



**HAL**  
open science

## Limit analyses of multilayered structures

Julien Dallot

► **To cite this version:**

Julien Dallot. Limit analyses of multilayered structures. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT: . pastel-00003625

**HAL Id: pastel-00003625**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00003625>**

Submitted on 10 Apr 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE**

*Présentée pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE  
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

*Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures*

*par*

**Julien Dallot**

Titre :

**Modélisation des structures multicouches en analyse limite.  
Application au renforcement de matériau "quasi-fragile-acier".**

en collaboration avec Arcelor Research Center (Liège)

*Soutenue le 19 décembre 2007*

devant le jury composé de :

<b>Gilles FORET (ENPC)</b>	Président du jury
<b>Patrice CARTRAUD (ECN)</b>	Rapporteur
<b>Claude BOUTIN (ENTPE)</b>	Rapporteur
<b>Stéphane BOURGEOIS (LMA)</b>	Examineur
<b>Jean-Yves SENER (MS3)</b>	Examineur
<b>Karam SAB (ENPC)</b>	Directeur de thèse
<b>Joseph MARRA (ARCELOR-MITTAL)</b>	Encadrant industriel



# Remerciements

Avant de remercier l'ensemble des personnes physiques ayant de près ou de loin contribué à la naissance de ce travail de thèse, j'exprimerai ma gratitude aux personnes "morales" ayant permis son bon déroulement : en premier lieu le Laboratoire d'Analyse des Matériaux et d'Identification (LAMI) de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées qui m'a accueilli en son sein et logé les jours ouvrés pendant trois ans, puis la société ARCELOR-MITTAL qui a supporté le financement de la thèse, en me donnant de quoi me loger les jours non ouvrés et les nuits.

Passons maintenant aux personnes physiques. Tout d'abord, je voudrais remercier Karam SAB pour avoir accepté de diriger mon travail de doctorat avec une main de maître et de m'avoir encouragé à toujours aller plus loin dans mon travail de recherche. Je n'oublierai jamais les longues discussions mathématico-techniques que nous avons tenues dans son bureau ou dans le couloir. Ma gratitude va également à Gilles FORET, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury ainsi que de m'aider dans toute la partie expérimentale de mon doctorat. Je le remercie également pour sa bonne humeur permanente et sa disponibilité hors pair. Merci à Claude BOUTIN et Patrice CARTRAUD pour avoir accepté de rapporter sur mon travail de doctorat, ainsi qu'à Stéphane BOURGEOIS – dont j'ai, en quelque sorte, prolongé le travail de thèse – pour avoir examiné mon travail.

Je remercie également Jean-Yves SENNER, qui a participé à mon embauche en tant que thésard CIFRE chez ARCELOR à l'époque, pour m'avoir inculqué sa vision de la recherche appliquée et ses méthodes de chiffrages de tonnes d'acier rapides. Je lui souhaite une bonne continuation dans sa nouvelle aventure MS3 (Materials and Systems for Safety and Security) et une belle réussite professionnelle. Après son départ d'ARCELOR-MITTAL cette fois-ci, c'est Joseph MARRA qui a eu la charge de m'encadrer, tâche qui devient difficile en dernière année de thèse. Je lui exprime toute ma gratitude pour avoir mené cette mission avec succès et bonne humeur. Sur un plan plus personnel, merci de m'avoir initié aux parties de squash endiablées ainsi qu'à la maison du péquet à Liège.

Je souhaiterais ensuite exprimer ma gratitude à l'ensemble du personnel du LAMI, d'ARCELOR-MITTAL et de MS3 pour m'avoir accompagné dans mon quotidien pendant ces trois années : Marie-Françoise pour toutes les tâches administratives dont elle m'a déchargé, Jean-François pour ses cours de composites et nos échanges musicaux, Brigitte pour l'organisation des séminaires internes (moments très joyeux du labo), Denis et Hai-Ping pour avoir ri à mes blagues de temps en temps, Robert pour ses discussions génie civil et béton et ses expressions

idiomatiques, Pierre pour sa franchise, Boum pour ses conseils sur la recherche académique, Amina pour sa bonne humeur permanente, Olivier pour ses vélos pliables, Nelly pour son accent ensoleillé, Alain pour tous ses conseils et l'encadrement mon stage de DEA, Didier pour son aide au maniement des kaplas, Christophe pour sa philosophie et ses précieux coups de main sur la fin de ma thèse quand il s'agissait de coller et de tester des poutres, Gilles pour sa bonhomie et ses "hé Julien! y a quelqu'un qui te cherche", Silvano pour son italianité, Adélaïde pour son champagne, Barbara pour sa fierté belge et nos discussions, Hugues pour m'avoir fait découvrir Liège et son Standard, Yoann pour son hospitalité et son humour, Gauthier pour son en train et sa Chimay, et tant d'autres que j'oublie et auprès desquels je m'excuse.

Je voudrais également remercier l'ensemble des doctorants qui ont partagé avec moi les affres de la thèse : Malika pour m'avoir accueilli au Gabon et partagé trois ans de bureau avec moi, Son pour son sourire et ses remises en question permanentes, Hung pour son aide informatique, Momo pour son esprit commerçant, Sylvain pour sa science du collage et ses blagues à 2 francs 6 sous, Ali K. et Ali A. pour mon initiation à l'arabe, Fadi pour son ovnitude, Céline pour ma découverte de Liège et du monde d'Arcelor, Tiffany pour ses itinéraires routiers en tant de grève, Truc et Hai pour leurs talents d'informaticiens, Saskia pour son multiculturalisme et le dynamisme qu'elle a su imprimer dans la vie du labo, Tung pour mes rudiments de vietnamiens, Lucia pour ses discussions "orientées" à la cafétéria, Yahia pour son pied droit magique, Firas pour son sourire constant, Daniela pour être toujours positive, Cyril pour son engagement quotidien, Kien pour ses questions auxquelles je n'ai pas toujours su répondre, Arthur pour ses conseils sur les clés à bougies et sa salade de pamplemousses, Minh pour son aide en MATLAB, Van-Ahn pour les parties de belote et ses gâteaux, Joanna pour ses cours de mathématiques des distributions et ses explications sur la complexe situation politique au Liban, Lina pour ses compléments d'informations sur la situation libanaise...j'en oublie et je m'en excuse. Je souhaite également exprimer toute ma gratitude à Corinne pour avoir relu très minutieusement quelques chapitres de ma thèse afin d'en améliorer la présentation. Je la remercie également pour son soutien dans des moments difficiles.

Enfin, je remercie du fond du coeur mon père et ma soeur qui m'ont permis, grâce à des encouragements sans failles, de continuer à avancer dans ma thèse, malgré des périodes compliquées. Je souhaite, enfin, dire merci à Marilynne d'avoir tout au long du doctorat partagé ma vie quotidienne.

# Table des matières

Table des Figures	9
Liste des tableaux	13
Introduction générale	15
<b>1 Rappels d'analyse limite et de plaques</b>	<b>21</b>
1.1 Introduction . . . . .	21
1.2 Rappels sur les domaines convexes . . . . .	21
1.2.1 Domaines de plasticité ou de résistance . . . . .	21
1.2.2 Fonction d'appui du domaine ou du critère . . . . .	22
1.2.3 Frontière du domaine de plasticité . . . . .	23
1.3 Analyse limite et calcul à la rupture : généralités . . . . .	25
1.4 Théorie des plaques : généralités . . . . .	27
1.4.1 Qu'est-ce qu'une plaque ? . . . . .	27
1.4.2 Efforts généralisés de plaque . . . . .	27
1.4.3 Equations d'équilibre . . . . .	28
1.4.4 Cinématique . . . . .	28
1.5 Critère sur les plaques de Love-Kirchhoff . . . . .	32
<b>2 Analyse limite des plaques périodiques : Modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff</b>	<b>35</b>
2.1 Introduction . . . . .	35
2.2 Problématique . . . . .	35
2.3 Homogénéisation des plaques périodiques . . . . .	36
2.3.1 Elasticité . . . . .	36
2.3.2 Plasticité . . . . .	37
2.4 Analyse limite des plaques minces périodiques . . . . .	38

2.4.1	Problème d'analyse limite 3D . . . . .	39
2.4.2	Le problème de plaque homogénéisée . . . . .	40
2.4.3	Détermination du domaine de résistance homogénéisé $G_p^{hom}$ . . . . .	42
2.4.4	Justification : la méthode des développements asymptotiques . . . . .	44
2.5	Conclusion . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Analyse limite des plaques multicouches : Modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff</b>	<b>51</b>
3.1	Introduction . . . . .	51
3.2	Le domaine de résistance homogénéisé de Love-Kirchhoff des plaques stratifiées.	51
3.2.1	Cas général . . . . .	52
3.2.2	Plaques stratifiées symétriques . . . . .	54
3.2.3	Plaques stratifiées homothétiques . . . . .	55
3.2.4	Plaques homogènes . . . . .	56
3.2.5	Un modèle approché pour les plaques stratifiées homothétiques et symétriques . . . . .	56
3.3	Application aux plaques stratifiées de Von-Mises . . . . .	57
3.3.1	Détermination de $\hat{G}_p$ . . . . .	58
3.3.2	Exemple : une plaque sandwich symétrique . . . . .	61
3.4	Conclusion . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Analyse limite des plaques multicouches : Effets de cisaillement</b>	<b>69</b>
4.1	Introduction . . . . .	69
4.2	Bibliographie . . . . .	70
4.2.1	Approche monocouche équivalente . . . . .	70
4.2.2	Approche par couche . . . . .	70
4.2.3	Modèle Multiparticulaire pour Matériaux Multicouches . . . . .	71
4.3	Rappel du problème 3D . . . . .	74
4.4	Un nouveau Modèle Multiparticulaire pour les plaques multicouches . . . . .	75
4.4.1	La méthode statique . . . . .	75
4.4.2	La méthode cinématique . . . . .	80
4.5	Conclusion . . . . .	83

<b>5</b>	<b>Flexion cylindrique</b>	<b>85</b>
5.1	Introduction . . . . .	85
5.2	Le problème 3D . . . . .	85
5.3	Le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff . . . . .	86
5.4	Le modèle M4 . . . . .	89
5.5	Détermination de $\Pi_p^{M4,cb}$ . . . . .	91
5.6	Conclusion . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Validation des modèles par éléments finis</b>	<b>99</b>
6.1	Introduction . . . . .	99
6.2	Le modèle de Love-Kirchhoff . . . . .	100
6.3	Le modèle M4 : méthode cinématique . . . . .	101
6.3.1	Un mécanisme plastique sans effets de cisaillement . . . . .	102
6.3.2	Un mécanisme plastique avec flexion pure des peaux, cisaillement de l'âme et sans glissement aux interfaces . . . . .	103
6.3.3	Un mécanisme plastique avec des glissements possibles aux interfaces . . . . .	104
6.4	Le modèle éléments finis . . . . .	108
6.5	Comparaison des modèles . . . . .	111
6.5.1	Petits contrastes matériels ( $r \leq 21$ ) : $H_+^{M4} = H^{LK}$ . . . . .	114
6.5.2	Contrastes matériels intermédiaires ( $22 \leq r \leq 254$ ) : $H_+^{M4} < \min(H_{pb}^{M4}, H^{LK})$ . . . . .	117
6.5.3	Grandes valeurs du contraste ( $r \geq 255$ ) : $H_+^{M4} = H_{pb}^{M4}$ . . . . .	121
6.6	Conclusion générale . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Homogénéisation des poutres périodiques en analyse limite</b>	<b>123</b>
7.1	Introduction . . . . .	124
7.2	The limit analysis problem . . . . .	127
7.3	Periodic beams . . . . .	130
7.4	Asymptotic expansion . . . . .	133
7.5	The homogenized Euler-Bernoulli strength domain of heterogeneous beams . . . . .	137
7.5.1	The general case : Upper and lower bounds for $G_b^{hom}$ . . . . .	137
7.5.2	$y_1$ -invariant beams : $G = G(y_2, y_3)$ . . . . .	139
7.5.3	Laminated beams : $G = G(y_3)$ . . . . .	141
7.6	Applications . . . . .	142
7.6.1	Homogeneous beams . . . . .	144

7.6.2	Sandwich beam . . . . .	145
7.7	Conclusion . . . . .	147
<b>8</b>	<b>Modèle M4 pour les poutres multicouches</b>	<b>149</b>
8.1	Introduction . . . . .	149
8.2	Hypothèses et notations . . . . .	149
8.3	Un nouveau modèle M4 pour les poutres en analyse limite . . . . .	150
8.3.1	La méthode statique . . . . .	150
8.3.2	La méthode cinématique . . . . .	153
8.4	Conclusion . . . . .	155
	<b>Quelques applications</b>	<b>155</b>
<b>9</b>	<b>Quelques applications</b>	<b>157</b>
9.1	Introduction . . . . .	157
9.2	Application au béton armé . . . . .	157
9.2.1	Détermination du domaine de résistance du béton armé $G^{RC}$ . . . . .	158
9.2.2	Essais de flexion 4 points sur une poutre en béton armé . . . . .	160
9.2.3	Comparaison avec un essai de flexion 4 points . . . . .	161
9.3	Application aux poutres en béton armé renforcées . . . . .	162
9.3.1	Modes de rupture pour les poutres renforcées . . . . .	162
9.3.2	Méthodes de calcul existantes pour la modélisation d'une poutre en BA renforcée par collage de renfort . . . . .	165
9.3.3	Méthode de Limam, Foret et Ehrlacher . . . . .	169
9.4	Un Nouveau Modèle Multicouche pour les poutres en béton armé renforcées	172
9.4.1	Modélisation multicouche . . . . .	172
9.4.2	Approche statique . . . . .	173
9.4.3	Approche cinématique . . . . .	174
9.5	Un mécanisme de ruine pour la flexion trois points . . . . .	176
9.5.1	Cinématique d'Euler-Bernoulli pour le béton . . . . .	176
9.5.2	Vérification de l'effort tranchant à l'appui . . . . .	178
9.6	Application aux essais sur les poutres en béton armé . . . . .	178
9.7	Comparaison avec des essais de la littérature . . . . .	178
9.7.1	Essais de (Hamelin et Varastehpour, 1997) . . . . .	179
9.7.2	Essais de (Limam et al., 2003a) . . . . .	180
9.8	Conclusion . . . . .	188

---

Conclusion générale	193
Bibliographie	193
Annexes	205



# Table des figures

1.1	Plaque homogène . . . . .	27
1.2	Cinématique de Love-Kirchhoff . . . . .	30
1.3	Cinématique de Reissner-Mindlin . . . . .	31
2.1	Structure 3D hétérogène, cellule de base et plaque homogène équivalente. . .	39
2.2	Approche cinématique (par l'extérieur) de $G_p^{hom}$ . . . . .	42
3.1	Plaque homogène : Section de $\hat{G}_p$ dans le plan $(n_{11}, m_{12})$ calculée par les méthodes cinématique et statique . . . . .	60
3.2	Plaque homogène : Section de $\hat{G}_p$ dans le plan $(n_{12}, m_{12})$ calculée par les méthodes cinématique et statique . . . . .	60
3.3	Plaque sandwich symétrique utilisée pour la validation du modèle. . . . .	61
3.4	Comparaison entre $\hat{G}_p^{hom}$ et $\hat{G}_p$ : Intersection avec le plan $(n_{11}, m_{11})$ pour les contrastes de matériaux $r = 2$ et $r = 0.5$ . . . . .	62
3.5	Intersection de $\hat{G}_p^{hom}$ avec le plan $(n_{11}, m_{11})$ pour différentes valeurs du contraste matériel $r$ . (a) $r = 1, 5, 10, \infty$ . (b) $r = 1, 100, \infty$ . . . . .	63
3.6	Intersection de $\hat{G}_p^{hom}$ avec le plan $(m_{11}, m_{22})$ pour différentes valeurs du contraste matériel $r$ et $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ . . . . .	64
3.7	Intersection de $\hat{G}_p^{hom}$ avec le plan $(m_{11}, m_{22})$ pour différentes valeurs du contraste matériel $r$ et $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ . . . . .	65
3.8	Intersection de $\hat{G}_p^{hom}$ avec le plan $(m_{11}, m_{22})$ pour différentes valeurs du contraste matériel $r$ et $\mathbf{n} = \mathbf{n}_3$ . . . . .	65
4.1	Notations . . . . .	76
4.2	Fonctions d'interpolation $t_1 P^1(\frac{x_3}{t})$ , $t_2 P^2(\frac{x_3}{t})$ et $t_3 P^3(\frac{x_3}{t})$ pour une plaque sandwich symétrique avec $t_1 = t_3 = \frac{t}{8}$ et $t_2 = \frac{3t}{4}$ . . . . .	78
4.3	Fonctions d'interpolation $R^{1,2}$ et $R^{2,3}$ pour une plaque sandwich symétrique avec $t_1 = t_3 = \frac{t}{8}$ et $t_2 = \frac{3t}{4}$ . . . . .	79
5.1	Contrainte de cisaillement normalisée $\sigma_{13}(\frac{x_3}{t})/\sigma_s^u$ correspondant au taux de déformation généralisé $E_s^{cb}$ . . . . .	96

6.1	Structure étudiée. . . . .	100
6.2	Pression de ruine normalisée $\frac{H}{\sigma_1^u}$ fonction du contraste matériel $r$ pour $H = H^{LK}$ , $H = H^{FEM}$ , $H = H_+^{M4}$ , $H = H_{pb}^{M4}$ et $H = H_{pb}^{M4,\infty}$ . $r \in [1, 500]$ . . . . .	107
6.3	Pression de ruine normalisée $\frac{H}{\sigma_1^u}$ fonction du contraste matériel $r$ pour $H = H^{LK}$ , $H = H^{FEM}$ , $H = H_+^{M4}$ , $H = H_{pb}^{M4}$ et $H = H_{pb}^{M4,\infty}$ . $r \in [1, 100]$ . . . . .	107
6.4	Problème de plaque éléments finis. . . . .	108
6.5	Maillage. . . . .	109
6.6	Détermination de $H^{FEM}$ . Charge normalisée $\frac{H}{\sigma_s^u}$ fonction du déplacement normalisé $\frac{V_3(0)}{L}$ de la section de bord libre pour différents contrastes matériels $r$ . . . . .	110
6.7	Mécanismes de ruine plastique pour différents contrastes. FEM et modèle M4. . . . .	112
6.8	Déformation plastique équivalente pour $r = 10$ . . . . .	113
6.9	Déformation plastique équivalente pour $r = 40$ . . . . .	113
6.10	Contrainte longitudinale normalisée $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 1$ . FEM et modèle de Love-Kirchhoff. . . . .	115
6.11	Contrainte de cisaillement normalisé $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 1$ . FEM et interpolation quadratique . . . . .	116
6.12	Contrainte longitudinale normalisée $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 10$ . FEM et modèle de Love-Kirchhoff. . . . .	116
6.13	Contrainte de cisaillement normalisée $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 10$ . FEM et interpolation quadratique. . . . .	117
6.14	Contrainte longitudinale normalisée $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 40$ . FEM et modèle M4. . . . .	118
6.15	Contrainte de cisaillement normalisée $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$ en $x = -L$ pour $r = 40$ . FEM et modèle M4. . . . .	119
6.16	Contrainte longitudinale normalisée $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$ en $x = -\alpha L$ pour $r = 40$ . FEM et modèle M4. . . . .	119
7.1	3D heterogeneous structure, unit cell and equivalent 1D beam. . . . .	127
7.2	3D sandwich beam. . . . .	143
7.3	Normalized strength domain $G_{b;2}^{hom}$ for a homogeneous Von-Mises beam. . . . .	144
7.4	Normalized strength domain for a homogeneous Drucker-Prager beam : lower bound $G_{b;2}^{hom,l}$ and upper bound $G_{b;2}^{hom,+}$ . . . . .	145
7.5	Normalized strength domain $G_{b;2}^{hom}$ for a sandwich Von-Mises beam. . . . .	146
7.6	Normalized strength domains for a sandwich Drucker-Prager (core) Von-Mises (skins) beam : lower bound $G_{b;2}^{hom,l}$ and upper bound $G_{b;2}^{hom,+}$ . . . . .	146
8.1	Notations. . . . .	150

9.1	Section de béton armé et zoom sur un acier. . . . .	158
9.2	Domaine de résistance normalisé $\hat{G}^{RC}$ d'une poutre en béton armé dans le plan $(n, m_3)$ . . . . .	160
9.3	Flexion quatre points d'une poutre en béton armé. . . . .	161
9.4	Expérience de flexion 4 points. . . . .	161
9.5	Force en fonction du déplacement vertical pour la flexion de 4 points d'une poutre en béton armé et détermination de la force de ruine . . . . .	162
9.6	Modes de ruine dus à la flexion . . . . .	163
9.7	Modes de ruines dus à l'effort tranchant . . . . .	164
9.8	Peeling-off . . . . .	164
9.9	Méthode des dents de béton . . . . .	167
9.10	Modélisation de type tri-couche (Limam, 2003) . . . . .	170
9.11	Caractéristiques de la poutre (Hamelin et al, 1997) . . . . .	171
9.12	Comparaison des résultats donnés par les différents modèles . . . . .	171
9.13	Modélisation multicouche adoptée pour une poutre en béton armé renforcée .	172
9.14	Demi-poutre équivalente à une poutre en flexion 3 points . . . . .	177
9.15	Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 1. . . .	181
9.16	Mode de ruine de la poutre 1 de (Limam et al., 2003a) . . . . .	182
9.17	Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 2. . . .	183
9.18	Mode de ruine de la poutre 2 de (Limam et al., 2003a) . . . . .	184
9.19	Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 3. . . .	185
9.20	Mode de ruine de la poutre 3 de (Limam et al., 2003a) . . . . .	186
9.21	Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 4. . . .	187
9.22	Mode de ruine de la poutre 4 de (Limam et al., 2003a) . . . . .	188
B.1	Domaines de résistance normalisés : poutre homogène de Von-Mises $G_{b;2}^{hom}$ , plaque homogène de Von-Mises en flexion cylindrique $G_p^{hom,cb}$ . . . . .	210
B.2	Domaines de résistance normalisés : poutre homogène de Drucker-Prager approche statique $G_{b;2}^{hom,l}$ , approche cinématique $G_{b;2}^{hom,+}$ , plaque homogène de Drucker-Prager en flexion cylindrique $G_p^{hom,cb}$ . . . . .	211
B.3	Domaines de résistance normalisés : poutre sandwich de Von-Mises $G_b^{hom}$ , plaque de Von-Mises en flexion cylindrique $G_p^{hom,cb}$ . . . . .	211
B.4	Domaines de résistance normalisés : poutre sandwich DPVM approche statique $G_{b;2}^{hom,l}$ , approche cinématique $G_{b;2}^{hom,+}$ , plaque DPVM en flexion cylindrique $G_p^{hom,cb}$ . . . . .	212



# Liste des tableaux

6.1	Constantes matérielles pour le calcul éléments finis . . . . .	109
6.2	Comparaison des résultats donnés par les modèles de Love-Kirchhoff, M4 et éléments finis . . . . .	111
6.3	Pourcentage de la dissipation pour différents contrastes. . . . .	114
7.1	Sandwich material constants. . . . .	147
9.1	Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents $x$ pour les poutres en béton armé testées. . . . .	178
9.2	Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents $x$ pour la poutre de (Hamelin et Varastehpour, 1997). . . . .	179
9.3	Pourcentage de la dissipation pour l'essai de (Hamelin et Varastehpour, 1997)	179
9.4	Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents $x$ pour la poutre 1. . .	181
9.5	Pourcentage de la dissipation pour la Poutre 1 de (Limam et al., 2003a) . . .	181
9.6	Force de ruine obtenue par le modèle pour différents $x$ pour la poutre 2. . . .	183
9.7	Pourcentage de la dissipation pour la Poutre 2 de (Limam et al., 2003a). . .	183
9.8	Force de ruine obtenue par le modèle pour différents $x$ pour la poutre 3. . . .	185
9.9	Pourcentage de la dissipation pour la poutre 3 de (Limam et al., 2003a) . . .	185



# Introduction générale

La thèse, qui fait l'objet de ce mémoire, s'est déroulée sous la forme d'une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) et s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI), membre de l'Institut Navier, et le centre de Recherche d'ARCELOR-MITTAL de Liège.

Depuis quelques années, la sécurité des bâtiments et des ouvrages d'art est devenue une préoccupation majeure des maîtres d'ouvrage. En effet, à partir du 19<sup>ème</sup> siècle et jusque dans les années 1960, de nombreux ouvrages d'art ont été bâtis avec des prévisions de trafic routier qui se révèlent être bien inférieures au trafic actuel. Ce phénomène est maintenant pris en compte car les règlements de trafic routier proposent des chargements de plus en plus importants (Calgaro et Lacroix, 1997). De plus, un grand nombre de pathologies des ouvrages d'art en béton a été relevé, généralement dues à un chargement excessif, à une erreur de conception, créées par la fatigue de la structure sous chargement cyclique ou bien par le vieillissement du béton lui-même.

Ainsi, une enquête menée par le SETRA (Service d'Etudes Techniques des Routes et Autoroutes) en 1995 recensait 10400 ponts d'une portée de plus de 5 mètres nécessitant des travaux "urgents" et 24000 nécessitant un "entretien particulier". Pour parer à ce problème, des techniques de réparations et de renforcement par collage de tôles d'acier ou de plaques en matériaux composites se sont développées.

Diverses études expérimentales ont été menées sur des poutres en béton armé renforcées. Elles ont conduit à identifier des modes de ruines non classiques comme des ruptures de décollement du renfort. Cependant, les méthodes de calcul pour déterminer les chargements maximaux supportables par de telles structures et pour prédire les modes de ruines ne sont pas toutes satisfaisantes. C'est pourquoi, nous nous proposons de développer des méthodes de calcul pour les structures multicouches et de les appliquer au cas des poutres en béton armé et en béton armé renforcées. Les résultats de ces modèles sont comparés à des résultats d'expérience, soit menées au LAMI, soit disponibles dans la littérature.

Dans le domaine du génie civil et de la construction ainsi que dans l'industrie, les structures hétérogènes et multicouches sont très utilisées. Les contraintes posées aux constructeurs et aux concepteurs de telles structures, comme les limitations du coût ou la légèreté d'une solution, nécessitent des modélisations de plus en plus fines afin d'optimiser les capacités de ces structures. L'utilisation des méthodes numériques classiques pour estimer les constantes élastiques globales et/ou la résistance globale des structures hétérogènes est très coûteuse en temps de calcul. C'est pourquoi de nombreuses méthodes simplifiées ont vu le jour, notam-

ment quand la taille de l'hétérogénéité est petite devant les dimensions caractéristiques de la structure. Dans ce cas, cette dernière peut être perçue comme un milieu continu homogène. Des méthodes d'homogénéisation peuvent donc être utilisées.

De nombreuses études d'homogénéisation ont été menées et pour différents types de structures dans le cadre de l'élasticité linéaire : plaques périodiques (Duvaut et Metellus, 1976), (Caillerie, 1984), poutres périodiques (Kolpakov, 1991), (Buanic et Cartraud, 2001). En revanche, le comportement des plaques et des poutres périodiques près de la rupture a été beaucoup moins étudié. L'une des demandes formulées par les ingénieurs pour concevoir de telles structures est aussi la connaissance des charges limites qu'elles peuvent supporter.

La théorie du calcul à la rupture, faisant suite à celle de l'analyse limite, permet, à partir de la simple donnée de critères de résistance sur les matériaux constituant un ouvrage, de calculer les charges limites potentiellement supportables par celui-ci sans connaître toute la loi de comportement de chacun des matériaux (Salençon, 1983). Partant des travaux de Suquet (1983) et de Buanic (1986) sur l'homogénéisation en plasticité, nous justifions une méthode d'homogénéisation des plaques périodiques proposée indépendamment par Bourgeois et al. (1998) et Sab (2003) pour le calcul des charges limites de celles-ci. Cette méthode est ensuite appliquée aux plaques multicouches, dont le domaine de résistance homogénéisé est déterminé semi-analytiquement. Cette méthode d'homogénéisation conduit à une cinématique de Love-Kirchhoff pour la plaque homogène équivalente. Nous proposons, par la suite, une amélioration de ce modèle dans le cas des plaques multicouches : un modèle multiparticulaire, inspiré des travaux menés au LAMI par Ehrlacher et al. (1994), Chabot (1997), Caron et al. (2006) entre autres, est présenté. Les modèles de Love-Kirchhoff et multiparticulaire sont, ensuite, validés par comparaison avec des calculs par éléments finis 3D.

Ils sont ensuite étendus aux poutres périodiques et multicouches en analyse limite, complétant ainsi les travaux de Kolpakov (1991), Bourgeois (2000), Buanic et Cartraud (2001) sur l'homogénéisation des poutres en élasticité.

Enfin, ces modèles sont appliqués aux poutres en béton armé et aux poutres en béton armés renforcés afin de déterminer leur charge de ruine. Leurs prédictions sont comparées à des essais effectués au LAMI ou disponibles dans la littérature.

Dans le chapitre 1, quelques éléments sur les théories de l'analyse limite et des plaques sont rappelés. Dans le chapitre 2, une méthode d'homogénéisation des plaques périodiques en analyse limite proposée par Bourgeois (1997) et Sab (2003) est décrite et justifiée à l'aide de la méthode des développements asymptotiques. Dans le chapitre 3, cette méthode d'homogénéisation est mise en oeuvre sur les plaques stratifiées et multicouches et le domaine de résistance d'une plaque sandwich est calculé. Dans le chapitre 4, un nouveau modèle multiparticulaire pour les plaques multicouches en analyse limite est présenté. Nous examinons, dans le chapitre 5, comment s'écrivent ces modèles sous l'hypothèse de flexion cylindrique. Cette dernière permet des simplifications conduisant à une détermination analytique ou semi-analytique du domaine de résistance de la plaque multicouche. Dans le chapitre 6, une comparaison de ces modèles avec un calcul aux éléments finis est effectuée, justifiant ainsi leur validité. Le chapitre 7 est dédié à une méthode d'homogénéisation des poutres multi-

couches en analyse limite, qui est inspirée de la méthode décrite au chapitre 2. Le chapitre 8 décrit brièvement un modèle multiparticulaire dans le cas des poutres multicouches en analyse limite. Enfin, nous appliquons ces modélisations à des poutres en béton armé et en béton armé renforcées et nous comparons leurs prédictions à des données expérimentales dans le chapitre 9. Le mémoire s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives.



# Chapitre 1

## Rappels d'analyse limite et de plaques

### 1.1 Introduction

Notre travail concerne essentiellement l'analyse limite de plaques et de poutres périodiques et/ou multicouches. Dans cette partie introductive, nous rappellerons brièvement quelques éléments d'analyse convexe, ainsi que les grands principes de la théorie de l'analyse limite. Enfin, quelques rappels concernant les théories de plaques (milieu bidimensionnel) seront donnés. Nous fixerons ainsi certaines notations par la suite.

### 1.2 Rappels sur les domaines convexes

#### 1.2.1 Domaines de plasticité ou de résistance

On introduit le domaine de plasticité ou de résistance  $G(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^6$  du matériau au point  $\mathbf{x}$  en tout point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de la structure. Il caractérise les contraintes admissibles en ce point  $\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x})$ . Le domaine  $G(\mathbf{x})$  possède les caractéristiques suivantes (expérimentalement intuitives) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \in G(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

c'est-à-dire que la contrainte nulle est admissible plastiquement. Et également :

$$\begin{cases} \forall \boldsymbol{\sigma}^1 \in G(\mathbf{x}), \forall \boldsymbol{\sigma}^2 \in G(\mathbf{x}), \forall \alpha \in [0; 1] \\ \alpha \boldsymbol{\sigma}^1 + (1 - \alpha) \boldsymbol{\sigma}^2 \in G(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{1.2}$$

qui traduit la convexité du domaine (des hypothèses plus restrictives peuvent être adoptées, mais on ne les détaillera pas ici : voir (Salençon, 1983)). On supposera également que le domaine est fermé.

Dans la plupart des critères courants (Von-Mises, Tresca, Coulomb...), le domaine de résistance est associé à une fonction seuil  $F$  qui est aussi convexe et différentiable presque partout par rapport au tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

L'équivalence s'écrit de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \iff F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0. \quad (1.3)$$

Citons en exemple particulier, le critère de plasticité de Von-Mises :

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \frac{1}{3} (\sigma^u(\mathbf{x}))^2, \quad (1.4)$$

avec :

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Id}, \quad (1.5)$$

Ici, les deux points “:” désignent l'opérateur réalisant la double contraction de tenseurs,  $\mathbf{s}$  est la partie déviatorique du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\text{tr}(\cdot)$  est l'opérateur trace et  $\mathbf{Id}$  est le tenseur identité du second ordre. Dans le cas d'un matériau constitutif hétérogène, la valeur de  $\sigma^u$  au point  $\mathbf{x}$  dépend de la position de ce point.

### 1.2.2 Fonction d'appui du domaine ou du critère

Tout domaine convexe fermé est uniquement déterminé par une fonction positivement homogène de degré 1 (donc convexe). On appelle cette fonction la fonction support ou fonction d'appui du domaine convexe (Ekeland et Temam, 1976). La fonction d'appui  $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  du domaine  $G(\mathbf{x})$  est définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) &= \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \\ &\iff \\ G(\mathbf{x}) &= \{\boldsymbol{\sigma} \mid \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \forall \mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{d} = (d_{ij})$  est le taux de vitesse de déformation plastique, représenté par un tenseur symétrique d'ordre 2. La donnée de la fonction d'appui au point  $\mathbf{x}$  pour tout  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^6$  est équivalente à la donnée de  $G(\mathbf{x})$  lui-même. Ainsi, si le domaine  $G$  est décrit par une fonction seuil  $F$ , on a :

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \sup_{F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (1.7)$$

La fonction d'appui du critère a des propriétés intéressantes :

- $\pi$  est une fonction positive. (Comme la contrainte nulle est admissible, il suffit de prendre la valeur en ce point dans (1.7)).

$-\pi$  est positivement homogène de degré 1, i. e. :

$$\forall \alpha \geq 0, \forall \mathbf{d}, \pi(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{d}) = \alpha \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (1.8)$$

$-\pi$  est convexe.

On notera, enfin, que si le domaine de plasticité est borné dans toutes les directions de l'espace, le "sup" dans la fonction  $\pi$  est atteint pour un ou plusieurs états de contraintes (selon la stricte convexité du domaine ou non). Si le domaine est non borné, il existe des valeurs du taux de déformation  $\mathbf{d}$  pour lesquelles la valeur de la fonction  $\pi$  est infinie.

On appelle souvent cette fonction d'appui la fonction de densité de dissipation plastique. Par exemple, dans le cas d'un critère de Von-Mises, on a ((Salençon, 1983)) :

$$\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \begin{cases} \sigma^u(\mathbf{x}) \times \left(\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbf{d}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si } tr(\mathbf{d}) = 0, \\ +\infty & \text{si } tr(\mathbf{d}) \neq 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

Une définition cinématique du domaine de résistance à partir de la fonction  $\pi$  revient à dire que  $G(\mathbf{x})$  est l'ensemble des tenseurs de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  tels que le minimum de la fonction,  $\mathbf{d} \mapsto (\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d})$ , sur la sphère unité  $\|\mathbf{d}\| = 1$  est positif :

$$G(\mathbf{x}) = \{\boldsymbol{\sigma} \mid \inf_{\|\mathbf{d}\|=1} (\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \geq 0\} \quad (1.10)$$

On peut utiliser la fonction  $\pi$  pour caractériser le domaine par sa fonction seuil  $F$  définie par :

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \sup_{\|\mathbf{d}\|=1} \{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})\} \quad (1.11)$$

### 1.2.3 Frontière du domaine de plasticité

#### 1.2.3.1 Caractérisation directe ou statique

On sait qu'un état de contrainte,  $\boldsymbol{\sigma}$ , est sur la frontière du domaine de plasticité,  $G(\mathbf{x})$ , notée  $\partial G(\mathbf{x})$ , si et seulement si le minimum de l'équation (1.10) est égal à 0. Ainsi, on écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G^t(\mathbf{x}) \iff \exists \mathbf{d} \neq 0, \boldsymbol{\sigma} \in \partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (1.12)$$

où  $\partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  est le sous-différentiel<sup>1</sup> de la fonction  $\pi$  au point  $\mathbf{d}$ .

En pratique, on notera que le sous-différentiel de la fonction  $\pi$  en un point  $\mathbf{d}$ ,  $\partial \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$ , se réduit à l'expression de sa dérivée  $\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  si la fonction  $\pi$  est différentiable au point  $\mathbf{d}$ .

<sup>1</sup>Le sous-différentiel  $\partial f$  d'une fonction réelle  $f : \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k) \rightarrow f(\mathbf{z})$  au point  $\mathbf{z}_0$  est l'ensemble convexe des points  $\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*)$  tel que  $f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{z}_0) + \mathbf{z}^* \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$  pour tout  $\mathbf{z}$ .

On remarquera également que la fonction  $\pi$  n'est pas différentiable au point  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  (par construction) et que le sous-différentiel en 0 est justement le domaine de résistance  $G(\mathbf{x})$  (le produit  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$  étant nul partout au point  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$  tous les états de contrainte dans le domaine de résistance réalisent le maximum du produit, i.e 0).

### 1.2.3.2 Caractérisation cinématique

On peut également caractériser la frontière du domaine de plasticité (ou de résistance)  $\partial G(\mathbf{x})$  de la manière suivante :

Pour un état de contrainte fixé non nul,  $\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$ , on note  $b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \geq 0$  la fonction réelle positive telle que  $b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \times \boldsymbol{\sigma} \in \partial G(\mathbf{x})$ . On a alors :

$$b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\{\mathbf{d} \mid \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 1\}} \pi(\mathbf{x}, \mathbf{d}). \quad (1.13)$$

Ainsi, la frontière du domaine de plasticité  $\partial G(\mathbf{x})$  peut être générée en considérant toutes les directions de l'espace des contraintes comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = 1, b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') < +\infty, \boldsymbol{\sigma} = b(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') \times \boldsymbol{\sigma}'. \quad (1.14)$$

L'équation (1.12) peut être qualifiée de méthode *directe* pour la détermination de  $\partial G(\mathbf{x})$  et les équations (1.13-1.14) de méthode *cinématique*.

Classiquement, la fonction support du domaine de plasticité  $\pi(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  est la densité de puissance de dissipation correspondant à une règle *normale d'écoulement*. Dans sa version la plus générale, la règle *normale d'écoulement*, qui relie le taux de déformation à la contrainte, s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &\in G(\mathbf{x}), \\ (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') : \mathbf{d} &\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}' \in G(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Quand le critère de plasticité  $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})$  est différentiable par rapport aux contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , la règle d'écoulement ci-dessus est équivalente à la règle d'écoulement classique de la plasticité parfaite :

$$\mathbf{d} = \zeta \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{avec } \zeta \geq 0, \leq 0 \text{ et } \zeta F = 0$$

où  $\zeta(\mathbf{x})$  est le champ multiplicateur de Lagrange sur l'espace considéré.

## 1.3 Analyse limite et calcul à la rupture : généralités

Le calcul à la rupture est une méthode relativement simple pour prédire la capacité de structures à supporter une charge déterminée. Il s'agit d'une démarche très ingénieriale qui peut s'énoncer ainsi (Salençon, 1983) : "dans la géométrie fixée pour l'ouvrage, on doit s'assurer que les charges appliquées, fixées de manière déterministe par les conditions naturelles et par des spécifications réglementaires seront supportées par l'ouvrage, compte tenu des caractéristiques des matériaux qui le constituent." Une certaine ductilité de ces matériaux est néanmoins requise afin que cette théorie puisse s'appliquer. C'est le cas pour presque tous les matériaux utilisés dans le génie civil : acier, aluminium, métaux, mais aussi béton armé ou précontraint, terre armée qu'on munit d'un critère de plasticité adéquat,...

L'intérêt du calcul à la rupture est qu'il permet de donner un chargement maximal potentiellement supportable en se référant uniquement aux résistances des matériaux, c'est à dire en s'affranchissant d'une vraie loi de comportement. Seule la donnée d'un domaine de résistance est nécessaire. On peut ainsi déterminer la charge de ruine d'une structure sans suivre tout le chemin force-déformation. Lorsque le système est constitué d'un matériau élastique parfaitement plastique, on sait que la charge de ruine prédite par le calcul à la rupture est effectivement la charge pour laquelle il y a écoulement plastique de la structure. C'est la théorie d'analyse limite. Dans les autres cas, la charge de ruine prédite par le calcul à la rupture est une borne supérieure de la charge de ruine effective de la structure.

Cette méthode a été appliquée à un nombre important de structures, dès que les principaux théorèmes ont été établis. Dans le cas de la ruine plastique des plaques, on citera entre autres le cas des plaques isotropes soumises à un chargement en flexion (Prager, 1959), ou plus récemment l'analyse limite pour les plaques orthotropes (Corradi et Vena, 2003).

Dans la théorie du calcul à la rupture, comme il a été rappelé ci-dessus, les matériaux constituant la structure sont uniquement connus via leurs capacités de résistance : en chaque point de la structure, un domaine de contraintes "admissibles" est donné. Les contraintes en ce point doivent être dans ce domaine pour que la structure "tienne". Cette dernière est chargée selon un mode de chargement dépendant linéairement d'un paramètre  $\lambda$ . La question à laquelle on doit répondre est : connaissant la géométrie et les capacités de résistances des matériaux, est-ce que la structure va supporter le chargement  $\lambda$ ? Une condition nécessaire pour la "stabilité" de la structure est la compatibilité des équations d'équilibre sous le chargement  $\lambda$  avec les domaines de résistance en tout point. Si le modèle constitutif du matériau est l'élasto-plasticité parfaite, il est connu que cette condition nécessaire est aussi suffisante et que la valeur critique du chargement  $\lambda^c$  pour laquelle la structure s'écoule plastiquement ne dépend pas des caractéristiques élastiques du matériau (cf (Salençon, 1983) et (Salençon, 1990)). Aussi pourra-t-on considérer des matériaux rigides parfaitement plastiques pour la détermination de  $\lambda^c$  dans la suite des développements. En réalité, il s'agit d'une structure identique à celle initiale, mais constituée d'un matériau fictif indéformable hormis plastiquement dans les mêmes conditions que le matériau constitutif initial. Les chargements extrêmes apparaissent donc comme les seuls chargements pour lesquelles une déformation

de la structure est possible.

Dans cette théorie de l'analyse limite, on met en évidence deux principes duaux de minimum d'énergie, établis en supposant que le chargement limite correspond à une solution d'écoulement plastique libre. Le principe de minimum pour les contraintes caractérise le champ de contrainte d'une solution d'écoulement plastique libre. Celui sur les vitesses concerne les champs de vitesse de cette même solution.

Plus précisément :

On considère une structure occupant un espace  $\Omega$  constitué d'un matériau rigide parfaitement plastique dont le critère de plasticité est  $F$ . On suppose que sa frontière est divisée en deux sous domaines  $\partial\Omega_U$  et  $\partial\Omega_T$  tels que  $\partial\Omega = \partial\Omega_U \cup \partial\Omega_T$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^d$  sur  $\partial\Omega_U$  et  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{T}$  sur  $\partial\Omega_T$ .  $\lambda$  est un paramètre positif. On suppose également l'absence de forces de volume.

Le problème d'analyse limite est de trouver la valeur critique de  $\lambda$  pour laquelle il existe un champ de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , un champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et un champ de multiplicateur de Lagrange  $\zeta$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{T} \text{ sur } \partial\Omega_T \\ F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{d} = \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}), \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}^d \text{ sur } \partial\Omega_U, \\ \mathbf{d} = \zeta^t \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \text{ avec } \zeta \geq 0 \text{ et } \zeta F = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

La valeur critique de  $\lambda$  est, en réalité, la valeur maximale que le paramètre peut prendre en respectant les conditions (1.16), c'est à dire équilibrant la structure sous le chargement et qu'en tout point de la structure les contraintes soient plastiquement admissibles. Cette méthode est appelée méthode directe ou méthode statique.

Sous certaines hypothèses mathématiques sur le domaine de plasticité, cette valeur de  $\lambda$  peut être déterminée de manière équivalente par la méthode cinématique par :

$$\lambda = \inf_{\{\mathbf{u} \text{ respectant les conditions aux limites et } P_{ext}=1\}} \int_{\Omega} \pi(\mathbf{x}, \operatorname{grad}^s(\mathbf{u})) \, d\Omega,$$

où  $P_{ext}$  est la puissance des efforts extérieurs pour  $\lambda = 1$  :

$$P_{ext} = \int_{\partial\Omega_T} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \, dS$$

où  $\mathbf{u}$  est le champ de vitesse sur la frontière  $\partial\Omega_T$ .

Il est à noter que la théorie de l'analyse limite est à l'origine du calcul aux états limites ultimes (E.L.U.) dans les normes de construction comme les Eurocodes.

## 1.4 Théorie des plaques : généralités

### 1.4.1 Qu'est-ce qu'une plaque ?

Les plaques sont des structures planes pour lesquelles une surface moyenne  $\omega$  peut être identifiée, deux dimensions étant prépondérantes par rapport à la troisième. Sur la Figure 1.1  $t \ll L_1, L_2$ . Le domaine global est donc  $\Omega = \omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  avec  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ .

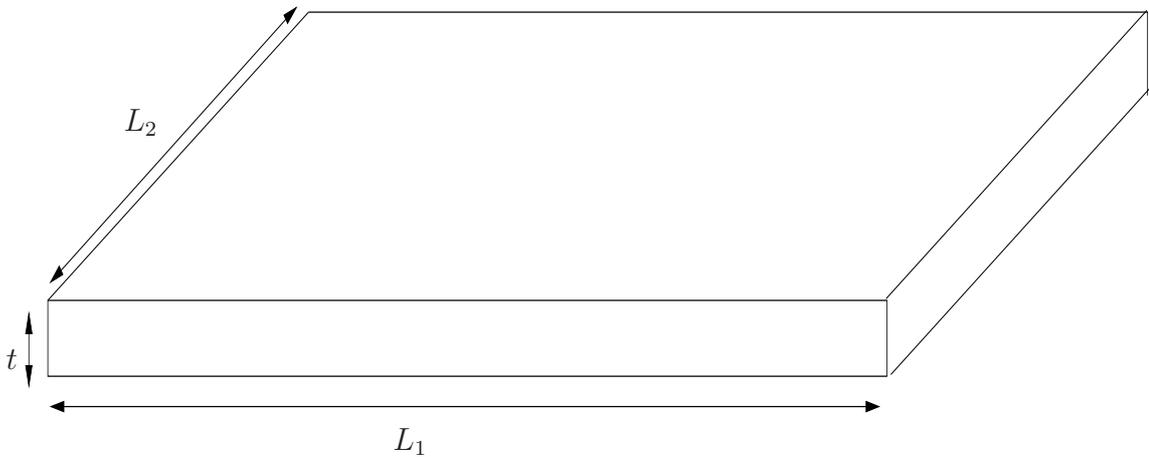


FIG. 1.1. *Plaque homogène*

L'idée de toute théorie de plaque est de substituer à la structure 3D présentant une faible épaisseur une structure 2D qui lui soit équivalente, présentant plus de simplicité pour les calculs. On présentera, ci-dessous, une manière de définir la plaque équivalente au 3D, en développant les équations constitutives de celle-ci dans le cadre de l'élasticité.

Dans la suite, on munit l'espace d'un repère orthonormé  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . On note  $(x_1, x_2, x_3)$  les variables d'espaces associées. De plus, la notation  $u_{,\alpha}$  signifie la dérivée partielle du champ  $u$  par rapport à la variable d'espace  $x_\alpha$ . Enfin, les indices grecs parcourent 1, 2 et les indices latin parcourent 1, 2, 3.

### 1.4.2 Efforts généralisés de plaque

On considère une plaque d'épaisseur  $t$  qui occupe le volume  $\Omega = \omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  de  $\mathbb{R}^3$ . Cette plaque est encadrée sur son bord latéral  $\partial\Omega_l = \partial\omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$ . Elle est soumise à des champs de forces surfaciques  $\mathbf{T}^-$  sur sa face inférieure  $\partial\Omega_3^-$  et  $\mathbf{T}^+$  sur sa face supérieure  $\partial\Omega_3^+$ . On suppose une absence de force de volume et on se place dans l'hypothèse de petites perturbations. Le matériau constituant la plaque est supposé homogène et élastique. Le comportement s'écrit :

$$\epsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = R_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

où les  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  et les  $\epsilon_{kl}$  les composantes du tenseur de déformation  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

On introduit alors les efforts généralisés suivants associés à la contrainte 3D,  $\boldsymbol{\sigma}$  :

- N** tenseur des efforts membranaires,
- M** tenseur des moments fléchissants,
- Q** vecteur des efforts tranchants

définis par :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \\ M_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ \text{et} \\ Q_\alpha &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \end{aligned} \tag{1.18}$$

### 1.4.3 Equations d'équilibre

En intégrant l'équation d'équilibre  $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = 0$  sur l'épaisseur de la plaque et en utilisant les conditions aux limites, on trouve les équations d'équilibre généralisées suivantes :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + T_\alpha^+ + T_\alpha^- = 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{t}{2}(T_\alpha^+ - T_\alpha^-) = 0, \\ Q_{\alpha,\alpha} + T_3^+ + T_3^- = 0, \end{cases} \tag{1.19}$$

avec  $\alpha, \beta = 1, 2$ .

### 1.4.4 Cinématique

#### 1.4.4.1 Le modèle de Love-Kirchhoff

Dans ce modèle, on ne considère que les efforts généralisés **N** et **M** dans l'écriture de l'énergie élastique. L'énergie due aux cisaillements est donc négligée.

On le construit en faisant des hypothèses *mixtes* sur la forme des contraintes et des déformations. Premièrement, si l'épaisseur  $t$  est très petite devant les autres dimensions caractéristiques, les contraintes hors-plan  $\sigma_{i3}$  sont très petites devant les contraintes dans le plan  $\sigma_{\alpha\beta}$  (contraintes planes). On peut donc les négliger dans l'énergie élastique et les prendre nulles  $\sigma_{i3} = 0$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Ce sera la première hypothèse. Il a été démontré dans (Ciarlet et Destuynder,

1979) que cette hypothèse était vérifiée quand l'élanement de la plaque  $\frac{L}{t}$  tendait vers l'infini.

On suppose ensuite que la déformation 3D dans le plan est affine en fonction de l'épaisseur et peut s'écrire :

$$\epsilon_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta} + x_3\chi_{\alpha\beta} \quad (1.20)$$

Avec cette hypothèse, on trouve par la loi de comportement que la forme des contraintes dans le plan est :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t} + x_3 \frac{M_{\alpha\beta}}{I} \quad (1.21)$$

où  $I = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3^2 dx_3 = \frac{t^3}{12}$ .

Les déplacements généralisés associés au champ de déplacement 3D  $\mathbf{u}$  sont :

$$\begin{aligned} V_i(x_1, x_2) &= \frac{u_j(x_1, x_2, -\frac{t}{2}) + u_j(x_1, x_2, \frac{t}{2})}{2} \\ \phi_i(x_1, x_2) &= \frac{u_j(x_1, x_2, \frac{t}{2}) - u_j(x_1, x_2, -\frac{t}{2})}{t} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Les déformations généralisées du modèle sont :

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}) \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ainsi, on peut voir :

- $V_\alpha(x_1, x_2)$  comme le déplacement de la surface moyenne dans la direction  $\alpha$ .

- $V_3(x_1, x_2)$  comme le déplacement vertical ou la flèche de la surface moyenne.

- $\phi_\alpha(x_1, x_2)$  : la rotation due à la flexion (sans cisaillement)

Dans la cinématique de Love-Kirchhoff (Kirchhoff, 1850), les segments matériels situés sur la normale à la surface moyenne sont indéformables et restent normaux à la surface moyenne au cours de la transformation. Figure 1.2

Le champ de déplacements 3D de Love-Kirchhoff s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} u_\alpha^{3D}(x_1, x_2, x_3) &= V_\alpha(x_1, x_2) - x_3 V_{3,\alpha}(x_1, x_2) + u_\alpha^1(x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3^{3D}(x_1, x_2, x_3) &= V_3(x_1, x_2) + u_3^1(x_3) \end{aligned} \quad (1.24)$$

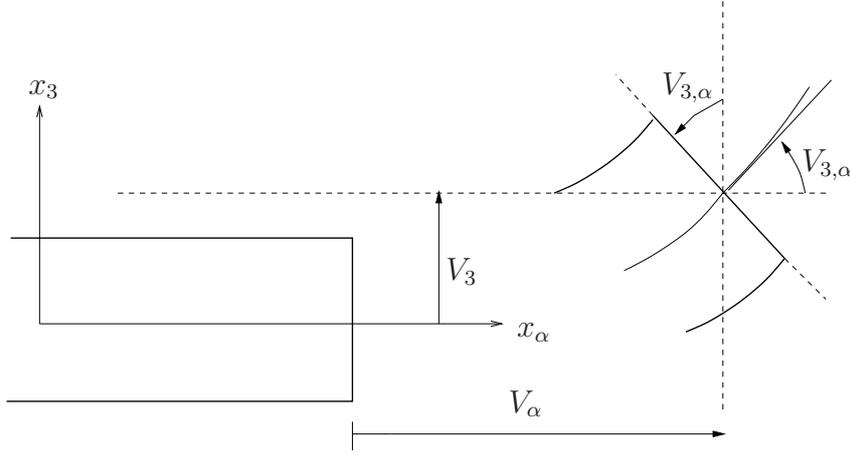


FIG. 1.2. Cinématique de Love-Kirchhoff

On reconnaît dans cette expression le champ de vitesse de Love-Kirchhoff classique auquel vient s'ajouter un terme prenant en compte l'effet de Poisson et permettant d'assurer cinématiquement l'hypothèse de contraintes planes  $\sigma_{i3} = 0$ .

Ainsi, on a également que :

$$\chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) = -V_{3,\alpha\beta} \quad (1.25)$$

Le comportement de la plaque s'écrit classiquement sous la forme :

$$N_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\lambda\mu} D_{\lambda\mu} \quad (1.26)$$

$$M_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} t \\ D_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} I \end{aligned} \quad (1.27)$$

où les termes  $R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP}$  sont les termes de la matrice de rigidité *en contraintes planes*.

On trouvera les preuves mathématiques de convergence de ces modèles lorsque l'élanement de la plaque  $\frac{L}{t}$  tend vers l'infini dans (Ciarlet et Destuynder, 1979) et (Lewinski et Telega, 1999).

On notera que le modèle de Love-Kirchhoff ne fait pas intervenir les contraintes de cisaillement. L'effort tranchant n'est pas donc pas un effort généralisé du modèle. On sait, cependant, que pour les plaques "épaisses" où l'épaisseur n'est pas négligeable devant la taille caractéristique de la plaque, les effets de cisaillement peuvent être importants. Plusieurs modèles ont cherché à intégrer ces effets. On présente dans la suite celui de Reissner-Mindlin.

### 1.4.4.2 Le modèle de Reissner-Mindlin

Dans le modèle de Reissner-Mindlin, on choisit de prendre en compte l'effet des cisaillements transverses. Ainsi les efforts généralisés de l'énergie élastique sont  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{Q}$ .

Les constantes élastiques relatives aux efforts normaux et aux moments fléchissants (les matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ ) doivent être les mêmes que celles du modèle de Love-Kirchhoff car les deux modèles sont asymptotiquement équivalents lorsque  $\frac{t}{L}$  tend vers 0. Historiquement, l'idée pour l'identification des termes relatifs aux cisaillements hors plan de la matrice d'élasticité est de reprendre la solution de contraintes 3D du modèle de Love-Kirchhoff et d'ajouter un terme à celle-ci qui respecte la condition d'équilibre des contraintes 3D (Reissner, 1985), (Cecchi et Sab, 2007).

Dans l'approche mixte, on garde l'hypothèse sur l'affinité de la déformation plane dans l'épaisseur, mais l'hypothèse sur les contraintes hors-plan est modifiée. On suppose que les  $\sigma_{\alpha 3}$  sont quadratiques dans l'épaisseur de la plaque et que  $\sigma_{33}$  reste nulle. Les contraintes de cisaillement prennent des valeurs nulles en bord de plaque  $\sigma_{\alpha 3}(\pm \frac{t}{2}) = 0$  et on a  $\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 = Q_\alpha$ . La donnée de l'effort tranchant  $Q_\alpha$  suffit donc à déterminer  $\sigma_{\alpha 3}$  et l'énergie élastique associée.

Par dualisation du problème, on obtient une cinématique de Reissner-Mindlin (Mindlin, 1951) dans laquelle la normale reste droite (indéformable) mais non orthogonale à la surface moyenne (à cause de l'effet du cisaillement transverse) dans la configuration déformée (Figure 1.3).

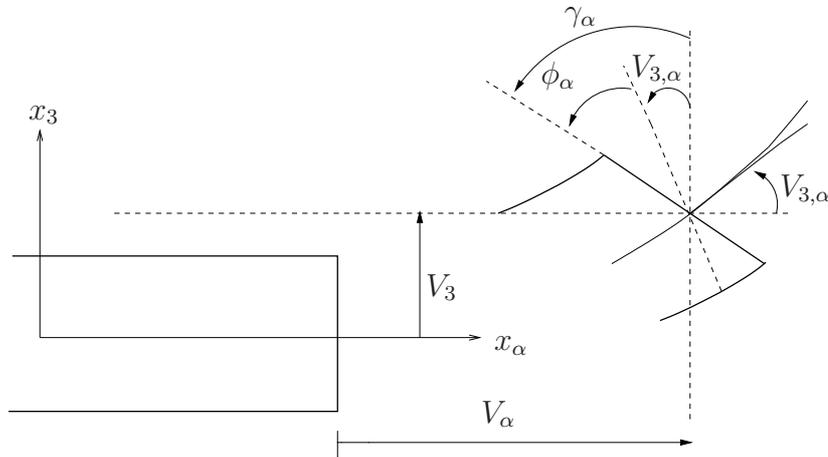


FIG. 1.3. Cinématique de Reissner-Mindlin

Ainsi, une approximation du champ de déplacements 3D de Reissner-Mindlin s'écrit alors :

$$\begin{aligned} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) &= V_\alpha(x_1, x_2) + x_3 \phi_\alpha(x_1, x_2) + u_\alpha^2(x_3), \quad \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= V_3(x_1, x_2) + u_3^2(x_3) \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec :

$-V_\alpha(x_1, x_2)$  : le déplacement de la surface moyenne dans la direction  $\alpha$ .

$-V_3(x_1, x_2)$  : le déplacement vertical ou la flèche de la surface moyenne.

$-\phi_\alpha$  : la rotation de la normale à la surface moyenne autour de l'axe  $x_\alpha$ .

Ainsi, on peut définir les déformations généralisées  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  introduites précédemment :

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) + V_{\beta,\alpha}(x_1, x_2)), & \alpha = 1, 2, \beta = 1, 2 \\ \chi_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= \phi_{\alpha,\beta} \end{aligned} \quad (1.29)$$

et également  $\gamma$  la déformation de cisaillement transverse mesurée à la surface moyenne. Elle est telle que :

$$\gamma_\alpha = \phi_\alpha + V_{3,\alpha} \quad (1.30)$$

Le comportement de la plaque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta\lambda\mu} D_{\lambda\mu} \\ M_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu} \\ Q_\alpha &= F_{\alpha\beta} \gamma_\beta \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} t \\ D_{\alpha\beta\lambda\mu} &= R_{\alpha\beta\lambda\mu}^{CP} I \\ F_{\alpha\beta} &= \frac{5}{6} R_{\alpha 3 \beta 3} t \end{aligned} \quad (1.32)$$

En plasticité, la démarche est formellement la même qu'en élasticité, mais ce n'est plus la loi de comportement qui reliera les contraintes et les déformations, mais la règle d'écoulement, définie à partir du critère de plasticité. Les espaces des champs de vitesses et de contraintes admissibles sont les mêmes qu'en élasticité. En revanche, la fonctionnelle à minimiser n'est plus l'énergie élastique mais la dissipation plastique. Cette dernière est positivement homogène de degré 1 alors qu'en élasticité, l'énergie est quadratique.

## 1.5 Critère sur les plaques de Love-Kirchhoff

Un critère de plasticité sur les plaques de Love-Kirchhoff s'écrira donc non plus sur les contraintes 3D, mais sur les efforts généralisés du modèle de plaque.

Dans le cas de Love-Kirchhoff :

$$f(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \leq 0 \quad (1.33)$$

Dans le cas de Reissner-Mindlin :

$$f(\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}) \leq 0 \quad (1.34)$$

On verra que ces critères généralisés ne sont pas toujours faciles à expliciter, même pour des critères 3D “simples” type Von-Mises, notamment quand ils font intervenir le couplage entre les efforts généralisés (Ilyushin, 1956). Cependant, dans le cas où on néglige les efforts membranaires  $\mathbf{N} = 0$  pour les plaques minces (i.e Love-Kirchhoff) de Von-Mises, on trouve (Salençon, 1983), (Lescouarc’h, 1983) par exemple :

$$M_{11}^2 + M_{22}^2 + 3M_{12}^2 - M_{11}M_{22} = \frac{3}{4}m^2 \quad (1.35)$$

où  $m = \sigma^u t$  est le moment limite maximal.

On verra, dans la prochaine partie que ce critère peut se généraliser au cas des plaques multicouches.

Dualement, les fonctions de dissipation sont à leur tour exprimées en fonction des déformations généralisées du modèle.

On a donc :

Dans le cas de Love-Kirchhoff :

$$\pi : (\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \rightarrow \pi(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \quad (1.36)$$

Dans le cas de Reissner-Mindlin :

$$\pi : (\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \pi(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\gamma}) \quad (1.37)$$

Dans le cas d’une plaque de Love-Kirchhoff de Von-Mises en flexion pure, la fonction de dissipation ne dépend plus que de  $\boldsymbol{\chi}$  (Salençon, 1983) et on a donc :

$$\pi : (\boldsymbol{\chi}) = m \sqrt{\chi_{11}^2 + \chi_{22}^2 + \chi_{12}^2 + \chi_{11}\chi_{22}} \quad (1.38)$$

La théorie de l’analyse limite pour les plaques est formellement la même que celle exposée plus haut dans le cas 3D. Les équations d’équilibre 3D sont remplacées par les équations d’équilibre de plaques, de même pour les conditions limites. La loi d’écoulement relie les déformations généralisées de plaques aux contraintes généralisées de plaques via le critère portant sur les efforts généralisés. Dans le chapitre suivant, on écrira le problème d’analyse limite de plaque plus précisément.



# Chapitre 2

## Analyse limite des plaques périodiques : Modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff

### 2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de se munir d'une méthode d'homogénéisation des plaques hétérogènes périodiques, rigides-parfaitement plastiques en partant du problème 3D, c'est-à-dire une structure périodique dans le plan, avec une faible épaisseur en regard de ses autres tailles caractéristiques.

Il s'agit de définir le domaine de résistance de plaque de Love-Kirchhoff équivalente à la plaque hétérogène 3D et de savoir comment on le détermine. La méthode d'homogénéisation sera justifiée via une technique de développements asymptotiques.

### 2.2 Problématique

On considère une plaque 3D périodique dans son plan et dont l'épaisseur  $t$  est très petite devant ses autres longueurs caractéristiques  $L_1$  et  $L_2$ . Cette structure est soumise à des charges dans le plan et hors-plan qui dépendent linéairement d'un paramètre positif  $\lambda$ . Quand  $\lambda$  croît à partir de la valeur 0, l'écoulement plastique de la structure commence pour une valeur critique  $\lambda^c$ . Le problème d'analyse limite consiste à déterminer  $\lambda^c$ . Comme on l'a vu précédemment,  $\lambda^c$  est la valeur maximale que peut prendre le paramètre  $\lambda$  correspondant à un champ de contrainte admissible,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x})$  pour tout  $\mathbf{x}$  satisfaisant les équations d'équilibre avec les conditions de chargement imposées.

Trois longueurs caractéristiques du problème sont importantes :  $L = \min(L_1, L_2)$  la taille caractéristique de la plaque,  $t$  son épaisseur et  $\epsilon$  la taille de la période dans le plan.  $\epsilon$  est donc la dimension de la cellule de base à partir de laquelle la plaque peut être engendrée

par périodicité.

Quand  $t$  et  $\epsilon$  sont du même ordre de grandeur et très petits devant  $L$ , l'idée naturelle est de remplacer par une plaque homogène 2D de Love-Kirchhoff rigide parfaitement plastique la structure 3D périodique hétérogène et d'appliquer la théorie de l'analyse limite à cette plaque homogène équivalente.

Le problème d'analyse limite pour la plaque de Love-Kirchhoff équivalente consiste à trouver  $\lambda_p^c$ , la valeur maximale de  $\lambda_p$  pour laquelle il existe un champ de contraintes généralisées  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  qui satisfasse les équations d'équilibre de plaque de Love-Kirchhoff et le critère de résistance homogénéisée  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})(x_1, x_2) \in G_p^{hom}$  pour tout  $(x_1, x_2)$ , où  $G_p^{hom}$  est le domaine de résistance de la plaque homogène équivalente. Le but de ce chapitre est de déterminer  $G_p^{hom}$  en fonction de la donnée  $G(\mathbf{x})$  sur la cellule de base et d'étudier la relation entre  $\lambda_p^c$  et  $\lambda^c$ .

## 2.3 Homogénéisation des plaques périodiques

L'homogénéisation des plaques périodiques a été déjà largement étudiée dans différents cadres : matériaux constitutifs élastiques, élasto-plastiques ou rigides parfaitement plastiques. Néanmoins, aucune justification formelle d'une telle méthode n'est disponible, d'après nos recherches bibliographiques. Nous exposons brièvement par la suite l'essentiel des travaux sur de telles problématiques.

### 2.3.1 Elasticité

L'homogénéisation de plaques périodiques *élastiques* a été étudiée par beaucoup d'auteurs ((Duvaut et Metellus, 1976), (Caillerie, 1984), (Kohn et Vogelius, 1984) et (Lewinski et Telega, 1999), par exemple). Pour une valeur fixe de la taille caractéristique de la plaque  $L$ , le problème d'homogénéisation consiste à trouver la solution asymptotique quand  $t$  et  $\epsilon$  tendent vers zéro. Caillerie (1984) a considéré une plaque hétérogène d'épaisseur constante et a abouti à un modèle de plaque de Love-Kirchhoff équivalent. Toutefois, comme il a été montré dans (Caillerie, 1984) et (Kohn et Vogelius, 1984), le schéma d'homogénéisation dépend de l'ordre de convergence vers 0 de l'épaisseur  $t$  et de la période  $\epsilon$ . En effet, lors du processus d'homogénéisation, l'ordre de passage à la limite de ces deux paramètres ne commutent pas et conduit à différents résultats.

On suppose généralement que  $\epsilon$  est une fonction de  $t$  se comportant au voisinage de 0 de manière équivalente à  $t^a$ ,  $a > 0$ .

Trois cas sont considérés :  $a < 1$ ,  $a > 1$  et  $a = 1$ .

- Cas  $a < 1$  (épaisseur très petite par rapport à l'hétérogénéité dans le plan).

Dans ce cas, on fait d'abord tendre l'épaisseur vers 0 ( $t \rightarrow 0$ ) puis la période de l'hétérogénéité ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Lors de la première étape, la structure hétérogène 3D devient une plaque hétérogène périodique. Le second passage à la limite aboutit à la résolution de problèmes cellulaires de localisation bidimensionnelle (Kohn et Vogelius, 1984), (Caillerie, 1984). Les premiers travaux sur l'homogénéisation des plaques minces périodiques ont été conduits par Duvaut et Metellus (1976). Ces auteurs partent d'une formulation bidimensionnelle du problème hétérogène sur les bases d'un modèle de Love-Kirchhoff périodique pour aboutir à un modèle homogénéisé du même type. On note également, dans ce cadre, les travaux sur les plaques perforées (Duvaut, 1977) et les plaques renforcées (Artola et Duvaut, 1977).

- Cas  $a > 1$  (période très petite par rapport à l'épaisseur).

Dans ce cas, on fait d'abord tendre la période vers 0 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). La structure 3D hétérogène est alors remplacée par un milieu 3D homogène équivalent qui, à son tour, est substitué ( $t \rightarrow 0$ ) par une plaque homogène équivalente de Love-Kirchhoff (en flexion dans (Kohn et Vogelius, 1984), en membrane et flexion dans (Caillerie, 1984)).

- Cas  $a = 1$  (épaisseur et taille de l'hétérogénéité du même ordre de grandeur  $t \sim \epsilon \rightarrow 0$ ).

Dans cette situation, les deux paramètres n'en forment plus qu'un seul et une technique de développements asymptotiques mène à une formulation des problèmes cellulaires tridimensionnels (Caillerie, 1984). Le milieu 3D hétérogène est remplacé directement par une plaque homogène de Love-Kirchhoff dont les coefficients élastiques sont calculés en résolvant un problème auxiliaire sur la cellule de base. Lewinski et Telega (1999) montrent également que les problèmes établis dans Kohn et Vogelius (1984) sont équivalents à ceux de Caillerie (1984) en ce qui concerne la détermination de la loi de comportement homogénéisée. Lewinski et Telega (1999) ont également généralisé dans le cas  $a = 1$  les travaux de Caillerie (1984) et Kohn et Vogelius (1984) pour les plaques périodiques non symétriques, hétérogènes et d'épaisseur variable. Ils obtiennent également un comportement homogène équivalent de type Love-Kirchhoff.

### 2.3.2 Plasticité

Concernant la détermination du domaine de résistance homogénéisé global d'un milieu 3D périodique hétérogène, les travaux pionniers ont été ceux de Suquet (1983) et de Buhan (1986). Par exemple, dans (de Buhan, 1983), le domaine de résistance macroscopique homogénéisé d'un multicouche 3D est explicitement déterminé en fonction des caractéristiques "microscopiques" de résistance de chaque couche. Omri et al. (2000) proposent également une procédure d'homogénéisation élasto-plastique pour les stratifiés 3D. Dans ce cas, le comportement "entier" du matériau est pris en compte sans oublier la phase élastique.

Dans (Telega, 1995), l'homogénéisation d'une plaque de Love-Kirchhoff, rigide parfaitement plastique, périodique (cas  $a < 1$ ) a été étudiée. A l'instar du cas élastique, l'étape de localisation se fait sur une cellule bidimensionnelle : la structure 3D est d'abord transformée en plaque de Love-Kirchhoff 2D, puis on extrait de cette dernière une cellule de base pour le problème d'homogénéisation.

En considérant le cas  $a = 1$  (épaisseur et période de l'hétérogénéité du même ordre de grandeur) dans le cas du calcul à la rupture, Bourgeois et al. (1998) et Sab (2003) ont proposé de manière indépendante de substituer la plaque 3D périodique dans le plan par une plaque homogène de Love-Kirchhoff équivalente dont le domaine de résistance macroscopique homogénéisé est déterminé à partir de la résolution d'un problème auxiliaire sur la cellule de base 3D.

Dans ce chapitre, nous présentons une justification formelle de la méthode proposée dans (Bourgeois, 1997) et (Sab, 2003) pour les plaques périodiques dans leur plan et nous l'utiliserons dans le chapitre suivant afin de déterminer le domaine de résistance homogénéisé d'une plaque *stratifiée* ( $F = F(x_3, \sigma)$  est une fonction arbitraire de  $x_3$ ). Il est à noter que la méthode des développements asymptotiques qu'on emploiera par la suite a déjà été mise en oeuvre dans le cadre de l'élasticité non linéaire des plaques multicouches dans (Tarn, 1997) et dans (Millet et al., 2003) pour l'élasto-plasticité avec écrouissage de plaques homogènes.

## 2.4 Analyse limite des plaques minces périodiques

On considère une plaque rigide parfaitement plastique qui exhibe une périodicité dans son plan principal. L'épaisseur de la plaque  $t$  et la taille caractéristique de l'hétérogénéité  $\epsilon$  sont supposées être du même ordre de grandeur et très petites par rapport à la taille caractéristique de la plaque  $L$ , *i.e.* : ( $\epsilon \sim t \ll L$ ).

Le but de cette partie est de remplacer la structure hétérogène 3D par une plaque 2D équivalente avec une cinématique de Love-Kirchhoff et de déterminer la charge critique (hors plan) pour laquelle l'écoulement plastique de la structure entière se produit (Figure 2.1).

On présentera d'abord le problème d'analyse limite 3D en rappelant ce que sont les méthodes cinématique et statique et on définira également les notations. On abordera ensuite le problème d'homogénéisation : comment passer de la structure 3D à une plaque homogène équivalente? On introduira pour cela le domaine de résistance de la plaque homogénéisée  $G_p^{hom}$ . Les liens entre ce dernier et les domaines de résistance locaux de la plaque 3D, ainsi qu'entre les distributions de contraintes 3D et les contraintes généralisées du modèle de plaque seront étudiés à partir d'une cellule de base notée  $Y$ , plus petit volume nécessaire pour générer la structure 3D entière à partir de simples translations (Figure 2.1). Enfin, on présentera une justification de cette méthode d'homogénéisation en utilisant la technique des développements asymptotiques.

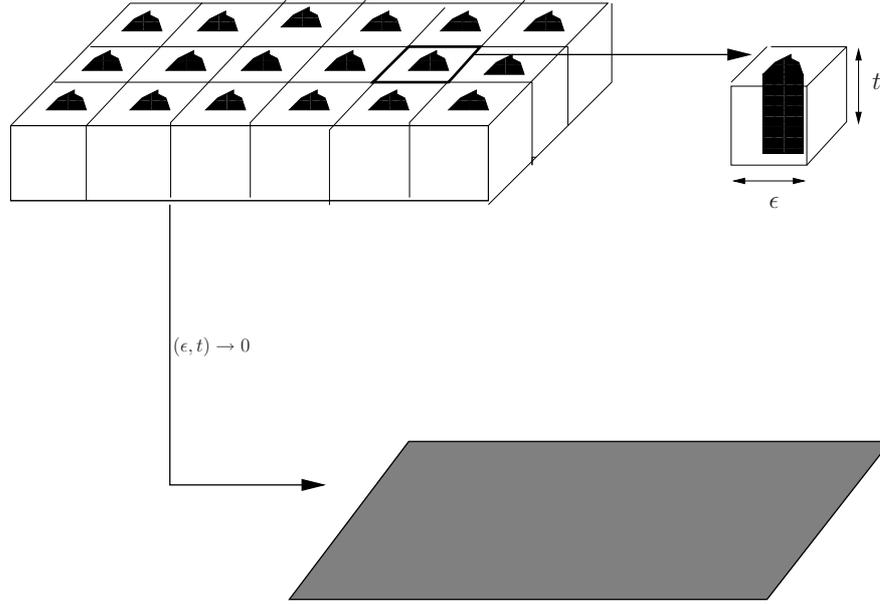


FIG. 2.1. Structure 3D hétérogène, cellule de base et plaque homogène équivalente.

### 2.4.1 Problème d'analyse limite 3D

La plaque hétérogène considérée dans cette partie occupe un domaine noté :

$$\Omega^t = \omega \times ] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2} [$$

où  $\omega$  est la surface moyenne de la plaque et  $t$  son épaisseur. La frontière géométrique de cette plaque,  $\partial\Omega^t$ , peut être décomposée en trois parties, les peaux, supérieure et inférieure, et la frontière latérale :

$$\partial\Omega^t = \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_3^+ \cup \partial\Omega_3^-, \text{ avec } \partial\Omega_l = \partial\omega \times ] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2} [ \text{ et } \partial\Omega_3^\pm = \omega \times \left\{ \pm \frac{t}{2} \right\}.$$

On suppose que la plaque est fixée sur sa frontière latérale,  $\partial\Omega_l$ , et qu'elle est soumise à une distribution de forces surfaciques  $\mathbf{h}^{t,\lambda,\pm}$  sur les peaux supérieure et inférieure,  $\partial\Omega_3^+$  et  $\partial\Omega_3^-$ . On choisit d'écrire la distribution de force sous la forme suivante :

$$\mathbf{h}^{t,\lambda,\pm}(x_1, x_2) = \lambda \times (t f_1^\pm(x_1, x_2), t f_2^\pm(x_1, x_2), t^2 f_3^\pm(x_1, x_2)) \quad (2.1)$$

où les fonctions  $f_i^\pm(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont données et  $\lambda$  est un paramètre adimensionnel que l'on fait croître à partir de 0.

On notera  $G^t(\mathbf{x})$  le domaine convexe de résistance du matériau constituant la plaque en chaque point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  de  $\Omega^t$  (Salençon, 1983) et  $\pi^t$  la fonction d'appui de ce domaine et  $F^t$  sa fonction seuil.

Le problème d'analyse limite 3D présenté au chapitre précédent revient à chercher  $\lambda^t$ , valeur critique de  $\lambda$  pour laquelle il existe *un champ de vitesse  $\mathbf{u}^t$ , un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^t$  et un champ de multiplicateur de Lagrange  $\zeta^t$  tels que :*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^t = 0, \\ \boldsymbol{\sigma}^t \cdot (\pm \mathbf{e}_3) = \mathbf{h}^{t, \lambda^t, \pm} \text{ sur } \partial\Omega_3^\pm, \\ F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}^t) \leq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{d}^t = \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}^t), \\ \mathbf{u}^t = 0 \text{ sur } \partial\Omega_l, \\ \mathbf{d}^t = \zeta^t \frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \text{ avec } \zeta^t \geq 0 \text{ et } \zeta^t F^t = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Ici, le triplet de vecteurs  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  est la base normale associée aux coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  et  $\operatorname{grad}^s$  est la notation pour la partie symétrique du gradient.

Sous certaines conditions mathématiques, la valeur critique peut être déterminée de manière équivalente par la méthode *cinématique* :

$$\lambda^t = \inf_{\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}=0 \text{ sur } \partial\Omega_l, \text{ et } P_{ext}^+ + P_{ext}^- = 1\}} \int_{\Omega} \pi^t(\mathbf{x}, \operatorname{grad}^s(\mathbf{u})) \, d\Omega,$$

où la puissance des efforts extérieurs pour  $\lambda = 1$  est  $P_{ext}^+ + P_{ext}^-$  avec :

$$P_{ext}^\pm = \int_{\omega} [t f_1^\pm u_1^\pm + t f_2^\pm u_2^\pm + t^2 f_3^\pm u_3^\pm] \, dx_1 dx_2$$

et  $u_i^\pm = u_i(x_1, x_2, \pm \frac{t}{2})$ .

## 2.4.2 Le problème de plaque homogénéisée

On considère une plaque exhibant une structure périodique dans les directions 1 et 2 (plan de la plaque) de sorte qu'on puisse en extraire une cellule de base. Cette dernière permet de reproduire exactement la plaque par de simples translations. Elle contient toute l'information nécessaire à la description physique de la plaque. On note cette cellule de base comme suit :

$$Y = A \times ] - \frac{t}{2}, \frac{t}{2} [,$$

où  $A \subset \mathbb{R}^2$  ; la frontière  $\partial Y$  de  $Y$  est décomposée en trois parties :

$$\partial Y = \partial Y_l \cup \partial Y_3^+ \cup \partial Y_3^-, \text{ avec } \partial Y_3^\pm = A \times \left\{ \pm \frac{t}{2} \right\}.$$

et  $\partial Y_l$  est la partie latérale de la frontière de  $Y$ .

On fait l'hypothèse que l'épaisseur de la plaque  $t$  est du même ordre de grandeur que la taille de l'hétérogénéité, c'est-à-dire la taille caractéristique de  $A$  (Figure 2.1) et que  $t$  est également très petit par rapport à la taille de la structure (*i.e.* de la plaque), c'est à dire la

taille caractéristique de  $\omega$ .

Dans leurs travaux, Bourgeois (1997) et Sab (2003) ont indépendamment proposé de remplacer la structure 3D représentée sur la Figure 2.1 par une plaque homogène de Love-Kirchhoff selon la procédure d'homogénéisation que nous allons décrire par la suite.

Cette procédure est une généralisation à l'analyse limite des travaux de Caillerie (1984) sur les plaques minces élastiques.

On introduit les efforts généralisés de plaque  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{Q}$ , les déformations généralisées  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  et  $\mathbf{V} = V_i(x_1, x_2)$  la vitesse de la plaque.

Le problème d'analyse limite de la plaque consiste à chercher  $\lambda^p$ , la valeur critique de  $\lambda$  pour laquelle il existe un champ d'efforts généralisés  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ , un champ d'effort tranchant  $\mathbf{Q} = Q_\alpha(x_1, x_2)$  et un champ de vitesse de la plaque  $\mathbf{V} = V_i(x_1, x_2)$  sur  $\omega$  satisfaisant les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta} + h_\alpha^{t,\lambda,+} + h_\alpha^{t,\lambda,-} = 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha + \frac{t}{2} (h_\alpha^{t,\lambda,+} - h_\alpha^{t,\lambda,-}) = 0, \\ Q_{\alpha,\alpha} + h_3^{t,\lambda,+} + h_3^{t,\lambda,-} = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

la condition de plasticité :

$$(\mathbf{N}(x_1, x_2), \mathbf{M}(x_1, x_2)) \in G_p^{hom}, \quad (2.5)$$

les conditions de compatibilité :

$$\begin{cases} D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta} + V_{\beta,\alpha}), \quad \chi_{\alpha\beta} = -V_{3,\alpha\beta}, \\ \mathbf{V} = 0, \quad V_{3,n} = 0, \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\omega, \end{cases} \quad (2.6)$$

et enfin la règle normale d'écoulement :

$$(\mathbf{N} - \mathbf{N}') : \mathbf{D} + (\mathbf{M} - \mathbf{M}') : \boldsymbol{\chi} \geq 0 \quad \forall (\mathbf{N}', \mathbf{M}') \in G_p^{hom}. \quad (2.7)$$

Ici,  $V_{3,n}$  est la dérivée de  $V_3$  par rapport à la normale de la frontière  $\partial\omega$  de  $\omega$  et on rappelle que  $G_p^{hom}$  est le domaine de résistance convexe de la plaque homogénéisée. Pour déterminer ce dernier, il faut résoudre un problème auxiliaire d'analyse limite sur la cellule de base  $Y$  qu'on décrira dans le prochain paragraphe. En fait,  $\lambda^p$  est la valeur maximale de  $\lambda$  pour laquelle il existe des efforts généralisés  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  satisfaisant les équations (2.4) et la condition de plasticité (2.5) sur  $\omega$ .

Sous certaines hypothèses mathématiques,  $\lambda^p$  peut être déterminé de manière équivalente avec la méthode cinématique comme suit :

$$\lambda^p = \inf_{\{\mathbf{V} \mid \mathbf{V}=0, V_{3,n}=0 \text{ sur } \partial\omega, \text{ et } P_p^+ + P_p^- = 1\}} \int_{\omega} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \, d\omega$$

où :

- La puissance des efforts extérieurs pour  $\lambda = 1$  est  $P_p^+ + P_p^-$  :

$$P_p^\pm = \int_\omega \left[ t f_1^\pm \left( V_1 \mp \frac{t}{2} V_{3,1} \right) + t f_2^\pm \left( V_2 \mp \frac{t}{2} V_{3,2} \right) + t^2 f_3^\pm V_3 \right] d\omega.$$

- La fonction support  $\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  de  $G_p^{hom}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) &= \sup_{(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom}} \mathbf{N} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\chi} \\ &\iff \\ G_p^{hom} &= \{ (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \mid \mathbf{N} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\chi} \leq \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}), \forall (\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La dernière égalité correspond à la définition cinématique du domaine de résistance de la plaque homogénéisée  $G_p^{hom}$ . C'est une approche par l'extérieur du domaine homogénéisé. Cette méthode est illustrée sur la Figure 2.2.

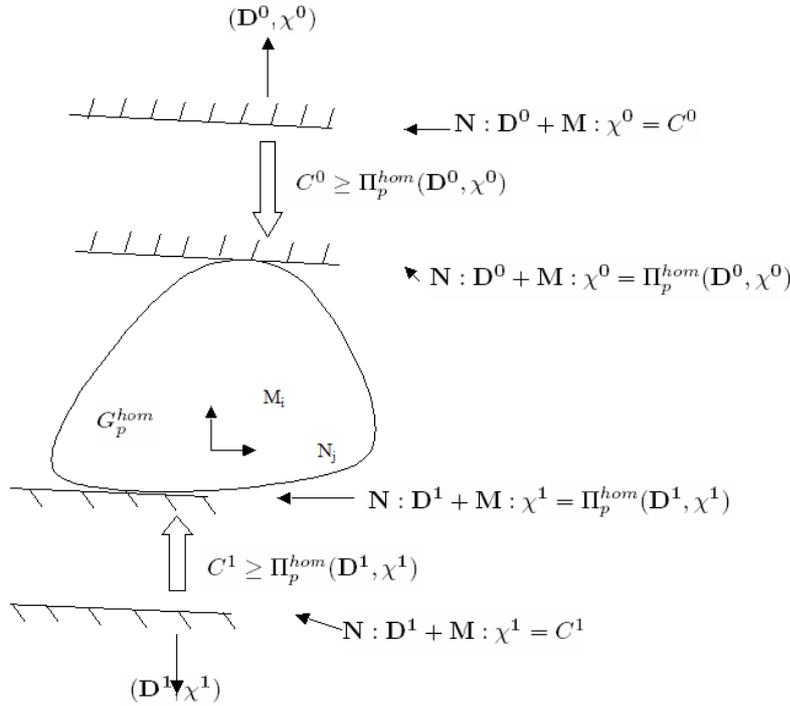


FIG. 2.2. Approche cinématique (par l'extérieur) de  $G_p^{hom}$ .

### 2.4.3 Détermination du domaine de résistance homogénéisé $G_p^{hom}$

Comme expliqué plus haut, nous allons décrire un problème auxiliaire à résoudre pour la détermination du domaine de plasticité de la plaque homogénéisée. Pour déterminer  $G_p^{hom}$ , on procède de la manière suivante :

Pour chaque contrainte généralisée  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ , on définit l'ensemble des champs de contraintes 3D statiquement admissibles  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  sur la cellule de base  $Y$  par :

$$SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \mid N_{\alpha\beta} = t\langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle, M_{\alpha\beta} = t\langle y_3 \sigma_{\alpha\beta} \rangle, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ sur } Y, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ anti-périodique sur } \partial Y_i; \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \text{ sur } \partial Y_3^\pm \end{array} \right\} \quad (2.9)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  est l'opérateur de la moyenne volumique sur  $Y$ .

Selon (Bourgeois, 1997) et (Sab, 2003),  $G_p^{hom}$  est l'ensemble des efforts généralisés  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  (efforts de membrane et moments fléchissants) tels qu'il existe un champ  $\boldsymbol{\sigma}$  dans  $SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  qui vérifie le critère de plasticité  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y})$  en chaque point  $\mathbf{y}$  de la cellule de base  $Y$  :

$$G_p^{hom} = \{(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \mid \exists \boldsymbol{\sigma} \in SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in Y\}. \quad (2.10)$$

Cette définition est appelée la définition statique du domaine de résistance de la plaque homogène équivalente.

La définition cinématique de  $G_p^{hom}$  est obtenue de la manière suivante :

Pour chaque  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$ , on définit l'ensemble des champs de vitesses 3D  $\mathbf{v} = (v_i)$  cinématiquement admissibles par :

$$KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \left\{ \mathbf{v} \mid \operatorname{grad}^s(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{D}} + y_3 \tilde{\boldsymbol{\chi}} + \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}^{per}), \mathbf{u}^{per} A\text{-périodique} \right\} \quad (2.11)$$

en utilisant les notations suivantes :

$$\tilde{D}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}, \quad \tilde{D}_{i3} = 0, \quad \tilde{\chi}_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\chi}_{i3} = 0.$$

Ces deux espaces, respectivement de champ de contraintes statiquement admissibles  $SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  et de champs de vitesses cinématiquement admissibles  $KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$ , sont en dualité au sens du principe des puissances virtuelles, c'est-à-dire :

$$\forall \boldsymbol{\sigma} \in SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \quad \forall \mathbf{v} \in KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}), \quad \mathbf{N} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\chi} = t\langle \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad}^s(\mathbf{v}) \rangle. \quad (2.12)$$

En exploitant la propriété (2.12), on peut donner la définition cinématique suivante de  $G_p^{hom}$ , c'est à dire donner sa fonction d'appui  $\pi_p^{hom}$  (2.8) (cf (Suquet, 1983), (Salençon, 1983), (Bourgeois, 1997) et (Sab, 2003)), par exemple :

$$\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \inf_{\mathbf{v} \in KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})} t\langle \pi(\operatorname{grad}^s(\mathbf{v})) \rangle. \quad (2.13)$$

A l'instar du 3D, on peut également caractériser la frontière du domaine de plasticité de la plaque homogénéisée  $\partial G_p^{hom}$  de la manière *directe* suivante :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in \partial G_p^{hom} \Leftrightarrow \exists (\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \neq (0, 0), \quad (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in \partial \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \quad (2.14)$$

où  $\partial \pi_p^{hom}$  est le sous-différentiel de  $\pi_p^{hom}$ . De manière équivalente, la caractérisation *cinématique* de  $\partial G_p^{hom}$  peut être obtenue de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}, \mathbf{M}) &\in \partial G_p^{hom} \Leftrightarrow \exists (\mathbf{N}', \mathbf{M}'), \mathbf{N}' : \mathbf{N}' + \mathbf{M}' : \mathbf{M}' = 1, \\ B(\mathbf{N}', \mathbf{M}') &< +\infty, (\mathbf{N}, \mathbf{M}) = B(\mathbf{N}', \mathbf{M}') \times (\mathbf{N}', \mathbf{M}') \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec :

$$B(\mathbf{N}', \mathbf{M}') = \inf_{\{(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \mid \mathbf{N}' : \mathbf{D} + \mathbf{M}' : \boldsymbol{\chi} = 1\}} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}). \quad (2.16)$$

#### 2.4.4 Justification : la méthode des développements asymptotiques

Il s'agit dans cette partie de justifier la méthode d'homogénéisation proposée ci-dessus pour les plaques hétérogènes périodiques dans le cas où l'épaisseur de la plaque et la taille de l'hétérogénéité sont du même ordre de grandeur. Cela signifie que  $\lambda^p$  est une bonne approximation de  $\lambda^t$  pour des valeurs de l'épaisseur de la structure  $t$  suffisamment petites. Plus précisément :

On notera  $Y^*$  la cellule de base unité, définie de la manière suivante :

$$Y^* = t^{-1}Y = A^* \times ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [.$$

On suppose également que le critère de plasticité a la forme suivante :

$$F^t(x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{\sigma}) = F(t^{-1}x_1, t^{-1}x_2, t^{-1}x_3, \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.17)$$

où  $F$  est une fonction de  $\boldsymbol{\sigma}$  et de  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} [$ ,  $A^*$ -périodique pour les coordonnées  $(y_1^*, y_2^*)$  et convexe en  $\boldsymbol{\sigma}$ . Dans le cas d'un critère de Von-Mises (1.4), cela signifie qu'il existe une fonction positive  $\sigma^u(\mathbf{y}^*)$   $A^*$ -périodique en  $(y_1^*, y_2^*)$  telle que :

$$\sigma_t^u(\mathbf{x}) = \sigma^u(\mathbf{y}^*), \quad \mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{x}.$$

Montrons alors qu'en utilisant la dernière propriété (2.17), pour une fonction  $F$ , une surface  $\omega$  et des forces extérieures  $f_i^\pm$  fixées, la valeur  $\lambda^p$  ne dépend pas de  $t$ . En effet :

Soit  $G_p^{hom,*}$  le domaine de résistance convexe de la plaque homogénéisée d'épaisseur unité ( $t = 1$ ) définie par (2.10) et soit  $SA^*$  l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles définis par (2.9).

Le changement de variable  $\mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{y}$  permet de montrer que  $\boldsymbol{\sigma} \in SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  est équivalent à  $\boldsymbol{\sigma}^* \in SA^*(t^{-1}\mathbf{N}, t^{-2}\mathbf{M})$  avec  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{y}^*) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ . Ainsi, nous avons  $(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \Leftrightarrow (t^{-1}\mathbf{N}, t^{-2}\mathbf{M}) \in G_p^{hom,*}$ . Sachant que  $\lambda^p$  est la valeur maximale de  $\lambda$  pour laquelle il existe un couple de contraintes généralisées  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  satisfaisant (2.4) et (2.5), il est clair que  $\lambda^p$  peut être calculé pour  $t = 1$ . Cette valeur ne dépend donc pas de  $t$ .

Le critère  $F$ , la surface  $\omega$  et les efforts extérieurs  $f_i^\pm$  étant maintenant fixés, le problème d'homogénéisation consiste à trouver la limite de  $\lambda^t$  quand  $t$  tend vers 0,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda^t$ , et de comparer cette limite à  $\lambda^p$ .

La méthode d'homogénéisation pour la détermination du domaine de résistance global a été initialement introduite dans (Suquet, 1983), (de Buhan, 1986) et (Bouchitté, 1986-1987) pour les milieux continus périodiques, par Sab (1994) pour les milieux continus aléatoires et dans (Florence et Sab, 2006) pour les milieux discrets. Pour un milieu continu 3D périodique dans les trois directions, il a été prouvé dans (Bouchitté, 1986-1987) que la charge limite pour le vrai matériau hétérogène est asymptotiquement égale à la charge limite pour la plaque homogénéisée, quand la taille de l'hétérogénéité tend vers 0 et lorsque les conditions limites sont telles qu'il n'y ait pas d'effets de bord libre. C'est effectivement le cas quand tous les déplacements sont imposés aux frontières de la structure. Par ailleurs, on trouvera un contre-exemple dans (de Buhan, 1986) où la charge limite pour le domaine du matériau hétérogène réel est asymptotiquement strictement inférieure à la charge limite pour la matériau homogène équivalent.

Dans cette section, on va utiliser la méthode des développements asymptotiques ((Sanchez-Palencia, 1980)) et (Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992)) pour fournir une justification formelle du fait que  $\lambda^p$  est la limite de  $\lambda^t$  quand  $t$  tend vers 0 *en l'absence d'effets de bord libre*. De tels effets peuvent par exemple se produire pour une plaque stratifiée qui est homogène dans les directions  $(x_1, x_2)$ . En effet, on montrera plus loin que, pour un stratifié,  $G_p^{hom}$  est complètement déterminé à partir de  $G^{ps}(y_3)$ , le domaine de résistance local en contraintes planes, défini par :

$$G^{ps}(y_3) = G(y_3) \cap \{\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{i3} = 0\}.$$

En d'autres termes, cela signifie que, si  $G^{ps}(y_3)$  est pris à la place de  $G(y_3)$  pour tout  $y_3$ , alors le problème de plaque homogénéisée est inchangé alors que le problème 3D hétérogène conduit à  $\lambda^t = 0$  en raison des conditions limites sur  $\partial\Omega_3^\pm$  et du critère de plasticité modifié qui impose  $\sigma_{i3} = 0$  partout. Ainsi, on aura  $\lambda^p > \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda^t = 0$ .

On admet que la  $\Gamma$ -convergence peut être établie pour notre problème comme l'ont fait Bouchitté (1986-1987) pour les milieux périodiques, Sab (1994) pour les milieux continus aléatoires et Telega (1995) pour des plaques périodiques dans le cas où l'épaisseur de la plaque est très petite en regard de la taille caractéristique de l'hétérogénéité. Prouver cette convergence demande un important développement mathématique trop éloigné de l'objet de cette thèse. Cependant, il nous semble utile de fournir une justification formelle basée sur la méthode des développements asymptotiques.

Selon cette méthode, on suppose qu'une solution du problème (2.2-2.3) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^t = t^{-1}\mathbf{u}^{-1} + t^0\mathbf{u}^0 + t\mathbf{u}^1 + \dots \\ \boldsymbol{\sigma}^t = t^0\boldsymbol{\sigma}^0 + t^1\boldsymbol{\sigma}^1 + \dots \\ \zeta^t = t^0\zeta^0 + t^1\zeta^1 + \dots \\ \lambda^t = t^0\lambda^0 + t^1\lambda^1 + \dots \end{cases} \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\sigma}^i, \zeta^i$  sont des fonctions de  $(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  qui sont  $A^*$ -périodiques en  $(y_1^*, y_2^*)$  avec  $\mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{x}$ . Dans ce cas, la règle de dérivation de telles fonctions devient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}} &= \left( \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, 0 \right) + t^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y_1^*}, \frac{\partial}{\partial y_2^*}, \frac{\partial}{\partial y_3^*} \right) = \partial_{(x_1, x_2)} + t^{-1} \partial_{\mathbf{y}^*}. \end{aligned}$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^t = t^{-1} (\operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^0) + t^0 (\operatorname{div}_{(x_1, x_2)} \boldsymbol{\sigma}^0 + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^1) + \dots = 0.$$

En annulant tous les termes de la série ci-dessus, on trouve :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^0 = 0 \tag{2.19}$$

pour l'ordre  $t^{-1}$  et

$$\operatorname{div}_{(x_1, x_2)} \boldsymbol{\sigma}^i + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^{i+1} = 0 \tag{2.20}$$

pour l'ordre  $t^i$  avec  $i \geq 0$ .

La condition limite  $\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{e}_3 = \pm \mathbf{h}^{t, \lambda^t, \pm}$  sur  $\partial\Omega_3^\pm$  donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_{13}^0(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \sigma_{23}^0(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = 0 \\ \sigma_{33}^0(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

pour l'ordre  $t^0$ ,

$$\begin{cases} \sigma_{13}^1(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = \pm \lambda^0 f_1^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{23}^1(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = \pm \lambda^0 f_2^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{33}^1(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

pour l'ordre  $t^1$ , et

$$\begin{cases} \sigma_{13}^2(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = \pm \lambda^1 f_1^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{23}^2(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = \pm \lambda^1 f_2^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{33}^2(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, \pm \frac{1}{2}) = \pm \lambda^0 f_3^\pm(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.23}$$

pour l'ordre  $t^2$ .

En utilisant (2.22) et en faisant la moyenne volumique par rapport aux  $\mathbf{y}^* \in Y^*$  de la cellule de base normalisée des deux premières composantes de (2.20) <sub>$i=0$</sub> , on a :

$$N_{\alpha\beta}^0 + \lambda^0 (f_\alpha^+ + f_\alpha^-) = 0 \tag{2.24}$$

où

$$N_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) = \langle \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle_{Y^*}$$

et  $\langle \cdot \rangle_{Y^*}$  est l'opérateur de moyenne volumique sur  $Y^*$ . De la même manière, en prenant la moyenne volumique des deux premières composantes de (2.20) <sub>$i=0$</sub>   $\times y_3^*$  et en intégrant par parties sur  $y_3^*$ , on a :

$$M_{\alpha\beta,\beta}^0 - Q_\alpha^1 + \frac{\lambda^0}{2} (f_\alpha^+ - f_\alpha^-) = 0 \quad (2.25)$$

avec

$$M_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2) = \langle y_3^* \sigma_{\alpha\beta}^0 \rangle_{Y^*},$$

et

$$Q_\alpha^1(x_1, x_2) = \langle \sigma_{3\alpha}^1 \rangle_{Y^*}.$$

On établit facilement que  $\langle \sigma_{3\alpha}^0 \rangle_{Y^*} = 0$  en utilisant (2.19), (2.21) et la  $A^*$ -périodicité de  $\sigma^0$ . Par conséquent, prendre la moyenne volumique de la troisième composante (2.20) <sub>$i=0$</sub>  conduit à une équation triviale. Finalement, en utilisant (2.23) et en prenant la moyenne de la troisième composante (2.20) <sub>$i=1$</sub> , on obtient :

$$Q_{\alpha,\alpha}^1 + \lambda^0 (f_3^+ + f_3^-) = 0. \quad (2.26)$$

De l'équation de compatibilité on déduit que le taux de déformation peut être écrit :

$$\mathbf{d}^t = t^{-2} \mathbf{d}^{-2} + t^{-1} \mathbf{d}^{-1} + t^0 \mathbf{d}^0 + \dots$$

avec :

$$\mathbf{d}^{-2} = \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{-1})$$

et pour tout  $i \geq -1$  :

$$\mathbf{d}^i = \text{grad}_{(x_1, x_2)}^s(\mathbf{u}^i) + \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{i+1}).$$

La condition limite portant sur  $\partial\Omega_l$  conduit à :

$$\mathbf{u}^i = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\omega \quad (2.27)$$

pour tout  $i \geq -1$ .

En effectuant un développement de Taylor en  $\sigma$ , le critère de plasticité s'écrit :

$$F^t = F(\mathbf{y}^*, \sigma^0) + t \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\mathbf{y}^*, \sigma^0) \right] : \sigma^1 \right) + t^2 \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\mathbf{y}^*, \sigma^0) \right] : \sigma^2 + \frac{1}{2} \sigma^1 : \left[ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)(\mathbf{y}^*, \sigma^0) \right] : \sigma^1 \right) + \dots \quad (2.28)$$

On trouve une expression similaire pour  $\frac{\partial F^t}{\partial \sigma}(\mathbf{x}, \sigma^t)$ .

Ainsi, quand on applique la loi d'écoulement, on obtient les équations suivantes :

$$\mathbf{d}^{-2} = \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{-1}) = 0, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{d}^{-1} = \text{grad}_{(x_1, x_2)}^s(\mathbf{u}^{-1}) + \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^0) = 0, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{d}^0 = \zeta^0 \frac{\partial F}{\partial \sigma}(\mathbf{y}^*, \sigma^0) \quad \text{avec } \zeta^0 \geq 0, F(\mathbf{y}^*, \sigma^0) \leq 0 \text{ et } \zeta^0 F(\mathbf{y}^*, \sigma^0) = 0.$$

De (2.29) on déduit que  $\mathbf{u}^{-1}$  est un champ de vitesse de corps rigide en  $\mathbf{y}^*$  périodique en  $(y_1^*, y_2^*)$ . Ainsi,

$$\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}^{-1}(x_1, x_2).$$

Usant de (2.30), de la périodicité de  $\mathbf{u}^0$  en  $(y_1^*, y_2^*)$  et des conditions limites (2.27) pour  $i = -1, 0$ , on trouve que  $\mathbf{u}^{-1}$  et  $\mathbf{u}^0$  ont les formes suivantes :

$$\mathbf{u}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3^{-1}(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} V_1^0(x_1, x_2) - y_3^* V_{3,1}^{-1}(x_1, x_2) \\ V_2^0(x_1, x_2) - y_3^* V_{3,2}^{-1}(x_1, x_2) \\ V_3^0(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

et

$$V_3^{-1} = V_{3,n}^{-1} = V_j^0 = 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \partial\omega. \quad (2.31)$$

De plus, puisque  $V_3^{-1}$  est nulle sur  $\partial\omega$ , sa dérivée l'est aussi sur  $\partial\omega$ . On obtient

$$\mathbf{d}^0 = \tilde{\mathbf{D}}^0 + y_3^* \tilde{\chi}^{-1} + \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\hat{\mathbf{u}}^1) \quad (2.32)$$

où  $\hat{\mathbf{u}}^1(x_1, x_2, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  est le champ de vitesse  $A^*$ -périodique défini par :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{u}^1 + y_3^* \begin{pmatrix} V_{3,1}^0 \\ V_{3,2}^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\alpha\beta}^0 &= D_{\alpha\beta}^0 = \frac{1}{2}(V_{\alpha,\beta}^0 + V_{\beta,\alpha}^0), & \tilde{D}_{i3}^0 &= 0, \\ \tilde{\chi}_{\alpha\beta}^{-1} &= \chi_{\alpha\beta}^{-1} = -V_{3,\alpha\beta}^{-1}, & \tilde{\chi}_{i3}^{-1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, le champ de vitesse 3D s'écrit donc comme la somme d'un champ de vitesse de Love-Kirchhoff ( $\mathbf{u}^0$ ) et d'un champ de vitesse (périodique ici) dépendant de  $y_3$  ( $\mathbf{u}^1$ ).

En utilisant la définition statique de  $G_p^{hom,*}$ , (2.10) avec  $t = 1$ , on trouve que  $(\mathbf{N}^*, \mathbf{M}^*) = (\mathbf{N}^0, \mathbf{M}^0) \in G_p^{hom,*}$  en raison de (2.19), (2.21) et de  $F(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \leq 0$ . Ensuite, en combinant (2.24), (2.25) et (2.26), on prouve que  $(\mathbf{N}^*, \mathbf{M}^*)$  satisfait en réalité les trois conditions de (2.4) avec  $t = 1$  et  $\lambda = \lambda^0$ . De plus, des équations (2.33) et (2.31), on tire facilement que  $\mathbf{V}^* = (V_1^0, V_2^0, V_3^{-1})$  et le taux de déformation généralisé qui en découle  $(\mathbf{D}^*, \boldsymbol{\chi}^*) = (\mathbf{D}^0, \boldsymbol{\chi}^{-1})$  satisfont les équations de compatibilité cinématique de l'équation (2.6). Il reste donc à prouver que le couple taux de déformations généralisées  $(\mathbf{D}^*, \boldsymbol{\chi}^*)$  suit la règle *d'écoulement normal* (2.7) quelles que soient les contraintes généralisées dans  $G_p^{hom,*}$ .

Pour ce faire, soit  $(\mathbf{N}^{*'}, \mathbf{M}^{*'}) \in G_p^{hom,*}$  et soit  $\boldsymbol{\sigma}^{*'}$  un champ de contraintes correspondant statiquement admissible ( $\boldsymbol{\sigma}^{*'}$   $\in SA^*(\mathbf{N}^{*'}, \mathbf{M}^{*'})$ ) avec  $\boldsymbol{\sigma}^{*'(\mathbf{y}^*)} \in G(\mathbf{y}^*)$  pour tout  $\mathbf{y}^*$  dans  $Y^*$ . En considérant (2.12) avec  $t = 1$  et (2.32), on obtient  $(\mathbf{N}^* - \mathbf{N}^{*'}) : \mathbf{D}^* + (\mathbf{M}^* - \mathbf{M}^{*'}) : \boldsymbol{\chi}^* = \langle (\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^{*'}) : \mathbf{d}^0 \rangle_{Y^*}$ . Or,  $\langle (\boldsymbol{\sigma}^0 - \boldsymbol{\sigma}^{*'}) : \mathbf{d}^0 \rangle_{Y^*} \geq 0$  en raison de la règle d'écoulement locale (1.15). La règle d'écoulement globale est donc vérifiée.

Ainsi, on a démontré que  $\lambda^0$  peut être déterminé en résolvant le problème d'analyse limite de la plaque (2.4-2.7).

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a justifié formellement la méthode proposée par Bourgeois (1997) et Sab (2003) pour la détermination du domaine de résistance homogénéisé de Love-Kirchhoff  $G_p^{hom}$  d'une plaque périodique rigide et parfaitement plastique. La valeur critique du paramètre 3D  $\lambda^t$  est asymptotiquement égale à celle trouvée par la méthode d'homogénéisation  $\lambda^p$  s'il n'y a pas d'effet de bord libre. Autrement  $\lambda^p$  est asymptotiquement une borne supérieure de  $\lambda^t$ . Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de déterminer le domaine de résistance homogénéisé des plaques multicouches, c'est-à-dire des plaques dont l'hétérogénéité est uniquement fonction de l'épaisseur.



# Chapitre 3

## Analyse limite des plaques multicouches : Modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, le problème d'homogénéisation d'une plaque hétérogène périodique en analyse limite a été présenté. On a montré qu'on pouvait, pour le calcul des charges limites, la remplacer par une plaque homogène de Love-Kirchhoff équivalente.

Ici, on va adapter les définitions obtenues précédemment sur le domaine de résistance homogénéisé au cas des plaques stratifiées et multicouches. L'hétérogénéité de telles structures est complètement contenue dans l'épaisseur. Cette hypothèse va nous permettre de simplifier le problème auxiliaire et de donner une expression analytique de la fonction d'appui du critère de la plaque homogène équivalente. Notre modèle sera validé ensuite dans le cas d'une plaque de Von-Mises homogène et on montrera que les résultats de la littérature, en particulier ceux d'Ilyushin (1956), sont retrouvés grâce à la mise en oeuvre de la méthode cinématique. Enfin, le domaine de résistance d'une plaque sandwich tricouche de Von-Mises sera tracé pour différents contrastes matériels (résistance des peaux/résistance de l'âme).

### 3.2 Le domaine de résistance homogénéisé de Love-Kirchhoff des plaques stratifiées.

Dans cette partie, on va déterminer le domaine de résistance macroscopique des plaques stratifiées. On appelle plaques stratifiées les plaques qui sont homogènes dans le plan  $(y_1, y_2)$ , mais hétérogènes dans l'épaisseur. En termes de domaine de plasticité, on a donc :

$$G(\mathbf{y}) = G(y_3)$$

Dans un premier temps, on montrera que la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique  $\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  peut être explicitement exprimée en fonction de  $\pi$ , fonction d'appui des domaines de plasticité microscopiques ou locaux.

Ensuite, les cas particuliers des plaques stratifiées symétriques homothétiques et homogènes seront étudiés. Enfin, un modèle approché pour la détermination de  $G_p^{hom}$  pour les stratifiés symétriques homothétiques sera proposé et appliqué à un stratifié de Von-Mises.

### 3.2.1 Cas général

Une plaque stratifiée est homogène dans les directions  $(x_1, x_2)$  :

$$G^t(\mathbf{x}) = G^t(x_3) = G(y_3^*), \text{ avec } y_3^* = t^{-1}x_3.$$

Dans ce cas, la cellule de base peut se réduire à une fibre perpendiculaire au plan de la plaque.

Les champs  $\mathbf{u}^i, \boldsymbol{\sigma}^i, \zeta^i$  introduits dans le développement asymptotique (2.18) sont dans ce cas des fonctions de  $(x_1, x_2, y_3^*) \in \omega \times ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ , avec  $y_3^* = t^{-1}x_3$ , qui ne dépendent pas de  $(y_1^*, y_2^*)$ . Ainsi, des équations (2.19) et (2.21), on tire que  $\sigma_{13}^0 = \sigma_{23}^0 = \sigma_{33}^0 = 0$  et de l'équation (2.20) pour  $i = 0$ , et de la troisième équation de (2.22), on obtient  $\sigma_{33}^1 = 0$ . Cela signifie que  $\sigma_{\alpha\beta}^t$  est d'ordre  $t^0$ ,  $\sigma_{13}^t$  et  $\sigma_{23}^t$  sont d'ordre  $t^1$ , et que  $\sigma_{33}^t$  est d'ordre  $t^2$ .

On peut facilement montrer que l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles  $SA(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  et l'ensemble des champs de vitesses cinématiquement admissibles  $KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  introduits pour la cellule de base  $Y$  deviennent :

$$SA(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = \left\{ \boldsymbol{\sigma}(y_3) \mid N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dy_3, M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y_3 \sigma_{\alpha\beta} dy_3, \sigma_{i3} = 0 \right\}$$

et

$$KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \left\{ \mathbf{v} \mid \text{grad}^s(\mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{D}} + y_3 \tilde{\boldsymbol{\chi}} + \text{grad}^s(\mathbf{u}), \mathbf{u}(y_3) \right\}.$$

Soit :

$$G^{ps}(y_3) = G(y_3) \cap \{ \boldsymbol{\sigma}, \sigma_{i3} = 0 \}$$

le domaine de plasticité local en  $y_3$  dans l'hypothèse des contraintes planes. Alors, la définition statique de  $G_p^{hom}$  devient :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\sigma}(y_3) \text{ tel que } \begin{cases} N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta}(y_3) dy_3, \\ M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y_3 \sigma_{\alpha\beta}(y_3) dy_3, \\ \boldsymbol{\sigma}(y_3) \in G^{ps}(y_3). \end{cases} \quad (3.1)$$

La définition cinématique de  $G_p^{hom}$  se conjugue de la manière suivante. Pour tout  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  dans  $G_p^{hom}$  et tout  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$ , on a :

$$\mathbf{N} : \mathbf{D} + \mathbf{M} : \boldsymbol{\chi} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta} (D_{\alpha\beta} + y_3 \chi_{\alpha\beta}) dy_3 \leq \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}) dy_3$$

où  $\pi^{ps}$  est la fonction support de  $G^{ps}(y_3)$  :

$$\pi^{ps}(y_3, (d_{\alpha\beta})) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in G^{ps}(y_3)} \sigma_{\alpha\beta} d_{\alpha\beta} = \inf_{d_{i3}} \pi(y_3, \mathbf{d}). \quad (3.2)$$

Ainsi, en maximisant sur tous les  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  dans  $G_p^{hom}$  le membre de gauche de l'inégalité précédente, on obtient à partir de (2.8) :

$$\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \leq \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}) dy_3.$$

Ensuite, en raison de (3.2), on a aussi l'inégalité suivante pour tout  $\mathbf{v}$  dans  $KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  :

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}) dy_3 \leq \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi(y_3, \tilde{\mathbf{D}} + y_3 \tilde{\boldsymbol{\chi}} + \text{grad}^s(\mathbf{u})) dy_3.$$

En utilisant (2.13) et en minimisant sur tous les  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(y_3)$  dans  $KA(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  le membre de droite de l'inégalité précédente, on a :

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}) dy_3 \leq \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}).$$

Finalement, il vient :

$$\pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}) dy_3. \quad (3.3)$$

Par conséquent, selon (1.12) et (2.14), la caractérisation *directe* de la frontière du domaine de plasticité global  $\partial G_p^{hom}$  devient :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in \partial G_p^{hom} \iff \exists (\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) \neq 0 \text{ tels que } \begin{cases} N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{\alpha\beta}(y_3) dy_3, \\ M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} y_3 \sigma_{\alpha\beta}(y_3) dy_3, \\ (\sigma_{\alpha\beta}(y_3)) \in \partial \pi^{ps}(y_3, \mathbf{D} + y_3 \boldsymbol{\chi}). \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $\partial \pi^{ps}$  est le sous-différentiel de  $\pi^{ps}$  par rapport  $(d_{\alpha\beta})$ .

Il est à noter que dans certains cas,  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  peuvent être éliminés dans l'équation ci-dessus et on obtient alors un critère de plasticité explicite caractérisant  $\partial G_p^{hom}$ .

Enfin, la caractérisation cinématique de la frontière du domaine de résistance de la plaque

homogénéisée équivalente  $\partial G_p^{hom}$  devient (2.15-2.16) où  $\pi_p^{hom}$  est donné par (3.3).

En conclusion, on notera qu'au premier ordre en  $t$ , le domaine de plasticité global ne dépend que des domaines de plasticité locaux en contraintes planes pour les plaques stratifiées. Ainsi, aucun effet de cisaillement ne peut être pris en compte dans la plaque homogène équivalente.

### 3.2.2 Plaques stratifiées symétriques

On dit qu'une plaque stratifiée est *symétrique* si

$$\begin{aligned} \sigma \in G(y_3) &\iff -\sigma \in G(y_3) \\ &\text{et} \qquad \qquad \qquad \forall y_3, \sigma \\ G(y_3) &= G(-y_3). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Les plaques stratifiées symétriques ont des propriétés intéressantes que l'on va détailler dans la suite.

On introduit d'abord les notations suivantes :

$$G^N = \{ \mathbf{N} \mid \exists \mathbf{M}, (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \}$$

est la projection de  $G_p^{hom}$  sur le sous-espace  $(\mathbf{N}, \mathbf{M} = 0)$  dont la fonction d'appui associée est :

$$\pi^N(\mathbf{D}) = \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, 0).$$

De manière similaire, on définit :

$$G^M = \{ \mathbf{M} \mid \exists \mathbf{N}, (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \}$$

la projection de  $G_p^{hom}$  sur le sous-espace  $(\mathbf{N} = 0, \mathbf{M})$  et sa fonction d'appui associée :

$$\pi^M(\boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{hom}(0, \boldsymbol{\chi}).$$

L'intersection de  $G_p^{hom}$  avec le sous-espace  $(\mathbf{N}, \mathbf{M} = 0)$  est notée :

$$G^{(N,0)} = \{ \mathbf{N} \mid (\mathbf{N}, 0) \in G_p^{hom} \}.$$

La fonction support correspondante est :

$$\pi^{(N,0)}(\mathbf{D}) = \inf_{\boldsymbol{\chi}} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}).$$

Et enfin,

$$G^{(0,M)} = \{ \mathbf{M} \mid (0, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \}$$

l'intersection de  $G_p^{hom}$  avec le sous-espace  $(\mathbf{N} = 0, \mathbf{M})$  et la fonction support associée :

$$\pi^{(0,M)}(\boldsymbol{\chi}) = \inf_{\mathbf{D}} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}).$$

Pour les plaques stratifiées symétriques, nous avons la propriété suivante

$$G^N = G^{(N,0)} \text{ et } G^M = G^{(0,M)}.$$

Pour montrer cela, rappelons tout d'abord que deux domaines convexes fermés sont confondus si et seulement si leurs fonctions d'appui sont égales. En utilisant (3.3), (3.5) et le fait que  $\pi^{ps}(y_3, \cdot)$  est positivement homogène de degré 1, on établit facilement que les fonctions convexes  $\boldsymbol{\chi} \mapsto \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  et  $\mathbf{D} \mapsto \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  le sont également. Elles atteignent donc leur minimum en 0. Ce qui signifie que l'on a :

$$\begin{aligned} \pi^{(N,0)}(\mathbf{D}) &= \inf_{\boldsymbol{\chi}} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, 0) = \pi^N(\mathbf{D}), \\ \pi^{(0,M)}(\boldsymbol{\chi}) &= \inf_{\mathbf{D}} \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{hom}(0, \boldsymbol{\chi}) = \pi^M(\boldsymbol{\chi}). \end{aligned}$$

### 3.2.3 Plaques stratifiées homothétiques

Une plaque stratifiée est dite *homothétique* si  $G(y_3)$  est donné par :

$$G(y_3) = \sigma^u(y_3) \times \hat{G}$$

où  $\hat{G} \subset \mathbb{R}^6$  est un ensemble fermé convexe et  $\sigma^u(y_3)$  est une fonction réelle positive. Par exemple,  $\sigma^u$  peut être choisi comme la limite d'élasticité du matériau au point  $y_3$  pour une traction uniaxiale dans la direction 1, et ainsi  $\hat{G}$  est le domaine de résistance normalisé.

De (3.3), on tire que  $\pi^N$  et  $\pi^M$  dans ce cas sont données par

$$\pi^N(\mathbf{D}) = \pi_p^{hom}(\mathbf{D}, 0) = \Sigma_{eff}^N \times t \times \hat{\pi}^{ps}(\mathbf{D}), \quad (3.6)$$

$$\pi^M(\boldsymbol{\chi}) = \pi_p^{hom}(0, \boldsymbol{\chi}) = \Sigma_{eff}^M \times \frac{t^2}{4} \times \hat{\pi}^{ps}(\boldsymbol{\chi}), \quad (3.7)$$

où  $\hat{\pi}^{ps}$  est la fonction d'appui du domaine de plasticité dans l'hypothèse des contraintes planes,

$$\hat{G}^{ps} = \hat{G} \cap \{\boldsymbol{\sigma}, \sigma_{i3} = 0\},$$

et les deux constantes effectives  $\Sigma_{eff}^N$  et  $\Sigma_{eff}^M$  sont définies comme suit :

$$\Sigma_{eff}^N = \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma^u(y_3) dy_3, \quad (3.8)$$

et

$$\Sigma_{eff}^M = \frac{4}{t^2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} |y_3| \sigma^u(y_3) dy_3. \quad (3.9)$$

On introduit les variables normalisées suivantes :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{\Sigma_{eff}^N \times t}, \quad m_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\Sigma_{eff}^M \times t^2/4}. \quad (3.10)$$

En utilisant (3.10), on définit le domaine de résistance normalisé de la plaque, noté  $\hat{G}_p^{hom}$  :

$$(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{hom} \iff (\mathbf{n}, \mathbf{m}) \in \hat{G}_p^{hom} \text{ avec (3.10)}. \quad (3.11)$$

### 3.2.4 Plaques homogènes

Quand la plaque est homogène, on a :

$$\sigma^u(y_3) = \sigma^u.$$

Par conséquent, on a également :

$$\Sigma_{eff}^N = \Sigma_{eff}^M = \sigma^u.$$

Dans ce cas, on voit aisément en considérant (3.1) que le domaine de résistance normalisé défini par (3.11) est un ensemble convexe, noté  $\hat{G}_p$ , qui ne dépend ni de l'épaisseur de la plaque,  $t$ , ni de limite d'élasticité,  $\sigma^u$ . Ainsi, on a :

$$\hat{G}_p^{hom} = \hat{G}_p$$

si  $\sigma^u(y_3)$  est uniforme.

En fait,  $\hat{G}_p$  ne dépend que de  $\hat{G}^{ps}$ . De plus, une plaque homogène ayant un domaine de résistance tel que  $\boldsymbol{\sigma} \in G(y_3) \iff -\boldsymbol{\sigma} \in G(y_3)$  a l'intéressante propriété suivante : la projection de  $\hat{G}_p$  sur le sous-espace  $(\mathbf{n}, \mathbf{m} = 0)$ , la projection de  $\hat{G}_p$  sur le sous-espace  $(\mathbf{n} = 0, \mathbf{m})$ , l'intersection de  $\hat{G}_p$  avec le sous-espace  $(\mathbf{n}, \mathbf{m} = 0)$  et l'intersection de  $\hat{G}_p$  avec le sous-espace  $(\mathbf{n} = 0, \mathbf{m})$  sont toutes égales à  $\hat{G}^{ps}$ .

### 3.2.5 Un modèle approché pour les plaques stratifiées homothétiques et symétriques

On rappelle que pour les plaques stratifiées homothétiques et symétriques,  $G^N = G^{(N,0)}$  et  $G^M = G^{(0,M)}$  sont déterminés exactement par respectivement (3.6) et (3.7). Par conséquent, en utilisant la normalisation proposée ci-dessus (3.10), on obtient pour les stratifiées homothétiques et symétriques :

$$(\mathbf{n}, 0) \in \hat{G}_p^{hom} \iff (\mathbf{n}, 0) \in \hat{G}_p \iff \mathbf{n} \in \hat{G}^{ps},$$

et

$$(0, \mathbf{m}) \in \hat{G}_p^{hom} \Leftrightarrow (0, \mathbf{m}) \in \hat{G}_p \Leftrightarrow \mathbf{m} \in \hat{G}^{ps}.$$

Ce qui signifie que les intersections de  $\hat{G}_p^{hom}$  et de  $\hat{G}_p$  avec les sous-espaces  $(\mathbf{n} = 0, \mathbf{m})$  et  $(\mathbf{n}, \mathbf{m} = 0)$  coïncident. On peut donc proposer le modèle approché suivant pour les plaques stratifiées homothétiques et symétriques :

$$\hat{G}_p^{hom} \approx \hat{G}_p. \quad (3.12)$$

Cela signifie que le domaine de résistance normalisé pour un stratifié homothétique et symétrique est approché par le domaine de résistance normalisé d'une plaque homogène avec la règle de normalisation (3.10).

### 3.3 Application aux plaques stratifiées de Von-Mises

Dans cette section, on restreint l'étude aux plaques stratifiées symétriques de Von-Mises décrites par (1.4), (1.5) et (1.9). Le critère de plasticité en contraintes planes (cf (Salençon, 1983)) par exemple) s'écrit :

$$F^{ps}(y_3, (\sigma_{\alpha\beta})) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - (\sigma^u(y_3))^2 \quad (3.13)$$

et la fonction support associée :

$$\pi^{ps}(y_3, (d_{\alpha\beta})) = 2 \times \frac{\sigma^u(y_3)}{\sqrt{3}} \times \sqrt{d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{12}^2 + d_{11}d_{22}}. \quad (3.14)$$

Le sous-différentiel de  $\pi^{ps}$  est  $\partial\pi^{ps} = G^{ps}(y_3)$  pour  $(d_{\alpha\beta}) = 0$ , et  $\partial\pi^{ps} = \left\{ \left( \frac{\partial\pi^{ps}}{\partial d_{\alpha\beta}} \right) \right\}$  pour  $(d_{\alpha\beta}) \neq 0$  avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi^{ps}}{\partial d_{11}} &= \frac{\sigma^u(y_3)}{\sqrt{3}} \times \frac{2d_{11} + d_{22}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{12}^2 + d_{11}d_{22}}}, \\ \frac{\partial\pi^{ps}}{\partial d_{22}} &= \frac{\sigma^u(y_3)}{\sqrt{3}} \times \frac{2d_{22} + d_{11}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{12}^2 + d_{11}d_{22}}}, \\ \frac{\partial\pi^{ps}}{\partial d_{12}} &= \frac{\sigma^u(y_3)}{\sqrt{3}} \times \frac{2d_{12}}{\sqrt{d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{12}^2 + d_{11}d_{22}}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.3.1 Détermination de $\hat{G}_p$

Le domaine de résistance local normalisé  $\hat{G}^{ps}$  est caractérisé par le critère de plasticité (3.13) et la fonction support (3.14) où  $\sigma^u$  est pris égal à 1. La détermination de  $\hat{G}_p$ , domaine de plasticité normalisé de la plaque correspondant à une plaque homogène de Von-Mises, a été étudié par de nombreux chercheurs. Ilyushin (1956) a éliminé  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\chi}$  dans le problème *statique* (3.4)- (3.15) et a obtenu une caractérisation analytique de  $\hat{G}_p$  dans l'espace à six dimensions  $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$ . Faisant l'hypothèse que les déformations de la plaque suivent une cinématique de Love-Kirchhoff, il cherche à décrire le domaine de plasticité d'une plaque d'épaisseur  $t$ , isotrope, parfaitement plastique et obéissant à un critère de Von-Mises ( $\sigma^u$  est uniforme). Pour ce faire, il introduit les efforts généralisés normalisés suivants :

$$n_{\alpha\beta} = \frac{N_{\alpha\beta}}{t\sigma^u}, \quad m_{\alpha\beta} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\frac{t^2}{4}\sigma^u}. \quad (3.16)$$

Il introduit également des quantités relatives aux critères en efforts membranaires, en moments fléchissants et en couplage membrane-flexion.

$$\begin{cases} Q_n = n_{11}^2 + n_{22}^2 + 3n_{12}^2 - n_{11}n_{22} \\ Q_m = m_{11}^2 + m_{22}^2 + 3m_{12}^2 - m_{11}m_{22} \\ Q_{nm} = n_{11}m_{11} + n_{22}m_{22} + 3n_{12}m_{12} - \frac{1}{2}n_{11}m_{22} - \frac{1}{2}n_{22}m_{11} \end{cases} \quad (3.17)$$

Ilyushin (1956) a établi que la surface de charge limite peut être exprimée sous la forme d'un système de trois équations non linéaires à huit inconnues : les six contraintes généralisées et deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  décrivant l'état de la déformation le long de la normale. Ce système s'écrit :

$$\begin{cases} Q_n = \frac{1}{\Delta_1^2}(\mu^2\psi^2 + \phi^2) \\ Q_m = \frac{2}{\Delta_1^3}(\mu^2\Delta\psi^2 + \Delta\phi^2 + \mu^2\phi\psi + \phi\chi) \\ Q_{nm} = \frac{4}{\Delta_1^4}(\mu^2(\mu^2 + \Delta^2)\psi^2 + (4\mu^2 + \Delta^2)\phi^2 + 2\mu^2\Delta\phi\psi - 2\mu^2\psi\chi + \chi^2) \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $\Delta_1, \Delta, \phi, \psi$  et  $\chi$  sont fonctions de  $\lambda$  et  $\mu$  avec :

$$\begin{cases} \Delta_1 = |\sqrt{1 - \mu^2} + \epsilon\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}| \\ \Delta = \frac{1 - \lambda^2}{\Delta_1} \\ \phi = \lambda - 1 \\ \psi = |Ln(\frac{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu}) + \epsilon Ln(\frac{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}}{\mu})| \\ \chi = |\sqrt{1 - \mu^2} + \epsilon\lambda\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}| \end{cases} \quad (3.19)$$

Ici,  $\epsilon$  peut prendre les deux valeurs  $+1$  et  $-1$ .

Comme ce critère est très complexe, des critères simplifiés et approchés ont été proposés. On citera quelques exemples :

-Ilyushin (1956) :

$$\sqrt{Q_n + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}}|Q_{nm}|} = 1 \quad (3.20)$$

-Hodge (1959) :

$$\sqrt{Q_m} + Q_n = 1 \quad (3.21)$$

-Owen et Figueiras (1983) :

$$\sqrt{Q_n + Q_m} = 1 \quad (3.22)$$

-Grisard (1993) :

$$\sqrt{Q_n + Q_m + \frac{3}{2}Q_{nm}^2} = 1 \quad (3.23)$$

Plus récemment, Bourgeois (1997) a proposé un nouveau critère numérique pour les plaques orthotropes qu'il a validé sur l'exemple d'une plaque homogène.

Il propose le critère suivant :

$$\sqrt{Q_n + Q_m + \frac{1}{\sqrt{3}}|Q_{nm}|} = 1 \quad (3.24)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_n = N_{11}^2 \phi_{1111}^n + N_{22}^2 \phi_{2222}^n + N_{12}^2 \phi_{1212}^n + 2N_{11}N_{22} \phi_{1122}^n \\ Q_m = M_{11}^2 \phi_{1111}^m + M_{22}^2 \phi_{2222}^m + N_{12}^2 \phi_{1212}^m + 2M_{11}M_{22} \phi_{1122}^m \\ Q_{nm} = N_{11}M_{11} \phi_{1111}^{nm} + N_{22}M_{22} \phi_{2222}^{nm} + N_{12}M_{12} \phi_{1212}^{nm} - N_{11}M_{22} \phi_{1122}^{nm} - \\ N_{22}M_{11} \phi_{2211}^{nm} \end{array} \right. \quad (3.25)$$

où les coefficients  $\phi$  sont à identifier de la manière suivante :

Pour les coefficients  $\phi^n$ , on se place dans un plan où seules deux contraintes membranaires sont non nulles. On étudie l'intersection de la surface de charge avec ces plans. En raison des symétries de la surface de charge, on peut se restreindre au demi-plan ( $N_{11}, N_{22} \geq 0$ ) et aux quarts de plan ( $N_{11} \geq 0, N_{12} \geq 0$ ) et ( $N_{22} \geq 0, N_{12} \geq 0$ ). On identifie alors les coefficients  $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^n$  par la méthode des moindres carrés à partir d'un certain nombre de charges limites obtenues numériquement. On procède de même pour les  $\phi^m$  et les  $\phi^{nm}$  respectivement dans les plans  $(M_{ij}, M_{kl})$  et  $(N_{ij}, M_{kl})$ .

Dans la suite, on se propose de tracer les intersections de  $\hat{G}_p$  avec certains plans en utilisant la méthode *cinématique*, (2.15-2.16), (3.3) et (3.14) avec  $\sigma^u = 1$ , car cela nous semble plus facilement programmable et, ce à l'aide du logiciel MATLAB. Pour déterminer ces sections, on procède de la manière suivante :

Pour chaque direction  $(\mathbf{N}', \mathbf{M}')$ ,  $B(\mathbf{N}', \mathbf{M}')$  est calculé en minimisant la fonction  $\pi_p^{hom}$  sur

tous les  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  sous la contrainte  $\mathbf{N}' : \mathbf{D} + \mathbf{M}' : \boldsymbol{\chi} = 1$ . En fait,  $\pi_p^{hom}$  peut être exprimée analytiquement en fonction de  $(\mathbf{D}, \boldsymbol{\chi})$  en utilisant les techniques d'intégration standard.

On a choisi de présenter ici deux intersections du domaine de résistance avec les quarts de plans normalisés suivants :  $(n_{11} \geq 0, m_{12} \geq 0)$  et  $(n_{12} \geq 0, m_{12} \geq 0)$ , toutes les autres contraintes généralisées étant nulles. Ces intersections ont été déterminées avec la méthode statique d'Ilyushin d'une part et avec la méthode cinématique suggérée ci-dessus d'autre part. L'intégralité de la section peut être obtenue en faisant une symétrie par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées. Ces intersections sont tracées sur les Figures 3.1 et 3.2.

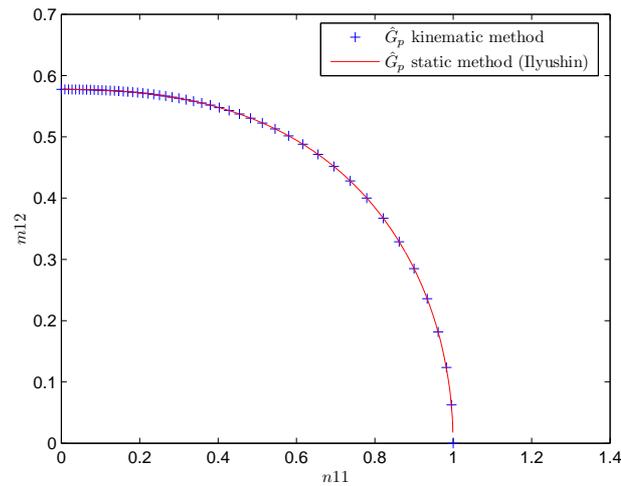


FIG. 3.1. *Plaque homogène : Section de  $\hat{G}_p$  dans le plan  $(n_{11}, m_{12})$  calculée par les méthodes cinématique et statique*

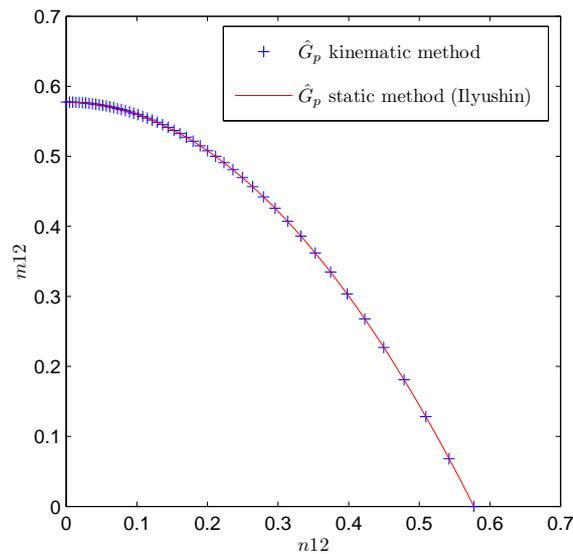


FIG. 3.2. *Plaque homogène : Section de  $\hat{G}_p$  dans le plan  $(n_{12}, m_{12})$  calculée par les méthodes cinématique et statique*

Comme attendu, on observe une excellente adéquation entre la méthode cinématique et la méthode statique.

### 3.3.2 Exemple : une plaque sandwich symétrique

On considère une plaque sandwich constituée de deux matériaux de Von-Mises comme sur la Figure (3.3). La fraction volumique du matériau de l'âme est noté  $f$ . On suppose que la connexion entre les deux matériaux est parfaite aux interfaces  $y_3 = \pm \frac{t}{2}f$ .

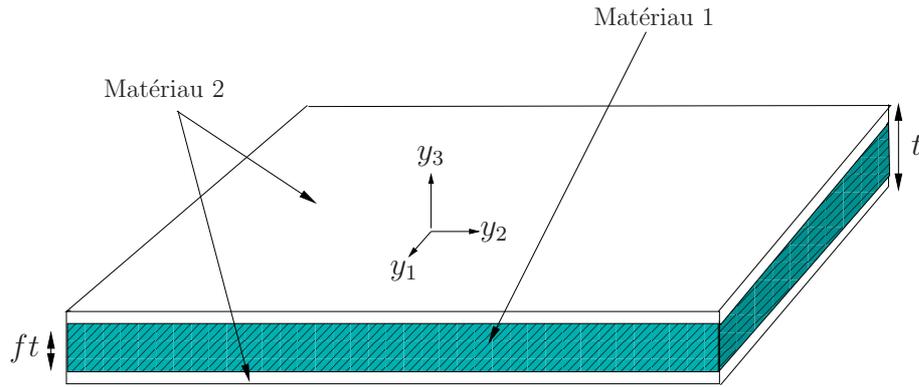


FIG. 3.3. Plaque sandwich symétrique utilisée pour la validation du modèle.

On a donc :

$$\sigma^u(y_3) = \begin{cases} \sigma_1^u & \text{si } |y_3| > \frac{t}{2}f, \\ \sigma_2^u & \text{si } |y_3| < \frac{t}{2}f. \end{cases} \quad (3.26)$$

On définit le contraste  $r$  entre les matériaux comme suit :

$$r = \frac{\sigma_1^u}{\sigma_2^u}.$$

Les deux constantes effectives introduites plus haut deviennent simplement :

$$\Sigma_{eff}^N = \sigma_1^u + f \times (\sigma_2^u - \sigma_1^u)$$

et

$$\Sigma_{eff}^M = \sigma_1^u + f^2 \times (\sigma_2^u - \sigma_1^u).$$

Le domaine normalisé "exact"  $\hat{G}_p^{hom}$ , est calculé en utilisant la méthode cinématique sur la plaque sandwich réelle, (2.15-2.16), (3.3), (3.14) et (7.52). Ensuite, on compare ce domaine à  $\hat{G}_p$  qui est calculé pour une plaque homogène comme décrit dans le paragraphe 3.3.1. Pour tous ces calculs, on a pris une densité volumique de matériau d'âme  $f = 0.75$  et plusieurs valeurs de contraste :  $r = 0, 0.5, 2, 5, 10, 100, \infty$ .

On représente d'abord les sections des domaines décrits ci-dessus dans le quart de plan ( $n_{11} \geq 0, m_{11} \geq 0$ ). La Figure 3.4 représente la comparaison entre  $\hat{G}_p$  et  $\hat{G}_p^{hom}$  pour les deux contrastes  $r = 2$  et  $r = 0.5$ . On constate que le décalage entre les deux domaines est très petit ( $< 1.5\%$ ).

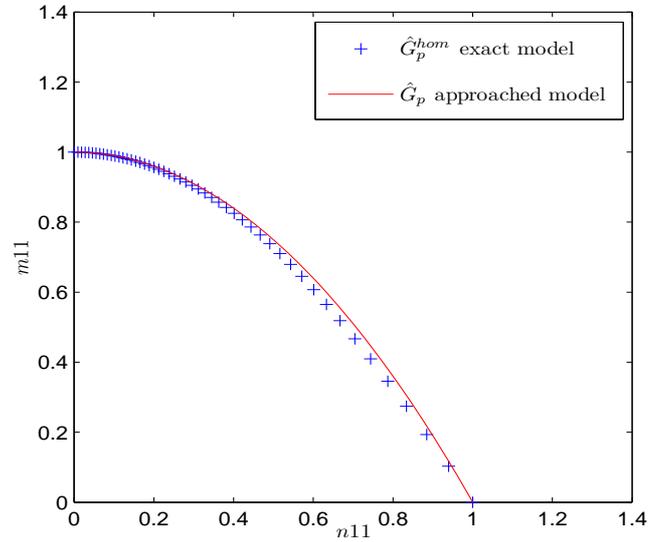
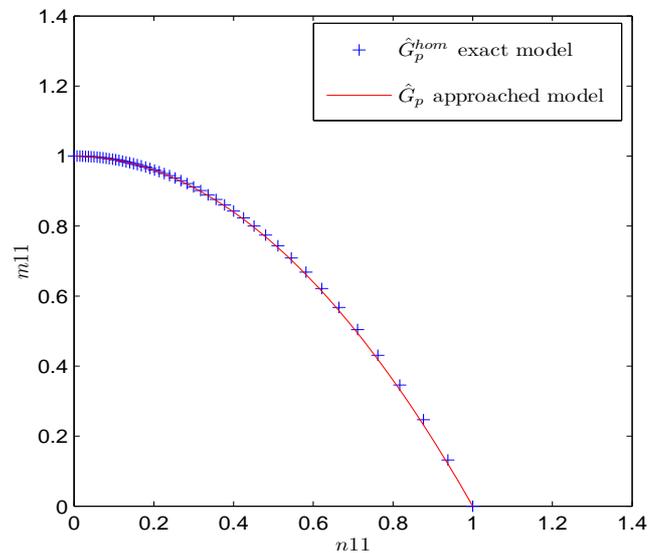
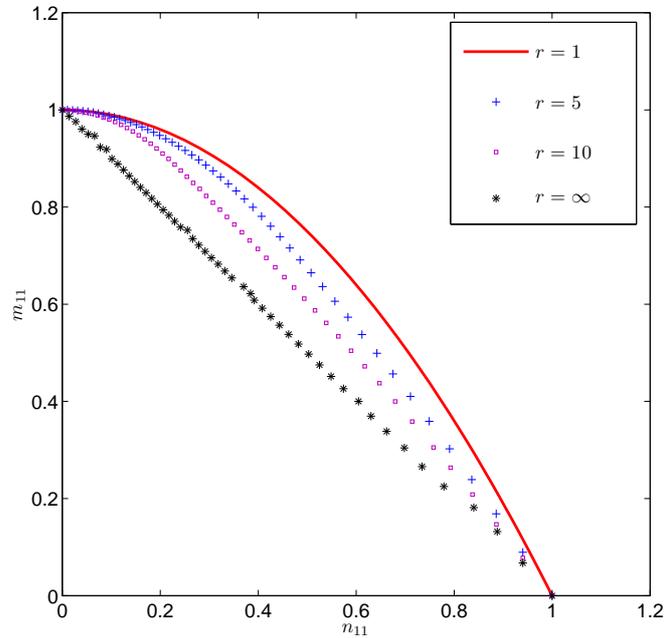
(a)  $\sigma_1^u/\sigma_2^u = 2$ (b)  $\sigma_1^u/\sigma_2^u = 0.5$ 

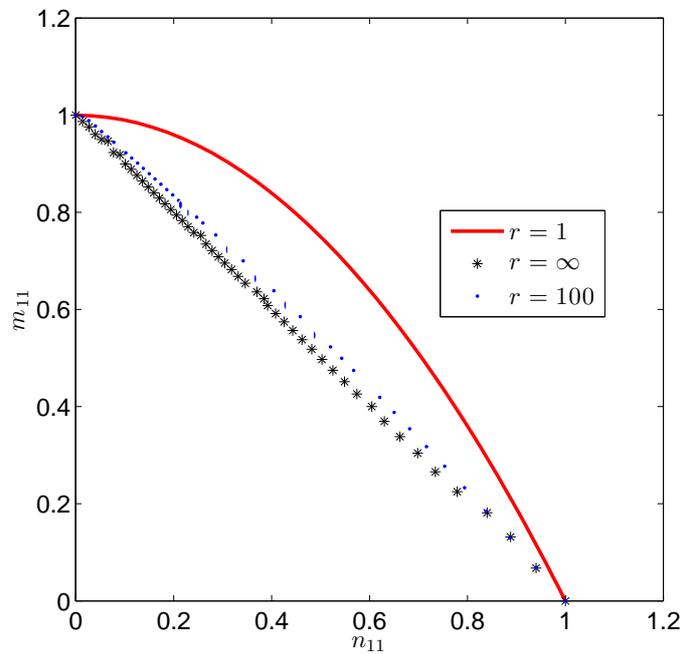
FIG. 3.4. Comparaison entre  $\hat{G}_p^{hom}$  et  $\hat{G}_p$  : Intersection avec le plan  $(n_{11}, m_{11})$  pour les contrastes de matériaux  $r = 2$  et  $r = 0.5$ .

Sur la Figure 3.5 (a), on a représenté le domaine dans ce plan calculé pour différents contrastes  $r = 1, 2, 10, \infty$ , le cas  $r = 1$  étant le modèle approché. Dans ce cas, le décalage maximal entre le modèle approché et le modèle pour  $r = \infty$  est de 16%. On peut donc considérer que, dans ce cas, le modèle approché marche très bien pour les petits contrastes

( $r \leq 10$ ) mais est insuffisant pour les grands contrastes ( $r \geq 10$ ). De plus, on a représenté sur la Figure 3.5 (b) le domaine calculé pour  $r = 100$  ainsi que pour  $r = \infty$ .



(a)



(b)

FIG. 3.5. Intersection de  $\hat{G}_p^{hom}$  avec le plan  $(n_{11}, m_{11})$  pour différentes valeurs du contraste matériel  $r$ . (a)  $r = 1, 5, 10, \infty$ . (b)  $r = 1, 100, \infty$

On constate que ces deux modèles sont très proches. On en conclut que le modèle calculé pour un contraste infini (c'est à dire des peaux infiniment plus résistantes que l'âme) peut être utilisé pour les grandes valeurs du contraste  $r \geq 100$ . On évite ainsi de recalculer à chaque fois le domaine de résistance. Ainsi, pour un contraste donné inférieur à 10, on approxime le domaine de résistance normalisé de la plaque sandwich par le domaine normalisée d'une plaque homogène (qui n'est calculé qu'une seule fois) alors que pour les grandes valeurs du contraste  $r \geq 100$ , la même chose peut être faite avec le contraste infini (qui a lui aussi été calculé une seule fois). Pour les contrastes intermédiaires ( $10 \leq r \leq 100$ ), on peut se permettre de calculer le domaine normalisé "exact", étant donné que le calcul MATLAB est rapide.

Sur les Figures 3.6, 3.7 et 3.8, on a tracé des sections dans le quart de plan ( $m_{11} \geq 0, m_{22} \geq 0$ ) pour trois valeurs différentes de  $\mathbf{n}$  :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

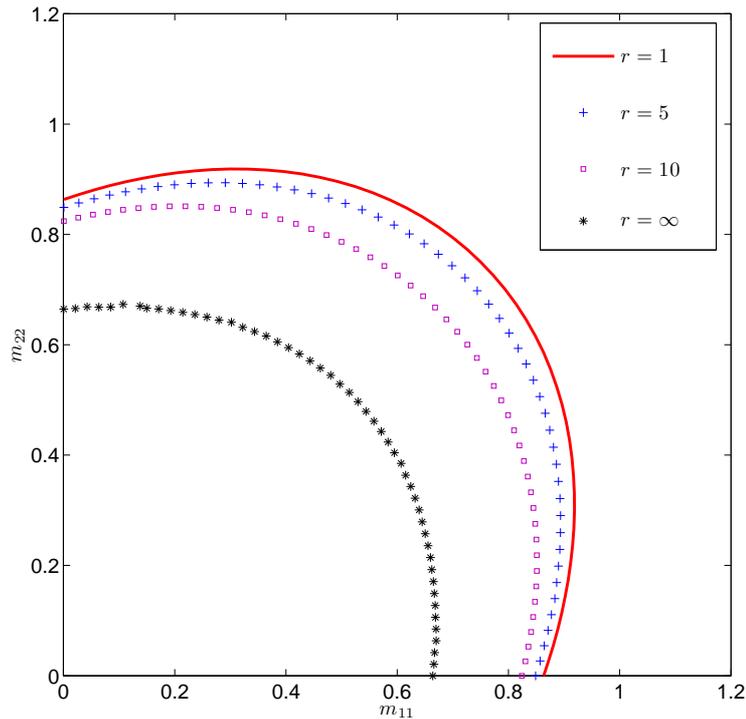


FIG. 3.6. Intersection de  $\hat{G}_p^{hom}$  avec le plan  $(m_{11}, m_{22})$  pour différentes valeurs du contraste matériel  $r$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$ .

On étudie ainsi l'effet d'une "précontrainte" normale plastiquement admissible sur le domaine des moments fléchissants plastiquement admissibles.

Ici, seules les valeurs de  $r = 1, r = 5, r = 10$  et  $r = \infty$  ont été tracées sur ces figures.

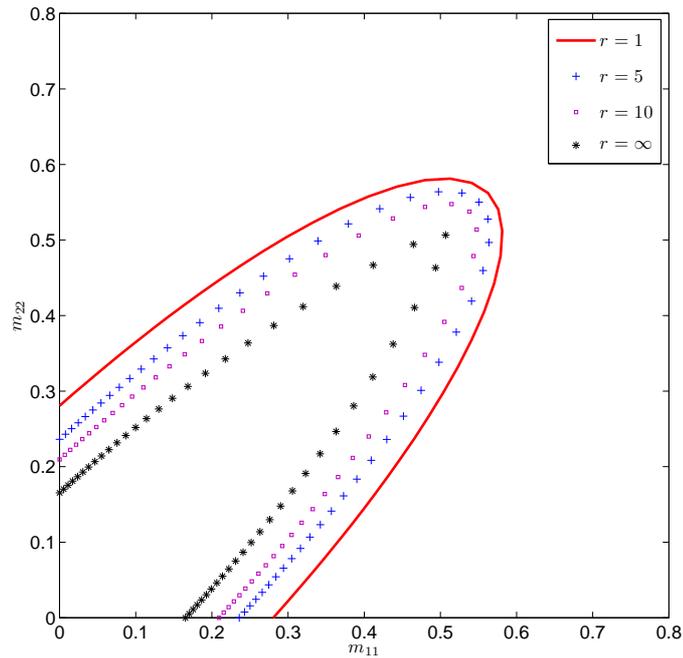


FIG. 3.7. Intersection de  $\hat{G}_p^{hom}$  avec le plan  $(m_{11}, m_{22})$  pour différentes valeurs du contraste matériel  $r$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ .

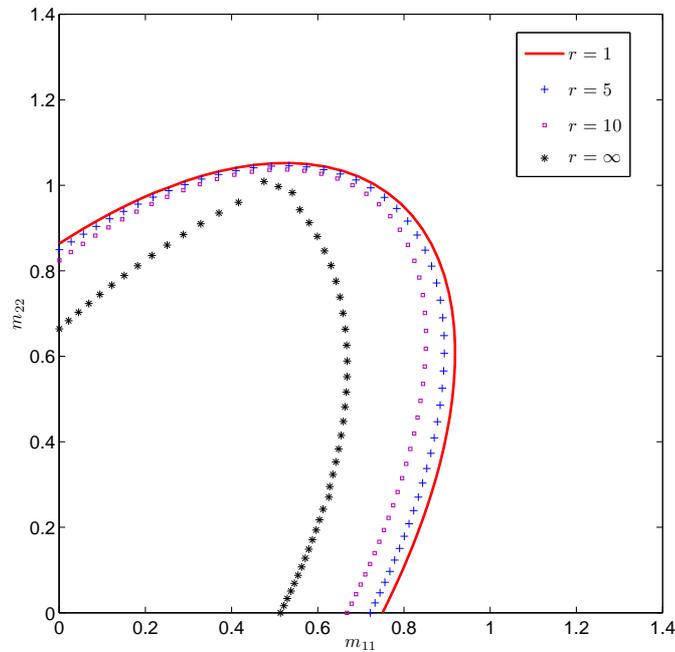


FIG. 3.8. Intersection de  $\hat{G}_p^{hom}$  avec le plan  $(m_{11}, m_{22})$  pour différentes valeurs du contraste matériel  $r$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_3$ .

Les conclusions tirées sur la base de la première figure restent valables, à savoir qu'on peut utiliser le domaine de résistance d'une plaque homogène comme modèle approché pour celui des plaques sandwichs de petits contrastes, et le domaine de résistance d'une plaque de contraste infini pour les grandes valeurs du contraste  $r \geq 100$ . On remarque, cependant, que la situation où une précontrainte normale est appliquée sur la plaque est globalement plus défavorable que le cas précédent. Pour  $r = 10$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_3$ , l'erreur commise par rapport au modèle approché  $r = 1$  est inférieure à 10.4%. Le cas  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ , qui correspond à un cisaillement pur dans le plan est plus défavorable.

### 3.4 Conclusion

La méthode de détermination de  $G_p^{hom}$ , le domaine de résistance homogénéisé de Love-Kirchhoff d'une plaque rigide parfaitement plastique présentant une hétérogénéité périodique dans son plan, initiée par Bourgeois (1997) et Sab (2003) et justifiée dans le second chapitre a été mise en oeuvre dans ce chapitre pour les plaques stratifiées.

Pour celles-ci,  $G_p^{hom}$  est déterminé analytiquement en fonction de la fonction  $\pi$ , qui décrit le domaine de résistance local en chaque point de la plaque. En effet, une représentation paramétrique de la surface de charge ou frontière du domaine de plasticité,  $\partial G_p^{hom}$ , est donnée par (2.14). Cette représentation fournit également une méthode de localisation des contraintes 3D correspondant à un état de contraintes généralisées  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  appartenant à  $\partial G_p^{hom}$ .

Pour une plaque stratifiée *homothétique*, c'est à dire dont le critère de plasticité est de la forme  $F(x_3, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma^u(x_3) \hat{F}(\boldsymbol{\sigma})$ , deux constantes effectives  $\Sigma_{eff}^N$  et  $\Sigma_{eff}^M$  sont définies (3.6) et (3.7). On a trouvé qu'en utilisant comme facteur de normalisation  $\Sigma_{eff}^N$ , la projection de  $G_p^{hom}$  sur le sous-espace  $(\mathbf{N}, 0)$  est égale au domaine de résistance en contraintes planes défini par  $\hat{F}(\boldsymbol{\sigma})$ . Ceci reste valable avec  $\Sigma_{eff}^M$  sur  $(0, \mathbf{M})$ . De plus, si le critère  $\hat{F}$  est symétrique et  $\sigma^u(x_3) = \sigma^u(-x_3)$  pour tout  $x_3$  (c'est à dire une plaque symétrique), alors la projection de  $G_p^{hom}$  sur le sous-espace  $(\mathbf{N}, 0)$ , (respectivement  $(0, \mathbf{M})$ ) coïncide avec son intersection sur le même sous-espace. Dans ce cas, si le contraste matériel (rapport entre les résistances des peaux et de l'âme) est relativement petit ( $r \leq 5$ ) le domaine de résistance normalisé de la plaque  $\hat{G}_p^{hom}$  est très proche de  $\hat{G}_p$ , le domaine de résistance normalisé d'une plaque de Love-Kirchhoff homogène ( $\sigma^u(x_3)$  constante). Ceci a été établi numériquement pour une plaque sandwich symétrique composée de deux matériaux de Von-Mises (le matériau de l'âme et celui des peaux). On utilise la méthode cinématique, via une minimisation sous contraintes à l'aide de MATLAB, pour déterminer le domaine de résistance  $G_p^{hom}$  de la plaque sandwich pour différentes valeurs du contraste entre les deux matériaux. Pour un contraste de matériaux égal à 1 (plaque homogène), on trouve que la méthode cinématique proposée pour la détermination de  $\hat{G}_p$  coïncide avec la méthode d'Ilyushin mais que sa mise en oeuvre numérique est plus simple. Pour les petits contrastes ( $r \leq 10$ ), le décalage entre  $G_p^{hom}$  normalisé et  $\hat{G}_p$  est acceptable. Pour les contrastes intermédiaires ( $10 \leq r \leq 100$ ), le calcul exact doit être effectué. Enfin, pour les grandes valeurs du contraste ( $r \geq 100$ ), le domaine de résistance global homogénéisé est très proche de celui calculé pour un contraste infini ( $r = \infty$ ), qui peut alors être utilisé comme modèle approché.

Comme on l'a montré formellement dans ce chapitre et le précédent, le modèle de Love-Kirchhoff homogénéisé est asymptotique du modèle 3D quand l'éclancement de la plaque  $\frac{t}{L}$  tend vers l'infini (plaque infiniment mince). Cela signifie que le modèle de Love-Kirchhoff est un bon modèle pour des valeurs "suffisamment grandes" de l'éclancement. En outre, la méthode des développements asymptotiques effectués dans le premier chapitre, permet de montrer que, quand l'écoulement plastique d'une plaque stratifiée a lieu, les contraintes 3D normalisées dans la structure et les forces extérieures normalisées ont les ordres de grandeur suivants (en fonction du paramètre destiné à tendre vers 0,  $\frac{t}{L}$ ) :

$$\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\Sigma} \sim \left(\frac{t}{L}\right)^0, \frac{\sigma_{\alpha 3}}{\Sigma} \sim \left(\frac{t}{L}\right)^1, \frac{\sigma_{33}}{\Sigma} \sim \left(\frac{t}{L}\right)^2$$

et

$$\frac{h_\alpha}{\Sigma} \sim \left(\frac{t}{L}\right)^1, \frac{h_3}{\Sigma} \sim \left(\frac{t}{L}\right)^2$$

Ici,  $\Sigma$  est une valeur caractéristique de la contrainte locale de la plaque hétérogène (par exemple,  $\Sigma = \Sigma_{eff}^N$  ou  $\Sigma = \Sigma_{eff}^M$  sont deux bons choix dans le cas d'une plaque homothétique). Remarquons que les effets de cisaillement ne sont pas pris en compte dans le modèle asymptotique homogénéisé de Love-Kirchhoff. Or, ces effets sont importants si l'éclancement de la plaque n'est pas "assez grand". Une stratégie d'amélioration peut être d'aller à l'ordre supérieur dans le développement asymptotique comme l'a fait Boutin (1996) pour les composites élastiques. Dans ce cas, l'énergie plastique serait fonction du second gradient des déplacements, donc du gradient des rotations et des vitesses de plaque. Dans le prochain chapitre, nous considérerons une autre approche et proposerons un nouveau modèle pour la charge limite des plaques multicouches (on se limite à ce type de stratifiés) prenant en compte les effets de cisaillement.



# Chapitre 4

## Analyse limite des plaques multicouches : Effets de cisaillement

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, l'analyse limite d'une plaque multicouche rigide parfaitement plastique soumise à une charge hors-plan a été abordée. On a montré qu'on pouvait substituer au multicouche 3D hétérogène une plaque homogène équivalente avec une cinématique de Love-Kirchhoff (du premier ordre) quand l'élancement de la structure (rapport entre longueur et épaisseur) tendait vers l'infini. En effet, les termes relatifs au cisaillement hors plan ( $\sigma_{i3}$ ) deviennent asymptotiquement négligeables en regard des efforts dans le plan ( $\sigma_{\alpha\beta}$ ). En les négligeant, on aboutit dualement à une cinématique dans le plan, qui est affine dans l'épaisseur de la plaque.

Cependant, pour beaucoup de matériaux multicouches (relativement épais ou dont les contrastes matériels entre les couches sont grands), la rupture ou la plastification est due au cisaillement. Pour les plaques sandwichs par exemple, on assiste fréquemment à une rupture en cisaillement de l'âme et à des glissements aux interfaces entre l'âme et les peaux. On peut dès lors prédire que pour de telles plaques, c'est-à-dire dont l'élancement n'est pas "suffisant", le modèle de plaque équivalente de Love-Kirchhoff ne sera pas efficace pour la détermination de la charge de ruine.

Le but de ce chapitre est donc de construire un nouveau modèle, de la famille des Modèles Multiparticulaires pour les Matériaux Multicouches (M4) en calcul à la rupture, qui permettra de prendre en compte les effets de cisaillement et d'améliorer ainsi la description de la réalité. Après une rapide bibliographie sur les modèles existants dans la littérature pour la modélisation des plaques multicouches, on présentera le nouveau modèle, inspiré des travaux déjà réalisés au LAMI sur les Modèles Multiparticulaires pour Matériaux Multicouches. La méthode statique et la méthode cinématique seront développées. On proposera un nouveau domaine de résistance global pour la plaque  $\mathbf{G}_p^{M4}$  et, par dualité, sa fonction d'appui  $\Pi_p^{M4}$ .

## 4.2 Bibliographie

Pour la modélisation des plaques multicouches en élasticité et en analyse limite, on peut distinguer essentiellement deux types d’approches :

- une approche de type monocouche équivalente,
- une approche par couche.

### 4.2.1 Approche monocouche équivalente

La première approche se trouve être celle utilisée dans la partie précédente en plasticité. Elle revient à considérer le multicouche comme une couche homogène équivalente. Le nombre d’équations dans le problème ne dépend donc pas du nombre de couches.

En revanche, la cinématique de cette couche peut être diverse, passant d’une cinématique de Love-Kirchhoff ((Kirchhoff, 1850), (Reissner et Stavsky, 1961), (Yang et al., 1966)), à une cinématique de Reissner-Mindlin (Mindlin, 1951) avec coefficient correcteur (Whitney, 1973) ou à une cinématique d’ordre supérieur. Dans cette dernière, les auteurs proposent une distribution non linéaire des champs dans l’épaisseur. On citera entre autres (Lo et Christensen, 1977) et (Swaminathan et Ragounadin, 2004) dans le cadre de l’élasticité. En analyse limite, on rappellera les travaux de Bourgeois et al. (1998) et Sab (2003), qui proposent une cinématique de Love-Kirchhoff pour la plaque homogène équivalente. Dans le cas de plaques orthotropes en analyse limite, les travaux de Kao et al. (1963) et Corradi et Vena (2003) considèrent une cinématique du premier ordre.

### 4.2.2 Approche par couche

Dans l’approche par couche, le multicouche est subdivisé en sous-structures (correspondant en fait à chaque couche matérielle ou à un ensemble de couches). On applique à chacune des couches une théorie du premier ordre ou d’ordre supérieur. Ainsi, différents modèles ont été développés pour l’élasticité : (Pagano, 1978), (Seide, 1980), (Di Sciuva, 1984), (Chabot, 1997), (Carreira et al., 2002), (Diaz-Diaz et al., 2002). Ces approches sont, en général, destinées à mieux prédire les effets d’interface entre les couches : glissement, délaminage...

Ces modèles sont plus coûteux (le nombre de variables dépend du nombre de couches), mais permettent l’obtention de résultats plus précis, notamment en ce qui concerne le calcul des contraintes hors-plan.

On se focalisera ici sur les modèles dits “modèles de couches discrètes”. Ces modèles proposent une cinématique par couche plutôt qu’une cinématique globale. Le multicouche est représenté par un ensemble de plaques en interaction les unes avec les autres via leurs interfaces. Les conditions de continuité aux interfaces sont assurées. Dans les travaux de Srinivas

(1987), Seide (1980), Reddy (1987), Naciri et al. (1998), Tahani et Nosier (2003), on postule une cinématique du premier ordre ou d'ordre supérieur par couche. Les équations fondamentales par couche sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les conditions aux limites sont également données couche par couche.

D'une manière alternative, certains auteurs utilisent une approximation uniquement sur le champ de contraintes par couche (Ying, 1994), ou une approche mixte contraintes-cinématique. Ainsi, Ren (1986) utilise un champ de contraintes dont la composante de cisaillement transversal est quadratique par couche et les déplacements sont considérés cubiques par couche et continus aux interfaces.

### 4.2.3 Modèle Multiparticulaire pour Matériaux Multicouches

Les modèles multiparticulaires ont été développés initialement par Pagano (1978) et Pagano et Soni (1983). Les modèles nommés par les auteurs "Modèles Multiparticulaire pour Matériaux Multicouches" (M4) ont été conçus par Ehrlacher et al. (1994) et Chabot (1997) dans le but d'étendre le modèle uniaxial appelé "Shear Lag" de Garrett et Bailey (1977). La plupart de ces modèles servent à prédire l'état des contraintes locales dans la plaque, par exemple à l'interface entre les couches ou au bord d'un trou, en régime élastique (Carreira, 1998), (Pham, 2007). Cependant, des déformations inélastiques ont été introduites par Diaz-Diaz et al. (2007) et Diaz-Diaz et Caron (2006). De plus, on trouve dans (Limam et al., 2003a,b, 2005, 2006) une application des modèles M4 en calcul à la rupture afin de déterminer la résistance de poutres ou de plaques en béton armé renforcées par des composites.

#### 4.2.3.1 Elasticité

La construction des modèles M4 est basée sur la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner. Elle est présentée en détail dans (Chabot, 1997). On la résume succinctement en quatre étapes principales.

1. Au lieu de chercher la solution exacte du problème d'élasticité standard en  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{u}$ , on cherche une solution approchée de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans un sous-espace vectoriel. En effet, les contraintes sont cherchées comme des polynômes de  $x_3$ . Les champs de contraintes approchées  $\boldsymbol{\sigma}$  appartenant à ce sous-espace s'expriment à l'aide de champs qui sont les efforts généralisés. Ainsi, la première étape de l'approximation d'Hellinger-Reissner est de définir les efforts intérieurs généralisés et d'écrire l'approximation en contraintes sous forme polynomiale en  $x_3$ . Les coefficients des polynômes font intervenir les efforts intérieurs généralisés. Les efforts généralisés pour un multicouches de  $n$  couches sont :

- le tenseur  $\mathbf{N}^i$  d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche  $i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x_1, x_2) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (N/m); \quad (4.1)$$

- le tenseur  $\mathbf{M}^i$  d'ordre 2 des moments de flexion de la couche  $i$  par rapport au plan médian de la couche situé à la cote  $\bar{x}_3^i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$M_{\alpha\beta}^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (Nm/m); \quad (4.2)$$

- le vecteur plan  $\mathbf{Q}^i$  d'effort tranchant de la couche  $i$  (avec  $1 \leq i \leq n$ ) :

$$Q_{\alpha}^i(x_1, x_2) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (N/m); \quad (4.3)$$

- le vecteur plan  $\boldsymbol{\tau}^{j,j+1}$  d'effort intérieur de cisaillement à l'interface  $j, j+1$  (avec  $1 \leq j \leq n-1$ ) :

$$\tau_{\alpha}^{j,j+1}(x_1, x_2) = \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3^j) \quad (N/m^2); \quad (4.4)$$

- le scalaire  $\sigma^{j,j+1}$  d'effort d'arrachement à l'interface  $j, j+1$  (avec  $1 \leq j \leq n-1$ )

$$\sigma^{j,j+1}(x_1, x_2) = \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3^j) \quad (N/m^2). \quad (4.5)$$

2. On injecte le champ de contraintes approchées dans la formulation d'Hellinger-Reissner et on identifie les déplacements généralisés et les déformations généralisées cohérentes avec l'approximation en contraintes.

3. En faisant une variation de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des déplacements généralisés, on obtient les équations d'équilibre généralisé et les conditions aux limites généralisées.

4. La stationnarité de la fonctionnelle par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés donne les équations de comportement généralisé.

Différents types de modèles sont générés selon le degré du polynôme pris pour les contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

Si on prend un champ constant en  $x_3$  alors l'équation d'équilibre 3D impose que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{\alpha 3}$  soient affines en  $x_3$  et  $\sigma_{33}$  de degré 2. Ce modèle présente alors  $2n+1$  équations d'équilibre ( $n$  étant le nombre de couches). On peut alors négliger ou non les moments de flexion propres de chaque couche  $\mathbf{M}^i$ . Dans le premier cas, on appelle ce modèle M4-2N+1 M (M comme Membrane) et dans l'autre M4-2N+1 P (P comme Plaque). Les couches sont alors vues soit comme des membranes, soit comme des plaques.

Si on prend une approximation par un polynôme du premier degré pour les contraintes planes, alors le cisaillement est quadratique et l'arrachement est cubique. On obtient le modèle M4-5N. Différentes approximations peuvent aussi être faites : prise en compte de l'arrachement entre les couches ou non, prise en compte des moments de flexion propres, etc...

Il est à noter qu'un logiciel d'éléments finis a été développé par Nguyen (2004) pour l'implémentation de l'élément M4. Ce logiciel est nommé MPFEAP (MultiParticle Finite Element Analysis Programm). Quelques tests ont permis de justifier le bon comportement numérique de l'élément M4. Les matériaux constituants du logiciel éléments finis sont supposés élastiques pour le moment, mais un comportement plastique parfait est introduit par Duong dans une thèse en cours au LAMI.

### 4.2.3.2 Analyse limite

Dans le cadre de l'analyse limite, Limam (2002) est le premier à utiliser, dans sa thèse, un modèle M4. L'auteur considère un modèle M4-2N+1M, c'est à dire que chacune des couches est vue comme une membrane. Dans un tel modèle, les efforts intérieurs sont les efforts membranaires  $\mathbf{N}^i$  dans la couche  $i$  et les cisaillements d'interfaces  $\boldsymbol{\tau}^{i,i+1}$  entre les couches  $i$  et  $i + 1$ . Pour construire son modèle, Limam (2002) part du champ de contraintes approchées en polynômes constants pour les contraintes planes ( $\sigma_{\alpha\beta}^a$ ), du premier degré pour les contraintes de cisaillement ( $\sigma_{\alpha 3}^a$ ) et du second degré pour les contraintes normales ( $\sigma_{33}^a$ ). En injectant ses champs de contraintes approchées dans le principe des puissances virtuelles, il déduit les déplacements généralisés, les déformations généralisées, ainsi que les équations d'équilibre de son modèle.

Ensuite, concernant les critères de plasticité des matériaux constituant la plaque multicouche, il propose de passer d'un critère 3D portant sur les contraintes 3D approchées  $\sigma_{ij}^a$  à un critère 2D portant sur les efforts généralisés du modèle. Il suppose un découplage entre le critère portant sur les composantes planes du tenseur de contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  et le critère portant sur les contraintes hors-plan  $\sigma_{i3}$  et néglige l'effet de l'arrachement  $\sigma_{33}$ . Dans une couche  $i$  donnée, on a :

$$F_1^i(\sigma_{\alpha\beta}^a) \leq 0 \text{ et } F_2^i(\sigma_{\alpha 3}^a) \leq 0, \quad (4.6)$$

où les  $\sigma_{ij}^a$  sont données en fonction des efforts généralisés par le biais des coefficients des polynômes. Comme les contraintes planes sont supposées constantes en fonction de  $x_3$ , elles s'expriment très simplement en fonction de  $\mathbf{N}^i$ . Les contraintes de cisaillement étant supposées affines dans l'épaisseur de la couche, par convexité, il suffit qu'elles vérifient le critère aux points extrêmes de la couche pour être plastiquement admissible. Il obtient donc :

$$F_1^i\left(\frac{1}{t_i} N_{\alpha\beta}^i\right) \leq 0 \text{ et } F_2^i(\tau_{\alpha 3}^{i,i+1}) \leq 0 \text{ et } F_2^i(\tau_{\alpha 3}^{i-1,i}) \leq 0. \quad (4.7)$$

Dans ce modèle, on a donc des critères découplés sur les efforts normaux et les cisaillements d'interface.

Pour être admissibles, les champs d'efforts généralisés doivent vérifier les conditions aux limites, les équations d'équilibre et respectent le critère défini ci-dessus.

Un des inconvénients majeurs du modèle de Limam (2002) est qu'il ne coïncide pas exactement avec le modèle de Love-Kirchhoff identifié dans le chapitre précédent lorsque l'élanement de la plaque tend vers l'infini.

Dans la suite, nous allons proposer un nouveau modèle pour matériaux multicouches dans le cadre de l'analyse limite. A la différence de celui de Limam, celui-ci prendra en compte la flexion propre de la couche. De plus, aucune hypothèse sur le découplage des critères ne sera faite. Enfin, dans sa construction même, le modèle sera différent car on ne passera pas par une approximation des contraintes 3D  $\sigma_{\alpha\beta}$ .

### 4.3 Rappel du problème 3D

La plaque multicouche considérée occupe l'espace  $\Omega = \omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[$  où  $\omega$  est la surface moyenne de la plaque et  $t$  son épaisseur. La frontière de la plaque,  $\partial\Omega$ , est décomposée en trois parties :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_3^+ \cup \partial\Omega_3^-, \text{ avec } \partial\Omega_l = \partial\omega \times ]-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}[ \text{ et } \partial\Omega_3^\pm = \omega \times \left\{ \pm \frac{t}{2} \right\}.$$

La plaque est encadrée sur sa frontière latérale<sup>1</sup>,  $\partial\Omega_l$ . Elle est soumise à un champ de force hors plan  $\mathbf{h}^{\lambda, \pm}$  sur ses faces inférieures et supérieures  $\partial\Omega_3^-$  et  $\partial\Omega_3^+$ .

La force répartie s'écrit :

$$\mathbf{h}^{\lambda, \pm}(x_1, x_2) = \lambda \times \left( 0, 0, \tilde{h}_3^\pm(x_1, x_2) \right), \quad (4.8)$$

où  $\tilde{h}_3^\pm(x_1, x_2)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  est un paramètre adimensionnel positif, croissant à partir de zéro.

Le domaine de résistance convexe  $G(\mathbf{x})$  pour une plaque multicouche est constant par morceaux en  $x_3$  :

$$G(\mathbf{x}) = G(x_3) = G^i \text{ pour } x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où  $G^i$  est le domaine de résistance de la couche  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), dont la fonction d'appui est  $\pi^i$ ,  $x_3^i$  est la cote de l'interface entre les couches  $i$  et  $i+1$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ),  $x_3^0 = -\frac{t}{2}$  et  $x_3^n = +\frac{t}{2}$ . L'épaisseur de la couche  $i$  est  $t_i = x_3^i - x_3^{i-1}$  et  $\bar{x}_3^i = \frac{x_3^i + x_3^{i-1}}{2}$  sa cote moyenne. Ces notations sont explicitées sur la Figure 4.1. L'épaisseur totale de la plaque est  $t = \sum_{i=1}^n t_i$ . Dans la plupart des cas, il existe une fonction  $F^i(\boldsymbol{\sigma})$  convexe et différentiable par rapport aux contraintes telle que  $\boldsymbol{\sigma} \in G^i \iff F^i(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ .

Le problème d'analyse limite consiste à trouver la valeur critique  $\lambda^c$  pour laquelle la ruine plastique de la structure se produit.

Selon la méthode statique  $\lambda^c$  est la valeur maximale de  $\lambda$  pour laquelle il existe un tenseur de contraintes satisfaisant les trois conditions suivantes<sup>2</sup> :

- $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$  sur  $\Omega$
- $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\pm \mathbf{e}_3) = \mathbf{h}^{\lambda, \pm}$  sur  $\partial\Omega_3^\pm$
- $\boldsymbol{\sigma} \in G^i$  dans la couche  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

<sup>1</sup>D'autres conditions aux limites peuvent être considérées

<sup>2</sup>Des conditions de bords libres sur la frontière latérale doivent être ajoutées le cas échéant.

Une borne supérieure de  $\lambda^c$  peut être trouvée en écrivant le principe des puissances virtuelles avec un champ de vitesses admissible particulier. Sous certaines hypothèses mathématiques,  $\lambda^c$  peut être déterminé exactement en considérant tous les champs de vitesses admissibles par :

$$\lambda^c = \inf_{\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}=0 \text{ on } \partial\Omega_l \text{ et } P_{ext}^+ + P_{ext}^- = 1\}} \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \int_{\omega} \pi^i(\text{grad}^s(\mathbf{u})) d\omega dx_3,$$

La puissance des efforts extérieurs pour  $\lambda = 1$  est  $P_{ext}^+ + P_{ext}^-$  avec :

$$P_{ext}^{\pm} = \int_{\omega} \tilde{h}_3^{\pm}(x_1, x_2) u_3 \left( x_1, x_2, \pm \frac{t}{2} \right) d\omega.$$

## 4.4 Un nouveau Modèle Multiparticulaire pour les plaques multicouches

Le but de ce chapitre est de décrire un nouveau modèle en analyse limite pour déterminer le chargement maximal qu'une plaque multicouche peut supporter. A la différence du modèle de Love-Kirchhoff, celui-ci prend en compte les effets de cisaillement et est asymptotiquement équivalent au modèle des chapitres 2 et 3 quand l'élanement  $\frac{L}{t}$  tend vers l'infini. Ce modèle se classe dans la catégorie des modèles multiparticulaires : chaque couche homogène est considérée comme une plaque de Reissner en interaction avec ses voisins.

### 4.4.1 La méthode statique

Comme nous l'avons déjà écrit, le multicouche 3D est modélisé comme une superposition de  $n$  plaques de Reissner en interaction entre elles par le biais de leurs interfaces comme sur la Figure 4.1.

On introduit les efforts généralisés de plaques  $\mathbf{N}^i, \mathbf{M}^i, \mathbf{Q}^i, \boldsymbol{\tau}^{i,i+1}$  et  $\sigma^{i,i+1}$  définis plus haut avec la convention suivante qui est cohérente avec les conditions limites :

$$\begin{cases} \tau_{\alpha}^{0,1} = 0, \\ \tau_{\alpha}^{n,n+1} = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

et

$$\begin{cases} \sigma^{0,1} = h_3^-, \\ \tau^{n,n+1} = h_3^+. \end{cases} \quad (4.10)$$

La définition des efforts généralisés de plaque à partir des contraintes 3D est la suivante :

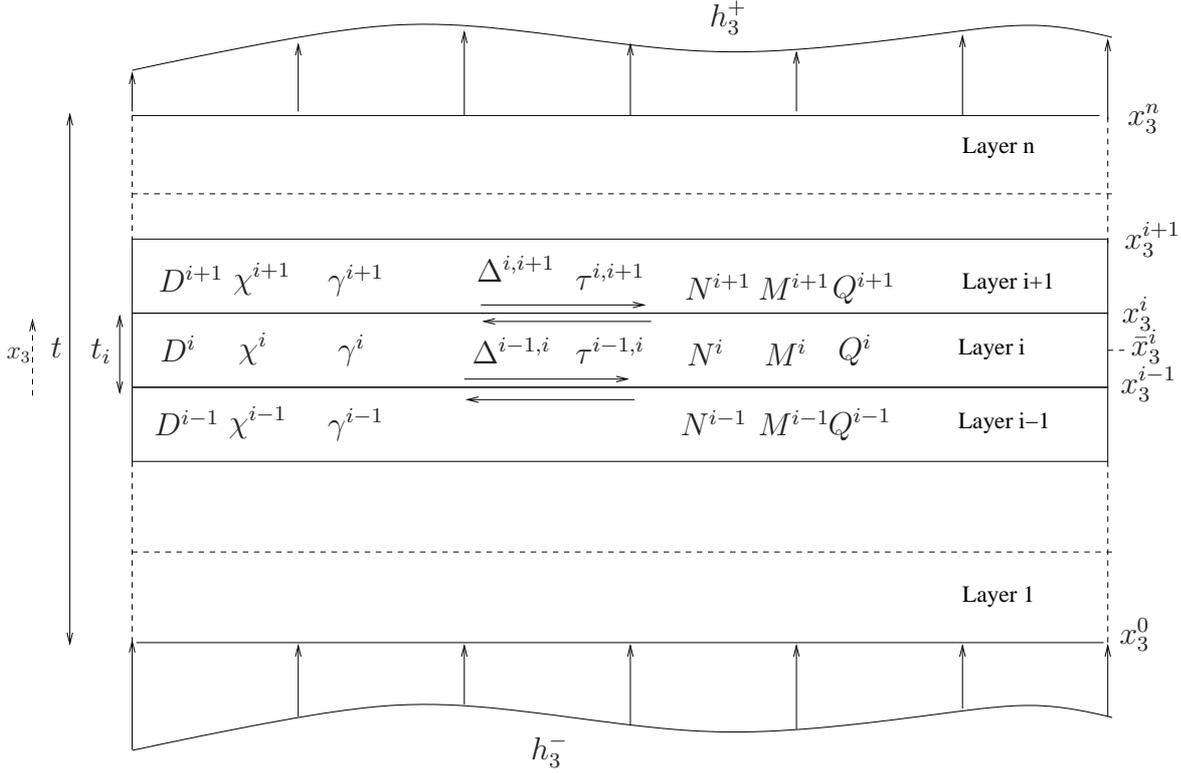


FIG. 4.1. Notations

$$1 \leq i \leq n, \begin{cases} N_{\alpha\beta}^i(x_1, x_2) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \\ M_{\alpha\beta}^i(x_1, x_2) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx_3, \\ Q_{\alpha}^i(x_1, x_2) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3) dx_3. \end{cases}$$

Les tenseurs des efforts membranaires globaux  $\mathbf{N}$ , des moments fléchissants globaux  $\mathbf{M}$  et de l'effort tranchant global  $\mathbf{Q}$  sont donnés par :

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^i, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{M}^i + \bar{x}_3^i \mathbf{N}^i) \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{Q}^i.$$

On peut facilement établir que l'équation d'équilibre 3D  $\text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$  conduit aux équations d'équilibre suivantes pour les contraintes généralisées pour chaque couche  $i$  :

$$1 \leq i \leq n, \begin{cases} N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i} = 0, \\ M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{t_i}{2} (\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) = 0, \\ Q_{\alpha,\alpha}^i + \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} = 0, \end{cases}$$

On trouvera cette démonstration dans (Caron et Sab, 2001) et (N'Guyen et al., 2005) par exemple. Les efforts d'arrachement entre les couches  $\sigma^{i,i+1}$  peuvent être éliminés de la troisième équation d'équilibre ci-dessus en utilisant la condition limite  $\boldsymbol{\sigma} \cdot (\pm \mathbf{e}_3) = \pm \mathbf{h}^{\lambda,\pm}$  sur  $\partial\Omega_3^{\pm}$  et en sommant sur  $i$  allant de 1 à  $n$  la troisième équation de (4.4.1).

Ainsi, le champ des contraintes généralisées  $\Sigma$  défini par :

$$\Sigma(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}^i(x_1, x_2), \mathbf{M}^i(x_1, x_2), \mathbf{Q}^i(x_1, x_2), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \tau^{i,i+1}(x_1, x_2), \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}$$

doit vérifier les équations d'équilibre généralisées (4.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n, \quad N_{\alpha\beta,\beta}^i + \tau_{\alpha}^{i,i+1} - \tau_{\alpha}^{i-1,i} = 0, \\ 1 \leq i \leq n, \quad M_{\alpha\beta,\beta}^i - Q_{\alpha}^i + \frac{t_i}{2}(\tau_{\alpha}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i-1,i}) = 0, \\ \left( \sum_{i=1}^n Q_{\alpha,\alpha}^i \right) + h_3^+ + h_3^- = 0. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

La contrainte M4 généralisée  $\Sigma$  a  $(10 \times n - 2)$  composantes et il y a  $(4 \times n + 1)$  équations d'équilibre. Il s'agit donc d'un modèle M4-4N+1. Notons que si les équations de (4.11) sont satisfaites pour certains  $\Sigma$  alors (2.4) est satisfaite pour les  $(\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{Q})$  correspondants (il suffit de sommer les deux premières équations d'équilibre).

Il nous faut maintenant déterminer le domaine de résistance global M4  $\mathbf{G}_p^{M4} \subset \mathbb{R}^{10n-2}$ . Pour ce faire, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- On suppose que  $\sigma_{33}$  est négligeable par rapport aux autres contraintes et donc on pose :  $\sigma_{33} = 0$  (On a montré à la fin du chapitre précédent qu'elle est d'ordre 2 par en  $\frac{L}{t}$ ).
- On suppose que les contraintes de cisaillement  $\sigma_{\alpha 3}$  sont continues et quadratiques par couche en  $x_3$ .

La seconde hypothèse implique que les contraintes de cisaillement 3D sont uniquement déterminées en fonction des  $Q_{\alpha}^i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et des  $\tau_{\alpha}^{i,i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ). En effet, puisque le champ est supposé quadratique en  $x_3$  sur chaque couche, les trois coefficients du trinôme du second degré suffisent à la connaissance totale du champ de cisaillement. Or, comme on connaît la valeur de ce champ en deux points (les interfaces  $(i-1, i)$  et  $(i, i+1)$  où il vaut  $\tau_{\alpha}^{i-1,i}$  et  $\tau_{\alpha}^{i,i+1}$ ) et également son intégrale sur toute la couche ( $Q_{\alpha}^i$ ), il est uniquement déterminé en fonction de ces contraintes généralisées.

Ainsi, étant donnée une contrainte généralisée  $\Sigma$ , on peut définir l'ensemble  $SA^{M4}(\Sigma)$  des contraintes 3D statiquement admissibles avec ce champ par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}(x_3)) \in SA^{M4}(\Sigma) \\ \iff \\ \left\{ \begin{array}{l} N_{\alpha\beta}^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{\alpha\beta}(x_3) dx_3, \quad 1 \leq i \leq n, \\ M_{\alpha\beta}^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{\alpha\beta}(x_3) dx_3, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \sigma_{\alpha 3}(x_3) = \sum_{i=1}^n P^i(x_3) Q_{\alpha}^i + \sum_{i=1}^{n-1} R^{i,i+1}(x_3) \tau_{\alpha}^{i,i+1}, \\ \sigma_{33}(x_3) = 0, \end{array} \right. \quad (4.12) \end{aligned}$$

où les fonctions d'interpolation sont :

$$P^i(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{t_i} \tilde{P}\left(\frac{x_3 - \bar{x}_3^i}{t_i}\right) & \text{si } x_3 \in [x_3^{i-1}, x_3^i], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$R^{i,i+1}(x_3) = \begin{cases} \tilde{R}^-\left(\frac{x_3 - \bar{x}_3^i}{t_i}\right) & \text{si } x_3 \in [x_3^{i-1}, x_3^i], \\ \tilde{R}^+\left(\frac{x_3 - \bar{x}_3^{i+1}}{t_{i+1}}\right) & \text{si } x_3 \in [x_3^i, x_3^{i+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{P}(z) = -6z^2 + \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{R}^\pm(z) = 3z^2 \mp z - \frac{1}{4}.$$

Les fonctions d'interpolation ont les propriétés suivantes :

$$\int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} P^i(x_3) dx_3 = 1, \quad \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} R^{i,i+1}(x_3) dx_3 = \int_{x_3^i}^{x_3^{i+1}} R^{i,i+1}(x_3) dx_3 = 0,$$

$$R^{i,i+1}(x_3^i) = 1, \quad P^i(x_3^{i-1}) = P^i(x_3^i) = R^{i,i+1}(x_3^{i-1}) = R^{i,i+1}(x_3^{i+1}) = 0.$$

Sur les Figures 4.2 et 4.3, ces fonctions sont représentées dans le cas d'une plaque sandwich tri-couche symétrique  $t_1 = t_3 = \frac{t}{8}$  et  $t_2 = \frac{3t}{4}$  (exemple du chapitre précédent).

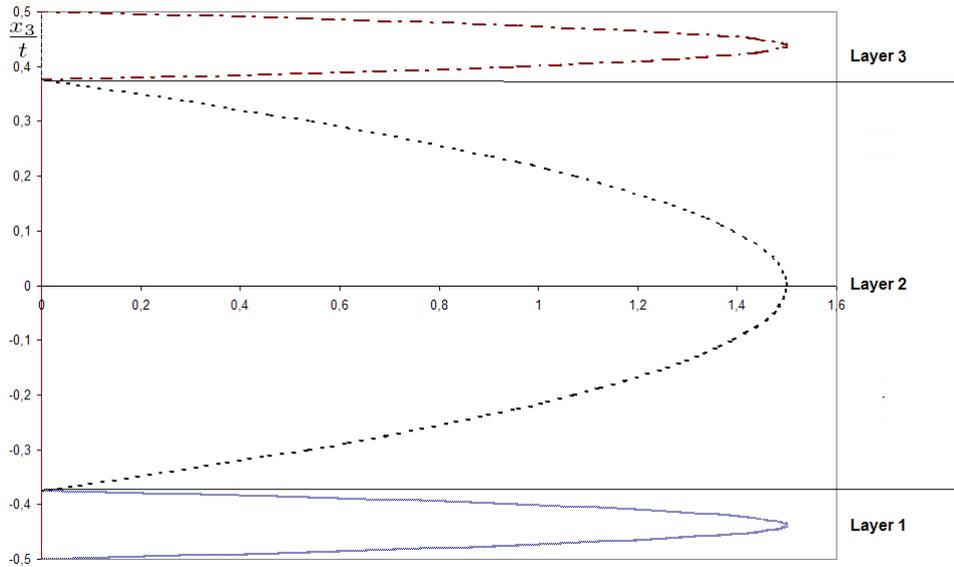


FIG. 4.2. Fonctions d'interpolation  $t_1 P^1(\frac{x_3}{t})$ ,  $t_2 P^2(\frac{x_3}{t})$  et  $t_3 P^3(\frac{x_3}{t})$  pour une plaque sandwich symétrique avec  $t_1 = t_3 = \frac{t}{8}$  et  $t_2 = \frac{3t}{4}$ .

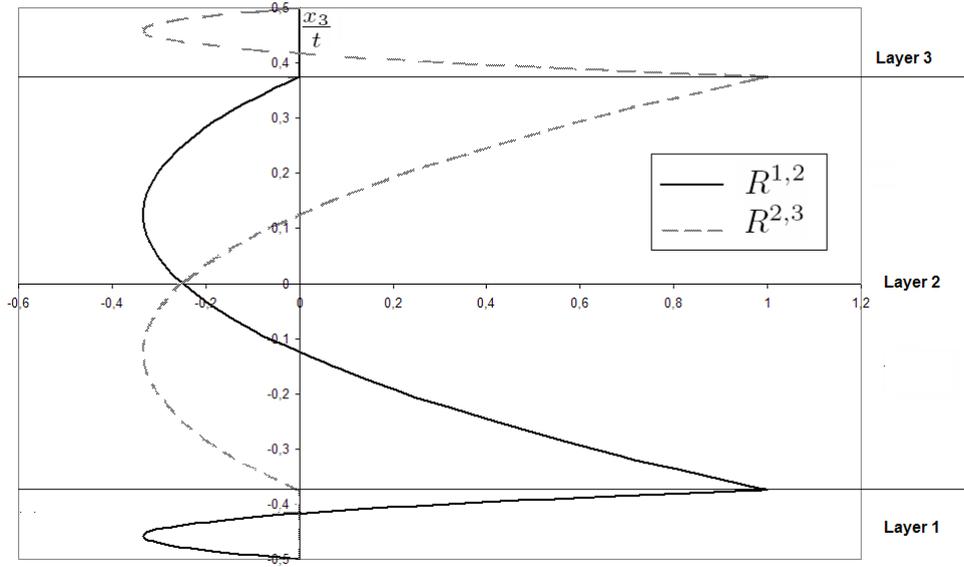


FIG. 4.3. Fonctions d'interpolation  $R^{1,2}$  et  $R^{2,3}$  pour une plaque sandwich symétrique avec  $t_1 = t_3 = \frac{t}{8}$  et  $t_2 = \frac{3t}{4}$ .

On notera qu'aucune hypothèse n'est faite sur la forme des champs de contraintes dans le plan.

A partir de l'ensemble  $SA^{M4}$ , on peut alors définir le domaine de résistance global au sens M4 :

*Définition :*

$$\Sigma \in \mathbf{G}_p^{M4} \iff \begin{cases} \exists \sigma \in SA^{M4}(\Sigma), \\ \sigma(x_3) \in G^i \text{ pour } x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Pour faire une comparaison avec le domaine de résistance homogénéisé  $G_p^{\text{hom}}$  introduit dans le chapitre précédent, on signale que  $\mathbf{G}_p^{M4}$  a les propriétés suivantes :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}^i, \mathbf{M}^i, \mathbf{Q}^i = 0; 1 \leq i \leq n \\ \tau^{i,i+1} = 0; 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \in \mathbf{G}_p^{M4} \implies (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{\text{hom}},$$

et

$$(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{\text{hom}} \implies \exists \Sigma = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}^i, \mathbf{M}^i, \mathbf{Q}^i = 0; 1 \leq i \leq n \\ \tau^{i,i+1} = 0; 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \in \mathbf{G}_p^{M4}.$$

Le problème d'analyse limite M4 dans sa formulation statique est donc le suivant :

Trouver  $\lambda^{M4}$ , la valeur maximale de  $\lambda$  pour laquelle il existe un champ de contraintes généralisées  $\Sigma(x_1, x_2)$  satisfaisant les équations d'équilibre (4.11)<sup>3</sup> et qui soit dans  $\mathbf{G}_p^{M4}$  pour tout  $(x_1, x_2)$ .

<sup>3</sup>Les conditions de bords libres peuvent être ajoutées, si besoin est.

### 4.4.2 La méthode cinématique

La méthode cinématique pour la détermination de  $\lambda^{M4}$  peut être obtenue par dualisation de la méthode statique. Pour ce faire, on procède en deux étapes :

- D'abord, on donne la formulation faible des équations d'équilibre généralisé (4.11) afin de définir la cinématique M4.
- Ensuite, la fonction support de  $\mathbf{G}_p^{M4}$  est introduite.

La définition cinématique de  $\lambda^{M4}$  peut alors être effectuée.

Comme dans la méthode statique, chaque couche est vue comme une plaque de Reissner, et on introduit par conséquent la cinématique 3D suivante :

Pour la couche  $i$ , c'est à dire  $x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} V_1^i(x_1, x_2) + (x_3 - \bar{x}_3^i) \phi_1^i(x_1, x_2) \\ V_2^i(x_1, x_2) + (x_3 - \bar{x}_3^i) \phi_2^i(x_1, x_2) \\ V_3^i(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

où :

- $\mathbf{V}^i = (V_j^i(x_1, x_2))$  qui est le champ de vitesses de la surface moyenne de la couche  $i$  et
- $\phi^i = (\phi_\alpha^i(x_1, x_2))$  le champ de rotations de la surface moyenne de la couche  $i$ .

Cette cinématique permet d'assurer la partie plane de la déformation comme une affine dans l'épaisseur. Ce sont les hypothèses sur la forme quadratique des contraintes de cisaillement hors-plan qui complètent ce modèle, qui est donc un modèle mixte.

Comme les efforts d'arrachement entre couches  $\sigma^{i,i+1}$  n'ont pas été choisis en tant qu'efforts généralisés du modèle M4 statique proposé, les composantes hors-plan du champ de vitesses doivent être continues à l'interface entre la couche  $i$  et la couche  $i + 1$ . Ainsi, on pose

$$V_3^i = V_3 \text{ pour tout } i.$$

On définit donc une flèche globale pour le multicouche et non une flèche par couche, ce qui dualement correspond à une absence d'effort d'arrachement.

On introduit alors les taux de déformations généralisées suivants :

$$\begin{cases} D_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (V_{\alpha,\beta}^i + V_{\beta,\alpha}^i), \\ \chi_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha,\beta}^i + \phi_{\beta,\alpha}^i), \\ \gamma_\alpha^i = \phi_\alpha^i + V_{3,\alpha}, \\ \Delta_\alpha^{i,i+1} = \left( V_\alpha^{i+1} - \frac{t_{i+1}}{2} \phi_\alpha^{i+1} \right) - \left( V_\alpha^i + \frac{t_i}{2} \phi_\alpha^i \right), \end{cases} \quad (4.14)$$

où :

- $\mathbf{D}^i = (D_{\alpha\beta}^i(x_1, x_2))$  est le tenseur des taux de déformations membranaires de la couche  $i$ ,
- $\boldsymbol{\chi}^i = (\chi_{\alpha\beta}^i(x_1, x_2))$  est le tenseur des taux de courbures,
- $\boldsymbol{\gamma}^i = (\gamma_{\alpha}^i(x_1, x_2))$  est le taux de déformation de cisaillement hors plan,
- $\boldsymbol{\Delta}^{i,i+1} = (\Delta_{\alpha}^{i,i+1}(x_1, x_2))$  est le glissement à l'interface entre la couche  $i$  et la couche  $i + 1$ , correspondant à la discontinuité de vitesse à l'interface.

La formulation faible des équations d'équilibre (4.11) est donc :

$$\int_{\omega} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{N}^i : \mathbf{D}^i + \mathbf{M}^i : \boldsymbol{\chi}^i + \mathbf{Q}^i \cdot \boldsymbol{\gamma}^i + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\tau}^{i,i+1} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{i,i+1} \right) d\omega = \lambda \times \int_{\omega} \left( \tilde{h}_3^+ + \tilde{h}_3^- \right) V_3 d\omega$$

pour tout  $\mathbf{V}^i$  (avec  $V_3^i = V_3$ ) et  $\phi^i$  tels que :

$$\mathbf{V}^i = \phi^i = 0 \text{ sur } \partial\omega \text{ pour tout } i.$$

Ainsi :

$$\mathbf{E}(x_1, x_2) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^i(x_1, x_2), \boldsymbol{\chi}^i(x_1, x_2), \boldsymbol{\gamma}^i(x_1, x_2); 1 \leq i \leq n \\ \boldsymbol{\Delta}^{i,i+1}(x_1, x_2); 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}$$

est le taux de déformation généralisé M4 et (4.14) sont les conditions de compatibilité généralisées.

La cinématique M4 ayant été définie, il nous reste à déterminer la fonction d'appui du domaine de résistance  $\mathbf{G}_p^{M4}$ . Elle est obtenue de la manière suivante :

Pour chaque taux de déformation généralisée  $\mathbf{E}$ , l'ensemble  $KA^{M4}(\mathbf{E})$  des champs de taux de déformation 3D,  $\mathbf{d}(x_3)$ , cinématiquement admissibles avec  $\mathbf{E}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = (d_{ij}(x_3)) \in KA^{M4}(\mathbf{E}) \\ \iff \\ \left\{ \begin{array}{l} d_{\alpha\beta}(x_3) = D_{\alpha\beta}^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi_{\alpha\beta}^i, \quad x_3^{i-1} \leq x_3 \leq x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{-t}{2}}^{\frac{t}{2}} 2P^i(x_3) d_{\alpha 3}(x_3) dx_3 = \gamma_{\alpha}^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{-t}{2}}^{\frac{t}{2}} 2R^{i,i+1}(x_3) d_{\alpha 3}(x_3) dx_3 = \Delta_{\alpha}^{i,i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Cette définition de  $KA^{M4}(\mathbf{E})$  est justifiée par le fait que les ensembles  $SA^{M4}(\boldsymbol{\Sigma})$  (4.12) et  $KA^{M4}(\mathbf{E})$  sont en dualité au sens suivant :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}) \in SA^{M4}(\boldsymbol{\Sigma}) \times KA^{M4}(\mathbf{E}) \implies \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dx_3 = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E},$$

où :

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{E} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{N}^i : \mathbf{D}^i + \mathbf{M}^i : \boldsymbol{\chi}^i + \mathbf{Q}^i \cdot \boldsymbol{\gamma}^i) + \sum_{i=1}^{n-1} \boldsymbol{\tau}^{i,i+1} \cdot \boldsymbol{\Delta}^{i,i+1}$$

est le produit scalaire de  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{E}$ .

La fonction support de  $\mathbf{G}_p^{M4}$  est donc :

$$\boldsymbol{\Pi}_p^{M4}(\mathbf{E}) = \inf_{\mathbf{d} \in KA^{M4}(\mathbf{E})} \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \pi^i(\mathbf{d}(x_3)) dx_3. \quad (4.16)$$

On notera que, pour le calcul exact de  $\boldsymbol{\Pi}_p^{M4}(\mathbf{E})$ , une étape d'optimisation sur les taux de déformation de cisaillement  $d_{j3}$ , compatibles avec les  $\boldsymbol{\gamma}^i$  et les  $\boldsymbol{\Delta}^{i,i+1}$  comme dans (4.15), est nécessaire.

En utilisant des techniques de calcul des variations classiques (Ekeland et Temam, 1976), on trouve que le minimum du problème d'optimisation (4.16) est obtenu pour un taux de déformation  $\mathbf{d} \in KA^{M4}(\mathbf{E})$  tel qu'il existe une contrainte généralisée  $\boldsymbol{\Sigma}$  et un tenseur de contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}(x_3)$  tels que :

$$\boldsymbol{\sigma} \in SA^{M4}(\boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \partial\pi^i(\mathbf{d}), \quad \text{pour } x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.17)$$

où  $\partial\pi^i$  est le sous-différentiel de la fonction d'appui du domaine de résistance  $G^i$  de la couche  $i$ .

La contrainte généralisée  $\boldsymbol{\Sigma}$  de l'équation (4.17) est en réalité sur la frontière  $\partial\mathbf{G}_p^{M4}$  de  $\mathbf{G}_p^{M4}$ .

On en tire la caractérisation suivante de la frontière du domaine de résistance  $\partial\mathbf{G}_p^{M4}$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &\in \partial\mathbf{G}_p^{M4} \\ &\iff \\ \exists \mathbf{E} \neq 0, \boldsymbol{\Sigma} &\in \partial\boldsymbol{\Pi}_p^{M4}(\mathbf{E}) \\ &\iff \\ \exists \mathbf{E} \neq 0, (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{d}) &\in SA^{M4}(\boldsymbol{\Sigma}) \times KA^{M4}(\mathbf{E}), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \partial\pi^i(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Selon (1.12), le tenseur des contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}$  dans (4.17) et (4.18) appartient également à la frontière  $\partial G^i$  du domaine de résistance  $G^i$  pour  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ . Autrement,  $\partial\pi^i = G^i$  pour  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ .

Suivant la méthode cinématique, on trouvera une borne supérieure pour  $\lambda^{M4}$  en égalisant la puissance plastique dissipée pour un champ de vitesses compatible et la puissance des efforts

extérieurs. Sous certaines hypothèses mathématiques,  $\lambda^{M4}$  peut être déterminé exactement en considérant tous les champs de vitesses compatibles possibles :

$$\lambda^{M4} = \inf_{\{(\mathbf{V}^i, \phi^i) \mid P_p^+ + P_p^- = 1, V_3^i = V_3, \mathbf{V}^i = \phi^i = 0 \text{ sur } \partial\omega\}} \int_{\omega} \Pi_p^{M4}(\mathbf{E}) d\omega \quad (4.19)$$

où la puissance des efforts extérieurs pour  $\lambda = 1$  est  $P_p^+ + P_p^-$  :

$$P_p^{\pm} = \int_{\omega} [h_3^{\pm} V_3] d\omega.$$

En procédant à un développement asymptotique analogue à celui du chapitre 2, on montrerait que le modèle M4 proposé est asymptotiquement équivalent au modèle de Love-Kirchhoff homogénéisé quand l'élanement tend vers l'infini (soit  $\frac{t}{L}$  tend vers 0) car les contraintes hors-plan  $\sigma_{\alpha 3}$  deviennent alors négligeables par rapport aux contraintes planes. On montrera dans le prochain chapitre que le modèle M4 donne de meilleures prévisions de charges limites que celles du modèle de Love-Kirchhoff, quand celles-ci ne coïncident pas (pour une plaque épaisse par exemple).

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a construit, en s'inspirant de travaux de la littérature, un nouveau modèle pour la modélisation des plaques multicouches. On l'a construit de telle sorte qu'il soit asymptotiquement équivalent au modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff. Les méthodes statiques et cinématiques ont été développées pour ce modèle. La théorie proposée dans ce chapitre diffère des modèles M4 classiques en élasticité, qui ne supposent pas la nullité de  $\sigma_{33}$ . En effet, ces derniers ont été développés essentiellement pour des chargements dans le plan de plaques composites et de plaques composites trouées. Dans ce cas, les contraintes d'arrachement peuvent jouer un rôle prépondérant et ne sont pas du second ordre, comme pour les chargements hors-plan.

Nous proposons dans le prochain chapitre de le mettre en oeuvre dans le cas de la flexion cylindrique.



# Chapitre 5

## Flexion cylindrique

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie le cas particulier de plaques multicouches en flexion cylindrique. Une telle plaque est infinie dans une des directions de son plan et le chargement qu'elle subit est invariant dans cette même direction. Dans ces conditions, des simplifications peuvent, dans de nombreux cas, permettre la résolution analytique des problèmes de Love-Kirchhoff ou M4.

Après avoir précisé l'hypothèse de flexion cylindrique sur les champs 3D, l'écriture des problèmes de plaque homogénéisée de Love-Kirchhoff et de plaque M4 est fournie. Le cas particulier d'un multicouche de Von-Mises est traité pour illustrer concrètement ces théories. Le calcul des fonctions d'appui des critères de plaque  $G_p^{hom}$  et  $\mathbf{G}_p^{M4}$  est explicité. La méthode de localisation associée aux fonctions supports sera également explicitée.

### 5.2 Le problème 3D

La plaque considérée est supposée infinie dans la direction 2 et les forces réparties appliquées sont uniformes par rapport à la coordonnée  $x_2$  :  $\mathbf{h}^{\lambda,\pm} = \mathbf{h}^{\lambda,\pm}(x_1)$ . Par conséquent, on cherche le champ de vitesse 3D sous la forme suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_3) \\ 0 \\ u_3(x_1, x_3) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le tenseur du taux de déformation plane est de la forme :

$$\mathbf{d}(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} d_{11}(x_1, x_3) & 0 & d_{13}(x_1, x_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{13}(x_1, x_3) & 0 & d_{33}(x_1, x_3) \end{pmatrix}.$$

La fonction  $\pi^{cb}$  ( $cb$  pour “cylindrical bending”, alias flexion cylindrique) est la restriction de  $\pi$  à l’ensemble des tenseurs de taux de déformation plane de la forme :

$$\mathbf{d}^{cb} = \begin{pmatrix} d_{11}^{cb} & d_{13}^{cb} \\ d_{13}^{cb} & d_{33}^{cb} \end{pmatrix}.$$

C’est à dire :

$$\pi^{cb}(\mathbf{d}^{cb}, x_3) = \pi \left( \begin{pmatrix} d_{11}^{cb} & 0 & d_{13}^{cb} \\ 0 & 0 & 0 \\ d_{13}^{cb} & 0 & d_{33}^{cb} \end{pmatrix}, x_3 \right).$$

Le domaine de résistance local en déformation plane est noté  $G^{cb}(x_3)$ . Sa définition cinématique est :

$$\boldsymbol{\sigma}^{cb} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{cb} & \sigma_{13}^{cb} \\ \sigma_{13}^{cb} & \sigma_{33}^{cb} \end{pmatrix} \in G^{cb}(x_3) \iff \boldsymbol{\sigma}^{cb} : \mathbf{d}^{cb} \leq \pi^{cb}(\mathbf{d}^{cb}, x_3), \quad \forall \mathbf{d}^{cb}.$$

Pour un multicouche de Von-Mises, la fonction d’appui  $\pi^{i,cb}$  de la couche  $i$  est (Salençon, 1983) :

$$\pi^{i,cb}(\mathbf{d}^{cb}) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \times \sigma_i^u \times \sqrt{(d_{11}^{cb})^2 + (d_{13}^{cb})^2} & \text{si } d_{11}^{cb} + d_{33}^{cb} = 0, \\ +\infty & \text{si } d_{11}^{cb} + d_{33}^{cb} \neq 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

et le domaine de résistance en déformation plane est donné par le critère :

$$\boldsymbol{\sigma}^{cb} \in G^{i,cb} \iff \frac{(\sigma_{11}^{cb} - \sigma_{33}^{cb})^2}{4} + (\sigma_{13}^{cb})^2 - \frac{(\sigma_i^u)^2}{3} \leq 0 \quad (5.2)$$

où  $\sigma_i^u$  est la limite en traction simple de la couche  $i$ .

Notons également que pour un multicouche de Von-Mises, on a :

$$\boldsymbol{\sigma}^{cb} \in G^{i,cb} \iff \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{cb} & 0 & \sigma_{13}^{cb} \\ 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{11}^{cb} + \sigma_{33}^{cb}) & 0 \\ \sigma_{13}^{cb} & 0 & \sigma_{33}^{cb} \end{pmatrix} \in G^i.$$

### 5.3 Le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff

Sous l’hypothèse de flexion cylindrique, la cinématique de la plaque homogénéisée est décrite par le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1(x_1) \\ 0 \\ V_3(x_1) \end{pmatrix}.$$

Le taux de déformation généralisé est uniaxial et s'écrit :

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\chi} = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

avec  $(D, \chi) = (V_{1,1}(x_1), -V_{3,11}(x_1))$ .

Ainsi, les composantes des contraintes généralisées sont  $(N(x_1), M(x_1))$  avec :

$$\begin{cases} N(x_1) = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{11}(x_1, x_3) dx_3, \\ M(x_1) = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{11}(x_1, x_3) dx_3. \end{cases}$$

Les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} N_{,1} = 0, \\ M_{,1} - Q = 0, \\ Q_{,1} + h_3^{\lambda,+} + h_3^{\lambda,-} = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Le domaine de résistance en flexion cylindrique  $G_p^{\text{hom},cb} \subset \mathbb{R}^2$  peut être défini cinématiquement par :

$$(N, M) \in G_p^{\text{hom},cb} \iff N \cdot D + M \cdot \chi \leq \pi_p^{\text{hom},cb}(D, \chi), \quad \forall (D, \chi),$$

où la fonction support  $\pi_p^{\text{hom},cb}$  est obtenue à partir de  $\pi_p^{\text{hom}}$  en remplaçant dans (3.3) les tenseurs de taux de déformation généralisés par (5.3) :

$$\pi_p^{\text{hom},cb}(D, \chi) = \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \pi^{i,ps}(\mathbf{D} + x_3 \boldsymbol{\chi}) dx_3.$$

Pour un multicouche de Von-Mises, cela devient :

$$\pi_p^{\text{hom},cb}(D, \chi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma^u(x_3) \times |D + x_3 \chi| dx_3$$

avec

$$\sigma^u(x_3) = \sigma_i^u, \quad x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, pour les stratifiées symétriques ( $\sigma^u(x_3) = \sigma^u(-x_3)$ ), le moment fléchissant ultime (sans effort normal) peut être calculé par :

$$(N = 0, M) \in G_p^{\text{hom},cb} \iff |M| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \times \Sigma_{eff}^M \times \frac{t^2}{4}$$

en rappelant que la constante effective, dans ce cas, est :

$$\Sigma_{eff}^M = \frac{4}{t^2} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} |x_3| \sigma^u(x_3) dx_3. \quad (5.5)$$

La caractérisation cinématique de  $\partial G_p^{\text{hom},cb}$ , la frontière de  $G_p^{\text{hom},cb}$ , s'obtient en introduisant (5.3) dans (3.4). Pour le cas d'un multicouche de Von-Mises, cela donne :

$$(N, M) \in \partial G_p^{\text{hom},cb} \iff \begin{cases} \exists (D, \chi) \neq 0, \exists \sigma_{11}(x_3), \\ N = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_{11}(x_3) dx_3, \\ M = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} x_3 \sigma_{11}(x_3) dx_3, \\ \sigma_{11}(x_3) \in \left[ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3), +\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3) \right] \quad \text{si } D + x_3 \chi = 0, \\ \sigma_{11}(x_3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3) \times \text{sign}(D + x_3 \chi) \quad \text{si } D + x_3 \chi \neq 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

avec  $\text{sign}(x)$  qui est égal à  $+1$  si  $x > 0$  et à  $-1$  si  $x < 0$ .

Cela signifie que, pour un couple de contraintes généralisées  $(N, M) \in \partial G_p^{\text{hom},cb}$ , la composante longitudinale des contraintes  $\sigma_{11}(x_3)$  est d'une des formes suivantes; le scalaire  $\hat{x}_3 = -\frac{D}{\chi}$  désigne la position de l'axe neutre s'il est compris entre  $-\frac{t}{2}$  et  $\frac{t}{2}$  :<sup>1</sup>

- $\sigma_{11}(x_3) = +\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3)$  si  $D \geq \frac{t}{2} |\chi|$ . Le multicouche est alors en traction pure.
- $\sigma_{11}(x_3) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3)$  si  $D \leq -\frac{t}{2} |\chi|$ . Le multicouche est alors en compression pure.
- $\sigma_{11}(x_3) = \begin{cases} +\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3), & +\frac{t}{2} \geq x_3 > \hat{x}_3, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3), & -\frac{t}{2} \leq x_3 < \hat{x}_3, \end{cases}$  si  $x_3 \in [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$  et  $D + \frac{t}{2} \chi > 0$ . Le multicouche est alors en flexion : traction au dessus de l'axe neutre  $x_3 = \hat{x}_3$  et compression en dessous.
- $\sigma_{11}(x_3) = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3), & +\frac{t}{2} \geq x_3 > \hat{x}_3, \\ +\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3), & -\frac{t}{2} \leq x_3 < \hat{x}_3, \end{cases}$  si  $x_3 \in [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}]$  et  $D + \frac{t}{2} \chi < 0$ . Le multicouche est alors en flexion : compression au dessus de l'axe neutre et traction en dessous.

Les autres contraintes locales 3D peuvent également être obtenues. En effet, rappelons que dans la théorie de Love-Kirchhoff, les contraintes hors plan sont supposées nulles :  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$ . De plus,  $\sigma_{12}$  et  $\sigma_{22}$  sont données par (2.14) avec (5.3). Ainsi, pour les stratifiés de Von-Mises, (3.15) donne  $\sigma_{12} = 0$  et  $\sigma_{22} = \frac{1}{2} \sigma_{11}$ . Finalement, l'état de contraintes correspondant au modèle de Love-Kirchhoff en flexion cylindrique est :

<sup>1</sup>Pour les stratifiées symétriques et  $N = 0$ , on a  $\hat{x}_3 = 0$ .

$$\boldsymbol{\sigma}(x_3) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_{11}(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec  $\sigma_{11}(x_3)$  décrit ci-dessus.

On notera également que :

- le tenseur des taux de déformation est donné par :

$$\mathbf{d}(x_3) = \begin{pmatrix} (D + x_3\chi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(D + x_3\chi) \end{pmatrix};$$

- le tenseur des contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}$  satisfait le critère 3D de Von-Mises (1.4), le critère de plasticité en contraintes planes dans le plan (1, 2) (3.13) et le critère de plasticité en déformation plane dans le plan (1, 3) (5.2) ;
- enfin, on a :

$$(N, M) \in G_p^{\text{hom}, cb} \iff (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_p^{\text{hom}},$$

où les contraintes globales de Love-Kirchhoff  $(\mathbf{N}, \mathbf{M})$  associées aux contraintes en flexion cylindrique  $(N, M)$  sont :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}M \end{pmatrix}.$$

## 5.4 Le modèle M4

En condition de flexion cylindrique, la cinématique du modèle M4 est décrite par :

$$\mathbf{V}^i = \begin{pmatrix} V_1^i(x_1) \\ 0 \\ V_3(x_1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}^i = \begin{pmatrix} \phi^i(x_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où  $\mathbf{V}^i$  et  $\boldsymbol{\phi}^i$  sont respectivement la vitesse et la rotation de la surface moyenne et de la couche  $i$ . Ainsi, les champs de déformation généralisée sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^i &= \begin{pmatrix} D^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}^i = \begin{pmatrix} \gamma^i \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\chi}^i &= \begin{pmatrix} \chi^i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}^{i,i+1} = \begin{pmatrix} \Delta^{i,i+1} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

avec

$$\begin{aligned} D^i &= V_{1,1}^i, \quad \chi^i = \phi_{,1}^i, \quad \gamma^i = \phi^i + V_{3,1}, \\ \Delta^{i,i+1} &= \left( V_1^{i+1} - \frac{t_{i+1}}{2} \phi^{i+1} \right) - \left( V_1^i + \frac{t_i}{2} \phi^i \right). \end{aligned}$$

Soit  $\mathbf{E}_{cb}(x_1)$  le taux de déformation généralisée en flexion cylindrique défini par :

$$\mathbf{E}^{cb}(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} D^i(x_1), \chi^i(x_1), \gamma^i(x_1), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \Delta^{i,i+1}(x_1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}.$$

La contrainte généralisée  $\Sigma^{cb}(x_1)$  correspondante est aussi une fonction réelle de  $x_1$  :

$$\Sigma^{cb}(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} N^i(x_1), M^i(x_1), Q^i(x_1), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \tau^{i,i+1}(x_1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^{i,i+1}(x_1) = \sigma_{13}(x_1, x_3^i), \\ N^i(x_1) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{11}(x_1, x_3) dx_3, \\ M^i(x_1) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{11}(x_1, x_3) dx_3, \\ Q^i(x_1) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{13}(x_1, x_3) dx_3. \end{array} \right.$$

Les équations d'équilibre deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \leq i \leq n, \quad \frac{dN^i}{dx_1} + \tau^{i,i+1} - \tau^{i,i-1} = 0, \\ 1 \leq i \leq n, \quad \frac{dM^i}{dx_1} - Q^i + \frac{t_i}{2} (\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i}) = 0, \\ \left( \sum_{i=1}^n \frac{dQ^i}{dx_1} \right) + h_3^{\lambda,+} + h_3^{\lambda,-} = 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Notons que si  $\Sigma^{cb}$  satisfait les équations d'équilibre ci-dessus, alors l'effort membranaire et le moment fléchissant global :

$$(N, M) = \left( \sum_{i=1}^n N^i, \sum_{i=1}^n (M^i + \bar{x}_3^i N^i) \right)$$

satisfont également les équations d'équilibre de Love-Kirchhoff (5.4).

La définition statique du domaine de résistance M4 pour un problème en flexion cylindrique,  $\mathbf{G}_p^{M4,cb}$ , est :

$$\begin{aligned} & \Sigma^{cb} \in \mathbf{G}_p^{M4,cb} \\ & \iff \\ & \left\{ \begin{array}{l} \exists \boldsymbol{\sigma}^{cb}(x_3), \\ N^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{11}^{cb}(x_3) dx_3, \quad 1 \leq i \leq n, \\ M^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{11}^{cb}(x_3) dx_3, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \sigma_{13}^{cb}(x_3) = \sum_{i=1}^n P^i(x_3) Q^i + \sum_{i=1}^{n-1} R^{i,i+1}(x_3) \tau^{i,i+1}, \\ \sigma_{33}^{cb}(x_3) = 0, \\ \sigma^{cb}(x_3) \in G^{i,cb} \text{ pour } x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Une expression explicite de  $\mathbf{G}_p^{M4,cb}$  peut être obtenue dans les cas des multicouches de Von-Mises. Voir Annexe A.

La fonction support  $\Pi_p^{M4,cb}$  de  $\mathbf{G}_p^{M4,cb}$  est obtenue en injectant (5.7) dans (4.16), ce qui donne :

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}^{cb}) = \inf_{\mathbf{d}^{cb} \in KA^{M4,cb}(\mathbf{E}^{cb})} \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \pi^{i,cb}(\mathbf{d}^{cb}(x_3)) dx_3, \quad (5.9)$$

où, pour chaque taux de déformation  $\mathbf{E}^{cb}$ , l'ensemble  $KA^{M4,cb}(\mathbf{E}^{cb})$  est défini par :

$$\begin{aligned} & \mathbf{d}^{cb} \in KA^{M4,cb}(\mathbf{E}^{cb}) \\ & \iff \\ & \left\{ \begin{array}{l} d_{11}^{cb}(x_3) = D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i, \quad x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{x_3^i}{2}}^{\frac{x_3^i}{2}} 2P^i(x_3) d_{13}^{cb}(x_3) dx_3 = \gamma^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{x_3^i}{2}}^{\frac{x_3^i}{2}} 2R^{i,i+1}(x_3) d_{13}^{cb}(x_3) dx_3 = \Delta^{i,i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1. \end{array} \right. \quad (5.10) \end{aligned}$$

La détermination de  $\Pi_p^{M4,cb}$  nécessite la résolution du problème d'optimisation (5.9). Dans la suite, on montre comment ce problème peut être résolu analytiquement dans certains cas.

## 5.5 Détermination de $\Pi_p^{M4,cb}$

Dans cette section, on va se placer uniquement dans le cas de multicouches de Von-Mises. Pour un taux de déformation  $\mathbf{E}_0^{cb}$  sans cisaillement de la forme :

$$\mathbf{E}_0^{cb} = \left\{ \begin{array}{l} D^i, \chi^i, \gamma^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \Delta^{i,i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{array} \right\},$$

la solution du problème (5.9) est triviale :  $d_{13}^{cb} = 0$  et  $d_{33}^{cb} = -d_{11}^{cb}$ . On a donc :

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_0^{cb}) = \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_i^u \times |D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i| dx_3. \quad (5.11)$$

Les taux de déformation locaux sont alors :

$$\begin{cases} d_{11}(x_3) = D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i, & x_3^{i-1} \leq x_3 \leq x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ d_{12}(x_3) = d_{13}(x_3) = d_{23}(x_3) = d_{22}(x_3) = 0, \\ d_{33}(x_3) = -d_{11}(x_3). \end{cases}$$

De plus, en raison de la règle d'association (4.17), on peut déterminer les composantes du tenseur de contraintes locales 3D :

$$\begin{cases} \sigma_{11}(x_3) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3) \times \text{sign}(D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i), \\ \sigma_{12}(x_3) = \sigma_{13}(x_3) = \sigma_{23}(x_3) = \sigma_{33}(x_3) = 0, \\ \sigma_{22}(x_3) = \frac{1}{2} \sigma_{11}(x_3). \end{cases} \quad (5.12)$$

De manière complémentaire, pour un taux de déformation de cisaillement pur,  $\mathbf{E}_s^{cb}$ , de la forme :

$$\mathbf{E}_s^{cb} = \left\{ \begin{array}{l} D^i = \chi^i = 0, \gamma^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \Delta^{i,i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{array} \right\},$$

le problème d'optimisation (5.9) devient :

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = \inf_{d_{13}} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^u(x_3) \times |d_{13}(x_3)| dx_3, \quad (5.13)$$

où la minimisation est effectuée sur les fonctions  $d_{13} : x_3 \mapsto d_{13}(x_3)$  qui vérifient également :

$$\begin{cases} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} 2P^i(x_3) d_{13}(x_3) dx_3 = \gamma^i, & 1 \leq i \leq n, \\ \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} 2R^{i,i+1}(x_3) d_{13}(x_3) dx_3 = \Delta^{i,i+1}, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (5.14)$$

Ainsi, les composantes du taux de déformation locale sont :

$$\begin{cases} d_{11}(x_3) = d_{12}(x_3) = d_{22}(x_3) = d_{23}(x_3) = d_{33}(x_3) = 0 \\ \text{et } d_{13}(x_3) \text{ à optimiser.} \end{cases}$$

Par conséquent, avec la règle d'association (4.17), le tenseur des contraintes locales est donné par :

$$\begin{cases} \sigma(x_3) \in G^i, & \text{si } d_{13}(x_3) = 0, \\ \sigma(x_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13}(x_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13}(x_3) & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{si } d_{13}(x_3) \neq 0, \\ \text{avec} \\ \sigma_{13}(x_3) = \frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}} \times \text{sign}(d_{13}(x_3)). \end{cases} \quad (5.15)$$

En insérant (5.15) dans (5.13),  $\Pi_p^{M4,cb}$  devient :

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} 2\sigma_{13}(x_3) d_{13}(x_3) dx_3 = \sum_{i=1}^n Q^i \gamma^i + \sum_{i=1}^{n-1} \tau^{i,i+1} \Delta^{i,i+1}.$$

Considérons maintenant la couche  $i$  :

- S’il existe trois points de l’intervalle  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$  tels que  $d_{13} > 0$ , alors de (5.15) et de l’hypothèse que  $\sigma_{13}$  est quadratique, on conclut que  $\sigma_{13}$  est constante ( $= +\frac{\sigma_i^u}{\sqrt{3}}$ ) et  $d_{13} > 0$  sur  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$ . On peut par conséquent, dans ce cas, se limiter à l’analyse de  $d_{13} (> 0)$  constant sur  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$ .
- S’il existe exactement deux points de l’intervalle  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$  tels que  $d_{13} > 0$ , alors ces deux points sont nécessairement situés aux extrémités de l’intervalle  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$ . Dans ce cas, le minimum de  $\sigma_{13}$  est atteint au milieu de l’intervalle en  $\bar{x}_3^i$ . Si ce minimum est égal à  $-\frac{\sigma_i^u}{\sqrt{3}}$ , alors  $d_{13}$  est une somme de deux diracs “positifs” en  $x_3^{i-1}$  et  $x_3^i$  et d’un dirac “négatif” situé en  $\bar{x}_3^i$ . Sinon,  $d_{13}$  est simplement une somme de deux diracs “positifs” en  $x_3^{i-1}$  et  $x_3^i$ .
- S’il y a exactement un point de l’intervalle de  $[x_3^{i-1}, x_3^i]$  tel que  $d_{13} > 0$ , alors  $d_{13}$  est la somme d’un dirac “positif” situé en ce point et éventuellement un ou deux diracs “négatifs” situés en  $x_3^{i-1}$  et  $x_3^i$ .

On peut tenir le même raisonnement pour les valeurs négatives de  $d_{13}$ . En gardant ces règles à l’esprit, on peut restreindre le problème d’optimisation (5.13) aux  $d_{13}$  obtenus par la combinaison d’une fonction constante par morceaux sur chaque couche, de diracs aux interfaces et d’au moins un dirac à l’intérieur de l’intervalle. C’est à dire que la restriction du taux de déformation sur la couche  $i$  a la forme suivante :  $d_{13}(x_3) = a\delta(x_3 - x_3^i) + b\delta(x_3 + x_3^{i+1}) + c\delta(x_3 - x_3^i) + C$  avec  $a, b, c, C$  et  $x_3^i$  à déterminer.

Nous reconsidérons l’exemple étudié précédemment d’une plaque sandwich tricouche symétrique faite de deux matériaux de Von-Mises. Les couches 1 et 3 sont les peaux de la plaque sandwich, de limite d’élasticité  $\sigma_3^u = \sigma_1^u = \sigma_s^u$  et d’épaisseur,  $t_3 = t_1 = t_s$ , la couche 2 est l’âme de la plaque sandwich, de limite d’élasticité  $\sigma_2^u = \sigma_c^u$  et d’épaisseur  $t_2 = t_c$ . On suppose que la connexion entre les deux matériaux est parfaite aux interfaces  $x_3 = \pm \frac{t_c}{2}$ . L’épaisseur totale de la plaque est :

$$t = t_c + 2t_s,$$

et on définit le contraste entre les deux matériaux  $r$  par :

$$r = \frac{\sigma_s^u}{\sigma_c^u}.$$

Par la suite,  $\Pi_p^{M4,cb}$  est calculée pour le taux de déformation globale :

$$\mathbf{E}_s^{cb} = \left\{ \begin{array}{l} D^i = 0, \chi^i = 0, \quad 1 \leq i \leq 3, \\ \gamma^1 = \gamma^3 = 0 \\ \gamma^2 = \gamma \\ \Delta^{1,2} = \Delta^{2,3} = \Delta \end{array} \right\}, \quad (5.16)$$

avec  $\gamma \geq 0$  et  $\Delta$  deux paramètres fixés (le cas  $\gamma < 0$  est similaire). En utilisant (5.14) et (5.15), le problème d'optimisation (5.13) est résolu pour  $\mathbf{E}_s^{cb}$ . Six cas ont été analysés et étudiés. La Figure 5.1 montre les efforts de cisaillement normalisés dans l'épaisseur de la plaque  $\frac{\sigma_{13}(x_3)}{\sigma_s^u}$  pour ces différents cas. Pour l'interprétation de la Figure 5.1, on précise qu'une ligne continue a pour signification que la contrainte  $\sigma_{13}$  est complètement déterminée et connue et qu'une ligne en pointillé signifie que la contrainte de cisaillement est une fonction quadratique par morceaux incluse dans le domaine de résistance  $|\sigma_{13}(x_3)| \leq \frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}$  (les zones blanches de la Figure 5.1), mais qu'elle reste indéterminée. Précisons enfin que sur les Figures 5.1a, 5.1b, 5.1c, le contraste vaut  $r = 2$  alors que sur les Figures 5.1d, 5.1e, 5.1, il est de  $r = 0.5$ .

Les six cas sont les suivants :

- Cas (a) :  $\gamma > 0$ ,  $\Delta \geq 0$  et  $r \geq 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\gamma}{2}\mathbb{I}_{\left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right]}(x_3),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} +\frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} & \text{si } x_3 \in \left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right], \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm\frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma_s^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $\delta$  est un dirac en  $x_3 = 0$  et  $\mathbb{I}_{\left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right]}$  est la fonction indicatrice de la couche, c'est-à-dire telle que  $\mathbb{I}_{\left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right]}(x_3) = 1$  si  $x_3 \in \left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right]$  et 0 sinon.

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = (2\Delta + \gamma t_c) \sigma_c^u. \quad (5.17)$$

- Cas (b) :  $\gamma > 0$ ,  $\Delta < 0$  et  $r \geq 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\gamma t_c}{3}\delta(x_3),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} - \frac{8\sigma_c^u}{\sqrt{3}} \frac{x_3^2}{t_c^2} & \text{si } x_3 \in \left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right], \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm\frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma_s^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = \left(-2\Delta + \frac{2}{3}\gamma t_c\right) \sigma_c^u.$$

- Cas (c) :  $\gamma = 0$ ,  $\Delta \neq 0$  ( $> 0$  sur la Figure 5.1.c) et  $r \geq 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} \text{sign}(\Delta) \times \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_{s_1}^{cb}) = 2|\Delta|\sigma_c^u.$$

– Cas (d) :  $\gamma > 0$ ,  $\Delta \geq 0$  et  $r < 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\gamma t_c}{3}\delta(x_3),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} + \frac{4(\sigma_s^u - \sigma_c^u)x_3^2}{\sqrt{3}t_c^2} & \text{si } x_3 \in \left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right], \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = 2\Delta\sigma_s^u + \frac{2}{3}\gamma t_c\sigma_c^u.$$

– Cas (e) :  $\gamma > 0$ ,  $\Delta < 0$  et  $r < 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\gamma t_c}{3}\delta(x_3),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} - \frac{4(\sigma_s^u + \sigma_c^u)x_3^2}{\sqrt{3}t_c^2} & \text{si } x_3 \in \left[-\frac{t_c}{2}, \frac{t_c}{2}\right], \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = -2\Delta\sigma_s^u + \frac{2}{3}\gamma t_c\sigma_c^u.$$

– Cas (f) :  $\gamma = 0$ ,  $\Delta \neq 0$  ( $> 0$  sur la Figure 4.f) et  $r < 1$ .

$$d_{13}(x_3) = \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 + \frac{t_c}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\delta\left(x_3 - \frac{t_c}{2}\right),$$

$$\sigma_{13}(x_3) = \begin{cases} \text{sign}(\Delta) \times \frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}} & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ 0 & \text{si } x_3 = \pm \frac{t_c}{2}, \\ \in \left[-\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}, +\frac{\sigma^u(x_3)}{\sqrt{3}}\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}_s^{cb}) = 2|\Delta|\sigma_s^u.$$

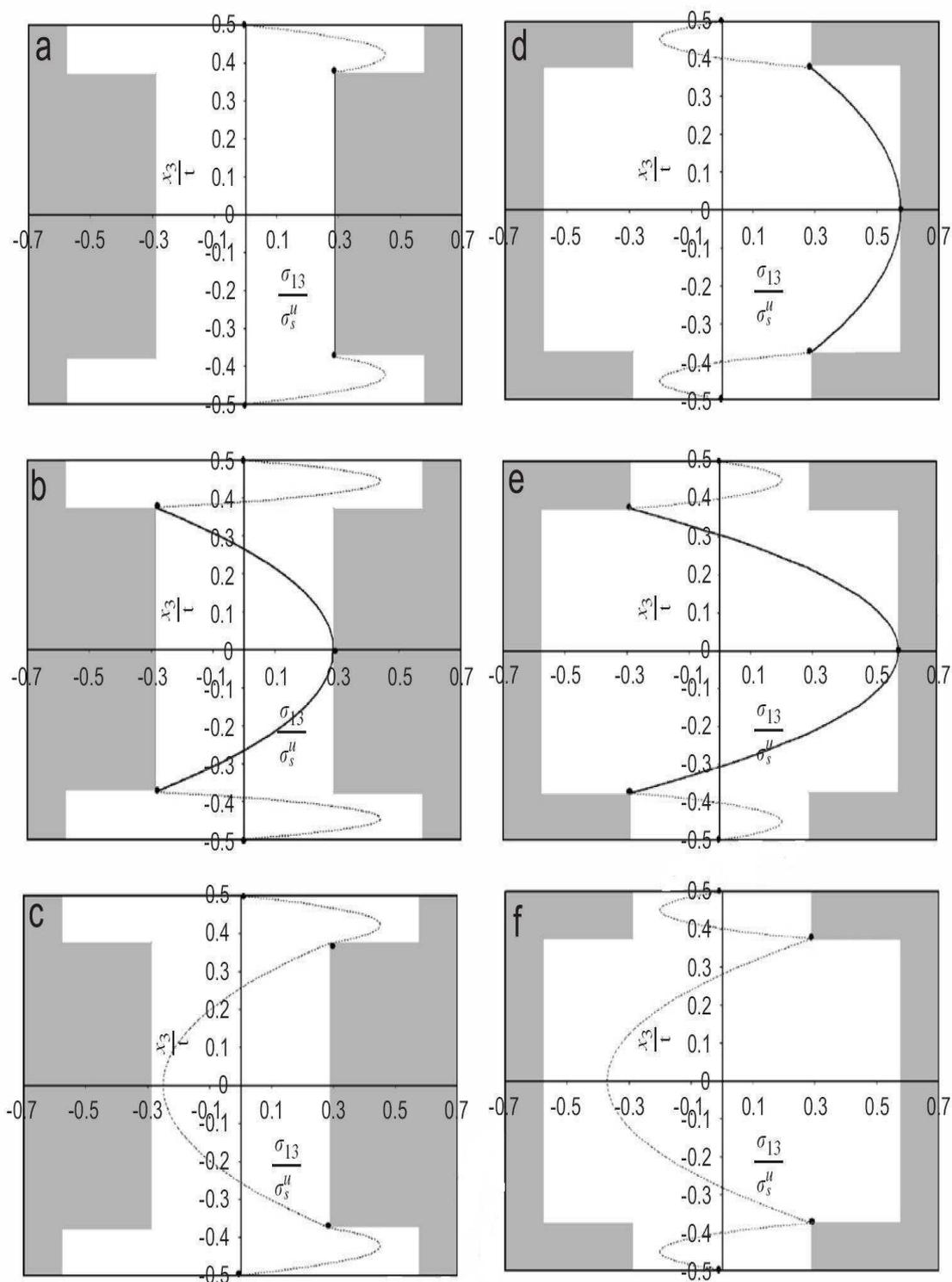


FIG. 5.1. Contrainte de cisaillement normalisée  $\sigma_{13}(\frac{x_3}{t})/\sigma_s^u$  correspondant au taux de déformation généralisé  $E_s^{cb}$ .

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, l'hypothèse de la flexion cylindrique a été explicitée. Elle a entraîné de nombreuses simplifications qui nous ont permis de résoudre analytiquement le problème d'analyse limite concernant la flexion de plaques multicouches tant pour le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff que pour le modèle M4. Grâce à notre méthode de localisation des contraintes à partir du sous-différentiel de la fonction de dissipation, il nous a été possible de prédire, à partir d'une déformation généralisée donnée, la répartition de contraintes 3D dans la plaque.

Nous proposons dans le prochain chapitre de valider nos théories en utilisant un exemple de plaque en flexion cylindrique que nous comparerons à un modèle éléments finis. Les résultats développés dans ce chapitre nous seront utiles à cet égard.



# Chapitre 6

## Validation des modèles par éléments finis

### 6.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de valider les modèles proposés, modèle d'homogénéisation (Love-Kirchhoff) et modèle M4 en plasticité. Pour ce faire, on considère la plaque sandwich tricouche introduite précédemment en flexion cylindrique. La plaque est supposée infinie dans le sens 2. Elle occupe le domaine  $] -L, 0[ \times \mathbb{R} \times ] -\frac{t}{2}, +\frac{t}{2}[$ . La plaque est encastree en son extrémité en  $x_1 = -L$  et est libre en son extrémité située en  $x_1 = 0$  comme sur la Figure 6.1.

Une distribution uniforme de forces verticales est appliquée sur les frontières inférieures et supérieures de la plaque.

$$\mathbf{h}^\pm(x_1, x_2) = -\frac{H}{2}\mathbf{e}_3.$$

On fait croître la pression  $H$  à partir de 0. Pour une valeur critique de  $H$  que l'on cherche à déterminer, la structure s'écoule plastiquement.

L'objectif de ce chapitre est de comparer les prédictions des différents modèles. On notera la pression maximale prédite par le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff  $H^{LK}$  et celle prédite par le modèle M4  $H^{M4}$ . On comparera ces deux valeurs entre elles mais également à une troisième pression de ruine obtenue par la simulation du problème par éléments finis en utilisant le logiciel commercial ABAQUS. Cette dernière sera notée  $H^{FEM}$ .

On évaluera les écarts donnés par chaque modèle pour les données géométriques suivantes :  $t_c = \frac{3}{4}t$  (épaisseur de l'âme),  $t_s = \frac{t}{8}$  (épaisseur de chaque peau) et un élanecement  $\frac{L}{t}$  de la plaque vaut 10 et pour différentes valeurs du contraste entre matériaux  $r = \frac{\sigma_s^u}{\sigma_c^u} : 1$  (plaque homogène), 10, 20, 40, 60, 100 et 500.

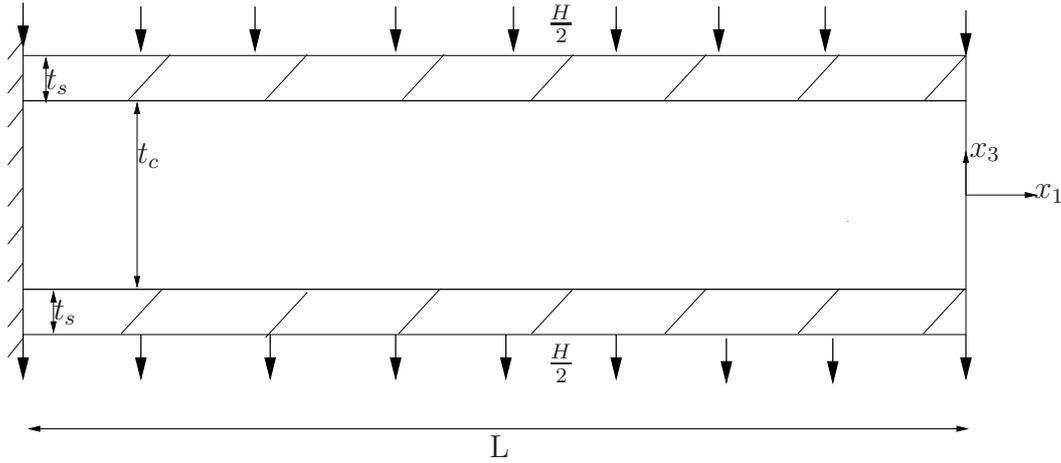


FIG. 6.1. Structure étudiée.

## 6.2 Le modèle de Love-Kirchhoff

Les équations d'équilibre (5.4) et la condition de bord libre nous permettent d'exprimer les efforts généralisés en fonction de la variable d'espace  $x_1$  :

$$\begin{cases} N(x_1) = 0, \\ M(x_1) = \frac{H}{2}x_1^2 \end{cases}$$

La constante effective (5.5) définie pour les moments est ici :

$$\Sigma_{eff}^M = \sigma_s^u + \left( \frac{t_c}{t_c + 2t_s} \right)^2 \times (\sigma_c^u - \sigma_s^u).$$

Ainsi, les efforts généralisés sont plastiquement admissibles en tout point, c'est-à-dire  $(N(x_1), M(x_1)) \in G_p^{\text{hom},cb}$  pour tout  $x_1$ , si la pression  $H$  est inférieure à une pression  $H^{LK}$  telle que :

$$H \leq H^{LK} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \Sigma_{eff}^M \times \left( \frac{t}{L} \right)^2. \quad (6.1)$$

Selon le modèle de Love-Kirchhoff, la ruine plastique de la structure se produit quand la pression atteint la valeur  $H^{LK}$ . Une rotule plastique apparaît à l'extrémité où la plaque est encastree. En ce point, la contrainte longitudinale  $\sigma_{11}$  prédite est donc :

$$\sigma_{11}(x_3) = \begin{cases} +\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_s^u, & \frac{t_c}{2} + t_s > x_3 > \frac{t_c}{2}, \\ +\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_c^u, & \frac{t_c}{2} > x_3 > 0, \end{cases} \quad \sigma_{11}(-x_3) = -\sigma_{11}(x_3). \quad (6.2)$$

On notera également que la limite de  $H^{LK}$ , quand le contraste matériel  $r$  tend vers l'infini (*i.e.* : quand  $\sigma_c^u$  tend vers zéro pour une limite d'élasticité  $\sigma_s^u$  fixée dans la peau) est :

$$H^{LK,\infty} = 4 \frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}} \frac{t_s^2 + t_s t_c}{L^2}. \quad (6.3)$$

Cette valeur surestime en réalité la vraie limite asymptotique qui correspond au mécanisme de rupture plastique suivant : deux peaux isolées et sur chacune d'elles une pression  $\frac{H}{2}$ . L'application du modèle de Love-Kirchhoff pour une peau donne une pression de ruine  $2\frac{\sigma_s^u t_s^2}{\sqrt{3} L^2}$ .

Sur la Figure 6.2, on peut observer l'allure de la courbe donnant la charge limite normalisée  $\frac{H^{LK}}{\sigma_s^u}$  en fonction du contraste matériel  $r$ . Notons que la valeur asymptotique  $H^{LK,\infty}$  est atteinte pour  $r \sim 10$ .

### 6.3 Le modèle M4 : méthode cinématique

La plaque sandwich est symétrique. On peut donc se limiter, sans perte de généralité, à considérer des champs de vitesses et de rotations présentant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} V_1^1 = -V_1^3, \\ V_1^2 = 0, \\ \phi^1 = \phi^3, \\ D^1 = -D^3 = -V_{1,1}^3, \\ D^2 = 0, \\ \chi^1 = \chi^3 = \phi_{,1}^3, \\ \gamma^1 = \gamma^3 = \phi^3 + V_{3,1}, \\ \Delta^{1,2} = \Delta^{2,3} = V_1^3 - \frac{t_s}{2}\phi^3 - \frac{t_c}{2}\phi^2. \end{cases} \quad (6.4)$$

La méthode cinématique (4.19) permet d'obtenir une borne supérieure pour la pression limite  $H^{M4}$  :

$$H^{M4} \leq \int_{-L}^0 \Pi_p^{M4,cb}(\mathbf{E}^{cb}(x_1)) dx_1 \quad (6.5)$$

pour chaque ensemble de vitesse et taux de rotation compatibles  $(V_1^i, V_3, \phi^i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  vérifiant les conditions de symétrie (6.4), les conditions aux limites :

$$V_1^i(x_1 = -L) = V_3(x_1 = -L) = \phi^i(x_1 = -L) = 0, \quad (6.6)$$

et également la condition de normalisation :

$$\int_{-L}^0 V_3(x_1) dx_1 = -1. \quad (6.7)$$

L'épaisseur des peaux étant très petite devant la longueur de la plaque  $L$  ( $L/t_s = 80$ ), celles-ci peuvent être considérées comme des plaques de Love-Kirchhoff. L'analyse sera donc restreinte aux mécanismes de ruine plastique qui ne présentent pas de taux de déformations de cisaillement dans les peaux :  $\gamma^1 = \gamma^3 = 0$ . C'est-à-dire que l'on suppose que les contraintes de cisaillement ne travaillent pas plastiquement dans les peaux. On peut donc rajouter la condition suivante :

$$\phi^3 = -V_{3,1} = \phi^1.$$

Ainsi, les cinématiques prises en compte sont décrites par les trois fonctions  $V_1^3(x_1) = -V_1^1(x_1)$ ,  $V_3(x_1)$  et  $\phi^2(x_1)$ .

Les composantes du taux de déformation généralisé sont :

$$\begin{cases} D^2 = 0, \\ \chi^2 = \phi_{,1}^2, \\ \gamma^2 = \phi^2 + V_{3,1}, \\ D^3 = V_{1,1}^3 = -D^1, \\ \chi^1 = \chi^3 = -V_{3,11}, \\ \gamma^1 = \gamma^3 = 0, \\ \Delta^{1,2} = \Delta^{2,3} = V_1^3 + \frac{t_s}{2}V_{3,1} - \frac{t_c}{2}\phi^2. \end{cases} \quad (6.8)$$

Les conditions limites deviennent :

$$V_1^3(x_1 = -L) = V_3(x_1 = -L) = V_{3,1}(x_1 = -L) = \phi^2(x_1 = -L) = 0.$$

En utilisant les conditions ci-dessus et en intégrant par parties la condition de normalisation (6.7), on trouve :

$$\int_{-L}^0 \frac{(x_1)^2}{2} \chi^3(x_1) dx_1 = 1. \quad (6.9)$$

Une fois posées toutes ces conditions, on examine trois mécanismes de rupture plastique. On propose donc trois types de champs de taux de déformation généralisée  $\mathbf{E}^{\text{cb}}$ .

### 6.3.1 Un mécanisme plastique sans effets de cisaillement

Quand le contraste matériel  $r$  entre les peaux et l'âme du sandwich est suffisamment "petit", il est raisonnable de supposer que le mécanisme plastique réel causant l'écoulement de la structure ne fait pas intervenir le cisaillement dans l'âme. Ainsi, cette hypothèse impose que toutes les déformations de cisaillement sont nulles. On obtient donc :

$$\gamma^2 = \Delta^{2,3} = 0,$$

et on retrouve donc la cinématique du modèle de Love-Kirchhoff. En effet, toutes les rotations sont égales à  $-V_{3,1}$ . La première composante du champ de vitesse 3D (4.13) est linéaire dans toute l'épaisseur de la plaque. On a :

$$\begin{cases} V_1^1 = -V_1^3 = \frac{ts+tc}{2}V_{3,1}, \\ V_1^2 = 0, \\ \phi^1 = \phi^2 = \phi^3 = -V_{3,1}, \end{cases} \implies \begin{cases} D^2 = 0, \\ \gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = \Delta^{2,3} = \Delta^{1,2} = 0, \\ D^3 = -D^1 = -\frac{ts+tc}{2}V_{3,11}, \\ \chi^1 = \chi^2 = \chi^3 = -V_{3,11}. \end{cases}$$

Ainsi, cette cinématique peut être décrite uniquement par la flèche ou la vitesse verticale de la plaque  $V_3$ .

En considérant un mécanisme de rotule plastique à l'encastrement de la plaque et en prenant en compte les conditions limites et la condition de normalisation (6.9), on trouve que  $V_3$  est égale à :

$$V_3(x_1) = -\frac{2}{L^2}(x_1 + L), \quad (6.10)$$

et les taux de déformation :

$$\begin{aligned} D^3(x_1) &= -D^1(x_1) = \frac{ts + tc}{L^2}\delta(x_1 + L), \\ \chi^1(x_1) &= \chi^2(x_1) = \chi^3(x_1) = \frac{2}{L^2}\delta(x_1 + L), \end{aligned}$$

où  $\delta$  est la fonction dirac au point  $x_1 = 0$ .

Finalement, en utilisant l'expression ci-dessus, ainsi que les équations (5.11) et (6.5), on établit que  $H^{LK}$ , définie par (6.1), est en fait une borne supérieure de  $H^{M4}$  :

$$H^{M4} \leq H^{LK}.$$

### 6.3.2 Un mécanisme plastique avec flexion pure des peaux, cisaillement de l'âme et sans glissement aux interfaces

Au contraire du paragraphe précédent, quand le contraste matériel  $r$  tend vers l'infini ( $\sigma_c^u$  tend vers zéro pour une résistance des peaux fixée  $\sigma_s^u$ ), les deux peaux agissent de manière "séparée". Ainsi, chacune des peaux peut être modélisée comme une plaque mince de Love-Kirchhoff en flexion pure (avec  $D^1 = D^3 = 0$ ). Afin de déterminer la charge limite quand le contraste matériel  $r$  tend vers l'infini, le choix du mode de ruine suivant semble naturel : flexion pure des deux peaux ( $D^1 = D^3 = 0$ ) et encore une fois une rotule plastique à l'encastrement ( $V_3$  est alors donnée par (6.10)). On suppose de plus qu'il n'y a pas de glissement aux interfaces entre les peaux et l'âme :

$$\Delta^{1,2} = \Delta^{2,3} = 0.$$

Par conséquent, la rotation  $\phi^2$  et le taux de déformation de cisaillement sont uniformes. En conclusion, la mécanisme de ruine plastique est donc décrit par les champs de vitesses et de déformations suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^1 = V_1^2 = V_1^3 = 0, \\ V_3^1(x_1) = -\frac{2}{L^2}(x_1 + L), \\ \phi^1(x_1) = \phi^3(x_1) = \frac{2}{L^2} \\ \phi^2(x_1) = -\frac{2t_s}{t_c L^2}, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} D^1 = D^2 = D^3 = 0, \\ \gamma^1 = \gamma^3 = \Delta^{2,3} = \Delta^{1,2} = 0, \\ \chi^1(x_1) = \chi^3(x_1) = \frac{2}{L^2}\delta(x_1 + L), \\ \chi^2(x_1) = -\frac{2t_s}{t_c L^2}\delta(x_1 + L), \\ \gamma^2(x_1) = -\frac{2}{L^2}\frac{t_s + t_c}{t_c}. \end{array} \right.$$

Utilisant les expressions ci-dessus, ainsi que (5.11), (5.17) et (6.5), on établit après calculs que la pression de ruine  $H_{pb}^{M4}$  ( $pb$  pour pure bending = flexion pure) est la charge limite asymptotique pour le sandwich quand le contraste matériel tend vers l'infini, avec :

$$H_{pb}^{M4} = 2\frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}}\frac{t_s^2}{L^2} + 2\frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}}\left(\frac{t_s + t_c}{L} + \frac{t_s t_c}{2L^2}\right).$$

Cette pression reste une borne supérieure de  $H^{M4}$  :

$$H^{M4} \leq H_{pb}^{M4}.$$

Notons également que :

$$H_{pb}^{M4} < H^{LK} \text{ pour } r > r^* = \frac{2L(t_s + t_c) - t_c(t_c - t_s)}{2t \times t_s}.$$

L'allure de la charge normalisée  $\frac{H_{pb}^{M4}}{\sigma_s^u}$  en fonction du contraste entre les matériaux  $r$  est tracée sur la Figure 6.2. Pour  $t_c = \frac{3}{4}t$ ,  $t_s = \frac{t}{8}$  et  $\frac{L}{t} = 10$ , on trouve  $r^* = 41.92$ . Quand  $r$  tend vers l'infini ( $\sigma_c^u$  tend vers 0 pour un  $\sigma_s^u$  fixé), la charge limite ci-dessus tend également vers :

$$H_{pb}^{M4,\infty} = 2\frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}}\frac{t_s^2}{L^2}.$$

Cette dernière valeur correspond à la charge limite obtenue par le modèle de Love-Kirchhoff appliqué *séparément* aux deux peaux isolées (avec  $\frac{H}{2}$  sur chacune d'elles). On insistera particulièrement sur le fait que cette charge limite asymptotique obtenue avec le M4 est plus basse que la charge limite asymptotique prévue par le modèle de Love-Kirchhoff (6.3) pour un contraste assez grand. Elle est atteinte pour environ  $r \sim 500$  (avec une erreur relative inférieure à 1%) comme on peut le voir sur la Figure 6.2.

### 6.3.3 Un mécanisme plastique avec des glissements possibles aux interfaces

Les deux cas considérés précédemment s'appliquent surtout aux cas extrêmes : de petites valeurs de  $r$ , c'est-à-dire une plaque "presque homogène" (premier mode) et aux grandes valeurs de  $r$ , c'est-à-dire deux peaux avec transmission des efforts entre elles (deuxième mode). Pour des valeurs intermédiaires du contraste matériel  $r$ , on propose le mécanisme plastique

suisant avec des glissements possibles aux interfaces :

La cinématique proposée pour les peaux est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1^3(x_1) = -V_1^1(x_1) = \begin{cases} a \text{ pour } x_1 \in ]-L, -\alpha L[, \\ b \text{ pour } x_1 \in ]-\alpha L, 0[, \end{cases} \\ V_3(x_1) = \begin{cases} -c(x_1 + L) \text{ pour } x_1 \in [-L, -\alpha L], \\ -[c + (\frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2})](x_1 + \alpha L) - c(1 - \alpha)L \text{ pour } x_1 \in [-\alpha L, 0], \end{cases} \\ \phi^1(x_1) = \phi^3(x_1) = -V_{3,1}(x_1) = \begin{cases} c \text{ pour } x_1 \in ]-L, -\alpha L[, \\ c + (\frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2}) \text{ pour } x_1 \in ]-\alpha L, 0[, \end{cases} \end{array} \right.$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois paramètres inconnus à optimiser. On considère donc deux rotules plastiques dans chaque couche : une première rotule à l'encastrement de la plaque en  $x_1 = -L$ , et une seconde rotule au point  $x_1 = -\alpha L$  où  $\alpha$  est un paramètre inconnu compris entre 0 et 1 ( $0 < \alpha < 1$ ). On continue de négliger les déformations de cisaillement dans les peaux. Les champs de taux de déformation généralisés dans les peaux sont donc  $\gamma^1 = \gamma^3 = 0$  et

$$\left\{ \begin{array}{l} D^3(x_1) = -D^1(x_1) = a\delta(x_1 + L) + (b - a)\delta(x_1 + \alpha L), \\ \chi^3(x_1) = \chi^1(x_1) = c\delta(x_1 + L) + (\frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2})\delta(x_1 + \alpha L). \end{array} \right.$$

On remarquera que la cinématique proposée a été construite de manière à respecter la condition de normalisation (6.9).

Dans l'âme, la rotation suivante est considérée :

$$\phi^2(x_1) = \begin{cases} d \text{ si } x \in ]-L, -\alpha L[, \\ e \text{ si } x \in ]-\alpha L, 0[. \end{cases}$$

où  $d$  et  $e$  sont deux paramètres additionnels à optimiser.

Ainsi, on obtient les taux de déformation généralisés suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi^2 = d\delta(x_1 + L) + (e - d)\delta(x_1 + \alpha L), \\ \gamma^2(x_1) = \begin{cases} d - c \text{ pour } x \in ]-L, -\alpha L[, \\ e - [c + (\frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2})] \text{ pour } x \in ]-\alpha L, 0[, \end{cases} \\ \Delta^{2,3}(x_1) = \Delta^{1,2}(x_1) = \begin{cases} a - \frac{t_s}{2}c - \frac{t_c}{2}d \text{ pour } x \in ]-L, -\alpha L[, \\ b - \frac{t_s}{2}[c + (\frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2})] - \frac{t_c}{2}e \text{ pour } x \in ]-\alpha L, 0[. \end{cases} \end{array} \right.$$

En utilisant les résultats obtenus au chapitre précédent dans le paragraphe sur le calcul de la fonction d'appui du modèle M4 en flexion cylindrique  $\pi_p^{M4,cb}$  - et plus précisément les équations (5.11) et (5.17) - la dissipation plastique associée au mécanisme de ruine décrit ci-dessus peut être donnée explicitement en fonction des paramètres inconnus  $a, b, c, d, e$  et  $\alpha$ . Cette fonction peut s'exprimer comme la somme de quatre termes que l'on précise dans la suite :

– flexion et étirement des deux peaux aux deux rotules plastiques :

$$T_1 = 4 \frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}} \int_{-\frac{t_s}{2}}^{\frac{t_s}{2}} \left( |a + x_3 c| dx_3 + \left| b - a + \left( \frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2} \right) x_3 \right| \right) dx_3,$$

– flexion de l'âme aux deux rotules plastiques :

$$T_2 = \frac{\sigma_c^u}{2\sqrt{3}} t_c^2 (|d| + |e - d|),$$

– cisaillement de l'âme :

$$T_3 = \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} t_c L \left( |d - c| (1 - \alpha) + \left| e - c - \left( \frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2} \right) \right| \alpha \right),$$

– glissement aux interfaces entre l'âme et les peaux :

$$T_4 = 2 \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} L (1 - \alpha) \left| a - \frac{t_s}{2} c - \frac{t_c}{2} d \right| + 2 \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}} L \alpha \left| b - \frac{t_s}{2} \left[ c + \left( \frac{2}{\alpha^2 L^2} - \frac{c}{\alpha^2} \right) \right] - \frac{t_c}{2} e \right|,$$

Ainsi, en utilisant l'approche cinématique (6.5), on obtient :

$$H^{M4} \leq H_+^{M4} = \inf_{a,b,c,d,e,\alpha} \{T_1 + T_2 + T_3 + T_4\},$$

où  $H_+^{M4}$  est le minimum d'une fonction de six variables réelles.

En réalité, la détermination analytique de  $H_+^{M4}$  est plutôt ardue et il est bien plus judicieux d'utiliser un logiciel standard comme MATLAB, pour calculer numériquement cette valeur  $H_+^{M4}$ . Notons que  $H_+^{M4}$  est en réalité une borne inférieure de  $H^{LK}$  et  $H_{pb}^{M4}$ . En effet, en prenant les valeurs suivantes des paramètres inconnus :

$$\begin{cases} b = a, \\ c = \frac{2}{L^2}, \\ e = d = \frac{2a}{t_c} - \frac{2t_s}{t_c L^2}, \\ \alpha \text{ arbitraire,} \end{cases} \quad (6.11)$$

on trouve qu'il n'y a qu'une seule rotule plastique (située à l'encastrement  $x_1 = -L$ ) et que  $\Delta^{2,3} = \Delta^{1,2} = 0$ . Ainsi, pour obtenir le premier mécanisme plastique sans cisaillement, il suffit de prendre  $a = \frac{t_c + t_s}{L^2}$ , ( $\gamma^2 = 0$ ), et le second mécanisme plastique est obtenu pour  $a = 0$ , ( $D^1 = 0$ ).

En conclusion,  $H_+^{M4}$  est la meilleure borne supérieure pour  $H^{M4}$  parmi les trois mécanismes plastiques considérés :

$$H^{M4} \leq H_+^{M4} \leq \min(H_{pb}^{M4}, H^{LK}). \quad (6.12)$$

Le comportement de la charge normalisée  $\frac{H_+^{M4}}{\sigma_s^u}$  avec le contraste matériel  $r$  est montré sur la Figure 6.2. La Figure 6.3 représente un zoom sur pour les valeurs de contraste comprises entre 1 et 100 de la Figure 6.2.

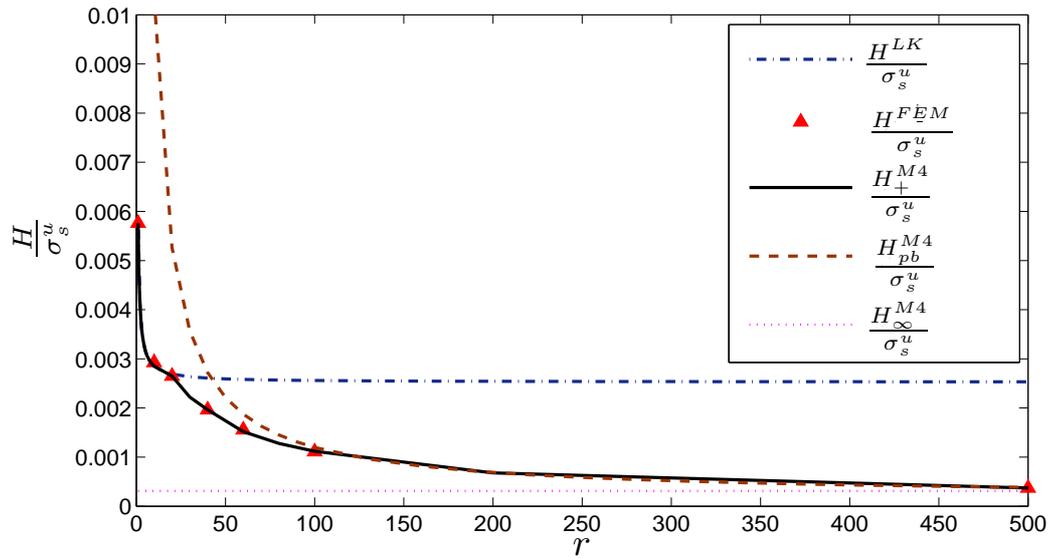


FIG. 6.2. Pression de ruine normalisée  $\frac{H}{\sigma_s^u}$  fonction du contraste matériel  $r$  pour  $H = H^{LK}$ ,  $H = H^{FEM}$ ,  $H = H_+^{M4}$ ,  $H = H_{pb}^{M4}$  et  $H = H_\infty^{M4}$ .  $r \in [1, 500]$ .

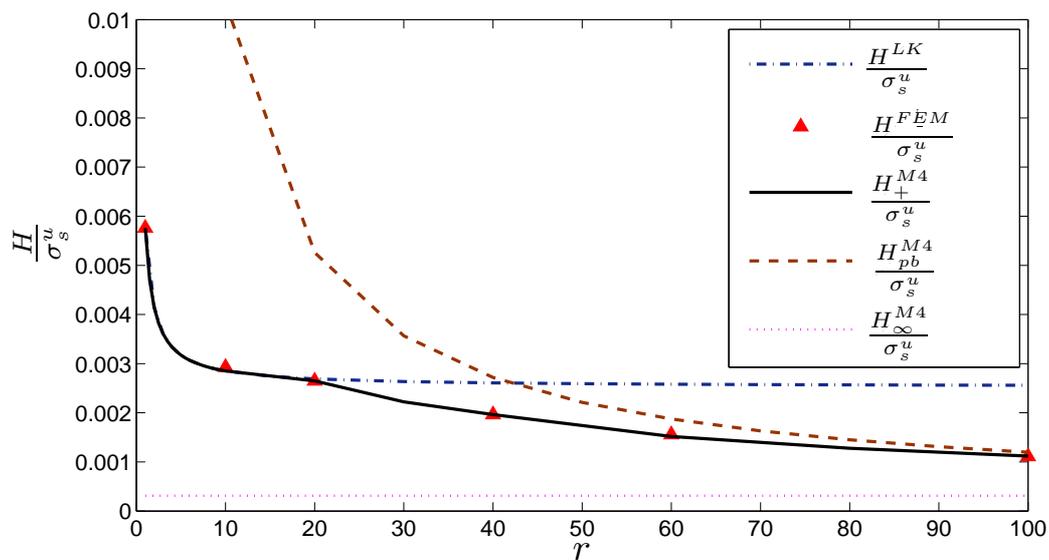


FIG. 6.3. Pression de ruine normalisée  $\frac{H}{\sigma_s^u}$  fonction du contraste matériel  $r$  pour  $H = H^{LK}$ ,  $H = H^{FEM}$ ,  $H = H_+^{M4}$ ,  $H = H_{pb}^{M4}$  et  $H = H_\infty^{M4}$ .  $r \in [1, 100]$ .

L'étude numérique montre que pour des petites valeurs de contraste (correspondant à  $r \leq 21$  pour  $t_c = \frac{3}{4}t$ ,  $t_s = \frac{t}{8}$  et  $\frac{L}{t} = 10$ ), la charge limite obtenue par la minimisation introduite ci-dessus  $H_+^{M4}$  coïncide avec la charge limite prédite par le modèle de Love-Kirchhoff homogénéisé. En effet, après avoir programmé et minimisé la fonction à six paramètres sur MATLAB, on constate que les inconnues du problème  $a, b, c, d, e$  et  $\alpha$  prennent les valeurs exactes de (6.11) avec  $a = \frac{t_s + t_c}{L^2}$ . À l'opposé,  $H_+^{M4}$  coïncide avec  $H_{pb}^{M4}$  pour des valeurs de contraste matériel "assez grandes" ( $r \geq 255$  pour  $t_c = \frac{3}{4}t$ ,  $t_s = \frac{t}{8}$  et  $\frac{L}{t} = 10$ ). Ici encore, les paramètres  $a, b, c, d, e$  et  $\alpha$  prennent les valeurs exactes de (6.11) avec  $a = 0$ . Pour les valeurs de contraste intermédiaires ( $22 \leq r \leq 254$ ),  $H_+^{M4}$  est strictement inférieure à  $H^{LK}$  et  $H_{pb}^{M4}$ .

## 6.4 Le modèle éléments finis

On veut évaluer la pertinence des modèles M4 et de Love-Kirchhoff homogénéisé. Pour ce faire, on se propose de comparer leurs prédictions respectives par rapport à celle d'un calcul par éléments finis effectué à l'aide du logiciel ABAQUS. Ce calcul ABAQUS sera considéré comme une référence et représentatif de la réalité. L'hypothèse des déformations planes dans le plan (1, 3) est adoptée. On notera  $H^{FEM}$  la valeur de la charge critique obtenue par éléments finis. Dans les calculs, l'éclatement  $\frac{L}{t} = 10$  est toujours le même et on a considéré sept valeurs de contraste matériel  $r$  : 1 (plaque homogène), 10, 20, 40, 60, 100 et 500.

La plaque est encadrée sur son extrémité gauche et présente un bord libre sur son extrémité droite. En raison de la symétrie de la plaque (par rapport au plan  $x_3 = 0$ ), seulement une moitié de la plaque (dans son épaisseur) a été maillée (la couche 3 et la moitié de la couche 2). Voir la Figure 6.4. Nous avons choisi un maillage optimal en utilisant des éléments CPE4R rectangulaires à 4 noeuds après plusieurs tests de convergence. On utilise des éléments carrés près du bord encadré. Près du bord libre, ils sont rectangulaires car nous avons "relâché" le maillage dans cette zone. Dans son épaisseur, nous avons utilisé 40 éléments. Voir la Figure 6.5.



FIG. 6.4. *Problème de plaque éléments finis.*

FIG. 6.5. *Maillage.*

Les deux matériaux constituant la plaque sont supposés élastiques linéaires et parfaitement plastiques. Les propriétés de ces matériaux sont données dans le Tableau 6.1 où  $E_s$  et  $E_c$  sont les modules d'Young et  $\nu_s$  et  $\nu_c$  les coefficients de Poisson respectivement des peaux et de l'âme.

$r$	$E_s$ (MPa)	$E_c$ (MPa)	$\nu_s$	$\nu_c$	$\sigma_s^u$ (MPa)	$\sigma_c^u$ (MPa)
1	210000	210000	0.3	0.2	540	540
10	210000	21000	0.3	0.2	540	54
20	210000	10500	0.3	0.2	540	27
40	210000	5250	0.3	0.2	540	13.5
60	210000	3500	0.3	0.2	540	9
100	210000	2100	0.3	0.2	540	5.4
500	210000	420	0.3	0.2	540	1.08

TAB. 6.1. *Constantes matérielles pour le calcul éléments finis*

Quand le paramètre de charge  $H$  augmente à partir de 0, on observe un plateau plastique pour  $H = H^{FEM}$  dans la courbe donnant la pression en fonction de la vitesse verticale de l'extrémité de la plaque (Figure 6.6). Dans ce graphe, on trouve en abscisse le déplacement vertical normalisé (par rapport à la longueur de la plaque) d'un point de la section libre  $\frac{V_3(0)}{L}$  tandis qu'en ordonnée on trouve la charge normalisée  $\frac{H^{FEM}}{\sigma_s^u}$ . On a bien vérifié que les modules élastiques n'avaient aucune influence sur la charge limite,  $H^{FEM}$ , comme prédit par la théorie de l'analyse limite.

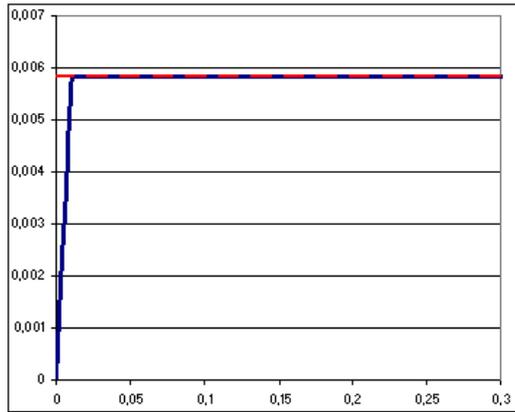
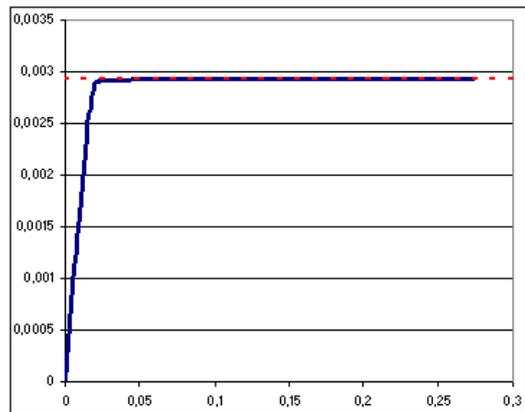
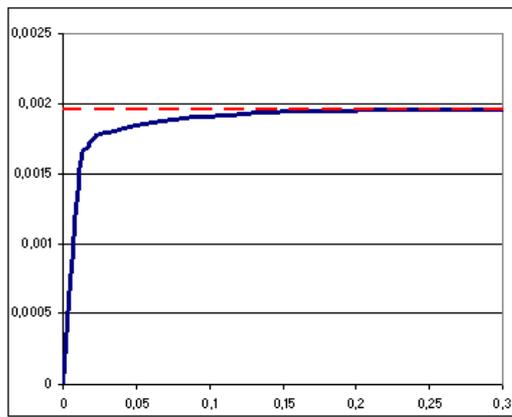
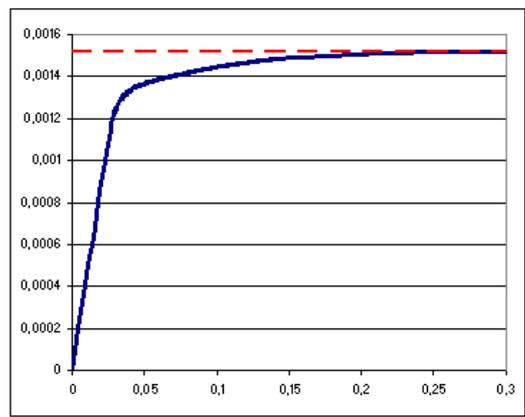
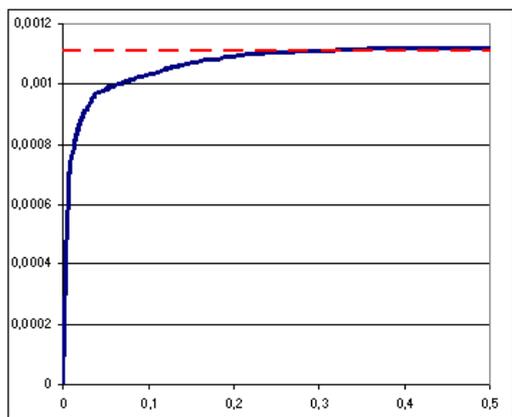
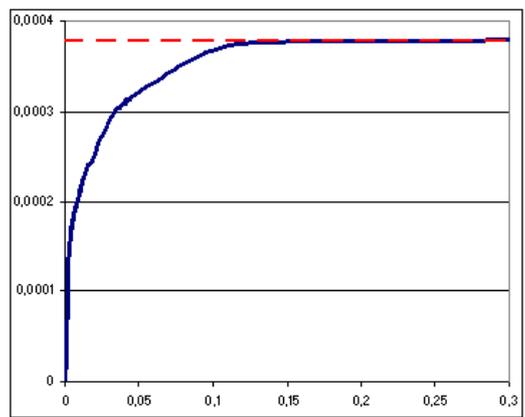
(a)  $r = 1$ (b)  $r = 10$ (c)  $r = 40$ (d)  $r = 60$ (e)  $r = 100$ (f)  $r = 500$ 

FIG. 6.6. Détermination de  $H^{FEM}$ . Charge normalisée  $\frac{H}{\sigma_s}$  fonction du déplacement normalisé  $\frac{V_3(0)}{L}$  de la section de bord libre pour différents contrastes matériels  $r$ .

## 6.5 Comparaison des modèles

Nous comparons maintenant les deux modèles aux calculs éléments finis. Dans la Table 6.2, on donne les charges limites normalisées des différents modèles  $\frac{H^{LK}}{\sigma_s^u}$ ,  $\frac{H_{pb}^{M4}}{\sigma_s^u}$ ,  $\frac{H_+^{M4}}{\sigma_s^u}$  et  $\frac{H^{FEM}}{\sigma_s^u}$  ainsi que les erreurs relatives de ces derniers, définies par  $\epsilon^{LK} = 100 \times \frac{H^{LK} - H^{FEM}}{H^{FEM}}$ ,  $\epsilon_{pb}^{M4} = 100 \times \frac{H_{pb}^{M4} - H^{FEM}}{H^{FEM}}$  et  $\epsilon_+^{M4} = 100 \times \frac{H_+^{M4} - H^{FEM}}{H^{FEM}}$  pour plusieurs valeurs du contraste  $r$ . L'allure des courbes en fonction du contraste  $r$  est donnée sur les Figures 6.2 et 6.3 pour les différents modèles. On constate une excellente corrélation entre le modèle M4 calculé avec le troisième mécanisme et le modèle éléments finis pour toutes les valeurs de  $r$ .

$r$	$H^{LK}$	$H_{pb}^{M4}$	$H_+^{M4}$	$H^{FEM}$	$\epsilon^{LK}$ (%)	$\epsilon_{pb}^{M4}$ (%)	$\epsilon_+^{M4}$ (%)
1	3.12	54.94	3.12	3.15	-1.0	1644	-1.0
10	1.54	5.58	1.54	1.59	-3.1	251	-3.1
20	1.45	2.84	1.45	1.43	-1.4	95.8	-1.4
40	1.41	1.47	1.06	1.06	32.8	38.6	< 1
60	1.39	1.01	0.82	0.82	68.8	23.1	< 1
100	1.38	0.64	0.60	0.60	130	6.7	< 1
500	1.37	0.20	0.20	0.20	583	< 1	< 1

TAB. 6.2. Comparaison des résultats donnés par les modèles de Love-Kirchhoff, M4 et éléments finis

Le troisième mécanisme de ruine du modèle M4, avec une possibilité de double rotule, est comparé avec le calcul aux éléments finis. Les contraintes de Von-Mises appliquées sur la déformée de demi-plaque sandwich sont présentées sur la Figure 6.7. On a également représenté de manière schématique la déformée donnée par ce troisième mécanisme en respectant l'échelle par rapport à la longueur (emplacement de la seconde rotule). On observe un bon accord entre les prévisions du modèle M4 et les résultats du calcul ABAQUS.

On constate également que pour les valeurs extrêmes du contraste entre les matériaux  $r$  (1, 10, 20, 500), le mécanisme de ruine ne présente qu'une rotule plastique à l'encastrement alors qu'il en présente deux pour les valeurs intermédiaires de  $r$  ( $\alpha = 0.69$  pour  $r = 40$ ,  $\alpha = 0.53$  pour  $r = 60$ , et  $\alpha = 0.44$  pour  $r = 100$ ). Sur les Figures 6.8 et 6.9, on exhibe la déformation plastique cumulée dans la structure quand l'écoulement a lieu, c'est-à-dire quand la charge limite  $H^{FEM}$  est atteinte pour un contraste 10 et un contraste 40. Comme prévu, pour  $r = 10$  une rotule plastique dans toute l'épaisseur de la plaque apparaît clairement à l'encastrement (Figure 6.8). Pour  $r = 40$ , on constate qu'il y a une rotule à l'encastrement et aussi une seconde rotule plastique due à une flexion dans la peau, une déformation de cisaillement plus ou moins uniforme dans l'âme et également un glissement à l'interface (ligne rouge sur la Figure 6.9).

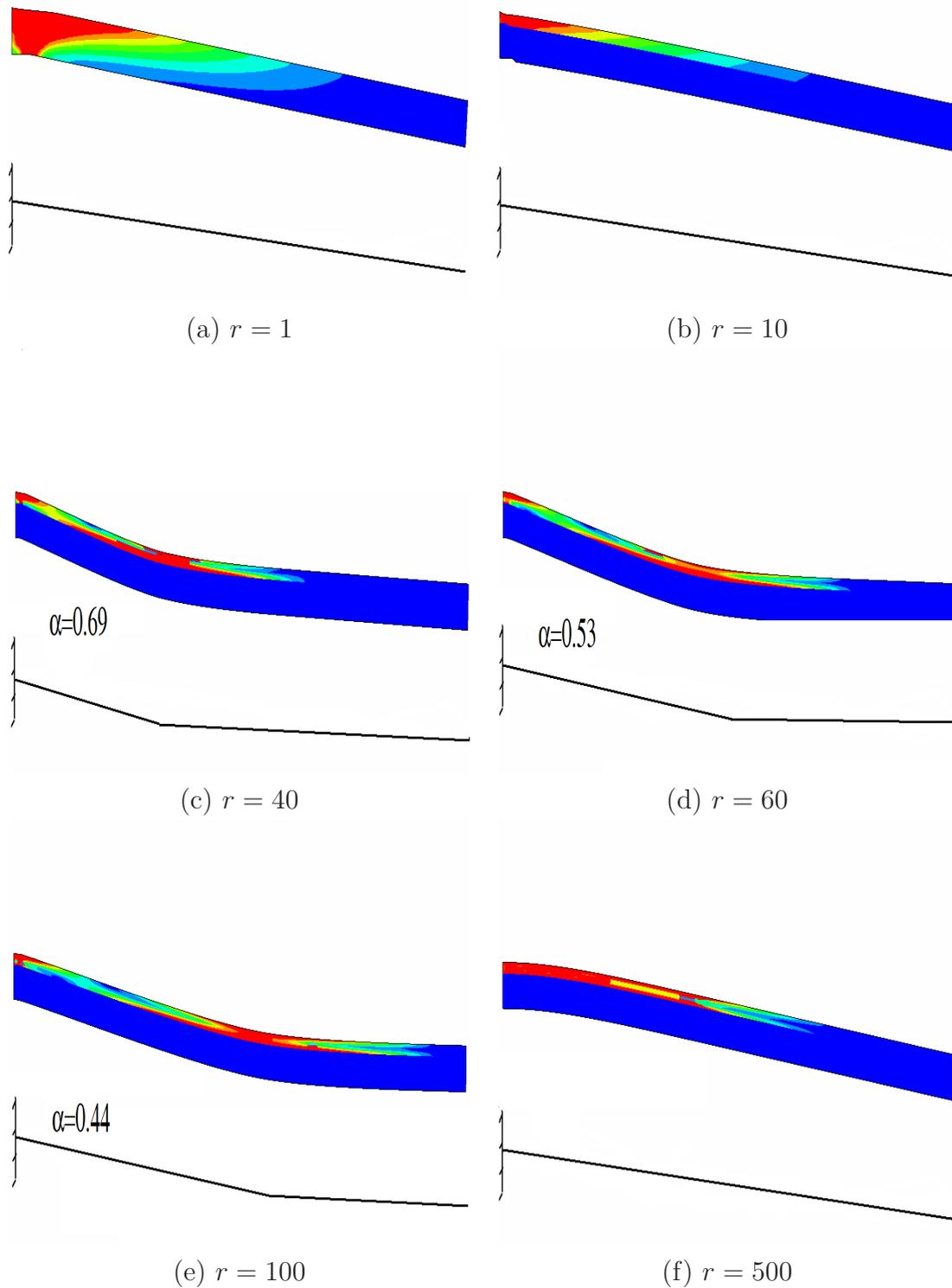
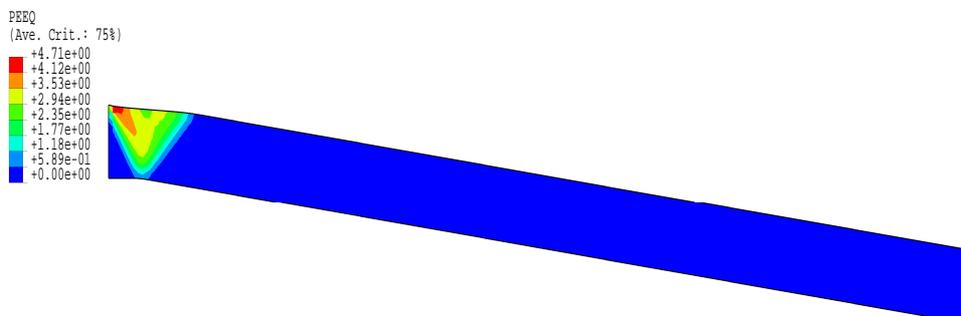
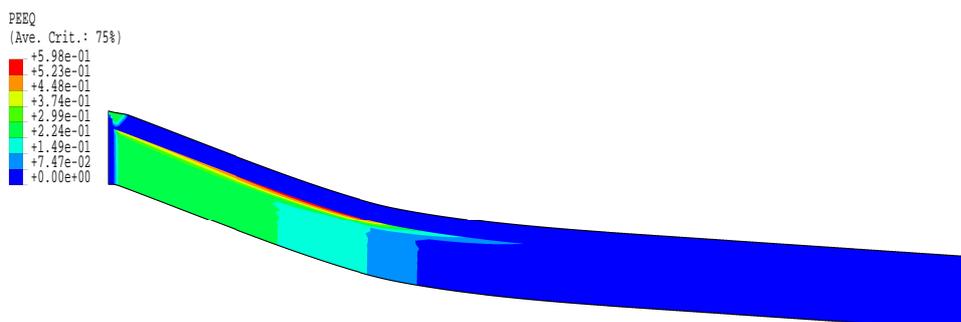


FIG. 6.7. Mécanismes de ruine plastique pour différents contrastes. FEM et modèle  $M_4$ .

FIG. 6.8. Déformation plastique équivalente pour  $r = 10$ .FIG. 6.9. Déformation plastique équivalente pour  $r = 40$ .

Nous cherchons, ensuite, à évaluer la participation de chaque sous-mécanisme à la dissipation globale. Cela revient à mesurer l'importance de chaque terme  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$  précédemment

défini dans la dissipation totale : qui de la flexion des peaux, de la flexion de l'âme, du cisaillement global de l'âme et du glissement à l'interface contribue le plus à la dissipation plastique ?

Pour ce faire, on définit les pourcentages suivants :  $100 \times \frac{T_i}{H_+^{M4}}$  et on les exhibe dans la Table reftab : pour pour différentes valeurs du contraste entre les matériaux  $r$ .

	$r = 1$	$r = 10$	$r = 40$	$r = 60$	$r = 100$	$r = 500$
Flexion des peaux ( $T_1$ )	43.7%	88.6%	40.0%	33.9%	41.1%	47.3%
Flexion de l'âme ( $T_2$ )	56.3%	11.4%	1.1%	0.5%	0.3%	0.2%
Cisaillement de l'âme ( $T_3$ )	0%	0%	51.6%	57.3%	48.7%	52.8%
Glissement de l'interface ( $T_4$ )	0%	0%	7.2%	8.3%	9.9%	0%

TAB. 6.3. *Pourcentage de la dissipation pour différents contrastes.*

On constate que la flexion de l'âme devient de plus en plus faible quand le contraste augmente, alors que la tendance est inverse pour le cisaillement de l'âme. La dissipation due à la flexion des peaux est assez stable en fonction du contraste, sauf pour  $r = 10$  où le mécanisme global est une rotule plastique à l'encastrement, donc une flexion des peaux et de l'âme. Cependant, l'âme étant 10 fois moins résistante que les peaux, c'est vraiment la flexion des peaux qui participe pour presque toute la dissipation. Enfin, on notera que la dissipation due aux glissements aux interfaces est nulle pour les petits contrastes, puis elle augmente pour les contrastes intermédiaires, avant de redevenir nulle pour les grands contrastes.

Nous proposons maintenant d'examiner en détail les résultats pour les trois gammes de contrastes : petits, intermédiaires et grands.

### 6.5.1 Petits contrastes matériels ( $r \leq 21$ ) : $H_+^{M4} = H^{LK}$

Pour  $r \leq 21$ ,  $H_+^{M4}$  coïncide avec  $H^{LK}$  et la charge limite prédite par ces modèles est très proche des résultats éléments finis. On voit sur la Table 6.2 que l'erreur relative du modèle de Love-Kirchhoff par rapport aux éléments finis est plus petite que 3.1%<sup>1</sup>. En revanche, il est clair que le modèle de Love-Kirchhoff homogénéisé surestime nettement la charge limite réelle pour les grands contrastes : on arrive à une erreur de 500% pour un contraste matériel de  $r = 500$ . On remarquera cependant que pour des contrastes dit "intermédiaires", l'erreur relative commise par le modèle homogénéisé est quand même assez forte (32% et 68% pour  $r = 40$  et  $r = 60$ , respectivement).

On en conclut que le modèle de Love-Kirchhoff homogénéisé est fiable lorsque le contraste matériel entre les matériaux du multicouche est à peu près du même ordre de grandeur que

<sup>1</sup>Pour  $r = 1$ , c'est à dire pour une plaque homogène, on a aussi calculé la pression de ruine  $H^{FEM}$  pour un élanement  $\frac{L}{t} = 5$  et on trouve que l'erreur relative  $\epsilon^{LK}$  est plus petite que 5 %.

l'éclatement. Sur la Figure 6.2, on voit que le modèle de Love-Kirchhoff est bien prédictif jusqu'au contraste 20 pour un éclatement 10. En effet, le développement asymptotique effectué au chapitre 2 a montré que le modèle homogénéisé conduit à la situation suivante :  $\sigma_{11}$  est environ de l'ordre de grandeur de  $\sigma^u \times \left(\frac{t}{L}\right)^0$ ,  $\sigma_{13}$  est de l'ordre de grandeur  $\sigma^u \times \left(\frac{t}{L}\right)^1$  et  $\sigma_{33}$  est de l'ordre grandeur  $\sigma^u \times \left(\frac{t}{L}\right)^2$ . Pour de très grandes valeurs du contraste matériel  $\frac{\sigma_s^u}{\sigma_c^u}$ , les conditions ci-dessus peuvent ne pas être vérifiées simultanément dans les peaux et dans l'âme. Les cas avec un très grand contraste matériel et un éclatement classique ( $\sim 10$ ) présentent des effets de cisaillement prédominants dans le matériau d'âme. Il faut, par conséquent, un éclatement beaucoup plus grand pour obtenir la convergence du modèle Love-Kirchhoff afin que ce dernier corresponde bien à la réalité.

Nous proposons maintenant d'évaluer la pertinence des modèles, en comparant les contraintes 3D données par les éléments finis et par la méthode de localisation explicitée précédemment.

Pour  $r = 1$  (plaque homogène), on a représenté la contrainte longitudinale normalisée  $\frac{\sigma_{11}(x_3)}{\sigma_s^u}$  et la contrainte de cisaillement normalisée  $\frac{\sigma_{13}(x_3)}{\sigma_s^u}$  dans la demi-épaisseur de la plaque (moitié du haut), à l'encastrement en  $x_1 = -L$ . Les prédictions (6.2) du modèle de Love-Kirchhoff sont comparées aux résultats donnés par les éléments finis quand la pression de ruine  $H^{FEM}$  est atteinte. Elles sont présentées sur les Figures 6.10 et 6.11. Les prédictions du modèle correspondent assez bien au calcul éléments finis pour la contrainte longitudinale  $\sigma_{11}$ . Le calcul ABAQUS montre également que les contraintes autres que  $\sigma_{11}$ , c'est à dire les contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  et les contraintes  $\sigma_{33}$  sont négligeables (en effet, on trouve que  $\frac{\sigma_{13}(x_3)}{\sigma_{11}}$  est plus petit que 10%).

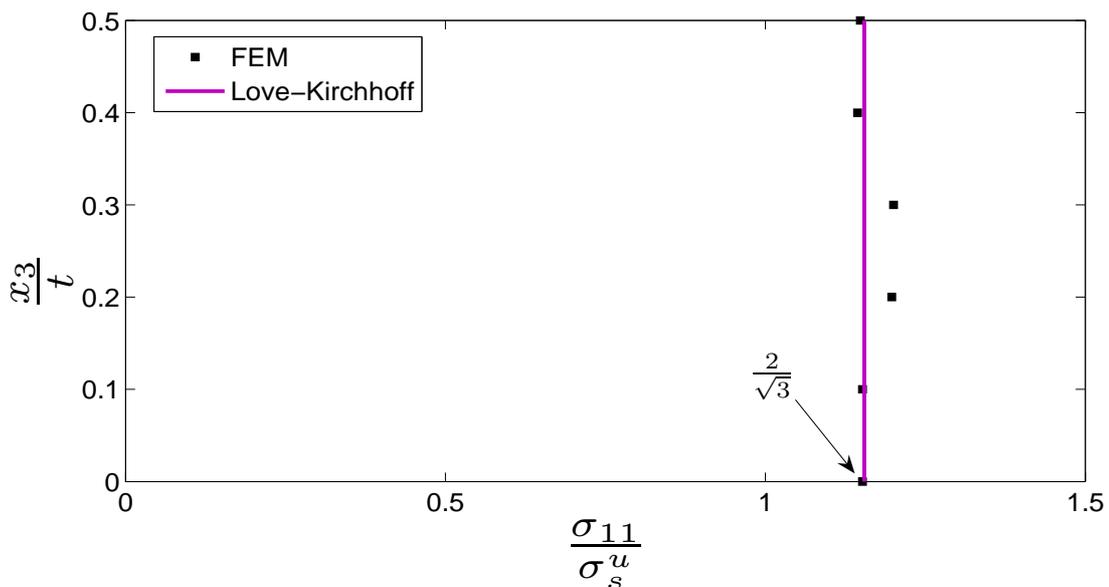


FIG. 6.10. Contrainte longitudinale normalisée  $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 1$ . FEM et modèle de Love-Kirchhoff.

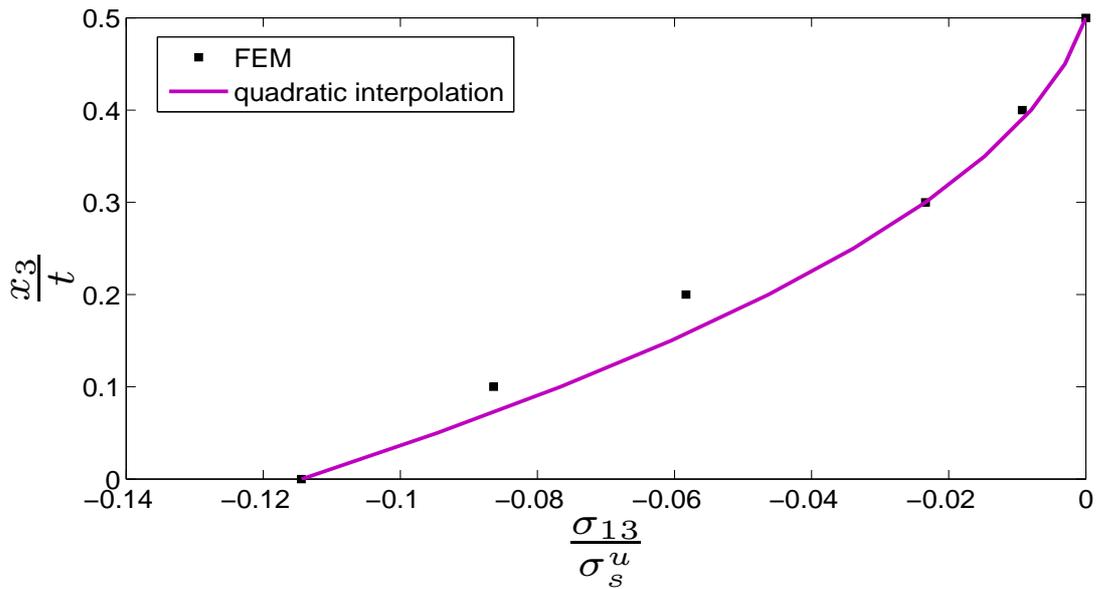


FIG. 6.11. Contrainte de cisaillement normalisé  $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 1$ . FEM et interpolation quadratique

Pour un contraste matériel  $r = 10$ , on présente les mêmes courbes que précédemment sur les Figures 6.12 et 6.13.

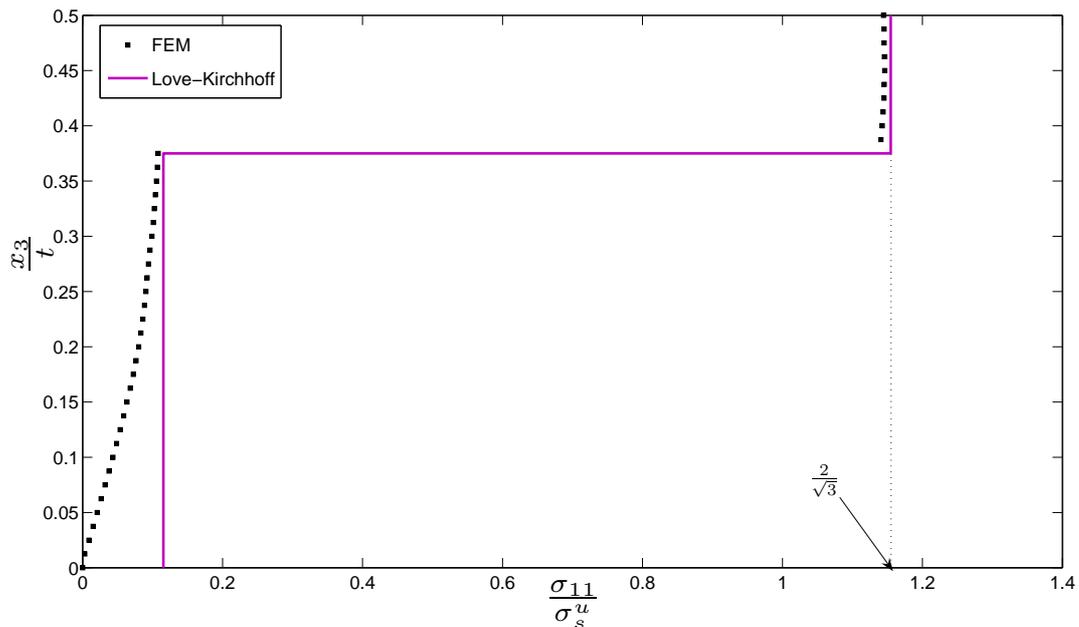


FIG. 6.12. Contrainte longitudinale normalisée  $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 10$ . FEM et modèle de Love-Kirchhoff.

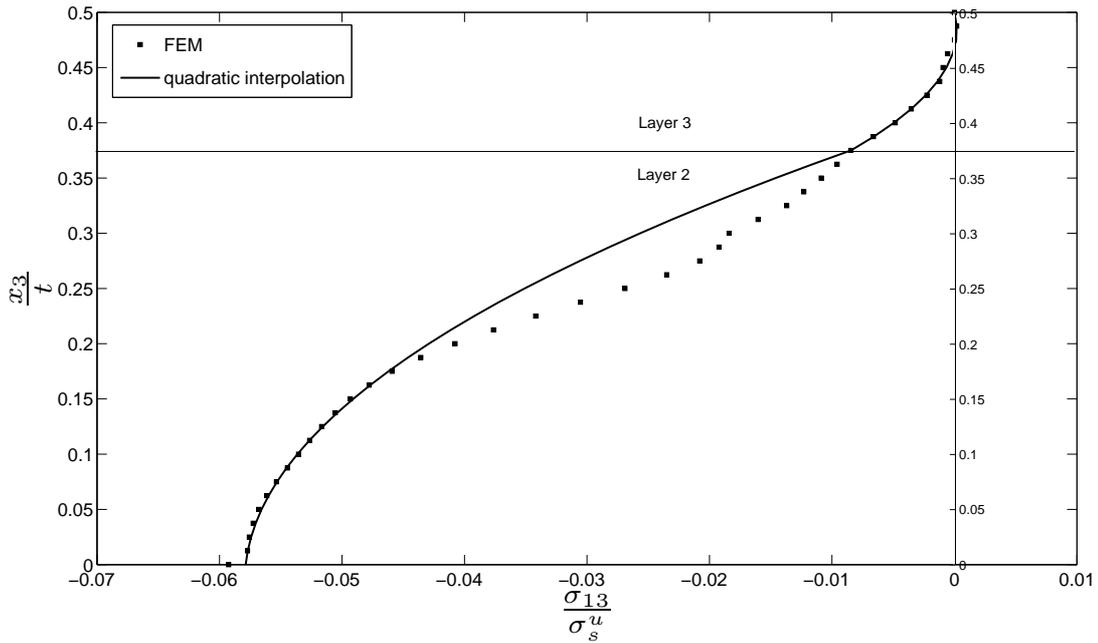


FIG. 6.13. Contrainte de cisaillement normalisée  $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 10$ . FEM et interpolation quadratique.

Les prédictions du modèle de Love-Kirchhoff pour les contraintes dans la plaque ne sont précises que pour les peaux à l'encastrement. En effet, sur la surface centrale de l'âme (plan  $x_3 = 0$ ), la contrainte de cisaillement  $\sigma_{13}$  n'est pas négligeable par rapport à la contrainte longitudinale  $\sigma_{11}$  (en fait, à cet endroit précis,  $\sigma_{11} = 0$  et  $\sigma_{13}$  est égale à la résistance de la plaque en cisaillement,  $\frac{\sigma_s^u}{\sqrt{3}}$ ).

Cependant, cela ne contredit aucunement le fait que l'erreur relative sur la charge limite est très petite ( $|\epsilon^{LK}| < 3.1\%$ ). En effet, la Table 6.3 montre que, dans le cas d'un contraste 10, la contribution des peaux à la dissipation totale est très importante : 88.6 % exactement. Comme le modèle de Love-Kirchhoff donne de très bons résultats sur les contraintes dans la peau, et que le mécanisme de plastification est également bon (rotule plastique à l'encastrement - Figure 6.8), la prédiction de la charge maximale est finalement acceptable. On remarquera aussi que, pour toutes les valeurs de  $r$ , la distribution des efforts de cisaillement à la section  $x_1 = -L$ , section encastree, est en assez bon accord avec une interpolation quadratique dans chaque couche.

### 6.5.2 Contrastes matériels intermédiaires ( $22 \leq r \leq 254$ ) :

$$H_+^{M4} < \min(H_{pb}^{M4}, H^{LK})$$

Dans cette portion ( $22 \leq r \leq 254$ ),  $H_+^{M4}$  est toujours strictement inférieure aux pressions de ruine prédites par le modèle de Love-Kirchhoff  $H^{LK}$  et par la flexion pure des peaux  $H_{pb}^{M4}$ . En fait, comme on peut le voir sur la Figure 6.7, la minimisation proposée dans le calcul de  $H_+^{M4}$  pour les contrastes de la plage 40, 60 et 100 rend active une deuxième rotule plastique au point  $x_1 = -\alpha L$ . D'un point de vue énergétique, pour ces contrastes, il est moins coûteux

de présenter une deuxième rotule, que d'avoir une seule rotule plastique et l'âme cisailée sur toute la longueur. Pour  $r = 40$ , le maillage déformé -quand la pression  $H$  atteint la valeur ultime  $H^{FEM}$ - montre également clairement une deuxième rotule plastique comme on peut le voir sur les Figures 6.7 et 6.9. Sur cette dernière, on voit que la déformation plastique cumulée équivalente est non nulle sur la partie gauche de la poutre (partie encastrement). Elle est même maximale à l'interface entre les peaux et l'âme, à l'endroit où a lieu le glissement plastique, c'est-à-dire d'un point de vue dual, à l'endroit où l'interface est plastifiée et où la contrainte de cisaillement d'interface  $\tau$  travaille. Les distributions normalisées de contraintes longitudinales,  $\frac{\sigma_{11}(x_3)}{\sigma_s^u}$  et de contraintes de cisaillement  $\frac{\sigma_{13}(x_3)}{\sigma_s^u}$ , dans la section encastree  $x_1 = -L$  sont représentées respectivement sur les Figures 6.14 et 6.15. Les prédictions du modèle M4 sont comparées aux résultats des éléments finis. On observe une très bonne corrélation. Le décalage entre les résultats sur les contraintes est essentiellement dû à la discrétisation des éléments finis. Par exemple, si l'axe neutre de la peau en flexion combinée se trouve dans un des éléments du maillage de la peau, ce dernier donne des résultats "faux" car moyennés sur son épaisseur (on trouverait donc un meilleur accord en raffinant le maillage). Sur la Figure 6.16, on trace la distribution des contraintes longitudinales normalisées dans la section de la deuxième rotule  $x_1 = -\alpha L$  donnée par les modèle éléments finis et M4. Encore une fois, les résultats sont satisfaisants.

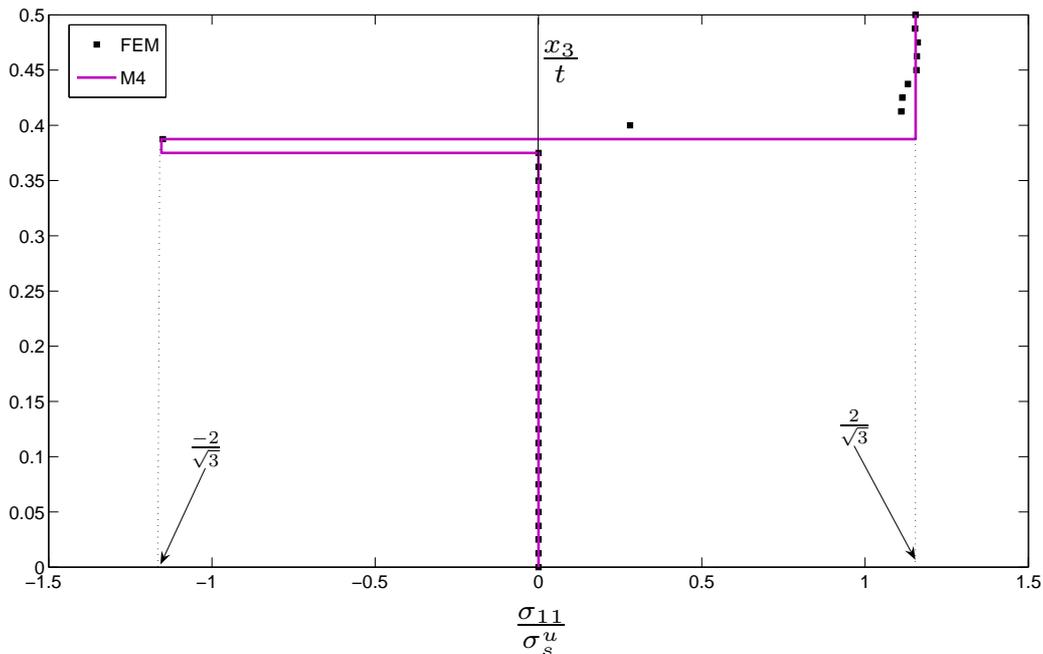


FIG. 6.14. Contrainte longitudinale normalisée  $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 40$ . FEM et modèle  $M_4$ .

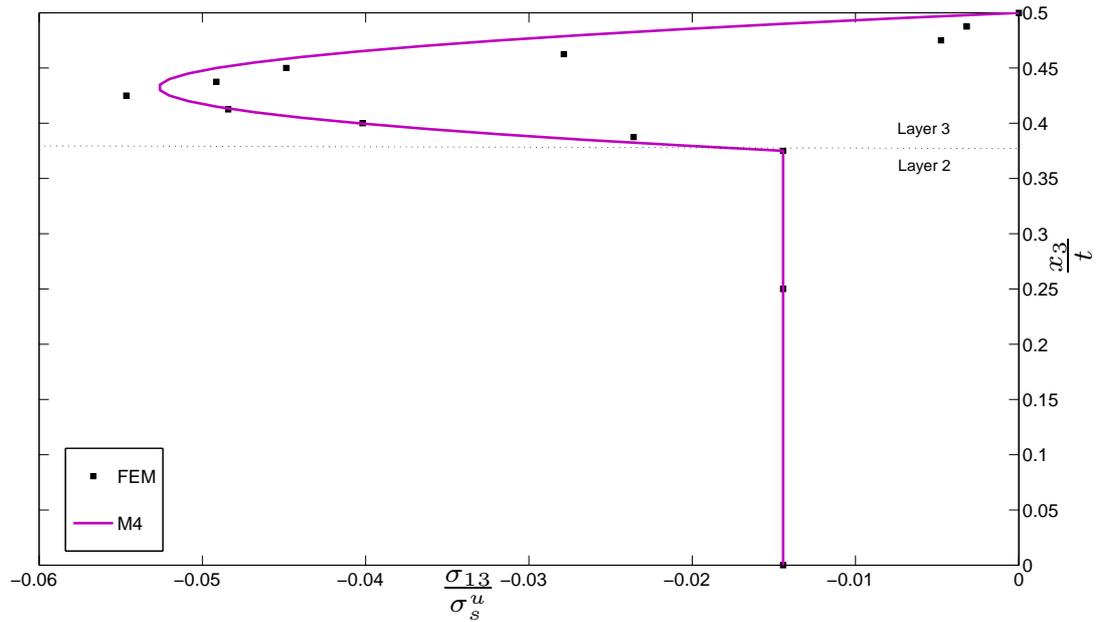


FIG. 6.15. Contrainte de cisaillement normalisée  $\frac{\sigma_{13}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -L$  pour  $r = 40$ . FEM et modèle  $M_4$ .

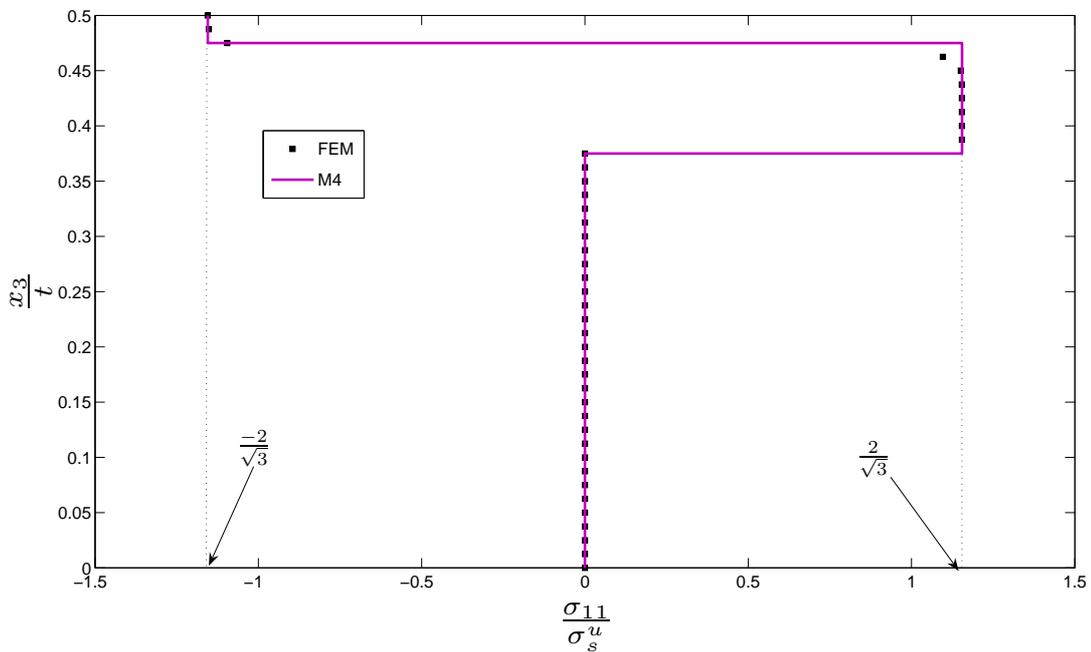


FIG. 6.16. Contrainte longitudinale normalisée  $\frac{\sigma_{11}}{\sigma_s^u}$  en  $x = -\alpha L$  pour  $r = 40$ . FEM et modèle  $M_4$ .

Expliquons maintenant comment il est possible de prédire la répartition de certaines composantes du champ de contraintes 3D dans les sections  $x_1 = -L$  et  $x_1 = -\alpha L$  en utilisant le modèle  $M_4$ .

Pour la détermination de la distribution de contrainte longitudinale  $\sigma_{11}(x_3)$  à la section  $x_1 = -L$ , on procède de la façon suivante :

D'après le modèle M4 (troisième mécanisme de plastification), on a une rotule plastique en  $x_1 = -L$ . Le taux de déformation généralisé en  $x_1 = -L$  est donc infini. C'est une distribution de Dirac en ce point :

$$(D^3, \chi^3, \gamma^3, D^2, \chi^2, \gamma^2, \Delta^{2,3}) = \delta(x_1 + L) \times (a, c, 0, 0, d, 0, 0).$$

Par conséquent,  $\sigma_{11}(x_3)$  est donnée par (5.12) parce que tous les taux de déformation dus au cisaillement sont nuls ( $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ ). L'axe neutre dans le matériau d'âme est donc  $\hat{x}_3 = 0$  (puisque'il n'y a pas de contraintes ni de déformations membranaires du fait de la symétrie), alors que l'axe neutre dans la peau est :

$$\hat{x}_3 = -\frac{a}{c} + \frac{t_c + t_s}{2},$$

où  $a$  et  $c$  sont obtenus grâce à la procédure de minimisation de MATLAB.

Pour  $r = 40$ ,  $t = 0.1$ ,  $t_c = \frac{3}{4}t$ ,  $t_s = \frac{t}{8}$  et  $\frac{L}{t} = 10$ , les valeurs suivantes des paramètres ont été trouvées :

$$\begin{cases} a = 0.015, \\ b = 0.022, \\ c = 3.38, \\ d = 0.46, \\ e = 0.50, \\ \alpha = 0.69 \end{cases}$$

Ainsi, la valeur de la cote de l'axe neutre peut être obtenue et vaut  $\frac{\hat{x}_3}{t} = 0.39$ . On peut alors tracer la Figure 6.14. La distribution de contraintes longitudinale  $\sigma_{11}(x_3)$  à la section  $x_1 = -\alpha L$  est déterminée de manière similaire (Figure 6.16).

De fait, la méthode de localisation, illustrée ici sur les contraintes longitudinales dans les rotules (5.12) est un des points importants dans l'apport de la nouvelle méthode. En effet, on peut déterminer la position du vrai axe neutre dans chaque couche, pour toutes les sections plastifiées. Rappelons que dans les modèles M4 classiques, la stratification des couches est prédéfinie "à l'avance". Le modèle construit dans notre travail permet de ne prendre en compte que la stratification matérielle. Comme nous l'avons déjà écrit, la seule application de modèles M4 au calcul à la rupture a été faite dans (Limam, 2002) et (Limam et al., 2003a) sur le renforcement de poutres et plaques en béton armé par des matériaux composites. Les auteurs ont considéré la poutre renforcée comme un matériau à 3 couches, une couche de béton en compression (la résistance en traction est négligée), une couche d'acier d'armatures et une couche de matériaux composites. La position de l'axe neutre, séparant la partie en

compression et la partie en traction dans le béton a été fixée *a priori* pour toutes les sections. Au contraire, le modèle proposé ici est capable de prédire la position de l'axe neutre *a posteriori*, c'est-à-dire en faisant le calcul. Cette position peut d'ailleurs varier d'une section à une autre comme on l'a vu dans le cas du multicouche étudié avec un contraste  $r = 40$ .

L'évaluation de la distribution des contraintes de cisaillement par le modèle M4 à la section encastrée  $x_1 = -L$  a été effectuée de la manière suivante :

Dans le troisième mécanisme de plastification, le taux de déformation généralisé en  $x_1 = (-L)^+$  est de la forme (5.16) avec  $\gamma = d - c < 0$  et  $\Delta = a - \frac{t_s}{2}c - \frac{t_c}{2}d < 0$ . Comme observé au chapitre 5,  $\sigma_{13}(x_3)$  est donc uniforme dans la couche d'âme ( $= -\frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}}$ ) et l'effort tranchant généralisé associé est  $Q^2 = -t_c \frac{\sigma_c^u}{\sqrt{3}}$ .

A priori, l'effort tranchant généralisé dans les peaux,  $Q^3 = Q^1$ , n'est pas connu. Mais on peut le déterminer grâce à l'équation d'équilibre  $2Q^3 + Q^2 = -H_+^{M4} \times L$  où  $H_+^{M4}$  est obtenue grâce à la procédure de minimisation. Finalement, connaissant les deux valeurs limites du cisaillement dans la peau et connaissant son intégrale via  $Q_3$ , la contrainte de cisaillement est complètement déterminée par son interpolation quadratique dans la peau, à l'encastrement. Au final, on accède donc à toute la distribution de l'effort de cisaillement à la section  $x_1 = (-L)^+$ . Elle est montrée sur la Figure 6.15. On observe aussi une bonne adéquation entre les résultats du modèle M4 et les résultats des éléments finis.

On remarquera sur la Figure 6.15 que le maximum de la distribution de cisaillement dans la peau est à peu près égal à 5% à la limite d'élasticité  $\sigma_s^u$ . L'hypothèse d'une cinématique de Love-Kirchhoff dans les peaux est donc pleinement justifiée.

### 6.5.3 Grandes valeurs du contraste ( $r \geq 255$ ) : $H_+^{M4} = H_{pb}^{M4}$

Pour un contraste matériel très grand  $r \geq 255$ , la charge ultime prédite par le troisième mécanisme de ruine du modèle M4 proposé coïncide exactement avec celle prédite par le second mécanisme de ruine : une flexion pure des peaux et un cisaillement total de l'âme.

Après optimisation, on trouve que les six paramètres décrivant la cinématique  $a, b, c, d, e$  et  $\alpha$  prennent exactement les valeurs de (6.11) avec  $a = 0$ . De même, les calculs éléments finis ne contredisent pas le modèle M4 : l'âme est cisailée d'abord à la section encastrée  $x_1 = -L$ , puis cette plastification s'étend à toute l'âme et finalement une rotule plastique apparaît dans chaque peau à la section encastrée  $x_1 = -L$ .

En conclusion, on peut dire que le modèle M4 proposé est en accord avec le calcul éléments finis pour toutes les valeurs de contraste matériel (l'erreur relative est plus petite que 1%). On a également mis en lumière un nouveau mécanisme de ruine constitué d'une double rotule plastique.

En négligeant les effets de cisaillement, on retrouve la cinématique du modèle homogénéisé

de Love-Kirchhoff. Ces effets ne peuvent, cependant, être négligés que dans le cas où la valeur du contraste entre les matériaux est du même ordre de grandeur que l'élanement de la poutre.

Enfin, pour des contrastes plus grands, on assiste à un mode de ruine complexe, mettant en jeu du cisaillement de l'âme et du glissement aux interfaces ainsi que de l'éirement et de la flexion des peaux. La Table 6.3 montre clairement l'importance de la contribution du cisaillement de l'âme et du glissement aux interfaces dans la dissipation totale (jusqu'à 66% pour  $r = 60$ ).

## 6.6 Conclusion générale

Dans ce chapitre, l'analyse par éléments finis d'une plaque sandwich de Von-Mises chargée hors plan a été menée. On s'est particulièrement intéressé à la charge de ruine de cette plaque. On a démontré sur cet exemple numérique que la théorie asymptotique conduisant à une plaque homogène de Love-Kirchhoff équivalente donne de bons résultats quand le contraste entre les matériaux n'est pas trop grand. Les résultats sont satisfaisants tant que l'élanement et le contraste de la plaque sont du même ordre de grandeur. Cependant, à élanement fixé, plus le contraste est grand, moins les résultats de ce modèle homogénéisé sont bons. En effet, dans ce cas, les effets de cisaillement dans le mécanisme de ruine ne sont plus négligeables et doivent être pris en compte pour la détermination de la charge de ruine. Le modèle M4 présenté dans le chapitre 4 nous a permis d'améliorer le modèle de plaque homogène équivalente de Love-Kirchhoff. Dans celui-ci, la plaque multicouche est vue comme une superposition de plaques de Reissner-Mindlin interagissant entre elles par le biais de leurs interfaces. Les effets de cisaillement sont bien pris en compte. En effectuant un développement asymptotique du même acabit que celui présenté dans le cas des plaques périodiques, on pourrait montrer que ce modèle est asymptotiquement équivalent au modèle donné par la théorie de l'homogénéisation quand l'élanement de la plaque tend vers l'infini.

Le cas particulier de la flexion cylindrique a été étudié car il permet de grandes simplifications qui conduisent à la résolution semi-analytique de la charge de ruine de la plaque. Cette hypothèse permet également d'analyser les résultats avec plus de clarté.

Une comparaison entre le modèle hétérogène 3D, le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff et le modèle M4 a été effectuée sur une plaque sandwich tricouche de Von-Mises en flexion cylindrique. La détermination de la charge de ruine du modèle 3D a été faite par éléments finis. Les charges limites des modèles de Love-Kirchhoff et M4 sont données analytiquement ou semi-analytiquement. On a alors montré que la charge de ruine calculée par le modèle homogénéisé devient très mauvaise quand le contraste entre les matériaux du sandwich grandit. En effet, dans ce cas, le cisaillement de l'âme est très important dans le mécanisme de ruine de la plaque. Cependant, on peut très bien décrire ces mécanismes par le modèle M4. Les prédictions de ce dernier pour la charge de ruine de la plaque sont donc très bonnes, puisque l'erreur entre le calcul éléments finis et le modèle est plus petite que 1%. En perspective, on peut donc penser à construire un outil numérique basé sur le modèle M4, afin de déterminer la charge limite de plaques multicouches dans des situations plus complexes que celles traitées ici.

# Chapitre 7

## Homogénéisation des poutres périodiques en analyse limite

Ce chapitre reprend l'intégralité d'un article soumis et écrit avec Karam Sab et Gilles Forest. Nous nous proposons de déterminer le domaine de résistance macroscopique de poutres périodiques grâce à un modèle analytique basé sur des techniques d'homogénéisation. Grâce à celles-ci, déterminer les caractéristiques à la rupture de telles structures revient à résoudre un problème auxiliaire sur une cellule de base (échelle micro), représentative de la structure complète (échelle macro). L'approche d'homogénéisation utilisée est très proche de celle mise en oeuvre au chapitre 2 pour les plaques périodiques en analyse limite. Elles s'inspirent essentiellement des travaux de Caillerie (1984) pour les plaques périodiques élastiques et de Kolpakov (1991) pour les poutres périodiques élastiques ainsi que des travaux de Bourgeois et al. (1998), Sab (2003) et (Dallot et Sab, 2007a) sur les plaques périodiques en analyse limite.

Dans la première partie de ce chapitre, nous explicitons le problème d'analyse limite de la structure 3D et de la poutre homogène 1D équivalente, dotée d'une cinématique d'Euler-Bernoulli. On pose ensuite un problème auxiliaire à résoudre pour homogénéiser la poutre périodique 3D. Cette approche est justifiée formellement en utilisant des techniques de développements asymptotiques. Des bornes supérieures et inférieures du domaine de résistance de la poutre homogénéisée sont proposées à partir des caractéristiques de résistances locales des matériaux constitutifs de la poutre. On étudie également le cas des poutres invariantes par translation selon  $y_1$ , coordonnée caractérisant l'axe de la poutre. Dans le cas de poutres stratifiées, c'est à dire dont l'hétérogénéité est simplement contenue dans leur épaisseur, une nouvelle borne supérieure est définie, améliorant la borne générale du cas périodique. Les bornes inférieures et supérieures du domaine sont enfin comparées sur quelques exemples de poutres sandwich composées de matériaux avec différents critères, conduisant à une bonne approximation du domaine.

## Limit analysis of periodic beams

Julien DALLOT, Karam SAB, Gilles FORET

*Université Paris-Est, Institut Navier. LAMI (ENPC / LCPC). Ecole Nationale des Ponts et Chaussées. 6 & 8 avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2. France.*

### Abstract

One of the purposes of this paper is to determine  $G_b^{hom}$ , the overall homogenized Euler-Bernoulli strength domain of a *periodic* rigid-perfectly plastic beam. It also aims at studying the relationship between the 3D and the homogenized Euler-Bernoulli beam limit analysis problems. In the homogenized beam model, the generalized 1D stresses are the axial and the flexural stress field resultants. The homogenization method suggested by Bourgeois (1997), Sab (2003) and Dallot et Sab (2007a) for periodic rigid-perfectly plastic plates is extended to periodic beams. The homogenization procedure is justified using the asymptotic expansion method. Lower and upper bounds for  $G_b^{hom}$  are provided. These bounds are analytically obtained in terms of local axial ultimate strengths. Special cases of axially-invariant beams and laminated beams are studied and an improved upper bound is derived. Considering several sandwich beams, it is found that the discrepancy between the lower bound and the improved upper bound is small.

**Keywords** : Asymptotic analysis, Homogenization, Limit analysis, Periodic beams, Sandwich beams

## 7.1 Introduction

Heterogeneous structures, particularly beams and plates, made of arranged periodically elements are widely used in civil engineering and industry. Moreover, multi-layered plates or beams are structures that are used more and more in every field of technology (for instance : CFRP or steel reinforced slabs, steel-concrete-steel walls,...). The elastic behavior of these structures has been studied for many years. The idea for modeling these structures is to substitute a homogeneous equivalent 2D plate, or 1D beam, model for the heterogeneous 3D model ((Whitney et Pagano, 1970) for laminated plates).

This work aims at studying the limit analysis of periodic and multilayered beams. The suggested homogenization method is inspired from the works of Bourgeois et al. (1998), Sab (2003), Dallot et Sab (2007a), Sab, Dallot, et Cecchi (2007) for periodic rigid-perfectly plastic plates.

Limit analysis is a simple method to predict the ability of ductile structures to sustain load. Therefore, it provides, in a simple manner, information of prominent engineering significance without the need to follow the complete load/deformation path. As soon as the fundamental theorems were established, the procedure was applied to a number of structures of interest : isotropic plates were among the first ones to be examined (Prager, 1959)

followed by isotropic perfectly plastic beams (Ball et Lee, 1962) and (Anderson et Shield, 1967), for example.

In the limit analysis theory, the behavior of the constitutive material is only known through the strength characteristics : at any point of the structure a domain is given in the stress space defining allowable stress tensors. The structure is loaded according to a loading process depending linearly on the scalar parameter  $\lambda$ . The question to be answered is whether the system, given its geometry and the strength characteristics of the material, will sustain the load  $\lambda$ . A necessary condition for the “stability” of the structure is the compatibility between equilibrium under  $\lambda$  and the material strength characteristics. If the constitutive model of the material is standard elasto-plasticity, it is well known that this necessary condition is also sufficient and that the critical  $\lambda^c$  for which the structure collapses does not depend on the elastic characteristics of the material (Salençon, 1983),(Salençon, 1990). Hence, a rigid-perfectly plastic constitutive law can be adopted for the determination of  $\lambda^c$ .

The problem considered can be stated as follows : the 3D yield function,  $F$ , at a point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  of a periodic rigid-perfectly plastic beam is a convex function of the local 3D stress tensor,  $\boldsymbol{\sigma}$ , and a  $x_1$ -periodic function, where direction 1 denotes the axis direction of the beam. The yield function defines the local strength domain,  $G(\mathbf{x})$  in the following way :  $\boldsymbol{\sigma} \in G(\mathbf{x}) \iff F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ . The beam is subjected to axial and non-axial loads which linearly depend on a positive parameter  $\lambda$ . When  $\lambda$  increases from zero, the flow of the structure starts for a critical value of  $\lambda^c$ . The limit analysis problem consists in determining this critical value,  $\lambda^c$ . Actually,  $\lambda^c$  is the maximum value of  $\lambda$  corresponding to a stress field,  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in G(\mathbf{x})$  for all  $\mathbf{x}$  which satisfies the balance equation with the prescribed loading conditions. There are three characteristic lengths in this problem :  $L$ , the length of the beam,  $t$ , the characteristic size of its section,  $S^t$ , and,  $\epsilon$ , the length of the unit cell that generates the beam by  $x_1$ -periodicity. When  $t$  and  $\epsilon$  are very small compared to  $L$ , the natural idea is to substitute a homogeneous 1D rigid-perfectly plastic Euler-Bernoulli beam model for the 3D heterogeneous one. More precisely, if  $N$  denotes the axial stress field resultant and  $M_2$  and  $M_3$  denote the flexural stress field resultants, the beam limit analysis problem consists in finding  $\lambda_b$ , the maximum value of  $\lambda$  for which there is a generalized stress field  $(N, M_2, M_3)$  which satisfies both the Euler-Bernoulli beam balance equation and the condition  $(N, M_2, M_3) \in G_b^{hom}$  for all  $x_1$ . The purpose of this paper is to determine  $G_b^{hom}$ , the overall homogenized Euler-Bernoulli strength domain, and to study the relationship between  $\lambda_b$  and  $\lambda^c$ .

The homogenization method for *elastic* periodic beams has been widely studied by many authors (Geymonat et al., 1987), (Kolpakov, 1991), (Kalamkarov et Kolpakov, 1997), (Buanic et Cartraud, 2001). For a fixed value of  $L$ , the homogenization problem consists in finding the asymptotic solution when  $t$  and  $\epsilon$  tend to zero. This approach has been initiated by Caillerie (1984) for periodic elastic plates. The homogenization scheme depends on the rate of convergence of  $t$  and  $\epsilon$ . It is generally assumed that  $\epsilon$  is a function of  $t$  which behaves like  $t^a$ ,  $a > 0$ , near zero. Three cases have been considered :  $a < 1$ ,  $a = 1$  and  $a > 1$ . The commutativity of the limiting processes has been studied in (Geymonat et al., 1987) : The obtained limit model is a homogeneous Euler-Bernoulli beam. The determination of the

overall elastic beam properties is as follows :

The case  $a < 1$  corresponds to the following scheme : first, the 3D heterogeneous structure is substituted by a periodic Euler-Bernoulli beam ( $t \rightarrow 0$ ) which is homogenized in a second step ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). This method amounts to study an Euler-Bernoulli beam with rapidly varying properties (Miller, 1994), (Cioranescu et Saint-Paulin, 1999). The case  $a > 1$  corresponds to the following scheme : the 3D heterogeneous structure is first homogenized ( $\epsilon \rightarrow 0$ ), then the obtained homogeneous 3D body is substituted by beam with Euler-Bernoulli kinematics ( $t \rightarrow 0$ ). Finally, in the case  $a = 1$  (the axial heterogeneity size is comparable to the characteristic size of the section :  $t \sim \epsilon \rightarrow 0$ ), the 3D heterogeneous body is substituted by a homogeneous Euler-Bernoulli beam whose stiffness constants are computed by solving an auxiliary boundary problem on the 3D unit cell (Kolpakov, 1991), (Kalamkarov et Kolpakov, 1997). Convergence results are established by Kolpakov (1991). This homogenization method is appropriate if  $t$  and  $\epsilon$  have the same order of magnitude. However, its application to many examples shows that its domain of validity can be enlarged (Bourgeois, 1997).

The kinematics of the homogenized beam can be enhanced by considering higher orders in the asymptotic expansions (Bourgeois, 2000). Buanic et Cartraud (2001) have derived the successive terms in the asymptotic expansions for periodic heterogeneous beams, the first order terms corresponding to Euler-Bernoulli model. Similar results for homogeneous elastic beams have been derived by Cimetière et al. (1988) and Fan et Widera (1994).

Concerning the limit analysis of 3D periodic media, the founding works on the characterization of the overall strength domain of such media are those of Suquet (1983) and de Buhan (1986). In (de Buhan, 1983), the overall strength domain of 3D layered composites is explicitly determined in terms of the strength characteristics of each layer. See also (Omri et al., 2000).

In (Telega, 1995), the homogenization of the rigid perfectly plastic periodic Love-Kirchhoff plates (case  $a < 1$ ) has been studied. Considering the case  $a = 1$  within the framework of limit analysis, Bourgeois et al. (1998), Sab (2003) independently proposed to substitute the 3D in-plane periodic plate by a homogeneous Love-Kirchhoff plate whose overall strength domain is computed by solving an auxiliary limit analysis problem on the 3D unit cell. This method has been formally justified in (Dallot et Sab, 2007a). Limam et al. (2003a) have provided a limit analysis theory for multilayered beams using a multi-particular model (Caron et al., 2006), (Dallot et Sab, 2007b). At the authors' knowledge, the present work is the first one dealing with the limit analysis of periodic beams.

The paper contains five parts : First, the 3D limit analysis problem for periodic beams is formulated in Section 2. Then, the proposed homogenized Euler-Bernoulli problem is described leading to an auxiliary problem to be solved on the 3D unit cell for the determination of the overall homogenized strength domain (Section 3). Assuming that the axial heterogeneity size is comparable to typical size of the section,  $t \sim \epsilon$ , the asymptotic expansion method (Sanchez-Palencia, 1980) is used, in Section 4, to show that the 3D problem is asymptotically equivalent to the homogenized Love-Kirchhoff plate problem, as  $t$  tends to zero. This method shows that the overall homogenized Euler-Bernoulli strength domain is unambiguously determined by solving the auxiliary limit analysis problem on the 3D unit. Actually, the asymptotic expansion method has already been used for plates with non-linear

constitutive equations : Millet et al. (2003) studied elasto-plastic homogeneous plates with strong strain hardening. Section 5 is dedicated to the determination of the overall homogenized Euler-Bernoulli strength domain. The general case is considered first : a lower and an upper bound for the overall homogenized strength domain of the equivalent beam are given. The special case of beams which are homogeneous in their axis direction is also treated : a sufficient condition for the lower bound to be exact is also provided. Finally, the case of laminated beams is considered. With this assumption, the local strength domain of the constituent materials depend only on  $x_3$ . An enhanced upper bound is proposed for the special case  $M_2 = 0$ . In Section 6, some applications of the provided method are presented. The lower and upper bounds of the strength domains of homogeneous beams with Von-Mises and Drucker-Prager yield criteria are computed and compared. Then, two symmetric sandwich beams consisting of two different materials (the core material and the skins material) are studied. The first one is made of two Von-Mises materials, whereas the second one is made with Drucker-Prager core material and Von-Mises skins material. The upper and lower bounds are also compared showing a rather small discrepancy.

## 7.2 The limit analysis problem

A rigid-perfectly plastic beam periodic in its axis direction is studied. It is assumed that the typical size of the beam section,  $t$ , and the heterogeneity typical length,  $\epsilon$ , are of the same order, and that they are very small in comparison with the length of the beam,  $L$  ( $\epsilon \sim t \ll L$ ). The purpose of this work is to substitute a homogeneous Euler-Bernoulli beam 1D model for the heterogeneous 3D model in order to determine the limit load for which the flow of the structure occurs. Figure 7.1 shows a periodic beam with rectangular section.

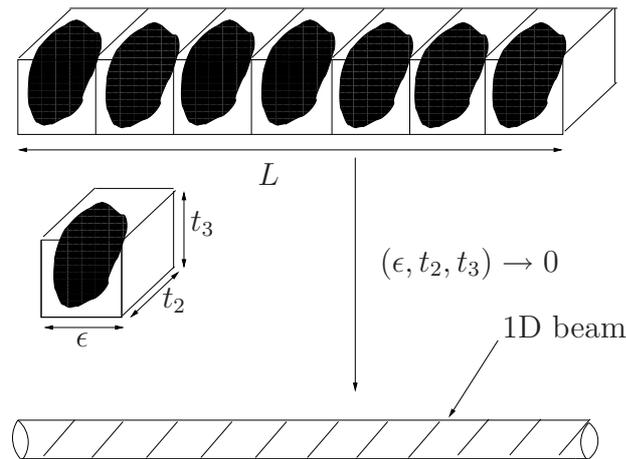


FIG. 7.1. 3D heterogeneous structure, unit cell and equivalent 1D beam.

The 3D problem is stated as follows. The heterogeneous beam of length  $L$  under consideration occupies a domain  $\Omega^t = ]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[ \times S^t$  where  $S^t = t \times S$  is the section of the beam and  $t$  its typical size ; the beam section area is  $|S^t| = t^2 \times |S| = t^2$  where  $S$  is a domain of

$\mathbb{R}^2$  of unit area centered at the origin. The boundary of the beam,  $\partial\Omega^t$ , is decomposed into three parts :

$$\partial\Omega^t = \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_1^+ \cup \partial\Omega_1^-, \text{ with } \partial\Omega_l = \left] \frac{-L}{2}, \frac{L}{2} \right[ \times \partial S^t \text{ and } \partial\Omega_1^\pm = \left\{ \pm \frac{L}{2} \right\} \times S^t.$$

The beam is free on its lateral boundary,  $\partial\Omega_l$ , and fixed on its right and left boundaries  $\partial\Omega_1^+$  and  $\partial\Omega_1^-$ . It is submitted to body forces  $\mathbf{f}^{t,\lambda}$  which can be written as follows :

$$\mathbf{f}^{t,\lambda}(x_1) = \lambda \times (f_1(x_1), tf_2(x_1), tf_3(x_1)) \quad (7.1)$$

where  $f_i(x_1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , are determined functions and  $\lambda$  is a non-dimensional positive parameter increasing from zero.

The convex domain  $G^t(\mathbf{x})$  characterizing the strength capacities of the constituent material at every point  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  of  $\Omega^t$  is introduced (Salençon, 1983). In most cases, there is a yield function  $F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})$  which is convex and differentiable with respect to the stress tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  such that :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G^t(\mathbf{x}) \iff F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \leq 0.$$

For instance, the Von-Mises yield function reads :

$$F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} - \frac{1}{3} \sigma_u^2 \quad \text{with} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Id} \quad (7.2)$$

where the value of the ultimate tensile strength  $\sigma_u(\mathbf{x}; t) > 0$  at point  $\mathbf{x}$  depends on the material constituent located at this point; here  $:$  is the double contraction operator,  $\mathbf{s}$  is the deviatoric stress tensor,  $tr(\cdot)$  is the trace operator and  $\mathbf{Id}$  is the identity second order tensor.

The Von-Mises yield function is even with respect to  $\boldsymbol{\sigma}$ . Hence,  $G^t(\mathbf{x})$  is a symmetric domain with respect to the origin :  $\boldsymbol{\sigma} \in G^t(\mathbf{x}) \iff -\boldsymbol{\sigma} \in G^t(\mathbf{x})$ . The Von-Mises ultimate tensile ( $\sigma_t$ ) and compressive ( $\sigma_c$ ) strengths are opposite :  $\sigma_t = -\sigma_c = \sigma_u$ .

A non-symmetric domain is obtained with the Drucker-Prager yield function often used for geomaterials (concrete, rocks, clay,...) :

$$F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \frac{3 \sin(\phi)}{\sqrt{3(3 + \sin^2(\phi))}} (H - \frac{tr(\boldsymbol{\sigma})}{3})$$

where  $H(\mathbf{x}; t) > 0$  and  $\phi(\mathbf{x}; t) > 0$  are the ultimate multiaxial tensile strength and the frictional angle of the material at point  $\mathbf{x} \in \Omega^t$ . The corresponding ultimate tensile and compressive strengths are not opposite. We have :

$$\begin{cases} \sigma_t &= \frac{3 \sin(\phi)}{\sin(\phi) + \sqrt{3 + \sin^2(\phi)}} H \\ \sigma_c &= \frac{3 \sin(\phi)}{\sin(\phi) - \sqrt{3 + \sin^2(\phi)}} H \end{cases} \quad (7.3)$$

It is well-known that every closed convex domain is uniquely determined by its corresponding positively homogeneous convex function of degree one called the support function (Ekeland et Temam, 1976). The support function  $\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  of  $G^t(\mathbf{x})$  is defined as :

$$\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in G^t(\mathbf{x})} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \iff G^t(\mathbf{x}) = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \leq \pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}), \forall \mathbf{d} \}$$

where  $\mathbf{d} = d_{ij}$  is a second order tensor describing the plastic strain rate.

The above kinematic definition means that  $G^t(\mathbf{x})$  is the set of stress tensors  $\boldsymbol{\sigma}$  such that the minimum of the function  $\mathbf{d} \mapsto (\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}) - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d})$  over the unit sphere  $\|\mathbf{d}\| = 1$  is positive. Moreover,  $\boldsymbol{\sigma}$  is on the boundary of  $G^t(\mathbf{x})$ , denoted by  $\partial G^t(\mathbf{x})$ , if, and only if, this minimum is equal to zero. Hence, we have :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G^t(\mathbf{x}) \iff \exists \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma} \in \partial \pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}) \quad (7.4)$$

where  $\partial \pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  is the sub-differential<sup>1</sup> of  $\pi^t$  at  $\mathbf{d}$ . In fact,  $\partial \pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  reduces to the derivative  $\frac{\partial \pi^t}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  if  $\pi^t$  is differentiable at  $\mathbf{d}$ . Note that  $\pi^t$  is not differentiable at  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , and that its sub-differential at this point is the strength domain,  $G^t(\mathbf{x})$ .

Another equivalent characterization of  $\partial G^t(\mathbf{x})$  can be obtained as follows : for a fixed  $\boldsymbol{\sigma} \neq \mathbf{0}$ , let  $b^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \geq 0$  denote the positive real such that  $b^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \times \boldsymbol{\sigma} \in \partial G^t(\mathbf{x})$ . We have :

$$b^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \inf_{\{\mathbf{d} \mid \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = 1\}} \pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}). \quad (7.5)$$

Hence,  $\partial G^t(\mathbf{x})$  can be generated by considering all the directions in the stress tensor space as follows :

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial G^t(\mathbf{x}) \iff \exists \boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = 1, b^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') < +\infty, \boldsymbol{\sigma} = b^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}') \times \boldsymbol{\sigma}'. \quad (7.6)$$

Equation (7.4) will be referred to as the *direct* method for the characterization of  $\partial G^t(\mathbf{x})$  and (7.5-7.6) as the *kinematic* method.

Actually,  $\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d})$  is the plastic dissipation power density corresponding to the well-known *normality-flow* rule :

$$\boldsymbol{\sigma} \in G^t(\mathbf{x}), \quad (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}') : \mathbf{d} \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}' \in G^t(\mathbf{x}). \quad (7.7)$$

When  $F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})$  is differentiable with respect to  $\boldsymbol{\sigma}$ , the above *normality-flow* rule is equivalent to :

$$\mathbf{d} = \zeta \frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \text{with } \zeta \geq 0, \quad F^t \leq 0 \quad \text{and} \quad \zeta F^t = 0$$

where  $\zeta(\mathbf{x})$  is the Lagrange multiplier field over  $\Omega^t$ .

For the Von-Mises case, we have :

$$\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \begin{cases} \sigma_u \times \left(\frac{2}{3} \mathbf{d} : \mathbf{d}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{if } tr(\mathbf{d}) = 0 \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{s}.$$

For the Drucker-Prager case, we have :

$$\pi^t(\mathbf{x}, \mathbf{d}) = \begin{cases} H tr(\mathbf{d}) & \text{if } tr(\mathbf{d}) \geq \sqrt{\frac{2 \sin^2(\phi)}{3 + \sin^2(\phi)} (3 tr(\mathbf{d}^2) - tr^2(\mathbf{d}))} \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (7.9)$$

$$\frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{s} + \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{3(3 + \sin^2(\phi))}} \mathbf{Id}. \quad (7.10)$$

<sup>1</sup>The sub-differential  $\partial f$  of a real function  $f(\mathbf{z})$ ,  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ , at point  $\mathbf{z}_0$  is the closed convex set of  $\mathbf{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*)$  such that  $f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{z}_0) + \mathbf{z}^* \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_0)$  for all  $\mathbf{z}$ .

The limit analysis problem consists in finding  $\lambda^t$ , the critical value of  $\lambda$  for which the flow of the structure occurs. It can be determined by finding a velocity field  $\mathbf{u}^t$ , a stress field  $\boldsymbol{\sigma}^t$  and a Lagrange multiplier field  $\zeta^t$  in  $\Omega^t$  such that :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^t + \mathbf{f}^{t,\lambda^t} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_l, \quad F^t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}^t) \leq 0, \quad (7.11)$$

and

$$\begin{cases} \mathbf{d}^t = \operatorname{grad}^s(\mathbf{u}^t), & \mathbf{d}^t = \zeta^t \frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \text{ with } \zeta^t \geq 0 \quad \text{and} \quad \zeta^t F^t = 0, \\ \mathbf{u}^t = 0 \text{ on } \partial\Omega_1^\pm. \end{cases} \quad (7.12)$$

Here,  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$  is the orthonormal basis associated with coordinates  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\mathbf{n}$  is the normal to  $\partial\Omega_l$  and  $\operatorname{grad}^s$  denotes the symmetric part of the gradient operator .

Actually,  $\lambda^t$  is the maximum value of  $\lambda$  for which there is a stress tensor field satisfying the three conditions (7.11). This is the so-called *static* method for the determination of  $\lambda^t$ . Under some mathematical assumptions,  $\lambda^t$  can be equivalently determined with the *kinematic* method as :

$$\lambda^t = \inf_{\{\mathbf{u} \mid \mathbf{u}=0 \text{ on } \partial\Omega_1^\pm, \text{ and } P_{ext}=1\}} \int_{\Omega^t} \pi^t(\mathbf{x}, \operatorname{grad}^s(\mathbf{u})) \, d\Omega^t,$$

where the power of the external forces for  $\lambda = 1$  is :

$$P_{ext} = \int_{\Omega^t} [f_1 u_1 + t f_2 u_2 + t f_3 u_3] \, d\Omega^t.$$

### 7.3 Periodic beams

The beam considered here is a periodic structure in the axial direction 1 so that it is possible to extract an elementary cell which contains all information necessary to completely describe the beam. This cell is denoted by :

$$Y = ]-\frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2}[ \times S^t$$

where  $t_1$  is the cell size in the axial direction; the boundary  $\partial Y$  of  $Y$  is decomposed into three parts :

$$\partial Y = \partial Y_l \cup \partial Y_1^+ \cup \partial Y_1^-, \quad \text{with } \partial Y_1^\pm = \left\{ \pm \frac{t_1}{2} \right\} \times S^t.$$

Assuming that  $t$  and  $t_1$  have the same order of magnitude, and that  $t$  is very small compared to the length of the beam, it is proposed to consider the 3D-body as a homogeneous Euler-Bernoulli beam according to the homogenization procedure described hereafter. This procedure is very similar to the one proposed by Caillerie (1984) for thin elastic plates, by Bourgeois et al. (1998), Sab (2003) and Dallot et Sab (2007a) for thin rigid-plastic plates and by Kolpakov (1991) and Buanic et Cartraud (2001) for periodic elastic beams.

The following notations are used :  $N(x_1)$  is the macroscopic axial stress field resultant for the homogenized beam with  $x_1 \in ]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$ ;  $M_2(x_1)$  and  $M_3(x_1)$  are the macroscopic axial stress field moments :

$$\begin{aligned}
N(x_1) &= \int_{(x_2, x_3) \in S^t} \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) dS^t, \\
M_2(x_1) &= \int_{(x_2, x_3) \in S^t} x_2 \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) dS^t, \\
M_3(x_1) &= \int_{(x_2, x_3) \in S^t} x_3 \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) dS^t.
\end{aligned}$$

The shear resultant fields are :

$$\begin{aligned}
Q_2(x_1) &= \int_{(x_2, x_3) \in S^t} \sigma_{12}(x_1, x_2, x_3) dS^t, \\
Q_3(x_1) &= \int_{(x_2, x_3) \in S^t} \sigma_{13}(x_1, x_2, x_3) dS^t.
\end{aligned}$$

$D(x_1)$  is the axial strain rate field;  $\chi_2(x_1)$  and  $\chi_3(x_1)$  are the curvature strain rate field;  $\mathbf{V} = (V_1(x_1), V_2(x_1), V_3(x_1))$  is the beam velocity field.

The beam limit analysis problem consists in finding  $\lambda_b$ , the critical value of  $\lambda$  for which there is a generalized stress field  $(N, M_2, M_3)$ , a shear resultant field  $(Q_2, Q_3)$  and a beam velocity field  $\mathbf{V}$  on  $]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$  satisfying the balance equations :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dx_1} + t^2 f_1^{t, \lambda} = 0, \\ \frac{dQ_2}{dx_1} + t^2 f_2^{t, \lambda} = 0, \quad \frac{dQ_3}{dx_1} + t^2 f_3^{t, \lambda} = 0, \\ \frac{dM_2}{dx_1} - Q_2 = 0, \quad \frac{dM_3}{dx_1} - Q_3 = 0, \end{cases} \quad (7.13)$$

the yield condition :

$$(N, M_2, M_3) \in G_b^{hom}, \quad (7.14)$$

the kinematic compatibility conditions :

$$\begin{cases} D = \frac{dV_1}{dx_1}, \quad \chi_2 = -\frac{d^2 V_2}{dx_1^2}, \quad \chi_3 = -\frac{d^2 V_3}{dx_1^2} \\ \mathbf{V} = 0, \quad \frac{dV_2}{dx_1} = \frac{dV_3}{dx_1} = 0, \quad \text{for } x_1 = \pm \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (7.15)$$

and the *normality*-flow rule :

$$(N - N') D + (M_2 - M'_2) \chi_2 + (M_3 - M'_3) \chi_3 \geq 0 \quad \forall (N', M'_2, M'_3) \in G_b^{hom}. \quad (7.16)$$

Here,  $G_b^{hom}$ , the convex strength domain of the homogenized plate, can be determined by solving an auxiliary limit analysis problem over  $Y$  as described below.

Actually,  $\lambda_b$  is the maximum value of  $\lambda$  for which there is a generalized stress field  $(N, M_2, M_3)$  satisfying the balance equations (7.13) and the yield condition (7.14) over  $]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[$ . Under some mathematical assumptions,  $\lambda_b$  can be equivalently determined with the kinematic method as :

$$\lambda_b = \inf_{\left\{ \mathbf{V} \mid \mathbf{V}=0, \frac{dV_2}{dx_1} = \frac{dV_3}{dx_1} = 0, \text{ for } x_1 = \pm \frac{L}{2}, \text{ and } P_b = 1 \right\}} \int_{x_1 \in ]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[} \pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3) dx_1$$

where the power of the external forces for  $\lambda = 1$  is :

$$P_b = t^2 \times \int_{x_1 \in ]-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}[} [f_1 V_1 + t f_2 V_2 + t f_3 V_3] dx_1.$$

and the support function  $\pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3)$  of  $G_b^{hom}$  is defined as :

$$\pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3) = \sup_{(N, M_2, M_3) \in G_b^{hom}} ND + M_2 \chi_2 + M_3 \chi_3 \quad (7.17)$$

$$\iff$$

$$G_b^{hom} = \{(N, M_2, M_3) \mid ND + M_2 \chi_2 + M_3 \chi_3 \leq \pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3), \forall (D, \chi_2, \chi_3)\}.$$

The last equality is the kinematic definition of  $G_b^{hom}$ .

The determination of  $G_b^{hom}$  is as follows : for every  $(N, M_2, M_3)$  the set of statically compatible 3D stress field  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  of unit cell  $Y$  is defined by :

$$SA_b(N, M_2, M_3) = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \mid N = t^2 \langle \sigma_{11} \rangle, M_2 = t^2 \langle y_2 \sigma_{11} \rangle, M_3 = t^2 \langle y_3 \sigma_{11} \rangle \right. \\ \left. \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ on } Y, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1 \text{ } y_1 \text{-periodic; } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial Y_l \right\} \quad (7.18)$$

where  $\langle \cdot \rangle$  is the volume average operator on  $Y$  and  $\mathbf{n}$  is the normal to  $\partial Y_l$ . The homogenized domain  $G_b^{hom}$  is the set of the generalized stresses  $(N, M_2, M_3)$  such that there is a 3D stress field  $\boldsymbol{\sigma}$  in  $SA_b(N, M_2, M_3)$  with  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y})$  for all  $\mathbf{y}$  in  $Y$  :

$$G_b^{hom} = \{(N, M_2, M_3) \mid \exists \boldsymbol{\sigma} \in SA_b(N, M_2, M_3), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y}), \forall \mathbf{y} \in Y\}. \quad (7.19)$$

The kinematic definition of  $G_b^{hom}$  is obtained as follows : For every  $(D, \chi_2, \chi_3)$ , the set of kinematically compatible velocity fields of the unit cell,  $\mathbf{v} = (v_i)$  is defined by :

$$KA_b(D, \chi_2, \chi_3) = \left\{ \mathbf{v} \mid \text{grad}^s(\mathbf{v}) = (D + y_2 \chi_2 + y_3 \chi_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \text{grad}^s(\mathbf{u}^{per}), \right. \\ \left. \mathbf{u}^{per} \text{ } y_1 \text{-periodic} \right\} \quad (7.20)$$

The sets  $SA_b$  and  $KA_b$  are actually in duality in the sense of the virtual power on the unit cell :

$$\forall (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) \in SA_b(N, M_2, M_3) \times KA_b(D, \chi_2, \chi_3), ND + M_2 \chi_2 + M_3 \chi_3 = t^2 \langle \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}^s(\mathbf{v}) \rangle. \quad (7.21)$$

Using (7.21), the following kinematic definition of  $G_b^{hom}$  (7.17) may be obtained. See Suquet (1983), Salençon (1983), Bourgeois (1997), Sab (2003) and Dallot et Sab (2007a), for instance :

$$\pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3) = \inf_{\mathbf{v} \in KA_b(D, \chi_2, \chi_3)} t^2 \langle \pi(\text{grad}^s(\mathbf{v})) \rangle. \quad (7.22)$$

Hence, the following *direct* characterization of  $\partial G_b^{hom}$  is obtained :

$$(N, M_2, M_3) \in \partial G_b^{hom} \iff \exists (D, \chi_2, \chi_3) \neq (0, 0, 0), (N, M_2, M_3) \in \partial \pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3) \quad (7.23)$$

where  $\partial \pi_b^{hom}$  is the sub-differential of  $\pi_b^{hom}$ . Moreover, using (7.22) and (7.23), it is found that  $(N, M_2, M_3)$  is on  $\partial G_b^{hom}$  if, and only if, there exists a stress field  $\boldsymbol{\sigma}$  in  $SA_b(N, M_2, M_3)$ ,

a generalized strain rate  $(D, \chi_2, \chi_3)$  and a velocity field  $\mathbf{u}^{per}$  such that the corresponding strain rate  $\mathbf{d} = \text{grad}^s(\mathbf{v})$  in (7.20) and  $\boldsymbol{\sigma}$  are related by the normality-flow rule (7.7).

Equivalently, the *kinematic* characterization of  $\partial G_b^{hom}$  can be obtained as follows :

$$\begin{aligned} (N, M_2, M_3) \in \partial G_b^{hom} &\Leftrightarrow \exists (N', M'_2, M'_3), NN' + M_2M'_2 + M_3M'_3 = 1, \\ B(N', M'_2, M'_3) &< +\infty, (N, M_2, M_3) = B(N', M'_2, M'_3) \times (N', M'_2, M'_3) \end{aligned} \quad (7.24)$$

where

$$B(N', M'_2, M'_3) = \inf_{\{(D, \chi_2, \chi_3) \mid N'D + M'_2\chi_2 + M'_3\chi_3 = 1\}} \pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3). \quad (7.25)$$

For rectangular unit cells, the beam unit cell problem introduced in this work is different from the plate unit cell problem introduced by Bourgeois et al. (1998) and Sab (2003). Indeed, the static definition of the homogenized beam strength domain prescribes three constraints  $(N, M_2, M_3)$  on the field  $\sigma_{11}$  whereas the static definition of the homogenized plate strength domain prescribes six constraints  $(N_{11}, N_{12}, N_{22}, M_{11}, M_{12}, M_{22})$  on the stress fields  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Moreover, free boundary conditions instead of periodic conditions are prescribed on the lateral boundary of the cell. In the same way, the kinematic compatibility conditions are not the same for plate and beam unit cell problems.

## 7.4 Asymptotic expansion

The purpose of this section is to provide a justification for the homogenization method proposed in section 3. This procedure is applied to periodic beams when the typical sizes of the section and the heterogeneity have the same order of magnitude. This means that  $\lambda_b$  is a good estimation of  $\lambda^t$  for small enough  $t$ .

More precisely, let  $Y^*$  denote the normalized cell defined by :

$$Y^* = t^{-1}Y = ]\frac{-t_1^*}{2}, \frac{t_1^*}{2}[ \times S.$$

It is assumed that the yield function has the following form :

$$F^t(x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{\sigma}) = F(t^{-1}x_1, t^{-1}x_2, t^{-1}x_3, \boldsymbol{\sigma}) \quad (7.26)$$

where  $F$  is a function of  $\boldsymbol{\sigma}$  and  $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*) \in \mathbb{R} \times S$  which is periodic in the  $y_1^*$  coordinate (period  $t_1^*$ ) and convex in  $\boldsymbol{\sigma}$ . In the Von-Mises case (7.2), this means that there is a positive function  $\sigma_u(\mathbf{y}^*)$  which is  $t_1^*$ -periodic in  $y_1^*$  such that :  $\sigma_u(\mathbf{x}; t) = \sigma_u(\mathbf{y}^*)$  and  $\mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{x}$ .

Using the property (7.26), it can be seen that, for fixed  $F$ ,  $L$  and  $f_i$ ,  $\lambda_b$  does not depend on  $t$ . Indeed, for  $t = 1$ , let  $G_b^{hom,*}$  denote the convex strength domain of the homogenized beam of unit section area defined by (7.19), and let  $SA_b^*$  denote the set of statically compatible stress fields defined by (7.18). Using the change of variables  $\mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{y}$ , there is a one-to-one map from  $\boldsymbol{\sigma} \in SA_b(N, M_2, M_3)$  to  $\boldsymbol{\sigma}^* \in SA_b^*(t^{-2}N, t^{-3}M_2, t^{-3}M_3)$  with  $\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{y}^*) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{y})$ . Hence, we have  $(N, M_2, M_3) \in G_b^{hom} \iff (t^{-2}N, t^{-3}M_2, t^{-3}M_3) \in G_b^{hom,*}$ . Recalling that  $\lambda_b$  is the maximum value of  $\lambda$  for which there is a generalized stress field  $(N, M_2, M_3)$

satisfying (7.13) and (7.14), it is clear that  $\lambda_b$  can be computed by setting  $t = 1$ . Now,  $F$ ,  $L$  and  $f_i$  being fixed, the homogenization problem is to find the limit of  $\lambda^t$  as  $t$  approaches zero.

The homogenization method for the determination of the overall ultimate strength has initially been developed in (Suquet, 1983), (de Buhan, 1986) and (Bouchitté, 1986-1987) for periodic continuum media, in (Sab, 1991) and (Sab, 1994) for random continuum media and in (Florence et Sab, 2006) for discrete media. For a 3D continuum medium periodic in all three directions, it has been shown in (Bouchitté, 1986-1987) that the limit load of the real heterogeneous domain is asymptotically equal to the limit load of the homogenized domain, as the heterogeneity size goes to zero, if the boundary conditions are such that *no free-edge effects occur*. This is the case if all the displacement components are prescribed at the domain's boundary. On the other hand, de Buhan (1986) has provided an example where the limit load of the real heterogeneous domain is asymptotically strictly lower than the limit load of the homogenized domain. Homogenization results using the  $\Gamma$ -convergence theory have been established by Bouchitté (1986-1987) for periodic continuous media, by Sab (1994) for continuous random media, by Telega (1995) for periodic plates in the case where the thickness of the plate is very small compared to the typical heterogeneity size and by Lewinski et Telega (1999) for periodic plates in the case where the thickness of the plate and the typical size of the heterogeneity have the same order of magnitude for a Hencky material. However, the use of  $\Gamma$ -convergence would require many mathematical technicalities which are beyond the scope of this paper. Nevertheless, the well-known asymptotic expansion method -(Bensoussan et al., 1978), (Sanchez-Palencia, 1980), (Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia, 1992) for instance- will be used hereafter to provide a formal justification of the fact that  $\lambda_b$  is the limit of  $\lambda^t$  as  $t$  tends to zero *when no free-edge effects occur*.

According to this method, it is assumed that a solution to (7.11-7.12) can be written in the following form :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^t = t^{-1}\mathbf{u}^{-1} + t^0\mathbf{u}^0 + t^1\mathbf{u}^1 + \dots \\ \boldsymbol{\sigma}^t = t^0\boldsymbol{\sigma}^0 + t^1\boldsymbol{\sigma}^1 + \dots \\ \zeta^t = t^0\zeta^0 + t^1\zeta^1 + \dots \\ \lambda^t = t^0\lambda^0 + t^1\lambda^1 + \dots \end{cases} \quad (7.27)$$

where  $\mathbf{u}^i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^i$ ,  $\zeta^i$  are functions of  $(x_1, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  which are  $t_1^*$ -periodic in  $y_1^*$  coordinate and  $\mathbf{y}^* = t^{-1}\mathbf{x}$ . Actually, the form of these asymptotic expansions is strongly related to the assumptions (7.1) on the orders of the body forces with respect to the section area  $t^2$ . It is expected that  $f_1^{t,\lambda}$  having the order of magnitude of  $t^0$  and  $f_2^{t,\lambda}$  and  $f_3^{t,\lambda}$  having the order of magnitude of  $t$ , the axial stress component will have the order of magnitude of  $t^0$ . The derivation rule for  $\mathbf{u}^i$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^i$ ,  $\zeta^i$  is :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mathbf{x}} &= \left( \frac{d}{dx_1}, \frac{d}{dx_2}, \frac{d}{dx_3} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, 0, 0 \right) + t^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y_1^*}, \frac{\partial}{\partial y_2^*}, \frac{\partial}{\partial y_3^*} \right) = \partial_{(x_1)} + t^{-1}\partial_{\mathbf{y}^*}. \end{aligned}$$

With obvious notations, the balance equation becomes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^t &= t^{-1} (\operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^0) + t^0 (\operatorname{div}_{(x_1)} \boldsymbol{\sigma}^0 + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^1) + t^1 (\operatorname{div}_{(x_1)} \boldsymbol{\sigma}^1 + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^2) + \dots \\ &= - t^0 (\lambda^0 f_1 \mathbf{e}_1) - t^1 (\lambda^1 f_1 \mathbf{e}_1 + \lambda^0 f_2 \mathbf{e}_2 + \lambda^0 f_3 \mathbf{e}_3) - \dots \end{aligned}$$

Identifying all the terms of the above two series, it is found :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^0 = 0 \quad (7.28)$$

for the order  $t^{-1}$ , and

$$\operatorname{div}_{(x_1)} \boldsymbol{\sigma}^0 + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^1 + \lambda^0 f_1 \mathbf{e}_1 = 0 \quad (7.29)$$

for the order  $t^0$ , and

$$\operatorname{div}_{(x_1)} \boldsymbol{\sigma}^i + \operatorname{div}_{\mathbf{y}^*} \boldsymbol{\sigma}^{i+1} + \lambda^i f_1 \mathbf{e}_1 + \lambda^{i-1} f_2 \mathbf{e}_2 + \lambda^{i-1} f_3 \mathbf{e}_3 = 0 \quad (7.30)$$

for the order  $t^i$  with  $i \geq 1$ .

The boundary conditions  $\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = 0$  on  $\partial\Omega_l$  give the same conditions for all  $i \geq 0$  :

$$\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_l. \quad (7.31)$$

Using (7.31) <sub>$i=0,1$</sub>  and the  $y_1^*$ -periodicity of  $\boldsymbol{\sigma}^i \cdot \mathbf{e}_1$ , and taking the volume average over  $\mathbf{y}^* \in Y^*$  of the first component of (7.29) gives :

$$\frac{dN^0}{dx_1} + \lambda^0 f_1 = 0 \quad (7.32)$$

where  $N^0(x_1) = \langle \sigma_{11}^0 \rangle_{Y^*}$  and  $\langle \cdot \rangle_{Y^*}$  is the volume average operator over  $Y^*$ . In a similar way, averaging the second and third components of (7.29) gives :

$$Q_2^0(x_1) = \langle \sigma_{12}^0 \rangle_{Y^*} = 0, \quad Q_3^0(x_1) = \langle \sigma_{13}^0 \rangle_{Y^*} = 0.$$

Averaging the first component of (7.29)  $\times y_2^*$  and (7.29)  $\times y_3^*$  gives<sup>2</sup> :

$$\frac{dM_2^0}{dx_1} - Q_2^1 = 0, \quad \frac{dM_3^0}{dx_1} - Q_3^1 = 0, \quad (7.33)$$

where  $M_2^0(x_1) = \langle y_2^* \sigma_{11}^0 \rangle_{Y^*}$ ,  $M_3^0(x_1) = \langle y_3^* \sigma_{11}^0 \rangle_{Y^*}$ ,  $Q_2^1(x_1) = \langle \sigma_{12}^1 \rangle_{Y^*}$  and  $Q_3^1(x_1) = \langle \sigma_{13}^1 \rangle_{Y^*}$ .

Finally, averaging the second and third components of (7.30) <sub>$i=1$</sub>  gives :

$$\frac{dQ_2^1}{dx_1} + \lambda^0 f_2 = 0, \quad \frac{dQ_3^1}{dx_1} + \lambda^0 f_3 = 0. \quad (7.34)$$

From the compatibility equation, it is found that the strain rate field can be written as :

$$\mathbf{d}^t = t^{-2} \mathbf{d}^{-2} + t^{-1} \mathbf{d}^{-1} + t^0 \mathbf{d}^0 + \dots$$

with

$$\mathbf{d}^{-2} = \operatorname{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{-1})$$

and for all  $i \geq -1$  :

$$\mathbf{d}^i = \operatorname{grad}_{(x_1)}^s(\mathbf{u}^i) + \operatorname{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{i+1}).$$

<sup>2</sup>Here we use the fact that the beam section  $S$  is centered at the origin

The boundary condition over  $\partial\Omega_1^\pm$  leads to :

$$\mathbf{u}^i \left( x_1 = \pm \frac{L}{2}, y_1^*, y_2^*, y_3^* \right) = 0 \quad \forall i \geq -1. \quad (7.35)$$

Assuming that the function  $F^t$  is differentiable and using a Taylor expansion in  $\boldsymbol{\sigma}$ , it is found that the yield function can be written as :

$$\begin{aligned} F^t &= F(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) + t \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \right] : \boldsymbol{\sigma}^1 \right) \\ &+ t^2 \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \right] : \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^1 : \left[ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) (\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \right] : \boldsymbol{\sigma}^1 \right) + \dots \end{aligned}$$

A similar expression can be found for  $\frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}^t)$ . Hence, the constitutive law provides the following equations :

$$\mathbf{d}^{-2} = \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^{-1}) = 0, \quad (7.36)$$

$$\mathbf{d}^{-1} = \text{grad}_{(x_1)}^s(\mathbf{u}^{-1}) + \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\mathbf{u}^0) = 0, \quad (7.37)$$

$$\mathbf{d}^0 = \zeta^0 \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \quad \text{with } \zeta^0 \geq 0, F(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \leq 0 \text{ and } \zeta^0 F(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) = 0.$$

From (7.36) it is deduced that  $\mathbf{u}^{-1}$  is a rigid-body velocity field in  $\mathbf{y}^*$  which is periodic in  $y_1^*$ . Moreover, using (7.37), the periodicity of  $\mathbf{u}^0$  in  $y_1^*$  and the boundary conditions (7.35),  $i = -1, 0$ , it can be found that  $\mathbf{u}^{-1}$  and  $\mathbf{u}^0$  have the following form :

$$\mathbf{u}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_2^{-1}(x_1) \\ V_3^{-1}(x_1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} V_1^0(x_1) - \frac{dV_2^{-1}}{dx_1}(x_1)y_2^* - \frac{dV_3^{-1}}{dx_1}(x_1)y_3^* \\ V_2^0(x_1) + W^0(x_1)y_3^* \\ V_3^0(x_1) - W^0(x_1)y_2^* \end{pmatrix}$$

and

$$V_2^{-1} = V_3^{-1} = \frac{dV_2^{-1}}{dx_1} = \frac{dV_3^{-1}}{dx_1} = V_1^0 = 0 \text{ for } x_1 = \pm \frac{L}{2}. \quad (7.38)$$

We obtain then :

$$\mathbf{d}^0 = (D^0 + y_2^* \chi_2^{-1} + y_3^* \chi_3^{-1}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \text{grad}_{\mathbf{y}^*}^s(\hat{\mathbf{u}}^1) \quad (7.39)$$

where  $\hat{\mathbf{u}}^1(x_1, y_1^*, y_2^*, y_3^*)$  is the  $y_1^*$ -periodic velocity field defined by :

$$\hat{\mathbf{u}}^1 = \mathbf{u}^1 - y_2^* \left( \frac{dV_2^0}{dx_1}(x_1) + \frac{dW^0}{dx_1}(x_1)y_3^* \right) \mathbf{e}_2 - y_3^* \left( \frac{dV_3^0}{dx_1}(x_1) - \frac{dW^0}{dx_1}(x_1)y_2^* \right) \mathbf{e}_3$$

and

$$D^0 = \frac{dV_1^0}{dx_1}, \quad \chi_2^{-1} = -\frac{d^2V_2^{-1}}{dx_1^2}, \quad \chi_3^{-1} = -\frac{d^2V_3^{-1}}{dx_1^2}. \quad (7.40)$$

Using the static definition of  $G_b^{\text{hom},*}$ , (7.19) with  $t = 1$ , it is found that  $(N^*, M_2^*, M_3^*) = (N^0, M_2^0, M_3^0) \in G_b^{\text{hom},*}$  because of (7.28), (7.31) and  $F(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\sigma}^0) \leq 0$ . Combining (7.32), (7.33) and (7.34), we prove that  $(N^*, M_2^*, M_3^*)$  actually satisfies all the three static conditions (7.13) with  $t = 1$  and  $\lambda = \lambda^0$ . Moreover, from (7.40) and (7.38), it can be easily seen that  $\mathbf{V}^* = (V_1^0, V_2^{-1}, V_3^{-1})$  and its corresponding generalized strain rate field

$(D^*, \chi_2^*, \chi_3^*) = (D^0, \chi_2^{-1}, \chi_3^{-1})$  satisfy the two compatibility conditions of (7.15). The task of checking whether  $(D^*, \chi_2^*, \chi_3^*)$  obeys the *normality-flow* rule with the convex strength domain  $G_b^{hom,*}$ , remains. Indeed, let  $(N^{*'}, M_2^{*'}, M_3^{*'}) \in G_b^{hom,*}$  and a corresponding stress field  $\sigma^{*'}$  in  $SA_b^*(N^{*'}, M_2^{*'}, M_3^{*'})$  with  $\sigma^{*'(\mathbf{y}^*)} \in G(\mathbf{y}^*)$  for all  $\mathbf{y}^*$  in  $Y^*$ . Using (7.21) with  $t = 1$  and (7.39), we have  $(N^* - N^{*'})D^* + (M_2^* - M_2^{*'})\chi_2^* + (M_3^* - M_3^{*'})\chi_3^* = \langle (\sigma^0 - \sigma^{*'}) : \mathbf{d}^0 \rangle_{Y^*} \geq 0$  because of the local *normality-flow* rule (7.7).

Therefore, we have proved that  $\lambda^0$  can be determined by solving the beam limit analysis problem (7.13-7.16).

## 7.5 The homogenized Euler-Bernoulli strength domain of heterogeneous beams

In this section, we aim at determining the homogenized strength domain of periodic beams. First, lower and upper bounds for the homogenized strength domain of a generic periodic beam are provided. Then, the special case of  $y_1$ -invariant beams - which are homogeneous in their axis direction 1- is studied. Next, the case of laminated beams -which are homogeneous in both  $y_1$ -direction and  $y_2$ -direction is considered. An improved upper bound is proposed for these beams. Finally, the strength domain of several homogeneous and sandwich beams are computed in Section 6, providing the accuracy of the bounds proposed.

### 7.5.1 The general case : Upper and lower bounds for $G_b^{hom}$

As it has been shown above, the exact determination of  $G_b^{hom}$  necessitates the solution of a 3D limit analysis problem on the unit cell,  $Y$ . In general, this problem can not be analytically solved. This section aims at deriving simple upper and lower bounds for  $G_b^{hom}$  in terms of the ultimate strengths of the material constituents  $\sigma_t$ ,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_M$  and  $\sigma_m$  where

$$\sigma_t(\mathbf{y}) = \max \{ \sigma, \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \in G(\mathbf{y}) \}$$

is the ultimate tensile strength in direction 1 at point  $\mathbf{y} \in Y$  ;

$$\sigma_c(\mathbf{y}) = \min \{ \sigma, \sigma \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \in G(\mathbf{y}) \}$$

is the ultimate compressive strength ;

$$\sigma_M(\mathbf{y}) = \max \{ \sigma_{11}, \sigma \in G(\mathbf{y}) \}$$

is the maximum (1, 1)-stress component ; and

$$\sigma_m(\mathbf{y}) = \min \{ \sigma_{11}, \sigma \in G(\mathbf{y}) \}$$

is the minimum  $(1, 1)$ -stress component.

We introduce also :

$$\sigma_t^*(y_2, y_3) = \inf_{y_1 \in ]-\frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2}[} \sigma_t(y_1, y_2, y_3), \quad \sigma_c^*(y_2, y_3) = \sup_{y_1 \in ]-\frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2}[} \sigma_c(y_1, y_2, y_3)$$

and

$$\sigma_M^\#(y_2, y_3) = \frac{1}{t_1} \int_{-\frac{t_1}{2}}^{+\frac{t_1}{2}} \sigma_M(y_1, y_2, y_3) dy_1, \quad \sigma_m^\#(y_2, y_3) = \frac{1}{t_1} \int_{-\frac{t_1}{2}}^{+\frac{t_1}{2}} \sigma_m(y_1, y_2, y_3) dy_1.$$

The natural condition :

$$\sigma_c^* \leq 0 \leq \sigma_t^* \quad \forall (y_2, y_3)$$

will be assumed in the sequel (otherwise, the unit cell could not sustain the free stress state  $\sigma = 0$ ).

We have the straightforward inequalities :

$$\sigma_m^\# \leq \sigma_c^* \leq 0 \leq \sigma_t^* \leq \sigma_M^\#$$

A lower bound called  $G_b^{hom,l}$  is obtained from the static definition of  $G_b^{hom}$ , (7.19), by considering stress fields in  $SA_b(N, M_1, M_2)$  of the form  $\sigma = \sigma(y_2, y_3)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ . According to the definitions of  $\sigma_t^*$  and  $\sigma_c^*$  and to condition  $\sigma(\mathbf{y}) \in G(\mathbf{y})$ , we have :

$$\sigma_c^* \leq \sigma \leq \sigma_t^* \quad \forall (y_2, y_3). \quad (7.41)$$

Hence,  $G_b^{hom,l}$  is the set :

$$G_b^{hom,l} = \left\{ (N, M_2, M_3) \mid \exists \sigma(y_2, y_3), \sigma_c^* \leq \sigma \leq \sigma_t^* \right. \\ \left. N = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \sigma dS^t, M_2 = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_2 \sigma dS^t, M_3 = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_3 \sigma dS^t \right\}. \quad (7.42)$$

The support function of  $G_b^{hom,l}$ ,  $\pi_b^{hom,l}$ , is obtained using standard convex analysis methods. We have :

$$G_b^{hom,l} = \{(N, M_2, M_3) \mid ND + M_2\chi_2 + M_3\chi_3 \leq \pi_b^{hom,l}(D, \chi_2, \chi_3)\} \quad (7.43)$$

where

$$\begin{cases} \pi_b^{hom,l}(D, \chi_2, \chi_3) = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \pi^*(y_2, y_3, D + y_2\chi_2 + y_3\chi_3) dS^t \\ \text{with} \\ \pi^*(y_2, y_3, d) = \sigma_t^*(y_2, y_3) \times d \text{ if } d \geq 0, \\ \pi^*(y_2, y_3, d) = \sigma_c^*(y_2, y_3) \times d \text{ if } d \leq 0. \end{cases} \quad (7.44)$$

Similarly to (7.23), we know that a parametric representation of  $\partial G_b^{hom,l}$  is :

$$(N, M_2, M_3) \in \partial G_b^{hom,l} \Leftrightarrow \exists (D, \chi_2, \chi_3) \neq (0, 0, 0), (N, M_2, M_3) \in \partial \pi_b^{hom,l}(D, \chi_2, \chi_3).$$

Using (7.44), it comes :

$$\begin{aligned}
(N, M_2, M_3) &\in \partial G_b^{hom,l} \Leftrightarrow \exists (D, \chi_2, \chi_3) \neq (0, 0, 0) \text{ such that} \\
N &= \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \sigma_u^*(y_2, y_3) dS^t \\
M_2 &= \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_2 \sigma_u^*(y_2, y_3) dS^t \\
M_3 &= \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_3 \sigma_u^*(y_2, y_3) dS^t \\
\text{where } \sigma_u^*(y_2, y_3) &= \begin{cases} \sigma_t^*(y_2, y_3) & \text{if } D + y_2 \chi_2 + y_3 \chi_3 > 0 \\ \sigma_c^*(y_2, y_3) & \text{if } D + y_2 \chi_2 + y_3 \chi_3 < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.45}$$

An upper bound called  $G_b^{hom,u}$  is obtained from the kinematic definition of  $G_b^{hom}$  by considering the kinematically compatible velocity field of the unit cell such that  $\mathbf{u}^{per} = 0$  in (7.20). Hence, the support function of  $G_b^{hom,u}$  is an upper bound for  $\pi_b^{hom}$ , (7.22), and it is given by :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_b^{hom,u}(D, \chi_2, \chi_3) = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \pi^\sharp(y_2, y_3, D + y_2 \chi_2 + y_3 \chi_3) dS^t \\ \text{with} \\ \pi^\sharp(y_2, y_3, d) = \sigma_M^\sharp(y_2, y_3) \times d \text{ if } d \geq 0, \\ \pi^\sharp(y_2, y_3, d) = \sigma_m^\sharp(y_2, y_3) \times d \text{ if } d \leq 0. \end{array} \right.$$

Indeed, according to the definitions of  $\sigma_M^\sharp$ ,  $\sigma_m^\sharp$  and  $\pi(\mathbf{y}, d\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1)$ , we have :

$$\pi^\sharp(y_2, y_3, d) = \frac{1}{t_1} \int_{-\frac{t_1}{2}}^{+\frac{t_1}{2}} \pi(y_1, y_2, y_3, d\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) dy_1.$$

Moreover, the static definition of  $G_b^{hom,u}$  is obtained as :

$$G_b^{hom,u} = \left\{ (N, M_2, M_3) \mid \exists \sigma(y_2, y_3), \sigma_m^\sharp \leq \sigma \leq \sigma_M^\sharp, \right. \\
\left. N = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \sigma dS^t, M_2 = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_2 \sigma dS^t, M_3 = \int_{(y_2, y_3) \in S^t} y_3 \sigma dS^t \right\}.$$

It should be emphasized that the lower and upper bounds proposed for  $G_b^{hom}$

$$G_b^{hom,l} \subseteq G_b^{hom} \subseteq G_b^{hom,u}$$

can be explicitly expressed in terms of the uniaxial yield properties of the material constituents. For Von-Mises materials,  $\sigma_t = -\sigma_c$  and the  $\sigma_{11}$ -component of the stress tensor is not bounded :  $\sigma_M = -\sigma_m = +\infty$ . Hence, the upper bound is trivial.

### 7.5.2 $y_1$ -invariant beams : $G = G(y_2, y_3)$ .

In this section, we study the overall homogenized strength domain of a beam whose properties are invariant in its axis direction. In other words, the local strength domain,  $G$ , is function of the two coordinates  $(y_2, y_3)$ . In this case, the determination of  $G_b^{hom}$  is obtained by solving a 2D limit analysis problem on the beam section,  $S^t$ . Indeed, the unit cell  $Y$  can have any arbitrary length in direction 1. Therefore, the stress fields  $\boldsymbol{\sigma}$  in  $SA_b$  and the velocity fields  $\mathbf{u}^{per}$  in the definition of  $KA_b$ , (7.20), do not depend on the  $y_1$ -coordinate. The

operator  $t^2 \langle \cdot \rangle$  used in the definition of  $G_b^{hom}$  is actually the integral operator over the beam section,  $\int_{(y_2, y_3) \in S^t} (\cdot) dS^t$ .

The strength domain of  $y_1$ -invariant beams can be explicitly determined under the following assumption.

**Theorem :** If there exists a symmetric second order tensor  $\mathbf{T}$  with  $T_{11} = 1$ ,  $T_{12} = T_{13} = 0$ , and a positive function  $\lambda(y_2, y_3) > 0$  such that :

$$\frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(y_2, y_3, \boldsymbol{\sigma} = \sigma_t(y_2, y_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = -\frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(y_2, y_3, \boldsymbol{\sigma} = \sigma_c(y_2, y_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \lambda(y_2, y_3) \mathbf{T}, \quad (7.46)$$

for all  $(y_2, y_3)$ , then,

$$G_b^{hom, l} = G_b^{hom}. \quad (7.47)$$

*Proof :*

Because  $SA_b$  and  $KA_b$  are in duality in the sense of the virtual power, (7.21), we know that  $\mathbf{u}^{per}(y_2, y_3)$  is a solution for the minimization problem (7.22), for given  $(D, \chi_2, \chi_3)$ , if the corresponding strain rate

$$\mathbf{d} = (D + y_2\chi_2 + y_3\chi_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \text{grad}^s \mathbf{u}^{per} \quad (7.48)$$

is related by the normality-flow rule to some stress field  $\boldsymbol{\sigma}(y_2, y_3)$  in  $SA_b(N, M_2, M_3)$  such that  $\boldsymbol{\sigma}$  is in  $G$  for all  $(y_2, y_3)$ . For such  $\boldsymbol{\sigma}$ , the generalized stress  $(N, M_2, M_3)$  lies on the boundary of  $G_b^{hom}$ . Let us show that

$$\mathbf{u}^{per} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{22}(D + \frac{y_2}{2}\chi_2 + y_3\chi_3)y_2 + T_{23}\chi_3y_3^2 + T_{23}Dy_3 - T_{33}\chi_2\frac{y_3^2}{2} \\ T_{33}(D + y_2\chi_2 + \frac{y_3}{3}\chi_3)y_3 + T_{23}\chi_2y_2^2 + T_{23}Dy_2 - T_{22}\chi_3\frac{y_3^2}{2} \end{pmatrix}$$

is a solution for (7.22). Indeed, its corresponding strain rate (7.48) is :

$$\mathbf{d} = (D + y_2\chi_2 + y_3\chi_3) \mathbf{T}.$$

We define  $\boldsymbol{\sigma}$  as :

$$\boldsymbol{\sigma}(y_2, y_3) = \sigma_u^*(y_2, y_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad (7.49)$$

where  $\sigma_u^*$  is given by (7.45). Obviously, we have  $\text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$  on  $\partial S^t$  and  $\boldsymbol{\sigma}$  is in  $G$  for all  $(y_2, y_3)$ . Moreover, thanks to assumption (7.46),  $\mathbf{d}$  and  $\boldsymbol{\sigma}$  are related by the normality-flow rule  $\mathbf{d} = \zeta \frac{\partial F^t}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ ,  $\zeta \geq 0$ ,  $F^t \leq 0$  and  $\zeta F^t = 0$ , where  $\zeta$  is given by :

$$\zeta(y_2, y_3) = \frac{|D + y_2\chi_2 + y_3\chi_3|}{\lambda(y_2, y_3)} > 0.$$

Hence,  $\mathbf{u}^{per}$  is a solution for (7.22) and the static definition of  $G_b^{hom}$ , (7.19), can be restricted to those stress fields in  $SA_b(N, M_1, M_2)$  which are of the form  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma(y_2, y_3) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ . This proves  $G_b^{hom, l} = G_b^{hom}$ . The following corollary is straightforward :

**Corollary :** If  $G(y_2, y_3) = \alpha(y_2, y_3)\hat{G}$  where  $\alpha(y_2, y_3)$  is a positive real function and  $\hat{G}$  is a closed convex set having the symmetries :  $\boldsymbol{\sigma} \in \hat{G} \Leftrightarrow -\boldsymbol{\sigma} \in \hat{G}$  and  $\boldsymbol{\sigma} \in \hat{G} \Leftrightarrow S(\boldsymbol{\sigma}) \in \hat{G}$  where  $S$  is the symmetry with respect to  $(y_2, y_3)$ -plane :

$$S \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

then :

$$G_b^{hom,l} = G_b^{hom}.$$

**Example :** Von-Mises  $y_1$ -invariant beams

In this case,  $F^t$  is given by (7.2). We have  $\sigma_t = -\sigma_c = \sigma_u$  and the assumption (7.46) holds true for

$$\lambda(y_2, y_3) = \frac{2}{3}\sigma_u(y_2, y_3) \text{ and } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

### 7.5.3 Laminated beams : $G = G(y_3)$ .

A laminated beam is an  $y_1$ -invariant beam which is homogeneous in the  $y_2$  directions :  $G(\mathbf{y}) = G(y_3)$ . The purpose of this section is to improve the upper bound  $G_b^{hom,u}$  for laminated beams such that  $G_b^{hom,l} \neq G_b^{hom}$ . For seek of simplicity, we restrict the analysis below to isotropic constituent materials. Of interest is the out-of-plane loading in direction 3 : we want to determine the intersection of  $G_b^{hom}$  with the  $M_2 = 0$  plane :

$$G_{b;2}^{hom} = G_b^{hom} \cap \{M_2 = 0\}.$$

The support function of  $G_{b;2}^{hom}$ ,  $\pi_{b;2}^{hom}(D, \chi_3)$ , is the minimum of  $\pi_b^{hom}(D, \chi_2, \chi_3)$  over all  $\chi_2$ . Because  $\pi_b^{hom}$  is even and convex in  $\chi_2$ , it reaches its minimum value at  $\chi_2 = 0$ . Hence,  $G_{b;2}^{hom}$  is also the projection of  $G_b^{hom}$  on the  $M_2 = 0$  plane. An upper bound for  $\pi_{b;2}^{hom}$ ,  $\pi_{b;2}^{hom,+}$ , is obtained from the kinematic definition of  $G_b^{hom}$  by considering the following velocity fields  $\mathbf{u}^{per}$  in (7.20) :

$$\begin{cases} u_1^{per} = 0 \\ u_2^{per} = (Ay_3 + B)y_2 \\ u_3^{per} = -A\frac{y_2^2}{2} + \int d_3(y_3)dy_3 \end{cases}$$

where  $(A, B)$  are two constants and  $d_3(y_3)$  is a function to be obtained. The corresponding strain rate (7.48) is :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1(y_3) = D + \chi_3 y_3 & 0 & 0 \\ 0 & d_2(y_3) = Ay_3 + B & 0 \\ 0 & 0 & d_3(y_3) \end{pmatrix}$$

Setting  $A = B = d_3(y_3) = 0$  leads to the upper bound  $\pi_b^{hom,u}(D, \chi_2 = 0, \chi_3)$ . This bound can be improved by optimizing (7.22) over  $A, B$  and  $d_3$ . The optimization over  $d_3$  gives  $d_3^{ps}$  in terms of  $d_1$  and  $d_2$ . Indeed, we have :

$$\min_{d_3} \pi(\mathbf{d}) = \pi^{ps}(d_1, d_2)$$

where  $\pi^{ps}$  is the support function of the strength domain under the assumption of (1, 2)-plane stress.

– For a Von-Mises material, we have :

$$d_3^{ps} = -(d_1 + d_2), \quad \pi_{VM}^{ps}(d_1, d_2) = 2\sigma_u \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2}$$

– For a Drucker-Prager material, we have :

$$d_3^{ps} = -\frac{(1 + \sin^2 \phi)}{\cos^2 \phi}(d_1 + d_2) + \frac{2 \sin \phi}{\cos^2 \phi} \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 (1 + \sin^2 \phi)}$$

and

$$\pi_{DP}^{ps}(d_1, d_2) = 2H \left[ -(d_1 + d_2) \tan^2 \phi + \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 (1 + \sin^2 \phi)} \right].$$

The kinematic definition of domain  $G_{b;2}^{hom,+}$  is :

$$G_{b;2}^{hom,+} = \{(N, M_3) \mid ND + M_3 \chi_3 \leq \pi_{b;2}^{hom,+}(D, \chi_3)\}. \quad (7.50)$$

where the support function  $\pi_{b;2}^{hom,+}$  is given by :

$$\pi_{b;2}^{hom,+}(D, \chi_3) = \inf_{A,B} \int_{(y_2, y_3) \in S^t} \pi^{ps}(d_1, d_2) dS^t \quad (7.51)$$

with  $d_1(y_3) = D + \chi_3 y_3$  and  $d_2(y_3) = A y_3 + B$ .

## 7.6 Applications

A symmetric sandwich beam made of two material constituents is considered. The beam section is rectangular :

$$S^t = \left] -\frac{t_2}{2}, \frac{t_2}{2} \right[ \times \left] -\frac{t_3}{2}, \frac{t_3}{2} \right[.$$

The volume fraction of the core material is denoted by  $f$ . Perfect bonding between the two constituents at the interfaces  $y_3 = \pm (t_3/2) f$  is assumed. Figure 7.2.

The purpose of this section is to determine the lower and upper bounds of  $G_{b;2}^{hom}$ ,  $G_{b;2}^{hom,l} = G_b^{hom,l} \cap \{M_2 = 0\}$  and  $G_{b;2}^{hom,+}$ . Because we have  $\chi_2 = 0$  in (7.45) as seen before,  $\boldsymbol{\sigma}$  and  $\mathbf{d}$  are function of  $y_3$ . Due to the symmetry of the beam, the domains  $G_{b;2}^{hom}$ ,  $G_{b;2}^{hom,l}$  and  $G_{b;2}^{hom,+}$  are all invariant under the action of the transformation :  $(N, M_3) \rightarrow (N, -M_3)$ . Indeed, the support functions of these domains are even in  $\chi_3$ .

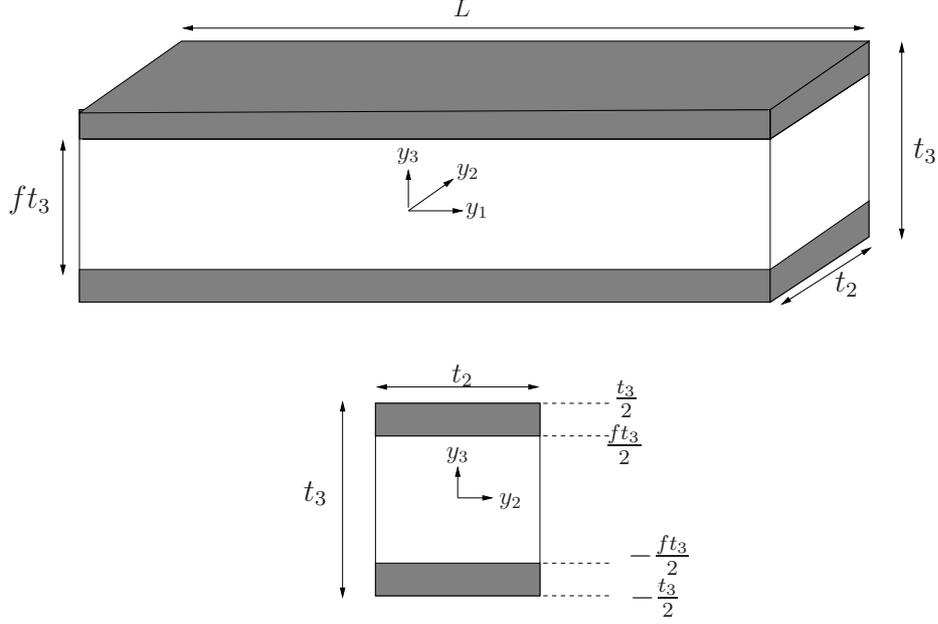


FIG. 7.2. 3D sandwich beam.

We have :

$$\sigma_t(y_2, y_3) = \begin{cases} \sigma_t^{sk} & \text{if } |y_3| > \frac{t_3}{2}f, \\ \sigma_t^{co} & \text{if } |y_3| < \frac{t_3}{2}f. \end{cases} \quad \text{and } \sigma_c(y_2, y_3) = \begin{cases} \sigma_c^{sk} & \text{if } |y_3| > \frac{t_3}{2}f, \\ \sigma_c^{co} & \text{if } |y_3| < \frac{t_3}{2}f. \end{cases} \quad (7.52)$$

where  $\sigma_t^{sk}$  (resp.  $\sigma_c^{sk}$ ) is the ultimate tensile (resp. compressive) strength of the skin material and  $\sigma_t^{co}$  (resp.  $\sigma_c^{co}$ ) is the ultimate tensile (resp. compressive) strength of the core material.

Using (7.45), the following parametric characterization of  $\partial G_{b;2}^{hom,l}$ ,  $M_3 \geq 0$ , is obtained :

$$\begin{cases} N = [\sigma_t^{co} f t_3 + \sigma_t^{sk} (\frac{t_3}{2} - \hat{y}_3 - f t_3) + \sigma_c^{sk} (\hat{y}_3 + \frac{t_3}{2})] t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in ]-\frac{t_3}{2}, -f \frac{t_3}{2}] \\ N = [(\sigma_t^{sk} + \sigma_c^{sk}) (1 - f) \frac{t_3}{2} + (\sigma_c^{co} - \sigma_t^{co}) \hat{y}_3 + (\sigma_t^{co} + \sigma_c^{co}) f \frac{t_3}{2}] t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in [-f \frac{t_3}{2}, f \frac{t_3}{2}] \\ N = [\sigma_c^{co} f t_3 + \sigma_t^{sk} (\frac{t_3}{2} - \hat{y}_3) + \sigma_c^{sk} (\frac{t_3}{2} + \hat{y}_3 - f t_3)] t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in [f \frac{t_3}{2}, \frac{t_3}{2}[ \end{cases} \quad (7.53)$$

and

$$\begin{cases} M_3 = (\sigma_t^{sk} - \sigma_c^{sk}) \left( \frac{t_3^2}{8} - \frac{\hat{y}_3^2}{2} \right) t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in ]-\frac{t_3}{2}, -f \frac{t_3}{2}] \\ M_3 = \left[ \frac{t_3^2}{8} (1 - f^2) (\sigma_t^{sk} - \sigma_c^{sk}) + \left( \frac{t_3^2}{8} f^2 - \frac{\hat{y}_3^2}{2} \right) (\sigma_t^{co} - \sigma_c^{co}) \right] t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in [-f \frac{t_3}{2}, f \frac{t_3}{2}] \\ M_3 = (\sigma_t^{sk} - \sigma_c^{sk}) \left( \frac{t_3^2}{8} - \frac{\hat{y}_3^2}{2} \right) t_2 & \text{if } \hat{y}_3 \in [f \frac{t_3}{2}, \frac{t_3}{2}[ \end{cases} \quad (7.54)$$

where the varying parameter  $\hat{y}_3 \in ]-\frac{t_3}{2}, \frac{t_3}{2}[$  denotes the position of the neutral axis such that  $D + \hat{y}_3 \chi_3 = 0$  with  $\chi_3 > 0$ . An explicit equation for  $\partial G_{b;2}^{hom,l}$  can be obtained by eliminating  $\hat{y}_3$  in (7.53) and (7.54). The following normalization rules with respect to the ultimate strengths of the core material will be used :

$$n = \frac{2N}{(\sigma_t^{co} - \sigma_c^{co}) t_2 t_3} \\ m_3 = \frac{8M_3}{(\sigma_t^{co} - \sigma_c^{co}) t_2 t_3^2}.$$

### 7.6.1 Homogeneous beams

For a homogeneous beam  $\sigma_t^{sk} = \sigma_t^{co} = \sigma_t$  and  $\sigma_c^{sk} = \sigma_c^{co} = \sigma_c$ , we obtain the following equation for  $\partial G_{b;2}^{hom,l}$  :

$$|m_3| + \left(n - \frac{\sigma_t + \sigma_c}{\sigma_t - \sigma_c}\right)^2 = 1 \quad (7.55)$$

For symmetric yield surfaces such that  $\sigma_t = -\sigma_c$ , we have :

$$|m_3| + n^2 = 1 \quad (7.56)$$

This equation is similar to the one found by Ilyushin (1956) and Hodge (1959) for homogeneous Von-Mises plates. See Figure 7.3 showing the homogenized strength domain for a Von-Mises beam.

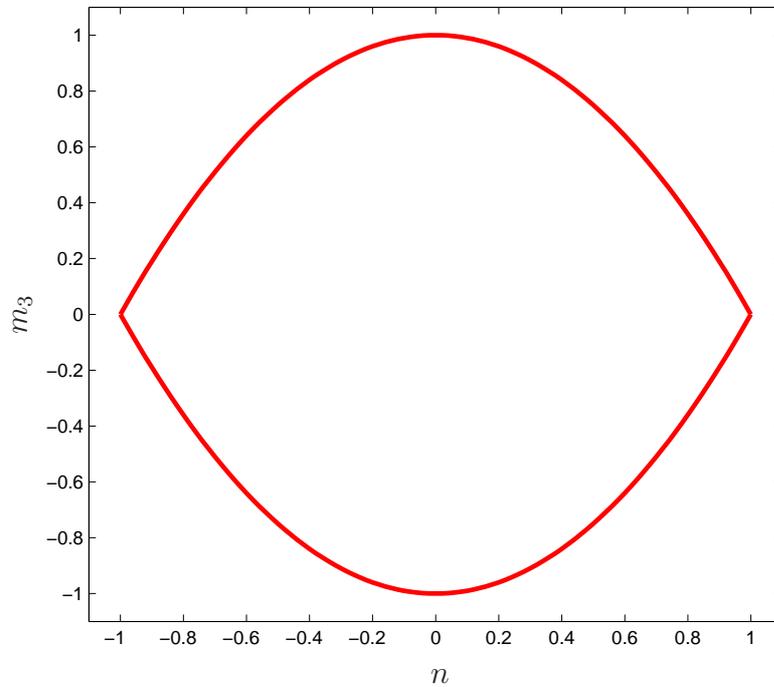


FIG. 7.3. Normalized strength domain  $G_{b;2}^{hom}$  for a homogeneous Von-Mises beam.

Recall that for  $y_1$ -invariant Von-Mises beams, we have  $G_{b;2}^{hom} = G_{b;2}^{hom,l}$ . This is not true for Drucker-Prager beams even in the homogeneous case<sup>3</sup>. Hence, it is interesting to compare lower and upper bounds  $G_{b;2}^{hom,l}$  and  $G_{b;2}^{hom,+}$  for a homogeneous Drucker-Prager beam. Figure 7.4 shows these domains for  $H = 30$  MPa and  $\phi = 30^\circ$ . The discrepancy between  $G_{b;2}^{hom,l}$  and  $G_{b;2}^{hom,+}$  is less than 5% which means that  $G_{b;2}^{hom,l}$  is a very good estimation for  $G_{b;2}^{hom}$ . The determination of  $G_{b;2}^{hom,+}$  is as follows : the kinematic method (7.24-7.25) is implemented using MATLAB software : for each direction  $(N', M'_3)$ ,  $B(N', M'_3)$  is computed by

<sup>3</sup>This can be established by showing that the strain rate field associated by the normality-flow rule to the stress field  $\sigma$  (7.49) is not in  $KA_b(D, \chi_2, \chi_3)$  for all  $(D, \chi_2, \chi_3)$ .

minimizing (7.51) over all  $(A, B, D, \chi_3)$  under the constraint  $ND + M_3\chi_3 = 1$ . The obtained  $(N, M_3) = B(N', M'_3) \times (N', M'_3)$  lies on the boundary of  $G_{b;2}^{hom,+}$ ,  $\partial G_{b;2}^{hom,+}$ .

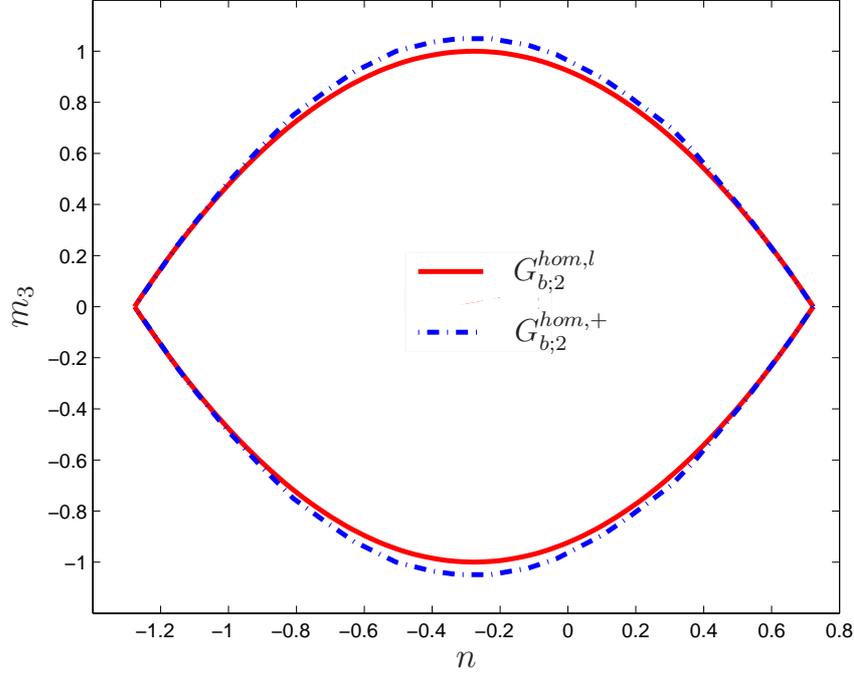


FIG. 7.4. Normalized strength domain for a homogeneous Drucker-Prager beam : lower bound  $G_{b;2}^{hom,l}$  and upper bound  $G_{b;2}^{hom,+}$ .

### 7.6.2 Sandwich beam

Figure 7.5 shows the domain  $G_{b;2}^{hom,l}$  for a Von-Mises sandwich ( $\sigma_t = -\sigma_c$ ) with a contrast ratio  $\frac{\sigma_t^{sk}}{\sigma_c^o} = 25.59$  and  $f = 0.98$ . With these values, the ultimate tensile (and compressive) strength of the beam is increased by 49.2% when compared to the same beam made with the core material. While the ultimate flexural strength is increased by 97% (Figures 7.3 and 7.5). Actually, we have  $G_{b;2}^{hom,l} = G_{b;2}^{hom}$  for Von-Mises sandwiches.

In what follows, we consider a sandwich beam made with the same Von-Mises skins ( $\sigma_t = -\sigma_c$ ) and with a Drucker-Prager core  $(H, \phi)$ . For instance, a beam made of a geomaterial which is reinforced by metallic skins (Wright et al., 1991). In this case, we know that  $G_{b;2}^{hom,l} \neq G_{b;2}^{hom}$ . The determination of  $G_{b;2}^{hom,+}$  is computed, as described in the previous Section, for the values given in Table 7.1. The domain is shown in Figure 7.6. The upper and lower bounds show maximal discrepancy (20%) for uniaxial compression. For maximal flexural moment, the discrepancy is about 18% whereas it is smaller than 1% for  $n = 1$  (uniaxial traction). The lower bound  $G_{b;2}^{hom,l}$  can be considered as a rather good approximation of the exact domain  $G_{b;2}^{hom}$ .

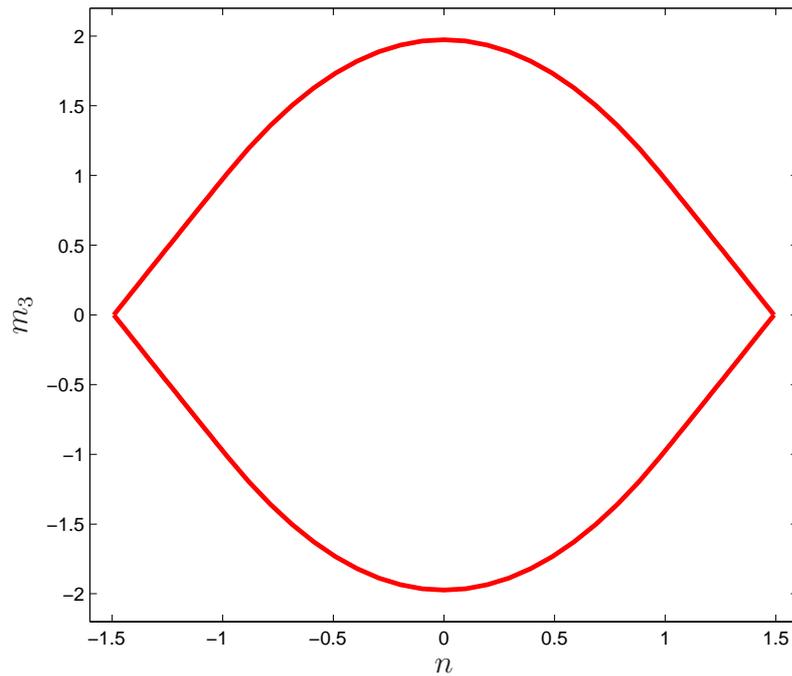


FIG. 7.5. Normalized strength domain  $G_{b;2}^{hom}$  for a sandwich Von-Mises beam.

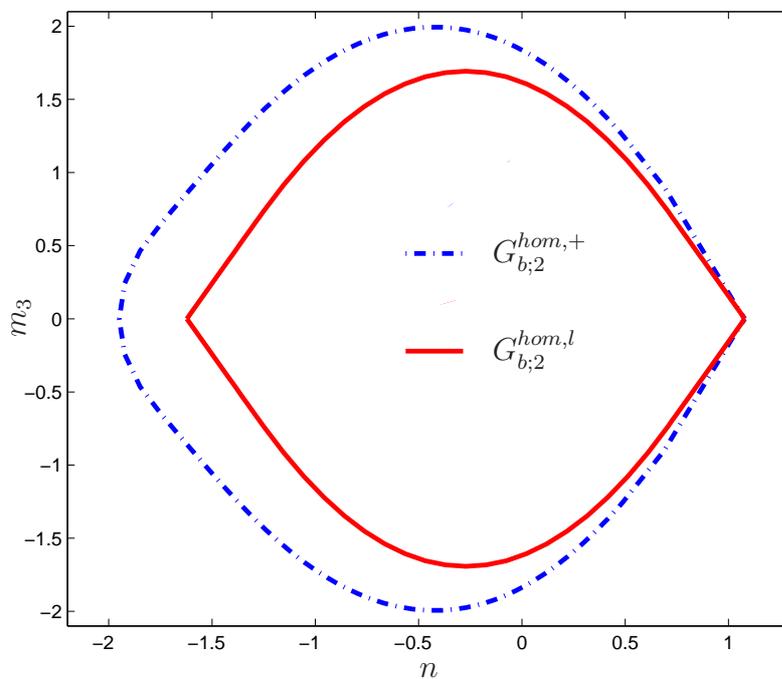


FIG. 7.6. Normalized strength domains for a sandwich Drucker-Prager (core) Von-Mises (skins) beam : lower bound  $G_{b;2}^{hom,l}$  and upper bound  $G_{b;2}^{hom,+}$ .

The reinforcement due to the skins (2% of the volume) can be observed by comparing Figure 7.6 and Figure 7.4. The ultimate tensile strength of the beam is increased by at least 49%, the ultimate compressive strength by at least 29% and the ultimate flexural moment by at least 69%.

$H$	$\phi$	$\sigma_s^u$
30 MPa	30°	500 (MPa)

TAB. 7.1. *Sandwich material constants.*

## 7.7 Conclusion

In this work, a new homogenization method for periodic beams is provided and formally justified using the asymptotic expansion method. The determination of  $G_b^{hom}$ , the homogenized Euler-Bernoulli strength domain of a rigid-perfectly plastic periodic beam, is obtained by solving an auxiliary problem on the unit cell. Static and kinematic characterizations are given. Lower and upper bounds for  $G_b^{hom}$  are proposed, considering uniaxial stress state and uniaxial strain rate. For  $y_1$ -invariant beams, a sufficient condition on the local yield criteria of the material constituents for the lower bound to be exact is exhibited. In the case of Von-Mises beams, the lower bound coincides with the exact domain.

The case of laminated beams is then tackled. For this special case, a sharper upper bound is proposed. The support function of this improved upper bound  $\pi_{b;2}^{hom,+}$  can be expressed in terms of  $\pi^{ps}$ , the local support function under plane stress assumption. A parametric representation of the yield surface  $\partial G_{b;2}^{hom,l}$  in the  $M_2 = 0$  plane is given, (7.23).

Some applications of the theoretical results described above are presented : a homogeneous Von-Mises beam, a homogeneous Drucker-Prager beam, a symmetric Von-Mises (the core and the skins) sandwich beam and a symmetric sandwich beam made with Von-Mises skins and Drucker-Prager core. Lower and upper bounds are analytically or numerically computed for all these examples. It is shown that, for a homogeneous Von-Mises beam, the yield criterion is very similar to the one proposed by Ilyushin (1956) for homogeneous Von-Mises plates. For a Drucker-Prager homogeneous beam, the discrepancy between upper and lower bounds is found to be less than 5%. For the Von-Mises sandwich beam, the exact homogenized domain is computed since the lower bound is equal to the exact strength domain. Finally, for the mixed sandwich beam, it is found that the discrepancy between lower and upper bounds reaches a maximal value of 20%, which seems to be acceptable. As a conclusion, the lower bound of the homogenized strength domain can be used as a rather good estimation of the exact strength domain.

As it is formally shown in this paper, the homogenized Euler-Bernoulli model is asymptotic to the 3D model as the slenderness ratio  $\frac{L}{t}$  tends to infinity ( $t$  being the typical size of the section). This means that the Euler-Bernoulli model is a good model only for “large

enough” values of the slenderness ratio. Moreover, the shear effects are not taken into account in the homogenized asymptotic Euler-Bernoulli model. These effects are important if the slenderness ratio is not large enough. In a next work, a new enhanced model for the limit analysis of multilayered beams which takes into account shear effects will be suggested.

Dans l’annexe B, on propose une comparaison entre les domaines de résistances homogénéisés obtenus par la théorie de poutre et de plaque en flexion cylindrique sur les exemples de plaques sandwichs développés dans ce chapitre.

# Chapitre 8

## Modèle M4 pour les poutres multicouches

### 8.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'écrire un nouveau modèle pour la détermination du domaine de résistance de poutres multicouches. Ce modèle prendra en compte les effets de cisaillement ce qui n'était pas le cas pour le modèle homogénéisé d'Euler-Bernoulli présenté au chapitre précédent. On développera ici la théorie en considérant seulement une force hors plan dans l'axe 3. Les travaux sur la théorie M4 portent essentiellement sur les plaques. Seul Pham (2007) a développé un modèle M4-5N élastique de poutre avec un glissement d'interface dans le cadre de sa thèse.

### 8.2 Hypothèses et notations

On fait l'hypothèse que la poutre est chargée dans le plan  $(1, 3)$ . On prendra donc  $M_2 = 0$ . On notera alors  $M = M_3$  pour plus de simplicité.

On supposera également que tous les champs (contraintes, déplacements,...) ne dépendent pas de la variable  $x_2$ . On notera  $b$  la largeur de la poutre et  $t$  son épaisseur. Sa longueur est  $L$ .

A part les modifications ci-dessus, les notations restent les mêmes que pour le chapitre sur les plaques M4.

## 8.3 Un nouveau modèle M4 pour les poutres en analyse limite

### 8.3.1 La méthode statique

La poutre multicouche 3D est vue comme une superposition de  $n$  poutres de Timoshenko en interaction par le biais de leurs interfaces comme sur la Figure 8.1. On introduit les notations suivantes :

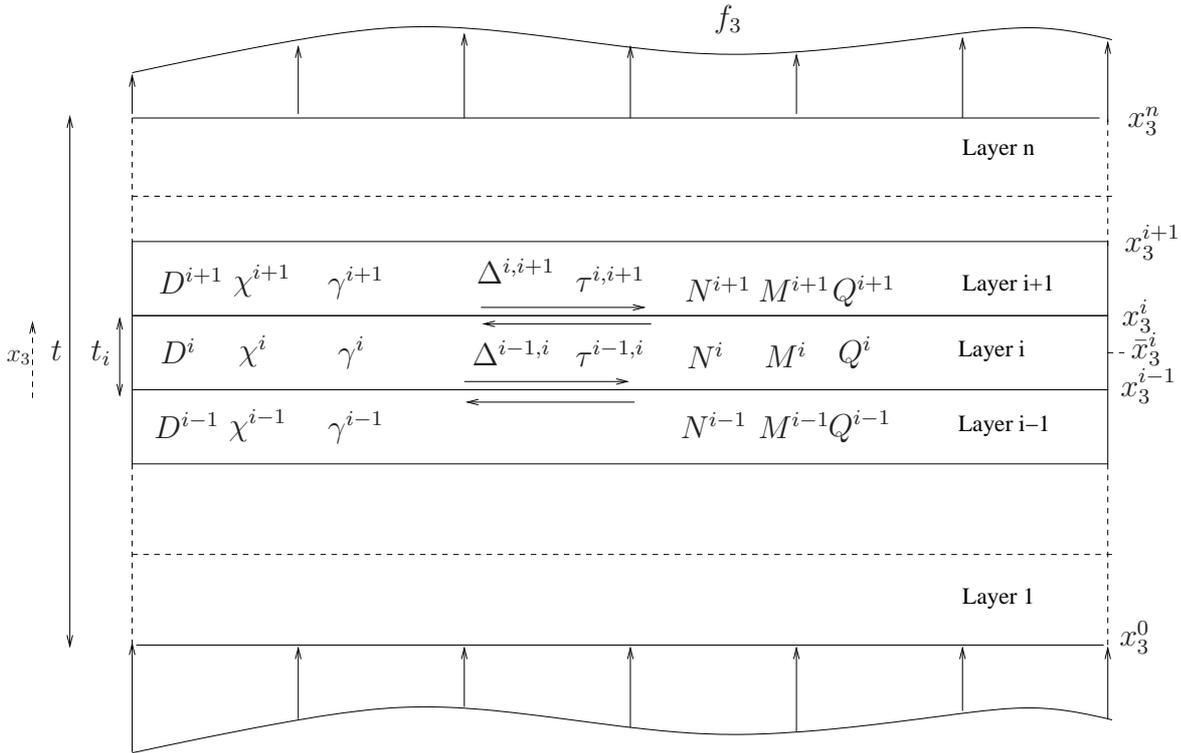


FIG. 8.1. Notations.

- Dans la couche  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $N^i$  est l'effort membranaire,  $M^i$  est le moment fléchissant par rapport à la surface moyenne de la couche  $i$  et  $Q^i$  est l'effort tranchant.
- A l'interface entre la couche  $i$  et la couche  $i+1$  :  $\tau^{i,i+1} = (\sigma_{13}(x_3^i))$  est la contrainte de cisaillement et  $\sigma^{i,i+1} = \sigma_{33}(x_3^i)$  est la contrainte normale ou contrainte d'arrachement.

La définition des efforts généralisés de poutre à partir des contraintes 3D est la suivante :

$$1 \leq i \leq n, \begin{cases} N^i(x_1) = b \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{11}(x_1) dx_3, \\ M^i(x_1) = b \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{11}(x_1) dx_3, \\ Q^i(x_1) = b \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{13}(x_1) dx_3. \end{cases}$$

On définit l'effort membranaire global  $N$ , le tenseur des moments fléchissants global  $M$  et l'effort tranchant global  $Q$  comme :

$$N = \sum_{i=1}^n N^i, \quad M = \sum_{i=1}^n (M^i + \bar{x}_3^i N^i), \quad Q = \sum_{i=1}^n Q^i.$$

On peut très facilement établir que l'équation d'équilibre 3D  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$  conduit aux équations d'équilibre suivantes pour les contraintes généralisées pour chaque couche  $i$  :

$$1 \leq i \leq n, \quad \begin{cases} \frac{dN^i}{dx_1} + \tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i} = 0, \\ \frac{dM^i}{dx_1} - Q^i + \frac{t_i}{2}(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i}) = 0, \\ \frac{dQ^i}{dx_3} + \sigma^{i,i+1} - \sigma^{i-1,i} = 0, \end{cases}$$

avec la convention suivante :

$$\begin{cases} \tau^{0,1} = 0, \\ \tau^{n,n+1} = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Les efforts d'arrachement entre les couches  $\sigma^{i,i+1}$  peuvent être éliminés de la troisième équation d'équilibre ci-dessus en utilisant la condition limite  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_3 = \pm \mathbf{h}^{\lambda, \pm}$  sur  $\partial\Omega_3^\pm$  et en sommant sur  $i$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Ainsi :

$$\boldsymbol{\Sigma}(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} N^i(x_1), M^i(x_1), Q^i(x_1), \quad 1 \leq i \leq n, \\ \tau^{i,i+1}(x_1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}$$

est le champ de contraintes généralisées et (8.2) sont les équations d'équilibre généralisées :

$$\begin{cases} 1 \leq i \leq n, & \frac{dN^i}{dx} + \tau^{i,i+1} - \tau^{i-1,i} = 0, \\ 1 \leq i \leq n, & \frac{dM^i}{dx} - Q^i + \frac{t_i}{2}(\tau^{i,i+1} + \tau^{i-1,i}) = 0, \\ & \left( \sum_{i=1}^n \frac{dQ^i}{dx} \right) + h_3^{\lambda,+} + h_3^{\lambda,-} = 0. \end{cases} \quad (8.2)$$

La contrainte M4 généralisée  $\boldsymbol{\Sigma}$  a  $(4 \times n - 1)$  composantes et il y a  $(2 \times n + 1)$  équations d'équilibre. Il s'agit donc d'un modèle  $M4_{2n+1}b$  (b pour beam=poutre).

La détermination du domaine de résistance M4,  $\mathbf{G}_b^{M4} \subset \mathbb{R}^{4n-1}$ , se fait comme suit :

- On suppose que :  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  sont négligeables par rapport aux autres contraintes et donc on pose :

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} = 0.$$

De même, vu que l'on suppose qu'il n'y a pas de sollicitation hors plan dans la direction 2 ( $f_2 = 0$ ) on posera aussi :

$$\sigma_{23} = \sigma_{12} = 0.$$

- Les contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}$  sont supposées continues et quadratiques dans l'épaisseur de chaque couche. Par conséquent, elles sont uniquement déterminées en fonction de  $Q^i$ , ( $1 \leq i \leq n$ ), et  $\tau^{i,i+1}$ , ( $1 \leq i \leq n-1$ ).

Ainsi, pour tout état de contraintes généralisées M4  $\Sigma$ , l'ensemble  $SA_b^{M4}(\Sigma)$  des contraintes locales statiquement admissibles  $\sigma(x_3)$ , est défini par :

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_{ij}(x_3)) \in SA_b^{M4}(\Sigma) \\ &\iff \\ \begin{cases} N^i = b \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{11}(x_3) dx_3, & 1 \leq i \leq n, \\ M^i = b \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{11}(x_3) dx_3, & 1 \leq i \leq n, \\ \sigma_{13}(x_3) = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n P^i(x_3) Q^i + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{n-1} R^{i,i+1}(x_3) \tau^{i,i+1}, \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.3)$$

où les fonctions d'interpolation sont :

$$P^i(x_3) = \begin{cases} \frac{1}{t_i} \tilde{P} \left( \frac{x_3 - \bar{x}_3^i}{t_i} \right) & \text{si } x_3 \in [x_3^{i-1}, x_3^i], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$R^{i,i+1}(x_3) = \begin{cases} \tilde{R}^- \left( \frac{x_3 - \bar{x}_3^i}{t_i} \right) & \text{si } x_3 \in [x_3^{i-1}, x_3^i], \\ \tilde{R}^+ \left( \frac{x_3 - \bar{x}_3^{i+1}}{t_{i+1}} \right) & \text{si } x_3 \in [x_3^i, x_3^{i+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec :

$$\tilde{P}(z) = -6z^2 + \frac{3}{2}, \quad \tilde{R}^\pm(z) = 3z^2 \mp z - \frac{1}{4}.$$

Les fonctions d'interpolation ont les propriétés suivantes :

$$\int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} P^i(x_3) dx_3 = 1, \quad \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} R^{i,i+1}(x_3) dx_3 = \int_{x_3^i}^{x_3^{i+1}} R^{i,i+1}(x_3) dx_3 = 0,$$

$$R^{i,i+1}(x_3^i) = 1, \quad P^i(x_3^{i-1}) = P^i(x_3^i) = R^{i,i+1}(x_3^{i-1}) = R^{i,i+1}(x_3^{i+1}) = 0.$$

En résumé, le champ de contraintes 3D est de la forme :

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

On peut ainsi donner une définition du domaine de résistance de poutre global au sens M4 :

*Définition :*

$$\Sigma \in \mathbf{G}_b^{M4} \iff \begin{cases} \exists \sigma \in SA_b^{M4}(\Sigma), \\ \sigma(x_3) \in G^i \text{ for } x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Par rapport au domaine de résistance homogénéisé défini dans la méthode précédente,  $G_{b;2}^{\text{hom}}$ , on signale que  $\mathbf{G}_b^{M4}$  a les propriétés ci-après :

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{l} N^i, M^i, Q^i = 0; 1 \leq i \leq n \\ \tau^{i,i+1} = 0; 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\} \in \mathbf{G}_b^{M4} \implies (\mathbf{N}, \mathbf{M}) \in G_{b;2}^{\text{hom}},$$

et

$$(N, M) \in G_{b;2}^{\text{hom}} \implies \exists \Sigma = \left\{ \begin{array}{l} N^i, M^i, Q^i = 0; 1 \leq i \leq n \\ \tau^{i,i+1} = 0; 1 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\}, \Sigma \in \mathbf{G}_b^{M4}.$$

Le problème d'analyse limite M4 dans sa formulation statique est donc le suivant :

Trouver  $\lambda^{M4}$ , la valeur maximale de  $\lambda$  pour laquelle il existe un champ de contraintes généralisées  $\Sigma(x_1)$  satisfaisant les équations d'équilibre(8.2)<sup>1</sup> et tel que  $\Sigma$  soit dans  $\mathbf{G}_b^{M4}$  pour tout  $(x_1)$ .

### 8.3.2 La méthode cinématique

Dans ce cas, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}^i = D^i \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \left(\frac{dV_1^i}{dx_1}\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\chi}^i = \chi^i \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \left(\frac{d\phi^i}{dx_1}\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}^i = \gamma^i \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \left(\phi^i + \frac{dV_2}{dx_1}\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}^{i,i+1} = \Delta^{i,i+1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \left(V_1^{i+1} - \frac{t^{i+1}}{2} \phi^{i+1} - V_1^i + \frac{t^i}{2} \phi^i\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{array} \right. \quad (8.5)$$

Le champ de taux de vitesse de déformation 3D s'écrit :

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} (D + y_3 \chi) & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \quad (8.6)$$

Formellement, le taux de déformation M4 est le même que celui défini en flexion cylindrique, à la différence près qu'ici, les composantes 12 et 22 et 23 du champ de déformation ne sont pas nulles, mais indéterminées puisque les hypothèses sont statiques (on suppose nulles les contraintes 3D duales de ces taux de déformation).

On trouve alors que la fonction support,  $\Pi_b^{M4}$ , de  $\mathbf{G}_p^{M4}$  est obtenue comme suit :

$$\Pi_b^{M4}(\mathbf{E}) = \inf_{\mathbf{d} \in KA_b^{M4}(\mathbf{E})} \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \pi^i(\mathbf{d}(x_3)) dx_3 \quad (8.7)$$

<sup>1</sup>Les conditions de bords libres peuvent être ajoutées si besoin.

où, pour chaque taux de déformation  $\mathbf{E}$ ,  $KA^{M4,b}(\mathbf{E})$  est définie par :

$$\mathbf{d} \in KA_b^{M4}(\mathbf{E}) \iff \begin{cases} d_{11}(x_3) = D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i, & x_3^{i-1} < x_3 < x_3^i, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{x_3^i}{2}}^{\frac{x_3^i}{2}} 2P^i(x_3) d_{13}(x_3) dx_3 = \gamma^i, & 1 \leq i \leq n, \\ \int_{\frac{x_3^i}{2}}^{\frac{x_3^i}{2}} 2R^{i,i+1}(x_3) d_{13}(x_3) dx_3 = \Delta^{i,i+1}, & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases} \quad (8.8)$$

La détermination de  $\Pi_b^{M4}$  nécessite la résolution du problème d'optimisation (8.7). La même démarche de calcul de  $\pi$  et de localisation des contraintes que dans le cas de la déformation plane dans le sens (1,3) du chapitre sur la flexion cylindrique. Elle peut être effectuée ici dans le cas d'un multicouche de Von-Mises. La différence se situe dans la minimisation de la fonction support. Au lieu de minimiser sur les  $d_{ij}$  pour  $(i, j) \neq (1, 1)$  et  $(i, j) \neq (1, 3)$  et  $d_{33}$ , on minimise la fonction support 3D  $\pi$  sur toutes les composantes de  $\mathbf{d}$  avec des contraintes mathématiques sur les composantes 11 et 13.

Il est clair que la fonction support  $\Pi_b^{M4}$  est plus petite que  $\Pi_p^{M4,cb}$ , introduite dans le chapitre sur la flexion cylindrique, ce qui correspond à  $G_b^{M4} \subseteq G_p^{M4,cb}$ . Il suffit de remarquer que l'espace de minimisation est plus grand. On retrouve pour le modèle M4 ce que nous avons démontré au chapitre précédent sur les domaines de résistance homogénéisés.

On peut, cependant, simplifier dans ce cas l'expression de la fonction  $\Pi_b^{M4}$ . En effet, l'hypothèse des contraintes planes dans le plan (1, 3) est faite. Les taux  $d_{12}$  et  $d_{22}$  et  $d_{23}$  sont donc fixées et sont tels que :

$$d_{\alpha 2} = d_{\alpha 2}^{ps} \quad (8.9)$$

où  $d_{\alpha 2}^{ps}$  sont les champs de déformations "produisant" les contraintes planes, c'est à dire minimisant la fonction  $\pi^i$  par rapport aux composantes  $d_{\alpha 2}$ .

Donc, la fonction support de  $G_b^{M4}$  peut s'écrire :

$$\Pi_b^{M4}(\mathbf{E}) = \inf_{\mathbf{d} \in KA_b^{M4}(\mathbf{E})} \sum_{i=1}^n \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \pi^{ps,i}(\mathbf{d}(x_3)) dx_3 \quad (8.10)$$

$\pi^{ps,i}$  est la fonction support du critère en contraintes planes de la couche  $i$ .  $KA^{M4,b}$  reste le même espace. Cependant, on ne minimise que sur  $d_{11}$ ,  $d_{22}$  et  $d_{33}$ .

Pour donner un exemple de la différence entre cette théorie en contraintes planes dans le sens (1, 3) et celle en déformation plane dans les sens (1, 3) donnée précédemment, on peut écrire la fonction support d'un critère de Von-Mises.

Pour la flexion cylindrique de plaque (déformation plane dans le sens (1, 3)), on a :

$$\begin{cases} \pi^{cb13} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^u \sqrt{(d_{11})^2 + (d_{13})^2} & \text{si } d_{11} + d_{33} = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.11)$$

Pour la contrainte plane dans le sens (1, 3), on a :

$$\pi^{ps} = \sigma^u \sqrt{d_{11}^2 + d_{33}^2 + d_{13}^2 + d_{11}d_{33}} \quad (8.12)$$

Dans le cas d'une extension simple (i.e  $d_{13} = 0$ ), on retrouve bien le résultat démontré au chapitre précédent :  $\pi^{cb13} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{ps}$ .

## 8.4 Conclusion

On a construit dans ce chapitre un nouveau modèle M4 pour les poutres prenant en compte le cisaillement de la section dans le sens (1, 3). Les approches, statique et cinématique, ont été développées et ce modèle apparaît comme strictement inférieur à celui de la flexion cylindrique présenté plus haut.

L'objectif est d'appliquer maintenant ce modèle aux poutres en béton armé renforcées afin de prévoir leur charge de ruine.



# Chapitre 9

## Quelques applications

### 9.1 Introduction

On souhaite, à présent, mettre en oeuvre les différents modèles développés dans les chapitres précédents sur des exemples plus concrets. En effet, jusqu'ici, les multicouches considérés étaient constitués de matériaux parfaitement plastiques, mais, en réalité, la plupart des matériaux ne présente pas un tel comportement. Cependant, la théorie du calcul à la rupture permet d'obtenir une estimation du chargement maximal supportable par une structure. L'idée directrice de cette théorie est d'analyser la tenue d'un ouvrage en se fondant uniquement sur des considérations de statique et de résistance (au sens propre) des matériaux constitutifs. Il convient pour qu'un ouvrage soit stable d'assurer la compatibilité entre les conditions imposées par son équilibre et les capacités de résistance des matériaux. S'appuyant sur une condition nécessaire, la théorie du calcul à la rupture ne donne qu'une présomption de stabilité. Dans le cas où les matériaux sont élasto-plastiques parfaits, cette présomption est une certitude (voir (Salençon, 1983) par exemple), c'est la théorie de l'analyse limite. Le résultat sur le chargement maximal ne dépendant pas du module d'élasticité des matériaux, un comportement rigide parfaitement plastique est supposé. Le calcul à la rupture donne donc une borne supérieure du chargement critique avec peu d'hypothèses sur les matériaux (la simple donnée de leur domaine de résistance).

Nous nous proposons, dans cette partie, de tester les différents modèles de poutres développés précédemment pour le calcul à la rupture des poutres en béton armé et des poutres en béton armé renforcées.

### 9.2 Application au béton armé

L'objectif de ce paragraphe est d'appliquer la méthode statique de la méthode d'homogénéisation des poutres périodiques développée précédemment à une poutre en béton armé soumise à une flexion 4 points et de comparer la force de ruine prédite par le modèle à celle obtenue expérimentalement. On procédera en deux étapes : premièrement, on se propose de tracer le domaine de résistance de la poutre en béton armé  $G^{RC}$  (R.C : reinforced

concrete) dans le plan  $(n, m_3)$  et deuxièmement de déduire de celui-ci la force de ruine d'une poutre en béton armé soumise à une flexion quatre points. Nous supposons ici que la poutre suit une cinématique d'Euler-Bernoulli et que le mode de ruine de celle-ci est seulement dû à la flexion.

### 9.2.1 Détermination du domaine de résistance du béton armé $G^{RC}$

La section est composée de béton et de barres en acier. On suppose que les limites en compressions et en traction du béton sont  $f_c$  et  $f_t$  et que les aciers suivent un critère de Von-Mises avec une résistance  $\sigma_u$ . La géométrie de la section est donnée sur la Figure 9.1. On note  $A_s$  la section globale représentée par les aciers ( $A_s = 3S$ , où  $S$  est la section d'une barre d'acier). Classiquement pour le béton armé, on néglige les aciers supérieurs.

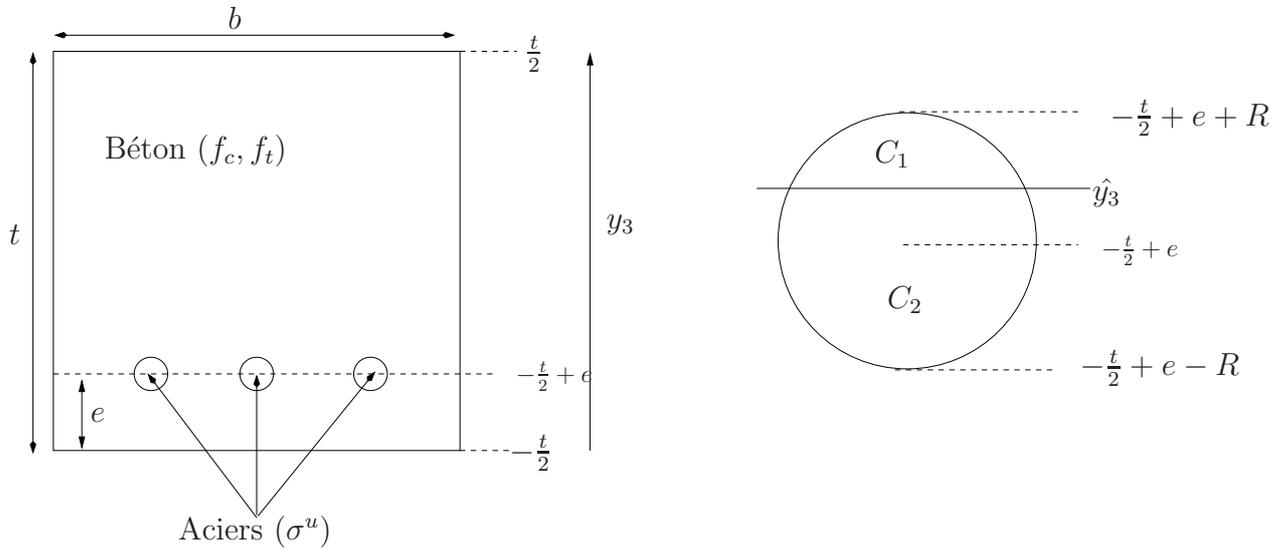


FIG. 9.1. Section de béton armé et zoom sur un acier.

Pour la modélisation, on va supposer qu'il s'agit d'une couche homogène de béton à laquelle on vient ajouter des inclusions d'acier. Le béton occupe donc toute la section, c'est à dire qu'on néglige son absence à la place des aciers dans cette modélisation. Aux points où se trouve une barre d'acier, il y a donc deux matériaux dans notre modélisation : le béton et l'acier. Cette démarche est justifiée pour deux raisons : d'abord la section d'acier est très petite devant la section globale et donc la contribution de ces inclusions de béton est négligeable par rapport au reste du béton dans le calcul des efforts membranaires et des moments. Ensuite, les armatures d'acier (amenées à travailler en traction) possèdent une résistance à la traction 100 à 300 fois plus forte que celle du béton et une résistance à la compression de 10 à 20 fois plus forte. La contribution de ces ronds de béton sera donc négligeable.

On met en oeuvre l'approche statique pour obtenir le domaine de résistance des  $(N, M)$ , qui n'est pas symétrique par rapport à  $y_3$ . On suppose également ici que la matière au-dessus de la fibre neutre  $\hat{y}_3$  est en compression et celle au-dessous en traction. On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = b((f_t - f_c)\hat{y}_3 + (f_t + f_c)\frac{t}{2}) + \sigma^u A_s \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2} + e + R, \frac{t}{2}] \\ N = b((f_t - f_c)\hat{y}_3 + (f_t + f_c)\frac{t}{2}) - 3\sigma^u \int_{C_1} da + 3\sigma^u \int_{C_2} da \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2} + e - R, -\frac{t}{2} + e + R] \\ N = b((f_t - f_c)\hat{y}_3 + (f_t + f_c)\frac{t}{2}) - \sigma^u A_s \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2} + e - R] \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} M = b((f_t - f_c)(\frac{t^2}{8} - \frac{\hat{y}_3^2}{2}) + \sigma^u A_s(-\frac{t}{2} + e) \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2} + e + R, \frac{t}{2}] \\ M = b((f_t - f_c)\hat{y}_3 + (f_t + f_c)\frac{t}{2}) - 3\sigma^u \int_{C_1} y_3 da + 3\sigma^u \int_{C_2} y_3 da \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2} + e - R, -\frac{t}{2} + e + R] \\ M = b((f_t - f_c)(\frac{t^2}{8} - \frac{\hat{y}_3^2}{2}) - \sigma^u A_s(-\frac{t}{2} + e) \text{ si } \hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2}, -\frac{t}{2} + e - R] \end{array} \right.$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont représentés sur la Figure 9.1.

Ainsi, on voit que dans ce cas, le moment est négatif sur la partie du domaine “classique” du béton armé, c’est à dire quand les aciers travaillent en traction  $\hat{y}_3 \in [-\frac{t}{2} + e + R, \frac{t}{2}]$ . L’autre partie du domaine est obtenue par le même calcul mais en supposant que la matière au-dessus de la fibre neutre est en traction (ce qui n’est généralement pas le cas pour le béton armé). On peut ainsi représenter le domaine de résistance  $G^{RC}$  d’une poutre en béton armé dans le plan  $(n, m_3)$  (Figure 9.2) en normalisant les efforts comme pour un Drücker-Prager de résistances  $f_c$  et  $f_t$  :

$$n = \frac{2N}{(f_t - f_c)bt}$$

$$m_3 = \frac{8M_3}{(f_t - f_c)bt^2}$$

Ainsi, on voit que le béton est renforcé en flexion de 32% avec une section d’acier égale à 0.6% de la section totale.

Pour le tracé de ce domaine sur la Figure 9.2, on a pris les valeurs suivantes :  $b = 15cm$ ,  $t = 25cm$ ,  $R = 5mm$ ,  $e = 2cm$ ,  $f_c = -30.1MPa$ ,  $f_t = 2.97MPa$  et  $\sigma^u = 500MPa$ . Pour une vraie application au béton armé, il convient de regarder la courbe “du bas”. On remarque qu’une compression partielle de la poutre ( $-1.3 < n < 0$ ) entraîne une amélioration de sa résistance en flexion (dans le domaine  $m < 0$ ) : on retrouve ici le principe du béton précontraint.

Pour une expérience en flexion pure, c’est à dire à  $n = 0$ , on voit que le moment maximal supportable est  $m = -0.9257$  donc un moment réel de  $M = -35.8kN.m$  pour nos valeurs numériques.

On peut également prédire la position de l’axe neutre :

$$\hat{y}_3 = -\frac{\sigma^u A_s}{b(f_t - f_c)} - \frac{(f_t + f_c)t}{2(f_t - f_c)} \quad (9.1)$$

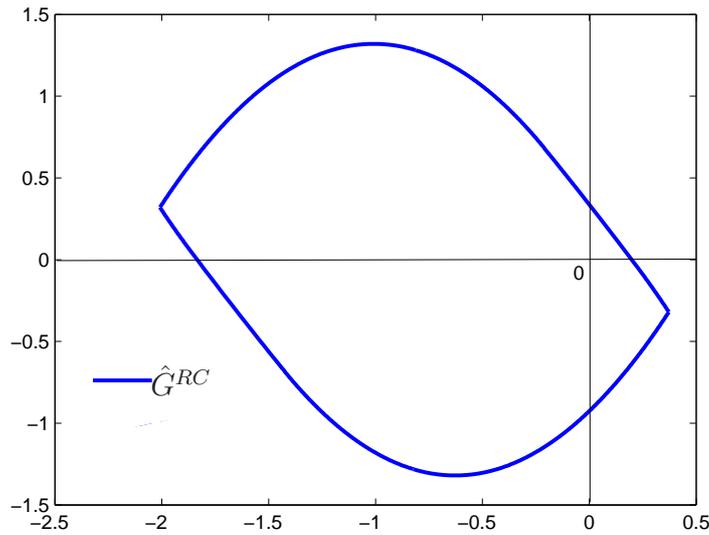


FIG. 9.2. *Domaine de résistance normalisé  $\hat{G}^{RC}$  d'une poutre en béton armé dans le plan  $(n, m_3)$ .*

On voit ici le rôle des aciers qui ont tendance à faire “descendre” l’axe neutre du béton seul situé en  $y_3 = -\frac{(f_t+f_c)t}{2(f_t-f_c)}$ , ce qui assure une aire de béton comprimé plus grande.

A partir de cet axe neutre, il est facile de calculer le moment maximal dans le cas de la flexion pure. On a donc :

$$M = b(f_c - f_t)\left(\frac{t^2}{8} - \frac{\left(-\frac{\sigma^u A_S}{b(f_t-f_c)} - \frac{(f_t+f_c)t}{2(f_t-f_c)}\right)^2}{2}\right) + \sigma^u A_S\left(-\frac{t}{2} + e\right) \quad (9.2)$$

A partir de cette valeur, on peut remonter à la force de ruine d’une expérience de flexion en égalisant cette valeur de  $M$  avec celle donnée par une formule RDM en fonction de la sollicitation  $F$ .

### 9.2.2 Essais de flexion 4 points sur une poutre en béton armé

Le principe de base de la flexion quatre points est représenté sur la Figure 9.3. Ici, on considère une flexion 4 points symétrique et équi-répartie.

On impose une force  $\frac{F}{2}$  en deux points de la structure. On sait alors que le moment est linéaire par morceaux en fonction de  $x_1$  et qu’il est constant entre les deux charges et vaut ici :

$$M = -\frac{FL}{6} \quad (9.3)$$

Ainsi, pour une poutre ayant les caractéristiques géométriques et matérielles données ci-dessus, la force maximale supportée pour un essai 4 points est  $F = 119.3\text{kN}$ .

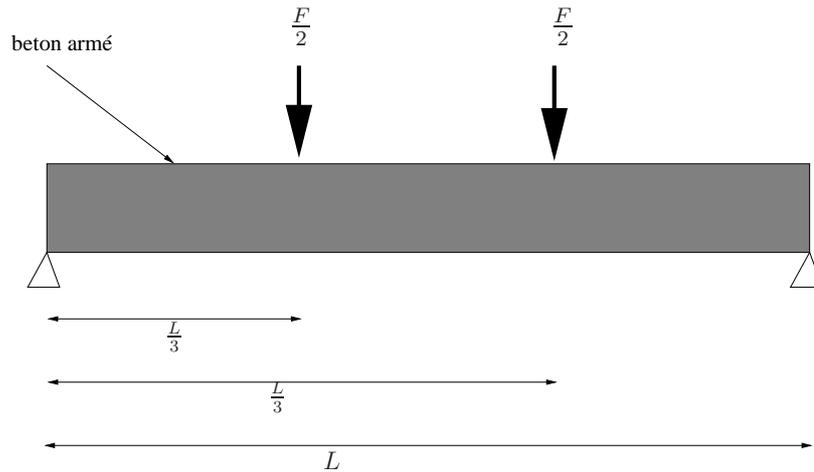


FIG. 9.3. Flexion quatre points d'une poutre en béton armé.

### 9.2.3 Comparaison avec un essai de flexion 4 points

Plusieurs essais de flexion 4 points ont été réalisés sur le bâti de l'Institut Navier montré sur la Figure 9.4.



FIG. 9.4. Expérience de flexion 4 points.

La section des poutres testées est la même que celle décrite ci-dessus. Des essais de caractérisation du béton ont été menés et ont conduit à une valeur de la résistance en compression de  $f_c = -30.1\text{MPa}$  et en traction de  $f_t = 2.97\text{MPa}$ . La valeur de la résistance en traction de l'acier n'a pas été mesurée, mais elle est donnée par le fournisseur comme étant égale à 500 MPa.

Sept essais de flexion 4 points ont été réalisés donnant une moyenne de force de ruine de 105.6kN. La plus petite force de ruine était de 99.2kN et la plus grande de 116.4kN. La courbe typique d'un essai (Force en fonction du déplacement vertical au centre) est donnée sur la Figure 9.5, ainsi que la manière de déterminer la force de ruine.

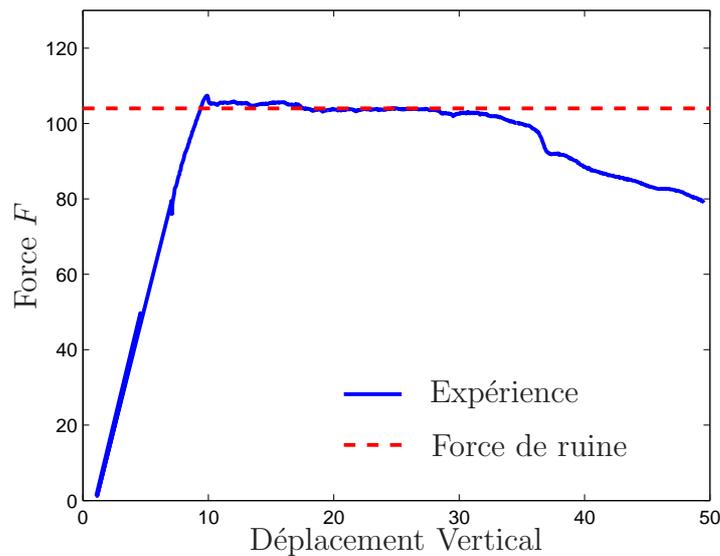


FIG. 9.5. Force en fonction du déplacement vertical pour la flexion de 4 points d'une poutre en béton armé et détermination de la force de ruine

On voit donc que notre modèle, qui donne une force de ruine de 119.3 kN, surestime en moyenne la force de ruine réelle de 13%. L'erreur varie, quant à elle, de 2.4% à 20.2%. On peut donc estimer que les résultats donnés par le modèle sont satisfaisants. Il est a priori normal que la force de ruine prédite par le modèle soit supérieure à la valeur réelle, bien qu'il s'agisse d'une approche statique puisque la théorie du calcul à la rupture conduit à une borne supérieure du chargement maximal réel.

### 9.3 Application aux poutres en béton armé renforcées

Dans cette partie, on va s'intéresser aux poutres en béton armé renforcées à l'aide de plats composites ou de plats acier. Après une rapide étude bibliographique sur les différents modes de ruines de telles poutres, on proposera une méthode basée sur un modèle multicouche M4 pour le calcul du chargement de ruine de celles-ci. Enfin, une validation de ce modèle sera effectuée sur des essais de la littérature. Cette modélisation sera utilisée pour obtenir une prédiction de la force de ruine de poutres en béton armé renforcées avec différents types d'acier. Des essais seront menés et les résultats seront comparés aux estimations théoriques.

#### 9.3.1 Modes de rupture pour les poutres renforcées

Plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés sur le renforcement des poutres. Les essais effectués en général sont des essais de flexion 4 points. Ceux-ci présentent une zone de moment constant entre les deux charges. Grâce au renforcement, on peut prétendre multiplier par 2 la force de ruine de la poutre comme le montrent les expériences réalisées par Ramana

et al. (2000). Les fissurations apparaissent en zone centrale de moment constant. La rupture peut se produire dans les aciers, le béton, le renfort et les interfaces entre ces différents matériaux. Les modes de rupture des poutres en béton armé renforcées peuvent être divisés en deux catégories : ceux dus à la flexion et ceux dus à l'effort tranchant.

### 9.3.1.1 Modes de ruine dus à la flexion

Les trois modes de ruines dus à la flexion sont :

1- Une rupture par compression excessive du béton : le béton atteint la résistance maximale.

2- Une rupture par traction excessive des armatures métalliques tendues (plastification des armatures d'acier).

3- Une rupture par traction excessive du renfort.

Ces différents types de ruines sont illustrés sur la Figure 9.6.

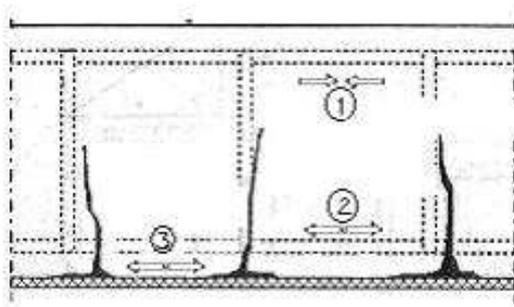


FIG. 9.6. Modes de ruine dus à la flexion

### 9.3.1.2 Modes de ruine dus à l'effort tranchant

Les quatre modes de ruines dus à l'effort tranchant sont :

1- Une rupture par compression excessive de bielles de béton comprimé, situées entre des fissures de traction dues à l'effort tranchant.

2- Une plastification excessive des armatures transversales métalliques.

3-Une rupture de l'interface tissu/béton par délaminage du composite de renforcement inférieur.

4-Rupture par décollement du béton d'enrobage ("peeling-off").

Ces différents types de ruine sont illustrés sur la Figure 9.7 et 9.8.

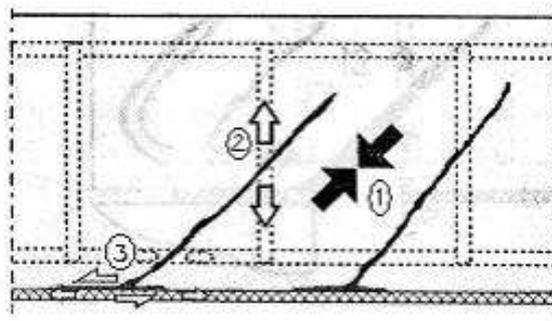


FIG. 9.7. Modes de ruines dus à l'effort tranchant

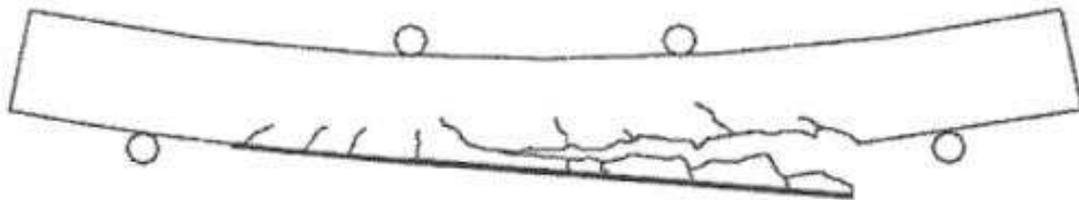


FIG. 9.8. Peeling-off

L'interface entre le béton et le renfort peut être envisagée en deux sous-interfaces : l'interface colle-renfort et l'interface colle-béton. La rupture par délaminage correspond à la rupture de la première et la rupture par peeling-off à la seconde.

L'analyse par éléments finis des contraintes à l'interface par éléments finis montre une concentration de contraintes de cisaillement aux bords du renfort (Buyle-Bodin et al., 2002). La rupture se fait par une propagation de la fissure dans l'adhésif. Dans ces cas, on peut observer que la plaque de renfort est décollée avec ou sans béton encore collé à cette dernière. Des modèles analytiques proposent une variation exponentielle de la contrainte de cisaillement à l'interface, atteignant son maximum au bord (Sierra-Ruiz et al., 2002). Des

expériences de flexion 3 points où les poutres sont équipées de jauges de déformation placées sur l'interface béton-renfort donnent des résultats concordants avec cette modélisation (Tajsten, 1997).

La rupture par peeling-off (Figure 9.8) consiste en une propagation d'une fissure horizontale au niveau des aciers inférieurs. On observe alors un décollement du béton d'enrobage (Triantafilou et Plevris, 1992), (Garden et al., 1998).

### 9.3.2 Méthodes de calcul existantes pour la modélisation d'une poutre en BA renforcée par collage de renfort

#### 9.3.2.1 Modélisation classique

Dans les modélisations les plus classiques, on suppose qu'il y a adhérence parfaite entre le béton et le renfort. Le calcul consiste alors à écrire l'équilibre de la demi-poutre à la droite de la section médiane (Sharif et al., 1994) (Aitali et al., 1993). Dans cette modélisation, l'acier est plastifié lorsque la contrainte dans celui-ci atteint la contrainte limite de plastification. Le béton est rompu lorsque la fibre supérieure atteint la limite de déformation à la rupture du béton. On utilise alors un critère en extension du béton. Enfin, le renfort plastifie lorsqu'il atteint sa limite de plastification (qui peut être la limite d'élasticité quand il s'agit d'un composite type fibres de carbone avec un comportement élastique fragile). Dans le cas de la flexion trois points, la section médiane est la plus sollicitée. Les modes de rupture par flexion peuvent alors être décrits. Néanmoins, le mode de ruine par décollement du renfort et par peeling-off ne peut être décrit par cette méthode.

#### 9.3.2.2 Modélisation par méthode non linéaire itérative

Il est possible de décrire également le comportement non linéaire des poutres. Varahstepour et Hamelin (1994) ont proposé d'adopter une méthode itérative basée sur une incrémentation pas à pas du chargement. Les auteurs considèrent des lois de comportement non linéaires pour les matériaux, ainsi qu'une loi de comportement à l'interface. Cette méthode tient compte du glissement aux interfaces à chaque itération, ils obtiennent ainsi un diagramme moment-courbure à partir duquel ils décrivent le comportement.

Cette méthode est néanmoins assez coûteuse du point de vue du temps de calcul.

#### 9.3.2.3 Modélisation par éléments finis

Cette méthode est performante mais coûteuse en temps de calcul. En effet, le cas d'une poutre en BA renforcée nécessite un maillage assez raffiné afin de bien décrire les différents phénomènes. La méthode des éléments finis est néanmoins extrêmement utile dans le cas d'ouvrages exceptionnels avec des formes complexes telle que des coques en béton armé pour lesquelles des méthodes simplifiées sont plus rares.

On citera notamment David (1998) qui a utilisé de telles méthodes pour la prédiction du comportement des poutres en béton renforcées par des plaques de matériaux composites. Dans son approche, le béton est considéré comme un matériau élasto-plastique avec écrouissage dans le domaine de compression et comme un matériau linéaire élastique fragile dans le domaine de traction. Les aciers sont élasto-plastiques parfaits. Le renfort en matériaux composites et le joint de colle sont supposés élastiques linéaires.

Dans (Buyle-Bodin et al., 2002), le même type de loi est utilisé pour les matériaux, mais des lois de comportement particulières sont également considérées pour l'interface composite-béton et l'adhérence entre les aciers et le béton. Ce modèle permet de modéliser le comportement d'une poutre fissurée et réparée.

#### 9.3.2.4 Méthodes de calculs relatives au décollement du renfort

Différentes méthodes pour prévoir les ruptures par décollement ou peeling-off sont disponibles dans la littérature. En général, les auteurs considèrent que ces ruptures se confondent. Elles sont décrites par la même approche. Ces méthodes peuvent être divisées en trois grandes catégories :

- la méthode basée sur l'effort tranchant
- la méthode des dents
- la méthode d'analyse des contraintes en bord de renfort

Nous nous proposons de les développer plus précisément dans la suite.

##### *Méthode basée sur l'effort tranchant*

Dans le cas de poutres en béton armé renforcées soumises à une flexion trois ou quatre points, le moment est nul aux extrémités de la poutre. La valeur limite de l'effort tranchant pour éviter un décollement de la plaque de renfort est donc donnée au niveau de l'appui (l'extrémité de la plaque de renfort est supposée se situer près de l'appui).

Ainsi, Oehlers (2001), puis Jansze (1997) ont proposé un critère portant sur l'effort tranchant maximal pour une poutre en BA renforcée avec une plaque d'acier. Ce dernier propose un critère indépendant du taux de renforcement de la poutre. Lorsque la valeur maximale de l'effort tranchant est atteinte, le béton se fissure sous l'effet du cisaillement et se fragilise au voisinage du renfort entraînant un décollement du renfort. La valeur maximale de l'effort tranchant pour ce modèle est donnée par :

$$Q_{max} = bd\tau_{max} \quad (9.4)$$

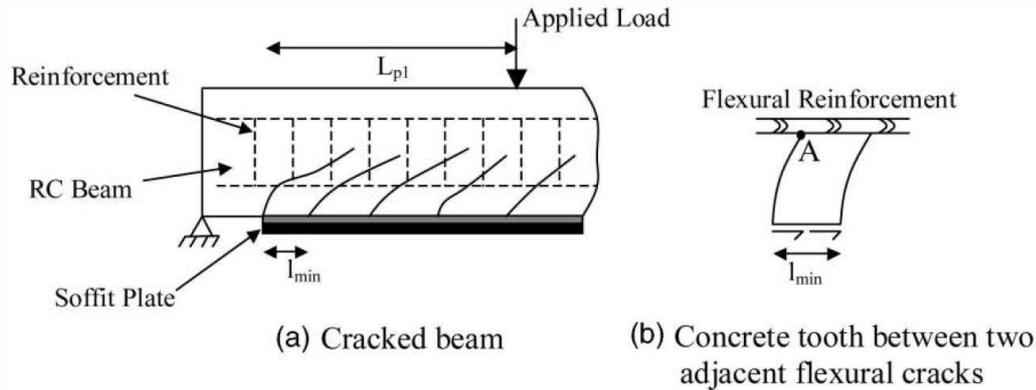


FIG. 9.9. Méthode des dents de béton

où  $\tau_{max}$  est la valeur maximale du cisaillement dans le béton,  $b$  est la largeur de la poutre et  $d = t - e$  est le bras de levier et  $t$  est l'épaisseur de la poutre et  $e$  l'épaisseur d'enrobage. Des corrections ont été proposées pour tenir compte des aciers longitudinaux et certains auteurs (Ahmed et al., 2001) ont proposé des modèles similaires mais en tenant compte du renforcement à l'effort tranchant à savoir les armatures transversales.

#### Méthode des dents

Cette méthode a été décrite par (Zhang et al., 1995) pour les poutres en béton armé renforcées par des plaques d'acier. Ce modèle est utilisé pour la rupture de type peeling off. Il suppose la formation de fissures horizontales au niveau de la zone de béton en traction, qui engendrent la formation de "dents" de béton. Dans cette zone, les auteurs font l'hypothèse que les fissures sont espacées d'une distance variant entre  $l_{min}$  et  $l_{max} = 2l_{min}$ . Cette dent de béton est alors modélisée comme une poutre encastree avec un chargement de cisaillement en son extrémité au niveau de la plaque composite. Selon ce modèle, la rupture par peeling-off survient lorsque la limite en traction du béton est atteinte dans la section au niveau de l'encastrement (Fig 9.9).

La valeur minimale de l'espacement des fissures est donnée par la relation :

$$l_{min} = \frac{A_t f_t}{\tau^c (P + b)} \quad (9.5)$$

avec  $A_t$  la surface de béton en traction,  $f_t$  la résistance à la traction du béton.  $P$  est la somme des périmètres des aciers d'armature et  $b$  est la largeur de la plaque d'acier, supposée égale à la largeur de la poutre. Enfin,  $\tau^c$  est la limite à la rupture par cisaillement de l'interface entre l'acier et le béton. Cette dernière peut être déterminée par un essai d'arrachement d'armature.

La rupture se produit quand la contrainte au point A (Figure 9.9) atteint la limite en traction. La loi de comportement du béton étant supposée linéaire élastique, on a :  $\sigma_A = \frac{M_A l}{I_A 2}$ ,  $I_A$  étant le moment d'inertie de la section de la poutre considérée,  $M_A$  le moment appliqué

au niveau de l'encastrement et  $l$  la distance effective entre deux fissures.

D'après cette théorie, toutes les dents se rompent au niveau de leur ancrage sous un chargement de cisaillement minimal à l'extrémité tel que :

$$\tau_{min} = \frac{f_t l_{min}}{6e} \quad (9.6)$$

où  $e$  est l'épaisseur de l'enrobage. A partir de là, il est aisé de remonter à la contrainte de traction minimale permise au niveau de la plaque de renfort pour un chargement de flexion. Il suffit d'écrire l'équilibre de la plaque de renfort sous un chargement de traction et de cisaillement à l'interface. On obtient alors :

$$\sigma_s = 0.5 \frac{L_p h_l b f_t}{e(P + b)t_p} \quad (9.7)$$

$L_p$  est la demi-longueur de la plaque de renfort dans le cas de la flexion trois points,  $t_p$  son épaisseur et  $h_l$  est la distance entre le centre de gravité des aciers et l'interface de collage de la plaque de renfort. On peut enfin relier  $\sigma_s$  à la charge de la poutre en écrivant que la somme des forces et des moments sur une section est nulle.

#### *Méthode d'analyse des contraintes à l'interface*

Comme nous l'avons signalé précédemment, les études par éléments finis montrent une concentration de contraintes de cisaillement en bord de plaque. Cela explique la propagation des fissures à partir de cet endroit.

Ziraba et al. (1994) ont proposé un critère portant sur le cisaillement maximal et la contrainte d'arrachement en bord de plaques et à l'interface entre le composite et le béton. Il s'agit d'un critère de type Mohr-Coulomb. L'auteur propose :

$$\tau + \sigma \tan(\phi) \leq C \quad (9.8)$$

où  $C$  est la cohésion et  $\phi$  l'angle de frottement interne.  $\tau$  est la contrainte de cisaillement et  $\sigma$  celle d'arrachement en bord de plaque. Ces dernières sont données par les formules empiriques :

$$\tau = \alpha_1 f_t \left( \frac{C_{R1} Q_0}{f_c} \right)^{\frac{5}{4}} \quad \text{et} \quad \sigma = \alpha_2 C_{R2} \tau \quad (9.9)$$

où les coefficients  $C_{R1}$ ,  $C_{R2}$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont empiriques et donnés par (Roberts, 1989).  $Q_0$  est l'effort tranchant. Les ruptures par peeling off et décollement peuvent donc être prédites à partir d'un critère sur l'effort tranchant dans la poutre.

Par ailleurs, Varahstepour et Hamelin (1994) ont établi une formule de la contrainte de cisaillement dans le joint de colle entre deux sections distantes de  $dx$ , partant d'une méthode itérative :

$$\tau = (\epsilon_i - \epsilon_j) \frac{E_r A_r}{b} dx \quad (9.10)$$

où  $\epsilon_i - \epsilon_j$  représente la variation de déformation de la plaque composite.  $A_r$  est la section de la plaque de renfort,  $E_r$  son module d'Young et  $b$  sa largeur.

Ces mêmes auteurs ont également développé un critère de décollement basé sur un critère de type Mohr-Coulomb à l'interface. Le coefficient de cohésion  $C$  est déterminé par des essais de traction-cisaillement (une valeur de 5.4 MPa est suggérée), l'angle de frottement est déterminé par des essais sur des petites poutres renforcées (une valeur de 33° est suggérée). La valeur de cisaillement utilisée dans le critère de Mohr-Coulomb est donnée par :

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\beta} (\lambda Q_0)^{\frac{3}{2}} \quad (9.11)$$

$\beta$  et  $\lambda$  sont des constantes qu'on détermine expérimentalement.

### 9.3.3 Méthode de Limam, Foret et Ehrlacher

Comme on l'a déjà évoqué plus haut, (Limam et al., 2003a) ont développé un modèle multiparticulaire pour matériau multicouche en calcul à la rupture. Ce modèle est un modèle de plaque, mais ils l'ont appliqué aux poutres en béton armé renforcées en considérant la théorie de plaque en déformation plane en flexion trois points. Dans ce modèle, chaque couche est vue comme une membrane avec des efforts généralisés  $\mathbf{N}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  qui sont les efforts membranaires et le cisaillement d'interface.

Dans cette modélisation des poutres en béton armé renforcées par des plaques de composites en fibres de carbone, les auteurs considèrent un tri-couche : béton en compression (couche 3), aciers (couche 2) et composite (couche 1). Pour calculer l'épaisseur de la couche de béton en compression, les auteurs utilisent une formule approchée donnant l'axe neutre quand tous les matériaux sont supposés élastiques, après avoir prouvé que la position de l'axe neutre ne variait pas beaucoup à l'approche de la rupture. Cette formule approchée est donnée dans (Ferrier, 1999). L'épaisseur de la couche 3 (béton en compression) est alors prise égale à  $t_3 = 2t - 2e - 0.8\hat{y}_3$  où  $t$  est l'épaisseur de la poutre,  $e$  l'épaisseur d'enrobage et  $\hat{y}_3$  est la position de l'axe neutre calculée précédemment. Pour l'épaisseur de la couche d'acier, ils considèrent qu'elle est égale à deux fois la distance d'enrobage  $t_2 = 2e$ . Enfin, l'épaisseur de composite  $t_1$  est l'épaisseur réelle de la plaque de renfort (Fig 9.11). Ainsi, l'épaisseur de la poutre multicouche est plus grande que l'épaisseur de la poutre réelle ( $t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + 2t - 0.8\hat{y}_3$ ,  $y_3$  étant compris  $-t/2$  à  $t/2$ ).

Les variables statiques introduites sont :  $N^1$ ,  $N^2$ ,  $N^3$ ,  $\tau^{1,2}$  et  $\tau^{2,3}$ .  $\tau^{1,2}$  représente le cisaillement dans le joint de colle et  $\tau^{2,3}$  est le cisaillement pouvant produire le peeling-off.

Les critères unidimensionnels de rupture adoptés sont :

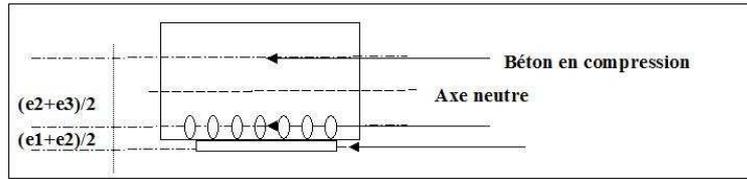


FIG. 9.10. Modélisation de type tri-couche (Limam, 2003)

- Pour le béton, le critère est  $|N^3| \leq N_c^3 = -0.85f_cab$ .  $a$  est la profondeur de l'axe neutre par rapport à la fibre supérieure,  $b$  la largeur de la poutre et  $f_c$  la limite en compression du béton (négative). La traction est négligée :  $f_t = 0$ .
- Pour les aciers, le critère est  $|N^2| \leq N_c^2 = A_s\sigma_u^2$ .  $A_s$  est la section d'acier et  $\sigma_u^2$  la limite de plastification de ceux-ci.
- Pour le composite, le critère est  $|N^1| \leq N_c^1 = \sigma_u^1 s b e_1$  où  $e_1$  est l'épaisseur du composite et  $\sigma_u^1$  sa limite de rupture.
- Pour le cisaillement dans la colle, le critère est  $|\tau^{1,2}| \leq \tau^c$  où  $\tau^c$  est le cisaillement maximal dans la colle (donné par le fabricant).
- Pour le cisaillement maximal entre le béton et l'acier, le critère est  $|\tau^{1,2}| \leq \tau^{po}$ ,  $\tau^{po} = -0.05f_c$ .

Les auteurs considèrent que la rupture de la poutre a lieu lorsque deux éléments du tri-couche parmi les 5 existants (les 3 couches et les 2 interfaces) sont rompus (i.e. le critère sur les variables statiques est atteint). Tous les mécanismes de ruine possibles en fonction des paramètres des critères et de la géométrie de la poutre sont calculés et le mécanisme donnant la valeur de force de ruine minimale est adopté. Ce modèle a l'avantage d'être très simple car analytique.

On notera par ailleurs que la flexion quatre points symétrique est analogue à la flexion trois points : il suffit de remplacer la demi-longueur de la poutre en flexion trois points par la distance entre la charge et l'appui de la flexion quatre points.

### 9.3.3.1 Comparaison des modèles sur un exemple

(Hamelin et Varastehpour, 1997) ont testé 4 poutres en béton armé renforcées par une plaque de carbone jusqu'aux appuis en flexion quatre points symétrique. Les caractéristiques sont les suivantes :

La longueur de la poutre est 2m, sa largeur 15cm et son épaisseur 25cm. Le béton la constituant présente une limite en compression de 42MPa et une limite en traction de 2.8 MPa. Les aciers inférieurs ont un diamètre de 14mm et leur limite de plastification est 540 MPa.

L'enrobage est de 3.5mm. Enfin, la plaque de composite est épaisse de 2.5mm et présente une limite en traction de 1380 MPa. Les modules d'Young des matériaux sont : 35GPa pour le béton, 210 GPA pour l'acier et 117 GPa pour le composite.

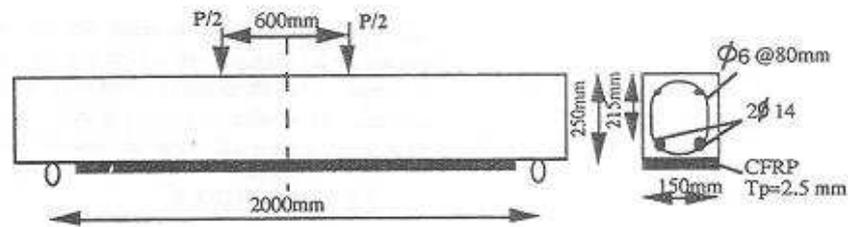


FIG. 9.11. Caractéristiques de la poutre (Hamelin et al, 1997)

Cette poutre rompt par un mécanisme de peeling-off. Le critère de Mohr-Coulomb et une valeur de cisaillement décrivant le peeling-off de 2MPa ont été appliqués par les auteurs. La force de ruine expérimentale  $P$  varie de 160 à 200 kN. Une comparaison des résultats de différents modèles est donnée sur la Figure 9.12 :

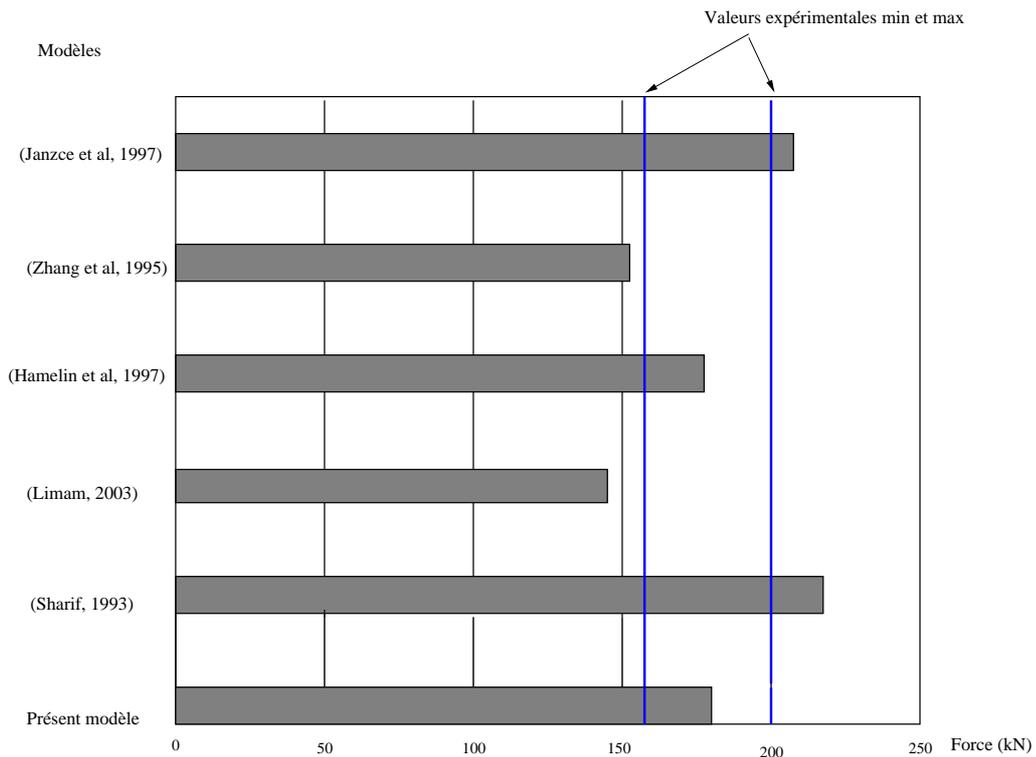


FIG. 9.12. Comparaison des résultats donnés par les différents modèles

On constate que le modèle de (Sharif et al., 1994) surestime assez largement les forces de ruines expérimentales. En effet, dans ce modèle, seul un mécanisme de rupture par flexion peut être décrit et ce n'est pas le mécanisme qui est observé expérimentalement. Le modèle de (Limam, 2002) sous-estime au contraire la force de ruine. Le modèle de (Hamelin et Varastehpour, 1997) est le plus performant sur cet exemple.

## 9.4 Un Nouveau Modèle Multicouche pour les poutres en béton armé renforcées

On propose ici un nouveau modèle multicouche pour les poutres en béton armé renforcées en flexion trois points. Ce modèle est forcément approché car le béton armé n'est pas un matériau multicouche (en se plaçant dans un référentiel lié à la section de la poutre, les armatures en acier sont des inclusions dans une matrice de béton). Cependant, les résultats de (Limam et al., 2003a) étant relativement bons, il nous a semblé opportun d'améliorer ce modèle.

### 9.4.1 Modélisation multicouche

Pour modéliser les aciers d'armature, on suppose qu'ils forment une couche d'épaisseur  $t_2 = x + e$  où  $e$  est l'épaisseur d'enrobage des aciers, qui est donnée.  $x$  est une épaisseur à optimiser qui correspond à l'épaisseur de béton au-dessus des aciers entraînée par ceux-ci. La résistance de cette couche est prise égale à  $\sigma_a^u S$  où  $S$  représente la section des aciers (on néglige la traction du béton devant celle des aciers).

La couche de renfort est, elle aussi, très peu épaisse et sera considérée comme une membrane. Son épaisseur dans le modèle multicouche  $t_1$  est son épaisseur physique. La résistance de cette couche sera  $bt_1\sigma_r^u$  où  $b$  est la largeur de la poutre et  $\sigma_r$  la résistance de la couche de renfort.

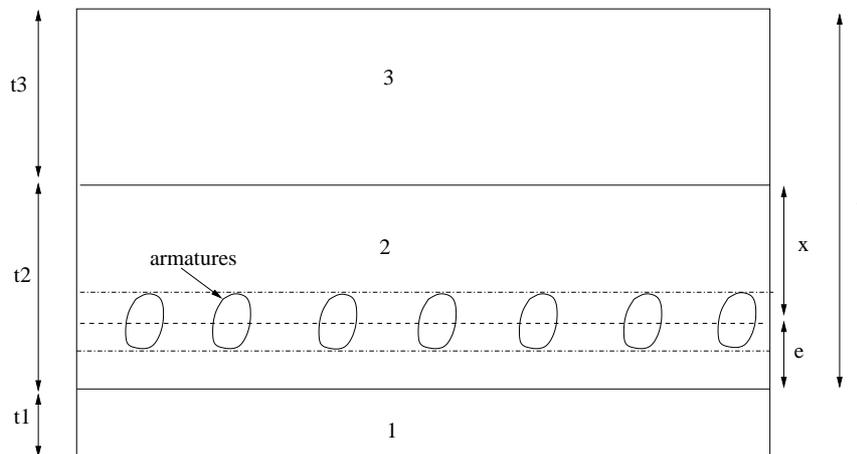


FIG. 9.13. Modélisation multicouche adoptée pour une poutre en béton armé renforcée

Enfin, pour la couche de béton, son épaisseur dans le modèle multicouche sera  $t_3 = t - t_2 = t - x - e$  où  $t$  est l'épaisseur de la poutre en béton armé. On considérera cette couche comme une plaque de Reissner, soumise aux efforts généralisés  $N_3$ ,  $M_3$  et  $Q_3$ . Nous ferons, cependant, l'hypothèse que les modes de ruine dus à la flexion sont complètement découplés de ceux dus à l'effort tranchant. Les caractéristiques de résistance du béton sont  $f_c$  et  $f_t$ , les limites en compression et traction du béton ainsi que la valeur de cisaillement limite du béton  $f_{cis} = 0.05f_c$ . Ces valeurs de résistance en traction et en cisaillement du béton sont

des valeurs dites “caractéristiques”, c’est à dire que sur 100 essais de traction ou cisaillement du béton, on les dépasse 90 fois sur 100. Nous choisissons de les prendre ainsi dans notre modèle pour des raisons de sécurité dans un éventuel dimensionnement.

Ainsi, les efforts généralisés du modèle sont donc :

- $N^3$ ,  $M^3$  et  $Q^3$  les résultantes des efforts membranaires, de moments de flexion et d’efforts tranchants dans le béton,
- $N^2$  la résultante des efforts membranaires dans les aciers (qui seront toujours supposés travailler en traction),
- $N^1$  la résultante des efforts membranaires dans le renfort (toujours supposés en traction également),
- $\tau^{1,2}$  le cisaillement à l’interface 1, 2, qui représente le cisaillement dans la colle,
- $\tau^{2,3}$  le cisaillement à l’interface 2, 3, qui représente le cisaillement de peeling-off.

Comme pour l’exemple de sandwich tri-couche en déformation plane traité dans le chapitre 6, on va appliquer la méthode cinématique du modèle M4.

## 9.4.2 Approche statique

### 9.4.2.1 Equations d’équilibre

Dans le cas d’une poutre soumise à un champ de forces  $\mathbf{h}^\pm = h_3^\pm \mathbf{e}_3$ , les équations d’équilibre sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN^1}{dx_1} + \tau^{1,2} = 0 \\ \frac{dN^2}{dx_1} + \tau^{2,3} - \tau^{1,2} = 0 \\ \frac{dN^3}{dx_1} - \tau^{2,3} = 0 \\ \frac{dM^3}{dx_1} - Q^3 + \frac{t_3}{2} \tau^{2,3} = 0 \\ \frac{dQ^3}{dx_1} + \frac{t_1}{2} \frac{d\tau^{1,2}}{dx} + \frac{t_2}{2} \left( \frac{d\tau^{1,2}}{dx} + \frac{d\tau^{2,3}}{dx} \right) + h_3^+ + h_3^- = 0 \end{array} \right. \quad (9.12)$$

### 9.4.2.2 Critères sur les matériaux

On supposera que les matériaux suivent les critères suivants :

- Pour le renfort, le critère est celui de Von-Mises uniaxial  $|\sigma_{11}| \leq \sigma_r^s$  i.e.  $f_1(N^1) = |N^1| - \sigma_r^s b t_1$

- Pour les aciers, le critère est celui de Von-Mises uniaxial  $|\sigma_{11}| \leq \sigma_a^s$  i.e.  $f_2(N^2) = |N^2| - \sigma_a^s S$ .

- Pour le cisaillement dans la colle, le critère est  $g^{1,2}(\tau^{1,2}) = |\tau^{1,2}| - \tau^c$  où  $\tau^c$  est le cisaillement maximal dans la colle (donné par le fabricant).

- Pour le cisaillement maximal entre le béton et l'acier, le critère est  $g^{2,3}(\tau^{2,3}) = |\tau^{2,3}| - \tau^{po}$ ,  $\tau^{po} = -0.05 f_c$ .

- Pour le béton, on suppose que cette couche est une couche avec une cinématique d'Euler-Bernoulli, donc soumise aux efforts généralisés  $N^3$  et  $M^3$ . Pour ces efforts, on propose le critère caractérisant  $G_b^{hom,l}$  proposé dans le chapitre précédent  $f_3^f(N_3, M_3) = |m_3| + (n_3 - \frac{f_t - f_c}{f_t + f_c})^2 - 1$  où  $n_3$  et  $m_3$  sont les efforts normalisés.

- Pour l'effort tranchant dans le béton, on supposera  $f_3^t(Q^3) = Q^3 - b(t - e) f_{cis}$ .

Ainsi, le problème d'analyse limite de la poutre de béton armé renforcée modélisée par une poutre multicouche M4 est donc de trouver le chargement maximal supportable par celle-ci, sachant que les efforts généralisés doivent vérifier les conditions d'équilibre et les critères :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \\ (N^1, N^2, N^3, M^3, \tau^{1,2}, \tau^{2,3}) \\ \text{vérifiant (9.12) et} \\ f_i(N^i, M^i) \leq 0, g^{i,i+1}(\tau^{i,i+1}) \leq 0 \end{array} \right\} F \quad (9.13)$$

où on suppose que le chargement est celui d'une flexion trois points ( $h_3^+ = F_{\{x=0\}} \mathbf{e}_3$  et  $h_3^- = 0$ ).

### 9.4.3 Approche cinématique

Nous allons tout d'abord nous restreindre à une cinématique d'Euler-Bernoulli pour le béton. Ainsi, dans toutes les couches, la courbure est la même  $\chi^1 = \chi^2 = \chi_3 = \chi$ . Cependant, on va centrer la couche 2 au niveau de la position des armatures et non au centre géométrique de cette couche. Ainsi, les déformations généralisées duales des efforts généralisés sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} D^1 = \frac{dV_1^1}{dx} \\ D^2 = \frac{dV_1^2}{dx} \\ D^3 = \frac{dV_1^3}{dx} \\ \chi_3 = -\frac{d^2V_3}{dx^2} \\ \Delta^{1,2} = V_1^2 - V_1^1 + \frac{t_1+2e}{2} \frac{dV_3}{dx} \\ \Delta^{1,3} = V_1^3 - V_1^2 + \frac{2x+t_3}{2} \frac{dV_3}{dx} \end{array} \right. \quad (9.14)$$

Celles-ci sont obtenues via le principe des puissances virtuelles qui s'écrit :

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (N^1 D^1 + N^2 D^2 + N^3 D^3 + M^3 \chi^3 + \tau^{1,2} \Delta^{1,2} + \tau^{2,3} \Delta^{2,3}) dx = FV_3(x_1 = 0) \quad (9.15)$$

### 9.4.3.1 Fonctions de dissipation

On suppose que les contraintes sont invariantes dans la largeur de la poutre, i.e.  $\sigma = \sigma(x_1, x_3)$ .

Les fonctions de dissipation associées à ces critères sont donc :

- Pour le béton :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \pi^3(D^3, \chi) = f_t(D^3 + y_3\chi) & \text{si } D^3 + y_3\chi \geq 0 \\ \pi^3(D^3, \chi) = -f_c(D^3 + y_3\chi) & \text{si } D^3 + y_3\chi \leq 0 \end{array} \right. \quad (9.16)$$

- Pour les aciers, on suppose que la flexion n'intervient pas :

$$\pi^2(D^2, \chi) = \sigma_a^s |D^2| \quad (9.17)$$

- Pour le renfort :

$$\pi^1(D^1, \chi) = \sigma_r^s |D^1| \quad (9.18)$$

- Pour l'interface de colle :

$$\pi^{1,2}(\Delta^{1,2}) = \tau^c |\Delta^{1,2}| \quad (9.19)$$

- Pour l'interface de peeling-off :

$$\pi^{2,3}(\Delta^{1,2}) = \tau^{po} |\Delta^{2,3}| \quad (9.20)$$

Ainsi, la fonction de dissipation  $M_4$  totale  $\Pi^{M_4}$  est la somme de 5 termes :

– Flexion combinée du béton

$$T_1 = b \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{-\frac{t^3}{2}}^{\frac{t^3}{2}} \pi^3(D^3, \chi) dx_1 dx_3 \quad (9.21)$$

– Traction des armatures

$$T_2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} S_a \pi^2(D^2) dx_1 \quad (9.22)$$

– Traction du renfort

$$T_3 = bt_1 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \pi^1(D^1) dx_1 \quad (9.23)$$

– Cisaillement dans la colle

$$T_4 = b \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \pi^{1,2}(\Delta^{1,2}) dx_1 \quad (9.24)$$

– Cisaillement de peeling-off

$$T_5 = b \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \pi^{2,3}(\Delta^{2,3}) dx_1 \quad (9.25)$$

D'après la méthode cinématique de l'analyse limite, on peut obtenir une borne supérieure du chargement supportable  $F_{max}$  :

$$F_{max} \leq \min_{\mathbf{V}} \Pi^{M_4}(D^1, D^2, D^3, \chi^3, \Delta^{1,2}, \Delta^{2,3}) \quad (9.26)$$

pour tous les champs de déformation généralisée compatibles et vérifiant les conditions aux limites de la flexion trois points :  $V_3(\frac{-L}{2}) = V_3(\frac{L}{2}) = 0$  et la condition de normalisation  $V_3(0) = 1$ .

## 9.5 Un mécanisme de ruine pour la flexion trois points

La symétrie de la flexion trois points nous permet de ne considérer qu'une moitié de la poutre. La demi-poutre est donc encastree en un bord et est soumise à une force  $\frac{F}{2}$  en son autre extrémité (Figure 9.14).

### 9.5.1 Cinématique d'Euler-Bernoulli pour le béton

On suppose d'abord comme précédemment que le béton ne subit pas d'effet de cisaillement réparti  $Q_3 = 0$ . On choisit un mécanisme de rotule plastique à l'extrémité encastree en  $x_1 = 0$ . Le déplacement vertical est le même pour toutes les couches et est affine. La condition de normalisation devient ici  $V_3(\frac{L}{2}) = 1$  et les conditions limites  $V_3(x_1 = 0) = \frac{dV_3}{dx_1}(x_1 = 0) = 0$ . Le champ de vitesse M4 s'écrit donc :

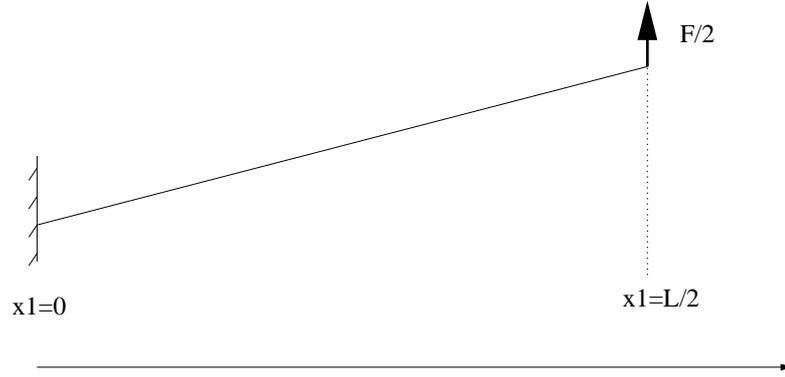


FIG. 9.14. Demi-poutre équivalente à une poutre en flexion 3 points

$$\begin{cases} V^1 = A \text{ si } x_1 > 0 \\ V^2 = B \text{ si } x_1 > 0 \\ V^3 = C \text{ si } x_1 > 0 \\ V_3 = \frac{2}{L}(x_1 + \frac{L}{2}) \end{cases} \quad (9.27)$$

Les déformations généralisées sont donc :

$$\begin{cases} D^1 = A\delta_{x_1=0} \\ D^2 = B\delta_{x_1=0} \\ D^3 = C\delta_{x_1=0} \\ \chi_3 = \frac{2}{L}\delta_{x_1=0} \\ \Delta^{1,2} = B - A + \frac{t_1+2e}{L} \\ \Delta^{2,3} = C - B + \frac{2x+t_3}{L} \end{cases} \quad (9.28)$$

Ainsi la dissipation totale devient donc :

$$\begin{aligned} \Pi^{M4}(A, B, C) = & \sigma_r^u b t_1 |A| + \sigma_a^u S |B| + b \tau^c |B - A + \frac{t_1+2e}{L}| + b \tau^{p0} |C - B + \frac{2x+t_3}{L}| + \dots \\ & b \int_{-\frac{t_3}{2}}^{\frac{t_3}{2}} 2\pi^3 (C - y_3 \frac{2}{L}) dy_3 \end{aligned} \quad (9.29)$$

En vertu de la méthode cinématique, on aura donc :

$$F_{max} \leq 2 \min_{A,B,C} \pi^{M4}(A, B, C) \quad (9.30)$$

On doit donc procéder à la minimisation d'une fonction par rapport aux trois variables A,B,C. Cette minimisation sera effectuée à l'aide du logiciel MATLAB.

Afin de tester ce modèle, nous allons le comparer à une série d'essais faits par (Hamelin et Varastehpour, 1997) et Limam (2002).

Il est a priori difficile d'estimer l'épaisseur du béton entraînée par la cinématique des aciers  $x$ , c'est pourquoi dans la suite, nous ferons une étude paramétrique de ce modèle en fonction de  $x$ . On a choisi 6 valeurs de  $x$ ,  $x = ke$  avec  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  et  $e$  l'épaisseur d'enrobage.

### 9.5.2 Vérification de l'effort tranchant à l'appui

Comme on l'a vu plus haut, un mécanisme de ruine avec fissuration du béton à l'appui est possible et n'est pas pris en compte dans le mécanisme précédent. Pour ce faire, on propose une approche statique. On sait que dans un essai de flexion trois points, l'effort tranchant est constant par morceaux et vaut en valeur absolue  $\frac{F}{2}$ . Il suffit alors de vérifier que :

$$\frac{F_{max}}{2} \leq Q^{max} = b(t - e)f^{cis} = -0.05b(t - e)f_c \quad (9.31)$$

Ensuite, ayant fait la minimisation de la fonction de dissipation pour le mécanisme de ruine proposé avec une cinématique d'Euler-Bernoulli pour le béton, on prend le minimum entre  $2Q^{max}$  et la force de ruine donnée par la minimisation :

$$F_{max} = \min(\min_{A,B,C} \Pi^{M4}, 2Q^{max}) \quad (9.32)$$

## 9.6 Application aux essais sur les poutres en béton armé

Dans cette section, on veut appliquer ce modèle multicouche aux poutres en béton armé étudiées au paragraphe 9.2. Dans ce cas, le multicouche devient un bi-couche avec l'épaisseur de la couche d'armature variable et valant  $x + e$ . Dans ce cas, les constantes  $A$  et  $\tau^c$  sont nulles dans la dissipation (9.29). En effectuant la minimisation sur les variables  $B$  et  $C$ , on obtient une force de ruine variant de 111.9 kN à 99.8 kN (Table 9.1). Le mode de ruine obtenu est une rupture par flexion.

Epaisseur $x$	$x = 0$	$x = e$	$x = 2e$	$x = 3e$	$x = 4e$	$x = 5e$
Force de ruine (kN)	111.9	106.1	103.5	101.5	100.5	99.8

TAB. 9.1. Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents  $x$  pour les poutres en béton armé testées.

On remarque que notre valeur pour  $x = 0$  est plus petite que celle obtenue par le modèle de poutre homogène équivalente d'Euler-Bernoulli (119.3kN). Cela s'explique par le fait que dans notre modélisation multicouche, on néglige le béton situé sous les armatures qui travaille en traction et qui participe de la dissipation. On voit que les valeurs de la force de ruine sont assez stables en fonction de  $x$  et donnent une meilleure approximation de la force de ruine expérimentale moyenne (105.6kN). L'erreur varie de 0.3% à 5.4%.

## 9.7 Comparaison avec des essais de la littérature

On se propose d'appliquer notre modèle à certains essais disponibles dans la littérature sur les poutres en béton armé renforcées, en particulier les essais de Hamelin et Varastehpour

(1997) et Limam et al. (2003a).

### 9.7.1 Essais de (Hamelin et Varastehpour, 1997)

Pour commencer, on se propose de comparer les résultats donnés par le modèle sur l'essai de (Hamelin et Varastehpour, 1997). Il s'agit d'un essai de flexion 4 points symétriques. On sait alors qu'un tel essai se modélise par un essai de flexion trois points en prenant comme demi-longueur de la poutre équivalente en flexion trois points, la distance entre la charge et l'appui de la poutre en flexion 4 points (cf (Hamelin et Varastehpour, 1997), par exemple). Il est à noter que la poutre a été fortement renforcée à l'effort tranchant au niveau des appuis grâce à des cadres métalliques. Notre estimation de l'effort tranchant maximal est donc mauvaise (car ne prenant pas en compte les cadres métalliques). On suppose donc que la rupture n'a pas lieu par effort tranchant excessif dans le béton à l'appui.

En minimisant sur les variables cinématiques introduites précédemment, on obtient une force maximale variant de 187.5 kN à 174kN selon l'épaisseur de béton entraînée choisie  $x$  (Table 9.2).

Epaisseur $x$	$x = 0$	$x = e$	$x = 2e$	$x = 3e$	$x = 4e$	$x = 5e$
Force de ruine (kN)	187.5	183.8	180.5	177.5	175.6	174

TAB. 9.2. *Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents  $x$  pour la poutre de (Hamelin et Varastehpour, 1997).*

On remarque que, dans ce cas, la dépendance de la force de ruine calculée par le modèle par rapport au paramètre  $x$  est faible. Une variation d'environ 6% est observée entre les valeurs extrêmes de  $x$ . On rappelle que les quatre essais de Hamelin et Varastehpour (1997) ont conduit à des valeurs de force de ruine variant entre 160kN et 200kN. Notre modèle est bien pertinent sur cet exemple.

Le pourcentage de la contribution des  $T_i$  à la dissipation totale est montré sur la Table 9.3 pour  $x = 4e$  (il est à noter que pour les autres valeurs de  $x$  la contribution de chaque terme est du même ordre de grandeur). Ainsi, notre modèle montre que le mode de ruine de la poutre est du type peeling-off (la contribution de ce terme à l'énergie est de 80%), comme ce qui a été observé expérimentalement. La comparaison avec les autres modèles est représentée sur la Figure 9.12 (la valeur  $x = 4e$  a été représentée).

Flexion du béton ( $T_1$ )	10%
Traction des aciers ( $T_2$ )	10%
Traction du renfort ( $T_3$ )	0%
Peeling-off ( $T_4$ )	80%
Décollement ( $T_5$ )	0%

TAB. 9.3. *Pourcentage de la dissipation pour l'essai de (Hamelin et Varastehpour, 1997)*

Notre modèle donne de bons résultats pour toutes les valeurs du paramètre  $x$  choisies. Sur cet exemple particulier, il est le meilleur avec celui de (Hamelin et Varastehpour, 1997).

### 9.7.2 Essais de (Limam et al., 2003a)

Dans (Limam et al., 2003a), les auteurs ont testé 4 poutres en béton armé renforcées à l'aide d'un composite en fibre de carbone en flexion trois points. Ces poutres ont différentes caractéristiques géométriques et matérielles. On propose d'appliquer notre modèle à ces poutres afin d'en évaluer la pertinence.

#### 9.7.2.1 Poutre 1

Les caractéristiques de cette poutre sont les suivantes :

- longueur  $L = 2m$
- largeur  $b = 0.1m$
- épaisseur  $t = 5cm$
- épaisseur d'enrobage  $e = 0.006m$
- Aciers : 2 HA 6 (aciers haute adhérence de 6 mm de diamètre)
- Renfort : épaisseur  $e = 0.00156m$
  
- limite en compression du béton  $f_c = -70MPa$
- limite en traction du béton  $f_t = -0.05f_c = 3.5MPa$
- limite de peeling-off  $\tau^{po} = -0.05f_c = 3.5MPa$
- limite de cisaillement de la colle  $\tau^c = 5MPa$
- limite de plasticité des aciers  $\sigma_a^s = 540MPa$
- limite de d'élasticité du renfort  $\sigma_r^s = 2500MPa$

La force de ruine expérimentale obtenue est  $F_{max} = 10.5kN$ .

La rupture du béton par effort tranchant à l'appui a lieu pour une force maximale de 30.8kN. En faisant l'optimisation proposée ci-dessus avec la cinématique d'Euler-Bernoulli pour le béton, on trouve alors une force de ruine variant de 18.12 kN à 8.98 kN selon la valeur du paramètre  $x$  (cf table 9.4). On voit donc que, quelque soit la valeur du paramètre  $x$  choisie, c'est un autre mécanisme que l'effort tranchant à l'appui qui minimise la dissipation. Le mécanisme de ruine prévu par le modèle est une rupture en compression du béton et une plastification des aciers.

A la différence du cas précédent (Hamelin et Varastehpour, 1997), on voit que le choix du paramètre  $x$  est très important dans cet essai. On peut expliquer cette forte dépendance par le mode de ruine. En effet, le mode de ruine obtenu par optimisation est la compression complète de la couche 3 du multicouche (correspondant au béton). Ainsi, plus le paramètre  $x$  est grand, plus la dissipation dans cette couche 3 est petite puisqu'elle est directement

Épaisseur $x$	$x = 0$	$x = e$	$x = 2e$	$x = 3e$	$x = 4e$	$x = 5e$
Force de ruine (kN)	18.12	17.30	15.98	14.14	11.82	8.98

TAB. 9.4. Forces de ruine obtenues par le modèle pour différents  $x$  pour la poutre 1.

proportionnelle à l'épaisseur  $t_3$ . Les pourcentages de dissipation des différents termes de la fonction  $\pi^{M4}$  sont présentés dans la Table 9.5 pour  $x = 4e$ .

Flexion du béton ( $T_1$ )	96%
Traction des aciers ( $T_2$ )	4%
Traction du renfort ( $T_3$ )	0%
Peeling-off ( $T_4$ )	0%
Décollement ( $T_5$ )	0%

TAB. 9.5. Pourcentage de la dissipation pour la Poutre 1 de (Limam et al., 2003a)

La comparaison avec l'essai est donnée sur la Figure 9.15.

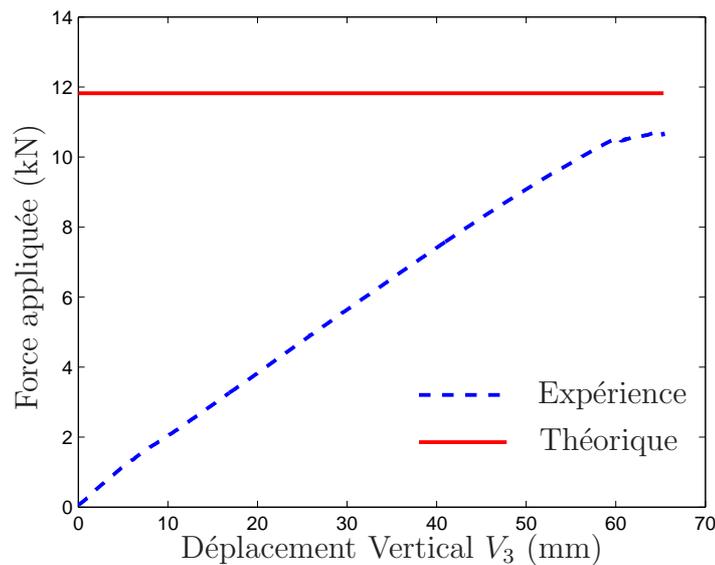


FIG. 9.15. Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 1.

Une photo du mode de ruine de la poutre a été prise (Figure 9.16).

La courbe de l'essai montre que la rupture a été brutale, le domaine de ductilité est très réduit. On observe un allongement des aciers, dû à une plastification partielle. Des fissurations apparaissent dans le béton sur la peau supérieure de la poutre en zone centrale ( $x = 0$ ) dues à une mise en compression excessive. Enfin, il y a un décollement partiel de la plaque composite, sûrement dû au choc après la rupture.

Ce mode de ruine est bien celui décrit par notre modèle. C'est pour la valeur de  $x = 4e$  que l'erreur entre le modèle et l'expérience est minimale (9.8%).



FIG. 9.16. *Mode de ruine de la poutre 1 de (Limam et al., 2003a)*

### 9.7.2.2 Poutre 2

Les caractéristiques de cette poutre sont les suivantes :

- longueur  $L = 0.8m$
- largeur  $b = 0.1m$
- épaisseur  $t = 6cm$
- épaisseur d'enrobage  $e = 0.006m$
- Aciers : 2 HA 6 (aciers haute adhérence de 6 mm de diamètre)
- Renfort : épaisseur  $e = 0.00052m$
  
- limite en compression du béton  $f_c = -70MPa$
- limite en traction du béton  $f_t = -0.05f_c = 5MPa$
- limite de peeling-off  $\tau^{po} = -0.05f_c = 5MPa$
- limite de cisaillement de la colle  $\tau^c = 5MPa$
- limite de plasticité des aciers  $\sigma_a^s = 540MPa$
- limite de d'élasticité du renfort  $\sigma_r^s = 120MPa$

La force de ruine expérimentale obtenue est  $F_{max} = 10.8kN$ .

En procédant à l'optimisation de la fonction  $\pi^{M4}$  en fonction des variables  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on trouve une force de ruine variant de 12.8 kN à 7.8 kN (Table 9.6). La rupture par effort tranchant à l'appui est prévue pour 54 kN. Le mode de ruine sera donc obtenu avec une cinématique d'Euler-Bernoulli dans le béton.

Le mécanisme de ruine prévu par le modèle est une traction dans le béton avec une plastification des aciers d'armature et du composite, sans mécanismes d'interface. Les pourcentages

Épaisseur $x$	$x = 0$	$x = e$	$x = 2e$	$x = 3e$	$x = 4e$	$x = 5e$
Force de ruine (kN)	12.8	12.12	11.32	11.02	9.76	7.80

TAB. 9.6. Force de ruine obtenue par le modèle pour différents  $x$  pour la poutre 2.

des  $T_i$  dans la dissipation pour  $x = 4e$  sont donnés dans la Table 9.7.

Flexion du béton ( $T_1$ )	15.5%
Traction des aciers ( $T_2$ )	67.5%
Traction du renfort ( $T_3$ )	17%
Peeling-off ( $T_4$ )	0%
Décollement ( $T_5$ )	0%

TAB. 9.7. Pourcentage de la dissipation pour la Poutre 2 de (Limam et al., 2003a).

La comparaison avec l'essai est donnée sur la Figure 9.17.

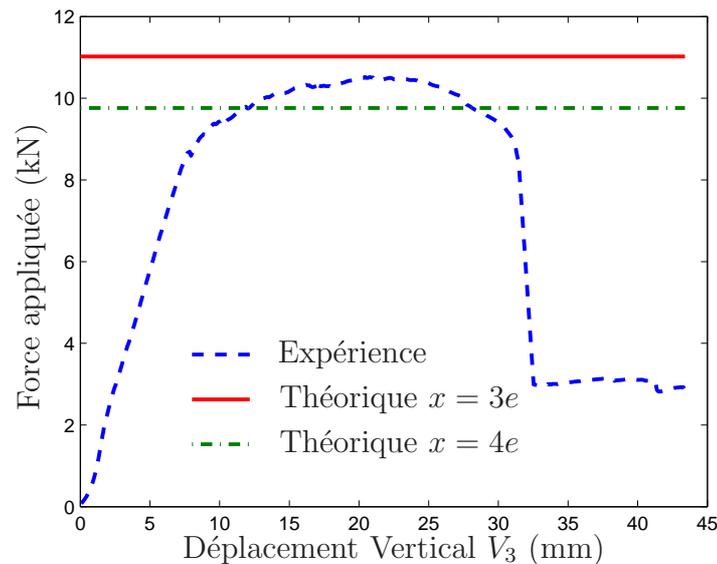


FIG. 9.17. Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 2.

Une photo du mode de ruine de la poutre a été prise (Figure 9.18) :

La poutre présente un comportement très ductile. On observe un allongement des aciers, dû à une plastification jusqu'à rupture de ceux-ci. La plaque de renfort présente un comportement ductile dû à l'orientation des fibres (+45,-45). Des fissurations apparaissent dans le béton en zone centrale ( $x = 0$ ). Le mode de ruine de la poutre 2 semble concorder avec celui du modèle. On voit que deux valeurs du paramètre  $x$  ( $x = 3e$  et  $x = 4e$ ) donnent des résultats proches de l'essai (respectivement 5% et 7% d'erreur sur la charge de ruine). Selon nous, il vaut mieux, dans une optique de dimensionnement, retenir la valeur obtenue pour  $x = 4e$ , qui donne une force de ruine inférieure à la réalité, afin d'aller dans le sens de la sécurité.



FIG. 9.18. *Mode de ruine de la poutre 2 de (Limam et al., 2003a)*

### 9.7.2.3 Poutre 3

Les caractéristiques de cette poutre sont les suivantes :

- longueur  $L = 1m$
- largeur  $b = 0.1m$
- épaisseur  $t = 6cm$
- épaisseur d'enrobage  $e = 0.006m$
- Aciers : 3 HA 10 (aciers haute adhérence de 10 mm de diamètre)
- Renfort : épaisseur  $e = 0.00052m$

- limite en compression du béton  $f_c = -5MPa$
- limite en traction du béton  $f_t = -0.05f_c = 0.25MPa$
- limite de peeling-off  $\tau^{po} = -0.05f_c = 0.25MPa$
- limite de cisaillement de la colle  $\tau^c = 5MPa$
- limite de plasticité des aciers  $\sigma_a^s = 540MPa$
- limite de d'élasticité du renfort  $\sigma_r^s = 120MPa$

La force de ruine expérimentale obtenue est  $F_{max} = 1.95kN$ .

La force de ruine nécessaire à la rupture de la poutre par effort tranchant aux appuis est de 2.7kN. L'optimisation de la fonction  $\pi^{M4}$  nous donne une force de ruine variant de 2.27 à 2.21 kN (Table 9.8). La rupture n'a donc pas lieu par effort tranchant excessif à l'appui. On voit qu'ici aussi le paramètre  $x$  n'a que très peu d'influence sur la dissipation.

Le mode de ruine obtenu par minimisation est une flexion dans le béton, une plastification du renfort et un cisaillement par peeling-off (Table 9.9).

Épaisseur $x$	$x = 0$	$x = e$	$x = 2e$	$x = 3e$	$x = 4e$	$x = 5e$
Force de ruine (kN)	2.27	2.25	2.24	2.23	2.22	2.21

TAB. 9.8. Force de ruine obtenue par le modèle pour différents  $x$  pour la poutre 3.

Flexion du béton ( $T_1$ )	28.5%
Traction des aciers ( $T_2$ )	0%
Traction du renfort ( $T_3$ )	7%
Peeling-off ( $T_4$ )	64.5%
Décollement ( $T_5$ )	0%

TAB. 9.9. Pourcentage de la dissipation pour la poutre 3 de (Limam et al., 2003a)

La comparaison de la force de ruine avec l'essai est donnée sur la Figure 9.19. On a tracé la valeur de la force de ruine théorique pour  $x = 4e$ .

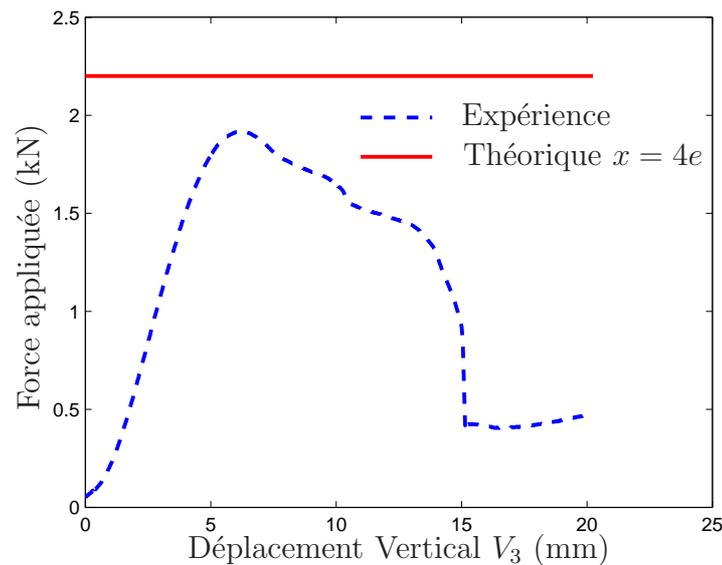


FIG. 9.19. Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 3.

Une photo du mode de ruine de la poutre a été prise (Figure 9.20) :

La rupture s'est produite suite à une fissuration horizontale de type peeling-off, qui se propage au niveau des armatures. La plaque composite est partiellement plastifiée. On observe également une fissuration verticale à 45° près de la mi-travée (le béton de la fibre supérieure travaillant en compression). La plaque composite reste collée au béton d'enrobage.

La Figure 9.17 montre une concordance correcte entre le modèle et la valeur expérimentale. Le mode de ruine obtenu par le modèle semble être correct, mais on observe tout de même une différence de l'ordre de 20% entre la force de ruine expérimentale et la force de ruine



FIG. 9.20. Mode de ruine de la poutre 3 de (Limam et al., 2003a)

calculée par le modèle M4. Il est à noter, cependant, que la limite en compression du béton utilisé pour cet essai est de 5MPa, ce qui est particulièrement faible. La fraction volumique de granulats est petite par rapport à la pâte de ciment. On peut donc raisonnablement considérer que ce béton est peu ductile en compression, ce qui pourrait expliquer une trop grande dissipation dans la flexion du béton. De même, une légère erreur sur la valeur de la limite de cisaillement en peeling-off peut conduire à surestimer la force de ruine. La valeur de celle-ci (5% de  $f_c$ ) a été tirée de différents essais dans la littérature (Zhang et al., 1995), (Hamelin et Varastehpour, 1997), (Smith et Teng, 2002), qui étaient tous menés sur des bétons “classiques”. Dans le cas de bétons particulièrement peu résistants, cette valeur est peut-être à revoir.

#### 9.7.2.4 Poutre 4

Les caractéristiques de cette poutre sont les suivantes :

- longueur  $L = 0.26m$
- largeur  $b = 0.1m$
- épaisseur  $t = 6cm$
- épaisseur d'enrobage  $e = 0.006m$
- Aciers : 3 HA 10 (aciers haute adhérence de 10 mm de diamètre)
- Renfort : épaisseur  $e = 0.014m$
  
- limite en compression du béton  $f_c = -70MPa$
- limite en traction du béton  $f_t = -0.05f_c = 3.5MPa$
- limite de peeling-off  $\tau^{po} = -0.05f_c = 3.5MPa$
- limite de cisaillement de la colle  $\tau^c = 5MPa$
- limite de plasticité des aciers  $\sigma_a^s = 540MPa$

- limite de d'élasticité du renfort  $\sigma_r^s = 2500MPa$

La force de ruine expérimentale obtenue est  $F_{max} = 37.7kN$ .

La minimisation de la fonction de dissipation donne une force de ruine variant entre 48kN et 43.6kN selon les valeurs de  $x$ . Le mode de ruine est un cisaillement de type peeling-off (75%), un cisaillement de la colle (15%) et une flexion du béton (10%). Cependant, l'effort tranchant maximal supportable calculé est de 37.8 kN. A priori, le mécanisme de ruine sera donc une fissuration du béton au niveau des appuis.

La comparaison avec l'essai est donnée sur la Figure 9.21.

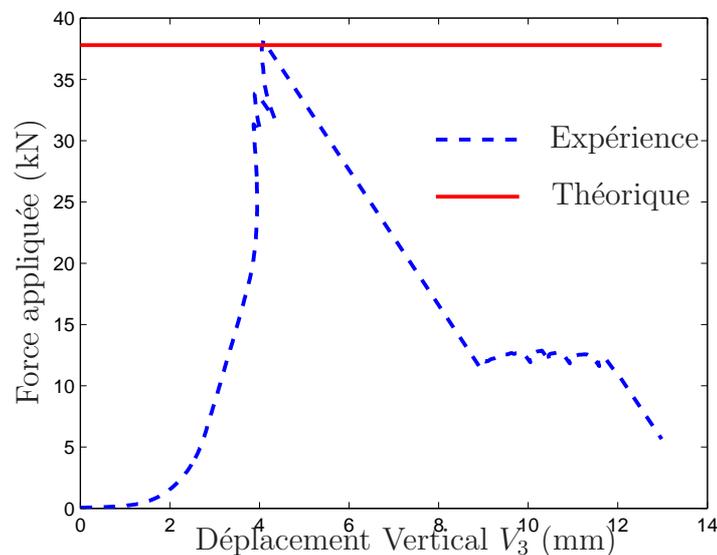


FIG. 9.21. Comparaison des forces de ruine expérimentales et du modèle. Poutre 4.

Une photo du mode de ruine de la poutre a été prise (Figure 9.22) :

On observe bien une fissuration à 45° initiée au niveau de l'appui. Le mécanisme est donc le bon. La différence entre les valeurs données par le modèle et l'essai est de 1%. Il est à noter que, dans son modèle M4, Limam (2002) ne prend pas en compte les ruptures dues à l'effort tranchant dans les couches. Il obtient pour cet essai une rupture des deux interfaces 1, 2 et 2, 3. Il obtient une force de ruine de 36.2 kN, tout en notant que la concordance entre l'essai et les résultats de son modèle est illusoire.

Au vu des comparaisons des résultats théoriques avec les résultats d'essais déjà existants dans la littérature, il apparaît que la valeur  $x = 4e$  semble donner dans tous les cas des résultats corrects. En effet, dans les mécanismes d'interface (peeling-off, décollement), il a été constaté que la valeur de  $x$  n'influe pas beaucoup sur le chargement. En revanche, dans le cas de mécanismes de couches (flexion du béton, traction des aciers, tractions du renfort), celle-ci a une grande influence. Cependant, la valeur  $x = 4e$  permet de donner des résultats



FIG. 9.22. *Mode de ruine de la poutre 4 de (Limam et al., 2003a)*

corrects quelque soit le mode de ruine. On recommandera alors, dans une optique de dimensionnement à l'ELU (état limite ultime), d'utiliser cette valeur.

On précise également que le mécanisme de double rotule explicité dans le chapitre sur les plaques multicouches a été testé sur ces exemples, mais la minimisation de la fonction a toujours conduit à confondre les deux rotules au centre de la poutre.

Des essais de renforcement de poutres en béton armé par des plats d'acier sont actuellement en cours. Leurs résultats ainsi que la comparaison avec le modèle seront présentés lors de la soutenance.

## 9.8 Conclusion

Ce chapitre est une tentative de l'application d'une théorie de calcul à la rupture pour la ruine de poutre en béton armé et de poutres en béton armé renforcées. Une poutre en béton armé est homogénéisée selon la procédure décrite dans le chapitre 7. L'approche statique de ce modèle est utilisée. Ces résultats sont comparés à une série de tests réalisés au sein du LAMI sur des poutres en béton armé. On a constaté une erreur sur la force de ruine variant de 2% à 20%, ce qui semble largement acceptable, compte tenu que les matériaux utilisés ne sont pas parfaitement plastiques comme supposés dans la théorie.

Ensuite, le cas des poutres en béton renforcées a été traité. Après un bref rappel des différentes méthodes existantes pour calculer le chargement de ruine de telles poutres, un nouveau modèle multicouche en calcul à la rupture est présenté. Dans celui-ci, les poutres en béton armé renforcées sont modélisées comme des tri-couches (plaque de renfort-lit d'armatures (épaisseur variable)- béton). Ce modèle s'inspire de celui de Limam et al. (2003a). On applique la méthode cinématique de l'analyse limite à ce modèle, en considérant que les

couches d'armature et de renfort ne travaillent qu'en traction (pas de flexion). Un mécanisme de ruine consistant en une rotule plastique au centre de la poutre et en des cisaillements constants dans les interfaces est proposé. Il nous conduit à la minimisation d'une fonction de 3 variables pour déterminer une borne supérieure de la force de ruine. Cette borne supérieure est comparée à différents essais disponibles dans la littérature (Hamelin et Varastehpour, 1997),(Limam et al., 2003a). Les valeurs théoriques de chargement maximal coïncident relativement bien avec celles obtenues expérimentalement (erreur variant de 1% à 20% selon les essais). Au vu de nos résultats, il semble que les poutres présentant un élancement assez grand conduisent à des mécanismes de couches, tandis que pour des faibles élancements, ce sont les mécanismes d'interfaces qui sont prépondérants, voire des mécanismes de rupture du béton par cisaillement à l'appui. Dans tous les cas, le modèle théorique donne des approximations relativement bonnes de l'expérience. Il est à noter, cependant, que le cas de la rupture par cisaillement du béton à l'appui représente un cas marginal dans les ouvrages réels.

Enfin, on rappelle que ce travail de comparaison entre théorie et expérience ne représente qu'une première étape de validation et ne constitue pas une validation expérimentale en soi. En effet, le nombre d'essais est trop faible. De plus, certaines valeurs des caractéristiques mécaniques, telles que le cisaillement maximal de peeling-off, dont on a fait l'hypothèse qu'il valait 5% de la limite de compression (à partir d'essais de la littérature), demande un travail approfondi qui ne fait pas l'objet de cette étude.

Cependant, la concordance encourageante entre nos résultats théoriques et expérimentaux pousse vers une utilisation, même prudente, de notre modèle pour un éventuel dimensionnement de renforcement de poutre en béton armé à l'ELU.



# Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire portent essentiellement sur la modélisation de structures périodiques et multicouches en analyse limite. Les cas des plaques et des poutres ont été traités. Ainsi, partant de la structure 3D hétérogène périodique ou multicouche, nous avons proposé des modèles de plaques et de poutres simplifiés permettant d'obtenir des domaines de résistance globaux de plaques ou de poutres à partir des domaines de résistance locaux des matériaux constituants. En tout, quatre modèles ont été présentés. Le premier est un modèle d'homogénéisation des plaques périodiques ou multicouches. Il s'agit de transformer la plaque 3D hétérogène en une plaque 2D homogène équivalente, avec une cinématique de Love-Kirchhoff. Ce dernier ne prend pas en compte les effets de cisaillement. Pour remédier à cela, un modèle amélioré est proposé dans le cas des plaques multicouches. Il se base sur une modélisation multiparticulaire, c'est à dire que plusieurs matériaux sont situés en un même point géométrique. Ces deux modèles sont étendus ensuite aux poutres et plaques périodiques.

Dans le premier chapitre, des rappels d'analyse convexe nécessaires à la théorie d'analyse limite sont donnés. Les notions de domaine de résistance d'un matériau et de fonction support ainsi que de critères de résistance sont développées. Enfin, nous proposons quelques rappels sur la construction des théories de plaques élastiques.

Dans le second chapitre, nous présentons une procédure d'homogénéisation des plaques périodiques en analyse limite, quand tous les matériaux de la plaque sont supposés rigides-parfaitement plastiques. Cette méthode avait déjà été introduite par Bourgeois (1997) et par Sab (2003), indépendamment. Les déterminations, statique et cinématique, du domaine de résistance sont effectuées ainsi qu'une justification formelle de celles-ci en s'appuyant sur la méthode des développements asymptotiques. Cette démarche permet notamment de bien mettre en exergue les différents ordres de grandeur des contraintes, montrant que les contraintes planes  $\sigma_{\alpha\beta}$  sont d'ordre 0 en  $t/L$ , les contraintes de cisaillement hors plan  $\sigma_{\alpha 3}$  sont d'ordre 1 en  $t/L$  et que les contraintes normales  $\sigma_{33}$  sont d'ordre 2 en  $t/L$ .

Dans le chapitre 3, cette méthode d'homogénéisation est appliquée au cas des plaques multicouches. Dans ce cas, la fonction support du domaine de résistance de la plaque homogénéisée est analytique. Ainsi, on peut donner une représentation paramétrique de la frontière du domaine de résistance de la plaque homogène équivalente. Celle-ci fournit également une méthode de localisation pour la détermination des contraintes 3D pour chaque champ de contraintes généralisées. Dans le cas des plaques dites homothétiques, c'est à dire dont le critère est de la forme  $F(x_3, \boldsymbol{\sigma}) = \sigma^u(x_3)\hat{F}(\boldsymbol{\sigma})$ , on met en évidence deux constantes effectives

$\Sigma_{eff}^N$  et  $\Sigma_{eff}^M$  permettant de caractériser la résistance globale de la plaque en effort normal et en moment fléchissant. Dans le cas des plaques multicouches symétriques, ces constantes effectives servent de facteur de normalisation pour le domaine de résistance de la plaque homogénéisée  $G_p^{hom}$ . L'étude d'une plaque sandwich tricouche de Von-Mises nous a permis de mettre en oeuvre la méthode cinématique de l'analyse limite pour calculer le domaine de résistance de cette plaque. Une étude en fonction du contraste entre les résistances du matériau d'âme et du matériau des peaux  $r$  est menée, conduisant à des modèles approchés du domaine de résistance homogénéisé pour les petites ( $r \leq 5$ ) et les grandes ( $r > 100$ ) valeurs de celui-là.

Comme précisé plus haut, le modèle de plaque de Love-Kirchhoff ne tient pas compte des effets de cisaillement. Or, ceux-ci s'avèrent particulièrement importants dans le cas de grands contrastes entre les matériaux de la plaque ou quand cette dernière est épaisse. Un nouveau modèle multiparticulaire pour matériaux multicouches (M4) en analyse limite est donc proposé au chapitre 4. Il est inspiré des travaux de Ehlacher et al. (1994), Chabot (1997), Diaz-Diaz (2001), Limam et al. (2003a), Caron et al. (2006). Dans ce modèle, chaque couche est vue comme une plaque de Reissner-Mindlin en interaction avec ses voisines, à travers les cisaillements d'interfaces. En procédant à un développement asymptotique du même acabit que celui du chapitre 2, on pourrait montrer que ce dernier est asymptotiquement équivalent au modèle de Love-Kirchhoff introduit précédemment. Les méthodes, statique et cinématique, sont développées pour caractériser le domaine de résistance  $G_p^{M4}$ .

Le chapitre 5 est dédié à la particularisation de ce modèle en condition de flexion cylindrique. Cette hypothèse apporte beaucoup de simplifications et permet la détermination analytique du domaine de résistance M4, dans le cas d'une plaque sandwich de Von-Mises. Une méthode de localisation des contraintes 3D à partir de la donnée d'efforts généralisés  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  est également explicitée.

Dans le chapitre 6, une comparaison des modèles de Love-Kirchhoff et M4 avec un calcul aux éléments finis de plaque tricouche de Von-Mises en flexion cylindrique est faite. Le modèle de plaque homogène équivalente de Love-Kirchhoff s'avère très bon quand le contraste entre les matériaux est relativement petit et très mauvais quand le contraste devient grand. En revanche, le modèle M4 permet une bonne prédiction de la charge limite de la plaque quel que soit le contraste. Les modes de ruine observés par éléments finis sont bien reproduits par le modèle M4. On notera également que, pour des contrastes intermédiaires, un mécanisme de double rotule a été exhibé. Il serait, néanmoins, intéressant de construire un outil numérique basé sur ce modèle M4 en analyse limite pour tenter de prédire la charge limite de structures plus complexes.

Dans le chapitre 7, la théorie de l'homogénéisation pour les plaques périodiques est étendue aux poutres périodiques en analyse limite, poursuivant ainsi les travaux de Kolpakov (1991), Bourgeois (2000) et Buanic et Cartraud (2001) en élasticité. La méthode d'homogénéisation est, ici encore, justifiée à l'aide de développements asymptotiques. Un encadrement du domaine de résistance de la poutre homogénéisée par des bornes, supérieure et inférieure, analytiques, construites à partir d'un état uniaxial de déformation ou de contrainte, est donné. Le cas de poutres invariantes par translation selon leur axe est également traité. Si une telle poutre est constituée de différents matériaux de Von-Mises, alors la borne inférieure coïncide avec le domaine exact. Le domaine de résistance des poutres multicouches est aussi étudié.

Une borne supérieure raffinée est proposée dans le cas où  $M_2 = 0$ . Enfin, on a calculé ces bornes pour plusieurs exemples de poutres multicouches. Le décalage entre les deux s'avère correct ( $< 20\%$ ), ce qui nous pousse à recommander l'utilisation de la borne inférieure pour un éventuel dimensionnement aux charges limites.

Dans le huitième chapitre, la théorie des plaques M4 est adaptée au cas des poutres multicouches. Les différences avec la théorie de plaques en déformation plane sont soulignées.

Enfin, dans le neuvième et dernier chapitre, quelques applications de ces modèles de poutres sont données. Premièrement, on applique la théorie d'homogénéisation des poutres en analyse limite à des poutres en béton armé. Les résultats du modèle sont comparés à des essais de flexion 4 points réalisés au sein du LAMI. La différence sur les forces de ruine s'avère être de 15% en moyenne, ce qui semble très raisonnable. Ensuite, après une étude bibliographique sur les modèles de calcul des charges limites de poutres en béton armé renforcées, on propose un modèle multicouche M4 pour le calcul de celles-ci, inspiré des travaux de Limam et al. (2003a). Ce modèle est d'abord appliqué aux poutres en béton armé testées, donnant d'excellents résultats (erreur de 5%), puis sur une batterie d'essais disponibles dans la littérature. Les résultats obtenus semblent satisfaisants (erreur variant de 1% à 20% selon les essais). Cependant, plusieurs éléments peuvent être améliorés dans ce modèle, comme la détermination du cisaillement de peeling-off, par exemple. Par ailleurs, dans la plupart des cas courants, les poutres en béton armé sont renforcées à l'effort tranchant par des cadres métalliques transversaux, qui ne sont pas pris en compte dans notre modélisation. Une étude plus poussée de ceux-ci pourrait permettre également d'améliorer notre modèle.

Ainsi, au cours de ce travail de thèse, plusieurs modèles théoriques ont été développés. Leurs applications sur des cas concrets comme il a été fait dans le chapitre 9 sont encourageantes. Cependant, nous avons conscience que les cas traités ont une portée limitée et il semble judicieux de vouloir améliorer ces outils, notamment en les numérisant, afin de prédire, par exemple, les charges de ruines d'ouvrages en béton armé renforcés ou non, plus complexes que des poutres. Il nous semblerait judicieux d'introduire dans le logiciel MP-FEAP, développé par le LAMI, le domaine de résistance M4 défini au chapitre 4, afin d'obtenir numériquement le chargement de ruine hors-plan de structures multicouches. Ainsi, on pourrait avoir accès au comportement élastique de la plaque multicouche ainsi qu'à son comportement lorsque l'écoulement de la structure a lieu. Une implémentation des lois élastoplastiques pourrait permettre de simuler l'écroutissement ayant lieu entre la phase élastique et la phase plastique. Ainsi, l'intégralité du comportement de la structure multicouche pourrait être calculée par les éléments finis M4. Les courbes de la Figure 6.6 obtenues avec le logiciel de calcul aux éléments finis 3D ABAQUS pourraient être simulées.

Une autre perspective éventuelle de cette thèse serait de calculer les forces de ruine de structures multicouches dans tous les cas de charges classiques (poutre en flexion 3 points, poutres en flexions quatre points, plaque simplement appuyée sur ses bords avec charge centrale...), en ayant identifié plusieurs mécanismes de ruine, et, ainsi, réaliser des abaques pour permettre un dimensionnement à la rupture simple pour des chargements hors-plan.



# Bibliographie

- Ahmed, O., van Gemert, D., Vandewalle, L., February 2001. Improved model for plate-end shear of CFRP strengthened RC beams. *Cement and Concrete Composites* 23 (Issue 1), 3–19.
- Aitali, M., Pinglot, M., Lorrain, M., May 1993. Modélisation du comportement en flexion statique des sections rectangulaires en béton armé. *Materials and Structures* 26 (4), 207–213.
- Anderson, C. A., Shield, R., 1967. A class complete solutions for bending of perfectly-plastic beams. *International Journal of Solids and Structures* 3 (Issue 6), 935–950.
- Artola, M., Duvaut, G., 1977. Homogénéisation d'une plaque renforcée. C.R.A.S., Paris, Série A (284).
- Ball, R., Lee, S. L., 1962. On the effect of uniform surface load upon plastic yielding of simply supported beams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 10 (Issue 2), 151–163.
- Bensoussan, A., Lions, J. L., Papanicolaou, G., 1978. *Asymtotic Analysis For Periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam.
- Bouchitté, G., 1986-1987. Convergence et relaxation de fonctionnelles du calcul des variations à croissance linéaire. application à l'homogénéisation en plasticité. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* 8, 7–36.
- Bourgeois, S., 1997. Modélisation numérique des panneaux structuraux légers. Ph.D. thesis, University Aix-Marseille.
- Bourgeois, S., 2000. Homogenization of periodic beams : limit of the expansions. *Comptes-rendus de l'Académie des Science* 10, 719–725.
- Bourgeois, S., Débordes, O., Patou, P., 1998. Homogénéisation et plasticité des plaques minces. *Revue Européenne des Elements Finis* 7, 39-54.
- Boutin, C., 1996. Microstructural effects in elastic composites. *International Journal of Solids and Structures* 33 (7), 1023–1051.
- Buanic, N., Cartraud, P., 2001. Higher order modelling of periodic heterogeneous beams I. Asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures* 38, 7139–7161.

- Buyle-Bodin, F., David, E., Rangneau, E., 2002. Finite element modelling of flexural behaviour of externally bonded cfrp reinforced concrete structures. *Engineering Structures* 24, 1423–1429.
- Caillerie, D., 1984. Thin elastic and periodic plates. *Math. Methods Appl. Sci.* 6, 159–191.
- Calgaro, J., Lacroix, R., 1997. Maintenance et réparations des ponts. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Caron, J. F., Diaz-Diaz, A., Carreira, R., Chabot, A., Ehrlacher, A., 2006. Multi-particle modelling for the prediction of delamination in multi-layered material. *Composites Sciences and Technology* 66 (Issue 6), 755–765.
- Caron, J.-F., Sab, K., 2001. Un nouveau modèle de plaque multicouche épaisse. *C.R. Acad. Sci. Paris II b* 329, 595–600.
- Carreira, R., 1998. Validation par éléments finis des modèles multiparticulaires pour matériaux multicouches. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Carreira, R., Caron, J.-F., Diaz-Diaz, A., 2002. Model of multilayered materials for interface stresses estimation and validation by finite element calculation. *Mechanics of Materials* 34, 217–230.
- Cecchi, A., Sab, K., 2007. A homogenized reissner-mindlin model for orthotropic plates : Application to brickwork pannel. *International Journal of Solids and Structures* 44, 6055–6079.
- Chabot, A., 1997. Analyse des efforts à l'interface entre les couches de matériaux composites à l'aide de modèles de matériaux multiparticulaires multicouches. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Ciarlet, P., Destuynder, P., 1979. Justification of the 2-dimensional linear plate model. *Journal de Mécanique* 18 (2), 315–344.
- Cimetière, A., Geymonat, G., LeDret, H., Raoult, A., Tutek, Z., 1988. Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in non linear elastic straight slender rods. *Journal of Elasticity* 19, 111–161.
- Cioranescu, D., Saint-Paulin, J., 1999. Homogenization of Reticulated Structures. Springer, Berlin.
- Corradi, L., Vena, P., 2003. Limit analysis of orthotropic plates. *Int. Jour. of Plasticity* 19, 1543–1566.
- Dallot, J., Sab, K., 2007a. Limit analysis of multi-layered plates. Part I : the homogenized Love-Kirchhoff model. *J. Mech. Phys. Solids* (2007),doi :10.1016/J.JMPS2007.05.005.
- Dallot, J., Sab, K., 2007b. Limit analysis of multi-layered plates. Part II : Shear Effects. *J. Mech. Phys. Solids* (2007),doi :10.1016/J.JMPS2007.05.006.

- David, E., 1998. Comportement mécanique des poutres en béton armé renforcées ou réparées par collage de matériaux composites. Ph.D. thesis, Université d'Artois, Lens.
- de Buhan, P., 1983. Homogénéisation en calcul à la rupture : le cas du matériau multicouche. *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* (296), 159–191.
- de Buhan, P., 1986. Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sol renforcé. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- Diaz-Diaz, A., 2001. Délaminage des matériaux multicouches ; phénomènes, modèles et critères. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- Diaz-Diaz, A., Caron, J.-F., 2006. Interface plasticity and delamination onset prediction. *Mechanics of Materials* 38, 643–668.
- Diaz-Diaz, A., Caron, J.-F., Carreira, R., 2002. Software application for evaluating interfacial stresses in inelastic symmetrical laminates with free edges. *Composites Structures* 58, 195–208.
- Diaz-Diaz, A., Caron, J.-F., Ehrlacher, A., 2007. Analytical determination of the modes I, II and III energy release rates in a delaminated laminate and validation of a delamination criterion. *Composites Structures* 78 (3), 424–432.
- Di Sciuva, M., 1984. A refined transverse shear deformation theory for multilayered anisotropic plates. *Atti Accad. Sci. Torino* 118, 279–295.
- Duvaut, G., 1977. Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement. *Lecture Notes in Mathematics* (594).
- Duvaut, G., Metellus, A.-M., 1976. Homogénéisation d'une plaque mince en flexion périodique et symétrique. *C.R. Acad. Sci., Paris A283*, 947–950.
- Ehrlacher, A., Naciri, T., Chabot, A., Caron, J.-F., Nov 1994. Analyse des efforts d'interface à l'aide d'une modélisation multiphasique des matériaux multicouches (m4). *Comptes rendus des 9èmes journées nationales sur les composites* 19 (207).
- Ekeland, I., Temam, R., 1976. *Convex Analysis and Variational Problems*. North-Holland, Amsterdam, New-York.
- Fan, H., Widera, G., 1994. Refined engineering beam theory based on the asymptotic expansion approach. *AIAA Journal* 29 (3), 444–449.
- Ferrier, E., 1999. Comportement à l'interface composite-béton des poutres ba renforcées. Ph.D. thesis, Université Claude Bernard Lyon I.
- Florence, C., Sab, K., 2006. A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate yield strength of periodic discrete media and an application to honeycomb materials with arbitrary non-uniform cell wall thickness. *Eur. Jour. Mech. A/ Solids* 25, 72–97.

- Garden, H., Quantrill, R., Hollaway, L., Thorne, A., Parke, G., June 1998. An experimental study of the anchorage length of carbon fibre composite plates used to strengthen reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials* 12 (Issue 4), 203–219.
- Garett, K., Bailey, J., 1977. Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of glass fiber-reinforced polyester. *Journal of Material Science* 12 (157).
- Geymonat, G., Krasucki, F., Marigo, J., 1987. Sur la commutativité des passages à la limite en théorie asymptotique des poutres composites. *C. R. Acad. Sci., Série II* 305, 225–228.
- Grisard, L., 1993. Modélisation bidimensionnelle de la mise en forme des tôles. Ph.D. thesis, University of Liège.
- Hamelin, P., Varastehpour, H., 1997. Characterization of concrete-composite plate adhesion. *Mechanical Behaviour of Adhesive Joints, Testing*, 167–179.
- Hodge, P., 1959. *Plastic Analysis of Structure*. McGraw-Hill, New-York.
- Ilyushin, A.-A., 1956. *Plasticité*. Eyrolles, Paris.
- Jansze, W., 1997. Strengthening of rc members in bending by externally bonded steel plate. Ph.D. thesis, University of Delft.
- Kalamkarov, A., Kolpakov, A., 1997. *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*. Wiley, Chichester.
- Kao, J. S., Mura, T., Lee, S. L., 1963. Limit analysis of orthotropic plates. *Jour. of the Mech. and Phy. of Solids* 11, 429–436.
- Kirchhoff, G., 1850. Über das gleichgewicht and die bewegung einer elastischen scheibe. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 40, 51–88.
- Kohn, R., Vogelius, M., 1984. A new model for thin plates with rapidly varying thickness. *Int. Jour. of Solids and Structures* 20, 333–350.
- Kolpakov, A., 1991. Calculation of the characteristics of thin elastic rods with a periodic structure. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 55 (3), 358–365.
- Lescouarc'h, Y., 1983. *Calcul en plasticité des structures*. Paris.
- Lewinski, T., Telega, J. J., 1999. *Plates, Laminates and Shells. Asymptotic analysis and homogenization*. World Scientific, Singapore.
- Limam, O., 2002. Dalles en béton armée renforcées à l'aide de matériaux composites. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, France.
- Limam, O., Foret, G., Ehrlacher, A., 2003a. RC beams strengthened with composite material : a limit analysis approach and experimental study. *Composite Structures* 59 (Issue 4), 467–472.

- Limam, O., Foret, G., Ehrlacher, A., 2003b. RC two way slabs strengthened with cfrp strips : experimental and a limit analysis approach. *Composite Structures* 60 (Issue 4), 467–471.
- Limam, O., Foret, G., Ehrlacher, A., 2006. Ultimate strength of free edge composite laminates under tensile loading : A limit analysis approach. *Composites part B : Engineering* 37 (Issue 4-5), 286–291.
- Limam, O., N’Guyen, V.-T., Foret, G., 2005. Numerical and experimental analysis of two-way slabs strengthened with cfrp strips. *Engineering Structures* 27 (Issue 6), 841–845.
- Lo, K. H., Christensen, R. M., 1977. A high order theory of plate deformation. part 2 : Laminated plates. *Jour. of Applied Mechanics* 44 (4), 669–676.
- Miller, R., 1994. The eigenvalue problem for a class of long, thin, elastic structures with periodic geometry. *Quarterly of Applied Mathematics* 52 (2), 261–282.
- Millet, O., Cimetiere, A., Hamdouni, A., 2003. An asymptotic elastic-plastic plate model for moderate displacement and strong strain hardening. *Eur. J. Mech. A/ Solids* 22, 369–384.
- Mindlin, R. D., 1951. Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18, 31–38.
- Naciri, T., Ehrlacher, A., Chabot, A., 1998. Interlaminar stress analysis with a new multi-particle modelization of multilayered material (m4). *Composites Science and Technology* 58, 337–343.
- Nguyen, V., 2004. Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- N’Guyen, V.-T., Caron, J.-F., Sab, K., 2005. A model for thick laminates and sandwich plates. *Composites Science and Technology* 65, 475–489.
- Oehlers, D., 2001. Premature failure of externally plated reinforced concrete beams. *Journal of Structural Engineering* 116 (4), 978–995.
- Omri, A. E., Fennan, A., Sidoroff, F., Hih, A., 2000. Elastic-plastic homogenization for layered composites. *Eur. J. MEch A/ Solids* 19, 585–601.
- Owen, D. R. J., Figueiras, J. A., 1983. Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semi-loof element. *Int. Jour. for Numerical Methods in Engineering* 9, 521–539.
- Pagano, J. N., 1978. Stress fields in composite laminates. *Int. Jour. of Solids and Structures* 14, 385–400.
- Pagano, J. N., Soni, S. R., 1983. Global-local laminate variational model. *Int. Jour. of Solids and Structures* 19 (207).
- Pham, H. S., 2007. Dimensionnement d’une poutre mixte bois-beton. Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

- Prager, W., 1959. *An Introduction to Plasticity*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Ramana, V., Kant, T., Mortin, S., Dutta, P., Mukherjee, A., Desai, Y., 2000. Behavior of CFRPC strengthened reinforced concrete beams with varying degrees of strengthening. *Composites : Part B : engineering* 31, 461–470.
- Reddy, J., 1987. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates. *Commun. Appl. Numer. Methods* 3, 173–180.
- Reissner, E., 1985. Reflections on the theory of elastic plates. *ASME, Applied Mechanics Review* 38 (11), 1453–1464.
- Reissner, E., Stavsky, Y., 1961. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plate. *Journal of Applied Mechanics* 28, 402–408.
- Ren, J. G., 1986. A new theory of laminated plate. *Composite Science and Technology* 26, 225–239.
- Roberts, T., 1989. Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layers of plated rc beams. *The Structural Engineer* 67 (2), 229–233.
- Sab, K., 1991. Hill's principle and homogenization of random materials. *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* 312 (1), 1–5.
- Sab, K., 1994. Homogenization of non-linear random media by a duality method. application to plasticity. *Asymptotic Analysis* 9, 311–336.
- Sab, K., 2003. Yield design of thin periodic plates by a homogenization technique and an application to masonry wall. *C.R Mécanique* 331, 641–646.
- Sab, K., Dallot, J., Cecchi, A., 2007. Determination of the overall yield strength domain of out-of-plane loaded brick masonry. *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 5 (2), 83–92.
- Salençon, J., 1983. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- Salençon, J., 1990. An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics. *Eur. Jour. Mech. A/ Solids* 21, 715–746.
- Sanchez-Hubert, J., Sanchez-Palencia, E., 1992. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Masson, Paris.
- Sanchez-Palencia, E., 1980. *Non homogeneous media and vibration theory*. Springer, Berlin.
- Seide, P., 1980. An improved approximate theory for the bending of laminated plates. *Mech Today JNC* 5, 451–466.
- Sharif, A., Al-Sulaimani, G., Basunbul, I., Baluch, M., Chaleb, B., 1994. Strengthening of initially loaded reinforced concrete beams using FRP plates. *ACI Structure Journal* 91 (2), 160–168.

- Sierra-Ruiz, V., Destrebec, J.-F., Grédiac, M., 2002. The transfer length in concrete structures repaired with composites materials : a survey of analytical models and simplified models. *Composite Structures* 27 (3-4), 445–454.
- Smith, S., Teng, J., 2002. FRP-strengthened RC beams I : review of debonding strength model. *Engineering Structures* 24, 385–395.
- Srinivas, S., 1987. A refined analysis of composite laminates. *Journal of Sound and Vibration* 30 (4), 495–507.
- Suquet, P., 1983. Analyse limite et homogénéisation. *C.R Acad. Sci. SER. II* 296, 1355–1358.
- Swaminathan, K., Ragounadin, D., 2004. Analytical solution using a higher order refined theory for the static analysis of antisymmetric angle-ply composite and sandwich plates. *Composite Structures* 64, 405–417.
- Tahani, M., Nosier, A., 2003. Edge effect of uniformly loaded cross-ply composite laminate. *Material and Design* 24, 647–658.
- Taljsten, B., November 1997. Defining anchor lengths of steel and cfrp plates bonded to concrete. *International Journal of Adhesion and Adhesives* 17 (Issue 4), 319–327.
- Tarn, J.-Q., July 1997. An asymptotic theory for nonlinear analysis of multilayered anisotropic plates. *Jour. of the Mech. and Phy. of Solids* 45 (Issue 7), 1105–1120.
- Telega, J. J., 1995. Epi-limit on hb and homogenization of heterogeneous plastic plates. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Application* 25 (5), 499–529.
- Triantafilou, T., Plevris, E., 1992. Strengthening of rc beams with epoxy-bonded fibre-composite materials. *Material and Structures* 25, 201–211.
- Varahstepour, H., Hamelin, P., 1994. Analysis and study of failure mechanism of rc beam strengthened with frp plate. *Advanced Composite material in bridge and structures*, 519–527.
- Whitney, J. M., 1973. Shear correction factor for orthotropic laminates under static load. *Jour. Applied Mechanics* 40, 302–304.
- Whitney, J. M., Pagano, J. N., 1970. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Jour. Applied Mechanics* 37, 1031–1036.
- Wright, H., Oduyemi, T., Evans, H., 1991. The experimental behaviour of double skin composite elements. *Journal of Constructional Steel Research* 19 (Issue 2), 111–132.
- Yang, P., Norris, C., Stavsky, Y., 1966. Elastic wave propagation in heterogeneous plate. *Int. Jour. of Solids and Structures* 2, 665–684.
- Ying, W. L., 1994. Free-edge effect in anisotropic laminate under extension, bending and twisting, part i : A stress based variational approach. *Journal of Applied Mechanics* 61, 1510–1548.

- Zhang, S., Raoof, M., Wood, L., August 1995. Prediction of peeling failure of reinforced concrete beams with externally bonded steel plates. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers : Structures and Buildings* 110, 257–269.
- Ziraba, Y., Baluch, M., Basunbul, I., Sharif, A., Al-Sulaimani, A. A. G., 1994. Guidelines towards the design of reinforced concrete beams with external plates. *ACI Structural Journal* 91 (6), 639–646.

# Annexes



# $G_p^{M4,cb}$ pour les multicouches de Von-Mises.

En utilisant la condition  $\sigma_{33}^{cb} = 0$ , l'équation (5.2) devient :

$$|\sigma_{11}^{cb}(x_3)| \leq 2\sqrt{\frac{(\sigma_i^u)^2}{3} - (\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2}. \quad (A.1)$$

Ainsi, on déduit de l'équation (A.1) la condition nécessaire suivante :

$$1 \leq i \leq n, \quad \text{Max}_{x_3^{i-1} \leq x_3 \leq x_3^i} |\sigma_{13}^{cb}(x_3)| \leq \frac{\sigma_i^u}{\sqrt{3}}. \quad (A.2)$$

Rappelons que la distribution de contraintes de cisaillement  $\sigma_{13}^{cb}$  dans la couche  $i$  est supposée quadratique en  $x_3$ . Par conséquent, le maximum de (A.2) peut être exprimé comme une fonction explicite des efforts généralisés  $\tau^{i-1,i}$ ,  $\tau^{i,i+1}$  et  $Q^i$ .

De plus, en utilisant (A.1), on trouve que  $(N^i, M^i)$  doit appartenir au domaine noté  $G_p^{i,cb}$ , dont la fonction support est :

$$\pi_p^{i,cb}(D^i, \chi^i) = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} 2\sqrt{\frac{(\sigma_i^u)^2}{3} - (\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} \times |D^i + (x_3 - \bar{x}_3^i) \chi^i| dx_3.$$

On remarque que le domaine  $G_p^{i,cb}$  dépend explicitement des contraintes de cisaillement généralisées  $(\tau^{i-1,i}, \tau^{i,i+1}, Q^i)$ .

Une représentation paramétrique de la frontière du domaine  $\partial G_p^{i,cb}$  est obtenue de la manière suivante :

$$(N^i, M^i) \in \partial G_p^{i,cb} \iff \begin{cases} N^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sigma_{11}^{cb}(x_3) dx_3, \\ M^i = \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} (x_3 - \bar{x}_3^i) \sigma_{11}^{cb}(x_3) dx_3. \end{cases} \quad (A.3)$$

où la contrainte  $\sigma_{11}^{cb}(x_3)$  est de la forme suivante avec  $\epsilon = \pm 1$  :

$$- \sigma_{11}^{cb}(x_3) = +2\epsilon \sqrt{\frac{(\sigma_i^u)^2}{3} - (\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} \quad \text{pour } x_3^{i-1} \leq x_3 \leq x_3^i.$$

$$- \sigma_{11}^{cb}(x_3) = \begin{cases} +2\epsilon\sqrt{\frac{(\sigma_i^u)^2}{3} - (\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} & \text{pour } x_3^i > x_3 > \hat{x}_3^i, \\ -2\epsilon\sqrt{\frac{(\sigma_i^u)^2}{3} - (\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} & \text{pour } x_3^{i-1} < x_3 < \hat{x}_3^i. \end{cases}$$

$\hat{x}_3^i$  est un scalaire compris entre  $x_3^{i-1}$  et  $x_3^i$  et représentant la position de l'axe neutre.

Pour  $\tau^{i-1,i} = \tau^{i,i+1} = Q^i = 0$ , (c'est-à-dire  $\sigma_{13}^{cb} = 0$  dans la couche  $i$ ),  $\hat{x}_3^i$  est donné par :

$$\hat{x}_3^i = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}N^i}{4\sigma_i^u} + \bar{x}_3^i & \text{si } M^i > 0 \\ +\frac{\sqrt{3}N^i}{4\sigma_i^u} + \bar{x}_3^i & \text{si } M^i < 0 \end{cases}$$

Ainsi, nous avons établi que la contrainte généralisée M4  $\Sigma^{cb}$  est dans  $G_p^{M4,cb}$  si et seulement si  $(\tau^{i-1,i}, \tau^{i,i+1}, Q^i)$  satisfait (A.2) et  $(N^i, M^i)$  appartiennent au domaine  $G_p^{i,cb}$  caractérisé par (A.3).

Notons que  $\sigma_{13}^{cb}$  est une fonction paire de  $x_3$  si on a  $\tau^{i-1,i} = \tau^{i,i+1}$ . Ainsi, en reprenant les résultats du chapitre sur l'homogénéisation des plaques multicouches, une approximation correcte de  $G_p^{i,cb}$  est donnée dans ce cas par :

$$(n^i)^2 + |m^i| \leq 1 \quad (\text{A.4})$$

où les résultantes adimensionnelles de traction-compression  $n^i$  et de moment  $m^i$  sont :

$$n^i = \frac{N^i}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{i,eff}^N t_i}, \quad m^i = \frac{4M^i}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{i,eff}^M t_i^2}, \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\sum_{i,eff}^N = \frac{4}{t_i} \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} \sqrt{(\sigma_i^u)^2 - 3(\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} dx_3, \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{i,eff}^M = \frac{4}{t_i^2} \int_{x_3^{i-1}}^{x_3^i} |x_3 - \bar{x}_3^i| \sqrt{(\sigma_i^u)^2 - 3(\sigma_{13}^{cb}(x_3))^2} dx_3. \quad (\text{A.7})$$

Pour  $\tau^{i-1,i} = \tau^{i,i+1} = Q^i = 0$ , on obtient que les constantes effectives sont égales à la résistance de la couche homogène  $\sum_{i,eff}^N = \sum_{i,eff}^M = \sigma_i^u$ . Ainsi,  $G_p^{i,cb}$  est exactement déterminé par (A.4) correspondant à une plaque de Love-Kirchhoff en flexion cylindrique (Ilyushin, 1956), (Hodge, 1959).

Autrement, si  $\sigma_{13}^{cb}$  n'est pas identiquement nul dans la couche  $i$  alors  $G_p^{i,cb}$  devient plus petit en raison des effets de cisaillement. Ainsi, si  $\Sigma^{cb}$  est dans  $G_p^{M4,cb}$ , alors le couple des résultantes normales et des moments résultants totaux ( $N = \sum_{i=1}^n N^i$ ,  $M = \sum_{i=1}^n (M^i + \bar{x}_3^i N^i)$ ) est dans  $G_p^{\text{hom},cb}$ .

En utilisant la méthode statique pour la détermination de la charge de ruine, on conclut que la charge limite  $\lambda^{M4}$  obtenue par le modèle M4 est une borne inférieure de la charge limite  $\lambda^{LK}$  obtenue par le modèle homogénéisé de Love-Kirchhoff :

$$\lambda^{M4} \leq \lambda^{LK}$$

En réalité, la validité de cette borne inférieure peut être étendue aux plaques multicouches dont toutes les couches présentent un domaine de résistance ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & 0 \end{pmatrix} \in G^{i,cb} \implies \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in G^{i,cb}$$

en condition de flexion cylindrique, et

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} \in G^i \implies \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G^i$$

pour des conditions de chargement plus générales.



# Comparaison avec le modèle de plaque en flexion cylindrique

On se propose ici de comparer le modèle de poutre à celui de plaque prise en déformation plane. Ce dernier sera a priori meilleur lorsque la largeur de la poutre est grande devant l'épaisseur et la longueur.

La démarche pour déterminer le domaine de résistance d'une plaque en déformation plane comme il a été montré dans (Dallot et Sab, 2007b) est de procéder de la même façon que dans la démarche cinématique pour les poutres : on considère la fonction de dissipation en contraintes planes de chaque matériau, mais en imposant  $d_{22} = 0$ . En clair, le domaine sera plus grand puisqu'à même  $d_{11} = (D + y_3\chi_3)$  et même  $d_{33} = d_{33}^{ps}$ , l'étape d'optimisation sur  $d_{22}$  est abandonnée.

On va donc reprendre les 4 exemples et comparer les domaines de résistances en flexion cylindrique  $G_p^{hom,cb}$  et pour les poutres  $G_b^{hom}$ .

- Poutre de Von-Mises homogène

Dans ce cas, on prouve très facilement que :

$$\pi_p^{VM,cb} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi_b^{VM} \quad (\text{B.1})$$

Le domaine de plaque en flexion cylindrique  $\hat{G}_p^{cb}$  sera donc homothétique de celui de poutre en contrainte uniaxiale  $\hat{G}_b$ . La différence entre les deux sera donc de  $2/\sqrt{3} \approx 1.15$ . (Figure B.1)

- Poutre de Drucker-Prager homogène

Dans ce cas, on voit que l'écart pour la résistance en compression est très grand : environ 75%. L'écart sur le moment maximal est de comprise entre 40% et 47% selon le modèle cinématique ou statique.(Figure B.2)

- Poutre sandwich de Von-Mises

Dans ce cas-là aussi, on a :

$$\pi_p^{hom,cb} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi_b^{hom} \quad (\text{B.2})$$

Le domaine en flexion cylindrique est donc 1.15 fois plus grand.(Figure B.3)

- Poutre sandwich Drucker-Prager-Von-Mises (DPVM)

L'écart est dans ce cas compris entre 30% et 53% pour la compression uniaxiale selon qu'on adopte le modèle cinématique ou statique. Pour la flexion pure, il est compris entre 15% et 33%.(Figure B.4).

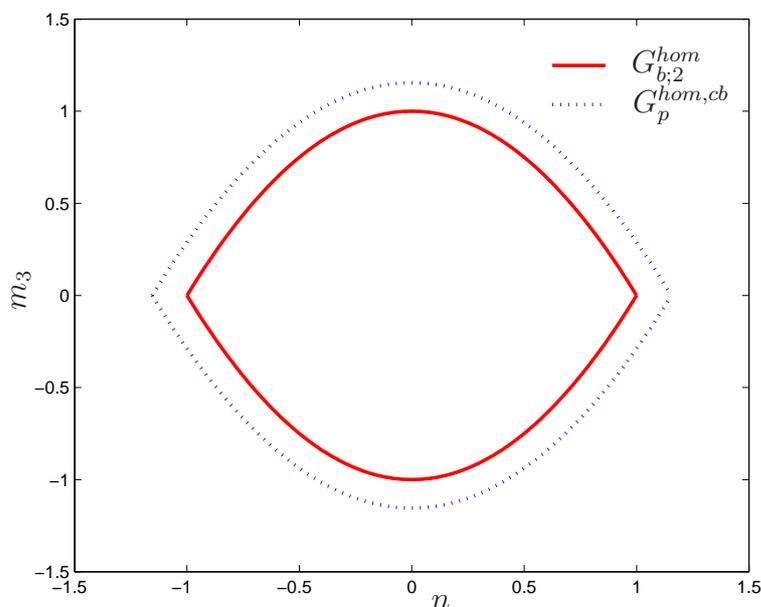


FIG. B.1. Domaines de résistance normalisés : poutre homogène de Von-Mises  $G_{b;2}^{hom}$ , plaque homogène de Von-Mises en flexion cylindrique  $G_p^{hom,cb}$ .

De manière générale, la théorie de plaque en déformation plane sera pertinente lorsque la largeur  $t_2$  sera très grande devant les autres dimensions  $t_3$  et  $L$ .

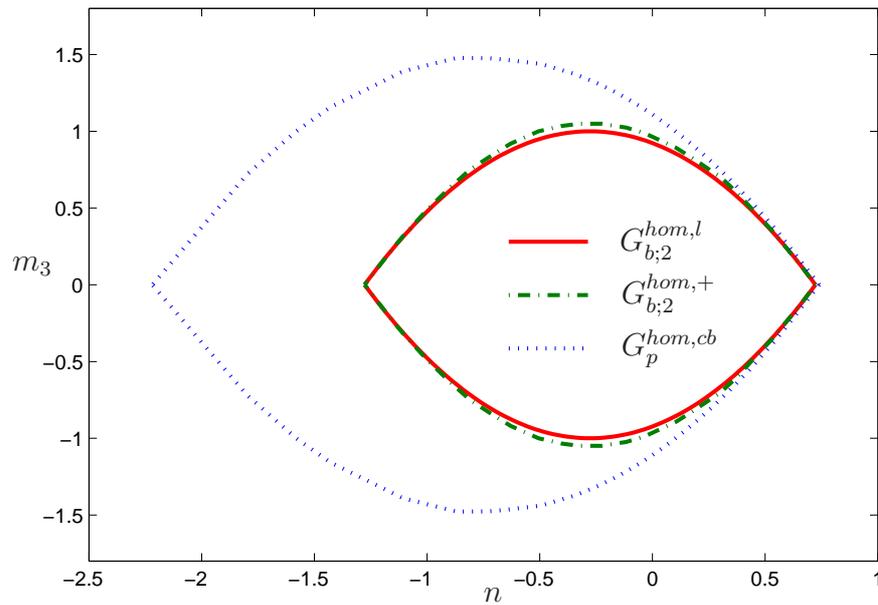


FIG. B.2. Domaines de résistance normalisés : poutre homogène de Drucker-Prager approche statique  $G_{b;2}^{hom,l}$ , approche cinématique  $G_{b;2}^{hom,+}$ , plaque homogène de Drucker-Prager en flexion cylindrique  $G_p^{hom,cb}$ .

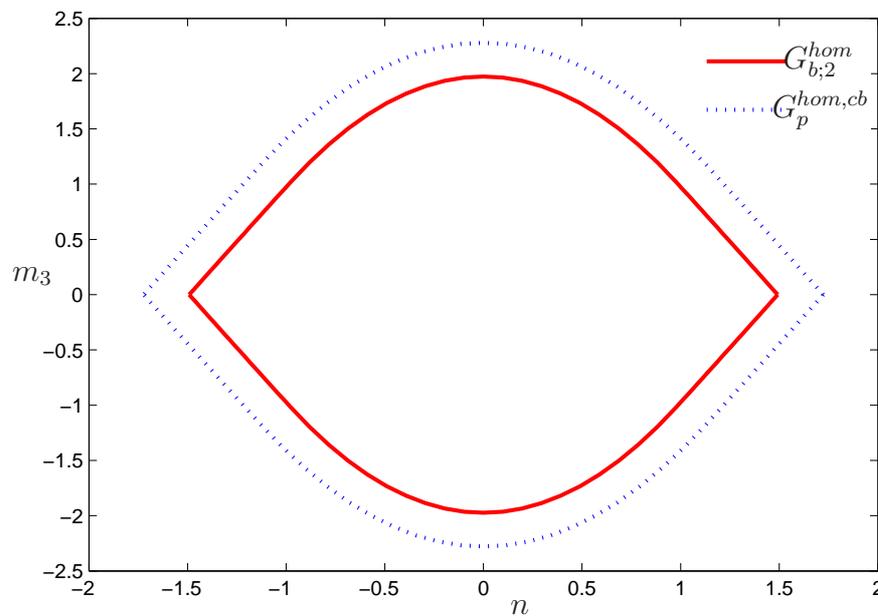


FIG. B.3. Domaines de résistance normalisés : poutre sandwich de Von-Mises  $G_b^{hom}$ , plaque de Von-Mises en flexion cylindrique  $G_p^{hom,cb}$ .

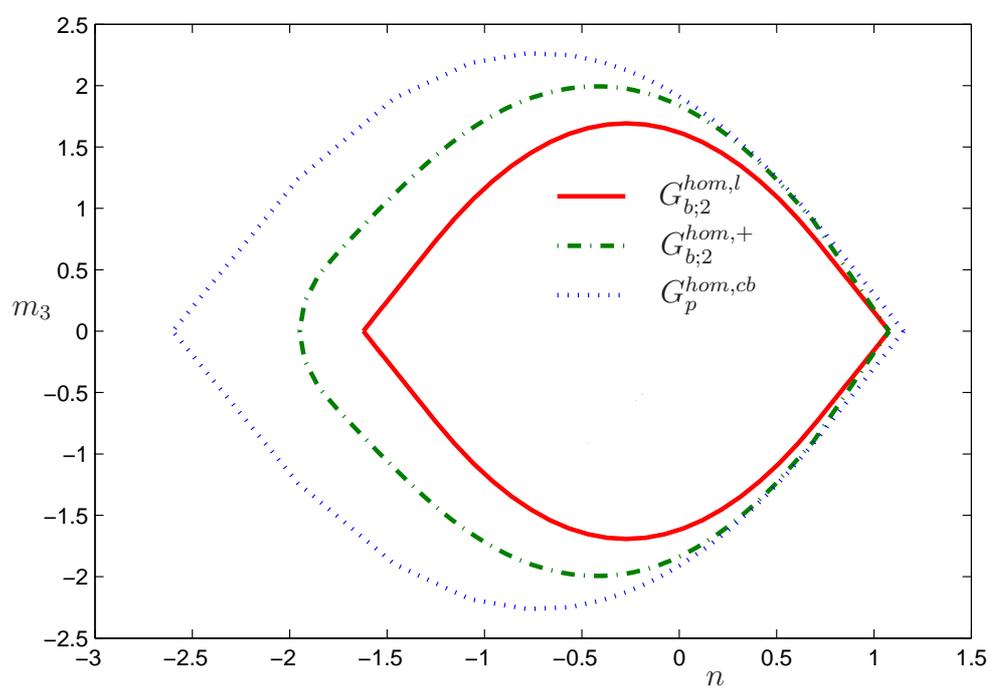


FIG. B.4. Domaines de résistance normalisés : poutre sandwich DPVM approche statique  $G_{b;2}^{hom,l}$ , approche cinématique  $G_{b;2}^{hom,+}$ , plaque DPVM en flexion cylindrique  $G_p^{hom,cb}$ .