HAL
open science

Optimisation and fatigue behaviour of interface wood-UHPFRC for new composite bridges

Hoai Son Pham

To cite this version:

Hoai Son Pham. Optimisation and fatigue behaviour of interface wood-UHPFRC for new composite bridges. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT : . pastel-00003725

HAL Id: pastel-00003725

https://pastel.hal.science/pastel-00003725v1

Submitted on 15 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée pour l'obtention du diplôme de

Docteur de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Spécialité : Structures et Matériaux

par

Hoai Son PHAM

Sujet de la thèse :

Optimisation et comportement en fatigue de la connexion bois-BFUP pour de nouveaux ponts mixtes

Soutenue le 26 Novembre 2007 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	T. KELLER
	C. PETIT
Examinateurs :	J.A. CALGARO
	J.F. BOCQUET
	D. CALVI
Directeur :	R. LE ROY
Co-Directeur :	G. FORET

Remerciements

En premier lieu, j'aimerais remercier vivement mon directeur de thèse Monsieur Robert LE ROY qui m'a encadré avec beaucoup d'enthousiasme et de disponibilité. Sans lui la rédaction de ce mémoire n'aurait pas été réalisée. Merci Robert pour tes conseils, ton optimisme et ta confiance que tu m'as accordés au cours de ces années.

Je remercie également mon co-directeur de thèse, Monsieur Gilles FORET, qui m'a beaucoup aidé sur le plan expérimental et aussi sur la rédaction de ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail. Je remercie Monsieur J.A. CALGARO, d'avoir accepté de présider le jury. Je remercie également Monsieur T. KELLER ainsi que Monsieur C. PETIT d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de mon rapport m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce dernier. Je remercie également Monsieur J.F. BOCQUET et Monsieur D. CALVI qui ont accepté d'être les examinateurs.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Alain EHRLACHER dont l'aide précieuse sur le plan scientifique ainsi que les grandes qualités humaines ont permis de mener à bout cette thèse.

Je remercie également Monsieur J.F CARON et C. STEFANI qui m'ont apporté un soutien scientifique important à mon travail.

Un grand merci à toute l'équipe du LAMI, pour son accueil chaleureux durant ces années. Elle a su créer une ambiance solidaire et conviviale.

Je souhaite exprimer, de tout mon coeur, toute mon affection et ma reconnaissance à mes parents pour leur soutien constant qui m'a permis d'en arriver là. Enfin, ma gratitude va à ma femme Hien Thuong pour la patience et l'amour qu'elle nous a apporté à moi et à ma fille Ngoc Linh.

Résumé

On s'intéresse dans cette recherche à la valorisation du matériau bois dans les ouvrages d'art. Le concept retenu est une structure mixte bois-BFUP (Béton Fibré Ultra Performant). Ce type de conception possède des propriétés structurales qui ne sont théoriquement pas atteintes par l'utilisation seule du bois ou du béton. Ici, le béton est utilisé en compression et le bois essentiellement en traction. La résistance élevée du BFUP associée à la performance du bois en flexion permet d'espérer la conception d'ouvrages légers, faciles à construire, et utilisant un minimum de matière non renouvelable. Cependant, dans cette solution, la connexion à l'interface des deux matériaux est toujours un point extrêmement sensible, notamment sous les actions de fatigue. Du comportement de l'interface dépend le taux d'augmentation de la résistance et de la rigidité.

Cette thèse présente des études théoriques et expérimentales sur la contribution des systèmes de connexion au comportement global de nouveaux ponts mixtes bois-BFUP. Après le chapitre de synthèse bibliographique, un modèle, appartenant à la famille des Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches (M4), est développé. Sa résolution analytique pour le cas de la poutre mixte a été réalisée et validée par un calcul aux éléments finis. On met en évidence la bonne prise en compte des déformations de cisaillement dans les couches et de glissement à l'interface.

Dans la partie expérimentale, des essais exploratoires en flexion sur des poutres mixtes, équipées de différents systèmes de connexion couvrant toutes les familles, sont présentés. Les résultats ont montré que la solution par collage entre le bois et le BFUP est bien plus performante que les autres solutions, tant en rigidité qu'en résistance. Un prototype d'un tablier mixte bois-BFUP collé à l'échelle 1/3 a été ensuite conçu et quatre exemplaires ont été réalisés. Les tests ont permis de démontrer la bonne tenue en fatigue de la solution par collage. Les résultats positifs ont ainsi ouvert des perspectives pour de nouveaux ponts mixtes.

Abstract

This research, deals with the valorisation of wood in bridges The concept selected is a composite wood-UHPFRC (Ultra High Performance Fiber Reinforced Concrete) structure. This type of design has structural properties which are theoretically not reached by the use alone of wood or concrete. Here, the concrete is used in compression and wood primarily in tension. The high resistance of UHPFRC associated with the performance of wood in tension makes it possible to hope designing lightweight structures, easy to build, and using a minimum of non-renewable material. However, in this solution, the connection of two materials is always a great concern, in particular under the actions of fatigue. The increase of resistance and rigidity depends on the behaviour of the interface.

This thesis presents theoretical and experimental studies on the contribution of connection systems to the behaviour of new wood-UHPFRC composite bridges. After the chapter devoted to bibliographical synthesis, a model, deduced from the Multi-particulate of Multi-layer Materials Models (M4), is developed. The analytical resolution in the case of a composite beam has been carried out and validated by finite elements calculation. The model accounts for shearing deformation in the layers and slip at the interface.

In the experimental part, the exploratory tests on composite beams, with various fastener systems, covering all the categories, are presented. The results have showed that glued assembly of the two materials leads to the best shear stiffness, and offers the ultimate highest strength. A prototype of a wood-UHFRC composite deck on scale 1/3 has been designed and four specimens have been carried out. The tests have showed good behavior in fatigue. The encouraging results have thus opened prospects for new composite bridges

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Synthèse bibliographique **3**

1.1 Typologie des ponts en bois 3

1.2 Ponts à poutres mixtes bois-béton 7

1.3 Systèmes de connexion de ponts mixtes bois-béton 8

1.3.1 Connexion par compression locale du bois 8

1.3.2 Connexion par adhérence des surfaces 15

1.4 Propriétés des matériaux 16

1.4.1 Bois 16

1.4.2 Béton 22

1.5 Expérimentations sur la connexion bois-béton 24

1.5.1 Essai de cisaillement 24

1.5.2 Essai en flexion 26

1.5.3 Essai de fatigue 27

1.6 Conclusion 30

2 Modèles pour les poutres mixtes à connexion imparfaite **31**

2.1 Modèle classique de poutre mixte à connexion imparfaite 32

2.1.1 Rappel de la théorie des poutres selon les hypothèses de Bernoulli 33

2.1.2 Équations du modèle classique de poutres mixtes à connexion imparfaite . . 34

2.1.3 Résolution simplifiée pour le calcul selon les Eurocodes 36

2.1.4 Prise en compte de la déformation de cisaillement 37

2.1.5 Résolution formelle des équations du modèle classique 37

2.1.6 Comparaison de la solution formelle et de la solution selon les Eurocodes du modèle classique . . . 38
2.2 Nouveau modèle de poutre mixte à connexion imparfaite . . . 41
2.2.1 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux multicouches à connexion imparfaite . . . 41
2.2.2 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres multicouches à connexion imparfaite . . . 43
2.2.3 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres mixtes à connexion imparfaite - Résolution analytique et validation par les EF . . . 53
2.3 Comparaison des modèles . . . 64
2.4 Conclusion . . . 65

3 Essais exploratoires sur différents systèmes de connexion pour poutres mixtes 66
3.1 Dimension des éprouvettes et propriétés des matériaux . . . 66
3.2 Métrologie et procédure d'essai . . . 70
3.3 Résultats des essais . . . 71
3.3.1 Modes de rupture des poutres . . . 71
3.3.2 Comportement élastique des poutres . . . 76
3.4 Traitement des résultats expérimentaux par les modèles . . . 78
3.5 Validation expérimentale du modèle $M4-5n-P$ . . . 80
3.6 Conclusion . . . 83

4 Vérification de la tenue en fatigue du collage Bois-BFUP 84
4.1 Corps d'épreuve . . . 84
4.1.1 Dimensions et propriétés des matériaux . . . 84
4.1.2 Mise au point du collage sur BFUP . . . 86
4.1.3 Fabrication des corps d'épreuve . . . 87
4.2 Mise au point des essais . . . 91
4.2.1 Calcul du chargement . . . 91
4.2.2 Programme de chargement . . . 95
4.2.3 Vérification des contraintes dans les matériaux et à l'interface . . . 95
4.2.4 Dispositif . . . 97
4.2.5 Instrumentation . . . 100
4.3 Résultats . . . 102
4.3.1 Premier corps d'épreuve $CE1$ . . . 102

4.3.2 Corps d'épreuve $CE2$, $CE3$ et $CE4$ 105
4.4 Conclusion 113

Conclusion générale et perspectives **114**

Bibliographie **120**

Annexes **121**

A Résolution formelle du modèle classique **122**

B Adaptation du modèle $\mathcal{M}4$-5n **125**
B.1 Méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner pour les modèles multiparticulaires 125
B.2 Problème de multicouche à connexion imparfaite 127
B.3 Approximation des champs de contraintes 3D 129
B.4 Équation d'équilibre et conditions aux limites 131
B.5 Comportement cohérent avec l'approximation en contrainte 136
B.6 Loi de comportement d'interface 140

C Résolution analytique du modèle $\mathcal{M}4$-5n adapté aux poutres mixtes **141**

D Résultats des essais en flexion trois points **150**
D.1 Courbes de force flèche 150
D.2 Courbes de glissement 154
D.3 Expérimentation dans le cadre de la thèse M. Van Der Linden 159

E Résultats des essais en fatigue **166**
E.1 Courbes de force-flèche 166
E.2 Courbes de force-Glissement 175

Table des figures

1.1 Passerelle Pinot 4
1.2 Pont sur l'Inn en Suisse 4
1.3 Pont de Vihantasalmi en Finlande 5
1.4 Pont sur la Dore 5
1.5 Pont de Merle 6
1.6 Pont sur la Resgia 7
1.7 Brevet d'invention de Schaub et de Martino 9
1.8 Brevet d'invention de Deperraz 9
1.9 Brevet d'invention de Molard 9
1.10 Dalle mixte bois béton nommée D-Dalle 10
1.11 Clous et vis de grande résistance testés par Ahmadi 10
1.12 Brevet d'invention de Trygve et de Kuttel 11
1.13 Connecteurs testés par Benitez et par Steinberg 12
1.14 Brevet d'invention de Bettex 12
1.15 Brevet d'invention de Gauthier 13
1.16 Brevet d'invention de Alain 13
1.17 Brevet d'invention de Raymond et de Welch 14
1.18 Brevet d'invention de Aitcin 15
1.19 Brevet d'invention de Bathon 16
1.20 Comparaison des matériaux bois, acier et béton armé 17
1.21 Trois axes principaux du bois 17
1.22 Caractéristiques élastiques de certains bois résineux (1) et feuillus (2) [Navi *et al.*, 2005] 19
1.23 L'influence de hygroscopie [Natterer *et al.*, 2000] 19

1.24 Lois typique de comportement du bois [Setra, 2006] 20
1.25 Tableau des valeurs caractéristiques du BLC [EC5-1-1, 1995] 21
1.26 multi-fissuration du $CEMTEC^{®}$ en traction directe 22
1.27 Deux exemples de ponts en $BFUP$ 23
1.28 Un exemple du comportement de l'interface 25
1.29 Essai Push-out 25
1.30 Essai de cisaillement d'un interface 26
1.31 Dégradation de la raideur d'interface sous l'action cyclique [Weaver, 1999] 27
1.32 Dégradation de la raideur en flexion [Weaver, 1999] 28
1.33 Comportement force-flèche du premier cycle et après 10^7 cycles d'une poutre [Gürtler, 2004] 28
1.34 Relation entre k_{fat} et le nombre de cycles n 29

2.1 Problème de poutre 33
2.2 Sens positif des grandeurs de la théorie de poutre 34
2.3 Poutre mixte 35
2.4 Poutre mixte bois-BHP fibré 39
2.5 Schéma de la poutre chargée uniformément 39
2.6 Comparaison des champs de déplacement vertical et d'effort de cisaillement pour deux approches du modèle classique 40
2.7 Multicouche étudié 42
2.8 Poutre multicouche à bords libres 43
2.9 Poutre mixte bois-BHP fibré 55
2.10 Modélisation des éléments finis 55
2.11 Flèche de la poutre en fonction du module d'Young E_{int} de couche intermédiaire . 56
2.12 Tranche d'élément dans la couche intermédiaire pour l'identification des raideur . . 57
2.13 Contrainte de cisaillement et d'arrachement en z dans la couche intermédiaire pour la poutre $h/L = 5,4$ 57
2.14 Contrainte en cisaillement et glissement pour quatre différents élancements 58
2.15 Courbes paramétrées contrainte de cisaillement-glissement 58
2.16 Contrainte d'arrachement et arrachement pour quatre différents élancements . . . 59
2.17 Courbes paramétrées contrainte d'arrachement-arrachement d'interface 60
2.18 Courbes paramétrées contrainte de cisaillement-glissement dans le cas où $E_{int} = 500MPa$ 60

2.19 Déplacement vertical des éléments finis et du modèle proposé 62
2.20 Contrainte d'arrachement et arrachement d'interface par les deux approches 63
2.21 Contrainte d'arrachement et arrachement par les deux approches 63
2.22 Déplacement vertical de la couche bois en fonction des raideurs d'interface 64
2.23 Influence de la déformation de cisaillement et de la raideur de cisaillement sur le déplacement vertical 65

3.1 Géométrie des poutres en flexion 67
3.2 Connecteurs locaux par tubes et tiges 68
3.3 Connecteurs continus 69
3.4 Connexion par collage 70
3.5 Schéma de pilotage des essais en flexion 71
3.6 Disposition des capteurs 71
3.7 Rupture en traction du bois et du béton 72
3.8 Courbes force-flèche représentatives du mode de rupture $M1$ 72
3.9 Courbe représentative force flèche du mode de rupture $M2$ 73
3.10 Rupture par arrachement du bois 73
3.11 Courbes force flèche des trois poutres collées 74
3.12 Courbe représentative force flèche du mode de rupture $M4$ 74
3.13 Raideur représentative des poutres 77
3.14 Résultats des essais en cisaillement 81
3.15 Courbe force-fleche de la poutre $SCH - 5$ 82
3.16 Glissement à deux extrémités de la poutre $SCH - 5$ 82

4.1 Géométrie de la poutre d'essai 85
4.2 Rupture des poutres bois-BFUP collées 87
4.3 Mise en place de la dalle en BFUP 88
4.4 Ponceuses pour la préparation des surfaces de collage 89
4.5 Mise en place le collage 89
4.6 Corps d'épreuve avec les serre-joints 90
4.7 Camion B_f 91
4.8 Section transversale du pont d'essai au LCPC 92

4.9 Courbes de fatigue - Variations de contrainte de cisaillement 93
4.10 Chargement fréquent appliqué au pont de référence 94
4.11 Schéma mécanique pour le calcul des contraintes 96
4.12 Cadre de presse 98
4.13 Système d'appui 99
4.14 Position des capteurs de déplacement 100
4.15 Capteur de glissement à l'extrémité de la poutre 101
4.16 Position des jauges 101
4.17 Courbes force-flèche des trois capteurs $D1$, $D2$, et $D3$ 102
4.18 Force flèche de $EC1$ 102
4.19 Glissement à des extrémités de la poutre 103
4.20 Déformation axiale mesurée et contrainte axiale calculée 104
4.21 Rupture du $CE1$ 104
4.22 Contrainte jusqu'à la rupture dans la poutre en bois 105
4.23 Force-flèche du $CE4$ pour les 3 phases de chargement 106
4.24 Force-glissement du $CE4$ pour les 3 phases de chargement 107
4.25 Force-flèche jusqu'à la rupture de $CE2$ et $CE3$ 108
4.26 Rupture d'une poutre du bois du $CE2$ 108
4.27 Rupture cohésive en cisaillement dans le bois de $CE3$ 109
4.28 Position des deux modes de rupture du $CE4$ 109
4.29 Les cycles des capteurs $D6$ et $D8$ autour du premier événement 110
4.30 Les cycles des capteurs $D1$ et $D3$ autour du premier événement 110
4.31 Rupture observée par le capteur de glissement $D6$ 111
4.32 Rupture adhésive de l'interface colle-BFUP du $CE4$ 112
4.33 Résultat de la tenue en fatigue du collage 113

A.1 Champ de déformation de la section 123

D.1 Courbe force-flèche de poutre de connecteur aux tiges 150
D.2 Courbe force-flèche de poutre de connecteur aux tubes 151
D.3 Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD31 151
D.4 Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD43 151

D.5 Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD51 152
D.6 Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD86 152
D.7 Courbe force-flèche de poutre de connecteur de la PAP 152
D.8 Courbe force-flèche de poutre de connecteur de la RB 153
D.9 Courbe force-flèche de poutre de connecteur de collage 153
D.10 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Tu - 2$ 154
D.11 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD31 - 1$ 154
D.12 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD31 - 2$ 155
D.13 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD43 - 1$ 155
D.14 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD43 - 2$ 155
D.15 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD86 - 1$ 156
D.16 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD86 - 2$ 156
D.17 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - PAP - 1$ 156
D.18 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - PAP - 2$ 157
D.19 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - RB - 1$ 157
D.20 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - RB - 2$ 157
D.21 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 1$ 158
D.22 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 2$ 158
D.23 Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 3$ 158
D.24 Disposition des essais en cisaillement 159
D.25 Courbe force-fleche de la poutre $SCH - 7$ 161
D.26 Glissement à deux extrémités de la poutre $SCH - 7$ 161
D.27 Courbe force-fleche de la poutre $NAG - 1$ 162
D.28 Glissement à deux extrémités de la poutre $NAG1 - 1$ 162
D.29 Courbe force-fleche de la poutre $NAG - 3$ 163
D.30 Glissement à deux extrémités de la poutre $NAG - 3$ 163
D.31 Courbe force-fleche de la poutre $N + S - 3$ 164
D.32 Glissement à deux extrémités de la poutre $N + S - 3$ 164
D.33 Courbe force-fleche de la poutre $N + S - 4$ 165
D.34 Glissement à deux extrémités de la poutre $N + S - 4$ 165

E.1 Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement 167

E.2 Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement 168
E.3 Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement 169
E.4 Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement 170
E.5 Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement 171
E.6 Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement 172
E.7 Courbe force-flèche du $CE4$ de la phase de $10 - 80KN$ 173
E.8 Courbe force-flèche du $CE2$ de la phase de $10 - 80KN$ 174
E.9 Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement 175
E.10 Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement 176
E.11 Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement 177
E.12 Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement 178
E.13 Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement 179
E.14 Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement 180
E.15 Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement 181
E.16 Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement 182
E.17 Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement 183
E.18 Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement 184
E.19 Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement 185

Liste des tableaux

1.1 Clous testés par Gutkowski 11

1.2 Valeurs de $k_{fat,\infty}$ des éléments du bois 29

2.1 Raideurs de cisaillement correspondant au cas $E_g = 10MPa$ 59

2.2 Raideurs d'arrachement correspondant au cas $E_g = 10MPa$ 59

3.1 Propriétés du bois lamellé collé GL28 67

3.2 Formulation du BHP fibré pour $1m^3$ 67

3.3 Résistance du béton 68

3.4 Identification des 19 poutres 70

3.5 Charge de rupture et mode de rupture des poutres 75

3.6 Raideur des poutres dans la phase élastique 76

3.7 Raideur de cisaillement des systèmes de connexion testés (* Raideur calée trop grande, pas de sens) 79

3.8 Raideur de cisaillement des poutres collées (* Raideur calée trop grande, pas de sens) 80

4.1 Carte d'identification du $BSI^{®}CERACEM$ (d'après EIFAGE) 85

4.2 Caractéristiques mécaniques de la colle $Sikadur^{®}30$ 86

4.3 Procédure de malaxage du $BSI^{®}CERACEM$ 87

4.4 Identification des corps d'épreuve 89

4.5 Étendue en cisaillement à l'interface dans le pont de référence à l'action B_f 93

4.6 Chargement et étendue de contrainte pour chaque corps d'épreuve 93

4.7 Contrainte de cisaillement d'interface du pont de référence et comparaison avec celle du chargement fréquent 94

4.8 Probabilité de dépassement du niveau de charge du programme expérimental sur une durée de 100 95

4.9 Vérification en fatigue des contraintes en traction dans le bois 97
4.10 Vérification en fatigue des contrainte en cisaillement dans le bois 97
4.11 Vérification en fatigue du béton 97

Introduction générale

Contexte de la thèse

La recherche sur la valorisation du bois dans les ouvrages d'art est actuellement un des thèmes de recherche au sein de l'Institut Navier et plus précisément, au laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification (LAMI). La France est un pays producteur de bois, dont une essence considérée comme durable et adaptée aux ouvrages d'art, le Douglas, est disponible en abondance. Sont en effet récoltés annuellement environ $1,5$ millions de m^3 de douglas. Pourtant, les ouvrages d'art en bois sont beaucoup moins nombreux en France qu'en Suisse, Norvège ou Allemagne. La recherche peut contribuer, grâce à la proposition de structures nouvelles adaptées aux besoins des maîtres d'ouvrage, à combler ce retard. Un autre point de vue pour promouvoir ce thème de recherche se justifie dans le cadre de l'éco-conception. En effet, parmi les indicateurs donnés dans la norme $NFP01010$ sur l'évaluation environnementale des constructions, l'indicateur d'impact climatique consiste à évaluer la quantité de CO_2 équivalente rejetée dans l'atmosphère au cours du cycle de vie d'une unité fonctionnelle. Il est important de proposer, dans une démarche d'éco-conception, des solutions techniques innovantes intégrant du bois, étant donné le puit de carbone que peuvent constituer ses construction. Enfin, dans une vision à plusieurs décennies, il est raisonnable de penser que les constructions intégreront beaucoup plus de matériaux renouvelables qu'actuellement, comme l'indique le rapport Brundland en 1987, rapport présentant les bases pour un développement durable.

Le contexte est favorable à cette recherche tant du point de vue politique, réglementaire qu'en terme de dynamique de recherche. Tout d'abord il faut mentionner qu'il existe maintenant un eurocode dévolu au bois qui devrait être officialisé en 2008 (l'EN 1995). Cette norme, construite dans le même esprit que les autres eurocodes, devrait encourager les bureaux d'étude non spécialisés dans le bois à se lancer dans le calcul de ces structures. D'un point de vue politique, un accord cadre interministériel encourage à l'utilisation du bois dans les constructions. Cet encouragement a été entendu par le SETRA, organisme dépendant du ministère MEDAD, qui a montré son intérêt pour le bois en proposant en 2006 un guide décrivant les moyens d'assurer la durabilité des ponts en bois. Enfin, signalons l'existence du projet de recherche européen "New Roads Construction Concepts" ($NR2C$) dont le programme vise à faire des propositions pour les routes du futur à l'horizon 2050. Le programme expérimental de 2007 du $WP3$ de ce projet a porté sur l'essai d'un pont hybride

comportant majoritairement du bois. Ce parti pris de conception montre que la communauté des chercheurs s'intéresse à l'utilisation du bois dans les structures.

Nous réfléchissons à des conceptions nouvelles de ponts comportant du bois, conceptions fondées sur l'association entre des matériaux différents. Une combinaison raisonnable des matériaux dans une structure est en effet une voie de développement qui permet d'optimiser leur utilisation. La structure mixte bois-béton exhibe des propriétés structurales qui ne sont pas atteintes par l'utilisation seule du bois ou du béton. Le béton, qui a une faible résistance en traction, est utilisé en compression et le bois est utilisé en traction. Cependant, dans le concept de structures mixtes, la connexion à l'interface reste toujours un point sensible au niveau du dimensionnement ainsi qu'au niveau de la technique de connexion.

Objectif de la thèse

L'objectif de la thèse est donc de fournir un outil de dimensionnement de structures mixtes qui tient compte de l'état de l'interface entre le bois et le béton, et de déterminer un système de connexion le plus performant possible vis-à-vis des états limites de service et des états limites ultimes dont l'état limite en fatigue.

Organisation de la thèse

Le premier chapitre de la thèse est consacré à justifier le choix de la structure à poutre mixte bois-BFUP. Une synthèse des systèmes de connexion existants, l'évaluation de leurs performances et de leurs influences sur le comportement de la structure mixte bois béton seront présentés.

Le deuxième chapitre présente une adaptation du modèle multiparticulaire $\mathcal{M}4$-$5n$ développé au LAMI pour les multicouches à connexion imparfaite. Un modèle de poutre associé est ensuite établi. Une solution analytique pour le cas de poutres mixtes est réalisée et validée à l'aide du code de calcul aux éléments finis Abaqus.

Dans le troisième chapitre, des essais exploratoires flexion 3 points sur des poutres mixtes bois-BHP, équipées de différents systèmes de connexion couvrant toutes les familles existantes, sont présentés et analysées grâce au modèle proposé.

Le dernier chapitre de la thèse présente le prototype à l'échelle 1/3 d'un tablier mixte bois-BFUP collé et les quatre exemplaires réalisés. Les résultats sont présentés et analysés.

Chapitre 1

Synthèse bibliographique

Nous allons présenter dans ce chapitre la justification du choix de la structure à poutre mixte bois-BFUP à étudier. Nous présentons ensuite la synthèse des systèmes de connexion existants, l'évaluation de leurs performances et de leurs influences sur le comportement de la structure mixte bois béton. Les propriétés des matériaux utilisés sont aussi présentées.

1.1 Typologie des ponts en bois

Bien que les performances du bois soient très satisfaisantes, l'utilisation du bois en flexion est limitée par la résistance au cisaillement longitudinal. De plus, la résistance en traction du bois est limitée par la nature des assemblages qui entraîne des contraintes localisées de cisaillement. C'est la raison pour laquelle l'utilisation du bois pour les ouvrages d'art reste limitée à certaines de gammes de pont. Nous présentons ici les types d'ouvrages d'art adaptés au bois.

Ponts en arc

L'utilisation optimale du bois est de faire travailler le bois en compression axiale en pleine section. Ceci fait référence à des ponts en arc. La gamme de portée de ces ouvrages est de 30 à $60m$. Nous présentons ici l'exemple de la passerelle Pinot à Blagnac, réalisée en 1998, d'une portée de $36m$ (Fig. 1.1).

Ce pont en arc est composé d'une structure principale en arc auto-ancré en bois, d'une dalle en béton armé, de deux poutre tirant, de pièces de pont, ainsi que de suspentes en acier, et d'une couverture en polyméthacrylate de méthyle. L'arc est en bois lamellé collé de classe $GL24$. L'essence est le pin sylvestre.

On rencontre également les ponts en arc intermédiaire. Le pont sur l'Inn qui a été construit en 1993, se trouve en montagne, à Strada, en Suisse (Fig. 1.2). L'arc a une portée de $39m$ et la longueur totale de l'ouvrage est de $48m$. La structure porteuse est entièrement en bois, avec

Fig. 1.1 – Passerelle Pinot

des poutres en lamellé collé d'épicéa non traité, mais protégée par un bardage en mélèze et une couvertine en cuivre. La structure secondaire est constituée d'entretoises en bois, qui supportent un platelage en bois précontraint, c'est à dire un platelage constitué d'éléments en bois serrés entre eux par des barres en acier.

Fig. 1.2 – Pont sur l'Inn en Suisse

Ponts à fermes

Les ponts à fermes sont composés de structures triangulées. Le pont de Vihantasalmi en Finlande en est un exemple (Fig. 1.3). Ce pont a été mis en service en 1999. La longeur de l'ouvrage est de $168m$, répartie sur 5 portées de 21 et $42m$. Les deux portées principales de $42m$ sont soutenues par les poutres triangulées en bois assemblées comme une charpente de toiture. Les poutres porteuses en bois sont connectées à une dalle en béton, qui participe à la résistance mécanique de

l'ensemble par l'intermédiaire de connecteurs spécialement étudiés pour cet ouvrage.

Fig. 1.3 – Pont de Vihantasalmi en Finlande

Ponts à poutres treillis

Les ponts à poutres treillis sont une évolution des ponts à fermes. La gamme de portée de ces ouvrages est de $20 - 50m$. L'intérêt est de créer des poutres de forte hauteur pour franchir des portées assez importantes et d'utiliser la structure en treillis pour soutenir les poutres porteuses. Un exemple de ce type d'ouvrage est le pont sur la Dore à Saint-Gervais-sous-Meymont, construit en 1994 (Fig. 1.4).

Fig. 1.4 – Pont sur la Dore

Le portée de l'ouvrage est de $33,25m$. Chacune des poutres principales est formée de deux éléments en lamellé collé de $185 \times 528mm$. Le treillis formé par des poutres en lamellé collé en pin sylvestre sert à soutenir les poutres principales.

Ponts à béquilles

Les ponts à béquille sont bien adaptés au bois, car ils permettent une réduction des portées effectives et engendrent un effort de compression dans les palées. La gamme de portée de ces ouvrages est de $20 - 40m$. Un exemple de pont à béquilles en bois est le pont de Merle à Saint-Geniez-ô-Merle en Corrèze, construit en 1999 (Fig. 1.5).

Fig. 1.5 – Pont de Merle

Cet ouvrage de $57m$ de long et $10m$ de large surplombe le fond de la vallée à plus de $30m$ de hauteur au point plus haut. L'essence retenue pour les lamelles entrant dans la fabrication du bois lamellé collé est le Douglas de classe mécanique $C30$. Les poutres principales ont une section de $160 \times 16cm$ et sont soutenue par les béquilles de section en T. Une dalle en béton de $25cm$ d'épaisseur non collaborante est simplement posée sur des appuis en néoprène et maintenue par l'intermédiaire de tiges filetées scellées dans les poutres en bois.

Ponts suspendus ou à haubans

Les ponts suspendus ou à haubans permettent de concevoir des ouvrages de grande portée. La gamme de portée de ces ouvrages est de $30 - 100m$. Citons ici deux exemples de ce type de pont : le pont en bois de Ojuela au Mexique, construit en 1892, avec $278m$ de portée et en France, le pont de Tournon datant de 1845 est constitué de deux travées de $97,50m$.

Parmi les ouvrages récents, on recense notamment la passerelle sur le Doubs. Cette passerelle construite en 1983 est en bois massif de sapin et d'épicéa et a une longueur d'environ $52m$ pour $37m$ de portée.

Ponts mixtes bois-béton

Le principe des ponts mixtes bois-béton est le même que pour les ponts mixtes acier-béton. La dalle béton participe à la reprise des efforts, principalement en compression. La gamme de portée de ces ouvrages est de $20 - 80m$. Les longues portées peuvent être atteintes avec des ponts en arc dont le tablier repose sur des appuis intermédiaires (pilettes, suspentes, etc.) tous les 5 à $10m$.

Un exemple est le pont sur la Resgia à Inneferrera en Suisse construit en 1998 (Fig. 1.6).

Fig. 1.6 – Pont sur la Resgia

L'ouvrage de $60m$ de longueur est constitué de 4 arcs principaux en lamellé collé d'une portée de $45m$. La dalle est constituée de prédalles de $6cm$ d'épaisseur et de béton coulé en place de $16cm$ d'épaisseur. Les essences utilisées sont du mélèze pour les arcs et de l'épicéa pour le reste.

1.2 Ponts à poutres mixtes bois-béton

Le paragraphe ci-dessus présente un synthèse de typologie des ponts en bois dont les ponts mixtes bois-béton. L'association de matériaux ayant des propriétés différentes et complémentaires permet d'améliorer le fonctionnement des structures, en utilisant chaque matériau dans son domaine de prédilection. Le béton possède une bonne résistance en compression, mais une faible résistance à la traction. Il peut être associé au bois comme dalle collaborante comprimée, qui permettra la reprise des efforts de cisaillement nuisibles au fonctionnement en flexion du bois seul et peut assurer également une protection de la charpente en bois vis-à-vis des intempéries.

La gamme de portée de $10 - 25m$ occupe 80% des ponts en France. C'est la raison pour laquelle la solution des ponts à poutres pour cette gamme de portée est une solution économique, structurellement efficace et à développer.

Dans la conception des ponts à poutre mixte, la connexion à l'interface est un point sensible. Une étude du comportement mécanique du pont de Mercle (1.1) a été réalisée afin de pourvoir valider les

hypothèses prises lors de la conception de l'ouvrage [Dubois *et al.*, 2006]. Dans ce pont, le tablier est liaisonné aux poutres par l'intermédiaire d'une connexion souple ne transmettant que très peu d'efforts de cisaillement tout en assurant le contreventement horizontal définitif de la structure. Les mesures effectuées lors des épreuves de réception de l'ouvrage couplées à la modélisation numérique par éléments finis a permis de conclure que les simplifications de modélisation, comme la non-prise en compte de la connexion bois-béton, si elle permettent de rassurer les maîtres d'ouvrage et les concepteurs, induisent un surdimensionnement non compatible avec le contraintes économiques actuelles. Comme l'état limite de service est souvent dimensionnant pour les éléments fléchis en bois, considérer une hypothèse grossière de la connexion à l'interface est largement surdimensionnant et a eu des conséquences importantes vis-à-vis des performances économiques de l'ouvrage .

1.3 Systèmes de connexion de ponts mixtes bois-béton

La connexion de la structure mixte bois-béton est assurée par des éléments qui sont dénommés les connecteurs. Les connecteurs transmettent les efforts de cisaillement entre les deux matériaux pour assurer un comportement monolithique. L'état de l'interface pilote le taux d'augmentation de la résistance et de la rigidité. Si le bois et le béton travaillent d'une manière monolithique, la structure atteint la rigidité optimale. Un système de connexion est constitué soit par des tenons en béton enfoncé dans le bois, soit par des éléments mécaniques comme des clous, des plaques métalliques, des tubes métalliques emmanchés dans le bois, soit par le collage. On peut classer les systèmes de connexion existants en 2 grandes familles :

- Les systèmes fonctionnant prioritairement par compression locale du bois ;
- Les systèmes fonctionnant prioritairement par cisaillement surfacique du bois.

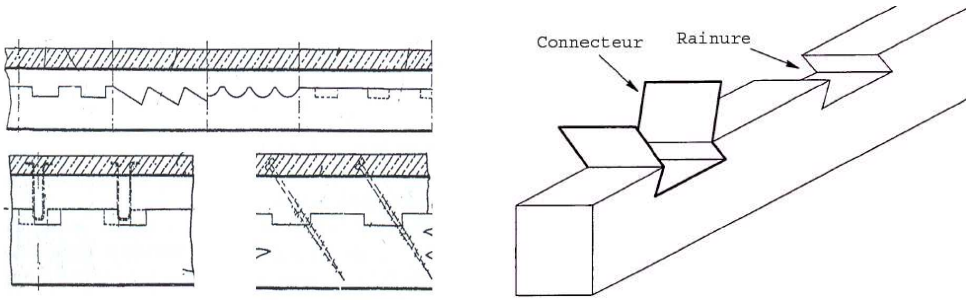
1.3.1 Connexion par compression locale du bois

Les systèmes de connexion par compression locale du bois sont des éléments qui permettent de transmettre le cisaillement entre le bois et le béton par la compression de ces éléments sur le bois.

Connexion par des entailles

On usine des rainures dans le bois, rainures qui sont remplies de béton lors du coulage pour former des tenons dans le bois. Dans le brevet d'invention de Schaub [Schaub, 1929], les surfaces de contact entre le bois et le béton sont dentelées, crénelées, ou trouées afin d'empêcher le glissement longitudinal entre le bois et le béton. Afin de renforcer des dents en béton dans le bois, des vis ou des fers d'ancrage sont enfoncés à l'intérieur des dents et du bois. Martino [Martino, 2005] a renforcé les rainures de section trapèzoidale dans le bois par des éléments en acier de même section (Fig. 1.7).

Deperraz [Deperraz, 1998] réalise des entailles de sections variables dans lesquelles différents profils sont convenablement disposés et orientés par rapport au signe de l'effort de cisaillement. La



(a) [Schaub, 1929] (b) [Martino, 2005]

Fig. 1.7 – Brevet d'invention de Schaub et de Martino

connexion est renforcée encore par des tiges. Le béton armé remplit l'espace entre deux poutres ainsi que le volume des entailles (Fig. 1.8).

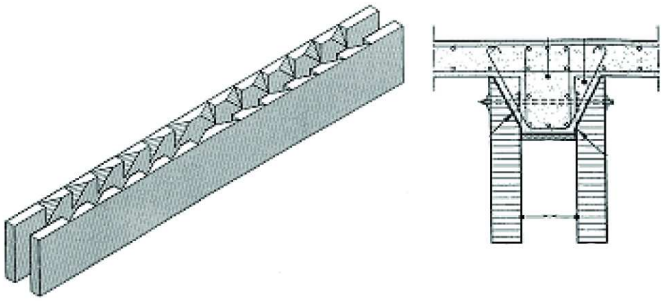


Fig. 1.8 – Brevet d'invention de Deperraz

Une autre technique de connexion par des entailles est présentée dans le brevet de Molard [Molard *et al.*, 1998]. La partie bois se compose de lattes assemblées entre elles par clouage ou collage de manière à ce que certaines lattes soient saillantes pour la création des rainures longitudinales. De plus, des connecteurs tels que de tasseaux en bois ou des cornières sont disposés transversalement pour l'accrochage du béton sur la surface du bois. Cela permet aussi de rigidifier l'ensemble de la structure au cours de la manipulation en atelier et du transport (Fig. 1.9).

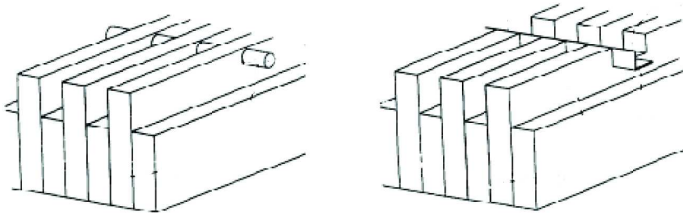


Fig. 1.9 – Brevet d'invention de Molard

Avec le même principe, le groupe CBS-CBT a développé une dalle bois béton dit D-Dalle (Fig. 1.10). Avec cette section, la poutre peut atteindre une portée de $11m$ à $18m$.

Fig. 1.10 – Dalle mixte bois béton nommée D-Dalle

Connexion par des pointes, des vis, des goujons

Avec le même principe que la connexion par entailles, les éléments en acier sont utilisés pour former des tenons ou des dents qui sont cloués, vissés, ou collés dans le bois et noyés dans le béton. Les pointes, les vis et les goujons sont utilisés dans les brevets de [Tadeusz *et al.*, 1981], [Heinz, 2000] et [Natale, 2000].

Dix types de clous et de vis de grande résistance ont été testés par Ahmadi [Ahmadi *et al.*, 1993], lequel a fait varier la profondeur de pénétration du connecteur dans le bois dans la gamme $8d$, $11d$ et $15d$, où "d" est le diamètre des clous et vis (Fig. 1.11). Les essais de cisaillement montrent que la résistance des connecteurs augmente avec la profondeur de pénétration des clous jusqu'à la valeur de 11d pour se stabiliser ensuite. La partie linéaire de la courbe force-glissement disparaît quand le glissement atteint la valeur de $0,38mm$. La force correspondante est prise comme la valeur admissible du connecteur. Les essais en flexion montrent une augmentation de 55% de la résistance en flexion et une diminution de la flèche de 230% par rapport à l'essai en flexion sans connexion.

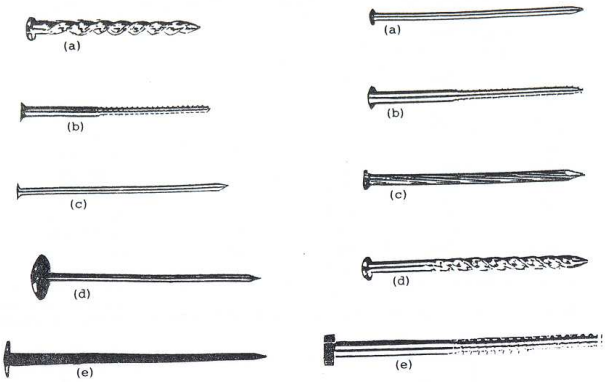


Fig. 1.11 – Clous et vis de grande résistance testés par Ahmadi

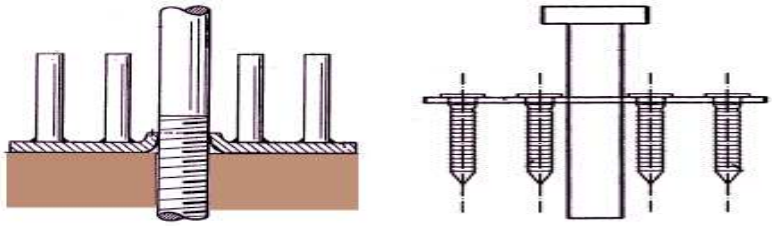
Des clous de différents diamètres avec différentes profondeurs de pénétration dans les matériaux ont aussi été testés par Gutkowski [Gutkowski *et al.*, 1996]. 72 échantillons ont été testés, compre-

nant 4 diamètres différents et 2 valeurs de pénétration pour chaque diamètre (Tab. 1.1). Les essais en cisaillement montrent que la rigidité est principalement pilotée par la résistance du béton (reliée à son âge) tandis que la charge ultime est, elle, gouvernée par le type de connecteur (relié à son diamètre et à sa profondeur d'enfoncement dans le bois).

Numéro	Type de connecteur		Profondeur dans le bois(mm)	Profondeur dans le béton(mm)
	Longueur(mm)	Diamètre(mm)		
1	88.2	3.5	44.1	44.1
2	88.2	3.5	63	25.2
3	51	2.9	25.2	25.8
4	51	2.9	37.8	13.2
5	102	3.8	56.7	45.3
6	102	3.8	75.6	26.4
7	76.5	3.3	37.8	38.7
8	76.5	3.3	50.4	26.1

Tab. 1.1 – Clous testés par Gutkowski

Trygve [T.Trygve, 1982] et Kuttel [Kuttel, 1998] proposent d'autres types de connecteurs dans leurs brevets d'invention (Fig. 1.12). Les vis sont utilisées pour fixer au bois la partie du connecteur noyée dans le béton au bois par l'intermédiaire d'une plaque de répartition. La rigidité supplémentaire apportée par cette plaque et l'amélioration de l'ancrage apportée par le nombre de vis conduit à une augmentation de la résistance de la liaison.



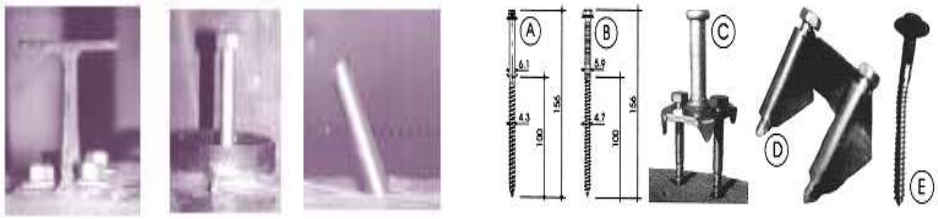
(a) [T.Trygve, 1982] (b) [Kuttel, 1998]

Fig. 1.12 – Brevet d'invention de Trygve et de Kuttel

Benitez [Benitez, 2000] a testé trois connecteurs de ce type (Fig. 1.13(a)). Il trouve une augmentation d'un facteur 3 de la résistance par rapport aux vis isolées. Cinq connecteurs de ce type ont aussi été proposés et testés par Steinberg [Steinberg *et al.*, 2003] (Fig. 1.13(b)). La rigidité initiale, la limite du comportement élastique et la charge à la rupture sont comparées.

Les clous, les vis, les goujons présentent une facilité d'exécution, et sont "bon marché". Ils présentent l'inconvénient d'être assez flexibles, ce qui entraîne une diminution de la raideur de la connexion.

Connexion par des crampons



(a) [Benitez, 2000] (b) [Steinberg *et al.*, 2003]

Fig. 1.13 – Connecteurs testés par Benitez et par Steinberg

En appliquant la technique de connexion utilisée dans la construction des charpentes, des plaques à pointes métalliques sont proposées pour assurer la liaison entre le bois et le béton dans le brevet de Bettex [Bettex, 1992] . Les plaques comportent des pointes dont une partie est enfoncée dans la poutre en bois et une autre partie de ces pointes est noyée dans le béton (Fig. 1.14).

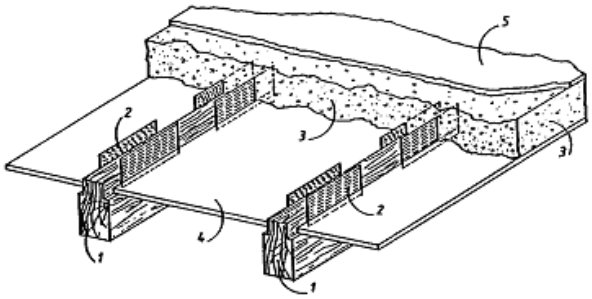


Fig. 1.14 – Brevet d'invention de Bettex

Une bande de tôle métallique modifiée, comportant des crampons ancrés dans le bois et des emboutissages et des évasements noyés dans le béton, est utilisée comme élément de connexion dans le brevet de Gauthier [Gauthier, 1993]. Les évasements permettent le passage et le maintien des armatures métalliques et les emboutissages participent à l'ancrage de la tôle métallique dans le béton. L'encastrement des crampons dans le bois est effectué en usine à l'aide d'une presse. Le profil des crampons peut-être modifié, la colle ou la résine peut-être ainsi utilisée pour favoriser l'ancrage de la bande dans le bois. La bande de tôle métallique peut-être une bande de tôle métallique ondulée pour éviter des amorces de propagation de fissures dans le bois et augmenter l'ancrage de la tôle dans le béton (Fig. 1.15).

Connexion par des tubes

La connexion par des clous ou des vis présente l'inconvénient que leur flexibilité entraîne une diminution de la raideur. Plusieurs auteurs de brevets proposent d'utiliser des tubes métalliques à section circulaire pour augmenter la résistance et aussi la rigidité du système de connexion [Alain, 1988], [Raymond, 1995], [Welch, 2005].

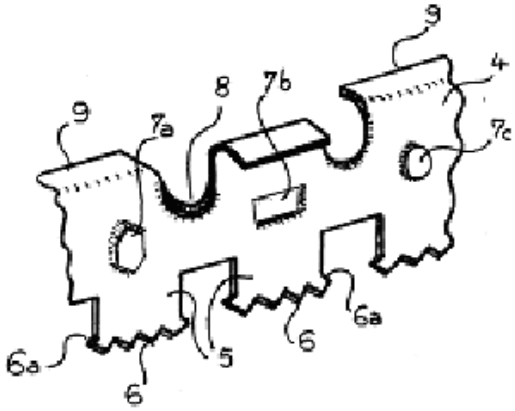


Fig. 1.15 – Brevet d'invention de Gauthier

La rainure circulaire est creusée en laissant subsister un noyau du bois et le tube métallique y est emmanché [Alain, 1988]. Le diamètre du tube est suffisant pour le remplissage du béton dans la partie supérieure lors du coulage en formant un renforcement de connecteur (Fig. 1.16). Ce type de connecteur possède une grande rigidité et une grande résistance par rapport à des clous et des vis.

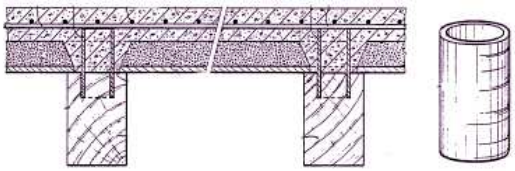
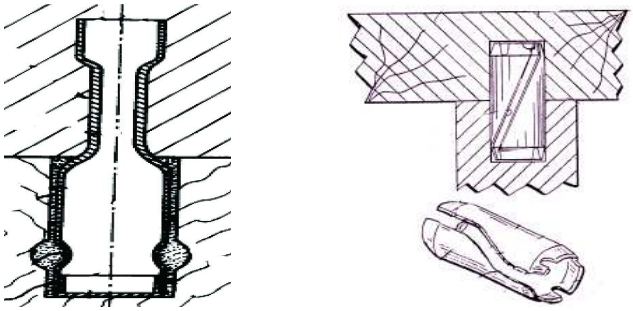


Fig. 1.16 – Brevet d'invention de Alain

En changeant la section du tube, Raymond a amélioré la résistance d'arrachement du connecteur dans le béton et aussi dans le bois [Raymond, 1995]. La partie implantée dans le bois est collée au moyen d'une résine et l'autre partie noyée dans le béton, est reliée à la précédente par une partie intermédiaire. Les trois parties sont étudiées pour obtenir une bonne résistance à l'arrachement du connecteur dans le bois ou dans le béton. La partie intermédiaire peut se déformer pour autoriser un glissement relatif entre le bois et le béton, ce qui évite une rupture fragile de la structure en cas de surcharge (Fig. 1.17(a)). Pour améliorer la ductilité de la structure, Welch [Welch, 2005] a proposé un connecteur qui permet un glissement relatif entre le bois et le béton grâce à la réalisation d'une fente sur les cylindres creux (Fig. 1.17(b)).



(a) [Raymond, 1995] (b) [Welch, 2005]

Fig. 1.17 – Brevet d'invention de Raymond et de Welch

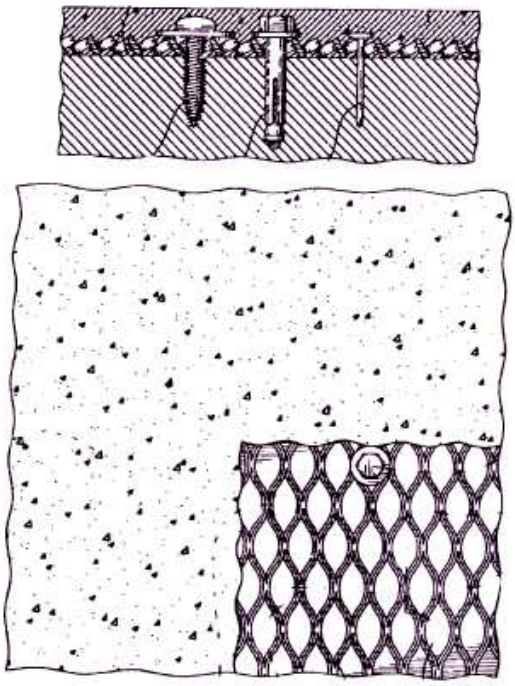


FIG. 1.18 – Brevet d'invention de Aitcin

1.3.2 Connexion par adhérence des surfaces

Adhérence créée par des plaques métalliques

Les systèmes de connexion décrits précédemment sont des connecteurs locaux disposés d'une manière discontinue. L'augmentation de résistance en cisaillement à l'interface est obtenue en ajoutant des connecteurs supplémentaires, mais celle-ci est limitée par la surface entre le bois et le béton. La présence des connecteurs locaux mentionnés sur la surface du bois risque d'entraîner la rupture du bois. Pour une répartition plus uniforme et pour tenter d'augmenter la résistance en cisaillement à l'interface, des systèmes de connexion par adhérence ou autrement dit des systèmes de connexion continus sont proposés par Aitcin [Aitcin, 1998] et Bathon [Bathon *et al.*, 2005].

Dans le brevet de Aitcin [Aitcin, 1998], l'adhérence entre le bois et le béton est assurée par un filet en métal expansé fixé sur la surface du bois avant le coulage du béton. Le béton traverse les mailles du filet pour adhérer à la surface du bois, le filet sert à l'ancrage du béton sur le bois (Fig. 1.18).

Le système de connexion de Bathon [Bathon *et al.*, 2005] a reçu le code d'approbation pour une utilisation en Europe. Le connecteur est une grille métallique dont une partie est collée dans le bois et une autre noyée dans le béton. La grille est modifiée selon la direction longitudinale de la poutre, la partie noyée dans le béton étant pliée pour augmenter la capacité du connecteur (Fig. 1.19). Le cisaillement est transmis du béton au bois par l'intermédiaire de l'adhérence entre la grille métallique et le bois.

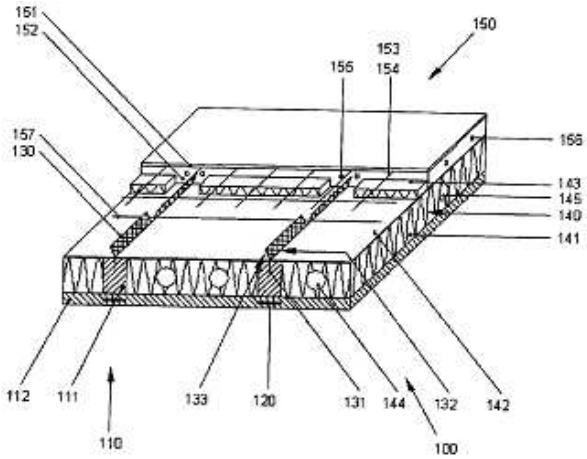


Fig. 1.19 – Brevet d'invention de Bathon

Connexion par collage

Nous avons vu que la connexion bois-béton peut être effectuée par des moyens mécaniques tels que ceux présentés ci-dessus. Il existe cependant aussi une technique par collage pour associer le béton et le bois [Pincus, 1970], [Maurice *et al.*, 2000]. Les résultats montrent un comportement rigide parfait de l'association bois-béton, c'est à dire sans glissement. La rigidité d'ensemble de la structure est augmentée. Selon les auteurs, le collage évite aussi d'avoir des zones de concentration de contrainte que l'on retrouve avec une connexion mécanique.

1.4 Propriétés des matériaux

1.4.1 Bois

Le bois est une ressource naturelle qui est largement disponible dans le monde et il possède plusieurs avantages environnementaux et structuraux.

Du côté environnemental, le bois est d'abord un lieu de fixation du dioxyde de carbone à travers un processus biologique de stockage de matière ligno-cellulosique au sein de l'arbre. Pendant la croissance d'un arbre, 1 tonne du bois absorbe $1,6$ tonne de gaz carbonique, émet $1,1$ tonne d'oxygène et fixe $0,5$ tonne de carbone. En terme d'analyse du cycle de vie (ACV), plusieurs facteurs en faveur du bois ont été constatés :

- Le bois est un matériau renouvelable ;
- Le bois est un matériau durable à condition d'une bonne conception et d'un bon entretien ;
- Le bois permet de diminuer l'impact climatique des structures.

Du côté structural, le bois présente un net avantage par rapport aux autres matériaux lorsque l'on considère le rapport entre performances mécaniques et densité (Fig. 1.20). En outre, avec l'apparition des matériaux dérivés du bois comme les lamellés collés, les contrecollés, les panneaux,

il est possible de construire des ouvrages dont l'esthétique, la légèreté et la durabilité sont assurés.

Fig. 1.20 – Comparaison des matériaux bois, acier et béton armé

Anisotropie du bois

Le bois se distingue des autres matériaux de génie civil par son orthotropie. Le matériau bois est défini à partir des trois directions naturelles de croissance (Fig. 1.21). Ces trois direction sont considérées comme orthogonales entre elles, ce qui explique qu'on parle parfois d'orthotropie cylindrique du bois.

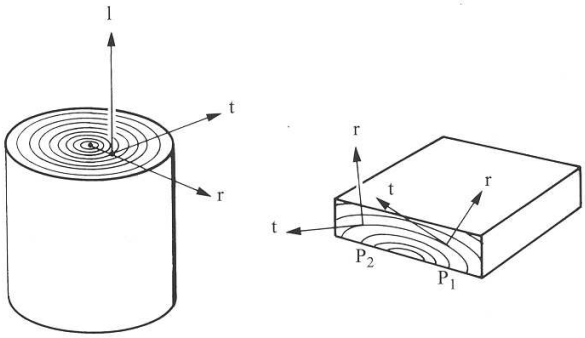


Fig. 1.21 – Trois axes principaux du bois

La loi de Hooke d'un solide élastique parfait relie la déformation à la contrainte. Étant donnée

l'anisotropie du bois, la loi de Hooke généralisée aux trois axes (r, t, l) s'écrit (Eq. 1.1) :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_l \\ \epsilon_r \\ \epsilon_t \\ \gamma_{rt} \\ \gamma_{lt} \\ \gamma_{lr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_l} & -\frac{\nu_{rl}}{E_r} & -\frac{\nu_{tl}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_l} & \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{tr}}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_l} & -\frac{\nu_{rt}}{E_r} & \frac{1}{E_t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rt}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lt}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{lr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_l \\ \sigma_r \\ \sigma_t \\ \tau_{rt} \\ \tau_{lt} \\ \tau_{lr} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Où :

- ϵ_l, ϵ_r et ϵ_t sont les déformations selon les trois axes ;
- γ_{rt}, γ_{lt} et γ_{lr} sont les distorsions selon les trois plans ;
- E_r, E_t et E_l sont les modules de Young selon les trois axes ;
- G_{rl}, G_{tl} et G_{rt} sont les modules de cisaillement selon les trois plans ;
- ν_{rl}, ν_{lr}, ν_{rt}, ν_{tr}, ν_{tl} et ν_{lt} sont les coefficients de poisson ;
- σ_l, σ_r et σ_t sont les contraintes normales selon les trois axes ;
- τ_{rt}, τ_{lt} et τ_{lr} sont les contraintes de cisaillement selon les trois plans.

Pour un matériau orthotrope, la matrice de souplesse est symétrique, c'est-à-dire :

$$\frac{\nu_{rt}}{E_r} = \frac{\nu_{tr}}{E_t} \quad , \quad \frac{\nu_{rl}}{E_r} = \frac{\nu_{lr}}{E_l} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{tl}}{E_t} = \frac{\nu_{lt}}{E_l} \tag{1.2}$$

Donc, les propriétés élastiques de chaque essence du bois sont totalement définies par 9 paramètres E_r, E_t, E_l, G_{rl}, G_{tl}, G_{rt}, ν_{rl}, ν_{tr} et ν_{tl}. Il faut noter que ces caractéristiques sont fonction de la teneur en eau et de la densité du bois et sont différentes pour chaque essence. Le tableau (Tab. 1.22) donne les valeurs indicatives des constantes élastiques de certaines essences.

Matériaux dérivés du bois

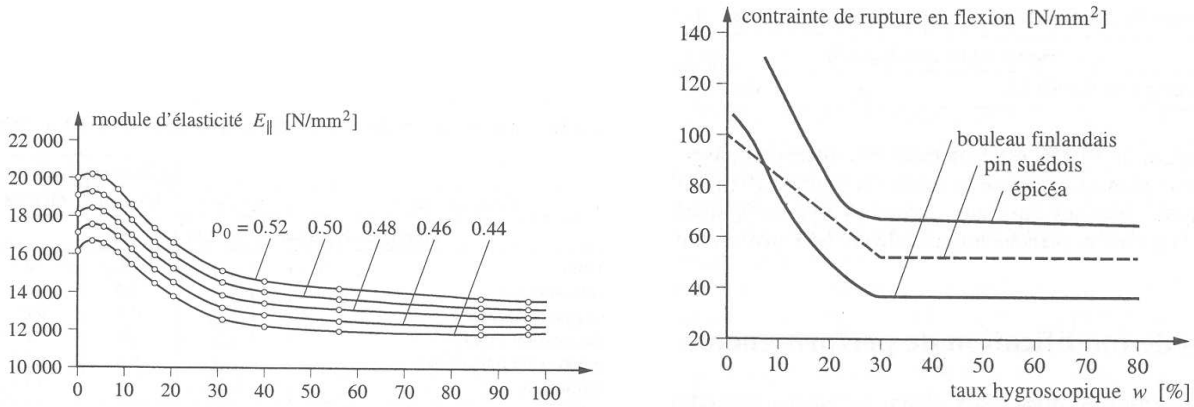
Il existe le bois massif, débité généralement en section standardisée, et les produits reconstitués. Les produits reconstitués sont fabriqués avec du bois trituré ou déroulé puis collé. Ces produits sont plus homogènes que le bois massif. Notons ici quelques matériaux dérivés du bois comme les lamellés collés, les panneaux contreplaqués, les lamibois, ...

Hygroscopie du bois

L'hygroscopie joue un rôle important sur les performances mécaniques du bois. Des essais sur petites éprouvettes et pour différentes essences de bois ont permis d'observer l'évolution du module d'élasticité (Fig. 1.23(a)) et de la résistance à la rupture (Fig. 1.23(b)).

Constantes	Epicéa (1) *(pieca sitchensis)*	Douglas (1) *(pseudotsuga menziesii)*	Sapin (1) *(abies)*	Peuplier (2) *(populus alba)*	Chêne rouge (2) *(quercus rubra)*	Hêtre (2) *(fagus silvatica)*
Teneur en eau [%]	12	12	13	14	12	11
Densité [g/cm^3]	0,36	0,59	0,31	0,4	0,6	0,74
E_l [N/mm^2]	10700	16550	8020	6830	14800	14000
E_r [N/mm^2]	649	1300	816	1190	1500	2280
E_t [N/mm^2]	348	900	304	493	828	1160
G_{rl} [N/mm^2]	533	1200	558	1000	967	1640
G_{rt} [N/mm^2]	41	80	48	200	398	470
G_{tl} [N/mm^2]	438	929	461	900	695	1080
ν_{rl}	0,02	0,03	0,03	0,04	0,06	0,07
ν_{tr}	0,3	0,41	0,25	0,37	0,33	0,36
ν_{lt}	0,4	0,38	0,33	0,45	0,69	0,52

FIG. 1.22 – Caractéristiques élastiques de certains bois résineux (1) et feuillus (2) [Navi *et al.*, 2005]



(a) Évolution du module d'élasticité

(b) Évolution de la résistance en flexion

FIG. 1.23 – L'influence de hygroscopie [Natterer *et al.*, 2000]

Propriétés mécaniques du bois

La résistance mécanique du bois dépend des paramètres suivants :

- Son essence ;
- Direction de sollicitation par rapport aux fibres (anisotropie) ;
- Humidité (hygroscopie) ;
- Mode de sollicitation (traction, compression, ...).

Le comportement du bois dans le sens des fibres peut être considéré comme élastique fragile en traction et élasto-plastique en compression (Fig. 1.24).

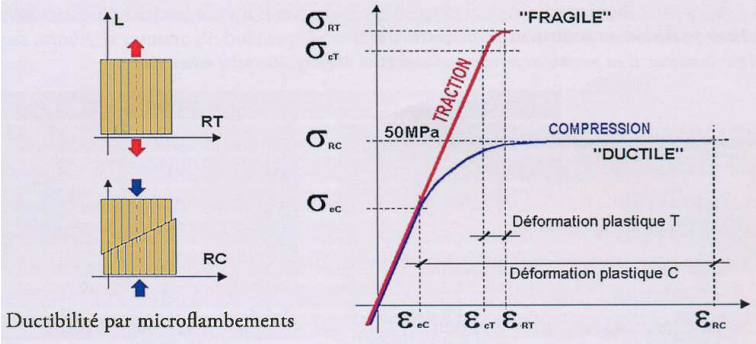


Fig. 1.24 – Lois typique de comportement du bois [Setra, 2006]

Nous présentons les valeurs caractéristiques des classes de résistance du bois lamellé collé (Tab. 1.25).

		GL 22	GL 24	GL 26	GL 28	GL 30
Propriétés de résistance en N/mm²						
Flexion	$f_{m,g,k}$	22	24	26	28	30
Traction axiale	$f_{t,0,g,k}$ [1)]	14	15,5	16,5	17,5	18,5
Traction transversale	$f_{t,90,g,k}$	0,35	0,35	0,45	0,45	0,45
Compression axiale	$f_{c,0,g,k}$ [1)]	21,5	23,5	24,5	25,5	26,5
Compression transversale	$f_{c,90,g,k}$	4,8	5,1	5,3	5,6	5,7
Cisaillement	$f_{v,g,k}$	1,9	2,1	2,5	2,5	2,6
Propriété de rigidité en kN/mm²						
Module moyen d'élasticité axial	$E_{0,g,moyen}$	9,9	10,8	11,7	12,5	12,5
Module d'élasticité axial au fractile de 5%	$E_{0,g,05}$	7,9	8,6	9,4	10,0	10,0
Module moyen d'élasticité transversal	$E_{90,g,moyen}$	0,33	0,36	0,39	0,41	0,41
Module moyen de cisaillement	$G_{g,moyen}$	0,62	0,67	0,73	0,78	0,78
Masse volumique en kg/m³						
Masse volumique au fractile de 5%	ρ_k [2)]	330	340	360	380	380

1) Dans le cas de bois lamellé collé homogène la valeur correspondante peut être augmentée de 10%

2) Dans le cas de bois lamellé collé homogène la valeur correspondante peut être augmentée de 5%

FIG. 1.25 – Tableau des valeurs caractéristiques du BLC [EC5-1-1, 1995]

1.4.2 Béton

Aujourd'hui, les progrès dans le domaine des adjuvants et des méthodes de formulation ont permis de développer une gamme de matériaux à matrice cimentaire de résistance caractéristique à la compression qui varie de $150MPa$ jusqu'à $250MPa$ [AFGC, 2002]. Ce sont les Bétons Fibrés Ultra Performant ($BFUP$).

Richard [Richard *et al.*, 1995], qui a été un des premiers à développer les $BFUP$, décrit clairement les méthodes de formulation de ce matériau. Plus tard, Rossi [Rossi, 1997] a poussé le concept du $BFUP$ jusqu'à proposer un matériau ductile en traction, le $CEMTEC$®, disposant d'un comportement post fissuration à écrouissage positif, ce comportement se traduisant en traction directe par une multi-fissuration (Fig. 1.26).

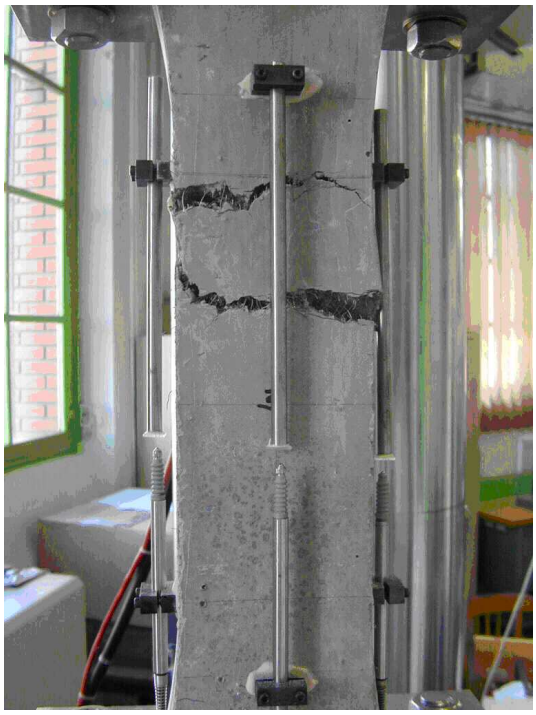


Fig. 1.26 – multi-fissuration du $CEMTEC$® en traction directe

Les BFUP utilisés dans les structures fortement sollicitées contiennent 2 à 3% en volume de fibres métalliques à haute limite élastique (acier tréfilé), dans le but d'obtenir une certaine ductilité structurelle en traction, et, si possible permettre de se dispenser du renforcement par des barres d'acier. Ils sont formulés avec un rapport eau/ciment en masse de l'ordre de $0,2$, contiennent de la fumée de silice et des granulats fins dont la dimension des plus gros est comprise, selon les formules, entre $400\mu m$ et $6mm$. Ce matériau nécessite des procédures de malaxage longues, jusqu'à 20 minutes, et des malaxeurs réputés performants. C'est la faible teneur en eau et l'incorporation d'ultrafines qui conduisent à ces résistances élevées en compression. Le retrait se développe essentiellement au jeune âge, le retrait endogène, avec une amplitude de l'ordre de 500×10^{-6}. Le

retrait de dessiccation est de l'ordre de 150×10^{-6}. L'amplitude de fluage est faible. Le coefficient de fluage, rapport de la déformation à l'infini à celle au chargement, pour un chargement à 28 jours, est inférieur à 1, voire très inférieur à 1 si le $BFUP$ a subi un traitement thermique. Le module d'Young est élevé et varie entre 50 et $65GPa$ à 28 jours. En France, il est possible de réaliser des structures en $BFUP$ grâce aux recommandations de l'association française de Génie Civil [AFGC, 2002], [Resplendino, 2004] et [Resplendino, 2005]. Des recommandations internationales sont en préparation dans le cadre de la FIB (task group 8.6). Quelques ouvrages d'art ont déjà été réalisés en BFUP. On citera par exemple un passage supérieur sur l'autoroute A51 (Fig. 1.27(a)) et la passerelle de Sakata au Japon (Fig. 1.27(b)).

(a) Passage sur l'autoroute $A51$

(b) Passerelle de Sakata

Fig. 1.27 – Deux exemples de ponts en $BFUP$

Le BFUP est un bon candidat pour la conception de ponts mixtes. En effet la structure à poutres bois limite la portée transversale du hourdis et permet de se dispenser de renforcement passif. La haute résistance en compression et le module élevé contribue à pouvoir dimensionner des éléments dalles de faible épaisseur, inférieure à $10cm$.

1.5 Expérimentations sur la connexion bois-béton

Le concept de la structure mixte Bois-Béton dépend surtout de l'état de l'interface entre les deux matériaux. Cette interface est gouvernée par des systèmes de connexion dont la connaissance du comportement est nécessaire pour le dimensionnement. En général, le comportement d'un système de connexion dépend des facteurs suivants :

- Catégorie de connexion, local ou continu ;
- Morphologie des connecteurs ;
- Profondeur de pénétration des connecteurs dans les matériaux ;
- Disposition des connecteurs à l'interface ;
- Caractéristiques des matériaux ;
- Mode de chargement, monotone ou cyclique.

Plusieurs paramètres interviennent dans le comportement du système de connexion. Une étude théorique n'est donc pas suffisante pour le décrire complètement. L'étude expérimentale est souvent nécessaire. Il existe plusieurs types d'essai pour étudier le comportement des connecteurs. Nous allons les décrire dans les paragraphes suivants.

1.5.1 Essai de cisaillement

L'essai de cisaillement a pour but de déterminer la loi de comportement d'interface et de quantifier l'influence de différents paramètres sur celui-ci. Un état de cisaillement à l'interface est créé, l'état dans lequel se retrouvent les différents systèmes de connexion pour tester leur comportement. Une loi de comportement d'interface est la relation entre l'effort de cisaillement d'interface et le déplacement relatif entre deux matériaux à l'interface appelé aussi le glissement d'interface. Le comportement d'interface est généralement composé d'une partie élastique linéaire qui peut être exprimée par la raideur d'interface initiale, K, suivie d'une deuxième partie non linéaire (Fig 1.28). Une connexion complète dans la poutre est obtenue quand $K \longrightarrow \infty$ et il n'y a pas d'interaction quand $K \longrightarrow 0$.

Il n'existe pas pour l'instant d'essai normalisé pour caractériser les connecteurs Bois-Béton. Aussi, l'essai normalisé pour la section acier-béton est le plus utilisé pour étudier le comportement des connecteurs bois-béton. On l'appelle essai 'Push out' (Fig. 1.29). L'échantillon de l'essai se compose de deux blocs en bois connectés à un bloc en béton par le système de connexion. Cet essai permet de diminuer l'effet de flexion à l'interface grâce à la symétrie du chargement. Cependant, comme deux connecteurs sont testés en même temps dans cet essai, le comportement obtenu est

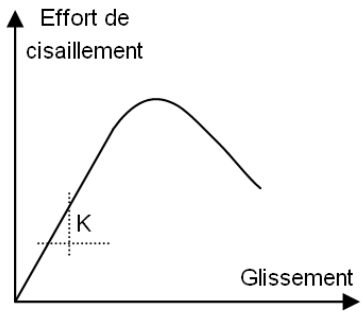


FIG. 1.28 – Un exemple du comportement de l'interface

un "comportement moyen" et certains phénomènes locaux, au niveau d'un connecteur, ne peuvent pas être observés. D'autre part, un effet de voûte peut se produire, provoquant une augmentation de la rigidité de connecteur. En fin, une asymétrie de cet échantillon peut avoir des conséquences néfastes à l'interface [Gattesco, 2001].

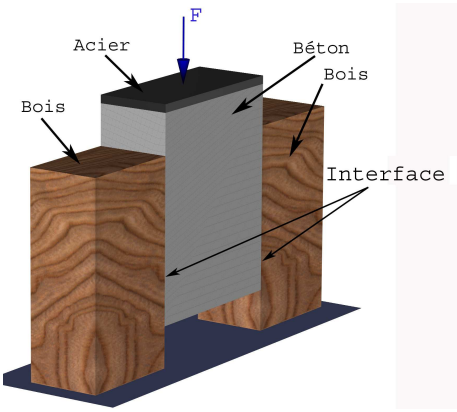
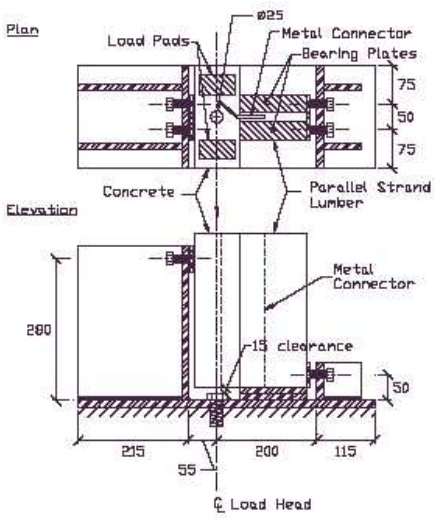
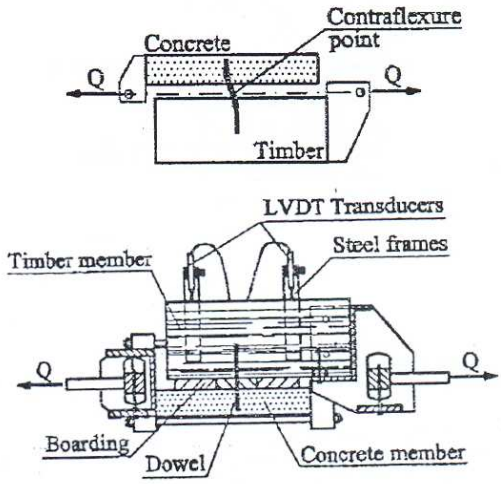


FIG. 1.29 – Essai Push-out

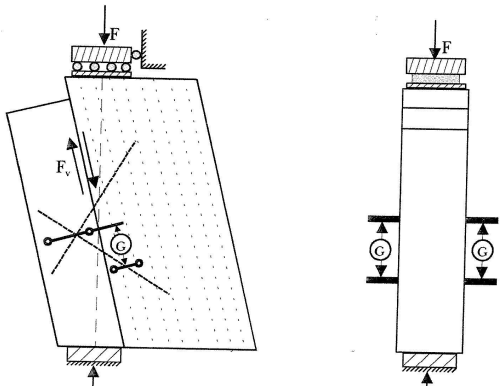
Certains auteurs [Clouston *et al.*, 2004], [Gattesco, 2001], [Tommola *et al.*, 2005] ont proposé d'autres protocoles pour réaliser l'essai de cisaillement (Fig. 1.30). Ce sont des essais avec une seule interface de cisaillement entre deux matériaux. Ce type d'essai permet de déterminer le comportement d'un seul connecteur. Cependant, l'asymétrie de chargement engendre une flexion à l'interface, ce qui rend difficile pour le traitement des résultats.



(a) [Clouston *et al.*, 2004]



(b) [Gattesco, 2001]



(c) [Tommola *et al.*, 2005]

Fig. 1.30 – Essai de cisaillement d'un interface

1.5.2 Essai en flexion

L'essai en flexion permet de simuler les sollicitations qui sont proches de la réalité sur les systèmes de connexion. L'essai en flexion permet aussi de valider des modèles de structure mixte en prenant en compte le comportement des systèmes de connexion. Ce type d'essai a été utilisé par Ahmadi [Ahmadi *et al.*, 1993] et Gutkowski [Gutkowski *et al.*, 1996].

1.5.3 Essai de fatigue

L'utilisation des structures mixtes bois-béton dans les ouvrages d'art exige la validation des performances des systèmes de connexion sous l'action de charges cycliques. Il existe plusieurs procédures de réalisation des essais de fatigue. Les éprouvettes de cisaillement conçues initialement pour la réalisation d'essais statiques sont souvent utilisées pour de tels essais. Ces essais permettent de déterminer l'endurance, la résistance résiduelle et aussi les modes de rupture des connecteurs. Il est aussi possible de réaliser des essais en flexion pour étudier la tenue en fatigue des éléments structuraux dont les systèmes de connexion.

Notons d'abord les travaux réalisés dans le cadre de la thèse de Weaver [Weaver, 1999] concernant le comportement de la structure bois-béton renforcée par le composite. La connexion entre le bois et le béton est assurée par les tiges (steel rebar) d'environ $20mm$ de diamètre. Les tiges sont collées dans le bois à $20cm$ de profondeur à l'époxy et elles sont noyées de $7,5cm$ dans le béton. Les premiers essais sont les essais en cisaillement sous l'action monotone et cyclique. L'auteur a montré que la résistance ultime de ce type de connecteur n'est pas influencée par le chargement cyclique. Cependant, une dégradation de la raideur d'interface a été observée sous l'action cyclique (Fig. 1.31).

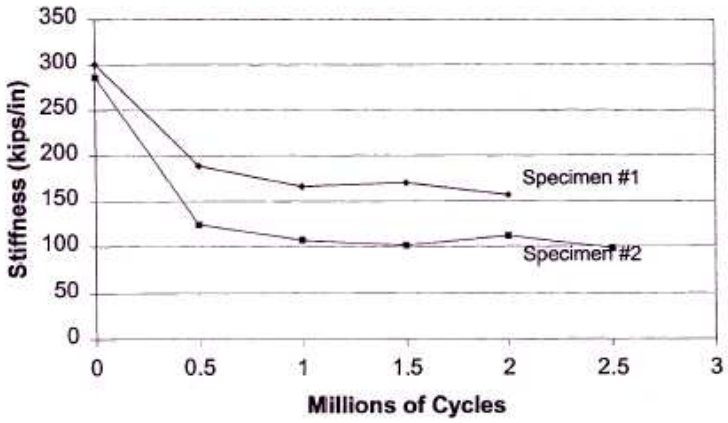
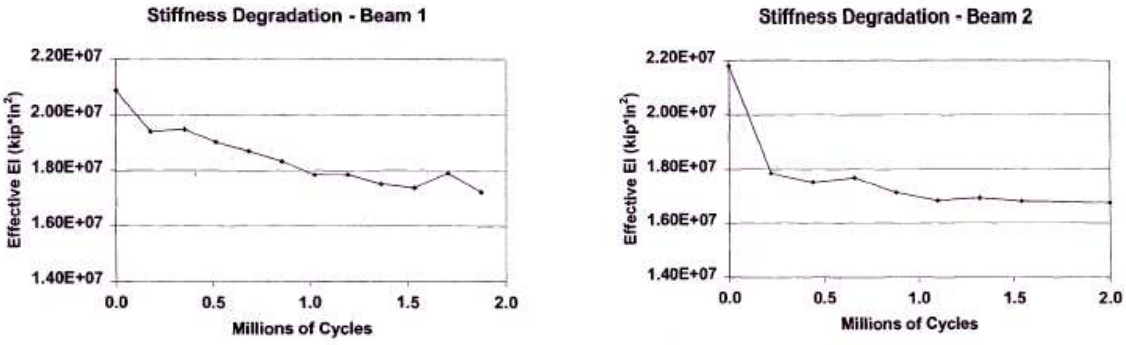


FIG. 1.31 – Dégradation de la raideur d'interface sous l'action cyclique [Weaver, 1999]

Deux poutres bois-béton renforcée par composite sont aussi été testées sous l'action cyclique par l'auteur. L'auteur montre que la raideur en flexion de la poutre a progressivement diminué (Fig. 1.32).



(a) Poutre 1 (b) Poutre 2

Fig. 1.32 – Dégradation de la raideur en flexion [Weaver, 1999]

Une compagne d'essais en flexion sur une structure collée a été présentée dans [Gürtler, 2004]. Des essais en flexion sur des poutres mixtes acier-GFRP - tabliers en fibre de verre collés sur des poutres en acier - ont été réalisés. Les résultats ont montré que la colle est efficace et que l'action cyclique n'influence pas la raideur de la poutre mixte avec la technique du collage (Fig. 1.33).

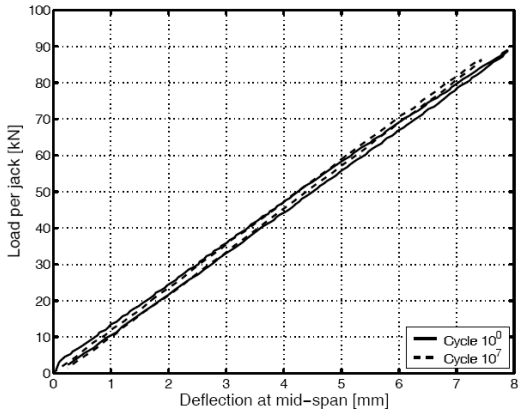


Fig. 1.33 – Comportement force-flèche du premier cycle et après 10^7 cycles d'une poutre [Gürtler, 2004]

Vérification de la fatigue du bois

La vérification en fatigue des structures en bois consiste à comparer l'étendue de contraintes dans la structure $\Delta\sigma$ avec la contrainte de calcul à la fatigue du bois qui dépend du nombre de cycles de chargement [ENV-2, 1997] :

$$\Delta\sigma \leq f_{fat,d} \tag{1.3}$$

Où : $f_{fat,d}$ est la contrainte de calcul à la fatigue et s'écrit :

$$f_{fat,d} = \frac{k_{fat} f_k}{\gamma_{M,fat}} \tag{1.4}$$

Où f_k est la contrainte caractéristique sous charge statique du bois et k_{fat} est donné sur (Fig. 1.34).

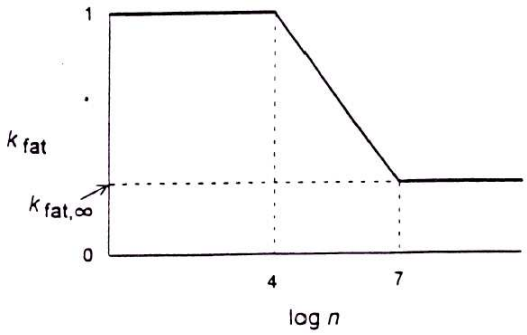


FIG. 1.34 – Relation entre k_{fat} et le nombre de cycles n

Les valeurs de $k_{fat,\infty}$ pour les éléments du bois sont présentées dans le tableau ce-dessous (Tab. 1.2) :

En compression perpendiculaire et parallèle au fil	$0,6$
En flexion, en traction ou alternativement en traction et compression	$0,3$
En cisaillement	$0,2$

TAB. 1.2 – Valeurs de $k_{fat,\infty}$ des éléments du bois

Vérification de la fatigue du Bfup

Les recommandations sur les BFUP [AFGC, 2002] permet l'emploi de ces nouveaux matériaux dans les domaines du génie civil. Pour la vérification en fatigue du BFUP, il n'y a pas de modification par rapport à celle de BPEL 91 [BPEL91, 1992]. En général, pour des contraintes inférieures à $0,6 f_{cm}$, le problème de la fatigue du béton ne se pose pas.

1.6 Conclusion

L'analyse de la typologie des ponts en bois nous conduit à choisir la structure mixte à poutres comme schéma d'étude, étant donné la gamme de portée à laquelle on s'intéresse. Le choix du béton fibré ultra performant a été arrêté du fait de son utilisation possible en faible épaisseur - ce qui facilite le transport et la mise en oeuvre, notamment dans le cas de la préfabrication -, de son module et de sa résistance élevés.

La littérature et les brevets nous livrent un ensemble de types de connexion dont le comportement n'est pas toujours bien connu, exception faite des connexions à tiges métalliques étudiées en fatigue en Nouvelle Zélande [Weaver, 1999] et pour laquelle une perte de rigidité a été constatée.

Une étude préalable des systèmes de connexion est donc nécessaire afin d'arrêter le choix d'une structure mixte. Cette nécessité est renforcée par le choix du béton fibré ultra performant, matériau non encore utilisé en association avec le bois. Enfin, l'application de la recherche proposée aux ouvrages d'art impose qu'une vérification du comportement en fatigue du système retenu soit réalisée.

La modélisation des structures mixtes n'a pas été évoquée ici. Nous avons réservé le chapitre 2 à cette question.

Chapitre 2

Modèles pour les poutres mixtes à connexion imparfaite

Le calcul des poutres mixtes dépend surtout de l'état de l'interface entre les matériaux et peut être regroupé en deux catégories.

- Poutres mixtes à connexion parfaite
- Poutres mixtes à connexion imparfaite

Poutres mixtes à connexion parfaite

La poutre mixte dont deux couches se connectent l'une à l'autre d'une manière parfaite, ou bien une interface avec discontinuïté de déplacement nulle, est appelée poutre mixte à connexion parfaite. Pour décrire mécaniquement cette structure, il existe d'abord l'approche monocouche équivalente qui consiste à homogénéiser les deux couches en une seule couche. La théorie la plus classique est celle de Bernoulli qui consiste à supposer que la section de la couche équivalente reste plane et perpendiculaire à l'axe neutre lors de la déformation. Cette théorie ne prend pas en compte l'effet de déformation de cisaillement. Dans la théorie de Timoshenko, on introduit ensuite un angle de rotation supplémentaire de la section plane pour prendre en compte la déformation de cisaillement (cité dans [Piskunov, 2003]). La déformation de cisaillement constante ajoutée dans cette théorie correspond à une hypothèse d'un champ de contrainte de cisaillement uniforme. Pour mieux prendre en compte cet effet de déformation de cisaillement, l'introduction de coefficients correcteurs a été proposée dans [Cowper, 1996]. Cependant, cet approche implique l'hypothèse de section plane qui n'est pas toujours adéquate. D'où l'idée de développer la théorie d'ordre supérieur qui est basée sur une distribution non linéaire des champs [Krishna-Murty, 1970]. Cette théorie d'ordre supérieur permet de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée.

Outre l'approche du monocouche équivalent qui est basée sur une cinématique globale, il existe l'approche par couche qui consiste à considérer séparément deux couches de la poutre et à imposer

les conditions de continuité en déplacements et en contraintes à l'interface. De nombreux travaux décrivant cette approche sont présentés dans [Nguyen, 2004]. Ce type d'approche est destiné à mieux décrire les effets d'interface que l'on ne trouve pas avec la première approche.

Poutres mixtes à connexion imparfaite

Les résultats expérimentaux de la littérature montrent qu'il est très difficile de réaliser une connexion parfaite pour les poutres mixtes dans le Génie Civil. Cependant, les poutres mixtes à connexion imparfaite présentent un glissement à l'interface entre les couches de matériaux. Ce glissement change significativement la réponse de la structure par rapport au cas d'une connexion parfaite. Plusieurs auteurs ont développé des théories qui permettent d'obtenir des solutions pour ce problème. Les premiers calculs ont été présentés par [Granholm, 1949] pour les poutres de deux ou trois couches de bois, et par [Newmark *et al.*, 1951] pour les poutres mixtes acier-béton. Ces théories se basent sur l'hypothèse de matériaux élastiques linéaires et sur la cinématique de Bernoulli appliquée à chaque couche de matériau. En plus, pour tenir en compte de la connexion imparfaite, les auteurs supposent une loi d'interface linéaire qui relie l'effort de cisaillement et le glissement à l'interface. Goodman [Goodman, 1968] a présenté un calcul qui permet de prendre en compte le comportement non-linéaire de l'interface. Un résumé très riche des théories des poutres mixtes à connexion imparfaite prenant en compte le comportement non-linéaire des matériaux et de l'interface a été présenté dans [Johnston *et al.*, 1991]. Grâce au développement des outils informatiques, des solutions numériques ont été proposées pour ce problème dans le domaine élastique linéaire et non-linéaire [Aribert, 1996].

Nous savons que la cinématique de Bernoulli consiste à négliger l'effet de déformation en cisaillement ce qui rend la structure beaucoup plus raide qu'elle n'est réellement dans certaines configurations. Pour tenter de décrire plus fidèlement le comportement d'un bicouche à connexion imparfaite, Schnabl [Schnabl *et al.*, 2007] a proposé une solution analytique du problème en introduisant une cinématique de Timoshenko pour chaque couche. Selon cet auteur, il semble qu'il n'existait pas précédemment de solution exacte pour ce problème dans la littérature.

2.1 Modèle classique de poutre mixte à connexion imparfaite

Nous allons présenter dans cette partie l'établissement et la résolution formelle d'un modèle de poutre mixte à connexion imparfaite trouvé dans la littérature [Newmark *et al.*, 1951], dit aussi modèle classique. La résolution simplifié de ce modèle pour un calcul selon les Eurocodes [EC5-1-1, 1995] et la résolution formelle vont être présentées. Nous ferons ensuite une comparaison entre les deux approches dans le cas d'une poutre mixte chargée uniformément. Les résultats montrent que la résolution simplifiée est assez précise quand on la compare à la solution formelle.

2.1.1 Rappel de la théorie des poutres selon les hypothèses de Bernoulli

Considérons une poutre rectiligne de longueur l et de section constante d'aire A dans le repère orthonormé $(0, x, y, z)$. Le volume occupé par la poutre est noté $\Omega = A \times (0, l)$. La poutre admet $(0, x, y)$ comme plan de symétrie pour la géométrie et les efforts (Fig. 2.1).

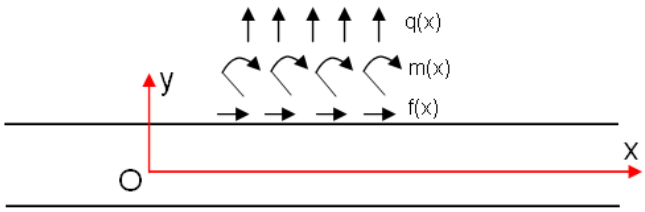


FIG. 2.1 – Problème de poutre

Nous rappelons d'abord les grandeurs fonction de x de la théorie de poutre :

Les déplacements :

- u, v : les déplacements suivant l'axe x et y ;
- ϕ : la rotation par rapport à l'axe z.

Les efforts intérieurs :

- N : l'effort normal
- Q : l'effort tranchant
- M : le moment fléchissant

Les déformations

- χ : la courbure

$$\chi = \phi' \tag{2.1}$$

- ϵ : la déformation normale

$$\epsilon = -u' \tag{2.2}$$

Nous notons ensuite les conventions de signe pour ces grandeurs (Fig. 2.2).

En se basant sur les hypothèses de Bernoulli, nous rappelons ici les équations de la poutre qui sont compatibles avec les conventions précédentes :

$$\begin{cases} u' = -\frac{N}{EA} \\ v'' = \frac{M}{EI} \\ N' - f(x) = 0 \\ M' - Q - m(x) = 0 \\ Q' - q(x) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

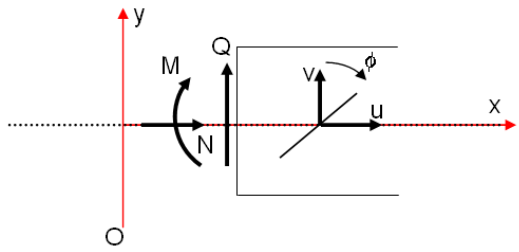


Fig. 2.2 – Sens positif des grandeurs de la théorie de poutre

2.1.2 Équations du modèle classique de poutres mixtes à connexion imparfaite

A partir des équations précédentes, nous allons construire dans cette partie les équations du problème de poutre mixte chargée verticalement possédant une connexion imparfaite. Ce problème a été initialement présenté par [Newmark *et al.*, 1951]. Les hypothèses principales de cette théorie sont les suivantes :

- Le comportement des matériaux de la poutre est élastique linéaire
- La cinématique de Bernoulli est applicable pour chaque couche. L'hypothèse de la section plane n'est pas applicable pour la section totale de la poutre mais elle est applicable pour chaque section des deux couches.
- Il n'y a pas d'arrachement entre deux couches, i.e. les deux couches ont la même flèche le long de la poutre.
- La connexion est considérée continue et le glissement à l'interface entre deux couches est proportionnel à la force de cisaillement à l'interface.

La poutre admet $(0, x, y)$ comme plan de symétrie pour la géométrie et les efforts. En plus, l'axe $0x$ se situe à l'interface entre deux matériaux. Nous supposons que les deux couches sont indépendantes et qu'elles sont reliées par les efforts de cisaillement $\tau(x)$ et d'arrachement $\nu(x)$. La géométrie, les propriétés mécaniques et le chargement vertical de la poutre sont illustrés sur la figure (Fig. 2.3). On suppose aussi que $q(x)$, $\tau(x)$ et $\nu(x)$ ont le sens indiqué sur la figure (Fig. 2.3).

Nous allons écrire les équations du problème en considérant que chaque couche est une poutre de Bernoulli avec le chargement $q(x)$, l'effort de cisaillement $\tau(x)$ et l'effort d'arrachement $\nu(x)$ qui sont les efforts extérieurs. Les équations pour deux couches sont les suivantes :

Première couche :

$$u_1' = -\frac{N_1}{E_1 A_1} \tag{2.4}$$

$$v'' = \frac{M_1}{E_1 I_1} \tag{2.5}$$

$$N_1' = \tau \tag{2.6}$$

$$M_1' = Q_1 - d_1 \tau \tag{2.7}$$

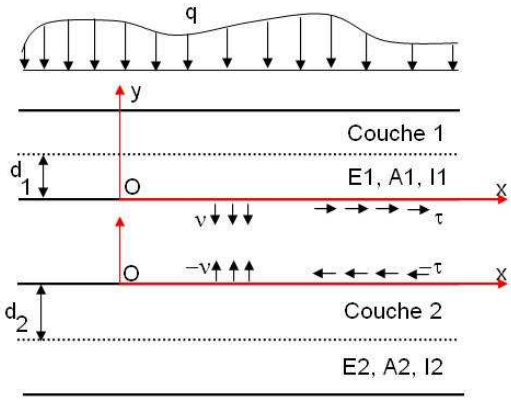


FIG. 2.3 – Poutre mixte

$$Q_1' = -\nu - q \tag{2.8}$$

Deuxième couche :

$$u_2' = -\frac{N_2}{E_2 A_2} \tag{2.9}$$

$$v'' = \frac{M_2}{E_2 I_2} \tag{2.10}$$

$$N_2' = -\tau \tag{2.11}$$

$$M_2' = Q_2 - d_2\tau \tag{2.12}$$

$$Q_2' = \nu \tag{2.13}$$

Dans cette théorie, une loi de comportement d'interface linéaire qui relie l'effort de cisaillement et le glissement à l'interface par la raideur d'interface K a été proposée.

$$\begin{aligned} \tau &= K\left(U_1^2(x, y=0, z) - U_1^1(x, y=0, z)\right) \\ &= K\left((u_2 - d_2.v') - (u_1 + d_1.v')\right) \\ \tau &= K\left(-dv' - u_1 + u_2\right) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nous soulignons ici que la raideur K du modèle classique diffère de la raideur k_1 de notre modèle. k_1 est la raideur unitaire selon la largeur de la poutre et K est la raideur totale sur la largeur de la poutre.

En résumé, on a au total 11 inconnues :

$$N_1, N_2, M_1, M_2, Q_1, Q_2, \tau, \nu, u_1, u_2, v$$

et 11 équations (Eq. 2.4 à Eq. 2.14). Il y a trois équations algébriques (Eq. 2.9, Eq. 2.10, Eq. 2.12) et huit équations différentielles dont une équation d'ordre 2 (Eq. 2.5).

2.1.3 Résolution simplifiée pour le calcul selon les Eurocodes

Selon les Eurocodes, pour résoudre le système à 11 équations présentées ci-dessus, l'approche simplifiée des Eurocodes consiste à considérer que le chargement et les déplacements généralisés v_1, v_2 et u sont des sinusoïdales fonction de x. La solution de ce problème est ensuite généralisée pour les autres configurations de chargement. Cette approche a été proposé par Heimeshoff [Heimeshoff, 1987]. Nous présentons ici les démarches principales pour retrouver les équations Eurocodes.

(Eq. 2.6), (Eq. 2.4) et (Eq. 2.14) donnent :

$$E_1 A_1 v_1'' + K\left(u_2 - u_1 + du''\right) = 0 \tag{2.15}$$

(Eq. 2.11), (Eq. 2.9) et (Eq. 2.14) donnent :

$$E_2 A_2 v_2'' - K\left(u_2 - u_1 + du''\right) = 0 \tag{2.16}$$

(Eq. 2.7), (Eq. 2.12), (Eq. 2.8), (Eq. 2.13) et (Eq. 2.14) donnent :

$$\sum E_i I_i v^{(4)} - dK\left(u_2' - u_1' + dv''\right) = -q \tag{2.17}$$

Les déplacements généralisés v_1, v_2 et u sont des sinusoïdales fonction de x.

$$q(x) = p_0 sin(\frac{\pi}{l}x) \tag{2.18}$$

$$u_1(x) = u_{10} cos(\frac{\pi}{l}x) \tag{2.19}$$

$$u_2(x) = u_{20} cos(\frac{\pi}{l}x) \tag{2.20}$$

$$v(x) = v_0 sin(\frac{\pi}{l}x) \tag{2.21}$$

En introduisant les fonctions sinusoïdales dans les trois équations 2.15, 2.16 et 2.17, nous obtenons un système de trois équations à trois inconnues u_{10}, u_{20} et v_0 :

$$\begin{aligned}
&\left(-\frac{\pi^2}{l^2}E_1A_1 - K\right)u_{10} + Ku_{20} + Kd\frac{\pi}{l}v_0 = 0\\
&Ku_{10} + \left(-\frac{\pi^2}{l^2}E_2A_2 - K\right)u_{20} - Kd\frac{\pi}{l}v_0 = 0\\
&-Kd\frac{\pi}{l}u_{10} + Kd\frac{\pi}{l}u_{20} + \left(\sum E_iI_i\frac{\pi^4}{l^4} + Kd^2\frac{\pi^2}{l^2}\right)v_0 = -p_0
\end{aligned} \tag{2.22}$$

La résolution de ce système d'équation nous donne :

$$\begin{aligned}
v_0 &= -p_0\frac{l^4}{\pi^4}\frac{1}{(EI)_{ef}}\\
u_{10} &= -p_0\frac{\pi}{l}\frac{d\gamma_1E_2A_2}{\gamma_1E_1A_1 + E_2A_2}\\
u_{20} &= p_0\frac{\pi}{l}\frac{d\gamma_1E_1A_1}{\gamma_1E_1A_1 + E_2A_2}
\end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
(EI)_{ef} &= \sum E_i I_i + \frac{E_1 A_1 \gamma_1 d^2}{1 + \gamma_1 \frac{E_1 A_1}{E_2 A_2}} \\
\gamma_1 &= \frac{1}{1 + K_1} \\
K_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} \frac{E_1 A_1}{K}
\end{aligned}$$

Nous calculons le moment global de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
M &= M_1 + M_2 - N_1 d \\
&= -(EI)_{ef} \left(-\frac{\pi^2}{l^2} p_0 \frac{l^4}{\pi^4} \frac{1}{(EI)_{ef}} sin \frac{\pi}{l} x \right) \\
&= -(EI)_{ef} v''
\end{aligned} \tag{2.23}$$

A partir de cette équation reliant le moment global et la dérivé au second ordre du déplacement v, on généralise la raideur $(EI)_{ef}$ de la poutre comme une raideur de flexion qui tient compte de la raideur d'interface K. Le calcul de la poutre dans les autres configurations de chargement consiste à calculer cette raideur de flexion et à utiliser ensuite les théories de poutre classiques.

2.1.4 Prise en compte de la déformation de cisaillement

Le modèle classique se base sur le modèle de Bernoulli où la déformation de cisaillement est négligée. Le calcul selon les Eurocodes nous donne une raideur effectif $(EI)_{ef}$ pour tenir compte de la connexion imparfaite. La prise en compte de la déformation de cisaillement dans le calcul de poutres mixtes à connexion parfaite peut-être réalisé par la notion de raideur de cisaillement effectif $(GS)_{ef}$. Batoz [Batoz *et al.*, 1990] a considéré que la raideur de cisaillement effectif $(GS)_{ef}$ dans le cas d'un bicouche à connexion parfaite est la somme de la raideur de cisaillement de chaque couche. Cependant, Nguyen [Nguyen *et al.*, 2005] a montré que la raideur de cisaillement effectif d'un bicouche est la suivante :

$$(GS)_{ef} = \frac{(h_1 + h_2)^2 b}{\frac{h_1}{G_1} + \frac{h_2}{G_2}} \tag{2.24}$$

Où h_1, h_2 sont les hauteurs de couches et G_1, G_2 sont les modules de cisaillement des couches.

2.1.5 Résolution formelle des équations du modèle classique

En dérivant 2 fois (Eq. 2.5) et une fois (Eq. 2.7) et (Eq. 2.8) on peut écrire :

$$E_1 I_1 v^{(4)} = -q - \nu - d_1 \tau' \tag{2.25}$$

De la même manière, à partir de (Eq. 2.10), (Eq. 2.12) et (Eq. 2.13), on obtient :

$$E_2 I_2 v^{(4)} = \nu - d_2 \tau' \tag{2.26}$$

La somme de (Eq. 2.25) et (Eq. 2.26) donne :

$$\left(\sum E_i I_i\right) v^{(4)} = -q - d\tau' \tag{2.27}$$

Et la dérivée de (Eq. 2.14) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\tau' &= K\left[-dv'' - \frac{N_2}{E_2 A_2} + \frac{N_1}{E_1 A_1}\right] \\
\tau'' &= K\left[-dv''' - \frac{N_2'}{E_2 A_2} + \frac{N_1'}{E_1 A_1}\right] \\
&= K\left[-dv''' + \tau\left(\sum \frac{1}{E_i A_i}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

En introduisant (Eq. 2.28) dans la dérivée de (Eq. 2.27), la dérivée de la formulation obtenue donne :

$$\begin{aligned}
\sum E_i I_i v^{(6)} &= -q'' - dK\left(-dv^{(4)} + \tau' \sum \frac{1}{E_i A_i}\right) \\
&= -q'' - dK\left(-dv^{(4)} + \left(-\frac{q}{d} - \frac{\sum E_i I_i}{d} v^{(4)}\right) \sum \frac{1}{E_i A_i}\right) \\
v^{(6)} &= K\left[\frac{d^2}{\sum E_i I_i} + \sum \frac{1}{E_i A_i}\right] v^{(4)} + \frac{1}{\sum E_i I_i}\left[Kq \sum \frac{1}{E_i A_i} - q''\right]
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous obtenons enfin l'équation différentielle d'ordre six de la poutre mixte :

$$v^{(6)} - \alpha^2 v^{(4)} = f \tag{2.30}$$

Où :

$$\alpha^2 = K\left(\sum \frac{1}{E_i A_i} + \frac{d^2}{\sum E_i I_i}\right) \tag{2.31}$$

$$f = \frac{1}{\sum E_i I_i}\left[\left(K \sum \frac{1}{E_i A_i}\right) q - q''\right] \tag{2.32}$$

La résolution formelle de cette équation est présentée en annexe A.

2.1.6 Comparaison de la solution formelle et de la solution selon les Eurocodes du modèle classique

Considérons un exemple de poutre mixte bois-BHP fibré pour laquelle la géométrie et le type de chargement sont présentés sur la figure (Fig. 2.9). La poutre est constituée d'une couche supérieure en béton fibré à très hautes performances (BHP fibré), connectée à une poutre en bois lamellé-collé, qui constitue la couche inférieure.

Le bois est un matériau orthotrope élastique linéaire et le béton est un matériau isotrope élastique linéaire. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

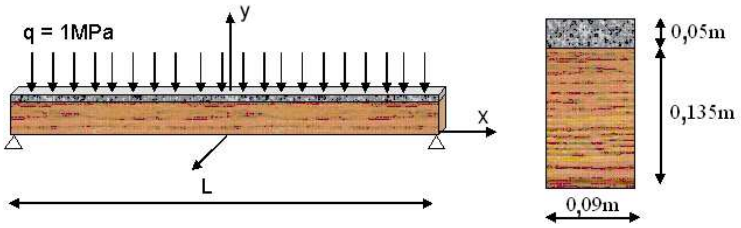


FIG. 2.4 – Poutre mixte bois-BHP fibré

- BHP fibré : $E_c = 45000MPa$, $\nu_c = 0.2$;

- Bois : $E_{w1} = 12500MPa$, $E_{w2} = 420MPa$, $E_{w3} = 420MPa$, $G_{w21} = G_{w31} = 780MPa$, $G_{w23} = 420MPa$, $\nu_{w21} = \nu_{w31} = 0.1$ et $\nu_{w23} = 0.3$.

Le schéma de calcul est présenté sur la fugure (Fig. 2.5).

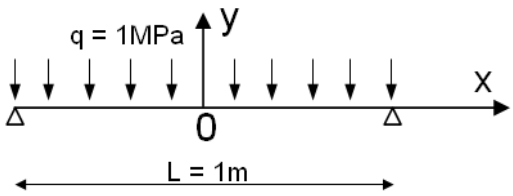
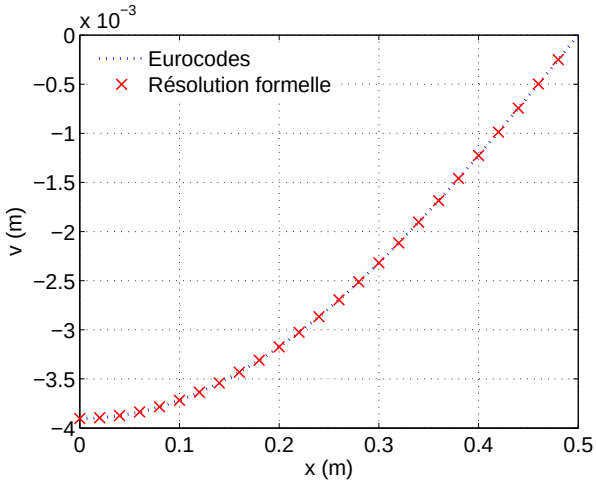


FIG. 2.5 – Schéma de la poutre chargée uniformément

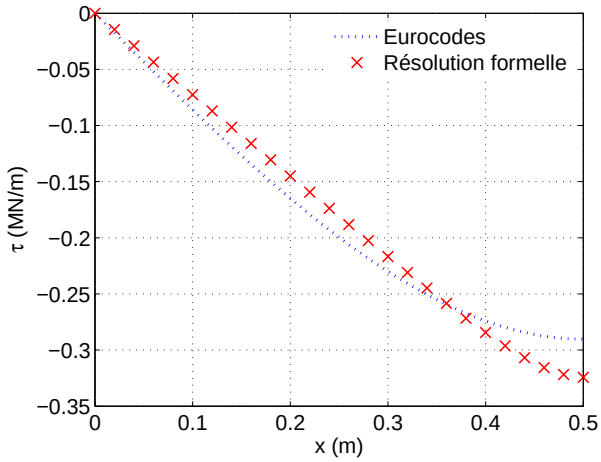
Les conditions aux limites pour trouver 6 coefficients différentiels dans la résolution analytique du modèle classique (Annexe A) sont les suivantes :

$$\begin{cases} v'(x=0)=0 \\ \tau(x=0)=0 \\ Q(x=0)=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x=L/2)=0 \\ v''(x=L/2)=0 \\ M(x=L/2)=0 \end{cases} \tag{2.33}$$

La solution formelle du modèle classique a été complètement établie. Nous présentons maintenant la comparaison avec le calcul selon les Eurocodes qui est une simplification de la résolution des équations du modèle classique. Les résultats (Fig. 2.6) montrent que dans ce cas de configuration, le calcul selon les Eurocodes donne une bonne prévision de la raideur globale de la poutre par rapport à la solution formelle. Par contre, le fait d'imposer une forme sinusoïdale pour le chargement modifie la forme du champ d'efforts de cisaillement à l'interface par rapport à la solution formelle.



(a) $v(x = 0)$ en fonction de K



(b) τ en fonction de x avec $K = 9000(MN/m/m)$

Fig. 2.6 – Comparaison des champs de déplacement vertical et d'effort de cisaillement pour deux approches du modèle classique

2.2 Nouveau modèle de poutre mixte à connexion imparfaite

2.2.1 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux multicouches à connexion imparfaite

La théorie de poutre mixte à connexion imparfaite se base en général sur le modèle de Bernoulli qui néglige la déformation de cisaillement [Newmark *et al.*, 1951] ou celui de Timoshenko qui prend en compte de déformation de cisaillement par une rotation supplémentaire des sections [Schnabl *et al.*, 2007]. Pour la prise en compte du glissement à l'interface, les auteurs imposent une loi d'interface qui relie l'effort de cisaillement au glissement à l'interface. Nous remarquons que le terme de glissement dans ces théories est une grandeur généralisée.

Les différents travaux [Chabot, 1997], [Carreira, 1998] réalisés au sein du LAMI (ENPC) ont abouti à la formulation complète d'une famille de modèles multiparticulaires dits $\mathcal{M}4$ (Modèles Multiparticulaires des Matériaux Multicouches), à partir de la méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner. Ces modèles adoptent une approximation plus fine des champs suivant l'épaisseur du multicouche par une cinématique par couche plutôt qu'une cinématique globale. En effet, avec les modèles multiparticulaires, le multicouche est représenté par un ensemble de plaques couplées par des efforts d'interface. Cette famille de modèles permet donc de mieux décrire les contraintes et les déformations aux interfaces. De plus, Diaz-Diaz [Diaz-Diaz, 2001] a repris la construction de deux modèles multiparticulaires de la famille de modèles $\mathcal{M}4$ pour les adapter aux multicouches comportant des déformations anélastiques dans les couches et des discontinuités de déplacement aux interfaces.

Afin de mieux prendre en compte le glissement dans les poutres mixtes à connexion imparfaite, nous allons, dans ce paragraphe, reprendre la construction du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ et introduire un terme de discontinuité pour l'adapter à notre problème de multicouche à connexion imparfaite. Le terme de glissement à l'interface est d'abord implanté dans le modèle à travers un terme de discontinuité à l'interface qui est supposé être une variable d'état. Ensuite, nous imposons la loi de comportement d'interface qui relie l'effort de cisaillement généralisé à ce terme de glissement. Cette démarche nous conduit à une amélioration du concept de glissement par rapport au terme de pseudo-glissement trouvé dans la littérature.

Considérons le multicouche formé de n couches d'épaisseur e^i dont les interfaces sont notées $\Gamma_{i,i+1}$. Le volume occupé par le multicouche est noté $\Omega = \omega \times \left[h_1^-; h_n^+\right]$ (Fig. 2.7) . Le détail des démarches de l'adaptation du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ est présenté dans l'annexe (B). Nous présentons ici la récapitulatif des champs généralisés et des équations du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ *adapté* :

Champs généralisés pour $1 \leq i \leq n$ **et** $1 \leq j \leq n-1$ **:**

- Efforts intérieurs généralisés $\tilde{\tilde{N}}^i, \tilde{\tilde{M}}^i, \tilde{Q}^i, \tilde{\tau}^{j,j+1}et\nu^{j,j+1}$

- Déplacements généralisés $\tilde{U}^i, \tilde{\phi}^ietU_3^i$

- Déformations généralisées $\tilde{\tilde{\epsilon}}^i, \tilde{\chi}^i, \tilde{d}_\phi^i, \tilde{D}^{j,j+1}etD_\nu^{j,j+1}$

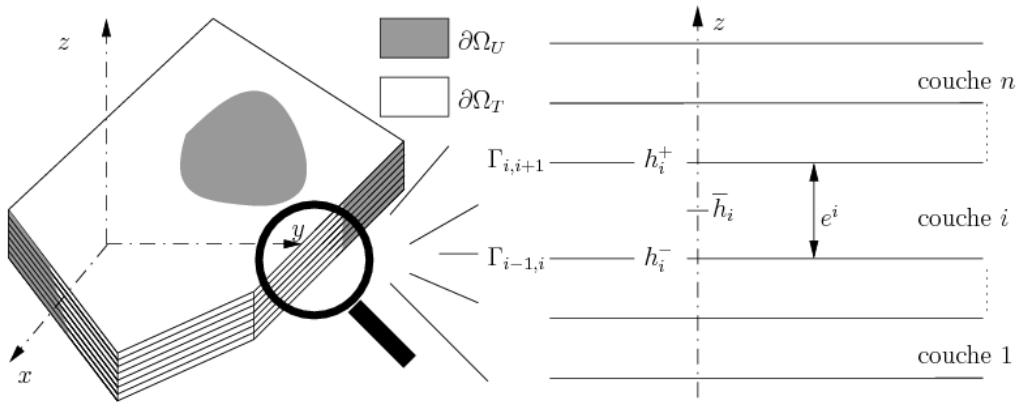


Fig. 2.7 – Multicouche étudié

Équations d'équilibre sur ω pour $i \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{div}\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \\
&div\tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \\
&\tilde{div}\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) - \tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega
\end{aligned}$$

Équations de comportement sur ω pour $i \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{\epsilon}}^i(x,y) = \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i(x,y) \\
&\tilde{\tilde{\chi}}^i(x,y) = \frac{12}{e^{i3}}\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i : \tilde{\tilde{M}}^i(x,y) \\
&\tilde{d}^i_\phi(x,y) = \frac{6}{5e^i}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\tilde{Q}^i - \frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) \\
&\tilde{D}^{j,j+1}(x,y) - \tilde{\gamma}^{j,j+1}(x,y) = -\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^j_Q.\tilde{Q}^j - \frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^{j+1}_Q.\tilde{Q}^{j+1} - \frac{e^j}{30}\tilde{\tilde{S}}^j_Q.\tilde{\tau}^{j-1,j} + \\
&\qquad + \frac{2}{15}\left(e^j\tilde{\tilde{S}}^j_Q + e^{j+1}\tilde{\tilde{S}}^{j+1}_Q\right).\tilde{\tau}^{j,j+1} - \frac{e^{j+1}}{30}\tilde{\tilde{S}}^{j+1}_Q.\tilde{\tau}^{j+1,j+2} \\
&D^{j,j+1}_\nu(x,y) - \gamma^{j,j+1}_3(x,y) = \frac{9}{70}e^j S^j_\nu \nu^{j-1,j} + \frac{13}{35}\left(e^j S^j_\nu + e^{j+1}S^{j+1}_\nu\right)\nu^{j,j+1} + \frac{9}{70}e^{j+1}S^{j+1}\nu^{j+1,j+2}
\end{aligned}$$

Équations de comportement d'interface sur ω pour $1 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned}
\tau^{j,j+1}_\alpha(x,y) &= k^{j,j+1}_\alpha \gamma^{j,j+1}_\alpha(x,y) \\
\nu^{j,j+1}(x,y) &= k^{j,j+1}_3 \gamma^{j,j+1}_3(x,y)
\end{aligned}$$

Conditions aux limites en efforts généralisés sur $\partial\omega$ pour $i \leq i \leq n$:

$$\left|\begin{aligned}
&\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}^i_d \\
&\tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} = \tilde{M}^i_d \\
&\tilde{Q}^i.\underline{n} = Q^i_{3d}
\end{aligned}\right. \tag{2.34}$$

2.2.2 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres multicouches à connexion imparfaite

Nous avons établi un modèle de multicouche à connexion imparfaite avec une loi d'interface linéaire. Nous allons présenter dans ce paragraphe le passage au modèle de poutre multicouche. Nous commençons par considérer une poutre à n couches à bords libres. Supposons que la largeur de chaque couche est constante et égale à $2b_i$. La poutre admet le plan $(0, x, z)$ comme plan de symétrie pour la géométrie et le chargement (Fig. 2.8). Nous allons construire un modèle de poutre associé au modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ de plaque présenté dans la partie précédente.

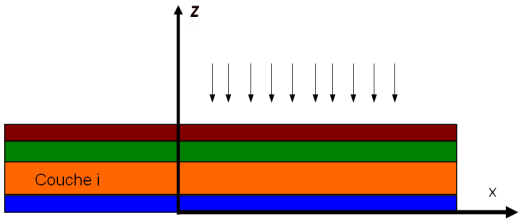


FIG. 2.8 – Poutre multicouche à bords libres

En supposant que $(0, x, z)$ est le plan de symétrie pour la géométrie et le chargement de la poutre, nous obtenons la parité des champs $3D$ dans la poutre, ainsi que celui des champs généralisés associés au modèle $\mathcal{M}4$-$5n$. Ce dernier nous permettra de simplifier le calcul intégral des champs selon l'axe y en remarquant que :

$$\int_{-b_i}^{b_i} f(x,y)dy = 0 \quad \text{si } f(x,y) \text{ est impaire sur } y \in [-b_i, b_i] \tag{2.35}$$

- Champ de contrainte $3D$:

  $\sigma_{11}(\underline{x})$, $\sigma_{22}(\underline{x})$, $\sigma_{33}(\underline{x})$, $\sigma_{31}(\underline{x})$: Pairs

  $\sigma_{23}(\underline{x})$, $\sigma_{12}(\underline{x})$: Impairs

- Champ de déplacement $3D$:

  $U_1(\underline{x})$, $U_2(\underline{x})$, $U_3(\underline{x})$: Pairs

- Champs des efforts généralisés :

  $N^i_{11}(x,y)$, $N^i_{22}(x,y)$, $M^i_{11}(x,y)$, $M^i_{22}(x,y)$, $Q^i_1(x,y)$, $\tau^{i,i+1}(x,y)$, $\nu^{i,i+1}_1(x,y)$: Pairs

  $N^i_{12}(x,y)$, $N^i_{21}(x,y)$, $M^i_{12}(x,y)$, $M^i_{21}(x,y)$, $Q^i_2(x,y)$, $\tau^{i,i+1}_2(x,y)$: Impairs

- Champs de déplacement généralisé :

  $U^i_\alpha(x,y)$, $\phi^i_\alpha(x,y)$, $U^i_3(x,y)$: Pairs

Nous nous intéressons ici au problème de poutre à bords libres. Nous avons alors les conditions aux limites associées aux champs généralisés du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$:

- $N^i_{22}(x, b_i) = N^i_{22}(x, -b_i) = 0$

- $N_{12}^i(x,b_i) = N_{12}^i(x,-b_i) = 0$
- $N_{21}^i(x,b_i) = N_{21}^i(x,-b_i) = 0$
- $M_{22}^i(x,b_i) = M_{22}^i(x,-b_i) = 0$
- $M_{12}^i(x,b_i) = M_{12}^i(x,-b_i) = 0$
- $M_{21}^i(x,b_i) = M_{21}^i(x,-b_i) = 0$
- $Q_2^i(x,b_i) = Q_2^i(x,-b_i) = 0$
- $\tau_2^i(x,b_i) = \tau_2^i(x,-b_i) = 0$

D'autre part, nous avons aussi la condition suivante pour un champ pair selon l'axe y :

$$f(x,b_i) - f(x,-b_i) = 0$$

Nous reprenons ensuite les équations du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ que nous intégrons sur la largeur pour trouver les grandeurs généralisées du modèle de poutre associé ainsi que ses équations d'équilibre, conditions aux limites et lois de comportement.

Efforts généralisés et équations d'équilibre

Rappelons ici les équations d'équilibre de modèle $\mathcal{M}4$-$5n$:

$$\tilde{div}\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \tag{2.36}$$

$$div\tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \tag{2.37}$$

$$\tilde{div}\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) - \tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \tag{2.38}$$

Nous introduisons les grandeurs suivantes qui seront les efforts intérieurs généralisés du modèle de poutre associé au modèle $\mathcal{M}4$-$5n$:

- Effort normal de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$\mathbf{N}_1^i(x) = \int_{-b_i}^{b_i} N_{11}^i(x,y)dy \qquad (N); \tag{2.39}$$

- Moment de flexion de la couche i par rapport au plan médian de la couche (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$\mathbf{M}_1^i(x) = \int_{-b_i}^{b_i} M_{11}^i(x,y)dy \qquad (Nm); \tag{2.40}$$

- Effort tranchant de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$\mathbf{Q}_1^i(x) = \int_{-b_i}^{b_i} Q_1^i(x,y)dy \qquad (N); \tag{2.41}$$

- Effort de cisaillement à l'interface $j, j+1$ (avec $1 \leq j \leq n-1$) :

$$\mathbf{T}_1^{j,j+1}(x) = \int_{-b_j}^{b_j} \tau_1^{j,j+1}(x,y)dy \qquad (N/m); \tag{2.42}$$

- Effort d'arrachement à l'interface $j, j+1$ (avec $1 \leq j \leq n-1$) :

$$\mathbf{V}^{j,j+1}(x) = \int_{-b_j}^{b_j} \nu_1^{j,j+1}(x,y)dy \qquad (N/m); \tag{2.43}$$

Nous considérons la première équation de (Eq. 2.36) et nous l'intégrons sur $y \in [-b_i, b_i]$:

$$\int_{-b_i}^{b_i} N_{11,1}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} N_{12,2}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \tau_1^{i,i+1}dy - \int_{-b_i}^{b_i} \tau_1^{i-1,i}dy = 0 \tag{2.44}$$

Rappelons ici que le bord de la poutre est libre, $N_{12}^i(x,b_i) = N_{12}^i(x,-b_i) = 0$, alors :

$$\int_{-b_i}^{b_i} N_{12,2}^i(x,y)dy = N_{12}^i(x,b_i) - N_{12}^i(x,-b_i) = 0 \tag{2.45}$$

Nous obtenons ainsi une première équation d'équilibre du modèle de poutre associé :

$$\mathbf{N}_{1,1}^i(x) + \mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) = O \tag{2.46}$$

En intégrant sur $y \in [-b_i, b_i]$ l'équation (Eq. 2.37) et en remarquant que $\int_{-b_i}^{b_i} Q_{2,2}^i(x,y)dy = Q_2^i(x,b_i) - Q_2^i(x,-b_i) = 0$, on obtient une deuxième équation d'équilibre du modèle de poutre associé :

$$\mathbf{Q}_{1,1}^i(x) + \mathbf{V}^{i,i+1}(x) - \mathbf{V}^{i-1,i}(x) = O \tag{2.47}$$

De manière similaire, en intégrant sur $y \in [-b_i, b_i]$ la première équation de (Eq. 2.38) et en remarquant que $\int_{-b_i}^{b_i} M_{12,2}^i(x,y)dy = M_{12}^i(x,b_i) - M_{12}^i(x,-b_i) = 0$, on obtient la troisième équation d'équilibre du modèle de poutre associé :

$$\mathbf{M}_{1,1}^i(x) - \mathbf{Q}_1^i(x) + \frac{e^i}{2}\left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right) = O \tag{2.48}$$

Nous récapitulons ici trois équations d'équilibre du modèle de poutre associé au modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ qui portent sur les efforts généralisés de la poutre :

$$\mathbf{N}_{1,1}^i(x) + \mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) = O \tag{2.49}$$

$$\mathbf{Q}_{1,1}^i(x) + \mathbf{V}^{i,i+1}(x) - \mathbf{V}^{i-1,i}(x) = O \tag{2.50}$$

$$\mathbf{M}_{1,1}^i(x) - \mathbf{Q}_1^i(x) + \frac{e^i}{2}\left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right) = O \tag{2.51}$$

Conditions aux limites en contrainte

A partir de la remarque B.3.1, on note les données sur la face inférieure et la face supérieure respectivement $\mathbf{T}_1^{0,1}(x)$, $\mathbf{V}^{0,1}(x)$ et $\mathbf{T}_1^{n,n+1}(x)$, $\mathbf{V}^{n,n+1}(x)$. Elles sont exprimées en effort imposé sur les faces de la poutre :

$$\begin{cases} \mathbf{T}_1^{0,1}(x,y) = -\mathbf{T}_1^-(x,y) \\ \mathbf{V}^{0,1}(x,y) = -\mathbf{T}_3^-(x,y) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{T}_1^{n,n+1}(x,y) = \mathbf{T}_1^+(x,y) \\ \mathbf{V}^{n,n+1}(x,y) = \mathbf{T}_3^+(x,y) \end{cases}$$

Les conditions aux limites en contrainte sur la frontière $\partial\omega$ sont exprimées comme suit :

$$\left|\begin{array}{c}\mathbf{N}^i_{1,1}(x)=\mathbf{N}^i_d\\ \mathbf{M}^i_{1,1}(x)=\mathbf{M}^i_d\\ \mathbf{Q}^i_1(x)=\mathbf{Q}^i_d\end{array}\right. \tag{2.52}$$

Déplacements généralisés et loi de comportement

Rappelons ici les lois de comportement du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$:

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}^i(x,y)=\frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i}{e^i}:\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) \tag{2.53}$$

$$\tilde{\tilde{\chi}}^i(x,y)=\frac{12}{e^{i^3}}\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i:\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) \tag{2.54}$$

$$\tilde{d}^i_\phi(x,y)=\frac{6}{5e^i}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\tilde{Q}^i-\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}+\tilde{\tau}^{i-1,i}\right) \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{i,i+1}(x,y)-\tilde{\gamma}^{i,i+1}(x,y)=&-\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\tilde{Q}^i-\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}^{i+1}_Q.\tilde{Q}^{i+1}-\frac{e^i}{30}\tilde{\tilde{S}}^i_Q.\tilde{\tau}^{i-1,i}+\\&+\frac{2}{15}\left(e^i\tilde{\tilde{S}}^i_Q+e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}^{i+1}_Q\right).\tilde{\tau}^{i,i+1}-\frac{e^{i+1}}{30}\tilde{\tilde{S}}^{i+1}_Q.\tilde{\tau}^{i+1,i+2}\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$D^{i,i+1}_\nu(x,y)-\gamma^{i,i+1}_3(x,y)=\frac{9}{70}e^iS^i_\nu\nu^{i-1,i}+\frac{13}{35}\left(e^iS^i_\nu+e^{i+1}S^{i+1}_\nu\right)\nu^{i,i+1}+\frac{9}{70}e^{i+1}S^{i+1}\nu^{i+1,i+2} \tag{2.57}$$

Nous intégrons les lois de comportement du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ sur $y\in[-b_i,b_i]$ pour faire apparaître les champs de déplacement généralisés et les champs de déformation généralisés du modèle de poutre associé ainsi que ses lois de comportement. Les grandeurs qui seront les déplacements généralisés du modèle de poutre sont les suivantes :

- Déplacement moyen selon l'axe x de la couche i (avec $1\leq i\leq n$) :

$$\mathbf{U}^i_1(x)=\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i}U^i_1(x,y)dy \qquad (m); \tag{2.58}$$

- Déplacement moyen selon l'axe z de la couche i (avec $1\leq i\leq n$) :

$$\mathbf{U}^i_3(x)=\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i}U^i_3(x,y)dy \qquad (m); \tag{2.59}$$

- Rotation moyenne autour l'axe y de la couche i (avec $1\leq i\leq n$) :

$$\Phi^i_1(x)=\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i}\phi^i_1(x,y)dy \qquad (rad); \tag{2.60}$$

- Glissement moyen selon l'axe x à l'interface :

$$\Omega^{i,i+1}_1(x)=\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i}\gamma^{i,i+1}_1(x,y)dy \qquad (m); \tag{2.61}$$

- Arrachement moyen selon l'axe z à l'interface :

$$\Omega_3^{i,i+1}(x) = \frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i} \gamma_3^{i,i+1}(x,y)dy \qquad (m); \tag{2.62}$$

* L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la première équation de (Eq. 2.53) donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{-b_i}^{b_i} \varepsilon_{11}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} U_{1,1}^i(x,y)dy \\
&= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1111}^i}{e^i} N_{11}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1112}^i}{e^i} N_{12}^i(x,y)dy + \\
&\int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1121}^i}{e^i} N_{21}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1122}^i}{e^i} N_{22}^i(x,y)dy
\end{aligned} \tag{2.63}$$

La parité de N_{12}^i et N_{21}^i donne :

$$\int_{-b_i}^{b_i} N_{12}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} N_{21}^i(x,y)dy = 0 \tag{2.64}$$

On en déduit :

$$\mathbf{U}_{1,1}^i(x) = \frac{S_{1111}^i}{2b_i e^i}\mathbf{N}_1^i(x) + \frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1122}^i}{e^i} N_{22}^i(x,y)dy \tag{2.65}$$

L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la deuxième équation de (Eq. 2.53) donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{-b_i}^{b_i} \epsilon_{22}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} U_{2,2}^i(x,y)dy \\
&= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{2211}^i}{e^i} N_{11}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{2212}^i}{e^i} N_{12}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{2221}^i}{e^i} N_{21}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{2222}^i}{e^i} N_{22}^i(x,y)dy
\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_{-b_i}^{b_i} U_{2,2}^i(x,y)dy = U_2^i(x,b_i) - U_2^i(x,-b_i) = 0$, on obtient :

$$\frac{S_{2211}^i}{e^i}\mathbf{N}_1^i(x) + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{2222}^i}{e^i} N_{22}^i(x,y)dy = 0 \tag{2.66}$$

Ou bien :

$$\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i} \frac{S_{1122}^i}{e^i} N_{22}^i(x,y)dy = -\frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{S_{2211}^i}{2b_i e^i}\mathbf{N}_1^i(x) \tag{2.67}$$

En introduisant (Eq. 2.67) dans (Eq. 2.65), on obtient alors la première équation de comportement du modèle de poutre associé :

$$\mathbf{U}_{1,1}^i(x) = \left(\frac{S_{1111}^i}{2b_i e^i} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{S_{2211}^i}{2b_i e^i}\right)\mathbf{N}_1^i(x) \tag{2.68}$$

* Considérons ensuite l'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la première équation de (Eq. 2.54) :

$$\int_{-b_i}^{b_i} \chi_{11}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} \phi_{1,1}^i(x,y)dy$$
$$= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1111}^i}{(e^i)^3} M_{11}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1112}^i}{(e^i)^3} M_{12}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1121}^i}{(e^i)^3} M_{21}^i(x,y)dy +$$
$$+ \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1122}^i}{(e^i)^3} M_{22}^i(x,y)dy$$

On en déduit :

$$\Phi_{1,1}^i(x) = \frac{12S_{1111}^i}{2b_i(e^i)^3}\mathbf{M}_1^i(x) + \frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1122}^i}{(e^i)^3} M_{22}^i(x,y)dy \tag{2.69}$$

L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la deuxième équation de (Eq. 2.54) donne :

$$\int_{-b_i}^{b_i} \chi_{22}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} \phi_{2,2}^i(x,y)dy$$
$$= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{2211}^i}{(e^i)^3} M_{11}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{2212}^i}{(e^i)^3} M_{12}^i(x,y)dy +$$
$$+ \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{2221}^i}{(e^i)^3} M_{21}^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{2222}^i}{(e^i)^3} M_{22}^i(x,y)dy$$

En remarquant que $\int_{-b_i}^{b_i} \phi_{2,2}^i(x,y)dy = \phi_2^i(x,b_i) - \phi_2^i(x,-b_i) = 0$, on obtient :

$$\frac{12S_{2211}^i}{(e^i)^3}\mathbf{M}_1^i(x) + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{2222}^i}{(e^i)^3} M_{22}^i(x,y)dy = 0 \tag{2.70}$$

Ou bien :

$$\frac{1}{2b_i}\int_{-b_i}^{b_i} \frac{12S_{1122}^i}{(e^i)^3} M_{22}^i(x,y)dy = -\frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{12S_{2211}^i}{2b_i(e^i)^3}\mathbf{M}_1^i(x) \tag{2.71}$$

En introduisant (Eq. 2.71) dans (Eq. 2.69), on obtient alors la deuxième équation de comportement du modèle de poutre associé :

$$\Phi_{1,1}^i(x) = \left(\frac{12S_{1111}^i}{2b_i(e^i)^3} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{12S_{2211}^i}{2b_i(e^i)^3}\right)\mathbf{M}_1^i(x) \tag{2.72}$$

* L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la première équation de (Eq. 2.55) donne :

$$\int_{-b_i}^{b_i} d_{\phi 1}^i(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} \phi_1^i(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} U_{3,1}^i(x,y)dy$$
$$= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{6}{5e^i}\left(4S_{1313}^i Q_1^i(x,y) + 4S_{1323}^i Q_2^i(x,y)\right)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \frac{1}{10}4S_{1313}^i\left(\tau_1^{i,i+1}(x,y) + \tau_1^{i-1,i}(x,y)\right)dy -$$
$$- \int_{-b_i}^{b_i} \frac{1}{10}4S_{1323}^i\left(\tau_2^{i,i+1}(x,y) + \tau_2^{i-1,i}(x,y)\right)dy$$

Rappelons que $Q_2^i(x,y), \tau_2^{i,i+1}(x,y), \tau_2^{i-1,i}(x,y)$ sont impairs sur $y \in [-b_i, b_i]$. On en déduit la troisième équation de comportement du modèle de poutre associé :

$$\Phi_1^i(x) + \mathbf{U}_{3,1}^i(x) = \frac{6}{2b_i 5e^i} 4S_{1313}^i \mathbf{Q}_1^i(x) - \frac{1}{2b_i 10} 4S_{1313}^i \left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right) \tag{2.73}$$

* L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la première équation de (Eq. 2.56) donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{-b_i}^{b_i} D_1^{i,i+1}(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \gamma_1^{i,i+1}(x,y)dy \\
&= \int_{-b_i}^{b_i} U_1^{i+1}(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} U_1^i(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \frac{e^i}{2}\phi_1^i(x,y)dy - \\
&\qquad - \int_{-b_i}^{b_i} \frac{e^{i+1}}{2}\phi_1^{i+1}(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \gamma_1^{i,i+1}(x,y)dy \\
&= -\frac{1}{10}\left(4S_{1313}^i Q_1^i(x,y) + 4S_{1323}^i Q_2^i(x,y)\right) - \frac{1}{10}\left(4S_{1313}^{i+1} Q_1^{i+1}(x,y) + 4S_{1323}^{i+1} Q_2^{i+1}(x,y)\right) - \\
&- \frac{e^i}{30}\left(4S_{1313}^i \tau_1^{i-1,i}(x,y) + 4S_{1323}^i \tau_2^{i-1,i}(x,y)\right) + \frac{2}{15}\left(e^i 4S_{1313}^i + e^{i+1} 4S_{1313}^{i+1}\right)\tau_1^{i,i+1} + \\
&+ \frac{2}{15}\left(e^i 4S_{1323}^i + e^{i+1} 4S_{1323}^{i+1}\right)\tau_2^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}}{30}\left(4S_{1313}^{i+1}\tau_1^{i+1,i+2}(x,y) + 4S_{1323}^{i+1}\tau_2^{i+1,i+2}(x,y)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit la quatrième équation de comportement du modèle de poutre associé :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_1^{i+1}(x) - \mathbf{U}_1^i(x) - \frac{e^i}{2}\Phi_1^i(x) - \frac{e^{i+1}}{2}\Phi_1^{i+1}(x) - \Omega_1^{i,i+1}(x) = -\frac{1}{2b_i 10}\left(4S_{1313}^i \mathbf{Q}_1^i(x) + 4S_{1313}^{i+1}\mathbf{Q}_1^{i+1}(x)\right) - \\
&- \frac{e^i}{2b_i 30} 4S_{1313}^i \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) + \frac{2}{2b_i 15}\left(e^i 4S_{1313}^i + e^{i+1}4S_{1313}^{i+1}\right)\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \frac{e^{i+1}}{2b_i 30} 4S_{1313}^{i+1}\mathbf{T}_1^{i+1,i+2}(x)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

* L'intégrale sur $y \in [-b_i, b_i]$ de la première équation de (Eq.2.57) donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{-b_i}^{b_i} D_\nu^{i,i+1}(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \gamma_3^{i,i+1}(x,y)dy = \int_{-b_i}^{b_i} U_3^{i+1}(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} U_3^i(x,y)dy - \int_{-b_i}^{b_i} \gamma_3^{i,i+1}(x,y)dy \\
&= \int_{-b_i}^{b_i} \frac{9}{70} e^i S_{3333}^i \nu^{i-1,i}(x,y)dy + \int_{-b_i}^{b_i} \frac{13}{35}\left(e^i S_{3333}^i + e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\right)\nu^{i,i+1}(x,y)dy + \\
&+ \int_{-b_i}^{b_i} \frac{9}{70} e^{i+1} S_{3333}^{i+1} \nu^{i+1,i+2}(x,y)dy
\end{aligned}$$

On en déduit la cinquième équation de comportement du modèle de poutre associé :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_3^{i+1}(x) - \mathbf{U}_3^i(x) - \Omega_3^{i,i+1} \quad = \quad & \frac{9}{2b_i 70} e^i S_{3333}^i \mathbf{V}^{i-1,i}(x) + \frac{13}{2b_i 35}\left(e^i S_{3333}^i + e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\right)\mathbf{V}^{i,i+1}(x) + \\
& + \frac{9}{2b_i 70} e^{i+1} S_{3333}^{i+1} \mathbf{V}^{i+1,i+2}(x)
\end{aligned} \tag{2.75}$$

* Nous introduisons les champs de déformation généralisés du modèle de poutre associé suivants :

$$\epsilon_1^i(x) = \mathbf{U}_{1,1}^i(x) \tag{2.76}$$

$$\chi_1^i(x) = \Phi_{1,1}^i(x) \tag{2.77}$$
$$\mathbf{d}_{\phi 1}^i(x) = \Phi_1^i(x) + \mathbf{U}_{3,1}^i(x) \tag{2.78}$$
$$\mathbf{D}_1^{j,j+1}(x) = \mathbf{U}_1^{j+1}(x) - \mathbf{U}_1^j(x) - \frac{e^j}{2}\Phi_1^j(x) - \frac{e^{j+1}}{2}\Phi_1^{j+1}(x) \tag{2.79}$$
$$\mathbf{D}_\nu^{j,j+1}(x) = \mathbf{U}_3^{j+1}(x) - \mathbf{U}_3^j(x) \tag{2.80}$$

Nous obtenons donc l'ensemble des équations de comportement du modèle de poutre associé :

$$\epsilon_1^i(x) = \left(\frac{S_{1111}^i}{2b_i e^i} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{S_{2211}^i}{2b_i e^i}\right)\mathbf{N}_1^i(x) \tag{2.81}$$
$$\chi_1^i(x) = \left(\frac{12S_{1111}^i}{2b_i (e^i)^3} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{12S_{2211}^i}{2b_i (e^i)^3}\right)\mathbf{M}_1^i(x)$$
$$\mathbf{d}_{\phi 1}^i(x) = \frac{6}{2b_i 5e^i}4S_{1313}^i\mathbf{Q}_1^i(x) - \frac{1}{2b_i 10}4S_{1313}^i\left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right)$$
$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1^{j,j+1}(x) - \Omega_1^{j,j+1}(x) = &-\frac{1}{2b_j 10}\left(4S_{1313}^i\mathbf{Q}_1^i(x) + 4S_{1313}^{i+1}\mathbf{Q}_1^{i+1}(x)\right) - \frac{e^i}{2b_j 30}4S_{1313}^i\mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) + \\ &+\frac{2}{2b_j 15}\left(e^i 4S_{1313}^i + e^{i+1}4S_{1313}^{i+1}\right)\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \frac{e^{i+1}}{2b_j 30}4S_{1313}^{i+1}\mathbf{T}_1^{i+1,i+2}(x)\end{aligned} \tag{2.82}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\nu^{j,j+1}(x) - \Omega_3^{j,j+1} = &\frac{9}{2b_j 70}e^i S_{3333}^i\mathbf{V}^{i-1,i}(x) + \frac{13}{2b_j 35}\left(e^i S_{3333}^i + e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\right)\mathbf{V}^{i,i+1}(x) + \\ &+\frac{9}{2b_j 70}e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\mathbf{V}^{i+1,i+2}(x)\end{aligned} \tag{2.83}$$

Loi de comportement d'interface

On reprend l'équation de comportement d'interface du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$:

$$\tau_\alpha^{j,j+1}(x,y) = k_\alpha^{j,j+1}\gamma_\alpha^{j,j+1}(x,y) \tag{2.84}$$
$$\nu^{j,j+1}(x,y) = k_3^{j,j+1}\gamma_3^{j,j+1}(x,y) \tag{2.85}$$

En intégrant sur $y \in [-b_i, b_i]$ la première équation de (Eq. 2.84) et l'équation (Eq. 2.85), nous obtenons deux équations de comportement du modèle de poutre associé :

$$\mathbf{T}_1^{j,j+1}(x) = 2b_j k_1^{j,j+1}\Omega_1^{j,j+1}(x) \tag{2.86}$$
$$\mathbf{V}^{j,j+1}(x) = 2b_j k_3^{j,j+1}\Omega_3^{j,j+1}(x) \tag{2.87}$$

Récapitulatif des équations et des champs généralisés

Champs généralisés pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$:

- Efforts intérieurs généralisés $\mathbf{N}_1^i(x), \mathbf{M}_1^i(x), \mathbf{Q}_1^i(x), \mathbf{T}_1^{j,j+1}(x)$ et $\mathbf{V}^{j,j+1}$

- Déplacements généralisés $\mathbf{U}_1^i(x), \Phi_1^i(x)$ et $\mathbf{U}_3^i(x)$

- Déformations généralisées $\epsilon_1^i(x), \chi_1^i(x), \mathbf{d}_{\phi 1}^i(x), \mathbf{D}_1^{j,j+1}(x)$ et $\mathbf{D}_\nu^{j,j+1}$

Équations de compatibilité pour $i \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$:

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_1^i(x) = \mathbf{U}_{1,1}^i(x) \\
&\chi_1^i(x) = \Phi_{1,1}^i(x) \\
&\mathbf{d}_{\phi 1}^i(x) = \Phi_1^i(x) + \mathbf{U}_{3,1}^i(x) \\
&\mathbf{D}_1^{j,j+1}(x) = \mathbf{U}_1^{j+1}(x) - \mathbf{U}_1^j(x) - \frac{e^j}{2}\Phi_1^j(x) - \frac{e^{j+1}}{2}\Phi_1^{j+1}(x) \\
&\mathbf{D}_\nu^{j,j+1}(x) = \mathbf{U}_3^{j+1}(x) - \mathbf{U}_3^j(x)
\end{aligned}
$$

Équations d'équilibre pour $i \leq i \leq n$:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{N}_{1,1}^i(x) + \mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) = O \\
&\mathbf{Q}_{1,1}^i(x) + \mathbf{V}^{i,i+1}(x) - \mathbf{V}^{i-1,i}(x) = O \\
&\mathbf{M}_{1,1}^i(x) - \mathbf{Q}_1^i(x) + \frac{e^i}{2}\left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right) = O
\end{aligned}
$$

Équations de comportement pour $i \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$:

$$
\epsilon_1^i(x) = \left(\frac{S_{1111}^i}{2b_i e^i} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{S_{2211}^i}{2b_i e^i}\right)\mathbf{N}_1^i(x)
$$

$$
\chi_1^i(x) = \left(\frac{12S_{1111}^i}{2b_i (e^i)^3} - \frac{S_{1122}^i}{S_{2222}^i}\frac{12S_{2211}^i}{2b_i (e^i)^3}\right)\mathbf{M}_1^i(x)
$$

$$
\mathbf{d}_{\phi 1}^i(x) = \frac{6}{2b_i 5e^i}4S_{1313}^i\mathbf{Q}_1^i(x) - \frac{1}{2b_i 10}4S_{1313}^i\left(\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) + \mathbf{T}_1^{i-1,i}(x)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_1^{j,j+1}(x) - \Omega_1^{j,j+1}(x) = &-\frac{1}{2b_j 10}\left(4S_{1313}^i\mathbf{Q}_1^i(x) + 4S_{1313}^{i+1}\mathbf{Q}_1^{i+1}(x)\right) - \frac{e^i}{2b_j 30}4S_{1313}^i\mathbf{T}_1^{i-1,i}(x) + \\
&+\frac{2}{2b_j 15}\left(e^i 4S_{1313}^i + e^{i+1}4S_{1313}^{i+1}\right)\mathbf{T}_1^{i,i+1}(x) - \frac{e^{i+1}}{2b_j 30}4S_{1313}^{i+1}\mathbf{T}_1^{i+1,i+2}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_\nu^{j,j+1}(x) - \Omega_3^{j,j+1} = &\frac{9}{2b_j 70}e^i S_{3333}^i\mathbf{V}^{i-1,i}(x) + \frac{13}{2b_j 35}\left(e^i S_{3333}^i + e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\right)\mathbf{V}^{i,i+1}(x) + \\
&+\frac{9}{2b_j 70}e^{i+1}S_{3333}^{i+1}\mathbf{V}^{i+1,i+2}(x)
\end{aligned}
$$

Équations de comportement d'interface pour $1 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_1^{j,j+1}(x) &= 2b_j k_1^{j,j+1} \Omega_1^{j,j+1}(x) \\ \mathbf{V}^{j,j+1}(x) &= 2b_j k_3^{j,j+1} \Omega_3^{j,j+1}(x)\end{aligned}$$

Conditions aux limites en efforts généralisés sur $\partial\omega$ pour $i \leq i \leq n$:

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{N}_{1,1}^i(x) = \mathbf{N}_d^i \\ \mathbf{M}_{1,1}^i(x) = \mathbf{M}_d^i \\ \mathbf{Q}_1^i(x) = \mathbf{Q}_d^i \end{array} \right. \tag{2.88}$$

2.2.3 Modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres mixtes à connexion imparfaite - Résolution analytique et validation par les EF

Les équations d'un modèle de poutre multicouche à connexion imparfaite viennent d'être établies dans la partie précédente. Nous avons réussi à introduire la raideur de cisaillement et la raideur d'arrachement pour mieux prendre en compte la connexion imparfaite entre les couches. Le présent paragraphe présente une application dans le cas d'une poutre mixte. La résolution analytique du système d'équations va être présentée. Un calcul éléments finis réalisé sous Abaqus nous permet de valider ce modèle.

Système d'équations

Champs inconnus du problème :

- Efforts normaux
$$\mathbf{N}_1^1(x), \mathbf{N}_1^2(x)$$
- Moments fléchissants
$$\mathbf{M}_1^1(x), \mathbf{M}_1^2(x)$$
- Efforts tranchants
$$\mathbf{Q}_1^1(x), \mathbf{Q}_1^2(x)$$
- Efforts de cisaillement
$$\mathbf{T}_1^{1,2}(x)$$
- Efforts d'arrachement
$$\mathbf{V}^{1,2}(x)$$
- Déplacements généralisés
$$\mathbf{U}_1^1(x), \mathbf{U}_1^2(x), \mathbf{U}_3^1(x), \mathbf{U}_3^2(x)$$
- Rotations généralisées
$$\Phi_1^1(x), \Phi_1^2(x)$$
- Glissement d'interface
$$\Omega_1^{1,2}(x) \quad \text{et} \quad \Omega_3^{1,2}(x)$$

Équations de compatibilité :

$$\epsilon_1^1(x) = \mathbf{U}_{1,1}^1(x) \tag{2.89}$$
$$\epsilon_1^2(x) = \mathbf{U}_{1,1}^2(x) \tag{2.90}$$
$$\chi_1^1(x) = \Phi_{1,1}^1(x) \tag{2.91}$$
$$\chi_1^2(x) = \Phi_{1,1}^2(x) \tag{2.92}$$
$$\mathbf{d}_{\phi 1}^1(x) = \Phi_1^1(x) + \mathbf{U}_{3,1}^1(x) \tag{2.93}$$

$$\mathbf{d}^2_{\phi 1}(x) = \Phi^2_1(x) + \mathbf{U}^2_{3,1}(x) \tag{2.94}$$

$$\mathbf{D}^{1,2}_1(x) = \mathbf{U}^2_1(x) - \mathbf{U}^1_1(x) - \frac{e^1}{2}\Phi^1_1(x) - \frac{e^2}{2}\Phi^2_1(x) \tag{2.95}$$

$$\mathbf{D}^{1,2}_\nu(x) = \mathbf{U}^2_3(x) - \mathbf{U}^1_3(x) \tag{2.96}$$

Équations d'équilibre :

$$\mathbf{N}^1_{1,1} + \mathbf{T}^{1,2}_1 = 0 \tag{2.97}$$

$$\mathbf{N}^2_{1,1} - \mathbf{T}^{1,2}_1 = 0 \tag{2.98}$$

$$\mathbf{Q}^1_{1,1} + \mathbf{V}^{1,2} = 0 \tag{2.99}$$

$$\mathbf{Q}^2_{1,1} - \mathbf{V}^{1,2} + \mathbf{V}^{2,3} = 0 \tag{2.100}$$

$$\mathbf{M}^1_{1,1} - \mathbf{Q}^1_1 + \frac{e^1}{2}\mathbf{T}^{1,2}_1 = 0 \tag{2.101}$$

$$\mathbf{M}^2_{1,1} - \mathbf{Q}^2_1 + \frac{e^2}{2}\mathbf{T}^{1,2}_1 = 0 \tag{2.102}$$

Loi de comportement :

$$\epsilon^1_1 = \left(\frac{S^1_{1111}}{2b_1e^1} - \frac{S^1_{1122}}{S^1_{2222}}\frac{S^1_{2211}}{2b_1e^1}\right)\mathbf{N}^1_1 \tag{2.103}$$

$$\epsilon^2_1 = \left(\frac{S^2_{1111}}{2b_2e^2} - \frac{S^2_{1122}}{S^2_{2222}}\frac{S^2_{2211}}{2b_2e^2}\right)\mathbf{N}^2_1 \tag{2.104}$$

$$\chi^1_1 = \left(\frac{12S^1_{1111}}{2b_1(e^1)^3} - \frac{S^1_{1122}}{S^1_{2222}}\frac{12S^1_{2211}}{2b_1(e^1)^3}\right)\mathbf{M}^1_1 \tag{2.105}$$

$$\chi^2_1 = \left(\frac{12S^2_{1111}}{2b_2(e^2)^3} - \frac{S^2_{1122}}{S^2_{2222}}\frac{12S^2_{2211}}{2b_2(e^2)^3}\right)\mathbf{M}^2_1 \tag{2.106}$$

$$\mathbf{d}^1_{\phi 1} = \frac{6}{2b_1 5e^1}4S^1_{1313}\mathbf{Q}^1_1 - \frac{1}{2b_1 10}4S^1_{1313}\mathbf{T}^{1,2}_1 \tag{2.107}$$

$$\mathbf{d}^2_{\phi 1} = \frac{6}{2b_2 5e^2}4S^2_{1313}\mathbf{Q}^2_1 - \frac{1}{2b_2 10}4S^2_{1313}\mathbf{T}^{1,2}_1 \tag{2.108}$$

$$\mathbf{D}^{1,2}_1 - \Omega^{1,2}_1 = -\frac{1}{2b_1 10}\left(4S^1_{1313}\mathbf{Q}^1_1 + 4S^2_{1313}\mathbf{Q}^2_1\right) + \frac{2}{2b_1 15}\left(e^1 4S^1_{1313} + e^2 4S^2_{1313}\right)\mathbf{T}^{1,2}_1 \tag{2.109}$$

$$\mathbf{D}^{1,2}_\nu - \Omega^{1,2}_3 = \frac{13}{2b_1 35}\left(e^1 S^1_{3333} + e^2 S^2_{3333}\right)\mathbf{V}^{1,2} + \frac{9}{2b_1 70}e^2 S^2_{3333}\mathbf{V}^{2,3} \tag{2.110}$$

Loi de comportement d'interface :

$$\mathbf{T}^{1,2}_1 = 2b_1 k^{1,2}_1 \Omega^{1,2}_1 \tag{2.111}$$

$$\mathbf{V}^{1,2} = 2b_1 k^{1,2}_3 \Omega^{1,2}_3 \tag{2.112}$$

Nous avons au total 16 inconnues du problème :

$$\mathbf{N}^1_1, \mathbf{N}^2_1, \mathbf{M}^1_1, \mathbf{M}^2_1, \mathbf{Q}^1_{1,1}, \mathbf{Q}^2_{1,1}, \mathbf{T}^{1,2}_1, \mathbf{V}^{1,2}$$

$$\mathbf{U}^1_{1,1}, \mathbf{U}^2_{1,1}, \Phi^1_{1,1}, \Phi^2_{1,1}, \mathbf{U}^1_3, \mathbf{U}^2_3, \Omega^{1,2}_1, \Omega^{1,2}_3$$

et 12 équations différentielles (Eq. 2.89 à Eq. 2.94), (Eq. 2.97 à Eq. 2.102) et 4 équations algébriques (Eq. 2.95), (Eq. 2.96), (Eq. 2.111) et (Eq. 2.112). Les calculs détaillés de la résolution analytique se situent en annexe C.

Calcul aux éléments finis et identification des raideurs d'interface

Nous reprenons l'exemple de poutre mixte bois-BHP fibré (cf. 2.1.6) (Fig. 2.9). Notons ici que la longueur de la poutre est un paramètre pour l'étude paramétrique.

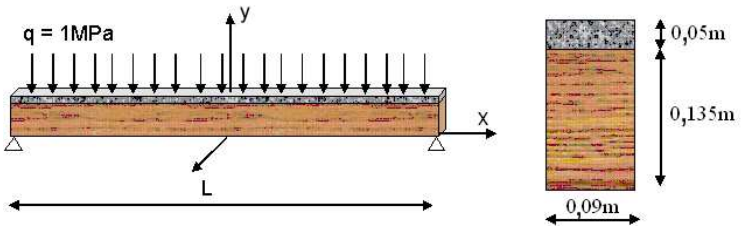


FIG. 2.9 – Poutre mixte bois-BHP fibré

Comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, le calcul de la structure mixte dépend surtout de l'état de la connexion entre deux couches de matériaux. Le modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté au problème de poutre mixte à connexion imparfaite possède deux paramètres qui caractérisent l'état de l'interface entre deux couches. En réalité, ces deux paramètres sont déterminés à partir d'essais de cisaillement et d'essais d'arrachement. Dans le but de valider notre modèle, nous avons réalisé un calcul aux éléments finis sous Abaqus. Une couche mince de matériau isotrope élastique linéaire, appelée couche intermédiaire, a été introduite entre les deux couches. Le choix des caractéristiques de cette couche permet de définir un état de connexion entre deux couches. Le calcul dans Abaqus est un calcul 2D avec une hypothèse de contrainte plane. Les caractéristiques du bois et du béton sont définies précédemment. La couche de bois est en appuis simples à ces extrémités (Fig. 2.10).

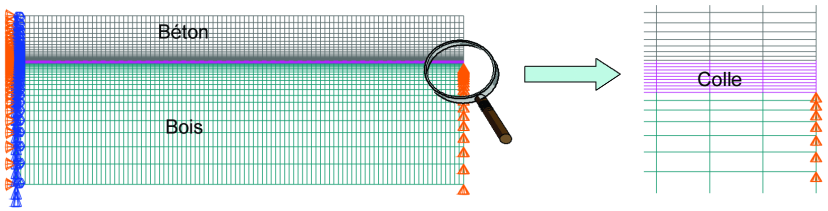


FIG. 2.10 – Modélisation des éléments finis

Le calcul aux éléments finis nous permet d'identifier les raideurs d'interface du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ *adapté*. Ce dernier consiste à remplacer la couche intermédiaire par une interface avec une loi constitutive. On retrouve ce type de calcul dans un travail portant sur une étude de maçonnerie

pour laquelle des mortiers situés entre des briques sont remplacés par une interface avec une loi constitutive [Cecchi *et al.*, 2002]. Pour pouvoir étudier l'influence des propriétés des mortiers sur la loi constitutive obtenue, un paramètre α est introduit qui est le rapport entre la raideur des mortiers et des autres matériaux. Un autre paramètre β est aussi introduit qui représente le rapport entre l'épaisseur des couches des mortiers et des autres matériaux. Les raideurs de la loi d'interface sont ensuite exprimées en fonction de ces coefficients.

Pour notre problème, nous avons choisi une épaisseur $e = 3mm$ pour la couche intermédiaire. Cela correspond à fixer $\beta = 0,06$. Nous allons faire varier le coefficient α pour étudier l'état de connexion entre deux couches de matériaux en traçant l'évolution de la flèche de la poutre ($L = 1m$) en fonction du module d'Young E_{int} de la couche intermédiaire (Fig. 2.11). On montre que la raideur de la poutre varie effectivement quand le module de la couche intermédiaire E_{int} est inférieur à $300MPa$.

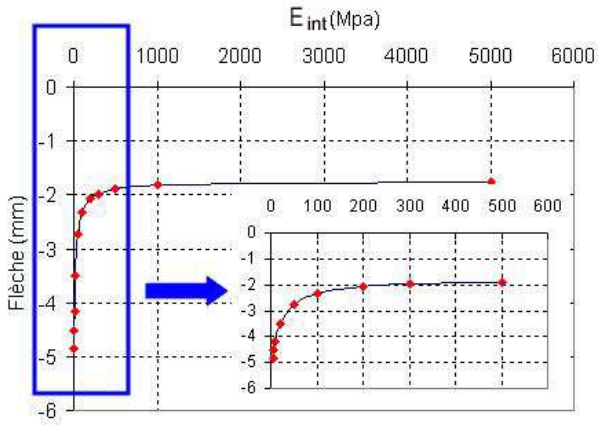


Fig. 2.11 – Flèche de la poutre en fonction du module d'Young E_{int} de couche intermédiaire

Abaqus ne nous permet d'accéder qu'à l'ensemble des contraintes et des déformations en valeur moyenne par éléments ou sur les points d'intégration. Par contre, nous pouvons accéder à l'ensemble des déplacements aux noeuds. Nous appelons C une tranche de noeuds dans la colle proche du béton et W une tranche proche du bois (Fig. 2.12). Désormais quand nous parlerons de contraintes selon les tranches, il s'agira des valeurs moyennes aux points d'intégration autour des noeuds.

Les résultats du calcul aux éléments finis sous Abaqus montrent que la contrainte de cisaillement et d'arrachement dans la couche intermédiaire sont quasi constantes en z (Fig. 2.13). Nous considérons alors la contrainte de cisaillement et d'arrachement selon la tranche C comme la contrainte de cisaillement et d'arrachement dans la couche intermédiaire. L'identification de la raideur en cisaillement k_1 (Eq. 2.111) consiste alors à exprimer la contrainte de cisaillement dans la couche intermédiaire en fonction du glissement d'interface qui est la différence de déplacement horizontal suivant x des deux tranches C et W. De plus, l'identification de la raideur d'arrachement k_3 (Eq. 2.112) consiste à exprimer la contrainte d'arrachement dans la couche intermédiaire

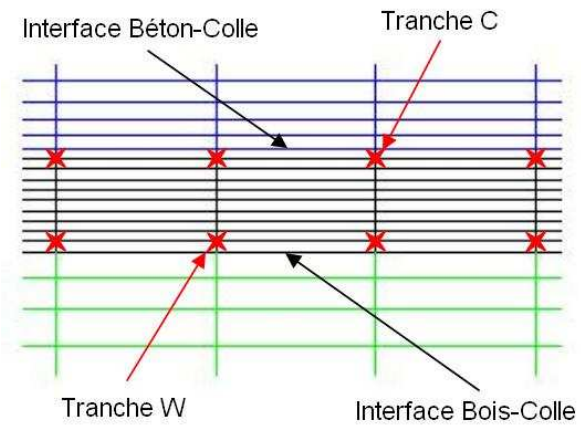
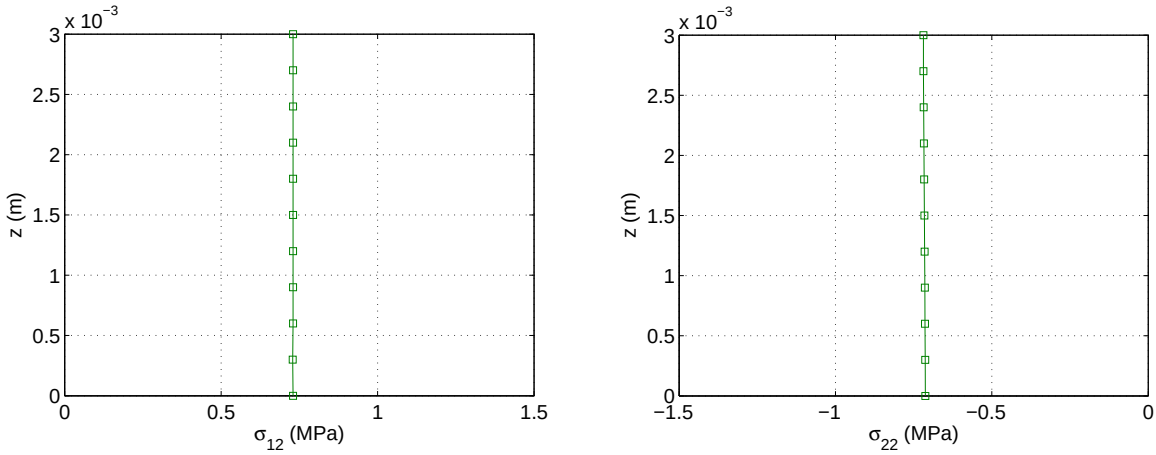


FIG. 2.12 – Tranche d'élément dans la couche intermédiaire pour l'identification des raideur

en fonction de l'arrachement qui est la différence de déplacement vertical des deux tranches C et W.



(a) Contrainte de cisaillement

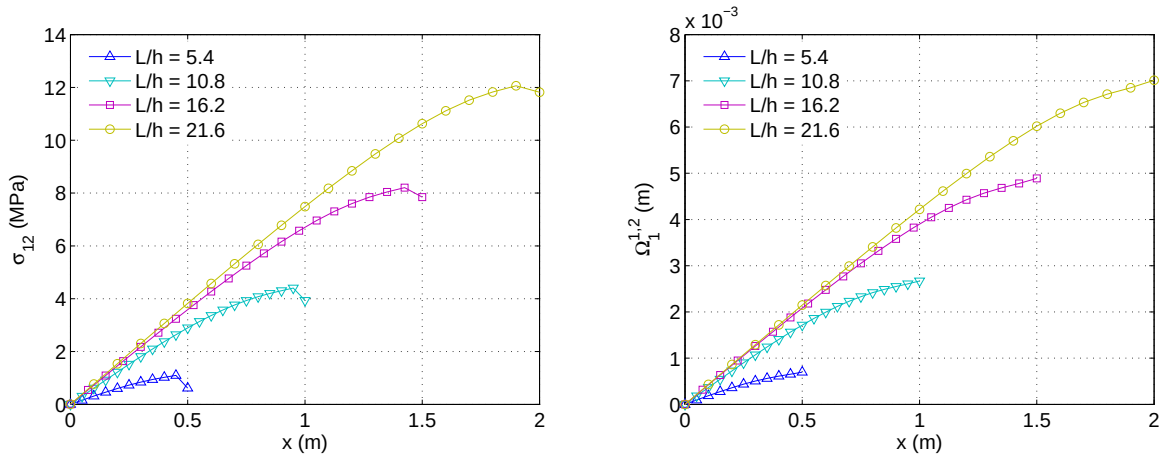
(b) Contrainte d'arrachement

FIG. 2.13 – Contrainte de cisaillement et d'arrachement en z dans la couche intermédiaire pour la poutre $h/L = 5,4$

Le calcul sous Abaqus nous montre aussi l'effet de bord aux extrémités de la poutre (Fig. 2.14). Par la suite, l'identification des raideurs sera faite dans une zone située suffisamment loin des extrémités de la poutre.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus dans le cas où $E_{int} = 10MPa$. Sur la figure (Fig. 2.14(a)) nous présentons l'évaluation de la contrainte de cisaillement dans la couche intermédiaire le long de la poutre pour différentes valeurs d'élancement. De même, sur la figure (Fig. 2.14(b)) nous présentons l'évaluation du glissement d'interface le long de la poutre pour les

mêmes valeurs d'élancement.



(a) Contrainte en cisaillement (b) Glissement d'interface

Fig. 2.14 – Contrainte en cisaillement et glissement pour quatre différents élancements

On peut alors tracer les courbes contraintes de cisaillement-glissement d'interface pour les quatre valeurs d'élancement (Fig. 2.15), ces courbes étant paramétrées par l'abscisse x de la poutre.

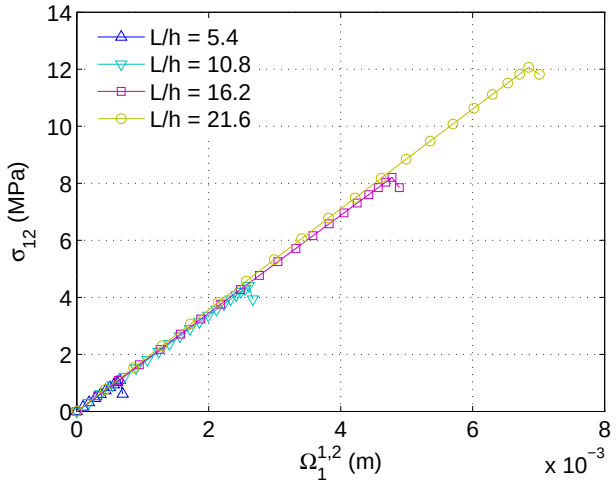


Fig. 2.15 – Courbes paramétrées contrainte de cisaillement-glissement

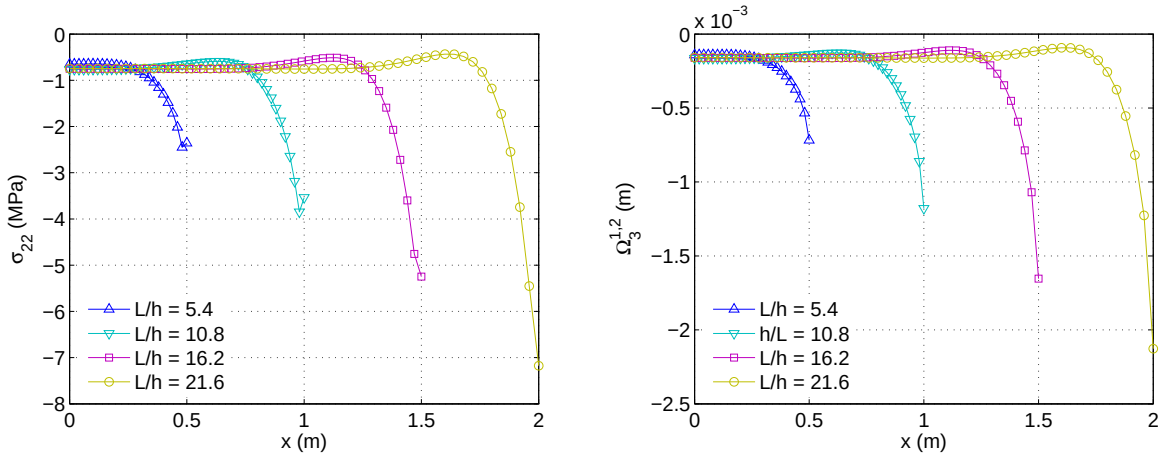
La linéarité de ces courbes montre que la raideur de cisaillement identifiée est constante le long de la poutre pour un élancement donné. De plus, nous obtenons des valeurs de raideur en cisaillement quasi identiques pour les différents élancements étudiés (Tab. 2.1).

De la même manière, nous obtenons les courbes de contrainte d'arrachement dans la couche

Élancement L/h	5.4	9.8	16.2	21.6
$k_1(MPa/m)$	1671	1688	1722	1775

TAB. 2.1 – Raideurs de cisaillement correspondant au cas $E_g = 10MPa$

intermédiaire et l'arrachement d'interface entre deux couches pour différents élancements (Fig. 2.16).



(a) Contrainte d'arrachement

(b) Arrachement d'interface

FIG. 2.16 – Contrainte d'arrachement et arrachement pour quatre différents élancements

Nous obtenons ensuite les courbes contrainte d'arrachement-arrachement d'interface paramétrées par l'abscisse x pour les différents élancements (Fig. 2.17).

Ces courbes nous permettent de déterminer la raideur d'arrachement pour quatre différents élancement (Tab.2.2). Il est important de noter que les singularités aux extrémités observées sont dues à un "artefact" numérique du calcul éléments finis. Au delà de la zone d'effet de bord, la linéarité des courbes paramétrées montre aussi que la raideur d'arrachement k_3 est constante le long de la poutre. En comparant les valeurs obtenues pour les différents élancements, nous pouvons considérer que la raideur d'arrachement ne dépend pas de l'élancement de la poutre.

Élancement L/h	5.4	9.8	16.2	21.6
$k_3(MPa/m)$	4607	4642	4652	4665

TAB. 2.2 – Raideurs d'arrachement correspondant au cas $E_g = 10MPa$

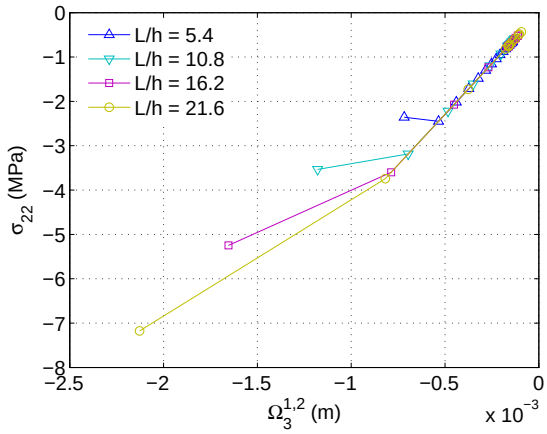


Fig. 2.17 – Courbes paramétrées contrainte d'arrachement-arrachement d'interface

Nous avons réalisé le même calcul dans le cas où $E_g = 500MPa$. Les raideurs identifiées sont cette fois dépendantes de l'élancement de la poutre (Fig. 2.18). En effet, l'indépendance de la raideur de cisaillement par rapport à l'élancement de la poutre vient du fait que l'on néglige deuxième terme de la déformation de cisaillement $U_{3,1}$ (Eq. 2.113). Dans le cas où le paramètre α est faible, i.e $E_g = 10MPa$, nous pouvons négliger ce terme, et, cela nous donne l'indépendance de la raideur de cisaillement par rapport à l'élancement. Au contraire, si α est grand, i.e $E_g = 500$, l'identification des raideurs d'interface dépend de l'élancement de la poutre.

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(U_{1,3} + U_{3,1}\right) \tag{2.113}$$

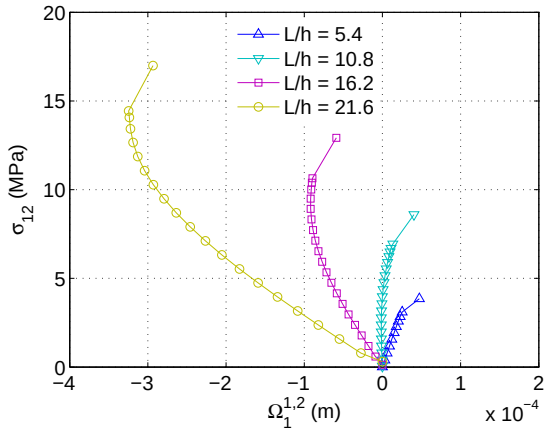


Fig. 2.18 – Courbes paramétrées contrainte de cisaillement-glissement dans le cas où $E_{int} = 500MPa$

Comparaison des solutions analytiques avec les calculs aux éléments finis

Le calcul aux éléments finis pour l'identification des raideurs d'interface a été réalisé avec différents élancements de la poutre. Nous trouvons que les raideurs obtenues dans le cas où $E_g = 10MPa$ sont quasi identiques pour les différents élancements de la poutre. Nous présentons donc dans cette partie la comparaison des résultats des solutions analytiques avec les résultats des calculs aux éléments finis pour un élancement $L/h = 5,4$.

Pour trouver les 12 coefficients différentiels de la résolution analytique du modèle proposé (Annexe C), nous avons les 12 conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1^1(x=0)=0 \\ \mathbf{U}_1^2(x=0)=0 \\ \Phi_1^1(x=0)=0 \\ \Phi_1^2(x=0)=0 \\ \mathbf{Q}_1^1(x=0)=0 \\ \mathbf{Q}_1^2(x=0)=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{N}_1^1(x=L/2)=0 \\ \mathbf{N}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{M}_1^1(x=L/2)=0 \\ \mathbf{M}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{Q}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{U}_3^1(x=L/2)=0 \end{cases} \tag{2.114}$$

La solution analytique est maintenant complètement établie. Le logiciel Maple a permis la résolution du système d'équations (Eq. 2.2.3) à l'aide des conditions aux limites (Eq. 2.114). Nous procédons maintenant à la comparaison entre la solution analytique du modèle proposé et les calculs aux éléments finis.

Déplacement vertical

Nous définissons d'abord les déplacements éléments finis approchés en s'inspirant des définitions des déplacements généralisés du modèle *$\mathcal{M}4$-5n adapté*. Le déplacement vertical moyen $\mathbf{U}_3^{EFi}$ de la couche i à l'abscisse $x = x_i$ est le suivant :

$$\mathbf{U}_3^{EFi}\Big|_{x=x_i} = \left.\frac{\mathbf{U}_3^{i0}\frac{(z_1-z_0)}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\mathbf{U}_3^{ij}\frac{(z_{j+1}-z_{j-1})}{2} + \mathbf{U}_3^{im}\frac{(z_m-z_{m-1})}{2}}{e}\right|_{x=x_i} \tag{2.115}$$

Avec : $\mathbf{U}_3^{ij}$, le déplacement vertical au noeud j dans la couche i ;

z_j, l'ordonnée du noeud j ;

m, le nombre des noeuds sur la section.

Les valeurs des déplacements verticaux moyens $\mathbf{U}_3^{EFi}$ éléments finis et des déplacements verticaux de deux couches $\mathbf{U}_3^i$ du modèle proposé sont représentés en (Fig. 2.19). Nous trouvons un bon accord entre les deux approches.

Effort de cisaillement et glissement

Nous présentons l'effort de cisaillement et le glissement obtenus par les deux approches (Fig. 2.20). Les résultats montrent une bonne concordance entre les deux approches. En particulier, le modèle proposé permet d'éviter l'effet de bord et de proposer une grandeur plus "physique" que celle des éléments finis.

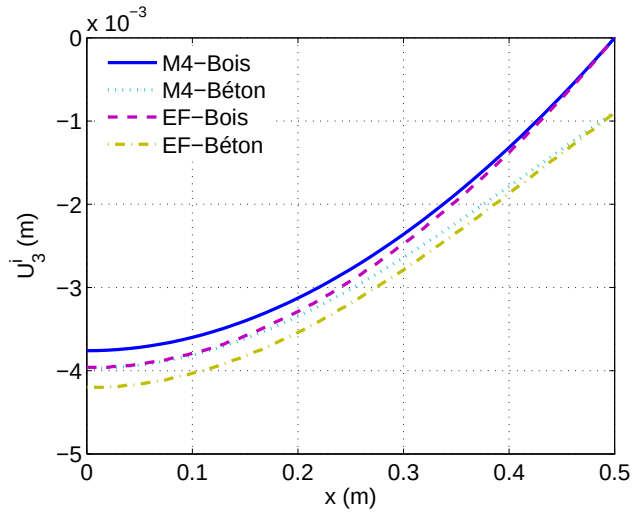
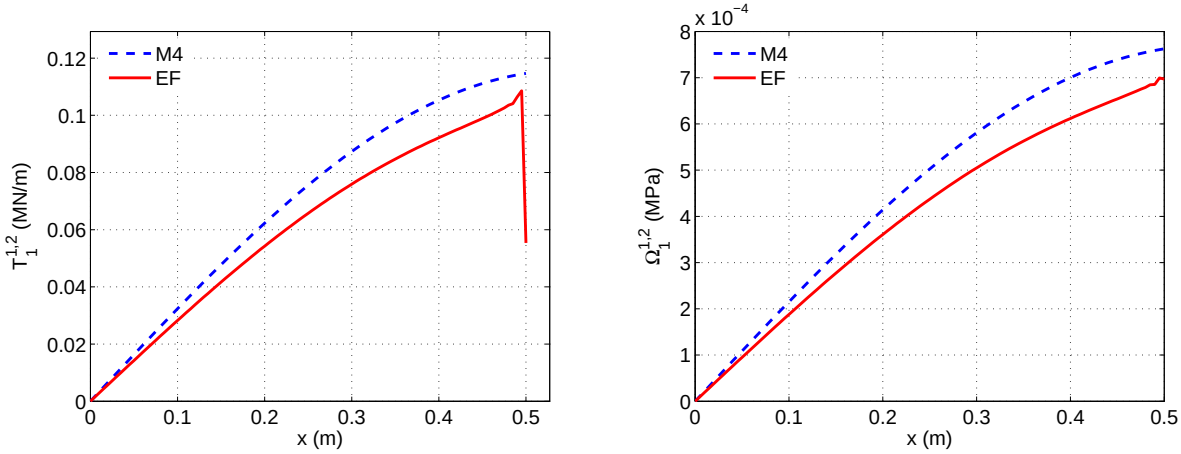


Fig. 2.19 – Déplacement vertical des éléments finis et du modèle proposé

Effort d'arrachement et arrachement

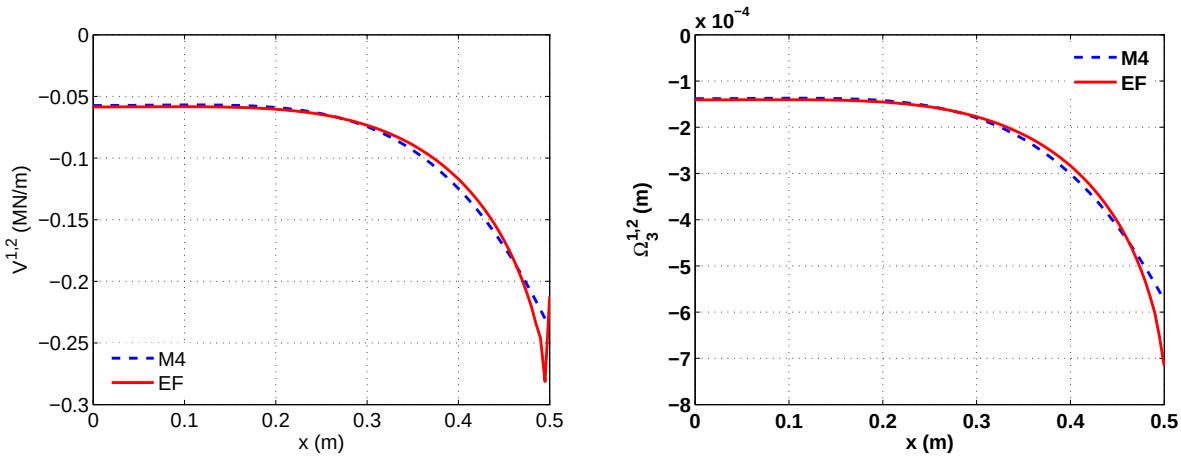
Nous présentons ici les efforts d'arrachement ainsi que l'arrachement à l'interface obtenus par les deux approches. Nous trouvons de nouveau une bonne concordance entre les deux calculs (Fig. 2.21).

En conclusion, nous trouvons que le modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres mixtes à connexion imparfaite fournit des résultats très proches des simulation EF.



(a) Effort de cisaillement (b) Glissement

FIG. 2.20 – Contrainte d'arrachement et arrachement d'interface par les deux approches



(a) Contrainte d'arrachement (b) Arrachement

FIG. 2.21 – Contrainte d'arrachement et arrachement par les deux approches

2.3 Comparaison des modèles

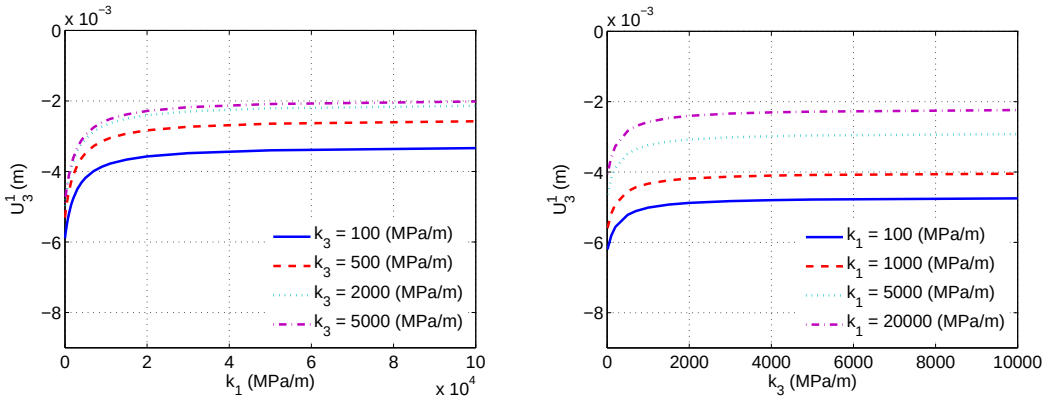
Nous proposons dans ce paragraphe une étude paramétrique appliquée au modèle proposé et au modèle classique. Nous reprenons la géométrie de l'exemple de la poutre mixte bois-BHP fibré présenté dans le paragraphe précédent (Fig. 2.9). On présente l'influence des paramètres suivants sur le comportement de la poutre :

- Raideur de cisaillement k_1 ;

- Raideur d'arrachement k_3 ;

- Élancement des poutres L/h ;

Nous présentons sur la figure (Fig. 2.22) l'évolution de la flèche de la poutre en fonction de la raideur de cisaillement et de la raideur d'arrachement dans le cas $L/h = 5,4$. Nous constatons que lorsque $k_1 < 40000(MPa/m)$ et $k_3 < 4000(MPa/m)$, l'influence des raideurs d'interface k_1 et k_3 sur la raideur globale de la poutre est significative.



(a) U_3^1 en fonction de k_1

(b) U_3^1 en fonction de k_3

Fig. 2.22 – Déplacement vertical de la couche bois en fonction des raideurs d'interface

Nous avons vu dans la partie bibliographique que le modèle classique ne tient pas compte des déformations dans les couches. Nous avons proposé un nouveau modèle qui permet d'en tenir compte. Nous allons maintenant présenter une étude paramétrique des deux modèles pour mettre en évidence l'influence de la déformation de cisaillement ainsi que l'élancement sur le comportement de la poutre. Comme nous pouvons dans notre modèle introduire la raideur d'arrachement ce qui n'est pas possible dans le modèle classique nous nous approchons d'un cas sans arrachement d'interface pour faire la comparaison entre les deux modèles en prenant $k_3 = 1000000(MPa/m)$. Sur la figure (Fig. 2.23), on trace le ratio entre le déplacement vertical obtenu avec le modèle proposé et le déplacement vertical obtenu avec le modèle classique pour différents élancements et différentes raideurs de cisaillement k_1.

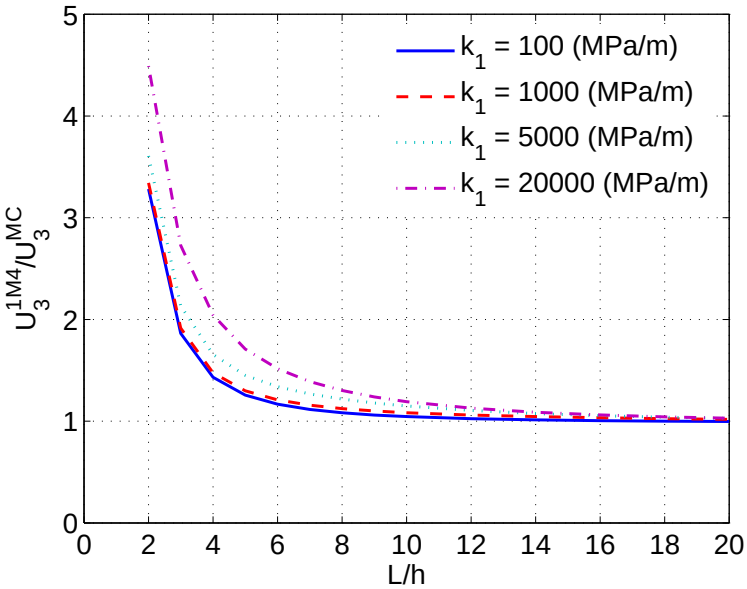


FIG. 2.23 – Influence de la déformation de cisaillement et de la raideur de cisaillement sur le déplacement vertical

Nous trouvons que l'influence de la déformation de cisaillement sur la raideur de la poutre augmente quand l'élancement L/h diminue et la raideur de cisaillement k_1 augmente. Dans le cas où $L/h = 4$ et $k_1 = 20000(MPa/m)$, nous trouvons une augmentation de 100% de la flèche de la poutre.

2.4 Conclusion

Une solution formelle du modèle classique de poutre mixte à connexion imparfaite a été présentée dans ce chapitre. Nous avons adapté les équations du modèle $\mathcal{M}4$-*5n* aux problèmes de multicouches à connexion imparfaite. Ce modèle permet de tenir compte des déformations de cisaillement qui ne sont pas prises en compte dans le modèle classique. Par l'intégration des équations de ce modèle, nous avons adapté les équations aux problèmes de poutres multicouches à connexion imparfaite. Une application aux poutres mixtes à connexion imparfaite a été traitée. La comparaison avec le calcul éléments finis nous permet de valider le modèle $\mathcal{M}4$-*5n adapté*.

Chapitre 3

Essais exploratoires sur différents systèmes de connexion pour poutres mixtes

Nous avons proposé dans la partie précédente de la thèse un outil de dimensionnement de structure mixte à connexion imparfaite. Nous présentons maintenant les études expérimentales réalisées dans le cadre de la thèse qui permettent de sélectionner le système de connexion Bois-Béton le plus performant pour le valider ensuite en fatigue.

L'évaluation du comportement des systèmes de connexion s'effectue traditionnellement par des essais de cisaillement (cf. 1.5.1). Le principe de ce type d'essai est simple mais son interprétation reste délicate. En effet, dans le cas de connecteurs linéiques ou par collage, des concentrations de contraintes apparaissent au bord [Hadj-Ahmed *et al.*, 2001], concentrations dont il faut tenir compte lors de l'exploitation. Dans l'optique de réaliser des essais exploratoires à la fois simples, proches des phénomènes à étudier, il a été décidé de réaliser des essais en flexion trois points.

Dix neuf poutres ont été fabriquées. Les poutres sont constituées d'une couche supérieure de béton fibré à très hautes performances, connectée à une poutrelle en bois lamellé-collé, réalisant la couche inférieure. Pour avoir une vision générale sur l'ensemble des systèmes de connexion, chaque type de connecteurs choisi a été testé sur 2 poutres, hormis le test de la liaison par collage qui a fait l'objet de 3 poutres. Les proportions relatives des 2 matériaux ont été ajustées de manière à maximiser la contrainte de cisaillement à l'interface. Le calcul a été fait dans le cas d'une connexion parfaite pour positionner l'axe neutre au plus près de l'interface.

3.1 Dimension des éprouvettes et propriétés des matériaux

Les dix neuf poutres ont : $1,3m$ de longueur, $0,09m$ de largeur pour les deux couches, et $0,185m$ de hauteur dont $0,05m$ de béton et $0,135m$ de bois. La portée est d'un mètre (Fig 3.1).

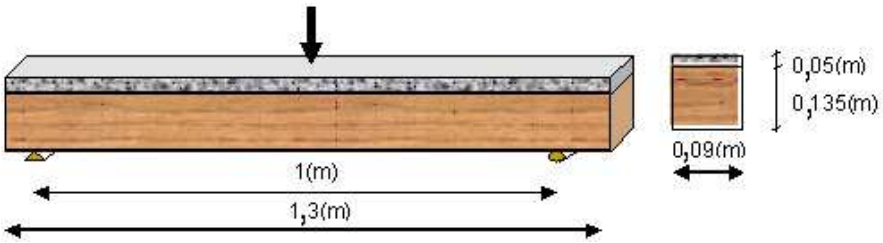


FIG. 3.1 – Géométrie des poutres en flexion

La partie "bois" de la poutre est constituée d'une poutrelle en lamellé collé de classe $GL28$. Les propriétés caractéristiques du bois $GL28$ peuvent être trouvées dans les Eurocodes [EC5-1-1, 1995] et sont les suivantes (Tab. 3.1).

Propriétés de résistance en MPa	
Flexion	28
Traction axiale	17,5
Compression axiale	25,5
Cisaillement	2,5
Propriétés de rigidité en GPa	
Module d'élasticité axial	12,5
Module de cisaillement	0,78
Masse volumique en kg/m^3	380

TAB. 3.1 – Propriétés du bois lamellé collé GL28

La partie "béton" est réalisée à l'aide d'un béton fibré à très hautes performances (BTHP fibré) de résistance moyenne à 28 jours de $120MPa$, dosé à $1,5\%$ de fibres métalliques de longueur $14mm$. Le module théorique est de $45GPa(\pm 3GPa)$. Les composants utilisés pour $1m^3$ du béton avec des granulats secs sont détaillés dans le tableau (Tab. 3.2). Les éprouvettes cylindriques $\phi 16H32$ sont

Composants	**Caractéristique**	**Masse (Kg)**
Gravillon	3mm-10mm	830 (58%)
Sable	0mm-3mm	762 (47%)
Ciment	CEMI 52,5N	650 (E/C = 0,27)
Eau		185,3
Superplastifiant	Optima 175	12,8

TAB. 3.2 – Formulation du BHP fibré pour $1m^3$

réalisées lors du coulage des poutres. Les résultats de résistance en compression sont présentés dans

le tableau (Tab. 3.3).

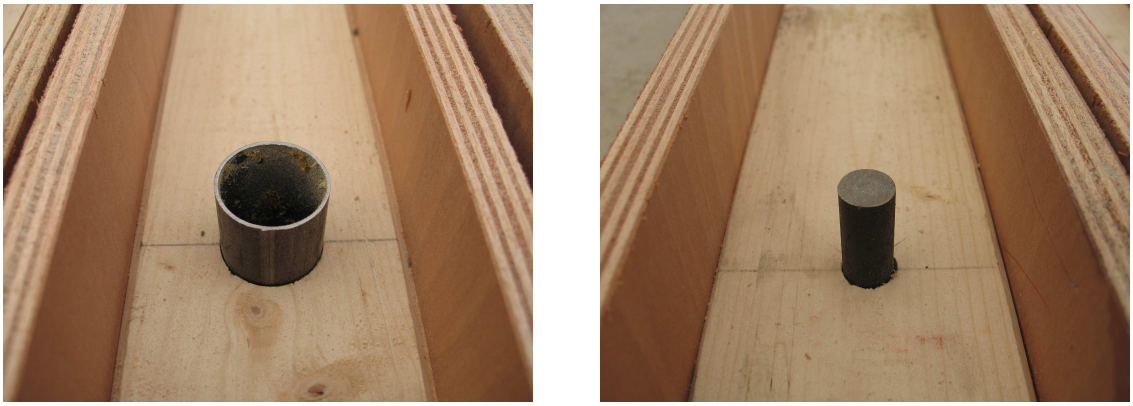
Éprouvette	Temps	Résistance (MPa)
1	Après une semaine	110
2	Après 4 semaines	122
3	Après 4 semaines	119

Tab. 3.3 – Résistance du béton

Les systèmes de connexion ont fait l'objet d'une étude bibliographique (Paragraphe 1.3). On distingue les systèmes de connexion réalisés par des entailles [Deperraz, 1998] et [Martino, 2005], par des éléments mécaniques, comme des clous [Ahmadi *et al.*, 1993], des tubes métalliques [Alain, 1988] et [Raymond, 1995], des plaques métalliques [Bathon *et al.*, 2005], ou bien par collage [Pincus, 1970] et [Maurice *et al.*, 2000]. Dans cet ensemble, trois familles différentes peuvent être distinguées : la famille des connecteurs locaux, celle des connecteurs continus métalliques et enfin celle par collage.

Nous avons choisi 6 types de connecteurs couvrant ces 3 familles pour réaliser les essais exploratoires :

– Connexion locale par tiges ou tubes (Fig. 3.2). Les tiges sont des barres cylindriques de $15mm$ de diamètre. Les tubes ont un diamètre extérieur de $30mm$ et une épaisseur de $1,5mm$. Ces connecteurs sont collés dans des trous percés dans le bois sur une profondeur de $50mm$ et sont ancrés dans le béton sur $30mm$. Chaque poutre possède quatre connecteurs locaux dont deux sur l'axe de l'appui et deux autres à une distance de $30cm$ par rapport à celui sur l'appui ;



(a) Tubes (b) Tiges

Fig. 3.2 – Connecteurs locaux par tubes et tiges

– Bande de métal déployé (Fig. 3.3(a)). La bande de métal déployé est insérée dans une rainure pratiquée dans le bois sur une profondeur de $50mm$ et collée à l'époxy. Elle est noyée dans le béton sur $30mm$ de profondeur ;

- Bande de plaque à pointes (Fig. 3.3(b)). La poutre en bois est découpée en deux et les plaques à pointes sont clouées sur chaque partie. Les deux parties sont ensuite assemblées et collées à l'époxy et maintenues en compression transversale par des tiges filetées précontraintes. Les profondeurs de pénétration sont les mêmes que précédemment.
- Ruban métallique perforé (Fig. 3.3(c)). La conception est la même que précédemment. Le métal déployé est remplacé par une bande métallique trouée d'épaisseur $1,5mm$.

(a) MD

(b) PAP

(c) Ruban

Fig. 3.3 – Connecteurs continus

- Collage (Fig. 3.4). Le béton est coulé sur la poutrelle en bois, puis décoffrée une fois durcie. La face de béton à encoller est ensuite sablée. L'assemblage par collage est effectué 7 jours après le coulage du béton. Une couche de colle de type époxy (Etancol 492) est appliquée sur chaque partie à coller sur une épaisseur de $1mm$ environ. L'ensemble est ensuite assemblé et maintenu en contact par une légère pression pendant $24heures$. Les corps d'épreuve sont ensuite placés dans un four à $45^{\circ}C$ pendant 24 heures. Les essais sont réalisés 4 jours après l'assemblage par collage.

L'identification des poutres est présentée dans le tableau (Tab. 3.4) :

Fig. 3.4 – Connexion par collage

Référence de poutre	Type de connecteur
P-MD31-1 et P-MD31-2	MD31
P-MD43-1 et P-MD43-2	MD43
P-MD51-1 et P-MD51-2	MD51
P-MD86-1 et P-MD86-2	MD86
P-PAP-1 et P-PAP-2	Plaque à pointes
P-RB-1 et P-RB-2	Ruban troué
P-Ti-1 et P-Ti-2	Tige-15mm
P-Tu-1 et P-Tu-2	Tube-30 :32mm
P-C-1, P-C-2 et P-C-3	Collage

Tab. 3.4 – Identification des 19 poutres

3.2 Métrologie et procédure d'essai

Les essais de flexion trois points ont été réalisés au LAMI sur une machine d'essai électromécanique MTS $20/M$ d'une capacité de $100kN$. Les essais ont été pilotés en déplacement à l'aide du logiciel Autotrac à une vitesse de chargement de $1mm/minute$ et de $3mm/minute$ pendant le déchargement. Le pilotage de l'essai est composé de trois phases principales (Fig. 3.5). La première phase consiste en trois cycles de charge-décharge de 5% à 30% de la charge à la rupture F_{Rup}(valeur déterminée par le pré-dimensionnement de la poutre). Elle permet de déterminer la raideur de la poutre. La deuxième phase est composée de trois cycles de charge-décharge allant de 5% à 60% de la charge à la rupture. Cette phase permet de déterminer le comportement des poutres dans le domaine plastique et aussi leur réversibilité. La dernière phase conduit la poutre à la rupture. Elle permet de déterminer le mode de rupture des poutres.

Cinq capteurs de déplacement $D1, D2, D3, D4, D5$ sont disposés pour mesurer la flèche et le

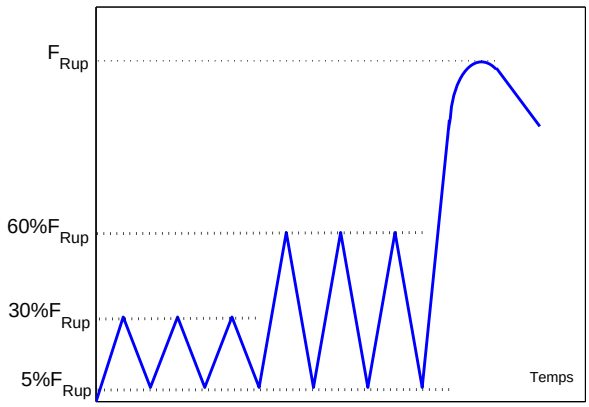


FIG. 3.5 – Schéma de pilotage des essais en flexion

glissement relatif à l'interface aux deux extrémités de la poutre. Le capteur $D1$ mesure la flèche totale. Le tassement d'appui est mesuré par les capteurs $D2, D3$. Les capteurs $D1, D2, D3$ ont $25(mm)$ de course. Les capteurs $D4, D5$ qui ont $10(mm)$ de course servent à mesurer les glissements aux deux extrémités de la poutre (Fig. 3.6).

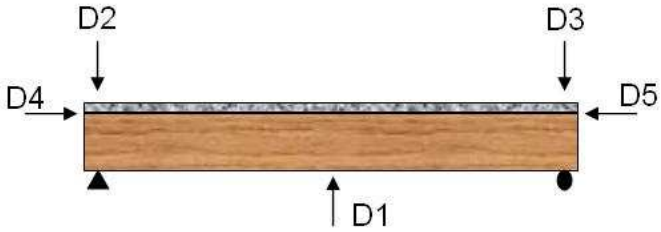


FIG. 3.6 – Disposition des capteurs

3.3 Résultats des essais

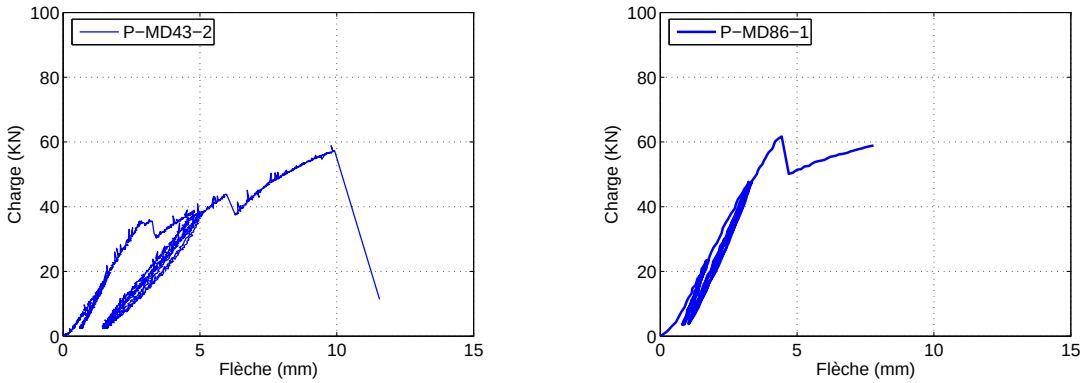
3.3.1 Modes de rupture des poutres

Les observations permettent de distinguer quatre modes de rupture principaux des poutres. Le premier mode de rupture est un décollement du connecteur par rapport au bois (mode $M1$). Il s'ensuit un développement de la rupture en traction dans le bois et le béton à mi-portée de la poutre (Fig. 3.7).

Ce mode de rupture apparaît pour les poutres ayant des connecteurs continus : $P-MD31-1$, $P-MD43-1$, $P-MD43-2$, $P-MD51-2$, $P-MD86-1$, $P-PAP-1$, $P-PAP-2$ et $P-RB2-2$. La diminution brutale de force observée sur les courbes force-flèche représente

Fig. 3.7 – Rupture en traction du bois et du béton

ce mode de ruine. Le décollement a lieu lorsque le chargement est encore faible pour la poutre $P-MD43-2$ (Fig. 3.8(a)). Ce dernier vient d'une mauvaise mise en place du collage de $MD43$ au bois. Au contraire, dans la plupart des poutres, le décollement se passe à un niveau de chargement plus grand (Fig. 3.8(b)).



(a) P-MD43-2

(b) P-MD86-1

Fig. 3.8 – Courbes force-flèche représentatives du mode de rupture $M1$

Le deuxième mode de ruine se développe suite à la diminution progressive de la raideur d'interface, ce qui engendre finalement une rupture dans la connexion ou par traction du béton et du bois (mode M2). En effet, on ne sait pas quel est le mécanisme initiateur car les ruptures surviennent rapidement. La dégradation de l'interface a pour origine des décollements locaux ou des déformations des parties métalliques. Ce mode de ruine apparaît pour les poutres : $P-MD31-2$, $P-MD51-1$, $P-MD86-2$ et $P-RB-1$. Nous trouvons un comportement plus ductile dans ce cas (Fig. 3.9).

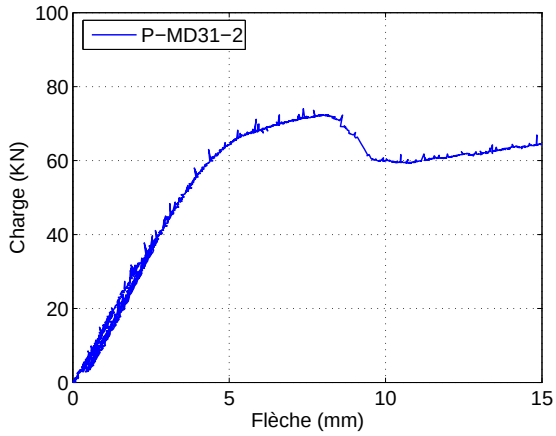


FIG. 3.9 – Courbe représentative force flèche du mode de rupture $M2$

Le troisième mode représente aussi une rupture brutale de la connexion mais il s'agit d'un arrachement du bois à l'interface (Fig. 3.10). La perte de liaison entre les 2 matériaux crée des

FIG. 3.10 – Rupture par arrachement du bois

contraintes de traction dans le béton et le bois. Il s'ensuit rapidement une rupture de celui-ci à mi portée comme dans le cas du premier mode de rupture. Une fois l'amorçage réalisé, la propagation de la surface de décollement est rapide. Ce mode de rupture apparaît pour la technique de collage (Fig. 3.11).

Enfin, on peut constater une rupture en traction ou en cisaillement du bois (mode M4). Ce mode de rupture apparaît pour les poutres avec connecteurs locaux $P - Ti - 2$, $P - Tu - 1$ et $P - Tu - 2$. Les flèches à la rupture sont importantes pour ces poutres. En effet, la déformation de l'interface est due à la compression locale du bois suivie de la flexion des tiges. Ce mécanisme

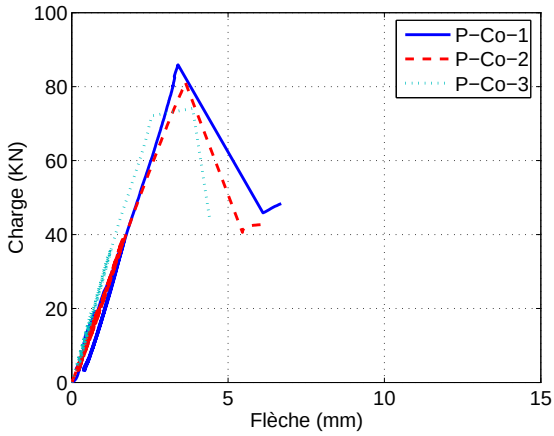


Fig. 3.11 – Courbes force flèche des trois poutres collées

peut absorber de grandes déformations (Fig. D.2(b)).

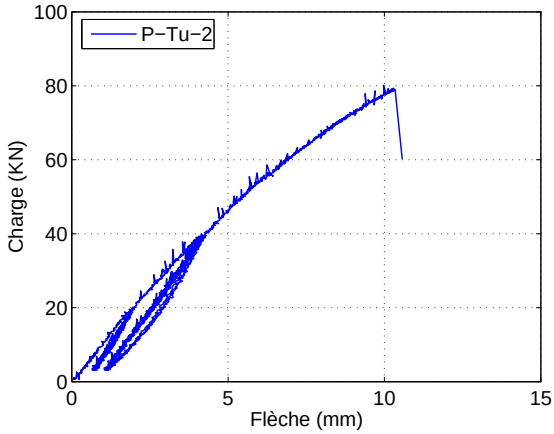


Fig. 3.12 – Courbe représentative force flèche du mode de rupture $M4$

On présente une synthèse des modes de rupture des poutres (Tab. 3.5).

Poutre	$F_{rup}(kN)$	Mode de rupture
P-Ti-1	70	M4
P-Ti-2	57	M4
P-Tu-1	59	M4
P-Tu-2	80	M4
P-MD31-1	66	M1
P-MD31-2	72	M2
P-MD43-1	52	M1
P-MD43-2	40	M1
P-MD51-1	73	M2
P-MD51-2	81	M1
P-MD86-1	61	M2
P-MD86-2	55	M1
P-PAP-1	85	M1
P-PAP-2	70	M1
P-RB-1	51	M2
P-RB-2	55	M1
P-C-1	86	M3
P-C-2	82	M3
P-C-3	74	M3

Tab. 3.5 – Charge de rupture et mode de rupture des poutres

3.3.2 Comportement élastique des poutres

Nous nous intéressons maintenant à la première phase qui est composée de trois cycles de chargement et de déchargement. La raideur de la poutre est définie comme le rapport entre l'effort appliqué et la flèche correspondante et elle est déterminée en moyennant les résultats des deux derniers chargements de la première phase de pilotage. Nous présentons dans le tableau les raideurs des poutres testées (Tab. 3.6).

Poutre	Raideur (kN/mm)
P-Ti-1	11,581
P-Ti-2	10,975
P-Tu-1	12,524
P-Tu-2	13,049
P-MD31-1	20,77
P-MD31-2	18,061
P-MD43-1	19,816
P-MD43-2	18,502
P-MD51-2	17,568
P-MD86-1	18,466
P-MD86-2	16,090
P-PAP-1	17,317
P-PAP-2	16,293
P-RB-1	17,794
P-RB-2	14,868
P-C-1	24,253
P-C-2	23,802
P-C-3	28,380

Tab. 3.6 – Raideur des poutres dans la phase élastique

On distingue trois familles de connecteurs fonction de la raideur moyenne des poutres. Les poutres à connecteurs locaux présentent une raideur moyenne de $12kN/m$. Les poutres à connecteurs continus ont une raideur moyenne de $17.77kN/m$. Enfin, les poutres collées possèdent une raideur moyenne de $23.82kN/m$ (Fig. 3.7).

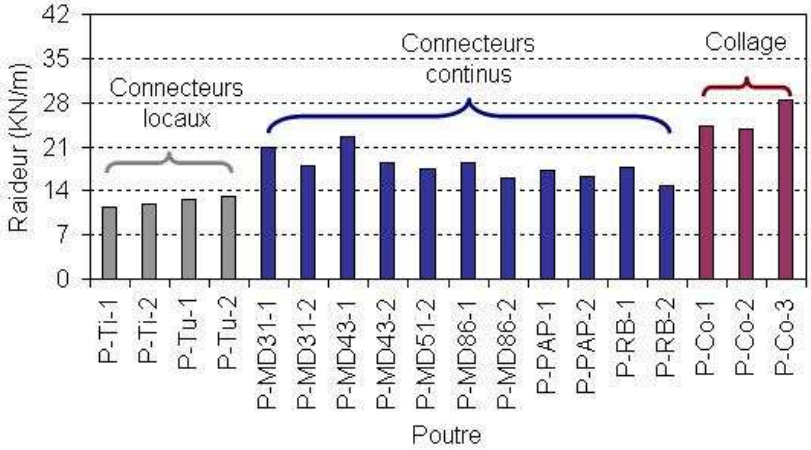


Fig. 3.13 – Raideur représentative des poutres

3.4 Traitement des résultats expérimentaux par les modèles

Nous proposons dans ce paragraphe le traitement des résultats expérimentaux par le modèle *$\mathcal{M}$4-5n adapté* et le modèle classique. Pour pouvoir comparer les deux modèles, nous avons introduit une raideur d'arrachement très grande de manière à se rapprocher d'un cas sans arrachement. Nous prenons alors $k_3 = 1000000(MPa/m)$.

Les douze conditions aux limites pour la résolution analytique du modèle proposé sont les suivantes (Eq. 3.1) :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1^1(x=0)=0 \\ \mathbf{U}_1^2(x=0)=0 \\ \Phi_1^1(x=0)=0 \\ \Phi_1^2(x=0)=0 \\ \mathbf{T}_1(x=0)=0 \\ \mathbf{Q}(x=0)=-F/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{N}_1^1(x=L/2)=0 \\ \mathbf{N}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{M}_1^1(x=L/2)=0 \\ \mathbf{M}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{Q}_1^2(x=L/2)=0 \\ \mathbf{U}_3^1(x=L/2)=0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Les six conditions aux limites pour la résolution analytique du modèle classique sont les suivantes :

$$\begin{cases} v'(x=0)=0 \\ \tau(x=0)=0 \\ Q(x=0)=-F/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x=L/2)=0 \\ v''(x=L/2)=0 \\ M(x=L/2)=0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Où F est le chargement au milieu de la poutre.

Les valeurs des flèches des poutres obtenues par l'expérience nous permettent d'identifier la raideur de cisaillement K du modèle classique ainsi que la raideur de cisaillement k_1 du modèle proposé. L'ensemble de ces valeurs est présenté dans le tableau (Tab. 3.7).

Poutre	$K(MN/m/m)$	$2bk_1(MPa/m)$
P-Ti-1	< 0	33
P-Ti-2	< 0	14
P-Tu-1	5	77
P-Tu-2	19	102
P-MD31-1	288	940
P-MD31-2	177.5	481
P-MD43-1	382	1600
P-MD43-2	193	536
P-MD51-2	158	426
P-MD86-1	192	532
P-MD86-2	108	290
P-PAP-1	150	400
P-PAP-2	115	306
P-RB-1	167	450
P-RB-2	52	203
P-C-1	472	2785
P-C-2	445	2334
P-C-3	786	Indisponible $^{(*)}$

TAB. 3.7 – Raideur de cisaillement des systèmes de connexion testés (* Raideur calée trop grande, pas de sens)

Nous remarquons que la raideur de cisaillement identifiée par le modèle classique est beaucoup plus faible que celle du modèle proposé. En fait, le modèle classique ne tient pas compte de la déformation de cisaillement ce qui se traduit par "une grande différence" par rapport au modèle proposé dans le cas de poutres à faible élancement.

Sur la figure (Fig. 2.23), nous avons observé que l'influence de l'effort tranchant sur la flèche est d'autant plus grande que la raideur d'interface est grande. Cette contribution est donc maximale pour les poutres collées. Dans ce dernier cas, la raideur de cisaillement effective peut être approchée par la formule (Eq. 2.24) (cf. partie 2.1.4). Cette expression est valable pour des poutres à connexion parfaite. La précision du modèle classique peut alors être améliorée en déduisant de la flèche la contribution de l'effort tranchant. Les résultats de raideur de cisaillement pour les poutres collées sont reportées dans le tableau (Tab. 3.8).

P-C-1	2366	2785
P-C-2	2032	2334
P-C-3	11024	Indisponible (*)

Tab. 3.8 – Raideur de cisaillement des poutres collées (* Raideur calée trop grande, pas de sens)

La comparaison portant sur la valeur du glissement calculée par les deux modèles avec le glissement mesuré aux deux extrémités est présentée en annexe D.2. Nous trouvons que le calcul à l'aide des deux modèles donne des valeurs éloignées des valeurs mesurées aux deux extrémités de la poutre. Ceci veut dire que la modélisation par une interface continue de connecteurs discrets n'est pas appropriée pour le calcul du glissement dans notre configuration des poutres courtes. Nous verrons plus loin que le glissement aux extrémités est bien prévu pour des poutres de 5 mètres de portée. Dans le cas de connexion par collage, les modèles surestiment également le glissement, mais les raideurs de cisaillement ajustées à partir du glissement expérimental restent dans un domaine où leur valeur n'influencent plus la raideur globale de la poutre (domaine assymptotique de la courbe flèche fonction de la raideur d'interface (Fig. 2.22)).

3.5 Validation expérimentale du modèle $M4-5n-P$

Ce paragraphe est consacré à la validation expérimentale du modèle $M4-5n-P$ en se basant sur les résultats expérimentaux provenant de la thèse du Mario Van Der Linden [Linden, 1999]. Quatre systèmes de connexion y ont été testés en cisaillement. L'auteur a ensuite réalisé des essais en flexion quatre points sur des poutres mixtes bois-béton équipées des systèmes de connexion préalablement testés. Les raideurs de cisaillement ainsi que les charges à la rupture des connecteurs sont présentées dans le tableau (Tab. 3.14). L'identification des connecteurs testés est présentée à l'annexe D.3.

Series	F_{max}		K_s	
	Mean value (kN)	coefficient of variation (%)	Mean value (kN/mm)	coefficient of variation (%)
A-SCH-(1÷20)	21,5	7,3	26,1	17,0
B-SCH-(1÷5) [1]	22,0	5,0	29,2	20,5
C-SCH-(1÷10) [1]	15,3	20,3	12,9	14,1
D-SCH-(1÷16) [1]	15,0	11,7	15,6	8,1
A-NAG-(1÷5)	53,5	9,2	49,8	25,8
B-NAG-(1÷46)	47,9	14,0	48,8	35,9
A-N+S-(1÷5)	34,9	7,1	31,5	14,7
B-N+S-(1÷46)	51,1	8,8	79,5	25,6
A-NPL-1	30,5 [2]	-	29,0 [2]	-
A-NPL-2	43,9 [2]	-	71,1 [2]	-
B-NPL-(1÷3)	47,3	-	56,6	-
C-NPL-(1÷2)	71,4	-	-	-
D-NPL-(1÷3)	84,8	-	-	-
E-NPL-(1÷7)	39,1	10,8	97,2	37,4
F-NPL-(1÷48)	52,3	16,1	128	51,9
G-NPL-(1÷6)	43,6	11,0	145	37,6

[1] F_{max} and K_s are related to 1 * 2 screws
[2] Single data value

FIG. 3.14 – Résultats des essais en cisaillement

La comparaison entre les résultats expérimentaux et ceux du modèle M4-5n-P pour la poutre $SCH-5$ est présentée sur les figures (Fig. 3.15 et Fig. 3.16).

Les autres comparaisons sont présentées dans l'annexe D.3. Nous avons donc confronté le modèle $M4-5n-P$ avec 6 résultats expérimentaux regroupant 3 types de connecteurs. Ces résultats expérimentaux sont bien documentés. Les raideurs d'interface et le module du bois ont été en effet mesurés sur des essais indépendants. Il apparaît que les prévisions du modèle sont très bonnes dans 5 cas sur 6. La partie élastique du comportement est très bien reproduite. Dans le cas de la poutre $SCH-7$, identique à $SCH-5$, la flèche et le glissement sont moins bien prévus. Nous pouvons cependant observé que l'évolution de la courbe force-flèche de $SCH-7$ n'est pas linéaire pour les faibles charges. Cette non linéarité montre une différence de comportement par rapport aux autres corps d'épreuve.

Nous concluons que le modèle $M4-5n-P$ proposé est validé expérimentalement et permet donc de prévoir le comportement global des structures mixtes à connexion imparfaite dans le domaine élastique.

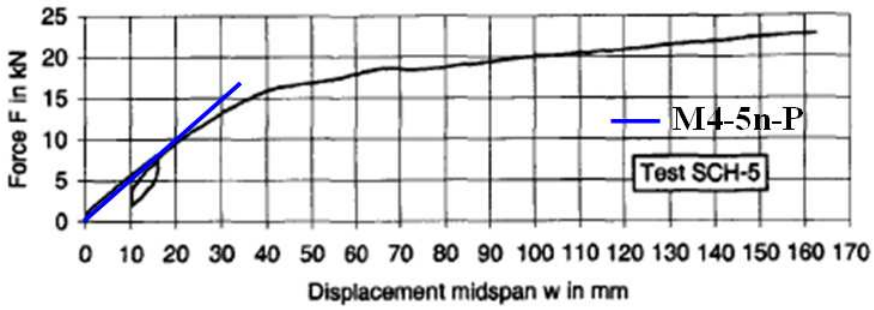
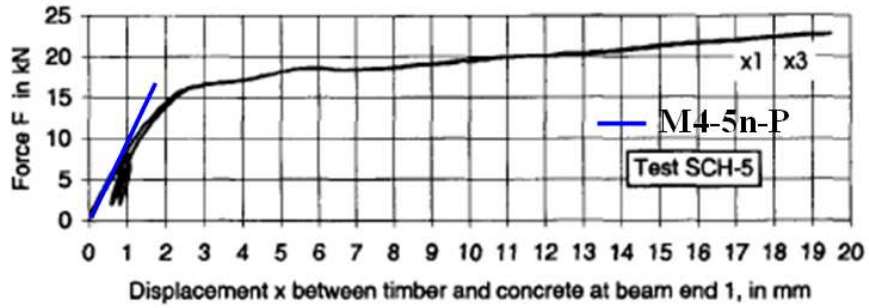
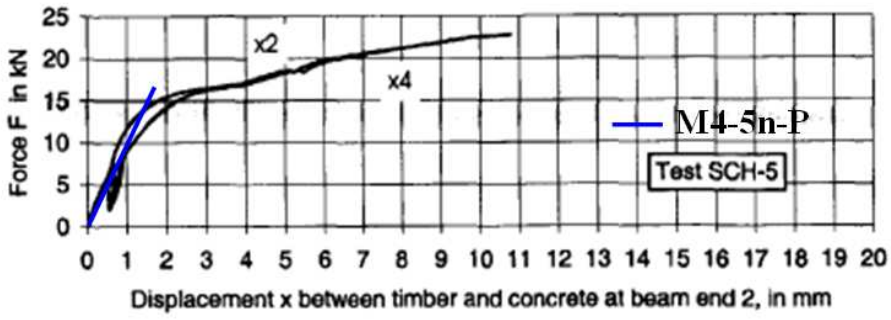


Fig. 3.15 – Courbe force-fleche de la poutre $SCH - 5$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

Fig. 3.16 – Glissement à deux extrémités de la poutre $SCH - 5$

3.6 Conclusion

Un ensemble de systèmes de connexion Bois-BTHP fibré pour des tabliers mixtes a été présenté dans ce chapitre. Des poutrelles mixtes ont été conçues et réalisées et leurs performances en termes de charge statique ultime et de rigidité en flexion ont été mesurées. Quatre mécanismes différents de rupture sont mis en évidence. Ces mécanismes sont en général initiés au sein du connecteur ou dans le bois. Le système par collage direct du BTHP fibré sur le bois se distingue de tous les autres par une raideur importante, très proche de la connexion parfaite, et par une charge ultime également plus importante que les autres d'au moins 20 %. La force à rupture moyenne est de $80kN$. On observe que la rupture a eu lieu dans le bois au niveau de l'interface ce qui signifie que la résistance de la connexion est au moins aussi importante que celle en cisaillement du bois. La connexion par collage est la solution à valider en fatigue puisque c'est la plus prometteuse.

La raideur de cisaillement K du modèle classique et k_1 du modèle $\mathcal{M}4$-*5n adapté* ont été identifiées à partir des résultats expérimentaux. On montre que, pour la géométrie des essais réalisés, le modèle $\mathcal{M}4$-*5n adapté* est plus approprié que le modèle classique car il prend en compte les déformations de cisaillement quelque soient les valeurs des raideurs d'interface. De plus, la comparaison des prévisions du modèle avec les résultats expérimentaux de la littérature [Linden, 1999] nous a permis de valider expérimentalement le modèle proposé.

Chapitre 4

Vérification de la tenue en fatigue du collage Bois-BFUP

La vérification en fatigue des ouvrages d'art est une étape très importante du dimensionnement. Ce dernier se base sur la notion de durée de vie, compte tenu de la résistance en fatigue des éléments de la structure. La connexion joue un rôle important pour les ouvrages mixtes vis-à-vis de l'état limite en fatigue. La partie précédente de la thèse portant sur l'expérimentation de différents systèmes de connexion Bois-BHP fibré nous a permis de choisir le collage comme la connexion la plus performante vis-à-vis de l'état limite de service et de l'état limite ultime. Nous allons présenter dans ce paragraphe une campagne d'essais en fatigue de maquettes de tabliers mixtes Bois-BFUP. L'objectif principal de ces essais est de valider en fatigue la technique par collage. Plus concrètement, nous avons mis au point puis réalisé une étude représentative de l'évolution en fatigue des poutres mixtes Bois-BFUP sous l'effet des charges de trafic. Quatre exemplaires d'un prototype de tablier mixte Bois-BFUP collé à l'échelle 1/3 ont été réalisés.

4.1 Corps d'épreuve

4.1.1 Dimensions et propriétés des matériaux

La section transversale des corps d'épreuve est en "⊓". Ils sont composés de deux poutres en bois, de $0,23m$ de hauteur et de $0,115m$ de largeur, qui sont collées à une dalle en BFUP de $0,5m$ de largeur et de $0,04m$ d'épaisseur. Ils ont $3,2m$ de longueur et la portée entre deux appuis est $L = 3,0m$. Le chargement est en flexion 4 points conformément à la figure (Fig. 4.1).

Le bois est de classe $GL28$ (cf. 3.1). La dalle du tablier est en BFUP, dans ce cas présent du $BSI^{®}CERACEM$. Ce BFUP, dosé à $2,5\%$ de fibres, a une résistance caractéristique à 28 jours de $165MPa$ et une résistance caractéristique en traction de $8,8MPa$. Les différentes caractéristiques du $BSI^{®}CERACEM$ sont synthétisées dans le tableau ci-dessous (Tab. 4.1).

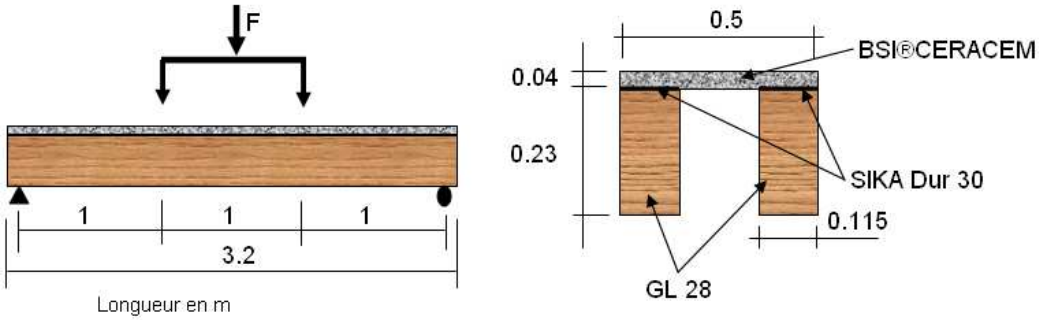


FIG. 4.1 – Géométrie de la poutre d'essai

Caractéristiques mécaniques		
Densité	ρ	$2.8t/m^3$
Résistance caractéristique en compression à 28j	f_{c28}	$165MPa$
Résistance caractéristique en traction à 28j de la matrice	f_{t28}	$8,8MPa$
Résistance caractéristique en traction à 28j du matériau fibré	σ_{bt28}	$8,8MPa$
Valeur caractéristique du module d'Young à 28j	E_{i28}	$65GPa$
Coefficient de Poisson	ν	$0,2$
Coefficient de dilatation thermique	α	$11,5\mu m/m$
Retrait endogène à l'infini	$\epsilon_{re\infty}$	550
Retrait de dessiccation à l'infini	$\epsilon_{rd\infty}$	150
Fluage propre et de dessiccation (chargement à $t1 = 48h$)	K_{fl}	1
Caractéristique rhéologiques		
Durée pratique d'utilisation	DPU	2 heures
Étalement au cône DIN (sans secousse de la table) à $t_0 + 2$min	$e(cm)$	$60 \leq e \leq 68$
Teneur en air occlus	AO	$\leq 3,5\%$
Composition pour $1m^3$		
Prémix : SIKA CERACEM BFM-MILLAU	$2355,1kg$	$\pm 2\%$
Superplastifiant : SIKA VISCOCRETE 5400F	$44,6kg$	$\pm 2\%$
Eau ajoutée	$195kg$	$\pm 2\%$
Fibres métalliques droites ($L_f = 20mm, \Phi = 0,3mm$)	$195kg$	$\pm 2\%$

TAB. 4.1 – Carte d'identification du $BSI^{®}CERACEM$ (d'après EIFAGE)

La colle utilisée est une colle époxydique à deux composants sans solvant *Sikadur*®30. Elle est titulaire d'un droit d'usage de la marque NF pour le collage structurel. Un kit prédosé comprend le premier composant de résine de couleur blanche et le deuxième composant de durcisseur de couleur noir. On mélange jusqu'à obtention d'un gris uniforme, démontrant l'homogénéité du mélange. Les caractéristiques mécaniques de cette colle sont présentées dans le tableaux ci-dessous (Tab. 4.2).

Résistance à la compression à $20^{\circ}C$ après 1 jour	$55MPa$
Résistance à la flexion à $20^{\circ}C$ après 1 jour	$30MPa$
Module d'élasticité statique	$12800MPa$
Adhérence sur béton (rupture dans le support)	$> 4MPa$

Tab. 4.2 – Caractéristiques mécaniques de la colle *Sikadur*®30

4.1.2 Mise au point du collage sur BFUP

La technique d'assemblage par collage ayant été validée avec un BHP fibré, l'utilisation d'un BFUP a nécessité une étude complémentaire visant à évaluer la performance de la colle en fonction du mode de traitement de surface.

Des essais de collage ont été réalisés à partir de poutres mixtes supplémentaires de $1(m)$. La fabrication des éléments en BFUP a été effectuée par coulage dans un coffrage dont le fond de moule constitue la face horizontale supérieure de la poutre en bois, elle-même protégée par un adhésif plastifié. Cet adhésif donne un a aspect " glacé " à la surface de béton. Aucun agent démoulant n'a été appliqué sur le coffrage afin d'éviter la présence de produits gras en contact avec la colle. Le double encollage, i.e. l'application de la colle sur les 2 surfaces à coller, a été pratiqué.

Une première série d'essais a consisté à coller, à une échéance de 7 jours après le coulage du béton, les éléments en BFUP directement sur le bois avec un nettoyage des surfaces avec un chiffon imprégné d'un solvant. Cette série n'a pas été concluante car quelques jours après le collage, un décollement a été observé au niveau de l'interface Bois-BFUP (Fig. 4.2(a)). Ce décollement est dû au retrait de dessiccation du BFUP. Bien que celui-ci soit réputé très faible, (Tab. 4.1), il a néanmoins conduit à la création d'une courbure orientée vers le haut, courbure que la liaison par collage sur une surface lisse "glacée" n'a pu empêcher. De plus, les essais en flexion de ces poutres montrent que le décollement du Bfup s'est rapidement propagé aux extrémités des poutrelles au cours du chargement(Fig. 4.2(b)).

Une seconde série d'essais a été réalisée en pratiquant un traitement de surface du béton par ponçage à l'aide d'un disque diamanté et en réalisant le collage pour un âge du béton de 28 jours, de manière à ce que le retrait restant à produire après collage soit faible. Les essais ont été concluants car les poutres ont résisté à une force de $100kN$ qui est beaucoup plus grande que les poutres de la première série. En plus, aucune fissure au niveau de l'interface n'a été observée. C'est cette technique qui a été retenue.

(a) Décollement par retrait de dessiccation

(b) Décollement au cours d'essai en flexion

FIG. 4.2 – Rupture des poutres bois-BFUP collées

4.1.3 Fabrication des corps d'épreuve

Dalle en BFUP

Un coffrage aux dimensions de la dalle en $BFUP$ a été préparé et positionné horizontalement. Un malaxeur de type $SKAKO\ NTV125$ a servi à fabriquer le BFUP à partir de sacs de prémix. La procédure de malaxage du $BSI^{®}CERACEM$ est présentée dans le tableau ci-dessus (Tab. 4.3) :

Composants	Temps partiel (min)	Temps total (min)
Prémix à sec	1	1
Ajout d'eau	3	4
Ajout de superplastifiant	7	11
Ajout de fibre	4	15

TAB. 4.3 – Procédure de malaxage du $BSI^{®}CERACEM$

Le béton a ensuite été mis en place (Fig. 4.3). La face supérieure de la dalle a été recouverte d'une bâche en plastique pour éviter l'évaporation de l'eau. Le décoffrage a été réalisé après 48 heures de durcissement. La dalle a ensuite été placée sur la tranche pour avoir un retrait de dessiccation uniforme sur les deux faces.

Fig. 4.3 – Mise en place de la dalle en BFUP

Poutres en bois

La partie en bois du corps d'épreuve est composée de deux poutres en lamellé collé de classe $GL28$. Deux pièces de pont (entretoises) ont été fabriqués pour assembler les deux poutres par des tiges boulonnées.

Mise en place du collage Bois-BFUP

Le collage a été réalisé au moins 28 jours après le coulage du béton pour diminuer les effets du retrait de dessiccation du béton. Le collage des poutres en bois sur la dalle BFUP nécessite une bonne préparation des surfaces de collage. La dalle en BFUP a été poncée en utilisant un disque diamanté (Fig. 4.4(a)). Les deux poutres en bois ont aussi été poncées en utilisant une ponceuse au papier de verre(Fig. 4.4(b)). Les surfaces ont été ensuite soufflées à l'air comprimé pour enlever les poussières.

Le mélange des deux composants de la colle *Sikadur*®30 a été réalisé par une perseuse équipée d'une hélice (Fig. 4.5(a)). La colle a été appliquée sur les surfaces de la dalle et des poutres en bois avec une épaisseur moyenne de $3mm$ à $4mm$ (Fig. 4.5(b)).

Pour assembler les deux parties corps d'épreuve, les poutres en bois ont été posées sur la dalle en BFUP. Le collage a été vérifié par l'observation de bourrelets au niveau de l'interface. Le contact entre les deux parties ont été maintenu par six serre-joints (Fig. 4.6).

L'identification des corps d'épreuve est présentée dans le tableau ci-dessous (Tab. 4.4).

(a) Ponceuse à disque diamantée

(b) Ponceuse au papier de verre

FIG. 4.4 – Ponceuses pour la préparation des surfaces de collage

(a) Mélange de la colle

(b) Application de la colle

FIG. 4.5 – Mise en place le collage

Corps d'épreuve	Identification
1	CE1
2	CE2
3	CE3
4	CE4

TAB. 4.4 – Identification des corps d'épreuve

Fig. 4.6 – Corps d'épreuve avec les serre-joints

4.2 Mise au point des essais

4.2.1 Calcul du chargement

Pour fixer la charge à appliquer nous allons procéder de 2 manières différentes.

Calcul par l'hypothèse de l'existence d'une courbe de fatigue

L'absence de données sur le comportement en fatigue du type de liaison étudié ici nous amène à faire des hypothèses sur la courbe de fatigue. En effet, généralement, le point de troncature d'une courbe de fatigue est obtenue pour 100 millions de cycles alors que nous nous limiterons à 2 millions de cycles. Nous avons fait une hypothèse qui consiste à considérer que la courbe de fatigue de la connexion par collage entre le bois et BFUP a une pente 1/5 et que le camion B_f (Fig. 4.7), tel qu'il est présenté dans le guide de justification des ponts métalliques et mixtes du SETRA [Setra, 1996], est un modèle de chargement à la fatigue pour les ponts mixtes bois-BFUP.

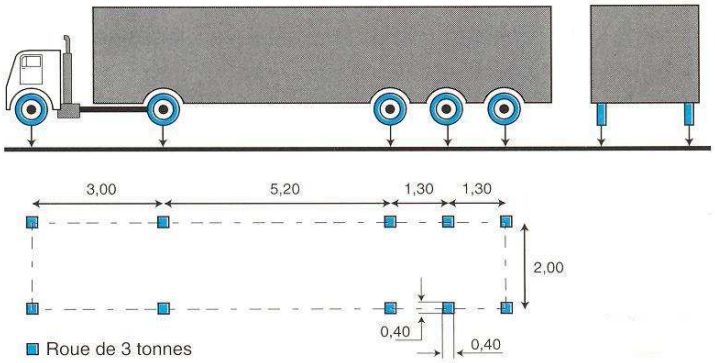


FIG. 4.7 – Camion B_f

La vérification de la fatigue consiste selon ce guide à calculer l'étendue de contrainte extrême produite dans tous les détails de la structure par un camion B_f. Ce camion B_f est ajusté et calibré en géométrie et en masse de telle manière qu'il donne des résultats approchants l'action du trafic sur une durée de 100 ans. En plus, la masse de ce camion doit être pondéré par un coefficient c de telle manière qu'il corresponde à une demande de niveau de trafic décidé par le maître d'ouvrage. La vérification consiste ensuite à comparer les étendues de contraintes dans la structure à la résistance des détails à 100 millions de cycles, divisées par le coefficient partiel de sécurité.

Pour calculer le chargement de notre essai, le pont qui fait l'objet de l'essai au LCPC dans le cadre du projet $NR2C$, a été considéré comme le pont de référence. C'est un pont de 10 m de longueur, de $2,5$ m de largeur. Le pont se compose de quatre poutres en bois de hauteur 60 cm et

de largeur 24 cm renforcées par des bandes composites d'épaisseur 3 mm. Elles sont connectées à une dalle de BFUP de 7 cm d'épaisseur par collage (Fig. 4.8).

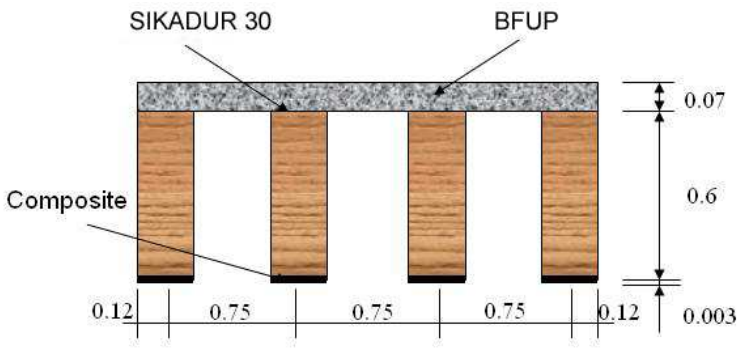


Fig. 4.8 – Section transversale du pont d'essai au LCPC

La vérification à la fatigue de ce pont consiste à calculer des étendues de contraintes extrêmes dans le pont sous le chargement de camion B_f. Le pont est ici considéré comme un pont de l'autoroute $A6$ qui est caractérisé par le passage de N camions par an, $N = 0,986$ milions, par le poids moyen des camions $P_m = 36,5$ tonnes. Cela nous permet de calculer le coefficient de pondération c prenant en compte le niveau de trafic du pont :

$$c = 1,05 \times N^{\frac{1}{5}} \times \frac{P_{5m}}{30} = 1,467 \tag{4.1}$$

Avec $P_{5m} \approx P_m + 0,5 \times s$, et $s = 12,1$, l'écart type sur le poids moyen des camions.

La vérification consiste ensuite à comparer les étendues de contraintes extrêmes à la résistance des détails à 100 millions de cycles (donnée).

Dans le cas d'une comparaison avec la résistance des détails en cisaillement à n millions de cycles, le chargement dû au camion Bf doit être pondéré une deuxième fois par le coefficient p :

$$p = (100/n)^{\frac{1}{5}} \tag{4.2}$$

L'expression du coefficient p signifie que la courbe de fatigue exprimant l'étendue de contraintes de cisaillement en fonction du nombre de cycles a une pente 1/5 (Fig. 4.9).

Le chargement de fatigue associé à un trafic sur l'autoroute $A6$ et à un niveau de vérification de n millions cycles pour le pont de référence, s'écrit finalement :

$$B_f = 30 \times c \times p$$

En appliquant ce chargement B_f sur le pont de référence, nous obtenons l'étendue en cisaillement à l'interface bois-béton pour les différents nombres de cycles (Tab. 4.5).

Le chargement de fatigue a été ensuite calculé pour avoir la même étendue de contraintes de cisaillement à l'interface des corps d'épreuve après n millions cycles. L'étendue en cisaillement à

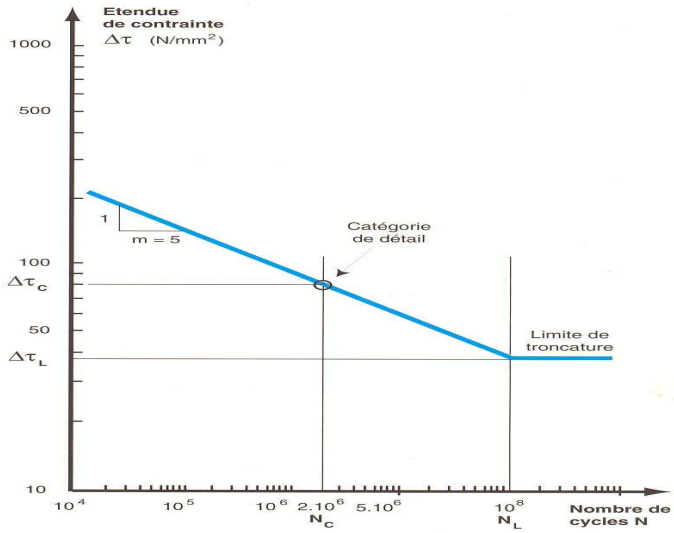


FIG. 4.9 – Courbes de fatigue - Variations de contrainte de cisaillement

Nombre de cycles	Étendue en cisaillement (MPa)
$n_0 = 100$ milions	$0,350$
$n_1 = 2$ milions	$0,766$
$n_2 = 0,3$ milions	$1,120$
$n_3 = 0,1$ milions	$1,395$

TAB. 4.5 – Étendue en cisaillement à l'interface dans le pont de référence à l'action B_f

l'interface du corps d'épreuve est présentée dans le tableau (Tab. 4.6). Dans ce tableau, l'écart représente la différence relative entre l'étendue de cisaillement obtenue sur le corps d'épreuve par rapport à celle du pont de référence.

Nombre de cycles	Amplitude de chargement	Étendue en cisaillement	Écart
$n_1 = 2$ millions	$F_1 = 70kN$	$0,813$	6%
$n_2 = 0,3$ millions	$F_2 = 100kN$	$1,161$	4%
$n_3 = 0,1$ millions	$F_3 = 150kN$	$1,742$	25%

TAB. 4.6 – Chargement et étendue de contrainte pour chaque corps d'épreuve

Vérification aux actions d'un chargement fréquent

Le calcul ci-dessus a été réalisé en faisant l'hypothèse que la courbe en fatigue de cisaillement de la connexion bois-BFUP a une pente d'une valeur 1/5. Une autre manière de procéder pour justifier le calcul de la charge à appliquer dans l'essai de fatigue ci-dessus consiste à vérifier la contrainte en cisaillement dans le pont de référence pour un chargement fréquent. Selon Calgaro [Calgaro, 1996], le chargement fréquent pour les ponts routiers dans les Eurocodes [EC1.3-DAN, 1997] a été choisi de façon que son intensité corresponde à une période de retour d'une semaine. Sur la figure (Fig. 4.10), nous présentons le modèle de chargement fréquent appliqué sur le pont de référence.

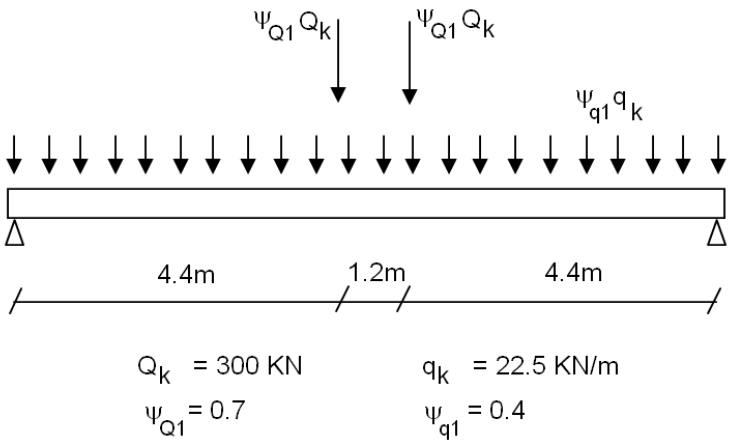


Fig. 4.10 – Chargement fréquent appliqué au pont de référence

La contrainte de cisaillement à l'interface a été calculée et ensuite comparée à celle appliquée au corps d'épreuve. Le calcul montre que le programme de chargement sur les corps d'épreuve engendre une contrainte de cisaillement au moins 60% plus grande que celle générée par le chargement fréquent dans le pont de référence (Tab.4.7).

Chargement	Contrainte de cisaillement d'interface (MPa)
$F_1 = 70kN$	$0,813$
$F_1 = 100kN$	$1,161$
$F_1 = 150kN$	$1,742$
Chargement fréquent	$0,507$

Tab. 4.7 – Contrainte de cisaillement d'interface du pont de référence et comparaison avec celle du chargement fréquent

En sachant que le chargement fréquent correspond à une période de retour d'une semaine,

le programme de chargement nous permet de déterminer la probabilité de dépassement de cette charge sur une durée de 100 ans de référence [Calgaro, 1996] (Tab.4.8).

Chargement	Nombre de cycle	Probabilité de dépassement en 100 ans
$F_1 = 70kN$	$n_1 = 2$ millions	$0,0026$
$F_1 = 100kN$	$n_1 = 0,3$ millions	$0,0174$
$F_1 = 150kN$	$n_1 = 0,1$ millions	$0,0521$

TAB. 4.8 – Probabilité de dépassement du niveau de charge du programme expérimental sur une durée de 100

On peut alors admettre que l'obtention de bons résultats sur les corps d'épreuve constitue une première validation de la tenue en fatigue de la liaison par collage, dans des conditions thermo-hydriques constantes.

4.2.2 Programme de chargement

Le programme de chargement des corps d'épreuve est donc le suivant :

- Le premier corps d'épreuve $CE1$ a subi quatre cycles de $0kN$ à $55kN$, puis trois cycles de $0kN$ à $100kN$ et enfin un chargement jusqu'à la rupture. Ce premier essai en statique nous permet d'identifier la raideur ainsi que la face de rupture du corps d'épreuve.
- Les trois corps d'épreuve $CE2$, $CE3$ et $CE4$ ont subi d'abord 2 millions cycles de $10kN$ à $80kN$. Ils ont ensuite subi 300000 cycles de $10kN$ à $110kN$ et puis 100000 cycles de $10kN$ à $160kN$. Enfin, les deux corps d'épreuve $CE2$ et $CE3$ sont chargées jusqu'à la rupture et le troisième a continuer à subir des cycles de $10kN$ à $160kN$ jusqu'à la rupture.

4.2.3 Vérification des contraintes dans les matériaux et à l'interface

Les charges obtenues ci-dessus pour le programme de chargement ont été calculées pour avoir les mêmes étendues de contraintes de cisaillement d'interface dans les corps d'épreuve par rapport à celles du pont de référence. Nous allons démontrer dans cette partie que le programme de charges n'engendre pas de fatigue dans le bois ni le béton. Le programme de fatigue consiste donc à fatiguer uniquement la connexion entre le bois et béton.

Nous présentons d'abord le calcul par le modèle $\mathcal{M}4$-*5n adapté* pour la configuration de l'essai quatre points (Fig. 4.11).

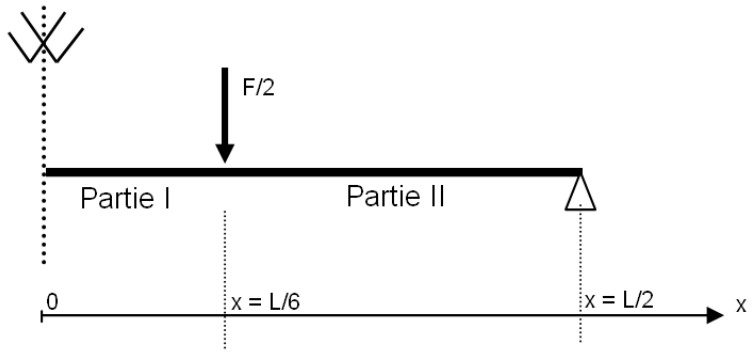


Fig. 4.11 – Schéma mécanique pour le calcul des contraintes

Les 12 conditions aux limites pour la partie II de la poutre sont les suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{U}^1_{1II}(x = L/6) = a_1 \\ \mathbf{U}^2_{1II}(x = L/6) = a_2 \\ \mathbf{U}^1_{3II}(x = L/6) = a_3 \\ \mathbf{U}^2_{3II}(x = L/6) = a_4 \\ \Phi^1_{1II}(x = L/6) = a_5 \\ \Phi^2_{1II}(x = L/6) = a_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{N}^1_{1II}(x = L/2) = 0 \\ \mathbf{N}^2_{1II}(x = L/2) = 0 \\ \mathbf{M}^1_{1II}(x = L/2) = 0 \\ \mathbf{M}^2_{1II}(x = L/2) = 0 \\ \mathbf{Q}^2_{1II}(x = L/2) = 0 \\ \mathbf{U}^1_{3II}(x = L/2) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Où a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 sont les constantes.

Nous avons ensuite les 12 conditions aux limites pour la partie I de la poutre :

$$\begin{cases} \mathbf{U}^1_{1I}(x = L/6) = a_1 \\ \mathbf{U}^2_{1I}(x = L/6) = a_2 \\ \mathbf{U}^1_{3I}(x = L/6) = a_3 \\ \mathbf{U}^2_{3I}(x = L/6) = a_4 \\ \Phi^1_{1I}(x = L/6) = a_5 \\ \Phi^2_{1I}(x = L/6) = a_6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{U}^1_{1I}(x = 0) = 0 \\ \mathbf{U}^2_{1I}(x = 0) = 0 \\ \Phi^1_{1I}(x = 0) = 0 \\ \Phi^2_{1I}(x = 0) = 0 \\ \mathbf{T}^1_{I}(x = 0) = 0 \\ \mathbf{Q}_{I}(x = 0) = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

Pour trouver les 6 constantes a_1 à a_6, nous avons 6 conditions de continuité suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{N}^1_{1I}(x = L/6) = \mathbf{N}^1_{1II}(x = L/6) \\ \mathbf{N}^2_{1I}(x = L/6) = \mathbf{N}^2_{1II}(x = L/6) \\ \mathbf{M}^1_{1I}(x = L/6) = \mathbf{M}^1_{1II}(x = L/6) \\ \mathbf{M}^2_{1I}(x = L/6) = \mathbf{M}^2_{1II}(x = L/6) \\ \mathbf{Q}_{I}(x = L/6) + \mathbf{Q}_{II}(x = L/6) = F/2 \\ \mathbf{T}^1_{I}(x = L/6) = \mathbf{T}^1_{II}(x = L/6) \end{cases} \tag{4.5}$$

Nous obtenons enfin la solution du modèle $\mathcal{M}4$-*5n adapté* pour l'essai quatre points.

Charge (kN)	Nombre de cycle	$\Delta\sigma_{11}^{bois}(MPa)$	$f_{fat,d}^{bois}(MPa)$	Vérification
$F_1 = 70$	$n_1 = 2 \times 10^6$	$8,162$	$12,967$	OK
$F_2 = 100$	$n_1 = 0,3 \times 10^6$	$11,66$	$18,35$	OK
$F_3 = 150$	$n_1 = 0,1 \times 10^6$	$17,491$	$21,467$	OK

TAB. 4.9 – Vérification en fatigue des contraintes en traction dans le bois

Sur le tableau (Tab. 4.9), nous présentons les contraintes en traction dans le bois et les contraintes de calcul à la fatigue du bois (cf. 1.5.3 pour la détermination de $f_{fat,d}^{bois}$) :

Les contraintes en cisaillement sont aussi vérifiées (Tab. 4.10).

Charge (kN)	Nombre de cycle	$\Delta\sigma_{12}^{bois}(MPa)$	$f_{fat,d}^{bois}(MPa)$	Vérification
$F_1 = 70$	$n_1 = 2 \times 10^6$	$0,832$	$0,966$	OK
$F_2 = 100$	$n_1 = 0,3 \times 10^6$	$1,189$	$1,515$	OK
$F_3 = 150$	$n_1 = 0,1 \times 10^6$	$1,783$	$1,833$	OK

TAB. 4.10 – Vérification en fatigue des contrainte en cisaillement dans le bois

Les contraintes en compression du béton sont aussi calculées et présentées dans le tableau (Tab. 4.11). Les contraintes dans le béton restent toujours inférieure à 60% de la résistance caractéristique du béton qui est $165MPa$.

Charge (kN)	Nombre de cycle	$\Delta\sigma_{11}^{beton}(MPa)$	$f_{fat,d}^{beton}(MPa)$	Vérification
$F_1 = 70$	$n_1 = 2 \times 10^6$	$13,456$	$0,6 \times 165$	OK
$F_2 = 100$	$n_1 = 0,3 \times 10^6$	$19,223$	$0,6 \times 165$	OK
$F_3 = 150$	$n_1 = 0,1 \times 10^6$	$28,835$	$0,6 \times 165$	OK

TAB. 4.11 – Vérification en fatigue du béton

Le calcul ci-dessus montre donc que le programme de chargement proposé nous permettra d'observer le comportement en fatigue de la connexion sans endommager les matériaux bois et BFUP.

4.2.4 Dispositif

Un bâti de presse a été conçu et monté au Lami pour cette campagne d'essais. On dispose d'un groupe hydraulique de marque $TEMA-Concept$®. Le vérin de $500kN$ de capacité de même marque est un vérin dynamique qui permet de simuler le chargement cyclique, celui-ci pouvant atteindre la fréquence de l'ordre $10Hz$. Le vérin est fixé à un chevêtre très rigide qui est porté par 8 tiges de diamètre $30mm$ ancrées à une dalle rigide. A la tête du vérin est fixée une rotule pour

éviter les efforts horizontaux parasites. Le cadre supérieur est contreventé par 8 tirants (Fig. 4.12).

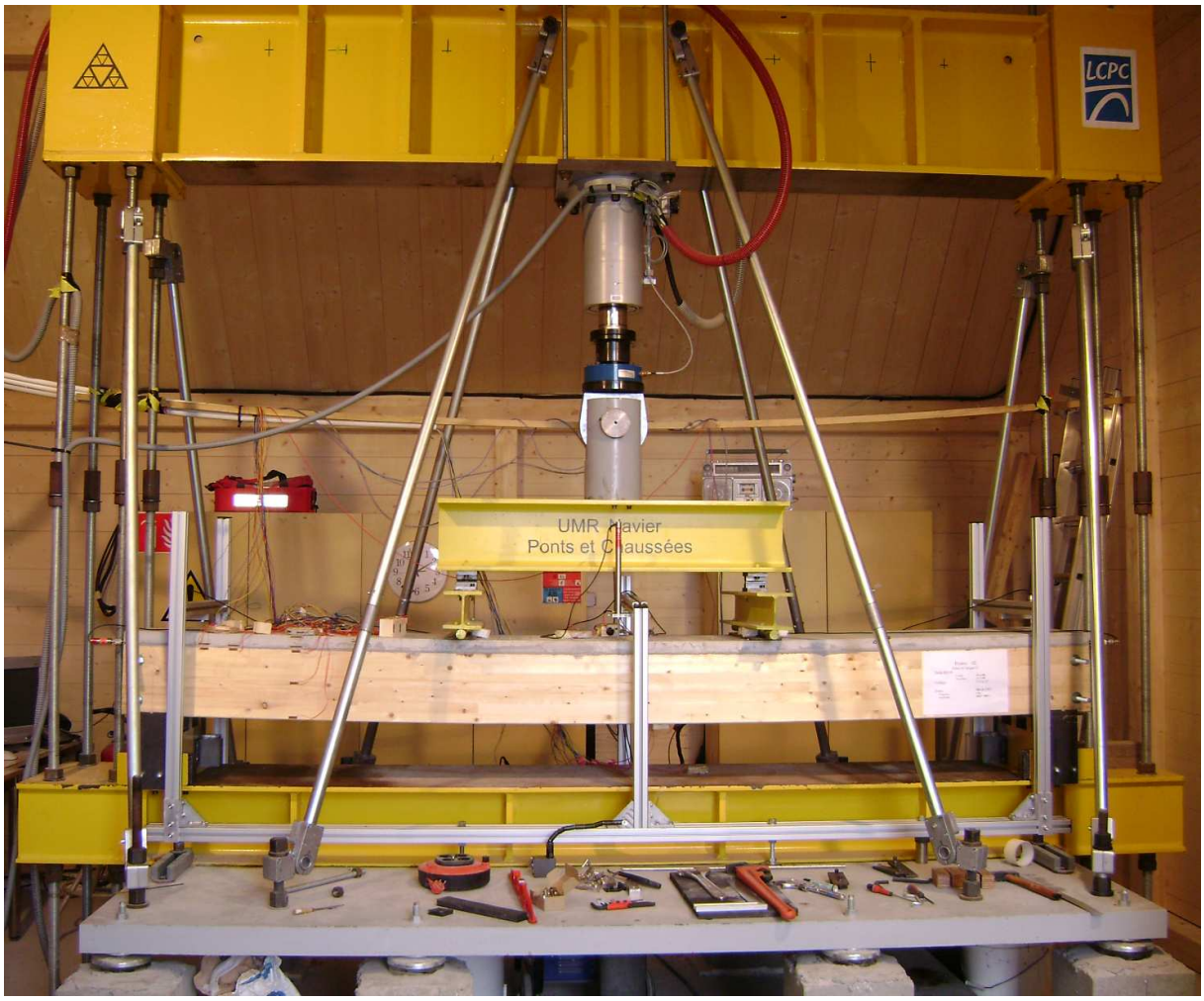


Fig. 4.12 – Cadre de presse

Les appuis se composent de rouleaux qui autorisent le déplacement horizontal de la poutre. On interpose entre les poutres en bois et les rouleaux des plaques métalliques de $2cm$ d'épaisseur. Le déplacement transversal de la poutre est bloqué par les quatre plaques qui sont fixées sur appui (Fig. 4.13). Les déplacements horizontaux longitudinaux du corps d'épreuve sont aussi limités par des butées souples.

Fig. 4.13 – Système d'appui

4.2.5 Instrumentation

Le groupe hydraulique et le vérin sont piloté en force ou en déplacement. Ce système de pilotage ne possède que huit canaux de mesures y compris la force et le déplacement du vérin. Un système d'acquisition indépendant a donc été créé. Il possède une mémoire tampon qui permet la lecture permanente des signaux des canaux. Un enregistrement sur le disque dur à un instant t se compose de 8 secondes avant et de 8 secondes après cet instant. Le temps entre deux enregistrements est de 2 heures. Le système d'acquisition permet d'enregistrer 100 points de mesure pendant 1 seconde ce qui constitue un bloc de mesure. On a donc 16 blocs de mesure enregistrés sur le disque dur à l'instant t. De plus, le programme permet la détection d'événement. Un incrément d'amplitude par rapport au cycle précédent sur les capteurs de déplacement va être détecté et un enregistrement va être effectué.

Le système d'acquisition est composé de 26 canaux de mesures dont deux canaux de force et de déplacement du système de pilotage. Le troisième canal sert à mesurer la température de la salle d'essai. Huit canaux sont réservés pour des capteurs de déplacement. Les capteurs de déplacement sont les LVDT notés $D1$ à $D8$. Le capteur $D1$ a $10cm$ de course. Les capteurs de $D2$ à $D5$ ont $2,5cm$ de course et les $D6$, $D7$ et $D8$ ont $1cm$ de course. La disposition des capteurs est présentée sur la figure ci-dessous (Fig. 4.14).

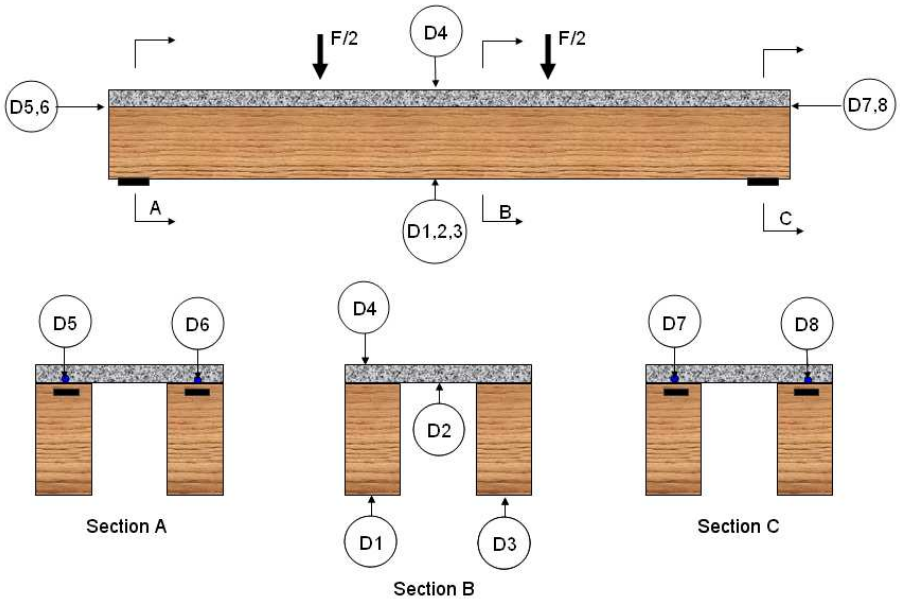


Fig. 4.14 – Position des capteurs de déplacement

Les capteurs $D5$ à $D8$ sont installés à deux extrémités de chaque poutre en bois pour mesurer le glissement relatif à l'interface entre le béton et le bois. Un exemple de capteur de glissement est présenté sur la figure (Fig. 4.15).

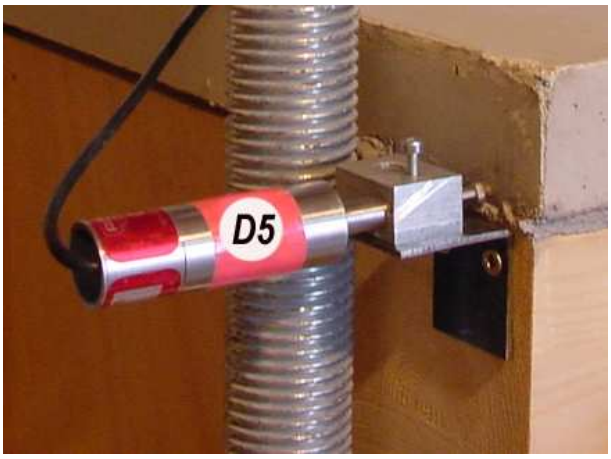


FIG. 4.15 – Capteur de glissement à l'extrémité de la poutre

Les trois capteurs $D1$, $D2$, et $D3$ servent à mesurer le déplacement de la face inférieure du tablier. Le capteur $D4$ mesure le déplacement de la face supérieure.

Quinze derniers canaux sont réservés à l'installation des jauges de déformation. Il y a deux types de jauges, une pour le bois et une pour le béton (Fig. 4.16). Les jauges $J0$ à $J9$ permettent de mesurer les déformations de deux sections transversales. Les deux jauges $J10$ et $J11$ mesurent la déformation longitudinale de la face inférieure de deux poutres en bois. Les deux jauges $J12$ et $J13$ mesurent la déformation longitudinale et transversale de la face inférieure de la dalle. La dernière jauge mesure la déformation de la face supérieure de la dalle.

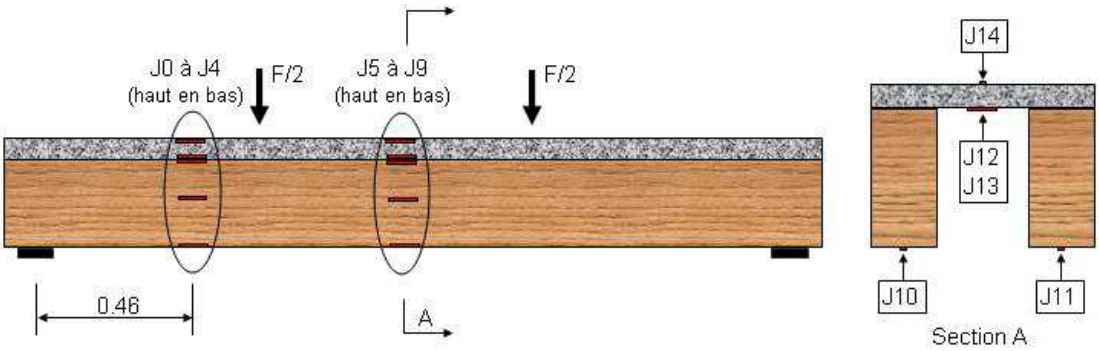


FIG. 4.16 – Position des jauges

4.3 Résultats

4.3.1 Premier corps d'épreuve $CE1$

Le $CE1$ a subi quatre cycles de $0kN$ à $55kN$, puis trois cycles de $0kN$ à $100kN$ et enfin un dernier cycle jusqu'à la rupture. Les courbes force-flèche montrent que le comportement de $CE1$ pendant les premiers cycles coïncide avec celui du dernier cycle jusqu'à la rupture pour les trois capteurs $D1$, $D2$ et $D3$ (Fig. 4.17).

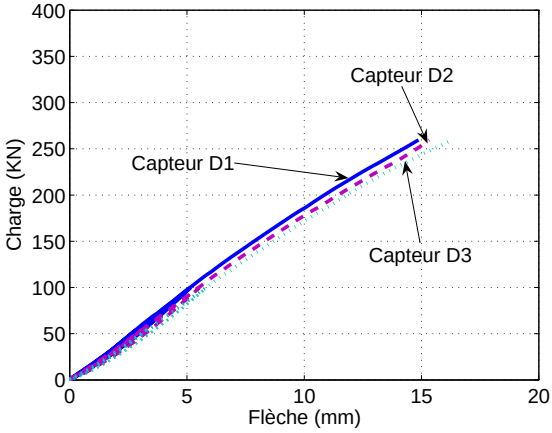


Fig. 4.17 – Courbes force-flèche des trois capteurs $D1$, $D2$, et $D3$

Nous présentons sur la figure (Fig. 4.18) les courbes force-flèche pour le dernier cycle jusqu'à la rupture et le comparons avec le calcul du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ *adapté* dans les cas de connexion parfaite et sans connexion.

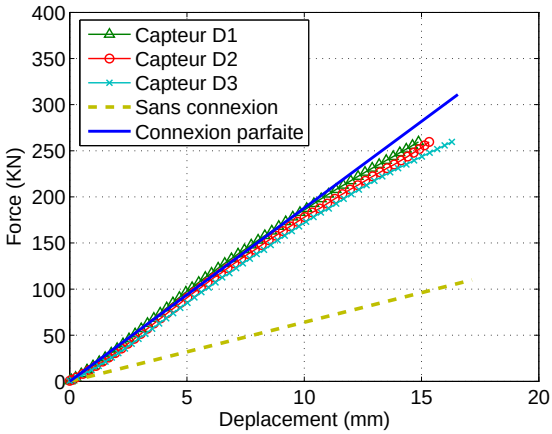


Fig. 4.18 – Force flèche de $EC1$

A cause de la faible course des capteurs $D1$, $D2$ et $D3$, nous les avons enlevé quand la force a atteint $280kN$. En réalité, la rupture s'est produite à $302kN$. On peut observer la rupture sur la courbe qui présente le glissement aux extrémités de chaque poutre en bois (Fig. 4.19). Le glissement mesuré reste de l'ordre de $0,03mm$ à la charge de ruine $302kN$. Sur la figure, le décalage des capteurs après la rupture est due à l'onde de choc produite par la rupture du bois. Les résultats des capteurs montrent que le comportement de la poutre est très proche de la connexion parfaite.

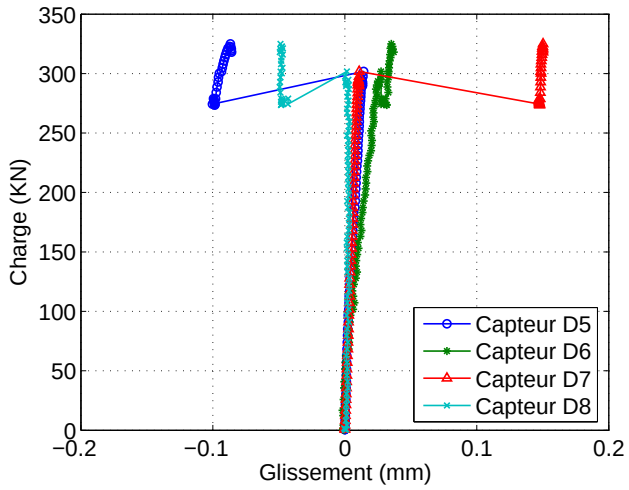
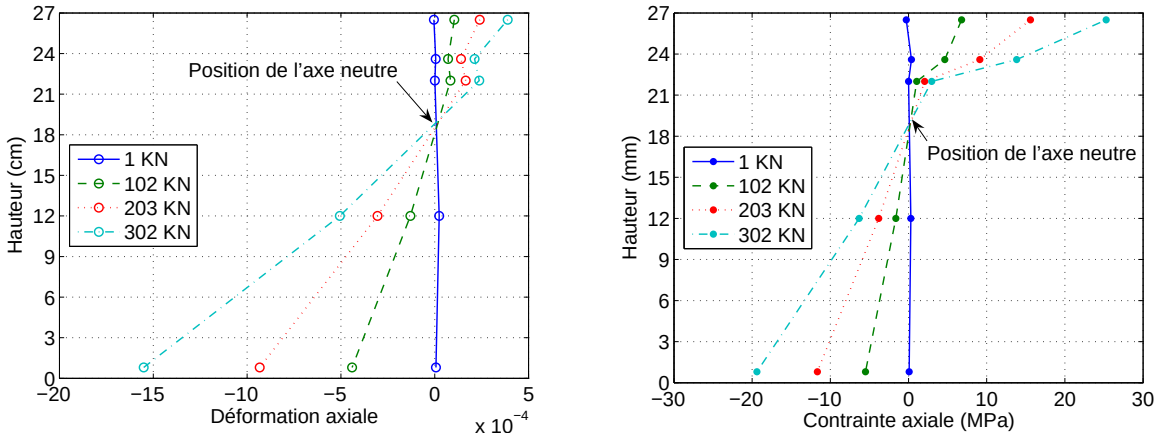


FIG. 4.19 – Glissement à des extrémités de la poutre

Sur la figure (Fig. 4.20(a)), on présente les déformations axiales mesurées par les jauges sur la section à $0,46m$ de l'appui pour les différentes charges. Dans la condition idéale d'une connexion parfaite, nous avons une continuité de la déformation axiale ϵ_{11} auprès de l'interface. Ici, nous trouvons qu'il existe une légère différence de déformation axiale entre la mesure de la jauge $J1$ dans le béton et celle de la jauge $J2$ dans le bois auprès de l'interface. Cette légère différence peut provenir d'un comportement élastique de la couche de colle. Les contraintes à la position des jauges sont ensuite calculées en considérant un comportement élastique des matériaux. Les résultats de contrainte sur la figure (Fig. 4.20(b)) montrent que le béton est toujours en compression au cours du chargement. De plus, le croisement des courbes permet d'identifier la position de l'axe neutre dans la partie du bois.



(a) Déformation axiale

(b) Contrainte axiale

Fig. 4.20 – Déformation axiale mesurée et contrainte axiale calculée

La rupture du $CE1$ a eu lieu en traction dans le bois à la position d'un joint d'aboutement de lamellé collé. La fissure s'est ensuite propagée suivant l'interface de lamellé collé (Fig. 4.21). Nous vérifions ici que l'interface n'a pas constitué le lieu de faiblesse de la structure.

(a) Vue de loin

(b) Vue de près

Fig. 4.21 – Rupture du $CE1$

Nous présentons les contraintes calculées à partir des déformations axiales mesurées par deux jauges $J7$ et $J8$ sur la figure (Fig. 4.22). La jauge $J7$ n'ayant plus de déformation après la rupture, cela montre que la rupture s'est passée dans la poutre sur la quelle est collée la jauge $J7$. De plus, la courbe montre que la contrainte à rupture dans la poutre en bois est de $26.87MPa$ à la rupture.

En conclusion, l'essai statique du $CE1$ nous permet de déterminer un comportement que est très proche de connexion parfaite. De plus, la charge à la rupture et le mode de rupture ont été

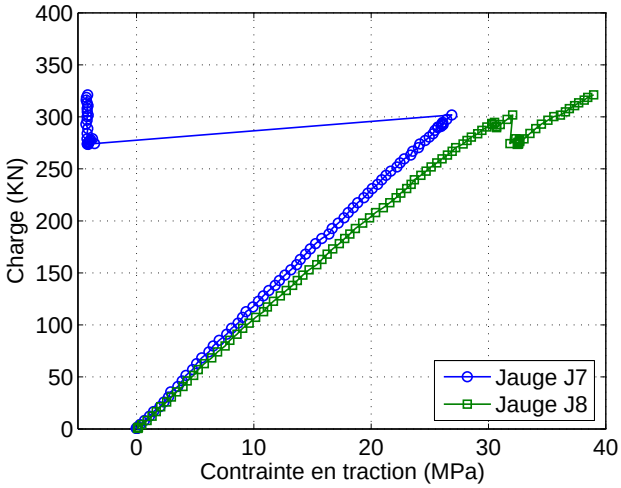
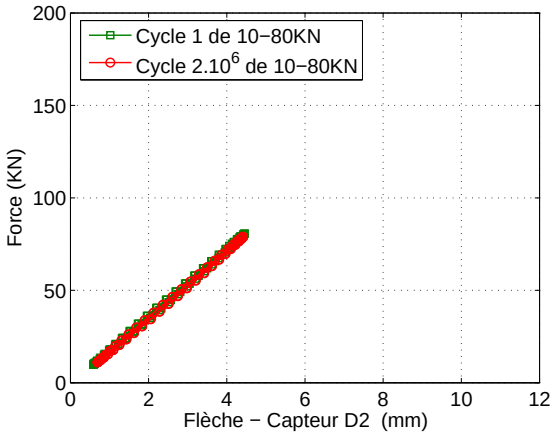


FIG. 4.22 – Contrainte jusqu'à la rupture dans la poutre en bois

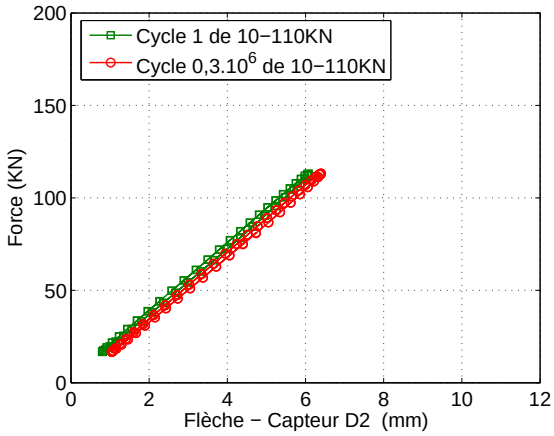
identifiés.

4.3.2 Corps d'épreuve $CE2$, $CE3$ et $CE4$

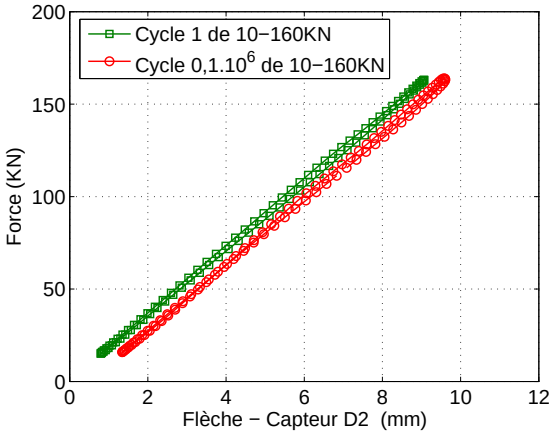
Les trois corps d'épreuve $CE2$, $CE3$ et $CE4$ ont subi d'abord 2 millions cycles de $10 - 80kN$. Puis 300000 cycles de $10-110$ et ensuite 100000 cycles de $10-160kN$. Désormais, nous ne présentons que la flèche donnée par le capteur $D2$, les données de deux capteurs $D1$ et $D3$ sont présentées dans l'annexe E.1. Sur la figure (Fig. 4.23), nous présentons le comportement force-flèche de $CE4$ du premier cycle et du dernier cycle des trois phases de chargement, $10 - 80kN$, $10 - 110kN$ et $10 - 160kN$. Les résultats de $CE2$ et de $CE3$ sont identique et présentés dans l'annexe E.



(a) Phase de $10 - 80KN$



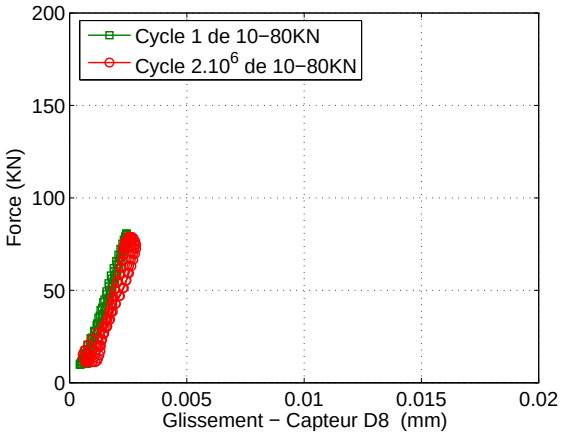
(b) Phase de $10 - 110KN$



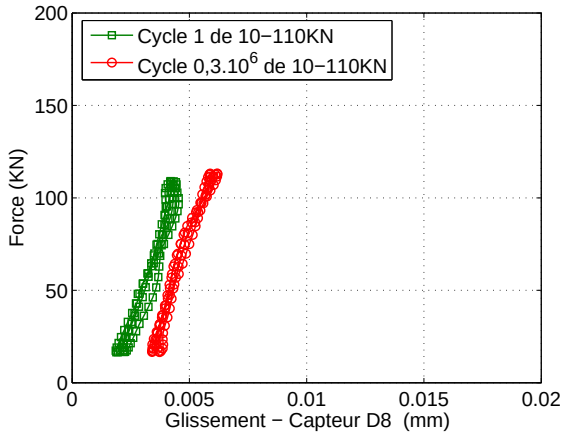
(c) Phase de $10 - 160KN$

Fig. 4.23 – Force-flèche du $CE4$ pour les 3 phases de chargement

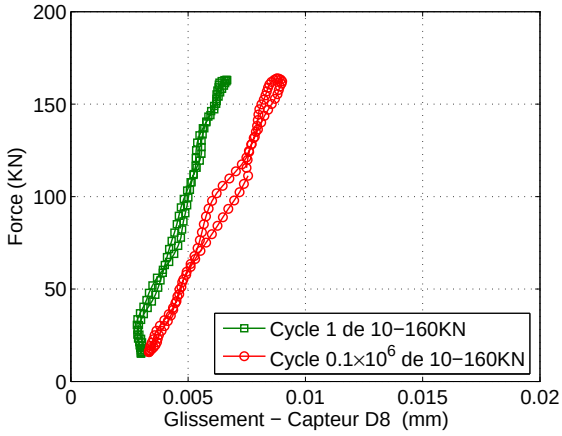
Nous trouvons que le comportement de la poutre reste linéaire et que sa raideur reste constante après les trois phases de chargement. De plus, les capteurs aux extrémités des corps d'épreuve montrent que le glissement mesuré reste dans l'ordre de précision des capteurs après les cycles de chargement (Fig. 4.24). Les autres mesures du glissement sont présentées dans l'annexe E.2.



(a) Phase de $10 - 80KN$



(b) Phase de $10 - 110KN$



(c) Phase de $10 - 160KN$

FIG. 4.24 – Force-glissement du $CE4$ pour les 3 phases de chargement

Après trois phases de chargement cyclique, les deux corps d'épreuve $CE2$ et $CE3$ sont chargés en statique jusqu'à la rupture. Sur la figure (Fig. 4.25), nous présentons la courbe force flèche, la flèche étant donnée par le capteur $D4$ pour deux corps d'épreuve.

Le corps d'épreuve $CE2$ s'est cassé à une charge de $360kN$. La rupture a eu lieu en traction dans une poutre en bois (Fig. 4.26).

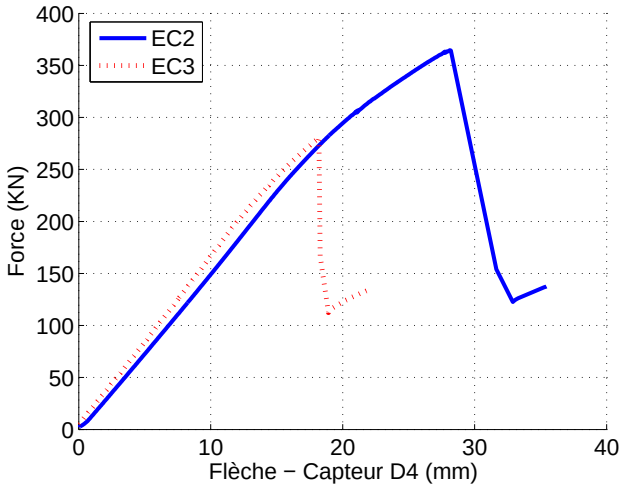


Fig. 4.25 – Force-flèche jusqu'à la rupture de $CE2$ et $CE3$

(a) Vue de loin

(b) Vue au près

Fig. 4.26 – Rupture d'une poutre du bois du $CE2$

La rupture dans le $CE3$ s'est produite au niveau de l'interface bois-BFUP. Après découpage de la poutre, nous avons pu observer que la rupture s'est produite dans le bois auprès de l'interface (Fig. 4.27). Il s'agit donc d'une rupture cohésive.

(a) Face du bois (b) Face du béton

FIG. 4.27 – Rupture cohésive en cisaillement dans le bois de $CE3$

Le $CE4$ a continué à subir des cycles de $10 - 160kN$ au dela 10^5 cycles et une rupture s'est produite. Deux zones de rupture ayant été observée et il importait de savoir quelle zone s'est rompue la première. Grâce au système d'acquisition qui permet la détection des événements au cours du chargement, les données des canaux de mesures au moment des événements permettent l'analyse du scénario des événements. Il y a deux ruptures observées correspondant aux deux événements principaux, une rupture en cisaillement dans une poutre en bois au niveau de l'axe neutre de $CE4$, le mode 1, et une rupture au niveau de l'interface du bois-BFUP, le mode 2 (Fig. 4.28).

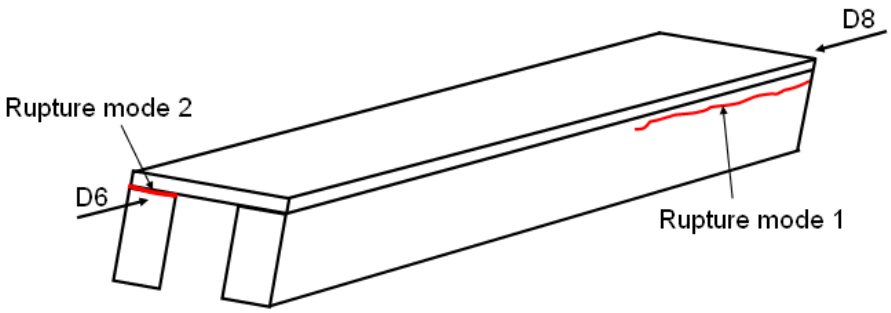
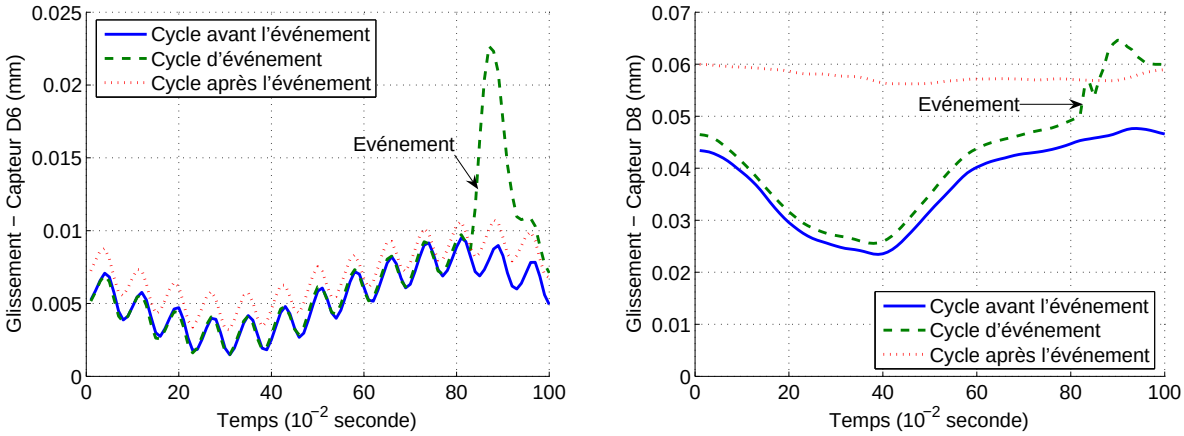


FIG. 4.28 – Position des deux modes de rupture du $CE4$

Sur la figure (Fig. 4.29(a)), le capteur $D6$, qui mesure le glissement à l'interface du côté du mode 2 de rupture, montre que les cycles succédant au cycle de l'événement sont de même allure que les cycles précédant l'événement. Par contre, le capteur $D8$ du côté du mode 1 montre que les cycles succédant à l'événement ne gardent pas la même allure que les cycles précédant l'événement (Fig. 4.29).

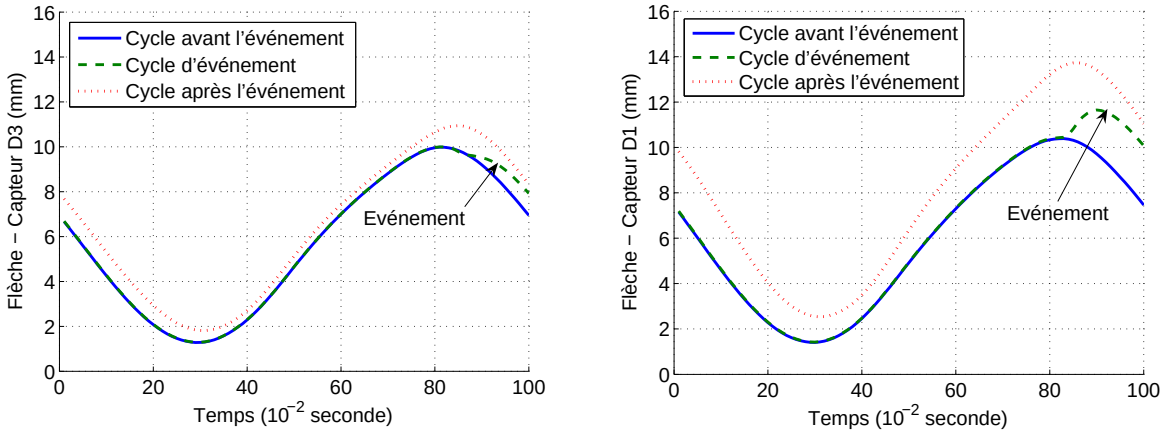


(a) Capteur D6

(b) Capteur D8

Fig. 4.29 – Les cycles des capteurs $D6$ et $D8$ autour du premier événement

Le capteur $D1$, qui mesure la flèche de la face inférieure de la poutre en bois du côté du mode 1, montre une augmentation de la flèche au moment de l'événement (Fig. 4.30(b)). Cette augmentation est due à une diminution de la raideur de la poutre en bois. Par contre, l'augmentation de la flèche ne s'est pas produite avec le capteur $D3$ situé du côté du mode 2 (Fig. 4.30(a)).



(a) Capteur D3

(b) Capteur D1

Fig. 4.30 – Les cycles des capteurs $D1$ et $D3$ autour du premier événement

De plus, cinq heures quarante cinq minutes et cinquante six secondes après le premier événement, une augmentation du glissement mesuré par le capteur $D6$ montre la rupture de l'interface (Fig. 4.31).

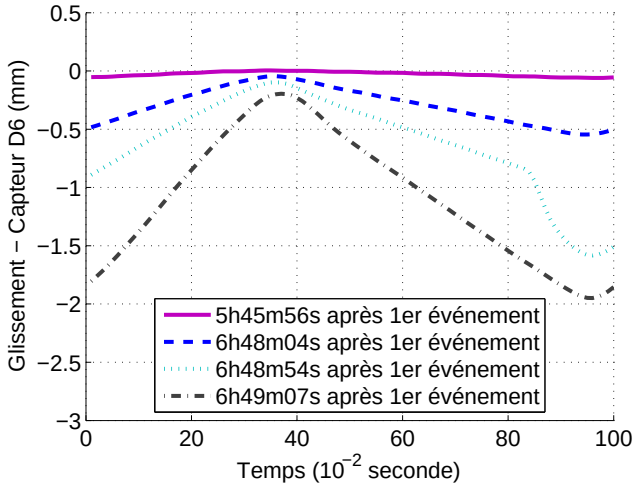


FIG. 4.31 – Rupture observée par le capteur de glissement $D6$

Nous concluons que la rupture s'est produite d'abord dans le bois en cisaillement (mode 1). La rupture en cisaillement à l'interface (mode 2) a commencé à se produire cinq heures quarante cinq minutes après. La rupture de l'interface est donc probablement une conséquence de la rupture selon le mode 1.

Après découpage de la poutre, nous avons pu observer que la rupture du mode 2 s'est produite cette fois à l'interface colle-BFUP, il s'agit d'une rupture adhésive (Fig. 4.32).

(a) Vue de loin (b) Vue au près

Fig. 4.32 – Rupture adhésive de l'interface colle-BFUP du $CE4$

4.4 Conclusion

Quatre exemplaires d'un prototype de tablier mixte bois-BFUP collé à l'échelle 1/3 ont été réalisés et présentés dans ce chapitre. Le programme de chargement a été justifié pour n'endommager que le système de connexion. A la première phase de 2 millions de cycles ont été ajoutées 2 autres phases de chargement d'amplitude plus grande. Tous les corps d'épreuve ont résisté au programme d'essais sans perte de rigidité de l'interface, à l'exception toutefois du 4ème corps d'épreuve ($CE4$) qui s'est rompu à 115000 cycles pour l'amplitude de $150kN$. Deux ruptures s'étant produites à des extrémités opposées du corps d'épreuve, la métrologie nous a permis de constater que la première s'est initiée dans le bois sous l'effet du cisaillement, et qu'elle a probablement entraîné la rupture de l'interface bois-BFUP environ 20000 cycles après. Une vérification de la contrainte de fatigue dans le bois (Tab. 4.10) nous informe que celle-ci est proche de la valeur limite, ce qui peut expliquer la rupture. Finalement, les résultats nous permettent de vérifier que la connexion par collage s'est comportée de manière satisfaisante sous l'action de 3 phases de chargement successives. Nous résumons le programme de chargement et les résultats de la tenue en fatigue sur la figure (Fig. 4.33). Chaque point représente 3 résultats d'essais sur 3 corps d'épreuve différents.

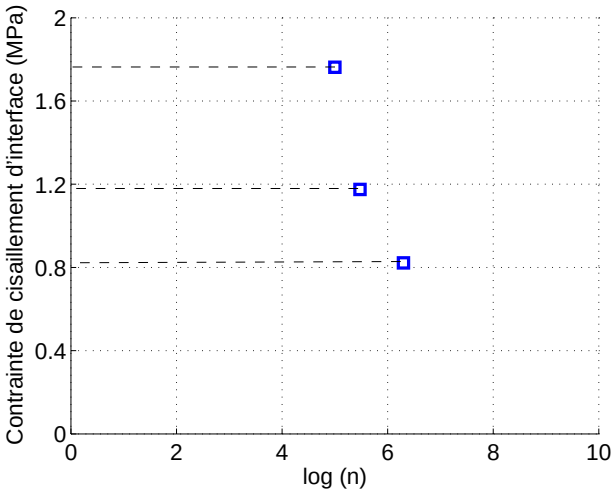


FIG. 4.33 – Résultat de la tenue en fatigue du collage

Ces résultats très satisfaisants, bien que restant incomplets pour dresser une courbe de fatigue, indiquent que la validation plus approfondie de la technologie du collage pour de nouveaux ponts mixtes mérite d'être poursuivie.

Conclusion générale et perspectives

Nous allons maintenant dresser le bilan général des travaux présentés dans ce mémoire.

L'analyse bibliographique du chapitre 1 nous a informé du faible nombre d'études relatives à la résistance à la fatigue des connecteurs bois-béton. Aucune validation du collage du béton sur le bois n'a été trouvée. Ces observations nous ont convaincu de mener une étude expérimentale exploratoire sur le comportement de divers systèmes de connexion bois-béton, étude menée dans le chapitre 3. Ces essais ont mis en évidence l'influence de la rigidité de l'interface sur le comportement global de la structure. Les systèmes de connexion testés ont couvert la plupart des familles de connexions existantes. Les modes de fonctionnement de chaque type et les différents modes de rupture ont été identifiés. Cette étude a mis en évidence que le collage du béton sur le bois est une solution performante. Cette performance a ensuite été validée pour le collage du béton fibré ultra performant au bois.

La conception des essais et leur analyse nous ont conduit à développer,dans le chapitre 2, une théorie adaptée aux poutres courtes ayant fait l'objet de la phase exploratoire. L'adaptation du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ a été proposée à cette fin. Elle nous a fourni un outil de dimensionnement des structures constituées de poutres mixtes à connexion imparfaite. L'introduction du glissement d'interface par une discontinuité d'interface a permis de simuler le glissement physique et non pas le glissement généralisé. De plus, le modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ *adapté* permet la prise en compte de la déformation de cisaillement des couches dans le comportement global de la structure. Une comparaison avec le modèle classique de poutres mixtes à connexion imparfaite nous a en effet montré l'importance de la déformation de cisaillement sur la flèche pour les poutres à faible élancement.

Enfin, le collage ayant été retenu comme objet de l'étude en fatigue, des essais en fatigue ont été présentés dans le chapitre 4. Quatre exemplaires du prototype à l'échelle 1/3 d'un tablier mixte bois-BFUP collé ont été réalisés. Le programme de chargement a été justifié pour n'endommager que le système de connexion. Tous les corps d'épreuve ont résisté au programme d'essais sans perte de rigidité de l'interface. On notera toutefois que le 4ème corps d'épreuve ($CE4$) s'est rompu à 115000 cycles pour l'amplitude de $150kN$. L'analyse fine des enregistrements des capteurs nous a informé que la rupture s'est d'abord produite par cisaillement dans le bois puis ensuite à l'interface bois-BFUP. Finalement, les résultats nous permettent de vérifier que la connexion par collage s'est comportée de manière satisfaisante sous l'action de 3 phases de chargement successives.

Ces résultats sont très satisfaisants, mais restent encore incomplets pour dresser une courbe de fatigue. Ils indiquent néanmoins que la validation plus approfondie de la technologie du collage pour de nouveaux ponts mixtes mérite d'être poursuivie.

Des travaux supplémentaires sont à proposer pour le futur aussi bien du point de vue expérimental que théorique.

D'une manière générale, si la durabilité des colles est étudiée dans différents laboratoires, il reste nécessaire de vérifier la durabilité du collage sur les matériaux bois et BFUP. Cette durabilité peut être affectée par différents facteurs extérieurs. Les essais effectués dans cette thèse ont par exemple fait abstraction des effets du changement hygroscopique du bois sur le comportement du collage. Les variations dimensionnelles transversales du bois étant fortement dépendantes de son hygroscopie, il apparaît indispensable de valider le comportement du collage sous les effets couplés du chargement et des variations hygrométriques extérieures représentatives de climats particuliers.

Les essais de fatigue présentés dans cette recherche sont assez lourds à conduire. En supposant que la phase précédente donnent des résultats satisfaisants, il paraît intéressant de proposer des essais de fatigue à plus petite échelle, mais en plus grand nombre, de manière à proposer une courbe de fatigue complète.

Le principe structurel présenté ici peut constituer une étape intermédiaire de conception de structures hybrides plus complexes. On pense ici au renforcement du bois dans le domaine de la traction ou du cisaillement. Ce travail est en cours au sein du laboratoire LAMI dans le cadre d'une thèse.

D'un point de vue théorique, le modèle *$\mathcal{M}4$-5n adapté* aux interfaces imparfaites gagnerait à être implanté dans un code aux EF et à être diffusé aussi largement que possible. Un tel outil reste nécessaire car on constate que les connexions imparfaites sont actuellement les seules utilisées dans les ouvrages mixtes en bois. Ce travail d'insertion dans un code a déjà commencé dans le cadre d'une thèse au LAMI.

Bibliographie

[AFGC, 2002] AFGC . Bétons fibrés à ultra-hautes performances. Association Française de Génie Civil, 2002.

[Ahmadi *et al.*, 1993] Ahmadi B.H. et Saka M.P. *Behaviour of composite timber-concrete floors.* Journal of Structural Engineering, Vol 119, pp. 3111–3129, 1993.

[Aitcin, 1998] Aitcin P.C. *Méthode et système d'ancrage d'un revétement de béton à une surface existante.* Brevet d'invention CA 02207549, Office de la propriété intellectuelle du Canada, 1998.

[Alain, 1988] Alain G. *Plancher à collaboration bois-béton.* Brevet d'invention 0280228 EP0280229, Office Européen des brevets, 1988.

[Aribert, 1996] Aribert J.M. *Influence of slip of the shear connection on composite joint behavior.* Connections in steel structures, pp. 11–22, 1996.

[Bathon *et al.*, 2005] Bathon T. et Bathon L. *Wood-Concrete-Composite systems.* Brevet d'invention US 2005/0086906, United States Patent Application Publication, 2005.

[Batoz *et al.*, 1990] Batoz J. et Dhatt G. Modélisation des structures par éléments finis. Hermes, 1990.

[Benitez, 2000] Benitez M.F. *Development and testing of timber/concrete shear connectors.* World Conference on Timber Engineering, 2000.

[Bettex, 1992] Bettex R. *Plancher mixte bois-béton.* Brevet d'invention WO 94/11589 WO11589, Organisation Mondiale De La Propriété Intellectuelle, 1992.

[BPEL91, 1992] BPEL91 . Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton précontraint suivant la méthode des états limites. 1992.

[Calgaro, 1996] Calgaro Jean-Armand. Introduction aux Eurocodes. 1996.

[Carreira, 1998] Carreira R.P. *Validation par éléments finis des Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches M4.* Thèse : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.

[Cecchi *et al.*, 2002] Cecchi A. et K.Sab . *A multi-parameter homogenization study for modeling elastic masonry.* European Journal of Mecanics A/Solids, Vol 21, pp. 249–268, 2002.

[Chabot, 1997] CHABOT A. *Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide de modèles multiparticulaires de matériaux multicouches(M4).* Thèse : L'Ecole Nationale Des Ponts Et Chaussées, 1997.

[Clouston *et al.*, 2004] CLOUSTON P., CIVJAN S. et BATHON L. *Experimental behavior of a continuous metal connector for a wood-concrete composite system.* Forest Products Journal, Vol 54, pp. 76–84, 2004.

[Cowper, 1996] COWPER G.R. *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory.* Journal of Applied Mechanics, Vol 33, pp. 335–340, 1996.

[Deperraz, 1998] DEPERRAZ G. *Poutre mixte bois-béton pour la construction et l'ouvrage d'art.* Brevet d'invention 2780427, Institut National De La Propriété Industrielle, 1998.

[Diaz-Diaz, 2001] DIAZ-DIAZ A. *EEEEE.* Thèse : Ecole nationale des ponts et chaussées, 2001.

[Dubois *et al.*, 2006] DUBOIS F., PETIT C., SAUVAT N. et PEUCHOT B. *Diagnostic et comportement des ponts à ossature bois.* Revue européenne de génie civile, Vol 10, pp. 191–208, 2006.

[EC1.3-DAN, 1997] EC1.3-DAN . *Bases de calcul et actions sur les structures - Partie 3 : Charges sur les ponts dues au trafic*, 1997.

[EC5-1-1, 1995] EC5-1-1 . *Calcul des structures en bois - Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments*, 1995.

[Ehrlacher, 1999] EHRLACHER A. Modèle de matériaux composites. Ecole Nationale Des Ponts et Chaussées, 1999.

[ENV-2, 1997] ENV-2 . *Calcul des structures en bois - Partie 2 : Ponts*, 1997.

[Gattesco, 2001] GATTESCO N. *Experimental study on different dowel techniques for shear transfer in wood-concrete composite beams.* Creative systems in Structural and Construction Engineering, 2001.

[Gauthier, 1993] GAUTHIER D. *Elément de construction composite bois-béton.* Brevet d'invention EP 0613985A1, Office Européen des Brevets, 1993.

[Goodman, 1968] GOODMAN J.R. *Layered wood systems with interlayer slip.* Wood Engineering, pp. 148–158, 1968.

[Granholm, 1949] GRANHOLM H. *On composite beams and columns with particular regard to nailed timber structures.* Transaction No. 88, Chalmers Technical University, 1949.

[Gürtler, 2004] GÜRTLER H.W. *Composite action of FRP bridge decks adhesively bonded to steel main girders.* Thèse : Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, 2004.

[Gutkowski *et al.*, 1996] Gutkowski R.M. et Chen T.M. *Tests and analysis of mixed concrete-wood beams.* International Wood Engineering Conference, Vol 3, pp. 436–442, 1996.

[Hadj-Ahmed *et al.*, 2001] Hadj-Ahmed R., Foret G. et Ehrlacher A. *Stress analysis in adhesive joints with a multiparticle model of multilayered materials (M4).* International Journal of Adhesion and Adhesive, Vol 21, pp. 297–307, 2001.

[Heimeshoff, 1987] Heimeshoff B. *Zur Berechnung von Biegetragern aus nachgiebig miteinander verbundenen Querschnittsteilen im Ingenieurholzbau.* Holz als Roh-und Werkstoff, Vol 45, pp. 237–241, 1987.

[Heinz, 2000] Heinz W. *Connection screw for wood-concrete composite structure.* Brevet d'invention, 2000.

[Johnston *et al.*, 1991] Johnston R.P. et Molenstra I.N. *Partial shear connection in composite beam for building.* Proc. Institution of Civil Engineering, Vol 91, pp. 679–704, 1991.

[Krishna-Murty, 1970] Krishna-Murty A.V. *Analysis of short beams.* AIAA journal, Vol 8, pp. 2098–2100, 1970.

[Kuttel, 1998] Kuttel R. *Connecting element for wood-concrete composite structure.* Brevet d'invention WO 96/21778 EP0832336, Internationale Zusammenarbeit Auf Dem Gebiet Des Patentwesens, 1998.

[Linden, 1999] Linden M. Van Der. *Timber-concrete composite floor systems.* Thèse : Delft University, 1999.

[Martino, 2005] Martino M. *System for the construction of mixed wood and concrete floors, and the components required to join the two marerials.* Brevet d'invention EP 1582644A1, European Patent Application, 2005.

[Maurice *et al.*, 2000] Maurice B. et Christophe G. *Composite decks of concrete glued to timber.* World Conference on Timber Engineering, 2000.

[Molard *et al.*, 1998] Molard D., Winter W. et Forge L. *Brevet d'invention-Elemment de paroi composite bois-béton.* Brevet d'invention, Institut National De La Propriété Industrielle, 1998.

[Natale, 2000] Natale A. *Brevet d'invention-Connertor for mixted timber-concrete construction.* Brevet d'invention EP1013840, 2000.

[Natterer *et al.*, 2000] Natterer J., Sandoz J.L. et Rey M. Construction en bois. Presses polytechnique et universitaires romandes, 2000.

[Navi *et al.*, 2005] Navi P. et Heger F. Comportement thermo-hydromécanique du bois. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2005.

[Newmark *et al.*, 1951] Newmark N.M., Siess C.P. et Viest I.M. *Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction.* Proceedings, Society for Experimental Stress Analysis, Vol 9, pp. 75–92, 1951.

[Nguyen *et al.*, 2005] Nguyen V. T., Caron J.F. et Sab K. *A model for thick laminates and sandwich plates.* Composites Science and Technology, Vol 65, pp. 475–489, 2005.

[Nguyen, 2004] Nguyen V.T. *Modélisation globale et locale des structures multicouches par éléments finis de plaque.* Thèse : Ecole nationale des ponts et chaussées, 2004.

[Pincus, 1970] Pincus G. *Behavior of Wood-Concrete Composite Beams.* Journal of the Structural Division, Vol 96, pp. 2009–2019, 1970.

[Piskunov, 2003] Piskunov V.G. *An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems.* Mechanics of composite materials, Vol 39, pp. 3–24, 2003.

[Raymond, 1995] Raymond H.G. *Connecteur pour plancher mixte, plancher incorporant un tel connecteur et procédé de réalisation.* Brevet d'invention 2742459 FR2742459, Institu National De La Propriété Industrielle, 1995.

[Resplendino, 2004] Resplendino J. *First recommendations for Ultra-High-Performance Concretes and examples of application.* International Symposium on UHPC, 2004.

[Resplendino, 2005] Resplendino J. *Innovative design of ultra high performance fiber reinforced concrete ribbed slab : experimental validation and preliminary detail analyses.* International Symposium on HSC/HPC, 2005.

[Richard *et al.*, 1995] Richard P. et Cheyrezy M. *Composition of reactive powder concretes.* Cement and Concrete Research, Vol 25, pp. 1501–1511, 1995.

[Rossi, 1997] Rossi P. *High performance multimodal fiber reinforced cement composite.* ACI materials journal, Vol 94, pp. 478–483, 1997.

[Schaub, 1929] Schaub M.O. *Brevet d'invention-Liaison exempte de glissement entre armature en bois et béton dans les constructions en béton à armature en bois.* Brevet d'invention 667419, Brevet d'invention-Ministère du Commerce et de l'Industrielle, 1929.

[Schnabl *et al.*, 2007] Schnabl S., Saje M., Turk G. et Planinc I. *Analytical solution of two-layer beam taking into account interlayer slip and shear deformation.* Jounal of structural engineering, Vol 113, pp. 886–894, 2007.

[Setra, 1996] Setra . *Ponts métaliques et mixtes - Résistance à la fatigue*, 1996.

[Setra, 2006] Setra . *Guide technique - Les ponts en bois - Comment assurer leur durabilité*, 2006.

[Steinberg *et al.*, 2003] Steinberg E., Ell R. et Faust T. *Connectors for timber-Lightweight concrete composite structures.* Jounal of structural engineering, Vol 129, pp. 1538–1545, 2003.

[Tadeusz *et al.*, 1981] Tadeusz G.C., Jacek K., Jerzy P. et Anna R. *Floor, in particular for apartment building, and method of erecting the same.* Brevet d'invention 0037546A1, European Patent Application, 1981.

[Tommola *et al.*, 2005] Tommola J., Salokangas L. et Jutila A. *Tests on shear connectors.* Rapport technique, Helsinki University of Technology-Laboratory of Bridge Engineering, 2005.

[T.Trygve, 1982] T.Trygve . *Pièce d'assemblage pour charpente en bois.* Brevet d'invention FR2517770, Institu National De La Propriété Industrielle, 1982.

[Weaver, 1999] Weaver C.A. *Behavior of FRP-Reinforced glulam-concrete composite bridge girders.* Thèse : B.S. University of Maine, 1999.

[Welch, 2005] Welch M.J. *Dowel Fastener and Joints Including Same.* Brevet d'invention US0100399, Patent Application Publication, 2005.

Annexes

Annexe A

Résolution formelle du modèle classique

La résolution formelle de (Eq. 2.30) nous donne la solution du problème :

$$v(x) = \frac{1}{\alpha^5}\int_0^x \left[sh\alpha(\alpha-t) - \frac{\alpha^3}{6}(x-t)^3 - \alpha(x-t)\right] f(t)dt + \tag{A.1}$$

$$+D_1 sh\alpha x + D_2 ch\alpha x + D_3 x^3 + D_4 x^2 + D_5 x + D_6 \tag{A.2}$$

Après avoir trouvé le déplacement v, on peut trouver les autres inconnues de la manière suivante :

(Eq. 2.5) et (Eq. 2.10) nous donnent les moments fléchissants de chaque couche :

$$M_1 = E_1 I_1 v''$$
$$M_2 = E_2 I_2 v''$$

(Eq. 2.27) donne l'effort de glissement à l'interface :

$$\tau = \int \left(-q/d - \frac{\sum E_i I_i}{d} v^{(4)}\right) dx + D_7 \tag{A.3}$$

(Eq. 2.7) et (Eq. 2.12) donnent les efforts tranchants dans les couches :

$$Q_1 = M_1' + d_1\tau$$
$$Q_2 = M_2' + d_2\tau$$

(Eq. 2.13) donne l'effort d'arrachement :

$$\nu = Q_2' \tag{A.4}$$

(Eq. 2.6) donne l'effort normal de couche 1 :

$$N_1 = \int \tau dx + D_8 \tag{A.5}$$

(Eq. 2.4) donne le déplacement horizontal v_1 de couche 1 :

$$u_1 = -\int \frac{N_1}{E_1 A_1} dx + D_9 \tag{A.6}$$

(Eq. 2.14) donne le déplacement horizontal v_2 de couche 2 :

$$u_2 = \frac{\tau}{K} + u_1 + dv' \tag{A.7}$$

(Eq. 2.9) donne l'effort normal de couche 2 :

$$N_2 = -E_2 A_2 u_2' \tag{A.8}$$

Les inconnues du problème sont fonction de 9 constantes différentielles D_1 à D_9. Dans un cas de chargement donné, on peut trouver ces 9 coefficients à l'aide de conditions aux limites correspondantes.

Dans le but de diminuer les constantes différentielles pour résoudre le système d'équations, nous proposons la notion de moment global de la poutre par rapport à l'axe qui passe par le centre de gravité de la poutre dans le cas de connexion parfaite. Nous présentons le champ de déformation sur la section de la poutre sur la figure (Fig. A.1).

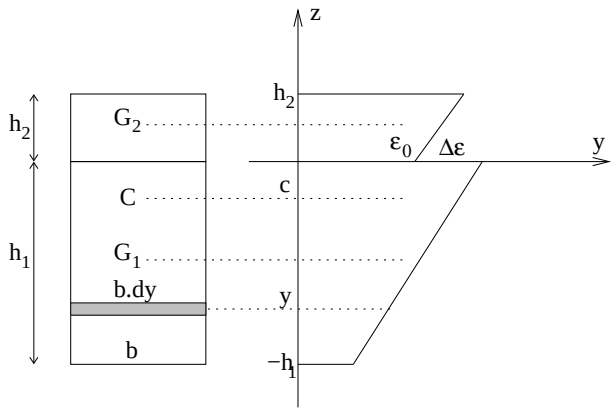


Fig. A.1 – Champ de déformation de la section

Remarquons que nous pouvons trouver la position de centre de gravité C de la poutre dans le cas de connexion parfaite :

$$c = \frac{E_1 A_1 d_1 - E_2 A_2 d_2}{\sum E_i A_i}$$

Le moment global de la poutre est alors calculé :

$$\begin{aligned} M &= \int_{-h_2}^{0} E_2\left(\epsilon_0 + \Delta\epsilon + yv''\right)(y-c)\,bdy + \int_{0}^{h_1} E_1\left(\epsilon_0 + yv''\right)(y-c)\,bdy \\ &= \{\{E_1\left[I_1 + d_1(d_1-c)A_1\right] + E_2\left[I_2 + d_2(d_2+c)A_2\right]\}\,v'' + \\ &+ \left[E_1(d_1-c)A_1 - E_2(d_2+c)A_2\right]\epsilon_0 - E_2\left(d_2+c\right)A_2\Delta\epsilon \\ &= \frac{1}{\sum\frac{1}{A_iE_i}}\left[\left(\sum E_iI_i\sum\frac{1}{E_iA_i} + d^2\right)v'' + \frac{d}{K}\tau'\right] \end{aligned} \tag{A.9}$$

En introduisant τ de (Eq. 2.27), nous obtenons :

$$M = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[\left(\sum E_iI_i\sum\frac{1}{E_iA_i} + d^2\right)v'' - \frac{\sum E_iI_i}{K}v^{(4)} - \frac{q}{K}\right] \tag{A.10}$$

Nous en déduisons ensuite l'effort tranchant globale de la poutre :

$$Q = M' = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[\left(\sum E_iI_i\sum\frac{1}{E_iA_i} + d^2\right)v''' - \frac{\sum E_iI_i}{K}v^{(5)} - \frac{1}{K}q'\right] \tag{A.11}$$

Les équations (Eq. 2.7) et (Eq. 2.12) nous donnent la formule de l'effort de glissement :

$$\tau = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[dv''' - \frac{\sum E_iI_i}{Kd}v^{(5)} - \frac{1}{Kd}q'\right] \tag{A.12}$$

(Eq. 2.26) donne l'effort d'arrachement :

$$\nu = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[\left(E_2I_2\sum\frac{1}{E_iA_i} + dd_2\right)v^{(4)} - \frac{d_2\sum E_iI_i}{Kd}v^{(6)} - \frac{d_2}{Kd}q''\right] \tag{A.13}$$

Nous arrivons à retrouver les efforts internes de chaque couche :

$$M_1 = E_1I_1v'' \tag{A.14}$$

$$M_2 = E_2I_2v'' \tag{A.15}$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[\left(\sum E_1I_1\sum\frac{1}{E_iA_i} + dd_1\right)v''' - \frac{d_1\sum E_iI_i}{Kd}v^{(5)} - \frac{d_1}{Kd}q''\right] \tag{A.16}$$

$$Q_2 = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[\left(\sum E_2I_2\sum\frac{1}{E_iA_i} + dd_2\right)v''' - \frac{d_2\sum E_iI_i}{Kd}v^{(5)} - \frac{d_2}{Kd}q''\right] \tag{A.17}$$

$$N_1 = -N_2 = \frac{1}{\sum\frac{1}{E_iA_i}}\left[dv'' - \frac{\sum E_iI_i}{Kd}v^{(4)} - \frac{1}{Kd}q\right] \qquad \text{Si} \qquad N_1 + N_2 = 0 \tag{A.18}$$

Nous avons donc présenté les inconnues du problème en fonction de 6 coefficients différentiels qui se trouvent dans la formule de la flèche de la poutre (Eq. A.1).

Annexe B

Adaptation du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$

B.1 Méthode d'approximation d'Hellinger-Reissner pour les modèles multiparticulaires

Problème d'élasticité 3D

Considérons le problème d'élasticité 3D dans le domaine Ω, de frontière $\delta\Omega$ suivant :

Trouver les champs de déplacement $\underline{U} \in E_{\underline{U}}$ et de contrainte $\overline{\overline{\sigma}} \in E_{\overline{\overline{\sigma}}}$ où :

- $E_{\underline{U}}$ est l'espace vectoriel des champs de vecteur continu $3D$ sur Ω.
- $E_{\overline{\overline{\sigma}}}$ est l'espace vectoriel des champs de tenseur d'ordre 2 symétrique sur Ω.

satisfaisant les équations suivantes :

- Équation d'équilibre quasi-statique :

$$\underline{div}\overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{f}(\underline{x}) = 0 \quad dans \quad \Omega \tag{B.1}$$

- Équation de comportement élastique linéaire :

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\underline{x}) = \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}} \tag{B.2}$$

Où $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})$ est le tenseur d'ordre quatre des souplesses du matériau en $\underline{x}$

- Équation de compatibilité :

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{\overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x}) +^T \overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x})}{2} \tag{B.3}$$

Dans la suite, nous noterons en abrégé, $\overline{\overline{\epsilon}}\left(\underline{U}(\underline{x})\right)$ au lieu de $\frac{\overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x}) +^T \overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x})}{2}$.

- Equations de conditions aux limites :

$$\underline{U}(\underline{x}) = \underline{U}^d(\underline{x}) \quad sur \quad \partial\Omega_U \left(\overline{\overline{\sigma}}.\underline{n}\right)(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad sur \quad \partial\Omega_T \tag{B.4}$$

Où $\underline{U}^d(\underline{x})$ est le déplacement imposé sur la partie $\partial\Omega_U$ de la frontière $\partial\Omega$ et $\underline{T}^d(\underline{x})$ est le vecteur contrainte imposé sur la partie $\partial\Omega_T$ de la frontière $\partial\Omega$. Supposons que $\partial\Omega_U \cap \partial\Omega_T = 0$ et $\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_T = \partial\Omega$.

Théorème de Reissner

Nous définissons la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner sur le couple de champs $(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$. Le champ $\underline{U}^*$ est un champ de vecteur continu 3D sur Ω, de classe C^1 par morceaux sur Ω et $\overline{\overline{\sigma}}^*$ est un champ de tenseur d'ordre 2 symétrique, de classe C^1 par morceaux sur Ω.

$$\begin{aligned} H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) \quad = \quad & \int_\Omega \left[\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\epsilon}}(\underline{U}^*(\underline{x})) - \underline{f}(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) - \frac{1}{2}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) \right] d\Omega \\ & - \int_{\partial\Omega_U} \left(\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}\right)(\underline{x}).\left(\underline{U}^* - \underline{U}^d\right)(\underline{x}) dS - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Le théorème de Reissner est le suivant :

La solution du problème élastique est le couple $(\underline{U}, \overline{\overline{\sigma}})$ qui rend stationnaire la fonctionnelle $H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$.

Approximation d'Hellinger-Reissner

L'utilisation de la formulation d'Hellinger-Reissner pour la construction des modèles multiparticulaires est présentée en détail dans [Chabot, 1997]. Nous n'en présentons ici qu'un résumé des étapes principales. La construction des modèles approchés découle des quatre étapes suivantes :

1. Au lieu de chercher la solution exacte $\overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) \in E_{\overline{\overline{\sigma}}}$, nous cherchons la solution approchée de $\overline{\overline{\sigma}}$ dans le sous-espace vectoriel de $E_{\overline{\overline{\sigma}}}$. Les champs de contraintes approchés $\overline{\overline{\sigma}}$ appartenant à ce sous-espace s'expriment à l'aide de champs qui sont les efforts généralisés. La première étape de l'approximation d'Hellinger-Reissner consiste à définir les efforts intérieurs généralisés et à écrire l'approximation en contrainte sous forme polynômiale en z. Les coefficients des polynômes font intervenir les efforts intérieurs généralisés.

2. Nous injectons le champ de contraintes approché dans la formulation $H.R.$ et nous identifions les déplacements généralisés et les déformations généralisées cohérentes avec l'approximation en contrainte.

3. En faisant une variation de la fonctionnelle $H.R.$ par rapport à une variation des déplacements généralisés, nous obtenons les équations d'équilibre généralisé et les conditions aux limites généralisées.

4. La stationnarité de $H.R.$ par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés donne les équations de comportement généralisées.

B.2 Problème de multicouche à connexion imparfaite

Considérons le multicouche formé de n couches d'épaisseur e^i dont les interfaces sont notées $\Gamma_{i,i+1}$. Le volume occupé par le multicouche est noté $\Omega = \omega \times \left[h_1^-; h_n^+\right]$. Pour pouvoir tenir compte des glissements aux interfaces $\Gamma_{i,i+1}$, on introduit la discontinuité de déplacement $\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x})$ à l'interface $\Gamma_{i,i+1}$. Le nouveau problème $3D$ qui possède la discontinuité à résoudre est le suivant :

Trouver les champs de déplacement $\underline{U}$ et de contrainte $\overline{\overline{\sigma}}$, dans le domaine tridimensionnel Ω, de frontière $\partial\Omega$ satisfaisant les équations suivantes :

- Équation d'équilibre quasi-statique :

$$\underline{div}\overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 \quad dans \quad \Omega \tag{B.6}$$

Supposons que la force volumique est nulle, $\underline{f}(\underline{x}) = 0$

- Équation de comportement élastique linéaire :

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\underline{x}) = \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}} \tag{B.7}$$

Où $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})$ est le tenseur d'ordre quatre des souplesses du matériau en $\underline{x}$

- Équation de compatibilité :

$$\overline{\overline{\epsilon}}(\underline{x}) = \frac{\overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x}) +^T \overline{\overline{Grad}}\underline{U}(\underline{x})}{2} \tag{B.8}$$

- Equations de conditions aux limites :

$$\left(\overline{\overline{\sigma}}.\underline{n}\right)(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad sur \quad \partial\Omega_T \tag{B.9}$$

Où $\underline{T}^d(\underline{x})$ est le vecteur contrainte imposé sur la partie $\partial\Omega_T$ de la frontière $\partial\Omega$. Nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que les conditions aux limites sont données sur tout $\partial\Omega$ du type vecteur contrainte imposée, $\partial\Omega = \partial\Omega_T$ et $\partial\Omega_U = \emptyset$.

- Equation de discontinuité des déplacements aux interfaces :

$$[\underline{U}(\underline{x})]^{i,i+1} = \underline{U}(x, y, h_{i+1}^-) - \underline{U}(x, y, h_i^+) = \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) \quad sur \quad \Gamma_{i,i+1} \tag{B.10}$$

Nous allons maintenant exposer la démarche pour la construction des modèles multiparticulaires par la méthode de l'approximation d'Hellinger Reissner présentée ci-dessus et d'autre part, nous allons décrire aussi la façon l'introduction du terme de glissement à l'interface $\gamma^{i,i+1}(\underline{x})$ dans les modèles multiparticulaires présenté dans [Diaz-Diaz, 2001].

Reprenons la formulation $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ associée au nouveau problème $3D$:

$$H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) = \int_\Omega \left[\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\epsilon}}(\underline{U}^*(\underline{x})) - \frac{1}{2}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x})\right] d\Omega - \int_{\partial\Omega_T} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS. \tag{B.11}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\epsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) &= \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{grad}}\,\underline{U}^*(\underline{x}) \\ &= div\left(\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})\right) - \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) \end{aligned} \tag{B.12}$$

Intégrale sur Ω :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\epsilon}}(\underline{U}^*)(\underline{x}) = \int_\Omega div\left(\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})\right) d\Omega - \int_\Omega \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega_T} \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}).\underline{n}(\underline{x}) dS + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\left[\underline{U}^*(\underline{x})\right]^{i,i+1}.\underline{e}_z dS\right) - \int_\Omega \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega_T} (\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n})(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} (\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{e}_z)(\underline{x})\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS\right) - \int_\Omega \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\Omega\end{aligned}$$

Nous obtenons alors la formulation $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ qui est associée au problème de multicouche à connexion imparfaite :

$$\begin{aligned}H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*) &= -\int_\Omega \left[\underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) + \frac{1}{2}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x})\right] d\Omega + \\ &+ \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} (\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{e}_z)(\underline{x})\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS\right) + \int_{\partial\Omega_T}\left((\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}) - \underline{T}^d\right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS\end{aligned} \tag{B.13}$$

Le théorème de Reissner dit que :

La solution du problème élastique est le couple $(\underline{U}, \overline{\overline{\sigma}})$ qui rend stationnaire la fonctionnelle $H.R.(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$ (Eq. B.13) .

Nous allons montrer que nous retrouverons les équations du problème $3D$ proposé au-dessus en réalisant la stationnarité de la fonctionnelle $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.13).

La stationnarité par rapport à une variable du champ de déplacement tridimensionnel $\underline{U}^*$ donne les équations d'équilibre et les conditions aux limites en contrainte sur $\partial\Omega_T$:

$$-\int_\Omega \left[\underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\delta\underline{U}^*(\underline{x})\right] d\Omega + \int_{\partial\Omega_T}\left((\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}) - \underline{T}^d\right)(\underline{x}).\delta\underline{U}^*(\underline{x}) dS = 0 \qquad \forall\delta\underline{U}^*$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) = 0 \\ (\overline{\overline{\sigma}}.\underline{n})(\underline{x}) = \underline{T}^d(\underline{x}) \quad sur \quad \partial\Omega_T \\ \overline{\overline{\sigma}}.\underline{n} \quad \text{continu sur les surfaces de discontinuité de} \quad \overline{\overline{\sigma}} \end{cases} \tag{B.14}$$

La stationnarité par rapport à une variation du champ de contrainte tridimensionnel $\overline{\overline{\epsilon}}$ donne le comportement élastique linéaire et les conditions aux limites en déplacement sur $\partial\Omega_U$:

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \left[\underline{div}\delta\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) + \delta\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x})\right] d\Omega + \sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} (\delta\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{e}_z)(\underline{x})\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS\right) + \\ &+ \int_{\partial\Omega_T}\left(\delta\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}\right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS = 0 \qquad \forall\delta\overline{\overline{\sigma}}^*\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\overline{\epsilon}}(\underline{U}(\underline{x})) = \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}(\underline{x}) \\ [\underline{U}(\underline{x})]^{i,i+1} = \underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) \quad \text{sur} \quad \Gamma_{i,i+1} \end{cases} \tag{B.15}$$

Nous avons alors retrouvé les équations $3D$ du problème proposé par la stationnarité de $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ B.13. Nous avons donc bien démontré le théorème de Reissner pour notre problème. Nous allons maintenant présenter les étapes nécessaires à la construction du modèle de multicouches à connexion imparfaite.

B.3 Approximation des champs de contraintes 3D

Nous proposons de retenir une approximation des champs de contrainte $3D$ sous forme polynômiale en z par couche. Ces polynômes de degré croissant en z, sont choisis orthogonaux entre eux afin de faciliter plus tard le calcul des énergies élastiques écrites en contrainte, c'est à dire que :

$$\int_{h_i^-}^{h_i^+} P_\alpha^i(z) P_\beta^i(z) dz = 0 \quad si \quad \alpha \neq \beta \tag{B.16}$$

La "base" polynômiale choisie est la suivante :

$$\begin{cases} P_0^i(z) = 1 \\ P_1^i(z) = \frac{z-\overline{h_i}}{e^i} \\ P_2^i(z) = -6\left(\frac{z-\overline{h_i}}{e^i}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ P_3^i(z) = -2\left(\frac{z-\overline{h_i}}{e^i}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(\frac{z-\overline{h_i}}{e^i}\right) \end{cases} \tag{B.17}$$

Les polynômes de cette "base" vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_0^{i'}(z) = 0 \\ P_1^{i'}(z) = \frac{P_0^i(z)}{e^i} \\ P_2^{i'}(z) = \frac{-12P_1^i(z)}{e^i} \\ P_3^{i'}(z) = \frac{P_2^i(z)}{e^i} - \frac{2}{10}\frac{P_0^i(z)}{e^i} \end{cases} ; \begin{cases} P_1^i(z = h_i^+) = \frac{1}{2} \\ P_1^i(z = h_i^-) = -\frac{1}{2} \\ P_2^i(z = h_i^+) = -1 \\ P_2^i(z = h_i^-) = -1 \\ P_3^i(z = h_i^+) = -\frac{1}{10} \\ P_3^i(z = h_i^-) = \frac{1}{10} \end{cases} ; \begin{cases} \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z).P_0^i(z)dz = e^i \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_1^i(z).P_1^i(z)dz = \frac{e^i}{12} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_2^i(z).P_2^i(z)dz = \frac{e^i}{5} \\ \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_3^i(z).P_3^i(z)dz = \frac{e^i}{700} \end{cases} \tag{B.18}$$

Nous choisissons les coefficients des polynômes qui apparaissent dans l'écriture des contraintes approchées de manière à faire intervenir les champs suivants qu'on appelle efforts intérieurs généralisés :

- Le tenseur plan $\tilde{\tilde{N}}$ d'ordre 2 des efforts membranaires de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$N_{\alpha\beta}^i(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \alpha_{\alpha\beta}(x,y,z)dz \qquad (N/m); \tag{B.19}$$

- Le tenseur plan $\tilde{\tilde{M}}^{\,i}$ d'ordre 2 des moments de flexion de la couche i par rapport au plan médian de la couche (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$M^i_{\alpha,\beta} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} (z - \overline{h_i})\alpha_{\alpha\beta}(x,y,z)dz \qquad (Nm/m); \tag{B.20}$$

- Le vecteur plan $\tilde{Q}^i$ d'effort tranchant de la couche i (avec $1 \leq i \leq n$) :

$$Q^i_\alpha(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \alpha_{\alpha 3}(x,y,z)dz \qquad (N/m); \tag{B.21}$$

- Le vecteur plan $\tilde{\tau}^{j,j+1}$ d'effort intérieur de cisaillement à l'interface $j, j+1$ (avec $1 \leq j \leq n-1$) :

$$\tau^{j,j+1}_\alpha(x,y) = \sigma_{\alpha 3}(x,y,h_j^+) \qquad (N/m^2); \tag{B.22}$$

- Le scalaire $\nu^{j,j+1}$ d'effort d'arrachement à l'interface $j, j+1$ (avec $1 \leq j \leq n-1$)

$$\nu^{j,j+1}(x,y) = \sigma_{33}(x,y,h_j^+) \qquad (N/m^2). \tag{B.23}$$

Dans le modèle $\mathcal{M}4$-5n , nous approchons les contraintes dans le plan par des polynômes en z du premier degré. On les notera $\sigma_{\alpha\beta}((\alpha,\beta) \in 1,2)$. Pour pouvoir avoir un champ de contrainte approché équilibré, dans l'hypothèse où la force de volume est nulle, nous en déduisons que les contraintes approchées $\sigma_{\alpha 3}$ et σ_{33} sont respectivement les polynômes en z du deuxième et du troisième degré. Les coefficients des polynômes sont choisis en introduisant les efforts généralisés définis au-dessus pour pourvoir exprimer les contraintes approchées d'une manière cohérente avec des efforts généralisés. Les contraintes approchées dans la couche i s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}
\sigma^{5n}_{\alpha\beta}(x,y,z) &= N^i_{\alpha\beta}(x,y)\frac{P^i_0(z)}{e^i} + \frac{12}{(e^i)^2}M^i_{\alpha\beta}(x,y)P^i_1(z) \\
\sigma^{5n}_{\alpha 3}(x,y,z) &= Q^i_\alpha(x,y)\frac{P^i_0(z)}{e^i} + \left(\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y) - \tau^{i-1,i}_\alpha(x,y)\right)P^i_1(z) + \\
&\quad + \left(Q^i_\alpha(x,y) - \frac{e^i}{2}\left(\tau^{i,i+1}_\alpha(x,y) + \tau^{i-1,i}_\alpha(x,y)\right)\right)\frac{P^i_2(z)}{e^i} \\
\sigma^{5n}_{33}(x,y,z) &= \left(\frac{\nu^{i,i+1}(x,y) + \nu^{i-1,i}(x,y)}{2} + \frac{e^i}{12}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right)P^i_0(z) \\
&\quad + \left(\frac{e^i}{10}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) - \frac{div\tilde{Q}^i(x,y)}{5} + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y)\right)P^i_1(z) + \\
&\quad + \frac{e^i}{12}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)P^i_2(z) + \\
&\quad + \left(\frac{e^i}{2}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) - div\tilde{Q}^i(x,y)\right)P^i_3(z)
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Remarque B.3.1
Dans ce qui précède, les efforts intérieurs $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$ sont définis pour i variant de 1 à $n-1$ (les interfaces entre les couches). Cependant il est utile de noter :
- $\tilde{\tau}^{0,1}$ et $\tilde{\tau}^{n,n+1}$ les efforts extérieurs de cisaillement sur la face inférieure de la couche 1 et supérieure de la couche n
- $\nu^{0,1}$ et $\nu^{n,n+1}$ l'effort extérieur normal sur la face inférieure de la couche 1 et supérieure de la couche n.

Les efforts $\tilde{\tau}^{0,1}$, $\tilde{\tau}^{n,n+1}$, $\nu^{0,1}$ *et* $\nu^{n,n+1}$ *sont donc des données*. Si nous notons T_k^- (respectivement T_k^+) $k \in \{1,3\}$ la composante suivant k du vecteur contrainte imposé sur la face externe inférieure (respectivement supérieure) du multicouche, nous avons :

$$\begin{cases} \tau_1^{0,1}(x,y) = -T_1^-(x,y) \\ \tau_2^{0,1}(x,y) = -T_2^-(x,y) \\ \nu^{0,1}(x,y) = -T_3^-(x,y) \end{cases} \quad \text{respectivement} \quad \begin{cases} \tau_1^{n,n+1}(x,y) = T_1^+(x,y) \\ \tau_2^{n,n+1}(x,y) = T_2^+(x,y) \\ \nu^{n,n+1}(x,y) = T_3^+(x,y) \end{cases}$$

Remarquons ici que :

$$\underline{n}(\underline{x}) = n_\alpha(\underline{x})\underline{e}_\alpha \quad \forall(\underline{x}) \in \omega \times [h_i^-, h_i^+], i = [1,n]$$

$$\underline{n}(\underline{x}) = n_3(\underline{x})\underline{e}_3 \quad \forall(\underline{x}) \in \omega(h_1^-) \bigcup \omega(h_n^+)$$

On peut donc montrer facilement que :

$$\begin{aligned} \int_{\omega(h_1^-)} \left((\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}) - \underline{T}^d \right) (\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\omega = 0 \\ \int_{\omega(h_n^+)} \left((\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}) - \underline{T}^d \right) (\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\omega = 0 \end{aligned} \tag{B.25}$$

B.4 Équation d'équilibre et conditions aux limites

Déplacements généralisés

En prenant les termes qui font apparaître le champ de déplacement $\underline{U}^*$ dans $H.R.$ $\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.13) , on obtient une fonctionnelle T sur $(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*)$ définie par :

$$T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right) = -\int_\Omega \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^*(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_T} \left((\overline{\overline{\sigma}}^*.\underline{n}) - \underline{T}^d \right) (\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS \tag{B.26}$$

En introduisant l'approximation en contrainte du $\mathcal{M}4$-$5n$ dans l'écriture de $\overline{\overline{\sigma}}^*$, on va faire apparaître les notations qu'on appelle déplacements généralisés cohérents avec l'approximation en contrainte.

Rappelons que :

$$\int_{\Omega} ...d\Omega = \int_{\omega} \left(\int_{h_1^-}^{h_n^+} ...dz \right) d\omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} ...dz \right) d\omega \tag{B.27}$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} ...d\omega &= \int_{\partial\omega} \left(\int_{h_1^-}^{h_n^+} ...dz \right) ds + \int_{\omega(h_1^-)} ...d\omega + \int_{\omega(h_n^+)} ...d\omega \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\omega} \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} ...dz \right) ds + \int_{\omega(h_1^-)} ...d\omega + \int_{\omega(h_n^+)} ...d\omega \end{aligned} \tag{B.28}$$

Nous avons le premier terme de $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.26), avec $\overline{\overline{\sigma}}^* = \overline{\overline{\sigma}}^{5n}$:

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega} \underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})d\Omega \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} d\omega \left[\begin{array}{l} \left(\tilde{div}\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) \right).\tilde{U}^{i*}(x,y) + \\ + \left(\tilde{div}\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) - \tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2}(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)) \right).\tilde{\phi}^{i*}(x,y) + \\ + \left(div\tilde{Q}^i(x,y) + \left(\nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y)\right) \right).U_3^{i*}(x,y) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Et le deuxième terme de $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.26), avec $\overline{\overline{\sigma}}^* = \overline{\overline{\sigma}}^{5n}$ en utilisant les expressions de (Eq.B.25) :

$$\int_{\partial\Omega_T} \left((\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}) - \underline{T}^d \right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dS = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\omega} ds \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left((\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}) - \underline{T}^d \right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dz \tag{B.29}$$

Remarquons ici que :

$$\underline{n}(\underline{x}) = n_\alpha(\underline{x})\underline{e}_\alpha \quad \forall(\underline{x}) \in \omega \times [h_i^-, h_i^+], i = [1, n]$$

$$\underline{n}(\underline{x}) = n_3(\underline{x})\underline{e}_3 \quad \forall(\underline{x}) \in \omega(h_1^-) \bigcup \omega(h_n^+)$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} &\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left((\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}) - \underline{T}^d \right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dz \\ &= \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\sigma_{\alpha\beta}^{5n}(\underline{x})n_\beta U_\alpha^*(\underline{x}) + \sigma_{\alpha 3}^{5n}(\underline{x})n_\alpha U_3^*(\underline{x}) \right) dz - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^*(\underline{x})dz \\ &= \left(\tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} \right).\tilde{U}^{i*} + \left(\tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} \right).\tilde{\phi}^{i*} + \left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) \right).\underline{n}.\hat{U}_3^{i*} + \\ &+ \tilde{Q}^i.\underline{n}U_3^{i*} + e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dz \end{aligned}$$

En introduisant les deux termes dans $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right)$ (Eq. B.26), on obtient :

$$T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\omega} d\omega \left\{ \begin{array}{l} \left(\tilde{div}\tilde{\tilde{N}}^{i}(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right).\tilde{U}^{i*}(x,y) + \\ + \left(\tilde{div}\tilde{\tilde{M}}^{i}(x,y) - \tilde{Q}^{i}(x,y) + \frac{e_i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right)\right).\tilde{\phi}^{i*}(x,y) + \\ \left(div\tilde{Q}^{i}(x,y) + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y)\right) U_3^{i*}(x,y) \end{array} \right\} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\omega} ds \left\{ \begin{array}{l} \left(\tilde{\tilde{N}}^{i}.\underline{n}\right).\tilde{U}^{i*} + \left(\tilde{\tilde{M}}^{i}.\underline{n}\right).\tilde{\phi}^{i*} + \left(\tilde{Q}^{i} - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\underline{n}\hat{U}_3^{i*} + \\ +\tilde{Q}^{i}.\underline{n}U_3^{i*} + e^i\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\underline{n}\overline{U}_3^{i*} - \int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dz \end{array} \right\} \quad \text{(B.30)}$$

Où nous avons introduit les notations suivantes pour i $\in [1, n]$:

- $\tilde{U}^{i*}$ est le champ de déplacements membranaires de la couche i (champ de vecteurs du plan) de composantes $U_\alpha^{i*}, \alpha \in 1, 2$, avec :

$$U_\alpha^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_\alpha^*(x,y,z)dz \quad \text{(B.31)}$$

$\underline{U}^*$ étant le champ de déplacement 3D.

- $\tilde{\phi}^{i*}$ est le champ de rotation de la couche i (champ de vecteur du plan) de composantes $\phi_\alpha^{i*}, \alpha \in 1, 2$, avec :

$$\phi_\alpha^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{12P_1^i(z)}{(e^i)^2} U_\alpha^*(x,y,z)dz \quad \text{(B.32)}$$

- U_3^{i*} est le champ de déplacement moyen normal de la couche i avec :

$$U_3^{i*}(x,y) = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_0^i(z)}{e^i} U_3^*(x,y,z)dz \quad \text{(B.33)}$$

- $\overline{U}_3^{i*}$ est un champ scalaire que nous pourrions nommer premier moment du déplacement normal de la couche i avec :

$$\overline{U}_3^{i*} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_1^i(z)}{e^i} U_3^*(x,y,z)dz \quad \text{(B.34)}$$

- $\hat{U}_3^{i*}$ est un champ scalaire que nous pourrions nommer, de même, second moment du déplacement normal de la couche i avec :

$$\hat{U}_3^{i*} = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \frac{P_2^i(z)}{e^i} U_3^*(x,y,z)dz \quad \text{(B.35)}$$

Nous remarquons que la contribution des déplacements $3D$ $\underline{U}^*$ dans le terme de surface $\int_\omega$ est contenue dans ce qu'on appellera les déplacements généralisés du modèle. Il s'agit des $5n$ champs en (x, y) suivants :

$$\tilde{U}^{i*}, \tilde{\phi}^{i*} \quad \text{et} \quad U_3^{i*}$$

Équations d'équilibre

Nous allons maintenant appliquer le théorème de Reissner pour déterminer les équations d'équilibre du modèle. La stationnarité de $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right)$ (Eq. B.30) par rapport à une première variation des déplacements généralisés nous donne les $5n$ équations d'équilibre généralisées, équations en (x, y) du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$, ce qui légitime son appellation :

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{div}\tilde{\tilde{N}}^i(x,y) + \tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \\ div\tilde{Q}^i + \nu^{i,i+1}(x,y) - \nu^{i-1,i}(x,y) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \\ \tilde{div}\tilde{\tilde{M}}^i(x,y) - \tilde{Q}^i(x,y) + \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1}(x,y) + \tilde{\tau}^{i-1,i}(x,y)\right) = 0 \quad \text{sur} \quad \omega \end{array}} \tag{B.36}$$

Conditions aux limites en contrainte

Ces conditions vont découler du théorème de Reissner et nous allons les obtenir dans le terme de bord de l'expression de $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right)$ (Eq. B.26) . Pour pourvoir faire une variation du terme de bord de $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right)$ (Eq. B.26) par rapport aux déplacements généralisés, nous décomposons sous forme polynômiale le champ de déplacement $3D$ $\underline{U}^*(x, y, z)$ aux bords de la manière suivante pour $z \in [h_i^-, h_i^+]$:

$$\underline{U}^*(\underline{x}) = \begin{cases} U_\alpha^*(\underline{x}) = P_0^i(z)U_\alpha^{i*}(x,y) + e^i P_i^1(z)\phi_\alpha^{i*}(x,y) + \Delta U_\alpha^{i*}(x,y,z) \\ U_3^*(x,y,z) = P_0^i(z)U_3^{i*}(x,y) + \Delta U_3^{i*}(x,y,z) \end{cases} \tag{B.37}$$

Avec $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$ orthogonal à $P_0^i(z)$ et $P_i^1(z)$ et $\Delta U_3^{i*}(x, y, z)$ orthogonal à $P_0^i(z)$.

Comme on a postulé une approximation sur le champ de contrainte, on ne pourra pas vérifier complètement et rigoureusement les conditions aux limites aux bords. On peut donc postuler l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1

La contribution des termes de perturbation $\Delta U_\alpha^{i*}(x, y, z)$ et $\Delta U_3^{i*}(x, y, z)$ dans les termes de bord est supposée négligeable devant celle des déplacements généralisés.

Le terme de bord $-\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^* dz$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} -\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}(\underline{x}) * dz &= -\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(T_\alpha^d(\underline{x})U_\alpha^*(\underline{x}) + T_3^d(\underline{x})U_3^*(\underline{x})\right) dz \\ &= -\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(T_\alpha^d(\underline{x})P_0^i(z)U_\alpha^{i*}(x,y) + T_\alpha^d(\underline{x})e^i P_1^i(z)\phi_\alpha^{i*}(x,y) + T_3^d(\underline{x})P_0^i(z)U_3^{i*}(x,y)\right) dz \\ &= -\tilde{T}_d^i\tilde{U}^{i*} - \tilde{M}_d^i\tilde{\phi}^{i*} - Q_{3d}^i U_3^{i*} \end{aligned} \tag{B.38}$$

Où :

$$\left| \begin{array}{l} T_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z)T_\alpha^d dz \\ M_{d\alpha}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} e^i P_1^i(z)T_\alpha^d dz \\ Q_{3d}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} P_0^i(z)T_3^d dz \end{array} \right. \tag{B.39}$$

En négligeant les termes de bord qui font intervenir les composantes $\overline{U}_3^{i*}$ et $\hat{U}_3^{i*}$ et qui font partie des termes de perturbation du champ de déplacements, nous obtenons grâce à la stationnarité de la fonctionnelle $T\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.26) les conditions aux limites en contrainte sur la frontière $\delta\omega$ ci-dessous :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^i.\underline{n} = \tilde{T}_d^i \\ \tilde{\tilde{M}}^i.\underline{n} = \tilde{M}_d^i \\ \tilde{Q}^i.\underline{n} = Q_{3d}^i \end{array} \right. \tag{B.40}$$

Déformations généralisées

Reprenons les termes qui font apparaître le champ de déplacement $\underline{U}^*$ dans la formulation $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.11), avec $\partial\Omega_U = 0$ et $\overline{\overline{\sigma}}^* = \overline{\overline{\sigma}}^{5n}$:

$$\bar{T}(\underline{U}^*(\underline{x}), \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})) = \int_\Omega \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}) : \overline{\overline{\epsilon}}^*(\underline{U}^*(\underline{x}))d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})dS \tag{B.41}$$

Nous notons ici $\bar{T}$ qui comprend des termes de discontinuité à l'interface pour pouvoir le distinguer de T. En faisant une intégration par parties, nous pouvons développer les termes associés avec les efforts généralisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{T}(\underline{U}^*(\underline{x}), \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} \int_\omega \left[\tilde{\tilde{N}}^i : \tilde{\tilde{\epsilon}}^{i*} + \tilde{\tilde{M}}^i : \tilde{\tilde{\chi}}^{i*} + \tilde{Q}^i.\left(\tilde{\phi}^{i*} + \tilde{Grad}U_3^{i*}\right)\right] d\omega + \\ & + \sum_{i=0}^{n} \int_\omega \left[\tilde{\tau}^{i,i+1}.\left(\tilde{U}^{i+1*} - \tilde{U}^{i*} - \frac{e^i}{2}\tilde{\phi}^{i*} - \frac{e^{i+1}}{2}\tilde{\phi}^{i+1*}\right)\right] d\omega + \\ & + \sum_{i=0}^{n} \int_\omega \left[\nu^{i,i+1}\left(U_3^{i+1*} - U_3^{i*}\right)\right] d\omega + \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \int_\omega \tilde{\tau}^{i,i+1}.\tilde{\gamma}^{i,i+1} d\omega - \sum_{i=1}^{n-1} \int_\omega \nu^{i,i+1}\gamma_3^{i,i+1} d\omega - \\ & - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\omega} ds \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^* dz \right) \end{aligned} \tag{B.42}$$

Avec les notations :

- $\tilde{\tilde{\epsilon}}^{i*}$ est le champ tensoriel d'ordre 2 de déformation membranaire de la couche i de composantes :

$$\epsilon_{\alpha\beta}^{i*} = \frac{1}{2}\left(U_{\alpha,\beta}^{i*} + U_{\beta,\alpha}^{i*}\right) \qquad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \tag{B.43}$$

- $\tilde{\tilde{\chi}}^{i*}$ est le champ tensoriel d'ordre 2 de courbure de la couche i de composantes :

$$\chi_{\alpha\beta}^{i*} = \frac{1}{2}\left(\phi_{\alpha,\beta}^{i*} + \phi_{\beta,\alpha}^{i*}\right) \qquad \alpha, \beta \in \{1, 2\} \tag{B.44}$$

On peut en déduire la dualité énergétique entre efforts et déformations généralisés pour $i \in [1, n]$ et $j \in [1, n-1]$:

$$\begin{array}{ccl}
\tilde{\tilde{N}}^i & \longleftrightarrow & \tilde{\tilde{\epsilon}}^i = \dfrac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{Grad}}\tilde{U}^i +^T \tilde{\tilde{Grad}}\tilde{U}^i\right) \\
\tilde{\tilde{M}}^i & \longleftrightarrow & \tilde{\tilde{\chi}}^i = \dfrac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{Grad}}\tilde{\phi}^i +^T \tilde{\tilde{Grad}}\tilde{\phi}^i\right) \\
\tilde{Q}^i & \longleftrightarrow & \tilde{d}^i_\phi = \tilde{\phi}^i + \tilde{Grad}U^i_3 \\
\tilde{\tau}^{j,j+1} & \longleftrightarrow & \tilde{D}^{j,j+1} = \tilde{U}^{j+1} - \tilde{U}^j - \dfrac{e^j}{2}\tilde{\phi}^j - \dfrac{e^{j+1}}{2}\tilde{\phi}^{j+1} \\
\tilde{\nu}^{j,j+1} & \longleftrightarrow & D^{j,j+1}_\nu = U^{j+1}_3 - U^j_3
\end{array} \tag{B.45}$$

On obtient enfin :

$$\begin{aligned}
\bar{T}(\underline{U}^*(\underline{x}), \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})) \;=\; & \sum_{i=1}^{n} \int_\omega \left[\tilde{\tilde{N}}^i : \tilde{\tilde{\epsilon}}^{i*} + \tilde{\tilde{M}}^i : \tilde{\tilde{\chi}}^{i*} + \tilde{Q}^i.\tilde{d}^{i*}_\phi\right] d\omega + \\
& + \sum_{i=0}^{n} \int_\omega \left[\tilde{\tau}^{i,i+1}.\tilde{D}^{i,i+1*}\right] d\omega + \\
& + \sum_{i=0}^{n} \int_\omega \left[\nu^{i,i+1} D^{i,i+1*}_\nu\right] d\omega + \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} \int_\omega \tilde{\tau}^{i,i+1}.\tilde{\gamma}^{i,i+1} d\omega - \sum_{i=1}^{n-1} \int_\omega \nu^{i,i+1}\gamma^{i,i+1}_3 d\omega - \\
& - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\omega} ds \left(\int_{h_i^-}^{h_i^+} \underline{T}^d.\underline{U}^* dz\right)
\end{aligned} \tag{B.46}$$

B.5 Comportement cohérent avec l'approximation en contrainte

Le comportement généralisé reliant les efforts intérieurs généralisés aux déformations généralisées s'obtient en écrivant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner par rapport à une variation des efforts intérieurs généralisés. On s'intéresse donc à la fonctionnelle T' déduite de la fonctionnelle $H.R.\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^*\right)$ (Eq. B.13) en ne prenant en compte que les termes faisant intervenir le champ de contrainte approché $\mathcal{M}4$-5n $\overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})$:

$$\begin{aligned}
T'\left(\underline{U}^*, \overline{\overline{\sigma}}^{5n}\right) = \quad & -\int_\Omega \left[\underline{div}\overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) + \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})\right] d\Omega + \\
& + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\int_{\Gamma_{i,i+1}} (\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{e}_z)(\underline{x}).\underline{\gamma}^{i,i+1}(\underline{x}) dS\right) + \int_{\partial\Omega_T} \left(\overline{\overline{\sigma}}^{5n}.\underline{n}\right)(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x})
\end{aligned} \tag{B.47}$$

On trouve que :

$$T' = \bar{T} + \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d(\underline{x}).\underline{U}^*(\underline{x}) dS - \int_\Omega \left[\overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})\right] \tag{B.48}$$

En introduisant l'expression de $\bar{T}$ de (Eq. B.46) dans (Eq. B.49), on obtient :

$$\begin{aligned} T'(\underline{U}^*(\underline{x}), \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} \left[\tilde{\tilde{N}}^{i} : \tilde{\tilde{\epsilon}}^{i*} + \tilde{\tilde{M}}^{i} : \tilde{\tilde{\chi}}^{i*} + \tilde{Q}^{i}.\tilde{d}_{\phi}^{i*} \right] d\omega + \\ &+ \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \left[\tilde{\tau}^{i,i+1}.\tilde{D}^{i,i+1*} \right] d\omega + \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \left[\nu^{i,i+1} D_{\nu}^{i,i+1*} \right] d\omega + \\ &- \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \tilde{\tau}^{i,i+1}.\tilde{\gamma}^{i,i+1} d\omega - \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \nu^{i,i+1} \gamma_3^{i,i+1} d\omega - \\ &- W_{3D}^{5n} \end{aligned} \tag{B.49}$$

Où :

$$W_{3D}^{5n} = \int_{\Omega} \left[\overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}) : \overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x}) : \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x}) \right] \tag{B.50}$$

Nous notons $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})$ le tenseur d'ordre 4 des souplesses du matériau. Supposons que le matériau des couches est orthotrope admettant l'axe $\underline{e}_3$ comme axe normal. $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})$ est donc constant dans chaque couche et est égal au tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}^{i}$ de composant S_{mnop}^{i} avec $m, n, o, p \in \{1, 2, 3\}^4$. En notation ingénieur, le tenseur $\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}(\underline{x})^{i}$ s'écrit [Ehrlacher, 1999] :

$$\overline{\overline{\overline{\overline{S}}}}^{i} = \begin{bmatrix} S_{1111}^{i} & S_{1122}^{i} & S_{1133}^{i} & 0 & 0 & 2S_{1112}^{i} \\ S_{2211}^{i} & S_{2222}^{i} & S_{2233}^{i} & 0 & 0 & 2S_{2212}^{i} \\ S_{3311}^{i} & S_{3322}^{i} & S_{3333}^{i} & 0 & 0 & 2S_{3312}^{i} \\ 0 & 0 & 0 & 4S_{2323}^{i} & 4S_{2331}^{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4S_{1323}^{i} & 4S_{1331}^{i} & 0 \\ 2S_{1211}^{i} & S_{1222}^{i} & S_{1233}^{i} & 0 & 0 & 2S_{1212}^{i} \end{bmatrix} \tag{B.51}$$

Nous notons $\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}}^{i}$ le tenseur d'ordre quatre plan des souplesses sur les efforts tridimensionnels membranaires, S_{ν}^{i} le scalaire de souplesse sur les efforts tridimensionnels d'arrachement, $\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{i}$ le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse sur les efforts tridimensionnels de cisaillement et $\tilde{\tilde{S}}_{3}^{i}$ le tenseur d'ordre 2 plan de souplesse caractéristique du couplage entre les efforts tridimensionnels membranaires et d'arrachement. Ces tenseurs ont pour composantes :

$$\left(\tilde{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}}^{i}\right)_{\alpha\beta\gamma\delta} = S_{\alpha\beta\gamma\delta}^{i} \,; (S_{\nu}^{i}) = S_{3333}^{i} \,; \left(\tilde{\tilde{S}}_{Q}^{i}\right)_{\alpha\beta} = 4S_{\alpha 3\beta 3}^{i} \text{ et } \left(\tilde{\tilde{S}}_{3}^{i}\right) = 2S_{\alpha\beta 33}^{i} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \{1, 2\}^2.$$

Le terme W_{3D}^{5n} de (Eq. B.49) n'est autre que l'énergie élastique écrite en contrainte du champ de contrainte approché $\mathcal{M}4\text{-}5n$. Cette énergie s'exprime sur chacune des couches en fonction de quatre termes :

$$W_{3D}^{5n} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} \left[w_{c}^{5ni} + w_{\nu}^{5ni} + w_{3}^{5ni} + w_{Q}^{5ni} \right] ds \tag{B.52}$$

Où :

- w_c^{5ni} est l'énergie élastique des contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ de la couche i :

$$w_c^{5ni} = \frac{1}{2}\int_{h_i^-}^{h_i^+} \tilde{\tilde{\sigma}}^{5n} : \tilde{\tilde{\tilde{S}}}^{i} : \tilde{\tilde{\sigma}}^{5n} dz \tag{B.53}$$

- w_ν^{5ni} est l'énergie élastique de la contrainte σ_{33} normale à la couche i :

$$w_\nu^{5ni} = \frac{1}{2}\int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{33}^{5n} S_\nu^i \sigma_{33}^{5n} dz \tag{B.54}$$

- w_3^{5ni} est l'énergie élastique de couplage entre les contraintes membranaires $\sigma_{\alpha\beta}$ et la contrainte normale σ_{33} à la couche i :

$$w_3^{5ni} = \frac{1}{2}\int_{h_i^-}^{h_i^+} \left(\tilde{\tilde{\sigma}}^{5n} : \tilde{\tilde{S}}_3^{i}\right) \sigma_{33}^{5n} dz \tag{B.55}$$

- w_Q^{5ni} est l'énergie élastique du cisaillement perpendiculaire au plan de la couche i :

$$w_Q^{5ni} = \frac{1}{2}\int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha 3}^{5n} \left(\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}\right)_{\alpha\beta} \sigma_{\beta 3}^{5n} dz \tag{B.56}$$

A ce stade, nous devons injecter l'expression des champs de contrainte approchés $\mathcal{M}4$-5n de façon à avoir l'expression généralisée de l'énergie élastique.

Si nous injectons l'expression des contraintes approchées $\mathcal{M}4$-5n de (Eq. B.24 à Eq. B.24) dans les expressions (Eq. B.53 à Eq. B.56) des énergies élastiques, nous obtenons :

$$w_c^{5ni} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\tilde{N}}^{i} : \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^{i}}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^{i} + \tilde{\tilde{M}}^{i} : \frac{12}{(e^i)^3}\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^{i} : \tilde{\tilde{M}}^{i}\right) \tag{B.57}$$

$$w_\nu^{5ni} = \frac{1}{2}S_\nu^i \left[\begin{array}{l} e^i\left(\frac{\nu^{i,i+1}+\nu^{i-1,i}}{2} + \frac{e^i}{12}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right)^2 + \\ +\frac{e^i}{12}\left(\frac{e^i}{10}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) + \frac{5}{6}\left(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}\right)\right)^2 + \\ +\frac{e^i}{5}\left(\frac{e^i}{12}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right)^2 + \\ +\frac{e^i}{700}\left(\left(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}\right) + \frac{e^i}{2}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right)^2 \end{array}\right] \tag{B.58}$$

$$w_3^{5ni} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{N}}^{i} : \tilde{\tilde{S}}_3^{i}\left(\left(\frac{\nu^{i,i+1}+\nu^{i-1,i}}{2}\right) + \frac{e^i}{12}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) + \\ +\frac{\tilde{\tilde{M}}^{i}}{e^i} : \tilde{\tilde{S}}_3^{i}\left(\frac{6}{5}\left(\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}\right) + \frac{e^i}{10}div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) \end{array}\right] \tag{B.59}$$

$$w_Q^{5ni} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} \tilde{\tilde{Q}}^{i}.\left(\frac{\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}}{e^i}\right).\tilde{Q}^i + \left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right).\frac{e^i}{12}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}.\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}\right) + \\ +\left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right).\frac{\tilde{\tilde{S}}_Q^{i}}{5e^i}.\left(\tilde{Q}^i - \frac{e^i}{2}\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)\right) \end{array}\right] \tag{B.60}$$

Remarque B.5.1
Dans le calcul de w_{ν}^{5ni} intervient un terme en $-div\tilde{Q}^i$ que nous avons remplacé par $\nu^{i,i+1} - \nu^{i-1,i}$ d'après la deuxième équation d'équilibre (Eq. B.36).

Le comportement généralisé déduit des expressions ci-dessus donne des calculs trop lourds. Nous simplifions donc l'expression des énergies élastiques approchées en négligeant certaines contributions.

Hypothèse 2
Nous négligeons les énergies w_3^{5n} de couplage entre les efforts membranaires et les contraintes perpendiculaires aux couches. Cela revient à négliger en quelque sorte les effets Poisson dus au "pincement" des couches. Cette hypothèse est habituelle dans la plupart des théories de plaque et a été validée par le travail de [Carreira, 1998].

De plus, les termes $div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ et $div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)^2$ dans l'écriture de w_{ν}^{5n} compliquent beaucoup les calculs alors que multipliés par ${e^i}^2$ ou ${e^i}^3$, leur contribution è l'énergie est probablement faible, ainsi :

Hypothèse 3
On néglige les termes en ${e^i}^2 div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)$ et ${e^i}^3 div\left(\tilde{\tau}^{i,i+1} \pm \tilde{\tau}^{i-1,i}\right)^2$ dans l'expression de W_{3D}^{5n}.

Après ces simplifications, on est capable de donner la contribution de l'énergie élastique W_{3D}^{5n} dans T' pour ensuite déterminer les équations de comportement. On obtient :

$$\begin{aligned} T'(\underline{U}^*(\underline{x}), \overline{\overline{\sigma}}^{5n}(\underline{x})) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{n} \int_{\omega} \left[\tilde{\tilde{N}}^i : \tilde{\tilde{\epsilon}}^{i*} + \tilde{\tilde{M}}^i : \tilde{\tilde{\chi}}^{i*} + \tilde{Q}^i . \tilde{d}_{\phi}^{i*} \right] d\omega + \\ & + \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \left[\tilde{\tau}^{i,i+1} . \left(\tilde{D}^{i,i+1*} - \tilde{\gamma}^{i,i+1} \right) \right] d\omega + \sum_{i=0}^{n} \int_{\omega} \left[\nu^{i,i+1} \left(D_{\nu}^{i,i+1*} - \gamma_3^{i,i+1} \right) \right] d\omega \\ & - W_{3D}^{5n} \end{aligned} \tag{B.61}$$

Finalement, l'expression de W_{3D}^{5n} dans (Eq. B.52) déduite de (Eq. B.53 à Eq. B.56) et de la stationnarité de T' par rapport à n'importe quelle variation des efforts généralisés nous permettent d'aboutir aux équations de comportement généralisé :

- Loi de comportement des efforts normaux de membrane de la couche i pour $1 \leq i \leq n$:

$$\tilde{\tilde{\epsilon}}^i(x,y) = \frac{\tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i}{e^i} : \tilde{\tilde{N}}^i(x,y); \tag{B.62}$$

- Loi de comportement des moments de flexion et de torsion dans le plan de la couche i pour $1 \leq i \leq n$:

$$\tilde{\tilde{\chi}}^i(x,y) = \frac{12}{{e^i}^3} \tilde{\tilde{\tilde{S}}}^i : \tilde{\tilde{M}}^i(x,y); \tag{B.63}$$

- Loi de comportement des efforts de cisaillement hors plan de la couche i pour $1 \leq i \leq n$:

$$\tilde{d}_{\phi}^i(x,y) = \frac{6}{5e^i} \tilde{\tilde{S}}_Q^i . \tilde{Q}^i - \frac{1}{10} \tilde{\tilde{S}}_Q^i . \left(\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i} \right); \tag{B.64}$$

- Loi de comportement des efforts de cisaillement à l'interface $i, i+1$ pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{i,i+1}(x,y) - \tilde{\gamma}^{i,i+1}(x,y) &= -\frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\tilde{Q}^i - \frac{1}{10}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{Q}^{i+1} - \frac{e^i}{30}\tilde{\tilde{S}}_Q^i.\tilde{\tau}^{i-1,i} + \\ &+\frac{2}{15}\left(e^i\tilde{\tilde{S}}_Q^i + e^{i+1}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}\right).\tilde{\tau}^{i,i+1} - \frac{e^{i+1}}{30}\tilde{\tilde{S}}_Q^{i+1}.\tilde{\tau}^{i+1,i+2}; \quad \text{(B.65)}\end{aligned}$$

- Loi de comportement des efforts d'arrachement à l'interface $i, i+1$ pour $1 \leq i \leq n-1$:

$$\begin{aligned}D_\nu^{i,i+1}(x,y) - \gamma_3^{i,i+1}(x,y) &= \frac{9}{70}e^i S_\nu^i \nu^{i-1,i} + \frac{13}{35}\left(e^i S_\nu^i + e^{i+1}S_\nu^{i+1}\right)\nu^{i,i+1} + \\ &+\frac{9}{70}e^{i+1}S_\nu^{i+1}\nu^{i+1,i+2}. \quad \text{(B.66)}\end{aligned}$$

B.6 Loi de comportement d'interface

La dualité énergétique nous permet de déduire les déformations de cisaillement et d'arrachement généralisées correspondant aux efforts généralisés à l'interface $\tilde{\tau}^{i,i+1}$ et $\nu^{i,i+1}$. Nous constatons que ces déformations généralisées sont les pseudo-glissements et les pseudo-arrachements à l'interface. Par contre, nous avons bien implanté le terme de discontinuité à l'interface pour représenter le glissement physique à l'interface. Nous cherchons ici à imposer dans notre modèle la loi de comportement d'interface qui porte sur les efforts à l'interface et la discontinuité à l'interface. La discontinuité à l'interface est le glissement physique qui apparaît sur les structures mixtes.

Le comportement s'écrit alors :

$$\tau_\alpha^{i,i+1}(x,y) = k_\alpha^{i,i+1}\gamma_\alpha^{i,i+1}(x,y) \quad \text{(B.67)}$$

$$\nu^{i,i+1}(x,y) = k_3^{i,i+1}\gamma_3^{i,i+1}(x,y) \quad \text{(B.68)}$$

Où $k_\alpha^{i,i+1}$ est la raideur de cisaillement à l'interface et $k_3^{i,i+1}$ est la raideur d'arrachement à l'interface. on suppose que $k_\alpha^{i,i+1}$ et $k_3^{i,i+1}$ sont constantes sur chaque interface.

Annexe C

Résolution analytique du modèle $\mathcal{M}4$-$5n$ adapté aux poutres mixtes

Pour simplifier la résolution des équations, nous introduisons les inconnues principales suivantes :

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1^1 + \mathbf{N}_1^2 \tag{C.1}$$
$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{N} = \mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_1^1 \tag{C.2}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^1 + \mathbf{Q}_1^2 \tag{C.3}$$
$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^2 - \mathbf{Q}_1^1 \tag{C.4}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^1 + \mathbf{M}_1^2 \tag{C.5}$$
$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^2 - \mathbf{M}_1^1 \tag{C.6}$$

avec :

$$\mathbf{N}_1^1 = \frac{\mathbf{N} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{N}}{2} \tag{C.7}$$
$$\mathbf{N}_1^2 = \frac{\mathbf{N} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{N}}{2} \tag{C.8}$$
$$\mathbf{Q}_1^1 = \frac{\mathbf{Q} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}}{2} \tag{C.9}$$
$$\mathbf{Q}_1^2 = \frac{\mathbf{Q} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{Q}}{2} \tag{C.10}$$
$$\mathbf{M}_1^1 = \frac{\mathbf{M} - \boldsymbol{\Delta}\mathbf{M}}{2} \tag{C.11}$$
$$\mathbf{M}_1^2 = \frac{\mathbf{M} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{M}}{2} \tag{C.12}$$

La somme des deux équations (Eq. 2.97) et (Eq. 2.98) nous donne :

$$\mathbf{N}_{,1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{N} = C_1 \tag{C.13}$$

La somme des deux équations (Eq. 2.99) et (Eq. 2.100) nous donne :

$$\mathbf{Q}_{,1} = -\mathbf{V}^{2,3} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Q} = \int -\mathbf{V}^{2,3} dx + C_2 \quad \text{où} \quad \mathbf{V}^{2,3} \quad \text{est connu} \tag{C.14}$$

A partir des équations d'équilibre (Eq. 2.97), (Eq. 2.98), (Eq. 2.101) et (Eq. 2.102), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Delta N}_{,1} = 2\mathbf{T}_1^{1,2} \\
&\mathbf{M}_{,1} = \mathbf{Q} - \left(\frac{e^1}{2} + \frac{e^2}{2}\right)\mathbf{T}_1^{1,2} \\
\Longrightarrow\ &\mathbf{M}_{,1} = -\frac{e}{4}\mathbf{\Delta N}_{,1} + \mathbf{Q} \\
\Longrightarrow\ &\mathbf{M} = -\frac{e}{4}\mathbf{\Delta N} + \int\left(\int -\mathbf{V}^{2,3} dx\right) dx + C_2 x + C_3
\end{aligned} \tag{C.15}$$

D'autre part, la compatibilité (Eq. 2.89), (Eq. 2.90) et le comportement (Eq. 2.103), (Eq. 2.104) nous donnent :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{S_N^1} U_{1,1}^1 + \frac{1}{S_N^2} U_{1,1}^2 = \mathbf{N} \\
&\Longrightarrow \left(\frac{1}{S_N^1} U_1^1 + \frac{1}{S_N^2} U_1^2\right)_{,1} = C_1 \\
&\Longrightarrow U_1^2 = -\frac{S_N^2}{S_N^1} U_1^1 + S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right)
\end{aligned}$$

Où

$$S_N^1 = \frac{S_{1111}^1}{2b_1 e^1} - \frac{S_{1122}^1}{S_{2222}^1}\frac{S_{2211}^1}{2b_1 e^1}$$

$$S_N^2 = \frac{S_{1111}^2}{2b_2 e^2} - \frac{S_{1122}^2}{S_{2222}^2}\frac{S_{2211}^2}{2b_2 e^2}$$

Nous notons les autres champs inconnus sous forme de matrices :

$$\underline{X} = \left\{\mathbf{\Delta Q}, \mathbf{U}_1^1, \Phi_1^1, \Phi_1^2, \mathbf{\Delta N}, \mathbf{\Delta M}, \mathbf{D}_3^{1,2}\right\} \tag{C.16}$$

$$\underline{Y} = \left\{\mathbf{T}_1^{1,2}, \Omega_1^{1,2}, \mathbf{V}^{1,2}, \Omega_3^{1,2}\right\} \tag{C.17}$$

$$\text{Où} \quad \mathbf{D}_3^{1,2} = \mathbf{U}_3^2 - \mathbf{U}_3^1 \quad \text{est une inconnue} \tag{C.18}$$

Nous allons d'abord présenter Y en fonction de X à partir des quatre équations algébriques parmi les équations du problème.

A partir de (Eq. 2.109) et (Eq. 2.111), nous avons :

$$\Omega_1^{1,2} = \frac{1}{1 + \frac{2}{15}\left(e^1 4 S_{1313}^1 + e^2 4 S_{1313}^2\right) k_1^{1,2}} \left(\mathbf{D}_1^{1,2} + \frac{1}{2b_1 10} 4 S_{1313}^1 \mathbf{Q}_1^1 + \frac{1}{2b_1 10} 4 S_{1313}^2 \mathbf{Q}_1^2\right) \tag{C.19}$$

En remplaçant $\mathbf{D}_1^{1,2}$ de 2.95, $\mathbf{Q}_1^1$ de C.9 et $\mathbf{Q}_1^2$ de C.10 :

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{1,2} &= \frac{1}{1+\frac{2}{15}\left(e^1 4S_{1313}^1 + e^2 4S_{1313}^2\right)k_1^{1,2}}\left(\mathbf{U}_1^2 - \mathbf{U}_1^1 - \frac{e^1}{2}\Phi_1^1 - \frac{e^2}{2}\Phi_1^2 + \right.\\
&\left. + \frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^1\frac{\mathbf{Q}-\mathbf{\Delta Q}}{2} + \frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^2\frac{\mathbf{Q}+\mathbf{\Delta Q}}{2}\right)\\
&= K_{\Delta Q}\mathbf{\Delta Q} - K_1\left(1+\frac{S_N^2}{S_N^1}\right)\mathbf{U}_1^1 - K_1\frac{e^1}{2}\Phi_1^1 - K_1\frac{e^2}{2}\Phi_1^2 + K_Q\mathbf{Q} + K_1 S_N^2\left(C_1 x + C_4\right)
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Avec

$$K_{\Delta Q} = -\frac{1}{2}K_1\frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^1 + \frac{1}{2}K_1\frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^2$$

$$K_Q = \frac{1}{2}K_1\frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^1 + \frac{1}{2}K_1\frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^2$$

$$K_1 = \frac{1}{1+\frac{2}{15}\left(e^1 4S_{1313}^1 + e^2 4S_{1313}^2\right)k_1^{1,2}}$$

On tire donc de 2.111 :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1^{1,2} &= 2b_1 k_1^{1,2}\Omega_1^{1,2}\\
&= 2b_1 k_1^{1,2}K_{\Delta Q}\mathbf{\Delta Q} - 2b_1 k_1^{1,2}K_1\left(1+\frac{S_N^2}{S_N^1}\right)\mathbf{U}_1^1 - 2b_1 k_1^{1,2}K_1\frac{e^1}{2}\Phi_1^1 - 2b_1 k_1^{1,2}K_1\frac{e^2}{2}\Phi_1^2(x)\\
&\quad + 2b_1 k_1^{1,2}K_Q\mathbf{Q} + 2b_1 k_1^{1,2}K_1 S_N^2\left(C_1 x + C_4\right)
\end{aligned} \tag{C.21}$$

D'une manière similaire, à partir de (Eq. 2.110), (Eq. 2.112) et (Eq. 2.96), nous avons :

$$\begin{aligned}
\Omega_3^{1,2} &= \frac{1}{1+\frac{13}{35}\left(e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2\right)k_3^{1,2}}\left(\mathbf{U}_3^2 - \mathbf{U}_3^1 - \frac{9}{2b_1 70}e^2 S_{3333}^2\mathbf{V}^{2,3}\right)\\
&= K_3\mathbf{D}_3^{1,2} - K_3\frac{9}{2b_1 70}e^2 S_{3333}^2\mathbf{V}^{2,3}
\end{aligned} \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{1,2} &= 2b_1 k_3^{1,2}\Omega_3^{1,2}\\
&= 2b_1 k_3^{1,2}K_3\mathbf{D}_3^{1,2} - k_3^{1,2}K_3\frac{9}{70}e^2 S_{3333}^2\mathbf{V}^{2,3}
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Avec

$$K_3 = \frac{1}{1+\frac{13}{35}\left(e^1 S_{3333}^1 + e^2 S_{3333}^2\right)k_3^{1,2}}$$

Nous allons maintenant considérer les équations différentielles pour les condenser.

En soustrayant (Eq. 2.100) à (Eq. 2.99) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta Q}_{,1} &= 2\mathbf{V}_1^{1,2} - \mathbf{V}^{2,3}\\
&= 4b_1 k_3^{1,2}K_3\mathbf{D}_3^{1,2} - \left(1 + 2k_3^{1,2}K_3\frac{9}{70}e^2 S_{3333}^2\right)\mathbf{V}^{2,3}
\end{aligned} \tag{C.24}$$

A partir des équations (Eq. 2.103), (Eq. 2.104), (Eq. 2.89) et (Eq. 2.90), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_N^1}U_{1,1}^1 + \frac{1}{S_N^2}U_{1,1}^2 &= \mathbf{N} \\
-\frac{1}{S_N^1}U_{1,1}^1 + \frac{1}{S_N^2}U_{1,1}^2 &= \mathbf{\Delta N} \\
\Longrightarrow U_{1,1}^1 &= -\frac{1}{2}S_N^1\mathbf{\Delta N} + \frac{1}{2}S_N^1\mathbf{N}
\end{aligned}$$

A partir des équations (Eq. 2.105), (Eq. 2.106), (Eq. 2.91) et (Eq. 2.92), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_M^1}\Phi_{1,1}^1 + \frac{1}{S_M^2}\Phi_{1,1}^2 &= \mathbf{M} \\
-\frac{1}{S_M^1}\Phi_{1,1}^1 + \frac{1}{S_M^2}\Phi_{1,1}^2 &= \mathbf{\Delta M}
\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,1}^1 &= \frac{1}{2}S_M^1\mathbf{M} - \frac{1}{2}S_M^1\mathbf{\Delta M} \\
\Phi_{1,1}^2 &= \frac{1}{2}S_M^2\mathbf{M} + \frac{1}{2}S_M^2\mathbf{\Delta M}
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
S_M^1 &= \frac{12S_{1111}^1}{2b_1(e^1)^3} - \frac{S_{1122}^1}{S_{2222}^1}\frac{12S_{2211}^1}{2b_1(e^1)^3} \\
S_M^2 &= \frac{12S_{1111}^2}{2b_2(e^2)^3} - \frac{S_{1122}^2}{S_{2222}^2}\frac{12S_{2211}^2}{2b_2(e^2)^3}
\end{aligned}$$

En remplaçant $\mathbf{M}$ (Eq. C.15), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Phi_{1,1}^1 &= -\frac{e}{8}S_M^1\mathbf{\Delta N} - \frac{S_M^1}{2}\mathbf{\Delta M} + \frac{S_M^1}{2}\left(\int\left(\int -\mathbf{V}^{2,3}dx\right)dx + C_2x + C_3\right) \\
\Phi_{1,1}^2 &= -\frac{e}{8}S_M^2\mathbf{\Delta N} + \frac{S_M^2}{2}\mathbf{\Delta M} + \frac{S_M^2}{2}\left(\int\left(\int -\mathbf{V}^{2,3}dx\right)dx + C_2x + C_3\right)
\end{aligned}$$

En soustrayant (Eq. 2.97) de (Eq. 2.98) il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta N}_{,1} &= 2\mathbf{T}_1^{1,2} \\
&= 4b_1k_1^{1,2}K_{\Delta Q}\mathbf{\Delta Q} - 4b_1k_1^{1,2}K_1\left(1+\frac{S_N^2}{S_N^1}\right)\mathbf{U}_1^1 - 4b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^1}{2}\Phi_1^1 - 4b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^2}{2}\Phi_1^2(x) \\
&\quad +4b_1k_1^{1,2}K_Q\mathbf{Q} + 4b_1k_1^{1,2}K_1S_N^2\left(C_1x + C_4\right) \qquad \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

et en soustrayant (Eq. 2.101) de (Eq. 2.102) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Delta M}_{,1} &= \mathbf{\Delta Q} + \left(\frac{e^1}{2} - \frac{e^2}{2}\right)\mathbf{T}_1^{1,2} \\
&= \mathbf{\Delta Q} + \left(\frac{e^1}{2} - \frac{e^2}{2}\right)\left(2b_1k_1^{1,2}K_{\Delta Q}\mathbf{\Delta Q} - 2b_1k_1^{1,2}K_1\left(1+\frac{S_N^2}{S_N^1}\right)\mathbf{U}_1^1 -\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -2b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^1}{2}\Phi_1^1 - 2b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^2}{2}\Phi_1^2(x) + 2b_1k_1^{1,2}K_Q\mathbf{Q} + 2b_1k_1^{1,2}K_1S_N^2\left(C_1x + C_4\right)\Big) \\
= \quad & \left(1 - \overline{e}b_1k_1^{1,2}K_{\Delta Q}\right)\mathbf{\Delta Q} + \overline{e}b_1k_1^{1,2}K_1\left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right)\mathbf{U}_1^1 + \\
& +\overline{e}b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^1}{2}\Phi_1^1 + \overline{e}b_1k_1^{1,2}K_1\frac{e^2}{2}\Phi_1^2 - \overline{e}b_1k_1^{1,2}K_Q\mathbf{Q} - \overline{e}b_1k_1^{1,2}K_1S_N^2\left(C_1x + C_4\right) \qquad \text{(C.26)}
\end{aligned}
$$

Où : $e = e^1 + e^2$ et $\overline{e} = e^2 - e^1$

A partir des équations (Eq. 2.107), (Eq. 2.108), (Eq. 2.93) et (Eq. 2.94), nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S_Q^1}\left(\Phi_1^1 + \mathbf{U}_{3,1}^1\right) &= Q_1^1 - \frac{S_T^1}{S_Q^1}\mathbf{T}_1^{1,2} \\
\frac{1}{S_Q^2}\left(\Phi_1^2 + \mathbf{U}_{3,1}^2\right) &= Q_1^2 - \frac{S_T^2}{S_Q^2}\mathbf{T}_1^{1,2}
\end{aligned}
$$

Avec

$$
\begin{aligned}
S_Q^1 &= \frac{6}{2b_1 5e^1}4S_{1313}^1 \\
S_Q^2 &= \frac{6}{2b_2 5e^2}4S_{1313}^2 \\
S_T^1 &= \frac{1}{2b_1 10}4S_{1313}^1 \\
S_T^2 &= \frac{1}{2b_2 10}4S_{1313}^2
\end{aligned}
$$

En écrivant la différence et la somme des deux équations ci-dessus nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{S_Q^1}\left(\Phi_1^1 + \mathbf{U}_{3,1}^1\right) + \frac{1}{S_Q^2}\left(\Phi_1^2 + \mathbf{U}_{3,1}^2\right) &= \mathbf{Q} - \left(\frac{S_T^1}{S_Q^1} + \frac{S_T^2}{S_Q^2}\right)\mathbf{T}_1^{1,2} \\
-\frac{1}{S_Q^1}\left(\Phi_1^1 + \mathbf{U}_{3,1}^1\right) + \frac{1}{S_Q^2}\left(\Phi_1^2 + \mathbf{U}_{3,1}^2\right) &= \mathbf{\Delta Q} - \left(\frac{S_T^2}{S_Q^2} - \frac{S_T^1}{S_Q^1}\right)\mathbf{T}_1^{1,2}
\end{aligned}
$$

Ou bien :

$$
\begin{aligned}
U_{3,1}^1 &= -\Phi_1^1 - S_T^1\mathbf{T}_1^{1,2} - \frac{S_Q^1}{2}\mathbf{\Delta Q} + \frac{S_Q^1}{2}\mathbf{Q} \\
U_{3,1}^2 &= -\Phi_1^2 - S_T^2\mathbf{T}_1^{1,2} + \frac{S_Q^2}{2}\mathbf{\Delta Q} + \frac{S_Q^2}{2}\mathbf{Q}
\end{aligned}
$$

Nous avons alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_{3,1}^{1,2} &= \mathbf{U}_{3,1}^2 - \mathbf{U}_{3,1}^1 \\
&= \Phi_1^1 - \Phi_1^2 + \left(S_T^1 - S_T^2\right)\mathbf{T}_1^{1,2} + \frac{S_Q^1 + S_Q^2}{2}\mathbf{\Delta Q} - \frac{S_Q^1 - S_Q^2}{2}\mathbf{Q} \qquad \text{(C.27)}
\end{aligned}
$$

En introduisant $\mathbf{T}_1^{1,2}$ de (Eq. C.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{3,1}^{1,2} = &\left(\frac{S_Q^1 + S_Q^2}{2} + \left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q}\right) \mathbf{\Delta Q} - \left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) \mathbf{U}_1^1 - \\ &- \left(\left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^1}{2} - 1\right) \Phi_1^1 - \left(\left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^2}{2} + 1\right) \Phi_1^2 + \\ &+ \left(\frac{S_Q^2 - S_Q^1}{2} + \left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_Q\right) \mathbf{Q} + \left(S_T^1 - S_T^2\right) 2b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \quad \text{(C.28)}\end{aligned}$$

Nous résumons les équations ci-dessus sous forme suivante :

$$\underline{X}' = \overline{\overline{A}}.\underline{X} + \underline{F} \quad \text{(C.29)}$$

avec :

$$
\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4b_1 k_3^{1,2} K_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} S_N^1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e S_M^1}{8} & -\frac{S_M^1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{e S_M^2}{8} & \frac{1}{2} S_M^2 & 0 \\
4b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & -4b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & -2b_1 k_1^{1,2} K_1 e_1 & -2b_1 k_1^{1,2} K_1 e_2 & 0 & 0 & 0 \\
1 - \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^1}{2} & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{S_Q}{2} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^1}{2} + 1 & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^2}{2} - 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{C.30}
$$

et avec

$$S_Q = S_Q^1 + S_Q^2$$
$$S_T = S_T^2 - S_T^1$$

Et :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -\left(1 + 2k_3^{1,2} K_3 \frac{9}{70} e^2 S_{3333}^2\right) \mathbf{V}^{2,3} \\ \frac{1}{2} S_N^1 \mathbf{N} \\ \frac{S_M^1}{2} \left(\int \left(\int -\mathbf{V}^{2,3} dx\right) dx + C_2 x + C_3\right) \\ \frac{S_M^2}{2} \left(\int \left(\int -\mathbf{V}^{2,3} dx\right) dx + C_2 x + C_3\right) \\ 4b_1 k_1^{1,2} K_Q \mathbf{Q} + 4b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \\ -\overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_Q \mathbf{Q} - \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \\ \left(\frac{S_Q^2 - S_Q^1}{2} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_Q\right) \mathbf{Q} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \end{bmatrix} \tag{C.31}$$

On note :

$$\underline{X}_1 = \left\{\mathbf{\Delta Q}, \mathbf{U}_1^1, \Phi_1^1, \Phi_1^2\right\} \tag{C.32}$$
$$\underline{X}_2 = \left\{\mathbf{\Delta N}, \mathbf{\Delta M}, \mathbf{D}_3^{1,2}\right\} \tag{C.33}$$

Équation (Eq. C.29) devient :

$$\begin{pmatrix} \underline{X}_1' \\ \underline{X}_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{X}_1 \\ \underline{X}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \end{pmatrix} \tag{C.34}$$

Avec :

$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -\left(1 + 2k_3^{1,2} K_3 \frac{9}{70} e^2 S_{3333}^2\right) \mathbf{V}^{2,3} \\ \frac{1}{2} S_N^1 \mathbf{N} \\ \frac{S_M^1}{2} \left(\int \left(\int -\mathbf{V}^{2,3} dx\right) dx + C_2 x + C_3\right) \\ \frac{S_M^2}{2} \left(\int \left(\int -\mathbf{V}^{2,3} dx\right) dx + C_2 x + C_3\right) \end{bmatrix} \tag{C.35}$$

$$\underline{F}_2 = \begin{bmatrix} 4b_1 k_1^{1,2} K_Q \mathbf{Q} + 4b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \\ -\overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_Q \mathbf{Q} - \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \\ \left(\frac{S_Q^2 - S_Q^1}{2} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_Q\right) \mathbf{Q} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 S_N^2 \left(C_1 x + C_4\right) \end{bmatrix} \tag{C.36}$$

$$\overline{\overline{B}} = \begin{bmatrix} 4b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & -4b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & -2b_1 k_1^{1,2} K_1 e_1 & -2b_1 k_1^{1,2} K_1 e_2 \\ 1 - \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^1}{2} & \overline{e} b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^2}{2} \\ \frac{S_Q}{2} - S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_{\Delta Q} & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \left(1 + \frac{S_N^2}{S_N^1}\right) & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^1}{2} + 1 & S_T 2b_1 k_1^{1,2} K_1 \frac{e^2}{2} - 1 \end{bmatrix} \tag{C.37}$$

$$\overline{\overline{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4b_1 k_3^{1,2} K_3 \\ -\frac{1}{2} S_N^1 & 0 & 0 \\ -\frac{e S_M^1}{8} & -\frac{S_M^1}{2} & 0 \\ -\frac{e S_M^2}{8} & \frac{1}{2} S_M^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.38}$$

On réécrit l'équation (Eq. C.34) :

$$\underline{X}_1' = \overline{\overline{C}}.\underline{X}_2 + \underline{F}_1 \tag{C.39}$$

$$\underline{X}_2' = \overline{\overline{B}}.\underline{X}_1 + \underline{F}_2 \tag{C.40}$$

En introduisant (Eq. C.39) dans la dérivé de (Eq. C.40), on obtient l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$\underline{X}_2'' = \overline{\overline{R}}.\underline{X}_2 + \underline{G} \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{B}}.\overline{\overline{C}} \quad \text{et} \quad \underline{G} = \overline{\overline{B}}.\underline{F}_1 + \underline{F}_2' \tag{C.41}$$

La résolution de cette équation est faite avec Maple. On trouve X_2 qui possède 6 constantes différentielles.

On prend la quatrième équation de (Eq. C.39) pour trouver $X1(4)$ qui fait apparaître en plus un autre coefficient différentiel :

$$X_1(4) = \int \left(\sum_{i=1}^{n=3} C(4,i) * X_2(i) + F_1(4) \right) dx \tag{C.42}$$

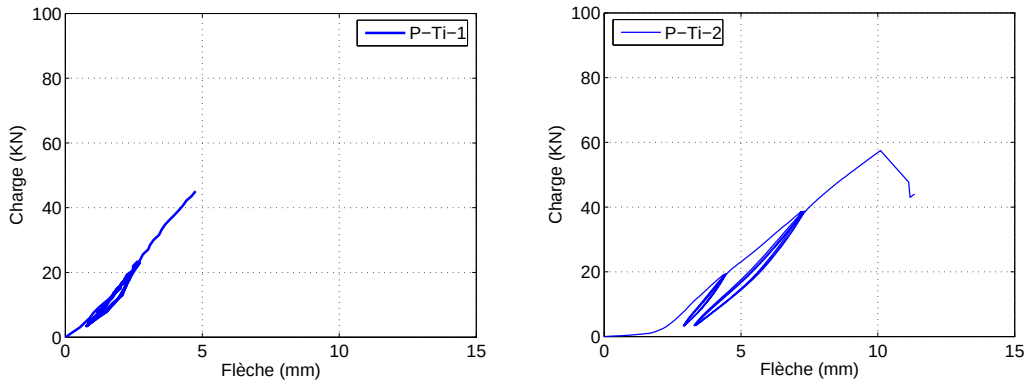
Les trois premières inconnues de X_1 sont ensuite trouvées en prenant le système de trois équations algébriques (Eq. C.40).

On a enfin les solutions du problème qui sont fonction de 12 constantes différentielles.

Annexe D

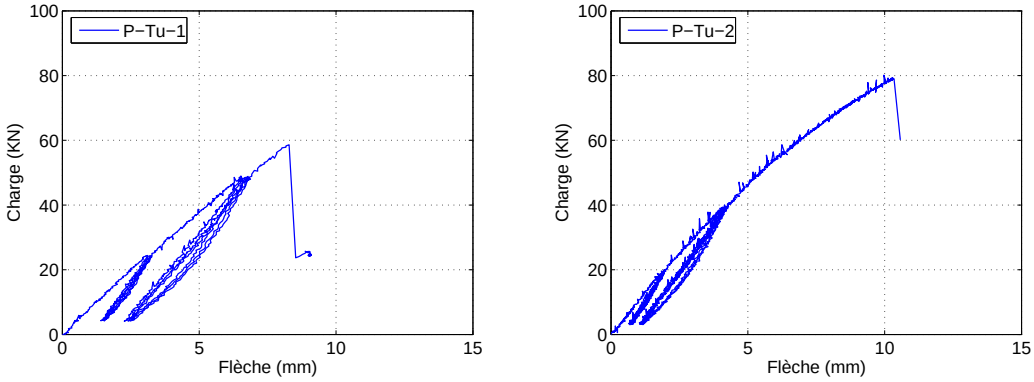
Résultats des essais en flexion trois points

D.1 Courbes de force flèche



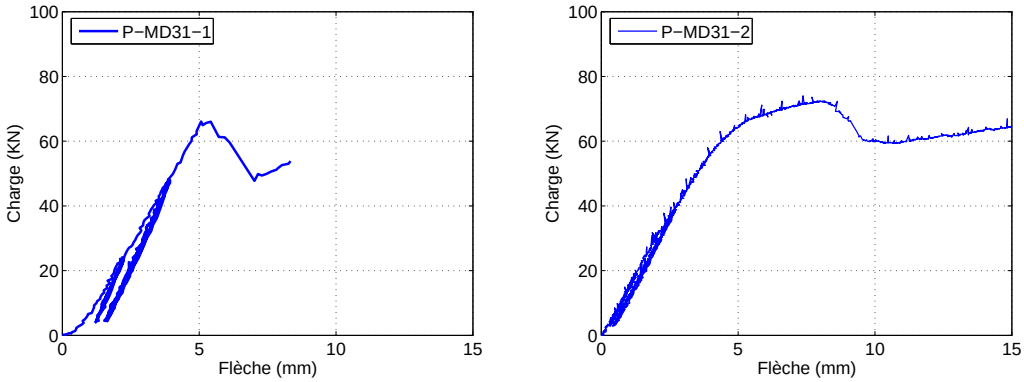
(a) P-Ti-1 (b) P-Ti-2

Fig. D.1 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur aux tiges



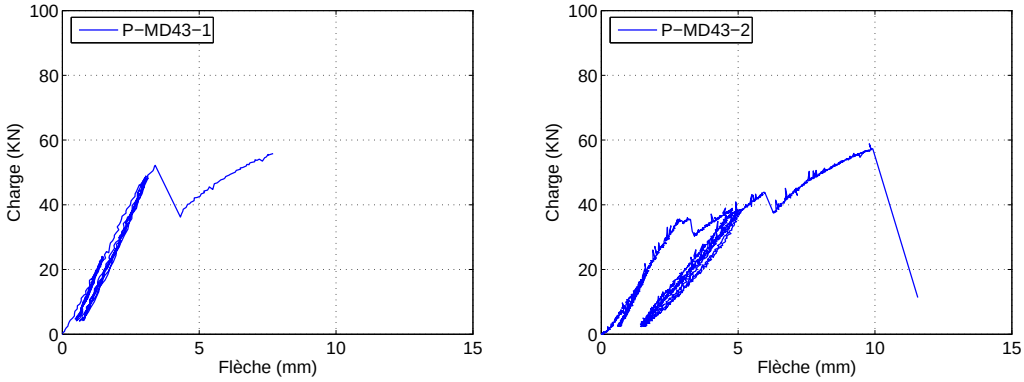
(a) P-Tu-1 (b) P-Tu-2

FIG. D.2 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur aux tubes



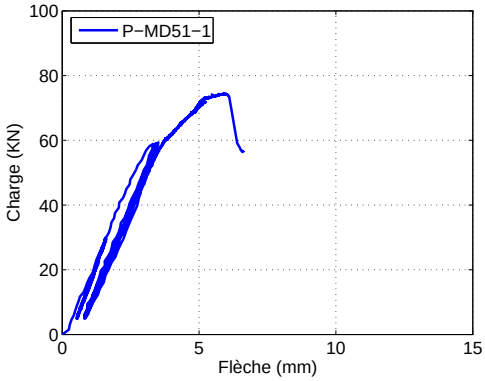
(a) P-MD31-1 (b) P-MD31-2

FIG. D.3 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD31

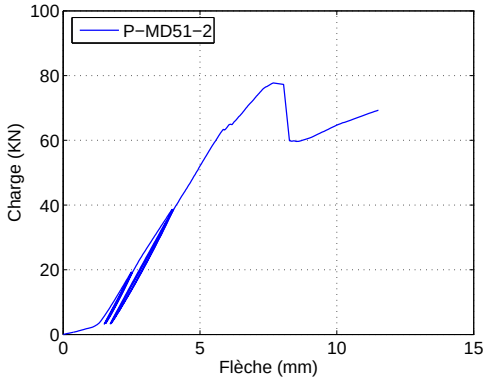


(a) P-MD43-1 (b) P-MD43-2

FIG. D.4 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD43

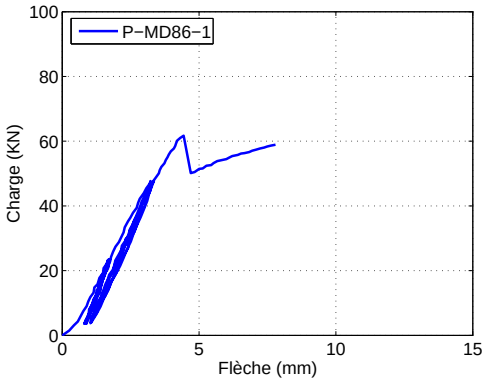


(a) P-MD51-1

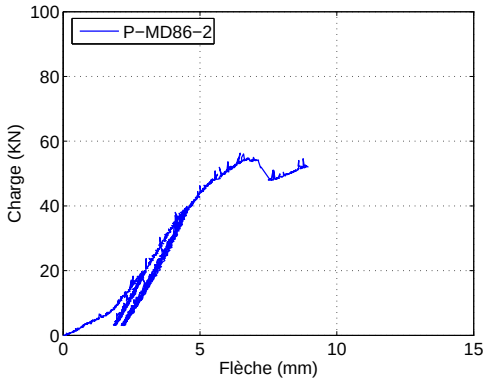


(b) P-MD51-2

Fig. D.5 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD51

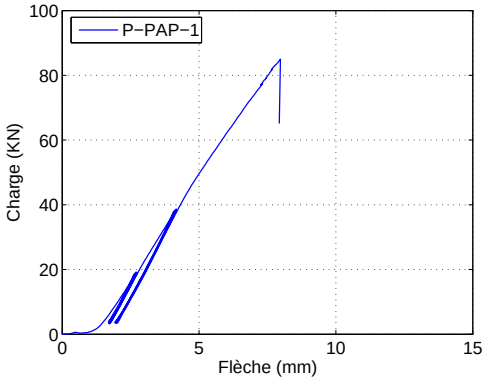


(a) P-MD86-1

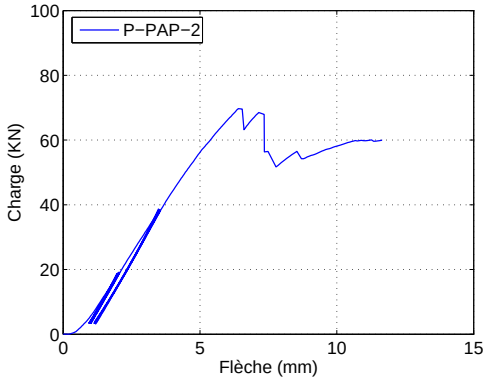


(b) P-MD86-2

Fig. D.6 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur du MD86

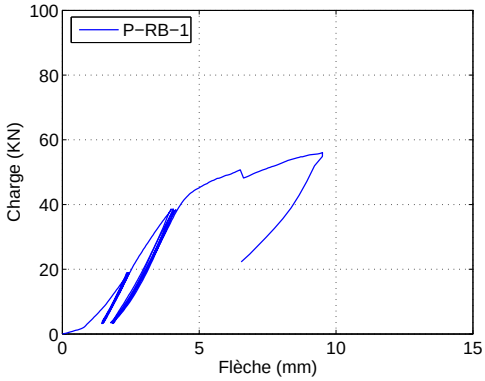


(a) P-PAP-1

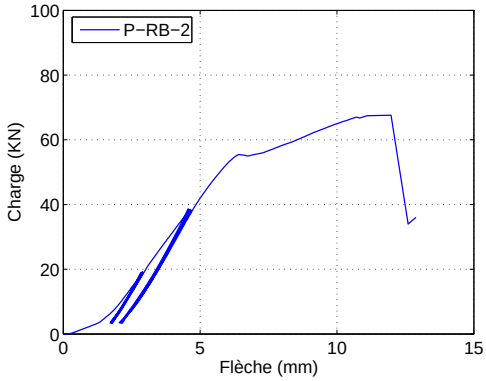


(b) P-PAP-2

Fig. D.7 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur de la PAP

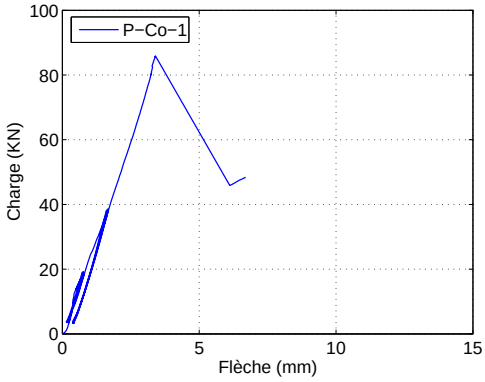


(a) P-RB-1

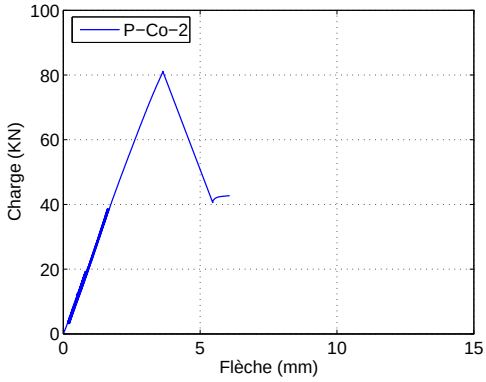


(b) P-RB-2

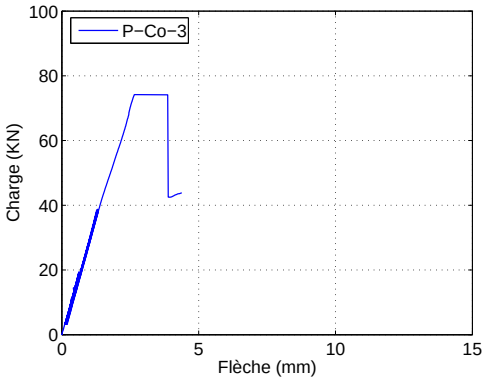
FIG. D.8 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur de la RB



(a) P-Co-1



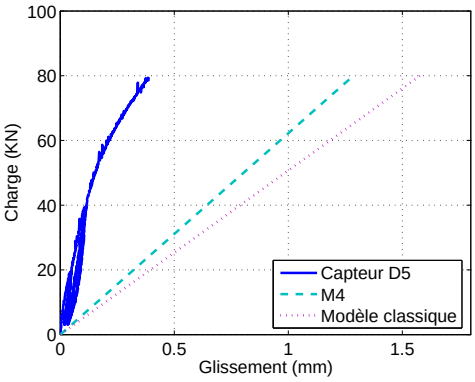
(b) P-Co-2



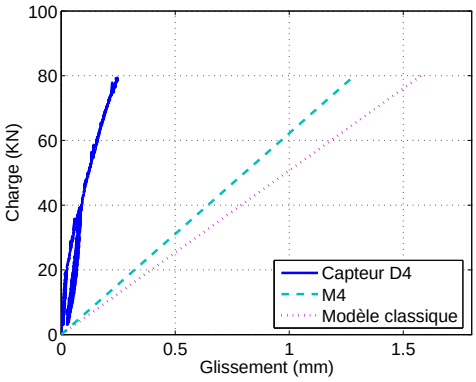
(c) P-Co-3

FIG. D.9 – Courbe force-flèche de poutre de connecteur de collage

D.2 Courbes de glissement

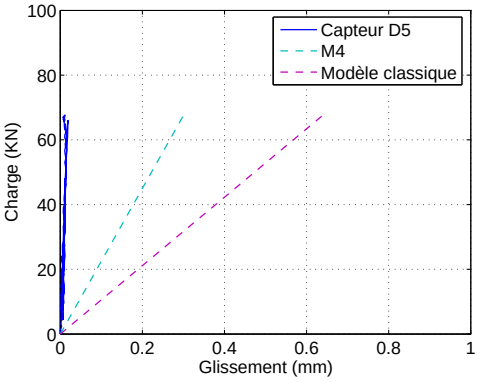


(a) CapteurD5

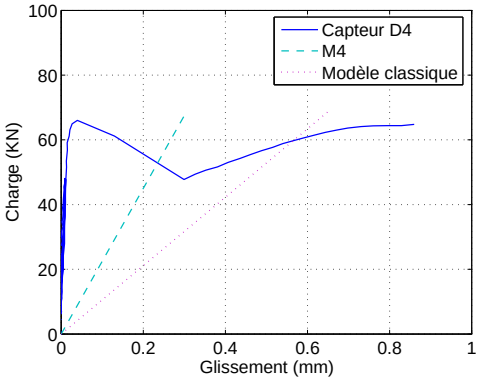


(b) Capteur D4

Fig. D.10 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Tu - 2$

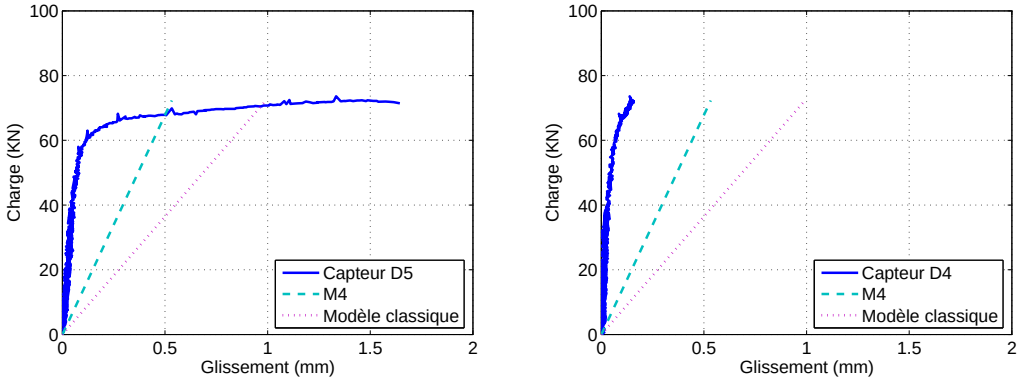


(a) CapteurD5



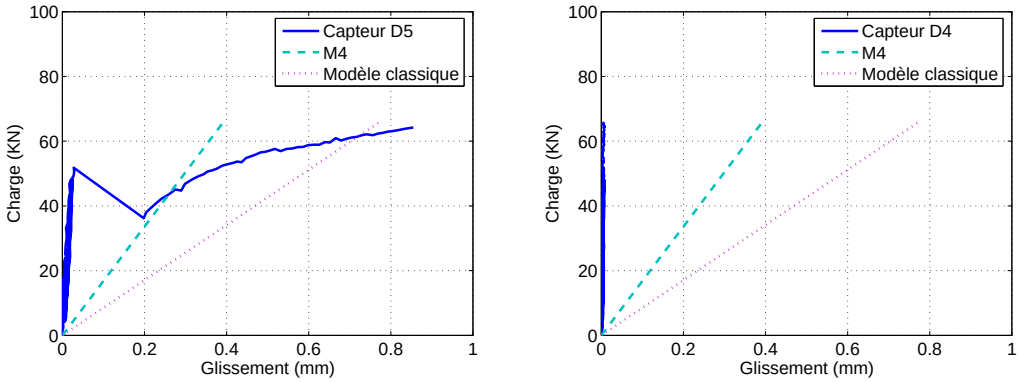
(b) Capteur D4

Fig. D.11 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD31 - 1$



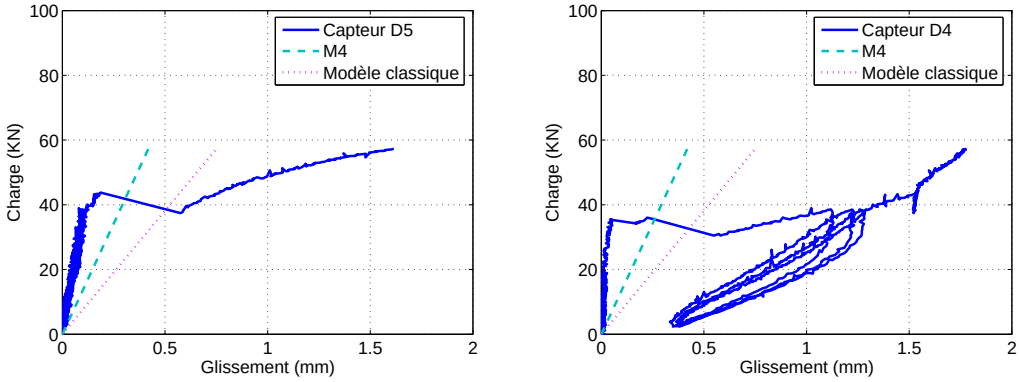
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.12 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD31 - 2$



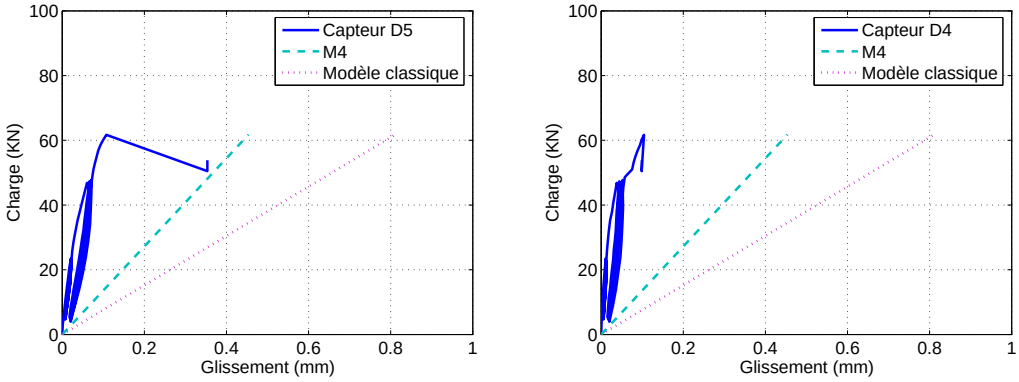
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.13 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD43 - 1$



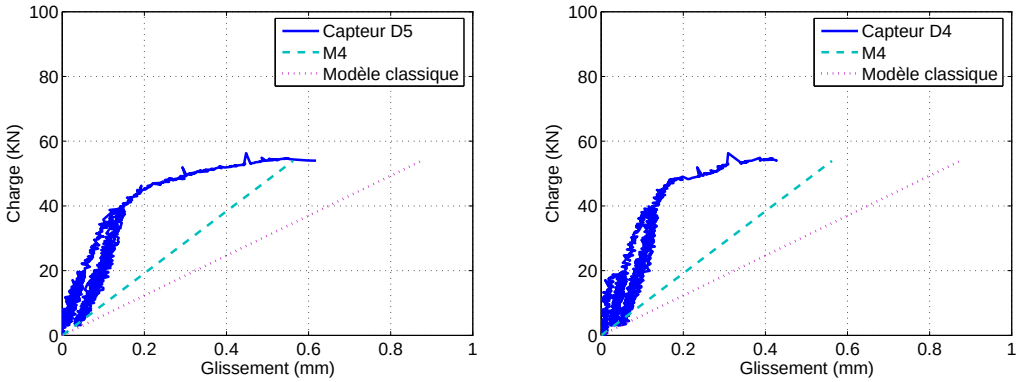
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.14 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD43 - 2$



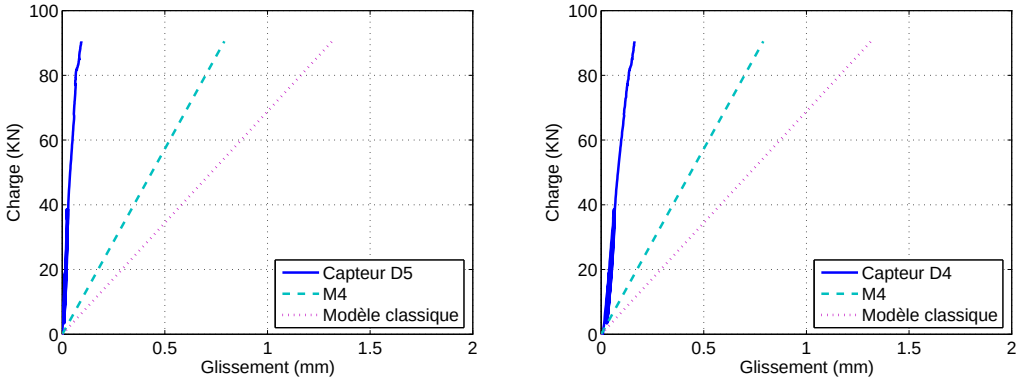
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

Fig. D.15 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD86 - 1$



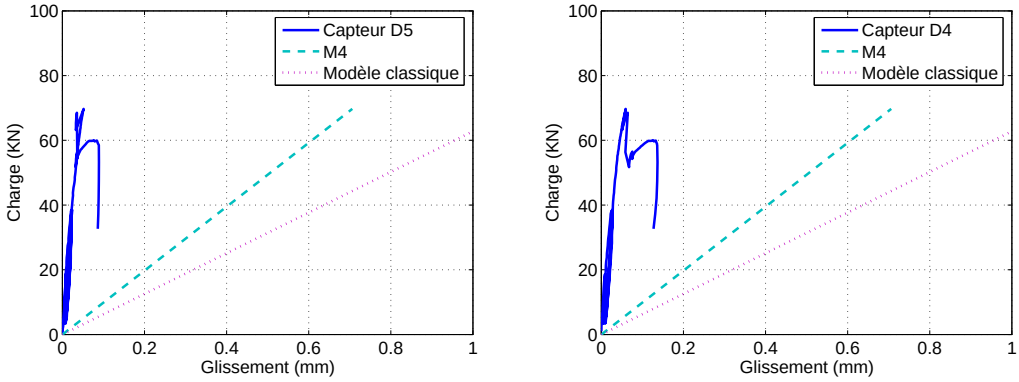
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

Fig. D.16 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - MD86 - 2$



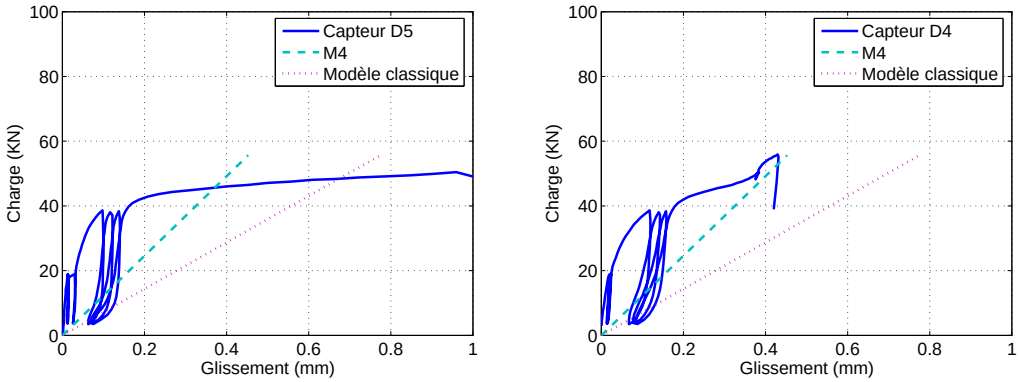
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

Fig. D.17 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - PAP - 1$



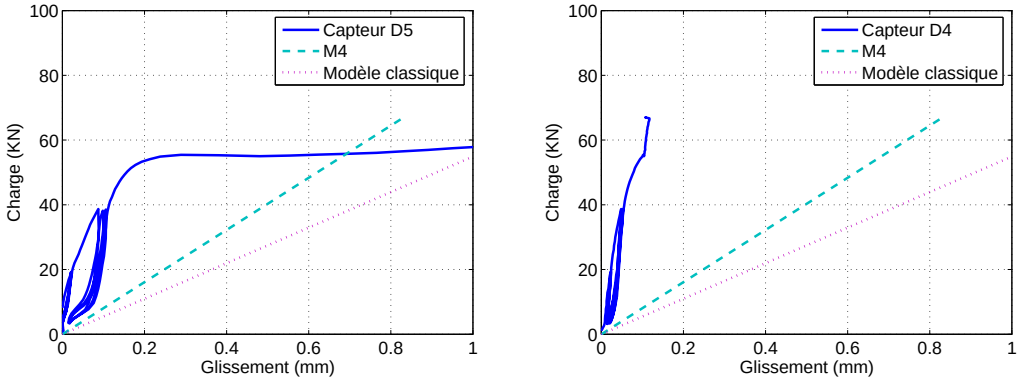
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.18 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - PAP - 2$



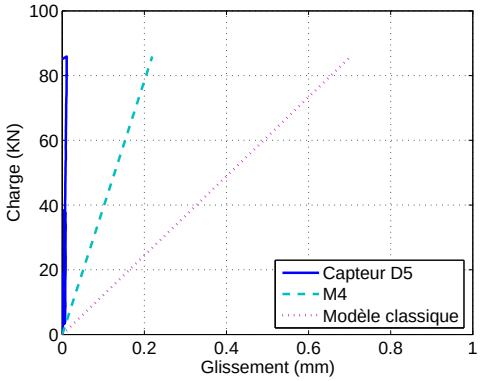
(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.19 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - RB - 1$

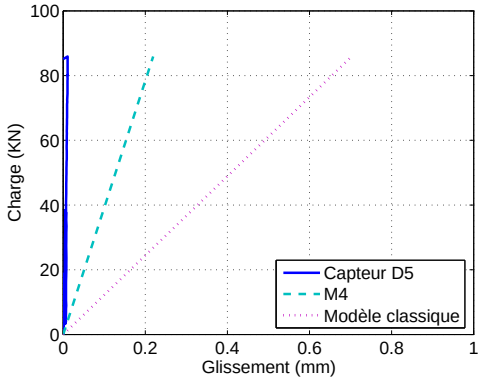


(a) CapteurD5 (b) Capteur D4

FIG. D.20 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - RB - 2$

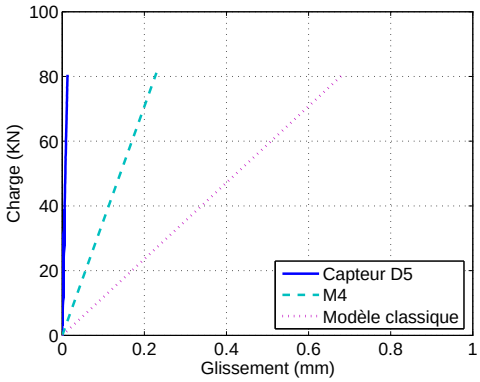


(a) CapteurD5

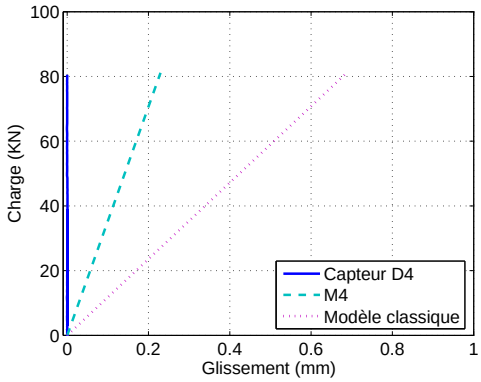


(b) Capteur D4

Fig. D.21 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 1$

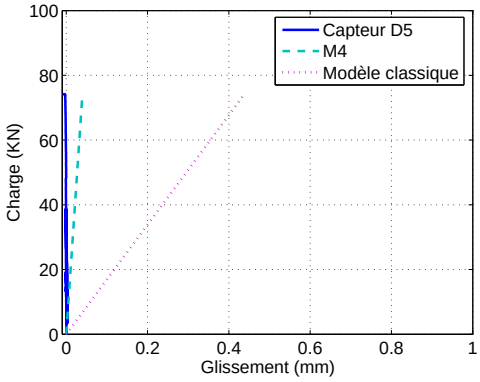


(a) CapteurD5

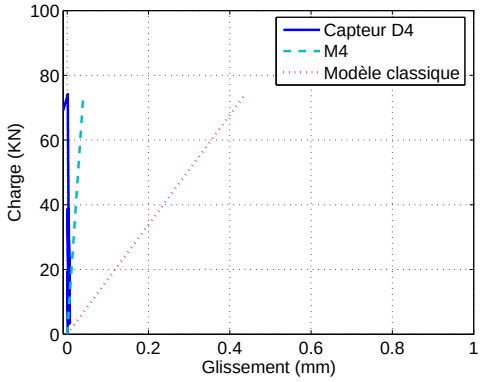


(b) Capteur D4

Fig. D.22 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 2$



(a) CapteurD5



(b) Capteur D4

Fig. D.23 – Glissement à deux extrémités de la poutre $P - Co - 3$

D.3 Expérimentation dans le cadre de la thèse M. Van Der Linden

Le protocole des essais en cisaillement :

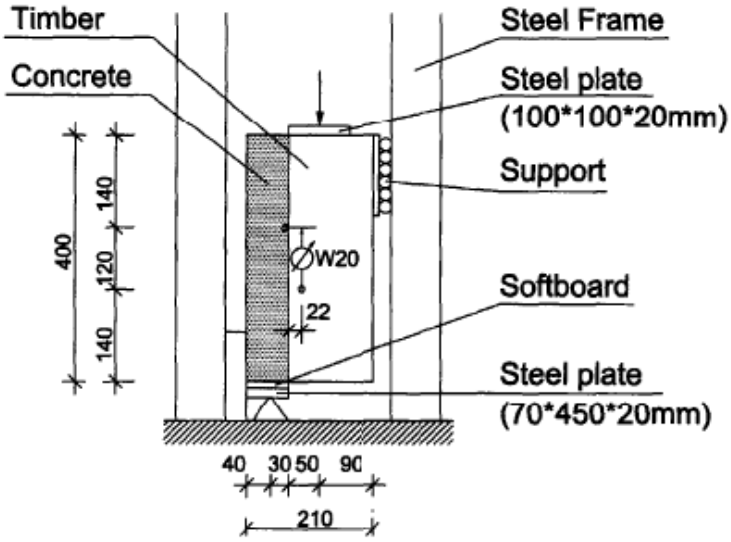


Fig. D.24 – Disposition des essais en cisaillement

L'identification des systèmes de connexion testés en cisaillement :

Batch	Description	Amount
Screws - SCH		
A	1 pair of screws, glulam, without particleboard layer	20
B	2 pairs of screws, glulam, without particleboard layer	5
C	2 pairs of screws, sawn timber, 19 mm of particleboard	10
D	2 pairs of screws, sawn timber, 28 mm of particleboard	16
Nailplates - NAG		
A	Nailplate GN 200, glulam	5
B	Nailplate MNP-A, sawn timber	46
Reinforcement bar with a concrete notch - N+S		
A	Concrete notch Ø 50 mm, ccach screw Ø 16 mm, glulam	5
B	Concrete notch Ø 70 mm, reinforcement bar Ø 20 mm, sawn timber	46
Concrete notch in a LVL plate - NPL		
A	Notch without reinforcement, Kerto S without water barrier	2
B	As batch A, LVL treated with formwork oil	3
C	Notch without reinforcement, Kerto Q without water barrier	2
D	As batch C, LVL treated with paint	3
E	As batch C, Foil between concrete and LVL	7
F	Reinforced notch, Kerto Q, Foil	48
G	As batch F, different reinforcement in the notch	6

La comparaison avec le modèle M4-5n-P pour les différentes poutres :

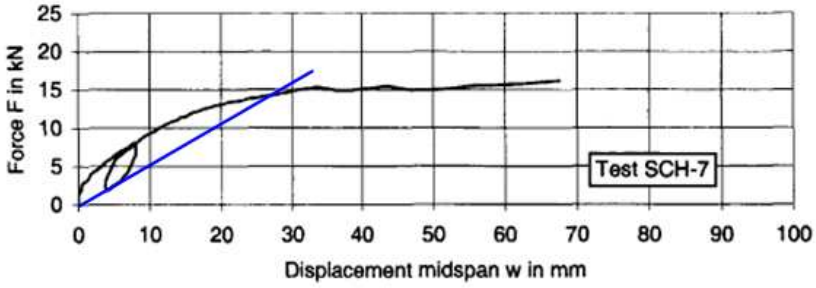
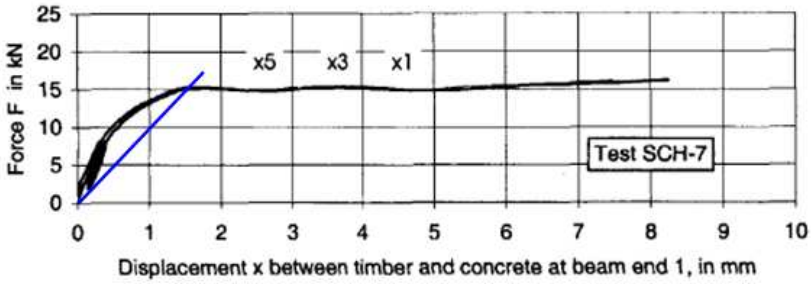
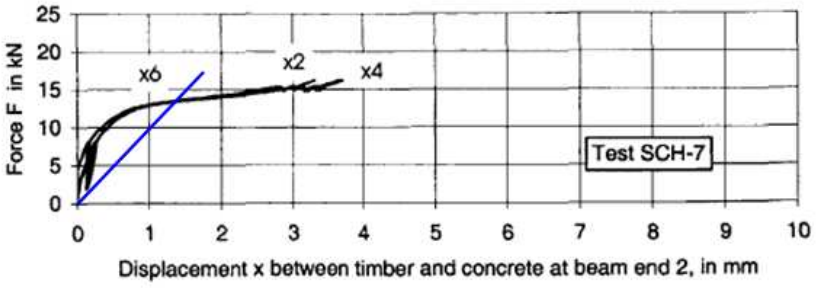


FIG. D.25 – Courbe force-fleche de la poutre $SCH - 7$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

FIG. D.26 – Glissement à deux extrémités de la poutre $SCH - 7$

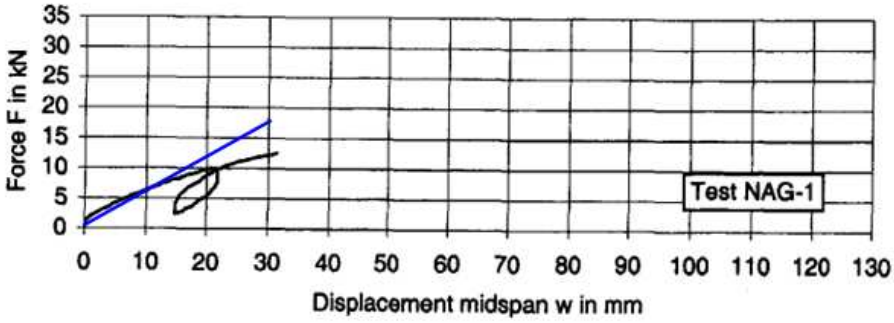
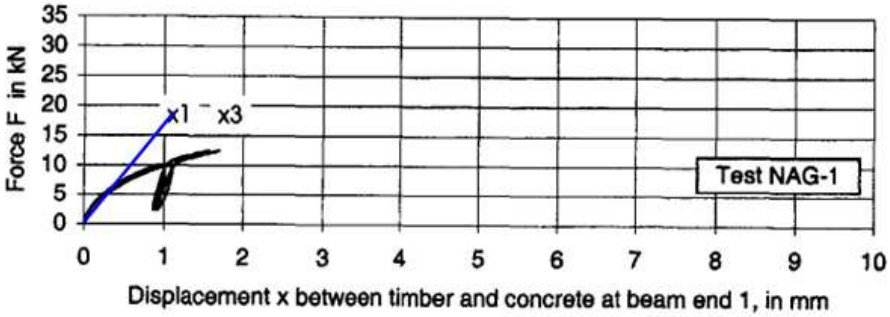
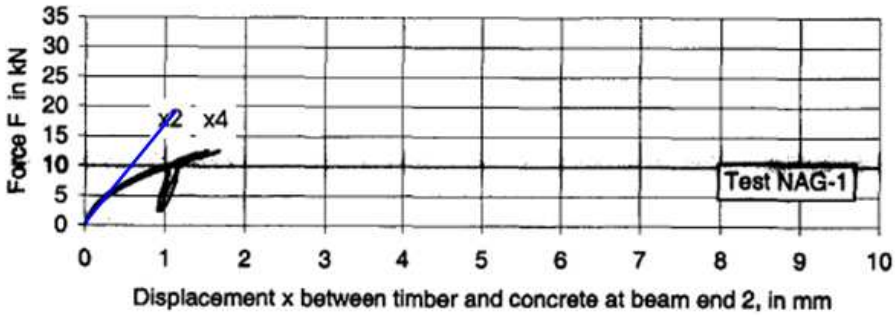


Fig. D.27 – Courbe force-fleche de la poutre $NAG - 1$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

Fig. D.28 – Glissement à deux extrémités de la poutre $NAG1 - 1$

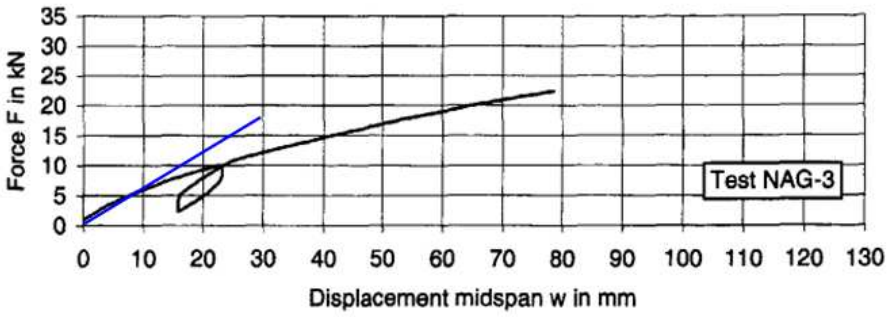
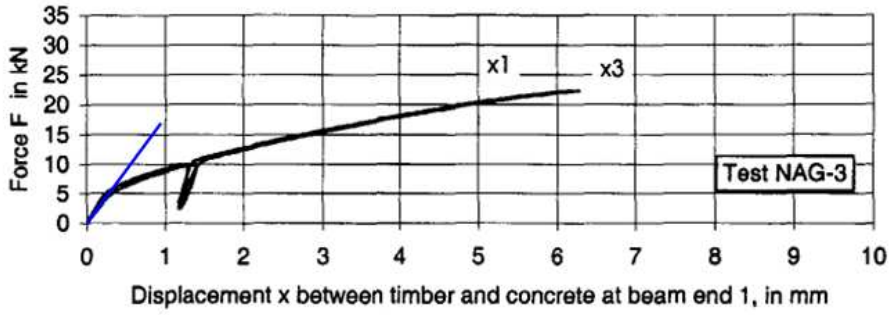
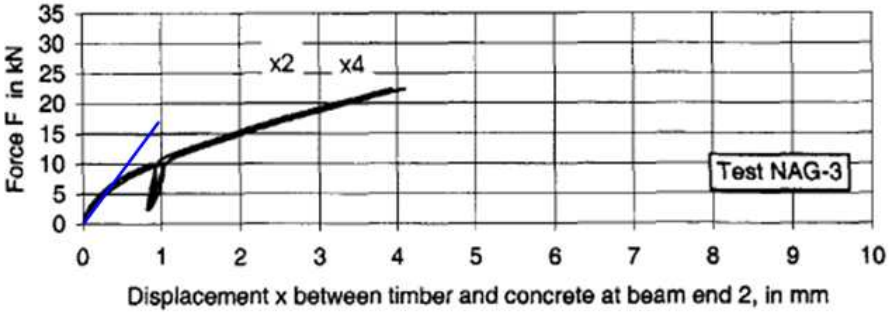


FIG. D.29 – Courbe force-fleche de la poutre $NAG - 3$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

FIG. D.30 – Glissement à deux extrémités de la poutre $NAG - 3$

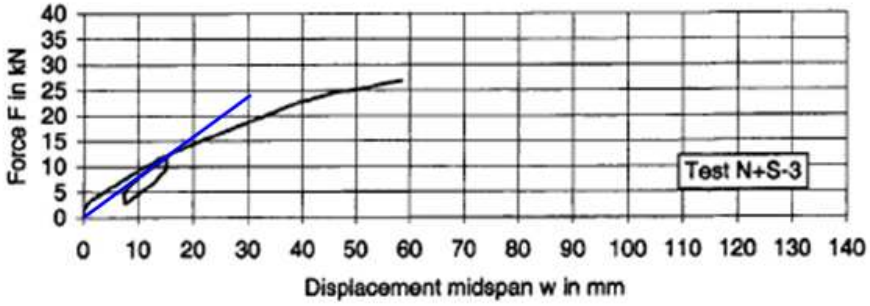
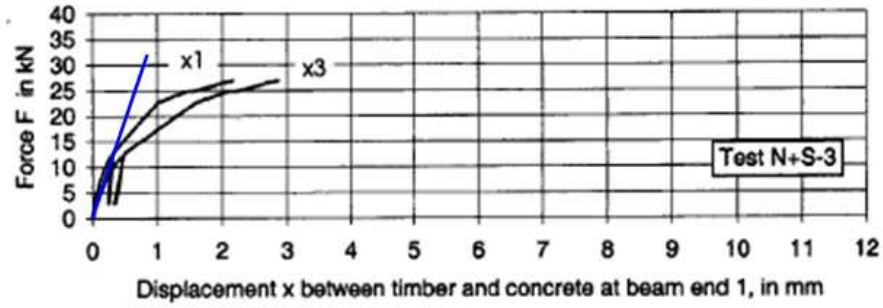
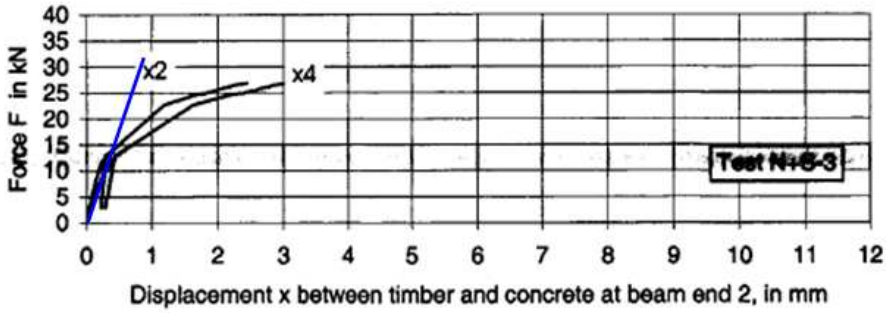


Fig. D.31 – Courbe force-fleche de la poutre $N + S - 3$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

Fig. D.32 – Glissement à deux extrémités de la poutre $N + S - 3$

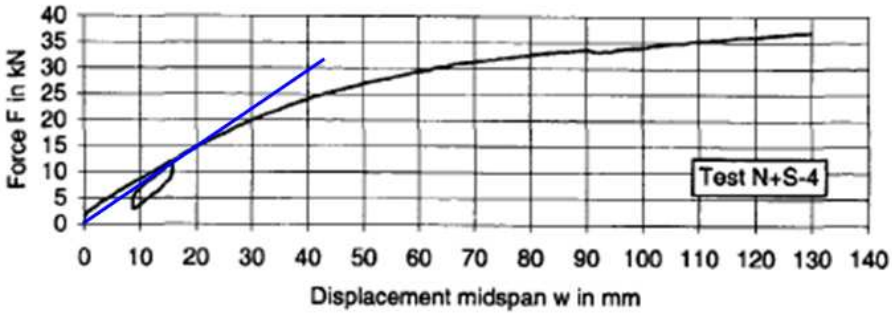
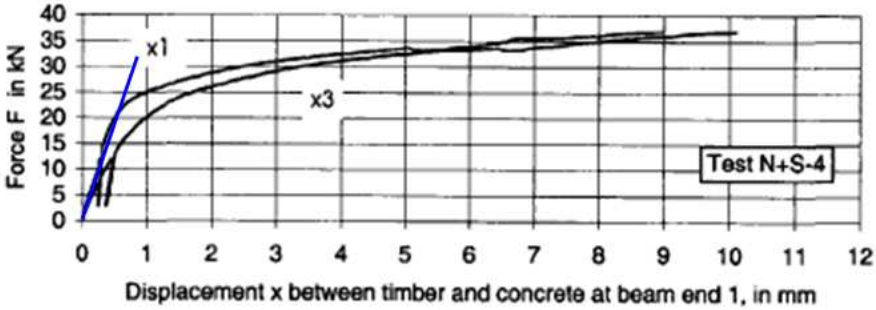
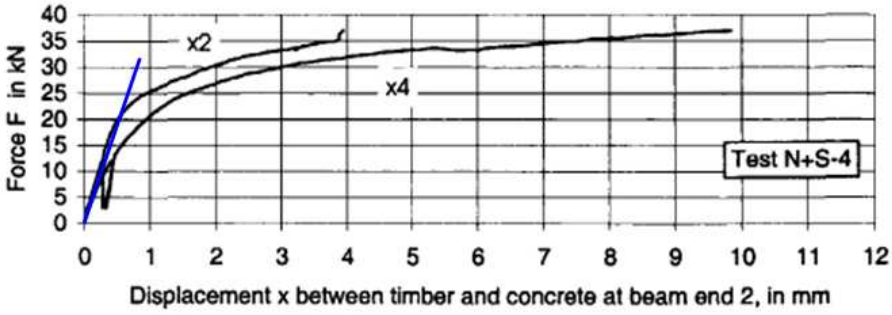


FIG. D.33 – Courbe force-fleche de la poutre $N + S - 4$



(a) Exétrémité gauche



(b) Exétrémité droite

FIG. D.34 – Glissement à deux extrémités de la poutre $N + S - 4$

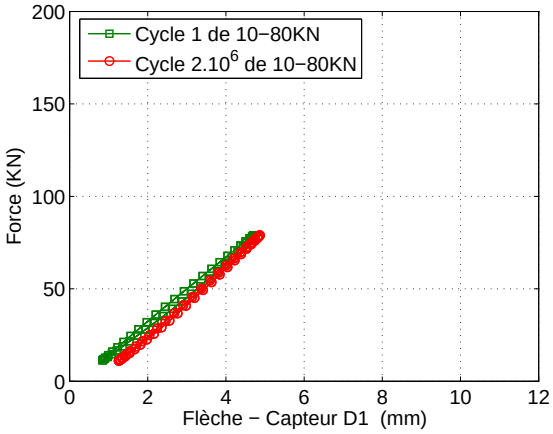
Annexe E

Résultats des essais en fatigue

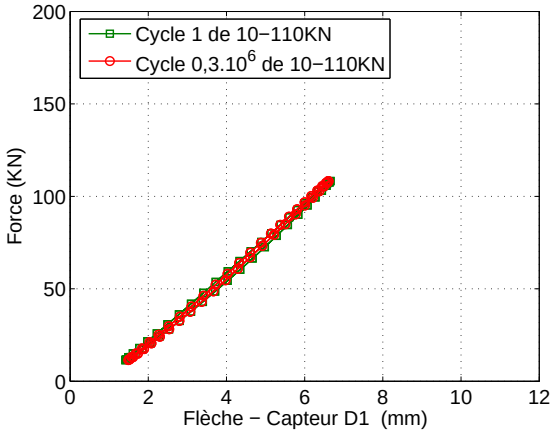
E.1 Courbes de force-flèche

CE2

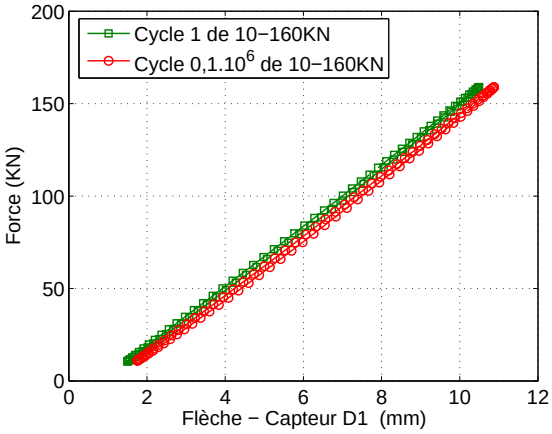
La flèche mesurée par le capteurs $D1$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



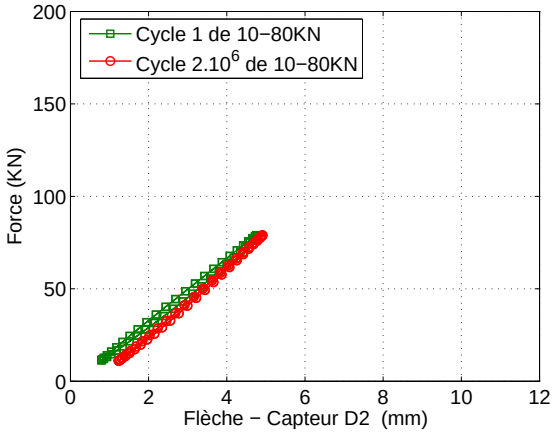
(b) Phase de $10-110KN$



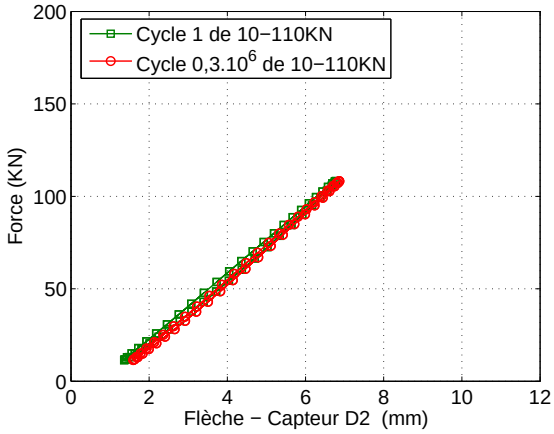
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.1 – Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement

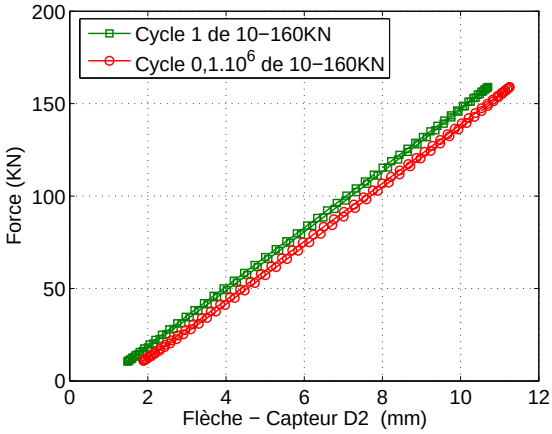
La flèche mesurée par le capteurs $D2$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



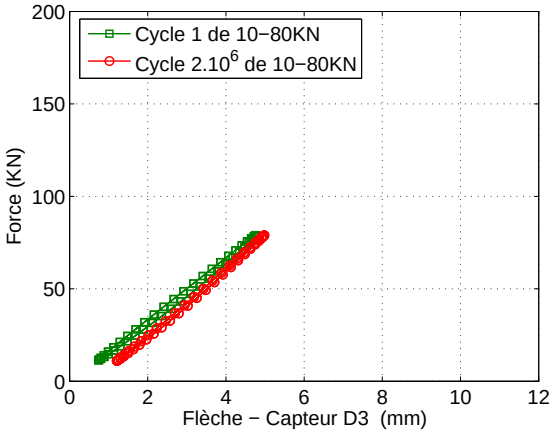
(b) Phase de $10-110KN$



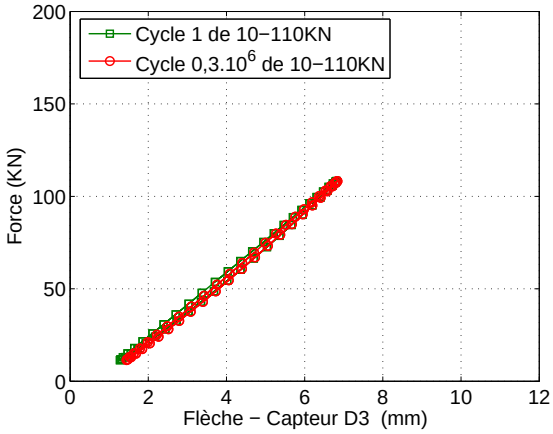
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.2 – Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement

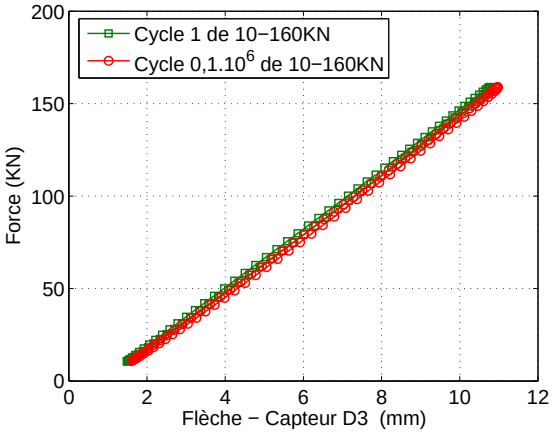
La flèche mesurée par le capteurs $D3$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$

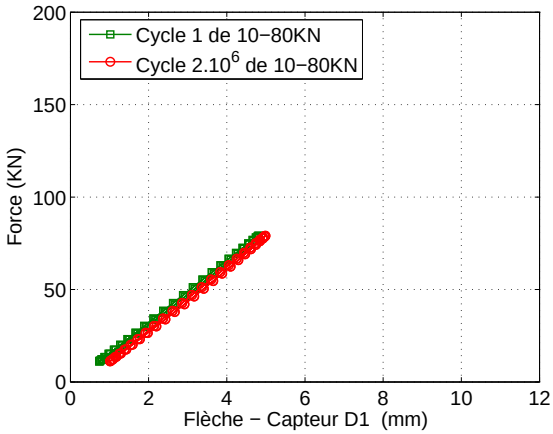


(c) Phase de $10-160KN$

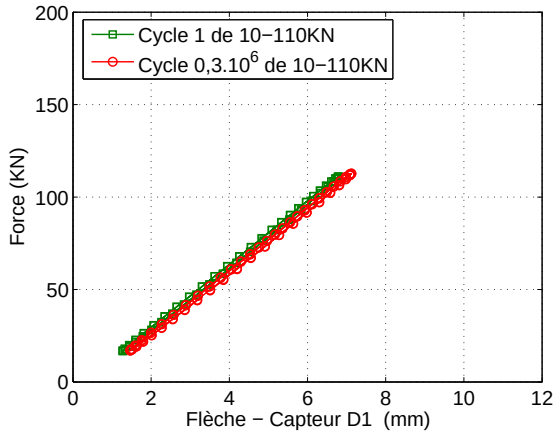
FIG. E.3 – Courbe force-flèche du $CE2$ de trois phase de chargement

CE3

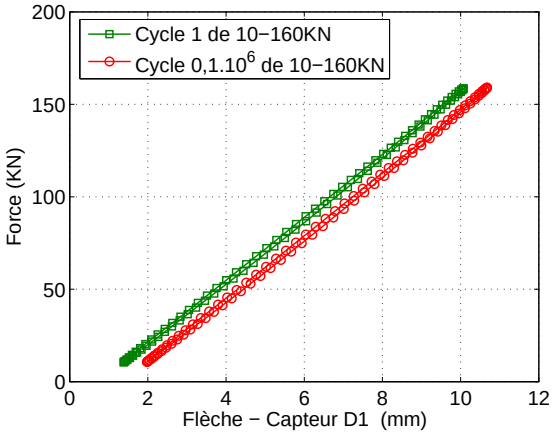
La flèche mesurée par le capteurs $D1$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



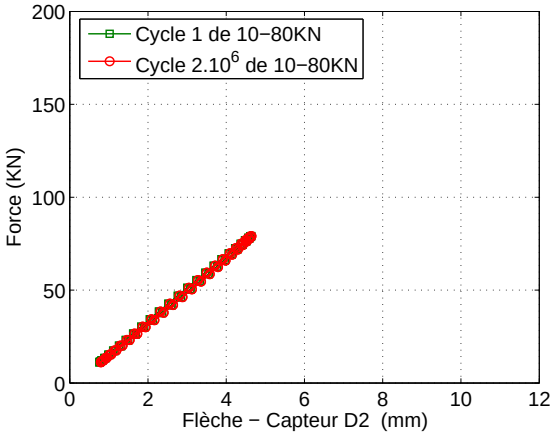
(b) Phase de $10-110KN$



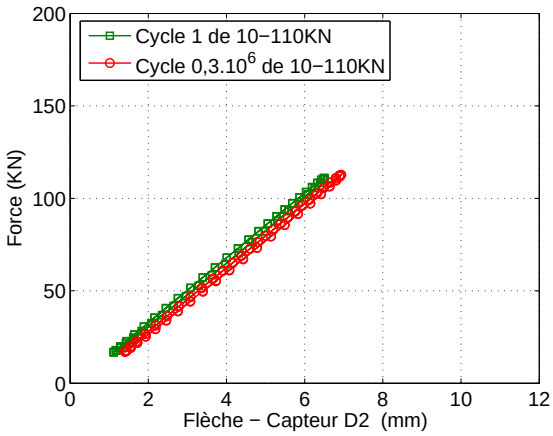
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.4 – Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement

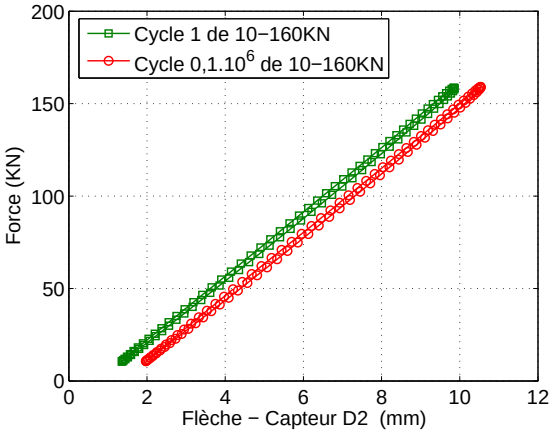
La flèche mesurée par le capteurs $D2$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



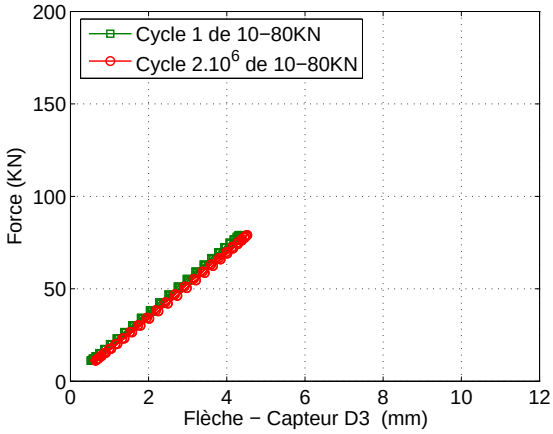
(b) Phase de $10-110KN$



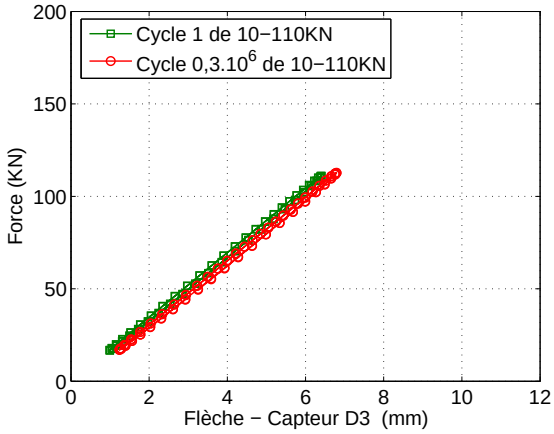
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.5 – Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement

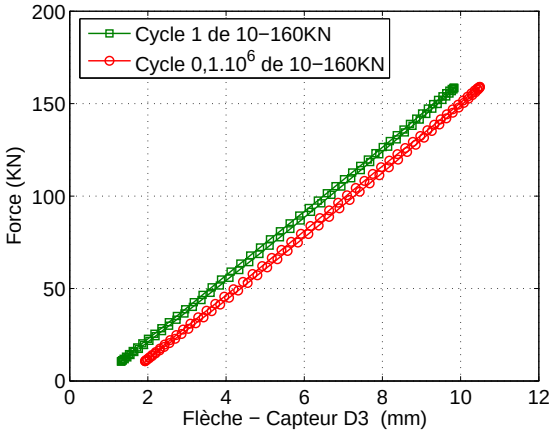
La flèche mesurée par le capteurs $D3$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$

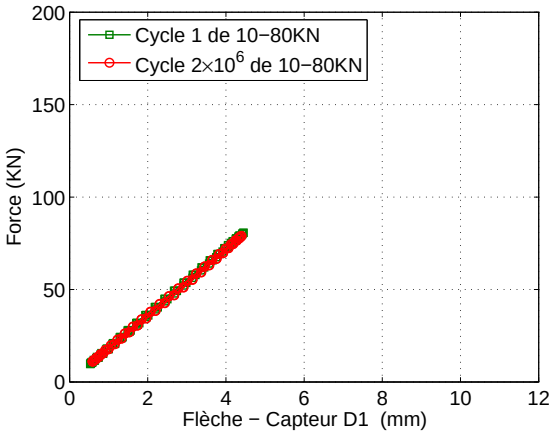


(c) Phase de $10-160KN$

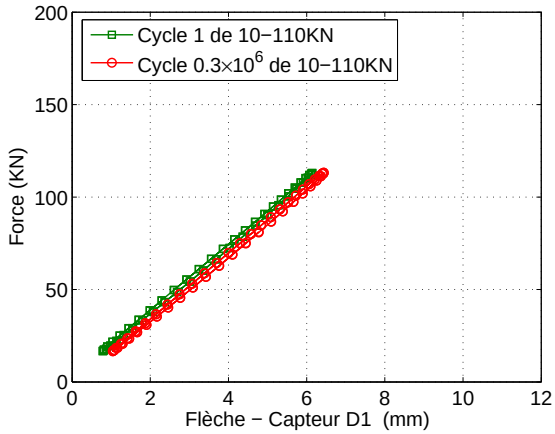
Fig. E.6 – Courbe force-flèche du $CE3$ de trois phase de chargement

CE4

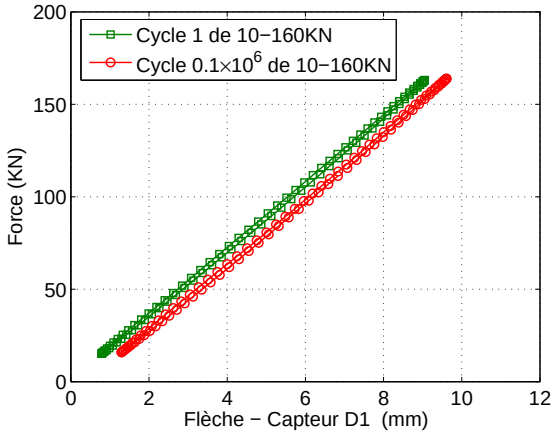
La flèche mesurée par le capteurs $D1$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



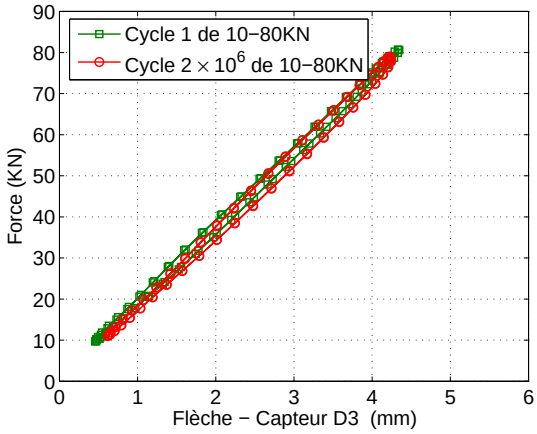
(b) Phase de $10-110KN$



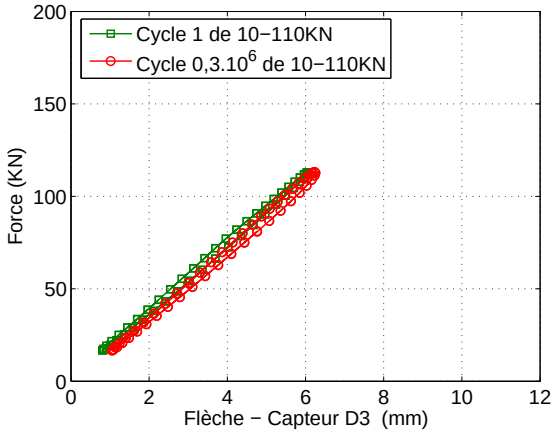
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.7 – Courbe force-flèche du $CE4$ de la phase de $10-80KN$

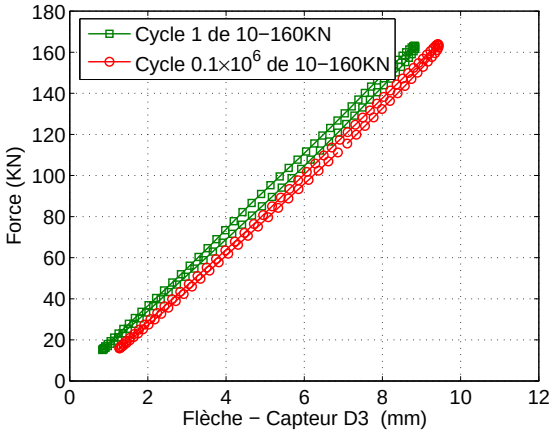
La flèche mesurée par le capteurs $D3$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$



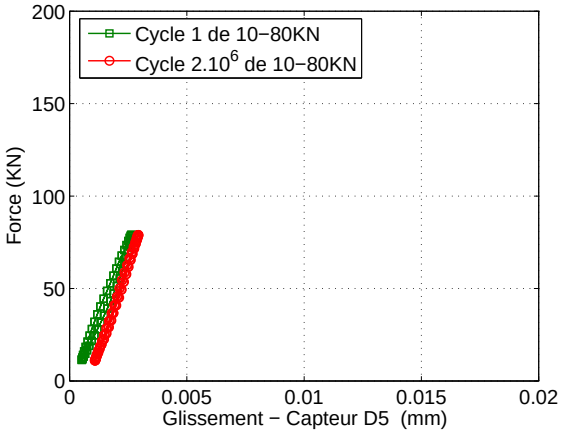
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.8 – Courbe force-flèche du $CE2$ de la phase de $10-80KN$

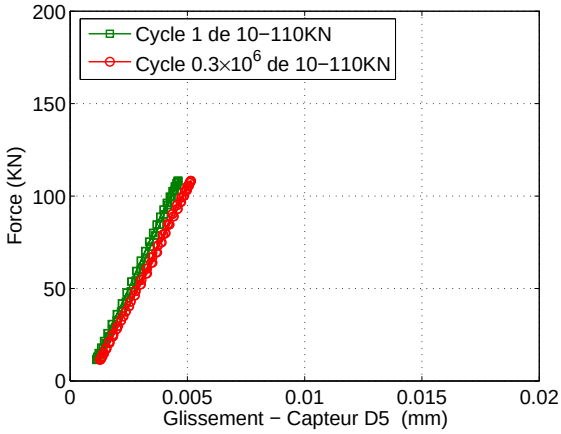
E.2 Courbes de force-Glissement

CE2

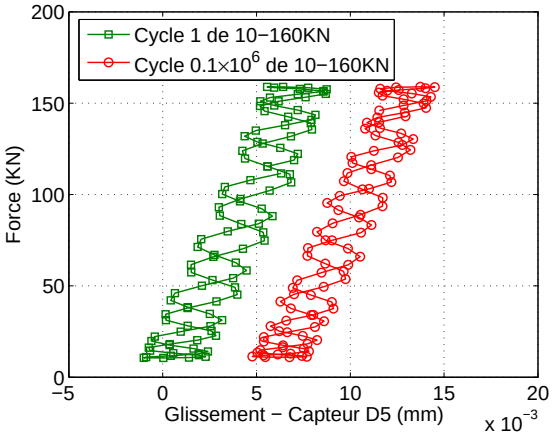
Le glissement mesurée par le capteurs $D5$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



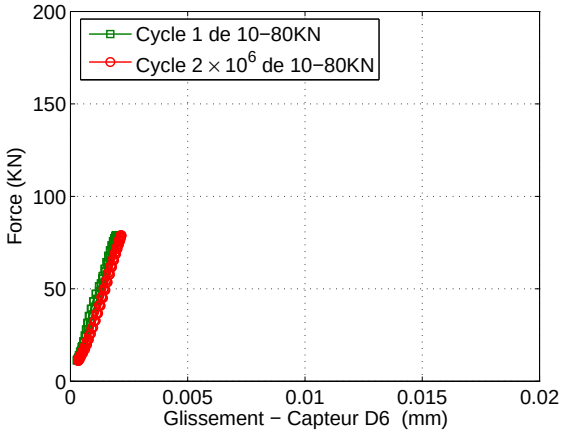
(b) Phase de $10-110KN$



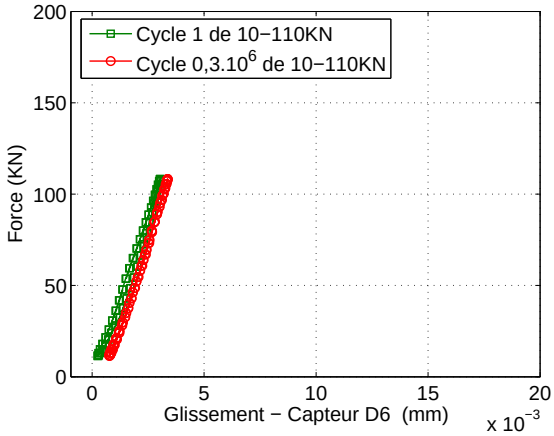
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.9 – Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement

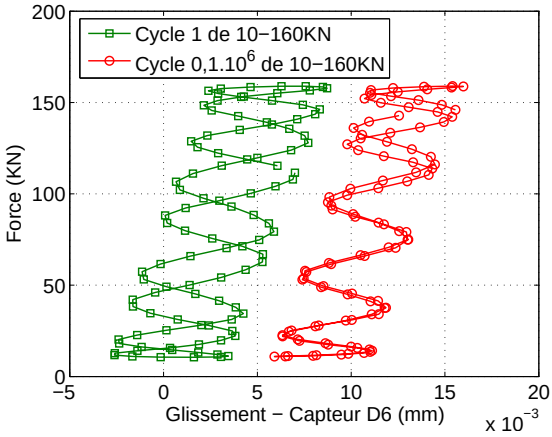
Le glissement mesurée par le capteurs $D6$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



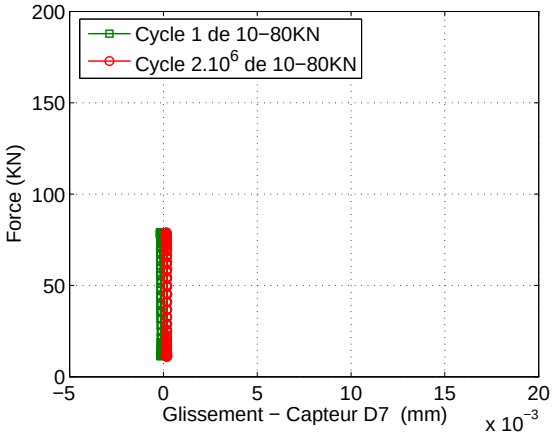
(b) Phase de $10-110KN$



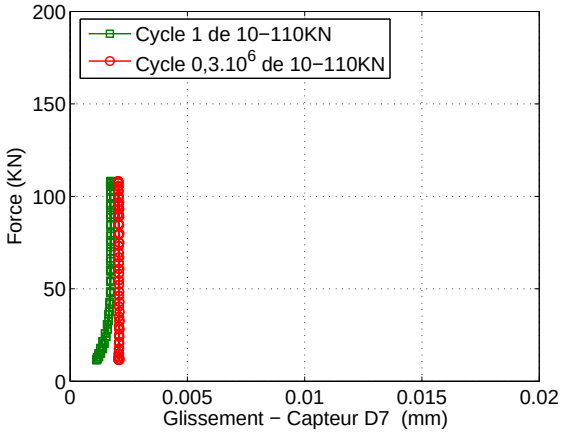
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.10 – Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement

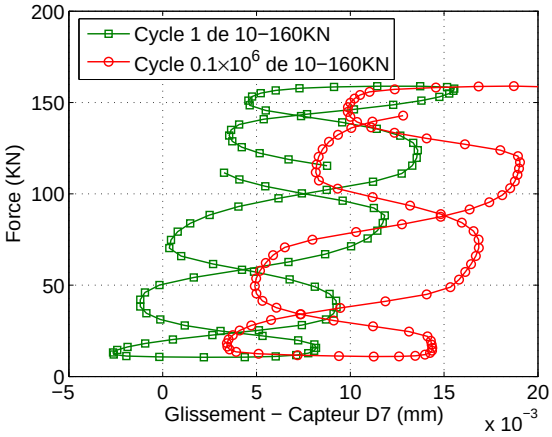
Le glissement mesurée par le capteurs $D7$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



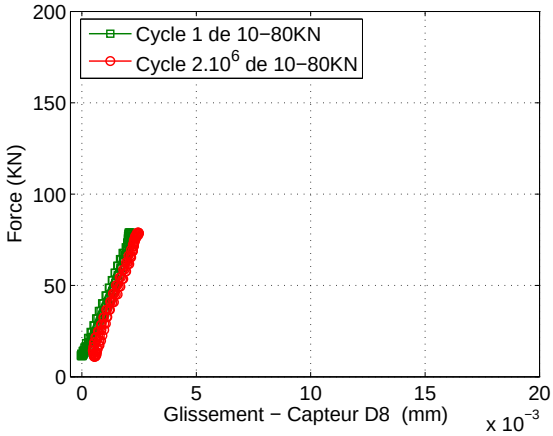
(b) Phase de $10-110KN$



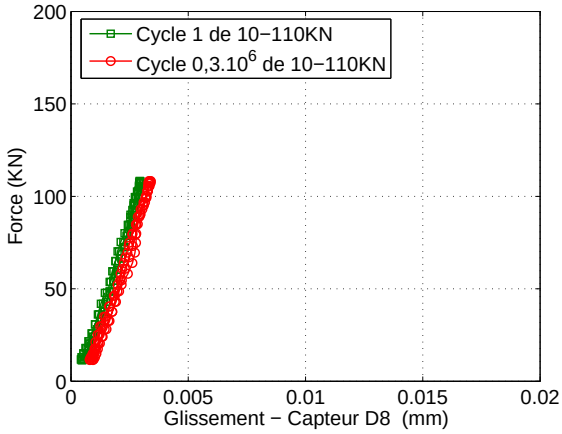
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.11 – Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement

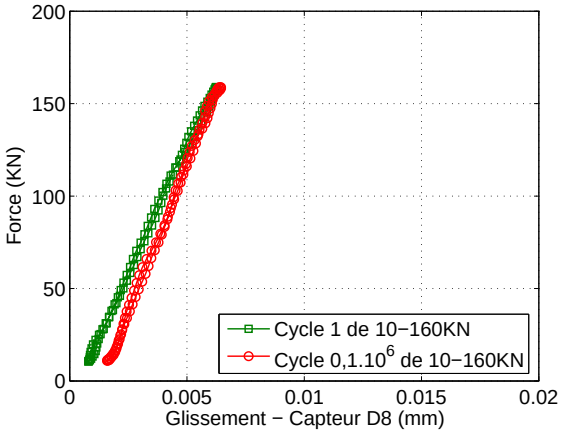
Le glissement mesurée par le capteurs $D8$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$

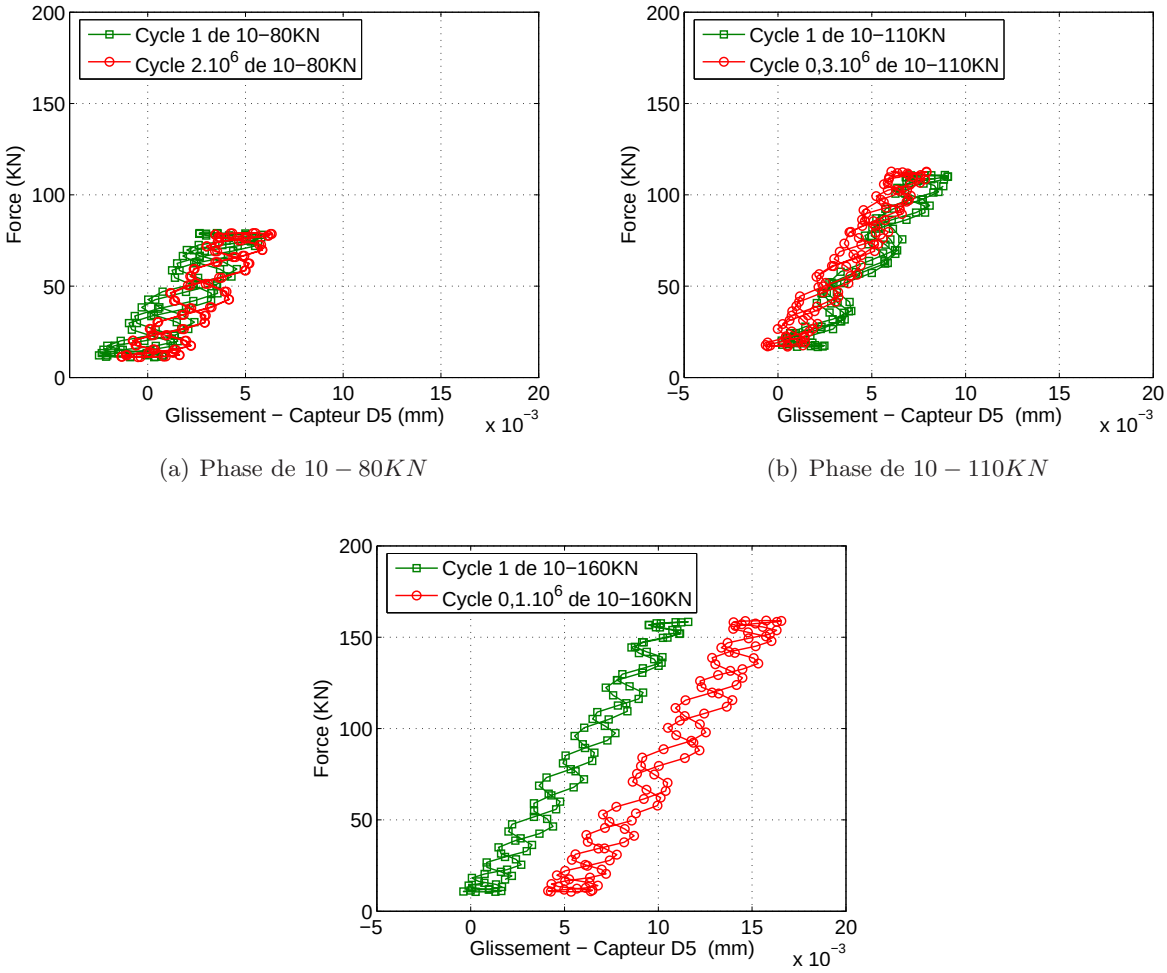


(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.12 – Force-glissement du $CE2$ pour 3 phase de chargement

CE3

Le glissement mesurée par le capteurs $D5$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



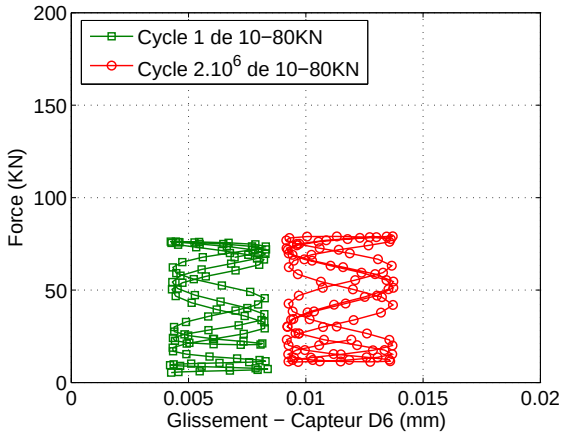
(a) Phase de $10-80KN$

(b) Phase de $10-110KN$

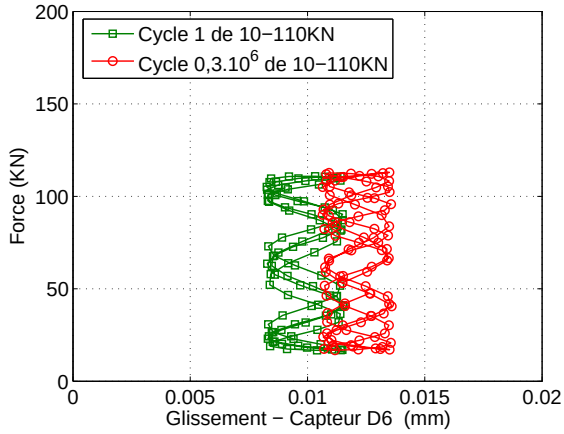
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.13 – Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement

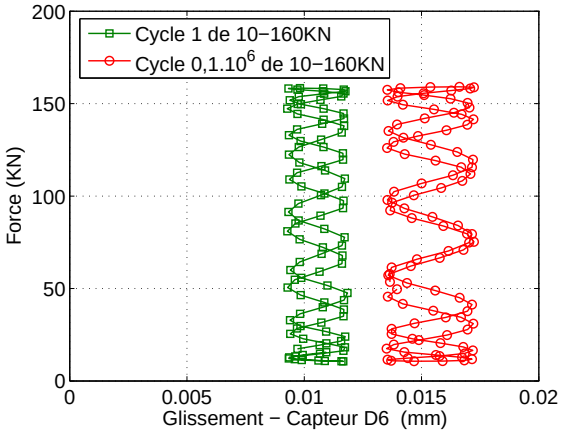
Le glissement mesurée par le capteurs $D6$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



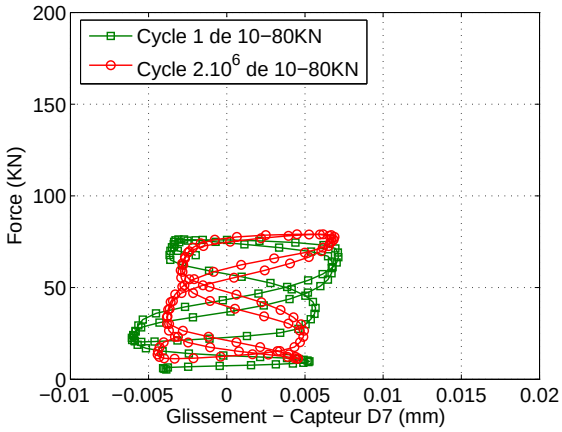
(b) Phase de $10-110KN$



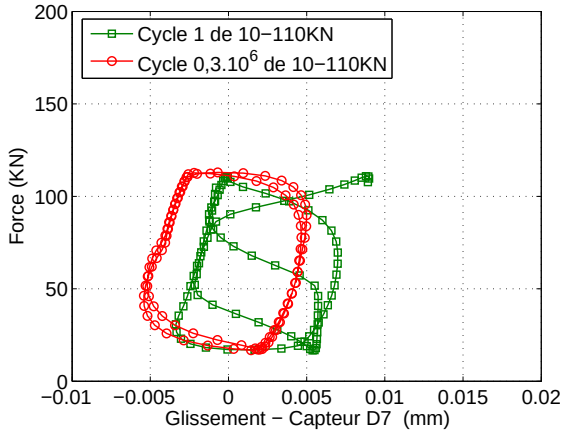
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.14 – Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement

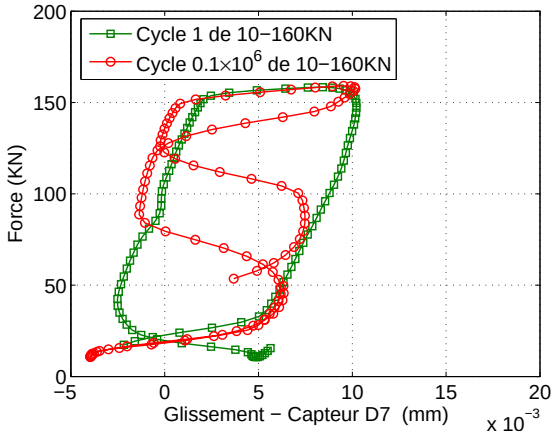
Le glissement mesurée par le capteurs $D7$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



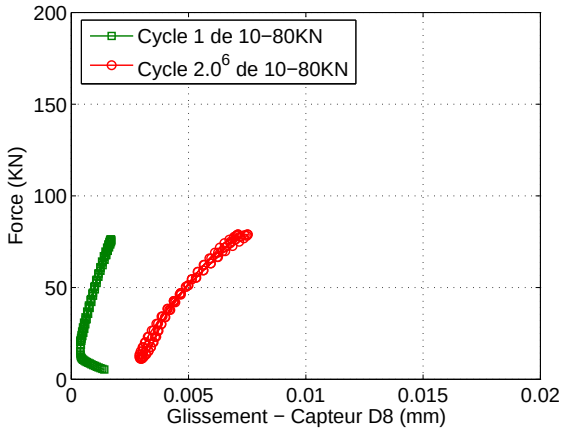
(b) Phase de $10-110KN$



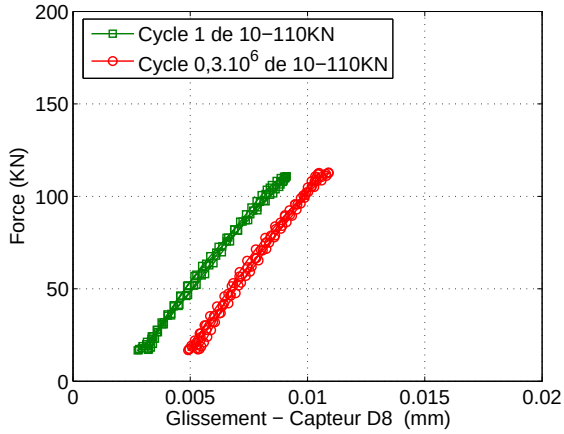
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.15 – Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement

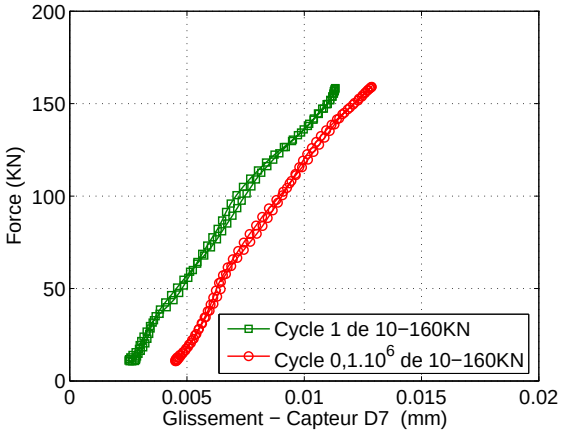
Le glissement mesurée par le capteurs $D8$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$

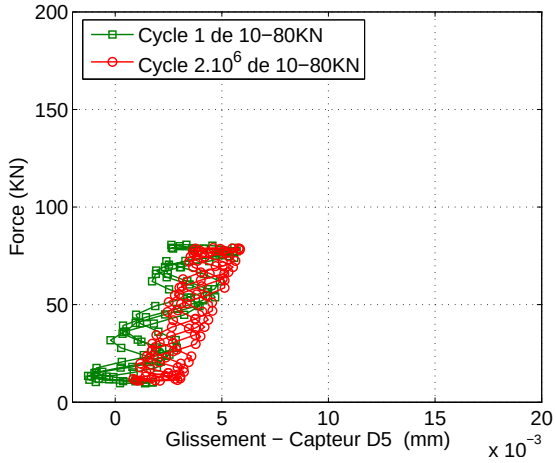


(c) Phase de $10-160KN$

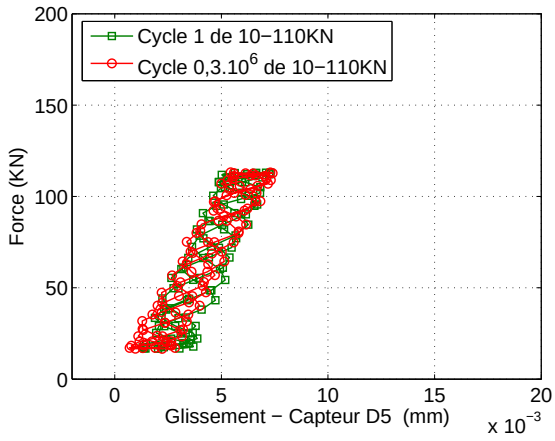
Fig. E.16 – Force-glissement du $CE3$ pour 3 phase de chargement

CE4

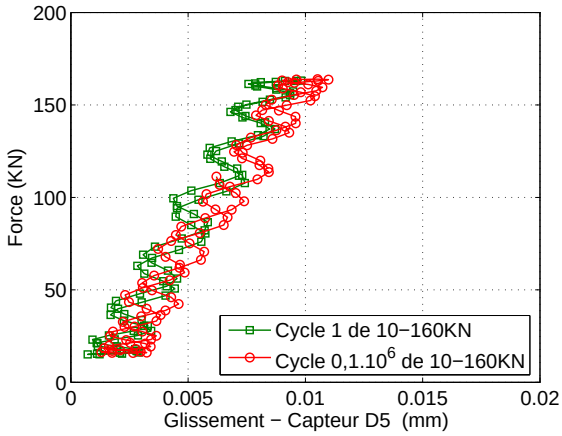
Le glissement mesurée par le capteurs $D5$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



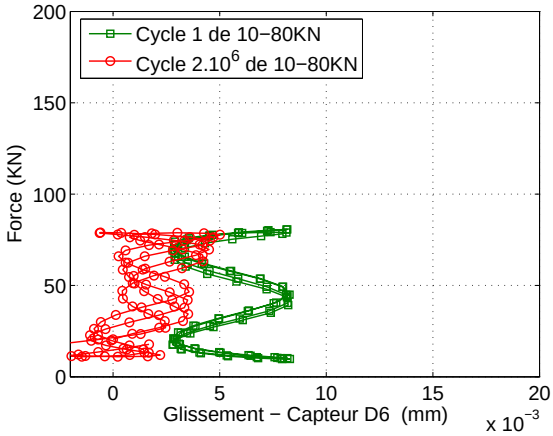
(b) Phase de $10-110KN$



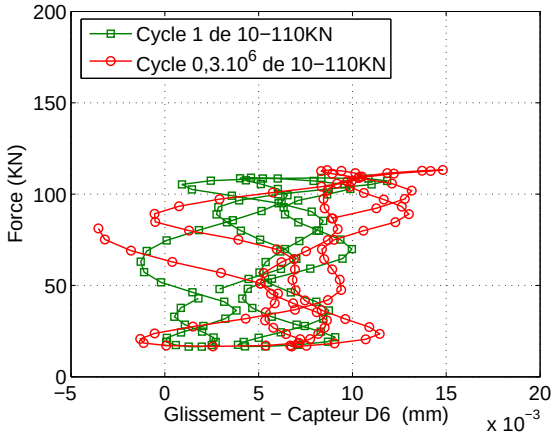
(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.17 – Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement

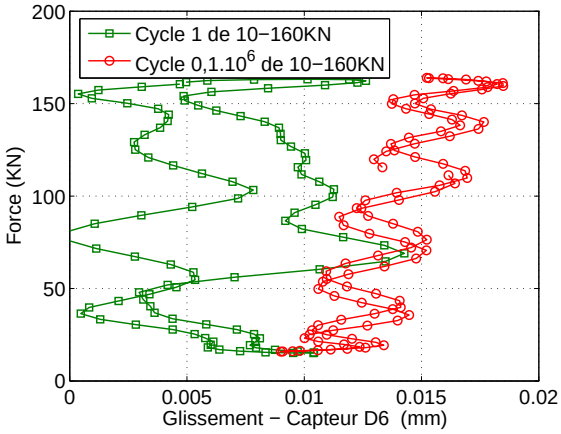
Le glissement mesurée par le capteurs $D6$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



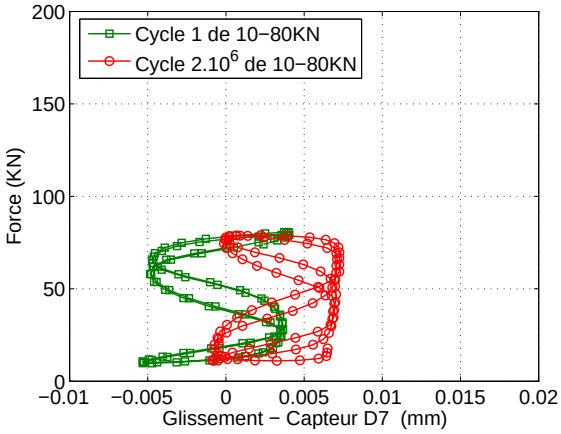
(b) Phase de $10-110KN$



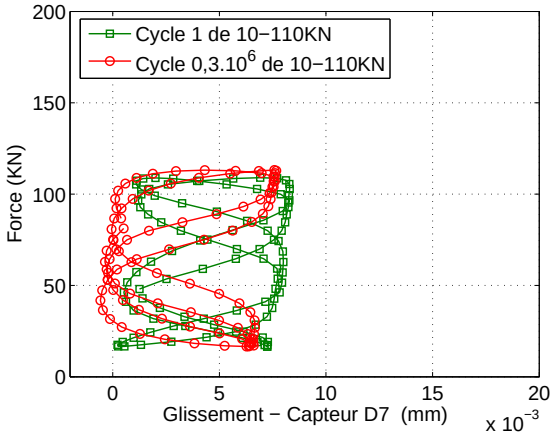
(c) Phase de $10-160KN$

Fig. E.18 – Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement

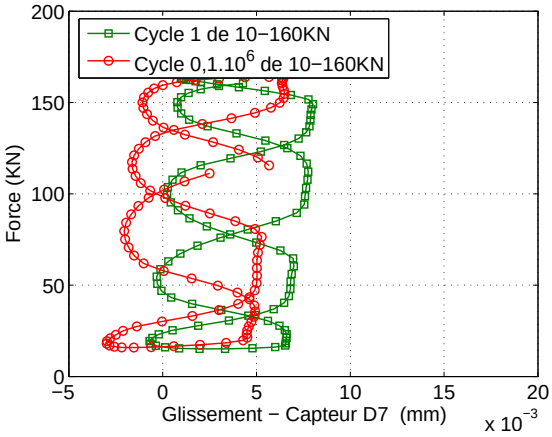
Le glissement mesurée par le capteurs $D7$ des trois phases $10-80KN$, $10-110KN$ et $10-160KN$:



(a) Phase de $10-80KN$



(b) Phase de $10-110KN$



(c) Phase de $10-160KN$

FIG. E.19 – Force-glissement du $CE4$ pour 3 phase de chargement