



HAL
open science

Instabilité des structures en contact frottant : Application au crissement des freins à disque de TGV

Xavier Lorang

► **To cite this version:**

Xavier Lorang. Instabilité des structures en contact frottant : Application au crissement des freins à disque de TGV. Engineering Sciences [physics]. Ecole Polytechnique X, 2007. English. NNT : . pastel-00003996

HAL Id: pastel-00003996

<https://pastel.hal.science/pastel-00003996>

Submitted on 28 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique

spécialité :
Mécanique

présentée par :
Xavier LORANG

le 4 octobre 2007

Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV

Composition du jury :

M. RAOUS	Directeur de Recherche CNRS, LMA	Rapporteur
L. BAILLET	Professeur, Université J. Fourier Grenoble, LGIT	Rapporteur
A. CHAIGNE	Professeur, ENSTA	Examineur
J.J. SINOUE	Maître de Conférence, Ecole Centrale de Lyon	Examineur
M. BONNET	Directeur de Recherche CNRS, LMS	Examineur
Q.S. NGUYEN	Directeur de Recherche CNRS, LMS	Directeur de thèse
P.E. GAUTIER	SNCF	Examineur
F. MARGIOCCHI	SNCF	Invitée
O. CHIELLO	Chargé de recherche, INRETS	Invité

à mon épouse, à mes parents, à ma famille...

Remerciements

Je voudrais remercier Quoc Son Nguyen d'avoir bien voulu m'accueillir en thèse au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'école polytechnique. Je remercie Pierre-Etienne Gautier de m'avoir accueilli dans l'unité de recherche Physique du système Ferroviaire de la direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF.

Je remercie Florence Margiocchi pour son soutien constant, son intérêt pour le sujet et son implication dans ce travail.

Je voudrais remercier Olivier Chiello pour sa contribution scientifique significative à cette thèse notamment grâce à nos nombreuses discussions fructueuses.

Merci à Marc Bonnet de s'être intéressé à ce sujet et d'avoir accepté que l'on travaille ensemble sur la méthode d'optimisation de forme de garniture.

Mes sincères remerciements vont aussi à Louis Marie Cléon pour son soutien tout au long de cette thèse ainsi que pour ses relectures complètes du mémoire.

Table des matières

Introduction générale	9
1 État de l'art : du bruit de frottement au crissement des freins	13
1.1 Phénoménologie et études expérimentales	13
1.1.1 Bruits et vibrations induites par le frottement en général	13
1.1.2 Bruits et vibrations des freins	14
1.1.3 Caractérisation expérimentale du crissement	16
1.2 Modélisation	18
1.2.1 Vibrations auto-entretenues induites par le frottement	18
1.2.2 Cricement des freins à disque	25
1.3 Conclusion	27
I Étude du comportement vibratoire des structures en contact frottant avec glissement	29
2 Formulation et résolution numérique des problèmes de contact frottant en dynamique	31
2.1 Formulations continues locales	31
2.2 Formulations variationnelles	35
2.3 Méthode de calcul des vibrations en présence de contact frottant	35
2.3.1 Intégrateur en temps	35
2.3.2 Formulation du contact unilatéral avec frottement	37
2.3.3 Algorithme	39
2.4 Validation : choc d'un lopin élastique	41
2.5 Conclusion	42
3 Cas des structures en situation de glissement : instabilité de l'équilibre	47
3.1 Frottement et instabilité	47
3.2 Stabilité dynamique du glissement stationnaire	48
3.3 Calcul numérique de la stabilité du glissement stationnaire	52
3.4 Validation	55
3.4.1 Solution semi-analytique du problème de stabilité de l'équilibre	55
3.4.2 Calculs numériques : influence de l'interpolation élément fini	56
3.4.3 Intérêt de la méthode d'itération sur les résidus	61
3.5 Conclusion	61

4	Transition entre évolution des perturbations et évolution transitoire	63
4.1	Liens entre modes de stabilité et évolution transitoire	63
4.1.1	Liens entre coordonnées modales des modes de stabilité et espace physique	63
4.1.2	Projection sur la base des modes de stabilité	64
4.1.3	Contributions des modes de stabilité aux énergies	67
4.1.4	Valeur moyenne de l'énergie cinétique modale sur le cycle limite	67
4.2	Application à la couche élastique bidimensionnelle	68
4.2.1	Méthode de calcul de la solution transitoire	68
4.2.2	Onde de type glissement / adhérence	69
4.2.3	Onde de type glissement / décollement	73
4.3	Conclusion	76
5	Application à un modèle simplifié de frein à disque tridimensionnel	77
5.1	Description du problème et formulations	77
5.1.1	Description du problème et formulation eulérienne	77
5.1.2	Formulation discrétisée en espace	80
5.1.3	Discrétisation et modes libres de disque	81
5.2	Configuration avec un seul mode instable	83
5.2.1	Étude de la stabilité de l'équilibre	84
5.2.2	Étude de la solution transitoire non linéaire	85
5.2.3	Vérification des hypothèses	94
5.2.4	Bilan des résultats	94
5.3	Configuration avec plusieurs modes instables	95
5.3.1	Étude de la solution transitoire non linéaire	95
5.3.2	Influence des conditions initiales	104
5.4	Conclusions	105
6	Sensibilité de la stabilité du glissement stationnaire vis-à-vis de la zone de contact	107
6.1	Contexte et hypothèses	107
6.2	Rappel des équations continues de la dynamique et instabilité glissante	108
6.3	Problème d'optimisation	109
6.4	Application sur une couche élastique bidimensionnelle	111
6.4.1	Validation du calcul de sensibilité	111
6.4.2	Application de l'algorithme d'optimisation	113
6.5	Validation sur le cas du disque	113
6.6	Conclusion et perspectives	116
II	Application au crissement des freins à disque de TGV	119
7	Caractérisation expérimentale du crissement au freinage du TGV	121
7.1	Caractérisation du bruit de crissement en gare	121
7.2	Le système de freinage du TGV	123
7.3	Mesures acoustiques et vibratoires embarquées	123
7.4	Mesures acoustiques et vibratoires sur banc d'essai	127

7.5	Conclusion	131
8	Modélisation du crissement du système TGV	133
8.1	Modélisation du système de freinage	133
8.1.1	Sous-système disque/moyeu	133
8.1.2	Sous-système porte-garniture	133
8.2	Stabilité de l'équilibre stationnaire	136
8.3	Étude des mécanismes d'instabilités dynamiques	140
8.3.1	Stabilité dans le cas d'une densité de plots nulle	140
8.3.2	Effets des modes propres de plots sur la stabilité	142
8.3.3	Effet de l'amortissement intrinsèque des plots	143
8.4	Conclusions et perspectives	144
9	Conclusion générale et perspectives	145
A	Méthode d'itération sur les résidus	155
B	Notions générales sur la stabilité dynamique des structures	159
C	Technologie du mécanisme de freinage TGV	163

Introduction générale

Contexte industriel et scientifique

Le crissement des freins des Trains à Grande Vitesse (TGV) est un bruit strident émis quasiment systématiquement lors de l'arrivée du train en gare. Sur les quais, la gêne occasionnée est significative. En effet, le niveau sonore maximum atteint à un mètre du bord du quai oscille entre 100 et 110 dB lors du passage d'un train (voir l'échelle de bruit représentée en figure 1). Cet effet indésirable n'affecte cependant pas la sécurité du freinage. La compréhension du phénomène ainsi que sa prédiction via un outil d'aide à la conception sont les objectifs de la SNCF afin que des solutions de réduction de ce type de bruit soient développées. C'est dans cet esprit que s'insère cette thèse effectuée dans le cadre d'un partenariat entre la SNCF et le Laboratoire de Mécanique des Solides et intégrée dans un projet de recherche accompagnant un programme national de recherche pour les transports (PREDIT).

Les études sur le crissement au freinage ont été menées depuis le début du 20^e siècle et motivées principalement par l'industrie automobile. Il en est tout autrement pour le crissement des freins à disque de TGV où ce travail de thèse est pionnier dans le domaine ferroviaire, pour lequel cette préoccupation est récente. Compte tenu des performances à exiger des mécanismes de freinage des trains (masse à freiner et donc énergie à dissiper), il apparaît des différences technologiques significatives vis-à-vis de l'automobile (figure 2).

Le phénomène acoustique considéré est d'origine vibratoire : le crissement des freins à disque résulte des **vibrations** auto-entretenues (des différents constituants) induites par le **frottement** des garnitures sur le disque. Le phénomène de frottement qui se manifeste par un effort de frottement est lié aux aspérités de surface. On est donc dans un problème à deux échelles où un phénomène à l'échelle microscopique crée des vibrations dans un disque à l'échelle macroscopique. Ces vibrations macroscopiques peuvent même avoir un effet sur les phénomènes présents à l'échelle microscopique. Au delà des aspects vibratoires, le frottement est un mécanisme dissipatif qui convertit l'énergie mécanique en chaleur. Le flux de chaleur généré peut modifier fortement les propriétés tribologiques au contact.

Les phénomènes de bruit de freinage sont complexes, variés et ont des origines diverses selon les points de fonctionnement du mécanisme. Les résultats expérimentaux de la littérature montrent que le crissement des freins résulte de vibrations auto-entretenues induites par le frottement du système (amplitude de vibration du disque de l'ordre de quelques micromètres). Les travaux de modélisation montrent qu'une instabilité de l'équilibre stationnaire dite géométrique ou par couplage de mode permet de mobiliser les modes de vibration responsables du crissement et ceci à coefficient de frottement constant.



FIG. 1 – Échelle du bruit (Source : Fédération française des associations de protection de la nature et de l'environnement)

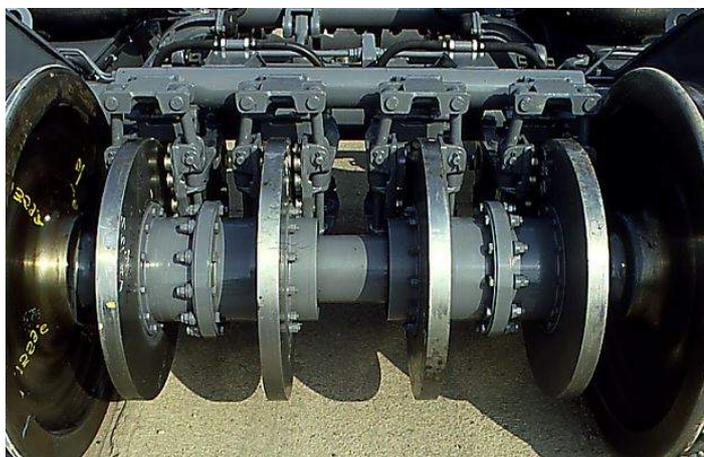


FIG. 2 – Vue globale d'un essieu TGV avec ses quatre disques et garnitures

Orientations

Ces constatations nous orientent vers un modèle de mécanique des milieux continus déformables dans l'hypothèse de petites perturbations. Beaucoup de travaux sur les vibrations auto-entretenues en général s'intéressent à la stabilité de l'équilibre mais font un raccourci rapide entre fréquences des modes instables et solution transitoire. Les travaux numériques traitant de la caractérisation des solutions transitoires montrent la complexité des solutions mettant en évidence des événements fortement non linéaires sous la zone de contact comme de l'adhérence ou du décollement à cause de l'unilatéralité du contact. Comment évoluent les perturbations proches de l'équilibre vers la solution transitoire ? Quels sont les liens entre les fréquences caractéristiques de la solution transitoire (fréquences de crissement) et les fréquences des modes de stabilité ? C'est une question importante auquel la thèse tente de répondre en particulier sur un mécanisme de frein à disque TGV simplifié tridimensionnel. La transition entre l'évolution des perturbations proches de l'équilibre et l'évolution transitoire est étudiée grâce à une projection sur les modes de stabilité. Elle permet une étude spatiale et temporelle des champs solutions transitoires. Pour mener à bien ces objectifs, le calcul de telles solutions transitoires doit être effectué. La complexité des événements sous la zone de contact observée dans les différents travaux nous oriente vers des algorithmes et des stratégies numériques adaptés. L'instabilité de l'équilibre par couplage de mode est le mécanisme générateur de vibrations auto-entretenues privilégié dans la littérature. Qu'en est-il sur le mécanisme de freinage TGV ? Cette question nous conduit dans un premier temps à observer le comportement du mécanisme réel à travers l'expérience. Dans un deuxième temps, elle nous conduit à proposer un modèle de frein TGV réaliste dans le but de préciser le mécanisme physique de couplage de mode. La connaissance de ce mécanisme physique est un fil conducteur robuste pour une action efficace dans la recherche de solution de réduction du bruit.

Résumé

Le chapitre 1 est un état de l'art qui fait le point d'abord d'un point de vue phénoménologique sur l'ensemble des bruits et vibrations de freinage et la spécificité du crissement dans ces bruits. Ensuite, les aspects modélisations sont abordés en deux temps : les mécanismes de génération des vibrations auto-entretenuës induits par le frottement sont étudiés puis les travaux spécifiques aux crissements des freins sont abordés.

Le chapitre 2 définit le cadre mécanique ainsi que la formulation mathématique du problème. Il s'agit d'un problème de dynamique des milieux continus déformable avec prise en compte des conditions unilatérales de contact en présence de frottement de Coulomb. Ces relations de comportement sont non linéaires et non régulières. On s'intéresse ensuite à la résolution numérique de tels problèmes dans le cadre d'une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. Les problèmes d'évolution dynamique en présence de non-linéarités non régulières sont à l'origine de difficultés numériques significatives telles que les situations de chocs.

Le chapitre 3 se consacre au cas particulier des structures en situation de glissement pour lesquelles la solution de glissement stationnaire est instable dynamiquement. En effet, c'est le mécanisme essentiel de génération de vibrations auto-entretenuës. La perte de stabilité dynamique conduit à l'explosion de perturbations proches de l'équilibre. Les résultats connus donnant les équations continues vérifiées par l'équilibre ainsi que par les perturbations glissantes sont rappelées. Dans le cadre de la discrétisation par la méthode des éléments finis, la méthode d'itération sur les résidus est proposée pour résoudre le problème aux valeurs propres sous jacent. Enfin, une étude de l'influence de la discrétisation sur la qualité des résultats est menée et nous guide vers une stratégie de discrétisation adaptée. Le calcul de stabilité nous permet de prédire l'évolution des perturbations glissantes oscillantes proches de l'équilibre. Mais comment évoluent ces perturbations loin de l'équilibre, en particulier quand on passe d'une situation de glissement sous la zone de contact à une situation plus complexe ? Quelle est l'influence des non linéarités ?

Le chapitre 4 s'intéresse à la transition entre l'évolution des perturbations glissantes et l'évolution transitoire. A proximité de l'équilibre, l'amplitude du mode complexe augmente exponentiellement. Cette croissance exponentielle va être saturée par l'apparition du décollement et/ou de l'adhérence. Une méthode originale de projection de la solution transitoire sur les modes de stabilité permet pour chaque mode instable de connaître l'évolution de l'amplitude modale complexe loin de l'équilibre. La méthode est appliquée au cas du glissement d'une couche élastique bidimensionnelle sur un obstacle indéformable. Ces calculs sont effectués pour des paramètres physiques mettant en évidence des ondes de surface sous la zone de contact du type glissement/adhérence et glissement/décollement. Les comportements dynamiques observés dépendent de la géométrie du système et des paramètres physiques. Qu'en est-il sur un mécanisme de frein à disque tridimensionnel simplifié ?

Le cas d'un mécanisme de frein à disque simplifié de TGV, constitué d'un disque ainsi que de deux garnitures cylindriques, est étudié au chapitre 5. Une formulation eulérienne du problème est proposée et des hypothèses simplificatrices sont formulées compte tenu des faibles fréquences de rotation considérées (quelques tours par secondes). Une telle formulation eulé-

rienne permet de calculer les champs sur un maillage géométrique fixe, on effectue ainsi un calcul transitoire et de stabilité sur le même modèle. Dans un premier temps, l'aptitude de la stratégie numérique à modéliser du crissement est évaluée au regard des résultats obtenus. Dans un deuxième temps, le lien entre les fréquences caractéristiques de la solution transitoire (fréquences de crissement) et les fréquences des modes de stabilité est approfondi.

On a vu que les modes de stabilité jouent un rôle essentiel dans le cycle limite. La recherche d'une géométrie de garniture optimale stabilisant l'équilibre motive la proposition de la méthode d'optimisation géométrique faite au chapitre 6. La sensibilité de la valeur propre issue du problème aux valeurs propres complexes est évaluée analytiquement vis-à-vis de paramètres définissant la géométrie de la surface de contact. Cette sensibilité est exploitée ensuite en l'intégrant dans un algorithme d'optimisation par une méthode de gradient. La méthode de sensibilité est formulée ici pour le cas de garnitures rigides. Elle est validée sur le cas du glissement d'une couche élastique et le cas du disque. L'intérêt de la méthode d'optimisation est testée sur le cas 2D. Cette approche dont l'apport est méthodologique s'inscrit à long terme dans une démarche de réduction de bruit par optimisation de forme de garniture.

L'objet du chapitre 7 est d'apporter une vue synthétique sur la caractérisation du phénomène de crissement des freins à disque de TGV à travers une synthèse de campagnes d'expériences effectuées à la SNCF. Des résultats de mesures acoustiques en gare ainsi que des investigations acoustiques et vibratoires embarquées permettent de caractériser une signature acoustique et vibratoire du crissement des freins de TGV : les fréquences caractéristiques ainsi que les niveaux acoustiques en champ proche et vibratoires sont caractérisés. Des résultats d'investigation du champ vibratoire du disque en situation de crissement effectuée sur banc d'essai sont présentés.

On présente chapitre 8 une modélisation « réaliste » du mécanisme de freinage TGV. Elle est effectuée au regard d'une analyse modale expérimentale des constituants. Ensuite un calcul de stabilité de l'équilibre est effectué et comparé aux résultats expérimentaux comme les déformées expérimentales identifiées en conditions de crissement. Enfin, l'étude de l'influence de paramètres physiques sur la stabilité comme les fréquences propres des éléments de garniture et l'amortissement matériau dans les garnitures permet de mieux cerner leur rôle dans le mécanisme d'instabilité.

1 – État de l’art : du bruit de frottement au crissement des freins

1.1 Phénoménologie et études expérimentales

1.1.1 Bruits et vibrations induites par le frottement en général

D’un point de vue historique, l’étude des bruits et des vibrations des systèmes frottants est très ancienne et remonte à plus d’un siècle. Dans [5], A. Akay fait une étude bibliographique de référence de ces systèmes. On distingue la famille des bruits de frottement sans glissement, comme le bruit de la neige écrasée lors d’une marche, de celle liée au de frottement de glissement, comme le bruit généré par le frottement d’une craie sur un tableau. Une des caractéristiques de ces bruits est qu’ils sont rarement stationnaires. Dans le cas du glissement (figure 1.1), Akay présente des résultats expérimentaux pour des systèmes très divers comme par exemple : le doigt mouillé qui glisse sur le bord d’un verre, le frottement d’un archet de violon sur la face libre d’une poutre encastrée ou le frottement d’une poutre sur un disque en rotation. Il en ressort que le comportement de ces systèmes est sensible à la manière dont le contact est établi (orientations de l’excitateur, efforts de contact faibles ou forts). Cette constatation



FIG. 1.1 – Exemples de systèmes générant des bruits de frottement de glissement [34]

permet de considérer différemment les systèmes avec de forts efforts de contact des systèmes avec de faibles efforts de contact. Pour ces derniers, la rugosité des surfaces peut intervenir et créer un « bruit de surface » aléatoire auquel s’ajoutent des impulsions dans les directions normale et tangentielle au niveau de la zone de contact qui excitent les modes propres de chacun des solides. Dans le cas des structures avec de forts efforts, les solides en contact forment un système couplé aux nouvelles caractéristiques dynamiques. La réponse est alors complexe et souvent non linéaire. Pour ces systèmes, une corrélation expérimentale est recherchée entre la réponse et les fréquences propres. Il en ressort que souvent, le système répond acoustiquement sur une fréquence propre du système couplé ainsi que sur ses harmoniques. A. Akay appelle ce phénomène le verrouillage de mode, ou « mode lock-in ». Il précise que la sélection du mode dépend de l’effort de contact, de la vitesse de glissement et de la géométrie du contact. Il constate sur ces systèmes que la réponse acoustique ne coïncide que très rarement avec plus d’une fréquence naturelle.

Les instruments de musique tels que le violon [5, 19] ou le bol chantant tibétain [36] sont des exemples de systèmes mécaniques générant des bruits de frottement de glissement et font l'objet d'études spécifiques et approfondies dont l'un des objectifs est la synthèse sonore.

1.1.2 Bruits et vibrations des freins

Contrairement aux instruments de musique, les bruits et vibrations des freins sont des phénomènes non désirés. Les niveaux sonores atteints sont particulièrement gênants dans les moyens de transport tels que l'avion, l'automobile, le bus ou le train. On peut noter que les freins d'avions émettent plutôt à basse fréquence (< 1000 Hz) alors que les autres moyens de transport émettent dans la totalité du domaine audible. D'un point de vue général, selon les conditions de fonctionnement et les mécanismes de frein, les bruits émis peuvent être variés : cela peut aller du bruit de rugosité de surface au bruit avec un spectre de raies.

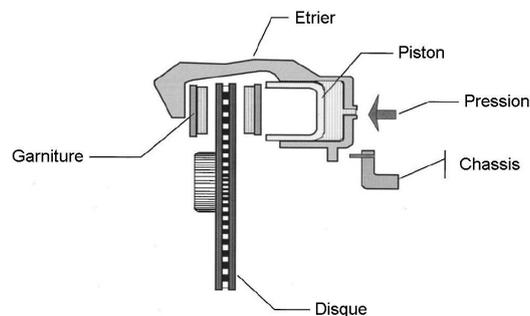


FIG. 1.2 – Mécanisme de frein à disque d'automobile générique (issu de [5])

On peut distinguer dans la littérature ([5, 42, 50] et [66]), les bruits issus de vibrations forcées et les bruits issus de vibrations auto-entretenues. Le vocabulaire caractérisant le bruit émis a pour origine l'aspect perceptif du bruit et est relativement dense et complexe. Il provient majoritairement de la littérature automobile (figure 1.2). On propose ici une classification non-exhaustive simplifiée :

Vibrations forcées

Les **trépidations** (judder) sont des vibrations dont les fréquences sont multiples de la fréquence de rotation du disque. Ces vibrations proviennent du caractère non uniforme de l'effort de frottement issu d'une variation de l'épaisseur du disque le long de la circonférence. Cette variation peut être due par exemple à un défaut de forme du disque. Un autre phénomène peut créer de telles vibrations : il s'agit de l'apparition de « hot spots » ou points chauds qui sont les conséquences d'une instabilité thermoélastique (TEI) (voir Yi, Barber et al [75],[76]). De tels points chauds créent des zones de surpression de contact vues de manière périodique par les garnitures à la fréquence de rotation du disque. Ces vibrations sont en général à des fréquences inférieures à 500 Hz. Les vibrations issues de la **rugosité des surfaces** (roughness noise) sont aussi des vibrations forcées. Les niveaux vibratoires et acoustiques associés sont faibles vis-à-vis des autres types de vibrations.

Vibrations auto-entretenues

Le **bourdonnement** (hum) ou **ronflement** (moan). Ces bruits résultent de vibrations basses fréquences (de 100 à 500 Hz) et de forte amplitude. Ces vibrations sont la conséquence d'instabilités géométriques faisant intervenir les constituants du frein en tant que solides rigides. Il s'agit d'un couplage des déplacements normaux et tangentiels du porte-garniture (rigide) assuré par ses éléments de liaison avec le châssis. Le porte-garniture se met alors en rotation. Historiquement, Spurr [68] a proposé en 1961 un mécanisme de génération de vibrations auto-entretenues avec coefficient de frottement constant appelé *sprag / slip* (arc-boutement / glissement) expliquant le phénomène précédent. Ce phénomène étudié sur les freins automobiles peut être transposé aux freins d'avions technologiquement très différents. Ainsi le « whirl vibration » ou vibration de giration traduit la rotation des disques de frein autour des deux autres axes que l'axe de révolution, conséquence d'une instabilité géométrique du même type [66].

Le **broutement** (groan). Il s'agit ici aussi de vibrations basses fréquences (< 100 Hz). Ce sont des vibrations de garnitures à très basses vitesses. Ces vibrations de solides rigides sont dues à la dépendance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement. Des mouvements d'ensemble de type adhérence / glissement (*stick / slip*) du porte-garniture par rapport au disque sont mis en évidence [42].

Le **crissement** (squeal). Le crissement caractérise une vibration auto-entretenue du frein avec un spectre de raies très marqué contenant plusieurs fréquences fondamentales ainsi que leurs harmoniques. Ce phénomène illustre parfaitement le « verrouillage de mode » (ou « mode lock-in ») introduit par Akay. Les fréquences mises en jeu sont supérieures à 1000 Hz. On distingue le crissement haute fréquence (au delà de 5 kHz) du crissement basse fréquence (1 kHz - 5 kHz). Le crissement basse fréquence implique des modes avec 4 diamètres nodaux

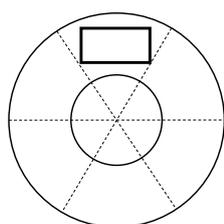


FIG. 1.3 – Mode axial à 3 diamètres nodaux (crissement basse fréquence)

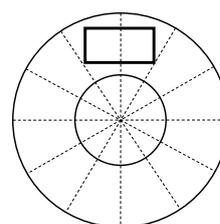


FIG. 1.4 – Mode axial à 6 diamètres nodaux (crissement haute fréquence)

maximum. La longueur de la garniture est alors plus petite que les espaces inter-diamètres nodaux.

Le crissement haute fréquence implique lui des modes d'ordre élevé. Le nombre de diamètres nodaux est souvent supérieur à 5. Dans ce cas, les espaces inter-diamètres nodaux sont souvent inférieurs à la longueur de la garniture.

Les travaux de modélisation effectués montrent qu'une instabilité géométrique permet de mobiliser ces modes haute fréquence [42].

1.1.3 Caractérisation expérimentale du crissement

Dans la littérature, la caractérisation expérimentale passe d'abord par une étude de l'occurrence du crissement en fonction des paramètres de fonctionnement du frein et des conditions de frottement. Ensuite des investigations acoustiques et vibratoires sont menées lorsque le crissement apparaît.

Occurrence du crissement

Paramètres de freinage. D'après [50], le crissement est observé pour des faibles pressions (< 2.5 MPa), des faibles vitesses (< 5 tours/s) et des faibles températures (< 150 °C). La vitesse n'a pas d'effet sur le crissement, il peut même être obtenu à vitesse variable jusque l'arrêt.

Conditions de frottement. L'expérience de Bergman et al. [15] a pour objectif de comprendre l'influence de l'état de surface et du coefficient de frottement sur l'occurrence du crissement. Pour cela, ils effectuent un grenailage du disque avant l'expérience, ce qui a pour effet de détériorer la surface du disque et de diminuer la surface frottante. Ensuite, ils effectuent un nombre de freinages important en laissant des temps de latence pour éviter une augmentation de la température. Au cours des freinages, le coefficient de frottement augmente progressivement. Pour un freinage donné, si le niveau sonore est supérieur à 84 dB dans la bande audible, le crissement est validé. La figure 1.5 montre pour chaque freinage le coefficient de frottement ainsi que le cumul de crissements validés pour deux freins différents (a) et (b). Ils concluent que le crissement apparaît au dessus d'un **coefficient de frottement critique** et pour un **régime de frottement établi**. Ces conclusions sont partagées par un certain nombre de travaux.

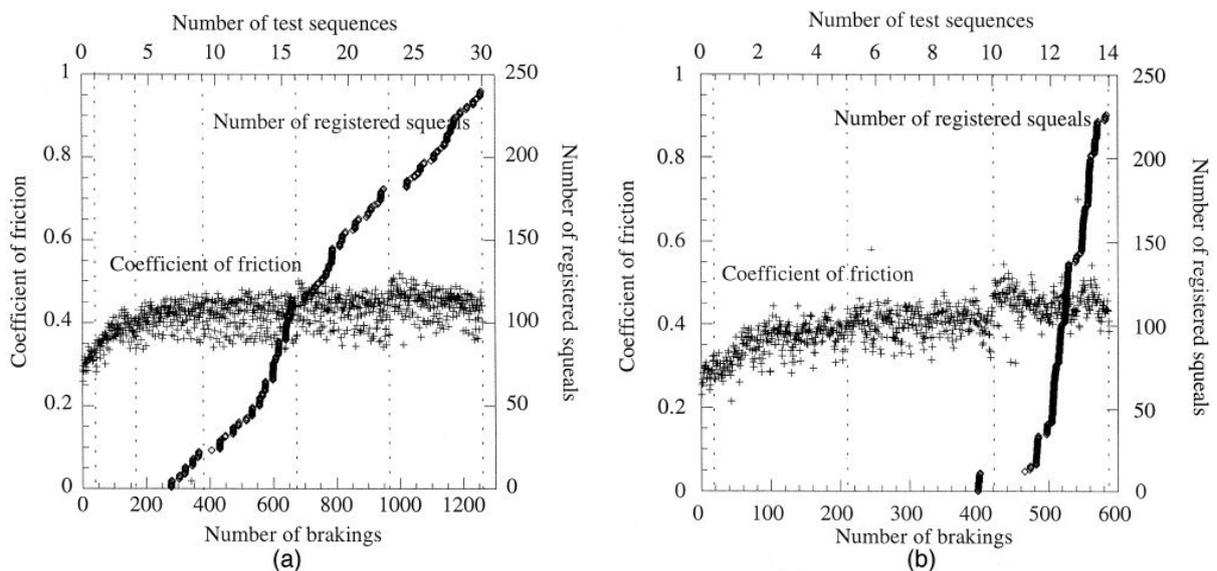


FIG. 1.5 – Occurrence du crissement en fonction du coefficient de frottement dans l'expérience de Bergman et al. [15] pour les freins (a) et (b)

Caractéristiques du crissement

Bruits de crissement. D'après [42], le bruit de crissement peut provenir du disque, des garnitures ou des deux. Les études existantes s'intéressent plus particulièrement aux vibrations des

différents constituants plutôt qu'aux aspects acoustiques. On a vu que le bruit de crissement était constitué, d'un point de vue spectral, d'une ou plusieurs raies. A ces fréquences de crissement correspondent souvent des harmoniques. Afin d'avoir des informations précises sur le comportement en situation de crissement des constituants, différentes techniques expérimentales ont été mises en œuvre pour caractériser les vibrations.

Identification des vibrations des constituants. Sur les constituants fixes comme les garnitures, les accéléromètres sont privilégiés pour les mesures de vibrations. En revanche, le disque en situation de rotation n'offre pas cette possibilité. Des techniques acoustiques telles que l'holographie acoustique peuvent être employées [13]. L'holographie consiste à utiliser une grille de microphones pour localiser les zones de fortes pressions acoustiques à la surface du disque et ainsi reconstituer les déformées vibratoires. Cette technique est limitée en fréquence (< 5000 Hz) puisqu'elle nécessite une finesse de la grille de microphone trop importante au delà. Des techniques optiques sont alors utilisées pour identifier le champ vibratoire du disque et caractériser quantitativement les niveaux. Plusieurs techniques existent. Les techniques interférométriques consistent à visualiser des motifs d'interférence sur le système vibrant à étudier [29]. D'autres techniques comme la vibrométrie laser à balayage peuvent être utilisées, elle consiste à balayer un faisceau laser mono-point sur la surface vibrante [69]. Cette technique nécessite une référence de phase pour la caractérisation d'ondes non-stationnaires (un accéléromètre sur la garniture par exemple).

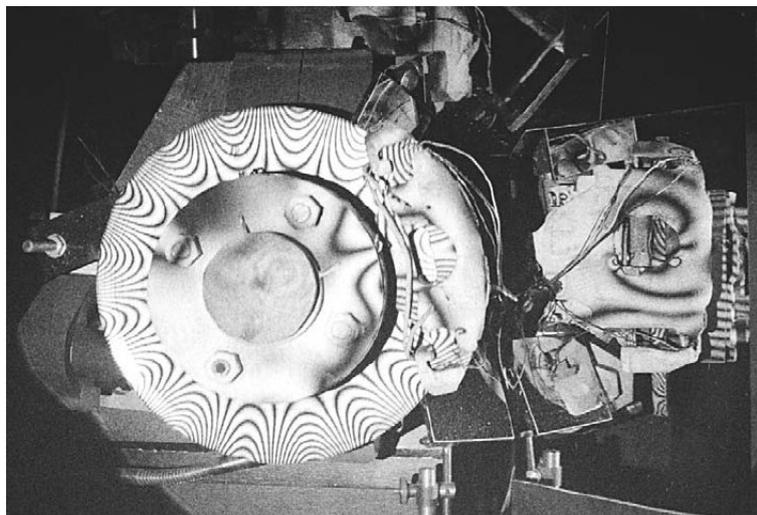


FIG. 1.6 – Mise en évidence du champ vibratoire par une technique interférométrique [29]

Les résultats de ces expérimentations concernant les vibrations de disque sont les suivants [42] :

- Les déformées vibratoires sont proches des modes de disque libre.
- Des ondes non-stationnaires se propagent le long du disque, en particulier à haute fréquence.
- L'amplitude vibratoire axiale est de l'ordre du micromètre.

Concernant les vibrations des garnitures et de l'étrier, les conclusions sont qu'à basse fréquence, les garnitures vibrent de manière rigide alors qu'à haute fréquence des modes de flexion / torsion interviennent.

1.2 Modélisation

1.2.1 Vibrations auto-entretenues induites par le frottement

On se consacre dans cette partie aux modèles mécaniques permettant de mettre en évidence des vibrations auto-entretenues, en laissant de côté les vibrations forcées.

Les efforts dynamiques de frottement sont de nature complexe. Cette complexité s'explique par le nombre important de facteurs influents comme la composition physique des interfaces, la réponse des interfaces aux efforts normaux, les effets thermiques et inertiels, la rugosité des surfaces, les histoires de chargement, l'usure et la présence ou non de lubrifiant. Il est accepté que la démarche qui consisterait à rechercher le modèle théorique unifié qui permettrait de décrire tous les effets dynamiques de frottement n'est pas raisonnable.

Oden et Martins [57] précisent que ces efforts de frottement sont les conséquences de phénomènes physiques et chimiques complexes interdépendants. Ils se restreignent au cas des matériaux métalliques en situation de frottement de glissement faisant apparaître des mouvements de type glissement / adhérence où l'interface est homogène et sans déformation plastique, et où les efforts globaux de frottement semblent dépendre de la vitesse relative d'un solide par rapport à l'autre. Ils réalisent une étude numérique du comportement dynamique de structures en situation de glissement. A partir d'une loi d'interface identifiable expérimentalement dans les hypothèses d'études qu'ils définissent, ils proposent une relation sous forme de puissance entre la contrainte normale de contact et le jeu. La résolution numérique dans le cadre dynamique est effectuée en régularisant l'effort de frottement à partir d'un modèle de Coulomb. Les conclusions principales issues des considérations numériques et expérimentales sont les suivantes :

1) Contrairement à ce qui était communément admis depuis Coulomb au 18^{ème} siècle pour expliquer les variations globales des efforts de frottement, le coefficient de frottement ne dépend pas nécessairement de la vitesse relative (la variation globale de l'effort était interprétée en distinguant un coefficient de frottement statique supérieur à un coefficient de frottement dynamique). En effet, ce sont en général les efforts de frottement globaux moyens dans le temps qui vérifient cette propriété. Si on considère un modèle simplifié à un seul degré de liberté tangentiel, alors, la réduction du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement est le seul moyen permettant de rendre compte de l'observation. De tels modèles qui ne tiennent pas compte des variations des efforts normaux, laissent de côté d'importantes propriétés du frottement dynamique.

2) Le phénomène de glissement / adhérence peut être la manifestation d'instabilités dynamiques inhérentes aux mouvements normaux et tangentiels relatifs des solides en contact. Ce phénomène n'est pas nécessairement la conséquence d'une variation du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement car il peut être observé à coefficient de frottement constant égal au coefficient de frottement statique.

L'ensemble de ces conclusions formulées dès 1985, reste d'actualité et est en adéquation avec les travaux les plus récents (on va le voir dans la suite). Ces travaux montrent aussi que les types de mécanisme de génération des vibrations auto-entretenues résultent du couple modèle mécanique / modèle de frottement.

Modèles de frottement

Comme on vient de le voir, la physique des efforts de frottement est complexe. La prise en compte des efforts tangentiels à une interface dans un modèle mécanique nécessite la prise en compte d'un modèle de frottement. Il existe des modèles de frottement complexes qui tiennent compte d'un nombre de paramètres important. Le modèle de Coulomb reste très utilisé car il permet de rendre compte de beaucoup de phénomènes en restant simple de formulation : il postule qu'en situation de glissement, l'effort de frottement est proportionnel à l'effort normal (de coefficient f) et s'oppose à la vitesse de glissement. Il est indépendant de la surface apparente de contact. Si il n'y a pas mouvement relatif, alors l'effort de frottement ne peut excéder f fois l'effort normal de contact.

On considère un modèle de frottement de Coulomb avec coefficient de frottement f . On peut distinguer les trois modèles de frottement suivants (figure 1.7) dans lesquels le coefficient de frottement dépend de la vitesse de glissement. Dans le cas I, le coefficient de frottement est constant. Dans le cas II, on distingue le coefficient de frottement statique et dynamique tandis que dans le cas III on considère une variation continue.

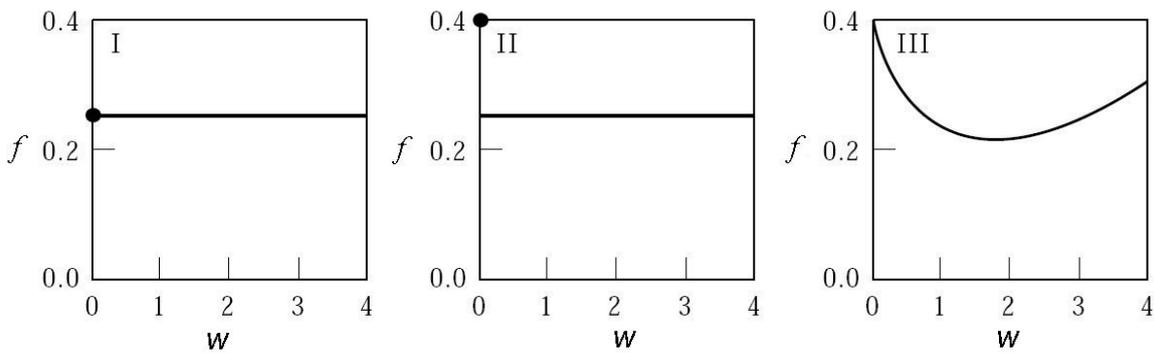


FIG. 1.7 – Trois modèles de frottement I,II et III (coefficient de frottement f en fonction de la vitesse de glissement w (issu de [34])

Mécanismes de générations des vibrations auto-entretenues

On considère tout d'abord le problème à un degré de liberté (figure 1.8), où une masse m glisse sur un tapis roulant allant à vitesse V et est retenue par un ressort de raideur k . Un effort normal constant N maintient la masse sur le tapis. Ce problème étudie ainsi le modèle le plus simple pour lequel les mécanismes de génération de vibrations dépendent de la loi de frottement. Un tel modèle a été analysé dans la littérature, on reprend ici les conclusions issues de [50]. On note la vitesse de glissement $w = V - \dot{x}$.

L'équation du mouvement de la masse s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = F(w)$$

Pour la loi de frottement II, on a :

$$\begin{cases} |F(0)| \leq f_s N \\ F(w) = f_d N, w \geq 0 \\ F(w) = -f_d N, w \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

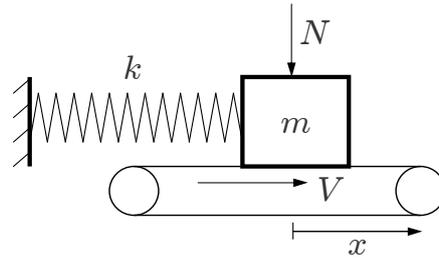


FIG. 1.8 – Modèle à un degré de liberté

Pour la loi de frottement III, on choisit un coefficient de frottement décroissant linéairement avec la vitesse de glissement tel que $f(w) = f_d(1 - \alpha|w|)$:

$$\begin{cases} |F(0)| \leq f_d N \\ F(w) = f_d(1 - \alpha w)N, w \geq 0 \\ F(w) = -f_d(1 + \alpha w)N, w \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

On note x^e la position d'équilibre statique et x^a la position limite d'adhérence.

$$\begin{cases} x^e = f_d N/k, & x^a = f_s N/k & \text{dans le cas II} \\ x^e = f_d(1 - \alpha V)N/k, & x^a = f_d N/k & \text{dans le cas III} \end{cases} \quad (1.3)$$

Les solutions pour les cas II et III sont tracées dans l'espace des phases (1.9).

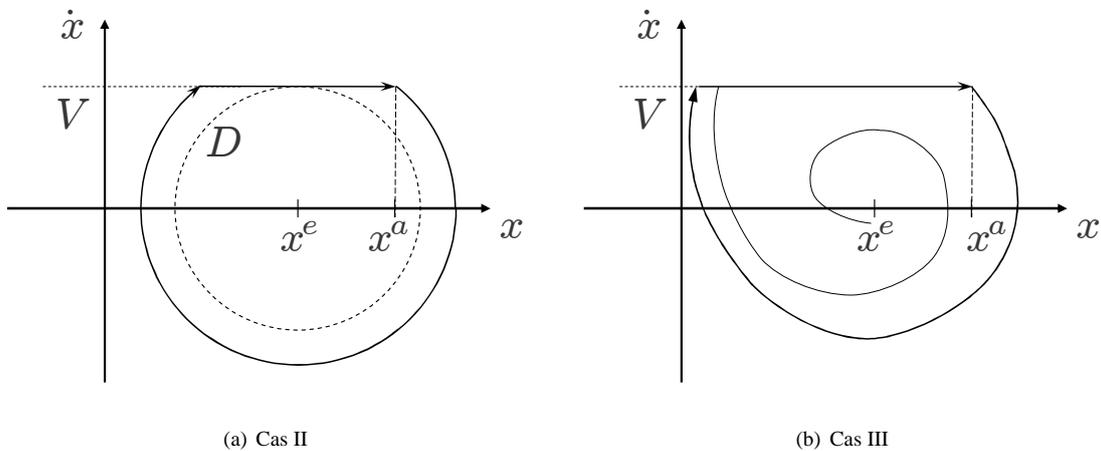


FIG. 1.9 – Espace des phases pour le modèle à un degré de liberté

Dans le cas II, la position d'équilibre est stable pour toutes conditions initiales incluses dans D . Pour toutes conditions initiales hors de D , la solution converge vers un cycle limite périodique de type adhérence / glissement.

Dans le cas III, la position d'équilibre est instable par flottement, c'est-à-dire qu'elle explose exponentiellement autour de l'équilibre. L'équation du mouvement linéarisée autour de l'équilibre s'écrit : $m\ddot{x} - \alpha f_d N \dot{x} + kx = f_d N(1 - \alpha V)$. On remarque que la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement crée un amortissement négatif responsable de l'instabilité. La solution converge vers un cycle limite périodique de type adhérence /

glissement et ceci pour toutes conditions initiales. Dans le cas où la dépendance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement $f(w)$ est continue, la stabilité de l'équilibre dépend du signe de $f'(V)$.

On constate ici la différence de mécanismes de génération de vibrations auto-entretenues. Un amortissement infinitésimal rend asymptotiquement stable l'équilibre dans le cas I pour toutes conditions initiales, donc pas de vibrations possibles. Dans le cas II, un amortissement infinitésimal rend asymptotiquement stable l'équilibre pour des conditions initiales incluses dans D. Hors de D, des vibrations sont possibles et le mécanisme de génération est appelé mécanisme « *stick / slip* » ou « *adhérence / glissement* ». Dans le cas III, l'ajout d'amortissement infinitésimal ne change rien. Le mécanisme en cause est un mécanisme de déstabilisation de l'équilibre par « *amortissement négatif* » ou « *negative damping* ».

On a vu avec ce modèle à un degré de liberté l'impossibilité de mettre en évidence des vibrations auto-entretenues avec un coefficient de frottement constant. Il faut pour cela comme le suggère Oden et Martins tenir compte des variations des efforts normaux et considérer alors des modèles à plus d'un degré de liberté.

De tels modèles à plusieurs degrés de liberté, peuvent rendre compte de vibrations auto-entretenues avec un coefficient de frottement constant. Le mécanisme responsable est un mécanisme d'instabilité de l'équilibre stationnaire lié à au caractère non-symétrique de la loi de Coulomb. On parle « *d'instabilité géométrique* » ou d'instabilité de contrainte cinématique [30, 67]. La contrainte cinématique en question est la contrainte de contact bilatéral effective dans la zone de contact qui forme un système mécanique couplé. La non symétrie de la loi de Coulomb signifie qu'en régime de glissement, l'effort de frottement est de norme proportionnelle à l'effort normal de contact mais que l'effort normal de contact ne peut pas être « piloté » par l'effort de frottement.

On peut prendre pour exemple simple le modèle de Hoffmann et al. [35] à deux degrés de liberté (figure 1.10). Le système différentiel gouvernant les perturbations x et y proches de

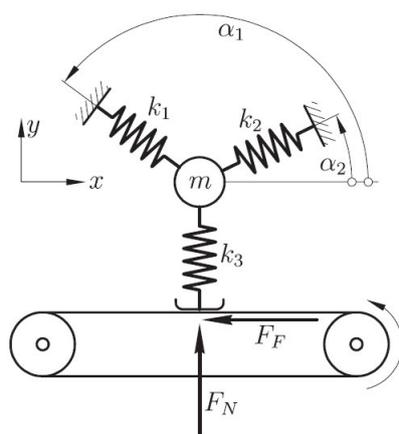


FIG. 1.10 – Modèle de Hoffmann et al. [35]

l'équilibre est donné par :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - f k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.4)$$

où k_{11} , k_{12} , k_{21} et k_{22} dépendent des angles et des raideurs. Dans ce modèle, f est constant. Selon les valeurs des paramètres physiques, et compte tenu de la non-symétrie de la matrice de raideur, il existe un coefficient de frottement qui déstabilise dynamiquement l'équilibre : les perturbations augmentent exponentiellement à partir de l'équilibre selon $\{X\} e^{st}$ avec $(\{X\}, s)$ solution propre de (1.4) et $s = r + i\omega$. $\{X\}$ est qualifié d'instable si $r > 0$. Dans ce mécanisme

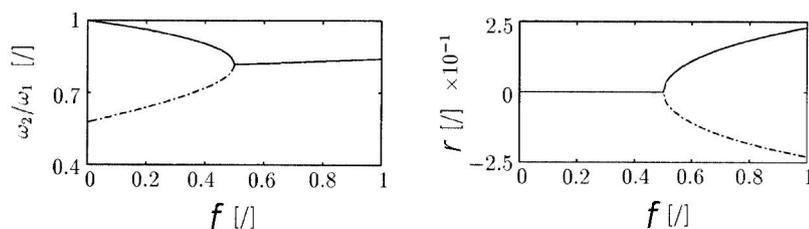


FIG. 1.11 – Couplage de deux modes [35]

d'instabilité dit géométrique, le frottement a pour effet de rapprocher les fréquences de deux modes du système couplé (système contraint par les contraintes de contact bilatéral) jusqu'à ce qu'elles soient confondues. À ce coefficient de frottement critique, les deux modes se couplent : un mode devient instable et l'autre stable. Cette instabilité géométrique est aussi appelée instabilité par *couplage de mode* ou « *mode coupling instability* ». À titre d'illustration, la figure 1.11, montre le couplage de modes. Le premier graphe montre le rapport de deux fréquences en fonction du coefficient de frottement. Le deuxième graphe représente lui la partie réelle de la valeur propre en fonction du coefficient de frottement.

Sur de tels systèmes à quelques degrés de liberté, une condition essentielle pour mettre en évidence l'instabilité sous frottement de Coulomb est *le couplage déplacement normal / déplacement tangent* au niveau de la zone de contact.

De nombreux modèles discrets à quelques degrés de liberté ont été proposés pour expliquer les bruits de freinage. Quelques uns sont cités dans la section suivante.

Bien évidemment, le même mécanisme d'instabilité géométrique peut être mis en évidence sur des systèmes continus. Jung et al. [39] étudient le glissement d'une poutre élastique sur un tapis roulant tandis que Martins et al. [46] et Adams [1, 2, 4], s'intéressent à l'instabilité de glissement de demi-espaces élastiques. Moiro [50] et Adams [3] mettent en évidence l'instabilité de l'équilibre stationnaire de deux couches élastiques semi-infinies et calculent semi-analytiquement les modes de stabilité.

Remarque : Parmi les mécanismes de génération de vibrations auto-entretenues présentés, il ressort que le mécanisme d'instabilité de l'équilibre stationnaire est prédominant. Seul le problème à un degré de liberté avec le modèle de frottement II exhibe un mécanisme différent. Ce mécanisme est en fait un cas limite qui historiquement et par abus de langage est appelé « *stick / slip* » dans la littérature alors que ces termes décrivent des événements non-linéaires tels que le passage du glissement à l'adhérence.

Comportements transitoires

Les mécanismes de génération de vibrations auto-entretenues présentés caractérisent (à part le mécanisme « *stick-slip* ») l'instabilité de l'équilibre stationnaire. Les conséquences de l'instabilité sont l'augmentation de l'amplitude vibratoire jusqu'à saturation. Autour de l'équilibre, on est en situation de glissement sous la zone de contact. À saturation, le statut des points de contact peut changer : il peut y avoir décollement à cause de la nature unilatérale du contact et/ou de l'adhérence. La prise en compte de ces événements non-linéaires est indispensable pour évaluer les niveaux vibratoires dans la solution dynamique car ce sont ces événements qui vont saturer la solution. La résolution de tels problèmes est difficile et un certain nombre de travaux de recherche y est consacré.

Moirot et al. [52] et Oueslati [58] exhibent des solutions semi-analytiques sur les solutions périodiques sous forme d'ondes de type « glissement - adhérence - décollement » dans les problèmes de frottement de cylindres coaxiaux élastiques linéaires. Ces solutions peuvent être trouvées en réduisant le problème (résolution approchée donc) par une condensation statique sur la surface de contact.

La discrétisation par éléments finis des systèmes continus permet d'étudier les vibrations auto-entretenues en phase de glissement.

Dans [9], Baillet et al. étudient la dynamique d'un lopin fini bidimensionnel élastique linéaire en situation de glissement et mettent en évidence numériquement des solutions périodiques. Oueslati et al. [59] font une étude similaire sur le glissement de cylindres coaxiaux en 2D. Ils mettent en évidence numériquement la propagation d'ondes de surface du type « glissement - adhérence - décollement ». Ils confirment les résultats semi-analytiques précédents.

Baillet et al. [8] effectuent une simulation de frottement d'un patin parallélépipédique sur une poutre (solide 3D) et mettent en évidence des vibrations auto-entretenues périodiques avec décollement. La visualisation a posteriori de la solution transitoire permet de discriminer un mode du système couplé. La fréquence de vibration est approximativement celle de ce mode et les harmoniques de cette fréquence apparaissent.

Dans [7], ils effectuent une simulation numérique de la dynamique d'un pion frottant sur un disque massif (tribomètre). En se fixant un coefficient de frottement local de Coulomb, ils évaluent l'effet de la vitesse de rotation du disque sur le coefficient de frottement global (calculé à partir des résultantes globales d'efforts). Les résultats vont dans le sens de Oden et Martins : le coefficient de frottement global dépend de la vitesse de glissement et reste inférieur au coefficient de frottement local. Ce phénomène est observé avec coefficient de frottement local constant.

Certains modèles discrets comprennent des ressorts élastiques non-linéaires dans lesquels l'instabilité géométrique conduit à des vibrations auto-entretenues saturées par les non-linéarités des ressorts et non du décollement ou de l'adhérence. Sinou et al. [66] proposent un tel modèle (figure 1.12).

Vola et al. [72] s'intéressent aux comportements vibratoires des structures hyper-élastiques en situation de frottement de glissement avec application aux crissements des lécheurs de vitre de voiture.

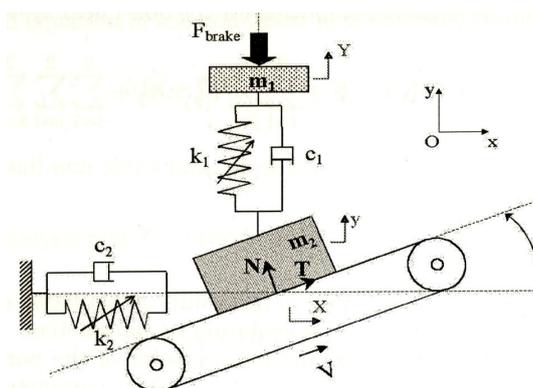


FIG. 1.12 – Modèle minimal de Sinou et al. [66]

Comportements temporels et stabilité de l'équilibre

Le comportement temporel est donné par la connaissance de la solution transitoire du problème et du cycle limite lorsqu'il existe. Les mécanismes d'instabilité présentés précédemment justifient l'existence de telles solutions vibratoires. Quels sont les liens entre les modes instables et le comportement temporel de la solution ?

Bengisu et al. [14] répondent à la question sur un exemple à trois degrés de liberté représenté figure 1.13. Le modèle de frottement choisi est de type III. La stabilité de l'équilibre est étudiée en fonction d'un paramètre de charge variable S_f qui est la pente de la loi $f(w)$. L'évolution de S_f peut faire apparaître un, deux, voire trois modes instables. Le calcul du cycle limite pour les

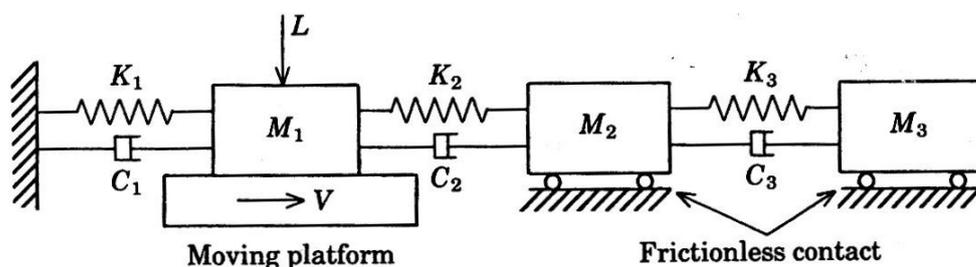


FIG. 1.13 – Modèle à 3 d.d.l. de Bengisu et al. [14]

différents cas permet de faire le lien avec la stabilité. Ils concluent que :

- La position d'équilibre est instable lorsque la valeur propre du système linéarisé est à partie réelle positive. Il existe alors un cycle limite.
- Les bifurcations qui suivent lors de l'évolution du paramètre de charge sont liées au franchissement de l'axe imaginaire par les pôles dans le plan complexe. Dans certains cas, un franchissement additionnel n'affecte pas immédiatement la réponse du système.
- Quand chaque bifurcation se manifeste par une fréquence fondamentale indépendante, une nouvelle fonction périodique est ajoutée à la réponse du système. De plus, la réponse a les harmoniques de chacune de ses fréquences fondamentales. Les valeurs relatives de ces fréquences fondamentales jouent un rôle significatif sur le comportement du système.
- Quand la réponse est périodique, il apparaît que le système vibre sur une de ses fréquences propres avec ses harmoniques (situation de « mode lock-in » définie par Akay.) Dans de telles réponses vibratoires, il peut y avoir plusieurs fonctions périodiques indépendantes

mais synchronisées.

- Quand le nombre de fréquences indépendantes est important, le système peut devenir chaotique.

1.2.2 Crissement des freins à disque

La classification présentée dans la partie expérimentale précédente des bruits et vibrations de freinage concernant spécifiquement les vibrations auto-entretenues a montré que l'on pouvait distinguer trois groupes : le broutement, le bourdonnement et le crissement.

Au regard des mécanismes de génération de vibrations auto-entretenues présentés, on peut préciser que le broutement est du à un mécanisme de type « stick / slip » et/ou un mécanisme de type « amortissement négatif ». Le bourdonnement est lié au mécanisme d'instabilité géométrique faisant intervenir le porte-garniture comme solide rigide vibrant autour de sa liaison élastique avec le châssis. Le crissement est associé à l'instabilité géométrique ou instabilité par couplage de modes.

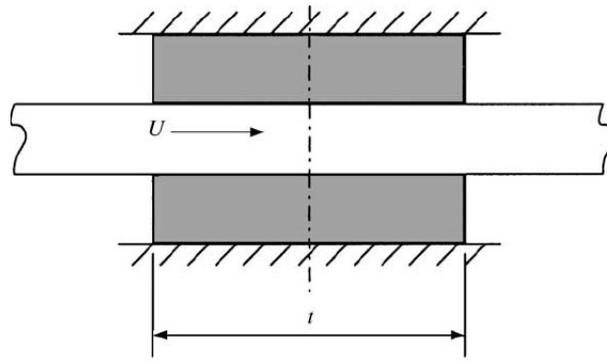
Historiquement [42], de nombreux modèles discrets simplifiés à quelques degrés de liberté ont été proposés pour tenter d'expliquer les bruits de freinage. On peut distinguer les modèles « minimaux » qui ont pour objectif de faire apparaître qualitativement le phénomène, comme le modèle de Hoffmann et al. [35] pour l'instabilité par couplage de modes. Dans un article récent, Wagner et al. [73] présentent quelques modèles minimaux. Une autre approche a consisté à la modélisation des mécanismes de freins à disque par des systèmes masse-ressort du plus simple au plus complexe dans le but de prédire quantitativement les fréquences bruyantes. Ces modèles mettent en avant des couplages déplacements normaux / déplacements tangents et ne prédisent que des vibrations de solides rigides avec leur élément de liaison, ce qui rend la prédiction délicate.

Pour la modélisation du crissement, les investigations expérimentales montrent qu'il faut s'intéresser aux constituants en tant que milieux déformables.

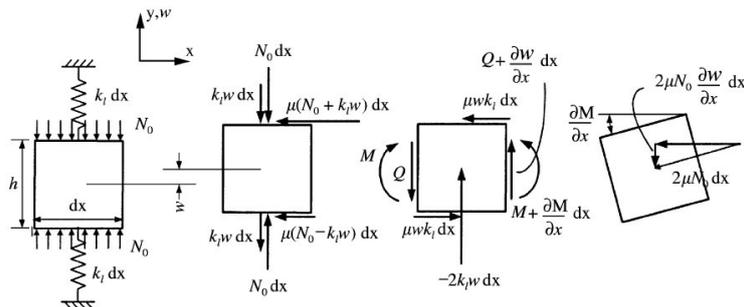
Chambrette et al. [22] s'intéressent à la stabilité d'une poutre inclinée frottant sur un disque en rotation. Ils mettent en avant la forte influence de l'angle d'inclinaison sur la stabilité, ainsi que l'instabilité d'un mode de flexion de disque avec un mode de flexion et un mode de compression de poutre. Un effet déstabilisant de l'amortissement visqueux a par ailleurs été mis en évidence dans cette étude.

Flint et Hulten [30] proposent un modèle continu simplifié à une dimension (figure 1.14). Le disque est modélisé par une poutre à symétrie cyclique en contact avec une garniture élastique sans masse. Dans ce modèle, seuls les mouvements transverses sont considérés mais les contributions des forces de frottement aux efforts transverses et aux moments de flexion sont intégrées. La figure 1.14 montre comment apparaissent ces contributions sur une tranche de poutre de longueur dx : à cause de l'épaisseur h , un déplacement w de la section de la poutre en frottement (coefficient μ) de glissement sur chaque coté va créer un moment de flexion $\mu k_1 h w$. Si l'on tient compte de la rotation de la section pour l'application des efforts de frottement, alors cet effort devient suiveur et une contribution transverse $2\mu N_0 \frac{\partial w}{\partial x}$ apparaît (N_0 est l'effort linéique à l'équilibre). L'équation du mouvement est la suivante :

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial w}{\partial x} k_1 h + 2\mu N_0 \frac{\partial w}{\partial x} + 2k_1 w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$



(a) Modèle de frein à disque simplifié : poutre à symétrie cyclique avec garniture sans masse.



(b) Moment de frottement et effort suiveur généré respectivement par la translation et la rotation d'un élément poutre de longueur dx .

FIG. 1.14 – Modèle de Flint et Hulten [30]

En utilisant la méthode de Galerkin, ils transforment 1.5 en système différentiel linéaire puis étudient la stabilité de l'équilibre numériquement. Les conclusions principales sont :

- Les contributions des efforts de frottement en tant qu'efforts suiveurs sont négligeables. C'est donc la contribution du frottement au moment de flexion qui prédomine.
- L'équilibre est instable par flottement. Le frottement rapproche deux modes de flexion proches jusqu'à ce qu'ils se confondent pour devenir instable. Les modes instables sont des modes complexes non stationnaires qui peuvent illustrer les phénomènes de rotation d'ondes observés expérimentalement. Ils rappellent que la proximité des fréquences des modes est liée à la symétrie de la structure (modes doubles) ici artificiellement prise en compte par la contrainte de symétrie cyclique.

Ce phénomène mis en évidence par Flint et Hulten est en quelque sorte un mécanisme d'auto-déstabilisation du disque du au caractère surfacique du contact (et à l'épaisseur significative du disque). En effet, le comportement est indépendant de la masse volumique de la garniture et donc des modes de garnitures, ce qui justifie le terme d'« auto-déstabilisation ». Le caractère surfacique du contact est nécessaire pour que le couplage des deux modes proches de disque s'opère : si le contact est ponctuel, un seul des deux modes doubles est affecté, l'autre mode aura un nœud de vibration à l'endroit du point de contact et la fréquence ne sera pas changée par la contrainte de contact. Le frottement n'a alors pas « la main mise » sur un des deux modes, ce qui empêche la déstabilisation par couplage de mode double. Ce phénomène est une interprétation physique d'un aspect des mécanismes d'instabilité géométrique (ou d'instabilité par couplage de modes).

Les modèles éléments finis ont été utilisés pour caractériser la stabilité de l'équilibre sur des mécanismes de frein à géométries réalistes. L'intérêt de ce type de modèle est de tenir compte des comportements élastiques tridimensionnels comme l'effet Poisson et de considérer l'ensemble des modes de disque. Des études paramétriques sont alors possibles pour étudier la stabilité. On peut se référer aux modèles élément fini de frein de Moiro [50] ou de Fritz [32]. Sur de tels modèles, en particulier dans [50], un accent est mis sur le caractère néfaste de l'axisymétrie du disque dans l'instabilité de l'équilibre.

Le calcul numérique de la solution vibratoire transitoire pour des modèles éléments finis de frein reste une opération difficile. Baillet et al. [9] effectuent une simulation numérique des vibrations d'un système simplifié de frein à disque avec garniture parallélépipédique. Après calcul transitoire, on observe que la solution est périodique à une fréquence très proche de la fréquence propre d'un mode libre de disque. Sous la zone de contact apparaissent tous les statuts de contact possibles.

Dans un article récent [47], Massi s'intéresse à la modélisation du crissement observé sur un banc d'essai de freinage simplifié (voir [48]). Il effectue un calcul de stabilité et un calcul non linéaire sur deux modèles numériques différents (maillages adaptés à la stratégie numérique). Les résultats essentiels sont que le calcul non linéaire prédit la fréquence bruyante observée sur le banc. Le calcul de stabilité montre que deux modes sont instables et c'est l'un des deux qui est observé dans la solution non linéaire. Le calcul de stabilité permet de constater que le frottement couple un des deux modes doubles de disque à trois diamètres nodaux avec un mode de flexion du support de garniture.

1.3 Conclusion

La quantité de travaux traitant tant des aspects expérimentaux des bruits et vibrations des freins que des aspects modélisation des vibrations auto-entretenues est très dense. Bien évidemment, les travaux cités ici ne constituent pas une liste exhaustive mais permettent d'orienter fortement le travail proposé ici.

Les résultats expérimentaux montrent que le crissement des freins résulte de vibrations auto-entretenues induites par le frottement du système (amplitude de vibration du disque de l'ordre de quelques micromètres). Les travaux de modélisation montrent qu'une instabilité de l'équilibre stationnaire dite géométrique ou par couplage de mode permet de mobiliser les modes de vibration responsables du crissement et ceci à coefficient de frottement constant.

Ce premier bilan nous oriente vers un modèle de mécanique des milieux continus déformables dans l'hypothèse de petites perturbations. Beaucoup de travaux cités sur les vibrations auto-entretenues en général s'intéressent à la stabilité de l'équilibre mais font un raccourci rapide entre fréquences des modes instables et solution transitoire. Les travaux numériques traitant de la caractérisation des solutions transitoires montrent la complexité des solutions mettant en évidence des événements fortement non linéaires sous la zone de contact comme du décollement ou de l'adhérence. Comment évoluent les perturbations proches de l'équilibre vers une solution transitoire ? Quels sont les liens entre les fréquences caractéristiques de la solution transitoire et les fréquences des modes de stabilité ? On a vu que Bengisu et al. [14] s'intéresse à cette question sur un modèle à trois degrés de liberté avec un mécanisme d'instabilité lié à la décroissance du coefficient de frottement avec la vitesse de glissement, seul mécanisme possible dans ce cas car le modèle ne tient pas compte des degrés de liberté normaux au contact. Qu'en est-il sur des

structures continues où le mécanisme d'instabilité apparaît à coefficient de frottement constant ? On verra ce qu'il en est dans un cas bidimensionnel puis sur un mécanisme de frein à disque TGV simplifié tridimensionnel. Une étude spatiale et temporelle des solutions transitoires est proposée grâce à une projection de ces solutions sur la base des modes de stabilité. Pour mener à bien ces objectifs, le calcul de telles solutions transitoires doit être effectué. La complexité des événements sous la zone de contact observée dans les différents travaux nous oriente vers des algorithmes et des stratégies numériques adaptés.

D'un point de vue expérimental, les résultats de la littérature sont principalement issus de l'automobile. Une synthèse des différents travaux expérimentaux réalisés sur le mécanisme de freinage du TGV est exposée afin de caractériser le bruit et les vibrations du système en situation d'arrivée en gare.

Enfin, le crissement des freins à disque est une instabilité par couplage de modes (instabilité géométrique). Dans le cas du mécanisme TGV, s'agit-il d'une auto-déstabilisation par couplage de mode double de disque comme le proposent Flint et Hulten [30] ? Y a-t-il couplage de mode de garnitures avec des modes de disque comme mis en évidence dans les travaux de Massi et al. [48] ? Ces questions nous conduisent à proposer un modèle de frein TGV « réaliste » et d'examiner la stabilité de l'équilibre afin de connaître l'influence des paramètres physiques de garniture sur le mécanisme d'instabilité.

Première partie

**Étude du comportement vibratoire des
structures en contact frottant avec
glissement**

2 – Formulation et résolution numérique des problèmes de contact frottant en dynamique

Une première étape pour l'étude du crissement des freins est de définir le cadre mécanique et la formulation mathématique du problème. On a vu dans l'état de l'art la nécessité de considérer un modèle de mécanique des milieux continus déformables en dynamique. La prise en compte des conditions de contact unilatéral avec un modèle de frottement de Coulomb est également nécessaire pour mettre en évidence les événements complexes dans la zone de contact. On partira d'une formulation intuitive des relations de comportements du contact frottant et on définira des formulations équivalentes qui seront utiles dans la suite.

Dans une deuxième étape, on va s'attacher à la résolution numérique des équations continues présentées. On se place dans le cadre classique d'une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. Il s'agit de résoudre un problème de dynamique non-linéaire. D'un point de vue numérique, cela va se traduire tout d'abord par un choix de la méthode d'intégration en temps et d'autre part par un choix de la stratégie de résolution spécifique à la non linéarité locale du contact frottant. On décrit brièvement les différents intégrateurs numériques ainsi que les diverses stratégies existantes de résolution dans la littérature. Ensuite au regard des difficultés spécifiques à notre problème on propose une stratégie numérique que l'on valide dans le cas du choc d'un lopin élastique bidimensionnel sur un massif semi-infini rigide. L'étape de prédiction / correction locale du comportement du contact frottant choisie ici permet une extension naturelle au cas tridimensionnel qui sera utilisée dans les chapitres suivants.

L'algorithme a été mis en œuvre dans le logiciel Matlab grâce à l'utilisation de la boîte à outil éléments finis *Structural Dynamics Toolbox* (SDT) [11].

2.1 Formulations continues locales

Afin de poser clairement les notations, on se propose de poser le problème de mécanique des milieux continus d'un solide viscoélastique en petite transformation en situation de contact unilatéral frottant avec un solide rigide dans le cadre dynamique (figure 2.1).

On note $\underline{u}(\underline{x}, t)$ le champ de déplacement et $\underline{\sigma}(\underline{x}, t)$ le champ de contrainte dans le domaine Ω ainsi que $\underline{r}(\underline{x}, t)$ le vecteur réaction de contact (vecteur contrainte) sur la surface de contact S_c . On note \mathcal{A} le tenseur de Hooke et \mathcal{B} le tenseur viscoélastique.

Le problème est de trouver les champs \underline{u} , $\underline{\sigma}$ et \underline{r} vérifiant l'ensemble des équations suivantes [62] :

Le principe fondamental :

$$\text{div}(\underline{\sigma}) + \underline{f}_v = \rho \ddot{\underline{u}} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

Les conditions limites en effort et en déplacement :

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}[\underline{n}] &= \underline{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_F \\ \underline{u} &= \underline{U}_D \text{ sur } \partial\Omega_U \end{aligned}$$

La relation de comportement :

$$\underline{\sigma} = \mathcal{A} : \underline{\varepsilon}[\underline{u}] + \mathcal{B} : \underline{\dot{\varepsilon}}[\underline{u}] \text{ dans } \Omega$$

L'équation de compatibilité :

$$\underline{\varepsilon}[\underline{u}] = 1/2(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \text{ dans } \Omega$$

Les conditions limites de contact :

$$\underline{\sigma}[\underline{n}] = \underline{r} \text{ sur } S_c$$

Les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, 0) &= \underline{u}_0(\underline{x}) \\ \dot{\underline{u}}(\underline{x}, 0) &= \underline{v}_0(\underline{x}) \end{aligned}$$

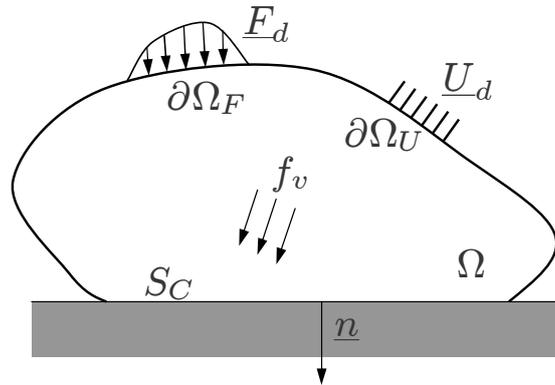


FIG. 2.1 – Notations

Afin d'écrire les relations de comportement du contact frottant, on extrait les composantes normales et tangentielles du déplacement et de la réaction de contact :

$$\begin{aligned} u_n &= \underline{u} \cdot \underline{n}, & \underline{u}_t &= \underline{u} - u_n \underline{n} \\ r_n &= \underline{r} \cdot \underline{n}, & \underline{r}_t &= \underline{r} - r_n \underline{n} \end{aligned}$$

\underline{n} désignant la normale extérieure au solide considéré Ω .

Les relations de contact unilatéral (ou relations de Signorini) traduisent simplement le fait qu'il n'y pas interpénétration et que la surface de contact ne subit que des contraintes de compression :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 0 \\ r_n &\leq 0 \\ u_n r_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

D'un point de vue cinématique, on peut remarquer que ces relations ne font intervenir que le déplacement normal. En ce qui concerne le modèle de frottement, on choisit le modèle de frottement de Coulomb. Il exprime que la réaction de contact reste dans le cône de Coulomb C (figure 2.2). Lorsque la réaction est sur le cône, la vitesse de glissement s'oppose à la réaction tangentielle tandis que lorsque la réaction est à l'intérieur, la vitesse de glissement est nulle.

$$\begin{aligned} \|\underline{r}_t\| &\leq -fr_n \Leftrightarrow \underline{r}_t \in S(-fr_n) \\ \|\underline{r}_t\| &= -fr_n \Rightarrow \exists \lambda > 0 / \underline{\dot{u}}_t = -\lambda \underline{r}_t \\ \|\underline{r}_t\| &< -fr_n \Rightarrow \underline{\dot{u}}_t = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

On appelle f le coefficient de frottement de Coulomb (f est toujours positif).

$S(-fr_n)$ est le disque de centre O et de rayon $-fr_n$.

La relation de frottement de Coulomb peut s'écrire aussi à partir des quantités cinématiques comme suit :

$$\begin{aligned} \|\underline{\dot{u}}_t\| = 0 &\Rightarrow \|\underline{r}_t\| \leq -fr_n \\ \|\underline{\dot{u}}_t\| \neq 0 &\Rightarrow \underline{r}_t = fr_n \frac{\underline{\dot{u}}_t}{\|\underline{\dot{u}}_t\|} \end{aligned}$$

Contrairement au contact unilatéral, les conditions de frottement sont formulées en vitesse.

Sur la figure 2.3 sont tracés les graphes caractéristiques du comportement du contact unilatéral et du frottement de Coulomb. Outre la non linéarité évidente du comportement du contact frottant, il faut noter le caractère multivoque et non différentiable des fonctions.

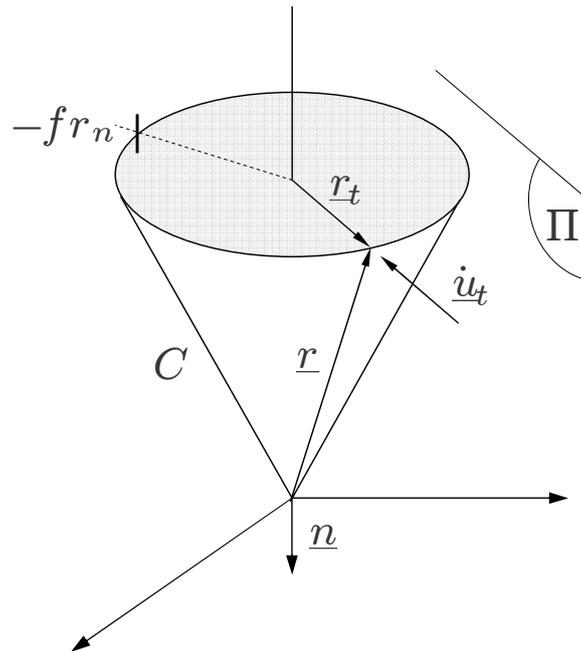


FIG. 2.2 – Cône de Coulomb

D'autres formulations locales sont possibles pour le contact unilatéral comme une formulation sous forme d'inclusion différentielle :

$$r_n \in -\partial\psi_{\mathbb{R}^-}(u_n)$$

où $\partial\psi_{\mathbb{R}^-}$ est le sous-différentiel de $\psi_{\mathbb{R}^-}$, fonction indicatrice de \mathbb{R}^- .

Une troisième formulation strictement équivalente est [37, 40] :

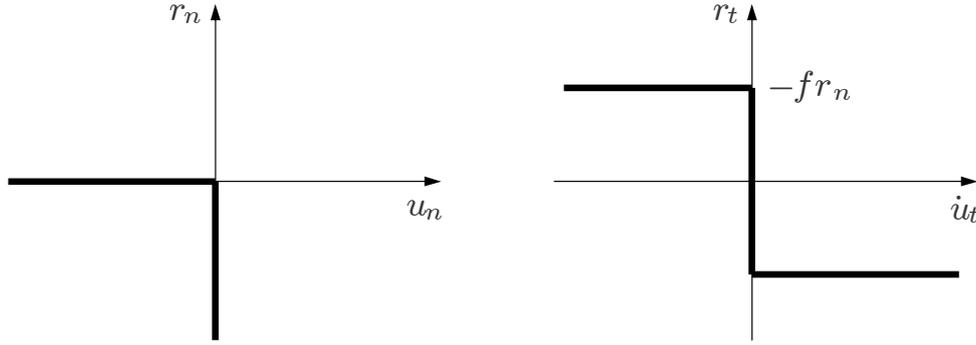


FIG. 2.3 – Graphes du comportement du contact et du frottement de Coulomb (vue dans II)

$$r_n = \langle r_n - \alpha u_n \rangle_- = \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(r_n - \alpha u_n), \alpha > 0$$

avec $\langle \cdot \rangle_-$ désignant la partie négative de l'élément.

De même, pour le frottement de Coulomb :

$$\begin{aligned} \|\underline{r}_t\| &\leq -f r_n \\ \underline{r}_t \cdot \underline{\dot{u}}_t - f r_n \|\underline{\dot{u}}_t\| &= 0 \end{aligned}$$

Pour $\underline{r}_t \neq \underline{0}$,

$$\begin{aligned} \phi = \|\underline{r}_t\| + f r_n &\leq 0 \\ \underline{\dot{u}}_t = -\nu \underline{\tau}, \underline{\tau} = \frac{\underline{r}_t}{\|\underline{r}_t\|}, \nu &\geq 0, \nu \phi = 0 \end{aligned}$$

Il est possible de définir l'effort de frottement à partir d'un pseudopotentiel de dissipation $D(\underline{\dot{u}}_t, r_n)$. Il est d'usage pour la loi de Coulomb de parler de loi non associée, puisque $\underline{\dot{u}}$ n'est pas normale au cône de Coulomb. En revanche, en considérant l'ensemble des forces admissibles comme l'ensemble des efforts de frottement inférieurs à un seuil égal à $-f r_n$ qui dépend de l'état actuel, on peut parler de loi de normalité entre $\underline{\dot{u}}_t$ et \underline{r}_t [55, 56].

$$\begin{aligned} D(\underline{\dot{u}}_t, r_n) &= f r_n \|\underline{\dot{u}}_t\| \\ \underline{r}_t &= -D_{,\underline{\dot{u}}_t} = -f r_n \partial \|\underline{\dot{u}}_t\| \end{aligned}$$

On peut souligner que comme en plasticité, l'effort tangentiel de frottement obéit au principe de dissipation maximal :

$$\underline{r}_t \in S(-f r_n), (\underline{r}_t^* - \underline{r}_t) \cdot \underline{\dot{u}}_t \geq 0, \forall \underline{r}_t^* \in S(-f r_n)$$

ce qui est équivalent à [37] :

$$\underline{r}_t = \text{Proj}_{S(-f r_n)}(\underline{r}_t - \alpha \underline{\dot{u}}_t), \alpha > 0$$

On a écrit les équations continues des problèmes de dynamique avec contact frottant. Pour cela, on a vu qu'il fallait adjoindre aux équations classiques de la dynamique (2.1) les équations qui traduisent le comportement du contact unilatéral et du frottement de Coulomb. On a vu que l'on pouvait les écrire sous différentes formes et qu'elle traduisait une non-linéarité non régulière.

2.2 Formulations variationnelles

Une formulation variationnelle à deux champs $(\underline{u}, \underline{r})$ du problème de contact précédemment introduit peut être formulée. On introduit pour cela l'espace admissible $\mathcal{U} = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial\Omega_U\}$ et l'espace $\mathcal{U}^0 = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_U\}$. Le problème est de trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}$ et \underline{r} vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \underline{u}^* \cdot \dot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \underline{\underline{\sigma}}[\underline{u}] d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d dS + \int_{\Omega} \underline{u}^* \cdot \underline{f} d\Omega + \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \\ (\underline{u}, \underline{r}) \text{ vérifiant (2.2)} \\ (\dot{\underline{u}}, \underline{r}) \text{ vérifiant (2.3)} \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Le champ $\underline{r}(x, t)$ est vu ici comme le multiplicateur de Lagrange associé aux conditions sur $\underline{u}(x, t)$. On se servira de cette formulation dans la suite pour la discrétisation par éléments finis.

2.3 Méthode de calcul des vibrations en présence de contact frottant

2.3.1 Intégrateur en temps

On se place dans le cadre des petites perturbations et on tient compte du comportement viscoélastique linéaire du matériau. On considère une discrétisation spatiale classique par la méthode des éléments finis. La prise en compte d'espaces admissibles approchés classiques associés à la formulation faible (2.4) fournit l'équation du mouvement suivante (dans l'hypothèse d'une évolution régulière) :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} + \{R_c\} \quad (2.5)$$

où $\{U\}$ désigne le vecteur déplacement global et $\{R_c\}$ le vecteur réaction de contact supposé connu pour le moment. On est en présence d'un système différentiel linéaire du second ordre en temps que l'on va résoudre de manière approchée. Pour ce faire, il faut utiliser un schéma d'intégration numérique du système différentiel. En dynamique des structures, la famille de schémas couramment utilisée est la famille de Newmark (famille à 2 paramètres) qui présente l'intérêt d'offrir suivant les paramètres choisis la stabilité numérique inconditionnelle [18]. Elle repose sur un développement de Taylor des déplacements (à l'ordre 2) et des vitesses, et suppose donc la régularité des quantités recherchées. En présence de contact avec frottement, des impacts sont susceptibles d'exister, mettant en évidence une discontinuité des vitesses relatives normales, les efforts de contact devenant alors des impulsions (ou percussions). La résolution numérique de tels problèmes discrets a été étudiée grâce aux travaux antérieurs de M. Jean et J.J. Moreau [38] et plus récemment par M. Jean (Non Smooth Contact Dynamics method [37]), D. Vola et al [71, 70], M. Wronski et al [74]. On fait le choix d'utiliser la méthode de discrétisation en temps proposée dans ces travaux : la θ - méthode.

Sous l'hypothèse de non-régularité, l'accélération ne doit plus être utilisée dans les approximations et l'on doit s'imposer un schéma d'ordre 1. D'un point de vue mathématique, (2.5) doit être compris au sens des distributions temporelles. On suppose que la vitesse est à variation bornée et on pose :

$$\int_{]a,b]} \{d\dot{U}\} = \{\dot{U}\}^+(b) - \{\dot{U}\}^+(a)$$

On supposera dans la suite que $\{\dot{U}\} = \{\dot{U}\}^+$, l'objet ici n'étant pas de rentrer dans les détails mathématiques qui pourront être trouvés dans [53] et [60]. On peut montrer alors dans le cas non régulier en temps que (2.5) peut s'écrire :

$$\begin{cases} [M] \left(\{U(t)\} - \{U(0)\} \right) = \int_0^t (\{F\} - [K] \{U\} - [C] \{\dot{U}\}) d\tau + \int_{]0,t]} \{R_c\} d\tau \\ \{U(t)\} = \{U(0)\} + \int_0^t \{\dot{U}(\tau)\} d\tau \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour calculer la solution sur $[0, T]$, l'équation précédente est écrite sur l'intervalle discret $I = [t^i, t^{i+1}]$. Le schéma numérique est obtenu en utilisant une « θ - méthode » pour approcher les intégrales sur I. ($h = t^{i+1} - t^i$)

$$\int_{t^i}^{t^{i+1}} \{f\} d\tau \# h(\theta \{f\}^{i+1} + (1 - \theta) \{f\}^i) \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Concernant l'intégrale des efforts de contact, on pose :

$$\{R_c\}^{i+1} = \frac{1}{h} \int_{]t^i, t^{i+1}]} \{R_c\} d\tau$$

La relation (2.6) prise aux instants $t = t^i$ et $t = t^{i+1}$ donne :

$$\begin{cases} [M] \left(\{\dot{U}\}^{i+1} - \{\dot{U}\}^i \right) = h\theta(\{F\}^{i+1} - [K] \{U\}^{i+1} - [C] \{\dot{U}\}^{i+1}) \\ \quad + h(1 - \theta)(\{F\}^i - [K] \{U\}^i - [C] \{\dot{U}\}^i) + h \{R_c\}^{i+1} \\ \{U\}^{i+1} = \{U\}^i + h(\theta \{\dot{U}\}^{i+1} + (1 - \theta) \{\dot{U}\}^i) \end{cases} \quad (2.7)$$

Ensuite, si les forces de contact sont supposées connues à t^{i+1} et les quantités cinématiques à t^i , la vitesse est mise à jour en utilisant :

$$[\hat{M}] \{\dot{U}\}^{i+1} = \{E\} (\{U\}^i, \{\dot{U}\}^i, \theta, h, \{F\}^{i+1}, \{F\}^i) + h \{R_c\}^{i+1} \quad (2.8)$$

$$\{E\} = -h [K] \{U\}^i + ([M] - h(1 - \theta)([C] + h\theta [K])) \{\dot{U}\}^i + h(\theta \{F\}^{i+1} + (1 - \theta) \{F\}^i)$$

$$[\hat{M}] = [M] + h^2\theta^2 [K] + h\theta [C]$$

et les déplacements sont mis à jour suivant :

$$\{U\}^{i+1} = \{U\}^i + h(\theta \{\dot{U}\}^{i+1} + (1 - \theta) \{\dot{U}\}^i) \quad (2.9)$$

Remarque : le schéma d'intégration ainsi formulé est un schéma implicite puisqu'il nécessite la résolution du système (2.8) à chaque itération. En revanche ce schéma est inconditionnellement stable pour $\theta \geq 1/2$, et ceci quel que soit le pas de temps. La stabilité inconditionnelle est particulièrement intéressante vis-à-vis des schémas explicites conditionnellement stables puisqu'elle permet de choisir le pas de temps indépendamment de la discrétisation spatiale. On peut montrer [70] que ce schéma est conservatif pour $\theta = 1/2$. On a vu que l'hypothèse de non-régularité imposait le choix d'un schéma du premier ordre. La contre-partie est une perte (relative) de précision vis-à-vis des schémas du second ordre (à égalité de pas de temps h).

2.3.2 Formulation du contact unilatéral avec frottement

On se place dans le contexte d'un solide bidimensionnel en situation de contact potentiel avec un solide indéformable. Si l'on introduit un jeu initial g_0 et si l'on considère la vitesse relative \underline{w} , alors on peut réécrire les conditions de contact avec frottement formulées dans la section précédente comme suit :

$$r_n = \text{Proj}_{\mathbb{R}_-}(r_n - \alpha g) , \alpha > 0 \quad (2.10)$$

De même, les conditions de frottement s'écrivent :

$$\underline{r}_t = \text{Proj}_C(\underline{r}_t - \alpha \underline{w}_t) , \alpha > 0 \quad C(\underline{x}) = \{\underline{x} / |\underline{x}_t| \leq -f x_n\} \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{aligned} g &= u_n - g_0 \\ \underline{w} &= \dot{\underline{u}} \end{aligned} \quad (2.12)$$

D'un point de vue numérique, une manière de tenir compte du contact unilatéral frottant est de « régulariser » les relations de comportement. Par exemple pour la réaction normale :

$$r_n = \varepsilon_n \langle g \rangle_-, \quad \varepsilon_n > 0 \quad (2.13)$$

Cette régularisation autorise une certaine interpénétration. On parle dans ce cas de méthode de pénalité car plus la violation de la condition d'impénétrabilité sera importante plus la pénalité sur l'effort normal sera grande. En pratique, ε_n est choisi très grand pour que l'interpénétration soit minimale. La conséquence de (2.13) est d'établir une relation bi-univoque entre l'effort et le déplacement et ainsi de pouvoir résoudre un problème non-linéaire mais régulier dont les inconnues sont purement cinématiques [57]. La contre-partie est le mauvais conditionnement des matrices en jeu compte tenu de la grande valeur de ε_n . De plus, si une interpénétration est autorisée cela entraîne une méconnaissance sur le statut de contact des nœuds.

Pour éviter ces problèmes, considérer une formulation non régularisée des conditions de contact avec frottement est mieux adapté. Les travaux concernant les méthodes numériques pour le contact frottant sont particulièrement nombreux. Une synthèse des méthodes numériques peut être trouvée dans [62]. On peut citer comme référence les travaux sur les méthodes de multiplicateurs de Lagrange [62], de lagrangiens augmentés [6, 65, 77], la méthode du bi-potentiel proposé par G. Desaxcé [27, 64] et la méthode de gradient conjugué projeté [63].

Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre, on va utiliser les relations (2.10 et 2.11) que l'on va appliquer au champ discrétisé. Les conditions seront donc non régularisées et vont conduire à une méthode de point fixe sur les efforts de contact [37, 40].

Pour cela, on définit les matrices $[P_{nt}]$, $[P_n]$ et $[P_t]$ qui permettent de passer des efforts dans le repère local aux efforts dans le repère global :

$$\{R_c\} = [P_{nt}]^T \{r\} = [P_n]^T \{r_n\} + [P_t]^T \{r_t\}$$

$$[P_{nt}] = [[nt] [0]], \quad [nt] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ t_{1x} & t_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{2x} & n_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & t_{2x} & t_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

$$[P_n] = [[n] [0]], \quad [n] = \begin{bmatrix} n_{1x} & n_{1y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{2x} & n_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \text{ et de même pour } [P_t].$$

On peut donc définir les quantités cinématiques locales discrètes :

$$\begin{aligned} \{g\} &= [P_n] \{U\} - \{g_0\} \\ \{w_t\} &= [P_t] \{\dot{U}\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sous forme discrète, (2.10) et (2.11) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \{r_n\} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(\{r_n\} - \alpha([P_n] \{U\} - \{g_0\})), \quad \alpha > 0 \\ \{r_t\} &= \text{Proj}_C(\{r_t\} - \alpha [P_t] \{\dot{U}\}), \quad \alpha > 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

De manière à ce que les relations (2.15) puissent être utilisées avec (2.8), c'est-à-dire exploitées en terme de vitesse, on utilise l'expression (2.9) issue de la discrétisation en temps :

$$\begin{aligned} [P_n] \{U\}^{i+1} - \{g_0\} \leq 0 &\Rightarrow ([P_n] \{U\}^{i+1} - \{g_0\}) / (h\theta) \leq 0 \\ [P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \left(\frac{1}{h\theta} [P_n] \{U\}^i - \frac{\{g_0\}}{h\theta} + \frac{1-\theta}{\theta} [P_n] \{\dot{U}\}^i \right) \leq 0 &\Rightarrow [P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \{B\}^i \leq 0 \end{aligned}$$

Ainsi, à l'itération $i + 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \{r_n\}^{i+1} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-}(\{r_n\}^{i+1} - \alpha([P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \{B\}^i)) \\ \{r_t\}^{i+1} &= \text{Proj}_C(\{r_t\}^{i+1} - \alpha [P_t] \{\dot{U}\}^{i+1}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

On est maintenant en mesure de résoudre numériquement le problème formulé en vitesse. Compte tenu de la relation (2.9) imposée par la discrétisation en temps entre vitesse et déplacement, il se pose la question de la compatibilité entre vitesse et déplacement à l'instant d'un choc éventuel. En effet, la relation (2.9) impose au niveau de la zone de contact la relation :

$$[P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} = \frac{1}{h\theta} [P_n] (\{U\}^{i+1} - \{U\}^i) + \frac{\theta - 1}{\theta} [P_n] \{\dot{U}\}^i \quad (2.17)$$

Si l'on se situe à l'itération i au nœud α à l'instant d'un choc et que l'on suppose donc que $[P_n] \{U\}_\alpha^i = \{g_0\}$, $[P_n] \{U\}_\alpha^{i+1} = \{g_0\}$ et $[P_n] \{\dot{U}\}_\alpha^i \neq 0$, alors :

$$[P_n] \{\dot{U}\}_\alpha^{i+1} = \frac{\theta - 1}{\theta} [P_n] \{\dot{U}\}_\alpha^i \neq 0 \quad (2.18)$$

Ce qui signifie que pour le nœud α , on obtient des vitesses normales non nulles alors que le déplacement normal reste constant. Autrement dit, il est impossible dans ce cas d'obtenir un choc inélastique. Ce problème a été abordé par D. Vola et al. dans [71] et par M. Jean dans [37]. La première idée est de choisir un schéma avec θ égal à 1, schéma dit de θ -Euler. Cependant, ce schéma peut être pénalisant car il crée de l'amortissement numérique. Afin de proposer un schéma conservatif, D. Vola et al. proposent une variante qui permet d'imposer un choc inélastique. L'idée est de garder un θ -schéma mais d'évaluer le jeu g^{i+1} à un instant futur (noté \tilde{g}^{i+1}) :

$$\begin{aligned} \tilde{g}^{i+1} &= g^{i+1}(t^{i+1} + h(1 - \theta)) = g^{i+1} + h(1 - \theta)\dot{g}^{i+1} \\ g^{i+1} &= g^i + h(\theta\dot{g}^{i+1} + (1 - \theta)\dot{g}^i) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\tilde{g}^{i+1} = \tilde{g}^i + h\dot{g}^{i+1} = g^i + h(\dot{g}^{i+1} + (1 - \theta)\dot{g}^i) \quad (2.20)$$

$$\tilde{g}^{i+1} \leq 0 \Rightarrow \dot{g}^{i+1} + (1 - \theta)\dot{g}^i + g^i/h \leq 0$$

Cette variante appelée θ -méthode modifiée dans [71] assure le caractère inélastique du choc. On obtient alors :

$$\begin{aligned} [P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \left(\frac{1}{h} [P_n] \{U\}^i - \frac{\{g_0\}}{h} + (1 - \theta) [P_n] \{\dot{U}\}^i \right) \leq 0 &\Rightarrow [P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \{B_m\}^i \leq 0 \\ \Leftrightarrow [P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \frac{\{\tilde{g}\}^i}{h} \leq 0 &\quad (2.21) \end{aligned}$$

De manière équivalente aux équations (2.16), on doit vérifier à l'itération $i + 1$ avec la version modifiée de la méthode :

$$\begin{aligned} \{r_n\}^{i+1} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-} (\{r_n\}^{i+1} - \alpha([P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \{B_m\}^i)) \\ \{r_t\}^{i+1} &= \text{Proj}_C (\{r_t\}^{i+1} - \alpha [P_t] \{\dot{U}\}^{i+1}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Afin d'illustrer la version modifiée de l'intégrateur, on se propose d'effectuer le raisonnement suivant : on suppose que $\{\tilde{g}\}^{i+1} = \{0\}$, $\{\tilde{g}\}^i = \{0\}$ et que $\{\dot{g}\}^i \neq \{0\}$. Dans ces conditions, l'équation (2.20) donne directement $\{\dot{g}\}^{i+1} = \{0\}$, ce qui résout le problème évoqué à l'équation (2.18). De plus, (2.19) donne alors $\{\tilde{g}\}^{i+1} = \{g\}^{i+1} = \{0\}$.

Remarque : si l'on s'intéresse au jeu à l'itération i , on obtient $\{g\}^i = \{\tilde{g}\}^i - h(1 - \theta)\{\dot{g}\}^i = -h(1 - \theta)\{\dot{g}\}^i \neq 0$. On peut donc interpréter la méthode modifiée en disant qu'elle ajuste le jeu à l'itération i pour garantir une vitesse normale relative nulle à l'itération $i + 1$.

Dans la suite, pour les raisons évoquées précédemment, on utilisera cette variante modifiée plutôt que le schéma de θ -Euler.

2.3.3 Algorithme

On a donc choisi un intégrateur en temps compatible avec une formulation du contact frottant. Il s'agit donc de résoudre à l'itération $i + 1$ le système suivant :

$$\begin{aligned} [\hat{M}] \{\dot{U}\}^{i+1} &= \{E\}^{i+1} + h [P_n]^T \{r_n\}^{i+1} + h [P_t]^T \{r_t\}^{i+1} \\ \{r_n\}^{i+1} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-} (\{r_n\}^{i+1} - \alpha([P_n] \{\dot{U}\}^{i+1} + \{B_m\}^i)) \\ \{r_t\}^{i+1} &= \text{Proj}_C (\{r_t\}^{i+1} - \alpha [P_t] \{\dot{U}\}^{i+1}) \end{aligned} \quad (2.23)$$

On peut noter le caractère implicite de la formulation (2.23). La formulation (2.22) suggère naturellement des étapes de prédiction et de correction pour la résolution. Afin de présenter un algorithme efficace, on se propose d'effectuer ces étapes dans un système réduit grâce à une condensation statique sur les nœuds de la surface de contact potentiel. On indice par C les degrés de libertés de contact potentiel et par Y tous les autres. Le système linéaire se décompose alors :

$$\begin{Bmatrix} \hat{M}_{CC} & \hat{M}_{CY} \\ \hat{M}_{YC} & \hat{M}_{YY} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_C \\ \dot{U}_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_C \\ E_Y \end{Bmatrix} + h \begin{Bmatrix} [nt] \{r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

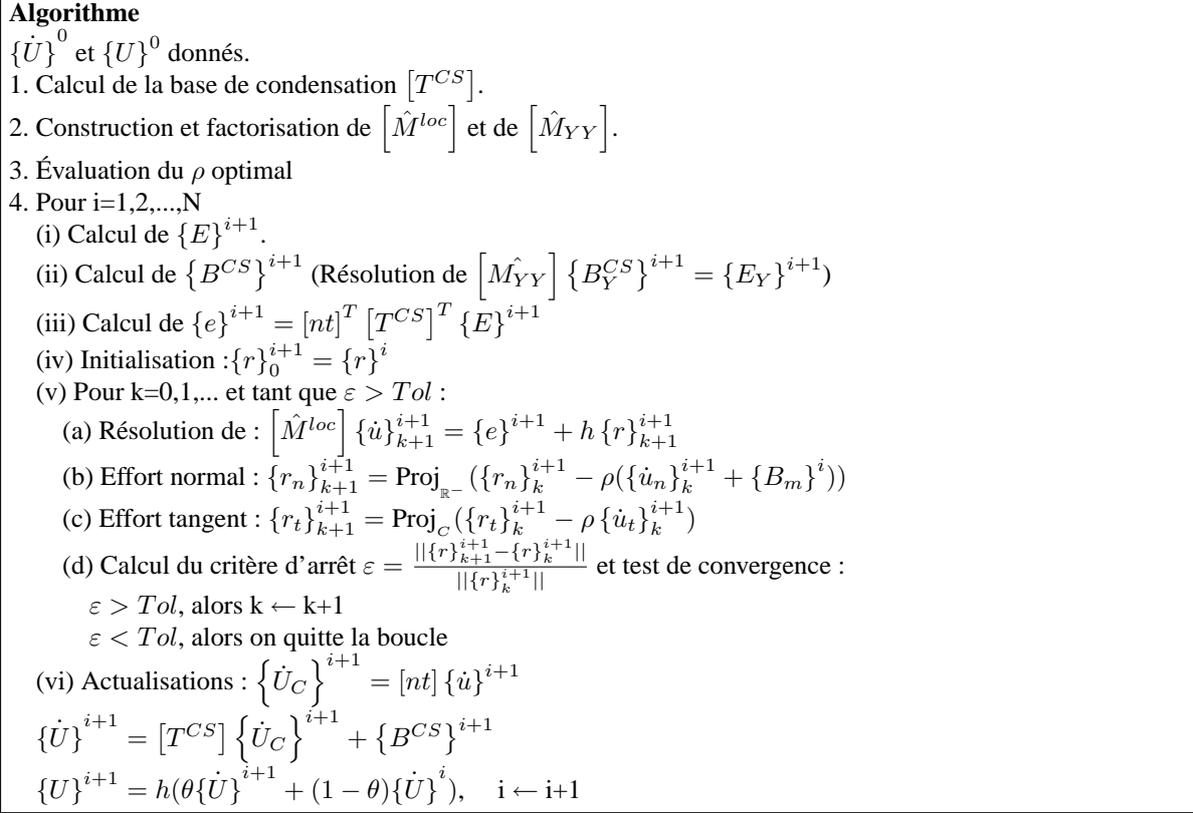


FIG. 2.4 – Algorithme de résolution du problème de contact frottant en dynamique

La deuxième ligne permet d'éliminer $\{\dot{U}_Y\}$ et donc d'exprimer $\{\dot{U}\}$ en fonction de $\{\dot{U}_C\}$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_C \\ \dot{U}_Y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{CC} \\ -\hat{M}_{YY}^{-1} \hat{M}_{YC} \end{bmatrix} \{\dot{U}_C\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{M}_{YY}^{-1} E_Y \end{Bmatrix} = [T^{CS}] \{\dot{U}_C\} + \{B^{CS}\}$$

La condensation sur la base $[T^{CS}]$ donne :

$$[\hat{M}^{CS}] \{\dot{U}_C\} = \{E_C\} - [\hat{M}_{YC} \hat{M}_{YY}^{-1}] \{E_Y\} + h [nt] \{r\} = \{E^{CS}\} + h [nt] \{r\}$$

avec $[\hat{M}^{CS}] = [T^{CS}]^T [\hat{M}] [T^{CS}]$ et $\{E^{CS}\} = \{E_C\} - [\hat{M}_{YC} \hat{M}_{YY}^{-1}] \{E_Y\}$.

Cette condensation est possible car la matrice $[\hat{M}]$ est symétrique. Le calcul de $[T^{CS}]$ n'est bien sûr pas effectué en calculant $[\hat{M}_{YY}^{-1}]$. Le terme $-[\hat{M}_{YY}^{-1} \hat{M}_{YC}]$ est directement calculé en cherchant la réponse aux déplacements imposés unitaires des d.d.l. de contact.

Le passage dans la base locale donne :

$$[\hat{M}^{loc}] \{\dot{u}\} = \{e\} + h \{r\}$$

avec $\{\dot{U}_C\} = [nt] \{\dot{u}\}$, $[nt]^T [\hat{M}^{CS}] [nt]$ et $\{e\} = [nt]^T \{E^{CS}\}$. L'algorithme dans sa globalité est résumé figure 2.4.

Remarque : d'un point de vue mathématique, les équations (2.23) vérifient les relations de contact frottant $\forall \alpha > 0$. En ce qui concerne la méthode numérique de prédiction / correction

qui permet d'atteindre le point fixe (boucle k , étape 4.(v) dans l'algorithme), le choix de ρ ne peut être arbitraire. On peut montrer que l'algorithme converge $\forall \rho \in [0, \rho_{max}]$ (voir [40]) et qu'une bonne estimation du ρ optimal est donnée par $\rho_{opt} \simeq 2\lambda_{min}(\hat{M}^{loc})$ (λ_{min} étant la plus petite valeur propre) [26, 27, 40].

Carpenter et al. [20] proposent une méthode numérique basée sur un intégrateur en temps explicite avec une formulation implicite du contact frottant basée sur les multiplicateurs de Lagrange qui sont calculés grâce à un algorithme itératif de Gauss Seidel modifié.

2.4 Validation : choc d'un lopin élastique

Afin de valider l'algorithme précédent, on se propose de calculer les efforts de contact lors du choc d'un lopin élastique sur un massif semi-infini indéformable. Cet exemple est largement illustré dans la littérature, notamment par Vola et al. [71], Kim et al. [41], Feng et al. [28]. On se place dans l'hypothèse de contrainte plane et les données du problème sont précisées en figure 2.5. Afin de rester dans les mêmes hypothèses que les articles de la littérature, on ne tient pas compte de l'amortissement visqueux. Les effets dissipatifs sont introduits ici par dissipation numérique ($\theta > 0.5$).

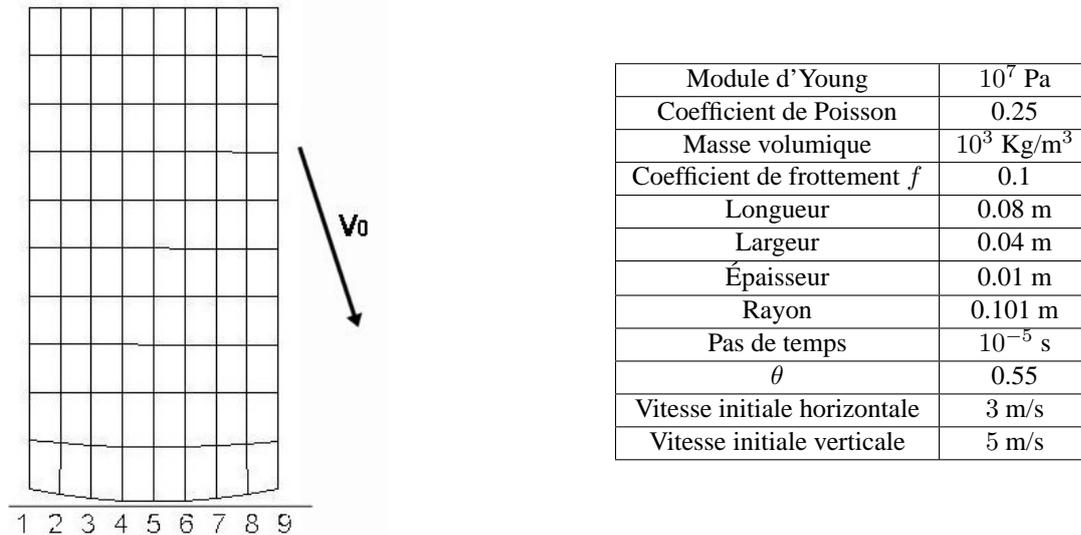


FIG. 2.5 – Maillage et caractéristiques physiques du lopin

Un calcul transitoire a été effectué avec un champ de déplacement initial nul et un champ de vitesse initiale constant $\{V_0\}$.

Les figures 2.6 et 2.7 présentent les réactions normales de contact au cours du temps et ceci à différents points de maillage. Les résultats en rouge sont issus de l'algorithme présenté alors que les courbes noires sont les résultats de calcul provenant de Vola et al. [71]. La comparaison montre que les tendances globales sont respectées même si les courbes noires présentent une régularité plus marquée. La figure 2.8 présente les évolutions des quantités cinématiques du nœud 8. Elle met en évidence la gestion correcte de l'unilatéralité du déplacement vertical ainsi que de la vitesse verticale. On remarquera qu'à l'instant du choc au point 8, $v_n^- < 0$ et $v_n^+ = 0$. L'observation des différents statuts de contact montre, sur la période du choc, une zone

prédominante de glissement. Ceci est dû à la faible valeur du coefficient de frottement. Une petite zone d'adhérence apparaît néanmoins au début du choc sur le nœud 9. Un autre calcul avec $f = 0.2$ montre figure 2.9 que les zones d'adhérence sont beaucoup plus importantes.

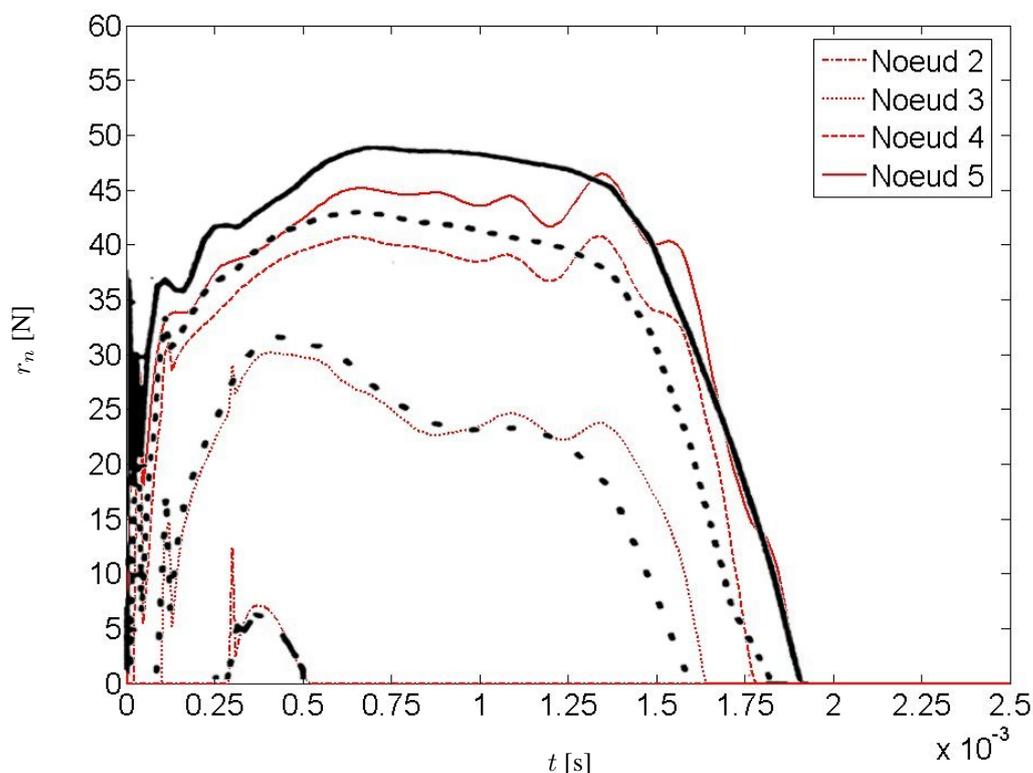


FIG. 2.6 – Évolution des efforts nodaux normaux de contact [N] en fonction du temps [s]

Les figures 2.10 et 2.11 montrent l'intérêt de la θ - méthode modifiée : lorsque l'on utilise le schéma non modifié, on observe de fortes oscillations en vitesse après le choc. Ces oscillations sont non physiques puisque leur période est de l'ordre du pas de temps. De même, sur les déplacements on observe des rebonds irréalistes.

D'un point de vue purement numérique, on peut voir l'ordre de grandeur du nombre de sous-itérations au cours du calcul figure 2.12 ($Tol = 10^{-3}$). Dans un graphe logarithmique de la figure 2.13 est représentée l'évolution du critère d'arrêt au cours des sous-itérations. Enfin, on peut voir figure 2.14 l'effet du choix de ρ sur le nombre de sous-itérations à convergence ($\rho = k_\rho \cdot \rho_{opt}$).

La figure 2.15 montre l'évolution des énergies lors d'un calcul effectué avec un coefficient de frottement nul. On peut observer que l'énergie globale reste conservée avec la θ - méthode modifiée ($\theta = 0.5$) alors que l'on observe une chute significative de l'énergie globale avec la méthode θ - Euler.

2.5 Conclusion

Le problème de contact frottant en dynamique a été formulé au niveau continu. Une méthode numérique permettant le calcul vibratoire des structures en contact frottant adaptée a été choisie dans la littérature puis mise en œuvre numériquement et enfin validée dans le cas du choc

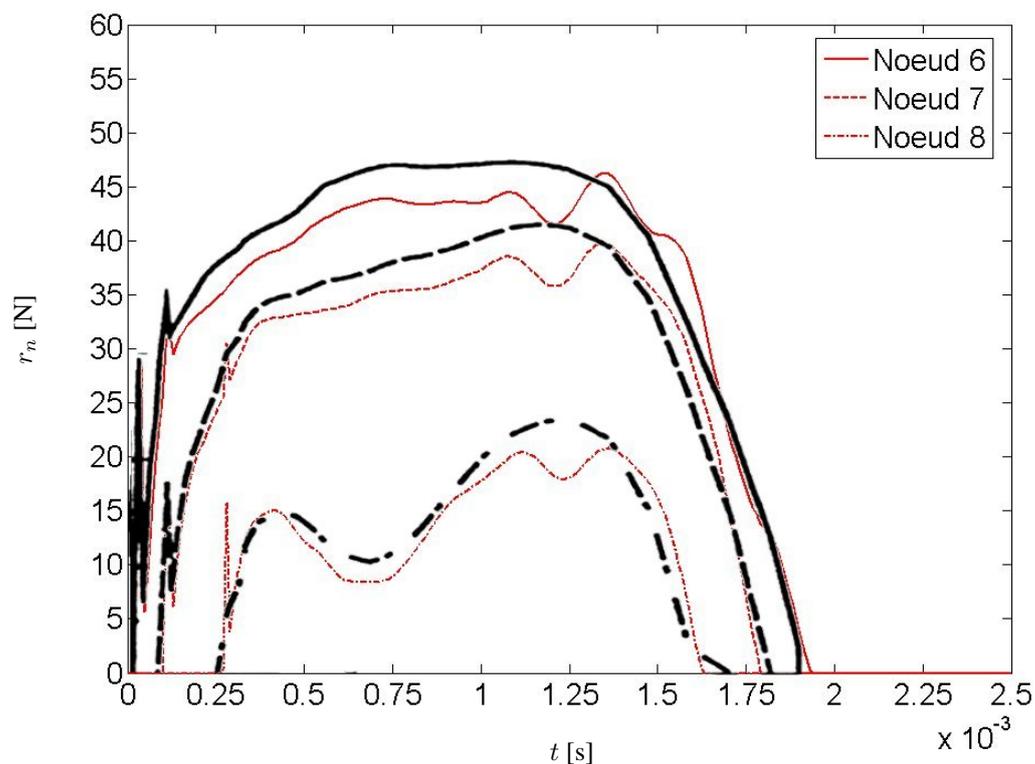


FIG. 2.7 – Évolution des efforts nodaux normaux de contact [N] en fonction du temps [s]

d'un lopin élastique bidimensionnel sur un massif semi-infini rigide. Pour la discrétisation en temps, la non régularité de la vitesse normale nous a conduit à choisir un intégrateur du premier ordre : la θ -méthode. Afin d'assurer la compatibilité entre déplacement normal et vitesse normale, une loi de choc inélastique a été introduite sans ajouter d'amortissement numérique, grâce à une version modifiée de l'intégrateur. D'un point de vue algorithmique, on a utilisé une condensation statique qui permet de réduire la taille du problème à inverser (et donc le coût du calcul) lors de l'étape de prédiction / correction des efforts de contact. L'algorithme utilisé s'étend de manière naturelle aux cas tridimensionnels. Dans ce chapitre on s'est placé dans le cadre général de résolution d'un problème transitoire de contact frottant. On s'intéresse dans le chapitre suivant au cas particulier des structures en situation de glissement pour lesquelles la solution de glissement stationnaire est instable dynamiquement. Comme on l'a vu dans l'état de l'art, l'instabilité du glissement stationnaire est le mécanisme de génération de vibrations auto-entretenues prédominant.

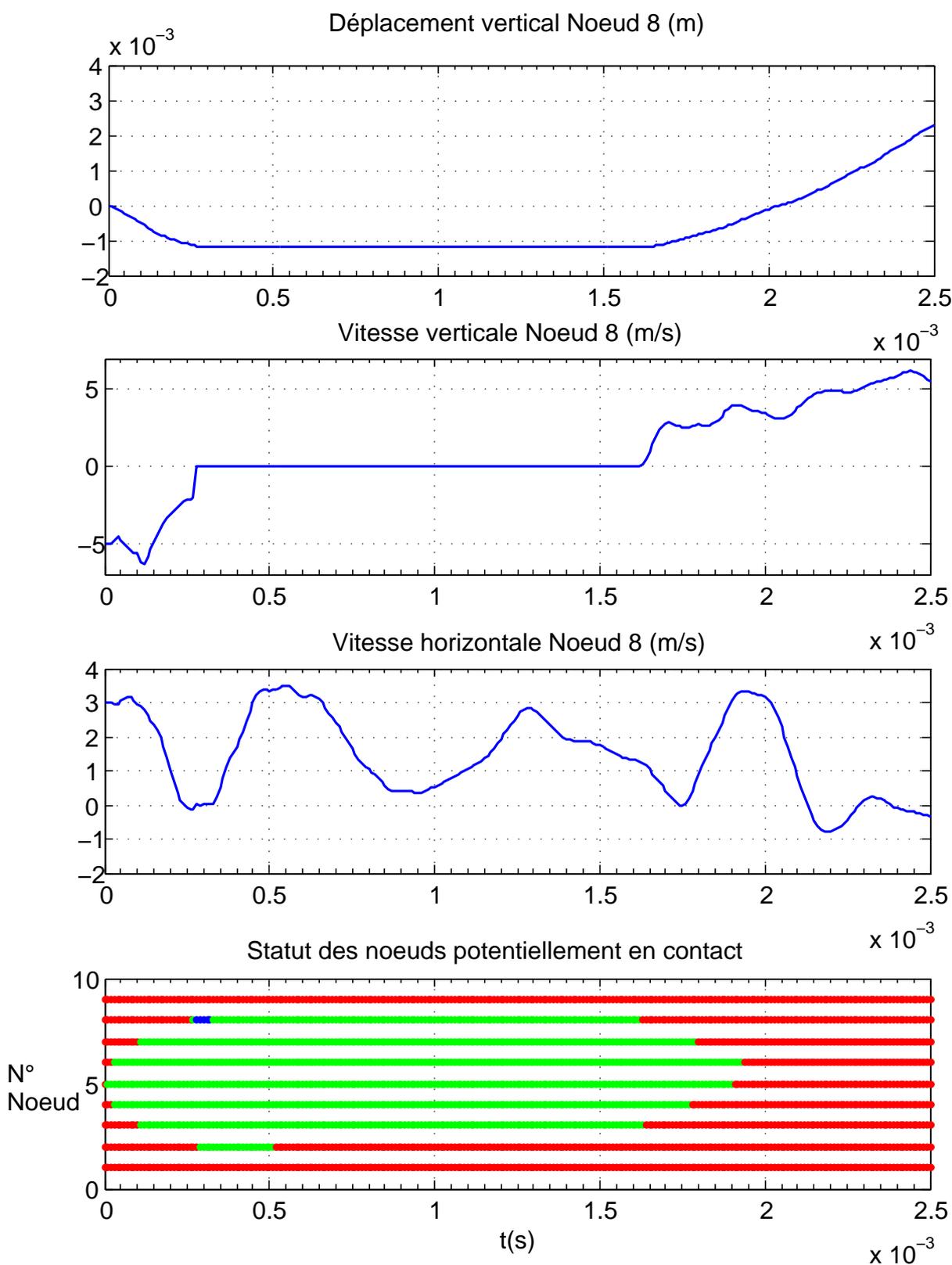


FIG. 2.8 – Évolution des quantités cinématiques du nœud 8 ainsi que les statuts des nœuds de contact (Rouge : décollement, Vert : glissement, Bleu : adhérence)

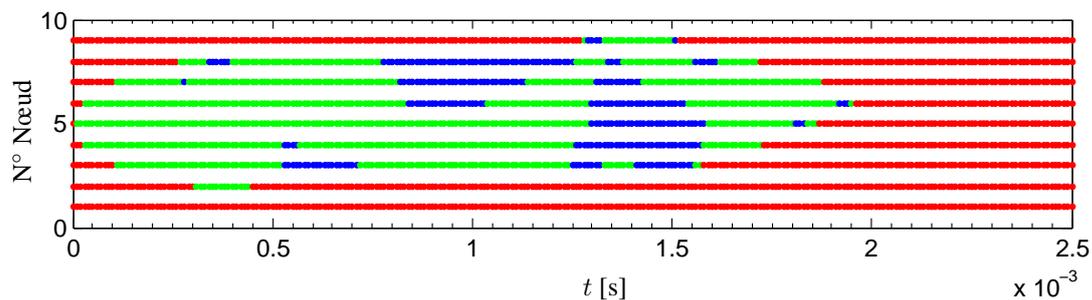


FIG. 2.9 – Statuts des nœuds de contact pour $f = 0.2$. (Numéro des nœuds en fonction du temps)

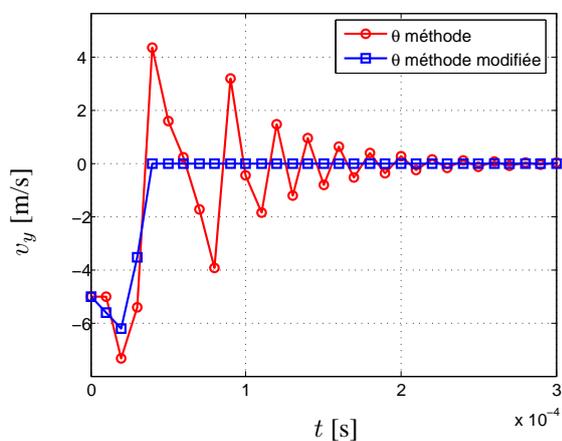


FIG. 2.10 – Vitesse verticale [m/s] du nœud 4 en fonction du temps.

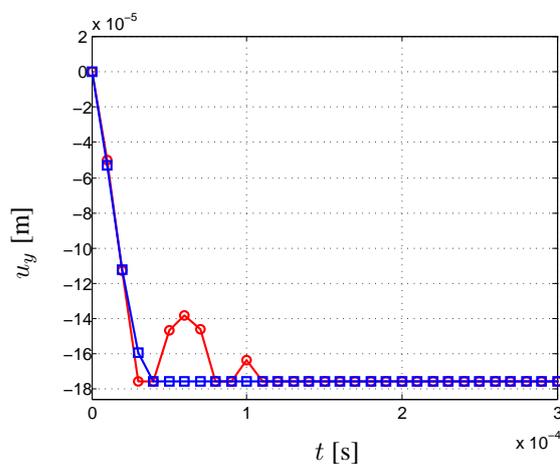


FIG. 2.11 – Déplacement vertical [m] du nœud 4 en fonction du temps.

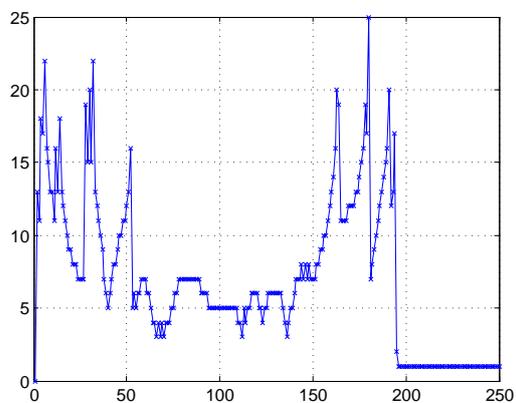


FIG. 2.12 – Nombre de sous-itérations en fonction des itérations temporelles

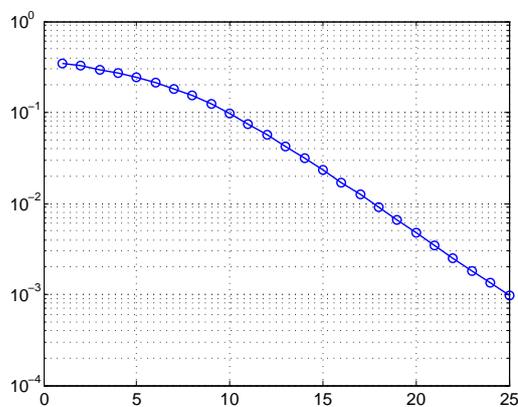


FIG. 2.13 – Critère d'arrêt ε pour chaque sous-itérations (à l'itération 180)

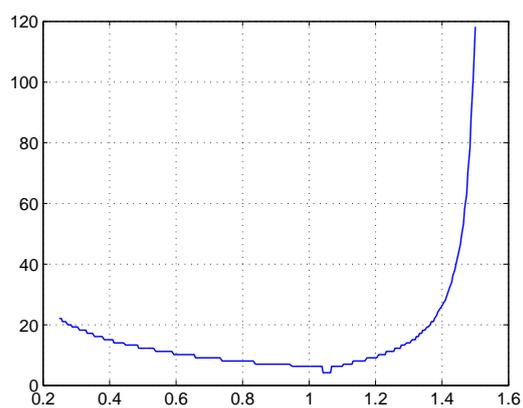


FIG. 2.14 – Existence d'un ρ optimal : nombre de sous-itérations à convergence (itér. 50) pour différents k_ρ

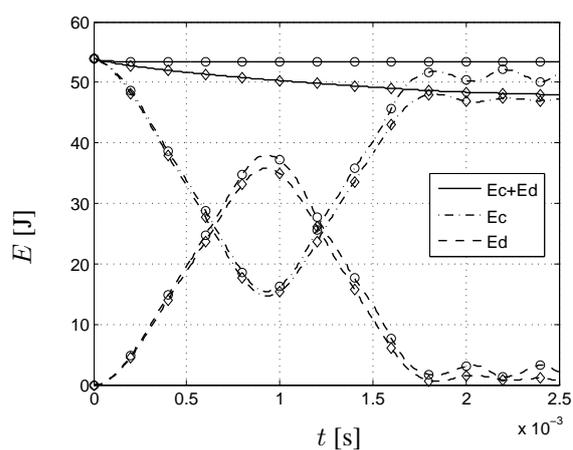


FIG. 2.15 – Courbes d'énergies [J] en fonction du temps ($f = 0$, $\circ : \theta = 0.5$; $\diamond : \theta = 1$)

3 – Cas des structures en situation de glissement : instabilité de l'équilibre

L'objectif de ce chapitre est d'aborder le mécanisme dominant de génération de vibration auto-entretenu : l'instabilité du glissement stationnaire. Il concerne le cas particulier des structures en situation de glissement dans lequel il existe une solution d'équilibre stationnaire instable sous perturbations. Après une mise en situation de l'instabilité de l'équilibre stationnaire dans les problèmes de frottement et de stabilité, on formule les équations continues vérifiées par l'équilibre puis par des perturbations proches de cet équilibre. Dans l'hypothèse d'instabilité par flottement, les perturbations quittent l'équilibre en oscillant selon les modes instables solutions d'un problème aux valeurs propres complexes. La maîtrise du calcul des modes de stabilité n'est pas chose aisée : on propose une méthode de calcul basée sur la méthode d'itération sur les résidus qui est validée par comparaison avec une solution semi-analytique. Une étude des résultats sur différents maillages éléments finis oriente notre choix de discrétisation en espace pour la suite.

3.1 Frottement et instabilité

L'objectif de cette section est de situer brièvement le problème de la stabilité dynamique de l'équilibre glissant dans les problèmes d'instabilité en présence de frottement et de stabilité plus généralement.

D'un point de vue général, on appelle équilibre, une solution stationnaire du problème mécanique. Caractériser la stabilité de cet équilibre, c'est savoir si une petite perturbation quelconque de position ou de vitesse donne un mouvement perturbé qui reste toujours proche de cette position d'équilibre. On donne en annexe, les définitions mathématiques de la stabilité. Pour une introduction aux problèmes de stabilités, on pourra se référer à [54]. Dans le cas des systèmes conservatifs, la stabilité d'un équilibre est donnée par le théorème de Lejeune-Dirichlet [54], qui postule que la stabilité est assurée dans le cas où l'équilibre constitue un minimum local de l'énergie potentielle. Les problèmes de stabilité pour les systèmes non-conservatifs sont liés aux questions de stabilité des vibrations, c'est-à-dire de la stabilité dynamique (l'ouvrage de Bolotin [17] est une référence sur le sujet). Dans ce cas, on dispose du théorème de Liapounov (voir annexe) qui permet de statuer sur la stabilité en fonction des valeurs propres de l'opérateur linéaire construit à partir du problème linéarisé. Il y a instabilité de l'équilibre par divergence ou instabilité par flottement si sous perturbations, le système quitte l'équilibre sans osciller ou en oscillant. A propos de la définition de la stabilité pour les problèmes de contact frottant en dynamique et sur la question de l'existence et de l'unicité des solutions on pourra consulter les articles récents de Basseville [12] et Ballard [10]. Le cas

plus général de la stabilité du problème d'évolution est traité dans [45] dans le cadre linéaire élastique en dimension finie.

Dans le cas des systèmes continus, Nguyen [56] fait un bilan des résultats théoriques sur les problèmes de stabilité en situation contact unilatéral avec frottement : la possibilité d'instabilité par divergence et la recherche d'un critère de stabilité statique (voir Chateau et al. [23]) d'un équilibre sont examinés dans le cas d'un obstacle fixe en transformation finie. Le cas de l'instabilité résultant d'un glissement stationnaire est ensuite envisagé dans le cas des petites transformations en dynamique. Une instabilité par flottement ou par divergence est envisageable. La stabilité dynamique du glissement stationnaire dans le cas hyperélastique en transformation finie est étudiée par Raous et al. [62, 72].

3.2 Stabilité dynamique du glissement stationnaire

On se place dans l'hypothèse de petite transformation. On s'intéresse ici à la présentation du problème de glissement plan d'un solide Ω par rapport à un solide indéformable ayant un champ de vitesse de solide rigide constant \underline{V} . Dans cette section, l'équilibre stationnaire est défini ainsi que la dynamique des perturbations proches de l'équilibre.

On considère donc le solide représenté en figure 3.1, en contact avec un solide rigide ayant une vitesse \underline{V} . Le solide Ω est donc en situation de glissement par rapport au solide rigide. En négligeant les efforts volumiques, les champs $\underline{u} \in \mathcal{U}$ et \underline{r} sont solutions du problème :

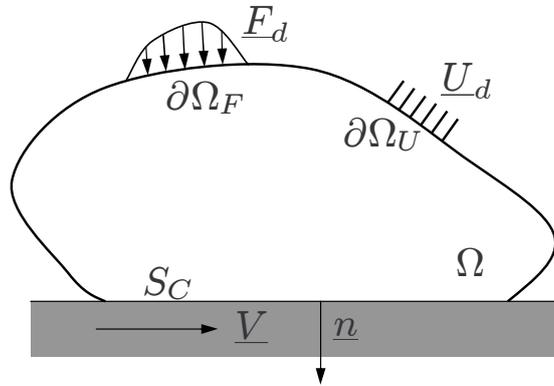


FIG. 3.1 – Glissement de Ω vis-à-vis d'un solide indéformable à vitesse \underline{V}

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \underline{u}^* \cdot \ddot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : (\mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] + \mathcal{B} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\underline{u}}]) d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d dS + \int_{S_C} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \\ \begin{cases} u_n \leq 0 \\ r_n \leq 0 \\ u_n r_n = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \|\underline{w}\| = 0 \Rightarrow \|r_t\| \leq -f r_n \\ \|\underline{w}\| \neq 0 \Rightarrow r_t = f r_n \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \end{cases} \text{ sur } S_C \text{ avec } \underline{w} = \dot{\underline{u}}_t - \underline{V} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

La problématique est de s'intéresser ici à la stabilité dynamique de l'équilibre glissant. Cet équilibre glissant est la solution quasi-statique du problème précédent, solution dite stationnaire. La solution stationnaire $(\underline{u}^e, \underline{r}^e)$ vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^e] d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F}_d dS + \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r}^e dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \\ \left\{ \begin{array}{l} u_n^e \leq 0 \\ r_n^e \leq 0 \\ u_n^e r_n^e = 0 \end{array} \right. \quad \text{et } \underline{r}_t = f r_n \frac{\underline{w}^e}{\|\underline{w}^e\|} = -f r_n \frac{V}{\|V\|} = f r_n \underline{t}^e \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Ce problème est élastique non linéaire à cause des conditions de contact unilatéral. On impose que l'effort de frottement soit sur le cône de frottement et s'oppose à la vitesse de glissement à l'équilibre dirigée selon \underline{t}^e .

La méthode choisie pour caractériser la stabilité dynamique de l'équilibre est la méthode de linéarisation. On décompose pour cela \underline{u} et \underline{r} sous la forme $\underline{u} = \underline{u}^e + \hat{\underline{u}}$ et $\underline{r} = \underline{r}^e + \hat{\underline{r}}$. On appelle $\hat{\underline{u}}$ et $\hat{\underline{r}}$ des perturbations par rapport à l'équilibre. La zone de contact obtenue à l'équilibre est appelée S_c^e . Une linéarisation du problème (3.1) semble loin d'être évidente compte tenu des non linéarités non régulières telles que le contact unilatéral. En revanche, si l'on suppose qu'il n'existe pas de contact affleurant, Moiro [50] montre que : si il y a unicité de la solution dynamique du problème (3.1), alors, l'équilibre est asymptotiquement stable pour toutes perturbations glissantes, si et seulement si, il est asymptotiquement stable pour les équations obtenues en rendant bilatérales les contraintes unilatérales actives à l'équilibre.

On appelle perturbations glissantes, des perturbations qui conservent la configuration de contact à l'équilibre. Elles vérifient des conditions de contact bilatéral pour $\hat{\underline{u}}$ sur S_c^e c'est-à-dire $\hat{u}_n = 0$ sur S_c^e . La figure 3.2 illustre l'évolution locale dans la zone de contact d'une perturbation glissante oscillante proche de l'équilibre.

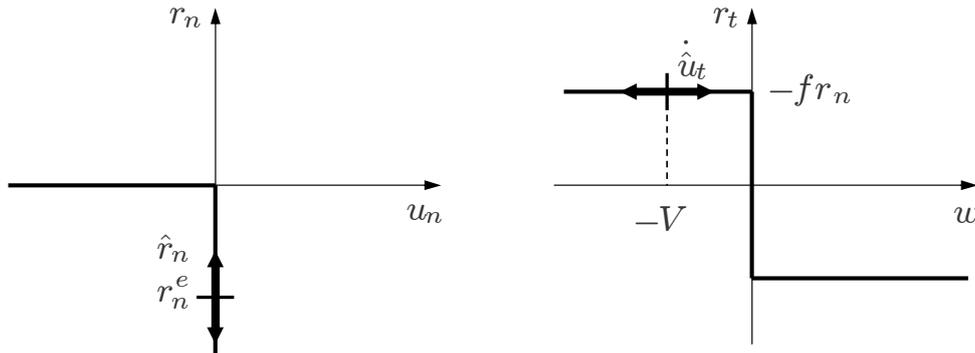


FIG. 3.2 – Image dans la zone de contact d'une perturbation glissante proche de l'équilibre.

L'équation variationnelle vérifiée par ces perturbations glissantes est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \rho \underline{u}^* \cdot \ddot{\hat{\underline{u}}} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : (\mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\hat{\underline{u}}] + \mathcal{B} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\dot{\hat{\underline{u}}}]) d\Omega = \int_{S_c^e} \underline{u}^* \cdot \hat{\underline{r}} dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \\ \hat{u}_n = 0 \text{ sur } S_c^e \\ \hat{r}_t \text{ dépend de la dimension du problème (2D ou 3D).} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

On distingue deux cas : le cas bidimensionnel (2D) et le cas tridimensionnel (3D). Dans le cas 2D, l'effort de frottement est rectiligne, ce qui signifie que la direction de la vitesse de

glissement est fixée. Dans ce cas, l'effort de frottement perturbé \hat{r}_t est dirigé simplement suivant \underline{t}^e :

$$\underline{r}_t = fr_n \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \Rightarrow \hat{r}_t = f\hat{r}_n \underline{t}^e$$

Dans le cas 3D, la direction de la vitesse de glissement est inconnue et peut parcourir tout le plan de frottement. La direction de glissement $\underline{t}(\underline{w}) = \underline{w}/\|\underline{w}\|$ est donc une fonction non linéaire de \underline{w} . Dans le problème d'évolution (3.1) initial, le passage au 3D ajoute une non-linéarité régulière. La conséquence sur l'effort de frottement perturbé est l'ajout d'une composante proportionnelle à \dot{w}_b et dirigée suivant \underline{b}^e (\underline{b}^e rendant le trièdre $(\underline{n}, \underline{t}^e, \underline{b}^e)$ direct).

$$\underline{r}_t = fr_n \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} \Rightarrow \hat{r}_t = f\hat{r}_n \underline{t}^e + f \frac{r_n^e}{\|\underline{w}^e\|} (\mathbb{I}_2 - \underline{t}^e \otimes \underline{t}^e) \underline{\hat{w}} = f\hat{r}_n \underline{t}^e + f \frac{r_n^e}{\|\underline{w}^e\|} \hat{w}_b \underline{b}^e$$

La figure 3.3 illustre dans le cas tridimensionnel la perturbation de l'effort de frottement \hat{r}_t .

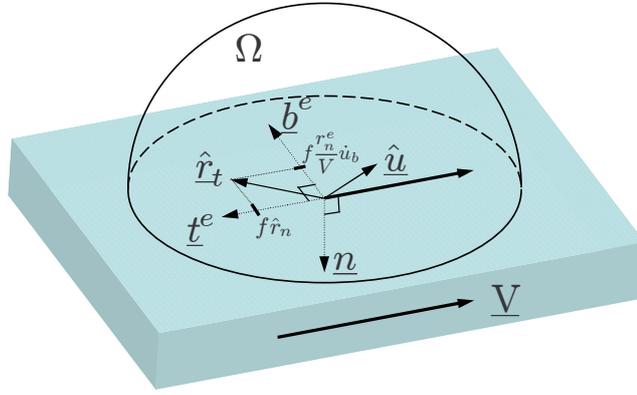


FIG. 3.3 – Perturbation de l'effort de frottement \hat{r}_t dans le plan de frottement (cas 3D)

Pour résumer, en 2D, les perturbations sont gouvernées par une équation linéaire alors qu'en 3D, elles sont gouvernées par une équation non linéaire mais régulière qui ajoute un terme lors de la linéarisation par rapport à la situation 2D. Dans [50], Moiroit s'intéresse à la régularité des solutions des équations de perturbations. Il propose des conditions qui assurent la régularité des solutions. Dans la suite, on fera cette hypothèse raisonnable de régularité de telle sorte que l'on admettra que : pour toutes conditions initiales suffisamment proches de l'équilibre, il y a existence et unicité de la solution des équations bilatérales, elle est régulière et elle est solution des équations unilatérales (3.1) sur un intervalle de temps $[0, T]$.

Sous ces hypothèses de régularité, il y a équivalence pour des perturbations glissantes entre la stabilité pour les équations unilatérales et pour les équations bilatérales. Ceci rend légitime l'application du théorème de Liapounov : la stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres du problème linéarisé (3.3).

Afin de mettre en évidence le problème aux valeurs propres, on écrit $(\underline{\hat{u}}, \hat{r}_n)$ sous la forme :

$$\underline{\hat{u}}(\underline{x}, t) = \underline{\hat{u}}_0(\underline{x}) e^{\lambda t} \text{ et } \hat{r}_n(\underline{x}, t) = \hat{r}_{n_0}(\underline{x}) e^{\lambda t}$$

(3.3) devient alors :

$$\begin{cases} \lambda^2 \mathcal{M}(\underline{\hat{u}}_0, \underline{u}^*) + \lambda \mathcal{C}(\underline{\hat{u}}_0, \underline{u}^*) + \mathcal{K}(\underline{\hat{u}}_0, \underline{u}^*) = \int_{S_c^e} \hat{r}_{n_0} \underline{u}^* \cdot (\underline{n} + f \underline{t}^e) dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U} \\ \underline{\hat{u}}_0 \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } S_c^e \end{cases} \quad (3.4)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\hat{u}_0, \underline{u}^*) &= \underline{\underline{\varepsilon}}[\hat{u}_0] : \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] && \text{en 2D} \\ \mathcal{C}(\hat{u}_0, \underline{u}^*) &= \underline{\underline{\varepsilon}}[\hat{u}_0] : \underline{\underline{\mathcal{B}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] - \int_{S_c^e} f \frac{r_n^e}{\|\underline{V}\|} \hat{u}_{0b} u_b^* dS && \text{en 3D} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Remarque : le terme amortissant qui apparaît dans la situation 3D a été pris en compte pour la première fois dans [50]. Il provient du caractère plan du frottement. Puisque $r_n^e \leq 0$, on verra que la matrice d'amortissement induite après la discrétisation a un effet amortissant. On parlera de matrice d'amortissement induite par le caractère plan du frottement.

Le problème aux valeurs propres généralisé (3.4) peut être reformulé purement en déplacement. Il s'agit de trouver le couple $(\underline{u}_0, \lambda)$ tel que :

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &\in \mathcal{W}_0 \text{ tel que } \lambda^2 \mathcal{M}(\hat{u}_0, \underline{u}^*) + \lambda \mathcal{C}(\hat{u}_0, \underline{u}^*) + \mathcal{K}(\hat{u}_0, \underline{u}^*) = 0, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_f \\ \mathcal{W}_0 &= \{\underline{u}/\underline{u} \in \mathcal{U}^0, \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } S_c^e\} \\ \mathcal{W}_f &= \{\underline{u}/\underline{u} \in \mathcal{U}^0, \underline{u} \cdot (\underline{n} + f\underline{t}) = 0 \text{ sur } S_c^e\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les espaces \mathcal{W}_0 et \mathcal{W}_f étant différents, (3.6) est un problème non symétrique. Les vecteurs propres \hat{u}_0 et valeurs propres λ sont donc a priori complexes. A partir d'un coefficient de frottement critique f_c , une valeur propre λ devient à partie réelle positive. Ainsi, pour $f > f_c$, l'équilibre est instable :

$$\begin{aligned} \text{Im}(\lambda) \neq 0, \quad \text{Re}(\lambda) > 0 &\Rightarrow \text{Instabilité par flottement,} \\ \text{Im}(\lambda) = 0, \quad \text{Re}(\lambda) > 0 &\Rightarrow \text{Instabilité par divergence.} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dans le cas de l'instabilité par divergence, la perturbation quitte l'équilibre sans osciller alors que dans le cas de l'instabilité par flottement, la perturbation quitte l'équilibre en oscillant. Dans la suite, on fera l'hypothèse raisonnable de ne considérer que l'instabilité dynamique par flottement. On suppose donc que $\text{Im}(\lambda) \neq 0$. Dans ce cas, la structure quitte l'équilibre suivant le mode instable \underline{u}_0 en oscillant :

$$\text{Re}(\underline{u}_0(x)e^{\lambda t}) = e^{\text{Re}(\lambda)t} [\text{Re}(\underline{u}_0(x)) \cos(\text{Im}(\lambda)t) - \text{Im}(\underline{u}_0(x)) \sin(\text{Im}(\lambda)t)]$$

Un mode sera déclaré instable si sa valeur propre est à partie réelle positive. Pour caractériser l'importance de l'instabilité d'un mode, on calcul le taux de croissance ζ du mode :

$$\zeta = \frac{\text{Re}(\lambda)}{\text{Im}(\lambda)} \quad (3.8)$$

Ce taux de croissance modal est intéressant car il est physiquement comparable à un amortissement modal négatif dont l'ordre de grandeur peut être comparé aux amortissements modaux ξ .

Remarque : La stabilité de l'équilibre est examinée exclusivement pour des perturbations glissantes, c'est-à-dire ne rompant pas le contact. La stabilité pour des perturbations avec décollement est un problème complexe, non abordé ici et qui reste un problème ouvert [55].

Dans la suite, lorsque l'on parlera de stabilité de l'équilibre stationnaire, implicitement, ce sera la stabilité sous perturbations glissantes. La caractérisation de la stabilité de l'équilibre se résume donc au calcul du problème aux valeurs propres complexes (3.6). On a vu dans le

Algorithme

1. Calcul de la base de condensation $[T^{CS}]$.
2. Construction et factorisation de $[\hat{K}^{loc}]$ et de $[\hat{K}_{YY}]$.
3. Évaluation du ρ optimal
4. Calcul de $\{B^{CS}\}$ (Résolution de $[\hat{K}_{YY}] \{B_Y^{CS}\} = \{F_Y\}$)
5. Calcul de $\{e\} = [nt]^T [T^{CS}]^T \{F\}$
6. Initialisation : $\{r\}_0 = \{0\}$
7. Pour $k=0,1,\dots$ et tant que $\varepsilon > Tol$:
 - (a) Résolution de : $[\hat{K}^{loc}] \{u\}_{k+1} = \{e\} + \{r\}_{k+1}$
 - (b) Effort normal : $\{r_n\}_{k+1} = \text{Proj}_{\mathbb{R}^-} (\{r_n\}_k - \rho \{u_n\}_k)$
 - (c) Effort tangent : $\{r_t\}_{k+1} = f \{r_n\}_k$
 - (d) Calcul du critère d'arrêt $\varepsilon = \frac{\|\{r\}_{k+1}^{i+1} - \{r\}_k^{i+1}\|}{\|\{r\}_k^{i+1}\|}$ et test de convergence :
 - $\varepsilon > Tol$, alors $k \leftarrow k+1$
 - $\varepsilon < Tol$, alors on quitte la boucle
8. Actualisations : $\{U_C\} = [nt] \{u\}$
 $\{U\} = [T^{CS}] \{U_C\} + \{B^{CS}\}$

FIG. 3.4 – Algorithme de calcul de l'équilibre stationnaire

cas 3D qu'un terme d'amortissement dépend de quantités à l'équilibre telles que l'effort normal de contact ainsi que la vitesse de glissement. Dans cette situation un calcul de l'équilibre est nécessaire au préalable. On présente dans la section suivante les méthodes numériques employées pour effectuer le calcul de l'équilibre ainsi que la résolution du problème aux valeurs propres complexes.

3.3 Calcul numérique de la stabilité du glissement stationnaire

On s'intéresse dans un premier temps au calcul de l'équilibre stationnaire. Après discrétisation, les équations continues vérifiées par l'équilibre (3.2) peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{aligned}
 [K] \{U^e\} &= \{F\} + [P_n]^T \{r_n^e\} + [P_t]^T \{r_t^e\} \\
 \{r_n^e\} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-} (\{r_n^e\} - \rho [P_n] \{U^e\}) \\
 \{r_t^e\} &= f \{r_n^e\}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Cette formulation est relativement proche de la formulation proposée pour le calcul du problème d'évolution en dynamique du chapitre précédent. L'algorithme proposé pour le calcul de l'équilibre est précisé figure 3.3.

Pour les problèmes où les conditions limites sont telles que la matrice de raideur est singulière, (ce qui est possible lorsque dans une direction, ce sont des efforts qui sont imposés et non des déplacements) une méthode possible est de régulariser le problème quasi-statique en considérant un problème de dynamique. Le choix d'un pas de temps très grand avec $\theta = 1$ permet de converger en quelques itérations vers la solution quasi-statique compte tenu du fort amortissement numérique introduit.

Remarque : le problème de l'existence et de l'unicité de la position d'équilibre n'est pas abordé ici. On pourra consulter [56] pour trouver des conditions d'existence de l'équilibre.

Pour f assez grand, la solution stationnaire peut ne pas exister.

On s'intéresse maintenant au calcul numérique de la stabilité de l'équilibre.

A partir de (3.3), on peut écrire le système différentiel linéaire vérifié par la perturbation. Dans le cas 2D, on obtient :

$$[M] \{\ddot{U}^*\} + [C] \{\dot{U}^*\} + [K] \{U^*\} = [P_{nt}]^T \{r^*\} = [P_n]^T \{r_n^*\} + [P_t]^T \{r_t^*\}$$

La réaction de contact normale s'exprime en fonction des quantités cinématiques comme :

$$\{r_n^*\} = [P_n] [M] \{\ddot{U}^*\} + [P_n] [C] \{\dot{U}^*\} + [P_n] [K] \{U^*\}$$

car $[P_n]$ est une matrice orthogonale. La condition de frottement de glissement donne :

$$\{r_t^*\} = f \{r_n^*\}$$

et par suite,

$$\begin{cases} ([M] + [M_f])\{\ddot{U}^*\} + ([C] + [C_f])\{\dot{U}^*\} + ([K] + [K_f]) \{U^*\} = [P_n]^T \{r_n^*\} \\ [P_n] \{U^*\} = 0 \\ \text{avec } [M_f] = -f [P_t]^T [P_n] [M], [C_f] = -f [P_t]^T [P_n] [C], [K_f] = -f [P_t]^T [P_n] [K] \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour les problèmes tridimensionnels, on obtient :

$$[M] \{\ddot{U}^*\} + [C] \{\dot{U}^*\} + [K] \{U^*\} = [P_{ntb}]^T \{r^*\} = [P_n]^T \{r_n^*\} + [P_t]^T \{r_t^*\} + [P_b]^T \{r_b^*\}$$

$$\{r_n^*\} = [P_n] [M] \{\ddot{U}^*\} + [P_n] [C] \{\dot{U}^*\} + [P_n] [K] \{U^*\}$$

$$\{r_t^*\} = f \{r_n^*\} \text{ et } \{r_b^*\} = [D] [P_b] \{\dot{U}^*\}$$

$$\begin{cases} ([M] + [M_f])\{\ddot{U}^*\} + ([C] + [C_f] + [C_f^e])\{\dot{U}^*\} + ([K] + [K_f]) \{U^*\} = [P_n]^T \{r_n^*\} \\ [P_n] \{U^*\} = 0 \\ \text{avec } [M_f] = -f [P_t]^T [P_n] [M], [C_f] = -f [P_t]^T [P_n] [C], [K_f] = -f [P_t]^T [P_n] [K] \\ \text{et } [C_f^e] = -f [P_b]^T [D] [P_b], D_{ii} = \frac{(r_n^e)_i}{V_i} \end{cases} \quad (3.11)$$

La condition $[P_n] \{U^*\} = 0$ implique que l'on se place dans l'espace des contraintes de contact bilatéral. On définit par $\{U_W^*\}$ la perturbation dans ce sous-espace. On a alors :

$$[P_n] \{U^*\} = 0 \Rightarrow \{U^*\} = [T] \{U_W^*\}$$

Se placer dans l'espace des contraintes bilatérales de contact est équivalent à projeter les matrices sur la base $[T]$ introduite.

La prise en compte du caractère plan de l'effort de frottement dans le cas 3D se traduit par l'addition d'une matrice d'amortissement supplémentaire $[C_f^e]$. Cette matrice dépend de la réaction normale de contact calculée à l'équilibre. Il est donc nécessaire de calculer l'équilibre stationnaire avant de calculer la stabilité pour les problèmes 3D.

Dans les deux cas, après projection sur la base $[T]$, on obtient le système dynamique gouvernant les perturbations :

$$\begin{cases} [\tilde{M}]\{\ddot{U}_W^*\} + [\tilde{C}]\{\dot{U}_W^*\} + [\tilde{K}]\{U_W^*\} = \{0\} \\ [\tilde{M}] = [T]^T ([M] + [M_f])[T], [\tilde{K}] = [T]^T ([K] + [K_f])[T], \\ [\tilde{C}] = [T]^T ([C] + [C_f] + [C_f^e])[T] \end{cases} \quad (3.12)$$

Le problème aux valeurs propres sous-jacent (λ, ϕ) est :

$$\begin{cases} (\lambda^2[\tilde{M}] + \lambda[\tilde{C}] + [\tilde{K}])\{\phi_W\} = \{0\} \\ \{\phi\} = [T]\{\phi_W\} \end{cases} \quad (3.13)$$

Le problème (3.13) est un problème aux valeurs propres complexes dans lequel les matrices en jeu sont non symétriques et de grandes tailles.

Pour la résolution numérique, une première idée suggérée dans [50] est de rechercher la solution du problème dans un sous-espace réduit. Il propose de projeter le problème initial sur la base des modes réels sans frottement avec contact bilatéral $[\hat{\phi}]$. Il s'agit donc de résoudre d'abord (3.13) avec $f = 0$ et $[C] = [0]$. Ce problème est de grande taille, mais les matrices sont symétriques et les solutions sont réelles. Il peut être résolu avec une méthode itérative telle que la méthode des puissances inverses ou la méthode de Lanczos [16, 43]. Ensuite les matrices initiales sont projetées sur la base réduite $[\hat{\phi}]$ calculée sur une bande de fréquence choisie. Le problème aux valeurs propres complexes réduit est alors :

$$\begin{cases} (\lambda^2[\hat{\phi}_W]^T [\tilde{M}][\hat{\phi}_W] + \lambda[\hat{\phi}_W]^T [\tilde{C}][\hat{\phi}_W] + [\hat{\phi}_W]^T [\tilde{K}][\hat{\phi}_W])\{z\} = \{0\} \\ \{\phi_W\} = [\hat{\phi}_W]\{z\}, \{\phi\} = [T]\{\phi_W\} \end{cases} \quad (3.14)$$

Le problème construit est de la taille du nombre de modes réels choisis. La résolution est possible par une méthode directe telle la méthode du QZ [43]. En pratique, (3.14) est résolu sous forme d'état ($[M_{red}]$, $[K_{red}]$ et $[C_{red}]$ désignent les matrices réduites) :

$$\left[\lambda \begin{pmatrix} [C_{red}] & [M_{red}] \\ [M_{red}] & [0] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [K_{red}] & [0] \\ [0] & -[M_{red}] \end{pmatrix} \right] \{Z\} = \{0\}$$

Cette méthode de projection sur la base des modes sans frottement avec contact bilatéral est une méthode efficace mais dont la qualité d'approximation est difficile à évaluer. La qualité d'approximation augmente lorsque le nombre de modes sans frottement utilisés pour la projection augmente. Mais le lien entre la taille de la base et la qualité d'approximation reste incertain et la convergence lente. Cet inconvénient peut être levé en utilisant la méthode d'itération sur les résidus présentée en annexe A.

Le principe général de la méthode est d'exploiter une base réduite initiale en calculant dans un premier temps le résidu en déplacement induit par le caractère approché de la base et de créer une base approchée de dimension plus grande dans laquelle on inclut ce résidu. Dans notre cas, la base réduite initiale est la base approchée des modes sans frottement. L'intérêt réside dans le fait que l'on inclut dans la base les résidus associés aux modes dont l'erreur en énergie est significative. On évite alors les inconvénients mentionnés précédemment : la dimension de la base d'approximation est ajustée automatiquement de manière à garantir une erreur en énergie maximale sur les modes. On utilisera dans la suite cette méthode de calcul des modes de stabilité en se fixant un indicateur d'erreur en énergie maximal ε (voir annexe A).

3.4 Validation

L'objectif de cette partie est de valider la méthode de calcul numérique proposée précédemment. On va considérer ici le cas du glissement d'une couche élastique infinie (figure 3.5) sur un massif semi-infini rigide se déplaçant à vitesse constante \underline{V} . L'intérêt de cet exemple est que le calcul de la stabilité peut-être mené semi-analytiquement, ce qui permet d'avoir une référence numérique pour une validation des résultats par la méthode des éléments finis. On se propose dans un premier temps de rappeler les résultats analytiques approfondis dans Moiro [50] et Adams [3]. Ensuite, le calcul du problème aux valeurs propres complexes est effectué sur différents maillages éléments finis. La qualité des résultats est évaluée par comparaison avec la solution semi-analytique. Ensuite, l'apport de la méthode d'itération sur les résidus est illustré.

3.4.1 Solution semi-analytique du problème de stabilité de l'équilibre

On introduit le déplacement physique comme : $\underline{\hat{u}}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) = \hat{u}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})\underline{x} + \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})\underline{y}$

Dans l'hypothèse de déformation plane, les déplacements dans le milieu s'écrivent :

$$(\lambda + 2\mu)\hat{u}_{,\hat{x}\hat{x}} + \mu\hat{u}_{,\hat{y}\hat{y}} + (\lambda + \mu)\hat{v}_{,\hat{x}\hat{y}} = \rho\ddot{\hat{u}}$$

$$(\lambda + 2\mu)\hat{v}_{,\hat{y}\hat{y}} + \mu\hat{v}_{,\hat{x}\hat{x}} + (\lambda + \mu)\hat{v}_{,\hat{x}\hat{y}} = \rho\ddot{\hat{v}}$$

On introduit les célérités des ondes dans le milieu : $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ et $\tau = c_2/c_1$.

Afin de simplifier les équations, on écrit la globalité du problème en faisant intervenir les variables adimensionnées suivantes : $x = \hat{x}/l$, $h = \hat{h}/l$, $\delta = \hat{\delta}/l$, $V = \hat{V}/c_2$, $t = \hat{t}c_2/l$.

On pose le déplacement adimensionné comme : $\underline{u}(x, y, t) = u(x, y, t)\underline{x} + v(x, y, t)\underline{y}$ dans le milieu.

$$u_{,x^2} + \tau^2 u_{,y^2} + (1 - \tau^2)v_{,xy} = \tau^2 \ddot{u}$$

$$v_{,y^2} + \tau^2 v_{,x^2} + (1 - \tau^2)v_{,xy} = \tau^2 \ddot{v}$$

les conditions aux limites d'encastrement :

$$\underline{u}(x, h, t) = \underline{0}$$

les conditions de contact unilatéral :

$$v(x, 0, t) \geq \delta$$

$$\sigma_{yy}(x, 0, t) \leq 0$$

$$(v(x, 0, t) - \delta)\sigma_{yy}(x, 0, t) = 0$$

les conditions de frottement de Coulomb :

$$s = c_2(\dot{u} - V)$$

$$|\sigma_{xy}(x, 0, t)| \leq -f\sigma_{yy}(x, 0, t)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0, t)s - f\sigma_{yy}(x, 0, t)|s| = 0$$

on a :

$$\sigma_{yy} = (\rho c_1^2/l)(v_{,y} + (1 - 2\tau^2)u_{,x})$$

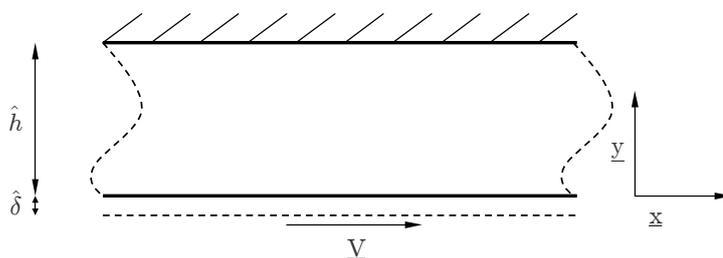


FIG. 3.5 – Glissement d'une couche élastique infinie

$$\sigma_{xy} = (\rho c_1^2 / l) \tau^2 (u_{,y} + v_{,x})$$

$$\hat{t}l = c_2 t$$

La solution stationnaire s'écrit :

$$u(y) = \delta f / \tau^2 (1 - y/h)$$

$$v(y) = \delta (1 - y/h)$$

On recherche de la stabilité de la solution stationnaire i.e. on cherche des solutions périodiques de période l/k en \hat{x} ($1/k$ en x) de la forme :

$$\underline{u}(x, y, t) = e^{2\pi\alpha t} e^{2ik\pi x} \underline{u}(y)$$

avec

$$\alpha t = \hat{c}t/l \text{ et } \alpha = c/c_2$$

On montre que les vitesses des ondes solutions doivent vérifier :

$$iB(p(c), q(c), k) - fC(p(c), q(c), k) = 0 \quad (3.15)$$

avec

$$B(p, q, k) = q(1 - p^2)(\sinh(2\pi pkh) \cosh(2\pi qkh) - pq \cosh(2\pi pkh) \sinh(2\pi qkh))$$

$$C(p, q, k) = pq(3 + p^2)(1 - \cosh(2\pi pkh) \cosh(2\pi qkh)) + (2p^2q^2 + 1 + p^2) \sinh(2\pi pkh) \sinh(2\pi qkh)$$

et $p(c) = \sqrt{1 + (c/c_2)^2}$, $q(c) = \sqrt{1 + \tau^2(c/c_2)^2}$

Il est donc possible de calculer les célérités c vérifiant (3.15). En pratique, les valeurs propres sont calculées par un algorithme de minimisation du module du membre de gauche de (3.15).

Après avoir choisi les paramètres physiques du tableau 3.1, on obtient les 25 premières valeurs propres du problème (3.6). On dispose donc des valeurs propres calculées indépendamment d'une discrétisation spatiale. Dans la section qui suit, on va étudier l'influence de la discrétisation sur la qualité d'approximation des valeurs propres.

3.4.2 Calculs numériques : influence de l'interpolation élément fini

On s'intéresse à l'effet du degré des fonctions d'interpolation dans les éléments sur la qualité d'approximation des valeurs propres. Pour cela, on considère trois types de maillages : un maillage 1 (figure 3.7) composé d'éléments linéaires, un maillage 2 (figure 3.8) composé

E	$5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
ν	0.2
ρ	2500 Kg/m^3
f	0.5
\tilde{h}	0.05 m
\tilde{l}	0.15 m
$\tilde{\delta}$	$5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

TAB. 3.1 – Paramètres du problème

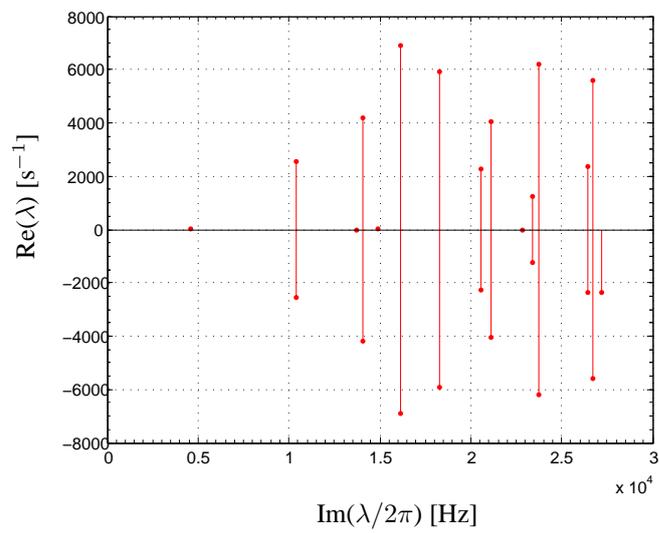


FIG. 3.6 – 25 premières valeurs propres : $Re(\lambda)$ en fonction de la fréquence $(Im(\lambda)/2\pi)$

d'éléments quadratiques et un maillage 3 mixte (figure 3.9), composé d'éléments quadratiques hors de la zone de contact et d'éléments linéaires sur la zone de contact. Pour ces trois types de maillage, on considère un maillage grossier (environ 900 ddls) et un maillage fin (environ 8000 ddls).

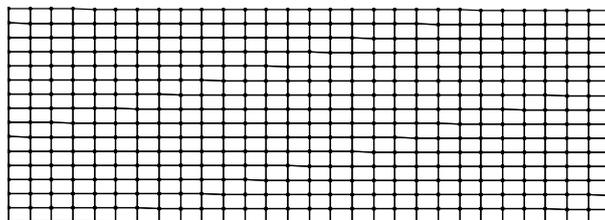


FIG. 3.7 – Maillage 1 grossier 30×15 (fin : 80×50)

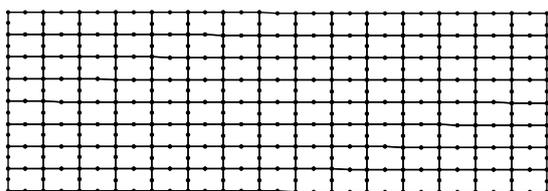


FIG. 3.8 – Maillage 2 grossier 15×8 (fin : 45×28)

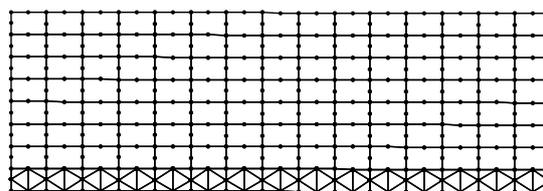


FIG. 3.9 – Maillage 3 grossier 15×8 (fin : 45×28)

Le calcul de la solution stationnaire pour le maillage 2 montre des oscillations de la réaction de contact (voir figure 3.10). Ce phénomène provient de la nature quadratique de l'élément lorsqu'il est en situation de contact et n'est pas acceptable. Cependant compte tenu de l'apport de la qualité d'approximation des éléments quadratiques par rapport aux éléments linéaires, on souhaite les utiliser. On propose alors deux stratégies : un maillage 2 avec linéarisation (que l'on appellera dorénavant simplement maillage 2) des éléments de la zone de contact et un maillage 3 où l'on intercale des éléments linéaires entre la structure et la zone de contact. L'expression « linéariser les éléments » du maillage 2 signifie qu'à chaque nœud 3 d'un élément quadratique (figure 3.11) on impose la contrainte $\{U_3\} = 1/2(\{U_1\} + \{U_2\})$.

On dispose donc de trois discrétisations qui possèdent un nombre de ddls comparables. Le calcul de stabilité est effectué et les figures 3.12, 3.13, 3.14 et 3.15 présentent les erreurs relatives sur les fréquences propres et sur les parties réelles des valeurs propres vis-à-vis des calculs semi-analytiques pour les maillages grossiers et fins et ceci pour les 10 premiers modes instables. Les calculs sont réalisés à l'aide de la méthode d'itération sur les résidus avec un critère d'erreur en énergie ε de 10^{-5} (voir annexe A).

On remarque après comparaison que :

- tant pour le maillage grossier que pour le maillage fin, le maillage 2 donne la meilleure approximation sur les fréquences propres.
- sur le maillage grossier, le maillage 1 donne la meilleure approximation des parties réelles des valeurs propres tandis que sur le maillage fin, le maillage 2 l'emporte.

Malgré les oscillations en effort normaux de contact observées sur le maillage 2 sans linéarisation de la zone de contact, on souhaite regarder la qualité d'approximation sur les valeurs

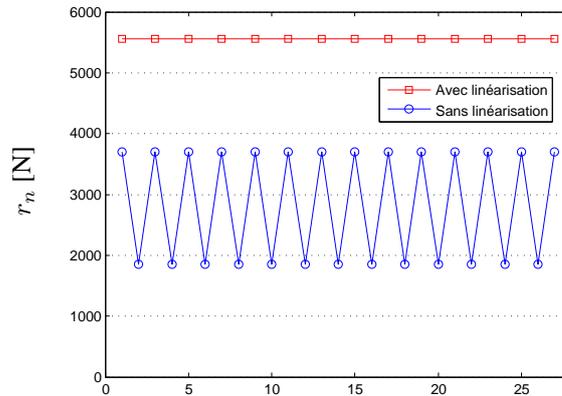


FIG. 3.10 – Efforts normaux nodaux de contact le long de la ligne de nœuds avec est sans linéarisation sur le maillage 2

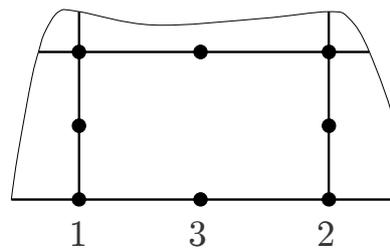


FIG. 3.11 – « Linéarisation de la zone de contact » pour les éléments du maillage 2 situés sur la zone de contact

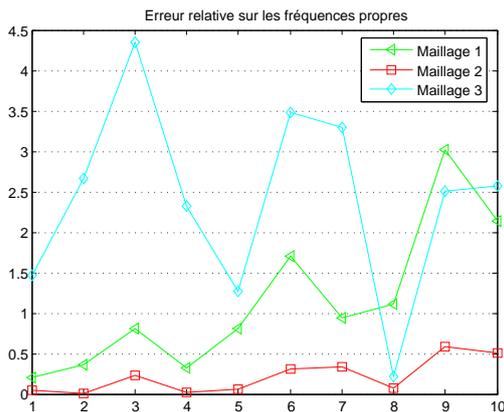


FIG. 3.12 – Erreurs relatives sur les fréquences propres [%] (Maillages grossiers)

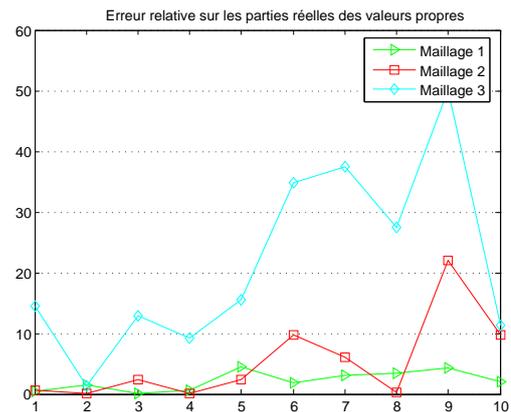


FIG. 3.13 – Erreurs relatives sur les parties réelles des valeurs propres [%] (Maillages grossiers)

propres (figures 3.16, 3.17, 3.18 et 3.19).

On constate que sur le maillage fin, la linéarisation a peu d’effet alors que sur le maillage grossier, elle détériore l’évaluation des parties réelles mais ne détériore pas l’évaluation des fréquences propres.

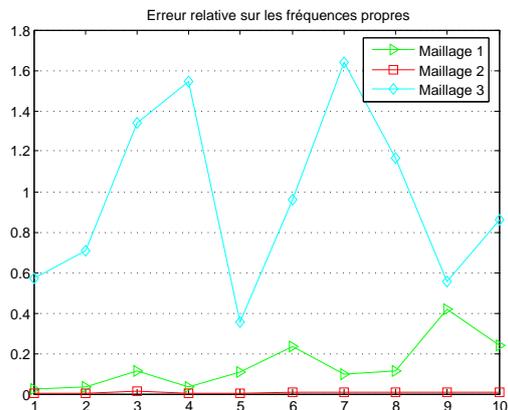


FIG. 3.14 – Erreur relative sur les fréquences propres en [%] (Maillages fins)

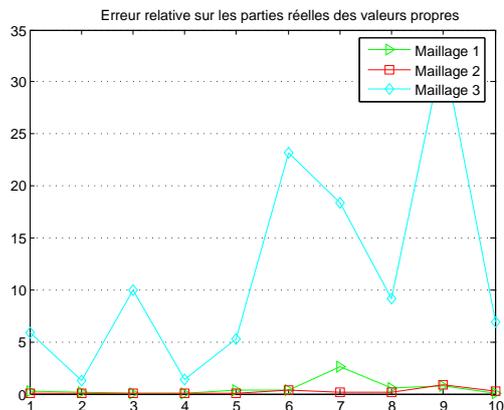


FIG. 3.15 – Erreur relative sur les parties réelles des valeurs propres [%] (Maillages fins)

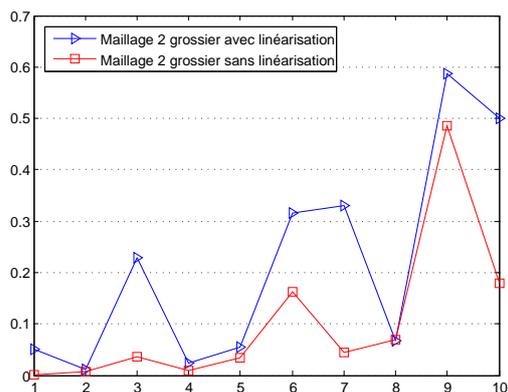


FIG. 3.16 – Effet de la linéarisation sur l'erreur relative sur les fréquences propres [%] (Maillage 2 grossier)

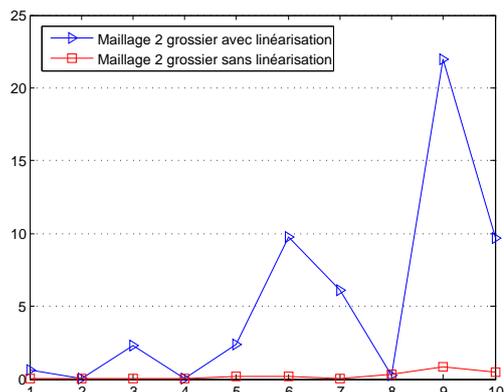


FIG. 3.17 – Effet de la linéarisation sur l'erreur relative sur les parties réelles des valeurs propres [%] (Maillage 2 grossier)

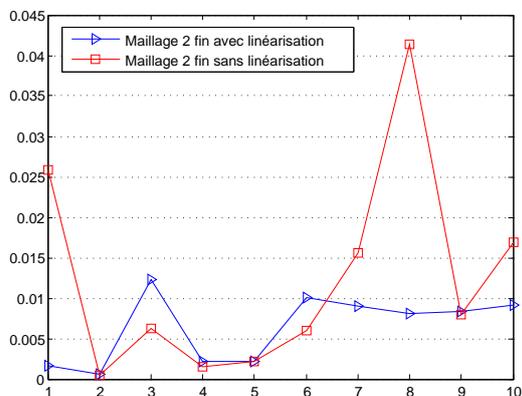


FIG. 3.18 – Effet de la linéarisation sur l'erreur relative sur les fréquences propres [%] (Maillage 2 fin)

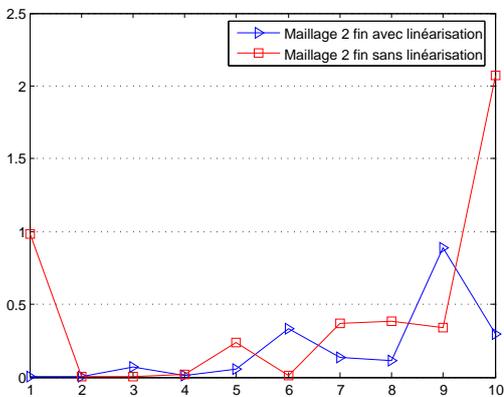


FIG. 3.19 – Effet de la linéarisation sur l'erreur relative sur les parties réelles des valeurs propres [%] (Maillage 2 fin)

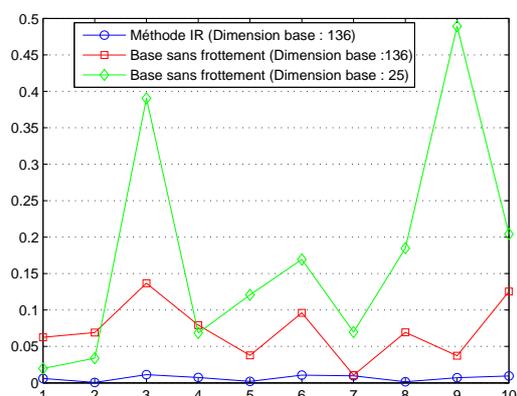


FIG. 3.20 – Influence de la méthode de calcul des fréquences propres sur l'erreur relative [%]

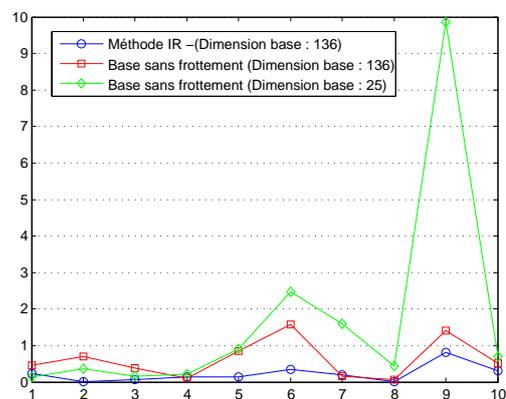


FIG. 3.21 – Influence de la méthode de calcul des parties réelles des valeurs propres sur l'erreur relative [%]

3.4.3 Intérêt de la méthode d'itération sur les résidus

On s'intéresse ici à la comparaison des résultats de stabilité calculés de trois façons différentes : la première manière est d'utiliser la méthode d'itération sur les résidus avec une base de mode initiale de dimension 25 (on constate qu'à convergence, la dimension du sous-espace de recherche est de dimension 136). La deuxième méthode est de rechercher les modes complexes sur la base des 25 premiers modes sans frottement. Enfin, la troisième méthode est de rechercher les modes complexes sur la base des 136 premiers modes sans frottement, ce qui permet d'évaluer par comparaison la qualité du sous-espace de recherche construit par la méthode d'itération sur les résidus.

Les résultats sont portés sur les figures 3.20 et 3.21. Si l'on compare les résultats pour la base des modes sans frottement, alors on constate que l'augmentation de la dimension de la base de projection apporte un gain de précision significatif tant sur les fréquences que sur les parties réelles des valeurs propres.

Si l'on compare la méthode d'itération sur les résidus avec la méthode de projection sur la base sans frottement de dimension 136, on constate que l'apport de la méthode d'itération sur les résidus est intéressant ($\varepsilon = 10^{-5}$, maillage 2) à la fois sur les fréquences propres et sur les parties réelles des valeurs propres. Cela montre que la base générée par les résidus en déplacement est de meilleure qualité.

3.5 Conclusion

Les équations continues vérifiées par l'équilibre stationnaire et par les perturbations proches de l'équilibre ont été présentées. D'un point de vue discret, la dynamique des perturbations proches de l'équilibre est prédite via la résolution d'un problème aux valeurs propres complexes dont on a proposé la résolution par la méthode d'itération sur les résidus.

La comparaison du calcul semi-analytique avec le calcul par élément fini nous a permis de dégager les éléments suivants :

- La convergence avec le maillage est observée et valide la méthode numérique.
- Le maillage 2 est adapté pour le calcul de l'équilibre stationnaire (grâce à la linéarisation)

et pour le calcul de stabilité. En effet, dans tous les cas de figure précédents, l'approximation faite sur les fréquences propres reste la meilleure. Néanmoins, la linéarisation détériore les parties réelles des valeurs propres pour les maillages grossiers. L'approximation redevient acceptable pour des maillages fins et reste comparable au maillage 1 (pour les parties réelles seulement). Le choix d'un maillage quadratique sera important dans la suite, notamment lors du maillage d'un disque où les éléments quadratiques offrent des gains significatifs par rapport aux éléments linéaires en particulier sur les modes de flexion.

- La méthode d'itération sur les résidus est intéressante car elle améliore significativement l'approximation.

Le calcul de stabilité nous permet de prédire l'évolution des perturbations glissantes oscillantes proches de l'équilibre. Mais comment évoluent ces perturbations loin de l'équilibre, en particulier quand on passe d'une situation de glissement sous la zone de contact à une situation plus complexe ? Beaucoup de travaux sur l'étude des vibrations auto-entretenues font un raccourci rapide entre fréquence des modes instables et solution transitoire. Le chapitre suivant suggère l'étude de la transition entre l'évolution des perturbations proches de l'équilibre et l'évolution transitoire loin de l'équilibre à l'aide de la projection de cette solution sur la base des modes de stabilité.

4 – Transition entre évolution des perturbations et évolution transitoire

On a caractérisé dans le chapitre précédent l'instabilité de l'équilibre stationnaire : sous petites perturbations, la structure quitte l'équilibre en oscillant et évolue suivant les modes d'instabilités dynamiques. On se propose dans ce chapitre d'étudier la transition entre l'évolution des perturbations et l'évolution transitoire loin de l'équilibre. Afin d'étudier l'effet des non linéarités sur l'évolution des perturbations, on propose une méthode originale de projection de la solution transitoire sur les modes de stabilité. Cette projection va nous permettre aussi de décrire spatialement la solution dans le cycle limite. La démarche est appliquée sur le problème du glissement d'une couche élastique bidimensionnelle.

4.1 Liens entre modes de stabilité et évolution transitoire

4.1.1 Liens entre coordonnées modales des modes de stabilité et espace physique

On a vu que la dynamique des perturbations proches de l'équilibre pouvait être prédite par la résolution d'un problème aux valeurs propres issu du système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} [\tilde{M}]\{\ddot{U}_W^*\} + [\tilde{C}]\{\dot{U}_W^*\} + [\tilde{K}]\{U_W^*\} = \{0\} \\ \{U^*\} = [T]\{U_W^*\} \end{cases} \quad (4.1)$$

La dynamique des perturbations est donnée par la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} (\lambda^2[\tilde{M}] + \lambda[\tilde{C}] + [\tilde{K}])\{\phi_W\} = \{0\} \\ \{\phi\} = [T]\{\phi_W\} \end{cases} \quad (4.2)$$

Il est possible de réécrire la dynamique des perturbations en utilisant une formulation sous forme d'état :

$$\begin{cases} [\tilde{A}]\{\dot{\alpha}_W^*\} + [\tilde{B}]\{\alpha_W^*\} = \{0\} \\ \{\alpha^*\} = [T_\alpha]\{\alpha_W^*\} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$[\tilde{A}] = \begin{pmatrix} [\tilde{C}] & [\tilde{M}] \\ [\tilde{M}] & [0] \end{pmatrix}, [\tilde{B}] = \begin{pmatrix} [\tilde{K}] & [0] \\ [0] & -[\tilde{M}] \end{pmatrix}$$

$$\{\alpha^*\} = \begin{pmatrix} \{U^*\} \\ \{\dot{U}^*\} \end{pmatrix}, [T_\alpha] = \begin{pmatrix} [T] & [0] \\ [0] & [T] \end{pmatrix}$$

Le champ $\{\alpha^*\}$ de dimension $2n$ contient le champ de déplacement et le champ de vitesse. Sous forme d'état, le problème aux valeurs propres se réécrit comme suit :

$$\begin{cases} ([\tilde{A}]\lambda_i + [\tilde{B}]) \{\Phi_{W_i}\} = \{0\} \\ \{\Phi_i\} = [T_\alpha] \{\Phi_{W_i}\} \end{cases} \quad (4.4)$$

On peut noter que

$$[\Phi_W] = \begin{pmatrix} \phi_W & \bar{\phi}_W \\ \phi_W \Lambda & \bar{\phi}_W \bar{\Lambda} \end{pmatrix} \text{ et } [\Phi] = \begin{pmatrix} \phi & \bar{\phi} \\ \phi \Lambda & \bar{\phi} \bar{\Lambda} \end{pmatrix}, \text{ avec } \Lambda = \text{diag}(\lambda) \quad (4.5)$$

La perturbation s'écrit donc :

$$\{\alpha^*\} = \sum_{k=1}^{2n} q_k \{\Phi_k\} e^{\lambda_k t} = \sum_{k=1}^n q_k \{\Phi_k\} e^{\lambda_k t} + \bar{q}_k \{\bar{\Phi}_k\} e^{\bar{\lambda}_k t} = 2 \sum_{k=1}^n \text{Re}(q_k \{\Phi_k\} e^{\lambda_k t}) \quad (4.6)$$

L'amplitude du mode complexe k s'écrit $|q_k e^{\lambda_k t}| = |q_k| e^{\text{Re}(\lambda_k) t}$. Les quantités q_k dépendent des conditions initiales en déplacement et en vitesse issues des perturbations.

Remarque : d'un point de vue théorique, si les conditions initiales sont les champs à l'équilibre, alors les amplitudes q_k sont nulles.

4.1.2 Projection sur la base des modes de stabilité

On a vu comment évoluaient les perturbations des champs de déplacement et de vitesse autour de l'équilibre : elles explosent exponentiellement à partir de l'équilibre dans les directions des modes de stabilité. On s'intéresse au devenir de ces perturbations « loin » de la position d'équilibre. On se pose le problème suivant : si l'on suppose connaître l'évolution des champs solutions du problème non linéaire sur une période donnée, peut-on connaître le rôle de chaque mode de stabilité ? En particulier, peut-on connaître l'effet des non linéarités sur la croissance exponentielle d'un mode instable ? Pour répondre à ces questions, on se propose de projeter les perturbations par rapport à l'équilibre sur la base des modes de stabilité. Les perturbations sont estimées à partir de la solution transitoire calculée au préalable.

Cette projection s'effectue en deux étapes :

Les modes de stabilité vérifient, on l'a vu, les conditions de contact bilatéral sur la zone de contact à l'équilibre. Or, lors de l'évolution transitoire, du décollement est susceptible d'apparaître. Il faut donc se placer dans l'espace des contraintes de contact bilatéral (figure 4.1). On décompose alors le champ de déplacement comme suit :

$$\{U\} = [T] \{U_W\} + [T_J] \{U_J\}, \text{ avec } [T]^T [T_J] = [0]$$

Avec $\{U_W\}$ le champ de déplacement vérifiant le non décollement et $\{U_J\}$ définissant les jeux éventuellement non nuls sous la zone de contact. On peut ensuite calculer $\{U_W\}$ en fonction de $\{U\}$:

$$\begin{aligned} [T]^T \{U\} &= [T]^T [T] \{U_W\} = [H] \{U_W\} \\ \{U_W\} &= [H]^{-1} [T]^T \{U\} \text{ avec } [H] \text{ diagonale} \end{aligned} \quad (4.7)$$

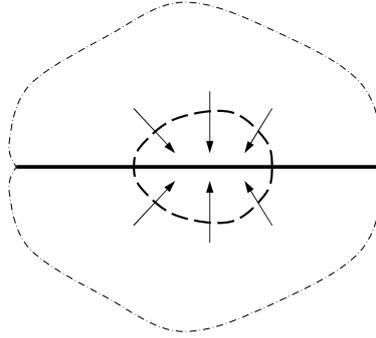


FIG. 4.1 – Projection dans l'espace des champs avec contact bilatéral sur la zone de contact

La même opération doit être faite pour le champ de vitesse $\{\dot{U}_W\}$ en fonction de $\{\dot{U}\}$.

La deuxième étape est de « séparer » les modes de stabilité dans la solution, autrement dit la solution est projetée sur la base des modes de stabilité. On introduit pour cela dans un premier temps le problème aux valeurs propres transposé au problème (4.2) :

$$(\lambda^2[\tilde{M}]^T + \lambda[\tilde{C}]^T + [\tilde{K}]^T) \{\psi_W\} = \{0\} \quad (4.8)$$

Sous forme d'état ce problème aux valeurs propres se réécrit comme suit :

$$([\tilde{A}]^T \lambda_i + [\tilde{B}]^T) \{L_{W_i}\} = \{0\} \quad (4.9)$$

On peut construire par analogie avec (4.5) :

$$[L_W] = \begin{pmatrix} \psi_W & \bar{\psi}_W \\ \psi_W \Lambda & \bar{\psi}_W \bar{\Lambda} \end{pmatrix}$$

Compte tenu du caractère non symétrique des matrices, on utilise la propriété de bi-orthogonalité des bases $[\Phi_W]$ et $[L_W]$, c'est-à-dire que $[L_W]^T [\tilde{A}] [\Phi_W]$ est une matrice diagonale. Cela se traduit par les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i \neq j \quad \{L_{W_i}\}^T [\tilde{A}] \{\Phi_{W_j}\} &= 0 \\ \{L_{W_i}\}^T [\tilde{A}] \{\Phi_{W_i}\} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

On suppose connaître $\{\alpha(t)\}$ sur $[0, T]$ et on calcule le champ perturbé :

$$\{\alpha_W^*(t)\} = \begin{pmatrix} [H]^{-1} [T]^T (\{U(t)\} - \{U_e\}) \\ [H]^{-1} [T]^T \{U(t)\} \end{pmatrix}$$

On projette le champ perturbé $\{\alpha_W^*(t)\}$ sur la base $\{\Phi_W\}$ et on définit les amplitudes modales complexes β_k :

$$\{\alpha_W^*(t)\} = \sum_{k=1}^{2n} \beta_k \{\Phi_{W_k}\}$$

On exploite les relations de bi-orthogonalité (4.10) :

$$\{L_{W_j}\}^T [\tilde{A}] \{\alpha_W^*(t)\} = \sum_{k=1}^{2n} \beta_k \{L_{W_j}\}^T [\tilde{A}] \{\Phi_{W_k}\} = \beta_j \{L_{W_j}\}^T [\tilde{A}] \{\Phi_{W_j}\}$$

L'amplitude modale complexe du mode j , $\beta_j(t)$ est alors :

$$\beta_j(t) = \frac{\{L_{W_j}\}^T [\tilde{A}] \{\alpha_{W_j}^*(t)\}}{\{L_{W_j}\}^T [\tilde{A}] \{\Phi_{W_j}\}} \quad (4.11)$$

Remarques :

- L'objectif de la projection ici est de séparer les contributions des modes de stabilité à la solution. On va le voir dans la suite, cela permettra de calculer des contributions des modes de stabilité à l'énergie vibratoire de la solution transitoire.
- Les relations de bi-orthogonalité (4.10) permettent de généraliser le théorème de projection dans le cas des opérateurs non auto-adjoints. Pour plus de détail, consulter l'ouvrage de L. Meirovitch [49].

À partir des amplitudes modales β_j , on peut reconstruire le champ vibratoire dans la base des modes de stabilité :

$$\{\alpha^*(t)\} = \sum_{k=1}^n (\beta_k(t) \{\Phi_k\} + \bar{\beta}_k(t) \{\bar{\Phi}_k\})$$

$$\{\alpha^*(t)\} = 2 \sum_{k=1}^n \text{Re}(\beta_k(t) \{\Phi_k\}) = 2 \sum_{k=1}^n \text{Re}(\beta_k) \text{Re}(\{\Phi_k\}) - \text{Im}(\beta_k) \text{Im}(\{\Phi_k\}) \quad (4.12)$$

Proche de l'équilibre, on se situe dans le régime linéaire et le module de l'amplitude modale $|\beta_j|$ se confond avec le comportement exponentiel :

$$|\beta_j(t)| = |\beta_j(0)| e^{(\text{Re}(\lambda_j) + i\text{Im}(\lambda_j))t} = |\beta_j(0)| e^{\text{Re}(\lambda_j)t} = |q_j| e^{\text{Re}(\lambda_j)t}$$

Dans le cas d'un mode instable, l'évolution du module de l'amplitude modale dans le temps est représenté schématiquement figure 4.2.

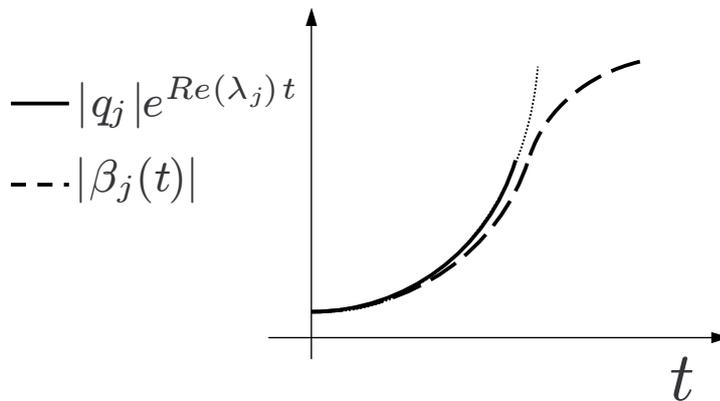


FIG. 4.2 – Évolution du module de l'amplitude modale $|\beta_j|(t)$ pour des perturbations proches de l'équilibre

L'effet des non linéarités sur un mode instable peut donc être examiné via cette projection. Afin de comparer les amplitudes des modes instables entre elles, on propose dans la section qui suit d'exploiter la projection pour calculer les contributions aux énergies des modes de stabilité.

4.1.3 Contributions des modes de stabilité aux énergies

À partir de la décomposition du champ perturbé sur la base des modes de stabilité (équation 4.11), on peut reconstruire le déplacement et la vitesse perturbée comme suit :

$$\begin{aligned} \{U_j^*(t)\} &= 2(\operatorname{Re}(\beta_j(t))\operatorname{Re}(\{\phi_j\}) - \operatorname{Im}(\beta_j(t))\operatorname{Im}(\{\phi_j\})) \\ \{\dot{U}_j(t)\} &= 2(\operatorname{Re}(\beta_j(t))\operatorname{Re}(\lambda_j \{\phi_j\}) - \operatorname{Im}(\beta_j(t))\operatorname{Im}(\lambda_j \{\phi_j\})) \end{aligned} \quad (4.13)$$

La contribution du mode de stabilité j à l'énergie totale perturbée (énergie totale du champ auquel on a retranché l'énergie de la solution stationnaire), à l'énergie de déformation perturbée ainsi qu'à l'énergie cinétique perturbée peut être calculée comme suit :

$$E_{T_j}(t) = E_{d_j}(t) + E_{c_j}(t) = 1/2 \{U_j^*(t)\}^T [K] \{U_j^*(t)\} + 1/2 \{\dot{U}_j(t)\}^T [M] \{\dot{U}_j(t)\} \quad (4.14)$$

Remarques :

- Dans les systèmes symétriques, les amplitudes modales sont liées aux énergies grâce aux propriétés d'orthogonalité par rapport à la masse et la raideur. Ceci permet de comparer les amplitudes modales entre elles. Ici, ce n'est pas le cas et les amplitudes modales servent d'intermédiaire pour calculer les contributions aux énergies grâce aux expressions précédentes.
- Les matrices $[K]$ et $[M]$ étant symétriques, il existe alors des contributions croisées aux énergies non nulles telles que $\{U_j^*(t)\}^T [K] \{U_i^*(t)\}$, dues au fait que les modes de stabilité ne diagonalisent pas $[M]$ et $[K]$. On qualifiera néanmoins d'énergies modales les contributions (4.14). On verra dans les exemples numériques qui suivent que ces contributions croisées ne jouent pas un rôle majeur.
- Sur un exemple de poutre unidimensionnel en situation de frottement sur un tapis roulant, Jung et al. [39] exploitent les solutions analytiques du problème pour construire des opérateurs auto-adjoints à partir des opérateurs non auto-adjoints où les valeurs propres et vecteurs propres sont identiques. Ils définissent alors des pseudo-énergies cinétiques et de déformations où les contributions croisées disparaissent.

4.1.4 Valeur moyenne de l'énergie cinétique modale sur le cycle limite

On s'intéresse à la caractérisation temporelle des modes excités dans le cycle limite. Autrement dit, on cherche à savoir à quelle fréquence vibre un mode excité et quel est son niveau d'énergie cinétique à cette fréquence. Une méthode possible serait de calculer sur le cycle limite les transformées de Fourier de tous les champs de vitesses en tous les points de la structure, puis de calculer l'énergie cinétique en identifiant le vecteur amplitude de vitesse à cette fréquence dans toute la structure.

Grâce à la décomposition sur la base des modes de stabilité, on peut calculer la contribution d'un mode au champ de vitesse. Cette contribution peut être évaluée dans le domaine fréquentiel. La transformée de Fourier de l'amplitude modale complexe (du mode concerné) calculée sur le cycle limite sert d'intermédiaire :

$$\{V(\omega)\} = 2(B_r(\omega)\operatorname{Re}(\lambda \{\phi\}) - B_i(\omega)\operatorname{Im}(\lambda \{\phi\}))$$

$B_r(\omega)$ et $B_i(\omega)$ désignent respectivement les transformées de Fourier sur le cycle limite de $\operatorname{Re}(\beta(t))$ et $\operatorname{Im}(\beta(t))$.

La valeur moyenne sur le cycle limite sur une période T à une fréquence donnée ω de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\langle E_c(\omega) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \{V(\omega, t)\}^T [M] \{V(\omega, t)\} dt \quad \text{avec } \{V(\omega, t)\} = \text{Re}(\{V(\omega)\} e^{j\omega t})$$

ce qui donne :

$$\langle E_c(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{1}{2} \{\bar{V}(\omega)\}^T [M] \{V(\omega)\} \right)$$

4.2 Application à la couche élastique bidimensionnelle

On s'intéresse au glissement d'une couche élastique bidimensionnelle semi-infinie (figure 4.3) présentée au chapitre précédent (les conditions de périodicité en espace sont imposées). L'objectif dans cette section est de caractériser la solution dynamique transitoire à la fois spatialement et temporellement. La caractérisation spatiale est effectuée en projetant la perturbation issue de la solution transitoire sur les modes de stabilité comme indiqué précédemment. Pour cela, on se donne un maillage composé de 25×10 éléments linéaires. L'équilibre stationnaire est calculé ainsi que sa stabilité. On distingue deux cas pour cette caractérisation pour lesquels la stabilité de l'équilibre est identique : le cas de la propagation d'une onde de type glissement / adhérence et le cas de la propagation d'une onde de type glissement / décollement. Les deux types d'ondes sont obtenus en modifiant les paramètres de l'équilibre, le déplacement imposé $\hat{\delta}$ et la vitesse imposée V .

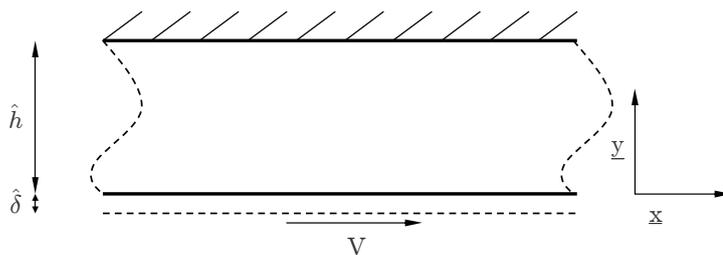


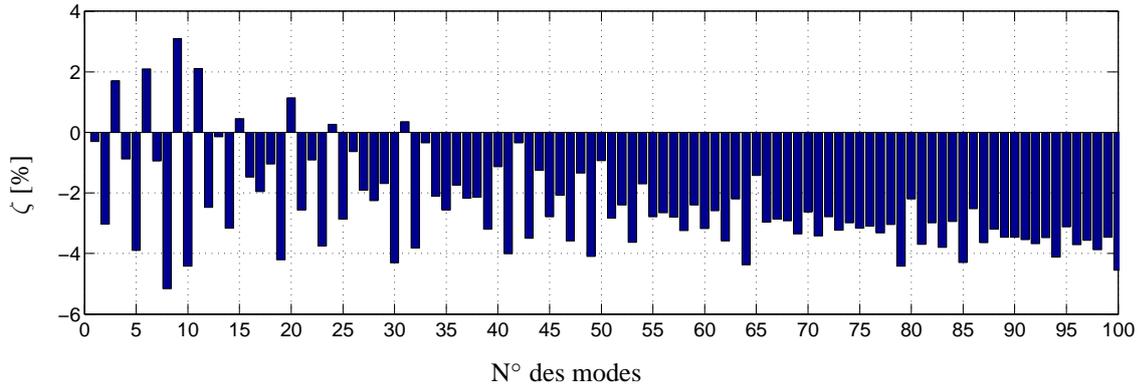
FIG. 4.3 – Glissement d'une couche élastique infinie

Pour l'ensemble des résultats, les paramètres communs suivants ont été choisis : Longueur=0.15 m, Largeur=0.05 m, $E=5 \times 10^9$ Pa, $\nu=0.2$, $\rho=2500$ kg/m³, $\alpha=7.8$ s⁻¹, $\beta=2 \times 10^{-7}$ s, $f=0.3$.

Les résultats de la stabilité de l'équilibre sont montrés figure 4.4 et figure 4.23 (les modes sont calculés pour un critère en énergie ε de 10^{-6}).

4.2.1 Méthode de calcul de la solution transitoire

En tenant compte de la vitesse V du solide rigide, le système non linéaire à résoudre après discrétisation est le suivant :

FIG. 4.4 – Taux de croissance des modes ζ en [%] en fonction des numéros des modes

$$\begin{aligned}
 [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= \{F\} + [P_n]^T \{r_n\} + [P_t]^T \{r_t\} \\
 \{r_n\} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^n}(\{r_n\} - \alpha([P_n] \{U\} - \{g_0\})) \\
 \{r_t\} &= \text{Proj}_C(\{r_t\} - \alpha([P_t] \{\dot{U}\} + \{V\}))
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

L'algorithme (2.23) appliqué au système (4.15) permet d'effectuer un calcul incrémental à partir de conditions initiales données.

4.2.2 Onde de type glissement / adhérence

Les paramètres de chargement choisis utilisés pour mettre en place une onde du type glissement / adhérence sont : $\hat{\delta}=0.2 \times 10^{-3}\text{m}$, $V = 0.1 \text{ m/s}$. Le calcul transitoire est effectué en partant de l'équilibre (la perturbation est de l'ordre du bruit numérique).

Comportement local. La solution converge vers un cycle limite périodique que l'on peut observer figure 4.6. L'évolution temporelle du statut des nœuds de contact est représentée figure 4.17. La vitesse tangentielle en un point de la zone de contact est tracée figure 4.5. La perturbation explose donc jusqu'à ce que la vitesse tangentielle atteigne la vitesse de glissement V . En ce qui concerne les efforts de frottement, la figure 4.7 illustre la phase d'adhérence. La figure 4.8 montre le rapport de la résultante d'effort de contact tangentielle avec la résultante normale. On peut observer deux phases distinctes consécutives : une première période de temps pendant laquelle le statut de contact est le glissement et où le rapport des résultantes vaut f et une seconde période pendant laquelle le cycle limite s'installe. On remarque alors que ce rapport de résultante est inférieur à f et vaut environ 0.21. Ce phénomène illustre la différence entre coefficient de frottement local et coefficient de frottement apparent (global). Cette constatation corrobore les résultats obtenus par Baillet et al. [7] sur la simulation du comportement d'un tribomètre.

Comportement global. La figure 4.9 présente les énergies vibratoires totales en fonction du temps. On remarque que 3 modes émergent significativement, les modes 9, 33 et 1. L'évolution des énergies vibratoires dans le temps nous montre que le mode instable 9 explose jusqu'à apparition de la première adhérence. À cet instant émergent les modes de stabilité 1 et 33 qui sont stables.

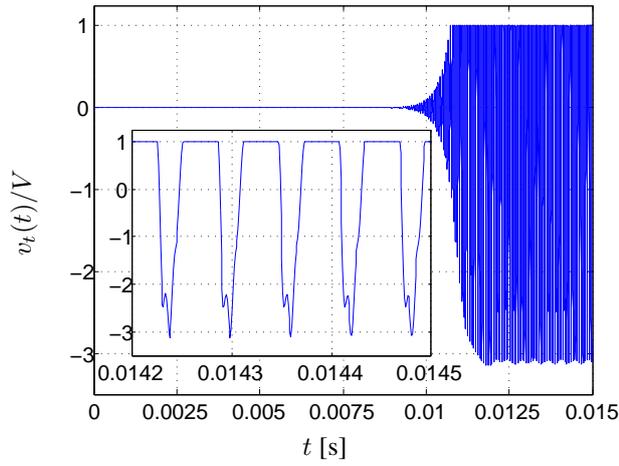


FIG. 4.5 – Vitesse tangente $v_t(t)/V$ en fonction du temps

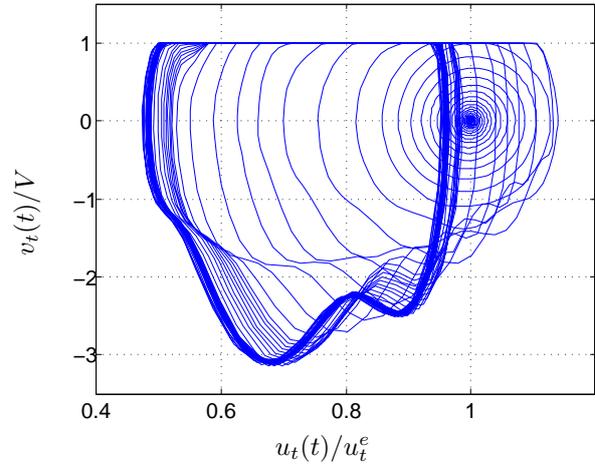


FIG. 4.6 – Diagramme de phase $v_t(t)/V$ en fonction de $u_t(t)/u_t^e$

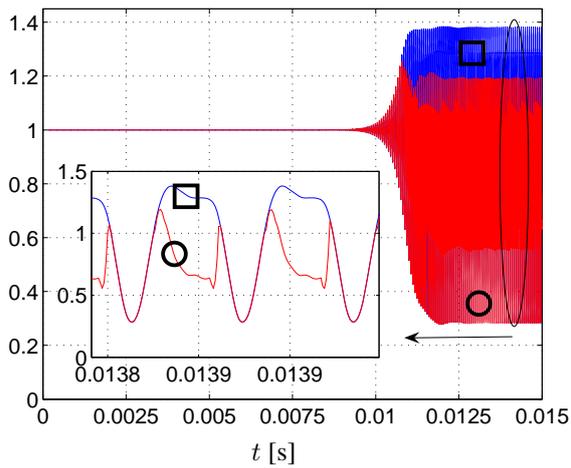


FIG. 4.7 – \square : Effort normal de contact $r_n(t)/r_n^e$, \circ : Effort tangent de contact $r_t(t)/r_t^e$ en fonction du temps

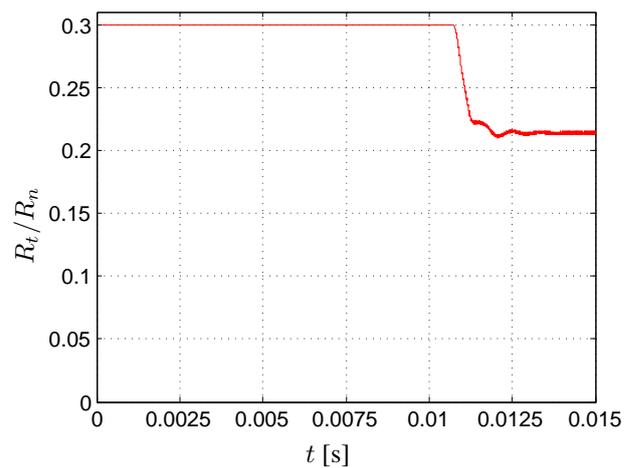


FIG. 4.8 – Rapport des résultantes tangentielles aux résultantes normales R_t/R_n en fonction du temps

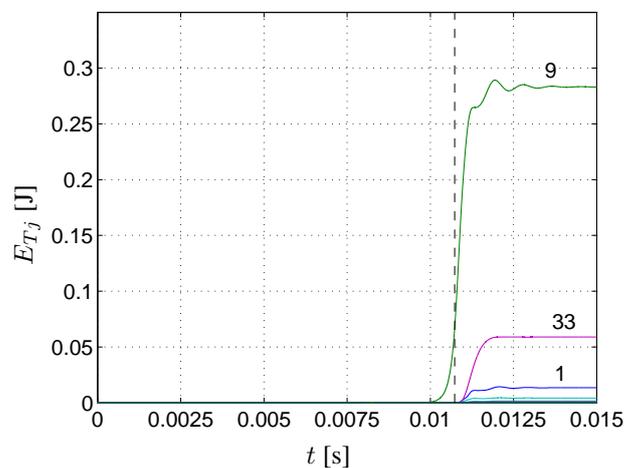
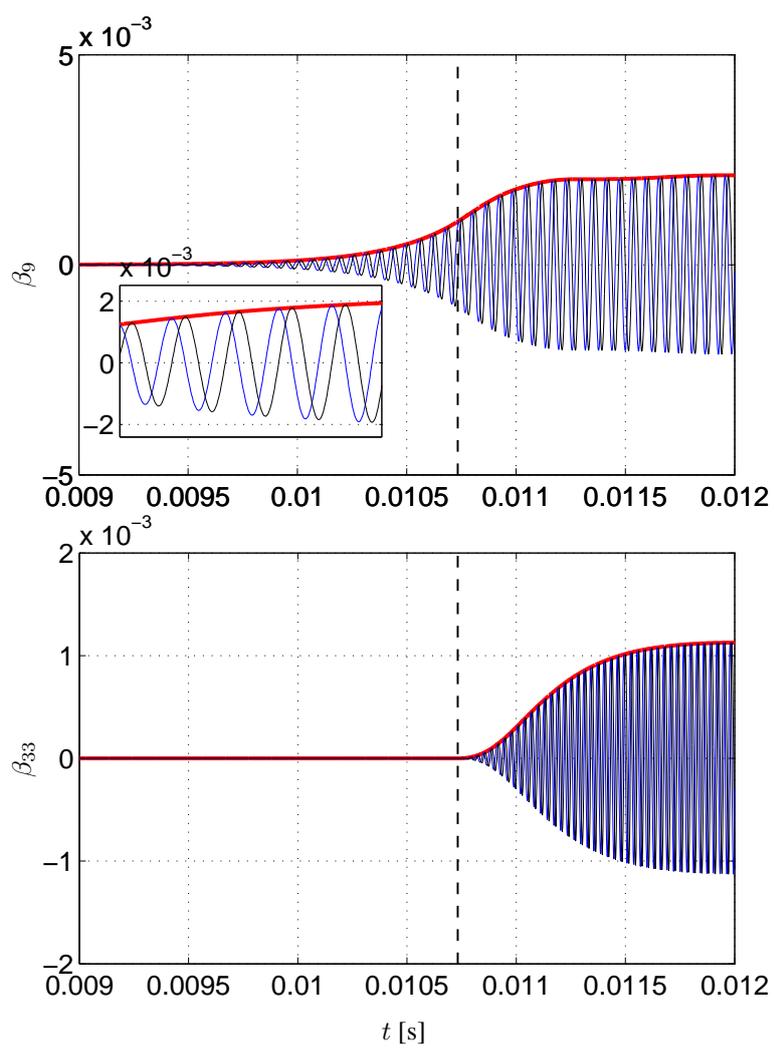


FIG. 4.9 – Énergies vibratoires totales modales E_{Tj} [J] en fonction du temps. Trait vertical : première adhérence

FIG. 4.10 – $|\beta(t)|$, $\text{Re}(\beta)$ et $\text{Im}(\beta)$ pour les modes de stabilité 9 et 33

La figure 4.10 montre les amplitudes modales complexes pour les modes 9 et 33 (modules, parties réelles et imaginaires). Ces amplitudes sont obtenues par projection de la solution transitoire sur les modes de stabilité. Elles montrent la transition du régime linéaire au régime non linéaire pour le mode instable 9. L'apparition du mode 33 du à la non linéarité est observé ici aussi. Les parties réelles et imaginaires de l'amplitude complexe sont déphasées de 90 degrés, ce qui illustre comment l'onde est reconstituée (formule 4.12) à partir des champs réels et imaginaires du mode.

Les déformées des modes de stabilité sont tracées figure 4.23.

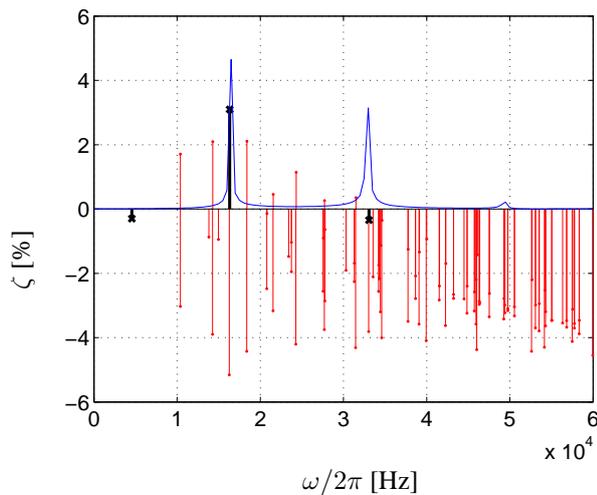


FIG. 4.11 – Taux de croissance ζ en [%] en fonction de la fréquence. \times : taux de croissance des modes 1, 9 et 33. Superposition du spectre de vitesse normale du cycle limite (niveaux non significatifs)

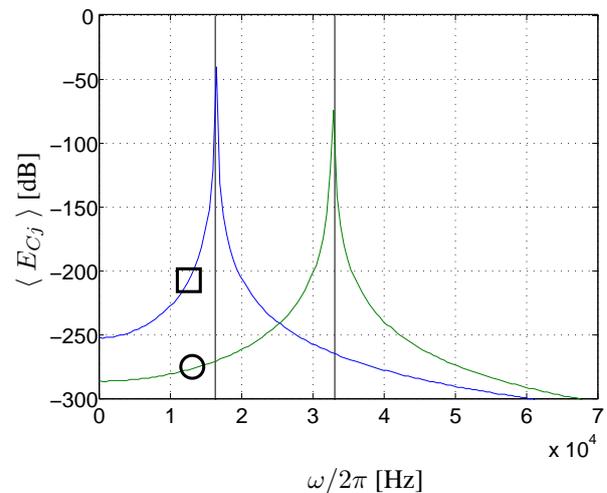


FIG. 4.12 – Énergies cinétique modales des modes \square 9 et \circ 33. en dB (réf :1J)

La figure 4.11 superpose le contenu fréquentiel de la vitesse normale du cycle limite avec les taux de croissance des modes. On remarque que la fréquence du cycle est la fréquence du mode instable qui a le taux de croissance maximal. On remarque aussi la présence d'une fréquence harmonique qui est très proche de la fréquence du mode 33. Les énergies cinétiques modales dans le domaine fréquentiel calculées sur le cycle limite sont tracées figure 4.12. Elles montrent que les deux modes présents vibrent à leur fréquence respective car les pics coïncident avec les fréquences des modes de stabilité.

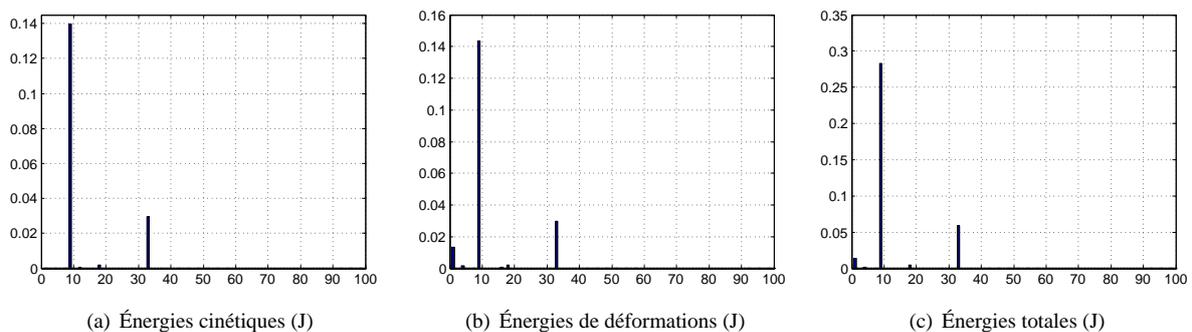


FIG. 4.13 – Contributions modales aux énergies vibratoires perturbées pour chaque mode de stabilité

L'observation des différentes énergies modales à un instant du cycle limite (figure 4.13) montre que le mode 1 ne vibre pas contrairement aux deux autres. La présence de ce mode est due à la chute du coefficient de frottement apparent. Une telle chute crée une correction statique à la perturbation qui introduit la projection d'une partie de l'équilibre sur la base des modes de stabilité. La part la plus importante de cette projection est sur le premier mode.

En conclusion, la solution dynamique converge vers un cycle limite périodique. Énergétiquement, on remarque que c'est le mode à plus fort taux de croissance qui impose la fréquence de vibration du cycle ainsi que le champ spatial. La fréquence harmonique à la fréquence du mode instable exacerbe un mode stable qui vibre. Pour résumer, on peut dire que la structure répond de manière forcée à l'harmonique du mode instable. La présence d'une onde de glissement / adhérence fait chuter le coefficient de frottement apparent qui fait apparaître une composante statique dans la perturbation vis-à-vis de l'équilibre.

4.2.3 Onde de type glissement / décollement

On considère les paramètres de chargements suivants : $\hat{\delta}=0.05 \times 10^{-3}$ m, $V = 0.5$ m/s. Le calcul transitoire est là aussi effectué en partant de l'équilibre (la perturbation est de l'ordre du bruit numérique).

Comportement local. Ces paramètres permettent de mettre en évidence là aussi un cycle limite périodique avec une onde de type glissement / décollement (voir figure 4.16). Les figures 4.14 et 4.15 représentent les diagrammes de phases des quantités cinématiques normales et tangentielles. On peut remarquer que cette fois-ci, ce n'est pas la quantité tangente qui sature la solution puisque $v_t(t)/V$ n'atteint jamais 1. En revanche, le décollement a bien lieu.

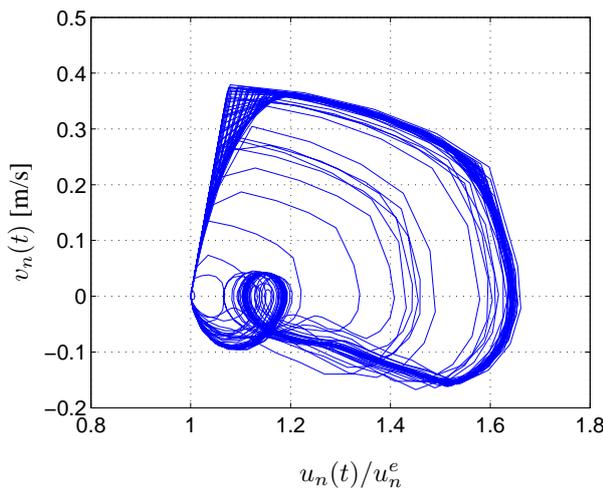


FIG. 4.14 – Diagramme de phase normal $v_n(t)$ en fonction de $u_n(t)/u_n^e$

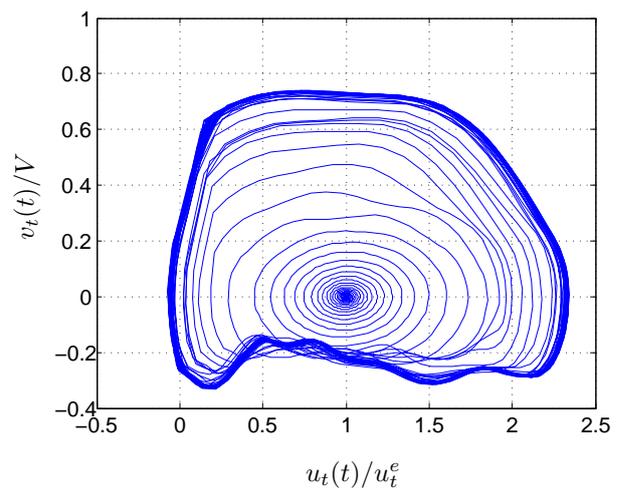


FIG. 4.15 – Diagramme de phase $v_t(t)/V$ en fonction de $u_t(t)/u_t^e$

L'effort normal de contact s'annule ici périodiquement (figure 4.18).

Comportement global. La figure 4.19 montre que cette fois-ci les modes 9, 33, 63 et 80 sont énergétiques. Cette fois-ci, on est en présence de trois harmoniques (figure 4.20) avec 4 modes

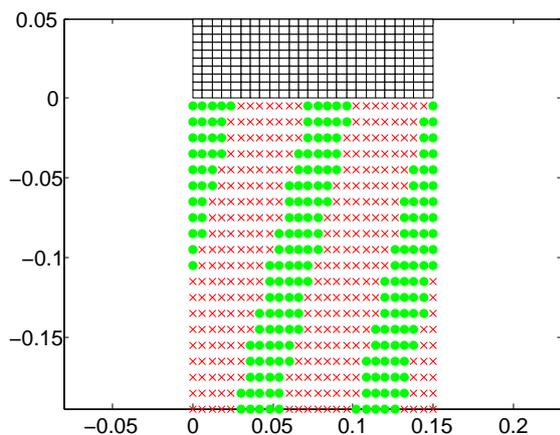


FIG. 4.16 – Onde de surface de type glissement/décollement (× : décollement, o : glissement). Le temps s’écoule de haut en bas

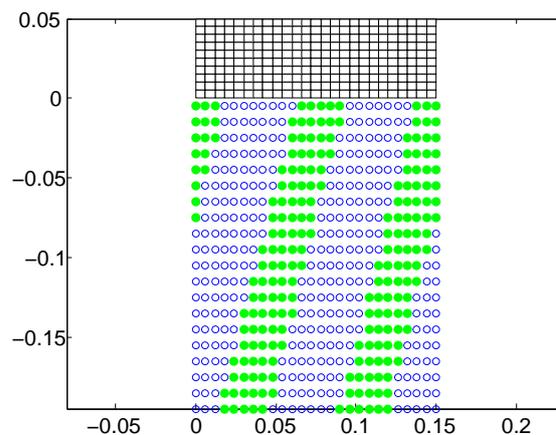


FIG. 4.17 – Onde de surface de type glissement / adhérence (o vide : adhérence, o plein : glissement). Le temps s’écoule de haut en bas

excités. La figure 4.21 nous montre que le premier mode (9) vibre sur la fréquence fondamentale du cycle limite (fréquence proche de celle du mode instable). Le deuxième mode (33) vibre sur la première harmonique et les deux autres modes (63 et 80) vibrent sur la troisième harmonique. Ces deux derniers modes ne vibrent donc pas sur leurs fréquences propres. On reconnaît ici une réponse des modes à une excitation forcée dont les fréquences sont les harmoniques de la fréquence du mode instable 9.

Contrairement au cas précédent, le fait qu’il n’y ait pas de statut adhérent implique l’égalité du coefficient de frottement local avec le coefficient de frottement apparent, ce qui a comme conséquence ici de ne pas faire apparaître le mode 1 dans la solution (figure 4.22).

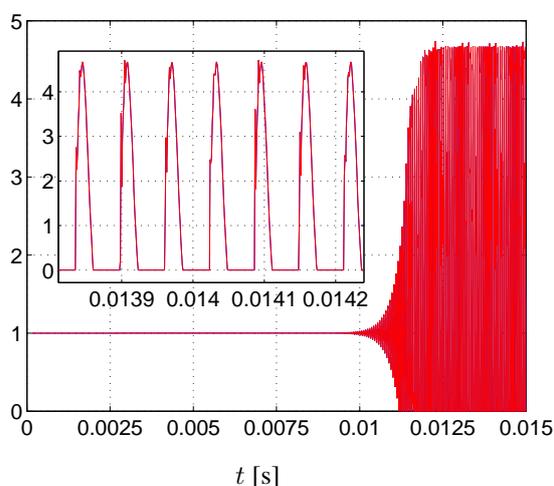


FIG. 4.18 – Effort normal de contact $r_n(t)/r_n^e$ et effort tangent de contact $r_t(t)/r_t^e$ (confondus)

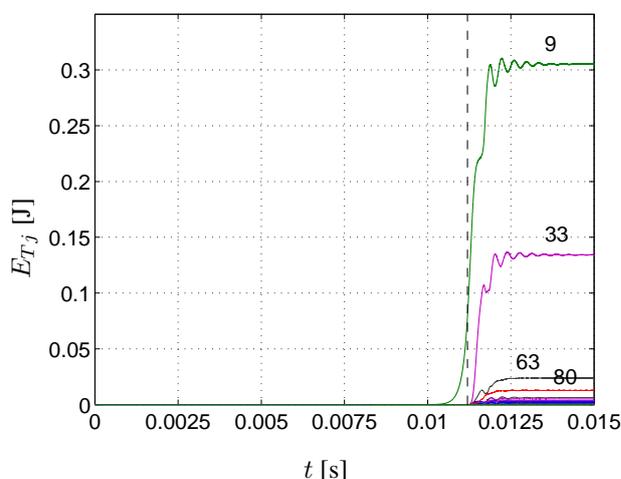


FIG. 4.19 – Énergies totales modales [J] en fonction du temps

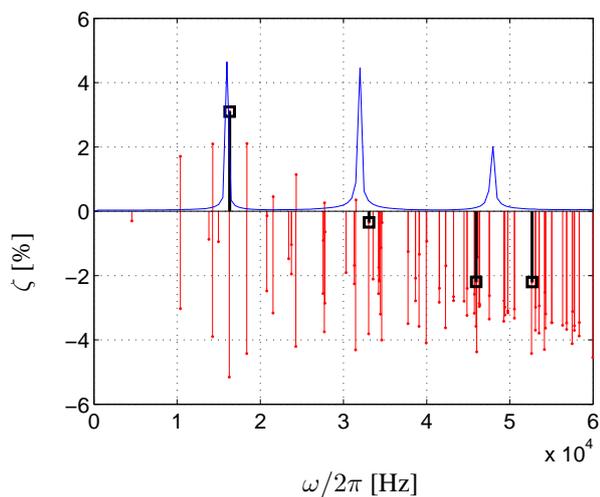


FIG. 4.20 – Taux de croissance ζ [%] en fonction de la fréquence \times : ζ modes 9, 33, 63 et 80.

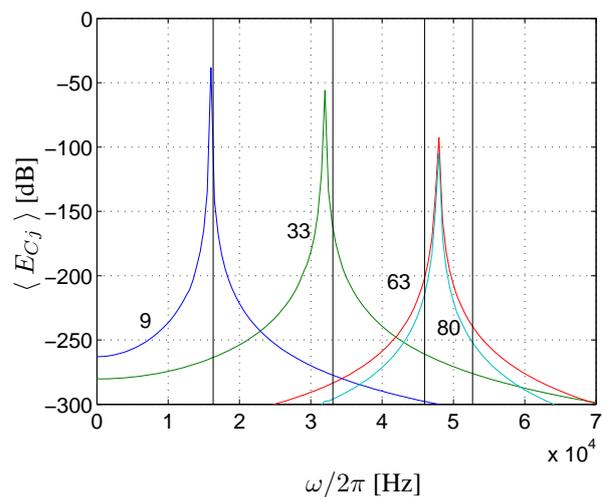


FIG. 4.21 – Énergies cinétiques modales des modes 9, 33, 63 et 80. Les traits verticaux représentent les fréquences des modes de stabilité

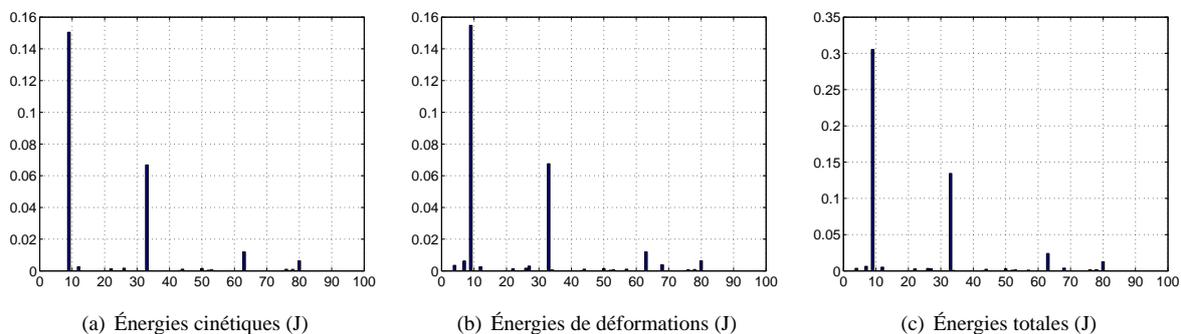


FIG. 4.22 – Contributions modales aux énergies vibratoires perturbées pour chaque mode de stabilité

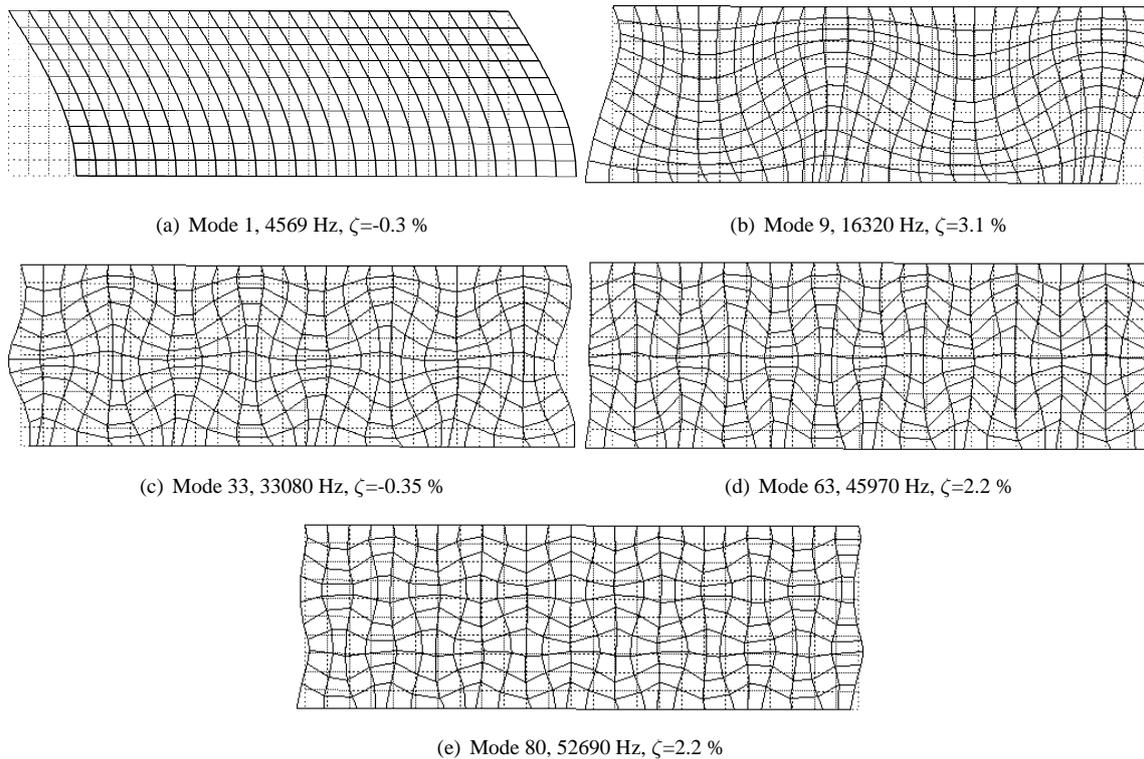


FIG. 4.23 – Modes de stabilité complexes n°1, 9, 33, 63 et 80

4.3 Conclusion

Une méthode originale permettant d'étudier la transition entre l'évolution des perturbations glissantes proches de l'équilibre et l'évolution transitoire loin de l'équilibre a été proposée : la projection de la solution transitoire permet d'étudier l'effet de la non linéarité sur l'amplitude modale d'un mode instable. Cette projection sur la base des modes de stabilité permet aussi de caractériser spatialement la solution. Le cas du glissement d'une couche élastique a été considéré. Deux familles de paramètres de chargement sont étudiées, ce qui permet de mettre en évidence des solutions transitoires périodiques avec propagation d'onde sur la zone de contact de type glissement / adhérence dans un cas et glissement / décollement dans l'autre. Dans les deux cas, c'est le mode à plus fort taux de croissance qui impose la fréquence de vibration du cycle. Les fréquences harmoniques viennent exciter des modes stables qui vibrent à ces mêmes fréquences harmoniques telle une excitation forcée. Dans le cas spécifique de l'onde de surface glissement / adhérence, la chute du coefficient de frottement apparent crée une correction statique à la solution.

Les comportements observés dépendent bien sûr de la géométrie du système et des paramètres physiques. L'objet du chapitre suivant est d'effectuer une étude similaire sur un mécanisme simplifié de frein à disque tridimensionnel dont les propriétés physiques sont choisies à partir des propriétés physiques des constituants du mécanisme de frein TGV.

5 – Application à un modèle simplifié de frein à disque tridimensionnel

On considère dans ce chapitre un modèle simplifié de frein à disque tridimensionnel dont les propriétés physiques des constituants sont choisis à partir de ceux des constituants du TGV.

De nombreux travaux sur le crissement des freins font le lien direct entre les fréquences des modes instables et les fréquences crissantes. Ce raccourci est-il légitime ? Autrement dit, quels rôles jouent les modes instables vis-à-vis des fréquences bruyantes ?

L'objectif de ce chapitre est d'apporter quelques réponses à ces questions sur le cas particulier d'un modèle tridimensionnel. Compte tenu de la complexité apportée par la situation de contact d'un solide déformable avec un autre, il se pose la question de la stratégie de calcul à adopter. En effet, la méthode de projection de la solution transitoire sur la base des modes de stabilité permettant d'étudier la transition entre la perturbation proche de l'équilibre et une solution transitoire loin de l'équilibre impose des contraintes de maillage. On propose ici une formulation eulérienne du problème dans laquelle des hypothèses simplificatrices sont formulées. Cette stratégie permet d'obtenir un maillage géométrique fixe du modèle et de pouvoir effectuer un calcul transitoire et de stabilité sur le même modèle. L'application de la méthode de projection présentée au chapitre 4 est alors possible.

Afin de vérifier la capacité de la stratégie numérique à modéliser du crissement, on propose tout d'abord un premier modèle dans lequel on met en évidence un seul mode instable. L'étude de la solution numérique périodique obtenue permet au regard des résultats expérimentaux et de la littérature de valider en effet la capacité de la stratégie à modéliser du crissement. Un deuxième modèle est proposé mettant en évidence trois modes instables. La projection de la solution sur les modes de stabilité permet de comprendre en partie le comportement du système. Enfin l'influence des conditions initiales est étudiée.

5.1 Description du problème et formulations

5.1.1 Description du problème et formulation eulérienne

On s'intéresse au mécanisme simplifié de frein à disque représenté figure 5.1. On suppose que le train avance à vitesse constante, c'est-à-dire que le disque tourne à vitesse constante Ω . On suppose que les solides ont un comportement élastique linéaire. Le système de freinage est décrit dans le référentiel Galiléen $(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{z})$. Dans un tel référentiel, la garniture G est un solide élastique subissant des petites perturbations. Si \underline{u}_G est le déplacement d'un point de G, \underline{u}_G doit

vérifier :

$$\underline{u}_G \in \mathcal{U}_G$$

$$\int_G \rho_G \underline{u}^* \cdot \underline{u}_{G,tt} d\Omega + \int_G \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A}_G : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}_G] d\Omega = \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r}_G dS + \int_{\partial G_F} \underline{u}^* \cdot \underline{F} dS, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_G^0$$

$$\text{avec } \mathcal{U}_G^0 = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial G_U\} \text{ et } \mathcal{U}_G = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial G_U\}$$

(5.1)

ρ_G et \mathcal{A}_G sont respectivement la masse volumique et le tenseur de Hooke. S_C est la surface de

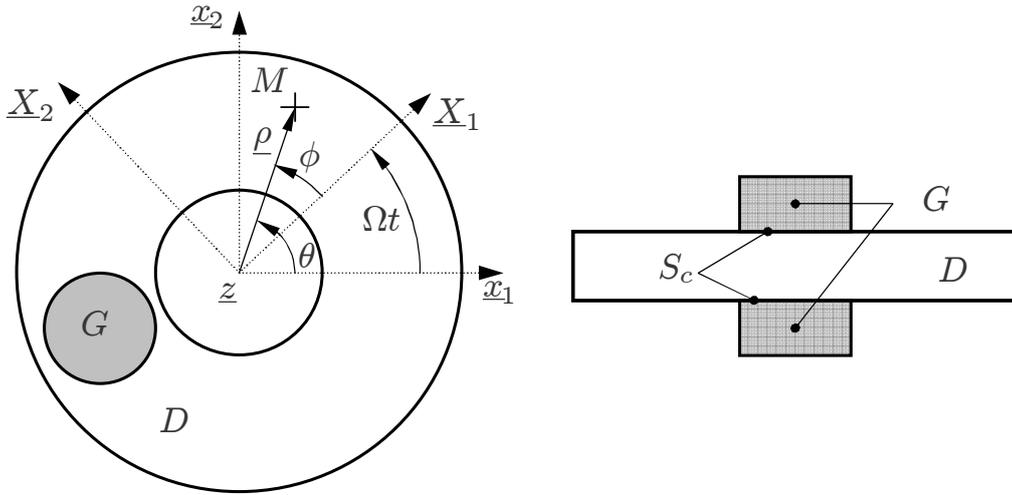


FIG. 5.1 – Notations

contact. ∂G_F désigne la surface de la garniture où l'effort est imposé tandis que ∂G_U désigne la surface où le déplacement est imposé.

Le référentiel $(\underline{X}_1, \underline{X}_2, z)$ est celui où le disque élastique en rotation D subit des petites perturbations. Si \underline{U} est le déplacement d'un point du disque et $\underline{\underline{\Sigma}}$ les contraintes, alors la relation de comportement et l'équilibre s'écrivent dans ce référentiel non Galiléen :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, t) &= \mathcal{A} : \nabla \underline{U}(\underline{X}, t), \quad \text{Div} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{X}, t) = \rho \underline{\Gamma}(\underline{X}, t), \quad \forall \underline{X} \in D \\ \underline{\Gamma} &= -\Omega^2 \underline{\rho} + \underline{U}_{,tt} + 2\Omega z \wedge \underline{U}_{,t} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Afin d'écrire les équations vérifiées par le disque dans un référentiel Galiléen, (comme proposé dans [51]), il est nécessaire d'effectuer le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} \underline{X} &= (r, \phi, z), \quad \underline{x} = (r, \theta, z), \quad \theta = \phi + \Omega t \\ \underline{U}(r, \phi, z, t) &= \underline{u}(r, \phi + \Omega t, z, t) \\ \underline{\underline{\Sigma}}(r, \phi, z, t) &= \underline{\underline{\sigma}}(r, \phi + \Omega t, z, t) \end{aligned}$$

Alors, les relations (5.2) deviennent :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) &= \mathcal{A} : \nabla \underline{u}(\underline{x}, t), \quad \text{Div} \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) = \rho \underline{\gamma}(\underline{x}, t), \quad \forall \underline{x} \in D \\ \underline{\gamma}(\underline{x}, t) &= \Omega^2 (-\underline{\rho} + \underline{u}_{,\theta\theta} + 2z \wedge \underline{u}_{,\theta}) + 2\Omega (\underline{u}_{,\theta t} + z \wedge \underline{u}_{,t}) + \underline{u}_{,tt} \end{aligned} \quad (5.3)$$

La vitesse d'un point du disque devient :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \Omega (z \wedge \underline{\rho} + \underline{u}_{,\theta}) + \underline{u}_{,t} \quad (5.4)$$

Le changement de variable effectué permet de formuler le problème à l'aide d'une description « eulérienne ». L'équation du mouvement du disque s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{u} \in \mathcal{U} \\ \int_D \rho \underline{u}^* \cdot \underline{\gamma}(\underline{x}, t) d\Omega + \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] d\Omega = \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS, \quad \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0 \quad (5.5) \\ \mathcal{U}^0 = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{0} \quad \text{sur} \quad \partial D_U\} \text{ et } \mathcal{U} = \{\underline{u} \mid \underline{u} = \underline{u}^d \quad \text{sur} \quad \partial D_U\} \end{aligned}$$

∂D_U désigne la surface où le déplacement est imposé. En développant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_D \rho \underline{u}^* \cdot \underline{u}_{,tt} d\Omega + 2\Omega \int_D \rho \underline{u}^* \cdot (\underline{u}_{,\theta t} + \underline{z} \wedge \underline{u}_{,t}) d\Omega + \Omega^2 \int_D \rho \underline{u}^* \cdot (\underline{u}_{,\theta\theta} + 2\underline{z} \wedge \underline{u}_{,\theta}) d\Omega \\ + \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}] d\Omega = \int_{S_c} \underline{u}^* \cdot \underline{r} dS + \Omega^2 \int_D \underline{u}^* \cdot \underline{\rho} dS, \quad \forall \underline{u}^* \quad (5.6) \end{aligned}$$

La forme développée de l'équation (5.6) fait apparaître 3 termes dus à la rotation du disque : un terme d'amortissement gyroscopique, un terme de rigidité gyroscopique dans le membre de gauche tandis que dans le membre de droite apparaît un effort volumique centrifuge.

Les deux formulations variationnelles (5.1) et (5.5) permettent de décrire le comportement dynamique de chaque garniture et du disque. Afin de compléter la formulation, les deux solides sont couplés à des conditions de contact unilatéral avec frottement de Coulomb qui sont décrites ci-dessous.

On note g , le jeu entre la garniture et le disque sur la surface de contact et $\underline{w}(\underline{x}, t)$ est la vitesse relative :

$$g = \underline{u} \cdot \underline{n} + \underline{u}_G \cdot \underline{n}_G - g_0, \quad \underline{w}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x}, t) - \underline{u}_{G,t}(\underline{x}, t)$$

$$\underline{r}_n = \underline{r} \cdot \underline{n} = \underline{r}_G \cdot \underline{n}_G, \quad \underline{r}_t = \underline{r} - \underline{r}_n \underline{n}$$

\underline{n} et \underline{n}_G sont respectivement la normale sortante au disque et à la garniture. De même, la vitesse de glissement $\underline{w}_t(\underline{x}, t)$ s'écrit :

$$\underline{w}_t = \underline{w} - \underline{w}_n \underline{n}$$

Les relations de contact unilatéral sont :

$$\underline{r}_n \leq 0, \quad g \leq 0, \quad g \underline{r}_n = 0 \quad \forall \underline{x} \in S_c$$

Les relations concernant le frottement de Coulomb :

$$\begin{aligned} |\underline{r}_t| &\leq -f \underline{r}_n \\ |\underline{w}_t| \neq 0 &\Rightarrow \underline{r}_t = f \underline{r}_n \frac{\underline{w}_t}{|\underline{w}_t|} \end{aligned}$$

Hypothèses simplificatrices : On a vu que la conséquence de la rotation sur la formulation eulérienne est de faire apparaître des termes supplémentaires dans l'équation du mouvement du disque. L'effet des termes convectifs sur la stabilité dynamique des modes de disque en rotation a été examiné notamment par [22] à la fois en condition libre et en condition de frottement avec une poutre. Il en ressort que les effets de la rotation sont prépondérants sur un mode de disque dans le cas où la fréquence de rotation est de l'ordre de grandeur de la fréquence du mode. Or,

on s'intéresse ici à des fréquences de rotation faibles, c'est-à-dire à des fréquences dont l'ordre de grandeur est au moins deux fois inférieur à la fréquence d'un mode.

On se place à faible fréquence de rotation, et les hypothèses suivantes qui conduisent à des simplifications sont formulées :

- On néglige les termes de convection de matière dans l'équation (5.6) ainsi que les efforts volumiques centrifuges. L'accélération de l'expression (5.3) se simplifie alors :

$$\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \underline{u}_{,tt}$$

- L'expression de la vitesse en formulation eulérienne (5.4) peut être simplifiée en enlevant la partie convective $\Omega \underline{u}_{,\theta}$ (hypothèse H) :

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = \Omega(\underline{z} \wedge \underline{\rho}) + \underline{u}_{,t}$$

La vitesse relative devient :

$$\underline{w}(\underline{x}, t) = \Omega(\underline{z} \wedge \underline{\rho}) + \underline{u}_{,t} - \underline{u}_{G,t}$$

Dans la suite, on effectuera ces simplifications qui seront vérifiées a posteriori.

5.1.2 Formulation discrétisée en espace

La formulation eulérienne du problème suggère une discrétisation par la méthode des éléments finis dans laquelle les nœuds des solides en contact sont face à face.

Après discrétisation de l'équation (5.6), on obtient l'équation discrétisée du mouvement du disque :

$$[M_D] \{\ddot{U}_D\} + [C_D^G] \{\dot{U}_D\} + ([K_D^G] + [K_D]) \{U_D\} = \{R\} + \{F_v\} \quad (5.7)$$

Pour la modélisation de l'amortissement physique, on choisit un modèle simplifié de Rayleigh dans lequel on introduit $[C_D] = \alpha [M_D] + \beta [K_D]$. En négligeant les termes gyroscopiques de (5.7) et en introduisant l'amortissement, l'équation du mouvement du disque devient :

$$[M_D] \{\ddot{U}_D\} + [C_D] \{\dot{U}_D\} + [K_D] \{U_D\} = \{R\} \quad (5.8)$$

De même, la discrétisation de (5.1) donne une équation similaire pour chacune des garnitures. On introduit de la même manière la matrice d'amortissement de Rayleigh pour une garniture $[C_G] = \alpha_G [M_G] + \beta_G [K_G]$. Après assemblage des matrices, le système différentiel non linéaire suivant régit l'évolution du système global :

$$\begin{aligned} [M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} &= \{F\} + [P_n]^T \{r_n\} + [P_t]^T \{r_t\} \\ \{r_n\} &= \text{Proj}_{\mathbb{R}^-} (\{r_n\} - \alpha ([P_n] \{U\} - \{g_0\})) \\ \{r_t\} &= \text{Proj}_C (\{r_t\} - \alpha ([P_t] \{\dot{U}\} + \{V\})) \end{aligned} \quad (5.9)$$

L'algorithme (2.23) appliqué au système (5.9) permet une résolution numérique incrémentale du problème.

Remarque : Dans le cas déformable / déformable 3D, $[P_n] \{U\}$ désigne le déplacement normal relatif et $[P_t] \{\dot{U}\}$ désigne la vitesse relative dans le plan de frottement. Le champ $\{V\}$ est calculé à partir de la vitesse de glissement à l'équilibre.

5.1.3 Discrétisation et modes libres de disque

La configuration géométrique du frein simplifié est illustrée figure 5.2. On appelle S_a les surfaces d'accroche des garnitures. Comme précisé précédemment, on effectue un maillage du système global dans lequel il y a compatibilité des maillages des solides au niveau de la zone de contact. On propose un paramétrage du maillage du système global comme suit :

- Nombre d'éléments dans le rayon du disque,
- Nombre d'éléments dans la circonférence du disque,
- Nombre d'éléments dans l'épaisseur du disque,
- Nombre d'éléments dans l'épaisseur de la garniture,
- Nombre d'éléments dans la circonférence de la garniture.

A titre d'exemple, la figure 5.3 montre le maillage [10 60 3 4 24].

Remarque sur l'interpolation élément fini : compte tenu des conclusions obtenues au chapitre 3, dans l'ensemble des modèles éléments finis de freins considérés dans la suite, les éléments finis seront des éléments quadratiques avec linéarisation des éléments sous la zone de contact potentielle. Dans le cas de structures élancées comme des disques en flexion, l'interpolation dans l'épaisseur joue un rôle important sur la convergence des fréquences propres avec le maillage. C'est ce qui motive tout particulièrement ce choix en particulier sur le modèle élément fini « réaliste » TGV du chapitre final.

Modes libres de disques

Avant d'étudier le comportement dynamique du système, on propose une classification des modes de disque libre (uniquement encastré sur le cylindre intérieur). Sur la bande de fréquence [0,10000 Hz], on recense 27 modes, majoritairement de multiplicité 2 (compte tenu de l'axi-symétrie du disque). On dégage 3 familles de modes : les modes axiaux A, radiaux R et circonférentiels C qui sont classés tableau 5.3. Afin d'illustrer la classification, on présente 4 exemples sur les figures 5.4, 5.5, 5.6 et 5.7.

Disque	
Diamètre extérieur	0.6 m
Diamètre intérieur	0.2 m
Épaisseur	0.04 m
Garnitures	
Diamètre	0.16 m
Hauteur	0.04 m
Excentricité	0.2 m

Disque	
Module d'Young E	2.02×10^{11} Pa
Coefficient de Poisson ν	0.29
Masse volumique ρ	7850 kg.m^{-3}
Paramètre d'amortissement α	7.5 s^{-1}
Paramètre d'amortissement β	10^{-7} s

TAB. 5.2 – Caractéristiques physiques

TAB. 5.1 – Caractéristiques géométriques

On propose maintenant d'étudier la dynamique du système couplé dans deux configurations de garnitures : une première dans le cas où un seul mode instable est présent et une configuration où l'on est en présence de trois modes instables.

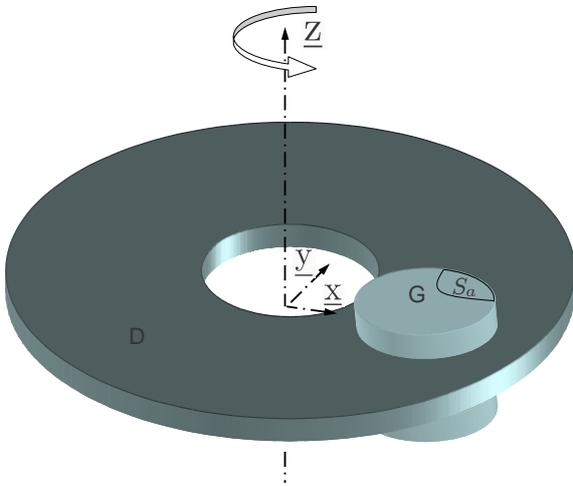


FIG. 5.2 – Géométrie du modèle simplifié de frein

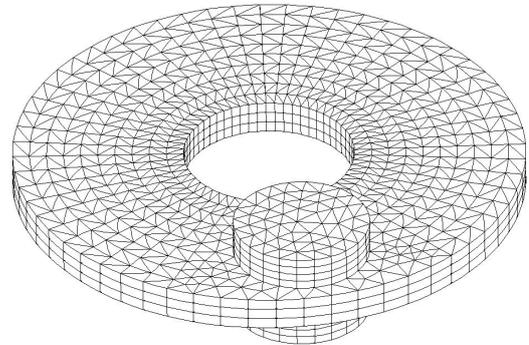


FIG. 5.3 – Maillage du système avec les paramètres [10 60 3 4 24].

Fréq. (Hz)	Type	Cercles nodaux	Diamètres nodaux
749	A	0	1
767	A	0	0
872	A	0	2
1387	A	0	3
1822	C	0	0
2230	A	0	4
3246	R	0	1
3284	A	0	5
4214	A	1	0
4373	A	1	1
4486	A	0	6
4875	A	1	2
5094	R	0	2
5749	A	1	3
5801	A	0	7
6509	R	0	3
6930	C	0	1
6973	A	1	4
7016	R	0	0
7207	A	0	8
7804	C	0	2
8007	R	0	4
8467	A	1	5
8687	A	0	9
9603	R	0	5
9993	C	0	3
10137	A	1	6

TAB. 5.3 – Premiers modes de disque libre - A : axial, R : radial, C : circonférentiel

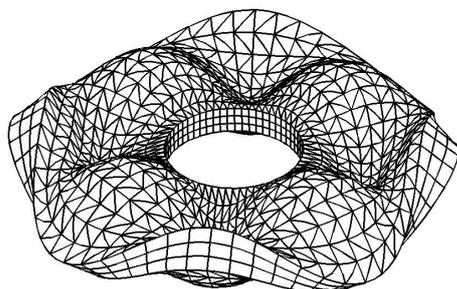


FIG. 5.4 – Mode A1-4

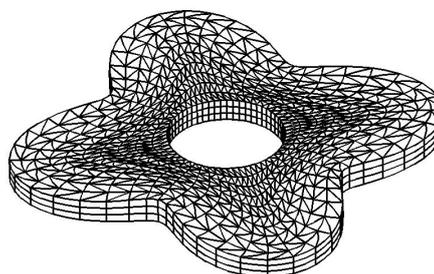


FIG. 5.5 – Mode R0-4

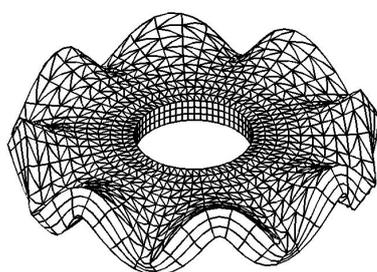


FIG. 5.6 – Mode A0-8

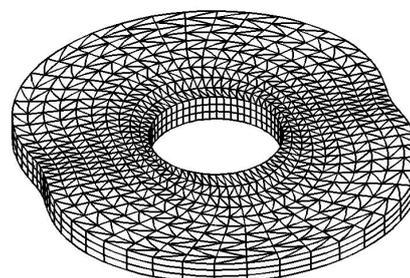


FIG. 5.7 – Mode C0-2

5.2 Configuration avec un seul mode instable

On considère le mécanisme de frein à disque simplifié décrit précédemment. On impose un effort vertical F uniforme sur S_a en imposant que la surface reste horizontale.

Ce mécanisme est discrétisé avec les paramètres de maillage [10 60 3 4 24]. On dispose au total d'un modèle à 45000 ddls. Pour le disque, l'amortissement matériau est choisi de manière à obtenir un taux d'amortissement modal de l'ordre de 0.2 % à 5500 Hz et de rester au dessus de 0.1 % à basse fréquence ($\alpha = 7.5 \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 10^{-7} \text{ s}$). En ce qui concerne les propriétés physiques des garnitures, elles sont résumées dans le tableau 5.4.

Garnitures	
Module d'Young E_G	$1.5 \times 10^9 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson ν_G	0.3
Masse volumique ρ_G	5250 kg.m^{-3}
Paramètre d'amortissement α_G	18α
Paramètre d'amortissement β_G	18β

TAB. 5.4 – Caractéristiques physiques des garnitures

Les paramètres d'amortissement choisis pour les garnitures sont tels que les amortissements modaux sont de l'ordre de 2 % jusqu'à 6000 Hz (supérieurs au dessus). Ce choix est motivé par le fait que l'amortissement matériau est en général assez important dans les garnitures de freins [33].

On se place à faible vitesse de rotation de disque $\Omega = 2.5 \text{ rad/s}$ dans le sens trigonométrique. L'effort F imposé sur les surfaces d'accroche S_a est de 8000 N. Le coefficient de frottement f est choisi égal à 0,35.

5.2.1 Étude de la stabilité de l'équilibre

L'équilibre stationnaire est calculé et la solution en déplacement est représentée figure 5.8.

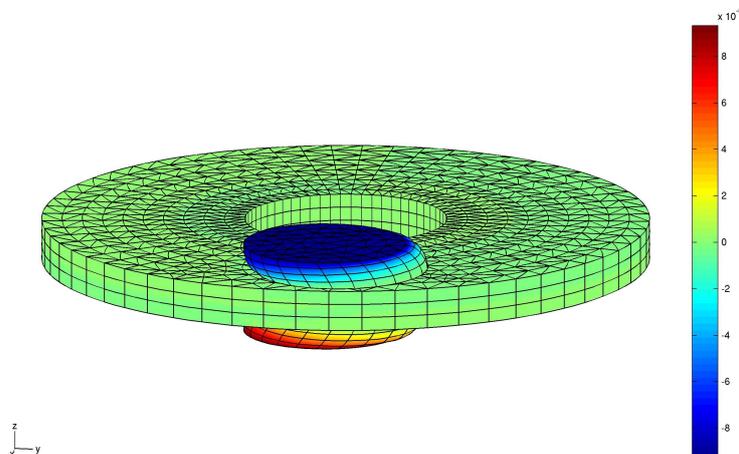


FIG. 5.8 – Solution stationnaire : Déplacements axiaux [m]

La stabilité de l'équilibre est calculée sur les 100 premiers modes correspondant à la plage de fréquence $[0, 6000 \text{ Hz}]$. L'erreur maximale en énergie des modes complexes est fixée à $\varepsilon = 10^{-5}$. Les résultats du calcul de stabilité sont exhibés figures 5.9. La sous-figure (a) montre les taux de croissance modaux dans le cas où l'on considère l'amortissement matériau ainsi que l'effet du frottement plan. On remarque que l'on est en présence d'un seul mode instable n°86 à 5724 Hz dont sa déformée modale est représentée figure 5.10.

La sous-figure (b) montre les taux de croissance modaux dans le cas où l'on néglige l'amortissement matériau. Les deux cas correspondant à la prise en compte ou non de l'effet du frottement plan sont représentés. On remarque que la prise en compte de l'effet du frottement plan a pour conséquence de faire chuter fortement les taux de croissance.

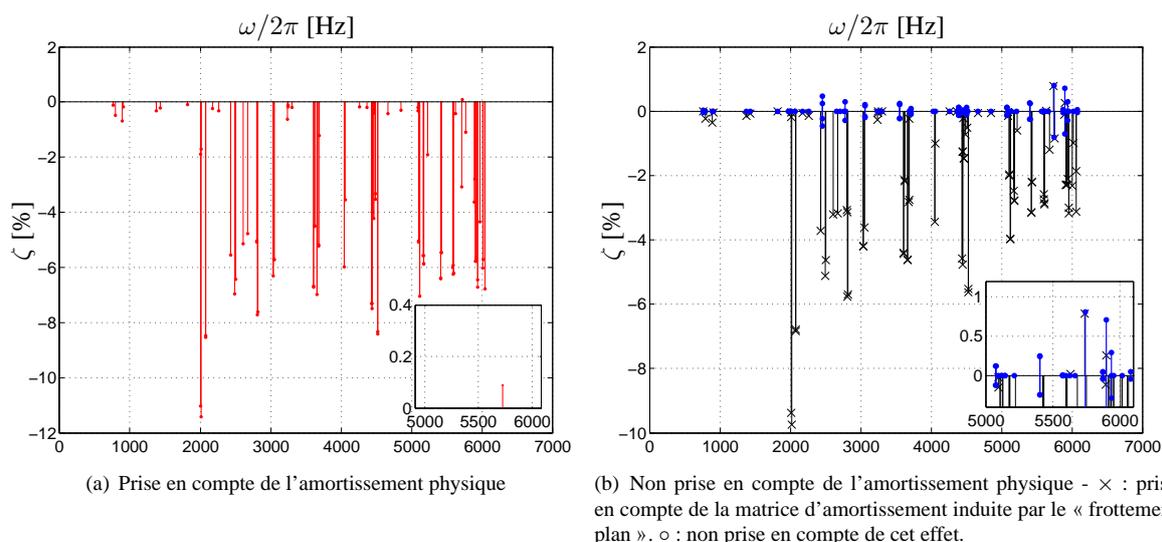


FIG. 5.9 – Taux de croissance modaux ζ [%] en fonction de la fréquence [Hz] avec (a) et sans (b) amortissement physique

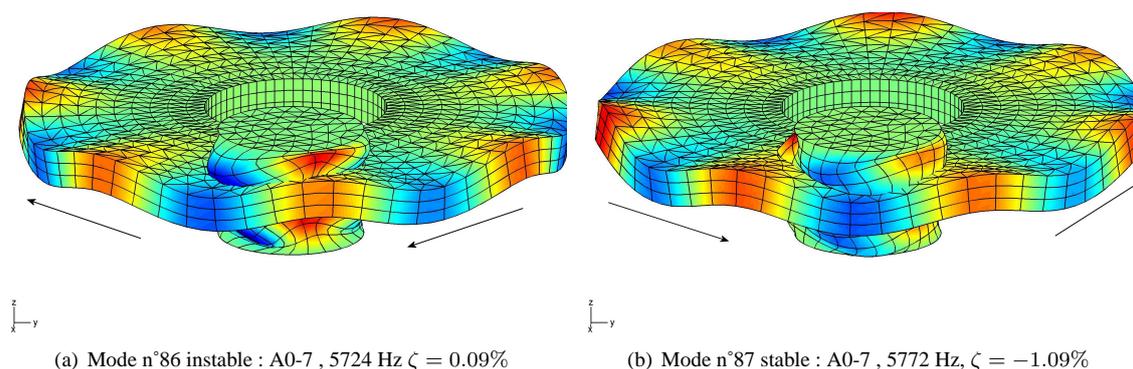


FIG. 5.10 – Modes de stabilité n°86 et n°87 (les couleurs représentent les déplacements verticaux)

Afin de mieux comprendre le couplage des modes par le frottement, la figure 5.11 présente les trajectoires des valeurs propres dans le plan complexe dans le cas où l'on considère tous les effets visqueux et dans le cas où l'on ne considère aucun effet visqueux.

Dans ce dernier cas, on observe qu'à faible coefficient de frottement, les deux modes de stabilité n°86 et n°87 ont des valeurs propres à parties réelles nulles et des fréquences distinctes. L'augmentation du coefficient de frottement rapproche ces deux modes jusqu'à ce que les fréquences se confondent : les deux modes se couplent. En ce point, le coefficient de frottement est dit critique et vaut 0,017. Une valeur propre devient à partie réelle positive et l'autre négative. Un mode devient donc instable et l'autre se stabilise. Au point de bifurcation dynamique, le mode instable se met à tourner dans le sens inverse au sens de rotation du disque et le mode stable dans le sens de rotation du disque.

Lorsque l'on considère les effets visqueux, les choses sont différentes : à coefficient de frottement faible, les fréquences sont distinctes et les taux de croissance sont négatifs et distincts eux aussi. L'augmentation du coefficient de frottement rapproche les fréquences des deux modes jusqu'à $f=0.05$. En ce point, les modes se mettent à tourner (figure 5.10). Les fréquences des modes s'écartent ensuite, les taux de croissance augmentant pour le mode n°86 et diminuant pour le mode n°87. Lorsque f vaut 0.32, le mode n°86 devient instable par flottement et le coefficient de frottement est dit critique.

Remarque : Les coefficients de frottement critiques sont très différents. Dans le cas non visqueux, il dépend exclusivement de l'écart sur les fréquences propres des modes n°86 et n°87 créé par la présence des garnitures (qui brisent l'axisymétrie des modes libres de disque). Dans le cas visqueux, ce coefficient dépend en plus de l'amortissement matériau qui fait chuter les taux de croissance modaux. La prise en compte de l'amortissement matériau rend réaliste l'ordre de grandeur du coefficient de frottement critique. En effet, en dessous du coefficient de frottement critique, le système est stable et instable au dessus. Il est donc lié à l'occurrence du crissement dont le lien est fait quantitativement avec le coefficient de frottement dans l'état de l'art avec Bergman et al. [15].

5.2.2 Étude de la solution transitoire non linéaire

On cherche dans cette section les solutions dynamiques des équations non linéaires. On s'intéresse en particulier au devenir du mode instable caractérisé précédemment. Dans ce but,

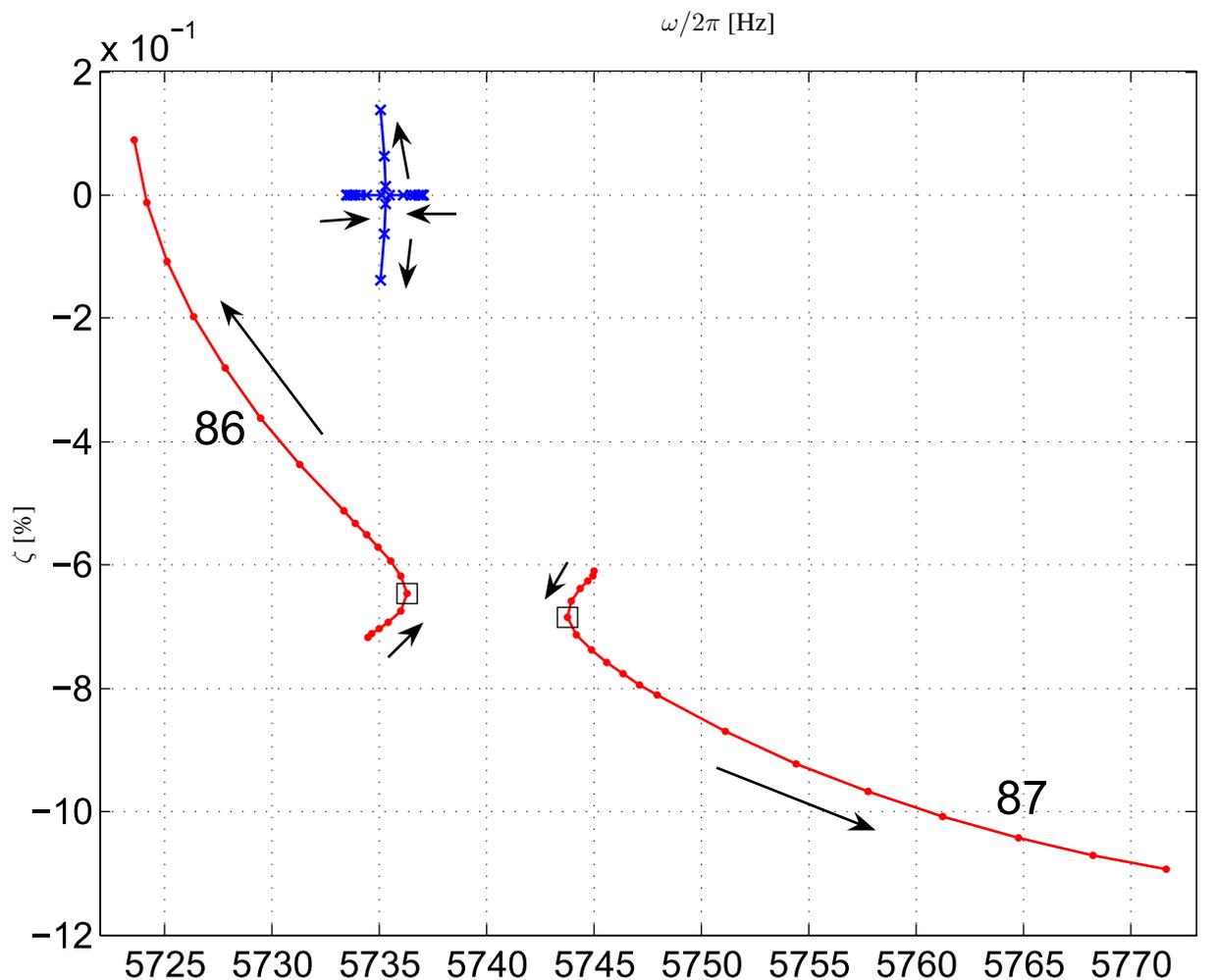
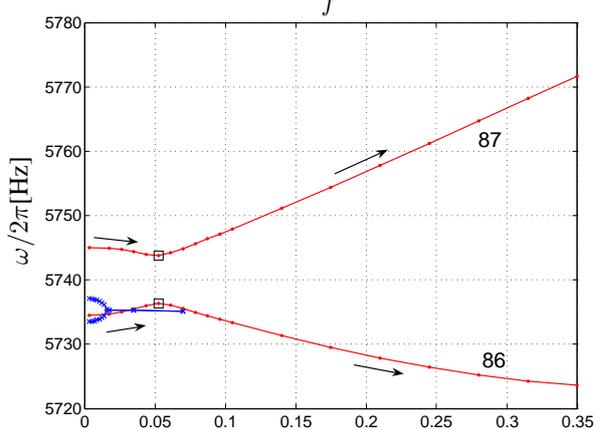
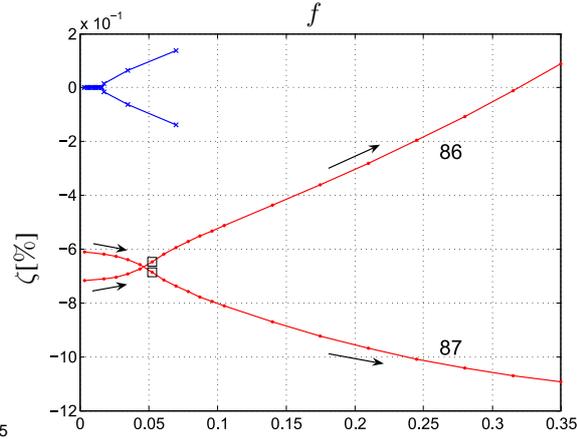
(a) Trajectoires dans le plan complexe des valeurs propres lors de la variation de f (b) Fréquences des modes en fonction de f (c) Taux de croissance des modes en fonction de f

FIG. 5.11 – Diagrammes de bifurcation caractérisant l'instabilité dynamique par couplage de mode des modes 86 et 87. \circ : Prise en compte de l'amortissement physique, \times : Non prise en compte de l'amortissement physique ni des effets visqueux dus au « frottement plan ». \square : Point des courbes où la rotation des modes complexes apparaît lorsque f croît

on choisit comme condition initiale de se placer sur ce mode. Les champs de déplacement et de vitesse initiaux sont tels que le maximum (sur le champ total) de la vitesse tangentielle n'excède pas 10 % de la vitesse maximum à l'équilibre.

Le calcul transitoire est effectué sur 0.1 s avec $h = 2.5 \times 10^{-6}$ s et $\theta = 0.5$. En terme de coûts de calculs, il a nécessité 40000 itérations en 16 heures environ.

Comportement global. L'énergie totale perturbée est représentée figure 5.12. La figure 5.15 montre l'évolution des contributions des modes de stabilité aux énergies totales perturbées E_{T_j} au cours du temps. Sur ces figures, la ligne pointillée verticale situe l'instant où le statut de glissement change : il y a décollement. La solution converge vers un cycle limite et on remarque qu'à terme, le mode instable reste prédominant dans la solution. La figure 5.13 montre le champ de déplacement dans le cycle limite. On remarque une rotation du champ vibratoire dans le sens contraire à la rotation du disque avec un décollement sous la zone de contact. On peut remarquer (figure 5.12 et figure 5.15), que la projection de la solution sur le mode instable contribue à plus de 95 % à l'énergie totale perturbée. L'amplitude modale complexe du mode instable est visualisée figure 5.14. L'effet du décollement sous la zone de contact a pour effet de saturer l'explosion du mode instable avec un effet de retard par rapport à l'instant du premier décollement. La figure 5.16 montre l'évolution du décollement des garnitures par rapport au disque tous les 10 pas de temps.

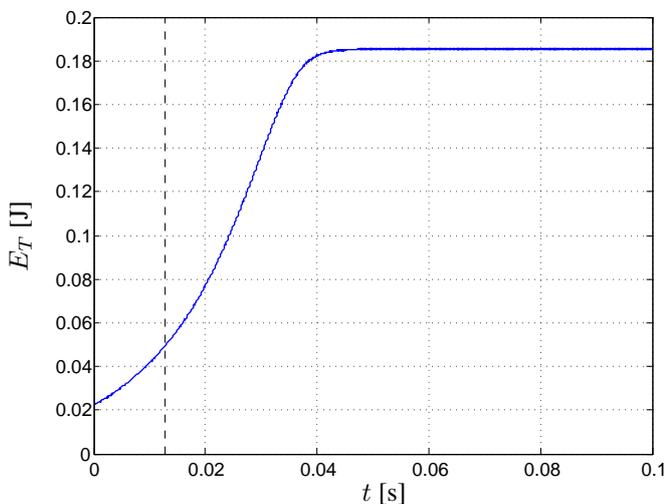


FIG. 5.12 – Energie totale perturbée $E_T(t)$

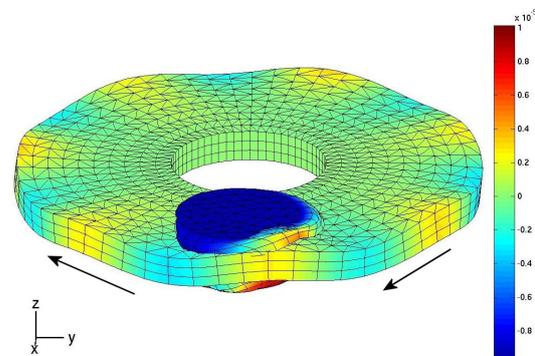


FIG. 5.13 – Champ de déplacement global dans le cycle limite [m] : Décollement sous la zone de contact

Comportement local. L'observation des quantités cinématiques montre que la solution dynamique est périodique. On présente figures 5.17, 5.18, 5.19, 5.20 et 5.21 les déplacements relatifs et les vitesses relatives dans les directions tangentielles (orthoradiales ici) et normales en un point de contact de la face supérieure du disque (figure 5.26). Ces figures mettent en évidence la propagation d'une onde de type « glissement / décollement » sous la zone de contact.

Une quantité intéressante est l'amplitude de la vitesse normale en un point loin de la zone de contact (rayon extérieur du disque). On trouve une amplitude de 13.6 cm/s (figure 5.23). En régime établi, la pression en champ proche est reliée à la vitesse vibratoire par :

$$p = \rho cv$$

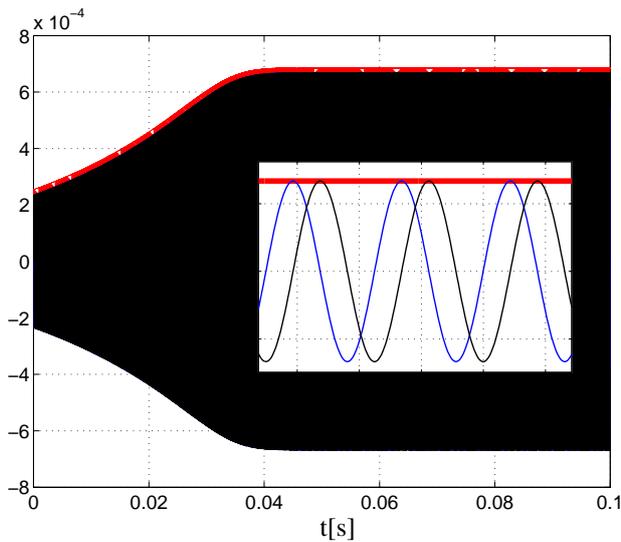


FIG. 5.14 – Amplitude modale complexe du mode 86, $|\beta_{86}(t)|$, $\text{Re}(\beta_{86}(t))$ et $\text{Im}(\beta_{86}(t))$

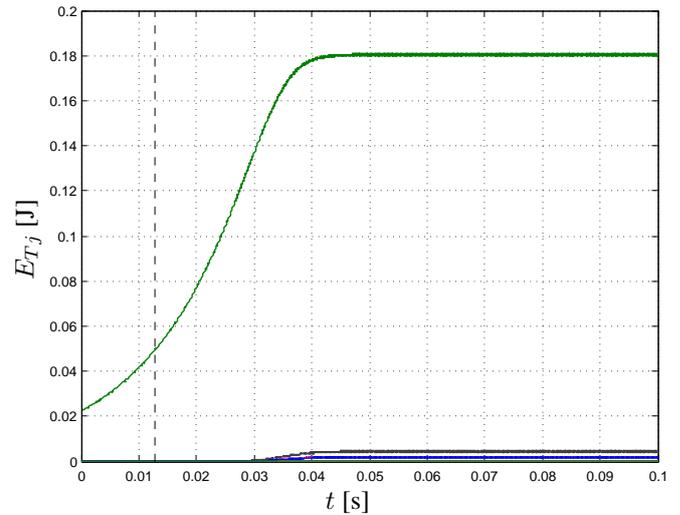


FIG. 5.15 – Energies totales perturbées modales E_{T_j} [J] en fonction du temps [s]

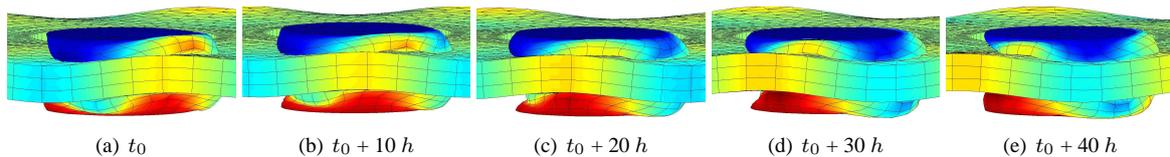


FIG. 5.16 – Evolution de l'onde de surface : déplacements axiaux (échelle de couleur identique à la figure 5.13)

On obtient alors une pression acoustique en champ proche de 127 dB (réf $20 \mu\text{Pa}$).

La figure 5.24 nous montre que la vitesse normale au disque vibre quasiment à la fréquence du mode instable c'est-à-dire 5724 Hz.

Les amplitudes de déplacements axiaux peuvent être visualisées figure 5.13. Loin de la zone de contact, on atteint sur la périphérie du disque une amplitude de l'ordre de $2 \mu\text{m}$. Le jeu maximal entre la garniture et le disque est de l'ordre de $3.5 \mu\text{m}$ (figure 5.19).

Afin d'avoir un aperçu des effets tridimensionnels sur les quantités cinématiques, on a représenté les trajectoires périodiques d'un point sous la zone de contact appartenant à la garniture (figure 5.25) et appartenant au disque (quantité eulérienne, c'est à dire associée à un point géométrique fixe lors de la rotation du disque) (figure 5.27). La figure 5.29 présente le déplacement relatif en fonction du temps. Dans l'ensemble de ces figures, les croix rouges représentent les quantités associées à la solution stationnaire. Le trait vert représente la direction du vecteur vitesse de glissement à l'équilibre.

L'extrémité du vecteur réaction de contact est représenté figure 5.28. On met en évidence ici la faible variation de l'effort de frottement dans le plan de frottement. Autrement dit, la direction du vecteur effort de frottement oscille avec une faible amplitude autour de la direction de l'effort de frottement à l'équilibre (direction orthoradiale).

On a vu que sous la zone de contact se propage une onde de type « glissement / décollement ». Afin de caractériser l'aspect surfacique de l'onde, on propose à différents instants de montrer figure 5.30 le statut des nœuds de la surface de contact entière. On peut voir à gauche le statut des nœuds de la surface supérieure du disque et respectivement à droite pour les nœuds de la

surface inférieure. On observe que le décollement (en rouge) s'effectue sur le bord de la garniture et que ce décollement de la garniture supérieure est en opposition de phase avec celui de la garniture inférieure.

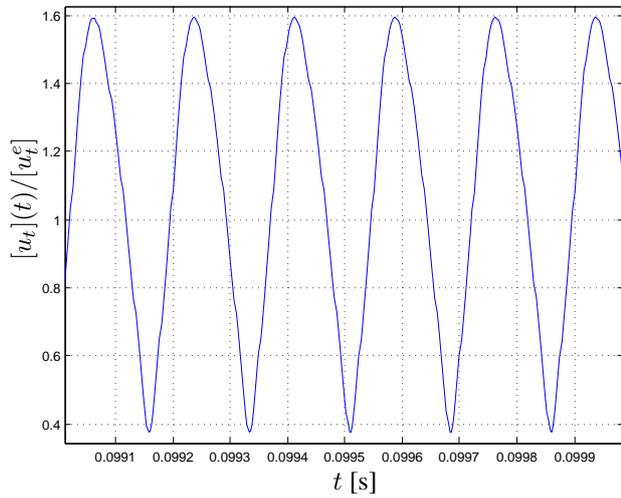


FIG. 5.17 - $[u_t](t)/[u_t^e]$

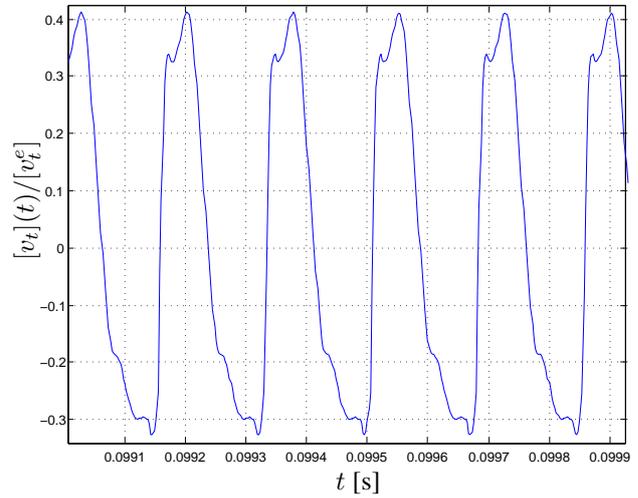


FIG. 5.18 - $[v_t](t)/[v_t^e]$

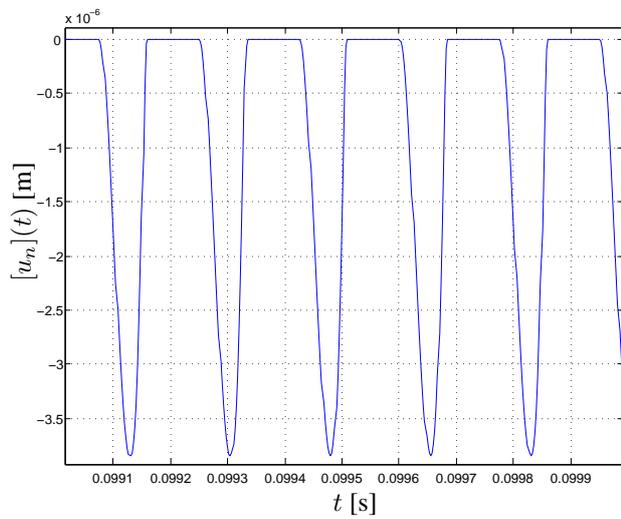


FIG. 5.19 - $[u_n](t)$

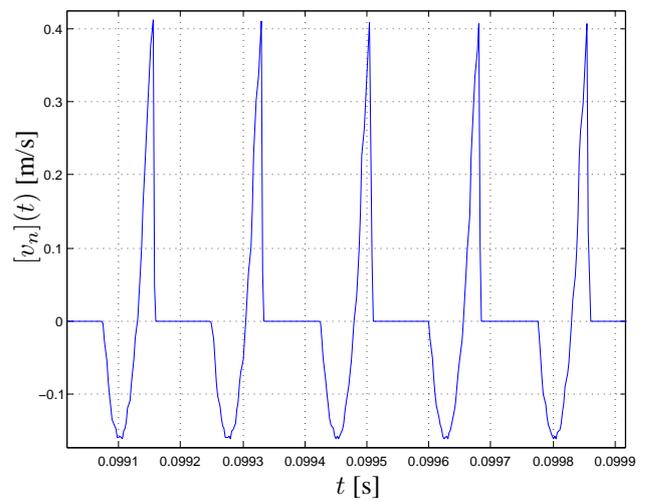


FIG. 5.20 - $[v_n](t)$

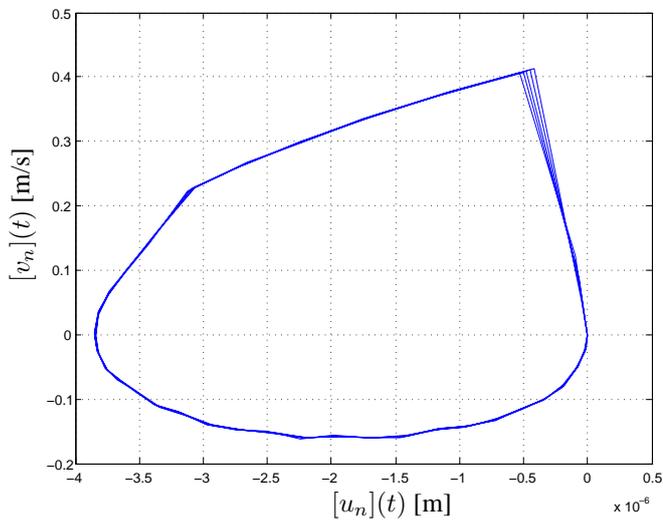
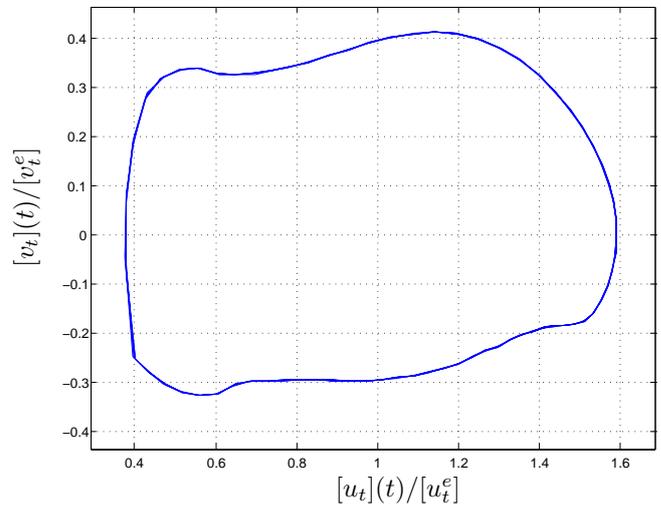
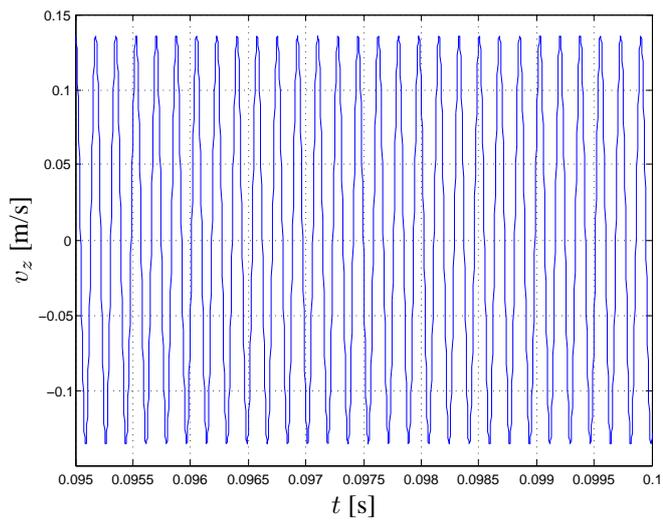
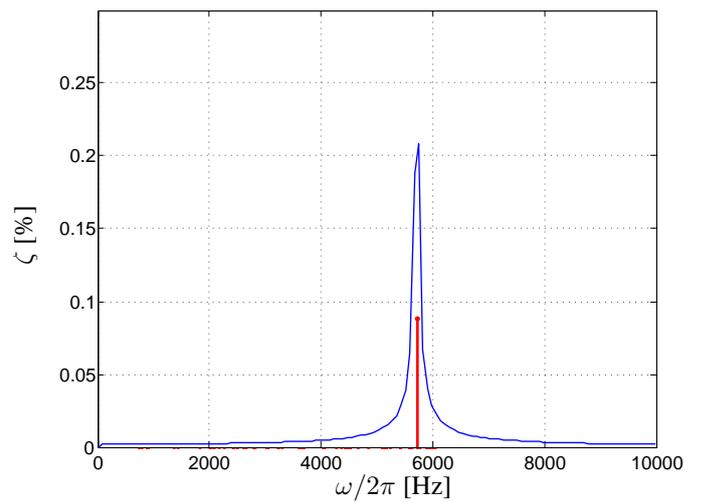
FIG. 5.21 – $[v_n](t)$ en fonction de $[u_n](t)$ FIG. 5.22 – $[v_t](t)/[v_t^e]$ en fonction de $[u_t](t)/[u_t^e]$ 

FIG. 5.23 – Vitesse normale d'un point loin de la zone de contact

FIG. 5.24 – ζ [%] en fonction de la fréquence (en rouge) et FFT de la vitesse normale loin de la zone de contact (niveau arbitraire)

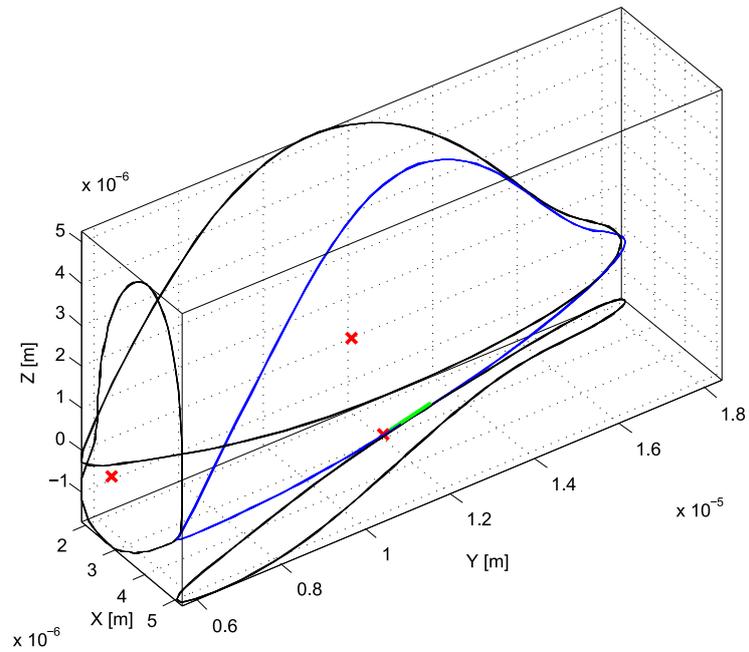


FIG. 5.25 – Trajectoire dans le repère global d'un point de contact de la garniture

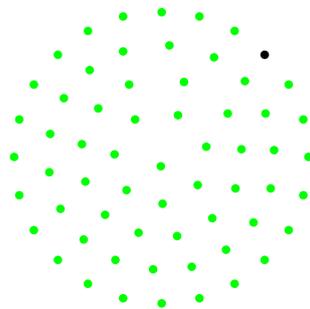


FIG. 5.26 – Point d'observation (en noir). Face supérieure du disque, vue de dessus

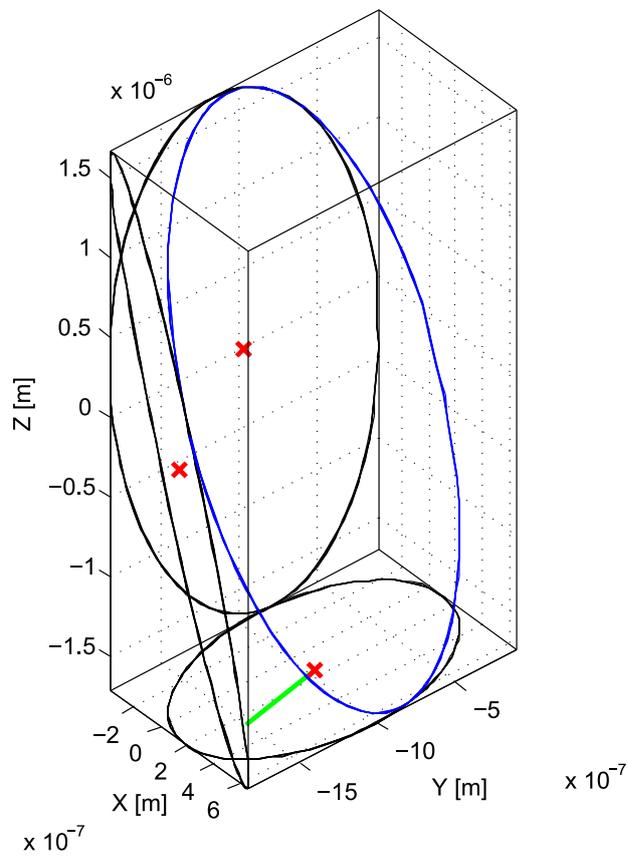


FIG. 5.27 – Trajectoire dans le repère global d'un point de contact du disque

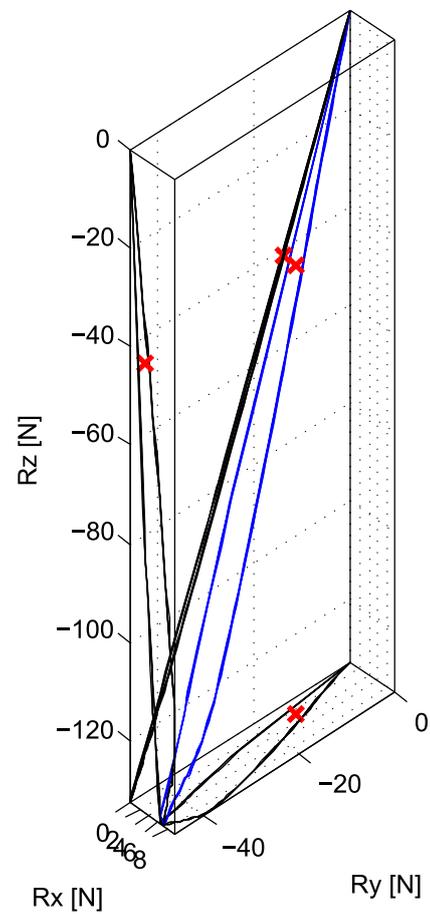


FIG. 5.28 – Extrémité du vecteur effort nodal de contact dans le repère global

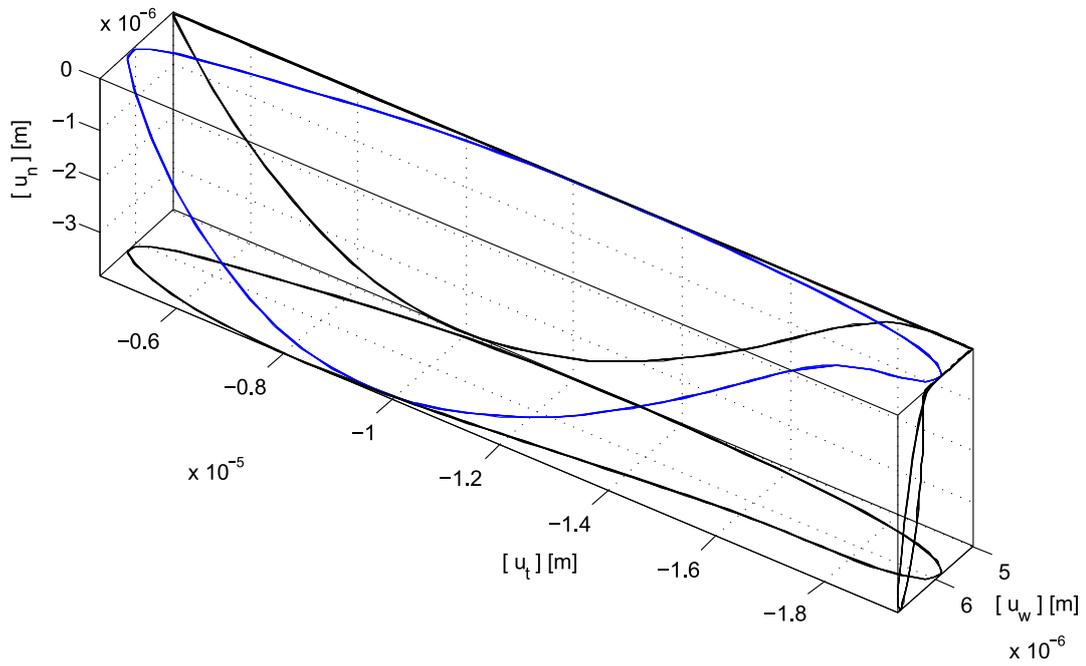


FIG. 5.29 – Déplacements relatifs

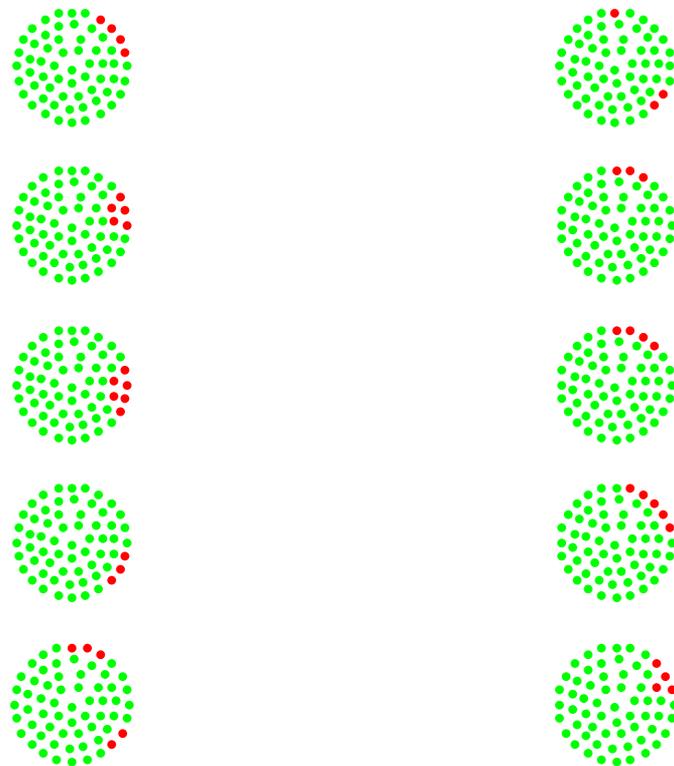


FIG. 5.30 – Évolution du statut des nœuds de contact (face supérieure à gauche et face inférieure à droite). Le temps s'écoulant de haut en bas

5.2.3 Vérification des hypothèses

À la lumière de ces résultats numériques, il faut vérifier les hypothèses de calcul qui sont :

- l’hypothèse de petites perturbations, à savoir : $\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| \ll 1$ et $\|\underline{u}\| \ll 1$
- l’hypothèse H précédente qui consiste à négliger le terme de convection de matière devant les vitesses associées à la rotation de corps rigide, ce qui revient à supposer que : $\|\underline{u}_{,\theta}\| \ll \|\underline{r}\|$ sur la zone de contact du disque.

Les figures représentant les champs de déplacement montrent que l’hypothèse $\|\underline{u}\| \ll 1$ est clairement vérifiée. En ce qui concerne le champ de déformation, on a calculé et représenté figure 5.31 dans toute la structure $\|\underline{\underline{\varepsilon}}\| = \sqrt{\underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}}$ à un instant du cycle limite périodique.

On obtient $\max(\|\underline{\underline{\varepsilon}}\|) < 4.10^{-5}$.

En ce qui concerne l’hypothèse H, la figure 5.32 montre le rapport $\|\underline{u}_{,\theta}\|/\|\underline{r}\|$ dans le disque et en particulier sur la zone de contact.

On obtient $\max(\|\underline{u}_{,\theta}\|/\|\underline{r}\|) < 2.10^{-4}$.

On a vérifié ainsi les deux hypothèses de calcul de cette formulation eulérienne.

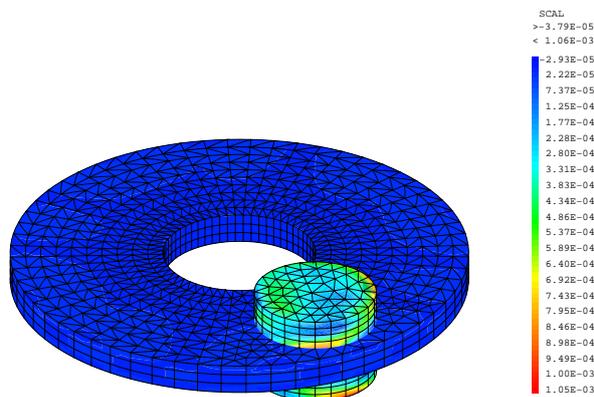


FIG. 5.31 – $\|\underline{\underline{\varepsilon}}\|$

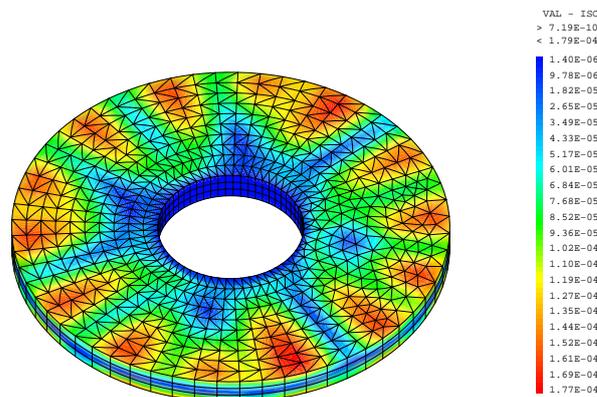


FIG. 5.32 – $\|\underline{u}_{,\theta}\|/\|\underline{r}\|$

5.2.4 Bilan des résultats

Au regard des résultats numériques obtenus dans cette configuration, on peut retenir les résultats essentiels suivants :

- Le coefficient de frottement critique vaut 0.32. Le frottement couple deux modes de disque (proches de modes de disque doubles). Le mode instable est un mode tournant.
- La solution non linéaire obtenue est une solution périodique qui fait apparaître une rotation d’onde. Le champ vibratoire est un champ à 7 diamètres nodaux dont la fréquence caractéristique est de 5724 Hz.
- Le niveau acoustique en champ proche est de 127 dB
- L’amplitude de déplacement axial sur la périphérie est de $2 \mu\text{m}$

Au regard des résultats de la littérature mentionnés dans l’état de l’art, ces résultats numériques montrent que la stratégie numérique utilisée ici sur un modèle simplifié de frein à disque permet de modéliser du crissement.

5.3 Configuration avec plusieurs modes instables

On considère le mécanisme simplifié de frein à disque défini figures 5.1 et 5.1. Les surfaces S_a sont encastrées suivant \underline{x} et \underline{y} . Dans la direction \underline{z} , on impose un déplacement δ sur chaque surface d'accroche de manière à venir serrer le disque. Le maillage du système est du type [6 25 3 3 12], ce qui donne un modèle à 12000 ddls. Les caractéristiques physiques sont présentées figure 5.5. On choisit $f = 0.35$, $\Omega = 2.5$ rad/s, $\delta = 3.33 \times 10^{-6}$ m (ce qui représente une résultante axiale d'effort d'une garniture sur le disque à l'équilibre d'environ 8000 N).

Garnitures	
Module d'Young E_G	4.5×10^9 Pa
Coefficient de Poisson ν_G	0.3
Masse volumique ρ_G	5250 kg.m^{-3}
Param. d'amortissement α_G	14.5α
Param. d'amortissement β_G	14.5β

TAB. 5.5 – Caractéristiques physiques

L'équilibre stationnaire est calculé ainsi que les modes de stabilité. Le résultat du calcul de stabilité est illustré figure 5.33 en traçant les taux de croissance ζ en fonction de la fréquence. Les modes sont calculés avec la méthode d'itération sur les résidus avec $\varepsilon = 10^{-4}$.

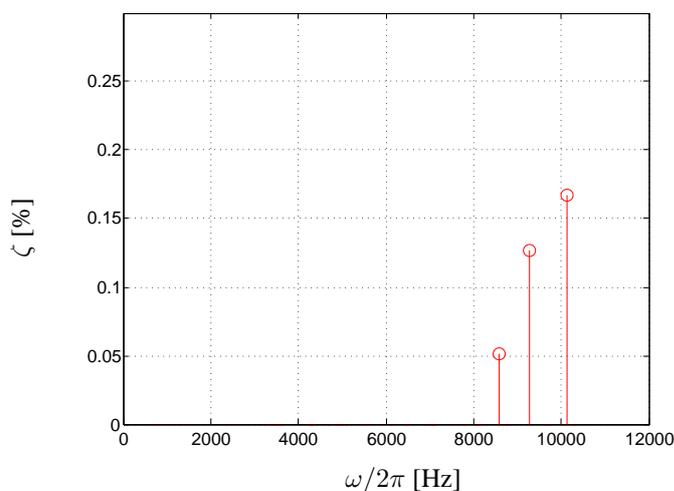


FIG. 5.33 – ζ [%] en fonction de la fréquence.

Sur les 100 modes calculés, on est en présence de 3 modes instables dont les déformées sont représentées figures 5.34, 5.35 et 5.36.

5.3.1 Étude de la solution transitoire non linéaire

La solution transitoire est calculée avec $\theta = 0.5$ et un pas de temps $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ s et ceci en partant de l'équilibre avec des conditions initiales en vitesse nulles (de l'ordre du bruit numérique). Le calcul est effectué sur la période [0 s, 1.5 s]. D'un point de vue coût de calcul, cela représente 300000 itérations effectuées en 35 heures. On constate que les statuts de contact sont du type glissement / décollement dans le cycle limite.

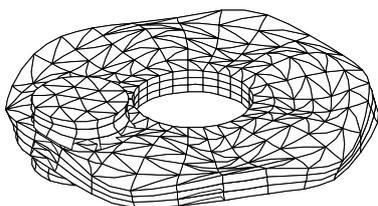


FIG. 5.34 – Mode M1 type A1-5
(n°77) - 8583 Hz, $\zeta = 0.05\%$

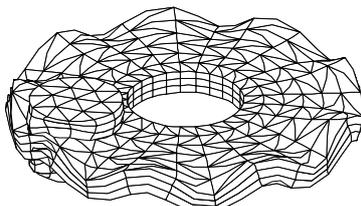


FIG. 5.35 – Mode M2 type A0-9
(n°85) - 9288 Hz, $\zeta = 0.13\%$

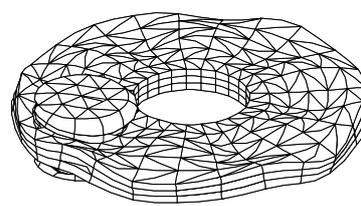


FIG. 5.36 – Mode M3 type A1-6
(n°96) - 10130 Hz, $\zeta = 0.17\%$

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'évolution locale du champ de vitesse. On peut voir figure 5.37 l'évolution temporelle de la vitesse normale en un point situé sur la périphérie du disque diamétralement opposé à la zone de contact. En ce point, la vitesse maximum atteinte est de l'ordre de 30 cm/s. On définit 4 fenêtres temporelles d'études spécifiées sur la figure 5.37. On considérera que la fenêtre 4 est représentative du cycle limite. Le spectrogramme (figure 5.38) montre l'évolution des fréquences dominantes au cours du temps. La figure 5.39 permet de comparer les 4 transformées de Fourier sur les 4 fenêtres (l'intérêt ici étant de visualiser l'évolution des fréquences, la courbe associée à la fenêtre 1 a été translatée vers le haut à cause des faibles niveaux). La transformée de Fourier de la vitesse sur la fenêtre 4 est détaillée figure 5.40.

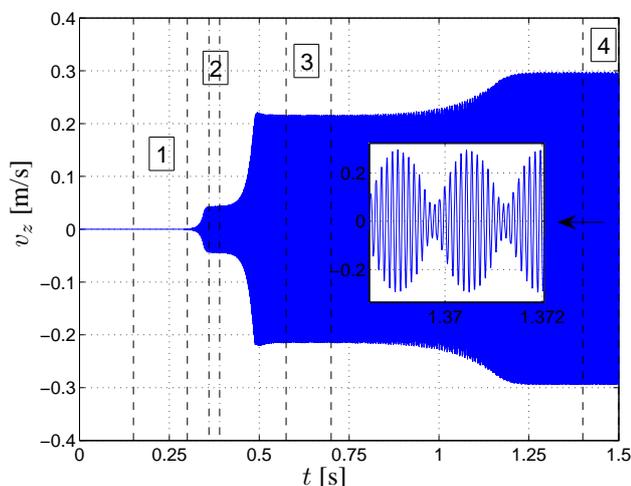


FIG. 5.37 – Vitesse normale [m/s] en un point loin de la zone de contact sur la périphérie en fonction du temps

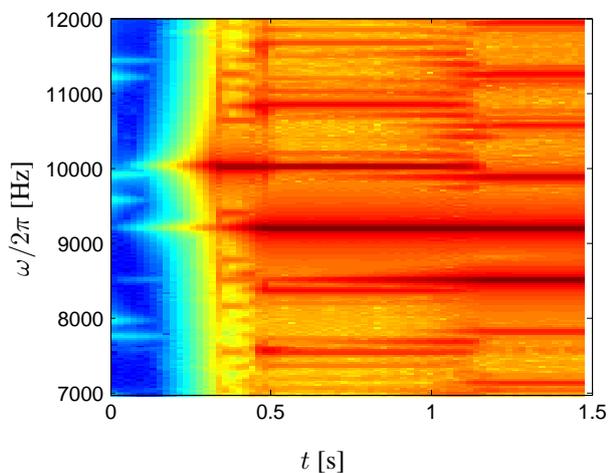


FIG. 5.38 – Diagramme temps/fréquence de la vitesse normale (à gauche) pendant l'intervalle [0 s, 1.5 s]

Grâce à la figure 5.39, on observe que le contenu fréquentiel sur la fenêtre 1 est composé de la fréquence f_3 du mode M3 le plus instable ainsi que de la fréquence f_2 du mode M2. Ensuite, le premier décollement apparaît et sur la fenêtre 2, on observe toujours les deux fréquences précédentes avec un décalage vers la droite (l'écart fréquentiel est observable dans le zoom, entre les traits verticaux pointillés). Le contenu de la fenêtre 3 montre toujours la présence des 2 fréquences précédentes avec une augmentation des niveaux et une apparition de fréquences harmoniques de fréquences $f_3 + (f_3 - f_2)$ et $f_2 - (f_3 - f_2)$. Sur la figure 5.40, on regarde exclusivement le contenu fréquentiel de la vitesse normale sur la fenêtre 4. On remarque qu'il y

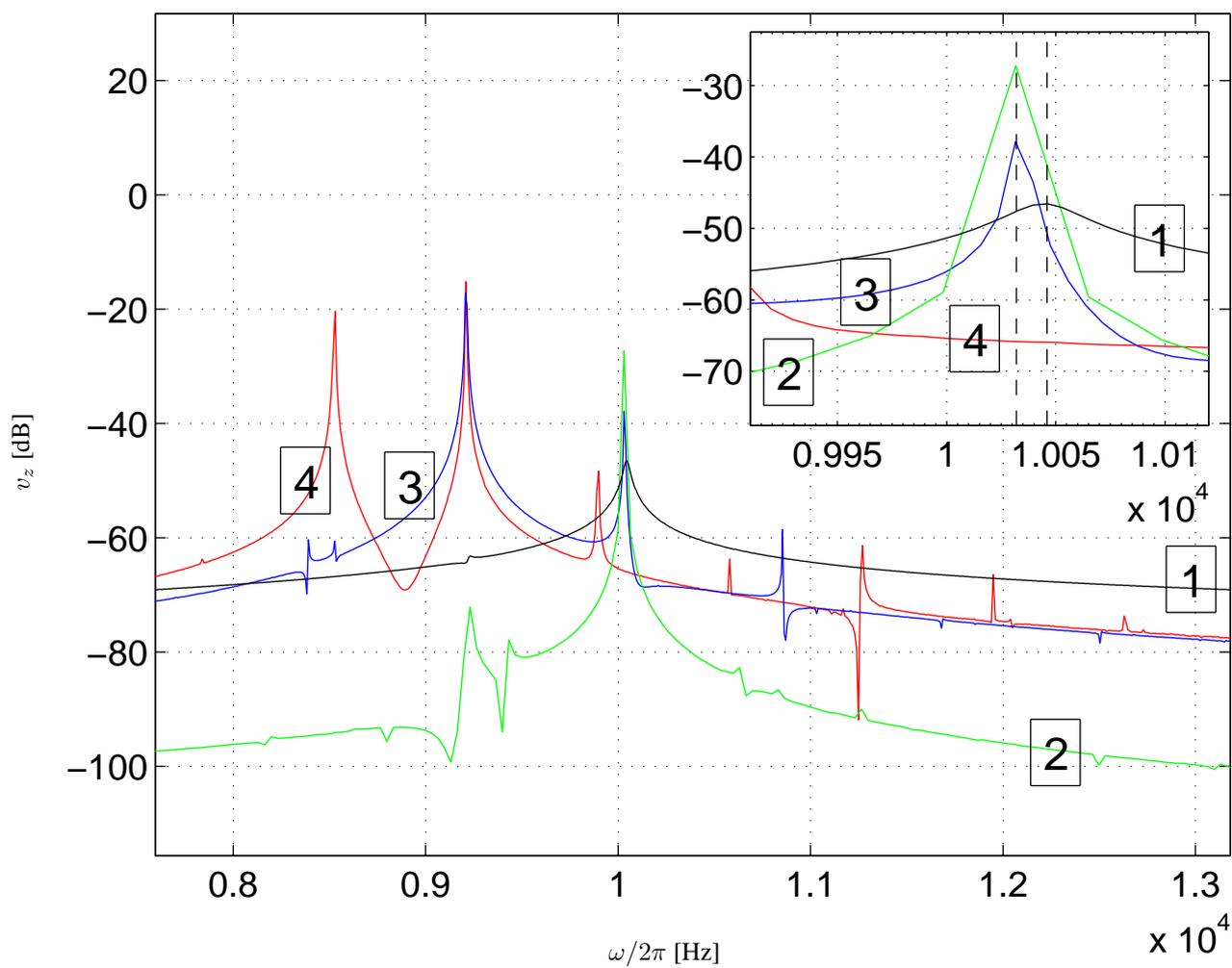


FIG. 5.39 – FFT de la vitesse normale (dB, réf 1 m/s) sur les 4 fenêtres temporelles (niveaux non significatifs sur la fenêtre 1)

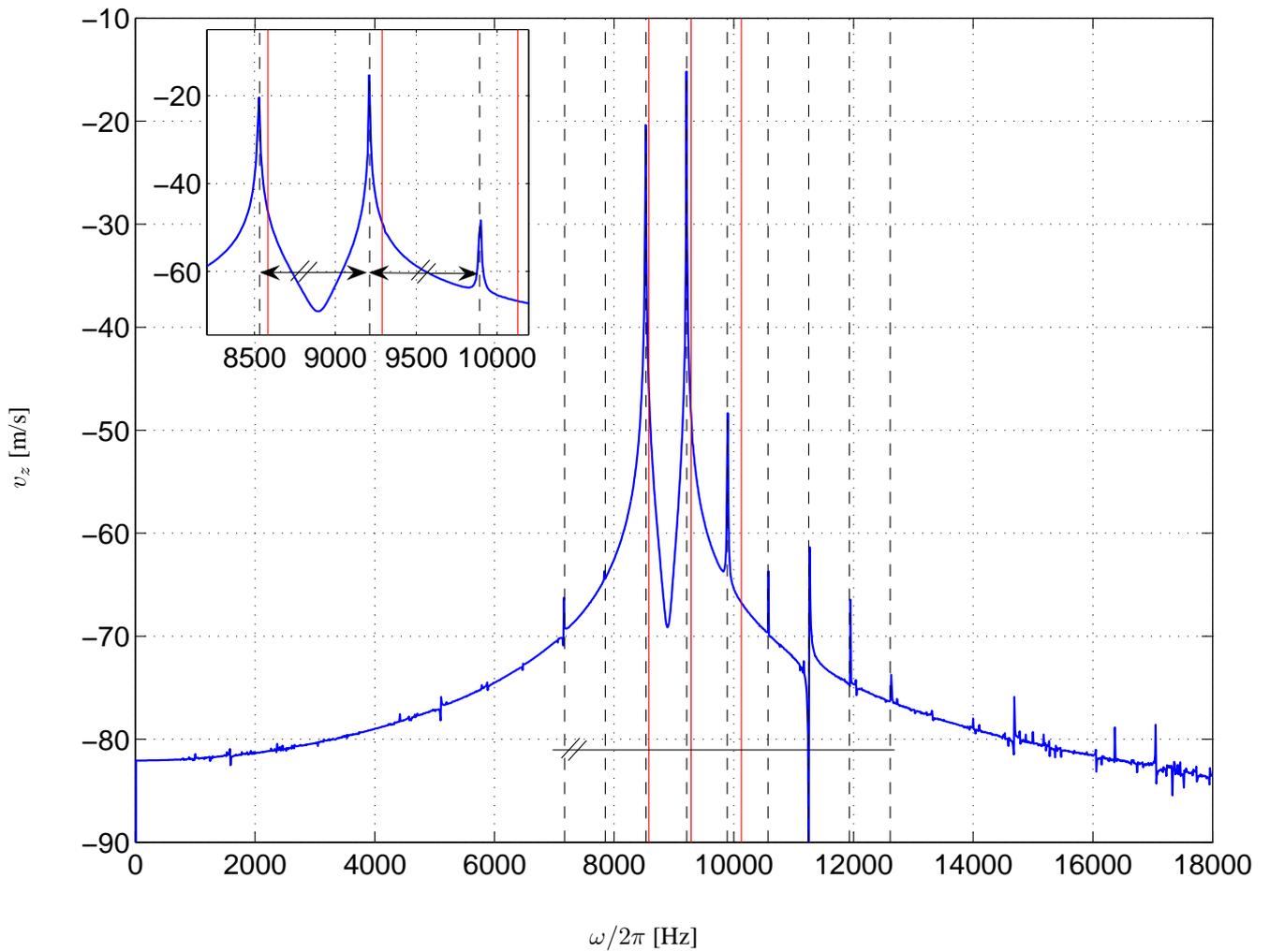


FIG. 5.40 – FFT de la vitesse normale (dB, réf 1 m/s). Traits verticaux continus : fréquences des modes instables. Traits verticaux pointillés : fréquences harmoniques des fréquences des modes M1 et M2

a quelques fréquences émergentes autour des deux fondamentales f_1 et f_2 . Si on calcule l'écart Δf entre les deux fréquences fondamentales, on s'aperçoit qu'autour émergent les fréquences $f_2 + \Delta f$, $f_2 + 2\Delta f$, $f_1 - \Delta f$ etc... dues à la présence de l'événement non-linéaire « décollement ».

La figure 5.47 montre la vitesse axiale au point d'observation en fonction du déplacement axial sur la fenêtre 4. On ne peut pas dire dans ce graphe que les trajectoires soient des courbes fermées mais plutôt qu'elles noircissent une partie du plan de phase. En conséquence, on peut dire que la solution n'est pas périodique. En revanche, le diagramme temps/fréquence (figure 5.38), montre clairement les émergences de deux fréquences sur la fenêtre 4. On peut donc conclure que la solution est la combinaison de deux fonctions périodiques chacune étant proche de deux fonctions sinusoïdales altérées par la non linéarité. Afin d'expliquer l'apparition des fréquences harmoniques précédentes, on considère l'égalité suivante :

$$\sin(2k_x x) + \sin(2k_y y) = 2\sin(k_x x + k_y y) \cos(k_x x - k_y y) \quad (5.10)$$

En choisissant $k_x = 2$ et $k_y = 1$, on fait apparaître la fréquence $2x - y = x - (y - x)$ et $2y - x$ en intervertissant le rôle de x et y . Si l'on considère 2 signaux périodiques, alors on peut les décomposer en série de Fourier. Ainsi en combinant les harmoniques de chacun des deux signaux on met en évidence le phénomène précédent.

Ces considérations sont issues de l'évolution temporelle des champs locaux. Il est intéressant d'observer maintenant des **quantités globales**.

D'un point de vue spatial, on peut observer figure 5.41 l'évolution des contributions des modes de stabilité à l'énergie totale perturbée au cours du temps (la ligne verticale représente l'instant à partir duquel apparaît le premier décollement). L'énergie totale perturbée est tracée figure 5.42. On remarque que deux projections émergent significativement et dans des proportions comparables, ce sont les projections des modes M1 et M2. La figure 5.43 présente les mêmes quantités précédentes mais rapportées à l'énergie totale perturbée calculée. On remarque que le mode M3 au début de la simulation dépasse les 100 %, cela est dû au fait qu'à ces instants les contributions croisées avec les modes voisins ne sont plus négligeables (elles sont négatives). En trait pointillé est représentée la même énergie mais associée à la contribution des 3 modes voisins qui ne dépasse plus les 100 %.

Les contributions non croisées des modes à l'énergie totale perturbée à l'instant final sont tracées figure 5.45 en fonction du numéro des modes. On constate ici aussi le rôle majeur joué par les modes M1 et M2 dans la solution dynamique. On constate aussi la faible participation de modes autour du mode M1 ainsi qu'autour du mode M3. En effet, on peut noter la participation des modes n°95, 96, 97 et 98. Le mode n°97 est l'homologue stable du mode M3, les modes n°95 et n°98 ayant les mêmes déformées modales de disque que le mode M3 avec une déformée de plot différente.

Afin de mieux connaître le rôle des modes dans les émergences fréquentielles, on se propose dans un premier temps de tracer les spectres des énergies cinétiques modales figure 5.48 sur la fenêtre 4. On constate que pour les modes M1 et M2, ce sont leur fréquence respective qui prédomine énergétiquement. L'homologue stable du mode M1, le mode n°78 ne contribue que très peu à l'énergie vis-à-vis du mode M1. En ce qui concerne les modes 95 à 97, on constate que les contributions sont du même ordre de grandeur pour la fréquence harmonique principale de la réponse vers 9900 Hz. Ceci montre qu'à cette fréquence harmonique, la contribution à

l'énergie cinétique du mode instable n'est pas supérieure à son homologue stable n°96 et est même légèrement inférieure à la contribution du mode n°95.

Dans un deuxième temps, on se propose d'évaluer les contributions des modes à la vitesse normale au point d'observation en les comparant à la vitesse calculée et ceci sur la fenêtre 4. Les constatations sont ici à peu près similaires aux constatations énergétiques globales précédentes. Les vitesses locales aux fréquences des modes M1 et M2 sont bien représentées en terme de niveaux de vitesse vibratoire respectivement par les contributions des modes M1 et M2. En ce qui concerne la fréquence harmonique, on constate que les contributions combinées des 4 modes 95, 96, 97 et 98 permettent de reconstituer quasiment à cette fréquence le niveau local de vitesse. La contribution seule du mode M3 fournit un niveau vibratoire inférieur, toujours à cette fréquence harmonique.

Sur la fenêtre 4, l'observation de la solution spatiale montre la rotation d'une onde dans le sens contraire à la rotation du disque. La reconstruction sur cette même fenêtre des champs à partir des modes M1 plus le n°78 permet de mettre en évidence la rotation d'onde. En revanche, la reconstruction des champs à partir de la combinaison des 4 modes 95, 96, 97 et 98 ne permet pas de mettre en évidence cette rotation. Ceci est un autre argument qui consiste à montrer que le mode instable M3 (n°96) n'est pas plus prépondérant dans ces 4 modes que les autres. Pour résumer ces considérations, la cause de la contribution du mode M3 est bien due à la proximité de sa fréquence avec une fréquence harmonique plutôt qu'à son caractère instable.

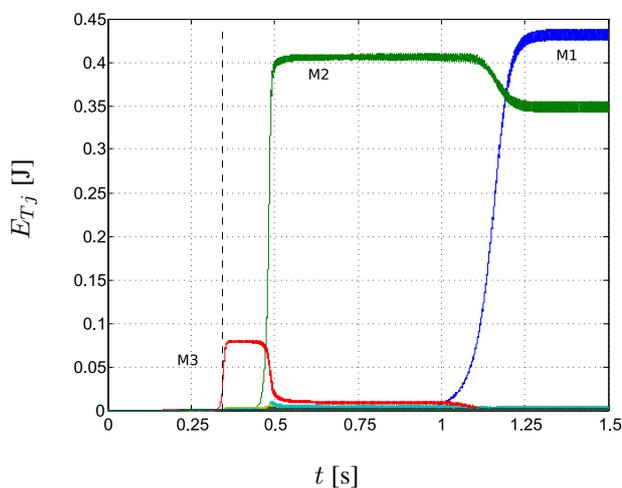


FIG. 5.41 – Évolution des contributions modales à l'énergie totale E_T perturbée [J] au cours du temps (s) (des 100 premiers modes)

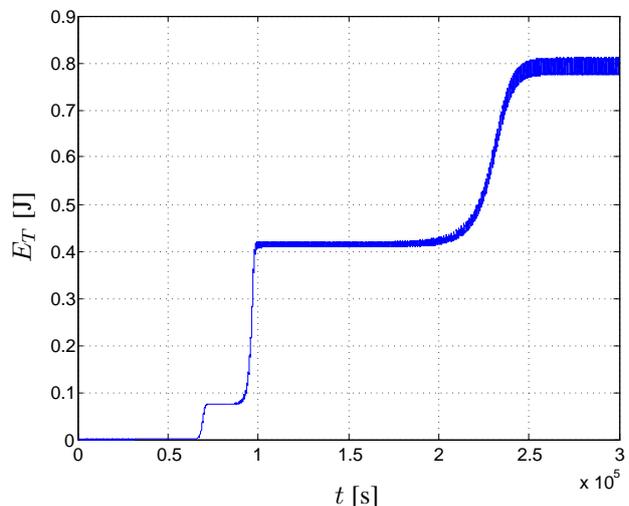


FIG. 5.42 – Énergie totale perturbée [J] au cours du temps

En conclusion, on a mis en évidence la coexistence possible de deux modes instables. Cette coexistence conduit à une solution non périodique mais quasi-périodique qui constitue le cycle limite. La non linéarité conduit à l'apparition de fréquences harmoniques liées aux fréquences des deux modes instables M1 et M2. Le mode M3 qui a le plus grand taux de croissance est énergétiquement quasiment inexistant dans le cycle limite. Les modes proches du mode M3 sont exacerbés par une harmonique issue des fréquences des modes M1 et M2.

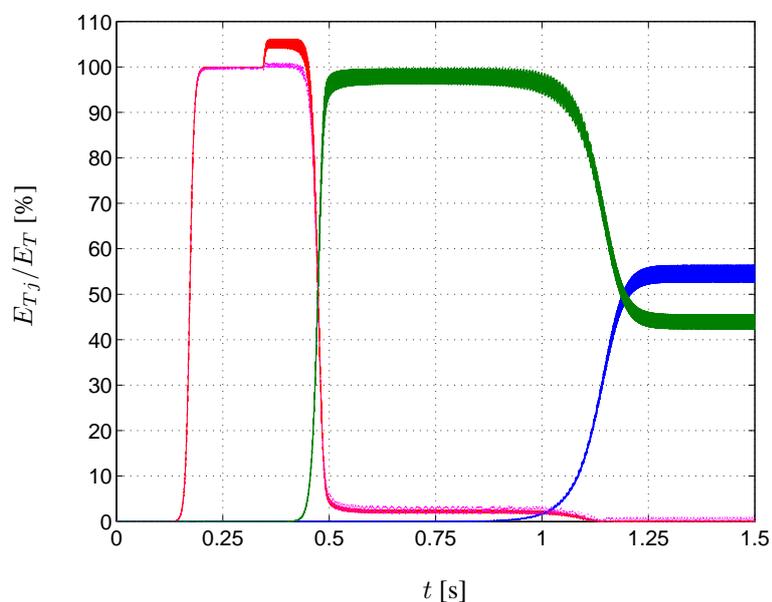


FIG. 5.43 – Traits continus : Contributions des modes instables à l'énergie totale perturbée ramenée à l'énergie totale perturbée calculée [%] en fonction du temps [s]. Traits pointillés : Contribution de la combinaison du mode M3 avec ses voisins

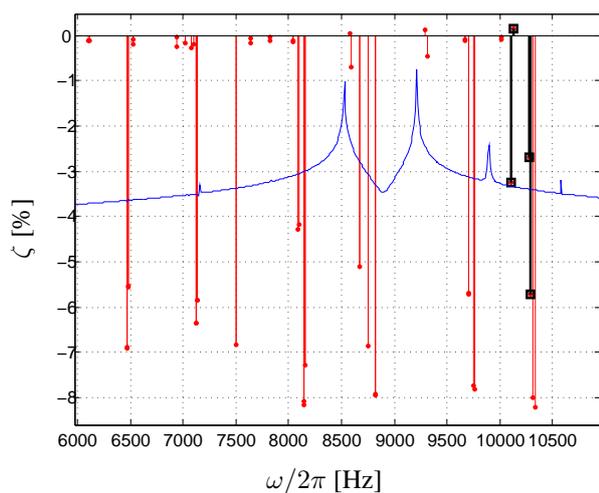


FIG. 5.44 – Taux de croissance ζ [%] en fonction de la fréquence avec superposition du spectre de vitesse normale au point d'observation (niveaux non significatifs). \square : Taux de croissance des modes n°95, 96, 97 et 98

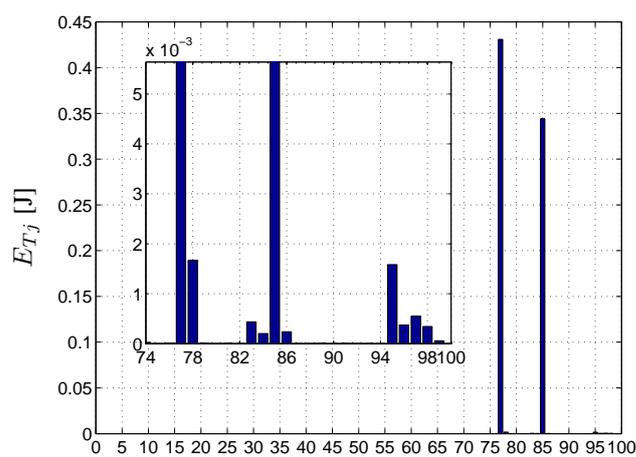


FIG. 5.45 – Contributions des modes à l'énergie totale perturbée en fonction du numéro des modes (à l'instant final)

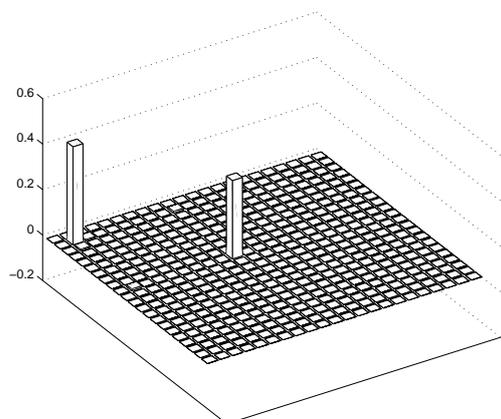


FIG. 5.46 – Contributions des modes de stabilité à l'énergie totale perturbée pour les 30 derniers modes calculés

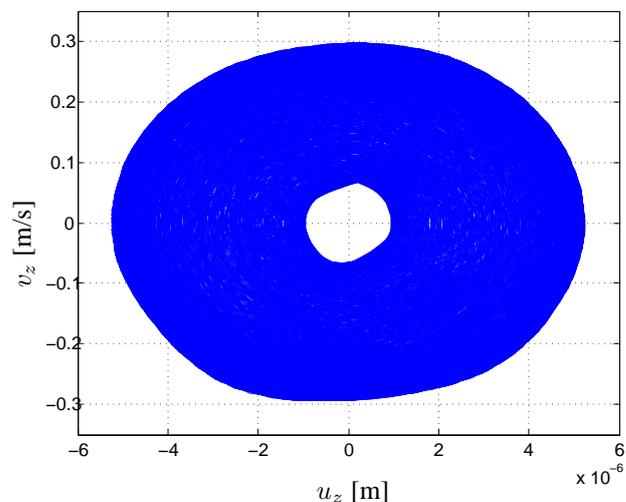


FIG. 5.47 – Vitesse axiale [m/s] au point d'observation en fonction du déplacement axial [m] sur la fenêtre 4

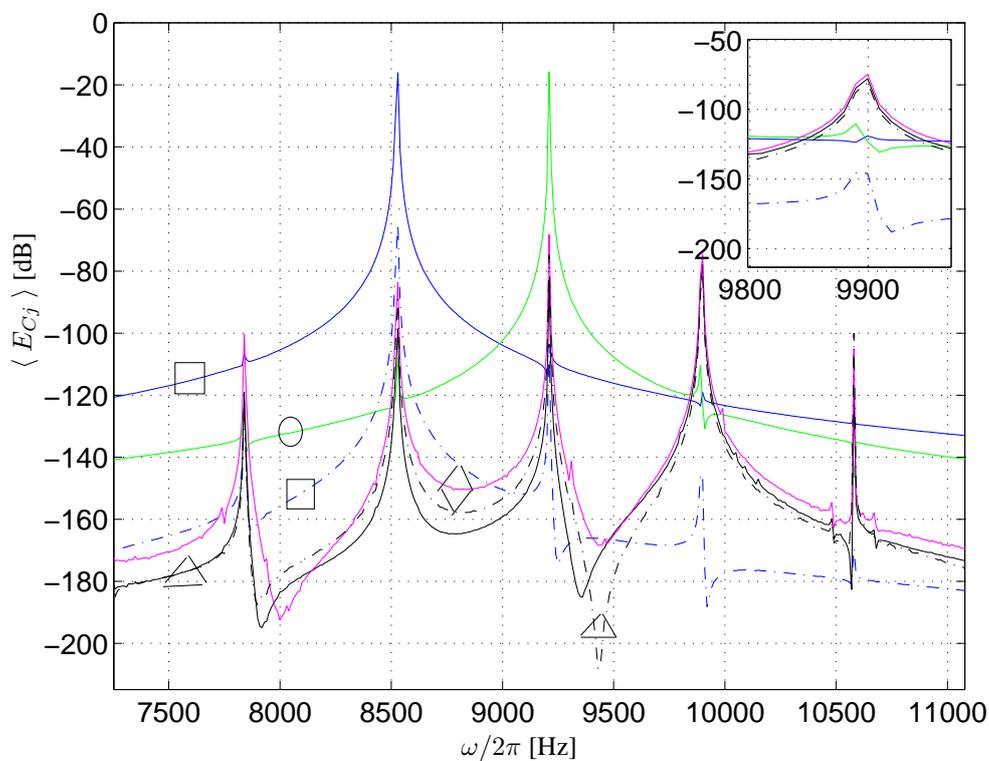


FIG. 5.48 – Spectres de l'énergie cinétique modale sur la fenêtre 4. (dB, réf : 1 J) \square — : mode M1 (n°77). \square · - : mode n°78. \circ : mode M2 (n°85). \triangle - : mode M3 (n°96). \triangle · - : mode n°97. \diamond : mode n°95

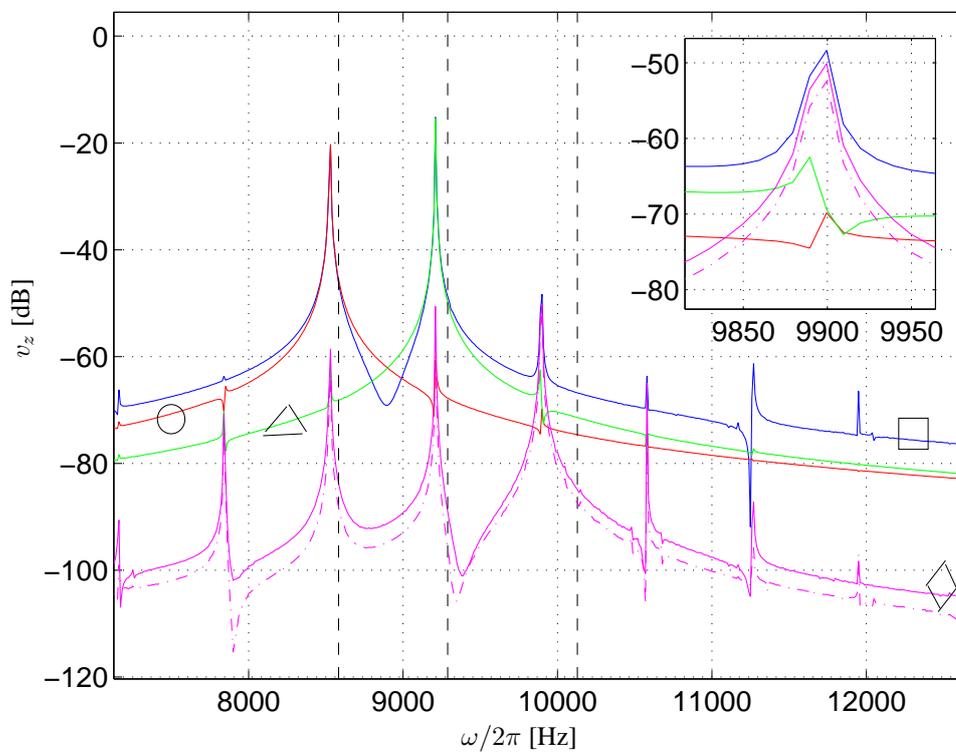


FIG. 5.49 – FFT de la vitesse normale (dB, réf : 1 m/s) sur la fenêtre 4 au point d'observation reconstruite à partir des amplitudes modales. □ : référence (non reconstruite). ○ : mode M1 + mode n°78. △ : mode M2. ◇ : modes n°95 + M3 (n°96) + n°97 + n°98.

5.3.2 Influence des conditions initiales

On a vu que dans le cycle limite précédent, il y avait une forme de sélection des modes instables. On se propose de regarder ici le rôle joué par les conditions initiales dans cette sélection. Afin d'étudier l'influence des conditions initiales sur le calcul transitoire, on a considéré 4 cas :

- cas A : $u_0 = u^e$, et $v_0 = 0$. (perturbation issue du bruit numérique)
- cas B : $u_0 = u^e + u_0^*$ avec u_0^* et v_0 tels que $\beta_{M1} \neq 0$, $\beta_{M2} = 0$ et $\beta_{M3} = 0$.
- cas C : $u_0 = u^e + u_0^*$ avec u_0^* et v_0 tels que $\beta_{M1} = 0$, $\beta_{M2} = 0$ et $\beta_{M3} \neq 0$.
- cas D : $u_0 = u^e + u_0^*$ avec u_0^* et v_0 tels que $\beta_{M1} = \beta_{M2} = \beta_{M3} \neq 0$.

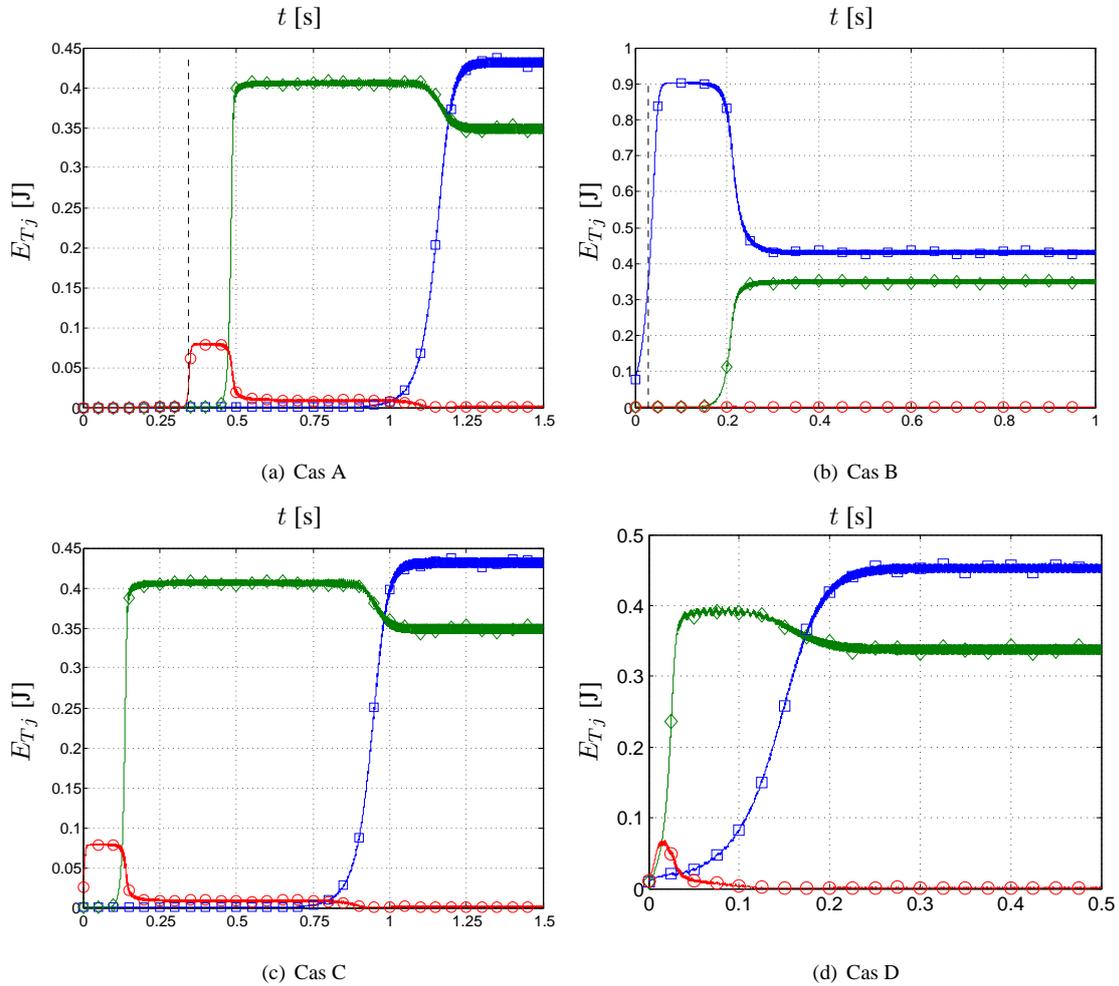


FIG. 5.50 – Évolution des contributions modales à l'énergie totale E_T [J] au cours du temps [s] pour les différents cas. $\square E_{T_{M1}}(t)$, $\diamond E_{T_{M2}}(t)$, $\circ E_{T_{M3}}(t)$

Les contributions à l'énergie totale perturbée des trois modes instables $E_{T_{M1}}(t)$, $E_{T_{M2}}(t)$ et $E_{T_{M3}}(t)$ sont représentées sur la figure 5.50 pour chacun des 4 cas.

À travers les différentes figures,

- On constate que la solution stabilisée n'est pas dépendante des conditions initiales.
- Les résultats montrent que le niveau d'énergie d'un mode instable dépend à l'instant t du niveau des autres modes à cet instant. Les niveaux d'énergie ne dépendent donc pas de l'histoire de l'évolution de chacun des modes mais plutôt de leur valeur instantanée.
- On remarque une certaine indépendance dans l'évolution de chacun des modes instables. Par exemple dans le cas A, même après le premier décollement et la saturation du mode M3, l'amplitude du mode M1 continue d'augmenter. Ce phénomène est possible grâce au caractère surfacique de la zone de contact. En effet, si on suppose un contact ponctuel, dès l'apparition du décollement ou de l'adhérence, l'amplitude des autres modes ne peut plus augmenter puisqu'il n'y a plus de glissement.

La question du mode de sélection des modes instables reste entière. En effet, pourquoi seuls les modes M1 et M2 restent présents ? Au regard des résultats de la figure 5.50, si on observe les niveaux d'énergie de chacun des modes lorsqu'ils sont seuls, on remarque que le mode M1 a le niveau le plus élevé avec 0.9 J (cas B au départ), ensuite le mode M2 avec 0.4 J puis M3 avec 0.08 J. Une conjecture possible est que les modes « sélectionnés », sont les modes les plus énergétiques lorsqu'ils sont seuls présents dans la solution.

Lorsque l'on considère un seul mode instable dans la solution, on remarque que le niveau d'énergie total à l'instant où apparaît le premier décollement est d'autant plus grand que le niveau d'énergie maximal (du cycle limite) est grand. Alors, si la conjecture précédente se révélait exacte, un critère de prédiction simplifié linéaire pourrait être proposé : Les modes instables susceptibles de coexister seraient ceux qui auraient le niveau d'énergie totale le plus élevé (lorsqu'ils sont considérés seuls présents dans la solution) à l'instant où la non linéarité forte (décollement ou adhérence) apparaîtrait. L'intérêt de ce critère est qu'il ne nécessite que le calcul de l'équilibre conjointement avec le calcul de stabilité.

5.4 Conclusions

Une formulation eulérienne du problème de crissement d'un frein à disque simplifié a été proposée. Elle permet d'effectuer un calcul de stabilité et un calcul transitoire sur le même modèle mécanique et ainsi de projeter cette solution sur la base des modes de stabilité, ce qui offre les mêmes intérêts qu'au chapitre précédent : l'étude du devenir des modes instables dans la solution transitoire et une étude spatiale et temporelle de cette solution.

Une configuration avec un seul mode instable a été étudiée. L'étude de la solution transitoire a permis de valider les hypothèses de la stratégie numérique et de montrer que cette stratégie appliquée sur le modèle est bien capable de modéliser du crissement. Elle met en évidence l'instabilité par couplage de modes doubles de disque. Le mode instable tournant est responsable de la rotation du champ observée dans le cycle limite.

Une configuration avec trois modes instables est étudiée. On constate la coexistence de deux modes instables dans la solution transitoire dans des proportions comparables. En revanche, le mode à plus fort taux de croissance est absent de la solution. Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il légitime le calcul de stabilité en tant qu'outil de prédiction des fréquences bruyantes même si le calcul transitoire est nécessaire pour connaître les modes qui apparaissent parmi ces modes instables. On montre sur ce cas une indépendance des conditions initiales

sur la solution transitoire. En revanche, l'évolution des contributions des modes instables à l'énergie totale perturbée pour les différentes conditions initiales nous permettent de proposer une conjecture sur la question de la sélection des modes instables par la non linéarité.

6 – Sensibilité de la stabilité du glissement stationnaire vis-à-vis de la zone de contact

On s’inscrit maintenant dans une perspective de recherche de solution non crissante à travers la recherche d’une géométrie de garniture optimale. Ce chapitre présente une méthode permettant d’évaluer la sensibilité de la valeur propre (associée au problème aux valeurs propres issu du calcul de stabilité de l’équilibre stationnaire) par rapport à la géométrie de la surface de contact. Un algorithme d’optimisation par une méthode de gradient utilisant la sensibilité de la valeur propre est proposé afin de trouver une surface de contact optimale. La méthode de calcul de la sensibilité est illustrée et validée sur un exemple simple bidimensionnel. L’efficacité de l’algorithme d’optimisation est montrée sur ce même cas. Un deuxième exemple tridimensionnel est considéré : il s’agit du glissement d’un disque en rotation par rapport à une garniture rigide. La validation du calcul de sensibilité est effectuée sur cet exemple. Il est clair que cette étude s’inscrit dans une démarche à long terme de réduction du bruit.

6.1 Contexte et hypothèses

Le problème d’étude de sensibilité de la stabilité vis-à-vis de paramètres géométriques tels que la zone de contact en présence de frottement fait partie des problèmes plus généraux d’études de sensibilité de valeurs propres pour les problèmes de stabilité dynamique. P. Pedersen et A. P. Seyranian [61] font un point sur le sujet et traitent pour les problèmes discrets des formules de dérivation des valeurs propres par rapport à des paramètres structuraux génériques. Ils traitent des systèmes continus à travers l’exemple de la stabilité dynamique d’une poutre sous effort suiveur.

Les conditions de stabilité (frontière entre domaines stables et instables) dépendent des paramètres structuraux du problème. Une application majeure des études de sensibilité est la conception optimale de structure. On propose ici d’utiliser la sensibilité des valeurs propres issues du problème de stabilité vis-à-vis de paramètres définissant la géométrie de la surface de contact afin de l’optimiser. Un algorithme basé sur la minimisation de la partie réelle d’une valeur propre par une méthode de gradient est défini.

On considère un disque élastique D en rotation autour de son axe de révolution (figure 6.1). Ce disque est en contact frottant avec un solide indéformable fixe sur une surface S_c (frottement de Coulomb et coefficient de frottement f constant). Comme on a pu le voir au chapitre 3, la stabilité relativement aux perturbations glissantes de l’équilibre est donnée par la résolution d’un problème aux valeurs propres. Dans ce chapitre, pour simplifier, on néglige l’amortissement matériau ainsi que l’amortissement induit par la linéarisation du frottement plan.

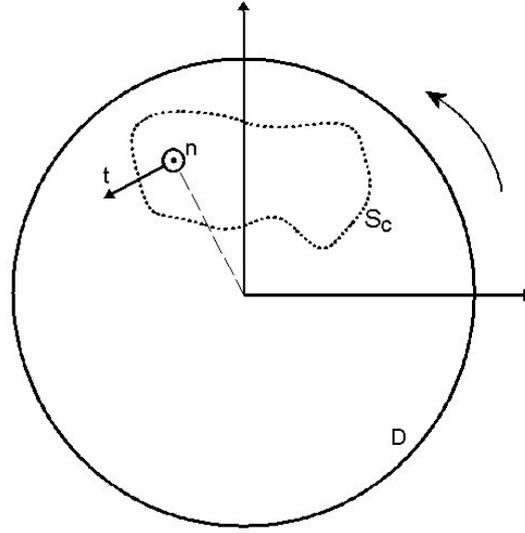


FIG. 6.1 – Mise en situation et notations.

6.2 Rappel des équations continues de la dynamique et instabilité glissante

On se place ici dans le cadre des hypothèses du paragraphe précédent. D'après (3.3), la dynamique des perturbations \hat{u} est régie par :

$$\hat{u} \in \mathcal{W}_0 \text{ et } \hat{r}_n \text{ tels que} \quad (6.1)$$

$$\int_D \rho \underline{u}^* \cdot \ddot{\hat{u}} d\Omega + \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\hat{u}] d\Omega = \int_{S_c^e} \hat{r}_n \underline{u}^* \cdot (\underline{n} + f \underline{t}^e) dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0$$

On rappelle que \mathcal{W}_0 est l'espace des déplacements vérifiant les contraintes de contact bilatéral :

$$\mathcal{W}_0 = \{u/u \in \mathcal{U}^0, \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } S_c^e\} \text{ et } \mathcal{W}_f = \{u/u \in \mathcal{U}^0, \underline{u} \cdot (\underline{n} + f \underline{t}^e) = 0 \text{ sur } S_c^e\}$$

La recherche des perturbations sous la forme $\hat{u}(x, t) = \hat{u}_0(x) e^{\lambda t}$ et $\hat{r}_n(x, t) = \hat{r}_{n_0}(x) e^{\lambda t}$, met en évidence le problème aux valeurs propres généralisé suivant vérifié par $(\hat{u}_0, \hat{r}_{n_0}, \lambda)$:

$$\hat{u}_0 \in \mathcal{W}_0 \text{ et } \hat{r}_{n_0} \text{ tels que} \quad (6.2)$$

$$\lambda^2 \int_D \rho \underline{u}^* \cdot \hat{u}_0 d\Omega + \int_D \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^*] : \mathcal{A} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\hat{u}_0] d\Omega = \int_{S_c^e} \hat{r}_{n_0} \underline{u}^* \cdot (\underline{n} + f \underline{t}^e) dS, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}^0$$

Afin de simplifier les écritures, dans la suite on remplace les perturbations $(\hat{u}_0, \hat{r}_{n_0})$ par (\underline{u}, r_n) . Une écriture plus compacte du problème (6.2), purement en déplacement est alors :

$$\underline{u} \in \mathcal{W}_0 \quad (6.3)$$

$$\lambda^2 \mathcal{M}(\underline{u}, \underline{u}^*) + \mathcal{K}(\underline{u}, \underline{u}^*) = 0, \forall \underline{u}^* \in \mathcal{W}_f$$

Avec les notations suivantes :

$$\mathcal{M}(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_D \rho \underline{u} \cdot \underline{u}^* d\Omega \quad \mathcal{K}(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_D \nabla \underline{u} : \mathcal{A} : \nabla \underline{u}^* d\Omega$$

6.3 Problème d'optimisation

On a vu que l'évolution de la structure suivant tout mode \underline{u} solution de (6.3) est

$$\operatorname{Re}(\underline{u}(x)e^{\lambda t}) = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} [\operatorname{Re}(\underline{u}(x)) \cos(\operatorname{Im}(\lambda)t) - \operatorname{Im}(\underline{u}(x)) \sin(\operatorname{Im}(\lambda)t)]$$

On note que si $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, alors le mode est instable. L'objectif poursuivi ici est d'éviter la déstabilisation d'un mode choisi en modifiant la géométrie de la zone de contact S_c . La stratégie de calcul est de déterminer cette zone par un algorithme de minimisation de la fonction coût

$$\mathcal{J}(S_c) = 2\operatorname{Re}(\lambda_i(S_c)) = \lambda_i(S_c) + \bar{\lambda}_i(S_c)$$

i étant fixé. Pour cela, la surface plane ajustable S_c est décrite à l'aide d'une transformation

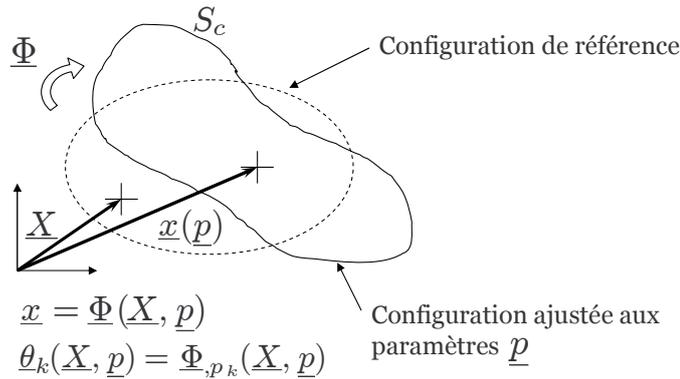


FIG. 6.2 – Transformation géométrique

géométrique Φ (figure 6.2) telle que $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, \underline{p})$ dépendant de paramètres géométriques \underline{p} . \underline{X} et \underline{x} sont respectivement les vecteurs position des points de S_c dans la configuration initiale et dans la configuration ajustée aux paramètres \underline{p} . Il s'agit de chercher \underline{p} , et donc S_c , qui minimise la fonction coût $J(\underline{p}) = \mathcal{J}(S_c(\underline{p}))$. Pour gagner en efficacité, c'est-à-dire minimiser le nombre d'évaluation de la fonction coût, on se place dans l'optique de l'utilisation d'une méthode d'optimisation employant le gradient de $J(\underline{p})$. Le développement qui suit a pour objet de proposer une procédure d'évaluation numériquement peu coûteuse des dérivées $J_{,p_k} = \lambda_{i,p_k} + \bar{\lambda}_{i,p_k}$ (dans la suite, on utilisera la notation abrégée $\dot{(\)}$ pour $(\)_{,p_k}$). Afin de calculer $\dot{\lambda}_i$, on effectue une dérivation par rapport à p_k de l'équation (6.3) :

$$(\dot{\lambda}^2)\mathcal{M}(\underline{u}, \underline{u}^*) + \lambda^2 \dot{\mathcal{M}}(\underline{u}, \underline{u}^*) + \dot{\mathcal{K}}(\underline{u}, \underline{u}^*) = 0 \quad (6.4)$$

Le calcul de $\dot{\mathcal{M}}$ et $\dot{\mathcal{K}}$ nécessite la dérivation d'intégrales de volume et de surface. Or la singularité de certains intégrands sur le bord de la surface de contact conduit à utiliser des formules de dérivation lagrangienne, en analogie avec les procédures de calcul de taux de restitution

d'énergie de type « $G - \theta$ » en mécanique linéaire de la rupture. Ainsi la dérivation lagrangienne de l'intégrale générique I s'écrit de la manière suivante :

$$I = \int_{\Omega} g d\Omega \Rightarrow \dot{I} = \frac{dI}{dp_k} = \int_{\Omega} \frac{dg}{dp_k} + g \operatorname{div} \underline{\theta}_k d\Omega$$

On est donc amené à introduire, compte tenu du caractère bilinéaire par rapport aux champs des composantes du problème variationnel (6.3), les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{M}}(\underline{u}, \underline{u}^*) &= \mathcal{M}(\dot{\underline{u}}, \underline{u}^*) + \mathcal{M}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) + \mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{u}^*) \\ \dot{\mathcal{K}}(\underline{u}, \underline{u}^*) &= \mathcal{K}(\dot{\underline{u}}, \underline{u}^*) + \mathcal{K}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) + \mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{u}^*) \end{aligned}$$

dans lesquelles $\mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{u}^*)$ et $\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{u}^*)$ correspondent aux valeurs prises par les dérivées lagrangiennes des intégrales correspondantes à *dérivées lagrangiennes des champs nulles*. On a :

$$\mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_D \rho \underline{u} \cdot \underline{u}^* \operatorname{div} \underline{\theta}_k d\Omega \quad (6.5)$$

$$\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{u}^*) = \int_D [(\nabla \underline{u} : \mathcal{A} : \nabla \underline{u}^*) \operatorname{div} \underline{\theta}_k - (\nabla \underline{u} \nabla \underline{\theta}_k) : \mathcal{A} : \nabla \underline{u}^* - \nabla \underline{u} : \mathcal{A} : (\nabla \underline{u}^* \nabla \underline{\theta}_k)] d\Omega$$

$$\underline{\theta}_k(\underline{X}, \underline{p}) = \underline{\Phi}_{,p_k}(\underline{X}, \underline{p}) \quad (6.6)$$

$\underline{\theta}_k$ désignant le champ de vitesse de transformation associé à $\underline{\Phi}$. L'expression (6.4) devient après développement des termes dérivés :

$$\begin{aligned} (\lambda^2) \mathcal{M}(\underline{u}, \underline{u}^*) + \lambda^2 \mathcal{M}(\dot{\underline{u}}, \underline{u}^*) + \lambda^2 \mathcal{M}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) + \lambda^2 \mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{u}^*) \\ + \mathcal{K}(\dot{\underline{u}}, \underline{u}^*) + \mathcal{K}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) + \mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{u}^*) = 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

On notera que ρ est constant et que les champs \underline{t} et \underline{n} sont constants vis-à-vis des paramètres géométriques. On a donc $\dot{\underline{t}} = \dot{\underline{n}} = \underline{0}$.

Afin d'isoler λ de (6.7), on propose la démarche suivante en deux étapes :

– Etape 1 : En remarquant que $\dot{\underline{u}}^*$ est un champ test admissible, c'est-à-dire que $\underline{u}^* \in W_f \Rightarrow \dot{\underline{u}}^* \in W_f$ (car $\dot{\underline{n}} = \dot{\underline{t}} = \underline{0}$), on obtient à partir de (6.3) :

$$\lambda^2 \mathcal{M}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) + \mathcal{K}(\underline{u}, \dot{\underline{u}}^*) = 0 \quad (6.8)$$

– Etape 2 : Afin d'éliminer les termes contenant $\dot{\underline{u}}$ de (6.7), on considère le problème aux valeurs propres suivant, problème adjoint au problème (6.3) :

$$\begin{aligned} \underline{v} \in \mathcal{W}_f \\ \lambda^2 \mathcal{M}(\underline{v}, \underline{v}^*) + \mathcal{K}(\underline{v}, \underline{v}^*) = 0, \forall \underline{v}^* \in \mathcal{W}_0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le choix de la fonction test $\underline{v}^* = \dot{\underline{u}}$ dans (6.9) est possible puisque $\underline{u}^* \in W_0 \Rightarrow \dot{\underline{u}}^* \in W_0$ (car $\dot{\underline{n}} = \underline{0}$). Ceci permet d'obtenir :

$$\lambda^2 \mathcal{M}(\underline{v}, \dot{\underline{u}}) + \mathcal{K}(\underline{v}, \dot{\underline{u}}) = 0 \quad (6.10)$$

Ensuite, le choix de $\underline{u}^* = \underline{v}$ dans (6.7) permet d'obtenir en tenant compte des simplifications apportées par (6.8) et (6.10) l'expression de la dérivée de la valeur propre :

$$\dot{\lambda} = - \frac{\lambda^2 \mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{v}) + \mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{v})}{2\lambda \mathcal{M}(\underline{u}, \underline{v})} \quad (6.11)$$

Remarques :

- La formule (6.11) généralise au cas non conservatif le calcul de sensibilité de fréquences propres par rapport au domaine.
- L'évaluation pratique de (6.11) peut être simplifiée en remarquant que, si $G_\theta(\underline{u})$ désigne le taux de restitution de l'énergie en régime quasistatique pour le champ \underline{u} associé à une fissure fictive dont le front est le bord de la surface de contact, alors (voir [55]) :

$$\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{u}) = -2G_\theta(\underline{u})$$

La fissure fictive est présentée figure (6.4). Compte tenu par ailleurs du caractère bilinéaire en $(\underline{u}, \underline{v})$ de $\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{v})$, on obtient

$$\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{v}) = \frac{1}{2}(G_\theta(\underline{u} - \underline{v}) - G_\theta(\underline{u} + \underline{v})) \quad (6.12)$$

L'intérêt pratique de cette remarque réside dans la possibilité d'évaluer la contribution $\mathcal{K}'(\underline{u}, \underline{v})$ à (6.11) au moyen d'un opérateur de calcul de taux de restitution d'énergie.

- Comme en mécanique de la rupture fragile [55], l'expression (6.11) ne dépend pas du champ de vitesse $\underline{\theta}_k$ dans le domaine. Il doit vérifier (6.6) sur S_c , être nul loin de la zone de contact et être suffisamment régulier.

Ainsi, à \underline{p} fixé, à partir du seul calcul des deux champs \underline{u} et \underline{v} , on peut calculer tous les gradients λ_{i,p_k} pour tous les paramètres p_k à partir de la construction des $\underline{\theta}_k$.

La figure 6.3 montre le schéma de principe de l'optimisation de forme qui résume la démarche présentée.

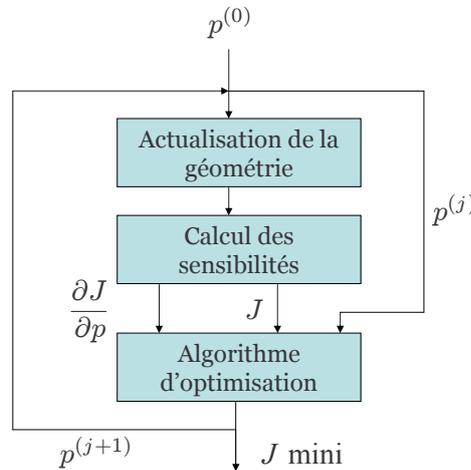


FIG. 6.3 – Schéma de principe de l'optimisation géométrique

6.4 Application sur une couche élastique bidimensionnelle

6.4.1 Validation du calcul de sensibilité

Un exemple simple de validation du calcul de sensibilité de valeur propre est présenté ici : on considère, sous l'hypothèse des déformations planes, un solide élastique rectangulaire en contact frottant glissant sur $S_c = S_{c_1} \cup S_{c_2}$ (figure 6.9), avec pour conditions aux limites $u|_{S_1} = u|_{S_2}$ (condition de périodicité), $u|_{S_3} = 0$. Les caractéristiques du matériau sont :

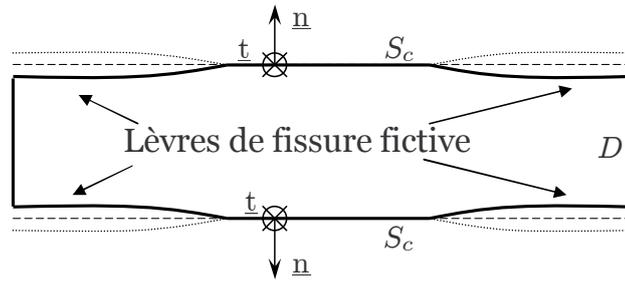


FIG. 6.4 – Analogie du problème d’optimisation avec un problème de propagation de fissure

$E = 2.5 \cdot 10^{11}$ Pa, $\nu = 0.3$, $\rho = 7800$ kg/m³ et $f = 1$. La surface de contact est paramétrée par le seul paramètre α . Ce paramètre permet de faire varier l’écartement entre les deux segments de contact. Le premier mode instable est le mode 3. Les variations des fréquences avec le paramètre α sont représentées figure 6.10. On observe des points de coalescence de fréquences propres qui traduisent une instabilité par couplage de mode.

L’objectif de la section est de valider le calcul de sensibilité. Pour cela on effectue un calcul en fonction de α , de la valeur propre λ_6 associée au mode 6 et la dérivée $\lambda_{,\alpha}$ donnée par l’expression analytique (6.11). Pour se faire, il faut se donner une transformation $\underline{\Phi}$ qui est suggérée par la figure 6.9 :

$$\begin{aligned} \underline{x}(\alpha) &= \underline{X} + \alpha \underline{k} \\ \underline{k} &= -\underline{e}_x \text{ pour la surface de contact gauche.} \\ \underline{k} &= \underline{e}_x \text{ pour la surface de contact droite.} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Le champ de vitesse $\underline{\theta} = \underline{\Phi}_{,\alpha}$ vaut donc \underline{k} . On choisit de définir $\underline{\theta} = \phi(r)\underline{k}$ dans le domaine avec r la distance d’un point du domaine à une extrémité d’un segment de contact (distance à la pointe de fissure fictive) avec $\phi(r)$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} r < R_0, & \quad \phi(r) = 1 \\ R_0 < r < R_1, & \quad \phi(r) = \frac{r - R_1}{R_0 - R_1} \\ r > R_1, & \quad \phi(r) = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

On présente une illustration pour α donné sur les figures 6.5 et 6.6 représentant respectivement le champ de vitesse et sa divergence sur un maillage éléments finis du domaine. On remarque que la divergence est non nulle pour les éléments dans la zone $R_0 < r < R_1$.

Il reste ensuite pour ce même α à calculer les vecteurs propres \underline{u}_6 du problème direct (6.3) et \underline{v}_6 du problème adjoint (6.9). La sensibilité est ensuite évaluée à l’aide de (6.11).

D’un point de vue pratique, les problèmes aux valeurs propres sont calculés avec la méthode d’itération sur les résidus dans Matlab (à l’aide de la *Structural Dynamic Toolbox*) et l’évaluation des termes (6.5) dans CAST3M, car il offre la possibilité de calcul de taux de restitution de l’énergie dans le but d’évaluer (6.12). Un traitement similaire n’étant pas disponible pour $\mathcal{M}'(\underline{u}, \underline{v})$, le calcul de ce terme a été programmé directement dans CAST3M. Ensuite la sensibilité est rapatriée dans MATLAB.

En effectuant plusieurs calculs pour une série de paramètres α , il est alors possible de vérifier la cohérence du résultat en comparant la dérivée calculée par (6.11) avec la dérivée numérique de $\lambda(\alpha)$ (figures 6.11 à 6.14). Les résultats font apparaître une bonne concordance

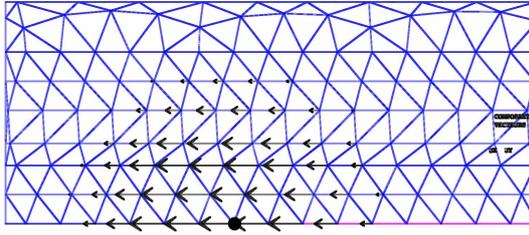


FIG. 6.5 – Champ de vitesse \underline{u} pour la zone de contact gauche (o : extrémité gauche)

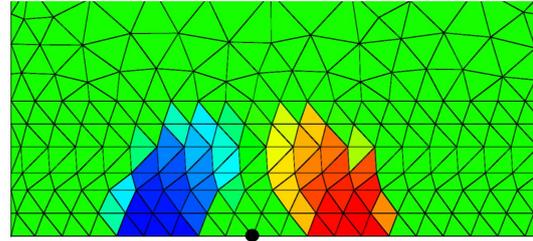


FIG. 6.6 – Divergence du champ de vitesse pour la zone de contact gauche (o : extrémité gauche) (code couleur : vert champ nul, rouge champ positif et bleu champ négatif)

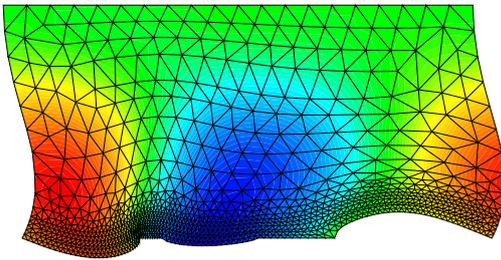


FIG. 6.7 – $\text{Re}(u_6)$ (les couleurs représentent la projection sur \underline{e}_x)

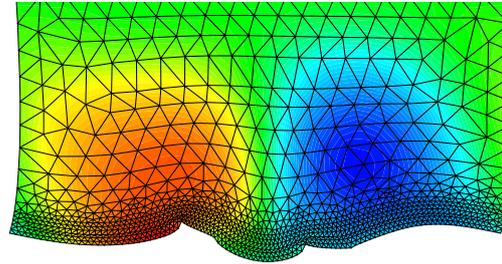


FIG. 6.8 – $\text{Re}(v_6)$ (les couleurs représentent la projection sur \underline{e}_x)

entre les dérivées analytique et numérique. La dérivée numérique est calculée par la méthode des différences centrées :

$$\lambda_{,\alpha}^{app} = \frac{\lambda(\alpha + \Delta\alpha) - \lambda(\alpha - \Delta\alpha)}{2\Delta\alpha}$$

6.4.2 Application de l’algorithme d’optimisation

On propose ici de tester la méthode d’optimisation proposée. On cherche donc à trouver le coefficient α qui minimise la fonction coût $J(\alpha) = \text{Re}(\lambda_6(\alpha))$. L’optimisation de $J(\alpha)$ est réalisée à l’aide du *optimization toolbox* de MATLAB, à laquelle l’information $\nabla_p J(\underline{p})$ est transmise.

On se donne un α_0 initial égal à 0.12. Afin de tester l’efficacité de la méthode, on propose de comparer les résultats avec une méthode d’optimisation sans évaluation du gradient : la méthode du simplexe. Les résultats sont présentés figures 6.15 et 6.16. Ils montrent que pour les mêmes conditions initiales, la méthode du simplexe nécessite 9 évaluations de la fonction coût, alors que la méthode par utilisation du gradient nécessite une seule itération.

6.5 Validation sur le cas du disque

On s’intéresse ici à la validation du calcul de sensibilité présentée précédemment pour le cas 3D du disque en situation de frottement avec un plot indéformable.

Les paramètres géométriques sont : diamètre extérieur du disque = 0.3 m, diamètre intérieur du disque = 0.1 m, épaisseur du disque = 0.04 m et rayon du plot = 0.03 m. Les propriétés

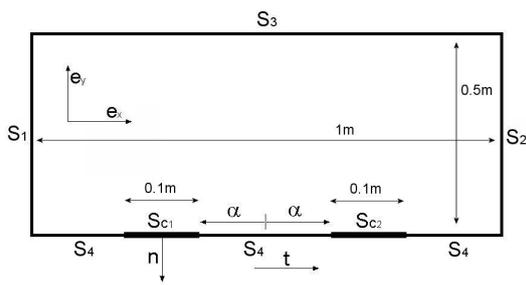


FIG. 6.9 – Configuration géométrique de l'exemple

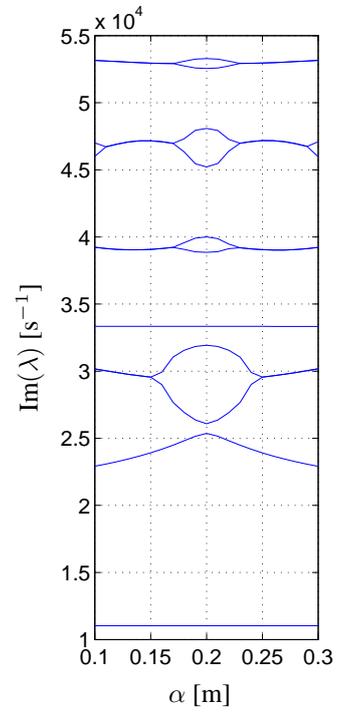


FIG. 6.10 – $\text{Im}(\lambda)$ en fonction de α

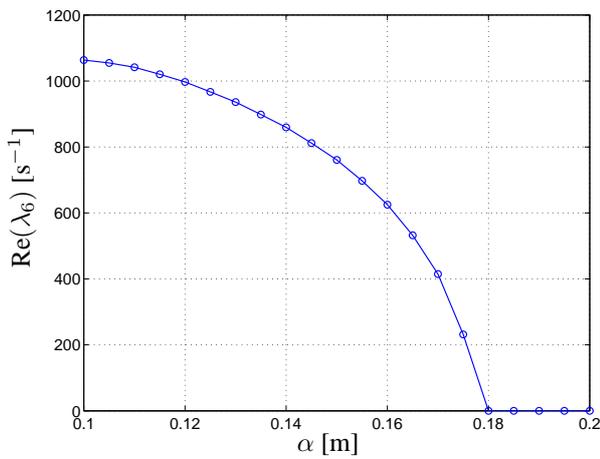


FIG. 6.11 – $\text{Re}(\lambda_6)$ en fonction de α

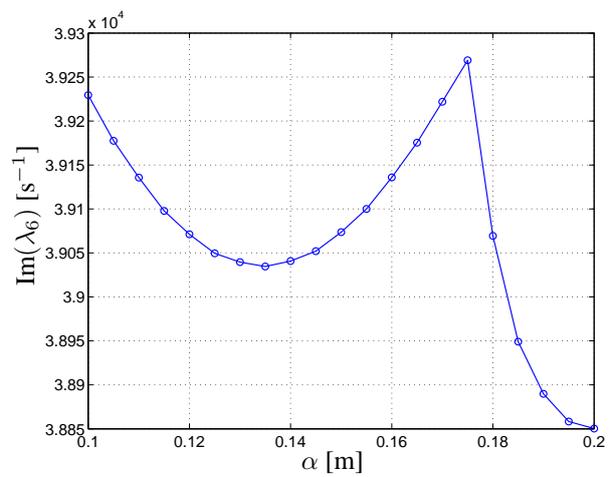


FIG. 6.12 – $\text{Im}(\lambda_6)$ en fonction de α

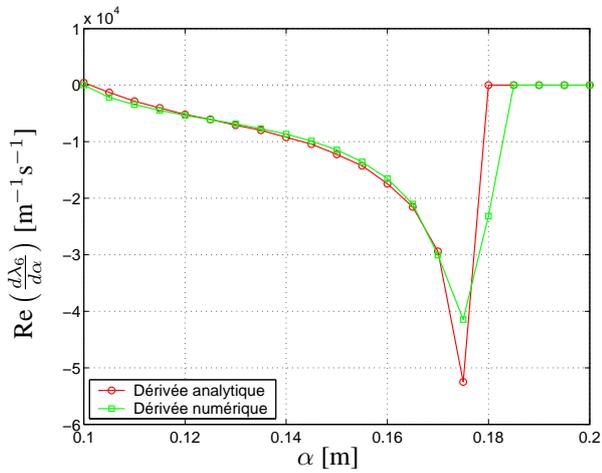


FIG. 6.13 – $\text{Re}(d\lambda_6/d\alpha)$ en fonction de α

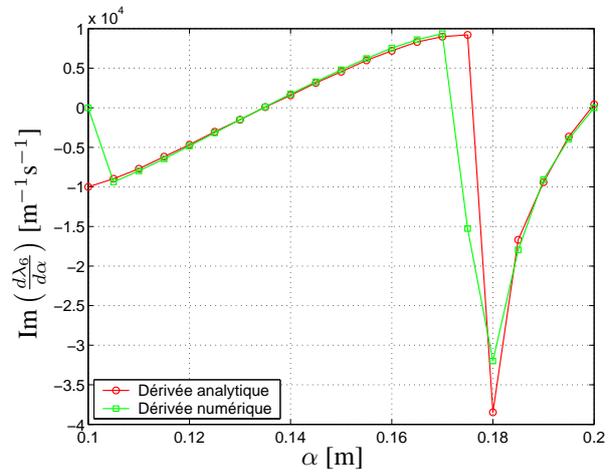


FIG. 6.14 – $\text{Im}(d\lambda_6/d\alpha)$ en fonction de α

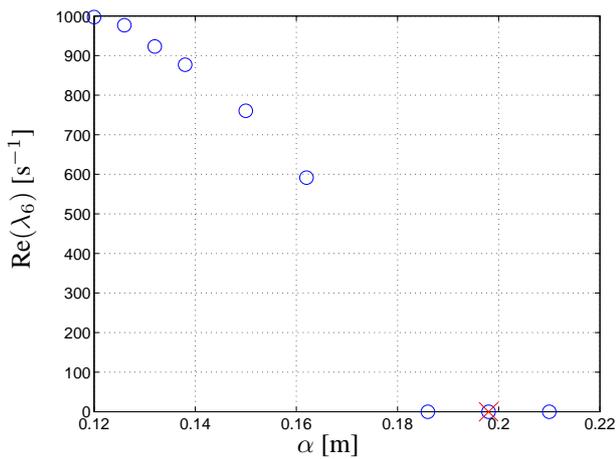


FIG. 6.15 – \circ Évaluation de la fonction coût $\text{Re}(\lambda_6)$ lors de l'optimisation par l'algorithme du simplexe. \times : évaluation finale

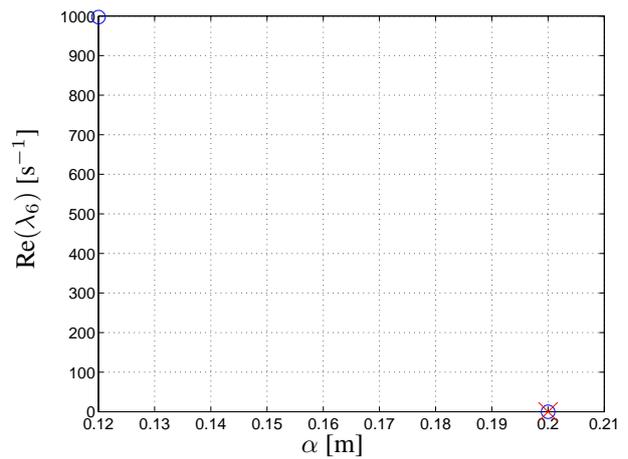


FIG. 6.16 – \circ Évaluation de la fonction coût $\text{Re}(\lambda_6)$ lors de l'optimisation par l'algorithme de minimisation avec utilisation du gradient. \times : évaluation finale

élastiques sont les mêmes que pour la couche élastique et $f = 2$.

La position radiale du plot est paramétrée par α (voir figure 6.17). Les champs \underline{u} (figure 6.18) et \underline{v} sont calculés pour le mode 10 instable. L'évolution de la partie réelle de la valeur propre avec la position radiale du plot est tracée figure 6.21. Ici, le champ de vitesse est égal à \underline{e}_x sur le bord de S_c . On choisit un champ de vitesse dans le domaine (figure 6.20) non nul sur les nœuds adjacents aux nœuds appartenant au bord de S_c . D'un point de vue numérique, les éléments dont le gradient de vitesse est non nul sont limités aux éléments à proximité des cercles adjacents au bord de S_c (figure 6.19). Ces éléments en question sont donc aussi situés à l'intérieur du volume du disque.

Les comparaisons entre les dérivées numériques et analytiques sont effectuées figure 6.22 et montre que la tendance est respectée. Les résultats sont moins bons que dans le cas bidimensionnel. Ceci est probablement dû au fait que la surface de contact n'est pas assez raffinée et/ou l'incrément $\Delta\alpha$ trop grand pour que la qualité de la dérivée numérique soit suffisante.

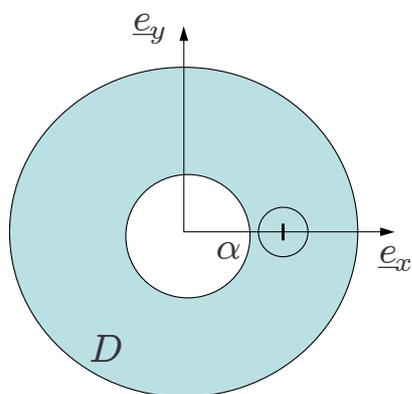


FIG. 6.17 – Paramétrage de la position radiale du plot

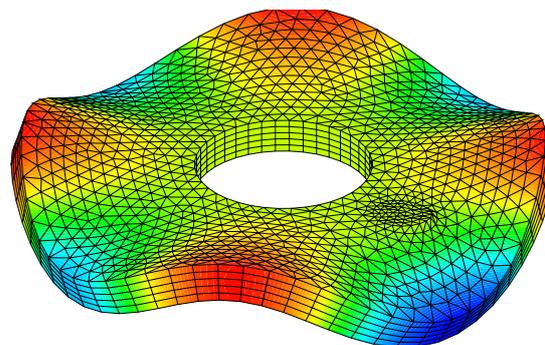


FIG. 6.18 – $\text{Re}(u_{10})$ (Les couleurs représentent le déplacement axial)

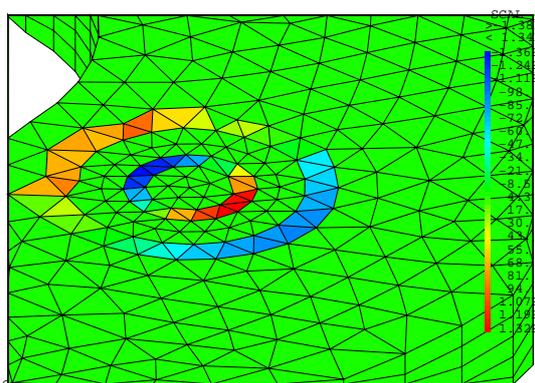


FIG. 6.19 – Divergence du champ de vitesse

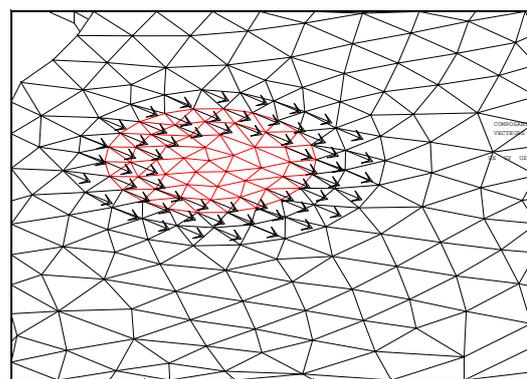
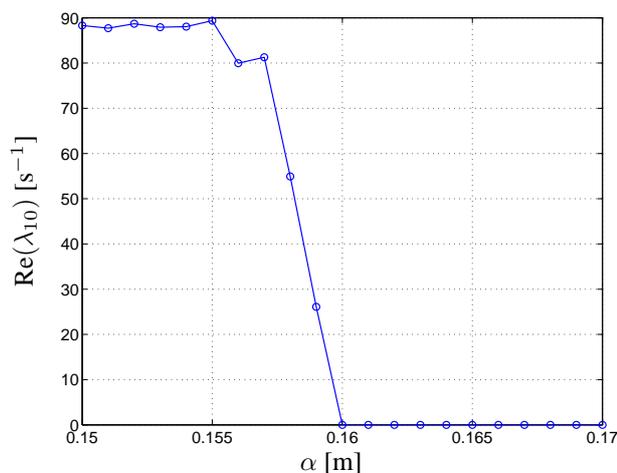
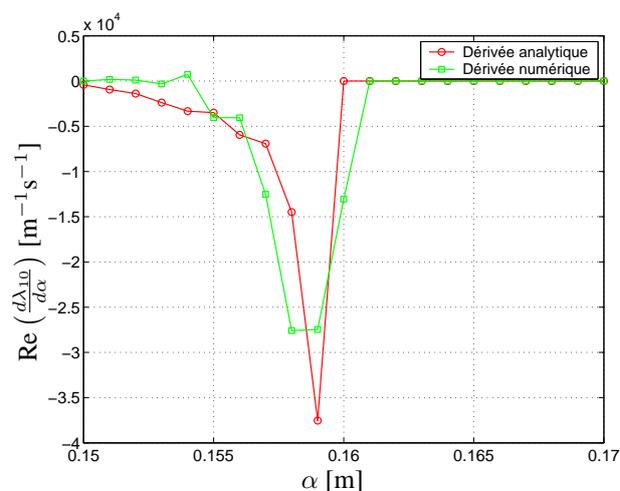


FIG. 6.20 – Champ de vitesse \underline{v}

6.6 Conclusion et perspectives

Une méthode originale d'optimisation de forme par un algorithme de gradient a été proposée. Elle est basée sur une expression analytique du gradient de la valeur propre caractérisant la

FIG. 6.21 – $\text{Re}(\lambda_{10})$ en fonction de α FIG. 6.22 – $\text{Re}(d\lambda_{10}/d\alpha)$ en fonction de α

stabilité dynamique du système. Tout d'abord, la formule analytique donnant la sensibilité a été validée via une comparaison avec une dérivation numérique sur un cas d'étude bidimensionnel. Ensuite l'algorithme d'optimisation a été appliqué avec succès sur ce même cas. La validation de la méthode sur le cas d'un disque élastique avec garniture rigide a été faite. Elle permet de trouver la position radiale optimale afin de stabiliser un mode précis.

Une première perspective au travail est de prendre en compte plus de paramètres géométriques afin de définir une forme plus complexe de garniture. Une évolution de la méthode est de généraliser la démarche au cas où la garniture est déformable. Il faut alors tenir compte de l'effet de l'ajout ou de retrait de matière sur la valeur propre. Afin de rendre performant l'algorithme d'optimisation, il faudrait prendre en compte les parties réelles des valeurs propres de plusieurs modes et faire de l'optimisation multi-critère.

Deuxième partie

**Application au crissement des freins à
disque de TGV**

7 – Caractérisation expérimentale du crissement au freinage du TGV

L'objet de ce chapitre est d'apporter une vue synthétique sur la caractérisation du phénomène de crissement des freins à disque de TGV à travers une synthèse bibliographique des résultats disponibles. Afin de quantifier d'un point de vue acoustique la gêne sonore dans les gares, on présente dans un premier temps, les résultats de mesure d'une campagne d'essai effectuée dans 2 gares sur 4 types de matériels TGV [24]. Ensuite, le système de freinage ainsi que son fonctionnement est brièvement décrit. Deux campagnes d'essais ont été réalisées afin de caractériser le phénomène : la première est une campagne de mesure embarquée [25] dans laquelle un microphone ainsi qu'un vibromètre laser ont permis de quantifier les vitesses vibratoires du disque de frein ainsi que le niveau acoustique. La deuxième est une campagne d'essai en fonctionnement sur banc d'essai [44] dont le but est de caractériser le champ vibratoire du disque à l'aide d'une technique de vibrométrie laser à balayage.

7.1 Caractérisation du bruit de crissement en gare



FIG. 7.1 – Implantation du dispositif de mesure en gare

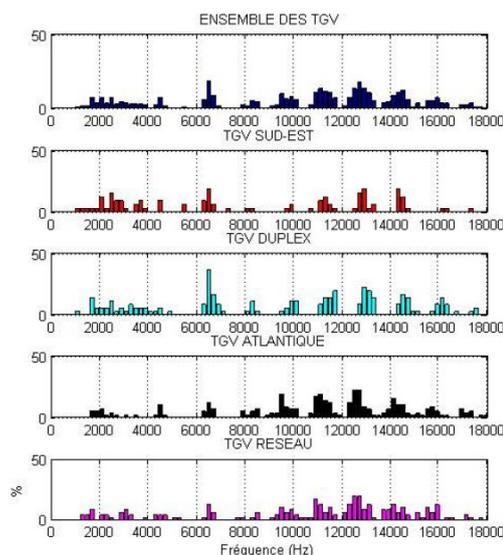


FIG. 7.2 – Pourcentage d'occurrence des fréquences de crissement par rapport au nombre de bogies bruyant

Dans un souci de caractérisation de la gêne sonore d'une manière globale dans les gares, la SNCF a réalisé une série de mesures acoustiques à l'aide d'un microphone disposé sur le

quai à un mètre du bord du quai et à un mètre de hauteur (figure 7.1). Après le passage d'une quarantaine de rames TGV de tous types, on identifie pour chaque essieu crissant les fréquences émergentes associées. On peut observer figure 7.2, le pourcentage d'occurrence des fréquences de crissement par rapport au nombre de bogies bruyants. Le niveau de bruit global mesuré varie entre 85 dB et 106 dB.

La figure 7.3 montre pour chaque type de TGV, les fréquences émergentes (fréquences dont le niveau maximum pendant le passage est supérieur à 80 dB) au passage de chaque bogie tandis que la figure 7.4 se restreint aux fréquences dont le niveau maximum pendant le passage est supérieur à 100 dB.

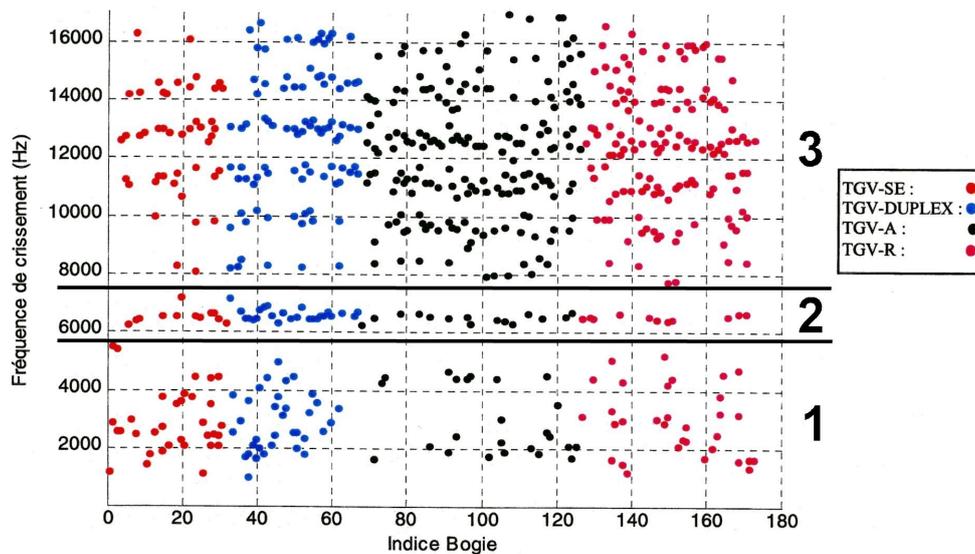


FIG. 7.3 – Fréquences de crissement émergentes en fonction du numéro du bogie au passage

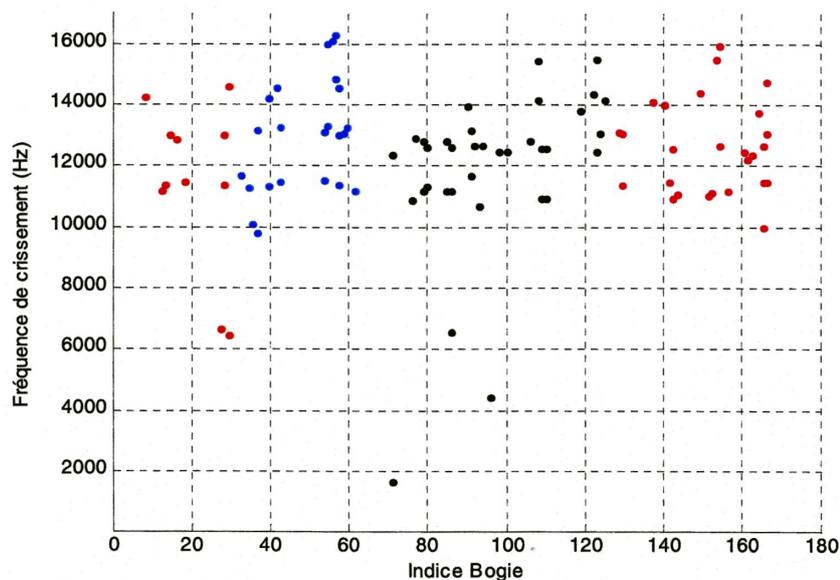


FIG. 7.4 – Fréquences de crissement émergentes dont le niveau en dB est supérieur à 100

On constate que le crissement est un spectre de raie très étendu. Trois groupes de fréquences apparaissent :

- Le groupe 1 fait apparaître des fréquences comprises entre 1000 et 5000 Hz environ. Le niveau acoustique est le moins important des 3 groupes.
- Le groupe 2 fait apparaître une fréquence située au environ de 6600 Hz.
- Le groupe 3 fait apparaître plusieurs fréquences bien marquées entre 8000 et 16000 Hz.

Ces constatations montrent déjà que pour tous types de matériels TGV se dégage une « signature acoustique » du crissement des freins à disque en gare.

7.2 Le système de freinage du TGV

On présente ici brièvement le fonctionnement du mécanisme de freinage TGV. On trouvera en annexe C des explications plus détaillées et des précisions sur la technologie du mécanisme.

Le système de freinage est un système de frein à disque. Le disque est fixé sur l'essieu via une pièce intermédiaire appelée moyeu (figures 7.5 et C.4).



FIG. 7.5 – Système disques / moyeu

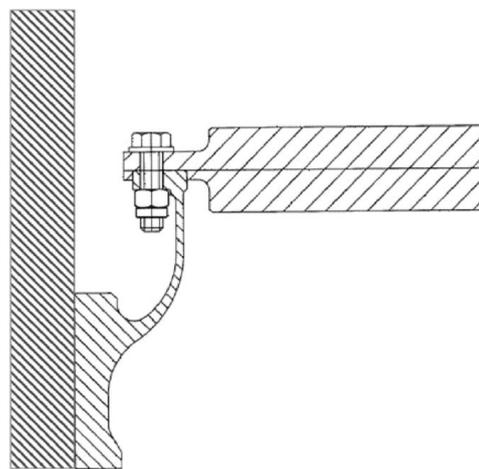


FIG. 7.6 – Implantation du disque sur le moyeu

Le disque est « pris en sandwich » par une garniture munie de plots. Cette garniture est montée dans son porte-garniture via une liaison par queue d'aronde (figures 7.7 et 7.8).

7.3 Mesures acoustiques et vibratoires embarquées

On cherche à caractériser de manière précise les niveaux vibratoires du disque de frein ainsi que les niveaux acoustiques. Une campagne d'essai en fonctionnement sur TGV Duplex a été réalisée par l'Agence d'Essai Ferroviaire [25]. Dans ce but, un microphone et un vibromètre laser ont été implantés à proximité du disque de frein (voir figures 7.10 et 7.11). Afin d'obtenir des conditions de fonctionnement stable dans le temps, on choisit un freinage de maintien qui garantit une vitesse du TGV approximativement constante de l'ordre de 7 km/h. La figure 7.9 présente l'évolution de la vitesse du train dans le temps ainsi que la valeur de la pression dans le cylindre de frein.

Pour des raisons d'encombrement, le vibromètre n'a pas pu être positionné selon l'axe du disque. On a donc utilisé un miroir qui a redirigé le laser de manière à ce qu'il arrive perpendiculairement à la surface plane pour mesurer une vitesse normale.



FIG. 7.7 – Deux garnitures par porte-garniture

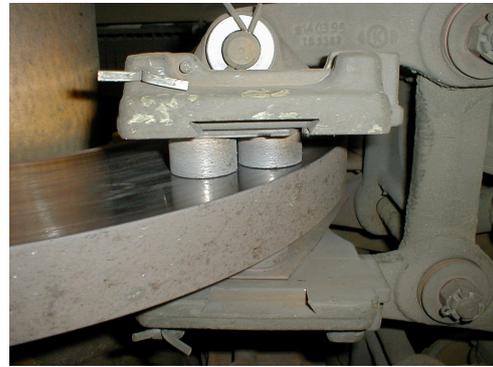


FIG. 7.8 – Montage des garnitures par queue d'aronde

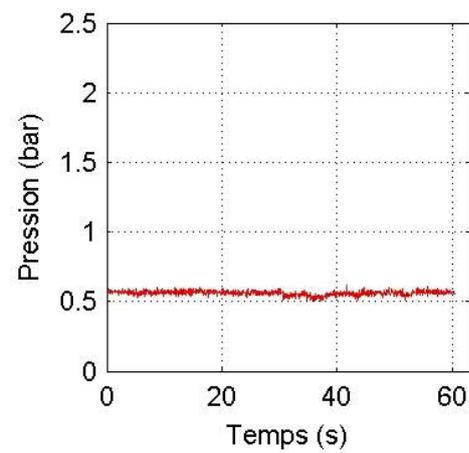
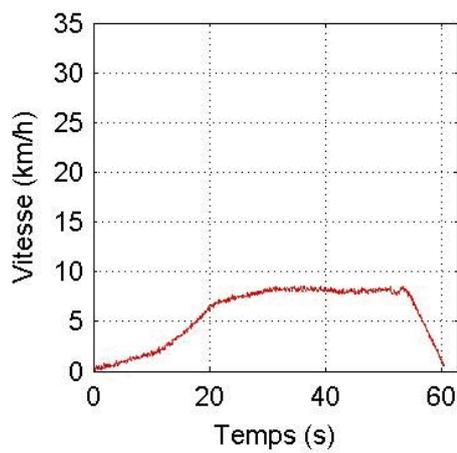


FIG. 7.9 – Caractéristiques de fonctionnement au cours du temps : Vitesse du train et pression dans le cylindre de frein



FIG. 7.10 – Implantation du microphone embarqué



FIG. 7.11 – Implantation du vibromètre laser embarqué

Les transformées de Fourier de la vitesse normale ainsi que de la pression acoustique sont représentées sur la figure 7.13.

La figure 7.12 montre un diagramme temps/fréquence associé à la vitesse normale mesurée. L'amplitude de vitesse normale mesurée au milieu du disque est de l'ordre de 10 cm/s (figure 7.15).

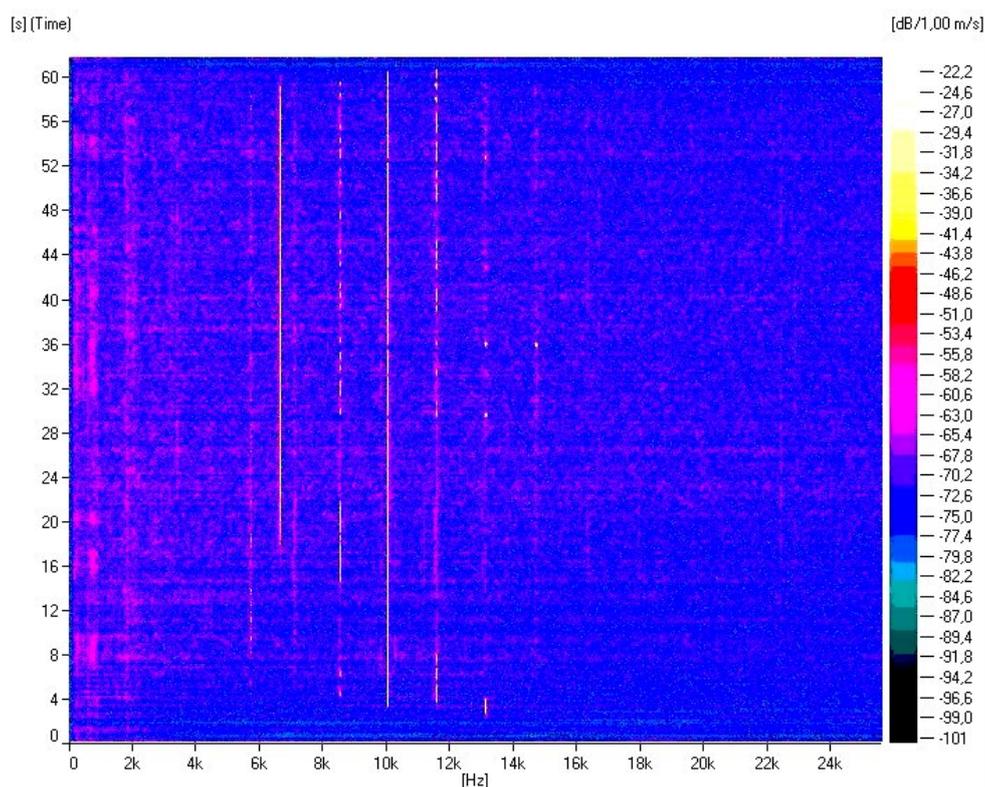


FIG. 7.12 – Diagramme temps/fréquence associée à la vitesse normale mesurée par le vibromètre

Ces résultats montrent que :

- Les fréquences vibratoires de disque émergentes coïncident avec les fréquences acoustiques émergentes. Les fréquences bruyantes sont donc dues aux fréquences vibratoires de disque.
- Les fréquences vibratoires émergentes restent stationnaires au cours du freinage ce qui corrobore les résultats sur le crissement dans l'automobile rappelés dans l'état de l'art.
- Le bruit rayonné au dessous de 5000 Hz n'est pas issu de vibrations de disque.

Si l'on compare ces résultats avec les résultats de mesure en gare présentés dans la section précédente, on peut déjà justifier le caractère brouillon du groupement de fréquences n°1 : il ne s'agit vraisemblablement pas de fréquences de vibrations de disque. En revanche, les groupes 2 et 3 dans lesquelles des paquets de fréquences se distinguent et ont des niveaux importants sont probablement issus de vibration de disque.

Cet essai particulier a permis de préciser la signature acoustique du crissement des matériels TGV en général.

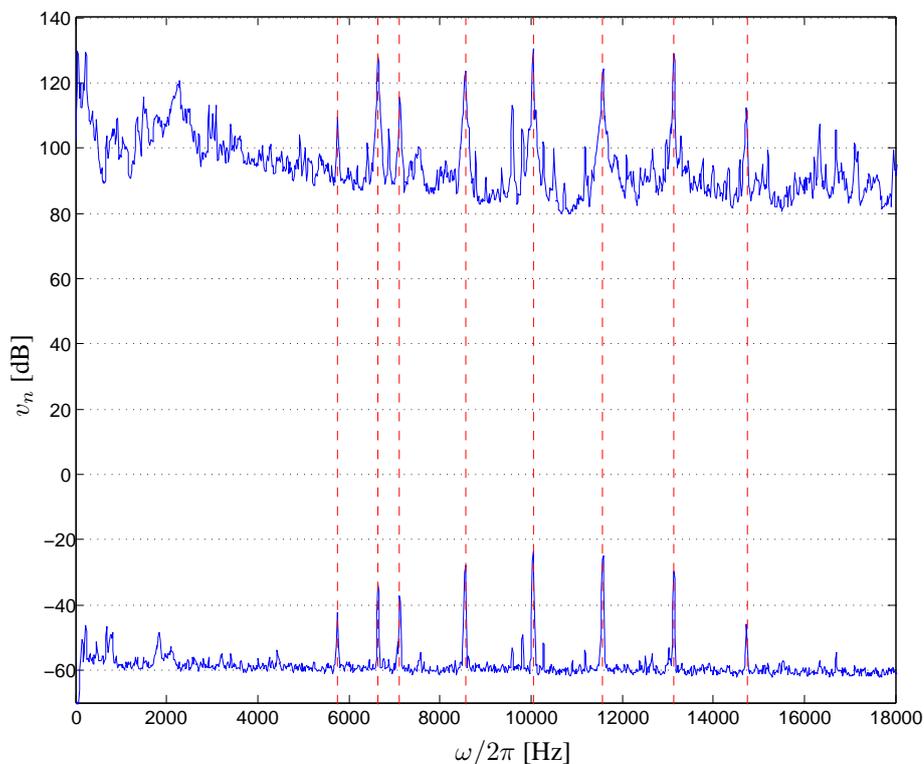


FIG. 7.13 – Transformée de Fourier de la vitesse normale mesurée par le vibromètre en dB (en bas, réf 1 m/s) et de la pression acoustique mesurée par le microphone en dB (en haut, réf 20 μPa) en fonction de la fréquence

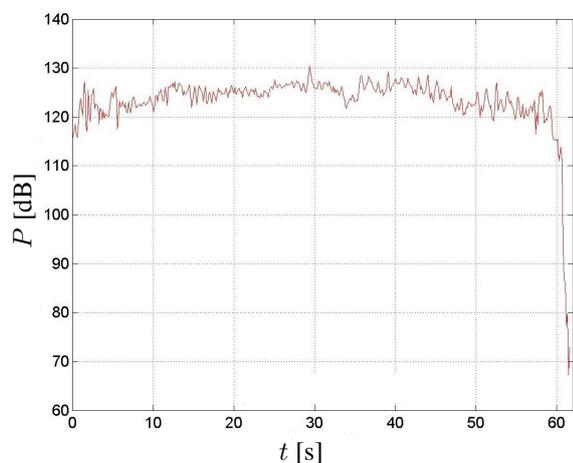


FIG. 7.14 – Niveau de pression acoustique en dB (réf 20 μPa) en fonction du temps

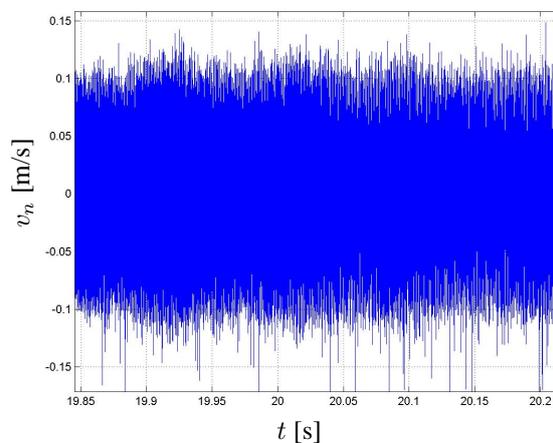


FIG. 7.15 – Vitesse normale vibratoire [m/s] en fonction du temps sur une faible période [19.85 s, 20.25 s]

7.4 Mesures acoustiques et vibratoires sur banc d'essai

Compte tenu des difficultés techniques d'implantation de matériels de mesure sur le TGV, un banc d'essai de freinage (banc d'essai de l'Agence d'Essai Ferroviaire de la SNCF) a été utilisé pour compléter les investigations. Il s'agit d'essayer de caractériser le champ vibratoire sur le disque lorsque le banc fait apparaître du crissement. Cet essai de caractérisation est le fruit d'une collaboration entre P. Castellini [21, 69] de l'université *Politecnica delle Marche* d'Ancone et la SNCF. Il a été mené par P. Castellini et L. Leoni [44].

Le banc d'essai de freinage (figure 7.20) est relativement réaliste puisqu'il dispose d'une timonerie semblable à celle du TGV et que le disque est monté sur un moyeu puis un arbre lui même réaliste. L'arbre est entraîné par un moteur électrique puissant. Afin de simuler l'inertie du train, des disques massifs sont rendus solidaires de l'arbre.

Méthode de mesure

L'essai consiste à effectuer un freinage de maintien dans des conditions proches des essais embarqués. La vitesse de train simulée est de 10 km/h avec une pression dans le cylindre de frein de 0.5 bar. Le matériel utilisé est un vibromètre laser pointant sur la surface plane du disque parcourant un maillage expérimental (figure 7.21). Un microphone est placé à 1 cm de la surface du disque et sert de référence de phase pour les mesures vibratoires.

On établit les conditions de freinage de sorte que l'on obtienne du crissement. On suppose que le phénomène perçu, c'est à dire la pression acoustique mesurée, reste stationnaire. Dans ces conditions, le laser balaye chaque point du maillage expérimental en effectuant une acquisition de 2 secondes environ par point de mesure. Pendant ce même temps, une acquisition de la pression acoustique est effectuée. On dispose donc pour chaque points de mesure de 2 signaux.

Puisque le signal venant du microphone nous sert de référence de phase, on qualifie les signaux vibratoires de signaux de réponse et les signaux acoustiques de signaux de référence. Une image du champ vibratoire dans le domaine fréquentiel nous sera donné grâce à la fonction de transfert calculée comme étant le rapport de l'interspectre des deux signaux avec l'autospectre du signal de référence. Le calcul de ces fonctions de transfert $H(\omega)$ pour chaque point de mesure est effectué par moyennage des interspectres et autospectres sur n portions de signal identiques.

Remarque : le laser mesure des vitesses normales exclusivement. Il n'est donc pas possible de mesurer des vibrations dans le plan du disque.

Résultats de représentativité

Le crissement observé sur banc d'essai peut être fluctuant dans le temps à la fois en terme de niveau sonore et de contenu fréquentiel. Il peut être amené à évoluer dans le temps au cours d'un freinage long. On se propose de comparer dans le domaine fréquentiel les signaux acoustiques et vibratoire mesurés sur banc d'essai et en situation embarquée (figures 7.16 et 7.17).

D'un point de vue fréquentiel, le phénomène au banc est assez représentatif du phénomène en ligne sauf pour la fréquence du groupe 2 (défini figure 7.3) de 6600 Hz. En revanche, les niveaux acoustiques et vibratoires sont inférieurs de manière significative au banc. Une expli-

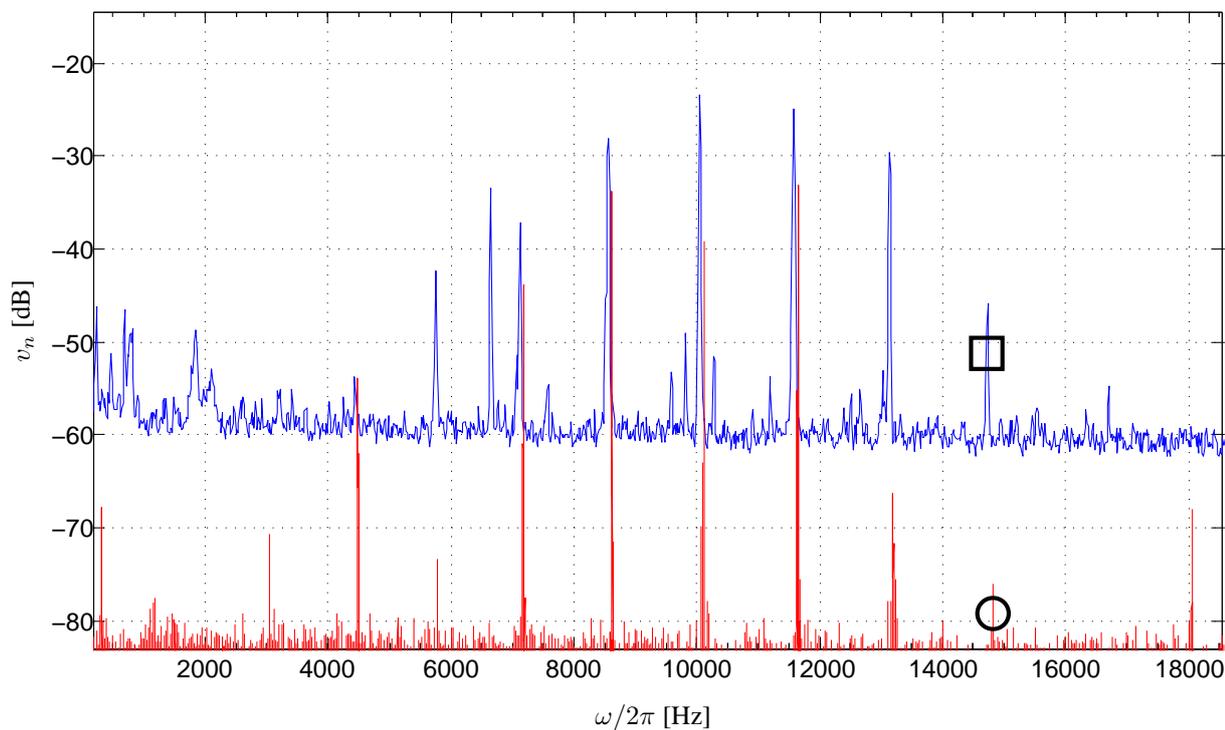


FIG. 7.16 – Comparaison des vitesses normales en ligne (\square) et au banc (\circ) (Spectre de la vitesse normale sur 2 s en dB, réf 1 m/s)

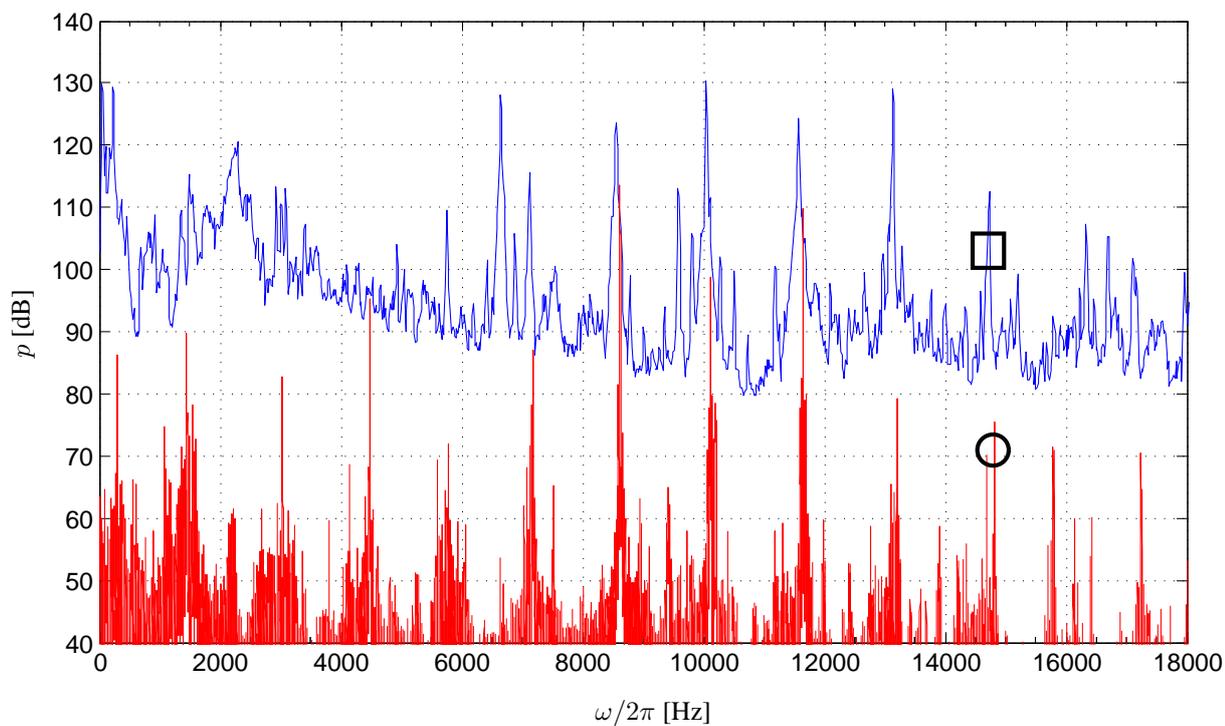


FIG. 7.17 – Comparaison du bruit émis en ligne (\square) et au banc (\circ) (Spectre de la puissance acoustique sur 2 s en dB, réf 20 μ Pa)

cation possible pour justifier cette différence de niveau est le possible écart entre les facteurs de frottement et/ou la situation de contact plots / disque.

Spectre vibratoire du disque en crissement et réponse impulsionnelle

Afin de connaître l'effet du serrage de la garniture sur les fréquences propres du système, on compare les réponses en vitesses axiales à un choc au marteau dans le cas où les garnitures sont serrées et dans le cas où le disque est libre. On observe figure 7.18 que les fréquences propres du système couplé sont très proches de celles du système libre.

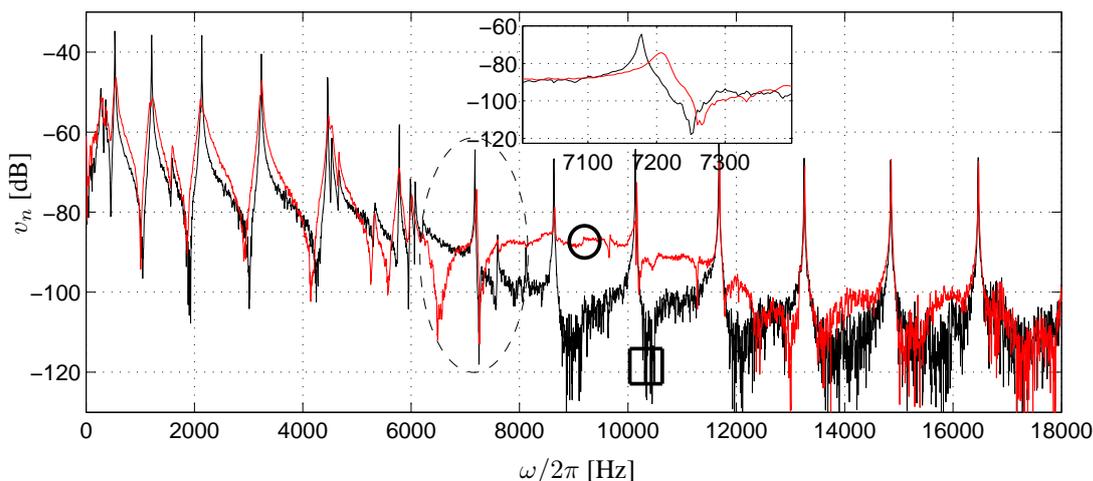


FIG. 7.18 – Réponse en vitesse (en dB) d'un point du disque à une excitation au marteau de choc (réf 12.5 mm/s). Garnitures serrées (o) et Garnitures ouvertes (□)

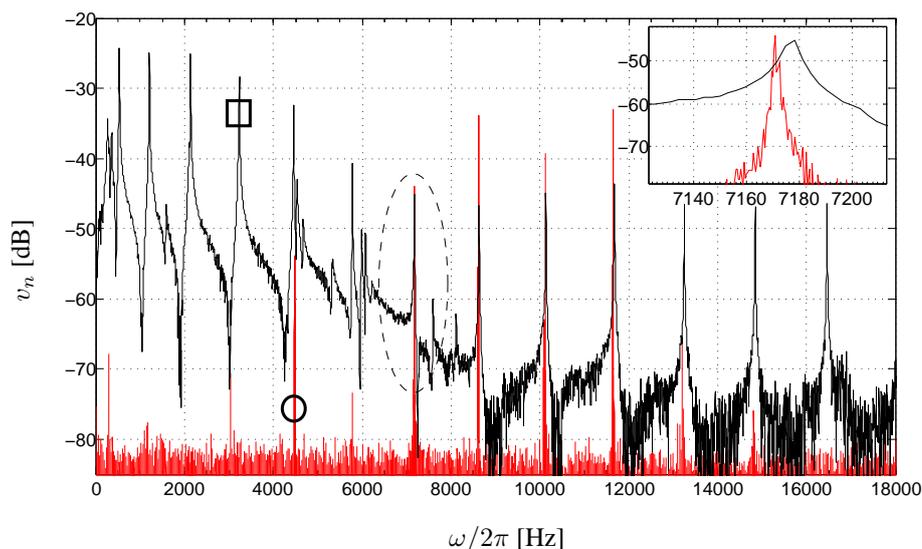


FIG. 7.19 – Réponse en vitesse (□) (en dB) d'un point du disque à une excitation au marteau de choc (réf 12.5 mm/s) Garnitures ouvertes. Spectre de vitesse normale (o) en situation de crissement au banc [dB] (réf 1 m/s)

Le spectre de vitesse normale en situation de crissement est comparé au spectre de la réponse en vitesse au marteau de choc du disque libre figure 7.19. On constate que les fréquences vibra-

toires de disque en situation de crissement sont quasiment confondues avec les fréquences de résonance du disque libre. Ceci montre que les multiples fréquences de crissement obtenues ne sont pas des harmoniques dues à un effet purement temporel.

Champ vibratoire en situation de crissement

Dans le cadre de cet essai d'investigation du champ vibratoire, le temps nécessaire pour l'acquisition de tous les points est de l'ordre de 20 minutes. Ceci suppose que le phénomène reste stationnaire pendant cette période.

Après l'acquisition des signaux, le post-traitement permet de calculer le module et la phase de la fonction de transfert. Les figures 7.22, 7.23 et 7.24 montrent la reconstruction du module et de la phase sur un rayon du disque et sur la périphérie.

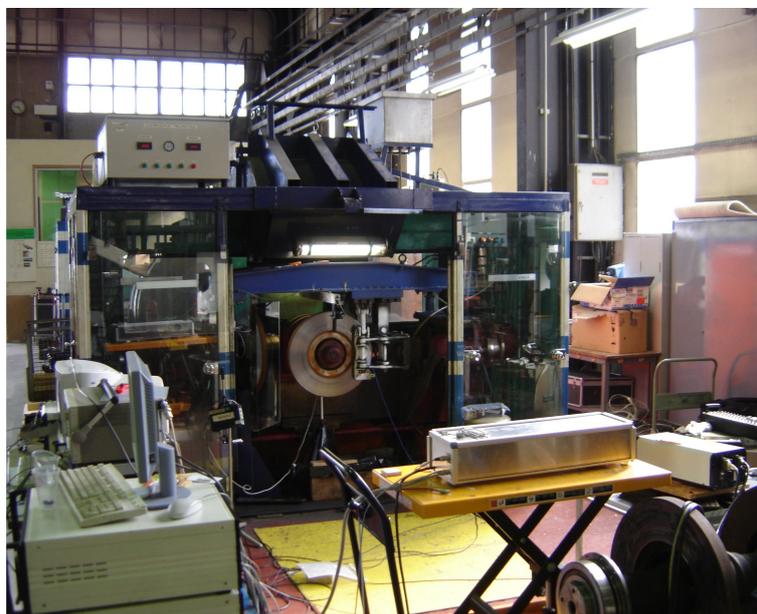


FIG. 7.20 – Banc d'essai de freinage

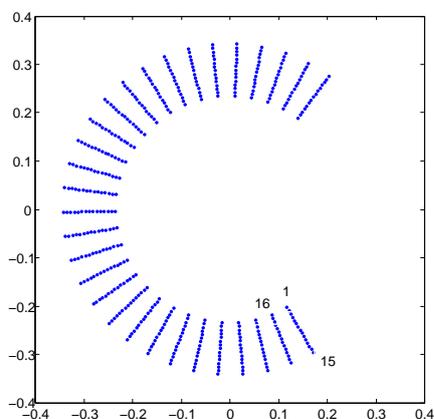


FIG. 7.21 – Maillage expérimental

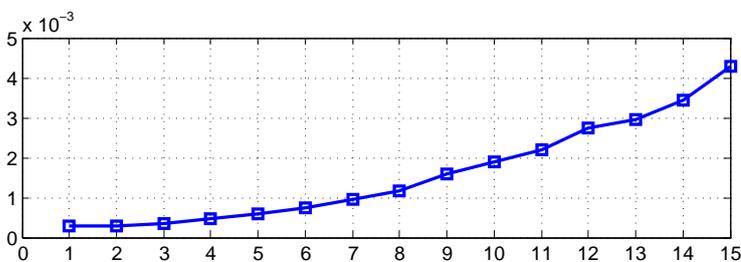
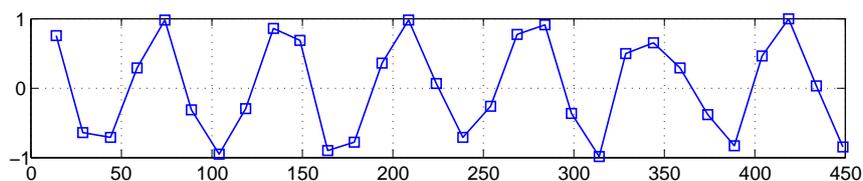
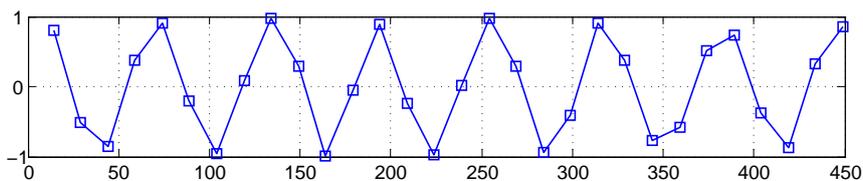


FIG. 7.22 – $|H(8618)|$ pour les points de 1 à 15

Enfin, les déformées vibratoires extraites sont tracées figure 7.4. Elles montrent que les

FIG. 7.23 – $\text{Cos}(\phi)$, $\phi=\text{arg}(H(8618))$ le long du cercle de rayon maximalFIG. 7.24 – $\text{Cos}(\phi)$, $\phi=\text{arg}(H(10120))$ le long du cercle de rayon maximal

fréquences émergentes correspondantes sont associées à des champs vibratoires faisant apparaître des diamètres nodaux. L'animation des déformées vibratoires reconstituées fait apparaître une rotation des nœuds de vibration (rotation mise en évidence avec une autre technique par Fieldhouse [29]).

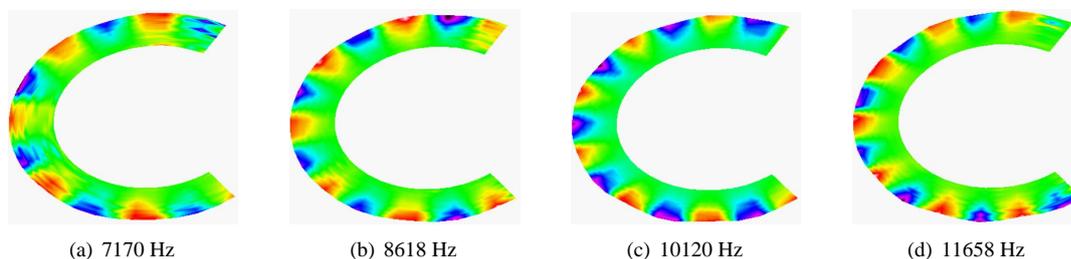


FIG. 7.25 – Déformées vibratoires en fonctionnement.

7.5 Conclusion

Les mesures acoustiques effectuées en gare sur un grand nombre de matériels TGV caractérisent clairement une signature acoustique du crissement des freins à disque et suggère un classement en 3 groupes de fréquences. Les essais acoustiques et vibratoires embarqués nous permettent de conclure que le crissement est dû aux vibrations hautes fréquences de disque (5000 Hz à 15000 Hz correspondant aux groupes 2 et 3). Ces mesures permettent de quantifier les niveaux acoustiques en champ proche et vibratoires. Une campagne de mesures effectuée sur banc d'essai a montré une représentativité des mesures acoustiques en ligne d'un point de vue fréquentiel (sauf la fréquence à 6600 Hz). Ce résultat nous a permis via une technique de vibrométrie laser à balayage d'identifier les déformées vibratoires en situation de crissement qui sont des champs à diamètres nodaux dont les nœuds de vibrations sont en rotation le long du disque.

8 – Modélisation du crissement du système TGV

On se propose dans ce chapitre d'effectuer une modélisation du mécanisme de freinage TGV. On décompose le système de freinage en deux sous-systèmes : le sous-système disque/moyeu ainsi que le sous-système porte-garniture. Dans un premier temps, on construit un modèle élément fini du sous-système disque/moyeu et on identifie les amortissements modaux mesurés grâce à une analyse modale expérimentale. Dans un second temps, on s'intéresse à la modélisation du sous-système porte-garniture. Les modules élastiques des plots de garnitures sont identifiés et des hypothèses sont formulées pour le choix des conditions d'accroche. Enfin la stabilité de l'équilibre stationnaire est étudiée au regard des paramètres physiques des plots.

8.1 Modélisation du système de freinage

8.1.1 Sous-système disque/moyeu

À partir de l'implantation du sous-système disque/moyeu sur l'essieu précisée en figure C.4, on propose une modélisation par éléments finis simplifiée : un disque composé d'éléments volumiques quadratiques ainsi qu'un moyeu composé d'éléments coques quadratiques encastré sur le disque. L'encastrement de l'ensemble sur l'essieu est modélisé par une condition au limite de type déplacement et rotation imposés nuls sur le cercle de plus petit diamètre du moyeu (figure 8.1).

Les caractéristiques physiques du sous-système disque/moyeu sont précisées figure 8.1. Un calcul numérique des modes libres du système a été mené et les principaux modes sont présentés sur les figures 8.3 à 8.5. D'autres modes tels que des modes de moyeu ne sont pas précisés. Une analyse modale expérimentale a été effectuée sur ce système libre. Elle permet de s'assurer de la pertinence des fréquences propres calculées (l'écart relatif avec les fréquences expérimentales est inférieur au pourcent) et d'identifier les amortissements modaux ξ dont une partie est représentée en figure 8.2. Ces amortissements sont tracés par famille de modes. On peut remarquer une certaine disparité entre ces familles avec une croissance avec la fréquence. Les amortissements modaux correspondant à la famille de modes A1- \times majorent ceux des deux autres familles.

8.1.2 Sous-système porte-garniture

On a vu dans la description du mécanisme que le porte-garniture est mécaniquement complexe. Afin de modéliser ce sous-ensemble, on effectue un certain nombre d'hypothèses (figure 8.6) :

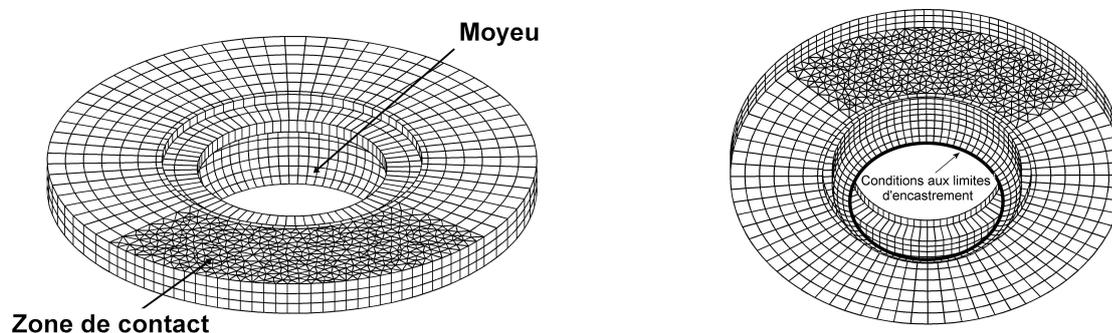
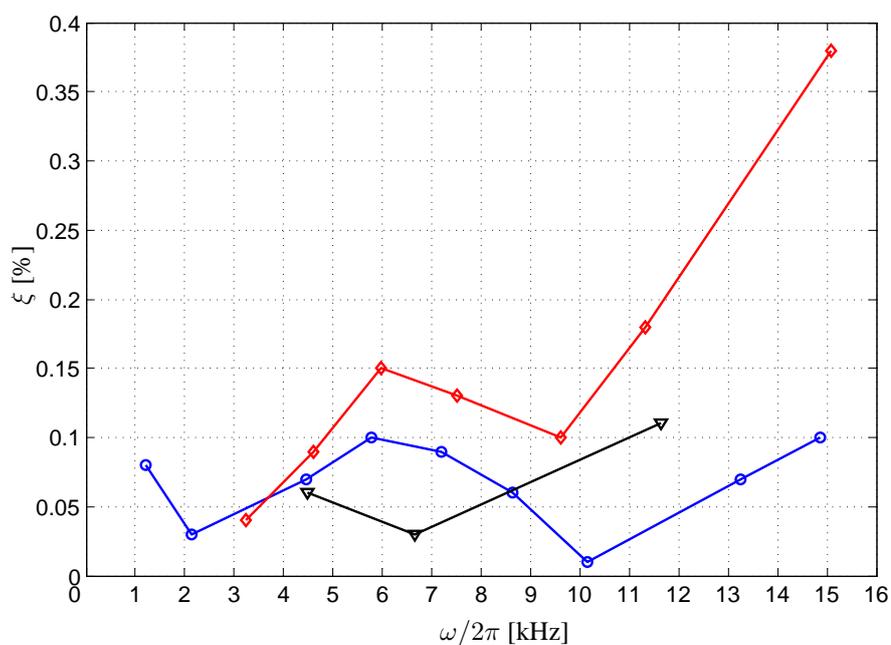


FIG. 8.1 – Vue de dessus et vue de dessous du sous-système disque/moyeu

Module d'Young E	2.02×10^{11} Pa
Coefficient de Poisson ν	0.29
Masse volumique ρ	7850 kg.m^{-3}
Épaisseur du disque	45 mm
Diamètre extérieur du disque	640 mm
Diamètres intérieurs du disque	248 mm et 340 mm

TAB. 8.1 – Caractéristiques physiques pour le disque

FIG. 8.2 – Amortissement modaux mesurés ξ (en %) classés selon les familles de modes en fonction de la fréquence (kHz). \circ : A0- \times , \diamond : A1- \times , \triangle : C0- \times

Fréq. (Hz)	Type	Diamètres nodaux
1230	A	3
2143	A	4
3229	A	5
4443	A	6
5755	A	7
7144	A	8
8594	A	9
10093	A	10
11631	A	11
13202	A	12
14799	A	13

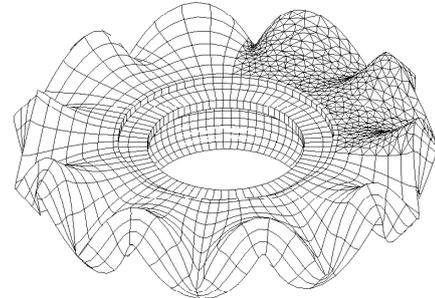


FIG. 8.3 – Premiers modes Axiaux sans cercles nodaux (A0-×) du sous-système disque/moyeu libre et représentation du mode A0-10

Fréq. (Hz)	Type	Diamètres nodaux
3286	A	2
4692	A	3
5991	A	4
7818	A	5
9529	A	6
11336	A	7
13196	A	8
14800	A	9

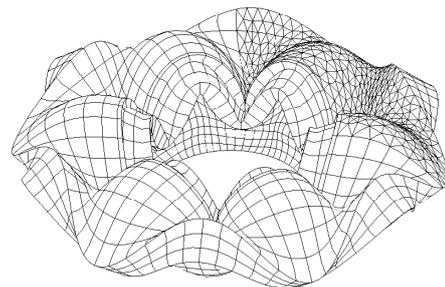


FIG. 8.4 – Premiers modes Axiaux avec 1 cercle nodal (A1-×) du sous-système disque/moyeu libre et représentation du mode A1-6

Fréq. (Hz)	Type	Diamètres nodaux
4515	C	1
6681	C	2
9188	C	3
11659	C	4
13978	C	5

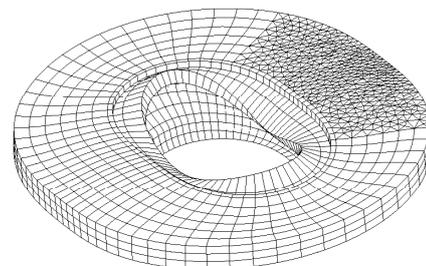


FIG. 8.5 – Premiers modes Circonférentiels sans cercles nodaux (C0-×) du sous système disque/moyeu libre et représentation du mode C0-2

Module d'Young	~ 3500 MPa
Coefficient de Poisson ν	0.3
Masse volumique ρ	6250 kg.m^{-3}
Longueur du plot	25 mm
Diamètre du plot	40 mm

TAB. 8.2 – Caractéristiques physiques pour un plot

- On néglige les effets de l'étrier.
- La garniture composée de l'armature métallique et des plots est montée dans le porte-garniture via une liaison par queue d'aronde. Les jeux dans cette liaison sont importants. En conséquence, la transmission des efforts porte-garniture / plots est effectuée par le plan (P). On fait l'hypothèse qu'à l'équilibre, l'armature reste en contact bilatéral avec le porte-garniture.
- On considère le porte-garniture rigide. Afin de tenir compte de son inertie, on reporte la masse totale du porte garniture sur le plan support des plots.

On impose des conditions aux limites sur la base des plots : on impose des déplacements nuls dans le plan et des déplacements orthogonaux tels que les points situés sur le plan (P) restent coplanaires. Cela permet de rendre possible la rotation de l'ensemble garniture / porte-garniture.

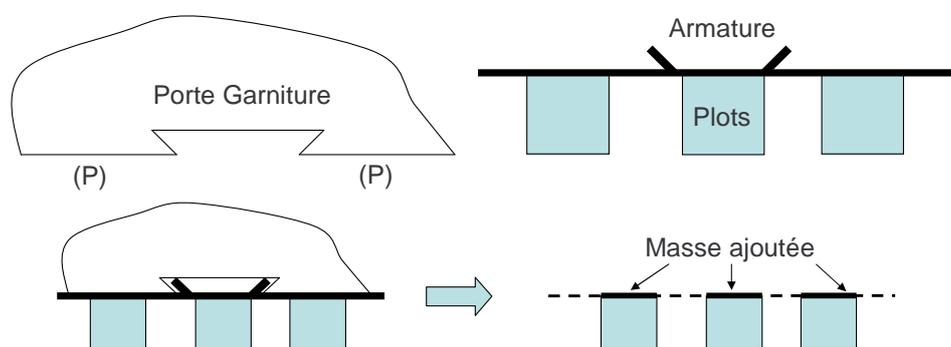


FIG. 8.6 – Modélisation et conditions limites de la garniture

Les propriétés physiques des plots sont résumées au tableau 8.2. Pour le module d'Young, la valeur est indicative et dépend du type de plot utilisé. La figure 8.7 donne l'évolution avec la température du module d'Young pour 4 types de garnitures TGV. Concernant la zone de contact potentielle, on fait l'hypothèse que l'ensemble des plots sont susceptibles d'être en contact avec le disque.

Le modèle éléments finis complet est représenté figure 8.8.

8.2 Stabilité de l'équilibre stationnaire

Le calcul de l'équilibre est effectué sur le modèle présenté précédemment en appliquant des efforts de pression sur la base des plots de telle sorte que la résultante axiale en effort F d'une garniture sur le disque soit de 2000 N. On choisit les paramètres de chargement suivant : $f=0.4$,

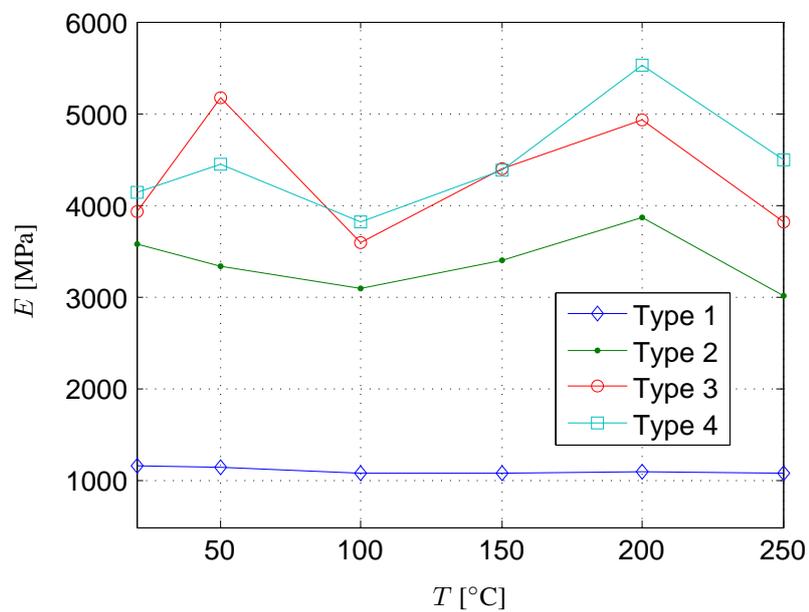


FIG. 8.7 – Modules de compression [MPa] des plots en fonction de la température pour 4 types de garnitures TGV

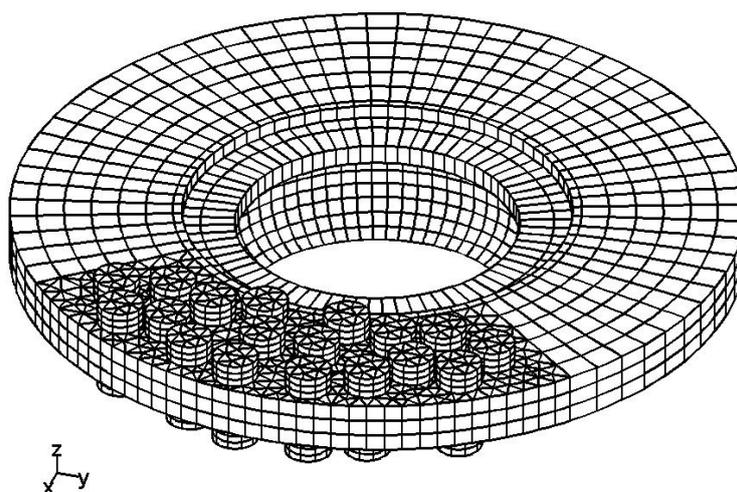


FIG. 8.8 – Modèle de frein avec porte-garniture rigide (modèle à 80000 ddls)

$F = 2000 \text{ N}$ et $\Omega = 4 \text{ rad/s}$ (ce qui correspond à une vitesse de train de l'ordre de 7 km/h environ). Dans un premier temps, on ne tient pas compte de l'amortissement matériau.

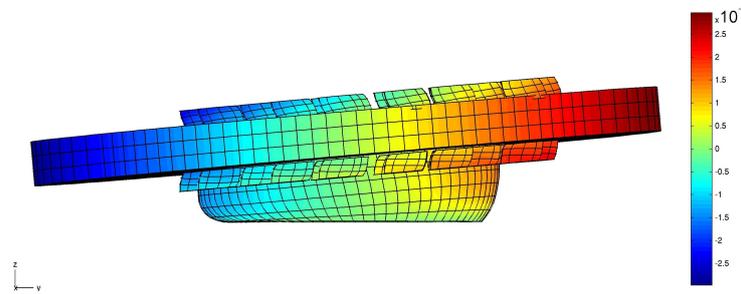


FIG. 8.9 – Solution stationnaire (déplacement axiaux [m])

Après avoir effectué le calcul de l'équilibre (voir figure 8.9), on résout le problème aux valeurs propres donnant la stabilité de cet équilibre. La figure 8.11 illustre le résultat du calcul de stabilité. Les taux de croissance des modes sont représentés en fonction de la fréquence. Bien sûr, les modes de stabilité sont des modes couplés qui vérifient les conditions de contact bilatéral sur la zone de contact donc les déformées sont globales. En revanche, pour certains modes, les déformées modales dans le disque sont prépondérantes et pour d'autres ce sont les déformées de plots. Il est donc intéressant de les distinguer. Pour cela, on calcule les contributions des énergies de déformations à chaque sous-structure, et l'on calcule le critère

$$C_r = \frac{E_{Disque}^D}{E_{Disque}^D + E_{Plots}^D} \quad \text{avec} \quad E_{Disque}^D = 1/2 Re \{ \phi_{Disque} \}^T [K_{Disque}] Re \{ \phi_{Disque} \}$$

Les résultats du calcul montrent que l'on obtient 610 modes sur l'intervalle [0 Hz, 15 kHz].

- À cause de la quantité importante de plots, on observe un grand nombre de modes de plots. Sur cette bande de fréquence, on met en évidence des modes instables de plots de type 1, 2 et 4 (figure 8.12). Le mode de type 1 est un mode de traction-compression de plot alors que les modes de type 2 et 4 sont des modes de flexion. Les modes de plots de type 3 sont des modes radiaux de plots stables (stabilisés par l'amortissement issu du frottement plan). Les modes instables de plots obtenus peuvent être qualifiés d'auto-déstabilisés car ils peuvent être mis en évidence en considérant un disque rigide.
- Concernant les modes de disque, on observe que les modes de disque instables se situent dans la bande de fréquence [6 kHz, 14 kHz]. On remarque que les fréquences des modes instables de disque (où les déformations dans le disque dominant) sont peu modifiées par rapport aux fréquences des modes couplés sans frottement, elles mêmes peu modifiées vis-à-vis des modes libres de disque. On peut donc garder les mêmes dénominations pour les modes instables (voir figure 8.13) : il s'agit du mode circonférentiel C0-2, des modes axiaux sans cercle nodal A0-9, A0-10, A0-11, A0-12 et des modes à un cercle nodal A1-6, A1-7 et A1-8. On remarque que ces modes instables sont non stationnaires et qu'ils tournent le long du disque. L'ensemble de ces modes de disque sont des modes axiaux susceptibles d'être bruyants. Seul le mode C0-2 n'est pas axial. En revanche, l'observation de sa déformée modale montre que l'effet Poisson est important dans le disque. Il est intéressant de comparer l'ordre de grandeur des amortissements modaux de disques mesurés ξ (figure 8.2) vis-à-vis des taux de croissances modaux obtenus. Ces derniers restent supérieurs aux amortissements modaux pour une majorité de modes instables.

La figure 8.10 montre le diagramme de stabilité auquel on a superposé le spectre de vitesse normale mesuré sur TGV (figure 7.13). On constate que parmi les modes instables, les modes de type A0- \times sont présents ainsi que le mode C0-2, alors que les autres sont absents.

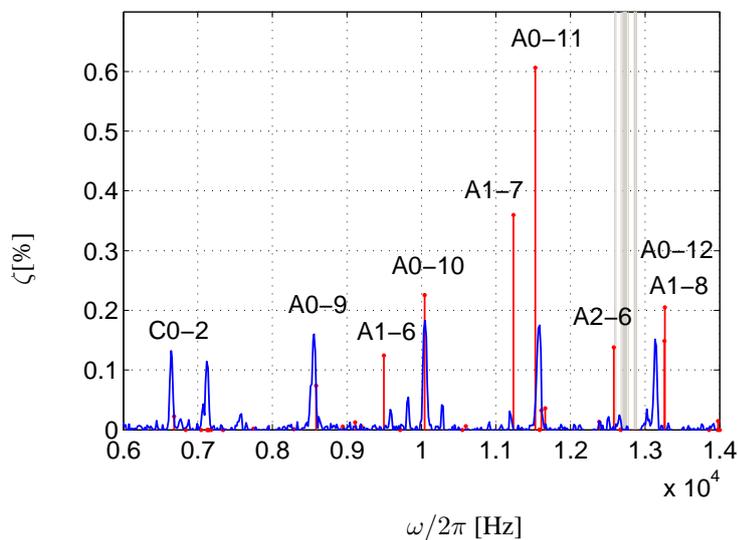


FIG. 8.10 – Superposition du spectre de vitesse normale expérimental (7.13) (échelle non significative) au diagramme de stabilité

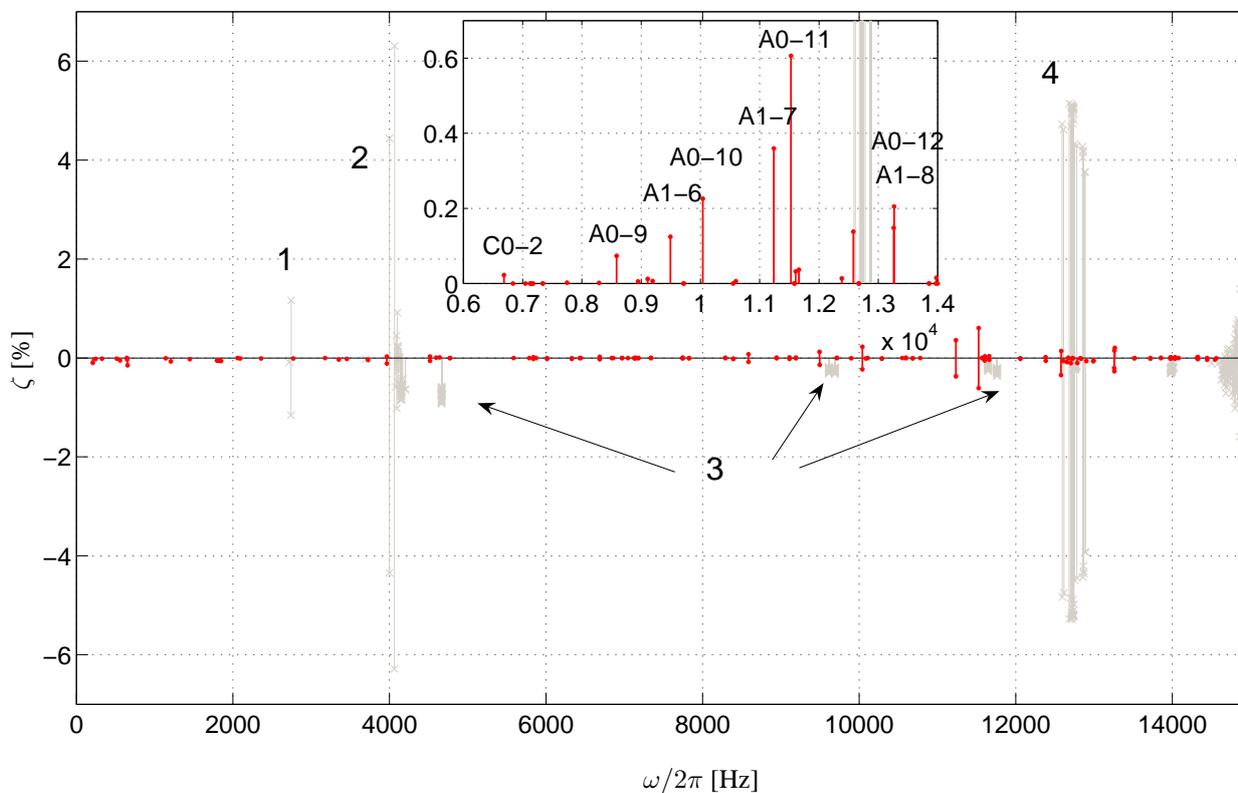


FIG. 8.11 – Taux de croissance en fonction de la fréquence : o Modes de disque ($C_r > 20\%$), x Mode de plots ($C_r \leq 20\%$)

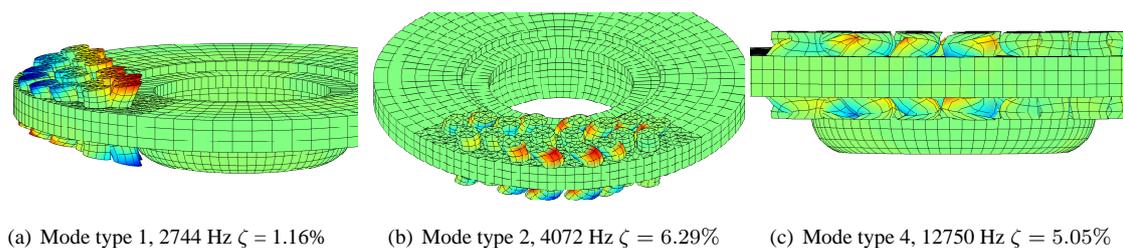


FIG. 8.12 – Modes instables de plots de type 1, 2 et 4

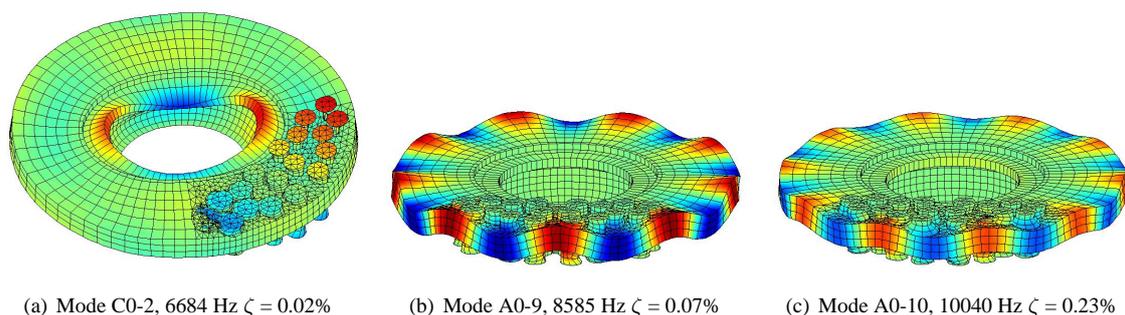


FIG. 8.13 – Quelques modes instables de disques

8.3 Étude des mécanismes d'instabilités dynamiques

Les résultats précédents nous permettent de constater le caractère prépondérant des modes axiaux à diamètres nodaux dans la stabilité de l'équilibre. On propose dans cette partie d'effectuer quelques calculs paramétriques afin de mieux comprendre le rôle des propriétés physiques des plots de garniture sur les résultats. Dans un premier temps, on ne tient compte exclusivement que de la raideur des plots afin de vérifier le mécanisme proposé par Flint et al. [30]. Dans un second temps, on regarde l'effet des modes de plots sur les modes instables de disques. Enfin, les conséquences de la prise en compte de l'amortissement dans les plots sont observées.

8.3.1 Stabilité dans le cas d'une densité de plots nulle

On l'a vu dans l'état de l'art, Flint et al. [30] propose un mécanisme de déstabilisation basé sur la création d'un moment de frottement du à l'aspect surfacique du disque et ceci avec une garniture sans masse. Ce mécanisme à lui seul permet de mettre en évidence des modes instables axiaux de disque. On propose d'effectuer un calcul de stabilité avec masse volumique de plots nulle. La figure 8.14 montre les résultats du calcul de stabilité pour quatre modules d'Young de plots avec une masse volumique nulle.

On constate que les modes à diamètres nodaux sans cercle nodal et avec un cercle nodal ont de forts taux de croissance et sont prépondérants sur toute la plage de fréquence. L'ensemble de ces modes instables résultent du couplage de modes proches (doubles lorsque le disque est libre). La dépendance des taux de croissance avec le module est quasiment linéaire dans le domaine de variation [1 MPa, 8 MPa]. En revanche, les fréquences des modes sont peu altérées. La plage de modules parcourue est représentative des modules de plots que l'on peut rencontrer

dans les divers types de garnitures TGV (figure 8.7).

La comparaison avec la configuration où l'on tient compte d'une densité réaliste est effectuée figure 8.15. On observe une chute significative des taux de croissances modaux sauf pour les modes de disques proches des modes instables de plots de type 4 (figure 8.12).

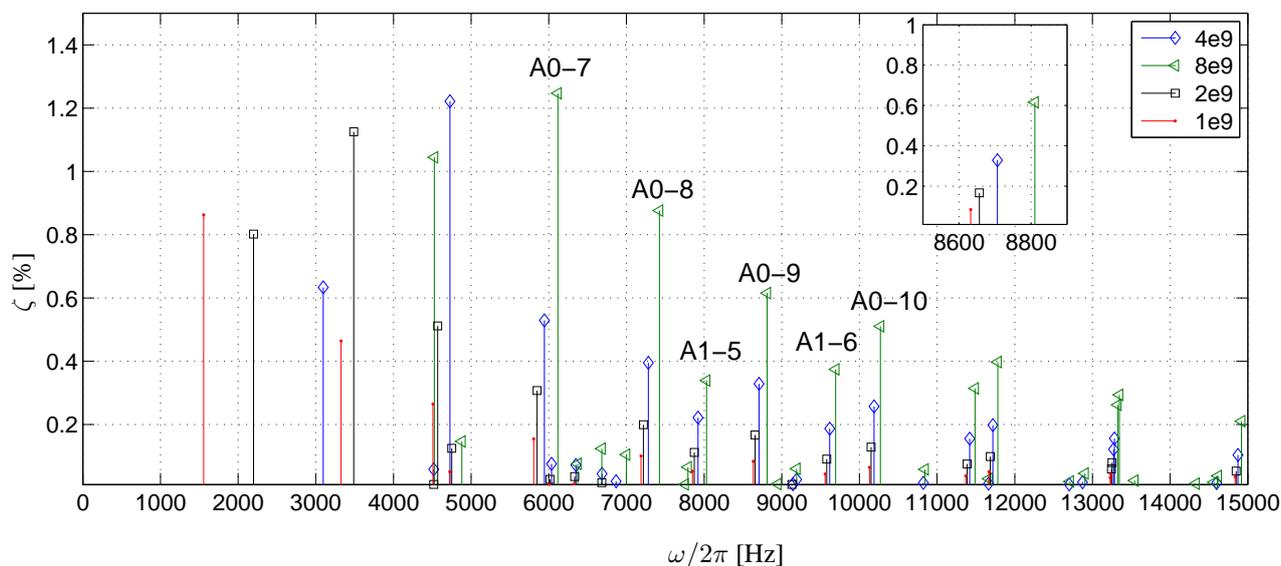


FIG. 8.14 – Effet du module d'Young des plots à masse volumique nulle : Taux de croissance modaux ζ (%) en fonction de la fréquence (Hz) pour 4 modules d'Young de Garniture (Pa)

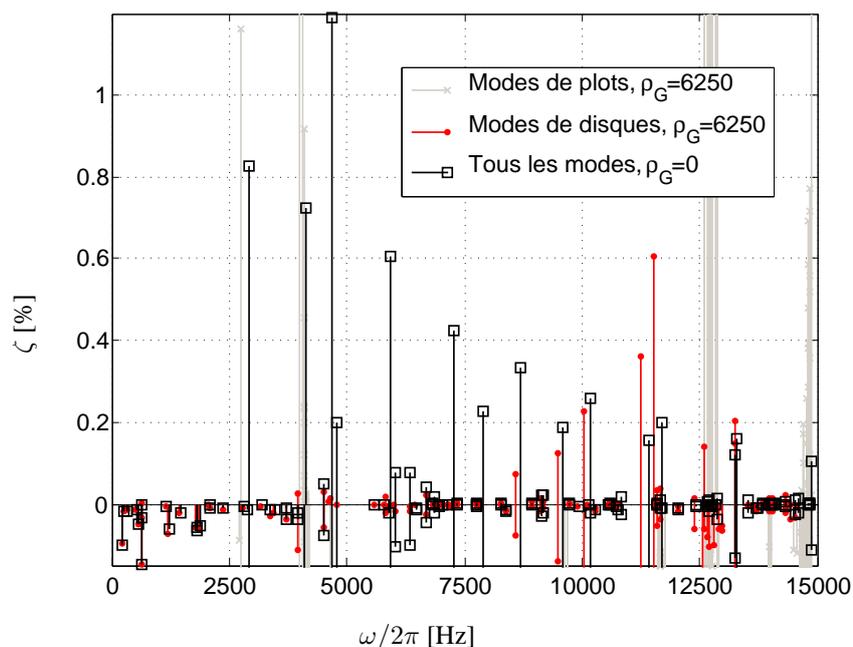


FIG. 8.15 – Comparaison des résultats de stabilité entre une configuration à masse volumique de plot nulle et une configuration à masse volumique de plot réaliste : Taux de croissance modaux ζ [%] en fonction de la fréquence [Hz]

8.3.2 Effets des modes propres de plots sur la stabilité

On propose ici de faire varier les fréquences propres des modes de plots pour comprendre l'influence de ces modes sur les modes de disque. La figure 8.16 montre le résultat du calcul de stabilité pour trois valeurs de densité de plots. La densité a été choisie pour piloter les fréquences propres plutôt que le module d'Young afin de garder comme référence les résultats de stabilité à densité de plots nulle précédents. On observe que les modes instables à plus forts taux de croissance suivent les modes instables de plots de type 4. La figure 8.17 exhibe un résultat de stabilité dans le cas particulier où une coïncidence fréquentielle est obtenue entre les modes instables de plots de type 4 et des modes de disque. Cette coïncidence a pour conséquence d'exacerber les taux de croissance des modes de disques concernés. Il s'agit d'une instabilité par couplage entre un mode de disque et un mode de flexion de plot. Par exemple, le taux de croissance du mode A0-12 dépasse 1% dans ce cas alors qu'il restait inférieur à 0.6 % dans les cas précédents.

La figure 8.18 montre la déformée modale du mode instable de disque A0-12 pour 3 densités de plots différentes. Dans le cas (a), la densité de plot est nulle et les plots suivent statiquement les déplacements imposés par le disque. Dans le cas (b), la prise en compte d'une densité de plot montre que l'on distingue les déformées modales de flexion des modes instables de plots de type 4 (le mode A0-12 oscille vers 13200 Hz alors que les modes de plots de type 4 oscillent à plus de 14 kHz). Comparé au cas (a), en terme de déplacements axiaux, il y a une répartition dans les plots plus importante. Dans le cas (c), il y a coïncidence et la répartition des déplacements dans chacune des sous-structures est encore plus importante.

En conclusion, l'effet des modes instables de plots sur les taux de croissance des modes instables de disque est continu lorsque les fréquences varient continûment : il ne s'agit pas véritablement de coïncidence mais plutôt d'effet maximal lorsque les fréquences sont les plus proches.

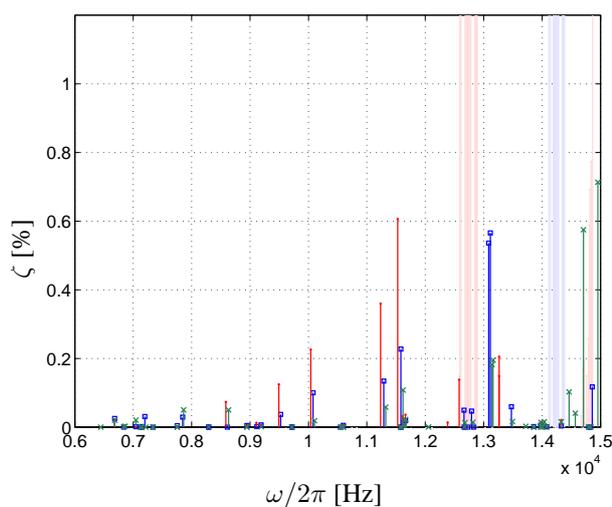


FIG. 8.16 – Taux de croissance modaux ζ (%) : \circ $\rho_G = 6250 \text{ kg/m}^3$, \square $\rho_G = 5000 \text{ kg/m}^3$, \times $\rho_G = 4000 \text{ kg/m}^3$

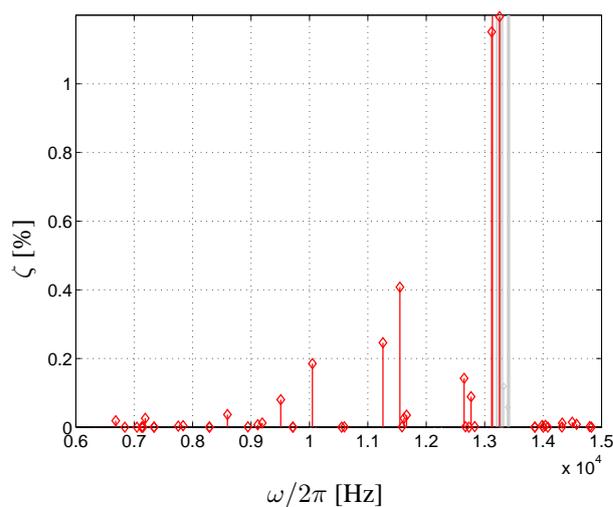


FIG. 8.17 – Taux de croissance modaux ζ (%) : \diamond $\rho_G = 5750 \text{ kg/m}^3$

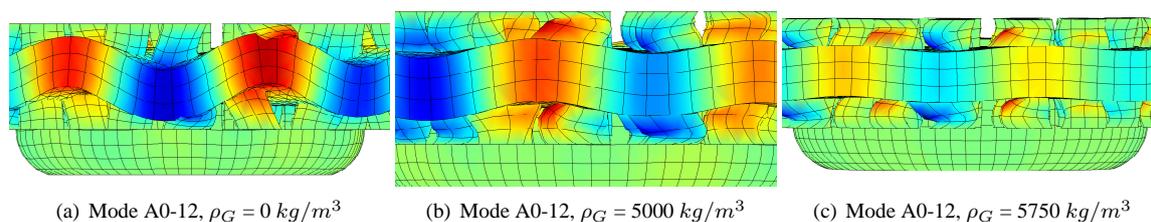


FIG. 8.18 – Influence de la masse volumique des plots sur le mode instable A0-12 (les couleurs représentent les déplacements axiaux)

8.3.3 Effet de l'amortissement intrinsèque des plots

On s'intéresse à l'effet de la prise en compte de l'amortissement de plots sur la stabilité. Pour cela, on choisit $\beta_G \neq 0$. Les autres coefficients de Rayleigh sont choisis nuls. Le résultat du calcul de stabilité est illustré figure 8.19 (calcul effectué pour $\rho_G=6250 \text{ kg/m}^3$). En plus des taux de croissance, le taux d'amortissement $-\xi_G$ en fonction de la fréquence est superposé. Ainsi, pour les modes couplés exclusivement de plots, les amortissements modaux sont de l'ordre de 4 %. La comparaison du calcul avec et sans amortissement de plots est illustrée figure 8.20.

On constate clairement que l'amortissement fait chuter les taux de croissance des modes sauf

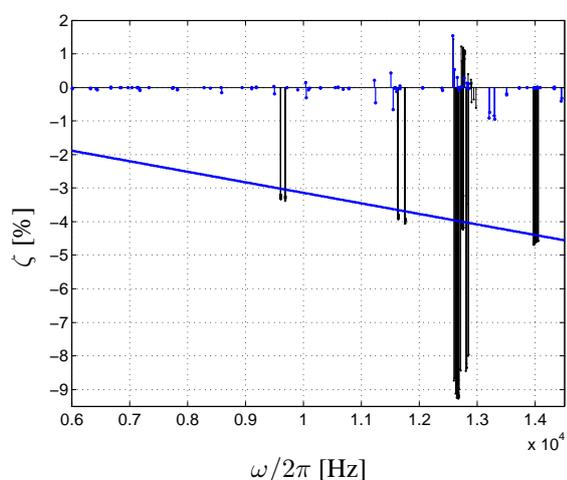


FIG. 8.19 – Taux de croissance modaux ζ [%] en fonction de la fréquence $\omega/2\pi$ [Hz]. Trait continu oblique : $-\xi$ [%] en fonction de la fréquence $\omega/2\pi$ [Hz]

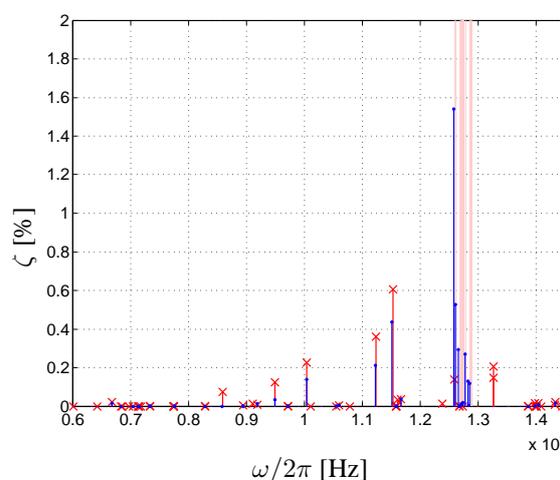


FIG. 8.20 – Taux de croissance modaux ζ [%] en fonction de la fréquence $\omega/2\pi$ [Hz]. \times : pas d'amortissement, \circ : amortissement dans les plots

pour les modes de disques dont les fréquences coïncident avec des modes de plots.

Dans un article récent, Fritz et al. [31] étudient l'effet de l'amortissement modal sur le couplage de deux modes par le frottement. Ils concluent que si les amortissements modaux sont similaires sur les deux modes alors l'amortissement a un rôle stabilisant. En revanche, si le rapport des deux amortissements modaux sont importants, alors l'amortissement a un rôle déstabilisant. Ces conclusions expliquent les constatations faites sur notre cas : l'amortissement introduit dans les plots crée des amortissements modaux très proches pour les modes couplés de disque, ce qui justifie le caractère stabilisant de l'amortissement. En revanche, l'amortissement

introduit dans les plots crée des amortissements modaux de modes couplés de plots beaucoup plus important que ceux de disques, ce qui justifie le caractère déstabilisant de l'amortissement pour le couplage de ces modes. On voit donc ici que le caractère stabilisant ou déstabilisant de l'amortissement dépend du type de modes qui se couplent, c'est-à-dire du type de mécanisme d'instabilité.

8.4 Conclusions et perspectives

Les fréquences bruyantes sont des fréquences de modes instables de disque. En revanche, certaines fréquences de modes instables sont absentes du spectre vibratoire de disque. Le calcul transitoire sur le mécanisme de frein à disque simplifié du chapitre 5 nous a montré que certains modes instables peuvent ne pas participer au cycle limite. Cet exemple permet de justifier l'absence de certaines fréquences de modes instables dans le spectre vibratoire expérimental. Cependant, le calcul transitoire sur le modèle de frein de TGV constitue une réelle perspective afin de vérifier la sélection opérée par les non linéarités.

Concernant les mécanismes d'instabilités, on a vu que le caractère surfacique du contact permet de mettre en évidence une instabilité par couplage de modes doubles de disque et ceci à densité de plots nulle. La prise en compte d'une densité de plot réaliste a pour conséquence d'exacerber les taux de croissance des modes de disque à proximité de modes instables de plots et de faire chuter ceux qui sont éloignés. Il y a donc une interaction complexe entre les modes instables (par couplage de modes doubles) de disque et les modes instables (auto-déstabilisés) de plots. La prise en compte de l'amortissement des plots a montré un effet déstabilisant pour les modes de disque dont les fréquences coïncident avec des fréquences de modes de plots.

9 – Conclusion générale et perspectives

L'état de l'art sur le crissement des freins a montré que les travaux expérimentaux et de modélisations étaient nombreux et souvent issus de l'automobile. Ces travaux ont fortement orientés ce travail. En effet, les phénomènes de bruits induits par le frottement ont des origines diverses et complexes. De manière synthétique, les conclusions sont que le crissement des freins est issu des vibrations auto-entretenues du mécanisme induites par le frottement. Le mécanisme de génération des vibrations auto-entretenues mis en avant est le mécanisme d'instabilité de l'équilibre par couplage de mode. Néanmoins, les travaux récents qui s'intéressent à la modélisation des vibrations auto-entretenues par le frottement mettent en évidence des solutions dynamiques où les événements sous la zone de contact sont complexes. À l'opposé, certains travaux font un raccourci rapide entre fréquences de crissement et fréquences des modes de stabilité. Dans ce contexte scientifique, on s'est d'abord posé la question du lien entre les fréquences de crissement et les fréquences des modes instables. Ensuite, on s'est intéressé à l'interprétation physique du mécanisme d'instabilité par couplage de mode dans le cas particulier de notre mécanisme TGV.

Cet objectif général a nécessité au préalable la possibilité de calcul numérique transitoire de structures en présence de contact unilatéral avec frottement de Coulomb. Ces problèmes d'évolution dynamique en présence de non-linéarités non régulières sont à l'origine de difficultés numériques significatives telles que les situations de chocs. La méthode numérique « Non-Smooth Contact Dynamics method » de M. Jean, bien adaptée pour ce type de problème, a été utilisée. L'implémentation numérique a été validée sur un exemple de la littérature. Ensuite, la stabilité dynamique des structures en situation de glissement a été abordée. Les résultats connus sur la dynamique des perturbations proches de l'équilibre ont été rappelées et ont conduit à une méthode de calcul de l'équilibre stationnaire ainsi que de la stabilité dynamique. La méthode d'itération sur les résidus a été proposée pour ce calcul de stabilité et son implémentation a été validée par l'application sur un cas où une solution semi-analytique existe. On a donc développé les outils de caractérisation des solutions transitoires ainsi que des modes de stabilité dynamique.

Afin de faire le lien entre les fréquences caractéristiques de la solution transitoire (fréquences de crissement) et les fréquences des modes de stabilité, une méthode originale de projection de la solution transitoire sur la base des modes de stabilité a été proposée et permet d'étudier la transition des perturbations proches de l'équilibre vers la solution transitoire. En particulier l'effet des non linéarités sur l'amplitude modale d'un mode instable peut être investigué. Cette méthode a été appliquée dans le cas du glissement d'une couche élastique bidimensionnelle sur un obstacle indéformable : le lien entre le calcul transitoire et la stabilité a été examiné pour des

paramètres physiques mettant en évidence des ondes de surface sous la zone de contact du type glissement / adhérence et glissement / décollement. On a observé que la solution contenait un mode instable à la fréquence du cycle limite dont les harmoniques exacerbaient certains modes stables telle une excitation forcée.

On s'en concentré ensuite sur le cas d'un mécanisme de frein à disque simplifié de TGV, constitué d'un disque ainsi que de deux garnitures cylindriques. Compte tenu du caractère tri-dimensionnel du problème, et de l'aspect déformable / déformable des solides en contact, une formulation eulérienne du problème a été proposée. Elle permet d'effectuer un calcul transitoire sur un maillage géométrique fixe et ainsi d'effectuer un calcul de stabilité sur le même modèle, autorisant la projection de la solution transitoire sur la base des modes de stabilité. Deux configurations ont été étudiées : une première configuration dans laquelle on est en présence d'un seul mode instable. Les résultats numériques ont mis en évidence la capacité de la stratégie numérique à modéliser du crissement. Dans une deuxième configuration, on est en présence de trois modes instables. Les résultats ont montré que deux des trois modes instables sont présents dans le cycle mais le mode à plus fort taux de croissance est absent. Ce résultat est particulièrement intéressant puisqu'il légitime le calcul de stabilité comme outil de prédiction des fréquences bruyantes même si le calcul transitoire est nécessaire pour connaître les modes qui apparaissent parmi ces modes instables. Une étude de la dépendance aux conditions initiales a été menée et elle a montrée l'indépendance du cycle limite pour les différentes conditions initiales.

On a pu observer que les réponses des systèmes étaient conditionnées par les modes instables. La recherche d'une géométrie de garniture optimale stabilisant l'équilibre a motivé la proposition d'une méthode d'optimisation géométrique originale : la sensibilité de la valeur propre issue du problème aux valeurs propres complexes a été évaluée analytiquement vis-à-vis de paramètres définissant la géométrie de la surface de contact. Cette sensibilité a été exploitée ensuite en l'intégrant dans un algorithme d'optimisation par une méthode de gradient. La méthode a été formulée ici pour le cas de garnitures rigides puis a été validée sur un cas bidimensionnel et enfin sur le cas d'un disque 3D.

Un bilan des campagnes de mesures acoustiques en gare ainsi que des mesures embarquées sur TGV nous ont permis de caractériser le crissement. Les résultats essentiels obtenus sont que le bruit émis à un spectre de raies très marqué et provient des vibrations hautes fréquences de disque. Des investigations sur banc d'essai ont permis de mettre en évidence des champs vibratoires tournant le long du disque. Ces rotations observées vont dans le sens des résultats numériques du modèle simplifié précédent : le frottement couple deux modes doubles de disque, le mode instable étant alors un mode tournant. Ces données expérimentales sont essentielles et nous ont servis de base pour l'étude de l'interprétation physique du mécanisme d'instabilité par couplage de mode.

Une modélisation « réaliste » du mécanisme TGV a été mise en place au regard d'une analyse modale expérimentale des constituants. Ensuite un calcul de stabilité de l'équilibre a été effectué. Il montre que les fréquences crissantes sont des fréquences de modes instables de disque. En revanche, certaines fréquences de modes instables de disque sont absentes du spectre

vibratoire du disque. Les résultats du calcul transitoire obtenus sur le mécanisme simplifié ont montrés que tous les modes instables n'étaient pas présent dans la solution. Cela permet de justifier l'absence de certaines fréquences dans le spectre vibratoire expérimental. Enfin, l'étude de l'effet des caractéristiques physiques des plots sur la stabilité a été investigué : Lorsque la densité des plots est considérée nulle, on observe qu'il y a couplage par le frottement de modes doubles de disque. Dans le cas d'une densité réaliste de plots, la proximité des modes instables de flexion de plots exacerbe l'instabilité des modes doubles de disque. La prise en compte de l'amortissement des plots a montré un effet déstabilisant pour les modes de disque dont les fréquences coïncident avec les fréquences de modes de plots.

En terme de perspectives, on a vu que les non linéarités sélectionnent en quelque sorte certains modes instables qui constituent le cycle limite. Le principe de sélection reste cependant inconnu. Une conjecture a été formulée au chapitre 5. Il pourrait être intéressant de tester d'autres configurations avec d'autres conditions de fonctionnement afin de la valider.

Concernant la méthode d'optimisation géométrique, les perspectives sont la prise en compte de garnitures déformables ainsi que de considérer une optimisation multi-critère afin de stabiliser plusieurs modes en même temps.

Le calcul de la solution transitoire pour le modèle réaliste de TGV est une réelle perspective afin de vérifier la bonne sélection des modes instables de disque par les non linéarités au regard des résultats expérimentaux.

En ce qui concerne les perspectives de solutions technologiques pour la réduction du bruit, on a vu que la solution de garniture à plots était pénalisante puisqu'elle crée un nombre important de modes (proportionnel au nombre de plots) susceptible d'exacerber les modes instables doubles de disque ou de créer des coïncidences fréquentielles. Concernant le disque, il est clair que l'axisymétrie joue un rôle particulièrement néfaste. L'amortissement dans les garnitures n'est à priori pas une solution efficace à cause de l'effet déstabilisant mis en évidence.

Le fait que la solution transitoire ne contienne que quelques modes instables suggère la construction de modèles réduits dans une optique de réduction des coûts de calculs. En effet la non linéarité est très locale et ne modifie que très peu le contenu spatial de la solution. Elle ne fait que saturer l'explosion des modes. Un tel modèle réduit consisterait à rechercher la solution sur une base réduite mixte constituée des modes de stabilité hors de la zone de contact et des degrés de liberté physiques dans la zone de contact afin de vérifier correctement les non linéarités.

Bibliographie

- [1] ADAMS, G. Self-excited oscillations of two elastic half-spaces sliding with a constant coefficient of friction. *Journal of Applied Mechanics* 62 (1995), 867–872.
- [2] ADAMS, G. Self-excited oscillations in sliding with a constant friction coefficient - a simple model. *Journal of Tribology* 118 (1996), 819–823.
- [3] ADAMS, G. Dynamic instabilities in the sliding of two layered elastic half-spaces. *ASME Journal of tribology* 120 (Apr. 1998), 289–295.
- [4] ADAMS, G. Steady sliding of two elastic half-spaces with friction reduction due to interface stick-slip. *Journal of applied Mechanics* 65 (1998), 470–475.
- [5] AKAY, A. Acoustics of friction. *J. Acoust Soc. Am.* 111, 4 (Apr. 2002).
- [6] ALART, P., AND CURNIER, A. A mixed formulation for frictional contact problems prone to newton like solutions methods. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.* 92 (1991), 353–375.
- [7] BAILLET, L., D’ERRICO, S., AND BERTHIER, Y. Influence of sliding contact local dynamics on macroscopic friction coefficient variation. *REEF 14* (2005), 305–321.
- [8] BAILLET, L., D’ERRICO, S., AND LAULAGNET, B. Understanding the occurrence of squealing noise using the temporal finite element method. *Journal of Sound and Vibration* 292 (2006), 443–460.
- [9] BAILLET, L., LINCK, V., D’ERRICO, S., LAULAGNET, B., AND BERTHIER, Y. Finite element simulation of dynamic instabilities in frictional sliding contact. *ASME Journal of Tribology* 127 (July 2005).
- [10] BALLARD, P., AND BASSEVILLE, S. Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with coulomb friction : a model problem. *Arch. Appl. Mech.* 39 (2005), 57–77.
- [11] BALMÈS, E. *Structural Dynamics Toolbox Manual*. 2006.
- [12] BASSEVILLE, S., AND LEGER, A. Stability of equilibrium states in a simple system with unilateral contact and coulomb friction. *Arch. Appl. Mech.* 76 (2006), 403–428.
- [13] BEIER, M., MEUNIER, N., WIRTH, X., AND FREUDENBERG, H. Acoustical investigations of disc brake squeal. *Proceedings of Euronoise 2006* (2006).
- [14] BENGISU, M. T., AND AKAY, A. Stability of friction-induced vibrations in multi-degree-of-freedom systems. *Journal of Sound and Vibration* 171 (1994), 557–570.
- [15] BERGMAN, F., ERIKSSON, M., AND JACOBSON, S. Influence of disc topography on generation of brake squeal. *Wear* 225-229 (1999), 621–628.
- [16] BOBILLOT, A. Méthodes de réduction pour le recalage, application au cas d’ariane 5. *Thèse de doctorat de l’Ecole Centrale Paris* (Dec. 2002).

- [17] BOLOTIN, V. V. Nonconservative problems of the theory of elastic stability. *Pergamon Press Inc* (1963).
- [18] BONNET, M. Analyse des structures mécaniques par la méthode des éléments finis. *Cours de l'Ecole Polytechnique, majeure 2 SEISM* (2005).
- [19] BOUTILLON, X. Corde frottée sur un violon. *Mécanique et Industrie 1* (2000), 609–619.
- [20] CARPENTER, N. J., TAYLOR, R. L., AND KATONA, M. G. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *Int. Journ. for Num. Meth. in Eng.* 32 (1991), 103–128.
- [21] CASTELLINI, P., AND SANTOLINI, C. Vibration measurements on blades of naval propeller rotation in water. *IMAC - XV Japan, Tokyo* (Sept. 1997), 253–261.
- [22] CHAMBRETTE, P., AND JEZEQUEL, L. Stability of a beam rubbed against a rotating disc. *Eur. J. Mech. A/Solids 11* (1992), 197–138.
- [23] CHATEAU, X., AND NGUYEN, Q. S. Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction. *Eur. J. Mech. A Solids 10* (1991), 71–89.
- [24] CORDIER, J. F. Projet CRISFIS, lot 3.1 : Mesures en gare, Rapport SNCF, DOC001413 - D001563.
- [25] CORDIER, J. F. Projet CRISFIS, lot 3.2 : Mesures embarquées á bord de la rame TGV DUPLEX 266, Rapport SNCF, DOC002864 - D001563.
- [26] FENG, Z. Q. Contribution à la modélisation des problèmes non linéaires : contact, plasticité et endommagement. *Thèse de doctorat de l'U.T.C.* (1991).
- [27] FENG, Z. Q., CROS, J. M., AND MAGNAIN, B. Un algorithme efficace pour les problèmes d'impact avec frottement. *REEF 14* (2005), 65–86.
- [28] FENG, Z. Q., FENG, Z., AND DOMASZEWSKI, M. Some computational aspects for analysis of low and high velocity of deformable bodies. *International Journal of Non-Linear Mechanics 37* (Sept. 2002), 1029–1036.
- [29] FIELDHOUSE, J. D., AND NEWCOMB, T. P. Double pulsed holography used to investigate noisy brakes. *Optics and Lasers in Engineering 25* (1996), 455–494.
- [30] FLINT, F., AND HULTEN, J. Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model. *Journal of Sound and Vibration 254* (2002), 1–21.
- [31] FRITZ, G., SINOUE, J., DUFFAL, J., AND JEZEQUEL, L. Effects of damping on brake squeal coalescence patterns - application on a finite element model. *Mechanics Research Communications 34* (2007), 181–190.
- [32] FRITZ, G., SINOUE, J., DUFFAL, J., AND JEZEQUEL, L. Parameter analysis of brake squeal using finite element method. *Revue Européenne de Mécanique Numérique* (2007).
- [33] GIANNINI, O., AND SESTIERI, A. Predictive model of squeal noise occurring on a laboratory brake. *Journal of Sound and Vibration 296* (2006), 583–601.
- [34] HINRICHS, N., OESTREICH, M., AND POPP, K. On the modelling of friction oscillators. *Journal of Sound and Vibration 216*, 3 (1998), 435–459.
- [35] HOFFMANN, N., FISCHER, M., ALLGAIER, R., AND GAUL, L. A minimal model for studying properties of the mode-coupling type instability in friction induced oscillations. *Mechanics Research Communications 29* (2002), 197–205.

- [36] INACIO, O., HENRIQUE, L. L., AND ANTUNES, J. The dynamics of tibetan singing bowls. *Proceedings of ISMA, Japan* (2004).
- [37] JEAN, M. The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177 (1999), 235–257.
- [38] JEAN, M., AND MOREAU, J. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid bodies collections. *Proc of Contact Mech. Int. Symp.* (1992), 31–48.
- [39] JUNG, C. M., AND FEENY, B. F. On the discretization of an elastic rod with distributed sliding friction. *Journal of Sound and Vibration* 252 (2002), 409–428.
- [40] KHENOUS, H. B. Problèmes de contact unilatéral avec frottement de coulomb en élastostatique et élastodynamique. étude mathématique et résolution numérique. *Thèse de doctorat de l'INSAT* (2005).
- [41] KIM, J., AND KWAK, B. Dynamic analysis of two-dimensional frictional contact by linear complementarity problem formulation. *Int. J. Solids Structures* 33, 30 (1996), 4605–4624.
- [42] KINKAID, N. M., O'REILLY, O. M., AND PAPADOPOULOS, P. Automotive disc brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* 267 (2003), 105–166.
- [43] LASCAUX, P., AND THÉODOR, R. *Analyse numérique matricielle appliquée l'art de l'ingénieur*. Masson, 1986.
- [44] LEONI, L. Projet CRISFIS, lot 3.3 : Caractérisation en fonctionnement du crissement d'un frein de TGV par vibrométrie laser sur banc d'essai, Rapport de stage SNCF.
- [45] MARTINS, J., BARBARIN, S., RAOUS, M., AND DA COSTA, A. P. Dynamic stability of finite dimensional linearly elastic systems with unilateral contact and coulomb friction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 177 (1999), 289–328.
- [46] MARTINS, J., GUIMARES, J., AND FARIA, L. O. Dynamic surface solutions in linear elasticity and viscoelasticity with frictional boundary conditions. *Journal of Vibration and Acoustics* 177 (1995), 445–451.
- [47] MASSI, F., BAILLET, L., GIANNINI, O., AND SESTIERI, A. Brake squeal : linear and nonlinear numerical approaches. *Mechanical Systems and Signal Processing* 21 (Aug. 2007), 2374–2393.
- [48] MASSI, F., GIANNINI, O., AND BAILLET, L. Brake squeal as dynamic instability : An experimental investigation. *Journal of Acoustical Society of America* 120 (2006), 1288–1298.
- [49] MEIROVITCH, L. *Computational Methods in Structural Dynamics*, rockville ed. 1980.
- [50] MOIROT, F. Etude de la stabilité d'un équilibre en présence de frottement de coulomb. application au crissement des freins à disque. *Thèse de doctorat de l'école Polytechnique* (1998).
- [51] MOIROT, F., AND NGUYEN, Q. Brake squeal : a problem of flutter instability of the steady sliding solution ? *Arch. Mech.* 52, 4-5 (2000), 645–661.
- [52] MOIROT, F., AND NGUYEN, Q. S. An example of stick-slip waves. *C. R. Acad. Sci. Paris* 328 (2000), 663–669.
- [53] MOREAU, J. *Topics in non-smooth mechanics*, birkhauser verlag. ed. 1988.

- [54] NGUYEN, Q. S. Stabilité des structures élastiques. *Coll. Mathématiques et Applications* (1995).
- [55] NGUYEN, Q. S. Stabilité et mécanique non linéaire, hermès.
- [56] NGUYEN, Q. S. Instability and friction. *C. R. Mécanique* 331 (2003), 99–112.
- [57] ODEN, J., AND MARTINS, J. Model and computational methods for dynamic friction phenomena. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 52 (1985), 527–634.
- [58] OUESLATI, A. Ondes élastiques de surface et fissure d'interface sous contact unilatéral et frottement de coulomb. *Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique* (2005).
- [59] OUESLATI, A., NGUYEN, Q., AND BAILLET, L. Stick-slip-separation waves in unilateral and friction contact. *Comptes Rendus Mécanique* 331 (2003), 133–140.
- [60] PANDIT, S., AND DEO, S. Differential systems involving impulses. *Lectures Notes in Mathematics* (1982).
- [61] PEDERSEN, P., AND SEYRANIAN, A. P. Sensitivity analysis for problems of dynamic stability. *Int. J. Solids Structures* 8 (1972), 29–40.
- [62] RAOUS, M., BARBARIN, S., AND VOLA, D. Numerical characterization and computation of dynamic instabilities for frictional contact problems in friction and instabilities. *CISM Courses and Lectures* 457 (2002), 234–291.
- [63] RENOUF, M., AND ALART, P. Conjugate gradient type algorithms for frictional multi-contact problems : applications to granular materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 194 (2005), 2019–2041.
- [64] SAXCÉ, G. D., AND FENG, Z. Q. The bipotential method : A constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms. *Math. Comput. Modelling* 38 (1998), 225–245.
- [65] SIMO, J. C., AND LAURSEN, T. A. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers and Structures* 42 (1992), 97–116.
- [66] SINOU, J., THOUVEREZ, F., AND JEZEQUEL, L. Methods to reduce non-linear mechanical systems for instability computation. *Archives of Computational Methods in Engineering : State of the Art Reviews* 11, 3 (2004), 257–344.
- [67] SINOU, J. J., AND JÉZÉQUEL, L. Mode coupling instability in friction-induced vibrations and its dependency on system parameters including damping. *European Journal of Mechanics A/Solids* (2006).
- [68] SPURR, R. T. A theory of brake squeal. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 1 (1961), 33–40.
- [69] TOMASINI, E. P., REVEL, G. M., AND CASTELLINI, P. Laser based measurement. *Encyclopaedia of Vibration* (2001), 699–710.
- [70] VOLA, D. Frottement et instabilités en dynamique : bruits de crissement. *Thèse de doctorat de l'université Aix-Marseille II* (Dec. 1998).
- [71] VOLA, D., PRATT, E., JEAN, M., AND RAOUS, M. Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques. *Revue européenne des éléments finis* 7, 1-2-3 (1998), 149–162.

-
- [72] VOLA, D., RAOUS, M., AND MARTINS, J. Friction and instability of steady sliding : squeal of a rubber/glass contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), 1699–1720.
- [73] WAGNER, U. V., HOCHLENERT, D., AND HAGEDORN, P. Minimal models for disk brake squeal. *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), 527–539.
- [74] WRONSKI, M., AND JEAN, M. Some computational aspects of structural dynamics problems with frictional contact. *Contact Mechanics* (1995).
- [75] YI, Y. B., BARBER, J. R., AND HARTSOCK, D. L. Thermoelastic instabilities in automotive disc brakes - finite element analysis and experimental verification. *Contact Mechanics* (2002), 187–202.
- [76] YI, Y. B., DU, S., BARBER, J. R., AND FASH, J. W. Effect of geometry on thermoelastic instability in disk brakes and clutches. *Transactions of the ASME Journal of Tribology* 121, 4 (1999), 661–666.
- [77] ZAVARISE, G., AND WRIGGERS, P. A superlinear convergent augmented lagrangian procedure for contact problems. *Engineering Computations* 16 (1999), 88–119.

A – Méthode d’itération sur les résidus

On présente dans cette annexe la méthode d’itération sur les résidus issue des travaux de Bobillot et Balmès [16]. Cette méthode numérique permet de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé. Elle permet de calculer les n premiers modes propres du problème : on parle de solveur *partiel*. En effet, les solveurs *complets* ou *directs*, tels que le solveur QZ sont beaucoup trop coûteux pour des problèmes dépassant quelques milliers de degrés de liberté.

On cherche donc à calculer les valeurs et vecteurs propres complexes $(\lambda, \{\phi\})$ vérifiant :

$$(\lambda^2 [M] + \lambda [C] + [K]) \{\phi\} = \{0\} \quad (\text{A.1})$$

$[M]$, $[C]$ et $[K]$ étant des matrices réelles quelconques.

La méthode fait partie des méthodes d’itération sur les sous-espaces dont l’hypothèse majeure est qu’une bonne approximation de la solution de (A.1) peut-être recherchée dans un sous-espace engendré par les vecteurs colonnes d’une matrice rectangulaire $[T]$. Les vecteurs propres approchés sont donnés par $\{\tilde{\phi}\} = [T] \{\phi_R\}$, où $\{\phi_R\}$ est solution du problème réduit suivant :

$$[T]^T (\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) [T] \{\phi_{jR}\} = \{0\}$$

Compte tenu du fait que le problème réduit reste approché, on calcule le résidu en effort non nul suivant :

$$\{R_{L_j}\} = (\lambda_j^2 [M] + \lambda_j [C] + [K]) \{\tilde{\phi}_j\}$$

Afin d’obtenir un indicateur d’erreur en énergie sur les modes approchés, on construit un résidu en déplacement à partir du résidu en effort et d’un opérateur $[\hat{K}]$:

$$\{R_{D_j}\} = [\hat{K}]^{-1} \{R_{L_j}\}$$

L’indicateur d’erreur en énergie du mode j est alors donné par

$$\varepsilon_j = \frac{\|\{R_{D_j}\}\|}{\|\{\tilde{\phi}_j\}\|_K}$$

$$\|\{R_{D_j}\}\| = \max_{\nu_r^2 + \nu_i^2 = 1} \|\nu_r Re(\{R_{D_j}\}) + \nu_i Im(\{R_{D_j}\})\|_K \quad (\text{A.2})$$

Ensuite, si l’erreur $\varepsilon > Tol$, on augmente la dimension du sous-espace de recherche en ajoutant à la base $[T]$ le résidu en déplacement associé. Puis on recommence l’opération en construisant un nouveau problème réduit. (figure A.1)

On choisira $\|\{x\}\|_K = \{x\}^T [K_0] \{x\}$ avec $[K_0]$ matrice symétrique définie positive.

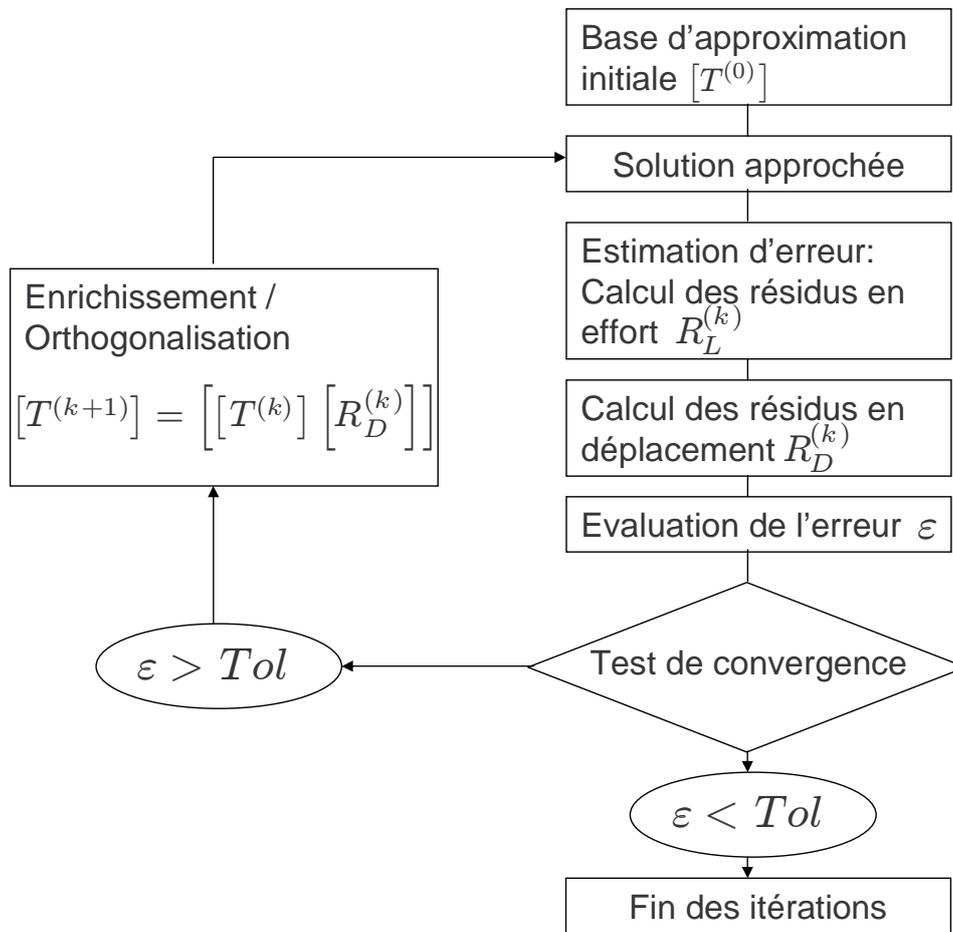


FIG. A.1 – Principe de l'enrichissement du sous-espace de recherche par les méthode d'itération sur les résidus [16]

Numériquement, $\|\{R_{D_j}\}\|$ est calculé en faisant une décomposition en valeur singulière de la matrice 2×2 $[\text{Re}(\{R_{D_j}\})\text{Im}(\{R_{D_j}\})]^T [K_0] [\text{Re}(\{R_{D_j}\})\text{Im}(\{R_{D_j}\})]$ qui permet de trouver le couple (ν_r, ν_i) optimal (figure A.2). Pour des raisons de performance, on préférera garder un résidu en déplacement réel pour l'enrichissement. On gardera $\{\tilde{R}_{D_j}\} = \nu_r \text{Re}(\{R_{D_j}\}) + \nu_i \text{Im}(\{R_{D_j}\})$ avec les (ν_r, ν_i) optimaux. Pour le choix de l'opérateur $[\hat{K}]$, on utilise l'opérateur $[K_0]$. Dans notre cas, $[K_0]$ est la matrice de raideur symétrique sans frottement.

Afin d'éviter lors de l'enrichissement un mauvais conditionnement des matrices réduites, il faut s'assurer que les vecteurs de la nouvelle base $[T]$ ne soient pas trop colinéaires. Pour cela, on effectue une orthonormalisation de la base $[T]$ (voir [16]).

Il faut mentionner que l'algorithme de Lanczos complexe est aussi un solveur partiel itératif. D'après [16], sur un problème visco-élastique (calcul de 20 modes complexes sur un modèle à 60000 ddl), l'utilisation de la méthode d'itération sur les résidus permet un gain en temps de calcul d'un facteur 4 à 5.

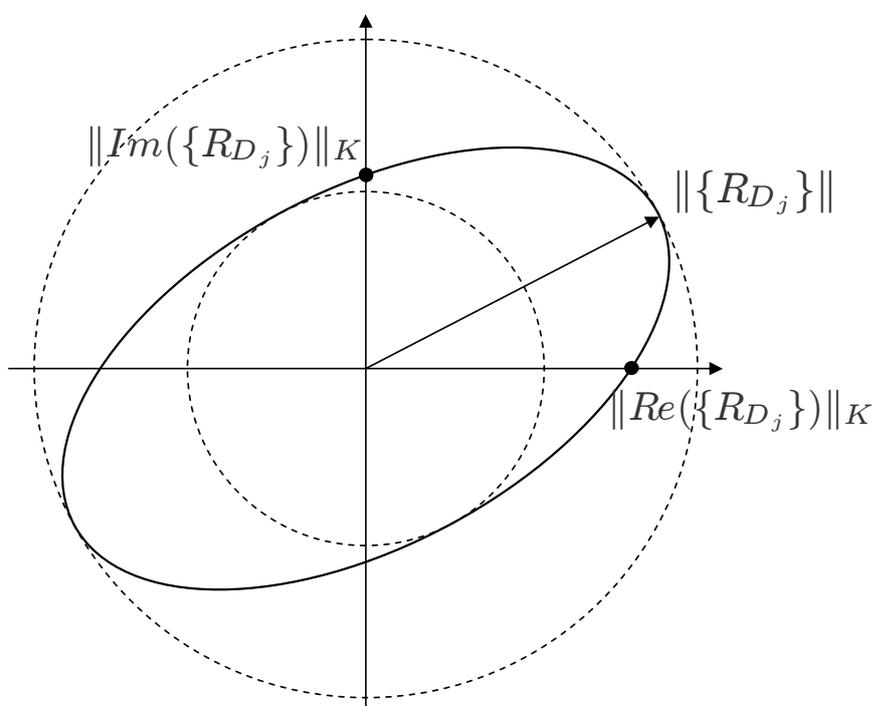


FIG. A.2 – Choix d'une norme pour le résidu en déplacement

B – Notions générales sur la stabilité dynamique des structures

Stabilité d'un équilibre

On considère un système dynamique sous forme discrète du premier ordre s'écrivant sous la forme :

$$\frac{d}{dt}\underline{x}(t) = \underline{y}(\underline{x}(t), \lambda) \quad (\text{B.1})$$

où λ est appelé paramètre de charge. \underline{x} est un vecteur de \mathbb{R}^N et \underline{y} une fonction non linéaire. Le système différentiel (B.1) est qualifié de système autonome car \underline{y} ne dépend pas explicitement du temps t .

A λ fixé, on appelle équilibre, le vecteur \underline{x}_e tel que $\underline{y}(\underline{x}_e, \lambda) = 0$. Lorsque l'on fait varier le paramètre de charge, on engendre une famille d'équilibre : on parle de courbe d'équilibre.

Afin de préciser les notions, on donne quelques définitions sur la stabilité d'un équilibre.

– Définition de la stabilité :

\underline{x}_e est stable si et seulement si :

$$\forall \varepsilon, \quad \exists \alpha / \|\underline{x}(0) - \underline{x}_e\| < \alpha \Rightarrow \forall t, \quad \|\underline{x}(t) - \underline{x}_e\| < \varepsilon$$

– Définition de la stabilité asymptotique (ou stabilité au sens de Liapounov) :

\underline{x}_e est asymptotiquement stable si et seulement si :

$$\exists p > 0 \quad \forall \varepsilon, \quad \exists \alpha / \|\underline{x}(0) - \underline{x}_e\| < \alpha \Rightarrow \forall t, \quad \|\underline{x}(t) - \underline{x}_e\| < \varepsilon e^{-pt}$$

Dans ce cas,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_e$$

Remarque : la stabilité asymptotique entraîne la stabilité.

Une démarche classique pour étudier la stabilité d'un équilibre est la méthode de linéarisation. L'idée de base est qu'à priori, des mouvements perturbés restent des petits mouvements. En faisant l'hypothèse que les mouvements sont petits, on linéarise (B.1) (lorsque cela est possible) autour de l'équilibre. Les conditions de stabilité sont alors données par le théorème de Liapounov :

Théorème de Liapounov :

On fait l'hypothèse que $\underline{y}(\underline{x})$ est localement Lipschitzienne en \underline{x}_e et que $\underline{A} = \underline{y}_{,\underline{x}}(\underline{x}_e)$.

Si toutes les valeurs propres de \underline{A} sont à partie réelle strictement négative, alors \underline{x}_e est asymptotiquement stable.

Si une valeur propre s de \underline{A} a sa partie réelle strictement positive, alors \underline{x}_e est instable.

Une position d'équilibre d'une courbe d'équilibre est un point critique s'il existe une valeur propre s quittant en ce point le demi-espace $Re(s) \leq 0$. Sinon, il s'agit d'un point régulier. Par définition, on dira que

si $s = 0$, alors le point critique est statique.

si $s = i\beta \neq 0$, alors le point critique est dynamique.

Pour les problèmes discrets de mécanique, l'équation générale du deuxième ordre est :

$$\underline{M}.\ddot{u} + (\underline{M}_{,u}\dot{u})\dot{u} - \frac{1}{2}\dot{u}.\underline{M}_{,u}.\dot{u} - F(u, \dot{u}, \lambda) = 0$$

on peut alors préciser \underline{x} et \underline{y} dans (B.1) [54] :

$$\underline{x} = \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\}, \quad \underline{y} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{M}^{-1} \left(-(\underline{M}_{,u}.v).v + \frac{v}{2}\underline{M}_{,u}.v + F(u, v, \lambda) \right) \end{array} \right\}$$

ce qui donne

$$\underline{A} = \underline{y}_{,x}(x_e) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\underline{M}^{-1}.\underline{K} & -\underline{M}^{-1}.\underline{N} \end{bmatrix}$$

avec $\underline{M} = \underline{M}(u_e)$, $\underline{K} = -F_{,u}(u_e, v_e, \lambda)$ et $\underline{N} = -F_{,v}(u_e, v_e, \lambda)$. Ainsi trouver les valeurs propres s de \underline{A} est équivalent à résoudre le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$[s^2\underline{M} + s\underline{N} + \underline{K}] \underline{X} = \underline{0}$$

Afin d'illustrer les cas, on a représenté figure B.2 les trajectoires des valeurs propres suivant les situations.

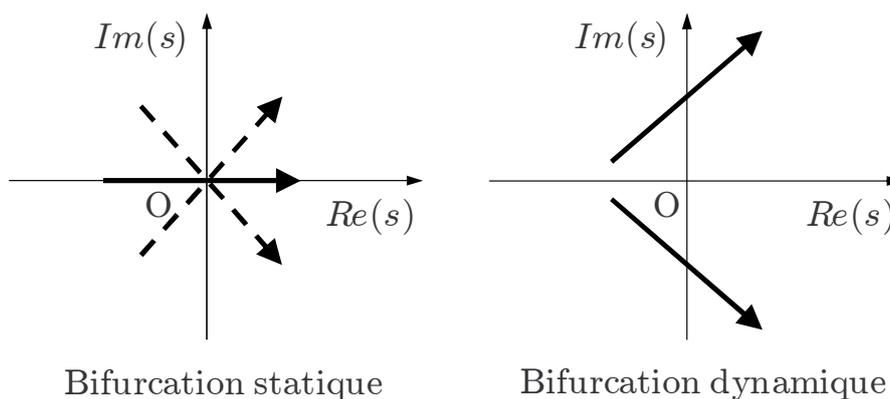


FIG. B.1 – Trajectoire des valeurs propres dans le plan complexe

Bifurcation de Hopf

Hypothèses :

On étudie la bifurcation d'une courbe d'équilibre $\underline{x}_e^0(\lambda)$ en un point critique λ_c en supposant que la valeur propre simple $s(\lambda) = \alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$ vérifie $\alpha(\lambda_c) = 0$ et $\beta(\lambda_c) > 0$. On suppose

\underline{y} de classe C^2 . On fait l'hypothèse que la valeur propre quitte l'axe imaginaire pour $\lambda = \lambda_c$ d'une manière franche mais avec une vitesse finie, c'est à dire :

$$\left| \frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c) \right| < +\infty, \operatorname{Re}\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}(\lambda_c)\right) > 0$$

– Théorème de Hopf

Sous les hypothèses précédentes, au point critique considéré, la courbe d'équilibre $\underline{x}_e^0(\lambda)$ bifurque en une réponse périodique d'amplitude croissant comme $|\lambda - \lambda_c|^{1/(2m)}$, $m > 1$. Afin d'illustrer le théorème, on présente figure B.2 la bifurcation d'une courbe d'équilibre (en bleu) vers une réponse périodique (en rouge).

Pour plus de détails concernant le théorème et sa démonstration voir [54].

Remarque :

En ce qui concerne nos problèmes, c'est à dire l'étude de la stabilité dynamique d'un équilibre en situation de contact unilatéral avec frottement de Coulomb, il faut noter qu'à priori les hypothèses du théorème de Hopf ne sont pas vérifiées. En effet, compte tenu du caractère non différentiable du contact frottant, \underline{y} n'est pas de classe C^2 . Seul dans le cas où l'on fait l'hypothèse d'une évolution régulière des perturbations glissantes proches de l'équilibre et que l'on est donc exclusivement en situation de glissement ($\underline{r}_t(\dot{\underline{u}}_t) = f r_n \frac{\dot{\underline{u}}_t}{\|\dot{\underline{u}}_t\|}$), c'est à dire le seul cas où les équations de comportement du contact frottant présentent une non linéarité régulière, on est dans le cadre du théorème (voir [50]).

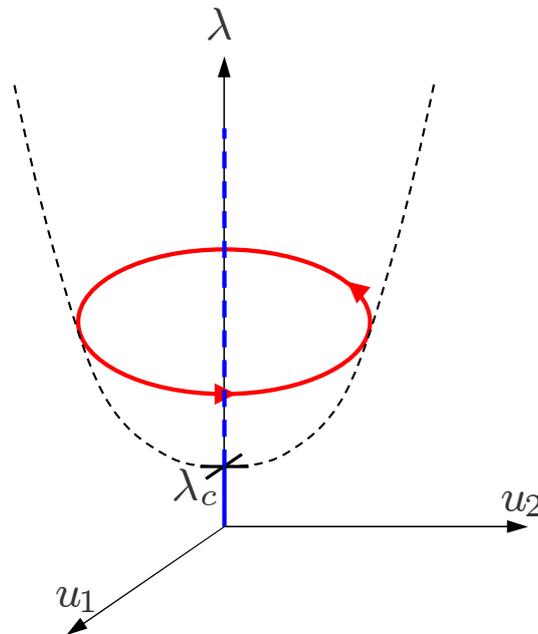


FIG. B.2 – Bifurcation de Hopf : réponse statique triviale (bleu) et réponse dynamique bifurquée (rouge)

C – Technologie du mécanisme de freinage TGV

Le TGV dispose de deux moyens pour effectuer une opération de freinage :

- un frein rhéostatique
- un dispositif de freinage à disque

Le frein rhéostatique est un frein « moteur ». Un couple résistant à l'avancement est appliqué sur les essieux grâce aux moteurs électriques débitant du courant dans un rhéostat. Le dispositif de freinage à disque est utilisé en général pour l'arrêt en gare et pour le freinage d'urgence. On comprend ainsi que le phénomène de crissement apparaissant notamment en gare devient une nuisance sonore pour les voyageurs sur le quai.

Le dispositif de freinage à disque est installé sur le bogie lui-même. Ce même bogie est en liaison avec les deux essieux ainsi qu'avec la rame. On peut observer que chaque essieu com-



FIG. C.1 – Levage d'une rame TGV lors du remplacement des bogies



FIG. C.2 – Bogie muni des deux essieux

porte quatre disques. Chaque disque est monté sur l'essieu par l'intermédiaire d'un moyeu usiné.

Chacun de ces disques est « pris en sandwich » par une plaquette munie de plots. Cette plaquette est appelée garniture et est montée dans son porte garniture.

Le freinage est assuré par des vérins pneumatiques appelés cylindres de frein. Chaque essieu comporte donc quatre vérins reliés au même circuit pneumatique. Le bogie, lui, comporte deux circuits pneumatiques indépendants, un pour chaque essieu.



FIG. C.3 – Système disques / cloche

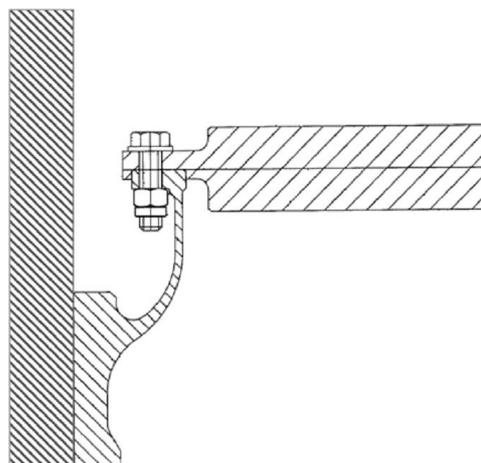


FIG. C.4 – Implantation du disque sur la cloche



FIG. C.5 – Bogie sans les essieux



FIG. C.6 – Vérin pneumatique



FIG. C.7 – Système d'application de l'effort de freinage

Principe de fonctionnement

On va se concentrer sur un des quatre disques d'un essieu, puisqu'ils sont identiques. Le système de freinage est composé des **garnitures, des portes garnitures, de l'étrier, des biellettes** et du **vérin**.

Les **garnitures** viennent serrer le disque sur ses deux faces planes. Chaque garniture est montée en liaison glissière par rapport au porte garniture grâce à une queue d'aronde. Il faut noter que les jeux sont importants dans cette liaison et que le blocage des garnitures n'est effectué que dans une phase de freinage.



FIG. C.8 – Deux garnitures par porte-garniture

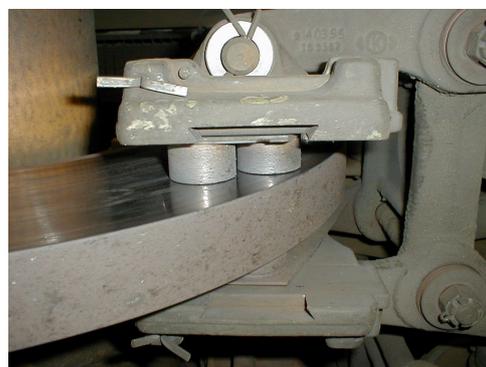


FIG. C.9 – Montage des garnitures par queue d'aronde

Les **portes garnitures** sont en liaison pivot avec **l'étrier et les biellettes**. Elles sont elles-même en liaison pivot avec le bogie. Leur rôle est double : reprendre l'effort de freinage et guider les portes garnitures. Ainsi, suivant le sens de rotation du disque, ces biellettes sont tantôt en traction, tantôt en compression.

Le guidage des porte-garnitures permet d'assurer un contact « franc » des garnitures avec le disque, autrement dit d'imposer le contact de tous les plots avec le disque de frein. L'ensemble garnitures, porte-garnitures et étrier est en liaison pivot à seuil (liaison frottante précontrainte) par rapport au bogie. Elle est utilisée pour le montage du système. La reprise des efforts de freinage est réalisée par les biellettes. Lors d'une commande de freinage, la pression augmente dans le cylindre de frein via le circuit pneumatique. Grâce aux quatre bras de l'étrier, l'effort de freinage est alors transmis aux porte-garnitures. Le schéma cinématique du mécanisme est représenté figure C.

Caractéristiques et performances

Commande du système. Sur commande du conducteur, il y a mise sous pression du cylindre de frein. Suivant les cas, il y a différents scénarios possibles : la situation classique est le freinage au tiers dès l'arrivée en gare puis relâchement de la pression puis re-freinage au tiers jusque l'arrêt complet. L'autre scénario est l'unique freinage maximum à 3.6 bars dans le cylindre de frein. Le temps de mise en charge ainsi que l'évolution de la pression est représentée figure C.11.

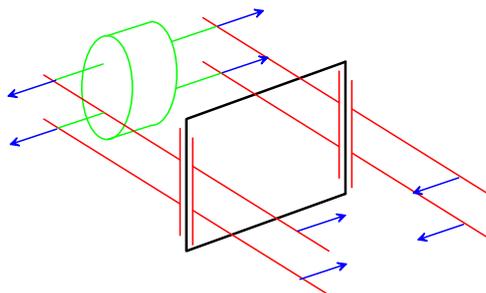


FIG. C.10 – Transmission des efforts générés par le vérin

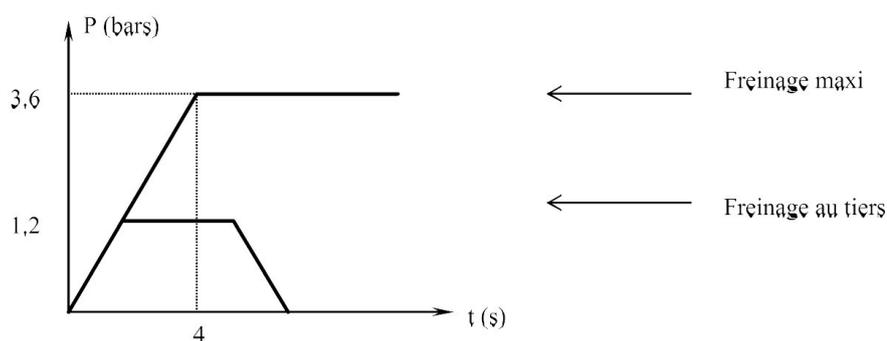


FIG. C.11 – Pression d'air dans le cylindre de frein

Caractéristiques géométriques

Diamètre extérieure disque : 640 mm

Surface utile dans le cylindre de frein : 254 cm²

Surface de frottement d'une garniture : 226 cm²

Efforts de freinage

Pour une pression dans le cylindre de frein maximale de 3.6 bars, on obtient un effort total exercé sur le disque de 24 kN et un couple résultant de 2000 Nm.

Caractéristiques énergétiques

La puissance maximale dissipée par disque est d'environ 22 MJ et l'effort d'application est d'environ 25 kN à une vitesse $V=300$ km/h. La distance d'arrêt est alors de 3400 m.

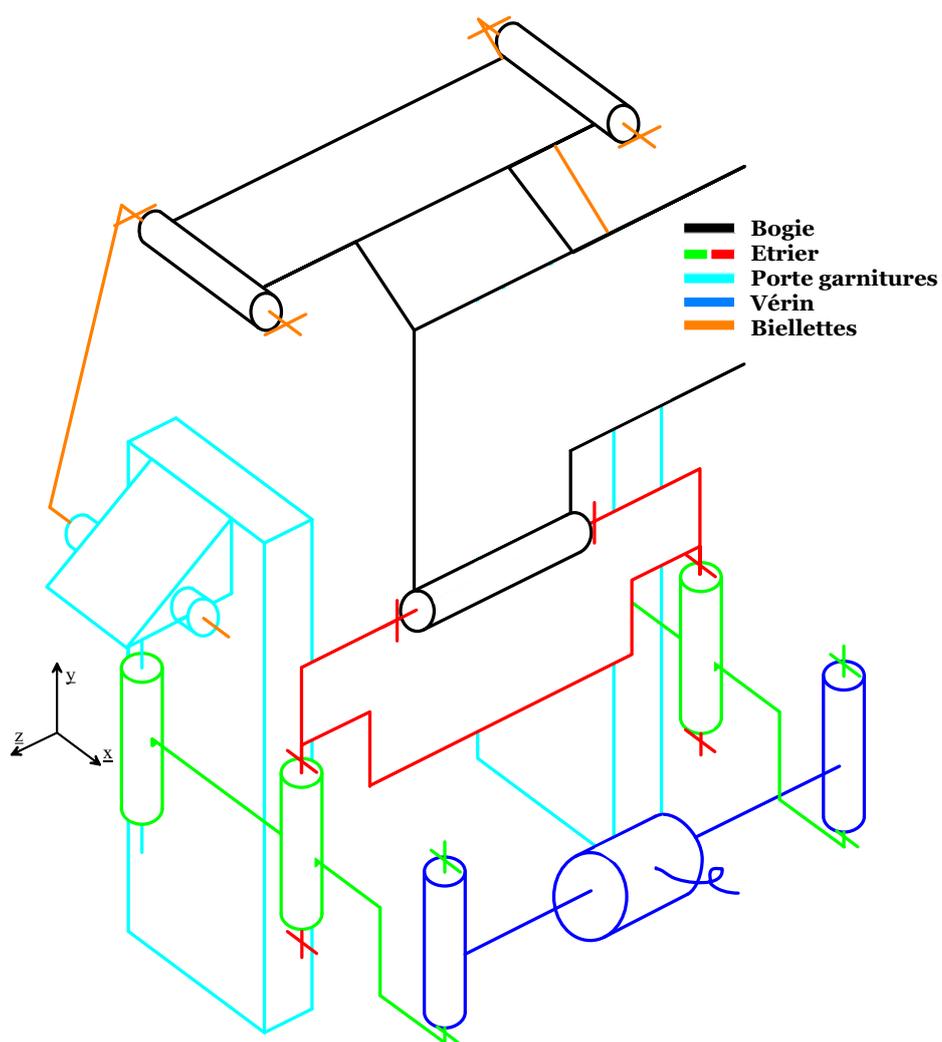


FIG. C.12 – Schéma cinématique du mécanisme de freinage