



**HAL**  
open science

# Predictability of atmospheric flow at synoptic scales :influence of moisture and non-linear processes

Olivier Rivière

► **To cite this version:**

Olivier Rivière. Predictability of atmospheric flow at synoptic scales :influence of moisture and non-linear processes. Sciences of the Universe [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2007. English. NNT : . pastel-00004043

**HAL Id: pastel-00004043**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004043>**

Submitted on 30 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Ecole Nationale des Ponts et Chaussées**  
Laboratoire de Météorologie Dynamique

**THÈSE**

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DES PONTS ET CHAUSSÉES**

*Spécialité : Mathématiques, Informatique*

par **Olivier RIVIÈRE**

19 Décembre 2007

**Prévisibilité de l'écoulement atmosphérique aux échelles  
synoptiques :  
influence des non-linéarités et de l'humidité.**

devant le jury composé de :

Mme. RABIER Florence	Rapporteur
M. WERNLI Heini	Rapporteur
M. DOERENBECHER Alexis	Examineur
M. ERN Alexandre	Examineur
M. KLEIN Patrice	Examineur
M. TALAGRAND Olivier	Co-directeur de thèse
M. LAPEYRE Guillaume	Co-directeur de thèse



---

# Table des matières

---

<b>I</b>	<b>Méthodes de sensibilité linéaires et non-linéaires : application à l'instabilité barocline</b>	<b>13</b>
I.1	Introduction . . . . .	13
I.2	L'instabilité barocline . . . . .	15
I.2.1	Description de l'atmosphère aux moyennes latitudes . . . . .	15
I.2.2	Mécanisme qualitatif d'instabilité barocline . . . . .	17
I.2.3	Equations quasi-géostrophiques : introduction au concept de vorticité potentielle . . . . .	18
I.2.4	Equations énergétiques quasi-géostrophiques . . . . .	19
I.2.5	Description d'un modèle quasi-géostrophique à 2 niveaux verticaux : le modèle de Phillips . . . . .	22
I.3	Calcul des modes normaux baroclines dans le modèle de Phillips . . . . .	23
I.3.1	Méthode des modes normaux . . . . .	23
I.3.2	Mécanisme d'Orr . . . . .	26
I.4	Détermination de la perturbation optimale : méthode des vecteurs singuliers . . . . .	29
I.4.1	Description de la méthode des vecteurs singuliers . . . . .	29
I.4.2	Importance du choix de la norme . . . . .	30
I.4.3	Vecteurs singuliers et modes normaux dans le modèle de Phillips . . . . .	31
I.4.4	Stabilité d'écoulements non stationnaires . . . . .	32
I.5	Instabilité barocline non-linéaire : théorie de l'ajustement barocline . . . . .	33
I.6	Perturbations optimales non-linéaires : méthode des vecteurs singuliers non-linéaires . . . . .	35
I.6.1	Etudes non-linéaires de prévisibilité . . . . .	35
I.6.2	Méthode des vecteurs singuliers non-linéaires . . . . .	36
I.7	Objectifs-Problématique . . . . .	37

<b>II Etude des perturbations optimales non-linéaires dans le modèle de Phillips d'instabilité barocline</b>	<b>41</b>
II.1 Description du modèle de Phillips barocline à deux couches . . . . .	41
II.2 Mise en oeuvre pratique de la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires. . . . .	43
II.2.1 Ecriture des codes linéaire-tangent et adjoint . . . . .	43
II.2.2 Test des codes linéaire-tangent et adjoint . . . . .	44
II.2.3 Algorithme de minimisation sous contrainte . . . . .	46
II.2.4 Convergence de l'algorithme d'optimisation . . . . .	49
II.3 Résumé de l'article . . . . .	50
II.4 Article en anglais : "Nonlinear generalization of singular vectors : behaviour in a baroclinic unstable flow" . . . . .	51
II.4.1 Abstract . . . . .	51
II.4.2 Introduction . . . . .	51
II.4.3 Numerical model . . . . .	53
II.4.4 Numerical computation of leading SV and NLSV . . . . .	54
II.4.5 Comparison of normal mode, leading SV and NLSVs . . . . .	55
II.4.6 Interpretation . . . . .	59
II.4.7 Generalization . . . . .	66
II.4.8 Discussion . . . . .	70
II.5 Conclusion . . . . .	73
<b>III Perturbations optimales dans un modèle de circulation générale avec une physique sèche</b>	<b>77</b>
III.1 Introduction . . . . .	77
III.2 Description du modèle . . . . .	77
III.2.1 Noyau dynamique . . . . .	78
III.2.2 Représentation de la couche limite atmosphérique . . . . .	78
III.2.3 Test des modèles linéaire-tangent et adjoint . . . . .	83
III.2.4 Convergence de l'algorithme d'optimisation . . . . .	83
III.3 Vecteurs singuliers secs du modèle PUMA2 . . . . .	85
III.3.1 Paramètres expérimentaux . . . . .	86
III.3.2 Résultats. Mécanisme barocline de croissance des perturbations optimales. . . . .	86
III.3.3 Evolution non-linéaire des vecteurs singuliers . . . . .	90
III.4 Comparaison des perturbations optimales linéaire et non-linéaire autour d'un écoulement zonal et stationnaire . . . . .	92
III.4.1 Description de l'écoulement de base- Méthode de relaxation de Held et Suarez . . . . .	92
III.4.2 Structure et évolution des perturbations optimales . . . . .	94
III.4.3 Conclusion . . . . .	108
<b>IV Influence de l'ajout d'une physique humide sur les perturbations optimales</b>	<b>113</b>
IV.1 Introduction . . . . .	114

IV.1.1	Thermodynamique humide de l'atmosphère . . . . .	114
IV.1.2	Modes normaux humides. Ondes de Rossby diabatiques . . . . .	116
IV.1.3	Mécanismes transitoires d'instabilité barocline humide . . . . .	120
IV.2	Influence de la physique humide sur les perturbations optimales . . . . .	121
IV.2.1	Physique humide de PUMA2 . . . . .	121
IV.2.2	Dispositif expérimental . . . . .	123
IV.2.3	Expérience 1. Etude de perturbations baroclines humides . . . . .	123
IV.2.4	Situation 2. Mise en évidence de vecteurs singuliers diabatiques . . . . .	132
IV.3	Conclusion . . . . .	142
<b>V</b>	<b>Choix des normes pour l'étude de perturbations optimales hu-</b>	
	<b>midés</b>	<b>147</b>
V.1	Comment choisir une norme ? Application au cas de la norme énergie totale sèche . . . . .	148
V.2	Etude de la norme énergie totale humide . . . . .	152
V.2.1	Dérivation de la norme énergie totale humide. . . . .	152
V.2.2	Problèmes liés à l'utilisation de la norme énergie totale humide . . . . .	153
V.3	Définition d'une nouvelle norme "énergie humide" . . . . .	156
V.3.1	Dérivation . . . . .	156
V.3.2	Choix des coefficients $q_{ref}$ et $T_{ref}$ dans le nouvelle norme . . . . .	158
V.4	Comparaison des perturbations optimales calculées avec différentes normes . . . . .	162
V.4.1	Résultats expérimentaux. . . . .	162
V.4.2	Liens entre norme et dynamique pour les vecteurs singuliers. Application à l'étude de l'impact de l'humidité . . . . .	165
V.4.3	Conclusion : quelle norme utiliser pour notre étude? . . . . .	167
<b>VI</b>	<b>Sensibilité non-linéaire à l'humidité</b>	<b>171</b>
VI.1	Sensibilité adjointe. Application à l'humidité. . . . .	171
VI.2	Sensibilité d'un optimum à un paramètre . . . . .	173
VI.2.1	Sensibilité de la perturbation optimale à un paramètre . . . . .	174
VI.2.2	Sensibilité de la fonction de coût optimale à un paramètre . . . . .	175
VI.2.3	Méthode de sensibilité non-linéaire à l'humidité . . . . .	176
VI.3	Description de la méthode de sensibilité non-linéaire à l'humidité . . . . .	177
VI.3.1	Optimisation d'une fonction non-différentiable : application à l'humidité . . . . .	178
VI.3.2	Prise en compte de la condition de non-saturation dans IPOPT180 . . . . .	180
VI.4	Article en anglais : "Nonlinear sensitivity of baroclinic perturbations to environmental moisture" . . . . .	181
VI.4.1	Abstract . . . . .	182
VI.4.2	Introduction . . . . .	182
VI.4.3	Non-linear sensitivity of nonlinear optimal perturbations to moisture . . . . .	184
VI.4.4	Application to a baroclinic situation . . . . .	187
VI.4.5	Physical interpretation . . . . .	192

VI.4.6 Conclusion . . . . .	194
VI.5 Conclusion . . . . .	195
<b>VII Conclusion générale</b>	<b>201</b>
<b>Annexe</b>	<b>206</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>







---

# Préambule

---

Aux moyennes latitudes, aux échelles dites synoptiques (c-à-d supérieures à 1000 km), le temps météorologique est généralement associé au passage successif d'anti-cyclones et de dépressions, synonymes respectivement de beau ou de mauvais temps. Le processus d'instabilité à l'origine de la formation des dépressions, appelé barocline, résulte fondamentalement du gradient méridien de température. Lorsqu'elles gagnent en intensité, ces dépressions se transforment en tempête. En Décembre 1999, les tempêtes Lothar et Martin touchent l'Europe, coûtant la vie à 91 personnes et causant des dégâts matériels de plus de 19 milliards de dollars. En Europe, les tempêtes constituent le principal aléa météorologique : la probabilité de mourir lors d'une tempête au Royaume-Uni est plus élevée que celle de périr à la suite d'un cyclone tropical aux Etats-Unis...

Afin d'améliorer notre connaissance sur la formation et le développement de ces dépressions en vue d'en améliorer la prévision, de nombreux programmes ont été lancés par la communauté scientifique mondiale, comme la campagne de mesure FASTEX<sup>1</sup>. Par ailleurs, cette thématique constitue un des volets du programme THORPEX<sup>2</sup> de l'organisation météorologique mondiale (OMM) destiné à "accélérer le rythme des améliorations apportées à la prévision [...] des phénomènes météorologiques à fort impact pour le plus grand profit de la société, de l'économie et de l'environnement". La prévisibilité est définie comme l'échéance jusqu'à laquelle il est possible d'effectuer des prévisions météorologiques fiables. Elle dépend de trois facteurs :

- la connaissance imparfaite de l'état initial de l'atmosphère. L'assimilation de données permet de reconstruire l'état initial de la prévision à partir des observations (éventuellement entachées d'erreurs de mesure) disponibles de façon non parfaite.

---

<sup>1</sup>Fronts and Atlantic Storm-Track EXperiment

<sup>2</sup>The Observing system Research and Predictability Experiment

- 
- la capacité du modèle numérique utilisé à reproduire l’écoulement atmosphérique. Le modèle de prévision repose sur une discrétisation d’équations dynamiques et thermodynamiques obtenues sous certaines approximations. De plus, les processus dont l’échelle caractéristique est inférieure à la résolution du modèle ne peuvent être représentés qu’au moyen de paramétrisations approchées.
  - des caractéristiques de l’écoulement et principalement de ses instabilités. En effet, celles-ci vont amplifier les erreurs initiales du modèle et rendre une prévision fiable de l’écoulement impossible au-delà d’une certaine échéance.

Une étude exhaustive des liens entre humidité et prévisibilité doit considérer l’impact de l’humidité pour chacun des points énoncés ci-dessus.

Au sujet du premier point, il paraît importer de rappeler que l’impact des observations d’humidité sur la qualité des prévisions atmosphériques est sujet à controverses comme en témoignent les articles contradictoires de Bengtsson and Hodges (2005) et Andersson et al. (2007) à ce sujet.

Concernant le deuxième point, de nombreux efforts ont été effectués pour améliorer la représentation des processus humides dans les modèles de prévision, que ce soit au niveau des échanges d’humidité avec la surface ou de la mycrophysique nuageuse.

Notre travail portera sur le troisième point, c-à-d l’étude des mécanismes humides de croissance des erreurs de prévision et nous chercherons à préciser *l’impact de l’humidité sur notre capacité à prévoir la formation et le développement de ces systèmes*. En effet, l’importance du rôle de l’humidité, au travers du dégagement de chaleur latente, sur la formation de ces dépressions demeure aujourd’hui encore sujet à controverses, la grande majorité des études d’instabilité barocline ayant été effectuée sous l’hypothèse d’une atmosphère sèche. Néanmoins, des intégrations de modèles numériques avec et sans humidité ont montré que celle-ci a joué un rôle important lors de la première des deux tempêtes de Décembre 1999. Nous répondrons à l’interrogation suivante : *dans quelle mesure, les processus humides contribuent-ils aux erreurs de prévision ?*

Dans un premier chapitre, nous décrirons le mécanisme d’instabilité barocline et nous préciserons comment la prévisibilité est estimée à partir du calcul des perturbations de l’état initial de la prévision possédant la plus forte croissance sur l’échéance de la prévision. Ces perturbations optimales sont appelées vecteurs singuliers et sont obtenus sous l’hypothèse d’évolution linéaire des perturbations. Parce que les processus humides limitent la plage de validité de cette hypothèse, nous en introduisons une variante non-linéaire, les vecteurs singuliers non-linéaires.

La mise en oeuvre de la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires sera détaillée dans le second chapitre. Une étude physique des processus d’optimalité non-linéaires sera effectuée dans un modèle simplifié d’instabilité barocline à 2 couches : le modèle de Phillips.

Ensuite, au sein du troisième chapitre, cette étude sera généralisée dans un modèle atmosphérique plus réaliste, le modèle de circulation générale PUMA2 (Portable University Model of the Atmosphere). Auparavant, le développement de la physique linéarisée de ce modèle, préambule nécessaire au calcul de perturbations optimales,

---

sera présenté.

L'humidité ne sera introduite que dans le quatrième chapitre. L'impact de la précipitation grande échelle sur la structure et la croissance de perturbations optimales constituera le coeur de ce chapitre, où nous dégagerons les mécanismes humides de croissance d'erreurs.

Dans le chapitre cinq, nous nous interrogerons sur le choix des différentes normes utilisées pour mesurer l'erreur ou la taille des perturbations. En effet, ces normes doivent mesurer simultanément les composantes sèche (vitesse, température) et humide des erreurs de prévision.

Dans le dernier chapitre, nous introduisons une méthode nouvelle de sensibilité non-linéaire qui permet de mesurer l'impact du champ d'humidité initial de la prévision sur la prévisibilité de l'écoulement.

---

# I

---

## Méthodes de sensibilité linéaires et non-linéaires : application à l'instabilité barocline

---

### I.1 Introduction

La prévisibilité d'un écoulement est liée à la présence d'instabilités qui vont amplifier les erreurs initiales du modèle. La limite de prévisibilité est d'autant plus faible que la croissance de celles-ci est importante. Evaluer l'amplification de ces erreurs permet d'estimer notre capacité à prévoir les caractéristiques de l'écoulement. Elle fut d'abord estimée comme l'inverse de l'exposant de Lyapounov dominant sans grand succès dans le cadre de modèles atmosphériques réalistes. Cette motivation jointe à la curiosité scientifique de comprendre les mécanismes qui régissent les phénomènes de développement des dépressions (cyclogénèse) a poussé la communauté des atmosphériciens à investiguer de façon détaillée les instabilités de l'écoulement atmosphérique. La première démarche a consisté à suivre les travaux de Reynolds (1880) qui développa pour l'hydrodynamique physique la théorie des modes normaux : la stabilité d'un écoulement est conditionnée par l'existence de solutions à croissance exponentielle des équations perturbées du système appelées modes normaux. Au bout d'un temps suffisamment long, une perturbation quelconque s'identifiera avec le mode normal dont le taux de croissance est le plus important. Il a cependant fallu attendre une meilleure compréhension qualitative des mécanismes physiques pour appliquer cette démarche avec succès au cas de l'atmosphère. Les études théoriques de Charney (1947) et de Eady (1949) basées sur les équations quasi-géostrophiques, simplification réaliste des équations de l'atmosphère (formulation des équations exploitant la prédominance des forces de Coriolis et de gradient de pression qui filtre les modes rapides de l'atmosphère telles que les ondes rapides d'inertie et de gravité), ont permis de mettre en évidence l'existence de modes normaux croissants de longueur d'onde ( $\approx 3000\text{km}$ ) similaire à celle des dépressions

observées aux moyennes latitudes. Si ces études ont permis d'identifier l'instabilité barocline comme le mécanisme responsable de la formation des dépressions aux latitudes moyennes, la décomposition en modes normaux ne suffit pas à décrire certaines propriétés des perturbations baroclines, tel leur changement de structure au cours de leur évolution.

Etant donné le temps important (3 jours) nécessaire à l'émergence du mode normal, un autre type de mécanisme lié à la structure initiale des perturbations est nécessaire pour expliquer les épisodes de cyclogénèse plutôt associés à des temps d'évolution de l'ordre de 24-48h. Farrell (1982), reprenant les résultats d'Orr (1907), a montré qu'une condition initiale bien choisie pouvait, sur une durée finie, croître plus vite que les modes normaux et ce, même en l'absence d'instabilité modale. Il introduisit à cet effet le concept de perturbation optimale afin de rendre compte de ce mécanisme, dit de croissance transitoire. La perturbation optimale est la perturbation initiale dont l'amplification linéaire mesurée sur une durée dite d'optimisation, au moyen d'une métrique donnée, est la plus importante. La structure de ces perturbations optimales évolue tout au long de la durée d'optimisation conformément aux résultats issus d'observations de cas réels de cyclogénèse.

Depuis, cette méthode a été utilisée intensivement aussi bien dans des études fondamentales sur la cyclogénèse que de façon opérationnelle pour générer les membres de leurs ensembles par certains centres de prévisions météorologiques (CEPMMT<sup>1</sup>, Météo-France...). Ces études ont permis d'explicitier de façon détaillée les mécanismes de croissance de ces perturbations optimales.

Néanmoins les théories évoquées précédemment reposent sur l'hypothèse d'une évolution linéaire des perturbations limitant leur cadre d'application à des amplitudes faibles et à des temps d'optimisation courts. La durée de validité du régime linéaire dépend non seulement de l'amplitude initiale des perturbations mais aussi de la complexité du modèle et de la situation météorologique considérée, ce qui explique la dispersion entre les différentes estimations entre 12h et 96h (Lacarra and Talagrand, 1988; Gilmour et al., 2001). Une première tentative de calcul de perturbations optimales non-linéaires avait été effectuée par Barkmeijer (1996) mais il a fallu attendre les travaux de Mu (2000) pour qu'une théorie complète voie le jour avec l'introduction des vecteurs singuliers non-linéaires. Appliquée jusqu'ici à des problèmes géophysiques simples de dimension peu importante, nous allons l'utiliser de façon intensive tout au long de ce travail dans des modèles d'instabilité barocline de complexité plus importante.

Ce chapitre très largement introductif illustrera de manière brève le mécanisme de l'instabilité barocline par une description des modes normaux ainsi que des perturbations optimales associées afin de familiariser le lecteur avec l'utilisation de ces concepts ainsi qu'avec leurs limites. Enfin nous décrirons la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires, peu utilisée jusqu'à aujourd'hui au sein de la communauté des atmosphériciens.

---

<sup>1</sup>Centre européen de prévisions météorologiques à moyen terme.

## I.2 L'instabilité barocline

Ce chapitre propose une description informelle du mécanisme d'instabilité barocline à l'origine de la formation des dépressions atmosphériques aux moyennes latitudes. Dans un premier temps, les concepts physiques traditionnellement utilisés en physique de l'atmosphère et nécessaires à la compréhension du présent travail seront brièvement introduits.

### I.2.1 Description de l'atmosphère aux moyennes latitudes

Avant d'aborder la dynamique des perturbations atmosphériques il convient de décrire l'état moyen de l'atmosphère.

Le profil vertical de température dans l'atmosphère n'est pas constant, l'atmosphère étant principalement chauffée par la surface via la radiation solaire. Aux échelles synoptiques la stratification verticale de l'atmosphère est stable : les particules d'air les plus légères sont au-dessus des particules les plus lourdes. Les forces de flottaison inhibent alors les mouvements d'agitation verticaux de l'atmosphère.

Considérons un déplacement rapide et donc adiabatique d'une particule de fluide entre les altitudes  $z$  à  $z + \delta z$  dans une atmosphère au repos caractérisé par les champs de pression, température et masse volumique ( $p_0, T_0, \rho_0$ ) supposés à l'équilibre hydrostatique  $\partial_z p_0 = -\rho_0 g$ . A chaque instant on suppose que la pression au sein de la particule  $p^p(t, z')$  s'ajuste instantanément à la pression environnante  $p_0(z')$ . Cette transformation étant adiabatique, la température potentielle  $\theta = T \left( \frac{p_{ref}}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$  est conservée<sup>2</sup> :  $\theta^p(z + \delta z) = \theta^p(z) = \theta_0(z)$ . On déduit le mouvement vertical de la particule à partir de la projection de l'équation d'Euler sur l'axe vertical :

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\delta z) = -g - \frac{1}{\rho^p} \frac{\partial p^p}{\partial z} \quad (I.1)$$

$$= g \frac{\rho_0(z) - \rho^p}{\rho^p} \quad (I.2)$$

$$= g \frac{\theta^p - \theta_0(z + \delta z)}{\theta_0(z)} \quad (I.3)$$

$$= -g \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \delta z \quad (I.4)$$

$$= -N^2 \delta z \quad (I.5)$$

Le profil vertical atmosphérique est donc stable si le gradient vertical de température potentielle est positif ou de façon équivalente si le gradient vertical de température est inférieur à une valeur limite  $\Gamma_d = \frac{g}{c_p}$  :

$$\begin{cases} \partial_z \theta_0 > 0 & \text{ou} & -\partial_z T_0 < \Gamma_d & \text{atmosphère stable} \\ \partial_z \theta_0 < 0 & \text{ou} & -\partial_z T_0 > \Gamma_d & \text{atmosphère instable} \end{cases}$$

---

<sup>2</sup>La température potentielle est la température qu'aurait la particule de fluide ramenée au niveau de la mer  $p=p_{ref}=1013$  hPa de façon adiabatique. Cette variable permet de s'affranchir des effets de détente adiabatique et de comparer l'état de deux particules de fluide. D'après la loi de Laplace, la température potentielle est conservée pour une transformation adiabatique



En pratique,  $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \left( \frac{d\theta_0}{dz} \right)$  est positif aux échelles synoptiques aux latitudes extratropicales : la stratification est stable. La fréquence  $N$  d'oscillation des particules de fluide déplacées de leur position d'équilibre est appelée fréquence de Brunt Väisälä. Cette stratification stable aux moyennes latitudes associée à la force de Coriolis impose aux mouvements atmosphériques à grande échelle d'être quasi-horizontaux. C'est pourquoi, pour des mouvements dont l'échelle verticale est négligeable par rapport à l'échelle horizontale, le terme d'accélération verticale est négligé dans la projection verticale de l'équation d'Euler qui est ramenée à l'équation de statique des fluides. C'est l'approximation hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{I.6})$$

En météorologie, le géopotential  $\Phi(z)$  dont dérive la force de pesanteur est couramment utilisé :

$$\frac{d\Phi}{dz} = g$$

La force de pression horizontale s'exprime alors en fonction du gradient horizontal de géopotential en coordonnées isobares :

$$\nabla_z p = \rho \nabla_p \Phi$$

En utilisant la loi des gaz parfaits  $p = \rho RT$  et (I.6), l'équilibre hydrostatique peut être réécrit comme :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{RT}{p} \quad (\text{I.7})$$

Aux moyennes latitudes, le gradient de pression horizontal est équilibré par la force de Coriolis liée à la rotation de la Terre dans l'équation de quantité de mouvement. Cet équilibre est appelé géostrophique. Il est vérifié pour les écoulements à faible nombre de Rossby<sup>3</sup> pour lesquels un développement à échelle multiple donne les relations suivantes entre le vent horizontal et le champ de pression dans le système de coordonnées (x,y,p) :

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (\text{I.8})$$

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (\text{I.9})$$

où les dérivées horizontales ont été effectuées à pression constante et  $f = 2\Omega \cos(\phi)$  représente le paramètre de Coriolis à la latitude  $\phi$ . Cette relation définit la vitesse géostrophique. En reliant densité et température au moyen de la loi des gaz parfaits et en utilisant la relation (I.7), on dérive la relation dite du vent thermique qui relie le gradient méridien de température au cisaillement vertical du vent :

$$f \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{I.10})$$

$$f \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{I.11})$$

---

<sup>3</sup>Le nombre de Rossby détermine l'importance relative du terme d'accélération et de la force de Coriolis dans les équations de quantité de mouvement. Il est défini comme  $Ro = \frac{U}{fL}$

Une des manifestations les plus visibles de la relation (I.10) entre le gradient Nord-Sud de température et le vent zonal est l'existence du courant jet aux moyennes latitude qui sépare les régions froides polaires des régions tempérées (Figure I.1). Cette zone, située entre 30°N et 60°N, où le cisaillement vertical de vent est important porte le nom de zone barocline.

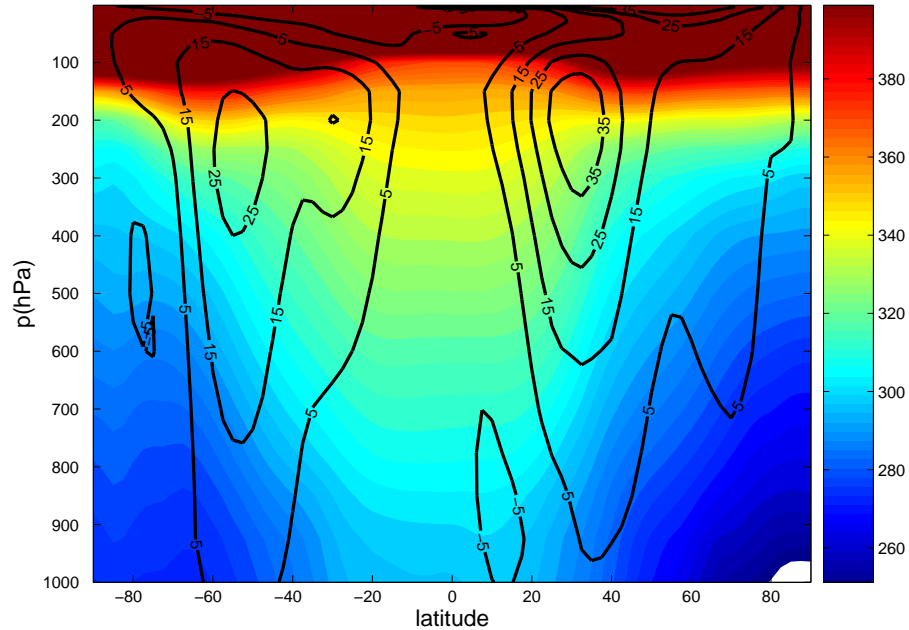


FIG. I.1 – Moyenne mensuelle et zonale des champs de température potentielle (en couleur °K) et de vent zonal (traits noirs en  $m.s^{-1}$ ) effectuée à partir des réanalyses ERA40 du CEPMMT pour le mois de Décembre 1995.

## I.2.2 Mécanisme qualitatif d'instabilité barocline

La figure I.2 représente de façon schématique la zone barocline à l'équilibre. Les courbes iso- $\theta$  (ou isentropes) sont inclinées de l'équateur vers les pôles. Déplaçons verticalement une particule de fluide originellement à l'équilibre en A vers le point C. La stratification verticale étant stable, puisque l'atmosphère est initialement au repos, la particule de fluide va revenir à sa position initiale. Déplaçons cette fois la particule de fluide adiabatiquement de A vers B. La particule conservant sa température potentielle au cours de la transformation, sa température potentielle va être plus élevée ( $\mathbf{AB} \cdot \nabla\theta > 0$ ) que celle des particules environnantes et plus légère que son environnement, cette dernière va subir un mouvement ascendant. Cette transformation a permis de convertir l'énergie potentielle stockée dans l'état de base en énergie cinétique pour la perturbation.

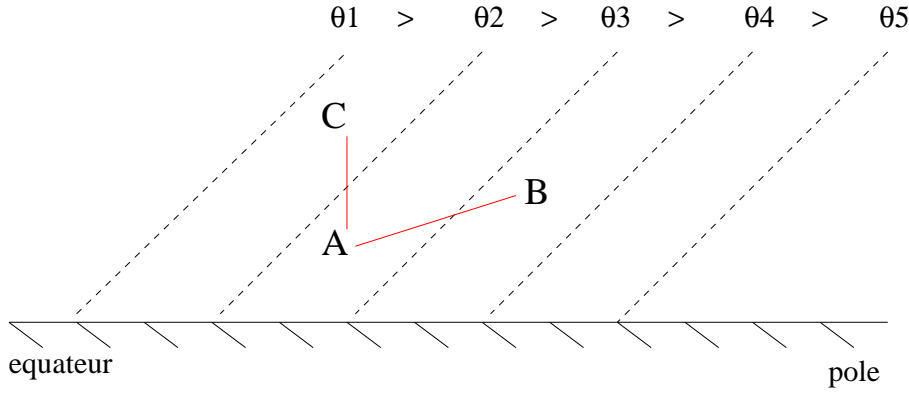


FIG. I.2 – Mécanisme de l'instabilité barocline. La température potentielle de l'état de base est plus grande en A qu'en B : en déplaçant adiabatiquement une particule de fluide de A vers B, elle sera plus légère que son environnement et subira un mouvement ascendant. Par contre, suite un déplacement vertical de A vers C de cette particule de fluide, celle-ci sera alors plus lourde que son environnement et reviendra vers sa position initiale en A

Ce raisonnement qualitatif ne tient pas compte des contraintes dynamiques de l'écoulement qui seront précisées au cours des deux paragraphes suivants.

### I.2.3 Equations quasi-géostrophiques : introduction au concept de vorticité potentielle

A l'ordre 0 par rapport au nombre de Rossby les équations atmosphériques se ramènent à l'équilibre géostrophique. Un développement à l'ordre 1 permet de décrire l'évolution de la vitesse géostrophique et des champs associés sous la forme d'une unique équation d'advection d'un traceur actif, la vorticité potentielle quasi-géostrophique  $q_g$  (Holton, 1972) :

$$(\partial_t + u_g \cdot \nabla)q_g = 0 \quad (\text{I.12})$$

où

$$q_g = \nabla^2 \psi + f + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) \quad (\text{I.13})$$

avec  $\psi$  la fonction de courant de l'écoulement et  $S = -\frac{R}{p} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^\kappa \frac{d\theta_0}{dp}$  la stabilité verticale en coordonnées pression avec  $\kappa = R/c_p$ . Cette approximation à l'ordre 1 par rapport au nombre de Rossby est appelée quasi-géostrophique et caractérise une dynamique proche de l'équilibre géostrophique.  $q_g$  est la vorticité potentielle quasi-géostrophique à partir de laquelle la fonction de courant  $\psi$  est déduite après inversion de l'équation elliptique (I.13) moyennant la connaissance des conditions aux limites du problème. La vorticité potentielle QG est la somme de trois termes :

- la vorticité relative  $\nabla^2 \psi$
- la vorticité planétaire  $f$

- un terme de vortex stretching :  $\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)$  qui tient compte de la variation adiabatique de température associée à l'éirement d'un tube de vorticité.

De la fonction de courant  $\psi$  peuvent se déduire toutes les grandeurs de l'écoulement :

- la vitesse géostrophique  $u_g = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$  et  $v_g = \frac{\partial \psi}{\partial x}$
- la vorticité cinématique verticale  $\zeta = \nabla^2 \psi$
- la température  $T = -\frac{p}{R} f_0 \frac{\partial \psi}{\partial p}$
- le géopotential  $\Phi = f_0 \psi$
- la température potentielle  $\theta = -\frac{p f}{R} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{c_v}{c_p}} \frac{\partial \psi}{\partial p}$

Si les équations quasi-géostrophiques constituent un outil suffisant pour étudier la cyclogénèse, elles ne permettent pas d'étudier la formation de fronts atmosphériques pour lesquels les phénomènes ag ostrophiques ne peuvent plus être négligés.

## I.2.4 Equations énergétiques quasi-géostrophiques

Soit un volume d'atmosphère périodique en  $x$  et  $y$  et compris verticalement entre  $p = p_{sol}$  à la surface et  $p = 0$  au sommet de l'atmosphère. On considère un état de référence stationnaire caractérisé par un cisaillement vertical de vent zonal  $U_0(p)$  en équilibre géostrophique avec un champ de température  $T_0$  tel que  $f_0 \partial_p U_0 = \frac{R}{p} \partial_y T_0$ . Nous noterons respectivement  $\Theta_0$  et  $Q_0$  les champs de température potentielle et de vorticité potentielle associés. L'équation linéarisée de conservation de la vorticité potentielle quasi-géostrophique s'écrit alors :

$$(\partial_t + U_0 \partial_x) q + v_g \partial_y Q_0 = 0 \quad (I.14)$$

Les densités d'énergie cinétique  $e_c$  et potentielle  $e_p$  d'une perturbation de cet état de base s'écrivent localement :

$$\begin{aligned} e_c &= \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \\ e_p &= \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{S} \left( \frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^2 \end{aligned}$$

En utilisant les équations quasi-géostrophiques linéarisées autour de l'état de base, un bilan d'énergie sur le domaine d'intégration donne :

$$\partial_t \left( \iiint_{x,y,p} e_c dm \right) = \iiint \omega \theta \partial_p \Theta_0 dm \quad (I.15)$$

$$\partial_t \left( \iiint_{x,y,p} e_p dm \right) = - \iiint \omega \theta \partial_p \Theta_0 dm + \iiint \frac{-v \theta \partial_y \Theta_0}{-S \frac{p}{R} \left( \frac{p_{ref}}{p} \right)^\kappa} dm \quad (I.16)$$

$$= - \iiint \omega \theta \partial_p \Theta_0 dm + \iiint \frac{f_0^2}{S} \partial_x \psi \partial_p \psi \partial_p U_0 \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{-\kappa} dm \quad (I.17)$$

où l'on a posé  $dm = -dxdy\frac{dp}{g}$  l'élément de masse élémentaire en coordonnées pression. D'où pour l'énergie totale  $E_{tot} = \iiint (e_c + e_p)dm$  :

$$\partial_t E_{tot} = \iiint \frac{f_0^2}{S} \partial_x \psi \partial_p \psi \partial_p U_0 \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{-\kappa} dm \quad (\text{I.18})$$

L'équation I.18 illustre l'extraction par les perturbations de l'énergie potentielle de l'état de base par le mécanisme présenté en I.2.2. Les perturbations puisent leur énergie potentielle de l'écoulement de base et cette énergie est ensuite convertie en énergie cinétique (figure I.3)

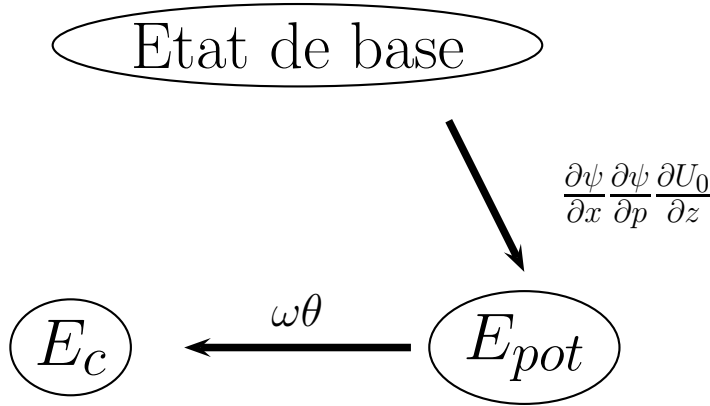


FIG. I.3 – Diagramme énergétique de perturbations baroclines

La croissance barocline de perturbations n'est possible d'après la relation (I.18) que si la condition suivante est réalisée au moins à un endroit de l'écoulement :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial p} \frac{\partial U_0}{\partial p} > 0 \quad (\text{I.19})$$

Ce terme correspond à l'extraction d'énergie potentielle de l'état de référence par la perturbation.  $\frac{\partial U_0}{\partial p}$  étant négatif au sein de la zone barocline, en moyenne on doit avoir  $\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial p} < 0$  ce qui se traduit par une inclinaison des structures iso- $\psi$  dans le sens opposé au cisaillement (cf figure I.4). Une perturbation telle que les lignes de courant sont orientées dans le sens du cisaillement (cas d'un traceur passif) cède de l'énergie à l'écoulement moyen.

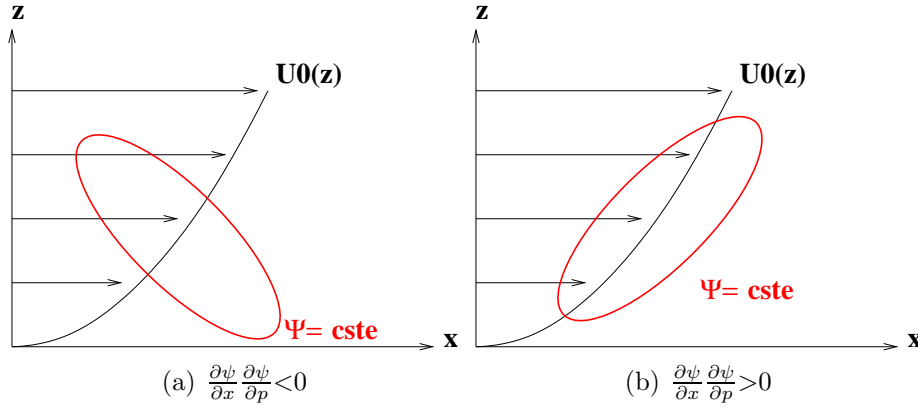


FIG. I.4 – (a) La fonction de courant est inclinée dans le sens opposé au cisaillement, la perturbation extrait de l'énergie barocliniquement de l'état de base. (b) Si la fonction de courant est inclinée dans le sens du cisaillement, la perturbation cède de l'énergie à l'écoulement de base.

Les échanges énergétiques entre la perturbation et l'écoulement moyen peuvent être appréhendés en calculant l'énergie de la partie zonale de l'écoulement  $\bar{E}$  (Pedlosky, 1987) :

$$\bar{E} = \iiint \left( \frac{\langle U_0 + u \rangle_x^2}{2} + \frac{\langle \Theta_0 + \theta \rangle_x^2}{2S} \right) dm$$

En utilisant les équations thermodynamiques et de quantité de mouvement linéarisées (Pedlosky, 1987), on obtient l'équation d'évolution suivante :

$$\partial_t \bar{E} = - \int \int \int \frac{f_0^2}{S} \partial_x \psi \partial_p \psi \partial_p U_0 \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{-\kappa} dm$$

La comparaison avec l'équation I.18 montre que la somme des énergies de l'écoulement moyen  $\bar{E}$  et de la perturbation  $E_{tot}$  est conservée. Ce sont les processus d'instabilités qui permettent à la perturbation de croître en extrayant son énergie de l'écoulement moyen.

### I.2.5 Description d'un modèle quasi-géostrophique à 2 niveaux verticaux : le modèle de Phillips

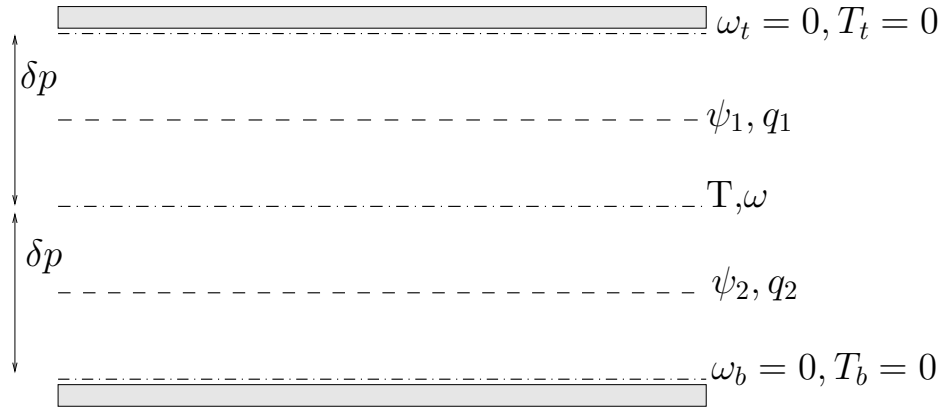


FIG. I.5 – Schéma du modèle de Phillips

Phillips (1956) a proposé un modèle à 2 niveaux verticaux qui permet de modéliser avec le minimum d'ingrédients physiques nécessaires le mécanisme d'instabilité barocline. Ce paragraphe présente une dérivation succincte des équations associées. Les équations quasi-géostrophiques sont discrétisées sur deux niveaux verticaux. L'atmosphère est alors divisée en deux couches 1 et 2 (choisies ici d'épaisseur égale en coordonnées pression). Au sein de chacune de ces couches sont définies (traits pointillés) les variables  $\psi$  et  $q$ . Les variables qui sont calculées par différentiation verticale de  $\psi$  et  $q$  ( $T, \omega \dots$ ) sont évaluées uniquement à la frontière entre les deux couches (traits mixtes) mais aussi aux frontières supérieure et inférieure du domaine. La condition aux limites aux bornes inférieure et supérieure du domaine s'écrit

$$\omega_b = \omega_t = 0 \quad (\text{I.20})$$

La vitesse verticale est reliée à l'équation thermodynamique par :

$$D_g(\partial_p \phi) = S\omega \quad (\text{I.21})$$

où  $D_g$  est la dérivée lagrangienne géostrophique  $D_g = \partial_t + \mathbf{u}_g \cdot \nabla$ .

La condition  $\omega_b = \omega_t = 0$  se traduit alors par  $D_g \partial_p \phi_b = D_g \partial_p \phi_t = 0$  soit  $D_g T_b = D_g T_t = 0$ .

Dans le modèle de Phillips, sont choisies les solutions particulières suivantes :

$$T_b = T_t = 0$$

soit en terme de fonction de courant :

$$\partial_p \psi_b = \partial_p \psi_t = 0 \quad (\text{I.22})$$

La différentiation verticale de (I.13) combinée à la relation I.22 permet d'écrire l'expression suivante discrétisée de la vorticité potentielle quasi-géostrophique :

$$q_i = \nabla^2 \psi_i + f + \frac{f_0^2}{\delta p S} (\psi_i - \psi_j) \quad i = 1, 2 \quad j = 3 - i \quad (\text{I.23})$$

La conservation lagrangienne de cette quantité servira de base à la formulation discrète du modèle de Phillips, dont nous effectuerons un usage intensif tout au long de ce chapitre et du chapitre suivant.

### I.3 Calcul des modes normaux baroclines dans le modèle de Phillips

Dans ce qui précède, nous avons décrit l'élaboration d'un modèle simplifié capable de modéliser les processus d'instabilité barocline et présenté les concepts physiques associés. La section qui suit présente une étude des processus d'instabilité à partir de ce modèle simplifié en utilisant la méthode des modes normaux, de façon analogue aux travaux de Charney (1947) et de Eady (1949) avec des modèles légèrement différents mais de complexité comparable.

#### I.3.1 Méthode des modes normaux

Considérons l'équation d'évolution non-linéaire suivante :

$$\partial_t X = F(X) \quad (\text{I.24})$$

La méthode des modes normaux permet d'étudier les processus d'instabilité d'un écoulement stationnaire. Une perturbation infinitésimale  $\delta X$  d'un écoulement stationnaire  $X_0$  obéit à une équation d'évolution linéaire de la forme :

$$\partial_t \delta X = G \delta X \quad (\text{I.25})$$

où  $X$  désigne le vecteur d'état du problème,  $\delta X$  une perturbation de ce vecteur d'état et  $G$  l'opérateur linéaire-tangent de l'opérateur d'évolution du modèle autour de la trajectoire  $X_0$  :

$$G = \frac{\partial F}{\partial X}$$

L'instabilité de l'écoulement est conditionné par l'existence de solutions croissantes en temps de l'équation (I.25) auquel cas l'écoulement est instable. Reynolds proposa le siècle dernier de rechercher des solutions à croissance exponentielle afin de caractériser l'évolution aux temps longs. L'équation (I.25) se ramène alors à un simple problème aux valeurs propres facilement soluble. Les modes normaux  $X_i$ , solutions de  $G X_i = \sigma_i X_i$ , s'amplifient sans changer de structure :

$$X_i(t) = X_i^0 e^{\sigma_i t}$$



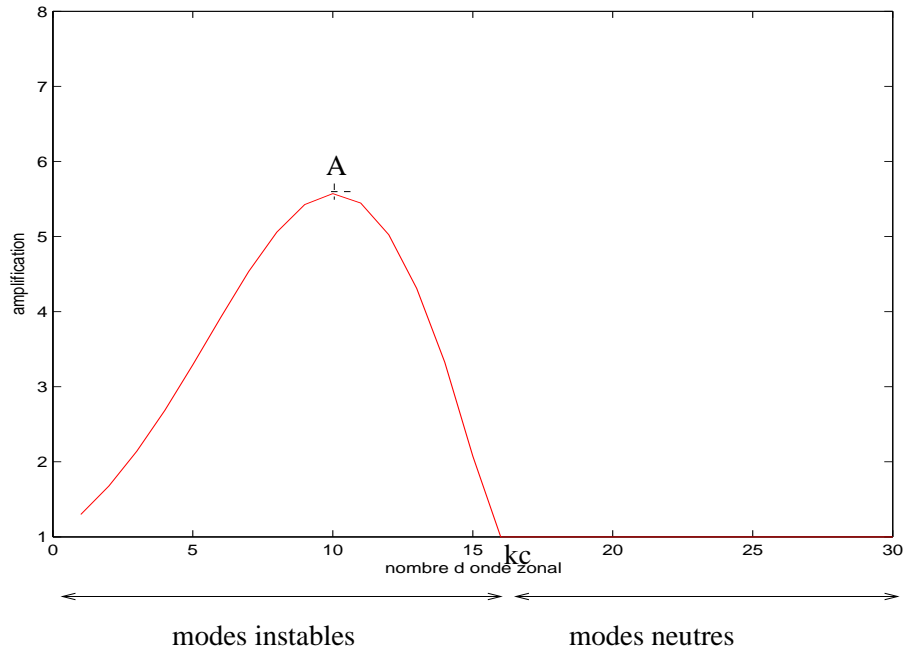


FIG. I.6 – Taux d’amplification du mode normal le plus instable du modèle de Phillips représenté en fonction du nombre d’onde zonal. Il existe un nombre d’onde de coupure  $k_c$  au-delà duquel l’écoulement est stable.

D’une condition initiale quelconque le mode normal de plus grand taux de croissance  $Re(\sigma_i)$  positif émerge au bout d’un temps suffisamment long par un processus de sélection naturelle où les modes de plus faible taux de croissance deviennent négligeables devant le mode dominant et le système perd ainsi la mémoire de la condition initiale.

Munis de ces outils, Eady (1949) et Charney (1947) calculèrent analytiquement les modes normaux dans des modèles simplifiés d’instabilité barocline. Ils montrèrent l’existence de modes normaux instables de longueur d’onde (3000 km) comparable à celle des systèmes dépressionnaires observés. En terme de prévisibilité, ils conclurent à un écoulement atmosphérique instable “de façon permanente”.

Nous présentons ici en guise d’illustration les conclusions de Charney et Eady à partir du calcul numérique des modes normaux du modèle de Phillips à deux dimensions (décrit dans la partie I.2.5)<sup>4</sup>. La figure I.6 révèle l’existence d’une bande de nombres d’ondes zonaux pour lesquels l’atmosphère est instable. Les modes normaux instables sont inclinés vers l’ouest dans le sens opposé au cisaillement vertical de vent afin d’extraire barocliniquement de l’énergie à l’écoulement de base (figure I.7).

<sup>4</sup>La dérivation de ces résultats déjà connus n’est pas explicitée : le lecteur intéressé trouvera de plus amples détails dans Rivière et al. (2001). Les paramètres expérimentaux choisis ici sont  $k_y = 4$ ,  $F = 64$ ,  $U = 0.2$ ,  $T = 0.7$ . L’adimensionnement des variables est décrit dans le paragraphe II.1. Toutes les figures jusqu’à la fin de ce chapitre correspondent à ce choix de paramètre pour lequel nous avons calculé numériquement modes normaux et vecteurs singuliers.

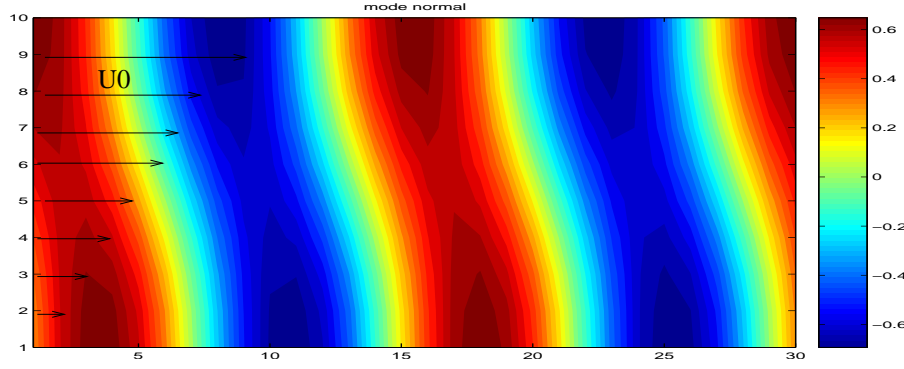


FIG. I.7 – Fonction de courant  $\psi$  du mode normal correspondant au point A de la figure I.6. La structure est inclinée dans le sens opposé au cisaillement de vent zonal (représenté par les flèches noires) afin d'extraire de l'énergie de l'écoulement de base.

De nombreuses études théoriques ont traité analytiquement l'analyse modale de l'instabilité barocline dans des modèles simplifiés d'instabilité barocline. Pour le modèle de Charney, Lindzen and Farrell (1980) obtiennent une expression approchée du taux de croissance maximal  $\sigma_E$  de l'instabilité barocline en fonction du cisaillement de vent vertical et de la stabilité vertical.  $\sigma_E$  est appelé l'indice d'Eady et son expression est donnée par :

$$\sigma_E = 0.31 \frac{f}{N} \frac{dU}{dz} \quad (\text{I.26})$$

La croissance modale de l'instabilité barocline est à la fois proportionnelle au cisaillement vertical de vent (ou au gradient méridien de température puisque les deux sont reliés par la relation du vent thermique) et à l'inverse de la fréquence de Brunt-Väisälä.

A partir de la décomposition en modes normaux de l'équation de conservation de la vorticité potentielle, Charney and Stern (1962) ont dérivé les conditions nécessaires d'instabilité barocline dites de Charney-Stern. En décomposant la fonction de courant  $\psi$  en ondes planes

$$\psi(x, y, p, t) = \text{Re}(\tilde{\psi}(y, z)e^{ik(x-ct)})$$

l'équation (I.14) s'écrit :

$$(U_0 - c) \left( \partial_y \partial_y \tilde{\psi} + \partial_p \left( \frac{f_0^2}{S} \partial_p \tilde{\psi} \right) - k^2 \tilde{\psi} \right) + \tilde{\psi} \partial_y Q_0 = 0 \quad (\text{I.27})$$

En multipliant cette relation par  $\tilde{\psi}$  on obtient après intégration dans les dimensions méridienne et verticale :

$$\int_0^{2\delta p} \int_{y_1}^{y_2} |\partial_y \tilde{\psi}|^2 + \frac{f_0^2}{S} |\partial_p \tilde{\psi}|^2 + k^2 |\tilde{\psi}|^2 dy dp - \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_0^{2\delta p} \frac{\partial_y Q_0}{U_0 - c} |\tilde{\psi}|^2 dp + \left[ \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial_p U}{U - c} |\tilde{\psi}|^2 \right]_0^{2\delta p} \right) = 0 \quad (\text{I.28})$$

soit en prenant la partie imaginaire de cette relation :

$$-\text{Im}(c) \int_{y_1}^{y_2} \left( \int_0^{2\delta p} \frac{\partial_y Q_0}{|U_0 - c|^2} |\tilde{\psi}|^2 dp + \left[ \frac{f_0^2}{S} \frac{\partial_p U |\tilde{\psi}|^2}{|U - c|^2} \right]_0^{2\delta p} dp \right) = 0 \quad (\text{I.29})$$

L'existence d'un mode instable se traduit par la condition  $\text{Im}(c) > 0$ , le contenu de l'intégrale dans la relation précédente est donc nulle d'où les conditions nécessaires d'instabilité barocline dites de Charney-Stern :

1. le gradient méridien de vorticité potentielle  $\partial_y Q_0$  change de signe entre le sol et la tropopause
2.  $\partial_y Q_0$  est de signe opposé à  $\partial_p U_0$  au sol.
3.  $\partial_y Q_0$  est de signe identique à  $\partial_p U_0$  à la tropopause.
4. si  $\partial_y Q_0 = 0$ ,  $\partial_p U_0$  est de même signe aux frontières inférieure et supérieure du domaine.

Pour que l'écoulement soit barocliniquement instable, au moins une des conditions précédentes doit être vérifiée.

### I.3.2 Mécanisme d'Orr

La méthode des modes normaux exclut de l'étude de stabilité les perturbations à croissance non exponentielle. Aux temps longs pour des problèmes à grand nombre de Reynolds, cette hypothèse est vérifiée de façon robuste. Nous verrons par la suite les faiblesses de cette hypothèse dans le cas de l'instabilité barocline. La remise en question de la théorie des modes normaux de l'instabilité barocline a été effectuée par Farrell (1985) qui remarqua que l'introduction de coefficients de friction réalistes dans le modèle d'Eady stabilisait tous les modes normaux sans pour autant empêcher la cyclogénèse de se produire. Il montra aussi que des conditions initiales judicieusement choisies pouvaient croître transitoirement en l'absence d'instabilité modale, soulignant la non-applicabilité de la méthode des modes normaux à l'étude de l'instabilité barocline.

Le phénomène d'instabilité transitoire peut être appréhendé à partir de la décomposition en modes normaux sans se focaliser sur les temps longs. En supposant que ceux-ci forment une base<sup>5</sup> notée  $(X_i)$ , une perturbation initiale  $\delta x(t = 0)$  décomposée dans cette base s'écrit :

$$\delta X(t = 0) = \sum_i \lambda_i X_i$$

---

<sup>5</sup>Cette hypothèse forte, qui constitue la base de la décomposition en modes normaux, n'est pas forcément vérifiée. Il faut en effet rajouter un continuum de modes aux modes normaux pour obtenir une base complète (Pedlosky, 1964). En pratique, le raisonnement que nous allons tenir au cours de ce chapitre introductif n'est pas affecté par la prise en compte de ce continuum et pour des raisons de clarté, il ne sera pas mentionné dans ce manuscrit.

Chaque mode normal possédant une croissance exponentielle avec son propre taux de croissance  $\sigma_i$ , il est facile de connaître l'évolution de la perturbation à chaque instant :

$$\delta X(t) = \sum_i \lambda_i X_i e^{\sigma_i t}$$

Afin de mesurer la taille de la perturbation nous définissons une norme  $\| \cdot \|_E$  que nous relierons à l'énergie E (mais qui en pratique peut être une mesure quelconque de la perturbation : enstrophie ...) et un produit scalaire associé  $(\cdot)_E$

L'énergie de la perturbation s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E(t) = E(\delta X(t)) = \| \delta X(t) \|_E &= \left( \sum_i \lambda_i e^{\sigma_i t}, \sum_i \lambda_i e^{\sigma_i t} \right)_E \\ &= \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j e^{(\sigma_i + \sigma_j^*) t} (X_i^0, X_j^0)_E \end{aligned}$$

Deux cas de figure apparaissent :

- les modes normaux sont orthogonaux par rapport au produit scalaire considéré. On peut alors renormaliser les modes normaux de façon à les rendre orthonormaux et l'énergie s'écrit alors

$$E(t) = \sum_i \|\lambda_i\|^2 e^{2Re(\sigma_i)t}$$

En l'absence d'instabilité modale ( $Re(\sigma_i) \leq 0$ ), il n'y a pas de croissance même transitoire de l'énergie et la condition nécessaire de stabilité obtenue par la théorie des modes normaux est consistante.

- les modes normaux ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire considéré :

$$E(t) = \sum_i \sum_k \lambda_k^* \lambda_i e^{(Re(\sigma_k) + Re(\sigma_i))t} e^{j(Im(\sigma_i - \sigma_k))t} < X_i^n, X_k^n >$$

où  $j$  représente l'imaginaire pur tel que  $j^2 = -1$ .

Les modes normaux peuvent alors échanger de l'énergie et, même en l'absence d'instabilité modale, le terme contenu dans la phase de l'exponentielle complexe autorise une croissance transitoire.

Le modèle de Phillips bidimensionnel permet d'illustrer facilement ce mécanisme de croissance transitoire. La figure I.8 montre l'évolution de l'énergie associée à une combinaison linéaire de deux modes normaux neutres situés au-delà du nombre d'onde de coupure. Initialement la perturbation est inclinée dans le sens opposé au cisaillement de vent vertical ce qui lui permet d'extraire barocliniquement de l'énergie de l'état de base (cf p20). Le vent zonal étant plus élevé en altitude qu'au sol, la perturbation se redresse au cours du temps. Une fois que l'inclinaison de la perturbation par rapport à la verticale change de signe, la perturbation cède de l'énergie à l'écoulement moyen et l'énergie de la perturbation décroît. Ce mécanisme de croissance transitoire a été mis

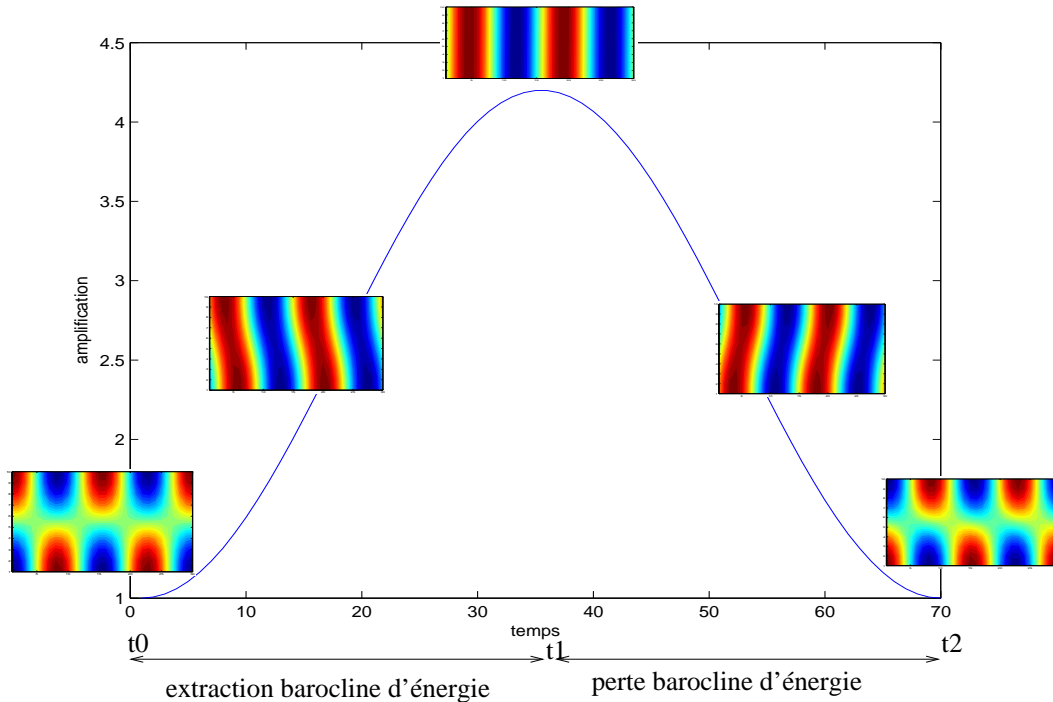


FIG. I.8 – Taux d’amplification d’une combinaison de deux modes normaux neutres dans le modèle de Phillips bidimensionnel. Les rectangles représentent des instantanés de la structure de la fonction de courant des perturbations au cours du temps. Entre les instants  $t_0$  et  $t_1$  la perturbation est inclinée dans le sens opposé au cisaillement de vent : elle extrait de l’énergie de l’état de base. Puis, entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ , la perturbation est inclinée dans le sens du cisaillement : la perturbation cède de l’énergie à l’écoulement de base (cf I.2.4 pour plus de détails)

en évidence par Orr (1907) au début du siècle et porte le nom de mécanisme d’Orr.

Rotunno and Fantini (1989) montrèrent que certains types de cyclogénèse observés pouvaient être reproduits en considérant la croissance transitoire d’une combinaison de deux modes normaux neutres .

L’orthogonalité des modes normaux entre eux dépend des propriétés de la matrice  $G$  : si celle-ci est auto-adjointe alors ses vecteurs propres forment une base orthogonale. Néanmoins, dans la majorité des cas,  $L$  ne vérifie pas cette propriété et les modes normaux ne sont pas orthogonaux. D’autres mécanismes expliquent l’existence du phénomène de croissance transitoire, notamment l’existence d’un continuum de modes qui complète la base formée par les modes normaux (Pedlosky, 1964) mais nous n’en discuterons pas.

## I.4 Détermination de la perturbation optimale : méthode des vecteurs singuliers

Les observations précédentes nous ont montré qu'en absence de modes normaux instables, une condition initiale bien choisie pouvait croître de façon importante sur des durées finies. Farrell (1989) définit la perturbation optimale comme la perturbation dont la croissance mesurée au moyen d'une norme donnée sur une durée déterminée, dite d'optimisation, est la plus importante. Cette perturbation optimale est déterminée grâce à une décomposition en vecteurs singuliers.

### I.4.1 Description de la méthode des vecteurs singuliers

La description du mécanisme d'Orr montre l'importance de la condition initiale, ici de l'inclinaison initiale de la perturbation, pour observer une croissance transitoire. La méthode des vecteurs singuliers détermine les perturbations initiales d'un écoulement qui, sous l'hypothèse d'une évolution linéaire, vont le plus s'amplifier entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ ,  $t_1 - t_0$  représentant la durée d'optimisation.

Pour caractériser la croissance d'une perturbation, il convient de définir une mesure de son amplitude c'est-à-dire d'introduire une norme à laquelle on peut associer un produit scalaire. Nous noterons  $\| \cdot \|_E$  cette norme et  $(\cdot)_E$  le produit scalaire associé. Le produit scalaire  $(\cdot)_E$  s'exprime en fonction du produit scalaire canonique  $\langle \cdot \rangle$  au moyen d'une matrice de E hermitienne définie positive :

$$(\delta x; \delta y)_E = \langle \delta x; E \delta y \rangle$$

L'équation (I.25) peut être écrite pour une perturbation évoluant linéairement sous forme intégrale (y compris pour M non stationnaire) :

$$\delta x(t_1) = L_{X_0}(t_1, t_0) \delta x(t_0)$$

où  $L_{X_0}(t_1, t_0)$  (noté L dans la suite afin de faciliter la lecture) est le modèle linéaire tangent qui décrit l'évolution linéarisée de perturbations autour d'une trajectoire de référence  $X_0$  entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ . Il correspond à la matrice jacobienne du modèle non-linéaire :

$$L_{X_0}(t_1, t_0) = \frac{\partial M(t_1, t_0, X_0)}{\partial X_0}$$

où  $M(t_1, t_0, X_0)$  désigne le modèle non-linéaire qui au vecteur d'état caractérisant l'état de l'atmosphère à  $t = t_0$  associe le vecteur d'état au terme de la prévision à  $t = t_1$ .

Le carré de la norme de la perturbation à l'instant final s'écrit dans l'approximation linéaire

$$(\delta x(t_1); \delta x(t_1))_E = \langle L \delta x(t_0), E L \delta x(t_0) \rangle = \langle \delta x(t_0), L^* E L \delta x(t_0) \rangle$$

où  $L^* = L_{X_0}^*(t_1, t_0)$  désigne l'opérateur adjoint de L par rapport au produit scalaire canonique. Tout comme l'opérateur linéaire-tangent, l'adjoint est défini par rapport à une trajectoire de référence.

La perturbation optimale  $\delta\tilde{x}$  maximise le rapport  $\lambda^2$  des normes finale et initiale de la perturbation :

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 &= \max_{\delta x(t_0)} \left[ \frac{(\delta x(t_1); \delta x(t_1))_E}{(\delta x(t_0); \delta x(t_0))_E} \right] \\
 &= \max_{\delta x(t_0)} \left[ \frac{\langle \delta x(t_0), L^* E L \delta x(t_0) \rangle}{\langle \delta x(t_0), E \delta x(t_0) \rangle} \right] \\
 &= \max_{\delta x(t_0)} \left[ \frac{\langle E^{-1/2} \delta y(t_0), L^* E L E^{-1/2} \delta y(t_0) \rangle}{\langle E^{-1/2} \delta y(t_0), E^{1/2} \delta y(t_0) \rangle} \right] \\
 &= \max_{\delta x(t_0)=E^{-\frac{1}{2}} \delta y(t_0)} \left[ \frac{\langle \delta y(t_0), E^{-1/2} L^* E L E^{-1/2} \delta y(t_0) \rangle}{\langle \delta y(t_0), \delta y(t_0) \rangle} \right] \tag{I.30}
 \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\delta y(t_0) = E^{1/2} \delta x(t_0)$ , l'expression de  $\delta x(t_0)$  dans la base associée à la norme E.

Le rapport  $\lambda^2$  est maximum lorsque  $\delta y(t_0)$  est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de  $\mathcal{M} = E^{-1/2} L^* E L E^{-1/2}$ . Les vecteurs propres de  $\mathcal{M}$ , matrice symétrique réelle, sont appelés vecteurs singuliers. Par convention on associe au vecteur propre correspondant à la i-ème plus grande valeur propre de  $\mathcal{M}$  le i-ème vecteur singulier. De plus, on fixe  $\| \delta x(t_0) \|_E$  égale à 1 pour permettre à la base des vecteurs singuliers d'être orthonormale.

La mise en oeuvre de cette méthode suppose de disposer en outre des expressions de L et de  $L^*$ , c'est-à-dire des modèles linéaire-tangent et adjoints. <sup>6</sup>

### I.4.2 Importance du choix de la norme

Le vecteur singulier est dépendant de la norme choisie : Ahlquist montra d'ailleurs dans un papier non publié qu'il était toujours possible de choisir une norme tel qu'un vecteur donné soit la solution du problème d'optimisation précédent. Cette norme précise d'une part le poids relatif aux différentes composantes du vecteur d'état (vent, température, humidité...) et d'autre part l'importance relative des différents composantes spectrales et géographiques de ces champs. Les normes les plus fréquemment utilisées sont dans le cas d'un modèle aux équations primitives :

- la norme énergie totale

$$(\delta x, \delta y)_E = \frac{1}{2} \iiint_{x,y,p} (\delta u_x \delta u_y + \delta v_x \delta v_y + R T_{ref} \delta \Pi_x \delta \Pi_y + \frac{c_p}{T_{ref}} \delta T_x \delta T_y) dm$$

avec  $T, \Pi, u, v$  les champs de température, de pression de surface et de vitesse et  $dm = -dx dy \frac{dp}{g}$  l'élément de masse élémentaire. Introduite par Talagrand (1981) dans un modèle shallow-water, elle est conservée par des perturbations d'une atmosphère isotherme au repos (Errico, 2000).

---

<sup>6</sup>Il est possible de mesurer l'amplitude de la perturbation avec deux jeux de normes différents  $E_1$  et  $E_2$  aux instants initial et final, le raisonnement est absolument identique à celui effectué ici. Néanmoins nous n'effectuerons pas un tel choix ici.

- la norme fonction de courant

$$(\delta x, \delta y)_\psi = \frac{1}{2} \iiint_{x,y,p} \delta\psi_x \delta\psi_y dm$$

- la norme enstrophie

$$(\delta x, \delta y)_\zeta = \frac{1}{2} \iiint_{x,y,p} \delta\zeta_x \delta\zeta_y dm$$

- la norme de covariance d'erreur d'analyse. L'état initial d'une prévision est le fruit du processus d'assimilation qui intègre les informations fournies par le réseau d'observations dans le modèle numérique afin de fournir l'état initial de la prévision. Cet état initial est imparfait à cause entre autres des défauts du système d'observations (erreurs de mesure, couverture imparfaite de certaines régions du globe...) et du modèle numérique. Les erreurs effectuées sur cet état initial appelées erreurs d'analyse possèdent une distribution de probabilité donnée qui dépend de la situation étudiée et du système d'observation. Ces erreurs d'analyse se transformeront au terme de la prévision en erreurs de prévision. L'usage d'une norme basée sur la covariance des erreurs d'analyse peut s'avérer particulièrement intéressante (Gelaro et al., 2001) puisqu'elle associe à chaque composante du vecteur d'état un poids proportionnel à sa probabilité d'occurrence. La difficulté principale réside dans notre non-connaissance a priori de la matrice de covariance d'erreur d'analyse qui dépend de l'état initial.

Les vecteurs singuliers à l'instant initial dépendent fortement de la norme choisie comme le montrent les travaux de Rivière et al. (2001) dans un modèle quasi-géostrophique, de Joly (1995) dans un modèle semi-géostrophique et de Palmer et al. (1998) dans un modèle aux équations primitives. A priori, il n'existe pas de relations exactes entre les vecteurs singuliers calculés avec deux normes différentes. Cependant, Kuang (2004) a montré qu'il était possible d'obtenir des relations approchées entre les perturbations optimales obtenues avec différentes métriques sous certaines hypothèses. Qualitativement, plus le poids associé à un terme dans la norme est important plus le poids de la composante associée dans le vecteur singulier sera faible à l'instant initial et important à l'instant final. Par exemple, la norme fonction de courant favorisera plus à l'instant initial les petites échelles que la norme énergie totale.

Palmer et al. (1998) montrèrent que la norme énergie totale permettait d'obtenir des vecteurs singuliers les plus représentatifs à l'instant initial des erreurs d'analyse et depuis cette norme est la plus fréquemment utilisée pour le calcul de vecteurs singuliers aussi bien à des fins de recherche qu'opérationnelles.

### I.4.3 Vecteurs singuliers et modes normaux dans le modèle de Phillips

La figure I.9 représente le taux de croissance du mode normal le plus instable et du premier vecteur singulier en fonction du nombre d'onde zonal, dans le modèle de Phillips, pour la norme énergie cinétique. Pour des nombres d'onde zonaux



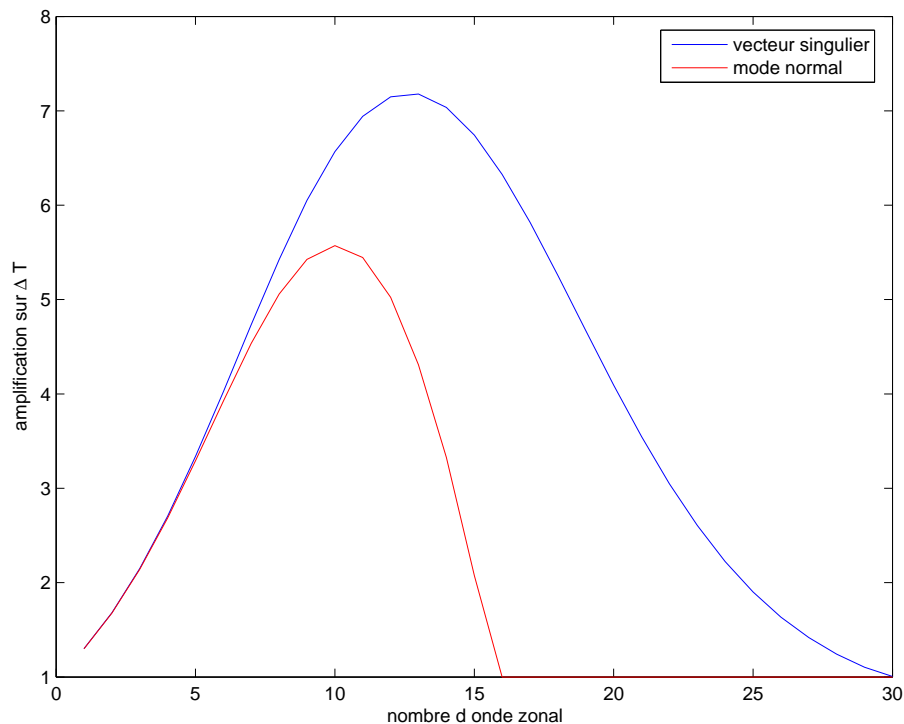


FIG. I.9 – Taux d’amplification du mode normal le plus instable et du premier vecteur singulier en fonction du nombre d’onde zonal (la norme choisie est la norme énergie cinétique)

supérieurs à 16 où il n’existe plus de nombre d’ondes instables, le vecteur singulier possède encore une croissance importante conformément à ce qui avait été dit dans le paragraphe I.3.2. La croissance du vecteur singulier a lieu pour tous les nombres d’onde, il n’existe pas de nombre d’ondes de coupure comme pour les modes normaux. De plus, le taux de croissance du vecteur singulier sur la durée d’optimisation dépasse celle du mode normal significativement pour tous les nombres d’ondes. Ces résultats illustrent les lacunes de la théorie des modes normaux à croissance exponentielle à décrire le mécanisme d’instabilité barocline sur des durées finies, les mécanismes d’instabilité transitoire dominant.

#### I.4.4 Stabilité d’écoulements non stationnaires

La théorie des modes normaux repose sur l’hypothèse d’un opérateur d’évolution stationnaire et ne permet donc de décrire que les instabilités d’un écoulement stationnaire. Cette hypothèse de stationnarité permet d’obtenir simplement la résolvante du système (I.24) à partir de l’opérateur d’évolution.

L’étude de la stabilité de fronts stationnaires a été effectuée au moyen de la méthode des modes normaux dans différentes études (Joly, 1991; Schär and Davies, 1990) afin d’expliquer la formation d’instabilités frontales couramment observées dans l’atmosphère. Néanmoins, dans les zones frontales, les observations relayées par des études théoriques ont mis en évidence la formation d’instabilités frontales de taux de crois-

sance comparable au temps d'évolution du front, mettant ainsi à mal l'hypothèse de stationnarité du front et imposant une limite de validité restrictive aux études de stabilité de fronts stationnaires effectuées au moyen de la méthode des modes normaux. Joly (1991) étudia la stabilité de structures frontales au moyen du calcul de modes normaux sur un intervalle de temps fini pour un opérateur d'évolution non stationnaire. Ces modes normaux sont définis comme les vecteurs propres de la résolvante du système sur l'intervalle de temps considéré (Frederiksen, 1997). Joly (1991) montra que pour des perturbations baroclines humides, la non-stationnarité de l'état de base permettait une augmentation du taux de croissance des instabilités, capturée grâce à cette nouvelle méthode. Celle-ci a été ensuite délaissée au profit de la méthode des vecteurs singuliers linéaires, rapidement appliquée à l'étude d'instabilités frontales (Joly, 1995). Snyder and Joly (1998) étudient la structure de perturbations optimales se développant sur une onde barocline tout au long de son développement. Ils montrent notamment que l'amplification des vecteurs singuliers dépasse celle de l'onde barocline porteuse et précisent les liens entre les deux structures. En termes de prévisibilité, cela signifie que les erreurs de prévision peuvent croître plus vite que les instabilités de l'écoulement et que la connaissance de ces dernières ne suffit pas à caractériser la prévisibilité. Si nous serons amenés à décrire les mécanismes d'instabilité de l'écoulement, il convient de garder à l'esprit que notre objectif principal est la connaissance des mécanismes de croissance d'erreurs. Parce qu'ils sont supposés être représentatifs des erreurs initiales de prévision, les vecteurs singuliers sont calculés opérationnellement pour initialiser des ensembles en prévision probabiliste. A partir du troisième chapitre de nombreuses illustrations de calcul de vecteurs singuliers linéaires autour d'une trajectoire de référence non stationnaire seront présentées.

## **I.5 Instabilité barocline non-linéaire : théorie de l'ajustement barocline**

Les vecteurs singuliers possèdent par construction une croissance initiale linéaire explosive et lorsqu'ils sont injectés dans un modèle non-linéaire avec une amplitude initiale caractéristique des erreurs typiques d'analyse, ces derniers sont susceptibles d'atteindre rapidement des amplitudes importantes pour lesquelles les termes non-linéaires ne sont plus négligeables. Si la durée de validité de l'hypothèse linéaire-tangente est inférieure au temps d'optimisation, alors les vecteurs singuliers ne sont plus dynamiquement pertinents pour l'amplitude initiale considérée.

Les vecteurs singuliers ont été utilisés pour identifier des zones sensibles de l'écoulement dans lesquelles sont effectuées des observations ciblées afin de réduire l'erreur dans les zones où l'erreur de prévision est susceptible de croître de façon importante. Si l'impact de ces observations est globalement positif (Buizza et al., 2007), dans certains cas les résultats de ces stratégies d'observation adaptatives peuvent s'avérer décevantes à cause de la non-validité de l'hypothèse linéaire (Hansen and Smith, 2000).

Avant de résumer les conclusions des différents travaux concernant la validité de

l'hypothèse linéaire-tangente, il convient de souligner l'ambiguïté de cette notion pour mieux appréhender la disparité des résultats présents dans la littérature. Il s'agit de préciser sous quelles conditions l'évolution d'une perturbation et en particulier des vecteurs singuliers dans le modèle linéaire-tangent approxime de façon satisfaisante son évolution non-linéaire. Lorsque l'amplitude des champs perturbés dépasse une certaine valeur, les termes non-linéaires dans les équations dynamiques du problème deviennent d'amplitude comparable aux termes linéaires. C'est pourquoi l'amplitude initiale de la perturbation ainsi que la durée d'évolution de celle-ci constituent deux paramètres indispensables pour caractériser la limite de validité de l'hypothèse linéaire-tangente. A ces deux caractéristiques de la perturbation s'ajoutent celles propres au modèle :

- la nature de la physique du modèle qui d'une part détermine la nature des termes non-linéaires dans les équations dynamiques mais aussi qui va permettre à une gamme plus ou moins importante d'instabilités d'être représentées. A ceci s'ajoute l'existence de paramétrisations physiques (précipitation, convection, turbulence...) souvent fortement non-linéaires voire discontinues à cause de la présence d'instructions conditionnelles (seuil de déclenchement de convection par exemple). Ce dernier cas soulevant des problèmes importants au niveau du codage du modèle linéaire-tangent au niveau des discontinuités. Deux stratégies sont alors envisageables : la première consiste à effectuer une linéarisation exacte de part et d'autre des discontinuités et la seconde à linéariser une variante régularisée de la paramétrisation non-linéaire. Dans les deux cas des différences importantes entre les modèles linéaire-tangent et adjoint peuvent être observés. Nous serons confrontés à ce type de problème par la suite au moment de linéariser la physique du modèle PUMA2.
- la résolution spatiale du modèle. On observe en effet une augmentation du taux d'amplification des perturbations optimales avec la résolution du modèle (Buizza, 1998) qui se traduit par une augmentation des non-linéarités.

De nombreuses études sur des modèles de degré de complexité différentes se sont penchées sur la validité de l'hypothèse linéaire-tangente. Que ce soit dans un modèle eau-peu profonde (Lacarra and Talagrand, 1988), dans le modèle aux équations primitives du CEPMMT (Buizza, 1995) ou dans un modèle sec à méso-échelle (Errico et al., 1993), les études se sont pendant longtemps accordées à considérer l'hypothèse linéaire-tangente valable sur une durée de l'ordre de 2 jours pour des modèles dont la physique est sèche et pour des perturbations d'amplitude initiale physiquement réaliste. Néanmoins, la prise en compte des processus humides peut diminuer de façon importante cette durée (Errico and Reader, 1999) et les études récentes de Gilmour et al. (2001) ainsi que de Reynolds and Rosmond (2003) réalisées avec le modèle du CEPMMT montrent que même dans le cas d'un modèle sec, les petites échelles peuvent être non-linéaires à partir de 12h et que la durée de validité de l'hypothèse linéaire était souvent inférieure à 48h voire à 24h pour des perturbations dont l'amplitude initiale est de l'ordre de l'erreur d'analyse.

L'étude de la dynamique non-linéaire des ondes baroclines a mis en évidence la neutralisation d'un écoulement barocliniquement instable par un mécanisme non-linéaire d'interaction avec les ondes baroclines instables qui s'y développent : c'est

la théorie de l'ajustement barocline mis en évidence par Stone (1978). Les ondes baroclines instables réduisent le gradient méridien de température en transportant la chaleur de l'équateur vers les pôles. Par la relation du vent thermique, le cisaillement vertical de vent moyen en est diminué et ainsi le taux de croissance de l'instabilité barocline qui s'équilibre. Un second mécanisme mis en évidence par Gutowski (1985a) s'y ajoute : la chaleur est aussi transportée verticalement par les perturbations baroclines et la stabilité verticale est augmentée. Ces interactions faiblement non-linéaires entre les perturbations baroclines et l'écoulement moyen seront détaillées dans la partie III.4.2.2. Chacun de ces deux effets a pour conséquence de diminuer le taux de croissance modal de l'instabilité barocline exprimée par la formule (I.26) de l'indice d'Eady ( $N$  augmente et  $\partial_z u$  diminue). L'importance des non-linéarités et des interactions entre l'écoulement moyen et des perturbations de ce dernier en assimilation de données a été illustrée par l'étude de Rabier and Courtier (1992) où, à partir d'une décomposition de l'écoulement atmosphérique en une partie zonale et une partie non-zonale, il a été montré que des observations relatives à uniquement l'une des deux composantes amélioreraient l'analyse relative à l'autre composante pour des régimes linéaires et faiblement non-linéaires.

## **I.6 Perturbations optimales non-linéaires : méthode des vecteurs singuliers non-linéaires**

### **I.6.1 Etudes non-linéaires de prévisibilité**

Si les outils permettant d'étudier la prévisibilité linéaire d'un écoulement sont relativement nombreux (modes normaux, exposants de Lyapounov, vecteurs singuliers), il est plus délicat d'étudier la prévisibilité dans le régime non-linéaire. Le centre américain de prévision météorologique (NCEP) développa à cet effet la méthode des bred modes (Toth and Kalnay, 1993, 1997). Les bred modes ont été utilisés afin de constituer un ensemble de perturbations pour la prévision d'ensemble du centre américain de prévision le NCEP. Introduit par Toth and Kalnay (1997), ils sont calculés de la façon suivante :

- une perturbation quelconque est ajoutée à l'état de base de référence et le nouvel état perturbé est injecté dans le modèle de prévision non-linéaire.
- après une période courte, de l'ordre de 6 heures, la perturbation (définie comme la différence entre l'intégration non-linéaire de l'état de base perturbé et l'intégration non-linéaire de l'état de base non perturbé) est redimensionnée de façon à ce que son énergie soit de l'ordre de l'énergie d'une erreur d'analyse classique.
- la nouvelle perturbation redimensionnée est ajoutée à l'analyse et le nouvel état modifié est injecté dans le modèle non-linéaire, ce cycle étant répété plusieurs fois.

Le principe de cet algorithme est une variante non-linéaire de celui permettant le calcul des exposants de Lyapounov.

Après les tentatives de Barkmeijer (1996) d'apporter des corrections non-linéaires aux vecteurs singuliers, Mu (2000) introduisit le concept de perturbation optimale nonlinéaire (CNOP<sup>7</sup>) ou vecteurs singulier non-linéaire (NLSV)<sup>8</sup> comme une extension nonlinéaire à la théorie des vecteurs singuliers. Le vecteur singulier non-linéaire est la perturbation qui s'amplifie le plus par rapport à une norme choisie en évoluant dans le modèle non-linéaire durant la durée d'optimisation. Mu and Duan (2003) utilisèrent cette méthode pour étudier la prévisibilité de la circulation thermohaline. Dans le cadre de l'étude des oscillations couplées entre l'atmosphère et l'océan dans le Pacifique, ils montrèrent que les précurseurs d'El-Nino (épisode d'affaiblissement des alizés sur le Pacifique accompagné d'un réchauffement de la température de surface de l'océan) et de La Nina (épisode inverse) s'identifient aux CNOPs dominants plutôt qu'aux vecteurs singuliers. Cette méthode fut appliquée à un modèle quasi-géostrophique à deux niveaux à très faible résolution (Mu and Zhang, 2006) sans toutefois dégager de mécanismes physiques associés aux CNOPs.

### I.6.2 Méthode des vecteurs singuliers non-linéaires

Considérons une perturbation  $\delta x(t_0) = \delta x_0$  d'un champ initial  $X(t_0) = X_0$ . A l'instant  $t$ , la perturbation  $\delta x$  est égale à la différence des intégrations non-linéaires du modèle entre les instants  $t_0$  et  $t$  :

$$\delta x(t) = M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0) \quad (\text{I.31})$$

où  $M(t, t_0, X)$  représente la sortie du modèle non-linéaire à l'instant  $t$  avec comme condition initiale  $X$  à  $t = t_0$ . En réutilisant les notations du paragraphe I.4.1, l'amplification  $J$  de la perturbation mesurée avec la norme  $\| \cdot \|_E$  est égale à :

$$\begin{aligned} J(\delta x_0, t) &= \frac{(\delta x(t), \delta x(t))_E}{(\delta x_0, \delta x_0)_E} \\ &= \frac{(M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0), M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0))_E}{(\delta x_0, \delta x_0)_E} \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

Cette expression est l'analogue non-linéaire de (I.30).

Le vecteur singulier non-linéaire  $\delta x_{NL}^*$  est défini comme la solution de :

$$J(\delta x_{NL}^*(t, E_0)) = \max_{\|\delta x(t_0)\|_E^2 = E_0} J(\delta x_0, t) \quad (\text{I.33})$$

Comme pour les vecteurs singuliers nous fixons la durée d'optimisation mais aussi l'énergie initiale de la perturbation. Sur ce dernier point plusieurs définitions sont possibles. Mu avait défini à l'origine une variante du NLSV, le CNOP comme le maximum de la fonction  $(\delta x(t), \delta x(t))_E$  sous la contrainte  $\|\delta x(t_0)\|_E^2 < E_0$ . Pour la majorité des problèmes atmosphériques que nous allons considérer,  $J(\delta x^*, t)$  est une fonction décroissante de la norme initiale de la perturbation à cause de la saturation

<sup>7</sup>Acronyme de Conditional Nonlinear Optimal Perturbations.

<sup>8</sup>Par la suite, nous sous-entenderons par vecteurs singuliers, les vecteurs singuliers linéaires.

non-linéaire et l'optimum serait alors obtenu pour une énergie nulle ce qui pose d'une part des problèmes de résolution numérique mais surtout équivaldrait à calculer des vecteurs singuliers linéaires.

L'équation (VI.12) constitue un problème de minimisation sous contraintes dont la résolution numérique nécessite le gradient de la fonction de coût J :

$$\nabla_{\delta x_0} J = \frac{\nabla_{\delta x_0}(\|\delta x(t)\|_E^2)}{\|\delta x_0\|_E^2} - \|\delta x(t)\|_E^2 \frac{\nabla_{\delta x_0}(\|\delta x_0\|_E^2)}{\|\delta x_0\|_E^4} \quad (I.34)$$

avec :

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta x_0}(\|\delta x_0\|_E^2) &= 2E\delta x_0 \\ \nabla_{\delta x_0}(\|\delta x_0\|_E^2) &= \nabla_{\delta x_0}(M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0), M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0))_E \\ &= 2L_{X_0 + \delta x_0}^* E [M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0)] \\ &= 2L_{X_0 + \delta x_0}^* E \delta x(t) \end{aligned} \quad (I.35)$$

où  $L_X^*$  est l'opérateur linéaire correspondant à l'adjoint du modèle linéaire-tangent linéarisé autour de la trajectoire de référence X et E la matrice associée au produit scalaire  $(\cdot)_E$ .

Dans le cas de la méthode des vecteurs singuliers linéaires, l'algèbre linéaire nous garantit l'existence d'une perturbation optimale, le vecteur propre associé à la valeur propre d'une matrice symétrique réelle. Pour les CNOPs ou les NLSVs, les algorithmes d'optimisation non-linéaires basés sur le gradient d'une fonctionnelle ne garantissent pas d'avoir atteint un extremum global mais uniquement un extremum local de la fonction de coût.

## I.7 Objectifs-Problématique

Un des objectifs de ce travail de thèse est de déterminer l'influence des non-linéarités sur la prévisibilité de l'écoulement atmosphérique à échelle synoptique. Nous entendrons par prévisibilité uniquement la croissance d'erreurs par des processus d'instabilité que notre étude a comme vocation de préciser. L'influence du système d'observations sur les erreurs de prévision et notamment l'impact des observations d'humidité sur la qualité de la prévision ne seront pas pris en compte. Les modèles numériques utilisés au long de cette étude ne sont pas des modèles de prévision numérique mais sont destinés à effectuer une étude de processus physiques et non à reproduire des situations météorologiques réelles.

L'étude de l'impact des non-linéarités sur la nature des perturbations optimales permettra de répondre à de nombreuses questions sur l'extension de l'optimalité des vecteurs singuliers pour des évolutions non-linéaires, en suspens jusqu'à aujourd'hui, puisque la méthode des perturbations optimales non-linéaires n'avait pas été appliquée à ce type de problème. Si les travaux récents tendent à montrer que l'évolution des SVs ne peut être tout-à-fait considérée comme linéaire, on ne peut rien présumer quand à l'influence des non-linéarités sur l'optimalité des structures. Existe-t-il par ailleurs des mécanismes de croissance de perturbations non-linéaires plus efficaces que les mécanismes linéaires? Quelle est l'influence de la rétroaction des

perturbations sur l'écoulement moyen? En effet, les méthodes linéaires négligent les interactions entre les perturbations et l'écoulement moyen. Ce dernier joue le rôle d'un réservoir d'énergie (au sens thermodynamique) duquel les perturbations peuvent tirer infiniment leur énergie. Dans la réalité, il est évident que pour des perturbations dont la croissance est importante, le réservoir s'épuise et la croissance des perturbations se ralentit. C'est le cas des dépressions qui se forment autour du courant-jet aux moyennes latitudes et qui une fois formées déforment ce dernier.

La réponse à ces questions dépend sans doute du type de problème étudié mais aussi de la physique des modèles utilisés et de leur capacité à représenter des processus non-linéaires. C'est pourquoi, nous allons essayer de répondre à ces questions en calculant des vecteurs singuliers non-linéaires dans deux modèles atmosphériques simples, le modèle de Philips puis un modèle de circulation générale (GCM). Ajoutons que si la méthode des CNOPs ou des NLSVs a été appliquée sur des systèmes de faible dimension ( $<1000$ ) sa faisabilité pour des systèmes plus complexes (dans le GCM que nous allons utiliser, le vecteur d'état du problème possèdera une dimension de  $10^5$  environ) reste à démontrer. L'impact de l'inclusion des processus humides sur la structure des perturbations optimales et leur croissance sera étudiée dans le cadre de la deuxième partie de ce travail. En effet, les paramétrisations non-linéaires humides possèdent un degré de non-linéarité important (avec la présence par exemple d'effets seuils liés à la présence d'un seuil de saturation) et le régime de validité de l'hypothèse linéaire-tangente est alors réduit (Errico and Reader, 1999).







## II

---

# Etude des perturbations optimales non-linéaires dans le modèle de Phillips d'instabilité barocline

---

La méthode des vecteurs singuliers non-linéaires est appliquée à l'étude de l'instabilité barocline non-linéaire dans le cadre du modèle de Phillips. Dans une première partie, nous décrivons la mise en oeuvre pratique de cette méthode et principalement la technique d'optimisation numérique utilisée. Dans un second temps, nous introduisons et résumerons l'article soumis à la revue "Journal of Atmospheric Sciences" qui rassemble les résultats principaux obtenus au cours de cette étude et dont la lecture est proposée en fin de chapitre.

### II.1 Description du modèle de Phillips barocline à deux couches

Au modèle de Phillips à deux dimensions décrit en I.2.5 est ajoutée la dimension méridienne. L'atmosphère est donc constituée de deux couches 1 et 2 au sein desquelles la vorticité potentielle  $q_{i=1,2}$  et la fonction de courant  $\psi_{i=1,2}$  sont homogènes. Les dérivées verticales de  $\psi_i$  ou de  $q_i$  sont évaluées à l'interface entre les deux couches.

L'écoulement de base choisi correspond au champ de vitesse zonale suivant :

$$U_1(y) = -U_2(y) = U_0(y) = \frac{U}{2 \cosh^2(y/L)}$$

Ce champ de vitesse représente deux courants-jets de direction opposée entre les couches 1 et 2 dans le but de créer un cisaillement de vent vertical important favorable à l'instabilité barocline. Les grandeurs majuscules désignent ici les champs associés à l'état de base, tandis que les minuscules désignent les perturbations de

	U	$\lambda$	taille du do- maine	$f_0$	L
Valeur dim	$14.7m.s^{-1}$	507 km	3744 km	$10^{-4} s^{-1}$	600 km
Valeur adim	2	0.85	$2\pi$		1

TAB. II.1 – Valeurs dimensionnées et adimensionnées de la vitesse du jet U, du rayon de déformation  $\lambda$ , de la taille du domaine, de la valeur du paramètre de Coriolis  $f_0$  et de la dimension caractéristique du courant-jet L

cet état de base, l'indice associé indiquant à chaque fois le niveau où la grandeur est évaluée. Les équations de conservation de la vorticité potentielle au sein de chacune des deux couches sont adimensionnées d'après Pedlosky (1987) :

$$\partial_t q'_1 + J(\psi'_1, q'_1) + J(\Psi_1, q'_1) + J(\psi'_1, Q_1) + \beta \partial_x \psi'_1 = 0 \quad (\text{II.1a})$$

$$\partial_t q'_2 + J(\psi'_2, q'_2) + J(\Psi_2, q'_2) + J(\psi'_2, Q_2) + \beta \partial_x \psi'_2 = 0 \quad (\text{II.1b})$$

La vorticité potentielle est reliée à la fonction de courant par la formule (I.23) :

$$q'_1 = \nabla^2 \psi'_1 + \lambda^{-2} (\psi'_2 - \psi'_1) \quad (\text{II.2a})$$

$$q'_2 = \nabla^2 \psi'_2 + \lambda^{-2} (\psi'_1 - \psi'_2) \quad (\text{II.2b})$$

$$(\text{II.2c})$$

où  $\lambda = NH/f_0$ , le rayon de déformation de Rossby est l'échelle caractéristique horizontale pour laquelle les effets de la rotation terrestre dépassent les effets de gravité et de flottabilité (H représentant ici la hauteur approximative de la tropopause.). Les valeurs des paramètres utilisés lors de cette étude sont indiquées dans le tableau II.1 sous leur forme dimensionnée et adimensionnée.

Les équations sont évaluées sur le plan  $\beta$  en coordonnées (x,y) au moyen d'un code pseudo-spectral (code spectral dont les termes non-linéaires sont évalués dans l'espace réel avant d'être transformés dans l'espace de Fourier) sur un modèle doublement périodique de taille  $[2\pi \times 2\pi]$ .

Les gradients méridiens de vorticité potentielle de l'état de base sont donnés par :

$$\partial_y Q_1 = \beta - \lambda^{-2} U_0$$

$$\partial_y Q_2 = \beta + \lambda^{-2} U_0$$

Le gradient méridien de vorticité potentielle change de signe entre les couches 1 et 2 pour :

$$U_0(y) > \lambda^2 \beta$$

condition vérifiée ici au centre du jet. L'état de base choisi ici vérifie donc les conditions de Charney-Stern et nos expériences montreront qu'il est bien barocliniquement instable.

## II.2 Mise en oeuvre pratique de la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires.

### II.2.1 Ecriture des codes linéaire-tangent et adjoint

La mise en oeuvre de la méthode des vecteurs singuliers nécessite la connaissance de  $L$  et de  $L^*$  les opérateurs linéaire-tangent et adjoint du modèle non-linéaire. De même le gradient de la fonction de coût dans la méthode des NLSV nécessite l'expression de  $L^*$ . Il faut donc développer les versions linéarisée et adjointe du modèle non-linéaire. Le modèle original étant écrit sous la forme d'une suite d'instructions correspondant à la discrétisation des équations du problème, l'écriture des codes linéaire-tangent et adjoint se fait à partir du code et non pas de l'expression analytique des équations.

Insistons sur le fait qu'il n'est pas envisageable dans l'optique d'appliquer cette méthode à des problèmes de dimension importante de stocker en mémoire une représentation matricielle explicite de  $L$  et de  $L^*$  (de taille  $n^2$  où  $n$  est la dimension du vecteur d'état du problème.).

Les codes effectuant les opérations suivantes sont développés :  $y \mapsto Lx$  et  $y \mapsto L^*x$  à partir d'un vecteur d'état  $x$  fourni en entrée.

La première étape constitue à linéariser le modèle non-linéaire discrétisé.

Nous pouvons alors décomposer le code linéaire tangent comme une suite d'instructions linéaires telles que :

$$L = A_n(X_0^n)A_{n-1}(X_0^{n-1})\dots A_1(X_0^1)$$

chaque matrice  $A_i(X_0^i)$  représentant une instruction linéarisée autour de la variable de la trajectoire  $X_0^i$ .

La matrice associée à l'adjoint s'écrit alors

$$L^* = {}^T L = {}^T A_1(X_0^1)\dots {}^T A_{n-1}(X_0^{n-1}) {}^T A_n(X_0^n)$$

L'écriture de code adjoint consiste donc en la transposition successive des équations du code linéaire-tangent en partant de la dernière instruction de ce dernier (la transposition inversant l'ordre des opérations).

L'exécution du code adjoint nécessite d'avoir accès en partant de l'instant final aux différentes variables de la trajectoire  $X_0^i$  intervenant dans les opérations non-linéaires. Ces variables peuvent soit être entièrement stockées en mémoire (ou dans des unités de stockage) ou être recalculées localement. Le stockage dans la mémoire du calculateur de l'intégralité des variables de la trajectoire est impensable pour des raisons évidentes de mémoire disponible. Le stockage systématique dans un fichier ralentit l'exécution du code à cause des temps de lecture-écriture des variables et enfin les variables étant utilisées de façon rétrograde, le recalcul intégral en partant de  $t=0$  est pour cette raison aussi exclu. Afin de résoudre ce problème, les méthodes dite de "check-points" (Charpentier, 2000) stockent de temps en temps les variables de la trajectoire, afin de permettre un recalcul par morceaux au moyen du code direct des variables de la trajectoire.

## II.2.2 Test des codes linéaire-tangent et adjoint

Le modèle linéaire-tangent sert de base à l'écriture du modèle adjoint sur lequel repose l'expression du gradient de la fonction de coût. C'est pourquoi il est crucial de s'assurer de l'exactitude de ces deux codes après chaque modification du code non-linéaire.

### II.2.2.1 Vérification du modèle linéaire-tangent

Le modèle linéaire-tangent est testé en comparant les évolution linéaire et non-linéaires de perturbations dont on fait varier l'amplitude. Considérons à  $t=0$  une perturbation  $\alpha\delta x_0$  de l'état de base  $X_0$ , celle-ci évoluera non-linéairement en

$$\begin{aligned}\Delta x(t) &= M(X_0 + \alpha\delta x_0) - M(X_0) \\ &= \alpha L_{X_0}\delta x_0 + \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}$$

où  $L_{X_0}$  est le modèle linéaire-tangent pris autour de  $X_0$  et  $M$  le modèle non-linéaire entre les instants 0 et  $t$ . Le modèle linéaire-tangent fait évoluer par construction la perturbation initiale en

$$\delta x(t) = \alpha L_{X_0}\delta x_0$$

L'erreur relative entre les évolutions linéaire et non-linéaire de la perturbation est alors proportionnelle à  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}r^2 &= \frac{\|\Delta x(t) - \delta x(t)\|^2}{\|\delta x(t)\|^2} \\ &= \mathcal{O}(\alpha^2)\end{aligned}$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme choisie par l'utilisateur (norme euclidienne, norme énergétique choisie pour le calcul des perturbations optimales...). La figure II.1 montre l'évolution du carré de l'erreur relative  $r^2$  calculé à partir d'un état de base correspondant à une sortie de modèle où  $\delta x_0$  est choisie aléatoire et où l'on a laissé évoluer les perturbations sur une durée de 24h. Cette courbe met en évidence deux régimes :

- $\alpha > 10^{-6}$ . L'erreur relative  $r^2$  croît en  $\alpha^2$  comme prédit par l'expression du développement de Taylor de  $r$  à l'ordre 2, ce qui valide la formulation du modèle linéaire-tangent.
- $\alpha < 10^{-6}$ . L'erreur relative augmente lorsque  $\alpha$  diminue à cause de la précision machine qui est atteinte. Les perturbations deviennent trop petites par rapport à  $X_0$  et la précision relative de la machine<sup>1</sup> ne permet plus de distinguer les grandeurs associées à  $\delta X$  et à  $\delta X + \delta x$ .

La précision du calculateur (ici les calculs sont réalisés en double précision) impose une limite de validité au modèle linéaire-tangent.

---

<sup>1</sup>Sur un calculateur deux types de précision existent : la précision absolue  $\epsilon_{abs}$  qui est le plus petit réel non nul pris en compte par la machine et la précision relative  $\epsilon_{rel}$  qui correspond au plus petit réel  $\epsilon$  tel que le calculateur puisse distinguer 1 et  $(1+\epsilon)$ . Sur la plupart des calculateurs  $\epsilon_{rel} \gg \epsilon_{abs}$  et par précision nous sous-entendrons par la suite la précision relative du calculateur.

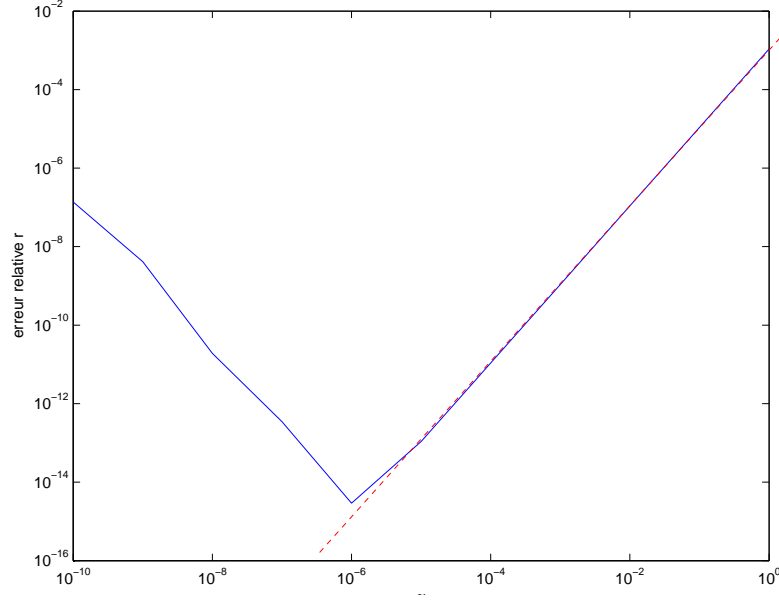


FIG. II.1 – Carré de l’erreur relative  $r^2$  définie en entre les évolutions linéaires et non-linéaires de la perturbation en fonction de  $\alpha$ . En rouge est tracée une droite de pente 2 en échelle logarithmique.

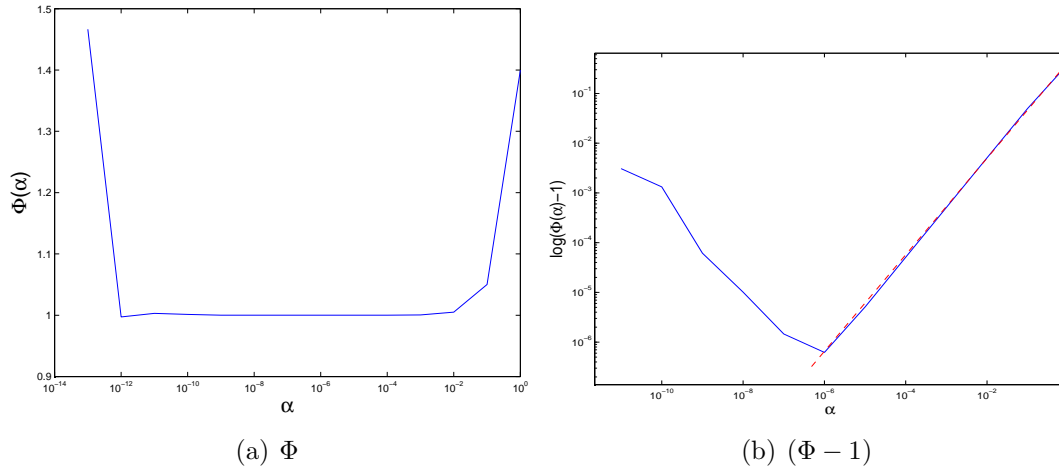


FIG. II.2 – Evaluations à l’ordre 1 et 2 de l’erreur relative entre le gradient de la fonction de coût et son évaluation par différences finies  $\Phi$ . En rouge, est tracée la courbe en  $\alpha$ .

### II.2.2.2 Vérification du modèle adjoint

La vérification du code adjoint repose sur la définition mathématique de l’opérateur adjoint :

$$\langle \delta y, L\delta x \rangle = \langle L^* \delta y, \delta x \rangle \quad \forall (\delta x, \delta y) \in \mathbb{R}^n$$

En pratique,  $\delta x$  et  $\delta y$  sont choisies aléatoires et chaque sous-routine du code complet est soumise à ce test qui doit être vérifié à la précision du calculateur.

$\alpha$	$J(X_0)$	$\frac{J(X_0+\alpha\delta x)-J(X_0)}{\nabla_{X_0}\alpha\delta x}$	$J(X_0 + \alpha\delta x) - J(X_0) - \nabla_{X_0}\alpha\delta x$
1	0.93266781544054	1.399750454826046	-3.026346706961027D-03
0.1	0.93266781544054	1.050121613324281	-3.794501734776488D-05
0.01	0.93266781544054	1.005083445469900	-3.848468031022501D-07
$10^{-3}$	0.93266781544054	1.000509019463490	-3.853577546975473D-09
$10^{-4}$	0.93266781544054	1.000050909157518	-3.854123475025181D-11
$10^{-5}$	0.93266781544054	1.000005097474331	-3.859088706209600D-13
$10^{-6}$	0.93266781544054	1.000000621732321	-4.706880350867098D-15
$10^{-7}$	0.93266781544054	1.000001457634334	-1.103515159061010D-15
$10^{-8}$	0.93266781544054	1.000010109953424	-7.653831004375283D-16
$10^{-9}$	0.93266781544054	1.000061437270056	-4.651163686622345D-16
$10^{-10}$	0.93266781544054	1.001322622764458	-1.001303438043878D-15

TAB. II.2 – Test du gradient de la fonction de coût J dans le modèle de Phillips pour différentes valeurs de l’amplitude initiale de la perturbation initiale

Dans le cadre de la méthode des NLSVs, le modèle adjoint complet est testé une seconde fois lors de la vérification du gradient de la fonction de coût J. En effet, la procédure d’optimisation requiert la connaissance précise du gradient. Son exactitude est vérifiée à partir du développement de Taylor autour de  $X_0$  de la fonction de coût J définie en I.32 pour le calcul des vecteurs singuliers non-linéaires :

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \frac{J(X_0 + \alpha\delta x) - J(X_0)}{\alpha\nabla_{X_0}J \cdot \delta x} = 1 + \mathcal{O}(\alpha) \\ \Phi(\alpha) - 1 &= \frac{J(X_0 + \alpha\delta x) - J(X_0) - \alpha\nabla_{X_0}J \cdot \delta x}{\alpha\nabla_{X_0}J \cdot \delta x} = \alpha \text{ cste} + o(\alpha) \quad (\text{II.3})\end{aligned}$$

$\Phi$  définit l’erreur relative associée entre le gradient de la fonction de coût et la variation obtenue par différences finies. La figure II.2 illustre les résultats donnés dans le tableau II.2.  $\Phi$  tend vers 1 pour des valeurs de  $\alpha$  comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^{-12}$  ce qui montre la validité du gradient de J à l’ordre 1 sur cette plage de valeurs de  $\alpha$ . Conformément à l’équation (II.3),  $\Phi - 1$  croît linéairement avec  $\alpha$  pour  $\alpha > 10^{-6}$ , valeur en-dessous de laquelle l’erreur croît à cause de la précision du calculateur. Ceci valide l’expression du gradient à l’ordre 2 et en fournit une plage de validité.

Le tableau II.2 illustre le rôle joué par la précision relative du calculateur lors du test du gradient de la fonction de coût. La dépendance en  $\alpha^2$  du terme  $J(X_0 + \alpha\delta x) - J(X_0) - \alpha\nabla_{X_0}\delta x$  n’est plus observée pour  $\alpha < 10^{-6}$ . Pour  $\alpha = 10^{-6}$ , le rapport  $\frac{J(X_0+\alpha\delta x)-J(X_0)-\alpha\nabla_{X_0}\delta x}{J(X_0)} \approx 10^{-15}$  qui correspond à la précision relative du calculateur utilisé. La connaissance de cette dernière est nécessaire afin de pouvoir distinguer les erreurs à imputer au calculateur de celles dues à une faute dans la programmation du linéaire-tangent ou de l’adjoint.

### II.2.3 Algorithme de minimisation sous contrainte

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires se réduisait à la résolution d’un problème classique d’optimisation non-

linéaire de type :

$$x^* \text{ tel que } f(x^*) = \underset{x \in \mathbb{R}, \|x\|=E_0}{max} f(x) = \underset{x \in \mathbb{R}, c(x)=\|x\|-E_0=0}{min} \frac{1}{f(x)} \quad (\text{II.4})$$

avec  $\nabla_x f(x)$  connu.

La résolution de ce type de problème nécessite la prise en compte des contraintes matérielles suivantes :

- Le temps CPU nécessaire devait être raisonnable. Pour une méthode itérative, il est à peu près proportionnel au nombre d'itérations effectuées par la méthode avant de converger. En effet, l'efficacité de nombreuses méthodes diminue de façon importante avec la dimension du problème.
- La mémoire utilisée. Certains algorithmes utilisent des matrices de travail de dimension  $n^2$  (en prenant  $n = 10^7$ , ceci équivaldrait à un espace mémoire de l'ordre du To bien évidemment indisponible sur un ordinateur de bureau.)

L'assimilation variationnelle d'observations recourt aussi à l'utilisation d'algorithmes d'optimisation adaptés à des problèmes de grande dimension. Cependant ces problèmes mathématiques sont non-contraints et s'appliquent principalement à des formes quadratiques ce qui ne permet pas l'utilisation des mêmes algorithmes. De grands progrès ont été effectués au cours des vingt dernières années dans le domaine de l'optimisation non-contraints, citons entre autres Le Dimet and Talagrand (1986) qui montrèrent la viabilité en termes de coût numérique des méthodes d'optimisation non-linéaires pour l'assimilation d'observations, Navon and Legler (1987) qui comparèrent l'efficacité des différentes méthodes à gradient-conjugué pour différentes applications météorologiques et plus récemment les travaux de Zou et al. (1993) sur les performances de différentes méthodes quasi-newtoniennes à mémoire limitée. La méthode quasi-newtonienne fondée sur la variante L-BFGS de Liu and Nocedal (1988) s'avère d'après eux être la plus efficace.

L'algorithme ayant donné pour les problèmes que nous avons considéré les résultats les plus satisfaisants est IPOPT (Wächter and Biegler, 2006) qui est un algorithme de point intérieur à recherche linéaire basé sur une méthode BFGS quasi-newtonienne. L'utilisation pratique de cet algorithme nécessitant de nombreux réglages afin d'obtenir une convergence rapide, nous allons en préciser les grandes lignes du fonctionnement sans toutefois traiter le cadre théorique de la convergence de la méthode. Le lecteur intéressé pourra se référer à Wächter and Biegler (2006) pour de plus amples détails.

Les conditions d'optimalité de premier ordre (conditions d'annulation de la dérivée première) s'écrivent pour la solution  $x^*$  du problème d'optimisation (II.4) :

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla c(x^*) = 0 \quad (\text{II.5})$$

$$c(x^*) = 0 \quad (\text{II.6})$$

où  $\lambda$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte  $c$ .

Etant donné  $(x_k, \lambda_k)$  les valeurs de la variable et du multiplicateur de Lagrange à la  $k$ -ième itération, l'algorithme va chercher les variables suivantes  $(x_{k+1}, \lambda_{k+1})$

---

<sup>1</sup>L'explication des termes cités ici est détaillée dans la suite du paragraphe.



dans la direction  $(d_{k+1}^x, d_{k+1}^\lambda)$  obtenue par linéarisation de (II.5) et (II.6) autour de  $(x_k, \lambda_k)$  :

$$\begin{bmatrix} W_k & \nabla c(x_k) \\ \nabla c(x_k)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_k^x \\ d_k^\lambda \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla f(x_k) + \lambda_k \nabla c(x_k) \\ c(x_k) \end{pmatrix} \quad (\text{II.7})$$

où  $W_k$  est la hessienne du lagrangien du problème  $f + \lambda c$  :  $W_k = \partial_x \partial_x f(x_k) + \lambda \partial_x \partial_x c(x_k)$

Le système II.7 est résolu à l'aide d'un solveur linéaire. Une fois la direction  $(d_k^x, d_k^\lambda)$  calculée, il reste à déterminer la longueur du pas  $\alpha_k \in [0,1]$  telle que  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k^x$ .

Afin qu'une valeur de  $\alpha$  soit acceptée, au moins l'une des deux conditions suivantes doit être vérifiée :

1.

$$|c(x_{k+1})| \leq (1 - \gamma_c) |c(x_k)| \quad (\text{II.8})$$

avec  $\gamma_c \in [0,1]$ . Cette condition impose à la contrainte de diminuer d'un facteur  $(1 - \gamma_c)$  entre les itérations  $k$  et  $(k+1)$ .

2.

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma_f |c(x_k)| \quad (\text{II.9})$$

avec  $\gamma_f \in [0,1]$  afin d'imposer à la fonction de coût de diminuer.

Si  $\alpha_k$  ne satisfait aucune de ces deux conditions, alors les valeurs des pas  $(\frac{\alpha_k}{2}, \frac{\alpha_k}{4}, \dots)$  sont essayées jusqu'à atteindre une longueur critique  $\alpha_c$  auquel cas l'algorithme a recours à une procédure de "restauration" qui vise à minimiser la contrainte jusqu'à ce que la condition II.8 soit vérifiée afin de pouvoir passer à l'itération suivante en résolvant le problème suivant :

$$\min_{x \text{ tel que } c(x)=0} \|x - x_k\|_2^2 \quad (\text{II.10})$$

La direction de recherche  $\tilde{d}_k^x$  correspondant à ce problème est ajoutée à  $d_k^x$  et la procédure de restauration est itérée jusqu'à ce que (II.8) soit vérifiée.

Une fois le nouveau point  $x_k$  déterminé l'algorithme recherche à nouveau une direction de descente jusqu'à ce que la condition d'arrêt suffisante soit vérifiée :

$$\epsilon_{opt} = \max \{ \|\nabla f(x) + \lambda_k \nabla c(x_k)\|_\infty, \alpha \|c(x)\|_\infty \} < \epsilon_{stop} \quad (\text{II.11})$$

où  $\epsilon_{stop}$  est un paramètre fourni par l'utilisateur idéalement de l'ordre de la précision machine.

En pratique, la méthode de Newton utilisée pour déterminer la direction de descente de l'algorithme requiert l'expression de la hessienne du lagrangien  $W_k$  qui n'est pas fournie explicitement par l'utilisateur et qui ne peut non plus être stockée explicitement pour des raisons de mémoire. La hessienne est estimée à partir de la méthode BFGS de Liu and Nocedal (1988) qui approxime cette dernière grâce à une procédure itérative ne nécessitant que le stockage de vecteurs.

La figure II.3 résume la procédure itérative suivie par l'algorithme.

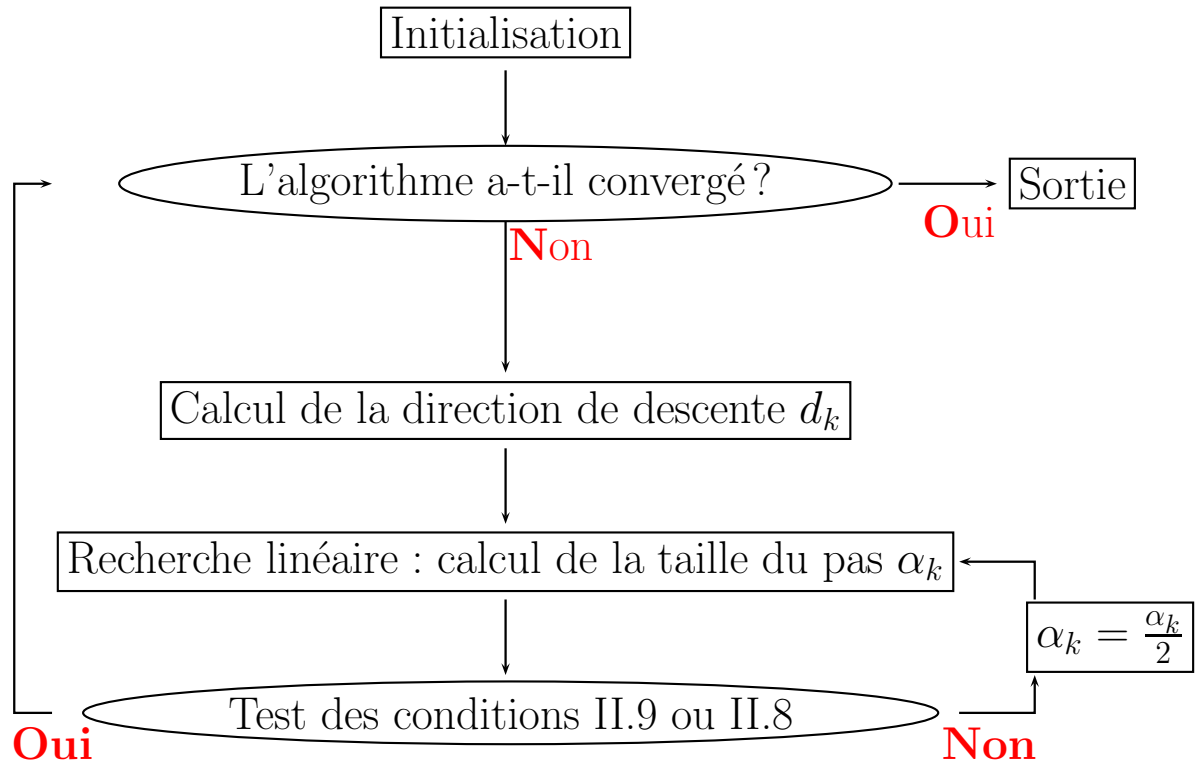


FIG. II.3 – Schéma simplifié de l’algorithme de minimisation sous contraintes utilisé

### II.2.4 Convergence de l’algorithme d’optimisation

La convergence de l’algorithme ou plus précisément le nombre d’itérations nécessaires pour atteindre la solution dépend de plusieurs paramètres :

- la résolution utilisée. En effet, elle détermine la taille du vecteur d’état. Dans le cas de problèmes périodiques comme le modèle de Phillips, si la résolution est insuffisante, le système peut “hésiter” entre deux nombres d’ondes spectraux encadrant la solution et une oscillation du système entre ces deux états peut être engendrée. Nous avons constaté que ce phénomène disparaissait en augmentant la résolution.
- le point de départ fourni à l’algorithme. En pratique, nous partons de conditions initiales aléatoires afin de ne pas influencer sur la convergence de l’algorithme. De même, une condition initiale vérifiant la contrainte réduit le nombre d’itérations, c’est pourquoi la condition initiale est dimensionnée de façon à ce que la contrainte associée soit faible à l’instant initial.
- le préconditionnement du problème. Le gradient de la fonction de coût doit être à peu près isotrope afin de ne pas introduire artificiellement de direction de convergence privilégiée, ce qui correspond à choisir une nouvelle métrique ou les iso-surfaces de la fonction de coût sont des sphères. Dans le cas de l’études des perturbations optimales dans le modèle aux équations primitives

PUMA2 qui sera utilisé à partir du prochain chapitre, celui-ci est crucial pour permettre à l'algorithme d'optimisation de converger. Le préconditionnement sera décrit dans la partie III.2.4.

## II.3 Résumé de l'article

Cette article étudie en détail les propriétés des perturbations optimales non-linéaires calculées avec le modèle de Phillips décrit précédemment. Les perturbations baroclines en se développant réduisent l'instabilité de l'écoulement de base par un mécanisme d'interaction perturbations-écoulement moyen similairement aux processus d'ajustement barocline. Dans ce contexte, les perturbations optimales non-linéaires prennent en compte cet ajustement non-linéaire qui s'oppose à leur croissance en augmentant la baroclinicité initiale de l'environnement par la présence d'un écoulement zonal moyen associé à la perturbation. Nous étudions en détail la structure des vecteurs singuliers non-linéaires et les mécanismes d'interaction entre ceux-ci et l'écoulement moyen dans le cadre d'une théorie faiblement non-linéaire afin de mettre en évidence les processus d'optimalité non-linéaires.

## II.4 Article en anglais : "Nonlinear generalization of singular vectors : behaviour in a baroclinic unstable flow"

### II.4.1 Abstract

Singular Vector (SV) analysis has proved to be helpful in understanding the linear instability properties of various types of flows. SVs are the perturbations with the largest amplification rate over a given time interval when linearizing the equations of a model along a particular solution. However the linear approximation necessary to derive SVs has strong limitations and does not take into account several mechanisms present during the nonlinear development (such as wave-mean flow interactions). A new technique has been recently proposed and allows to generalize SVs in terms of optimal perturbations with largest amplification rate in the fully nonlinear regime. In the context of a two-layer quasi-geostrophic model of baroclinic instability, we examine how nonlinearities affect these nonlinear optimal perturbations (that we will call NLSVs) in terms of structure and dynamics. NLSVs essentially differ from SVs in the presence of a positive zonal-mean shear at initial time and in a broader meridional extension. As a result, NLSVs sustain a significant amplification in the nonlinear model while SVs exhibit a strong reduction in term of amplification in the nonlinear model. The presence of an initial zonal-mean shear increases the initial extraction of energy from the total shear (basic plus zonal-mean flows) and opposes wave-mean flow interactions that decrease the shear through the nonlinear evolution. The spatial shape of the NLSVs (and especially their meridional elongation) allows them to limit wave-wave interactions. These wave-wave interactions are responsible for the formation of vortices and for a smaller extraction of energy from the basic flow. Therefore, NLSVs are able to modify their shape and keep their nonlinearities the weakest to preserve a large nonlinear growth. Results are generalized for different norms and optimization times. When the streamfunction variance norm is used, the NLSV technique fails to converge because this norm selects very small scales at initial time. This indicates that this technique may be inadequate for problems for which the lengthscale of instability is not properly defined. For other norms (such as potential enstrophy norm) and for different optimization times, the mechanisms of the NLSV amplification can still be viewed through wave-wave and wave-mean flow interactions.

### II.4.2 Introduction

The properties of baroclinic instability have been extensively studied in the linear approximation since the pioneering work of Charney (1947) and Eady (1949). The crucial characteristics of the mean state for the development of the instability (in terms of potential vorticity gradients) have been identified (Charney and Stern, 1962; Bretherton, 1966; Pedlosky, 1987). Two techniques are traditionally used to study the linear instability problem. The first one uses the normal mode approach,

i.e. linearizing a model about a mean state and finding a solution asymptotically growing in time. Such a method presents the disadvantage that it fails to capture localized disturbances that can have a rapid growth over a limited period in time (Farrell, 1982). A second approach consists in identifying "optimal perturbations" (called "singular vectors" or SVs) that maximize the growth rate over a given time interval (Farrell, 1982; Lacarra and Talagrand, 1988; Farrell and Ioannou, 1996). Then the regions in the physical space where small disturbances can have an explosive growth can be diagnosed. This idea has been applied in predictability studies and it has been shown that SVs capture the essential ingredients of growth of extratropical synoptic systems (Badger and Hoskins, 2001; Buizza and Palmer, 1995; Hoskins et al., 2000, among others). However their main disadvantage is that they are based on a linearization of the equations of motion. Under the linear assumption, positive and negative perturbations have the same growth rate although they can evolve rather differently under nonlinear dynamics Gilmour et al. (2001); Reynolds and Rosmond (2003); Hoskins and Coutinho (2005). In addition, the growth of the singular vectors in the nonlinear system can be strongly diminished compared to the growth in the linear case. We may then wonder if the optimality of singular vectors is still valid for the original nonlinear problem.

Recently, Mu (2000) has developed a new method to extend the concept of optimal perturbations to the nonlinear regime. The idea is to find a perturbation of a given model solution that will be an extremum in terms of the amplification rate of the perturbation energy over a finite-time interval. This solution will be called NonLinear Singular Vector (NLSV) in the following. The energy of the perturbation is constrained to a fixed value at initial time. A solution of such a problem can be computed using numerical techniques available for large-scale nonlinear optimization problems. A second and similar technique called CNOP (Conditional Nonlinear Optimal Perturbations) was developed by Mu et al. (2003). CNOPs are the perturbations with the largest final energy for an initial energy smaller than a given value. This technique has been applied in a simple ENSO model (Duan et al., 2004), in a two-box model of the thermohaline circulation (Mu et al., 2004) and also in a problem of equivalent-barotropic instability (Mu and Zhang, 2006). One can also mention the work of Barkmeijer (1996) who has developed an iterative method for the same purpose.

Even if it is generally admitted that the linear approximation is valid for up to about two days for large-scale meteorology, optimized perturbations for the nonlinear problem are important in situations of instability of well-formed coherent structures (Snyder, 1999) or when strongly nonlinear and intermittent processes are at play (for instance, in the case of latent heat release by large-scale or convective precipitation). This is one motivation for this work. To understand the potentials of this new technique, we have chosen to apply it to the baroclinic instability problem in a quasi-geostrophic (QG) two-layer model. The Phillips (1954) model is indeed a good test case to study the baroclinic wave development since its properties in terms of linear and nonlinear dynamics are well known.

The paper is organized as follows : in the next section, we succinctly describe the QG model we use. Then we discuss the algorithm to compute the leading Singular

Vector and the nonlinear optimal perturbations (called NLSVs). In Section 4, we compare the properties of the leading SV and NLSVs in term of spatial evolution, amplification rate. Then in Section 5, we present two mechanisms to explain how NLSVs are able to adjust so as to maximize their growth rate and limit nonlinearities. These mechanisms are related to wave-mean flow and wave-wave interactions. Section 6 examines the impact of using different norms and optimization times. Finally conclusions are drawn.

### II.4.3 Numerical model

The QG potential vorticity equations in the two-layer model on the  $\beta$ -plane can be written as

$$\partial_t q_1 + J(\psi_1, q_1) + \beta \partial_x \psi_1 = 0 \quad (\text{II.12a})$$

$$\partial_t q_2 + J(\psi_2, q_2) + \beta \partial_x \psi_2 = 0 \quad (\text{II.12b})$$

where

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 + \lambda^{-2} (\psi_2 - \psi_1) \quad (\text{II.13a})$$

$$q_2 = \nabla^2 \psi_2 + \lambda^{-2} (\psi_1 - \psi_2) \quad (\text{II.13b})$$

are the upper and lower layer potential vorticities,  $\psi_i$  ( $i=1,2$ ) the associated streamfunctions and  $\lambda$  the Rossby deformation radius.  $J(A, B) = \partial_x A \partial_y B - \partial_y A \partial_x B$ . All the equations that will be presented here are nondimensionalized following Pedlosky (1987) and Rivière et al. (2001). We first decompose the potential vorticity  $q$  into a perturbation  $\hat{q}$  and a stationary basic state  $Q$ . The equation for PV perturbations are

$$\partial_t \hat{q}_1 + J(\hat{\psi}_1, \hat{q}_1) + J(\Psi_1, \hat{q}_1) + J(\hat{\psi}_1, Q_1) + \beta \partial_x \hat{\psi}_1 = 0 \quad (\text{II.14a})$$

$$\partial_t \hat{q}_2 + J(\hat{\psi}_2, \hat{q}_2) + J(\Psi_2, \hat{q}_2) + J(\hat{\psi}_2, Q_2) + \beta \partial_x \hat{\psi}_2 = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$\Psi_1$  and  $\Psi_2$  are the basic-state streamfunctions of the upper and lower layers and  $\hat{\psi}_1$  and  $\hat{\psi}_2$  their analogues for the perturbations. The linearization of these equations gives

$$\partial_t \hat{q}_1 + J(\Psi_1, \hat{q}_1) + J(\hat{\psi}_1, Q_1) + \beta \partial_x \hat{\psi}_1 = 0 \quad (\text{II.15a})$$

$$\partial_t \hat{q}_2 + J(\Psi_2, \hat{q}_2) + J(\hat{\psi}_2, Q_2) + \beta \partial_x \hat{\psi}_2 = 0 \quad (\text{II.15b})$$

The hats will be omitted in the following. We choose a basic state that is zonally symmetric with zonal velocity equal to

$$U_1(y) = -U_2(y) = \frac{U}{2 \cosh^2(y/L)}$$

where  $U_i = -\partial_y \Psi_i$  ( $i = 1, 2$ ). The meridional profile of the shear of the basic flow is presented on Fig. II.9a. The parameters used in this study are those of Rivière et al.

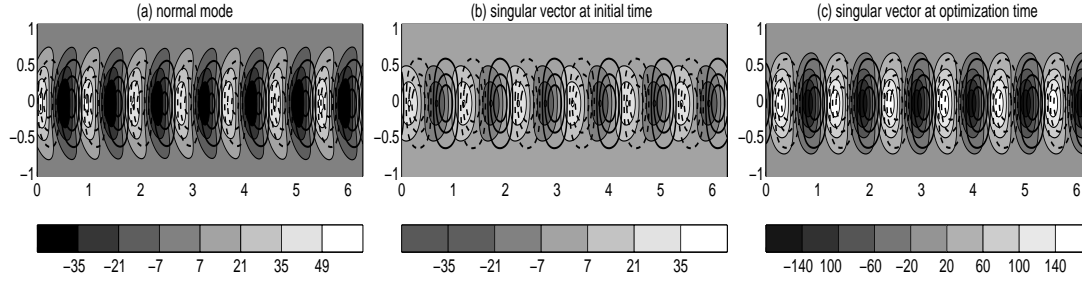


FIG. II.4 – Snapshot of (a) normal mode with an initial energy  $E_0 = 0.5$ , (b) the leading SV at initial time and (c) at  $t = T_{opt}$  (in the linear tangent model). The filled contours represent the upper-layer potential vorticity and the solid and dashed contours represent the lower-layer (solid for positive values and dashed for negative values). Negative and positive values have the same contour intervals.

(2001) who studied the structure of SVs and normal modes for a similar model. For a typical velocity scale  $U = 7.35\text{m s}^{-1}$ , a deformation radius  $\lambda = 507\text{km}$ , a domain size of  $3744\text{km}$ , a Brunt-Väisälä frequency  $1.13 \times 10^{-2}\text{s}^{-1}$ ,  $f_0 = 10^{-4}\text{s}^{-1}$ , and a jet scale of  $L = 600\text{km}$ , we find  $U_{adim} = 2$ ,  $\lambda_{adim}^{-2} = 54.53$  and  $\beta_{adim} = 32.4$  and  $L_{adim} = 1$ . The basic state we use here is a stationary and baroclinically unstable solution of (II.14a, b) with a change in sign of the PV gradient between the two layers. Moreover it is barotropically stable as the PV gradient has constant sign in each layer. The spatial resolution is  $256^2$ . The numerical model is pseudo-spectral over a doubly periodic domain with size  $[2\pi, 2\pi]$ . The code was initially developed by Smith and Vallis (2002).

## II.4.4 Numerical computation of leading SV and NLSV

The leading SV is the solution of the linearized equations (II.15a, b) with the largest amplification rate for a given norm and over a finite time. We first use the total energy norm for our optimization problem. Total energy is defined as the sum of the kinetic and potential energies,

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle |\nabla\psi_1|^2 + |\nabla\psi_2|^2 + 2\lambda^{-2}(\psi_1 - \psi_2)^2 \rangle$$

where  $\langle \rangle$  is the spatial horizontal mean. The leading SV can be viewed as the eigenvector associated with the largest eigenvalue of the matrix (in spectral space variables) involved in the Rayleigh quotient  $E(t = T_{opt})/E(t = 0)$ . Here  $T_{opt}$  is the optimization time. A Lanczos method can then be used to compute the SV with the help of the adjoint equations of (II.15a, b) (see Buizza and Palmer, 1995, for a complete description of the procedure).

The NLSV is a maximum (possibly local, see below) of the scalar function

$$f(q) = \frac{E(t = T_{opt})}{E(t = 0)}$$

Structure	NM in L	SV in L	SV in NL	SV in WKNL	NLSV	NLSV in WKNL
Amplification	8.38	9.85	6.86	6.71	8.21	8.13

TAB. II.3 – Amplification rates of energy for NM, SV and NLSV in different models, L for linear equations (II.15a, b), NL for nonlinear equations (II.14a, b), WKNL for weakly nonlinear equations (II.21a, b). In each case  $E_0 = 0.5$

under the constraint  $c(q) \equiv E(t = 0) - E_0 = 0$ . Here  $E_0$  is the initial energy of the perturbation and  $E(t)$  is the total energy after the evolution in the nonlinear model (II.14a, b).  $q$  represents the initial vector state  $q_1, q_2$ . This is a standard problem in large-scale constrained nonlinear optimization which we solve here with a quasi-Newton BFGS algorithm called IPOPT (Wächter and Biegler, 2006). The algorithm proceeds in minimizing the inverse of the cost function, i.e.  $1/f(q)$ . It needs to evaluate the gradients of the function  $f(q)$  and of the constraint  $c(q)$  which are computed using the adjoint equations of the model. The algorithm also approximates the hessian by the BFGS method. Further details can be found in Wächter and Biegler (2006). The algorithm stops when the optimality error  $\epsilon_{err}$

$$\epsilon_{err} = \max \{ \| \nabla(1/f(q)) + \mu \nabla c(q) \|_\infty, \alpha \| c(q) \|_\infty \}$$

becomes less than a specified error tolerance  $\epsilon$ .  $\alpha$  is a scaling factor and  $\mu$  the Lagrangian multiplier for the constraint that are implicitly defined by the numerical algorithm and are of order unity. We have found that the rate of convergence of the technique depends on the spectral resolution. If two wavenumbers are associated with almost equal growth rate, then the algorithm may not converge towards either one, and instead, tends to wander from one mode to another. This may be the case if there is not enough spatial resolution, or if the parameter  $\epsilon$  is not small enough. To prevent this phenomenon to happen, the algorithm is stopped in most cases after 50 iterations. In practice, it takes less than 20 iterations for the algorithm to converge for  $\epsilon = 10^{-4}$  (except for  $E_0 \geq 1$ ).

One would like a method to find a NLSV that is known to be a global maximum for the amplification rate. However, our numerical method cannot ensure this. In practice, we assume that a method to find a NLSV that is close to the global maximum amplification is to initialize the NLSV algorithm starting from the leading SV or its opposite as a first guess. For small enough perturbations, the NLSV and the leading SV will be almost the same. We thus initialize the algorithm using two different initial conditions which are the leading SV and its opposite (in the nonlinear model, they can have a different amplification). In this way, for small enough energy  $E_0$ , the solution should be close to the global maximum.

### II.4.5 Comparison of normal mode, leading SV and NLSVs

First, we describe the properties of the leading singular vector and normal mode. The normal mode was computed through a linear integration of the model with a time long enough so that the exponential growth rate becomes almost constant. For the SV and NLSV, we have chosen an optimization time  $T_{opt} = 0.3$  for which the



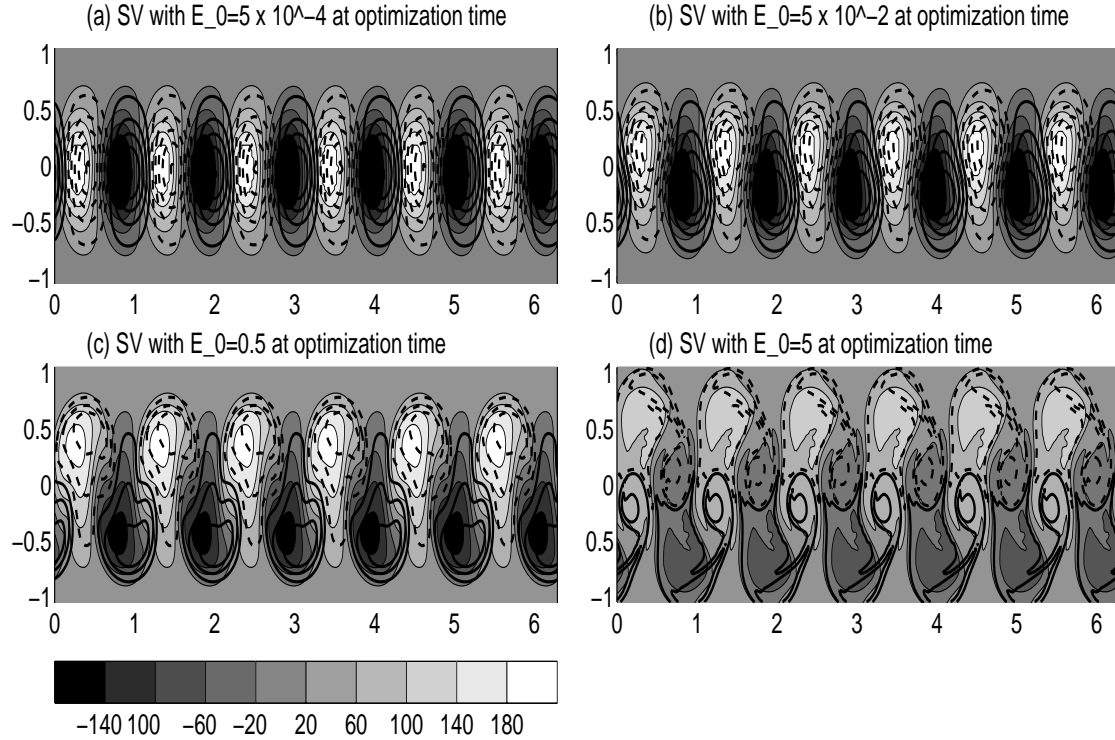


FIG. II.5 – Snapshots at final time ( $t = T_{opt}$ ) of the potential vorticity of the leading Singular Vector with initial energy from (a) to (d),  $E_0 = 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}, 0.5, 5$  using the fully nonlinear equations. Potential vorticity has been nondimensionalized by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

linear and nonlinear evolutions of the SV with initial energy of  $E_0 = 0.5$  significantly differ. We will discuss the impact of different optimization times and different choices of norms in Section 6. In dimensional units,  $T_{opt} = 0.3$  corresponds to an integration of 42 hours. The leading SV and normal mode (hereafter called NM) have respective linear amplification rate in total energy  $E(t = T_{opt})/E(t = 0)$  of 9.85 and 8.38. They are concentrated along the axis of the basic jet (see Fig. II.4a and b) and have a zonal wavenumber equal to 7 for the NM and 6 for the SV. We will see in Section 6 that for longer optimization time, the dominant zonal wavenumber and structure of the leading SV converges towards those of the NM. During the time evolution, the SV moves eastward and the upper and lower-layer waves mutually amplify (compare Fig. II.4b and c). The upper and lower PV anomalies of the leading SV are approximately in phase quadrature at initial time and close to phase opposition at final time. The upper and lower PV anomalies of the normal mode are also in phase opposition. This means that the temperature signal ( $\psi_1 - \psi_2$ ) dominates in the PV signal (see Eqs. II.13a, b).

### II.4.5.1 SV evolution

If we let the SV evolve in the nonlinear model for an initial energy of  $E_0 = 0.5$ , we observe that the amplification is much smaller (6.86, see Tab. II.3). A similar result is obtained for the normal mode (which has nonlinear amplification 4.99 for  $E_0 = 0.5$ ). We will not discuss the nonlinear evolution of the NM in the following as it is qualitatively similar to the SV except for the reduced amplification. To understand the behavior of the leading SV, one can look at the SV at the optimization time (Fig. II.5). For small initial energy (Fig. II.5a), the SV at final time resembles the SV in the linear model (compare with Fig. II.4c). When the initial energy increases (Fig. II.5b and c), we see that PV anomalies tend to move strongly in the meridional direction, whereas their displacement in the zonal direction is similar to the linear case. Upper-layer positive PV anomalies and lower-layer negative anomalies move towards the pole whereas upper-layer negative PV anomalies and lower-layer positive anomalies move towards the equator. This contributes to a meridional PV flux corresponding to a net poleward transport of heat, classical in the development of baroclinic waves (Pedlosky, 1987; Heifetz et al., 2004). For values of initial energy of the order of 0.5 and larger, we see the development of vortices (Fig. II.5d). Both phenomena (meridional displacement and formation of vortices) are related to wave-wave and wave-mean flow interactions as we will see later. This has profound consequences for the amplification of the SV in the nonlinear model as it decays by a factor 3 when the initial energy is increased to  $E_0 = 5$  (solid curve in Fig. II.6). Indeed the SV amplification rate decreases very rapidly when increasing initial energy beyond  $E_0 > 5 \times 10^{-2}$ . A similar result was obtained by Snyder and Joly (1998) for a growing baroclinic wave in the Eady model. It is possible here to predict the energy for which nonlinear terms will become important. Such a situation will occur when linear and nonlinear terms balance each other in (II.14a, b), i.e. when  $\partial_t q_i \approx J(\psi_i, q_i)$ . If we approximate  $q_i(t)$  by  $q_i(t=0) \exp(\lambda t)$ , we have  $\partial_t q_i \approx \lambda q_i(t)$ . The advection term  $J(\psi_i, q_i)$  can be scaled as  $q_i(t)$  divided by an eddy timescale. A typical eddy timescale is the root mean square of relative vorticity  $\zeta_{rms}(t)$  giving  $J(\psi, q) \approx \zeta_{rms}(t) q_i(t)$ . Nonlinear terms will become important when

$$\lambda \approx \zeta_{rms}(T_{opt}) .$$

Taking the square of this relation and using  $\zeta_{rms}(T_{opt}) \approx \zeta_{rms}(t=0) \exp(\lambda T_{opt})$  we obtain

$$\lambda^2 \approx E_0 \frac{\zeta_{rms}^2(t=0)}{E_0} \exp(2\lambda T_{opt})$$

or

$$E_0 \approx \frac{E_0}{\zeta_{rms}^2(t=0)} \lambda^2 \exp(-2\lambda T_{opt})$$

Since the amplification rate is equal to  $\exp(2\lambda T_{opt})$ , and  $\zeta_{rms}/\sqrt{E_0} \approx 7.63$  for the leading SV, we find a value for  $E_0$  of  $2.5 \times 10^{-2}$ , which gives a relative agreement with Fig. II.6.

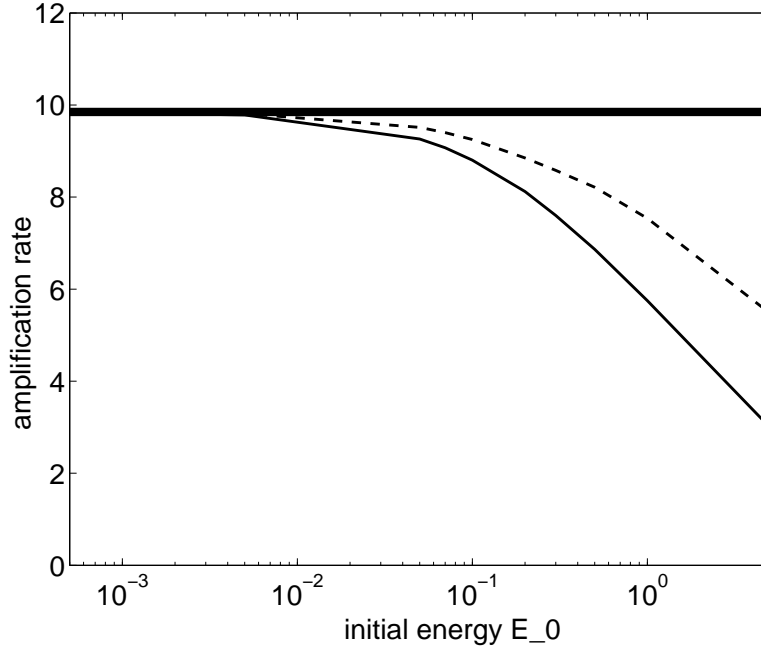


FIG. II.6 – Amplification rate for SV (solid line) and the NLSV (dashed line) in the nonlinear model as a function of initial energy  $E_0$ . The thick line represents the amplification rate of the SV in the linear model.

#### II.4.5.2 NLSV evolution

We now turn to the characteristics of the NLSV. First, we can check how the amplification rates of the NLSV and the leading SV compare in the nonlinear model as a function of initial energy. Figure II.6 shows that the growth rate of the NLSV is systematically larger than for the leading SV, as it must be. The figure also reveals that the maximum of amplification of the NLSV is reached for very small initial energies, i.e. when the evolution of perturbations is linear. When the initial energy is increased, the NLSV is able to maintain a substantial amplification rate in the nonlinear model even for  $E_0 = 0.1$ . For this problem (contrary to situations examined by Duan et al. (2004) and Mu et al. (2004)), nonlinearities systematically inhibit the growth of perturbations.

Figure II.7 shows the initial spatial structure of the NLSVs for different initial energies. Comparison of Fig. II.7a with Fig. II.4b reveals that for small energies, the NLSV and SV have very similar spatial structures which indicates that the method is able to find the global maximum [We have checked that, when initialized with random initial conditions, the algorithm that computes the NLSV converges towards the leading SV]. When the initial energy is increased, the structures of the NLSV and SV at initial time begin to differ (compare different panels of Fig. II.7). An asymmetry in the initial location of positive and negative PV anomalies can be observed : positive upper-layer and negative lower-layer PV anomalies tend to be on the equatorward side of the jet, while opposite anomalies are on the poleward side of the jet. This asymmetry cannot exist for the SV because there is a symmetry

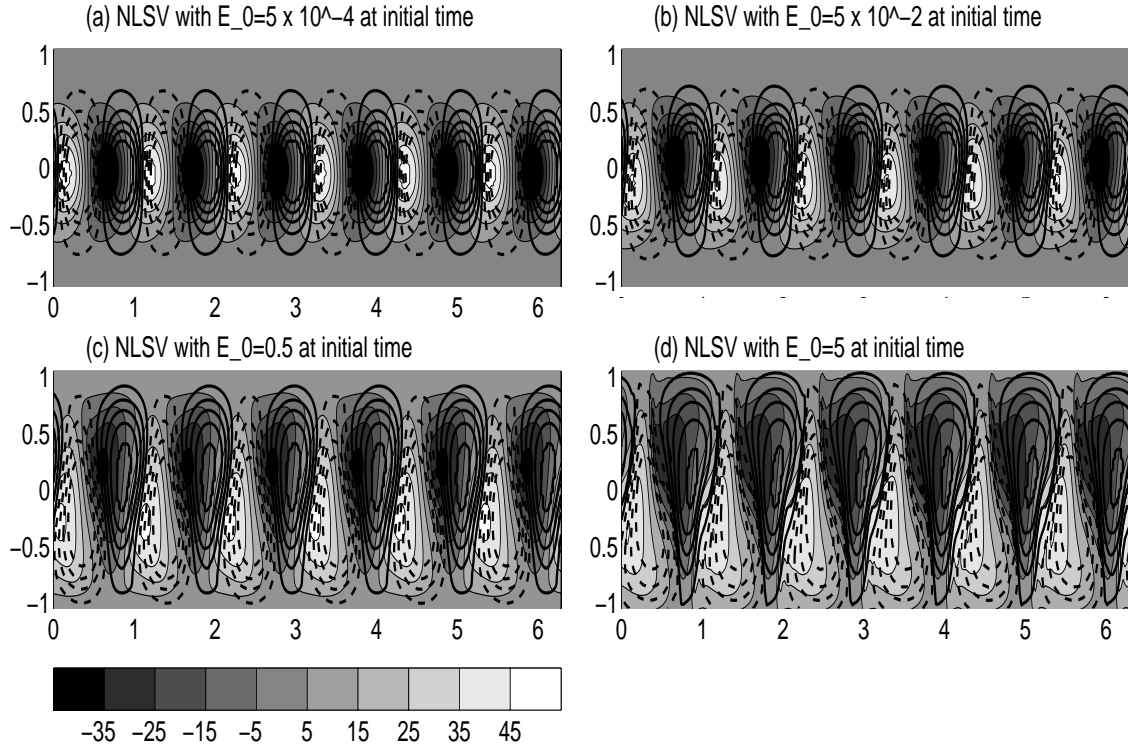


FIG. II.7 – Potential vorticity of the NLSV (total energy norm) at initial time for different initial energies. From (a) to (d),  $E_0 = 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}, 0.5, 5$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

in  $y/ - y$  in the linear equations of the system (II.15a, b). Also an increase in the latitudinal extension of the NLSVs can be observed as initial energy is increased. Overall, the spatial field is dominated by large scales and the zonal wavenumber 6 dominates. At the end of the optimization time, for small value of  $E_0$ , we obtain a structure similar to the SV (compare Fig. II.8a and II.5a). When the initial energy is increased, we observe that the upper and lower layer PV extrema of the NLSV move essentially poleward or equatorward (Fig. II.8b to d), similarly to the SV case. For  $E_0 = 5$ , and contrary to the SV nonlinear evolution, the NLSV do not form coherent vortices (compare Fig. II.8d and II.5d). Another difference is that PV extrema remain vertically aligned for the NLSV at  $t = T_{opt}$  while the PV extrema moved in different directions for the leading SV in the nonlinear model. Thus the degree of nonlinearity seems much reduced for the NLSV compared to the SV in the nonlinear model even for large initial energy. In addition, the NLSV structures are more efficient to carry heat poleward in comparison to SV in the nonlinear model.

#### II.4.6 Interpretation

It is necessary to explain the physical mechanisms that differentiate the NLSV from the leading SV, in particular in terms of growth. In the nonlinear evolution,

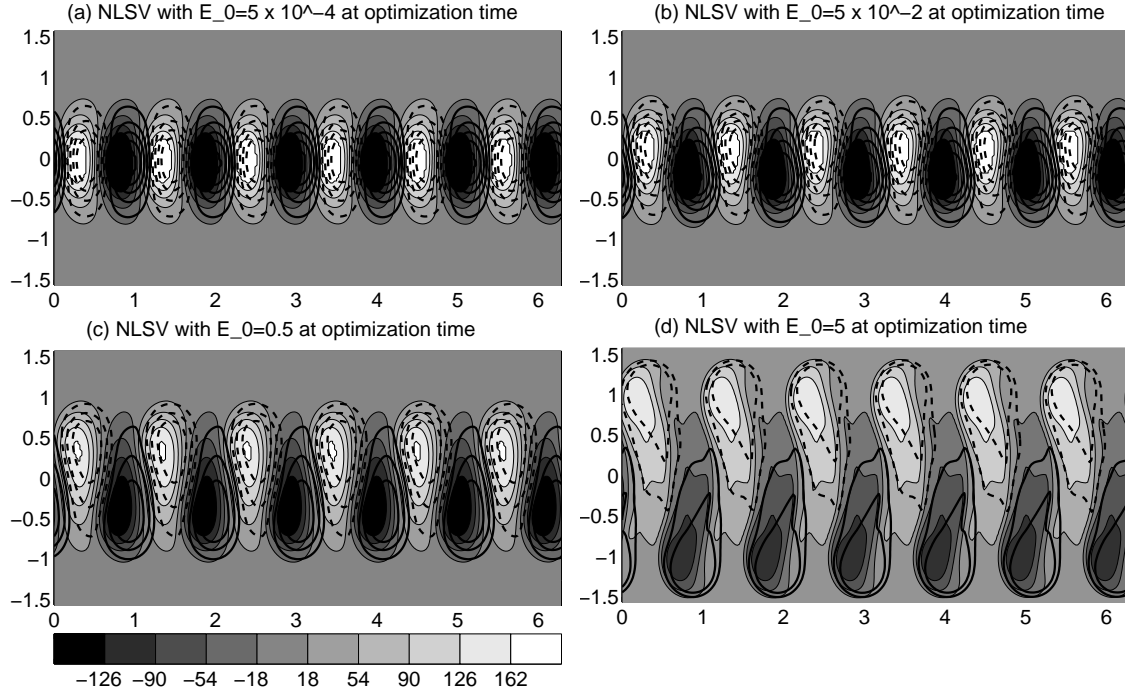


FIG. II.8 – Potential vorticity of the NLSV (total energy norm) at optimization time  $T_{opt} = 0.3$  for different initial energies. From (a) to (d),  $E_0 = 5 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-2}, 0.5, 5$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

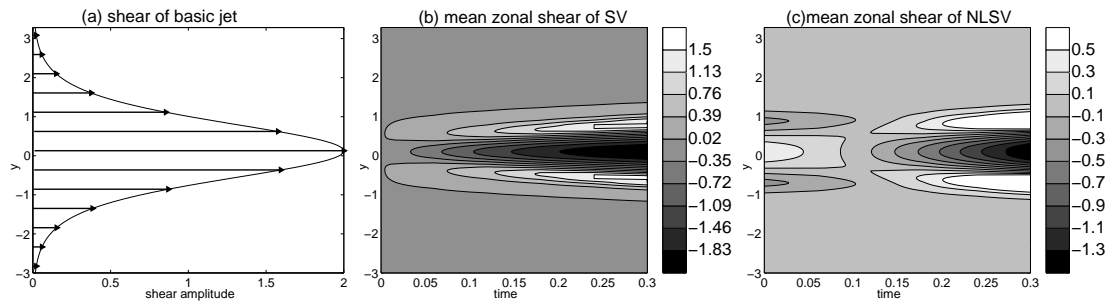


FIG. II.9 – (a) Zonal-mean shear of the basic jet. Zonal-mean shear  $\langle u_1 - u_2 \rangle_x$  as a function of time (abscissa) and  $y$  (ordinate), (b) for the SV in the nonlinear model, (c) for the NLSV. For these cases,  $E_0 = 0.5$

two different mechanisms can be invoked. First, nonlinear dynamics result in wave-mean flow interactions. Perturbations develop through the instability of the basic jet and give back their energy to the zonally-averaged jet. This can weaken the jet and diminish the shear through the mechanism of baroclinic adjustment. As a result, perturbations will extract less energy from the zonally-averaged flow and the perturbation growth will be limited. Second, wave-wave interactions can lead to the development of vortices and to a smaller energy extraction. We will show that the spatial structure of the NLSV adapts to counteract these different interactions,

resulting in a larger amplification of the NLSV compared to the SV.

### II.4.6.1 Zonal-mean shear of the NLSV

One important characteristic of nonlinear regimes such as the one studied here is the strong interactions between the perturbations and the large-scale flow. In our setting, it is instructive to decompose the potential vorticity of the NLSV into a zonal mean  $\langle q \rangle_x$  and a deviation (or eddy part)  $q'$  such that

$$q_i(x, y, t) = \langle q_i \rangle_x(y, t) + q'_i(x, y, t) \quad (\text{II.16})$$

where  $\langle q'_i(x, y, t) \rangle_x = 0$  with  $\langle \cdot \rangle_x$  the zonal mean and  $i = 1, 2$ . Using the decomposition given by (II.16) in (II.14a, b), we can separate the time evolution of the zonal-mean  $\langle q_i \rangle_x$  and the deviation  $q'_i$ ,

$$\begin{aligned} \partial_t q'_i = & -\beta \partial_x \psi'_i - J(\Psi_i + \langle \psi_i \rangle_x, q'_i) - J(\psi'_i, Q_i + \langle q_i \rangle_x) \\ & - (J(\psi'_i, q'_i) - \langle J(\psi'_i, q'_i) \rangle_x) \end{aligned} \quad (\text{II.17a})$$

$$\partial_t \langle q_i \rangle_x = -\langle J(\psi'_i, q'_i) \rangle_x = -\partial_y \langle v'_i q'_i \rangle_x \quad (\text{II.17b})$$

The first equation reveals that the energy of the non-zonal perturbations comes from the instability of the basic flow ( $\Psi_i$  and  $Q_i$ ) and of the zonal-mean flow ( $\langle \psi_i \rangle_x$  and  $\langle q_i \rangle_x$ ). The last term in the right hand side of (II.17a) is due to the self-interactions (or wave-wave interactions). The second equation is the standard wave-mean flow interaction term, which reveals that the eddies retroact on the mean flow (i.e. zonally-averaged flow) through the meridional PV transport, or the divergence of Eliassen-Palm flux Edmon et al. (1981); Shepherd (1983). This retroaction is important because it modifies the properties of the large-scale flow and in return this impacts on the perturbation growth in (II.17a).

The time evolution of the SV or the NLSV can be described in different stages (Pedlosky, 1964) : initially, perturbations ( $q'$ ) develop through the instability of the basic flow. During this stage, the linear approximation is valid because the amplitude of the perturbations is small so that the term  $J(\psi'_i, q'_i) - \langle J(\psi'_i, q'_i) \rangle_x$  in (II.17a) is small (not shown). Then, the eddies modify the mean jet through the poleward advection of heat leading to a modification of  $\langle q \rangle_x$  through (II.17b). This is apparent in Fig. II.9b which shows the evolution in time of the zonal shear  $\langle u_1 - u_2 \rangle_x$  for the leading SV. A strong zonal shear opposite to the basic shear develops through time. In response, the growth rate of instability (given by the total zonal-mean shear) should diminish (Gutowski, 1985b; Nakamura, 1999). Another effect is that the nonlinear term  $J(\psi', q') - \langle J(\psi', q') \rangle_x$  modifies the waves so that they may break and form vortices. This last stage is apparent for the SV time evolution, while it seems absent for the NLSV (compare Fig. II.5d and II.8d).

An important difference between the leading SV and the NLSV at initial time is that the NLSV possesses a zonal-mean shear in the same direction as the basic jet, but with retrograde jets on both sides (Fig. II.9c). This reinforces the basic jet so that the final mean shear of the NLSV is smaller than in the SV case. The asymmetric meridional structure of the PV of the NLSV (as shown in Fig. II.7) is

Structure	$\langle q \rangle_x + q'$	$-\langle q \rangle_x + q'$	$+q'$
Amplification	8.21	6.17	7.73

TAB. II.4 – Amplification rates for different initial conditions based on the NLSV.  $\langle q \rangle_x$  is the zonal-mean part of the NLSV and  $q'$  the deviation. For each type of structure, there was no rescaling of initial energy.

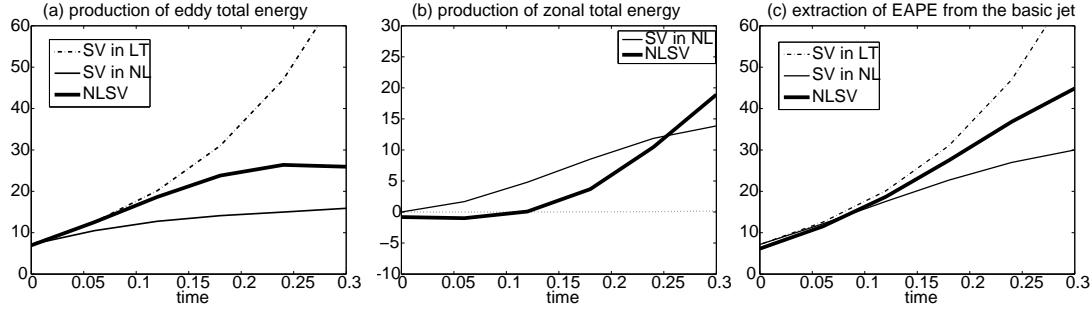


FIG. II.10 – (a) Production of eddy total energy over time following (II.18a). The dash-dotted (respectively thin solid) line represents the energy production for the SV in the linear (resp. nonlinear) model. The thick solid line represents the production for the NLSV. (b) Production of zonal total energy over time following (II.18b). The thin solid (resp. thick solid) line represents the production for the SV (resp. NLSV). (c) Extraction of EAPE from the basic jet (term 3 in (II.18a)). Curves with same definition as in (a). The initial energy for each case is  $E_0 = 0.5$ .

indeed related to the presence of this zonal component. The thermal wind balance implies that the zonal shear is associated with a meridional temperature gradient that reinforces positive temperature anomalies equatorward and negative anomalies poleward at initial time. Another confirmation of the importance of this mean shear is provided by the comparison with experiments for which the initial zonal-mean shear is reversed or suppressed. In these two cases, the amplification of the structure is smaller than for the SV (Tab. II.4). In contrast, changing SV into its opposite has no influence on the amplification rate (not shown). This demonstrates the important role played by the total mean-shear (basic-state plus perturbation) in the nonlinear development of the instability.

To confirm the importance of the initial zonal-mean shear, it is instructive to decompose the energetics into a zonal and an eddy part. Multiplying (II.17a) by  $-\psi'_i$ , (II.17b) by  $-\langle \psi_i \rangle_x$ , horizontally averaging each equation and summing over the layers, we obtain

$$\begin{aligned}
 \partial_t ETE &= \sum_{i=1}^2 \langle u'_i v'_i \partial_y^2 \Psi_i \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle u'_i v'_i \partial_y^2 \langle \psi_i \rangle_x \rangle \\
 &+ \lambda^{-2} \langle v'_1 (\psi'_1 - \psi'_2) \partial_y (\Psi_1 - \Psi_2) \rangle \\
 &+ \lambda^{-2} \langle v'_1 (\psi'_1 - \psi'_2) \partial_y \langle \psi_1 - \psi_2 \rangle_x \rangle
 \end{aligned} \tag{II.18a}$$

$a$	6	4	2	1
Amplification	7.35	7.76	8.09	7.80

TAB. II.5 – Amplification rate for the experiment with a different meridional extension for the SV with the zonal mean of the NLSV (see (II.20)).

$$\begin{aligned} \partial_t ZTE &= \langle u'_1 v'_1 \partial_y^2 \langle \psi_1 \rangle_x \rangle + \langle u'_2 v'_2 \partial_y^2 \langle \psi_2 \rangle_x \rangle \\ &+ \lambda^{-2} \langle v'_1 (\psi'_1 - \psi'_2) \partial_y \langle \psi_1 - \psi_2 \rangle_x \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.18b})$$

where

$$\begin{aligned} ETE &= \frac{1}{2} \langle (\partial_x \psi'_1)^2 + (\partial_y \psi'_1)^2 + (\partial_x \psi'_2)^2 \\ &+ (\partial_y \psi'_2)^2 \rangle + \lambda^{-2} \langle (\psi'_1 - \psi'_2)^2 \rangle \\ ZTE &= \frac{1}{2} \langle (\partial_y \langle \psi_1 \rangle_x)^2 + (\partial_y \langle \psi_2 \rangle_x)^2 \rangle + \lambda^{-2} \langle (\langle \psi_1 - \psi_2 \rangle_x)^2 \rangle \end{aligned}$$

ETE is the eddy part of the total energy (kinetic plus available potential energies) and ZTE is the zonal part. The decomposition of the total energy equation (II.18a, b) reveals that the eddy energy can grow through barotropic and baroclinic extraction from the basic flow  $\Psi$  (terms 1 and 3 in the right hand side of (II.18a)). Then this energy can be transferred to the zonal part through terms 2 and 4 of (II.18a). Figure II.10a shows the ETE production (left hand side of (II.18a)) for both the SV and NLSV in the nonlinear model for  $E_0 = 0.5$ . The growth rate of ETE of the SV saturates very rapidly in time compared to the linear case. This can be attributed to the steady growth of the zonal part (Fig. II.10b). On the contrary, the zonal part of the NLSV remains small until  $t = 0.1$  (Fig. II.10b) and the eddy part has a growth rate as strong as the linear SV until that time (Fig. II.10a). For the particular basic jet we use, we have found that the barotropic terms remain small over the entire time evolution and the energy production essentially comes from the EAPE ( $\lambda^{-2} \langle (\psi'_1 - \psi'_2)^2 \rangle$ ) production. The impact of the eddy-eddy interaction can be assessed by examining the energy extraction terms 3 and 4 of (II.18a). Figure II.10c shows a smaller extraction of EAPE from the basic flow for the SV than for the NLSV after  $t = 0.1$ . This means that after that time, wave-wave interactions have made the SV less efficient in extracting energy. On the contrary, the NLSV has an extraction that compares well with the linear SV case.

#### II.4.6.2 Meridional extension of the NLSV

One could think that the presence of the initial zonal shear in the NLSV can explain most of the behavior of the NLSV. However, in addition to this zonal shear, the NLSV is more elongated in the meridional direction than the SV and this needs to be examined. To see if this effect is important for the amplification, we have conducted experiments where we initialized a structure with the same profile in  $x$



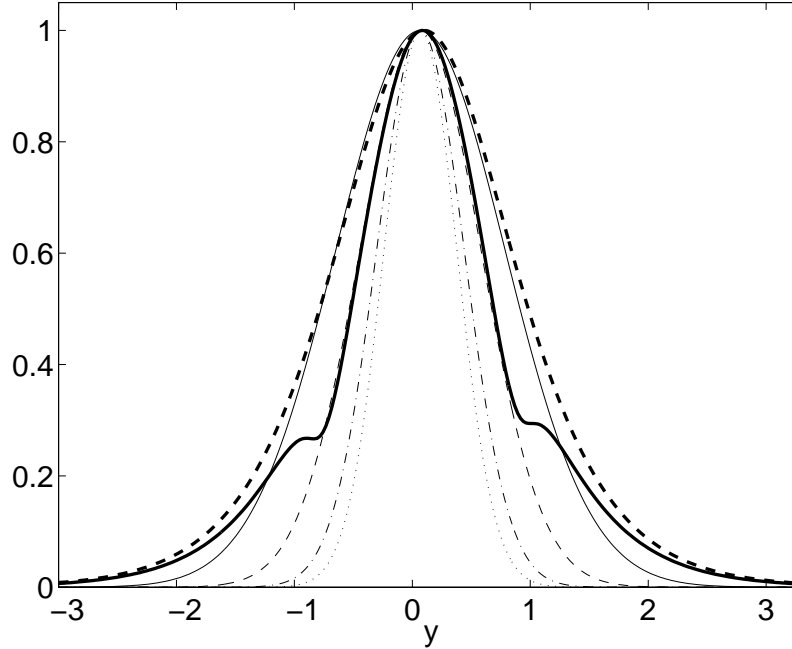


FIG. II.11 – Profile of  $\exp(-ay^2)$  as a function of  $a$ . Thin solid line :  $a = 1$ ; thin dashed line :  $a = 2$ ; dash-dotted line :  $a = 4$ ; dotted line :  $a = 6$ . The thick and dashed curve is the basic shear  $-\partial_y \Psi$  and the thick and solid line is the total zonal-mean shear  $-\partial_y(\Psi + \langle \psi \rangle_x)$  for the NLSV at  $E_0 = 0.5$ . All quantities were renormalized.

as the SV and with an exponential decay in the  $y$  direction, such that

$$q(x, y, t = 0) = \langle q_{NLSV} \rangle_x(x, t = 0) + \gamma q_{SV}(x, y = 0, t = 0) \exp(-ay^2) \quad (\text{II.20})$$

where  $\gamma$  is an adjustable parameter so that the initial energy is  $E_0 = 0.5$ . Different profiles are represented in Fig. II.11. We have verified that the exponential function in  $y$  fits well the SV for  $a = 6$  (not shown). The differences in behavior for different value of  $a$  allow to interpret the effect of the meridional extension of the structure (since  $a^{-1}$  gives the meridional decay scale of the structure). Table II.5 shows that adding the zonal shear to the SV increases the amplification (7.35 against 6.86) but this is still smaller than the NLSV amplification (8.21). We conclude from this that the zonal shear of the SV alone is not sufficient to increase the growth rate of the SV compared to the NLSV growth rate for the same total energy. One also needs to modify the nonzonal structure to obtain the largest growth rate. Indeed, one can obtain an amplification (8.09) that is close to the NLSV (8.21) for a meridional extension parameter  $a = 2$ . From Tab. II.5, one sees that there is an optimal extension for the amplification after which the amplification rate decays. The reason is that when the structures are too broad, they cannot extract energy from the basic jet since the basic jet is meridionally confined.

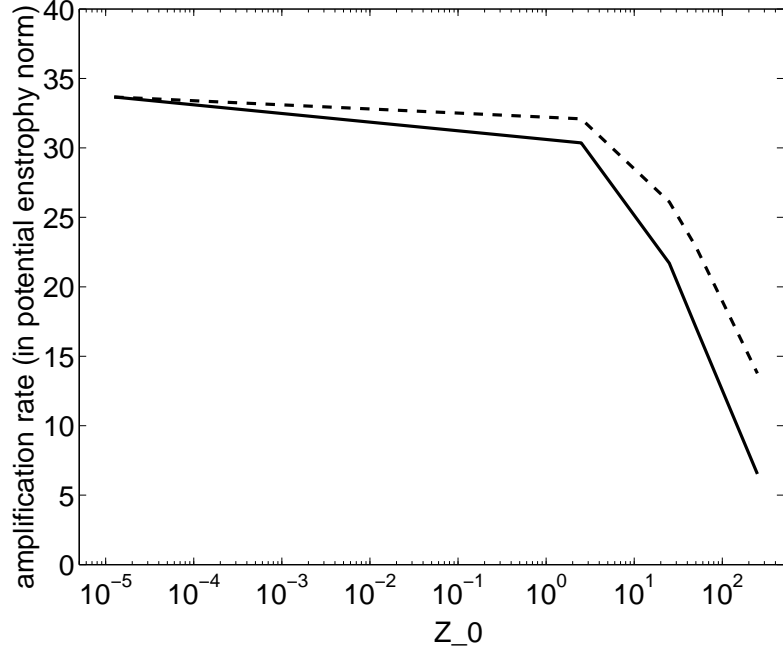


FIG. II.12 – Amplification rate for SV (solid line) and the NLSV (dashed line) for the potential enstrophy norm, in the nonlinear model as a function of initial potential enstrophy  $Z_0$ .

The existence of an optimal extension suggests that there is a link between the optimal structure and the shape of the jet. Indeed Pedlosky and Klein (1991) have shown that for weakly nonlinear baroclinic unstable flows, the meridional variation of the basic shear can strongly modify the amplification of perturbations. For perturbations having the same meridional structure as the basic shear, wave-mean flow interactions are unable to arrest the growth of the waves. It is interesting to compare the exponential profile of the different solutions of (II.20) with the basic shear  $-\partial_y \Psi$  and the total shear of the NLSV  $-\partial_y(\Psi + \langle \psi \rangle_x)$ . Figure II.11 shows these quantities and one can see a good agreement between the total shear and the exponential profile for  $a = 2$ . Surprisingly, this corresponds to the case of maximum amplification. Therefore, we are able to confirm the mechanism of Pedlosky and Klein (1991) in our fully nonlinear setting. It reveals that the meridional extension of the NLSV is tightly linked to the initial shear present in the NLSV so that wave-mean flow interactions cannot arrest the growth of the perturbations.

The presence of the zonal-mean shear and the meridional elongation of the NLSV has an impact on the nonlinearities of the system because it reduces the initial amplitude of  $q'_i$ . For a given total energy  $E_0 = 0.5$ , the eddy energy is only 0.45, i.e. smaller than the eddy energy of the SV (equal to  $E_0$ ). Also, the meridional broadening of the NLSV favors for the same energy a smaller perturbation maximum. This reduces the importance of nonlinearities in the term  $J(\psi', q') - \langle J(\psi', q') \rangle_x$  in the case of the NLSV in contrast to the SV. To verify this, we can examine a model

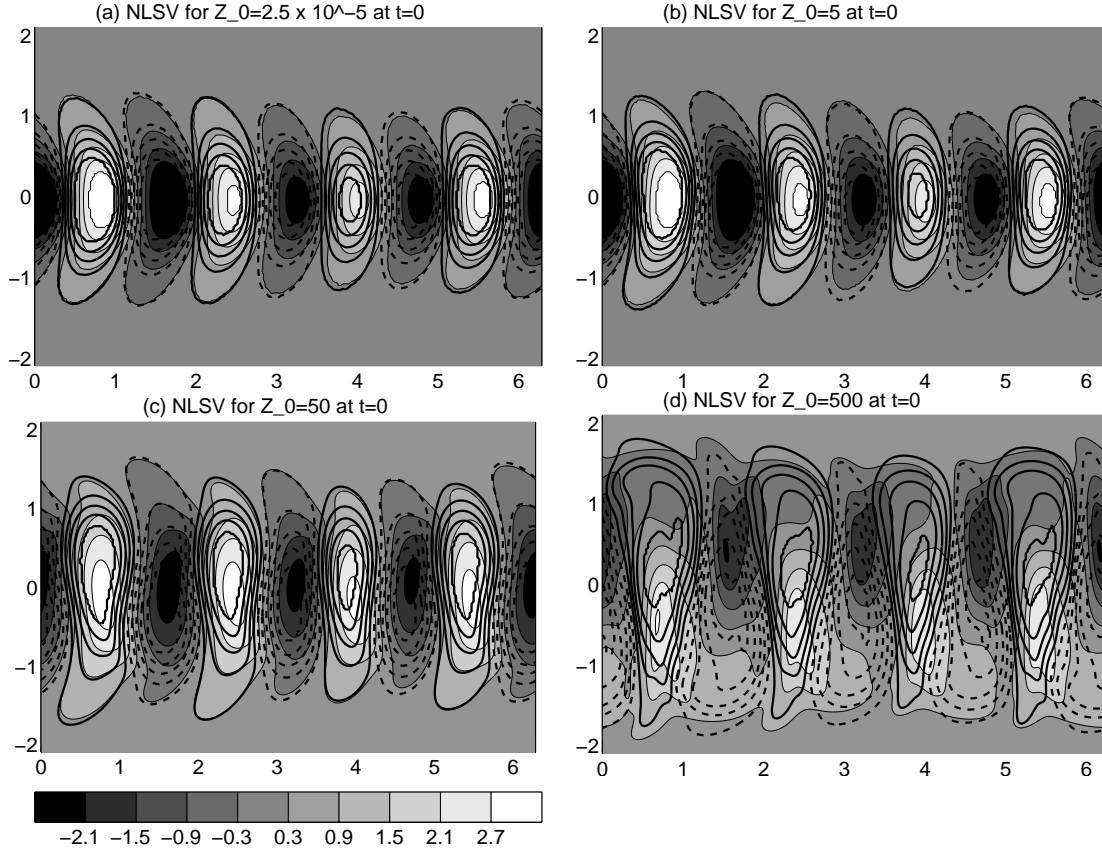


FIG. II.13 – Potential vorticity of the NLSV (potential enstrophy norm) at initial time for different initial potential enstrophies. From (a) to (d),  $Z_0 = 2.5 \times 10^{-5}, 5, 50, 500$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{Z_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

where the nonlinear term  $J(\psi'_i, q'_i) - \langle J(\psi'_i, q'_i) \rangle_x = 0$  in (II.17a). The evolution equations for this weakly nonlinear model are

$$\partial_t \langle q_i \rangle_x = - \langle J(\psi'_i, q'_i) \rangle_x \quad (\text{II.21a})$$

$$\partial_t q'_i = -J(\Psi_i + \langle \psi_i \rangle_x, q'_i) - J(\psi'_i, Q_i + \langle q_i \rangle_x) \quad (\text{II.21b})$$

As shown in Tab.II.3, the amplifications of the NLSV and for the leading SV in the weakly nonlinear model are quite close to the amplifications in the nonlinear model for  $E_0 = 0.5$ . We found that this is not true for larger initial energy  $E_0$  (not shown). This can be expected since nonlinearities may be stronger in that case.

### II.4.7 Generalization

Singular vectors are known to be sensitive to the choice of the norm and to the optimization time. We thus expect that NLSVs will also exhibit a dependence on these parameters. However the arguments developed above that explain the diffe-

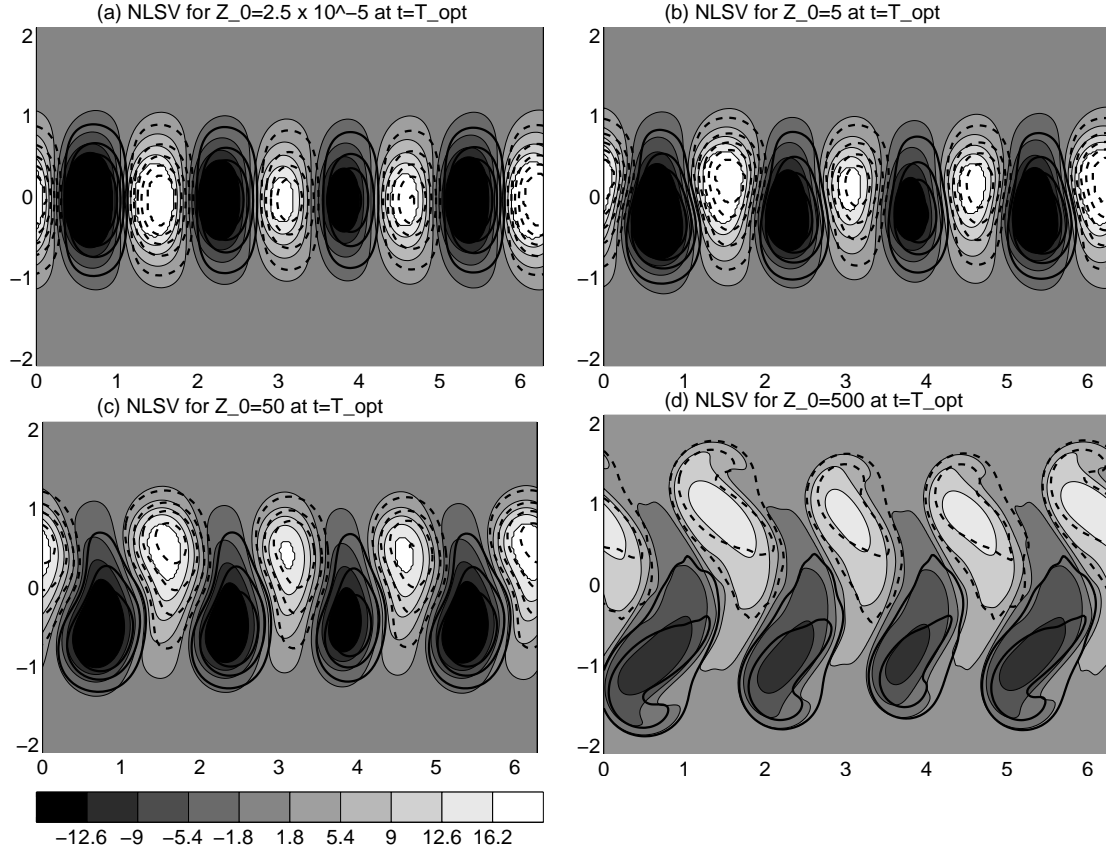


FIG. II.14 – Potential vorticity of the NLSV (potential enstrophy norm) at optimization time for different initial potential enstrophies. From (a) to (d),  $Z_0 = 2.5 \times 10^{-5}, 5, 50, 500$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{Z_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

rence between SV and NLSV were expressed in terms of energetics, and we may be inclined to think that they may still be valid when changing these parameters.

#### II.4.7.1 Other norms

Joly (1995) and Palmer et al. (1998) among others have examined the effect of the norm on Singular Vectors. They have found that SVs computed using total energy or streamfunction variance as norm are spatially confined whereas SVs computed using potential enstrophy have a larger scale signal. The reason is that the potential enstrophy gives more weight to small scales as a norm. It will thus favour large scales at initial time and smaller scales will develop during the time evolution leading to an amplification of the norm. The situation is opposite for the streamfunction variance norm that gives more weight to large scales as a norm and selects smaller scales at initial time. Moreover, the potential enstrophy norm is more barotropic because it is less sensitive to the Orr mechanism Joly (1995); Rivière et al. (2001); Kim and Morgan (2002); Heifetz and Methven (2005). We therefore tried to compute the

leading SV and different NLSVs for different norms. We can first examine the total potential enstrophy norm,

$$Z(q) = \frac{1}{2} \langle q_1^2 + q_2^2 \rangle$$

We use the same optimization time  $T_{opt} = 0.3$  as for the total energy norm. Figure II.12 shows that the Singular Vector that has evolved in the nonlinear model has an amplification rate ( $Z(q(t = T_{opt}))/Z(q(t = 0))$ ) that rapidly decreases between  $Z_0 = Z(q(t = 0)) = 1$  and  $Z_0 = 100$ . For these potential enstrophies, the NLSV has a significantly larger amplification rate than the SV. The spatial structure of the SV (or the NLSV with very small  $Z_0$ ) has a zonal wavenumber 4 that emerges (Fig. II.13a). This is a known result since SVs peak at larger scales for potential enstrophy norm than for total energy norm Rivière et al. (2001). One noticeable feature, different from the total energy norm is the almost barotropic character of the PV perturbations. When increasing the initial potential enstrophy  $Z_0$ , we observe the meridional shift of positive and negative PV maxima (Fig. II.13b, c). This was also apparent for the total energy norm. This displacement of the structures is due to the presence of a mean shear that increases with  $Z_0$  (not shown). Also the NLSV structure spreads meridionally (Fig. II.13d) and is reminiscent of results for the total energy norm (compare with Fig. II.7c). At the optimization time, we see that the NLSV structures tend to move meridionally (Fig. II.14b, c, d) whereas the SV moves zonally in the linear model (Fig. II.14a). The PV maxima are vertically aligned with PV minima, which means that temperature dominates relative vorticity in the PV. For very large potential enstrophy, we see that vortices begin to emerge at the end of the optimization time (Fig. II.14d). This norm seems less effective in inhibiting vortex formation. However the general characteristics of potential enstrophy NLSV are similar to those of the total energy NLSV. This indicates that the mechanisms of nonlinear amplification are very similar to the mechanisms for the total energy norm.

Another norm that can be considered is the streamfunction variance,

$$P(q) = \frac{1}{2} \langle \psi_1^2 + \psi_2^2 \rangle .$$

Linear Singular Vectors are well defined with this norm. We have made several tests to compute NLSVs with this norm but we were not able to make the algorithm converge for  $P(q)$  large enough so that nonlinearities limit amplification. During the process of optimization, structures at the smallest possible scales begin to emerge and become dominant in the spectrum (not shown). We attribute this problem to the choice of the norm : as stated before, the streamfunction variance puts more weight on the development of larger scales between  $t = 0$  and  $t = T_{opt}$ . Therefore, the optimization algorithm tries to find an initial structure which possesses energetic small scales that it will make grow in size as time evolves. In the linear setting, there is no scale interaction and a particular mode is selected. When nonlinear interactions are allowed, the algorithm makes interact large and small scales. As a result, small scales tend to dominate the energy spectrum and the NLSV technique exacerbate these scales. The computation of physically relevant NLSVs in this case is therefore not possible.

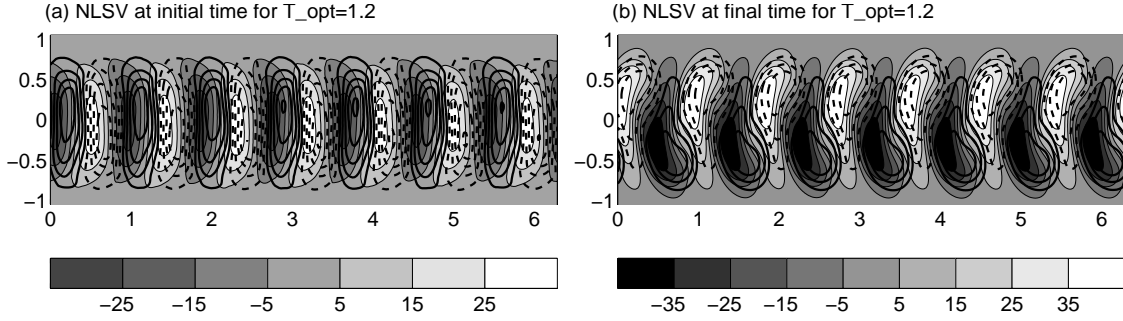


FIG. II.15 – Potential vorticity of the NLSV (total energy norm) at (a) initial and (b) optimization times for  $E_0 = 10^{-3}$  and  $T_{opt} = 1.2$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

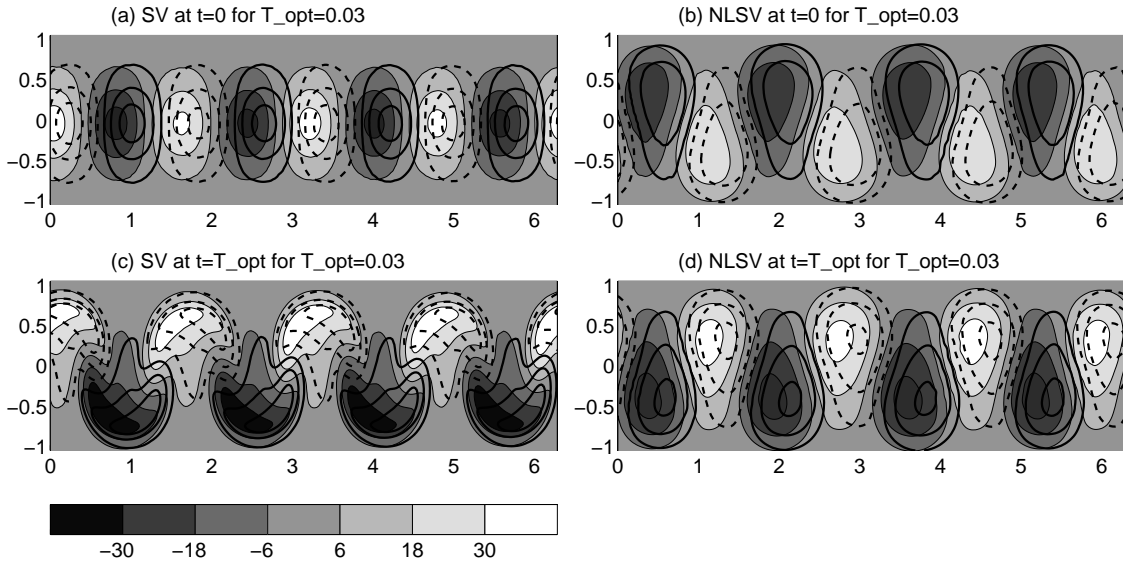


FIG. II.16 – Potential vorticity of the (a) SV, (b) NLSV at initial time and (c) SV, (d) NLSV at optimization time (total energy norm) for  $E_0 = 100$  and  $T_{opt} = 0.03$ . Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

### II.4.7.2 Optimization time

As investigated by Rivière et al. (2001) and others, the optimization time has some effect on the Singular Vector structure. We examine here the dependence of NLSV to  $T_{opt}$  using the total energy norm.

First, we examine the long time limit, taking  $T_{opt} = 1.2$ . In this case, the SV structure has a dominant zonal wavenumber 7 similar to the normal mode. Indeed at the final time, the leading SV strongly resembles the normal mode (not shown). Its amplification rate is 6297.5 in the linear model and 3555.8 in the nonlinear model

for  $E_0 = 10^{-3}$ . The corresponding NLSV has an amplification rate of 3748.8. The structure of the NLSV in physical space is quite similar to results with  $T_{opt} = 0.3$ . Comparing Fig. II.15a and Fig. II.7c, we see that the initial PV structure are in each case asymmetric compared to the jet axis, with PV extrema on either side of the jet. A difference is that NLSVs with  $T_{opt} = 0.3$  are stretched in a triangular shape whereas NLSVs with  $T_{opt} = 1.2$  are more with a rectangular shape. This means that the shear is less intense and weakly shifts the PV extrema. At the end of the optimization time, the PV structures have a stronger horizontal tilt than for  $T_{opt} = 0.3$  (Fig. II.15b).

We now examine the short time limit, taking  $T_{opt} = 0.03$ . The leading SV has an amplification rate of 1.28 in the linear model. It has a zonal wavenumber 4 (Fig. II.16a). In the nonlinear model, the amplification rate is only 1.21 for  $E_0 = 100$ . We still see the meridional displacement of PV maxima, associated with the development of a negative shear (Fig. II.16c). Also PV tends to roll up into vortices even for this small optimization time. The corresponding NLSV has an amplification rate of 1.26 and the structure in physical space (Fig. II.16b) has a strong asymmetry in the PV extrema, similar to the case of  $T_{opt} = 0.3$ . There is still the presence of a positive shear that helps in maintaining the growth rate. The NLSV structure extends meridionally as  $E_0$  increases. At the final time, the PV structures move meridionally and do not form vortices (Fig. II.16d), similar to the case of  $E_{opt} = 0.3$ .

The amplitude of the shear compared to the nonzonal velocity anomalies seems to depend on the optimization time : it is less intense for longer optimization times. This means that to maintain a growth rate over a long time period, the NLSV structure needs to inhibit the formation of vortices, leading to a broader meridional extension. On the contrary, this effect is less important for short optimization times and the optimization needs to put more weight on the zonal mean shear.

## II.4.8 Discussion

This study has revealed how nonlinearities affect baroclinic growth through the use of a new technique called NLSV (NonLinear Singular Vector). NLSVs are an extension to the nonlinear regime of Singular Vectors and were first proposed by Mu (2000). More specifically, they are perturbations with a given initial energy that maximize the amplification rate over a fixed time in the fully nonlinear system. They can be computed using constrained optimization algorithms.

In the Phillips model of baroclinic instability, it is well known that SVs have a limited growth in the nonlinear model. We showed here that NLSVs are rather similar to SV in their spatial patterns but that they maintain a larger amplification in the nonlinear model. NLSVs differ from the leading SV essentially by the presence of a zonal-mean flow (that is precluded for the SV by the symmetry in the linear equations) and by their broader meridional extension. The zonal-mean flow initially present in the NLSV maintains a strong production of potential energy during the time evolution. This tendency opposes the natural tendency of nonlinearities in baroclinic unstable flows that are responsible for a poleward heat flux that decelerates the mean jet (through the Eliassen-Palm flux). As a result, one can view NLSVs in

this baroclinic problem as weakly nonlinear structures for which nonlinearities apply to the zonal-mean flow at the first order, similarly to the development of Pedlosky (1964). Another aspect is that NLSVs have a broader meridional extension than SVs. This limits wave-wave interactions and the development of vortices so that the NLSV extracts more energy than the SV during the time evolution. In these simulations, the zonal wavenumber remains the same for the NLSV as one increases its initial energy. We observed that in other settings (in particular without the  $\beta$  effect and with a bottom drag), the zonal wavenumber decreases as  $E_0$  increases (not shown).

The picture that emerges is that the NLSV modifies the structure of the wave (the nonzonal part of the NLSV) and adds a zonal flow to take into account of the nonlinear baroclinic adjustment. The most unstable wave will saturate rapidly, so that it is not the wave of largest growth rate over a finite time that dominates. Therefore the NLSV selects a modified wave (which has a different meridional spatial scale but the same zonal scale in our case) that may be less unstable initially, but that will have a larger heat flux over the evolution in time. This behavior is similar to the findings of Pedlosky (1979), Hart (1981) and Cehelsky and Tung (1991) who found a selection of a particular wave, different from the most unstable one, for weakly nonlinear and baroclinic unstable flows

These optimal nonlinear perturbations are suggestive of Bred Vectors. Bred Vectors are perturbations that have grown in the nonlinear model and are rescaled to a finite energy at a given frequency in time Toth and Kalnay (1997). Letting the energy amplitude of renormalization tend to zero, one would obtain with this procedure the Lyapunov Vector (here the normal mode of the system since our basic flow is steady). We have computed Bred Vectors for our problem with a renormalization in initial energy taking  $E_0 = 10^{-2}$  and with a time of renormalization equal to  $T_{opt} = 0.3$ . We have initialized the procedure with the normal mode and we have run the nonlinear model for  $100T_{opt}$ , renormalizing the solution after each  $T_{opt}$  time interval. The solution converges toward a stable structure. The growth rate of the bred vector is only 7.73, i.e. much smaller than the growth rate of the SV and the NLSV in the nonlinear model for the same initial energy (see Fig. II.6). Figure II.17 shows that these structures have PV maxima centered on each side of the basic jet, with patterns resembling those of the leading SV and NLSV at the final time (compare with Figs. II.5 and II.8). Indeed, the Bred Vector has an initial negative shear because the structure has evolved in time. This shear limits the Bred Vector growth. On the other hand, the NLSV possesses an initial positive shear to counteract this effect and this explains why the NLSV growth is larger.

We believe that the NLSV approach is well suited for other problems, provided that there is a typical lengthscale that defines the instability or its saturation. If small scales are strongly unstable (such for the case of convection), the NLSV algorithm may not converge. This is the case in our model when using the streamfunction variance norm for which small scales at initial time are promoted by the NLSV algorithm. We are currently extending the NLSV approach to more realistic situations using a Primitive-Equation model. This will allow to better understand the role of nonlinearities in stratified baroclinic unstable flows. Our ultimate goal is



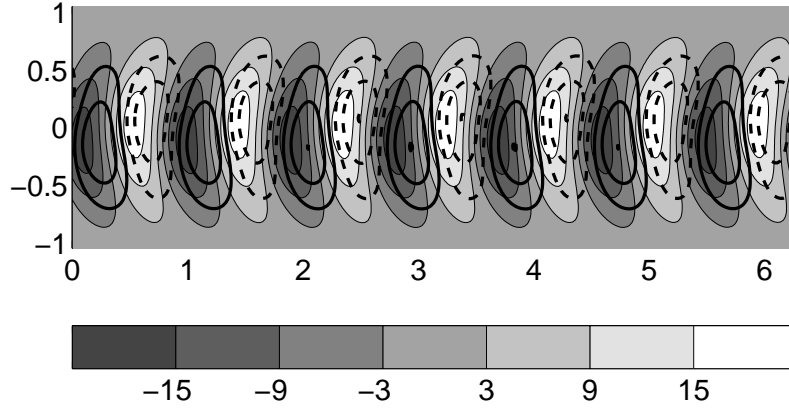


FIG. II.17 – Potential vorticity of the Bred Vector for  $E_0 = 10^{-2}$  after renormalization. Potential vorticity has been nondimensioned by  $\sqrt{E_0}$ . Contours have the same definition as in Fig. II.4.

to use such a method to study problems for which nonlinearities can be important. Such a situation can arise when taking into account the role of water vapor and latent heat release that can have a critical impact on moist synoptic systems (Lapeyre and Held, 2004). In this case, the precipitation introduces a threshold function and this may not be well handled by the adjoint model (used for the computation of the NLSV). In the framework of 4DVAR assimilation studies, it was shown that the BFGS method was still working well even in presence of thresholds (Zou, 1993). Two reasons can be invoked : first the gradient even if not perfectly defined, remains a good approximation of the search direction and secondly the line-search procedure (used once the search direction has been retrieved and requiring sufficient decrease in the cost function) can allow the algorithm to cross thresholds provided the step size is not too small. Preliminary experiments have been done and have shown indeed some success in finding NLSVs. These results will be reported in a future manuscript.

## II.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de détailler la mise en application de la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires dont le principe avait été présenté dans le chapitre précédent. Si cette méthode nécessite la connaissance du modèle adjoint comme pour la méthode des vecteurs singuliers linéaires, l'utilisation d'un algorithme d'optimisation non-linéaire destiné à minimiser sous contrainte une fonction de coût non-linéaire (et non plus quadratique comme en assimilation variationnelle) en un nombre acceptable d'itérations a constitué un enjeu technique important. Ensuite, l'application de cette nouvelle méthode à l'étude de perturbations optimales baroclines dans le modèle de Phillips a été présentée dans l'article accepté à la revue "Journal of Atmospheric Sciences". La physique des perturbations optimales non-linéaires a été comparée à leurs analogues linéaires. Contrairement aux vecteurs singuliers linéaires qui pour des raisons de symétrie ne présentent pas de composante moyenne zonale, les vecteurs singuliers non-linéaires exhibent une composante zonale qui s'oppose au processus d'ajustement barocline en renforçant le cisaillement vertical de vent moyen. De plus, les NLSVs présentent une structure plus étalée que les SVs qui a pour conséquence principale de diminuer l'effet des non-linéarités et de limiter la tendance non-linéaire associée à l'ajustement barocline. Ce comportement est observé pour des perturbations optimales calculées avec les normes énergie totale et enstrophie. La norme fonction de courant favorise les grandes échelles par rapport à la norme énergie totale. Puisqu'il maximise le rapport entre ses énergies initiale et finale, le vecteur singulier possède une structure localisée vers les petites échelles à l'instant initial, ce qui a posé des problèmes de convergence à l'algorithme d'optimisation non-linéaire lors du calcul de vecteurs singuliers non-linéaires que nous ne sommes pas arrivés à résoudre. Enfin, ce mécanisme d'optimalité non-linéaire n'est pas capturé par la méthode des bred vectors, ces derniers subissant l'ajustement barocline alors que les vecteurs singuliers non-linéaires s'y opposent (le signe de la contribution de la perturbation à l'écoulement moyen étant différent dans les deux cas).







# III

---

## Perturbations optimales dans un modèle de circulation générale avec une physique sèche

---

### III.1 Introduction

Si les résultats du chapitre précédent ont permis d'améliorer notre connaissance des mécanismes non-linéaires d'optimalité, le modèle de Phillips à deux couches ne représente que de façon très simplifiée la circulation atmosphérique. C'est pourquoi nous avons itéré la même expérience sur un modèle de circulation générale atmosphérique (GCM) aux équations primitives. J'ai choisi d'utiliser le GCM PUMA2 développé par l'université de Hambourg et une partie importante de mon travail de thèse a été consacré à l'écriture d'une version linéaire-tangente et adjointe de ce modèle après en avoir simplifié la physique en fonction de mes besoins. Ce modèle n'a pas été développé à des fins de prévision météorologique mais pour réaliser des études idéalisées. C'est pourquoi nous ne chercherons pas à effectuer des études de cas réels mais à dégager des mécanismes physiques. Dans une première partie, nous décrirons le modèle PUMA2 ainsi que la stratégie choisie pour le développement des modèles linéaire-tangent et adjoint. Dans un second temps, je validerai les outils développés en présentant la structure des vecteurs singuliers secs obtenus. Enfin, les résultats du chapitre précédent obtenus avec un modèle très simplifié d'instabilité barocline, sont généralisés au cas d'un écoulement zonal stationnaire du modèle PUMA2.

### III.2 Description du modèle

La modèle PUMA2 est la partie atmosphérique du modèle de climat Planet-Simulator<sup>1</sup> qui inclut un couplage avec un modèle d'océan et un modèle de vé-

---

<sup>1</sup>Disponible librement sur le site du Meteorologisches Institut de l'université de Hambourg (<http://www.mi.uni-hamburg.de/Planet-Simulator.216.0.html>)

gétation. Nous allons présenter le noyau dynamique du modèle PUMA2 ainsi que les paramétrisations qui ont été retenues dans la physique linéarisée utilisée par le modèle.

### III.2.1 Noyau dynamique

Le formulation des équations dynamiques est celle des équations primitives, construites à partir de l'approximation hydrostatique. Ces équations représentent les lois de conservation auxquelles les particules de fluide sont soumises :

- conservation de la quantité de mouvement horizontale (la composante verticale a été simplifiée via l'approximation hydrostatique)

$$\partial_t \mathbf{u} + f \mathbf{k} \times \mathbf{u} + \nabla_p \phi = 0 \quad (\text{III.1})$$

- conservation de l'énergie via le premier principe de la thermodynamique

$$\partial_t T = -\mathbf{u} \cdot \nabla T - \omega \partial_p T + \frac{\kappa}{p} \omega T \quad (\text{III.2})$$

avec  $\omega = \frac{dp}{dt}$  la vitesse verticale en coordonnées pression.

- conservation de la masse

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \partial_p \omega = 0 \quad (\text{III.3})$$

- conservation de la quantité d'eau si le modèle inclut une physique humide

$$\partial_t q = -\mathbf{u} \cdot \nabla q - \omega \partial_p q - \mathcal{P} \quad (\text{III.4})$$

- l'équation d'état des gaz parfaits

$$p = \rho RT \quad (\text{III.5})$$

où  $\nabla$  désigne le gradient horizontal. La coordonnée verticale utilisée n'est pas l'altitude  $z$  mais la coordonnée  $\sigma$  introduite par Phillips (1957) :

$$\sigma = \frac{p}{p_{sol}}$$

où  $p$  est la pression au point considéré et  $p_{sol}$  la pression au sol à la verticale du point considéré. Cette coordonnée varie entre 0 au sommet de l'atmosphère et 1 au niveau du sol. Pour alléger l'écriture des équations, nous écrirons les équations du problèmes en coordonnées pression plutôt qu'en coordonnées  $\sigma$ .

## III.2.2 Représentation de la couche limite atmosphérique

### III.2.2.1 Importance des paramétrisations physiques pour le calcul de perturbations optimales

Au noyau dynamique s'ajoutent des paramétrisations destinées à représenter les phénomènes absents des équations précédentes (mécanisme de précipitation, flux

à la surface de l'océan...) ou non-résolus par le modèle car associés à des échelles plus petites que la résolution du modèle (turbulence, convection...) mais dont l'effet sur les échelles plus grandes doit être pris en compte. Sans ces paramétrisations les versions linéaire-tangente et adjointe du modèle peuvent produire des résultats non réalistes physiquement bien que les sorties du modèle non-linéaire le soient.

Néanmoins, ces paramétrisations sont souvent caractérisées par un degré de non-linéarité et de complexité importante (présence de discontinuités, transition régime stable/instable, convection en cas de stabilité verticale faible) qui limitent la plage de validité du régime linéaire. Cela impose un travail de programmation important et augmente le temps de calcul dans les routines adjointes (l'adjoint est exécuté à l'envers dans le temps, toutes les variables non-linéaires doivent être soit stockées soit recalculées).

Une des préoccupations importantes des grands centres de prévision (Mahfouf et al., 1996; Mahfouf, 1999) lors des quinze dernières années a été de trouver un compromis entre la nécessité d'inclure des paramétrisations physiques pour améliorer la qualité de l'assimilation des observations et de la prévision d'ensemble tout en limitant le coût numérique des calculs d'optimisation associés.

Le modèle PUMA présente un degré de complexité proche de celui du modèle du centre européen dans les années 80. Les expériences pionnières réalisées à cette époque, documentées par de nombreux papiers et notes techniques, ont constitué la base de nombreux travaux de développement en matière de vecteurs singuliers dont les travaux de cette thèse.

Buizza et al. (1993) ont été les premiers à obtenir des vecteurs singuliers dans un modèle aux équations primitives. Buizza (1994) souligne la nécessité d'une représentation (même simplifiée) de la couche limite planétaire tenant compte au minimum de la friction au sol et du transport turbulent dans l'équation de quantité de mouvement. Le cas échéant, les vecteurs singuliers possèdent une signature anormalement forte dans les basses couches dont l'amplification disparaît dans le modèle non-linéaire. Avec le modèle PUMA2, j'ai rencontré le même problème, c'est pourquoi j'ai inclus un schéma de couche limite dans les modèles linéaire-tangent et adjoint. L'objectif étant de construire un outil capable d'obtenir des vecteurs singuliers physiquement réalistes, nous n'avons pas cherché à étudier l'impact précis des différentes paramétrisations ni à vérifier les résultats de Buizza (1994).

### III.2.2.2 Paramérisation non-linéaire originelle

Nous décrivons ici les paramétrisations de diffusion verticale et de friction de surface qui étaient appliquées aux champs de vitesse dans la version non-linéaire de PUMA2.

La surface de la Terre impose la présence d'une couche limite dissipant la quantité de mouvement de l'écoulement par turbulence dans la couche limite. La turbulence atmosphérique favorise aussi le mélange au sein de l'écoulement et donc une homogénéisation des différents champs (et tout particulièrement au niveau de la couche limite à cause de l'effet du sol). Les échelles caractéristiques de ces tourbillons sont trop faibles pour être résolues par le modèle aux résolutions courantes. Néanmoins



leur action sur le mélange vertical peut être modélisée en introduisant une équation de diffusion verticale turbulente. L'introduction d'un schéma de friction au sol qui élimine la quantité de mouvement au sol et d'un schéma de diffusion verticale homogénéisant tous les champs dans les basses couches permet une modélisation simple de la couche limite atmosphérique. L'équation de diffusion verticale d'une grandeur  $X$  (vent, température, humidité) s'écrit :

$$\partial_t X = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_x(X) \frac{\partial X}{\partial z} \right) \quad (\text{III.6})$$

Le coefficient de diffusion verticale turbulente  $K_x$  est défini en fonction du nombre de Richardson et des paramètres du modèle :

$$K_x = l_X^2(z) \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right| f_x(Ri)$$

où  $f_x$  est une fonction du nombre de Richardson et  $l_X$  une échelle caractéristique de diffusion qui dépend de l'altitude. Dans une couche limite la turbulence ne peut exister que si la production d'énergie cinétique est suffisamment importante pour dominer l'effet stabilisant de la stratification verticale stable. Cette condition est mesurée par le nombre de Richardson :

$$Ri = \frac{g}{\gamma T} \frac{\partial(\gamma_E T)}{\partial z} \left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|^{-2}$$

avec  $\gamma = \left(\frac{p_s}{p}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}$  et  $\gamma_E = \left(1 - \left(\frac{R_d}{R_v} - 1\right)q\right)\left(\frac{p_s}{p}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}$ . La couche limite est stable pour  $Ri > 0$  et instable pour  $Ri < 0$ . A chacun de ces régimes correspond une expression différente de la fonction  $f_x(Ri)$ .

L'action de la friction au sol est modélisée de façon similaire via un flux de quantité de mouvement évalué entre le sol et la plus basse couche du modèle  $F_u = \rho \left(\frac{\kappa}{\ln(z/z_0)}\right)^2 f_s\left(\frac{z}{z_0}, Ri_{sol}\right) |\mathbf{v}| \mathbf{u}$  associé à la tendance :

$$\partial_t \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho \Delta z} F_u \quad (\text{III.7})$$

où  $\kappa$  est la constante de von Karman,  $z_0$  la longueur de rugosité du sol et  $Ri_{sol}$  le nombre de Richardson au sol défini par :

$$Ri_{sol} = \frac{g \Delta z (\gamma_E T - \gamma_E T_S)}{\gamma T |\mathbf{v}|^2}$$

L'expression de la fonction  $f_s$  dépend du signe du Richardson de façon similaire au schéma de diffusion verticale. Ces schémas augmentent de façon importante le degré de non-linéarité du modèle pour deux raisons. La première est l'expression des coefficients de diffusion qui sont des fonctions complexes du nombre de Richardson et des différents champs du modèle. La deuxième est l'existence de structures conditionnelles liées au signe du nombre de Richardson qui rendent la formulation des équations non-différentiable.

Si la stabilité des schémas non-linéaires de diffusion verticale a été étudiée en détail (Girard and Delage (1990), Davies (1983)...), la dépendance des coefficients de diffusivité vis-à-vis du nombre de Richardson introduit des instabilités numériques dans le modèle linéaire-tangent (Mahfouf, 1999). Différentes solutions ont été employées : Mahfouf (1999) néglige dans le modèle linéaire-tangent les variations  $\delta K_x$  de ses coefficients, Janiskova et al. (1999) utilisent des approximations lissées de ces coefficients afin de diminuer l'amplitude des dérivées dans le modèle linéaire-tangent et Laroche et al. (2002) introduisent une régularisation plus complète en fonction d'un critère de stabilité du schéma numérique complet. La figure III.1 montre les erreurs associées aux différentes méthodes de linéarisation pour différentes amplitudes initiales  $\delta$  de perturbation. Si pour des perturbations de température de faible amplitude ( $\delta = 0.001K$ ), la linéarisation exacte du schéma de diffusion verticale s'avère plus précise que les variantes de linéarisation, pour des perturbations d'amplitude plus importantes ( $\delta = 1K$ ) de l'ordre de l'erreur d'analyse, la linéarisation exacte des équations peut induire des erreurs plus ou moins importantes selon la valeur du pas de temps utilisé. Le choix de négliger la variation des coefficients de diffusion verticale avec le Richardson ( $\delta K_x=0$ ) peut s'avérer plus précis. Pour  $\delta = 1K$ , les méthodes de Janiskova et al. (1999) et de Laroche et al. (2002) donnent des résultats plus satisfaisants. Je me suis basé sur ces considérations avant d'effectuer une éventuelle linéarisation et adjointisation de la routine non-linéaire, travail d'autant plus compliqué au niveau de l'adjoint qu'avec les non-linéarités augmente le nombre de variables de trajectoires à stocker ou à recalculer en partant de l'instant final.

### III.2.2.3 Paramétrisations incluses dans les modèles adjoint et linéaire-tangent

La méthode des vecteurs singuliers linéaires permet l'utilisation de modèles linéaire-tangent et adjoint ne correspondant pas à une linéarisation exacte mais approchée du modèle non-linéaire (voir par exemple les travaux de Buizza (1994)). L'unique contrainte pratique est celle d'utiliser un modèle adjoint qui soit l'adjoint exact du modèle linéaire-tangent. En négligeant la variation des coefficients de diffusion verticale dans les modèles linéaire-tangent et adjoint, Mahfouf (1999) et Zadra et al. (2004) obtiennent des structures optimales physiquement réalistes (rappelons que l'objectif principal de l'incorporation d'un schéma de diffusion verticale dans les modèles linéaire-tangent et adjoint était d'éviter la présence de structures non-réalistes). Par contre, la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires requiert un gradient exact et il est alors nécessaire que l'adjoint contienne exactement la même physique que le modèle non-linéaire. La courbe bleue figure III.2 représente le test du gradient de la fonction de coût évaluée d'après l'expression (II.3) pour le problème des vecteurs singuliers non-linéaires et où l'on a négligé la variation  $\delta K$  des coefficients de diffusion verticale dans le modèle linéaire-tangent : l'impact numérique d'une linéarisation approchée de la physique non-linéaire limite de façon importante la plage de validité du gradient de la fonction de coût. L'écriture exacte de la version linéaire du schéma de diffusion verticale complet aurait demandé un investissement en temps important sans forcément aboutir à une amélioration du problème comme le suggère

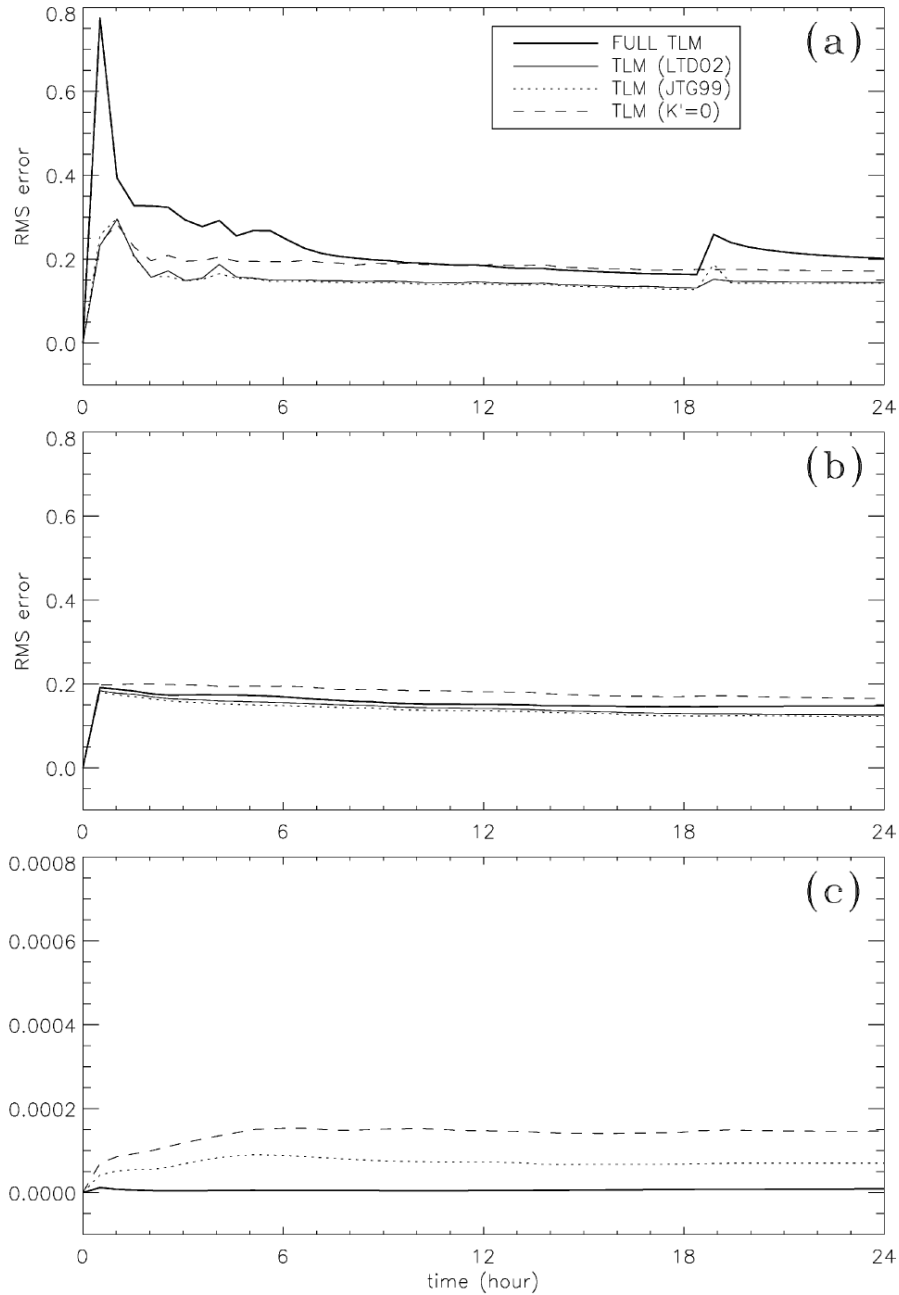


FIG. III.1 – Comparaison pour différents pas de temps  $\Delta t$  et amplitudes initiales des perturbations  $\delta$  aux différentes variantes de modèles linéaire-tangent de diffusion verticale (d'après Laroche et al. (2002)) a)  $Dt=1800s$  and  $\delta=1^\circ K$ , (b)  $Dt=60s$  and  $\delta=1^\circ K$ , and (c)  $Dt=60s$  and  $\delta=0.001^\circ K$ . En traits continus est représentée la linéarisation complète du schéma, en triplet de pointillés la linéarisation correspondant à  $\delta K = 0$ , en points serrés la régularisation de Laroche et al. (2002) et en points espacés celle de Janiskova et al. (1999)

la figure III.1 tirée des travaux de Laroche et al. (2002). Le schéma non-linéaire de-

vaît donc être régularisé avant qu’une version linéaire-tangente exacte en soit écrite. L’alternative la plus simple essayée s’est avérée satisfaisante : nous avons choisi un coefficient de diffusion vertical constant (égal à  $5m^2.s^{-1}$ ) auquel nous avons associé le schéma de friction de surface (III.7) où la dépendance en fonction du Richardson a été négligée.

### III.2.3 Test des modèles linéaire-tangent et adjoint

Les modèles linéaire-tangent et adjoints sont testés de la même façon qu’en II.2.1 : via la définition du produit scalaire (l’égalité est vérifiée à la précision du calculateur près) et au travers de l’exactitude du gradient de la fonction de coût définie à partir de l’équation (I.32) en utilisant la norme énergie totale introduite en I.4.2. La trajectoire de référence autour de laquelle les perturbations sont calculées correspond à une sortie de modèle du mois de Décembre. La résolution spectrale utilisée pour les procédures de test des modèles linéaire-tangent et adjoint est T63<sup>2</sup> avec 15 niveaux verticaux et la durée d’intégration du modèle est de 24h. La courbe rouge de la figure III.2 montre l’évolution de l’erreur relative entre l’expression du gradient évaluée grâce à l’adjoint et sa valeur obtenue par différences finies (analogue de la figure II.2 obtenue avec le modèle de Phillips) lorsque le modèle PUMA2 est utilisé sans aucune paramétrisation physique.

### III.2.4 Convergence de l’algorithme d’optimisation

La convergence de la méthode d’optimisation utilisée dépend fortement du conditionnement du problème. En effet, pour une convergence rapide (en terme de nombre d’itérations nécessaires), le gradient de la fonction de coût doit être isotrope. Plutôt que de chercher à maximiser directement la fonction de coût  $J(\delta x_0)$  définie par la relation I.32, le changement de variable  $\delta \tilde{x}_0 = A^{-1}\delta x_0$  permet de transformer le problème (VI.12) en :

$$J(\delta x_{NL}^*) = \tilde{J}(\delta \tilde{x}_{NL}^*) = \max_{\|A\delta \tilde{x}(t_0)\|_E^2 = E_0} J(\delta \tilde{x}_0 = A^{-1}\delta x_0, t)$$

et le gradient de la nouvelle fonction de coût s’écrit alors :

$$\nabla_{\delta \tilde{x}_0} \tilde{J} = A^{-1} \nabla_{\delta x_0} J$$

Cette transformation permet de travailler avec une nouvelle variable pour laquelle le gradient de la fonction de coût est rendu plus isotrope. Pour un problème quadratique, le préconditionnement idéal est réalisé en choisissant la matrice A tel que  ${}^T A A$  soit égal à la matrice hessienne du problème (et dans les autres cas égale à la hessienne au minimum). En assimilation de données, cette hessienne est obtenue comme un sous-produit de la minimisation de l’erreur de prévision estimée par la méthode

---

<sup>2</sup>La dénomination T63 pour la troncature spectrale signifie que les modes dont le nombre d’onde total est supérieur à 63 sont tronqués. Une résolution spectrale de T63 correspond à une grille de 96 par 192 points. La troncature utilisée est triangulaire.

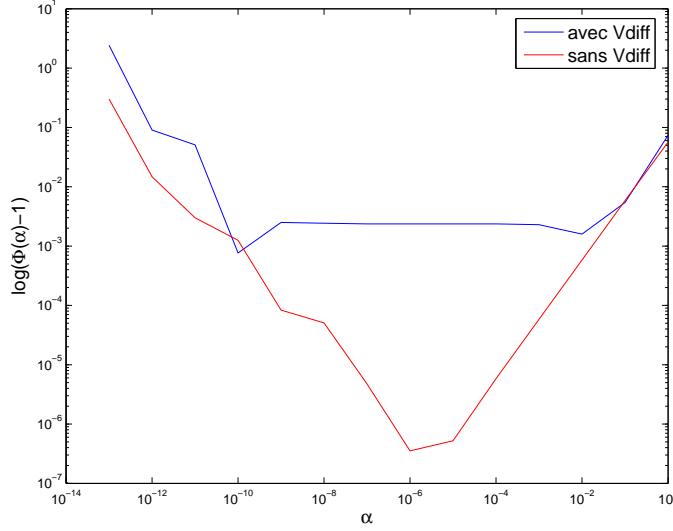


FIG. III.2 – Evaluation à l’ordre 2 de la précision du gradient de la fonction de coût à partir de la formule (II.3).  $\Phi - 1$  est tracée en rouge pour le modèle PUMA2 utilisé sans paramétrisation et en bleu en utilisant le schéma de diffusion verticale non-linéaire original et son adjoint où la variation des coefficients de diffusion verticale  $\delta K$  a été négligée.

BFGS lors du cycle d’assimilation 4D-VAR précédent. Pour le calcul des vecteurs singuliers non-linéaires, sans aucun préconditionnement dans le modèle PUMA2, l’algorithme ne converge pas ou sinon très lentement. Si nous ne connaissons pas la hessienne de la partie de l’opérateur associé à l’évolution des perturbations dans le modèle, il est possible de prendre en compte la partie de la hessienne correspondant au changement de variable entre l’espace des variables du modèle et l’espace canonique associé au produit scalaire  $(\cdot)_E$ .

Prenons l’exemple de la contrainte mesurée avec la norme énergie cinétique  $c = \sum_i (\delta u_i^2 + \delta v_i^2) - E_0$  qui s’exprime en fonction des variables utilisées par le modèle à savoir la vorticité  $z$  et la divergence  $d$  comme  $c = \sum_i -\frac{1}{k(k+1)} (\delta d_i^2 + \delta z_i^2) - E_0$  Le gradient de  $c$  par rapport à la vorticité s’écrit alors :

$$\frac{\partial c}{\partial \delta z_i} = \sum_i -\frac{2}{k(k+1)} \delta z_i$$

La composante du gradient sur la composante spectrale du champ de vorticité de nombre d’onde total  $k$  est donc proportionnelle à  $\frac{1}{k(k+1)}$  : l’algorithme d’optimisation agira donc en priorité sur les grands nombre d’onde, à savoir les petites échelles. Pour éviter ce phénomène, nous avons choisi  $A$  tel que  ${}^T A A = E$  où  $A$  est la matrice associée à la norme choisie pour mesurer l’amplitude des perturbations. Ce conditionnement permet une convergence satisfaisante de l’algorithme bien qu’il ne soit pas basé sur les propriétés du modèle. Dans l’expression de  $J$ , ce changement de variable qui consiste simplement à se placer dans l’espace associé à la norme choisie sera efficace à condition que l’opérateur associé au modèle linéaire-tangent ne soit

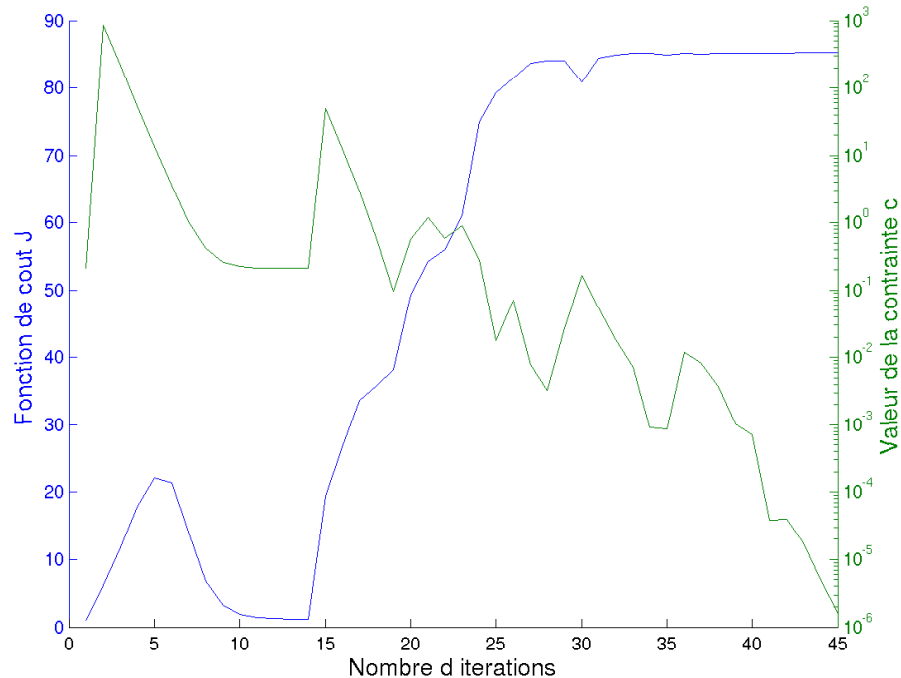


FIG. III.3 – Evolution de la fonction de coût du problème ainsi que de la valeur de la contrainte lors du processus de minimisation utilisé pour calculer des vecteurs singuliers non-linéaires à une résolution T63L15 du modèle PUMA2. Le point initial est aléatoire.

pas trop anisotrope dans ce nouvel espace, le préconditionnement choisi corrigeant déjà l'anisotropie introduite par le choix de la norme utilisée pour mesurer la taille de la perturbation.

La figure III.3 montre l'évolution des valeurs de la contrainte et de la fonction de coût au cours du processus de calcul du vecteur singulier non-linéaire à une résolution T63L15 ( $n \approx 400000$ ) en partant d'une condition initiale totalement aléatoire. On voit qu'au bout d'une trentaine d'itérations, l'algorithme a convergé. Le nombre d'itérations du modèle est comparable à ce qu'on obtient avec l'algorithme de Lanczos pour calculer les 10 vecteurs singuliers dominants du modèle.

### III.3 Vecteurs singuliers secs du modèle PUMA2

Cette partie montre les caractéristiques des vecteurs singuliers obtenus avec la version sèche du modèle. De nombreuses études similaires ont été réalisées par les principaux centres de prévision, citons entre autres l'ECMWF (Buizza and Palmer, 1995), le service météorologique canadien SMC (Zadra et al., 2004) et nous montrons la cohérence de nos résultats avec les leurs. Dans cette étape de validation de notre outil de calcul de perturbations optimales nous ne détaillerons pas la structure des SVs, sujet abondamment détaillé dans les études précédemment citées.

### III.3.1 Paramètres expérimentaux

PUMA2 est utilisé à une résolution spectrale T63 avec 15 niveaux verticaux. Au noyau dynamique sont ajoutées uniquement les paramétrisations de diffusion verticale dans leur version simplifiée détaillée précédemment. La trajectoire autour de laquelle les perturbations évoluent est calculée en utilisant la version humide du modèle contenant une paramétrisation de la précipitation grande échelle tandis que la physique des modèles linéaire-tangent et adjoint est sèche. La durée d'optimisation, sauf indications contraires, est fixée à 24h. Ce choix est motivé par les résultats de Buizza (1992) qui met en évidence des fortes similarités entre les vecteurs singuliers obtenus pour des durées d'optimisation de 24h et de 36h, ces derniers étant très différents de ceux calculés avec une durée d'optimisation de 12h. La norme choisie est la norme énergie totale présentée en I.4.2. A l'instant final elle est limitée uniquement aux régions de latitude supérieure à 30°N afin d'exclure les régions tropicales de notre étude.

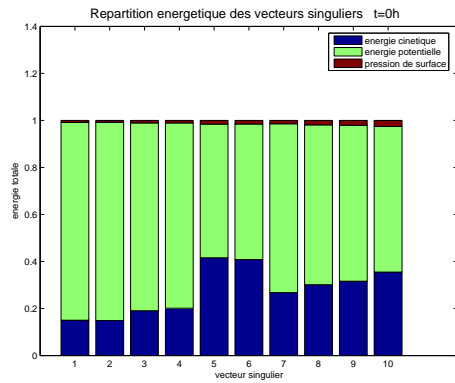
Nous avons restreint notre étude aux 10 premiers vecteurs singuliers. L'état de base a été obtenu en intégrant le modèle complet (i.e incluant le couplage avec la végétation, l'océan et un jeu de paramétrisations bien plus complet que celui présenté précédemment) pendant au moins deux ans à partir d'un état de base initial zonal. On laisse évoluer l'état obtenu pendant deux jours dans la version simplifiée de PUMA2 pour obtenir un état de base équilibré servant de point de départ à nos calculs. Il ne s'agit pas d'une situation météorologique réelle mais créée par le modèle. Le calcul des vecteurs propres dominants de la matrice  $\mathcal{M} = E^{-\frac{1}{2}}L^*ELE^{-\frac{1}{2}}$  est effectué par une méthode de type Lanczos dont le fonctionnement détaillé est précisé dans Buizza and Palmer (1995). Nous avons utilisé le logiciel libre Arpack (Lehoucq et al., 1997), adapté aux problèmes de dimensions importantes. Nous n'en détaillerons pas le fonctionnement, l'algorithme étant suffisamment robuste pour être utilisé comme une boîte noire par l'utilisateur. Dans ce qui suit, uniquement les dix premiers vecteurs singuliers sont calculés.

### III.3.2 Résultats. Mécanisme barocline de croissance des perturbations optimales.

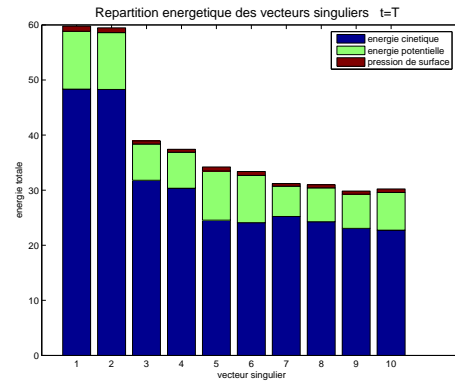
Comme le montre la comparaison des différentes caractéristiques des vecteurs singuliers entre l'instant initial (figures de la colonne de gauche de la figure III.4) et l'instant final (colonne de droite de la figure III.4), la structure des perturbations initiale s'est modifiée au cours de leur évolution. Ce changement de structure confirme la non-modalité de ces perturbations optimales : le mécanisme de croissance est bien transitoire. Le mécanisme d'Orr provoque la croissance transitoire des perturbations dont l'inclinaison verticale initialement dans le sens opposé au cisaillement vertical de vent diminue au cours de la période d'optimisation, les vecteurs singuliers possédant à l'instant final une structure presque verticale (figure III.5).

---

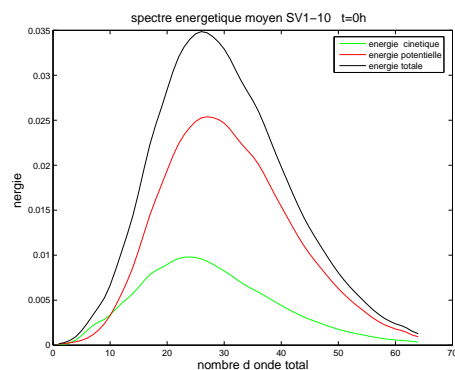
<sup>2</sup>Nous avons présenté figure III.5, la structure verticale associée au vecteur singulier dominant mais ce phénomène est visible sur chacun des dix vecteurs singuliers de cette expérience.



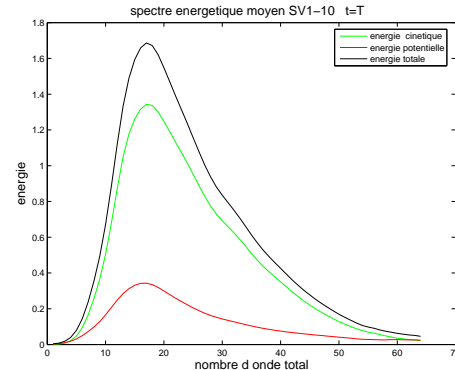
(a) Energie des 10 premiers SVs à t=0h



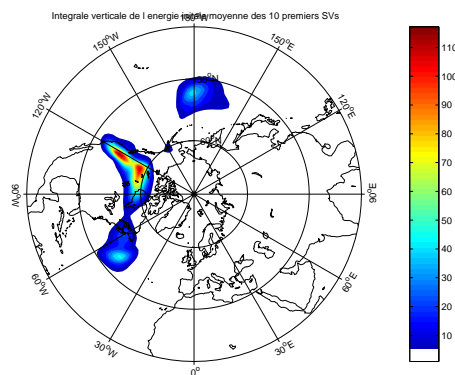
(b) Energie des 10 premiers SVs à t=24h



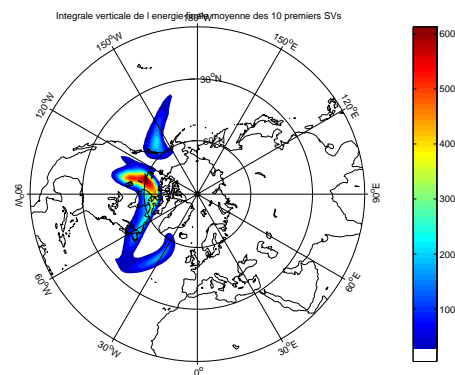
(c) Moyenne des spectres des 10 premiers SVs à l'instant initial



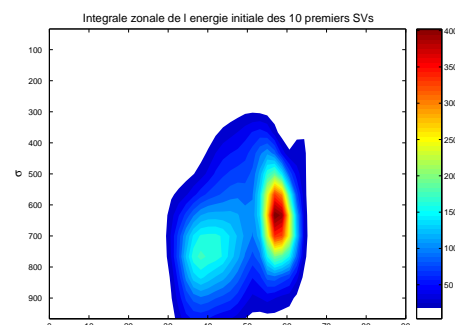
(d) Moyenne des spectres des 10 premiers SVs à l'instant final



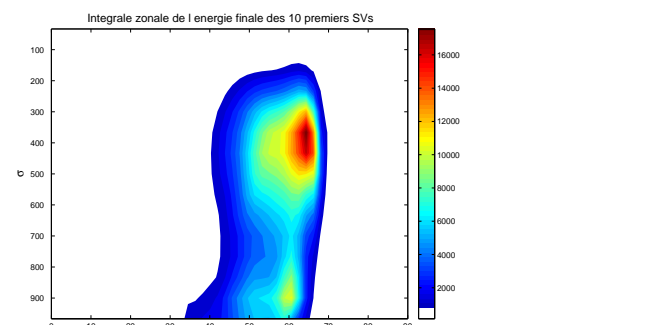
(e) Integrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs à l'instant initial



(f) Integrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs à l'instant final



(g) Integrale zonale de l'énergie des 10 premiers SVs à l'instant initial



(h) Integrale zonale de l'énergie des 10 premiers SVs à l'instant final

FIG. III.4 – Propriétés énergétiques des 10 premiers SVs à l'instant initial (à gauche) et à l'instant final (à droite)



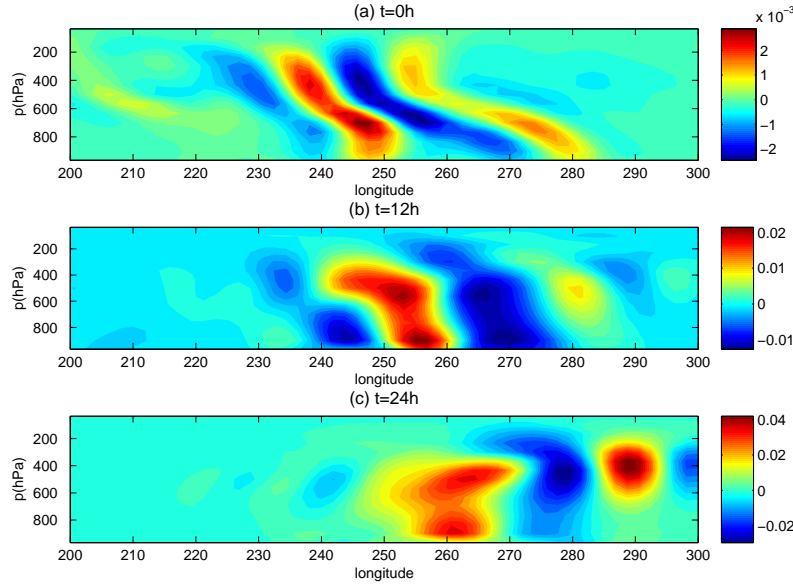


FIG. III.5 – Structure verticale du champ de vorticité cinématique du vecteur singulier dominant à l’instant initial et final (coupe réalisée à 58°N)

Les SVs sont situés dans les zones baroclines, comme le confirme la comparaison entre la répartition horizontale de l’énergie moyenne des 10 premiers SVs (figure III.4-e) et l’indice d’Eady (défini par la relation I.26) évalué entre 350 et 850 hPa à l’instant initial (figure III.6). Les perturbations sont ensuite advectées par le courant-jet comme le suggère la comparaison des figures III.4-e et III.4-f. On constate également une propagation verticale vers le haut de l’énergie de ces structures : initialement, leur énergie présente un pic autour de 700 hPa (figure III.4-g) tandis qu’à l’instant final elle est localisée au niveau du courant-jet autour de 350 hPa (figure III.4-h). On note aussi la présence d’un pic secondaire de plus faible amplitude au niveau du sol. Ces observations sont cohérentes avec les études de Zeng (1983) et de Badger and Hoskins (2001) sur l’évolution d’un paquet d’ondes de Rossby dans un écoulement cisailé verticalement : la partie du paquet d’onde inclinée contre le cisaillement de vent se propage vers le haut en s’amplifiant tandis que celle inclinée dans le sens du cisaillement se propage vers le bas en s’amortissant. Cette propagation verticale des structures s’accompagne d’un déplacement vers les grandes échelles (figures III.4 c et d) illustrant ainsi la tendance des perturbations à petite échelle à influencer la grande échelle. Les figures III.4-a et III.4-b qui présentent la composition énergétique initiale et finale de chacun des SVs illustrent le mécanisme de l’instabilité barocline présenté dans le premier chapitre : au cours de leur évolution, les perturbations convertissent de l’énergie potentielle en énergie cinétique.

Le bilan énergétique informel réalisé dans la partie I.2.4 peut-être écrit pour l’énergie potentielle  $E_p = \frac{c_p}{T_{ref}} \iiint \frac{\delta T^2}{2} dm$  à partir de l’équation linéarisée de tempé-

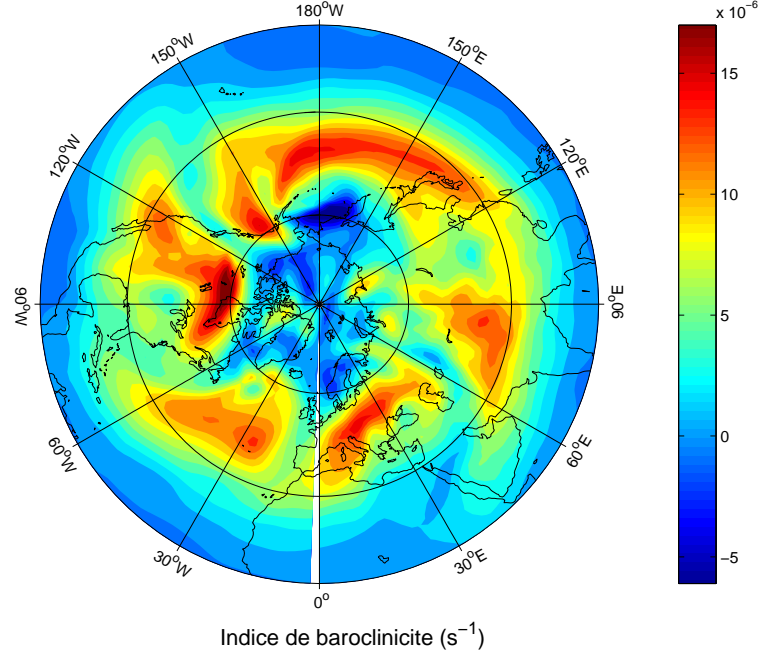


FIG. III.6 – Indice de baroclinicité évalué entre 350 et 850 hPa à l’instant initial sur la trajectoire

rature, écrite ici en présence de termes diabatiques :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \delta T &= -\mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta T - \delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 - \omega_0 \partial_p \delta T - \omega \partial_p T_0 + \kappa \omega_0 \delta T + \kappa \omega T_0 + \delta J \\
 \partial_t \left( \frac{\delta T^2}{2} \right) &= -\delta T (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta T + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0) - \delta T (\omega_0 \partial_p \delta T + \delta \omega \partial_p T_0) \\
 &\quad + \kappa (\omega_0 \delta T + \delta \omega T_0) \delta T + \delta J \delta T \quad (\text{III.8}) \\
 \partial_t E_p &= C_A + C_E + G_E \quad (\text{III.9})
 \end{aligned}$$

$C_A = -\frac{c_p}{T_{ref}} \iiint \delta T (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta T + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0) dm$  est le coefficient d’extraction barocline d’énergie potentielle à partir l’écoulement de base.

$C_E = \frac{c_p}{T_{ref}} \iiint [\omega_0 (\kappa \delta T + \partial_p \delta T) + \delta \omega (\kappa T_0 + \partial_p T_0) \delta T] dm$  est le terme de conversion adiabatique. Il correspond à la conversion d’énergie potentielle des perturbations en énergie cinétique.

$G_E = \frac{c_p}{T_{ref}} \iint \delta J \delta T dm$  est la création d’énergie potentielle par dégagement de chaleur latente et autres processus diabatiques.

La figure III.7 montre la répartition verticale de l’intégrale temporelle de ces coefficients sur la durée d’optimisation, la somme de ces coefficients formant le bilan d’énergie potentielle. Le signe respectif de  $C_a$  et de  $C_e$  illustre bien le mécanisme barocline d’extraction d’énergie potentielle ainsi que sa conversion en énergie cinétique. Ce mécanisme est similaire à celui présenté dans le cadre du modèle quasi-géostrophique.

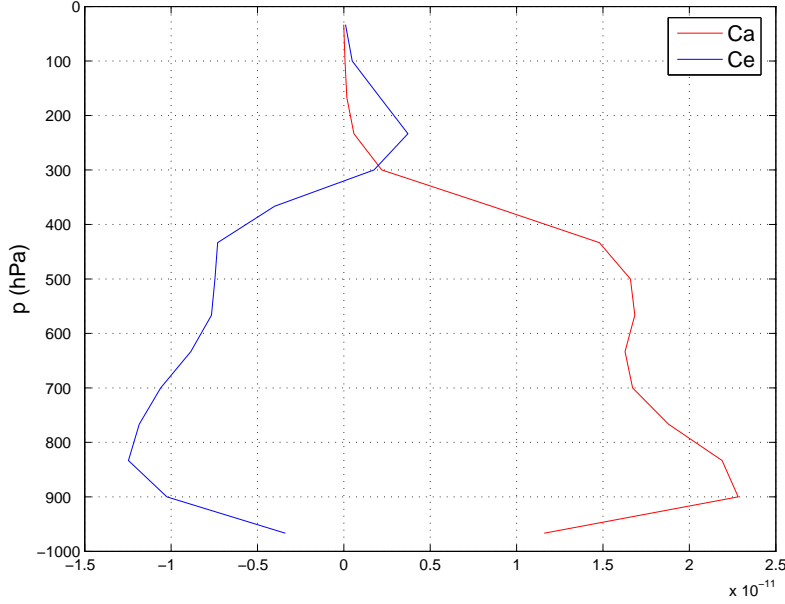


FIG. III.7 – Répartition verticale de la moyenne temporelle des coefficients  $C_a$  et  $C_e$  pour les vecteurs singuliers secs du modèle PUMA2 pour le vecteur singulier dominant.

### III.3.3 Evolution non-linéaire des vecteurs singuliers

Les vecteurs singuliers ont été calculés pour optimiser leur croissance sur un intervalle de temps donné, très vite ces perturbations vont donc atteindre des amplitudes telles que l'hypothèse linéaire-tangente ne sera plus valable.

Plutôt que de comparer les champs obtenus en laissant évoluer les perturbations d'un côté dans le modèle linéaire-tangent et de l'autre dans le modèle non-linéaire, Gilmour et al. (2001) ont introduit une méthode quantitative permettant de diagnostiquer l'importance relative des termes non-linéaires et linéaires lors de l'évolution des perturbations. Leur approche se base sur l'évolution non-linéaire de deux perturbations jumelles  $\delta x^+(t)$  et  $\delta x^-(t)$ , initialement de signe opposé ( $\delta x^+(0) = -\delta x^-(0)$ ) caractérisée via l'indice de non-linéarité  $\Theta$

$$\Theta(t) = 2 \frac{\|\delta x^+(t) + \delta x^-(t)\|}{\|\delta x^+(t)\| + \|\delta x^-(t)\|} \quad (\text{III.10})$$

où  $\|\cdot\|$  désigne une norme choisie par l'utilisateur, en pratique nous prendrons la norme énergie totale sèche utilisée pour le calcul des perturbations optimales. En écrivant le développement de Taylor de  $\delta x(t)$  à l'ordre 2 en  $\delta x(0)$ ,

$$\delta x(t) = L\delta x(0) + \frac{1}{2}\delta x(0)H\delta x(0) + o(\delta x(0)^2)$$

il apparaît que  $\Theta$  constitue une approximation du rapport entre les termes d'ordre 1 et 2 de ce développement.

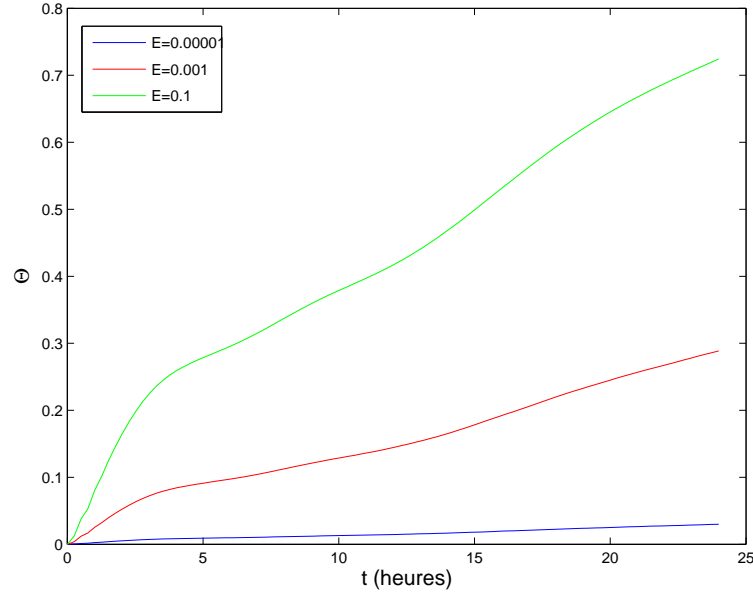


FIG. III.8 – Evolution temporelle de l'indice de non-linéarité  $\Theta$  évalué pour le vecteur singulier dominant du modèle PUMA sec injecté dans le modèle non-linéaire pour différentes énergies initiales.

En cas d'évolution purement linéaire,  $\delta x^+ = -\delta x^-$  à chaque instant et  $\Theta$  est nul (la réciproque n'est pas forcément vérifiée selon que les termes d'ordre pair du développement de Taylor de  $\delta x(t)$  soient ou non négligeables devant les termes d'ordre impair). Si  $\Theta$  est de l'ordre de 0.5, l'erreur effectuée en supposant l'hypothèse linéaire valide est de l'ordre de 50% de l'amplitude des perturbations<sup>3</sup>. Il convient de garder à l'esprit que  $\Theta$  faible est une condition nécessaire mais non suffisante de validité de l'hypothèse linéaire. Les indices de non-linéarité correspondant à l'évolution non-linéaire du vecteur singulier dominant de l'expérience de la partie précédente sont représentés pour différentes énergies initiales sur la figure III.8. Nous voyons que sur une durée de 24h, le vecteur singulier dominant redimensionné de façon à avoir une amplitude maximale de l'ordre de  $3K$  ( $E_0 \approx 10^{-2}$ )<sup>4</sup> n'a plus du tout un comportement linéaire à partir de  $t=15$ h. Ce résultat dépend de la norme choisie mais aussi des échelles considérées : Reynolds and Rosmond (2003) ont montré que les petites échelles étaient les premières à se comporter non-linéairement.

Au-delà de la prise de conscience du rôle plus tout à fait négligeable des non-linéarités, il convient de remettre en question l'optimalité des vecteurs singuliers au-delà du régime de validité de l'hypothèse linéaire. Ce travail vise à préciser la façon dont les mécanismes d'optimalité vont être modifiés par les non-linéarités : le

<sup>3</sup>Gilmour et al. (2001) définissent aussi un autre indice basé non plus sur l'amplitude mais sur la direction relative des perturbations jumelles  $l = -\frac{\langle \delta x^+, \delta x^- \rangle}{\|\delta x^+\| \|\delta x^-\|}$ . Néanmoins, dans notre cas, les conclusions étant sensiblement équivalentes pour l'un ou l'autre des indices nous nous restreindrons à l'usage de  $\Theta$ .

<sup>4</sup>Dans tout le manuscrit, nous utiliserons des énergies massiques en  $J.kg^{-1}$ .

concept de perturbation optimale non-linéaire ou NLSV va permettre d'apporter un élément de réponse.

## III.4 Comparaison des perturbations optimales linéaire et non-linéaire autour d'un écoulement zonal et stationnaire

La formulation plus réaliste des équations du modèle accompagnée d'une augmentation de la résolution verticale va permettre d'approfondir les résultats déjà obtenus avec le modèle de Phillips. Les perturbations optimales seront calculées autour d'un écoulement de base fortement idéalisé, puisque purement zonal et stationnaire sur un planète sans orographie.

### III.4.1 Description de l'écoulement de base- Méthode de relaxation de Held et Suarez

Le modèle de Phillips représentait de façon très schématique la zone barocline et les équations du mouvement comportaient des simplifications importantes. Néanmoins, les symétries du problème associées à la stationnarité de l'écoulement de base permettaient de séparer facilement les perturbations de l'écoulement moyen et donc d'accéder aux échanges entre perturbations et courant-moyen. Afin de bénéficier de cette facilité dans le diagnostic des échanges énergétiques, nous avons d'abord calculé des perturbations optimales autour d'une solution stationnaire du modèle aux équations primitives. Cet écoulement stationnaire et à symétrie zonale est obtenu grâce à la méthode de relaxation de Held et Suarez.

Initialement créée par Held and Suarez (1994) pour comparer les noyaux dynamiques des différents GCM tout en gardant un écoulement réaliste cette méthode introduit des coefficients de relaxation vers un équilibre radiatif  $T_{eq}$  afin de modéliser l'effet radiatif solaire sur l'atmosphère :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \dots - k_v(\sigma)v \tag{III.11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dots - k_T(\phi, \sigma)(T - T_{eq}(\phi, p)) \tag{III.12}$$

où les expressions de la température d'équilibre vers laquelle on relaxe et des coefficients de relaxation associés sont donnés par :

$$T_{eq} = \max \left( 200K, \left[ 315 - (\Delta T)_y \sin^2 \phi - (\Delta \theta)_z \log \left( \frac{p}{p_{ref}} \right) \cos^2 \phi \right] \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^\kappa \right)$$

$$k_T = k_a + (k_s - k_a) \cos^4 \phi \max \left( 0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right)$$

$$k_v = k_f \max \left( 0, \frac{\sigma - \sigma_b}{1 - \sigma_b} \right)$$

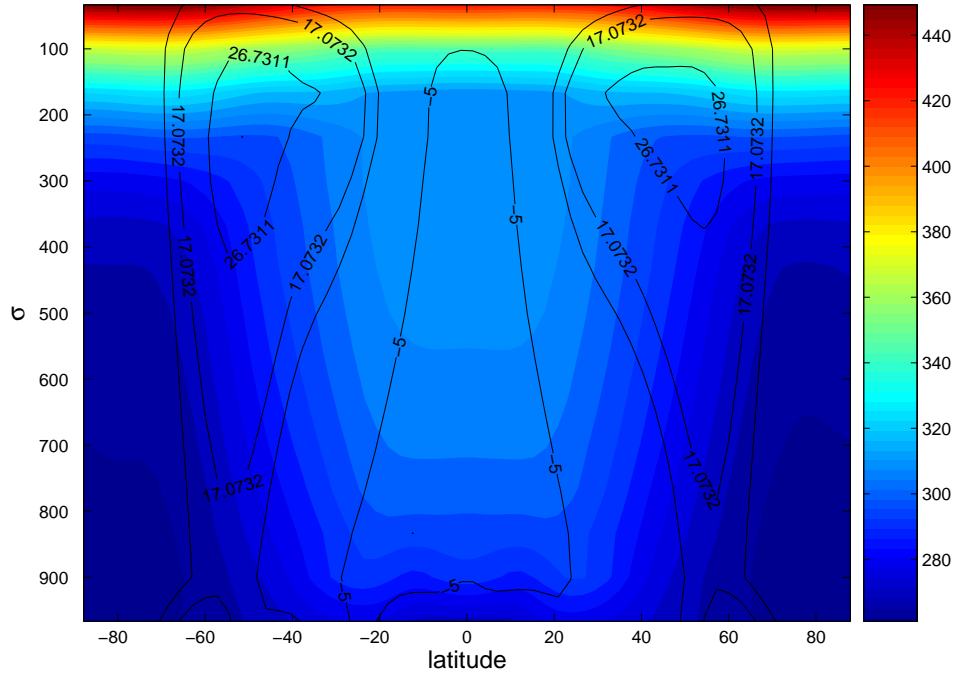


FIG. III.9 – Champs de température potentielle ( $K^\circ$ ) et de vitesse zonale ( $m.s^{-1}$ ) associés à l'état de base obtenu grâce à la paramétrisation de Held et Suarez

avec :

$$\begin{aligned} \sigma_b &= 0.7 & k_f &= 1 \text{ jour}^{-1} \\ k_a &= \frac{1}{40} \text{ jour}^{-1} & k_s &= \frac{1}{4} \text{ jour}^{-1} \\ (\Delta T)_y &= 60K & (\Delta \theta)_z &= 10K \end{aligned}$$

La paramétrisation inclut une dissipation de quantité de mouvement (équation III.11) dans les couches d'altitude inférieure à environ 3000m ( $\sigma_b = 0.7$ ) afin de représenter grossièrement la couche limite atmosphérique. La variation méridienne du flux solaire est prise en compte via le choix d'une température d'équilibre vers laquelle le modèle relaxe, plus élevée à l'équateur qu'aux pôles. L'orographie est supprimée du modèle, tout se passe comme si la Terre était couverte d'océans (d'où le nom d'Aquaplanet bien que la physique du modèle soit sèche). En partant d'une condition initiale quelconque du modèle et en laissant le modèle évoluer sur une durée de deux ans, un état de base dont la moyenne zonale constitue une solution stationnaire des équations du modèle est obtenu. Cet état représenté figure III.9 modélise la zone barocline de façon réaliste (on pourra comparer à la moyenne mensuelle zonale des mêmes champs effectuée sur la figure I.1 afin de s'en convaincre).

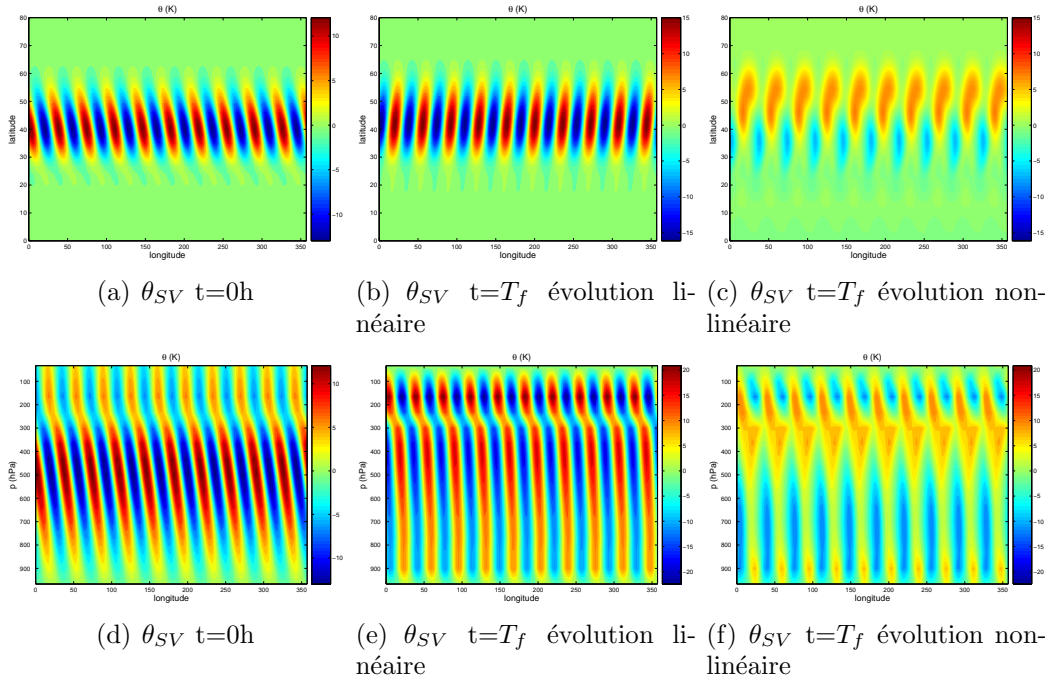


FIG. III.10 – Coupes horizontales (a-c) et verticales (d-f) des champs de températures potentielles à  $t=0$  et à  $t=T_f$  pour le SV évoluant dans les modèles linéaires (b) et (e) et non-linéaires (c) et (f). Pour les calculs non-linéaires, l'énergie initiale du SV a été choisie égale à  $1.0 J.kg^{-1}$ .

## III.4.2 Structure et évolution des perturbations optimales

### III.4.2.1 Calcul et description des perturbations optimales

Les perturbations optimales sont calculées dans la configuration du modèle suivante :

- résolution spectrale T42 avec 15 niveaux verticaux
- durée d'optimisation de 36h
- la norme sèche présentée en I.4.2 n'incluant à l'instant final uniquement les régions au-dessus de  $30^\circ N$ .

La structure du vecteur singulier dominant (figures III.10a et III.10d) présente des similarités avec les résultats obtenus avec le modèle quasi-géostrophique de la partie II.3. Localisées au niveau du maximum de baroclinicité, c'est-à-dire au niveau du courant jet atmosphérique, les structures associées présentent initialement une inclinaison verticale représentative des structures baroclines, opposée au cisaillement vertical de vent zonal. Par un mécanisme d'instabilité transitoire (cf chapitre I.3.2), l'inclinaison verticale diminue au cours de l'évolution de la perturbation jusqu'à ce que celle-ci devienne presque verticale (figure III.10e). Les perturbations sont aussi légèrement barotropiquement instables comme en témoigne l'inclinaison horizontale initiale du SV opposée au cisaillement horizontal de vent (figure III.10a). Les figures III.10b-c et III.10e-f comparent les champs de température potentielle associés au SV

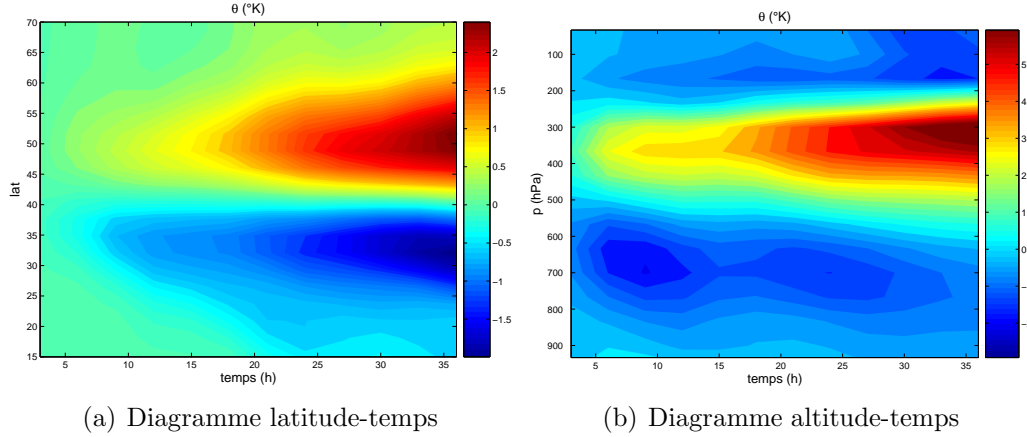


FIG. III.11 – Diagrammes de Hœvmoeller associés à l'évolution non-linéaire du SV ( $E_0 = 1.0 J.kg^{-1}$ ).

dominant après évolution linéaire et non-linéaire (énergie initiale  $E_0 = 1.0 J.kg^{-1}$ ). L'évolution de la moyenne zonale des champs de température potentielle, représentée au moyen des diagrammes de Hœvmoeller des figures III.11a et III.11b, met en évidence deux effets :

- l'apparition d'un gradient méridien de température potentielle consécutif au déplacement d'une anomalie chaude vers les pôles et froide vers l'équateur. La relation du vent thermique associée à ce gradient de température potentielle est une diminution du cisaillement vertical associé au courant jet. Cette évolution avait déjà été mise en évidence dans l'étude réalisée en II.3 avec le modèle quasi-géostrophique à deux niveaux.
- l'émergence d'un gradient vertical de  $\theta$  correspondant à des anomalies positives de température potentielle en altitude et négative dans les basses couches (figure III.11b). La stabilité verticale de l'atmosphère est ainsi renforcée. Cet effet ne pouvait être observé dans le cadre du modèle quasi-géostrophique où la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$  était fixée comme un paramètre du problème.

Ceci contraste avec l'évolution linéaire du vecteur singulier qui conserve des champs de valeur moyenne zonale nulle.

En considérant l'indice d'Eady  $\sigma_E = 0.31 \frac{f}{N} \frac{\partial u}{\partial z}$  comme un indicateur de la baroclinicité de l'écoulement (et ce, bien qu'il ne rende pas compte des mécanismes de croissance transitoire), les deux effets notés précédemment tendent à réduire celle-ci en augmentant  $N$  et en diminuant  $\frac{\partial u}{\partial z}$ . Les mécanismes à l'origine de cette diminution de la baroclinicité de l'environnement de la perturbation seront explicités dans la partie III.4.2.2.

Nous allons maintenant examiner les vecteurs singuliers non-linéaires. L'amplification non-linéaire de vecteurs singuliers non-linéaires calculés pour différentes énergies initiales demeure comparable à celle du vecteur singulier dominant pour des énergies initiales inférieures à  $0.1 J.kg^{-1}$ . Ensuite, les taux d'amplification diffèrent et la structure du NLSV s'écarte de celle du SV. Comme dans le cas quasi-géostrophique,



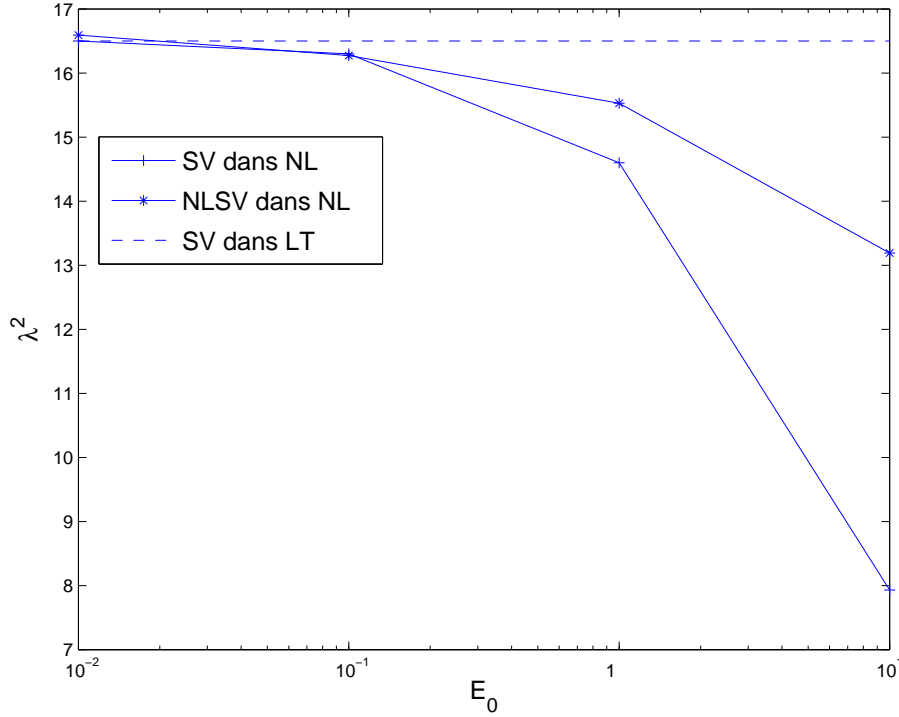


FIG. III.12 – Amplification énergétique des perturbations optimales linéaires et non-linéaires en fonction de l'énergie initiale  $E_0$  ( $J.kg^{-1}$ ) de la perturbation. (en pointillés est indiqué le taux de croissance linéaire du premier vecteur singulier).

le taux d'amplification non-linéaire du NLSV reste toujours inférieur au taux d'amplification linéaire du vecteur singulier (figure III.12 : les mécanismes non-linéaires de croissance sont donc moins efficaces que les mécanismes linéaires).

La structure initiale des NLSVs pour différentes énergies est donnée sur la figure III.13 : au fur et à mesure que l'énergie initiale des perturbations est augmentée les structures associées s'étalent principalement dans la direction méridienne et les champs présentent une moyenne zonale. Ce champ moyen renforce la baroclinicité de l'écoulement à l'instant initial ( $\sigma_E$  est augmenté d'après les mêmes arguments que précédemment), en instaurant des gradients méridien et vertical de température potentielle opposés à ceux observés au bout de la durée d'optimisation lors de l'évolution non-linéaire du SV.

Nous considérerons à partir de maintenant les propriétés du SV et du NLSV ayant une énergie initiale  $E_0 = 1.0 J.kg^{-1}$ .

Les diagrammes de Hovmöller de la figure III.14, associés à l'évolution non-linéaire du NLSV mettent en évidence des mécanismes similaires d'évolution pour les moyennes zonales des champs de température potentielle associés au NLSV et au SV (cf figure III.11) : les anomalies chaudes de température potentielle se déplacent vers les hautes couches et vers le Nord et inversement pour les anomalies froides.

L'impact du champ zonal moyen initial associé au NLSV sur la croissance de la perturbation est mesuré en calculant des vecteurs singuliers linéaires autour de

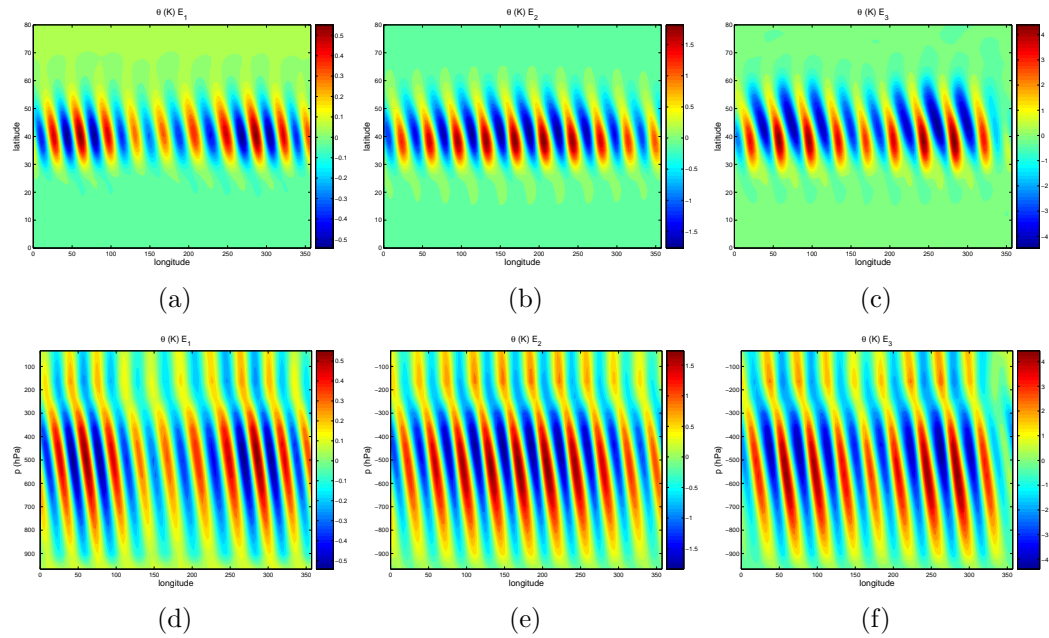


FIG. III.13 – Structure initiale des NLSVs pour différentes énergies. (a), (b) et (c) représentent  $\theta$  à 500 hPa pour les énergies  $E_0$  respectivement égales à  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$  et  $1 J.kg^{-1}$  tandis que (d), (e) et (f) sont les coupes verticales effectuées à  $40^\circ N$  associées aux mêmes énergies.

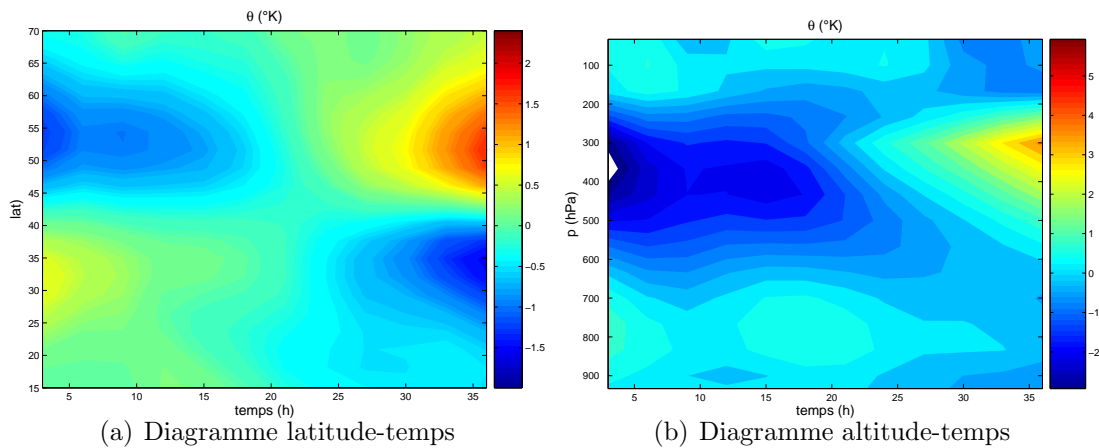


FIG. III.14 – Diagrammes de Hovmoeller associés à l'évolution non-linéaire du NLSV ( $E_0 = 1 J.kg^{-1}$ ).

l'état de base suivant :  $\tilde{X}_0(t) = X_0 + \langle \delta x(t=0) \rangle$  où  $\langle \delta x(t=0) \rangle$  est la moyenne zonale du NLSV à l'instant initial. Les vecteurs singuliers sont calculés en utilisant les modèles linéaire-tangent et adjoint linéarisés autour de cet état artifi-

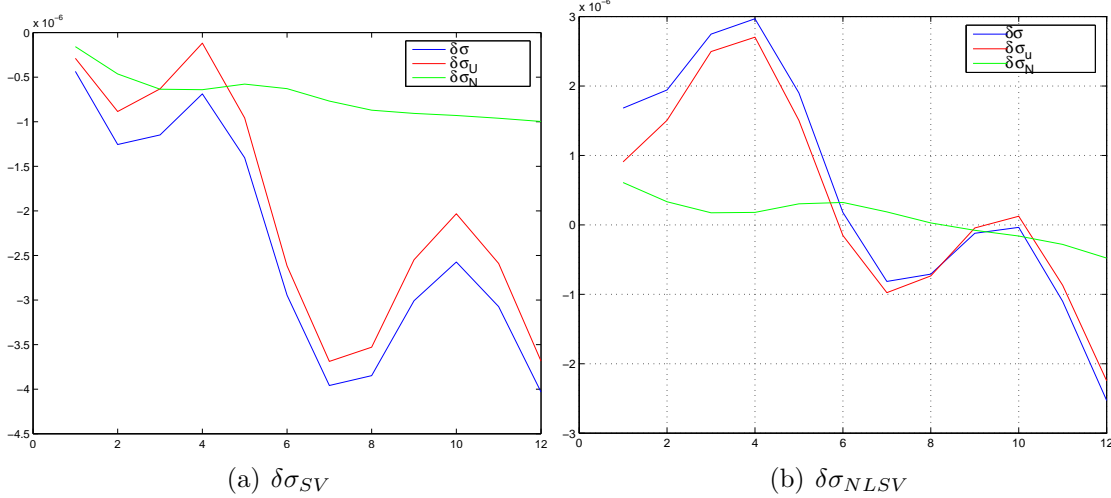


FIG. III.15 – Décomposition de la variation  $\delta\sigma$  de l'indice d'Eady associé : a) au SV et b) au NLSV.  $\delta\sigma_u$  représente la composante associée à la variation du cisaillement de vent et  $\delta\sigma_N$  une composante associée à la variation de la stabilité verticale.

ciellement maintenu stationnaire <sup>5</sup>. La comparaison des taux de croissance du SV de cette expérience avec celui de l'expérience de référence fournit une estimation de la modification de la baroclinicité de l'environnement modifié. Le nouveau taux d'amplification est de 56 contre 18 pour l'expérience de référence; l'optimalité du NLSV réside donc en partie en une modification judicieuse de l'environnement initial de la perturbation pour garantir une croissance maximale. Cette expérience ne tient pas compte de l'évolution non-linéaire de cet état de base modifié dont la baroclinicité diminue avec le temps par ajustement barocline.

Une seconde mesure de la baroclinicité de l'environnement qui présente le défaut de ne pas prendre en compte les mécanismes de croissance transitoire consiste à calculer le taux de croissance maximal des modes normaux en utilisant la formule de l'indice d'Eady. Afin d'évaluer l'importance relative de la diminution du cisaillement vertical et de l'augmentation de la stabilité verticale sur la croissance des perturbations, la contribution de chacun de ces deux effets à l'indice d'Eady a été évaluée. En supposant une dynamique faiblement non-linéaire, la variation de l'indice d'Eady  $\delta\sigma$  suite à une modification  $\delta(\partial_z u)$  du cisaillement de vent et  $\delta N$  de la fréquence de Brunt-Väisälä s'écrit :

$$\delta\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial(\partial_z u)}\delta(\partial_z u) + \frac{\partial\sigma}{\partial N}\delta N \quad (\text{III.13})$$

$$= 0.31\delta(\partial_z u)\frac{f}{N} - 0.31\frac{f\partial_z u}{N^2}\delta N \quad (\text{III.14})$$

La comparaison des deux termes du membres de droite de l'équation (III.14) (figure III.15) montre que la modification de la stabilité verticale n'a qu'un effet secondaire sur la baroclinicité ainsi évaluée, et ce aussi bien pour le SV (figure III.15a)

<sup>5</sup>Ce nouvel état de base n'a en effet aucune raison d'être une solution stationnaire du problème.

que pour le NLSV (figure III.15b). L'indice d'Eady de l'écoulement perturbé par le NLSV est à l'instant initial plus important que celui de l'état de base ce qui confirme une fois de plus le renforcement par la perturbation de la baroclinicité de l'écoulement.

### III.4.2.2 Interactions non-linéaires entre les perturbations baroclines et l'écoulement moyen

Dans ce qui précède, nous avons constaté l'influence de la modification de l'écoulement moyen sur la croissance de ces dernières. Cette partie est consacrée à l'étude détaillée de la nature de ces interactions. L'étude des interactions non-linéaires entre la perturbation et l'écoulement de référence peut se faire au moyen de deux outils. Le premier, sans doute le plus naturel, est la moyenne eulérienne qui regarde directement la valeur moyenne des termes non-linéaires associés à une écriture eulérienne classique des équations du problème. La seconde approche appelée moyenne eulérienne transformée (TEM), repose sur une réécriture des équations afin de regrouper les flux non-linéaires de température et de quantité de mouvement, liés par la loi du vent thermique, en une seule entité physique, le flux d'Eliassen-Palm (Andrews and McIntyre, 1976).

Dans ce qui suit nous adopterons les notation suivantes : l'indice 0 indique les grandeurs relatives à l'état de base zonal et stationnaire. Les grandeurs sans indice désignent les champs de perturbations. De plus, un champ  $f(x, y, p, t)$  pourra être décomposé comme la somme de sa moyenne zonale  $\bar{f}$  et d'une perturbation  $f'$  de cette moyenne telle que :

$$f(x, y, p, t) = \bar{f}(y, p, t) + f'(x, y, p, t) \quad (\text{III.15})$$

avec  $\bar{f}' = 0$ .

Les équations non-linéaires d'évolution des champs de température potentielle et de vent zonal associés aux perturbations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\theta} + \bar{v} \partial_y \theta_0 + \bar{\omega} \partial_p \theta_0 &= -\partial_y (\bar{v} \theta) - \partial_p (\bar{\omega} \theta) \\ &= -\partial_y F_y^\theta - \partial_p F_p^\theta \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} + \bar{v} \partial_y u_0 + \bar{\omega} \partial_p u_0 &= -\partial_y (\bar{v} u) - \partial_p (\bar{\omega} u) + f \bar{v} \\ &= -\partial_y F_y^u - \partial_p F_p^u + f \bar{v} \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

où l'on a utilisé le fait que l'état de base autour duquel les perturbations sont calculées est à la fois stationnaire et purement zonal. Le membre de droite des deux équations précédentes correspond à l'expression de la divergence des flux non-linéaires verticaux et horizontaux de chaleur ( $F_y^\theta$  et  $F_p^\theta$ ) ainsi que de quantité de mouvement ( $F_y^u$  et  $F_p^u$ ).

La figure III.16 représente l'intégrale temporelle sur la durée d'optimisation des termes non-linéaire de flux de température potentielle dans l'équation III.16 pour l'évolution du vecteur singulier dominant. Le flux méridien de température potentielle  $-\partial_y \bar{v} \theta$  transporte de la chaleur de l'équateur vers les pôles conformément à un

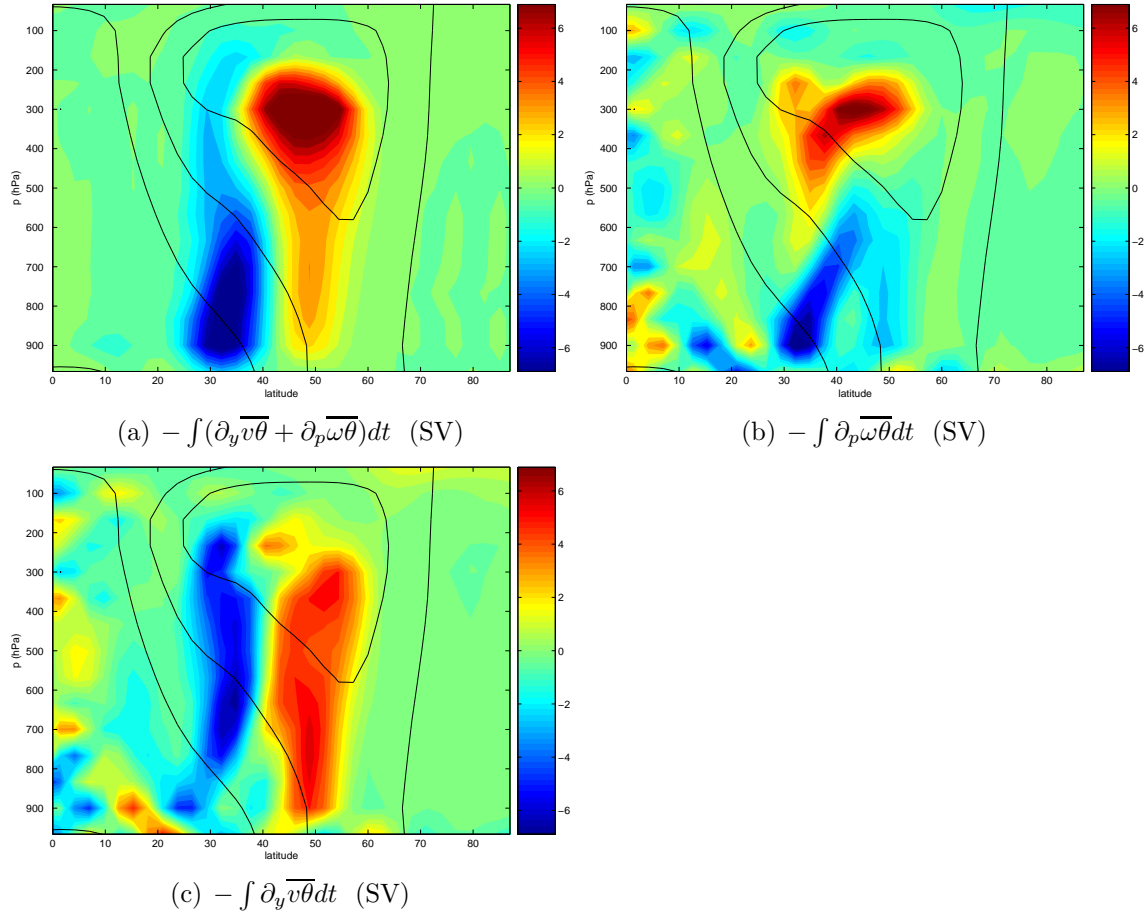


FIG. III.16 – Intégrale temporelle des termes non-linéaires de l'équation (III.16) d'évolution de la valeur moyenne zonale de température potentielle lors de l'évolution non-linéaire du vecteur singulier dominant ( $E_0 = 1 J.kg^{-1}$ ) sur la durée d'optimisation de 36h (en °K). En contours noirs est représentée la position du courant-jet de l'état de base.

mécanisme barocline, tandis que le flux vertical de température potentielle  $-\partial_p \overline{\omega\theta}$  réchauffe les hautes couches de l'atmosphère tout en refoiridissant en dessous de 500 hPa. Il en résulte l'apparition d'un gradient de température potentielle vertical qui augmente la stabilité verticale de l'atmosphère ainsi que d'un gradient méridien de  $\theta$  qui, d'après la relation du vent thermique, concourt à diminuer le cisaillement vertical de vent. Ces deux effets sont illustrés par la représentation des variations sur la durée d'optimisation de la valeur moyenne zonale de la température potentielle (figure III.17b) et de vent zonal (figure III.17a). La relation du vent thermique qui associe au cisaillement vertical de vent un gradient méridien de température potentielle est d'après ces deux figures qualitativement respectée. Nous avons ici une illustration du processus non-linéaire d'ajustement barocline (Stone, 1978) mentionné dans le premier chapitre.

Le vecteur singulier non-linéaire est soumis de façon identique aux processus d'ajustement barocline (figure III.18) et l'effet des non-linéarités sur les champs zo-

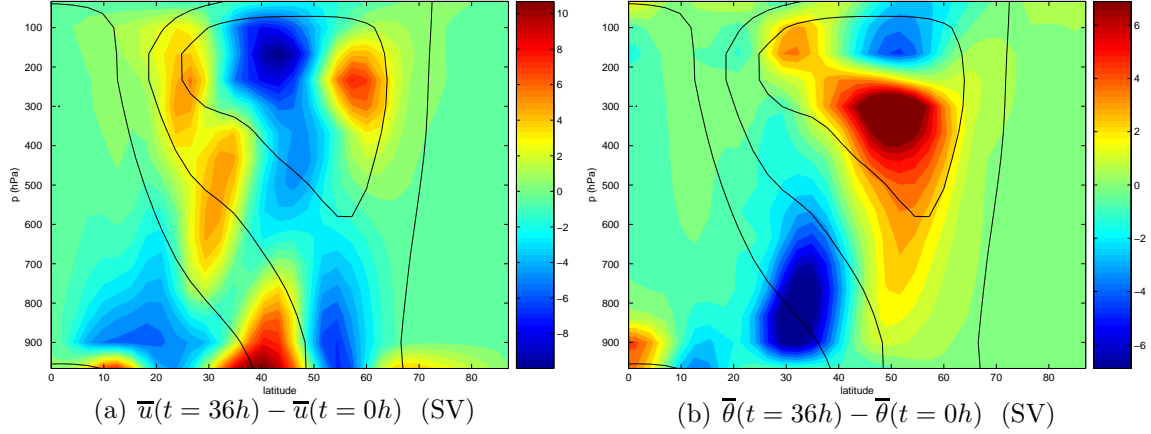


FIG. III.17 – Variation sur la durée d’optimisation de la valeur moyenne zonale du vent zonal ( $m.s^{-1}$ )  $\bar{u}(t = 36h) - \bar{u}(t = 0h)$  (a) et de température potentielle ( $^{\circ}K$ )  $\bar{\theta}(t = 36h) - \bar{\theta}(t = 0h)$  (b) correspondant à l’évolution non-linéaire du vecteur singulier linéaire ( $E_0 = 1J.kg^{-1}$ ) sur la durée d’optimisation

naux (figures III.19a et III.19b) est tout à fait comparable aussi bien qualitativement que quantitativement.

La méthode eulérienne classique présente le défaut principal de séparer la contribution des flux non-linéaires de chaleur et de quantité de mouvement. Or, d’après la relation du vent thermique, vérifiée de façon robuste à grande échelle et ce même par des écoulements dont la dynamique s’éloigne de la quasi-géostrophie, ces deux flux ne sont pas indépendants : la moyenne eulérienne transformée (TEM) permet après réécriture des équations du mouvement de regrouper les flux non-linéaires (Andrews and McIntyre, 1976). En utilisant la décomposition (III.15), les équations (III.16) et (III.17) s’écrivent :

$$\partial_t \bar{\theta} = -\bar{v} \partial_y (\bar{\theta} + \theta_0) - \bar{\omega} \partial_p (\bar{\theta} + \theta_0) - \partial_y \overline{v' \theta'} - \partial_p \overline{\omega' \theta'} \quad (\text{III.18})$$

$$\partial_t \bar{u} = -\bar{v} \partial_y (\bar{u} + u_0) - \bar{\omega} \partial_p (\bar{u} + u_0) - \partial_y \overline{v' u'} - \partial_p \overline{\omega' u'} + f \bar{v} \quad (\text{III.19})$$

où l’on a utilisé le fait que  $\overline{ab} = \overline{a\bar{b}} + \overline{a'b'}$ . Pour simplifier les écritures nous désignerons par  $\bar{\Theta} = \theta_0 + \bar{\theta}$  et  $\bar{U} = u_0 + \bar{u}$  les valeurs moyennes zonales des champs de températures potentielle et de vitesse zonale de l’écoulement total (trajectoire de base à laquelle s’ajoute la perturbation).

La TEM<sup>1</sup> consiste à introduire des nouvelles variables désignées ici par l’indice \* telles que

$$\psi^* = \frac{\overline{v' \theta'}}{\partial_p \bar{\Theta}} = \frac{\overline{v' \theta'}}{\partial_p (\theta_0 + \bar{\theta})} \quad (\text{III.20})$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} - \frac{\partial \psi^*}{\partial p} \quad (\text{III.21})$$

$$\bar{\omega}^* = \bar{\omega} + \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \quad (\text{III.22})$$

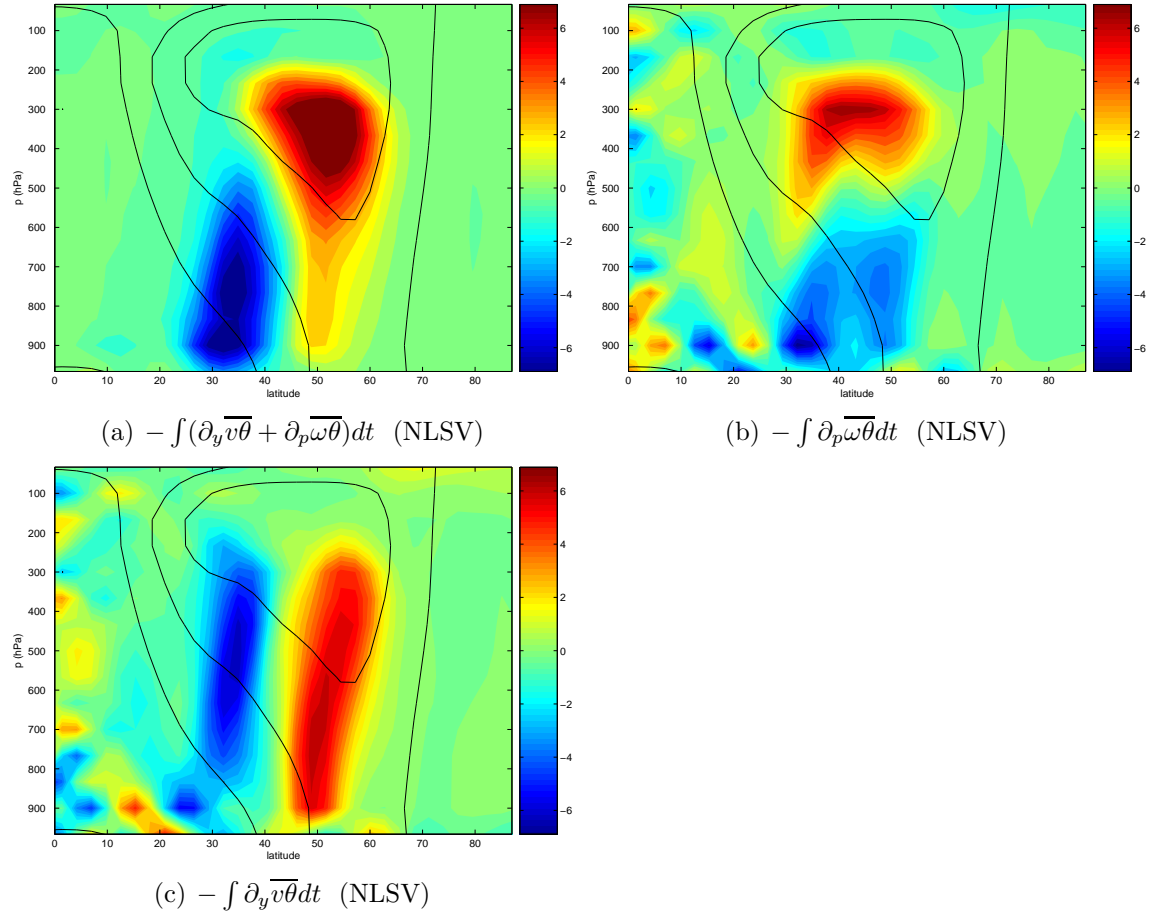


FIG. III.18 – Intégrale temporelle des termes non-linéaires de l'équation (III.16) d'évolution de la valeur moyenne zonale de température potentielle lors de l'évolution non-linéaire du NLSV ( $E_0 = 1 J.kg^{-1}$ ) sur la durée d'optimisation de 36h (en °K). En contours noirs est représentée la position du courant-jet de l'état de base. (à comparer avec l'évolution non-linéaire du SV figure III.16)

La vitesse eulérienne transformée ( $v^*, \omega^*$ ), non divergente par construction, possède une signification physique importante (Vallis, 2006) puisqu'il s'agit de la circulation atmosphérique moyenne pondérée par la masse.

Les équations (III.19) et (III.18) se réécrivent alors sous la forme suivante :

$$\partial_t \overline{U} = -\overline{v^*}(\partial_y \overline{U} - f) - \overline{\omega^*} \partial_p \overline{U} + \text{div}(\mathcal{F}_{ep}) \quad (\text{III.23})$$

$$\partial_t \overline{\Theta} = -\overline{v^*} \partial_y \overline{\Theta} - \overline{\omega^*} \partial_p \overline{\Theta} - \frac{\partial}{\partial p} (\overline{\omega' \theta'}) + \frac{\partial_y \overline{\Theta}}{\partial_p \overline{\Theta}} \overline{v' \theta'} \quad (\text{III.24})$$

$$0 = \partial_y \overline{v^*} + \partial_p \overline{\omega^*} \quad (\text{III.25})$$

<sup>1</sup>Les formules sont écrites ici dans le système de coordonnées cartésiennes dans le plan pour permettre plus de lisibilité ainsi qu'une meilleure compréhension des processus physiques. En pratique, les calculs ont été effectués en coordonnées sphériques conformément à la dérivation de Andrews and McIntyre (1976).

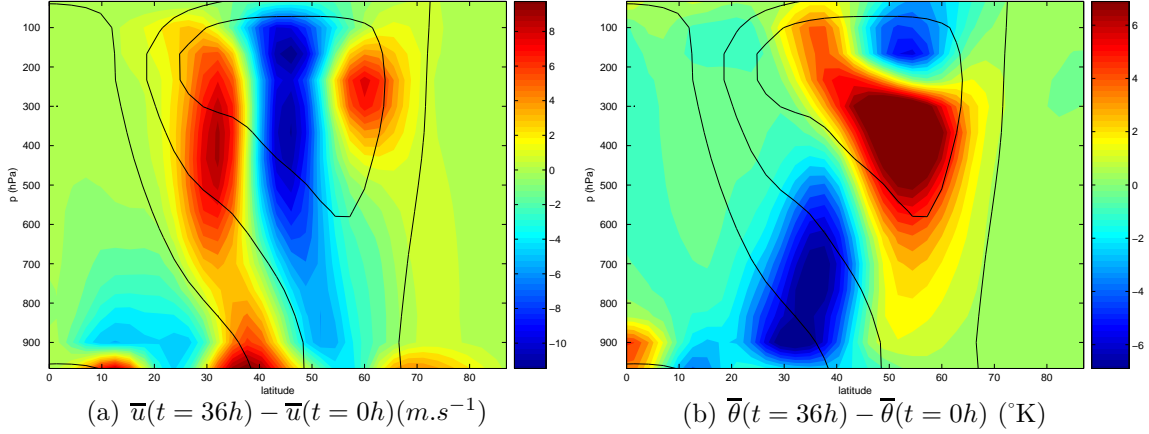


FIG. III.19 – Variation sur la durée d’optimisation de la valeur moyenne zonale du vent zonal  $\bar{u}(t = 36h) - \bar{u}(t = 0h)$  (a) et de température potentielle  $\bar{\theta}(t = 36h) - \bar{\theta}(t = 0h)$  (b) correspondant à l’évolution non-linéaire du NLSV ( $E_0 = 1.J.kg^{-1}$ ) sur la durée d’optimisation. (à comparer avec l’évolution non-linéaire du SV figure III.17).

où  $\mathcal{F}_{ep}$  désigne le flux d’Eliassen-Palm :

$$\mathcal{F}_{ep} = \left( \begin{array}{c} -\overline{u'v'} + \psi^* \partial_p \bar{u} \\ -\overline{u'\omega'} + \psi^* (f - \partial_y \bar{U}) \end{array} \right)$$

Le flux d’Eliassen-Palm regroupe en un forçage unique l’effet des flux non-linéaires de quantité de mouvement et de chaleur. D’après (III.23), ce forçage va ensuite être soit compensé par une accélération du courant moyen (terme  $\partial_t \bar{U}$ ) et/ou par une modification de la circulation eulérienne transformée (termes  $-\bar{v}^*(\partial_y \bar{U} - f) - \bar{\omega}^* \partial_p \bar{U}$ ). Cette modification des champs de vitesse eulériens transformés se traduit d’après (III.24) en une redistribution du champ de température potentielle advecté par  $(v^*, \omega^*)$  (en supposant le troisième terme du membre de droite négligeable ce qui est presque vrai comme nous le verrons par la suite). La figure III.20 montre la circulation eulérienne transformée associée à l’évolution non-linéaire du NLSV. Elle correspond à une unique cellule allant du nord vers le sud en altitude et dans le sens opposé dans les basses couches. Cette cellule est située au maximum de gradient méridien de température potentielle (ou de façon équivalente au maximum de cisaillement vertical). Ce mélange de température potentielle au sein de la zone barocline détruit les gradients de température potentielle. La tendance associée intégrée sur la durée d’optimisation  $\int_{t=0}^{t=T_F} (-\bar{v}^* \partial_y \bar{\Theta} - \bar{\omega}^* \partial_p \bar{\Theta}) dt$  (figure III.21) est une bonne approximation de la variation totale de la variation de la moyenne zonale de la température potentielle  $\bar{\Theta}(t = T_F) - \bar{\Theta}(t = 0)$  représentée figure III.19, le troisième terme du membre de droite de l’équation (III.24) étant alors presque négligeable pour le NLSV (non montré).

Cette condition permet de réduire l’équation (III.24) d’évolution de  $\bar{\Theta}$  à une équation d’advection par la vitesse eulérienne transformée sans avoir à rajouter de



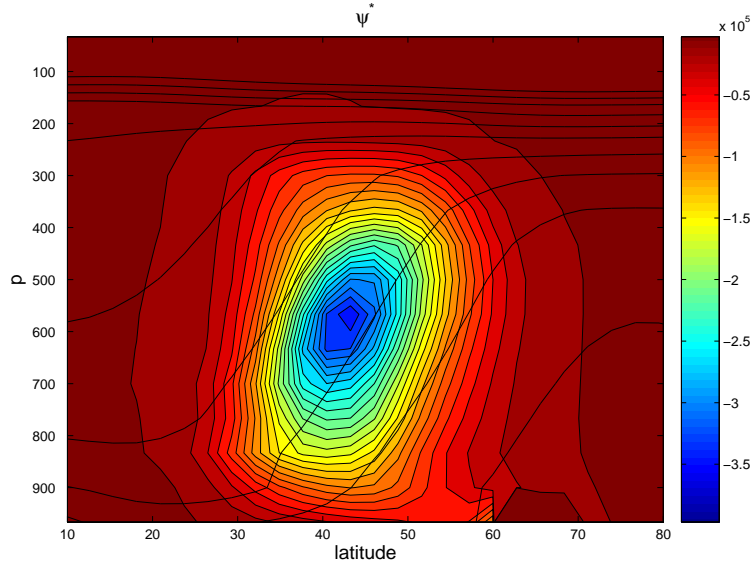


FIG. III.20 – Valeur moyenne temporelle sur 36h de  $\psi^*$  ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ) associée au NLSV. En contours est représentée le champ de température potentielle de l'état de base initial  $\theta_0$  afin de visualiser la zone barocline.

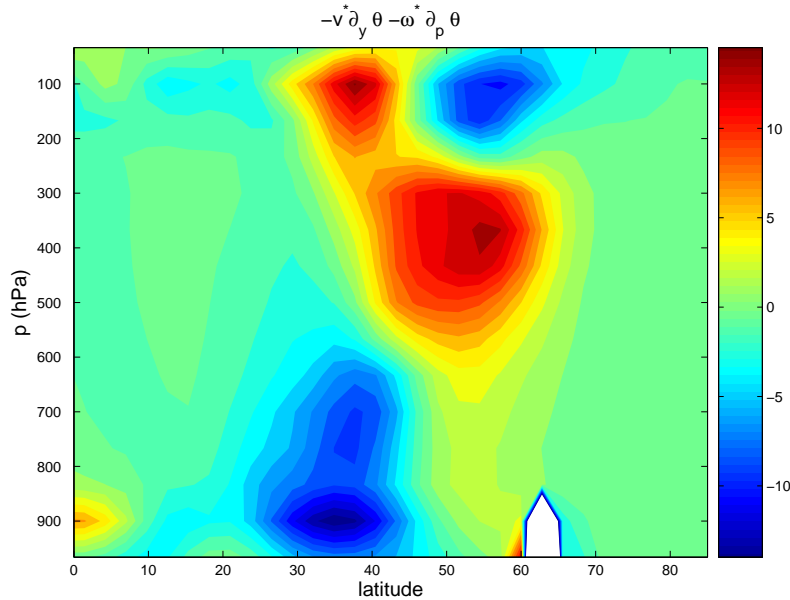


FIG. III.21 – Moyenne sur la période d'optimisation du terme d'advection de la moyenne zonale de la température potentielle par la circulation eulérienne transformée pour le NLSV :  $-\bar{v}^* \partial_y \bar{\theta} - \bar{\omega}^* \partial_p \bar{\theta}$  (en  $^\circ K$ ).

forçages supplémentaires :

$$\partial_t \bar{\theta} \approx -\bar{v}^* \partial_y \bar{\theta} - \bar{\omega}^* \partial_p \bar{\theta} \quad (\text{III.26})$$

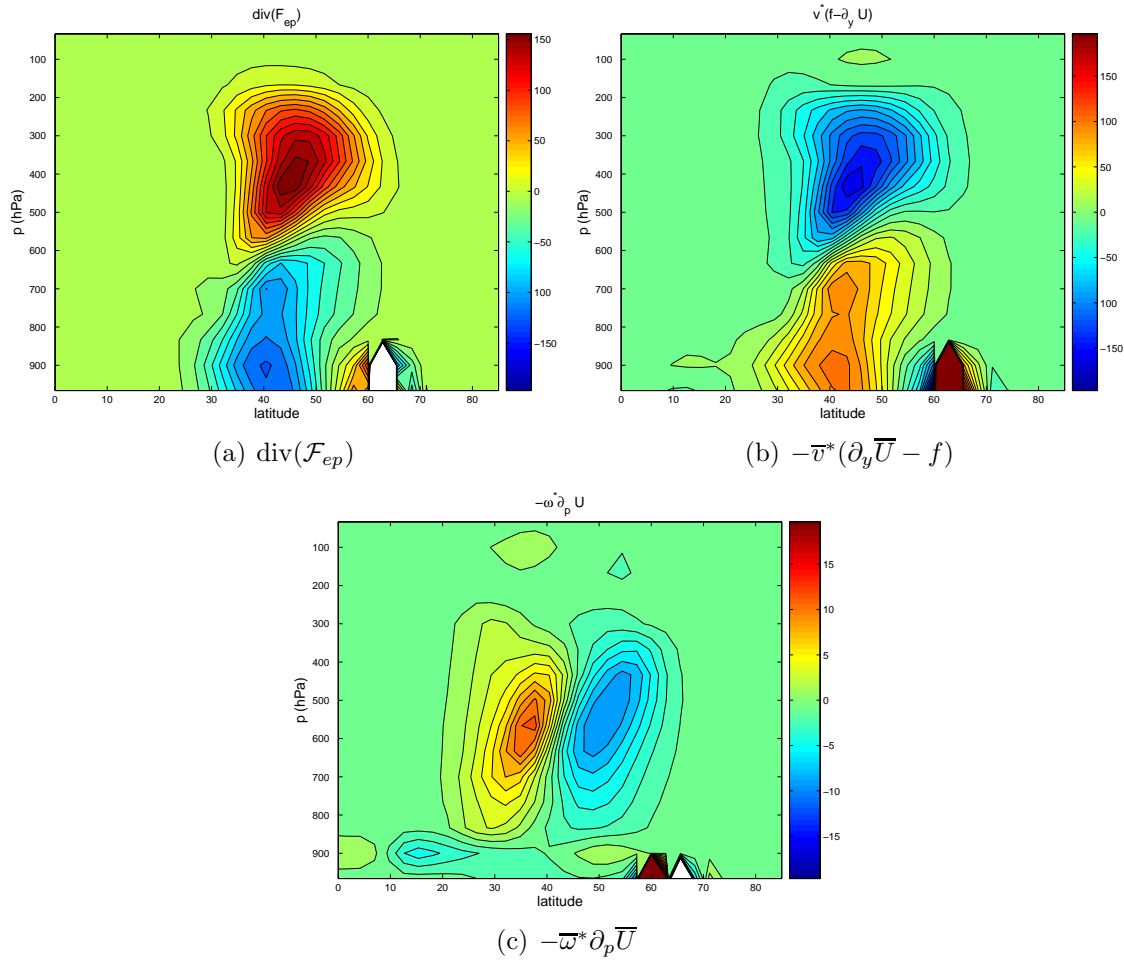


FIG. III.22 – Moyenne temporelle des différents termes du membre de droite de l'équation III.23 d'évolution de la vitesse zonale moyenne calculée pour le NLSV

La vitesse résiduelle  $(v^*, \omega^*)$  advecte ainsi la température potentielle moyenne en tenant compte de l'activité turbulente synoptique. La divergence du flux d'Eliassen-Palm correspond à un forçage de l'écoulement moyen par les perturbations dans l'équation d'évolution du vent zonal moyen. Le membre de droite de (III.23) est la différence entre deux termes qui se compensent presque,  $\text{div}(\mathcal{F}_{ep})$  d'un côté et  $-\bar{v}^*(\partial_y \bar{U} - f) - \bar{\omega}^* \partial_p \bar{U}$  de l'autre. La figure III.22 montre l'importance respective des différents termes du membre de droite de (III.23) pour le NLSV après intégration sur la durée d'optimisation. On remarque que l'équilibre suivant est alors vérifié en première approximation :

$$\text{div}(\mathcal{F}_{ep}) \approx -\bar{v}^* f - (\partial_y \bar{U}) \quad (\text{III.27})$$

Le schéma III.23 récapitule le principe de la circulation eulérienne transformée. La divergence du flux d'EP engendre d'après (III.27) un champ de vitesse méridienne  $\bar{v}^*$  de signe opposé. Ensuite, en utilisant la propriété de non-divergence de la vitesse eulérienne transformée, on complète cette circulation méridienne <sup>1</sup> au moyen d'une

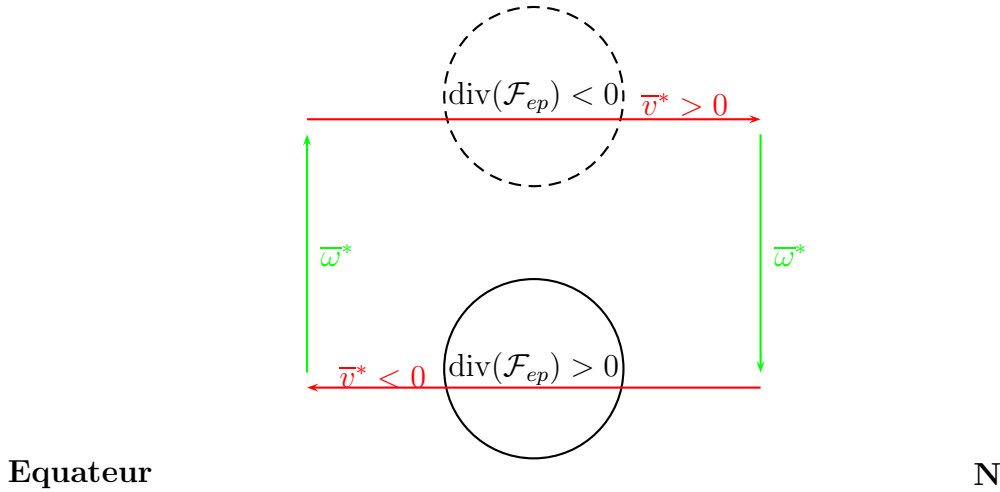


FIG. III.23 – Schéma illustrant l'influence non-linéaire des perturbations sur l'écoulement moyen au moyen de la divergence du flux d'EP à partir de la relation approchée  $\text{div}(\mathcal{F}_{ep}) \approx -\bar{v}^*(f - \partial_y \bar{U})$ . ( $\partial_y \bar{U}$  est en ordre de grandeur de 5 à 10 fois plus faible que  $f$ ).

composante verticale  $\bar{w}^*$

L'évolution non-linéaire du SV ne se traduit pas aussi clairement en termes de TEM. La figure III.24 met en évidence la présence de deux cellules de circulation, centrées autour de 300 et 800 hPa associées à deux maxima de  $\psi^*$ . Cette différence avec le NLSV est due à l'évolution du gradient vertical de température potentielle  $\partial_p \bar{\Theta}$  qui apparaît au dénominateur de (III.20). La figure III.25a représentant une coupe verticale de  $-\partial_p \bar{\Theta}$  au centre de la perturbation montre l'apparition rapide au cours de l'évolution non-linéaire du SV de deux minima situés autour de 300 et 800 hPa séparés par un maxima.

L'évolution non-linéaire du gradient vertical de la température potentielle totale (c'est-à-dire de la somme de l'état de base et de la perturbation)  $\bar{\Theta}$  est significativement différente dans le cas du SV et du NLSV :

- Dans le cas du SV,  $\partial_p \bar{\Theta}$  est multiplié par deux en moins de 6 heures à l'altitude de 500 hPa et est diminué de moitié dans les basses couches autour de 800 hPa (figure III.25a). Ensuite la structure moyenne zonale de température potentielle ne connaît pas d'évolution significative.
- La variation du gradient vertical de température potentielle totale est beaucoup plus modérée dans le cas du NLSV (figure III.25b). On note également une augmentation de  $-\partial_p \bar{\Theta}$  autour de 500 hPa et une diminution dans la partie inférieure de la troposphère.

La variation brutale de la stabilité verticale du SV suggère une condition initiale non équilibrée. En effet, les coupes verticales des champs non moyennés zonalement<sup>6</sup> de température potentielle du SV et du NLSV à  $t=0$ h (figure III.26) montrent

<sup>6</sup>Un raisonnement analogue permet de comprendre la formation des cellules de Hadley (Vallis, 2006)

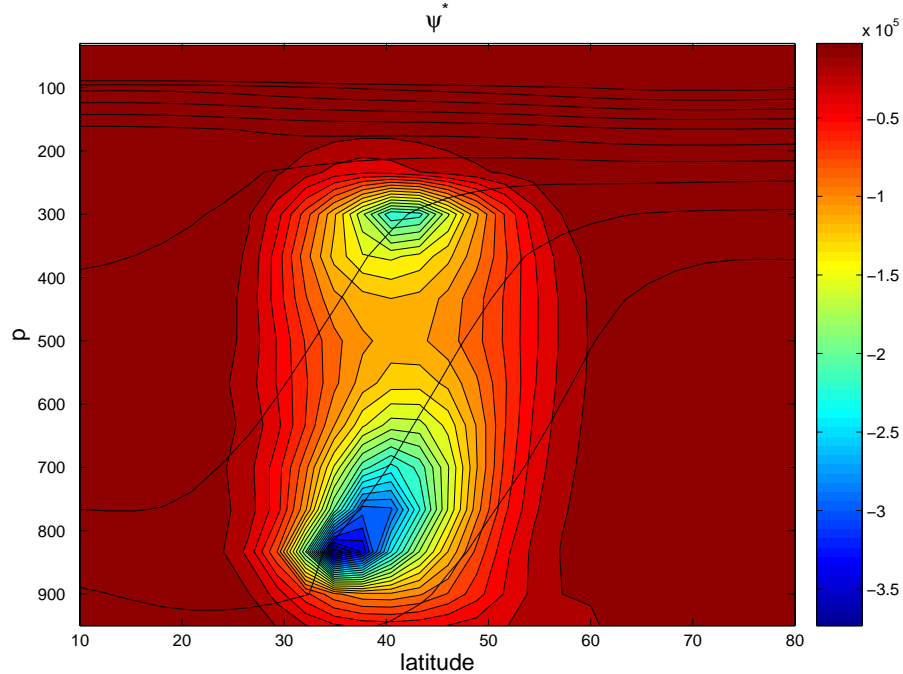


FIG. III.24 – Valeur moyenne temporelle sur 36h de  $\psi^*$  (couleur) associée au SV. En contours est représentée le champ de température potentielle de l'état de base initial  $\theta_0$

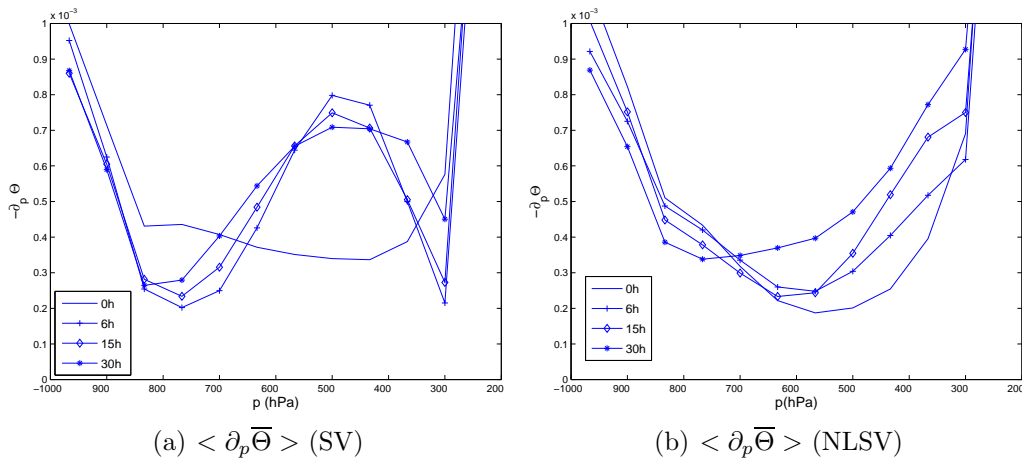


FIG. III.25 – Evolution du gradient moyen de température potentielle  $-\partial_p \bar{\Theta}$  pour l'écoulement total (état de base + perturbation optimale) à 40°N évalué pour le SV (a) et pour le NLSV (b).

que la stabilité verticale  $\partial_p \bar{\Theta}$  du SV change de signe par endroits. Par contre, la

<sup>6</sup>La valeur moyenne zonale du SV étant nulle, il est important de garder à l'esprit que les diagnostics à partir de champs moyennés zonalement peuvent masquer des processus locaux importants

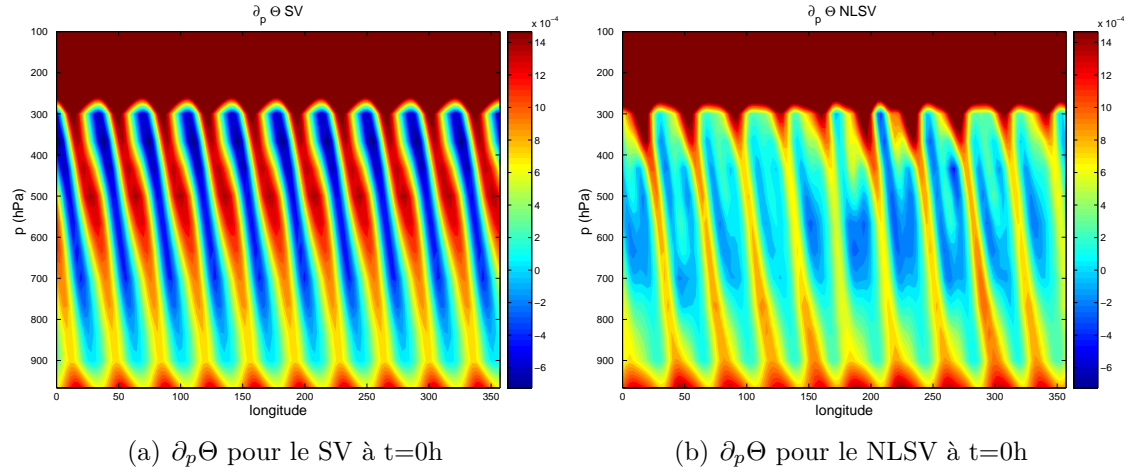


FIG. III.26 – Coupes verticales des champ initiaux de  $\partial_p \Theta$  pour le SV et le NLSV à t=0h

stabilité verticale du champ perturbé ne s'annule jamais dans le cas du NLSV et ce même pour des énergies initiales importantes. La structure verticale beaucoup plus fine par rapport au NLSV du SV provoque des gradients importants de température potentielle qui déstabilisent l'atmosphère. Il est intéressant de noter que le NLSV reste dynamiquement équilibré à l'instant initial, sans doute pour ne pas provoquer une relaxation brutale vers un équilibre qui serait moins favorable à la croissance barocline de la perturbation.

Une conséquence importante de ce qui précède est que l'équation III.24 ne peut plus s'écrire sous la forme  $\partial_t \bar{\Theta} + \bar{v}^* \partial_y \bar{\Theta} + \bar{w}^* \partial_p \bar{\Theta} = 0$ , le terme  $\frac{\partial}{\partial p} (\bar{\omega}' \theta' + \frac{\partial_y \bar{\Theta}}{\partial_p \bar{\Theta}} \bar{v}' \theta')$  n'étant plus négligeable devant l'advection par la circulation eulérienne transformée (figure III.27) à cause des flux verticaux non-linéaires de chaleur.

### III.4.3 Conclusion

La comparaison des structures spatiales des vecteurs singuliers linéaires et non-linéaires autour d'un écoulement zonal stationnaire obtenu grâce à la paramétrisation de Held et Suarez complète les résultats obtenus dans le chapitre II avec le modèle quasi-géostrophique. La contribution du NLSV à l'écoulement moyen se traduit ici non seulement par l'apparition d'un gradient méridien de température potentielle comme dans le modèle de Phillips, mais aussi par la présence d'un gradient vertical de température potentielle. En effet, dans un modèle aux équations primitives, l'ajustement barocline des perturbations consiste également en un transfert de chaleur en altitude qui stabilise verticalement l'atmosphère et diminue ainsi la baroclinicité de l'écoulement moyen.

L'étude des interactions non-linéaires entre l'écoulement moyen et les perturbations optimales au moyen du formalisme de la moyenne eulérienne transformée a permis

comme ici.

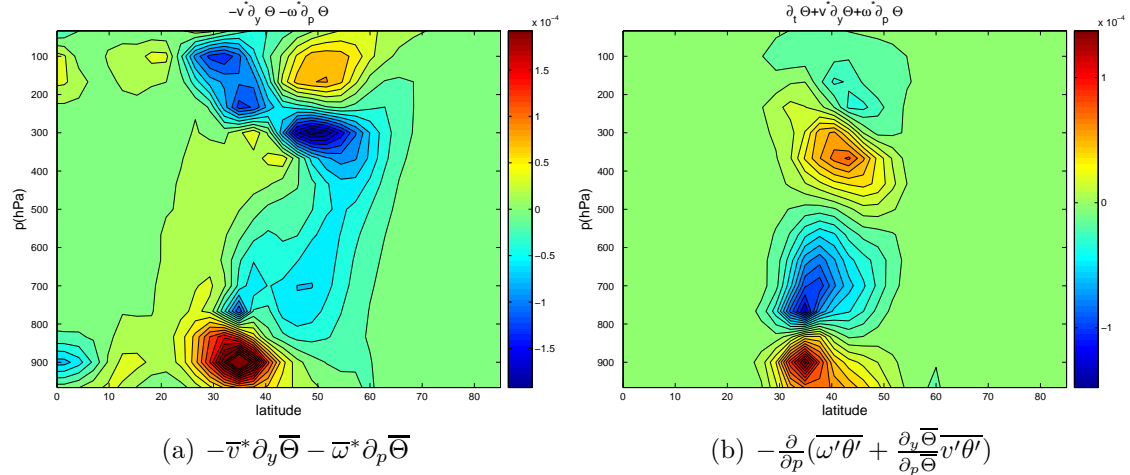


FIG. III.27 – Valeur moyenne temporelle des termes  $-\bar{v}^* \partial_y \bar{\Theta} - \bar{w}^* \partial_p \bar{\Theta}$  et  $-\frac{\partial}{\partial p} (\overline{\omega' \theta'}) + \frac{\partial_y \bar{\Theta}}{\partial_p} \overline{v' \theta'}$  de l'équation (III.24) pour l'évolution non-linéaire du SV

de mettre en évidence des différences importantes entre les évolutions non-linéaires du SV et du NLSV. Lorsque le SV est injecté dans le modèle non-linéaire avec une énergie initiale suffisamment importante, ce dernier rend l'atmosphère verticalement instable et provoque un réajustement brutal de celle-ci au moyen de flux verticaux de chaleur importants. Le NLSV, quelle que soit son énergie initiale, maintient sa structure verticale de façon à ce que l'atmosphère demeure stable verticalement afin d'éviter un réajustement convectif pénalisant la croissance de la perturbation.

En ce qui concerne l'applicabilité de cette méthode à l'atmosphère réelle, l'amplitude maximale initiale des perturbations correspondant à l'énergie initiale  $E_0 = 1 J.kg^{-1}$  pour laquelle nous avons étudié les propriétés du NLSV est de l'ordre de  $4^\circ K$  pour le champ de température potentielle de la perturbation. Cette valeur, très supérieure aux erreurs d'analyse actuelles, a été choisie de façon à obtenir un SV et un NLSV bien différenciés. L'exemple d'un NLSV calculé avec une physique sèche autour d'un écoulement ni zonal ni stationnaire figure III.28 montre la structure d'un NLSV différenciée de celle du SV pour une amplitude légèrement plus faible. Les coupes verticales de cette figure montrent l'apparition d'une diminution de la stabilité verticale de l'atmosphère comme nous l'avons vu dans la configuration Aquaplanet de PUMA et les coupes horizontales mettent en évidence un réarrangement méridien de la structure de la perturbation optimale entre les calculs linéaire et non-linéaire. Dans cette simulation, réalisée à une résolution spectrale de T63 avec une durée d'optimisation de 24h, le SV a un taux d'amplification linéaire égal à 58 et les taux d'amplification non-linéaires du NLSV et du SV sont respectivement de 56 et 51.

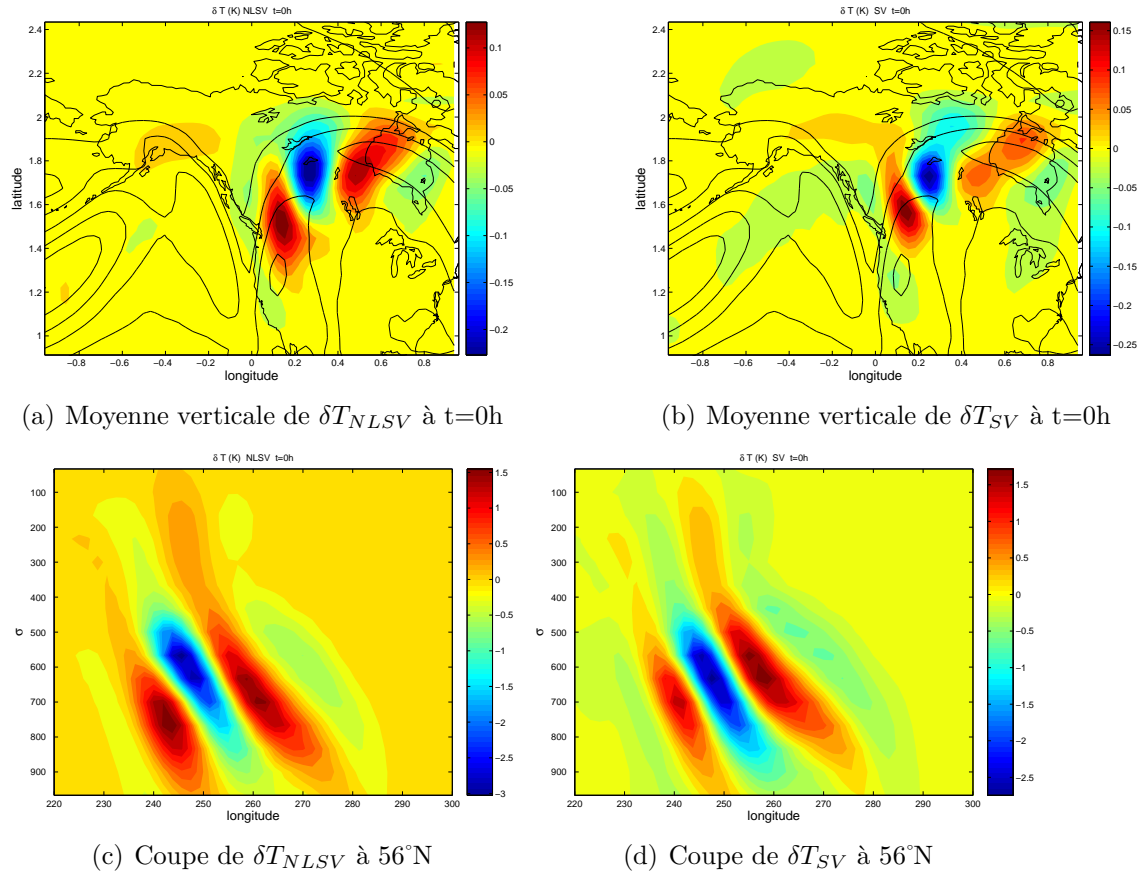


FIG. III.28 – Champs de température associés au SV et au NLSV à l’instant initial. Les contours noirs représentent la vitesse moyenne à 500 hPa et indiquent la position du jet







## IV

---

# Influence de l'ajout d'une physique humide sur les perturbations optimales

---

Les études de cas effectuées sur les grandes tempêtes qui ont récemment frappé les Etats-Unis (Février 2005) ou l'Europe (Décembre 1999) ont contribué à la prise en compte de l'importance des processus humides sur la cyclogénèse. L'exemple le plus marquant à cause de son actualité est sans doute celui de la première des deux tempêtes ayant touché l'Europe en Décembre 1999, la tempête Lothar ou T1. Wernli et al. (2002) ont en effet montré que le modèle HLM du centre allemand de prévision météorologique était incapable de prédire le creusement de la dépression associé au passage de la tempête sans tenir compte des processus humides. Des études ont été réalisées sur un nombre important de cas (Kuo and Low-Man, 1990; Kuo et al., 1991; Davis et al., 1993; Mallet et al., 1999; Chang et al., 1982; Stoelinga, 1996, pour n'en citer que quelques-uns), les conclusions de ces études demeurant partagées quant à l'importance respective à accorder aux processus diabatiques humides. Par exemple, Davis et al. (1993) estiment que le dégagement de chaleur ne fait que renforcer la circulation adiabatique sans en modifier la structure alors que d'autres études (Stoelinga, 1996) mettent en évidence une modification du mécanisme d'amplification des dépressions grâce aux processus diabatiques lorsque l'humidité est prise en compte. Ces études reflètent d'une grande variabilité suivant la situation étudiée et de la difficulté à estimer l'importance de la circulation diabatiquement induite. En effet, il existe un couplage entre la dynamique adiabatique qui provoque la condensation de la vapeur d'eau lors du mouvement ascendant des parcelles d'air et les processus diabatiques qui, suite au dégagement de chaleur latente, modifient la dynamique. Au-delà du rôle amplificateur de l'humidité dans le cyclogénèse, certaines de ces études évoquent la possibilité de mécanismes purement diabatiques de croissance des perturbations sans avoir recours à la théorie de l'instabilité barocline. Le dégagement de chaleur latente renforce alors l'ascendance, induisant une circulation

adiabatique qui se traduit par une convergence des vents dans les basses couches. Cette circulation apporte alors de l'humidité dans la zone d'ascendance qui est à son tour renforcée par la précipitation de cette eau. Ce mécanisme, où la convection interagit avec la grande échelle, a été introduit par Charney and Eliassen (1964) pour expliquer la formation des cyclones tropicaux et porte le nom d'instabilité conditionnelle de seconde espèce (CISK). Nous reviendrons ultérieurement sur ce mécanisme, dont l'applicabilité à la dynamique extra-tropicale est source de débats.

Ces incertitudes ont motivé de nombreuses études fondamentales au moyen de modèles simplifiés d'instabilité barocline reposant pour la plupart sur une formulation semi-géostrophique des équations du mouvement. Cette formulation permet d'examiner l'instabilité à l'échelle frontale (de l'ordre de 100-500 km) pour laquelle les vitesses agéostrophiques peuvent être importantes (un modèle de circulation générale ne résoud pas les échelles frontales). La variable humidité n'est généralement pas incluse dans les équations du problème, qui ne contiennent qu'une paramétrisation du dégagement de chaleur latente dans les régions d'ascendance. Notre travail ne concerne certes pas l'étude de ces instabilités humides, mais leur rôle dans la croissance des erreurs de prévision. Nous nous proposons donc d'étudier comment l'impact de la prise en compte du dégagement de chaleur latente à grande échelle affecte la prévisibilité. Après une introduction consacrée à la thermodynamique des processus humides et aux travaux dédiés à l'étude de l'instabilité modale et transitoire barocline humide, nous décrirons l'impact de l'inclusion du schéma de précipitation grande échelle sur les vecteurs singuliers du modèle aux équations primitives PUMA2 à travers l'étude de deux situations où les perturbations optimales exhibent des caractéristiques très différentes.

## IV.1 Introduction

### IV.1.1 Thermodynamique humide de l'atmosphère

La quantité de vapeur d'eau qu'un volume d'air donné peut contenir est fonction de la température de cette parcelle d'air. Lorsque celle-ci se refroidit, la pression partielle de vapeur d'eau atteint la pression partielle de vapeur d'eau à saturation  $p_s$  et la vapeur d'eau contenue dans cette parcelle se condense en eau liquide avec un dégagement de chaleur latente associé. La pression partielle de vapeur d'eau à saturation est donnée par la relation de Clausius-Clapeyron :

$$\frac{dp_s(T)}{dT} = \frac{Lp_s}{R_d T^2} \quad (\text{IV.1})$$

où  $L$  est la chaleur latente de condensation par unité de volume et  $R_d$  la constante de gaz parfait de l'air sec. L'humidité spécifique (définie comme la masse de vapeur d'eau par masse d'air sec en  $kg.kg^{-1}$ ) à saturation est alors donnée par :

$$q_{sat}(p, T) = \frac{\epsilon p_s(T)}{p - (1 - \epsilon)p_s(T)} \quad (\text{IV.2})$$

avec  $\epsilon = \frac{R_d}{R_v}$  le rapport des constantes de gaz parfait de l'air sec et de la vapeur d'eau.  $q_{sat}$  est alors une fonction croissante de la température  $T$ .

La précipitation est principalement provoquée par le refroidissement adiabatique des parcelles d'air lors de leur mouvement ascendant : en effet, en montant, celles-ci se détendent. Le refroidissement associé provoque la diminution de l'humidité à saturation et donc la condensation de la vapeur d'eau. Au-delà du niveau de condensation par ascendance, la parcelle d'air devient saturée. Considérons donc une parcelle d'air humide à saturation subissant un mouvement d'ascendance, la relation (I.3) est toujours vérifiée :

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\delta z) = g \frac{\theta^p(z + \delta z) - \theta_0(z + \delta z)}{\theta_0(z)} \quad (\text{IV.3})$$

La température potentielle  $\theta$  n'est plus conservée lors du mouvement de la parcelle à cause du dégagement de chaleur latente. On a alors

$$\theta^p(z + \delta z) = \theta^p(z) + \delta\theta$$

où  $\delta\theta$  provient du dégagement de chaleur latente. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit en ajoutant le terme de chauffage diabatique :

$$c_p \delta T - \frac{RT}{p} \delta p = -L \delta q$$

soit

$$\frac{\delta\theta}{\theta} = -\frac{L}{c_p T} \delta q \quad (\text{IV.4})$$

En appliquant cette relation au déplacement de la parcelle d'air (saturée) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\theta}{\theta} &= -\frac{L}{c_p T} \delta q_{sat} \\ &= -\frac{L}{T} \left[ \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \delta T + \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial p} \right)_T \delta p \right] \end{aligned}$$

(IV.3) devient alors :

$$\frac{D^2}{Dt^2}(\delta z) = g \left[ \frac{1}{\theta_0(z)} \frac{\partial \theta_0}{\partial z} - \frac{L}{T} \left( \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \frac{\partial T}{\partial z} + \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial p} \right)_T (-\rho g) \right) \right] \delta z \quad (\text{IV.5})$$

De façon similaire au cas sec, le profil de température est dit conditionnellement stable si :

$$\begin{cases} -\partial_z T_0 < \Gamma_s & \text{atmosphère conditionnellement stable} \\ -\partial_z T_0 > \Gamma_s & \text{atmosphère conditionnellement instable} \end{cases}$$

où l'expression de  $\Gamma_s$  est obtenue à partir de (IV.5) en utilisant la relation de Clausius-Clapeyron (IV.1) et l'approximation de (IV.2)  $q_{sat}(T) \approx \frac{\epsilon p_s(T)}{p}$  :

$$\Gamma_s = \frac{g}{c_p} \frac{1 - \rho L (\partial_p q_{sat})_T}{1 + L/c_p (\partial_T q_{sat})_p} \approx \Gamma_d \frac{1 + L q_{sat}/(R_v T)}{1 + L^2 q_{sat}/(c_p R_v T^2)} \quad (IV.6)$$

En pratique, comme le rapport  $L/(c_p T)$  est de l'ordre de 10,  $\Gamma_s < \Gamma_d$  : le dégagement de chaleur latente déstabilise donc le profil vertical atmosphérique.

La situation pour laquelle un déplacement vertical de la parcelle d'air demeure stable pourvu que la parcelle demeure non saturée mais est instable dès que celle-ci atteint la saturation est dit conditionnellement instable. Lors du mouvement ascendant d'une particule d'air saturée, le dégagement de chaleur latente associé réchauffe l'atmosphère et augmente ainsi la vitesse verticale de la particule. Le raisonnement de la partie I.2.1 appliqué à une particule d'air saturée dont la température décroît avec l'altitude selon le profil  $\Gamma_s$  permet d'obtenir l'expression de la stabilité statique humide  $N_m$  :

$$N_m^2 = \frac{g}{T_0} (\Gamma_s - \Gamma) < N^2 \quad (IV.7)$$

$$(IV.8)$$

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation précédente étant toujours positif, la précipitation et le dégagement de chaleur latente associé diminuent la stabilité verticale de l'atmosphère, une des conséquences étant l'augmentation des vitesses verticales par rapport au cas sec.

Nous avons vu que la température potentielle  $\theta$  n'était plus conservée pour une parcelle d'air dont la vapeur d'eau se condense. La température potentielle équivalente  $\theta_e$  est définie comme la température potentielle qu'aurait la parcelle d'air après condensation de toute son humidité (Emanuel, 1994). Son expression est obtenue après intégration de la relation (IV.4) entre l'état de la parcelle et un hypothétique état où toute l'humidité de la parcelle est condensée

$$\int_{\theta}^{\theta_e} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_q^{q=0} \frac{L}{c_p T} dq \quad (IV.9)$$

d'où l'expression approchée de  $\theta_e$  :

$$\theta_e = \theta \exp\left(\frac{Lq}{c_p T}\right) \quad (IV.10)$$

On montre facilement que la condition de stabilité conditionnelle de l'atmosphère est équivalente à un gradient vertical  $\partial_p \theta_e$  négatif dans les régions saturées.

## IV.1.2 Modes normaux humides. Ondes de Rossby diabatiques

Les premiers travaux consacrés à l'étude de l'instabilité barocline humide par une analyse en modes normaux remontent au début des années 80 (Emanuel et al., 1987a;

Emanuel, 1985; Wang and Barcilon, 1986; Mak, 1982). Ils reprirent la démarche de Eady (1949) et Charney (1947) avec des modèles quasi-géostrophiques ou plus souvent semi-géostrophiques. L'approximation semi-géostrophique permet d'étendre la validité des équations quasi-géostrophiques, non valables pour des vorticités de l'ordre du paramètre de Coriolis, aux écoulements frontaux. Ces études n'incorporent pas la variable humidité aux équations du modèle mais paramétrisent uniquement le dégagement de chaleur latente dans les régions d'ascendance. Dans la littérature, des variantes de deux paramétrisations suivantes existent :

- la paramétrisation introduite par Emanuel (1985). Dans les régions d'ascendance, la stabilité verticale  $N^2$  est remplacée par une stabilité verticale humide  $N_m^2$ .
- la paramétrisation de Snyder and Lindzen (1991) dite de type CISK. L'atmosphère est considérée conditionnellement instable et l'instabilité convective interagit avec la circulation à grande échelle par le mécanisme de type CISK. Le dégagement de chaleur latente est alors estimé dans les régions d'ascendance comme proportionnel au flux d'humidité dans les basses couches ou à la vitesse verticale  $w_b$  au niveau de la base des nuages située à une altitude  $z_b$  :

$$\frac{d\theta}{dt} = \epsilon \overline{\partial_z \theta} w_b h(z) \quad (\text{IV.11})$$

où  $h(z)$  est un profil vertical de chauffage normalisé variant selon les études et  $\epsilon$  un paramètre adimensionnel contrôlant l'amplitude du chauffage. Le profil vertical  $h(z)$  rend compte de la modification du profil vertical de température par la convection qui le rend stable. Cette paramétrisation se base sur le concept d'instabilité conditionnelle de second type (CISK). Introduit par Charney and Eliassen (1964) pour expliquer la formation des cyclones tropicaux, ce mécanisme consiste, comme nous l'avons déjà mentionné, en une convergence de vent dans les basses couches induite par l'ascendance due à la convection humide. Cette convergence apporte de l'humidité dans la zone d'ascendance entraînant ainsi la convection.

Si les résultats des différents groupes diffèrent quelque peu à cause du degré de complexité du modèle utilisé ou du choix de la paramétrisation de précipitation, de ces études se dégagent unanimement trois idées principales (Emanuel et al., 1987b; Wang and Barcilon, 1986; Mak, 1982) :

- l'ajout d'humidité augmente le taux de croissance du mode le plus instable
- la longueur d'onde associée au mode le plus instable est déplacée vers les petites échelles
- la plage de nombres d'ondes instables augmente et suivant la paramétrisation du dégagement de chaleur latente utilisée, on peut même observer la disparition du nombre d'onde de coupure aux petites échelles observé dans le cas sec : l'atmosphère est alors instable à tous les nombres d'onde.

Les deux premiers points peuvent être appréhendés à partir des résultats issus de la théorie sèche de l'instabilité barocline. En effet, les études théoriques sur le modèle d'Eady sec à partir de modes normaux prédisent un taux de croissance maximal donné par l'indice d'Eady  $\sigma_E = 0.31 \frac{f}{N} \frac{dU}{dz}$  pour une longueur d'onde égale à  $\lambda_m =$

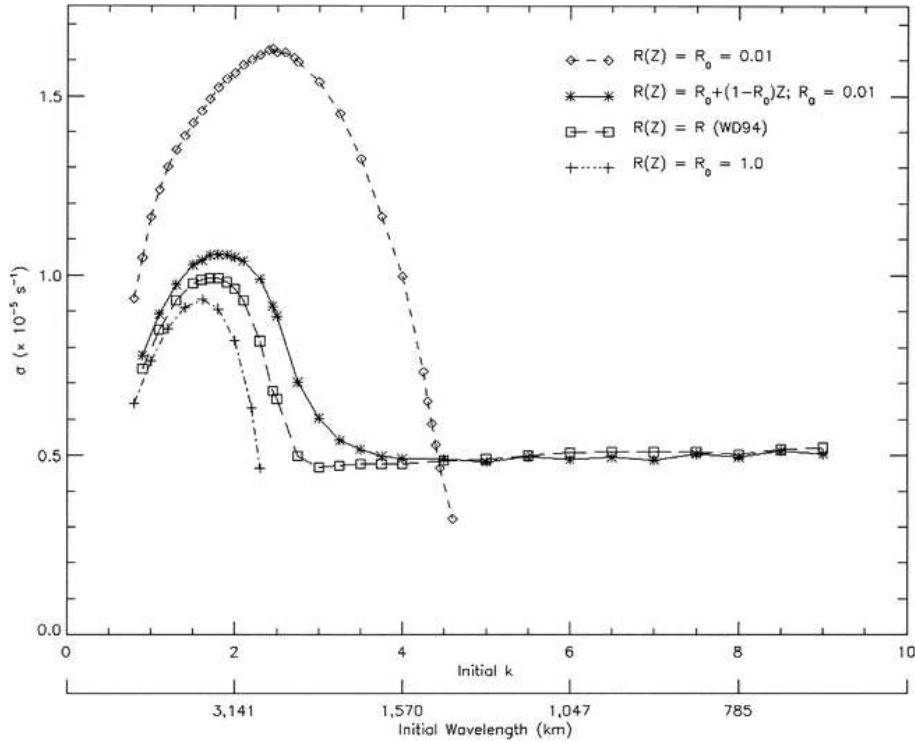


FIG. IV.1 – Taux de croissance de l’instabilité barocline humide en fonction du nombre d’onde initial adimensionné et de la longueur d’onde initiale pour différentes paramétrisations du dégagement de chaleur latente. La courbe  $R(Z)=1.0$  correspond au cas sec, les autres courbes correspondent à différentes paramétrisations des processus diabatiques. Cette figure est tirée de Moore and Montgomery (2004)

$1.25r_d = 1.25\frac{NH}{f}$  où  $r_d$  est le rayon de déformation. La diminution de la stabilité effective par le dégagement de chaleur latente rend alors compte de la diminution de  $\lambda_m$  et de l’augmentation de  $\sigma_E$  par rapport au cas sec dans le modèle d’Eady.

La figure IV.1, analogue humide de la figure I.9, rend compte de ces conclusions. Cette figure met en évidence deux régimes, le premier pour des longueurs d’onde supérieures à 1800 km auquel on associe des modes baroclines classiques, et le second, associé aux longueurs d’ondes plus petites que 1800 km. Dans ce dernier régime où le taux de croissance des perturbations est quasi-constant, les structures ne présentent plus les caractéristiques d’une onde barocline classique (Moore and Montgomery, 2004) et s’amplifient par le mécanisme diabatique décrit plus haut : elles sont appelées ondes de Rossby diabatiques (DRW). La figure IV.2 montre l’importance relative de la création d’énergie potentielle par des effets diabatiques et par extraction barocline en fonction de la longueur d’onde initiale. Pour des longueurs d’onde inférieure à 1800 km, l’extraction d’énergie potentielle s’effectue par des processus baroclines : ce régime correspond aux ondes baroclines classiques. Pour des longueurs d’onde au-delà de 1800km, les processus diabatiques prennent le dessus sur le mécanisme d’instabilité barocline. Le dégagement de chaleur latente alimente

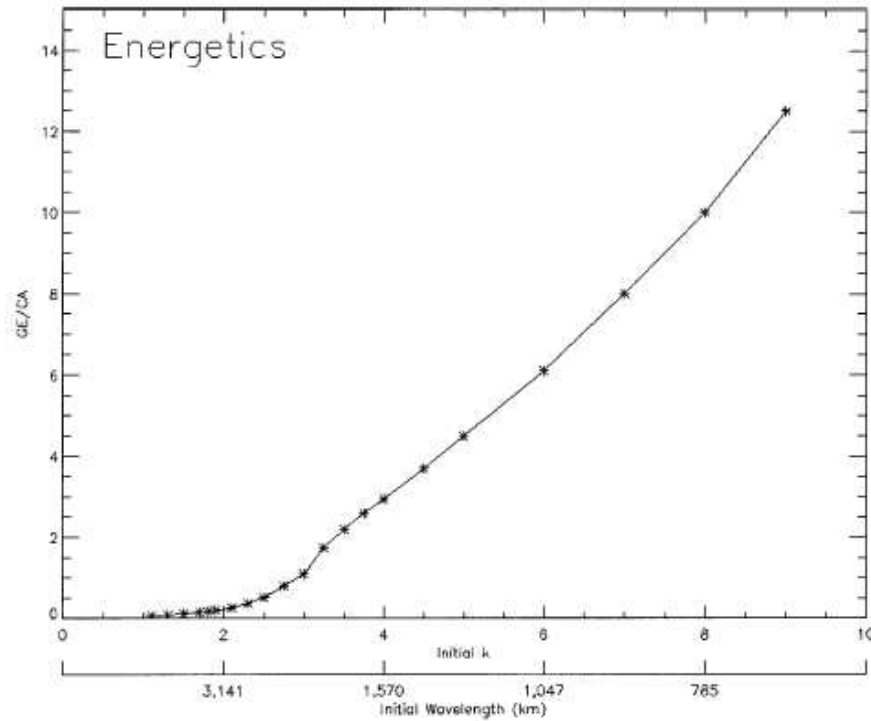


FIG. IV.2 – Rapport entre création d'énergie potentielle par des processus diabatiques et par un mécanisme barocline. D'après Moore and Montgomery (2004)

l'onde en énergie potentielle, le mécanisme d'instabilité est de type CISK.

L'existence de ces deux régimes a aussi été mise en évidence dans Lapeyre and Held (2004). En faisant varier la valeur du coefficient de dégagement de chaleur latente dans un modèle non-linéaire quasi-géostrophique humide, Lapeyre and Held (2004) montrent qu'au-delà d'une valeur critique de  $L$  apparaît un nouveau régime où l'écoulement est dominé par des tourbillons cycloniques tirant leur énergie du dégagement de chaleur latente, le mécanisme de formation de ces tourbillons pouvant être interprété comme celui des ondes de Rossby diabatiques (DRW). La dynamique de ces ondes a été étudiée par Parker and Thorpe (1995) et interprétée comme une onde de Rossby s'autoamplifiant grâce au dégagement de chaleur latente (figure IV.3). Le dégagement de chaleur latente crée une anomalie de vorticité potentielle en altitude interagissant avec le champ de vorticité potentielle en surface et créant une amplification mutuelle des structures dans les basses couches et en altitude.

Si ces ondes de Rossby diabatiques sont mises en évidence par des études théoriques, leur existence réelle est sujet   de nombreux d ebats, le rôle joué par l'humidité et par les processus baroclines étant souvent difficile à séparer. De plus, la longueur d'onde de transition entre l'onde barocline humide et l'onde de Rossby diabatique d epend fortement de la paramétrisation du d egagement de chaleur latente utilisée ce qui rend difficile la projection des résultats théoriques sur des situations réelles. Si les



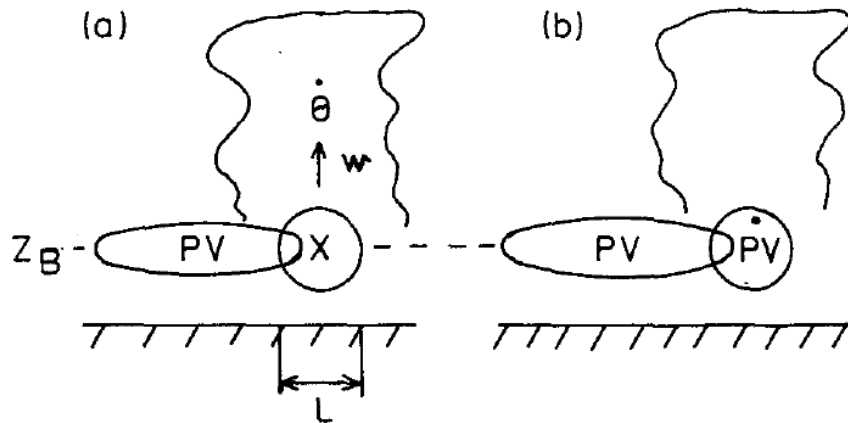


FIG. IV.3 – Mécanisme de propagation de l'onde de Rossby diabatique. D'après Parker and Thorpe (1995)

études basées sur les paramétrisations de type (IV.11) montrent l'existence d'ondes de Rossby diabatiques pour des valeurs du paramètre  $\epsilon$  supérieures à 1.4 (Craig and Cho, 1988), l'estimation de ce paramètre à partir des observations, montre une grande variabilité (voir Craig and Cho (1988) pour une revue des estimations de ce coefficient).

Des études de cas (Wernli et al., 2002) ont montré que Lothar, la première des deux tempêtes ayant frappé l'Europe de l'Ouest en Décembre 1999, serait un cas réel d'ondes de Rossby diabatiques. De même, un article à paraître (Moore et al., 2007) identifie la tempête ayant frappé le Nord-Est des Etats-Unis en Février 2005 comme une DRW. Mallet et al. (1999) se sont intéressés à une des dépressions dont la campagne de mesure FASTEX<sup>1</sup> a permis une étude détaillée. En séparant la contribution de la dynamique et des processus diabatiques dans l'équation de la vitesse verticale, ils montrent ainsi qu'après une phase de croissance barocline, l'évolution de la tempête IOP17 est entièrement pilotée par les processus diabatiques selon un mécanisme qui semble être celui des ondes de Rossby diabatiques. Ils estiment la valeur du paramètre  $\epsilon$  dans leur simulation entre 2.5 et 6.5, valeurs qui se situent largement dans le domaine d'existence des ondes de Rossby diabatiques (Craig and Cho, 1988).

### IV.1.3 Mécanismes transitoires d'instabilité barocline humide

Les études de perturbations optimales appliquées à l'instabilité barocline humide sont peu nombreuses. Tippett (1999) a été le premier à étudier les vecteurs singuliers

<sup>1</sup>FASTEX (Fronts and Atlantic Storm-Track EXperiment) est un projet de recherche scientifique destiné à l'étude des dépressions se formant et se développant sur l'Atlantique Nord dans le but d'en améliorer la prévision.

dans un modèle simplifié d'instabilité barocline humide, le modèle d'Eady à deux dimensions, généralisant ainsi les résultats de la partie précédente (augmentation du taux d'amplification des structures et diminution de l'échelle spatiale lorsqu'on inclut l'humidité) aux perturbations optimales. Il convient aussi de citer les travaux de Joly (1991) sur l'étude d'instabilités frontales humides dans un modèle semi-géostrophiques au moyen de la méthode des modes normaux sur un temps fini autour d'un état de base non stationnaire. Il montre que dans le cas d'une frontogénèse rapide, les modes baroclines classiques à grande échelle possèdent une croissance plus rapide que des modes frontaux de longueur d'onde plus faible ( $< 1000\text{km}$ ) mis en évidence par Moore and Peltier (1987) dans le cas sec. Néanmoins, dans le cas humide, lorsque la baroclinicité de l'écoulement (i.e le gradient méridien de température potentielle ou le cisaillement de vent vertical) est diminuée au fur et à mesure de l'évolution de la dépression, la croissance du mode frontal de petite échelle augmente jusqu'à dépasser la croissance du mode barocline classique lorsque la dépression est en fin de vie (Joly, 1991).

Les calculs de vecteurs singuliers humides effectués par Coutinho et al. (2004); Hoskins and Coutinho (2005) avec le modèle du CEPMMT montrent dans certains cas l'apparition de nouvelles structures optimales lorsque l'humidité est incluse dans la physique linéaire et soulignent l'importance d'utiliser une physique linéarisée humide pour obtenir des perturbations optimales localisées dans les régions sensibles de l'écoulement.

L'inclusion d'une composante humide au vecteur singulier aux instants initial et final soulève la question de la définition d'une norme "humide" (Errico et al., 2004). Le choix de cette dernière n'est pas évident et sera l'objet de discussions dans la partie V.2.2.

## IV.2 Influence de la physique humide sur les perturbations optimales

Cette partie présente le calcul de vecteurs singuliers humides, c.à.d calculés avec des modèles linéaire-tangent et adjoint incluant une paramétrisation de la précipitation grande échelle et où la variable humidité a été ajoutée. Dans le calcul des perturbations optimales, nous utiliserons des normes sèches n'incluant pas de champs d'humidité. Le champ d'humidité sera donc initialisé à zéro pour les vecteurs singuliers. Nous justifierons le choix d'une telle norme pour étudier l'humidité dans le chapitre V. En plus de la situation météorologique de la partie III.3, nous étudierons une nouvelle situation météorologique où l'inclusion des processus humides permet la mise en évidence d'instabilités purement humides.

### IV.2.1 Physique humide de PUMA2

Dans le modèle PUMA2, nous avons choisi de conserver uniquement la paramétrisation de la précipitation grande échelle. Les processus de précipitation convective ne sont pas modélisés ici. Plusieurs études (Coutinho et al., 2004) ont en effet

montré que l'influence de cette dernière sur les perturbations optimales dans un modèle aux équations primitives était secondaire et le travail de développement du linéaire-tangent et de l'adjoint de la précipitation convective a ainsi été évité. La paramétrisation de la précipitation convective n'a pas non plus été incluse dans le modèle non-linéaire.

Le schéma non-linéaire de précipitation grande échelle opère dans l'espace réel. La pression à saturation est évaluée grâce à une solution approchée de la relation de Clausius-Clapeyron, la formule de Tetens :

$$p_s(T) = a_1 \exp\left(a_2 \frac{T - T_0}{T - T_3}\right) \quad (\text{IV.12})$$

avec  $a_1 = 610.78Pa$ ,  $a_2 = 17.27$ ,  $T_3 = 35.86K$  et  $T_0 = 273.16K$ . Lorsque l'humidité relative excède 100% ( $q > q_{sat}(T, p)$ ), la vapeur d'eau en excès est condensée et de la chaleur latente est dégagée. Afin de pouvoir ajuster l'humidité relative à 100%, la température et l'humidité doivent vérifier après le passage par l'opérateur de précipitation :

$$\begin{aligned} q + \delta q &= q_{sat}(T + \delta T, p) \\ c_p \delta T &= -L \delta q \end{aligned}$$

où  $\delta T$  et  $\delta q$  représentent les ajustements effectués par l'opérateur de précipitation sur les champs de température et d'humidité. La deuxième condition est une conséquence de la conservation de l'enthalpie humide du système.

Une procédure itérative est utilisée pour calculer les tendance d'humidité et de température :

$$\delta T = \frac{L}{c_{pm}} \frac{q - q_{sat}(T)}{1 + \frac{L}{c_{pm}} \partial_T q_{sat}} \quad (\text{IV.13})$$

$$\delta q = -\frac{q - q_{sat}(T)}{1 + \frac{L}{c_{pm}} \partial_T q_{sat}} \quad (\text{IV.14})$$

avec  $c_{pm} = c_p(1 + q(c_v/c_d - 1))$  la capacité spécifique de l'air humide. Cette procédure est exécutée une seconde fois en utilisant comme nouvel état initial  $T + \delta T$  et  $q + \delta q$ . Ce schéma est appliqué uniquement dans les régions sursaturées, ce qui se traduit par une instruction conditionnelle de type "si  $q > q_{sat}$ ". Une telle instruction n'étant à priori pas différentiable, il n'est pas possible d'écrire une version linéaire-tangente exacte de cette routine. Sous l'hypothèse de perturbations infinitésimales  $q'$  et  $q'_{sat}$  des champs d'humidité et d'humidité à saturation,  $q + q' - (q_{sat} + q'_{sat})$  demeure du même signe que  $q - q_{sat}$  et le résultat de l'instruction conditionnelle demeure inchangé. Cette linéarisation approchée n'est plus valable pour des perturbations infinitésimales lorsque  $q = q_{sat}$  et pour des perturbations réelles lorsque l'humidité est proche de l'humidité à saturation et que des variations des champs d'humidité et/ou de température peuvent permettre un franchissement du seuil. Les comparaisons entre les évolutions linéaires et non-linéaires de perturbations dans des modèles incluant une physique humide (Vukicevic and Errico, 1993; Errico and

Reader, 1999; Mahfouf, 1999) ont montré que malgré d'inévitables erreurs au niveau de la localisation de seuils, l'ajout des processus humides (convection humide et précipitation grande échelle) dans le modèle linéaire-tangent permettait d'en améliorer la précision par rapport au linéaire-tangent sec. Par ailleurs, plusieurs travaux ont montré qu'une linéarisation sélective et non complète des schémas non-linéaires de convection humide permettait d'obtenir des meilleurs résultats (Mahfouf, 2005) de façon similaire à ce qui avait été observé par Laroche et al. (2002) pour les schémas de diffusion verticale.

Nous avons choisi de linéariser l'opérateur de précipitation exactement, en conservant l'instruction conditionnelle associée à la condition à saturation : la linéarisation effectuée dépend alors de la position du point considéré par rapport au seuil.

## IV.2.2 Dispositif expérimental

L'étude de l'impact de l'humidité sur la structure et l'amplification des perturbations optimales sera présentée à partir de l'étude de deux situations météorologiques différentes, la première représentative des résultats obtenus en calculant des vecteurs singuliers extra-tropicaux sur des situations hivernales et la deuxième plus originale qui permet la mise en évidence de nouvelles structures humides que nous étudierons. Chacune des deux situations a été obtenue à partir de sorties du mois de Décembre du modèle complet (incluant couplage avec l'océan et la végétation), injectés pendant deux jours dans le modèle linéaire simplifié (physique non-linéaire décrite dans le chapitre III à laquelle s'ajoute le schéma de précipitation grande échelle) pour être dynamiquement équilibrées. Pour les deux expériences, les paramètres expérimentaux sont identiques à ceux décrits dans la partie III.3.1, à la différence près que le schéma de précipitation linéarisé a été inclus dans le modèle linéaire-tangent et son adjoint dans la version adjointe du modèle. La durée d'optimisation est donc de 24h, la résolution spectrale du modèle est T63 avec 15 niveaux verticaux. La norme utilisée aux instants initial et final est la norme énergie totale sèche, la condition  $\delta q = 0$  étant imposée à  $t=0h$  et  $t=24h$ . A l'instant final, un filtre élimine les perturbations en-dessous de  $30^\circ N$ .

Nous noterons par l'exposant <sup>d</sup> les perturbations optimales calculées avec un linéaire-tangent et un adjoint secs et par l'exposant <sup>m</sup> celles calculées avec la précipitation incluse dans la physique linéaire, l'indice correspondant au numéro de la perturbation optimale considérée.

## IV.2.3 Expérience 1. Etude de perturbations baroclines humides

La situation étudiée est celle présentée dans le chapitre III et sera dénommée par la suite expérience 1.

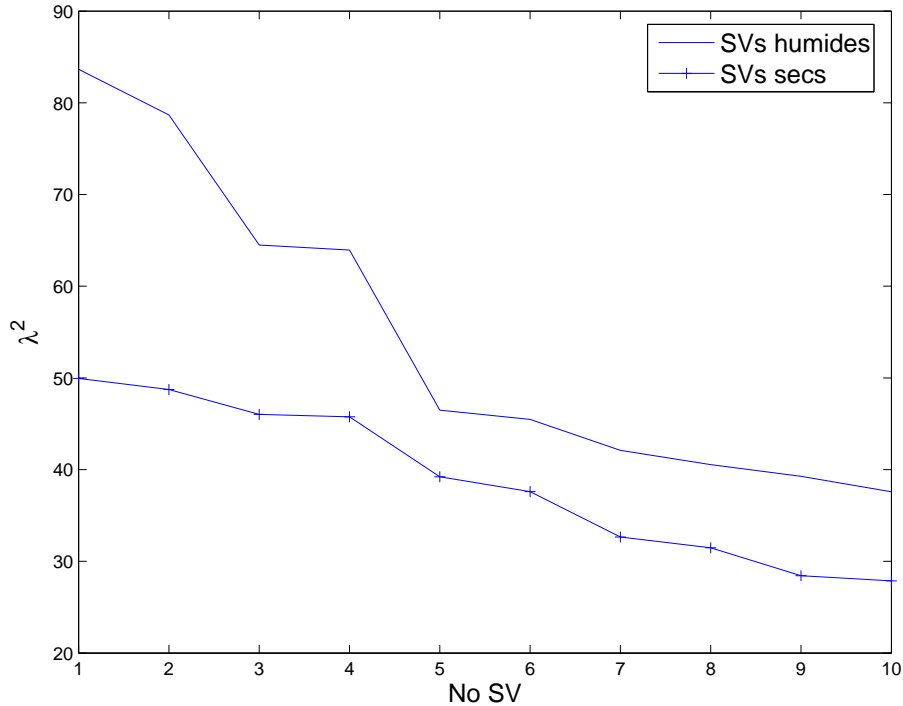


FIG. IV.4 – Taux d’amplification énergétique sur 24h des dix premiers vecteurs singuliers secs et humides de l’expérience 1.

### IV.2.3.1 Facteur d’amplification et spectre des SVs secs et humides

La figure IV.4 montre une augmentation comprise entre 60% pour les premiers SVs et 20% pour le 10ème SV du taux d’amplification énergétique des structures optimales lorsque la précipitation grande échelle est incluse. Les spectres moyens des SVs secs et humides sont très similaires à l’instant initial (figure IV.5a) ainsi qu’à l’instant final (figure IV.5b), les SVs humides étant initialement à des échelles légèrement plus petites que les SVs secs. Cette différence d’échelle se traduit en moyenne par un décalage de  $\Delta n \approx 3$  entre les deux spectres à l’instant initial. Cette valeur est à comparer avec l’étude de Coutinho et al. (2004) qui trouvent un décalage spectral environ de deux à trois fois plus important. A l’instant final (figure IV.5b), les deux spectres sont similaires aux grandes échelles tandis que la contribution des petites échelles est plus importante pour les vecteurs singuliers humides. Le décalage spectral initial vers les petites échelles et l’augmentation de l’amplification des structures avaient déjà été qualitativement observés pour les modes normaux humides en IV.1.2.

### IV.2.3.2 Localisation géographique

La comparaison des zones sensibles associées aux vecteurs singuliers secs et humides (figures IV.6c et III.4e page 86) montre de fortes ressemblances au niveau de la localisation des zones sensibles de l’écoulement entre les expériences sèche et

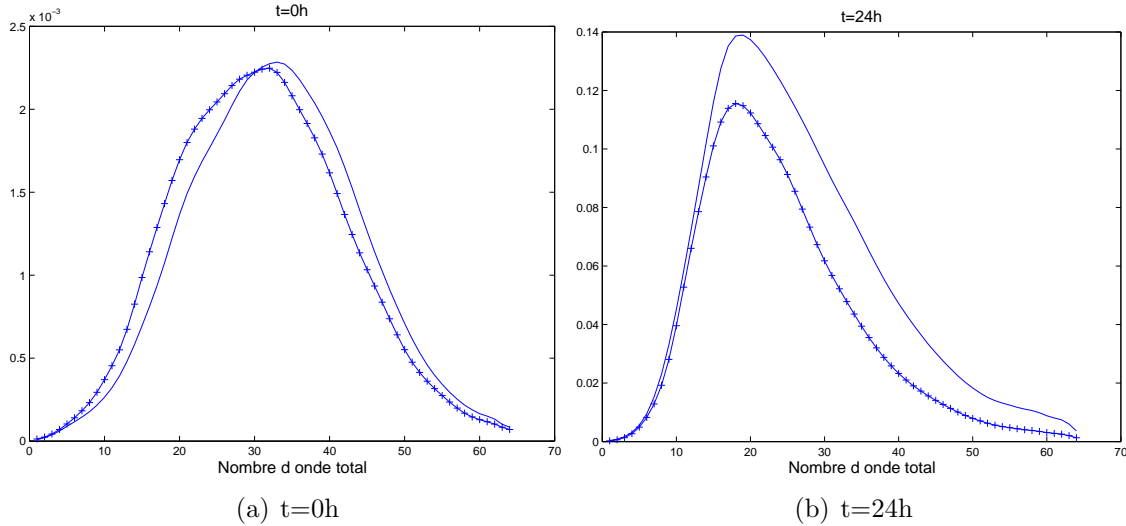


FIG. IV.5 – Spectre moyen des premiers vecteurs singuliers secs (-+-) et humides (traits continus) au début et à la fin de la période d'optimisation

humide, ce qui suggère l'existence de fortes similarités entre les SVs secs et humides. De plus, l'importance relative des composantes relatives aux énergies cinétique et potentielle au sein des perturbations est similaire dans les cas sec (figures III.4a et III.4b) et humide (figures IV.6a et IV.6b) ce qui suggère un mécanisme de croissance barocline des perturbations. Afin de comparer les deux jeux de perturbations optimales, nous avons calculé les indices de similarité entre les structures correspondant aux deux expériences (tableau IV.1). L'indice de similarité  $p$  de deux vecteurs  $x$  et  $y$  est défini (Buizza et al., 1993) à partir du produit scalaire de ces deux vecteurs dans le sous-espace canonique associé à la norme choisie :

$$p = \frac{(x, y)_E}{(x, x)_E (y, y)_E}$$

Il représente la fraction de l'énergie du vecteur  $x$  se projetant sur le vecteur  $y$ . Excepté les SVs N°9 et 10, chacune des structures se projette à plus de 80% sur le sous-espace constitué par les perturbations optimales de l'autre expérience. La plupart des SVs sont très proches d'une expérience à l'autre, comme par exemple les deux premiers SVs qui sont identiques à plus de 80% avec leur analogue sec. D'autres SVs humides correspondent à une combinaison linéaire de plusieurs SVs secs ( $SV_7^m$  et  $SV_8^m$  par exemple). En effet, les vecteurs singuliers apparaissent souvent par paires de structures identiques mais déphasées d'une demi-longueur d'onde (non montré), ce qui explique ce réarrangement par paires.

La comparaison de cartes de contenu en eau intégré sur la verticale et de l'indice d'Eady données figure IV.7 montre une bonne corrélation entre l'humidité atmosphérique disponible et la baroclinicité de l'environnement. Au sein de la zone barocline, le transport méridien de température par les dépressions synoptiques s'accompagne d'un transport d'humidité des tropiques vers les pôles. c'est pourquoi baroclinicité

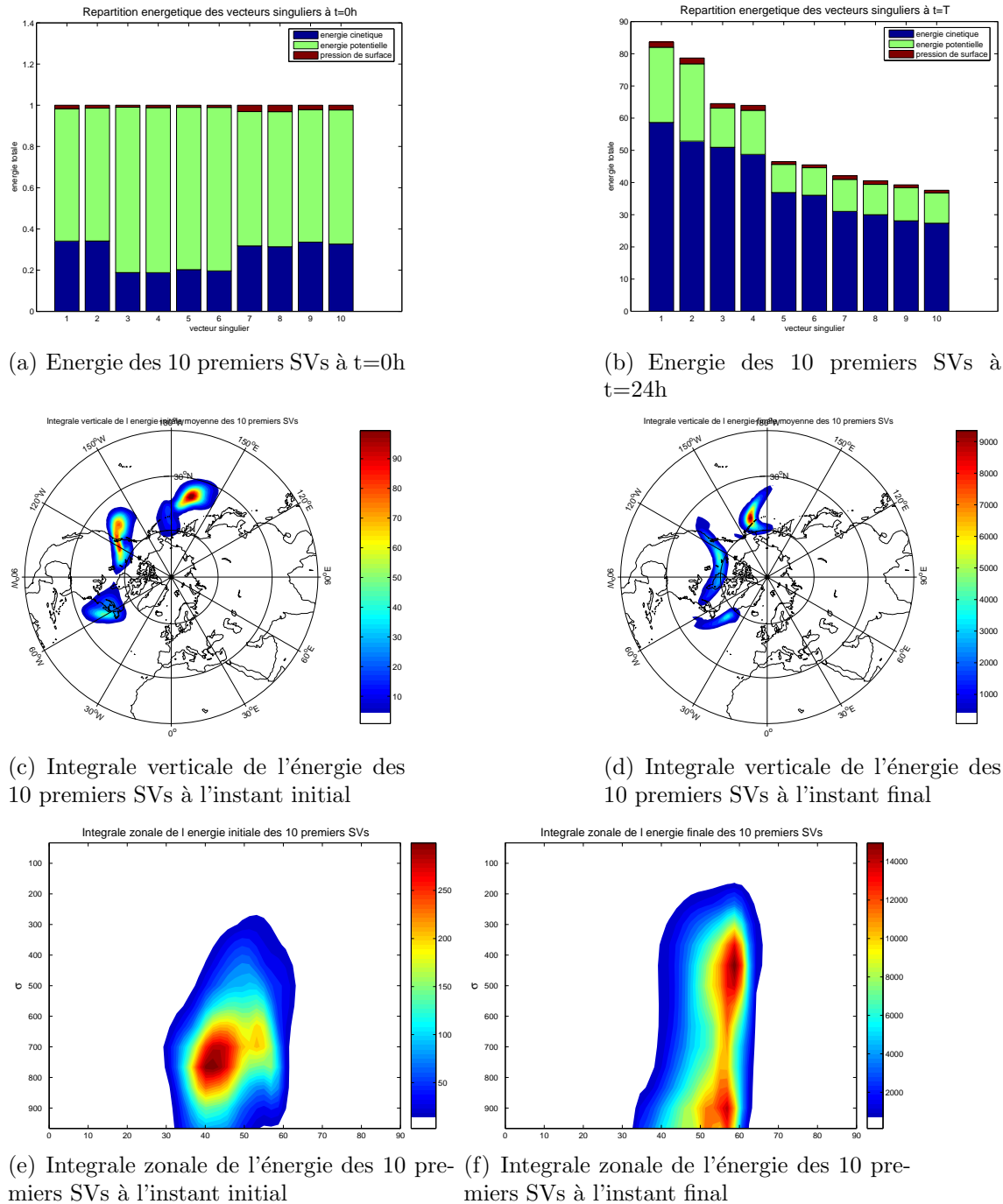


FIG. IV.6 – Propriétés énergétiques des 10 premiers SVs de l'expérience 1 à l'instant initial (à gauche) et à l'instant final (à droite)

et disponibilité en eau coïncident souvent.

L'inclusion de l'humidité dans le calcul des perturbations optimales a donc permis de mettre en évidence des perturbations baroclines humides, dont la structure dérive des vecteurs singuliers secs, mais dont l'amplification est plus importante. Nous étudierons dans la partie IV.2.3.3 ces mécanismes d'amplification diabatiques. Cette

$\sum_{i=1}^{10} SV_i^m$	$SV_1^m$	$SV_2^m$	$SV_3^m$	$SV_4^m$	$SV_5^m$	$SV_6^m$	$SV_7^m$	$SV_8^m$	$SV_9^m$	$SV_{10}^m$	
0.92	0.81	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.06	$SV_1^d$
0.93	0.02	0.82	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.05	0.03	$SV_2^d$
0.90	0.0	0.0	0.23	0.41	0.19	0.06	0.0	0.0	0.0	0.0	$SV_3^d$
0.90	0.0	0.0	0.47	0.22	0.02	0.18	0.0	0.0	0.01	0.0	$SV_4^d$
0.93	0.0	0.0	0.15	0.03	0.70	0.06	0.0	0.0	0.0	0.0	$SV_5^d$
0.94	0.0	0.0	0.02	0.22	0.04	0.65	0.0	0.0	0.01	0.0	$SV_6^d$
0.91	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.42	0.49	0.0	0.0	$SV_7^d$
0.90	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.49	0.40	0.0	0.0	$SV_8^d$
0.46	0.0	0.01	0.02	0.02	0.0	0.0	0.0	0.0	0.37	0.04	$SV_9^d$
0.10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.01	0.01	0.02	0.04	$SV_{10}^d$
	0.84	0.86	0.90	0.90	0.95	0.96	0.92	0.90	0.48	0.17	$\sum_{i=1}^{10} SV_i^d$

TAB. IV.1 – Indices de similarité entre les 10 premiers SVs secs et humides de l'expérience 1.

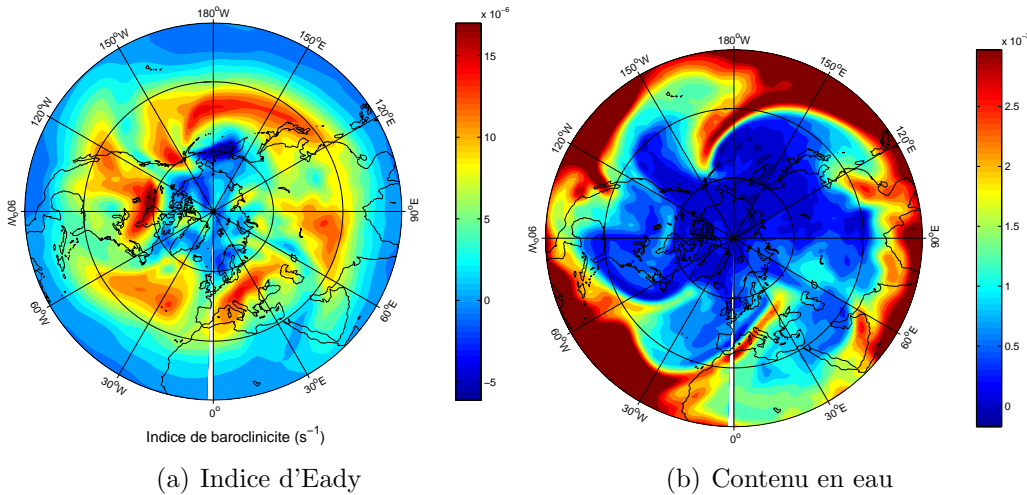


FIG. IV.7 – Indice d'Eady (a) défini entre 350 et 850 hPa de l'état de base et moyenne verticale de l'humidité relative de l'état de base (b) de l'expérience 1.

situation est représentative de la majorité des situations étudiées, néanmoins nous présentons ultérieurement une situation moins représentative mais où l'humidité joue un rôle majeur.

### IV.2.3.3 Mécanismes de croissance des perturbations baroclines humides.

Le bilan d'énergie potentielle de la perturbation (III.9) montre que l'amplification de cette dernière par les processus humides s'effectue grâce au dégagement de chaleur latente. En reprenant l'équation (III.8), le terme de production diabatique d'énergie potentielle est proportionnel au produit  $\delta J \delta T$  :



$$\begin{aligned} \partial_t \left( \frac{\delta T^2}{2} \right) &= -\delta T (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta T + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0) - \delta T (\omega_0 \partial_p \delta T + \delta \omega \partial_p T_0) \\ &\quad + \frac{\kappa}{p} (\omega_0 \delta T + \delta \omega T_0) \delta T + \delta J \delta T \end{aligned}$$

L'amplification diabatique est alors favorisée par une corrélation positive entre le dégagement de chaleur latente et le champ de température. Par ailleurs, nos résultats sur les SVs humides mettent en évidence des champs de température et de précipitation approximativement en phase (figure IV.8). Cette partie vise à expliciter les liens entre les différents champs des SVs humides afin d'expliquer les mécanismes d'amplification diabatique des perturbations.

La précipitation  $\delta \mathcal{P}$  au sein du modèle linéaire-tangent vérifie :

$$\Delta t \delta \mathcal{P} = \begin{cases} 0 & \text{où } \mathcal{P}_0 = 0 \\ \delta q - \delta q_{sat} & \text{où } \mathcal{P}_0 > 0 \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

avec  $\Delta t$  le pas de temps du modèle.

L'analyse de la figure IV.8 permet alors de préciser les liens entre les différents champs perturbés :

- les champs perturbés d'humidité et d'humidité à saturation au sein de la perturbation  $\delta q$  et  $\delta q_{sat} = \partial_T q_{sat} \delta T$  possèdent des structures similaires. Les profils moyens de température  $T_0$  et d'humidité  $Q_0$  de la trajectoire possèdent des caractéristiques communes comme la décroissance avec l'altitude et la latitude. L'extraction d'humidité (terme  $-\delta \mathbf{u} \cdot \nabla Q_0$  de l'équation (IV.16)) et de température (terme  $-\delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0$  de l'équation (IV.17)) à partir des champs de l'état de base crée donc des champs perturbés de température et d'humidité liés. A ceci s'ajoute le fait que la précipitation introduit une corrélation supplémentaire entre les champs de température et d'humidité.
- l'amplitude du champ d'humidité  $\delta q$  est supérieure en valeur absolue à celle du champ d'humidité à saturation  $\delta q_{sat}$  : le signe de  $\delta q$  fixe donc le signe de  $\delta q - \delta q_{sat}$ .  $\delta \mathcal{P}$  et  $\delta T$  sont alors de même signe et le dégagement de chaleur latente au sein de la perturbation renforce donc cette dernière.

Ajoutons que ce mécanisme n'est pas lié à l'optimalité des structures : ce mécanisme est également observé pour des SVs secs injectés dans le modèle linéaire-tangent humide. La figure IV.9 résume ces résultats auxquels on peut ajouter le fait que la vitesse verticale  $\delta \omega$  soit en opposition de phase avec les champs de température et de précipitation.

Afin d'approfondir les mécanismes associés à la précipitation, nous allons effectuer un bilan de précipitation<sup>2</sup> à partir des équations perturbées d'humidité et de température.

---

<sup>2</sup>Dans les équations (IV.16) à (IV.19) les champ de vitesse et l'opérateur  $\nabla$  sont exceptionnellement tridimensionnels contrairement à la convention choisie pour le reste du manuscrit.

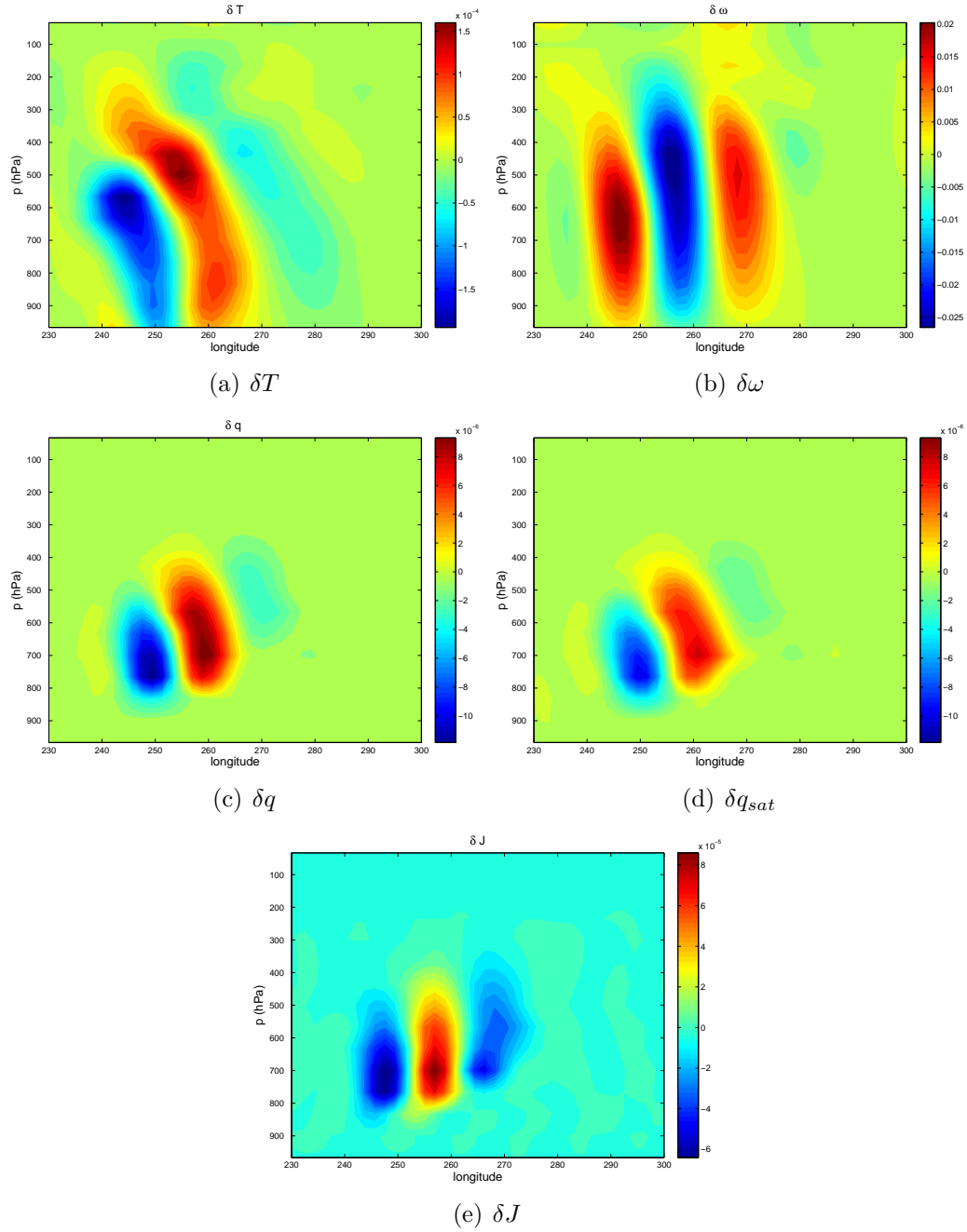


FIG. IV.8 – Coupe verticale des champs de température, vitesse verticale, humidité, humidité à saturation ainsi que du chauffage diabatique du  $SV_1^m$  de l'expérience 1 à  $t=12h$

$$\partial_t \delta q = -\delta \mathbf{u} \cdot \nabla Q_0 - \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta q - \delta \mathcal{P} \quad (\text{IV.16})$$

$$\partial_t \delta T = -\delta \mathbf{u} \cdot \nabla T_0 - \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta T + \frac{\kappa \delta \omega T_0}{p} + \frac{\kappa \omega_0 \delta T}{p} + \frac{L}{c_p} \delta \mathcal{P} \quad (\text{IV.17})$$

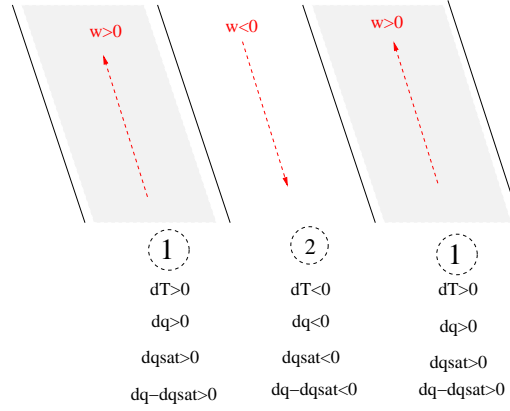


FIG. IV.9 – Schéma simplifié des liens entre les différents champs d'un vecteur singulier humide lors de son évolution observés figure IV.8

L'équation d'évolution de l'humidité à saturation est dérivée à partir de (IV.17), de l'équation non-linéaire d'évolution de  $T_0$  et de la relation approchée<sup>3</sup> suivante :

$$\delta q_{sat} = \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \delta T + \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial p} \right)_T \delta p \approx \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \delta T$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta q_{sat}) &= \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \partial_t \delta T + \left( \frac{\partial^2 q_{sat}}{\partial T^2} \right)_p \partial_t T_0 \delta T \\ &= -\delta \mathbf{u} \cdot \nabla q_{sat} - \mathbf{u} \cdot \nabla \delta q_{sat} + \delta T \left( \frac{\partial^2 q_{sat}}{\partial T^2} \right)_p \left( \frac{\kappa \omega_0 T_0}{p} + J_0 \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\kappa \delta \omega T_0}{p} + \frac{\kappa \omega_0 \delta T}{p} + \delta J \right) \end{aligned}$$

On en déduit l'équation d'évolution du déficit à saturation  $\delta d = \delta q - \delta q_{sat}$

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta d) &= -\delta \mathbf{u} \cdot \nabla (Q_0 - Q_{0sat}) - \mathbf{U}_0 \cdot \nabla (\delta q - \delta q_{sat}) \\ &\quad - \delta \mathcal{P} \left( 1 + \frac{L}{c_p} \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \right) - \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\kappa \delta \omega T_0}{p} + \frac{\kappa \omega_0 \delta T}{p} \right) \\ &\quad - \delta T \left( \frac{\partial^2 q_{sat}}{\partial T^2} \right)_p \left( \frac{\kappa \omega_0 T_0}{p} + J_0 \right) \end{aligned} \quad (IV.18)$$

<sup>3</sup>Nous avons vérifié que l'influence de la perturbation des champs de pression sur l'humidité à saturation était négligeable.

qui, multipliée par  $\delta d$ , fournit l'équation de la variance du déficit à saturation :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \left( \frac{\delta d^2}{2} \right) &= -\delta d [\delta \mathbf{u} \cdot \nabla d_0 + \mathbf{U}_0 \cdot \nabla \delta d] - \delta d \delta \mathcal{P} \left( 1 + \frac{L}{c_p} \partial_T q_{sat} \right) \\
 &\quad - \delta d \left( \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right)_p \left( \frac{\kappa \delta \omega T_0}{p} + \frac{\kappa \omega_0 \delta T}{p} \right) \\
 &\quad - \delta d \left( \frac{\partial^2 q_{sat}}{\partial T^2} \right) \left( \frac{\kappa \omega_0 T_0}{p} + J_0 \right)
 \end{aligned} \tag{IV.19}$$

Il convient ici de préciser comment utiliser ce budget. En effet, dans les régions de l'atmosphère où la précipitation sur la trajectoire est strictement positive, l'équilibre  $\delta q = \delta q_{sat}$  est strictement respecté et le déficit à saturation de la perturbation est nul. En pratique, le modèle exécute les routines adiabatiques (advection, expansion adiabatique) avant de passer dans les routines diabatiques dont l'opérateur de précipitation. L'équilibre  $\delta d = 0$  détruit lors du passage dans les routines adiabatiques est alors rétabli par la précipitation (cf partie IV.2.1 où est détaillée l'expression de l'opérateur de précipitation). L'évaluation du bilan de variance de déficit à saturation est effectué juste avant le passage dans la routine de précipitation lorsque  $\delta d$  n'est pas forcément nul dans les régions où  $\mathcal{P} > 0$ . Si les grandeurs étaient évaluées juste après l'opérateur de précipitation, le bilan de variance de  $\delta d$  se réduirait à  $0=0$  puisque  $\delta d$  est alors nul. Évalué aux points de grille où  $\mathcal{P} > 0$  où d'après (IV.15)  $\delta d = \delta \mathcal{P} \Delta t$ , le bilan (IV.19) se transforme en un bilan de précipitation au sein de la perturbation.

La figure IV.10 montre l'évolution temporelle de la contribution des différents termes au bilan de précipitation (les termes non représentés sont négligeables dans le bilan). On remarque la prédominance de trois termes au sein de ce budget :

- Les termes  $-\delta d \delta \mathcal{P}$  (courbe noire) et  $\delta d \delta \mathcal{P} \frac{L}{c_p}$  (courbe cyan), dont la somme est égale  $-\delta d \delta \mathcal{P} \left( 1 + \frac{L}{c_p} \partial_T q_{sat} \right)$ , sont tout le temps négatifs puisque la précipitation diminue le déficit en eau.
- L'advection verticale du déficit en eau de l'état de base  $-\delta d \delta \omega \partial_p d$  (courbe rouge) a un poids négatif sur le bilan de précipitation. Ceci est probablement dû au fait que  $d = q - q_{sat}$  est négatif au sol et tend ensuite vers zéro en altitude sur la trajectoire.
- Le terme  $-\frac{\kappa \partial_T q_{sat} \delta \omega T_0 \delta d}{p}$  (courbe verte) correspond à la variation de  $\delta q_{sat}$  causée par l'expansion adiabatique des parcelles d'air et est très largement positif. Il est responsable de la précipitation dans le modèle linéaire-tangent.

Les termes d'advection du déficit à saturation ont une contribution négligeable puisque  $\delta q$  et  $\delta q_{sat}$  sont advectés simultanément par le même écoulement. Le terme d'expansion adiabatique agit uniquement sur  $\delta q_{sat}$  et non pas simultanément sur  $\delta q$  et  $\delta q_{sat}$ . La tendance de température associée à la détente adiabatique d'une parcelle d'air ascendante est négative : l'effet de l'expansion adiabatique est donc de diminuer  $\delta q_{sat}$  et donc d'augmenter  $\delta \mathcal{P}$  dans les régions d'ascendance. La précipitation est donc corrélée à l'expansion adiabatique (et donc à la vitesse verticale) qui convertit l'énergie potentielle de la perturbation en énergie cinétique. Ce raisonnement qualitatif reproduit les observations résumées schématiquement figure IV.9.

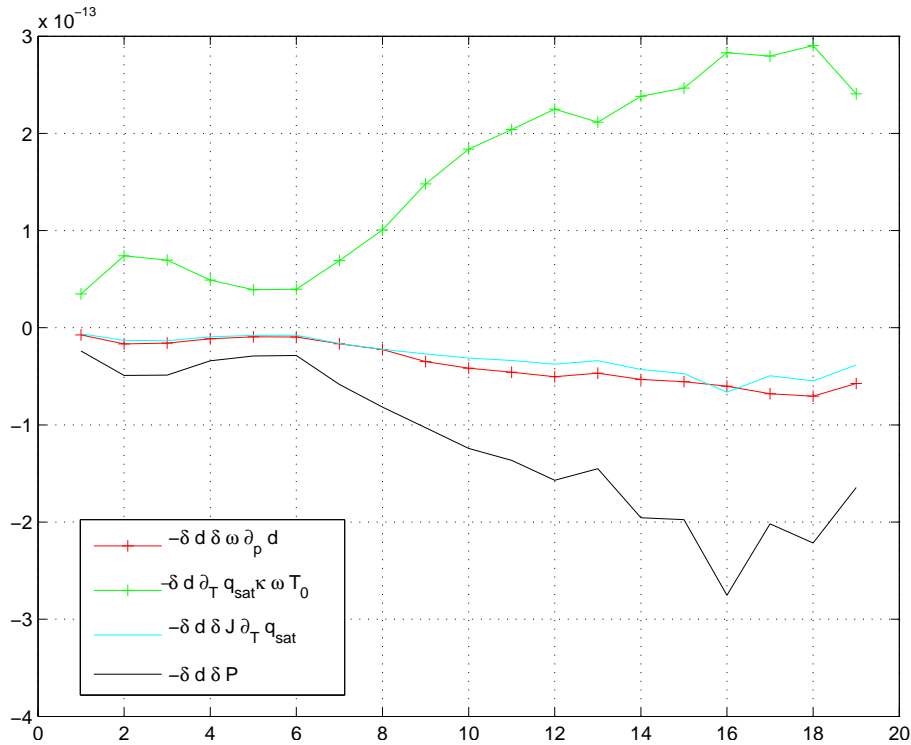
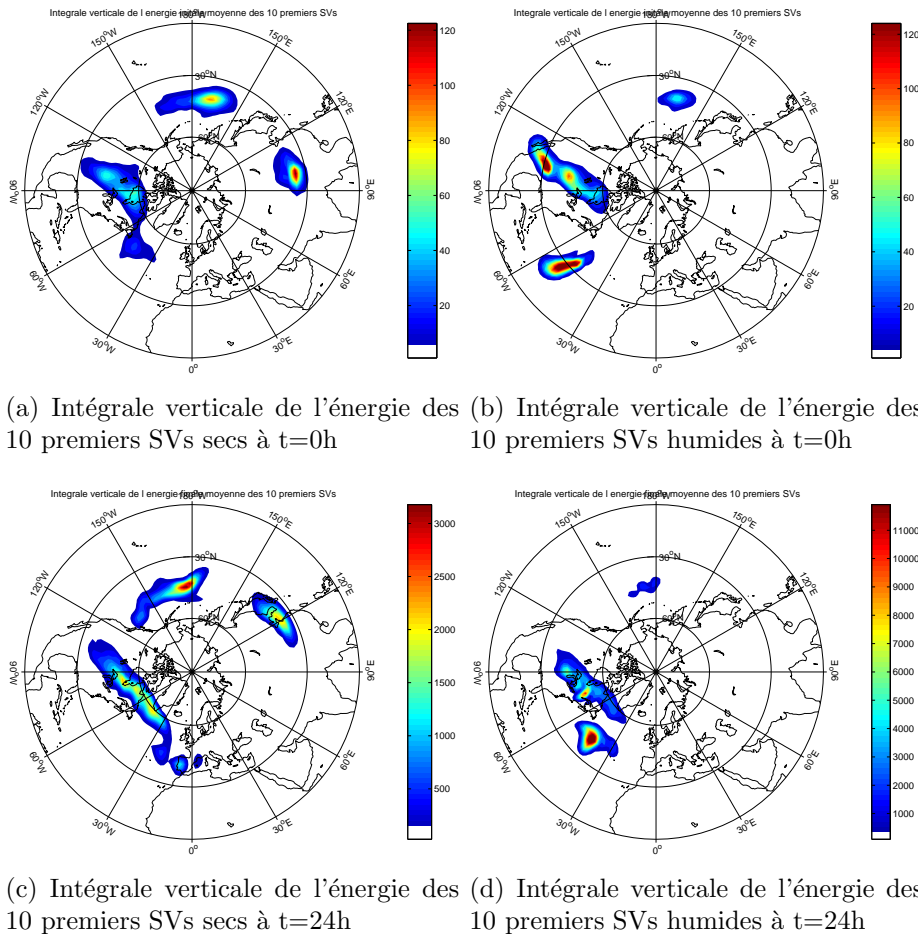


FIG. IV.10 – Bilan de variance du déficit en eau dans le modèle linéaire-tangent calculé aux points où  $\mathcal{P}_0 > 0$ . Les termes non représentés sur cette figure possèdent une contribution négligeable dans ce bilan.

Pour des perturbations baroclines,  $\delta T$  et  $\delta \omega$  sont en opposition de phase. Comme la vitesse verticale de la perturbation  $\delta \omega$  pilote la précipitation par l'expansion adiabatique, le dégagement de chaleur latente  $\delta J$  est alors en phase avec  $\delta T$ . Ceci explique l'amplification des perturbations par dégagement de chaleur latente. Ce mécanisme confirme les résultats de Gutowski et al. (1992) sur le cycle de vie d'ondes baroclines humides. Ils montrent en effet que le dégagement de chaleur latente renforçait les ascendances et la conversion d'énergie potentielle en énergie cinétique au sein de l'onde.

#### IV.2.4 Situation 2. Mise en évidence de vecteurs singuliers diabatiques

Nous reproduisons la comparaison entre vecteurs singuliers secs et humides sur une nouvelle situation. Les autres paramètres expérimentaux restent identiques à ceux de l'expérience précédente.



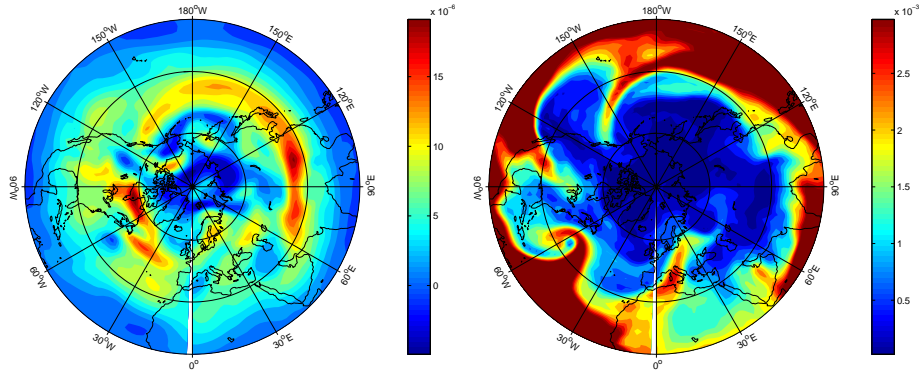
(a) Intégrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs secs à  $t=0h$  (b) Intégrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs humides à  $t=0h$

(c) Intégrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs secs à  $t=24h$  (d) Intégrale verticale de l'énergie des 10 premiers SVs humides à  $t=24h$

FIG. IV.11 – Répartition énergétique des 10 premiers SV pour les expériences sèche (colonne de gauche) et humide (colonne de droite)

#### IV.2.4.1 Répartition géographique des vecteurs singuliers

La figure IV.11 compare la somme des énergies des dix premiers vecteurs singuliers secs et humides calculés pour cette nouvelle situation météorologique. Contrairement à la situation précédente où la géographie des zones sensibles de l'écoulement ainsi déterminée était presque identique du cas sec au cas humide, on observe ici une modification de certaines zones sensibles. A l'instant initial, apparaît dans le cas humide (figure IV.11b) une zone sensible au milieu de l'Océan Atlantique (autour de  $50^{\circ}W-30^{\circ}N$ ) non présente dans le cas sec. Par ailleurs, les vecteurs singuliers secs situés à l'Est de l'Asie disparaissent dans l'expérience humide. Les autres zones sensibles de l'écoulement sont soit légèrement déplacées (au-dessus des Etats-Unis) soit affaiblies (au milieu du Pacifique Nord). Cette réorganisation des zones sensibles de l'écoulement est corrélée au contenu en eau de l'atmosphère (figure IV.12b) ainsi qu'à l'indice d'Eady (figure IV.12a) à l'instant initial. La nouvelle localisation des SVs humides correspond à la présence d'une langue d'humidité tropicale aux moyennes latitudes ( $50-40W, 30-40N$ ). La zone sensible au Nord-Ouest des Etats-Unis qui apparaît dans les cas sec et humide est à la fois riche en humidité et présente une



(a) Indice d'Eady de l'état de base à  $t=0h$  ( $s^{-1}$ ) (b) Humidité moyennée verticalement de l'état de base à  $t=0h$  ( $kg.kg^{-1}$ )

FIG. IV.12 – Baroclinicité et humidité de l'état de base initial

$\sum_{i=1}^{10} SV_i^d$	$SV_1^d$	$SV_2^d$	$SV_3^d$	$SV_4^d$	$SV_5^d$	$SV_6^d$	$SV_7^d$	$SV_8^d$	$SV_9^d$	$SV_{10}^d$	
0.75	0.0	0.0	0.0	0.0	0.45	0.0	0.16	0.0	0.0	0.14	$SV_{10}^m$
0.05	0.0	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01	0.0	0.01	0.0	$SV_9^m$
0.96	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.96	0.0	0.0	$SV_8^m$
0.45	0.0	0.0	0.0	0.0	0.05	0.0	0.33	0.0	0.08	0.0	$SV_7^m$
0.42	0.0	0.0	0.0	0.0	0.08	0.0	0.05	0.0	0.29	0.01	$SV_6^m$
0.84	0.0	0.0	0.0	0.0	0.08	0.0	0.01	0.0	0.19	0.56	$SV_5^m$
0.70	0.0	0.0	0.0	0.0	0.02	0.0	0.18	0.0	0.32	0.19	$SV_4^m$
0.09	0.0	0.0	0.0	0.0	0.02	0.0	0.057	0.0	0.0	0.01	$SV_3^m$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$SV_2^m$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	$SV_1^m$
	0.0	0.04	0.0	0.0	0.7	0.0	0.8	0.96	0.87	0.91	$\sum_{i=1}^{10} SV_i^m$

TAB. IV.2 – Indices de similarité entre les 10 premiers SVs secs et humides pour l'expérience 2.

baroclinicité importante. De même, les zones sensibles associées aux SVs secs situés dans des zones sèches à l'Est de l'Asie disparaissent. La localisation des SVs humides résulte donc d'un compromis entre la nécessité de rester à la fois dans une zone à la fois barocline et riche en humidité.

La comparaison des indices de similarité indiquée tableau IV.2 confirme l'apparition de nouvelles structures : en effet les trois premiers SVs humides ne se projettent pas (à 0% pour les SVs 1 et 2) ou très peu (9% pour le SV3) sur le sous-espace formé par les dix premiers SVs secs. Ces nouvelles structures sont responsables de la modification de la carte des zones sensibles aux instants initial (figures IV.11a et b) et final (figures IV.11 c et d) détaillée précédemment.

#### IV.2.4.2 Facteur d'amplification et spectre des SVs secs et humides.

L'inclusion des processus humides augmente l'amplification des structures optimales relativement au cas sec de façon plus importante que dans l'expérience 1

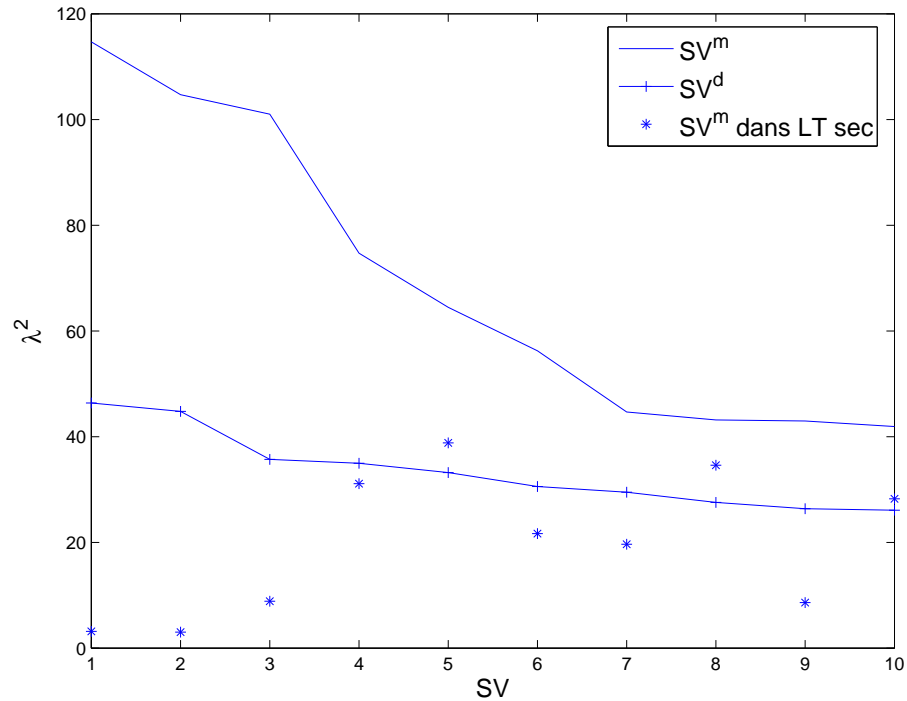


FIG. IV.13 – Taux d'amplification énergétique sur la durée d'optimisation des 10 premiers SVs secs et humides de l'expérience 2. La courbe d'amplification des SVs humides dans le modèle linéaire-tangent sec a été ajoutée en points.

comme le montre la figure IV.13 : le taux d'amplification augmente d'un facteur compris entre 2.5 pour les premiers SVs à 1.5 au-delà du 8ème SV par rapport au cas sec.

Le taux de croissance des SVs humides dans le modèle linéaire-tangent sec est donné par la courbe en pointillés de la figure IV.13. On remarque que les vecteurs singuliers 1, 2, 3 et 9 ne s'amplifient presque pas dans la version sèche du modèle linéaire-tangent. Ce sont exactement les vecteurs singuliers dont la projection sur le sous-espace engendré par les vecteurs singuliers secs était presque nulle (tableau IV.2). Ces structures sont situées au niveau de la langue d'humidité située sur l'océan Atlantique autour de 30°N dans un endroit où la baroclinicité mesurée avec l'indice d'Eady est faible sauf le  $SV_3^m$  situé au sud de l'Amérique du Nord dans une région où existe un apport en eau important. Nous appellerons ces vecteurs singuliers, vecteurs singuliers diabatiques. Les autres vecteurs singuliers humides sont des variantes humides de SVs secs.

Les spectres moyens des dix premiers vecteurs singuliers sont indiqués figure IV.14. On note un décalage spectral plus important entre les expériences sèches et humides à l'instant initial que pour la situation 1. Il est ici d'environ  $\delta n \approx 8$  valeur qui correspond aux expériences de Coutinho et al. (2004) soit presque trois fois la valeur obtenue dans l'expérience 1. A l'instant final, le spectre moyen des vecteurs singuliers humides présente un pic centré autour du même nombre d'onde que le spectre



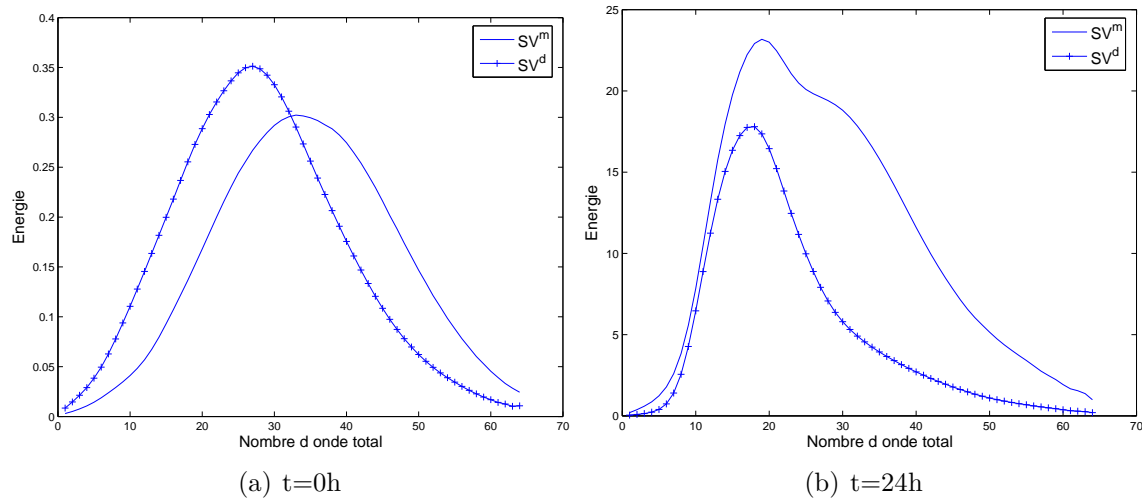


FIG. IV.14 – Spectres énergétiques des 10 premiers SVs secs (tirets) et humides (traits continus) au début et à la fin de la durée d’optimisation (Situation 2)

sec, malgré la présence initiale d’échelles beaucoup plus petites.

#### IV.2.4.3 Structure et mécanisme de croissance des SVs diabatiques

Nous allons détailler la structure de ces vecteurs singuliers humides ne possédant pas d’équivalent sec en nous intéressant au SV dominant (le 2<sup>ème</sup> SV possède une structure identique en quadrature de phase). Il se forme au sein d’une langue d’eau située au niveau d’un front froid bordant une dépression déjà bien développée. Les figures IV.15a et IV.15b montrent les positions respectives des champs d’humidité et de température associés à l’instant initial à cette dépression ainsi que la structure des champs de température du premier vecteur singulier à l’instant initial. Au cours de l’évolution de la perturbation optimale, celle-ci va être advectée vers le Nord par les champs de l’écoulement en tournant légèrement autour du système dépressionnaire (figures IV.16a et IV.16b).

Ce vecteur singulier qui se forme le long du front froid d’une perturbation déjà existante possède une longueur d’onde de l’ordre de 1000 km dans la direction du front. Ce vecteur est situé dans la région rendue instable par la présence d’eau dans les basses couches. La figure IV.17 compare les champs de température potentielle sèche  $\theta$  et humide  $\theta_e$  parallèlement au front froid. Alors que le profil vertical de température potentielle sèche est à peu près stable partout, le profil de température potentielle humide présente des courbes iso- $\theta_e$  plus inclinées, presque verticales au niveau du sol, comme c’est souvent le cas le long de fronts (Malardel, 2005) et surtout une nappe de température potentielle élevée dans les basses couches pour des latitudes entre 25 et 25°N qui déstabilise le profil vertical. Elle correspond à la langue d’air chaud et humide provenant des tropiques. C’est précisément à cet endroit où la stabilité statique humide est diminuée que l’on observe le dégagement de chaleur latente au sein du vecteur singulier à l’instant initial (tirets sur la figure IV.17) et durant l’évolution de la perturbation. La figure IV.18 superpose à t=0h et 12h

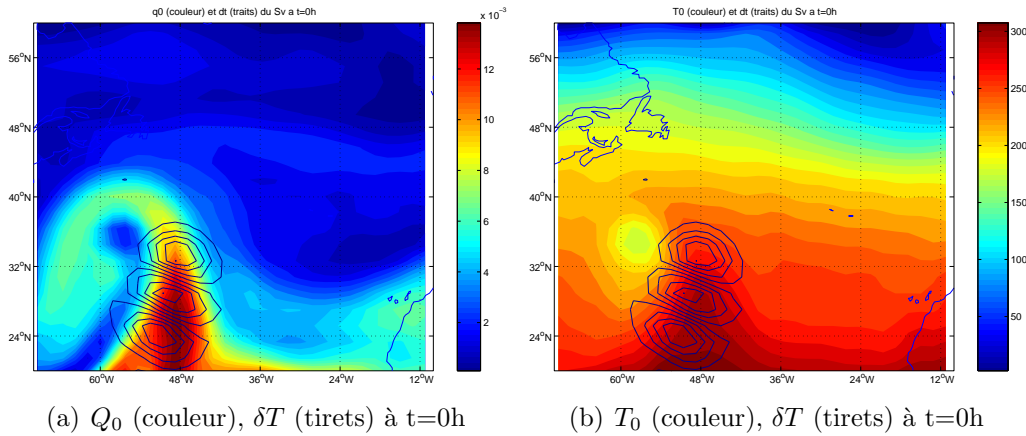


FIG. IV.15 – Champs d'humidité (a) et de température (b) à 800 hPa de l'état de base ainsi que la moyenne verticale du champ de température de  $SV_1^m$  (traits pleins) à  $t=0h$

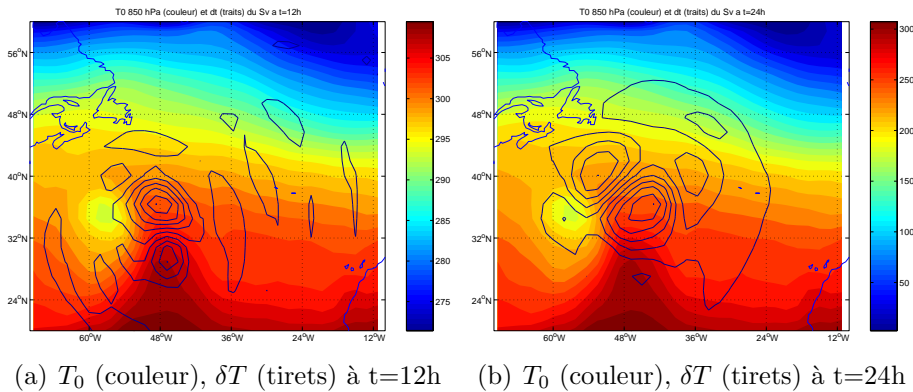


FIG. IV.16 – Champ de température à 800 hPa (couleur) de l'état de base et moyenne verticale du champ de température associé au  $SV_1^m$  à  $t=12$  (a) et 24h (b)

le dégagement de chaleur latente au sein du vecteur singulier avec  $\theta_0^e(350hPa) - \theta_0^e(900hPa)$ , une estimation de la stabilité verticale humide : le SV demeure localisé où la stabilité verticale humide reste négative.

Plusieurs hypothèses sont envisageables quant au mécanisme de croissance de cette perturbation optimale :

- mécanisme d'instabilité humide purement convectif (ou Conditional Instability of First Kind : CIFK). Un profil vertical de température potentielle instable est à la source de cette instabilité qui vise à rétablir la neutralité verticale de l'atmosphère au moyen de mouvements verticaux importants.
- mécanisme de type CISK (ou DRW). La convection n'est alors pas isolée de l'écoulement à grande échelle puisqu'elle provoque une convergence dans les basses couches qui se traduit par un apport d'eau dans les zones d'ascendance. Cette interaction entre le chauffage diabatique qui induit une circulation adiabatique à grande échelle qui renforce l'ascendance en apportant de l'humidité dans les basses couches entretient la convection contrairement au mécanisme

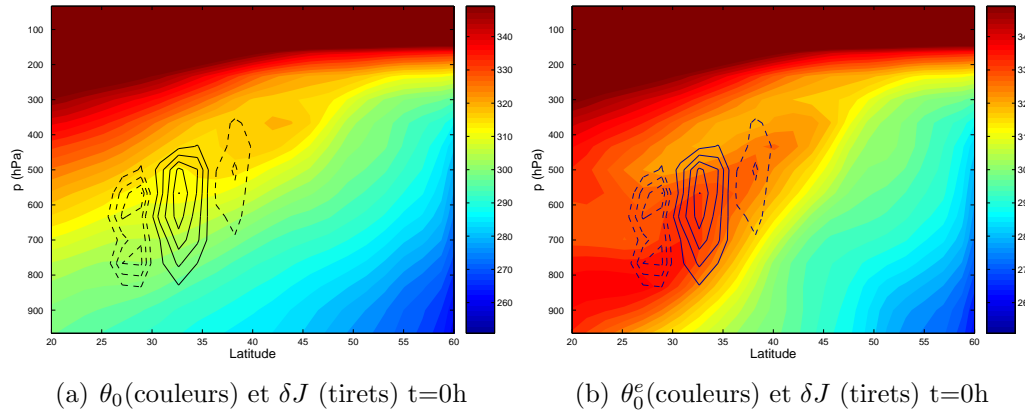


FIG. IV.17 – Champs de température potentielles sèche  $\theta_0$  et humide  $\theta_0^e$  de l'état de base à l'instant initial ainsi que dégagement de chaleur latente associé au  $SV_1^m$ . La coupe a été réalisée à  $48^\circ\text{W}$ .

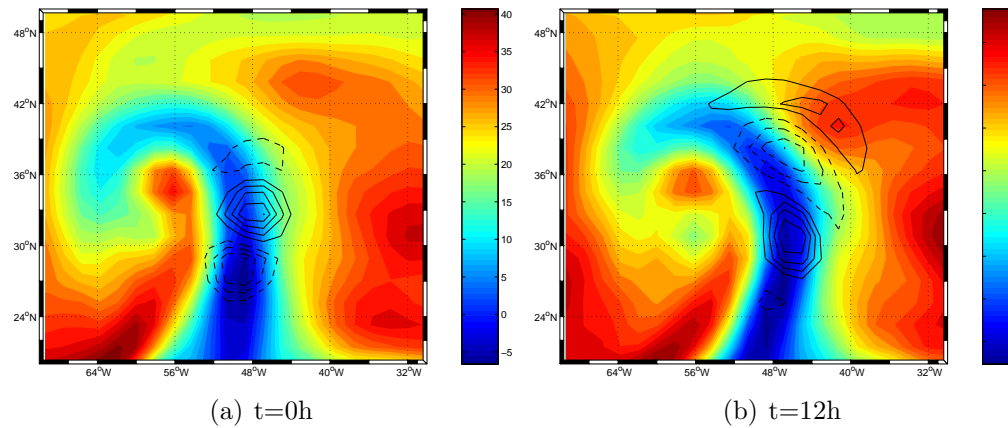


FIG. IV.18 – Représentation de  $\Delta\theta_0^e = \theta_0^e(350hPa) - \theta_0^e(900hPa)$  (couleur en  $^\circ\text{K}$ ) de l'état de base et de  $\delta J$  (contours) associé au  $SV_1^m$  à t=0h et t=12h

de type CIFK qui n'est qu'un simple ajustement.

Nous n'avons pas envisagé de mécanismes d'instabilité frontales humides (Joly, 1991), car la résolution de notre modèle ne nous permet pas de résoudre ce type d'instabilités.

Afin de mesurer l'écart de la dynamique de la perturbation par rapport à la quasi-géostrophie nous avons évalué l'évolution du rapport de la variance des perturbations de divergence sur la variance des perturbations de vorticité. La figure IV.19 représente le rapport des variances de divergence et de vorticité cinématique des champs associés au  $SV_1^m$  évoluant dans les modèles linéaire-tangent sec et humide et en guise de référence, l'évolution de ce rapport pour  $SV_1^d$  évoluant dans le modèle linéaire-tangent sec. Ce rapport vaut 0.5 au début de la période d'optimisation et diminue à 0.1 en fin de période d'optimisation pour le SV sec. En effet, les vecteurs singuliers ne respectent pas la balance géostrophique initialement (Montani and Thorpe, 2002) et ne l'atteignent qu'au terme de la durée d'optimisation. Que ce soit dans le cas sec

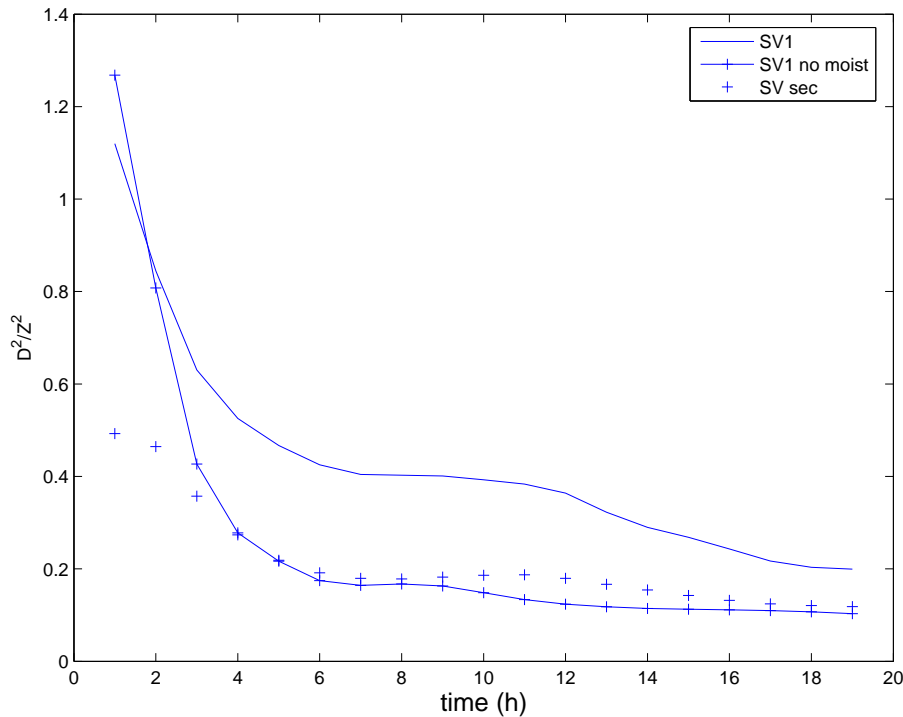


FIG. IV.19 – Evolution du rapport  $\frac{\langle \delta d^2 \rangle}{\langle \delta z^2 \rangle}$  au cours de la période d'optimisation pour la  $SV_1^m$  lors de son évolution dans les linéaire-tangents sec et humide.

ou humide, le  $SV_1^m$  viole de façon importante cette balance initialement, néanmoins l'évolution sèche permet d'atteindre au bout de 4 heures des valeurs du rapport  $\langle \delta d^2 / \delta z^2 \rangle$  de l'ordre de 0.15. Dans le cas humide, ce rapport demeure deux fois plus élevé tout au long de l'évolution. Ce comportement est lié à la présence de fortes vitesses verticales dans le cas humide qui ne se maintiennent pas dans le cas sec (non montré). On peut supposer que la convection humide est responsable de cette dynamique fortement agéostrophique. Néanmoins, après 6 heures, ce rapport se stabilise autour de 0.4 pour le  $SV_1^m$  évoluant dans le linéaire-tangent humide alors que l'énergie de la perturbation continue à croître. Cette valeur (0.4) est supérieure à la valeur qui semble caractériser une évolution barocline humide équilibrée (0.15). Il paraît alors vraisemblable de supposer qu'un mécanisme de type CISK est à l'origine de cette activité convective plus intense qui semble s'entretenir tout au long de l'évolution de la perturbation.

La présence d'une langue d'humidité qui s'élève en altitude incline les iso- $\theta_m$  parallèlement au front et rend difficile la comparaison directe avec les résultats des études théoriques comme celle de Wang and Barcilon (1986) (les iso- $\theta_m$  de l'état de base parallèlement au front sont horizontales dans ces simulations idéalisées).

La comparaison de la structure verticale des champs de température parallèlement à la direction de propagation de la perturbation entre le  $SV_1^m$  de cette expérience (figure IV.20) et le vecteur singulier humide dominant de l'expérience 1 (figure IV.8) montre des caractéristiques très différentes dans chacun des cas. Dans le cas de l'expérience 1, le champ de température du SV humide dominant présente

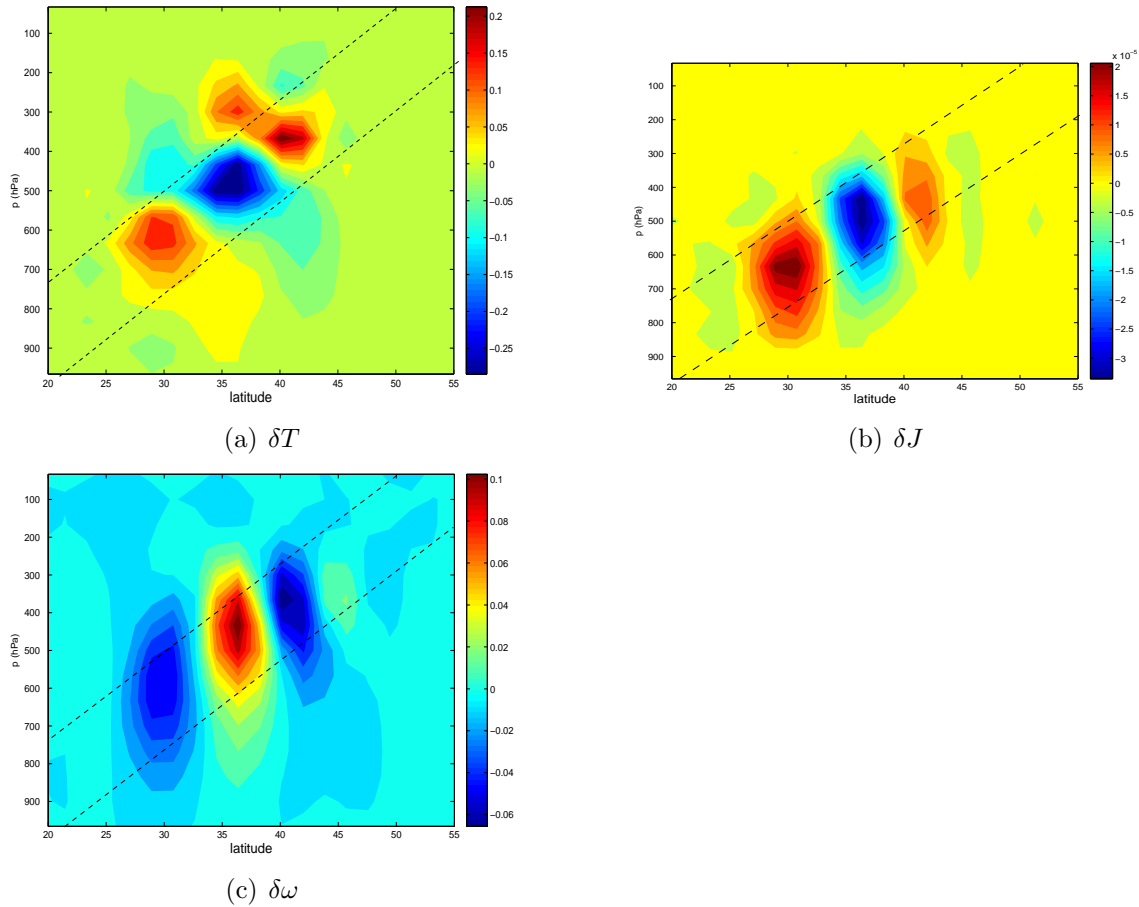


FIG. IV.20 – Champs de température, de chauffage diabatique et de vitesse verticale associés au  $SV_1^m$  à  $t=12h$ . La coupe a été effectuée à  $48^\circ W$ .

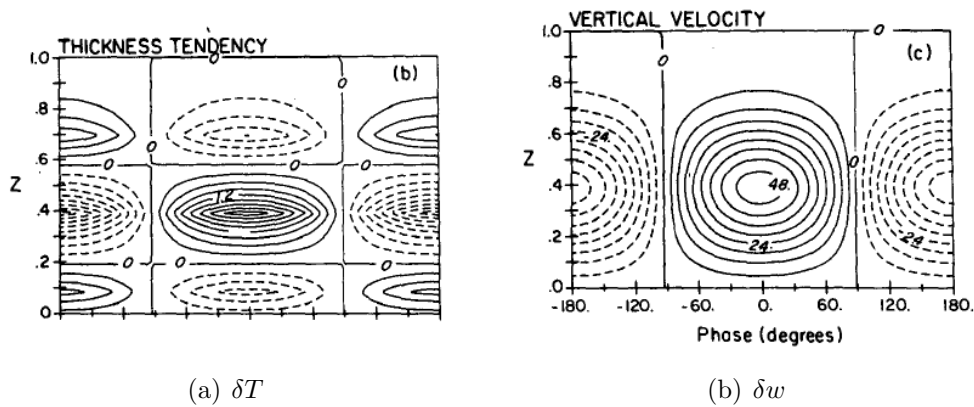


FIG. IV.21 – Structure verticale des champs de température et de vitesse verticale du mode normal associé à une instabilité de type CISK idéalisée (baroclinicité nulle). D'après (Craig and Cho, 1988).

une structure inclinée contre le cisaillement de vent, caractéristique des perturbations baroclines, tandis que le premier vecteur singulier humide dominant de l'expérience 2 possède une structure verticale plus complexe,  $\delta T$  changeant deux fois de signe sur la verticale. Entre les deux lignes tracées en pointillés représentés figure IV.20,  $\delta T$  et  $\delta\omega$  sont en opposition de phase et en phase en-dehors de ces lignes. Il en va de même pour  $\delta T$  et  $\delta J$ .

Cette structure présente des analogies avec celles des modes de Rossby diabatiques (figure IV.21) calculés par Craig and Cho (1988) pour une valeur du paramètre de chauffage  $\epsilon$  dans le domaine d'existence des CISKs. Dans cette simulation idéalisée, le terme d'expansion adiabatique qui refroidit l'atmosphère dans les zones d'ascendance possède une extension verticale supérieure au terme de chauffage diabatique d'amplitude plus importante : au milieu de la troposphère (pour une altitude normalisée  $Z$  comprise entre 0.2 et 0.6) le terme de chauffage diabatique domine, la vitesse verticale (en coordonnées  $z$ ) et la température sont alors en phase<sup>4</sup> (figure IV.21). En bas et en haut de la troposphère, le terme de chauffage diabatique, trop localisé sur la verticale est moins important que le terme d'expansion adiabatique : la température est alors négative (dans une zone d'ascendance) et les champs de température et de vitesse verticale sont donc de signe opposés. En supposant que les deux lignes de la figure IV.20 correspondent aux niveaux  $Z=0.2$  et  $Z=0.6$  de la figure IV.21, l'inclinaison résultant de la structure penchée des iso- $\theta_e$  suite à la présence d'air chaud et humide en provenance des tropiques et s'élevant en altitude vers le Nord (figure IV.17), les champs présentent des similitudes entre les deux expériences.

Les profils verticaux moyens des différents termes du bilan d'énergie potentielle sont représentés figure IV.22a. L'énergie potentielle n'est pas extraite barocliniquement mais provient du dégagement de chaleur latente qui en constitue la principale source. La conversion interne a une contribution négative puisqu'elle convertit l'énergie potentielle de la perturbation en énergie cinétique, sauf au-delà de 300 hPa où l'on note une inversion des signes de  $C_e$  et de  $G_e$ .

Le rapport de conversion défini dans Parker and Thorpe (1995) comme le rapport entre le terme de création diabatique sur la création barocline d'énergie potentielle évolue dans la présente simulation entre 8 à l'instant initial et 3 au terme de la période d'optimisation (figure IV.22b). Ce rapport très nettement supérieur à 1 confirme l'hypothèse d'un mécanisme de type CISK.

La comparaison des coupes verticales des termes associés à  $C_e$  et  $G_e$ , effectuée figure IV.23, montre que la conversion interne d'énergie potentielle est opposée à la création diabatique d'énergie potentielle. Néanmoins son extension verticale étant plus importante, le terme de conversion interne via le terme d'expansion adiabatique (non montré) domine le bilan d'énergie potentielle au-delà du niveau où le chauffage diabatique devient inexistant.

---

<sup>4</sup>Il convient de différencier la vitesse verticale  $w = \frac{dz}{dt}$  en coordonnées  $z$  de la vitesse verticale  $\omega = \frac{dp}{dt}$  en coordonnées pression. En particulier, celles-ci sont de signe opposé ( $\omega$  est négatif dans une ascendance.)

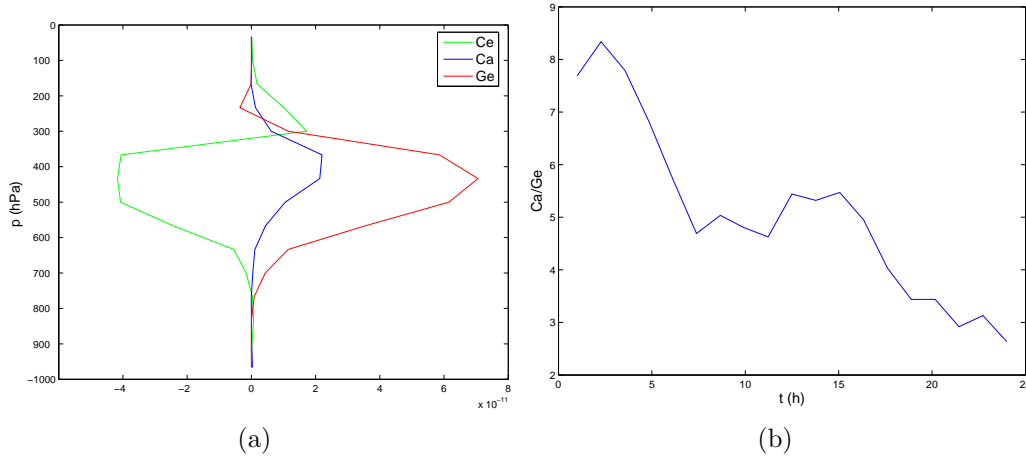


FIG. IV.22 – a) Coupe verticale de la moyenne temporelle des coefficients de création barocline  $C_a$ , diabatique  $C_e$  d'énergie potentielle et de conversion interne  $G_e$ , les trois termes du membre de droite de l'équation III.9 pour le  $SV_1^m$  de l'expérience 2. b) Evolution du rapport  $\frac{G_e}{C_a}$  au cours de l'évolution linéaire de  $SV_1^m$

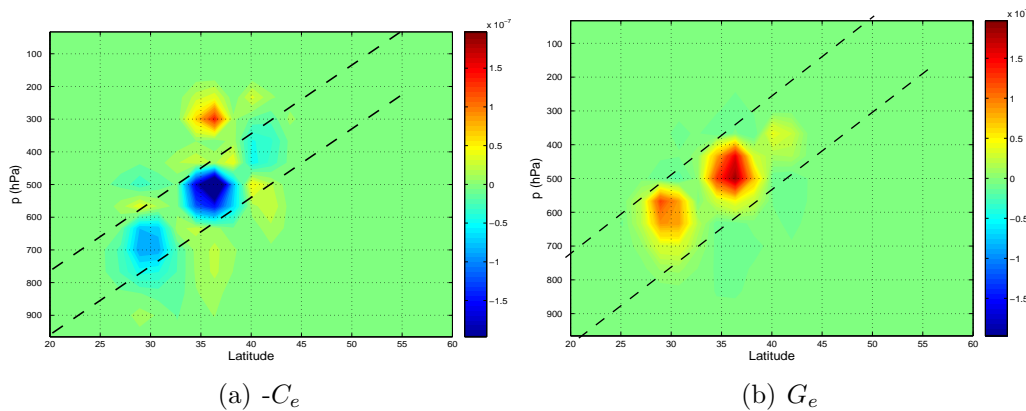


FIG. IV.23 – Termes de conversion locale d'énergie potentielle en énergie cinétique  $[\omega_0(\kappa\delta T + \partial_p\delta T) + \delta\omega(\kappa T_0 + \partial_p T_0)]\delta T$  et de création locale d'énergie potentielle par dégagement de chaleur latente  $\delta T\delta J$  pour le SV dominant de l'expérience 2.

## IV.3 Conclusion

Nos études de l'impact de l'humidité sur la structure des vecteurs singuliers linéaires confirment la variabilité des conclusions existant dans la littérature sur le rôle de la dynamique humide aux moyennes latitudes. Nous avons présenté deux simulations où l'humidité jouait un rôle très différent dans chacun des cas. Dans l'expérience 1, les processus diabatiques renforçaient la croissance barocline des perturbations sans changer qualitativement la dynamique sèche. Les vecteurs singuliers secs et humides étaient alors quasiment identiques. Ce résultat n'est pas sans rappeler les travaux de Davis et al. (1993) qui, en se penchant sur des études de cas de

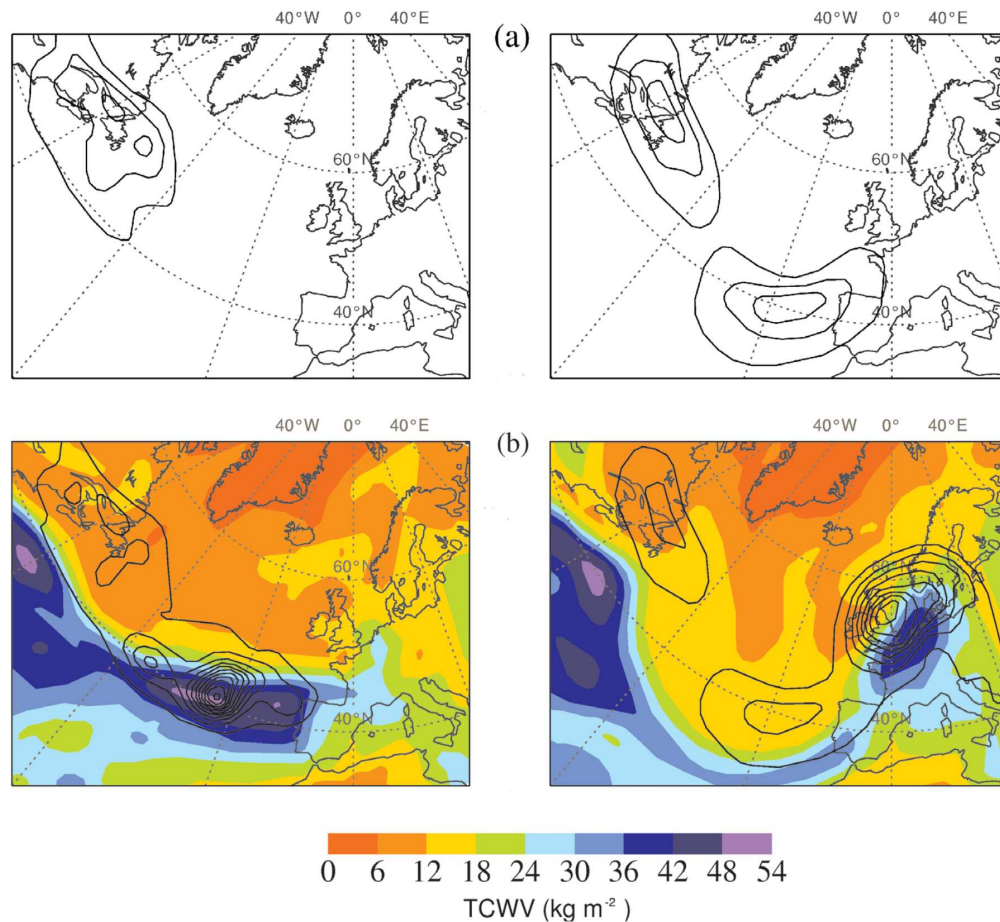


FIG. IV.24 – Distribution géographique des 10 premiers SVs secs (a) et humides (b) calculés sur la situation météorologique correspondant à la tempête du 16 Octobre 1987. La colonne de gauche représente les structures à l'instant initial et la colonne de droite au terme de la période d'optimisation qui est de 24h. D'après Hoskins and Coutinho (2005).

tempêtes extra-tropicales, ont montré que les processus humides ne modifiaient pas la dynamique sèche tout en l'amplifiant.

Ce type de situations correspond à la grande majorité des expériences de calcul de vecteurs singuliers que nous avons effectués. Néanmoins, nous montrons dans l'expérience 2 un exemple de cas où la présence d'une zone riche en humidité dans l'écoulement permet la croissance purement diabatique d'erreurs. Ces erreurs ne sont pas diagnosticables en utilisant une physique sèche. Il est intéressant de rapprocher cette étude des résultats de Hoskins and Coutinho (2005), où la structure de vecteurs singuliers secs et humides calculées sur les tempêtes du 16 Octobre 1987 et de Décembre 1999. La figure IV.24, tirée de leur article, compare la distribution géographique des dix premiers SVs secs (a) et humides (b) aux instants initial (colonne de gauche) et final (colonne de droite). La localisation des vecteurs singuliers humides



apparaît au maximum de d'humidité à l'Est de l'Espagne alors que ceux-ci étaient situées à l'Est du Canada dans le cas sec, similairement à l'expérience 2.

Contrairement aux perturbations optimales humides présentes uniquement dans les zones humides mises en évidence par Hoskins and Coutinho (2005), les vecteurs singuliers de l'expérience 2 sont purement diabatiques et ne présentent pas les caractéristiques des perturbations baroclines humides, mais d'ondes de Rossby diabatiques. Le dégagement de chaleur latente étant la source principale d'énergie potentielle de ces perturbations, l'inclusion d'une physique humide est nécessaire pour les mettre en évidence.

L'importance de ces perturbations diabatiques dans la prévisibilité de l'écoulement peut être appréhendée à partir des figures IV.4 et IV.13. En effet, alors que les dix premiers SVs secs possèdent dans les deux expériences des taux d'amplification similaires (entre 30 et 50), l'amplification des SVs purement diabatiques ( $SV_1^m, SV_2^m, SV_3^m$ ) de l'expérience 2 possède un taux d'amplification de 30 à 40% supérieur à celui des SVs baroclines humides de l'expérience 1 et au  $SV_4^m$  de l'expérience 2 qui est le vecteur singulier barocline humide de l'expérience 2 s'amplifiant le plus. Pour celui qui utilise les vecteurs singuliers pour caractériser les zones sensibles de l'écoulement (observation ciblée) ou pour initialiser un ensemble, il paraît crucial de posséder la connaissance de la localisation de ces instabilités purement humides dont l'impact est le plus important sur la prévisibilité.





# V

---

## Choix des normes pour l'étude de perturbations optimales humides

---

La prise en compte de la physique linéaire humide nécessite l'ajout de la variable humidité a priori indépendante des variables sèches. Néanmoins si les travaux de Errico et al. (2003) montrent une sensibilité initiale importante de l'écoulement atmosphérique à des perturbations d'humidité dans certaines situations, cette sensibilité à l'humidité est fortement liée à celle à la température dans les situations de cyclogénèse (Langland et al., 1996) : est-il alors pertinent de considérer à la fois des perturbations des deux champs dans le calcul des perturbations optimales ? Pour le calcul de perturbations optimales, deux possibilités sont envisageables :

- On peut continuer à ne mesurer que la composante sèche de la perturbation au moyen par exemple de l'énergie totale sèche. Pour que l'expression quadratique de l'énergie totale sèche reste une norme (et respecte la condition de séparation  $\|x\|=0 \Rightarrow x=0$ ), il est alors nécessaire de mettre à zéro la composante humide des champs perturbés, aux instants initial et final de la période d'optimisation dans le cas des vecteurs singuliers linéaires et non-linéaires. Après l'instant initial, la perturbation extrait de l'humidité de la trajectoire de référence. A l'instant final, cette composante humide n'est alors pas mesurée par la norme de la perturbation.
- Pour tenir compte de la partie humide de la perturbation, il faut alors lui associer à tout instant un nouveau vecteur d'état  $(\delta\mathbf{v}, \delta T, \delta q, \delta\pi)$ . La mesure de la "taille" de la perturbation doit se faire au moyen d'une norme "humide"<sup>1</sup> incluant l'humidité.

Ce chapitre vise à présenter les différents choix possibles de norme humide, leur justification physique ainsi que leur influence sur la structure des perturbations optimales et la mesure de l'impact de l'humidité.

---

<sup>1</sup>Nous parlerons de vecteurs singuliers humides lorsque les modèles linéaire-tangent et adjoint incluent les processus humides et ce même si la norme utilisée ne contient pas de composante humide.

Puisque la structure des vecteurs singuliers dépend de façon importante de la norme choisie (Palmer et al., 1998; Joly, 1995), il convient de s'interroger sur l'impact du choix d'une norme incorporant l'humidité. Jusqu'ici, il n'existe dans la littérature qu'une unique expression de norme humide : la norme énergie totale humide. Cette dernière consiste en une variante de la norme énergie totale sèche à laquelle on ajoute un terme proportionnel à  $\delta q^2$  (Ehrendorfer et al., 1999; Zadra et al., 2004). Il n'existe pas de réelle théorie à l'origine de ce choix mais cette expression permet de former une forme bilinéaire quadratique commode à utiliser. De fait, les études de vecteurs singuliers au moyen de normes humides sont peu nombreuses et il semblerait que les utilisateurs de vecteurs singuliers ne soient pas très confiants en leur bien-fondé, d'où le recours à des normes sèches y compris pour étudier les problèmes liés à l'humidité (Coutinho et al., 2004). Les travaux de Marquet (2006) permettent d'expliquer différents termes de cette nouvelle norme à partir du concept d'enthalpie utilisable humide avec néanmoins des corrections concernant le terme lié à l'humidité. Malgré le recours intensif au calcul de perturbations optimales, peu d'études sont consacrées au problème et à la justification du choix des normes.

Ce chapitre est une réflexion sur l'impact du choix des normes sur le calcul des perturbations optimales. Nous reviendrons aussi sur la justification de la norme énergie totale sèche que nous avons utilisée auparavant. Dans un premier temps, nous dériverons à partir des équations dynamiques du problème l'expression de la norme énergie totale sèche et nous nous interrogerons sur le bien-fondé d'une telle démarche. Ensuite seront détaillés les problèmes liés à la norme énergie totale humide et dans un troisième temps, une nouvelle expression de norme humide sera proposée. Enfin, l'impact des différentes normes mentionnées au cours de ce chapitre sera étudié et nous justifierons notre préférence pour la norme énergie totale sèche.

## V.1 Comment choisir une norme ? Application au cas de la norme énergie totale sèche

Le choix d'une norme donnée pour le calcul de perturbations optimales dépend de l'objectif poursuivi. Nous avons distingué jusqu'ici deux démarches :

1. La première consiste à caractériser les instabilités d'un écoulement donné pour associer à un type de situation une famille d'instabilités possibles. Ces motivations sont par exemple à l'origine des études de stabilité de fronts (Joly, 1991) aux moyen de modes normaux puis de vecteurs singuliers (Joly, 1995). Le choix d'une norme dérivée des équations dynamiques du problème, notamment par le choix d'invariants des équations chargés d'une signification physique importante (énergie, entropie...) paraît alors pertinent.
2. La seconde démarche vise à caractériser via le calcul de vecteurs singuliers les zones sensibles de l'écoulement où l'impact d'une erreur sur les conditions initiales serait le plus important à l'échéance de la prévision. L'utilisateur cherche alors à obtenir une carte de sensibilité la plus représentative possible des erreurs d'analyse.

Afin de préciser les difficultés inhérentes au choix de la norme, nous allons considérer l'expression de la norme énergie totale sèche dont nous avons fait un usage intensif jusqu'ici :

$$E_T = \frac{1}{2} \iiint_{x,y,p} \left( \frac{\delta \mathbf{v}^2}{2} + \frac{c_p}{T_{ref}} \frac{\delta T^2}{2} + RT_{ref} \delta \Pi^2 \right) dm$$

avec  $dm = \rho dx dy dz = -\frac{1}{g} dx dy dp$ .

Le choix des valeurs des coefficients  $T_{ref}$ ,  $P_{ref}$  proposés dans la littérature est rarement justifié lors de l'utilisation de la norme énergie totale sèche. Il faut remonter aux travaux de Talagrand (1981) sur l'assimilation pour trouver une justification de cette norme. La norme énergie totale apparait alors comme un invariant des équations linéarisées du problème autour d'un état de base stable : la norme de la perturbation ne doit pas croître en l'absence d'instabilités pour éviter une croissance de l'énergie de cette dernière ex-nihilo.

L'état de base suivant est considéré :

- planète sans orographie
- $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$  écoulement de base nul
- la température potentielle ne dépend que de la coordonnée pression :  $\theta_0(p)$
- la pression au sol  $p_0$  est constante

Nous y ajoutons pour pouvoir élargir par la suite la problématique à l'étude de normes humides un profil d'humidité  $q_0(p)$  dépendant aussi uniquement de la coordonnée pression. Ce profil est choisi de façon à ce que la stratification verticale soit conditionnellement stable.

Après linéarisation autour de l'état de base considéré, les équations primitives s'écrivent pour les variables vitesse, température et humidité (ici on ne prendra pas en compte le terme de pression au sol qui en pratique n'a que peu de poids dans le calcul des vecteurs singuliers) :

$$\frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial t} + f \mathbf{k} \wedge \delta \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{p}} \delta \Phi = 0 \quad (\text{V.1})$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} - \delta \omega \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} - \frac{L}{C_p} \delta \mathcal{P} = 0 \quad (\text{V.2})$$

$$\frac{\partial \delta q}{\partial t} + \delta \mathcal{P} + \delta \omega \frac{dq_0}{dp} = 0 \quad (\text{V.3})$$

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\partial \delta \omega}{\partial p} = 0 \quad (\text{V.4})$$

où l'on a introduit la température potentielle de l'état de base  $\theta_0 = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}}$ .

En utilisant la loi des gaz parfaits linéarisée  $\partial_p \delta \Phi = -\frac{R \delta T}{p}$ , sont obtenues les équations

tions d'évolution de  $\delta T^2$  et de  $\delta \mathbf{v}^2$  :

$$\partial_t \left( \frac{(\delta \mathbf{v})^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\delta \Phi \delta \mathbf{v}) - \partial_p (\delta \omega \delta \Phi) - \frac{\delta \omega R \delta T}{p} \quad (\text{V.5})$$

$$\partial_t \left( \frac{\delta T^2}{2} \right) = \frac{L}{C_p} \delta \mathcal{P} \delta T - \delta \omega \delta T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} \quad (\text{V.6})$$

Dans le cas d'une atmosphère sèche, le terme de dégagement de chaleur latente est nul, l'équation d'évolution de l'énergie totale sèche des perturbations s'écrit alors :

$$\partial_t (E_T) = - \iiint \left( \nabla \cdot (\delta \Phi \delta \mathbf{v}) + \partial_p (\delta \omega \delta \Phi) + \frac{R \delta \omega \delta T}{p} + \frac{C_p}{T_{ref}} \delta \omega \delta T \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} \right) dm$$

avec  $E_T = \iiint_{x,y,p} \left( \frac{(\delta \mathbf{v})^2}{2} + \frac{C_p}{T_{ref}} \frac{\delta T^2}{2} \right) dm$ .

Les deux premiers termes de l'intégrale, correspondant à l'intégrale volumique de la divergence du flux de géopotentiel, ont une contribution négligeable une fois intégrés sur le domaine complet. En fait ils sont compensés par le terme associé à la pression dans la norme (Talagrand, 1981), mais ce dernier étant en pratique négligeable devant les termes d'énergie cinétique et potentielle nous l'avons exclu de la dérivation pour plus de lisibilité. L'équation de conservation de l'énergie se restreint alors à :

$$\partial_t (E_T) = - \iiint \delta T \delta \omega \left( \frac{R}{p} + \frac{C_p}{T_{ref}} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} \right) dm$$

Pour que l'énergie de la perturbation demeure constante pour une atmosphère stable ( $\partial_t E_T = 0$ ), l'intégrale précédente doit être nulle et ce, quelles que soient les perturbations choisies. Le contenu de l'intégrale doit donc être égal à 0 d'où la condition nécessaire suivante :

$$T_{ref}(p) = - \frac{C_p p}{R} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} = T_0(p) - \frac{c_p p}{R} \frac{dT_0}{dp} \quad (\text{V.7})$$

Plusieurs hypothèses quant au choix du profil de température potentielle  $\theta_0(p)$  sont envisageables :

- le cas d'une atmosphère isotherme de température  $T_0$ . D'après (V.7), il est facile de vérifier que :

$$T_{ref} = T_0 \quad (\text{V.8})$$

- Pour plus de réalisme,  $\theta_0$  peut être choisi égal au profil moyen de température potentielle issue de données climatologiques. Le gradient vertical de température potentielle terrestre est à peu près constant jusqu'à une altitude de 200 hPa (Peixoto and Ort, 1992) et en considérant sa valeur moyenne à 500 hPa ( $3.5^\circ \text{K.m}^{-1}$ ) on obtient :

$$T_{ref} \approx 140^\circ \text{K}$$

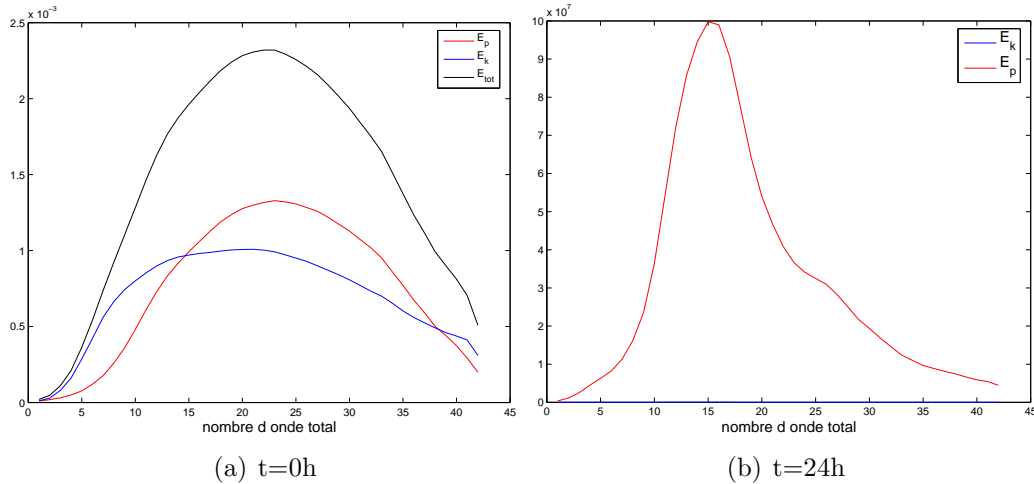


FIG. V.1 – Spectre moyen des dix premiers vecteurs singuliers calculés avec la norme énergie totale sèche pour  $T_{ref} = 140$  au début et à la fin de la période d’optimisation.

Cette valeur est bien inférieure à celle que l’on aurait trouvé en prenant pour  $T_{ref}$  la température moyenne atmosphérique à cette altitude dans la relation (V.8), et on trouve une allusion à ce sujet dans Ehrendorfer and Errico (1995).

Nous avons réalisé un calcul de vecteurs singuliers en choisissant  $T_{ref} = 140K$  dans l’expression de l’énergie totale sèche. La figure V.1 montre les spectres moyens des dix premiers vecteurs singuliers aux instants final et initial. Le poids sur la partie énergie potentielle de la norme étant trop important, à l’instant initial l’énergie potentielle du vecteur singulier domine et l’énergie cinétique de la perturbation est alors négligeable. Tout ce passe comme si à l’instant final nous avons choisi une norme ne tenant compte que du terme en  $\delta T^2$  en imposant  $\delta u$  à l’instant final. Cet exemple illustre la sensibilité des résultats obtenus grâce à des méthodes de type vecteurs singuliers par rapport aux poids de la norme utilisée.

De ce qui précède émerge le caractère quelque peu approximatif du choix des coefficients de la norme énergie totale sèche. Ehrendorfer and Errico (1995) soulignent pour justifier le choix  $T_{ref} \approx 300K$ , que la norme énergie totale sèche ne doit être considérée comme une énergie conservée mais comme une forme quadratique “simple et utile qui ressemble à une énergie”.

Finalement, la justification du choix actuel des coefficients semble résider dans l’explication de Palmer et al. (1998) : ce choix de norme permet d’obtenir des structures les plus représentatives à l’instant initial des erreurs d’analyse par rapport aux autres normes utilisées. Dans le cadre de cette étude, il n’a pas été cherché à rentrer plus dans le détail de cette problématique qui déborde quelque peu de nos objectifs.



## V.2 Etude de la norme énergie totale humide

La norme énergie totale humide est une extension humide de la norme énergie totale sèche :

$$E_m = \frac{1}{2} \iiint_{x,y,p} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{c_p}{T_{ref}} \frac{\delta T^2}{2} + RT_{ref} \delta \Pi^2 + \epsilon \frac{L^2}{c_p T_{ref}} \delta q^2 \right) dm$$

où  $\epsilon$  est une constante permettant de moduler le poids relatif de l'humidité par rapport aux composantes sèches de la norme. Elle est traditionnellement prise égale à 1 et, sauf indications contraires, nous la considérerons comme telle par la suite. Introduite par Mahfouf and Buizza (1996); Ehrendorfer et al. (1999), elle a depuis été abandonnée au CEPMMT pour les études de vecteurs singuliers et peu de travaux en ont fait usage depuis (Zadra et al., 2004).

### V.2.1 Dérivation de la norme énergie totale humide.

Afin de mesurer l'influence de la perturbation du champ d'humidité, Ehrendorfer et al. (1999) ajoutent un terme de la forme  $\epsilon \frac{L^2}{c_p T_{ref}} \delta q^2$  à l'expression de la norme énergie totale sèche pour former une "énergie" humide. En partant de la considération que le dégagement de chaleur latente respecte  $C_p \delta T = -L \delta q$ , ils choisissent  $\epsilon = 1$ .

A partir des équations d'évolution linéarisées, il est possible de vérifier de façon plus rigoureuse la légitimité de ce choix. En utilisant les équations (V.5) et (V.6) auxquelles on ajoute l'équation de variance d'humidité obtenue à partir de (V.3)

$$\partial_t \left( \frac{\delta q^2}{2} \right) = -\delta q \delta \mathcal{P} - \delta q \delta \omega \frac{dq_0}{dp} \quad (\text{V.9})$$

on obtient l'équation d'évolution de la norme énergie totale humide

$$\begin{aligned} \partial_t E_m &= \partial_t \iiint \left( \frac{\delta \mathbf{v}^2}{2} + \frac{c_p}{T_{ref}} \frac{\delta T^2}{2} + \frac{\epsilon L^2}{c_p T_{ref}} \frac{\delta q^2}{2} \right) dm \\ &= \iiint \left( \delta \omega \delta T \left[ -\frac{R}{p} - \frac{c_p}{T_{ref}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} \right] + \frac{L \delta T}{T_{ref}} \delta \mathcal{P} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon \frac{L^2}{c_p T_{ref}} \left[ \delta q \delta \mathcal{P} + \delta q \delta \omega \frac{dq_0}{dp} \right] \right) dm \end{aligned}$$

En supposant, pour simplifier la dérivation, le profil d'humidité  $q_0$  constant avec l'altitude et en utilisant la relation  $\delta q = \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \delta T$ <sup>1</sup> valable dans les régions saturées en eau, l'intégrale précédente se simplifie en :

$$\partial_t E_m = \iiint \left( \delta \omega \delta T \left[ -\frac{R}{p} - \frac{c_p}{T_{ref}} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} \right] + \delta \mathcal{P} \delta T \left[ \frac{L}{T_{ref}} - \epsilon \frac{L^2}{c_p T_{ref}} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right] \right) dm$$

<sup>1</sup>On utilise la relation  $\delta q = \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \delta T$  et non pas  $L \delta q = C_p \delta T$  pour relier la perturbation d'humidité à celle de température dans les régions où il pleut. En effet la deuxième relation est vérifiée par les tendances des variables humidité et température et non pas par les variables elles-mêmes.

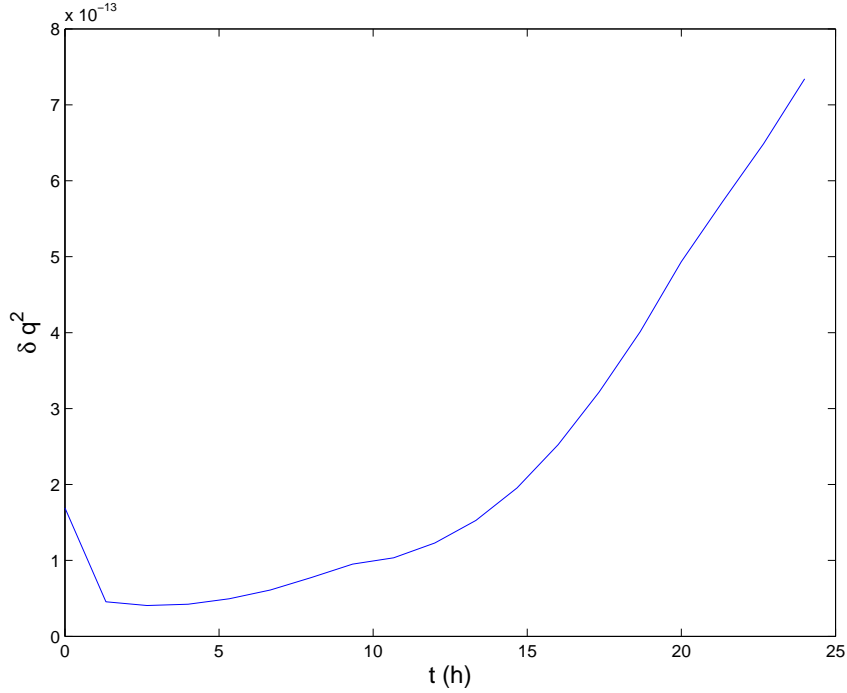


FIG. V.2 – Evolution de  $\delta q^2$  pour un vecteur singulier calculé avec la norme énergie totale humide.

d'où les deux conditions nécessaires pour conserver la propriété de non-croissance de la norme énergie totale humide en l'absence d'instabilités :

$$T_{ref}(p) = -\frac{C_p p}{R} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{d\theta_0}{dp} = T_0(p) - \frac{c_p p}{R} \frac{dT_0}{dp} \quad (\text{V.10})$$

$$\epsilon = \left[ \frac{L}{c_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \right]^{-1} \quad (\text{V.11})$$

L'expression de  $T_{ref}$  est identique au cas sec. Cette dérivation est valable dans les régions où la précipitation est non-nulle (sinon  $\delta \mathcal{P} = 0$  et l'énergie humide est conservée quelle que soit la valeur de  $\epsilon$ ). A l'aide de la relation de Clausius-Clapeyron et en considérant un profil de température atmosphérique moyen autour de  $45^\circ\text{N}$ , le terme  $\frac{L}{c_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}$  est de l'ordre de 1 ce qui justifie l'approximation  $\epsilon \approx 1$  effectuée dans l'expression de la norme énergie totale humide.

## V.2.2 Problèmes liés à l'utilisation de la norme énergie totale humide

Les calculs de vecteurs singuliers effectués dans le modèle PUMA en utilisant la norme humide font apparaître une incohérence physique importante. En effet, lors de leur évolution dans le modèle linéaire-tangent, les perturbations optimales précipitent la majeure partie de l'humidité présente initialement dans la perturbation :

en moins de trois heures la quantité d'eau  $\delta q^2$  de la perturbation chute brutalement (figure V.2). Cette précipitation intense ne peut correspondre à une réalité physique mais à une incohérence d'ordre numérique. Dans l'annexe du papier de Ehrendorfer et al. (1999), les auteurs notent que l'énergie totale humide peut croître localement par précipitation et dans ce paragraphe nous allons détailler leur raisonnement crucial pour comprendre les problèmes liées au choix de la norme énergie totale.

En un point de grille du modèle où la précipitation sur la trajectoire de référence est non nulle à l'instant considéré, l'opérateur linéaire associé à la version linéaire-tangente du schéma de précipitation à grande échelle n'agit que sur les champs d'humidité et de température. En restreignant la norme humide uniquement à ces deux variables l'énergie humide du système s'écrit au point considéré :

$$\delta E(t) = \frac{c_p}{T_{ref}} \delta T^2 + \frac{L^2}{c_p T_{ref}} \delta q^2$$

Les perturbations d'humidité et de température après le schéma linéaire de précipitation ( $t=\Delta t$ ) s'écrivent en fonction de leurs valeurs avant ce dernier ( $t=0$ )<sup>2</sup> :

$$\delta q(t = \Delta t) = \delta q_{sat}(\delta T(t = \Delta t)) \quad (V.12)$$

$$\delta T(t = \Delta t) = \delta T(t = 0) + \frac{L}{C_p}(\delta q(t = 0) - \delta q_{sat}(t = \Delta t)) \quad (V.13)$$

A l'instant  $t=0$  la relation (V.12) n'est pas vérifiée du fait de l'influence de la dynamique et/ou d'une condition initiale imposée par l'utilisateur qui ne vérifie pas cette relation.

La perturbation d'humidité à saturation est dans le modèle linéaire-tangent proportionnelle à la perturbation de température :

$$\delta q_{sat}(t = \Delta t) = \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}(T_0) \delta T(t = \Delta t) \quad (V.14)$$

Les équations (V.12) et (V.13) se réécrivent toujours au point de grille considéré sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \delta T(t = \Delta t) \\ \delta q(t = \Delta t) \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{L}{C_p} \\ \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} & \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta T(t = 0) \\ \delta q(t = 0) \end{pmatrix} \quad (V.15)$$

En utilisant le changement de variable  $\delta \tilde{T} = \sqrt{\frac{C_p}{T_{ref}}} \delta T$  et  $\delta \tilde{q} = \sqrt{\frac{L^2}{C_p T_{ref}}} \delta q$  tel que  $E = \delta \tilde{T}^2 + \delta \tilde{q}^2$ , l'expression précédente devient :

$$\begin{pmatrix} \delta \tilde{T}(t = \Delta t) \\ \delta \tilde{q}(t = \Delta t) \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} & \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \delta \tilde{T}(t = 0) \\ \delta \tilde{q}(t = 0) \end{pmatrix} \quad (V.16)$$

<sup>2</sup>Le schéma de précipitation utilisé dans PUMA est semi-implicite ce qui permet d'avoir  $\delta q(t = \Delta t) = \delta q_{sat}(\delta T(t = \Delta t))$  et non pas  $\delta q(t = \Delta t) = \delta q_{sat}(\delta T(t = 0))$ . En pratique, le choix d'un schéma du second type ne modifierait pas les conclusions de ce qui suit mais uniquement la forme des calculs.

Au point de grille considéré, l'amplification énergétique maximale avant et après le passage par le schéma de précipitation est donnée par la plus grande des valeurs propres  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  de  $M^T M$ , soit

$$\lambda_1^2 = 0 \quad (\text{V.17})$$

$$\lambda_2^2 = 2 \frac{1 + \left(\frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}\right)^2}{\left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}\right)^2} \quad (\text{V.18})$$

La première valeur propre est nulle à cause des relations (V.12) et (V.14) entre l'humidité et la température qui enlèvent un degré de liberté au problème. La seconde valeur propre, associée au vecteur propre  $(\delta\tilde{T}, \delta\tilde{q}) = (1, 1)$ , est toujours plus grande que 1 ce qui veut dire que l'opérateur de précipitation peut augmenter localement l'énergie du système telle que nous la mesurons au moyen de la norme énergie totale humide. Ce comportement est du fait que  $x^2 + y^2$  puisse être inférieur à  $(x + y)^2$ . En supposant  $q_{sat} = 0$  et en partant de perturbations initiales telles que  $\delta\tilde{q}_0 = \delta\tilde{T}_0$  en variables adimensionnées, on a après passage par l'opérateur de précipitation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\tilde{T}_0 \\ \delta\tilde{q}_0 = \delta\tilde{T}_0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\text{précipitation}} \begin{pmatrix} \delta\tilde{T}_{\Delta t} = 2\delta\tilde{T}_0 \\ \delta\tilde{q}_{\Delta t} = 0 \end{pmatrix} \\ \delta E_0 = \delta\tilde{q}_0^2 + \delta\tilde{T}_0^2 = 2\delta\tilde{T}_0^2 &\xrightarrow{\text{précipitation}} \delta E_{\Delta t} = 0 + \delta\tilde{T}_{\Delta t}^2 = (\delta\tilde{T}_0 + \delta\tilde{q}_0)^2 = 4\delta\tilde{T}_0^2 \end{aligned}$$

Le système double alors son énergie par simple précipitation. L'ajout du terme d'énergie cinétique à la norme ne change en rien les conclusions précédentes étant donnée que la vitesse n'intervient pas dans l'équation de précipitation.

Ce qui précède montre bien le problème inhérent à la norme énergie humide totale. Le schéma de précipitation possédant pour cette norme une valeur propre plus grande que 1, le processus d'optimisation va utiliser cette incohérence numérique afin de maximiser le rapport des énergies des perturbations initiale et finale. En terme de coût énergétique, il devient plus avantageux d'introduire une perturbation se projetant sur le vecteur propre associé à  $\lambda_2^2$  et d'en précipiter la composante humide que d'introduire directement le champ de température résultant.

La précipitation artificielle de l'humidité initialement introduite dans le modèle peut aussi être due au fait que le calcul traditionnel des vecteurs singuliers suppose les différentes variables entièrement indépendantes à l'instant initial. Ce n'est pas tout à fait le cas puisqu'aux endroits où la précipitation est non nulle dans l'état de base, l'équilibre à saturation impose aux perturbations de cet état de base de vérifier  $\delta q = \delta q_{sat}$ .

L'équilibre entre l'humidité et l'humidité à saturation n'est pas imposé à l'instant initial aux endroits de l'état de base où la précipitation est non-nulle. C'est pourquoi la contrainte

$$\delta q = \delta q_{sat} = \partial_T q_{sat}(T_0) \delta T$$

est imposée au sein du modèle linéaire-tangent aux perturbations optimales à l'instant initial dans les régions où  $\mathcal{P}_0 > 0$ . La précipitation importante d'eau au cours

des premiers pas de temps ne disparaît pas pour autant (non montré). En effet, le modèle crée des déséquilibres par rapport à la saturation en advectant de l'eau de zones non saturées vers des zones saturées afin de précipiter et augmenter l'énergie du système. Notons aussi que la contrainte  $\delta q = \delta q_{sat}$  dans les régions de l'état initial saturées en eau n'est pas imposable dans la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires puisque son expression non-linéaire serait :

$$\delta q = \delta q_{sat} \quad \text{si} \quad Q_0 + \delta q > q_{sat}(T_0 + \delta T)$$

qui n'est pas codable en pratique étant donné que la condition  $Q_0 + \delta q > q_{sat}(T_0 + \delta T)$  n'est pas connue à priori.

Afin de diminuer l'intensité des précipitations on peut aussi introduire une relaxation qui permet de ne précipiter à chaque itération de l'opérateur de précipitation qu'une fraction de l'humidité au-delà de la saturation. Cette méthode est utilisée par Ehrendorfer et al. (1999) qui avaient rencontré des problèmes analogues pour des schémas de convection humide. Néanmoins un tel mécanisme modifie la physique du problème et les résultats obtenus seront susceptibles de dépendre de façon importante de la valeur de ce coefficient de relaxation.

Nous considérons que cette précipitation initiale intense non-physique dans la mesure où elle correspond à une condition initiale non équilibrée et non représentative d'erreurs classiques de prévision.

## V.3 Définition d'une nouvelle norme "énergie humide"

Marquet (2006) propose à partir du concept d'enthalpie utilisable une dérivation de la norme énergie totale humide qui justifie en partie les expressions utilisées jusqu'ici dans la littérature. Néanmoins ces résultats montrent un désaccord quant au choix du terme lié à l'humidité. Cependant l'écriture d'un cycle énergétique humide reste "novateur" (Pauluis, 2007), la principale difficulté consistant à estimer la distribution du dégagement de chaleur latente. Dans une première partie nous allons dériver l'expression théorique d'une nouvelle norme à partir des équations linéarisées du mouvement autour d'un état de base zonal idéalisé. Ensuite nous discuterons du choix des poids devant les différents termes de cette norme avant de présenter les résultats obtenus.

### V.3.1 Dérivation

Lapeyre and Held (2004) se sont intéressés dans le cadre d'un modèle quasi-géostrophique humide aux transferts énergétiques et ont introduit un budget d'énergie fermé reposant sur l'expression d'une énergie potentielle humide  $PE_{moist}$  dont l'expression diffère singulièrement de l'expression de la norme humide introduite précédemment :

$$E_{moist} = \frac{1}{2} \iiint \left[ \mathbf{u}^2 + \frac{C_p}{T_{ref}} (\delta T + \frac{L}{C_p} \delta q)^2 + \frac{L}{q_{ref}} (\delta q - \delta q_{sat})^2 \right] dm \quad (\text{V.19})$$

Les variables considérées ne sont plus l'humidité et la température mais l'enthalpie humide  $h = C_p T + Lq$  et le déficit à saturation en eau  $q - q_{sat}$ . En généralisant la dérivation de Lapeyre and Held (2004) aux équations primitives et en utilisant la relation (IV.18) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\delta T + \frac{L}{c_p} \delta q)^2}{2} &= \delta \omega \left( \delta T + \frac{L}{C_p} \delta q \right) \left( S_p^0 - \frac{L}{c_p} \frac{dq_0}{dp} \right) \\ &= \delta \omega \delta T \left( S_p^0 - \frac{L}{c_p} \frac{dq_0}{dp} \right) + \delta \omega \delta q \frac{L}{C_p} \left( S_p^0 - \frac{L}{c_p} \frac{dq_0}{dp} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\delta q - \delta q_{sat})^2}{2} &= \delta \omega (\delta q - \delta q_{sat}) \left[ \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial p} \right)_T - \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p S_p^0 - \frac{dq_0}{dp} \right] \\ &= \delta \omega \delta T \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right) \left[ \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p S_p^0 - \frac{dq_0}{dp} \right] \\ &\quad + \delta \omega \delta q \left[ \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial p} \right) - \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p S_p^0 - \frac{dq_0}{dp} \right] \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta v^2}{2} \right) &= \frac{R \delta \omega \delta T}{p} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les égalités non-triviales<sup>3</sup>  $(q - q_{sat})\mathcal{P} = 0$  et  $(\delta q - \delta q_{sat})\delta\mathcal{P} = 0$ .

$S_p^0 = -\left(\frac{p}{p_{ref}}\right)^{\frac{R}{c_p}} \frac{dq_0}{dp}$  représente la stabilité verticale l'écoulement de base.

L'annulation des termes proportionnels à  $\delta \omega \delta q$  au sein de l'intégrale (V.19) impose la condition suivante entre les coefficients  $T_{ref}$  et  $q_{ref}$  :

$$\frac{q_{ref}}{T_{ref}} = \frac{S_p^0 \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p + \frac{dq_0}{dp} - \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial p} \right)_T}{S_p^0 - \frac{L}{c_p} \frac{dq_0}{dp}} \quad (\text{V.20})$$

Pour éliminer en plus les termes proportionnels à  $\delta \omega \delta T$ , il faut effectuer le choix suivant pour  $T_{ref}$  et  $q_{ref}$  :

$$T_{ref} = \frac{p C_p}{R} \left( 1 + \frac{L}{c_p} \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p \right) \left( S_p^0 - \frac{L}{c_p} \frac{dq_0}{dp} \right) \quad (\text{V.21})$$

$$q_{ref} = \frac{p C_p}{R} \left( 1 + \frac{L}{c_p} \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p \right) \left( S_p^0 \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial T} \right)_p + \frac{dq_0}{dp} - \left( \frac{\partial q_{sat}^0}{\partial p} \right)_T \right) \quad (\text{V.22})$$

qui permet d'obtenir le bilan énergétique humide fermé suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t KE &= - \iiint \frac{R \delta \omega \delta T}{p} dm \\ \partial_t PE_{moist} &= \iint \frac{R \omega \delta T}{p} dm \end{aligned}$$

<sup>3</sup>On utilise le fait qu'aux endroits où  $\mathcal{P} \neq 0$ ,  $q = q_{sat}$  sur la trajectoire ainsi que pour les variables perturbées.

avec  $KE = \iint \frac{\delta u^2}{2} dm$  l'énergie cinétique et  $PE_{moist} = \frac{1}{2} \iint \frac{C_p}{T_{ref}} (\delta T + \frac{L}{C_p} \delta q)^2 + \frac{L}{q_{ref}} (\delta q - \delta q_{sat})^2 dm$  l'expression de la nouvelle énergie potentielle humide introduite par Lapeyre and Held (2004).

A 500 hPa, en utilisant (V.20), on trouve pour une valeur de  $T_{ref}$  de l'ordre de 300 K une valeur de  $q_{ref}$  autour de  $0.1 \text{ kg.kg}^{-1}$ . L'amplification locale de l'énergie choisie suite au passage par l'opérateur de précipitation est donnée par les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{M} = A^{-1/2} M^* A M A^{1/2}$  où A est la matrice de changement de variable entre les variables du modèle et les variables canoniques liées à la nouvelle norme et où M est l'expression matricielle dans l'espace des variables du modèle de l'opérateur de précipitation. Le raisonnement est alors le même qu'en V.2.2 et nous ne le détaillerons pas. Les valeurs propres  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  et les vecteurs propres associés  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$  de  $\mathcal{M}$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 = 0 & \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \delta h = 0 \\ \delta m = 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2^2 = 1 & \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \delta h = 1 \\ \delta m = 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le premier vecteur propre correspond à une perturbation d'enthalpie humide nulle et de déficit en eau non nul : après passage dans l'opérateur de précipitation l'enthalpie humide reste conservée et le déficit en eau devient nul c'est pourquoi cette perturbation est associée à la valeur propre 0. Le deuxième vecteur propre est une perturbation de déficit en eau nul pour laquelle l'action de l'opérateur de précipitation est l'identité. Les valeurs propres  $\lambda_1^2$  et  $\lambda_2^2$  et les vecteurs propres associés sont indépendants des choix des coefficients  $T_{ref}$  et  $q_{ref}$ . Les deux valeurs propres de  $\mathcal{M}$  étant inférieures ou égale à 1, ce schéma de précipitation ne provoquera donc pas d'augmentation locale de la norme choisie sans intervention de la dynamique. Le calcul de perturbations optimales ne favorisera pas la précipitation et c'est pour cette raison que nous considérons cette norme physiquement plus réaliste que pour la norme énergie totale humide.

### V.3.2 Choix des coefficients $q_{ref}$ et $T_{ref}$ dans le nouvelle norme

L'exemple de l'étude de la norme énergie totale sèche a montré la difficulté du choix des poids au sein d'une norme et en particulier que la dérivation à partir des équations du mouvement ne suffisait pas pour obtenir les poids de la norme. Pour garder une cohérence avec le cas sec, nous avons choisi de garder  $T_{ref} = 280K$ . En effet, la convergence avec le régime sans physique humide est obtenue en supprimant la variable humidité en en faisant tendre le coefficient de chaleur latente L vers zéro dans (V.19). Avec ce choix de  $T_{ref}$ , cette norme demeure cohérente avec la norme énergie totale sèche.

Dans cette partie, les perturbations optimales ont été calculées sur une durée d'optimisation de 24h autour d'une trajectoire non-linéaire humide en utilisant le modèle PUMA2 à une résolution spectrale T42 et 15 niveaux verticaux. L'état de base

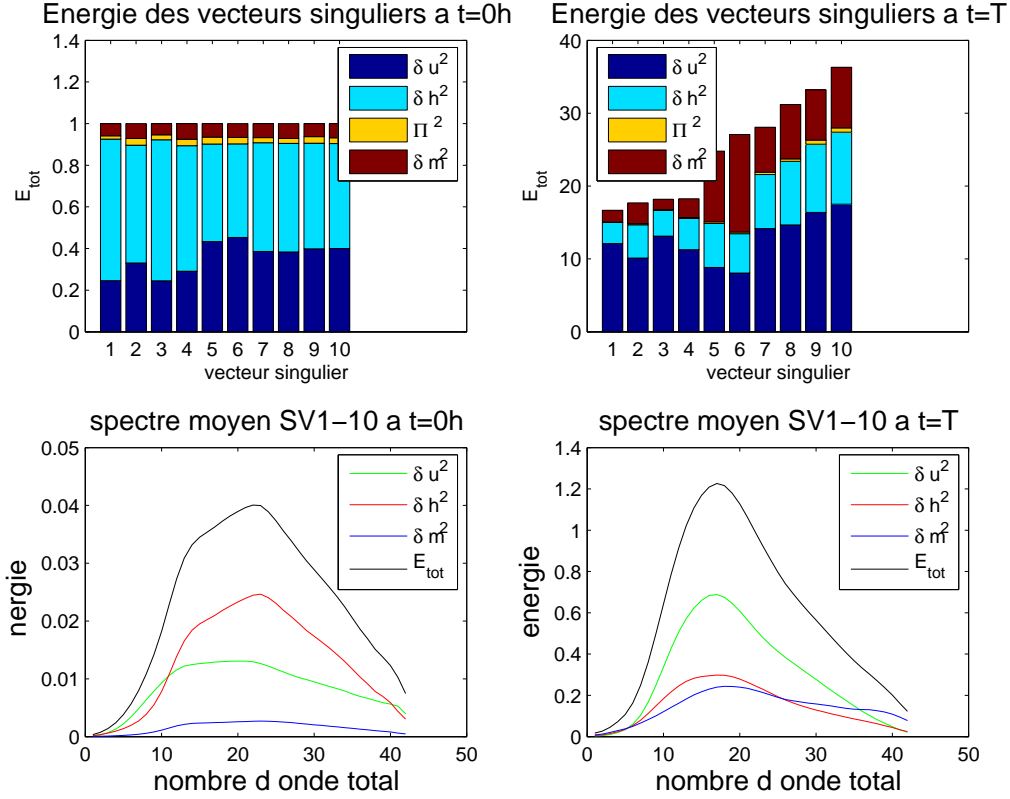


FIG. V.3 – Spectre moyen et répartition énergétique des dix SVs aux instants initial (colonne de gauche) et final (colonne de droite). La norme 2 avec  $q_{ref} = 0.03$  a été utilisée pour le calcul des perturbations optimales.

correspond à une sortie hivernale du modèle. Pour simplifier les notations, nous désignerons par :

- norme 1 la norme énergie totale humide
- norme 2 la norme humide de Lapeyre et Held.

Par  $SV_j^i$  nous désignerons le j-ème SV calculé avec la norme i ( $i=1$  ou  $i=2$ ) et  $\langle \cdot \rangle_i$  désigne le produit scalaire associé à la norme i.

Les vecteurs singuliers sont calculés avec la norme 2 pour 3 choix différents de coefficient pour  $q_{ref}$  : 0.03, 0.1 et 0.3 . Les spectres moyens aux instants initial et final ainsi que la contribution des différents termes de la norme à l'énergie de la structure sont indiqués figures V.3, V.4 et V.5.

Les spectres initiaux et finaux de ces 3 expériences présentent des pics aux mêmes échelles : les échelles spatiales sont identiques dans chacun des trois cas. L'étude de la contribution respective des poids des termes correspondant aux termes en  $\delta v^2$ ,  $\delta h^2$  et  $\delta m^2$  permet de choisir la valeur de  $q_{ref}$  a priori la plus judicieuse :

- Pour l'expérience  $q_{ref} = 0.3$ , le poids initial du terme en  $\delta m^2$  est très faible : la perturbation est initialement saturée tandis qu'à l'instant final elle est loin de la saturation et environ un quart de son énergie à l'instant final est issue d'un déficit à saturation important. Or, dans le cadre de la dynamique de



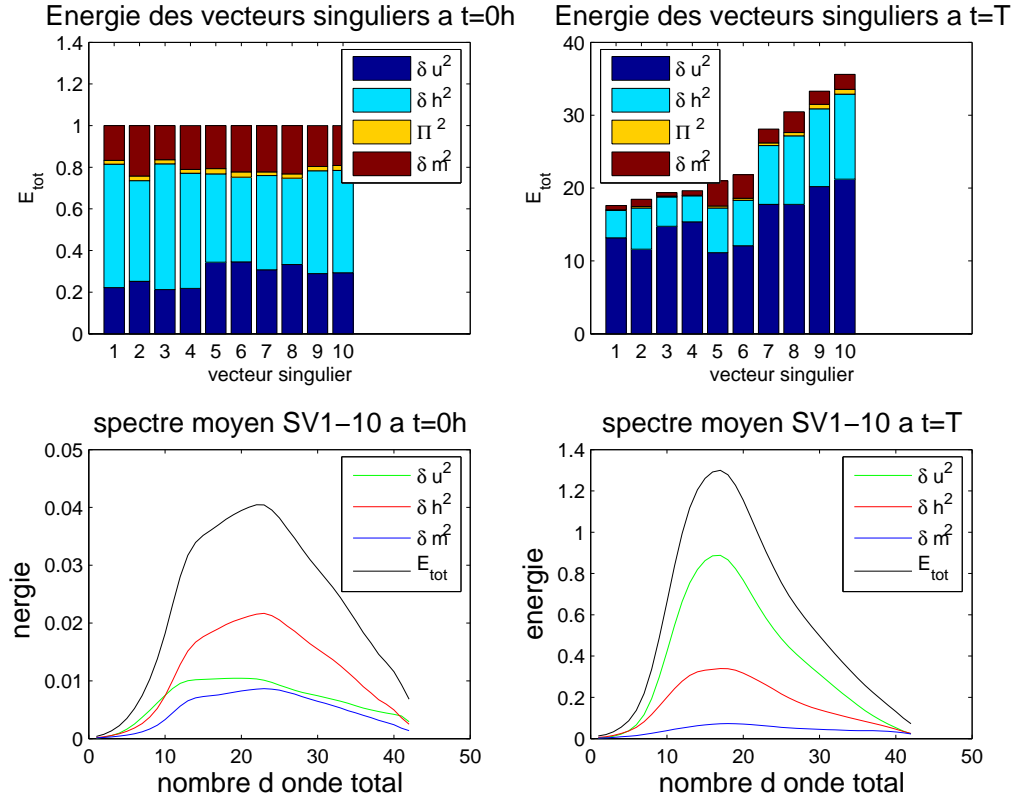


FIG. V.4 – Spectre moyen et répartition énergétique des dix SVs aux instants initial (colonne de gauche) et final (colonne de droite). La norme 2 avec  $q_{ref} = 0.1$  a été utilisée pour le calcul des perturbations optimales.

perturbations humides, il serait préférable qu'à l'instant final, les perturbations aient atteint un équilibre proche de la saturation afin de pouvoir s'amplifier adiabatiquement.

- Le phénomène inverse se produit si le choix  $q_{ref} = 0.03$  est effectué. En effet, le poids du terme relatif au déficit en eau dans la norme a été augmentée. Par un raisonnement analogue au cas précédent, les perturbations sont à l'instant final proches de la saturation. Par contre, la croissance de l'énergie cinétique de la perturbation est anormalement élevée (de l'ordre de 100). De plus à l'instant final, le choix d'une valeur de  $q_{ref}$  trop faible impose l'équilibre  $\delta q = \delta q_{sat}$ . Soucieux de ne pas imposer de contraintes dynamiques à la dynamique des perturbations, nous n'effectuerons pas ce choix de valeur de  $q_{ref}$ .
- Le choix  $q_{ref} = 0.1$  intermédiaire entre les deux configurations précédentes apparaît comme une alternative raisonnable puisque les extrêmes présentés dans chacun des deux cas précédentes sont évités. Par la suite, nous effectuerons ce choix pour l'utilisation de la norme 2.

Pour comparer les structures initiales associées aux différents jeux de perturbations optimales, nous avons utilisé l'indice de projection introduit par Buizza (1998). Le sous-espace constitué par les 10 vecteurs singuliers calculés avec la norme 2 est

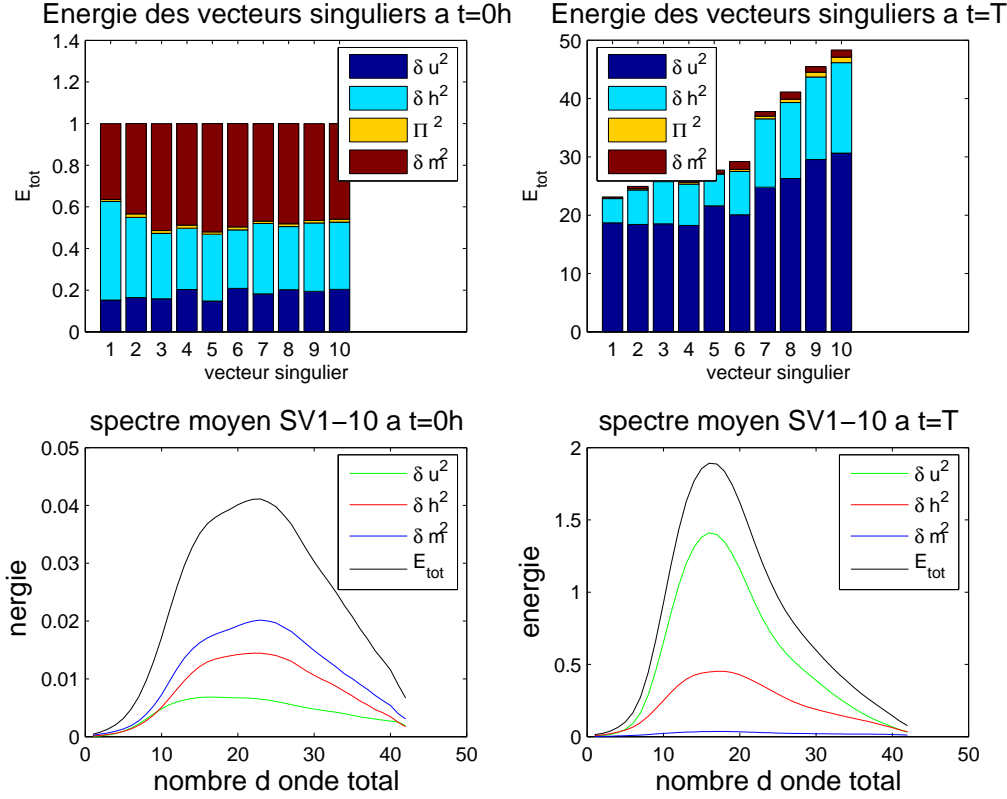


FIG. V.5 – Spectre moyen et répartition énergétique des dix SVs aux instants initial (colonne de gauche) et final (colonne de droite). La norme 2 avec  $q_{ref} = 0.3$  a été utilisée pour le calcul des perturbations optimales.

projeté sur celui engendré par les 10 vecteurs singuliers obtenus en utilisant la norme 1. Pour effectuer la projection, le produit scalaire associé à la norme 1 a été choisi. L'indice de projection  $p_{i,j}$  de  $SV_i^1$  sur  $SV_j^2$  s'écrit alors :

$$p_{i,j} = 100 \frac{\langle SV_i^1 \cdot SV_j^2 \rangle_1^2}{\langle SV_i^1 \cdot SV_i^1 \rangle \langle SV_j^2 \cdot SV_j^2 \rangle} \quad (\text{V.23})$$

$p_{i,j}$  correspondant à la fraction de l'énergie mesurée avec la norme 1 de  $SV_i^1$  se projette sur  $SV_j^2$ . Deux sous-espaces générés ici par les 10 premiers vecteurs singuliers de deux expériences différentes peuvent être comparés au moyen de l'indice de similarité suivant :

$$s(exp1, exp2) = \frac{1}{10} \sum_{i,j} \langle \tilde{S}V_i^{exp1} \cdot \tilde{S}V_j^{exp2} \rangle_1^2 \quad (\text{V.24})$$

où  $\tilde{S}V_{i=1,10}$  désigne les vecteurs de la base obtenue après orthonormalisation de Gram-Schmidt des vecteurs singuliers correspondant dans la base canonique associée à la norme 1. En effet, dans cette base, les vecteurs singuliers calculés avec la norme 2 ne sont plus nécessairement orthogonaux et il est nécessaire de considérer une nouvelle base orthonormée du sous-espace engendré. L'indice de similarité est

	N1 (DRY)	N1	N2 $q_{ref} = 0.03$	N2 $q_{ref} = 0.1$	N2 $q_{ref} = 0.3$	N2 $q_{ref} = 0.1$ (DRY)
N1 (DRY)	1	0.71	0.58	0.78	0.41	0.58
N1		1	0.54	0.67	0.30	0.38
N2 $q_{ref} = 0.03$			1	0.67	0.5	0.70
N2 $q_{ref} = 0.1$				1	0.61	0.66
N2 $q_{ref} = 0.3$					1	0.74
N2 $q_{ref} = 0.1$ (DRY)						1

TAB. V.1 – Comparaison des sous-espaces engendrés par les perturbations optimales à l’instant initial pour les 10 premiers vecteurs singuliers calculés avec la norme énergie totale sèche (N1 DRY), la norme énergie totale humide (N1), la norme 2 pour 3 choix de  $q_{ref}$  et la norme 2 avec  $q_{ref} = 0.1$  mais avec  $\delta q(t = 0) = \delta q(t = T_F) = 0$  d’imposé (N2  $q_{ref} = 0.1$  DRY).

égal à 1 pour deux sous-espaces identiques et est nul dans le cas de deux sous-espaces orthogonaux.

Le tableau V.1 compare entre eux les sous-espaces engendrés par les dix premiers vecteurs singuliers des différentes expériences au moyen de l’indice de similarité défini par la formule V.24. Le choix de  $q_{ref} = 0.1$  permet d’obtenir le parallélisme le plus important entre les sous-espaces instables obtenus avec les normes 1 et 2. Par ailleurs, il est aussi marquant de noter que les sous-espaces instables obtenus avec la norme 2 sont plus proches de ceux de l’expérience N1 (DRY) que N1 (MOIST).

## V.4 Comparaison des perturbations optimales calculées avec différentes normes

La comparaison des perturbations optimales calculées en utilisant deux jeux de normes, la première favorisant la précipitation et la seconde ayant un comportement neutre à son égard, nous permettra de séparer les artefacts liés aux propriétés de la norme des mécanisme physiques de croissance d’erreurs. Maintenant que la valeur du coefficient  $q_{ref}$  dans le norme 2 a été fixée à 0.1, nous présentons des calculs de vecteurs singuliers effectués sur la situation de la partie III.3 avec une résolution plus fine (T63 avec 15 niveaux verticaux) plus pertinente pour décrire les processus humides.

### V.4.1 Résultats expérimentaux.

Les dix premiers vecteurs singuliers ont été calculés avec les jeux de normes suivants :

- la norme énergie totale sèche (N1 sèche)
- la norme énergie totale humide (N1)
- la nouvelle norme humide (N2)

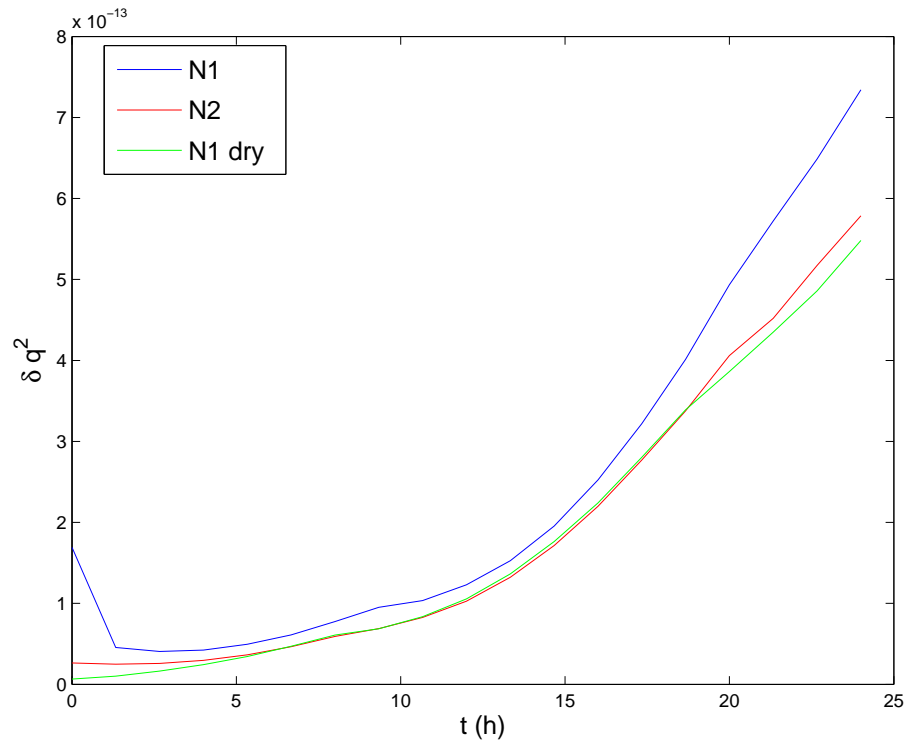


FIG. V.6 – Evolution de la quantité d'eau  $\delta q^2$  pour les vecteurs singuliers dominants calculés avec les normes énergie totale sèche et humide ainsi que la norme 2

La figure V.6 montre que le phénomène de précipitation initiale intense disparaît lorsque on utilise la nouvelle norme humide. La quantité d'eau contenue dans la perturbation devient à peu près identique au bout de 5 heures pour les normes 2 et énergie totale sèche. Par contre, pour la norme énergie totale humide, la perturbation demeure plus riche en humidité tout au long de son évolution. La répartition des différents types d'énergie au sein des perturbations optimales calculées avec les normes 1 et 2 est fortement similaire aux instants initial et final et ce aussi bien pour chaque niveau vertical (figure V.7) que pour chaque nombre d'onde (figure V.8). Seul le terme humide diffère à l'instant initial : alors que son amplitude est faible pour les  $SV^2$ , il est plus important que le terme d'énergie cinétique à l'instant initial pour les  $SV^1$ . Nous avons relié cette humidification intense des perturbations optimales (suivie d'une précipitation intense sur quelques pas de temps) à l'instant initial à la structure de la norme énergie totale humide. Il est intéressant de noter que pour une norme ne favorisant pas la précipitation en tant que telle, les perturbations optimales demeurent relativement sèches aux instants initial et final, le modèle préférant sans doute extraire lui-même de l'humidité de l'état de base pour la précipiter ensuite. On remarque aussi à partir des spectres des figures V.8 a et b que les structures optimales possèdent les mêmes échelles spatiales quelle que soit la norme utilisée pour le calcul.

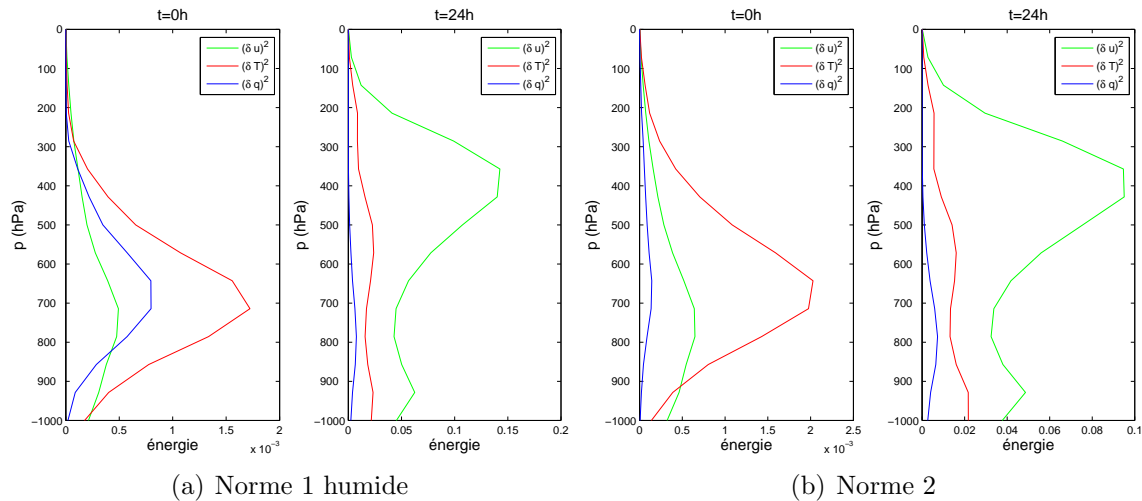


FIG. V.7 – Profil énergétique moyen aux instants initial et final des 10 premiers SVs calculés avec différentes normes. (Les contributions relatives à l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le terme d'humidité sont mesurées en utilisant la norme 1)

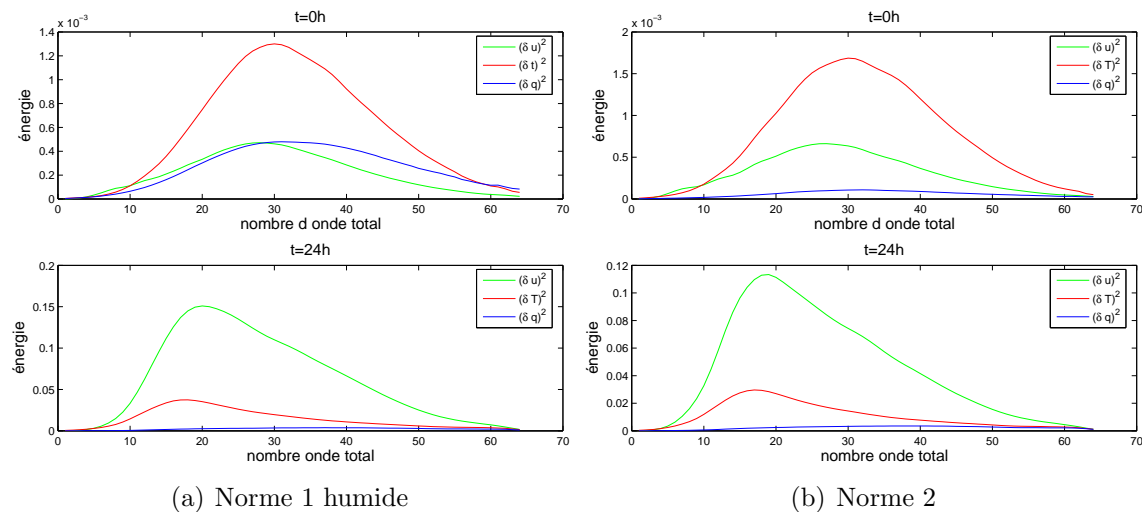


FIG. V.8 – Spectre énergétique moyen aux instants initial et final des 10 premiers SVs calculés avec différentes normes. (Les contributions relatives à l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et le terme d'humidité sont mesurées en utilisant la norme 1)

La comparaison des indices de similarité entre les sous-espaces engendrés par les 10 vecteurs singuliers calculés avec la norme sèche et les normes 1 et 2 à l'instant initial et final (tableau V.2) montre que les sous-espaces engendrés sont identiques à l'instant final et ce, indépendamment de la norme choisie.

Les mécanismes d'instabilité en jeu sont donc les mêmes pour les différentes normes. A l'instant initial, les sous-espaces présentent plus de différences et ce, probablement à cause d'une composante humide élevée pour les SVs calculés avec la norme 1 humide. En terme de prévisibilité, la méthode des SVs prédit donc des erreurs de prévisions similaires quelle que soit la norme utilisée pour des erreurs

	N1 (sèche)	N1 (humide)	N2
N1 (sèche)	<b>1</b> <i>1</i>	<b>0.73</b> <i>0.97</i>	<b>0.83</b> <i>0.97</i>
N1 (humide)		<b>1</b> <i>1</i>	<b>0.66</b> <i>0.95</i>
N2			<b>1</b> <i>1</i>

TAB. V.2 – Indices de similarité à l’instant initial (gras) et final (italique) des sous-espaces engendrés par les 10 vecteurs singuliers calculés avec la norme N1 sèche et humide ainsi qu’avec la norme N2. L’indice de similarité est calculé en utilisant le produit scalaire associé à la norme N1 humide .

d’analyse associées différentes. En effet, nous avons mentionné auparavant le fait que l’opérateur de précipitation possédait une valeur propre nulle du fait de la contrainte imposée par la condition d’équilibre à saturation ( $\delta q = \delta q_{sat} = \partial_T q_{sat} \delta T$ ). A une valeur des champs perturbés en sortie de l’opérateur de précipitation correspondent donc plusieurs champs perturbés initiaux. En calculant des vecteurs singuliers avec deux normes différentes à l’instant initial la première purement humide et la seconde sèche, Errico et al. (2004) observent aussi des structures similaires au terme de la durée d’optimisation. En pratique, nous assistons à un ajustement des conditions initiales pour des champs finaux identiques, ces derniers étant fixés par les processus d’instabilité. Dans ce cas, choisir une norme revient à choisir parmi les conditions initiales possibles la plus rentable du point de vue énergétique. La sensibilité à l’humidité ainsi mesurée est alors entièrement conditionnée par le choix de norme effectuée. Par exemple, la norme 1 humide favorise des conditions initiales humides pour précipiter cette humidité pour gagner de l’énergie.

#### V.4.2 Liens entre norme et dynamique pour les vecteurs singuliers. Application à l’étude de l’impact de l’humidité

Nous avons vu que le choix des poids de la norme était délicat, puisque plus le poids devant un terme de la norme est grand plus la contribution associée à ce terme sera importante à l’instant final et faible à l’instant initial (Kuang, 2004), et inversement si le poids devant le terme est faible. Une valeur de  $q_{ref}$  trop faible dans (V.19) a pour effet d’imposer à l’instant initial  $\delta h \approx 0$  soit  $\delta T \approx -\frac{L}{C_p} \delta q$ . Cet équilibre est contraire à l’équilibre dynamique entre les champs d’humidité et de précipitation que vérifient les perturbations baroclines humides (partie IV.2.3.3). Nous voyons alors apparaître les liens entre la norme choisie et la dynamique des perturbations optimales : la norme impose une contrainte dynamique que nous souhaiterions être le plus possible conforme à la dynamique des perturbations de l’écoulement. En réalité, même dans le cas sec, à l’instant initial les vecteurs singuliers ne sont pas dynamiquement équilibrés. Montani and Thorpe (2002) montrent par exemple que les vecteurs singuliers ne respectent pas l’équilibre quasi-géostrophique à l’instant initial, les perturbations s’équilibrant au cours de leur évolution pour respecter cet équilibre au terme de la période d’optimisation.

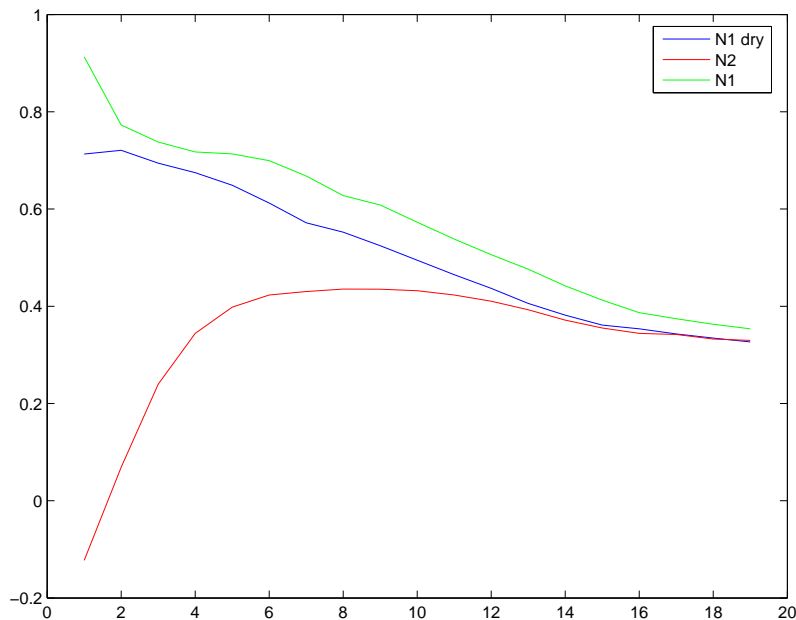


FIG. V.9 – Evolution du coefficient de corrélation entre les champs perturbés  $\delta T$  et  $\delta q$  correspondant au vecteur singulier dominant des expériences réalisées pour les trois normes étudiées

Nous avons remarqué en étudiant la dynamique des vecteurs singuliers baroclines humides calculés avec une norme sèche dans le chapitre IV que les perturbations créaient un champ d'humidité en phase avec le champ de température. Ce lien fort entre ces deux champs était nécessaire à l'amplification diabatique des perturbations. La figure V.9 montre l'évolution temporelle des corrélations entre les champs de température et d'humidité pour le vecteur singulier dominant pour chacune des 3 expériences.

Pour la norme 2, à l'instant initial, cette corrélation est négative et converge à partir d'une quinzaine d'heures vers la courbe correspondant à la norme énergie totale sèche. Pour la norme 1 sèche ou humide, la corrélation  $\delta q - \delta T$ , toujours positive, décroît au cours du temps. Les deux courbes correspondant à la norme 1 sont similaires si ce n'est que la corrélation reste supérieure de 0.1 environ pour la norme énergie totale humide que pour la norme énergie totale sèche. En cherchant à ne pas favoriser la précipitation au travers du choix de la norme, la norme 2 présente le défaut d'imposer un déséquilibre dynamique au champ d'humidité. Ce déséquilibre pénalise l'amplification diabatique des perturbations puisque  $\delta q$  et  $\delta T$  sont initialement anti-corrélés. On remarque néanmoins que le choix de la norme 2 permet une convergence plus rapide de la corrélation  $\delta T - \delta q$  autour de la valeur d'équilibre 0.35 vers laquelle les trois structures convergent. L'impact de l'inclusion d'une physique humide dans les modèles linéaire-tangent et adjoint sur la prévisibilité est donnée par la comparaison des taux d'amplification des SVs secs et humides

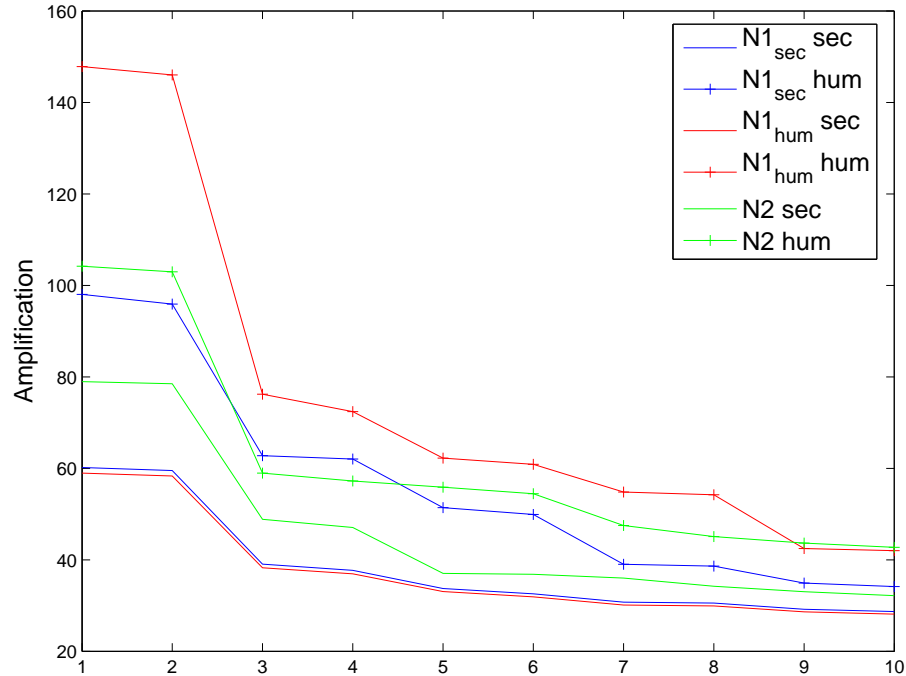


FIG. V.10 – Taux d'amplification sur la durée d'optimisation des 10 premiers vecteurs singuliers calculés avec une physique sèche et humide pour les normes énergie totale sèche, énergie totale humide et la nouvelle norme humide.

pour les expériences réalisées avec les différentes normes <sup>4</sup>. On remarque que la présence d'une physique humide augmente presque d'un facteur 2 l'amplification des dix premières perturbations optimales contre environ 1.5 pour la norme énergie totale sèche et de 1.2 pour la nouvelle norme humide (figure V.10). Cet exemple montre l'importance du choix de la norme quant aux conclusions relatives à l'impact de l'inclusion de l'humidité dans la physique linéaire. Si l'impact de l'humidité est pour les trois choix de normes positif, quantitativement l'effet est très différent selon la norme utilisée.

### V.4.3 Conclusion : quelle norme utiliser pour notre étude ?

L'utilisation de deux jeux de norme humide a permis de mettre en évidence les difficultés à inclure l'humidité dans le calcul des perturbations optimales. En effet, le champ d'humidité est trop fortement lié aux autres champs dynamiques pour pouvoir être considéré comme indépendant des autres champs. Le non-respect à l'instant initial de cet équilibre dynamique entre le champ d'humidité et les champs secs se traduit par des ajustements non-physiques. Néanmoins, les mécanismes d'in-

<sup>4</sup>Lors de l'utilisation de la norme 2 du modèle avec une physique sèche, nous avons imposé  $\delta q = 0$  dans l'expression (V.19) sans prendre  $L=0$ . Si nous avons ajouté la condition  $L=0$ , la norme 2 dans un modèle sec aurait été équivalente à la norme 1 (courbes bleue et rouge continues de la figure V.10).



stabilités demeurent identiques que l'on utilise une des deux normes humides ou la norme énergie totale sèche : les sous-espaces engendrés par les perturbations optimales à l'instant final sont fortement similaires. Il aurait été intéressant de disposer des erreurs d'analyse associées au modèle PUMA2 pour les comparer aux vecteurs singuliers issus des différentes normes.

A partir des résultats du paragraphe précédent, la norme énergie totale sèche paraît le meilleur choix possible **dans le cadre de ce travail** pour étudier les perturbations baroclines et l'impact de l'humidité sur ces structures. Nous demeurons néanmoins conscient de l'implication de ce choix sur la mesure d'une sensibilité à l'humidité. Dans le chapitre suivant, nous allons proposer une méthode de sensibilité de la croissance des erreurs de prévision au champ d'humidité à grande échelle. Cette méthode présentera entre autres, l'avantage de se libérer des contraintes liées au choix de la norme.





# VI

---

## Sensibilité non-linéaire à l'humidité

---

Les précédents chapitres ont permis de préciser l'impact des processus humides sur la prévisibilité, c'est-à-dire sur la croissance des erreurs de prévision grâce à la détermination des perturbations les plus instables de l'écoulement. Le chapitre IV a montré que la présence d'humidité pouvait augmenter de façon importante le taux de croissance linéaire des perturbations les plus instables et changer la localisation des zones sensibles de l'écoulement. A notre connaissance, il n'existe que peu d'études sur ce sujet : Pavan et al. (1999) montrent en envisageant différentes distributions d'humidité que le creusement des dépressions aux moyennes latitudes est amplifié en présence d'humidité provenant des latitudes tropicales. Afin d'étudier plus en détail les liens entre le champ d'humidité à grande échelle et la croissance des perturbations optimales, nous proposons une nouvelle méthode basée sur la technique des vecteurs singuliers non-linéaires. Cette méthode permet de caractériser la sensibilité non-linéaire de la croissance et de la structure du vecteur singulier non-linéaire à l'humidité  $Q_0$  de l'état de base. Les méthodes de sensibilité à l'ordre 1 dites adjointes seront décrites dans un premier temps. Ensuite, dans l'idée d'étudier la sensibilité des perturbations optimales par rapport à l'humidité de l'état de base, considérée comme un paramètre, nous décrirons mathématiquement l'étude de la sensibilité d'une fonction dérivée d'un optimum à un paramètre. Enfin, nous présenterons cette nouvelle méthode de sensibilité non-linéaire des perturbations optimales à l'humidité à grande échelle dont une illustration dans le modèle PUMA2 sera proposée au sein d'un article à soumettre à la revue "Journal of Atmospheric Sciences".

### VI.1 Sensibilité adjointe. Application à l'humidité.

Si la sensibilité d'un champ de sortie du modèle ou d'une fonction de ces champs de sortie par rapport à un processus physique déterminé a souvent été effectuée

en désactivant puis réactivant la paramétrisation associée, il devient plus difficile d'évaluer la sensibilité par rapport à un champ ou un paramètre d'entrée du modèle. Des méthodes directes utilisant une approche stochastique existent (Beare et al., 2003; Martin and Xue, 2006), mais elles nécessitent un nombre d'intégrations non-linéaires du modèle égal à la dimension du champ par rapport auquel on cherche à mesurer la sensibilité. Malgré les possibilités actuelles de calcul parallèle, de telles méthodes sont inapplicables pour des problèmes de grande dimension rencontrés en météorologie. Les méthodes dites adjointes permettent d'obtenir une sensibilité des variables de sortie du modèle par rapport aux paramètres d'entrée à l'ordre 1 à un coût numérique bien moindre. Le modèle adjoint peut être utilisé, en dehors du calcul de perturbations optimales, afin d'effectuer des études de sensibilité par rapport aux conditions initiales de la prévision ou par rapport aux paramètres du modèle.<sup>1</sup> Nous ne détaillerons pas le principe des études de sensibilité aux paramètres du modèle mais nous nous intéresserons aux problèmes de sensibilité aux conditions initiales dont le principe est détaillé par exemple dans Errico and Vukicevic (1991) ou Rabier et al. (1996).

Soit une fonction diagnostique  $J(x_t)$ , fonction des champs  $x_t = M(x_0)$  du modèle à l'instant final de la prévision. La sensibilité au premier ordre de  $J$  par rapport aux champs initiaux du modèle est donnée par le gradient  $\nabla_{x_0} J$ . En utilisant les règles traditionnelles de dérivation composée appliquées à  $J(x_t(x_0))$ , on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial x_{0,i}} = \frac{\partial x_{t,j}}{\partial x_{0,i}} \frac{\partial J}{\partial x_{t,j}}$$

soit :

$$\nabla_{x_0} J = L_{x_0}^* \nabla_{x_t} J \quad (\text{VI.1})$$

Le gradient de  $J$  par rapport aux variables d'entrée du modèle est obtenu à partir du gradient de  $J$  par rapport aux variables de sortie du modèle grâce à une intégration du modèle adjoint.

La première étape d'une étude de sensibilité est la détermination de l'objet de cette sensibilité. De quoi mesure-t-on la sensibilité? Quelle est la grandeur sensible du problème qui va définir la fonction de coût du problème? Différents exemples existent dans la littérature : Rabier et al. (1996) calculent la sensibilité de l'erreur de prévision aux conditions initiales, Langland et al. (1996) s'intéressent à la sensibilité de la pression au centre d'une dépression en fonction des différents champs tandis que Errico et al. (2003) choisissent entre autres une fonction de coût égale au taux de précipitation...

La connaissance du gradient ou de la sensibilité à l'ordre 1, permet ainsi de déterminer les champs physiques et les zones de l'écoulement où l'impact d'une erreur initiale va être la plus importante sur la qualité de la prévision, sur le creusement de

<sup>1</sup>Pour une introduction générale sur les applications du modèle adjoint, Errico (1997) en décrit le vaste champ d'applications. Une bibliographie détaillée sur l'utilisation de méthodes adjointes a fait l'objet d'un article dans la revue *Tellus* (Courtier et al., 1993).

la tempête ou sur la précipitation atteignant une région donnée (selon le choix de  $J$  effectué). Cette technique présente l'avantage d'être peu coûteuse par rapport aux méthodes directes dans la mesure où elle ne nécessite qu'une intégration du modèle non-linéaire et une intégration adjointe. Par contre, elle ne permet d'obtenir qu'une sensibilité à l'ordre 1 et, lorsque l'hypothèse linéaire-tangente n'est plus valable, le gradient de la fonction de coût peut alors se révéler n'être qu'une approximation peu précise de la variation attendue de la fonction diagnostique.

Appliquée à l'étude d'un cyclone extratropical dans Langland et al. (1996), cette méthode a permis de mettre en évidence la sensibilité de l'intensité de celui-ci à des perturbations des différents champs. Ses résultats montrent une sensibilité à l'eau possédant la même structure que la sensibilité à l'humidité. Il montre que l'intensification du cyclone est sensible au dégagement de chaleur latente entre 700 et 900 hPa.

## VI.2 Sensibilité d'un optimum à un paramètre

Dans ce qui précède, nous avons introduit la sensibilité d'une fonction de coût en fonction des paramètres ou des champs initiaux du modèle. Cependant, l'étude de la sensibilité du taux d'amplification maximal ou de la structure des perturbations optimales ne rentre pas dans ce cadre d'étude, car les perturbations optimales et leur taux d'amplification ne sont pas définies comme une fonction explicite des variables d'entrée du modèle mais respectivement comme les solutions optimales et le maximum d'une fonction. La dérivée de la fonction de coût optimale par rapport à un paramètre n'est pas égale à la dérivée de la fonction de coût par rapport à ce paramètre autour de l'optimum (qui serait obtenu grâce à la sensibilité adjointe) puisque la position de l'optimum est fonction du paramètre (comme nous le verrons plus tard). Si la différence entre ce type de sensibilité et la sensibilité adjointe est bien définie mathématiquement dans Cacuci (1981), à notre connaissance il n'existe que deux études explorant cette notion en météorologie : les papiers de Zupanski (1995) et de Le Dimet et al. (1997), tous deux dans le domaine de l'assimilation variationnelle. Zupanski (1995) s'intéresse à la sensibilité des solutions du problème d'assimilation par rapport à des perturbations des variables d'entrée du modèle tandis que Le Dimet et al. (1997) traitent de la sensibilité d'une fonction des solutions optimales du problème à un paramètre du modèle. Notons que l'on trouve dans le travail de doctorat de H.-E. Ngodock, qui inclut les résultats de Le Dimet et al. (1997) une extension à la sensibilité linéaire de l'analyse aux observations. Les travaux précédemment cités ne concernent que des études de sensibilité linéaires en calculant des gradients appropriés. Afin de préciser la raison probable pour laquelle ce type de sensibilité n'a pas été mis en pratique jusqu'ici, il convient de préciser le contexte théorique. Nous proposons ici une dérivation mathématique similaire à celle de Zupanski (1995) adaptée au problème d'optimisation non-linéaire associé au calcul des NLSVs. Cette dérivation présente l'avantage d'être plus intuitive que celle basée sur les équations adjointes formulée dans Le Dimet et al. (1997). Dans un premier temps, nous dériverons la formule de la sensibilité de la perturbation

optimale à un paramètre et ensuite nous étudierons la sensibilité de la valeur de la fonction de coût à ce paramètre.

### VI.2.1 Sensibilité de la perturbation optimale à un paramètre

Considérons la problème d'optimisation formulé pour le calcul des NLSVs (équation VI.12) auquel nous ajoutons un paramètre  $K$ , paramètre pour le moment non précisé. Le NLSV  $x^*(K)$  est alors solution du problème d'optimisation suivant :

$$J^* = J(x^*(K)) = \max_{\|x_0\|_E^2 = E_0} J(x_0, K) \quad (\text{VI.2})$$

où  $J$  est la fonction de coût qui mesure l'amplification de la perturbation sur la durée d'optimisation (équation I.32).

Considérons une variation  $\delta K$  du paramètre  $K$ ,  $x^*(K)$  n'est alors plus solution du problème (VI.2) pour la valeur du paramètre  $K + \delta K$ . Soit  $\delta x^*(K, \delta K) = x^*(K + \delta K) - x^*(K)$  la variation de la solution optimale de (VI.2) suite à une variation  $\delta K$  du paramètre  $K$ .  $\delta x^*(K)$  est alors solution de :

$$J(x^*(K) + \delta x^*(K, \delta K)) = \max_{\|x_0 + \delta x_0\|_E^2 = E_0} J(x_0 + \delta x_0, K + \delta K) \quad (\text{VI.3})$$

Sauf mention explicite, dans ce qui suit les dérivées sont estimées au point  $(x^*, K)$ . La condition d'optimalité associée à (VI.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(x^* + \delta x^*, K + \delta K)}{\partial \delta x} &= \lambda_L \frac{\partial c}{\partial \delta x} \\ &= \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^* + \delta x^*, K + \delta K)} 2^T AA(x^* + \delta x^*) \end{aligned}$$

où  $A$  est la matrice telle que  $\|X\|_E^2 = X^T A A X$  et  $c$  est la contrainte définie par  $c(\delta x) = \|x_0 + \delta x\|_E^2$ .  $\lambda_L = \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^* + \delta x^*, K + \delta K)}$  est le multiplicateur de Lagrange du problème (VI.3)

Un développement de Taylor à l'ordre 2 en  $\delta x$  et  $\delta K$  donne une expression quadratique de la fonction à maximiser :

$$\begin{aligned} J(x^* + \delta x, K + \delta K) &= J(x^*, K) + \frac{\partial J}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial J}{\partial K} \delta K \\ &\quad + \delta K \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial K} \cdot \delta x + \frac{1}{2} \delta K \frac{\partial^2 J}{\partial K^2} \delta K + \frac{1}{2} \delta x \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \cdot \delta x \end{aligned}$$

En remplaçant le développement à l'ordre de 2 de  $J$  par rapport à  $\delta x$  à l'optimum  $\delta x^*$  dans cette relation, :

$$\delta K \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial K} + \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} \delta x^* + \frac{\partial J}{\partial x} = \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^* + \delta x^*, K + \delta K)} 2^T AA(x^* + \delta x^*) \quad (\text{VI.4})$$

$$H \delta x^* + \delta K \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial K} + \frac{\partial J}{\partial x} = \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^* + \delta x^*, K + \delta K)} 2^T AA(x^* + \delta x^*) \quad (\text{VI.5})$$

avec  $H$  la hessienne de  $J$  par rapport à  $\delta x$  calculée en  $x^*$ .

La condition d'optimalité associée à l'équation (VI.2) en  $(x^*, K)$  s'écrit :

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_{(x^*, K)} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial E_0}\right)_{(x^*, K)} 2^T AAx^* \quad (\text{VI.6})$$

En injectant cette relation dans (VI.5), on peut dériver l'expression de la variation  $\delta x^* = \frac{\partial x^*}{\partial K} \delta K$  de l'optimum en fonction d'une variation  $\delta K$  d'un paramètre :

$$\begin{aligned} H\delta x^* &= -\delta K \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial K} \right)_{x^*, K} - \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^*, K)} 2^T AAx^* + \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{(x^* + \delta x^*, K + \delta K)} 2^T AA(x^* + \delta x^*) \\ &\approx \delta K \left[ - \left( \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial K} \right)_{x^*, K} + \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial K \partial E_0} \right)_{x^*, K} 2^T AAx^* \right] + \left( \frac{\partial J^*}{\partial E_0} \right)_{x^*, K} 2^T AA\delta x^* \end{aligned}$$

soit

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = \left[ H - \frac{\partial J^*}{\partial E_0} 2^T AA \right]^{-1} \left( - \left( \frac{\partial^2 J}{\partial K \partial x} \right)_{x^*, K} + \left( \frac{\partial^2 J^*}{\partial K \partial E_0} \right)_{x^*, K} 2^T AAx^* \right) \quad (\text{VI.7})$$

La sensibilité de la perturbation optimale à un paramètre requiert la connaissance, d'une part de la hessienne de la fonction de coût et d'autre part, des dérivées des différents multiplicateurs de Lagrange. Ces fonctions ne sont pas connues, et rendent impossible tout calcul a priori de la sensibilité à l'ordre 1 des perturbations optimales par rapport à un paramètre. Notre problème présente un degré de difficulté supplémentaire par rapport aux études effectuées en assimilation dans la mesure où la contrainte sur l'énergie initiale introduit des conditions d'optimalité en fonction de multiplicateur de Lagrange.

Pour des problèmes d'assimilation non contraints, Zupanski (1995) utilise une méthode d'optimisation nonlinéaire pour obtenir une estimation de la hessienne  $H$  à partir de l'approximation BFGS utilisée par l'algorithme d'optimisation non-linéaire.

## VI.2.2 Sensibilité de la fonction de coût optimale à un paramètre

Sans déterminer la variation de la structure exacte des perturbations optimales en fonction de la variation d'un paramètre, il peut être intéressant de regarder la sensibilité de la fonction de coût à la variation de ce paramètre en vue par exemple d'étudier la sensibilité du taux de croissance des perturbations optimales à l'humidité de l'état de base.

La solution optimale  $x^*$  étant une fonction de  $K$ , le théorème de dérivation des



fonctions composées nous donne :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial J^*}{\partial K} \right)_K &= \frac{\partial J(x^*(K), K)}{\partial K} \\ &= \frac{\partial J}{\partial K} + \frac{\partial J}{\partial x} \frac{\partial x^*}{\partial K} \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial J}{\partial K} + \lambda_L \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial x^*}{\partial K} \\ &= \frac{\partial J}{\partial K} + \frac{\partial J^*}{\partial E_0} 2^T A A x^* \frac{\partial x^*}{\partial K} \end{aligned} \quad (\text{VI.9})$$

avec  $\lambda_L = \frac{\partial J^*}{\partial E_0}$  le multiplicateur de Lagrange à l'optimum du problème et où l'on a utilisé la condition d'optimalité de premier ordre :  $\partial_x J(x^*) = \lambda_L \partial_x c$ . Dans le cas d'un problème d'optimisation non-contraint, la condition d'optimalité s'écrit simplement  $\partial_x J = 0$  et, d'après VI.8, la sensibilité au paramètre K à l'optimum est la sensibilité "classique" :

$$\frac{\partial J^*}{\partial K} = \frac{\partial J}{\partial K}$$

et ce quelle que soit la sensibilité des perturbations optimales au paramètre K. Ce résultat est obtenu dans Le Dimet et al. (1997) à partir des équations adjointes. La présence de la contrainte sur l'énergie initiale des perturbations ne joue donc pas un rôle secondaire puisqu'elle modifie de façon importante l'expression des différentes sensibilités.

### VI.2.3 Méthode de sensibilité non-linéaire à l'humidité

En appliquant les résultats précédents à la fonction de coût J définie dans la méthode des NLSVs et en considérant l'humidité de l'état de base  $Q_0$  comme paramètre, les équations (VI.7) et (VI.9) montrent bien que la détermination de la sensibilité du NLSV ou de son amplification par rapport à  $Q_0$  n'est pas calculable en pratique à cause de la présence de termes associés aux multiplicateurs de Lagrange. L'utilisation d'une méthode itérative d'optimisation non-linéaire va permettre de déterminer une sensibilité non-linéaire qui ne sera plus restreinte uniquement aux petites variations de paramètres et qui présente l'avantage d'être réalisable dans notre problème, grâce aux méthodes d'optimisation non-linéaire déjà utilisées pour le calcul des NLSVs. En effet, ces méthodes requièrent uniquement les expressions des dérivées partielles de la fonction de coût à l'ordre 1 et utilisent des expressions de Hessienne approximées (par des méthodes itératives de type BFGS). Rappelons que l'idée de calculer une sensibilité non-linéaire n'est pas nouvelle, puisqu'elle avait déjà été employée par Klinker et al. (1998) pour obtenir les erreurs d'analyse prépondérantes à partir du résultats des premières itérations d'un algorithme de minimisation.

### VI.3 Description de la méthode de sensibilité non-linéaire à l'humidité

Afin d'introduire cette méthode, il est nécessaire de revenir aux équations relatives à la méthode des NLSVs. Nous avons défini une fonction de coût  $J$  égale à l'amplification énergétique d'une perturbation d'un état de référence sur une durée d'optimisation :

$$J(\delta x_0, X_0, t) = \frac{(\delta x(X_0, t), \delta x(X_0, t))_E}{(\delta x_0, \delta x_0)_E} \quad (\text{VI.10})$$

avec

$$\delta x(X_0, t) = M(t, t_0, X_0 + \delta x_0) - M(t, t_0, X_0) \quad (\text{VI.11})$$

La dépendance des variables vis-à-vis de l'état de base  $X_0$  de la prévision a été précisée explicitement. La méthode des NLSVs consistait à maximiser  $J$  par rapport aux perturbations  $\delta x_0$  de l'état de base. Nous noterons par  $J^*(X_0)$  la valeur de ce maximum. La valeur de  $J^*$  caractérise la prévisibilité non-linéaire de l'écoulement sur la durée d'optimisation considérée. Elle dépend de la situation considérée et donc de l'état de base  $X_0$ . Nous nous proposons d'étudier la sensibilité de  $J^*$  au champ d'humidité de l'état de base  $Q_0$  afin de caractériser l'impact de l'humidité sur la prévisibilité. En considérant une variation  $\Delta Q_0$  de l'humidité de l'état de base, l'étude du comportement de la fonction  $J^*(\Delta Q_0)$  permettra de préciser les liens entre le champ de vapeur d'eau et la croissance non-linéaire locale d'erreurs. La partie précédente (VI.9) nous a montré qu'il n'était pas possible de calculer directement  $\nabla_{\Delta Q_0} J^*$  à cause de la contrainte sur l'énergie initiale de la perturbation. Nous proposons donc d'utiliser une méthode d'optimisation non-linéaire pour étudier la sensibilité de  $J^*$  par rapport aux modifications  $\Delta Q_0$  du champ d'humidité en posant le problème d'optimisation suivant :

$$J(\delta x^*, \Delta Q_0^*) = \begin{aligned} & \max_{\|\delta x(t_0)\|_E^2 = E_0} J(\delta x_0, t) \\ & 0 < Q_0(t=0) + \Delta Q_0 < Q_{sat}^0(t=0) \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

La fonction de coût  $J$  est alors optimisée à la fois par rapport aux variables  $\Delta Q_0$  et  $\delta x_0$ . La contrainte

$$0 < Q_0(t=0) + \Delta Q_0 < Q_{sat}^0(t=0) \quad (\text{VI.13})$$

est ajoutée de façon à ce que le champ d'humidité modifié demeure physique. La figure VI.4 illustre schématiquement la différence entre la technique des vecteurs singuliers non-linéaires et notre méthode de sensibilité non-linéaire. En particulier, il est important de noter que la trajectoire autour de laquelle les perturbations évoluent non-linéairement est modifiée suite à la perturbation de l'humidité de l'état initial.

Il est possible d'ajouter d'autres contraintes portant sur  $\Delta Q_0$ , par exemple si l'on cherche à modifier l'humidité de l'état de base de façon plus réaliste de ce qu'autorise (VI.13), pour n'autoriser par exemple qu'une modification d'humidité inférieure à un certain pourcentage de la valeur  $Q_0$ .

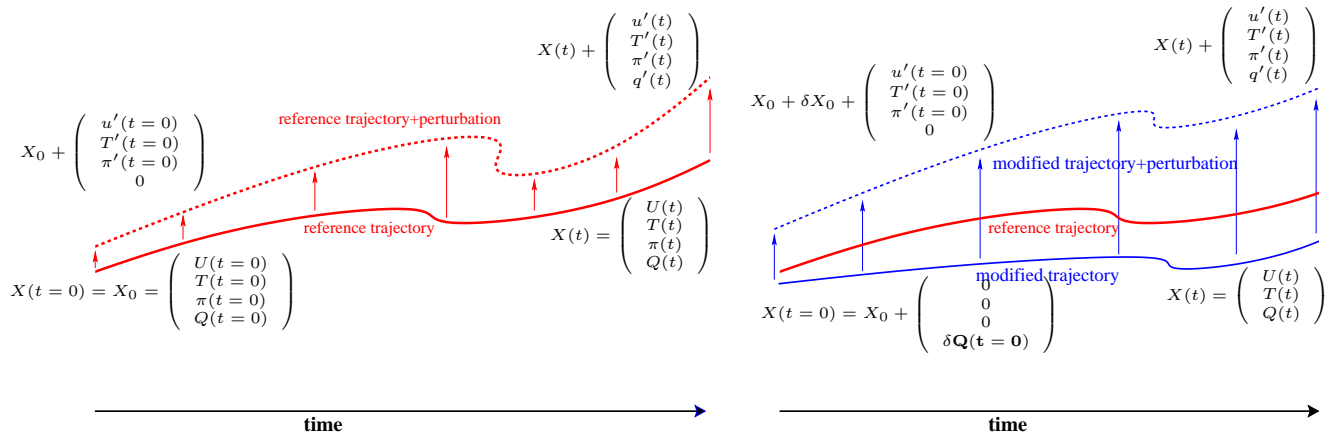


FIG. VI.1 – (a) Méthode des NLSV : l'état initial  $X_0$  intégré dans le modèle non-linéaire permet de construire la trajectoire de référence. Les perturbations (flèches rouges) sont évaluées à partir de la différence entre la trajectoire de référence et l'intégration non-linéaire du modèle à partir de l'état de base perturbé. (b) Méthode de sensibilité linéaire des NLSVs à l'humidité de l'état de base :  $\Delta X_0 = \Delta Q_0$  modifie la trajectoire de référence (ligne bleue continue) autour de laquelle sont calculées les perturbations non-linéaires.

### VI.3.1 Optimisation d'une fonction non-différentiable : application à l'humidité

Avant d'appliquer la méthode décrite précédemment à l'étude de la sensibilité de perturbations baroclines humides au champ d'humidité à grande échelle, il est nécessaire de s'assurer que la non-différentiabilité du problème à la suite de l'inclusion de l'opérateur de précipitation ne s'oppose pas à un fonctionnement satisfaisant de l'algorithme. En effet, les perturbations de l'écoulement (et en particulier du champ de vapeur d'eau) ont une amplitude finie et peuvent modifier la localisation des seuils associés à la précipitation. La plupart des algorithmes classiques d'optimisation non-linéaire (dont IPOPT) utilisent des stratégies basées sur l'information fournie par le gradient de la fonction de coût et ne sont à priori pas adaptés à la minimisation de fonction non-différentiables.

L'impact de l'inclusion des paramétrisations physiques (précipitation, convection, rayonnement...) dans le modèle linéaire-tangent a été étudié entre autres par Mahfouf (1999); Vukicevic and Errico (1993). Ces études soulignent une amélioration de la capacité du modèle linéaire-tangent à approximer l'évolution de petites perturbations du modèle non-linéaire complet même si la linéarisation directe des processus n'aboutit pas nécessairement aux meilleurs résultats dans certains cas (Mahfouf, 2005)<sup>2</sup>. De même, il s'est avéré que l'inclusion dans la physique linéarisée des processus physiques, améliore la qualité de l'analyse en assimilation variationnelle (Mahfouf et al., 1996; Zou, 1993). Les travaux de Zhang et al. (2001) montrent que l'utilisa-

<sup>2</sup>Ce résultat était également observé lors de la linéarisation des schémas de diffusion verticale dont nous avons parlé dans le chapitre III.

tion d'algorithmes d'optimisation numérique non-différentiables n'est pas nécessaire pour un problème de type assimilation variationnelle 4D-VAR en présence d'une physique discontinue. L'information fournie par le gradient quoique partiellement erronée suffit à permettre aux algorithmes classiques de converger.

Afin de tester le comportement de l'algorithme de minimisation choisi en présence de l'effet seuil associé à la physique humide du modèle, nous avons essayé de résoudre le problème inverse suivant.

A l'état de base  $X_0$  du modèle est ajouté une perturbation du champ d'humidité  $\delta\tilde{Q}_0$  connue. L'état final associé à l'état de base perturbé ( $X_0 + \delta\tilde{Q}_0$ ) est noté  $\tilde{x}_F = M(X_0 + \delta\tilde{Q}_0)$ . Etant donné une perturbation  $\delta Q$  de l'état initial, considérons la fonction de coût  $J(\delta Q)$  suivante :

$$J(\delta Q) = \| M(X_0 + \delta Q) - \tilde{x}_F \|_E$$

$J$  est toujours positive et atteint son minimum en  $\delta Q = \delta\tilde{Q}_0$  où elle est alors nulle. Afin de vérifier que l'algorithme IPOPT est capable de minimiser  $J$  en modifiant les zones où la précipitation est présente, nous avons fixé  $\delta\tilde{Q}_0 = 1.1Q_{sat}^0 - Q_0$  afin de sursaturer volontairement une région (40-70°N, 120-80°W) qui ne l'était que partiellement et vérifier la capacité de l'algorithme à franchir la discontinuité. Notons que ce problème est plus restrictif que ceux rencontrés lors de l'assimilation variationnelle dans le cas d'un modèle diabatique où le gradient adiabatique fournit une approximation du gradient réel capable de guider l'algorithme. Ici, l'algorithme doit retrouver la perturbation d'humidité à partir des modifications de la dynamique sèche engendrée de façon très similaire au problème que nous allons essayer de résoudre par la suite. Le point de départ choisi pour initialiser l'algorithme est  $\delta Q = 0$ .

L'évolution de la fonction de coût en fonction du nombre d'itérations effectuées par IPOPT est donnée figure VI.2. L'algorithme est nettement moins efficace que dans les chapitres II et III puisque l'information fournie par le gradient est partiellement fautive.

La comparaison de la solution  $\delta\tilde{Q}_0$  et du champ obtenu par l'algorithme de minimisation  $\delta Q_0^{IPOPT}$  (figure VI.3) montre qu'il a été capable d'approximer la solution malgré un gradient faux. Néanmoins on note que des différences subsistent dans les niveaux les plus bas. La figure VI.2 montre que le processus de minimisation n'a pas abouti et l'on peut supposer qu'en effectuant des itérations supplémentaires l'algorithme réduise encore l'erreur à tous les niveaux du modèle. On peut aussi incriminer l'effet de la dissipation importante au sein de la couche limite qui atténue la sensibilité dans cette région. La présence de l'effet seuil lié à la précipitation grande échelle ralentit la convergence de l'algorithme, néanmoins grâce à la procédure de recherche linéaire (à condition que la taille maximale du pas ne soit pas trop faible), l'algorithme est capable de franchir les discontinuités à condition que le nombre de pas de temps employés soit suffisant.

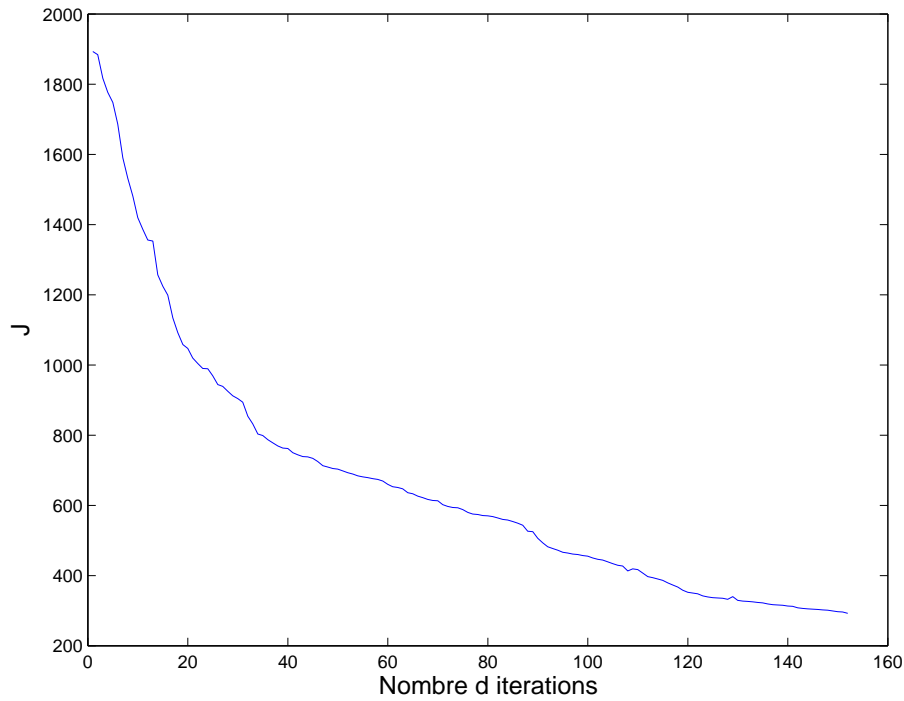
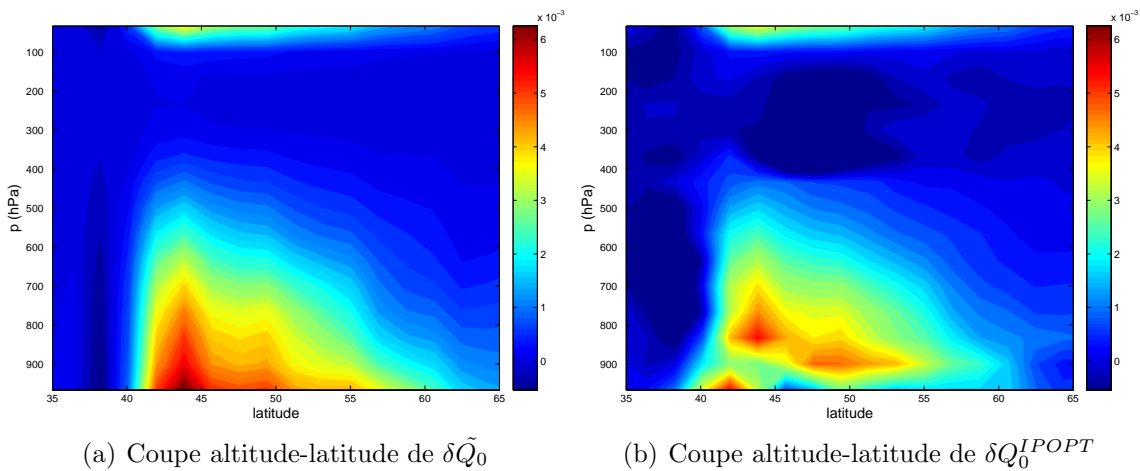


FIG. VI.2 – Evolution de la fonction de coût  $J$  en fonction du nombre d'itérations réalisées par IPOPT



(a) Coupe altitude-latitude de  $\delta\tilde{Q}_0$

(b) Coupe altitude-latitude de  $\delta Q_0^{IPOPT}$

FIG. VI.3 – Solution exacte  $\delta\tilde{Q}_0$  du problème d'inversion et solution  $\delta Q_0^{IPOPT}$  calculée par IPOPT.

### VI.3.2 Prise en compte de la condition de non-saturation dans IPOPT

La prise en compte de la contrainte (VI.13) imposée à la variable  $\Delta Q_0$  sur laquelle porte l'optimisation à la fois une borne supérieure et une borne inférieure, susceptibles d'être atteintes par la solution. Il convient de compléter la description effectuée

dans le chapitre II du fonctionnement de l'algorithme aux problèmes d'optimisation bornés. La méthode utilisée, dite de point intérieur, est décrite brièvement dans ce paragraphe. Le problème d'optimisation

$$f^* = \max_{x>0} f(x) \quad (\text{VI.14})$$

est remplacé par le problème suivant :

$$f^* = \max_x (f(x) - \mu \log(x)) \quad (\text{VI.15})$$

où  $\mu$  est diminué d'itération en itération.

A la fonction de coût est ajouté un terme de pénalisation logarithmique. Le paramètre de pénalisation  $\mu$  est initialisé à une valeur  $\mu_0$  strictement positive lors de la première itération de l'algorithme. Le terme de pénalisation joue le rôle d'une barrière qui empêche l'algorithme de choisir des valeurs de la variable  $x$  négatives. En diminuant la valeur de  $\mu$  à chaque itération de l'algorithme, le problème converge vers le problème originel tout en respectant la condition  $x>0$ . Ce raisonnement se généralise trivialement au cas où la variable  $x$  est définie sur un intervalle, auquel cas une deuxième fonction de pénalisation logarithmique est rajoutée à la fonction de coût. Lors de l'implémentation de la condition  $-Q_0 < \Delta Q_0 < Q_{sat}^0 - Q_0$ , la convergence de l'algorithme d'optimisation s'est trouvée fortement ralentie du fait que la solution  $\Delta Q_0^*$  soit égale en certains points aux bornes de son intervalle de définition. Le terme de pénalisation logarithmique éloigne alors l'algorithme de la solution qui ne peut être atteinte que lorsque la valeur du paramètre de pénalisation correspondant a été suffisamment diminuée. C'est pourquoi la valeur initiale de  $\mu$  a été diminuée de façon à permettre une convergence plus rapide de l'algorithme.

## VI.4 Article en anglais : "Nonlinear sensitivity of baroclinic perturbations to environmental moisture"

Nous proposons dans cette partie la lecture d'un article à soumettre qui illustre la méthode de sensibilité non-linéaire à l'humidité détaillée précédemment. Cette méthode est appliquée à la situation météorologique de l'expérience 1 du chapitre IV. Sans imposer d'autres contraintes à la variation d'humidité de l'état de base  $\Delta Q_0$  que la condition de non-saturation et de positivité de l'humidité initiale totale ( $-Q_0 < \Delta Q_0 < Q_{sat}^0 - Q_0$ ), la croissance du NLSV augmente sur 24h d'un facteur trois environ grâce à une modification optimale  $\Delta Q_0^*$  du champ d'humidité par rapport à l'expérience de référence. Malgré cette augmentation importante de l'amplification de la perturbation optimale, la structure de cette dernière change peu entre les expériences  $\Delta Q_0 = 0$  et  $\Delta Q_0 = \Delta Q_0^*$ . Par ailleurs, le mécanisme de croissance demeure barocline humide dans les deux cas. Le renforcement de la croissance barocline par les processus diabatiques est rendu possible par le mécanisme vu dans la partie IV.2.3.3. Pour augmenter de façon significative la croissance du NLSV, le

système a ajouté de l'humidité principalement dans les basses couches. Cette humidité ajoutée se retrouve ensuite advectée par l'écoulement avec la perturbation optimale approvisionnant en humidité cette dernière au long de son évolution.

### VI.4.1 Abstract

This paper describes a new nonlinear sensitivity technique and applies it to investigate the role of moisture in the nonlinear previsibility of baroclinic systems. Since the linear assumption may not be valid for moist dynamics, optimal perturbations are computed using a nonlinear generalization of singular vectors called NonLinear Singular Vectors (NLSV). Through an optimal modification of the moisture field of a given atmospheric state, the amplification of optimal perturbations measured with the dry energy norm is enhanced by a factor of 3. Despite this significant increase in amplification, the optimal modification of initial moisture has little effect on the structure of optimal perturbations which remain baroclinic. Analysis of the optimal moisture perturbation shows two effects : a moistening of the lower troposphere below 850hPa and a structure anticorrelated in the middle troposphere to the temperature fields of the optimal perturbation. Complete saturation of the atmosphere at the location of the optimal perturbation, leads to a smaller increase in amplification rates.

### VI.4.2 Introduction

The development of midlatitude atmospheric perturbations is primary driven by baroclinic instability processes. Considerable attention has been paid on its dry dynamics, moist processes being thought to play a secondary role. However, recent studies argued that diabatic effects may have played a predominant role in violent cyclogenetic events as the December 99 storms (Wernli et al., 2002; Hoskins and Coutinho, 2005) and new mechanisms for synoptic system development depending essentially on diabatic processes have been proposed in alternative to the classical baroclinic mechanisms, such as the diabatic Rossby waves (Parker and Thorpe, 1995). In the case of the storm Lothar (T1), a filament with high water vapor content (of width 300km and length 2000km) was observed in the region of development of the storm ; an analysis by singular vectors (initial perturbations having a maximum growth rate over a given time period) including moist physics demonstrated that this filament of high water vapor was crucial for the storm intensification (Hoskins and Coutinho, 2005). It was recognized both by theoretical analysis (Lapeyre and Held, 2004) and by studies of individual cases (Hoskins and Coutinho, 2005) that the spatial distribution of water vapor compared to the distribution of potential vorticity is essential to promote the intensification of storms. If water vapor is present in the first phase of growth, it can efficiently intensify the storm. This means that the horizontal transport of water vapor plays a major role and needs to be further investigated, not at the scale of the storm, but at the scale of the storm-track which creates a favorable background for subsequent storm development. Second, latent heat release may strongly modify nonlinearities of synoptic systems. Actually,

synoptic eddies have properties very different for different water content in the atmosphere (Lapeyre and Held, 2004; Moore and Montgomery, 2005). Increasing the atmospheric moisture content can have a dramatic effect on nonlinearities of the synoptic eddies, as one observes an abrupt transition from weakly nonlinear eddies for low water vapor content to intense coherent structures for higher water vapor content (Lapeyre and Held, 2004).

Different methods exist to measure numerically the sensitivity of a particular physical process. A first method consists in performing integrations of the model modifying each time specific parameters or switching off specific parametrizations in order to quantify the effects on these parameters or parametrizations dynamics. This has been done for instance by Moore and Montgomery (2004) and this procedure determines if some processes (such as latent heat release) are crucial in the intensification of extratropical cyclones. Following such an approach, Hoskins and Coutinho (2005) have compared dry and moist singular vectors. Singular vectors are perturbations that achieve the largest amplification between time  $t_0$  and  $t_0 + \tau$  under the assumption of linear evolution. They characterize the regions of space where perturbations (or errors) can develop rapidly in time. Hoskins and Coutinho (2005) have shown that moist singular vectors could appear in regions where dry singular vectors were absent, indicating that moist processes could trigger a strong development of midlatitude cyclones.

A drawback of comparing different simulations with some parametrization switched off or on is that it cannot give quantitative information on the part played by the physical process in the dynamics. A more systematic method consists in computing the adjoint sensitivity of a particular function (e.g. surface pressure of a cyclone). Indeed, the adjoint model allows to get the gradient of any function of the forecast fields in regards to the input parameters or fields of the model and therefore provides an useful first-order approximation of the sensitivity (Rabier et al., 1992, 1996; Errico, 1997; Langland et al., 1996). Using this technique, Langland et al. (1996) studied the effect of latent heat release in the development of a cyclone using an idealized case study. They show that the adjoint sensitivity to moisture was very similar to the adjoint sensitivity to temperature, with a signal primarily in the region of strong precipitation. Moisture was shown to reinforce dry baroclinic mechanism of growth. However this approach (and the singular vector analysis) relies on the linear assumption which may not be valid for strongly developing synoptic systems.

To remedy these limitations and to study and quantify the role played by water vapor in predictability of midlatitude storms, we developed a new approach based in part on the nonlinear generalization of singular vectors Mu et al. (2003, 2004). Mu et al. (2003) have proposed a method to generalize singular vectors to the nonlinear regime. The idea is to find the minimum of a cost function (the inverse of the total energy over a given time period) for perturbations with a given initial amplitude. These Conditional Nonlinear Optimal Perturbations give interesting information on the nonlinear predictability of atmospheric and oceanic systems (Duan et al., 2004; Mu and Zhang, 2006). Rivière et al. (2007) have used a similar method to compute nonlinear singular vectors (hereafter called NLSVs) for a problem of baroclinic instability. Their study shows that NLSVs are very similar to linear SVs except that



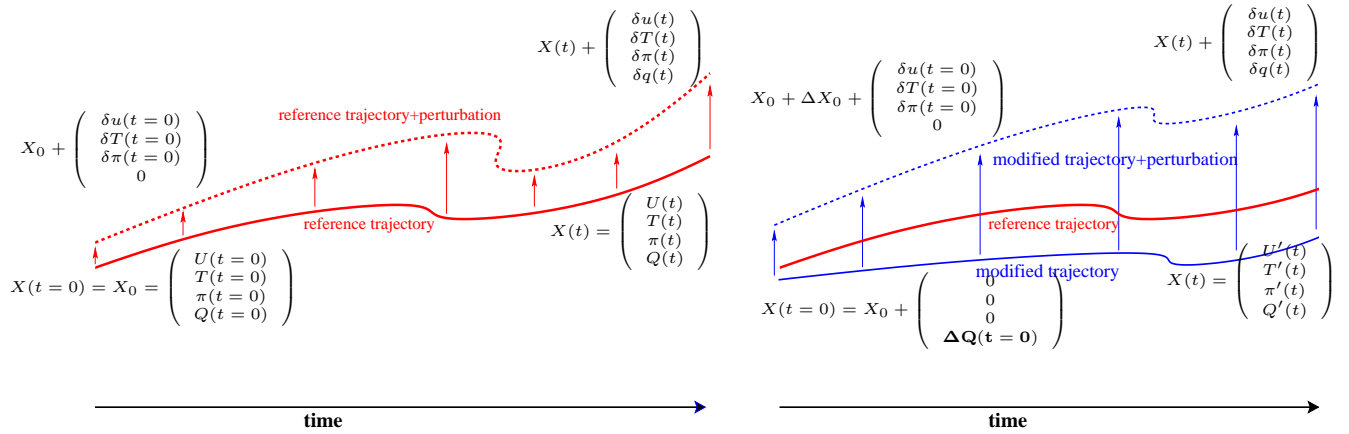


FIG. VI.4 – (a) Nonlinear optimal perturbations technique : the initial basic state  $X_0$  builds a reference trajectory when evolving nonlinearly in the model and perturbations  $\delta x$  (red arrows) are computed as the difference between the nonlinear runs represented by the two curves. (b) Nonlinear sensibility of optimal perturbations to environmental moisture :  $\Delta X_0$  modifies the basic state (blue continuous curve instead of the red one) and perturbations  $\delta x$  are computed the same way as in the previous figure in regards to this modified trajectory.

their spatial structure is modified to adapt to wave-wave and wave-mean flow interactions. They possess an initial shear that increases the total shear of the jet, in order to oppose to the natural tendency of nonlinear baroclinic flows that decreases the shear. Also the spatial structure of NLSV is more elongated than that of SV to limit wave-wave interactions.

In this paper, we propose a new technique to quantify the nonlinear sensitivity of perturbation growth to environment moisture. This technique is quite general but we choose to apply it here to the problem of predictability of moist synoptic systems. Section 2 describes the technique we developed and its numerical implementation. Then in Section 3, we examine the impact of moisture on the growth rate of baroclinic perturbations. In Section 4, we propose an interpretation of the role of water vapor on cyclogenesis. Finally, in Section 5, conclusions are drawn.

### VI.4.3 Non-linear sensitivity of nonlinear optimal perturbations to moisture

We propose an original approach to quantify the role of moisture in the growth of synoptic perturbations. It takes advantage of the singular vector analysis (Buizza, 1994) and of the adjoint sensitivity (Rabier et al., 1992).

Consider a reference model trajectory noted with initial condition  $X(t=0) = X_0$  with  $X$  the state vector. The time evolution of this trajectory will be noted  $X(t) = M(X_0)$ . For an initial perturbation  $\delta x(t=0) = \delta x_0$ , its evolution in the nonlinear model is  $\delta x(t) = M(X_0 + \delta x_0) - M(X_0)$  (see Fig. VI.4a). The amplification of such a perturbation over a period  $\tau$  is  $E(\delta x(\tau))/E(\delta x_0)$  with  $E(\delta x)$  the energy of the perturbation (to be defined below). The singular vectors are the perturbations that

maximize the amplification when  $M$  is the linear tangent of the model.

Now, we modify the trajectory itself such that  $X_0 + \Delta X_0$  is the reference trajectory along which we compute our perturbations. For such a trajectory, the equation for the perturbation writes

$$\delta x(t) = M(X_0 + \Delta X_0 + \delta x_0) - M(X_0 + \Delta X_0) \quad (\text{VI.16})$$

(see Fig. VI.4b). The amplification of this perturbation depends on two quantities, namely  $\Delta X_0$  and  $\delta x_0$ ,

$$J(\Delta X_0, \delta x_0) = \frac{E(\delta x(t = \tau))}{E(\delta x_0)} \quad (\text{VI.17})$$

since  $\delta x(t)$  depends on  $\Delta X_0$  through (VI.16). We choose here for  $E()$  to use the total dry energy, defined by

$$E(\delta x) = \frac{1}{2g} \iiint_{p_0}^0 \left( \delta u^2 + \delta v^2 + RT_{ref} \delta \pi^2 + \frac{c_p \delta T^2}{T_{ref}} \right) dx dy dp \quad (\text{VI.18})$$

where  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta T$  and  $\delta \pi$  are respectively the perturbations of the horizontal wind, temperature and logarithm of the surface pressure fields.  $T_{ref}$  is a reference temperature equal to 270K and  $p_0 = 1000\text{hPa}$ . Through the choice of the dry energy norm, moisture fields in the perturbations are set to zero at initial and final times. The use of moist norms for large-scale extratropical singular vectors computations did not prove to lead to results significantly different from the dry ones even with moist physics (Mahfouf and Buizza, 1996).

The modification of the basic state flow will be only on the water vapor field, i.e.  $\Delta X_0 = \Delta Q_0$ . By this way, we can measure the sensitivity of the perturbation growth to the moisture of the basic state.

The problem we want to solve is to find the optimal perturbation  $\delta x_0^*$  and the optimal moisture field  $\Delta Q_0^*$  that satisfy

$$\begin{aligned} J(\Delta X_0^*, \delta x_0^*) &= \max_{\Delta Q_0, \delta x_0} J(\Delta Q_0, \delta x_0) \\ \text{under the constraints} \quad &E(\delta x_0) = E_0 \\ \text{and} \quad &0 < Q_0 + \Delta Q_0 < Q_{sat}(T_0) \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

where  $Q_0 + \Delta Q_0$  is the initial water vapor field of the modified trajectory and  $Q_{sat}(T_0)$  is the saturated water vapor. Since we want to detect and quantify a non-linear sensitivity to environmental moisture, we only perturb the moist part of the initial basic state and  $\Delta Q_0$  must verify that  $Q_0 + \Delta Q_0$  remains both positive and under saturation. The reason is that if initially  $Q_0 + \Delta Q_0$  were larger than saturation, the excess of water vapor would precipitate immediately. A maximum might not exist in that case because there would be an infinite source of potential energy by diabatic heating.

This is a standard problem in large-scale constrained nonlinear optimization. It is not straightforward that an optimal solution of such a problem exists and is unique. However for a model with a finite number of degrees of freedom, such a solution should exist but its physical meaning needs to be assessed.

We solve the problem (VI.19) with a quasi-Newton BFGS algorithm called IPOPT (Wächter and Biegler, 2006). The algorithm proceeds in minimizing the inverse of the cost function, i.e.  $1/J(\Delta X_0, \delta x_0)$ . It needs to evaluate the gradients of the function  $J(\Delta X_0, \delta x_0)$  and of the constraint  $E(\delta x_0)$  which are computed using the adjoint equations of the model. The gradient of  $J(\Delta X_0, \delta x_0)$  verifies the following equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \delta x_0} &= \frac{2}{E_0} M_{|X_0+\Delta X_0+\delta x_0}^* A^\top A \delta x(t = \tau) \\ &\quad - \frac{2E_f}{E_0^2} A^\top A \delta x_0 \\ \frac{\partial J}{\partial \Delta X_0} &= \frac{2}{E_0} M_{|X_0+\Delta X_0+\delta x_0}^* A^\top A \delta x(t = \tau) \\ &\quad - \frac{2}{E_0} M_{|X_0+\Delta X_0}^* A^\top A \delta x(t = \tau) \end{aligned}$$

where  $E_0 = E(\delta x_0)$  and  $E_f = E(\delta x(t = \tau))$ .  $A$  is the matrix of the scalar product associated with the norm defined by (VI.18) and  $A^\top$  its transpose.  $M_X^*$  stands for the adjoint model around the trajectory corresponding to the initial basic state  $X$ . The algorithm also approximates the hessian of  $J$  by the BFGS method. Further details can be found in Wächter and Biegler (2006). The algorithm stops when the optimality error  $\epsilon_{opt}$

$$\epsilon_{opt} = \max \{ \| \nabla(1/J(\Delta Q_0, \delta x_0)) + \mu \nabla c(\delta x_0) \|_\infty, \alpha \| c(\delta x_0) \|_\infty \}$$

becomes less than a specified error tolerance  $\epsilon$ .  $\alpha$  is a scaling factor and  $\mu$  the Lagrangian multiplier for the constraint that are implicitly defined by the numerical algorithm and are of order unity. We have found that the rate of convergence of the technique depends on the spectral resolution and of the degree of non-linearity of the problem. Such a technique has already been used to compute the nonlinear generalization of singular vectors Rivière et al. (2007).

An important difference with the SV technique is that there is no guarantee to obtain a global maximum instead of a local one. Several minimizations have been performed with different starting points in order to ensure that the final result does not depend on the initial condition. Furthermore with  $\Delta Q_0$  set to zero, we have checked that the optimal perturbation  $\delta x_0^*$  converges towards the leading SV as  $E_0$  goes to zero (not shown).

Due to the inclusion of moist physics and precipitation in the nonlinear model, the gradient of the cost function is discontinuous and may not approximate the variation of the cost function when perturbing it around a given value. Indeed, large-scale precipitation and the associated latent heat release are triggered when moisture reaches the saturation threshold. The BFGS algorithm used for the optimization process is a gradient-based technique associated with a line-search method that gives the size of the step the algorithm will perform in the direction given by the Newton method (Wächter and Biegler, 2006) and theoretically requires the gradient of the cost function to be continuous. Similar difficulties had been encountered by the assimilation community, when including physical processes of large-scale precipitation and convection in 4D-Var assimilation strategies (Zou, 1993, and others).

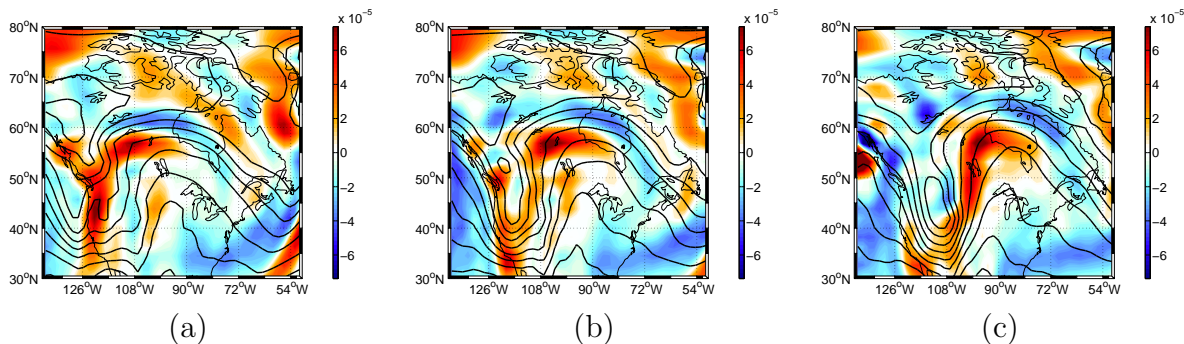


FIG. VI.5 – CONTROL experiment : In color, surface relative vorticity (in  $\text{s}^{-1}$ ) for the basic state (a) at  $t = 0$ , (b) at  $t = 12$  and (c) at  $t = 24h$ . In black contours, temperature contours at  $\sigma = 0.73$

Their studies point out a slower convergence rate of the BFGS method when discontinuous processes were included without hindering convergence towards the solution. By performing 4D-Var experiments with simulated observations we came to the same conclusion provided the step size in the line-search procedure is not set initially to a small value.

## VI.4.4 Application to a baroclinic situation

### VI.4.4.1 Short description of the numerical model

To obtain our basic state, we first run the PPlanet Simulator (PLASIM) developed by the University of Hamburg (see Fraedrich et al. (2005) for complete description) for 700 days at a spectral resolution of T63 with 15 vertical levels. The model is a GCM coupled with vegetation, ocean and sea-ice. Its atmospheric part is the PUMA2 model based on the primitive equations and is written in sigma coordinates. After the spin-up, we run for 2 days a modified version of PUMA2 that includes water vapor equation and simplified vertical diffusion, surface drag and large-scale precipitation schemes. All these parametrizations are present in a linearised form in the linear-tangent and the adjoint model we developed. A parametrization for convective precipitation is not included in our physics package, since, according to Coutinho et al. (2004), it has a weak impact on the development of synoptic perturbations when compared to the impact of large-scale precipitation. Optimal perturbations are computed with a 24 hour optimization time for regions located over  $30^\circ\text{N}$ . In the NLSV computation the initial energy  $E_0$  is set such as to correspond to a maximal temperature amplitude of about  $3^\circ\text{K}$  at initial time.

### VI.4.4.2 NLSV for the CONTROL Experiment

We focus our attention on an extratropical baroclinic situation associated with the interaction of an upper-level structure and a surface system. The anomalies seem to mutually amplify leading to the detachment of an upper-level cyclone over the United-States (Fig. VI.5). During this event, a tongue with a high moisture content

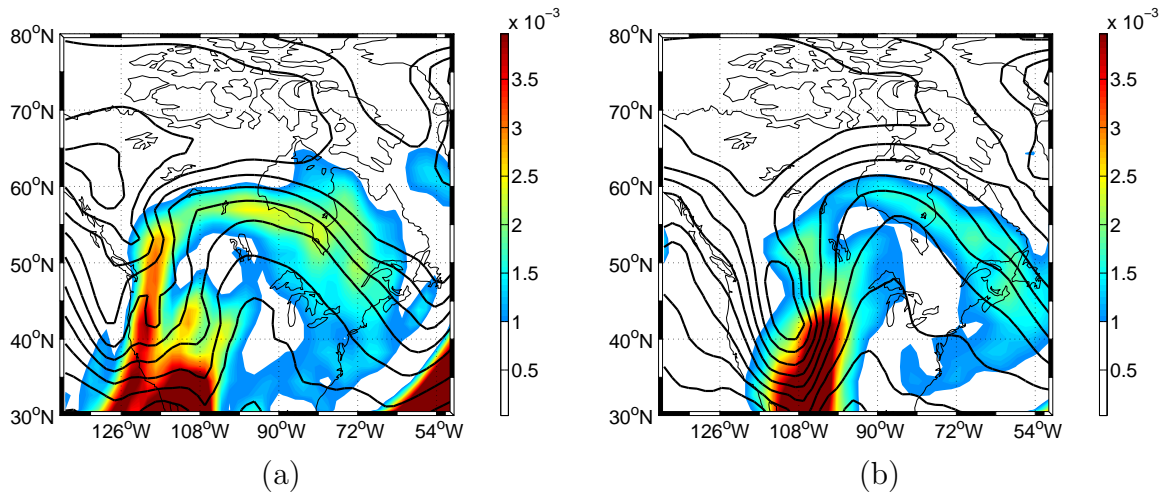


FIG. VI.6 – CONTROL experiment : In color, specific humidity (in kg/kg) at the level  $\sigma = 1$ . In black contours, temperature field at  $\sigma = 0.73$  for time  $t = 0$  (a), and  $t = 24\text{h}$  (b).

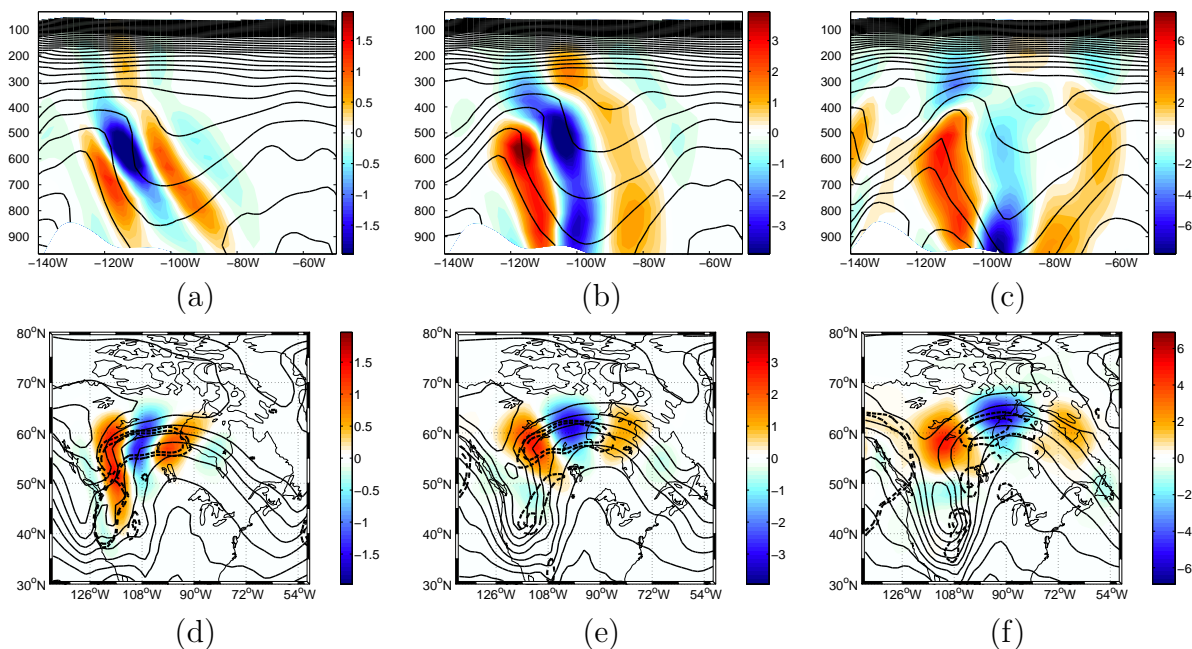


FIG. VI.7 – CONTROL experiment : In color,  $\delta T$  (in K) for the NLSV at  $t = 0$  (a, d), at  $t = 12\text{h}$  (b, e),  $24\text{h}$  (d, f). Panels (a-c) correspond to vertical cross section at latitude  $59^\circ$ . Panels (d-f) are horizontal sections at  $\sigma = 0.73$ . On panels (a-c) are superposed potential temperature contours in black. On panels (d-f) are superposed temperature contours (in solid lines) and vertical integrated precipitation (in dashed lines) of the basic state.

was transported from the tropical regions and reached the Western coast of the United States (Fig. VI.6). We will call this reference basic state the CONTROL experiment. We first compute the nonlinear extension to singular vectors called

Initial perturbation	NLSV in NL	SV in LT	SV1 in NL	dry SV1 in LT
Amplification over 24h for CONTROL	88.3	98.0	70.4	61.0
Amplification over 24h for OPTIM	245.8	214.6		83

TAB. VI.1 – Amplification rates in terms of energy of singular vectors and nonlinear optimal perturbations in the Linear Tangent (LT) and nonlinear (NL) models for Control and Optimal experiments

NLSV<sup>3</sup>. These structures verify

$$J(\delta x_0^\dagger) = \max_{\delta x_0} J(\delta x_0)$$

with  $E(\delta x_0) = E_0$  (VI.20)

Here there is no modification of the flow field (i.e.  $\Delta X_0 = 0$ ). The NLSV are located in the baroclinic region and exhibit features typical of singular vectors such as a westward tilt decreasing with time as shown on Fig. VI.7a, b, c. Also temperature perturbations propagate upward and downward (Buizza and Palmer, 1995). Amplification rates for the NLSV and for the leading SV evolving in the nonlinear and linear model are given in the first line of Table VI.1. The NLSV  $\delta x_0^\dagger$  has an amplification rate of 88.3 in terms of total dry energy. In comparison the leading SV has a linear growth rate of 98, but reduces to 70.4 when integrated through the nonlinear model. This shows that nonlinearities tend to limit the amplification (a classical result in predictability Rivière et al., 2007). The growth of the NLSV is larger than the growth of the SV1 in the nonlinear model, as expected from the definition of the NLSV. One advantage of using a nonlinear technique of optimisation is that we obtain an optimal structure with a given sign (whereas SVs and  $-SV$ s have the same growth rate being integrated in the linear tangent model).

To evaluate the impact of moist processes in the growth, we computed the leading SV turning off latent heat release by large-scale precipitation. We observe a reduced amplification (see Table VI.1), consistent with results of Coutinho et al. (2004). This could be expected since strong precipitation can be observed in the spatial region spanned by the NLSV (see Fig. VI.7). Therefore latent heat release plays an important role in the dynamics of the structure we observe.

#### VI.4.4.3 Nonlinear sensitivity to the trajectory moisture

Optimization is carried on  $\delta x_0$  and  $\Delta Q_0$ , leading to a new trajectory and a new set of optimal perturbations. The new trajectory obtained  $X'(t) = M(X_0 +$

<sup>3</sup>Our NLSV has a strong similarity with the CNOP Mu et al. (2003). We maximize the amplification rate for a fixed initial energy  $E_0$  of perturbations whereas Mu et al. (2003) maximize the final energy of perturbations with initial energy smaller than  $E_0$ . The two definitions may coincide for finite dimensional systems (Mu, personal communication).

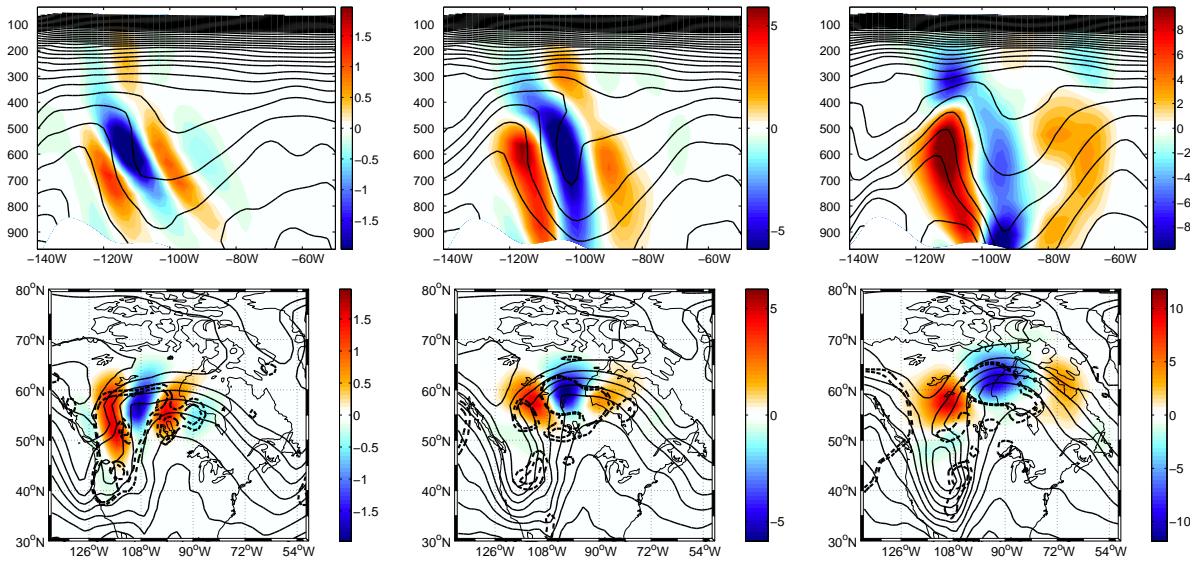


FIG. VI.8 – OPTIM experiment : In color,  $\delta T$  (in K) for the NLSV at  $t = 0$  (a, d), at  $t = 12\text{h}$  (b, e),  $24\text{h}$  (d, f). Panels (a-c) correspond to vertical cross section at latitude  $59^\circ$ . Panels (d-f) are horizontal sections at  $\sigma = 0.73$ . On panels (a-c) are superposed potential temperature contours in black. On panels (d-f) are superposed temperature contours (in solid lines) and vertical integrated precipitation of OPTIM trajectory (in dashed lines).

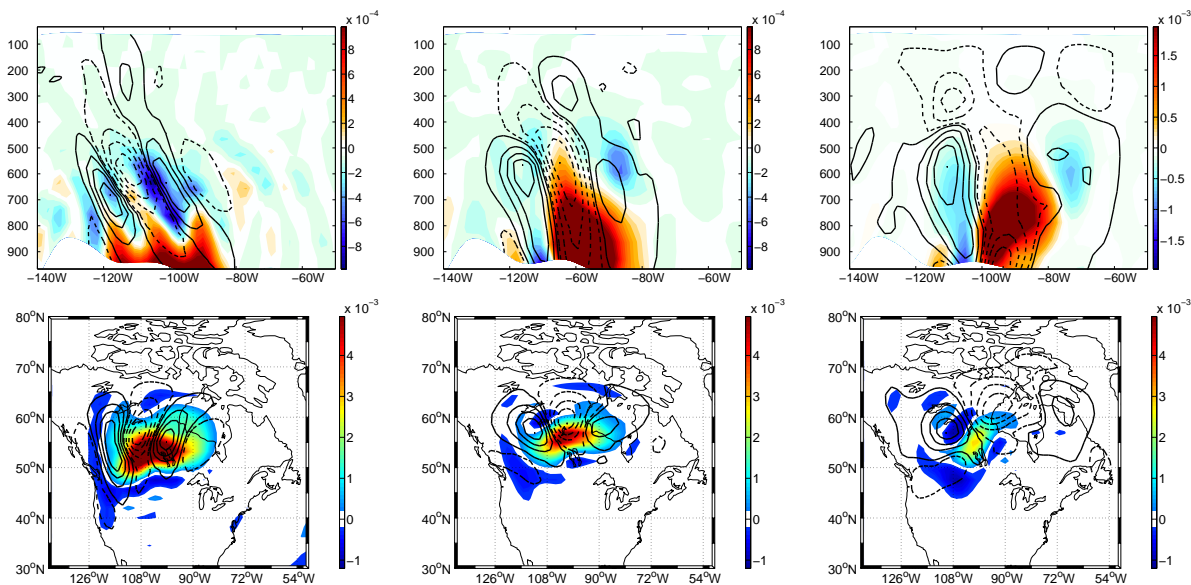


FIG. VI.9 –  $\Delta Q_0^*$  at  $t = 0$  (a, d),  $12$  (b, e) and  $24\text{h}$  (c, f). Panels (a-c) correspond to vertical cross section at latitude  $59^\circ\text{N}$ . Panels (d-f) are horizontal sections at  $\sigma = 1$ . Superposed are the NLSV temperature field (taken at  $\sigma = 0.73$  for (d-f)).

$\Delta Q_0$ ) will be called OPTIM. The first question to ask is the consistency of this new trajectory compared to the CONTROL trajectory. Surprisingly we found that the

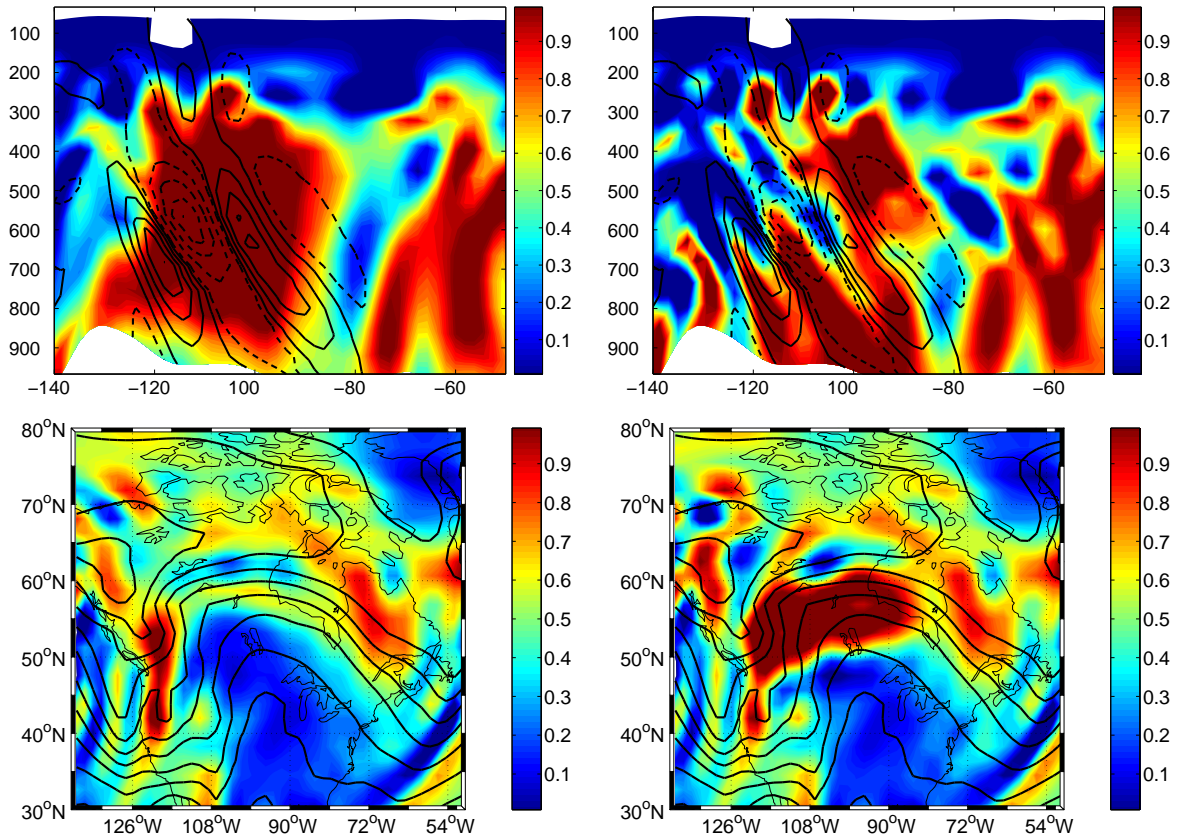


FIG. VI.10 – Relative humidity at  $t = 0h$ . Panels (a-b) correspond to vertical cross section at latitude  $59^\circ N$ . Panels (c-d) are horizontal sections at  $\sigma = 1$ . Superposed are the NLSV temperature field (taken at  $\sigma = 0.73$  for (d-f)). (a-c) correspond to the relative humidity of the CONTROL experiment and (b-d) to the OPTIM experiment.

time evolution of the two trajectories are similar (compare vertical cross section of potential temperature fields on Fig. VI.7a and VI.8a and horizontal cross section of temperature fields on Fig. VI.7b and VI.8b). The addition of moisture in that case has only a weak impact on the evolution of the system. The cyclone seems to detach more in the OPTIM trajectory (compare Fig. VI.7f and VI.8f). The basic state of OPTIM seems more neutrally unstable than the CONTROL trajectory (Fig. VI.7f at  $110^\circ W$ ) and this is accompanied with stronger precipitation. The difference of the two velocity fields in terms of mean kinetic energy is at most  $2m^2s^{-2}$ . This is confirmed by computing the amplification of dry SV for CONTROL and OPTIM. Here dry SVs are computed by setting the latent heat release to zero in the Linear Tangent model. The growth rate increases from 61 to 83 which shows a relatively small change of the amplification with very similar dry SV structures (not shown). We hypothesize that the larger value in OPTIM is due to a smaller static stability when the water vapor distribution is modified because of the precipitation induced by  $\Delta Q_0$  that occurs in the lowest levels of the model and not in the middle troposphere



as in the CONTROL experiment. Indeed the spatially averaged static stability over the region decreases by 7% between the two experiments. If the growth rate is given by the Eddy growth rate  $f_0 \partial_z u / \sigma$ , then the amplification should become  $61^{1.07} \approx 81$  which compares well with the observed value.

The spatial structure of the OPTIM perturbations  $\delta x_0^*$  is very similar to the CONTROL NLSV  $\delta x_0^\dagger$  (compare Fig. VI.7 and VI.8) : the similarity index defined by Buizza (1994) using the dry energy norm is equal to 0.92, meaning that OPTIM and CONTROL NLSVs share 92 percents of their energy, which makes them difficult to distinguish. However, a surprising result is the increase by almost a factor 3 of the amplification rate of the NLSV for the OPTIM experiment as shown in Table VI.1. This is true also for the moist leading SV. Therefore, the nonlinear optimization seems to arrange the moisture field in such a way that the dynamics remains very similar but adding a large reservoir of potential energy released through diabatic heating. This result gives some confidence on the pertinence of the method and does not lead to unphysical results.

How is water vapor optimized to obtain the largest growth of perturbations? Figure VI.9 shows that a positive  $\Delta Q_0^*$  anomaly is located at initial time in the lowest levels of the model mainly below 850hPa and then gets advected horizontally and vertically by the mean flow. This perturbation remains to the South of the NLSV structure. The OPTIM trajectory is less saturated in the upper atmosphere (Fig. VI.10) but closer to saturation near the surface compared to the CONTROL experiment. It seems that the added moisture stays southward of NLSVs.

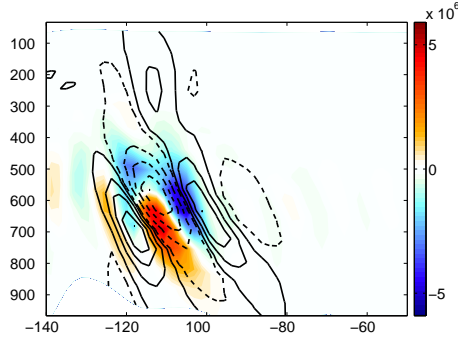
To see if the first order growth in the OPTIM solution is governed by the saturation of humidity of the trajectory, experiments keeping the same dry initial basic state but saturating all the region of longitude between -140W and -60°W and latitude between 40 and 80°N, levels either under 700hPa or above 700hPa were performed for comparison : amplification of the NLSV was between 120 and 140 depending on the experiments. Such poor increase in the amplification compared to the experiments using the optimal value of  $\Delta Q_0$  can be explained by the destruction of the trajectory baroclinicity. In these experiments, We indeed observed a decrease of the vertical shear of the wind induced by large latent heat release in the middle troposphere (not shown).

As stated above, we do not claim uniqueness of the solution of the optimization problem as we may have reached a local extremum. However the moisture modification  $\Delta Q_0$  of basic state dramatically increases the amplification of perturbations. In the following section we propose some physical mechanisms to explain the results we obtain.

## VI.4.5 Physical interpretation

### VI.4.5.1 Differences between linear and nonlinear sensitivity

To see how our nonlinear sensitivity method compares with the standard technique of adjoint sensitivity, we computed the adjoint sensitivity to moisture for the CONTROL NLSV perturbation. Figure VI.11 shows that the linear sensitivity of  $J$

FIG. VI.11 –  $\partial J/\partial Q_0$  at  $t = 0$ 

to moisture at initial time gives a signal at mid-atmosphere and out of phase with the temperature of the NLSV. The pattern of  $\partial J/\partial Q_0$  is similar to what Langland et al. (1996) observed in their idealized extratropical cyclogenesis study. The signal in the middle troposphere is very similar to the  $\Delta Q_0$  field (compare with Fig. VI.9a). However a strong difference is that our method captures a positive water vapor addition near the surface that is completely absent in the adjoint sensitivity field. This shows the usefulness to compute an optimal water vapor field using the fully nonlinear system since this surface moisture is essential for the development of perturbations (see below).

It is important to stress that the sensitivity we discuss is different from classical adjoint sensitivity. The NLSV  $\delta x^*(\Delta Q_0)$  is indeed dependent on the modification of the water vapor of the basic state. Using the chain rule for the derivative of the optimal value of the cost function  $J^*(\Delta Q_0, \delta x^*(\Delta Q_0))$ , one can see that

$$\frac{\partial J^*}{\partial \Delta Q_0} = \frac{\partial J}{\partial \Delta Q_0} + \left. \frac{\partial J}{\partial \delta x} \right|_{\delta x^*, \Delta Q_0} \frac{\partial \delta x^*}{\partial \Delta Q_0} \quad (\text{VI.21})$$

Since we have a constrained optimisation problem the first order optimality condition differs from  $\partial J/\partial \delta x = 0$  and is a function of the Lagrange multiplier for the problem. Furthermore, the expression of  $\partial \delta x^*/\partial \Delta Q_0$  requires the knowledge of second order derivatives (Le Dimet et al., 1997). Therefore the gradient of the cost function along the optimum is different from the gradient of the cost function and cannot be computed directly using the adjoint.

#### VI.4.5.2 Optimal environmental moisture location

In the light of the previous results we are now able to give further explanations regarding the shape and location of  $\Delta Q_0$  in the OPTIM experiment. From comparison with experiments in a saturated atmosphere we have seen that only optimally located water vapor can trigger very intense amplification compared to the CONTROL experiment. The added moisture  $\Delta Q_0$  exhibits two main features.

First,  $\Delta Q_0$  possesses an initial westward tilt (Fig. VI.9) decreasing during the time evolution. This is similar to the westward tilt of the optimal perturbations and

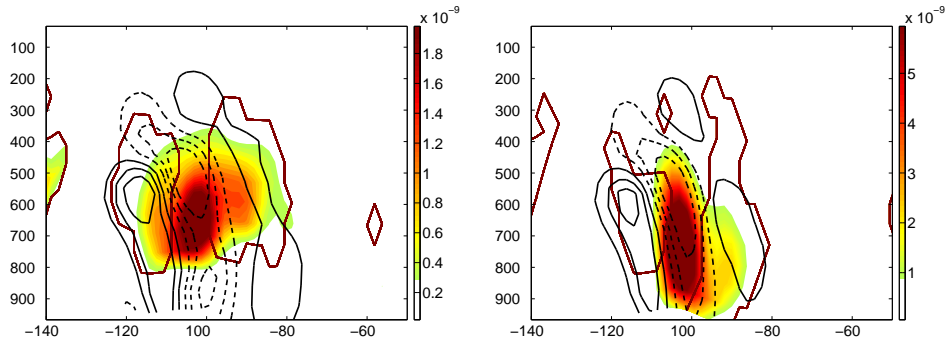


FIG. VI.12 – Vertical cross sections of the precipitation field at 12h in color for (a) CONTROL trajectory (i.e.  $P_0$ ), (b) OPTIM trajectory (i.e.  $P_0 + \delta P_0$ ). Dashed black contours materialize the temperature perturbation of the NLSV (i.e.  $\delta T$ ). Brown contours materialize total precipitation (i.e.  $P_0 + \delta P$  and  $P_0 + \delta P_0 + \delta P$ ).

it allows moisture to be extracted directly in phase with the temperature fields of the optimal perturbations (through the term  $\delta \mathbf{u} \cdot \nabla \Delta Q_0$ ). This promotes a water vapor field closer to saturation when considering the OPTIM trajectory plus its perturbation. This leads to stronger precipitation in that case.

Secondly, the precipitation  $P_0 + \delta P_0$  of the OPTIM basic state occurs mainly in regions where the temperature of the optimal perturbation  $\delta x^\dagger$  is negative (compare Fig. VI.12a and b). This has to do with nonlinearities in the precipitation scheme. To explain that, we first consider the trajectories  $X_0 + \delta x_0$  and  $X_0$ . The precipitations on both trajectories ( $P_0 + \delta P$  and  $P_0$ ) must be positive. This means that if  $\delta P < 0$ , there is an intrinsic limit such that  $|\delta P| < P_0$ . In the special case of  $P_0 = 0$ ,  $\delta P$  has to vanish as well. On the contrary, if  $\delta P > 0$ , there is no such constraint and  $\delta P$  can increase without limit. We therefore see an asymmetry that exists in the nonlinear equation of perturbations and that is absent from the linearized system.

The effect of moisture will result in a production of potential energy through latent heat release. This term will be proportional to  $\delta P \delta T$ . To increase the amplification,  $\delta P$  needs to grow in the same time as  $\delta T$ . To this end, we need to modify the trajectory so as to create precipitation  $P_0 + \Delta P_0$  where  $\delta T$  is negative. Looking at Fig. VI.12, this is indeed what occurs : on the CONTROL trajectory, precipitation  $P_0$  occurs both on positive and negative extrema of  $\delta T$  whereas in the OPTIM trajectory,  $P_0 + \delta P_0$  is very strongly correlated with the negative extrema. This effect which is purely nonlinear would not occur in a linear perturbation study where crossing the on-off threshold associated with precipitation is not allowed.

## VI.4.6 Conclusion

In this study, we presented a nonlinear method for measuring sensitivity to moisture, extending the concept of adjoint sensitivity to a fully nonlinear framework, without imposing the linear assumption which may not be valid in presence of moist physics in the model. Using constrained nonlinear optimization, the modification of

the basic state moisture field allowing the largest nonlinear growth of perturbations (NLSVs) over the forecast lead time in a given region was retrieved. It came out that a localized modification of the initial moisture field allowed optimal growth of dry NLSV, larger than if the whole atmosphere were saturated at initial time. The growth rate of NLSV over 24 hours is then increased by a factor of almost 3 in comparison with the reference case. Such enhancement of the amplification is mainly due to diabatic effects, the modification of the moisture field increasing only slightly the baroclinicity of the trajectory. However in both cases the shape and structure of the optimal perturbations remain quite similar, thus indicating that the mechanism of perturbation growth remains basically unchanged and that the role of diabatic effects is to reinforce the dry baroclinic instability mechanism for this situation. This is possible because diabatic tendencies due to precipitation and temperature perturbations are in phase, allowing largest growth without modifying the structure of the perturbations. The optimal moisture modification, at initial time in the lowest troposphere (mainly below 700hPa), is then advected eastwards in the middle troposphere within the conveyor belt.

If this nonlinear moist sensitivity technique is a relevant tool for the study of sensitivity to moisture, it can also be applied to the study of other processes where the linear assumption may not be hold.

## VI.5 Conclusion

L'expérience non-linéaire de sensibilité à l'eau illustre les possibilités offertes par les méthodes d'optimisation non-linéaires en termes d'étude de sensibilité. Par rapport à notre travail sur l'humidité, il est intéressant de noter que sur la situation météorologique étudiée dans le papier (qui correspond à l'expérience 1 du chapitre 4), aucune perturbation optimale possédant un mécanisme de croissance purement diabatique n'a été mise en évidence malgré la modification optimale de l'humidité de l'état initial de la prévision. Dans la mesure où la méthode d'optimisation non-linéaire ne garantit pas d'avoir atteint un extremum global et non pas local, nos conclusions doivent se limiter à constater une baisse de la prévisibilité associée à la modification  $\Delta Q_0^*$  du champ d'humidité calculée par l'algorithme. La structure de  $\Delta Q_0^*$  montre une humidification importante des basses couches en dessous de 800 hPa. Ce résultat est cohérent avec les travaux de Langland et al. (1996) qui montrent une sensibilité importante du développement d'un cyclone extratropical au dégagement de chaleur latente entre 700 et 900 hPa et soulève le rôle important que peuvent jouer les flux d'humidité au niveau de la surface des océans dans les processus de cyclogénèse. Des études de cas (Carrera et al., 1999) de cyclogénèse explosive ont souligné l'importance des flux de surface d'humidité dans le développement de la tempête. Il convient alors de s'interroger, en vue d'études futures portant sur l'impact de l'humidité sur la nécessité de la prise en compte des flux de surface principalement au niveau de l'océan. La méthode de sensibilité non-linéaire présentée dans ce chapitre constituerait un outil adapté à l'étude de l'impact de ces flux de surface mais aussi de la température de surface de l'océan sur la prévisibilité.

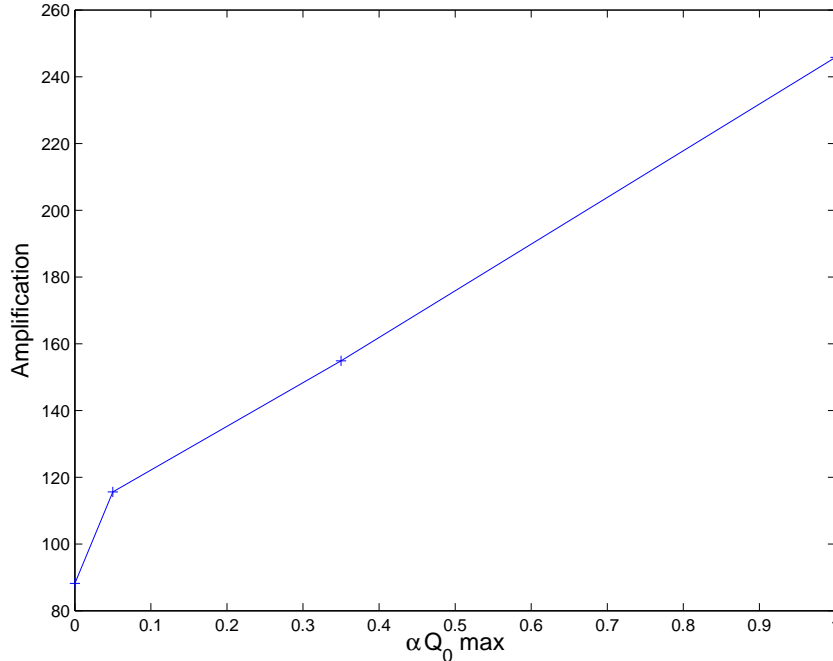


FIG. VI.13 – Amplification du NLSV dominant pour les expériences où le champ d’humidité a été modifié de façon optimale en fonction de l’amplitude maximale de  $\Delta q_0$  définie par  $\alpha$  (formule (VI.22)).

Pour apporter une réponse plus définitive quant à l’impact de l’humidité à grande échelle sur la prévisibilité, il est nécessaire d’imposer à  $\Delta Q_0$  d’être de l’ordre des erreurs classiques sur l’humidité. Nous avons reproduit l’étude de l’article en imposant à l’amplitude de la modification du champ d’humidité de l’état de base  $\Delta Q_0$  d’être inférieur à un certain pourcentage de l’humidité maximale de l’état de base dans une région d’étude  $\mathcal{R}$  (40-70°N,120-80°W) située autour de la perturbation optimale :

$$|\Delta Q_0(p_i)| < \alpha \max_{\mathcal{R}}(Q_0(p_i)) \quad (\text{VI.22})$$

où  $p_i$  est le niveau pression considéré. La condition (VI.13) est aussi maintenue pour garder des champs d’humidité positifs et non saturés.

La figure VI.13 montre la variation du taux d’amplification maximal du NLSV de la trajectoire modifiée en fonction de  $\alpha$  : pour une modification relative du champ d’humidité de moins de 5% ( $\alpha = 0.05$ ), le taux d’amplification maximal du NLSV a déjà augmenté de 30%. Pour  $\alpha$  supérieur à 0.1, le taux d’amplification non-linéaire maximal augmente linéairement par rapport à  $\alpha$ . Cette courbe montre que des petits ajustements du champ d’humidité de la trajectoire peuvent affecter la prévisibilité de l’écoulement de façon importante. L’application de cette méthode à des études de cas réels de cyclogénèse explosive (comme la tempête Lothar) où l’humidité a joué un rôle important constitue un piste de prolongation de ce travail. Une telle étude serait particulièrement intéressante car elle permettrait de comparer le champ d’humidité ”optimal” pour lequel la croissance non-linéaire d’erreurs est la plus im-

---

portante avec le champ d'humidité réel et de valider ainsi le caractère physique des résultats de cette méthode.









# VII

---

## Conclusion générale

---

L'objectif premier de ce travail était l'étude de l'influence de l'humidité sur la prévisibilité aux échelles synoptiques. La diminution du régime de validité de l'hypothèse linéaire-tangente pour des dynamiques humides nous a poussé à utiliser une méthode de calcul de perturbations optimales non-linéaires : les vecteurs singuliers non-linéaires. Ces derniers maximisent la croissance non-linéaire des erreurs de prévision sur la durée d'optimisation. Si cette méthode avait déjà été utilisée dans des problèmes de faible dimension, elle n'avait jamais été appliquée dans un modèle atmosphérique avec une formulation des équations aussi réaliste que les équations primitives. L'étude des mécanismes d'optimalité non-linéaire a permis de comprendre les processus physiques non-linéaires de croissance d'erreurs baroclines sèches dans des modèles de degré de réalisme croissant. L'optimalité des vecteurs singuliers non-linéaires dans le cadre de l'étude de l'instabilité barocline sèche consiste en deux effets :

- *Un renforcement initial de l'écoulement moyen qui s'oppose à l'ajustement barocline.* La croissance barocline d'une perturbation s'accompagne d'un flux de chaleur vertical et d'un flux de chaleur méridien qui ont tendance à stabiliser l'écoulement moyen. La contribution du NLSV à l'écoulement moyen s'oppose à la stabilisation barocline de celui-ci. Nous avons étudié ces interactions entre perturbation et écoulement moyen dans un modèle quasi-géostrophique à deux niveaux dans le chapitre II et dans un modèle de circulation générale au moyen du formalisme de la moyenne eulérienne transformée dans le chapitre III.
- *Une diminution de la saturation non-linéaire de la croissance d'erreurs.* Les termes d'advection favorisent la saturation de la croissance des perturbations grâce entre autres à la formation de tourbillons. Le NLSV est moins sensible à cet effet grâce à sa structure spatiale plus étalée et grâce à son amplitude plus faible que celle du SV à énergie égale.

L'étude de l'optimalité des vecteurs singuliers non-linéaires dans le cadre du modèle simplifié de l'instabilité barocline a fait l'objet d'un article accepté dans la revue "Journal of Atmospheric Sciences" (Rivière et al., 2007).

La seconde partie de notre travail a été consacrée à l'étude de l'impact de l'humidité sur la prévisibilité. Cette thématique a été abordée au moyen du calcul de perturbations optimales maximisant la croissance des erreurs de prévision.

Une des premières questions que nous nous sommes posées a été de savoir si le choix d'une métrique humide incluant la variable humidité dans la mesure de l'erreur de prévision était pertinente. Nous avons donc calculé des perturbations optimales avec trois jeux de normes (énergie totale sèche, énergie totale humide et une nouvelle norme humide). Alors que la norme énergie totale humide favorise la précipitation au sein des vecteurs singuliers, la seconde norme humide au contraire y était peu favorable pour des raisons énergétiques. Si au terme de la période d'optimisation, les vecteurs singuliers obtenus avec chacune des normes étaient sensiblement identiques, ces vecteurs sont plus ou moins riches en humidité à l'instant initial selon le poids accordé à l'humidité par rapport aux champs secs au sein de la norme. Nous avons montré que l'utilisation de la norme énergie totale sèche permettait d'obtenir des perturbations optimales dynamiquement plus équilibrées quant à l'évolution temporelle respective des champs d'humidité et de température. En tenant compte de la dépendance possible des résultats des expériences par rapport au choix de norme effectué, l'utilisation de la norme énergie totale sèche a été privilégié pour nos calculs de vecteurs singuliers.

Le calcul des vecteurs singuliers linéaires avec une physique linéarisée humide a permis de mettre en évidence deux phénomènes :

- *une augmentation de la croissance des structures baroclines déjà obtenues en utilisant une physique linéarisée sèche.* Le mécanisme de renforcement diabatique de la croissance de ces perturbations baroclines humides a été explicité. Au sein des perturbations, le dégagement de chaleur latente est en phase avec les champs de température perturbés grâce à l'expansion adiabatique qui diminue la valeur de l'humidité à saturation dans les ascendances en entraînant la précipitation d'humidité.
- *l'apparition de nouveaux vecteurs singuliers purement diabatiques dans les zones riches en humidité.* Le mécanisme de croissance de ces perturbations n'est plus barocline mais purement diabatique. La localisation géographique de ces structures dans les zones instables du point de vue de la convection humide laisse supposer un mécanisme de croissance similaire à celui des ondes de Rossby diabatiques ou CISKs. Pour ce type de perturbations, on peut s'interroger sur l'influence de la prise en compte des processus de précipitation convective, négligés dans notre travail.

Le lien entre le champ d'humidité à grande échelle et la prévisibilité a été étudié au moyen d'une nouvelle méthode de sensibilité non-linéaire. Cette méthode permet de diagnostiquer la modification du champ d'humidité de l'écoulement initiale permettant l'augmentation la plus importante de la croissance non-linéaire des erreurs de prévision. Cette étude a mis en évidence *une baisse significative de la prévisibilité suite à des modifications optimales même faibles du champ d'humidité.* Ces modifications optimales d'humidité sont principalement situées en-dessous de 850 hPa et sont corrélées à la perturbation optimale de façon à ce que celle-ci demeure approvisionnée en eau tout au long de son évolution.

En guise de prolongement de ce travail, l'application de la méthode des NLSVs à une étude de cas réel, une des tempêtes de 1999 par exemple, permettrait d'évaluer les potentialités opérationnelles de cette méthode. Descamps et al. (2007) montrent en effet des différences significatives entre les évolutions linéaire et non-linéaire des vecteurs singuliers de la tempête Lothar. De plus, l'humidité ayant joué un rôle important dans le développement de cette tempête, la comparaison de l'humidité optimale calculée par la méthode de sensibilité non-linéaire du chapitre VI avec le champ d'humidité réel offrirait la possibilité d'évaluer la capacité de cette méthode à diagnostiquer les conditions initiales sur les champs d'humidité favorables à une cyclogénèse intense et éventuellement à être utilisée dans des stratégies d'observation adaptative.

Ce travail nous a poussé à nous interroger sur l'applicabilité de la méthode des vecteurs singuliers non-linéaires à d'autres problèmes. En effet, si à l'échelle synoptique l'instabilité barocline pilote la prévisibilité, à des échelles plus fines la croissance des erreurs de prévision est liée aux processus d'instabilités convectives. Zhang et al. (2007) montrent alors que les erreurs, initialement localisées vers les petites échelles, saturent rapidement avant de modifier les grandes échelles de l'écoulement. La méthode des NLSVs pourrait constituer un outil intéressant pour réaliser une étude fondamentale des processus de croissance des erreurs de prévision d'un écoulement convectif humide. La démarche effectuée avec l'instabilité barocline sèche, c-à-d en choisissant des écoulements de référence fortement idéalisés, répétée dans le cas de l'instabilité convective permettrait d'améliorer nos connaissances de la prévisibilité à l'échelle convective, où la méthode des vecteurs singuliers linéaires est inappropriée à cause de la non-validité de l'hypothèse linéaire-tangente. Par contre, si la saturation non-linéaire est importante, il est probable que, en l'absence de mécanisme non-linéaire de croissance, le NLSV s'étale spatialement de façon très importante en diminuant son amplitude pour évoluer de façon quasi-linéaire en se projetant sur les premiers vecteurs singuliers linéaires. Dans la situation 2 du chapitre IV, le calcul du NLSV associé aux SVs diabatiques illustre ce phénomène : le NLSV se projette sur deux vecteurs singuliers situés dans des régions indépendantes de l'écoulement (figure VII.1). La méthode des NLSVs n'apporte alors aucune information nouvelle concernant la caractérisation des sous-espaces instables de l'écoulement. Si la méthode des NLSVs s'avère un bon outil pour effectuer des études de processus physiques, cet artefact de la méthode des NLSVs, dû au fait que ceux-ci sont optimaux par rapport à leur amplification sur la durée d'optimisation, mérite de futures réflexions avant de penser à une utilisation opérationnelle de cette méthode.

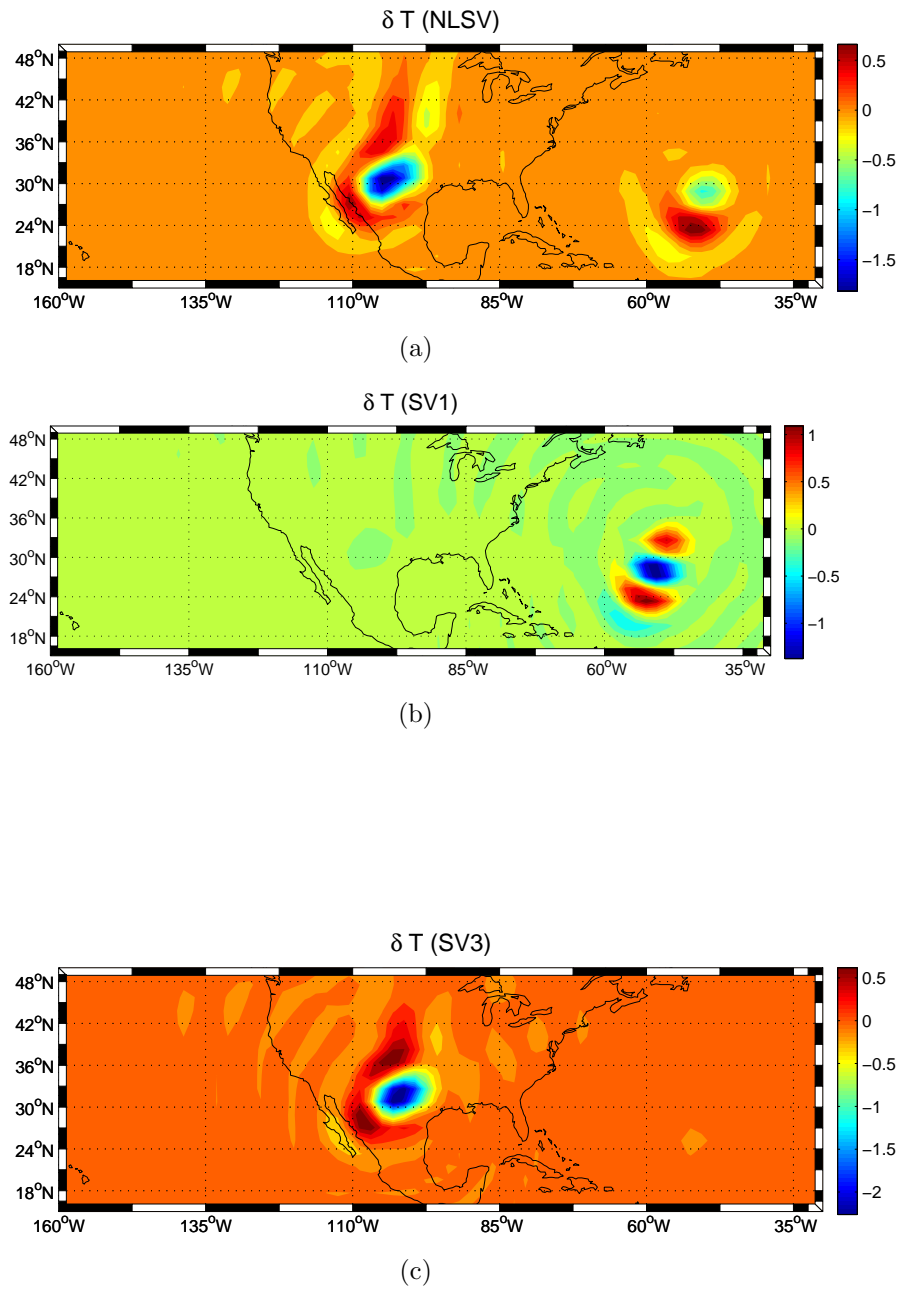


FIG. VII.1 – Champs de température ( $^{\circ}\text{K}$ ) à 700 hPa de  $SV_1^m$ , de  $SV_3^m$  et du NLSV à  $t=0\text{h}$  pour la situation 2 du chapitre IV. Les SVs ont été redimensionnés de façon à ce que leur énergie initiale soit égale à celle du NLSV soit  $3.10^{-3} J.kg^{-1}$ .





---

# Bibliographie

---

- Andersson, E., E. Holm, P. Bauer, A. Blejaars, G. Kelly, A. P. McNally, A. J. Simmons, J.-N. Thépaut, and A. M. Tompkins, 2007 : Analysis and forecast impact of the main humidity observing systems. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **in press**.
- Andrews, D., and L. McIntyre, 1976 : Planetary waves in horizontal and vertical shear : the generalized Eliassen-Palm relation and the mean zonal acceleration. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 2031–2048.
- Badger, J., and B. J. Hoskins, 2001 : Simple initial value problems and mechanisms for baroclinic growth. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 38–49.
- Barkmeijer, J., 1996 : Constructing fast-growing perturbations for the nonlinear regime. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 3838–2851.
- Beare, R. J., A. J. Thorpe, and A. A. White, 2003 : The predictability of extratropical cyclones : Nonlinear sensitivity to localized potential-vorticity perturbations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **129**, 219–237.
- Bengtsson, L., and K. Hodges, 2005 : On the impact of humidity observations in numerical weather prediction. *Tellus*, **57A**, 701–708.
- Bretherton, F. P., 1966 : Critical layer instability in baroclinic flows. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 325–334.
- Buizza, R., 1992 : Unstable perturbations computed using the adjoint technique. *ECMWF Technical Memorandum*, **189**, 1–42.
- Buizza, R., 1994 : Sensitivity of optimal unstable structures. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **120**, 429–451.



- Buizza, R., 1995 : Optimal perturbation time evolution and sensitivity of ensemble prediction to perturbation amplitude. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **121**, 1705–1738.
- Buizza, R., 1998 : Impact of horizontal diffusion on t21, t42, and t63 singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 1069–1083.
- Buizza, R., and T. Palmer, 1995 : The singular-vector structure of the atmospheric circulation. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1434–1456.
- Buizza, R., J. Tribbia, F. Molteni, and T. Palmer, 1993 : Computation of optimal unstable structures for a numerical weather prediction model. *Tellus*, **45A**, 388–407.
- Buizza, R., C. Cardinali, G. Kelly, and J.-N. Thépaut, 2007 : The value of observations. part ii : the value of observations located in singular vectors based target areas. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **submitted**.
- Cacuci, D. G., 1981 : Sensitivity theory for nonlinear systems. ii. extensions to additional classes of responses. *Journal of Mathematical Physics*, **22**, 2803–2812.
- Carrera, M. L., J. R. Gyakum, and D. L. Zhang, 1999 : A numerical case study of secondary marine cyclogenesis sensitivity to initial error and varying physical processes. *J. Atmos. Sci.*, **127**, 641–660.
- Cehelsky, P., and K. K. Tung, 1991 : Nonlinear baroclinic adjustment. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 1930–1947.
- Chang, C., D. Perkey, and C. Kreitzberg, 1982 : A numerical case study of the effects of latent heating on a developing wave cyclone. *J. Atmos. Sci.*, pp. 1555–1570.
- Charney, J., 1947 : The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. *Journal of Meteorology*, **4**, 135–162.
- Charney, J. G., and A. Eliassen, 1964 : On the growth of the hurricane depression. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 68–75.
- Charney, J. G., and M. E. Stern, 1962 : On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **19**, 159–172.
- Charpentier, I., 2000 : Checkpointing schemes for adjoint codes : Application to the meteorological model Meso-NH. *SIAM J. Sci. Comput.*, **22**(6), 2135–2151.
- Courtier, P., J. Derber, R. Errico, J.-F. Louis, and T. Vukicevic, 1993 : Important literature on the use of adjoint, variational methods and the kalman filter in meteorology. *Tellus*, **45A**, 342–357.
- Coutinho, M. M., B. J. Hoskins, and R. Buizza, 2004 : The influence of physical processes on extratropical singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 195–209.

- Craig, G., and H. Cho, 1988 : Cumulus heating and cisk in the extratropical atmosphere. part i : Polar lows and comma clouds. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 2622–2640.
- Davies, H., 1983 : The stability of some planetary boundary layer diffusion equations. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 2140–2413.
- Davis, C. A., M. T. Stoelinga, and Y.-H. Kuo, 1993 : The integrated effects of condensation in numerical simulations of extratropical cyclogenesis. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2309–2330.
- Descamps, L., D. Ricard, A. Joly, and P. Arbogast, 2007 : Is a real cyclogenesis case explained by linear baroclinic instability? *J. Atmos. Sci.*, **in press**.
- Duan, W. S., M. Mu, and B. Wang, 2004 : Conditional nonlinear optimal perturbations as the optimal precursors for ENSO events. *J. Geophys. Res.*, **109**, D23,105, doi :10.1029/2004JD004,756.
- Eady, E. T., 1949 : Long waves and cyclone waves. *Tellus*, **1**, 33–52.
- Edmon, H. J., B. J. Hoskins, and M. E. McIntyre, 1981 : Eliassen-Palm cross sections for the troposphere. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 2600–2616.
- Ehrendorfer, M., and R. M. Errico, 1995 : Mesoscale predictability and the spectrum of optimal perturbations. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3475–3500.
- Ehrendorfer, M., R. M. Errico, and K. Raeder, 1999 : Singular-vector perturbation growth in a primitive equation model with moist physics. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1627–1648.
- Emanuel, K., M. Fantini, and A. Thorpe, 1987a : Baroclinic instability in an environment of small stability to slantwise convection. part i : Two-dimensional models. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 1559–1573.
- Emanuel, K. A., 1985 : Frontal circulations in the presence of small moist symmetric stability. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 1062–1071.
- Emanuel, K. A., 1994 : *Atmospheric convection*. Oxford University Press. New York.
- Emanuel, K. A., M. Fantini, and A. J. Thorpe, 1987b : Baroclinic instability in an environment of small stability to slantwise moist convection. part i : two-dimensional models. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1559–1573.
- Errico, R., 2000 : Interpretations of the total energy and rotational energy norms applied to determination of singular vectors. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1581–1599.
- Errico, R., T. Vukicevic, and K. Reader, 1993 : Examination of the accuracy of a tangent linear model. *Tellus*, **45A**, 462–497.

- Errico, R. M., 1997 : What is an adjoint model? *Bulletin of the American Meteorological Society*, pp. 2577–2591.
- Errico, R. M., and K. D. Reader, 1999 : An examination of the accuracy of the linearization of a mesoscale model with moist physics. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 169–195.
- Errico, R. M., and T. Vukicevic, 1991 : Sensitivity analysis using an adjoint of the psu-near mesoscale model. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1644–1660.
- Errico, R. M., K. D. Raeder, and L. Fillion, 2003 : Examination of the sensitivity of forecast precipitation rates to possible perturbations of initial conditions. *Tellus*, **55A**, 88–105.
- Errico, R. M., K. Reader, and M. Ehrendorfer, 2004 : Singular vectors for moisture-measuring norms. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 963–987.
- Farrell, B., 1982 : The initial growth of disturbances in a baroclinic flow. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1663–1686.
- Farrell, B., 1985 : Transient growth of damped baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2718–2727.
- Farrell, B., 1989 : Optimal excitation of baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1193–1206.
- Farrell, B. F., and P. J. Ioannou, 1996 : Generalized stability theory. Part I : Autonomous operators. *J. Atmos. Sci.*, **53**, 2025–2053.
- Fraedrich, K., H. Jansen, E. Kirk, U. Luksch, and F. Lunkeit, 2005 : The planet simulator : Towards a user friendly model. *Meteorol. Zeitschrift*, **14**, 299–304.
- Frederiksen, J.-S., 1997 : Adjoint sensitivity and finite time normal mode disturbances during blocking. *J. Atmos. Sci.*, **54**, 1144–1165.
- Gelaro, R., T. Rosmond, and R. Daley, 2001 : Singular vectors calculations with an analysis error variance metric. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 1166–1186.
- Gilmour, I., L. A. Smith, and R. Buizza, 2001 : Linear regime duration : Is 24 hours a long time in synoptic weather forecasting? *J. Atmos. Sci.*, **58**, 3525–3539.
- Girard, C., and Y. Delage, 1990 : Stables schemes for nonlinear vertical diffusion in atmospheric circulation models. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 737–745.
- Gutowski, W., 1985a : A simple model for the interaction between vertical eddy heat fluxes and static stability. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 346–358.
- Gutowski, W., L. Branscome, and D. A. Stewart, 1992 : Life cycles of moist baroclinic eddies. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 306–319.

- Gutowski, W. J., 1985b : Baroclinic adjustment and midlatitude temperature profiles. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 1733–1745.
- Hansen, J., and L. Smith, 2000 : The role of operational constraints in selecting supplementary observations. *J. Atmos. Sci.*, **57**, 2859–2871.
- Hart, J. E., 1981 : Wavenumber selection in nonlinear baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **38**, 400–408.
- Heifetz, E., and J. Methven, 2005 : Relating optimal growth to counterpropagating rossby waves in shear instability. *Phys. Fluids*, **17**, 064,107.
- Heifetz, E., C. H. Bishop, B. J. Hoskins, and J. Methven, 2004 : The counter-propagating rossby-wave perspective on baroclinic instability. I : Mathematical basis. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 211–231.
- Held, I., and M. Suarez, 1994 : A proposal for the intercomparison of the dynamical cores of atmospheric general circulation models. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **75**, 1825–1830.
- Holton, J., 1972 : *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press.
- Hoskins, B. J., and M. M. Coutinho, 2005 : Moist singular vectors and the predictability of some high impact european cyclones. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **606**, 581–601.
- Hoskins, B. J., R. Buizza, and J. Badger, 2000 : The nature of singular vector growth and structure. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **126**, 1565–1580.
- Janiskova, M., J.-N. Thépaut, and J.-F. Geleyn, 1999 : Simplified and regular physical parametrizations for incremental four-dimensional variational assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **127**, 26–45.
- Joly, A., 1991 : The stability of time-dependent flows : an application to fronts in developing baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 163–182.
- Joly, A., 1995 : The stability of steady fronts and the adjoint method : nonmodal frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 3082–3108.
- Kim, H. M., and M. C. Morgan, 2002 : Dependence of singular vector structure and evolution on the choice of norm. *J. Atmos. Sci.*, **59**, 3099–3116.
- Klinker, E., F. Rabier, and R. Gelaro, 1998 : Estimation of key analysis errors using the adjoint technique. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1909–1933.
- Kuang, Z., 2004 : The norm dependence of singular vectors. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2943–2949.
- Kuo, Y.-H., and S. Low-Man, 1990 : Prediction of nine explosive cyclones over the western atlantic ocean with a regional model. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 3–25.

- Kuo, Y.-H., M. A. Shapiro, and E. G. Donall, 1991 : The interaction between baroclinic and diabatic processes in a numerical simulation of a rapidly intensifying extratropical marine cyclone. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 368–384.
- Lacarra, J. F., and O. Talagrand, 1988 : Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, **40A**, 81–95.
- Langland, R. H., R. L. Elsberry, and R. M. Errico, 1996 : Adjoint sensitivity of an idealized extratropical cyclone with moist physical processes. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 1891–1920.
- Lapeyre, G., and I. M. Held, 2004 : The role of moisture in the dynamics and energetics of turbulent baroclinic eddies. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 1693–1710.
- Laroche, S., M. Tanguay, and Y. Delage, 2002 : Linearization of a simplified planetary boundary layer parametrization. *Mon. Wea. Rev.*, **130**, 2074–2087.
- Le Dimet, F.-X., and O. Talagrand, 1986 : Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations : theoretical aspects. *Tellus*, **38A**, 97–110.
- Le Dimet, F.-X., H.-E. Ngodock, and B. Luong, 1997 : Sensitivity analysis in variational data assimilation. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, **75**, 145–155.
- Lehoucq, R., D. Sorensen, and C. Yang, 1997 : . Arpack users' guide : Solution of large scale eigenvalue problems with implicitly restarted arnoldi methods.
- Lindzen, R. S., and B. Farrell, 1980 : A simple approximate result for the maximum growth rate of baroclinic instabilities. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1648–1654.
- Liu, D., and J. Nocedal, 1988 : On the limited memory bfgs method for large scale optimization. *Tech. Rep. NAM03, Dpt of Electrical Engeneering and Computer Science, Northwestern University*.
- Mahfouf, J.-F., 1999 : Influence of physical processes on the tangent-linear approximation. *Tellus*, **51A**, 147–166.
- Mahfouf, J.-F., 2005 : Linearization of a simple moist convection scheme for large-scale nwp models. *Mon. Wea. Rev.*, **133**, 1655–1670.
- Mahfouf, J.-F., and R. Buizza, 1996 : On the inclusion of physical processes in linear forward and adjoint models. impact of large-scale condensation on singular vectors. *ECMWF Newsletter*, **72**, 2–8.
- Mahfouf, J.-F., R. Buizza, and R. Errico, 1996 : Strategy for including physical processes in the ecmwf variational data assimilation system. *ECMWF Workshop on Non-linear aspects of data assimilation*, pp. 595–632.

- Mak, M., 1982 : On moist quasi-geostrophic baroclinic instability. *J. Atmos. Sci.*, **39**, 2028–2037.
- Malardel, S., 2005 : *Fondamentaux de météorologie*. Cépaduès éditions.
- Mallet, I., J.-P. Cammas, P. Mascart, and P. Bechthold, 1999 : Effects on cloud diabatic heating on the early development of the fastex iop17 cyclone. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **125**, 3439–3467.
- Marquet, P., 2006 : Sur l'utilisation potentielle des développements récents concernant l'énergétique humide de l'atmosphère (du type "w\*" / cape)? *Ateliers de modélisation de l'atmosphère, "Modélisation du changement climatique"*.
- Martin, W. J., and M. Xue, 2006 : Sensitivity analysis of convection of the 24 may 2002 ihop case using very large ensembles. *Mon. Wea. Rev.*, **134**, 192–207.
- Montani, A., and A. Thorpe, 2002 : Mechanisms leading to singular-vector growth for fastex cyclones. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **128**, 131–148.
- Moore, G. W. K., and W. R. Peltier, 1987 : Cyclogenesis in frontal waves. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 384–409.
- Moore, R., and M. Montgomery, 2004 : Reexamining the dynamics of short-scale, diabatic rossby waves and their role in midlatitude moist cyclogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 754–768.
- Moore, R. W., and M. T. Montgomery, 2005 : Analysis of an idealized, three-dimensional diabatic rossby vortex : A coherent structure of the moist baroclinic atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **62**, 2703–2725.
- Moore, R. W., M. T. Montgomery, and H. C. Davis, 2007 : The integral role of a diabatic rossby vortex in a heavy snowfall event. *Mon. Wea. Rev.*, **Accepted**.
- Mu, M., 2000 : Nonlinear singular vectors and nonlinear singular values. *Sci. China (D)*, **43**, 375–383.
- Mu, M., and W. S. Duan, 2003 : A new approach to studying ENSO predictability : Conditional nonlinear optimal perturbation. *Chinese Sci. Bull.*, **48**, 1045–1047.
- Mu, M., and Z. Zhang, 2006 : Conditional nonlinear optimal perturbations of a two-dimensional quasigeostrophic model. *J. Atmos. Sci.*, **63**, 1587–1604.
- Mu, M., W. S. Duan, and B. Wang, 2003 : Conditional nonlinear optimal perturbation and its applications. *Nonlinear Processes in Geophysics*, **10**, 493–501.
- Mu, M., L. Sun, and H. A. Dijkstra, 2004 : The sensitivity and stability of the ocean's thermohaline circulation to finite amplitude perturbations. *J. Phys. Oceanogr.*, **34**, 2305–2315.

- Nakamura, N., 1999 : Baroclinic-barotropic adjustments in a meridionally wide domain. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2246–2260.
- Navon, I., and D. Legler, 1987 : Conjugate-gradient methods for large-scale minimization in meteorology. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 1479–1502.
- Orr, W. M. F., 1907 : Stability or instability of the steady motions of a perfect liquid. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, **27**, 9–69.
- Palmer, T., R. Gelaro, J. Barkmeijer, and R. Buizza, 1998 : Singular vectors metrics and adaptive observations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 633–653.
- Parker, D. J., and A. J. Thorpe, 1995 : Conditional convection heating in a baroclinic atmosphere : a model of convective frontogenesis. *J. Atmos. Sci.*, **52**, 1699–1711.
- Pauluis, O., 2007 : Sources and sinks of available potential energy in a moist atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **64**, 2627–2641.
- Pavan, V., N. Hall, P. Valdes, and M. Blackburn, 1999 : The importance of moisture distributions for the growth and energetics of midlatitude systems. *Ann. Geophysicae*, **17**, 242–256.
- Pedlosky, J., 1964 : An initial value problem in the theory of baroclinic instability. *Tellus*, **16**, 12–17.
- Pedlosky, J., 1979 : Finite-amplitude baroclinic waves in a continuous model of the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1908–1924.
- Pedlosky, J., 1987 : *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer Verlag.
- Pedlosky, J., and P. Klein, 1991 : The nonlinear dynamics of slightly supercritical baroclinic jets. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 1276–1296.
- Peixoto, J. P., and A. H. Ort, 1992 : *Physics of climate*. American Institute of Physics.
- Phillips, N., 1956 : The general circulation of the atmosphere : a numerical experiment. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **82**, 123–164.
- Phillips, N. A., 1954 : Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level quasi-geostrophic model. *Tellus*, **6**, 273–286.
- Phillips, N. A., 1957 : A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. *Journal of meteorology*, **14**, 184–185.
- Rabier, F., and P. Courtier, 1992 : 4-dimensional assimilation in the presence of baroclinic instability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **118**, 649–672.
- Rabier, F., P. Courtier, and O. Talagrand, 1992 : An application of adjoint models to sensitivity analysis. *Beitr. Phys. Atmos.*, **65**, 177–192.

- Rabier, F., E. Klinker, P. Courtier, and A. Hollingsworth, 1996 : Sensitivity of forecast errors to initial conditions. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 121–150.
- Reynolds, C. A., and T. E. Rosmond, 2003 : Nonlinear growth of singular-vector-based perturbations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **129**, 3059–3078.
- Rivière, G., B. L. Hua, and P. Klein, 2001 : Influence of the  $\beta$ -effect on non-modal baroclinic instability. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **127**, 1375–1388.
- Rivière, O., G. Lapeyre, and O. Talagrand, 2007 : Nonlinear generalization of singular vectors in baroclinic unstable flows. *J. Atmos. Sci.*, **in press**.
- Rotunno, R., and M. Fantini, 1989 : Peterssen's "type b" cyclogenesis in term of discrete, neutral eady modes. *J. Atmos. Sci.*, **46**, 3599–3604.
- Schär, C., and H. Davies, 1990 : An instability of mature cold front. *J. Atmos. Sci.*, **47**, 929–950.
- Shepherd, T. G., 1983 : Mean motions induced by baroclinic instability in a jet. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **27**, 35–72.
- Smith, K. S., and G. K. Vallis, 2002 : The scales and equilibration of midocean eddies : Forced-dissipative flows. *J. Phys. Oceanogr.*, **32**, 1699–1721.
- Snyder, C., 1999 : Error growth in flows with finite-amplitude waves or coherent structures. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 500–506.
- Snyder, C., and A. Joly, 1998 : Development of perturbations within growing baroclinic waves. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **124**, 1961–1983.
- Snyder, C., and R. S. Lindzen, 1991 : Quasi-geostrophic wave-cisk in an unbounded baroclinic shear. *J. Atmos. Sci.*, **48**, 76–86.
- Stoelinga, M. T., 1996 : A potential vorticity-based study of the role of diabatic heating and friction in a numerically simulated baroclinic cyclone. *Mon. Wea. Rev.*, **124**, 849–874.
- Stone, P., 1978 : Baroclinic adjustment. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 561–571.
- Talagrand, O., 1981 : A study of the dynamics of four-dimensional data assimilation. *Tellus*, **33**, 43–60.
- Tippett, M., 1999 : Transient moist baroclinic instability. *Tellus*, **51A**, 273–288.
- Toth, Z., and E. Kalnay, 1993 : Ensemble forecasting at NMC : the generation of perturbations. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **74**, 2317–2330.
- Toth, Z., and E. Kalnay, 1997 : Ensemble forecasting at NCEP and the breeding method. *Mon. Wea. Rev.*, **125**, 3297–3319.



- Vallis, G. K., 2006 : *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-scale Circulation*. Cambridge University.
- Vukicevic, T., and R. M. Errico, 1993 : Linearization and adjoint of parametrized moist diabatic processes. *Tellus*, **45A**, 493–510.
- Wang, B., and A. Barcilon, 1986 : Moist stability of a baroclinic zonal flow with conditionally unstable stratification. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 705–719.
- Wernli, H., S. Dirren, M. A. Liniger, and M. Zillig, 2002 : Dynamical aspects of the life cycle of the winter storm 'lothar' (24-26 december 1999). *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **128**, 405–429.
- Wächter, A., and L. T. Biegler, 2006 : On the implementation of a primal-dual interior point filter line search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, **106**, 25–57.
- Zadra, A., M. Buehner, S. Laroche, and J.-F. Mahfouf, 2004 : Impact of the gem model simplified physics on extratropical singular vectors. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **130**, 2541–2569.
- Zeng, Q. C., 1983 : The evolution of a rossby wave packet in a three-dimensional baroclinic atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 73–84.
- Zhang, F., N. Bei, R. Rotunno, C. Snyder, and C. C. Epifanio, 2007 : Mesoscale predictability of moist baroclinic waves : convection-permitting experiments and multistage error growth dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **in press**.
- Zhang, S., X. Zhou, and J. Ahlquist, 2001 : Examination of numerical results from tangent linear and adjoint of discontinuous nonlinear models. *J. Atmos. Sci.*, **129**, 2791–2804.
- Zou, X., 1993 : Variational data assimilation with moist threshold processes using the nmc spectral model. *Tellus*, **45A**, 370–387.
- Zou, X., I. M. Navon, M. Berger, K. H. Phua, T. Schlick, and F. X. Le Dimet, 1993 : Numerical experience with limited-memory quasi-newton and truncated newton methods. *SIAM Journal on Optimization*, **3**(3), 582–608.
- Zupanski, M., 1995 : An iterative approximation to the sensitivity in calculus of variations. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 3590–3604.