



**HAL**  
open science

# Étude structurelle des transducteurs de norme bornée

Rodrigo de Souza

► **To cite this version:**

Rodrigo de Souza. Étude structurelle des transducteurs de norme bornée. domain\_other. Télécom ParisTech, 2008. English. NNT: . pastel-00004322

**HAL Id: pastel-00004322**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004322v1>**

Submitted on 9 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



*À ma famille*



# Remerciements

Cette thèse, la totalité des résultats qu'elle présente, est le fruit d'une collaboration étroite avec Jacques Sakarovitch. Je lui suis redevable pour m'avoir accueilli à Paris, pour ses encouragements, sa patience et son intérêt constant au développement de mes idées, sans oublier sa sensibilité envers ma condition d'étudiant étranger. Que ma carrière naissante de chercheur, déjà profondément marquée par son influence, lui soit mon meilleur remerciement.

Je tiens à remercier Olivier Carton et Helmut Seidl d'avoir accepté de rapporter ce mémoire et pour les discussions que l'on a pu entretenir sur les transducteurs, ainsi que Jean Berstel, Sylvain Lombardy, Juhani Karhumäki, Gérard Cohen et Géraud Sénizergues, pour leurs suggestions et pour me faire l'honneur de participer de mon jury de thèse.

Durant mon séjour à TELECOM ParisTech j'ai pu bénéficier de conditions excellentes de travail. Je remercie son personnel, en particulier Hayette Soussou, Céline Bizart et Florence Besnard, qui ont su toujours me guider au milieu des démarches administratives vers de bonnes solutions. De même, cette thèse n'aurait pas été possible sans le soutien financier de la fondation CAPES, qui m'a jugé digne de la développer aux frais du peuple brésilien. J'aspire dès maintenant être à la hauteur de ce salaire précieux en enseignant ce qu'il m'a permis d'acquérir.

Ma connaissance en théorie des automates vient d'une formation solide reçue dans le « Instituto de Matemática e Estatística » de l'Université de São Paulo et des cours et séminaires que j'ai pu assister au Laboratoire Informatique Théorique et Programmation de l'Université Paris VII. Je remercie aux chercheurs de ces deux institutions remarquables pour m'avoir laissé leurs portes ouvertes, en particulier Nami Kobayashi, qui a dirigé mes premiers travaux sur le sujet et qui n'a cessé de s'intéresser à leur suite.

Enfin, je remercie très chaleureusement tous ceux qui m'ont accompagné,

de près ou de loin, durant ces quatre ans en France. J'ai été particulièrement heureux d'avoir pu garder de bonnes amitiés dans au moins trois endroits : à Paris, où mes pensées vont à João, Judson, Marcia, Rex, Eric, Denis, Roberta, Pierre-Yves, Dimitri, Celina, Francisco, Qin, Sammy, Korinna, Fernando, David, Martin, et aux camarades de l'association des chercheurs et étudiants brésiliens en France ; à Nancy, à Julio, Tatiane (et leurs enfants) et Cathérine ; à São Roque et à São Paulo, à tous mes vieux et fidèles amis. À ma famille, qui n'a jamais épargné des efforts pour me permettre d'étudier, j'adresse mon dernier mot et je dédie cette thèse ; dans celle-ci, j'inclus Maria, épouse chérie que j'ai rencontré en France, pour son amour, et avec qui je découvre un nouveau monde — dans le nouveau monde qui est le Brésil.

Rodrigo

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>21</b>
1.1 Ensembles, relations et matrices . . . . .	21
1.2 Structures algébriques . . . . .	24
1.3 Relations rationnelles . . . . .	26
1.4 Graphes . . . . .	28
1.5 Automates . . . . .	29
1.6 $\mathbb{K}$ -automates . . . . .	31
1.7 Transducteurs . . . . .	34
1.8 Représentations linéaires . . . . .	38
<b>2 Le revêtement lexicographique</b>	<b>39</b>
2.1 Revêtements et $\mathbb{K}$ -revêtements . . . . .	42
2.1.1 Morphismes . . . . .	42
2.1.2 Revêtements . . . . .	43
2.1.3 $\mathbb{K}$ -revêtements . . . . .	45
2.2 Produit d'un automate par une action . . . . .	46
2.2.1 Actions . . . . .	47
2.2.2 Produit d'un automate par une action . . . . .	49
2.2.3 Morphismes d'actions et quotients . . . . .	54
2.2.4 Deux applications . . . . .	58

2.3	Produit d'un automate par une action gauchie . . . . .	64
2.3.1	Cas d'un automate sur un monoïde . . . . .	64
2.3.2	Cas d'un $\mathbb{K}$ -automate . . . . .	66
2.3.3	Uniformisation des relations déterministes . . . . .	72
2.4	Le gauchissement lexicographique . . . . .	77
2.4.1	Construction d'un automate non ambigu . . . . .	77
2.4.2	Le théorème du paludier glouton . . . . .	82
2.4.3	Division d'une série $\mathbb{N}$ -rationnelle par un entier . . . . .	92
2.5	Le revêtement Avance ou Retard d'un transducteur . . . . .	94
2.5.1	L'action Avance ou Retard et ses troncatures . . . . .	94
2.5.2	Le revêtement Avance ou Retard . . . . .	101
2.5.3	Le revêtement Avance ou Retard lexicographique . . . . .	106
2.5.4	Nombre d'états des revêtements tronqués . . . . .	111
<b>3</b>	<b>Décomposition</b> . . . . .	<b>115</b>
3.1	Introduction . . . . .	115
3.2	Des transducteurs $k$ -valués aux $k$ -ambigus en entrée . . . . .	119
3.2.1	Produits de plusieurs transducteurs . . . . .	120
3.2.2	Le lemme des chemins proches . . . . .	121
3.2.3	Construction du transducteur $k$ -ambigu en entrée . . . . .	124
3.3	Décomposition d'un transducteur $k$ -ambigu en entrée . . . . .	126
3.3.1	La décomposition lexicographique . . . . .	126
3.3.2	Taille de la décomposition lexicographique . . . . .	130
3.4	Décomposition avec morphisme . . . . .	132
3.4.1	Décomposition des calculs réussis . . . . .	133
3.4.2	Construction de la décomposition . . . . .	136
3.5	Ambiguïté . . . . .	137
<b>4</b>	<b>Décidabilité</b> . . . . .	<b>143</b>
4.1	Introduction . . . . .	143



---

4.2	Appartenance à $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$ . . . . .	147
4.2.1	L'action avance ou retard généralisée . . . . .	148
4.2.2	L'expansion avance ou retard de $\mathcal{T}^l$ . . . . .	150
4.2.3	Caractérisation finie des transducteurs $k$ -valués . . . . .	153
4.2.4	Test effectif de la caractérisation . . . . .	159
4.3	Appartenance à $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$ . . . . .	170
4.3.1	Caractérisation des $\mathbb{N}$ -automates bornés . . . . .	171
4.3.2	Caractérisation des transducteurs bornés . . . . .	177
4.3.3	Test effectif de la caractérisation avec $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$ . . . . .	181
4.4	Équivalence . . . . .	186
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>189</b>
	<b>Index</b>	<b>193</b>



# Introduction

Les transducteurs — automates « avec sortie »— et les relations rationnelles sont des concepts fondamentaux de la théorie des automates ; on en trouve les traces dès les premières définitions du domaine (les « machines de Mealy » et les « machines de Moore »). Un rôle particulier est joué par la famille des fonctions rationnelles, en raison de ses propriétés remarquables. Pour en citer trois, ambiguïté, séquentialité et décidabilité sont des aspects classiques de cette famille, exposés dans les ouvrages traitant du sujet [4, 38].

En 1976, dans le contexte d'une étude de la croissance de la cardinalité des images, en fonction de la longueur des mots du domaine, Schützenberger considère la famille plus générale des relations rationnelles qui pour chaque mot du domaine « émettent » au plus  $k$  mots, où  $k$  est un entier fixé ; on les appelle relations *k-valuées* [44]. Autrement dit, le supremum des cardinalités des images, ce que l'on appelle la *norme* de la relation, est borné par une constante. Depuis lors, les relations rationnelles de norme bornée ont reçu une attention particulière en de différents travaux, dont le but a été de généraliser certaines propriétés des fonctions rationnelles. Pourtant, les différences entre les techniques mises en œuvre et la difficulté de quelques preuves conduisent à la nécessité d'une compréhension plus approfondie de ces mêmes propriétés, des liens existants entre elles et leurs algorithmes associés.

Cette thèse est consacrée à une présentation uniforme, centrée sur l'objet automate, d'un ensemble de propriétés des relations de norme bornée. Dans ce sens, la représentation des relations par des transducteurs et les manipulations de la structure de ces automates sont primordiaux dans nos preuves par rapport aux raisonnements combinatoires portant sur les graphes des relations ou à l'emploi de résultats issus d'un autre domaine. Ainsi, nous évitons de résoudre un problème de décision *via* une réduction à une autre question, expédient duquel une procédure concrète et la complexité sous-

jacente peuvent s'avérer difficiles de trouver, pour préférer la construction d'une expasion d'automates (ou revêtement, dans notre terminologie) mettant en lumière les rapports entre les calculs et les étiquettes des automates en étude ; un algorithme et le calcul de sa complexité en découlent aisément. De même, la construction d'un automate réalisant une opération entre une série rationnelle et un entier est dérivée de la mise en relation des calculs réussis d'un automate réalisant cette série au lieu de l'application itérée d'un résultat général, ce qui permet d'éviter l'introduction d'une tour d'exponentielles dans la taille du résultat. Il est à remarquer que l'intérêt de cette approche structurelle se révèle non seulement à travers de nouveaux résultats rendus possibles, mais aussi, et de façon également authentique, dans de nouvelles éclairages apportées sur des théorèmes déjà établis. Cet aspect est éminemment illustré, par exemple, dans les preuves présentées en [29].

Autre objectif que nous nous efforçons de poursuivre dans ce mémoire est la généralisation de techniques connues et utilisées en des problèmes sur les fonctions rationnelles, ce qui rajoute à la clarté et à l'établissement d'une phylogénie entre les résultats. C'est le cas de la construction présentée en [3] pour décider la fonctionnalité d'un transducteur, qui sera ici généralisée pour l'approche du problème correspondant pour les relations  $k$ -valuées.

Deux aspects distincts (mais liés) des relations de norme bornée sont abordés dans ce mémoire. D'abord, on s'intéressera à la structure de ces relations, étude qui culminera avec une méthode pour décomposer une relation  $k$ -valuée dans une somme de  $k$  fonctions rationnelles. D'autre part, on décrira, à l'aide des mêmes outils, des algorithmes pour décider de l'appartenance d'une relation rationnelle à la classe des relations de norme bornée et pour en décider l'équivalence.

Le premier chapitre fixe un minimum de concepts et notations (dans la plupart classiques) sur les relations rationnelles, qui sont nécessaires pour la compréhension des développements ultérieurs. Nous y présenterons les structures algébriques utilisées dans ce mémoire, les automates sur un alphabet, à multiplicité et étiquetés sur un monoïde — parmi lesquels on trouve les transducteurs — et leurs représentations matricielles. On y définira également les sous-classes des relations de norme bornée et  $k$ -valuées, qui font l'objet de ce mémoire, et on en présentera quelques exemples qui seront repris dans les chapitres à venir. Ce premier chapitre, ainsi que l'orientation générale de ce

mémoire, prend part dans la lignée des ouvrages d'Eilenberg [13], Berstel [4] et Sakarovitch [38].

Le second chapitre se consacre aux revêtements d'automates, qui sont des morphismes permettant d'établir une bijection entre les calculs réussis de deux automates. Typiquement, un revêtement met en relation un automate et une expansion de celui sur laquelle une propriété des calculs réussis est rendue explicite. Ceci permet d'isoler, avec l'extraction d'un sous-automate, des sous-ensembles de calculs possédant certaines propriétés. La définition de revêtement d'automates est inspirée d'un concept analogue de la théorie de graphes dû à Stallings [46]. Elle a été partiellement introduite dans [18], et une étude plus complète des propriétés de ces morphismes est faite en [37]. On définira dans ce chapitre un revêtement d'automates ci-appelé *revêtement lexicographique*, construction qui sera à la base de la plupart des preuves faites dans ce mémoire. L'idée derrière ce revêtement est la mise d'un ordre entre les transitions de l'automate et puis d'un ordre lexicographique entre les calculs, qui sont vus comme de mots sur les transitions.

Nous décrirons des revêtement lexicographiques pour les automates booléens, les  $\mathbb{N}$ -automates et les transducteurs temps réel. Pour les automates booléens, le revêtement permettra de construire un automate non ambigu, équivalent à l'automate de départ, et qui en est une immersion. Ce résultat a été établi à l'aide d'un autre revêtement dans [37]. Avec le revêtement lexicographique d'un  $\mathbb{N}$ -automate, ou *revêtement du paludier glouton* — terme emprunté de [38], où le paludier qui récolte son sel dans les marais salants est une image pour l'opération de différence entre une série et un entier — on obtiendra le résultat principal de ce chapitre. Ce revêtement « compte », pour chaque calcul réussi de l'automate, le nombre de calculs qui y sont plus petits, information qui permet, moyennant un changement dans les poids finaux du revêtement, d'en tirer un sous-automate réalisant la différence entre son comportement et un entier  $k$  donné. Le premier travail établissant que la différence entre une série  $\mathbb{N}$ -rationnelle et un entier est elle aussi une série rationnelle remonte à 1970 et est dû à Schützenberger [42]; une autre preuve a été présentée en [39]. Dans les deux cas, une construction de taille exponentielle — par exemple, le théorème de la transversale d'Eilenberg, ou le revêtement utilisé en [38] (*cf.* aussi [39]) — est appliquée  $k$  fois, ce qui résulte dans un automate dont le nombre d'états est une tour d'exponentielles.

Notre méthode permet la construction d'un automate n'ayant qu'un nombre exponentiel d'états sur le nombre d'états de l'automate de départ.

Le revêtement lexicographique d'un transducteur est une modification d'un autre revêtement, le *revêtement Avance ou Retard*. Le principe du dernier est d'attacher à chaque calcul réussi du transducteur l'ensemble des *différences* entre sa sortie et celles des calculs ayant la même entrée, ceci à l'aide de l'*action Avance ou Retard*, introduite en [3] pour comparer les sorties le long de paires de calculs d'un transducteur. Ce revêtement peut être infini, mais avec une « troncature » de ces différences, on définira aussi une famille de revêtements finis, indicés par un entier  $N$ , qui représentent seulement les différences dont la longueur est au plus  $N$ . Le revêtement Avance ou Retard lexicographique sera appliqué notamment dans la décomposition d'une relation rationnelle  $k$ -valuée dans une somme de  $k$  fonctions rationnelles, objet du chapitre suivant, mais sera aussi utile pour les problèmes de décision étudiés dans le dernier chapitre. On estimera à la fin du chapitre le nombre d'états accessibles du revêtement tronqué lorsque appliqué aux transducteurs  $k$ -valués, premier pas dans l'estimation de la taille de la décomposition.

Le troisième chapitre contient l'un des résultats principaux de ce mémoire, la décomposition d'une relation rationnelle  $k$ -valuée dans une somme de  $k$  fonctions rationnelles. Il est le point de départ des liens qu'on veut établir entre ces deux classes de relations. L'existence d'une telle décomposition a été avancée par Schützenberger en 1976 [44], dont la preuve n'est pas complète. Vingt ans plus tard, A. Weber a répondu positivement la question, dans ce qui est l'aboutissement de ses travaux sur les relations de norme bornée [50]. La construction présentée par Weber se base sur des manipulations structurelles au moyen desquelles plusieurs informations décrivant les chemins réussis du transducteur  $k$ -valué de départ sont stockées dans les états des transducteurs faisant partie de la décomposition. La description de ces transducteurs est considérablement longue, une partie de laquelle s'appuie sur une décomposition préliminaire du transducteur dans un nombre exponentiel de transducteurs non ambigus, résultat plus ancien aussi à lui pour l'estimation de bornes supérieures pour la norme d'un transducteur en fonction de son nombre d'états [49] (question qui n'est pas traitée dans ce mémoire). Le calcul du nombre d'états de la décomposition fait dans [50] est de l'ordre  $2^{2^P}$ , où  $P$  est un polynôme dans la taille du transducteur de départ. La question

de l'existence d'une décomposition plus concise est alors posée par Weber.

Nous présentons dans ce chapitre une décomposition qui s'appuie largement sur les revêtements présentés dans le chapitre précédent. On commencera par montrer qu'à partir d'un transducteur  $k$ -valué il est possible d'en construire un nouveau qui lui est équivalent et  $k$ -ambigu « en entrée » (c'est-à-dire, tout mot du domaine peut être lu par au plus  $k$  calculs réussis du transducteur). Ce dernier sera obtenu avec le revêtement Avance ou Retard lexicographique : on montrera à l'aide d'un lemme d'itération, généralisation d'une propriété de l'action Avance ou Retard énoncée dans [3], que pour un certain  $N$ , le revêtement tronqué d'indice  $N$  contient un sous-transducteur possédant les propriétés désirées. Ce lemme d'itération apparaît aussi dans les travaux de Weber, mais sa place dans cette preuve semble être différente, puisque l'égalité entre les classes des relations rationnelles  $k$ -valués et celle des relations qui peuvent être réalisées par un transducteur  $k$ -ambigu en entrée n'est établie dans [50] qu'après le théorème de décomposition.

Ensuite, on appliquera le revêtement du paludier glouton sur l'automate d'entrée sous-jacent de ce transducteur  $k$ -ambigu en entrée. Cet automate étant  $k$ -ambigu, le revêtement contient  $k$  automates non ambigus, et le morphisme de ces automates sur  $\mathcal{T}$  permet de « remonter » des sorties vers leurs transitions. Il en résulte  $k$  transducteurs non ambigus qui décomposent  $\mathcal{T}$ .

En ce qui concerne la complexité, la première impression est qu'en raison de l'application de deux revêtements, la taille du résultat final ne saurait être d'un ordre inférieur à une double exponentielle. Une analyse fine des informations contenues dans les états accessibles de ces revêtements permettra pourtant de montrer qu'une seule exponentielle est suffisante.

Aussi dans [50], une variante de cette décomposition est conjecturée, l'objet en question étant la famille des relations rationnelles où le nombre de longueurs distinctes dans les images est borné. Nous donnerons une réponse positive à cette question. On montrera en fait un résultat plus général : étant donné un transducteur et un morphisme de monoïdes libres dont la composée est une relation  $k$ -valué, il existe  $k$  relations rationnelles dont l'union est équivalente au transducteur de départ et qui composées avec le même morphisme résultent en des fonctions rationnelles. Notre preuve commence avec la décomposition d'un transducteur réalisant la composée. Ensuite, nous montrons que les calculs réussis du transducteur de départ ne peuvent pas être « loins » des transducteurs faisant partie de la décomposition construite,

ce qui permettra de « l'enrichir » avec ces calculs. Il en résulte  $k$  transducteurs dont la projection des calculs réussis sur le transducteur de départ est surjective, et un changement des sorties de leurs transitions donne la décomposition désirée. On montrera que la taille de cette décomposition est comparable à celle que nous avons obtenue pour un transducteur  $k$ -valué.

Ces constructions ont été présentées en [41].

À la fin de ce chapitre, on étudiera, avec les mêmes techniques, l'ambiguïté des relations de norme bornée. Contrairement aux fonctions rationnelles, il existent des relations de norme bornée qui ne peuvent pas être réalisées par un transducteur non ambigu. On montrera que ce fait est lié à l'impossibilité de décomposer une relation  $k$ -valué dans une somme de  $k$  fonctions rationnelles *disjointes*, et on verra que l'ambiguïté d'une relation rationnelle n'est pas une propriété décidable.

Le quatrième et dernier chapitre est dédié à la décidabilité de l'appartenance d'un transducteur donné à la classe des transducteurs de norme bornée, et à la décidabilité de l'équivalence pour les transducteurs  $k$ -valués.

En ce qui concerne l'appartenance, deux problèmes en effet se posent, qui en dépit de toute ressemblance, ne sont pas équivalents. Le premier consiste à décider si un transducteur est  $k$ -valué pour un entier  $k$  donné. Le cas  $k = 1$ , c'est-à-dire, décider si un transducteur réalise une fonction, a été résolu par Schützenberger en 1975 [43], l'algorithme étant la vérification des images d'un nombre fini (et exponentiel) de mots. Des algorithmes en complexité polynomiale ont été proposés par A. Weber et R. Klemm [51] et ensuite par Béal et al. [3]. Que des algorithmes en complexité polynomiale sont possibles il est connu depuis 1983 même pour le cas général (pour un  $k$  quelconque), résultat dû à E. Gurari et O. Ibarra [23], dont la preuve suit pourtant une approche entièrement différente. Alors que les preuves présentées dans [51] et [3] se basent sur des constructions avec le transducteur, celle de Gurari et Ibarra est une réduction au problème du vide pour une certaine classe d'automates à compteurs. Il en résulte que l'on peut calculer les complexités exactes pour les deux premières (ce qui est fait de façon plus explicite dans [3]), alors que dans la seconde le fait qu'on se ramène à un « autre univers » ne laisse pas de pistes sur le degré du polynôme sous-jacent. Le second problème est l'appartenance à la classe des relations de norme bornée, ce qui s'énonce de façon équivalente comme la décidabilité de l'existence d'un



entier  $k$  tel que le transducteur soit  $k$ -valué. Une réponse a été donnée par A. Weber en 1989 [47]. L'algorithme est la vérification d'une caractérisation des transducteurs de norme bornée en terme de certains motifs de calculs, similaire à celle donnée pour les  $\mathbb{N}$ -automates bornés par A. Mandel et I. Simon [31], et H. Seidl et A. Weber [52].

L'équivalence des relations rationnelles est indécidable [16]. L'équivalence pour les fonctions rationnelles est une conséquence immédiate de la décidabilité de la fonctionnalité, mais le même n'est pas vrai pour  $k > 1$ . Deux réponses sont connues pour le cas général. La première, due à K. Culik et J. Karkumäki [10], apparaît dans le contexte d'une étude de la conjecture d'Ehrenfeucht et la complexité de la procédure sous-jacente n'est pas explicite. Weber a montré en 1993, à l'aide d'une certaine décomposition de transducteurs, qu'une complexité de l'ordre d'une double exponentielle est possible [49]. La question de l'existence d'une procédure de complexité exponentielle est restée ouverte.

Dans ce chapitre, on répondra aux trois problèmes avec des techniques fondées sur les deux chapitres précédents.

Notre algorithme pour décider si un transducteur est  $k$ -valué, pour un  $k$  donné, généralise celui de Béal et al. pour décider la fonctionnalité [3]. Ce dernier consiste à « voir » la propriété dans le produit du carré du transducteur par l'action Avance ou Retard. Dans la même veine, nous allons dans un premier temps généraliser cette action et faire apparaître le fait que le transducteur soit  $k$  valué ou pas dans  $\mathcal{T}^{k+1}$ , le produit du transducteur par lui même  $k + 1$  fois. Contrairement au cas fonctionnel, ce produit peut être infini, et le cœur de notre preuve est la description d'une valuation des états de  $\mathcal{T}^{k+1}$  par des ensembles représentant l'information contenue dans le produit infini. On montrera que ces ensembles peuvent être construits de façon efficace avec un parcours des composantes fortement connexes de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , et on en donnera une expression exacte pour la complexité.

Notre preuve pour la décidabilité de la finitude de la norme d'un transducteur est similaire à celle de Weber en ce que d'abord on définit une caractérisation des transducteurs de norme bornée et ensuite on montre comment la tester. Notre caractérisation est en effet équivalente à celle de Weber, mais la façon dont elle sera énoncée permet une preuve immédiate de la direction la plus délicate avec le revêtement Avance ou Retard et la caractérisation des  $\mathbb{N}$ -automates bornés de Mandel et Simon. Ensuite, on montrera comment dé-

tecter les motifs présents dans la caractérisation avec le produit du cube du transducteur par l'action Avance ou Retard. La complexité de la procédure résultante semble être similaire à celle de Weber.

Les deux constructions précédentes ont été présentées en [40].

Dans la dernière section de ce chapitre on alliera deux constructions présentées dans ce mémoire pour montrer que l'équivalence de deux transducteurs  $k$ -valués est décidable en complexité exponentielle. Tout comme on a pu décider si un transducteur  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué avec un parcours du produit  $\mathcal{T}^{k+1}$ , on montrera comment décider si le comportement d'un transducteur  $\mathcal{T}$  est inclus dans celui d'un autre transducteur  $\mathcal{T}'$  en appliquant le même algorithme sur un produit de transducteurs tirés des décompositions de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ . Ce résultat a fait l'objet d'une communication présentée en [11].

En parlant d'ouvertures, un premier prolongement de ce travail porterait sur l'investigation des transducteurs sur les mots infinis. Le seul résultat connu dans ce sens est la décidabilité de la fonctionnalité, établie par F. Gire [20]. Il s'agit alors de savoir si les propriétés des transducteurs  $k$ -valués considérées dans ce mémoire se conservent pour les transducteurs sur les mots infinis ; la possibilité d'appliquer dans ce cas les techniques structurelles que nous avons présentées fait aussi objet de question. Une seconde voie concerne l'étude des extensions correspondantes pour les transducteurs d'arbre. Pour les transducteurs d'arbre *bottom-up*, le volet « décidabilité » a été considéré par H. Seidl [45], mais la possibilité de décomposer un transducteur d'arbre  $k$ -valué reste ouverte ; pour les transducteurs *top-down*, seulement la fonctionnalité a été établie [15]. En revenant aux mots finis, l'application des techniques présentées dans ce mémoire pour l'étude des transducteurs où le nombre de longueurs distinctes dans les images est borné est envisageable. Nous avons dit, une décomposition de ces transducteurs est présentée dans le chapitre 3. Les résultats de décidabilité connus sont dus à Weber [48], mais des possibilités d'amélioration restent ouvertes ; mentionnons que la complexité de la procédure présentée pour l'équivalence s'élève à une tour d'exponentielles de hauteur exponentielle. Une autre question concerne l'optimalité de nos complexités. Dans certains cas, le paramètre  $k$ , norme de la relation (considérée comme une constante), apparaît dans le degré d'un polynôme faisant partie de l'expression de la complexité. Il reste à savoir si cette « dépendance de la dimension » est intrinsèque. Finalement, mentionnons

que nous ne montrons pas si un transducteur  $k$ -valué peut être décomposé dans une somme de  $k$  transducteurs fonctionnels avec un nombre *polynomial* d'états.<sup>1</sup> Notre décomposition est optimale en ce que les transducteurs construits sont *non ambigus*; en supprimant cette restriction, il n'est pas clair si une explosion exponentielle peut être évitée.

---

<sup>1</sup>Question posée par D. Perrin lors d'un exposé de l'auteur.



# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Ensembles, relations et matrices

On note  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{N}$ , respectivement, les ensembles des entiers et celui des entiers positifs.

L'*ensemble vide* sera noté  $\emptyset$ . La *cardinalité* d'un ensemble  $X$  sera notée  $\text{card}(X)$ . L'ensemble des sous-ensembles de  $X$  sera noté  $\mathfrak{P}(X)$ .

Le *produit cartésien* de deux ensembles  $A$  et  $B$  est l'ensemble  $A \times B$  des paires  $(a, b)$  telles que  $a \in A$  et  $b \in B$ .

Une *fonction partielle*, ou simplement *fonction*, de  $A$  sur  $B$  est un sous-ensemble

$$f \subseteq A \times B$$

tel que, pour tout  $a \in A$ , si

$$(a, b), (a, b') \in f,$$

alors

$$b = b'.$$

On écrit

$$f : A \rightarrow B$$

pour dire que  $f$  est une fonction de  $A$  dans  $B$ .

L'*image* d'un élément  $a$  de  $A$  par  $f$  est l'élément  $b$  de  $B$  tel que  $(a, b) \in f$ , si un tel élément existe, ou est l'ensemble vide sinon. On note

$$af$$

l'image de  $a$  par  $f$ .

DÉFINITION 1.1.1 (RELATION) Une *relation*  $\tau$  de  $A$  à  $B$  est un sous-ensemble de  $A \times B$ . On peut aussi voir une relation de façon plus « dynamique » comme une fonction

$$\tau : A \rightarrow \mathfrak{P}(B),$$

qui envoie chaque élément  $a$  de  $A$  à l'ensemble des éléments  $b$  de  $B$  tels que  $(a, b)$  est une paire contenue dans la relation.  $\triangle$

Comme pour les fonctions, on écrit

$$\tau : A \rightarrow B$$

pour dire que  $\tau$  est une relation de  $A$  à  $B$ .

En adoptant ce point de vu « dynamique », on dira que l'ensemble des paires qui définissent  $\tau$  est son *graphe*.

Toute relation s'étend additivement à une fonction

$$\tau : \mathfrak{P}(A) \rightarrow \mathfrak{P}(B)$$

définie par

$$\forall X \subseteq A \quad X\tau = \bigcup_{a \in X} a\tau.$$

Le *domaine* de  $\tau$  est l'ensemble

$$\text{dom } \tau = \{a \in A \mid a\tau \neq \emptyset\}.$$

Étant données deux relations

$$\tau : A \rightarrow B, \quad \sigma : B \rightarrow C,$$

leur *composée*, ou la *composition* de  $\tau$  et  $\sigma$ , est la relation

$$\tau\sigma : A \rightarrow C$$

définie par

$$\forall a \in A \quad a(\tau\sigma) = (a\tau)\sigma.$$

DÉFINITION 1.1.2 (NORME) La *norme* d'une relation  $\tau : X \rightarrow Y$  est le supremum des cardinalités des ensembles  $x\tau$  sur tous les éléments  $x$  de  $X$ .  $\triangle$

La norme d'une relation peut être finie ou infinie. On dit dans le premier cas que  $\tau$  est une *relation de norme bornée*, ou même une *relation bornée*.

**DÉFINITION 1.1.3 (RELATION  $k$ -VALUÉE)** Si  $k$  est une borne supérieure pour la norme d'une relation  $\tau$ , c'est-à-dire, l'image par  $\tau$  de tout élément de  $X$  contient au plus  $k$  éléments, on dit que  $\tau$  est une *relation  $k$ -valuée*.  $\triangle$

Remarquons que les fonctions sont les relations dont la norme est 1.

L'ensemble des fonctions d'un ensemble  $X$  dans un ensemble  $Y$  est noté

$$Y^X.$$

Une *matrice*  $\mathbf{m}$  sur un ensemble  $K$ , indicée par des ensembles  $P$  et  $Q$ , est, formellement, une fonction

$$\mathbf{m} : P \times Q \mapsto K.$$

On dit que  $P$  est l'ensemble des *lignes*,  $Q$  celui des *colonnes*, et  $P \times Q$  la *dimension* de  $\mathbf{m}$ . Si  $P = Q$ ,  $\mathbf{m}$  est une *matrice carrée* de dimension  $P$ .

Les paires  $(p, q) \in P \times Q$  sont appelés les *coordonnées* de  $\mathbf{m}$ . L'image d'une paire  $(p, q) \in P \times Q$  par  $\mathbf{m}$  est appelée le *coefficient* de  $\mathbf{m}$  dans la coordonnée  $(p, q)$ , ou encore dans la ligne  $p$  et la colonne  $q$ , et est notée

$$\mathbf{m}_{p,q}.$$

Si  $Q = \{q\}$  est un singleton, nous dirons que  $\mathbf{m}$  est un *vecteur ligne* de dimension  $P$  et si  $P = \{p\}$  est un ensemble unitaire,  $\mathbf{m}$  est un *vecteur colonne* de dimension  $Q$ . Nous dirons dans le premier cas que  $P$  est l'ensemble des coordonnées de  $\mathbf{m}$  (au lieu de  $P \times \{q\}$ ) et dans le second que  $Q$  est l'ensemble des coordonnées de  $\mathbf{m}$ .

Le coefficient dans la coordonnée  $p$  d'un vecteur ligne ou colonne  $\mathbf{v}$  est noté

$$\mathbf{v}_p.$$

L'ensemble des matrices de dimension  $P \times Q$  sur  $K$  est noté

$$K^{P \times Q}$$

et ceux des vecteurs lignes et colonnes de dimension  $X$ , dans les deux cas (celui duquel on parle étant claire dans le contexte), comme

$$K^X.$$

Pour tout  $p \in P$ , la *ligne  $p$  de  $m$*  est le vecteur ligne donnée par la restriction de  $m$  à  $\{p\} \times Q$ ; la définition correspondante s'applique aux colonnes de  $m$ .



## 1.2 Structures algébriques

### Monoïdes et morphismes

Un *semigroupe* est un ensemble  $M$  muni d'une opération associative  $\cdot_M$ , ou simplement  $\cdot$  (qui peut être omis dans l'écriture d'un produit de deux éléments, c'est-à-dire,  $mn$  et  $m \cdot n$  sont synonymes). On peut aussi noter ce semigroupe comme  $(M, \cdot_M)$ .

Si  $\cdot_M$  a une identité  $1_M$  (ou même  $1$ , si le contexte le permet), alors  $M$  est un *monoïde*.

On peut étendre l'opération de  $M$  aux sous-ensembles de  $M$ ,

$$\forall X, Y \subseteq M \quad X \cdot Y = \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$$

ce qui fait de  $\mathfrak{P}(M)$  un semigroupe, et un monoïde si  $M$  l'est (l'identité étant le singleton  $\{1_M\}$ ).

Soient  $M$  et  $N$  deux semigroupes. Un *morphisme* (de semigroupes) de  $M$  dans  $N$  est une fonction  $\varphi : M \rightarrow N$  compatible avec la structure :

$$\forall m, n \in M \quad (m \cdot_M n)\varphi = m\varphi \cdot_N n\varphi.$$

Si  $M$  et  $N$  sont deux monoïdes, on dit que  $\varphi$  est un *morphisme de monoïdes* si de plus

$$1_M\varphi = 1_N.$$



Le *semigroupe libre* engendré par un ensemble  $A$ , ou *alphabet*, est l'ensemble noté  $A^+$  des suites d'éléments de  $A$  avec l'opération de concaténation de suites. En y rajoutant la suite vide on obtient le *monoïde libre* engendré par  $A$ , noté  $A^*$ . Les éléments de  $A$  sont appelés *lettres*, les suites de lettres sont aussi appelés *mots*, et la suite vide, notée  $1_{A^*}$ , le mot vide.

La *longueur* d'un mot  $u \in A^*$  est notée  $|u|$ . Dans toute factorisation  $u = xy$ , on dit que  $x$  est un *préfixe* et  $y$  un *suffixe* de  $u$ .

Soit  $\prec$  un ordre sur l'alphabet  $A$ . L'*ordre lexicographique* engendré par  $\prec$ , aussi noté  $\prec$ , est l'ordre total sur  $A^*$  défini comme suit : pour tout  $u, v \in A^*$ , on pose que  $u \prec v$  si, et seulement si, soit  $u$  est un préfixe de  $v$ , soit un peut factoriser

$$u = wau'' \quad v = wbv'', \quad a, b \in A$$

avec

$$a \prec b.$$

### Semi-anneaux

Un *semi-anneau* est un ensemble  $\mathbb{K}$  muni de deux opérations,  $+$  et  $\cdot$  (que l'on peut appeler sa somme et sa multiplication) qui satisfont :

- l'opération  $+$  est associative, commutative et a une identité  $0_{\mathbb{K}}$  (ou simplement 0) ;
- l'opération  $\cdot$  est associative et a une identité  $1_{\mathbb{K}}$  ;
- la multiplication distribue sur l'addition à gauche et à droite,

$$\forall a, b, c \in \mathbb{K} \quad a(b + c) = ab + ac, \quad (b + c)a = ba + ca;$$

- $0_{\mathbb{K}}$  est un zéro pour l'opération  $\cdot$ , c'est-à-dire,

$$\forall a \in \mathbb{K} \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot a = a \cdot 0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}.$$

La dernière condition ne découle pas des autres.

Par exemple, le *semi-anneau booléen*,  $\mathbb{B}$ , est l'ensemble  $\{0, 1\}$  dont la somme et la multiplication peuvent être vues comme les lois « ou » et « et », respectivement ; autrement dit, la somme satisfait  $1 + 1 = 1$ . Un autre exemple de semi-anneau est l'ensemble des entiers positifs,  $\{0, 1, \dots\}$ , muni de l'addition et de la multiplication, et que l'on note  $\mathbb{N}$ .

Soient  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$  des semi-anneaux. Un *morphisme* (de semi-anneaux) de  $\mathbb{K}$  à  $\mathbb{L}$  est une fonction  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{L}$  qui est un morphisme de monoïdes à la fois pour les deux opérations de  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$ .

### $\mathbb{K}$ -sous-ensembles et séries formelles

Soient  $X$  un ensemble et  $\mathbb{K}$  un semi-anneau. Un  $\mathbb{K}$ -*sous-ensemble* de  $X$  est une fonction

$$X \rightarrow \mathbb{K}.$$

On peut voir un  $\mathbb{K}$ -sous-ensemble comme une somme formelle infinie de monômes dont les variables sont les éléments de  $X$ . De telles sommes sont ce que l'on appelle une *série* (formelle) sur  $X$  à coefficients, ou multiplicités, dans  $\mathbb{K}$ . On note

$$\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$$

l'ensemble des séries sur  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

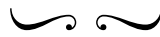
Si  $X$  est un monoïde,  $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  est un semi-anneau muni de la somme classique de séries et du produit de Cauchy.

On utilise la notation « fonctionnelle »  $xs$  pour retrouver la multiplicité d'un élément  $x \in X$  dans  $s$ .

Le *support* d'une série  $s \in \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$  est l'ensemble, noté  $\text{supp } s$ , des éléments de  $X$  dont les multiplicités sont distinctes de  $0_{\mathbb{K}}$ .

Un *polynôme* est une série formelle dont le support est fini, ou, de façon équivalente, est une somme finie de monômes. L'ensemble des polynômes sur  $X$  est noté

$$\mathbb{K}\langle X \rangle.$$



## 1.3 Relations rationnelles

À la base de la théorie des automates on rencontre le théorème de Kleene, qui établit l'égalité entre deux familles de sous-ensembles d'un monoïde libre

$A^*$  (pour  $A$  fini) : les rationnels, que l'on note  $\text{Rat } A^*$ , et les reconnaissables, que l'on note  $\text{Rec } A^*$ . Les reconnaissables sont les langages reconnus par un automate déterministe fini (ou une action de  $A^*$  sur un ensemble fini, ou un morphisme de  $A^*$  dans un ensemble fini). Les rationnels sont ceux qui peuvent être définis à partir des ensembles finis de mots avec les opérations dites rationnelles :

**THÉORÈME 1.3.1 (KLEENE)** *Pour tout alphabet fini  $A$ ,  $\text{Rat } A^* = \text{Rec } A^*$ .*

Une généralisation abstraite de ces familles pour un monoïde quelconque a été envisagée par S. Eilenberg [12]. On va ici s'intéresser seulement à celle des rationnels, qui est nécessaire pour la définition de relation rationnelle. Mentionnons que l'égalité entre les rationnels et les reconnaissables n'est pas vraie pour n'importe quel monoïde.

**DÉFINITION 1.3.1 (ENSEMBLES RATIONNELS)** Les opérations rationnelles sur les sous-ensembles d'un monoïde  $M$  sont l'union, le produit d'ensembles, et l'étoile,

$$X^+ = \bigcup_{n>0} X^n, \quad X^* = X^+ \cup \{1_M\}.$$

La famille des *sous-ensembles rationnels* de  $M$ , notée  $\text{Rat } M$ , est la fermeture des ensembles finis par ces opérations.  $\triangle$

Étant donnés deux monoïdes  $M$  et  $N$ , le produit cartésien  $M \times N$  est un monoïde avec l'opération

$$\forall (m, n), (m', n') \in M \times N \quad (m, n) \cdot_{M \times N} (m', n') = (m \cdot_M m', n \cdot_N n').$$

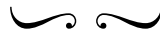
**DÉFINITION 1.3.2 (RELATION RATIONNELLE)** On dit qu'une relation d'un monoïde  $M$  à un monoïde  $N$  est une *relation rationnelle* si son graphe est un sous-ensemble rationnel du monoïde produit  $M \times N$ .  $\triangle$

La première étude systématique des relations rationnelles est due à Elgot et Mezei [14], qui établissent, entre autres, leur fermeture par composition :

**THÉORÈME 1.3.2 (ELGOT ET MEZEI 1965)** *Soient  $A$  un alphabet,  $M$  et  $N$  des monoïdes, et  $\tau : M \rightarrow A^*$  et  $\sigma : A^* \rightarrow N$  deux relations rationnelles. La composée  $\tau\sigma : M \rightarrow N$  est aussi une relation rationnelle.*

Plusieurs classes de relations rationnelles ont été depuis largement étudiées ; parmi les ouvrages consacrés (intégralement ou en partie) au sujet, on peut citer [13, 4, 38]. On rencontrera « en passant » une de ces classes, celle des relations déterministes, dans le chapitre suivant.

On note  $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$  la famille des relations rationnelles de norme bornée sur des monoïdes libres  $A^*$  et  $B^*$ . Pour chaque entier positif  $k$ , on note  $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$  celle des relations  $k$ -valuées. En particulier,  $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$  pour  $k = 1$  est la famille des *fonctions rationnelles*. Ces deux familles font l'objet d'étude de ce mémoire.



## 1.4 Graphes

Un *graphe* (orienté) est une couple  $(Q, E)$  où  $Q$  est un ensemble (fini ou infini) dont chaque élément est appelé un *sommet* de  $\mathcal{G}$  et  $E$  est un sous-ensemble de  $Q \times Q$  où chaque élément est appelé un *arc* de  $\mathcal{G}$ .

Un arc  $e$  dans  $\mathcal{G}$  d'un sommet  $p$  à un sommet  $q$  est notée

$$e : p \rightarrow q.$$

Si on veut de plus souligner que  $e$  appartient à  $\mathcal{G}$ , on peut aussi écrire

$$e : p \xrightarrow{\mathcal{G}} q.$$

Un *chemin* dans  $\mathcal{G}$  est une suite d'arcs consécutifs,

$$c : p_0 \rightarrow p_1 \dots p_{n-1} \rightarrow p_n.$$

Comme pour les transitions, on écrit

$$c : p_0 \xrightarrow{\mathcal{G}} q_0 \tag{1.1}$$

pour dire que  $c$  est un chemin de  $p_0$  à  $q_0$  dans  $\mathcal{G}$ . Cette notation est à la fois un énoncé : (1.1) est synonyme de « il existe un chemin  $c$  dans  $\mathcal{G}$  de  $p_0$  à  $q_0$  ».

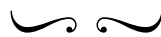
On dit qu'un sommet  $q$  est accessible à partir d'un sommet  $p$  s'il existe un chemin de  $p$  à  $q$ . Dans ce cas on dit aussi que  $p$  est co-accessible à  $q$ .

La *longueur* de  $c$  est l'entier

$$|c| = n.$$

Son *origine* et son *extrémité* sont, respectivement, les sommets  $p_0$  et  $p_n$ .

On trouvera des explications détaillées sur ces concepts classiques (et d'autres comme celui de composantes fortement connexes, qui sera utilisé au chapitre 4) dans de nombreuses ouvrages d'algorithmique et théorie des graphes (*cf.* [9] pour une source moderne).



## 1.5 Automates

Plusieurs « types » d'automates seront étudiés dans ce mémoire : les automates sur un alphabet, les automates sur un monoïde, les  $\mathbb{K}$ -automates et les transducteurs (qui sont des automates sur un monoïde). Dans tous les cas, l'objet automate est un *graphe étiqueté*.

Commençons avec les définitions les plus simples.

**DÉFINITION 1.5.1 (AUTOMATE SUR UN ALPHABET)** Un automate sur un alphabet  $A$  est un quintuplet  $\langle Q, A, E, I, T \rangle$  où  $Q$  est un ensemble dont les éléments sont appelés *états*,  $E$  est un ensemble d'arcs étiquetés par  $A$ , appelés *transitions*,  $I$  et  $T$  sont des sous-ensembles de  $Q$  des *états initiaux* et *finaux*, respectivement.  $\triangle$

On voit à la figure 1.1 une représentation habituelle d'un automate. Les états initiaux et finaux sont désignés respectivement par des flèches « entrantes » et « sortantes » sur les états.

Les chemins dans un automate sont définis de la même façon que pour les graphes. De plus, ils ont une *étiquette* : le mot donné par la concaténation des étiquettes des transitions qui forment le chemin.

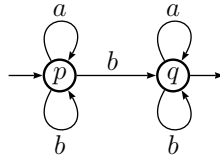


FIG. 1.1 – Un automate, noté  $\mathcal{B}_1$ , sur l'alphabet  $\{a, b\}$ .

On dit qu'un état  $q$  est *accessible* s'il existe un chemin dans l'automate d'un état initial à  $q$ , et *co-accessible* s'il existe un chemin de  $q$  à un état final. L'état est *utile* s'il est à la fois accessible et co-accessible.

Un automate  $\mathcal{A}$  est *accessible* si tous ses états sont accessibles, *co-accessible* si ses états sont co-accessibles, et *émondé* s'il est accessible et co-accessible.

On dit qu'un chemin dans  $\mathcal{A}$  est *réussi* ou est un *calcul* s'il commence dans un état initial et termine dans un état final. Le *comportement* de  $\mathcal{A}$ , noté  $|\mathcal{A}|$ , est le sous-ensemble de  $A^*$  des étiquettes des chemins réussis :

$$|\mathcal{A}| = \left\{ u \in A^* \mid i \xrightarrow{\mathcal{A}}^u t, i \in I, t \in T \right\}.$$

Par exemple, le comportement de l'automate  $\mathcal{B}_1$  (figure 1.1) est l'ensemble

$$|\mathcal{B}_1| = A^*bA^*.$$

La notion de graphe étiqueté permet de considérer des généralisations de ces automates « classiques », dans lesquelles les transitions sont étiquetées par des éléments d'un monoïde quelconque :<sup>1</sup>

**DÉFINITION 1.5.2 (AUTOMATE SUR UN MONOÏDE)** Soit  $M$  un monoïde. Un automate sur  $M$  est un quintuplet  $\langle Q, M, E, I, T \rangle$  où  $Q$  est un ensemble d'états,  $E$  est un ensemble de transitions étiquetées par  $M$ ,  $I$  et  $T$  sont des sous-ensembles de  $Q$  des états initiaux et finaux, respectivement.  $\triangle$

Toutes les définitions faites pour les automates sur un alphabet s'appliquent aux automates sur un monoïde. En particulier, l'étiquette d'un chemin dans un automate sur  $M$  est un élément de  $M$  (défini comme le produit

<sup>1</sup>Ce sont les *automates généralisés* en [13].

des étiquettes des transitions qui constituent le chemin) et le comportement d'un tel automate est donc un sous-ensemble de  $M$ . Une des raisons pour lesquelles ces automates sont intéressants est le fait bien connu suivante :

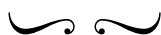
**PROPOSITION 1.5.1** *Un sous-ensemble de  $M$  est rationnel si, et seulement si, il est le comportement d'un automate fini sur  $M$ .*  $\square$

On dit que deux automates (sur un alphabet ou un monoïde) sont *équivalents* si leurs comportements coïncident.

On dit qu'un rationnel est non ambigu s'il peut être construit avec l'application d'un nombre fini d'opérations rationnelles non ambiguës. Une autre manière de définir ce concept est à travers des automates non ambiguës :

**DÉFINITION 1.5.3 (AUTOMATE NON AMBIGU)** On dit qu'un automate  $\mathcal{A}$  sur un monoïde  $M$  est *non ambigu* si pour chaque élément de  $M$ , il existe au plus un chemin réussi de  $\mathcal{A}$  étiqueté par cet élément.  $\triangle$

**DÉFINITION 1.5.4 (RATIONNEL NON AMBIGU)** On dit qu'un sous-ensemble rationnel d'un monoïde  $M$  est *non ambigu* s'il est le comportement d'un automate non ambigu. Sinon (si aucun automate non ambigu ne peut réaliser cet ensemble) on dit qu'il est *intrinsèquement ambigu*.  $\triangle$



## 1.6 $\mathbb{K}$ -automates

Si au lieu de reconnaître des mots on veut y associer une information sur les calculs — le nombre de calculs lisant chaque mot, par exemple — on se ramènera à l'étude des automates à multiplicité.

On peut voir ces automates comme des graphes étiquetés par des séries sur un monoïde. On veut par contre éviter les difficultés posées par cette définition très générale (par exemple, le cas d'automates dont le comportement n'est pas défini). On s'intéressera alors seulement aux automates dont les transitions sont étiquetés par des monômes dont le support est une lettre.

DÉFINITION 1.6.1 Soit  $A$  un alphabet. Un automate à multiplicité dans un semi-anneau  $\mathbb{K}$ , ou  $\mathbb{K}$ -*automate* (sur  $A$ ), est un quadruplet  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  où :  $Q$  est un ensemble d'états, aussi appelé la *dimension* de  $\mathcal{A}$ ;  $E$  est une matrice de dimension  $Q \times Q$  sur  $\mathbb{K}^A$ , la *matrice de transitions* de  $\mathcal{A}$ ;  $I$  et  $T$  sont des vecteurs de dimension  $Q$  sur  $\mathbb{K}$ , le premier étant un vecteur ligne appelé *vecteur initial* et le second un vecteur colonne appelé *vecteur final*.  $\triangle$

La multiplicité initiale d'un état  $q$  est le coefficient dans la coordonnée  $q$  de  $I$ , sa multiplicité finale est le coefficient dans la coordonnée  $q$  de  $T$ .

Dans cette définition,  $E$  n'est pas un ensemble de transitions; mais on peut quand-même voir les automates à multiplicité comme des graphes étiquetés : pour chaque paire d'états  $p$  et  $q$ , le coefficient  $E_{p,q}$ , fonction de l'alphabet  $A$  dans le semi-anneau  $\mathbb{K}$ , représente l'ensemble des transitions de l'état  $p$  à l'état  $q$ . Nous dirons ainsi que  $\mathcal{A}$  contient une transition

$$e : p \xrightarrow{la} q \quad (l \in \mathbb{K}, a \in A)$$

si, et seulement si,

$$aE_{p,q} = l \quad \text{et} \quad l \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

On dit que  $l$  est la *multiplicité* de  $e$ , que la lettre  $a$  est son *support*, et le monôme  $la$  est son *étiquette*. Remarquons que, selon cette définition, pour chaque  $p$  et  $q$  et chaque lettre  $a$  il existe un plus une transition de  $p$  à  $q$  dont le support est  $a$ .

EXEMPLE 1.6.1 Le quadruplet suivant représente un  $\mathbb{N}$ -automate sur l'alphabet  $A = \{a, b\}$  :

$$\left\langle \{p, q\}, A, \begin{pmatrix} a+b & b \\ 0 & 2a+2b \end{pmatrix}, (1 \ 0), (1 \ 0) \right\rangle$$

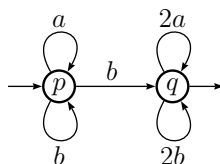
Cet automate est illustré sur la figure 1.2.  $\triangle$

Comme avant, on écrit

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{la} q$$

pour dire que  $e$  est une transition de  $\mathcal{A}$ , ou, de façon équivalente, que  $E_{p,q} = l$  et  $l \neq 0_{\mathbb{K}}$ .



FIG. 1.2 – Un  $\mathbb{N}$ -automate, noté désormais  $\mathcal{C}_1$ .

Un chemin dans  $\mathcal{A}$  est une suite de transitions

$$c : p_0 \xrightarrow[\mathcal{A}]{l_1 a_1} p_1 \dots p_{n-1} \xrightarrow[\mathcal{A}]{l_n a_n} p_n$$

On définit la *multiplicité*, le *support* et l'*étiquette* de  $c$ , respectivement, comme suit :

$$\langle c \rangle = l_1 \dots l_n, \quad a_1 \dots a_n, \quad l(c) = (l_1 \dots l_n)(a_1 \dots a_n).$$

On dit qu'un état  $q$  de  $\mathcal{A}$  est initial si sa multiplicité initiale n'est pas nulle, de même on dit que  $q$  est final si sa multiplicité finale n'est pas nulle. Ceci permet de définir les états accessibles, co-accessibles et utiles de  $\mathcal{A}$ .

Un *calcul* dans un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{A}$  est un chemin dans lequel la multiplicité initiale de son origine et la multiplicité finale de son extrémité sont considérées. Ainsi, la multiplicité d'un calcul est le produit de ces multiplicités par la multiplicité de l'étiquette.

Le *comportement* de  $\mathcal{A}$  est une série  $|\mathcal{A}| \in \mathbb{K}\langle\langle A^* \rangle\rangle$  où la multiplicité d'un mot  $u \in A^*$  est la somme des multiplicités des calculs dont le support est  $u$ . Les  $\mathbb{K}$ -automates réalisent exactement les séries rationnelles — ou celles qui peuvent être construites avec des expressions rationnelles à multiplicité. Le passage d'un objet à l'autre, automate et expression, est un pas fondamental pour établir le théorème de Kleene-Schützenberger (*cf.* théorème 1.8.1).

On dit qu'un  $\mathbb{N}$ -automate est borné si les multiplicités de son comportement sont plus petites qu'une constante fixé.

On peut aussi définir le comportement de  $\mathcal{A}$  à l'aide de l'étoile de la matrice de transitions  $E$ , à cause du rapport entre les puissances de cette matrice et les chemins de  $\mathcal{A}$  :

PROPOSITION 1.6.1 Soient  $\mathcal{A}$  un  $\mathbb{K}$ -automate et  $E$  sa matrice de transitions. Pour tout  $n > 0$ , pour tout  $p, q \in Q$ ,  $E_{p,q}^n$  est la somme des étiquettes des chemins de  $p$  à  $q$  de longueur  $n$  dans  $\mathcal{A}$ .  $\square$

La famille

$$E^0, E^1, E^2, \dots$$

est localement finie, et on peut définir

$$E^* = \sum_{i \geq 0} E^i.$$

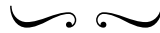
La proposition 1.6.1 permet ainsi d'établir que le comportement de  $\mathcal{A}$  est la série

$$IE^*T.$$

EXEMPLE 1.6.2 L'automate  $\mathcal{C}_1$  représenté à la figure 1.2 calcule la « valeur binaire » de tout mot dans  $A^*$  en considérant  $a$  comme 0 et  $b$  comme 1.

L'automate  $\mathcal{B}_1$  illustré sur la figure 1.1 peut être aussi vu comme un  $\mathbb{N}$ -automate, où les multiplicités des transitions, états initiaux et états finaux sont égales à 1. La multiplicité d'un mot dans la série réalisée par cet automate est le nombre d'occurrences de la lettre  $b$  dans ce mot.  $\triangle$

Le *support* d'un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{A}$  est l'automate sur l'alphabet  $A$  où on « oublie » les multiplicités. Ses états initiaux et finaux sont ceux dont les multiplicités initiales et finales, respectivement, ne sont pas nulles.



## 1.7 Transducteurs

Les transducteurs sont des automates « avec sortie ».

En toute généralité, un transducteur est un automate sur un monoïde produit. Un transducteur sur un produit de monoïdes libres est donc un graphe étiqueté par des couples de mots, qui peut être aussi vu comme une machine de Turing à deux bandes où la lecture dans chaque bande se fait avec un déplacement obligatoire de la tête vers la droite.

DÉFINITION 1.7.1 (TRANSDUCTEUR) Soient  $M$  et  $N$  deux monoïdes. Un transducteur sur  $M$  et  $N$  et un automate sur le monoïde produit  $M \times N$  :  $\langle Q, M \times N, E, I, T \rangle$ . On préférera la notation  $\langle Q, M, N, E, I, T \rangle$ .  $\triangle$

Toute transition (et tout chemin) d'un transducteur est étiquetée par un couple  $(m, n)$  dans  $M \times N$ . On note une telle transition

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{T}]{m|n} q.$$

On dit que  $m$  est l'*entrée* de  $e$  et  $n$  sa *sortie*. Si  $\mathcal{T}$  est un transducteur sur un produit de monoïdes libres, on peut dire qu'un chemin étiqueté par  $u|v$  « lit » le mot  $u$ .

Le comportement de  $\mathcal{T}$  est une relation

$$|\mathcal{T}| : M \rightarrow N.$$

Il vient de la proposition 1.5.1 qu'une relation de  $M$  sur  $N$  est rationnelle si, et seulement, elle est le comportement d'un transducteur sur  $M \times N$ .

L'*automate d'entrée sous-jacent* de  $\mathcal{T}$  est l'automate sur  $M$  obtenu en effaçant les sorties des transitions.

L'image d'un élément du domaine par  $\mathcal{T}$  peut être un ensemble fini ou infini. On ne va considérer que des sorties finies ; on dit dans ce cas que le transducteur est *d'image finie*. Et comme pour les relations, on peut définir la norme d'un transducteur :

DÉFINITION 1.7.2 (NORME) La *norme* d'un transducteur est définie comme la norme de son comportement.  $\triangle$

DÉFINITION 1.7.3 (TRANSDUCTEUR  $k$ -VALUÉ) On dit qu'un transducteur est  *$k$ -valué*, pour un entier positif  $k$ , si son comportement est une relation  $k$ -valuée.  $\triangle$

En particulier, on dit qu'un transducteur est *fonctionnel* si son comportement est une fonction rationnelle.

On dit qu'un transducteur est *borné* s'il réalise une relation dont la norme est bornée, c'est-à-dire, si son comportement appartient à  $\text{Rat}_{\text{fn}}(A^* \times B^*)$ .

On va s'intéresser seulement aux transducteurs (d'image finie) sur un produit  $A^* \times B^*$  de monoïdes libres. De plus, on ne va considérer que des transducteurs dont les entrées des transitions sont des lettres. En raison du théorème de Kleene-Schützenberger (*cf.* théorème 1.8.1), ceci ne pose aucun problème de généralité, sauf en ce que l'image du mot vide par la relation réalisée est forcément soit l'ensemble vide, soit le singleton  $\{1_{B^*}\}$ . En effet, ces transducteurs sont un cas particulier des transducteurs « temps réel »,  $\mathbb{K}$ -automates où  $\mathbb{K}$  est le semi-anneau des rationnels de  $B^*$  (et dont toutes les multiplicités sont des singletons).<sup>2</sup> On note  $\mathcal{T} = \langle Q, A, B^*, E, I, T \rangle$  un tel transducteur.

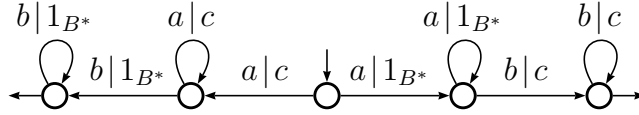
On dit qu'un transducteur est *k-ambigu en entrée* si la série réalisée par son automate d'entrée sous-jacent est bornée par  $k$ ; de façon équivalente, pour chaque mot du domaine, il existe au plus  $k$  chemins réussis lisant ce mot dans le transducteur.

On voit à la figure 1.3 quatre exemples de transducteurs.



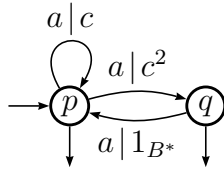

---

<sup>2</sup>Ils sont aussi les automates appelés *nondeterministic generalised sequential machine* dans quelques références.



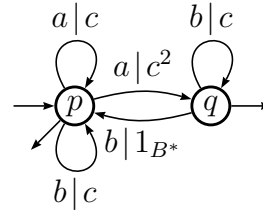
(a) Un transducteur 2-valué dont l'automate d'entrée est 2-ambigu. Son comportement est la relation

$$\forall i, j > 0 \quad a^i b^j \mapsto \{c^i, c^j\}$$



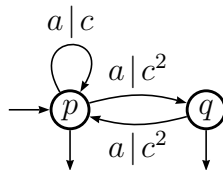
(b) Un transducteur 2-valué dont l'automate d'entrée n'est pas d'ambiguïté bornée. Il réalise la relation

$$\forall n \geq 0 \quad a^n \mapsto \begin{cases} \{1_{B^*}\} & n = 0 \\ \{c^n, c^{n+1}\} & n > 0 \end{cases}$$



(c) Autre transducteur 2-valué dont l'automate d'entrée n'est pas d'ambiguïté bornée. Il réalise la relation

$$\forall u \in A^* \quad u \mapsto \begin{cases} \{c^{|u|}\} & u \in b^* \\ \{c^{|u|}, c^{|u|+1}\} & u \in A^* a A^* \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$



(d) Un transducteur qui n'est pas borné. Son comportement est la relation

$$\forall n \geq 0 \quad a^n \mapsto \{a^i \mid n \leq i \leq 2n\}$$

FIG. 1.3 – Quatre transducteurs sur  $A^* \times B^*$  où  $A = \{a, b\}^*$ ,  $B = \{c\}^*$ .

## 1.8 Représentations linéaires

Une *représentation linéaire* de dimension  $Q$  est un triplet  $(\lambda, \mu, \nu)$  où  $\lambda$  et  $\nu$  sont, respectivement, un vecteur ligne et un vecteur colonne de dimension  $Q$  sur  $\mathbb{K}$ , et  $\mu$  est un morphisme

$$A^* \rightarrow \mathbb{K}^{Q \times Q}.$$

La série réalisée par  $(\lambda, \mu, \nu)$ ,  $s \in \mathbb{K}\langle\langle A^* \rangle\rangle$ , est définie par

$$\forall u \in A^* \quad us = \lambda \cdot u\mu \cdot \nu.$$

On dit qu'une série est *reconnaisable* si elle est peut être réalisée par une représentation linéaire. Le théorème de Kleene se généralise de façon remarquable pour les séries :

**THÉORÈME 1.8.1 (KLEENE-SCHÜTZENBERGER)** *Une série est rationnelle si, et seulement si, elle est reconnaissable.*

Les  $\mathbb{K}$ -automates et les représentations linéaires sont essentiellement les mêmes objets. En effet, étant donné un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$ , le morphisme  $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{K}^{Q \times Q}$  défini par

$$\forall p, q \in Q \quad \forall a \in A \quad a\mu_{p,q} = aE_{p,q}$$

est tel que

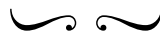
$$\forall u \in A^* \quad u|\mathcal{A}| = I \cdot u\mu \cdot T.$$

Donc,  $\mathcal{A}$  est équivalent à la série réalisée par la représentation linéaire  $(I, \mu, T)$  ; on dit que  $\mu$  est le *morphisme associé* à  $\mathcal{A}$ . Remarquons que

$$\forall p, q \in Q \quad \forall u \in A^* \quad u\mu_{p,q} = uE_{p,q}^n.$$

C'est-à-dire,  $u\mu_{p,q}$  est la somme des multiplicités des chemins de  $p$  à  $q$  étiquetés par  $u$ .

La même discussion peut être faite pour les automates sur un alphabet, si on les voit comme des automates sur le semi-anneau booléen  $\mathbb{B}$ .



# Chapitre 2

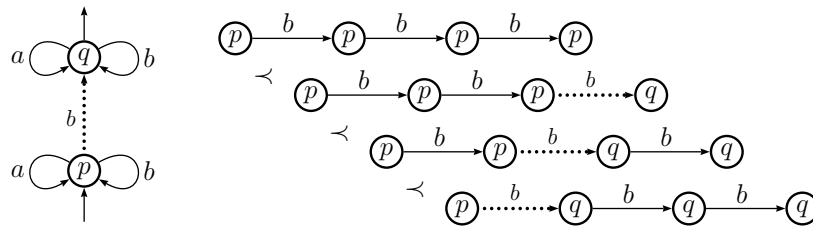
## Le revêtement lexicographique

En 1998, Sakarovitch a montré comment une construction due à Schützenberger permet d'établir deux résultats fondamentaux de la théorie des relations rationnelles : le théorème d'uniformisation rationnelle et le théorème de décomposition des fonctions rationnelles en des fonctions séquentielles [37].

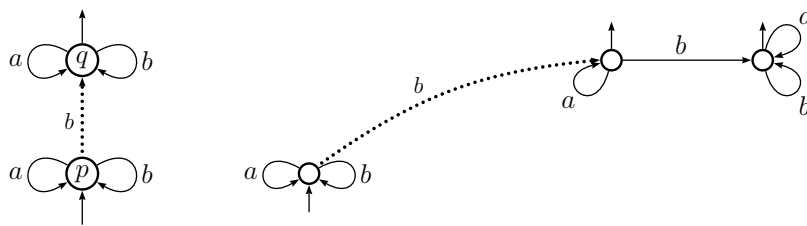
Le cadre dans lequel cette construction est présentée est celui de revêtement d'automates, morphisme qui induit une bijection entre les calculs réussis d'un automate et de son image morphique. Un aspect de cette présentation est de mettre en relief la technique en soi et son potentiel face à différents problèmes. L'utilisation de morphismes d'automates est, en effet, implicite en plusieurs preuves de la théorie des automates. Mentionnons l'uniformisation des relations rationnelles déterministes établie par H. Johnson [26], dont la preuve cache la construction d'un revêtement pour les transducteurs déterministes (comme on aura l'occasion de voir dans ce chapitre).

Le définition de revêtement d'automates, inspiré d'un concept similaire pour les graphes dû à Stallings [46], a été partiellement introduite par Frougny et Sakarovitch pour l'étude des relations rationnelles synchronisées [17, 18]. Une généralisation « à multiplicités » a été introduite dans [39] pour la construction d'un automate réalisant la différence entre une série rationnelle et un entier. La construction de Schützenberger décrite dans [37] sous le nom de « revêtement de Schützenberger » a été employée dans [34] pour la construction d'une uniformisation pour les relations déterministes, et aussi dans les problèmes étudiés dans [39].

Ce chapitre présente une technique pour construire des revêtements que nous appelons, de façon générale, *revêtement lexicographique*. L'ordre lexicographique en question est mis sur les calculs de l'automate, qui sont vus comme des mots sur l'ensemble de transitions. On illustre ci-dessous un ordre  $\prec$  entre quatre calculs de l'automate  $\mathcal{B}_1$  (cf. figure 1.1), engendré par l'ordre partiel sur les transitions sortantes de  $p$  étiquetées par  $b$  où la transition pointillée est la plus grande.



Le principe du revêtement lexicographique est d'attacher à chaque calcul de l'automate une information sur les calculs plus petits. Cette information permettra d'extraire du revêtement un sous-automate dont les calculs réussis possèdent une certaine propriété liée à l'ordre lexicographique ; par exemple, la propriété d'être un calcul minimal. Ci-dessous, on voit à droite un revêtement de  $\mathcal{B}_1$  où la suppression de l'état final à droite fournit un sous-automate dont les calculs réussis se projettent sur les calculs réussis minimaux de  $\mathcal{B}_1$ .



De tels sous-automates sont les objets principaux permettant d'établir les résultats de ce chapitre. En un sens, les revêtements lexicographiques généralisent la construction de Johnson en [26], où l'ordre entre les transitions est induit par un ordre lexicographique mis dans l'alphabet de sortie.

Les deux premières sections sont un rappel des définitions de revêtements,  $\mathbb{K}$ -revêtements et de produit d'un automate par une action, que l'on peut



---

consulter aussi dans [37, 3, 38]. On y définira le revêtement de Schützenberger et on décrira une application de ce revêtement faite dans [37], la construction d’une immersion non ambiguë et équivalente pour un automate booléen. On étudiera aussi un revêtement pour les  $\mathbb{N}$ -automates qui permettra une opération de restriction pour les séries  $\mathbb{N}$ -rationnelles. Les définitions contenues dans ces sections seront largement utilisées dans les suivants.

La section 2.3 introduit une modification dans le concept de produit d’un automate par une action, que nous appelons gauchissement d’un produit d’un automate par une action. L’idée est de rajouter dans chaque transition du produit une information qui dépend, en plus de l’action, de la transition projetée sur l’automate de départ. Cette notion est la base pour la définition de revêtement lexicographique. On verra aussi que la construction de Johnson est un produit d’un transducteur déterministe par une action gauchie.

Les deux dernières sections sont dédiées à la définition de revêtements lexicographiques pour trois types d’automates, les automates booléens, les  $\mathbb{N}$ -automates et les transducteurs temps réel. Avec celui pour les automates booléens, on obtiendra une construction d’une immersion non ambiguë sur un automate booléen. Le revêtement lexicographique d’un  $\mathbb{N}$ -automate permettra de montrer le résultat principal de ce chapitre : la différence entre le comportement d’un  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{A}$  et un entier positif  $k$  peut être réalisée par un  $\mathbb{N}$ -automate dont le nombre d’états est borné par une exponentielle dans le nombre d’états de  $\mathcal{A}$ . Que cette opération peut être réalisée par un automate il est connu dès 1970 [42] ; une autre démonstration, avec le revêtement de Schützenberger, est présentée dans [39]. Pourtant, ces preuves sont basées sur l’itération,  $k$  fois, d’une construction de taille exponentielle, et l’existence d’un automate plus concis est conjecturé dans [39]. On montrera aussi, avec le même revêtement, une opération de division d’une série  $\mathbb{N}$ -rationnelle par un entier, établie, avec une autre construction, par Eilenberg dans son traité [13]. Finalement, la définition du revêtement lexicographique pour les transducteurs temps réel se base sur une action introduit dans [3] qui « mesure » la différence entre des paires de mots, l’*Action Avance ou Retard*. Ce revêtement, que nous appelons le revêtement Avance ou Retard, permettra d’attacher à chaque calcul du transducteur les différences entre sa sortie et celles des calculs plus petits. Il sera utilisé dans le chapitre suivant pour la construction d’une décomposition d’une relation rationnelle  $k$ -valuée, et l’action Avance ou Retard sera encore une fois utile dans le chapitre 4, ou elle

sera généralisée et appliquée en des problèmes de décision pour les transducteurs. On fera à la fin de cette section un calcul du nombre d'états accessibles du revêtement Avance ou Retard qui sera utile dans les calculs de complexité pour le théorème de décomposition.



## 2.1 Revêtements et $\mathbb{K}$ -revêtements

Cette section est dédiée à définir le concept de revêtement d'automates, introduit par Jacques Sakarovitch en 1998 [37], et son analogue pour les automates à multiplicité, les  $\mathbb{K}$ -revêtements, développé dans [39, 38]. Nous suivons de près ces trois références.

### 2.1.1 Morphismes

Fixons deux automates sur un monoïde  $M$ ,  $\mathcal{A} = \langle Q, M, E, I, T \rangle$  et  $\mathcal{B} = \langle R, M, F, J, U \rangle$ .

**DÉFINITION 2.1.1 (MORPHISME D'AUTOMATES)** Un *morphisme d'automates* de  $\mathcal{B}$  dans  $\mathcal{A}$  est une application

$$\varphi : R \rightarrow Q$$

qui induit une application, aussi notée  $\varphi$ , de  $F$  dans  $E$  qui respecte les étiquettes,

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{B}]{m} q \quad \Longrightarrow \quad e\varphi : p\varphi \xrightarrow[\mathcal{A}]{m} q\varphi$$

et qui satisfait

$$J\varphi \subseteq I \quad \text{et} \quad U\varphi \subseteq T. \quad \triangle$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.1.

La fonction  $\varphi$  s'étend naturellement aux chemins de  $\mathcal{B}$  : tout chemin

$$c : p_0 \xrightarrow[\mathcal{B}]{m_1} p_1 \cdots p_{n-1} \xrightarrow[\mathcal{B}]{m_n} p_n \quad (p_i \xrightarrow[\mathcal{B}]{m_{i+1}} p_{i+1} \in F, \text{ pour } 0 \leq i < n)$$

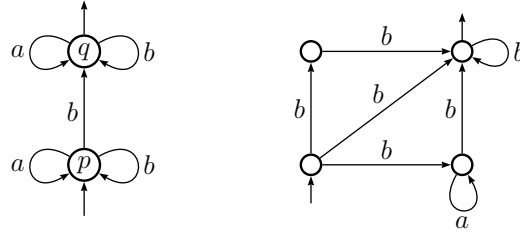


FIG. 2.1 – Un morphisme d'un automate  $\mathcal{B}$ , à droite, sur un automate  $\mathcal{A}$ , défini par la projection horizontale.

se projette sur un chemin de  $\mathcal{A}$ , noté  $c\varphi$  :

$$c\varphi : (p_0\varphi) \xrightarrow[\mathcal{A}]{m_1} (p_1\varphi) \dots (p_{n-1}\varphi) \xrightarrow[\mathcal{B}]{m_1} (p_n\varphi)$$

De la mise en relation entre les calculs réussis de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  induite par  $\varphi$  on a une propriété globale entre les comportements de ces automates :

PROPOSITION 2.1.1 *Si  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ , alors tout calcul réussi de  $\mathcal{B}$  se projette sur un calcul réussi de  $\mathcal{A}$ , et on a  $|\mathcal{B}| \subseteq |\mathcal{A}|$ .*  $\square$

### 2.1.2 Revêtements

Un revêtement est un morphisme particulier où certaines restrictions locales sont respectées.

DÉFINITION 2.1.2 On dit que le morphisme  $\varphi$  est *globalement surjectif* si  $\varphi$  est une fonction surjective de  $R$  à  $Q$ .

Il est *localement surjectif* si la restriction de  $\varphi$  à chaque bouquet de transitions sortantes<sup>1</sup> de  $\mathcal{B}$  est une fonction surjective, si tout état initial de  $\mathcal{A}$  est l'image d'au moins un état initial de  $\mathcal{B}$ , et si tout état de  $\mathcal{B}$  qui se projette sur un état final de  $\mathcal{A}$  est aussi final.

<sup>1</sup>Pour chaque état  $p$  d'un automate, son bouquet de transitions sortantes est l'ensemble des transitions dont l'origine est  $p$ .

Il est *localement injectif* si la restriction de  $\varphi$  à chaque bouquet de transitions sortantes de  $\mathcal{B}$  est une fonction injective, et si tout état initial de  $\mathcal{A}$  est l'image d'au plus un état initial de  $\mathcal{B}$ .

Pareillement, on peut définir les propriétés duales *localement co-surjectif* et *localement co-injectif* à partir des transposés de ces automates.  $\triangle$

On dit que l'automate  $\mathcal{B}$  est un *quotient* de  $\mathcal{A}$  si  $\varphi$  est globalement et localement surjectif.

**DÉFINITION 2.1.3 (REVÊTEMENT)** Un morphisme  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  est un *revêtement* s'il est à la fois localement bijectif et globalement surjectif. On peut aussi dire que  $\mathcal{B}$  est un revêtement de  $\mathcal{A}$ .  $\triangle$

Autrement dit,  $\varphi$  est un revêtement si, et seulement si,

- pour chaque état initial  $i$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un unique état initial de  $\mathcal{B}$  qui se projette sur  $i$  ;
- tout état de  $\mathcal{B}$  qui se projette sur un état final de  $\mathcal{A}$  est final ;
- $\varphi$  induit une bijection entre les bouquets sortants des états de  $\mathcal{B}$  et ceux de leurs projections.

Le morphisme illustré sur la figure 2.1 n'est pas un revêtement : aucun état de  $\mathcal{B}$  ne respecte la bijectivité entre les bouquets sortants. Un revêtement est illustré sur la figure 2.2.

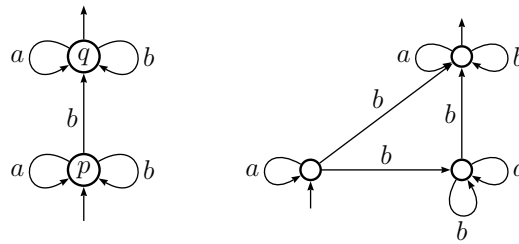


FIG. 2.2 – A droite, un revêtement (défini par la projection horizontale) de l'automate dessiné à gauche.

Une des raisons pour lesquelles les revêtements sont intéressants est la suivante :

PROPOSITION 2.1.2 *Un revêtement  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  induit une bijection entre les calculs réussis de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , et alors  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont équivalents.*  $\square$

### 2.1.3 $\mathbb{K}$ -revêtements

Lorsqu'on passe aux automates à multiplicité, l'existence d'une bijection entre les calculs réussis de deux automates n'implique plus l'égalité de leurs comportements. Il est quand même possible d'adapter la notion de revêtement de façon cohérente pour ces automates. Intuitivement, la propriété à respecter est l'égalité entre la somme des multiplicités des calculs qui se projettent sur un même calcul  $c$ , et la multiplicité de  $c$ .

On pose que  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  et  $\mathcal{B} = \langle R, F, J, U \rangle$  sont deux automates à multiplicité dans un semi-anneau  $\mathbb{K}$ .

DÉFINITION 2.1.4 ( $\mathbb{K}$ -REVÊTEMENT) Soit  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  un  $\mathbb{K}$ -automate. Un  $\mathbb{K}$ -revêtement de  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{B} = \langle R, F, J, U \rangle$  pour lequel existe une fonction surjective

$$\varphi : R \rightarrow Q$$

qui satisfait

$$\forall p \in Q \quad I_p = \sum_{q \in p\varphi^{-1}} J_q \quad \text{et} \quad \forall q \in R \quad U_q = T_{q\varphi}.$$

$$\forall p, q \in Q \quad \forall r \in p\varphi^{-1} \quad E_{p,q} = \sum_{s \in q\varphi^{-1}} F_{r,s} \quad \triangle$$

Autrement dit, la fonction  $\varphi$  fait de  $\mathcal{B}$  un  $\mathbb{K}$ -revêtement de  $\mathcal{A}$  si

- a) pour chaque état  $p$  de  $\mathcal{A}$ , la somme des multiplicités initiales des états de  $\mathcal{B}$  qui se projettent sur  $p$  est égale à la multiplicité initiale de  $p$ ;
- b) pour tout état  $p$  de  $\mathcal{B}$ , la multiplicité finale de  $p$  est égale à la multiplicité finale de l'état  $p\varphi$  de  $\mathcal{A}$ ;
- c) pour toute transition  $e : p \xrightarrow{la} q$  de  $\mathcal{A}$  et tout état  $r$  de  $\mathcal{B}$  qui se projette sur  $p$ , la somme des multiplicités des transitions sortantes de  $r$  qui se projettent sur  $e$  est égale à la multiplicité de  $e$ .

Un exemple est illustré sur la figure 2.3.

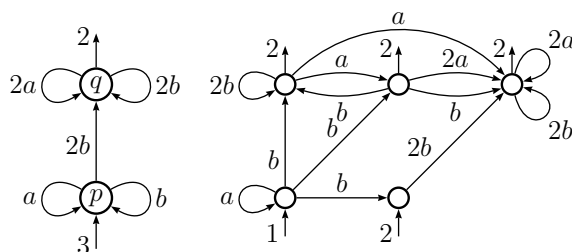


FIG. 2.3 – A droite, un  $\mathbb{N}$ -revêtement de l'automate dessiné à gauche.

Un  $\mathbb{K}$ -revêtement  $\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  n'induit pas forcément un revêtement entre les supports de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , mais fait du support de  $\mathcal{A}$  un quotient du support de  $\mathcal{B}$ . Pour cette raison, on dit que  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -quotient de  $\mathcal{B}$ . Et même lorsque les calculs réussis de ces supports ne sont pas en bijection, on a, conséquence de la définition de  $\mathbb{K}$ -revêtement, que les séries réalisées par  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  sont égales :

PROPOSITION 2.1.3 *Tout  $\mathbb{K}$ -revêtement d'un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{A}$  est équivalent à  $\mathcal{A}$ .*  $\square$



## 2.2 Produit d'un automate par une action

Le cadre abstrait sur lequel s'inscrivent les revêtements que l'on va commencer à construire à partir de la section prochaine est celui de produit d'un automate par une action des étiquettes des transitions sur un ensemble. Cette méthode apparaît de façon implicite en quelques constructions de la théorie des automates. On trouve sa définition explicite dans [3] dans le contexte d'un problème de décidabilité (qui sera repris dans un cadre plus général dans le chapitre 4) et aussi dans [38] où d'autres applications sont étudiées.

On va par la suite décrire ces produits et introduire ce que nous appellerons un gauchissement d'un produit d'un automate par une action, nouvelle

construction où, en plus de l'action, une information qui dépend des transitions, et non seulement des étiquettes, peut être rajoutée dans les transitions du revêtement.

### 2.2.1 Actions

Rappelons qu'une *action* d'un monoïde  $M$  sur un ensemble  $\Psi$  est une application

$$\delta : \Psi \times M \rightarrow \Psi$$

compatible avec le produit de  $M$  :

$$\forall \psi \in \Psi \quad \forall m, n \in M \quad (\psi, 1_M) = \psi, \quad (\psi, mn)\delta = ((\psi, m)\delta, n)\delta.$$

On peut utiliser la notation plus légère

$$\psi \cdot m = (\psi, m)\delta.$$

Au besoin, d'autres symboles pourront être utilisés à la place de  $\cdot$  pour désigner des actions particulières ou éviter des ambiguïtés.

On va souvent voir une action comme un automate sur  $M$ , dont les états sont l'ensemble  $\Psi$  et les transitions sortantes d'un état  $\psi$  représentent l'action des éléments de  $M$  sur  $\psi$ . Aussi, on va distinguer un élément  $\psi_0 \in \Psi$ , l'état initial de cet automate (mais en général des états finaux ne sont pas désignés).

Toute action est entièrement décrite par un ensemble de générateurs de  $M$ . Donc, la connaissance des transitions étiquetées par ces générateurs permet de retrouver l'action de n'importe quel élément de  $M$ .

Un exemple est illustré sur la figure 2.4.

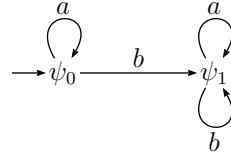
### Automates déterministes

Les actions d'un monoïde libre sur un ensemble fini sont ce que l'on appelle un *automate déterministe*. Un tel automate, sur un alphabet  $A$ , est un quadruplet

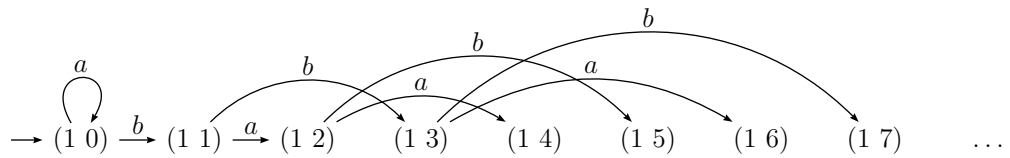
$$\langle Q, A, i, T \rangle$$

où  $Q$  est l'ensemble d'états,  $i$  est l'état initial et  $T$  est l'ensemble des états finaux. Les transitions sont définies par une fonction

$$Q \times A \rightarrow Q,$$



(a) Une action de  $A^*$  sur l'ensemble fini  $\{\psi_0, \psi_1\}$ , avec élément distingué  $\psi_0$ .



(b) Une action de  $A^*$  sur l'ensemble infini de vecteurs  $\mathbb{N}^2$ , définie par les produits matriciels suivants (et représentée avec le symbole  $\circ$ , pour éviter confusion avec le produit matriciel) : pour tout  $(x \ y) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(x \ y) \circ a = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $(x \ y) \circ b = (x \ y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

FIG. 2.4 – Deux actions du monoïde libre engendré par l'alphabet  $A = \{a, b\}$ , représentées par un automate dont les transitions sont la restriction de l'action aux lettres.

qui s'étend de façon unique à une action de  $A^*$  sur  $Q$ , et pour laquelle  $i$  est l'élément distingué.

La bien connue méthode des sous-ensembles permet de construire à partir d'un automate booléen  $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T \rangle$  un automate déterministe équivalent

$$\langle \mathbb{B}^Q, A, i, U \rangle$$

dont les états sont des vecteurs booléens, caractéristiques des sous-ensembles de  $Q$ . Sa fonction de transition dépend du morphisme  $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{B}^{Q \times Q}$  associé à  $\mathcal{A}$ . Il s'agit de l'action

$$\delta_{\text{det}} : \mathbb{B}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{B}^Q$$



(relative à  $\mu$ ) désignée par le symbole  $\circ$  et définie par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{B}^Q \quad \forall a \in A \quad \mathbf{v} \circ a = \mathbf{v} \cdot a\mu. \quad (2.1)$$

L'état initial  $i$  est le vecteur caractéristique de l'ensemble  $I$ ,

$$\forall p \in Q \quad i_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et les états finaux sont définis par

$$U = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{B}^Q \mid \exists t \in T \text{ tel que } \mathbf{v}_t = 1 \}.$$

On note  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  la partie accessible de cet automate, que l'on appelle le *déterminisé* de  $\mathcal{A}$ . Un exemple est illustré sur la figure 2.5.

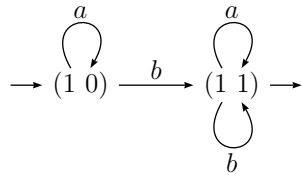


FIG. 2.5 – Le déterminisé de l'automate  $\mathcal{B}_1$  (figure 1.1). Les vecteurs sont indicés par les états  $p$  et  $q$  dans cet ordre. Ainsi, et puisque  $p$  est l'unique état initial de  $\mathcal{A}$ , l'état initial  $i$  de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  est le vecteur  $(1 0)$ .

---

### 2.2.2 Produit d'un automate par une action

Le produit d'automates étiquetés par des lettres est une technique courante pour la réalisation d'opérations entre les langages rationnels. Le même n'est pourtant pas toujours possible pour les automates sur un monoïde  $M$  quelconque, vu que l'on peut trouver des automates équivalents qui n'ont aucune transition avec la même étiquette.

En revanche, étant donné un automate sur  $M$  et une action de  $M$  sur un ensemble  $\Psi$ , on peut définir un produit de ces objets, basé sur l'application des étiquettes des transitions. Cette construction s'avère très utile.

**DÉFINITION 2.2.1 (PRODUIT D'UN AUTOMATE PAR UNE ACTION)** Soient  $\mathcal{A} = \langle Q, M, E, I, T \rangle$  un automate sur un monoïde  $M$  et  $\delta$  une action de  $M$  sur un ensemble  $\Psi$ , notée par  $\circ$  et avec élément distingué  $\psi_0$ . Considérons l'automate sur  $M$

$$\mathcal{B} = \langle Q \times \Psi, A, F, I \times \{\psi_0\}, T \times \Psi \rangle \quad (2.2)$$

où les transitions sortantes de chaque état  $(p, \psi)$  de  $\mathcal{B}$  sont en bijection avec les transitions sortantes de  $p$  dans  $\mathcal{A}$  :

$$\forall (p, \psi) \in Q \times \Psi \quad \forall p \xrightarrow{\mathcal{A}}^m q \quad (p, \psi) \xrightarrow{\mathcal{B}}^m (q, \psi \circ m). \quad (2.3)$$

On définit le produit de  $\mathcal{A}$  par l'action  $\delta$ , noté  $\mathcal{A} \times \delta$ , comme la partie *accessible* de cet automate.  $\triangle$

La projection de  $\mathcal{A} \times \delta$  dans la première composante, notée  $\pi_{\mathcal{A}}$  et définie par

$$\forall (p, m) \in Q \times M \quad (p, m)\pi_{\mathcal{A}} = p,$$

fait de  $\mathcal{A} \times \delta$  un revêtement sur la partie accessible de  $\mathcal{A}$ .

**EXEMPLE 2.2.1** Le produit d'un automate booléen  $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T \rangle$  par son déterminisé  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  est la partie accessible de l'automate booléen

$$\langle Q \times \mathbb{B}^Q, A, F, I \times \{i\}, T \times \mathbb{B}^Q \rangle$$

dont les transitions sont définies comme dans (2.3). On note  $\mathcal{S}$  ce produit et on l'appelle le *revêtement de Schützenberger* de  $\mathcal{A}$  (nom proposé dans [37] où une application remarquable de  $\mathcal{S}$ , inspiré d'un travail de Schützenberger et que l'on va présenter à la section 2.2.4, est étudiée).  $\triangle$

Autre exemple, le produit d'un transducteur par une action qui mesure les différences entre les sorties, sera exploré à la fin de ce chapitre (section 2.5.1).

### Produit d'un $\mathbb{K}$ -automate par une action

Si  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -automate, on définit le produit de  $\mathcal{A}$  par une action  $\delta$  comme le produit du support de  $\mathcal{A}$  (ce qui est un automate booléen) par  $\delta$ . De plus, les multiplicités sont conservées dans les états et les transitions du revêtement.

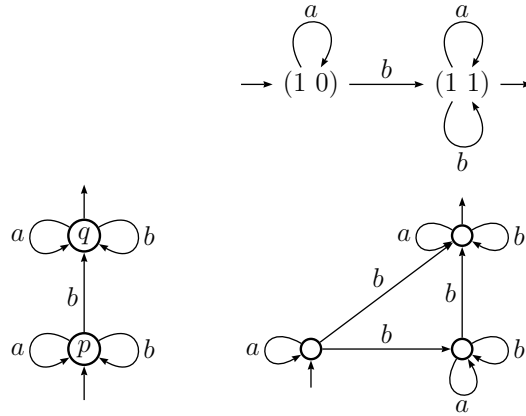


FIG. 2.6 – Le revêtement de Schützenberger (dessiné à droite) de l'automate  $\mathcal{B}_1$  (à gauche). Le déterminisé de  $\mathcal{B}_1$ , dessiné en haut, est celui représenté à la figure 2.5. Les états du produit sont des couples formés par un état de  $\mathcal{B}_1$  et un vecteur booléen indicé par les états de cet automate. Le revêtement sur  $\mathcal{B}_1$  est défini par la projection horizontale à gauche, et la projection verticale est un morphisme sur  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ .

DÉFINITION 2.2.2 (PRODUIT D'UN  $\mathbb{K}$ -AUTOMATE PAR UNE ACTION)

Soient  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  un  $\mathbb{K}$ -automate sur un alphabet  $A$  et  $\delta$  une action de  $A^*$  sur un ensemble  $\Psi$ , avec un élément distingué  $\psi_0$ , et notée  $\circ$ . Considérons le  $\mathbb{K}$ -automate

$$\mathcal{B} = \langle Q \times \Psi, F, J, U \rangle$$

dont les multiplicités initiales et finales sont définies par

$$\forall (p, \psi) \in Q \times \Psi \quad J_{(p, \psi)} = \begin{cases} I_p & \text{si } \psi = \psi_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad U_{(p, \psi)} = T_p$$

et les transitions sont définies à partir des transitions de  $\mathcal{A}$  :

$$\forall (p, \psi) \in (Q \times \Psi) \quad \forall p \xrightarrow{\mathcal{A}}^a q \quad (p, \psi) \xrightarrow{\mathcal{B}}^a (q, \psi \circ a).$$

On définit le produit de  $\mathcal{A}$  par l'action  $\delta$ , noté  $\mathcal{A} \times \delta$ , comme la partie *accessible* de cet automate. △

La projection de ce produit sur la première composante est un  $\mathbb{K}$ -revêtement sur la partie accessible de  $\mathcal{A}$ .

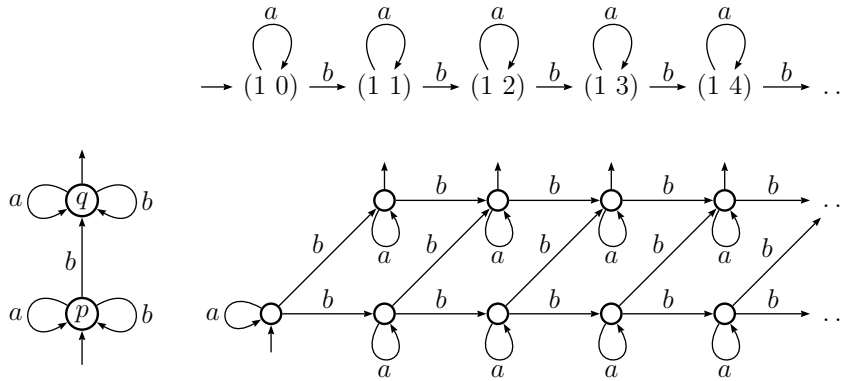
EXEMPLE 2.2.2 Étant donné un  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$ , dont le morphisme associé est  $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{N}^{Q \times Q}$ , on définit l'action

$$\gamma_\mu : \mathbb{N}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{N}^Q$$

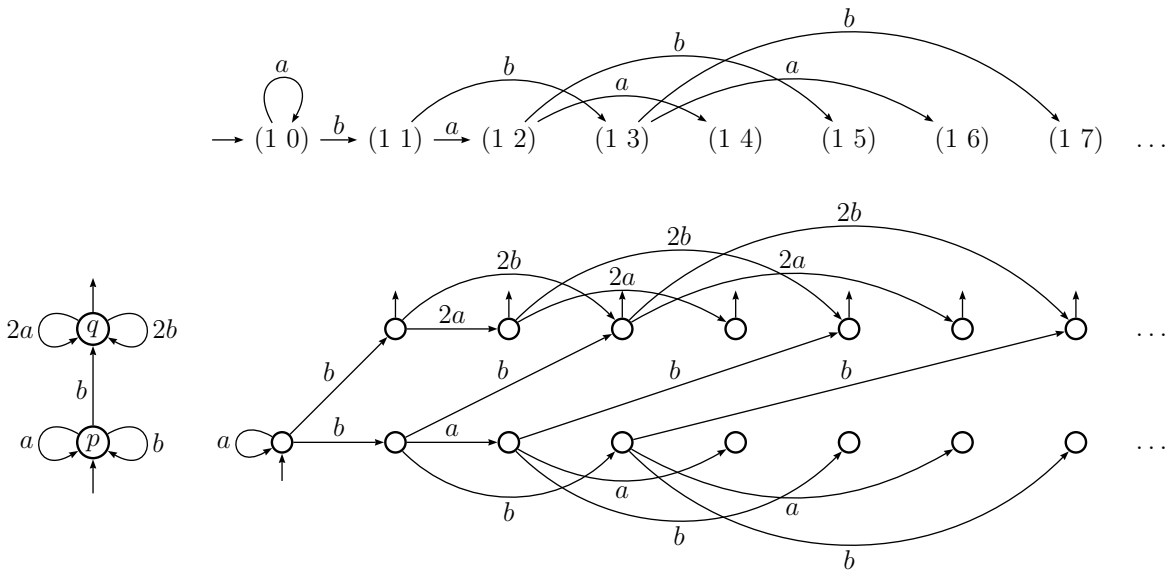
(relative à  $\mu$  et désignée par le symbole  $\diamond$ ) comme suit :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{N}^Q \quad \forall a \in A \quad \mathbf{v} \diamond a = \mathbf{v} \cdot a\mu. \quad (2.4)$$

Le vecteur  $I$  est l'élément distingué de cette action. On illustre sur la figure 2.7 deux produits de  $\mathbb{N}$ -automates par cette action, et on en verra une application à la section 2.2.4.  $\triangle$



(a) Le produit de  $\mathcal{B}_1$ , vu comme  $\mathbb{N}$ -automate, par l'action  $\gamma_\mu$  (relative au morphisme  $\mu$  associé à  $\mathcal{B}_1$ ).



(b) Le produit de  $\mathcal{C}_1$  par l'action  $\gamma_\mu$  (relative à son morphisme associé).

FIG. 2.7 – Deux produits (infinis) de  $\mathbb{N}$ -automates par l'action définie dans 2.4. Ils se projettent dans la première composante sur l'automate de départ, et dans la seconde sur l'ensemble des vecteurs sur  $\mathbb{N}$  indicés par l'ensemble d'états de l'automate ( $Q = \{p, q\}$  dans le deux cas et indicés dans cet ordre).

### 2.2.3 Morphismes d'actions et quotients

La notion de morphisme entre deux automates sur un monoïde  $M$  s'applique naturellement aux actions de  $M$  sur un ensemble puisque, comme nous l'avons remarqué, toute action peut être vue comme un automate.

DÉFINITION 2.2.3 Soient

$$\delta_\Psi : \Psi \times M \rightarrow \Psi \quad \delta_\Gamma : \Gamma \times M \rightarrow \Gamma$$

deux actions de  $M$  sur des ensembles  $\Psi$  et  $\Gamma$ , respectivement, désignées par les symboles  $\circ_\Psi$  et  $\circ_\Gamma$ , et dont les éléments distingués sont  $\psi_0$  et  $\gamma_0$ , respectivement. Un *morphisme d'actions* est une fonction

$$\varrho : \Psi \rightarrow \Gamma$$

qui satisfait

$$\psi_0 \varrho = \gamma_0$$

et

$$\forall \psi \in \Psi \quad \forall m \in M \quad (\psi \circ_\Psi m) \varrho = \psi \varrho \circ_\Gamma m. \quad \triangle$$

EXEMPLE 2.2.3 On montre à la figure 2.8 un quotient de l'action illustrée sur la figure 2.4(b).

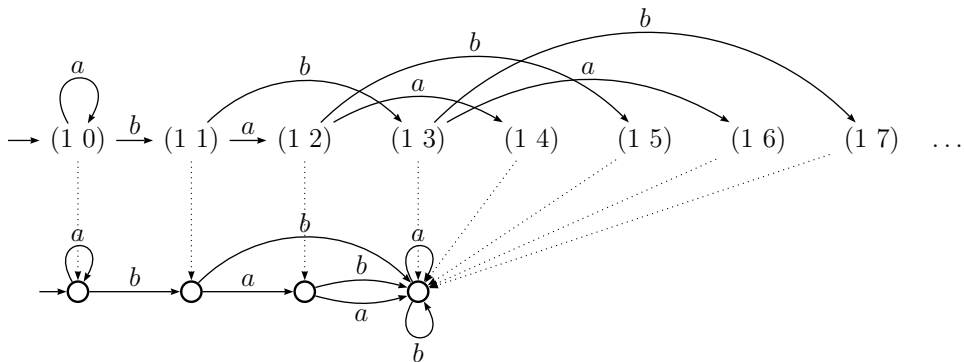


FIG. 2.8 – Un quotient de l'action illustrée sur la figure 2.4(b).

Ce quotient est un exemple d'une construction générale. Soit

$$\mathbb{N}_k = \{0, \dots, k-1, \omega\}$$

le semi-anneau quotient de  $\mathbb{N}$  par la relation

$$k = k + 1$$

(où  $\omega$  joue un rôle d'élément infini). Notons

$$\eta_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_k$$

ce quotient, qui est un morphisme de semi-anneaux. Ce morphisme peut être naturellement étendu aux matrices et vecteurs sur  $\mathbb{N}$ .

Étant donné un  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$ , avec morphisme associé  $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{N}^{Q \times Q}$ , considérons l'action

$$\gamma_{\mu, k} : \mathbb{N}_k^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{N}_k^Q$$

notée  $\diamond_k$ , dont l'élément distingué est le vecteur  $I\eta_k$  et qui est définie comme suit :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{N}_k^Q \quad \forall a \in A \quad \mathbf{v} \diamond_k a = \mathbf{v} \cdot (a\mu)\eta_k. \quad (2.5)$$

Ici, les opérations du produit matriciel  $\mathbf{v} \cdot (a\mu)\eta_k$  sont faites dans  $\mathbb{N}_k$ .

On vérifie que la fonction  $\eta_k$  induit un morphisme de l'action  $\gamma_\mu$  définie dans (2.4) sur l'action  $\gamma_{\mu, k}$  :

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{N}^Q \quad \forall u \in A^* \quad (\mathbf{v} \diamond u)\eta_k = \mathbf{v}\eta_k \diamond_k u.$$

On illustre sur la figure 2.9 le morphisme  $\eta_k$  pour deux  $\mathbb{N}$ -automates et deux valeurs distincts de  $k$ . △

Nous nous servirons des morphismes d'actions pour construire des quotients d'un produit d'un automate par une action. La propriété suivante est une conséquence directe de la définition de morphisme d'actions :

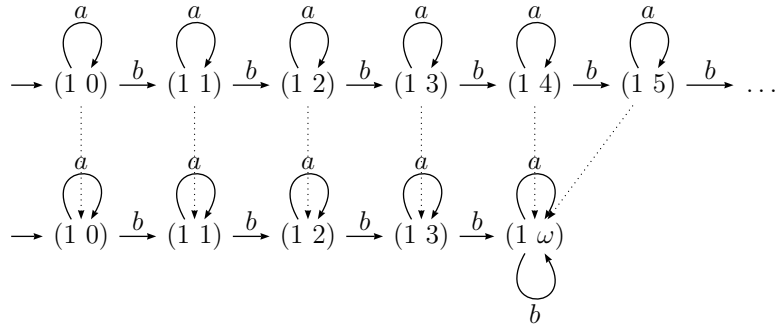
**PROPRIÉTÉ 2.2.1** *Étant donné un morphisme  $\varrho$  d'une action  $\delta_\Psi$  sur une action  $\delta_\Gamma$ , la fonction  $(Q \times \Psi) \rightarrow (Q \times \Gamma)$ , aussi notée  $\varrho$  et définie par*

$$\varrho : (p, \psi) \rightarrow (p, \psi\varrho),$$

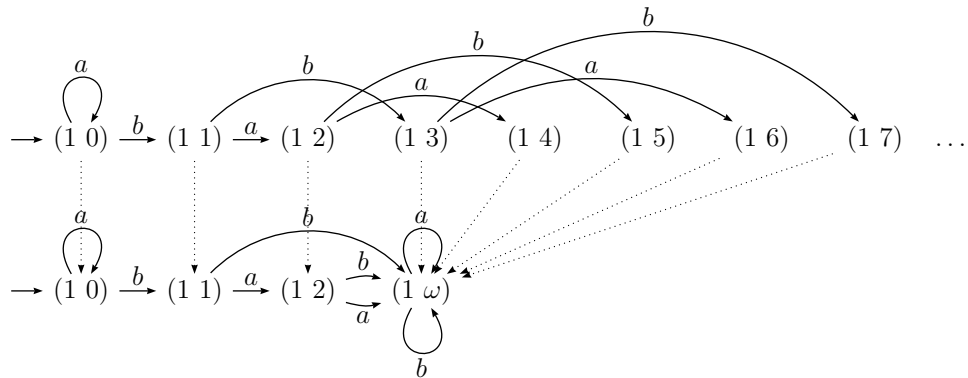
*est un revêtement de  $\mathcal{A} \times \delta_\Psi$  sur  $\mathcal{A} \times \delta_\Gamma$ .*

*Si  $\mathcal{A}$  est un  $\mathbb{K}$ -automate, alors  $\varrho$  fait de  $\mathcal{A} \times \delta_\Gamma$  un  $\mathbb{K}$ -quotient de  $\mathcal{A} \times \delta_\Psi$ . □*

On illustre sur la figure 2.10 un  $\mathbb{N}$ -quotient d'automates induit par un morphisme d'actions.



(a) Le quotient de l'action  $\gamma_\mu$  associé à l'automate  $\mathcal{B}_1$  (vu comme  $\mathbb{N}$ -automate) sur l'action  $\gamma_{\mu,k}$  avec  $k = 4$ .



(b) Le quotient de l'action  $\gamma_\mu$  associé au  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{C}_1$  sur l'action  $\gamma_{\mu,k}$  avec  $k = 3$ .

FIG. 2.9 – Deux morphismes d'actions induits par le morphisme de semi-anneaux  $\eta_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_k$ .



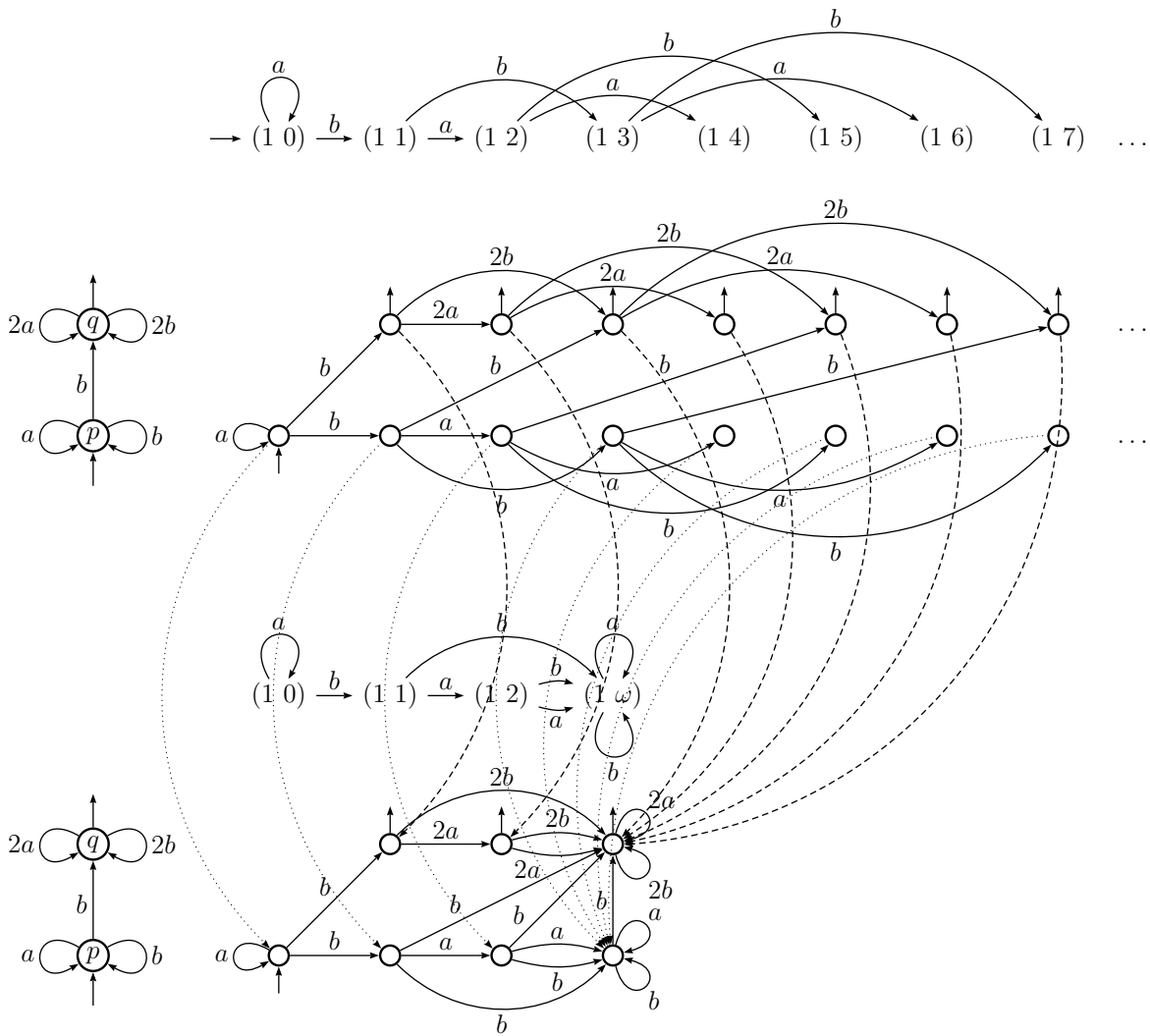


FIG. 2.10 – Un  $\mathbb{N}$ -quotient de  $\mathcal{C}_1 \times \gamma_\mu$  ( $\mathbb{N}$ -revêtement infini de  $\mathcal{C}_1$  illustré aussi sur la figure 2.7) induit par le morphisme d'actions  $\eta_k$ . Ce  $\mathbb{N}$ -quotient (fini) est le produit  $\mathcal{C}_1 \times \gamma_{\mu,k}$ , pour  $k = 3$  (cf. figure 2.9).

### 2.2.4 Deux applications

On clot cette section avec deux applications de produits d'un automate par une action. Elles sont une motivation pour les méthodes que l'on va mettre en œuvre à la section suivante.

La première est une application du revêtement de Schützenberger présentée dans [37]. Il s'agit de montrer, à l'aide de ce revêtement, que tout automate booléen admet une immersion équivalente et non ambiguë, ce que l'on va énoncer ici, pour cohérence avec d'autres énoncés à venir, de la manière suivante :

**THÉORÈME 2.2.1 (SAKAROVITCH 1998)** *Soit  $\mathcal{A}$  un automate booléen avec  $n$  états. Il existe un revêtement de  $\mathcal{A}$  avec au plus  $n2^n$  états qui contient un sous-automate non ambigu et équivalent à  $\mathcal{A}$ .*

Rappelons que la projection du revêtement de Schützenberger d'un automate  $\mathcal{A}$  sur le déterminisé  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ ,

$$\pi_{\mathcal{A}_{\text{det}}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}_{\text{det}}$$

est un morphisme sur ce dernier. Le cœur de la preuve du théorème 2.2.1 est la propriété suivante de  $\pi_{\mathcal{A}_{\text{det}}}$ , tirée *ipsis litteris* de [37] :

**PROPRIÉTÉ 2.2.2** *La projection de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  est un morphisme localement co-surjectif.*

**PREUVE** On doit montrer que le transposé de  $\mathcal{S}$  est un morphisme localement surjectif sur le transposé de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ . C'est-à-dire :

- a) tout état de  $\mathcal{S}$  de la forme  $(p, i)$  (où  $i$  est l'état initial de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ ) est initial ;
- b) pour tout état final  $v$  de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ , il existe au moins un état  $(t, v)$  dans  $\mathcal{S}$  tel que  $t \in T$  ;
- c) si  $v \xrightarrow{a} w$  est une transition de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  et  $(q, w)$  est un état dans  $\mathcal{S}$ , ce dernier a aussi une transition de la forme  $(v, p) \xrightarrow{a} (w, q)$ .

Pour montrer ces conditions, on utilisera la propriété suivante des chemins de  $\mathcal{A}$ , qui s'établit par induction :

$$\begin{aligned} \text{si } v \xrightarrow[\mathcal{A}_{\text{det}}]{u} w \text{ alors} \\ \forall q \in Q \quad w_q = 1 \iff \exists p \in Q \text{ tel que } v_p = 1 \text{ et } p \xrightarrow{\mathcal{A}} q. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Soit  $(p, i)$  un état de  $\mathcal{S}$ . Comme  $\mathcal{S}$  est accessible, il existe un chemin  $(i, i) \xrightarrow{u} (p, i)$  dans cet automate où  $(i, i)$  est un état initial, ou, de façon équivalente,  $i_i = 1$ . Ce chemin se projette dans un chemin  $i \xrightarrow{u} p$  dans  $\mathcal{A}$ . De (2.6), on a que  $i_p = 1$ , donc  $p$  est un état initial de  $\mathcal{A}$ , et  $(p, i)$  est un état initial de  $\mathcal{S}$ .

Soit  $v$  un état final de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ . Soit  $u$  le mot tel que  $i \xrightarrow{u} v$  dans  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ . De la définition des états finaux de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ , il existe  $t \in T$  tel que  $v_t = 1$ . De (2.6), il existe un état  $i$  de  $\mathcal{A}$  tel que  $i_i = 1$  et un calcul  $i \xrightarrow{u} t$  dans  $\mathcal{A}$ . Donc,  $(i, i) \xrightarrow{u} (t, v)$  est un calcul réussi de  $\mathcal{S}$ , et  $(t, v)$  est un état final de  $\mathcal{S}$  qui se projette dans  $v$ .

Soient  $v \xrightarrow{a} w$  une transition de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  et  $(q, w)$  un état dans  $\mathcal{S}$ . De (2.6) on a qu'il existe  $p$  dans  $Q$  tel que  $v_p = 1$  et une transition  $p \xrightarrow{a} q$  dans  $\mathcal{A}$ . Comme  $\mathcal{A}_{\text{det}}$  est accessible, il existe un chemin  $i \xrightarrow{u} v$  dans cet automate, et il vient de (2.6) qu'il existe un chemin  $i \xrightarrow{u} p$  dans  $\mathcal{A}$  où  $i$  est un état initial. Alors,  $(i, i) \xrightarrow{u} (p, v)$  est un chemin dans  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}_{\text{det}}$ , donc  $(p, v)$  est accessible, et appartient à  $\mathcal{S}$ . Alors,  $(v, p) \xrightarrow{a} (w, q)$  est une transition de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

La preuve du théorème 2.2.1 consiste à « extraire » l'automate souhaité de  $\mathcal{S}$ .

**PREUVE DU THÉORÈME 2.2.1** En effaçant quelques transitions et la qualité d'être final de quelques états de  $\mathcal{S}$ , on peut en obtenir un sous-automate qui est un co-revêtement de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ , donc un automate équivalent à  $\mathcal{A}$  et non ambigu (puisque ses calculs réussis sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{A}_{\text{det}}$ ).  $\square$

Un exemple est illustré sur la figure 2.11.

Le second exemple est une opération de « restriction » sur les séries  $\mathbb{N}$ -rationnelles. Étant donné une série  $s : A^* \rightarrow \mathbb{N}$  et un entier positif  $k$ , on note  $s_{(\geq k)}$  la série définie par

$$\forall u \in A^* \quad us_{(\geq k)} = \begin{cases} us & \text{si } us \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pareillement, on note  $s_{(=k)}$  la série

$$\forall u \in A^* \quad us_{(=k)} = \begin{cases} us & \text{si } us = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

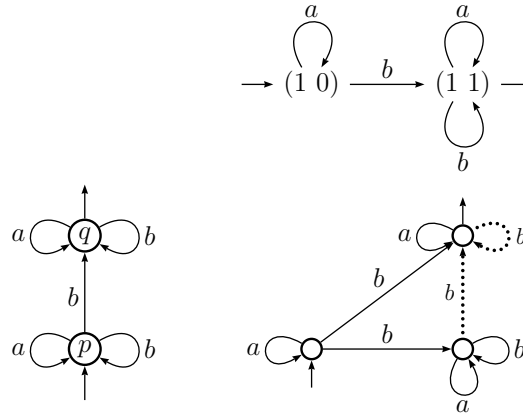


FIG. 2.11 – Le revêtement de Schützenberger de l'automate  $\mathcal{B}_1$ . Deux immersions de Schützenberger, sous-automates non ambigus et équivalents à  $\mathcal{B}_1$ , sont obtenues en effaçant une des transitions pointillées.

**THÉORÈME 2.2.2** *Soit  $\mathcal{A}$  un  $\mathbb{N}$ -automate avec  $n$  états qui réalise une série  $\mathfrak{s}$ . Il existe un  $\mathbb{N}$ -revêtement infini  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  jouissant de la propriété suivante : pour tout  $k > 0$ , il existe un  $\mathbb{N}$ -quotient  $\mathcal{B}_k$  de  $\mathcal{B}$  de dimension  $n(k+1)^n$  tel que*

1.  $\mathcal{B}_k$  contient un sous-automate  $\mathcal{B}_{(\geq k)}$  qui réalise la série  $\mathfrak{s}_{(\geq k)}$  ;
2. pour  $0 < i < k$ ,  $\mathcal{B}_k$  contient un sous-automate  $\mathcal{B}_{(=i)}$  qui réalise la série  $\mathfrak{s}_{(=i)}$ .

On montre ce théorème avec le produit de  $\mathcal{A}$  par l'action  $\gamma_\mu$  définie à l'exemple 2.2.2. Ce produit jouera le rôle du  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{B}$ , et son  $\mathbb{N}$ -quotient par le morphisme  $\eta_k$  sera le  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{B}_k$ . L'idée de la preuve est la suivante. Dans le revêtement  $\mathcal{B}$ , tout calcul réussi

$$C : (p, I) \xrightarrow{\mathcal{B}} (q, \mathbf{v})$$

se projette dans la première composante sur un calcul réussi de  $\mathcal{A}$  et dans la seconde sur une suite de vecteurs. Le vecteur  $\mathbf{v}$  (dans l'extrémité de  $C$ ) permet de calculer la multiplicité du mot qui étiquette ce calcul :

$$\mathbf{v} = I \cdot u\mu$$

et donc

$$us = v \cdot T.$$

Cette information permet, *via* un certain changement de la multiplicité finale de  $(q, v)$ , de « garder » ou « rejeter » le calcul  $C$ , de façon que l'ensemble des calculs gardés réalise la série  $s_{(\geq k)}$  (ou  $s_{(=i)}$ ). Le  $\mathbb{N}$ -quotient fini  $\mathcal{B}_k$  suit le même principe, sauf en ce que les vecteurs dans ses états permettent de compter jusqu'à  $k - 1$ . Cette information est néanmoins suffisante pour extraire de  $\mathcal{B}_k$  des sous-automates qui réalisent les séries souhaitées.

**PREUVE DU THÉORÈME 2.2.2** On obtient le sous-automate  $\mathcal{B}_{(\geq k)}$  qui réalise la série  $s_{(\geq k)}$  en annulant la multiplicité finale de tout état final  $(p, v)$  de  $\mathcal{B}_k$  tel que

$$v \cdot (T\eta_k) < \omega.$$

Le fait que cet automate réalise la série  $s_{(\geq k)}$  découle de deux remarques. La première est évidente : pour tout mot  $u \in A^*$  on a

$$us \geq k \quad \iff \quad (us)\eta_k = \omega. \quad (2.7)$$

La seconde se montre par induction dans la longueur des calculs de  $\mathcal{B}_k$  : pour tout calcul

$$C : (p, I\eta_k) \xrightarrow[\mathcal{B}_k]{u} (q, v)$$

on a que

$$v = (I \cdot u\mu)\eta_k$$

et donc

$$v \cdot (T\eta_k) = (I \cdot u\mu \cdot T)\eta_k = (us)\eta_k. \quad (2.8)$$

On tire de (2.7) et (2.8) qu'un calcul

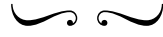
$$C : (p, I) \xrightarrow[\mathcal{B}_{(\geq k)}]{u} (q, v)$$

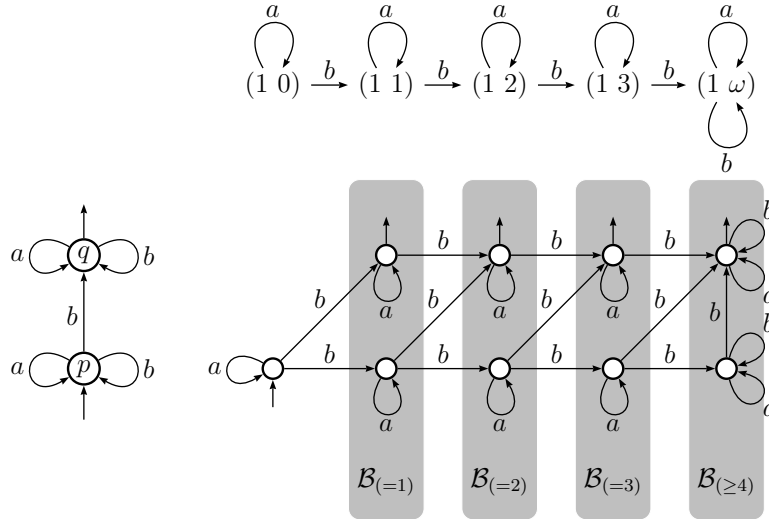
est réussi dans  $\mathcal{B}_{(\geq k)}$  si, et seulement si,  $us \geq k$ . Alors, les calculs réussis de  $\mathcal{B}_{(\geq k)}$  se projettent exactement sur l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{A}$  étiquetés par un mot dont la multiplicité est plus grande ou égale à  $k$ .

Les automates  $\mathcal{B}_{(=i)}$ , pour  $0 < i < k$ , sont définis de façon similaire : on annule la multiplicité finale d'un état  $(p, v)$  de  $\mathcal{B}_k$  si, et seulement si,

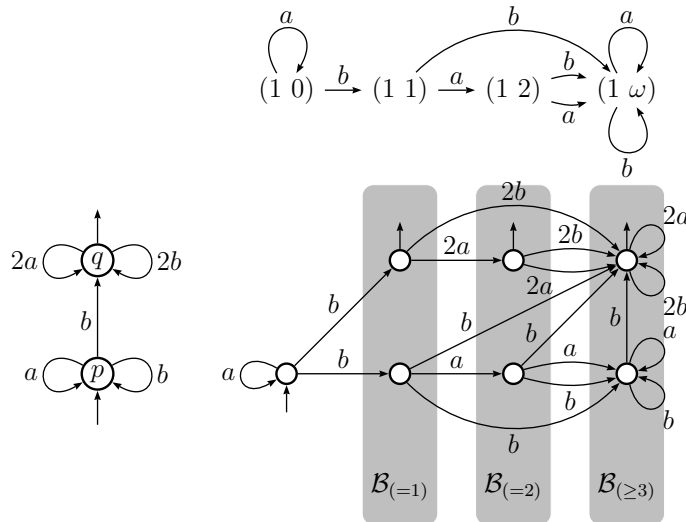
$$v \cdot (T\eta_k) \neq i. \quad \square$$

Deux exemples de restrictions, un pour la série réalisée par  $\mathcal{B}_1$  et autre pour celle de  $\mathcal{C}_1$ , sont illustrés sur la figure 2.12.





(a) Les restrictions de la série réalisée par  $\mathcal{B}_1$  avec  $k = 4$ .



(b) Les restrictions de la série réalisée par  $\mathcal{C}_1$  avec  $k = 3$ .

FIG. 2.12 – Deux produits d'un N-automate par l'action  $\gamma_{\mu,k}$ , et leurs sous-automates qui réalisent des restrictions (sur le comportement de l'automate de départ). Chaque restriction est obtenue en annulant tous les états finaux du revêtement sauf celui dans le rectangle gris correspondant au sous-automate souhaité.

## 2.3 Produit d'un automate par une action gauchie

On va maintenant introduire une sorte de *gauchissement* d'un produit d'un automate par une action (sur un ensemble  $\Psi$ ). L'intuition, c'est que dans chaque transition du revêtement un élément de  $\Psi$  qui dépend *de la transition projetée*, et non seulement de l'étiquette, peut être rajoutée à l'application de l'action. Cette construction sera utile pour la définition des revêtement lexicographiques à la section suivante.

On définira ce produit gauchi pour deux types d'automates : les automates sur un monoïde et les  $\mathbb{K}$ -automates.

### 2.3.1 Cas d'un automate sur un monoïde

**DÉFINITION 2.3.1 (GAUCHISSEMENT)** Étant donné un automate  $\mathcal{A} = \langle Q, M, E, I, T \rangle$ , un monoïde  $(\Psi, \oplus)$ , une action  $\delta : \Psi \times M \rightarrow \Psi$  notée  $\circ$  et des fonctions (dites *de gauchissement*)

$$\alpha : I \rightarrow \Psi \quad \xi : E \rightarrow \Psi$$

le produit de  $\mathcal{A}$  par  $\circ$  gauchi par  $\alpha$  et  $\xi$  est la partie accessible, notée  $\mathcal{A} \times_{(\alpha, \xi)} \delta$ , de l'automate

$$\langle Q \times \Psi, M, F, J, T \times \Psi \rangle$$

où l'ensemble des états initiaux est égal à

$$J = \{(i, i\alpha) \mid i \in I\}$$

et, pour tout état  $(p, \psi)$ , les transitions sortantes de  $(p, \psi)$  sont en bijection avec celles de  $p$  et sont définies comme suit :

$$e : p \xrightarrow{\mathcal{A}} q \quad \Longrightarrow \quad (p, \psi) \xrightarrow{\mathcal{B}} (q, (\psi \circ m) \oplus e\xi). \quad \triangle$$

Il vient directement de cette définition que la projection de  $\mathcal{A} \times_{(\alpha, \xi)} \delta$  sur la première coordonnée est un revêtement sur la partie accessible de  $\mathcal{A}$ . Un exemple est illustré sur la figure 2.13.



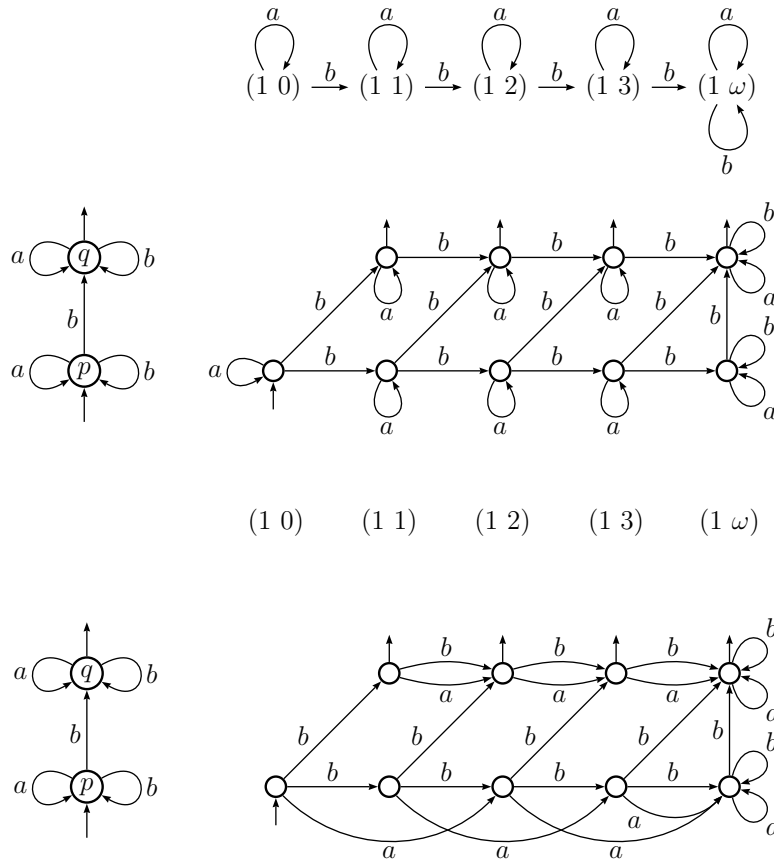


FIG. 2.13 – Au-dessus, le produit de l'automate booléen  $\mathcal{B}_1$  par une action. En dessous, un gauchissement de ce produit, résultat de la fonction  $\xi$  qui attribue à la transition  $p \xrightarrow{a} p$  le vecteur  $(0\ 2)$ , à la transition  $q \xrightarrow{a} q$  le vecteur  $(0\ 1)$ , et aux autres transitions le vecteur  $(0\ 0)$ . Dans ce gauchissement, les transitions de l'action ne sont pas illustrées, choix qui sera dorénavant adopté.

On a vu que, étant donné un morphisme  $\varrho : \Psi \rightarrow \Gamma$  d'une action  $\delta_\Psi$  sur une action  $\delta_\Gamma$ , on obtient des revêtements

$$\mathcal{A} \times \delta_\Psi \rightarrow \mathcal{A} \times \delta_\Gamma \rightarrow \mathcal{A}.$$

Si, de plus,  $\Gamma$  est un monoïde, d'opération  $\otimes$ , et  $\varrho$  est un *morphisme de monoïdes* de  $\Psi$  à  $\Gamma$ , le produit de  $\mathcal{A}$  gauchi par les compositions

$$\alpha\varrho : I \rightarrow \Gamma \quad \xi\varrho : E \rightarrow \Gamma$$

est un quotient de  $\mathcal{A} \times_{(\alpha, \xi)} \delta_\Psi$  :

**PROPRIÉTÉ 2.3.1** *Si  $\varrho : \Psi \rightarrow \Gamma$  est à la fois un morphisme d'actions et un morphisme de monoïdes, alors la fonction  $\varrho : (Q \times \Psi) \rightarrow (Q \times \Gamma)$  définie par*

$$\varrho : (p, \psi) \rightarrow (p, \psi\varrho)$$

*est un revêtement de  $\mathcal{A} \times_{(\alpha, \xi)} \delta_\Psi$  sur  $\mathcal{A} \times_{(\alpha\varrho, \xi\varrho)} \delta_\Gamma$ .*

**PREUVE** Il suffit de remarquer que pour tout  $\psi \in \Psi$ , tout  $m \in M$  et toute transition  $e \in E$ ,

$$(\psi \circ_\Psi m \oplus e\xi)\varrho = \psi\varrho \circ_\Gamma m \otimes e\xi\varrho. \quad \square$$

### 2.3.2 Cas d'un $\mathbb{K}$ -automate

Si  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  est un  $\mathbb{K}$ -automate, la définition de gauchissement doit changer pour être cohérent avec la définition de  $\mathbb{K}$ -revêtement, et va devenir ce que l'on appellera un  $\mathbb{K}$ -gauchissement de l'action  $\delta$ .

Un  $\mathbb{K}$ -gauchissement est défini à partir de deux fonctions dont les images sont des  $\mathbb{K}$ -polynômes sur  $\Psi$ ,

$$\alpha : Q \rightarrow \mathbb{K}\langle \Psi \rangle, \quad \xi : E \rightarrow \mathbb{K}\langle \Psi \rangle.$$

Afin que le produit de  $\mathcal{A}$  par  $\delta$  gauchi par ces fonctions soit un  $\mathbb{K}$ -revêtement de  $\mathcal{A}$ , on suppose que ces fonctions satisfont

$$\forall p \in Q \quad \sum_{\psi \in \Psi} \psi(p\alpha) = I_p \quad \forall e : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{I_a} q \quad \sum_{\psi \in \Psi} \psi(e\xi) = I \quad (2.9)$$

(des sommes finies, puisque  $p\alpha$  et  $e\xi$  sont des polynômes).

**DÉFINITION 2.3.2 ( $\mathbb{K}$ -GAUCHISSEMENT)** Soient  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  un  $\mathbb{K}$ -automate,  $(\Psi, \oplus)$  un monoïde,  $\delta : \Psi \times A^* \rightarrow \Psi$  une action, notée  $\circ$ , et  $\alpha : Q \rightarrow \mathbb{K}\langle \Psi \rangle$ ,  $\xi : E \rightarrow \mathbb{K}\langle \Psi \rangle$  des fonctions qui satisfont (2.9). Le produit de  $\mathcal{A}$  par  $\delta$  gauchi par  $\alpha$  et  $\xi$  est la partie accessible du  $\mathbb{K}$ -automate

$$\mathcal{B} = \langle Q \times \Psi, F, J, U \rangle$$

où les multiplicités initiales et finales sont définies par

$$\forall (p, \psi) \in Q \times \Psi \quad J_{(p,\psi)} = \psi(p\alpha) \quad U_{(p,\psi)} = T_p$$

et, pour chaque état  $(p, \psi)$  et chaque transition

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{la} q$$

l'ensemble des transitions sortantes de  $(p, \psi)$  qui se projettent sur  $e$  est défini par

$$\forall \gamma \in \Psi \quad \text{si } \gamma(e\xi) \neq 0_{\mathbb{K}} \quad \text{alors } (p, \psi) \xrightarrow[\mathcal{B}]{[\gamma(e\xi)]a} (q, (\psi \circ a) \oplus \gamma). \quad \triangle$$

**EXEMPLE 2.3.1** On illustre sur la figure 2.14 un  $\mathbb{N}$ -gauchissement pour un produit du  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{C}_1$  par une action. Il se projette dans la première composante sur  $\mathcal{C}_1$  et dans la seconde sur l'ensemble des vecteurs sur  $\mathbb{N}$  indicés par  $Q = \{p, q\}$ , dans cet ordre.

La fonction  $\alpha$  attribue le vecteur  $(1 \ 0)$  au seul état initial de  $\mathcal{A}$ ,  $p$ . Pour les autres états,  $\alpha$  est le polynôme nul. Donc, l'état initial du revêtement est le couple  $(p, (1 \ 0))$ , avec multiplicité initiale 1 (le coefficient du monôme correspondant au vecteur  $(0 \ 0)$  dans  $p\alpha$ ).

La fonction de gauchissement des transitions  $\xi$  attribue à la transition  $q \xrightarrow{2a} q$  le polynôme dont le support est formé par les vecteurs  $(0 \ 0)$  et  $(0 \ 1)$ , et où le coefficient pour les deux monômes est égal à 1. Pour les autres transitions,  $\xi$  est le monôme dont le support est le vecteur  $(0 \ 0)$  et le coefficient est égal à la multiplicité de la transition. Ainsi, chaque état de la forme  $(q, (x \ y))$  du revêtement a trois transitions sortantes, deux étiquetées par  $a$  avec multiplicité 1 et une par  $b$  avec multiplicité 1. Par exemple, les extrémités des deux transitions sortantes de  $(q, (1 \ 1))$  qui se projettent sur  $q \xrightarrow[\mathcal{C}_1]{2a} q$  sont définies par

$$(1 \ 1) \diamond a\mu \oplus (0 \ 0) = (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (0 \ 0) = (1 \ 2),$$

$$(1 \ 1) \diamond a\mu \oplus (0 \ 1) = (1 \ 3),$$

et celle qui se projette sur  $q \xrightarrow[\mathcal{C}_1]{2b} q$  est définie par

$$(1 \ 1) \diamond b\mu \oplus (0 \ 0) = (1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus (0 \ 0) = (1 \ 3).$$

Un deuxième  $\mathbb{N}$ -gauchissement est illustré sur cette figure. La fonction  $\alpha$  attribue le vecteur  $(0\ 0)$  au seul état initial de  $\mathcal{A}$ ,  $p$ . Pour les autres états,  $\alpha$  est le polynôme nul. Donc, l'état initial du revêtement est le couple  $(p, (0\ 0))$ , avec multiplicité initiale 1 (le coefficient du monôme correspondant au vecteur  $(0\ 0)$  dans  $p\alpha$ ). La fonction de gauchissement  $\xi$  attribue à la transition sortante de  $p$  étiquetée par  $a$ , et pour la transition  $p \xrightarrow{b} p$  le polynôme formé par le vecteur  $(0\ 0)$  avec coefficient 1. Pour la transition  $p \xrightarrow{b} q$ ,  $\xi$  donne le polynôme formé par le vecteur  $(1\ 0)$  avec coefficient 1. Pour chacune des deux transitions sortantes de  $q$ , la fonction  $\xi$  attribue le polynôme dont le support contient deux vecteurs,  $(0\ 0)$  et  $(0\ 1)$ . Ainsi, chaque état de la forme  $(q, (x\ y))$  du revêtement a quatre transitions sortantes, deux étiquetées par  $a$  et deux par  $b$ , toutes avec multiplicité 1.  $\triangle$

Le support du produit d'un  $\mathbb{K}$ -automate  $\mathcal{A}$  par un  $\mathbb{K}$ -gauchissement n'est pas forcément un revêtement du support de  $\mathcal{A}$  : il se peut que plusieurs transitions de ce produit se projettent sur une même transition de  $\mathcal{A}$ . Mais la somme des multiplicités de ces transitions se conserve, ce qui est une conséquence de la condition faite sur la fonction  $\xi$  en (2.9). Les multiplicités sont aussi conservées dans les états initiaux, et on a alors

**PROPRIÉTÉ 2.3.2** *Le produit de  $\mathcal{A}$  par une action avec un  $\mathbb{K}$ -gauchissement est un  $\mathbb{K}$ -revêtement de  $\mathcal{A}$ .*  $\square$

Comme pour le cas booléen, un morphisme  $\rho : \Psi \rightarrow \Gamma$  d'une action  $\delta_\Psi : \Psi \times A^* \rightarrow \Psi$  sur une action  $\delta_\Gamma : \Gamma \times A^* \rightarrow \Gamma$  induit un gauchissement de l'action  $\delta_\Gamma$ , et un  $\mathbb{K}$ -quotient du produit gauchi de  $\mathcal{A}$  par  $\delta_\Psi$ .

Ce nouveau  $\mathbb{K}$ -gauchissement est le résultat des fonctions

$$\alpha_\rho : I \rightarrow \mathbb{K}\langle \Gamma \rangle \quad \xi_\rho : E \rightarrow \mathbb{K}\langle \Gamma \rangle$$

définies par

$$\begin{aligned} \forall p \in Q \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma(p\alpha_\rho) &= \sum_{\psi \in \Psi, \psi\rho = \gamma} \psi(p\alpha) \\ \forall e \in E \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma(p\xi_\rho) &= \sum_{\psi \in \Psi, \psi\rho = \gamma} \psi(e\xi). \end{aligned}$$

L'image de  $p\alpha_\varrho$  est un « quotient » du polynôme  $p\alpha$ , où le coefficient d'un élément  $\gamma \in \Gamma$  dans  $p\alpha_\varrho$  est la somme des coefficients dans  $p\alpha$  des éléments dont l'image par  $\varrho$  est  $\gamma$ . On a alors

$$\forall p \in Q \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(p\alpha_\varrho) = \sum_{\psi \in \Psi} \psi(p\alpha).$$

De façon similaire, on a que, pour toute transition  $e$  de  $\mathcal{A}$ ,

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma(e\xi_\varrho) = \sum_{\psi \in \Psi} \psi(e\xi).$$

Ces remarques permettent de montrer

**PROPRIÉTÉ 2.3.3** *Soient  $\mathcal{B}$  le produit de  $\mathcal{A}$  par un  $\mathbb{K}$ -gauchissement d'une action  $\delta_\Psi$ , et  $\mathcal{C}$  le produit de  $\mathcal{A}$  par un  $\mathbb{K}$ -gauchissement de l'action  $\delta_\Gamma$  induit par une fonction  $\varrho : \Psi \rightarrow \Gamma$ , à la fois un morphisme d'actions et un morphisme de monoïdes. La fonction  $\varrho : (Q \times \Psi) \rightarrow (Q \times \Gamma)$  définie par*

$$\varrho : (p, \psi) \rightarrow (p, \psi\varrho)$$

*fait de  $\mathcal{B}$  un  $\mathbb{K}$ -revêtement de  $\mathcal{C}$ .* □

Un exemple est illustré sur la figure 2.15.

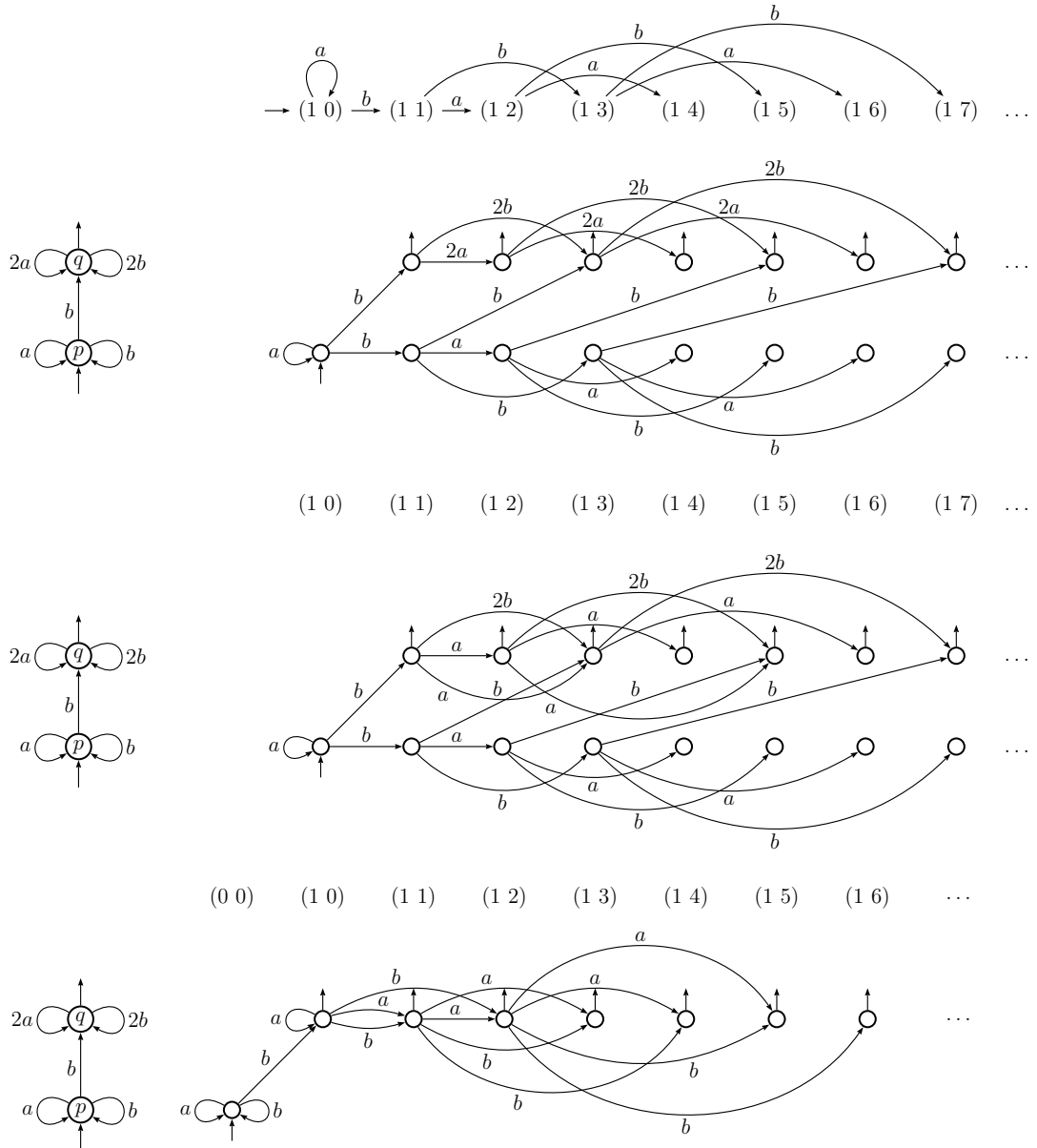


FIG. 2.14 – Produit de  $\mathcal{C}_1$  par l'action  $\gamma_\mu$  et deux N-gauchissements (cf. exemple 2.3.1).

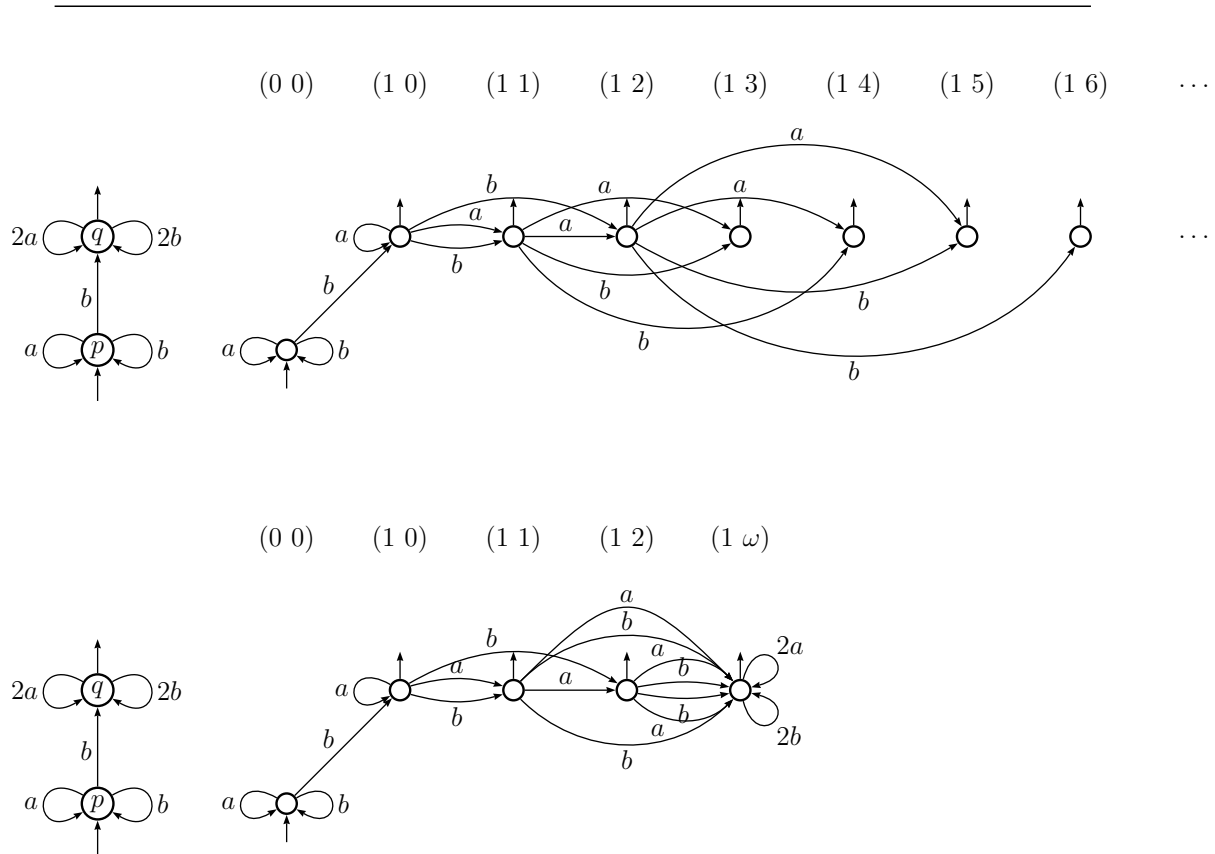


FIG. 2.15 – Un  $\mathbb{N}$ -gauchissement du produit de  $\mathcal{C}_1$  par l'action  $\gamma_\mu$  et un  $\mathbb{N}$ -quotient de ce gauchissement par le morphisme  $\eta_k$  avec  $k = 3$ .

---

### 2.3.3 Uniformisation des relations déterministes

Uniformiser une relation  $\tau$  issue d'une famille de relations considérée consiste à trouver dans la même famille une fonction dont le domaine coïncide avec celui de  $\tau$  et qui envoie chaque élément  $x$  de son domaine à un élément de  $x\tau$ . Une telle fonction est ce que l'on appelle une *uniformisation* de  $\tau$ .

Dans son traité, Eilenberg établit (avec son *théorème de transversale rationnelle*) que toute relation rationnelle peut être uniformisée par une fonction rationnelle :

THÉORÈME DE L'UNIFORMISATION RATIONNELLE (EILENBERG 1974)

Toute relation rationnelle admet une uniformisation rationnelle.

La preuve la plus moderne pour ce résultat est celle de J. Sakarovitch [37], qui le tire du revêtement de Schützenberger (travail auquel nous renvoyons le lecteur pour un historique du sujet, en effet antérieur au travail d'Eilenberg).

Plus tard, H. Johnson établit le même pour la sous-famille des relations qui peuvent être réalisées par un transducteur dont la lecture est déterministe dans les deux bandes — les relations rationnelles déterministes [26, 27] :

THÉORÈME 2.3.1 (JOHNSON 1985) *Toute relation rationnelle déterministe peut être uniformisée par une fonction rationnelle déterministe.*

Le résultat de Johnson est en effet plus fin. Soit  $<$  un ordre lexicographique sur  $B^*$ . La *sélection lexicographique* d'une relation  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  est la fonction partielle  $\tau_{\text{lex}}$  qui envoie chaque mot  $x \in A^*$  au mot le plus petit dans  $x\tau$ , si un tel mot existe (rappelons que l'ordre lexicographique n'est pas un bon ordre). Il n'est pas vrai en général que la sélection lexicographique d'une relation rationnelle est une fonction *rationnelle*, mais pour les relations déterministes Johnson a montré le suivant :

PROPOSITION 2.3.1 (JOHNSON 1985) *La sélection lexicographique d'une relation rationnelle déterministe est une fonction rationnelle déterministe.*

Moyennant une construction qui permet d'approcher toute relation déterministe par une autre d'image finie, on a que le théorème 2.3.1 est une conséquence de cette proposition.



Notre but dans cette section est de montrer que la preuve de Johnson pour la proposition 2.3.1 consiste à construire un produit d'un transducteur par une action gauche.

Commençons avec la définition de transducteur déterministe.

**DÉFINITION 2.3.3 (TRANSDUCTEUR DÉTERMINISTE)** Soient  $A_\$$  et  $B_\$$  les alphabets  $A$  et  $B$  avec un nouveau symbole  $\$$  rajouté. Un *transducteur déterministe* est un transducteur

$$\mathcal{T} = \langle Q, A_\$^* \times B_\$^*, E, \{i\}, T \rangle$$

avec un seul état initial  $i$  et qui possède une partition des états

$$Q = Q_A \cup Q_B$$

tel que, pour chaque  $q \in Q_A$  ( $q \in Q_B$ ), les transitions sortantes de  $q$  sont étiquetées par des éléments de  $A_\$ \times \{1_{B^*}\}$  ( $\{1_{A^*}\} \times B_\$$ ), et des transitions distinctes n'ont pas la même étiquette.  $\triangle$

Le comportement de  $\mathcal{T}$  est un sous-ensemble de  $A_\$^* \times B_\$^*$ ; mais on voudra que le symbole  $\$$  ait seulement un rôle de fin de bande. On définit alors le *\\$-comportement* de  $\mathcal{T}$  comme la relation

$$|\mathcal{T}|_\$ = \{(u, v) \in A^* \times B^* \mid (u\$, v\$) \in |\mathcal{T}|\}$$

et nous dirons qu'une relation rationnelle est *déterministe* si elle est le  $\$$ -comportement d'un transducteur déterministe.

Il est connu que l'absence du symbole de fin de bande diminue le pouvoir de ces machines [34], mais on peut supposer que

$$|\mathcal{T}| \subseteq A^*\$ \times B^*\$ \quad \text{et} \quad T \subseteq Q_A.$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.16.

La preuve de Johnson est la construction d'un revêtement de  $\mathcal{T}$  qui contient un sous-transducteur  $\mathcal{V}$  — une immersion sur  $\mathcal{T}$ , donc — dont les calculs réussis sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{T}$  qui écrivent les mots les plus petits des images par la relation réalisée par  $\mathcal{T}$ . Le fait que  $\mathcal{V}$  soit une immersion sur  $\mathcal{T}$  est fondamental puisque toute immersion sur un transducteur déterministe est également un transducteur déterministe.

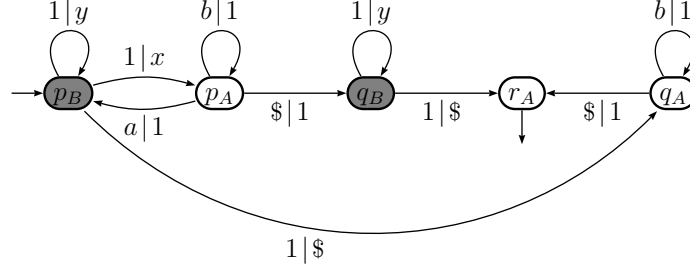


FIG. 2.16 – Un transducteur déterministe (tiré de [34]) sur les alphabets  $A = \{a, b\}$  et  $B = \{x, y\}$ . Les couleurs des états indiquent la partition de  $Q$  en  $Q_A$  et  $Q_B$ . Le  $\$$ -comportement de ce transducteur est la relation déterministe  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  définie comme suit : pour tout  $u \in A^*$ ,  $v \in u\tau$  si, et seulement si,  $|u|_a \leq |v|_x \leq |u|_a + 1$ .

Afin de définir ce revêtement, considérons le morphisme

$$\sigma : A_{\$}^* \rightarrow \mathbb{B}^{Q_A \times Q_A}$$

défini comme suit :

$$\forall u \in A_{\$}^* \quad \forall p, q \in Q \quad (u\sigma)_{pq} = 1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad p \xrightarrow[u]{\$} q.$$

Avec ce morphisme on définit une action

$$\mathbb{B}^{Q_A} \times (A_{\$}^* \times B_{\$}^*) \rightarrow \mathbb{B}^{Q_A}$$

notée  $\circ$  par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{B}^{Q_A} \quad \forall (u, v) \in A_{\$}^* \times B_{\$}^* \quad \mathbf{v} \circ (u, v) = \mathbf{v} \cdot u\sigma$$

(donc, la restriction de cette action à  $\{1_{A^*}\} \times B_{\$}^*$  est l'identité).

Le revêtement de Johnson est un produit de  $\mathcal{T}$  par un gauchissement de cette action.

La fonction de gauchissement  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{B}^{Q_A}$  attribue le vecteur zéro,  $\mathbf{v}_0$ , à l'unique état initial de  $\mathcal{T}$ .

La fonction de gauchissement de transitions  $\xi : E \rightarrow \mathbb{B}^{Q_A}$  donne pour toute transition sortante d'un état de  $Q_A$  le vecteur zéro. Pour la définir dans les transitions sortantes des états de  $Q_B$ , considérons l'ordre  $<$  étendu à  $B_{\S}$  en mettant  $\$ < b$  pour tout  $b \in B$ . Pour toute transition

$$e : p \xrightarrow{\mathcal{T}}^{1_{A^*|b}} q \quad (p \in Q_B)$$

$e\xi$  est le vecteur dans  $\mathbb{B}^{Q_A}$  défini par

$$\forall r \in Q \quad (e\xi)_r = 1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad p \xrightarrow{\mathcal{T}}^{1_{A^*|b'u}} r \quad \text{avec } b' \in B_{\S} \text{ et } b' < b.$$

Ainsi, le revêtement de Johnson,  $\mathcal{U}$ , est la partie accessible d'un transducteur déterministe de la forme

$$\langle Q \times \mathbb{B}^{Q_A}, A_{\S}^* \times B_{\S}^*, F, (i, \mathbf{v}_0), T \times \mathbb{B}^{Q_A} \rangle.$$

Dans tout état  $(p, \mathbf{v})$  de  $\mathcal{U}$ , les transitions sortantes sont en bijection avec les transitions sortantes de  $p$  dans  $\mathcal{T}$  : si  $p \in Q_A$ , alors, pour toute transition

$$p \xrightarrow{\mathcal{T}}^{a|1_{B^*}} q$$

$\mathcal{U}$  a une transition

$$(p, \mathbf{v}) \xrightarrow{\mathcal{U}}^{a|1_{B^*}} (q, \mathbf{v} \cdot a\sigma);$$

si  $p \in Q_B$ , pour toute transition

$$e : p \xrightarrow{\mathcal{T}}^{1_{A^*|b}} q$$

$\mathcal{U}$  a une transition

$$(p, \mathbf{v}) \xrightarrow{\mathcal{U}}^{1_{A^*|b}} (q, \mathbf{v} + e\xi).$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.17.

La propriété suivante, qui se démontre par induction sur la longueur des chemins de  $\mathcal{T}$ , est l'argument principal de la preuve du théorème :

PROPRIÉTÉ 2.3.4 *Pour tout chemin*

$$(i, \mathbf{v}_0) \xrightarrow{\mathcal{U}}^{u|w} (p, \mathbf{w})$$

le vecteur  $\mathbf{w}$  satisfait : pour tout  $q \in Q_A$ ,  $w_q = 1$  si, et seulement, si,

$$i \xrightarrow{\mathcal{T}}^{u|w'} q \quad \text{avec} \quad w' < w. \quad \square$$

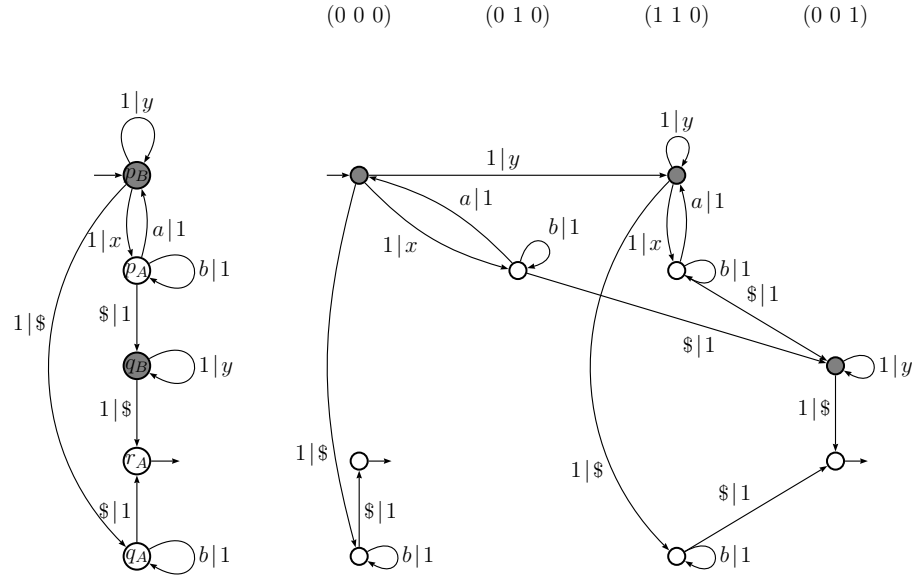


FIG. 2.17 – À gauche, le transducteur déterministe défini à la figure 2.16. À droite, le revêtement de Johnson avec l'ordre  $\$ < x < y$ . Les vecteurs sont indicés par  $Q_A = \{p_A, q_A, r_A\}$ , dans cet ordre.

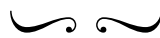
On obtient le sous-transducteur  $\mathcal{V}$  en *effaçant* la propriété d'être final de quelques états de  $\mathcal{U}$  : on ne considère final que les états

$$(p, \mathbf{v}) \in T \times \mathbb{B}^{Q_A}$$

tels que

$$\forall r \in T \quad \mathbf{v}_r = 0.$$

Il découle de la propriété 2.3.4 qu'un calcul de  $\mathcal{V}$  est réussi si, et seulement si, sa projection sur  $\mathcal{T}$  est un calcul réussi qui écrit le mot le plus petit dans l'image de son entrée par la relation réalisée par  $\mathcal{T}$ .



## 2.4 Le gauchissement lexicographique

Comme discuté dans l'introduction de ce chapitre, les revêtements lexicographiques sont des revêtements d'automates construits à partir d'un ordre sur les calculs de l'automate induit par un ordre fixé sur les transitions. Nous allons dans cette section en présenter des instances pour trois types d'automates : automates booléens,  $\mathbb{N}$ -automates et transducteurs temps réel.

Intuitivement, un revêtement lexicographique est un produit de l'automate par une action gauchie, où la projection dans la seconde composante décrit, pour chaque calcul de l'automate de départ, une information sur les extrémités de ceux qui sont plus petits. Dans chaque transition du revêtement, la fonction de gauchissement actualise cette information avec les extrémités des transitions qui sont plus petites que celle « lue » dans la première composante. À l'aide de l'information contenue dans les états finaux du revêtement, il sera possible, en effaçant la qualité d'être finaux ou en changeant la multiplicité de quelques-uns de ces états, d'obtenir un sous-automate qui choisit certains chemins selon un critère basé sur l'ordre lexicographique.

On pourrait vouloir imaginer une définition générale de revêtement lexicographique pour un automate sur un monoïde quelconque. Une telle généralisation ne saurait pourtant apporter les propriétés dont on aura besoin. On voudra, par exemple, construire un revêtement qui contient pour chaque élément dans le comportement de l'automate de départ le calcul réussi le plus petit étiqueté par cet élément. Ce revêtement représente donc une transversale pour le morphisme d'étiquetage. En se traitant d'automates sur un monoïde quelconque, on peut trouver des exemples de morphismes pour lesquels aucune transversale rationnelle n'est possible.

### 2.4.1 Construction d'un automate non ambigu

Le premier exemple de revêtement lexicographique que l'on va présenter est une construction pour les automates booléens sur un alphabet. Avec ce revêtement, on obtiendra une autre preuve pour le théorème 2.2.1 — pour tout automate booléen avec  $n$  états, il existe un automate équivalent avec au plus  $n2^n$  états qui est non ambigu et qui est une immersion dans le premier.

### Ordre lexicographique des chemins

Soit  $\mathcal{A} = \langle Q, A, E, I, T \rangle$  un automate booléen. Si on fixe un ordre  $\prec_e$  sur  $E$ , l'ordre lexicographique engendré dans le monoïde libre  $E^*$  est un ordre total. En particulier les chemins de  $\mathcal{A}$ , qui sont des mots sur  $E$ , deviennent totalement ordonnés.

Pour la construction du revêtement lexicographique de  $\mathcal{A}$ , la totalité de l'ordre dans  $E^*$  n'est pas nécessaire. D'une part, les mots de  $E^*$  qui ne forment pas de chemins n'ont aucun rôle dans cette construction, donc il est inutile, et même gênant, de les comparer avec les chemins de  $\mathcal{A}$ . De plus, on ne voudra comparer que des chemins qui ont la même étiquette.

On va alors considérer que  $\prec_e$  est un ordre partiel sur  $E$  où deux transitions sont comparables si, et seulement si, elles ont la même étiquette et la même origine. On définit l'ordre partiel engendré par  $\prec_e$  sur les chemins de  $\mathcal{A}$ , aussi noté  $\prec_e$ , comme suit : étant donnés deux chemins

$$c = e_1 \dots e_n, \quad d = f_1 \dots f_n \quad (e_i, f_i \in E \text{ pour } 1 \leq i \leq n)$$

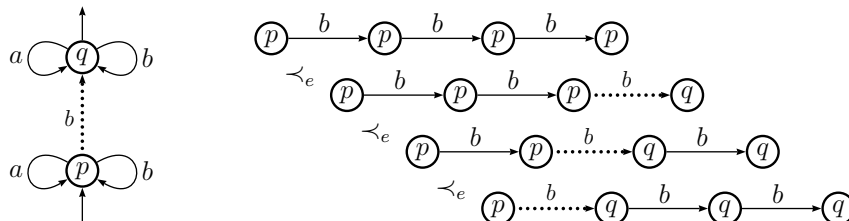
on pose que

$$c \prec_e d$$

si, et seulement si,  $c$  et  $d$  ont la même étiquette et

$$\exists l \quad \text{tel que} \quad e_i = f_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq l-1 \quad \text{et} \quad e_l \prec_e f_l.$$

Dans l'automate illustré dans l'introduction de ce chapitre et reproduit ci-dessous, seulement deux transitions sont comparables, à savoir, les transitions étiquetées par  $b$  et qui commencent dans l'état  $p$ .



Si deux chemins sont comparables par  $\prec_e$ , alors ils commencent dans un même état. On voudra aussi pouvoir comparer des chemins commençant en des états *initiaux* différents. Pour ce faire, on va fixer un ordre  $\prec_I$  entre les états initiaux et définir un nouvel ordre,  $\prec$ , qui étend  $\prec_e$  comme suit : étant donnés deux chemins  $c$  et  $d$  de  $\mathcal{A}$  avec la même étiquette et qui commencent en des états initiaux, on pose

$$c \prec d$$

si, et seulement si,

$$c_I \prec_I d_I \quad \text{ou} \quad c_I = d_I \quad \text{et} \quad c \prec_e d.$$

On dira que  $\prec$  est l'*ordre lexicographique des chemins* de  $\mathcal{A}$ .

### Le revêtement lexicographique d'un automate booléen

Le revêtement lexicographique de  $\mathcal{A}$  basé sur l'ordre  $\prec$ , que l'on décrira ci-dessous, permettra d'établir la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.4.1** *Soit  $\mathcal{A}$  un automate booléen avec  $n$  états et  $\prec$  un ordre lexicographique entre ses chemins. Il existe un revêtement de  $\mathcal{A}$  avec ou plus  $n2^n$  états qui contient un sous-automate  $\mathcal{C}$  tel que un calcul  $C$  dans  $\mathcal{B}$  est réussi si, et seulement si, la projection de  $C$  dans  $\mathcal{A}$  est un calcul minimal (selon  $\prec$ ).*

Le théorème 2.2.1 est un corollaire de cette proposition. En effet, pour chaque mot  $u$  dans le comportement de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  contient exactement un calcul réussi étiqueté par  $u$  : celui qui se projette dans le calcul réussi de  $\mathcal{A}$  le plus petit selon  $\prec$  étiqueté par  $u$ .

Le revêtement lexicographique de  $\mathcal{A}$  est un produit de cet automate par l'action  $\delta_{\text{det}} : \mathbb{B}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{B}^Q$  qui définit les transitions du déterminisé de  $\mathcal{A}$ ,

$$\forall v \in \mathbb{B}^Q \quad \forall a \in A \quad v \circ a = v \cdot a\mu$$

(où  $\mu$  est le morphisme associé à  $\mathcal{A}$ ) gauchie par deux fonctions

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{B}^Q \quad \xi : E \rightarrow \mathbb{B}^Q.$$

La fonction  $\alpha$ , qui définit les états initiaux de  $\mathcal{B}$ , associe chaque état initial de  $\mathcal{A}$  au vecteur booléen caractéristique des états initiaux qui sont plus petits selon l'ordre  $\prec_I$  :

$$\forall p \in I \quad \forall r \in Q \quad (p\alpha)_r = 1 \quad \text{ssi} \quad r \in I \quad \text{et} \quad r \prec_I p.$$

La fonction  $\xi$  associe chaque transition  $e$  de  $\mathcal{A}$  au vecteur caractéristique des extrémités des transitions plus petites que  $e$  avec la même étiquette :

$$\forall p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q \in E \quad \forall r \in Q \quad (e\xi)_r = 1 \quad \text{ssi} \quad f : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} r \quad \text{et} \quad f \prec_e e.$$

Alors, ce revêtement est la partie accessible de l'automate booléen

$$\mathcal{B} = \langle Q \times \mathbb{B}^Q, A, F, J, T \times \mathbb{B}^Q \rangle$$

où l'ensemble des états initiaux est égal à

$$J = \{(i, i\alpha) \mid i \in I\}$$

et les transitions sont définies de la manière suivante, où  $\oplus$  est l'opération dans  $\mathbb{B}^Q$  de somme de vecteurs : pour tout état  $(p, \mathbf{v})$ , les transitions sortantes de  $(p, \mathbf{v})$  sont en bijection avec celles de  $p$ ,

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q \quad \Longrightarrow \quad (p, \mathbf{v}) \xrightarrow[\mathcal{B}]{a} (q, \mathbf{v} \cdot a\mu \oplus e\xi).$$

**EXEMPLE 2.4.1** On illustre sur la figure 2.18 un revêtement lexicographique pour l'automate booléen  $\mathcal{B}_1$ . La première composante de ce revêtement est l'automate  $\mathcal{B}_1$ , dessiné à gauche, la deuxième est l'ensemble de vecteurs booléens indexés par  $Q = \{p, q\}$ , dans cet ordre.

Dans  $\mathcal{B}_1$ , il y a trois transitions sortantes de l'état  $p$ ,

$$e_1 : p \xrightarrow[\mathcal{B}_1]{a} p, \quad e_2 : p \xrightarrow[\mathcal{B}_1]{b} p, \quad e_3 : p \xrightarrow[\mathcal{B}_1]{b} q.$$

Comme  $e_1$  est la seule transition sortante de  $p$  étiquetée par  $a$ , on a, pour n'importe quel ordre entre les transitions,

$$e_1\xi = (0 \ 0).$$

Posons l'ordre

$$e_2 \prec_e e_3.$$



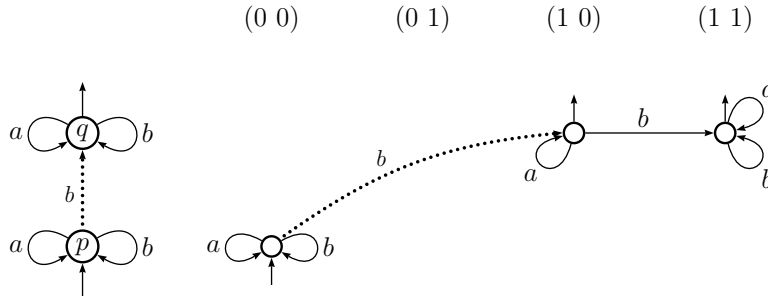


FIG. 2.18 – Un revêtement lexicographique de l'automate  $\mathcal{B}_1$ . La transition pointillée est la plus grande selon l'ordre  $\prec_e$ .

Alors on a que

$$e_2\xi = (0\ 0), \quad e_3\xi = (1\ 0).$$

La fonction  $\alpha$  attribuée à l'unique état initial de  $\mathcal{B}_1$  le vecteur  $(0\ 0)$ . Donc l'état initial de  $\mathcal{B}$  est le couple

$$(p, (0\ 0)).$$

Il y a trois transitions sortantes de cet état, qui se projettent sur  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ , respectivement :

$$(p, (0\ 0)) \xrightarrow{\mathcal{B}}^a (p, (0\ 0)), \quad (p, (0\ 0)) \xrightarrow{\mathcal{B}}^b (p, (0\ 0)), \quad (p, (0\ 0)) \xrightarrow{\mathcal{B}}^a (q, (1\ 0)).$$

L'extrémité de la troisième, par exemple, est le résultat de l'opération

$$(0\ 0) \circ a\mu \oplus e_3\xi = (0\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus (1\ 0) = (1\ 0). \quad \triangle$$

La propriété suivante décrit, pour chaque calcul réussi du revêtement lexicographique de  $\mathcal{A}$ , l'information fournie par le vecteur dans l'extrémité du calcul. C'est à partir de cette information que l'on pourra extraire du revêtement lexicographique un sous-automate qui contient, pour chaque mot dans le comportement de  $\mathcal{A}$ , exactement un calcul réussi. La preuve est par induction dans la longueur des chemins.

PROPRIÉTÉ 2.4.1 *Soit*

$$C : (p, p\alpha) \xrightarrow{\mathcal{B}} (q, \mathbf{w})$$

*un calcul de  $\mathcal{B}$  qui commence dans un état initial; soit*

$$c : p \xrightarrow{\mathcal{A}} q$$

*sa projection sur  $\mathcal{A}$ . Pour tout  $r \in Q$ ,*

$$\mathbf{w}_r = 1 \quad \text{ssi} \quad d : p' \xrightarrow{\mathcal{A}} r \quad \text{et} \quad d \prec c. \quad \square$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.4.1 Le sous-automate  $\mathcal{C}$  est obtenu en effaçant la qualité d'être final de quelques états finaux de  $\mathcal{B}$  :

$$(p, \mathbf{v}) \text{ est final dans } \mathcal{C} \quad \text{ssi} \quad p \text{ est final} \quad \text{et} \quad \forall t \in T \quad \mathbf{v}_t = 0.$$

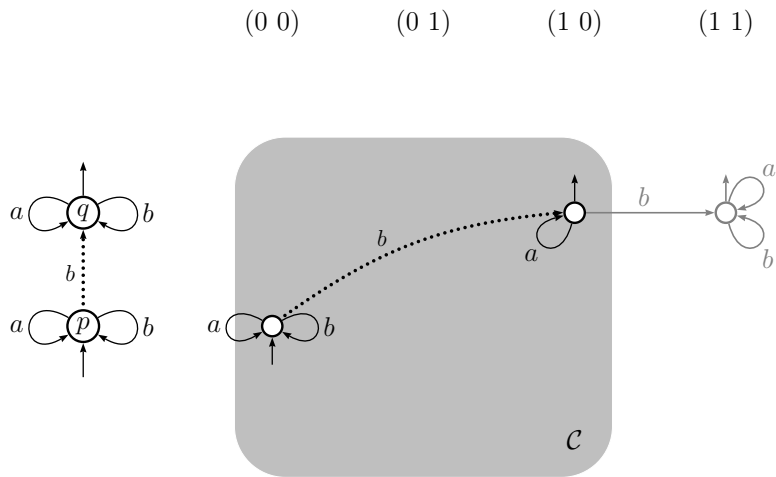
Puisque les calculs réussis de  $\mathcal{B}$  sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{A}$ , l'ordre lexicographique des calculs de  $\mathcal{A}$  induit un ordre sur les calculs de  $\mathcal{B}$ . Il vient de la propriété 2.4.1 qu'un calcul réussi  $C$  dans  $\mathcal{B}$  est réussi dans  $\mathcal{C}$  si, et seulement si, il n'y a pas d'autre calcul réussi plus petit avec la même étiquette, c'est-à-dire, si  $C$  est minimal.  $\square$

On illustre sur la figure 2.19 le sous-automate non ambigu pour deux revêtements lexicographiques de  $\mathcal{B}_1$ . Le premier revêtement est celui décrit à l'exemple 2.4.1, le second est obtenu en changeant l'ordre  $\prec_e$  dans les transitions.

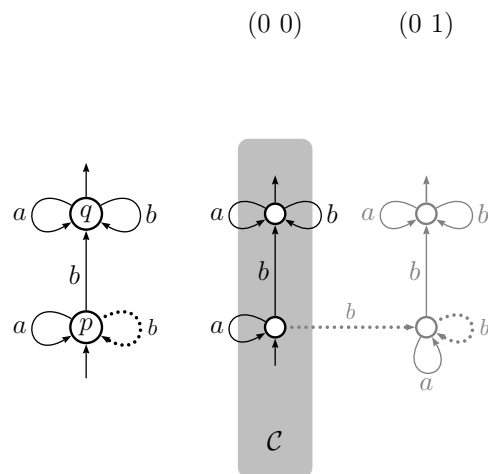
## 2.4.2 Le théorème du paludier glouton

Si  $\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle$  est un  $\mathbb{N}$ -automate sur un alphabet  $A$ , la définition de revêtement lexicographique pour  $\mathcal{A}$  suit le même principe de la construction pour un automate booléen, mais elle sera basée sur la notion de  $\mathbb{N}$ -gauchissement. Intuitivement, le gauchissement réalise un « éclatement » des transitions de  $\mathcal{A}$ , permettant de voir un chemin avec multiplicité  $l$  comme  $l$  chemins distincts (avec multiplicité 1) et les comparer.

A l'aide de ce revêtement, on construira un automate qui réalise la différence entre une série  $\mathbb{N}$ -rationnelle et un entier, opération définie comme



(a) Avec un ordre...



(b) ... et avec un autre.

FIG. 2.19 – Extraction d'un sous-automate non ambigu et équivalent des revêtements lexicographiques de  $\mathcal{B}_1$  (cf. figure 1.1) correspondants à deux ordres distincts sur les transitions commençant dans l'état  $p$ . Dans chaque figure, la transition pointillée est la plus grande.

suit : étant donné une  $\mathbb{N}$ -série  $\mathbf{s} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$  et un entier  $k > 0$ , la différence entre  $\mathbf{s}$  et  $k$ , notée  $\mathbf{s} \dot{-} k$ , est la  $\mathbb{N}$ -série

$$\forall u \in A^*, \quad u(\mathbf{s} \dot{-} k) = \begin{cases} us - k & \text{si } us \geq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

Il est bien connu que si  $s$  est une série rationnelle, alors  $\mathbf{s} \dot{-} k$  l'est aussi. Ce résultat, dû à Schützenberger, peut être déduit d'une application itérée du théorème de la transversale d'Eilenberg [13], ou du revêtement de Schützenberger [39]. L'inconvénient de cette approche est la taille de l'automate obtenu : comme de tels méthodes peuvent conduire à la construction d'un nombre exponentiel d'états (dans le nombre d'états de l'automate de départ), il n'est pas évident si on peut espérer mieux qu'une tour de  $k$  exponentielles pour la taille de l'automate réalisant  $\mathbf{s} \dot{-} k$ .

Avec le revêtement lexicographique, on obtiendra un automate « concis » qui réalise cette différence, et en effet plus que cela :

#### THÉORÈME DU PALUDIER GLOUTON

Soit  $\mathcal{A}$  un  $\mathbb{N}$ -automate avec  $n$  états, qui réalise une série  $\mathbf{s}$ . Il existe un  $\mathbb{N}$ -revêtement infini  $\mathcal{L}$  de  $\mathcal{A}$  tel que pour tout entier  $k > 0$ , il existe un  $\mathbb{N}$ -quotient fini  $\mathcal{L}^{(k)}$  de  $\mathcal{L}$  ayant les propriétés suivantes :

1.  $\mathcal{L}^{(k)}$  est un  $\mathbb{N}$ -revêtement de  $\mathcal{A}$  avec au plus  $n(k+1)^n$  états ;
2. pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < k$ , il existe un sous-automate non ambigu  $\mathcal{S}^{(k,i)}$  de  $\mathcal{L}^{(k)}$  qui reconnaît la série caractéristique du support de  $\mathbf{s} \dot{-} i$  ;
3. il existe un sous-automate  $\mathcal{P}^{(k)}$  de  $\mathcal{L}^{(k)}$  dont comportement est  $\mathbf{s} \dot{-} k$ .

Rappelons que le *support* d'une série  $\mathbf{s}$  est le langage contenant exactement les mots dont la multiplicité est distincte de 0 ; on le note  $\mathbf{supp} \mathbf{s}$ . La *série caractéristique* de  $\mathbf{supp} \mathbf{s}$ , notée  $\underline{\mathbf{supp}} \mathbf{s}$ , est la série non ambiguë (à multiplicités dans  $\mathbb{N}$ ) qui attribue 1 exactement aux mots dans  $\mathbf{supp} \mathbf{s}$ .

L'idée derrière le revêtement  $\mathcal{L}$  est de compter, pour chaque calcul réussi de  $\mathcal{A}$ , les multiplicités des calculs réussis plus petits avec la même étiquette, selon un ordre lexicographique dans les chemins (et non la somme des multiplicités de tous les calculs, comme fait dans la construction présentée à la section 2.2.4 pour les restrictions d'une série  $\mathbb{N}$ -rationnelle.). Le quotient  $\mathcal{L}^{(k)}$  suit le même principe, sauf en ce que sa capacité de calcul est bornée et il ne peut compter que jusqu'à  $k - 1$ .

Posons  $\mathcal{A} = (Q, E, I, T)$ , et soit  $\mu : A^* \rightarrow \mathbb{N}^{Q \times Q}$  le morphisme associé à cet automate. Soit  $\prec_I$  un ordre sur les états de  $\mathcal{A}$  et  $\prec_e$  un ordre sur  $E$  tel que deux transitions sont comparables si, et seulement si, elles ont la même origine et le même support.

Le revêtement lexicographique de  $\mathcal{A}$  (basé sur les ordres fixés  $\prec_I$  et  $\prec_e$ ) est un produit de  $\mathcal{A}$  par l'action  $\gamma_\mu : \mathbb{N}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{N}^Q$  définie à l'exemple 2.2.2,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{N}^Q \quad \forall a \in A \quad \mathbf{v} \diamond a = \mathbf{v} \cdot a\mu,$$

gauchi par par deux fonctions

$$\alpha : Q \rightarrow \mathbb{N}\langle \mathbb{N}^Q \rangle, \quad \xi : E \rightarrow \mathbb{N}\langle \mathbb{N}^Q \rangle.$$

La fonction  $\alpha$ , qui définit les états initiaux du revêtement  $\mathcal{L}$ , attribue à chaque état  $p$  de  $\mathcal{A}$  un polynôme dont tous les coefficients sont égaux à 1 et le support contient  $I_p$  vecteurs :  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^Q$  appartient à ce support si, et seulement si,

$$\mathbf{v}_p < I_p \quad \text{et} \quad \forall q \neq p \quad \mathbf{v}_q = \begin{cases} 0 & \text{si } p \prec_I q \\ I_q & \text{si } q \prec_I p \end{cases}$$

La fonction  $\xi$  est définie comme suit. Pour toute transition

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{l a} q,$$

$e\xi$  est un polynôme dont tous les coefficients sont égaux à 1 et le support contient  $l$  vecteurs :  $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^Q$  appartient à ce support si, et seulement si,

$$\mathbf{w}_q < l \quad \text{et} \quad \forall r \neq q \quad \mathbf{w}_r = \begin{cases} a\mu_{p,r} & \text{si } f : p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} r \text{ et } f \prec_e e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**EXEMPLE 2.4.2** On illustre sur la figure 2.20 un revêtement lexicographique pour l'automate  $\mathcal{C}_1$ . Il se projette dans la première composante sur  $\mathcal{C}_1$  et dans la seconde sur l'ensemble des vecteurs sur  $\mathbb{N}$  indexés par  $Q = \{p, q\}$ , dans cet ordre.

L'ordre lexicographique n'a effet que dans les transitions étiquetées par  $b$  sortantes de l'état  $p$ . Posons

$$p \xrightarrow[\mathcal{C}_1]{b} p \quad \prec_e \quad p \xrightarrow[\mathcal{C}_1]{b} q.$$

Le revêtement lexicographique avec cet ordre est le deuxième  $\mathbb{N}$ -gauchissement illustré sur la figure 2.14. La fonction  $\alpha$  attribue le vecteur  $(0\ 0)$  au seul état initial de  $\mathcal{A}$ ,  $p$ . Pour les autres états,  $\alpha$  est le polynôme nul. Donc, l'état initial du revêtement est le couple  $(p, (0\ 0))$ , avec multiplicité initiale 1 (le coefficient du monôme correspondant au vecteur  $(0\ 0)$  dans  $p\alpha$ ). La fonction de gauchissement  $\xi$  attribue à la transition sortante de  $p$  étiquetée par  $a$ , et pour la transition pleine étiquetée par  $b$ , le polynôme formé par le vecteur  $(0\ 0)$  avec coefficient 1. Pour la transition pointillée, qui est la plus petite,  $\xi$  donne le polynôme formé par le vecteur  $(1\ 0)$  avec coefficient 1. Pour chacune des deux transitions sortantes de  $q$ , la fonction  $\xi$  attribue le polynôme dont le support contient deux vecteurs,  $(0\ 0)$  et  $(0\ 1)$ .  $\triangle$

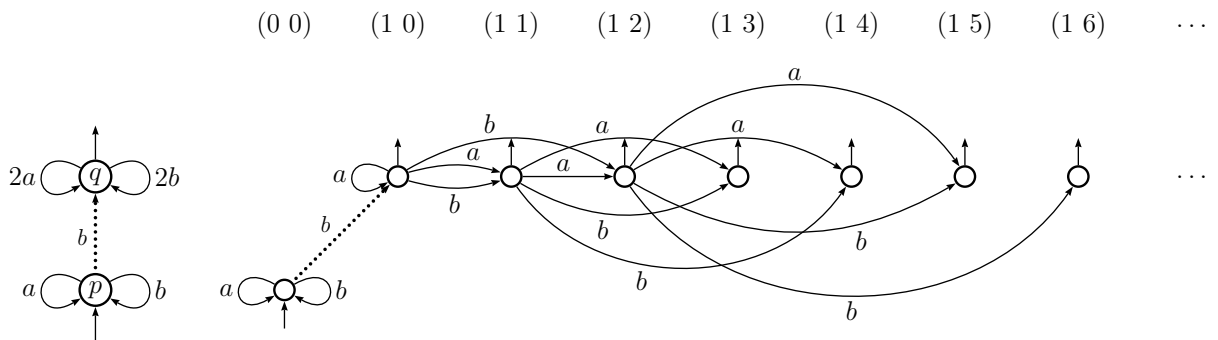


FIG. 2.20 – Un revêtement lexicographique pour l'automate  $\mathcal{C}_1$ . La transition pointillée est la plus grande dans l'ordre lexicographique.

Le revêtement lexicographique infini  $\mathcal{L}$  est une sorte d'« éclatement » de  $\mathcal{A}$  : ses états initiaux et ses transitions ont multiplicité 1, et chaque chemin de  $\mathcal{A}$  avec multiplicité  $l$  est la projection de  $l$  chemins de  $\mathcal{L}$ . De plus, il permet de comparer ces  $l$  chemins, avec un ordre induit par  $\prec_e$  et  $\prec_I$ . Étant donnés deux chemins de  $\mathcal{L}$  qui commencent dans un état initial,

$$C : (p, \mathbf{v}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (q, \mathbf{w}) \quad \text{et} \quad C' : (p', \mathbf{v}') \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (q', \mathbf{w}'),$$

on pose

$$C \prec C'$$

si, et seulement si, ces calculs satisfont une des conditions suivantes :

- $p \prec_I p'$
- $p = p'$  et  $\mathbf{v}_p < \mathbf{v}'_p$ ;
- $p = p'$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$ ,  $C = fe_1c'$  et  $C' = fe_2d'$  où

$$e_1 : (r, \mathbf{x}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{a} (s, \mathbf{y}), \quad e_2 : (r, \mathbf{x}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{a} (s', \mathbf{y}')$$

sont deux transitions de  $\mathcal{L}$  telles que

$$\text{soit } s \neq s' \text{ et } r \xrightarrow{a} s \prec_e r \xrightarrow{a} s', \quad \text{soit } s = s' \text{ et } \mathbf{y}_s < \mathbf{y}'_s.$$

Avec cet ordre, on peut montrer, par induction sur la longueur des calculs, que le revêtement  $\mathcal{L}$  compte le nombre de chemins « éclatés » de  $\mathcal{A}$  plus petits que chaque chemin commençant dans un état initial :

PROPRIÉTÉ 2.4.2 *Soit*

$$C : (p, \mathbf{v}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (q, \mathbf{w})$$

un chemin de  $\mathcal{L}$  qui commence dans un état initial. Pour tout  $r \in Q$ ,  $\mathbf{w}_r$  est le nombre de chemins de  $\mathcal{L}$  étiquetés par  $u$ , plus petits que  $C$  et dont l'extrémité se projette dans la première composante sur  $r$  :

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{w}_r = \text{card} \left( \left\{ D : (p', \mathbf{v}') \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (r, \mathbf{x}) \mid D \prec C \right\} \right). \quad \square$$

Pour trouver les automates finis énoncés dans le théorème du paludier glouton, on va d'abord décrire leurs « correspondants éclatés », des sous-automates de  $\mathcal{L}$  que l'on définit dans le lemme suivant. Ce lemme se démontre (on le fera à la fin de cette section) à l'aide de la propriété 2.4.2.

LEMME 2.4.1 *Soit*

$$\mathcal{L}' = \langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U' \rangle$$

le sous-automate de  $\mathcal{L}$  obtenu en changeant son vecteur de multiplicités finales,  $U$ , comme suit :

$$\forall (p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^Q \quad U'_{(p, \mathbf{v})} = \begin{cases} U_{(p, \mathbf{v})} & \text{si } \mathbf{v} \cdot T \geq k \\ \mathbf{v} \cdot T + T_p - k & \text{si } \mathbf{v} \cdot T < k \text{ et } \mathbf{v} \cdot T + T_p > k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour chaque entier  $i \geq 0$ , soit

$$\mathcal{L}_{(i)} = \langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U^{(i)} \rangle$$

le sous-automate de  $\mathcal{L}$  obtenu en changeant son vecteur de multiplicités finales comme suit :

$$\forall (p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^Q \quad U_{(p, \mathbf{v})}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{v} \cdot T \leq i \text{ et } \mathbf{v} \cdot T + T_p > i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a

$$|\mathcal{L}'| = \mathbf{s} \dot{-} k \quad \text{et} \quad |\mathcal{L}_{(i)}| = \underline{\text{supp}(\mathbf{s} \dot{-} i)}.$$

L'automate  $\mathcal{L}^{(k)}$  est le quotient de  $\mathcal{L}$  par le morphisme  $\eta_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_k$ , étant donc un automate fini de dimension  $Q \times \mathbb{N}_k$ .

Le sous-automate  $\mathcal{P}^{(k)}$ , qui réalise la série  $\mathbf{s} \dot{-} k$ , est le quotient de  $\mathcal{L}'$  par ce morphisme. On l'obtient en remplaçant le vecteur de multiplicités finales, soit  $V$ , de  $\mathcal{L}^{(k)}$  par le vecteur  $V'$  défini comme suit : pour tout état  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}_k^Q$  de  $\mathcal{L}^{(k)}$ ,

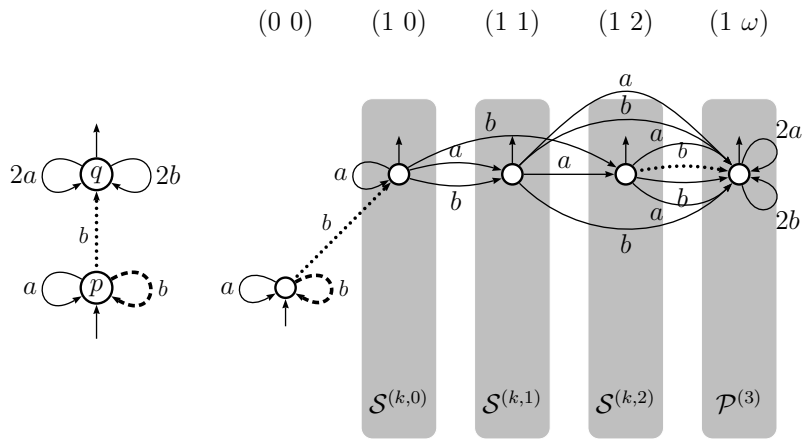
$$V'_{(p, \mathbf{v})} = \begin{cases} V_{(p, \mathbf{v})} & \text{si } \mathbf{v} \cdot (T\eta_k) = \omega \\ \mathbf{v} \cdot (T\eta_k) + T_p - k & \text{si } \mathbf{v} \cdot (T\eta_k) < k \text{ et } \mathbf{v} \cdot (T\eta_k) + T_p = \omega \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.11)$$

Chaque automate  $\mathcal{S}^{(k, i)}$  (pour  $0 \leq i < k$ ), dont le comportement est la série caractéristique du support de  $\mathbf{s} \dot{-} i$ , est le quotient du sous-automate  $\mathcal{L}_{(i)}$  de  $\mathcal{L}$ . On l'obtient également en remplaçant le vecteur  $V$  de  $\mathcal{L}^{(k)}$  par le vecteur  $V^{(i)}$  suivant : pour tout état  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}_k^Q$  de  $\mathcal{L}^{(k)}$ ,

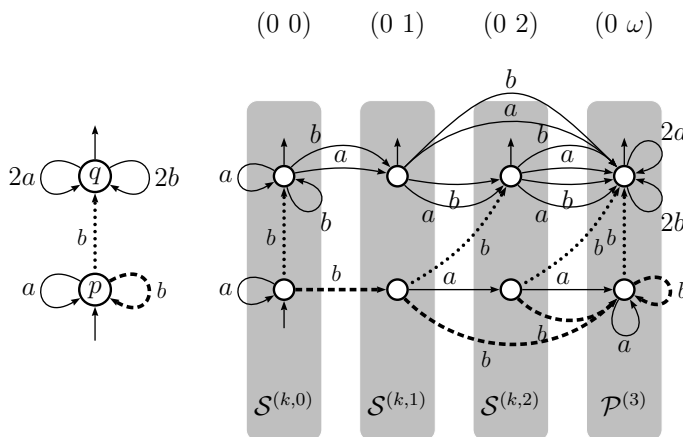
$$V_{(p, \mathbf{v})}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{v} \cdot T \leq i \text{ et } \mathbf{v} \cdot T + T_p > i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.21.





(a) Un revêtement où la transition pointillée est la plus grande.



(b) Autre revêtement, où la transition pointillée est la plus petite.

FIG. 2.21 – Deux revêtements lexicographiques de  $\mathcal{C}_1$  et les sous-automates « paludeurs » pour  $k = 3$ . Chacun est obtenu en effaçant les transitions finales sauf celle dans la colonne indiquée.

PREUVE DU THÉORÈME DU PALUDIER GLOUTON Il suffit d'établir le lemme 2.4.1.

À partir d'un  $\mathbb{N}$ -automate qui réalise la série  $\mathfrak{s}$ ,

$$\mathcal{A} = \langle Q, E, I, T \rangle,$$

on obtient avec le revêtement lexicographique un  $\mathbb{N}$ -automate infini

$$\mathcal{L} = \langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U \rangle$$

et le morphisme  $\eta_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_k$  induit un  $\mathbb{N}$ -quotient fini de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}^{(k)} = \langle Q \times \mathbb{N}_k^Q, G, K, V \rangle.$$

Ces automates sont équivalents et réalisent la série  $\mathfrak{s}$ .

Afin de construire le sous-automate de  $\mathcal{L}^{(k)}$  qui réalise la série  $\mathfrak{s} \div k$ , on va d'abord définir un sous-automate du  $\mathbb{N}$ -revêtement infini  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L}' = \langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U' \rangle,$$

qui réalise cette différence. Le sous-automate de  $\mathcal{L}^{(k)}$  souhaité sera un  $\mathbb{N}$ -quotient de  $\mathcal{L}'$ .

On définit le sous-automate  $\mathcal{L}'$  en changeant les multiplicités finales des états de  $\mathcal{L}$  de la manière suivante :

$$\forall (p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^Q \quad U'_{(p, \mathbf{v})} = \begin{cases} U_{(p, \mathbf{v})} & \text{si } \mathbf{v} \cdot T \geq k \\ \mathbf{v} \cdot T + T_p - k & \text{si } \mathbf{v} \cdot T < k \text{ et } \mathbf{v} \cdot T + T_p > k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le fait que  $\mathcal{L}'$  réalise la série  $\mathfrak{s} \div k$  découle de deux propriétés de  $\mathcal{L}$ .

La première, c'est le fait que les multiplicités initiales et les multiplicités des transitions de  $\mathcal{L}$  sont égales à 1. Cela permet de calculer la multiplicité d'un mot  $u \in A^*$  de la manière suivante. Soient

$$C_1 : (p_1, \mathbf{v}^{(1)}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (q_1, \mathbf{w}^{(1)}) \quad \dots \quad C_n : (p_n, \mathbf{v}^{(n)}) \xrightarrow[\mathcal{L}]{u} (q_n, \mathbf{w}^{(n)})$$

les chemins réussis de  $\mathcal{L}$  étiquetés par  $u$ . La multiplicité finale de chaque  $(q_i, \mathbf{w}^{(i)})$  est par définition  $T_{q_i}$ , donc

$$us = u|\mathcal{B}| = T_{q_1} + \dots + T_{q_n}. \quad (2.13)$$

La seconde propriété est l'information contenue dans les vecteurs des extrémités de ces chemins, ce qui a été décrit dans la propriété 2.4.2. En considérant les chemins  $C_1, \dots, C_n$  écrits selon l'ordre lexicographique  $\prec$ , on a, comme conséquence de cette propriété, que tous les coefficients du vecteur  $\mathbf{w}^{(1)}$  sont égales à zéro, donc

$$\mathbf{w}^{(1)} \cdot T = 0,$$

et que pour tout  $i$ ,  $1 < i \leq n$ , et  $r \in Q$ , le coefficient de  $r$  dans le vecteur  $\mathbf{w}^{(i)}$  est le nombre de calculs parmi  $C_1, \dots, C_{i-1}$  dont l'extrémité est un état de la forme  $(r, \mathbf{w})$ . Ainsi,

$$\forall i, 1 < i \leq n \quad \mathbf{w}^{(i)} \cdot T = T_{q_1} + \dots + T_{q_{i-1}}. \quad (2.14)$$

Avec ces deux propriétés, on montre que  $\mathcal{L}'$  réalise  $\mathfrak{s} \div k$  comme suit.

Supposons d'abord que  $us \leq k$ , ce qui, en vu de (2.13), est équivalent à

$$T_{q_1} + \dots + T_{q_n} \leq k.$$

De (2.14) on tire que, pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\mathbf{w}^{(i)} \cdot T + T_{p_i} \leq k.$$

De la définition des multiplicités finales de  $\mathcal{L}'$ , il vient alors que les multiplicités finales des extrémités des chemins  $C_1, \dots, C_n$  sont toutes égales à 0. Donc,

$$u|\mathcal{B}'| = 0.$$

Supposons maintenant que  $us > k$ . Les mêmes propriétés permettent de montrer que  $u|\mathcal{L}'| = \mathfrak{s} \div k$ . Soit  $i$  l'indice tel que

$$T_{q_1} + \dots + T_{q_{i-1}} \leq k \quad \text{et} \quad T_{q_1} + \dots + T_{q_{i-1}} + T_{q_i} > k.$$

On a que les les multiplicités finales des états  $(q_1, \mathbf{w}^{(1)}), \dots, (q_{i-1}, \mathbf{w}^{(i-1)})$  dans  $\mathcal{L}'$  sont égales à 0, la multiplicité finale de  $(q_i, \mathbf{w}^{(i)})$  est égale a  $T_{q_1} + \dots + T_{q_i} - k$  et les multiplicités finales des états  $(q_{i+1}, \mathbf{w}^{(i+1)}), \dots, (q_n, \mathbf{w}^{(n)})$  sont conservées. Alors,

$$u|\mathcal{L}'| = (T_{q_1} + \dots + T_{q_i} - k) + (T_{q_{i+1}} + \dots + T_{q_n})$$

ce qui est égal à  $u|\mathcal{L}| - k$ .

On vient de montrer que l'automate infini  $\mathcal{L}'$  réalise la série  $\mathbf{s} \div k$ . L'automate fini  $\mathcal{P}^{(k)}$  qui réalise cette différence est obtenu en projetant sur  $\mathcal{L}^{(k)}$  les changements effectués dans les états finaux de  $\mathcal{L}$  pour la construction de  $\mathcal{L}'$ . Cet automate est de la forme

$$\mathcal{P}^{(k)} = \langle Q \times \mathbb{N}_k, G, K, V' \rangle$$

où les multiplicités finales sont définies dans (2.11). On a que  $\mathcal{P}^{(k)}$  est un  $\mathbb{N}$ -quotient  $\mathcal{L}'$ , donc  $|\mathcal{D}| = \mathbf{s} - k$ .

La construction de l'automate  $\mathcal{S}^{(k,i)}$  qui réalise la série caractéristique du support de  $\mathbf{s} \div i$ , pour  $0 \leq i < k$ , est similaire. On définit d'abord un nouveau vecteur de multiplicités finales pour  $\mathcal{L}$ ,  $U^{(i)}$  :

$$\forall (p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^Q \quad U_{(p,\mathbf{v})}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{v} \cdot T \leq i \text{ et } \mathbf{v} \cdot T + T_p > i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a que l'automate

$$\langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U^{(i)} \rangle$$

réalise la série caractéristique du support de  $\mathbf{s} \div i$ , et on obtient un quotient fini de cet automate en faisant les changements correspondants des multiplicités finales dans  $\mathcal{L}^{(k)}$ .  $\square$

### 2.4.3 Division d'une série $\mathbb{N}$ -rationnelle par un entier

Le revêtement lexicographique  $\mathcal{L}$ , avec lequel on a établi le théorème du paludier glouton, permet aussi de trouver un  $\mathbb{N}$ -automate fini qui réalise le quotient de la division d'une série rationnelle  $\mathbf{s} : A^* \rightarrow \mathbb{N}$  par un entier  $d$ . Ce quotient, noté  $\mathbf{s} \div d$ , est la série (à multiplicités dans  $\mathbb{N}$ ) définie par

$$\forall u \in A^*, \quad u(\mathbf{s} \div d) = (us) \div d \quad (2.15)$$

(où  $n \div d$ , pour  $n$  entier, est le quotient de la division entière de  $n$  par  $d$ ).

DIVISION (EILENBERG 1974)

Le quotient de la division d'une série rationnelle par un entier positif est une série rationnelle.

La fermeture de la classe des séries rationnelles (à multiplicités dans  $\mathbb{N}$ ) par l'opération de division a été démontré par Eilenberg dans son traité [13]. Sa construction est différente, mais permet de trouver un automate dont le nombre d'états est comparable à celui de la nôtre.

Afin d'établir le théorème de la division, on procédera comme dans la preuve du théorème du paludier glouton : d'abord, on définit un sous-automate de  $\mathcal{L}$  qui réalise l'opération ; l'automate fini souhaité en est un  $\mathbb{N}$ -quotient. La première étape (et sa preuve) évoque le lemme 2.4.1 et s'énonce de la manière suivante :

LEMME 2.4.2 *Soit*

$$\mathcal{C}^{(d)} = \langle Q \times \mathbb{N}^Q, F, J, U' \rangle$$

le sous-automate de  $\mathcal{L}$  obtenu en changeant son vecteur de multiplicités finales,  $U$ , comme suit :

$$\forall (p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathbb{N}^Q \quad U'_{(p, \mathbf{v})} = (((\mathbf{v} \cdot T) \bmod d) + T_p) \div d \quad (2.16)$$

(où  $\bmod$  désigne le reste de la division entière). On a

$$|\mathcal{C}^{(d)}| = \mathfrak{s} \div d.$$

L'idée du « fonctionnement » de l'automate  $\mathcal{C}^{(d)}$  est plus clairement comprise en considérant la situation où les multiplicités finales de  $\mathcal{B}$  sont toutes égales à 1. Dans ce cas, pour chaque mot  $u$  dans  $A^*$ ,  $\mathcal{C}^{(d)}$  choisit exactement un chemin réussi de  $\mathcal{A}$  pour chaque tranche de  $d$  calculs réussis de  $\mathcal{A}$  avec entrée  $u$ , considérés dans l'ordre lexicographique. Ainsi, le nombre de calculs projetés par  $\mathcal{C}^{(d)}$  dans  $\mathcal{A}$  avec entrée  $u$  est le quotient de  $us$  par  $d$ .

L'automate fini demandé est un sous automate du  $\mathbb{N}$ -quotient de  $\mathcal{L}$  induit par la surjection canonique

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z},$$

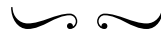
qui est un morphisme d'anneaux. Ce morphisme est aussi un morphisme de l'action  $\gamma_\mu$ , utilisée pour la définition de  $\mathcal{L}$ , sur l'action

$$\delta : \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^Q$$

définie par

$$\forall v \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}^Q \quad \forall u \in A^* \quad v \circ u = v \cdot (u\mu \bmod d).$$

En redéfinissant les multiplicités finales de ce quotient comme dans (2.16), on obtient un  $\mathbb{N}$ -quotient fini de  $\mathcal{C}^{(d)}$  qui réalise la série  $s \div d$ .



## 2.5 Le revêtement Avance ou Retard d'un transducteur

Le *revêtement Avance ou Retard* d'un transducteur temps réel est un produit de ce transducteur par une action qui permet de comparer la sortie de chaque calcul avec celles des calculs avec la même entrée. Le concept principal dans cette construction est l'action *Avance ou Retard*, introduite dans [3] pour la description d'un algorithme pour décider la fonctionnalité d'un transducteur (résultat que nous rappellerons également). On introduira aussi une sorte de « troncature » de cette action, où les rapports (entre les sorties) plus grands qu'un entier fixé sont rejetés.

Avec un gauchissement de ce revêtement, on décrira ensuite un revêtement lexicographique — le *revêtement Avance ou Retard lexicographique* — duquel on tirera un transducteur ne possédant pas des calculs « proches » selon une certaine distance. Cette propriété sera utile dans le chapitre 3 pour la construction d'une décomposition des transducteurs  $k$ -valués.

Nous supposerons fixé un transducteur temps réel  $\mathcal{T} = \langle Q, A, B^*, E, I, T \rangle$ .

### 2.5.1 L'action Avance ou Retard et ses troncatures

#### Différence et décalage

L'idée derrière l'action Avance ou Retard est celle de différence entre deux mots, que l'on va formaliser à l'aide des groupes libres.

DÉFINITION 2.5.1 (GROUPE LIBRE) Soit  $B$  un alphabet. Le *groupe libre* engendré par  $B$  est le quotient de  $(B \cup \bar{B})^*$  par les relations

$$a\bar{a} = \bar{a}a = 1_{B^*} \quad (a \in B),$$

où  $\bar{B}$  est une copie disjointe de  $B$ . On note  $F(B)$  ce quotient.  $\triangle$

Les classes de  $F(B)$  sont des langages sur  $B \cup \bar{B}$ , et contiennent exactement un mot n'ayant aucun facteur de la forme  $u\bar{u}$  ou  $\bar{u}u$ , pour  $u \in B^+$ . On peut donc les identifier avec ces représentants canoniques. Ainsi, on peut dire que l'inverse de  $u \in F(B)$  est l'image miroir de  $u$  avec des lettres barrées, ce que l'on note  $\bar{u}$ , que l'inverse d'une lettre barrée,  $\bar{a}$ , est la lettre  $a$ , etc. Ces faits sur le groupe libre peuvent être retrouvés dans [30].

La proposition suivante, conséquence directe de la définition du groupe libre, montre comment le rapport entre deux mots  $x$  et  $y$  dans  $B^*$  peut être représenté par le mot  $\bar{xy}$  :

PROPOSITION 2.5.1 Soient  $x$  et  $y$  deux mots dans  $B^*$ .

- i)  $x$  est un préfixe de  $y$  si, et seulement si,  $\bar{xy} \in B^*$  ;
- ii)  $y$  est un préfixe de  $x$  si, et seulement si,  $\bar{xy} \in \bar{B}^*$  ;
- iii)  $x$  et  $y$  ne sont pas comparables si, et seulement si,  $\bar{xy} \in F(B) - (B^* \cup \bar{B}^*)$ .

Remarquons aussi que dans le premier cas,  $\bar{xy}$  est le suffixe de  $y$  obtenu en supprimant le préfixe  $x$ , et dans le deuxième,  $\bar{xy}$  est l'inverse du suffixe de  $x$  obtenu en supprimant le préfixe  $y$ .

Avec cette notation, on comparera les sorties de paires de calculs de  $\mathcal{T}$  dont les entrées sont égales. Appelons respectivement les mots dans  $B^*$  et  $\bar{B}^*$  positifs et négatifs, et notons

$$\Delta = B^* \cup \bar{B}^* \cup \{\mathbf{0}\}$$

où  $\mathbf{0}$  est un nouvel élément utilisé pour représenter les paires de mots qui ne sont pas comparables. Un élément dans  $\Delta$  est appelé une *différence*. Soit

$$\rho : F(B) \rightarrow \Delta$$

la fonction définie par

$$\forall w \in F(B) \quad w\rho = \begin{cases} w & \text{si } w \in B^* \cup \bar{B}^* \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

DÉFINITION 2.5.2 (DIFFÉRENCE ET DÉCALAGE) Soient

$$c : p \xrightarrow{\mathcal{T}} q, \quad d : p' \xrightarrow{\mathcal{T}} q'$$

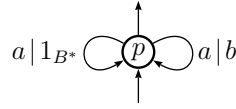
deux chemins dans  $\mathcal{T}$  avec la même entrée (et qui ont, donc, avec la même longueur). La *différence* entre  $c$  et  $d$  est l'élément de  $\Delta$  défini par

$$\text{AR}(c, d) = (\bar{xy})\rho.$$

Si  $\text{AR}(c, d) \neq \mathbf{0}$ , on définit le *décalage* entre  $c$  et  $d$  comme l'entier suivant, où  $\prec$  est la relation de préfixe de chemins :

$$\langle c, d \rangle = \max \{ |\text{AR}(c', d')| \mid c' \prec c, d' \prec d, |c'| = |d'| \}. \quad \triangle$$

EXEMPLE 2.5.1 Considérons le transducteur  $\mathcal{T}$  suivant :



Pour tout  $n > 0$ , posons

$$c_n = p \xrightarrow{\mathcal{T}} p \xrightarrow{\mathcal{T}} p \xrightarrow{\mathcal{T}} p, \quad d_n = p \xrightarrow{\mathcal{T}} p \xrightarrow{\mathcal{T}} p \xrightarrow{\mathcal{T}} p.$$

La différence entre ces calculs est égale à

$$\text{AR}(c_n, d_n) = 1_{B^*}$$

et leur décalage est égal à

$$\langle c_n, d_n \rangle = n. \quad \triangle$$

### Définition et produit de $\mathcal{T}^2$ par l'action Avance ou Retard

PROPOSITION 2.5.2 (BÉAL ET AL. 2003) La fonction

$$\phi : \Delta \times (B^* \times B^*) \rightarrow \Delta$$

définie par

$$\forall w \in \Delta \quad \forall (x, y) \in B^* \times B^* \quad (w, (x, y))\phi = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } w = \mathbf{0} \\ (\bar{xy})\rho & \text{sinon} \end{cases}$$

est une action du monoïde produit  $B^* \times B^*$  sur l'ensemble  $\Delta$ .  $\square$



Cette action, de  $B^* \times B^*$  sur  $\Delta$ , est ce que l'on appelle l'action *Avance ou Retard*; son élément distingué est le mot vide de  $B^*$ . Dans [3], elle est définie sans l'usage du groupe libre, mais les deux descriptions sont équivalentes.

Avec l'action Avance ou Retard, on peut représenter la différence entre les sorties de paires de calculs d'un transducteur : soient  $c$  et  $d$  deux calculs, et  $x$  et  $y$  leurs sorties, respectivement ; on a

$$\text{AR}(c, d) = 1_{B^*} \cdot (x, y);$$

donc,  $1_{B^*} \cdot (x, y)$  est un mot positif si  $x$  est un préfixe de  $y$  (l'*avance* de  $y$  par rapport à  $x$ ), un mot négatif si  $y$  est un préfixe de  $x$  (le *retard* de  $y$  par rapport à  $x$ ), et est égal à  $\mathbf{0}$  si  $x$  et  $y$  ne sont pas comparables.

Cette propriété est très utile lorsqu'utilisé avec des produits de transducteurs. Étant donnés deux transducteurs

$$\mathcal{T} = \langle Q, A, B^*, E, I, T \rangle, \quad \mathcal{T}' = \langle Q', A, B^*, E', I', T' \rangle$$

leur *produit* est le transducteur

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T}' = \langle Q \times Q', A, B^* \times B^*, F, I \times I', T \times T' \rangle$$

où les transitions sont définies par

$$F = \left\{ (p, p') \xrightarrow{a|(u, u')} (q, q') \mid p \xrightarrow{a|u} q \in E, p' \xrightarrow{a|u'} q' \in E' \right\}.$$

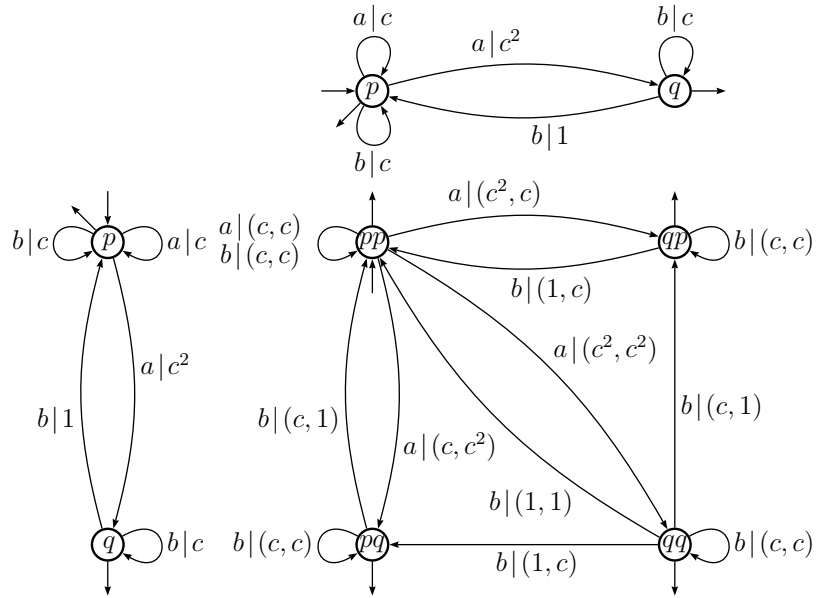
En particulier, le *carré* de  $\mathcal{T}$  est le transducteur  $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ . Si on efface les entrées de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ , l'objet résultant est un automate étiqueté par des couples de mots de  $B^*$ , et on peut en faire le produit avec l'action Avance ou Retard. On obtient ainsi un transducteur où chaque calcul se projette d'une part sur un calcul de  $\mathcal{T}$  et d'autre part sur un calcul de  $\mathcal{T}'$ , les deux avec la même entrée, et dans lequel on peut *lire* la différence entre les sorties des calculs projetés. Formellement, on définit

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \mathcal{G} = \langle Q \times Q' \times \Delta, A, B^* \times B^*, F, I \times I' \times \{1_{B^*}\}, T \times T' \times \Delta \rangle$$

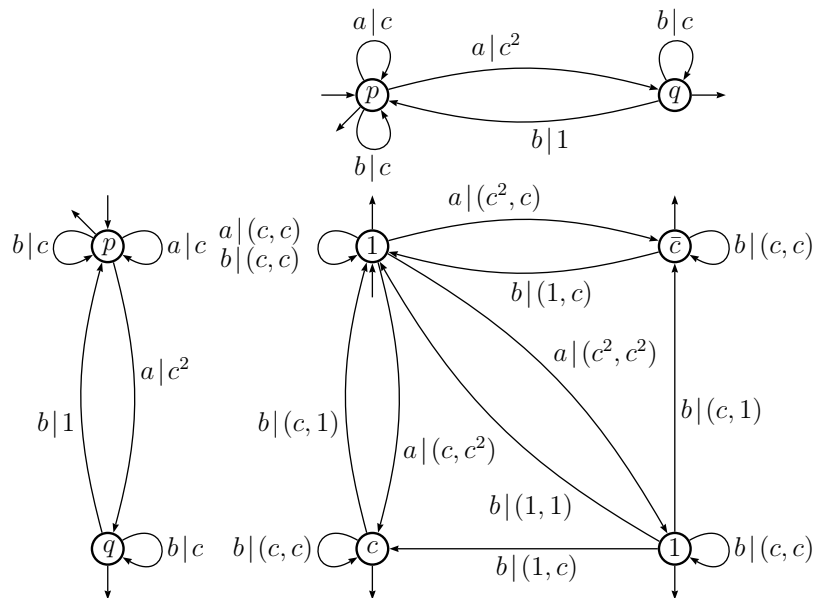
où

$$F = \left\{ (p, p', \delta) \xrightarrow{a|(u, u')} (q, q', \gamma) \mid p \xrightarrow{a|u} q \in E, p' \xrightarrow{a|u'} q' \in E', \gamma = \delta \cdot (u, u') \right\}.$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.22.



(a)



(b)

FIG. 2.22 – Le carré du transducteur représenté à la figure 1.3(c) et son produit par l'action Avance ou Retard.

PROPRIÉTÉ 2.5.1 *Soient*

$$\mathbf{c} = (p, p', 1_{B^*}) \xrightarrow{\mathcal{A}|(u, u')}_{\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \mathcal{G}} (p, p', \delta)$$

un chemin de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \mathcal{G}$  et  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  les projections de  $\mathbf{c}$  sur  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ , respectivement. On a que

$$\delta = \text{AR}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2). \quad \square$$

En particulier, le produit du carré de  $\mathcal{T}$  par l'action Avance ou Retard fournit une caractérisation des transducteurs qui réalisent une fonction. En effet,  $\mathcal{T}$  réalise une fonction si, et seulement si, pour chaque paire de calculs réussis avec la même entrée, leurs sorties sont égales ; cela se traduit dans  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  comme suit, énoncé qui sera le point de départ pour une des preuves que nous présenterons au chapitre 4 :

THÉORÈME 2.5.1 (BÉAL ET AL. 2003) *Un transducteur  $\mathcal{T}$  réalise une fonction si, et seulement si : pour tout état  $(p, p')$  de la partie émondée de  $\mathcal{T}^2$ , il existe au plus une différence  $\delta$  telle que  $(p, p', \delta)$  est un état accessible de  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  ; les états finaux accessibles de  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  appartiennent à  $Q \times Q \times \{1_{B^*}\}$ .*

### Troncature de l'action Avance ou Retard

Pour tout entier positif  $N$ , soit  $B^{\leq N}$  l'ensemble des mots sur  $B$  avec longueur au plus  $N$ . Posons

$$\Delta_{\leq N} = B^{\leq N} \cup \overline{B}^{\leq N} \cup \{\mathbf{0}, \omega\}$$

où  $\omega$  est un nouveau symbole. Soit

$$\rho_N : F(B) \rightarrow \Delta_{\leq N}$$

la fonction définie par

$$\forall u \in F(B) \quad u\rho_N = \begin{cases} \omega & \text{si } u \in B^* \cup \overline{B}^* \text{ et } |u| > N \\ u\rho & \text{sinon} \end{cases}$$

La troncature de l'action Avance ou Retard est la fonction

$$\phi_N : \Delta_{\leq N} \times (B^* \times B^*) \rightarrow \Delta_{\leq N}$$

définie par

$$\forall u \in \Delta_{\leq N} \quad \forall (x, y) \in B^* \times B^* \quad (u, (x, y))\phi_N = \begin{cases} \omega & \text{si } u = \omega \\ \mathbf{0} & \text{si } u = \mathbf{0} \\ (\bar{x}uy)\rho_N & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction n'est pas une action de  $B^* \times B^*$  sur  $\Delta_{\leq N}$ . Par exemple, pour  $B = \{a\}$  et  $N = 1$  on a

$$(1_{B^*}, (a, aaa))\phi_N = \omega$$

donc

$$((1_{B^*}, (a, aaa))\phi_N, (aa, a)) = \omega \neq 1_{B^*} = (1_{B^*}, (aaa, aaa))\phi_N.$$

On peut quand même définir un produit entre  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$  et  $\phi_N$ . Il s'agit du transducteur

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \phi_N = \langle Q \times Q' \times \Delta_{\leq N}, A, B^* \times B^*, F, I \times I' \times \{1_{B^*}\}, T \times T' \times \Delta_{\leq N} \rangle$$

dont les transitions sont définies par

$$F = \left\{ (p, p', \delta) \xrightarrow{a|(u, u')} (q, q', \gamma) \mid p \xrightarrow{a|u} q \in E, p' \xrightarrow{a|u'} q' \in E', \gamma = (\delta, (u, u'))\phi_N \right\}.$$

Comme dans le produit de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$  par l'action Avance ou Retard, le transducteur  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \phi_N$  permet de retrouver les différences entre les calculs de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ , mais seulement entre ceux dont le décalage est borné par  $N$ . On pose (où  $\prec$  est la relation de préfixe de chemins)

$$\text{AR}_N(c, d) = \begin{cases} \omega & \text{si } \exists c' \prec c, d' \prec d \text{ où } |c'| = |d'|, \text{AR}(c', d') \neq \mathbf{0}, |\text{AR}(c', d')| > N \\ \text{AR}(c, d) & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a

PROPRIÉTÉ 2.5.2 *Soient*

$$\mathbf{c} = (p, p', 1_{B^*}) \xrightarrow{\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \phi_N, a|(u, u')} (p, p', \delta)$$

un chemin de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}' \times \phi_N$  et  $\mathbf{c}_1$  et  $\mathbf{c}_2$  les projection de  $\mathbf{c}$  sur  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ , respectivement. On a que

$$\delta = \text{AR}_N(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2). \quad \square$$

### 2.5.2 Le revêtement Avance ou Retard

On a vu que chaque calcul du produit  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  représente la différence entre deux calculs de  $\mathcal{T}$ . Dans le *revêtement Avance ou Retard*, que l'on va définir dans cette section, les calculs représentent les différences entre un calcul de  $\mathcal{T}$  et tous les calculs avec la même entrée.

On va aussi définir une troncature pour ce revêtement, où seulement des différences dont la longueur est bornée par un entier donné sont repérées. À la section suivante, on étudiera les propriétés d'un gauchissement lexicographique pour ce revêtement.

#### Définition

Alors que dans  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  chaque transition est définie par l'action des sorties d'une paire de transitions de  $\mathcal{T}$  sur un élément de  $\Delta$ , les transitions du revêtement Avance ou Retard sont le résultat d'une action des sorties d'un ensemble de transitions avec la même entrée sur un vecteur.

Afin de définir cette action (ci-dessous dans la proposition 2.5.3), il sera nécessaire de multiplier des vecteurs et matrices dont les coefficients sont des sous-ensembles de  $\Delta$ . Pour cela, on étend le produit du groupe libre  $F(B)$  pour transformer  $\mathbf{0}$  en un zéro :

$$\forall x \in F(B) \quad x\mathbf{0} = \mathbf{0}x = \mathbf{0}.$$

Avec cette opération,  $S = F(B) \cup \{\mathbf{0}\}$  est un semigroupe et l'ensemble  $\mathfrak{P}(S)$  des parties de  $S$  (qui contient les sous-ensembles de  $\Delta$ ) est un semi-anneau.

On va étendre aussi la fonction  $\rho$  en mettant

$$\mathbf{0}\rho = \mathbf{0}$$

et noter par le même symbole son extension à des ensembles,

$$\forall X \in \mathfrak{P}(S) \quad X\rho = \{x\rho \mid x \in X\}$$

et à des vecteurs,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathfrak{P}(S)^Q \quad \forall r \in Q \quad (\mathbf{v}\rho)_r = \mathbf{v}_r\rho.$$

Avec ces définitions, on a :

PROPOSITION 2.5.3 *Soit*

$$\Phi : \mathfrak{P}(\Delta)^Q \times (B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q}) \rightarrow \mathfrak{P}(\Delta)^Q$$

la fonction définie par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathfrak{P}(\Delta)^Q \quad \forall (x, \mathbf{m}) \in B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q} \quad (\mathbf{v}, (x, \mathbf{m}))\Phi = (\bar{x}\mathbf{v} \cdot \mathbf{m})\rho$$

où  $\bar{x}\mathbf{v}$  est le vecteur obtenu en multipliant par  $\bar{x}$  à gauche chaque coefficient de  $\mathbf{v}$ , et  $\bar{x}\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}$  est le produit de ce vecteur par la matrice  $\mathbf{m}$ . Cette fonction est une action du monoïde produit  $B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q}$  sur l'ensemble  $\mathfrak{P}(\Delta)^Q$ .  $\square$

L'élément distingué de cette action est le vecteur  $\mathbf{v}_0$  défini par

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{v}_{0r} = \begin{cases} 1_{B^*} & \text{si } r \in I \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit le revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$  comme un produit de  $\mathcal{T}$  par l'action  $\Phi$ , noté  $\mathcal{T} \times \Phi$ , où les entrées des transitions ne sont pas considérées. Il s'agit de la partie accessible du transducteur infini de la forme

$$\mathcal{U} = \langle Q \times \mathfrak{P}(\Delta)^Q, A, B^*, F, J, \mathcal{T} \times \mathfrak{P}(\Delta)^Q \rangle.$$

La définition des transitions de  $\mathcal{U}$  dépend du morphisme  $\mu$  associé à  $\mathcal{T}$ . Pour chaque  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times \mathfrak{P}(\Delta)^Q$ , les transitions sortantes de cet état sont en bijection avec les transitions de  $\mathcal{T}$  sortantes de  $p$  :

$$p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|x} q \quad \Longrightarrow \quad (p, \mathbf{v}) \xrightarrow[\mathcal{T} \times \Phi]{a|x} (p, \mathbf{v} \cdot (x, a\mu)).$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.23.

PROPRIÉTÉ 2.5.3 *Soient*

$$C : (i, \mathbf{v}_0) \xrightarrow[\mathcal{T} \times \Phi]{u|x} (p, \mathbf{w})$$

un calcul de  $\mathcal{T} \times \Phi$  et

$$c : i \xrightarrow[\mathcal{T}]{u|x} p$$

sa projection sur  $\mathcal{T}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  contient l'ensemble des différences entre  $c$  et tous les calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée et qui commencent dans un état initial :

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{w}_r = \left\{ \text{AR}(c, d) \mid d : j \xrightarrow[\mathcal{T}]{u|y} r, j \in I \right\}. \quad \square$$

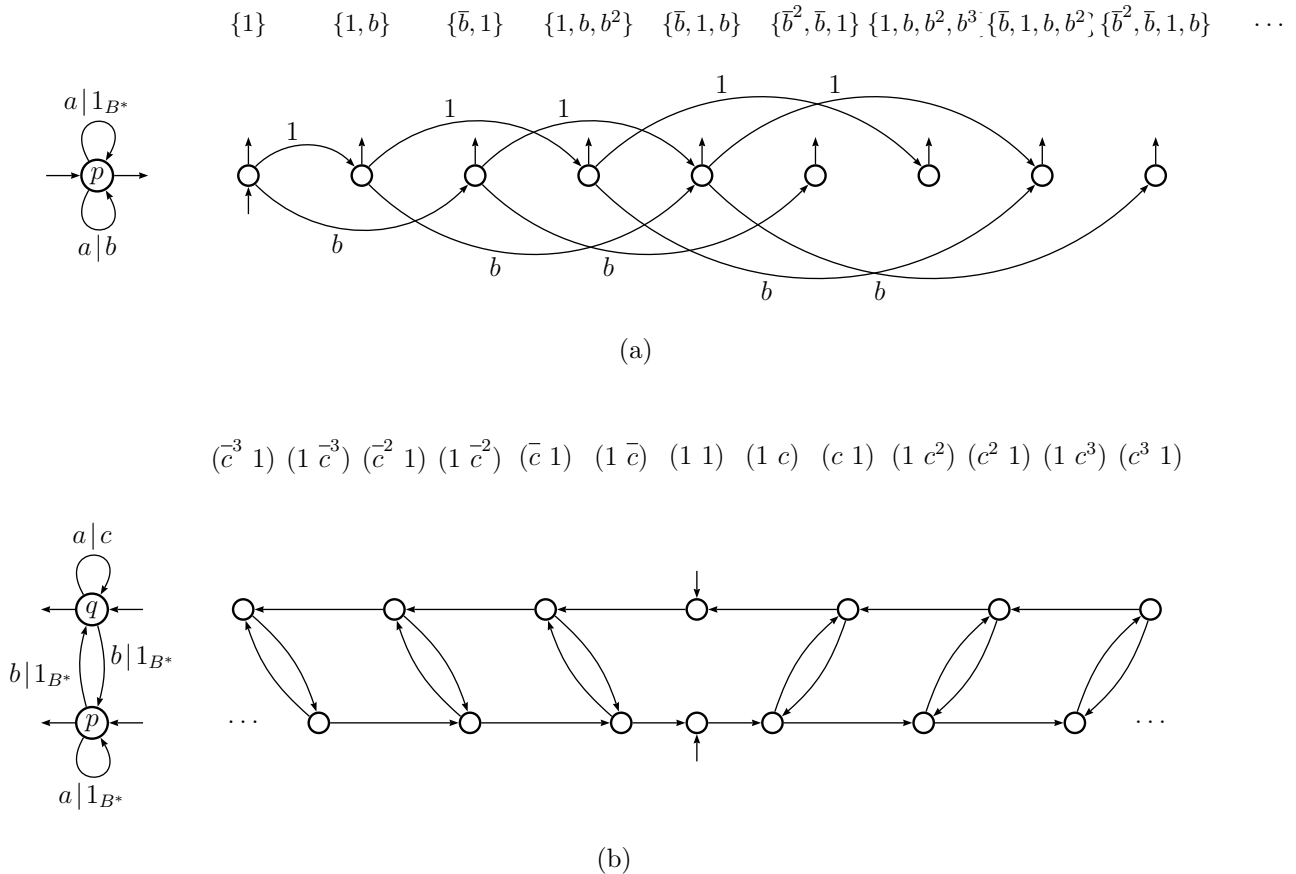


FIG. 2.23 – Deux revêtements Avance ou Retard.

**Troncature d'un revêtement Avance ou Retard**

On peut appliquer le concept de troncature de l'action Avance ou Retard aux revêtements Avance ou Retard, en utilisant dans la définition des transitions la réduction  $\rho_N$  au lieu de  $\rho$ . Le résultat est un revêtement fini de  $\mathcal{T}$  qui permet de comparer seulement des chemins dont le décalage est borné par l'entier fixé  $N$ . On appelle ce revêtement le *revêtement Avance ou Retard tronqué* de  $\mathcal{T}$ .

Pour le définir, transformons l'ensemble  $F(B) \cup \{\mathbf{0}, \omega\}$  dans un semigroupe en étendant l'opération de  $F(B) \cup \{\mathbf{0}\}$  à  $\omega$  de façon à faire de ce symbole un

zéro :

$$\forall x \in F(B) \cup \{\mathbf{0}\} \quad x\omega = \omega x = \omega.$$

Les parties de  $F(B) \cup \{\mathbf{0}, \omega\}$  forment un semi-anneau, et alors le produit de vecteurs et matrices sur ces parties est défini. On pose aussi

$$\mathbf{0}\rho_N = \mathbf{0}, \quad \omega\rho_N = \omega.$$

La troncature d'indice  $N$  du revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$  est le revêtement fini de  $\mathcal{T}$  de la forme

$$\mathcal{U}_N = \left\langle Q \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q, A, B^*, F, J, T \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q \right\rangle$$

où les états initiaux sont définis comme dans le revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$ , et pour chaque  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q$ , les transitions sortantes de cet état sont en bijection avec les transitions sortantes de  $p$  :

$$\forall e : p \xrightarrow{\mathcal{T}} q \quad (p, \mathbf{v}) \xrightarrow{\mathcal{U}_N} (q, (\bar{x}\mathbf{v} \cdot a\mu)\rho_N).$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.24.

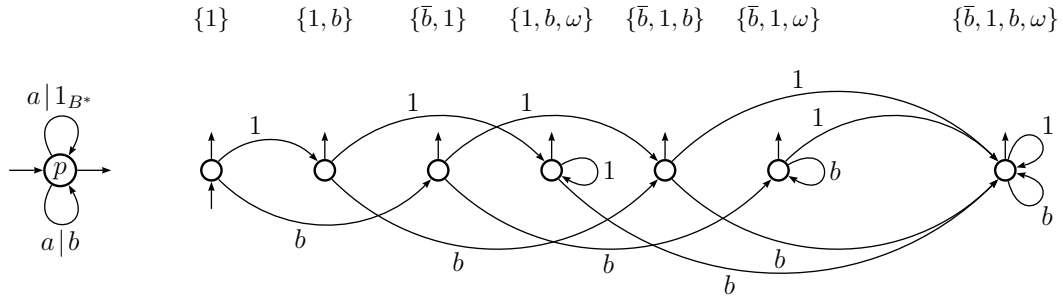


FIG. 2.24 – La troncature de niveau  $N = 1$  du revêtement Avance ou Retard illustré sur la figure 2.23(a).

Contrairement à la définition du revêtement Avance ou Retard, la fonction

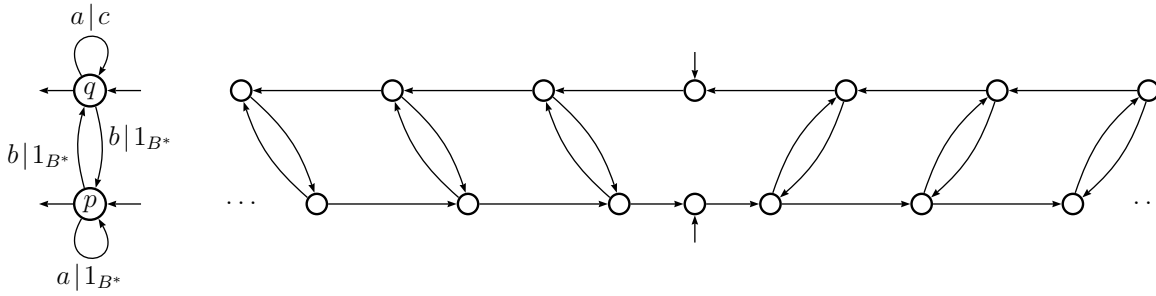
$$\delta_N : \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q \times (B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q}) \rightarrow \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q$$

définie par

$$\forall \mathbf{v} \in \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q \quad \forall (x, \mathbf{m}) \in B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q} \quad (x, \mathbf{v})\delta = (\bar{x}\mathbf{v} \cdot \mathbf{m})\rho_N$$

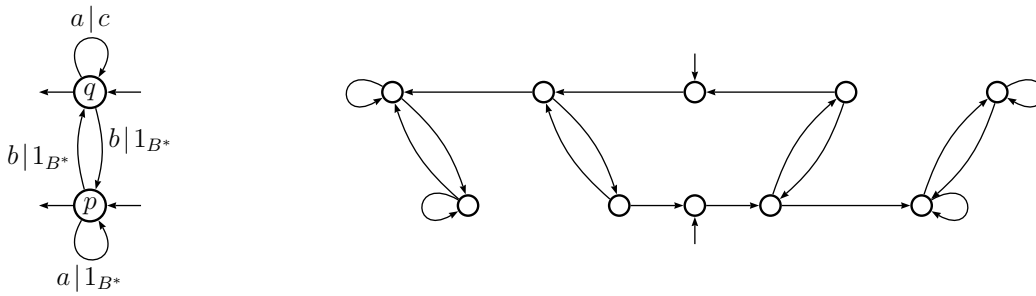


$$(\bar{c}^3 \ 1) \ (1 \ \bar{c}^3) \ (\bar{c}^2 \ 1) \ (1 \ \bar{c}^2) \ (\bar{c} \ 1) \ (1 \ \bar{c}) \ (1 \ 1) \ (1 \ c) \ (c \ 1) \ (1 \ c^2) \ (c^2 \ 1) \ (1 \ c^3) \ (c^3 \ 1)$$



(a) Le revêtement Avance ou Retard infini pour le transducteur illustré sur la figure 2.23(b).

$$(\omega \ 1) \ (1 \ \omega) \ (\bar{c} \ 1) \ (1 \ \bar{c}) \ (1 \ 1) \ (1 \ c) \ (c \ 1) \ (1 \ \omega) \ (\omega \ 1)$$



(b) Le revêtement Avance ou Retard tronqué en  $N = 1$ .

FIG. 2.25 – Un revêtement Avance ou Retard qui n'est pas un revêtement sur ses troncatures.

*n'est pas* une action du monoïde produit  $B^* \times \mathfrak{P}(B^*)^{Q \times Q}$  sur l'ensemble  $\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q$ . De plus, il n'est pas vrai que tout revêtement Avance ou Retard est un revêtement sur ses troncatures. Ceci est illustré sur la figure 2.25, où aucun revêtement n'est possible entre le revêtement Avance ou Retard sur la troncature.

Comme on l'a dit, les troncatures permettent de comparer les sorties entre

des calculs dont le décalage est borné par  $N$ . Cela vient par induction sur la longueur des chemins :

PROPRIÉTÉ 2.5.4 *Soient*

$$C : (i, \mathbf{v}_0) \xrightarrow{\mathcal{U}_N^{u|x}} (p, \mathbf{w})$$

un calcul de  $\mathcal{U}_N$  et

$$c : i \xrightarrow{\mathcal{T}^{u|x}} p$$

sa projection sur  $\mathcal{T}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  contient l'ensemble des différences entre  $c$  et tous les calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée, qui commencent dans un état initial et dont le décalage est borné par  $N$  :

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{w}_r = \left\{ \text{AR}_N(c, d) \mid d : j \xrightarrow{\mathcal{T}^{u|y}} r, j \in I \right\}. \quad \square$$

### 2.5.3 Le revêtement Avance ou Retard lexicographique

Le but de cette section est de décrire un gauchissement lexicographique pour le revêtement Avance ou Retard et l'appliquer pour établir le suivant :

THÉORÈME 2.5.2 *Pour tout transducteur  $\mathcal{T}$ , pour tout entier  $N > 0$ , il existe un revêtement fini  $\mathcal{U}_N$  de  $\mathcal{T}$  et un sous-transducteur  $\mathcal{V}_N$  de  $\mathcal{U}_N$  tels que :  $\mathcal{V}_N$  est équivalent à  $\mathcal{T}$  ; pour toute paire de calculs réussis  $c$  et  $d$  de  $\mathcal{V}_N$  avec la même entrée et la même sortie, leur décalage,  $\langle c, d \rangle$  (cf. définition 2.5.2), est plus grand que  $N$ .*

On dira d'un transducteur tel que, pour toute paire  $c$  et  $d$  de calculs réussis avec même étiquette,  $\langle c, d \rangle > N$ , qu'il est un transducteur  $N$ -séparé.

#### Définition du revêtement Avance ou Retard lexicographique

Étant donné un ordre  $\prec_I$  sur les états initiaux de  $\mathcal{T}$  et un ordre  $\prec_e$  sur l'ensemble de transitions, où deux transitions sont comparables si, et seulement si, elles ont la même entrée, on pose que l'ordre lexicographique des calculs de  $\mathcal{T}$ ,  $\prec$ , est l'ordre engendré par  $\prec_I$  et  $\prec_e$  sur l'automate d'entrée

sous-jacent de  $\mathcal{T}$  (cf. section 2.4.1). Cet ordre est partiel et si deux calculs sont comparables, alors ils ont la même entrée.

Le revêtement Avance ou Retard lexicographique de  $\mathcal{T}$  est le produit de  $\mathcal{T}$  par l'action  $\Phi$  décrite dans la proposition 2.5.3 gauchie par les fonctions

$$\xi : E \rightarrow \mathfrak{P}(\Delta)^Q \quad \alpha : Q \rightarrow \mathfrak{P}(\Delta)^Q$$

définies par

$$\forall q \in Q \quad (p\alpha)_q = \begin{cases} \{1_{B^*}\} & \text{si } q \prec_I p \text{ et } q \in I \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall e : p \xrightarrow{a|x} q \in E \quad \forall r \in Q \quad (e\xi)_r = \left\{ (\bar{xy})\rho \mid f : p \xrightarrow{a|y} r \in E, f \prec_e e \right\}$$

Plus explicitement, pour chaque  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times (\mathfrak{P}(\Delta))^Q$ , les transitions sortantes de cet état sont en bijection avec les transitions sortantes de  $p$  :

$$\forall e : p \xrightarrow{a|x} q \quad (p, \mathbf{v}) \xrightarrow{a|x}_{\mathcal{U}_N} (p, (\bar{x}\mathbf{v} \cdot a\mu)\rho \oplus e\xi).$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.26.

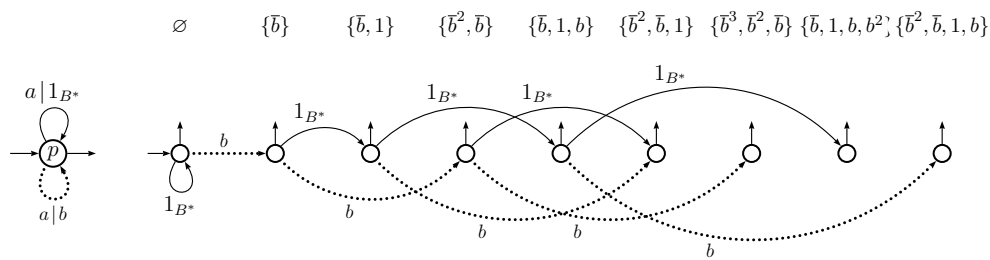


FIG. 2.26 – Un revêtement Avance ou Retard lexicographique (infini). La transition pointillée est la plus grande dans l'ordre lexicographique.

Par induction dans la longueur des calculs, on a :

PROPRIÉTÉ 2.5.5 *Soient*

$$C : (i, \mathbf{v}_0) \xrightarrow[\mathcal{U}]{u|x} (p, \mathbf{w})$$

un calcul de  $\mathcal{U}$  et

$$c : i \xrightarrow[\mathcal{T}]{u|x} p$$

sa projection sur  $\mathcal{T}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  contient l'ensemble des différences entre  $c$  et tous les calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée, plus petits et qui commencent dans un état initial :

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{w}_r = \left\{ \text{AR}(c, d) \mid d : j \xrightarrow[\mathcal{T}]{u|y} r, j \in I, d \prec_e c \right\}. \quad \square$$

### Troncature d'un revêtement Avance ou Retard lexicographique

Soit

$$\xi_N : E \rightarrow \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q$$

la fonction définie par

$$\forall e : p \xrightarrow{a|x} q \in E \quad \forall r \in Q \quad (e\xi_N)_r = \left\{ (\bar{x}y)\rho_N \mid f : p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|y} r \in E, f \prec_e e \right\}.$$

On définit le revêtement Avance ou Retard lexicographique tronqué d'indice  $N$  comme le revêtement fini de  $\mathcal{T}$  de la forme

$$\mathcal{U}_N = \left\langle Q \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q, A, B^*, F, J, T \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q \right\rangle$$

où les états initiaux sont définis comme dans le revêtement Avance ou Retard lexicographique de  $\mathcal{T}$ , et pour chaque  $(p, \mathbf{v}) \in Q \times (\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N}))^Q$ , les transitions sortantes de cet état sont en bijection avec les transitions sortantes de  $p$  :

$$\forall e : p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|x} q \quad (p, \mathbf{v}) \xrightarrow[\mathcal{U}_N]{a|x} (p, (\bar{x}\mathbf{v} \cdot a\mu)\rho_N \oplus e\xi_N).$$

Un exemple est illustré sur la figure 2.27.

Par induction dans la longueur des calculs on a (comme on peut voir à la figure 2.27) :

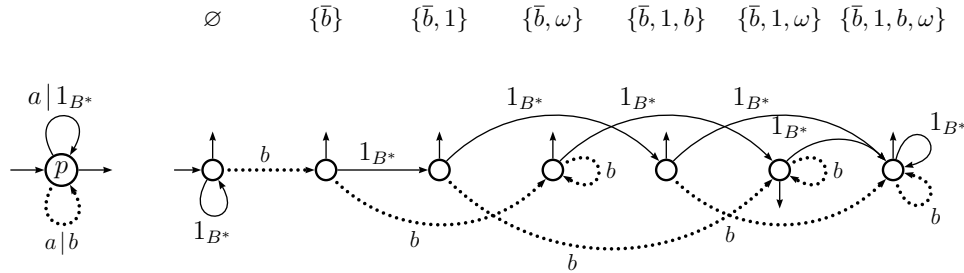


FIG. 2.27 – La troncature de niveau  $N = 1$  du revêtement Avance ou Retard lexicographique illustré sur la figure 2.26, avec l'ordre  $p \xrightarrow{a|1_{B^*}} p \prec_e p \xrightarrow{a|b} p$ .

PROPRIÉTÉ 2.5.6 Soient

$$C : (i, \mathbf{v}_0) \xrightarrow[u]{u|x} (p, \mathbf{w})$$

un calcul de  $\mathcal{U}$  et

$$c : i \xrightarrow[T]{u|x} p$$

sa projection sur  $\mathcal{T}$ . Le vecteur  $\mathbf{w}$  contient l'ensemble des différences entre  $c$  et tous les calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée, plus petits, qui commencent dans un état initial et dont le décalage avec  $c$  est borné par  $N$  :

$$\forall r \in Q \quad \mathbf{w}_r = \left\{ \text{AR}_N(c, d) \mid d : j \xrightarrow[T]{u|y} r, j \in I, d \prec_e c \right\}. \quad \square$$

### Construction d'un transducteur $N$ -séparé (preuve du théorème 2.5.2)

En analysant l'information contenue dans les états finaux du revêtement Avance ou Retard lexicographique de  $\mathcal{T}$ , on trouve un sous-transducteur de ce revêtement qui établit le théorème 2.5.2.

Ce sous-transducteur est obtenu avec la suppression de la qualité d'être final de certains états finaux de  $\mathcal{U}_N$  : un état final de  $\mathcal{U}_N$ ,

$$(p, \mathbf{v}) \in T \times \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})^Q,$$

est aussi final dans  $\mathcal{V}_N$  si, et seulement si,

$$\exists t \in T \quad \text{tel que} \quad 1_{B^*} \in \mathbf{v}_t.$$

On appelle ce sous-transducteur l'*immersion Avance ou Retard lexicographique* de  $\mathcal{T}$ , et on le note  $\mathcal{V}_N$ . Un exemple est illustré sur la figure 2.28.

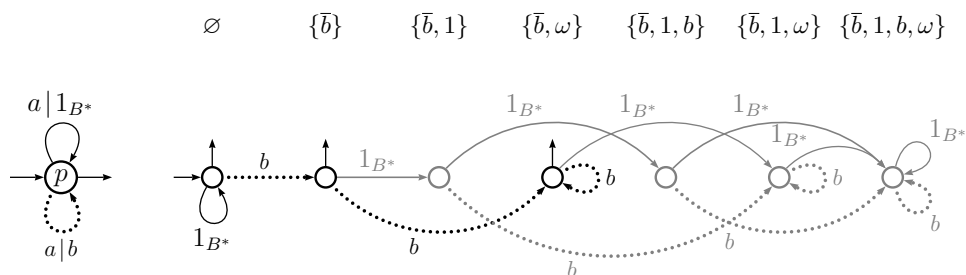


FIG. 2.28 – L’immersion Avance ou Retard lexicographique de niveau  $N = 1$  du transducteur illustré sur la figure 2.26, avec l’ordre  $p \xrightarrow{a|1_{B^*}} p \prec_e p \xrightarrow{a|b} p$ .

Les propriétés principales de cette immersion, qui permettent en particulier d’établir le théorème 2.5.2, sont les suivantes :

PROPRIÉTÉ 2.5.7 *Un calcul  $C$  de  $\mathcal{V}_N$  est réussi si, et seulement si,*

1. *la projection  $C\varphi$  sur  $\mathcal{T}$  est un calcul réussi dans ce transducteur ;*
2. *pour tout calcul réussi  $d$  de  $\mathcal{T}$  plus petit que  $C\varphi$  avec la même entrée et la même sortie,  $\langle C\varphi, d \rangle > N$ .*

PREUVE Conséquence de la propriété 2.5.6. □

PROPRIÉTÉ 2.5.8 *L’immersion Avance ou Retard lexicographique  $\mathcal{V}_N$  est équivalent à  $\mathcal{T}$ .*

PREUVE Pour chaque paire  $(u, x)$  dans la relation réalisée par  $\mathcal{T}$ , le calcul le plus petit de  $\mathcal{T}$  étiqueté par  $(u, x)$  est projeté par un calcul dans  $\mathcal{V}_N$ . □

PREUVE DU THÉORÈME 2.5.2 Si  $C$  et  $D$  sont deux calculs réussis de  $\mathcal{V}$  avec la même entrée et la même sortie, et en supposant que  $C\varphi \prec D\varphi$  (où  $\varphi$  est le morphisme de  $\mathcal{V}_N$  sur  $\mathcal{T}$ ), on a que le décalage entre  $C\varphi$  et  $D\varphi$  est plus grande que  $N$ , sinon  $D$  ne pourrait pas être réussi. Et clairement le décalage entre  $C$  et  $D$  est égal au décalage entre leurs projections. □

### 2.5.4 Nombre d'états des revêtements tronqués

On a vu que le revêtement Avance ou Retard et le revêtement Avance ou Retard lexicographique sont des objets infinis : l'ensemble d'états de ces transducteurs est  $Q \times \mathfrak{P}(\Delta)$ . Et les revêtements tronqués sont finis, leurs états appartenant à  $Q \times \mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})$ .

On exprime le nombre d'états de ces troncatures en fonction du nombre  $n$  d'états de  $\mathcal{T}$ , et de la cardinalité  $h$  de l'alphabet de sortie  $B$ .

Pour le calculer, notons d'abord que le nombre d'éléments de  $\Delta_{\leq N}$  est

$$\text{card}(\Delta_{\leq N}) = 2 \sum_{1 \leq i \leq N} h^i + 3 = 2 \frac{h^{N+1} - h}{h - 1} + 3 = \Theta(h^N).$$

Donc,

$$\text{card}(\mathfrak{P}(\Delta_{\leq N})) = \Theta(2^{h^N}).$$

Ainsi,

**PROPRIÉTÉ 2.5.9** *Pour tout entier positif  $N$ , le nombre d'états accessibles et co-accessibles d'une troncature de niveau  $N$  est*

$$\mathcal{O}(2^{nh^N}). \quad \square$$

Ensuite, on vérifiera que pour les revêtements appliqués sur un transducteur  $k$ -valué on peut faire « tomber » l'exposant  $N$ . Ce fait sera crucial pour le calcul de la taille de la décomposition d'une relation rationnelle  $k$ -valué, objet du chapitre suivant. Pour un ensemble  $X$  et un entier positif  $l$ , on note

$$\mathfrak{P}_{(l)}(X) = \{Y \subseteq X \mid \text{card}(Y) \leq l\}.$$

**PROPRIÉTÉ 2.5.10** *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur  $k$ -valué émondé.*

*Tout état accessible et co-accessible du revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$  appartient à*

$$Q \times (\mathfrak{P}_{(k)}(\Delta))^Q.$$

*Pour tout entier positif  $N$ , tout état accessible et co-accessible de son revêtement Avance ou Retard tronqué de niveau  $N$  appartient à*

$$Q \times (\mathfrak{P}_{(k+1)}(\Delta_{\leq N}))^Q.$$

*Le même est vrai pour le revêtement Avance ou Retard lexicographique, et le revêtement Avance ou Retard lexicographique tronqué, respectivement.*

PREUVE On va d'abord montrer que, pour tout état  $(p, \mathbf{v})$  accessible dans le revêtement Avance ou Retard, chaque coefficient de  $\mathbf{v}$  est un ensemble de cardinalité au plus  $k$ .

Soit  $C$  un chemin du revêtement d'un état initial à  $(p, \mathbf{v})$ . Ce chemin se projette sur un chemin  $c$  de  $\mathcal{T}$ , d'un état initial à  $p$ . Rappelons la description des coefficients du vecteur  $\mathbf{v}$  énoncé à la propriété 2.5.3. Pour tout  $r \in Q$ , chaque mot dans  $\mathbf{v}_r$  est la différence entre la sortie de  $c$  et la sortie d'un calcul de  $\mathcal{T}$  allant d'un état initial à  $p$  avec la même entrée. Des différences distinctes impliquent des chemins ayant des sorties distinctes. Donc, les  $l$  éléments de  $\mathbf{v}_r$  impliquent  $l$  chemins de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée allant d'un état initial à  $p$ , et dont les sorties sont deux à deux distinctes. Comme  $p$  est co-accessible dans  $\mathcal{T}$  (puisque  $(p, \mathbf{v})$  est co-accessible), et  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, il doit exister au plus  $k$  éléments dans  $\mathbf{v}_r$ .

L'argument est le même pour les autres revêtements. Dans les tronca-tures, on compte au plus  $k + 1$  éléments dans les coefficients pour considérer l'élément  $\omega$ .  $\square$

La chute de l'exposant  $N$  découle de cette propriété et de la remarque suivante. Soient  $X$  un ensemble,  $a$  sa cardinalité, et  $l$  un entier positif. Pour  $l = a$ ,  $\mathfrak{P}_{(l)}(X)$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $X$ , et sa cardinalité est  $2^a$ . En général,  $\text{card}(\mathfrak{P}_{(l)}(X))$  est une somme partielle d'une ligne du triangle de Pascal,

$$\text{card}(\mathfrak{P}_{(l)}(X)) = \sum_{0 \leq i \leq l} \binom{a}{i}.$$

D'après Knuth et al. [21], « there is no closed form for the partial sum of a row of Pascal's triangle ». Mais il est immédiat que<sup>2</sup>

$$\text{card}(\mathfrak{P}_{(l)}(X)) \leq a^{l^2} \tag{2.17}$$

donc la cardinalité de  $Q \times (\mathfrak{P}_{(k)}(\Delta_{\leq N}))^Q$  est au plus

$$n \cdot \left( \text{card}(\Delta_{\leq N})^{k^2} \right)^n.$$

On vient de montrer le suivant :

---

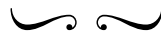
<sup>2</sup>Je remercie à Gérard Cohen pour avoir remarqué que cette estimation grossière peut être largement améliorée.



PROPRIÉTÉ 2.5.11 *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur émondé et  $k$ -valué avec  $n$  états. Soit  $h$  la cardinalité de son alphabet de sortie. Pour tout entier positif  $N$ , le nombre d'états accessibles et co-accessibles du revêtement Avance ou Retard tronqué de  $\mathcal{T}$  est*

$$\mathcal{O}\left(h^{Nk^2n}\right).$$

*Le même est vrai pour le revêtement Avance ou Retard lexicographique tronqué d'indice  $N$ .  $\square$*





# Chapitre 3

## Décomposition

### 3.1 Introduction

Les fonctions rationnelles occupent une position centrale parmi les relations rationnelles entre des monoïdes libres en raison de leurs propriétés remarquables. Toute fonction rationnelle peut être réalisée par un transducteur non ambigu, propriété qui découle, de façon explicite ou pas, des travaux fondateurs d'Elgot et Mezei [14], Kobayashi [28], Eilenberg [13], et reprise avec d'autres techniques par Schützenberger [44], Arnold et Latteux [1] et Sakarovitch [37]. On aura l'occasion de voir dans ce chapitre que le même n'est pas vrai pour une relation rationnelle quelconque. Il est décidable si une relation rationnelle est une fonction, et l'équivalence des fonctions rationnelles est décidable (ce que l'on verra dans le chapitre suivant), alors que l'équivalence entre deux transducteurs quelconques est indécidable. De plus, on trouve parmi les fonctions rationnelles celles qui sont séquentielles. Les caractérisations de ces fonctions par Ginsburg et Rose [19] et Choffrut [6, 7, 8] sont la base de l'algorithme pour décider si un transducteur réalise une fonction séquentielle [3] et pour le séquentialiser [33, 35, 2], qui ont été récemment utilisés en traitement de langues naturelles [35]. Dans ce chapitre, on étudiera les liens entre les relations rationnelles  $k$ -valués et les fonctions rationnelles permettant la généralisation de certaines propriétés des dernières.

En 1976, Schützenberger a considéré la possibilité de représenter une relation rationnelle  $k$ -valué comme une union de  $k$  fonctions rationnelles. Son approche à ce problème, combinatoire et centrée dans les graphes des rela-

tions, n'a pas abouti à terme en raison d'une faille dans un lemme clé [44].

Une réponse, due à Weber, a vu le jour en 1996.

**THÉORÈME 3.1.1 (DÉCOMPOSITION [50])** *Tout transducteur  $k$ -valué  $\mathcal{T}$  peut être effectivement décomposé en une somme de  $k$  transducteurs fonctionnels non ambigus.*

La construction proposée dans [50] est assez technique. Elle s'appuie sur une décomposition préliminaire de  $\mathcal{T}$  dans un ensemble de cardinalité exponentielle de transducteurs non ambigus, résultat plus ancien dû à Weber également et utilisé pour établir une borne supérieure pour la norme d'un transducteur en fonction de son nombre d'états [49]. La décomposition en  $k$  transducteurs est ensuite extraite des composantes fortement connexes d'un graphe défini sur cette décomposition préliminaire. Le calcul fait dans [50] pour le nombre d'états de cette décomposition fournit une double exponentielle, et l'existence d'une décomposition de taille plus petite est lancée.

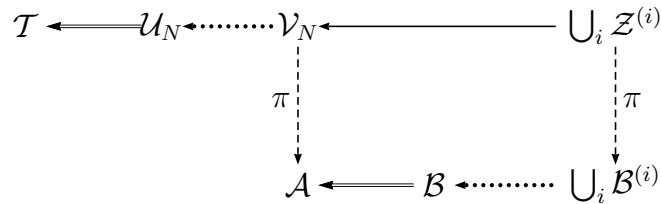
Une question liée, portant sur une classe de transducteurs où la propriété en question n'est plus le nombre de mots en sortie mais le *nombre de longueurs distincts* de ces mots, a été posée aussi dans [50]. Il s'agit de savoir, étant donné un transducteur où ce nombre est borné par un entier  $k$ , si on peut trouver  $k$  transducteurs dont l'union  $y$  est équivalent et qui écrivent des mots de même longueur pour tout mot d'entrée.

Dans ce chapitre nous présenterons la construction d'une décomposition d'un transducteur  $k$ -valué qui s'appuie largement sur les techniques développées dans le chapitre précédent. D'une part, notre preuve semble être, d'un bout à l'autre, plus accessible que celle de Weber. D'autre part, le nombre d'états des transducteurs obtenus ne nécessite qu'une exponentielle.

Le point de départ est la construction, présentée à la section 3.2, d'un transducteur  $k$ -ambigu en entrée et équivalent à un transducteur  $k$ -valué  $\mathcal{T}$ . L'existence d'un tel transducteur, fait intéressant en soi, sera prouvée avec la construction d'un revêtement Avance ou Retard lexicographique sur  $\mathcal{T}$  : on montrera que, pour un certain entier  $N$ , le revêtement d'indice  $N$ , noté toujours  $\mathcal{U}_N$ , contient un sous-transducteur  $\mathcal{V}_N$  équivalent et  $k$ -ambigu en entrée. Il est à remarquer que l'existence d'un transducteur  $k$ -ambigu en entrée équivalent à  $\mathcal{T}$  est vue en [50] comme une conséquence de la décomposition : ce transducteur est l'union des  $k$  transducteurs non ambigus qui en font partie.

À la section 3.3, on décomposera  $\mathcal{V}_N$  à l'aide du revêtement du paludier glouton appliqué dans l'automate d'entrée sous-jacent,  $\mathcal{A}$ , de  $\mathcal{V}_N$ . Cet automate étant  $k$ -ambigu, le revêtement fournit  $k$  automates non ambigus  $\mathcal{B}_k^{(0)}, \dots, \mathcal{B}_k^{(k-1)}$  qui en sont des immersions. À l'aide des morphismes d'automates conservés le long des constructions, on pourra ensuite « remonter » les sorties de  $\mathcal{V}_N$  vers les transitions de  $\mathcal{A}$ , et ainsi obtenir  $k$  transducteurs non ambigus  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  qui décomposent  $\mathcal{V}_N$ . Le théorème de décomposition est montré, puisque  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}_N$  sont équivalents.

Ces étapes sont illustrées ci-dessous. Les flèches doubles sont des revêtements ; celles pointillées des sous-automates ; la flèche simple est une immersion, et  $\pi$  indique la projection dans l'automate d'entrée sous-jacent.



En dépit de l'utilisation de deux revêtements dans cette construction, on montrera que les états accessibles et co-accessibles des transducteurs  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  ont une forme très particulière. Ceci permettra de borner le nombre de ces états par une exponentielle, à savoir,  $2^{\mathcal{O}(h\ell k^4 n^{k+4})}$ , où  $n$  est le nombre d'états de  $\mathcal{T}$ ,  $h$  est la cardinalité de son alphabet de sortie et  $\ell$  est la longueur maximale des sorties des transitions.

On va ensuite, avec les mêmes techniques, décomposer un transducteur où le nombre de longueurs distinctes en sortie est borné, résultat qui répond à la question de Weber. On va en effet montrer plus :

**THÉORÈME 3.1.2 (DÉCOMPOSITION AVEC MORPHISME)** *Soient  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  une relation rationnelle d'image finie et  $\theta : B^* \rightarrow C^*$  un morphisme tels que la composition  $\tau\theta$  soit une relation rationnelle  $k$ -valuée. Tout transducteur  $\mathcal{S}$  réalisant  $\tau$  peut être effectivement décomposé en  $k$  transducteurs dont les compositions avec  $\theta$  sont des fonctions.*

La question de Weber est établie en prenant  $\theta$  comme le morphisme qui à chaque mot associe sa longueur.

Ce théorème fait l'objet de la section 3.4, et sera tiré d'une décomposition des calculs réussis du transducteur obtenu en remplaçant les sorties de  $\mathcal{S}$  par les images données par le morphisme  $\theta$ . Ce transducteur,  $\mathcal{T}$ , réalise la relation  $\tau\theta$  et est donc  $k$ -valué. Cette décomposition de calculs consiste à construire  $k$  transducteurs fonctionnels  $\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$  qui sont des immersions sur  $\mathcal{T}$  et sont tels que l'union des images (par ces immersions) de leurs calculs réussis est égale à l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{T}$ . La construction de cette décomposition de calculs se base sur le fait que  $\mathcal{V}_N$  est un « noyau dur » de  $\mathcal{T}$ , dans le sens où, pour tout calcul réussi de  $\mathcal{T}$ , il en existe un dans  $\mathcal{V}_N$  avec la même entrée, même sortie et dont le décalage est plus petit qu'un certain entier qui dépend du nombre d'états de  $\mathcal{T}$ . Il en résulte que l'on peut obtenir  $\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$  moyennant une opération de « collage » des calculs réussis de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$ , faite à l'aide de l'action Avance ou Retard. La décomposition désirée de  $\mathcal{S}$  est tirée des transducteurs  $\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$  en remplaçant leurs sorties par celles des transitions projetées dans  $\mathcal{T}$  (qui en sont des images inverses par le morphisme  $\theta$ ).

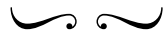
Le schéma de cette construction est représenté ci-dessous, où  $\theta$  indique une réétiquetage des sorties par ce morphisme, et les autres flèches indiquent des immersions.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{T} & \longleftarrow & \bigcup_{0 \leq i < k} \mathcal{Z}^{(i)} \\
 \uparrow & & & \swarrow & \uparrow \\
 \bigcup_{0 \leq i < k} \mathcal{X}^{(i)} & \xleftarrow{\theta^{-1}} & \bigcup_{0 \leq i < k} \mathcal{W}^{(i)} & & 
 \end{array}$$

On montrera que la taille de cette décomposition et celle de la décomposition d'un transducteur  $k$ -valué sont dans le même ordre. Ces constructions ont été présentées en [41].

Alors que toute fonction rationnelle peut être réalisée par un transducteur non ambigu, le même n'est pas vrai en général pour les relations de norme bornée. Il existe en effet des relations rationnelles qui sont *intrinsèquement ambiguës*. On va à la fin de ce chapitre exprimer ce fait au moyen des constructions y présentées. Aussi, on va mettre en lumière le fait que la non ambiguïté est équivalente à l'existence d'une décomposition en des fonctions

deux à deux disjointes, et montrer qu'on ne peut pas décider si une relation rationnelle est intrinsèquement ambiguë.



## 3.2 Des transducteurs $k$ -valués aux $k$ -ambigus en entrée

Le long de cette section,  $\mathcal{T}$  désignera un transducteur  $k$ -valué et émondé. On notera aussi  $\ell$  la longueur maximale des sorties des transitions de  $\mathcal{T}$ , paramètre presque omniprésent dans nos développements.

On montrera dans cette section que, pour un certain indice  $N$ , le revêtement Avance ou Retard lexicographique tronqué de  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{V}_N$ , est un transducteur  $k$ -ambigu en entrée. Ce résultat est la première étape de notre preuve pour le théorème de décomposition :

**PROPOSITION 3.2.1** *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur avec  $n$  états dont les sorties ont longueur au plus  $\ell$ . Si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, alors, pour  $N \geq \ell n^{k+1}$ ,  $\mathcal{V}_N$  est  $k$ -ambigu en entrée.*

Par conséquent,

**THÉORÈME 3.2.1** *Pour tout transducteur  $k$ -valué, on peut construire (effectivement) un transducteur équivalent et  $k$ -ambigu en entrée.  $\square$*

Le cœur de la preuve de la proposition 3.2.1 est un argument d'itération consigné sur ce que nous appellerons le *lemme des chemins proches* (cf. lemme 3.2.1). Nous en donnerons une preuve basée sur une propriété de l'action Avance ou Retard établie en [3]. Remarquons qu'un argument similaire est développé dans les travaux de Weber ; l'utilisation de l'action Avance ou Retard en permet pourtant une preuve plus courte.

### 3.2.1 Produits de plusieurs transducteurs

Rappelons la définition de produit cartésien de deux ou plus transducteurs, notation qui sera utile pour exprimer le lemme des chemins proches (section 3.2.2) et d'autres développements à venir.

Cette définition a été déjà introduite à la section 2.5.1 : étant donnés deux transducteurs

$$\mathcal{T} = \langle Q, A, B^*, E, I, T \rangle, \quad \mathcal{T}' = \langle Q', A, B^*, E', I', T' \rangle$$

le produit de  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{T}'$  est le transducteur

$$\mathcal{T} \times \mathcal{T}' = \langle Q \times Q', A, B^* \times B^*, F, I \times I', T \times T' \rangle$$

où  $F$ , l'ensemble de transitions, est défini par

$$F = \left\{ (p, p') \xrightarrow{a|(u, u')} (q, q') \mid p \xrightarrow{a|u} q \in E, p' \xrightarrow{a|u'} q' \in E' \right\}.$$

Ce produit s'étend naturellement à  $l$  transducteurs  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_l$ . Posons

$$\mathcal{T}_i = \langle Q_i, A, B^*, E_i, I_i, T_i \rangle \quad 1 \leq i \leq l.$$

Le produit  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_l$  est un transducteur sur  $A^* \times B^{*l}$  dont les transitions sont définies par

$$\left\{ \mathbf{p} \xrightarrow{a|u} \mathbf{q} \mid \mathbf{p}, \mathbf{q} \in Q_1 \times \dots \times Q_l, \mathbf{p}_i \xrightarrow{a|u_i} \mathbf{q}_i \in E_i, 1 \leq i \leq l \right\}.$$

En particulier, le produit de  $\mathcal{T}$  par lui même  $l$  fois, transducteur de la forme  $\mathcal{T} \times \dots \times \mathcal{T}$ , est noté  $\mathcal{T}^l$ . On a appelé  $\mathcal{T}^2$  le carré de  $\mathcal{T}$ , on appellera son *cube* le transducteur  $\mathcal{T}^3$ .

Un chemin  $\mathbf{c}$  dans  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_l$  (donc, un vecteur de chemins) se projette sur  $l$  chemins *avec la même entrée*. Formellement, la projection de  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_l$  sur la coordonnée  $i$  est la fonction  $\pi_{\mathcal{T}_i} : Q_1 \times \dots \times Q_l \rightarrow Q_i$  définie par

$$\forall \mathbf{q} = (p_1, \dots, p_l) \in Q_1 \times \dots \times Q_l \quad \mathbf{q} \pi_{\mathcal{T}_i} = p_i$$

(ce qui définit un revêtement de  $\mathcal{T}_1 \times \dots \times \mathcal{T}_l$  sur  $\mathcal{T}_i$ ). Le chemin de  $\mathcal{T}_i$  projeté par  $\mathbf{c}$  est la coordonnée  $i$  de  $\mathbf{c}$  :

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c} \pi_{\mathcal{T}_i}.$$



### 3.2.2 Le lemme des chemins proches

Dans un transducteur fonctionnel, le décalage entre deux calculs réussis avec la même entrée ne peut pas être arbitrairement grand :

**PROPOSITION 3.2.2** *Si  $\mathcal{T}$  est fonctionnel, alors pour toute paire  $c$  et  $d$  de calculs réussis de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée,  $\langle c, d \rangle < \ell n^2$  (où  $n$  est le nombre d'états de  $\mathcal{T}$  et  $\ell$  la sortie maximale de ses transitions).*

La preuve peut être « lue » dans le produit du carré de  $\mathcal{T}$  par l'action Avance ou Retard :

**PROPRIÉTÉ 3.2.1** *Si  $\mathcal{T}$  est un transducteur fonctionnel, alors pour tout état accessible et co-accessible  $((p, q), w)$  de  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$ ,  $|w| < \ell n^2$ .*

**PREUVE** Soit

$$c : ((i, j), 1_{B^*}) \xrightarrow[\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}]{u|(x,y)} ((p, q), w)$$

un chemin qui commence dans un état initial. En vertu du théorème 2.5.1, toute factorisation de  $c$  de la forme

$$((i, j), 1_{B^*}) \xrightarrow[\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}]{u_1|(x_1,y_2)} ((r, s), z_1) \xrightarrow[\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}]{u_2|(x_2,y_2)} ((r, s), z_2) \xrightarrow[\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}]{u_3|(x_3,y_3)} ((p, q), w)$$

doit satisfaire

$$z_1 = z_2 \neq \mathbf{0}.$$

Donc, la suppression de la boucle

$$((r, s), z_1) \xrightarrow[\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}]{u_2|(x_2,y_2)} ((r, s), z_1)$$

donne un chemin plus court de  $((i, j), 1_{B^*})$  à  $((p, q), w)$ . La suppression de toutes ces boucles conduit à un chemin de  $((i, j), 1_{B^*})$  à  $((p, q), w)$  dont l'entrée est un mot de longueur plus petit que  $n^2$ , ce qui établit  $|w| < \ell n^2$ .  $\square$

Le lemme des chemins proches, argument principal de notre construction (avec le revêtement Avance ou Retard lexicographique) d'un transducteur  $k$ -ambigu en entrée, est une généralisation aux transducteurs  $k$ -valués de la proposition 3.2.2. Il établit que dans tout ensemble de  $k + 1$  calculs réussis avec la même entrée, on peut en trouver deux avec la même sortie et dont le décalage est borné par un certain entier :

LEMME 3.2.1 (LEMME DES CHEMINS PROCHES) *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur avec  $n$  états, soit  $\ell$  la longueur maximale des sorties de ses transitions. Si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, alors pour tout calcul réussi  $\mathbf{c}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$  il existe deux coordonnées  $i$  et  $j$  ( $1 \leq i < j \leq k+1$ ) telles que les projections  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{c}_j$  satisfont*

$$\text{AR}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = 1_{B^*}$$

(c'est-à-dire,  $\mathbf{c}_i$  et  $\mathbf{c}_j$  ont la même sortie) et

$$\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle < \ell n^{k+1}.$$

La preuve consiste à trouver deux chemins n'ayant aucune boucle « incompatible » avec la différence des sorties des préfixes précédents. Pour ce faire, on utilisera la propriété évoquée de l'action Avance ou Retard :

LEMME 3.2.2 (BÉAL ET AL. 2003) *Soient  $w \in B^* \cup \overline{B}^*$  et  $(x, y) \in B^* \times B^*$ . Si  $w \cdot (x, y) = w$ , alors, pour tout  $r \in \mathbb{N}$ ,  $w \cdot (x, y)^r = w$ . Sinon, pour tout  $z \in B^* \cup \overline{B}^*$ , il existe au plus un entier  $r$  tel que  $w \cdot (x, y)^r = z$ .  $\square$*

C'est-à-dire, si  $w \cdot (x, y) \neq w$ , alors le couple de mots  $(x, y)$  « casse » le mot  $w$ , et la suite de valeurs  $w \cdot (x, y)^r$  doit être infinie ou tomber dans  $\mathbf{0}$ .

Un énoncé similaire au lemme des chemins proches apparaît dans [50], dont la preuve est plus longue que celle que nous allons présenter.

PREUVE DU LEMME DES CHEMINS PROCHES Considérons les ensembles deux à deux distincts suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq k+1, \text{AR}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \neq 1_{B^*}\}, \\ \mathcal{I}_2 &= \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq k+1, \text{AR}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = 1_{B^*}, \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle \geq \ell n^{k+1}\}, \\ \mathcal{I}_3 &= \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq k+1, \text{AR}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = 1_{B^*}, \langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle < \ell n^{k+1}\}. \end{aligned}$$

On doit montrer que  $\mathcal{I}_3 \neq \emptyset$ . Pour cela, on montrera, par induction sur  $\text{card}(\mathcal{I}_2)$ , que  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$  implique l'existence d'un calcul réussi de  $\mathcal{T}^{k+1}$  — donc,  $k+1$  calculs réussis de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée — dont les sorties des projections sont deux à deux distinctes. Un tel calcul est en contradiction avec l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué.

Le cas  $\text{card}(\mathcal{I}_2) = 0$  est immédiat : si  $\mathcal{I}_2 = \emptyset$  et  $\mathcal{I}_3 = \emptyset$ , alors toutes les paires d'indices appartiennent à  $\mathcal{I}_1$ , et  $\mathbf{c}$  a  $k+1$  sorties deux à deux distinctes.

Considérons  $\text{card}(\mathcal{I}_2) > 0$ . On va d'abord montrer l'affirmation suivante : si  $i$  et  $j$  sont deux indices tels que

$$\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j \rangle \geq \ell n^{k+1}$$

alors il existe une factorisation

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}'\mathbf{c}''\mathbf{c}'''$$

où  $\mathbf{c}''$  est un cycle tel que

$$\text{AR}(\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}'_j) \neq \text{AR}((\mathbf{c}'\mathbf{c}'')_i, (\mathbf{c}'\mathbf{c}'')_j). \quad (3.1)$$

C'est-à-dire, ce cycle « casse » la différence entre les sorties de  $\mathbf{c}'_i$  et  $\mathbf{c}'_j$ .

Cette affirmation vient par induction sur la longueur de  $\mathbf{c}$  comme suit. Soit  $\mathbf{d}$  un préfixe de  $\mathbf{c}$  tel que

$$\text{AR}(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j) \geq \ell n^{k+1}.$$

Comme  $\mathcal{I}^{k+1}$  a  $n^{k+1}$  états,  $\mathbf{d}$  doit avoir au moins un cycle ; soit  $\mathbf{f}$  un tel cycle, et posons  $\mathbf{d} = \mathbf{d}'\mathbf{f}\mathbf{d}''$ . Si

$$\langle \mathbf{d}'_i, \mathbf{d}'_j \rangle \neq \langle (\mathbf{d}'\mathbf{f})_i, (\mathbf{d}'\mathbf{f})_j \rangle$$

alors on peut prendre  $\mathbf{c}'' = \mathbf{f}$ , et l'affirmation est montrée. Sinon, le chemin strictement plus court  $\mathbf{d}'\mathbf{d}''$  satisfait

$$\langle (\mathbf{d}'\mathbf{d}'')_i, (\mathbf{d}'\mathbf{d}'')_j \rangle = \langle \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle$$

et par induction,  $\mathbf{d}'\mathbf{d}''$  a un cycle  $\mathbf{g}$  qui casse les différences entre les sorties sur  $i$  et  $j$  d'un de ses préfixes. On a deux cas à considérer. D'abord, si  $\mathbf{g}$  est un facteur de  $\mathbf{d}'$  ou de  $\mathbf{d}''$ , alors il est aussi un facteur du chemin  $\mathbf{d}$ , et on peut prendre  $\mathbf{c}'' = \mathbf{g}$ . Sinon, on peut écrire  $\mathbf{d}' = \mathbf{h}\mathbf{g}'$ ,  $\mathbf{d}'' = \mathbf{g}''\mathbf{h}'$  et  $\mathbf{g} = \mathbf{g}'\mathbf{g}''$ . Dans ce cas,  $\mathbf{g}'\mathbf{g}''$  est un cycle dans  $\mathbf{d}$  comme désiré, et on peut prendre  $\mathbf{c}'' = \mathbf{g}'\mathbf{g}''$ .

Pour finir, on va établir à l'aide du lemme 3.2.2 que l'existence d'une factorisation qui satisfait (3.1) implique l'existence d'un entier  $r$  tel que l'ensemble correspondant à  $\mathcal{I}_2$  pour le calcul réussi  $\mathbf{c}'\mathbf{c}''^r\mathbf{c}'''$ , soit  $\mathcal{I}'_2$ , ne contient pas  $(i, j)$  et est donc strictement contenu dans  $\mathcal{I}_2$ . Ceci permet d'appliquer l'hypothèse d'induction sur le calcul  $\mathbf{c}'\mathbf{c}''^r\mathbf{c}'''$ .

Le lemme 3.2.2 assure qu'il existe un entier  $r$  tel que : les projections de

$$\mathbf{c}'\mathbf{c}''^r\mathbf{c}'''$$

sur  $i$  et  $j$  ont des sorties distinctes ; si  $\mathbf{c}_{i'}$  et  $\mathbf{c}_{j'}$  sont deux projections avec des sorties distinctes, alors les projections de  $\mathbf{c}'\mathbf{c}''^r\mathbf{c}'''$  sur  $i'$  et  $j'$  ont aussi des sorties distinctes ; pour toute autre paire d'indices  $i''$  et  $j''$ , soit les sorties des projections de  $\mathbf{c}'\mathbf{c}''^r\mathbf{c}'''$  sur  $i''$  et  $j''$  sont distinctes, soit le décalage entre eux est égal au décalage entre les projections de  $\mathbf{c}$  sur  $i''$  et  $j''$ . Ainsi,  $(i, j)$  n'appartient pas à  $\mathcal{I}'_2$ , et toute paire dans  $\mathcal{I}'_2$  appartient à  $\mathcal{I}_2$ .  $\square$

### 3.2.3 Construction du transducteur $k$ -ambigu en entrée

PREUVE DE LA PROPOSITION 3.2.1 Soit  $N$  un entier quelconque plus grand ou égal à  $\ell n^{k+1}$ .

D'après la propriété 2.5.7 (cf. section 2.5.3),  $\mathcal{V}_N$  est  $N$ -séparé, c'est-à-dire, si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux calculs réussis distincts de  $\mathcal{V}_N$  avec une même entrée, alors soit  $C_1$  et  $C_2$  ont des sorties distinctes, soit  $\langle C_1, C_2 \rangle \geq \ell n^{k+1}$ .

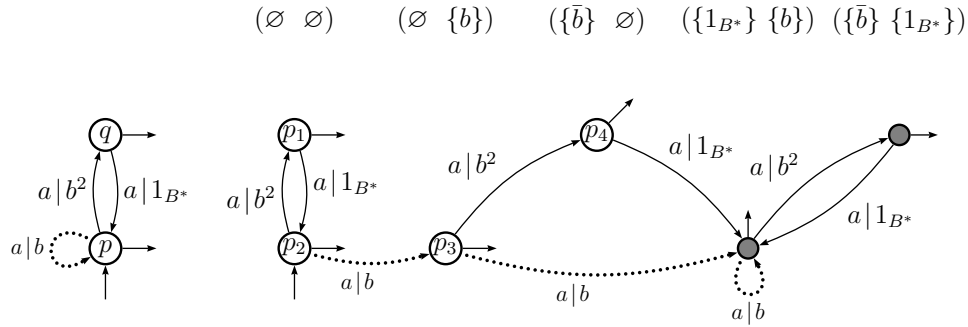
Tout calcul réussi de  $\mathcal{V}_N$  se projette sur un calcul réussi de  $\mathcal{T}$ . Alors, il vient du lemme 3.2.1 que  $\mathcal{V}_N$  ne peut pas avoir  $k + 1$  calculs réussis distincts avec une même entrée.  $\square$

EXEMPLE 3.2.1 La figure 3.1 représente deux revêtements Avance ou Retard d'un transducteur 2-valué sur  $\{a\}^* \times \{b\}^*$ ,  $\mathcal{T}_1$  (aussi illustré sur la figure 1.3(b)). Ce transducteur réalise la relation

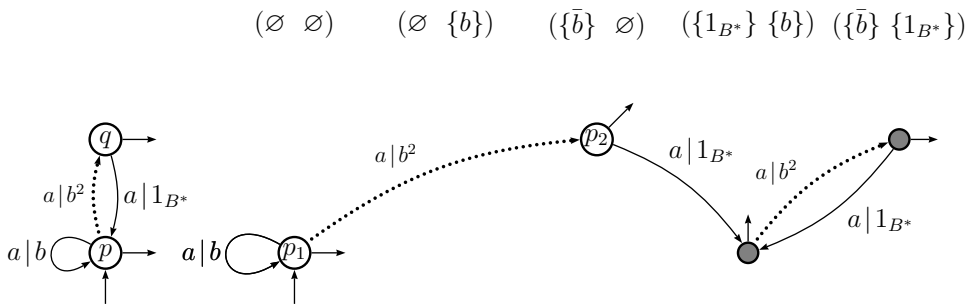
$$a^n \rightarrow \begin{cases} 1_{B^*} & n = 0 \\ \{b^n, b^{n+1}\} & n > 0 \end{cases}$$

L'ambiguïté de l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{T}_1$  n'est pas bornée. On voit dans chacun des deux revêtements le sous-transducteur  $\mathcal{V}_N$ , qui est équivalent à  $\mathcal{T}_1$  et 2-ambigu en entrée.  $\triangle$





(a) Avec un ordre sur les transitions sortantes de  $p$ ...



(b) ... et avec un autre ordre.

FIG. 3.1 – Deux revêtements Avance ou Retard de  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{U}^{(a)}$  et  $\mathcal{U}^{(b)}$ . Dans chacun des revêtements, la transition pointillée est la plus grandes dans l'ordre lexicographique. Les  $(\mathfrak{P}(\Delta))^Q$ -vecteurs (projection verticale) sont indiqués par  $\{p, q\}$ , dans cet ordre. Ces revêtements sont égaux à tous leurs troncatures, puisque le décalage entre toute paire de calculs réussis de  $\mathcal{T}_1$  ne dépasse jamais 1. En effaçant les états gris (et leurs transitions entrantes), on obtient deux sous-transducteurs équivalents à  $\mathcal{T}_1$  et 2-ambigus en entrée,  $\mathcal{V}_N^{(a)}$  et  $\mathcal{V}_N^{(b)}$ .

### 3.3 Décomposition d'un transducteur $k$ -ambigu en entrée

Le transducteur  $k$ -ambigu en entrée  $\mathcal{V}_N$  étant construit, on va le décomposer à l'aide du revêtement du paludier glouton. Ceci conclut la construction d'une décomposition de  $\mathcal{T}$ , puisque, comme on a vu dans le chapitre précédent,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}_N$  sont équivalents (pour tout  $N$ ).

Ensuite, on va montrer que le nombre d'états de cette décomposition est bornée par une exponentielle (dans le nombre d'états de  $\mathcal{T}$ ). Le calcul fait dans le chapitre précédent (*cf.* section 2.5.4) pour le nombre d'états d'un revêtement Avance ou Retard lexicographique tronqué aura un rôle important dans ce résultat.

#### 3.3.1 La décomposition lexicographique

PREUVE DU THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION Prenons

$$N = \ell n^{k+1}$$

et soit  $\mathcal{A}$  le  $\mathbb{N}$ -automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{V}_N$ . Dans cet automate, la multiplicité d'une transition est la somme des transitions de  $\mathcal{V}_N$  avec même origine, extrémité et entrée.

Il vient de la proposition 3.2.1 que  $\mathcal{V}_N$  est  $k$ -ambigu en entrée, ce qui est équivalent à dire que  $\mathcal{A}$  est  $k$ -ambigu. Alors, le théorème du paludier glouton appliquée sur  $\mathcal{A}$  fournit  $k$  automates

$$\mathcal{B}_k^{(0)}, \dots, \mathcal{B}_k^{(k-1)}$$

qui sont *non ambigus* — en particulier, les multiplicités des transitions, des états initiaux et des états finaux des parties utiles de ces automates sont égales à 1 —, immersions dans  $\mathcal{A}$  et tels que

$$\sum_{0 \leq i < k} |\mathcal{B}_k^{(i)}| = |\mathcal{A}|.$$

De plus, comme  $\mathcal{A}$  est  $k$ -ambigu, l'ensemble des calculs réussis dans ces immersions est en bijection avec l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{A}$ .

Ensuite, on transforme  $\mathcal{B}_k^{(0)}, \dots, \mathcal{B}_k^{(k-1)}$  en  $k$  transducteurs en leur attribuant des sorties comme suit : une transition  $e$  dans ces automates se projette sur une transition  $f$  de  $\mathcal{A}$  avec la même étiquette, soit  $a$  ; la transition  $f$  correspond à une transition de  $\mathcal{V}_N$  ; soit  $u$  la sortie de cette transition ; on redéfinit l'étiquette de  $e$  comme étant le couple  $a|u$ .

Avec cette réétiquetage, on obtient  $k$  transducteurs non ambigus

$$\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$$

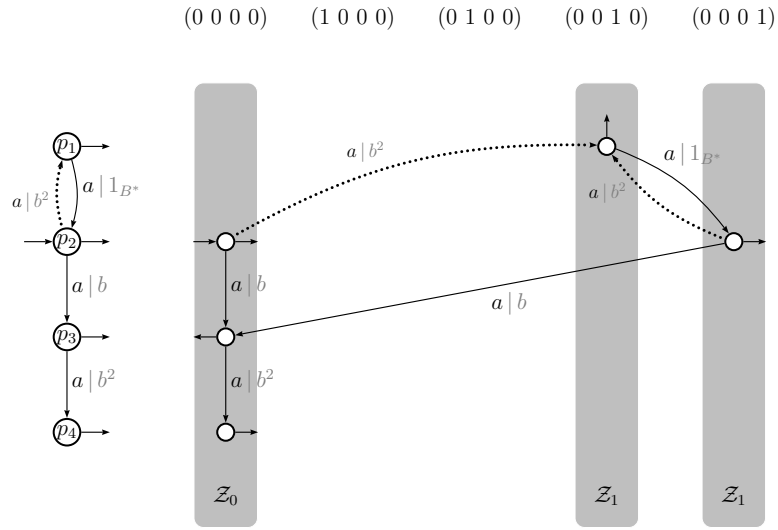
dont l'union est équivalente à  $\mathcal{V}_N$  et, donc, à  $\mathcal{T}$ . □

On appellera les transducteurs  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  une *décomposition lexicographique* de  $\mathcal{T}$ .

Insistons sur le fait (implicite dans la preuve) que les calculs réussis des transducteurs dans cette décomposition sont en bijection avec ceux de  $\mathcal{V}_N$ . Ceci sera utile plus tard.

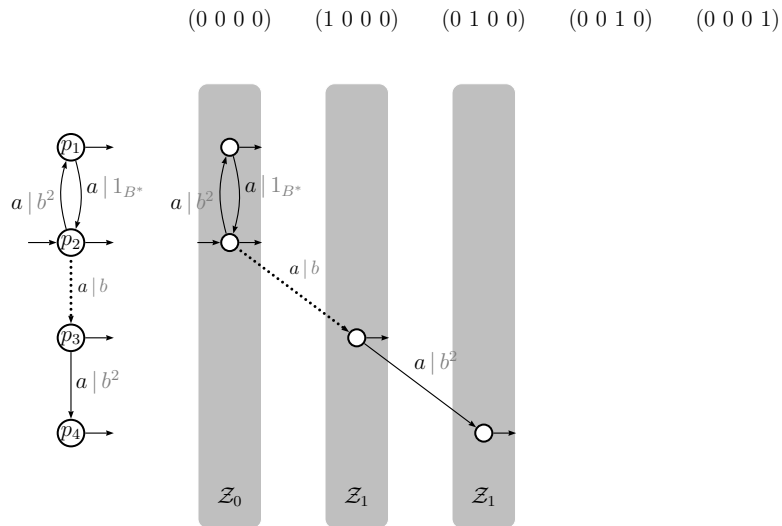
**PROPRIÉTÉ 3.3.1** *Soit  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  une décomposition lexicographique d'un transducteur  $k$ -valué  $\mathcal{T}$ . L'immersion de  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  sur  $\mathcal{V}_N$  définit une bijection entre les calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  et l'union des calculs réussis dans cette décomposition.* □

**EXEMPLE 3.3.1 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 3.1)** On représente aux figures 3.2 et 3.3 quatre décompositions distinctes pour le transducteur  $\mathcal{T}_1$ , obtenues avec le revêtement du paludier glouton appliqué sur les transducteurs  $\mathcal{V}_N^{(a)}$  et  $\mathcal{V}_N^{(b)}$  illustrés sur la figure 3.1. △



(a) Une décomposition de  $\mathcal{V}_N^{(a)}$  dans les fonctions

$$|\mathcal{Z}_0|: a^n \mapsto \begin{cases} 1_{B^*} & n = 0 \\ b^{n+1} & n \text{ pair} > 0 \\ b^n & n \text{ impair} \end{cases} \quad |\mathcal{Z}_1|: a^n \mapsto \begin{cases} b^n & n \text{ pair} > 0 \\ b^{n+1} & n \text{ impair} \end{cases}$$

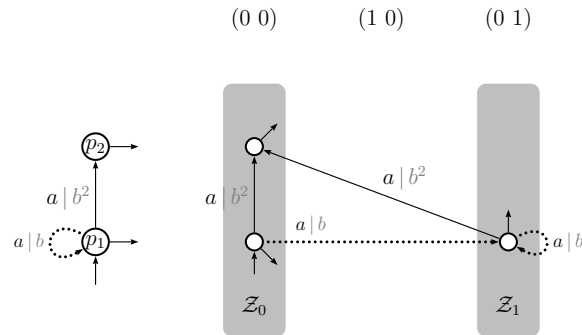


(b) Autre ordre et autre décomposition :

$$|\mathcal{Z}_0|: a^n \mapsto \begin{cases} b^n & n \text{ pair} \geq 0 \\ b^{n+1} & n \text{ impair} \end{cases} \quad |\mathcal{Z}_1|: a^n \mapsto \begin{cases} b^{n+1} & n \text{ pair} > 0 \\ b^n & n \text{ impair} \end{cases}$$

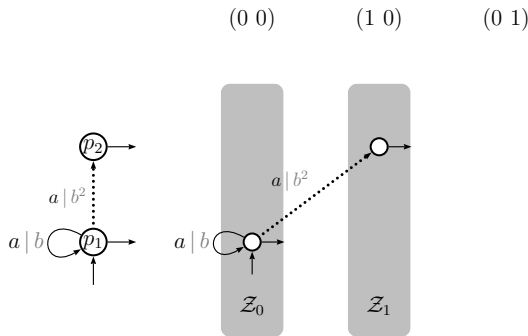
FIG. 3.2 – Le revêtement du paludier glouton sur l'automate d'entrée de  $\mathcal{V}_N^{(a)}$  avec deux ordres distincts. Les transitions pointillées sont les plus grandes.





(a) Une décomposition de  $\mathcal{V}_N^{(a)}$  dans les fonctions

$$|\mathcal{Z}_0|: a^n \mapsto \begin{cases} 1_{B^*} & n = 0 \\ b^{n+1} & n > 0 \end{cases} \quad |\mathcal{Z}_1|: a^n \mapsto b^n \quad n > 0$$



(b) Autre ordre et autre décomposition :

$$|\mathcal{Z}_0|: a^n \mapsto b^n \quad n \geq 0 \quad |\mathcal{Z}_1|: a^n \mapsto b^{n+1} \quad n > 0$$

FIG. 3.3 – Le revêtement du paludier glouton sur l'automate d'entrée de  $\mathcal{V}_N^{(b)}$  avec deux ordres distincts. Les transitions pointillées sont les plus grandes.

### 3.3.2 Taille de la décomposition lexicographique

On va mesurer le nombre d'états d'une décomposition lexicographique de  $\mathcal{T}$  en fonction des paramètres suivantes de  $\mathcal{T}$  :  $n$  (le nombre d'états),  $h$  (la cardinalité de l'alphabet de sortie),  $\ell$  (la longueur maximale des sorties des transitions) et  $k$  (la norme).

On supposera que le revêtement du paludier glouton, seconde étape de la construction de la décomposition lexicographique, est appliquée sur la partie utile de  $\mathcal{A}$ . Sous cette hypothèse, on va montrer le suivant :

**PROPRIÉTÉ 3.3.2** *Si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, chaque transducteur  $\mathcal{Z}^{(i)}$  (construit à partir de  $\mathcal{V}_N$  avec  $N = \ell n^{k+1}$ ) a au plus  $2^{\mathcal{O}(h\ell k^4 n^{k+4})}$  états utiles.*

La preuve de cette propriété dépend du calcul du nombre d'états de  $\mathcal{V}_N$  fait dans le chapitre précédent (cf. section 2.5.4) et du fait, démontré ci-dessous, que sous l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  est émondé et  $k$ -valué, les vecteurs contenus dans les états utiles de  $\mathcal{Z}^{(i)}$  n'ont qu'un nombre linéaire de coordonnées dont les coefficients sont distincts de 0.

Pour éviter toute confusion avec l'écriture des états  $\mathcal{V}_N$ , on notera les états de  $\mathcal{Z}^{(i)}$  avec des lettres majuscules.

**LEMME 3.3.1** *Sous l'hypothèse que  $\mathcal{T}$  est émondé et  $k$ -valué, et que  $\mathcal{V}_N$  est construit avec  $N = \ell n^{k+1}$ , on a : pour tout état utile  $(P, \mathbf{V})$  de  $\mathcal{Z}^{(i)}$ ,  $\mathbf{V}$  a au plus  $kn$  coordonnées dont les coefficients sont distincts de 0.*

**PREUVE** Fixons un état  $q$  de  $\mathcal{T}$ . On va montrer qu'il existe au plus  $k$  vecteurs  $\mathbf{w}$  tels que  $V_{(q, \mathbf{w})} > 0$  (rappelons que  $\mathbf{V}$  est indicé par les états de  $\mathcal{V}_N$ ).

Pour ce faire, on va associer à chaque vecteur  $\mathbf{w}$  tel que  $V_{(q, \mathbf{w})} > 0$  un certain chemin  $D_{\mathbf{w}}$  de  $\mathcal{V}_N$  de façon que : pour des vecteurs  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{w}'$  distincts,  $D_{\mathbf{w}}$  et  $D_{\mathbf{w}'}$  ont la même entrée, et de plus soit leurs sorties sont distinctes, soit  $\langle D_{\mathbf{w}}, D_{\mathbf{w}'} \rangle \geq \ell n^{k+1}$ . Ensuite, on montrera à l'aide du lemme des chemins proches qu'il existe au plus  $k$  chemins de cette forme.

Fixons d'abord l'entrée de ces chemins. Comme  $(P, \mathbf{V})$  est un état utile de  $\mathcal{Z}^{(i)}$ , ce transducteur a (au moins) un chemin  $C$  allant d'un état initial à  $(P, \mathbf{V})$ . Soit  $u$  l'entrée de  $C$ .

Si  $\mathbf{w}$  est un vecteur tel que  $V_{(q, \mathbf{w})} > 0$ , il découle de la construction du revêtement du paludier glouton (cf. section 2.4.2) qu'il existe dans  $\mathcal{V}_N$  au

moins un chemin allant d'un état initial à  $(q, \mathbf{w})$  et qui lit  $u$  (plus précisément, un chemin plus petit que la projection de  $C$  sur  $\mathcal{V}_N$ ). On définit  $D_{\mathbf{w}}$  comme l'un de ces chemins.

Montrons que pour  $D_{\mathbf{w}} \neq D_{\mathbf{w}'}$  soit les sorties de ces chemins sont distinctes, soit  $\langle D_{\mathbf{w}}, D_{\mathbf{w}'} \rangle \geq \ell n^{k+1}$ . Supposons, sans perte de généralité, que

$$D_{\mathbf{w}'}\varphi \prec D_{\mathbf{w}}\varphi$$

où  $\varphi$  est le morphisme de  $\mathcal{V}_N$  sur  $\mathcal{T}$  et  $\prec$  est l'ordre lexicographique fixé sur les calculs de  $\mathcal{T}$ . Si les sorties de  $D_{\mathbf{w}}$  et  $D_{\mathbf{w}'}$  étaient égales et  $\langle D_{\mathbf{w}}, D_{\mathbf{w}'} \rangle < \ell n^{k+1}$ , on aurait par la propriété 2.5.6 que  $1_{B^*} \in \mathbf{w}_q$ . Or, ceci implique que  $(q, \mathbf{w})$  n'est pas co-accessible dans  $\mathcal{V}_N$  (contradiction avec l'hypothèse que le revêtement du paludier glouton est appliqué sur la partie utile de  $\mathcal{V}_N$ ), puisque, dans ce cas, tout état  $(t, \mathbf{z})$  accessible à partir de  $(q, \mathbf{w})$  devrait satisfaire  $1_{B^*} \in \mathbf{z}_t$ , et donc  $(t, \mathbf{z})$  ne saurait pas être final dans  $\mathcal{V}_N$ .

Afin de conclure la preuve, remarquons que chaque  $D_{\mathbf{w}}$  se projette sur un chemin de  $\mathcal{T}$  de la forme

$$c_{\mathbf{w}} : i \xrightarrow[\mathcal{T}]{u|x} q$$

où  $i$  est un état initial. Comme  $\mathcal{T}$  est émondé, il existe un chemin

$$f : q \xrightarrow[\mathcal{T}]{v|z} t$$

où  $t$  est un état final. Posons

$$d_{\mathbf{w}} = c_{\mathbf{w}}f.$$

Donc,  $d_{\mathbf{w}}$  est chemin réussi de  $\mathcal{T}$ ; de plus, pour  $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ ,  $d_{\mathbf{w}}$  et  $d_{\mathbf{w}'}$  ont la même entrée, et soit leurs sorties sont distinctes, soit  $\langle d_{\mathbf{w}}, d_{\mathbf{w}'} \rangle \geq \ell n^{k+1}$ . Du lemme 3.2.1 il vient que  $\mathcal{T}$  contient au plus  $k$  chemins de cette forme.  $\square$

**PREUVE DE LA PROPRIÉTÉ 3.3.2** Soit  $X$  l'ensemble des états utiles de  $\mathcal{V}_N$ . Comme on a énoncé dans la propriété 2.5.10,

$$X \subseteq Q \times (\mathfrak{P}_{(k+1)}(\Delta_N))^Q.$$

Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < k$ , les états du transducteur  $\mathcal{Z}^{(i)}$  (donné par le revêtement du paludier glouton de l'automate d'entrée de  $\mathcal{V}_N$ ) appartiennent à

$$X \times \mathbb{N}_k^X.$$

Du lemme 3.3.1 il vient que pour tout état utile  $(P, \mathbf{V})$  de  $\mathcal{Z}^{(i)}$ , l'ensemble des coordonnées de  $\mathbf{V}$  dont le coefficient n'est pas nul est contenu dans

$$\mathfrak{P}_{(kn)}(X).$$

Il y a  $k$  possible valeurs différentes de zéro pour chacune de ces coordonnées, à savoir,

$$\{1, \dots, k-1, \omega\},$$

alors le nombre d'états utiles de  $\mathcal{Z}^{(i)}$  est au plus

$$\text{card}(X) \times \text{card}(\mathfrak{P}_{(kn)}(X)) \times k^{kn}.$$

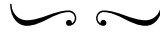
Pour conclure, nous récurons au calcul du nombre d'états utiles de  $\mathcal{V}_N$  fait à la section 2.5.4 : de la propriété 2.5.11 il vient que  $\text{card}(X)$  est

$$2^{\mathcal{O}(hNk^2n)}$$

et de (2.17) il découle

$$\text{card}(\mathfrak{P}_{(kn)}(X)) \leq \text{card}(X)^{(kn)^2}.$$

Avec  $N = \ell n^{k+1}$ , on obtient que  $\mathcal{Z}^{(i)}$  a  $2^{\mathcal{O}(h\ell k^4 n^{k+4})}$  états utiles.  $\square$



### 3.4 Décomposition avec morphisme

Considérons maintenant la décomposition de la composée d'une relation rationnelle avec un morphisme :

#### DÉCOMPOSITION AVEC MORPHISME

Soient  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  une relation rationnelle d'image finie et  $\theta : B^* \rightarrow C^*$  un morphisme tels que la composition  $\tau\theta$  soit une relation rationnelle  $k$ -valuée. Tout transducteur  $\mathcal{S}$  réalisant  $\tau$  peut être effectivement décomposé en  $k$  transducteurs dont les compositions avec  $\theta$  sont des fonctions.

On tirera ce théorème d'une décomposition totale des calculs réussis d'un transducteur  $k$ -valué, que l'on va tout d'abord construire.

### 3.4.1 Décomposition des calculs réussis

**THÉORÈME 3.4.1** *Pour tout transducteur  $k$ -valué  $\mathcal{T}$ , on peut construire effectivement  $k$  transducteurs fonctionnels  $\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$  avec les propriétés suivantes :*

1. *pour tout  $i$ ,  $0 \leq i < k$ , il existe une immersion  $\varphi^{(i)} : \mathcal{W}^{(i)} \rightarrow \mathcal{T}$  ;*
2. *l'union des images (par ces immersions) des ensembles de calculs réussis de  $\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$  est égale à l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{T}$ .*

Une bonne partie de la preuve de ce théorème est faite en construisant une décomposition lexicographique de  $\mathcal{T}$ .

On la conclut avec une propriété de cette décomposition que l'on montrera ci-dessous. Cette propriété dit que tout calcul réussi de  $\mathcal{T}$  doit être « proche » d'au moins un calcul réussi dans la décomposition  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  :

**PROPRIÉTÉ 3.4.1** *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur  $k$ -valué avec  $n$  états et sorties des transitions bornées par  $\ell$ . Soit  $\mathcal{Z}^{(0)} \cup \dots \cup \mathcal{Z}^{(k-1)}$  une décomposition lexicographique de ce transducteur, avec  $N = \ell n^{k+1}$ . Pour tout calcul réussi  $c$  de  $\mathcal{T}$  il existe un calcul réussi  $D$  dans  $\mathcal{Z}^{(0)} \cup \dots \cup \mathcal{Z}^{(k-1)}$  avec la même entrée, même sortie et tel que  $\langle c, D\varphi \rangle < 2(k+1)N$  (où  $\varphi$  est le morphisme de la décomposition sur  $\mathcal{T}$ ).*

**PREUVE** Posons  $K = 2(k+1)N$ .

Rappelons que l'union des calculs réussis de  $\mathcal{Z}_0, \dots, \mathcal{Z}_{k-1}$  est en bijection avec les calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  (propriété 3.3.1). Donc il suffit de montrer que pour tout calcul réussi  $c$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un calcul réussi  $D$  dans  $\mathcal{V}_N$  avec la même entrée, même sortie et tel que  $\langle c, D\varphi \rangle < K$ .

Soit  $\mathcal{C}$  l'ensemble des calculs réussis de  $\mathcal{T}$ . On va définir une suite emboîtée de sous-ensembles de  $\mathcal{C}$  deux à deux distincts. L'ensemble le plus petit,  $\mathcal{C}_0$ , est la projection sur  $\mathcal{T}$  des calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$ , et, pour tout  $i > 0$ ,

$$\mathcal{C}_i = \left\{ c \in \mathcal{C} - \bigcup_{0 \leq j < i} \mathcal{C}_j \mid \exists d \in \mathcal{C}_{i-1} \text{ tel que } \langle c, d \rangle < N \right\}.$$

On va montrer que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{0 \leq i < 2(k+1)} \mathcal{C}_i. \quad (3.2)$$

Ceci établit la preuve en raison du fait suivant, immédiat par induction sur  $i$  : pour tout  $c \in \mathcal{C}_i$ , il existe  $d \in \mathcal{C}_0$  (l'image d'un calcul dans  $\mathcal{V}_N$ ) avec la même entrée, même sortie et tel que  $\langle c, d \rangle < iN$ .

Pour montrer (3.2), on va d'abord établir que

$$\mathcal{C}_{2(k+1)} = \emptyset.$$

En effet, si  $\mathcal{C}_{2(k+1)} \neq \emptyset$ , alors on peut construire  $k+1$  calculs réussis  $c_1, \dots, c_{k+1}$  dans  $\mathcal{T}$  tels que

$$\langle c_i, c_j \rangle \geq N \quad \text{pour } i \neq j$$

de la manière suivante. Premièrement, on choisit  $c_1$  comme n'importe quel calcul dans  $\mathcal{C}_{2(k+1)}$ . De la définition de ces ensembles il vient qu'il existe des calculs

$$d' \in \mathcal{C}_{2(k+1)-1} \quad \text{et} \quad d \in \mathcal{C}_{2k}$$

avec la même entrée, même sortie et tels que

$$\langle c, d' \rangle < N \quad \text{et} \quad \langle d', d \rangle < N.$$

On a que

$$\langle c, d \rangle \geq N,$$

puisque au contraire  $c$  appartiendrait à  $\mathcal{C}_{2(k+1)-1}$ . On choisit  $c_2$  comme  $d$ , et il suffit d'itérer ces choix. Or, comme  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, ces  $k+1$  calculs contredisent le lemme des chemins proches (lemme 3.2.1).

On montre (3.2) comme suit.

Supposons le contraire, et soit  $c$  un calcul réussi minimal par l'ordre lexicographique des chemins de  $\mathcal{T}$  qui n'est pas dans l'ensemble  $\bigcup_{0 \leq i < 2(k+1)} \mathcal{C}_i$ . Il n'existe pas de calcul dans  $\mathcal{V}_N$  qui se projette sur  $c$  (parce que  $c$  n'est pas dans  $\mathcal{C}_0$ ), donc il vient de la propriété 2.5.7 qu'il existe dans  $\mathcal{T}$  un calcul réussi plus petit  $d$  avec la même entrée, la même sortie, et tel que

$$\langle c, d \rangle \leq N.$$

En raison de la minimalité de  $c$ , on a que  $d$  appartient à un ensemble  $\mathcal{C}_i$  pour  $i < 2(k+1)$ , et comme  $\langle c, d \rangle \leq N$  on a que  $c$  doit appartenir à  $\mathcal{C}_{i+1}$ . Contradiction : comme  $\mathcal{C}_{2(k+1)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{C}_{i+1}$  est un des ensembles

$$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{2(k+1)-1}.$$

Alors, tout calcul réussi de  $\mathcal{T}$  appartient à  $\bigcup_{0 \leq i < 2(k+1)} \mathcal{C}_i$ . □

Cette propriété permet de tirer la décomposition des calculs de  $\mathcal{T}$  avec un « collage » des calculs réussis de ce transducteur dans  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  à l'aide de l'action Avance ou Retard tronquée.

PREUVE DU THÉORÈME 3.4.1 Soient  $\mathcal{T}$  un transducteur  $k$ -valué, et

$$\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$$

une décomposition lexicographique de  $\mathcal{T}$ . On tirera  $\mathcal{W}^{(i)}$ , pour  $0 \leq i < k$ , du produit de  $\mathcal{T} \times \mathcal{Z}^{(i)}$  par l'action Avance ou Retard tronquée d'indice  $2(k+1)N$ , pour  $N = \ell n^{k+1}$  (cf. section 2.5.1),

$$\mathcal{T} \times \mathcal{Z}^{(i)} \times \phi_{2(k+1)N}.$$

Il découle de la propriété 2.5.2 que les calculs dans ce produit dont l'extrémité contient (dans la troisième coordonnée) le mot vide se projettent sur les calculs réussis de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{Z}^{(i)}$  avec la même entrée, même sortie, et dont le décalage est borné par  $N$ .

On définit  $\mathcal{W}^{(i)}$  en effaçant la propriété d'être final des états finaux de  $\mathcal{T} \times \mathcal{Z}^{(i)} \times \phi_{2(k+1)N}$  qui ne contiennent pas le mot vide, et en effaçant le deuxième mot des sorties des transitions de  $\mathcal{T} \times \mathcal{Z}^{(i)} \times \phi_{2(k+1)N}$ . La propriété 3.4.1 assure que ces transducteurs ont les propriétés demandées.  $\square$

Les opérations que l'on a mis en œuvre pour construire les transducteurs  $\mathcal{W}^{(i)}$  n'introduisent pas de nouvelles exponentielles. Ainsi, la taille d'une décomposition de calculs est dans le même ordre que celle d'une décomposition lexicographique :

PROPRIÉTÉ 3.4.2 Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur  $k$ -valué avec  $n$  états et sorties des transitions bornées par  $\ell$  ; soit  $h$  la cardinalité de son alphabet de sortie. Chaque transducteur  $\mathcal{W}^{(i)}$  a au plus  $2^{\mathcal{O}(h\ell k^4 n^{k+4})}$  états utiles.

PREUVE Pour chaque  $i$ ,  $0 \leq i < k$ , soit  $M_i$  le nombre d'états utiles de  $\mathcal{Z}^{(i)}$ . Le nombre d'états utiles de  $\mathcal{W}^{(i)}$  est borné par

$$n \times M_i \times \text{card}(\Delta_K) \leq n M_i 2^{hK+1}$$

(où  $K = 2(k+1)N$ ). Comme on a montré dans la propriété 3.3.2,  $M_i$  est de l'ordre  $2^{\mathcal{O}(h\ell k^4 n^{k+4})}$ . L'expression  $n M_i 2^{hK+1}$  clairement en est de même.  $\square$

### 3.4.2 Construction de la décomposition

La décomposition avec morphisme découle de la décomposition des calculs avec un simple aller-retour de réétiquetage de transitions.

PREUVE DE LA DÉCOMPOSITION AVEC MORPHISME Soit  $\mathcal{S}$  un transducteur réalisant  $\tau$ . On peut construire à partir de  $\mathcal{S}$  un transducteur  $k$ -valué  $\mathcal{T}$  réalisant la composition  $\tau\theta$  avec une réétiquetage des transitions de  $\mathcal{S}$  : chaque transition

$$p \xrightarrow[\mathcal{S}]{a|x} q$$

est remplacée par

$$p \xrightarrow[\mathcal{T}]{a|x\theta} q.$$

Soit

$$\mathcal{W}^{(0)}, \dots, \mathcal{W}^{(k-1)}$$

une décomposition des calculs de  $\mathcal{T}$ . On va remplacer les sorties des transitions de chaque transducteur  $\mathcal{W}^{(i)}$  de façon à obtenir une immersion sur  $\mathcal{S}$  : chaque transition

$$e : p \xrightarrow[\mathcal{W}^{(i)}]{a|y} q$$

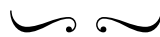
se projette sur une transition  $f$  de  $\mathcal{T}$  ; l'étiquette de  $f$  est, par construction, de la forme

$$a|x\theta$$

où  $x$  est la sortie originale dans  $\mathcal{S}$  ; la sortie  $y$  de  $e$  est remplacée par  $x$ .

On obtient alors  $k$  transducteurs décomposant entièrement les calculs de  $\mathcal{S}$ . Ces transducteurs ne sont pas nécessairement fonctionnels. Mais leurs composées avec  $\theta$  (qui sont les transducteurs de la décomposition de calculs de  $\mathcal{T}$ ) le sont.  $\square$

Il vient de la propriété 3.4.2 que les transducteurs dans cette décomposition ont  $2^{\mathcal{O}(\ell k^4 n^{k+4})}$  états, où  $\ell$  dans ce cas est la longueur maximale des images des sorties des transitions de  $\mathcal{S}$  par le morphisme  $\theta$  et  $n$  est le nombre d'états de  $\mathcal{S}$ .





## 3.5 Ambiguïté

On peut définir le concept d'ambiguïté de façon très générale pour les sous-ensembles rationnels d'un monoïde quelconque. Une façon de l'énoncer est en recourant aux expressions rationnelles : on dit qu'un rationnel est non ambigu s'il peut être construit avec une expression rationnelle dans laquelle toutes les opérations sont non ambiguës. Une autre est à travers des automates sur le monoïde, en raison des passages possibles d'un objet à l'autre. On trouvera les définitions et développements concernant en [38].

Dans cette section, on s'intéressera à quelques aspects du concept d'ambiguïté pour la famille des relations de norme bornée.

### Définition et exemples

**DÉFINITION 3.5.1 (RELATION INTRINSÈQUEMENT AMBIGUË)** On dit qu'un transducteur sur  $A^* \times B^*$  est *non ambigu* si pour chaque paire de mots dans  $A^* \times B^*$  il existe au plus un calcul réussi dans ce transducteur étiqueté par cette paire ; sinon on dit qu'il est ambigu. On dit qu'une relation rationnelle est *intrinsèquement ambiguë* s'il n'existe aucun transducteur non ambigu pouvant la réaliser ; sinon, on dit qu'elle est *non ambiguë*.  $\triangle$

On sait que tout sous-ensemble rationnel d'un *monoïde libre* est non ambigu, et que toute fonction rationnelle est non ambiguë. Le même n'est pourtant pas vrai pour n'importe quelle relation rationnelle, et en particulier pour celles de norme bornée. La proposition suivante donne un critère nécessaire simple pour la non ambiguïté d'une relation rationnelle.

**PROPOSITION 3.5.1** *Si  $\tau$  est une relation rationnelle d'image fini non ambiguë, alors pour tout entier  $k > 0$  l'ensemble*

$$\{u \in \text{dom } \tau \mid \text{card}(u\tau) = k\} \quad (3.3)$$

*est rationnel.*

**PREUVE** Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur non ambigu qui réalise  $\tau$ . Pour chaque  $u \in \text{dom } \tau$ , le nombre de chemins distincts de  $\mathcal{T}$  lisant  $u$  est égal à  $\text{card}(u\tau)$ . Le revêtement décrit dans le théorème 2.2.2 (pour la construction de la série  $s_{(=k)}$ ), appliqué sur l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{T}$ , permet donc d'obtenir une immersion sur ce dernier qui réalise l'ensemble (3.3).  $\square$

EXEMPLE 3.5.1 La proposition 3.5.1 implique que toute relation rationnelle  $\tau$  incluse dans  $(a, c)^*(b, 1)^* + (a, 1)^*(b, c)^*$  et ayant un nombre infini de paires de la forme  $(a^i b^i, c^i)$  est intrinsèquement ambiguë. En effet,  $\text{card}(u\tau) = 1$  si et seulement si  $u$  est un mot du domaine de  $\tau$  de la forme  $a^i b^i$ , et un ensemble infini de tels mots n'est pas rationnel.  $\triangle$

EXEMPLE 3.5.2 D'après la proposition 3.5.1, la relation rationnelle de norme bornée suivante,

$$[(a, a)^+(b, 1)^+(c, b) + (a, 1)^+(b, a)^+(c, b)]^+$$

est intrinsèquement ambiguë. En effet,

$$\text{card}(u\tau) = 1 \text{ ssi } u \in (\{a^i b^i \mid i > 0\} c)^+$$

et  $\{u \in \text{dom } \tau \mid \text{card}(u\tau) = 1\}$  n'est pas rationnel.  $\triangle$

EXEMPLE 3.5.3 Soient  $\sigma_1, \sigma_2$  les morphismes engendrés par

$$a\sigma_1 = a, b\sigma_1 = 1, a\sigma_2 = 1, b\sigma_2 = a$$

et  $\sigma$  la relation rationnelle  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ . Alors,

$$u\sigma = \{a^{|u|_a}, a^{|u|_b}\}$$

Cette relation rationnelle est intrinsèquement ambiguë. En fait,

$$\text{card}(u\sigma) = 1 \text{ ssi } |u|_a = |u|_b,$$

et  $\{u \in \text{dom } \sigma : \text{card}(u\sigma) = 1\}$  n'est pas rationnel.  $\triangle$

### Décomposition d'une relation rationnelle non ambiguë

On a montré comment décomposer une relation  $k$ -valuée, mais on n'a rien dit sur la possibilité d'obtenir des fonctions deux à deux disjointes. Cette possibilité est en effet liée à l'ambiguïté de la relation :

PROPOSITION 3.5.2 *Une relation rationnelle  $k$ -valuée est non ambiguë si, et seulement si, elle est une somme de  $k$  fonctions rationnelles deux à deux disjointes.*

PREUVE L'union de  $k$  fonctions rationnelles disjointes est une relation non ambiguë puisque toute fonction rationnelle est non ambiguë. La réciproque s'établit avec l'application du revêtement du paludier glouton sur l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{T}$  : cette construction fournit directement une décomposition de  $\mathcal{T}$  (puisque son automate d'entrée est  $k$ -ambigu), où de plus les calculs réussis des transducteurs en faisant partie sont en bijection avec les calculs réussis de  $\mathcal{T}$  ; donc, deux transducteurs distincts dans la décomposition n'ont aucun calcul réussi avec la même étiquette.  $\square$

### Une caractérisation

On vérifie que le décalage entre les calculs réussis d'un transducteur de norme borné a aussi un certain rapport avec l'ambiguïté de la relation réalisée.

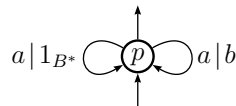
Pour tout transducteur  $\mathcal{T}$ , notons

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \max \left\{ \langle c, d \rangle \mid c : i \xrightarrow{\mathcal{T}} t, d : i' \xrightarrow{\mathcal{T}} t', c \text{ et } d \text{ réussis} \right\}$$

De façon équivalente,  $\langle \mathcal{T} \rangle$  est le supremum des longueurs des mots dans les états accessibles et co-accessibles de  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$ . Remarquons qu'on peut avec cette notation énoncer la proposition 3.2.2 de la manière suivante :

PROPOSITION 3.5.3 *Pour tout transducteur fonctionnel  $\mathcal{T}$ ,  $\langle \mathcal{T} \rangle < \ell n^2$  (où  $\ell$  est la longueur maximale des sortes des transitions et  $n$  le nombre d'états).*  $\square$

En général, il se peut que  $\langle \mathcal{T} \rangle$  soit fini ou infini, même si le comportement de  $\mathcal{T}$  est une relation non ambiguë. Par exemple,  $\langle \mathcal{T} \rangle$  est infini pour le transducteur suivant, qui réalise une relation non ambiguë :



Pour les relations de norme bornée, on a pourtant que la finitude de  $\langle \mathcal{T} \rangle$  caractérise la non ambiguïté du comportement de  $\mathcal{T}$ .

THÉORÈME 3.5.1 Soit  $\tau : A^* \rightarrow B^*$  une relation rationnelle  $k$ -valuée. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a)  $\tau$  est intrinsèquement ambiguë ;
- b) il existe un transducteur  $\mathcal{T}$  réalisant  $\tau$  tel que  $\langle \mathcal{T} \rangle = \infty$  ;
- c) pour tout transducteur  $\mathcal{T}$  réalisant  $\tau$ ,  $\langle \mathcal{T} \rangle = \infty$ .

Il est clair que c)  $\implies$  a) et c)  $\implies$  b). L'implication a)  $\implies$  c) est une conséquence directe du revêtement Avance ou Retard : en effet, si  $\langle \mathcal{T} \rangle$  est un transducteur réalisant  $\tau$  pour lequel il existe un entier  $N$  tel que  $\langle \mathcal{T} \rangle \leq N$ , alors le transducteur  $\mathcal{V}_N$ , sous-transducteur du revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$  (cf. théorème 2.5.2), est non ambigu. La substance du théorème est l'implication b)  $\implies$  c), qui découle du lemme suivant (remarquons que dans cet énoncé  $\langle c, d \rangle$  indique le décalage entre deux calculs appartenant à des transducteurs distincts) :

LEMME 3.5.1 Si  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  sont deux transducteurs  $k$ -valués, et si le comportement de  $\mathcal{T}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$ , alors il existe un entier  $L$  tel que pour tout calcul réussi  $c$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un calcul réussi  $d$  dans  $\mathcal{T}'$  avec même entrée, même sortie et tel que  $\langle c, d \rangle < L$ .

PREUVE Soient  $\mathcal{V}_N$  le transducteur  $k$ -ambigu en entrée et équivalent à  $\mathcal{T}'$  tiré d'un revêtement Avance ou Retard lexicographique de ce dernier, et  $\mathcal{B}$  le produit de l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{V}_N$  par l'action  $\gamma_{\mu, k+1}$  définie dans (2.5) (exemple 2.2.3). Soit  $\mathcal{Y}$  le transducteur obtenu à partir de  $\mathcal{B}$  en rajoutant dans chaque transition la sortie de la transition correspondante dans  $\mathcal{V}_N$ . Donc,  $\mathcal{Y}$  est un revêtement de  $\mathcal{V}_N$ , et dû à la propriété 3.4.1, il suffit de montrer, afin d'établir de lemme, qu'il existe un entier  $L$  tel que, pour tout calcul réussi  $c$  de  $\mathcal{T}$ , il existe un calcul réussi  $d$  dans  $\mathcal{Y}$  avec même entrée, même sortie et tel que  $\langle c, d \rangle < L$ .

Pour chaque  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , soit  $\mathcal{Y}^{(i)}$  le sous-transducteur de  $\mathcal{Y}$  obtenu en effaçant la qualité d'être final des états qui contiennent, dans la seconde composante, un vecteur où la somme des coordonnées correspondantes à un état final (de  $\mathcal{V}_N$ ) est distincte de  $i$ . Cette construction est similaire à celle de la décomposition lexicographique ; c'est le revêtement de l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{V}_N$  qui change (pour la décomposition lexicographique, il est celui du paludier glouton). Pour chaque  $i$ , il vient directement de la définition

de  $\mathcal{Y}^{(i)}$  que le domaine de ce transducteur est l'ensemble des mots qui sont l'entrée d'exactly  $i$  calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$ ; en particulier, pour  $i \neq j$ , les domaines de  $\mathcal{Y}^{(i)}$  et  $\mathcal{Y}^{(j)}$  sont disjoints.

Un argument similaire au lemme des chemins proches (lemme 3.2.1) achève la preuve. Soient  $n$  la somme des cardinalités des ensembles d'états des  $\mathcal{Y}^{(i)}$  et de celui de  $\mathcal{T}$ , et  $\ell$  la longueur maximale des sorties des transitions de ces transducteurs; on pose  $L = \ell n^{k+1}$ . Soit  $c$  un calcul réussi de  $\mathcal{T}$ , et  $c_1, \dots, c_t$  les calculs réussis dans  $\mathcal{Y}$  avec la même entrée. Alors,  $c_1, \dots, c_t$  sont projetés par  $t$  calculs réussis, soit  $d_1, \dots, d_t$ , de  $\mathcal{Y}^{(t)}$ . On affirme qu'il existe un  $d_i$  avec la même étiquette que celle de  $c$  et qui satisfait  $\langle c, d \rangle < L$ . En effet, le contraire impliquerait l'existence d'un calcul réussi  $c'$  de  $\mathcal{T}$  et de  $t$  calculs réussis  $d'_1, \dots, d'_t$  dans  $\mathcal{Y}^{(t)}$  dont les entrées sont égales à celle de  $c'$ , mais les sorties en sont distinctes. Or, les domaines des  $\mathcal{Y}^{(i)}$  pour  $i \neq t$  ne contiennent pas l'entrée de  $c'$ : contraction avec l'hypothèse que le comportement de  $\mathcal{T}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$ .  $\square$

### Indécidabilité

Pour conclure, on va montrer que la non ambiguïté n'est pas une propriété décidable pour les relations rationnelles de norme bornée :

**THÉORÈME 3.5.2** *Il n'est pas décidable si l'union de deux fonctions rationnelles est une relation intrinsèquement ambiguë.*

On commence avec le lemme suivant :

**LEMME 3.5.2 (EXERCICE IV.4.1 DE [38])** *Il n'est pas décidable si l'intersection de deux fonctions rationnelles est une relation rationnelle.*

**PREUVE** La preuve est une réduction au problème de correspondance de Post, dont l'indécidabilité, résultat classique, peut être consulté dans de nombreux ouvrages sur le sujet (*cf.* par exemple [24]).

Soient les morphismes  $\theta_1, \theta_2 : A^+ \rightarrow B^+$  une instance du problème de correspondance de Post,  $a$  et  $b$  de nouvelles lettres qui n'appartiennent pas à  $A$ , et  $c$  une lettre qui n'appartient pas à  $B$ . Considérons les morphismes  $\alpha, \beta : (A \cup a \cup b)^* \rightarrow (B \cup c)^*$  définis par

$$\begin{aligned} a\alpha &= c, \quad b\alpha = 1, \quad f\alpha = f\theta_1, \quad \forall f \in A^*; \\ a\beta &= 1, \quad b\beta = c, \quad f\beta = f\theta_2, \quad \forall f \in B^*. \end{aligned}$$

Soient  $C$  l'ensemble des mots dans  $(A \cup a \cup b)^*$  avec au moins une lettre dans  $A$ ,  $\sigma_1$  la restriction de  $\alpha$  à  $C$ , et  $\sigma_2$  la restriction de  $\beta$  à  $C$ . Le lemme est une conséquence des propriétés suivantes :

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \emptyset \iff \sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \quad (3.4a)$$

$$\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset \iff \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \text{Rat}(A^* \cup a \cup b) \times (B^* \cup c) \quad (3.4b)$$

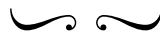
Montrons (3.4a). Supposons que  $\theta_1 \cap \theta_2 \neq \emptyset$  et soit  $f \in \text{dom}(\theta_1 \cap \theta_2)$ . Alors,  $f\sigma_1 = f\sigma_2$ , donc  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ . Supposons maintenant que  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ , et soit  $f \in \text{dom}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$ . Soit  $g$  le mot obtenu en effaçant les lettres  $a$  et  $b$  de  $f$ . De la définition de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  il suit que  $g\theta_1 = g\theta_2$ , et alors  $\theta_1 \cap \theta_2 \neq \emptyset$ .

Pour établir (3.4b) il reste à montrer que si  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$  alors  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  n'est pas rationnel. En effet, il suit de la définition de ces fonctions que si  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$  alors l'image de  $\text{dom}(\sigma_1 \cap \sigma_2)$  par le morphisme qui efface les lettres dans  $A$  est  $\{f \in \{a, b\}^* : |f|_a = |f|_b\}$ , ensemble qui n'est pas rationnel. Alors,  $\sigma_1 \cap \sigma_2$  n'est pas une relation rationnelle.  $\square$

**PREUVE DU THÉORÈME 3.5.2** Soient  $\sigma$  et  $\tau$  deux fonctions rationnelles. On va montrer que leur union est une relation non ambiguë si, et seulement si, leur intersection est rationnelle (rappelons que les relations rationnelles ne sont pas fermées par intersection). Le théorème découle de ce fait et du lemme 3.5.2.

Supposons que  $\sigma \cup \tau$  est une relation non ambiguë. Soit  $K$  l'intersection de leurs domaines. Alors,  $\sigma \cap \tau$  est la restriction de  $\sigma$  (ou  $\tau$ ) au sous-ensemble des mots dans  $K$  dont les images par  $\sigma$  et  $\tau$  coïncident. Il suffit d'appliquer la proposition 3.5.1 pour établir que ce sous-ensemble est rationnel.

Supposons que  $\sigma \cap \tau$  est rationnel. Alors, le domaine de  $\sigma \cap \tau$  est rationnel, et son complément, soit  $K$ , l'est aussi. La relation  $\sigma \cup \tau$  est une union de trois fonctions rationnelles disjointes, étant donc non-ambiguë : la restriction de  $\sigma$  à  $K$ , la restriction de  $\tau$  à  $K$ , et  $\sigma \cap \tau$ .  $\square$



# Chapitre 4

## Décidabilité

### 4.1 Introduction

Alors que l'équivalence entre deux transducteurs est suue être indécidable depuis quarante ans, ce problème devient décidable si on se restreint à la classe des relations rationnelles de norme bornée. La position privilégiée de ces relations vis-à-vis des problèmes de décidabilité fait l'objet de ce chapitre.

L'indécidabilité de l'équivalence est en effet une conséquence de l'indécidabilité de l'universalité, résultat dû à Fischer et Rosenberg :

**THÉORÈME 4.1.1 (UNIVERSALITÉ [16])** *Il n'est pas décidable si le comportement d'un transducteur sur  $A^* \times B^*$  est la relation  $A^* \times B^*$ .*

D'autres « mauvaises nouvelles », fortement liées à ce théorème, ont été montrées par Fischer et Rosenberg ; on peut les voir également dans [4, 38].

Toute autre est l'histoire pour les fonctions rationnelles, en raison d'un résultat classique duquel l'équivalence est une conséquence formelle :

**THÉORÈME 4.1.2 (FONCTIONNALITÉ [43])** *Il est décidable si un transducteur réalise une fonction.*

La procédure qui se dérive de la preuve de Schützenberger consiste à vérifier la cardinalité de la sortie d'un nombre fini, et exponentiel, de mots d'entrée ; une preuve similaire a été publiée par Blattner et Head [5]. Plus tard, ce problème

a été repris d'un point de vu plus structurel permettant des complexités polynomiales, d'abord par Weber et Klemm [51] et ensuite par Béal et. al [3].

Une généralisation du théorème de Schützenberger pour les relations de norme bornée est connue. Elle est due à Gurari et Ibarra :

**THÉORÈME 4.1.3 (APPARTENANCE À  $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$  [23])** *Soient  $k$  un entier positif et  $\mathcal{T}$  un transducteur. Il est décidable en complexité polynomiale si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué.*

La preuve de Gurari et Ibarra se place en grande partie dans un univers bien éloigné de l'objet transducteur. Elle consiste à réduire la question au problème de tester le vide pour un automate avec  $k(k+1)$  compteurs. Intuitivement, un calcul dans cet automate correspond à  $k+1$  calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée, et chaque compteur est associée à une paire de projections. Durant la lecture d'un mot d'entrée, l'automate « devine » de façon non déterministe les positions où les sorties des projections cessent de coïncider (méthode qui suppose l'existence d'un symbole de fin de bande) ; les compteurs sont incrémentés jusqu'à ces positions. Il est alors possible de définir dans cet automate des états finaux de façon qu'un calcul soit réussi si, et seulement si, les sorties de ses  $k+1$  projections soient distinctes, et décider si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué est équivalent à tester si cet automate n'accepte aucun mot.

Si la décidabilité est établie, la complexité de ce schéma théorique n'est pas facilement calculable, ce qui est particulièrement dû à la procédure employée pour décider le vide d'un automate avec compteurs. Cette procédure, décrite par les mêmes auteurs dans [22], découle du fait que pour tout automate avec  $r$  compteurs et  $m$  transitions il existe une constante  $c$  telle que, si l'automate accepte au moins un mot, alors il en accepte un de longueur bornée par  $(rm)^{cr}$ . Comme montré dans [22], ce nombre fini d'entrées peut être testé avec une machine de Turing non déterministe travaillant en espace  $cr \log(rm)$ . On obtient alors une procédure en complexité polynomiale en appliquant un résultat de base en théorie de la complexité, à savoir, pour toute machine de Turing qui travaille en espace  $f(n)$  il en existe une équivalente et déterministe qui travaille en temps  $d^{f(n)}$ , où  $d$  est une constante (cf. [24]).

Savoir décider si un transducteur est  $k$ -valué pour un entier  $k$  donné n'implique pas la décidabilité de l'existence d'un tel entier, problème qui est en effet d'une autre nature. La réponse à ce problème est quand même connue, et est aussi positive :



THÉORÈME 4.1.4 (APPARTENANCE À  $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$  [47]) *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur. Il est décidable en complexité polynomiale s'il existe un entier positif  $k$  tel que  $\mathcal{T}$  soit  $k$ -valué.*

La preuve de Weber s'aligne avec la caractérisation des  $\mathbb{N}$ -automates qui réalisent une série bornée présentée par Mandel et Simon [31] et redémontrée par Weber et Seidl [52]. D'abord, les transducteurs dont la norme n'est pas bornée sont caractérisés par un certain motif « interdit » de chemins. L'algorithme consiste à détecter ces motifs, avec une construction sur le graphe du transducteur, en complexité polynomiale.

Si la décidabilité de l'équivalence pour les fonctions rationnelles découle aisément de la décidabilité de la fonctionnalité, il n'en est pas de même pour les relations rationnelles de norme bornée. Deux réponses à ce problème, basées sur des méthodes distinctes, sont connues :

THÉORÈME 4.1.5 (ÉQUIVALENCE [10, 49]) *Il est décidable si deux transducteurs  $k$ -valués sont équivalents.*

Le résultat de Karhumäki et Culik est, à vrai dire, plus général : l'équivalence de deux transducteurs  $k$ -valués sur un langage HDTOL (un des plusieurs types de langages engendrés par les systèmes de Lyndenmeyer, *cf.* [36]) est décidable. Leur preuve, conséquence d'une généralisation de la conjecture d'Ehrenfeucht établie dans le même article, rend pourtant difficile d'estimer la complexité de la procédure sous-jacente, et en effet aucune analyse n'est présentée. La preuve de Weber, plus constructive, se base sur la décomposition d'un transducteur dans un nombre exponentiel de transducteurs non ambigus présentée dans [49], et sa complexité est de l'ordre d'une double exponentielle. La question de l'existence d'une procédure nécessitant une exponentielle de moins est lancée par Weber (qui suggère dans [49] qu'une décomposition de taille bornée par une exponentielle impliquerait une procédure en complexité exponentielle pour la décidabilité de l'équivalence, la raison n'étant pas toutefois immédiate).

Nous présentons à la section 4.2 une autre preuve pour la décidabilité de l'appartenance à  $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$  (théorème 4.1.3). Notre preuve peut être vue comme une généralisation de l'algorithme décrit par Béal et al. [3] pour la

décidabilité de la fonctionnalité, qui se base sur le produit du carré de  $\mathcal{T}$  par l'action Avance ou Retard. Cette généralisation dans un premier temps est naturelle, et consiste à faire apparaître la propriété dans le produit de  $\mathcal{T}^{k+1}$  par une action qui applique l'action Avance ou Retard pour chaque paire de projections des calculs de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , l'action *avance ou retard généralisée* notée  $\mathcal{G}_{k+1}$ . Elle n'est pourtant pas effective, puisque contrairement au cas  $k = 1$  il se peut que la partie accessible de ce produit soit infinie. Le cœur de notre preuve est la description de ce que l'on appellera la *transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$* , une sorte de valuation finie de  $\mathcal{T}^{k+1}$  qui contient toute l'information de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  permettant de conclure si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué. Nous décrivons un algorithme efficace pour construire cette structure et nous donnerons une expression exacte pour sa complexité, à savoir,  $\mathcal{O}(2^{5(k+1)^4} \ell n^{k+1} m^{k+1})$ , où  $n$  et  $m$  sont le nombre d'états et de transitions, respectivement, de  $\mathcal{T}$  et  $\ell$  est la longueur maximale des sorties des transitions de ce transducteur.

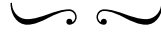
La section 4.3 est dédiée à la décidabilité de l'appartenance d'une relation à  $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$ , théorème 4.1.4. On en fera une preuve en deux pas comme celle Weber, comprenant une caractérisation des transducteurs de norme borné et un algorithme pour la tester. Nous nous en différencions pourtant en ce que notre preuve s'encadre dans l'ensemble de techniques mises en œuvre dans ce mémoire. D'abord, on donnera une preuve rapide de la caractérisation, qui est basée sur des propriétés du revêtement Avance ou Retard et la caractérisation de Mandel et Simon des  $\mathbb{N}$ -automates bornés. Ensuite, on montrera comment tester la caractérisation dans un produit de  $\mathcal{T}^3$  par l'action Avance ou Retard en complexité  $\mathcal{O}(\ell n^3(n^3 + m^3))$ . Il advient que les technicités de l'algorithme de Weber sont capturées par ce produit, avec une complexité qui paraît être de même ordre.

Ensuite, on décrira, toujours avec nos méthodes, un algorithme pour tester l'équivalence entre deux transducteurs  $k$ -valués, dont la complexité est celle conjecturée par Weber :

**THÉORÈME 4.1.6 (ÉQUIVALENCE)** *Il est décidable en complexité exponentielle si deux transducteurs  $k$ -valués sont équivalents.*

Les socles de notre preuve sont la décomposition lexicographique et notre construction pour décider si un transducteur est  $k$ -valué. Avec le premier, on décomposera les transducteurs étant comparés ; on pourra ensuite « voir » s'ils sont équivalents dans une valuation donnée par l'action Avance ou Retard

d'un certain produit des transducteurs faisant partie de cette décomposition.



## 4.2 Appartenance à $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$

Notre preuve pour l'appartenance à  $\text{Rat}_{(k)}(A^* \times B^*)$  (théorème 4.1.3) est une généralisation de la caractérisation de la fonctionnalité présentée par Béal et. al [3].

On a énoncé cette caractérisation dans le théorème 2.5.1 (chapitre 2). Elle traduit le fait que tout calcul du carré  $\mathcal{T}^2 = \mathcal{T} \times \mathcal{T}$  se projette sur deux calculs de  $\mathcal{T}$  avec la même entrée, et que  $\mathcal{T}$  réalise une fonction si, et seulement si, dans tout calcul réussi de  $\mathcal{T}^2$ , les sorties des projections sont égales. Le rapport entre ces sorties est capturé par le produit entre  $\mathcal{T}^2$  et l'action Avance ou Retard. On a alors que  $\mathcal{T}$  réalise une fonction si, et seulement si, la partie accessible de  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  attribue exactement une différence à chaque état accessible de  $\mathcal{T}^2$ , et les différences dans les états finaux sont toutes égales au mot vide. Il en découle directement que l'on peut décider une complexité polynomiale si  $\mathcal{T}$  réalise une fonction, puisque  $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{G}$  peut être construit avec un parcours de  $\mathcal{T}^2$ .

Il n'est pas difficile de généraliser cette caractérisation. Le transducteur  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué si, et seulement si, tout calcul réussi du produit  $(k+1)$  fois de  $\mathcal{T} - \mathcal{T}^{k+1} -$  a au moins deux projections dont les sorties sont égales. Les rapports entre ces sorties sont capturés par une généralisation de l'action Avance ou Retard, que l'on va noter  $\mathcal{G}_{k+1}$ , qui applique  $\mathcal{G}$  à chaque paire de projections des calculs de  $\mathcal{T}^{k+1}$ . Il est alors possible de « lire » dans les états finaux du produit  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué (théorème 4.2.1). Cette généralisation sera précisée à la section 4.2.1.

La généralisation de l'algorithme pour tester la caractérisation, pourtant, n'est pas si immédiate. Contrairement au cas  $k = 1$ , il se peut que la partie accessible de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  soit infinie, même si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué (cf. figure 4.3).

Le cœur de notre preuve est une approche à cette difficulté qui consiste à définir, pour chaque état accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , un ensemble fini de différences décrivant l'ensemble (potentiellement infini) des différences dans les états de

$\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  qui se projettent sur  $\mathbf{q}$ . La famille de ces ensembles finis est ce que l'on appellera la *transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$* , structure finie sur laquelle on peut encore voir si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué (théorème 4.2.2).

On décrira cette structure à la section 4.2.3, et on montrera à la section 4.2.4 comment la construire avec un parcours des composantes fortement connexes de  $\mathcal{T}^{k+1}$ . La complexité de notre algorithme pour décider si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué (théorème 4.2.3) est  $\mathcal{O}(2^{5(k+1)^4} \ell n^{k+1} m^{k+1})$ , où  $n$  est le nombre d'états de  $\mathcal{T}$ ,  $m$  le nombre de transitions et  $\ell$  la longueur maximale des sorties des transitions.

### 4.2.1 L'action avance ou retard généralisée

Fixons un entier positif  $k$ .

Dire que  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué se traduit à une affirmation sur le produit  $\mathcal{T}^{k+1}$  :

**PROPOSITION 4.2.1** *Un transducteur  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué si, et seulement si, pour tout calcul réussi  $\mathbf{c}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , il existe au moins deux indices distincts  $i$  et  $j$  tels que les projections de  $\mathbf{c}$  sur  $i$  et sur  $j$  ont la même sortie.*  $\square$

Afin de généraliser pour  $k > 0$  la caractérisation de Béal et al., on va d'abord généraliser l'action avance ou retard  $\mathcal{G}$  — action de couples de mots sur l'ensemble  $\Delta$  — à une action qui applique  $\mathcal{G}$  en même temps entre toutes les paires de projections des calculs de  $\mathcal{T}^{k+1}$ . On définira en effet une famille d'actions, paramétrisées par un entier positif  $l$ , qui appliquent  $l$ -uplets de mots sur un ensemble de vecteurs indicés par des paires  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq l$ .

On pose

$$D_l = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq l\}$$

et

$$\Delta_l = \Delta^{D_l}.$$

C'est-à-dire,  $D_l$  est un ensemble de paires d'indices, et  $\Delta_l$  est l'ensemble des vecteurs de dimension  $D_l$  sur  $\Delta$ .

Un vecteur dans  $\Delta_l$  sera appelé une *différence multiple*, ou simplement DM. Le coefficient dans la coordonnée  $(i, j)$  d'une DM  $\delta$  est noté  $\delta_{i,j}$ . On notera  $\eta$  la DM où toutes les coordonnées sont égales au mot vide :

$$\forall (i, j) \in D_l, \quad \eta_{i,j} = 1_{B^*}. \quad (4.1)$$

On représentera les DM par des matrices triangulaires supérieures, comme illustré à l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.2.1 On représente les DM dans  $\Delta_3$ , l'ensemble des vecteurs sur  $\Delta$  indicés par  $D_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ , par des matrices triangulaires supérieures indicées par  $\{1, 2\} \times \{2, 3\}$ . La  $(i, j)$ -ème coordonnée d'une DM est écrite dans la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de cette matrice.

Ainsi, la DM définie en (4.1) est représentée comme

$$\eta = \begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & 1_{B^*} \end{pmatrix}$$

et la DM  $\delta \in \Delta_3$  définie par

$$\delta_{(1,2)} = \bar{c}, \quad \delta_{(1,3)} = 1_{B^*}, \quad \delta_{(2,3)} = c$$

est représentée comme

$$\delta = \begin{pmatrix} \bar{c} & 1_{B^*} \\ & c \end{pmatrix}. \quad \Delta$$

DÉFINITION 4.2.1 Pour tout entier positif  $l > 0$ , l'action Avance ou Retard Généralisée du monoïde produit  $B^{*l}$  sur  $\Delta_l$ , notée  $\mathcal{G}_l$ , est définie par

$$\forall \delta \in \Delta_l \quad \forall \mathbf{u} \in B^{*l} \quad \forall (i, j) \in D_l \quad (\delta \cdot \mathbf{u})_{i,j} = \delta_{i,j} \cdot (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j). \quad \Delta$$

Il est immédiat que  $\mathcal{G}_l$  est en effet une action, puisque l'action Avance ou Retard est appliquée indépendamment dans chaque coordonnée.

EXEMPLE 4.2.2 L'action  $\mathcal{G}_3$  applique des triplets de mots sur l'ensemble des vecteurs sur  $\Delta$  indicés par  $D_3$  :

$$\mathcal{G}_3 : \Delta_3 \times B^{*3} \rightarrow \Delta_3.$$

Le vecteur  $(cc, 1_{B^*}, c)$  appliqué sur  $\eta$  donne

$$\begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & 1_{B^*} \end{pmatrix} \cdot (cc, 1_{B^*}, c) = \begin{pmatrix} \bar{cc} & \bar{c} \\ & c \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $(1_{B^*}, c, c)$  appliqué sur ce résultat donne

$$\begin{pmatrix} \bar{c} & \bar{c} \\ c & c \end{pmatrix} \cdot (1_{B^*}, c, c) = \begin{pmatrix} \bar{c} & 1_{B^*} \\ c & c \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\mathcal{G}_3$  est une action, on obtient la même DM en appliquant sur  $\eta$  le vecteur  $(cc, 1_{B^*}, c)(1_{B^*}, c, c) = (cc, c, cc)$  :

$$\begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ 1_{B^*} & 1_{B^*} \end{pmatrix} \cdot (cc, c, cc) = \begin{pmatrix} \bar{c} & 1_{B^*} \\ c & c \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

Remarquons que la définition 4.2.1 est une généralisation cohérente de l'action Avance ou Retard, puisque

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_2.$$

### 4.2.2 L'expansion avance ou retard de $\mathcal{T}^l$

Avec la définition de  $\mathcal{G}_l$ , on peut généraliser le produit du carré de  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{G}$  comme suit :

DÉFINITION 4.2.2 L'expansion avance ou retard de  $\mathcal{T}^l$  est le produit de  $\mathcal{T}^l$  par l'action  $\mathcal{G}_l$  :

$$\mathcal{T}^l \times \mathcal{G}_l = (Q^l \times \Delta_l, A, B^{*l}, G, I^l \times \{\eta\}, T^l \times \Delta_l)$$

et les transitions de  $\mathcal{T}^l \times \mathcal{G}_l$  sont définies par

$$G = \left\{ (\mathbf{p}, \delta) \xrightarrow{a|\mathbf{u}} (\mathbf{q}, \delta') \mid \delta' = \delta \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{p} \xrightarrow{a|\mathbf{u}}_{\mathcal{T}^l} \mathbf{q} \right\}. \quad \triangle$$

EXEMPLE 4.2.3 On illustre sur la figure 4.1 l'expansion avance ou retard d'une partie du cube d'un transducteur. On y voit que toute DM a au moins une coordonnée dont le coefficient est le mot vide. Les symétries dans  $\mathcal{T}^3$  permettent de conclure qu'il en est de même dans tous les états finaux de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}^3$ , et il suit du théorème 4.2.1 énoncé ci-dessous que le transducteur est 2-valué.

Une partie de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}^3$  pour un autre transducteur, aussi 2-valué, est illustré sur la figure 4.2. Contrairement au produit précédent, cette expansion est infinie. △

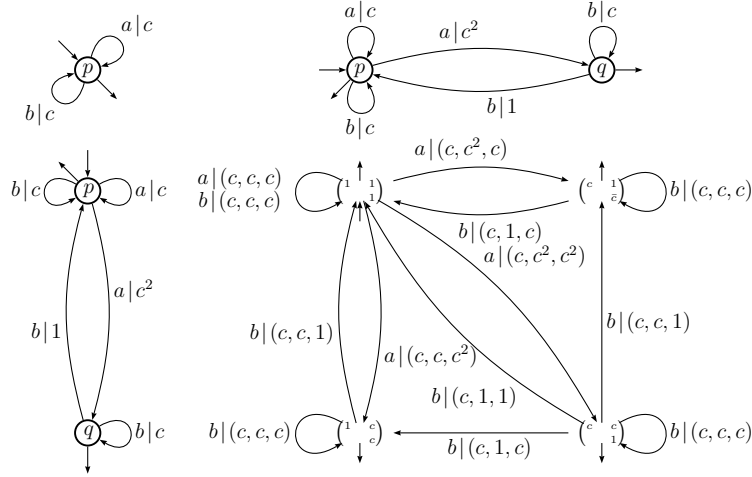


FIG. 4.1 – L’expansion avance ou retard d’une partie du cube d’un transducteur (le mot vide est noté 1). Il s’agit du produit de la partie accessible à partir de  $(p, p, p)$  et co-accessible à  $(p, q, q)$  (où la première coordonnée est fixée à l’état  $p$ ) par  $\mathcal{G}_3$ . Tous les états sont finaux.

La généralisation du théorème 2.5.1 s’énonce comme suit :

**THÉORÈME 4.2.1** *Un transducteur  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué si, et seulement si, pour tout état final accessible  $(\mathbf{q}, \delta)$  de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$ , le vecteur  $\delta$  a au moins une coordonnée dont le coefficient est égal à  $1_{B^*}$ .*

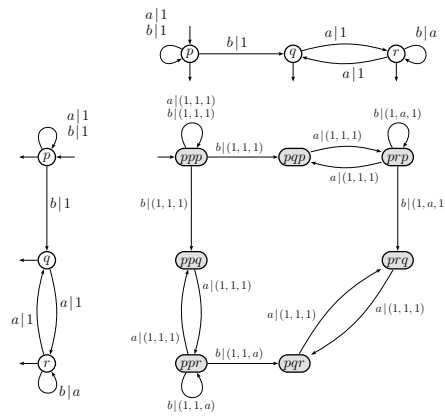
**PREUVE** Pour tout entier  $l > 1$ , il vient de la définition des transitions de  $\mathcal{T}^l \times \mathcal{G}_l$  que

$$\text{pour tout chemin } c : (\mathbf{p}, \delta) \xrightarrow[\mathcal{T}^l \times \mathcal{G}_l]{f|\mathbf{u}} (\mathbf{q}, \gamma), \quad \gamma = \delta \cdot \mathbf{u}. \quad (4.2)$$

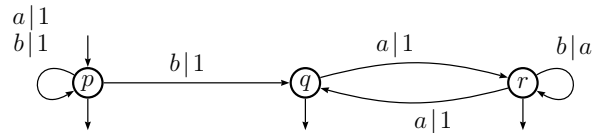
Si ce calcul est réussi, et donc  $\delta = \eta$ , on a que pour toute coordonnée  $(i, j) \in D_l$ ,  $\delta_{i,j}$  est la différence entre les sorties des projections de  $c$  sur  $i$  et  $j$  :

$$\gamma_{i,j} = 1_{B^*} \cdot (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_i^{-1} \mathbf{u}_j.$$

Ces sorties sont égales si, et seulement si,  $\gamma_{i,j} = 1_{B^*}$ . Il ne reste qu’évoquer la remarque faite au début de la section précédente (proposition 4.2.1) :  $\mathcal{T}$



La partie accessible à partir de  $(p, p, p)$  et co-accessible à  $(p, q, r)$  du cube d'un transducteur  $\mathcal{T}$ . Tous les états sont finaux.



Le produit (infini) de cette partie par  $\mathcal{G}_3$ . Les régions en gris couvrent les ensembles de DM dans les états de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}_3$  qui se projettent sur un même état de  $\mathcal{T}^3$ . Les sorties des transitions pointillées sont égales à  $(1_{B^*}, 1_{B^*}, 1_{B^*})$ .

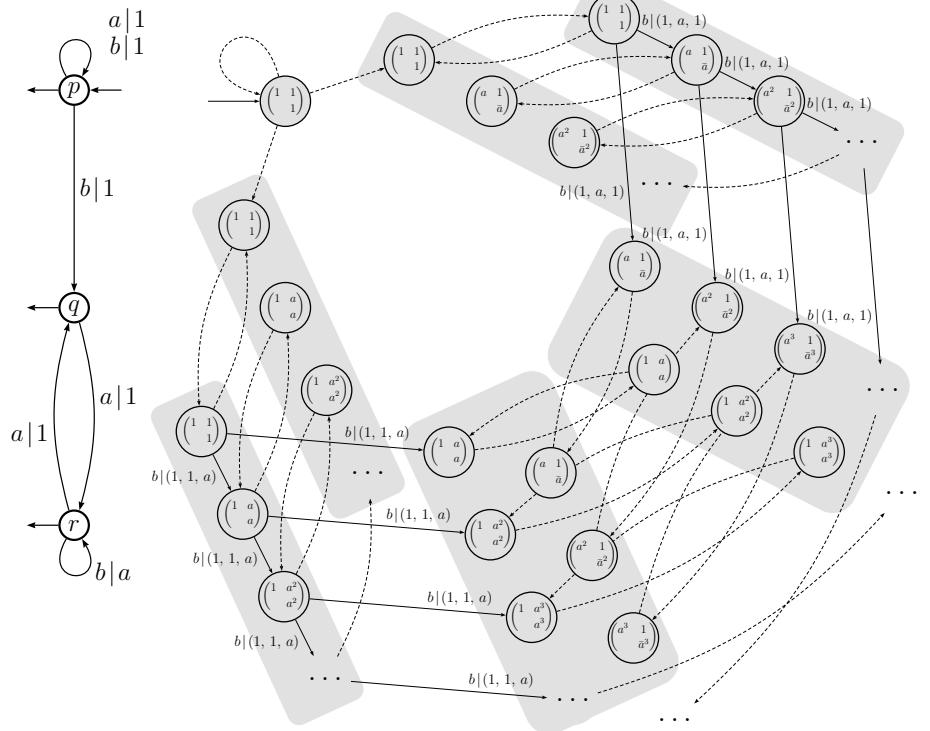


FIG. 4.2 – Une partie de l'expansion  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}_3$  d'un transducteur.



est  $k$ -valué si, et seulement si, pour tout calcul réussi de  $\mathcal{T}^{k+1}$  il existe au moins une paire de projections qui ont la même sortie.  $\square$

Pour tout état  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , on note  $X(\mathbf{q})$  l'ensemble des différences multiples associées à  $\mathbf{q}$  dans la partie accessible de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  :

$$X(\mathbf{q}) = \{ \delta \in \Delta_{k+1} \mid (\mathbf{q}, \delta) \text{ accessible in } \mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1} \}. \quad (4.3)$$

EXEMPLE 4.2.4 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 4.2.3) On voit dans l'expansion avancée ou retardée illustrée sur la figure 4.2 que les différences multiples attachées à l'état  $(p, q, r)$  forment un ensemble infini,

$$X((p, q, r)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{B^*} & a^t \\ & a^t \end{pmatrix} \mid t > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a^t & 1_{B^*} \\ & \bar{a}^t \end{pmatrix} \mid t > 0 \right\}. \quad \triangle$$

Comme le montre cet exemple, les ensembles  $X(\mathbf{q})$  peuvent être infinis pour  $k > 1$  (même si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué). Donc, le théorème 4.2.1 ne présente pas une caractérisation effective. On va montrer par la suite comment « résumer » chacun de ces ensembles dans un objet fini, et comment construire ces objets de façon efficace. Ceci permettra de tester si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué avec une analyse de ces ensembles dans les états finaux de  $\mathcal{T}^{k+1}$ .

### 4.2.3 Caractérisation finie des transducteurs $k$ -valués

On décrira dans cette section ce que nous appellerons la transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$ , structure finie qui capture une certaine information contenue dans ce produit permettant une caractérisation effective des transducteurs  $k$ -valués. On montrera à la section 4.2.4 comment cette structure peut être construite avec un parcours de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , et on calculera la complexité de ce parcours.

L'idée sous-jacente à la transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  est d'associer à chaque état  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$  un nombre fini de vecteurs. Intuitivement, ces vecteurs *intersectent*, dans au moins une coordonnée, chaque différence multiple contenue dans l'ensemble  $X(\mathbf{q})$ .

Commençons avec une motivation pour la définition de ces vecteurs :

EXEMPLE 4.2.5 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 4.2.4) On dit qu'une DM  $\gamma \in \Delta_l$  *traverse* un ensemble  $X \subseteq \Delta_l$  si

$$\forall \delta \in X, \quad \exists (i, j) \in D_l \quad \text{tel que} \quad \delta_{i,j} \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \gamma_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Posons  $Z = X((p, q, r))$ , ensemble décrit explicitement à l'exemple 4.2.4 :

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{B^*} & a^t \\ & a^t \end{pmatrix} \mid t > 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} a^t & 1_{B^*} \\ & \bar{a}^t \end{pmatrix} \mid t > 0 \right\}.$$

Toute DM ayant une des formes suivantes traverse  $Z$  :

$$\begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & a^t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \bar{a}^t \end{pmatrix}$$

Pour chacune de ces deux DM, il existe exactement une DM dans  $Z$  dont l'intersection se vérifie dans une coordonnée contenant  $a^t$  ou  $\bar{a}^t$  ; pour les autres DM dans  $Z$ , l'intersection se vérifie dans une coordonnée contenant le mot vide.

Il n'existe pas de DM traversant l'ensemble suivante :

$$Z \cup \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ & 1_{B^*} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a \\ & a \end{pmatrix} \right\}. \quad \triangle$$

Autrement dit, une DM  $\gamma$  traverse un ensemble  $X$  s'il existe une intersection entre  $\gamma$  et chaque élément de  $X$ . Mais rien n'empêche l'existence d'une coordonnée  $(i, j)$  où aucune de ces intersections a lieu.

On dira que  $\gamma$  est une transversale pour  $X$  si de telles coordonnées « inutiles » n'existent pas. Et pour se débarrasser de ces coordonnées, on va permettre l'existence de « trous » dans une différence multiple. Formellement, on plonge  $\Delta$  dans l'ensemble

$$H_l = [\Delta \cup \{\perp\}]^{D_l}$$

où  $\perp$  désigne une coordonnée non définie. Chaque élément dans  $H_l$ , vecteur sur  $\Delta \cup \{\perp\}$  indicé par  $D_l$ , est appelé une *différence multiple partiellement définie*.

DÉFINITION 4.2.3 On dit qu'une différence multiple partiellement définie  $\gamma$  est une *transversale* pour un ensemble  $X \subseteq H_l$  si, et seulement si,

$$\forall \delta \in X, \quad \exists (i, j) \in D_l \quad \text{tel que} \quad \delta_{i,j} \neq \mathbf{0}, \quad \delta_{i,j} \neq \perp \quad \text{et} \quad \gamma_{i,j} = \delta_{i,j}$$

et

$$\forall (i, j) \in D_l, \quad \text{si} \quad \gamma_{i,j} \neq \perp, \quad \text{alors} \quad \exists \delta \in X \quad \text{tel que} \quad \delta_{i,j} \neq \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \gamma_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

On dénote par

$$\text{tv}(X)$$

l'ensemble des transversales de  $X$ . △

Remarquons que toute transversale a au moins une coordonnée définie, et aucune coordonnée n'est égale à  $\mathbf{0}$ .

On voit à l'exemple suivant que  $\text{tv}(X)$  peut être un ensemble infini :

EXEMPLE 4.2.6 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 4.2.5) Soient

$$X_1 = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & a^t \end{array} \right) \mid t > 0 \right\}, \quad X_2 = \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \bar{a}^t \end{array} \right) \mid t > 0 \right\}.$$

L'ensemble des transversales pour les différences multiples associées à l'état  $(p, q, r)$  de  $\mathcal{T}_1^3$  est l'ensemble infini suivant :

$$\text{tv}(Z) = X_1 \cup X_2 \cup \left\{ \left( \begin{array}{cc} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \perp \end{array} \right) \right\}. \quad \triangle$$

La transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$  est l'attribution à chaque état co-accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$  du sous-ensemble de transversales minimales de  $\text{tv}(X(\mathbf{q}))$  selon un ordre d'« inclusion » sur  $H_l$  :

$\beta \sqsubseteq \gamma$  si, et seulement si,

$\gamma$  coïncide avec  $\beta$  dans toutes les coordonnées définies de  $\beta$ .

Par exemple,

$$\left( \begin{array}{cc} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \perp \end{array} \right) \sqsubseteq \left( \begin{array}{cc} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & a \end{array} \right)$$

Pour tout  $X \subseteq \Delta_l$ , on note

$$\mathbf{m}(X) = \min(\text{tv}(X))$$

l'ensemble des transversales minimales de  $\text{tv}(X)$  selon l'ordre  $\sqsubseteq$  (si  $\text{tv}(X) = \emptyset$ , on pose  $\mathbf{m}(X) = \emptyset$ ).

Il n'est pas vrai que l'ensemble des éléments minimaux d'un ensemble quelconque  $X$  est fini. Par exemple, avec la notation de l'exemple 4.2.6 on a

$$\min(X_1 \cup X_2) = X_1 \cup X_2.$$

On constate pourtant *qu'il existe toujours un nombre fini de différences minimales dans  $\text{tv}(X)$*  :

**PROPOSITION 4.2.2** *Pour tout  $X \subseteq \Delta_l$ , l'ensemble  $\mathbf{m}(X)$  est toujours fini, et de plus  $\text{card}(\mathbf{m}(X)) \leq 2^{l^4}$ .*

**EXEMPLE 4.2.7 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 4.2.6)** L'ensemble  $\text{tv}(Z)$  décrit dans l'exemple 4.2.6 contient une seule transversale minimale :

$$\mathbf{m}(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \perp \end{pmatrix} \right\}. \quad \triangle$$

L'énoncé suivant, conséquence immédiate du théorème 4.2.1 et de la définition de transversale, est la caractérisation finie annoncée des transducteurs qui réalisent une relation  $k$ -valuée. Dans cet énoncé on note pour chaque état accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$

$$\mathbf{m}(\mathbf{q}) = \mathbf{m}(X(\mathbf{q})).$$

**THÉORÈME 4.2.2** *Un transducteur  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué si, et seulement si, pour tout état final et accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$  il existe au moins une différence partielle  $\gamma$  dans  $\mathbf{m}(\mathbf{q})$  dont les coefficients définis sont égaux à  $1_{B^*}$ .  $\square$*

Remarquons que la caractérisation de la fonctionnalité de Béal et. al est cohérente avec cet énoncé (*cf.* théorème 2.5.1).

On appellera l'ensemble  $\mathbf{m}(\mathbf{q})$  la *valeur de  $\mathbf{q}$* . De façon cohérente, on appellera *valuation de  $\mathcal{T}^{k+1}$*  la famille des ces ensembles, ce qui est un autre

nom pour la transversale de  $\mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1}$ . Notre algorithme pour décider si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué, qui sera décrit à la section suivant, consiste à construire cette valuation puis vérifier, dans chaque état final de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , la condition énoncé dans le théorème 4.2.2.

La preuve de la proposition 4.2.2 clôt cette section. On aura besoin d'une caractérisation des transversales minimales :

**LEMME 4.2.1** *Soit  $X \subseteq H_l$ . Une transversale  $\gamma \in \text{tv}(X)$  appartient à  $\mathfrak{m}(X)$  si, et seulement si, pour tout  $(i, j) \in D_l$  tel que  $\gamma_{i,j} \neq \perp$  il existe  $\delta \in X$  tel que  $(i, j)$  est la seule coordonnée définie de  $\delta$  où  $\delta$  et  $\gamma$  coïncident.*

**PREUVE** Supposons que  $\gamma$  appartient à  $\mathfrak{m}(X)$ . Si  $(i, j)$  était une coordonnée qui contredit l'énoncé, alors la DM obtenue à partir de  $\gamma$  en remplaçant la valeur dans  $(i, j)$  par  $\perp$  serait une transversale pour  $X$  plus petite que  $\gamma$ .

Réciproquement, si  $\gamma \in \text{tv}(X)$  est tel que pour toute coordonnée définie  $(i, j)$  il existe une DM  $\delta \in X$  qui ne coïncide avec  $\gamma$  que dans  $(i, j)$ , alors toute DM dont la coordonnée  $(i, j)$  n'est pas définie ne peut pas avoir une coordonnée dont le coefficient est commun avec  $\delta$ . Par conséquent, aucune DM plus petite que  $\gamma$  ne peut être une transversale pour  $X$ .  $\square$

**PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.2** Le domaine d'une différence partielle  $\delta \in H_l$  est l'ensemble de coordonnées

$$\text{dom } \delta = \{(i, j) \in D_l \mid \delta_{i,j} \neq \perp\}.$$

On va prouver

$$\forall P \subseteq D_l, \quad \text{card}(\{\delta \in \mathfrak{m}(X) \mid \text{dom } \delta = P\}) \leq \text{card}(P)!^2. \quad (4.4)$$

Ceci établi la proposition avec une borne supérieure plus précise :

$$\text{card}(\mathfrak{m}(X)) \leq \text{card}(\mathfrak{P}(D_l)) \times \text{card}(D_l)!^2 \leq 2^{l(l-1)+2(l(l-1))^2} \quad (4.5)$$

(dès que  $\text{card}(D_l) \leq l(l-1)$  et  $n! \leq 2^{n^2}$ , pour tout entier positif  $n$ ). La preuve de (4.4) est par induction sur  $d = \text{card}(P)$ .

Pour  $d = 1$ , il vient de la définition de  $\text{tv}(X)$  qu'il existe au plus une différence partielle dans  $\text{tv}(X)$  dont le domaine est un singleton.

Soit  $d > 1$ . Pour une coordonnée  $(i, j) \in P$  et un mot  $x \in \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ , soit

$$Y = \{\delta \in \mathfrak{m}(X) \mid \text{dom } \delta = P\}, \quad Y_{(i,j),x} = \{\delta \in Y \mid \delta_{i,j} = x\}.$$

On va montrer

$$\forall (i, j) \in P, \forall x \in \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \text{card}(Y_{(i,j),x}) \leq ((d-1)!)^2. \quad (4.6)$$

Avant de prouver (4.6), montrons la fin du pas d'induction. Soit  $S$  un sous-ensemble maximal de  $Y$  qui satisfait la propriété suivante : pour tout  $(k, l) \in P$ , les coefficients dans cette coordonnée des différences partielles dans  $S$  sont deux à deux distincts. De la maximalité de  $S$ , on a que, pour tout  $\delta \in Y$ , il existe  $\gamma \in S$  et  $(k, l) \in P$  tels que  $\delta_{k,l} = \gamma_{k,l}$ . On a alors que

$$\text{card}(Y) \leq \text{card}(S) \times d \times \text{card}(Y_{(k,l),x})$$

ce qui, par (4.6), est borné par

$$\text{card}(S) \times d \times ((d-1)!)^2.$$

On a aussi

$$\text{card}(S) \leq d.$$

En effet, soit  $\gamma \in X$ . Du fait que toute différence partielle dans  $Y$  est une transversale pour  $X$ , et de la définition de  $S$ , on a que des différences partielles distinctes dans  $S$  « intersectent »  $\gamma$  en des coordonnées distinctes. Il existe au plus  $d = \text{card}(P)$  coordonnées où cela peut se produire, donc au plus  $d$  différences partielles dans  $S$ . On vient de conclure le pas d'induction.

Pour montrer (4.6), soit

$$Z = \{\delta \in X \mid \delta_{i,j} \neq x\}, \quad W = \{\xi \in \mathfrak{m}(Z) \mid \text{dom } \xi = P - \{(i, j)\}\}.$$

Par l'hypothèse d'induction on a

$$\text{card}(W) \leq ((d-1)!)^2.$$

On va montrer que

$$\text{card}(Y_{(i,j),x}) \leq \text{card}(W).$$

Pour cela, on va montrer que pour tout  $\gamma \in Y_{(i,j),x}$ , la différence partielle  $\gamma'$  obtenue de  $\gamma$  en remplaçant la valeur dans  $(i, j)$  par  $\perp$  appartient à  $W$ . Donc,  $\gamma \mapsto \gamma'$  est une bijection entre  $Y_{(i,j),x}$  et  $W$ , ce qui conclut la preuve.

D'abord, remarquons que

$$\text{dom } \gamma' = P - \{(i, j)\}.$$

Ensuite, comme  $\gamma$  est une transversale pour  $X$ , pour toute différence partielle  $\delta$  dans  $Z$  il existe une coordonnée où  $\delta$  et  $\gamma$  coïncident. Comme  $\gamma_{i,j} = x$ , cette coordonnée est différente de  $(i, j)$ . Ainsi,  $\gamma'$  est une transversale pour  $Z$ . Finalement, comme  $\gamma$  est minimal dans  $\text{tv}(X)$ , il vient du lemme 4.2.1 que pour toute coordonnée  $(i', j') \neq (i, j)$  telle que  $\gamma_{i',j'} \neq \perp$ , il existe  $\delta \in X$  tel que la seule coordonnée où  $\gamma$  et  $\delta$  coïncident est  $(i', j')$ . De la définition de  $Z$ , on a que  $\delta \in Z$ , et encore par le lemme 4.2.1, on obtient  $\gamma' \in \mathfrak{m}(Z)$ .  $\square$

#### 4.2.4 Test effectif de la caractérisation

On supposera fixé dans cette section un ordre topologique dans le graphe quotient de  $\mathcal{T}^{k+1}$  sur ses composantes fortement connexes (CFC, pour faire court).

Notre construction de la valuation de  $\mathcal{T}^{k+1}$  est une conséquence de deux propriétés des ensembles de transversales minimales  $\mathfrak{m}(\mathbf{q})$ . On les appelle *stabilité* et *dépendance*. On va les énoncer ci-dessous, et ensuite décrire l'algorithme. On donnera les preuves de chacune de ces propriétés après la description de l'algorithme.

##### Stabilité

La première propriété établit que, pour tout état accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , l'ensemble  $\mathfrak{m}(\mathbf{q})$  est « stable » dans la composante fortement connexe de  $\mathcal{T}^{k+1}$  qui contient  $\mathbf{q}$ .

DÉFINITION 4.2.4 On dit qu'une différence multiple partiellement définie  $\gamma$  est *stable* dans un état  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$  si pour tout cycle

$$\mathbf{q} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{f|\mathbf{u}} \mathbf{q}$$

on a

$$\gamma \cdot \mathbf{u} = \gamma. \quad \triangle$$

PROPOSITION 4.2.3 Soit  $\mathbf{q}$  un état accessible de  $\mathcal{T}^{k+1}$ . Toute différence dans  $\mathfrak{m}(\mathbf{q})$  est stable dans  $\mathbf{q}$ .

Le corollaire suivante découle directement de cette propriété. Dans son énoncé, on a étendu l'action avance ou retard généralisée aux ensembles de différences partielles, où l'élément  $\perp$  est considéré comme un point fixe :

$$\forall X \subseteq H_l \quad \forall \mathbf{u} \in B^{*l} \quad X \cdot \mathbf{u} = \{\delta \cdot \mathbf{u} \mid \delta \in X\}.$$

**COROLLAIRE 4.2.1** *Si  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  sont deux états de  $\mathcal{T}^{k+1}$  dans une même composante fortement connexe, pour tout chemin*

$$\mathbf{p} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{f|\mathbf{u}} \mathbf{q}$$

*on a que*

$$m(\mathbf{q}) = m(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}. \quad \square$$

## Dépendance

La seconde propriété assure que la valeur d'un état  $\mathbf{q}$  ne dépend que des valeurs des états qui précèdent et sont adjacents à la CFC de  $\mathbf{q}$ .

Pour l'énoncer, on aura besoin d'une opération entre des ensembles de différences partielles :

**DÉFINITION 4.2.5** *Étant donnés deux différences partielles  $\beta$  et  $\gamma$  dans l'ensemble partiellement ordonné  $H_l$ , on note  $\beta \mathbf{V} \gamma$  leur majorant le plus petit, qui existe si, et seulement si,  $\beta$  et  $\gamma$  sont compatibles dans leurs coordonnées définies. On définit aussi*

$$\forall X, Y \subseteq H_l \quad X \mathbf{V} Y = \min \{\beta \mathbf{V} \gamma \mid \beta \in X, \gamma \in Y\}. \quad \triangle$$

Il est une conséquence formelle de cette définition que l'opération  $\mathbf{V}$  est commutative et associative, et que si  $X$  et  $Y$  sont finis, alors  $X \mathbf{V} Y$  est fini, sa cardinalité étant bornée par le produit des cardinalités de  $X$  et  $Y$ .

Pour tout  $X \subseteq H_{k+1}$  et tout état  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{T}^{k+1}$ , on note

$$\text{st}_{\mathbf{q}}(X) = \{\gamma \in X \mid \gamma \text{ stable dans } \mathbf{q}\}.$$



PROPOSITION 4.2.4 Soit  $\mathbf{q}$  un état de  $\mathcal{T}^{k+1}$  et  $C$  sa CFC. Soit  $I(C)$  l'ensemble des transitions qui arrivent dans  $C$  à partir d'autres CFC, c'est-à-dire,

$$I(C) = \left\{ e : \mathbf{p} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \mid \mathbf{p} \notin C, \mathbf{r} \in C \right\}.$$

Pour chaque  $e : \mathbf{p} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \in I(C)$ , fixons un chemin quelconque  $c : \mathbf{r} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{f|\mathbf{v}} \mathbf{q}$  et posons

$$X_e = \text{st}_{\mathbf{q}}(\mathbf{m}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v})). \quad (4.7)$$

On a

$$\mathbf{m}(\mathbf{q}) = \bigvee_{e \in I(C)} X_e.$$

### Algorithme

En se basant sur les propositions 4.2.3 et 4.2.4, on peut construire la valuation de  $\mathcal{T}^{k+1}$  comme suit.

L'algorithme commence avec la définition d'un état initial « subliminal »  $\mathbf{i}$  ayant des transitions sortantes étiquetées par  $1_{B^*}$  qui se terminent dans les états initiaux de  $\mathcal{T}^{k+1}$ . La valeur initiale  $\mathbf{m}(\mathbf{i})$  est l'ensemble des différences partielles ayant exactement un coefficient défini, qui est égal à  $1_{B^*}$ .

L'algorithme construit la valuation avec un parcours des composantes fortement connexes de  $\mathcal{T}^{k+1}$  dans un ordre topologique fixé.

Pour chaque composante  $C$ , un état  $\mathbf{q}$  est choisi. La construction de l'ensemble  $X_e$ , pour chaque  $e : \mathbf{p} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \in I(C)$ , est faite comme suit : d'abord, le sous-ensemble de  $\mathbf{m}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}$  des différences stables dans  $C$ , soit  $X$ , est calculé ; pour décider si une différence dans  $\mathbf{m}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}$  est stable, un parcours de  $C$ , avec l'application des sorties des transitions, est réalisé. La façon dont ce parcours est fait (en largeur ou en profondeur) n'est pas importante : l'algorithme simplement visite une seule fois chaque transition de  $C$ , et vérifie si la valeur construite dans l'extrémité (avec l'application de la sortie de cette transition à la valeur de l'état d'où elle sort) n'est pas distincte de la valeur déjà attribuée à cet état (s'il a été déjà visité). On a alors que  $X_e = X \cdot \mathbf{v}$  (où  $\mathbf{v}$  est la sortie du chemin fixé dans (4.7)). Ensuite, la valeur de  $\mathbf{q}$  est construite à partir des ensembles  $X_e$  avec l'opération  $\bigvee$ .

D'après le corollaire 4.2.1, il est possible de calculer à partir de  $\mathbf{m}(\mathbf{q})$  (la valeur de l'état choisi  $\mathbf{q}$ ) la valeur des autres états dans  $C$  : on vient de construire la valuation de cette composante.

EXEMPLE 4.2.8 (CONTINUATION DE L'EXEMPLE 4.2.7) Une exécution de l'algorithme est illustrée sur la figure 4.3. On y voit que la valeur de l'état  $(p, q, r)$  est un singleton obtenu avec l'application de  $\mathbf{V}$  aux différences partielles suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1_{B^*} & \perp \\ & \perp \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \perp & 1_{B^*} \\ & \perp \end{pmatrix}$$

Le résultat est égal à

$$\mathbf{m}((p, q, r)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1_{B^*} & 1_{B^*} \\ & \perp \end{pmatrix} \right\}. \quad \triangle$$

### Preuve de la proposition 4.2.3 (stabilité)

Supposons que  $\gamma \in \mathbf{m}(\mathbf{q})$  n'est pas stable dans  $\mathbf{q}$ , c'est-à-dire :

$$\exists (i, j) \in D_l, \exists c : \mathbf{q} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{f|\mathbf{u}} \mathbf{q} \quad \text{tel que} \quad \gamma_{i,j} \neq \perp \quad \text{et} \quad \gamma_{i,j} \neq \gamma_{i,j} \cdot (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$

Comme  $\gamma$  est minimal, il existe, par le lemme 4.2.1,  $\delta \in X(\mathbf{q})$  tel que  $(i, j)$  est la seule coordonnée définie de  $\delta$  où  $\gamma$  et  $\delta$  coïncident. Soit  $P$  l'ensemble des coordonnées définies de  $\delta$  avec coefficient différent de  $\mathbf{0}$  et  $P' \subseteq P$  celles qui sont stables par rapport au cycle  $c$ , c'est-à-dire  $(i', j') \in P'$  si, et seulement si,  $\delta_{i',j'} = \delta_{i',j'} \cdot (\mathbf{u}_{i'}, \mathbf{u}_{j'})$ . On va établir qu'il existe un entier  $r$  tel que les différences partielles  $\delta \cdot \mathbf{u}^r$  et  $\gamma$  n'admettent pas de coordonnée dont les coefficients sont définis et égaux. Ceci contredit le fait que  $\gamma$  est une transversale pour  $X(\mathbf{q})$ , dès que  $\delta \cdot \mathbf{u}^r \in X(\mathbf{q})$ .

Comme les coefficients de  $\delta$  dans les coordonnées dans  $P \setminus P'$  ne sont pas stables dans  $c$ , il vient du lemme 3.2.2 qu'il existe un entier  $r$  tel que

$$\xi = \delta \cdot \mathbf{u}^r \quad \text{satisfait} \quad \forall (i', j') \in P \setminus P', \quad \gamma_{i',j'} \neq \xi_{i',j'}.$$

On a aussi

$$\forall (i', j') \in P', \quad \gamma_{i',j'} \neq \xi_{i',j'}.$$

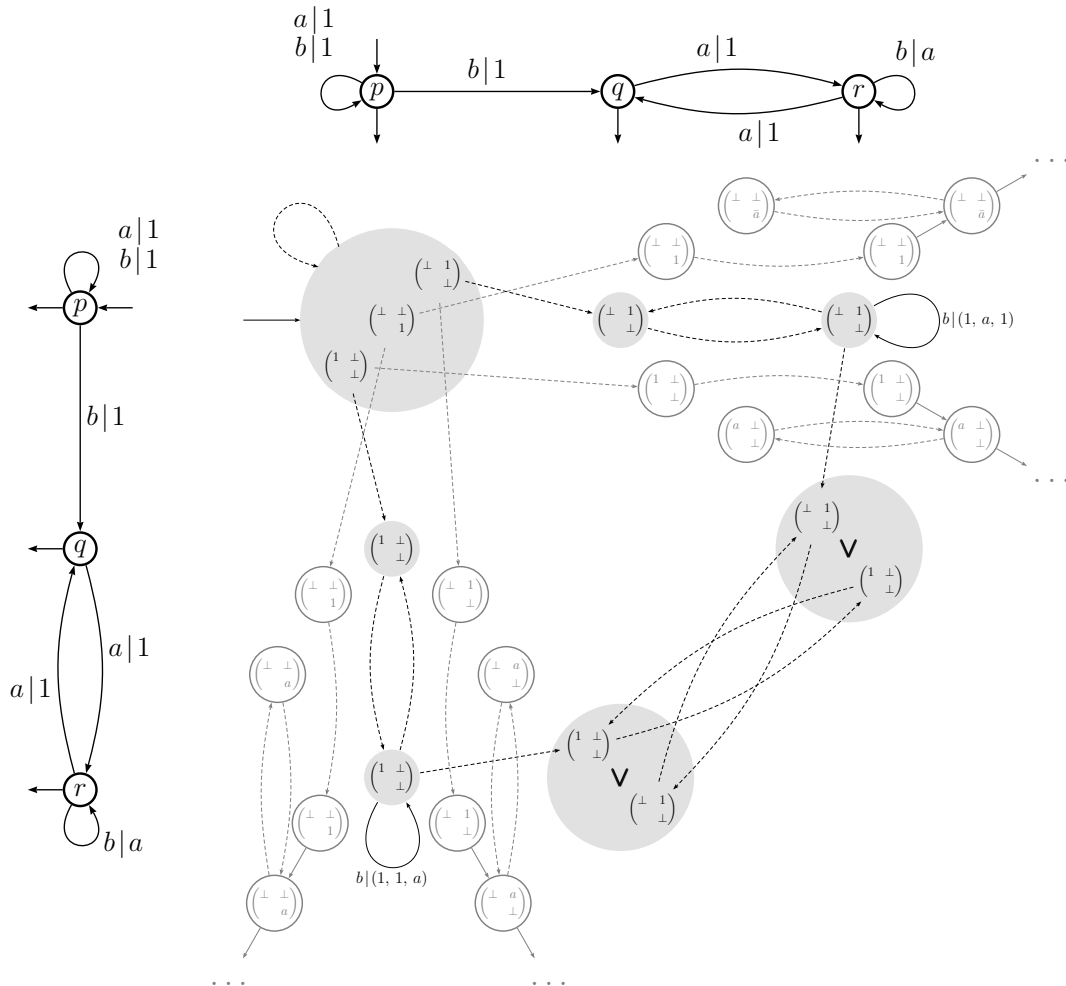


FIG. 4.3 – Les valeurs  $m(q)$  (régions en gris) pour la partie du cube  $\mathcal{T}^3$  illustrée sur la figure 4.1. Dans cette partie, les composantes fortement connexes sont  $\{(p, p, p)\}$ ,  $\{(p, p, q), (p, p, r)\}$ ,  $\{(p, q, p), (p, r, p)\}$ ,  $\{(p, q, r), (p, r, q)\}$ . Les sorties des transitions pointillées sont égales à  $(1_{B^*}, 1_{B^*}, 1_{B^*})$ .

En effet, soit  $(i', j') \in P'$ . Par la définition de  $P'$ ,  $\delta_{i', j'}$  est stable dans  $c$ , donc

$$\delta_{i', j'} = \xi_{i', j'}. \quad (4.8)$$

Par l'hypothèse que  $\delta_{i, j} = \gamma_{i, j}$  et  $\gamma_{i, j}$  n'est pas stable dans  $c$ ,  $(i, j) \notin P'$ . Comme  $(i, j)$  est la seule coordonnée définie où  $\delta$  et  $\gamma$  coïncident,

$$\delta_{i', j'} \neq \gamma_{i', j'}. \quad (4.9)$$

De (4.8) et (4.9) on obtient

$$\gamma_{i', j'} \neq \xi_{i', j'}.$$

Le coefficients de  $\xi$  dans les coordonnées n'appartenant pas à  $P$  sont soit non définis, soit égaux à  $\mathbf{0}$ . Donc,  $\xi$  et  $\gamma$  n'ont pas de coordonnée avec le même coefficient.

#### Preuve de la proposition 4.2.4 (dépendance)

Afin de montrer la proposition 4.2.4, on nécessitera de deux lemmes.

LEMME 4.2.2 *Pour tout  $e \in I(C)$ , soit*

$$Y_e = \left\{ \delta \in \Delta_{k+1} \mid (\mathbf{q}, \delta) \text{ accessible dans } \mathcal{T}^{k+1} \times \mathcal{G}_{k+1} \right. \\ \left. \text{par un chemin dont la projection sur } \mathcal{T}^{k+1} \text{ contient } e \right\}.$$

On a

$$X_e = \mathbf{m}(Y_e).$$

PREUVE On va d'abord montrer que

$$\mathbf{m}(Y_e) \subseteq X_e.$$

Soit  $\delta \in \mathbf{m}(Y_e)$ . Rappelons la définition de  $X_e$  dans (4.7). D'elle vient que montrer  $\delta \in X_e$  est équivalent à montrer

$\delta$  est stable dans  $\mathbf{q}$

et il existe une différence partielle  $\xi \in \mathbf{m}(\mathbf{p})$  telle que  $\xi \cdot (\mathbf{uv}) = \delta$ .

La preuve que  $\delta$  est stable est une répétition de celle que l'on a fait pour la proposition 4.2.3.

Ensuite, on construit la différence partielle souhaitée  $\xi$  dans  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$  comme suit :  $\xi_{i,j} \neq \perp$  si, et seulement si,  $\delta_{i,j} \neq \perp$  ; pour tout  $(i, j) \in D_{k+1}$  tel que  $\delta_{i,j} \neq \perp$ ,  $\xi_{i,j} = (\mathbf{uv})_i \overline{\delta_{i,j}(\mathbf{uv})}_j$ .

Pour montrer que  $\xi \in \mathbf{m}(\mathbf{p})$ , on va d'abord montrer que  $\xi$  est une transversale pour  $X(\mathbf{p})$ . Soit  $\gamma$  une différence partielle quelconque dans  $X(\mathbf{p})$ . De (4.2), on a qu'il existe un chemin  $\mathbf{i} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{g|\mathbf{w}} \mathbf{p}$ , où  $\mathbf{i}$  est un état initial, tel que

$$\gamma = \eta \cdot \mathbf{w}.$$

Donc on peut construire le chemin

$$\mathbf{i} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{g|\mathbf{w}} \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{f|\mathbf{v}} \mathbf{q}$$

et encore de (4.2) il vient que

$$\gamma \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in Y_e.$$

Comme  $\delta$  est une transversale pour  $Y_e$ ,

$$\exists (i, j) \in D_{k+1} \quad \text{tel que} \quad \delta_{i,j} = (\gamma \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})_{i,j}.$$

Cela, avec la définition de  $\xi$ , implique

$$\xi_{i,j} = \gamma_{i,j},$$

Comme  $\gamma$  est arbitraire, on a que  $\xi$  est une transversale pour  $X(\mathbf{p})$ .

Ensuite, on montrera que  $\xi$  est une transversale minimale pour  $X(\mathbf{p})$ . En vue du lemme 4.2.1, on doit montrer que, pour tout  $(i, j) \in D_{k+1}$  tel que  $\xi_{i,j} \neq \perp$ , il existe une différence multiple dans  $X(\mathbf{p})$  qui coïncide avec  $\xi$  dans  $(i, j)$  et seulement dans cette coordonnée. On dérivera une telle différence multiple du fait que  $\delta$  est une transversale minimale pour  $Y_e$ .

Comme  $\xi_{i,j}$  est défini, il en est de même pour  $\delta_{i,j}$ , et comme  $\delta$  est une transversale minimale pour  $Y_e$ , il suit du lemme 4.2.1 qu'il existe  $\zeta \in Y_e$  tel que  $(i, j)$  est la seule coordonnée définie où  $\delta_{i,j} = \zeta_{i,j}$ . Par (4.2), il existe un chemin  $\mathbf{i} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{h|\mathbf{z}} \mathbf{q}$  qui contient  $e$  et tel que  $\zeta = \eta \cdot \mathbf{z}$ . On peut factoriser ce chemin comme

$$\mathbf{i} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{g|\mathbf{w}} \mathbf{p} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \xrightarrow{\mathcal{T}^{k+1}}^{f'|\mathbf{v}'} \mathbf{q}. \quad (4.10)$$

La différence partielle  $\eta \cdot \mathbf{w}$  a les propriétés souhaitées. Qu'elle appartienne à  $X(\mathbf{p})$  est une conséquence de (4.2). Du fait que  $\delta$  est stable dans  $\mathbf{q}$ , on dérive

$$\begin{aligned} \forall (m, n) \in D_{k+1} \quad \delta_{m,n} &= ((\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}))_{m,n} \\ \text{si, et seulement si,} \quad \delta_{m,n} &= ((\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}'))_{m,n} \end{aligned} \quad (4.11)$$

et par la définition de  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} \forall (m, n) \in D_{k+1} \quad \xi_{m,n} &= (\eta \cdot \mathbf{w})_{m,n} \\ \text{si, et seulement si,} \quad \delta_{m,n} &= ((\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}))_{m,n}. \end{aligned}$$

Comme

$$\zeta = (\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}'),$$

la seule coordonnée définie où  $\eta \cdot \mathbf{w}$  et  $\xi$  coïncident est  $(i, j)$ .

Ensuite, on va montrer que

$$X_e \subseteq \mathfrak{m}(Y_e).$$

Soit  $\delta \in X_e$ ; il existe une différence partielle  $\xi \in \mathfrak{m}(\mathbf{p})$  telle que

$$\delta = \xi \cdot (\mathbf{uv}).$$

On va montrer que  $\delta$  est une transversale pour  $Y_e$ . Avec cela, on a aussi que  $\delta$  est minimal parce que une transversale pour  $Y_e$  strictement plus petite que  $\delta$  impliquerait, en raison de la construction ci-dessous, une transversale pour  $X(\mathbf{p})$  strictement plus petite que  $\xi$ .

Soit  $\zeta \in Y_e$ . Par (4.2) et la définition de  $Y_e$ , il existe un chemin  $\mathbf{i} \xrightarrow[h|\mathbf{z}]{\mathcal{T}^{k+1}} \mathbf{q}$  qui commence dans un état initial, qui contient  $e$  et est tel que  $\zeta = \eta \cdot \mathbf{z}$ . On peut factoriser ce chemin comme dans (4.10). Par (4.2),  $\eta \cdot \mathbf{w} \in X(\mathbf{p})$ . Comme  $\xi$  est une transversale pour  $X(\mathbf{p})$ , il existe une coordonnée  $(i, j)$  telle que

$$\xi_{i,j} = (\eta \cdot \mathbf{w})_{i,j}.$$

Donc,

$$\delta_{i,j} = ((\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}))_{i,j}$$

et il suit de (4.11) (et du fait que  $\zeta = (\eta \cdot \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{uv}')$ ) que

$$\delta_{i,j} = \zeta_{i,j}.$$

Comme  $\zeta$  est arbitraire, on a que  $\delta$  est une transversale pour  $Y_e$ .  $\square$

LEMME 4.2.3 *Pour tout  $X, Y \subseteq H_l$ ,*

$$\mathbf{m}(X \cup Y) = \mathbf{m}(X) \mathbf{V} \mathbf{m}(Y).$$

PREUVE On va d'abord montrer que

$$\mathbf{m}(X \cup Y) \subseteq \mathbf{m}(X) \mathbf{V} \mathbf{m}(Y).$$

Soit  $\delta \in \mathbf{m}(X \cup Y)$ . Soit  $\gamma$  une différence partielle quelconque possédant les propriétés suivantes :

$$\gamma \sqsubseteq \delta; \gamma \text{ est une transversale pour } X.$$

Soit  $\xi$  une telle différence partielle par rapport à  $Y$ . Il vient directement du choix de ces différences partielles que

$$\gamma \in \mathbf{m}(X), \quad \xi \in \mathbf{m}(Y).$$

Ensuite, on a que

$$\delta = \gamma \mathbf{V} \xi,$$

puisque au contraire  $\delta$  ne serait pas minimal dans  $\text{tv}(X \cup Y)$ . On a aussi qu'il n'existe pas  $\gamma' \in \mathbf{m}(X)$  et  $\xi' \in \mathbf{m}(Y)$  tel que  $\gamma' \mathbf{V} \xi'$  est strictement plus petit que  $\delta$ , puisque dans ce cas  $\gamma' \mathbf{V} \xi'$  serait une transversale pour  $X \cup Y$  plus petite que  $\delta$ . Ainsi, de la définition de l'opération  $\mathbf{V}$  on a

$$\delta \in \mathbf{m}(X) \mathbf{V} \mathbf{m}(Y).$$

Ensuite, on va montrer

$$\mathbf{m}(X) \mathbf{V} \mathbf{m}(Y) \subseteq \mathbf{m}(X \cup Y).$$

Soit  $\delta \in \mathbf{m}(X) \mathbf{V} \mathbf{m}(Y)$ . De la définition de  $\mathbf{V}$  on a

$$\exists \gamma \in \mathbf{m}(X) \exists \xi \in \mathbf{m}(Y) \quad \text{tels que} \quad \delta = \gamma \mathbf{V} \xi.$$

Comme  $\gamma$  est une transversale pour  $X$  et  $\xi$  est une transversale pour  $Y$ , on a que  $\delta$  est une transversale pour  $X \cup Y$ . Si  $\delta$  n'était pas une transversale minimale, c'est-à-dire, s'il existait une transversale  $\delta'$  pour  $X \cup Y$  strictement plus petite que  $\delta$ , alors on pourrait trouver à partir de  $\delta'$  deux différences

partielles dans  $\mathbf{m}(X)$  et  $\mathbf{m}(Y)$  respectivement (comme avant) telles que soit la différence partielle dans  $\mathbf{m}(X)$  est strictement plus petite que  $\gamma$  soit la différence partielle dans  $\mathbf{m}(Y)$  est strictement plus petite que  $\xi$ . Contradiction avec la minimalité de  $\gamma$  et  $\xi$ . Alors,

$$\delta \in \mathbf{m}(X \cup Y). \quad \square$$

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.2.4 Rappelons la définition des ensembles  $Y_e$  dans le lemme 4.2.2. L'union de ces ensembles est  $X(\mathbf{q})$ . Alors,

$$\mathbf{m}(\mathbf{q}) = \mathbf{m} \left( \bigcup_{e \in I(C)} Y_e \right). \quad (4.12)$$

Du lemme 4.2.3 il vient que

$$\mathbf{m}(\mathbf{q}) = \bigvee_{e \in I(C)} \mathbf{m}(Y_e). \quad (4.13)$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le lemme 4.2.2. □

### Bilan de la complexité

La complexité de notre algorithme dépend des paramètres suivantes de  $\mathcal{T}$  :  $n$  (le nombre d'états),  $m$  (le nombre de transitions),  $\ell$  (la longueur maximale des sorties des transitions) et  $k$ .

Un élément fondamental pour l'analyse est la proposition suivante, qui établit une longueur maximale pour les coefficients des différences contenues dans la valuation de  $\mathcal{T}^{k+1}$  :

**PROPOSITION 4.2.5** *Pour tout  $\gamma \in \mathbf{m}(\mathbf{q})$ , si  $\gamma_{i,j}$  est défini, alors  $|\gamma_{i,j}| \leq \ell n^{k+1}$ .*

PREUVE On va prouver que pour tout coefficient défini  $\gamma_{i,j}$  il existe un chemin  $\mathbf{i} \xrightarrow[\mathcal{T}^{k+1}]{f|\mathbf{u}} \mathbf{q}$  qui commence dans un état initial, qui ne contient aucun cycle et qui satisfait  $\gamma_{i,j} = \bar{\mathbf{u}}_i \mathbf{u}_j$ . Ceci établit que  $|\gamma_{i,j}| \leq \ell n^{k+1}$ , puisque  $\mathcal{T}^{k+1}$  a au plus  $n^{k+1}$  états.



Un tel chemin peut être construit par induction sur un ordre topologique des composantes fortement connexes de  $\mathcal{T}^{k+1}$ .

Soit  $C$  une CFC de  $\mathbf{q}$ . Supposons que pour tout état  $\mathbf{p}$  plus petit que ceux dans  $C$ , toute différence partielle dans  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$ , et toute coordonnée définie, il existe un tel chemin.

De la proposition 4.2.4 il vient qu'il existe une transition  $e : \mathbf{p} \xrightarrow{a|\mathbf{u}} \mathbf{r} \in I(C)$ , un chemin  $c : \mathbf{r} \xrightarrow{f|\mathbf{v}} \mathbf{q}$  et une différence partielle  $\delta \in \mathbf{m}(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v})$  telle que  $\delta_{i,j} = \gamma_{i,j}$ . Soit  $\xi \in \mathbf{m}(\mathbf{p})$  tel que  $\delta = \xi \cdot (\mathbf{u}\mathbf{v})$ . Par hypothèse, il existe un chemin sans cycles de la forme  $d : \mathbf{i} \xrightarrow{g|\mathbf{v}} \mathbf{p}$  tel que  $\xi_{i,j} = \bar{\mathbf{v}}_i \mathbf{v}_j$ , et comme on peut supposer sans perte de généralité que  $c$  ne contient aucun cycle, on a que  $dec$  est un chemin comme souhaité.  $\square$

**THÉORÈME 4.2.3** *Soient  $\mathcal{T}$  un transducteur  $k$  un entier positif. Il est décidable en complexité  $\mathcal{O}(2^{5(k+1)^4} \ell n^{k+1} m^{k+1})$  si  $\mathcal{T}$  est  $k$ -valué.*

**PREUVE** Tester si une différence partielle est stable dans un CFC avec  $s$  transitions peut être fait en complexité

$$\mathcal{O}(k^2 \ell n^{k+1} s).$$

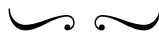
De la proposition 4.2.2 il vient que tout  $\mathbf{m}(\mathbf{q})$  a au plus  $2^{(k+1)^4}$  différences partielles, donc la construction de chaque ensemble  $X_e$  peut être fait en complexité

$$\mathcal{O}(2^{(k+1)^4} k^2 \ell n^{k+1} s)$$

et chaque opération  $\mathbf{V}$  en

$$\mathcal{O}(2^{4(k+1)^4} k^2 \ell n^{k+1}).$$

La complexité globale est donc  $\mathcal{O}(2^{5(k+1)^4} \ell n^{k+1} m^{k+1})$ .  $\square$



### 4.3 Appartenance à $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$

La preuve de Weber [47] pour la décidabilité de l'existence d'un entier limitant les cardinalités des images d'un transducteur (théorème 4.1.4) est faite en deux pas, indépendants l'un de l'autre. Le premier est une caractérisation des transducteurs dont la norme est finie à partir de certains motifs de chemins ; le second est un algorithme pour détecter ces motifs. La preuve que nous donnerons ici pour ce problème suivra la même idée.

Avec un schéma similaire, Weber et Seidl ont établi la décidabilité de la classe des  $\mathbb{N}$ -automates qui réalisent une série bornée [52], dont la caractérisation peut être aussi dérivée d'un travail de Mandel et Simon [31] — le premier, avec celui de G. Jacob [25], à donner une réponse positive à la question. La preuve de Mandel et Simon, à son tour, est une réduction à la décidabilité de la finitude d'un monoïde finiment engendré  $S$  de matrices dans  $\mathbb{N}^{n \times n}$ , basée sur une caractérisation des éléments de  $\mathbb{N}^{n \times n}$  qui sont torsion (lemme 2.6 dans [31]). Ce résultat, avec un théorème classique de McNaughton et Zalcstein [32], implique la caractérisation de Weber et Seidl. Toutefois, l'algorithme de Mandel et Simon ne tire pas partie de façon explicite des motifs de chemins présents dans cette caractérisation, et dépend d'un théorème plus fort, qui ramène la finitude de  $S$  à une propriété décidable sur les éléments idempotents dans un espace fini (le monoïde des matrices sur  $\mathbb{N}_2 = \{0, 1, \omega\}$ ). Ce théorème, qui passe par le théorème de Ramsey, fournit une borne supérieure pour  $S$  en fonction de  $n$  et de la taille de l'alphabet de l'automate, et une procédure de complexité exponentielle.

La caractérisation des transducteurs de norme bornée donnée dans [47] est très technique, en partie dû au fait qu'elle permet de calculer une borne supérieure pour la norme. Dans notre preuve, on introduira dans un premier temps une caractérisation équivalente, les motifs C1 et C2 énoncés dans le théorème 4.3.4. On donnera une preuve simple de l'une des directions de ce théorème avec le revêtement Avance ou Retard et la caractérisation des  $\mathbb{N}$ -automates bornés de Mandel et Simon. Plus précisément, on montrera que si  $\mathcal{T}$  satisfait C1 et C2, alors le revêtement Avance ou Retard de  $\mathcal{T}$  permet de construire un transducteur équivalent et dont l'automate d'entrée sous-jacent réalise une série bornée, ce qui est équivalent à dire que la norme de ce transducteur est bornée.

Ensuite, on montrera comment cette caractérisation peut être testée dans

un certain sous-transducteur du produit de  $\mathcal{T}^3$  par l'action Avance ou Retard (théorème 4.3.5). Intuitivement,  $\mathcal{T}$  réalise une relation de norme bornée si, et seulement si, ce sous-transducteur est fini (dont le nombre d'états est borné par un polynôme ne dépendant que de la taille de  $\mathcal{T}$ ). Une propriété de compatibilité des différences dans ses états permettra de montrer que ce teste peut être fait en complexité  $\mathcal{O}(Ln^3(n^3 + m^3))$  (théorème 4.3.6).

### 4.3.1 Caractérisation des $\mathbb{N}$ -automates bornés

On dira qu'un  $\mathbb{N}$ -automate  $\mathcal{A}$  est *borné* s'il existe un entier  $k$  tel que son comportement est une série où aucune multiplicité n'est plus grande que  $k$  :

$$\forall u \in A^* \quad |\mathcal{A}| \leq k.$$

La caractérisation que l'on va introduire prochainement pour les transducteurs de norme bornée dépend de la caractérisation des  $\mathbb{N}$ -automates bornés implicite dans la preuve de Mandel et Simon (section 2 de [31]) et mise en relief par Seidl et Weber (section 3 de [52]). Celle-ci consiste à identifier certains motifs de chemins « interdits » qui produisent des multiplicités croissantes. On va ici la décrire (théorème 4.3.2) et pour que la présentation de notre algorithme soit complète en donner une preuve combinatoire.

La preuve de Mandel et Simon est une caractérisation des matrices qui sont torsion par rapport au produit, c'est-à-dire, qui engendrent un semi-groupe fini (*cf.* lemme 2.6 de [31]). Il s'agit de montrer qu'une matrice est torsion si, et seulement si, son graphe ne contient aucun chemin interdit :

**LEMME 4.3.1 (MANDEL-SIMON 1977)** *Une matrice  $m \in \mathbb{N}^{n \times n}$  est torsion si, et seulement si, son graphe ne contient ni un cycle lourd, ni un haltère.*

On obtient alors une caractérisation des  $\mathbb{N}$ -automates bornés à partir du lemme 4.3.1 et d'un résultat général classique du type « Burnside » de R. McNaughton et Y. Zalcstein :

**THÉORÈME 4.3.1 (MCNAUGHTON-ZALCSTEIN 1975)** *Soit  $S$  un semigroupe de matrices (de dimension  $n$ ) sur un corps. Si tout élément de  $S$  est torsion, alors, pour tout sous-ensemble fini  $X \subseteq S$ , le sous-monoïde de  $S$  engendré par  $X$  est fini.*

Celle de Seidl et Weber est fondée purement en des constructions avec  $\mathcal{A}$ , et ne passe pas par le théorème 4.3.1. Elle fait apparaître les motifs que nous appellerons des haltères et des cycles lourds. Un *haltère* d'un état  $p$  à un autre état  $q$  est un chemin de la forme

$$p \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_1 u} p \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_2 u} q \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_3 u} q \quad (k_1, k_2, k_3 \neq 0).$$

Un tel chemin est illustré sur la figure 4.4. Un *cycle lourd* est un cycle qui contient une transition avec multiplicité plus grande que 1. Un haltère ou un cycle lourd sont ce que l'on appelle un *chemin interdit* pour cet automate.

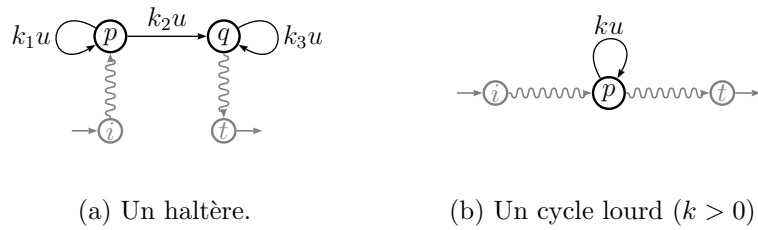


FIG. 4.4 – Les chemins « interdits » dans un  $\mathbb{N}$ -automate.

On peut ainsi énoncer :

**THÉORÈME 4.3.2** (MANDEL-SIMON 1977, SEIDL-WEBER 1991) *Un  $\mathbb{N}$ -automate émondé  $\mathcal{A}$  est borné si, et seulement si,*

**S1** :  $\mathcal{A}$  ne contient aucun cycle lourd ;

**S2** :  $\mathcal{A}$  ne contient aucun haltère.

À vrai dire, dans l'énoncé original dans [31] on lit, au lieu de S1, le suivant :

**S1'** :  $\mathcal{A}$  n'a ni un cycle contenant des transitions avec multiplicité plus grande que 1 ni des cycles distincts avec la même extrémité et la même étiquette.

En présence de S2, les deux formulations sont équivalentes :

PROPOSITION 4.3.1 Soit  $\mathcal{A}$  un  $\mathbb{N}$ -automate émondé qui satisfait la condition S2 du théorème 4.3.2, c'est-à-dire, qui ne contient aucun haltère. Les conditions suivantes sur les chemins de  $\mathcal{A}$  sont équivalentes :

**S1** :  $\mathcal{A}$  ne contient aucun cycle lourd ;

**S1'** :  $\mathcal{A}$  n'a ni un cycle contenant des transitions avec multiplicité plus grande que 1 ni des cycles distincts avec la même extrémité et la même étiquette.

PREUVE Il suffit de montrer que si  $\mathcal{A}$  satisfait S1, alors cet automate ne contient aucune paire de cycles distincts avec les mêmes extrémités et la même étiquette. Supposons le contraire, et soient  $c : r \xrightarrow[\mathcal{A}]{u} r$  et  $d : r \xrightarrow[\mathcal{A}]{u} r$  de tels cycles. Comme ils sont distincts, on peut trouver deux états distincts, soit  $p$  et  $q$ , et des factorisations  $c = c_1c_2$  et  $d = d_1d_2$ , où  $c_1$  et  $d_1$  sont des chemins de  $r$  à  $p$  et à  $q$ , respectivement, avec la même étiquette. Mais dans ce cas  $(c_2c_1)(c_2d_1)(d_2d_1)$  est un haltère, contradiction.  $\square$

On donnera une preuve combinatoire élémentaire du théorème 4.3.2.

PREUVE DU THÉORÈME 4.3.2 Supposons que  $\mathcal{A}$  a un cycle lourd

$$p \xrightarrow[\mathcal{A}]{ku} p \quad (k > 0).$$

Soient  $v$  et  $w$  des mots qui étiquettent un chemin d'un état initial  $i$  à  $p$  et un chemin de  $p$  à un état final  $t$ , respectivement. Alors, pour tout entier  $n > 0$ , le mot  $vu^nw$  étiquette un calcul réussi de la forme

$$i \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_iv} p \xrightarrow[\mathcal{A}]{ku} p \xrightarrow[\mathcal{A}]{ku} p \dots p \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_tw} t$$

et donc

$$(vu^nw) | \mathcal{A} | \geq k_i k^n k_t.$$

Il en découle que  $\mathcal{A}$  n'est pas borné. Supposons ensuite que  $\mathcal{A}$  a un haltère

$$p \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_1u} p \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_2u} q \xrightarrow[\mathcal{A}]{k_3u} q$$

et soient  $v$  et  $w$  des mots qui étiquettent un chemin d'un état initial  $i$  à  $p$  et un chemin de  $q$  à un état final  $t$ , respectivement. Alors, pour tout entier

$n > 0$ , le mot  $vu^n w$  étiquette  $n$  calculs réussis distincts de la forme

$$\begin{aligned} \rightarrow i \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_i v} p \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} p \dots p \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} q \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_t w} t \rightarrow, \\ \rightarrow i \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_i v} p \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} p \dots p \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} q \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} q \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_t w} t \rightarrow, \\ \dots \\ \rightarrow i \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_i v} p \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} q \dots q \xrightarrow{\mathcal{A}}^{ku} q \xrightarrow{\mathcal{A}}^{k_t w} t \rightarrow \end{aligned}$$

et donc

$$(vu^n w) | \mathcal{A} | \geq k_i k n k_t.$$

Dans ce cas, l'automate  $\mathcal{A}$  n'est pas non plus borné.

On tirera la réciproque d'un énoncé plus précis. Soient  $\mathcal{A}$  un automate avec  $n$  états et  $(\lambda, \mu, \nu)$  sa représentation linéaire, de dimension  $Q$ . On note

$$L = \max \{ a \mu_{p,q} \mid a \in A, p, q \in Q \},$$

c'est-à-dire,  $L$  est la multiplicité maximale des transitions de  $\mathcal{A}$ . On montrera que, si  $u \in A^*$  est un mot tel que

$$u | \mathcal{A} | \geq \left( \sum_{q \in Q} \lambda_q \right) (nL)^{2^n} \left( \sum_{q \in Q} \nu_q \right),$$

alors  $\mathcal{A}$  doit contenir un chemin interdit.

Posons

$$u = a_1 \dots a_l \quad (a_i \in A \text{ pour } 1 \leq i \leq l).$$

Pour chaque  $i$ ,  $0 \leq i \leq l$ , on définit un vecteur et un ensemble d'états comme suit (on dénote la ligne  $p$  d'une matrice  $m$  par  $m^{[p]}$ ) :

$$\mathbf{v}^{(i)} = \lambda \cdot (a_1 \dots a_i) \mu, \quad X_i = \left\{ p \in Q \mid ((a_{i+1} \dots a_l) \mu)^{[p]} \cdot \nu > 0 \right\}.$$

Dans cette définition, on considère

$$\mathbf{v}^{(0)} = \lambda, \quad X_l = \{ p \in Q \mid \nu_p > 0 \}.$$

Il vient par induction que, pour tout état  $p$ ,  $\mathbf{v}_p^{(i)}$  est la somme des multiplicités des chemins étiquetés par  $a_1 \dots a_i$  d'un état initial à  $p$ , multipliées par les multiplicités initiales respectives, et que  $p$  appartient à  $X_i$  si, et seulement

si,  $\mathcal{A}$  a un chemin de  $p$  à un état final étiqueté par  $a_{i+1} \dots a_l$  (rappelons que  $\mathcal{A}$  est émondé). On a aussi que, pour tout  $i$  et  $j$ ,  $0 \leq i < j \leq l$ ,

$$\forall p \in X_i \quad \exists q \in X_j \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a_{i+1} \dots a_j} q \quad (4.14)$$

$$\forall q \in X_j \quad \exists p \in X_i \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a_{i+1} \dots a_j} q \quad (4.15)$$

$$\forall q \in X_j \quad \nu_q^{(j)} = \sum_{p \in X_i} \nu_p^{(i)}(a_{i+1} \dots a_j) \mu_{p,q} \quad (4.16)$$

On note

$$s_i = \sum_{q \in X_i} \nu_q^{(i)} \quad 0 \leq i \leq l.$$

Il suit de (4.14) que

$$s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_l.$$

On construira à l'aide de ces objets un graphe dirigé étiqueté  $\mathcal{X}$  où chaque arc représente un chemin de  $\mathcal{A}$  et qui contient un motif interdit. Pour cela, on va trouver deux indices  $i$  et  $j$  tels que  $X_i$  et  $X_j$  coïncident. Soit

$$Y = \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq l, s_{i-1} < s_i\}.$$

Notons les éléments dans cet ensemble en ordre croissant comme

$$i_1, i_2, \dots, i_m$$

(où  $m$  est la cardinalité de  $Y$ ). En considérant  $i_0 = 0$ , il vient de (4.16) que

$$\forall i_j \in Y \quad s_{i_j} \leq s_{(i_{j-1})}(nL).$$

Par la définition de  $Y$ , on a que  $s_{i_{(j-1)}} < s_{i_j}$  et  $s_{(i_{j-1})} = s_{i_{(j-1)}}$ . Donc,

$$\forall i_j \in Y \quad s_{i_{(j-1)}} < s_{i_j} \leq s_{i_{(j-1)}}(nL).$$

Ceci implique

$$s_l = s_m \leq s_0 (nL)^m,$$

et comme

$$s_l \left( \sum_{q \in Q} \nu_q \right) \geq u|\mathcal{A}|,$$

on doit avoir

$$m \geq 2^n.$$

Donc il existe deux indices distincts  $i_j$  et  $i_{j'}$  tels que

$$X_{i_j} = X_{i_{j'}}.$$

Soulignons que, en dépit de cette identité, on a

$$s_{i_j} < s_{i_{j'}}.$$

Posons

$$X = X_{i_j}, \quad v = a_{i_j+1} \dots a_{i_{j'}}.$$

L'ensemble de sommets du graphe  $\mathcal{X}$  est  $X$ , et les arcs sont définis par

$$\forall p, q \in X \quad p \xrightarrow[\mathcal{X}]{kv} q \iff p \xrightarrow{\mathcal{A}}{kv} q.$$

Soulignons que tous les arcs de  $\mathcal{X}$  ont le même support — le mot  $v$ .

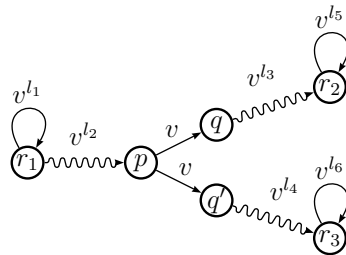
Clairement, un chemin interdit dans  $\mathcal{X}$  est aussi un chemin interdit dans  $\mathcal{A}$ . On va montrer que ce graphe en a un, et ceci sera tiré de la propriété suivante, conséquence de (4.14) et (4.15) : chaque sommet de  $\mathcal{X}$  a au moins un arc entrant et au moins un arc sortant.

On considérera deux cas. Supposons d'abord que les arcs de  $\mathcal{X}$  induisent une permutation de  $X$ , c'est-à-dire,  $\mathcal{X}$  est une union de cycles. Comme  $s_{i_{j'}} > s_{i_j}$ , il vient de (4.16) que  $\mathcal{X}$  a au moins un arc avec multiplicité plus grande que 0. Donc,  $\mathcal{X}$  contient un cycle lourd.

Supposons que  $\mathcal{X}$  n'est pas une union de cycles. Donc il existe un état  $p \in X$  qui contient au moins deux arcs sortants distincts, soient

$$p \xrightarrow[\mathcal{X}]{v} q \quad \text{et} \quad p \xrightarrow[\mathcal{X}]{v} q' \quad (q \neq q').$$

Les multiplicités des arcs n'ont aucun rôle dans ce cas. Comme chaque sommet de  $\mathcal{X}$  a au moins un arc sortant,  $q$  et  $q'$  sont accessibles à des cycles ; et comme chaque sommet a au moins un arc entrant, il existe un cycle accessible à  $p$ . Cette situation est illustrée ci-dessous :





Si  $r_1 \neq r_2$ , alors on peut construire un haltère de  $r_1$  à  $r_2$  (étiqueté par une puissance de  $v$ ). Il en est de même si  $r_1 \neq r_3$ . Et si  $r_1 = r_2 = r_3$ , on peut construire un haltère de  $q$  à  $q'$  (rappelons que ces deux états sont distincts).  $\square$

### 4.3.2 Caractérisation des transducteurs bornés

Rappelons qu'on dit qu'un transducteur est *borné* s'il réalise une relation dont la norme est bornée (et qui appartient donc à  $\text{Rat}_{\text{fin}}(A^* \times B^*)$ ).

La caractérisation de Weber des transducteurs de norme borné (cf. [47]), énoncée ci-dessous (théorème 4.3.3), dépend des motifs illustrés sur la figure 4.5, que nous appellerons un *haltère* et un *W-chemin*. À vrai dire, la façon dont cette caractérisation est présentée dans [47] en est légèrement différente (puisque W1 et W2 font partie d'un seul énoncé), mais équivalente. Notre modification permet pourtant d'éclaircir les rapports entre la preuve de Weber et celle que nous allons présenter.

**THÉORÈME 4.3.3 (WEBER 1989)** *Un transducteur  $\mathcal{T}$  est borné si, et seulement si*

**W1** :  $\mathcal{T}$  ne contient aucune paire de cycles distincts avec les mêmes extrémités, les mêmes entrées et dont les sorties sont distinctes ;

**W2** :  $\mathcal{T}$  ne contient aucun haltère tel que  $x_1x_2 \neq x_2x_3$  ;

**W3** :  $\mathcal{T}$  ne contient aucun W-chemin tel que  $|y_2| \neq |z_2|$ .

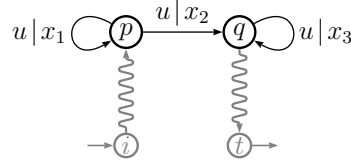
La condition W1 est clairement nécessaire pour que  $\mathcal{T}$  soit borné.

Si  $\mathcal{T}$  contient un haltère, son automate d'entrée sous-jacent n'est pas borné. Mais  $\mathcal{T}$  peut être quand même borné, puisque les mots de la forme  $x_1^n x_2 x^m$  sont deux à deux distincts ou pas selon que  $x_1x_2$  et  $x_2x_3$  sont distincts ou pas. Donc, la condition W2 est aussi nécessaire pour que  $\mathcal{T}$  soit borné.

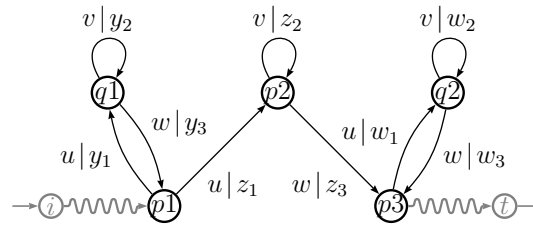
Mais ces deux conditions ne sont pas suffisantes : un W-chemin tel que  $z_2$  est la seule sortie différente du mot vide satisfait W2, mais les chemins de  $p_1$  à  $p_2$  qui lisent des mots de la forme

$$uvwuv^2w \dots uv^nw$$

écrivent  $n$  mots distincts.



(a) Un haltère de l'état  $p$  à l'état  $q$  formé par les chemins  $c_1 = p \xrightarrow{\mathcal{T}} p$ ,  $c_2 = p \xrightarrow{\mathcal{T}} q$  et  $c_3 = q \xrightarrow{\mathcal{T}} q$ .



(b) Un W-chemin de l'état  $p_1$  à l'état  $p_3$ , et qui contient les états  $q_1$ ,  $p_2$  et  $q_2$ .

FIG. 4.5 – Un haltère et un W-chemin dans un transducteur  $\mathcal{T}$ .

Dans notre preuve, on introduira une restriction sur le décalage qui permettra de capturer W2 et W3 en même temps :

**THÉORÈME 4.3.4** *Un transducteur  $\mathcal{T}$ , avec  $n$  états et longueurs des sorties des transitions bornées par  $\ell$ , est borné si, et seulement si,*

**C1** :  $\mathcal{T}$  n'a aucun cycle qui contient deux transitions avec les mêmes extrémités, les mêmes entrées et des sorties distinctes ;

**C2** :  $\mathcal{T}$  ne contient aucun haltère  $c_1c_2c_3$  tel que soit  $x_1x_2 \neq x_2x_3$ , soit  $x_1x_2 = x_2x_3$  et  $\langle c_1c_2, c_2c_3 \rangle > \ell n^3$ .

On donnera par la suite une preuve du théorème 4.3.4, séparée dans les propositions 4.3.2 et 4.3.3.

PROPOSITION 4.3.2 *Si un transducteur  $\mathcal{T}$  est borné, alors il satisfait les conditions C1 et C2.*

On nécessitera du lemme suivant :

LEMME 4.3.2 *Si tout W-chemin de  $\mathcal{T}$  satisfait  $|y_2| = |z_2|$  et tout haltère satisfait  $x_1x_2 = x_2x_3$ , alors tout haltère satisfait  $\langle c_1c_2, c_2c_3 \rangle \leq \ell n^3$ .*

PREUVE La preuve est par contradiction. Soit  $c_1c_2c_3$  un haltère de longueur minimale tel que  $\langle c_1c_2, c_2c_3 \rangle > \ell n^3$ . Il existe des préfixes (de même longueur)  $c'_1$  et  $c'_2$  de  $c_1c_2$  et  $c_2c_3$ , respectivement, tels que

$$|\text{AR}(c'_1, c'_2)| > \ell n^3. \quad (4.17)$$

On considérera séparément le cas où  $c'_1$  est un préfixe de  $c_1$ , et le cas où la longueur de  $c'_1$  est plus grande que celle de  $c_1$ . Commençons avec le premier cas. Considérons les factorisations

$$c_1 = c'_1c''_1, \quad c_2 = c'_2c''_2, \quad c_3 = c'_3c''_3$$

où  $c'_3$  est un préfixe de  $c_3$  dont la longueur est égale à celle de  $c_1$ . De (4.17), on a que la longueur de ces préfixes est plus grande que  $n^3$ . Donc, il existe des factorisations

$$c'_1 = d_1d_2d_3, \quad c'_2 = d'_1d'_2d'_3, \quad c'_3 = d''_1d''_2d''_3$$

où les longueurs de  $d_1$ ,  $d'_1$  et  $d''_1$  sont égales, les longueurs de  $d_2$ ,  $d'_2$  et  $d''_2$  sont égales, et  $d_2$ ,  $d'_2$  et  $d''_2$  sont des *cycles*. Soient  $x$  et  $y$  les sorties de  $d_2$  et  $d'_2$ , respectivement. Ces factorisations montrent que  $c_1c_2c_3$  est aussi un W-chemin, et par l'hypothèse faite sur les W-chemins,

$$|x| = |y| \quad (4.18)$$

Pour tout  $r \geq 0$ , considérons l'haltère suivant :

$$b_1 = (d_1d_2^r d_3)c''_1, \quad b_2 = (d'_1d_2^r d'_3)c''_2, \quad b_3 = (d''_1d_2^r d''_3)c''_3.$$

Par hypothèse, les sorties de  $b_1b_2$  et de  $b_2b_3$  sont égales. De (4.18) et du lemme 3.2.2 (*cf.* section 3.2.2), on dérive que ceci n'est possible que si

$$\text{AR}(d_1, d'_1) = \text{AR}(d_1d_2, d'_1d'_2).$$

Mais dans ce cas

$$|\text{AR}(d_1d_3, d'_1d'_3)| = |\text{AR}(c'_1, c'_2)| > \ell n^3$$

et alors

$$\langle d_1d_3c''_1, d'_1d'_3c''_2 \rangle > \ell n^3,$$

contradiction avec la minimalité de  $c_1c_2c_3$ , puisque  $(d_1d_3c''_1)(d'_1d'_3c''_2)(d''_1d''_3c''_3)$  est un haltère de longueur plus petite celle de  $c_1c_2c_3$ .

Maintenant, supposons que la longueur de  $c'_1$  est plus grande que  $c_1$ . Soient  $d_2$  et  $d_3$  les suffixes de même longueur de  $c_2$  et  $c_3$ , respectivement, tels que

$$c_1c_2 = c'_1d_2, \quad c_2c_3 = c'_2d_3.$$

Soit  $d_1$  le suffixe de  $c_1$  avec la même longueur. Comme les sorties de  $c_1c_2$  et de  $c_2c_3$  sont égales, on a que la différence entre les longueurs des sorties de  $d_2$  et  $d_3$  est égale à  $|\text{AR}(c'_1, c'_2)|$ . Donc, cette différence est plus grande que  $\ell n^3$ , et la longueur de  $d_1$  (et donc de  $d_2$  et  $d_3$ ) est plus grande que  $n^3$ . Pour conclure, il suffit d'appliquer dans les transposés de  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  les mêmes arguments qu'avant, et on obtient trois cycles dans ces chemins qui induisent un haltère contredisant la minimalité de  $c_1c_2c_3$ .  $\square$

**PREUVE DE LA PROPOSITION 4.3.2** Si la norme de  $\mathcal{T}$  est finie, il est clair que  $\mathcal{T}$  doit satisfaire C1.

Tout haltère doit satisfaire la condition  $x_1x_2 = x_2x_3$  dans C2, puisque des mots de la forme  $x_1^n x_2 x_3^m$  sont soit deux à deux distincts soit égaux selon que les mots  $x_1x_2$  et  $x_2x_3$  sont distincts ou pas.

Tout W-chemin doit satisfaire  $|y_2| = |z_2|$ , puisqu'au contraire les chemins de  $p_1$  à  $p_2$  qui lisent un mot de la forme  $uvvuv^2w \dots uv^n w$  écrivent  $n$  mots distincts.

Du lemme 4.3.2, on a aussi que tout haltère de  $\mathcal{T}$  satisfait  $\langle c_1c_2, c_2c_3 \rangle \leq \ell n^3$ . Donc,  $\mathcal{T}$  satisfait C2.  $\square$

La réciproque sera tiré du revêtement Avance ou Retard de la caractérisation des N-automates bornés de Mandel et Simon (théorème 4.3.2).

**PROPOSITION 4.3.3** *Si  $\mathcal{T}$  satisfait C1 et C2, alors sa norme est bornée.*

PREUVE Supposons que  $\mathcal{T}$  satisfait C1 et C2. Prenons  $N = \ell n^3$ , et soit  $\mathcal{A}$  l'automate d'entrée sous-jacent de l'immersion Avance ou Retard lexicographique  $\mathcal{V}_N$  de  $\mathcal{T}$  (cf. section 2.5.3). Comme les calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  se projettent sur les calculs réussis de  $\mathcal{T}$ , on a directement que  $\mathcal{V}_N$  satisfait C1, donc  $\mathcal{A}$  satisfait S1 (la multiplicité d'une transition  $e$  dans  $\mathcal{A}$  est le nombre de transitions dans  $\mathcal{V}_N$  qui se projettent sur  $e$ ).

Ensuite, comme le décalage entre deux calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  est égal au décalage entre leurs projections, on peut conclure que  $\mathcal{V}_N$  n'a aucun haltère. En effet, dans le contraire on pourrait trouver dans  $\mathcal{V}_N$  des calculs réussis distincts de la forme  $cc_1c_2d$  et  $cc_2c_3d$  tels que  $\langle cc_1c_2d, cc_2c_3d \rangle \leq N$ , où  $c$  est un chemin d'un état initial à  $p$  et  $d$  est un chemin de  $q$  à un état final. Contradiction avec le fait que  $\mathcal{V}_N$  est  $N$ -séparé. Donc,  $\mathcal{A}$  satisfait S2. Du théorème 4.3.2, il vient que  $\mathcal{A}$  est borné, et donc  $\mathcal{T}$  l'est aussi.  $\square$

Le théorème 4.3.4 est ainsi démontré.

### 4.3.3 Test effectif de la caractérisation avec $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$

Il n'est pas difficile de détecter la présence du motif C1 décrit dans le théorème 4.3.4. On va dans cette section établir une caractérisation du motif C2 à l'aide d'un produit de  $\mathcal{T}^3$  par l'action Avance ou Retard  $\mathcal{G}$  (théorème 4.3.5). On définit  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$  de façon similaire à  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}_3$ ; la différence, c'est que  $\mathcal{G}$  agit sur une seule paire de projections, à l'occurrence, la première et la deuxième. Ensuite, on montrera comment tester cette caractérisation.

THÉORÈME 4.3.5 *Un transducteur  $\mathcal{T}$  (avec  $n$  états et longueurs des sorties des transitions bornées par  $\ell$ ) satisfait C2 si, et seulement si, pour toute paire d'états distincts  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{T}$ , tout état  $((r, s, t), w)$  de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$  accessible à partir de  $((p, p, q), 1_{B^*})$  et co-accessible à un état de la forme  $((p, q, q), v)$  satisfait*

$$w \neq \mathbf{0}, \quad |w| \leq \ell n^3.$$

PREUVE Supposons que  $\mathcal{T}$  satisfait C2. Considérons le chemin

$$c : ((p, p, q), 1_{B^*}) \xrightarrow{\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}}^{f|(x_1, x_2, x_3)} ((r, s, t), w) \xrightarrow{\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}}^{g|(y_1, y_2, y_3)} ((p, q, q), v).$$

Les projections de  $c$  produisent l'haltère suivant :

$$c_1 : p \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{f|x_1}{r} \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{g|y_1}{p}, \quad c_2 : p \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{f|x_2}{s} \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{g|y_2}{q}, \quad c_3 : q \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{f|x_3}{t} \xrightarrow{\mathcal{T}} \frac{g|y_3}{q}.$$

Comme  $\mathcal{T}$  satisfait  $C2$ ,  $x_1$  et  $x_2$  doivent être des préfixes d'un même mot et le décalage entre  $c_1$  et  $c_2$  est au plus  $\ell n^3$ . Comme  $w = 1_{B^*} \cdot (x_1, x_2)$ , on a que  $w \neq \mathbf{0}$  et  $|w| \leq \ell n^3$ .

Réciproquement, supposons les conditions sur les états de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$ .

Soit

$$c_1 : p \xrightarrow{u|x_1} p, \quad c_2 : p \xrightarrow{u|x_2} q, \quad c_3 : q \xrightarrow{u|x_3} q$$

un haltère. On va d'abord montrer que  $x_1 x_2 = x_2 x_3$ . Il est seulement nécessaire de considérer le cas où  $x_1$  et  $x_3$  ne sont pas tous les deux égaux au mot vide.

Pour tout  $r > 0$ , considérons le chemin

$$c : ((p, p, q), 1_{B^*}) \xrightarrow{\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}} \frac{u^r |(x_1^r, x_2 x_3^{r-1}, x_3^r)|}{((p, q, q), w')}, \quad w' = 1_{B^*} \cdot (x_1^r, x_2 x_3^{r-1})$$

qui se projette sur l'haltère

$$(c_1^r)(c_2 c_3^{r-1})(c_3^r).$$

Par l'hypothèse sur  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$ ,

$$w' \neq \mathbf{0}, \quad |w'| \leq \ell n^3.$$

Ceci implique que

$$|x_1| = |x_3|. \tag{4.19}$$

En effet, le contraire impliquerait que pour  $r > |x_2| + \ell n^3$ , soit  $w' = \mathbf{0}$ , soit  $|w'| > \ell n^3$ .

Ensuite, soit  $r$  l'entier le plus petit tel que

$$|x_1^r| > |x_2| + |x_3|.$$

Comme  $w' \neq \mathbf{0}$ , les sorties de  $c_1^r$  et  $c_2 c_3$  doivent être des préfixes d'un même mot. On dérive de cette remarque et de (4.19) des factorisations

$$x_1 = wz, \quad x_2 = x_1^{r-2}w, \quad x_3 = zw,$$

ce qui montre que

$$x_1x_2 = x_2x_3.$$

Maintenant, on montrera que  $\langle c_1c_2, c_2c_3 \rangle \leq \ell n^3$ . En vertu du lemme 4.3.2, il suffit de montrer que, pour tout W-chemin, les longueurs des sorties  $y_2$  et  $z_2$  sont égales. En effet, si ceci n'était pas vrai, alors, dans la partie de  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$  accessible à partir de  $((p_1, p_1, p_3), 1_{B^*})$  et co-accessible à un état de la forme  $((p_1, p_3, p_3), z)$ , il existe un chemin

$$((p_1, p_1, p_3), 1_{B^*}) \xrightarrow{u|(y_1, z_1, w_1)} ((q_1, p_2, q_2), r_1) \xrightarrow{v|(y_2, z_2, w_2)} ((q_1, p_2, q_2), r_2) \xrightarrow{v|(y_2, z_2, w_2)} \dots$$

où soit les mots  $r_i$  sont deux à deux distincts, soit il existe un indice  $j$  tel que  $r_i = \mathbf{0}$  pour  $i \geq j$ . Ceci est impossible en raison de l'hypothèse sur  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$ .  $\square$

Afin de tester le théorème 4.3.5 en complexité polynomiale, on montrera comment éviter la vérification d'un ensemble de mots de longueur au plus  $\ell n^3$  (dont la cardinalité est exponentielle). Pour ce faire, on trouvera dans  $\mathcal{T}^3 \times \mathcal{G}$  un « noyau dur » permettant de tester les mêmes conditions du théorème et dont les états sont des préfixes les un des autres.<sup>1</sup>

On fixe la notation suivante. Soient  $p$  et  $q$  deux états distincts de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$  la partie de  $\mathcal{T}^3$  accessible à partir de  $(p, p, q)$  et co-accessible à  $(p, q, q)$ . Soit  $\mathcal{V}'$  le sous-transducteur de  $\mathcal{V}$  induit par les états co-accessibles à un cycle dont la sortie n'est pas de la forme  $(1_{B^*}, 1_{B^*}, x)$  (autrement dit, la première et la seconde coordonnées ne contiennent pas en même temps le mot vide). Soit  $\mathcal{W}$  la partie de  $\mathcal{V} \times \mathcal{G}$  accessible à partir de  $((p, p, q), 1_{B^*})$ , et  $\mathcal{W}'$  la partie de  $\mathcal{V}' \times \mathcal{G}$  accessible à partir de  $((p, p, q), 1_{B^*})$ .

**LEMME 4.3.3** *Les conditions du théorème 4.3.5 sont vérifiées par les états de  $\mathcal{W}$  si, et seulement si, elles sont vérifiées par les états de  $\mathcal{W}'$ .*

**PREUVE** Si les conditions sont vérifiées dans  $\mathcal{W}$ , elles sont vérifiées dans  $\mathcal{W}'$ , puisque  $\mathcal{W}'$  est un sous-automate de  $\mathcal{W}$ .

Supposons que les conditions sont vérifiées dans  $\mathcal{W}'$ . Soient  $((r, s, t), w)$  un état de  $\mathcal{W}$  et  $c$  un chemin d'un état initial à cet état :

$$c : ((p, p, q), 1_{B^*}) \xrightarrow[\mathcal{W}]{u|(x_1, x_2, x_3)} ((r, s, t), w).$$

<sup>1</sup>Propriété qui rappelle de façon remarquable la construction donnée dans [3] pour tester la séquentialité d'un transducteur.

On montrera d'abord que  $w \neq \mathbf{0}$ . Si  $x_1 = 1_{B^*}$  ou  $x_2 = 1_{B^*}$ , il n'a rien à faire. Sinon,  $((r, s, t), w)$  appartient à  $\mathcal{W}'$  : il existe un chemin de  $(r, s, t)$  à  $(p, q, q)$  et un cycle

$$(p, q, q) \xrightarrow[\mathcal{T}^3]{v|(y_1, y_2, y_3)} (p, q, q)$$

où  $x_1$  est un préfixe de  $y_1$ , alors  $y_1 \neq 1_{B^*}$ . Comme  $((r, s, t), w)$  appartient à  $\mathcal{W}'$ ,  $w \neq \mathbf{0}$ .

Pour montrer que  $|w| \leq \ell n^3$ , supposons que  $c$  est un chemin de longueur minimale de  $((p, p, q), 1_{B^*})$  à  $((r, s, t), w)$ . Si  $|w| > \ell n^3$ , on peut factoriser  $c$  comme  $c_1 c_2 c_3$  où  $c_2$  est un chemin de la forme

$$c_2 = ((r', s', t'), v') \xrightarrow[\mathcal{W}]{v|(z_1, z_2, z_3)} ((r', s', t'), v'').$$

Les mots  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas tous les deux égaux au mot vide, puisque sinon  $c_1 c_3$  serait un chemin plus petit de  $((p, p, q), 1_{B^*})$  à  $((r, s, t), w)$ . Ainsi,  $(r', s', t')$  appartient à  $\mathcal{V}'$ , et pour tout  $n$ ,

$$((r', s', t'), v' \cdot (z_1, z_2)^n)$$

est un état de  $\mathcal{W}'$ . Du lemme 3.2.2 il vient que si  $v' \cdot (z_1, z_2) \neq v'$ , alors l'ensemble

$$\{v' \cdot (z_1, z_2)^n \mid n \geq 0\}$$

doit être infini ou contenir  $\mathbf{0}$ . Ceci contredit l'hypothèse sur les états de  $\mathcal{W}'$ . Ainsi,  $v' \cdot (z_1, z_2) = v'$ . Mais dans ce cas  $c_1 c_3$  est un chemin plus petit qui se termine dans  $((r, s, t), w)$ , contradiction avec la minimalité de  $c$ . On conclut qu'il n'est pas possible que  $|w| > \ell n^3$ .  $\square$

On dit que deux mots dans  $B^*$  (dans  $\overline{B^*}$ ) sont comparables s'ils sont des préfixes (suffixes) d'un même mot.

**LEMME 4.3.4** *Soient  $((r, s, t), x)$  et  $((r, s, t), y)$  deux états de  $\mathcal{W}'$ . Si  $x$  et  $y$  sont deux mots positifs, ou deux mots négatifs, alors ils doivent être comparables, ou les conditions du théorème 4.3.5 ne sont pas remplies.*

**PREUVE** Par la définition de  $\mathcal{W}'$ , l'état  $(r, s, t)$  est co-accessible à un circuit

$$c : (r', s', t') \xrightarrow[\mathcal{T}^3]{v|(y_1, y_2, y_3)} (r', s', t')$$



tel que

$$\text{soit } y_1 \neq 1_{B^*} \quad \text{soit } y_2 \neq 1_{B^*}.$$

Soit

$$(r, s, t) \xrightarrow[\mathcal{T}^3]{u|(x_1, x_2, x_3)} (r', s', t')$$

un chemin de  $(r, s, t)$  à ce cycle. Alors,  $\mathcal{W}'$  contient les chemins

$$((r, s, t), x) \xrightarrow[\mathcal{W}']{u|(x_1, x_2, x_3)} ((r', s', t'), x'), \quad ((r, s, t), y) \xrightarrow[\mathcal{W}']{u|(x_1, x_2, x_3)} ((r', s', t'), y'),$$

où

$$x' = x \cdot (x_1, x_2), \quad y' = y \cdot (y_1, y_2).$$

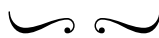
Les mots  $x$  et  $y$  sont comparables si, et seulement si,  $x'$  et  $y'$  le sont. Afin de voir que  $x'$  et  $y'$  sont comparables, remarquons que les ensembles

$$\{x' \cdot (y_1, y_2)^n : n \geq 0\}, \quad \{y' \cdot (y_1, y_2)^n : n \geq 0\}$$

doivent être des singletons, sinon en appliquant le lemme 3.2.2 on peut construire, avec le cycle  $c$ , des états dans  $\mathcal{W}'$  qui ne satisfont pas les conditions du théorème 4.3.5. Donc, pour  $n > |x'| + |y'|$ , si  $x', y' \in B^*$ , alors  $x'$  et  $y'$  sont tous les deux des préfixes de  $y_1^n$ , et si  $x', y' \in \overline{B}^*$ , alors  $x'$  et  $y'$  sont tous les deux des suffixes de  $y_2^n$ .  $\square$

**THÉORÈME 4.3.6** *Soit  $\mathcal{T}$  un transducteur avec  $n$  états,  $m$  transitions et dont les longueurs des sorties sont bornées par  $\ell$ . Il est décidable en complexité  $\mathcal{O}(\ell n^3(n^3 + m^3))$  si  $\mathcal{T}$  est borné.*

**PREUVE** Pour la construction de  $\mathcal{W}'$ , à partir de  $((p, p, q), 1_{B^*})$ , on maintient un tableau indicé par  $Q^3$  où chaque coordonnée contient deux mots, un positif et un négatif, de longueur au plus  $\ell n^3$ . Les préfixes de ces mots représentent les états de  $\mathcal{W}'$  déjà construits. Le même tableau est utilisé indépendamment du choix des états  $p$  et  $q$ , puisque la preuve du lemme 4.3.4 implique que la compatibilité des mots doit être respecté dans chaque état de  $\mathcal{T}^3$  même entre des  $\mathcal{W}'$  distincts. Chaque préfixe correspond à un parcours de  $\mathcal{T}^3$ , donc la complexité globale de cette construction est  $\mathcal{O}(\ell n^3(n^3 + m^3))$ .  $\square$



## 4.4 Équivalence

Afin de montrer le théorème 4.1.6 — la décidabilité de l'inclusion (et donc de l'équivalence) entre deux relations rationnelles  $k$ -valuées en complexité exponentielle — on alliera le théorème de décomposition lexicographique et l'action Avance ou Retard généralisée.

On se ramènera d'abord à une simplification. Fixons deux transducteurs  $k$ -valués,  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$  ; on souhaite décider si le comportement de  $\mathcal{T}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$ . La décomposition lexicographique de  $\mathcal{T}$  fournit  $k$  transducteurs non ambigus dont union est équivalente à  $\mathcal{T}$ , donc il suffit de tester l'inclusion de chacun de ces transducteurs sur  $\mathcal{T}'$ .

Soit  $\mathcal{R}$  un de ces transducteurs. On a vu que le nombre d'états de  $\mathcal{R}$  est borné par une exponentielle dans le nombre d'états de  $\mathcal{T}$ .

Soient  $\mathcal{Z}^{(0)}, \dots, \mathcal{Z}^{(k-1)}$  une décomposition lexicographique de  $\mathcal{T}'$ , et  $\mathcal{A}$  l'automate sous-jacent d'entrée de  $\mathcal{V}_N$  (le sous-transducteur  $k$ -ambigu en entrée du revêtement Avance ou Retard lexicographique de  $\mathcal{T}'$ ). Soit  $\mu$  le morphisme associé de  $\mathcal{A}$ , et rappelons l'action

$$\gamma_\mu : \mathbb{N}^Q \times A^* \rightarrow \mathbb{N}^Q$$

définie à l'exemple 2.2.2,

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbb{N}^Q \quad \forall a \in A \quad \mathbf{v} \diamond a = \mathbf{v} \cdot a\mu.$$

Notre algorithme dépend d'une propriété du produit suivant :

$$\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)} \times \gamma_\mu$$

Dans ce produit, le rôle de l'action  $\gamma_\mu$  est d'indiquer, pour chaque mot  $u$  du domaine de  $\mathcal{T}'$ , les états de  $\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)}$  qui contiennent tous les états finaux des calculs réussis dans  $\mathcal{V}_N$  dont l'entrée est  $u$  :

PROPRIÉTÉ 4.4.1 *Soit*

$$(\mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k-1)}, \mathbf{v}) \tag{4.20}$$

*un état du produit  $\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)} \times \gamma_\mu$ . Soient  $U$  le vecteur de multiplicités finales de  $\mathcal{A}$  (l'automate d'entrée sous-jacent de  $\mathcal{V}_N$ ) et  $s$  le nombre d'états  $\mathbf{q}^{(i)}$  dans le vecteur (4.20) avec la propriété d'être final dans  $\mathcal{Z}^{(i)}$ .*

Si

$$s = \mathbf{v} \cdot U, \quad (4.21)$$

alors, pour tout calcul

$$C : (\mathbf{i}^{(0)}, \dots, \mathbf{i}^{(k-1)}, \mathbf{v}_0) \xrightarrow[\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)} \times \gamma_\mu]{u|x} (\mathbf{q}^{(0)}, \dots, \mathbf{q}^{(k-1)}, \mathbf{v})$$

d'un état initial de  $\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)} \times \gamma_\mu$  à (4.20), l'ensemble des projections de  $C$  sur  $\mathcal{V}_N$  (un ensemble de  $k$  chemins) contient tous les calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  avec entrée égale à  $u$ .

Réciproquement, si  $C$  est un calcul ayant cette propriété, alors son extrémité satisfait (4.21).  $\square$

Posons dans le produit  $\mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)} \times \gamma_\mu$  qu'un état est final si, et seulement si, il vérifie (4.21). Soit  $\mathcal{W}$  la partie accessible de ce transducteur. Alors, pour tout mot  $u \in A^*$ , un calcul de  $\mathcal{W}$  qui lit  $u$  est réussi si, et seulement si, sa projection dans  $\mathcal{V}_N$  contient tous les calculs réussis de  $\mathcal{V}_N$  dont les entrées sont égales à  $u$ .

Le nombre d'états de  $\mathcal{W}$  est exponentiel dans le nombre d'états de  $\mathcal{T}$ . En effet, on montre que la partie accessible de l'action  $\gamma_\mu$  a un nombre exponentiel de vecteurs avec le même argument utilisé pour borner le nombre d'états de la décomposition.

L'achèvement de la preuve se fait à l'aide de notre algorithme pour tester si un transducteur est  $k$ -valué. Considérons le produit

$$\mathcal{R} \times \mathcal{W} \times \mathcal{G}_{k+1}.$$

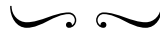
Dans ce produit, on applique l'action Avance ou Retard généralisée avec les sorties de  $\mathcal{R} \times \mathcal{Z}^{(0)} \times \dots \times \mathcal{Z}^{(k-1)}$ . Clairement, le comportement de  $\mathcal{R}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$  si, et seulement si, pour chaque calcul réussi de  $\mathcal{R}$  il existe au moins un transducteur  $\mathcal{Z}^{(i)}$  possédant un calcul réussi avec la même étiquette, ce qui s'énonce avec  $\mathcal{R} \times \mathcal{W} \times \mathcal{G}_{k+1}$  de la manière suivante :

**PROPRIÉTÉ 4.4.2** *Le comportement du transducteur  $\mathcal{R}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$  si, et seulement, pour tout état  $(\mathbf{q}, \delta)$  final dans  $\mathcal{R} \times \mathcal{W} \times \mathcal{G}_{k+1}$ , il existe un indice  $i$  tel que  $\delta_{1,i} = 1_{B^*}$ .  $\square$*

La même propriété s'exprime dans la valuation de  $\mathcal{R} \times \mathcal{W} \times \mathcal{G}_{k+1}$  par notre algorithme pour tester si un transducteur est  $k$ -valué. Ceci découle directement de la définition de transversale d'un ensemble de différences partielles (cf. section 4.2.3) :

**PROPRIÉTÉ 4.4.3** *Le comportement du transducteur  $\mathcal{R}$  est inclus dans celui de  $\mathcal{T}'$  si, et seulement, pour tout état final et accessible  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{R} \times \mathcal{W}$ , il existe au moins une différence partielle  $\gamma$  dans  $\mathbf{m}(\mathbf{q})$  où tous les coefficients définis de la forme  $\gamma_{1,i}$  sont égaux à  $1_{B^*}$ .  $\square$*

Ainsi, pour décider de l'inclusion de  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{T}'$ , il suffit de construire la valuation de  $\mathcal{R} \times \mathcal{W} \times \mathcal{G}_{k+1}$  avec l'algorithme présentée à la section 4.2, et tester si les états finaux de  $\mathcal{R} \times \mathcal{W}$  satisfont la condition énoncée dans la propriété 4.4.3. La complexité de cette construction est bornée par un polynôme sur la taille de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{W}$ , étant donc exponentielle dans le nombre d'états de  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}'$ .



# Bibliographie

- [1] A. ARNOLD et M. LATTEUX : A new proof of two theorems about rational transductions. *Theoretical Computer Science*, 8:261–263, 1979. 115
- [2] M.-P. BÉAL et O. CARTON : Determinization of transducers over finite and infinite words. *Theoretical Computer Science*, 289(1):225–251, 2002. 115
- [3] M.-P. BÉAL, O. CARTON, C. PRIEUR et J. SAKAROVITCH : Squaring transducers : an efficient procedure for deciding functionality and sequentiality. *Theoretical Computer Science*, 292:45–63, 2003. 12, 14, 15, 16, 17, 41, 46, 94, 97, 115, 119, 144, 145, 147, 183
- [4] J. BERSTEL : *Transductions and Context-Free Languages*. B. G. Teubner, 1979. Quatre premiers chapitres disponibles sur <http://www-igm.univ-mlv.fr/ions05mai2007.pdf>. 11, 13, 28, 143
- [5] M. BLATTNER et T. HEAD : Single-valued  $a$ -transducers. *Journal of Computer and System Sciences*, 15(3):310–327, 1977. 143
- [6] C. CHOFFRUT : Une caractérisation des fonctions séquentielles et des fonctions sous-séquentielles en tant que relations rationnelles. *Theoretical Computer Science*, 5(3):325–338, 1977. 115
- [7] C. CHOFFRUT : *Contribution à l'étude de Quelques Familles Remarquables de Fonctions Rationnelles*. Thèse d'état, Université Paris VII, 1978. 115
- [8] C. CHOFFRUT : A generalization of Ginsburg and Rose's characterization of gsm mappings. In *ICALP'79*, volume 71 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 88–103. Springer, 1979. 115
- [9] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST et C. STEIN : *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2001. 29
- [10] K. CULIK et J. KARHUMÄKI : The equivalence of finite valued transducers (on HDTOL languages) is decidable. *Theoretical Computer Science*, 47(1):71–84, 1986. 17, 145
- [11] R. de SOUZA : On the decidability of the equivalence for  $k$ -valued transducers. In M. ITO et M. TOYAMA, éditeurs : *DLT 2008*, volume 5257

- de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 252–263. Springer, 2008. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85780-8\\_20](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85780-8_20). 18
- [12] S. EILENBERG : Algèbre catégorique et théorie des automates. *Institut Henri Poincaré, Université de Paris*, 1967. 27
- [13] S. EILENBERG : *Automata, Languages, and Machines*, volume A. Academic Press, 1974. 13, 28, 30, 41, 84, 93, 115
- [14] C. C. ELGOT et J. E. MEZEI : On relations defined by generalized finite automata. *IBM Journal of Research and Development*, 9:47–68, 1965. 27, 115
- [15] Z. ESIK : Decidability results concerning tree transducers. *Acta Cybernetica*, 5:303–314, 1983. 18
- [16] P. C. FISCHER et A. L. ROSENBERG : Multitape one-way nonwriting automata. *Journal of Computer and System Sciences*, 2(1):88–101, juin 1968. 17, 143
- [17] Ch. FROUGNY et J. SAKAROVITCH : Synchronized rational relations of finite and infinite words. *Theoretical Computer Science*, 108(1):45–82, 1993. 39
- [18] Ch. FROUGNY et J. SAKAROVITCH : Synchronisation déterministe des automates à délai borné. *Theoretical Computer Science*, 191:61–77, 1998. 13, 39
- [19] S. GINSBURG et G. F. ROSE : A characterization of machine mappings. *Canadian Journal of Mathematics*, 18:381–388, 1966. 115
- [20] F. GIRE : Two decidability problems for infinite words. *Information Processing Letters*, 22:135–140, 1986. 18
- [21] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH et O. PATASHNIK : *Concrete Mathematics*. Addison Wesley, 1989. 112
- [22] E. GURARI et O. IBARRA : The complexity of decision problems for finite-turn multicounter machines. *Journal of Computer and System Sciences*, 22(2):220–229, 1981. 144
- [23] E. GURARI et O. IBARRA : A note on finite-valued and finitely ambiguous transducers. *Mathematical Systems Theory*, 16:61–66, 1983. 16, 144
- [24] J. E. HOPCROFT, R. MOTWANI et J. D. ULLMAN : *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 2001. 141, 144
- [25] Gérard JACOB : Un algorithme calculant le cardinal, fini ou infini, des demi-groupes de matrices. *Theoretical Computer Science*, 5(2):183–204, 1977. 170
- [26] J. H. JOHNSON : Do rational equivalence relations have regular cross-sections ? *In Proc. ICALP'85*, volume 194 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 300–309, 1985. 39, 40, 72

- [27] J. H. JOHNSON : Rational equivalence relations. *Theoretical Computer Science*, 47(3):39–60, 1986. 72
- [28] K. KOBAYASHI : Classification of formal languages by functional binary transductions. *Information and Control*, 15:95–109, 1969. 115
- [29] S. LOMBARDY : *Approche structurelle de quelques problèmes de la théorie des automates*. Thèse de doctorat, ENST Paris, 2001. 12
- [30] W. MAGNUS, A. KARRASS et D. SOLITAR : *Combinatorial Group Theory*. Interscience Publishers, 1966. 95
- [31] A. MANDEL et I. SIMON : On finite semigroups of matrices. *Theoretical Computer Science*, 5(2):101–111, octobre 1977. 17, 145, 170, 171, 172
- [32] R. MCNAUGHTON et Y. ZALCSTEIN : The burnside problem for semigroups. *J. of Algebra*, 34:292–299, 1975. 170
- [33] M. MOHRI : On some applications of finite-state automata theory to natural language processing. *Journal of Natural Language Engineering*, 2:1–20, 1995. 115
- [34] M. PELLETIER et J. SAKAROVITCH : On the representation of finite deterministic 2-tape automata. *Theoretical Computer Science*, 225:1–63, 1999. 39, 73, 74
- [35] E. ROCHE et Y. SCHABES : *Finite-State Language Processing*. MIT Press, 1997. 115
- [36] G. ROZENBERG et A. SALOMAA : *The Mathematical Theory of L-Systems*. Academic Press, 1980. 145
- [37] J. SAKAROVITCH : A construction on finite automata that has remained hidden. *Theoretical Computer Science*, 204(1–2):205–231, 1998. 13, 39, 41, 42, 50, 58, 72, 115
- [38] J. SAKAROVITCH : *Éléments de théorie des automates*. Vuibert, 2003. Translation anglaise : *Elements of Automata Theory*, Cambridge University Press, à paraître. 11, 13, 28, 41, 42, 46, 137, 141, 143
- [39] J. SAKAROVITCH : The rational skimming theorem. In Do Long VAN et M. ITO, éditeurs : *Proc. of The Mathematical Foundations of Informatics (1999)*, World Scientific, pages 157–172, 2005. 13, 39, 41, 42, 84
- [40] J. SAKAROVITCH et R. de SOUZA : On the decidability of bounded valuedness for transducers. In E. OCHMAŃSKI et J. TYSZKIEWICZ, éditeurs : *MFCS 2008*, volume 5162 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 588–600. Springer, 2008. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85238-4\\_48](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85238-4_48). 18
- [41] J. SAKAROVITCH et R. de SOUZA : On the decomposition of  $k$ -valued rational relations. In S. ALBERS et P. WEIL, éditeurs : *Proceedings of*

- STACS 2008*, pages 621–632, 2008, arXiv :0802.2823v1. disponible sur <http://stacs-conf.org> (à paraître dans *Theory of Computing Systems*). 16, 118
- [42] M. P. SCHÜTZENBERGER : Parties rationnelles d'un monoïde libre. *In Proc. of the International Mathematics Conference*, pages 281–282, 1970. 13, 41
- [43] M. P. SCHÜTZENBERGER : Sur les relations rationnelles. *In Automata Theory and Formal Languages, 2nd GI Conference*, volume 33 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 209–213, 1975. 16, 143
- [44] M. P. SCHÜTZENBERGER : Sur les relations rationnelles entre monoïdes libres. *Theoretical Computer Science*, 3(2):243–259, 1976. 11, 14, 115, 116
- [45] H. SEIDL : Equivalence of finite-valued tree transducers is decidable. *Mathematical Systems Theory*, 27:285–346, 1994. 18
- [46] J. R. STALLINGS : Topology of finite graphs. *Inventiones Math.*, 71:551–565, 1983. 13, 39
- [47] A. WEBER : On the valuedness of finite transducers. *Acta Informatica*, 27(8):749–780, 1989. 17, 145, 170, 177
- [48] A. WEBER : On the lengths of values in a finite transducer. *Acta Informatica*, 29(6/7):663–687, 1992. 18
- [49] A. WEBER : Decomposing finite-valued transducers and deciding their equivalence. *SIAM Journal on Computing*, 22(1):175–202, 1993. 14, 17, 116, 145
- [50] A. WEBER : Decomposing a  $k$ -valued transducer into  $k$  unambiguous ones. *RAIRO Informatique Théorique et Applications*, 30(5):379–413, 1996. 14, 15, 116, 122
- [51] A. WEBER et R. KLEMM : Economy of description for single-valued transducers. *Information and Computation*, 119:327–340, 1995. 16, 144
- [52] A. WEBER et H. SEIDL : On the degree of ambiguity of finite automata. *Theoretical Computer Science*, 88:325–349, 1991. 17, 145, 170, 171



# Index

<b>A</b>	
action .....	47
Avance ou Retard .....	97
alphabet .....	25
arc .....	28
automate	
émondé .....	30
accessible .....	30
co-accessible .....	30
déterministe .....	47
morphisme associé .....	38
non ambigu .....	31
quotient .....	44
sur un alphabet .....	29
sur un monoïde .....	30
automate d'entrée sous-jacent .....	35
<b>B</b>	
$\mathbb{B}$ .....	25
<b>C</b>	
calcul .....	30
cardinalité .....	21
carré	
d'un transducteur .....	97
chemin .....	28
étiquette .....	33
extrémité .....	29
interdit .....	172
longueur .....	29
multiplicité .....	33
origine .....	29
réussi .....	30
support .....	33
comportement .....	30
composée .....	22
composition .....	22
cube	
d'un transducteur .....	120
cycle lourd .....	172
<b>D</b>	
décalage .....	96
décomposition lexicographique .....	127
déterminisé .....	49
différence .....	95, 96
différence multiple .....	148
partiellement définie .....	154
domaine .....	22
<b>E</b>	
ensemble vide .....	21
entier .....	25
état .....	29
étiquette .....	29
<b>F</b>	
fonction .....	21
partielle .....	21
rationnelle .....	28
<b>G</b>	
gauchissement .....	64

- graphe ..... 22, 28  
 groupe libre ..... 95
- H**
- haltère ..... 172, 177
- I**
- image ..... 21  
 immersion  
   Avance ou Retard lexicographique  
   110
- K**
- $\mathbb{K}$ -automate ..... 32  
 $\mathbb{K}$ -gauchissement ..... 66  
 $\mathbb{K}$ -quotient ..... 46  
 $\mathbb{K}$ -revêtement ..... 45  
 $\mathbb{K}$ -sous-ensemble ..... 26
- L**
- longueur ..... 25
- M**
- matrice ..... 23  
   carré ..... 23  
   coefficient ..... 23  
   coordonnées ..... 23  
   dimension ..... 23  
 matrice de transitions ..... 32  
 monoïde ..... 24  
   morphisme ..... 24  
 monoïde libre ..... 25  
 morphisme  
   d'actions ..... 54  
   d'automates ..... 42  
   de monoïdes ..... 24  
   de semi-anneau ..... 26  
   de semigroupes ..... 24  
   globalement surjectif ..... 43
- localement co-injectif ..... 44  
   localement co-surjectif ..... 44  
   localement injectif ..... 44  
   localement surjectif ..... 43
- N**
- $\mathbb{N}$  ..... 25  
 $\mathbb{N}$ -automate  
   borné ..... 171  
 norme ..... 22
- O**
- ordre lexicographique ..... 25  
   des chemins ..... 79
- P**
- polynôme ..... 26  
 préfixe ..... 25  
 produit  
   cartésien ..... 21  
   de transducteurs ..... 97
- R**
- rationnel  
   intrinsèquement ambigu ..... 31  
   non ambigu ..... 31  
 relation ..... 22  
   bornée ..... 23  
    $k$ -valuée ..... 23  
 relation rationnelle ..... 27  
   déterministe ..... 73  
   intrinsèquement ambiguë ..... 137  
   non ambiguë ..... 137  
 représentation linéaire ..... 38  
 revêtement ..... 44  
   Avance ou Retard ..... 101  
   Avance ou Retard tronqué... 103  
   de Schützenberger ..... 50  
   lexicographique ..... 79, 82, 94

- 
- S**
- sélection lexicographique ..... 72
  - série ..... 26
    - caractéristique ..... 84
    - reconnaissable ..... 38
    - support ..... 26
  - semi-anneau ..... 25
    - booléen ..... 25
    - des entiers ..... 25
    - morphisme ..... 26
  - semigroupe ..... 24
    - morphisme ..... 24
  - semigroupe libre ..... 25
  - sommet ..... 28
  - sous-ensembles rationnels ..... 27
  - suffixe ..... 25
  - support ..... 84
- T**
- transducteur
    - borné ..... 35, 177
    - déterministe ..... 73
    - d'image finie ..... 35
    - fonctionnel ..... 35
    - $k$ -ambigu en entrée ..... 36
    - $k$ -valué ..... 35
    - $N$ -séparé ..... 106
    - non ambigu ..... 137
    - norme ..... 35
  - transition
    - étiquette ..... 32
    - multiplicité ..... 32
    - support ..... 32
  - transversale ..... 155
  - troncature ..... 99
- U**
- uniformisation ..... 72
- V**
- vecteur
    - colonne ..... 23
    - final ..... 32
    - initial ..... 32
    - ligne ..... 23
- W**
- W-chemin ..... 177