



**HAL**  
open science

# Etude de faisabilité d'un lidar Rayleigh-Mie pour la mesure à courte distance de la vitesse de l'air de sa température et de sa densité.

Nicolas Cezard

► **To cite this version:**

Nicolas Cezard. Etude de faisabilité d'un lidar Rayleigh-Mie pour la mesure à courte distance de la vitesse de l'air de sa température et de sa densité.. Optique [physics.optics]. Ecole Polytechnique X, 2008. Français. NNT: . pastel-00004485

**HAL Id: pastel-00004485**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004485>**

Submitted on 21 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse

Présentée par

**Nicolas CÉZARD**

Etude de faisabilité d'un lidar Rayleigh-Mie pour des mesures à courte portée de la vitesse de l'air, de sa température et de sa densité

Soutenue le 16 Mai 2008  
Devant le jury composé de :

Alain Hauchecorne	Rapporteur
Jean-Louis Meyzonnette	Rapporteur
Alain Barthélémy	Examineur
Alain Dabas	Examineur
Emmanuel Rosencher	Examineur
Pierre Flamant	Directeur de thèse
Jean-Pierre Huignard	Directeur de thèse
Agnès Dolfi-Bouteyre	Invitée

Thèse préparée au Département d'Optique Théorique et Appliquée de l'ONERA





# Remerciements

*« Il faut rendre à César ce qui est à César »*

Qu'il me soit permis, pour une fois, d'utiliser ce proverbe au-delà du jeu de mot qu'il comporte avec mon patronyme ! Je voudrais « rendre à César ce qui est à César », en remerciant ici les nombreuses personnes qui m'ont apporté leur aide et leur soutien au cours de ces trois dernières années. Le succès de ce travail de thèse est également le leur : qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord remercier Mr René Jalin, directeur du Département d'Optique Théorique et Appliquée, et Mme Claudine Besson, responsable de l'unité des Sources Laser et Systèmes, pour m'avoir chaleureusement accueilli à l'ONERA. Cette thèse ayant bénéficié d'un financement Cifre, j'adresse également tous mes remerciements à l'entreprise THALES R&T, partenaire de l'ONERA dans ce projet.

Je souhaite ensuite remercier mes directeurs de thèse, Mrs Jean-Pierre Huignard et Pierre Flamant, pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, pour ce supplément de motivation qu'ils m'ont apporté, et pour m'avoir fait bénéficier, chacun à leur manière, de leur expérience dans le domaine de la recherche.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres du jury : Mr Alain Barthelemy, qui m'a fait l'honneur d'en accepter la présidence, Mrs Jean-Louis Meyzonnette et Alain Hauchecorne, qui ont bien voulu être les rapporteurs de ce travail, et Mrs Emmanuel Rosencher et Alain Dabas qui en ont été les examinateurs tout aussi attentifs.

J'adresse des remerciements particuliers à Mme Agnès Dolfi-Bouteyre, mon encadrante directe, pour son soutien tout au long de la thèse, et pour avoir su trouver un laser au moment opportun, rendant ainsi possible la partie expérimentale de cette étude !

Je voudrais remercier chaleureusement Mr Matthieu Valla pour l'aide immense qu'il m'a apporté dans de nombreux domaines, notamment en traitement de signal mais aussi lors de mes essais lidars nocturnes...le tout avec une simplicité et une générosité peu communes.

J'aimerais remercier Mr Didier Goular pour son aide précieuse en matière d'électronique et informatique, toujours très rapide et efficace, et toujours dans la bonne humeur. Merci également à Mr Didier Fleury, dont le sens pratique et le tiroir à outils m'ont été d'un grand secours pour monter un certain nombre d'éléments du banc !

Je voudrais remercier Mme Béatrice Augère, d'une part pour sa gentillesse, et d'autre part pour m'avoir prêté un lidar hétérodyne parfaitement réglé le temps de quelques expériences. J'aimerais remercier également Mr Pierre Bourdon, qui s'est toujours montré disponible pour répondre à mes questions, et dont l'expérience en matière de laser m'a permis d'appivoiser peu à peu le mien.

J'adresse des remerciements particuliers à Mlle Baya Bennaï, qui a eu la gentillesse et le courage de bien vouloir relire ma thèse. Plus généralement, je voudrais remercier tous les membres de l'unité SLS, thésards et stagiaires inclus, pour leur capacité à rendre l'atmosphère de travail si

agréable. Ce fut un plaisir de faire partie de l'unité pendant ces trois ans de thèse, et je suis très heureux que cela se poursuive aujourd'hui...en CDI.

J'ai quelques remerciements spéciaux à adresser à mes plus proches collègues :  
A Claire, pour les nombreuses sorties escalade, indispensables pour se défouler,  
A Isabelle, pour cette bonne expérience partagée au bureau de l'association des doctorants EChO,  
A Matthieu et Baya, pour tous les bons moments qui ont animé le bureau pendant ces trois années, notamment à l'occasion de la « pause Prince de Lu de 16h30 »,  
A Pierre, pour les blagues du vendredi, les concours de quiche lorraine, et pour le légendaire four à raclette pris en otage et échangé contre du matériel de labo...

Pour finir, je voudrais remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, en dehors de l'ONERA, à me faire apprécier la vie parisienne : essai transformé, comme on dit. Merci à tous les membres du club d'escalade du CIHM avec lesquels j'ai passé de très bons moments, à Christophe et Marie-Françoise qui m'ont si souvent invité à partager de succulents repas le dimanche, à ma cousine Charlotte qui fut ma patiente colocataire pendant deux ans, à Antoine pour les soirées Alias, à Aurélien et Annabel pour les indispensables week-ends revigorants à Grenoble.

Et bien sûr, je remercie de tout cœur ma famille pour le soutien qu'elle m'a apporté tout au long de mes études. Merci également d'être tous venus pour la soutenance, c'était super !

Voilà, merci encore, et à présent pour ceux qui le souhaitent, bonne lecture !

*Nicolas*

*A mon grand père*



# Table des matières

<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre 1: Contrôle des conditions atmosphériques de vol par lidar</b> .....	5
1.1. <i>Mesure des paramètres air</i> .....	5
1.2. <i>Détection de turbulences</i> .....	8
<b>Chapitre 2 : Diffusion Rayleigh et diffusion Mie dans l'atmosphère</b> .....	11
2.1. <i>Diffusion Rayleigh dans l'atmosphère</i> .....	11
2.1.1 Diffusion par un dipôle à polarisabilité isotrope .....	11
2.1.2 Diffusion par un dipôle à polarisabilité anisotrope .....	15
2.1.3 Sections efficaces de rétrodiffusion et de diffusion totale d'une « molécule d'air » .....	17
2.1.4 Coefficients de rétrodiffusion et d'extinction de l'air .....	18
2.1.5 Effet Doppler .....	19
2.1.6 Spectre de la raie Cabannes et effet Rayleigh-Brillouin .....	21
2.2. <i>Diffusion de Mie dans l'atmosphère</i> .....	24
2.2.1 Sections efficaces de rétrodiffusion et d'extinction des particules .....	24
2.2.2 Granulométrie des particules dans l'atmosphère.....	25
2.2.3 Coefficients de rétrodiffusion et d'extinction des particules .....	26
2.2.4 Spectre de diffusion Mie .....	28
2.3. <i>Conclusion du chapitre</i> .....	29
<b>Chapitre 3 : Propagation et réception du signal lidar</b> .....	31
3.1. <i>Propagation de la cible à la pupille de réception</i> .....	31
3.1.1 Champ instantané reçu dans la pupille de réception .....	31
3.1.2 Phénomène de speckle dans la pupille de réception .....	34
3.1.3 Cohérence temporelle du signal lidar.....	36
3.1.4 Puissance moyenne reçue par la pupille.....	38
3.2. <i>L'approche par l'optique des rayons</i> .....	39
3.2.1 Phénomène de vignettage.....	39
3.2.2 Modélisation d'un lidar coaxial à réception fibrée.....	40
3.3. <i>Conclusion du chapitre</i> .....	45
<b>Chapitre 4 : Etude comparative de deux techniques d'analyse spectrale</b> .....	47
4.1. <i>Cadre de validité de l'étude comparée</i> .....	50
4.2. <i>Méthode de calcul des performances</i> .....	50
4.3. <i>Performances d'un Analyseur de Spectre Idéal</i> .....	52
4.4. <i>Performance d'un Fabry-Perot imageur</i> .....	53
4.5. <i>Performances d'un Double Interféromètre de Michelson Imageur (DIMI)</i> .....	58
4.5.1 Paramètres et performances du DIMI optimisé pour la mesure de vitesse .....	61
4.5.2 Paramètres et performances du DIMI optimisé pour la mesure de température.....	64
4.6. <i>Conclusion du chapitre</i> .....	65

<b>Chapitre 5 : Etude approfondie de l'analyseur DIMI</b> .....	69
5.1. Représentation du DIMI comme « analyseur de cohérence » à deux canaux .....	69
5.2. Etude de sensibilité des performances .....	71
5.2.1 Influence du rapport de diffusion .....	71
5.2.2 Influence de la température atmosphérique.....	72
5.2.3 Influence du signal de fond solaire.....	73
5.2.4 Influence des facteurs de contraste instrumentaux.....	74
5.3. Calcul et méthode d'optimisation du contraste de frange .....	75
5.3.1 Trois facteurs de contrastes non limitants .....	75
5.3.2 Facteur de contraste lié au champ angulaire de la source .....	77
5.3.3 Principe et mise en œuvre de la compensation de champ .....	82
5.4. Simulation et estimation du signal d'un DIMI .....	88
5.4.1 Simulation de figures de franges .....	88
5.4.2 Estimation par maximum de vraisemblance (MV) : principe et algorithme.....	89
5.4.3 Performances statistiques de l'estimateur MV .....	90
5.4.4 Sensibilité de l'estimation au modèle de spectre Rayleigh-Brillouin .....	92
5.5. Conclusion du chapitre .....	95
<b>Chapitre 6 :Développement d'un lidar pour la mesure de vent</b> .....	97
6.1. Conception d'un instrument adapté aux contraintes météorologiques .....	97
6.1.1 Sensibilité météorologique de la mesure de phase.....	97
6.1.2 L'instrument réalisé et ses principaux modules .....	98
6.2. Traitement de signal des franges d'interférences .....	102
6.2.1 Modèle de franges à 5 paramètres .....	102
6.2.2 Pré-estimation des paramètres de franges par transformée de Fourier .....	103
6.2.3 Statistiques des signaux enregistrés .....	105
6.2.4 Estimation conjointe par MV des figures de franges .....	108
6.2.5 Bornes de Cramer-Rao et influence du bruit sur l'estimation de la phase.....	109
6.2.6 Vérification des performances du traitement de signal sur des signaux de synthèse....	113
6.2.7 Traitement de signal adapté aux expériences de jour.....	114
6.3. Résultats expérimentaux.....	116
6.3.1 Caractérisation des paramètres du speckle créé par les fibres optiques .....	116
6.3.2 Réglage de l'interféromètre en champ compensé .....	118
6.3.3 Mesure du « zéro Doppler » et caractérisation de la stabilité de l'instrument .....	119
6.3.4 Calibration de l'instrument sur cible dure .....	124
6.3.5 Mesure du signal Rayleigh atmosphérique et détection de rafales .....	125
<b>Conclusion générale</b> .....	128
<b>Annexe A : Performances théoriques d'un lidar hétérodyne infrarouge 1.55 <math>\mu\text{m}</math></b> .....	131
A.1. Conditions initiales de l'étude .....	131
A.2. Expression du spectre analysé par détection hétérodyne .....	131
A.1.1 Principe de base de la détection hétérodyne.....	131
A.1.2 Spectre du courant échantillonné et spectre de signal analysé.....	132
A.3. Calcul du CNR d'un lidar monostatique dans l'approximation des champs gaussiens.....	134
A.1.3 Expression de la puissance du courant hétérodyne .....	134
A.1.4 Expression du CNR dans l'approximation des champs gaussiens .....	135
A.1.5 Formulation du CNR par le rendement hétérodyne .....	135

A.1.6 Application numérique et interprétation du CNR .....	137
A.4. Précision de l'estimation de fréquence en détection hétérodyne .....	138
A.5. Conclusion sur les performances maximales d'un lidar hétérodyne réaliste.....	140
<b>Annexe B : Différence de marche dans une lame séparatrice inclinée .....</b>	<b>143</b>
<b>Annexe C : Une seconde méthode de mesure de la phase de référence .....</b>	<b>145</b>
<b>Références .....</b>	<b>147</b>



## Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier la faisabilité d'un instrument de type LIDAR pour la mesure à courte distance (environ 50 m) de paramètres atmosphériques tels que la vitesse de l'air, sa température, et sa densité.

Le mot LIDAR, acronyme de « Light Detection And Ranging », désigne une méthode de mesure analogue au RADAR (Radio Detection And Ranging) mais adaptée au domaine des longueurs d'onde optiques. On utilise aussi parfois l'expression de « radar laser » pour désigner la technique LIDAR. Bien que paradoxale, cette expression a l'avantage de mettre en avant l'objet fondamental qui est à la base du système : la source laser. La directivité des lasers permet en effet de guider l'énergie lumineuse sur de très longues distances avec une grande résolution spatiale, ce qui en fait un outil de choix pour des applications de télémétrie ciblée. Par ailleurs, l'essor constant des sources lasers, en termes de puissance, de qualité spatiale, de qualité spectrale, ainsi que leur diversification en longueurs d'ondes et fonctionnalités, jouent un rôle moteur dans le développement parallèle des techniques LIDAR.

Par extension, le mot « lidar » est devenu un nom commun dans le milieu scientifique, servant à désigner l'instrument physique lui-même. Analogue au radar dans son principe, un lidar est composé d'une source laser dirigée vers une cible dont on mesure l'écho, c'est-à-dire la lumière réfléchie. La cible peut être une cible « dure » : un avion, un véhicule, un sol... toute surface solide, caractérisée par sa réflectivité. Le principal avantage du lidar par rapport au radar est alors sa meilleure résolution spatiale, liée à l'usage de longueurs d'ondes plus courtes. Cependant, les ondes optiques ont un autre avantage par rapport aux ondes radio : celui de pouvoir interagir avec des objets beaucoup plus petits, tels que les particules en suspension dans l'atmosphère (poussières, aérosols), ou même les molécules de gaz. Il est donc possible d'utiliser un lidar pour caractériser un milieu gazeux, et notamment l'atmosphère terrestre. On parle alors d'une cible « volumique », car l'écho lidar est rétrodiffusé au fur et à mesure de la propagation du laser dans l'atmosphère.

C'est à la classe d'instruments des lidars atmosphériques que nous allons nous intéresser dans ce mémoire. Aujourd'hui, les paramètres atmosphériques mesurés par lidar sont des plus variés : vitesse du vent, température, concentrations en aérosols et en diverses espèces chimiques (CO<sub>2</sub>, ozone, bioaérosols...). Il existe même des réseaux de stations lidars, fonctionnant de concert pour caractériser des phénomènes de grande étendue géographique (EARLINET en Europe), sans parler de la mise en service, récente ou à venir, de lidars spatiaux assurant une couverture géographique encore plus vaste (CALIPSO, ALADIN, ATLID...).

On peut également appliquer, en les adaptant, certaines des techniques de lidar atmosphérique au domaine de l'aéronautique. Le lien est direct, puisque tout aéronef quel qu'il soit (avion, hélicoptère...) interagit avec l'atmosphère. Cette interaction est à double sens : d'une part, les conditions atmosphériques déterminent les conditions de vol de l'aéronef, et d'autre part, l'aéronef perturbe, parfois dangereusement, l'atmosphère dans laquelle il évolue. Ceci nous conduit à deux types d'applications potentielles :

- les applications de contrôle des conditions atmosphériques de vol : on cherche à caractériser l'atmosphère « pré-existante » au passage de l'aéronef, en effectuant des mesures en amont ;
- les applications de caractérisation des perturbations turbulentes induites par les aéronefs sur l'atmosphère. Ces perturbations peuvent s'avérer dangereuses pour l'aéronef lui-même (cas des

« Vortex Ring State » formés par les rotors d'hélicoptères, par exemple) ou pour les appareils qui le suivent (cas des vortex de sillages d'avions, notamment dans les phases de décollage et atterrissage).

Le travail de thèse présenté ici se rattache, dans son contexte, au premier domaine d'applications : le contrôle des conditions atmosphériques de vol. Ce thème se décline à son tour en plusieurs applications possibles, en fonction du niveau de contrôle que l'on souhaite exercer. On distingue aujourd'hui deux idées fortes :

- la première consiste à mesurer les paramètres atmosphériques régissant les conditions locales de vol de l'aéronef, en termes d'aérodynamisme. Ces paramètres sont nommés **paramètres air**, et requièrent la mesure simultanée, au voisinage de l'appareil, de la vitesse de l'air, de sa température et de sa densité ;

- la seconde concerne la mesure anticipée des conditions atmosphériques vers lesquelles l'aéronef se dirige, le but étant de donner l'alerte en cas de **détection de turbulence** dangereuse. Il s'agit ici de détecter les variations violentes de vitesse de l'air en amont de l'appareil.

Dans les deux cas, la fonctionnalité développée doit être opérationnelle quelle que soit l'altitude de vol, y compris aux très hautes altitudes supérieures à 10 000 m : c'est là une contrainte majeure à laquelle doit pouvoir répondre un système lidar embarqué.

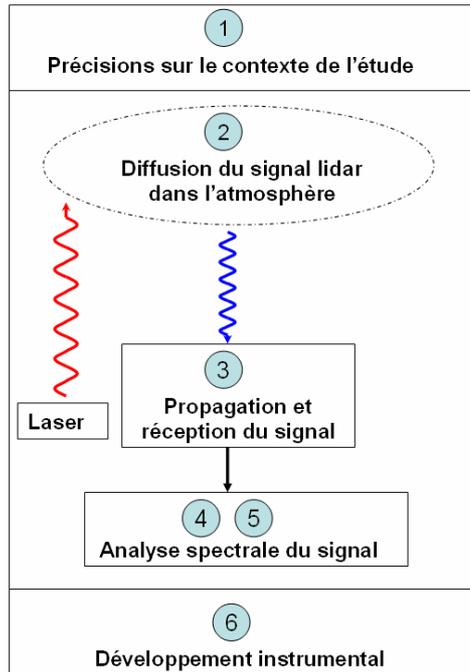
Dans la plupart des lidars embarqués jusqu'à présent, le signal est issu de la rétrodiffusion de Mie provenant des particules en suspension dans l'atmosphère. Les « lidars Mie » permettent de mesurer la vitesse de ces particules, assimilable à celle de l'air ambiant, avec une grande efficacité en basse altitude car les particules y sont nombreuses. Cependant, rien ne peut garantir aujourd'hui la fiabilité des lidars Mie pour des mesures à haute altitude. En effet, au-delà de 10 000 m, la concentration atmosphérique en particules est extrêmement faible, et l'on estime que le signal rétrodiffusé est de l'ordre de 1000 fois inférieur à sa valeur dans les basses couches de l'atmosphère, avec de surcroît une grande variabilité. Par ailleurs, un lidar Mie ne peut mesurer ni la température de l'air, ni sa densité.

Par opposition au lidar Mie, le « lidar Rayleigh » exploite le signal rétrodiffusé par les molécules de gaz contenues dans l'atmosphère (diffusion Rayleigh). Pour les applications de contrôle des paramètres air ou détection de turbulences à haute altitude, le lidar Rayleigh est a priori une solution intéressante. En effet, les « molécules d'air » sont par définition présentes partout dans l'atmosphère, quels que soient le lieu géographique et l'altitude considérée, et leur concentration ne varie que d'un facteur 4 entre le sol et 11 000 m. Par ailleurs, ce sont les caractéristiques moléculaires de concentration, d'agitation thermique, et de vitesse moyenne, qui définissent fondamentalement les paramètres de densité, température, et vitesse de l'air. Par conséquent, l'analyse du signal fourni par un lidar Rayleigh doit permettre de remonter aux trois paramètres atmosphériques fondamentaux, et ce à toute altitude de vol.

Bien évidemment, dans le cas d'un instrument « toute altitude », il faut envisager en fait un système lidar mixte « Rayleigh-Mie », qui puisse exploiter le signal Rayleigh pour la mesure de température et densité, et utiliser les deux types de signaux pour la mesure de vitesse.

L'objectif de cette thèse est donc de proposer un concept de lidar « Rayleigh-Mie » permettant des mesures simultanées de vitesse, température et densité atmosphérique, et éventuellement d'en réaliser un démonstrateur.

Ce mémoire s'articule autour de 6 chapitres, suivant le plan logique illustré par le schéma suivant :



L'objet du premier chapitre est d'apporter quelques précisions sur les motivations de cette étude, en présentant les deux principales applications liées au contrôle des conditions atmosphériques de vol (contrôle des paramètres air et détection de turbulences).

Les chapitres 2 à 5 suivent en quelque sorte la chronologie du signal lidar, en commençant par les phénomènes de diffusion atmosphérique qui en sont l'origine (chapitre 2). Le signal diffusé se rétro-propage ensuite dans l'atmosphère jusqu'à un récepteur, au niveau duquel nous dresserons le bilan des caractéristiques spatiales, temporelles, spectrales et énergétiques du signal lidar (chapitre 3). Puis le signal est guidé jusqu'à un analyseur de spectre, dont le rôle est d'extraire, à partir du signal incident, les paramètres recherchés de vitesse, température, et densité de l'atmosphère. Le chapitre 4 propose une première approche du problème de l'analyse spectrale, à travers une étude comparative de deux types d'analyseurs spectraux, l'un étant relativement bien connu (interféromètre de Fabry-Perot), et l'autre constituant une proposition originale formulée au cours de cette thèse (double interféromètre de Michelson). Le chapitre 5 s'attache ensuite à détailler le fonctionnement et les performances potentielles du double analyseur de Michelson, dont on verra également les limites.

Pour finir, nous présentons dans le chapitre 6 le banc expérimental développé au laboratoire pour la mesure de vitesse du vent, ainsi que le traitement du signal associé. La faisabilité des mesures de vitesses par interféromètre de Michelson est démontrée.



# Chapitre 1

## Contrôle des conditions atmosphériques de vol par lidar

Dans ce chapitre, nous revenons sur les deux principales applications potentielles d'un lidar Rayleigh embarqué pour le contrôle des conditions atmosphériques de vol. Nous présentons plus précisément la problématique de mesures des paramètres air, application à laquelle est davantage rattachée la suite de ce mémoire. Le problème de la détection de turbulences étant toutefois un sujet d'actualité, nous en donnons également un aperçu.

### 1.1. Mesure des paramètres air

Tout comme le conducteur de voiture a besoin de connaître sa vitesse pour maîtriser son véhicule, le pilote d'avion a besoin de contrôler divers paramètres aérodynamiques de vol. La communauté industrielle des aviateurs s'accorde à dire que la mesure de « seulement » trois paramètres atmosphériques permettrait de déterminer un grand nombre de propriétés aérodynamiques utiles au pilotage. Ces trois paramètres sont nommés les paramètres air : il s'agit de la **vitesse air vraie**, de la **température statique**, et de la **densité atmosphérique**, définis ci-après.

En 2001, une équipe de l'université de Michigan, en partenariat avec l'entreprise *Michigan Aerospace*, a publié un diagramme illustrant les relations entre ces paramètres air et les paramètres de vol utiles au pilotage<sup>[1]</sup>. A titre d'exemple, une partie de ce diagramme est reproduite en figure 1.1. Quelques définitions permettront d'en faciliter la compréhension :

- i) la pression totale est la pression atmosphérique perçue par l'aéronef, somme de la pression statique et de la pression dynamique. La pression statique est celle de l'atmosphère au repos ; la pression dynamique est la surpression perçue par l'aéronef en raison de son déplacement dans l'atmosphère ;
- ii) la température totale est la température perçue par l'aéronef, somme de la température statique de l'atmosphère au repos, et de la température d'impact due à l'échauffement cinétique lors du déplacement de l'aéronef ;
- iii) le vecteur vitesse air vraie est le vecteur vitesse de l'atmosphère au repos, vu depuis le repère de l'aéronef. Ce vecteur peut être défini par ses valeurs projetées sur trois axes indépendants  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ .

Dans ces définitions, l'expression « d'atmosphère au repos » désigne une zone de l'atmosphère amont non encore perturbée par l'arrivée de l'aéronef. En effet, comme l'illustre la figure 1.2, le déplacement d'air induit par l'avancée de l'aéronef perturbe le champ atmosphérique situé en amont de l'appareil, sur une distance d'environ une longueur de fuselage. Cette distance est parfois appelée « l'infini amont » : pour un gros porteur, elle vaut environ 100 m.

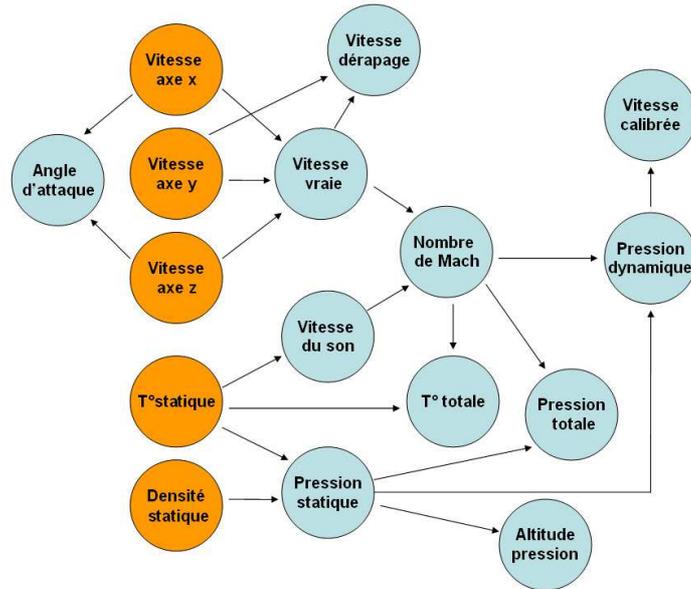


Figure 1.1: Relations entre paramètres air et paramètres de vol. Source : Référence [1]

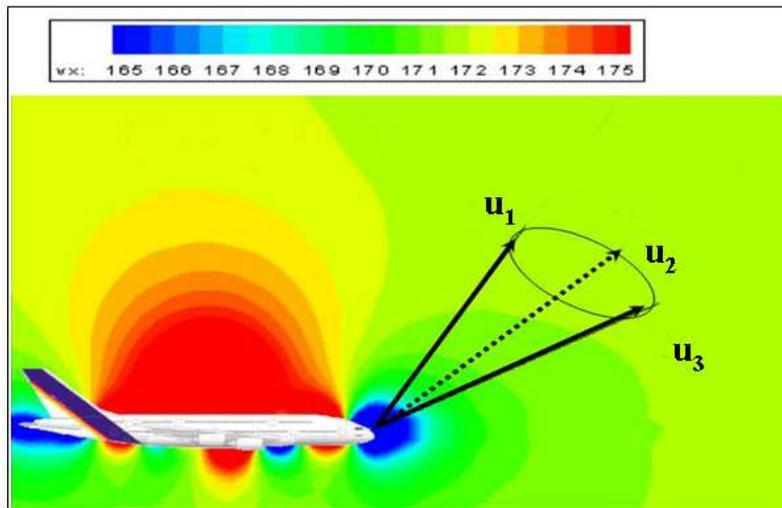


Figure 1.2 Perturbation du champ de vent atmosphérique au voisinage d'un aéronef.  
 Source : J-L.Hantrais-Gervois, Département d'Aérodynamique, ONERA. On a également représenté le principe d'une mesure de vitesse 3 axes ( $u_1, u_2, u_3$ ) par lidar.

Une définition rigoureuse de la mesure des paramètres air serait donc la mesure, à l'infini amont, des 5 grandeurs scalaires que sont les trois composantes du vecteur vitesse de l'air, ainsi que sa température et sa densité. Mais en réalité, du point de vue des aviateurs, il n'est pas forcément nécessaire d'effectuer les mesures à « l'infini amont ». Des mesures à distance plus courte seraient tout aussi valables, puisque les perturbations induites par l'aéronef peuvent être calculées à l'avance pour corriger les mesures de manière adéquate. Cette stratégie ne peut cependant pas être employée à l'immédiate proximité du fuselage, qui peut être le siège d'écoulements turbulents irréguliers. Ainsi, la distance de mesure des paramètres air doit être au minimum de 1 mètre.

Toutefois, force est de constater que les avions volent depuis fort longtemps de manière satisfaisante...et sans lidar à bord pour mesurer les paramètres air ! Pour comprendre quel

peut être aujourd'hui l'apport du lidar par rapport à l'instrumentation actuelle, il n'est pas inutile de s'intéresser brièvement à cette dernière. Nous ne prendrons ici qu'un seul exemple, celui de la mesure de vitesse, traditionnellement assurée par les sondes « Pitot ».

Une sonde Pitot, ainsi nommée du nom de son inventeur, est un tube disposé sur le fuselage de l'appareil, qui mesure la pression dynamique  $P_d$  de l'atmosphère. La figure 1.3 en donne un aperçu schématique. La sonde est munie d'une prise d'air frontale (point d'arrêt de l'écoulement) pour la prise de pression totale, et d'une prise d'air latérale (écoulement d'air libre) pour la prise de pression statique. La différence de pression obtenue exerce une déformation sur un capteur piézo-électrique, qui fournit alors un signal proportionnel à la pression dynamique.

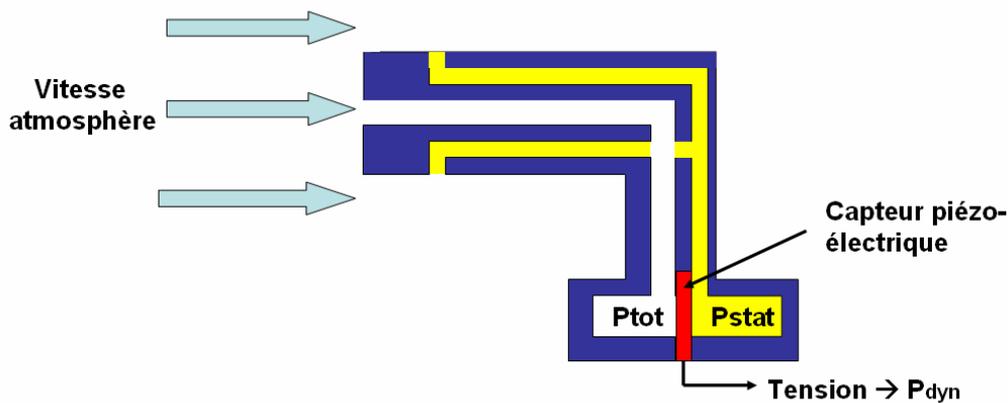


Figure 1.3 : Principe de mesure du tube Pitot

Cette pression dynamique étant proportionnelle à la portance, c'est une mesure tout à fait pertinente pour qualifier l'état aérodynamique de l'atmosphère locale. La vitesse air vraie est d'ailleurs liée à la pression dynamique par la relation  $V_{vraie} = \sqrt{2P_d / \rho_m}$ ,  $\rho_m$  étant la masse volumique de l'air. Toutefois, le paramètre  $\rho_m$  n'étant pas mesuré par ailleurs, la sonde Pitot ne permet pas de calculer directement la vitesse air vraie. Les indicateurs de vitesse affichent donc une vitesse conventionnelle, ou vitesse « calibrée », définie par  $V_{cal} = \sqrt{2P_d / \rho_{m0}}$ , où  $\rho_{m0}$  est la masse volumique de l'air au niveau de la mer.

La faiblesse de la sonde Pitot réside dans la prise de pression statique. En effet, celle-ci n'est correctement effectuée que si l'écoulement latéral n'est pas perturbé par l'appareil lui-même, ce qui n'est jamais le cas. Afin de minimiser les perturbations, les sondes Pitot sont généralement placées au niveau des ailes (pour un avion) ou du nez de l'appareil (pour un hélicoptère), mais dans tous les cas, elles doivent faire l'objet d'un étalonnage précis au sol. Cet étalonnage n'est pas simple, et peut coûter cher (jusqu'à plusieurs centaines d'heures de réglage par avion...) Par ailleurs, il n'est plus valable en cas d'écoulements turbulents, ceux-ci étant irréguliers. De tels écoulements peuvent être rencontrés dans certaines configurations de vol, par exemple si l'angle d'attaque est trop important, et notamment dans le domaine des avions militaires, où la manœuvrabilité est essentielle.

L'avantage principal du lidar sur la sonde Pitot est donc de pouvoir effectuer des mesures à distance, et en particulier, dans des zones où les écoulements ne sont pas perturbés par l'aéronef, ou perturbés de manière prévisible et répétable. Cet avantage fondamental a

d'ores et déjà été mis en évidence via des systèmes lidars Mie, aux basses et moyennes altitudes, et notamment dans le cadre de campagnes aéroportées sur hélicoptère<sup>[2]</sup>. Aujourd'hui, on souhaiterait pouvoir généraliser le principe de la mesure lidar au contexte de la haute altitude, avec en plus, si possible, la mesure simultanée de la température statique et de la densité atmosphérique. Ces deux raisons nous invitent à passer du cadre des lidars Mie à celui des lidars Rayleigh.

## 1.2. Détection de turbulences

Les turbulences atmosphériques se caractérisent essentiellement par des fluctuations de vitesse de vent vertical. Dans certains cas extrêmes, celles-ci peuvent être très violentes : un regard à l'article de journal de la figure 1.4 permettra de s'en convaincre... Toutefois, même sans en arriver jusqu'à un tel niveau de gravité, les turbulences sont aujourd'hui identifiées comme un facteur de danger non négligeable pour les passagers et équipages des vols commerciaux, d'autant plus que le trafic aérien augmente continuellement. Par ailleurs, comme il est impératif que les structures d'avions résistent aux événements turbulents, les constructeurs sont tenus de concevoir des structures plus solides, mais par conséquent aussi plus lourdes. La détection de la turbulence a donc également un enjeu économique important : celui de pouvoir à terme réduire la masse des structures volantes.



Figure 1.4 : En 1992, un cargo parvient à atterrir après avoir perdu un réacteur et un morceau d'aile sous l'effet d'une turbulence extrême

Deux types d'actions peuvent être envisagés en matière de détection de turbulences par lidar :

- soit utiliser un lidar de très longue portée (plusieurs km), de manière à détecter la turbulence suffisamment tôt pour pouvoir l'éviter, ou pour laisser aux passagers le temps de regagner leurs sièges et d'attacher leurs ceintures.
- soit utiliser un lidar de courte portée (50-150 m), permettant de déclencher, en un laps de temps très court, une réponse mécanique intelligente de la structure, via des actuateurs

judicieusement placés. La structure pourrait ainsi s'adapter à la turbulence de manière à en limiter l'impact.

Bien entendu, dans les deux cas, il importe que le système lidar soit opérationnel en haute altitude et notamment en configuration dite « d'air clair », où les turbulences sont invisibles à l'œil nu (pas de nuages), et où il n'y a pas assez d'aérosols pour une mesure par lidar Mie. Ceci implique donc à nouveau l'usage d'un lidar Rayleigh.

Des travaux précurseurs sur la détection de turbulences à longue portée ont été menés au sein de la NASA dans les années 1990<sup>[3]</sup>. Des tests aéroportés, effectués à basse altitude et avec des lidars Mie<sup>[4]</sup>, ont par la suite illustré le fort potentiel du lidar dans ce domaine.

La détection de turbulences en air clair, haute altitude, et courte portée a fait l'objet ces dernières années d'études approfondies, notamment en Europe avec le projet européen AWIATOR. Au cours de ce vaste programme, un lidar Rayleigh-Mie d'une portée de 50 m a notamment été réalisé, puis testé en vol<sup>[5]</sup>. L'instrument s'est montré capable d'effectuer des mesures de vitesse air dans une large gamme de conditions de vol, incluant la haute altitude, marquant ainsi une étape importante vers la mise au point d'un système lidar de détection de turbulence courte portée.

La détection de turbulence en air clair, haute altitude, et longue portée, demeure quant à elle un « challenge » technologique non relevé à l'heure actuelle. Les puissances lasers nécessaires pour ce type de mesure sont non seulement très élevées, mais le principe même de la mesure est sujet à débats. En effet, ce sont généralement des turbulences de vent vertical qu'il faut détecter, or un lidar n'est capable de mesurer que la composante de vitesse projetée sur l'axe de visée du laser. Sur de très longues portées, l'inclinaison de l'axe de visée est nécessairement très faible, et la mesure de vitesse verticale extrêmement difficile. Actuellement, de nouveaux projets proposent d'exploiter le lien entre les fluctuations de vitesse verticale et les fluctuations de densité atmosphérique, ces dernières étant plus « faciles » à mesurer à longue distance (projet européen FLYSAFE).



## Chapitre 2

### Diffusion Rayleigh et diffusion Mie dans l'atmosphère

Dans ce chapitre nous allons décrire les deux mécanismes de diffusion qui sont à l'œuvre dans la formation du signal lidar : diffusion Rayleigh et diffusion Mie. La première s'opère à partir des molécules de gaz, la seconde à partir des particules (poussières aérosols...) en suspension dans l'atmosphère. Dans le domaine du lidar, les propriétés qui nous intéressent particulièrement sont, pour chaque type de diffusion : les coefficients de rétrodiffusion et d'extinction, la polarisation et le spectre rétrodiffusé.

Remarque : le choix de la longueur d'onde du lidar ne sera réellement argumenté que dans l'introduction du chapitre 4. Toutefois, pour plus de clarté, nous utiliserons dès maintenant pour les applications numériques la **longueur d'onde  $\lambda=355$  nm**.

#### 2.1. Diffusion Rayleigh dans l'atmosphère

La théorie de Rayleigh permet de décrire la diffusion de la lumière par des objets de taille bien inférieure à la longueur d'onde du rayonnement. Elle s'applique donc en particulier dans le cas de la diffusion atomique ou moléculaire, la taille d'une molécule d'azote  $N_2$  ou d'oxygène  $O_2$  étant de l'ordre de 0,1 nm. Dans le cadre de cette théorie, chaque atome ou molécule peut être représenté par un nuage d'électrons « gravitant » autour d'un noyau de charge positive, l'ensemble étant électriquement neutre. L'application d'un champ électromagnétique externe oscillant a pour effet de séparer quasi instantanément ces charges en dipôles électriques oscillants, lesquels deviennent à leur tour sources d'un champ électromagnétique. De l'énergie est ainsi rayonnée dans tout l'espace : c'est le phénomène de diffusion.

Le modèle de la diffusion par un dipôle de polarisabilité isotrope (parfois appelé « dipôle à symétrie sphérique », c'est-à-dire ne présentant aucune direction de polarisation privilégiée), permet d'introduire certains résultats fondamentaux de la théorie élastique de la diffusion Rayleigh. Nous commencerons donc par quelques rappels et définitions à partir de ce modèle. Cependant, l'atmosphère étant essentiellement constituée de molécules à polarisabilité anisotrope, telles  $N_2$  et  $O_2$ , il nous faudra introduire de nouveaux phénomènes de diffusions inélastiques. Après quoi nous donnerons l'expression de la section efficace de diffusion d'une « molécule d'air » isolée, puis celles des coefficients de diffusion et d'extinction volumique de l'air. Nous présenterons enfin le phénomène fondamental qu'est l'effet Doppler, avant de terminer par l'étude du spectre de diffusion Rayleigh élastique.

##### *2.1.1 Diffusion par un dipôle à polarisabilité isotrope*

Le modèle du dipôle à polarisabilité isotrope est bien adapté pour décrire la diffusion par des gaz monoatomiques, tels l'hélium ou l'argon. Sur la figure 2.1, on a représenté un dipôle immobile soumis au champ électrique  $\vec{E}_{inc}$  d'une onde électromagnétique incidente,

supposée de pulsation  $\omega$ . Ce dipôle diffuse dans toutes les directions  $(\theta, \varphi)$  un champ électromagnétique de champ électrique  $\vec{E}_{dif}$ .

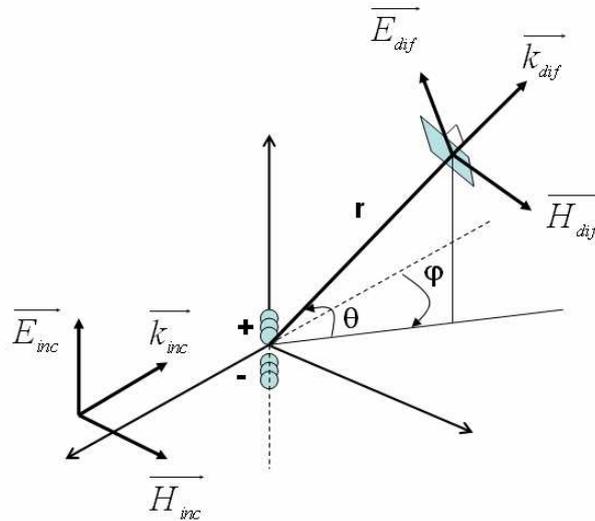


Figure 2.1 : Diffusion par un dipôle : schéma de principe et notations

Dans le cadre de l'optique linéaire, le moment dipolaire  $p_0$  développé par le dipôle est proportionnel au champ incident, et pour une polarisabilité isotrope, il lui est de plus colinéaire. On a alors la relation :

$$\vec{p}_0 = \alpha_{pol} \vec{E}_{inc}, \text{ où } \alpha_{pol} \text{ est la polarisabilité du dipôle.}$$

Par ailleurs, on peut montrer<sup>[6]</sup> que, à une distance  $r$  suffisante du dipôle ( $r \gg \lambda$ ):

- l'onde diffusée possède localement la structure d'une onde plane, avec une composante magnétique  $\vec{H}_{dif}$  toujours orthogonale à l'axe du dipôle. Ceci implique notamment que, dans le plan équatorial ( $\theta=0$ ) et en particulier dans la direction de rétrodiffusion ( $\theta=0, \varphi=\pi$ ),  $\vec{E}_{dif}$  est parallèle à  $\vec{E}_{inc}$  : la polarisation est donc conservée en rétrodiffusion ;
- l'amplitude du champ électrique diffusé au point de coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  est :

$$|E_{dif}(r, \theta, \varphi)| = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi r \epsilon_0 c^2} |\cos \theta|$$

Dans cette expression, le terme en  $\omega^2$  provient du fait que le champ est proportionnel à l'accélération du dipôle, tandis que le terme  $p_0 \cos \theta$  correspond au moment dipolaire apparent vu depuis la « direction d'observation » spécifiée par  $(\theta, \varphi)$ .

Notons également que l'onde diffusée est de même pulsation  $\omega$  que l'onde incidente : le processus de diffusion est dit « élastique » (cette terminologie élastique/inélastique s'entend hors considération de l'effet Doppler : nous avons pris soin de préciser que le dipôle considéré ici est immobile).

L'éclairement, en  $\text{W}/\text{m}^2$ , produit par le dipôle à travers une surface infinitésimale centrée autour du point  $(r, \theta, \varphi)$  est:  $\xi = \varepsilon_0 c |E_{dif}|^2 / 2$ , soit :

$$\xi(r, \theta, \varphi) = \frac{c\pi^2 p_0^2}{2\varepsilon_0 r^2 \lambda^4} \cos^2 \theta$$

L'intensité  $I$  émise par le dipôle, en  $\text{W}/\text{sr}$ , est une grandeur qui lui est propre, et par conséquent indépendante de  $r$ . Nous avons :  $\xi = I / r^2$ , soit :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{c\pi^2 p_0^2}{2\varepsilon_0 \lambda^4} \cos^2 \theta \quad (2.1)$$

Selon cette expression, l'intensité diffusée par le dipôle est anisotrope selon  $\theta$  et isotrope selon  $\varphi$ . Ces propriétés sont illustrées par les figure 2.2 et figure 2.3 : sur la première est représentée une moitié de l'indicatrice de diffusion du dipôle (surface normalisée de l'intensité émise). La seconde montre la trace de cette indicatrice dans deux plans de coupe : le plan équatorial  $z=0$ , dans lequel l'intensité diffusée est maximale, et le plan axial  $y=0$ , illustrant l'absence de diffusion dans l'axe du dipôle.

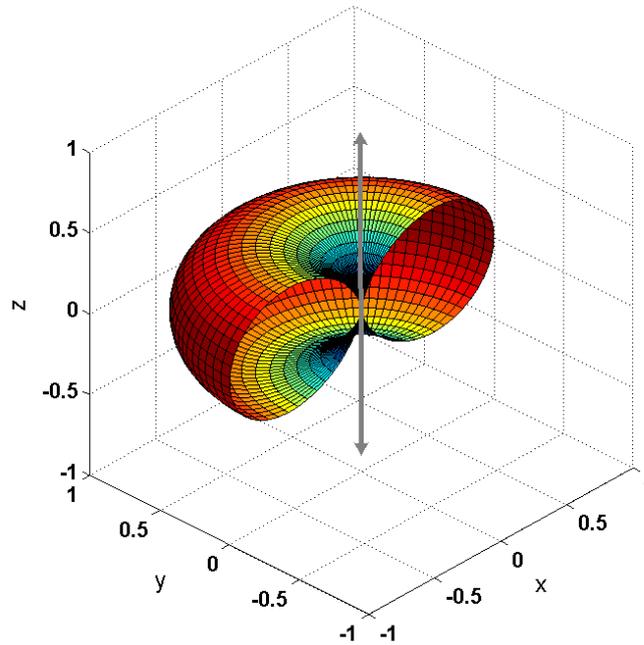
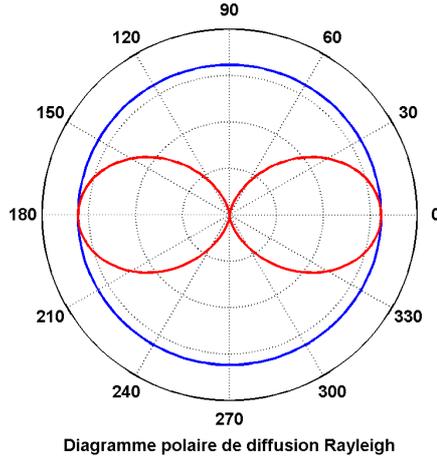


Figure 2.2 : Indicatrice de diffusion Rayleigh. Chaque point de la surface a pour coordonnées sphériques  $(r=\cos^2\theta, \theta, \varphi)$ . L'axe vertical au centre représente l'axe de polarisation de la lumière incidente.



**Figure 2.3 : Trace de l'indicatrice de diffusion dans deux plans de coupe.**  
 - plan équatorial  $z=0$  (bleu) : trace circulaire, l'intensité diffusée est maximale  
 - plan axial  $y=0$  (rouge) : trace en forme de « ∞ » : absence de diffusion dans l'axe du dipôle

En introduisant dans l'éq.(2.1) l'expression de l'amplitude du moment dipolaire  $p_0 = \alpha_{pol} |E_{inc}|$ , et celle de l'éclairement incident  $\xi_{inc} = \varepsilon_0 c |E_{inc}|^2 / 2$ , on obtient une relation directe entre l'intensité émise par le dipôle et l'éclairement incident reçu :

$$I(\theta, \varphi) = \frac{\pi^2 \alpha_{pol}^2}{\varepsilon_0^2 \lambda^4} \cos^2 \theta \xi_{inc}$$

La constante de proportionnalité entre ces deux grandeurs est appelée la section efficace de diffusion, notée  $\sigma(\theta, \varphi)$  et mesurée en  $\text{m}^2 \cdot \text{sr}^{-1}$ . On a la relation :  $I = \sigma \xi_{inc}$ , soit :

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{\pi^2 \alpha_{pol}^2}{\varepsilon_0^2 \lambda^4} \cos^2 \theta \quad (2.2)$$

Dans le domaine du lidar, deux valeurs de sections efficaces sont importantes :

- la section de rétrodiffusion  $\sigma(\theta=0, \varphi=\pi)$ , notée simplement  $\sigma_\pi$ , qui donne naissance au signal lidar lui-même :

$$\sigma_\pi = \frac{\pi^2 \alpha_{pol}^2}{\varepsilon_0^2 \lambda^4} \quad (2.3)$$

Cette section étant inversement proportionnelle à la puissance quatrième de la longueur d'onde incidente, l'usage de courtes longueurs d'onde est particulièrement avantageux pour un lidar Rayleigh.

- la section totale de diffusion  $\sigma_{tot}$ , intégrée sur tout l'angle solide de diffusion, qui va déterminer l'atténuation du signal par diffusion (cf. section 2.1.4). Elle s'exprime en  $\text{m}^2$ .

$$\sigma_{tot} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma(\theta) 2\pi \cos \theta d\theta = \frac{8\pi}{3} \frac{\pi^2 \alpha_{pol}^2}{\varepsilon_0^2 \lambda^4}$$

On peut d'ailleurs noter que, du fait de l'anisotropie de la diffusion Rayleigh, le rapport  $\sigma_{\pi}/\sigma_{tot}$  vaut  $3/8\pi$  et non  $1/4\pi$ .

### 2.1.2 Diffusion par un dipôle à polarisabilité anisotrope

Dans l'air, les espèces majoritaires d'azote  $N_2$  et d'oxygène  $O_2$  sont des molécules diatomiques, dont les propriétés de polarisabilité sont anisotropes. Dès lors le moment dipolaire induit par le champ incident ne lui est plus forcément colinéaire, et la polarisabilité d'une molécule prend la forme non plus d'un simple scalaire, mais d'un tenseur de rang 3 dont la valeur dépend de l'orientation moléculaire par rapport au champ incident. Cette orientation étant aléatoire, la polarisabilité macroscopique d'un gaz moléculaire, prise comme moyenne d'ensemble des polarisabilités individuelles, se ramène à la définition de deux grandeurs scalaires : une polarisabilité moyenne  $a_{pol}$  et un facteur d'anisotropie  $\gamma_{pol}$ <sup>[7]</sup>.

Dans le cas d'un champ incident polarisé linéairement, on observe deux composantes de champ dans la direction de rétrodiffusion :

- une composante de forte amplitude polarisée parallèlement au champ incident : nous noterons  $\sigma_{//}$  la section efficace de rétrodiffusion correspondante ;
- une composante de faible amplitude polarisée orthogonalement au champ incident, de section efficace de rétrodiffusion notée  $\sigma_{\perp}$ . Cette composante n'est pas « prévue » dans le modèle du dipôle à polarisabilité isotrope, lequel conserve la polarisation.

Une description plus fine de l'interaction lumière-matière à l'échelle d'une molécule permet de préciser les phénomènes qui sont à l'origine de cette composante orthogonale. Sans entrer dans les détails théoriques, qui font appel à la mécanique quantique, une molécule se distingue d'un atome par le fait qu'elle possède des niveaux d'énergie internes correspondant à ses modes propres de vibration et rotation. En plus du rayonnement élastique du dipôle, l'interaction de la lumière avec ces niveaux d'énergie engendre deux autres composantes de diffusion:

- l'une inélastique, c'est-à-dire avec décalage fréquentiel par rapport à l'onde incidente : il s'agit de la diffusion Raman Stokes et anti-Stokes sur les modes vibrationnels et rotationnels des molécules. Dans ce cas la lumière diffusée est répartie sur autant de raies spectrales qu'il y a de modes peuplés. Elle est de plus fortement dépolarisée ;
- l'autre élastique, sans changement de fréquence : il s'agit du cas particulier de la diffusion Raman rotationnelle dite « de la branche Q », au cours de laquelle le moment cinétique de la molécule est réorienté, mais son module inchangé. Cette composante de diffusion est également fortement dépolarisée.

Du fait de la dépolarisation des composantes de diffusion Raman, on retrouve une fraction de ces dernières en polarisation orthogonale au champ. La diffusion polarisée parallèlement au champ comprend quant à elle toute la composante de diffusion « ordinaire », plus la fraction restante des composantes Raman.

Un exemple de spectre de diffusion à 355 nm est présenté sur la figure 2.4 pour les molécules  $N_2$  et  $O_2$  à  $T=200$  K. Il est composé de séries de raies Raman rotationnelles Stokes et Anti-Stokes, et d'une raie centrale très intense. Cette dernière correspond à la diffusion élastique « ordinaire », que nous nommerons désormais « raie Cabannes » suivant les

recommandations terminologiques de Young<sup>[8]</sup>, à laquelle s'additionne la branche Q de la diffusion Raman rotationnelle. Les composantes Raman vibrationnelles ne sont pas représentées, car trop éloignées par rapport à l'échelle de la figure : en effet pour N<sub>2</sub> les premières raies vibrationnelles sont distantes de 70 THz contre 0,36 THz pour la raie rotationnelle Stokes la plus proche, soit respectivement 30 nm et 0,15 nm pour  $\lambda=355$  nm.

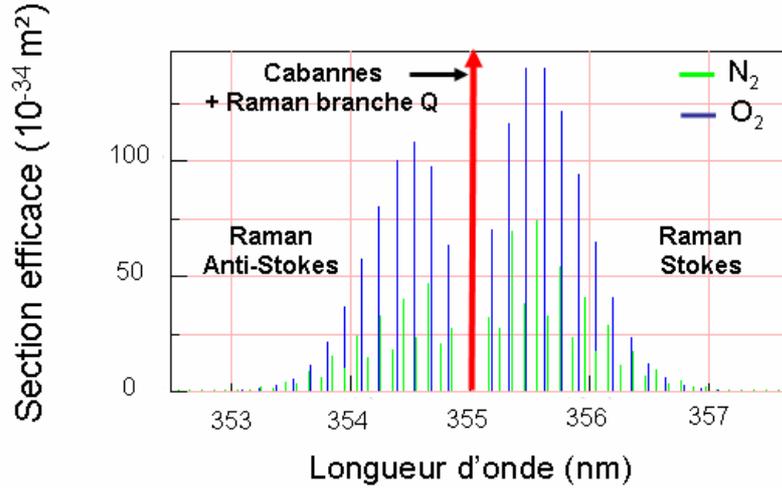


Figure 2.4 : Exemple type d'un spectre Rayleigh-Raman à 355 nm.  
 Source : programme dû à M.Vountas, Université de Brême<sup>[9]</sup>.  
 Voir ref.[10] pour plus de détails théoriques.

Dans le tableau 2.1, présenté ci-après, sont rassemblées les expressions des sections efficaces de rétrodiffusion  $\sigma_{//}$  et  $\sigma_{\perp}$  pour la raie Cabannes, pour les ensembles de raies Raman Stokes/Anti-Stokes, et pour la raie Raman de la branche Q, respectivement notées (C), (S/AS), (Q). La section efficace de diffusion Raman vibrationnelle étant d'un ordre de grandeur plus faible que son homologue rotationnelle, nous l'avons négligée. On utilise pour ce tableau deux expressions nouvelles :

$$\sigma_{\pi}^0 = \frac{\pi^2 a_{pol}^2}{\epsilon_0^2 \lambda^4} \quad (2.4)$$

Par analogie avec l'éq.(2.3), cette section efficace correspond à celle d'un dipôle équivalent de polarisabilité isotrope  $a_{pol}$  ;

$$F_k = \left( 1 + \frac{10 \gamma_{pol}^2}{45 a_{pol}^2} \right)$$

Ce facteur, dit « facteur de King », est lié au contraire à l'anisotropie moléculaire, et vaut l'unité lorsque  $\gamma_{pol}$  est nul.

$\sigma_{//}^C = \sigma_{\pi}^0$	$\sigma_{\perp}^C = 0$
$\sigma_{//}^Q = \frac{F_k - 1}{10} \sigma_{\pi}^0$	$\sigma_{\perp}^Q = \frac{3}{4} \sigma_{//}^Q$
$\sigma_{//}^{S/AS} = 3 \frac{F_k - 1}{10} \sigma_{\pi}^0$	$\sigma_{\perp}^{S/AS} = \frac{3}{4} \sigma_{//}^{S/AS}$

Tableau 2.1 : Sections efficaces de rétrodiffusion pour les raies Cabannes, Raman Stokes/Anti-Stokes, et Raman de la branche Q. Source : données publiées dans ref.[7].

Tout d'abord, on peut noter que le taux de dépolarisation des composantes Raman s'établit à 75 %, et que la diffusion dans les branches Stokes et Anti-Stokes est 3 fois plus importante que dans la branche Q.

Deuxièmement, ce tableau montre clairement qu'il est équivalent de parler de diffusion Raman ou d'anisotropie dans la polarisabilité moléculaire, l'une n'existant pas sans l'autre. Il y a de même équivalence d'expressions entre la section efficace de la raie Cabannes et celle d'un dipôle de polarisabilité isotrope.

Selon Bates<sup>[12]</sup>, le facteur de King pour de l'air dans les conditions normales de température et de pression (CNTP :  $T_0=288,15$  K et  $P_0=101325$  Pa) vaut environ 1,05 à 355 nm. On en déduit l'intensité relative des différentes composantes Raman rétrodiffusées :

$$\frac{\sigma_{//\perp}^Q}{\sigma_{//\perp}^C + \sigma_{//\perp}^Q + \sigma_{//\perp}^{S/AS}} = 0,9 \text{ \% pour la branche Q}$$

$$\frac{\sigma_{//\perp}^{S/AS}}{\sigma_{//\perp}^C + \sigma_{//\perp}^Q + \sigma_{//\perp}^{S/AS}} = 2,7 \text{ \% pour les branches Stokes et Anti-Stokes (toutes confondues)}$$

Le taux de dépolarisation global du signal rétrodiffusé vaut quant à lui :

$$\frac{\sigma_{\perp}^Q + \sigma_{\perp}^{S/AS}}{\sigma_{//}^C + \sigma_{//}^Q + \sigma_{//}^{S/AS}} = 1,6 \text{ \%}$$

De là, on peut conclure que les contributions Raman sont faibles, d'autant plus qu'elles se répartissent sur plusieurs raies spectrales. Par ailleurs, elles affectent peu la polarisation du signal. Notons toutefois qu'elles peuvent s'avérer suffisamment intenses pour certains instruments, comme par exemple les lidars Raman rotationnels utilisés pour la mesure de température<sup>[10][11]</sup>.

Dans toute la suite, nous ferons l'hypothèse que la diffusion Raman est négligeable, et que seule la diffusion correspondante à la raie Cabannes est à prendre en compte.

### 2.1.3 Sections efficaces de rétrodiffusion et de diffusion totale d'une « molécule d'air »

Nous utiliserons l'expression abusive mais courante de « molécule d'air » pour désigner un ensemble microscopique composé de 80% de la masse d'une molécule d'azote  $N_2$  et 20 % de la masse d'une molécule d'oxygène  $O_2$ . La masse molaire de l'ensemble est  $M_{mol}=28,8$  g/mol.

Selon l'éq.(2.4), la section efficace de diffusion d'une molécule d'air dépend de sa polarisabilité moyenne  $a_{pol}$ . Celle-ci est liée à l'indice de réfraction  $n$  de l'air par l'équation de Lorentz-Lorenz<sup>[6][7]</sup>, qui peut être approximée, pour un milieu dont l'indice est très proche de l'unité, de la manière suivante :

$$a_{pol} = \frac{3\epsilon_0}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \approx \frac{2\epsilon_0}{\rho} (n - 1)$$

Dans cette expression,  $\rho$  est la concentration moléculaire de l'atmosphère (nombre de molécules d'air/m<sup>3</sup>). Bien que les grandeurs  $\rho$  et  $n$  soient des grandeurs macroscopiques, le rapport  $(n-1)/\rho$  est bien caractéristique, lui, d'une molécule unique.

L'expression de la section efficace de rétrodiffusion devient alors, d'après l'éq.(2.4) :

$$\sigma_{\pi} = \frac{4\pi^2}{\lambda^4} \left( \frac{n-1}{\rho} \right)^2 \quad (2.5)$$

Pour les longueurs d'onde supérieures à 230 nm, et pour de l'air dans les CNTP, Peck et Reeder<sup>[13]</sup> ont proposé la loi de dispersion d'indice suivante :

$$(n-1) = 10^{-8} \cdot \left( \frac{5\,791\,817}{238,0185 - (1/\lambda)^2} + \frac{167\,909}{57,362 - (1/\lambda)^2} \right) \text{ avec } \lambda \text{ en } \mu\text{m}.$$

Le nombre  $\rho$  de molécules d'air par m<sup>3</sup> dans ces mêmes CNTP nous est donné, lui, par la loi des gaz parfaits :

$\rho = N_{Av} \frac{P_0}{R_g T_0}$ , où  $R_g$  est la constante des gaz parfaits ( $R_g=8.31$  J/mol/K) et  $N_{Av}$  le nombre d'Avogadro ( $N_{Av}=6.02 \times 10^{23}$  mol<sup>-1</sup>).

En insérant ces deux dernières équations dans l'éq.(2.5), on peut calculer la section efficace de rétrodiffusion pour une molécule d'air en fonction de la longueur d'onde incidente. La section de diffusion totale se déduit quant à elle de la section de rétrodiffusion par la relation :

$$\sigma_{tot} = \frac{8\pi}{3} \sigma_{\pi}.$$

### 2.1.4 Coefficients de rétrodiffusion et d'extinction de l'air

Alors que la section efficace de diffusion caractérise une molécule individuelle, on utilise, dans le cas d'une diffusion volumique par un gaz de concentration  $\rho$ , le terme de « coefficient de diffusion », noté  $\beta$ , défini par  $\beta = \rho\sigma$  en m<sup>-1</sup>sr<sup>-1</sup>.

En terme de système lidar, le coefficient de rétrodiffusion  $\beta_{\pi} = \rho\sigma_{\pi}$  détermine la réflectivité de l'atmosphère, tandis que le facteur  $\beta_{tot} = \rho\sigma_{tot}$  est responsable de l'atténuation du signal par diffusion au cours de la propagation atmosphérique. Par conséquent ce coefficient est plus volontiers nommé « coefficient d'extinction », et noté  $\beta_{ext}$ . Selon la loi intégrée de Beer-Lambert, la transmission atmosphérique sur le trajet aller-retour du signal lidar est :

$$T_{atm} = \exp(-2\beta_{ext} z)$$

Etant proportionnels à la concentration locale  $\rho$  de l'air, les coefficients  $\beta_\pi$  et  $\beta_{ext}$  sont notamment fonctions, en moyenne, de l'altitude à laquelle opère le lidar. On admet généralement un profil de concentration moléculaire exponentiel décroissant :

$$\rho(h) = \rho_0 \exp(-h/h_e)$$

où  $\rho_0$  est la concentration aux CNTP,  $h$  l'altitude, et  $h_e$  une constante nommée « hauteur d'échelle de l'atmosphère », valant environ 8 km. Par rapport à leurs valeurs au niveau de la mer, les coefficients de rétrodiffusion et d'extinction sont ainsi divisés par deux à 5,5 km, et par quatre à 11 km.

On pourra évaluer les coefficients de rétrodiffusion et d'extinction en fonction de l'altitude et la longueur d'onde en utilisant les deux équations suivantes :

$$\beta_\pi(h, \lambda(\mu m)) = 10^{20} \exp(-h/h_e) \frac{4\pi^2}{\rho_0 \lambda^4} \left( \frac{5,79}{238 - (1/\lambda)^2} + \frac{0,17}{57 - (1/\lambda)^2} \right)^2$$

$$\beta_{ext} = \frac{8\pi}{3} \beta_\pi$$

Le tableau 2.2 récapitule les valeurs numériques de  $n$ ,  $\rho$ ,  $\sigma_\pi$ ,  $\beta_\pi$  et  $\beta_{ext}$ , pour une onde à  $\lambda=355$  nm dans de l'air aux CNTP.

Indice de l'air	$n$	1,0002857	-
Concentration en molécules	$\rho$	$2,55 \times 10^{25}$	molécules/m <sup>3</sup>
Section efficace de rétrodiffusion	$\sigma_\pi$	$3,1 \times 10^{-31}$	m <sup>2</sup> .sr <sup>-1</sup>
Coefficient de rétrodiffusion	$\beta_\pi$	$8,0 \times 10^{-6}$	m <sup>-1</sup> .sr <sup>-1</sup>
Coefficient d'extinction	$\beta_{ext}$	$6,7 \times 10^{-5}$	m <sup>-1</sup>

**Tableau 2.2: Valeurs numériques récapitulatives, valables aux CNTP  $T_0=288,15$  K et  $P_0=101325$  Pa (sauf  $\sigma_\pi$  qui est indépendante des CNTP)**

Notons que pour un lidar de courte portée à 355 nm, la transmission atmosphérique est quasiment unitaire. Par exemple, pour  $z=50$  m, et dans les CNTP, on calcule que  $T_{atm}=99,3$  %.

### 2.1.5 Effet Doppler

Jusqu'ici nous avons considéré le cas de dipôles immobiles par rapport à l'onde incidente, et nous avons vu que l'essentiel de la diffusion s'exerçait de manière élastique, sans changement de fréquence. Ce n'est plus le cas lorsqu'on considère un dipôle mobile, du fait de l'effet Doppler. Cet effet est illustré sur la figure 2.5.

Considérons un dipôle, éclairé par une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega_L$  (vecteur d'onde  $k_L=\omega_L/c$ , fréquence  $\nu_L$ , longueur d'onde  $\lambda_L$ ). Le dipôle est animé d'une vitesse radiale  $u_r$ , à contresens de l'onde optique.

Au temps  $t_0$ , le dipôle se trouve sur un front de phase optique  $\phi(t_0)$ , séparé d'un front de phase de référence par  $\Delta\phi_0$ . Au temps  $t$ , la phase de l'onde a progressé de  $\omega_L(t-t_0)$ , tandis que le dipôle s'est décalé d'une distance  $u_r(t-t_0)$ , soit un décalage de phase  $k_L u_r(t-t_0)$ .

La différence de phase optique est donc  $\phi(t) - \phi(t_0) = (\omega_L + k_L u_r)(t - t_0)$ .

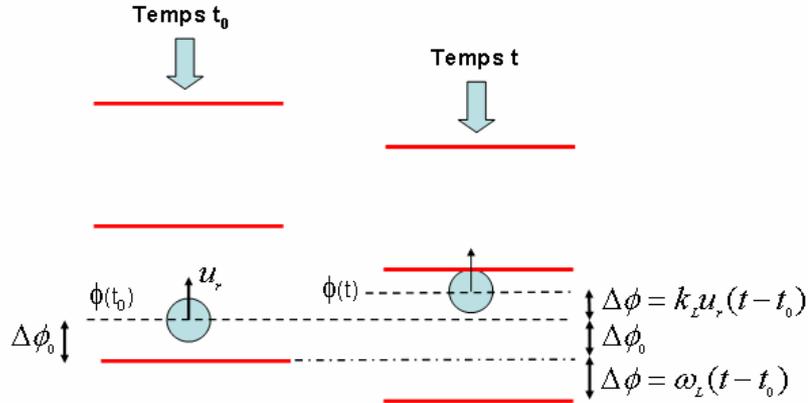


Figure 2.5 : Principe de l'effet Doppler

Si l'on considère une durée  $(t-t_0)$  infinitésimale, alors la pulsation instantanée de l'onde optique vue par le dipôle est :

$$\omega_1 = \frac{d\phi}{dt} = \omega_L(1 + u_r/c)$$

Cette pulsation est donc décalée par rapport à celle de l'onde incidente : c'est l'effet Doppler. Cet effet est algébrique, le décalage pouvant être positif ou négatif suivant que le dipôle s'approche ou s'éloigne de l'émetteur de l'onde incidente.

Lorsque le dipôle diffuse la lumière reçue, il le fait, dans son référentiel, avec la même pulsation instantanée (diffusion élastique). Vu depuis l'émetteur de l'onde incidente, l'effet Doppler joue donc une seconde fois. La pulsation perçue par un récepteur placé dans le même référentiel que l'émetteur est alors :

$$\omega_2 = \omega_1(1 + u_r/c)$$

L'ordre de grandeur de vitesse des particules ou molécules de l'atmosphère étant très faible devant la vitesse de la lumière, on obtient le résultat net suivant :

$$\omega_2 = \omega_L(1 + u_r/c)^2 \approx \omega_L(1 + 2u_r/c)$$

Le décalage Doppler, exprimé en fréquence s'écrit donc :

$$\Delta\nu_{DOP} = 2\nu_L u_r/c, \text{ ou } \Delta\nu_{DOP} = 2u_r/\lambda_L$$

A 355 nm, le décalage est de 5,6 MHz/m.s<sup>-1</sup>.

### 2.1.6 Spectre de la raie Cabannes et effet Rayleigh-Brillouin

La raie Cabannes correspond au terme de diffusion élastique, lié à la polarisabilité moyenne  $a_{pol}$  des molécules. Cette diffusion s'effectue sans changement de fréquence pour une molécule immobile, mais pour une molécule mobile, il y a changement de fréquence par effet Doppler. Ainsi, la composition spectrale de la raie Cabannes rétrodiffusée par un volume d'air reflète la statistique des vitesses radiales de translation des molécules contenues dans ce volume.

De cette statistique, seule la moyenne est aisément identifiable : il s'agit de la vitesse macroscopique des molécules, autrement dit, la vitesse radiale du vent. Connaître le détail de la statistique de vitesse est un problème autrement plus complexe car celle-ci doit tenir compte :

- des mouvements individuels et désordonnés des molécules, liés à leur agitation thermique ;
- des mouvements collectifs et ordonnés des molécules qui se propagent de proche en proche via la viscosité du milieu. Ces mouvements collectifs correspondent macroscopiquement à la propagation d'ondes acoustiques qui se développent spontanément dans l'atmosphère.

En terme de diffusion, on parle de diffusion Rayleigh thermiquement élargie (ou régime cinétique) lorsque l'agitation thermique domine, et de diffusion Brillouin spontanée (ou régime hydrodynamique) lorsque ce sont les ondes acoustiques qui dominent. Mais en règle générale, les deux types de diffusion coexistent, et la raie Cabannes résulte d'un mélange de diffusion Rayleigh-Brillouin.

Afin de déterminer l'importance relative de ces deux effets, différents modèles ont été proposés, parmi lesquels le modèle dit « S6 » de Tenti<sup>[14]</sup> est reconnu par plusieurs auteurs<sup>[7][15]</sup> comme étant le plus précis. Ce modèle, bien que très complexe, est essentiellement régi par un paramètre fondamental nommé paramètre  $y$ . Dans la direction de rétrodiffusion celui-ci s'exprime par :

$$y = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda/2}{d_{lpm}} \quad \text{où } d_{lpm} \text{ est la distance de libre parcours moyen des molécules d'air et } \lambda \text{ la}$$

longueur d'onde utilisée.

Ce libre parcours moyen peut s'exprimer en fonction de la viscosité  $\eta$  du milieu :

$$d_{lpm} = \sqrt{\frac{2}{mk_B T}} \frac{\eta}{\rho}, \quad \text{où } m \text{ est la masse d'une molécule d'air } (m=M_{mol}/N_{Av}), k_B \text{ la constante}$$

de Boltzmann ( $k_B=1.38 \times 10^{-23}$  J/K), et  $\rho$  le nombre de molécules/m<sup>3</sup>.

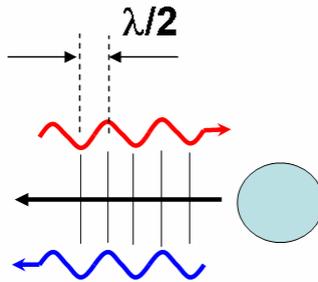
Dans les gaz parfaits la viscosité dépend uniquement de la température, via la formule de Sutherland<sup>[7]</sup> :

$$\eta = \eta_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left( \frac{T_0 + S}{T + S} \right), \quad \text{avec } \eta_0=1,716 \times 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}, T_0=273 \text{ K et } S=111 \text{ K dans l'air.}$$

De là, on en déduit une formule de calcul pour l'évaluation du paramètre  $y$ , en fonction de la température  $T$ , la pression  $P$ , et la longueur d'onde  $\lambda$  utilisée :

$$y = 0,23 \frac{T + 111}{T^2} P(\text{atm}) \lambda(\text{nm})$$

Physiquement, on peut comprendre le rôle du paramètre  $y$  de la façon suivante. Il faut d'abord noter que la quantité  $\lambda/2$  correspond, pour une molécule, au pas de l'onde stationnaire formée par la superposition du champ incident et du champ rétrodiffusé, vu depuis le repère mobile attaché à la molécule (voir figure 2.6). Le réseau de densité ainsi créé (par électrostriction), n'est cependant « stable » que s'il s'accorde avec les oscillations de densité d'origine acoustique. Aussi la diffusion Brillouin ne peut exister efficacement que si le milieu est suffisamment visqueux pour permettre la propagation d'ondes acoustiques dont la période est du même ordre de grandeur, ou plus petite, que le pas de ce « réseau » à  $\lambda/2$ . Il faut pour cela que le libre parcours moyen des molécules soit plus petit que  $\lambda/2$ , puisqu'il ne peut y avoir de mouvement collectif acoustique sans collisions intermoléculaires.



**Figure 2.6 : Vue depuis une molécule, la superposition des ondes reçue et rétrodiffusée créée à son voisinage un petit réseau de densité, à l'origine de la diffusion Brillouin.**

Ainsi, si  $y \ll 1$  (basse pression ou haute température), l'effet Brillouin ne peut se manifester car le libre parcours moyen est grand. Par exemple, à  $P=0,1$  atm et  $T=220$  K, le libre parcours moyen est d'environ 500 nm. A  $\lambda=355$  nm, le paramètre  $y$  est alors faible, avec une valeur de 0,06. Dans ce cas limite, la statistique des vitesses moléculaires est dominée par le régime thermique, et la théorie de la cinétique des gaz nous apprend qu'elle est de forme gaussienne. Sous sa forme unidimensionnelle, c'est à dire en projetant les vitesses moléculaires sur l'axe des vitesses radiales, elle s'écrit :

$$P(U_r = u_r) = \frac{1}{\gamma_u \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{u_r - \bar{u}_r}{\gamma_u}\right)^2} \text{ avec } \gamma_u = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \text{ et } \bar{u}_r \text{ la vitesse macroscopique du vent.}$$

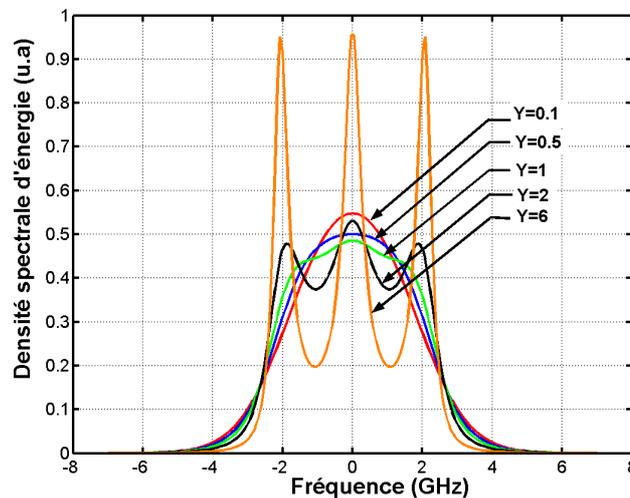
Il s'ensuit, par effet Doppler, que pour un lidar monochromatique de fréquence  $\nu_L$ , le spectre rétrodiffusé a pour expression :

$$R(\nu) = \frac{1}{\gamma_R \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_c}{\gamma_R}\right)^2} \text{ avec } \gamma_R = \frac{2\nu_L}{c} \gamma_u \text{ et } \nu_c = \nu_L (1 + 2\bar{u}_r / c)$$

Notons qu'il s'agit d'un spectre large : à 288 K et 355 nm,  $\gamma_R=2,3$  GHz (soit  $\gamma_u \sim 400$  m/s).

A l'inverse, si  $y \gg 1$ , le fluide est très dense, et la statistique de vitesse, telle qu'elle est perçue à la longueur d'onde  $\lambda$ , est dominée par la dynamique des ondes acoustiques dans le milieu. La statistique de vitesse est alors composée de 3 raies principales de formes lorentziennes : deux d'entre elles correspondent aux ondes acoustiques et sont centrées sur la vitesse du son, en co- ou contra-propagation du signal rétrodiffusé; la troisième correspond au régime thermique résiduel, sur lequel se relaxent les ondes acoustiques.

La figure 2.7 montre des simulations du spectre Rayleigh-Brillouin rétrodiffusé dans l'air, dans le cas d'un lidar monochromatique à  $\lambda_L=355$  nm, pour diverses valeurs du paramètre  $y$ . Précisons que quelle que soit la valeur de  $y$ , la section efficace de diffusion reste inchangée. Seule la répartition spectrale de l'énergie est modifiée.



**Figure 2.7 : Spectre Rayleigh-Brillouin d'après le modèle S6 de Tenti.**  
Le spectre est représenté centré sur l'axe des fréquences. Source : code fourni par A.Dabas (Météofrance, Toulouse), code original dû à R.Seasholtz (NASA Lewis Research Center).

Dans l'atmosphère, les pressions rencontrées sont telles qu'à 355 nm, le paramètre  $y$  n'excède pas 0,4 dans des conditions normales (valeur aux CNTP). Aussi l'effet Brillouin n'a-t-il qu'un impact limité à cette longueur d'onde. Cependant, pour des longueurs d'ondes plus grandes, on peut s'attendre à des déformations conséquentes du spectre réel par rapport au spectre gaussien. Par exemple pour un lidar à 1,55  $\mu\text{m}$  opérant dans les CNTP, le paramètre  $y$  est de 1,7.

Le modèle de Tenti n'est cependant pas parfait, comme le souligne Young en ref.[15]: il ne prend notamment pas en compte les possibles couplages entre les diverses espèces chimiques d'un gaz complexe tel que l'air. Il n'existe pas, à notre connaissance, de modèle plus précis décrivant le spectre Rayleigh-Brillouin dans l'air, pas plus que de données expérimentales sur lesquelles s'appuyer. Le modèle S6 a cependant montré, dans son domaine de validité des gaz monoespèces, un bon accord avec des mesures expérimentales<sup>[16]</sup>, surtout pour les valeurs  $y < 2$  qui correspondent au domaine qui nous concerne.

Toutefois, au vu de la faiblesse du paramètre  $y$  attendu, nous négligerons en première approche l'effet Brillouin, et utiliserons le modèle de spectre gaussien du régime thermique. L'impact de cette hypothèse sera examiné au chapitre 5.

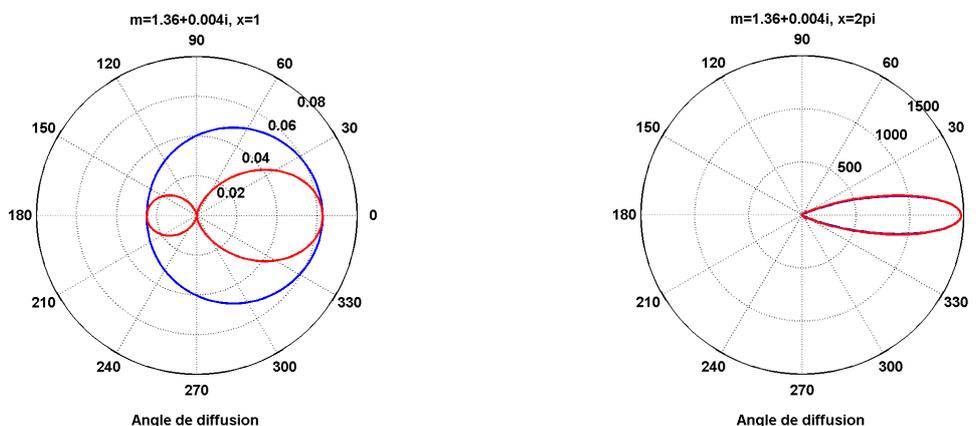
## 2.2. Diffusion de Mie dans l'atmosphère

L'atmosphère n'est pas composée uniquement de molécules : elle contient également de nombreuses particules plus massives capables de rétrodiffuser la lumière (poussières, aérosols, gouttelettes d'eau...). Pour ces particules, dont la taille est du même ordre de grandeur, ou plus grande, que la longueur d'onde, la théorie de Rayleigh ne s'applique pas : on utilise la théorie de la diffusion de Mie. Ce type de diffusion est de nature élastique, mais peut s'accompagner ou non d'un changement de polarisation, selon qu'elle s'opère sur des particules sphériques (cas des gouttelettes d'eau en suspension: la polarisation est conservée), ou au contraire des particules orientées (gouttelettes en précipitation, cristaux de glace : forte dépolarisation possible).

Nous nous restreindrons ici au cas de particules sphériques, qui sont les plus fréquemment rencontrées en dehors des formations nuageuses de haute altitude. Dans ce cas, le calcul de la diffusion Mie fait appel à un formalisme certes complexe, mais bien connu, et l'évolution des moyens et méthodes de calcul a permis au fil du temps la mise au point de codes de simulation efficaces. Les simulations présentées dans ce paragraphe ont ainsi été réalisées en utilisant une bibliothèque de fonctions dédiées, due à C. Mätzler (Institut de Physique Appliquée, Berne).

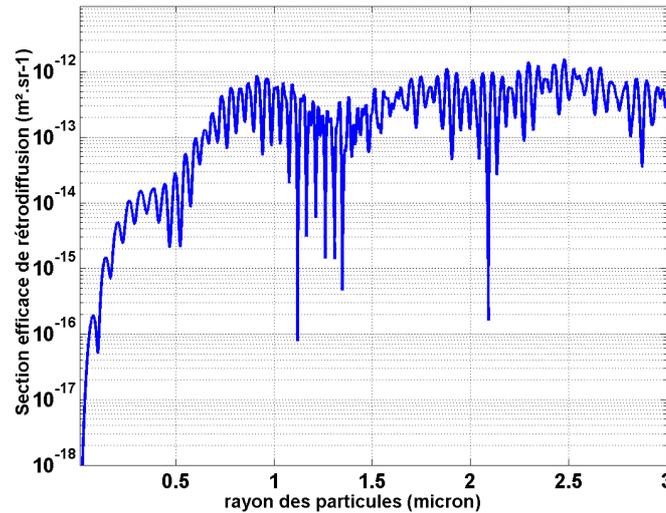
### 2.2.1 Sections efficaces de rétrodiffusion et d'extinction des particules

Les modèles de diffusion Mie font intervenir essentiellement deux paramètres fondamentaux : l'indice complexe  $m$  de la particule et le rapport  $x=2\pi r/\lambda$ , où  $r$  est le rayon de la particule. A partir de ces deux paramètres, on peut calculer, entre autres, les valeurs de section efficace de rétrodiffusion et d'extinction. Notons aussi la possibilité d'obtenir, de manière analogue à la figure 2.3, les traces de la section efficace de diffusion dans les plans de coupe axiale et équatoriale. D'après la figure 2.8, la diffusion Mie est clairement davantage piquée vers l'avant que la diffusion Rayleigh, avec une tendance d'autant plus marquée que la particule est de taille importante



**Figure 2.8 : Trace de l'indicatrice de diffusion Mie dans deux plans de coupe.  
A gauche  $x=1$  (petite particule), à droite  $x=2\pi$  (grosse particule).**

La section efficace de rétrodiffusion peut être calculée en fonction du rayon de particule. A 355 nm, et pour un indice typique de particule  $m=1,36+0,004i$ , on obtient par exemple la courbe représentée en figure 2.9. Les nombreux rebonds illustrent les effets d'interférences successivement constructives et destructives caractéristiques de la diffusion Mie.



**Figure 2.9 : Section efficace de rétrodiffusion à 355 nm en fonction du rayon des particules**

Une courbe analogue peut être obtenue pour la section efficace d'extinction. Nous nous contenterons pour ce paramètre des valeurs numériques données dans le tableau 2.3 récapitulatif.

### 2.2.2 Granulométrie des particules dans l'atmosphère

Pour obtenir le coefficient de rétrodiffusion  $\beta_{\pi}$ , il nous faut également connaître la granulométrie précise des particules dans l'atmosphère, c'est-à-dire la concentration atmosphérique de chaque classe de taille de particule. Or cette donnée est généralement inconnue, la granulométrie pouvant varier en fonction du lieu, de l'altitude, de l'heure, de la météo... On ne peut donc pas prétendre à une modélisation quantitative précise de la rétrodiffusion particulaire dans l'atmosphère. On peut cependant obtenir des ordres de grandeur représentatifs en utilisant des profils moyens. Nous distinguerons deux modèles de granulométrie, valables l'un dans la stratosphère, à une altitude d'environ 10 km, l'autre dans la couche limite, située en moyenne à 1500 m d'altitude.

Dans la stratosphère, il est communément admis que la distribution des tailles de particules suit une loi de type log-normale monomodale :

$$f(r) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2\pi} \ln s} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{[\ln r - \ln r_0]^2}{2(\ln s)^2}\right)$$

où  $\rho_0$  est la concentration totale de particules,  $r_0$  le rayon du mode de la distribution, et  $s$  le paramètre qui en régit l'écart type. Nous adopterons ici les valeurs de Wang et al.<sup>[17]</sup>:  $\rho_0=10 \text{ cm}^{-3}$ ,  $r_0=72,5 \text{ nm}$ ,  $s=1,86$ .

Dans la couche limite, la présence de particules plus grosses se fait ressentir, aussi des lois à deux modes sont couramment proposées : un mode pour les grosses particules, l'autre pour les petites. Nous retiendrons le modèle utilisé par Banakh et al.<sup>[18]</sup> :

$$f(r) = 3\rho_0 r^2 \left[ \frac{1}{r_1^3} \frac{c_1}{(1+(r/r_1)^3)^2} + \frac{1}{r_2^3} \frac{c_2}{(1+(r/r_2)^3)^2} \right]$$

avec les coefficients :  $\rho_0=1430 \text{ cm}^{-3}$ ,  $r_1=52 \text{ nm}$ ,  $r_2=1,52 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $c_1=99,975 \%$ ,  $c_2=0,025 \%$ .

### 2.2.3 Coefficients de rétrodiffusion et d'extinction des particules

Le coefficient de rétrodiffusion granulométrique s'obtient par le produit  $\sigma_\pi(r)f(r)$ , duquel on déduit la valeur du coefficient de rétrodiffusion total par intégration sur la taille des particules.

$$\beta_\pi = \int_0^{r_{\max}} \sigma_\pi(r) f(r) dr$$

A titre d'exemple, les fonctions  $f(r)$  et  $\sigma_\pi(r)f(r)$  pour le modèle granulométrique de la couche limite sont présentées en figure 2.10 et figure 2.11. L'impact des grosses particules sur le coefficient de rétrodiffusion est notamment visible sur la seconde figure.

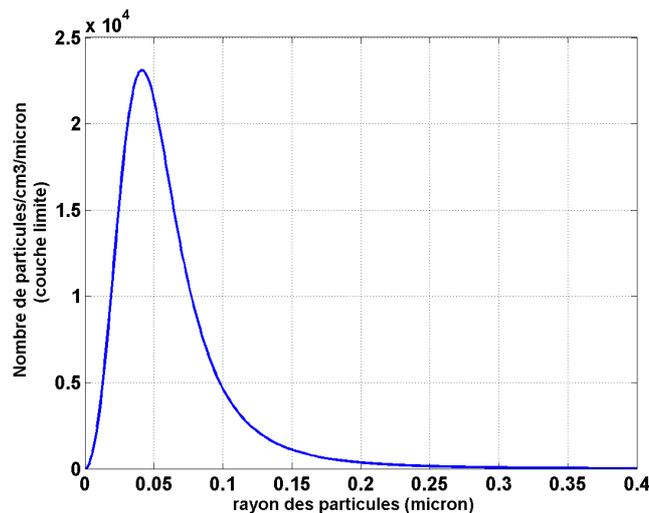


Figure 2.10 : Granulométrie dans la couche limite

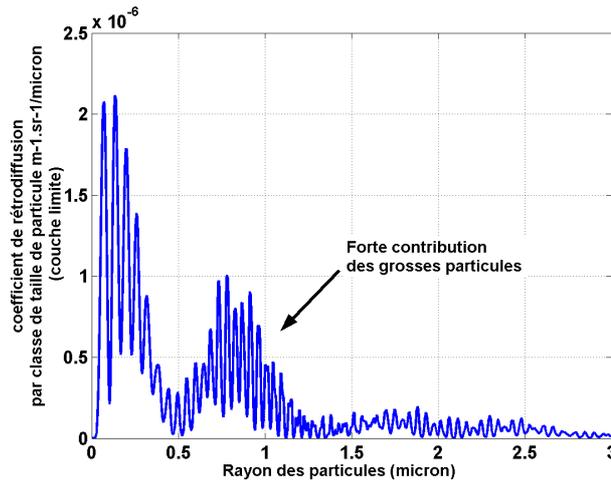


Figure 2.11 : Coefficient de rétrodiffusion granulométrique dans la couche limite

Par une démarche totalement similaire, on peut également calculer le coefficient d'extinction particulaire, la section efficace d'extinction étant l'un des résultats du code de calcul de diffusion Mie. Notons que dans le cas des particules, le coefficient d'extinction tient compte à la fois de la diffusion et de l'absorption du rayonnement.

Les valeurs numériques des coefficients de rétrodiffusion et d'extinction calculés pour l'un et l'autre des modèles granulométriques sont rassemblées dans le tableau 2.3. Ce dernier comprend également les valeurs des coefficients de diffusion et d'extinction Rayleigh, calculées aux altitudes de 10 km et 1500 m. On en déduit, pour chacune de ces altitudes, la valeur d'une quantité sans dimension nommée rapport de rétrodiffusion, et définie par  $\alpha = 1 + \beta_{\pi}^{Mie} / \beta_{\pi}^{Rayleigh}$ , dont le rôle est de quantifier le « rapport de force » des deux types de diffusion Mie et Rayleigh.

	Couche limite 1500 m	Stratosphère 10 km
$\beta_{\pi}^{Mie}$ ( $m^{-1}.sr^{-1}$ )	$7,2 \times 10^{-7}$	$6,9 \times 10^{-9}$
$\beta_{\pi}^{Rayleigh}$ ( $m^{-1}.sr^{-1}$ )	$6,6 \times 10^{-6}$	$2,3 \times 10^{-6}$
$\alpha$	1,109	1,003
$\beta_{ext}^{Mie}$ ( $m^{-1}$ )	$5,0 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^{-7}$
$\beta_{ext}^{Rayleigh}$ ( $m^{-1}$ )	$5,5 \times 10^{-5}$	$1,9 \times 10^{-5}$

Tableau 2.3 : Valeurs récapitulatives des coefficients de rétrodiffusion et d'extinction Rayleigh-Mie

De ce tableau, il ressort que la contribution des particules au signal rétrodiffusé par l'atmosphère est très faible à haute altitude, mais non négligeable dans la couche limite. Le coefficient d'extinction des particules, quant à lui, reste comparable ou inférieur au coefficient d'extinction moléculaire, et par conséquent ne pénalise que très faiblement la transmission atmosphérique sur de courtes portées.

Aux altitudes inférieures à la couche limite, et en particulier au voisinage des zones urbaines très polluées, le rapport de rétrodiffusion peut cependant augmenter rapidement pour atteindre quelques unités, voire la dizaine, ce qui implique une diffusion largement dominée par les particules. Dans ces zones, le coefficient d'extinction des particules peut donc devenir à la fois très significatif, et très variable.

### ***2.2.4 Spectre de diffusion Mie***

Les particules étant de masses très faibles, on les considère généralement comme de bons traceurs de vent. Aussi, les signaux de diffusion Mie et Rayleigh sont sujets à des effets Doppler identiques. En revanche, si légères qu'elles soient, les particules restent bien plus lourdes que les molécules d'air, et par conséquent connaissent une agitation thermique bien moindre que ces dernières. L'élargissement spectral dû à la dispersion de vitesse des particules, de l'ordre de quelques kHz à 355 nm, est négligeable par rapport à l'élargissement de diffusion Rayleigh, qui est de plusieurs GHz à cette même longueur d'onde. Ainsi, le spectre Mie de rétrodiffusion monochromatique sera modélisé par la fonction delta de Dirac  $\delta_{\nu-\nu_c(u_r)}$ , avec  $\nu_c = \nu_L(1 + 2u_r/c)$ .

### 2.3. Conclusion du chapitre

Dans le cas d'une source laser monochromatique, le spectre Rayleigh-Mie rétrodiffusé prendra l'expression suivante :

$$R(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma_R\alpha} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_c(u_r)}{\gamma_R}\right)^2} + (1-1/\alpha)\delta_{\nu-\nu_c(u_r)}$$

$$\text{avec } \gamma_R(T) = \mu\sqrt{T} \text{ et } \mu = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{8k_B}{m}}$$

Cette expression est normalisée en énergie. Nous verrons au chapitre 3 quel facteur énergétique ajouter pour décrire le signal reçu.

Dans le cas plus réaliste d'une source laser non monochromatique, le spectre rétrodiffusé résulte de la convolution du spectre du laser avec le spectre exprimé ci-dessus. Si l'on considère un spectre laser gaussien de demi-largeur à 1/e notée  $\gamma_L$ , l'expression du spectre devient :

$$R(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\gamma_G(T)\alpha} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_c(u_r)}{\gamma_G(T)}\right)^2} + \frac{(1-1/\alpha)}{\sqrt{\pi}\gamma_L} e^{-\left(\frac{\nu-\nu_c(u_r)}{\gamma_L}\right)^2}$$

$$\text{avec } \gamma_G(T) = (\gamma_L^2 + \mu^2 T)^{1/2}$$

Toutefois, on utilise généralement des sources lasers dites « injectées », dont la largeur spectrale est environ 20 fois inférieure à celle du signal Rayleigh. L'influence de la largeur et de la forme spectrale du laser est dans ce cas anecdotique. Dans la suite, nous utiliserons essentiellement le modèle de rétrodiffusion monochromatique.

On peut rappeler les deux hypothèses principales qui nous ont conduit à ces résultats :

- les termes de diffusion Raman sont négligeables : au vu des valeurs numériques de la section 2.1.2., cette hypothèse semble très raisonnable. Expérimentalement, on pourra, pour la conforter davantage, filtrer le signal lidar par un polariseur, réduisant ainsi le signal Raman d'un facteur quasiment deux sans atténuer la raie Cabannes.
- l'effet Brillouin spontané est négligeable : cette approximation constitue une première approche acceptable au vu de la faiblesse du paramètre  $\gamma$  ( $<0,4$ ). Nous verrons au chapitre 5 quelle est l'influence de cette hypothèse.



## Chapitre 3

### Propagation et réception du signal lidar

Nous abordons dans cette partie la rétropropagation et la réception du signal lidar. Il s'agit de déterminer quelles sont les propriétés du signal collecté par la pupille de réception, puis transmis par fibre optique jusqu'à l'analyseur spectral (ce dernier faisant l'objet des chapitres suivants). Le premier objectif est bien sûr de calculer l'énergie du signal disponible à l'entrée de l'analyseur, mais nous nous intéresserons aussi aux propriétés de cohérence spatiale et temporelle du signal lidar.

Pour ce faire, nous procéderons en deux temps. Tout d'abord, nous utiliserons le formalisme de l'optique ondulatoire pour propager le signal lidar depuis la cible atmosphérique jusqu'à la pupille de réception. Cela nous permettra, entre autres, de mettre en évidence l'origine et les propriétés du phénomène de « speckle », qui se traduit par un éclaircissement instantané fortement inhomogène de la pupille de réception. Nous verrons que sous certaines conditions, cet effet de speckle peut être négligé, et que dans ce cas le cadre de l'optique géométrique devient suffisant pour décrire la propagation du signal.

Dans un second temps, nous utiliserons donc l'optique géométrique pour calculer l'énergie transmise de la pupille de réception à la fibre optique de guidage vers l'analyseur spectral. Ceci nous amènera à définir le facteur de « rendement direct » de l'instrument, prenant en compte le phénomène de vignettage de la pupille. Une architecture complète de module de réception fibrée sera proposée, pour laquelle on déterminera le volume de mesure. Un calcul complet de bilan de liaison est présenté en conclusion de ce chapitre.

### **3.1. Propagation de la cible à la pupille de réception**

#### *3.1.1 Champ instantané reçu dans la pupille de réception*

Le diagramme de la figure 3.1 illustre le mécanisme de formation temporelle du signal dans le cas d'un lidar impulsif. Le diagramme est représenté sur deux axes, espace et temps. A l'origine des temps, une impulsion de durée  $\tau_p$  est émise par le laser. Les deux droites de pente  $+c$  illustrent la propagation de l'impulsion dans l'atmosphère à la vitesse  $c$ . Le temps  $t_0$  marque l'instant où l'on souhaite calculer l'éclaircissement de la pupille de réception. Le signal lidar reçu à l'instant  $t_0$  s'est propagé depuis l'atmosphère suivant une droite de pente  $-c$ . Ainsi, la zone participant à la construction du signal au temps  $t_0$  est représenté par le segment rouge sur le diagramme. Il s'agit d'un tube d'atmosphère de longueur  $\Delta z = c\tau_p / 2$ , dans lequel la puissance de l'impulsion est comme « diluée » spatialement. Si la puissance de l'impulsion à l'émission est  $P(t)$ , en Joule/seconde, la « puissance métrique » en Joule/mètre déposée par l'impulsion dans l'atmosphère peut s'écrire comme une fonction  $\tilde{P}(z)$ , la relation entre les deux étant :

$$\tilde{P}(z(t)) = \frac{2}{c} P(t) \text{ avec } z(t) = \frac{c}{2}(t_0 - t)$$

De même, on peut écrire une relation similaire pour les champs électriques :

$$\tilde{E}(z(t)) = \sqrt{\frac{2}{c}} E(t)$$

Dans la suite, on prendra garde à ces notations : les variables de champ électrique, éclairage, ou puissance surmontées d'un «  $\tilde{\phantom{x}}$  » sont associées à des énergies « par mètre d'atmosphère ». Ces mêmes variables, sans «  $\tilde{\phantom{x}}$  », sont associées à des énergies « par seconde », avec les unités usuelles. Une intégration spatiale de  $\tilde{P}(z)$  sur le domaine de distance décroissant  $[z_0; z_0 - c\tau_p/2]$  a donc la même signification qu'une intégration de  $P(t)$  sur le domaine temporel croissant  $[0, \tau_p]$ .

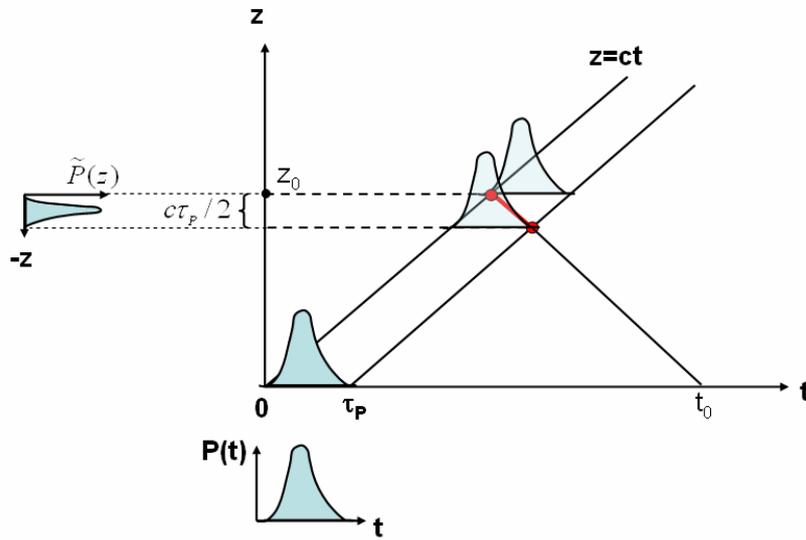


Figure 3.1 : Diagramme temporel d'un lidar impulsif

Sur la figure 3.2, on a représenté un volume rétrodiffusant de longueur  $\Delta z = c\tau_p/2$ . Avant de calculer le champ total rétrodiffusé par ce volume dans l'optique de réception, commençons par évaluer le champ reçu depuis un plan cible particulier situé en  $z=z_c$  et émettant un champ  $E_c$ . Le champ reçu sur la pupille nous est rigoureusement donné par l'intégrale de Kirchhoff :

$$E_{pup}(\vec{r}, t_0) = \iint_{\substack{\text{plan} \\ \text{cible}}} \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{1 + \cos(\vec{U}_z, \vec{R})}{2} E_c(\vec{\rho}, t_0 - z_c/c) d\vec{\rho}$$

où  $\vec{U}_z$  est le vecteur unitaire selon  $z$ , et les vecteurs  $\vec{R}$ ,  $\vec{\rho}$  et  $\vec{r}$  sont définis sur la figure 3.2.

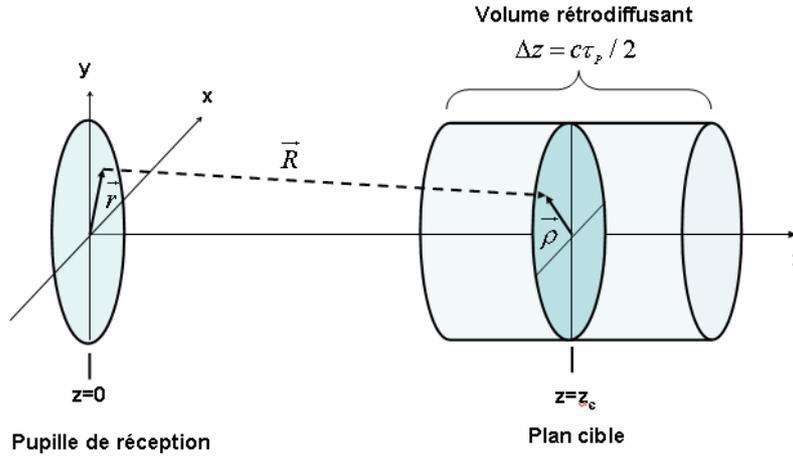


Figure 3.2 : Rétrodiffusion depuis un plan cible : schéma et notations

Le vecteur  $\vec{R}$  peut s'exprimer de la manière suivante :  $\vec{R} = z_c \vec{U}_z + (\vec{\rho} - \vec{r})$ . Or, pour un système lidar d'une portée supérieure à quelques dizaines de mètres, la dimension  $R$  reste largement supérieure aux domaines d'excursions de  $|\vec{\rho}|$  et  $|\vec{r}|$ , limités respectivement par la taille du faisceau et par la taille de la pupille de réception. Ainsi, le facteur d'inclinaison  $\cos(\vec{U}_z, \vec{R}) \approx 1$ . Par ailleurs, on peut développer  $R$  à l'ordre 3 comme suit :

$$R = z_c + \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}|^2}{2z_c} + \frac{|\vec{\rho} - \vec{r}|^4}{4z_c^3}$$

Le terme  $1/R$  de l'intégrale de Kirchhoff est alors bien approximé par  $1/z_c$ , mais le facteur de phase  $e^{-jkR}$  requiert une approximation à l'ordre 2, dans la mesure où  $|\vec{\rho} - \vec{r}|^2 / 2z_c$  n'est pas négligeable devant  $\lambda$ . Le troisième ordre par contre est négligeable : en effet, en supposant une pupille de réception de rayon  $r_{pup} = 10$  cm et une distance  $z_c = 20$  m, on calcule que  $r_{pup}^4 / 4z_c^3 = 3$  nm, ce qui est plus de 100 fois inférieur à  $\lambda = 355$  nm. On entre alors dans le cadre de l'approximation de Fresnel, et l'expression du champ dans la pupille de réception devient :

$$E_{pup}(\vec{r}, t_0) = \frac{1}{j\lambda z_c} e^{-jkz_c} e^{-jk \frac{r^2}{2z_c}} \iint_{\text{plan cible}} E_c(\vec{\rho}, t_0 - z_c/c) e^{-jk \frac{\rho^2}{2z_c}} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{z_c}} d\vec{\rho}$$

Cette relation est valable pour un plan émissif. Dans le cas d'un lidar, nous avons affaire à un volume émissif, continu dans l'intervalle longitudinal  $[z_0, z_0 - c\tau_p/2]$ . Le champ total obtenu au niveau de la pupille de réception s'exprime donc par :

$$E_{pup}(\vec{r}, t_0) = \int_{z_0}^{z_0 - c\tau_p/2} \iint_{\text{plan } z} \frac{1}{j\lambda z} e^{-jkz} e^{-jk \frac{r^2}{2z}} \sqrt{\frac{c}{2}} d\vec{E}_{emis}(\vec{\rho}, z) e^{-jk \frac{\rho^2}{2z}} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{z}} d\vec{\rho}$$

où  $d\vec{E}_{emis}(\vec{\rho}, z)$  est le champ « métrique » infinitésimal rayonné par l'élément de volume cylindrique de profondeur  $dz$  centré sur le plan  $z$ . Considérons une dimension

« infinitésimale »  $dz \gg \lambda/2$ . Du fait de la position aléatoire des diffuseurs dans l'élément de volume, la phase des champs rayonnés par les diffuseurs individuels est elle-même aléatoire, de statistique uniforme entre  $[0 \text{ et } 2\pi]$ . Il résulte de l'interférence de ces champs que le champ  $d\tilde{E}_{émis}(\vec{\rho}, z)$  est aléatoire, de statistique gaussienne complexe (voir aussi section 3.1.2). Ce dernier étant par ailleurs proportionnel au champ incident, nous pouvons écrire :

$$d\tilde{E}_{émis}(\vec{\rho}, z) = A \cdot \left| \tilde{E}_{inc}(\vec{\rho}, z) \right| h(\vec{\rho}, z) dz$$

Dans cette expression :

-  $A$  est un coefficient réel positif, proportionnel à la réflectivité de l'atmosphère, qui sera exprimé par la suite en fonction du coefficient de rétrodiffusion  $\beta$  usuel.

-  $h(\vec{\rho}, z)$  est une variable aléatoire gaussienne complexe traduisant la réponse de l'atmosphère normalisée en puissance. Ses propriétés sont les suivantes :

- $\langle h(\vec{\rho}, z) \rangle = 0$  (variable centrée, le symbole  $\langle \rangle$  représentant la moyenne statistique)
- $\text{var}(h(\vec{\rho}, z)) = \langle h(\vec{\rho}, z) h^*(\vec{\rho}, z) \rangle = 1$  (variance unitaire : c'est une réponse normalisée)
- $\text{covar}(h(\vec{\rho}, z), h(\vec{\rho}', z')) = \langle h(\vec{\rho}, z) h^*(\vec{\rho}', z') \rangle = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(z - z')$  (pas de corrélation spatiale de la réponse atmosphérique)
- son unité est le  $\text{m}^{-3/2}$ . En effet, l'intégrale volumique de la fonction  $\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(z - z')$  valant 1, on peut attribuer à la fonction de covariance l'unité  $\text{m}^{-3}$ .

Le champ obtenu dans la pupille de réception s'exprime donc en fonction du champ incident :

$$E_{pup}(\vec{r}, t_0) = \int_{z_0}^{z_0 - c\tau_p/2} \iint_{\text{plan } z} \sqrt{\frac{c}{2}} \frac{|A|}{\lambda z} e^{-jk \frac{r^2}{2z}} \left| \tilde{E}_{inc}(\vec{\rho}, z) \right| h(\vec{\rho}, z) e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{\rho}}{z}} d\vec{\rho} dz \quad (3.1)$$

expression dans laquelle les termes de phase ne dépendant pas de  $\vec{r}$  ont été « absorbés » par le caractère aléatoire de la phase de la réponse  $h(\vec{\rho}, z)$ .

### 3.1.2 Phénomène de speckle dans la pupille de réception

L'expression précédente fait apparaître le champ obtenu en chaque point  $\vec{r}$  de la pupille de réception comme une somme de multiples composantes de phases aléatoires. Ce champ se construit donc comme une marche aléatoire dans l'espace complexe, telle qu'illustrée sur la figure 3.3.

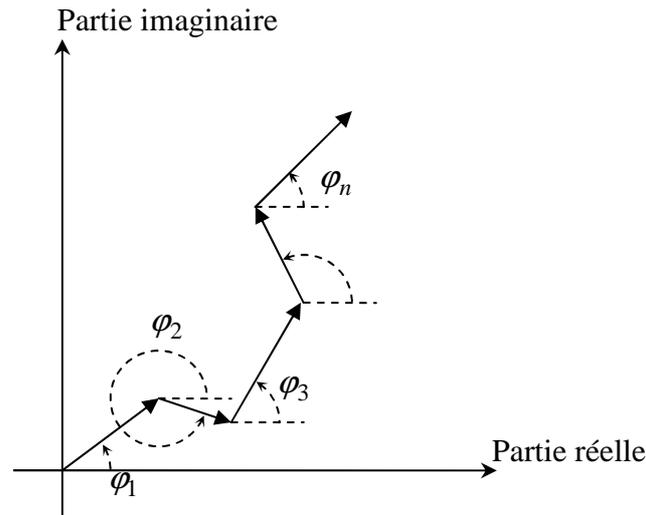


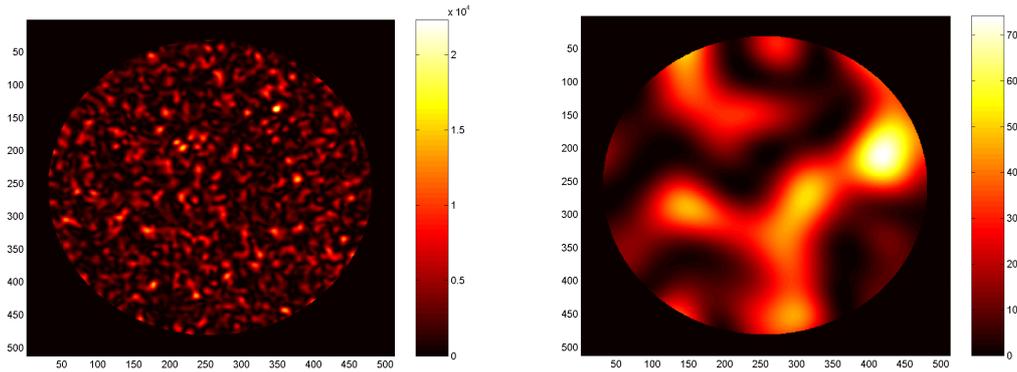
Figure 3.3 : Marche aléatoire dans l'espace complexe

Lorsque le nombre de composantes intervenant dans cette construction est très important, comme c'est le cas notamment pour la diffusion moléculaire, les propriétés statistiques du résultat de cette marche aléatoire nous sont données par le théorème central limite : la statistique du champ total en  $\vec{r}$  est gaussienne, complexe, et centrée (c'est-à-dire de moyenne nulle). Dans ces conditions, l'éclairement en  $\vec{r}$  suit une statistique exponentielle négative<sup>[19]</sup>:

$$P_r(\xi = \xi_0) = \frac{1}{\langle \xi \rangle} \exp\left(-\frac{\xi_0}{\langle \xi \rangle}\right), \text{ de moyenne } \langle \xi \rangle \text{ et de variance } \langle \xi \rangle^2.$$

Selon cette statistique, il est davantage probable d'obtenir de faibles intensités, tout en n'excluant pas des réalisations très intenses. Ceci se traduit par la formation, dans la pupille de réception, de figures de tavelures, ou « speckle » en anglais, composées de tâches brillantes sur un fond globalement sombre.

La figure 3.4 montre des simulations de figures de speckle calculées pour deux profils de champs incidents, tous deux gaussiens mais de focalisation différente au niveau de la cible. Ces figures illustrent le lien de quasi-proportionnalité entre l'étalement spatial du faisceau sur la cible et l'étalement spectral (en fréquence spatiale) de la figure de speckle obtenue dans la pupille de réception. Le lecteur intéressé trouvera en ref.[19] plus de détails sur cette relation : on peut la voir comme une conséquence du théorème de Van Cittert-Zernike, celui-ci énonçant que le degré de cohérence spatiale entre deux points éclairés par une source spatialement incohérente est d'autant plus faible que la source est étendue. Un faisceau fortement focalisé sur la cible produit donc dans la pupille de réception une figure de speckle à spectre spatial étroit, caractérisée par des tavelures de grandes dimensions. A l'inverse, un faisceau peu focalisé produit des tavelures à spectre spatial étendu, c'est à dire de petites dimensions.



**Figure 3.4 : Simulations de figure de speckle sur la pupille de réception, pour une distance de rétropropagation  $z_0=30$  m (calcul effectué par calcul numérique de l'éq.(3.1) ).**  
**Figure de gauche : « beam waist » du faisceau sur la cible = 10 mm**  
**Figure de droite : « beam waist » du faisceau sur la cible = 1 mm**  
**Le « beam waist » est défini comme le rayon à  $1/e^2$  de l'intensité lumineuse.**

Dans le cas de la diffusion par les particules, notons que le théorème central limite ne s'applique pas automatiquement a priori, car le nombre de particules participant à la construction du champ instantané peut être très restreint. On peut cependant montrer que la statistique du champ rétrodiffusé par une somme d'aérosols converge rapidement vers la distribution gaussienne complexe centrée, avec pour cela pas plus de 6 aérosols nécessaires<sup>[20]</sup>.

### 3.1.3 Cohérence temporelle du signal lidar

Nous l'avons dit, l'éclairement instantané de la pupille de réception suit une statistique exponentielle négative. Cependant, si le temps d'intégration du détecteur auquel est associée la pupille excède la durée de cohérence temporelle du signal, il y a sommation sur le détecteur, ou de manière équivalente sur la pupille de réception, de multiples figures de speckle décorréelées.

Pour un spectre gaussien de paramètre  $\gamma$ (demi-largeur à  $1/e$ ), la durée de cohérence  $\tau_{coh}$  des trains d'ondes, définie comme la largeur totale à  $1/e$  de la transformée de Fourier du spectre, est :

$$\tau_{coh} = \frac{2}{\pi\gamma}$$

La durée de cohérence du spectre Mie est au mieux égale à celle de la source laser, c'est-à-dire égale à la durée d'impulsion (typiquement quelques ns). Celle du spectre Rayleigh est beaucoup plus courte, de l'ordre de 0,3 ns à 288 K. Pour un système lidar, on peut traduire ces temps de cohérence en distances de cohérence de l'atmosphère via la relation  $d_{coh} = c\tau_{coh} / 2$ . Les ordres de grandeurs sont alors :  $d_{coh}^{Mie} \approx 1,5$  m (pour une impulsion laser de durée  $\tau_p=10$  ns), et  $d_{coh}^{Rayleigh} \approx 4,5$  cm .

Le nombre  $M$  de figures de speckle sommées de manière incohérente sur l'optique de réception dépend de la profondeur effective  $\Delta z_{eff}$  du volume de mesure du lidar :

$$M = \frac{\Delta z_{eff}}{d_{coh}} \quad (3.2)$$

Cette profondeur  $\Delta z_{eff}$  peut être définie, par exemple, comme celle depuis laquelle émane plus de 90 % du signal reçu pendant la durée d'intégration du détecteur. Elle sera déterminée dans un cas pratique en section 3.2.2.

La statistique d'éclairement d'une somme incohérente de  $M$  figures de speckle s'obtient par  $(M-1)$  convolutions de la statistique exponentielle négative. Le résultat obtenu est une loi gamma de paramètre  $M$  définie par :

$$P_r(\xi = \xi_0) = \frac{M^M}{\Gamma(M)} \frac{\xi_0^{M-1}}{\langle \xi \rangle^M} e^{-M \frac{\xi_0}{\langle \xi \rangle}}, \text{ de moyenne } \langle \xi \rangle \text{ et de variance } \langle \xi \rangle^2 / M. \quad (3.3)$$

Dans cette expression,  $\Gamma(M)$  désigne la fonction eulérienne dite « fonction gamma ». Adoptant la définition de Goodman<sup>[19]</sup>, le contraste  $V$  d'une figure de speckle peut être évalué par le rapport de l'écart type de la distribution à sa moyenne, soit  $V = 1/\sqrt{M}$ .

La figure 3.5 montre l'effet d'une accumulation de figures de speckle décorellées sur la pupille de réception. Au delà de  $M=100$ , le contraste de la figure obtenue est inférieur à 10 %, autrement dit, l'éclairement est quasiment homogène.

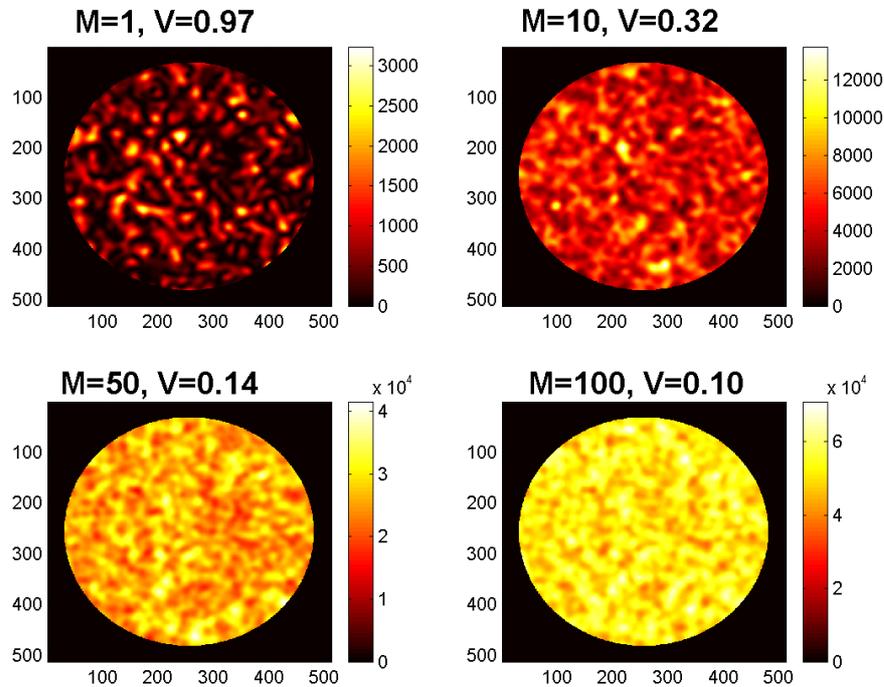


Figure 3.5 : Somme incohérente de figures de speckle sur la pupille de réception

En pratique, la profondeur effective d'un sondage lidar pendant une mesure excède souvent 4,5 m (plus de 100 fois la distance de cohérence du signal Rayleigh) ; ce sera notamment notre cas. Dans ces conditions, l'éclairement obtenu par rétrodiffusion Rayleigh, en moyenne sur le temps d'intégration du détecteur, est quasiment homogène dans la pupille de réception et tend vers la moyenne statistique du speckle, calculée ci-après. Cette même conclusion ne s'applique pour la diffusion Mie que pour des distances de sondages beaucoup plus étendues, de l'ordre de 150 m. La profondeur de champ d'un lidar courte portée étant limitée à des valeurs généralement inférieures (voir section 3.2.2), on peut s'attendre à ce que la puissance du signal Mie ne soit pas tout à fait moyennée, et conserve une certaine variabilité due au phénomène aléatoire de speckle.

Cependant nous avons vu en section 2.2.3 qu'à 355 nm, le rapport de rétrodiffusion  $\alpha$  est généralement faible, et que par conséquent, le signal Rayleigh domine sur le signal Mie. L'éclairement de la pupille devrait donc être globalement homogène, et le phénomène de speckle peu visible même aux basses altitudes (sauf zones très denses en particules). Ainsi, dans les chapitres 3-4-5, nous négligerons totalement le speckle. Nous le retrouverons toutefois au chapitre 6, dans un autre contexte, et nous aurons alors recours à certains des éléments théoriques présentés ici.

### 3.1.4 Puissance moyenne reçue par la pupille

Dans le cas où le speckle est complètement moyenné temporellement, l'éclairement de la pupille est égal à la moyenne statistique du speckle. Cet éclairement moyen, en  $W/m^2$ , nous est donné par :

$$\langle \xi_{pup}(\vec{r}) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_{pup}(\vec{r})|^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_{pup}(\vec{r})| |E_{pup}^*(\vec{r})| \right\rangle$$

où le symbole  $\langle \rangle$  représente la moyenne sur les réalisations de speckle. En utilisant l'expression du champ de l'éq.(3.1), et en imbriquant les intégrales, il vient :

$$\langle \xi_{pup}(\vec{r}) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \int_{z_0}^{z_0 - \frac{c\tau_p}{2}} \iint_{plan\ z} \int_{z_0}^{z_0 - \frac{c\tau_p}{2}} \iint_{plan\ z'} \frac{c}{2} \frac{A^2}{\lambda^2 z z'} |\tilde{E}_{inc}(\vec{\rho}, z)| |\tilde{E}_{inc}(\vec{\rho}', z')| h(\vec{\rho}, z) h^*(\vec{\rho}', z') e^{-jk\vec{r} \cdot \left( \frac{\vec{\rho}}{z} - \frac{\vec{\rho}'}{z'} \right)} d\vec{\rho}' dz' d\vec{\rho} dz \right\rangle$$

Dans cette expression, la seule composante aléatoire est celle déterminant la phase du champ rétrodiffusé. Or, nous avons vu que  $\langle h(\vec{\rho}, z) h^*(\vec{\rho}', z') \rangle = \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') \delta(z - z')$ . Il en résulte l'expression suivante de l'éclairement moyen :

$$\langle \xi_{pup} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c \int_{z_0}^{z_0 - \frac{c\tau_p}{2}} \iint_{plan\ z} \frac{c}{2} \frac{A^2}{(\lambda z)^2} |\tilde{E}_{inc}(\vec{\rho}, z)|^2 d\vec{\rho} dz$$

Comme il se doit, cette expression n'est plus dépendante de  $\vec{r}$ , ce qui traduit un éclairement homogène de la pupille de réception. On voit également apparaître l'éclairement incident  $\tilde{\xi}_{inc} = \varepsilon_0 c |\tilde{E}_{inc}|^2 / 2$ . On obtient alors :

$$\langle \xi_{pup} \rangle = \frac{c}{2} \int_{z_0}^{z_0 + \frac{c\tau_p}{2}} \iint_{plan\ z} \frac{A^2}{(\lambda z)^2} \tilde{\xi}_{inc}(\vec{\rho}, z) d\vec{\rho} dz$$

L'intégration en  $\vec{\rho}$  fait apparaître la puissance incidente  $\tilde{P}_{inc}(z)$ , et si l'on considère par ailleurs que  $z_0 \gg c\tau_p/2$ , on peut négliger la variation en  $1/z^2$  dans l'intégrale, et obtenir le résultat suivant :

$$\langle \xi_{pup} \rangle \approx \frac{A^2}{(\lambda z_0)^2} \frac{c}{2} \int_{z_0}^{z_0 + \frac{c\tau_p}{2}} \tilde{P}_{inc}(z) dz$$

Dans cette expression, l'intégrale est tout simplement égale à l'énergie  $E_P$  de l'impulsion. Ainsi, la puissance moyenne, en Watt, reçue dans une pupille de réception de surface  $S_r$ , est telle que :

$$P_{pup} \approx \frac{c}{2} \frac{A^2}{\lambda^2} E_P \frac{S_r}{z_0^2}$$

On obtient ici le résultat de l'optique géométrique, à savoir que la puissance reçue est proportionnelle à l'angle solide  $S_r / z_0^2$  sous-tendu par la pupille vue depuis la cible diffusante. Nous pouvons identifier le coefficient  $A^2 / \lambda^2$  avec le coefficient de rétrodiffusion  $\beta_\pi$ . En effet, dans le cadre de l'optique géométrique, l'énergie intégrée dans la pupille pendant le temps  $dt$  est donnée par l'équation lidar suivante (intuitive par l'analyse dimensionnelle) :

$$P_{pup} dt \approx \beta E_p \frac{S_r}{z_0^2} dz \quad \text{avec } dz = cdt/2 \quad (3.4)$$

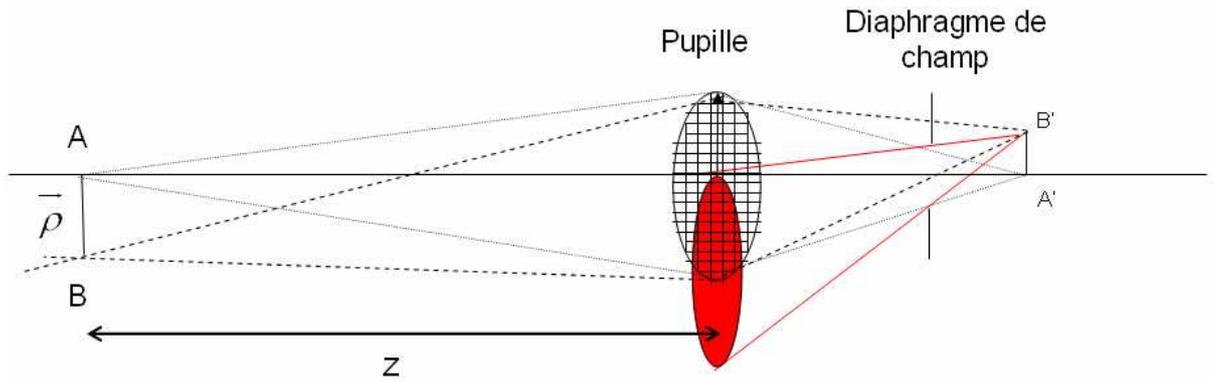
Nous en déduisons que  $|A| = \lambda \sqrt{\beta_\pi}$  en  $m^{1/2}$ .

## **3.2. L'approche par l'optique des rayons**

Comme nous venons de le constater, lorsque le phénomène de speckle est moyenné temporellement, le cadre de l'optique des rayons est suffisant pour calculer l'énergie du signal lidar collecté par la pupille de réception de l'instrument. Ce cadre va nous permettre de calculer le signal lidar « utile », c'est-à-dire disponible pour la mesure souhaitée. Car il ne suffit pas de collecter le signal sur la pupille de réception ; encore faut-il, de là, le transmettre efficacement jusqu'à l'analyseur spectral.

### ***3.2.1 Phénomène de vignettage***

La problématique du transfert d'énergie de la pupille au diaphragme de champ du système de réception (pour nous une fibre optique) est illustrée sur la figure 3.6.



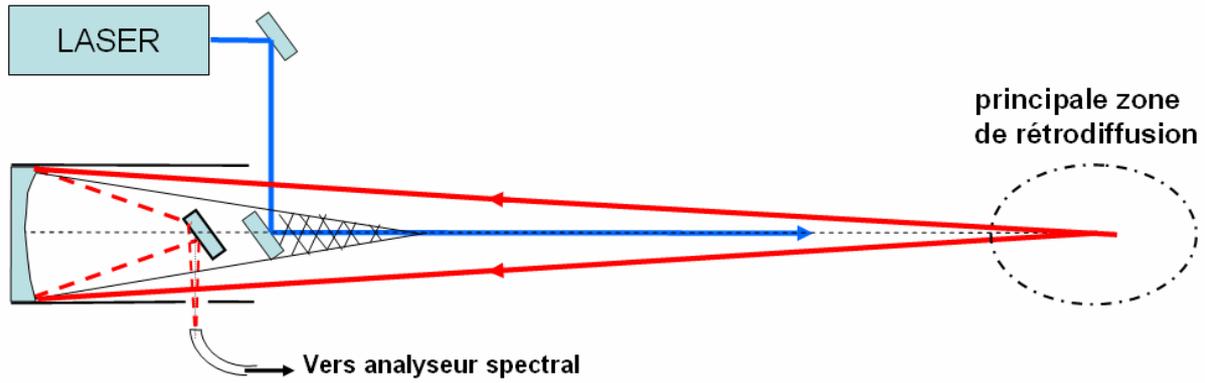
**Figure 3.6: Illustration de l'effet de vignettage**

Cette figure montre que le signal issu du point A et collecté par la pupille d'entrée est intégralement restitué au point image A'. En revanche, une fraction du signal issu de B et collecté par la pupille d'entrée n'est pas transmise au point conjugué B'. Une partie des rayons ne pénètre pas dans la fibre : c'est le phénomène de vignettage. Pour calculer l'énergie transférée de B à B', l'angle solide à prendre en compte dans l'équation lidar (3.4) est donc  $S/z^2$  avec  $S \leq S_r$ .

Cette surface S dépend des coordonnées  $(\bar{\rho}, z)$  du point objet B. On peut la calculer numériquement de façon simple, en réalisant un maillage de la pupille en petits éléments de surface, et en déterminant le nombre de ces éléments vérifiant l'équation du volume interne du cône issu de B' et s'appuyant sur le contour du diaphragme de champ.

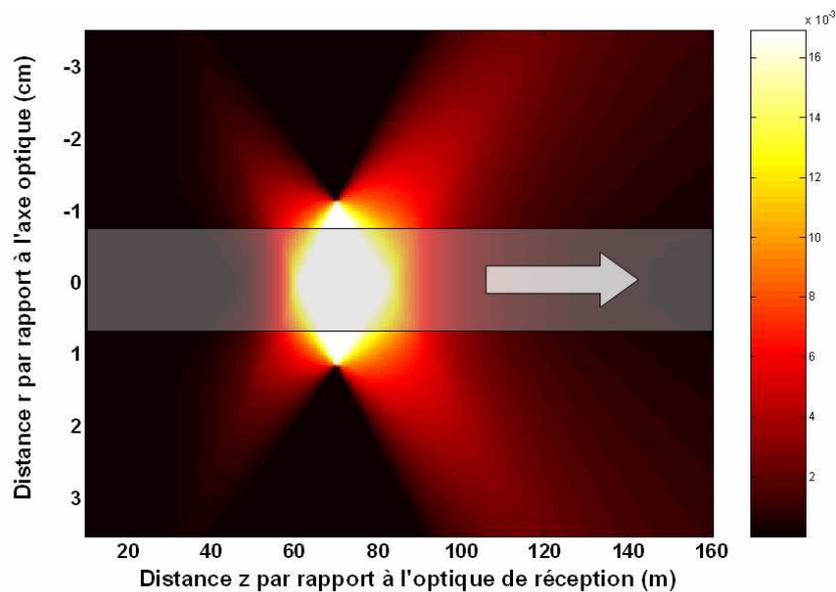
### **3.2.2 Modélisation d'un lidar coaxial à réception fibrée**

Illustrons la méthode de calcul présentée ci-dessus en prenant l'exemple d'une architecture de lidar coaxial à réception fibrée, qui sera par la suite notre choix de réalisation instrumentale. Représentée sur la figure 3.7, cette architecture a pour pupille d'entrée le miroir primaire d'un télescope de Newton, et pour diaphragme de champ le coeur d'une fibre optique disposée à proximité du plan focal du miroir primaire. Le miroir secondaire du télescope fait obstruction à la pupille d'entrée, de même que le miroir de déflexion du laser émis. Cet effet supplémentaire d'obstruction est modélisable simplement en excluant du maillage de la pupille les éléments contenus dans un disque de diamètre égal à celui du plus grand des miroirs d'obstruction.



**Figure 3.7 : Architecture d'un lidar coaxial à réception fibrée.**  
**La zone hachurée est la zone d'obstruction du miroir secondaire.**

Un exemple de surface utile de pupille  $S(\vec{\rho}, z)$ , calculée dans cette configuration et pour un télescope focalisé à 70 m de distance, est présenté sur la figure 3.8. La surface représentée possède la symétrie de révolution autour de l'axe optique et peut donc être notée  $S(\rho, z)$  où  $\rho$  est la variable radiale scalaire définie par  $\rho = |\vec{\rho}|$ .



**Figure 3.8 : Surface de pupille utile  $S(\rho, z)$  en fonction de ses deux variables. La valeur de la surface est donnée par le code de couleur. Le calcul s'appuie sur les paramètres suivants : le miroir primaire est de diamètre  $D=152$  mm, ouvert à  $f/4$  et focalisé à 70 m ; le miroir d'obstruction est de diamètre 40 mm ; la fibre optique est de diamètre  $\phi=200$   $\mu\text{m}$ . On a également représenté un faisceau laser de diamètre total 16 mm (beam waist de 4mm) traversant le champ de vision du télescope.**

Notons sur cette figure 3.8 que seul le plan de mise au point à 70 m est exempt de vignettage (pas de zone d'éclairage partiel). Par ailleurs, la surface  $S(\rho, z)$  est nulle en champ proche ( $<40$  m) et en champ lointain ( $>140$  m). Ceci illustre l'intérêt de l'architecture coaxiale, qui permet de définir géométriquement une porte de mesure finie, par combinaison des effets de profondeurs de champ et d'obstruction.

De par la symétrie de révolution de la fonction  $S(\bar{\rho}, z)$  autour de l'axe du lidar, et en supposant que le profil spatial du faisceau laser possède cette même symétrie, nous pouvons calculer la puissance « utile » entrant dans la fibre au temps  $t_0$ , de la manière suivante:

$$P_{\text{fibre}}(t_0) = \beta_{\pi} \frac{c}{2} \int_{z_0}^{z_0 + \frac{c\tau_p}{2}} \frac{1}{z^2} \left( \int_0^{\infty} \tilde{\xi}_{\text{inc}}(\rho, z) S(\rho, z) 2\pi\rho d\rho \right) dz \quad (3.5)$$

Les aspects de focalisation ou de divergence du laser au niveau de la cible atmosphérique peuvent être pris en compte, mais pour plus de simplicité ici, et dans la mesure où cela n'a que peu d'influence sur le résultat, nous considérerons que l'éclairement incident est homogène sur un disque de rayon  $w$ , invariable dans l'espace. Par ailleurs on suppose également que l'impulsion est un créneau de durée  $\tau_p$  et d'énergie totale  $E_p$ . On a alors l'éclairement incident suivant :

$$\tilde{\xi}_{\text{inc}}(z) = \frac{1}{\pi w^2} \frac{E_p}{c\tau_p / 2}$$

En insérant cette expression dans l'éq.(3.5), et en supposant de plus que  $z_0 \gg c\tau_p / 2$ , il vient:

$$P_{\text{fibre}}(t_0) \approx \gamma_{\text{dir}}(z_0) \beta_{\pi} \frac{c}{2} E_p \frac{S_r}{z_0^2} \quad \text{avec} \quad \gamma_{\text{dir}}(z_0) = \frac{1}{S_r \pi w^2} \int_0^w S(\rho, z_0) 2\pi\rho d\rho$$

Il n'est pas déplacé d'appeler « rendement direct du lidar » le facteur  $\gamma_{\text{dir}}$ , par analogie avec la définition du « rendement hétérodyne » utilisé dans le domaine des lidars cohérents. Ce facteur traduit l'efficacité de transmission du signal de la pupille à la fibre de réception. La courbe du rendement direct est présentée sur la figure 3.9, pour les mêmes paramètres instrumentaux que dans la figure 3.8. On s'aperçoit que le couplage est optimal sur une vingtaine de mètres autour du point de focalisation.

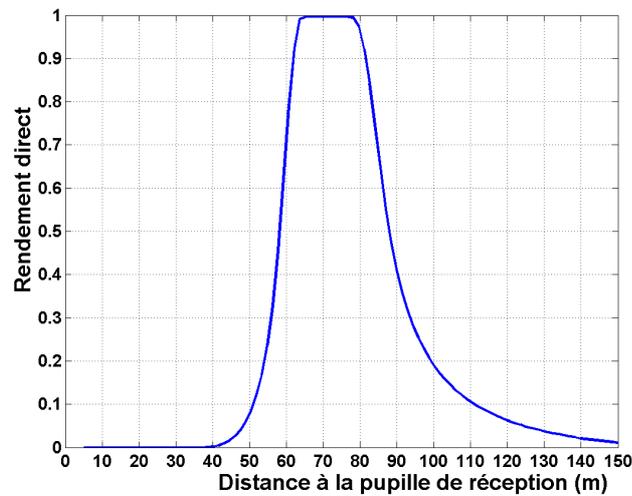


Figure 3.9 : Rendement direct du lidar en fonction de la distance de sondage

On peut également, à partir de l'expression précédente, définir la puissance photonique « métrique » rétrodiffusée, c'est-à-dire le nombre de photons utiles rétrodiffusés par mètre de propagation, par la relation :

$$\tilde{N}_{\text{fibre}}(z_0) = \frac{2}{c} \frac{P_{\text{fibre}}(t_0)}{h_{pl} \nu_L} = \gamma_{\text{dir}}(z_0) \beta_{\pi} N_p \frac{S_r}{z_0^2}$$

où  $h_{pl}$  est la constante de Planck et  $N_p$  le nombre de photons qui composent l'impulsion laser.

Cette puissance photonique est tracée en figure 3.10 pour une impulsion de 10 mJ à 355 nm, et toujours les mêmes paramètres instrumentaux. On constate que le pic de signal est obtenu légèrement devant le plan de mise au point à 70 m. Ceci est dû à la pondération en  $1/z^2$  qui favorise les courtes distances.

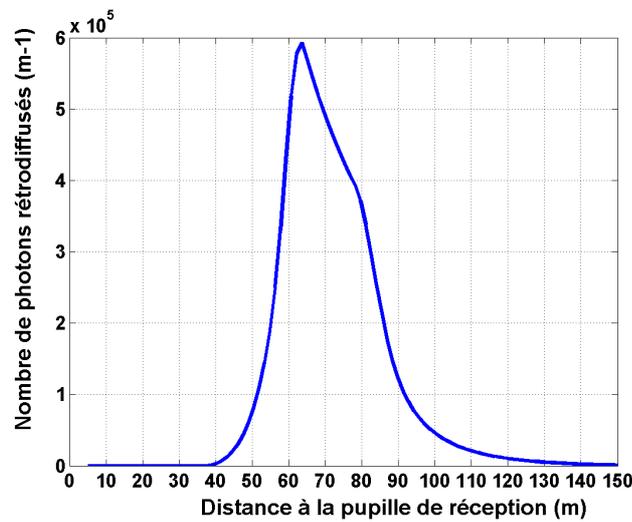


Figure 3.10 : Puissance photonique rétrodiffusée par mètre de propagation

Dans cet exemple, le nombre total de photons utiles rétrodiffusés entre 0 et 150 m s'élève à environ 16 millions. L'intervalle spatial compris entre 50 et 100 m fournit 94 % du signal total. On peut donc considérer que la profondeur effective du volume de mesure de ce lidar est de  $\Delta z_{\text{eff}}=50$  m environ. Dans le cas d'un signal Rayleigh dominant, on a donc sur le détecteur sommation incohérente de  $M=1100$  tavelures environ, d'après l'éq.(3.2), pendant la durée d'intégration du signal. Dans ces conditions, il est bien justifié de négliger le phénomène de speckle. En revanche, dans le cas d'un signal Mie dominant, le nombre de tavelures sommées de manière incohérente se réduit à  $M=30$  (pour un laser de durée d'impulsion 10 ns). On doit alors observer un certain contraste de speckle résiduel sur le détecteur.

Notons pour finir que les précédents calculs du nombre de photons utiles et du rendement direct font l'hypothèse implicite que tout le signal entrant dans le cœur de la fibre y est guidé sans pertes. La condition de guidage peut être obtenue si l'angle d'ouverture du télescope demeure inférieur à l'ouverture numérique (ON) de la fibre, soit :

$$\frac{D}{2f} < \text{asin}(O.N.), \text{ ou encore } f/D > (2\text{asin}(O.N))^{-1}$$

où  $f/D$  est le nombre d'ouverture du télescope.

Pour des fibres classiques d'ON=0,22, le nombre d'ouverture requis est ainsi  $f/D > 2,3$ . Ces fibres conviennent donc parfaitement pour un télescope ouvert à  $f/D=4$ .

En revanche, la condition de guidage « sans pertes » n'est bien sûr jamais obtenue. Les pertes sont de deux sortes : pertes à l'injection à l'interface d'entrée, et pertes par absorption/diffusion dans la fibre elle-même. La première est impossible à modéliser car le nombre de modes pouvant se propager dans ce type de fibre est de plusieurs dizaines de milliers (60 000 modes pour  $\phi=200 \mu\text{m}$  et une ON=0,22). Nous supposons qu'une perte par couplage de 10 % est une valeur raisonnable. La seconde peut être spécifiée par les constructeurs, et se situe typiquement autour de 30 dB/km à 355 nm pour les fibres choisies.

### 3.3. Conclusion du chapitre

Le tableau suivant récapitule les paramètres instrumentaux du lidar dont nous avons calculé le bilan de liaison au cours de ce chapitre. Nous ajoutons simplement ici des facteurs de pertes liés aux transmissions non unitaires des optiques et de la fibre de réception:

<b>Laser</b>	
Longueur d'onde/fréquence optique	$\lambda_L = 355 \text{ nm}, \nu_L = 845 \text{ THz}$
Energie par impulsion	$E_P = 10 \text{ mJ}$
Rayon du faisceau (supposé collimaté)	$w = 4 \text{ mm}$
<b>Télescope de réception</b>	
Diamètre miroir primaire	152,4 mm
Focale miroir primaire	609,6 mm
Diamètre d'obstruction du secondaire	40 mm
Transmission du télescope	$T_{\text{tel}} = 0,9$ (défauts des optiques)
<b>Fibre optique de guidage</b>	
Diamètre de coeur	$\phi_{\text{fib}} = 200 \text{ }\mu\text{m}$
Ouverture numérique	$\text{ON} = 0,22$
Plan de mise au point	$z = 70 \text{ m}$
Transmission de la fibre	$T_{\text{fib}} = 0,9$ (absorption/diffusion, injection)
Porte spatiale d'intégration du signal	Signal intégré entre 0 et 150 m
Profondeur effective du volume de mesure	$\Delta z_{\text{eff}} = 50 \text{ m}$ (intervalle [50 m, 100 m])
<b>Nombre de photons utiles rétrodiffusés</b>	<b><math>K \sim 13 \times 10^6</math> photons</b>

Soulignons que la quantité notée  $K$  dans ce tableau correspond au nombre de photons qui seraient obtenus à l'entrée de l'analyseur spectral, dans le cas d'une expérience de rétrodiffusion menée dans une atmosphère purement moléculaire (rapport de diffusion  $\alpha=1$ ) et aux CNTP (densité atmosphérique  $\rho_0$ ).

Avec cette définition, et d'après les résultats obtenus en fin de chapitre 2, l'expression du spectre Rayleigh-Mie rétrodiffusé par une atmosphère de vitesse radiale  $u_r$ , température  $T$ , densité  $\rho$ , et rapport de diffusion  $\alpha$ , pourra s'écrire dans le cas d'un laser monochromatique par :

$$R(\nu) = K \rho^* \alpha \left[ \frac{1}{\alpha \gamma_R(T) \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_c(u_r)}{\gamma_R(T)}\right)^2} + (1 - 1/\alpha) \delta_{\nu - \nu_c(u_r)} \right] \quad (3.6)$$

avec  $\rho^*$  la densité atmosphérique normalisée  $\rho^* = \rho/\rho_0$ . Dans toute la suite, et par commodité d'écriture, nous appellerons simplement « densité » ce paramètre normalisé et ne ferons plus référence à la densité réelle  $\rho$ . Le nombre total de photons reçus est  $N_{\text{tot}} = K \rho^* \alpha$ .



## Chapitre 4

### Etude comparative de deux techniques d'analyse spectrale

Nous abordons maintenant le problème de l'analyse spectrale du signal lidar. La figure 4.1 nous rappelle que le signal se présente comme la somme des spectres Mie et Rayleigh rétrodiffusés. Le rôle de l'analyseur est de permettre la mesure, à partir du spectre du signal, des paramètres atmosphériques qui le régissent. Ces paramètres sont au nombre de quatre : vitesse  $u_r$ , densité  $\rho^*$ , température  $T$ , et rapport de diffusion  $\alpha$ .

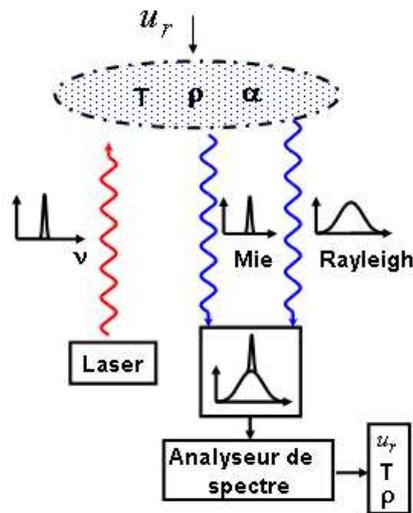


Figure 4.1 : Rôle de l'analyseur spectral.

Seules la mesure des paramètres ( $u_r$ ,  $\rho^*$ ,  $T$ ) nous intéresse pour les applications présentées au chapitre 1, et trois constats nous indiquent que celle-ci est théoriquement possible. En effet :

- l'intensité du signal Rayleigh est proportionnelle à la densité,
- la largeur spectrale du signal Rayleigh est fonction de la température,
- la fréquence centrale du signal Rayleigh-Mie est fonction linéaire de la vitesse.

Cependant, en ce qui concerne les mesures de température et densité, le paramètre  $\alpha$  fait office de « trouble-fête » : en effet, l'intensité et la largeur effective du spectre Rayleigh-Mie dépendent aussi de sa valeur. Ainsi, pour réaliser des mesures non biaisées sur les paramètres  $T$  et  $\rho^*$ , deux stratégies sont possibles :

- soit éliminer le signal Mie par filtrage spectral: l'inconvénient majeur de cette méthode est qu'il faut filtrer toute la plage de fréquence sur laquelle le signal Mie est susceptible de se déplacer par effet Doppler. Avec par exemple 300 m/s de dynamique pour un avion, cela revient à supprimer une bonne moitié du signal Rayleigh ;
- soit conserver l'intégralité du signal et chercher à mesurer  $\alpha$  en même temps que les trois autres paramètres. Nous choisirons cette deuxième stratégie, plus intéressante car elle conserve toute l'information du signal.

Le problème qui se pose est donc de savoir mesurer non pas trois, mais bien quatre paramètres atmosphériques : vitesse, densité, température, et rapport de diffusion Mie/Rayleigh. Pour ce faire, il existe principalement deux méthodes d'analyse spectrale.

La première méthode consiste à enregistrer temporellement le signal rétrodiffusé, pour en déduire des informations sur son spectre. Par exemple on peut calculer le spectre par transformée de Fourier du signal temporel enregistré. Les fréquences optiques étant cependant trop grandes pour être détectées et échantillonnées correctement, ceci n'est possible que si le spectre optique est transféré dans une gamme de fréquences plus faibles, par exemple les radiofréquences. C'est le principe de la **détection hétérodyne**. Cette technique a connu de spectaculaires développements technologiques dans le domaine des lidars infrarouges (1,5  $\mu\text{m}$  et 2  $\mu\text{m}$  notamment), avec l'arrivée des composants fibrés issus des télécommunications (fibre à maintien de polarisation, coupleurs, circulateurs...). Aujourd'hui, un lidar hétérodyne infrarouge peut être rendu extrêmement compact et robuste, ce qui rend cette technologie très attractive pour des applications aéroportées. Malheureusement, si le bilan de liaison atteint par les lidars infrarouges actuels est suffisant pour permettre l'analyse d'un spectre étroit de type « Mie », il ne l'est pas pour un spectre large de type « Rayleigh ». Le lecteur intéressé en trouvera la démonstration dans l'annexe A de ce mémoire. L'option d'une détection hétérodyne à plus faible longueur d'onde, qui augmenterait le niveau de signal Rayleigh (proportionnel à  $\lambda^{-4}$ ) se heurte quant à elle à d'importantes difficultés technologiques (composants fibrés plus rares, échantillonnage de plus en plus rapide...). Au final, la détection hétérodyne ne semble donc pas bien adaptée pour l'analyse du signal Rayleigh.

La seconde méthode consiste à analyser le contenu spectral du signal rétrodiffusé « directement » dans le domaine optique, à l'aide de filtres fréquentiels. Ce mode d'analyse est communément appelé **détection directe**. Dans ce type de détection, le choix de la longueur d'onde est beaucoup moins critique, en matière de technologie employée, qu'en détection hétérodyne. Pour maximiser le signal Rayleigh, on a donc intérêt à choisir une courte longueur d'onde. Nous utiliserons ici la longueur d'onde de 355 nm, qui combine plusieurs avantages : elle est facilement générée (triplage de fréquence d'une source classique Nd :YAG), elle peut être efficacement détectée (capteur silicium classique), et elle procure une sécurité oculaire accrue par rapport au domaine visible.

Au niveau de l'analyse spectrale, la détection directe repose sur l'utilisation de filtres spectraux. On peut par exemple balayer un filtre spectral très fin, de type Fabry-Perot, le long du spectre incident afin de reconstituer ce dernier. Une autre solution consiste à utiliser plusieurs filtres statiques, calés sur différentes fréquences du spectre, et à diriger une fraction de signal sur chacun d'entre eux, l'ensemble des signaux détectés en sortie permettant alors de reconstruire le spectre incident. On parle dans ce cas d'un analyseur spectral multicanal, dont le principe est illustré sur la figure 4.2. Au cours de ce chapitre, c'est ce type de solution que nous allons examiner plus en détail.

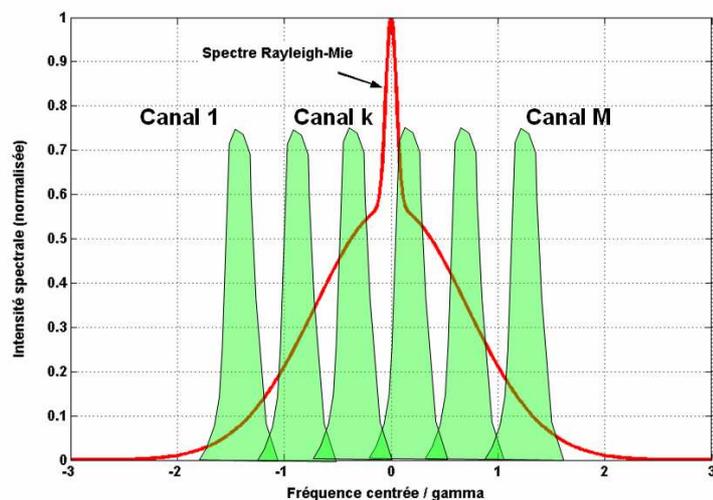


Figure 4.2 : Principe de l'analyseur spectral multicanal

La famille des analyseurs multicanaux se subdivise à son tour en plusieurs types d'instruments, selon le nombre de canaux utilisés. Dans le domaine du lidar, on distingue essentiellement les **analyseurs à deux canaux**<sup>[21][22][23]</sup> et les analyseurs à grand nombre de canaux (>10), généralement nommés **analyseurs à imagerie de franges** pour une raison qui deviendra claire par la suite. Quelques systèmes se trouvent en zone médiane avec trois ou quatre canaux d'analyse<sup>[23][24]</sup>. Dans notre cas, puisque le nombre de paramètres indépendants à mesurer est de quatre, un minimum de quatre canaux d'analyse est nécessaire. Afin de conserver la plus grande généralité d'étude, nous avons choisi de porter notre attention sur les systèmes à imagerie de franges, la théorie d'un système à 2, 3 ou 4 canaux pouvant s'en déduire aisément.

Parmi les différents types d'analyseurs à imagerie de franges, le plus connu à ce jour, et le plus utilisé, est sans conteste le **Fabry-Perot imageur (FPI)**. Les performances de cet analyseur ont été étudiées par de nombreux auteurs<sup>[25][26][27]</sup>, et, bien que sa mise en œuvre soit assez délicate, des efforts remarquables ont été entrepris pour aboutir à des versions de FPI stabilisés et embarqués<sup>[1][28]</sup>. Toutefois, ce n'est que très récemment que les premières mesures de vitesse en haute altitude à l'aide d'un FPI ont été rapportées<sup>[5]</sup>, après plusieurs tentatives inabouties ou non concluantes<sup>[29][30]</sup>. Par ailleurs, et malgré tous ces efforts, la faisabilité des mesures de température et densité atmosphériques par FPI reste à ce jour non démontrée expérimentalement à notre connaissance.

Il nous a donc semblé intéressant de chercher une solution alternative au FPI pour l'analyse spectrale. Le dispositif que nous proposons ici est un **Double Interféromètre de Michelson Imageur (DIMI)**, dont le principe trouve son origine dans les travaux de Bruneau publiés en 2002-2003<sup>[31][32]</sup>. Dans ces deux articles, l'auteur étudie le potentiel d'un interféromètre imageur de Mach-Zehnder pour des mesures de vitesse et d'autres paramètres. Cependant il n'en apporte pas de démonstration expérimentale et n'aborde pas les possibilités de mesure de température et densité atmosphérique par ce dispositif. C'est donc à ses deux tâches, entre autres, que nous nous sommes attelés au cours de cette thèse.

Dans ce chapitre 4, nous chercherons d'abord à comparer, dans un cadre simplifié, les performances théoriques du FPI et du DIMI pour la mesure simultanée des paramètres de vitesse, température et densité. Après avoir précisé le cadre de validité de cette étude comparative, nous décrirons une méthode de calcul des performances d'un analyseur spectral

quelconque limité par le bruit quantique de photodétection. Nous appliquerons ensuite cette méthode au calcul des performances d'un instrument de référence que nous appellerons l'Analyseur de Spectre Idéal (ASI). Cet instrument nous fournira le point de comparaison auquel rapporter les performances des analyseurs FPI et DIMI étudiés ensuite.

## **4.1. Cadre de validité de l'étude comparée**

La performance d'un instrument se juge, en fin de compte, par la précision obtenue sur la mesure qu'il réalise, c'est-à-dire l'écart type d'erreur. Dans le cas d'un analyseur spectral, cet écart type d'erreur final va dépendre en général de nombreuses propriétés, notamment :

- la qualité du spectre analysé (intensité, largeur spectrale, bruit intrinsèque, fond solaire)
- la qualité des filtres spectraux (finesse spectrale, taux de transmission)
- la qualité des photodétecteurs (efficacité quantique, autres sources de bruit)
- la qualité de l'algorithme d'estimation utilisé (biais, précision).

Sur ces quatre critères, le FPI et le DIMI ne diffèrent fondamentalement que par le second : la fonction de filtrage spectral. Dans le cadre de cette étude comparative, nous prendrons donc les hypothèses communes suivantes sur les autres critères :

- la qualité du signal est limitée seulement par le bruit quantique (bruit de photon) ; le signal de fond solaire est nul ; l'élargissement spectral lié au laser est nul (laser considéré monochromatique)
- les photodétecteurs sont tous de même efficacité quantique  $\eta$ , et n'ajoutent pas de bruit supplémentaire
- l'estimateur est sans biais (pas d'erreur systématique) et de précision optimale, c'est à dire qu'il atteint la limite de précision théorique, également appelée « Borne de Cramer-Rao » (explicitée plus loin).

Ces hypothèses, dont la plupart seront réexaminées ultérieurement, ont ici l'avantage de nous placer dans une configuration de mesure optimale : les performances des analyseurs ASI, FPI et DIMI calculées dans ce chapitre seront donc des valeurs absolument maximales. Notons que nous réduisons la définition de l'analyseur spectral à l'appareil optique effectuant la fonction de filtrage, qui n'inclut donc pas les photodétecteurs.

## **4.2. Méthode de calcul des performances**

Considérons un analyseur spectral présentant  $M$  canaux d'analyse, tel que représenté sur la figure 4.2, chaque canal  $k$  étant constitué d'un filtre spectral suivi d'un photodétecteur. L'analyseur est chargé de mesurer les quatre paramètres atmosphériques de vitesse, densité, température, et rapport de diffusion, paramètres que nous rassemblons sous un seul et même vecteur  $\vec{\theta}$  à quatre dimensions défini par :  $(\theta_1 = u, \theta_2 = \rho^*, \theta_3 = T, \theta_4 = \alpha)$ .

Soient  $(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k \dots \sigma_M)$  les signaux, en nombre de photoélectrons, mesurés par les photodétecteurs des différents canaux spectraux. Même si l'analyseur est parfaitement calibré, ces signaux sont entachés d'un bruit de mesure qui leur confère un caractère aléatoire. Dans l'hypothèse retenue précédemment, et qui correspond au meilleur des cas, seul le bruit

quantique de photodétection est à considérer. La probabilité d'obtenir  $\sigma_k$  photoélectrons sur le détecteur  $k$  suit alors une statistique de Poisson telle que :

$$P(S_k = \sigma_k) = \frac{\langle S_k \rangle^{\sigma_k} e^{-\langle S_k \rangle}}{\sigma_k !} \quad (4.1)$$

où  $S_k$  est le nom de la variable aléatoire, et  $\langle S_k \rangle$  sa valeur moyenne (égale à sa variance).

L'évaluation de la précision maximale, avec laquelle cet analyseur à M canaux peut effectuer la mesure de l'un des paramètres du vecteur  $\vec{\theta}$ , peut être faite par le calcul de ses Bornes de Cramer-Rao (BCR). Les BCR représentent en effet l'écart type minimum de l'estimation que peut produire un estimateur non biaisé. Mathématiquement, ces bornes se définissent à partir des éléments diagonaux de l'inverse de la matrice de Fisher du système de mesure<sup>[33]</sup>. L'écart type minimal de mesure sur le paramètre  $\theta_i$  est ainsi :

$$\epsilon_{\theta_i} = (F^{-1})_{ii}^{1/2}$$

Avec F la matrice de Fisher définie par :

$$F_{ij} = -E \left[ \frac{d^2 \ln \Lambda(\vec{\theta})}{d\theta_i d\theta_j} \right] \quad (4.2)$$

Dans cette expression,  $E[X]$  représente l'opérateur d'espérance mathématique, appliqué ici sur des variables aléatoires correspondant aux dérivées secondes de la fonction dite de log-vraisemblance du signal. La fonction de vraisemblance, notée  $\Lambda(\vec{\theta})$ , mesure simplement la probabilité qu'a l'analyseur de fournir un jeu de signaux particulier ( $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k \dots \sigma_M$ ), compte tenu du fait que le spectre incident est de vecteur paramètre  $\vec{\theta}$ . Elle s'écrit comme une fonction de probabilité jointe :

$$\Lambda(\vec{\theta}) = P(S_1(\vec{\theta}) = \sigma_1 \dots S_k(\vec{\theta}) = \sigma_k \dots S_M(\vec{\theta}) = \sigma_M)$$

Si les canaux d'analyse sont statistiquement indépendants, hypothèse vérifiée dans la plupart des cas en détection directe, puisque chaque canal correspond à un détecteur physique différent, cette fonction de vraisemblance s'écrit comme le produit des lois de probabilités individuelles :

$$\Lambda(\vec{\theta}) = \prod_{k=1}^M P(S_k(\vec{\theta}) = \sigma_k) \quad (4.3)$$

Les lois de probabilités individuelles étant des lois de Poisson, la fonction de vraisemblance est compliquée mais le calcul de la matrice de Fisher est simple, puisqu'il fait intervenir le logarithme de cette fonction. En insérant l'éq.(4.1) dans (4.3), puis en calculant l'éq.(4.2), on obtient le résultat suivant :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{\langle S_k \rangle} \frac{d\langle S_k \rangle}{d\theta_i} \frac{d\langle S_k \rangle}{d\theta_j} \quad (4.4)$$

Notons que du fait de l'opérateur d'espérance mathématique, aucun jeu de données particulier n'intervient dans le calcul de la matrice : seules comptent les moyennes des signaux, qui sont déterministes.

Si l'on considère un grand nombre de canaux d'analyse séparés entre eux par de faibles écarts de fréquences, alors on peut donner une forme intégrale à la matrice de Fisher :

$$F_{ij}(\vec{\theta}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{S(\nu)} \frac{dS(\nu, \vec{\theta})}{d\theta_i} \frac{dS(\nu, \vec{\theta})}{d\theta_j} d\nu \quad (4.5)$$

où  $S(\nu)$  est une densité de photoélectrons par canal spectral.

### **4.3. Performances d'un Analyseur de Spectre Idéal**

Dans le meilleur des mondes, l'Analyseur de Spectre Idéal (ASI) serait constitué d'une infinité de canaux, échantillonnant uniformément le spectre incident sur toute son étendue, avec pour chaque canal une finesse spectrale infinie, c'est-à-dire une fonction de transmission de type delta de Dirac.

Dans ces conditions la matrice de Fisher du système se calcule via l'éq.(4.5), avec pour fonction  $S(\nu)$  le spectre incident du signal lidar, multiplié par l'efficacité quantique du détecteur. Si nous supposons que le signal incident est un spectre Rayleigh pur, nous avons d'après l'expression (3.6):

$$S(\nu) = \frac{N_{ASI}}{\gamma_R(T)\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_c(u_r)}{\gamma_R(T)}\right)^2} \quad (4.6)$$

avec  $N_{ASI} = K\eta\rho^*$  le nombre total de photoélectrons détectés par l'analyseur.

Le rapport de diffusion  $\alpha$  n'intervenant pas ici en tant que paramètre du spectre, le vecteur  $\vec{\theta}$  n'a que trois dimensions ( $\theta_1 = u_r, \theta_2 = \rho^*, \theta_3 = T$ ) et la matrice de Fisher est de dimension  $[3 \times 3]$ . En insérant directement l'éq.(4.6) dans l'éq.(4.5), on trouve rapidement que la matrice de Fisher est diagonale, et que les BCR correspondantes sont les suivantes:

$$\text{Pour la mesure de vitesse : } \varepsilon_{u_r} = \gamma_u / \sqrt{2N_{ASI}}, \text{ avec } \gamma_u = \sqrt{2k_B T / m}$$

$$\text{Pour la mesure de densité : } \varepsilon_{\rho^*} = \rho^* / \sqrt{N_{ASI}}$$

$$\text{Pour la mesure de température : } \varepsilon_T = T \sqrt{2 / N_{ASI}}$$

De manière logique, on constate que pour les trois paramètres, l'écart type de mesure est d'autant plus faible que l'énergie du signal est grande. Le gain en précision est proportionnel à  $(N_{ASI})^{-1/2}$ , ce qui est typique d'une mesure limitée par le bruit quantique de photodétection

(le rapport signal à bruit, c'est-à-dire moyenne sur écart type, du bruit de Poisson valant justement  $(N_{\text{ASI}})^{1/2}$ ).

L'erreur de mesure sur la vitesse est en outre proportionnelle à  $\gamma_u$ , paramètre qui décrit la largeur de la statistique de vitesse des molécules. Ceci explique pourquoi il est plus difficile d'effectuer une mesure de vitesse à partir d'un spectre Rayleigh qu'à partir d'un spectre Mie. En effet, pour un spectre Mie supposé gaussien, nous aurions la même expression de BCR pour la mesure de vitesse, mais avec  $\gamma_u$  de l'ordre de quelques m/s. Pour un spectre Rayleigh, nous avons  $\gamma_u=400$  m/s. Ainsi, à précision de mesure égale, le lidar Rayleigh nécessite environ 100 000 fois plus de signal qu'un lidar Mie !

Concernant les erreurs de mesures de température et de densité, nous noterons que, exprimées de manières relatives, elles ne dépendent que du nombre de photoélectrons détectés. Bien entendu, la mesure de température en absolu est donc d'autant moins précise que le spectre est large. La largeur de spectre est en revanche indifférente pour la mesure de densité.

Nous garderons à l'esprit les ordres de grandeurs suivants : si  $T= 273$  K, le nombre de photoélectrons nécessaires pour un Analyseur de Spectre Idéal est :

$N_{\text{ASI}}=10\ 000$  pour une erreur relative de 1 % sur la densité

$N_{\text{ASI}}=80\ 000$  pour une erreur absolue de 1 m/s sur la vitesse

$N_{\text{ASI}}=150\ 000$  pour une erreur absolue de 1 K sur la température.

Notons enfin que pour l'ASI, nous avons utilisé un modèle de spectre à 3 paramètres car la prise en compte du rapport de diffusion  $\alpha$  n'a pas de sens physique pour cet analyseur. En effet, dans l'hypothèse d'un laser monochromatique et d'un spectre Mie non élargi par la dispersion naturelle de vitesse, le spectre Mie est une fonction delta de Dirac. Comme les fonctions de transmission des canaux spectraux de l'ASI sont également des delta de Dirac, la précision de mesure sur  $\alpha$  est infinie (écart type nul), et ne produit donc aucun couplage d'erreur avec les paramètres  $T$  et  $\rho^*$ . Par contre, dans le cas des analyseurs réels étudiés ci-après, la précision de mesure de  $\alpha$  sera nécessairement limitée, et l'on devra utiliser le modèle à 4 paramètres de l'éq.(3.6) afin de prendre en compte les couplages d'erreurs de mesures entre paramètres (voir en section 4.4 l'interprétation de la matrice de Fisher).

#### **4.4. Performance d'un Fabry-Perot imageur**

L'utilisation d'un interféromètre de Fabry-Perot Imageur (FPI) pour des mesures multi-paramètres est un concept bien développé dans deux articles de McGill<sup>[25][34]</sup>. Nous utiliserons ici un formalisme similaire pour la modélisation du Fabry-Perot, notre contribution originale se situant au niveau de la méthode de calcul des performances.

La figure 4.3 rappelle le principe du Fabry-Perot :

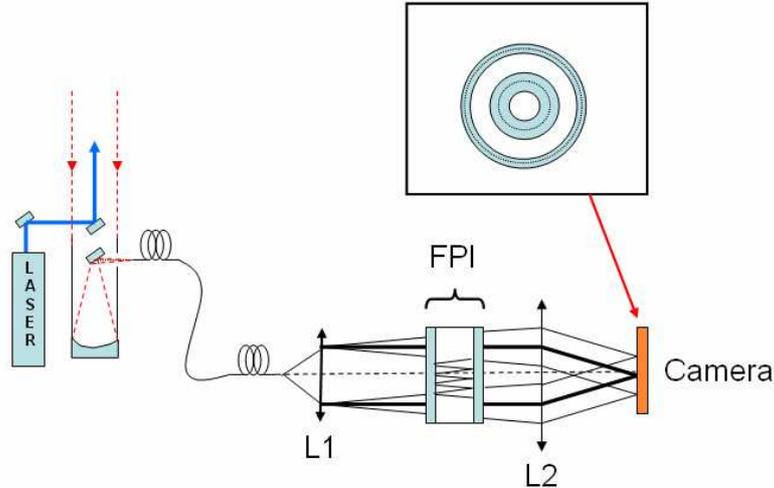


Figure 4.3 : Principe de l'interféromètre de Fabry-Perot Imageur (FPI)

Supposons que le signal lidar est convoyé depuis le télescope de réception jusqu'à l'analyseur par une fibre de guidage. A l'issue de cette dernière, le signal est collimaté par une lentille L1 et projeté sur un interféromètre plan de Fabry-Perot, composé de deux fines lames de verre parallèles et partiellement réfléchissantes, séparées par un espace d'air. Il s'en suit des interférences à ondes multiples en sortie de cavité, interférences qui ont lieu à l'infini puisque la lumière est collimatée. La figure d'interférences, composée d'anneaux, est visualisée sur une caméra CCD placée dans le plan focal d'une lentille d'imagerie L2. Ce sont ces franges d'interférences en anneaux qui jouent physiquement le rôle des canaux d'analyse spectrale, d'où le nom « d'analyseur à imagerie de franges ».

Considérons une cavité Fabry-Perot non absorbante, aux faces parfaitement planes et parallèles, de réflectivité  $R_0$  et séparées d'un espace d'air de longueur  $e$ . Le coefficient de transmission de la cavité illuminée par une onde plane monochromatique de fréquence  $\nu$  et d'angle d'incidence  $\psi$  est :

$$T(\nu, \psi) = \frac{1 - R_0}{1 + R_0} \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_0^p \cos \left( p 2\pi \frac{\nu}{c} \Delta_0 \cos \psi \right) \right]$$

où  $\Delta_0 = 2e$  est la différence de marche entre deux ondes successives à l'incidence normale. Cette expression est le développement en série de Fourier de la fonction de transmission classique d'un Fabry-Perot.

Si la cavité est éclairée par un continuum d'ondes planes monochromatiques balayant un certain intervalle d'angles d'incidences (cas d'une source étendue), cette fonction de transmission dessine au plan focal de la lentille d'imagerie une figure de franges circulaires périodiques, correspondant à des rayons d'incidences égales. Chaque anneau peut être associé à un certain angle d'incidence  $\psi$ , et en même temps joue le rôle d'un filtre spectral, puisque ne sont transmises en totalité jusqu'à lui que les fréquences  $\nu_m$  vérifiant la condition d'interférence constructive :  $\Delta_0 \cos \psi \nu_m / c = m$ , avec  $m$  entier. Ainsi, chaque anneau sur le détecteur joue le rôle d'un canal d'analyse spectrale.

D'un point de vue énergétique, le canal d'analyse correspondant à l'angle d'incidence  $\psi$  reçoit la lumière émanant de la portion élémentaire du cône d'éclairage dont l'angle solide infinitésimal est  $d\Omega = 2\pi \sin \psi d\psi$ . En supposant l'éclairage angulairement homogène et d'intensité unitaire, le nombre de photoélectrons détectés par ce canal est donc :

$$dN(\nu, \psi) = \frac{2\pi \sin \psi d\psi}{\Omega_0} \eta \frac{1-R_0}{1+R_0} \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_0^p \cos \left( p 2\pi \frac{\nu}{c} \Delta_0 \cos \psi \right) \right]$$

où  $\Omega_0$  est l'angle solide d'éclairage. Dans l'approximation des petits angles, nous avons la relation  $\Omega_0 = \pi \varphi^2$ , où  $\varphi$  est le demi-angle d'ouverture du cône d'éclairage. Il est alors commode de faire le changement de variable  $y = \psi^2$ . On obtient:

$$dN(\nu, y) = \frac{dy}{\varphi^2} \eta \frac{1-R_0}{1+R_0} \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_0^p \cos \left( p 2\pi \frac{\nu}{c} \Delta_0 (1 - y/2) \right) \right]$$

La quantité  $dy$  correspond bien à la « distance » qui sépare deux canaux d'analyse, car l'angle solide élémentaire est homogène au carré de l'angle :  $d\Omega = \pi d(\psi^2) = \pi dy$ . Ainsi, pour une onde monochromatique, la densité de photoélectrons détectés par canal est simplement  $S(\nu, y) = dN(\nu, y) / dy$ .

Dans le cas d'un signal de spectre Rayleigh-Mie, cette densité devient :

$$S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu, y) R(\nu) d\nu$$

où  $R(\nu)$  est donné par l'équation (3.6). Nous obtenons le résultat suivant :

$$S(y) = \frac{1}{\varphi^2} K \eta \rho^* \alpha \left( \frac{1-R_0}{1+R_0} \right) \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_0^p \left( \frac{1}{\alpha} e^{-\left( \frac{p\pi\Delta_0\mu}{c} \right)^2 T} + \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right) \cos \left( p \left( \frac{d\phi}{du_r} u_r + \phi(y) \right) \right) \right]$$

$$\text{avec } \frac{d\phi}{du_r} = \frac{4\pi\Delta_0}{c\lambda_L} \text{ et } \phi(y) = \frac{2\pi\Delta_0}{\lambda_L} \left( 1 - \frac{y}{2} \right)$$

Ici, le terme  $\phi(y)$  décrit la phase des franges circulaires lorsque la vitesse du vent est nulle. Si le demi-angle d'éclairage du Fabry-Perot est choisi tel que  $\varphi_0 = \sqrt{\lambda/e}$ , alors la phase  $\phi(y)$  décrit tout juste un intervalle de  $2\pi$  lorsque  $y$  varie entre 0 et  $\varphi_0^2$ . Cet angle  $\varphi_0$  correspond donc à l'angle d'illumination d'un interfrange.

Plutôt que d'une densité de photoélectrons par « angle au carré », on préférera raisonner de manière équivalente à partir d'une densité de photoélectrons par radian de phase, définie par la relation  $2\pi S(\phi) = \varphi^2 S(y)$ . Nous supposons également que la figure de franges projetée contient un nombre entier  $n$  de franges. Dans ce cas, nous avons  $S(\phi) = \varphi^2 S(y) / 2n\pi$ .

La matrice de Fisher correspondant aux signaux fournis par le détecteur peut alors être calculée par l'intégrale suivante :

$$F_{ij}(\vec{\theta}) = \int_0^{2n\pi} \frac{1}{S(\phi, \vec{\theta})} \frac{dS(\phi, \vec{\theta})}{d\theta_i} \frac{dS(\phi, \vec{\theta})}{d\theta_j} d\phi \quad (4.7)$$

où l'on rappelle que  $\vec{\theta}$  est le vecteur paramètre du spectre Rayleigh-Mie, possédant quatre dimensions et défini par  $(\theta_1 = u_r, \theta_2 = \rho^*, \theta_3 = T, \theta_4 = \alpha)$ .

Comme la fonction intégrée est périodique, la matrice de Fisher ne dépend pas du nombre de franges projetées (on a  $n$  fois la même intégrale d'une fonction dont la moyenne est en  $l/n$ ).

On peut calculer analytiquement les dérivées  $dS/d\theta_i$ , l'intégration étant quant à elle numérique. On constate que la matrice de Fisher obtenue prend la forme suivante :

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & F_{34} \\ 0 & F_{24} & F_{34} & F_{44} \end{bmatrix}$$

Elle contient un certain nombre de zéros, dont certains sont simples à anticiper mathématiquement. Par exemple le terme  $F_{12}$  met en jeu l'intégrale sur un intervalle symétrique d'une fonction impaire. En effet  $S(\phi)$  et  $dS/d\rho^*$  sont des fonctions paires, tandis que  $dS/du_r$  est impaire. L'intégrale est donc nulle.

La forme de cette matrice s'interprète physiquement. En effet, les termes non diagonaux de la matrice de Fisher illustrent les couplages d'informations existants entre variables. Par exemple le terme  $F_{24}$  nous indique qu'il y a couplage entre les paramètres  $\rho^*$  et  $\alpha$ , ce qui veut dire qu'une erreur sur la mesure de l'un se répercute sur la mesure de l'autre. De fait, on constate que la mesure de  $\rho^*$  se déduit physiquement de l'intensité moyenne des franges, laquelle dépend également de  $\alpha$ . De même, le paramètre  $F_{34}$  illustre le couplage entre les variables  $T$  et  $\alpha$ , qui s'exprime dans les termes correspondants aux facteurs de contraste des interférences multiples. A l'inverse, la mesure de vitesse, exclusivement liée à la phase des franges, est strictement indépendante des autres mesures : on pourrait donc mesurer la vitesse sans se préoccuper de savoir quelle est la température, la densité ou le rapport de diffusion. La Borne de Cramer Rao pour la mesure de vitesse est donc simplement  $\epsilon_{ur} = (F_{11})^{-1/2}$ .

L'ensemble des BCR de l'analyseur se déduit de la matrice inverse de Fisher. On peut deviner que ces bornes vont être indépendantes de la vitesse  $u_r$ , puisque a priori, la précision de mesure sur la phase des franges ne dépend pas de sa valeur absolue. Par ailleurs, de manière identique à l'ASI, on peut aussi anticiper le fait que les bornes seront proportionnelles à  $(K\eta\rho^*)^{-1/2}$ .

Afin de quantifier la qualité de l'analyseur spectral seul, indépendamment de l'intensité du spectre incident et de l'efficacité quantique des détecteurs, nous pouvons définir pour chacun des quatre paramètres mesurés un « facteur de performance » du FPI, notés  $\kappa$ ; et défini comme étant le quotient de la BCR atteinte par le FPI avec celle atteinte par l'ASI. Par exemple pour la mesure de vitesse, nous aurons le facteur de performance  $\kappa_{ur} = \epsilon_{ur}^{FPI} / \epsilon_{ur}^{ASI}$ . Bien sûr, ceci n'a de sens que si les performances des deux analyseurs sont comparées à

spectre incident égal. **Dans la suite, les facteurs de performances des analyseurs seront donc calculés pour un spectre Rayleigh pur ( $\alpha=1$ ) à  $T_0=273$  K.**

Compte tenu de cette définition, il ne reste plus qu'à optimiser les paramètres du Fabry-Perot, c'est-à-dire la réflectivité  $R_0$  des lames et leur espacement ( $e$  ou  $\Delta_0$ ), de manière à obtenir le meilleur facteur de performance possible. Cependant l'optimum est différent selon que l'on cherche à optimiser le FPI pour la mesure de vitesse (minimisation de  $\kappa_{ur}$ ), ou pour la température (minimisation de  $\kappa_T$ ).

Par exemple, la figure 4.4 illustre la fonction  $\kappa_{ur}(R_0, \Delta_0)$ , pour une longueur d'onde  $\lambda_L=355$  nm.

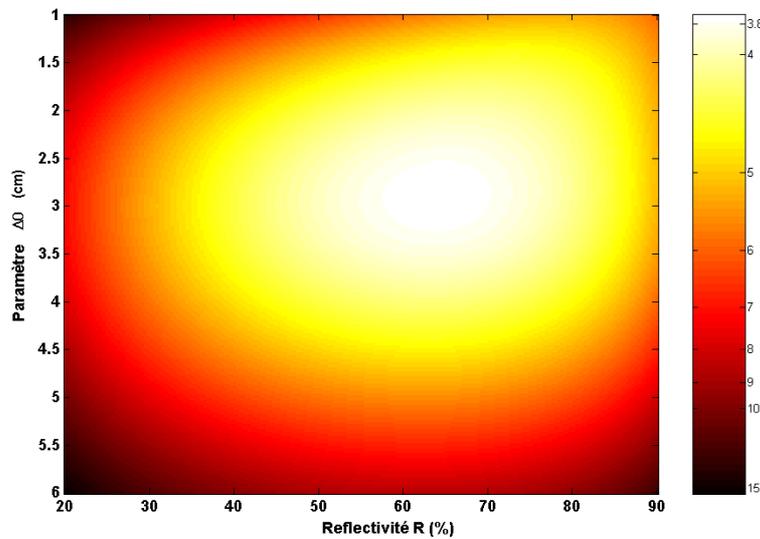


Figure 4.4 : Facteur de performance  $\kappa_{ur}$  d'un FPI en fonction de  $R_0$  et  $\Delta_0$

Les paramètres optimaux sont alors  $R_0=0,64$  et  $\Delta_0=2,9$  cm, conditions pour lesquelles on obtient les facteurs de performances suivants :

$$\kappa_{u_r}^{FPI} \approx 3,7 \quad \kappa_{\rho^*}^{FPI} \approx 5,5 \quad \kappa_T^{FPI} \approx 6,9$$

Si au contraire on cherche à optimiser un FPI pour la mesure de température, on choisira plutôt les paramètres suivants : ( $R_0=0,78$ ,  $\Delta_0=3,9$  cm). Dans ce cas, les facteurs de performances obtenus deviennent :

$$\kappa_{u_r}^{FPI} \approx 4,4 \quad \kappa_{\rho^*}^{FPI} \approx 4,0 \quad \kappa_T^{FPI} \approx 5,2$$

On constate que les deux points d'optimisation trouvés sont relativement proches, l'optimisation en température étant peut-être un peu plus avantageuse, dans la mesure où elle permet un gain de précision intéressant en température et densité, pour une moindre perte sur la mesure de vitesse.

Le point de minimisation de  $\kappa_{ur}$  ne coïncide pas tout à fait avec celui identifié par McGill ( $R_0=0,71$ ,  $\Delta_0=1,9$  cm) dans ref.[34]. Toutefois, ce dernier considère dans son article

que l'illumination du FPI ne recouvre que 48 % de l'interfrange. Nous n'avons pas traité cette éventualité ici, néanmoins il est possible de le faire aisément en posant dans le modèle précédent  $n=0,48$  périodes, et en calculant l'intégrale de l'éq.(4.7) sur 0,48 période également (centrée sur le pic d'interférence constructive). En utilisant les paramètres de l'optimum identifié par McGill dans les mêmes conditions, nous trouvons que le coefficient de performance s'améliore quelque peu, avec un maximum de  $\kappa_{ur}=3,2$ . Cette valeur est proche de celle calculée à partir de la figure 7b de ref.[34] ( $\kappa_{ur}=3,1$ ).

Dans la suite, nous ne détaillerons pas davantage les performances des instruments dans le cas de l'illumination de fractions de franges  $n < 1$ . Bien que permettant théoriquement un certain gain de performances, nous verrons au cours du chapitre 6 qu'il est difficile expérimentalement, et pas forcément souhaitable, de travailler avec des fractions d'interfranges.

#### **4.5. Performances d'un Double Interféromètre de Michelson Imageur (DIMI)**

Dans un article datant de 2002<sup>[31]</sup>, Bruneau suggère d'utiliser un interféromètre de Mach-Zehnder à imagerie de franges pour l'analyse spectrale du signal Rayleigh. Dans le montage qu'il propose, l'un des miroirs de l'interféromètre est incliné, de sorte que la différence de marche entre les deux ondes qui interfèrent varie lentement, autour d'une valeur moyenne  $\Delta_0$ , le long de la section transverse des faisceaux. Il se forme ainsi une figure de franges rectilignes, que l'on peut imager sur un détecteur et utiliser pour l'analyse spectrale.

Ce principe est tout à fait transposable aux interféromètres de Michelson. Ces derniers ont l'avantage, par rapport au système de Mach-Zehnder, d'utiliser une seule et même lame pour la séparation et la recombinaison des faisceaux. L'interféromètre de Michelson est donc plus simple, et a priori moins sensible mécaniquement. L'inconvénient principal est qu'il réfléchit 50 % du signal, alors que le Mach-Zehnder peut théoriquement en mesurer la totalité (ceci au prix, toutefois, de deux détecteurs, ce qui n'est pas sans coût...).

Le système DIMI proposé ici est représenté en figure 4.5. Il est composé de deux interféromètres de Michelson, de différences de marches  $\Delta_0$  distinctes, placés en parallèle. On distingue l'interféromètre de Michelson court (IMC), de l'interféromètre de Michelson long (IML), avec évidemment  $\Delta_{0-IMC} < \Delta_{0-IML}$ . On peut se demander pourquoi utiliser deux interféromètres, dans la mesure où le montage proposé par Bruneau pour la mesure de vitesse n'en utilise qu'un seul. Nous verrons en fait que pour réaliser des mesures de vitesse, un seul interféromètre peut effectivement suffire. Mais si l'on souhaite réaliser, en plus, des mesures de température et densité, alors il en faut deux, et de différences de marche distinctes.

Le schéma de principe du DIMI est le suivant :

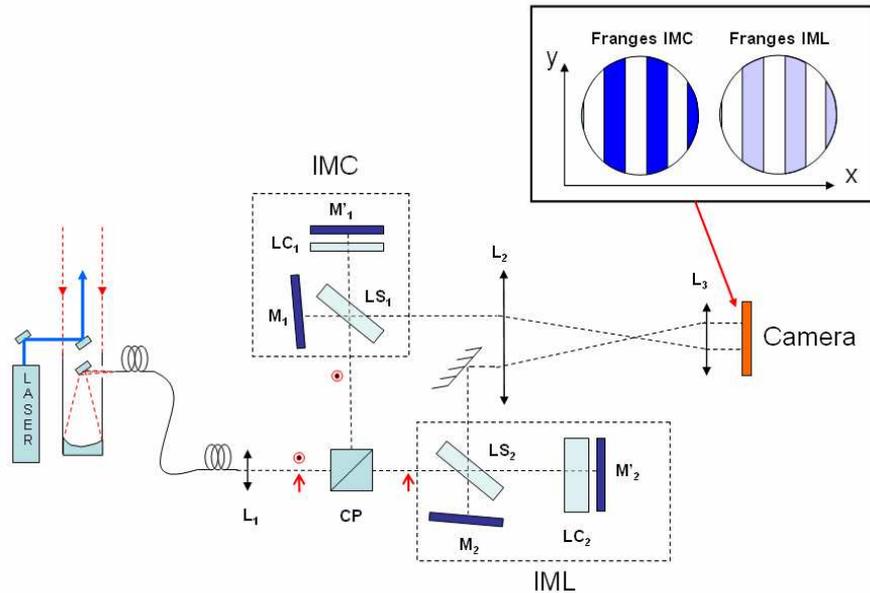


Figure 4.5 : Schéma de principe du DIMI

En sortie de fibre, le signal est collimaté par la lentille  $L_1$ . Le faisceau est ensuite divisé en deux parties, dirigées chacune vers un interféromètre, au moyen d'un cube polariseur (CP). Rappelons que la fibre, qui est très multimode, ne conserve pas la polarisation quasi-linéaire de la lumière entrante, de sorte que l'on obtient en sortie les deux composantes de polarisation (la répartition n'étant pas nécessairement de 50 %-50 %).

Chaque interféromètre est composé de 2 miroirs ( $M$ - $M'$ ), dont l'un est incliné d'un petit angle  $\psi$  par rapport à la normale, d'une lame séparatrice (LS), et d'une lame dite « de compensation » (LC), dont le rôle est d'améliorer le contraste des franges générées. Les figures de franges sont localisées au voisinage des miroirs inclinés, et peuvent être imagées sur une caméra via un système afocal  $L_2$ - $L_3$ . Le lecteur trouvera en chapitre 5 plus d'informations sur le rôle des lames de compensation, ainsi que sur le phénomène de localisation des franges. Ici, de manière analogue aux franges circulaires du Fabry-Perot, ce sont les franges d'interférences rectilignes qui jouent le rôle des canaux d'analyse spectrale.

Considérons à présent une onde monochromatique à l'entrée du système et intéressons-nous à l'un des deux interféromètres, tous deux étant supposés parfaits, c'est-à-dire produisant un contraste de franges unitaire. Considérons que cet interféromètre, placé derrière le cube polariseur, reçoit exactement 50 % du signal total. Sur ces 50 % reçus, il en réfléchit la moitié, et ne transmet donc au détecteur que 25 % du total en moyenne. La modulation d'intensité provoquée par l'interférence des deux ondes peut s'interpréter comme un facteur de transmission variable dans l'espace, dont la fonction est la suivante :

$$T(\nu, x) = \frac{1}{4} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\nu}{c} (\Delta_0 - 2\psi x) \right) \right] \quad (4.8)$$

Chaque position  $x$  sur le détecteur transmet préférentiellement les fréquences  $\nu_m$  correspondant à l'interférence constructive :  $(\Delta_0 - 2\psi x)\nu_m / c = m$ . Ce sont donc cette fois les franges rectilignes qui jouent le rôle de canaux spectraux.

Supposons que la fenêtre d'éclairage de l'interféromètre est rectangulaire, de longueur  $L$ , et que l'éclairage est homogène spatialement, d'intensité unitaire. Supposons en outre que les canaux d'analyse spectrale sont physiquement constitués de fins rectangles photosensibles, de largeur  $dx$ , disposés le long des franges rectilignes. Dans ces conditions, le nombre de photoélectrons détectés par canal d'analyse est simplement  $dN(\nu, x) = \eta T(\nu, x) dx / L$  et la densité correspondante  $S(\nu, x) = dN(\nu, x) / dx$ . Nous verrons ultérieurement (chapitre 6) que l'hypothèse d'une fenêtre rectangulaire, a priori étrange puisque l'éclairage issu d'une fibre est circulaire, n'a pas de réelle importance en pratique, mais permet ici de simplifier le propos.

Dans le cas d'un spectre Rayleigh-Mie incident, la densité de photoélectrons par canal est :

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu, x) R(\nu) d\nu \quad (4.9)$$

Et l'on obtient :

$$S(x) = \frac{1}{L} \frac{K\eta\rho^*\alpha}{4} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{\pi\Delta_0 u}{c}\right)^2 T} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right) \cos\left(\frac{d\phi}{du_r} u_r + \phi(x)\right) \right] \quad (4.10)$$

$$\text{avec: } \frac{d\phi}{du_r} = \frac{4\pi\Delta_0}{c\lambda_L}, \text{ et } \phi(x) = \frac{2\pi\Delta_0}{\lambda_L} \left(1 - \frac{2\psi}{\Delta_0} x\right)$$

On peut remarquer ici la grande similitude de ces expressions avec celles obtenues pour le FPI : l'interféromètre à 2 ondes apparaît comme un cas particulier de l'interféromètre à ondes multiples.

L'équation (4.10) nous invite à trois constats importants :

- l'intensité des franges est une fonction de  $\rho^*$  et  $\alpha$
- le contraste est une fonction de  $T$  et  $\alpha$
- la phase est une fonction de la vitesse  $u_r$  seulement.

Ceci explique pourquoi un interféromètre seul permet bien de mesurer la vitesse mais pas la température ou la densité. En effet, on peut déduire de manière univoque le paramètre de vitesse en mesurant la phase des franges, mais il ne reste que deux grandeurs physiques mesurables - intensité et contraste des franges - pour les trois autres paramètres  $\rho^*$ ,  $T$ , et  $\alpha$ . Par conséquent, ces derniers ne peuvent être déterminés. Il est intéressant d'observer la différence avec le FPI, pour lequel ce problème ne se pose pas. Le FPI étant un système à ondes multiples, la modulation des franges n'est pas d'amplitude sinusoïdale : elle est qualifiée par un gabarit plus complexe, déterminé de manière unique par le couple de variables  $T$  et  $\alpha$ . Autrement dit la mesure de ce gabarit, sorte de contraste multi-ondes, permet de déterminer de manière univoque  $T$  et  $\alpha$ , levant ainsi l'indétermination à laquelle est confrontée l'interféromètre à deux ondes.

Cette indétermination s'exprime mathématiquement dans la matrice de Fisher d'un interféromètre de Michelson. Pour calculer cette dernière, on peut, de manière analogue au FPI, raisonner en terme de densité de photoélectrons par radian de phase avec la relation

$2\pi S(\phi) = x_f S(x)$ , où  $x_f$  est la période spatiale des franges  $x_f = \lambda/2\psi$ . En considérant  $n$  franges éclairées, on a  $S(\phi) = LS(x)/2n\pi$ . La matrice de Fisher s'écrit alors de la même manière que pour le FPI (éq.(4.7)), et prend la même forme :

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & F_{34} \\ 0 & F_{24} & F_{34} & F_{44} \end{bmatrix}$$

Du fait de la totale indépendance du paramètre de vitesse, la BCR sur la vitesse est calculable et vaut  $(F_{11})^{-1/2}$ . En revanche, les couplages entre les variables  $\rho^*$ ,  $T$  et  $\alpha$  sont tels que leur sous-déterminant est nul : c'est-à-dire  $F_{22}(F_{33}F_{44} - F_{34}^2) - F_{24}^2F_{33} = 0$ . Leurs BCR ne sont donc pas calculables.

L'addition d'un second interféromètre de Michelson permet d'ajouter des équations au système pour le résoudre. Pour cela, sa différence de marche doit être différente de celle du premier. Mathématiquement, la matrice de Fisher d'un DIMI est la somme des matrices correspondant à chacun des interféromètres qui le composent, soit :

$$F_{tot} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & F_{34} \\ 0 & F_{24} & F_{34} & F_{44} \end{bmatrix}_{IMC} + \begin{bmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & F_{24} \\ 0 & 0 & F_{33} & F_{34} \\ 0 & F_{24} & F_{34} & F_{44} \end{bmatrix}_{IML}$$

Si  $\Delta_{0-IMC} \neq \Delta_{0-IML}$ , la matrice  $F_{tot}$  est inversible et le calcul des BCR devient possible.

De manière analogue au FPI, on peut définir des facteurs de performances  $\kappa$  pour le DIMI et rechercher les paramètres  $\Delta_{0-IMC}$  et  $\Delta_{0-IML}$  qui mènent aux meilleurs résultats. Rappelons que ces facteurs de performances doivent être calculés pour un spectre de référence tel que  $\alpha=1$  et  $T_0=273$  K, et qu'ils sont a priori différents selon que l'on cherche à minimiser  $\kappa_{ur}$  ou  $\kappa_T$ .

#### 4.5.1 Paramètres et performances du DIMI optimisé pour la mesure de vitesse

La démarche à suivre pour cette optimisation est un peu particulière, puisque si nous ne voulions mesurer que la vitesse, un seul interféromètre serait suffisant. On peut donc optimiser les interféromètres séparément : le premier pour maximiser la précision de mesure de vitesse, le second pour maximiser la précision des autres mesures compte tenu du réglage du premier.

En utilisant le modèle de signal précédent (un seul interféromètre), la densité de photoélectrons par radian de phase sur le détecteur est, lorsque  $\alpha=1$  et  $T=T_0=273$  K :

$$S_1(\phi) = \frac{1}{2n\pi} \frac{K\eta\rho^*}{4} \left[ 1 + e^{-\left(\frac{\pi\Delta_{01}\mu}{c}\right)^2 T_0} \cos\left(\frac{4\pi\Delta_{01}}{c\lambda_L} u_r + \phi\right) \right]$$

Ce modèle permet d'obtenir une expression analytique de la BCR de vitesse. Nous obtenons l'expression suivante en calculant  $\varepsilon_{u_r} = (F_{11})^{-1/2}$  :

$$\varepsilon_{u_r} = \frac{c\lambda_L}{4\pi\Delta_{01}} \sqrt{\frac{4}{K\eta\rho^*} \left( 1 - \sqrt{1 - e^{-2\left(\frac{\pi\Delta_{01}\mu}{c}\right)^2 T_0}} \right)^{-\frac{1}{2}}} \quad (4.11)$$

pour laquelle nous avons utilisé le résultat suivant, valide lorsque  $0 < V \leq 1$  :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \Psi}{1 + V \cos \Psi} d\Psi = \frac{1 - \sqrt{1 - V^2}}{V^2}$$

L'expression (4.11) montre que la BCR est indépendante de la vitesse elle-même, un résultat argumenté intuitivement dans le cas du FPI, et propre à tous les analyseurs à imagerie de franges. Compte tenu de cette expression, le facteur de performance  $\kappa_{u_r}$  du DIMI s'écrit :

$$\kappa_{u_r} = \frac{(\varepsilon_{u_r})_{DIMI}}{(\varepsilon_{u_r})_{ISA}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d_{c_0}}{\Delta_{01}} \left( 1 - \sqrt{1 - \exp\left(-8\left(\frac{\Delta_{01}}{d_{c_0}}\right)^2\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

expression dans laquelle  $d_{c_0} = 2c/(\pi\mu\Gamma_0^{1/2})$  est la longueur de cohérence du signal Rayleigh définie au chapitre 3 ( $d_{c_0} = c\tau_{c_0} = 9$  cm environ). Il est intéressant de constater que le facteur de performance ne dépend alors que du rapport entre la différence de marche et la longueur de cohérence du signal.

La courbe de  $\kappa_{u_r}$  en fonction de  $\Delta_{01}$  est illustrée en figure 4.6.

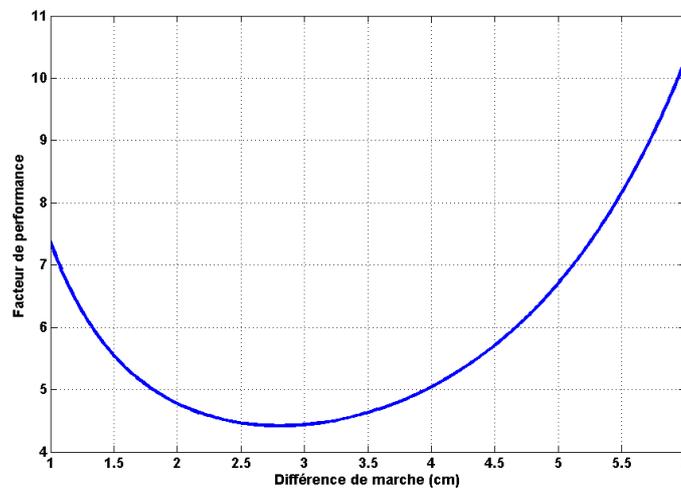
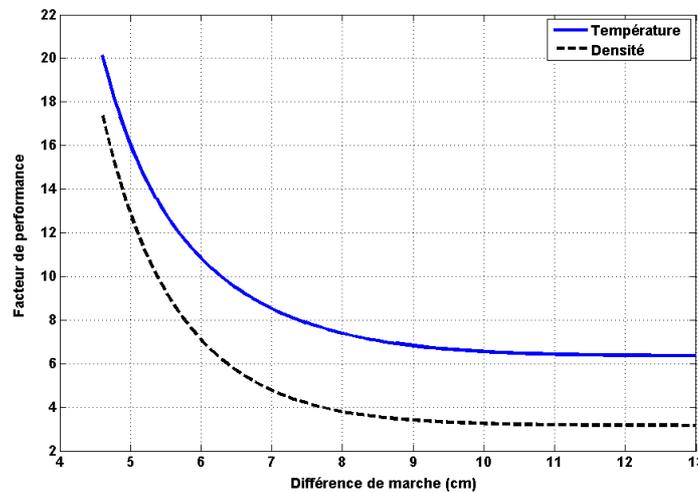


Figure 4.6 : Optimisation d'un interféromètre pour la mesure de vitesse, et facteur de performance

Pour un lidar à 355 nm, la valeur optimale de différence de marche est  $\Delta_{01}=2,8$  cm, un résultat analogue à celui obtenu par Bruneau pour le dispositif de Mach-Zehnder dans ref.[31], avec toutefois une autre méthode de calcul.

Le paramètre  $\Delta_{01}$  étant dès lors fixé, on peut chercher à optimiser la différence de marche  $\Delta_{02}$  du second interféromètre, de manière à obtenir les meilleures mesures possibles de température et de densité. Il suffit pour cela de considérer maintenant deux interféromètres, et de sommer leurs matrices de Fisher (la première étant fixe, calculée avec  $\Delta_{01}$ , la seconde paramétrée par  $\Delta_{02}$ ).

On peut ainsi tracer les courbes  $\kappa_T(\Delta_{02})$  et  $\kappa_{\rho^*}(\Delta_{02})$ , sachant que  $\Delta_{01}=2,8$  cm. Les résultats sont les suivants (figure 4.7):



**Figure 4.7 : Optimisation de l'IML pour les mesures de température et densité lorsque l'IMC est optimisé pour la vitesse**

On remarque ici deux choses intéressantes. Tout d'abord, il n'y a plus de gain sensible en performance au-delà d'une différence de marche  $\Delta_{02}=10$  cm, valeur qui semble donc optimale pour ce deuxième interféromètre. Ensuite, on observe un comportement parallèle des facteurs de performances  $\kappa_T$  et  $\kappa_{\rho^*}$ . Ceci n'est pas un hasard, car ces deux variables sont couplées au rapport de diffusion  $\alpha$ , qui est le véritable nœud du problème. A grande différence de marche, d'après l'éq.(4.10), le contraste de l'IML ne dépend plus que de  $\alpha$ , ce qui fait de ce contraste un moyen de mesure indépendant et sans équivoque du rapport de diffusion. Le surcroît d'erreur sur les mesures de  $T$  et  $\rho^*$ , dû aux effets de couplages entre variables, est donc d'autant plus faible que  $\Delta_{02}$  est grand.

En conclusion, si l'on souhaite optimiser le DIMI pour des mesures de vitesse en air clair et à  $T_0=273$  K, il faut choisir un IMC de différence de marche  $\Delta_{01}=2,8$  cm, et un IML de paramètre  $\Delta_{02}=10$  cm. Les facteurs de performances sont alors les suivants :

$$\kappa_{u_r} \approx 4,4 \quad \kappa_{\rho^*} \approx 3,3 \quad \kappa_T \approx 6,5$$

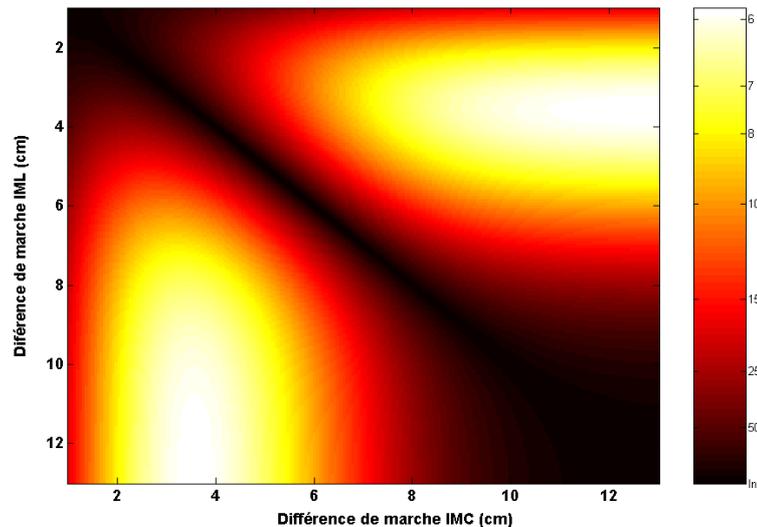
Notons que le facteur  $\kappa_{ur}$  du DIMI peut paraître faible en comparaison de celui de l'interféromètre de Mach-Zehnder étudié par Bruneau ( $\kappa_{ur} = 2,3$ , d'après ref.[31]). Mais il y a à cela deux raisons fort simples :

- un facteur  $\sqrt{2}$  est tout d'abord perdu, dans le cas du Michelson, car celui-ci réfléchit 50 % des photons incidents. Le Mach-Zehnder, lui, peut théoriquement analyser 100 % des photons incidents ;

- un second facteur  $\sqrt{2}$  est concédé par le DIMI simplement parce que le signal doit être partagé entre les deux interféromètres. Rappelons en effet que les facteurs de performances sont calculés en air clair, et que dans ce cas, l'IML ne produit aucune information sur la vitesse (pas de franges) tout en privant le premier de la moitié du signal. Mais en contrepartie, il permet de mesurer la densité, la température, et le rapport de diffusion, ce que ne peut pas faire un interféromètre de Mach-Zehnder seul.

#### 4.5.2 Paramètres et performances du DIMI optimisé pour la mesure de température

Dans ce cas le procédé d'optimisation est analogue à celui du FPI. On calcule le facteur de performance  $\kappa_T$  du DIMI pour tout couple ( $\Delta_{01}$ ,  $\Delta_{02}$ ) et on identifie le couple menant aux meilleures performances. La « carte » suivante, symétrique par nature, est ainsi obtenue (figure 4.8) :



**Figure 4.8 : Optimisation et facteur de performance d'un DIMI optimisé pour la mesure de température. Le facteur de performance est donné par le code de couleur.**

On observe que la différence de marche optimale de l'IMC se situe aux alentours de 3,6 cm, tandis que celle de l'IML n'a plus guère d'influence sur le résultat au-delà de 11 cm. On peut remarquer également la présence de la diagonale noire, qui illustre l'impossibilité de mesurer la température avec deux interféromètres identiques.

Avec les paramètres ( $\Delta_{01}=3,6$  cm,  $\Delta_{02}=11$  cm), les facteurs de performances du DIMI sont :

$$\kappa_{u_r} \approx 4,7 \qquad \kappa_{p^*} \approx 3,1 \qquad \kappa_T \approx 5,9 .$$

## 4.6. Conclusion du chapitre

Appartenant tous deux à la famille des analyseurs à imagerie de franges, les interféromètres FPI et DIMI sont basés sur le même principe : il s'agit d'obtenir spatialement une certaine image du spectre, grâce aux franges d'interférences. Nous avons d'ailleurs pu remarquer, au cours de cette étude comparative, une grande similitude mathématique entre les deux systèmes.

Les facteurs de performances des deux instruments, illustrant leur potentiel en terme de précision de mesure des paramètres atmosphériques, sont rassemblés dans le tableau suivant :

	FPI		DIMI	
	Optimisé pour $u_r$ $\Delta_0=2,9$ cm $R_0=0,64$	Optimisé pour $T$ $\Delta_0=3,9$ cm $R_0=0,78$	Optimisé pour $u_r$ $\Delta_{01}=2,8$ cm $\Delta_{02}=10$ cm	Optimisé pour $T$ $\Delta_{01}=3,6$ cm $\Delta_{02}=11$ cm
$K_{ur}$	3,7	4,4	4,4	4,7
$K_{\rho^*}$	5,5	4,0	3,3	3,1
$K_T$	6,9	5,2	6,5	5,9

On peut tout d'abord constater que, sur le plan strictement théorique, il n'y a pas de grand vainqueur : les performances du FPI et du DIMI sont dans l'ensemble assez proches. Le FPI optimisé en température apparaît peut-être comme le plus polyvalent, permettant à la fois une bonne mesure de température et densité sans dégrader excessivement celle de vitesse. Pour les mesures de densité, le DIMI est cependant le plus intéressant.

Dans tous les cas, on remarque que ces deux systèmes sont assez éloignés de l'analyseur idéal, et l'on peut d'ores et déjà anticiper que le nombre de photons à collecter sera élevé :

- pour la mesure de vitesse : au moins 20 fois plus que pour l'ASI, soit 1,6 millions de photons nécessaires pour 1 m/s de précision si la détection est parfaite ( $\eta=1$ )
- pour la mesure de température : au moins 40 fois plus que pour l'ASI, soit 6,6 millions de photons nécessaires pour 1 K de précision si la détection est parfaite.

Rappelons qu'avec le récepteur mentionné au chapitre 3, une impulsion de 10 mJ ne donne « que » 13 millions de photons disponibles en entrée de l'analyseur. Compte tenu de l'efficacité quantique limitée des détecteurs, on peut s'attendre à ce que les mesures, en particulier pour la température, soient difficiles et demandent une certaine accumulation de mesures.

Autre résultat intéressant de cette étude comparative, les deux systèmes FPI et DIMI ont à peu près la même différence de marche optimale :

- autour de 2,8 cm pour la mesure de vitesse, soit un ordre d'interférence  $\Delta_0/\lambda=80\,000$  environ
- autour de 3,8 cm pour la mesure de température, soit un ordre d'interférence  $\Delta_0/\lambda=100\,000$  environ

Il n'est pas inutile de mentionner ici les ordres d'interférences  $\Delta_0/\lambda$ , car les facteurs de performances ne dépendent en fait que de ces derniers, et sont donc indépendants de la

longueur d'onde. Ceci est visible notamment à travers l'éq.(4.12) :  $\kappa_{ur}$  ne dépend que du rapport de  $\Delta_0$  à la distance de cohérence du signal, laquelle est proportionnelle à  $\lambda$ .

Par conséquent, on peut souligner que pour ce type d'application, la précision de mesure n'est pas proportionnelle à la résolution spectroscopique. Prenons un exemple pour s'en convaincre. La résolution spectroscopique d'un interféromètre est donnée par  $\text{Resol} = p\Delta_0 / \lambda$  où  $p$  est le nombre d'ondes participant à l'interférence. Dans le cas du DIMI,  $p=2$ , tandis que pour le FPI, ce nombre est approximativement égal à la finesse réflexive, c'est-à-dire  $p = -\pi / \ln(R_0)$ . Ainsi :

- pour le FPI optimisé en température :  $\text{Resol} = 12 \cdot 110\,000 = 1,3 \times 10^6$ ,
- pour le DIMI optimisé en vitesse :  $\text{Resol} = 2 \cdot 80\,000 = 160\,000$ .

Or ces deux systèmes sont de performances égales pour la mesure de vitesse. La résolution spectroscopique des interféromètres n'est donc pas un critère pertinent.

Enfin, rappelons tout de même que le cadre de cette étude comparative reste théorique, et ne permet pas d'étudier la sensibilité de chacun des deux systèmes aux problèmes pratiques qui peuvent être rencontrés expérimentalement. Cependant, bien que d'allure plus complexe que le FPI pour des performances théoriques équivalentes, le DIMI laisse entrevoir des avantages pratiques non négligeables :

- il fournit des franges rectilignes naturellement adaptées aux capteurs matriciels de type CCD, assurant ainsi la possibilité d'un échantillonnage des franges régulier. Dans le cas de franges circulaires, les anneaux centraux ne pourraient être correctement échantillonnés (trop peu de pixels par anneau), entraînant une perte d'information et donc une baisse des performances. La détection par caméra matricielle et le traitement de signal s'annoncent donc à la fois plus simple et plus performants dans le cas du DIMI.
- il ne met en jeu que deux ondes en interférence, et produit donc une interférence sinusoïdale simple à modéliser. Par exemple, un défaut d'alignement peut certes produire une variation de l'interfrange (variation de l'angle  $\psi$ ) mais ceci ne modifie en rien les paramètres d'intensité, contraste et phase desquels sont déduits les paramètres atmosphériques recherchés. Pour un FPI, la situation est plus sensible, car un défaut d'alignement ou de planéité des lames a pour effet de faire chuter la finesse effective de l'instrument, et donc de modifier la fonction de « gabarit » des franges dont sont issus les paramètres  $T$  et  $\alpha$ . De ce point de vue, là aussi, la mesure par DIMI s'annonce moins vulnérable aux désalignements que par FPI.

Pour ces raisons plus ou moins intuitives, et également dans le but de proposer un travail original, la suite de ce mémoire sera uniquement consacrée au DIMI. Nous en effectuerons l'étude approfondie au chapitre 5. Le chapitre 6 sera quant à lui consacré au développement instrumental réalisé.





## Chapitre 5

### Etude approfondie de l'analyseur DIMI

Dans ce chapitre, nous poursuivons l'étude des performances du DIMI, amorcée au chapitre 4. Nous commencerons par donner du DIMI une seconde représentation : en effet, on peut l'interpréter soit comme une méthode de filtrage spectral (chapitre 4), soit comme une méthode d'analyse de la cohérence temporelle du signal. Nous effectuerons ensuite l'étude de sensibilité des performances du DIMI, afin d'identifier quels sont les paramètres atmosphériques ou instrumentaux les plus influents sur la précision finale des mesures. Nous verrons notamment que le paramètre de contraste de franges est critique : c'est pourquoi nous consacrerons une partie importante de ce chapitre à son calcul et à son optimisation. Ceci nous permettra ensuite de simuler des figures de franges plus réalistes, et de nous pencher sur le problème de l'estimation des paramètres atmosphériques à partir des signaux simulés. Nous verrons notamment s'il est possible ou non d'atteindre les Bornes de Cramer-Rao de manière non biaisée, et quelle est l'influence du modèle de spectre Rayleigh-Brillouin sur l'estimation effectuée.

#### **5.1. Représentation du DIMI comme « analyseur de cohérence » à deux canaux**

Dans le chapitre précédent, nous avons envisagé le DIMI comme un analyseur spectral multicanal, dans lequel chaque canal est muni de sa propre fonction de transmission périodique. On en a déduit une certaine expression de la densité  $S(x)$  de photoélectrons reçus par canal spectral. En fait, on peut calculer cette densité  $S(x)$  d'une autre façon, plus générale et tout aussi instructive. D'après l'éq.(4.8), nous avons :

$$T(\nu, x) = T_0 [1 + \cos(2\pi\nu\tau_0(x))] \text{ avec } \tau_0(x) = (\Delta_0 - 2\psi x) / c$$

Le spectre incident, lui, peut être noté, dans l'hypothèse d'un laser monochromatique :

$$R(\nu) = I_0 \tilde{R}(\nu) \text{ avec } I_0 = K\rho^* \alpha \text{ et } \tilde{R}(\nu) = \frac{1}{\gamma_R \alpha \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\nu - \nu_c}{\gamma_R}\right)^2} + (1 - 1/\alpha) \delta_{\nu - \nu_c}$$

Le spectre  $\tilde{R}(\nu)$  est alors normalisé à l'unité en énergie.

Avec ces notations, et d'après l'éq.(4.9), l'expression du signal est :

$$S(x) = A_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}(\nu) [1 + \cos(2\pi\nu\tau_0(x))] d\nu \text{ avec } A_0 = I_0 T_0 \eta / L$$

On reconnaît, dans le terme en cosinus de l'intégrale ci-dessus, la partie réelle d'une Transformée de Fourier (TF). Si l'on effectue le changement de variable  $f = \nu - \nu_c$ , et en remarquant que la TF du spectre normalisé centré  $\tilde{R}(f)$  est réelle, il vient immédiatement :

$$S(x) = A_0 \left[ 1 + G(\tau_0(x)) \cos(2\pi\nu_c \tau_0(x)) \right] \text{ avec } G(\tau) = TF \left[ \tilde{R}(f) \right] \quad (5.1)$$

Le contraste des franges est donc directement lié à la TF du spectre. C'est en fait la traduction physique du théorème de Wiener-Khinchine : un interféromètre à deux ondes réalise en effet l'autocorrélation du champ optique, ce qui revient au même que d'en réaliser la TF du spectre de puissance. Notons que la variation de phase des franges avec l'effet Doppler s'interprète alors très simplement, le décalage du spectre en fréquence se traduisant naturellement par un déphasage de sa TF.

Remarquons que la fonction  $\tau_0(x)$  varie lentement, aussi peut-on la considérer comme constante dans le terme de contraste (pas dans le terme de phase car  $\tau_0(x)$  y est multiplié par la fréquence). Nous noterons donc simplement que le contraste des franges est :  $G(\Delta_0/c)$ , en rappelant que:

$$G(\Delta_0/c) = \frac{1}{\alpha} e^{-\left(\frac{\pi\Delta_0\mu}{c}\right)^2 T} + \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$$

Chacun des deux interféromètres agit donc comme une « sonde » de la cohérence du signal, dont le contraste de frange est l'indicateur. L'IMC permet de sonder l'intensité des composantes lumineuses de faible cohérence, tandis que l'IML sonde les composantes de cohérence plus longue. On peut donc donner du DIMI une représentation dans « l'espace de cohérence temporelle », comme sur la figure 5.1. Cette représentation nous sera utile par la suite.

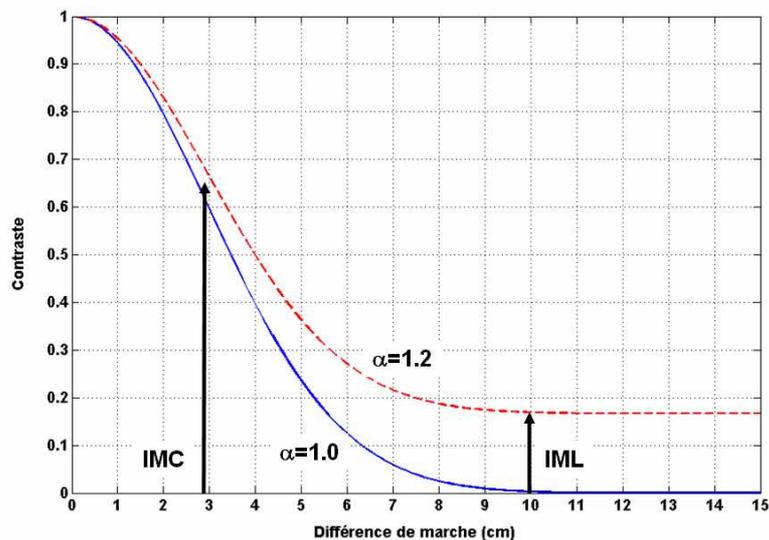


Figure 5.1 : Fonction de cohérence du spectre Rayleigh-Mie  $G(\Delta_0/c)$ , en fonction de  $\Delta_0$ , et pour deux valeurs du rapport de diffusion :  $\alpha=1$  et  $\alpha=1,2$ . Les flèches indiquent les points de fonctionnement des interféromètres pour un DIMI optimisé pour la mesure de vitesse.

## 5.2. Etude de sensibilité des performances

Nous revenons à présent sur le calcul des performances du DIMI. Dans le chapitre 4, les paramètres du DIMI ont été optimisés de manière à maximiser la précision des mesures, mais dans des conditions bien particulières : un spectre incident de paramètre  $\alpha=1$  et  $T=273$  K, un signal de fond solaire nul, et des interféromètres parfaits (contraste unitaire pour une onde monochromatique). Il s'agit à présent de voir comment varient les performances du DIMI lorsque l'on s'écarte de ces conditions d'optimisation.

Le modèle de signal doit être légèrement modifié pour inclure les nouveaux paramètres de contraste instrumental et de fond solaire. Nous utiliserons l'expression suivante, représentant toujours une densité de photoélectrons par radian de phase :

$$S_{1,2}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{B_{tot}}{2} + \frac{N_{tot}}{2} \alpha \left[ 1 + W_{1,2} \cos \left( \frac{4\pi\Delta_{0,2}}{c\lambda_L} u + \phi \right) \right] \right) \quad (5.2)$$

avec  $W_{1,2} = V_{1,2} G_0(\Delta_{01,2}/c)$  où  $G_0$  est la TF du spectre Rayleigh-Mie normalisé centré pour une onde monochromatique.

Dans ces deux expressions, les indices 1 et 2 distinguent les interféromètres (indice 1 pour l'IMC, indice 2 pour l'IML). Par ailleurs :

- les facteurs  $V_{1,2}$  sont les facteurs de contraste instrumental des interféromètres et  $W_{1,2}$  leurs facteurs de contraste total,
- le facteur  $N_{tot}=(K\eta\rho^*)/2$  est le nombre total (cumulé sur les deux interféromètres) de photoélectrons de signal mesurés en conditions d'air clair ( $\alpha=1$ ),
- le facteur  $B_{tot}$  est le nombre total de photoélectrons de fond solaire,
- on considère une seule période de frange :  $\phi$  varie sur  $[0,2\pi]$ .

La méthode utilisée pour calculer la sensibilité des performances en fonction des variations de  $\alpha$ ,  $T$ ,  $B_{tot}$ ,  $V_1$  et  $V_2$  est simple et systématique. Elle consiste à fixer tous les paramètres du système sauf un, dont l'influence est étudiée. Les BCR sont calculées à chaque nouvelle configuration, et normalisées par rapport à celles obtenues dans les conditions de références  $\alpha=1$ ,  $T=273$  K,  $B_{tot}=0$ ,  $V_{1,2}=1$ , qui sont les conditions prises au chapitre 4.

Les différences de marches des interféromètres sont figées aux valeurs optimales obtenues précédemment. Nous n'exposerons ici que les résultats concernant le DIMI optimisé prioritairement pour la mesure de vitesse, c'est-à-dire tel que  $\Delta_{01}=2,8$  cm, et  $\Delta_{02}=10$  cm.

### 5.2.1 *Influence du rapport de diffusion*

La figure 5.2 montre l'évolution relative des performances du DIMI en fonction du rapport de diffusion atmosphérique.

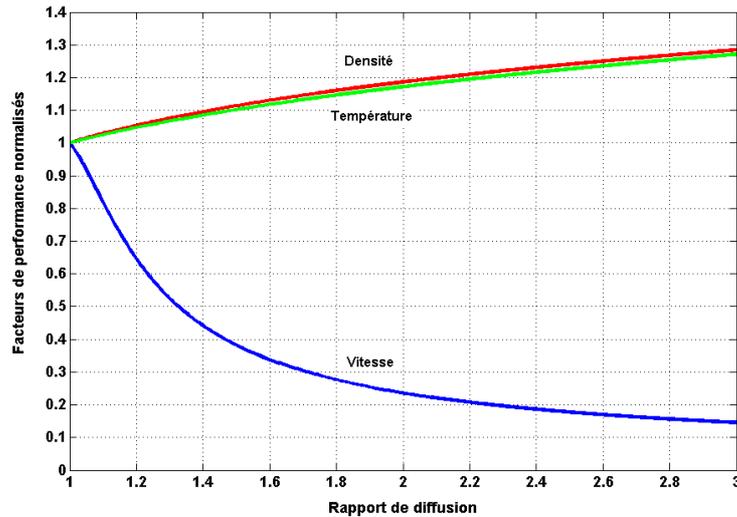


Figure 5.2 : Influence du rapport de diffusion sur les performances du DIMI

On constate tout d'abord que les incertitudes de mesure en température et densité croissent lorsque que le rapport de diffusion augmente. Ceci est dû au fait que les variations de contraste  $dW_1/dT$  et  $dW_2/d\alpha$  diminuent quand  $\alpha$  croît. Par conséquent, les paramètres  $T$  et  $\alpha$  (et donc  $\rho^*$ , couplé à  $\alpha$ ) sont plus difficiles à mesurer lorsque la valeur de  $\alpha$  est élevée. Cependant, les pertes en précision restent limitées à environ 20-25 % pour des valeurs de  $\alpha$  comprises entre 2 et 3, valeurs qui correspondent au maximum attendu dans les basses couches de l'atmosphère. Dans un nuage toutefois, où  $\alpha$  est beaucoup plus élevé, la mesure risque d'être fortement dégradée.

La mesure de vitesse, elle, gagne rapidement en précision lorsque  $\alpha$  augmente. Deux effets se cumulent ici : tout d'abord un rapport de diffusion élevé signifie un meilleur contraste sur l'IMC, mais également l'apparition de franges exploitables pour la mesure de vitesse sur l'IML (voir figure 5.1). Or celui-ci est beaucoup plus sensible que l'IMC pour la mesure de vitesse : en effet, d'après l'éq.(4.10), la sensibilité de la phase des franges à la vitesse est proportionnelle à la différence de marche :  $d\phi/du_r = 4\pi\Delta_0/c\lambda_L$ . Quand  $\alpha=2$ , l'erreur de mesure est ainsi quasiment divisée par 5 par rapport à la configuration air clair.

### 5.2.2 Influence de la température atmosphérique

La figure 5.3 montre l'évolution relative des performances du DIMI en fonction de la température atmosphérique.

Pour les mesures de vitesse et de température, les courbes de BCR indiquent que les performances se dégradent à haute température atmosphérique. Ceci provient simplement du fait que le contraste  $W_1$  de l'IMC est alors plus faible. Cependant les performances n'apparaissent pas très sensibles à la température mesurée. Sur un intervalle de +80 K, l'erreur augmente d'environ 15 % pour la vitesse et la température, tandis qu'elle diminue de moins de 10 % pour la densité. On peut comprendre cette légère amélioration, pour la densité, en remarquant qu'à haute température, la contribution - déjà faible - du signal Rayleigh au contraste de l'IML diminue encore, facilitant ainsi la mesure indépendante de  $\alpha$ , et par suite, de  $\rho^*$ .

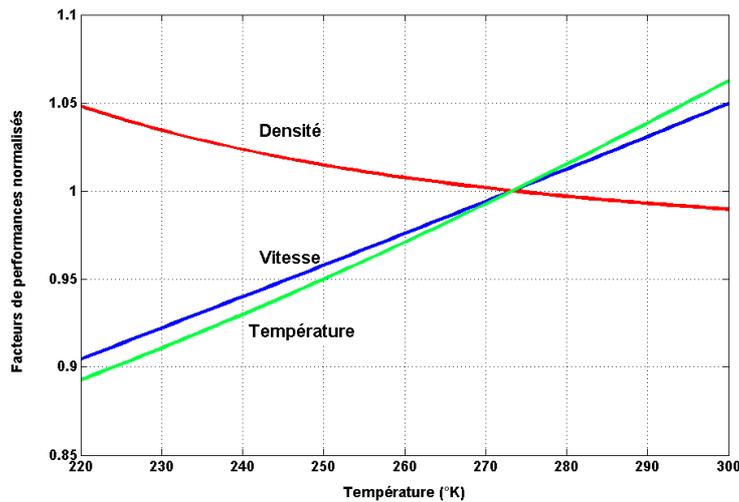


Figure 5.3 : Influence de la température atmosphérique sur les performances du DIMI

### 5.2.3 Influence du signal de fond solaire

Si l'on calcule les BCR du système pour différentes valeurs de signal  $N_{tot}$ , on s'aperçoit que la dégradation relative des performances, survenant lorsqu'on ajoute un fond solaire  $B_{tot}$ , ne dépend que du rapport  $N_{tot}/B_{tot}$ . Le critère pertinent permettant de juger de l'influence du signal de fond solaire est donc le Rapport Signal sur Fond, que l'on appellera ici le  $RSF = N_{tot}/B_{tot}$ . Les courbes des performances en fonction du RSF sont représentées en figure 5.4.

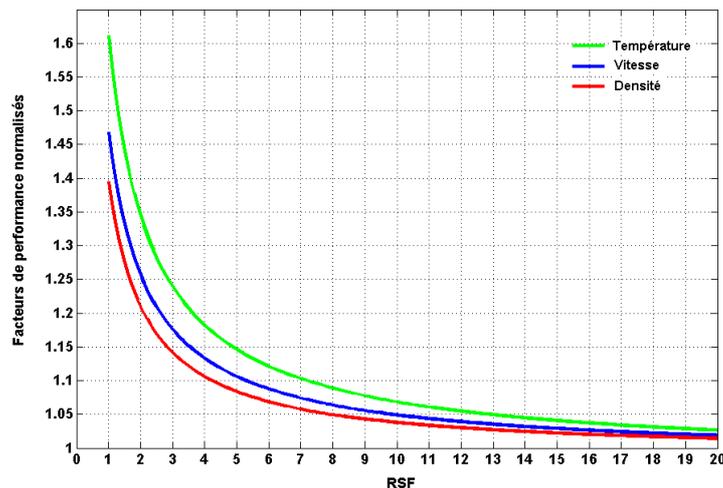


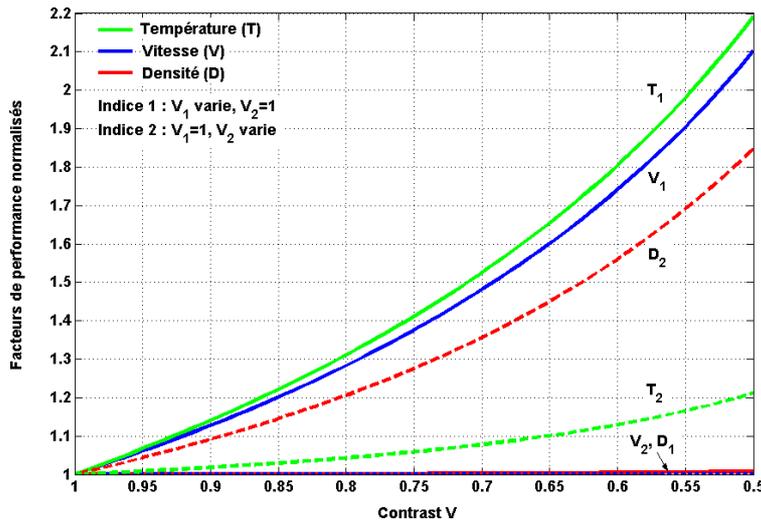
Figure 5.4 : Influence du signal de fond solaire sur les performances du DIMI

D'après cette figure, pour un RSF supérieur à 7, la perte de précision de mesure reste inférieure à 10 % pour les trois paramètres mesurés. En dessous de ce seuil, l'incertitude de mesure croît rapidement. La température est le plus sensible des paramètres, puis vient la vitesse et enfin la densité. Pour un RSF de 1, les incertitudes de mesure pour ces trois

paramètres sont à majorer respectivement d'environ 60 %, 45 % et 40 %, par rapport aux performances obtenues en l'absence de fond solaire.

### 5.2.4 Influence des facteurs de contraste instrumentaux

La figure 5.5 présente deux jeux de courbes : l'un de paramètre variable  $V_1$  avec  $V_2$  fixe (courbes continues), l'autre de paramètre variable  $V_2$  avec  $V_1$  fixe (courbes pointillées).



**Figure 5.5 : Influence des facteurs de contraste instrumentaux  $V_1$  et  $V_2$  sur les performances du DIMI.**  
Courbes continues :  $V_1$  varie,  $V_2=1$  ; Courbes pointillées :  $V_2$  varie,  $V_1=1$ .

Pour la mesure de vitesse, on constate que la valeur  $V_1$  de l'IMC est un paramètre critique. Même pour une valeur raisonnablement bonne de  $V_1=0,8$ , l'erreur s'accroît de 30 % par rapport à la situation idéale d'un contraste instrumental unitaire. Le contraste  $V_2$  de l'IML, ne semble avoir ici aucune influence sur la mesure de vitesse, mais nulle surprise à cela puisque en air clair, le contraste  $G_0(\Delta_{02}/c)$  est quasiment nul. Toutefois, nous avons vu avec la figure 5.2 que lorsque  $\alpha$  croît, on peut exploiter les franges de l'IML pour la mesure de vitesse avec un gain intéressant. Ce gain, bien sûr, est d'autant meilleur que  $V_2$  est élevé.

La mesure de température suit à peu près la même dépendance que la mesure de vitesse vis-à-vis du contraste  $V_1$  de l'IMC, mais est également légèrement sensible au facteur  $V_2$  de l'IML, même en air clair. Là encore, rappelons que la capacité de l'instrument à déterminer la température dépend de sa capacité à mesurer  $\alpha$ , ce qui est plus d'autant plus facile que  $V_2$  est élevé.

La mesure de densité, pour finir, n'est pas sensible à la valeur de  $V_1$  car l'information de densité est issue de l'intensité de la figure de franges, laquelle ne dépend pas de son contraste. En revanche, et pour la même raison que pour la température, la mesure de densité se montre sensible à la valeur de  $V_2$ .

Ces courbes montrent qu'il est important de maximiser les facteurs de contrastes instrumentaux  $V_1$  et  $V_2$ , ce qui implique auparavant de les calculer précisément. C'est justement l'objet de la section suivante.

### 5.3. Calcul et méthode d'optimisation du contraste de frange

Pour chaque interféromètre, le facteur de contraste  $V$  comptabilise différentes sources de pertes et peut se mettre sous la forme :

$$V = V_{las} V_{pix} V_{déseq} V_{champ}$$

expression dans laquelle :

- $V_{las}$  est lié à la largeur spectrale non nulle du laser,
- $V_{pix}$  est lié à la résolution spatiale limitée des détecteurs,
- $V_{déseq}$  est lié à l'éventuel déséquilibre d'énergie entre les deux bras de l'interféromètre,
- $V_{champ}$  est lié au champ angulaire de la source éclairant l'interféromètre.

Nous commencerons par évaluer les trois premiers facteurs, qui ne sont pas limitants. Nous traiterons ensuite, et de manière beaucoup plus détaillée, le problème des pertes de contraste dues au champ angulaire de la source lumineuse. Nous présenterons alors la technique dite de « compensation de champ », qui permet d'améliorer le contraste de champ.

#### 5.3.1 *Trois facteurs de contrastes non limitants*

##### 5.3.1.1 *Facteur $V_{las}$*

Ce facteur est lié à l'élargissement spectral du signal rétrodiffusé, provoqué par la largeur spectrale du laser source. En supposant que le spectre du laser est gaussien (cas idéal d'un laser impulsif délivrant des impulsions gaussiennes), de demi-largeur à 1/e notée  $\gamma_L$ , alors le spectre rétrodiffusé peut s'écrire comme le produit de convolution du spectre laser et du spectre Rayleigh-Mie en régime monochromatique. En écrivant ce produit à partir de fonctions normalisées et centrées, on obtient le spectre total  $\tilde{R}(f)$  suivant :

$$\tilde{R}(f) = \left( \frac{1}{\gamma_L \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{f}{\gamma_L}\right)^2} \right) \otimes \left( \frac{1}{\gamma_R \alpha \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{f}{\gamma_R}\right)^2} + (1 - 1/\alpha) \delta_f \right)$$

Le contraste de franges pour un interféromètre de différence de marche  $\Delta_0$  étant donné par  $G(\Delta_0/c)$ , où  $G(\tau) = TF[\tilde{R}(f)]$ , le produit de convolution va se traduire par un produit scalaire de facteurs de contraste :  $G(\Delta_0/c) = V_{las} G_0(\Delta_0/c)$ . On obtient donc immédiatement que :

$$V_{las} = \left( TF \left[ \frac{1}{\gamma_L \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{f}{\gamma_L}\right)^2} \right] \right) (\Delta_0/c) \text{ soit } V_{las} = e^{-\left(\pi \gamma_L \Delta_0 / c\right)^2}$$

En supposant par exemple une source laser Nd:Yag délivrant des impulsions de durée  $\tau_p = 10$  ns (égale au temps de cohérence) à 1064 nm, la largeur de spectre correspondante est de  $\gamma = 2/(\pi \tau_p)$  soit 60 MHz à 1064 nm. Le triplage de fréquence permettant d'aboutir à la longueur d'onde de 355 nm a pour effet de convoluer le spectre avec lui-même deux fois (au

doublage puis au triplage de fréquence). On aura donc un élargissement spectral d'un facteur minimum de  $\sqrt{3}$  (somme quadratique des largeurs spectrales). Au final, on obtient donc  $\gamma_L=110$  MHz. Ainsi le facteur  $V_{\text{las}}$  pour l'IMC ( $\Delta_0=2,8$  cm) vaut 99,9 %. Pour l'IML ( $\Delta_0=10$  cm), ce facteur n'est guère plus gênant, avec  $V_{\text{las}}=98,6$  %.

### 5.3.1.2 Facteur $V_{\text{pix}}$

Ce facteur apparaît lors de l'intégration de la densité surfacique de photoélectrons sur des pixels de dimensions finies. Dans le cas d'une onde incidente monochromatique, éclairant la caméra sur une surface de rayon  $r$ , et en supposant que les franges d'interférences sont strictement parallèles à l'axe  $y$  de la caméra (voir figure 4.5), cette densité surfacique s'écrit :

$$S(x, y) = \frac{I_0}{\pi r^2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\nu}{c} (\Delta_0 - 2\psi x) \right) \right]$$

Le nombre de photoélectrons reçus sur un pixel carré de côté  $a$ , centré spatialement en  $(x_i, y_j)$  est simplement :

$$S_{ij} = \int_{x_i-a/2}^{x_i+a/2} \int_{y_j-a/2}^{y_j+a/2} S(x, y) dx dy$$

ce qui conduit à l'expression suivante :

$$S_{i,j} = I_0 \frac{a^2}{\pi r^2} \left[ 1 + V_{\text{pix}} \cos \left( \frac{2\pi\nu}{c} (\Delta_0 - 2\psi x_i) \right) \right]$$

avec  $V_{\text{pix}} = \text{sinc}(1/P)$  et  $P$  l'interfrange en pixels défini par  $P = x_f/a$ .

Le facteur  $V_{\text{pix}}$  est donc supérieur à 99 % dès que  $P$  dépasse 12 pixels, ce qui est largement réalisable.

### 5.3.1.3 Facteur $V_{\text{déseq}}$

Dans le cas où la répartition d'énergie dans les deux bras de l'interféromètre n'est pas strictement de 50 % - 50 % (cas d'un défaut de la lame séparatrice), le contraste des franges n'est pas optimal. Si les intensités lumineuses circulant dans les deux bras sont  $I_1 = T_1 I_0$  et  $I_2 = T_2 I_0$  avec  $T_1 + T_2 = 1$ , alors la figure d'interférence produit un champ dont l'intensité est :

$$I_{\text{tot}} = \left| \sqrt{T_1} E_0 + \sqrt{T_2} E_0 e^{j\phi} \right|^2, \text{ avec } E_0^2 = I_0$$

On obtient alors  $I_{\text{tot}} = I_0 \left[ 1 + V_{\text{déseq}} \cos \phi \right]$  avec  $V_{\text{déseq}} = 2\sqrt{T_1 T_2}$

Cependant, même si la répartition d'énergie est de 60 %-40 %, ce qui constitue déjà un grave défaut de la lame séparatrice, le facteur  $V_{\text{déseq}}$  reste élevé à près de 98 %.

### 5.3.2 Facteur de contraste lié au champ angulaire de la source

Il s'agit maintenant de calculer l'influence du champ angulaire de la source éclairant l'interféromètre sur le contraste des franges qu'il génère. Le phénomène provient du fait que la différence de marche entre les deux ondes qui interfèrent en sortie de l'interféromètre dépend de l'angle de l'onde incidente en entrée. Par conséquent, si la source couvre un large domaine d'angles d'incidence, on a brouillage du contraste de franges. Pour commencer, le problème de base est donc de calculer la différence de marche dépendante de l'angle d'incidence. Nous utiliserons pour cela un modèle géométrique de l'interféromètre de Michelson. Tout au long de ce paragraphe, la source est considérée monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ .

#### 5.3.2.1 Modèle géométrique d'un interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle collimatée

Ce modèle géométrique, présenté en figure 5.6, reprend très largement celui présenté par Fortunato en réf.[35]. Soit un interféromètre éclairé par un point source  $S_1$ , de coordonnées polaires  $(R, \delta)$  dans le plan focal objet d'une lentille de focale  $f$ . L'angle d'incidence de l'onde collimatée incidente sur l'interféromètre est :  $\rho = R/f$ . La différence de distance entre les deux miroirs  $M_1$  et  $M_2$  par rapport au point O est notée  $d = \overline{OA} - \overline{OB}$ . Le miroir  $M_1$  est incliné d'un angle  $\psi$  par rapport à l'axe optique. La lame séparatrice est considérée infiniment mince pour le moment.

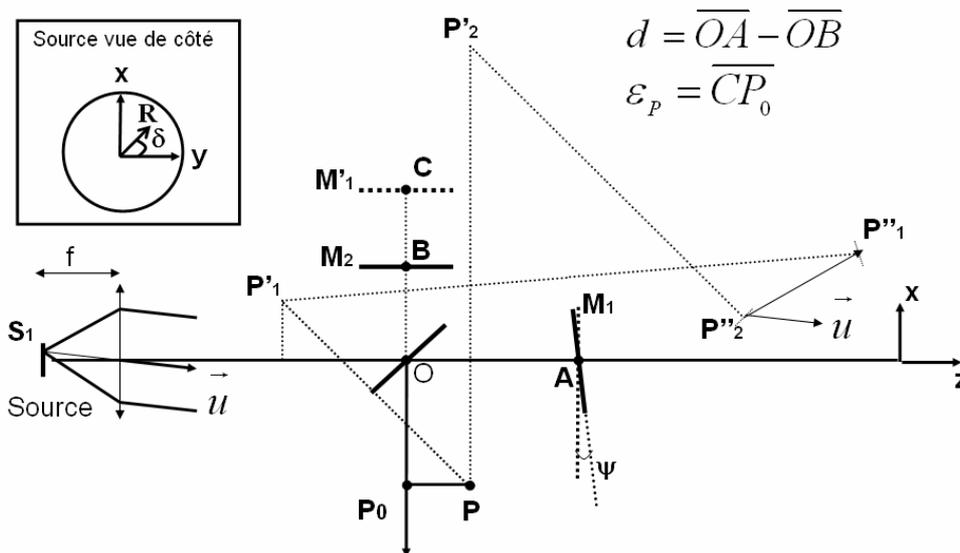


Figure 5.6 : Modèle géométrique d'un interféromètre de Michelson

En coordonnées cartésiennes, l'onde plane incidente se propage dans la direction  $\vec{u}$ , dont les cosinus directeurs sont notés  $(\alpha, \beta, \gamma)$  :

$$\vec{u} = \alpha \vec{u}_x + \beta \vec{u}_y + \gamma \vec{u}_z$$

Cette onde se divise en deux au passage de la lame séparatrice, puis les deux ondes créées se recombinent en sortie de l'interféromètre. L'état d'interférence au point P dépend de la différence de marche entre les deux ondes arrivant en ce point, égale à :

$$\Delta_p = \vec{u} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = \alpha(x_2 - x_1) + \beta(y_2 - y_1) + \gamma(z_2 - z_1)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont les deux points images de P à travers l'un et l'autre des chemins optiques de l'interféromètre, et  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  leurs coordonnées respectives. La détermination géométrique des positions de  $P_1$  et  $P_2$  est représentée sur la figure 5.6.

En supposant que la normale au miroir  $M_1$  reste perpendiculaire à  $u_y$  (on ne considère qu'une dimension pour l'inclinaison de  $M_1$ , dont la normale fait l'angle  $\psi$  avec  $u_z$ ), les coordonnées de  $P_1$  et  $P_2$  vérifient l'égalité  $y_1 = y_2$ . Le calcul des coordonnées  $(x_1, z_1)$  et  $(x_2, z_2)$  mène alors à la différence de marche suivante au point P :

$$\Delta_p = \alpha(2\psi \varepsilon_p) + \gamma(2d - 2\psi x_p)$$

expression dans laquelle les variables  $x_p$  et  $\varepsilon_p = \overline{CP_0}$  sont utilisées pour noter respectivement la distance transversale de P par rapport à l'axe optique, et sa position longitudinale.

Si le point source est situé à faible distance radiale  $R$  de l'axe optique, l'approximation paraxiale  $\gamma = 1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2$  est valable. Par ailleurs, en utilisant les relations entre coordonnées angulaires polaires et cartésiennes :  $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$  et  $\alpha = \rho \sin \delta$ , la différence de marche en P peut se réécrire :

$$\Delta_p(\rho, \delta) = (2d - 2\psi x_p) + [(2\varepsilon_p \psi) \rho \sin \delta + (-d + \psi x_p) \rho^2]$$

Dans cette équation, nous distinguerons les deux termes du membre de droite, dont l'un dépend des coordonnées angulaires du point source et l'autre pas, par les notations :

$$\begin{aligned} \Delta_p^0 &= (2d - 2\psi x_p) \\ \Delta_p^1(\rho, \delta) &= [(2\varepsilon_p \psi) \rho \sin \delta + (-d + \psi x_p) \rho^2] \end{aligned}$$

Le terme  $\Delta_p^0$  nous est familier : il décrit la succession, dans le plan perpendiculaire à l'axe optique, de franges d'interférences parallèles à l'axe  $u_y$ , et de distance interfrange  $\Delta x_i = \lambda / 2\psi$  selon  $u_x$ .

Le terme  $\Delta_p^1$ , lui, indique que la différence de marche en P est aussi fonction des coordonnées angulaires du point source. On peut donc prévoir que ce terme va conduire, pour une source non plus ponctuelle mais étendue, à la sommation en P de figures de franges déphasées, pour donner au final une figure de franges de contraste inférieur à 1. Notons en effet que si la répartition d'énergie entre les deux bras de l'interféromètre est parfaite à 50 % - 50 %, l'éclairement reçu en P est :

$$\xi_p = L(\rho, \delta) d \rho d \delta [1 + \cos(k \Delta_p(\rho, \delta))] \quad (5.3)$$

avec  $k=2\pi/\lambda$ , et  $L(\rho,\delta)$  la densité angulaire d'éclairement (en  $W/m^2/sr$ ) caractérisant la source après collimation.

### 5.3.2.2 Contraste des franges pour une source à champ étendu

Si la source n'est plus ponctuelle, le faisceau collimaté incident sur l'interféromètre présente un champ d'incidence étendu. En réécrivant le terme en cosinus de l'éq.(5.3) comme la partie réelle d'un nombre complexe, et en intégrant sur toute la dimension angulaire de la source, il vient :

$$\xi_P = \iint_S L(\rho, \delta) d\rho d\delta + \text{Re} \left\{ e^{jk\Delta_P^0} \iint_S L(\rho, \delta) e^{jk\Delta_P^1(\rho, \delta)} d\rho d\delta \right\}$$

Le premier terme de cette expression n'est autre que l'éclairement total en P en l'absence d'interférence, soit

$$\xi^{tot} = \iint_S L(\rho, \delta) d\rho d\delta$$

En introduisant par ailleurs le facteur de contraste complexe suivant

$$\widetilde{V}_P = \frac{1}{\xi^{tot}} \iint_S L(\rho, \delta) e^{jk\Delta_P^1(\rho, \delta)} d\rho d\delta = V_P e^{j\Phi_P}$$

alors on obtient :

$$\xi_P = \xi_P^{tot} \left[ 1 + V_P \cos(k\Delta_P^0 + \Phi_P) \right]$$

Ainsi, par rapport à la figure d'interférence créée par une source ponctuelle sur l'axe, l'intégration en champ angulaire pour une source étendue produit un double effet : altération du contraste et déphasage des franges. Dans la suite, les quantités réelles  $V_P$  et  $\Phi_P$  seront dénommés « contraste de champ » et « déphasage de champ ».

### 5.3.2.3 Contraste et déphasage de champ dans le cas d'une source circulaire homogène

Dans le cas d'un disque source émettant de manière homogène sur toute sa surface, l'éclairement total en P, en l'absence d'interférence, s'exprime par :

$$\xi_P^{tot} = \int_0^{\rho_{max}} \int_0^{2\pi} L_0 \rho d\rho d\delta = L_0 \pi \rho_{max}^2$$

où  $\rho_{max}$  est le demi-angle de champ de la source collimatée, et où  $L_0$  peut se définir par rapport à la puissance totale  $P_{tot}$  émise par la source via la relation de conservation de l'énergie  $L_0 \pi \rho_{max}^2 S_{col} = P_{tot}$ , avec  $S_{col}$  la surface du faisceau collimaté.

Dans ce cas, le facteur de contraste complexe, se met sous la forme

$$\widetilde{V}_P = \frac{1}{\pi \rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} \rho e^{-jk(d-\psi x_{P_0})\rho^2} \left( \int_0^{2\pi} e^{jk2\varepsilon_P \psi \rho \sin \delta} d\delta \right) d\rho$$

expression dans laquelle nous reconnaissons une fonction de Bessel d'ordre zéro, définie par:

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-jz \sin \delta} d\delta$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\widetilde{V}_P = \frac{2}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} \rho e^{-jk(d-\psi x_P)\rho^2} J_0(2k\psi\varepsilon_P\rho) d\rho \quad (5.4)$$

Cette intégrale peut être calculée rigoureusement en faisant intervenir les fonctions dites de Lommel (ref.[6], p.435-441). Nous allons toutefois pouvoir nous passer ici de ce raffinement, après une remarque sur la localisation des franges.

La localisation des franges est en effet directement induite par la fonction de Bessel de l'éq.(5.4). Cette fonction atteint son maximum lorsque  $\varepsilon_P=0$ , c'est à dire lorsque  $P_0=C$ . Ceci définit un plan, qui se trouve être, à l'angle d'inclinaison près, l'image du miroir  $M_1$  à travers la lame séparatrice. C'est donc sur ce plan, nommé « plan de localisation des franges », que se forment les franges de contraste maximal. Mais pour de très faibles angles d'inclinaison du miroir  $M_1$ , cette localisation est faible. Par exemple, dans le cas d'un interféromètre à différence de marche nulle ( $d=0$ ), et pour un point P situé sur l'axe optique ( $x_P=0$ ), le contraste complexe devient réel avec pour valeur :

$$V_P = 2J_1(a)/a, \text{ avec } a = 2k\psi\rho_{\max}\varepsilon_P$$

Expérimentalement, nous avons comme valeurs typiques un angle  $\psi=60$  mrad et un angle de champ  $\rho_{\max}=4$  mrad (fibre de 100  $\mu\text{m}$  de rayon de cœur au foyer d'une lentille de 25 mm). A la longueur d'onde de 355 nm, le contraste reste alors supérieur à 99 % dès lors que la condition  $|\varepsilon_P| < 3,3$  cm est réalisée. Autrement dit, même un léger défaut de mise au point du détecteur sur le plan de localisation n'a aucune incidence sur le contraste mesuré. Dans toute la suite nous pourrons donc négliger la fonction de Bessel. Notons que fondamentalement, cette fonction de Bessel est à relier au théorème de Van Cittert-Zernike pour une source circulaire. Celui-ci décrit en effet la perte de cohérence mutuelle entre deux points éclairés par une source lorsque la distance transverse ( $x_2-x_1$ ) entre ceux-ci augmente. Les deux points sont ici  $P_1$  et  $P_2$ , qui jouent le rôle de « trous d'Young ». Par conséquent, la dégradation de leur cohérence mutuelle se traduit par une chute du contraste d'interférence.

En négligeant la fonction de Bessel dans l'équation (5.4), on obtient simplement :

$$\widetilde{V}_P = \frac{2}{\rho_{\max}^2} \int_0^{\rho_{\max}} \rho e^{-jk(d-\psi x_p)\rho^2} d\rho$$

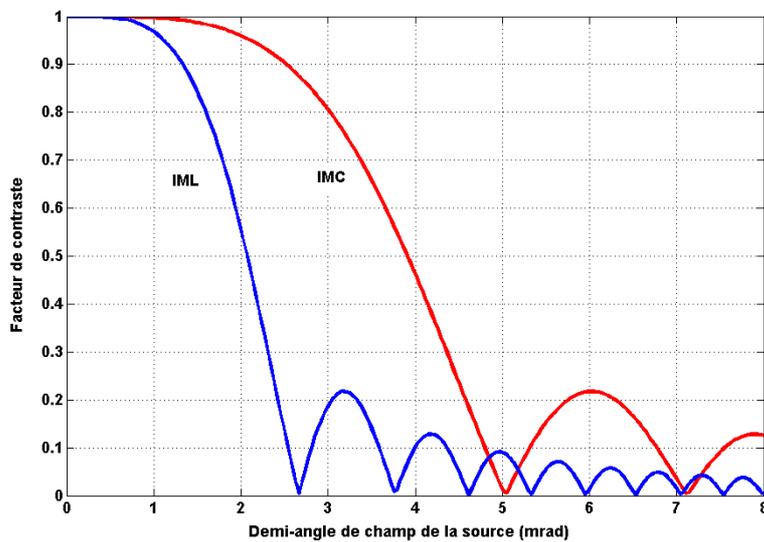
Dans cette intégrale, on peut négliger le terme d'inclinaison  $\psi x_p$ , très petit devant  $d$  en pratique, tant pour l'IMC que pour l'IML. Le contraste de champ et le déphasage de champ sont alors homogènes sur un plan de détection donné, avec pour expression

$$V = \text{sinc}\left(\frac{d\rho_{\max}^2}{\lambda}\right) \quad (5.5)$$

$$\Phi = -k \frac{d\rho_{\max}^2}{2} \quad (5.6)$$

Remarquons d'abord que, puisque la mesure de vitesse implique une mesure différentielle de phase, le déphasage de champ n'est pas gênant *a priori*, du moment que celui-ci est constant tout au long des mesures. Cette dernière condition n'est malheureusement pas toujours vérifiée en pratique : nous y reviendrons au chapitre 6.

La valeur du contraste de champ est quant à elle préoccupante. La figure 5.7, représente en effet les courbes de contraste obtenues en fonction du champ pour deux paramètres  $\Delta_0=2d$ , correspondants aux différences de marches souhaitées pour l'IMC ( $\Delta_0=2,8$  cm) et l'IML ( $\Delta_0=10$  cm). On constate que pour un champ de 4 mrad, par exemple, le contraste de champ n'est que de 46 % pour l'IMC, et tombe à 10 % pour l'IML. La chute de performances du DIMI est alors sans appel (voir figure 5.5).



**Figure 5.7 : Contraste de champ des interféromètres du DIMI (sans compensation et dans le cas d'une lame séparatrice infiniment mince)**

Pour obtenir un champ réduit, on peut :

- soit augmenter la focale de la lentille de collimation, ce qui rend le dispositif plus encombrant, tout en accroissant les difficultés ultérieures liées à l'imagerie des franges d'interférences sur le détecteur (nécessité d'un facteur de réduction plus grand)

- soit réduire le diamètre de la fibre, ce qui limite le signal disponible pour la mesure (cf. chapitre 3).

Il n'est donc pas aisé de réduire le champ de l'interféromètre. Heureusement, il existe une troisième solution, qui consiste à utiliser des lames dites de « compensation de champ », permettant d'améliorer le contraste de l'interféromètre.

### 5.3.3 Principe et mise en œuvre de la compensation de champ

#### 5.3.3.1 Effet d'une lame de compensation dans le cas d'une séparatrice infiniment mince

Dans un article de 1966, Hilliard et Shepherd<sup>[36]</sup> développent l'idée d'utiliser une lame de compensation de champ pour améliorer le contraste d'un interféromètre de Michelson éclairé par une source étendue. L'application de l'époque concerne la mesure de l'élargissement Doppler de raies naturellement émises par l'atmosphère, application finalement très proche de la notre, à ceci près que le lidar utilise une source active.

L'idée est en fait fort simple, et part du diagnostic suivant : si l'on pousse l'approximation paraxiale à l'ordre 4 (en négligeant le terme d'inclinaison en  $\psi x_p$  dans l'ordre 4), la différence de marche entre les deux ondes au point P s'écrit :

$$\Delta_p = 2(d - \psi x_p) - (d - \psi x_p)\rho^2 - d \frac{\rho^4}{4}$$

Idéalement, il faudrait donc pouvoir supprimer, ou au moins limiter, le terme d'ordre 2. C'est précisément ce que permet de faire la compensation de champ. Il suffit pour cela d'insérer une lame, d'épaisseur et d'indice bien choisis, dans le bras le plus long de l'interféromètre.

La figure 5.8 montre que pour un rayon d'angle d'incidence  $i$ , la différence de marche existant entre les trajets de propagation des ondes dans un espace sans lame (trajet bleu) et avec lame (trajet rouge), est pour un aller-retour :  $\Delta_c = 2e(n_c \cos r - \cos i)$ .

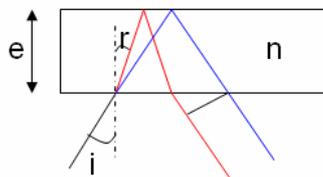


Figure 5.8 : Différence de marche produite par une lame d'épaisseur  $e$  et d'indice  $n_c$

La quantité  $\cos i$  n'est autre que le cosinus directeur  $\gamma$  de l'onde collimatée, et peut être approchée à l'ordre 4 par  $\cos i = \gamma \approx 1 - \rho^2/2 - \rho^4/8$ . Par ailleurs, en utilisant la loi de Snell-Descartes  $n_c \sin r = \sin i$ , on obtient :

$$\Delta_c = e \left( 2(n_c - 1) + \rho^2 \frac{n_c - 1}{n_c} + \frac{\rho^4}{4} \frac{n_c^3 - 1}{n_c^3} \right)$$

En insérant cette lame dans le bras le plus long de l'interféromètre, la différence de marche totale en P devient :

$$\Delta_p = 2(d - \psi x_p + e(n_c - 1)) + \rho^2 \left( e \frac{n_c - 1}{n_c} - d + \psi x_p \right) + \frac{\rho^4}{4} \left( e \frac{n_c^3 - 1}{n_c^3} - d \right)$$

Par conséquent, le terme d'ordre 2 se réduit au terme d'inclinaison, très petit, si l'on règle la position des miroirs de manière à ce que :  $d = d_{opt} = e(n_c - 1)/n_c$ . On est alors en situation de champ compensé.

En champ compensé, la différence de marche d'ordre zéro vaut, en moyenne sur la figure de franges,  $\Delta_p^0 = 2d_{opt}(1 + n_c)$ . Les valeurs optimales des paramètres  $d_{opt}$  et  $e_{opt}$  permettant d'obtenir à la fois le paramètre  $\Delta_0$  souhaité et un champ compensé sont alors données par :

$$d_{opt} = \frac{\Delta_0}{2} \frac{1}{(n_c + 1)} \quad \text{et} \quad e_{opt} = \frac{\Delta_0}{2} \frac{n_c}{n_c^2 - 1}$$

Par exemple, dans le cas d'une lame de verre d'indice  $n_c = 1,5$ , et pour un interféromètre travaillant à  $\Delta_0 = 2,8$  cm, la différence de distance entre les miroirs devrait être  $d_{opt} = 5,6$  mm, et l'épaisseur de la lame  $e_{opt} = 1,68$  cm. Notons qu'en pratique, il est inutile de spécifier une épaisseur de lame au  $1/10^{\text{ème}}$  de mm près. La précision au mm suffit, la stricte compensation étant alors obtenue pour une différence de marche voisine de  $\Delta_0$  à 1 mm près, ce qui est sans conséquence sur les performances de l'instrument.

Lorsque la compensation n'est pas tout à fait bien réglée ( $d \neq d_{opt}$ ), on observera un résidu d'ordre 2. Le contraste d'un interféromètre quasi compensé se calcule d'après l'expression suivante :

$$V(d, \rho_{\max}) = \frac{2}{\rho_{\max}^2} \left| \int_0^{\rho_{\max}} \rho e^{jk \left[ \rho^2 (d_{opt} - d) + \frac{\rho^4}{4} \left( (d_{opt} - d) + d_{opt} \frac{n_c + 1}{n_c} \right) \right]} d\rho \right| \quad (5.7)$$

La figure 5.9 montre les courbes de contraste obtenues en fonction du champ dans trois situations distinctes : légère sous-compensation ( $d = d_{opt} - 20 \mu\text{m}$ ), compensation parfaite ( $d = d_{opt}$ ), et légère sur-compensation ( $d = d_{opt} + 20 \mu\text{m}$ ). On observe que le réglage de  $d$  n'est pas très critique pour des champs modérés inférieurs à 20 mrad, et ne le devient qu'aux très larges champs de 80 mrad et plus, c'est-à-dire bien au delà de notre besoin.

Notons que nous avons négligé dans l'équation (5.7) le terme d'inclinaison  $\psi x_p$  dans l'ordre 2, car ce terme est de l'ordre du micron : si la compensation est imparfaite, il est donc dominé par le terme  $(d - d_{opt})$  de l'ordre 2, et si la compensation est parfaite; il ne devient significatif qu'aux larges champs, où il est dominé par l'ordre 4.

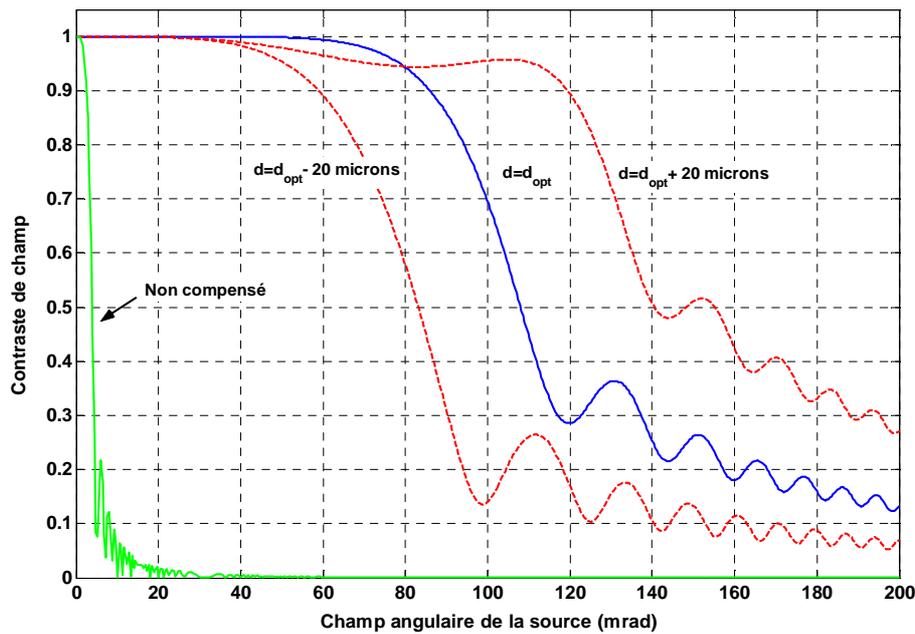


Figure 5.9 : Contraste de champ d'un interféromètre avec et sans compensation de champ (cas d'un lame séparatrice infiniment mince)

Ces courbes sont analogues à celles publiées par Hilliard et Shepherd en réf.[36], bien que la méthode de calcul soit différente. Elles montrent que la compensation de champ est un moyen extrêmement efficace pour améliorer le contraste des franges d'interférences, et ce jusqu'à des champs très larges. Physiquement, le fait d'interposer une lame de verre dans le bras le plus long de l'interféromètre revient à rapprocher virtuellement le miroir de ce bras. L'image à travers la séparatrice du nouveau miroir virtuel est alors exactement superposée avec le miroir de l'autre bras. Tout se passe comme si l'on travaillait autour d'une « pseudo différence de marche nulle », insensible au champ, tout en ayant une différence de marche réelle  $\Delta_0$ .

Cette technique de compensation semble donc la solution idéale à notre problème. Toutefois, nous avons supposé tout au long de ce paragraphe que la lame séparatrice était infiniment mince. Or on peut s'attendre à ce qu'une lame séparatrice épaisse joue elle-même le rôle de lame compensatrice, avec toutefois une différence : la lame séparatrice est inclinée de  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique. C'est un effet qu'il nous faut prendre en compte.

### 5.3.3.2 Effet d'une séparatrice épaisse en l'absence de lame compensatrice

Nous supposons dans ce paragraphe que la lame séparatrice est épaisse mais qu'il n'y a pas de lame de compensation. On suppose que le traitement semi-réfléctif est déposé sur la face avant de la lame. La figure 5.10 illustre alors les chemins optiques parcourus dans l'un et l'autre bras de l'interféromètre, en représentant les rayons réels (traits continus) et « dépliés » (traits pointillés). L'approche « dépliée » consiste à ne représenter qu'un seul axe optique, sur lequel on dispose l'image des lames effectivement traversées par les rayons. On constate alors que :

- le faisceau bleu (bras M1) traverse  $LS_1$  seulement
- le faisceau rouge (bras M2) traverse  $LS$ ,  $LS_2$  et  $LS_2'$ .

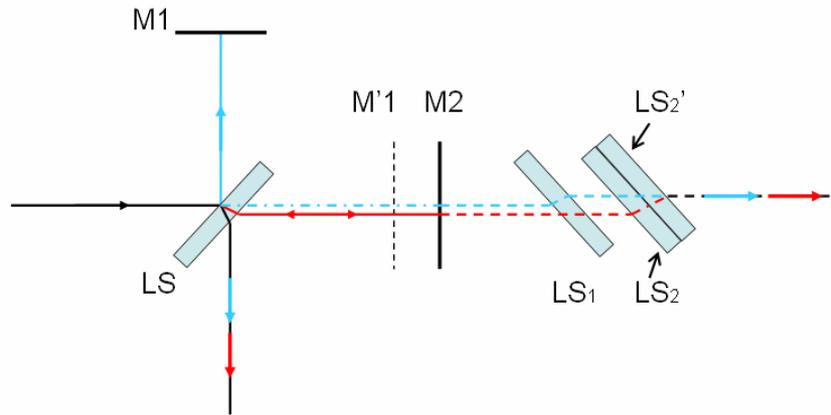


Figure 5.10 : Représentation « dépliée » d'un interféromètre de Michelson. Source : réf.[35]

Les lames  $LS_1$  et  $LS_2$  étant strictement équivalentes, la différence de marche entre les deux ondes de l'interféromètre se limite à :

$$\Delta_S = \Delta_{LS} + \Delta_{LS_2'} = h(n_s \cos r_1 - \cos i_1 + n_s \cos r_2 - \cos i_2)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la séparatrice,  $n_s$  son indice, et les angles  $i_1, r_1$  et  $i_2, r_2$  les angles d'incidence et réfraction sur  $LS$  et  $LS_2'$  respectivement.

Comme  $LS$  et  $LS_2'$  sont inclinées, les angles d'incidence  $i_1$  et  $i_2$  se définissent par  $\cos i_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = (-\alpha + \gamma) / \sqrt{2}$  et  $\cos i_2 = \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = (\alpha + \gamma) / \sqrt{2}$ , où  $\vec{n}_1$ ,  $\vec{n}_2$  sont les normales rentrantes des faces d'entrées de  $LS$  et  $LS_2'$  et  $\vec{u}$  la direction de l'onde incidente.

C'est donc ici que se situe la différence entre l'effet d'une lame de compensation perpendiculaire à l'axe optique, et l'effet de la séparatrice, inclinée de  $45^\circ$ .

Le lecteur intéressé trouvera le détail du calcul de  $\Delta_S$  en annexe B de ce mémoire. Le résultat est :

$$\Delta_S = \sqrt{2}h \left[ (2n_s^2 - 1)^{1/2} - 1 \right] + \alpha^2 \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-3/2} \right] + \beta^2 \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-1/2} \right]$$

### 5.3.3.3 Effets combinés d'une séparatrice épaisse et d'une lame de compensation

Dans le cas d'un interféromètre incluant une lame séparatrice d'épaisseur  $h$ /indice  $n_s$ , une lame compensatrice d'épaisseur  $e$ /indice  $n_c$ , et pour lequel la différence de distance entre les deux miroirs vaut  $d$ , la différence de marche existant en sortie pour un rayon entrant de cosinus directeurs  $(\alpha, \beta)$  est, d'après les résultats précédents et en se limitant à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= 2d + 2e(n_c - 1) + \sqrt{2}h \left[ (2n_s^2 - 1)^{1/2} - 1 \right] \dots \\
 &+ \alpha^2 \left( \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-3/2} \right] - \left( d - e \frac{n_c - 1}{n_c} \right) \right) \dots \\
 &+ \beta^2 \left( \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-1/2} \right] - \left( d - e \frac{n_c - 1}{n_c} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

expression dans laquelle le terme d'inclinaison en  $\psi\alpha_P$  est négligé.

Cette expression pose un problème nouveau, dû à l'épaisseur de la séparatrice : puisque les termes en  $\alpha^2$  et  $\beta^2$  sont différents, il n'est plus possible de compenser les deux à la fois. On peut réduire la différence de marche d'ordre 2 mais pas l'annuler tout à fait.

Le compromis consiste à compenser la moyenne des termes en  $\alpha^2$  et  $\beta^2$ , c'est à dire de choisir une solution telle que :

$$d - e \frac{n_c - 1}{n_c} = \frac{1}{2} \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 2 - (2n_s^2 - 1)^{-3/2} - (2n_s^2 - 1)^{-1/2} \right] \tag{5.9}$$

Par ailleurs, cette condition s'accompagne de l'équation que doit satisfaire le terme de différence de marche non dépendante du champ :

$$\Delta_0 = 2d + 2e(n_c - 1) + \sqrt{2}h \left[ (2n_s^2 - 1)^{1/2} - 1 \right]$$

Ces deux équations permettent alors de calculer les valeurs des paramètres de compensation. Par exemple, si  $h=10$  mm et  $n_c=n_s=1,48$ , les valeurs « optimales » d'épaisseur  $e_{opt}$  et de distance  $d_{opt}$  à réaliser sont :

- pour un IMC de paramètre  $\Delta_0=28$  mm :  $e_{opt}=4,5$  mm ;  $d_{opt}=6$  mm
- pour un IML de paramètre  $\Delta_0=100$  mm :  $e_{opt}=49,5$  mm ;  $d_{opt}=20,5$  mm.

Remarquons que pour un IMC, les valeurs obtenues sont très raisonnables, alors que la lame de compensation requise pour l'IML s'annonce très épaisse.

Reste à connaître l'efficacité de cette compensation moyenne. Si l'on introduit l'éq.(5.9) dans l'éq.(5.8), le terme de différence de marche dépendante du champ s'écrit :

$$\Delta_1(\alpha, \beta) = d_{comp} (\alpha^2 - \beta^2) - (d - d_{opt}) \rho^2 \tag{5.10}$$

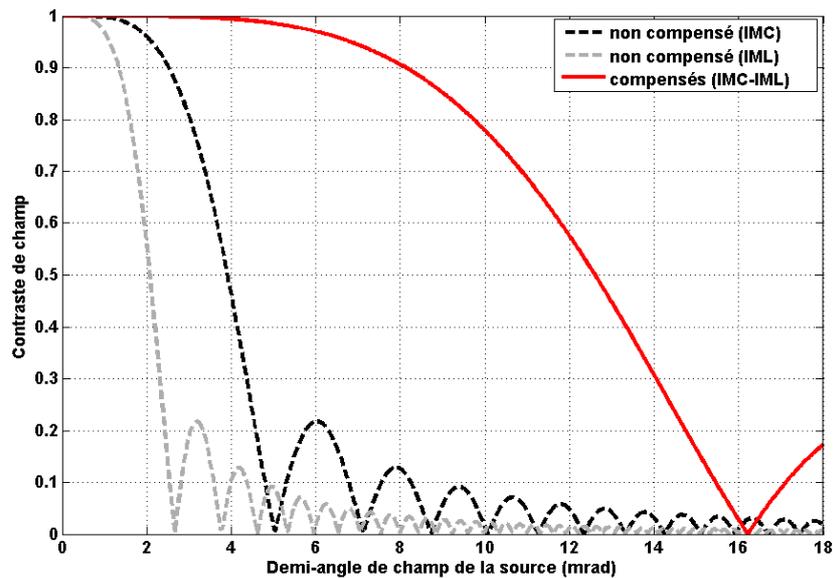
$$\text{avec } d_{comp} = \frac{h}{2\sqrt{2}} \left[ (2n_s^2 - 1)^{-1/2} - (2n_s^2 - 1)^{-3/2} \right]$$

Ainsi, même lorsque  $d=d_{opt}$ , la compensation à l'ordre 2 n'est totale et limitée par l'ordre 4 que pour les ondes collimatées vérifiant  $\alpha^2=\beta^2$ , (c'est à dire pour les points de la source situés sur les diagonales  $y = \pm x$ ). Au contraire, la compensation est minimale lorsque  $\Delta_1(\alpha, \beta)$  atteint son maximum en valeur absolue. Pour une source circulaire de rayon angulaire maximal  $\rho_{max}$ , ce maximum est obtenu lorsque  $\alpha^2 = \rho_{max}^2$ ,  $\beta=0$ , ou bien lorsque  $\alpha=0$ ,  $\beta^2 = \rho_{max}^2$ .

Un minorant du contraste de champ peut ainsi être calculé, sur la base d'une compensation qui serait homogène mais limitée à l'ordre 2 par le terme  $\Delta_1(\rho) = d_{\text{comp}}\rho^2$ . L'expression de ce minorant est, de manière analogue à l'éq.(5.4), égale à :

$$V_{\text{comp}} = \left| \text{sinc} \left( \frac{d_{\text{comp}}\rho_{\text{max}}^2}{\lambda} \right) \right|$$

La courbe de contraste de champ correspondant à cette expression est tracée sur la figure 5.11 et comparée aux courbes de contrastes non compensés.



**Figure 5.11** Comparaison des contrastes de champs des interféromètres du DIMI avec et sans compensation

Cette figure illustre le gain très net de contraste de champ que permet la compensation, même si celle-ci est limitée par l'utilisation d'une lame séparatrice épaisse. En particulier, pour une application où le champ ne dépasse pas 4 mrad, on doit théoriquement obtenir un contraste de champ supérieur à 99 %.

Notons que si l'élément séparateur de faisceau dans l'interféromètre était un cube et non une lame, nous aurions symétrie du séparateur dans les deux bras, et nous devrions alors avoir accès à une compensation encore plus efficace (figure 5.9). Le champ délivré par les fibres optiques est toutefois suffisamment faible pour que ce ne soit pas là un critère de choix. Au contraire, le choix entre cube ou lame devant aussi tenir compte de la qualité des surfaces, il nous a paru plus prudent, de ce point de vue, de choisir une lame.

## 5.4. Simulation et estimation du signal d'un DIMI

Pendant l'étude comparative du chapitre 4, nous avons supposé pouvoir appliquer aux signaux détectés un estimateur idéal, c'est-à-dire sans biais et dont la précision atteint les Bornes de Cramer-Rao, pour réaliser la mesure des paramètres atmosphériques. C'est ce point que nous allons remettre en question ici : peut-on réellement trouver un tel estimateur pour notre problème, et comment le mettre en œuvre ? Pour répondre à cette question, nous allons d'abord simuler un exemple de figures de franges, à partir de paramètres atmosphériques, puis nous tenterons de résoudre le problème inverse : retrouver les paramètres atmosphériques d'entrée en appliquant un estimateur aux figures de franges simulées.

### 5.4.1 Simulation de figures de franges

En entrée du modèle figure le vecteur paramètre atmosphérique, que nous nommerons ici vecteur vrai (c'est celui que l'estimateur devra retrouver). Prenons par exemple :

$$\vec{\theta}_{\text{vrai}} = (u_r = 100 \text{ m/s} ; \rho^* = 0,5 ; T=250 \text{ K} ; \alpha=1,2)$$

A partir du modèle de l'éq.(5.2), il est facile de simuler des figures de franges, telles qu'on pourrait les mesurer sur une caméra CCD. Nous supposerons pour plus de réalisme que les figures de franges sont de supports circulaires, et qu'il y a en tout  $M$  pixels éclairés (en cumulé sur les deux figures). Chaque pixel  $k$  délivre un nombre de photoélectrons noté  $\sigma_k$ .

Les deux figures présentées en figure 5.12 ont été calculées avec les paramètres suivants :

- chaque figure contient  $M/2=1250$  pixels (environ 20 pixels de rayon)
- l'interfrange est de 10 pixels
- le facteur  $K$  d'intensité du signal Rayleigh pur est de  $K=10 \times 10^6$  photons en entrée du DIMI
- l'efficacité quantique des pixels est homogène avec une valeur  $\eta=50\%$
- la quantité de signal Rayleigh pur/pixel est  $N_{\text{tot}} / M = K\eta\rho^* / (2M) = 500$  photoélectrons
- la quantité moyenne de fond solaire/pixel est de  $B_{\text{tot}}/M = 100$  photoélectrons (RSF=5)
- les différences de marches des interféromètres sont  $\Delta_{01}=3$  cm et  $\Delta_{02}=10$  cm
- le contraste de champ des franges est :  $V_{\text{champ-1,2}}=0,9$ , le facteur  $V_{\text{déseq}}=1$
- la largeur spectrale du laser est de  $\gamma_L=150$  MHz.

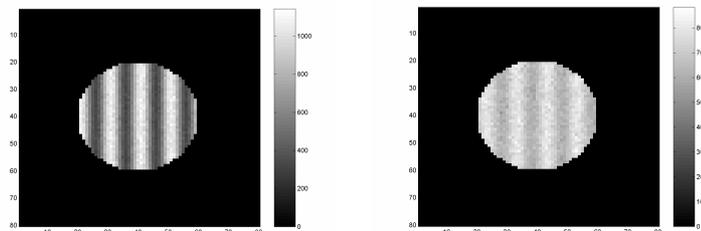


Figure 5.12 : Simulation de figures de franges (IMC à gauche, IML à droite)

Compte tenu de la légère dégradation de contraste due à l'échantillonnage des pixels et à la largeur spectrale du laser, les valeurs de contraste total sont de  $W_1=0,62$  pour l'IMC et

$W_2=0,15$  pour l'IML. Notons que l'aspect encore quelque peu idéaliste des figures de franges obtenues est surtout dû à l'hypothèse d'homogénéité de l'éclairement, laquelle n'est pas fondamentale.

### 5.4.2 Estimation par maximum de vraisemblance : principe et algorithme

Bien que d'autres méthodes d'estimation soient possibles, nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse à l'estimateur du maximum de vraisemblance (MV), car d'une part, sa philosophie est assez intuitive, et d'autre part, il a pour propriétés, au moins asymptotiquement, d'être non-biaisé et d'atteindre en précision les Bornes de Cramer-Rao. Néanmoins l'expression « au moins asymptotiquement » pose un problème : elle signifie que les bonnes performances de l'estimateur MV ne sont garanties que si l'on accumule les données d'un grand nombre de tirs lasers avant estimation. Or, en environnement embarqué, et plus particulièrement dans le cas de sources lasers de haute énergie mais de basse cadence, les possibilités d'accumulation s'annoncent limitées à quelques tirs seulement, voire un seul. Idéalement nous voudrions donc que l'estimateur MV mène à des résultats non-biaisés et de précision optimale à chaque tir laser. C'est ce que nous nous proposons de vérifier ici.

Le principe de l'estimateur MV est le suivant : supposons l'observation de signaux  $(\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k \dots \sigma_M)$ , à partir duquel le vecteur paramètre  $\vec{\theta}$  de l'atmosphère doit être déterminé. La probabilité que l'on a d'obtenir ce jeu de signaux, si l'on prend pour hypothèse que  $\vec{\theta} = \vec{\theta}_1 = (u_{r_1}, \rho_1^*, T_1, \alpha_1)$ , est donnée par la loi de probabilité jointe :

$$\Lambda(\vec{\theta}_1) = P(S_1(\vec{\theta}_1) = \sigma_1 \dots S_k(\vec{\theta}_1) = \sigma_k \dots S_M(\vec{\theta}_1) = \sigma_M)$$

Cette fonction, déjà rencontrée au chapitre 4, n'est autre que la fonction de vraisemblance du signal. Si  $\Lambda(\vec{\theta}_1)$  est faible, c'est qu'il est peu vraisemblable que  $\vec{\theta}_1$  soit le vrai paramètre. Le but du jeu est de trouver le paramètre  $\vec{\theta}$  qui maximise  $\Lambda(\vec{\theta})$ .

Dans le cas de signaux statistiquement indépendants (c'est le cas des pixels de caméra CCD), la fonction de vraisemblance est le produit des lois de probabilités individuelles. Par ailleurs, il est plus commode de maximiser la fonction de log-vraisemblance, laquelle s'exprime par :

$$f(\vec{\theta}) = \ln(\Lambda(\vec{\theta})) = \sum_{k=1}^M \ln(P(S_k(\vec{\theta}) = \sigma_k))$$

En introduisant dans cette expression les statistiques de Poisson de l'éq.(4.1), il vient :

$$f(\vec{\theta}) = cste + \sum_{k=1}^M \sigma_k \ln \langle S_k(\vec{\theta}) \rangle - \langle S_k(\vec{\theta}) \rangle$$

On peut utiliser, pour maximiser cette fonction, les méthodes d'optimisation classiques. Par exemple, la méthode de Newton, qui définit automatiquement la direction de recherche et l'amplitude du pas d'itération, suit la formule d'itération suivante :

$$\vec{\theta}_{i+1} = \vec{\theta}_i - H_f^{-1}(\vec{\theta}_i) \cdot \text{grad}_f(\vec{\theta}_i)$$

où  $H_f$  et  $\text{grad}_f$  sont respectivement la matrice hessienne (dérivées secondes) et la fonction gradient (dérivées premières) de la fonction de log-vraisemblance (toutes deux sont calculables analytiquement).

Avec cet algorithme, pas plus de 10 itérations s'avèrent nécessaires pour converger vers le maximum global de la fonction. Cependant, afin d'éviter les maxima locaux, il est nécessaire d'utiliser un vecteur d'initialisation qui ne soit pas trop éloigné de la solution. Cette contrainte ne remet toutefois pas en cause l'intérêt pratique de l'algorithme car la tolérance sur le choix du point d'initialisation est assez large, comme nous allons le voir.

### 5.4.3 Performances statistiques de l'estimateur MV

Afin de déterminer les performances de l'estimateur MV, en termes de biais et d'écart type d'estimation, on réalise un test statistique. A partir du vecteur paramètre  $\vec{\theta}_{\text{vrai}}$ , 5000 jeux de signaux ( $\sigma_1, \sigma_2 \dots \sigma_k \dots \sigma_M$ ) sont simulés. Chaque réalisation est ensuite soumise à l'estimateur MV, initialisé par un unique vecteur  $\vec{\theta}_{\text{ini}}$ . L'ensemble des résultats fournit alors la statistique d'estimation de l'estimateur, dont la moyenne permet de mesurer le biais, tandis que l'écart type est à comparer avec les BCR.

Nous prenons par exemple, le vecteur d'initialisation suivant :

$$\vec{\theta}_{\text{ini}} = (u_r = 140 \text{ m/s} ; \rho^* = 0,4 ; T = 230 \text{ K} ; \alpha = 1,0)$$

soit un point de départ relativement éloigné de la solution qui est :

$$\vec{\theta}_{\text{vrai}} = (u_r = 100 \text{ m/s} ; \rho^* = 0,5 ; T = 250 \text{ K} ; \alpha = 1,2)$$

L'estimation des 5000 jeux de signaux simulés fournit les résultats statistiques du tableau 5.1, dans lequel figurent également les BCR théoriques, calculées à partir de la matrice de Fisher discrète de l'éq.(4.4).

	$u_r$ (m/s)	$\rho^*$	T (°K)	$\alpha$
$\theta$ vrai	100	0,5	250	1,2
$\theta$ estimé	99,90	0,50	250,2	1,20
BCR	0,62	0,14%	2,08	0,003
écart-type d'estimation	0,62	0,13%	2,08	0,003

Tableau 5.1 : Biais et précision de l'estimateur MV

Ce tableau montre que le biais d'estimation de l'estimateur MV est très faible, avec seulement 0,1 m/s pour la mesure de vitesse et 0,2 K pour la température. Par conséquent, pour des applications ne demandant pas des précisions de mesures meilleures que 1 m/s ou 1 K, ces résultats sont satisfaisants. Par ailleurs, les écarts types d'estimation correspondent presque parfaitement aux bornes de Cramer-Rao calculées. La figure 5.13 montre l'histogramme de la statistique d'estimation pour la température. On constate d'une part l'absence de « fausses estimations » (*outliers* en anglais, c'est à dire des estimations complètement hors statistique), et d'autre part que la forme de la distribution correspond à la

forme asymptotiquement atteinte par tout estimateur MV, à savoir une gaussienne de loi de probabilité donnée par :

$$P(T = T_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_T^2}} e^{-\frac{(T_0 - \langle T \rangle)^2}{2\varepsilon_T^2}}, \text{ où } \varepsilon_T \text{ est l'écart type d'estimation en température.}$$

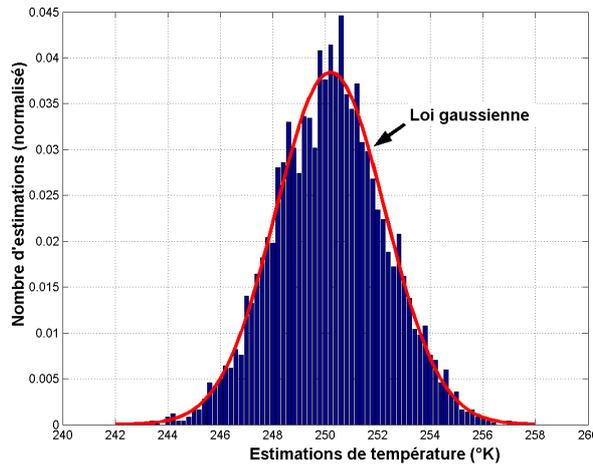


Figure 5.13 : Histogramme d'estimation de la température produit par l'estimateur MV (RSF=5)

Notons toutefois que lorsque le RSF  $N_{\text{tot}}/B_{\text{tot}}$  devient faible, l'estimateur MV peut tout à la fois produire des « fausses estimations », et un biais plus conséquent sur les bonnes. Ceci est illustré sur l'histogramme de la figure 5.14, obtenu pour un RSF=0,5.

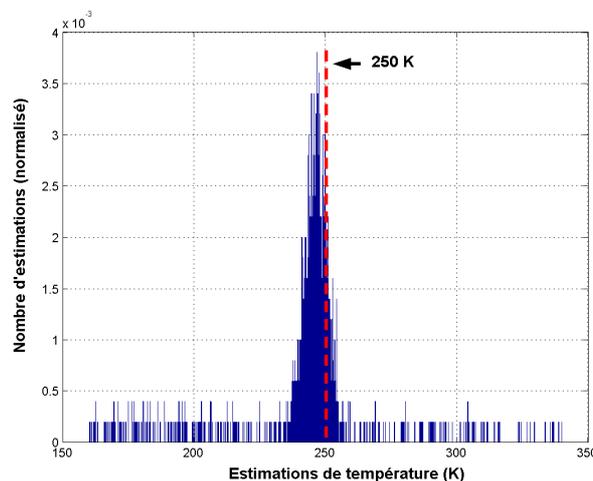


Figure 5.14 : Histogramme d'estimation de la température produit par l'estimateur MV (RSF=0,5). Le biais est de 3,6 K ; 75 % des estimations sont hors du domaine  $[\langle T \rangle - 5\varepsilon_T, \langle T \rangle + 5\varepsilon_T]$

Toutefois, pour des valeurs raisonnables de RSF  $> 1$  ou 2, l'estimateur MV approche le comportement d'un estimateur idéal : non biaisé, de précision optimale et cela sans nécessité d'accumulation. Il sera donc très intéressant de chercher à le mettre en pratique sur des signaux réels. Ceci sera discuté dans le chapitre 6.

#### 5.4.4 Sensibilité de l'estimation au modèle de spectre Rayleigh-Brillouin

L'estimateur MV peut être très performant, comme nous venons de le voir, mais est à double tranchant : dans la mesure où il évalue la ressemblance entre le signal observé et le modèle qui le décrit, toute imperfection du modèle peut potentiellement induire un biais d'estimation.

Le modèle présenté jusqu'à présent se veut le plus fidèle possible (à l'homogénéité de l'éclairage près) quant à la description des signaux fournis par un DIMI, dans le cas d'un spectre analysé de forme gaussienne. Mais nous savons depuis le chapitre 2 que le modèle gaussien n'est qu'une hypothèse, qui s'est avérée commode pour les calculs menés jusqu'à présent. En réalité, le modèle de Tenti et la figure 2.7 nous indiquent que d'une part, le spectre rétrodiffusé n'est pas gaussien, et que par ailleurs, sa forme varie en fonction de la densité et de la température atmosphérique. On peut donc s'interroger sur le biais d'estimation produit par l'utilisation d'un modèle de spectre gaussien pour inverser des signaux issus d'un spectre qui ne l'est pas en réalité.

Pour calculer ce biais, et ainsi caractériser l'influence de l'effet Brillouin, nous pouvons utiliser la démarche suivante :

- i) Choisir des paramètres atmosphériques et calculer le spectre de Tenti
- ii) Simuler des figures de franges correspondant à ce spectre
- iii) Inverser les signaux par une estimation MV faisant l'hypothèse d'un spectre gaussien
- iv) Mesurer le biais entre les paramètres atmosphériques estimés et les valeurs de départ.

En fait, on sait que l'effet Brillouin ne modifie en rien la vitesse macroscopique du vent. Par conséquent, le modèle de spectre n'affecte pas la phase des franges. Par ailleurs, l'effet Brillouin laisse également inchangée l'intensité moyenne des franges, puisqu'il ne s'agit que d'une redistribution spectrale de l'énergie rétrodiffusée. Il n'intervient donc que sur le contraste des franges d'interférences. Le biais d'estimation porte alors sur les paramètres  $T$  et  $\alpha$ , et par suite  $\rho^*$  (puisque  $\rho^*$  et  $\alpha$  sont couplés).

D'après l'éq.(5.1), le contraste des franges peut se calculer à partir de la TF du spectre. Comme nous disposons du modèle numérique de Tenti pour le calcul du spectre, il est aisé de calculer les valeurs de contrastes prévues pour chacun des deux interféromètres, et de simuler les figures de franges correspondantes. A partir de ces figures, l'inversion se déroule par estimateur MV, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent.

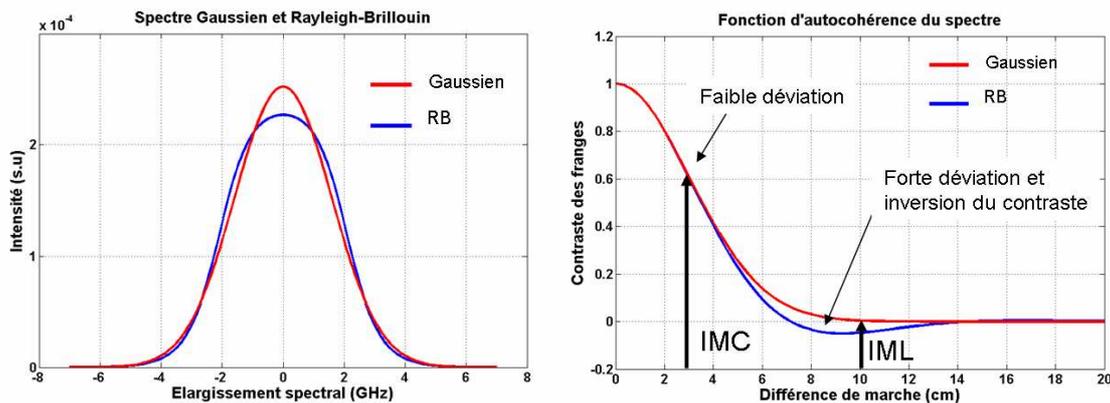
Nous prendrons trois exemples de conditions atmosphériques différentes, correspondant à des spectres de Tenti de paramètres  $\gamma$  fort, modéré, et faible. Le tableau 5.2 rassemble les valeurs de biais constatées à l'estimation. Les différences de marche des interféromètres sont  $\Delta_{01}=2,8$  cm et  $\Delta_{02}=10$  cm, les contrastes instrumentaux  $V_1$  et  $V_2$  sont tous deux unitaires, le signal de fond solaire est nul.

Paramètres atmosphériques	Biais Densité ( $\rho^*_{estimée} - \rho^*_{vraie}$ )	Biais Température $T_{estimée} - T_{vraie}$
$\rho^*=1$ ; $T=288$ K ( $y=0,39$ ) ; $\alpha=1,5$	+ 5 %	-14 K
$\rho^*=0,5$ ; $T=250$ K ( $y=0,20$ ) ; $\alpha=1,1$	+ 2 %	-9 K
$\rho^*=0,1$ ; $T=220$ K ( $y=0,04$ ) ; $\alpha=1,0$	< +1 %	- 4 K

**Tableau 5.2 : Biais d'estimation en densité et température sous l'influence de l'effet Brillouin**

Les très importantes valeurs de biais constatées, surtout pour la température, apparaissent sans appel, et nous invitent à la conclusion suivante : il est absolument nécessaire de disposer d'un modèle de spectre adéquat pour espérer pouvoir mesurer la température atmosphérique. Toutefois l'extrême sensibilité du biais constaté peut être inquiétante : même pour un très faible effet Brillouin, de paramètre  $y=0,04$ , le biais est d'environ 4 K.

On peut visualiser l'origine de ce biais d'estimation en comparant les fonctions d'autocorrélation des signaux gaussiens et de Tenti, c'est-à-dire les TF de leurs spectres respectifs, comme le montre la figure 5.15.



**Figure 5.15 : Comparaison des spectres gaussien et Rayleigh-Brillouin (RB : Tenti avec  $y=0,4$ ) et de leurs TF respectives**

Cette figure illustre bien le problème posé par l'effet Brillouin, et en même temps nous suggère une solution. D'après le modèle de Tenti, l'IML mesure un contraste négatif (c'est-à-dire de phase opposée) de quelques pourcents, alors que le modèle gaussien prévoit un contraste positif quasi nul. Cette différence importante induit le système en erreur. En revanche, nous pouvons chercher à augmenter la différence de marche de l'IML jusqu'à atteindre des valeurs pour lesquelles le contraste attendu est quasi-indépendant du modèle de spectre, par exemple  $\Delta_{02}=20$  cm. Du reste, une telle modification ne changerait guère les facteurs de performances du DIMI, puisque aux fortes valeurs de  $\Delta_{02}$  les facteurs de performances sont constants (dans la limite bien entendu de la cohérence du signal Mie, c'est-à-dire du laser). En revanche, la compensation de champ deviendrait probablement difficile à réaliser (lame de compensation très épaisse). Cependant, en supposant que cela soit possible, et toujours avec des facteurs de contrastes unitaires, nous obtenons les valeurs de biais suivantes :

Paramètres atmosphériques	Biais Densité ( $\rho^*_{\text{estimée}} - \rho^*_{\text{vraie}}$ )	Biais Température $T_{\text{estimée}} - T_{\text{vraie}}$
$\rho^*=1$ ; $T=288$ K ( $y=0,39$ ) ; $\alpha=1,5$	- 0,5 %	+2,5 K
$\rho^*=0,5$ ; $T=250$ K ( $y=0,20$ ) ; $\alpha=1,1$	Pas de biais	+1,3 K
$\rho^*=0,1$ ; $T=220$ K ( $y=0,04$ ) ; $\alpha=1,0$	Pas de biais	< 1 K

**Tableau 5.3 : Biais d'estimation en densité et température avec  $\Delta_{02}=20$  cm**

Les valeurs de biais sont ainsi considérablement réduites. Pour autant, en ce qui concerne la température, elles ne deviennent acceptables que pour de faibles valeurs du paramètre  $y$ . L'influence de l'effet Brillouin est donc particulièrement critique pour les mesures de température. Ces dernières ne peuvent être envisagées que si le modèle de spectre est suffisamment bien connu.

## 5.5. Conclusion du chapitre

Nous avons vu au cours de ce chapitre que le DIMI est un instrument capable théoriquement d'effectuer des mesures simultanées de vitesse, température, densité, et rapport de diffusion. Les performances théoriques sont intéressantes, avec des précisions attendues de l'ordre de 0,6 m/s en vitesse, 2 K en température et 0,15 % en densité, à 5500 m d'altitude, et dans une configuration expérimentale relativement réaliste mettant en jeu une énergie laser de 10 mJ environ. Ces performances sont assez résistantes aux conditions atmosphériques d'opération de l'instrument puisque seul le cas de mesures dans un milieu de rapport de diffusion très élevé ( $\alpha > 3$ ) semble pouvoir nuire gravement aux mesures de température et densité. Les facteurs de contraste des interféromètres sont en revanche des paramètres d'utilisation critiques, mais leurs valeurs peuvent être rendues pratiquement optimales grâce à la technique de compensation de champ. Enfin, nous avons vu que l'estimateur MV appliqué aux signaux fournis par le DIMI permet d'atteindre les Bornes de Cramer-Rao de manière non biaisée à chaque réalisation de signal. Toutefois, pour les mesures de température, et dans une moindre mesure celles de densité, l'absence de biais ne peut être garantie que si le modèle de spectre Rayleigh-Brillouin est parfaitement connu par l'expérimentateur.

Ce dernier point est une faiblesse importante, qui doit remettre en question non pas le principe du DIMI (le problème serait identique avec un FPI) mais le principe même des mesures de température et de densité. En effet, la forme du spectre Rayleigh-Brillouin est encore aujourd'hui sujette à débat. La question qui se pose est donc la suivante : **la précision requise sur le modèle de spectre ne va-t-elle pas au-delà de celle des modèles actuels ?** C'est là une question difficile à laquelle il faudrait répondre avant d'envisager de véritables mesures expérimentales de température et densité par cette méthode. Dans le cadre de ce mémoire, nous la laisserons ouverte à de futurs travaux.

En revanche, et c'est l'un des aspects très positifs de la mesure par imagerie de franges, l'effet Brillouin n'a aucune influence sur la mesure du paramètre de vitesse. Mieux encore, l'éventuelle présence d'un signal Mie ne dégrade pas la précision de mesure de vitesse, mais peut au contraire l'améliorer. Reste donc à démontrer, sur le plan expérimental, la faisabilité de cette mesure, ce qui fait l'objet du chapitre suivant.



## Chapitre 6

### Développement d'un lidar pour la mesure de vent

Dans ce chapitre, nous présentons d'une part l'instrument développé au cours de cette thèse, et d'autre part les résultats expérimentaux que celui-ci nous a permis d'obtenir. L'instrument est un lidar Rayleigh-Mie de courte portée (20-50 m), à réception fibrée, muni d'un interféromètre de Michelson à imagerie de franges pour la mesure de vitesse de l'air. Nous commencerons par présenter les contraintes de stabilité métrologique que requiert une telle mesure, ainsi que l'instrument que nous avons conçu et réalisé afin de s'en affranchir au mieux. Le traitement de signal employé pour estimer la vitesse à partir des signaux obtenus est ensuite discuté en détail. Nous finirons ce chapitre sur les principaux résultats expérimentaux obtenus, qui soulignent à la fois les limites mais aussi le potentiel de l'instrument.

#### **6.1. Conception d'un instrument adapté aux contraintes métrologiques**

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la mesure de vitesse peut être effectuée à partir d'un unique interféromètre de Michelson à imagerie de frange. Fondamentalement, il s'agit d'une mesure différentielle : on mesure la différence de phase entre les franges produites par le signal lidar et les franges produites par un signal de référence marquant le « zéro Doppler ». Cette « phase de référence » peut être obtenue en injectant une fraction du faisceau laser directement dans l'interféromètre.

L'une des difficultés majeures de la mesure de vitesse tient donc à la stabilité de la phase de référence au cours du temps. En effet, si la phase de référence dérive, il convient de la mesurer régulièrement. Si elle dérive à chaque tir laser, il faut pouvoir la mesurer à chaque tir laser, mais cela implique de nouvelles exigences instrumentales. Par conséquent, avant de concevoir l'instrument, il nous faut analyser la sensibilité métrologique du montage et déterminer à quelle cadence il est nécessaire de réaliser les mesures de référence de phase.

##### ***6.1.1 Sensibilité métrologique de la mesure de phase***

La différence de marche optimale d'un interféromètre de Michelson pour une mesure de vitesse est  $\Delta_0 = 2,8$  cm. D'après l'éq.(4.10), et si l'on néglige le terme d'inclinaison en  $\psi_{\chi_P}$ , la phase des franges du signal lidar est :

$$\phi = \phi_{ref} + S_\phi u_r \text{ avec } \phi_{ref} = \frac{2\pi V_L}{c} \Delta_0 \text{ et } S_\phi = \frac{4\pi \Delta_0}{c \lambda_L}$$

Le coefficient  $S_\phi$  traduit la sensibilité de la phase des franges vis-à-vis du décalage Doppler. Cette sensibilité est tenue, puisqu'avec  $\Delta_0 = 2,8$  cm, la sensibilité  $S_\phi$  est de

3,3 mrad/m.s<sup>-1</sup> seulement. Mesurer une vitesse de 1 m/s revient donc à mesurer un déphasage de  $1/2000^{\text{ème}}$  de période. Par conséquent, pour que la stabilité de la phase de référence  $\phi_{ref}$  soit assurée à moins de 1 m/s près, il faut faire en sorte que son éventuelle variation  $d\phi_{ref}$  reste inférieure à  $S_\phi$ .

Selon l'expression ci-dessus, la phase  $\phi_{ref}$  dépend de la fréquence laser  $\nu_L$  et de  $\Delta_0$ . Nous avons donc  $d\phi_{ref} = \frac{2\pi}{c}(\Delta_0 d\nu_L + \nu_L d\Delta_0)$ .

Si  $\Delta_0$  est constant mais que  $\nu_L$  varie, la condition  $d\phi_{ref} < S_\phi$  impose  $d\nu_L < 5,6$  MHz lorsque  $\Delta_0=2,8$  cm. **La stabilité requise du laser est donc de l'ordre de 5 MHz.** A l'inverse, si  $\nu_L$  est stable mais que  $\Delta_0$  varie, la condition  $d\phi_{ref} < S_\phi$  impose  $d\Delta_0 < 0,2$  nm. Cette condition fixe des contraintes métrologiques très fortes sur l'interféromètre, tant sur le plan mécanique que thermique. Par exemple, **la stabilité mécanique des miroirs de l'interféromètre doit être maintenue à 0,1 nm près**, un écart de position ayant un effet deux fois supérieur sur la différence de marche. La stabilité thermique du montage n'est pas moins contraignante. En effet, la valeur typique de variation thermique de l'indice de réfraction de l'air est de  $\Delta n/\Delta T=10^{-6}$  K<sup>-1</sup>. Ceci induit une variation de différence de marche  $d\Delta_0=L\Delta n$  où  $L$  est la différence de parcours en espace libre. En supposant, pour plus de simplicité, que  $L=2,8$  cm (interféromètre non compensé à lame séparatrice infiniment mince), la condition  $d\Delta_0 < 0,2$  nm se traduit par  $\Delta T < 7 \times 10^{-3}$  K. Un calcul plus précis devrait certes prendre en compte les paramètres effectifs de compensation ainsi que les coefficients de dilatation des lames, mais nous retiendrons ici l'ordre de grandeur : **la stabilité thermique requise est de l'ordre de 0,01°K.**

Compte tenu de ces ordres de grandeurs (laser stable à 5 MHz, mécanique stable à 0,1 nm, température stable à 0,01 K), ce serait un véritable « challenge » technologique que de stabiliser l'instrument sur de longues durées de fonctionnement. Dans notre cas, la simple observation de l'instabilité de la phase des franges tirs à tirs (voir plus loin en figure 6.15) nous indique qu'**il est impératif de mesurer la référence de phase à chaque tir laser.**

### 6.1.2 L'instrument réalisé et ses principaux modules

Nous avons imaginé deux méthodes permettant de mesurer la phase de référence des franges à chaque tir laser. Dans ce chapitre, nous n'en présenterons qu'une seule de manière détaillée (la seconde méthode, intéressante mais peu testée, est décrite en Annexe C). Le principe est d'enregistrer à chaque tir laser les figures de franges créées successivement par le signal lidar d'abord, puis par le signal de référence, celui-ci ayant « patienté » dans une ligne à retard pendant le temps nécessaire à l'enregistrement du signal lidar. Cette technique requiert l'usage d'une caméra CCD d'un type particulier, nommé caméra CCD Interligne.

Le schéma complet de l'instrument réalisé est illustré en figure 6.1.

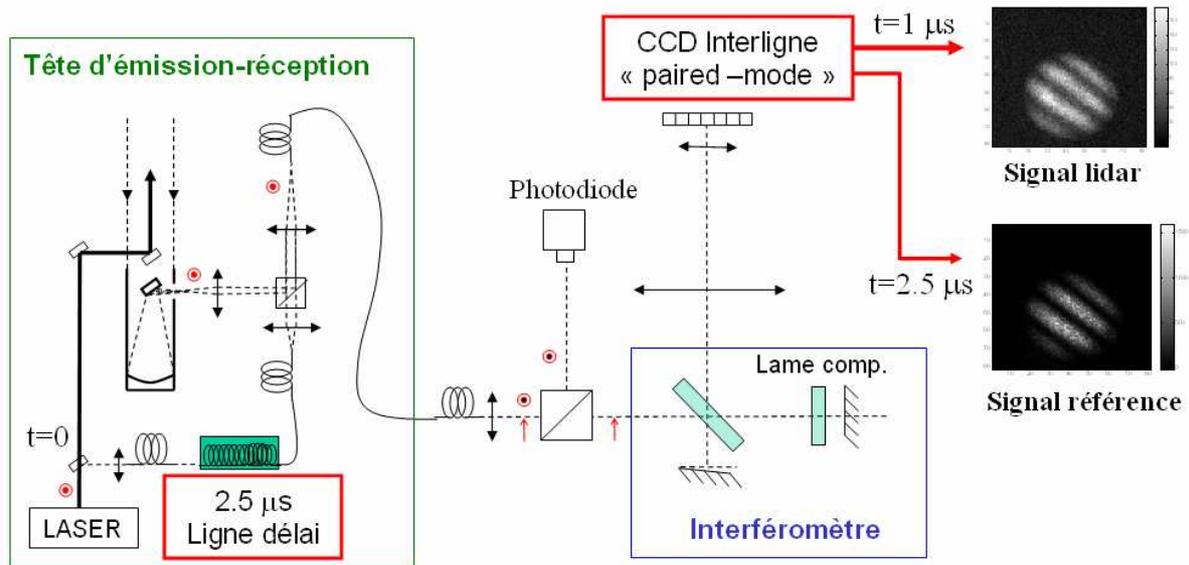


Figure 6.1 : Schéma de l'instrument réalisé

Immédiatement après l'émission du pulse laser, une fraction du signal laser est dirigé vers une fibre optique de 500 m de longueur, retardant d'un délai de  $2,5 \mu\text{s}$  ce qui constitue le signal de référence. Entre-temps, la figure de franges générée par le signal lidar dans l'interféromètre est imagée sur la caméra CCD Interligne, puis est enregistrée et stockée en mémoire par la caméra. Lorsque le signal de référence sort de la ligne à retard, il est lui-même injecté dans l'interféromètre par la même fibre de guidage, et produit une nouvelle figure de franges, également enregistrée par la caméra. La différence de phase entre les deux figures de franges enregistrées est alors en principe proportionnelle à la vitesse Doppler du signal lidar. Cette méthode de mesure présente l'avantage crucial d'être insensible aux dérives de fréquences du laser. Par ailleurs, le très court délai ( $2 \mu\text{s}$  environ) existant entre le passage dans l'interféromètre des deux signaux permet de minimiser drastiquement l'influence des perturbations thermo-mécaniques.

Nous présentons à présent brièvement les différents modules de l'instrument.

### Le laser :

C'est un laser Nd:YAG impulsif (de marque BMI), pompé par lampe flash et émettant plus de  $100 \text{ mJ/impulsion}$  à  $1064 \text{ nm}$  avec un taux de répétition de  $10 \text{ Hz}$ . Des cristaux non linéaires situés hors cavité permettent de doubler et tripler la fréquence de l'onde. A  $355 \text{ nm}$ , l'énergie disponible peut atteindre  $30 \text{ mJ/impulsion}$ . La cavité est injectée par un laser monomode continu à  $1064 \text{ nm}$  : un élément piezo-électrique, placé sur le miroir de fond de cavité du laser Nd:YAG, permet alors d'ajuster en permanence la longueur de cavité pour qu'elle s'accorde sur le mode injecté. De cette manière, le faisceau à  $355 \text{ nm}$  est lui-même monomode. La polarisation de sortie à  $355 \text{ nm}$  est « s ».

### Le module d'émission-réception :

L'émission laser dans l'atmosphère s'effectue dans l'axe d'un télescope de réception de type Newton, dont le miroir primaire est parabolique, de diamètre  $15 \text{ cm}$ , ouvert à  $f/4$ , et légèrement obstrué en son centre par le miroir plan secondaire ainsi que par le miroir de

renvoi axial du laser. En sortie du miroir secondaire, le signal est repris par une lentille et dirigé vers un cube polariseur. Comme la rétrodiffusion Rayleigh ne dépoliarise que très faiblement la lumière, l'essentiel du signal lidar est polarisé « s »: il est donc quasiment intégralement dévié par le cube polariseur, pour être focalisé dans la fibre de guidage. Cette dernière présente un diamètre de cœur de 200  $\mu\text{m}$  et une ouverture numérique de 0,22 bien adaptée à l'ouverture du télescope. Le plan de mise au point de la fibre dans l'atmosphère est ajustable sur une distance s'étalant typiquement de 20 à 50 m, selon la portée désirée du lidar.

### **L'interféromètre :**

A l'issue de la fibre de guidage, le signal est collimaté avec un demi-angle de champ de près de 4 mrad. Le diamètre du faisceau est alors de 10 mm environ. La fibre n'étant pas à maintien de polarisation, le signal qui en est issu doit être à nouveau filtré par un cube polariseur. La fraction de lumière polarisée « p » est transmise à l'interféromètre de Michelson, la fraction polarisée « s » pouvant être quant à elle exploitée sur une seconde voie (par exemple munie d'une photodiode pour suivre l'évolution temporelle du signal lidar). L'épaisseur de la lame séparatrice de l'interféromètre est de 10 mm, celle de la lame de compensation de 5 mm. L'ensemble de l'interféromètre est compensé pour une différence de marche  $\Delta_0 \approx 3 \text{ cm}$  (soit une sensibilité  $S_\phi \approx 3,5 \text{ mrad/m.s}^{-1}$ ). L'angle d'inclinaison typique du miroir inclinable est de 60  $\mu\text{rad}$ , permettant d'obtenir 3 ou 4 interférences sur la section de faisceau. La figure de franges est localisée au voisinage du miroir incliné (en fait optiquement superposé au miroir plan du fait de la lame de compensation). Un système afocal de deux lentilles en sortie d'interféromètre permet d'imager les franges sur le plan du détecteur, en y reproduisant les mêmes conditions d'interférence. Le grandissement est de 1/6.

### **La caméra :**

Le choix de la caméra est un élément clé de l'expérience. Nous avons opté pour une Caméra de type Interligne (modèle Coolsnap HQ de Roper Scientific), que l'on utilise dans son mode d'opération dit « paired mode ». Bien que non optimale du point de vue de l'efficacité quantique ( $\eta=20 \%$  à 355 nm), cette caméra a la capacité d'enregistrer successivement une paire d'images avec un délai entre elles de quelques  $\mu\text{s}$  seulement (délai minimum de 1  $\mu\text{s}$ ). Ce délai est suffisamment bref pour permettre la séparation temporelle des signaux lidar et référence au moyen d'une ligne à retard.

Dans un contexte exigeant la mesure de référence à chaque tir laser, cette possibilité de double acquisition donne à la caméra Interligne un avantage déterminant sur les caméras CCD classiques, dites « Full Frame », qui peuvent présenter d'excellentes efficacités quantiques (jusqu'à 70 % en technologie « back-illuminated ») mais ne peuvent lire les images qu'avec un délai entre elles de quelques ms. La caméra Interligne représente également une alternative « économique » par rapport aux caméras Intensifiées, dont l'excellente résolution temporelle (quelques ns) et la bonne détectivité seraient probablement intéressantes, mais pour un prix deux fois supérieur.

Le fonctionnement et le « timing » de la caméra Interligne dans notre expérience est représenté sur la figure 6.2. Le laser « trigge » la caméra juste avant émission du pulse laser, ce qui déclenche l'acquisition d'une première image pendant une durée de 1  $\mu\text{s}$ . Cette courte durée suffit pour enregistrer le signal lidar, le temps de vol aller-retour du signal lidar n'étant que de 200 ns pour une portée de 30 m. A l'issue de cette première acquisition, le signal enregistré sur chaque pixel est rapidement transféré en un pixel adjacent de stockage, non

photosensible (temps de transfert 200 ns). Une fois l'image stockée, le contrôleur de la caméra en débute la lecture, pendant que les pixels photosensibles commencent à acquérir la seconde image. L'acquisition de cette seconde image dure tout le temps nécessaire au circuit électronique pour lire la première (environ 10 ms). La seconde image est alors lue à son tour (10 ms également). Au final, la caméra délivre une paire d'images toutes les 25 à 30 ms, ce qui est bien adapté aux sources laser de cadence de répétition inférieure à 40 Hz. Notons que le délai minimal que doit assurer la ligne à retard est de 1,2  $\mu$ s. Ce n'est que pour plus de sécurité que nous avons choisi une ligne deux fois plus longue.

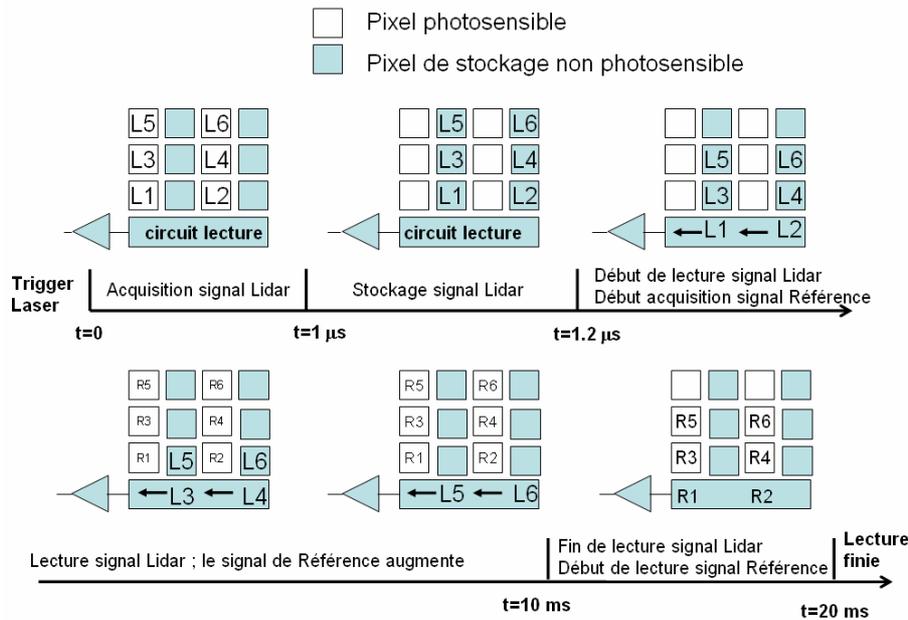


Figure 6.2 : Fonctionnement et « timing » de la caméra CCD Interligne

Parmi les autres propriétés importantes de la caméra, citons :

- **les bruits de détection :** le bruit dominant est ici le bruit de lecture des pixels, issu du circuit électronique de lecture. Pour cette caméra, il s'élève à environ 4,8 électrons rms par pixel (voir caractérisation en figure 6.6). Etant donné les très faibles durées d'acquisition, le bruit d'obscurité n'est pas limitant : la caméra est de plus refroidie thermo-électriquement à  $-30^{\circ}\text{C}$ .

- **la taille des pixels et les possibilités de « binning » :** faire du « binning » signifie sommer les signaux de plusieurs pixels adjacents avant lecture. Cela dégrade la résolution spatiale de l'image mais permet d'augmenter le niveau de signal de manière à sortir du bruit de lecture. Sur cette caméra, la taille d'un pixel physique est de  $6,45 \mu\text{m}$ , mais nous avons essentiellement travaillé en « binning 4x4 », c'est à dire avec sommation en carrés de 16 pixels. Désormais, nous entendrons par le mot « pixel » l'élément de détection équivalent obtenu après « binning », faisant donc  $25,8 \mu\text{m}$  de côté. Le diamètre de la figure de franges est donc d'environ 60 pixels, pour un total de 2800 pixels illuminés. La périodicité des franges est typiquement de 10 à 20 pixels. La précision recherchée sur la phase des franges correspond à  $1/100^{\text{ème}}$  ou  $1/200^{\text{ème}}$  de pixel.

## 6.2. Traitement de signal des franges d'interférences

La figure 6.3 montre une paire d'images réellement enregistrée à l'aide de l'instrument. L'image de gauche correspond au signal lidar, celle de droite au signal de référence. Afin d'éviter le signal de fond solaire, ces images ont été prises de nuit.

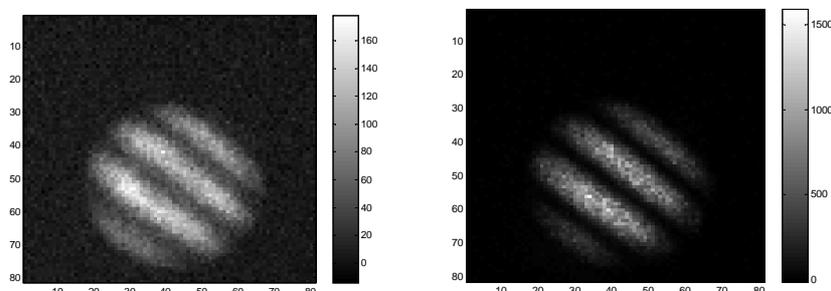


Figure 6.3 : Une paire de franges lidar (gauche) / franges de référence (droite), enregistrée de nuit

Il nous faut à présent mesurer la différence de phase entre ces deux figures de franges, en gardant à l'esprit que le déphasage n'est que de l'ordre de  $1/100^{\text{ème}}$  de pixel pour des vitesses de vent normales : il est donc totalement invisible à l'œil nu. Nous allons tenter de mettre en œuvre un estimateur du Maximum de Vraisemblance (MV) afin d'estimer la différence de phase entre les deux figures. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, bien que d'autres méthodes d'estimation soient possibles, celle-ci devrait avoir le mérite d'atteindre les Bornes de Cramer-Rao d'estimation à chaque tir laser. Pour mettre en place cet estimateur, nous avons besoin de trois éléments :

- un modèle paramétrique du signal
- une pré-estimation des paramètres recherchés, permettant d'initialiser l'estimateur
- la statistique du signal, afin de calculer correctement la fonction de vraisemblance.

Nous allons donc mettre en place successivement ces trois éléments, avant de décrire la méthode de mise en œuvre pratique de l'estimateur MV. Nous calculerons également les bornes de Cramer-Rao sur l'estimation de la phase de chacune des figures de franges, en étudiant tout particulièrement l'impact sur la valeur des bornes des différents bruits qui les affectent (bruit de lecture pour le signal lidar, bruit de speckle pour le signal de référence).

L'essentiel du traitement de signal sera présenté en supposant l'absence de signal de fond solaire (cas d'expériences nocturnes). La légère variante de traitement, nécessaire pour prendre en compte ce paramètre supplémentaire et permettre des expériences diurnes, sera présentée en fin de section.

### 6.2.1 *Modèle de franges à 5 paramètres*

Contrairement aux hypothèses faites dans les chapitres 4 et 5 (franges verticales, éclairage homogène), l'expérience montre évidemment que l'éclairage des franges est spatialement inhomogène et que l'angle d'orientation des franges est inclinable à loisir selon le réglage des miroirs de l'interféromètre. Les figures de franges observées, telles qu'en figure 6.3, sont donc décrites par 5 paramètres : intensité, contraste, périodicité, orientation angulaire, et phase, le tout modulé par une figure d'éclairement inhomogène.

En l'absence de signal de fond solaire, le nombre de photoélectrons délivrés par le pixel de coordonnées  $(u,v)$  peut donc être modélisé par l'expression suivante :

$$N(u,v) = E(u,v) \left( K + KV \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{P} [(u - u_1) \cos \theta + (v - v_1) \sin \theta] \right) \right) \quad (6.1)$$

Dans cette expression :

- $E(u, v)$  est la fonction d'éclairement de la figure de franges
- $(u_1, v_1)$  sont les coordonnées d'un pixel arbitrairement choisi de phase  $\phi$
- $K, V, P, \theta$  sont les paramètres d'intensité, contraste, périodicité et orientation angulaire des franges.

A priori, seule nous intéresse la phase  $\phi$  des franges. Cependant, celle-ci ne peut être estimée correctement par MV que si tous les autres paramètres sont précisément connus, sans quoi l'algorithme MV peut converger vers une valeur fautive (un maximum local de la fonction de vraisemblance). Or, il n'est pas possible d'étalonner précisément les valeurs des paramètres  $K, V, P, \theta$  avant expérience. En effet, ces paramètres sont eux aussi susceptibles de varier d'un tir laser à l'autre. Par exemple, les perturbations thermo-mécaniques de l'interféromètre peuvent induire de légères variations d'orientation des miroirs, faisant varier simultanément  $P$  et  $\theta$ . De même,  $K$  et  $V$  dépendent de différents facteurs potentiellement variables à chaque tir laser : la puissance du laser et la densité atmosphérique pour  $K$ ; l'efficacité d'injection, la température et le rapport de diffusion pour  $V$ . **Par conséquent, il est nécessaire de procéder à l'estimation simultanée des 5 paramètres  $K, V, P, \theta, \phi$  pour chaque image de franges.**

### 6.2.2 Pré-estimation des paramètres de franges par transformée de Fourier

Si l'on raisonne sur les fréquences spatiales des figures de franges, on peut remarquer que le paramètre  $K$  caractérise la fréquence nulle de l'image, tandis que les paramètres  $V, P, \theta, \phi$  caractérisent différentes propriétés de la fréquence spatiale dominée par les franges. Il semble donc particulièrement indiqué d'effectuer la pré-estimation des 5 paramètres  $K, V, P, \theta, \phi$  à partir de la transformée de Fourier des images enregistrées.

Numériquement, on peut calculer la transformée de Fourier (TF) discrète bidimensionnelle des images, via l'algorithme dit de « Fast Fourier Transform » (FFT). Appliquée au modèle de signal  $N(u,v)$ , l'opération de FFT peut être définie mathématiquement par l'expression suivante :

$$FFT[N(u,v)] = F(p, q) = \sum_{u=1}^{N_{win}} \sum_{v=1}^{N_{win}} N(u, v) e^{-j2\pi \left[ (u-1) \left( \frac{p-1}{N_{win}} \right) + (v-1) \left( \frac{q-1}{N_{win}} \right) \right]} \quad (6.2)$$

expression dans laquelle  $N_{win} \times N_{win}$  est la taille, en pixel, de l'image analysée. Les fréquences échantillonnées par FFT sont donc, en  $\text{pixel}^{-1}$ ,  $f_{h-ech} = (p-1)/N_{win}$  (fréquences horizontales) et  $f_{v-ech} = (q-1)/N_{win}$  (fréquences verticales). Par ailleurs, on note que c'est le pixel  $F(1,1)$  de la FFT qui contient l'information de fréquence nulle.

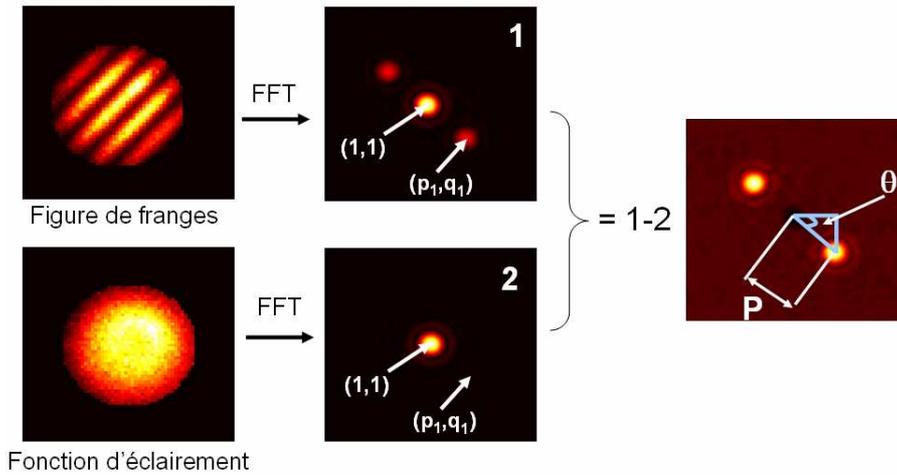
Si l'on insère dans l'éq.(6.2) le modèle de l'éq.(6.1), on obtient :

$$F(p, q) = K\varepsilon(p, q) \dots + \frac{KV}{2} \left[ e^{-j\varphi} \sum_{u=1}^{N_{win}} \sum_{v=1}^{N_{win}} E(u, v) e^{-j2\pi \left[ (u-1) \left( \frac{p-p_1}{N_{win}} \right) + (v-1) \left( \frac{q-q_1}{N_{win}} \right) \right]} + e^{j\varphi} \sum_{u=1}^{N_{win}} \sum_{v=1}^{N_{win}} E(u, v) e^{-j2\pi \left[ (u-1) \left( \frac{p-p_2}{N_{win}} \right) + (v-1) \left( \frac{q-q_2}{N_{win}} \right) \right]} \right] \quad (6.3)$$

expression dans laquelle :

- $\varepsilon(p, q) = FFT[E(u, v)]$
- $\varphi = \frac{2\pi}{P} ((u_1 - 1) \cos \theta + (v_1 - 1) \sin \theta) - \phi$  (6.4)
- $p_{1,2} = round(1 \pm N_{win} \cos \theta / P)$  et  $q_{1,2} = round(1 \pm N_{win} \sin \theta / P)$  où  $round(x)$  désigne l'arrondi de  $x$  à la valeur entière la plus proche. Ces pixels  $p_{1,2}$  et  $q_{1,2}$  fournissent une expression approchée de la fréquence spatiale des franges d'interférence.

Les pixels  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  correspondant à des fréquences conjuguées l'une de l'autre, on peut se contenter d'utiliser un demi-plan de la FFT. Comme le montre la figure 6.4, le pixel  $(p_1, q_1)$  peut alors être identifié comme étant le pixel le plus brillant du demi-plan restant, une fois filtrée la composante continue.



**Figure 6.4 : Pré-estimation des paramètres de franges dans l'espace de Fourier. NB : les FFT sont calculées sous le logiciel Matlab, et représentées ici après application de l'opérateur FFTshift, qui a pour effet de replacer la fréquence continue au centre de l'image.**

Ainsi les paramètres  $P$  et  $\theta$  sont aisément estimés, en calculant la distance et l'angle du point  $F(p_1, q_1)$  par rapport au point  $F(1, 1)$ . Ceci nous donne :

$$P = \left[ \left( \frac{p_1 - 1}{N_{win}} \right)^2 + \left( \frac{q_1 - 1}{N_{win}} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\theta = \text{atan} \left( \frac{q_1 - 1}{p_1 - 1} \right)$$

Par ailleurs, l'équation (6.3), considérée sur le demi-plan des fréquences positives, nous donne accès à deux expressions intéressantes :

$$F(1,1) \approx K\varepsilon(1,1) + \frac{KV}{2} \left[ e^{-j\varphi} \varepsilon^*(p_1, q_1) \right]$$

$$F(p_1, q_1) \approx K\varepsilon(p_1, q_1) + \frac{KV}{2} e^{-j\varphi} \varepsilon(1,1)$$

Nous pouvons faire alors l'approximation  $\varepsilon(p_1, q_1) \approx 0$ , exprimant le fait que le spectre de la fonction d'éclairement est nul en  $(p_1, q_1)$ . Cette hypothèse n'est toutefois valable que si la fonction d'éclairement est « douce » et dépourvue de bords francs. La figure d'éclairement présentée sur la figure 6.4 nous rassure à cet égard : la décroissance régulière de  $E(u, v)$  à sa périphérie se traduit en effet par une auto-apodisation bienvenue de sa TF.

Compte tenu de l'approximation  $\varepsilon(p_1, q_1) \approx 0$ , on obtient les estimations suivantes de  $K$ ,  $V$ , et  $\varphi$  :

$$K \approx F(1,1) / \varepsilon(1,1)$$

$$V \approx \left| \frac{2F(p_1, q_1)}{K\varepsilon(1,1)} \right|$$

$$\varphi = -\arg(F(p_1, q_1)), \text{ d'où l'on déduit la phase } \phi \text{ par la relation (6.4).}$$

L'analyse des figures de franges par FFT permet donc une pré-estimation très simple des 5 paramètres de franges. La précision obtenue avec une fenêtre de paramètre  $N_{\text{win}}=512$  est plutôt bonne (voir plus loin l'histogramme d'estimation de la figure 6.11) et en tout cas suffisante pour initialiser l'estimateur MV.

### 6.2.3 Statistiques des signaux enregistrés

Les franges de la figure 6.3 nous invitent à distinguer les propriétés statistiques du signal lidar et celles du signal de référence. En effet, pour le signal lidar, nous voyons que le bruit de lecture de la caméra n'est pas négligeable par rapport au signal, tandis qu'il l'est pour le signal de référence. Inversement, nous voyons pour le signal de référence que malgré la forte intensité du signal, la figure de franges conserve un aspect granuleux : il s'agit en fait du bruit de speckle, créé par l'interférence temporellement cohérente des nombreux modes issus de la fibre optique. Ce bruit de speckle n'est pas visible sur le signal lidar, la cohérence temporelle de ce signal étant bien inférieure à sa durée d'enregistrement. Les statistiques des signaux lidar et référence doivent donc être différenciées.

#### 6.2.3.1 Statistique du signal lidar

Pour le signal lidar, dans des conditions atmosphériques normales (pas de brouillard épais par exemple), l'hypothèse selon laquelle le bruit de speckle est temporellement

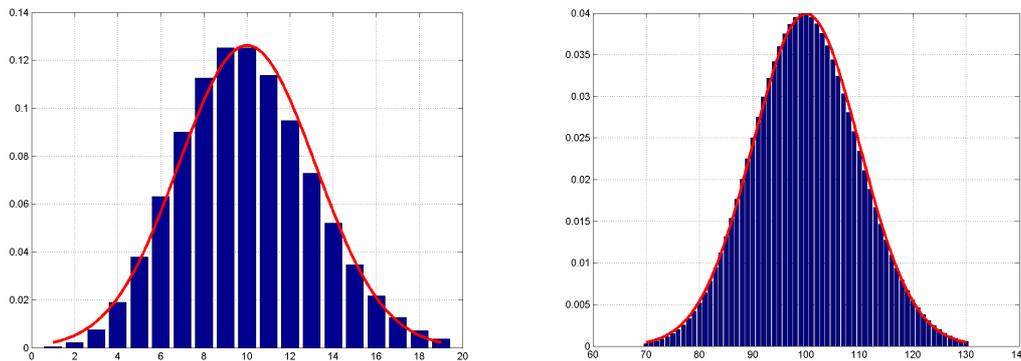
moyenné pendant la durée de son enregistrement est valable (voir chapitre 3). En l'absence de speckle, la statistique du signal émis par un pixel n'est donc plus régie que par deux phénomènes aléatoires : d'une part le bruit quantique de photodétection, et d'autre part le bruit de lecture du pixel provoqué par le circuit électronique aval de la caméra CCD.

La statistique d'un signal limité seulement par le bruit quantique de photodétection est rigoureusement donnée par la loi de Poisson. Pour le pixel  $k$ , de coordonnées  $(u_k, v_k)$ , la statistique du signal délivré est :

$$P(N_k = n_k) = \frac{\langle N_k \rangle^{n_k} e^{-\langle N_k \rangle}}{n_k!}, \text{ loi dont la variance est égale à la moyenne } \langle N_k \rangle.$$

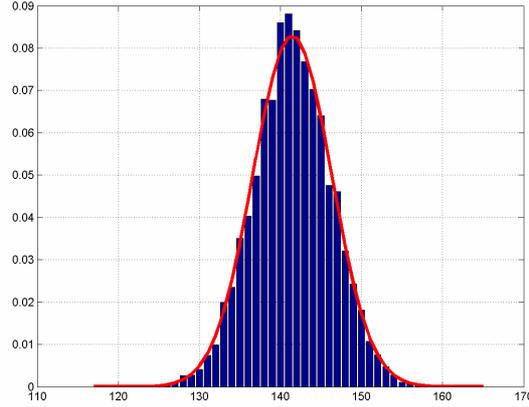
Cependant, comme le montrent les histogrammes de la figure 6.5, cette loi est très bien approchée par une loi gaussienne dès lors que  $\langle N_k \rangle > 10$ . La statistique gaussienne correspondante est la suivante :

$$P(N_k = n_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k^2}} e^{-\frac{(n_k - \langle N_k \rangle)^2}{2\sigma_k^2}} \text{ avec } \sigma_k^2 = \langle N_k \rangle \quad (6.5)$$



**Figure 6.5 : Histogrammes statistiques de variables aléatoires de Poisson de paramètres  $N=10$  (gauche) et  $N=100$  (droite), et « fit » par des lois gaussiennes de moyennes égale aux variances, avec  $\sigma_k^2=10$  (gauche) et  $\sigma_k^2=100$  (droite)**

La statistique du bruit de lecture est quant à elle aisément mesurable, à partir d'une image acquise sans signal, et est présentée en figure 6.6. C'est une statistique gaussienne d'écart type  $\sigma_{rd}=4,8$  électrons, et de moyenne nulle (l'histogramme de la figure est centré autour d'une valeur d'offset, mais ce dernier est retranché en première étape du traitement de signal).



**Figure 6.6 : Statistique mesurée du bruit de lecture de la caméra Interligne**

En définitive, le bruit quantique de photodétection et le bruit de lecture étant tous deux gaussiens et indépendants, la statistique du signal lidar peut être approchée par une loi gaussienne, de moyenne  $\langle N_k \rangle$  et de variance  $\sigma_k^2 = \langle N_k \rangle + \sigma_{rd}^2$ .

### 6.2.3.2 Statistique du signal de référence

Le signal de référence étant une fraction du signal laser émis, il est beaucoup plus intense que le signal lidar, et il convient de l'atténuer de manière à ne pas saturer la caméra CCD, tout en exploitant au mieux sa dynamique. Lorsque ces conditions sont obtenues, le bruit de lecture est négligeable devant le signal. Bien que l'acquisition de l'image de référence dure plusieurs ms, le signal laser de référence n'est perçu que pendant les quelques ns correspondant à la durée de l'impulsion. Il est donc temporellement cohérent, et l'éclairement qu'il produit sur la caméra est soumis au phénomène du speckle. La loi statistique d'éclairement en un point (x,y) de la caméra est de type exponentielle négative, comme nous l'avons vu au chapitre 3 :

$$P_r(\xi = \xi_0) = \frac{1}{\langle \xi \rangle} \exp\left(-\frac{\xi_0}{\langle \xi \rangle}\right), \text{ de moyenne } \langle \xi \rangle \text{ et de variance } \langle \xi \rangle^2.$$

L'intégration de l'éclairement sur la surface d'un pixel implique une sommation de variables aléatoires exponentielles négatives. La loi statistique du signal résultant est une loi gamma, de probabilité suivante :

$$P(N_k = n_k) = \frac{M_k^{M_k}}{\Gamma(M_k)} \frac{n_k^{M_k-1}}{\langle N_k \rangle^{M_k}} e^{-M_k \frac{n_k}{\langle N_k \rangle}} \quad (6.6)$$

loi de moyenne  $\langle N_k \rangle$  et de variance  $\langle N_k \rangle^2 / M_k$ .

Dans cette expression,  $M_k$  désigne le nombre de grains de speckle intégrés spatialement sur le pixel  $k$ . Ce nombre n'est pas nécessairement homogène sur tous les pixels de la caméra, car il dépend de la figure d'interférence produite par les nombreux modes issus de la fibre.

Nous présentons plus loin (figure 6.13) une méthode permettant de mesurer le facteur  $M_k$  de chaque pixel.

En toute rigueur, pour décrire correctement la statistique du signal de référence, il faudrait tenir compte également du bruit quantique de photodétection : le signal  $N_k$  suit en réalité une statistique de Poisson dont la moyenne est elle-même une variable aléatoire de loi gamma. Ici, nous allons négliger le bruit quantique, car le rapport des variances bruit de speckle/bruit quantique est de  $\langle N_k \rangle / M_k$ . Or nous verrons que les valeurs typiques de  $M_k$  s'échelonnent de 10 à 20 (figure 6.13), tandis que  $\langle N_k \rangle$  reste le plus souvent supérieur à 100 (par exemple, si  $K=1000$  et  $V=0,9$ , alors  $\langle N_k \rangle_{\min} \approx 100$ ). Ainsi le bruit de speckle domine au moins d'un facteur 5 à 10 le bruit quantique de photodétection.

#### 6.2.4 Estimation conjointe par MV des figures de franges

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, l'estimateur MV procède par maximisation de la fonction de vraisemblance du signal. Ici, le signal complet est composé des deux figures de franges, lidar et référence, liées par une hypothèse forte de stabilité thermo-mécanique entre les deux : nous supposons en effet que les paramètres  $P$  et  $\theta$  sont rigoureusement identiques pour les deux images. Cette hypothèse est nécessaire dans la mesure où, d'après l'éq.(6.1), les paramètres  $P$  et  $\theta$  sont couplés à la phase  $\phi$ . Par conséquent, la différence de phase  $\Delta\phi$  n'a de sens que si  $P$  et  $\theta$  ne varient pas entre les deux images.

Compte tenu de l'impact de la moindre perturbation thermo-mécanique sur la phase des franges (voir section 6.1), il s'agit là d'une hypothèse « à risque ». Heureusement, le très court délai séparant les signaux permet de limiter drastiquement le risque de dérive, et finalement, les résultats expérimentaux montreront que cette hypothèse est valable.

Nous pouvons donc chercher à réaliser une estimation conjointe des deux figures de franges, en caractérisant l'ensemble du signal par un vecteur paramètre  $\vec{\psi}$  à 8 dimensions, défini par :  $\vec{\psi} : (K_{lid}, K_{ref}, V_{lid}, V_{ref}, P, \theta, \phi_{lid}, \phi_{ref})$ .

La fonction de vraisemblance du signal s'écrit alors :

$$\Lambda(\vec{\psi}) = \left[ \prod_{k=1}^{Nbpix_{lid}} P(N_k(K_{lid}, V_{lid}, P, \theta, \phi_{lid}) = n_k) \right] \left[ \prod_{k=1}^{Nbpix_{ref}} P(N_k(K_{ref}, V_{ref}, P, \theta, \phi_{ref}) = n_k) \right]$$

Dans cette fonction, la première série de produits met en jeu les lois de statistiques gaussiennes du signal lidar (éq.(6.5)) tandis que la seconde met en jeu les lois statistiques gamma du signal de référence (éq.(6.6)).

On peut ensuite maximiser le logarithme de cette fonction de vraisemblance, en utilisant par exemple la méthode des gradients à pas décroissants, dont la loi d'itération est :

$$\vec{\psi}_{i+1} = \vec{\psi}_i + \vec{r}_i \cdot \overrightarrow{grad} \left( \log(\Lambda(\vec{\psi})) \right) \Big|_{\vec{\psi}_i}$$

Cette méthode est un peu moins commode d'usage que la méthode de Newton évoquée au chapitre 5 (nécessité de choisir le pas  $r_i$ ), mais permet d'éviter le calcul de la matrice hessienne de la log-vraisemblance, fastidieux et consommateur en temps de calcul.

### 6.2.5 Bornes de Cramer-Rao et influence du bruit sur l'estimation de la phase

Intéressons-nous maintenant à la précision théorique du traitement de signal proposé, en commençant par traiter chaque figure de franges comme un système indépendant dont on souhaite estimer la phase. Ceci nous permettra de quantifier l'impact du bruit de lecture sur la précision d'estimation de la phase du signal lidar, et l'impact du bruit de speckle sur l'estimation de la phase du signal de référence. Nous présenterons ensuite par quel moyen calculer la BCR d'estimation de la différence de phase  $\Delta\phi$  pour l'estimation conjointe des figures de franges.

#### 6.2.5.1 BCR d'estimation de phase du signal lidar, et impact du bruit de lecture

La matrice de Fisher pour des signaux suivant une rigoureuse statistique de Poisson peut être calculée (cf. chapitre 4) via l'expression :

$$F_{ij}^{lid} = \sum_{k=1}^{Nb_{pix}} \frac{1}{\langle N_k \rangle} \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_i^{lid}} \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_j^{lid}} \quad (6.7)$$

où  $Nb_{pix}$  est le nombre de pixels de la figure de franges analysée, et  $\psi^{lid}$  le vecteur paramètre à 5 dimensions défini par  $\overline{\psi^{lid}} : (K_{lid}, V_{lid}, P, \theta, \phi_{lid})$ .

Pour tenir compte du bruit de lecture de la caméra, on approche la statistique du signal par une loi gaussienne. L'expression de la matrice de Fisher devient alors :

$$F_{ij}^{lid} = \sum_{k=1}^{Nb_{pix}} \frac{1}{\sigma_k^2} \left( 1 - \frac{1}{2\sigma_k^2} \right) \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_i^{lid}} \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_j^{lid}} + \frac{1}{2\sigma_k^2} \frac{d^2\langle N_k \rangle}{d\psi_i^{lid} d\psi_j^{lid}} \quad (6.8)$$

Cette expression, plus fastidieuse à calculer puisqu'elle nécessite la prise en compte des dérivées secondes du modèle, semble assez différente de celle obtenue pour une stricte loi de Poisson. Cependant, la convergence des expressions (6.7) et (6.8) est à l'image des lois statistiques dont elles sont issues, c'est-à-dire excellente dès lors que  $\langle N_k \rangle > 10$ .

Pour caractériser l'impact du bruit de lecture, il suffit donc de calculer la Borne de Cramer-Rao du paramètre de phase  $\varepsilon_{\phi_{lid}} = \sqrt{\left[ (F^{lid})^{-1} \right]_{55}}$ , à partir de la matrice de Fisher donnée par l'éq.(6.8), et avec  $\sigma_k^2 = \langle N_k \rangle + \sigma_{rd}^2$ .

Considérons par exemple une figure de franges, affectée d'un bruit de lecture d'écart type  $\sigma_{rd}$ , et dont le vecteur paramètre est  $\overline{\psi}^{lid} : (K_{lid} ; 0,5 ; 9,6 ; 58,2^\circ ; 50 \text{ mrad})$ , où  $K_{lid}$  est un paramètre variable. La figure 6.7 présente les BCR d'estimation de la phase  $\phi_{lid}$  pour différentes valeurs de  $K_{lid}$  et  $\sigma_{rd}$ .

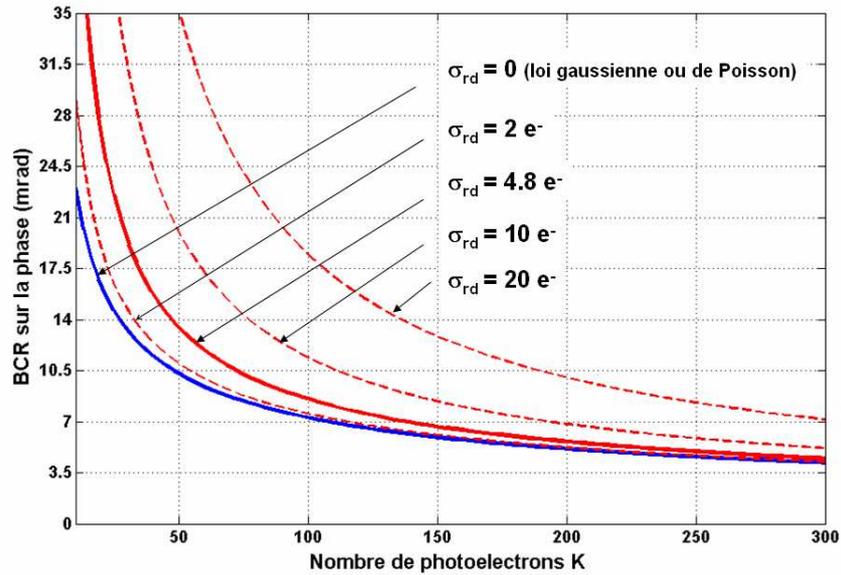


Figure 6.7 : Impact du bruit de lecture sur la précision d'estimation de la phase des franges lidar

Cette figure illustre le fort impact du bruit de lecture sur la précision de mesure. Par exemple, avec  $K_{lid}=100$ , une détection parfaite permettrait une précision de 7 mrad sur l'estimation de la phase des franges (soit environ 2 m/s si la sensibilité de l'interféromètre est  $S_\phi=3,5 \text{ mrad/m.s}^{-1}$ ). Compte tenu du bruit de lecture, nous passons à environ 8,4 mrad, soit 20 % d'erreur supplémentaire (2,4 m/s).

On peut représenter l'impact du bruit de lecture en terme de facteur de performance, de manière analogue à ce qui a été présenté dans les chapitres 4 et 5. En effet, le surcroît d'erreur commis par rapport à la situation idéale  $\sigma_{rd}=0$  ne dépend que du Rapport Signal/Bruit de lecture  $K_{lid} / \sigma_{rd}^2$ . Nous obtenons la courbe suivante :

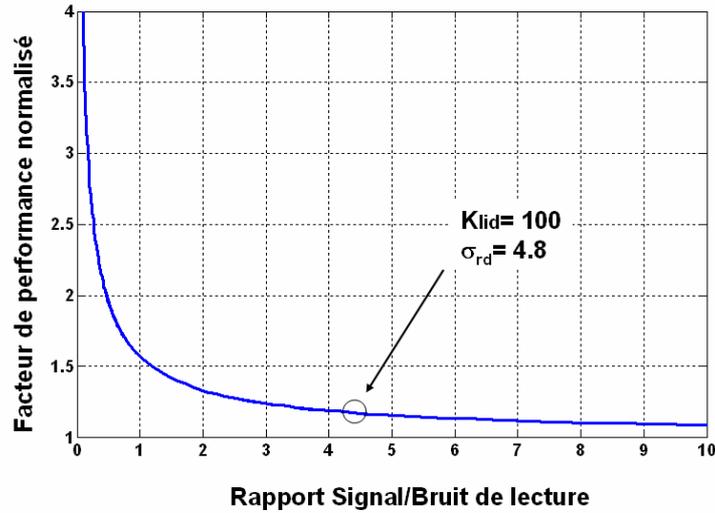


Figure 6.8 : Facteur de performance de l'instrument en fonction du rapport signal sur bruit de lecture

Nous voyons donc que le bruit de lecture peut coûter cher en terme de performances. Le point fléché illustre les 20 % de pertes calculés pour le cas ci-dessus. Remarquons que si l'on a  $K_{lid} / \sigma_{rd}^2 = 1$ , le surcroît d'erreur sur la mesure de la phase  $\phi_{lid}$  atteint 50 %. Il est donc impératif d'utiliser des caméras CCD à bas bruit.

#### 6.2.5.2 BCR d'estimation de phase du signal de référence, et impact du bruit de speckle

La matrice de Fisher dans le cas d'un bruit de speckle dominant peut être calculée à partir de la loi statistique de l'éq.(6.6). On trouve alors l'expression suivante :

$$F_{ij}^{ref} = \sum_{k=1}^M \frac{M_k}{\langle N_k \rangle^2} \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_i^{ref}} \frac{d\langle N_k \rangle}{d\psi_j^{ref}} \text{ avec cette fois } \overline{\psi}^{ref} : (K_{ref}, V_{ref}, P, \theta, \phi_{ref}).$$

Il y a une différence de taille entre cette expression, et celle calculée pour un bruit de Poisson. En effet, les termes de dérivées  $d\langle N_k \rangle / d\psi_i^{ref}$  étant proportionnels à l'énergie  $K$  des franges, nous avons dans le cas d'un bruit de Poisson un gain en  $(K)^{-1/2}$  sur les BCR (produit des dérivées divisé par  $K$  dans la matrice de Fisher). Dans le cas d'un bruit de speckle, le produit des dérivées est divisé par  $K^2$  : la matrice de Fisher et les valeurs des BCR sont donc indépendantes de la puissance du signal !

La figure 6.9 montre le résultat du calcul de la BCR  $\epsilon_{\phi_{ref}}$ , calculée pour une figure de franges de paramètre  $\overline{\psi}^{ref} : (K_{ref} ; 0,86 ; 9,6 ; 58,2^\circ ; 0 \text{ mrad})$  ( $K_{ref}$  étant donc indifférent), dans le cas d'un bruit de speckle homogène de paramètre  $M$  croissant.

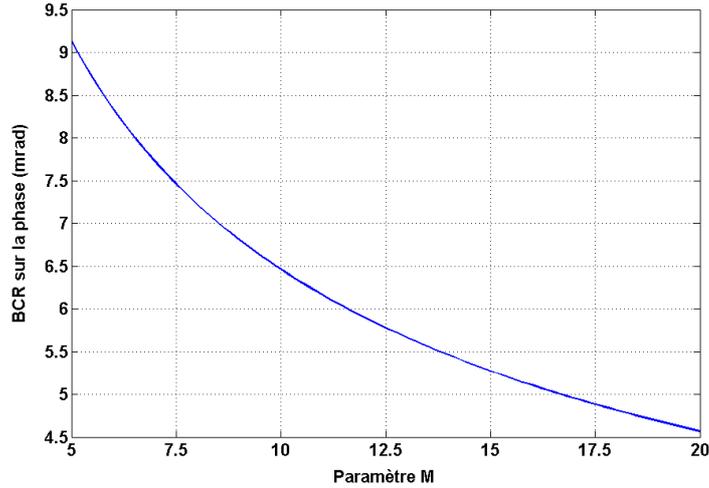


Figure 6.9 : Impact du paramètre  $M$  de speckle sur l'estimation de la phase des franges de référence

Cette courbe nous indique directement, à condition de connaître  $M$  (voir section 6.3.1), ce que nous coûte la nécessité d'estimer la phase du signal de référence à chaque tir laser. Par exemple, si  $M=15$ , l'erreur commise est de 5,3 mrad (1,5 m/s si  $S_0=3,5$  mrad/m.s<sup>-1</sup>). Ceci revient quasiment à doubler l'erreur de mesure par rapport à une situation idéale où la phase de référence serait pré-étalonnée et invariable. Cette erreur de mesure incompressible sur la phase des franges de la figure de référence constitue le côté négatif de la méthode de mesure différentielle à chaque tir laser.

### 6.2.5.3 Bornes de Cramer-Rao d'estimation conjointe

On peut à présent calculer les BCR de l'estimation conjointe à 8 paramètres. Le vecteur paramètre conjoint étant défini par  $\vec{\psi} : (K_{lid}, K_{ref}, V_{lid}, V_{ref}, P, \theta, \phi_{lid}, \phi_{ref})$ , la matrice de Fisher [8x8] correspondante peut s'écrire en fonction des termes des deux matrices [5x5]  $F^{lid}$  et  $F^{ref}$  définies dans les deux paragraphes précédents. La matrice de Fisher conjointe prend ainsi la forme suivante :

$$F_{conj} = \begin{bmatrix} F_{11}^{lid} & 0 & F_{12}^{lid} & 0 & F_{13}^{lid} & F_{14}^{lid} & F_{15}^{lid} & 0 \\ * & F_{11}^{ref} & 0 & F_{12}^{ref} & F_{13}^{ref} & F_{14}^{ref} & 0 & F_{15}^{ref} \\ * & * & F_{22}^{lid} & 0 & F_{23}^{lid} & F_{24}^{lid} & F_{25}^{lid} & 0 \\ * & * & * & F_{22}^{ref} & F_{23}^{ref} & F_{24}^{ref} & 0 & F_{25}^{ref} \\ * & * & * & * & F_{33}^{lid} + F_{33}^{ref} & F_{34}^{lid} + F_{34}^{ref} & F_{35}^{lid} & F_{35}^{ref} \\ * & * & * & * & * & F_{44}^{lid} + F_{44}^{ref} & F_{45}^{lid} & F_{45}^{ref} \\ * & * & * & * & * & * & F_{55}^{lid} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & F_{55}^{ref} \end{bmatrix}$$

où les termes représentés par « \* » prennent les mêmes valeurs que leurs symétriques.

A partir de là, on calcule sans problèmes les BCR d'estimations de  $\phi_{lid}$  et  $\phi_{ref}$ . Notons que la BCR d'estimation de la différence de phase  $\Delta\phi$  se calcule par la somme quadratique des BCR de  $\phi_{lid}$  et  $\phi_{ref}$  :  $\varepsilon_{\Delta\phi} = \sqrt{\varepsilon_{\phi_{lid}}^2 + \varepsilon_{\phi_{ref}}^2}$ .

### 6.2.6 Vérification des performances du traitement de signal sur des signaux de synthèse

De manière analogue au chapitre 5, nous allons vérifier par une étude statistique les performances de l'ensemble de la chaîne de traitement de signal décrite précédemment. Deux mille paires de franges sont calculées avec des réalisations différentes de bruit pour le vecteur à 8 paramètres suivant:

$$\vec{\psi} : (100 ; 700 ; 0,50 ; 0,86 ; 9,6 ; 58,2^\circ ; 50 \text{ mrad} ; 0 \text{ mrad}) .$$

Le signal lidar est affecté du bruit quantique de Poisson auquel s'ajoute un bruit de lecture d'écart type homogène  $\sigma_{rd}=4,8$  électrons. Le signal de référence est quant à lui affecté d'un bruit quantique de Poisson, dont la moyenne est elle-même une variable aléatoire simulant un effet de speckle homogène de paramètre  $M=10$ . Un exemple de paire de franges simulée est représenté en figure 6.10.

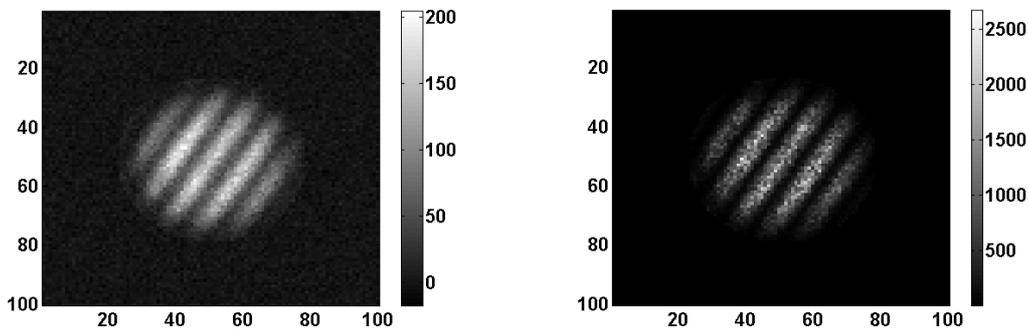


Figure 6.10 : Exemple de simulation d'une paire de franges lidar (gauche) / franges de référence (droite).

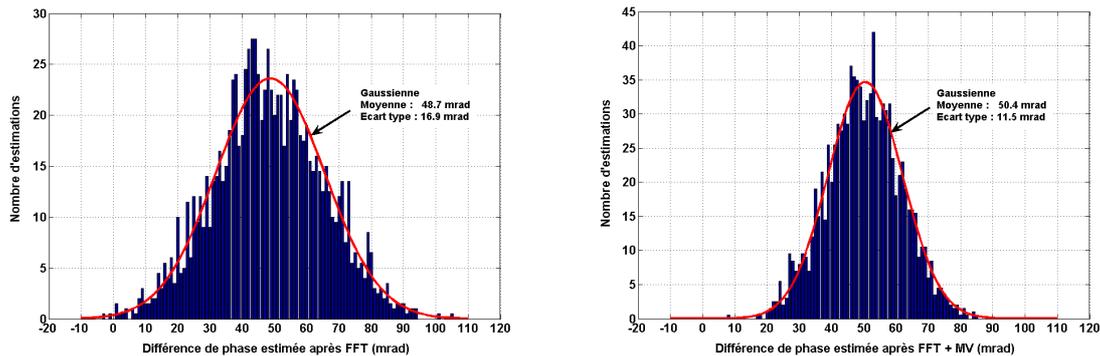
Chaque paire d'images est pré-estimée par une FFT de dimension  $N_{win}=512$  pixels, puis l'estimation est affinée par MV, avec les approximations précédemment évoquées (hypothèse de statistique gaussienne pour le signal lidar, négligence du bruit quantique pour le signal de référence). Les résultats statistiques du processus d'estimation, en termes de biais et d'écart type sont rassemblés dans le tableau 6.1. On a également reporté dans ce tableau les BCR calculées d'après la matrice de Fisher [8x8] d'estimation conjointe.

	$K_{lid}$	$K_{ref}$	$V_{lid}$	$V_{ref}$	$P$ (pixel)	$\theta$ (°)	$\phi_{lid}$ (mrad)	$\phi_{ref}$ (mrad)	$\Delta\phi$ (mrad)
<b>Valeur vraie</b>	100	700	0,50	0,86	9,6	58,2	50	0	<b>50</b>
<b>Moyenne d'estimation</b>	100,0	700	0,500	0,860	9,600	58,20	50,3	-0,1	<b>50,4</b>
<b>BCR</b>	0,3	5,0	0,004	0,003	0,006	0,035	8,5	6,5	<b>10,7</b>
<b>Ecart type d'estimation</b>	0,3	5,3	0,005	0,004	0,007	0,041	8,7	7,4	<b>11,5</b>

**Tableau 6.1 : Performances statistiques du traitement de signal, établies sur 2000 échantillons simulés de paires de franges**

De ce tableau, on peut conclure que le traitement du signal proposé atteint quasiment les bornes de Cramer-Rao théoriques sur l'estimation des 8 paramètres recherchés, et ce, de manière quasiment non biaisée. Le biais sur la différence de phase n'est que de 0,4 mrad (0,1 m/s) et l'écart type d'estimation est à 7 % de sa BCR. Ces résultats indiquent également que les approximations faites sur les statistiques des signaux sont valables.

A titre d'exemple, et pour illustrer la valeur ajoutée de l'estimateur MV par rapport à la pré-estimation par FFT, la figure 6.11 compare les histogrammes d'estimation de  $\Delta\phi$  obtenus après FFT seule, et après affinage par MV. Le gain en écart type apporté par l'estimateur MV est d'environ 30 % sur cet exemple, avec également une légère réduction du biais.



**Figure 6.11 : Histogrammes d'estimation de  $\Delta\phi$  après FFT seule (gauche), et après FFT+MV (droite)**

### 6.2.7 Traitement de signal adapté aux expériences de jour

Lors d'une expérience de jour, on enregistre généralement un signal de fond solaire, qui se superpose aux figures de franges. Fort heureusement toutefois, seules les figures de franges de référence sont affectées par ce signal néfaste. L'exposition de la figure de franges lidar est trop brève (1  $\mu$ s) pour donner lieu à l'enregistrement d'un signal de fond solaire notable, même en l'absence de filtre. En revanche, les 10 ms d'acquisition de la figure de franges de référence sont suffisamment longues pour intégrer un notable signal de fond, qui vient affaiblir le contraste des franges. La figure 6.12 montre une paire de figures de franges lidar et référence enregistrée de jour. La comparaison avec la figure 6.3 montre que le contraste des franges de référence est ici plus faible.

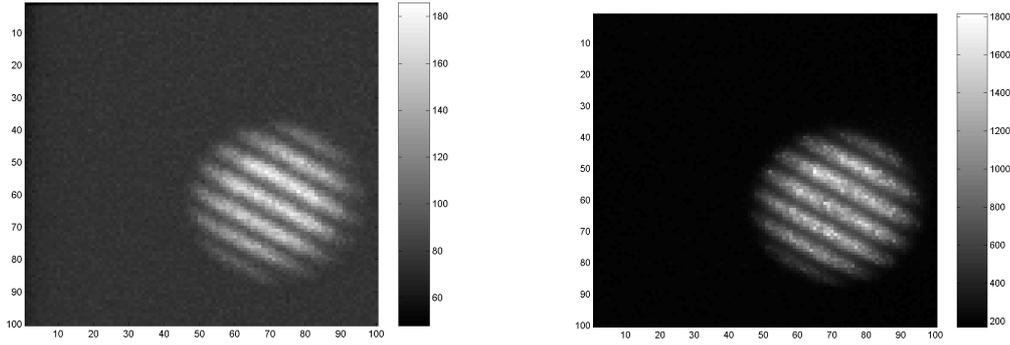


Figure 6.12 : Une paire de franges lidar (gauche) / franges de référence (droite) enregistrée de jour

Du point de vue du traitement de signal, il n'y a aucune modification à prendre en compte pour la figure de franges lidar. Ceci constitue déjà en soi une caractéristique très intéressante de l'instrument : on peut parfaitement enregistrer le signal lidar en plein jour sans altération.

Pour la figure de franges de référence, le modèle paramétrique du signal doit désormais intégrer le fond solaire, que nous noterons  $B_f$  :

$$N(u, v) = E(u, v) \left( K + B_f + KV \cos \left( \phi + \frac{2\pi}{P} [(u - u_1) \cos \theta + (v - v_1) \sin \theta] \right) \right)$$

Le pré-estimation par FFT des paramètres  $P, \theta, \phi$  n'est donc pas modifiée. En revanche, pour pré-estimer  $K, B_f$ , et  $V$ , nous n'avons que deux équations :

$$F(1, 1) \approx (K + B_f) / \varepsilon(1, 1)$$

$$|F(p_1, q_1)| \approx KV \varepsilon(1, 1) / 2$$

Cependant, dans le cas du signal de référence, l'estimation du paramètre  $V$  n'est nécessaire que pour faire face à une éventuelle désinjection du laser. Aussi lorsque le laser est stable,  $V$  est constant et n'a pas besoin d'être mesuré régulièrement. Il est donc possible d'aborder l'estimation des paramètres de la figure de franges de référence en supposant  $V$  constant et en estimant  $B_f$  à la place.

La statistique du signal doit également être modifiée, car si le bruit de speckle du signal laser domine son propre bruit quantique, il ne domine pas en général le bruit quantique du signal de fond solaire. Le signal délivré est donc la somme du signal de référence, dont la statistique est une loi gamma, et du signal de fond solaire, dont la loi statistique est une loi de Poisson. Pour écrire la loi statistique de cette somme de signaux, nous pouvons à nouveau utiliser l'approximation gaussienne. Celle-ci est totalement justifiée pour le signal de fond solaire (voir figure 6.5), mais ne l'est pour une loi gamma que si son paramètre  $M$  est suffisamment grand. Nous verrons en section 6.3.1 que pour le signal de référence, la valeur moyenne de  $M_k$  se situe autour de 20, et que dans ce cas l'approximation gaussienne est justifiée.

En conclusion, puisque le signal de référence et le signal de fond sont deux variables aléatoires indépendantes, leurs variances se somment. Ainsi, la statistique du signal de référence affecté d'un signal de fond solaire peut être approchée par une loi gaussienne de moyenne  $\langle N_k \rangle + B_f$  et de variance  $\langle N_k \rangle^2 / M_k + B_f$ . Il ne reste plus qu'à intégrer cette nouvelle statistique dans la fonction de vraisemblance du signal afin de réaliser une estimation par MV correcte des 8 paramètres  $(K_{lid}, K_{ref}, V_{lid}, B_f, P, \theta, \phi_{lid}, \phi_{ref})$ .

### 6.3. Résultats expérimentaux

#### 6.3.1 *Caractérisation des paramètres du speckle créé par les fibres optiques*

Nous avons vu précédemment que dans le cas d'un signal temporellement cohérent (signal lidar sur cible dure ou signal de référence laser), la statistique décrivant le nombre de photoélectrons délivrés par le pixel  $k$  est une loi gamma de paramètre  $M_k$ . A l'origine de ce bruit de speckle se trouve la fibre multimode servant de source d'éclairement à l'interféromètre, et produisant sur la caméra une figure d'interférence aléatoire de plusieurs milliers de modes. Cette situation complexe ne nous permet pas de calculer analytiquement la valeur de  $M_k$  pour chaque pixel. En revanche, il est possible de mesurer ce paramètre.

Pour mesurer le paramètre  $M_k$  obtenu sur chaque pixel à partir d'une fibre donnée, il suffit d'analyser statistiquement la figure d'éclairement que celle-ci produit. Pour chaque pixel  $k$ , on s'intéresse à l'histogramme, sur un grand nombre de figures d'éclairement, de la variable aléatoire suivante :

$$Y_k = X_k / \langle X_k \rangle$$

où  $X_k$  est la variable aléatoire correspondant au poids énergétique du pixel  $k$  sur la figure d'éclairement, définie par :

$$X_k = \frac{N_k}{\sum_{k=1}^{N_{pix}} N_k} = \frac{N_k}{N_{tot}}$$

L'utilisation du poids énergétique d'un pixel pour caractériser sa statistique de réponse nous permet de parer aux variations d'énergie laser tir à tir. Si l'on néglige le caractère aléatoire résiduel de  $N_{tot}$  (bruit quantique de photodétection), alors  $X_k$  est elle-même une variable aléatoire de loi gamma, de moyenne  $\langle N_k / N_{tot} \rangle$  et de variance  $\langle N_k / N_{tot} \rangle^2 / M_k$ . Par conséquent, la variable aléatoire  $Y_k$  suit une loi gamma de moyenne unitaire et de variance  $1/M_k$ . On peut donc déduire le paramètre  $M_k$  de l'analyse statistique de  $Y_k$  par la relation :

$$M_k = 1 / \text{var}(Y_k)$$

Pour chacune des deux fibres du montage de la figure 6.1, nous avons ainsi caractérisé les propriétés statistiques du speckle créé sur les pixels de la caméra. Rappelons que l'une des

fibres, très courte (2 m), relie le télescope à l'interféromètre et sert de guide au signal lidar, tandis que l'autre, très longue (500 m), est utilisée comme ligne à retard pour le signal de référence. Les deux fibres sont de même diamètre (200  $\mu\text{m}$ ), de même ouverture numérique (0,22), et proviennent du même constructeur (Ceramopectec).

Soulignons encore que, bien que le signal lidar ne soit pas ou peu soumis au bruit de speckle dans le cas d'une cible atmosphérique, il demeure important de caractériser le speckle créé par la fibre courte de la voie « lidar », notamment pour les expériences d'étalonnage décrites plus loin, dans lesquelles nous utiliserons des faisceaux temporellement cohérents sur les deux voies.

La figure 6.13 montre les « cartes de  $M_k$  » enregistrées sur la caméra pour chacune des deux fibres, ainsi que des exemples de statistiques de variables  $Y_k$  pour quelques pixels particuliers. Remarquons au passage le bon accord entre les histogrammes statistiques et les lois gamma de moyenne unitaire et de paramètre  $M_k=1/\text{var}(Y_k)$  (courbes rouges). Notons également que pour la figure de paramètre  $M=18,3$ , la statistique obtenue est quasiment gaussienne, ce qui justifie l'approximation, faite en section 6.2.7, de statistique gaussienne du signal de référence.

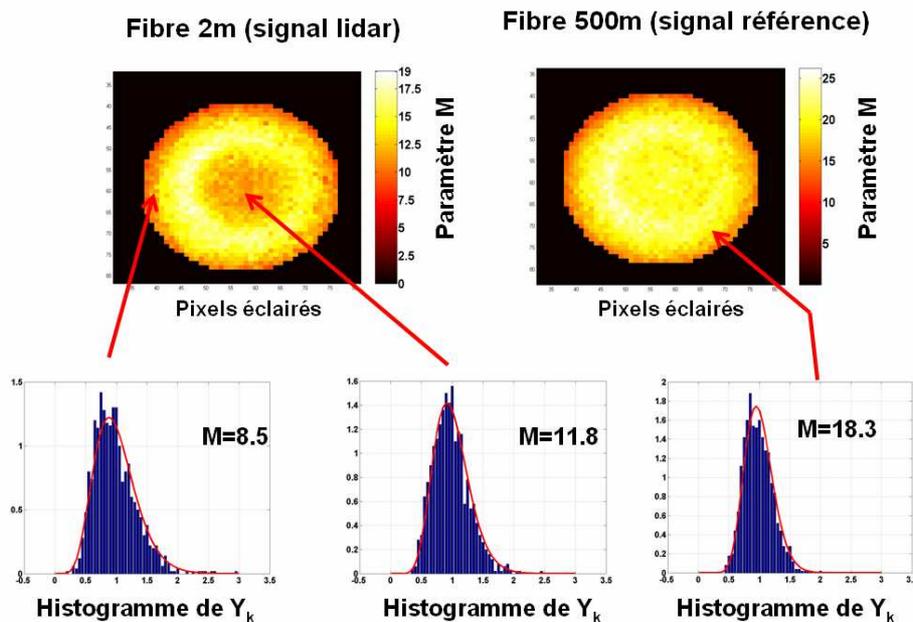


Figure 6.13 : Caractérisation, pour chaque pixel de caméra, du speckle engendré par les fibres optiques

Nous observons que la fibre de 500 m produit une carte de  $M_k$  plus homogène que la fibre courte, et avec des valeurs plus élevées (de l'ordre de 20 en moyenne), ce qui est positif pour la mesure de référence de phase puisque cela signifie une erreur d'estimation incompressible moins grande (voir figure 6.9). Cette différence entre les deux fibres provient probablement du fait qu'une fibre longue permet un meilleur brassage des modes de la fibre, et une répartition spatiale de ceux-ci plus homogène en sortie. On ne peut cependant allonger exagérément la longueur de fibre, à la fois pour une question de coût, et pour une question d'atténuation (30 dB/km). En particulier sur la voie lidar, l'importante atténuation des fibres actuelles impose l'usage d'une fibre très courte.

Soulignons pour conclure que cette caractérisation du facteur  $M_k$  peut être avantageusement mise à profit pour affiner le traitement du signal par MV, puisqu'elle permet de prendre en compte la statistique précise et individualisée de chaque pixel.

### 6.3.2 Réglage de l'interféromètre en champ compensé

L'interféromètre est muni d'une lame séparatrice de 10 mm d'épaisseur, et d'une lame de compensation d'épaisseur 5 mm, le tout permettant théoriquement d'être en position de champ quasiment compensé pour une différence de marche  $\Delta_0 \approx 3$  cm. Afin de régler la position du miroir mobile de manière optimale, il suffit d'enregistrer l'évolution du contraste des franges en fonction de sa position, le maximum de contraste étant atteint au point de compensation. Rappelons que selon l'éq.(5.10), l'expression de la différence de marche dépendante du champ est :

$$\Delta_1(\alpha, \beta) = d_{comp}(\alpha^2 - \beta^2) - (d - d_{opt})\rho^2 \text{ avec } d_{comp} \approx 1,3 \text{ mm dans le cas présent.}$$

La plage d'excursion  $(d - d_{opt})$  du miroir mobile excédant de beaucoup 1,3 mm, nous aurons essentiellement une différence de marche dépendant de  $\rho$  uniquement :

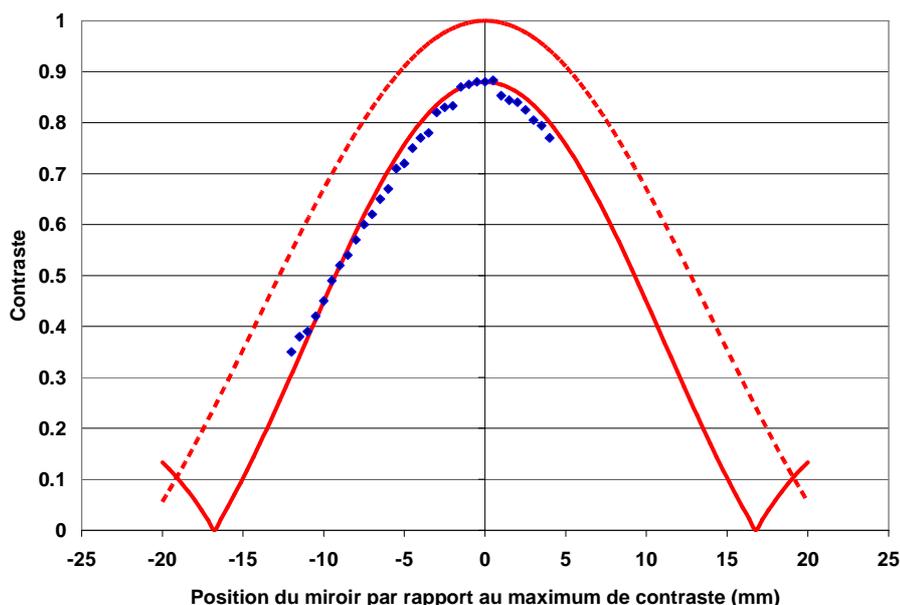
$$\Delta_1(\rho) = -(d - d_{opt})\rho^2$$

Par conséquent la courbe de contraste attendue est :

$$V = \left| \text{sinc} \left( (d - d_{opt})\rho_{max}^2 / \lambda \right) \right|, \text{ avec } \rho_{max} \text{ l'angle de champ de la source collimatée.}$$

Le rayon de cœur de la fibre étant de 100  $\mu\text{m}$ , placé au foyer d'une lentille de 25 mm de focale, nous avons en théorie  $\rho_{max} = 4$  mrad. La figure 6.14 permet de comparer la courbe théorique attendue (rouge pointillée), les points expérimentaux mesurés (bleus), ainsi que la courbe théorique correspondant le mieux aux résultats expérimentaux (rouge, continue). Cette dernière est d'équation suivante :

$$V = V_0 \left| \text{sinc} \left( (d - d_{opt})\rho_{fit}^2 / \lambda \right) \right| \text{ avec } V_0 = 0,88 \text{ et } \rho_{fit} = 4,6 \text{ mrad.}$$



**Figure 6.14 : Mesure du contraste de champ et réglage de l'interféromètre en son maximum de contraste. Points: contraste mesuré, courbe pointillée : contraste théorique attendu ; courbe continue : meilleur fit des mesures.**

Le maximum de contraste atteint reste donc en deçà de sa valeur théorique. Sur cet exemple, nous avons  $V_0=88\%$  (le maximum jamais atteint au cours des expériences ayant été de  $91\%$ ), pour une valeur théorique attendue de  $99\%$ . Toutefois l'alignement des faisceaux de l'interféromètre étant une opération relativement fine, des pertes de contraste par simple défaut de réglage sont difficilement évitables. Un contraste de  $90\%$  environ reste donc un résultat satisfaisant qui montre l'essentiel : la capacité de l'interféromètre à conserver un bon contraste de franges en dépit d'une large différence de marche.

Remarquons également que le champ expérimentalement mesuré d'après cette courbe est de  $4,6\text{ mrad}$  au lieu des  $4,0\text{ mrad}$  attendus. Les raisons de cette différence ne sont pas clairement élucidées : il est possible que cela provienne de la présence de modes de gaine à l'issue de la fibre optique (la figure 6.14 ayant été obtenue avec la fibre de  $2\text{ m}$ ). La présence de tels modes de gaine impliquerait un diamètre de cœur apparent plus large, et donc un champ plus étendu.

### 6.3.3 Mesure du « zéro Doppler » et caractérisation de la stabilité de l'instrument

Nous en venons maintenant aux mesures de vitesse proprement dites. Dans cette expérience, une fraction du faisceau laser est injectée directement dans les deux voies : la voie « lidar » et la voie « référence ». Les objectifs de cette expérience sont multiples :

- évaluer la stabilité du laser en énergie, efficacité d'injection, et fréquence émise
- évaluer la stabilité thermo-mécanique de l'interféromètre
- vérifier que l'on mesure bien zéro mrad de différence de phase entre les figures de franges obtenues (mesure du « zéro Doppler »)
- vérifier que cette mesure de « zéro Doppler » est stable dans le temps
- vérifier que l'écart-type de mesure correspond à la borne de Cramer-Rao attendue.

La figure 6.15 montre le résultat des estimations des paramètres des franges, mesurées à 10 Hz sur un enregistrement de 100 secondes. L'interféromètre est réglé à son maximum de contraste.

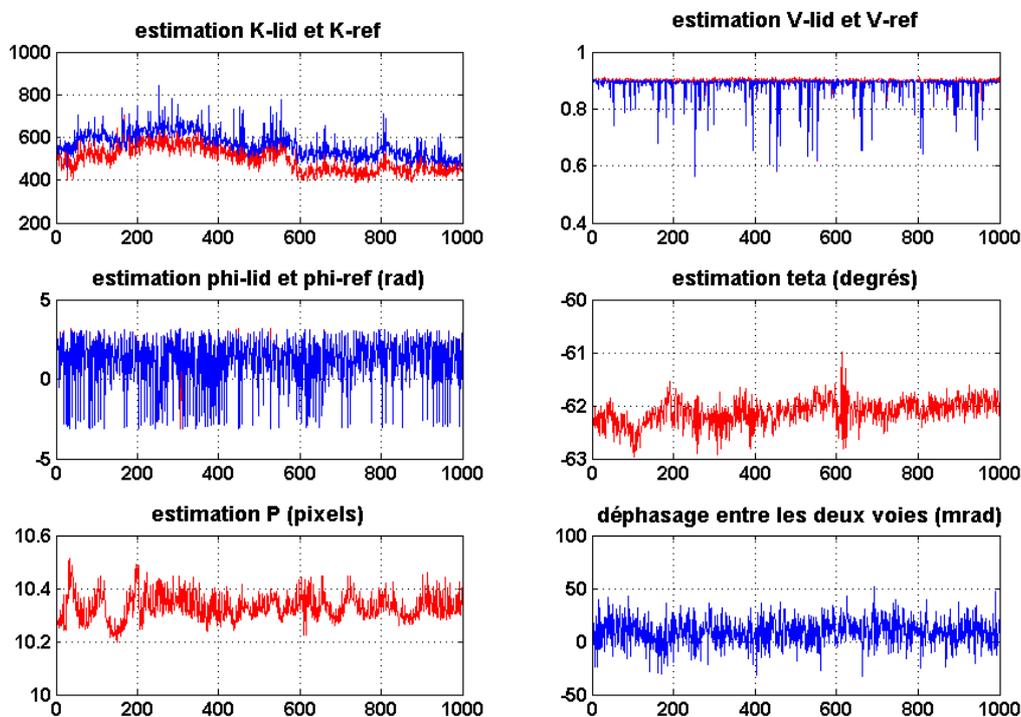


Figure 6.15 : Enregistrement sur 1000 tirs (100 s) des paramètres de figures de franges alors que le laser est injecté sur les deux voies. Pour les graphiques à deux courbes, les rouges représentent la voie « lidar » et les bleues la voie « référence ».

### 6.3.3.1 Stabilité du laser en énergie, contraste, et phase

Les mesures des paramètres  $K_{lid}$  et  $K_{ref}$  montrent que la stabilité du laser en énergie n'est pas bonne et varie sur plusieurs échelles de temps. D'un tir à l'autre, l'énergie peut croître brusquement lorsque le laser se désinjecte (le pulse émis est alors multimode, et donc davantage énergétique). Sur le plus long terme, nous observons des variations d'énergie non négligeables, de quelques 20 % sur cet exemple (de plus amples variations ont parfois été constatées). Nous reviendrons ultérieurement sur les causes possibles, et surtout sur les conséquences de ce phénomène.

Les « pics de désinjection » du laser sont clairement visibles à partir des mesures de contrastes. Celui-ci est globalement bon, avec une valeur de palier de 0,9 environ, mais avec de brusques chutes, qui sont d'ailleurs corrélées aux pics des mesures d'énergie. Lorsque le laser se désinjecte et devient multimode, les franges se brouillent immédiatement. Les mesures de contrastes s'avèrent donc très utiles pour éliminer en post-traitement les pulses lasers mal injectés. La transition monomode/multimode du laser peut être visualisée à travers la forme temporelle de l'impulsion laser émise (mesurée par photodiode). En l'absence

d'injection, on peut visualiser le battement temporel à la fréquence intermode  $\Delta\nu=c/2L_{cavité}$  produit par l'interférence des différents modes longitudinaux de la cavité laser.

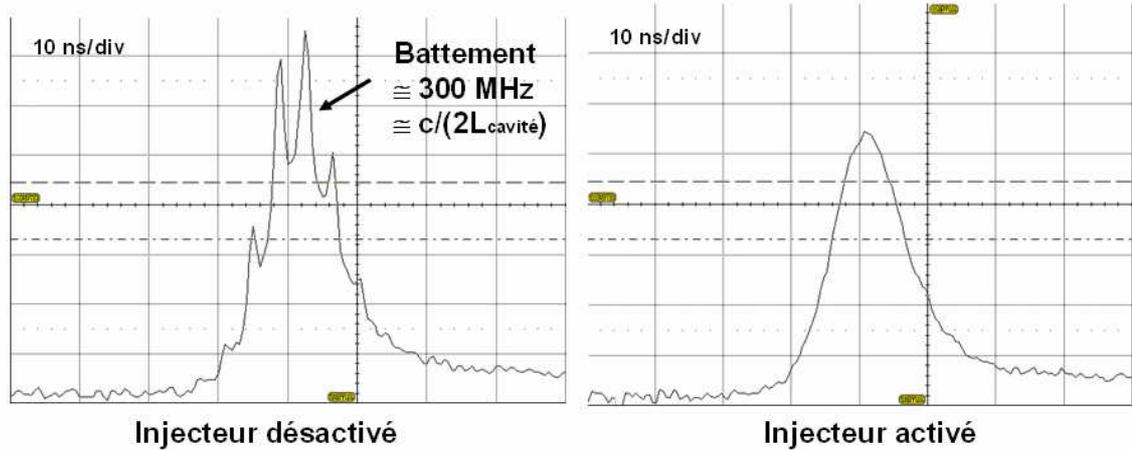


Figure 6.16 : Visualisation de l'injection/désinjection du laser par la forme temporelle de l'impulsion

La phase estimée des franges quant à elle, montre une grande instabilité tir à tir de la fréquence laser. En effet, la phase des franges balaie très rapidement l'intervalle de phase complet de  $2\pi$ . Nous ne pouvons mettre sur le compte des seules perturbations thermo-mécaniques de l'interféromètre un balayage de phase aussi rapide (les franges obtenues à l'aide d'un laser He-Ne dans les mêmes conditions vibratoires sont beaucoup plus stables). Pour pouvoir mesurer la vitesse Doppler, la mesure de référence de phase à chaque tir laser est donc bien une absolue nécessité.

### 6.3.3.2 Stabilité thermo-mécanique de l'interféromètre

Les mesures de l'interfrange  $P$  et de l'orientation  $\theta$  montrent une dérive régulière de l'interféromètre sur l'échelle de quelques dizaines de secondes, de l'ordre de  $\frac{1}{2}$  degré pour  $\theta$  et  $1/10^{\text{ème}}$  de pixel pour  $P$ , avec parfois des écarts plus marqués. C'est là la manifestation des limites de stabilité thermo-mécanique du montage, le réglage angulaire fin des miroirs de l'interféromètre impliquant naturellement une sensibilité accrue aux perturbations extérieures. Notons qu'aucune précaution particulière n'a été prise pour limiter ces dernières, et que de ce point de vue là, il existe une grande marge de gain en matière de stabilité expérimentale. Toutefois, les dérives de  $P$  et  $\theta$  ne sont pas pénalisantes, puisque l'on peut les mesurer. Elles ne produisent d'ailleurs aucune dérive parallèle des mesures de différence de phase.

### 6.3.3.3 Le « zéro Doppler » correspond-il bien à zéro mrad de différence de phase ?

A l'évidence, la réponse à cette question est non : la moyenne des mesures de  $\Delta\phi$  s'établit sur la figure 6.15 à 9,1 mrad. Ce décalage, que nous appellerons « offset de phase » provient de la différence entre les fonctions d'éclairement de la voie « lidar » et de la voie « référence ». En effet, l'éq.(5.6) nous rappelle que l'éclairement de l'interféromètre par une source large produit un déphasage de la figure de franges par rapport à un éclairement par source ponctuelle. Par conséquent, puisque les fonctions d'éclaircements des voies « lidar » et

« référence » sont différentes, il est normal de constater un « offset de phase » entre les deux figures, même à vitesse Doppler nulle.

### 6.3.3.4 *La mesure du « zéro Doppler », ou « offset de phase » est-elle stable ?*

Pour répondre à cette question, on peut s'appuyer sur un autre exemple de mesure de  $\Delta\phi$  présenté en figure 6.17. Il s'agit en fait de 4 séries de mesures successives de 100 secondes chacune. La courbe supérieure correspond aux valeurs de  $\Delta\phi$  mesurées à chaque tir laser, la courbe inférieure correspond à ces mêmes mesures moyennées sur 10 tirs.

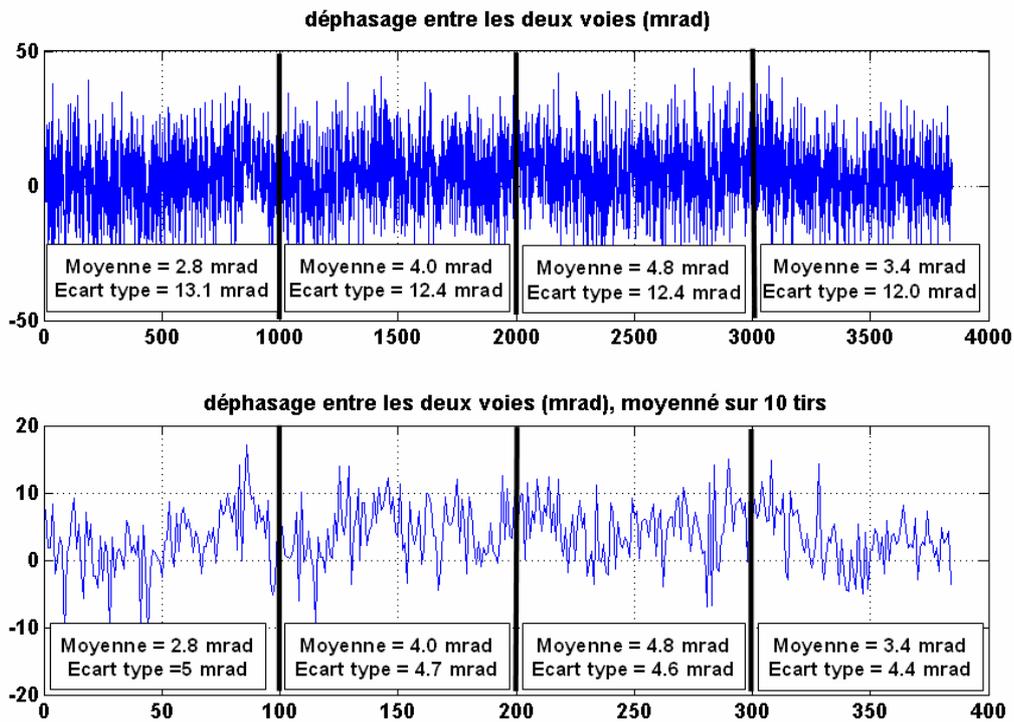


Figure 6.17 : Haut : Enregistrement sur 4000 tirs (4 séries de 100 s) du paramètre  $\Delta\phi$ .  
Bas : Le même enregistrement moyenné par tranches de 10 tirs.

Notons pour commencer que l'offset de phase moyen sur cette série se situe autour de 3,5 mrad, et diffère donc de l'offset de la figure 6.15. En fait, l'offset de phase est très dépendant du réglage expérimental des figures d'éclairement. D'un réglage à l'autre, il n'est pas conservé, ce qui constitue d'ailleurs l'une des limites importantes du montage.

Théoriquement, néanmoins, on pourrait s'attendre à ce que l'offset de phase demeure constant une fois l'interféromètre réglé. Or ce n'est justement pas ce que nous observons ici: l'offset fluctue entre 2,8 mrad et 4,8 mrad sur les quatre séries de mesures. C'est là un problème grave pour l'instrument, car cela remet en cause les possibilités de mesures absolues du déphasage, à moins de réaliser régulièrement la mesure d'offset de phase, ce qui est peu pratique. Les fluctuations de l'offset de phase ont pour conséquence parallèle de limiter l'intérêt de l'accumulation de mesures. On constate en effet sur la figure 6.17 que le moyennage des mesures sur 10 tirs se traduit par une réduction de l'écart type d'un facteur  $\sqrt{7}$  environ, au lieu des  $\sqrt{10}$  attendus.

Pourquoi l'offset de phase varie-t-il au cours du temps ? Notre hypothèse est la suivante : ces fluctuations seraient dues à une modification plus ou moins lente de la forme spatiale du faisceau émis par le laser. En effet, on imagine aisément qu'une variation de la forme spatiale du faisceau puisse induire une modification des conditions d'injection du faisceau dans la fibre, et par suite, une modification des figures d'éclairement produites en sortie : d'où une variation dans l'offset de phase. La figure 6.18 illustre l'existence d'une corrélation forte entre la variation de l'offset de phase et les variations d'énergie de long terme du laser. Il est donc plausible que ces deux effets soient tous deux liés à la même cause, et en l'occurrence à l'échauffement thermique du cristal tripleur de fréquence du laser. La dilatation thermique de ce dernier sous l'effet d'une forte puissance laser produirait tout à la fois une modification des conditions d'accord de phase, et donc une chute du rendement de conversion et de l'énergie délivrée, ainsi qu'une altération de la forme du faisceau. L'aspect cyclique des variations d'énergie du laser sur des constantes de temps de quelques dizaines de secondes semble renforcer cette hypothèse d'alternance de cycles réchauffement-refroidissement du cristal tripleur.

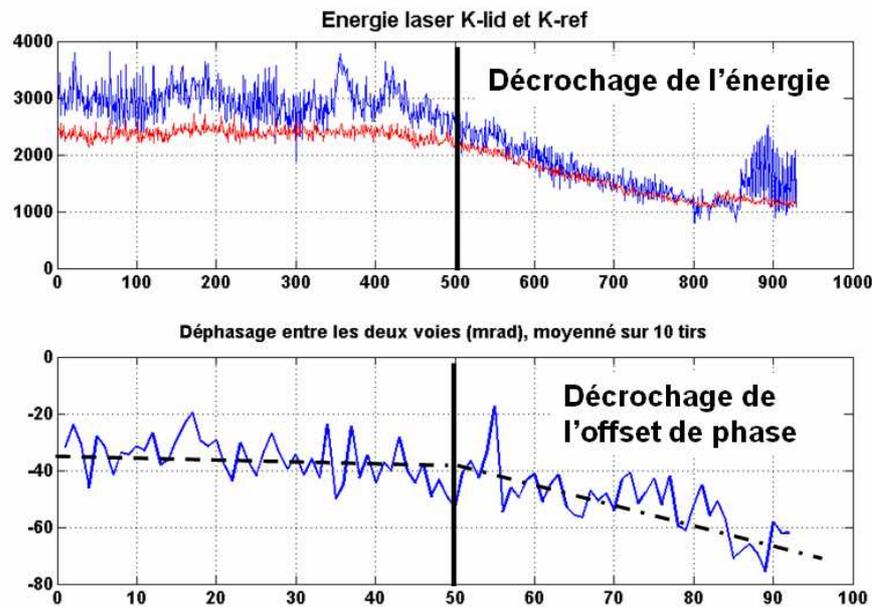


Figure 6.18 : Illustration de la forte corrélation entre les variations de l'énergie du laser et celles de l'offset de phase. Haut : enregistrement sur 1000 tirs (100 s) de l'énergie (rouge : voie lidar, bleu : voie référence).

Bas : enregistrement parallèle de la différence de phase (1000 tirs moyennés par tranche de 10). Sur cet exemple, l'énergie du signal chute de 2/3 en moins de 1 minute.

### 6.3.3.5 L'écart type de la mesure de différence de phase correspond-il à la Borne de Cramer-Rao ?

Compte tenu des fluctuations de valeur moyenne de  $\Delta\phi$  au cours du temps, il n'est guère possible d'atteindre en précision la Borne de Cramer-Rao. Toutefois, l'écart type des mesures effectuées en reste proche. Par exemple, l'écart type de la série de mesures présentée en figure 6.15 est de 12,6 mrad, et 11,9 mrad pour la série de la figure 6.17. En tenant compte des cartes de  $M_k$  mesurées en figure 6.13, le calcul des BCR donne les résultats suivants pour un contraste de franges de 90 % :

$$\varepsilon_{\phi_{lid}} = 6,7 \text{ mrad} \text{ et } \varepsilon_{\phi_{ref}} = 5,6 \text{ mrad} , \text{ soit } \varepsilon_{\Delta\phi} = 8,7 \text{ mrad} .$$

L'écart type des valeurs mesurées est donc supérieur aux BCR de 3 à 4 mrad par tir laser. Avec une sensibilité supposée  $S_{\phi}=3,5 \text{ mrad/m.s}^{-1}$ , la précision des mesures Doppler est ici de 3,4 m/s à 10 Hz, et de 1,3 m/s à 1 Hz (moyennage de 10 tirs).

### 6.3.4 Calibration de l'instrument sur cible dure

Cette expérience a maintenant pour but de mesurer la sensibilité  $S_{\phi}$  de l'interféromètre à l'effet Doppler. La voie « lidar » capte le signal rétrodiffusé par une cible dure mobile (roue tournante) et, pour différentes vitesses de la cible, on mesure la différence de phase  $\Delta\phi$  entre les figures de franges enregistrées. Parallèlement, la vitesse de la cible est finement mesurée à l'aide d'un lidar hétérodyne opérant à  $1,5 \mu\text{m}$ . Rappelons que l'un des grands avantages de la mesure hétérodyne est de fournir une mesure de vitesse absolue sans étalonnage (le battement de fréquence hétérodyne produit naturellement un signal de fréquence proportionnelle à la vitesse Doppler). La précision des mesures de vitesse du lidar hétérodyne étant de l'ordre de 4 cm/s, celui-ci n'introduit pas d'erreur supplémentaire sur l'étalonnage de l'interféromètre de Michelson.

Le résultat de cette expérience, effectuée de nuit, est présenté sur la figure 6.19.

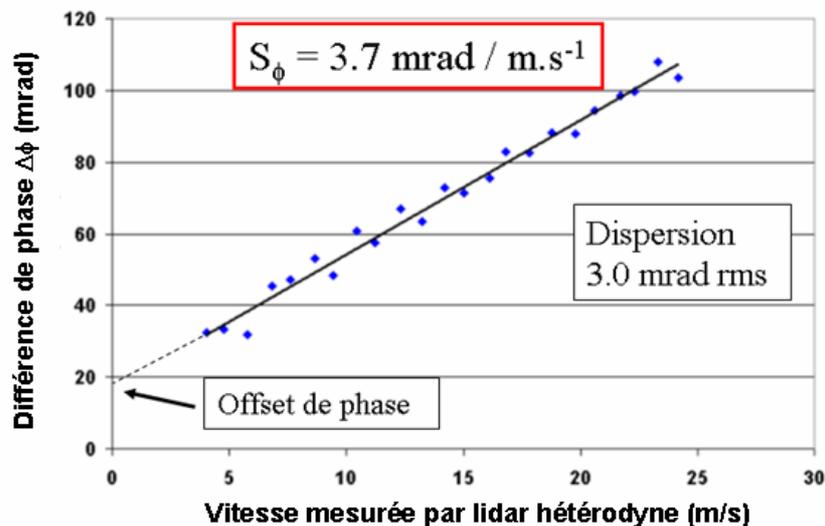


Figure 6.19 : Calibration de l'interféromètre de Michelson à partir de mesures de vitesses étalonnées sur cible dure. Chaque point correspond à la moyenne de 1000 tirs.

Les points expérimentaux mesurés montrent une tendance linéaire très marquée, ce qui valide le principe général de la mesure de vitesse par interféromètre de Michelson. La pente de la droite d'étalonnage est de  $3,7 \text{ mrad/m.s}^{-1}$ , très proche de la valeur attendue de  $3,5 \text{ mrad/m.s}^{-1}$ . La différence de marche effective de l'interféromètre s'établit donc à  $\Delta_0=3,13 \text{ cm}$  environ.

La dispersion des points expérimentaux par rapport au « fit » linéaire s'établit à 3,0 mrad rms, essentiellement due aux fluctuations de l'énergie du laser pendant l'expérience, et aux fluctuations parallèles de l'offset de phase. L'alternance régulière en milieu de courbe de points expérimentaux en dessus et en deçà de la moyenne montre d'ailleurs que les fluctuations d'offset de phase sont cycliques et répétables dans la durée (environ 2 min séparent la mesure de chaque point).

### 6.3.5 Mesure du signal Rayleigh atmosphérique et détection de rafales

Le principe de mesure ayant été démontré sur cible dure, il ne reste plus qu'à en démontrer le bon fonctionnement sur cible atmosphérique. La voie lidar capte donc maintenant un signal de rétrodiffusion atmosphérique.

La figure 6.20 montre pour commencer l'enregistrement de la trace temporelle du signal lidar, effectué par la photodiode de la voie polarisée « s » à la sortie de la fibre optique de guidage. Sur cet enregistrement la portée du lidar est limitée à 20 m.

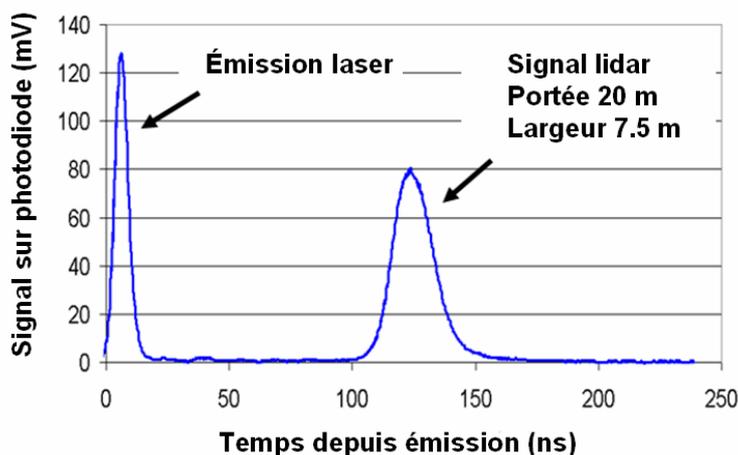
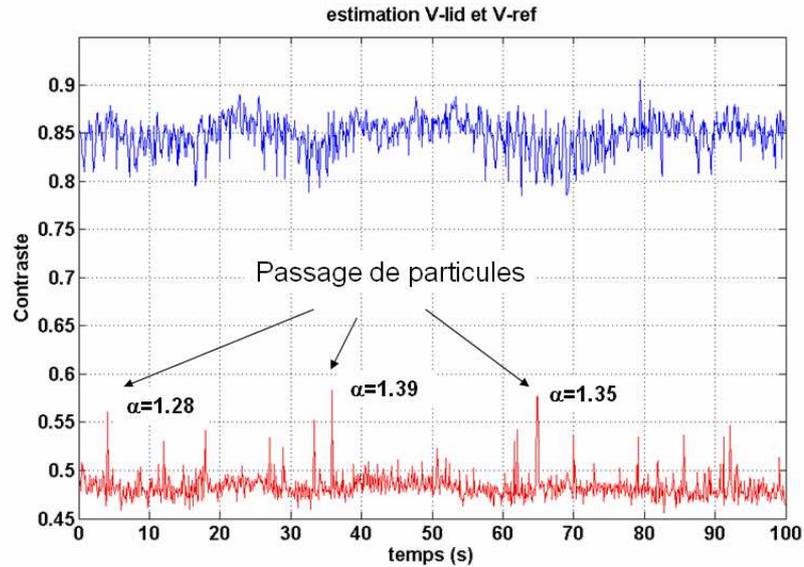


Figure 6.20 : Illustration de la sélectivité spatiale du lidar (ici de 7,5 m pour une portée nominale de 20 m)

Cette figure met en évidence la sélectivité spatiale passive du module de réception, engendrée par les effets combinés de l'obstruction du miroir primaire de réception et de la profondeur de champ limitée de l'instrument. Cette figure est à rapprocher, bien que les paramètres expérimentaux soient différents, de celle de la figure 3.10. Il faut noter toutefois que la profondeur de champ augmente avec la portée du lidar.

La figure 6.21 montre ensuite un enregistrement de 100 secondes du contraste des franges du signal lidar et du signal de référence, lors d'une expérience de rétrodiffusion typique, effectuée en plein jour dans une atmosphère calme.



**Figure 6.21 : Enregistrement de 100 s du contraste des franges lidar (rouge) et référence (bleu) dans une expérience de diffusion atmosphérique de jour**

Nous observons que le contraste du signal de référence vaut ici en moyenne  $V_{\text{ref}}=0,85$ , tandis que celui du signal lidar présente une valeur palier  $V_{\text{lid}}=0,48$ , avec parfois des pics de contraste. Ces pics de contraste proviennent du passage furtif de particules dans le champ du lidar, produisant une augmentation du rapport de diffusion  $\alpha$ , et donc du contraste des franges. Notons que, si nous supposons que la valeur palier  $V_{\text{lid}}=0,48$  correspond à une situation d'air clair, le rapport  $V_{\text{lid}}/V_{\text{ref}}$  nous permet d'estimer la valeur de la température de l'air. Nous obtenons ici une estimation  $T \approx 296$  K, soit  $23^\circ\text{C}$ , ce qui est cohérent avec les conditions expérimentales ( $20^\circ\text{C}$  relevés à l'heure de l'expérience). Nous pouvons sur la base de cette estimation calculer également l'ordre de grandeur du rapport de diffusion  $\alpha$  pour les pics de contraste. Là aussi, les valeurs obtenues respectent tout à fait les ordres de grandeurs attendus, avec des valeurs allant jusqu'à  $\alpha=1,4$  environ.

En ce qui concerne la mesure de vitesse de vent proprement dite, les problèmes de dérives de l'offset de phase, vraisemblablement liés au laser, ne nous permettent malheureusement pas d'envisager avec confiance des mesures absolues de la vitesse du vent naturel. La faible dynamique du vent dans des conditions normales serait masquée par les fluctuations de l'offset de phase. En revanche, nous pouvons théoriquement détecter de fortes rafales de vent. Nous avons donc réalisé, pour la démonstration de principe, une expérience de détection de rafales générées artificiellement. La photo de la figure 6.22 illustre le principe de l'expérience, composée d'un simple tube dans lequel passe le faisceau laser et dans lequel on génère à l'aide d'une « soufflante » des rafales de vent, soit dans un sens, soit dans l'autre. Le résultat de cette expérience, effectuée en plein jour et sans filtre solaire, est illustré par la figure 6.23.



Figure 6.22 : Génération « artisanale » de rafale de vent dans un tube pour une expérience de détection

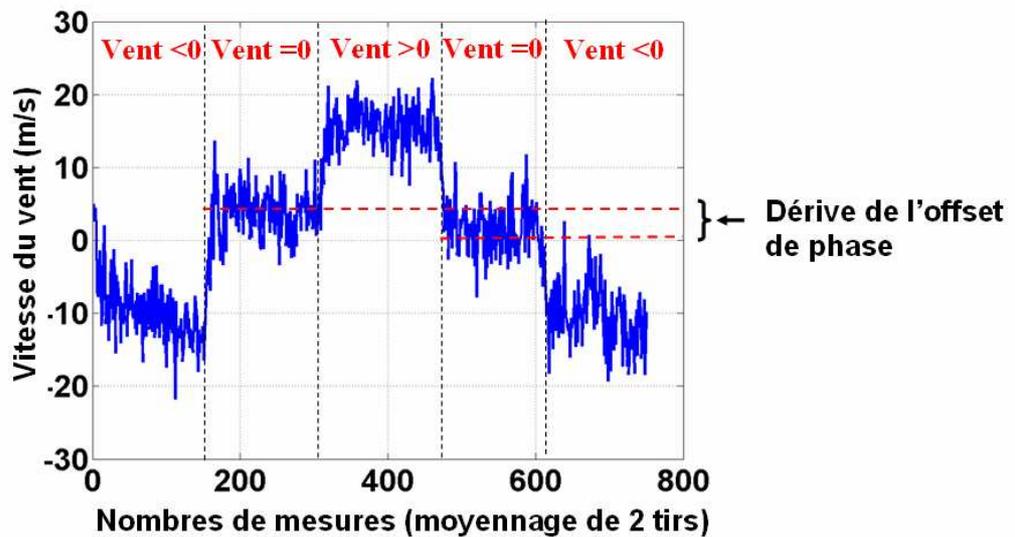


Figure 6.23 : Détection de rafales de vent par lidar, en expérience de jour

Sur cette figure, les mesures de  $\Delta\phi$  sont directement converties en vitesse, compte tenu de la sensibilité  $S_\phi$  précédemment mesurée sur cible dure. Nous observons que les rafales de vent générées sont clairement dissociées par l'instrument, avec une intensité de rafale estimée à une dizaine de m/s. L'impact de la variation de l'offset de phase au cours de l'expérience est encore une fois visible, avec une dérive non négligeable de quelques m/s. Toutefois, malgré le « bémol » posé par les problèmes de dérive de l'offset de phase, cette expérience finalise la démonstration de faisabilité de mesures de vitesse de vent, à partir d'un signal purement moléculaire et à l'aide d'un interféromètre de Michelson à imagerie de franges.

## Conclusion générale

Au terme de ce travail, nous pouvons répondre à la question suivante : « Est-il possible de mesurer simultanément, à l'aide d'un lidar Rayleigh-Mie, la vitesse de l'air, sa température, et sa densité, en se contentant, pour la partie Rayleigh du spectre, de la raie Cabannes ? ».

La réponse est que, sous réserve de connaître avec un grand degré de précision le modèle de spectre de cette raie Cabannes, alors la mesure est théoriquement possible, et avec une précision intéressante. Actuellement, la meilleure méthode pour réaliser cette mesure est une détection directe dans l'ultraviolet, beaucoup plus adaptée et performante qu'une détection hétérodyne dans l'infrarouge. Deux types d'analyseurs spectraux en détection directe ont été étudiés : l'interféromètre de Fabry-Perot Imageur (FPI) et le Double Interféromètre de Michelson Imageur (DIMI), ce dernier constituant une proposition originale de ce travail. Nous avons montré que les performances théoriques de ces deux systèmes sont proches, ce qui valide le principe du DIMI par rapport à la solution plus connue qu'est le FPI.

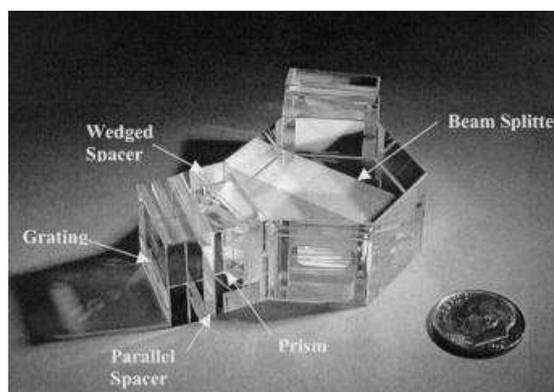
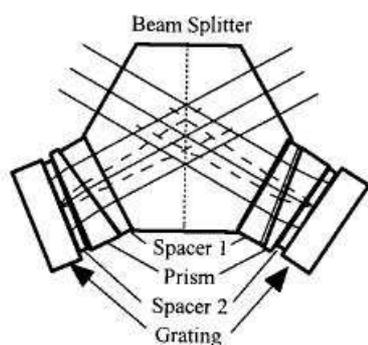
Toutefois, en ce qui concerne les mesures de température et densité atmosphérique, nous devons rester prudents : la mise en évidence, au chapitre 5, du très fort impact que peut avoir une légère erreur de modélisation de la forme de raie Cabannes sur les valeurs de température et densité estimées, nous invite à la plus grande réserve sur la faisabilité réelle de ces mesures. En fait, compte tenu de ces résultats, il ne nous semble pas judicieux de chercher à exploiter les informations de température et densité contenues dans la forme de la raie Cabannes, tant que la communauté scientifique n'aura pas statué sur la validité et sur la précision des différents modèles de spectres disponibles. L'avenir des mesures lidar de température et densité passe donc soit par des mesures préalables et très précises de la forme de raie, débouchant sur un modèle fiable, soit par l'exploitation, inexplorée au cours de ce travail, des composantes de rétrodiffusion inélastiques telles que les raies Raman (refs.[10][11]). Il y a donc à ce niveau deux axes de recherche possibles.

Pour les mesures de vitesse, en revanche, l'incertitude qui règne sur la forme de la raie Cabannes n'a pas d'importance puisque seule compte la position du centre de raie. La méthode de mesure de vitesse par imagerie de franges est donc parfaitement valide. A la fois par souci de simplicité et d'originalité, nous avons choisi de développer un interféromètre de Michelson imageur, plutôt qu'un FPI. Afin de faire face aux fortes contraintes métrologiques pesant sur l'instrument, nous avons mis en œuvre une méthode permettant d'étalonner la réponse de l'instrument à chaque tir laser. A notre connaissance, il s'agit du premier démonstrateur expérimental de ce type.

Le besoin impératif d'étalonnage de l'interféromètre à chaque tir laser nous a conduit à faire des sacrifices au niveau de la détectivité de l'instrument (efficacité quantique de caméra assez faible) et de sa précision de mesure (erreur ajoutée par l'étalonnage). En contrepartie, nous avons obtenu des mesures de vitesses très robustes : une expérience de détection de rafales de vent a pu être menée avec succès en plein jour, sans filtre solaire, et sans exercer le moindre contrôle thermo-mécanique sur l'interféromètre. Cette robustesse de mesure, alors même que les contraintes métrologiques sont très grandes, est probablement l'un des points les plus positifs de ce travail.

Nous n'avons pas réussi en revanche à effectuer des mesures absolues de vitesse, vraisemblablement à cause de problèmes liés au laser, notamment son instabilité en énergie et forme de faisceau. Nous avons cependant toutes les raisons de penser que ces problèmes devraient disparaître avec une source plus stable, telle que l'on sait en construire aujourd'hui. Par contre, il faut préciser que la méthode de mesure que nous avons développée est conçue pour être utilisée avec une source laser de grande énergie par impulsion (pour sortir du bruit de lecture de la caméra) mais de basse cadence (pour laisser à la caméra le temps de lire les images). Or on constate que, de plus en plus dans les systèmes embarqués, les sources lasers employées obéissent à la stratégie inverse (faible énergie par impulsion mais cadence de répétition élevée), ne serait-ce que pour des problèmes de sécurité oculaire. L'un des axes de recherche à l'avenir consisterait donc à chercher à adapter la méthode de mesure aux sources laser de hautes cadences. Pour ce faire, l'une des pistes prometteuses pourrait être de focaliser au moyen d'une lentille cylindrique les figures de franges de l'interféromètre sur une barrette linéaire de photodiodes. Ceci assurerait à la fois un gain de détectivité du signal pour des impulsions de faible énergie, mais aussi un gain en cadence de mesure puisque le nombre de « pixels » à lire serait alors considérablement réduit. Bien entendu, ceci demanderait en revanche de bien maîtriser l'orientation des franges d'interférences, c'est-à-dire de renforcer la stabilité thermo-mécanique de l'interféromètre. Mais, étant donné que nous n'avons exercé jusqu'à présent qu'un contrôle minimum, il devrait être possible de progresser sur ce point.

Pour terminer, pourquoi ne pas rêver un peu, en songeant qu'aujourd'hui, il est possible de construire de très beaux interféromètres de Michelson à champ compensé complètement monolithiques. Citons notamment les travaux publiés par Harlander et al.<sup>[37]</sup>, qui firent réaliser l'interféromètre de Michelson à base hexagonale illustré ci-dessous. Par conséquent, s'il est un jour question d'utiliser un interféromètre de Michelson dans un aéronef pour des mesures lidar, il semble que des solutions technologiques intéressantes existent déjà !



**Interféromètre de Michelson à champ compensé à base hexagonale, développé pour le projet de « Spatial Heterodyne Spectroscopy » (ref.[37]). Dans ce système, les miroirs sont remplacés par des réseaux.**



## Annexe A

### Performances théoriques d'un lidar hétérodyne infrarouge 1,55 µm pour l'analyse du spectre Rayleigh

Cette annexe s'adresse au lecteur déjà familier des bases du lidar hétérodyne et de ses notations usuelles. Elle a pour but de montrer qu'à l'heure actuelle, les sources impulsionnelles infrarouges ne sont pas suffisamment puissantes pour permettre l'analyse hétérodyne du spectre Rayleigh. Nous nous limiterons ici à l'étude du paramètre vitesse seul, à une longueur d'onde de 1,55 µm.

#### A.1. Conditions initiales de l'étude

Nous supposons disposer des conditions expérimentales suivantes :

- la source est une source laser fibrée, émettant à  $\lambda=1,55$  µm des impulsions de durée  $T_p=200$  ns en forme de créneaux. La cadence de répétition est de 10 kHz. L'énergie par impulsion constitue la variable d'étude, et est comprise entre 25 et 500 µJ (soit une puissance moyenne de source comprise entre 0,25 et 5 W). La qualité spatiale du faisceau est optimale, avec un facteur de diffraction  $M^2=1$ .

- le lidar est monostatique, avec un diamètre de pupille de rayon 5 cm (surface notée  $A_R$ ). Le faisceau laser émis est focalisé à une distance de 50 m (lidar courte-portée). Son « waist », noté  $w$  et défini comme la largeur à 1/e du champ électromagnétique, est de 2 cm au niveau de la pupille. L'évolution de la taille du faisceau suit la loi classique de propagation gaussienne

$$w(z) = w_0 \left[ 1 + \left( \frac{z - z_{foc}}{z_R} \right)^2 \right]^{1/2}$$

avec ici  $w_0=1.23$  mm (au point de focalisation) et  $z_R=3,08$  m (distance de Rayleigh).

- le coefficient de rétrodiffusion est de  $\beta_\pi=6 \times 10^{-9}$  m<sup>-1</sup>.sr<sup>-1</sup> (diffusion purement moléculaire à 1,55 µm et 10 km d'altitude)

- le détecteur a une efficacité quantique de 80 %, et sa bande passante n'est pas limitante.

#### A.2. Expression du spectre analysé par détection hétérodyne

##### A.1.1 *Principe de base de la détection hétérodyne*

Le principe de la détection hétérodyne consiste à transférer le spectre optique du signal lidar dans une gamme de fréquences physiquement mesurables, telles les radiofréquences

(RF). De cette manière, il est possible de détecter et d'échantillonner un signal électrique dont la fréquence porteuse, fonction de la vitesse Doppler, peut être extraite par traitement de signal (par exemple une transformée de Fourier).

Le transfert du spectre optique dans le domaine RF est obtenu par battement interférentiel, au niveau du détecteur, de l'onde optique rétrodiffusée avec une onde optique de référence appelée Oscillateur Local (OL), dont la fréquence est proche de celle du laser source. Typiquement, si  $\nu_L$  est la fréquence du laser émis, on notera :

- la fréquence de l'onde rétrodiffusée:  $\nu_r = \nu_L + \Delta\nu_{Dop}$ , avec  $\Delta\nu_{Dop}$  le décalage Doppler
- la fréquence de l'onde OL:  $\nu_{OL} = \nu_L + \nu_{offset}$ , avec  $\nu_{offset}$  une fréquence d'offset généralement appliquée à l'onde OL afin de résoudre l'ambiguïté sur le signe du vecteur vitesse mesuré.

Le champ optique reçu par le détecteur est donc la somme du champ rétrodiffusé et du champ OL, soit :  $E_{tot} = e^{j2\pi\nu_r t} (E_r + E_{ol} e^{j2\pi f_1 t})$ , où  $f_1 = \nu_{offset} - \Delta\nu_{Dop}$  est une radiofréquence.

$$\text{L'éclairement lié à ce champ est : } \xi = \varepsilon_0 c / 2 \left( |E_r|^2 + |E_{ol}|^2 + 2 \operatorname{Re}(E_r E_{ol}^* e^{j2\pi f_1 t}) \right)$$

Le détecteur transforme cet éclairement en photocourant, via la relation :  $i_{tot} = S\xi$ , où  $S$  est la sensibilité du détecteur, définie par  $S = \eta e / h\nu$ . D'après l'expression précédente de l'éclairement, le photocourant détecté est constitué de 3 composantes :

- le courant de signal direct (courant continu de très faible amplitude)
- le courant d'OL (courant continu d'amplitude très supérieure au courant direct)
- le courant hétérodyne, qui contient l'information de fréquence, donc de vitesse.

Le courant détecté est ensuite numérisé à une cadence d'échantillonnage notée  $F_{ech}$ .

### A.1.2 Spectre du courant échantillonné et spectre de signal analysé

Le spectre du courant échantillonné est schématiquement représenté sur la figure A.1. On y distingue différentes composantes spectrales :

a) la composante de fréquence nulle, dont la puissance est égale à la somme des puissances de courant direct et d'OL

b) le spectre du signal hétérodyne, qui n'est autre que le spectre Rayleigh transposé autour de la fréquence  $f_1$ . Nous supposons ici que le spectre est gaussien (pas d'effet Brillouin). Sa demi-largeur à 1/e est d'environ  $\gamma_R = 500$  MHz à 1,55 µm. On peut considérer que la totalité du spectre Rayleigh est comprise dans une bande de largeur  $B = 2,5 * \gamma_R$ , soit 1,25 GHz, et l'on suppose également que  $f_1 > B/2$  (pas de repliement de spectre). Sur la bande  $B$ , le spectre du signal hétérodyne s'écrit :

$$\phi_s(f) = \frac{\langle i_{het}^2 \rangle}{\sqrt{2\pi} f_2} \exp\left(-\frac{(f - f_1)^2}{2 f_2^2}\right) \text{ avec } f_2 = \gamma_R / \sqrt{2} = 350 \text{ MHz}$$

Dans cette expression,  $\langle i_{het}^2 \rangle$  est la puissance totale du courant hétérodyne reçu en moyenne sur le speckle (la valeur instantanée de  $i_{het}^2$  étant une quantité aléatoire du fait du speckle).

c) le spectre du courant de bruit, correspondant essentiellement au bruit du détecteur et au bruit quantique de l'OL (très supérieur au bruit quantique du courant direct). Pour simplifier le propos, nous négligerons ici le bruit du détecteur, pour nous placer dans le cas idéal d'une détection limitée par le bruit quantique de l'OL (bruit de photon). Dans ce cas le spectre du bruit est blanc sur toute la bande échantillonnée  $[0, F_{ech}/2]$ . Sa puissance spectrale est:  $\phi_b(f) = 2ei_{OL}$ , avec  $e$  la charge de l'électron et  $i_{OL}$  le photocourant d'OL.

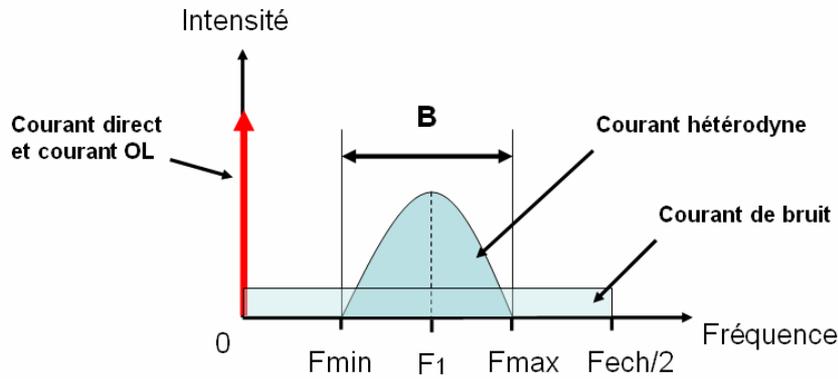


Figure A.1 : Spectre du courant échantillonné

Comme seul le signal Rayleigh nous intéresse, nous supposons pouvoir filtrer tout ce qui n'est pas contenu dans la bande  $B$ . La puissance totale du bruit est alors  $\langle i_b^2 \rangle = 2ei_{OL} B$ . Dans ces conditions, la densité spectrale du signal filtré peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\phi(f) = \frac{\langle i_b^2 \rangle}{B} \left[ \frac{B.CNR}{\sqrt{2\pi}f_2} \exp\left(-\frac{(f-f_1)^2}{2f_2^2}\right) + 1 \right] \quad (\text{A.1})$$

expression dans laquelle on a introduit le « CNR » (Carrier to Noise Ratio), défini par :

$$CNR = \frac{\langle i_{het}^2 \rangle}{\langle i_b^2 \rangle}$$

Nous allons chercher à évaluer ce terme pour une architecture donnée de lidar.

### **A.3. Calcul du CNR d'un lidar monostatique dans l'approximation des champs gaussiens**

#### ***A.1.3 Expression de la puissance du courant hétérodyne***

Le courant hétérodyne se calcule par intégration dans le plan du détecteur de la fonction de recouvrement entre le champ rétrodiffusé et le champ d'OL. On peut cependant montrer que, dans l'hypothèse de champs non tronqués (par le détecteur ou par les optiques), il est équivalent de calculer cette fonction de recouvrement dans le plan de la pupille de réception ou encore dans le plan de la cible atmosphérique, via le formalisme du BPLO (Back-Propagated Local Oscillator). Dans le plan R de la pupille de réception, nous avons par exemple:

$$i_{het}(t) = S \varepsilon_0 c \operatorname{Re} \left( \int_R E_r(\vec{r}, t) E_{ol}^*(\vec{r}, t) e^{j(2\pi f_1 t + \Delta\phi(t))} d\vec{r} \right)$$

où  $\Delta\phi(t)$  est le déphasage, hors pulsation porteuse, entre l'OL et le signal rétrodiffusé. Nous avons dans cette expression trois termes dépendant du temps

- le terme en  $\exp(j2\pi f_1 t)$ , qui est la porteuse RF du courant hétérodyne ;
- le terme  $\Delta\phi(t)$ , qui traduit la cohérence temporelle du signal de battement. Le signal d'OL étant très cohérent, le temps de cohérence du battement est dominé par le signal Rayleigh, et peut être défini par  $t_{coh} = 1/(2\pi f_2)$  ;
- les termes  $E_r(t)$  et  $E_{ol}^*(t)$ , qui traduisent, en chaque point  $\vec{r}$ , les variations temporelles de l'enveloppe des signaux lidar et OL. En effet, le laser étant impulsionnel, la réponse de l'atmosphère varie dans le temps.

Notons que si le champ spatial  $E_{ol}^*(\vec{r})$  est une fonction déterministe, le champ rétrodiffusé  $E_r(\vec{r})$ , lui, est une variable aléatoire gaussienne complexe centrée, à cause du speckle engendré par l'atmosphère. Il en va donc de même pour le courant hétérodyne.

La puissance du courant hétérodyne, et plus particulièrement sa moyenne statistique sur le speckle, s'écrit:

$$\langle i_{het}^2(t) \rangle = \left\langle (S \varepsilon_0 c)^2 \operatorname{Re}^2 \left( e^{j(2\pi f_1 t + \Delta\phi(t))} \int_R E_r(\vec{r}, t) E_{ol}^*(\vec{r}, t) d\vec{r} \right) \right\rangle$$

Effectuer une moyenne statistique sur le speckle revient à effectuer une moyenne temporelle sur de nombreuses périodes de durée  $t_{coh}$ . Pour le terme de porteuse RF variant rapidement, cette moyenne se traduit par  $\left\langle \operatorname{Re}^2 \left( e^{j(2\pi f_1 t + \Delta\phi(t))} \right) \right\rangle_T = 1/2$ . En exprimant les champs dans le plan de la cible atmosphérique, on obtient alors l'expression suivante de la puissance du courant hétérodyne<sup>[20]</sup> :

$$\langle i_{het}^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \left( S \varepsilon_0 c \lambda \sqrt{\beta_\pi} \right)^2 \int_{\Delta z(t)} \int_{plan\ z} \left| E_i(\vec{\rho}, z, t - z/c) \right|^2 \left| E_{ol}(\vec{\rho}, z, t - z/c) \right|^2 d\vec{\rho} dz$$

où  $E_i$  est le champ laser incident, et où la transmission atmosphérique est supposée parfaite (pertes négligées). Notons que l'intégrale porte sur le tube d'atmosphère sondée par l'impulsion laser (voir section 3.1.1 et figure 3.2).

#### A.1.4 Expression du CNR dans l'approximation des champs gaussiens

La puissance de bruit pouvant être notée  $\langle i_b^2 \rangle = 2eBSP_{ol}$ , où  $P_{ol}$  est la puissance optique du champ OL détecté, nous obtenons l'expression suivante du CNR :

$$CNR(t) = \frac{S}{2eBP_{ol}} \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 c \lambda \sqrt{\beta_\pi} \right)^2 \int_{\Delta z(t)} \int_{plan\ z} \left| E_i(\vec{\rho}, z, t - z/c) \right|^2 \left| E_{ol}(\vec{\rho}, z, t - z/c) \right|^2 d\vec{\rho} dz$$

Rappelons que nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un lidar monostatique : les formes spatiales des champs  $E_i$  et  $E_{ol}$  sont donc identiques. Dans l'hypothèse de champs gaussiens non tronqués, nous avons :

$$E_{ol}(\vec{\rho}, z) = \sqrt{\frac{4P_{ol}}{\varepsilon_0 c \pi w^2(z)}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}, \text{ normé de telle sorte que } \varepsilon_0 c / 2 \int_C \left| E_{ol}(\vec{\rho}) \right|^2 d\vec{\rho} = P_{ol}$$

$$E_i(\vec{\rho}) = \sqrt{\frac{4P_i}{\varepsilon_0 c \pi w^2(z)}} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}}, \text{ avec } P_i \text{ la puissance crête de l'impulsion.}$$

Avec ces expressions de champ, on obtient le CNR suivant :

$$CNR(t) = \frac{S \lambda^2 \beta_\pi P_i}{eB} \int_{\Delta z(t)} \frac{1}{\pi w^2(z)} dz, \text{ expression qui ne dépend plus de la puissance } P_{OL}.$$

On peut définir un CNR métrique, noté CNR<sub>z</sub>, par :

$$CNR_z(z) = \frac{S \lambda^2 \beta_\pi P_i}{eB} \frac{1}{\pi w^2(z)} \tag{A.2}$$

Le CNR s'exprime alors simplement par :  $CNR(t) = \int_{\Delta z(t)} CNR_z(z) dz$

#### A.1.5 Formulation du CNR par le rendement hétérodyne

On a coutume de relier le CNR au courant direct reçu dans la pupille de réception par la relation suivante :

$$CNR = \gamma_{het} \frac{\langle i_{dir} \rangle}{eB}$$

où  $\gamma_{het}$  est le rendement hétérodyne du lidar. Comme pour le rendement direct, que nous avons défini en section 3.2.2 et figure 3.9, le rendement hétérodyne s'interprète comme le rendement énergétique entre le signal capté par la pupille et le signal effectivement obtenu après détection hétérodyne. Nous pouvons obtenir une expression de  $\gamma_{het}$  de la manière suivante.

Le courant direct se calcule dans le plan de la pupille par l'expression :

$$i_{dir}(t) = S \epsilon_0 c / 2 \int_R |E_r(\vec{r}, 0, t)|^2 d\vec{r}$$

En exprimant cette relation dans le plan de la cible atmosphérique, on obtient :

$$\langle i_{dir}(t) \rangle = S \beta_\pi \frac{\epsilon_0 c}{2} \int_{\Delta z(t) \text{ plan } z} \int \frac{A_r}{z^2} |E_i(\vec{\rho}, z, t - z/c)|^2 d\vec{\rho} dz$$

En utilisant un champ incident gaussien, on obtient alors :

$$CNR(t) = \int_{\Delta z(t)} \gamma_{het} \frac{S \beta_\pi P_i A_r}{eB} \frac{1}{z^2} dz$$

Ce qui définit le  $CNR_z$  suivant :

$$CNR_z = \gamma_{het} \frac{S \beta_\pi P_i A_r}{eB} \frac{1}{z^2} \quad (\text{A.3})$$

Par identification des expressions (A.2) et (A.3), on obtient l'expression suivante du rendement hétérodyne :

$$\gamma_{het}(z) = \frac{\lambda^2 z^2}{\pi w^2(z) A_r}$$

Notons que ce rendement hétérodyne est majoré car  $w(z)$  est limité par la diffraction. Si l'on prend comme critère que le rayon à  $1/e^2$   $\sqrt{2}w(z) > 1.22\lambda z / D_R$ , où  $D_R$  est le diamètre de l'optique, on obtient notamment que  $\gamma_{het} < 0.54$ .

### A.1.6 Application numérique et interprétation du CNR

Pour le cas d'étude choisi, la courbe de rendement hétérodyne  $\gamma(z)$  est la suivante :

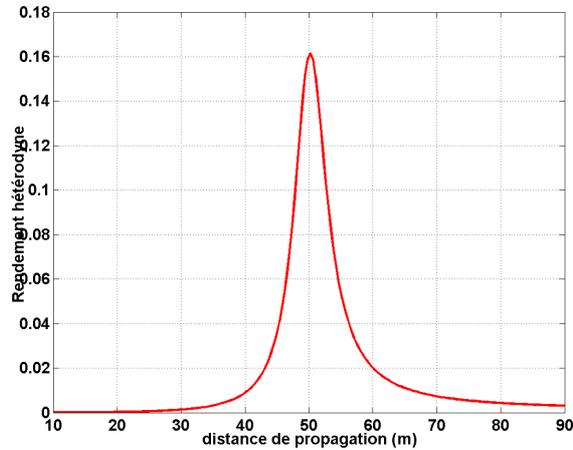


Figure A.2 : Courbe de rendement hétérodyne

Le maximum du rendement est donc de 16 % seulement au voisinage du point de focalisation. La forme de l'impulsion étant supposée de type « créneau », nous avons pour le CNR :

$$CNR(t) = \int_{c(t-T_p)/2}^{ct/2} CNR_z dz$$

On obtient alors la courbe suivante, calculée ici pour une énergie d'impulsion de 100  $\mu\text{J}$  :

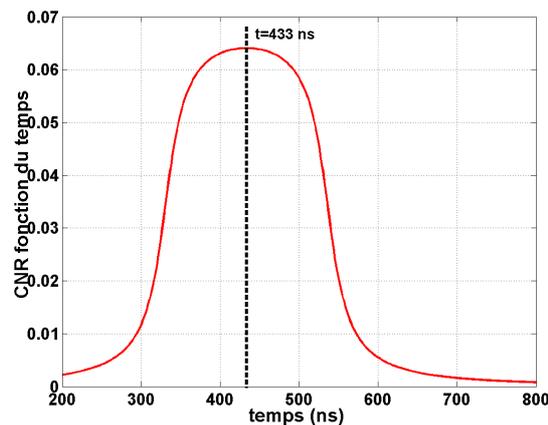


Figure A.3 : Courbe du CNR(t)

Cette courbe est maximale à  $t=433$  ns (temps nécessaire pour que le milieu de l'impulsion parvienne à la cote  $z=50$  m), mais est à peu près constante à une valeur  $CNR_0$  pendant les 200 ns de la durée d'impulsion. Dans la suite, nous supposons disposer d'une séquence de courant hétérodyne de 200 ns, enregistrée pendant l'intervalle de temps [350, 550 ns] avec une valeur de CNR constante, égale à  $CNR_0$  (par exemple avec 100  $\mu\text{J}$ ,  $CNR_0 \sim 0,065$ ).

Remarquons que la moyenne d'espace du rendement hétérodyne sur cet intervalle de temps est donnée par :

$$\overline{\gamma_{het}} = \frac{2}{cT_p} \int_{c(t-T_p)/2}^{ct/2} \gamma_{het}(z) dz, \text{ ce qui donne numériquement } \overline{\gamma_{het}} = 4,5\% \text{ environ}$$

Cette grandeur est utile puisque la valeur du  $CNR_0$  vérifie alors numériquement l'équation suivante :

$$CNR_0 = \overline{\gamma_{het}} \beta_\pi \frac{A_r}{z_{foc}^2} \frac{SP_i}{eB} \frac{cT_M}{2}, \text{ avec } T_M \text{ le temps de mesure (ici égale à } T_p=200 \text{ ns)}$$

Sachant que  $S = \eta e / h\nu$  nous obtenons :

$$B.CNR_0 = \overline{\gamma_{het}} \eta \beta_\pi \frac{A_r}{z_{foc}^2} N_i \frac{c}{2}, \text{ où } N_i \text{ est le nombre de photons dans l'impulsion}$$

Or, souvenons-nous que d'après l'équation lidar classique, le flux de photons reçus dans la pupille de réception est :

$$\Phi_{pup} = \beta_\pi \frac{A_r}{z_{foc}^2} N_i \frac{c}{2}$$

Nous avons donc :

$$CNR_0 = \overline{\gamma_{het}} \eta \Phi_{pup} \Delta t_{det} \text{ avec } \Delta t_{det} = 1/B$$

**Le  $CNR_0$  s'interprète donc comme le nombre de photoélectrons utiles reçus par intervalle de temps caractéristique du détecteur.**

Le nombre total de photoélectrons utiles détectés pendant la durée  $T_M$  est alors :

$$N_{e^-} = \overline{\gamma_{het}} \eta N_{pup} = T_M \cdot B \cdot CNR_0$$

où  $N_{pup} = \Phi_{pup} T_M$  est le nombre total de photons collectés par la pupille de réception.

#### **A.4. Précision de l'estimation de fréquence en détection hétérodyne**

Nous pouvons à présent appliquer une opération de TF complexe au signal de 200 ns sélectionné précédemment, afin d'en obtenir le spectre. A partir du spectre, nous devrions pouvoir estimer la fréquence  $f_i$ , et donc mesurer le décalage Doppler. La question est de savoir avec quelle précision l'on peut espérer faire cette estimation. Pour répondre à cette

question, nous allons calculer la Borne de Cramer-Rao d'estimation en détection hétérodyne. Le raisonnement proposé ici reprend celui de Rye et Hardesty dans réf.[38] et réf.[39].

Soient  $F_{ech}$  la fréquence d'échantillonnage du signal,  $T_M$  le temps de mesure, et  $N_{ech}=F_{ech} \cdot T_M$  le nombre total d'échantillons temporels disponibles. Découpons le signal temporel en  $n$  tranches de durée  $t_{coh}$  (temps de cohérence du signal Rayleigh). Nous avons  $n=T_M/t_{coh}$  tranches, contenant chacune  $M=N_{ech}/n$  échantillons de photocourant.

Pour chaque tranche de durée  $t_{coh}$ , on calcule la TF complexe du signal, ce qui fournit pour chaque tranche  $M$  échantillons spectraux, répartis entre  $-F_{ech}/2$  et  $+F_{ech}/2$ . Ces échantillons spectraux sont, à l'image des échantillons temporels, des variables aléatoires gaussiennes complexes centrées (l'opération de TF étant linéaire). Les échantillons de puissance spectrale calculés pour une tranche de durée  $t_{coh}$  sont donc de statistique exponentielle négative.

Nous sommes à présent les  $n$  spectres de puissance de chaque tranche. Dans la mesure où ceux-ci sont statistiquement indépendants, puisque temporellement décorréllés (c'est d'ailleurs là l'intérêt du découpage du signal en tranches de durée  $t_{coh}$ ), chacun des  $M$  échantillons spectraux de la somme devient une variable aléatoire dont la loi de probabilité est de type gamma- $n$  :

$$P(\Phi_k = \phi_k) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{\phi_k^{n-1}}{\langle \phi_k \rangle^n} e^{-n \frac{\phi_k}{\langle \phi_k \rangle}}$$

où  $\Phi_k$  est la puissance spectrale de l'échantillon  $k$  du spectre sommé, et  $\Gamma(n)$  la fonction eulérienne dite « fonction gamma ».

Dans l'approximation de Levin<sup>[40]</sup> (« les échantillons du spectre de puissance sommé sont non corrélés »), la fonction de vraisemblance du spectre total est le produit des lois de probabilités de chaque échantillon spectral. Nous obtenons alors la fonction de log-vraisemblance, et la BCR qui en dérive pour l'estimation de la fréquence  $f_1$  :

$$\ln \Lambda = \sum_{k=1}^M \ln P(\Phi_k = \phi_k) ; \quad \varepsilon_{f_1} = \left( -E \left[ \frac{d^2 \ln \Lambda(f_1)}{df_1^2} \right] \right)^{-1/2}$$

On obtient alors l'expression suivante :

$$\varepsilon_{f_1} = \left( n \sum_{k=1}^M \left( \frac{1}{\phi_k} \frac{d\phi_k}{df_1} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

La somme discrète peut être approchée par la somme continue divisée par la distance spectrale entre deux échantillons, qui est de  $\Delta f = F_{ech}/M$ . Par ailleurs, l'hypothèse de Levin des échantillons spectraux non corrélés impose de représenter l'ensemble du spectre du signal sur le domaine des fréquences positives seulement : le spectre du signal est donc considéré nul sur la partie des fréquences négatives tandis que l'amplitude de la partie positive est multipliée par deux (représentation dite du « signal analytique »). On obtient alors :

$$\varepsilon_{f_1} = \left( n \frac{M}{F_{ech}} \int_{F_{min}}^{F_{max}} \left( \frac{1}{\phi(f)} \frac{d\phi(f)}{df_1} \right)^2 df \right)^{-1/2}$$

où  $F_{min}$  et  $F_{max}$  sont définis sur la fig.A.1.

En introduisant dans cette équation l'expression du spectre du signal (éq.A.1), ainsi que la variable  $\alpha = B.CNR_0 t_{coh}$ , égale au nombre de photoélectrons détectés par intervalle de cohérence temporelle du signal Rayleigh, on aboutit au résultat suivant :

$$\varepsilon_{f_1} = \frac{f_2}{\sqrt{T_M B.CNR_0} g(\alpha)} \text{ avec } g(\alpha) = \int_{-B/(2f_2)}^{+B/(2f_2)} \frac{x^2 e^{-x^2}}{\left(1 + \alpha \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2}\right)^2} dx.$$

On peut alors écrire ce même résultat sous la forme suivante :

$$\varepsilon_{f_1} = \frac{f_2}{\sqrt{N_e}} g(\alpha)^{-1/2} \text{ ou encore } \varepsilon_{f_1} = \frac{f_2}{\sqrt{n\alpha g(\alpha)}}$$

Le coefficient  $g(\alpha)^{-1/2}$  joue donc le rôle du facteur de performance de la détection hétérodyne, pour un signal  $N_e$  donné.

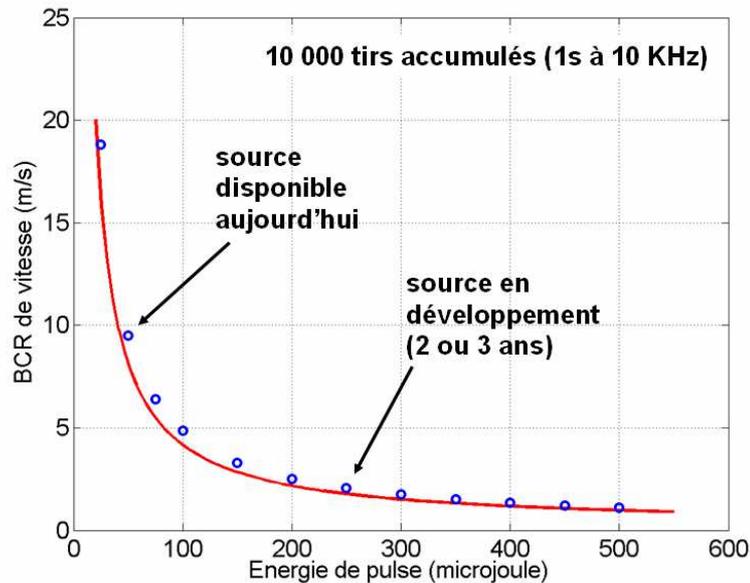
Notons enfin que dans le cas d'une accumulation incohérente de  $N_{acc}$  tir lasers, la précision de mesure devient :

$$\varepsilon_{f_1} = \frac{f_2}{\sqrt{N_{acc} n\alpha g(\alpha)}}$$

On peut montrer que le coefficient  $g(\alpha)$  atteint un maximum lorsque  $\alpha=1,3$  (le facteur de performance  $g(\alpha)^{-1/2}$  est alors minimal et vaut 2,2). Cet optimum est intéressant, car il signifie que pour améliorer la précision de mesure à puissance équivalente de la source laser, il est plus efficace d'augmenter l'énergie de l'impulsion que la fréquence de répétition tant que la condition  $\alpha=1,3$  n'est pas atteinte. Une fois ce seuil dépassé, c'est la stratégie inverse qui devient avantageuse.

## **A.5. Conclusion sur les performances maximales d'un lidar hétérodyne réaliste**

Sur la figure ci-dessous, nous avons représenté la courbe de la BCR d'estimation de la vitesse Doppler pour différentes énergies d'impulsion de 25 à 500 μJ, après une seconde d'accumulation à 10 kHz.



**Figure A.4 : Borne de Cramer-Rao du lidar hétérodyne pour la mesure de vitesse en fonction de l'énergie délivrée par impulsion (accumulation de 1 seconde à 10 kHz)**

Sur cette courbe, les points bleus représentent les BCR calculées à l'aide d'un modèle plus évolué que celui présenté ici, ne faisant notamment pas l'hypothèse simplificatrice de Levin (modèle dû à M. Valla<sup>[20]</sup>). La bonne correspondance des résultats calculés par ces deux méthodes montre justement que l'approximation de Levin est pertinente dans le cas de l'analyse d'un signal Rayleigh (elle ne l'est pas pour les spectres fins mis en jeu dans les lidars Mie).

Nous avons fléché sur le graphique l'endroit où se situent les sources actuellement disponibles (entre 50 et 100  $\mu\text{J}$ ). Pour ces sources, et avec 10 000 tirs accumulés, la précision en vitesse serait de l'ordre de 5 à 10 m/s, ce qui est insuffisant. Les développements actuels permettent de miser sur la disponibilité prochaine de sources plus puissantes, peut-être jusqu'à 300  $\mu\text{J}$  à la même cadence. La précision pourrait alors devenir intéressante avec près de 2 m/s. Cependant, nous devons rappeler que les BCR calculées ici sont optimistes, avec plusieurs hypothèses fortes, notamment un détecteur sans bruit, et surtout aucune perte optique...

En conclusion, il n'est donc pas possible à l'heure actuelle d'utiliser la détection hétérodyne à 1,55  $\mu\text{m}$  pour réaliser des mesures de vitesse sur signal Rayleigh avec 1 m/s de précision.



## Annexe B

### Différence de marche dans une lame séparatrice inclinée

Le calcul présenté ici suit la méthode proposée par Fortunato dans réf.[41].

Nous souhaitons calculer :

$$\Delta_S = \Delta_{LS} + \Delta_{LS2'} = h(n_s \cos r_1 + n_s \cos r_2 - (\cos i_1 + \cos i_2))$$

en tenant compte du fait que :

$$\cos i_1 = \vec{u} \cdot \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\alpha + \gamma) \text{ et } \cos i_2 = \vec{u} \cdot \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \gamma)$$

Nous avons pour commencer la loi de Snell-Descartes :

$$n_s \sin r_1 = (1 - \cos^2 i_1)^{1/2} = \left(1 - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma)\right)^{1/2}$$

A partir de là, on peut observer que  $(n_s \cos r_1)^2 = n_s^2 - (n_s \sin r_1)^2$ .

$$\text{De là on déduit : } n_s \cos r_1 = \left(n_s^2 - 1 + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma)\right)^{1/2}$$

Par ailleurs nous avons :  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$

$$\text{Ce qui nous mène alors à : } n_s \cos r_1 = \left(\frac{2n_s^2 - 1}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n_s^2 - 1}\right)^{1/2}$$

En utilisant le développement limité au second ordre de  $(1-x)^{1/2}$ , on obtient :

$$n_s \cos r_1 = \left(\frac{2n_s^2 - 1}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n_s^2 - 1} - \frac{1}{8} \left(\frac{\beta^2 + 2\alpha\gamma}{2n_s^2 - 1}\right)^2\right)$$

En ne conservant que les termes angulaires d'ordre 1 et 2, et compte tenu du fait que  $\gamma \approx 1$ , cette expression se réduit à :

$$n_s \cos r_1 = \left(\frac{2n_s^2 - 1}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 + 2\alpha}{2n_s^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(2n_s^2 - 1)^2}\right)$$

De la même manière, on obtient pour le terme  $n_s \cos r_2$  le résultat suivant :

$$n_s \cos r_2 = \left( \frac{2n_s^2 - 1}{2} \right)^{1/2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\beta^2 - 2\alpha}{2n_s^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(2n_s^2 - 1)^2} \right)$$

A partir de là, on trouve le résultat recherché :

$$\Delta_s = \sqrt{2}h \left[ (2n_s^2 - 1)^{1/2} - 1 \right] + \alpha^2 \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-3/2} \right] + \beta^2 \frac{h}{\sqrt{2}} \left[ 1 - (2n_s^2 - 1)^{-1/2} \right]$$

## Annexe C

### Une seconde méthode de mesure de la phase de référence

Le principe de cette seconde méthode est de chercher à différencier le signal lidar du signal de référence non pas temporellement, mais spatialement. Le schéma de principe est le suivant :

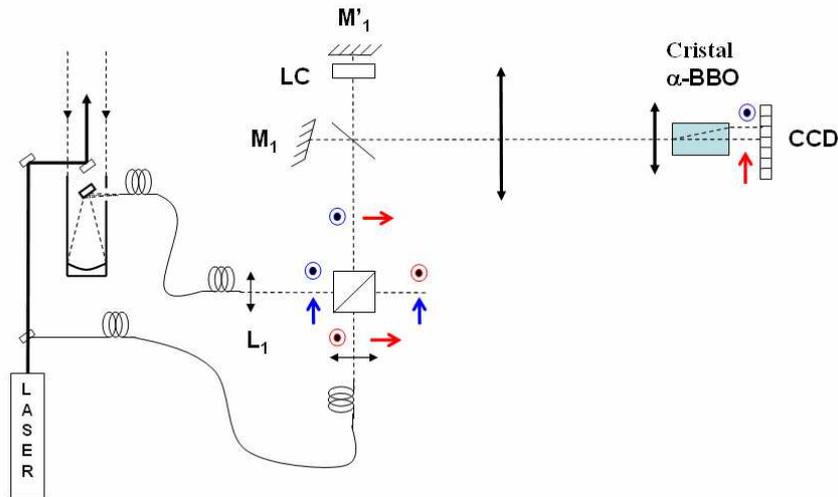


Figure C.1 : Schéma de principe de la mesure de référence de phase par analyse de deux interférogrammes à polarisations croisées

Immédiatement après émission du pulse laser, on prélève le signal de référence, pour le guider, via une fibre optique, jusqu'au cube polariseur précédant l'entrée dans l'interféromètre. On fait de même sur la « voie lidar », mais en arrivant sur l'autre face du cube polariseur. Nous avons alors propagation dans l'interféromètre de deux signaux de polarisations croisées. Par exemple, dans le schéma ci-dessus, le signal lidar est polarisé « s » tandis que le signal de référence est polarisé « p ».

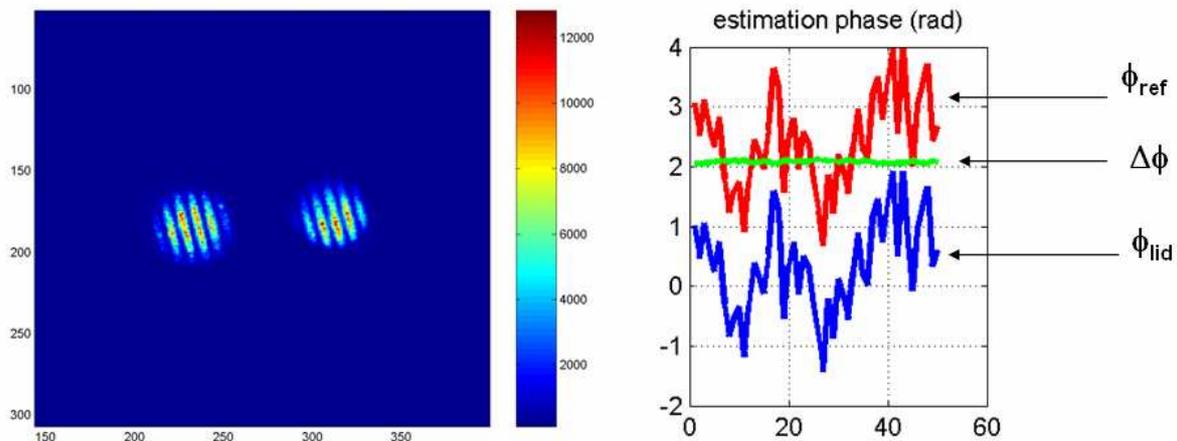
A la sortie de l'interféromètre, les deux figures de franges de polarisations croisées sont superposées. Après passage dans le système afocal d'imagerie, on peut alors les séparer spatialement grâce à un cristal biréfringent dont l'angle de coupe est judicieusement choisi afin de maximiser l'angle de « walk-off » entre les deux polarisations. Par exemple, nous avons pu tester à 355 nm un barreau de  $\alpha$ -BBO de 30 mm de long, permettant de séparer complètement des figures de franges de diamètre inférieur à 2,4 mm.

L'avantage de cette technique de différenciation spatiale, et non temporelle, est qu'elle permet de se passer de Caméra Interligne, dont l'efficacité quantique se limite à 20 % à 355 nm. A la place, on peut utiliser des caméras dites « Full-Frame », dont certaines versions présentent d'excellentes efficacités quantiques, allant jusqu'à 50 % voire 70 % à 355 nm. Le gain de signal possible est donc d'un facteur 2 ou 3 par rapport à la Caméra Interligne.

L'inconvénient de la technique réside dans le degré d'isolation limité entre les deux voies de polarisation. Le cube n'étant pas parfait, on a notamment une fraction de quelques pourcents du signal de référence polarisé « s » qui passe dans l'interféromètre, et vient

superposer sa propre figure de frange à celle du signal lidar. Le signal lidar étant très faible par rapport au signal de référence, la nuisance due à ce « taux de fuite » de la voie référence sur la voie lidar n'est pas négligeable, et peut compliquer singulièrement le traitement de signal.

En injectant une fraction du faisceau laser dans les deux voies, nous avons cherché à valider tout de même le principe de la méthode. La figure suivante montre d'une part un exemple de deux figures de franges obtenues derrière le cristal de  $\alpha$ -BBO, et d'autre part un enregistrement de la phase des franges de l'une et de l'autre figure, ainsi que leur différence de phase. Le traitement du signal est très similaire à celui présenté dans le chapitre 6.



**Figure C.2 : Gauche : Enregistrement d'interférogrammes en polarisations croisées séparées par un cristal de BBO. Droite : mesure sur 60 tirs de leur phases respectives et différence de phase.**

La courbe de différence de phase, sensiblement constante, montre que la méthode fonctionne dans son principe. Cependant la précision obtenue sur cet enregistrement n'est pas meilleure que  $\varepsilon_{\Delta\phi}=18$  mrad. Il est possible que ce résultat soit dû aux effets de fuite de polarisation de l'une vers l'autre voie. L'observation très nette de niveaux de fuite conséquents nous a incité à ne pas pousser plus loin l'utilisation de cette méthode, qui n'a donc pas été testée sur de véritables signaux lidar.

Toutefois, dans la mesure où le taux d'isolation des voies de polarisation peut certainement être amélioré, ne serait-ce que par l'ajout d'un second cube sur la voie de référence, le prolongement de cette idée n'est pas à exclure pour de futurs travaux.

## Références

- [1]. **P.Tchoryk, C.Watkins, S.Lindemann, P.Hays, C. Nardell**, « Molecular Optical Air Data System (MOADS) », Laser Radar Technology and Applications VI, SPIE Proc. Vol. 4377 (2001)
- [2]. **J.P.Cariou, B.Augere, D.Goular, J.P.Schlotterbeck, X.Lacondemine**, « All-fiber 1.5 mm CW coherent laser anemometer DALHEC – Helicopter flight test analysis », Proceedings of 13<sup>th</sup> Coherent Laser Radar Conference (CLRC), p.157-160 (2005)
- [3]. **D.Soreide, R.K.Bogue, L.J.Ehernberger, H.Bagley**, « Coherent lidar turbulence measurement for gust load alleviation », NASA Technical Memorandum 104318 (1996)
- [4]. **R.Targ et al.**, « Coherent lidar airborne wind sensor II: flight test results at 2 and 10  $\mu\text{m}$  », Appl.Opt.35 p.7117 (1996)
- [5]. **N.Schmitt et al.**, « Flight test of the AWIATOR airborne LIDAR Turbulence Sensor – First results », Proceedings of 14<sup>th</sup> Coherent Laser Radar Conference (CLRC) (2007)
- [6]. **M.Born, E. Wolf**, *Principles of Optics*, Sixth Edition, Pergamon (1980)
- [7]. **R.Miles, W.Rempert, J.Forkey**, « Laser Rayleigh scattering », Meas. Sci. Technol. **12**, R33-R51 (2001)
- [8]. **T. Young**, « Rayleigh scattering », Appl.Opt.**20**, p.533 (1981)
- [9]. <http://www.iup.physik.uni-bremen.de/~vountas/Ring/AIR.html>
- [10]. **Y.Arshinov, S.Bobrovnikov, V.Zuev, V.Mitev**, « Atmospheric temperature measurements using a pure rotational Raman lidar », Appl.Opt.**22**, p.2984 (1983)
- [11]. **G.Andersen, J.Brasseur, R.Knize, P.Harris**, « Raman and Rayleigh holographic lidar », Appl.Opt.**41**, p.1798 (2002)
- [12]. **D. Bates**, « Rayleigh scattering by air » Planet. Space Sci. **32**, p.785–790 (1984)
- [13]. **E. Peck, K. Reeder**, « Dispersion of air » J. Opt. Soc. Am.**62**, p.958–962 (1972)
- [14]. **G.Tenti, C.Boley, R.Desai**, « On the kinetic model description of Rayleigh-Brillouin scattering from molecular gases », Can. J. Phys. **52**, 285 (1974)
- [15]. **A.T.Young, G.W.Kattawar**, « Letters to the Editor – Rayleigh-scattering line profiles », Appl.Opt. **22**, 3668 (1983)
- [16]. **V. Ghaem-Maghami, A. May**, « Rayleigh-Brillouin spectrum of compressed He, Ne and Ar. I. Scaling », Phys.Rev. A **22**, p.692 (1980)

- 
- [17]. **P.-H. Wang, G. Kent, P. McCormick, L. Thomason, G. Yue**, « Retrieval analysis of aerosol-size distribution with simulated extinction measurements at SAGE III wavelengths », *Appl.Opt.* **35**, p433 (1996)
- [18]. **V. Banakh, I. Smalikho, C. Werner**, « Effect of aerosol particle microstructure on cw Doppler lidar signal statistics », *Appl.Opt.* **39**, p.5393 (2000)
- [19]. **J.W.Goodman**, « Statistical properties of laser speckle patterns », dans J.C.Dainty, *Laser Speckle and Related phenomena*, Springer-Verlag, Berlin (1975)
- [20]. **M. Valla**, « Etude d'un lidar doppler impulsif à laser Erbium fibré pour des mesures de champ de vent dans la couche limite de l'atmosphère », Thèse ENST (2005)
- [21]. **M-L. Chanin, A.Garnier, A.Hauchecorne, J.Porteneuve**, « A Doppler lidar for measuring winds in the middle atmosphere », *Geoph.Res.Let.*, Vol.16, n°11, p.1273 (1989)
- [22]. **C.Flesia, C.L.Korb**, « Theory of the double-edge molecular technique for Doppler lidar wind measurement », *Appl.Opt.* Vol.38, n°3, p.432 (1999)
- [23]. **D.Bruneau**, « Mach-Zehnder interferometer as a spectral analyser for molecular Doppler wind lidar », *Appl.Opt.*, Vol.40 n°3, p.391 (2001)
- [24]. **D.Hua, M.Uchida, T.Kobayashi**, « Ultraviolet Rayleigh-Mie lidar for daytime-temperature profiling of the troposphere », *Appl.Opt.*44, p.1315 (2005)
- [25]. **M.McGill, W.Skinner, T.Irgang**, « Analysis techniques for the recovery of winds and backscatter coefficients from a multiple-channel incoherent Doppler lidar », *Appl.Opt.*, Vol. 36, n°6, p.1253, (1997)
- [26]. **J.McKay**, « Modelling of direct detection Doppler wind lidar. II. The fringe imaging-technique », *Appl.Opt.* Vol.37, n°27, p.6487 (1998)
- [27]. **D.Rees, S.McDermid**, « Doppler lidar atmospheric wind sensor : reevaluation of a 355-nm incoherent Doppler lidar », *Appl.Opt.* Vol.29, n°28, p.4133 (1990)
- [28]. **C.Watkins et al.**, « Molecular optical air data system (MOADS) prototype II », *Laser Radar Technology and Applications IX*, SPIE.Proc.5412, p.10 (2004)
- [29]. **C.Watkins et al.**, « Molecular optical air data system (MOADS) flight experiment », *Laser Radar Technology and Applications VIII*, SPIE.Proc.5086, p.236 (2003)
- [30]. **N.P.Schmitt, W.Rehm, T.Pistner, P.Zeller, H.Diehl, P.Navé**, « Airborne direct detection UV LIDAR », *Proceedings of 23<sup>rd</sup> International Laser Radar Conference*, p.167 (2006)
- [31]. **D.Bruneau**, « Fringe-imaging Mach-Zehnder interferometer as a spectral analyzer for molecular Doppler wind lidar », *Appl.Opt.* **41**, p.503 (2002)

- [32]. **D.Bruneau, J.Pelon**, « Simultaneous measurements of particle backscattering and extinction coefficients and wind velocity by lidar with a Mach-Zehnder interferometer: principle of operation and performance assessment », *Appl.Opt.*42, p.1101 (2003)
- [33]. **C.H.Cramér**, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1946)
- [34]. **M.McGill, J.Spinhirne**, « Comparison of two direct-detection Doppler lidar techniques », *Opt.Eng.* 37(10) 2675-2686 (1998)
- [35]. **G.Fortunato**, « L'interféromètre de Michelson, quelques aspects théoriques et expérimentaux », *Bulletin de l'Union des Physiciens* n°91 (1997)
- [36]. **R.L.Hilliard, G.G.Shepherd**, « Wide-angle Michelson interferometer for measuring Doppler line widths », *JOSA* 56, 362 (1966)
- [37]. **J.M.Harlander and al.**, « Robust monolithic ultraviolet interferometer for the SHIMMER instrument on STPSat-1 », *Appl. Opt.* 42, 2829 (2003)
- [38]. **B. Rye, M.Hardesty**, « Discrete spectral peak estimation in incoherent backscatter heterodyne lidar. I: Spectral accumulation and the Cramer-Rao Lower Bound », *IEEE Trans. Geosci. Remote sensing*, Vol.31,n°1, p.16 (1993)
- [39]. **B.Rye**, « Comparative precision of distributed-backscatter Doppler lidars », *Appl.Opt.*34, p.8341 (1995)
- [40]. **M.J.Levin**, « Power spectrum parameter estimation », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-11, p.100 (1965)
- [41]. **G.Fortunato**, « Errata- Article Michelson, quelques aspects théoriques et expérimentaux », *Bulletin de l'Union des Physiciens* n°92 (1998)

## Publications de l'auteur

**N. Cézard, A. Dolfi-Bouteyre, J.P.Huignard, P.Flamant**, « A 355-nm Rayleigh-Mie lidar using two Michelson interferometers as spectral analyzers for multi-purpose near-field measurements », *Proceedings of 23<sup>rd</sup> International Laser Radar Conference (ILRC)*, p.31 (2006)

**N. Cézard, A. Dolfi-Bouteyre, J.P.Huignard, P.Flamant**, « Development of a short-range 355-nm Rayleigh-Mie lidar using a Michelson interferometer for wind speed measurements », *SPIE Proc.* 6750, *Remote Sensing Europe* (2007)

**N. Cézard, A. Dolfi-Bouteyre, J.P.Huignard, P.Flamant**, « Potential of the fringe-imaging Michelson interferometer for Rayleigh-Mie spectral analysis », *Proceedings of 24<sup>th</sup> International Laser Radar Conference (ILRC)*, p.231 (2008)

**Depôt d'un E-Repository : N.Cézard, A.Dolfi, J.P.Huignard, P.Feneyrou**

Marks & Clerk Ref 250529, « Double interféromètre de Michelson à champ compensé pour la mesure de paramètres atmosphériques », Date de l'horodatage : 05 Mai 2006