



**HAL**  
open science

# Numerical methods for subsurface flows and coupling with surface runoff

Pierre Sochala

► **To cite this version:**

Pierre Sochala. Numerical methods for subsurface flows and coupling with surface runoff. Mathematics [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2008. English. NNT : . pastel-00004625

**HAL Id: pastel-00004625**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004625>**

Submitted on 26 Jan 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'École Nationale des Ponts et Chaussées

**Spécialité : Mathématiques, Informatique**

par

**Pierre SOCHALA**

Méthodes numériques pour les écoulements souterrains  
et couplage avec le ruissellement

Soutenue le 3 décembre 2008  
devant le jury composé de :

Peter BASTIAN	Rapporteur
Stéphane CORDIER	Rapporteur
Alexandre ERN	Directeur de thèse
Robert EYMARD	Examinateur
Cyril KAO	Examinateur
Frédéric NATAF	Examinateur
Serge PIPERNO	Directeur de thèse



*A mes parents,  
Michel et Martine.*

*« Derrière les équations se cachent les audaces de l'imagination, des sentiments impérieux, qui transcendent la logique et donnent à la science une touche artistique particulière. Ce caractère artistique apparaît même si l'on n'entre pas dans le détail mathématique. »*

Banesh Hoffmann, *Histoire d'une grande idée, la relativité.*

*« ... si l'on ne fait pas indûment abstraction de la psychologie du mathématicien, on ne tarde pas à s'apercevoir qu'il y a dans l'activité mathématique plus qu'une organisation formelle de schèmes et que toute idée pure est doublée d'une application psychologique, d'un exemple qui fait office de réalité. Et l'on s'aperçoit, à méditer le travail mathématicien, qu'il provient toujours d'une extension d'une connaissance prise sur le réel et que, dans les mathématiques mêmes, la réalité se manifeste en sa fonction essentielle : faire penser. »*

Gaston Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique.*



## Remerciements

J'exprime ma gratitude à Alexandre Ern et Serge Piperno de m'avoir proposé d'effectuer une thèse au sein du CERMICS. Leurs connaissances scientifiques et le temps qu'ils ont toujours su m'accorder m'ont beaucoup aidé à appréhender les méthodes numériques que nous avons employées et les phénomènes physiques que nous avons modélisés. Leurs qualités humaines m'ont permis d'évoluer avec sérénité dans une ambiance agréable. Ce travail de recherche sous leur encadrement fut extrêmement enrichissant.

Je suis très reconnaissant à Peter Bastian et à Stéphane Cordier du temps qu'ils m'ont consacré en tant que rapporteur sur cette thèse. Mes remerciements s'adressent également à Robert Eymard, Cyril Kao et Frédéric Nataf pour leur présence dans le jury, témoignant de l'intérêt qu'ils portent à ce travail.

Je remercie Karim Djadel et Daniele di Pietro avec lesquels j'ai travaillé lors de l'implémentation des méthodes de Galerkin discontinues ainsi que Thomas Esclaffer et Bénédicte Augéard qui m'ont permis de mieux comprendre l'hydrologie. Je salue aussi mes collègues du CERMICS et de l'ENPC en particulier Jean-Philippe Chancelier et Roland Jarry pour leur aide lors de mes soucis ponctuels en informatique. Pablo Tassi fut un excellent camarade de bureau : sa bonne humeur et son café m'ont accompagnés quotidiennement au cours de la troisième année.

Jean-Pierre Chaquin m'a toujours orienté avec attention lors des moments importants de mon parcours. Mon intérêt pour la simulation numérique s'est révélé pendant son cours de mathématiques générales à l'ESTP. Je lui suis sincèrement reconnaissant de son sens pédagogique, de sa disponibilité et de sa gentillesse.

Cette thèse n'aurait pu être réalisée sans le soutien infailible de mes parents qui m'ont toujours encouragé dans mes choix et donné les moyens de faire ce que j'aime. Magalie m'a considérablement épaulé par ses conseils, son écoute et sa patience de chaque jour. Je les remercie profondément, ainsi que ma famille et mes amis, pour tout ce qu'ils m'apportent.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Contexte et motivations	3
1.1.1 Le ruissellement : processus et enjeux	3
1.1.2 Quels modèles en hydrologie ?	5
1.2 Modélisation des écoulements en milieu poreux	5
1.2.1 Milieu poreux	5
1.2.2 Ecoulements diphasiques eau-air	7
1.2.3 Propriétés hydrodynamiques des sols	9
1.3 Modélisation des écoulements à surface libre	12
1.3.1 Equations de Saint–Venant	12
1.3.2 Approximation de l’onde cinématique	12
1.4 Objectifs de la thèse	13
1.5 Plan de la thèse	15
<b>Chapitre 2 Ecoulements en milieu poreux variablement saturé</b>	<b>17</b>
2.1 Discrétisation de l’équation de Richards	17
2.1.1 Méthode de Galerkin discontinue SIPG	18
2.1.2 Schémas BDF	21
2.1.3 Linéarisation	22
2.1.4 Initialisation par le schéma DIRK3	23
2.1.5 Initialisation par le schéma de Crank–Nicolson	27
2.2 Résultats	28
2.2.1 Maillages	28
2.2.2 Cas tests analytiques	30
2.2.3 Cas test d’Haverkamp	32
2.2.4 Cas test de Polmann	35
2.2.5 Cas tests de Vogel, Van Genuchten et Cislerova	37
<b>Chapitre 3 Affleurement et drains</b>	<b>41</b>
3.1 Problème de frontière libre	41
3.1.1 Problème continu et ensemble admissible	41
3.1.2 Algorithme	44
3.1.3 Conservation de la masse avec le schéma BDF1	46
3.1.4 Conservation de la masse avec le schéma BDF2	46
3.2 Résultats	48
3.2.1 Affleurement	48
3.2.2 Drain	55

<b>Chapitre 4 Couplage avec le ruissellement surfacique</b>	<b>63</b>
4.1 Principe du couplage . . . . .	63
4.1.1 Problème continu et ensemble admissible . . . . .	63
4.1.2 Discrétisation de l'équation de l'onde cinématique . . . . .	65
4.1.3 Algorithme à un pas . . . . .	66
4.1.4 Algorithme à deux pas . . . . .	69
4.2 Résultats . . . . .	71
4.2.1 Assèchement . . . . .	71
4.2.2 Ruissellement dû à la pluie . . . . .	74
4.2.3 Ruissellement dû à l'injection d'eau dans le sol . . . . .	78
4.2.4 Ruissellement hortonien . . . . .	82
4.3 Application concrète en hydrologie . . . . .	86
4.3.1 Problème continu et ensembles admissibles . . . . .	86
4.3.2 Géométrie et propriétés hydrodynamiques du sol . . . . .	87
4.3.3 Résultats . . . . .	88
<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
<b>Annexe A Couplage avec les équations de Saint–Venant</b>	<b>97</b>
A.1 Discrétisation des équations de Saint–Venant . . . . .	97
A.2 Transfert entre sillons . . . . .	101
<b>Annexe B Le logiciel R+R_DG</b>	<b>105</b>
B.1 Organisation générale . . . . .	105
B.2 Assemblage de la matrice et du second membre . . . . .	107
B.3 Implémentations spécifiques au couplage . . . . .	112
<b>Bibliographie</b>	<b>116</b>

## Méthodes numériques pour les écoulements souterrains et couplage avec le ruissellement

**Résumé.** Des schémas numériques précis et robustes sont proposés pour modéliser les écoulements souterrains et leur couplage avec le ruissellement surfacique. Les écoulements souterrains sont décrits par l'équation de Richards (instationnaire) qui est discrétisée par une méthode BDF en temps et une méthode de Galerkin discontinue à pénalisation intérieure symétrique en espace. Des cas tests sur des colonnes d'infiltration confirment la robustesse des schémas choisis. Dans un premier temps, nous considérons des conditions de Signorini pour l'équation de Richards afin de modéliser la présence de drains en fond d'aquifère ou l'affleurement de la nappe en négligeant le ruissellement, c'est-à-dire en supposant que l'eau exfiltrée est immédiatement évacuée du système. Dans un second temps, nous prenons en compte le ruissellement par le biais de conditions de couplage qui imposent l'égalité des flux d'eau échangés et la continuité de la pression à l'interface. Les écoulements superficiels sont décrits par l'équation de l'onde cinématique qui constitue une approximation des équations de Saint-Venant. L'équation de l'onde cinématique est discrétisée par une méthode de Godunov. Les deux schémas, pour l'écoulement souterrain et pour l'écoulement superficiel, sont conservatifs et peuvent être utilisés dans des algorithmes de couplage faisant intervenir un ou plusieurs pas de temps. Pour assurer la conservation de la masse d'eau totale du système couplé, les flux à l'interface doivent être convenablement choisis. Nous donnons en particulier la construction de ces flux pour les schémas BDF1 et BDF2. La précision et la robustesse de nos schémas sont évaluées sur plusieurs cas tests dont le drainage d'une lame d'eau, deux cas d'exfiltration de nappe (l'un provoqué par la pluie et l'autre par une injection en fond d'aquifère) et un ruissellement hortonien. Enfin, nous présentons une application concrète portant sur le fonctionnement hydrologique d'un petit bassin versant drainé.

**Mots-clefs :** Equation de Richards, approximation de l'onde cinématique, éléments finis discontinus, BDF, schéma de Godunov, algorithmes de couplage, conservation de la masse.

---

### Numerical methods for subsurface flows and coupling with surface runoff

**Abstract.** Accurate and robust numerical schemes are proposed to simulate subsurface flows and their coupling with surface runoff. Subsurface flows are modelled by the (unsteady) Richards' equation discretized by a BDF in time and a discontinuous Galerkin method with symmetric interior penalty in space. Infiltration column test cases confirm the robustness of our schemes. Firstly, we consider Signorini conditions for the Richards' equation to model buried drains or the water table reaching the ground surface; thus we assume that exfiltrated water immediately exits the system. Secondly, runoff flow is taken into account through coupling conditions enforcing water flux equality and pressure continuity at the interface. Overland flows are modelled by the kinematic wave approximation of the shallow water equations, which is discretized by a Godunov method. Both schemes, that for the subsurface flow and that for the overland flow, are mass conservative and can be coupled within a multiple time step procedure. To ensure total water mass conservation for the whole system, interface fluxes must be carefully designed. We specify the form of these fluxes for BDF1 and BDF2. Accuracy and robustness of our schemes are assessed on drainage, exfiltration and hortonian runoff test cases. Finally, we apply the methodology to investigate the hydrological behavior of a small-scale drained watershed.

**keywords :** Richards' equation, kinematic wave approximation, discontinuous finite elements, coupling algorithms, mass conservation.



# Chapitre 1

## Introduction

Cette thèse porte sur la simulation numérique des écoulements souterrains en milieu poreux ainsi que leur couplage avec les écoulements surfaciques. L'infiltration de l'eau dans le sol, son transport dans la zone variablement saturée du sol et dans la nappe phréatique ainsi que son ruissellement sur la surface du sol sont des processus complexes régis par des lois physiques différentes. Ces phénomènes ont chacun un comportement propre et la compréhension de leurs interactions est cruciale en hydrologie.

Dans ce chapitre introductif, nous commençons par indiquer le contexte et les motivations de notre travail, puis nous présentons les différents modèles utilisés pour décrire les écoulements en milieu poreux, en précisant leurs domaines de validité. Nous donnons ensuite les équations régissant les écoulements à la surface du sol en indiquant les simplifications qui sont possibles. Nous précisons également les objectifs de cette thèse en écrivant le système d'équations couplées que nous proposons de résoudre numériquement. Nous concluons ce chapitre en détaillant le plan de ce mémoire.

### 1.1 Contexte et motivations

#### 1.1.1 Le ruissellement : processus et enjeux

La description des divers processus hydrologiques repose sur des fondements physiques théoriques (principes de conservation) et des connaissances empiriques (propriétés hydrodynamiques du sol, coefficient de frottement). La modélisation des écoulements souterrains repose sur la conservation de la masse écrite sous forme différentielle ainsi que sur la conservation de la quantité de mouvement écrite sous forme algébrique (loi de Darcy). La connaissance du comportement hydrodynamique du sol (pression capillaire et perméabilité hydraulique en fonction de l'état de saturation) est également nécessaire. De même, la modélisation des écoulements surfaciques repose sur la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement écrites sous forme différentielle et dépend de la rugosité et de la pente du terrain. En hydrologie, il est habituel de séparer deux processus expliquant l'apparition du ruissellement : l'incapacité d'infiltration dans un sol insaturé conduisant au ruissellement hortonien et l'incapacité d'infiltration dans un sol saturé. Ces deux types de ruissellement ont été étudiés respectivement par Horton [Hor33] et par Dunne et Black [DB70]. Le ruissellement hortonien se produit lorsque l'intensité de la pluie dépasse la capacité d'infiltration du sol et apparaît généralement sur des sols peu perméables (comme les argiles) ou sur des sols initialement secs. Le ruissellement sur sol saturé est observé quand une nappe se situe à faible profondeur et remonte jusqu'à la surface du sol sous l'effet de la pluie. L'eau en surface se propage plus ou moins facilement en fonction de la forme et de l'ampleur des hétérogénéités du sol comme le montrent les flaques de la figure 1.1.

Suivant les conditions d'humidité et les propriétés des sols en aval, ce ruissellement peut se ré-infiltrer et contribuer à une recharge de la nappe ou rejoindre une rivière. Une connaissance de l'évolution du ruissellement nécessite donc de connaître la capacité d'infiltration des zones traversées et plus généralement les interactions entre les écoulements de surface et les écoulements souterrains.



FIG. 1.1: Affleurement de nappe sur une parcelle de blé ruisselante.

Pendant les périodes de fortes pluies, le ruissellement alimente de façon plus importante les cours d'eau et participe à la formation de crues. Le débat sur la provenance de l'eau des crues, c'est-à-dire sur la répartition de l'eau de pluie ruisselée et de l'eau provenant de la nappe, a toujours lieu comme le montre la synthèse proposée par Kienzler et Naef [KN08]. Les hydrologues cherchent à mieux comprendre et anticiper l'importance du ruissellement qui peut engendrer des dégâts dans les zones habitables ou cultivées et sur le milieu naturel. En effet, lors d'inondations, les dommages sur les biens matériels sont souvent considérables et concernent parfois directement les populations. La pollution de l'eau est un autre risque accentué par le ruissellement. En milieu urbain, lorsque les systèmes d'assainissement des eaux usées sont saturés par des pluies d'intensité importante, le ruissellement des eaux pluviales non traitées détériore la qualité de l'eau utilisée dans les villes et a un impact négatif sur le milieu naturel. De même, en milieu rural, une partie des engrais et des pesticides répandus dans les champs peut se retrouver dans les eaux de ruissellement et être nocive pour les écosystèmes en diminuant la qualité de l'eau. Enfin, l'érosion des sols constitue un troisième risque rencontré en milieu agricole et amplifié par le ruissellement. La conséquence principale de ce processus naturel est la diminution de la couche superficielle du sol, ce qui peut engendrer la destruction des semis, la baisse de la fertilité du sol et des coulées de boue en aval. L'étude du ruissellement nécessite par ailleurs de prendre en compte les aménagements humains réalisés en milieux urbains et agricoles qui modifient le chemin de l'eau (fossé, présence de haies, tuyau de drainage, imperméabilisation, bassin de retenue, bandes enherbées ...).

L'intérêt de développer des modèles numériques en hydrologie est triple. Les modèles permettent d'abord une meilleure compréhension des facteurs contrôlant les processus physiques en s'affranchissant de certaines limites des mesures expérimentales notamment pour faire varier les différents paramètres comme la géométrie, l'intensité de la pluie et les conditions initiales et aux limites. Par ailleurs, ces modèles constituent dans certains cas des outils utilisables pour prévoir

le comportement de systèmes soumis à des sollicitations extrêmes qui favorisent l'apparition des risques liés au ruissellement. Enfin, ils peuvent également permettre de tester l'effet de nouveaux aménagements sur l'hydrologie. Ce développement de modèles numériques pour l'hydrologie est d'actualité comme le montre le récent Projet ANR « Méthode » [Mét] dont le but est d'étudier les effets des hétérogénéités de surface sur les écoulements. Plus précisément, il s'agit d'étudier l'impact des sillons agricoles sur le ruissellement des eaux de pluie.

### 1.1.2 Quels modèles en hydrologie ?

Plusieurs modélisations sont utilisées dans la simulation numérique en hydrologie. Les modèles conceptuels et empiriques comme ceux développés par Perrin, Michel et Andréassian [PMV01] proposent une simplification des processus pour simuler les débits des rivières à partir des données de pluie et d'évapotranspiration. Ces modèles présentent l'avantage de mener à des simulations rapides mais s'appuient sur des observations et des données expérimentales et ne peuvent pas prévoir des cas extrêmes ou l'effet de modifications éventuelles dans un bassin versant. A l'inverse, l'utilisation de modèles déterministes repose à la fois sur des bases théoriques et des données empiriques. Nous avons choisi ce type de modélisation qui peut s'appliquer dans de nombreuses configurations en changeant les différents paramètres. Enfin, la modélisation stochastique repose également sur des bases théoriques prenant en compte les incertitudes sur les données.

La représentation du sol fait appel à la théorie des milieux poreux et plusieurs modèles sont disponibles pour décrire les écoulements souterrains : modèle diphasique, équation de Richards et modèle de Green–Ampt. De nombreux modèles existent également pour décrire les écoulements à surface libre. Le plus général est le système des équations de Navier–Stokes à surface libre qui peut être remplacé sous certaines hypothèses par le système des équations de Saint–Venant. Des simplifications supplémentaires aboutissent à l'équation de l'onde gravitaire, de l'onde dynamique stationnaire, de l'onde diffusive ou de l'onde cinématique. Ainsi, de nombreux modèles existent pour décrire les écoulements souterrains et superficiels et le choix d'un modèle hydrologique est difficile puisqu'il résulte d'une bonne connaissance des processus physiques et de la hiérarchie existante entre ces processus.

Plusieurs travaux ont déjà été réalisés pour étudier le couplage entre le ruissellement surfacique et les écoulements souterrains. Esteves *et al.* [EFGV00] traitent le ruissellement hortonien puisqu'ils couplent un écoulement surfacique avec des colonnes de sol verticales en utilisant le modèle de Green–Ampt. Dawson [Daw06] prend en compte le ruissellement par remontée de nappe lorsque les écoulements souterrains sont instationnaires. Beaugendre *et al.* [BEE<sup>+</sup>06] ainsi que Esclaffier [Esc04] traitent les deux types de ruissellement dans le cas de la dimension deux d'espace. Le but de notre travail est de concevoir un algorithme robuste utilisable en dimension deux ou trois d'espace, permettant de prendre en compte le ruissellement hortonien et le ruissellement par remontée de nappe en intégrant également un aménagement agricole, le drainage enterré.

## 1.2 Modélisation des écoulements en milieu poreux

### 1.2.1 Milieu poreux

Un sol est un milieu constitué d'une partie solide et d'une partie fluide. La modélisation largement utilisée pour représenter ce type de milieu est celle des milieux poreux. Dans ce type de modèle, la matrice solide est appelée squelette et assure la cohésion du milieu. Les espaces vides délimités par cette matrice se nomment pores et permettent au milieu d'être traversé par

un fluide liquide ou gazeux. Ces deux éléments renvoient à deux caractéristiques essentielles dans la description d'un milieu poreux :

- la *porosité*  $\varphi$  [ $m^3/m^3$ ] qui est définie comme le rapport entre le volume des pores et le volume total dans un volume élémentaire représentatif du milieu. Ce paramètre géométrique est compris entre 0 et 1.
- la *perméabilité intrinsèque*  $k_i$  [ $m^2$ ] qui indique l'aptitude du milieu à être traversé par un écoulement. Cette grandeur ne dépend que de la structure et de la connectivité des pores. Lorsque le milieu est *isotrope*, c'est-à-dire que ses propriétés sont indépendantes de la direction, la perméabilité intrinsèque est un tenseur proportionnel au tenseur identité. Lorsque le milieu est *anisotrope*, la perméabilité intrinsèque est un tenseur symétrique. Plusieurs approximations analytiques de la perméabilité intrinsèque existent en fonction du type de milieu poreux. Nous citons, entre autres, le modèle de Hazen [Haz11] pour les milieux granulaires, celui de Saffmann [Saf59] pour les réseaux de canaux parallèles et celui de Kozeny–Carman [Koz27] pour les réseaux de canaux tortueux. Des calculs récents sur des réseaux de sphères ont aussi été effectués par Tardif, Ern et Dormieux [Td06, TdED07].

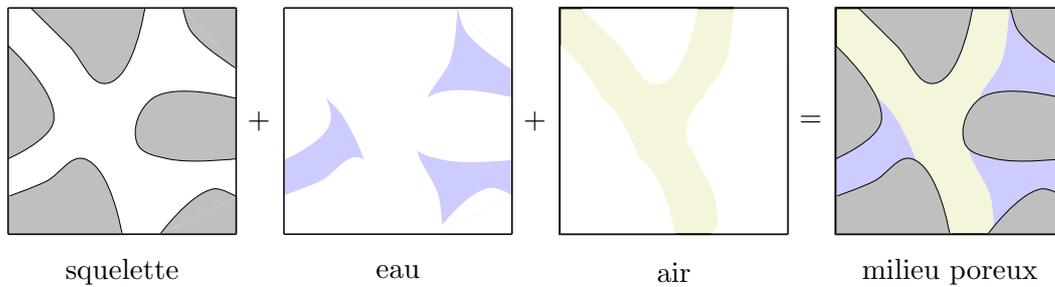


FIG. 1.2: Schéma d'un milieu poreux contenant de l'eau et de l'air.

Deux autres éléments relatifs à chaque fluide présent dans les pores sont importants pour comprendre les milieux poreux :

- la *saturation*  $s$  [ $m^3/m^3$ ] d'un fluide qui est le rapport entre le volume de ce fluide et le volume des pores dans un volume élémentaire représentatif du milieu. Ce paramètre représentant la fraction du fluide dans les pores est compris entre 0 et 1.
- la *perméabilité relative*  $k_r$  [–] d'un fluide donné qui varie en fonction de la saturation dans le milieu et qui traduit l'aptitude de ce fluide à s'écouler. La perméabilité relative est une quantité scalaire. Plusieurs auteurs ont proposé des relations empiriques pour déterminer la perméabilité relative pour l'eau et l'air. Nous citons entre autres Corey [Cor54], Fatt et Klikoff [FK59] ainsi que Bazant et Thonguthai [BT78].

Les caractéristiques intrinsèques des fluides s'écoulant dans les pores sont la viscosité dynamique  $\mu$  [ $Pa.s$ ] et la masse volumique  $\rho$  [ $kg.m^{-3}$ ]. Les grandeurs inconnues sont la saturation  $s$  et la pression  $p$  [ $Pa$ ]. Dans les milieux poreux, l'écoulement est *multiphasique* quand il fait intervenir plusieurs phases et *monophasique* quand il fait intervenir une seule phase. Par ailleurs, le milieu est dit *saturé* lorsque les pores sont complètement occupés par l'eau en phase liquide et *insaturé* dans le cas contraire.

### 1.2.2 Ecoulements diphasiques eau-air

Nous présentons les équations qui décrivent les écoulements diphasiques eau – air, notamment l'équation de Richards et le modèle de Green–Ampt qui en sont des formes simplifiées.

#### Equations diphasiques

Les variables concernant l'air portent l'indice a et celles concernant l'eau portent l'indice w. Dans notre cas, nous supposons que l'espace libre du sol est occupé par de l'air et de l'eau si bien que la saturation en eau  $s_w$  et la saturation en air  $s_a$  vérifient

$$s_w + s_a = 1.$$

Les écoulements diphasiques sont gouvernés par les équations de continuité des deux phases qui traduisent la conservation de la masse de l'eau et de l'air

$$\partial_t(\varphi \rho_j s_j) + \nabla \cdot \rho_j v_j = 0 \quad \text{pour } j \in \{a, w\}.$$

Les vitesses de chaque phase sont données par la loi de Darcy. Cette loi expérimentale, fondamentale en hydraulique des sols, exprime une relation affine entre la vitesse de chaque phase et le gradient de pression  $p_j$  de cette phase. Elle fut proposée par Darcy [Dar56] et la version tridimensionnelle est

$$v_j(x, t) = -ki(x) \frac{kr_j(x, p_j)}{\mu_j} (\nabla p_j + \rho_j \vec{g}) \quad \text{pour } j \in \{a, w\}.$$

où  $\vec{g} = -(0, 0, g)$  désigne le vecteur accélération de la gravité. Les perméabilités intrinsèque et relative intervenant dans la loi de Darcy sont de nature différente. La perméabilité intrinsèque est une grandeur tensorielle ne dépendant que du milieu alors que la perméabilité relative est une grandeur scalaire dépendant également de la pression du fluide considéré. Il est possible de regrouper ces deux perméabilités en utilisant la notion de perméabilité effective, introduite par Mayer, Jacobs et Wittmann [MJW92], pour la phase  $j$  notée  $ke_j$  sous la forme

$$ke_j(x, p_j) = \underbrace{ki(x)}_{\text{tenseur}} \times \underbrace{kr_j(x, p_j)}_{\text{scalaire}}.$$

La dépendance de la perméabilité effective à la variable  $x$  est liée au caractère *hétérogène* du milieu, c'est-à-dire aux variations des propriétés du milieu dans l'espace. Lorsque le milieu est *homogène*, la perméabilité effective ne dépend plus que de la pression de la phase correspondante. Lorsque le squelette est déformable, la porosité est variable et il convient de compléter les équations ci-dessus en exprimant l'équilibre mécanique du squelette entre les efforts de pression exercés par le fluide et les contraintes induites par les déformations du squelette. On aboutit alors aux équations de la poroélasticité qui ne seront pas décrites ci-après (voir par exemple le livre de Dormieux et Bourgeois [DB02, chap. 5 et 6]).

#### Equation de Richards

Le système d'équations précédent peut être simplifié sous les trois hypothèses suivantes :

1. le squelette est indéformable,
2. l'eau est incompressible,
3. l'air circule librement dans le milieu poreux.

La première hypothèse implique que la porosité est constante. La deuxième hypothèse signifie que la masse volumique de l'eau est constante. La troisième hypothèse se traduit par une viscosité de l'air nulle ce qui permet de déduire d'après la loi de Darcy que la pression de l'air est hydrostatique :

$$\mu_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla(p_a + \rho_a g z) = 0, \quad (1.1)$$

où  $z$  désigne la coordonnée verticale orientée vers le haut. Comme la quantité  $\rho_a g z$  est négligeable devant la pression atmosphérique (pour  $z$  de l'ordre de quelques dizaines mètres), l'équation (1.1) implique en général que la pression de l'air est constante et égale à la pression atmosphérique. La masse volumique de l'eau et la porosité étant constantes, l'équation de continuité de l'eau se simplifie

$$\varphi \partial_t s_w + \nabla \cdot v_w = 0. \quad (1.2)$$

La loi de Darcy portant sur l'eau peut se réécrire, si l'on tient compte du fait que le terme de gravité dérive du potentiel gravitaire, de la façon suivante

$$v_w = -ki \frac{kr_w(p_w)}{\mu_w} \nabla(p_w + \rho_w g z). \quad (1.3)$$

Pour alléger les notations, nous omettons la dépendance en la variable d'espace.

En hydrologie, il est courant d'introduire les trois grandeurs suivantes :

- la *teneur en eau*  $\theta$  [ $m^3/m^3$ ] regroupant la porosité et la saturation en eau :  $\theta \stackrel{\text{def}}{=} \varphi s_w$ ,
- la *conductivité hydraulique*  $K$  [ $m.s^{-1}$ ] définie par  $K \stackrel{\text{def}}{=} ki.kr_w(p_w)\rho_w g/\mu_w$ ,
- la *charge hydraulique*  $\psi$  [ $m$ ] qui est reliée à la pression par  $\psi \stackrel{\text{def}}{=} p_w/(\rho_w g)$ .

La teneur en eau étant reliée à la charge hydraulique par la courbe de pression capillaire, nous écrivons  $\theta(\psi)$  pour indiquer cette dépendance (voir la section 1.2.3 pour plus de détails). Avec ces notations et en désignant par  $v(\psi)$  la vitesse de l'eau, les équations (1.2) et (1.3) s'écrivent

$$\begin{aligned} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) &= 0, \\ v(\psi) &= -K(\psi)\nabla(\psi + z). \end{aligned}$$

L'élimination de la vitesse aboutit à l'équation de Richards [Ric31] où l'inconnue est la charge hydraulique

$$\partial_t[\theta(\psi)] - \nabla \cdot (K(\psi)\nabla(\psi + z)) = 0. \quad (1.4)$$

Si l'on suppose que la teneur en eau est une fonction dérivable de la charge hydraulique, il est possible de réécrire la dérivée temporelle de l'équation précédente en introduisant la *capacité capillaire*  $C$  [ $m^{-1}$ ] qui est la dérivée de la teneur en eau par rapport à la charge. L'équation de Richards s'écrit alors

$$C(\psi)\partial_t\psi - \nabla \cdot (K(\psi)\nabla(\psi + z)) = 0. \quad (1.5)$$

L'équation de Richards peut également avoir comme inconnue la teneur en eau. Cette dernière formulation fait intervenir la *diffusivité hydraulique*  $D$  [ $m^2.s^{-1}$ ] qui est le rapport entre la conductivité hydraulique et la capacité capillaire

$$\partial_t\theta - \nabla \cdot (D(\theta)\nabla\theta) - \nabla \cdot (K(\theta)\nabla z) = 0, \quad (1.6)$$

la conductivité hydraulique étant alors une fonction de la teneur en eau. Ginting [Gin04] présente les avantages et les inconvénients des formulations (1.5) et (1.6). La formulation en  $\theta$  correspond

à une loi de conservation avec terme source mais cette formulation n'est plus applicable si le milieu devient saturé puisque la teneur en eau est constante et la diffusivité tend vers l'infini. Par ailleurs, la teneur en eau n'étant pas nécessairement continue entre deux sols de nature différente, cette forme n'est valable que pour des sols homogènes. Par contre, la charge hydraulique étant continue dans le sol, la formulation (1.5) peut s'employer dans des sols hétérogènes. Cette version s'étend également aux milieux contenant des parties insaturées et saturées, mais elle n'est pas conservative. La forme (1.4) présente les trois avantages précédents puisqu'elle est conservative et s'applique dans des milieux hétérogènes pouvant être saturés.

### Modèle de Green–Ampt

Un modèle proposé par Green et Ampt [GA11] est parfois utilisé en hydrologie, comme dans les travaux de Govindaraju *et al.* [GKJR96] et de Esteves *et al.* [EFGV00], lorsque le sol est supposé homogène, de perméabilité constante et de texture grossière. Les deux hypothèses fondamentales de ce modèle sont d'une part que les transferts horizontaux sont négligeables si bien que le milieu est considéré comme une juxtaposition de colonnes d'infiltrations verticales et d'autre part que chaque colonne peut être séparée en deux zones distinctes par un front raide. En faisant tendre l'épaisseur du front vers zéro, on obtient une discontinuité dans la teneur en eau et dans la perméabilité. La vitesse d'infiltration  $v$  de l'eau dans une colonne de sol est alors simplement donnée par la loi de Darcy,

$$v = K_f \frac{\psi_0 - \psi_f + z_f}{z_f},$$

dans laquelle  $K_f$ ,  $\psi_f$  et  $z_f$  sont la conductivité hydraulique, la charge hydraulique et la position du front d'infiltration. La quantité  $\psi_0$  est la charge hydraulique au niveau de la partie haute de la colonne. Le principal domaine d'application de ce modèle concerne l'infiltration d'eau dans des sols fortement insaturés. Toutefois, il est parfois difficile de donner une estimation réaliste de la charge hydraulique au niveau du front d'infiltration pour des terrains naturels non homogènes. De plus, ce modèle est inutilisable pour les cas que nous envisageons de traiter puisqu'il ne s'applique pas dans le cas d'affleurement de nappe.

### 1.2.3 Propriétés hydrodynamiques des sols

Les relations  $\psi \mapsto \theta(\psi)$  et  $\psi \mapsto K(\psi)$  qui décrivent les propriétés hydrodynamiques du sol, sont nécessaires pour clore l'équation de Richards (1.4). Une première notion assez intuitive sur les propriétés hydrodynamiques d'un sol est la différence de comportement entre un milieu saturé et insaturé. En effet, lorsque la charge hydraulique dépasse un certain seuil, la teneur en eau et la conductivité hydraulique atteignent des valeurs maximales constantes  $\theta_s$  et  $K_s$  qui désignent respectivement la teneur en eau à saturation et la conductivité hydraulique à saturation. Le paramètre  $\theta_s$  n'est pas nécessairement égal à la porosité car en fonction de la texture du sol, il peut rester des bulles d'air emprisonnées dans les plus petits pores. Ainsi, les expressions générales de la teneur en eau et de la conductivité hydraulique sont

$$\theta(\psi) = \begin{cases} \theta_s & \text{si } \psi \geq -\psi_e, \\ \theta(\psi) & \text{si } \psi < -\psi_e, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$K(\psi) = \begin{cases} K_s & \text{si } \psi \geq -\psi_e, \\ K(\psi) & \text{si } \psi < -\psi_e. \end{cases} \quad (1.8)$$

Le paramètre  $\psi_e$  est positif ou nul et désigne la pression d'entrée d'air. Une conséquence des relations (1.7) et (1.8) est un changement de la nature mathématique de l'équation de Richards en fonction de l'état de saturation du sol. Quand le milieu est insaturé ( $\psi < -\psi_e$ ), les propriétés hydrodynamiques dépendent de la charge et l'équation (1.4) est de type parabolique non linéaire. En revanche, lorsque le milieu est saturé ( $\psi \geq -\psi_e$ ), les propriétés hydrodynamiques sont constantes et l'équation (1.4) se simplifie en une équation elliptique linéaire.

Les deux modèles les plus utilisés en hydrologie pour représenter les propriétés hydrodynamiques des sols sont celui de Brooks–Corey [BC64] et celui de Van Genuchten [Gen80] dans lesquels l'expression de la perméabilité relative de l'eau (l'indice  $w$  est dorénavant omis) est obtenue à partir de la relation de Mualem [Mua76] qui exprime cette quantité en fonction de la teneur en eau réduite  $\tilde{\theta} \in [0, 1]$  sous la forme

$$kr(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}^l \left( \frac{\int_0^{\tilde{\theta}} d\tau/\psi(\tau)}{\int_0^1 d\tau/\psi(\tau)} \right)^2,$$

où  $\tilde{\theta} \mapsto \psi(\tilde{\theta})$  est la fonction réciproque de  $\psi \mapsto \tilde{\theta}(\psi)$ ,  $l$  est un paramètre traduisant la connectivité des pores souvent pris égal à  $1/2$  et  $\tilde{\theta}$  représente la teneur en eau réduite définie par

$$\tilde{\theta}(\psi) = \frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r},$$

avec  $\theta_r$  et  $\theta_s$  désignant respectivement la teneur en eau résiduelle et la teneur en eau à saturation. La quantité  $\theta_r$  est la valeur limite de la teneur en eau lorsque  $\psi \mapsto -\infty$ . Cette valeur est non-nulle pour des raisons analogues à celles impliquant que la teneur en eau à saturation est strictement inférieure à la porosité ( $\theta_s < \varphi$ ).

### Modèle de Brooks–Corey

$$\tilde{\theta}(\psi) = \left( \frac{|\psi|}{\psi_e} \right)^{-\lambda} \quad \text{et} \quad K(\psi) = K_s \left( \frac{|\psi|}{\psi_e} \right)^{-n},$$

où  $\lambda$  et  $n = (2 + l)\lambda + 2$  sont des coefficients dépendant du sol.

### Modèle de Van Genuchten

$$\tilde{\theta}(\psi) = (1 + (\epsilon|\psi|)^n)^{-m} \quad \text{et} \quad K(\psi) = K_s \frac{(1 - (\epsilon|\psi|)^{n-1}(1 + (\epsilon|\psi|)^n)^{-m})^2}{(1 + (\epsilon|\psi|)^n)^{\frac{m}{2}}},$$

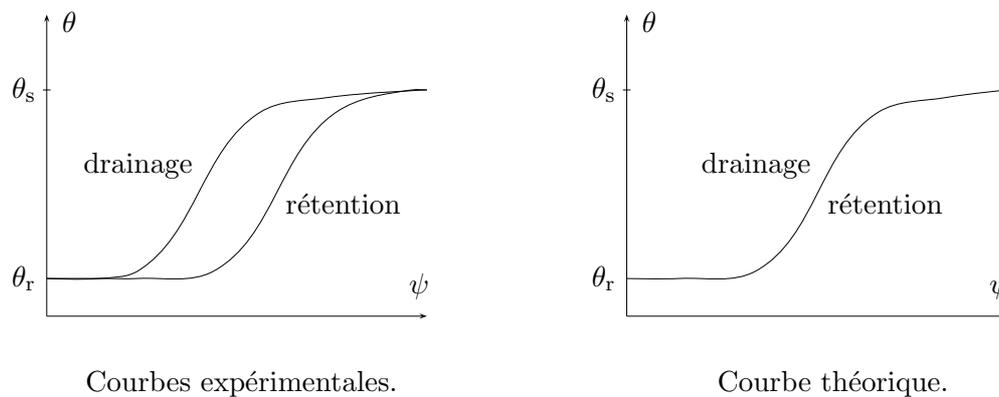
où  $\epsilon [m^{-1}]$ ,  $n$  et  $m = 1 - 1/n$  sont des coefficients dépendant du sol.

Etant donné les expressions des propriétés hydrodynamiques des sols proposées par les modèles, la non-linéarité de l'équation de Richards est dûe intrinsèquement aux variations de la teneur en eau et de la conductivité hydraulique en fonction de la charge hydraulique (voir la figure 1.3 et les courbes représentant les propriétés hydrodynamiques des sols utilisés dans les cas tests). Des estimations de la conductivité hydraulique à saturation en fonction du type de sol sont indiquées dans le tableau 1.1. Les valeurs sont reprises des travaux de Carsel et Parrish [CP88].

Type de sol	$K_s(cm.s^{-1})$	$K_s(mm.h^{-1})$
Sable	8.25e-3	297
Sable limoneux	4.05e-3	146
Limon sableux	1.22e-3	44.2
Limon	6.94e-5	2.5
Limon argileux	7.22e-5	2.7
Argile limoneux	1.94e-5	0.7
Argile	5.56e-5	2

TAB. 1.1: Conductivité à saturation selon la nature de sol.

L'approche conduisant à l'équation de Richards en simplifiant les équations générales régissant les écoulements diphasiques est attrayante puisqu'elle mène à la résolution d'une seule équation aux dérivées partielles, mais présente deux inconvénients. D'une part, il est nécessaire de connaître deux relations représentant la teneur en eau et la conductivité hydraulique du sol en fonction de la charge hydraulique. Comme nous l'avons vu pour les modèles de Brooks–Corey et de Van Genuchten, divers paramètres interviennent dans ces relations et il est parfois difficile de les déterminer expérimentalement, ce qui engendre une incertitude sur la prédiction du comportement du sol. D'autre part, ces relations empiriques ne prennent pas en compte les différences de comportement du sol suivant le sens de variation de la charge hydraulique. La figure 1.3 illustre le phénomène bien connu d'hystérésis, à savoir la différence entre les fonctions  $\psi \mapsto \theta(\psi)$  observées expérimentalement suivant que la teneur en eau diminue (drainage) ou augmente (rétention). Une possibilité pour pallier cette limitation du modèle peut être de considérer un modèle dynamique de pression capillaire dans lequel la relation  $\psi \mapsto \theta(\psi)$  fait intervenir la dérivée temporelle de la teneur en eau (voir par exemple les travaux de Hassanizadeh et Gray [HG93]). Une hystérésis sur la courbe de perméabilité relative peut également être considérée mais elle est en général de moindre importance.

FIG. 1.3: Allure des courbes  $\theta(\psi)$ .

## 1.3 Modélisation des écoulements à surface libre

### 1.3.1 Equations de Saint–Venant

Les équations générales de la mécanique des fluides sont les équations tridimensionnelles de Navier–Stokes (et font suite aux travaux de Navier [Nav23] et de Stokes [Sto45]) dans lesquelles les inconnues sont les trois composantes de la vitesse ainsi que la pression. Les écoulements surfaciques sont souvent modélisés par une simplification des équations de Navier–Stokes à surface libre. Dans les écoulements à surface libre en eau peu profonde, comme dans les rivières et les canaux, il est parfois pertinent de négliger la vitesse verticale devant ses composantes horizontales. Saint–Venant [dSV71] fut le premier à proposer les équations décrivant un écoulement unidimensionnel en eau peu profonde intégrées suivant la section. Ces équations dont les inconnues sont la hauteur d'eau  $h$  [m] et le débit  $q$  [ $m^3 \cdot s^{-1}$ ] traduisent la conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement unidimensionnel sous la forme

$$\partial_t h + \partial_x q = 0, \quad (1.9)$$

$$\partial_t q + \partial_x \left[ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right] = gh(S - J), \quad (1.10)$$

où  $g$  [ $m \cdot s^{-2}$ ] représente la gravité,  $S$  [–] est la pente du fond et  $J$  [–] prend en compte les frottements sur le fond et les berges. Le principe pour obtenir les équations de Saint–Venant est d'effectuer une intégration suivant la verticale (pour la version bidimensionnelle) ou suivant la section (pour la version monodimensionnelle) des équations de Navier–Stokes en supposant que l'écoulement est horizontal (typiquement une pente inférieure à 10%), la pression est hydrostatique, les variations de la surface libre sont faibles et la turbulence est négligeable. On suppose également qu'il n'y a pas de transfert de masse à travers le fond et la surface, que la vitesse verticale est nulle au fond et que la cote du fond est indépendante du temps. Une démonstration complète est par exemple donnée par Gerbeau et Perthame [GP01], Hervouet [Her03, p. 35] et Viollet *et al.* [VCEL03, p. 215].

Plusieurs formules empiriques existent pour estimer le terme de frottement  $J$ . Les plus connues sont celles de Chézy, de Strickler et de Darcy–Weisbach. Nous utilisons ici la relation de Manning–Strickler qui exprime le débit en fonction du coefficient de Strickler  $\mathcal{K}$  [ $m^{1/3} \cdot s^{-1}$ ], de la hauteur d'eau  $h$  et du frottement  $J$  sous la forme

$$q = \mathcal{K} h^{5/3} J^{1/2}. \quad (1.11)$$

L'écoulement est ici supposé unidirectionnel de sorte que le débit est positif ou nul ( $q \geq 0$ ).

### 1.3.2 Approximation de l'onde cinématique

L'équation (1.10) traduit un équilibre entre plusieurs effets : inertie, pression, gravité et frottement. Plusieurs approximations de cette équation sont possibles en fonction des termes conservés et sont indiquées par Ponce et Simons [PS77] ainsi que par Moussa et Bocquillon [MB96]. L'approximation de l'onde gravitaire néglige les effets des frottements, celle de l'onde dynamique stationnaire néglige les effets du terme d'inertie instationnaire et celle de l'onde diffusive néglige les effets des deux termes d'inertie à savoir  $\partial_t q + \partial_x(q^2/h)$ . L'équation de l'onde cinématique traduit simplement l'équilibre entre la gravité et les frottements,

$$S = J.$$

Le remplacement de  $J$  par  $S$  dans la formule (1.11) donne

$$q = \varphi(h, S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{K}h^{5/3}S^{1/2}. \quad (1.12)$$

En introduisant la relation (1.12) dans l'équation (1.9), nous obtenons l'équation de l'onde cinématique sous la forme d'une loi de conservation scalaire,

$$\partial_t h + \partial_x \varphi(h, S) = 0, \quad (1.13)$$

où  $\varphi$  représente une fonction de flux pour la hauteur d'eau  $h$ . Cette équation sera complétée par des termes sources pour tenir compte des échanges de masse avec le sol et de la présence éventuelle d'un apport de masse par la pluie.

## 1.4 Objectifs de la thèse

L'objectif principal de cette thèse est de développer une méthode numérique pour le couplage des écoulements souterrains avec un ruissellement surfacique. Comme nous l'avons déjà évoqué dans la section 1.2, le sol est considéré comme un milieu poreux et nous supposons que les écoulements d'eau qui s'y produisent sont modélisés par l'équation de Richards. Cela implique que des poches d'air ne peuvent pas être emprisonnées dans le sol, auquel cas un modèle diphasique tel que celui décrit à la section 1.2.2 s'avèrerait plus adéquat (voir par exemple le livre de Helmig [Hel97] et les travaux de Bastian [Bas99]). Les écoulements à surface libre sont représentés par l'approximation de l'onde cinématique dans laquelle les effets des termes d'inertie et de pression présents dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sont négligés. Néanmoins, notre principe de couplage permet de se placer sans difficulté dans un cadre plus général utilisant les équations de Saint-Venant complètes. De même, nous présentons des résultats numériques en 2D/1D (dimension deux pour les écoulements souterrains et dimension un pour les écoulements superficiels) mais l'extension au cas 3D/2D ne pose pas de nouvelle difficulté fondamentale.

Nous commençons par étudier l'équation de Richards (1.4) qui est de type parabolique non-linéaire en milieu insaturé et qui devient elliptique lorsque le sol se sature. Nous proposons ainsi de résoudre l'équation

$$\partial_t[\theta(\psi)] - \nabla \cdot (K(\psi)\nabla(\psi + z)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (1.14)$$

munie de conditions aux limites et d'une condition initiale.  $\Omega$  représente un domaine en espace et  $T$  désigne un temps fini de simulation. De nombreuses méthodes peuvent être employées pour la discrétisation en espace de l'équation de Richards. Celia et Bouloutas [CB90], Woodward et Dawson [WD00], Jones et Woodward [JW00] utilisent les différences finies (DF). Manzini et Ferraris [MF04] choisissent les volumes finis (VF). Celia et Bouloutas [CB90], Lehmann et Ackerer [LA98], Kavanagh *et al.* [KKB<sup>+</sup>02] travaillent avec les éléments finis (EF). Diersch et Perrochet [DP99], Knabner et Schneid [KS02], Bause et Knabner [BK04] utilisent les éléments finis mixtes (EFM). D'autres techniques ont été testées plus récemment, les éléments finis multi-échelles pour des applications en milieu hétérogène par He et Ren [HR06] et une méthode de Lattice Boltzmann par Ginzburg, Carlier et Kao [GCK04]. Pour étudier la concentration d'une espèce chimique dans le sol, un couplage de l'équation de Richards avec une équation de transport a aussi été effectué par Gabbouhy *et al.* [GMMS02] et par Diaw, Lehmann et Ackerer [DLA01]. Les méthodes de discrétisation en espace sont souvent combinées avec un schéma d'Euler implicite pour traiter le terme instationnaire.

Les méthodes de Galerkin discontinues (DG) constituent une approche différente pour la discrétisation en espace et offrent de nombreux avantages puisqu'elles sont localement conservatives (comme les VF et les EFM), permettent l'utilisation de polynômes d'interpolation d'ordre élevé (comme les EF et les EFM) éventuellement variable d'un élément à un autre ( $p$ -raffinement) et offrent une grande flexibilité dans l'usage de maillages non-coïncidants (comme les VF), facilitant le  $h$ -raffinement. Plusieurs méthodes DG peuvent être utilisées pour l'équation de Richards ainsi que pour les écoulements diphasiques en milieux poreux. La méthode « Local Discontinuous Galerkin » (plus connue sous l'abréviation LDG en anglais) est considérée par Fagherazzi *et al.* [FFRH04] et par Bastian *et al.* [BIR<sup>+</sup>07]. Les méthodes « non-symmetric and symmetric interior penalty » (désignées respectivement par les acronymes anglais NIPG et SIPG), développées par Baker [Bak77], Wheeler [Whe78], Arnold [Arn82], Oden *et al.* [OBB98], Rivière, Wheeler et Girault [RWG99], Arnold *et al.* [ABCM01] et Ern et Guermond [EG06], sont considérées par Klieber et Rivière [KR06] et par Bastian et Rivière [BR04] pour les écoulements en milieu poreux. Dans cette thèse, nous choisissons la méthode SIPG puisqu'elle préserve la symétrie dans l'opérateur de diffusion au niveau discret. Concernant la discrétisation temporelle associée aux méthodes DG, les schémas les plus souvent rencontrés sont ceux de Runge–Kutta (RK) explicites, développés par Cockburn et Shu [CS98a] pour les systèmes hyperboliques, et parfois diagonalement implicites [Bas03]. Nous proposons d'utiliser plutôt les formules de différentiation rétrograde (BDF pour « backward differentiation formulae ») dans lesquelles un ordre élevé peut être obtenu sans condition de stabilité dans le cas linéaire lorsque les valeurs propres de l'opérateur discret sont réelles négatives. Cela est notre cas si l'on suppose que la conductivité hydraulique ne varie pas trop fortement dans le sol. De plus, les BDF permettent de s'affranchir de la condition CFL classiquement rencontrée avec les schémas explicites (cette condition pouvant être très restrictive quand la diffusion est dominante) et sont moins coûteuses que les schémas RK diagonalement implicites notamment pour les problèmes non-linéaires. Lorsque des polynômes de degré  $p$  sont utilisés dans les méthodes DG, une BDF d'ordre  $p+1$  est utilisée en temps.

Nous effectuons ensuite un couplage entre l'équation de Richards (1.14) et l'équation de l'onde cinématique (1.13) dans le cadre d'un ruissellement surfacique sur un sol insaturé. Le couplage se produit sur une interface  $\mathcal{I}$  qui désigne la partie de la frontière du domaine  $\Omega$  représentant la surface supérieure du sol. L'approche que nous choisissons repose sur l'égalité des flux d'eau échangés et la continuité de la pression à l'interface. Cela signifie d'une part que la charge hydraulique du sol est égale à la hauteur d'eau ruisselante sur le sol et d'autre part que la vitesse normale de l'écoulement souterrain est introduite comme terme source dans l'équation de conservation de la masse des écoulements superficiels. Ces conditions de couplage sont généralement valables quand l'écoulement superficiel est produit par une exfiltration d'eau contenue dans le sol, un équilibre des flux d'eau et des pressions étant alors attendu. Parmi les travaux basés sur cette méthode, nous pouvons citer Esteves *et al.* [EFGV00] couplant un écoulement surfacique bidimensionnel avec des colonnes de sols verticales en utilisant le modèle de Green–Ampt, Singh et Bhallamudi [SB98] couplant un écoulement surfacique unidimensionnel avec des colonnes de sols verticales, Kollet et Maxwell [KM06] ainsi que Beaugendre *et al.* [BEE<sup>+</sup>06] couplant l'équation de Richards en deux dimensions d'espace avec l'approximation de l'onde diffusive ou cinématique en une dimension, et Dawson [Daw06] couplant l'équation de Darcy en deux dimensions avec les équations de Saint–Venant en une dimension. D'autres approches existent pour coupler les écoulements superficiels avec les écoulements souterrains. Une approche utilisée pour coupler notamment les écoulements de Darcy et de Stokes, suppose la continuité des vitesses normales et une discontinuité des pressions résultant de la condition de Beavers–Joseph–Saffman qui fut introduite par Beavers et Joseph [BJ67] ainsi que Saffman [Saf71]. Cette condition à l'interface modélise l'adhérence des composantes tangentielles du fluide s'écoulant en surface.

Jäger et Mikelić [JM00] l'utilisent par exemple dans le cadre d'écoulements visqueux laminaires. Cette condition a été utilisée par Discacciati *et al.* [DMQ02, MQS03] dans le cadre d'une étude mathématique et numérique du couplage de l'écoulement de Darcy avec un modèle de Saint-Venant non hydrostatique. Une autre approche rencontrée en hydrologie numérique et utilisée entre autres par VanderKwaak et Loague [VL01] considère que la pression est discontinue et évalue le flux à l'interface comme le produit de la différence de pression et d'un coefficient empirique d'échange qui dépend de la perméabilité relative du sol.

Dans le cadre de notre travail, deux termes sources supplémentaires sont présents dans l'équation (1.13) : l'un provient de la pluie et l'autre provient des interactions avec les écoulements souterrains. Nous résolvons ainsi l'équation

$$\partial_t h + \partial_x \varphi(h, S) = (v(\psi) - v_r) \cdot n_\Omega \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \quad (1.15)$$

munie de conditions aux limites et d'une condition initiale et dans laquelle  $v(\psi)$  représente le terme de couplage,  $v_r$  est l'intensité de la pluie et  $n_\Omega$  désigne la normale unitaire sortante à  $\Omega$ . Notons que la quantité  $v(\psi) \cdot n_\Omega$  est positive quand de l'eau s'exfiltre du sol et négative quand de l'eau s'y infiltre. L'équation de l'onde cinématique est discrétisée par un schéma de Godunov avec un pas de temps choisi éventuellement plus petit que celui utilisé dans la discrétisation de l'équation de Richards. Ce choix permet de respecter la condition CFL du schéma explicite sans diminuer l'efficacité de la simulation numérique dans le sol. Nous avons choisi les volumes finis pour faciliter la mise en œuvre du couplage mais une méthode DG (d'ordre supérieur ou égal à un) avec des flux de Godunov est également possible. Cela nécessite néanmoins l'utilisation de limiteurs de pente qui diminuent les oscillations et assurent la positivité de la hauteur d'eau en particulier en présence de lits secs.

Les algorithmes de couplage sont conçus pour vérifier deux critères. Le premier est de satisfaire aussi précisément que possible les conditions de couplage qui imposent des contraintes spécifiques de type égalité et inégalité sur la pression et la vitesse normale, comme pour les conditions aux limites rencontrées dans les problèmes de Signorini. Le second est d'assurer la conservation de la masse totale du système couplé. En effet, bien que des schémas conservatifs soient utilisés pour les écoulements souterrains et pour les écoulements superficiels, le flux à l'interface doit être convenablement adapté lorsque des méthodes à plusieurs pas de temps (comme les BDF) sont choisies. Nous détaillons le choix du flux pour la BDF1 et la BDF2 mais l'extension aux schémas d'ordre supérieur s'effectue sans difficulté.

## 1.5 Plan de la thèse

La suite de ce mémoire comporte trois chapitres, une conclusion et deux annexes.

Le chapitre 2 concerne la discrétisation de l'équation de Richards. La discrétisation en espace s'effectue par la méthode de Galerkin Discontinue à pénalisation intérieure symétrique (SIPG) et la discrétisation en temps s'appuie sur les méthodes BDF. Le problème discret est résolu de manière itérative par une méthode de type quasi-Newton. Plusieurs cas tests permettent ensuite de valider la méthode utilisée ainsi que l'implémentation du code informatique. Un premier cas test dans lequel nous choisissons une solution analytique permet de vérifier l'ordre de convergence théorique de la méthode BDF-SIPG. Trois autres cas d'infiltration de colonnes monodimensionnelles sont ensuite simulés pour confirmer la robustesse des schémas retenus.

Le chapitre 3 aborde les problématiques relatives aux conditions de Signorini rencontrées dans certaines situations en hydrologie. Les portions de la frontière sur lesquelles nous imposons les différents types de conditions aux limites (Dirichlet ou Neumann) sont alors inconnues et

doivent être déterminées pendant la simulation. Nous commençons par formaliser le problème continu en indiquant les inégalités sur la charge hydraulique et la vitesse normale à vérifier sur la frontière libre. Nous présentons ensuite l'algorithme implémenté pour satisfaire les contraintes ainsi que les propriétés sur la conservation de la masse du système étudié. Enfin, un cas test avec affleurement de nappe et un cas test avec un drain dans le sol permettent d'évaluer l'algorithme proposé pour traiter les frontières libres.

Le chapitre 4 est consacré au couplage entre les écoulements souterrains et surfaciques. Le système couplé consiste à résoudre l'équation de Richards dans un domaine  $\Omega$  et l'équation de l'onde cinématique sur une partie  $\mathcal{I}$  de la frontière de  $\Omega$  en respectant certaines contraintes physiques. Contrairement au chapitre précédent, où les valeurs à imposer sur le partitionnement de la frontière libre sont connues, les données dans les conditions aux limites de type Dirichlet et de type Neumann sur la zone de couplage sont liées à la résolution de l'équation de l'onde cinématique. La discrétisation par un schéma de Godunov de l'équation de l'onde cinématique est décrite ainsi que les algorithmes permettant de satisfaire les contraintes physiques de couplage et de conserver la masse totale du système. Notre algorithme conçu avec la BDF2 est évalué dans quatre cas tests aux configurations variées. Nous présentons également une application concrète en hydrologie dans le cadre d'une collaboration avec l'Institut de recherche pour l'ingénierie de l'agriculture et de l'environnement (désigné par l'acronyme CEMAGREF). Le but de l'étude est de prévoir le comportement hydrologique d'un système correspondant à une partie d'un bassin versant expérimental situé au nord de Coulommier.

L'annexe A présente la discrétisation des équations de Saint-Venant par une méthode de volumes finis. La modélisation des écoulements superficiels par ces équations permet de traiter un plus grand nombre de cas tests qu'avec l'approximation de l'onde cinématique. Un cas test de transfert entre sillons est présenté.

L'annexe B expose le logiciel conçu, développé, testé et mis en œuvre au cours de cette thèse. Nous l'avons appelé R+R\_DG en référence à Richards et Ruissellement par une méthode DG. Nous en indiquons l'organisation générale et précisons l'assemblage des matrices élémentaires et du second membre. Les éléments spécifiques à l'implémentation des conditions aux limites pour le couplage sont aussi détaillés.

# Chapitre 2

## Écoulements en milieu poreux variablement saturé

Nous présentons dans ce chapitre la méthode numérique utilisée pour résoudre l'équation de Richards lorsque le milieu est variablement saturé (c'est-à-dire pouvant être aussi bien insaturé que saturé). Notre méthode est basée sur la discrétisation de l'équation de Richards instationnaire et reste valable lorsque certaines parties du sol sont saturées puisqu'elle conduit à la discrétisation de l'équation de Darcy.

Ce chapitre comporte deux parties. Tout d'abord, nous détaillons la discrétisation de l'équation de Richards en exposant la méthode de Galerkin discontinue SIPG en espace, l'intégration temporelle par les BDF et la linéarisation utilisée pour la résolution du problème non-linéaire. Nous précisons aussi l'initialisation du schéma en temps par un schéma de Runge–Kutta diagonalement implicite ou par le schéma de Crank–Nicolson. Dans la deuxième partie, nous validons la méthode SIPG et son implémentation dans le logiciel R+R\_DG en réalisant plusieurs cas tests. Deux cas tests analytiques permettent de vérifier les ordres de convergence en milieu insaturé puis en milieu partiellement saturé. Plusieurs cas tests de colonne d'infiltration permettent ensuite de tester et de confirmer la robustesse de notre méthode.

### 2.1 Discrétisation de l'équation de Richards

Nous considérons un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de normale unitaire sortante  $n_\Omega$  dans lequel se produisent les écoulements souterrains. La frontière de  $\Omega$  est divisée en  $\partial\Omega^D \cup \partial\Omega^N$ ,  $\partial\Omega^D$  étant la portion de frontière sur laquelle la charge hydraulique  $\psi$  est connue (condition de Dirichlet) et  $\partial\Omega^N$  étant la portion de frontière sur laquelle la vitesse  $v(\psi)$  est connue (condition de Neumann). Bien que la vitesse ne soit pas simplement le gradient de la charge hydraulique puisqu'elle vérifie la loi de Darcy, nous appelons condition de Neumann une condition portant sur la vitesse. Nous proposons de résoudre l'équation de Richards écrite en charge hydraulique, sans terme source (un terme source sera considéré pour les cas tests ayant une solution analytique mais il est omis pour simplifier la suite de la présentation) et avec des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sur la frontière du domaine,

$$\begin{cases} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) = -K(\psi)\nabla(\psi + z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \psi = \psi_D & \text{sur } \partial\Omega^D \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = v_N & \text{sur } \partial\Omega^N \times [0, T], \\ \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Les fonctions  $\psi_D$  et  $v_N$  sont des données pour les conditions aux limites, imposées respectivement sur  $\partial\Omega^D$  et  $\partial\Omega^N$ , la fonction  $\psi^0$  est la condition initiale et  $T$  est un temps fini de simulation. Dans le système (2.1), la charge hydraulique  $\psi$  est une quantité scalaire et la vitesse  $v(\psi)$  est une quantité vectorielle. En posant  $u(\psi) = v(\psi) + K(\psi)e_z$ , le système (2.1) est équivalent à

$$\begin{cases} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot u(\psi) = \nabla \cdot (K(\psi)e_z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ u(\psi) = -K(\psi)\nabla\psi & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ \psi = \psi_D & \text{sur } \partial\Omega^D \times [0, T], \\ u(\psi) \cdot n_\Omega = v_N + K(\psi)e_z \cdot n_\Omega & \text{sur } \partial\Omega^N \times [0, T], \\ \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

où  $e_z = (0, 0, 1)$  désigne le vecteur vertical unitaire orienté vers le haut du repère cartésien.

### 2.1.1 Méthode de Galerkin discontinue SIPG

Soit  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  une famille de maillages non-structurés de  $\Omega$  constitués de triangles affines. Les maillages peuvent être non-coïncidants et sont réguliers au sens de Ciarlet ([Cia02, p. 124]). Pour un élément  $\tau \in \mathcal{T}_h$ ,  $\partial\tau$  représente sa frontière et  $n_\tau$  désigne sa normale unitaire sortante. L'espace d'éléments finis discontinus  $V_h$  est défini par

$$V_h \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in L^2(\Omega), \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \phi|_\tau \in \mathbb{P}_p(\tau)\},$$

dans lequel  $\mathbb{P}_p(\tau)$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$  sur un élément quelconque  $\tau$ . Les fonctions de l'espace  $V_h$  n'étant pas continues, cela permet de choisir des fonctions de base dont le support correspond à un élément du maillage.

L'ensemble  $\mathcal{F}_h$  des faces du maillage est partitionné en  $\mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^D \cup \mathcal{F}_h^N$  où  $\mathcal{F}_h^i$  est l'ensemble des faces internes,  $\mathcal{F}_h^D$  regroupe l'ensemble des faces sur lesquelles est imposée une condition de Dirichlet et  $\mathcal{F}_h^N$  désigne l'ensemble des faces sur lesquelles est imposée une condition de Neumann. Nous supposons qu'un seul type de condition aux limites est imposée sur une face, c'est-à-dire que  $\forall F \subset \partial\Omega, F \subset \partial\Omega^D$  ou  $F \subset \partial\Omega^N$ . Pour une face interne  $F \in \mathcal{F}_h^i$ , il existe  $\tau^+$  et  $\tau^-$  dans  $\mathcal{T}_h$  tels que  $F = \partial\tau^+ \cap \partial\tau^-$  et nous définissons l'opérateur de moyenne  $\{\}_F$  et l'opérateur de saut  $\llbracket \xi \rrbracket_F$  de la façon suivante : pour une fonction  $\xi$  pouvant prendre deux valeurs sur  $F$ ,

$$\{\xi\}_F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\xi^+ + \xi^-) \quad \text{et} \quad \llbracket \xi \rrbracket_F \stackrel{\text{def}}{=} \xi^- - \xi^+,$$

avec  $\xi^\pm = \xi|_{\tau^\pm}$ . Pour une fonction vectorielle, les opérateurs de moyenne et de saut sont définis composante par composante. Nous désignons par  $n_F$  la normale unitaire à  $F$  dirigée de  $\tau^-$  vers  $\tau^+$ . Notons que le signe du saut est arbitraire mais sans conséquence pour la suite puisque les sauts seront toujours multipliés par la normale  $n_F$ .

Les notations  $\psi_h$  et  $u_h$  désignent respectivement les approximations discrètes en espace et continues en temps de  $\psi$  et  $u$ . Pour obtenir la formulation discrète du système (2.2), nous constatons que la solution exacte  $(u, \psi)$  vérifie

$$\begin{cases} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\mathbb{P}_p(\tau)]^d, \quad \int_\tau u \cdot \tilde{\phi} = - \int_\tau K(\psi)\nabla\psi \cdot \tilde{\phi}, \\ \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_\tau \partial_t[\theta(\psi)]\phi + \int_\tau \nabla \cdot u \phi = \int_\tau \nabla \cdot (K(\psi)e_z)\phi, \end{cases} \quad (2.3)$$

Une intégration par parties du second membre de la première équation du système (2.3) donne

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\mathbb{P}_p(\tau)]^d, \quad \int_\tau u \cdot \tilde{\phi} = \int_\tau \psi \nabla \cdot (K(\psi)\tilde{\phi}) - \int_{\partial\tau} K(\psi) \tilde{\phi} \cdot n_\tau \psi.$$

Il n'est pas possible de remplacer directement  $(u, \psi)$  par  $(u_h, \psi_h)$  dans cette équation car les fonctions discrètes ne sont pas univaluées sur les interfaces. Nous introduisons dans l'intégrale de bord un flux numérique scalaire  $F_\psi(\psi_h)$  et écrivons au niveau discret

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\mathbb{P}_p(\tau)]^d, \quad \int_\tau u_h \cdot \tilde{\phi} = \int_\tau \psi_h \nabla \cdot (K(\psi_h) \tilde{\phi}) - \int_{\partial\tau} K(\psi_h|_\tau) \tilde{\phi} \cdot n_\tau F_\psi(\psi_h). \quad (2.4)$$

Le flux numérique  $F_\psi(\psi_h)$  défini sur les faces du maillage est associé à la charge hydraulique  $\psi$  et varie suivant que la face est interne, de bord avec une condition de Dirichlet ou de bord avec une condition de Neumann,

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad F_\psi(\psi_h)|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \{\psi_h\}_F & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ \psi_D & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ \psi_h & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^N. \end{cases}$$

Notons que nous utilisons la donnée de la condition aux limites de Dirichlet pour la définition de ce flux sur  $\mathcal{F}_h^D$ . Après une contre-intégration par parties, l'équation (2.4) devient

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \tilde{\phi} \in [\mathbb{P}_p(\tau)]^d, \quad \int_\tau u_h \cdot \tilde{\phi} = - \int_\tau K(\psi_h) \nabla \psi_h \cdot \tilde{\phi} - \int_{\partial\tau} K(\psi_h|_\tau) \tilde{\phi} \cdot n_\tau (F_\psi(\psi_h) - \psi_h|_\tau). \quad (2.5)$$

Nous effectuons maintenant une intégration par parties dans le deuxième terme de la seconde équation du système (2.3),

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_\tau \partial_t[\theta(\psi)]\phi - \int_\tau u \cdot \nabla \phi + \int_{\partial\tau} u \cdot n_\tau \phi = \int_\tau \nabla \cdot (K(\psi)e_z)\phi.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, nous introduisons dans l'intégrale de bord un flux numérique vectoriel  $F_u(\psi_h)$  associé à la grandeur  $u$  et écrivons au niveau discret

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_\tau \partial_t[\theta(\psi_h)]\phi - \int_\tau u_h \cdot \nabla \phi + \int_{\partial\tau} F_u(\psi_h) \cdot n_\tau \phi = \int_\tau \nabla \cdot (K(\psi_h)e_z)\phi. \quad (2.6)$$

Le flux numérique  $F_u(\psi_h)$  défini sur les faces du maillage varie suivant que la face est interne, de bord avec une condition de Dirichlet ou de bord avec une condition de Neumann,

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad F_u(\psi_h)|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\{K(\psi_h)\nabla\psi_h\}_F + \eta K_s d_F^{-1} \llbracket \psi_h \rrbracket_F n_F & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ -K(\psi_h)\nabla\psi_h + \eta K_s d_F^{-1} (\psi_h - \psi_D) n_\Omega & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ v_N n_\tau + K(\psi_h)e_z & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^N, \end{cases}$$

où  $\eta$  est un paramètre positif qui sert à la fois à pénaliser les sauts aux interfaces par moindres carrés et à imposer de manière faible les conditions aux limites de Dirichlet sur les faces dans  $\mathcal{F}_h^D$ . Ce paramètre  $\eta$  doit être plus grand qu'une valeur minimale dépendant de la régularité des maillages  $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ . Notons également que nous utilisons la donnée de la condition aux limites de Neumann sur les faces de  $\mathcal{F}_h^N$ . Par ailleurs,  $K_s$  est la conductivité à saturation et  $d_F$  une échelle de longueur de la face  $F$  qui sera ici évaluée en utilisant les diamètres des éléments pour lesquels  $F$  est une face,

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad d_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \max(d_{\tau^+}, d_{\tau^-}), & F = \partial\tau^+ \cap \partial\tau^-, & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ d_\tau, & F \subset \partial\tau, & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \end{cases}$$

où  $d_\tau$  désigne la plus grande arête de la maille  $\tau$ . Pour un milieu poreux ayant une conductivité variable (comme c'est le cas dans les écoulements variablement saturés puisque la conductivité

dépend de la charge), il convient de multiplier le coefficient de pénalisation par la moyenne harmonique de la conductivité normale de part et d'autre de l'interface (voir par exemple les travaux de Di Pietro, Ern et Guermond [DPEG08] ainsi que de Ern, Stephansen et Zunino [ESZ08]). Dans notre cas, les variations de  $K$  sont suffisamment faibles pour utiliser simplement la conductivité hydraulique à saturation. En prenant  $\tilde{\phi} = \nabla\phi$  dans l'équation (2.5) pour remplacer le deuxième terme de l'équation (2.6), nous obtenons la méthode SIPG,

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad & \int_{\tau} \partial_t[\theta(\psi_h)]\phi + \int_{\tau} K(\psi_h)\nabla\psi_h \cdot \nabla\phi + \int_{\partial\tau} K(\psi_h|_{\tau}) \nabla\phi \cdot n_{\tau}(\mathbb{F}_{\psi}(\psi_h) - \psi_h|_{\tau}) \\ & + \int_{\partial\tau} \mathbb{F}_u(\psi_h) \cdot n_{\tau} \phi = \int_{\tau} \nabla \cdot (K(\psi_h)e_z) \phi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous la forme suivante,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_{\tau} \partial_t[\theta(\psi_h)]\phi + a_{\tau}(\psi_h, \phi) = b_{\tau}(t, \psi_h, \phi), \quad (2.8)$$

dans laquelle pour  $(\psi_h, \phi) \in V_h \times \mathbb{P}_p(\tau)$ ,

$$a_{\tau}(\psi_h, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau} K(\psi_h)\nabla\psi_h \cdot \nabla\phi + \int_{\partial\tau} K(\psi_h|_{\tau}) \nabla\phi \cdot n_{\tau} (\widehat{\mathbb{F}}_{\psi}(\psi_h) - \psi_h|_{\tau}) + \int_{\partial\tau} \widehat{\mathbb{F}}_u(\psi_h) \cdot n_{\tau} \phi, \quad (2.9)$$

$$b_{\tau}(t, \psi_h, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\tau} K(\psi_h)e_z \nabla\phi + \int_{\partial\tau} K(\psi_h|_{\tau})e_z \phi n_{\tau} + \tilde{b}_{\tau}(t, \psi_h, \phi). \quad (2.10)$$

Nous avons intégré par parties le membre de droite de l'équation (2.7). Cette manipulation s'avère importante pour améliorer la robustesse de la méthode dans certains cas ; nous y reviendrons à la fin de ce chapitre (section 2.2.5). Dans l'expression de  $a_{\tau}(\psi_h, \phi)$ , la quantité  $\widehat{\mathbb{F}}_{\psi}(\psi_h)$  est définie par

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad \widehat{\mathbb{F}}_{\psi}(\psi_h)|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_{\psi}(\psi_h) & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ 0 & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ \mathbb{F}_{\psi}(\psi_h) & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^N, \end{cases}$$

et la quantité  $\widehat{\mathbb{F}}_u(\psi_h)$  est définie par

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \forall \psi_h \in V_h, \quad \widehat{\mathbb{F}}_u(\psi_h)|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{F}_u(\psi_h) & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ -K(\psi_h)\nabla\psi_h + \eta K_s d_F^{-1} \psi_h n_{\Omega} & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ 0 & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^N. \end{cases}$$

Dans l'expression de  $b_{\tau}(t, \psi_h, \phi)$ , la quantité  $\tilde{b}_{\tau}(t, \psi_h, \phi)$  est définie par

$$\tilde{b}_{\tau}(t, \psi_h, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\partial\tau \cap \mathcal{F}_h^D} (-K(\psi_h) \nabla\phi \cdot n_{\Omega} + \eta K_s d_F^{-1} \phi) \psi_D - \int_{\partial\tau \cap \mathcal{F}_h^N} (v_N + K(\psi_h)e_z \cdot n_{\Omega}) \phi.$$

La dépendance par rapport au temps de  $\tilde{b}_{\tau}(t, \psi_h, \phi)$  vient de la dépendance par rapport au temps des données des conditions aux limites  $\psi_D$  et  $v_N$ . Cette dépendance explicite nous sera utile dans la description des schémas DIRK3 et de Crank–Nicolson aux sections 2.1.4 et 2.1.5. Enfin, en sommant la forme locale  $a_{\tau}(\psi, \phi)$  sur l'ensemble des éléments du maillage, nous obtenons la

forme globale de la méthode SIPG,

$$\begin{aligned}
a_{\mathfrak{h}}(\psi_{\mathfrak{h}}, \phi) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathfrak{h}}} a_{\tau}(\psi_{\mathfrak{h}}, \phi) \\
&= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathfrak{h}}} \int_{\tau} K(\psi_{\mathfrak{h}}) \nabla \psi_{\mathfrak{h}} \cdot \nabla \phi \\
&\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^i} \int_F (\{K(\psi_{\mathfrak{h}}) \nabla \phi\}_F \llbracket \psi_{\mathfrak{h}} \rrbracket_F \cdot n_F + \{K(\psi_{\mathfrak{h}}) \nabla \psi_{\mathfrak{h}}\}_F \llbracket \phi \rrbracket_F \cdot n_F - \eta K_s d_F^{-1} \llbracket \psi_{\mathfrak{h}} \rrbracket_F \llbracket \phi \rrbracket_F) \\
&\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^D} \int_F (K(\psi_{\mathfrak{h}}) \nabla \phi \cdot \psi_{\mathfrak{h}} \cdot n_{\Omega} + K(\psi_{\mathfrak{h}}) \nabla \psi_{\mathfrak{h}} \cdot \phi \cdot n_{\Omega} - \eta K_s d_F^{-1} \psi_{\mathfrak{h}} \phi). \tag{2.11}
\end{aligned}$$

De manière analogue à l'approximation du Laplacien par la méthode SIPG (voir par exemple Arnold *et al.* [ABCM01]), le paramètre  $\eta$  doit être choisi suffisamment grand pour assurer que la forme globale  $a_{\mathfrak{h}}$  soit coercive, c'est-à-dire qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall \phi_{\mathfrak{h}} \in V_{\mathfrak{h}}, \quad a_{\mathfrak{h}}(\phi_{\mathfrak{h}}, \phi_{\mathfrak{h}}) \geq \alpha \left( \sum_{\tau \in \mathcal{T}_{\mathfrak{h}}} \int_{\tau} K(\phi_{\mathfrak{h}}) |\nabla \phi_{\mathfrak{h}}|^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^i} K_s d_F^{-1} \int_F \llbracket \phi_{\mathfrak{h}} \rrbracket_F^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^D} K_s d_F^{-1} \int_F \phi_{\mathfrak{h}}^2 \right). \tag{2.12}$$

Le seuil minimal de  $\eta$  dépend de la régularité des maillages  $\{\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}\}_{h>0}$ .

### 2.1.2 Schémas BDF

Nous désignons par  $N_T$  le nombre total de pas de temps et par  $\delta t$  le pas de temps supposé constant pour simplifier et tel que  $N_T \stackrel{\text{def}}{=} T/\delta t$  est un entier. Pour toute fonction  $\chi$  dépendant du temps et pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $\chi^n$  représente la valeur prise par la fonction  $\chi$  à l'instant discret  $n\delta t$ . La dérivée en temps d'une fonction suffisamment régulière  $\chi$  à un instant discret donné peut être approchée par des combinaisons linéaires des valeurs prises par cette fonction aux instants discrets précédents. Ces méthodes sont appelées « backward differentiation formulae » (voir par exemple le livre de Quarteroni, Sacco et Saleri [QSS00]) et s'écrivent pour toute fonction  $\chi \in C^{q+1}$  sous la forme

$$(\partial_t \chi)^n = \sum_{r=0}^q \frac{\alpha_r^q}{\delta t} \chi^{n-r} + \mathcal{O}(\delta t^q), \tag{2.13}$$

où  $q$  est l'ordre de la formule et les  $\{\alpha_r^q\}_{0 \leq r \leq q}$  sont des coefficients convenablement choisis. La BDF la plus simple correspond au schéma d'Euler implicite pour laquelle  $\alpha_0^1 = 1$  et  $\alpha_1^1 = -1$ , ce qui donne

$$(\partial_t \chi)^n = \frac{1}{\delta t} (\chi^n - \chi^{n-1}) + \mathcal{O}(\delta t). \tag{2.14}$$

Nous utilisons également la BDF d'ordre 2 pour laquelle  $\alpha_0^2 = 3/2$ ,  $\alpha_1^2 = -2$  et  $\alpha_2^2 = 1/2$ ,

$$(\partial_t \chi)^n = \frac{1}{\delta t} \left( \frac{3}{2} \chi^n - 2 \chi^{n-1} + \frac{1}{2} \chi^{n-2} \right) + \mathcal{O}(\delta t^2), \tag{2.15}$$

ainsi que la BDF d'ordre 3 pour laquelle  $\alpha_0^3 = 11/6$ ,  $\alpha_1^3 = -3$ ,  $\alpha_2^3 = 3/2$  et  $\alpha_3^3 = -1/3$ ,

$$(\partial_t \chi)^n = \frac{1}{\delta t} \left( \frac{11}{6} \chi^n - 3 \chi^{n-1} + \frac{3}{2} \chi^{n-2} - \frac{1}{3} \chi^{n-3} \right) + \mathcal{O}(\delta t^3). \tag{2.16}$$

En utilisant l'approximation (2.13) dans l'équation (2.8) pour tout  $n \in \{1 \cdots N_T\}$ , nous obtenons

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \frac{\alpha_0^q}{\delta t} \int_{\tau} \theta(\psi_h^n) \phi + a_{\tau}(\psi_h^n, \phi) = b_{\tau}(n\delta t, \psi_h^n, \phi) - \sum_{r=1}^q \frac{\alpha_r^q}{\delta t} \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-r}) \phi. \quad (2.17)$$

Pour les premiers pas de temps, des BDF d'ordres inférieurs ou des schémas implicites à pas unique sont utilisés (voir section 2.1.4).

### 2.1.3 Linéarisation

L'équation non-linéaire (2.17) est résolue itérativement par l'algorithme 1 présenté ci-après. Nous ajoutons un argument à la forme  $a_{\tau}$  ainsi qu'au flux  $\widehat{F}_u$  pour indiquer le traitement des termes non-linéaires. Ainsi, pour tout  $(\zeta, \psi, \phi) \in V_h \times V_h \times \mathbb{P}_p(\tau)$ , nous posons

$$\widehat{a}_{\tau}(\zeta, \psi, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau} K(\zeta) \nabla \psi \cdot \nabla \phi + \int_{\partial\tau} K(\zeta|_{\tau}) \nabla \phi \cdot n_{\tau} (\widehat{F}_{\psi}(\psi) - \psi) + \int_{\partial\tau} \widehat{F}_u(\zeta, \psi) \cdot n_{\tau} \phi,$$

où le flux  $\widehat{F}_u(\zeta, \psi)$  est défini par

$$\forall F \in \mathcal{F}_h, \quad \forall \psi \in V_h, \quad \widehat{F}_u(\zeta, \psi)|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\{K(\zeta) \nabla \psi\}_F + \eta K_s d_F^{-1} [\![\psi]\!]_F n_F & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^i, \\ -K(\zeta) \nabla \psi + \eta K_s d_F^{-1} \psi n_{\Omega} & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^D, \\ 0 & \text{si } F \in \mathcal{F}_h^N. \end{cases}$$

A l'instant discret  $n\delta t$ , les quantités  $(\psi_h^{n-r})_{r \geq 1}$  sont connues et nous déterminons des approximations successives  $(\psi_h^{n,m})_{m \geq 0}$  de  $\psi_h^n$  en utilisant la linéarisation suivante,

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \frac{\alpha_0^q}{\delta t} \int_{\tau} (\theta(\psi_h^{n,m}) + C(\psi_h^{n,m})(\psi_h^{n,m+1} - \psi_h^{n,m})) \phi + \widehat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m+1}, \phi) \\ = b_{\tau}(n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) - \sum_{r=1}^q \frac{\alpha_r^q}{\delta t} \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-r}) \phi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Nous rappelons que la quantité  $C(\psi)$  est la dérivée de la teneur en eau par rapport à la charge hydraulique et s'appelle la capacité capillaire. En posant  $\delta\psi_h^{n,m} = \psi_h^{n,m+1} - \psi_h^{n,m}$  et en définissant  $c_{\tau}$  par

$$c_{\tau}(\zeta, \psi, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\tau} C(\zeta) \psi \phi,$$

l'équation (2.18) s'écrit

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \frac{\alpha_0^q}{\delta t} c_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) + \widehat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) = b_{\tau}(n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) \\ - \sum_{r=1}^q \frac{\alpha_r^q}{\delta t} \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-r}) \phi - \frac{\alpha_0^q}{\delta t} \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n,m}) \phi - \widehat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m}, \phi). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il est important de préciser que notre méthode permet de traiter automatiquement la saturation complète du milieu poreux. En effet, dans ce cas, la teneur en eau est constante et sa dérivée

par rapport à la charge hydraulique est nulle, ce qui modifie l'équation (2.19) puisque le terme  $c_\tau$  est nul,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \widehat{a}_\tau(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) = b_\tau(n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) - \sum_{r=1}^q \frac{\alpha_r^q}{\delta t} \int_\tau \theta(\psi_h^{n-r}) \phi - \frac{\alpha_0^q}{\delta t} \int_\tau \theta(\psi_h^{n,m}) \phi - \widehat{a}_\tau(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m}, \phi). \quad (2.20)$$

L'équation (2.20) est vérifiée quand le milieu est saturé à l'instant  $n\delta t$  mais insaturé aux instants antérieurs. Dans le cas où la saturation est obtenue pendant suffisamment de pas de temps, les termes du second membre provenant de la BDF s'annulent (car la somme des coefficients  $\{\alpha_r^q\}_{0 \leq r \leq q}$  est nulle) et l'équation (2.20) se simplifie,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \widehat{a}_\tau(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) = b_\tau(n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) - \widehat{a}_\tau(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m}, \phi). \quad (2.21)$$

L'équation (2.21) correspond bien à la résolution de l'équation de Richards en milieu saturé, c'est-à-dire à l'équation de Darcy. Cette équation étant linéaire, le processus itératif converge en une itération.

---

**Algorithme 1** Algorithme itératif à chaque pas de temps pour résoudre l'équation de Richards

---

**Entrées:**  $\psi_h^{n-1}, \psi_h^{n-2}, \dots, \psi_h^{n-q}, \psi_h^{n,0}$  et  $\epsilon_{alg1}$

$m = 0$

**répéter**

Trouver  $\delta\psi_h^{n,m} \in V_h$  en résolvant (2.19)

$$\psi_h^{n,m+1} = \psi_h^{n,m} + \delta\psi_h^{n,m}$$

$m \leftarrow m + 1$

**jusqu'à**  $E \leq \epsilon_{alg1}$

$$\psi_h^n = \psi_h^{n,m}$$

**Sorties:**  $\psi_h^n$

---

L'initialisation la plus simple consiste à choisir l'approximation de la solution au pas de temps précédent ( $\psi_h^{n,0} = \psi_h^{n-1}$ ), mais une initialisation d'ordre supérieur peut être utilisée (voir la section 2.2.2). La mesure de l'erreur  $E$  dans l'algorithme 1 est la norme euclidienne relative du vecteur composantes associé à  $\delta\psi_h^{n,m}$  dans une base de l'espace  $V_h$  et  $\epsilon_{alg1}$  est un seuil de convergence choisi par l'utilisateur.

### 2.1.4 Initialisation par le schéma DIRK3

La relation (2.13) montre qu'un schéma BDF d'ordre  $q$  nécessite de connaître la solution aux  $q-1$  pas de temps précédents. L'initialisation des schémas à plusieurs pas de temps peut se faire de deux façons. Une première méthode consiste à utiliser des schémas d'ordres inférieurs pour les  $q-1$  premiers pas de temps. Par exemple, si l'on utilise la BDF3, le premier pas de temps est déterminé par la BDF1, le deuxième pas de temps par la BDF2 et les pas de temps suivants par la BDF3. Le désavantage est que l'erreur commise lors de l'initialisation peut diminuer fortement la précision des calculs aux pas de temps suivants. Une seconde méthode consiste à utiliser un schéma à pas unique d'ordre élevé. C'est cette solution que nous avons choisie en utilisant le schéma de Runge–Kutta diagonalement implicite d'ordre 3 (DIRK3) présenté dans cette section ou le schéma de Crank–Nicolson présenté dans la section suivante.

Repartons de l'équation (2.8) en introduisant la quantité  $f_\tau(t, \psi_h, \phi)$  définie par

$$\int_\tau \partial_t[\theta(\psi_h)]\phi = b_\tau(t, \psi_h, \phi) - a_\tau(\psi_h, \phi) \stackrel{\text{def}}{=} f_\tau(t, \psi_h, \phi). \quad (2.22)$$

• La première étape du schéma DIRK3 comporte trois sous-étapes. En partant de l'instant discret  $(n-1)\delta t$ , elles s'écrivent  $\forall \tau \in \mathcal{T}_h$ ,  $\forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau)$ ,

$$\begin{aligned} \int_\tau \theta(\psi_h^{(1)})\phi &= \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \beta_{11} f_\tau((n-1+c_1)\delta t, \psi_h^{(1)}, \phi), \\ \int_\tau \theta(\psi_h^{(2)})\phi &= \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \beta_{21} f_\tau((n-1+c_1)\delta t, \psi_h^{(1)}, \phi) \\ &\quad + \delta t \beta_{22} f_\tau((n-1+c_2)\delta t, \psi_h^{(2)}, \phi), \\ \int_\tau \theta(\psi_h^{(3)})\phi &= \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \beta_{31} f_\tau((n-1+c_1)\delta t, \psi_h^{(1)}, \phi) \\ &\quad + \delta t \beta_{32} f_\tau((n-1+c_2)\delta t, \psi_h^{(2)}, \phi) \\ &\quad + \delta t \beta_{33} f_\tau((n-1+c_3)\delta t, \psi_h^{(3)}, \phi), \end{aligned}$$

dans lesquelles  $\psi_h^{(j)}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , désigne la solution obtenue à la sous-étape  $j$ . Les trois sous-étapes peuvent s'écrire sous la forme générale suivante,

$$\forall 1 \leq j \leq 3, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau),$$

$$\int_\tau \theta(\psi_h^{(j)})\phi = \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \left( \sum_{r=1}^j \beta_{jr} f_\tau((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi) \right), \quad (2.23)$$

les  $\beta_{jr}$  et les  $c_r$  étant des coefficients donnés dans le tableau de Butcher ci-après. La nature implicite du schéma provient de la présence de  $\psi_h^{(j)}$  dans le second membre de l'étape  $j$ . La résolution de l'équation (2.23) s'effectue en décomposant le terme  $f_\tau((n-1+c_j)\delta t, \psi_h^{(j)}, \phi)$ ,

$$\forall 1 \leq j \leq 3, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau),$$

$$\begin{aligned} \int_\tau \theta(\psi_h^{(j)})\phi + \delta t \beta_{jj} a_\tau(\psi_h^{(j)}, \phi) &= \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \sum_{r=1}^{j-1} \beta_{jr} f_\tau((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi) \\ &\quad + \delta t \beta_{jj} b_\tau((n-1+c_j)\delta t, \psi_h^{(j)}, \phi). \end{aligned}$$

En divisant cette équation par  $\delta t \beta_{jj}$ , nous obtenons une équation similaire à l'équation (2.17)

$$\forall 1 \leq j \leq 3, \quad \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau),$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{jj}^{-1}}{\delta t} \int_\tau \theta(\psi_h^{(j)})\phi + a_\tau(\psi_h^{(j)}, \phi) &= b_\tau((n-1+c_j)\delta t, \psi_h^{(j)}, \phi) + \frac{\beta_{jj}^{-1}}{\delta t} \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi \\ &\quad + \sum_{r=1}^{j-1} \frac{\beta_{jr}}{\beta_{jj}} f_\tau((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

que nous résolvons après linéarisation par l'algorithme itératif 1.

• La seconde étape du schéma DIRK3 donne la solution à l'instant  $n\delta t$  en fonction de la solution à l'instant  $(n-1)\delta t$  ainsi que des solutions calculées aux trois sous-étapes précédentes,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_\tau \theta(\psi_h^n)\phi = \int_\tau \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \sum_{r=1}^3 \gamma_r f_\tau((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi),$$

où les coefficients réels  $\gamma_1, \gamma_2$  et  $\gamma_3$  ont une somme égale à 1 et sont donnés dans le tableau 2.1 ci-dessous. Comme précédemment cette équation non-linéaire est résolue de façon itérative en calculant des approximations successives  $\psi_h^{n,m}$  de  $\psi_h^n$  en utilisant la linéarisation suivante,

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad (2.25)$$

$$\int_{\tau} (\theta(\psi_h^{n,m}) + C(\psi_h^{n,m})\delta\psi_h^{n,m})\phi = \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-1})\phi + \delta t \sum_{r=1}^3 \gamma_r f_{\tau}((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi),$$

ou encore

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau),$$

$$c_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) = \int_{\tau} (\theta(\psi_h^{n-1}) - \theta(\psi_h^{n,m}))\phi + \delta t \sum_{r=1}^3 \gamma_r f_{\tau}((n-1+c_r)\delta t, \psi_h^{(r)}, \phi).$$

Les différents coefficients du schéma DIRK3 sont indiqués dans le tableau 2.1 en fonction d'un paramètre  $\mu$  vérifiant l'équation  $-3\mu^3 + 3\mu + 1 = 0$  et dont les trois racines sont  $\mu_1 = 2/\sqrt{3} \cos(\pi/18)$ ,  $\mu_2 = -2/\sqrt{3} \cos(5\pi/18)$  et  $\mu_3 = -2/\sqrt{3} \cos(7\pi/18)$ . Le domaine de stabilité de la méthode est infini si  $\mu = \mu_1$  alors qu'il est borné si  $\mu = \mu_2$  et  $\mu = \mu_3$ . Bien qu'avec  $\mu = \mu_3$ , la méthode soit d'ordre 4, l'étude du domaine de stabilité en fonction de la valeur du paramètre  $\mu$  nous a amené à choisir la valeur  $\mu_1$ .

$c_1$	$\beta_{11}$	$\beta_{12}$	$\beta_{13}$		$\frac{1+\mu}{2}$	$\frac{1+\mu}{2}$	0	0
$c_2$	$\beta_{21}$	$\beta_{22}$	$\beta_{23}$		$\frac{1}{2}$	$-\frac{\mu}{2}$	$\frac{1+\mu}{2}$	0
$c_3$	$\beta_{31}$	$\beta_{32}$	$\beta_{33}$	=	$\frac{1-\mu}{2}$	$1+\mu$	$-1-2\mu$	$\frac{1+\mu}{2}$
	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$		$\frac{1}{6\mu^2}$	$1 - \frac{1}{3\mu^2}$	$\frac{1}{6\mu^2}$	

TAB. 2.1: Tableau de Butcher du schéma DIRK3.

Notons que la première étape du schéma DIRK3 conduit à résoudre trois systèmes linéaires du même type que ceux rencontrés avec les méthodes BDF puisque l'équation (2.24) a la même forme que l'équation (2.17). En revanche la seconde étape est différente puisqu'il n'y a pas de terme implicite provenant de la discrétisation en espace dans l'équation (2.25). Cela rend inutilisable le schéma DIRK3 quand une partie du domaine est saturée au début de la simulation. C'est la raison pour laquelle nous avons également implémenté le schéma de Crank–Nicolson qui est présenté à la section 2.1.5. Lors de l'initialisation, lorsque les conditions initiales et les conditions aux limites sont incompatibles (comme c'est le cas notamment pour les cas tests proposés par Haverkamp et Polmann et présentés dans les sections 2.2.3 et 2.2.4), nous avons remarqué que les pas de temps du schéma DIRK3 doivent être plus petits que les pas de temps des schémas BDF pour que l'algorithme 1 converge. Nous avons ainsi implémenté un algorithme avec des sous-pas de temps adaptatifs pour le premier pas de temps. Nous notons  $\delta t_p$  le  $p$ -ième sous-pas de temps pour le schéma DIRK3. L'idée de base de cet algorithme est d'augmenter le pas de temps  $\delta t_p$  si le critère de convergence est vérifié et de le diminuer dans le cas contraire. Cet algorithme est décrit ci-après dans le cas  $n = 1$ , ce qui correspond au premier pas de temps.

---

**Algorithme 2** Initialisation par le schéma DIRK3 avec pas de temps adaptatif
 

---

**Entrées:**  $\psi_h^0, \delta t, \delta t_1 \leq \delta t$  et  $\epsilon_{alg1}$ 
 $p = 1$ 
 $t_{DIRK} = \delta t_p$ 
 $t_{restant} = \delta t$ 
**répéter**

 Trouver  $\psi_h^{0,(p)}$  à  $t_{DIRK}$  avec le schéma DIRK3 et le pas de temps  $\delta t_p$ 
**si**  $E \leq \epsilon_{alg1}$  **alors**
 $\psi_h^{0,p} = \psi_h^{0,(p)}$ 
 $t_{DIRK} \leftarrow t_{DIRK} + \delta t_p$ 
 $t_{restant} \leftarrow t_{restant} - \delta t_p$ 
 $\delta t_{p+1} = \min(2\delta t_p, \delta t/4, t_{restant})$ 
 $p \leftarrow p + 1$ 
**sinon**
 $t_{DIRK} \leftarrow t_{DIRK} - \delta t_p + \delta t_p/10$ 
 $\delta t_p \leftarrow \delta t_p/10$ 
**finsi**
**jusqu'à**  $t_{DIRK} = \delta t$ 
 $\psi_h^1 = \psi_h^{0,p-1}$ 
**Sorties:**  $\psi_h^1$ 


---

Donnons quelques précisions sur cet algorithme (voir également la figure 2.1 ci-après). Lors de l'initialisation il est possible que le critère de convergence  $E \leq \epsilon_{alg1}$  de l'algorithme 1 ne soit pas vérifié quand le pas de temps  $\delta t$  est trop grand. Pour résoudre ce problème, nous introduisons un nombre d'itérations maximales qui permet d'arrêter la boucle de l'algorithme 1 le cas échéant. Le calcul est alors repris avec un pas de temps dix fois plus petit. La valeur du premier pas de temps  $\delta t_1$  résulte des observations faites au cours des différentes simulations. Lorsqu'il y a compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites, le premier sous-pas de temps  $\delta t_1$  peut être pris égal à  $\delta t$ . En revanche lorsqu'il y a discontinuité entre les différentes conditions, il est nécessaire de prendre le premier sous-pas de temps  $\delta t_1$  plus petit que  $\delta t$  ( $\delta t_1$  pouvant être de l'ordre de  $10^{-5}\delta t$  dans les cas les plus défavorables). Le calcul de la solution à un sous-pas de temps  $\delta t_p$  avec le schéma DIRK3 nécessite la résolution d'au moins quatre systèmes non-linéaires. Pour avancer d'un pas de temps, le nombre de systèmes à résoudre est ainsi égal à quatre fois le nombre de « solutions provisoires »  $\psi_h^{0,(p)}$  calculées. Par ailleurs dans les arguments de la fonction « min » utilisés pour le calcul de  $\delta t_{p+1}$ , le coefficient 2 permet une augmentation progressive des sous-pas de temps, le deuxième argument  $\delta t/4$  impose un minimum de quatre sous-pas de temps par pas de temps  $\delta t$  et le dernier argument  $t_{restant}$  permet de finir l'algorithme sur le calcul de la solution au premier temps discret  $t^1 = \delta t$ . La figure 2.1 illustre l'initialisation du schéma d'intégration temporelle avec la BDF2 :  $\psi_h^0$  est donné,  $\psi_h^1$  est déterminé par l'algorithme 2 à partir de  $\psi_h^0$  en utilisant plusieurs fois le schéma DIRK3 et  $\psi_h^2$  est calculé à partir de  $\psi_h^0$  et  $\psi_h^1$  en utilisant la BDF2.

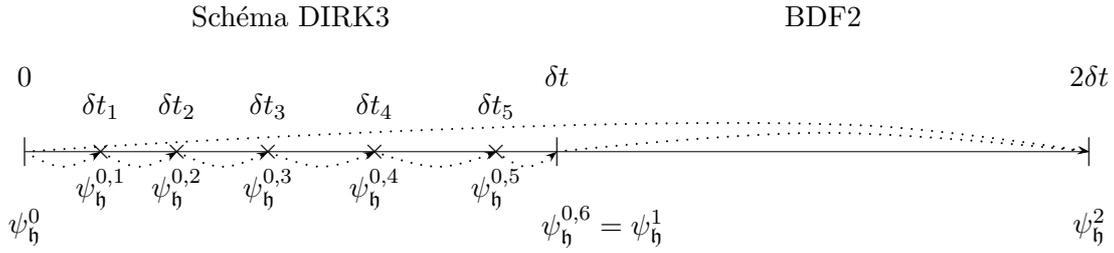


FIG. 2.1: Initialisation avec pas de temps adaptatif.

### 2.1.5 Initialisation par le schéma de Crank–Nicolson

Si une partie du milieu est saturée à l'initialisation, le schéma DIRK3 n'est pas utilisable car la capacité capillaire est nulle dans cette partie et nous ne pouvons pas déterminer  $\delta\psi_h^{n,m}$  à l'aide de la relation (2.25). Nous avons donc implémenté le schéma implicite d'ordre 2 de Crank–Nicolson (CN2) pour initialiser la BDF2. Ce schéma consiste à résoudre

$$\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad \int_{\tau} \theta(\psi_h^n) \phi = \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-1}) \phi + \frac{\delta t}{2} (f_{\tau}(n\delta t, \psi_h^n, \phi) + f_{\tau}((n-1)\delta t, \psi_h^{n-1}, \phi)).$$

En utilisant la définition de  $f_{\tau}$  et en effectuant une linéarisation, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad & \int_{\tau} (\theta(\psi_h^{n,m}) + C(\psi_h^{n,m}) \delta\psi_h^{n,m}) \phi + \frac{\delta t}{2} \hat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m+1}, \phi) \\ & = \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-1}) \phi + \frac{\delta t}{2} (b_{\tau}((n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) + f_{\tau}((n-1)\delta t, \psi_h^{n-1}, \phi)), \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau), \quad & c_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) + \frac{\delta t}{2} \hat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \delta\psi_h^{n,m}, \phi) = \int_{\tau} (\theta(\psi_h^{n-1}) - \theta(\psi_h^{n,m})) \phi \\ & + \frac{\delta t}{2} (b_{\tau}(n\delta t, \psi_h^{n,m}, \phi) - \hat{a}_{\tau}(\psi_h^{n,m}, \psi_h^{n,m}, \phi) + f_{\tau}((n-1)\delta t, \psi_h^{n-1}, \phi)), \end{aligned}$$

que nous résolvons par l'algorithme itératif 1. Plus généralement, pour initialiser la BDF $q$  si une zone du sol est saturée, il faut implémenter un schéma d'ordre  $q$  dans lequel  $\hat{a}_{\tau}$  dépend de la quantité  $\delta\psi_h^{n,m}$ . Nous n'avons pas utilisé la BDF3 excepté pour les tests de convergence (section 2.2.2), mais nous avons remarqué que la combinaison du schéma de Milne–Simpson d'ordre 4 (MS4) et du schéma de Crank–Nicolson est d'ordre 3. Le schéma MS4 consiste à résoudre  $\forall \tau \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \phi \in \mathbb{P}_p(\tau)$ ,

$$\int_{\tau} \theta(\psi_h^n) \phi = \int_{\tau} \theta(\psi_h^{n-2}) \phi + \frac{\delta t}{3} (f_{\tau}(n\delta t, \psi_h^n, \phi) + 4f_{\tau}((n-1)\delta t, \psi_h^{n-1}, \phi) + f_{\tau}((n-2)\delta t, \psi_h^{n-2}, \phi)).$$

Ainsi une façon d'initialiser la BDF3 lorsque le milieu est partiellement saturé est de déterminer  $\psi_h^1$  en combinant ces deux schémas ( $\psi_h^{1/2}$  étant calculé par CN2 et  $\psi_h^1$  par MS4) puis de déterminer  $\psi_h^2$  par MS4.

## 2.2 Résultats

Avant de présenter les résultats, nous commençons par décrire les maillages utilisés. Nous avons construit un indicateur qui mesure la qualité des triangles de chaque maillage. De plus nous avons utilisé une renumérotation des triangles pour réduire la largeur de bande des matrices. Ensuite deux cas tests analytiques valident les ordres de convergence de notre méthode. Trois cas tests de colonne d'infiltration unidimensionnelle (traités en dimension deux) sont aussi réalisés pour évaluer la robustesse de notre approche par rapport à l'état hydrologique et aux propriétés hydrodynamiques du sol.

### 2.2.1 Maillages

#### Caractéristiques des maillages

Dans les cas tests réalisés nous utilisons des maillages non structurés générés par le logiciel FreeFEM<sup>©</sup> développé par Danaila, Hecht et Pironneau [Fre]. Pour déterminer la qualité d'un maillage  $\mathcal{T}_h$ , nous calculons pour chaque triangle  $\tau \in \mathcal{T}_h$  l'indicateur  $Q_\tau$  suivant

$$Q_\tau \stackrel{\text{def}}{=} 2\sqrt{3}\frac{\rho_\tau}{d_\tau},$$

dans lequel  $\rho_\tau$  désigne le rayon du cercle inscrit et  $d_\tau$  est la plus grande arête du triangle  $\tau$ . Cet indicateur est égal à 1 pour un triangle équilatéral et tend vers zéro lorsque le triangle est de plus en plus aplati. Comme nous effectuons en dimension deux des simulations sur des colonnes d'infiltration (cas réalisables en dimension un), le domaine utilisé est un rectangle. Sa largeur est égale au cinquième de la longueur, l'écoulement se faisant suivant la longueur. La taille du rectangle initial est  $[0, 0.2] \times [0, 1]$  et un coefficient de dilatation permet de transformer ces dimensions de façon isotrope pour obtenir la longueur souhaitée suivant les cas tests. Pour les six maillages nous précisons dans le tableau 2.2 le nombre de nœuds  $N_n$ , le nombre de triangles  $N_t$ , le diamètre minimal  $h_{\min}$ , moyen  $h_{\text{moy}}$  et maximal  $h_{\max}$  des mailles ainsi que la qualité minimale  $Q_{\min}$ , moyenne  $Q_{\text{moy}}$  et maximale  $Q_{\max}$ .

Maillage	$N_n$	$N_t$	$h_{\min}$	$h_{\text{moy}}$	$h_{\max}$	$Q_{\min}$	$Q_{\text{moy}}$	$Q_{\max}$
$M_1$	13	16	0.20	0.26	0.33	0.45	0.67	0.78
$M_2$	40	54	0.081	0.11	0.13	0.69	0.85	0.98
$M_3$	128	204	0.045	0.053	0.065	0.68	0.89	0.99
$M_4$	464	826	0.021	0.026	0.034	0.58	0.88	1.00
$M_5$	1702	3198	0.010	0.013	0.018	0.54	0.90	1.00
$M_6$	6591	12780	0.0052	0.0066	0.0087	0.59	0.90	1.00

TAB. 2.2: Caractéristiques des maillages du rectangle  $[0, 0.2] \times [0, 1]$ .

Lorsque nous raffinons un maillage, le nombre de triangles  $N_t$  est approximativement multiplié par 4 ce qui entraîne une division des différents diamètres (minimal, moyen et maximal) par 2 environ. Ce tableau montre aussi que la qualité moyenne des maillages est très bonne puisqu'elle est supérieure ou égale à 0.85 sauf pour le premier maillage ( $Q_{\text{moy}} = 0.67$ ) qui est effectivement grossier puisqu'il ne contient que 16 triangles. Il convient de remarquer que la qualité minimale n'augmente pas forcément avec le raffinement alors que la qualité maximale est égale à 1 lorsque le maillage devient suffisamment fin (à partir de  $M_4$ ). La figure 2.2 représente les six maillages considérés.

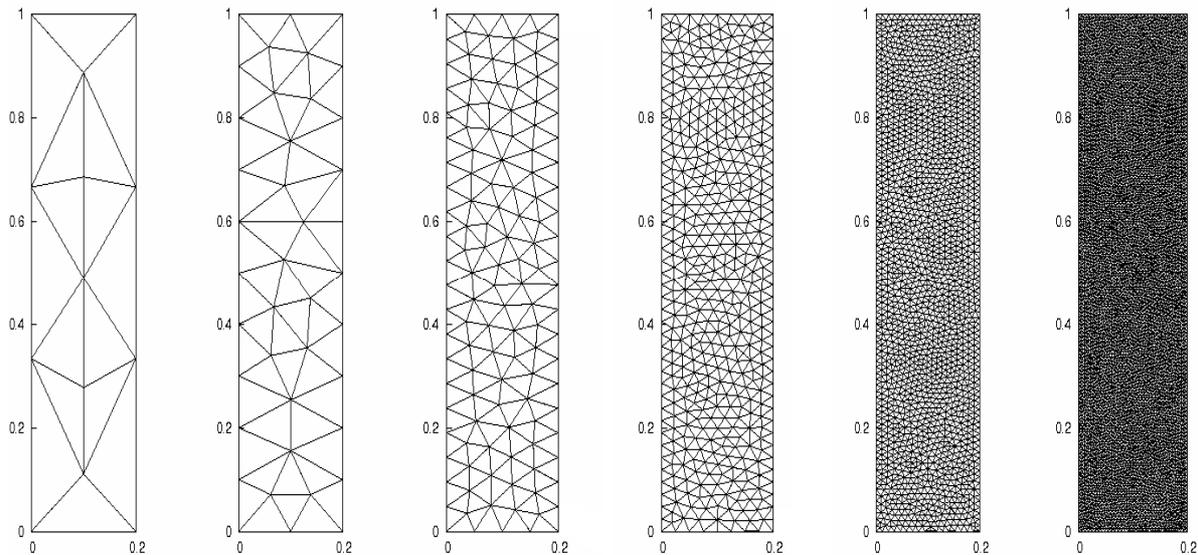


FIG. 2.2: Maillages triangulaires non-structurés générés par le logiciel FreeFEM<sup>©</sup>.

### Renumérotation des éléments

Pour résoudre les systèmes linéaires nous utilisons la librairie PETSc<sup>©</sup> [Pet] adaptée pour les matrices creuses puisque les matrices obtenues avec des éléments finis discontinus ont une structure creuse par blocs. En effet lorsque l'ordre d'interpolation est uniforme pour l'ensemble des éléments du maillage, les blocs sont de taille  $n_{\text{ddl}} \times n_{\text{ddl}}$  où  $n_{\text{ddl}}$  est le nombre de degrés de liberté sur chaque maille. En revanche si l'ordre d'interpolation est variable ( $p$ -raffinement), les blocs diagonaux restent carrés mais leurs tailles changent et les blocs extra-diagonaux deviennent rectangulaires. Des tests comparatifs entre les solveurs itératifs (avec et sans préconditionneur) et le solveur direct nous ont conduit à choisir le solveur direct basé sur la décomposition LU de la matrice.

Soit  $A$  une matrice carrée à valeurs réelles. Si  $A$  est à structure bande, alors les matrices  $L$  et  $U$  de la décomposition LU de  $A$  sont également des matrices bandes d'une largeur inférieure ou égale à celle de  $A$  (voir par exemple le livre de Golub et Van Loan [GL96, chap. 3]). Cette propriété motive le fait que nous avons renuméroté les triangles des différents maillages pour réduire le coût de stockage lors de la factorisation. Pour chaque maillage la renumérotation des éléments s'effectue selon les trois étapes suivantes,

1. Construction de la matrice carrée (de taille  $N_t \times N_t$ ) dont la  $i$ -ème ligne contient un 1 sur la diagonale ainsi que sur les colonnes qui correspondent aux numéros des trois (ou deux) triangles voisins du  $i$ -ème triangle.
2. Renumérotation de la matrice de connectivité par l'algorithme de Cuthill–McKee [CJ].
3. Génération du nouveau maillage à partir de la renumérotation.

Ces trois étapes s'effectuent avec le logiciel Matlab<sup>©</sup> [Mat] en pré-processing. La première étape nécessite de lire le fichier de maillage généré par PETSc<sup>©</sup> pour construire la matrice de connectivité entre les triangles du maillage. Dans notre cas, l'algorithme de Cuthill–McKee semble plus efficace pour réduire la largeur de bande de la matrice que l'algorithme de degré minimum également disponible. La dernière étape consiste à écrire le fichier de maillage avec les éléments renumérotés. Le tableau 2.3 donne pour les six maillages  $(M_i)_{1 \leq i \leq 6}$  la largeur de

bande initiale  $lb_{\text{init}}$  et la largeur de bande après renumérotation  $lb_{\text{renu}}$ . La figure 2.3 montre, pour le maillage  $M_4$ , la position des blocs non nuls dans la matrice avec et sans la renumérotation. Comme attendu nous pouvons observer sur cette figure la structure symétrique des matrices.

	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$	$M_6$
$lb_{\text{init}}$	8	31	195	536	3121	12695
$lb_{\text{renu}}$	4	5	8	19	32	66

TAB. 2.3: Influence de la renumérotation sur la largeur de bande des matrices.

Un point particulièrement agréable des méthodes d'éléments finis discontinus est qu'elles ne nécessitent pas de renumérotation quand on change le degré des polynômes utilisés. En effet, pour les éléments finis discontinus, la renumérotation est valable quel que soit l'ordre d'interpolation puisqu'elle porte sur la position des éléments les uns par rapport aux autres alors que, pour les éléments finis continus, la renumérotation porte sur les degrés de liberté et change donc suivant l'ordre utilisé.

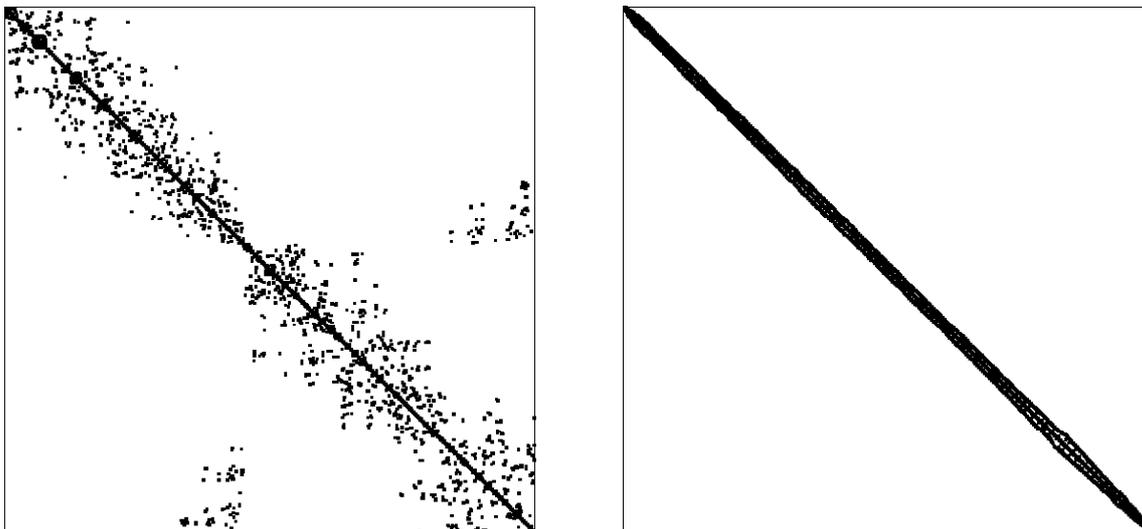


FIG. 2.3: Influence de la renumérotation sur la position des blocs non nuls (maillage  $M_4$ ).

### 2.2.2 Cas tests analytiques

Le but de ces cas tests est de vérifier que la méthode SIPG est correctement implémentée en retrouvant les estimations de convergence théoriques. En effet, si l'on utilise des polynômes de degré  $p$ , l'ordre de convergence de l'inconnue scalaire  $\psi$  est  $p + 1$  en norme  $L^2$  et l'ordre de convergence de l'inconnue vectorielle  $v(\psi)$  est  $p$  en norme  $L^2$ . En raison de l'ordre de convergence de  $\psi$  sur  $\Omega$ , nous associons une BDF d'ordre  $p + 1$  à l'utilisation de polynômes de degré  $p$  en espace. Les calculs étant réalisés avec des polynômes de degré 1 et 2, nous utilisons les BDF d'ordre 2 et 3 définies par les relations (2.15) et (2.16). Comme nous l'avons déjà évoqué à la section 2.1.4, la BDF2 est initialisée par le schéma DIRK3 pour le premier pas de temps (voir l'algorithme 2). Pour diminuer le temps CPU, nous choisissons une initialisation d'ordre 2 pour

la BDF2 dans l'algorithme 1 lorsque  $n \geq 3$ ,

$$\begin{aligned} \text{BDF2 : } \quad \psi_{\mathfrak{h}}^{1,0} &= \psi_{\mathfrak{h}}^0, \\ \psi_{\mathfrak{h}}^{2,0} &= 2\psi_{\mathfrak{h}}^1 - \psi_{\mathfrak{h}}^0, \\ \forall n \geq 3, \quad \psi_{\mathfrak{h}}^{n,0} &= 3\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1} - 3\psi_{\mathfrak{h}}^{n-2} + \psi_{\mathfrak{h}}^{n-3}. \end{aligned}$$

Il en est de même pour la BDF3 dans laquelle les deux premiers pas de temps sont calculés par le schéma DIRK3 et une initialisation d'ordre 3 est réalisée lorsque  $n \geq 4$ ,

$$\begin{aligned} \text{BDF3 : } \quad \psi_{\mathfrak{h}}^{1,0} &= \psi_{\mathfrak{h}}^0, \\ \psi_{\mathfrak{h}}^{2,0} &= 2\psi_{\mathfrak{h}}^1 - \psi_{\mathfrak{h}}^0, \\ \psi_{\mathfrak{h}}^{3,0} &= 3\psi_{\mathfrak{h}}^2 - 3\psi_{\mathfrak{h}}^1 + \psi_{\mathfrak{h}}^0, \\ \forall n \geq 4, \quad \psi_{\mathfrak{h}}^{n,0} &= 4\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1} - 6\psi_{\mathfrak{h}}^{n-2} + 4\psi_{\mathfrak{h}}^{n-3} - \psi_{\mathfrak{h}}^{n-4}. \end{aligned}$$

Nous utilisons une formule d'intégration numérique exacte pour les polynômes  $\mathbb{P}_5$ . Quatre erreurs sont calculées. Pour toute fonction  $\chi \in L^2(\Omega)$ , nous désignons par  $\|\chi\|_{L^2(\Omega)}$  la norme  $L^2$  de  $\chi$  sur  $\Omega$ . L'erreur relative  $L^2$  en espace et  $L^\infty$  en temps pour la charge hydraulique  $\psi$  est définie par

$$e_{\psi,\Omega} = \frac{\max_{1 \leq n \leq N_T} \|\psi^n - \psi_{\mathfrak{h}}^n\|_{L^2(\Omega)}}{\max_{1 \leq n \leq N_T} \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}},$$

et son ordre de convergence théorique est  $p+1$ . Cela signifie qu'en décroissant la taille des mailles et le pas de temps par 2, l'erreur est divisée par  $2^{p+1}$ . L'erreur relative  $L^2$  en espace et  $L^2$  en temps pour la vitesse  $v$  est définie par

$$e_{v,\Omega} = \frac{\|v - v_{\mathfrak{h}}\|_{L^2(\Omega \times [0,T])}}{\|v\|_{L^2(\Omega \times [0,T])}},$$

et son ordre de convergence théorique est  $p$ . Enfin, les deux dernières erreurs concernent respectivement les sauts de  $\psi_{\mathfrak{h}}$  sur les faces internes et les faces de Dirichlet. Elles sont définies par

$$\begin{aligned} e_{\psi,\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^i} &= \left( \int_0^T \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^i} \frac{\eta K_s}{d_F} \|\llbracket \psi - \psi_h \rrbracket\|_{L^2(F)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ e_{\psi,\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^D} &= \left( \int_0^T \sum_{F \in \mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^D} \frac{\eta K_s}{d_F} \|\psi - \psi_h\|_{L^2(F)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et leur ordre de convergence théorique est  $p$ . L'intégrale en temps est calculée par la méthode des rectangles.

### Cas test en milieu insaturé

Dans ce premier cas test analytique nous considérons sur le domaine  $\Omega = [0, 4] \times [0, 20]$  et sur l'intervalle de temps  $[0, 100]$  la solution analytique

$$\psi = 20.4 \tanh\left(0.5\left(x + \frac{t}{12} - 15\right)\right) - 41.1. \quad (2.26)$$

L'équation de Richards est résolue avec les conditions aux limites de Dirichlet et le terme source nécessaire pour que  $\psi$  donnée par (2.26) soit solution. La teneur en eau et la conductivité hydraulique sont données par

$$\theta(\psi) = \frac{\theta_s - \theta_r}{1 + |\tilde{\alpha}\psi|^\beta} + \theta_r \quad \text{et} \quad K(\psi) = \frac{K_s}{1 + |\tilde{A}\psi|^\gamma}, \quad (2.27)$$

avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.287 & \tilde{\alpha} &= 0.0271 \text{ cm}^{-1} & K_s &= 9.44 \cdot 10^{-3} \text{ cm.s}^{-1} & \gamma &= 4.74 \\ \theta_r &= 0.075 & \beta &= 3.96 & \tilde{A} &= 0.0524 \text{ cm}^{-1} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Les tableaux 2.4 et 2.5 présentent les résultats obtenus avec le logiciel R+R\_DG sous raffinement spatial et temporel. Les taux de convergence concordent avec ceux prédits par l'analyse d'erreur *a priori* et qui ont été rappelés précédemment. Nous pouvons observer la superconvergence de l'erreur  $e_{\psi, \mathcal{F}_h^D}$ . Les calculs sont effectués avec le paramètre de pénalisation  $\eta = 4$  pour les polynômes  $\mathbb{P}_1$  et  $\eta = 12$  pour les polynômes  $\mathbb{P}_2$ . Pour les tests réalisés sur l'ensemble des maillages  $(M_i)_{2 \leq i \leq 6}$ , nous donnons également la quantité adimensionnelle  $t_{\text{CPU}}^*$  définie comme le rapport entre le temps obtenu pour le calcul et le temps obtenu pour le calcul précédent (maillage plus grossier et pas de temps deux fois plus important). Une valeur de 8 pour  $t_{\text{CPU}}^*$  est raisonnable en dimension deux d'espace puisqu'elle indique un coût linéaire en le nombre de degrés de liberté.

### Cas test en milieu variablement saturé

Ce second cas test analytique est une adaptation du précédent dans lequel la solution est modifiée pour saturer une partie du milieu poreux. L'objectif est ainsi de vérifier que notre méthode est capable de traiter des configurations où le milieu se sature. Le domaine et la durée de la simulation restent identiques au cas précédent mais la solution est modifiée pour saturer la moitié du domaine à la fin de la simulation,

$$\psi = 20.4 \tanh\left(0.5\left(x + \frac{t}{12} - 15\right)\right) + \frac{t}{4} - 41.1. \quad (2.29)$$

Comme pour le cas test en milieu insaturé, la teneur en eau et la conductivité hydraulique sont données par les relations (2.27) et (2.28). Les résultats de convergence obtenus avec le logiciel R+R\_DG sont indiqués dans les tableaux 2.6 et 2.7 et confirment que notre méthode traite de manière robuste la saturation du milieu.

### 2.2.3 Cas test d'Haverkamp

Ce cas test a été proposé par Haverkamp [HVT<sup>+</sup>77] et repris notamment par Celia et Bouloutas [CB90] ainsi que par Manzini et Ferraris [MF04]. Il s'agit d'un cas d'infiltration d'eau dans une colonne de sol qui a donné lieu à des mesures expérimentales. La géométrie unidimensionnelle est un segment de 40cm. Nous modélisons ce problème sur un domaine rectangulaire de 40cm de profondeur et de 8cm de largeur pendant 6 minutes,

$$L = 40\text{cm}, \quad l = 8\text{cm} \quad \text{et} \quad T = 360\text{s}.$$

Les cas tests sont désormais réalisés uniquement avec la méthode  $\mathbb{P}_1$ -BDF2. La frontière du domaine est divisée en trois parties :  $\mathcal{I}$  est la partie supérieure,  $\mathcal{W}$  sont les parois latérales et  $\mathcal{B}$  désigne le fond du domaine (voir la figure 2.4). Ces trois lettres sont les premières lettres des mots anglais interface, walls et bottom. Une pression de  $-61.5\text{cm}$  est imposée à l'instant initial

$\eta$	$\mathcal{T}_h$	$\delta t$	$e_{\psi,\Omega}$		$e_{v,\Omega}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^i}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^D}$		$t_{\text{CPU}}^*$
			Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	
4	$M_2$	2	5.68e-3		1.25		1.31		2.12		
	$M_3$	1	1.60e-3	1.82	6.22e-1	1.00	4.17e-1	1.64	7.01e-1	1.59	4.5
	$M_4$	1/2	4.00e-4	2.14	3.14e-1	1.06	1.91e-1	1.20	2.48e-1	1.60	5.0
	$M_5$	1/4	9.59e-5	2.24	1.50e-1	1.16	8.32e-2	1.30	8.32e-2	1.72	4.3
	$M_6$	1/8	1.86e-5	2.25	7.24e-2	1.00	4.19e-2	0.94	3.07e-2	1.37	7.5

TAB. 2.4: Résultats de convergence du cas test insaturé - méthode  $\mathbb{P}_1$ -BDF2.

$\eta$	$\mathcal{T}_h$	$\delta t$	$e_{\psi,\Omega}$		$e_{v,\Omega}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^i}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^D}$		$t_{\text{CPU}}^*$
			Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	
12	$M_1$	4	1.31e-2		2.04e-2		2.69		6,48		
	$M_2$	2	5.84e-4	3.37	1.66e-3	2.69	2.42e-1	2.59	5.14e-1	2.72	3.3
	$M_3$	1	7.76e-5	2.91	4.47e-4	1.89	6.07e-2	1.99	9.02e-2	2.51	4.3
	$M_4$	1/2	1.02e-5	3.13	1.15e-4	2.09	1.32e-2	2.36	1.67e-2	2.61	4.8
	$M_5$	1/4	1.28e-6	3.25	2.67e-5	2.30	2.48e-3	2.62	2.83e-3	2.79	6.5

TAB. 2.5: Résultats de convergence du cas test insaturé - méthode  $\mathbb{P}_2$ -BDF3.

$\eta$	$\mathcal{T}_h$	$\delta t$	$e_{\psi,\Omega}$		$e_{v,\Omega}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^i}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^D}$		$t_{\text{CPU}}^*$
			Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	
4	$M_2$	2	4.98e-3		2.26e-1		2.34		2.26		
	$M_3$	1	1.59e-3	1.64	1.12e-1	1.01	1.11	1.08	7.35e-1	1.62	4.1
	$M_4$	1/2	4.14e-4	2.07	5.61e-2	1.07	5.49e-1	1.08	2.61e-1	1.60	4.9
	$M_5$	1/4	1.00e-4	2.23	2.79e-2	1.10	2.65e-1	1.14	8.77e-2	1.72	4.1
	$M_6$	1/8	2.48e-5	1.92	1.37e-2	0.97	1.31e-1	0.97	3.23e-2	1.37	8.1

TAB. 2.6: Résultats de convergence du cas test variablement saturé - méthode  $\mathbb{P}_1$ -BDF2.

$\eta$	$\mathcal{T}_h$	$\delta t$	$e_{\psi,\Omega}$		$e_{v,\Omega}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^i}$		$e_{\psi,\mathcal{F}_h^D}$		$t_{\text{CPU}}^*$
			Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	Erreur	Ordre	
12	$M_1$	4	1.66e-2		4.14e-1		4.20		9.14		
	$M_2$	2	5.99e-4	3.57	3.58e-2	2.63	4.22e-1	2.47	5,31e-1	3.05	2.1
	$M_3$	1	7.43e-5	3.01	9.03e-3	1.99	1.30e-1	1.70	9.00e-2	2.56	3.4
	$M_4$	1/2	1.07e-5	2.99	2.29e-3	2.12	2.79e-2	2.38	1.66e-2	2.61	5.6
	$M_5$	1/4	1.23e-6	3.40	5.48e-4	2.25	6.42e-3	2.31	2.80e-3	2.80	6.4

TAB. 2.7: Résultats de convergence du cas test variablement saturé - méthode  $\mathbb{P}_2$ -BDF3.

ainsi que sur le fond pendant toute la durée de la simulation. De l'eau est injectée par le haut du domaine en imposant une pression de  $-20.7cm$  et les parois latérales sont imperméables,

$$\begin{aligned}\psi^0 &= -61.5cm && \text{dans } \Omega, \\ \psi_D &= -61.5cm && \text{sur } \mathcal{B} \times [0, T], \\ \psi_D &= -20.7cm && \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ v_N &= 0 && \text{sur } \mathcal{W} \times [0, T].\end{aligned}$$

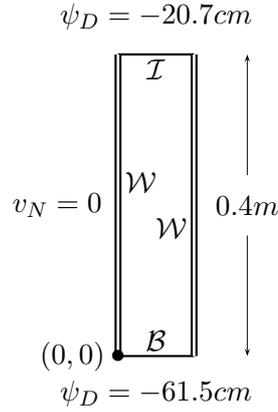


FIG. 2.4: Description du cas test d'Haverkamp.

Le sol est un sable dont les propriétés hydrodynamiques sont définies par les relations (2.27) et (2.28). Comme le montrent les deux courbes de la figure 2.5, la teneur en eau et la conductivité ne présentent pas de forts gradients.

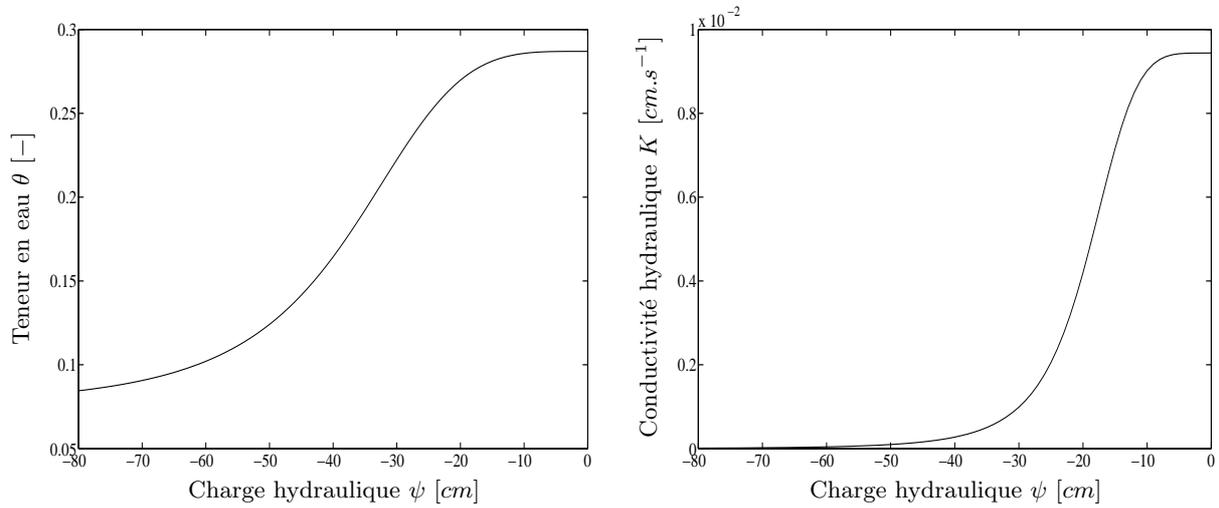


FIG. 2.5: Propriétés hydrodynamiques du sol dans le cas test d'Haverkamp.

Toutes les 120s, nous représentons sur la figure 2.6 la charge hydraulique moyenne suivant la direction  $x$  définie par

$$\bar{\psi}_h(z) = \frac{1}{l} \int_0^l \psi_h(x, z) dx,$$

où  $l$  est la largeur du domaine.

Nous utilisons le maillage  $M_4$  avec un pas de temps de 1s et le maillage  $M_5$  avec un pas de temps de 0.5s. La figure 2.6 montre que les résultats obtenus dans les deux simulations sont très proches. Une bonne concordance est observée avec les résultats présentés par Manzini et Ferraris [MF04].

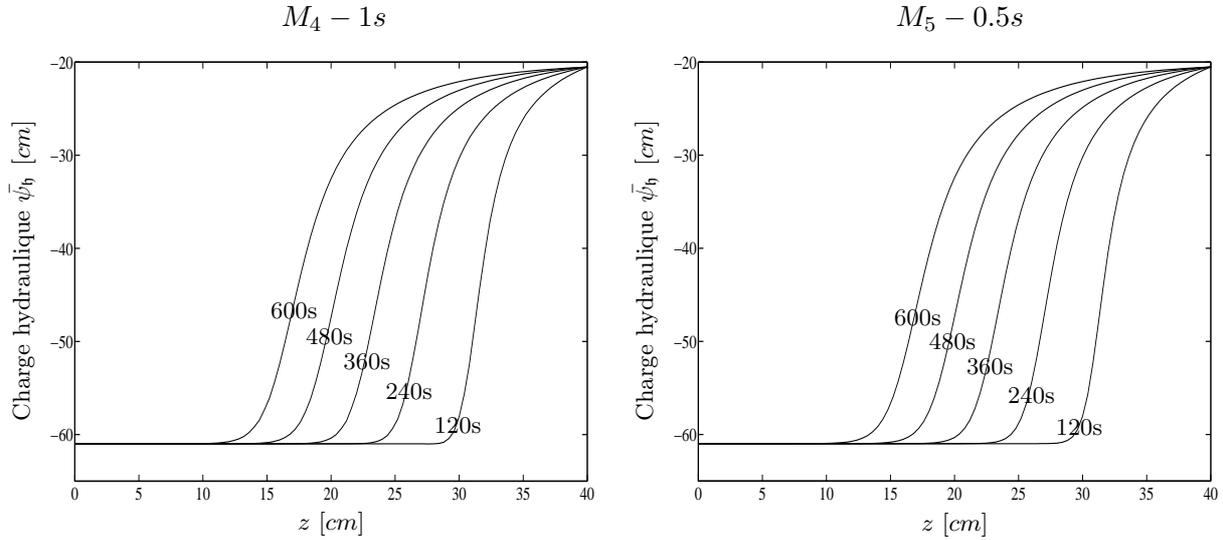


FIG. 2.6: Evolution du front d'infiltration du cas test d'Haverkamp.

### 2.2.4 Cas test de Polmann

Ce deuxième cas test d'infiltration a également été considéré par Celia et Bouloutas [CB90] et Manzini et Ferraris [MF04] et fait suite aux travaux de Polmann (1988). Le principe est identique au précédent : une surpression imposée en haut de la colonne engendre un front d'infiltration qui se propage vers le bas (2.7). Cependant ce problème est plus difficile que le précédent puisque la surpression est beaucoup plus importante et la conductivité hydraulique présente de fortes variations dans l'ensemble des valeurs prises par la charge hydraulique (voir figure 2.8). La géométrie et le temps final de simulation sont

$$L = 1m, \quad l = 20cm \quad \text{et} \quad T = 48h.$$

Nous rappelons que  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{B}$  désignent respectivement la partie supérieure, les parois latérales et le fond du domaine. Une pression de  $-10m$  est imposée à l'instant initial ainsi que sur le fond pendant toute la durée de la simulation. Une pression de  $-75cm$  (ce qui équivaut à une surpression de  $9.25m$ ) est imposée en haut de la colonne et les parois latérales sont imperméables,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -10m && \text{dans } \Omega, \\ \psi_D &= -10m && \text{sur } \mathcal{B} \times [0, T], \\ \psi_D &= -75cm && \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ v_N &= 0 && \text{sur } \mathcal{W} \times [0, T]. \end{aligned}$$

Les propriétés hydrodynamiques du sol sont données par les relations de Van Genuchten

$$\theta(\psi) = \frac{(\theta_s - \theta_r)}{(1 + (\epsilon|\psi|)^n)^m} + \theta_r \quad \text{et} \quad K(\psi) = K_s \frac{(1 - (\epsilon|\psi|)^{n-1}(1 + (\epsilon|\psi|)^n)^{-m})^2}{(1 + (\epsilon|\psi|)^n)^{\frac{m}{2}}}, \quad (2.30)$$

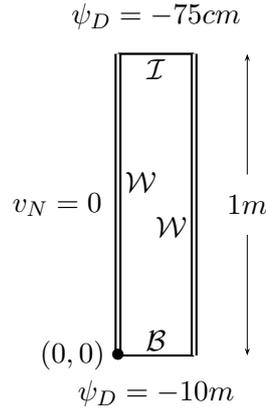


FIG. 2.7: Description du cas test de Polmann.

avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.368 & \epsilon &= 0.0335 \text{ cm}^{-1} & n &= 2 \\ \theta_r &= 0.102 & K_s &= 9.22 \cdot 10^{-3} \text{ cm.s}^{-1} & m &= 0.5 \end{aligned}$$

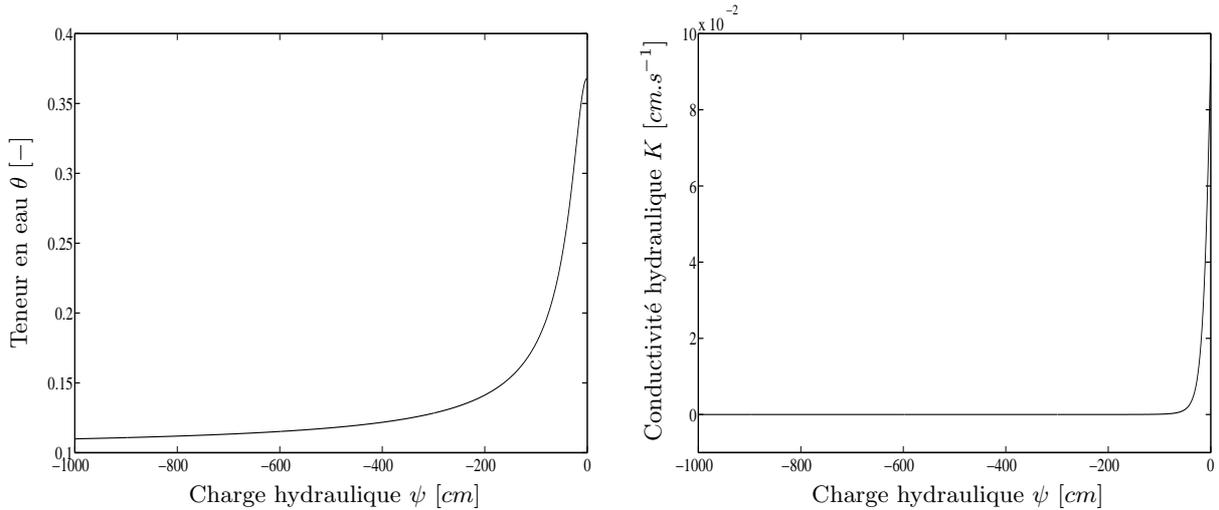


FIG. 2.8: Propriétés hydrodynamiques du sol dans le cas test de Polmann.

Les résultats sont présentés avec le maillage  $M_4$  et un pas de temps  $\delta t = 1min$ . La valeur moyenne de la charge  $\bar{\psi}_h$  est tracée sur la figure 2.9 à 12h, 24h, 36h et 48h. La partie gauche de la figure 2.9 présente les résultats obtenus. Comme nous le voyons sur cette figure, la raideur du front d'infiltration provoque l'apparition d'oscillations parasites. C'est la raison pour laquelle nous avons implémenté le limiteur de pente proposé par Cockburn et Shu [CS98b] pour les systèmes hyperboliques. La partie droite de la figure 2.9 montre que l'utilisation du limiteur diminue considérablement les oscillations (courbes continues) même si cela engendre un retard par rapport à la solution non limitée (courbes en traits pointillés, reprises de la figure gauche). Notons que ce retard n'est pas incompatible avec la conservation de la masse lors de l'utilisation du limiteur puisque l'eau dans le sol est injectée en imposant une condition sur la charge hydraulique.

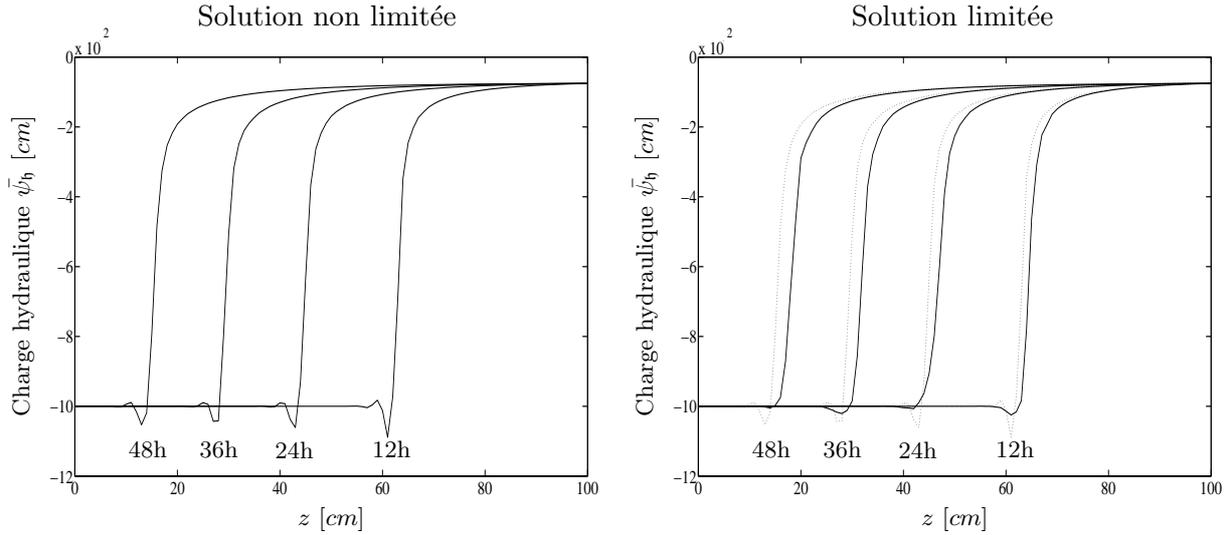


FIG. 2.9: Evolution du front d'infiltration du cas test de Polmann.

### 2.2.5 Cas tests de Vogel, Van Genuchten et Cislerova

Les trois cas tests de cette section sont tirés d'un article de Vogel, Van Genuchten et Cislerova [VGC01]. Ginzburg, Carlier et Kao [GCK04] ont également étudié l'un de ces cas en utilisant une méthode de Lattice Boltzmann. Ces trois cas sont réalisés avec le modèle de Van Genuchten modifié qui est donné par les relations (2.31) ci-dessous et dans lesquelles intervient un paramètre supplémentaire  $h_s$  qui peut s'interpréter comme la hauteur capillaire minimum ou comme le plus petit diamètre des pores présents dans le milieu poreux. Si ce paramètre est nul, le modèle est équivalent à celui de Van Genuchten. Dans [VGC01], les auteurs étudient l'influence de  $h_s$  sur les propriétés hydrodynamiques et la sensibilité de la charge hydraulique à ce paramètre dans les zones proches de la saturation. L'objectif n'est pas de discuter la validité de ce modèle ni le choix de ce paramètre mais de montrer que nous obtenons des résultats comparables avec notre méthode. La géométrie est identique pour les trois cas,

$$L = 1m \quad \text{et} \quad l = 20cm.$$

Les temps de simulation sont respectivement de 1 journée, une demi-journée et 2 journées,

$$T_1 = 24h, \quad T_2 = 12h \quad \text{et} \quad T_3 = 48h.$$

La condition initiale est hydrostatique et les parois latérales sont imperméables,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -1m - z \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{W} \times [0, T]. \end{aligned}$$

Trois combinaisons de conditions aux limites sont imposées : 1 - une pression nulle au fond avec un flux nul sur la partie supérieure conduisant à une infiltration par le bas, 2 - une pression nulle sur la partie supérieure avec un flux nul au fond conduisant à une infiltration par le haut, 3 - un flux constant sur la partie supérieure avec un flux nul au fond conduisant également à une infiltration par le haut (voir la figure 2.10).

$$\begin{aligned} \text{CL 1 : } & \psi_D = 0 \quad \text{sur } \mathcal{B} \times [0, T] \quad \text{et} \quad v_N = 0 \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ \text{CL 2 : } & v_N = 0 \quad \text{sur } \mathcal{B} \times [0, T] \quad \text{et} \quad \psi_D = 0 \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ \text{CL 3 : } & v_N = 0 \quad \text{sur } \mathcal{B} \times [0, T] \quad \text{et} \quad v_N = -0.5K_s \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T]. \end{aligned}$$

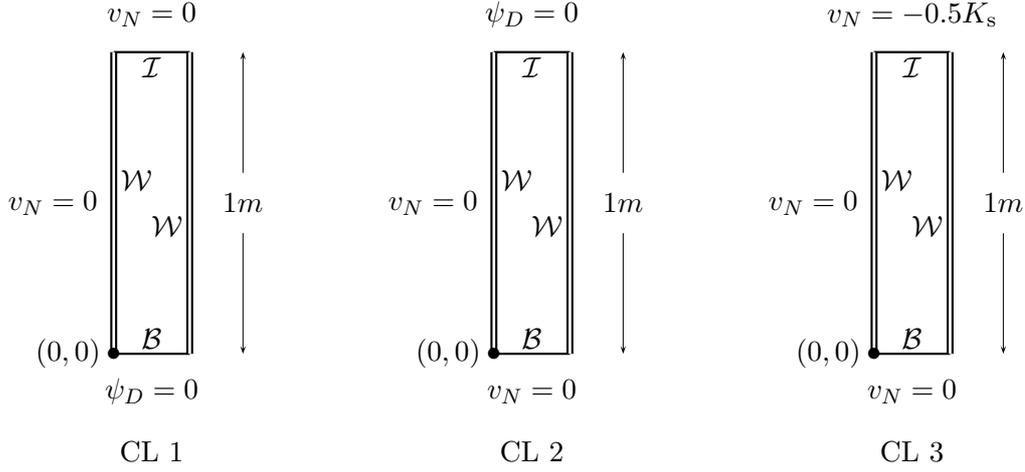


FIG. 2.10: Description des trois cas tests avec saturation.

Les propriétés hydrodynamiques du sol sont données par les relations de Van Genuchten modifiées

$$\theta(\psi) = \tilde{\theta}(\theta_s - \theta_r) + \theta_r \quad \text{et} \quad K(\psi) = K_s \tilde{\theta}^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - (1 - (\tilde{\theta}/\beta)^{1/m})^m)^2}{(1 - (1 - (1/\beta)^{1/m})^m)^2}, \quad (2.31)$$

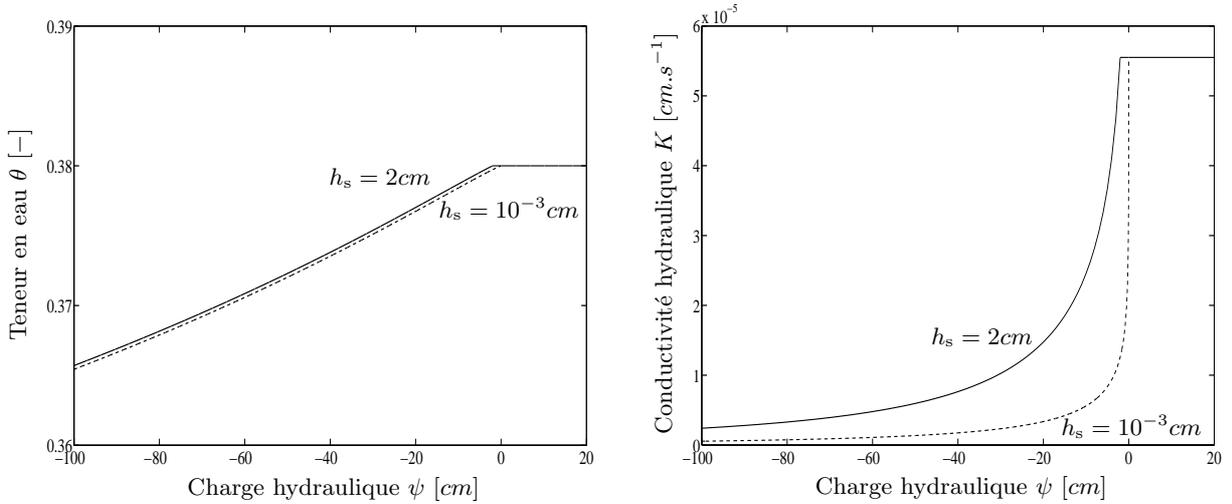
où les deux quantités  $\tilde{\theta}$  et  $\beta$  sont données pour  $\psi \leq -h_s$  par

$$\tilde{\theta} = \frac{(1 + (\epsilon h_s)^n)^m}{(1 + (\epsilon |\psi|)^n)^m} \quad \text{et} \quad \beta = (1 + (\epsilon h_s)^n)^m,$$

et où  $\tilde{\theta} = 1$  pour  $\psi \geq -h_s$ . Les valeurs des différents paramètres sont

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.38 & \epsilon &= 0.008 \text{ cm}^{-1} & n &= 1.09 \\ \theta_r &= 0.068 & K_s &= 5.55 \cdot 10^{-5} \text{ cm.s}^{-1} & m &= 0.0826 \end{aligned}$$

La figure 2.11, qui représente les propriétés hydrodynamiques pour  $h_s = 10^{-3} \text{ cm}$  en trait discontinu et pour  $h_s = 2 \text{ cm}$  en trait continu, montre que la conductivité hydraulique est beaucoup plus sensible que la teneur en eau à la variation de la hauteur minimum capillaire.

FIG. 2.11: Propriétés hydrodynamiques du sol en fonction du paramètre  $h_s$ .

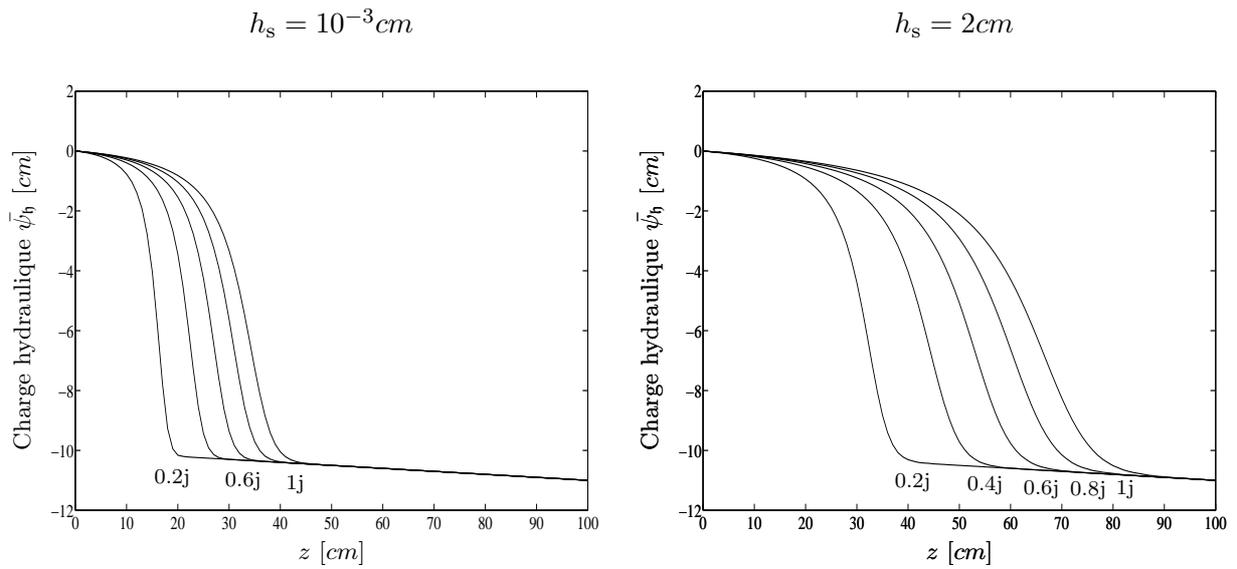


FIG. 2.12: Evolution du front d'infiltration avec la CL 1.

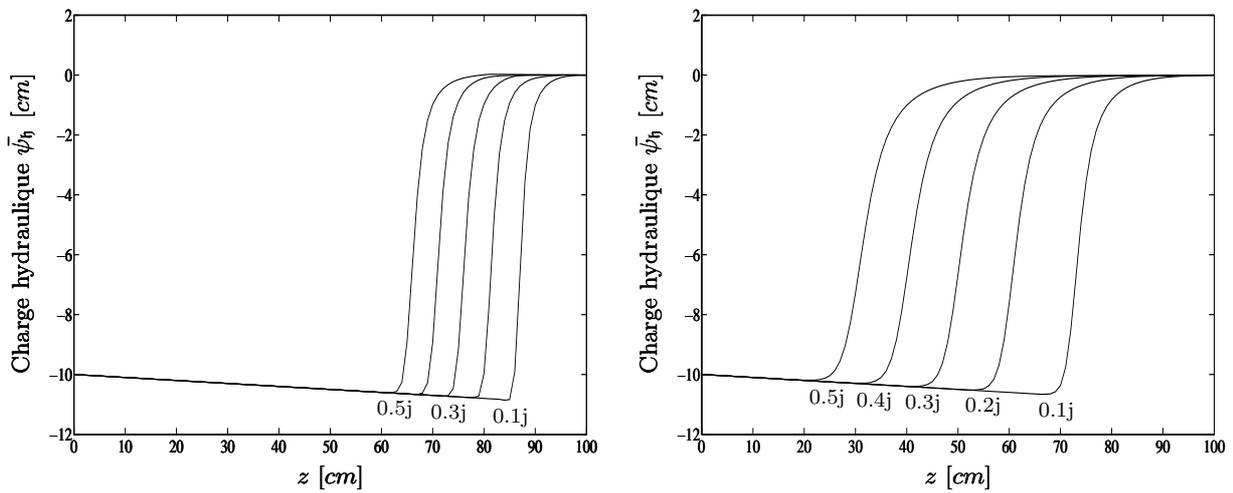


FIG. 2.13: Evolution du front d'infiltration avec la CL 2.

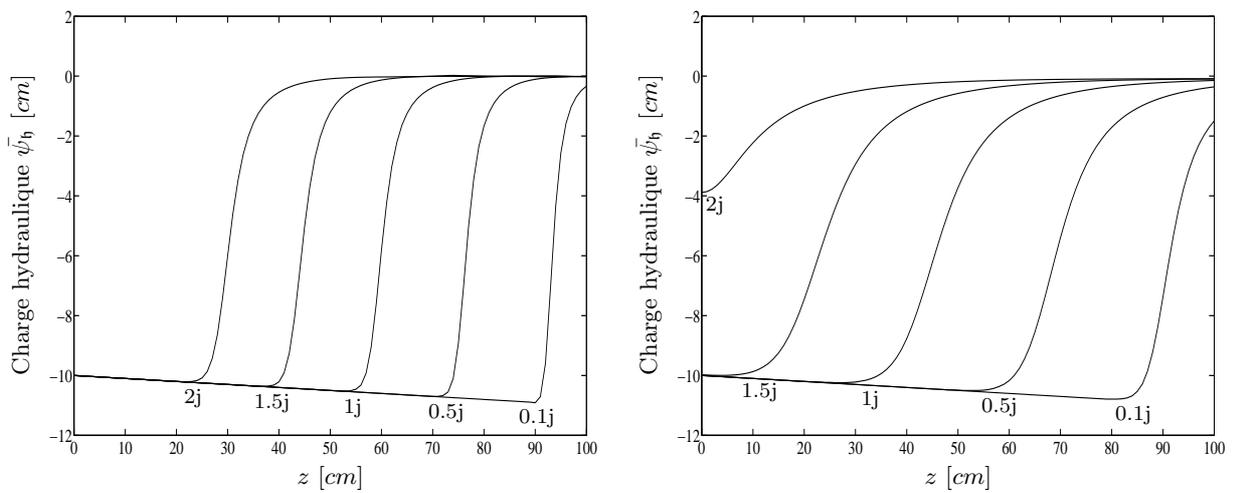


FIG. 2.14: Evolution du front d'infiltration avec la CL 3.

Les figures 2.12, 2.13 et 2.14 représentent les résultats obtenus avec le maillage  $M_5$  et un pas de temps  $\delta t = 2min$ . Les valeurs moyennes de la charge hydraulique  $\psi_h$  sont tracées en fonction de la profondeur sur les figures de droite pour  $h_s = 10^{-3}cm$  et sur les figures de gauche pour  $h_s = 2cm$ . Les courbes sont tracées toutes les  $2h48min$  ( $=0.2j$ ) pour la CL 1, toutes les  $1h24min$  ( $=0.1j$ ) pour la CL 2 et toutes les  $6h$  ( $=0.5j$ ) pour la CL 3.

Les résultats obtenus concordent avec ceux de Vogel, Van Genuchten et Cislerova [VGC01] ainsi que ceux de Ginzburg, Carlier et Kao [GCK04] lorsque  $h_s = 2cm$ . En revanche nous avons observé que les évolutions du front d'infiltration sont fortement sensibles au paramètre  $h_s$  lorsque celui-ci est proche de zéro. Cela s'explique par les très fortes variations de la conductivité hydraulique quand le milieu devient saturé si la hauteur minimum capillaire est nulle. De plus, l'algorithme 1 ne converge pas (ou converge très lentement) si la divergence de la conductivité apparaît dans le second membre. Nous avons remarqué que l'intégration par parties de l'intégrale surfacique contenant la divergence de la conductivité permet d'améliorer considérablement la convergence,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (K(\psi)e_z)\phi = - \int_{\tau} K(\psi)e_z \nabla \phi + \int_{\partial\tau} K(\psi|_{\tau})e_z \phi n_{\tau}.$$

Les résultats obtenus avec  $h_s = 10^{-3}cm$  (valeur minimale de  $h_s$  pour laquelle nos temps de calcul sont raisonnables) s'éloignent un peu de ceux de Vogel *et al.* obtenus avec  $h_s = 0$  confirmant la très forte sensibilité du système à la hauteur capillaire minimum quand celle-ci est faible.

Comme attendu pour les trois cas, l'infiltration est plus rapide avec  $h_s = 2cm$  puisque la conductivité hydraulique est supérieure au cas où  $h_s = 10^{-3}$  (voir la figure 2.11). L'influence de la gravité sur l'écoulement est également visible car l'infiltration par le haut (CL 2) est plus rapide que l'infiltration par le bas (CL 1). Ces trois cas sont particulièrement intéressants car ils nous ont permis de tester notre méthode, avec une zone dans le sol où la variation de la conductivité est très grande, et de dégager une information importante concernant l'implémentation du second membre que nous avons pris en compte dans le logiciel R+R\_DG.

# Chapitre 3

## Affleurement et drains

Nous avons présenté dans le chapitre précédent les écoulements en milieu poreux variablement saturé, c'est-à-dire lorsque l'eau remplit partiellement ou complètement les pores du sous-sol, avec des conditions aux limites déterminées de façon explicite sur la frontière du domaine. Il existe cependant des situations dans lesquelles les conditions aux limites sont définies par des inégalités et les morceaux de frontière, sur lesquels celles-ci s'imposent, ne sont pas explicitement déterminés : on parle de problèmes à frontière libre. En hydrologie ce type de problème apparaît lorsqu'une nappe affleure par exemple. La détermination de la position de la nappe est un problème de type obstacle régi par des conditions aux limites de Signorini. La modélisation des drains fait aussi appel à ce type de conditions aux limites.

Ce chapitre est organisé en deux parties. La première partie expose les conditions de Signorini et l'algorithme proposé pour résoudre les problèmes avec ce type de conditions aux limites. La seconde partie présente les résultats obtenus dans les deux exemples évoqués précédemment : d'abord la détermination de la position d'une nappe affleurante, puis la modélisation de drains.

### 3.1 Problème de frontière libre

#### 3.1.1 Problème continu et ensemble admissible

Nous considérons un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , connexe mais éventuellement non simplement connexe. La frontière extérieure est divisée en 3 parties ( $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{B}$ ) et la frontière intérieure représentant l'ensemble des drains est notée  $\mathcal{D}$ . Dans cette partie les parois latérales et le fond du domaine sont supposés imperméables et une pluie tombe à la vitesse  $v_r$  sur la totalité ou une partie du sol (voir figure 3.1). A chaque instant l'ensemble  $\mathcal{I}$  est divisé suivant que le milieu est localement saturé ou insaturé, ce qui se traduit par une condition sur le signe de la charge hydraulique,

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{w,t} \cup \mathcal{I}^{d,t}, \quad \mathcal{I}^{w,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{I}, \psi(x,t) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^{d,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{I}, \psi(x,t) < 0\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{D}$  est partitionné de la même façon,

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{w,t} \cup \mathcal{D}^{d,t}, \quad \mathcal{D}^{w,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{D}, \psi(x,t) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}^{d,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{D}, \psi(x,t) < 0\}.$$

Les exposants w et d ainsi que l'indice r font référence aux premières lettres des mots anglais « wet », « dry » et « rain ». Par abus de langage nous appelons « partie sèche » la partie non saturée et « partie mouillée » la partie saturée. Les partitions des ensembles  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{D}$  ne sont pas connues *a priori* et dépendent du temps. Ainsi les deux doublets  $\{\mathcal{I}^{w,t}, \mathcal{I}^{d,t}\}$  et  $\{\mathcal{D}^{w,t}, \mathcal{D}^{d,t}\}$  sont à déterminer en même temps que nous résolvons l'équation de Richards.

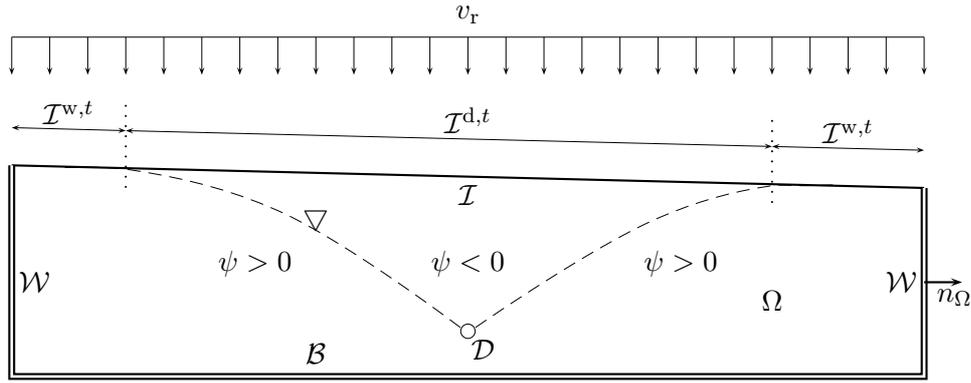


FIG. 3.1: Exemple de problème à frontière libre avec affleurement et drain.

L'affleurement d'une nappe dans une parcelle soumise à une pluie apparaît lorsque le milieu poreux n'est plus capable d'absorber l'eau provenant de cette pluie. Pour modéliser ce type de phénomène, les conditions aux limites sont des conditions de Signorini (aussi appelées condition de complémentarité) portant sur la charge hydraulique et la vitesse normale à la surface :

$$\left. \begin{array}{l} \psi \leq 0, \\ v(\psi) \cdot n_\Omega \geq v_r \cdot n_\Omega, \\ \psi(v(\psi) - v_r) \cdot n_\Omega = 0, \end{array} \right\} \text{ sur } \mathcal{I} \times [0, T]. \quad (3.1)$$

La première inégalité signifie que la pression au niveau du sol est inférieure ou égale à la pression atmosphérique. En particulier, nous supposons qu'en cas d'affleurement, l'eau ruisselante est évacuée instantanément ou qu'elle n'a pas d'influence sur l'écoulement souterrain. Cette hypothèse simplificatrice sera levée au chapitre 4. Toutefois nous pouvons d'ores et déjà observer que dans de nombreuses configurations où la lame d'eau ruisselante a une épaisseur très faible, l'hypothèse retenue dans ce chapitre s'avère suffisamment précise ; des comparaisons sont effectuées par exemple par Beaugendre *et al.* [BEE<sup>+</sup>06]. La seconde inégalité signifie que la vitesse normale est supérieure à l'intensité de la pluie (noter que  $v_r \cdot n_\Omega \leq 0$ ) ce qui traduit que la quantité d'eau maximale que le sol peut infiltrer est la quantité d'eau provenant de la pluie. La troisième équation précise que la charge hydraulique est nulle lorsque le milieu est saturé et que la vitesse normale est égale à l'intensité de la pluie lorsque le milieu est insaturé. Il est clair que cette dernière équation indique le type de condition aux limites à imposer sur le doublet  $\{\mathcal{I}^{w,t}, \mathcal{I}^{d,t}\}$  : condition de Dirichlet homogène sur  $\mathcal{I}^{w,t}$  et condition de Neumann non homogène sur  $\mathcal{I}^{d,t}$ . Les deux inégalités sont des conditions complémentaires permettant de déterminer la décomposition de l'intervalle  $\mathcal{I}$ .

De nombreuses méthodes existent pour modéliser les drains, parmi lesquelles une méthode « globale » se distingue des méthodes « locales ». La méthode globale, utilisée par exemple par Carlier, Kao et Ginzburg [CKG07], consiste à représenter un ensemble de drains par un milieu poreux homogène équivalent. Une direction préférentielle est donnée à l'écoulement dans la couche qui représente le réseau de drains par un tenseur de conductivité anisotrope. Les propriétés hydrodynamiques de ce milieu équivalent dépendent des propriétés du sol et des caractéristiques géométriques du réseau de drains (espacement entre les drains et diamètre des drains). D'autres méthodes représentent les drains de façon locale en les modélisant soit par des nœuds du maillage, soit géométriquement (en faisant des trous dans le maillage). Dans les approches nodales, le drain est assimilé à un terme puits en imposant une charge comme le font Barcelo et Nieber [BN82] ou une vitesse comme le font Gaharaaty-Sani et King [GSK78]. Dans les sols entièrement saturés,

une analogie avec un réseau de résistances électriques est utilisée par Vimoke et Taylor [VT62]. Dans la modélisation géométrique, Gureghian et Youngs [GY75] déterminent la vitesse à imposer sur le bord du drain en supposant que celle-ci varie logarithmiquement avec la distance radiale au centre du drain. Pour une comparaison de ces quatre méthodes locales, voir les travaux de Fipps et Skaggs [FS86]. Dans notre cas, nous choisissons une approche plus détaillée donc plus coûteuse numériquement mais beaucoup plus précise, en modélisant géométriquement les drains et en utilisant des conditions aux limites du même type que celles utilisées pour l'affleurement et qui s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \psi \leq 0, \\ v(\psi) \cdot n_\Omega \geq 0, \\ \psi v(\psi) \cdot n_\Omega = 0, \end{array} \right\} \text{ sur } \mathcal{D} \times [0, T]. \quad (3.2)$$

Ces équations sont les équations (3.1) obtenues avec  $v_r = 0$ . La première inégalité reste inchangée : la charge hydraulique est négative ou nulle. En revanche la seconde inégalité est modifiée : la vitesse doit rester positive ou nulle. Nous rappelons qu'avec les conventions choisies, une vitesse normale négative traduit une infiltration dans le milieu poreux, ce que nous excluons pour un drain. De même la relation de complémentarité est différente : soit la charge hydraulique est nulle si le milieu est saturé, soit la vitesse normale est nulle si le milieu est insaturé. Ainsi le type de condition aux limites à imposer sur le doublet  $\{\mathcal{D}^{w,t}, \mathcal{D}^{d,t}\}$  est le suivant : condition de Dirichlet homogène sur  $\mathcal{D}^{w,t}$  et condition de Neumann homogène sur  $\mathcal{D}^{d,t}$ . Notons qu'ici aussi, nous supposons que les drains évacuent instantanément l'eau.

Nous définissons l'ensemble  $\mathcal{E}$  comme la réunion de l'interface et des drains

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I} \cup \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}^{w,t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}^{w,t} \cup \mathcal{D}^{w,t} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^{d,t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}^{d,t} \cup \mathcal{D}^{d,t},$$

ainsi que la fonction  $\omega_v$  définie sur  $\mathcal{E}^{w,t}$  par

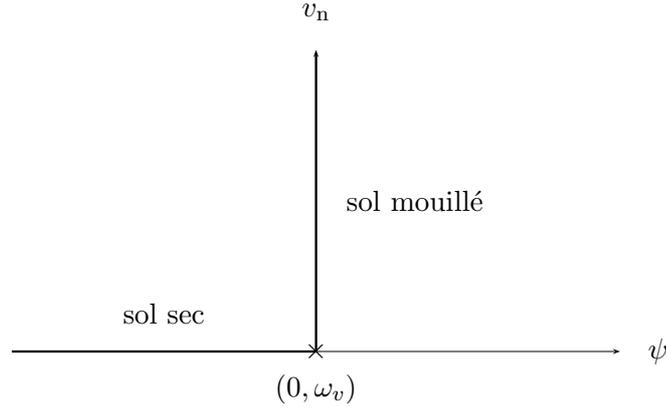
$$\omega_v(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} v_r \cdot n_\Omega & \text{si } x \in \mathcal{I}^{w,t}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathcal{D}^{w,t}. \end{cases}$$

Avec les conditions aux limites (3.1) et (3.2) ainsi que les notations précédentes, nous obtenons le système régissant les écoulements en milieux poreux décrits par l'équation de Richards avec la prise en compte de l'affleurement et de drains,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) = -K(\psi)\nabla(\psi + z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = v_N & \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = \omega_v & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{E}^{d,t}\}, \\ \psi = 0 & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{E}^{w,t}\}, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{dans } \Omega, \\ (\psi, v(\psi) \cdot n_\Omega) \in \mathcal{A}_1 & \text{dans } \mathcal{E} \times [0, T], \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où les données sont la condition initiale  $\psi^0$  et la vitesse normale  $v_N$ . Il s'agit d'un problème à frontière libre dans lequel les couples  $(\psi, v(\psi) \cdot n_\Omega)$  pour  $(x, t) \in \mathcal{E} \times [0, T]$  doivent rester dans un ensemble d'états admissibles du point de vue physique. Cet ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$ , représenté à la figure 3.2, est composé de deux branches dans le plan  $(\psi, v_n)$  où  $v_n = v(\psi) \cdot n_\Omega$ . La branche horizontale  $\{v_n = \omega_v\}$  est associée à un sol insaturé sur lequel la charge hydraulique est inférieure ou égale à zéro. La branche verticale  $\{\psi = 0\}$  est associée à un sol saturé où la vitesse normale est supérieure ou égale à  $\omega_v$ . L'ensemble  $\mathcal{A}_1$  est donc défini par

$$\mathcal{A}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\psi, v_n) \in \mathbb{R}^2, \psi \leq 0, v_n \geq \omega_v, \psi(v_n - \omega_v) = 0\}. \quad (3.4)$$

FIG. 3.2: L'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$ .

### 3.1.2 Algorithme

Nous donnons dans cette section l'algorithme proposé pour traiter les conditions aux limites de Signorini. L'ensemble  $\mathcal{E}_h$  est l'ensemble des faces appartenant à  $\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_h, F \subset \mathcal{E}\}$ ) et les deux ensembles  $\mathcal{E}_h^{d,n}$  et  $\mathcal{E}_h^{w,n}$  sont définis par

$$\mathcal{E}_h^{d,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_h, F \subset \mathcal{E}^{d,n\delta t}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_h^{w,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{F \in \mathcal{F}_h, F \subset \mathcal{E}^{w,n\delta t}\}.$$

Nous pouvons noter que  $\mathcal{E}_h^{d,n} \cap \mathcal{E}_h^{w,n} = \emptyset$  par construction. Les sous-ensembles  $\mathcal{E}_h^{d,n}$  et  $\mathcal{E}_h^{w,n}$  sont déterminés au cours du calcul et notre algorithme impose que toute arête de l'ensemble  $\mathcal{E}_h$  appartient à un de ces sous-ensembles de sorte que

$$\mathcal{E}_h^{d,n} \cup \mathcal{E}_h^{w,n} = \mathcal{E}_h.$$

Autrement dit, l'interface entre une zone sèche et une zone mouillée correspond à une interface surfacique du maillage (un nœud en dimension deux). Pour plus de concision dans la présentation de l'algorithme, nous introduisons les deux notations suivantes :

- $\psi_h^n \leftarrow \text{Richards}(\mathcal{E}_h^{d,n}, \mathcal{E}_h^{w,n}, \psi_h^{n-1}, \psi_h^{n-2})$  désigne la résolution du problème (3.3) sur un pas de temps en utilisant la méthode SIPG en espace, le schéma BDF1 ou BDF2 en temps et un partitionnement  $\{\mathcal{E}_h^{d,n}, \mathcal{E}_h^{w,n}\}$  donné ( $\psi_h^{n-2}$  n'est pas nécessaire en donnée d'entrée pour la BDF1),
- $v_h^{*,n} \leftarrow \text{Vitesse\_Normale}(\mathcal{E}_h^{d,n}, \mathcal{E}_h^{w,n}, \psi_h^n)$  désigne la détermination de la vitesse normale  $v_h^{*,n}$  sur l'ensemble  $\mathcal{E}$ ; celle-ci est définie par

$$v_h^{*,n}|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \omega_v^n|_F & \text{si } F \subset \mathcal{E}_h^{d,n}, \\ v(\psi_h^n)|_F \cdot n_\Omega + \eta K_s d_F^{-1} \psi_h^n|_F & \text{si } F \subset \mathcal{E}_h^{w,n}. \end{cases}$$

L'expression de  $v_h^{*,n}$  sur  $\mathcal{E}_h^{w,n}$  correspond à la composante normale de la reconstruction  $H(\text{div}, \Omega)$ -conforme de la vitesse introduite par Ern, Nicaise et Vohralík [ENV07] pour les méthodes DG.

Dans l'algorithme 3 nous commençons par supposer que la frontière  $\mathcal{E}$  est complètement saturée puisque nous prenons comme premier partitionnement  $\mathcal{E}_h^{w,n,1} = \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_h^{d,n,1} = \emptyset$ . Les égalités

**Algorithme 3** Algorithme pour traiter les frontières libres**Entrées:**  $\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1}$  et  $\psi_{\mathfrak{h}}^{n-2}$ 

$$p = 0$$

$$\psi_{\mathfrak{h}}^{n,1} = 0 \text{ sur } \mathcal{E}$$

$$v_{\mathfrak{h}}^{*,n,0} = \omega_v^n$$

**répéter**

$$p \leftarrow p + 1$$

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n,p} \leftarrow \{F \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n,p}|_F = 0 \text{ et } \exists k \in \{0 \dots p-1\}, v_{\mathfrak{h}}^{*,n,k}|_F \geq \omega_v^n|_F\}$$

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n,p} \leftarrow \mathcal{E}_{\mathfrak{h}} \setminus \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n,p}$$

$$\psi_{\mathfrak{h}}^{n,p} \leftarrow \text{Richards}(\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n,p}, \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n,p}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n-1}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n-2})$$

$$v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p} \leftarrow \text{Vitesse\_Normale}(\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n,p}, \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n,p}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n,p})$$

**jusqu'à**  $\forall F \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}, v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p}|_F \geq \omega_v^n|_F$ 

$$\psi_{\mathfrak{h}}^n = \psi_{\mathfrak{h}}^{n,p}$$

**Sorties:**  $\psi_{\mathfrak{h}}^n$ 

$\psi_{\mathfrak{h}}^{n,1} = 0$  et  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n,1} = \omega_v^n$  correspondent à ce partitionnement initial. Cela implique qu'une condition de Dirichlet est d'abord imposée sur l'ensemble de la frontière  $\mathcal{E}$ . L'équation de Richards est alors résolue et la nouvelle vitesse normale  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p}$  est déterminée. Nous vérifions ensuite que la condition sur la vitesse  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p} \geq \omega_v^n|_F$  est satisfaite sur toutes les faces  $F \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}$ . Si c'est le cas, la solution et le partitionnement sont acceptés. Dans le cas contraire, une condition de Neumann est imposée sur les arêtes ne vérifiant pas cette condition et l'équation de Richards est à nouveau résolue. L'algorithme converge puisque l'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n,p}$  augmente (au sens de l'inclusion) avec l'indice d'itération  $p$  alors que l'ensemble  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n,p}$  décroît. Les principaux avantages de cet algorithme sont la robustesse et une facile adaptation à la dimension 3. De plus, contrairement à un algorithme de suivi de front (voir [BEE<sup>+</sup>06] par exemple), l'algorithme 3 n'utilise aucune information issue du pas de temps précédent pour déterminer le partitionnement de l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

L'algorithme que nous proposons pour traiter les frontières libres garantit sur l'ensemble des pas de temps que la charge hydraulique est nulle sur  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n}$ ,

$$\forall n \in \{1 \dots N_T\}, \quad \forall F \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n}, \quad \psi_{\mathfrak{h}}^n|_F = 0. \quad (3.5)$$

Sur  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n}$ , la vitesse normale est égale à la fonction  $\omega_v^n$ ,

$$\forall n \in \{1 \dots N_T\}, \quad \forall F \in \mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{d,n}, \quad v_{\mathfrak{h}}^{*,n}|_F = \omega_v^n|_F. \quad (3.6)$$

Par définition de  $\omega_v$ , l'égalité (3.6) traduit que la vitesse normale est nulle sur la partie sèche du drain  $\mathcal{D}_{\mathfrak{h}}^{d,n}$  et égale à la vitesse normale de la pluie sur la partie sèche de l'interface  $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{d,n}$ . L'algorithme 3 assure également que la vitesse normale est supérieure ou égale à la fonction  $\omega_v^n$  sur la partie  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n}$ . La seule condition de complémentarité non vérifiée de manière exacte mais uniquement de manière approchée concerne la charge hydraulique qui peut éventuellement être positive sur la partie sèche  $\mathcal{E}_{\mathfrak{h}}^{w,n}$ .

### 3.1.3 Conservation de la masse avec le schéma BDF1

Le volume total d'eau dans le domaine  $\Omega$  à l'instant  $n\delta t$  est obtenu en intégrant la teneur en eau sur  $\Omega$ ,

$$V_{\text{grnd}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \theta(\psi_{\mathfrak{h}}^n).$$

En supposant que les parois latérales et le fond du domaine sont imperméables ( $v_N = 0$ ), le flux de masse à travers ces morceaux de frontière est nul. Sous cette hypothèse, en prenant la fonction test  $\phi$  égale à 1 dans la formulation SIPG (2.19), en sommant sur l'ensemble des éléments du maillage et en utilisant la BDF1 pour approcher le terme instationnaire, nous obtenons

$$V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1} = (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{D}}^n)\delta t + \epsilon^n, \quad (3.7)$$

où  $F_{\mathcal{I}}^n$  et  $F_{\mathcal{D}}^n$  sont définis par

$$F_{\mathcal{I}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{I}} v_{\mathfrak{h}}^{*,n} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{D}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{D}} v_{\mathfrak{h}}^{*,n}, \quad (3.8)$$

et  $\epsilon^n$  est l'erreur due à la résolution du système non linéaire. Nous avons  $|\epsilon^n| \leq C\epsilon_{\text{alg1}}$  où  $\epsilon_{\text{alg1}}$  est la tolérance choisie dans l'algorithme 1 et  $C$  est une constante venant du fait que le critère de convergence de l'algorithme 1 porte sur la charge hydraulique et non sur la teneur en eau. La relation (3.7) implique facilement le résultat suivant de conservation du volume d'eau lorsque la BDF1 est utilisée.

**Propriété 1.** Soit  $\delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  défini comme

$$\delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1} - (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{D}}^n)\delta t.$$

Soit  $\Delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle de temps  $[0, n\delta t]$  défini comme

$$\Delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \delta V^i.$$

Alors

$$|\Delta V^n| \leq nC\epsilon_{\text{alg1}},$$

où  $C$  est une constante et  $\epsilon_{\text{alg1}}$  le seuil de tolérance utilisé dans l'algorithme 1.

### 3.1.4 Conservation de la masse avec le schéma BDF2

Nous supposons dans cette section que le terme instationnaire de l'équation de Richards est approché par la BDF2. Dans ce cas, nous observons que l'égalité (3.7) devient

$$\frac{3}{2}V_{\text{grnd}}^n - 2V_{\text{grnd}}^{n-1} + \frac{1}{2}V_{\text{grnd}}^{n-2} = (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{D}}^n)\delta t + \epsilon^n, \quad (3.9)$$

et peut se réécrire

$$\frac{3}{2}(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1}) - \frac{1}{2}(V_{\text{grnd}}^{n-1} - V_{\text{grnd}}^{n-2}) = (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{D}}^n)\delta t + \epsilon^n, \quad (3.10)$$

où les flux  $F_{\mathcal{I}}^n$  et  $F_{\mathcal{D}}^n$  sont définis par (3.8). Nous souhaitons écrire un bilan de masse ne faisant intervenir que les instants discrets  $(n-1)\delta t$  et  $n\delta t$ . Or le membre de gauche de l'équation (3.10) étant une combinaison linéaire des variations de la masse sur les deux intervalles  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$

et  $[(n-2)\delta t, (n-1)\delta t]$ , il doit en être de même pour le membre de droite. Nous cherchons donc à construire des flux de masse  $\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n$  et  $\tilde{F}_{\mathcal{D}}^n$  sur l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  de sorte que

$$\frac{3}{2}(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1}) - \frac{1}{2}(V_{\text{grnd}}^{n-1} - V_{\text{grnd}}^{n-2}) = \frac{3}{2}(\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n + \tilde{F}_{\mathcal{D}}^n)\delta t - \frac{1}{2}(\tilde{F}_{\mathcal{I}}^{n-1} + \tilde{F}_{\mathcal{D}}^{n-1})\delta t + \epsilon^n. \quad (3.11)$$

Cette condition est réalisée en choisissant

$$\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3}F_{\mathcal{I}}^n + \frac{1}{3}\tilde{F}_{\mathcal{I}}^{n-1} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{\mathcal{D}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3}F_{\mathcal{D}}^n + \frac{1}{3}\tilde{F}_{\mathcal{D}}^{n-1}.$$

Lors du premier pas de temps, le schéma DIRK3 ou de Crank–Nicolson permet d'obtenir  $\tilde{F}_{\mathcal{I}}^1$  et  $\tilde{F}_{\mathcal{D}}^1$  pour commencer la récurrence. Le résultat concernant la conservation du volume d'eau lorsque la BDF2 est utilisée est le suivant.

**Propriété 2.** Soit  $\delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  défini comme

$$\delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1} - \tilde{F}^n \delta t, \quad (3.12)$$

avec  $\tilde{F}^n \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{\mathcal{I}}^n + \tilde{F}_{\mathcal{D}}^n$ . Soit  $\Delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle de temps  $[0, n\delta t]$  défini comme précédemment. Alors

$$|\Delta V^n| \leq \frac{1}{2}|\delta V^1| + nC\epsilon_{\text{alg1}},$$

où  $C$  est une constante et  $\epsilon_{\text{alg1}}$  le seuil de tolérance utilisé dans l'algorithme 1.

*Démonstration.* En utilisant la définition de  $\delta V^n$ , nous obtenons à partir de (3.11) la relation de récurrence

$$\delta V^n = \frac{1}{3}\delta V^{n-1} + \frac{2}{3}\epsilon^n,$$

qui peut également s'écrire

$$\delta V^n = \frac{1}{3^n}\delta V^1 + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^n 3^{i-n}\epsilon^i.$$

D'après la définition de la quantité  $\Delta V^n$ , nous avons

$$\Delta V^n = \sum_{j=1}^n \delta V^j = \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{3^j}\delta V^1 + \frac{2}{3}\sum_{i=1}^j 3^{i-j}\epsilon^i \right)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, nous déduisons que

$$|\Delta V^n| \leq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}\right)|\delta V^1| + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{3^{i+1}}\right)|\epsilon^i|,$$

d'où

$$|\Delta V^n| \leq \frac{1}{2}|\delta V^1| + \sum_{i=1}^n |\epsilon^i| \leq \frac{1}{2}|\delta V^1| + nC\epsilon_{\text{alg1}}.$$

□

Des raisonnements similaires avec des formules de récurrence plus longues peuvent être considérés pour des BDF d'ordre quelconque.

## 3.2 Résultats

Dans les deux cas tests présentés, l'un avec affleurement et l'autre avec un drain, nous effectuons un bilan de masse afin de vérifier que celle-ci est bien conservée. Pour déterminer si les conditions de complémentarité sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  sont vérifiées, nous représentons les couples  $\{\psi, v_n\}$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$  à différents instants de la simulation. L'évolution du type de condition aux limites imposé sur l'ensemble  $\mathcal{E}_h$  est suivie en indiquant, en fonction du temps, le nombre de faces dans  $\mathcal{E}_h$  ayant une condition de Dirichlet. Pour repérer l'état de stationnarité du système, nous introduisons l'indicateur  $\mathcal{I}_s$  défini par

$$\mathcal{I}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\frac{3}{2}\psi_h^n - 2\psi_h^{n-1} + \frac{1}{2}\psi_h^{n-2}\|_\infty}{\|\psi_h^0\|_\infty},$$

dans lequel  $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme usuelle dans  $L^\infty(\Omega)$ .

### 3.2.1 Affleurement

Nous reprenons un cas test aboutissant à l'affleurement d'une nappe proposé par Beaugendre *et al.* [BEE<sup>+</sup>06] et inspiré d'un article d'Abdul et Gilham [AG84]. Une caractéristique du domaine est la pente de la surface qui vaut 14% (voir la figure 3.3). La géométrie, le temps final de la simulation et le pas de temps utilisés sont

$$L = 1.4m, \quad P_g = 1m, \quad P_d = 0.8m, \quad T = 6h \quad \text{et} \quad \delta t = 1min.$$

La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située à  $0.7m$  et des conditions aux limites d'imperméabilité sont imposées sur les parois et le fond,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.7m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Une pluie d'intensité constante égale à 10% de la conductivité à saturation est imposée sur le sol pendant toute la simulation,

$$v_r \cdot n_\Omega = -0.1K_s cm.s^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T].$$

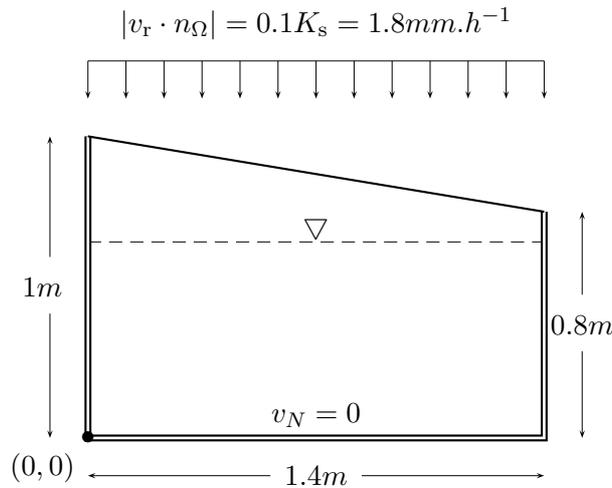


FIG. 3.3: Description du cas test avec affleurement de nappe.

Le sol est constitué d'un sable dont les propriétés hydrodynamiques sont données par les relations de Van-Genuchten (2.30) avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.55 & \epsilon &= 0.036 \text{ cm}^{-1} & n &= 1.9 \\ \theta_r &= 0.23 & K_s &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm.s}^{-1} & m &= 1 - 1/n \end{aligned}$$

La teneur en eau et la conductivité hydraulique sont illustrées sur la figure 3.4.

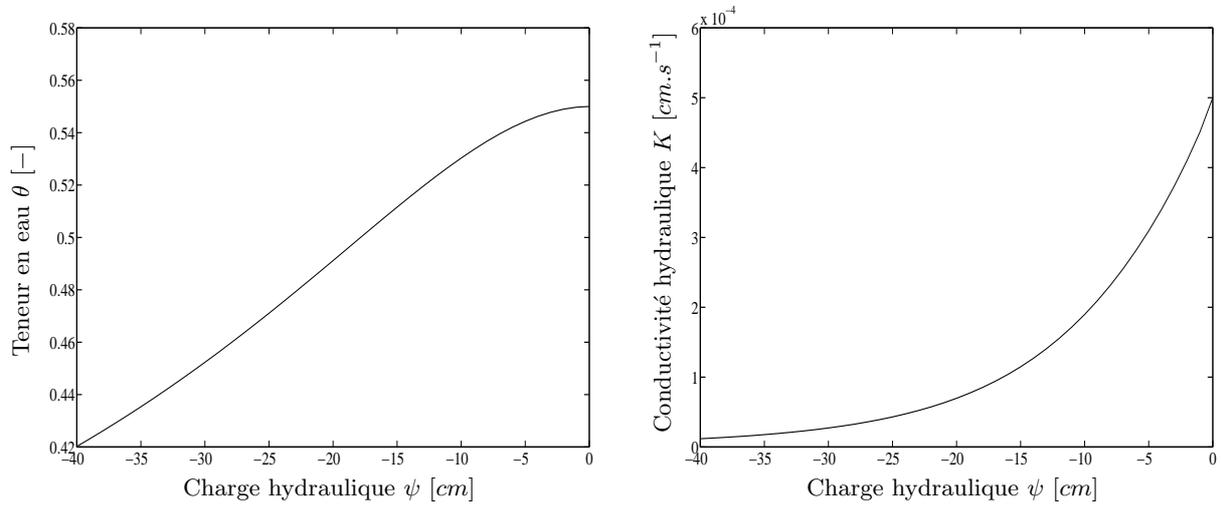


FIG. 3.4: Propriétés hydrodynamiques du sol dans le cas test d'affleurement.

Une partie du domaine étant saturée à l'instant initial, nous utilisons le schéma de Crank–Nicolson lors du premier pas de temps. De plus, nous choisissons un maillage de 2006 mailles qui est plus fin dans la partie supérieure pour mieux capter l'affleurement de la nappe : l'ensemble  $\mathcal{T}$  comporte 78 arêtes alors que le fond  $\mathcal{B}$  n'en compte que 17 (voir la figure 3.5).

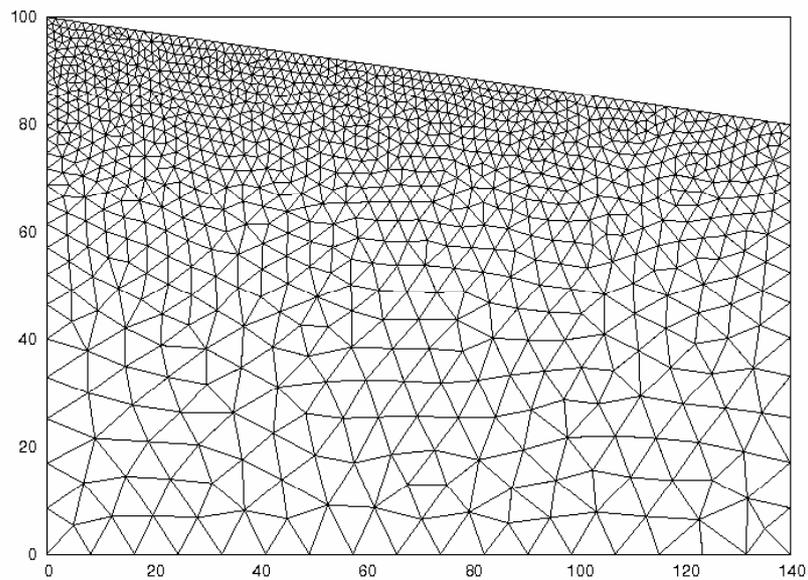


FIG. 3.5: Maillage avec raffinement en surface.

Sur la figure 3.6, la position de la nappe est dessinée en trait continu à plusieurs instants significatifs au cours de la simulation. La partie saturée du sous-sol (qui se trouve en-dessous de la nappe) est de couleur foncée alors que la partie insaturée est de couleur claire. A l'initialisation, la répartition de la pression est hydrostatique avec une nappe horizontale située à une altitude de  $0.7m$ . La pluie imposée sur la partie supérieure du domaine entraine une augmentation progressive de la pression ce qui se traduit par une montée de la nappe notamment sur la partie droite du domaine où le milieu est le moins insaturé en surface ( $1h$ ). Après  $1h30$  de pluie, la quantité d'eau infiltrée est suffisante pour saturer la partie droite du domaine et provoquer l'affleurement de la nappe. La dernière position correspond à l'état d'équilibre entre l'infiltration et l'exfiltration dans le système. La zone de saturation du milieu est alors maximale.

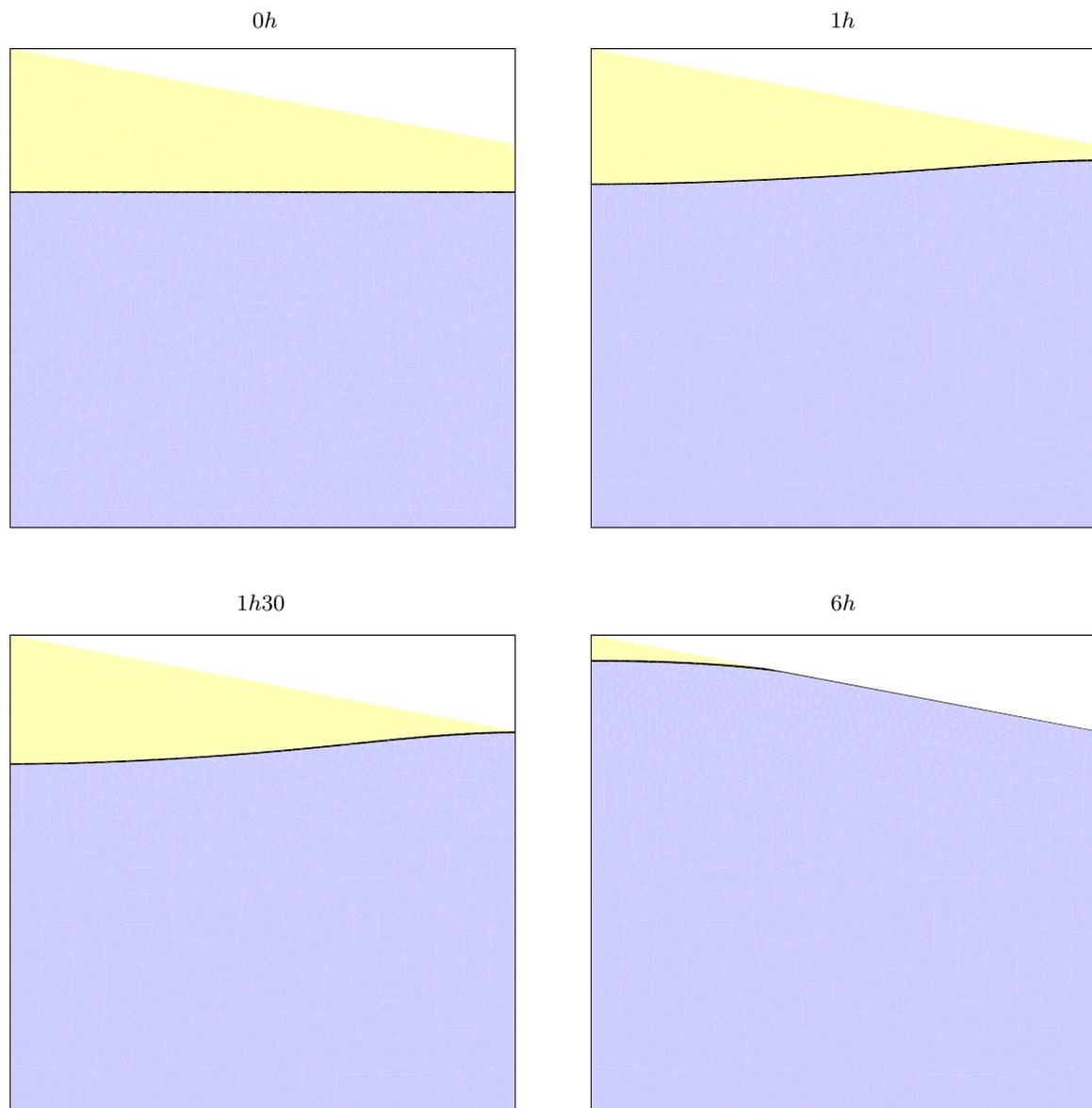


FIG. 3.6: Position de la nappe à différents instants.

La figure 3.7 montre les différents couples charge hydraulique/vitesse normale sur  $\mathcal{A}_1$  pendant la simulation. Pour différents instants et pour chaque arête de l'ensemble  $\mathcal{I}$ , le couple  $(\psi_b^n, v_b^n \cdot n_\Omega)$  est représenté par une croix (la valeur moyenne de  $\psi_b^n$  est utilisée sur chaque maille). Les phases précédemment décrites sont illustrées par les positions successives des nuages de points :

- A  $10min$ , la charge hydraulique est négative et la vitesse normale est égale à l'intensité de la pluie. Le nuage de points est seulement sur la branche  $\{v_n = v_r \cdot n_\Omega\}$  traduisant une infiltration complète de la pluie dans le sol.

- A  $1h$ , les couples sont toujours sur la branche  $\{v_n = v_r \cdot n_\Omega\}$  mais avec une augmentation de la charge hydraulique puisque le milieu se sature.

- A  $1h40$ , la vitesse normale est supérieure à l'intensité de la pluie pour quelques faces. Le nuage de points est situé sur les deux branches et la nappe commence à affleurer.

- A  $6h$ , le nuage se trouve sur les deux branches avec une augmentation de la vitesse normale traduisant une saturation du milieu. Quelques points s'éloignent quelque peu de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$  illustrant le fait que la condition de non-positivité de la charge hydraulique sur la partie sèche de la frontière libre n'est pas assurée de manière exacte par notre algorithme.

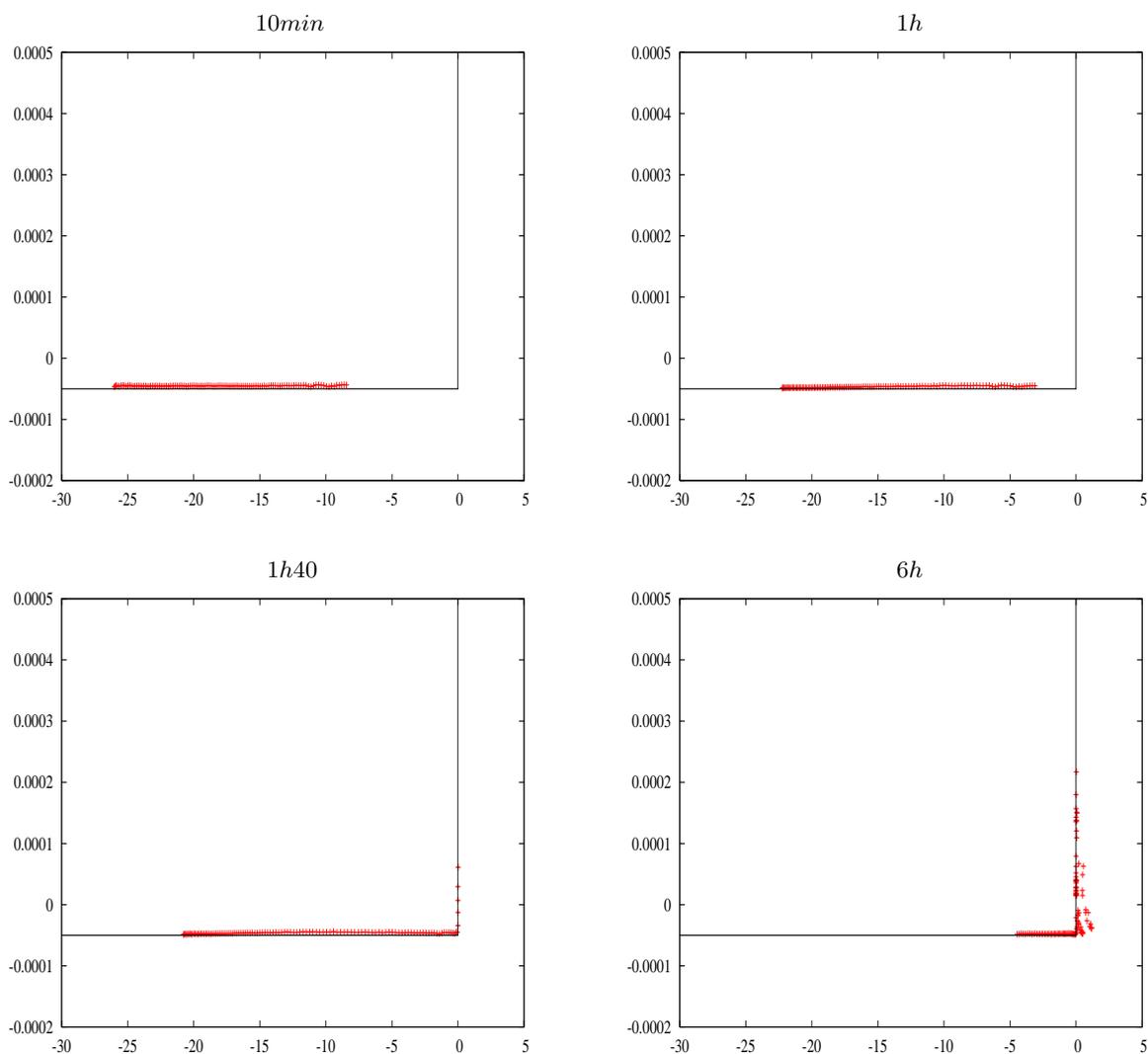


FIG. 3.7: Nuages de points  $(\psi_b^n, v_b^n \cdot n_\Omega)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$ .

Dans ce cas test d'affleurement, l'ensemble  $\mathcal{E}$  est réduit à l'interface  $\mathcal{I}$  puisqu'il n'y a pas de drain. Le flux de masse  $\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n$  à l'interface à l'instant discret  $n\delta t$  peut être décomposé en un flux d'infiltration  $\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^n$  et un flux d'exfiltration  $\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^n$ ,

$$\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^n + \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^n, \quad \text{avec} \quad \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{I}} v_{\mathfrak{h}}^{*,n,-} \quad \text{et} \quad \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{I}} v_{\mathfrak{h}}^{*,n,+},$$

où  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n,-} < 0$  et  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n,+} > 0$  désignent respectivement la partie négative et la partie positive de  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n}$  sur  $\mathcal{I}$ . Pour obtenir le bilan de masse sur toute la durée de la simulation, nous utilisons la décomposition du flux sur l'interface, multiplions l'équation (3.12) par la masse volumique de l'eau  $\rho$  et sommons sur l'intervalle  $[0, T]$ ,

$$\underbrace{\rho(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^0)}_{\Delta M_{\text{grnd}}^n} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^i}_{M_{\text{in}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t \tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^i}_{M_{\text{out}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta V^i}_{\mathbb{E}^i}.$$

La grandeur  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$  est la variation totale de masse pendant l'intervalle  $[0, n\delta t]$ . Les deux quantités  $M_{\text{in}}^i$  et  $M_{\text{out}}^i$  représentent respectivement la masse d'eau qui entre et qui sort du système entre  $(i-1)\delta t$  et  $i\delta t$ . L'erreur commise sur la conservation de la masse entre  $(i-1)\delta t$  et  $i\delta t$  est notée  $\mathbb{E}^i$ . Les quantités  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{\text{in}}^i$  (notée  $\Sigma M_{\text{in}}^n$  en abrégé),  $\sum_{i=1}^n M_{\text{out}}^i$  (notée  $\Sigma M_{\text{out}}^n$  en abrégé) et  $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}^i$  (notée  $\Sigma \mathbb{E}^n$  en abrégé) sont représentées sur la figure 3.8. Le bilan de masse confirme que la pluie s'infiltré totalement pendant les deux premières heures de la simulation car la variation de masse est égale à la masse apportée par la pluie. L'eau commence à s'exfiltrer pendant la phase suivante (entre 2 et 4 heures). Cela correspond à la période où l'affleurement de la nappe se produit. Après 4h de simulation, la masse d'eau dans le sol devient constante et la masse d'eau exfiltrée est égale à la masse d'eau infiltrée. Ce bilan montre également que l'erreur commise sur la conservation de la masse est faible par rapport à la masse d'eau initialement contenue dans le sol (écart relatif de l'ordre de 0.02%).

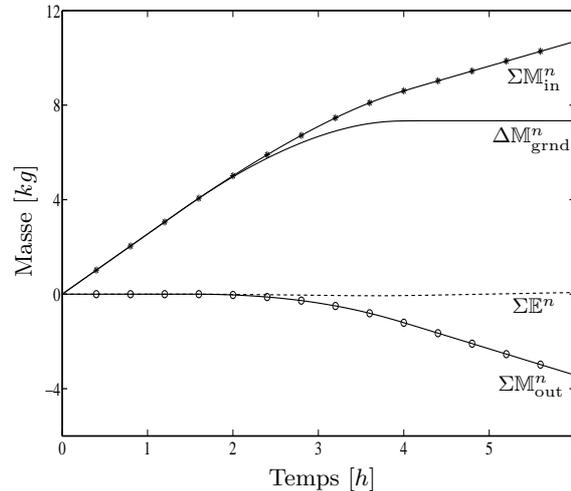


FIG. 3.8: Bilan de masse.

Le nombre d'arêtes ayant une condition de Dirichlet est indiqué sur la figure 3.9 et confirme les trois phases distinguées dans le bilan de masse. La simulation commence avec une condition de Neumann sur l'ensemble de l'interface  $\mathcal{I}$ . Ensuite l'affleurement de la nappe débute avec

l'apparition de la première arête avec une condition de Dirichlet. Le nombre d'arêtes de Dirichlet se stabilise lorsque le système atteint l'équilibre.

L'indicateur  $\mathcal{I}_s$  reporté sur la figure 3.10 traduit correctement l'état de stationnarité du système en devenant très faible (inférieur à  $10^{-8}$ ) quand la nappe atteint sa position finale.

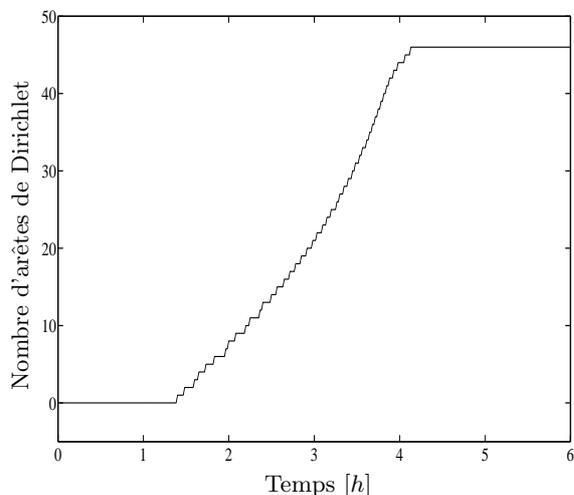


FIG. 3.9: Evolution des CL.

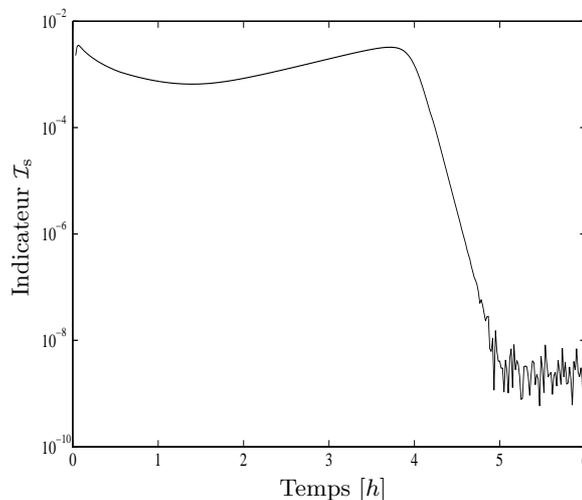


FIG. 3.10: Indicateur de stationnarité.

Le champ de vitesse (en  $mm.h^{-1}$ ) à proximité de la surface du domaine est tracé sur la figure 3.11 à plusieurs instants. Nous avons choisi de l'évaluer en utilisant le gradient par morceaux sur chaque élément (noté  $\nabla_{\mathfrak{h}}$ ) de la charge hydraulique (sans utiliser la correction  $H(div, \Omega)$ -conforme introduite par Ern, Nicaise et Vohralík [ENV07]),

$$v_{\mathfrak{h}}(\psi_{\mathfrak{h}}) = -\overline{K(\psi_{\mathfrak{h}})} \nabla_{\mathfrak{h}}(\psi_h + z),$$

où  $\overline{K(\psi_{\mathfrak{h}})}$  est la fonction constante par morceaux égale à la valeur moyenne de  $K(\psi_{\mathfrak{h}})$  sur chaque élément (évaluée par une quadrature à 7 points de degré 5). Comme la charge hydraulique est  $\mathbb{P}_1$ , les deux composantes de la vitesse sont constantes sur chaque triangle. Dans le champ de vitesse en haut de la figure 3.11, les triangles proches de la surface ont des vecteurs vitesse verticaux et dirigés vers le bas ce qui traduit l'infiltration totale de la pluie dans le sol. Les autres éléments du domaine ont un vecteur vitesse d'intensité faible. Le deuxième champ de vitesse représenté à 1 heure présente également des vecteurs vitesse verticaux descendants sur les triangles proches de la surface. La montée de la nappe est visible sur les éléments de la partie gauche du domaine proches de la cote  $0.7m$  puisque les vecteurs vitesse de ces éléments sont verticaux ascendants. Le troisième champ est représenté à  $1h40$  et se différencie du champ précédent par l'exfiltration qui est visible sur la dernière arête de l'interface  $\mathcal{I}$ . L'exfiltration apparaît clairement dans le dernier champ sur les triangles où les vecteurs vitesse sont dirigés vers l'extérieur du domaine. Il est clair que les lignes de courant proches de la surface ont leurs deux extrémités sur l'interface  $\mathcal{I}$  confirmant ainsi que l'eau infiltrée sur une partie de la surface s'exfiltre par une autre partie. Une vitesse normale quasiment nulle sur quelques éléments est visible puisque certains vecteurs vitesses sont pratiquement parallèles à l'interface.

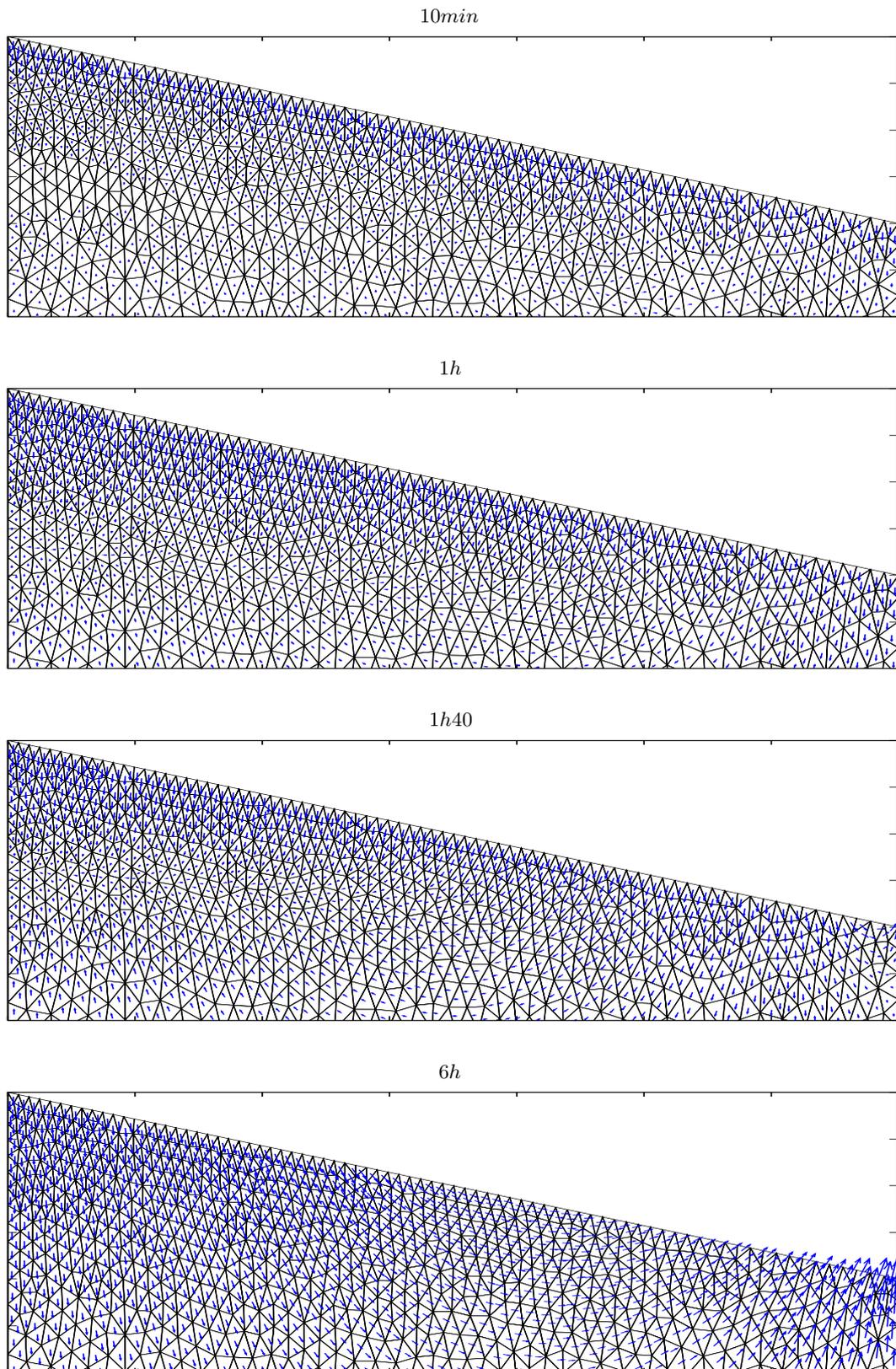


FIG. 3.11: Champs de vitesse proches de la surface à différents instants.

### 3.2.2 Drain

Nous proposons un cas test avec un drain situé à l'intérieur d'un domaine rectangulaire (voir la figure 3.12). La géométrie, le temps final de la simulation et le pas de temps utilisés sont

$$L = 4m, \quad P = 1m, \quad T = 18h \quad \text{et} \quad \delta t = 1min.$$

La condition initiale est hydrostatique avec une nappe coïncidant avec le fond du domaine et des conditions aux limites d'imperméabilité sont imposées sur les parois et le fond,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Une pluie d'intensité constante égale à 10% de la conductivité hydraulique à saturation est imposée sur le sol pendant les 6 premières heures uniquement,

$$\begin{aligned} v_r \cdot n_\Omega &= -0.1K_s cm.s^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, 6h], \\ v_r \cdot n_\Omega &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [6h, T]. \end{aligned}$$

Le centre  $c_d$  du drain de rayon  $r_d$  est situé proche du fond sur l'axe de symétrie du domaine parallèle aux parois latérales,

$$c_d = (200cm, 3cm) \quad \text{et} \quad r_d = 1cm.$$

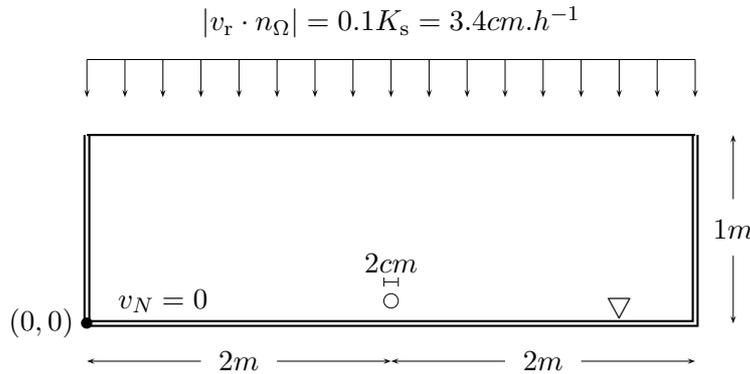


FIG. 3.12: Description du cas test avec drain.

Le sol est constitué du sable utilisé dans le cas test d'Haverkamp qui est caractérisé par les relations (2.27) et dont nous rappelons les valeurs des trois paramètres physiques  $\theta_r$ ,  $\theta_s$  et  $K_s$

$$\theta_r = 0.075, \quad \theta_s = 0.287 \quad \text{et} \quad K_s = 9.44 \cdot 10^{-3} cm.s^{-1}.$$

La teneur en eau et la conductivité hydraulique sont représentées sur la figure 2.5 de la section 2.2.3. Les paramètres de ce cas test (géométrie et intensité de la pluie) ne conduisent pas à l'affleurement de la nappe. L'ensemble  $\mathcal{E}$  sur lequel s'appliquent des conditions de Signorini est ainsi réduit au seul drain  $\mathcal{D}$ .

Concernant la prise en compte du drainage, il est important de noter que les dimensions des drains sont de l'ordre du centimètre alors que les dimensions du domaine sont ici de l'ordre du mètre. Le rayon du drain étant de  $1\text{cm}$ , son périmètre est d'environ  $6\text{cm}$  et, en utilisant une vingtaine de segments pour représenter convenablement sa circonférence, la taille des arêtes est de l'ordre de  $0.3\text{cm}$ . Un maillage structuré du domaine, constitué par exemple de triangles rectangles ayant leur plus petit côté égal à  $0.3\text{cm}$  aurait  $720000$  éléments ( $300 \times 1200 \times 2$ ). Pour réduire ce nombre nous effectuons un raffinement local autour du drain comme le montrent les figures 3.13 et 3.14. En prenant des triangles de  $10\text{cm}$  de côté sur les bords extérieurs du domaine, le maillage localement raffiné contient  $2009$  éléments. La présence du drain multiplie ainsi par  $2.5$  le nombre d'éléments du maillage structuré constitué de triangles rectangles de  $10\text{cm}$  de côté puisque ce maillage contient  $800$  éléments ( $10 \times 40 \times 2$ ). Le gain par rapport au maillage fin uniforme décrit précédemment est considérable car le nombre d'éléments est divisé par  $360$ . La simulation a été faite sur l'ensemble du domaine mais aurait pu être réalisée sur une seule moitié pour d'évidentes raisons de symétrie.

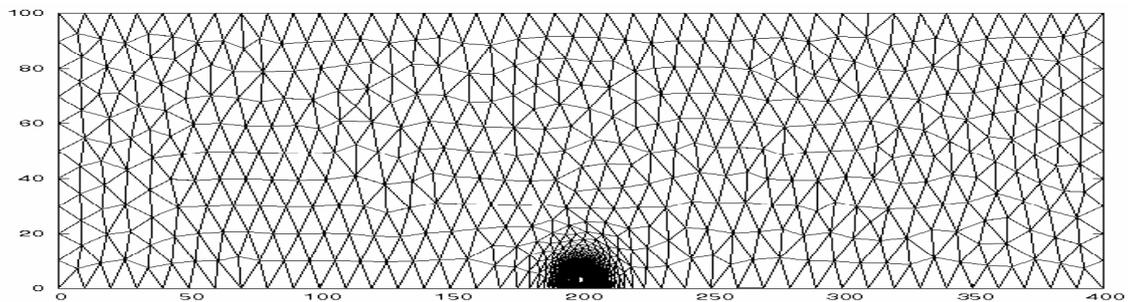


FIG. 3.13: Maillage avec drain.

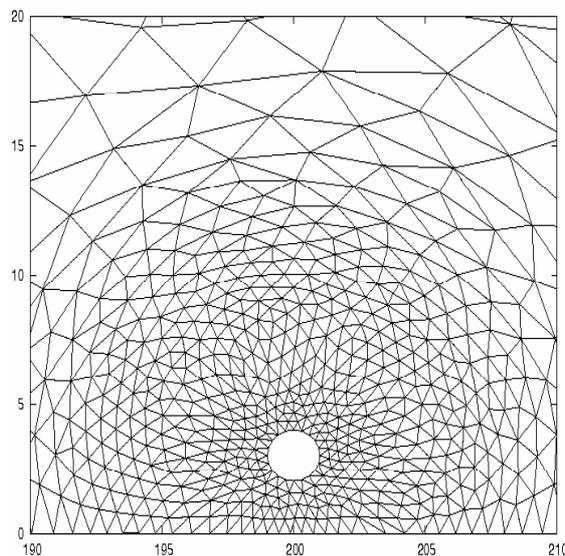


FIG. 3.14: Raffinement local autour du drain.

Sur la figure 3.15, la position de la nappe est repérée en trait continu à plusieurs instants. Comme dans le cas test précédent, la partie saturée du sous-sol est de couleur foncée alors que la partie insaturée est de couleur claire. La nappe est horizontale pendant la saturation de la partie du sous-sol située sous le drain. Ensuite l'effet du drain est clairement visible sur la position de la nappe à 3 et 6 heures. En effet, en l'absence de drain, les iso-valeurs de la charge hydraulique seraient horizontales ce qui correspondrait à une répartition de pression hydrostatique. Après l'arrêt de la pluie il y a un abaissement progressif de la nappe. Cela est observé pour la position finale de la nappe (18 heures) qui est presque horizontale au niveau du drain. Comme attendu, toutes les positions de la nappe présentent une symétrie par rapport à l'axe vertical passant par le centre du drain.

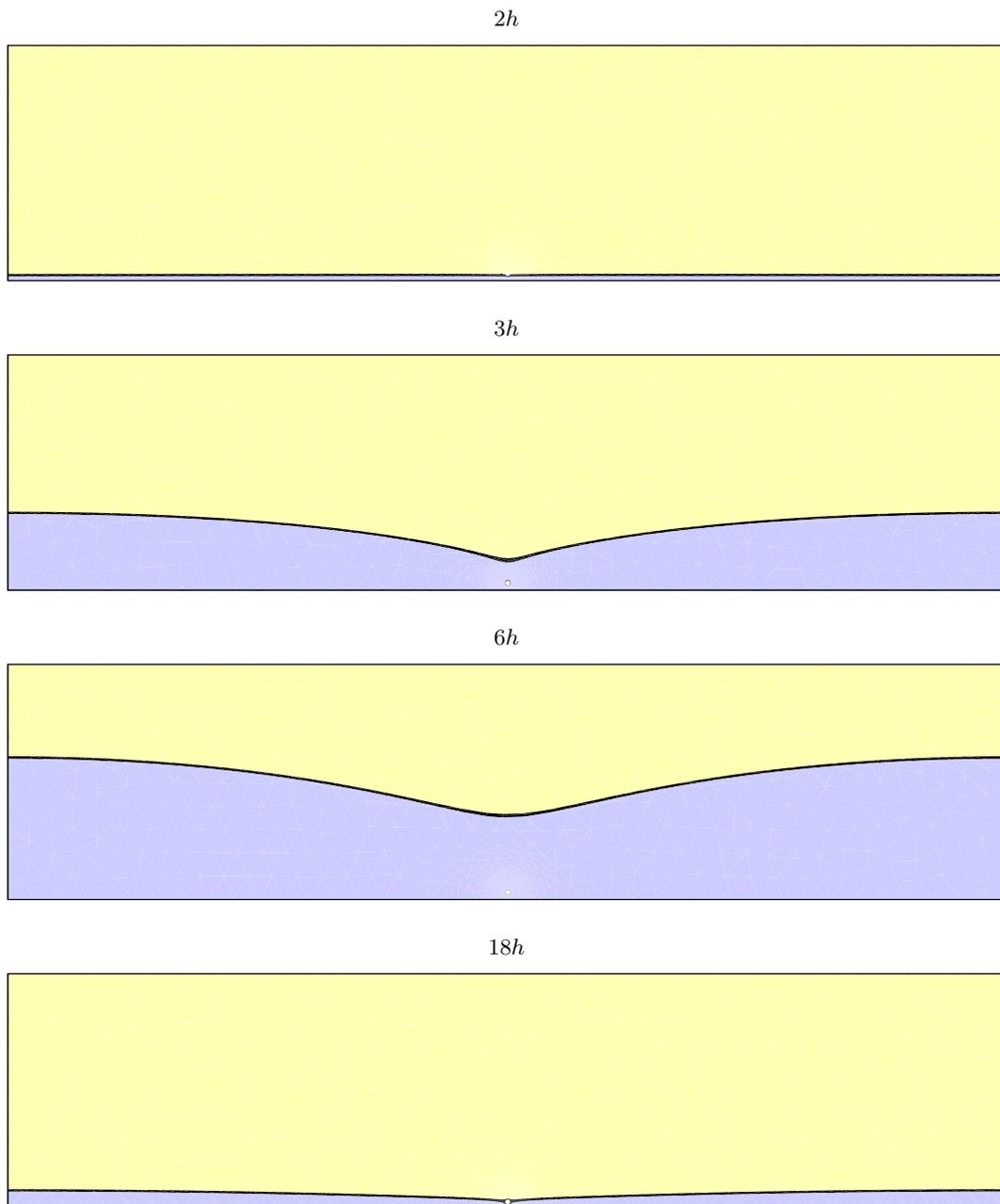


FIG. 3.15: Position de la nappe à différents instants.

La figure 3.16 montre les différents couples charge hydraulique/vitesse normale sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$  pendant la simulation. Les phases précédemment décrites sont illustrées par les positions successives des nuages de points :

- A  $2h$ , la charge hydraulique est négative et la vitesse normale est nulle. Le nuage de points est seulement sur la branche  $\{v_n = 0\}$  traduisant une saturation du sol autour du drain.
- A  $3h$ , les couples sont sur la branche  $\{\psi = 0\}$  puisque le sol est complètement saturé au niveau du drain.
- A  $6h$ , les couples se sont déplacés vers le haut de la branche verticale traduisant une augmentation de la vitesse normale.
- A  $18h$ , le nuage se trouve sur les deux branches puisque le drain a permis de désaturer le sol après l'arrêt de la pluie.

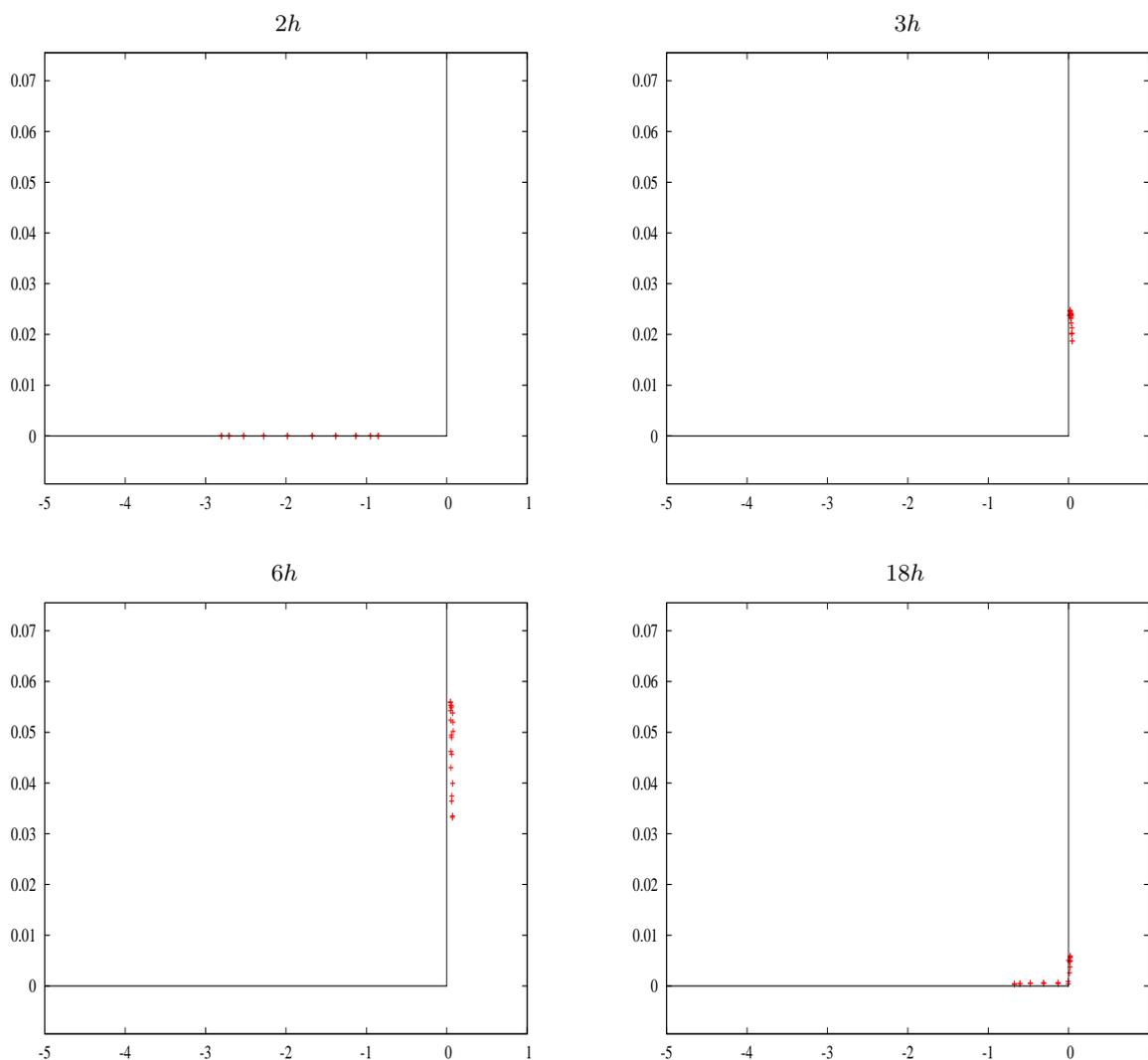


FIG. 3.16: Nuages de points  $(\psi_b^n, v_b^n \cdot n_\Omega)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_1$ .

Le bilan de masse est obtenu comme précédemment en multipliant l'équation (3.12) par la masse volumique de l'eau  $\rho$  et en effectuant la somme sur l'intervalle  $[0, n\delta t]$ ,

$$\underbrace{\rho(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^0)}_{\Delta M_{\text{grnd}}^n} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t \tilde{F}_{\mathcal{I}}^i}_{M_{\text{in}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t \tilde{F}_{\mathcal{D}}^i}_{M_{\text{out}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta V^i}_{\mathbb{E}^i}.$$

L'ensemble sur lequel l'infiltration se produit est inclus dans  $\mathcal{I}$  et l'ensemble sur lequel l'exfiltration se produit est inclus dans  $\mathcal{D}$ . Les quatre quantités  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{\text{in}}^i$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{\text{out}}^i$  et  $\sum_{i=1}^n \mathbb{E}^i$  sont représentées sur la figure 3.17. Le bilan de masse valide que l'eau s'infiltré complètement pendant les deux premières heures car la variation de masse d'eau dans le sol est égale à la masse apportée par la pluie. Dans la phase suivante, l'eau commence à s'exfiltrer et le drainage débute. L'augmentation de la masse d'eau dans le sol est alors moins importante que la masse d'eau venant de la pluie. Lorsque la pluie cesse, il n'y a plus d'eau qui entre dans le système et la variation de masse dans le sol est opposée à la quantité de masse qui passe par le drain. L'erreur commise sur la conservation de la masse est faible en comparaison de la masse d'eau initialement contenue dans le sol (écart maximal relatif de l'ordre de 1%). Cette accumulation des erreurs en temps, compatible avec la propriété 2, est plus importante que dans le cas d'affleurement car la simulation est ici plus longue et comporte deux phases (saturation puis drainage).

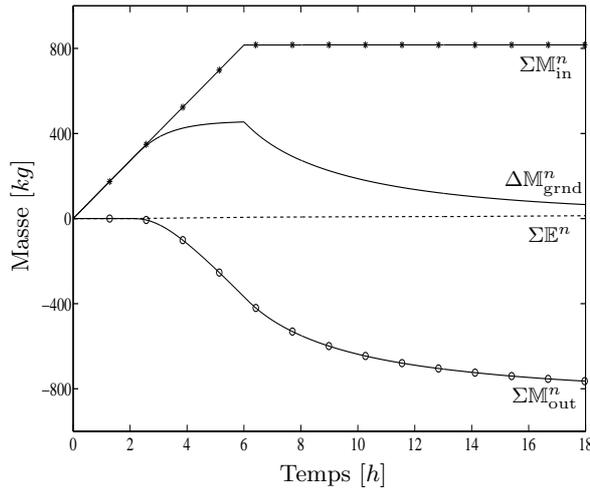


FIG. 3.17: Bilan de masse.

Le nombre d'arêtes ayant une condition de Dirichlet est indiqué sur la figure 3.18 et corrobore les trois phases identifiées dans le bilan de masse. Le milieu étant insaturé à l'initialisation, la simulation débute avec une condition de Neumann homogène imposée sur toutes les arêtes du drain. Puis, la zone au niveau du drain devient saturée avec le passage à des conditions aux limites de Dirichlet sur toutes les arêtes situées au bord du drain. Quand la pluie cesse, le sol se draine lentement et les conditions aux limites imposées sur certaines arêtes du drain redeviennent peu à peu (après 10h de simulation) de type Neumann.

L'indicateur de stationnarité  $\mathcal{I}_s$  tracé sur la figure 3.19 montre que le système tend exponentiellement vers une solution stationnaire sur l'intervalle  $[3h, 6h]$ . Cette première solution stationnaire correspond à un état d'équilibre entre la pluie et le drainage. Dans cette phase, l'indicateur est divisé par 10 en 2.4 heures environ : le temps caractéristique de la convergence exponentielle vers l'état stationnaire est de l'ordre d'une heure. Après l'arrêt de la pluie, le système tend vers

une seconde solution stationnaire qui est l'état d'équilibre hydrostatique ayant une position de nappe située au niveau du drain. Dans cette deuxième phase, les variations de l'indicateur de stationnarité coïncident avec les changements de conditions aux limites autour du drain.

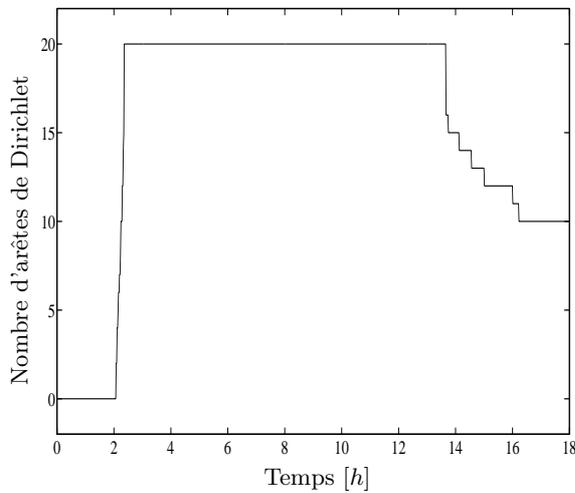


FIG. 3.18: Evolution des CL.

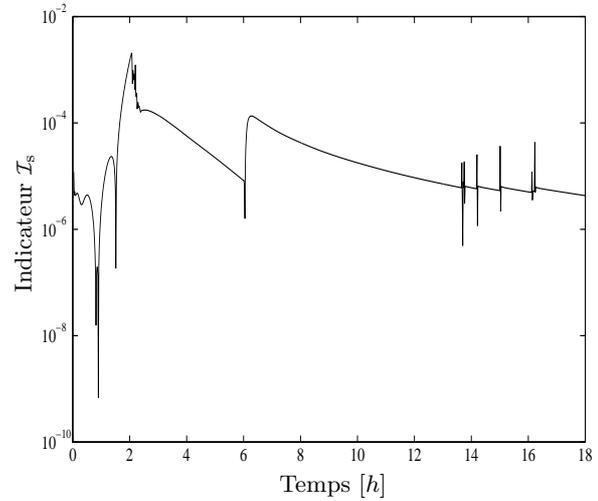
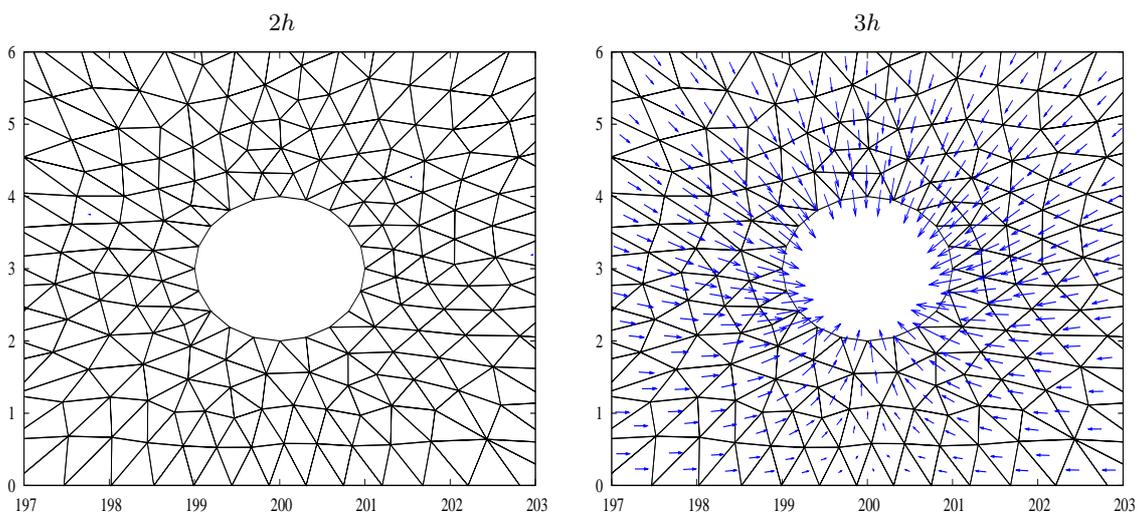


FIG. 3.19: Indicateur de stationnarité.

La figure 3.20 présente à plusieurs instants le champ de vitesse constant par morceaux (en  $cm$  par  $30s$ ) sur quelques éléments près du drain. Le premier champ confirme que les vitesses sont pratiquement nulles au début de la simulation. Le champ tracé à  $3h$  est radial et converge vers le centre du drain car toutes les conditions sont de Dirichlet. Les vecteurs vitesse sur les triangles proches du fond sont horizontaux, confirmant que la vitesse normale est nulle sur ce bord où une condition de Neumann homogène est imposée. Il en est de même du champ tracé à  $6h$  dans lequel la norme des vecteurs vitesse est plus importante qu'à  $3h$  car le milieu est plus saturé. Le champ de vitesse à  $12h$  est différent des deux précédents. La pluie ayant cessé, les vecteurs sont d'amplitude moindre. De plus, les deux types de conditions aux limites sont imposés sur le drain : Neumann sur les 6 arêtes supérieures et Dirichlet sur les 14 arêtes inférieures où l'exfiltration se produit.



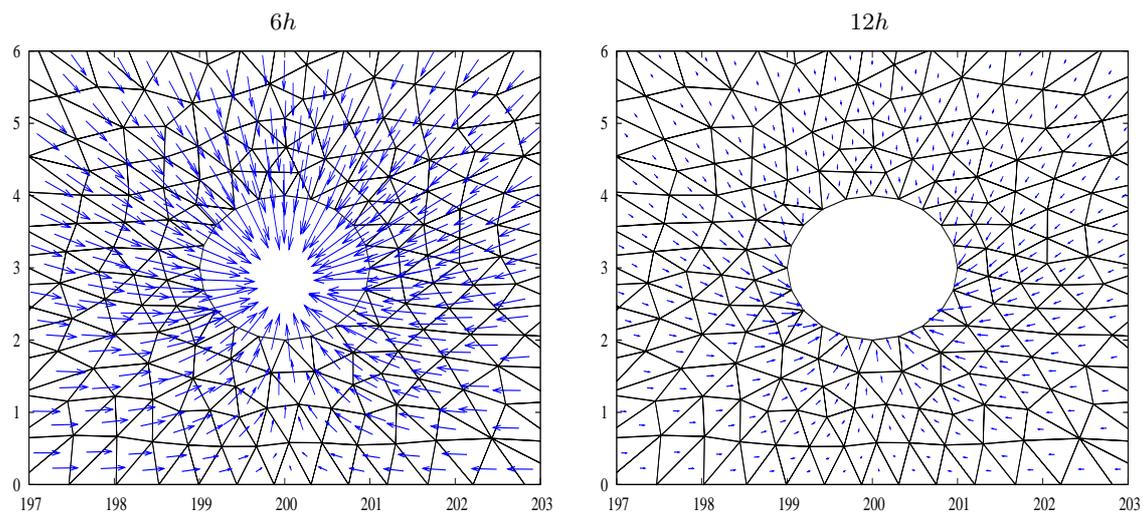


FIG. 3.20: Champ de vitesse  $v_{\mathbf{i}}$  autour du drain à différents instants.



# Chapitre 4

## Couplage avec le ruissellement surfacique

Les conditions aux limites de Signorini considérées dans le chapitre précédent ne prennent pas en compte le ruissellement surfacique lorsqu'une nappe affleure ou en cas de ruissellement hortonien lorsque les capacités d'infiltration du sol sont insuffisantes. Nous proposons dans ce chapitre d'inclure ce phénomène dans un modèle de couplage entre l'équation de Richards et l'approximation de l'onde cinématique.

Nous commençons par présenter le problème continu avec notamment la condition de couplage imposée sur la charge hydraulique et la hauteur d'eau à la surface du sol. L'équation de l'onde cinématique est ensuite discrétisée par une méthode de volumes finis et le schéma d'Euler explicite. Nous proposons deux algorithmes de couplage pour lesquels une propriété de conservation de la masse est établie. Nous détaillons ensuite les quatre cas tests considérés pour évaluer nos algorithmes dans diverses situations : assèchement d'un sol, ruissellement dû à la pluie, ruissellement dû à l'injection d'eau dans le sol et ruissellement hortonien. Enfin, nous présentons une application concrète en hydrologie relative au fonctionnement d'un petit bassin versant drainé.

### 4.1 Principe du couplage

#### 4.1.1 Problème continu et ensemble admissible

Le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  désigne à nouveau la partie du sol où interviennent les écoulements souterrains. La fonction  $h$ , qui désigne la hauteur d'eau à la surface du sol, est une inconnue supplémentaire à déterminer sur l'interface  $\mathcal{I}$  en fonction du temps (voir la figure 4.1). En omettant pour l'instant les conditions sur l'ensemble  $\mathcal{I} \times [0, T]$ , le système décrivant les écoulements souterrains s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) = -K(\psi)\nabla(\psi + z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = v_N & \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T], \\ \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

Le système régissant les écoulements superficiels est composé de l'équation de l'onde cinématique avec un terme source  $-v_r \cdot n_\Omega$  provenant de la pluie et un terme source (ou puits)  $v(\psi) \cdot n_\Omega$  provenant du couplage, ainsi qu'une condition initiale  $h^0$  et une condition à la limite  $h_A$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x \varphi(h, S) = (v(\psi) - v_r) \cdot n_\Omega & \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ h(\cdot, 0) = h^0 & \text{sur } \mathcal{I}, \\ h(A, \cdot) = h_A & \text{en } A \times [0, T]. \end{cases} \quad (4.2)$$

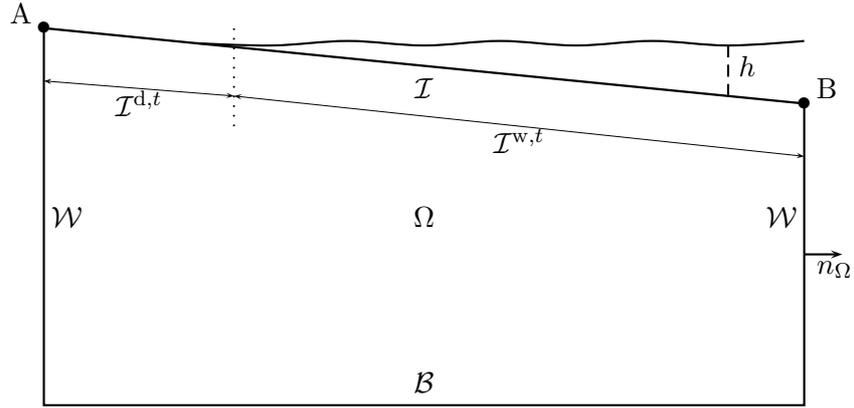


FIG. 4.1: Principe du couplage des écoulements souterrains et superficiels.

L'équation de l'onde cinématique est une loi de conservation scalaire hyperbolique si la hauteur d'eau est strictement positive. De plus, une condition à la limite est uniquement nécessaire au point A puisque les ondes se propagent de la gauche vers la droite.

Le problème modèle pour le couplage des écoulements souterrains et superficiels consiste à trouver le couple de fonctions  $(\psi, h)$  tels que

$$\begin{cases} \psi \text{ est solution de (4.1)} & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ h \text{ est solution de (4.2)} & \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\ (\psi, h) \in \mathcal{A}_2 & \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \end{cases} \quad (4.3)$$

dans lequel  $\mathcal{A}_2$  est l'ensemble des états  $(\psi, h)$  admissibles. L'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ , tracé à la figure 4.2, comprend deux branches. La branche  $\{h = 0\}$  est associée à un sol insaturé (ou sec par abus de langage) sur lequel la charge hydraulique est inférieure ou égale à zéro. La branche  $\{h = \psi\}$  est associée à un sol saturé (ou mouillé par abus de langage) où la charge hydraulique et la hauteur d'eau sont égales. Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{A}_2$  est défini par

$$\mathcal{A}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(\psi, h) \in \mathbb{R}^2, h = \psi^+\}, \quad (4.4)$$

où  $\psi^+ = \frac{1}{2}(\psi + |\psi|)$  est la partie positive de  $\psi$ .

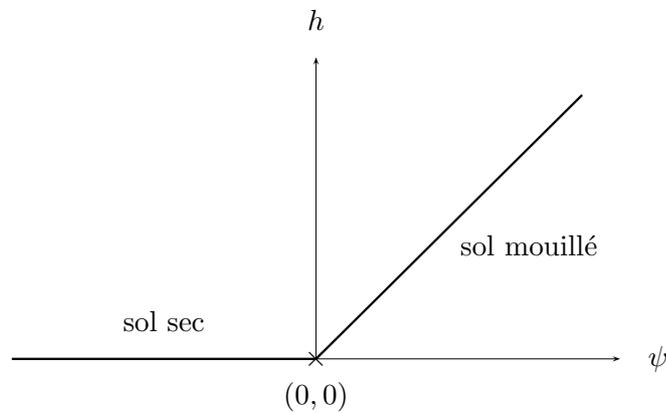


FIG. 4.2: L'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

Nous considérons principalement des situations dans lesquelles l'écoulement de surface est produit par l'exfiltration. Des déplacements du couple  $(\psi, h)$  sur l'ensemble admissible sont donc attendus. Des situations plus drastiques, comme des ondes ruisselantes sur des sols insaturés dans le cas du ruissellement hortonien, peuvent conduire dans certains cas à un départ de l'ensemble admissible en particulier si le sol est très sec. Dans ces cas limites, d'autres modèles de couplage peuvent être plus pertinents. Si les processus d'infiltration sont très lents par exemple, un modèle où les écoulements de surface se produisent sur un sol insaturé peut être envisagé. Ces études sortent du cadre de ce travail et ne seront donc pas abordées.

Les deux ensembles  $\mathcal{I}^{w,t}$  et  $\mathcal{I}^{d,t}$  dépendent du temps et sont définis en fonction de la quantité  $h$  de la façon suivante,

$$\mathcal{I}^{w,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{I}, h(x, t) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}^{d,t} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathcal{I}, h(x, t) = 0\}.$$

Il sera utile de reformuler le système (4.1) en désignant par  $\omega_\psi$  et  $\omega_v$  les données à imposer respectivement dans les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sur  $\mathcal{I} \times [0, T]$ ,

$$\begin{cases} \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) = -K(\psi)\nabla(\psi + z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = v_N & \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T], \\ v(\psi) \cdot n_\Omega = \omega_v & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{I}^{d,t}\}, \\ \psi = \omega_\psi & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{I}^{w,t}\}, \\ \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (4.5)$$

Les quantités  $\omega_\psi$  et  $\omega_v$  sont obtenues par la résolution de l'équation de l'onde cinématique et seront précisées dans les sections 4.1.3 et 4.1.4. Le système (4.5) est proche du système (3.3) puisque la seule différence concerne la condition aux limites de Dirichlet sur  $\mathcal{I}^{w,t}$  qui est désormais non-homogène pour garantir la continuité des pressions. Dans les sections suivantes, les variables de couplage feront référence au quadruplet  $\{\mathcal{I}^{w,t}, \mathcal{I}^{d,t}, \omega_\psi, \omega_v\}$ .

#### 4.1.2 Discrétisation de l'équation de l'onde cinématique

L'équation de l'onde cinématique est discrétisée sur un maillage de l'interface  $\mathcal{I}$ . Pour cela, nous considérons la trace du maillage  $\mathcal{T}_h$  sur  $\mathcal{I}$  et désignons par  $\mathcal{I}_h$  l'ensemble des faces de  $\mathcal{I}$  et par  $N_{\mathcal{I}}$  le nombre de ces faces. Un schéma de type volumes finis avec des flux de Godunov et un pas de temps  $\delta t'$  est choisi. Le pas de temps est inférieur ou égal au pas de temps utilisé pour l'équation de Richards, c'est-à-dire que  $\delta t' = \delta t/n'$  avec  $n'$  entier et  $n' \geq 1$  (voir figure 4.3). Ce choix est effectué parce que le schéma explicite est restreint par une condition CFL qui assure sa stabilité. Ce n'est pas le cas pour l'équation de Richards dans laquelle l'utilisation des BDF permet souvent d'utiliser un pas de temps plus important comme nous le verrons dans la section 4.2. Cela conduit aux notations suivantes :  $h_h^{n,k}$  pour  $n \in \{1 \cdots N_T\}$  et  $k \in \{0 \cdots n'\}$  est l'approximation de  $h$  au temps  $n\delta t + k\delta t'$  et pour simplifier nous écrivons  $h_h^n \stackrel{\text{def}}{=} h_h^{n,0} = h_h^{n-1,n'}$ .

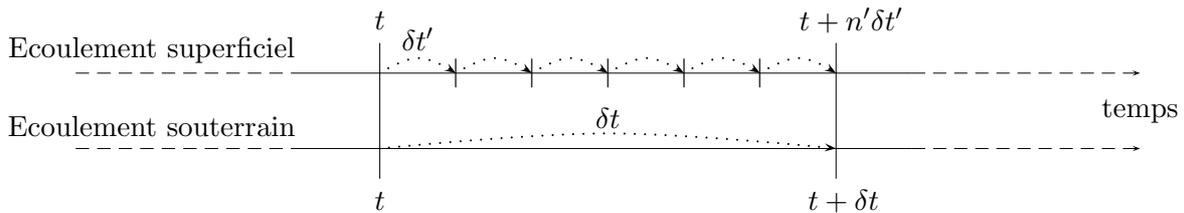


FIG. 4.3: Multi-pas de temps pour les écoulements souterrain et superficiel.

Soient  $x_i$ ,  $l_i$ ,  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}$  définis respectivement comme le centre, la longueur, et les sommets gauche et droit d'une arête quelconque  $e_i$  du maillage de l'interface  $\mathcal{I}$  (voir figure 4.4). La pente de  $e_i$  est notée  $S_i$ . Comme la fonction de flux  $\varphi$  est convexe et que la hauteur d'eau est positive ou nulle, le flux de Godunov coïncide avec le flux amont, ce qui conduit au schéma

$$\forall k \in \{0 \cdots n' - 1\}, \forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, \quad (4.6)$$

$$h_i^{n-1,k} = h_i^{n-1,k-1} + \frac{\delta t'}{l_i} \left( \varphi(h_{i-1}^{n-1,k-1}, S_{i-1}) - \varphi(h_i^{n-1,k-1}, S_i) - l_i v_{\mathbf{r}}^{n-1,k-1} \cdot n_{\Omega} + \int_{e_i} v_{\mathbf{h}}^{*,n} \right),$$

où pour tout  $i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}$ ,  $h_i^{n,k} = h_{\mathbf{h}}^{n,k}|_{e_i}$  et  $v_{\mathbf{h}}^{*,n}$  est le flux discret à l'interface défini dans le paragraphe suivant. Notons que le flux à l'interface est le même pour l'ensemble des sous-pas de temps compris dans un pas de temps de l'équation de Richards. Cette écriture du schéma de Godunov utilise le caractère monodimensionnel de l'onde cinématique. Lorsqu'une lame se propage sur une surface, l'écriture du schéma de Godunov en maillage non-structuré fait classiquement intervenir une valeur absolue pour déterminer la maille amont.

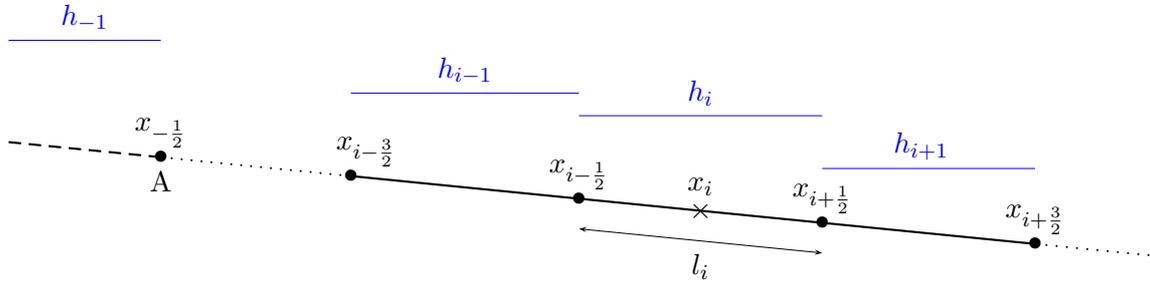


FIG. 4.4: Discrétisation de l'interface  $\mathcal{I}$ .

Le schéma (4.6) nécessite la connaissance de la hauteur d'eau à  $t = 0$  et sur une arête fictive à gauche de la première arête pour tous les temps discrets,

$$\forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, h_i^0 = h^0(x_i) \quad \text{et} \quad \forall n \in \{1 \cdots N_T\}, \forall k \in \{0 \cdots n' - 1\}, h_{-1}^{n,k} = h_A^{n\delta t + k\delta t'}.$$

La condition CFL pour le schéma explicite (4.6) est

$$\delta t' \leq \min_{1 \leq i \leq N_{\mathcal{I}}} \left( \frac{l_i}{\varphi'(h_i, S_i)} \right).$$

En utilisant la définition de la fonction flux  $\varphi$  et en supposant que  $h_{\max}$  est une borne supérieure *a priori* de la hauteur d'eau  $h$  sur  $\mathcal{I} \times [0, T]$ , cette condition est assurée si

$$\delta t' \leq \frac{3}{5\mathcal{K}h_{\max}^{2/3}} \cdot \min_{1 \leq i \leq N_{\mathcal{I}}} \left( l_i S_i^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Sans la pluie et le terme de couplage, la condition CFL garantit un principe du maximum discret.

#### 4.1.3 Algorithme à un pas

Les définitions des trois ensembles  $\mathcal{I}_{\mathbf{h}}$ ,  $\mathcal{I}_{\mathbf{h}}^{\text{d},n}$  et  $\mathcal{I}_{\mathbf{h}}^{\text{w},n}$  sont identiques à celles des ensembles  $\mathcal{E}_{\mathbf{h}}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathbf{h}}^{\text{d},n}$  et  $\mathcal{E}_{\mathbf{h}}^{\text{w},n}$  données au chapitre précédent : en particulier,  $\mathcal{I}_{\mathbf{h}}^{\text{d},n} \cup \mathcal{I}_{\mathbf{h}}^{\text{w},n}$  forme une partition de  $\mathcal{I}_{\mathbf{h}}$ . Nous supposons dans cette section que le schéma en temps utilisé dans la discrétisation de l'équation de Richards est la BDF1 (schéma d'Euler implicite). Avec le schéma de type volumes

finis pour l'onde cinématique décrit au paragraphe précédent, nous obtenons ainsi un schéma global pour approcher le système couplé (4.3) à condition que l'évolution dans le temps des variables de couplage  $\{\mathcal{I}_h^{d,n}, \mathcal{I}_h^{w,n}, \omega_v^n, \omega_\psi^n\}$  pour  $n \in \{1 \cdots N_T\}$  soit connue. L'évolution dans le temps du système couplé est conçu pour satisfaire deux objectifs. Le premier est d'assurer que l'approximation de  $(\psi, h)$  reste dans l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$  pour tous les pas de temps. Le second est de garantir une conservation de la masse du système total (écoulements souterrain et surfacique). L'algorithme proposé s'appelle « algorithme de couplage à un pas » puisqu'il utilise la BDF1 dans laquelle seule la solution au pas de temps précédent est nécessaire. Pour simplifier la présentation de cet algorithme, nous définissons

- $\psi_h^n \leftarrow \text{Richards\_BDF1}(\mathcal{I}_h^{d,n}, \mathcal{I}_h^{w,n}, \omega_v^n, \omega_\psi^n, \psi_h^{n-1})$  comme la résolution par l'algorithme 1 de l'équation de Richards sur un pas de temps par la méthode SIPG, la BDF1 et les conditions aux limites sur  $\mathcal{I}$  données par  $\{\mathcal{I}_h^{d,n}, \mathcal{I}_h^{w,n}, \omega_v^n, \omega_\psi^n\}$ ,
- $h_h^n \leftarrow \text{Onde\_cinématique}(h_h^{n-1}, n', v_r^{n-1}, v_h^{*,n})$  comme la résolution de l'équation de l'onde cinématique par (4.6),
- $v_h^{*,n} \leftarrow \text{Vitesse\_Normale}(\mathcal{I}_h^{d,n}, \mathcal{I}_h^{w,n}, \omega_v^n, \omega_\psi^n, \psi_h^n)$  comme l'évaluation de la vitesse normale  $v_h^{*,n}$  sur  $\mathcal{I}$ , donnée comme précédemment par

$$v_h^{*,n}|_F \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \omega_v^n|_F & \text{si } F \in \mathcal{I}_h^{d,n}, \\ v(\psi_h^n)|_F \cdot n_\Omega + \eta K_s d_F^{-1}(\psi_h^n|_F - \omega_\psi^n|_F) & \text{si } F \in \mathcal{I}_h^{w,n}. \end{cases}$$

---

**Algorithme 4** Algorithme de couplage à un pas

---

**Entrées:**  $\psi_h^{n-1}$  et  $h_h^{n-1}$

$$\tilde{h}_h^n \leftarrow \text{Onde\_cinématique}(h_h^{n-1}, n', v_r^{n-1}, 0)$$

$$p = 0$$

$$h_h^{n,0} = \tilde{h}_h^n$$

**répéter**

$$p \leftarrow p + 1$$

$$\mathcal{I}_h^{d,n,p} \leftarrow \{e_i \in I_h, \exists k \in \{0 \cdots p-1\}, h_i^{n,k} < 0\}$$

$$\mathcal{I}_h^{w,n,p} \leftarrow I_h \setminus \mathcal{I}_h^{d,n,p}$$

$$\omega_v^{n,p} \leftarrow -\tilde{h}_h^n / \delta t \text{ sur } \mathcal{I}_h^{d,n,p}$$

$$\omega_\psi^{n,p} \leftarrow \tilde{h}_h^n \text{ sur } \mathcal{I}_h^{w,n,p}$$

$$\psi_h^{n,p} \leftarrow \text{Richards\_BDF1}(\mathcal{I}_h^{d,n,p}, \mathcal{I}_h^{w,n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_\psi^{n,p}, \psi_h^{n-1})$$

$$v_h^{*,n,p} \leftarrow \text{Vitesse\_Normale}(\mathcal{I}_h^{d,n,p}, \mathcal{I}_h^{w,n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_\psi^{n,p}, \psi_h^{n,p})$$

$$\forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, h_i^{n,p} = \tilde{h}_h^n + \delta t / l_i \int_{e_i} v_h^{*,n,p}$$

**jusqu'à**  $\forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, h_i^{n,p} \geq 0$

$$\psi_h^n = \psi_h^{n,p}$$

$$h_h^n = h_h^{n,p}$$

**Sorties:**  $\psi_h^n$  et  $h_h^n$

---

Nous détaillons maintenant le principe de l'algorithme 4. Tout d'abord, une prédiction  $\tilde{h}_h^n$  de la hauteur d'eau est calculée sans terme de couplage ( $v_h^{*,n} = 0$ ). Cette prédiction sert de condition aux limites de Dirichlet dans l'équation de Richards. Comme le schéma de Godunov satisfait un principe du maximum discret,  $\tilde{h}_i^n \geq 0$  pour tout  $i \in \{1 \cdots N_T\}$ , ce qui implique que  $\mathcal{I}_h^{d,n,1} = \emptyset$  et  $\mathcal{I}_h^{w,n,1} = \mathcal{I}$ . Nous commençons ainsi par supposer que l'interface  $\mathcal{I}$  est complètement saturée, la détermination de  $\omega_v^{n,1}$  étant alors inutile. Ensuite, l'équation de Richards est avancée d'un pas de temps et la vitesse normale  $v_h^{*,n,p}$  correspondante est calculée puis utilisée afin d'évaluer la hauteur d'eau  $h_h^{n,p}$ . Le signe de  $h_h^{n,p}$  est alors examiné sur toutes les faces de  $\mathcal{I}$ . Si la hauteur d'eau est positive ou nulle sur l'ensemble des faces de  $\mathcal{I}$ , les évaluations de la charge hydraulique et de la hauteur d'eau sont acceptées comme solutions du système couplé à l'instant  $n\delta t$ . Dans le cas contraire, une nouvelle partition de  $\mathcal{I}$  est déterminée en imposant une condition de Neumann sur les faces où la hauteur d'eau est négative. Cette condition est évaluée pour assécher complètement l'eau de surface ce qui traduit une infiltration complète dans le sol. Un nouveau couple charge hydraulique/hauteur d'eau est calculé jusqu'à convergence. La convergence de ce processus itératif est assurée car l'ensemble  $\mathcal{I}_h^{d,n,p}$  croît avec  $p$  (au sens de l'inclusion) alors que l'ensemble  $\mathcal{I}_h^{w,n,p}$  décroît. Un point essentiel est que l'algorithme 4 garantit une hauteur d'eau positive ou nulle. De plus, sur la partie mouillée de l'interface, nous avons l'égalité

$$\forall n \in \{1 \cdots N_T\}, \quad \forall F \in \mathcal{I}_h^{w,n}, \quad \psi_h^n|_F = \tilde{h}_h^n|_F,$$

puisque la valeur imposée sur la condition de Dirichlet  $\omega_\psi^{n,p}$  est fixée pendant la boucle en  $p$  dans l'algorithme 4. Ce n'est pas la condition  $\psi = h$  imposée par l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$  mais une approximation en  $\mathcal{O}(\delta t)$  de celle-ci. Sur la partie sèche de l'interface, la hauteur d'eau est nulle et l'inégalité suivante est vérifiée,

$$\forall n \in \{1 \cdots N_T\}, \quad \forall F \in \mathcal{I}_h^{d,n}, \quad \psi_h^n|_F \leq \tilde{h}_h^n|_F.$$

Il s'agit aussi d'une approximation en  $\mathcal{O}(\delta t)$  de la condition  $\psi \leq 0$  qui est imposée sur l'ensemble admissible. Enfin, dans le cas particulier où la hauteur d'eau  $h_i^{n-1}$  et les flux amont sont nuls sur une arête quelconque  $e_i$  pendant l'intervalle de temps  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$ , la condition de Neumann dans l'équation de Richards sur cette arête est égale à l'intensité de la pluie. Nous retrouvons ainsi la situation traitée au chapitre 3.

Nous étudions maintenant la conservation du volume d'eau. En prenant une fonction test  $\phi$  égale à 1 dans la méthode SIPG, en sommant sur l'ensemble des éléments du maillage et en utilisant la BDF1 pour approcher le terme instationnaire, nous obtenons

$$V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1} = (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{WB}}^n)\delta t + \epsilon^n, \quad (4.7)$$

dans laquelle  $F_{\mathcal{I}}^n$  (resp.  $F_{\mathcal{WB}}^n$ ) est le flux pendant l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  à travers l'interface  $\mathcal{I}$  (resp. à travers le fond et les parois latérales),

$$F_{\mathcal{I}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{I}} v_h^{*,n} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{WB}}^n \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\mathcal{W} \cup \mathcal{B}} v_N^n, \quad (4.8)$$

et  $\epsilon^n$  est l'erreur due à la résolution du système non-linéaire. Le volume total d'eau dans l'écoulement surfacique à l'instant  $n\delta t$  est obtenu en intégrant la hauteur d'eau sur l'intervalle  $\mathcal{I}$

$$V_{\text{over}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{I}} h_h^n.$$

La variation totale d'eau dans l'équation de l'onde cinématique sur l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  est obtenue en sommant les contributions élémentaires de l'équation (4.6),

$$V_{\text{over}}^n - V_{\text{over}}^{n-1} = (-F_{\mathcal{I}}^n + F_{\text{ABr}}^n)\delta t, \quad (4.9)$$

où  $F_{\mathcal{I}}^n$  est déjà défini et  $F_{\text{ABr}}^n$  représente le flux d'eau pendant l'intervalle de temps  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  dû à la pluie et aux débits aux points A et B,

$$F_{\text{ABr}}^n \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{A}}^n + F_{\text{B}}^n + F_{\text{r}}^n,$$

$$F_{\text{A}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta t'}{\delta t} \sum_{k=1}^{n'} \varphi(h_{\text{A}}^{n-1,k}), \quad F_{\text{B}}^n \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\delta t'}{\delta t} \sum_{k=1}^{n'} \varphi(h_{N_{\mathcal{I}}}^{n-1,k}) \quad \text{et} \quad F_{\text{r}}^n \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\delta t'}{\delta t} \sum_{k=1}^{n'} \int_{\mathcal{I}} v_{\text{r}}^{n-1,k} \cdot n_{\Omega}.$$

Le volume total d'eau contenu dans le système couplé est la somme du volume d'eau de chaque sous-système,

$$V^n \stackrel{\text{def}}{=} V_{\text{grnd}}^n + V_{\text{over}}^n.$$

Lorsque les équations (4.7) et (4.9) sont sommées, les flux à l'interface s'annulent, ce qui donne

$$V^n - V^{n-1} = (F_{\mathcal{WB}}^n + F_{\text{ABr}}^n)\delta t + \epsilon^n.$$

En redéfinissant le défaut de volume d'eau, cette relation permet de retrouver la propriété 1 donnée dans le chapitre 3 concernant la conservation du volume d'eau avec l'algorithme de couplage à un pas.

**Propriété 3.** Soit  $\delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  défini comme

$$\delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} V^n - V^{n-1} - (F_{\mathcal{WB}}^n + F_{\text{ABr}}^n)\delta t.$$

Soit  $\Delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle de temps  $[0, n\delta t]$  défini par

$$\Delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \delta V^i.$$

Alors

$$|\Delta V^n| \leq nC\epsilon_{\text{alg1}},$$

où  $C$  est une constante et  $\epsilon_{\text{alg1}}$  le seuil de tolérance utilisé dans l'algorithme 1.

#### 4.1.4 Algorithme à deux pas

Nous supposons dans cette section que le schéma en temps utilisé dans la discrétisation de l'équation de Richards est la BDF2. L'observation essentielle est que l'algorithme de couplage à un pas n'est pas conservatif si le terme instationnaire de l'équation de Richards est approché par la BDF 2 car le schéma d'Euler explicite utilisé pour l'équation de l'onde cinématique mobilise un seul pas de temps. Ainsi, pour obtenir un schéma conservatif, le flux à l'interface  $F_{\mathcal{I}}^n$  utilisé dans l'équation de l'onde cinématique est modifié en un nouveau flux  $\Phi_{\mathcal{I}}^n$ , l'équation (4.9) devenant

$$V_{\text{over}}^n - V_{\text{over}}^{n-1} = (-\Phi_{\mathcal{I}}^n + F_{\text{ABr}}^n)\delta t. \quad (4.10)$$

Pour identifier l'expression de  $\Phi_{\mathcal{I}}^n$ , nous observons que l'utilisation de la BDF2 change (4.7) en

$$\frac{3}{2}V_{\text{grnd}}^n - 2V_{\text{grnd}}^{n-1} + \frac{1}{2}V_{\text{grnd}}^{n-2} = (F_{\mathcal{I}}^n + F_{\mathcal{WB}}^n)\delta t + \epsilon^n,$$

qui peut se réécrire

$$\frac{3}{2}(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^{n-1}) - \frac{1}{2}(V_{\text{grnd}}^{n-1} - V_{\text{grnd}}^{n-2}) - F_{\mathcal{WB}}^n\delta t = F_{\mathcal{I}}^n\delta t + \epsilon^n, \quad (4.11)$$

où les flux  $F_{\mathcal{I}}^n$  et  $F_{\mathcal{WB}}^n$  sont définis par (4.8). Une combinaison linéaire de l'équation (4.10) donne

$$\frac{3}{2}(V_{\text{over}}^n - V_{\text{over}}^{n-1}) - \frac{1}{2}(V_{\text{over}}^{n-1} - V_{\text{over}}^{n-2}) + \left(-\frac{3}{2}F_{\text{ABr}}^n + \frac{1}{2}F_{\text{ABr}}^{n-1}\right)\delta t = \left(-\frac{3}{2}\Phi_{\mathcal{I}}^n + \frac{1}{2}\Phi_{\mathcal{I}}^{n-1}\right)\delta t. \quad (4.12)$$

Le nouveau flux à l'interface  $\Phi_{\mathcal{I}}^n$  est déterminé pour que le flux de masse  $F_{\mathcal{I}}^n$  soit exactement équilibré par le flux à l'interface dans (4.11), d'où

$$F_{\mathcal{I}}^n = \frac{3}{2}\Phi_{\mathcal{I}}^n - \frac{1}{2}\Phi_{\mathcal{I}}^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathcal{I}}^n = \frac{2}{3}F_{\mathcal{I}}^n + \frac{1}{3}\Phi_{\mathcal{I}}^{n-1}.$$

Au premier pas de temps où un schéma implicite à un pas est utilisé, la conservation du volume d'eau est directement imposée en prenant  $\Phi_{\mathcal{I}}^1 \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{I}}^1$ .

---

**Algorithme 5** Algorithme de couplage à deux pas

---

**Entrées:**  $\psi_{\mathfrak{h}}^{n-1}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n-2}$  et  $h_{\mathfrak{h}}^{n-1}$

⋮

**répéter**

⋮

$$\omega_v^{n,p} \leftarrow -(3\tilde{h}_{\mathfrak{h}}^n/\delta t + v_{\mathfrak{h}}^{*,n-1})/2 \text{ sur } \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\text{d},n,p}$$

$$\psi_{\mathfrak{h}}^{n,p} \leftarrow \text{Richards\_BDF2}(\mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\text{d},n,p}, \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{\text{w},n,p}, \omega_v^{n,p}, \omega_{\psi}^{n,p}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n-1}, \psi_{\mathfrak{h}}^{n-2})$$

⋮

$$\forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, h_i^{n,p} = \tilde{h}_i^n + \delta t/l_i \int_{e_i} (2v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p} + v_{\mathfrak{h}}^{*,n-1})/3$$

⋮

**jusqu'à**  $\forall i \in \{1 \cdots N_{\mathcal{I}}\}, h_i^{n,p} \geq 0$

⋮

$$v_{\mathfrak{h}}^{*,n} = v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p}$$

**Sorties:**  $\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n$  et  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n}$

---

L'algorithme de couplage à deux pas est présenté par l'algorithme 5 dans lequel seules les différences avec l'algorithme 4 sont indiquées. La modification principale concerne l'évaluation de  $h_i^{n,p}$ . La donnée de Neumann  $\omega_v^{n,p}$  est aussi modifiée afin que la condition de Neumann conduise à un assèchement de la face correspondante. Enfin, l'approximation discrète  $\psi_{\mathfrak{h}}^{n-2}$  au temps  $(n-2)\delta t$  est ajoutée aux données d'entrée et la vitesse à l'interface  $v_{\mathfrak{h}}^{*,n}$  est ajoutée aux données de sortie à chaque pas de temps puisque celle-ci est utilisée dans le pas de temps suivant. Le résultat concernant la conservation du volume d'eau pour l'algorithme à deux pas est le suivant.

**Propriété 4.** Soit  $\delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle  $[(n-1)\delta t, n\delta t]$  défini comme

$$\delta V^n \stackrel{\text{def}}{=} V^n - V^{n-1} - (\tilde{F}_{\mathcal{WB}}^n + F_{\text{ABr}}^n)\delta t, \quad (4.13)$$

où  $\tilde{F}_{\mathcal{WB}}^n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{3}F_{\mathcal{WB}}^n + \frac{1}{3}\tilde{F}_{\mathcal{WB}}^{n-1}$ . Soit  $\Delta V^n$  le défaut de volume d'eau total pendant l'intervalle de temps  $[0, n\delta t]$  défini comme précédemment. Alors

$$|\Delta V^n| \leq \frac{1}{2}|\delta V^1| + nC\epsilon_{\text{alg1}}, \quad (4.14)$$

où  $C$  est une constante et  $\epsilon_{\text{alg1}}$  la tolérance dans l'algorithme 1.

*Démonstration.* Grâce à la relation (4.12), les termes de couplage sont éliminés lorsque les équations (4.10) et (4.11) sont sommées,

$$\frac{3}{2}(V^n - V^{n-1}) - \frac{1}{2}(V^{n-1} - V^{n-2}) - \left(F_{\mathcal{WB}}^n \delta t + \frac{3}{2}F_{\text{ABr}}^n \delta t - \frac{1}{2}F_{\text{ABr}}^{n-1}\right) \delta t = \epsilon^n.$$

En utilisant la définition de  $\delta V^n$ , nous obtenons la relation de récurrence

$$\delta V^n = \frac{1}{3}\delta V^{n-1} + \frac{2}{3}\epsilon^n.$$

La fin de la démonstration est identique à celle du chapitre 3.  $\square$

## 4.2 Résultats

L'algorithme 5 que nous avons implémenté dans le logiciel R+R\_DG est évalué sur quatre cas tests : assèchement d'un sol, ruissellement dû à la pluie, ruissellement dû à l'injection d'eau dans le sol et ruissellement hortonien. Les propriétés hydrodynamiques du sol sont données par les relations d'Haverkamp (2.27) avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.5 & \tilde{\alpha} &= 0.028 \text{cm}^{-1} & K_s &= 10^{-2} \text{cm.s}^{-1} & \gamma &= 4 \\ \theta_r &= 0.05 & \beta &= 4 & \tilde{A} &= 0.030 \text{cm}^{-1} \end{aligned}$$

La figure 4.5 représente les propriétés hydrodynamiques du sol. Le coefficient de Strickler  $\mathcal{K}$  est égal à  $60 \text{m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$  ce qui correspond à un frottement sur une surface avec des aspérités moyennes.

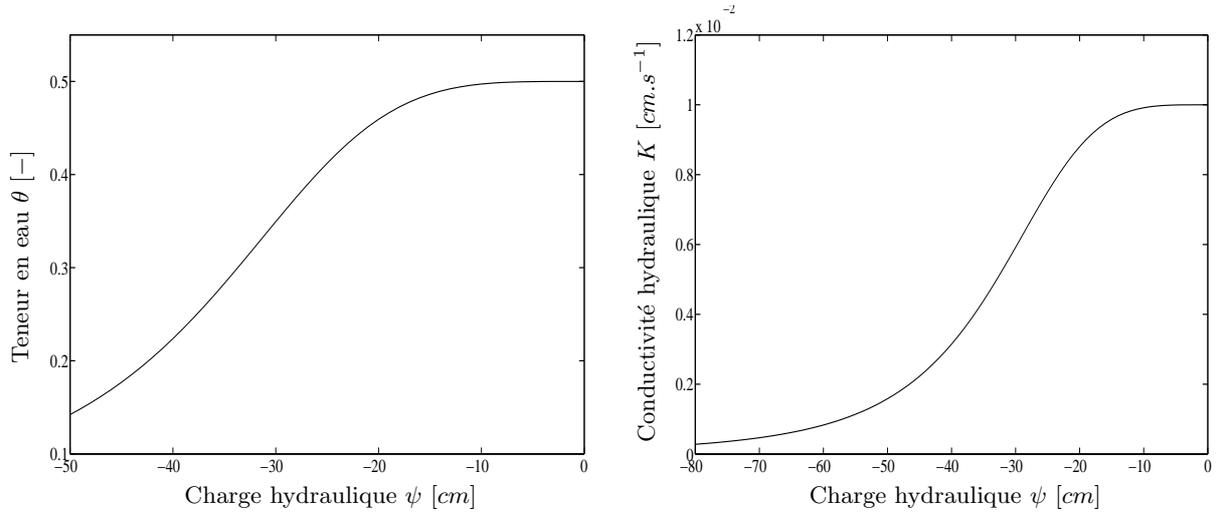


FIG. 4.5: Propriétés hydrodynamiques du sol dans les cas tests de couplage.

### 4.2.1 Assèchement

Dans ce premier cas test, l'écoulement surfacique et le drainage du sol sont provoqués par le débit à l'exutoire situé au point B. L'interface  $\mathcal{I}$  comprend trois parties (voir la figure 4.6),

$$\mathcal{I}_1 = \{(x, z) \in \mathcal{I}, x \in [0, 1.4]\}, \quad \mathcal{I}_2 = \{(x, z) \in \mathcal{I}, x \in [1.4, 1.6]\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_3 = \{(x, z) \in \mathcal{I}, x \in [1.6, 3]\},$$

dont les pentes respectives sont  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$ . La géométrie et le temps final de simulation sont

$$L = 3\text{m}, \quad P = 0.30\text{cm}, \quad J_1 = J_3 = 0.1\%, \quad J_2 = 0.3\% \quad \text{et} \quad T = 300\text{s},$$

où  $L$  est la longueur du domaine et  $P$  l'altitude du point le plus bas de  $\mathcal{I}$ . La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située à la cote  $z = 30.25\text{cm}$  et des conditions aux limites d'imperméabilité sont imposées sur les parois et le fond,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.3025m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Pour l'écoulement surfacique, la condition initiale est une surface libre horizontale et la hauteur d'eau imposée en A est nulle,

$$\begin{aligned} h^0 &= (-z + 0.3025)^+ m \quad \text{sur } I, \\ h_A &= 0 \quad \text{en } A \times [0, T]. \end{aligned}$$

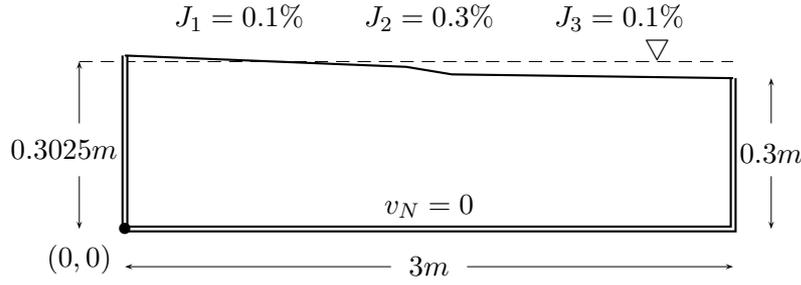


FIG. 4.6: Géométrie et condition initiale.

Les calculs sont effectués avec un maillage quasi-uniforme de 2063 triangles (ce qui correspond à une taille de maille d'environ  $3.5\text{cm}$ ) et des pas de temps  $\delta t = 2.5\text{s}$  et  $\delta t' = 0.25\text{s}$ . Nous avons vérifié que les vitesses normales à l'interface obtenues lorsque  $\delta t = \delta t' = 0.25\text{s}$  peuvent être superposées à celles obtenues lorsque  $\delta t = 2.5\text{s}$  et  $\delta t' = 0.25\text{s}$ . Le gain obtenu au niveau du temps CPU est considérable puisqu'il est d'un facteur 9.

La figure 4.7 présente le long de l'interface, à trois temps caractéristiques ( $10\text{s}$ ,  $100\text{s}$  et  $300\text{s}$ ), la surface libre de l'écoulement surfacique ( $h_{\mathfrak{h}}^n + \text{topographie}$ ) ainsi que la valeur moyenne de la vitesse normale utilisée dans l'algorithme 5 et notée  $\bar{v}_{\mathfrak{h}}^{*,n}$ ,

$$\forall i \in \{1 \dots N_{\mathcal{I}}\}, \quad \bar{v}_{\mathfrak{h}}^{*,n}|_{e_i} = \frac{1}{l_i} \int_{e_i} (2v_{\mathfrak{h}}^{*,n,p} + v_{\mathfrak{h}}^{*,n-1})/3. \quad (4.15)$$

La surface libre étant constante par morceaux, elle est représentée sur chaque arête par une ligne horizontale. La vitesse normale moyenne est dessinée avec un cercle bleu (sombre) si la face est mouillée ( $F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{w,n}$ ) et avec un cercle vert (clair) si la face est sèche ( $F \in \mathcal{I}_{\mathfrak{h}}^{d,n}$ ).

La figure 4.8 confirme que les couples charge hydraulique/hauteur d'eau restent sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ . Pour les mêmes temps que ceux de la figure 4.7 et pour l'ensemble des arêtes de  $I_{\mathfrak{h}}$ , chaque couple  $(\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n)$  est représenté par une croix (la valeur moyenne de  $\psi_{\mathfrak{h}}^n$  est considérée sur chaque arête). L'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$  est aussi tracé en trait continu.

Sur la figure 4.7, le ressaut hydraulique qui apparaît dans l'écoulement à surface libre au début de la simulation est clairement visible au niveau du changement de pente. De plus, une exfiltration apparaît sur quelques arêtes situées sur  $\mathcal{I}_2$  et  $\mathcal{I}_3$ . Pendant la simulation, une condition aux limites de type Neumann est imposée progressivement sur les faces où la hauteur d'eau devient nulle. Cela est visible sur la figure 4.8 dans laquelle le nombre de couples  $(\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n)$  sur la branche  $\{h = 0\}$  augmente au cours du temps.

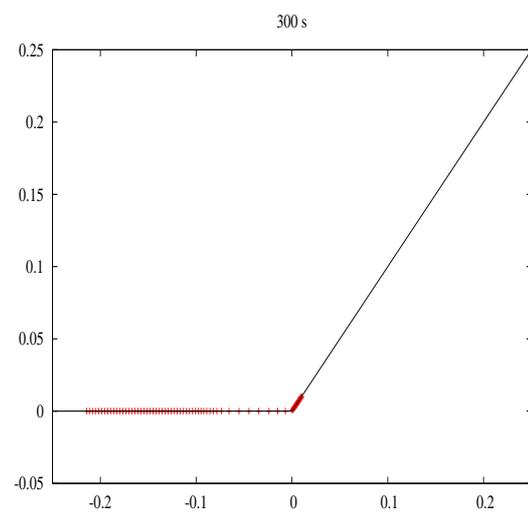
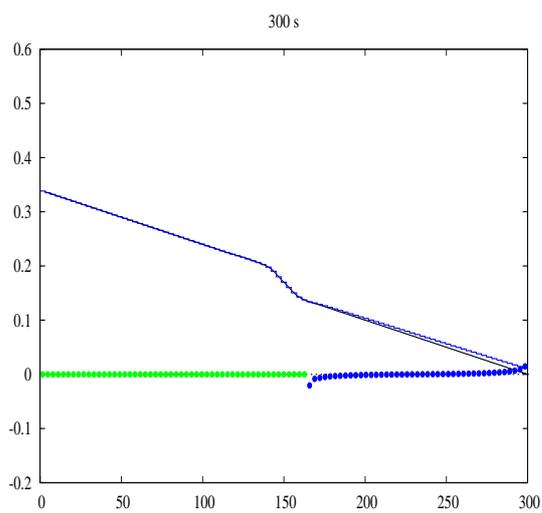
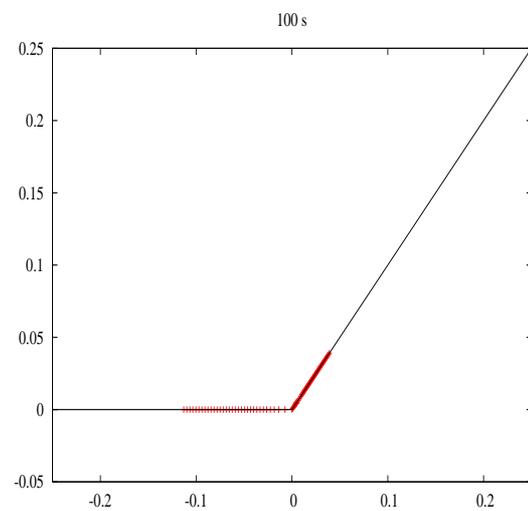
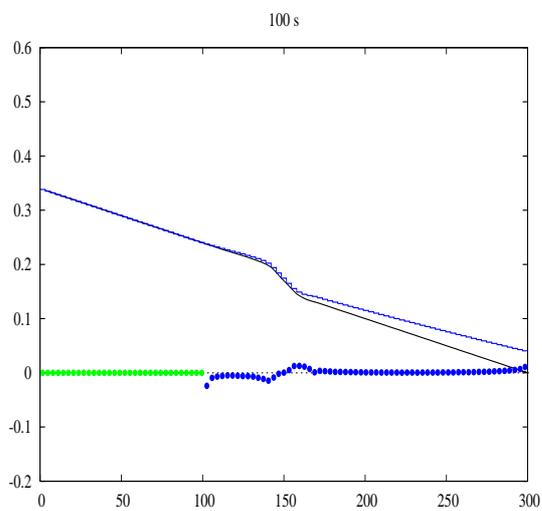
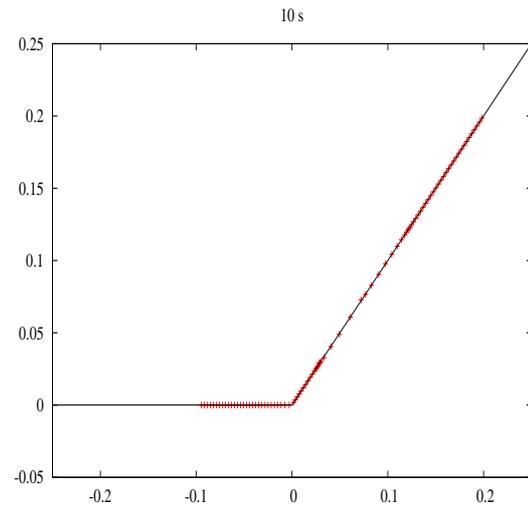
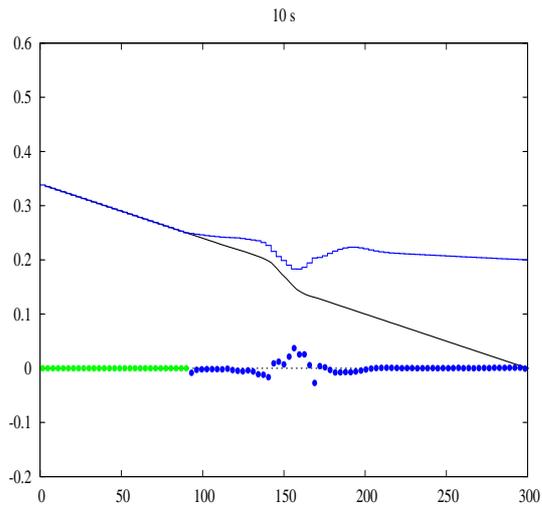


FIG. 4.7: Interface  $\mathcal{I}$  (—), surface libre et vitesse normale  $\bar{v}_b^{**}$  en  $cm/15min$  (• si l'arête est mouillée et • sinon).

FIG. 4.8: Nuage de points  $(\psi_b^n, h_b^n)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

### 4.2.2 Ruissellement dû à la pluie

Le principe de ce deuxième cas test est inspiré du cas test d'affleurement du chapitre précédent : une pluie d'intensité constante est imposée pendant une certaine période sur la partie supérieure du domaine. La géométrie et le temps final de simulation sont

$$L = 6m, \quad P = 1m, \quad J = 0.5\% \quad \text{et} \quad T = 360s,$$

où  $L$  est la longueur du domaine,  $P$  l'altitude du point le plus bas de  $\mathcal{I}$  et  $J$  la pente constante de l'interface  $\mathcal{I}$  (voir la figure 4.9). La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située à la cote  $z = 0.85m$  et les parois et le fond sont imperméables,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.85m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Pour l'écoulement surfacique, la condition initiale et la condition à la limite sont

$$\begin{aligned} h^0 &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{I}, \\ h_A &= 0 \quad \text{en } A \times [0, T]. \end{aligned}$$

Une pluie d'intensité constante égale à 10% de la conductivité hydraulique à saturation est imposée pendant les trois premières minutes,

$$\begin{aligned} v_r \cdot n_\Omega &= -0.1K_s cm.s^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, 180], \\ v_r \cdot n_\Omega &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [180, T]. \end{aligned}$$

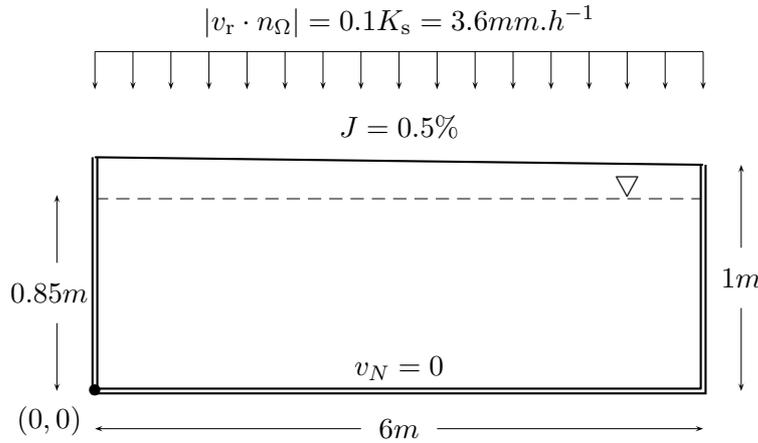


FIG. 4.9: Géométrie et condition initiale.

Un maillage quasi-uniforme avec 2049 triangles (ce qui correspond à des arêtes d'environ  $10cm$  de longueur) et des pas de temps  $\delta t = \delta t' = 1s$  sont utilisés. Nous avons vérifié que les vitesses normales à l'interface obtenues avec un maillage plus fin (8763 elements) et des pas de temps plus petits ( $\delta t = \delta t' = 0.5s$ ) peuvent être superposées à celles présentées ci-après. Le pas de temps  $\delta t = 1s$  est proche de la condition CFL, impliquant que le pas de temps utilisé dans l'équation de Richards pour des raisons de précision est proche de celui imposé dans l'équation de l'onde cinématique par la condition CFL pour des raisons de stabilité.

La figure 4.10 présente la surface libre de l'écoulement surfacique et la vitesse normale le long de l'interface à quatre temps caractéristiques de la simulation ( $10s$ ,  $60s$ ,  $180s$  et  $360s$ ). Les mêmes notations sont utilisées que sur la figure 4.7.

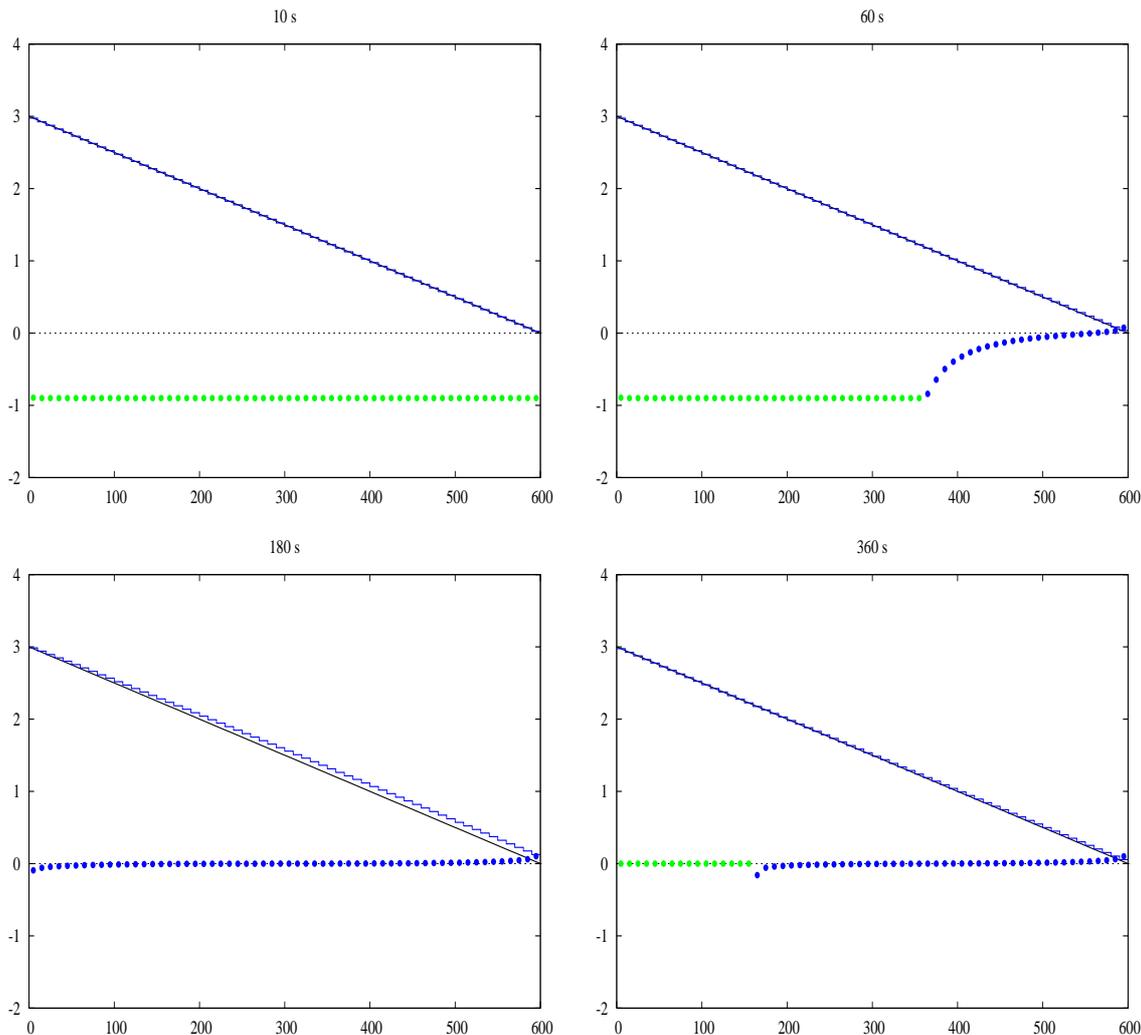


FIG. 4.10: Interface  $\mathcal{I}$  (—), surface libre (· · ·) et vitesse normale  $\bar{v}_h^{**}$  en  $cm/15min$  (• si l'arête est mouillée et • sinon).

La réponse du système peut être divisée en quatre phases :

1 - *Saturation du milieu*  $[0, 50s]$ . Cette phase, qui résulte de la position initiale de la nappe, correspond à la saturation de la zone d'environ  $15cm$  d'épaisseur située au-dessus de la nappe. La pluie est complètement absorbée par le sol, la hauteur d'eau est nulle et une condition de Neumann est imposée sur l'ensemble des arêtes de  $\mathcal{I}$  (figure 4.10 à 10s).

2 - *Ruissellement sur une partie de  $\mathcal{I}$*   $[50s, 90s]$ . La pluie est partiellement absorbée par le sol et une condition de Dirichlet est imposée sur la partie de  $\mathcal{I}$  située près du point B. L'infiltration se produit sur la majorité de l'interface puisque la vitesse normale est négative mais une exfiltration apparaît sur les premières arêtes situées près de l'exutoire où la vitesse normale est positive (figure 4.10 à 60s).

3 - *Ruissellement sur la totalité de  $\mathcal{I}$*   $[90s, 180s]$ . Le sol est complètement saturé et le ruissellement se produit sur l'ensemble de l'interface. La hauteur d'eau est positive puisqu'une condition de Dirichlet est imposée sur toutes les arêtes de  $\mathcal{I}$  (figure 4.10 à 180s).

4 - *Drainage*  $[180s, 360s]$ . Quand la pluie s'arrête, l'infiltration et le ruissellement conduisent à une hauteur d'eau nulle sur les premières arêtes situées près du point A où une condition de Neumann est imposée (figure 4.10 à 360s).

La figure 4.11 montre que les différents couples charge hydraulique/hauteur d'eau restent sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$  au cours de la simulation. Pour les mêmes temps que ceux de la figure 4.10 et pour chaque arête de l'interface, chaque couple  $(\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n)$  est représenté comme à la figure 4.8. Des échelles différentes étant utilisées pour  $h$  et pour  $\psi$ , la branche  $\{h = \psi\}$  semble presque verticale. Les quatre phases précédemment décrites sont clairement illustrées par les positions successives des nuages de points :

1 - A 10s, la charge hydraulique est négative et la hauteur d'eau est nulle. Le nuage de points est seulement sur la branche  $\{h = 0\}$  traduisant un état totalement sec.

2 - A 60s, la charge hydraulique est égale à la hauteur d'eau pour quelques faces. Le nuage de points est situé sur les deux branches puisque le sol contient des zones saturée et insaturée.

3 - A 180s, la charge hydraulique est égale à la hauteur d'eau pour toutes les faces. Le nuage de points est seulement sur la branche  $\{h = \psi\}$  traduisant un état totalement mouillé.

4 - A 360s, la charge hydraulique redevient négative sur les faces où la hauteur d'eau est nulle. De nouveau, le nuage de points est situé sur les deux branches.

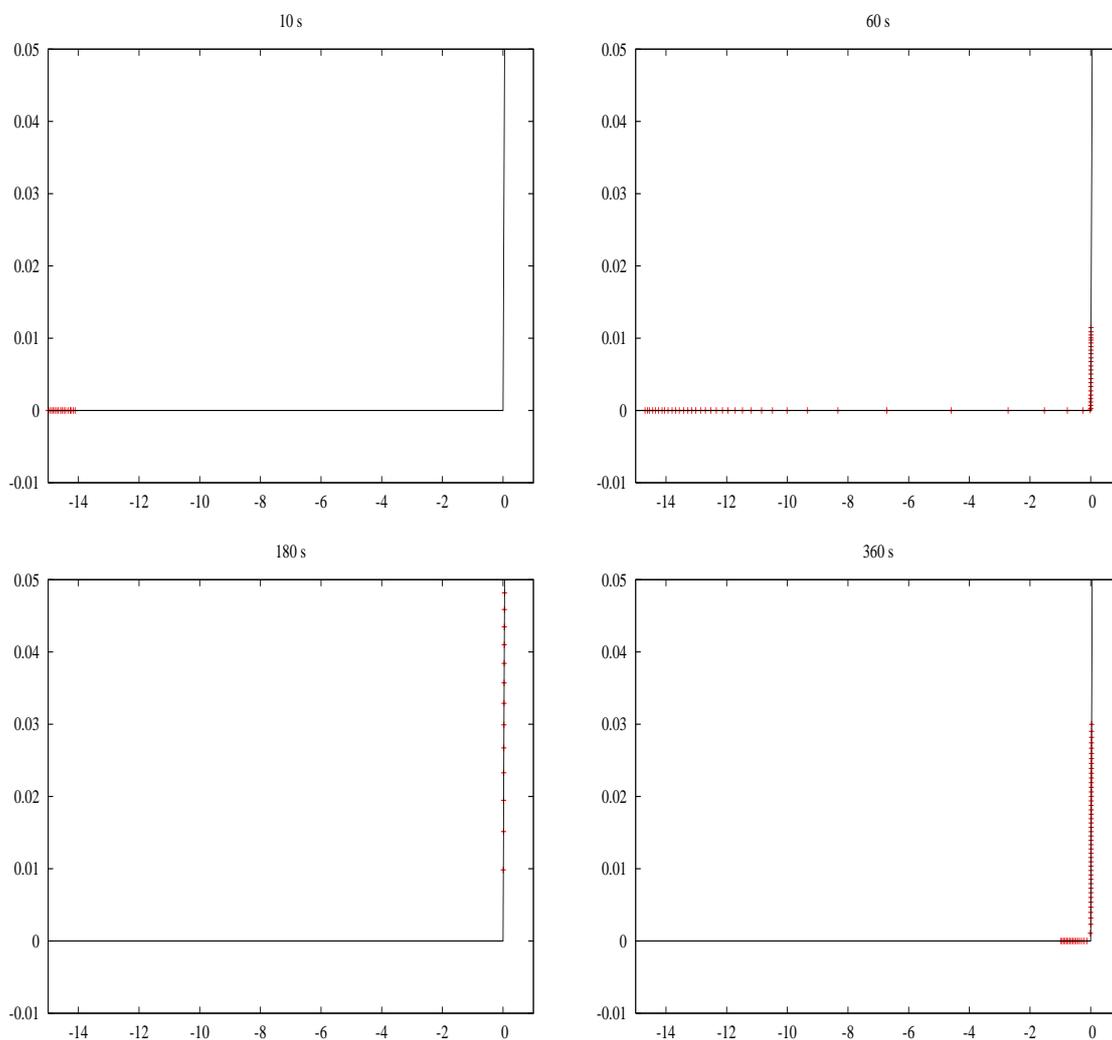


FIG. 4.11: Nuage de points  $(\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

La figure 4.12 présente les résultats concernant la conservation de la masse. Multiplions l'équation (4.13) par la masse volumique de l'eau  $\rho$ , sommons sur l'intervalle  $[0, n\delta t]$  et utilisons que  $\tilde{F}_{WB}^n = 0$  ainsi que la définition de  $V^n$ ,  $F_{ABr}^n$  et  $\Delta V^n$ , afin d'obtenir

$$\underbrace{\rho(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^0)}_{\Delta M_{\text{grnd}}^n} + \underbrace{\rho(V_{\text{over}}^n - V_{\text{over}}^0)}_{\Delta M_{\text{over}}^n} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t(F_A^i + F_r^i)}_{M_{\text{in}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho\delta t F_B^i}_{M_{\text{out}}^i} + \underbrace{\rho\Delta V^n}_{\mathbb{E}^n}.$$

La grandeur  $\Delta M^n$  est la variation totale de masse pendant l'intervalle  $[0, n\delta t]$  et se décompose naturellement comme la somme de la variation totale d'eau située dans le sol  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$  et de la variation totale d'eau située sur le sol  $\Delta M_{\text{over}}^n$ . Les deux quantités  $\sum_{i=1}^n M_{\text{in}}^i$  et  $\sum_{i=1}^n M_{\text{out}}^i$  sont respectivement la masse d'eau qui entre et qui sort du système. L'erreur commise sur la conservation de la masse entre 0 et  $n\delta t$  est notée  $\mathbb{E}^n$ . Les cinq quantités  $\Delta M^n$ ,  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$ ,  $\Delta M_{\text{over}}^n$ ,  $\sum_{i=1}^n M_{\text{in}}^i$  et  $\sum_{i=1}^n M_{\text{out}}^i$  sont représentées sur la partie gauche de la figure 4.12. Cette figure confirme les quatre phases de la simulation. En effet la pluie est totalement absorbée par le sol jusqu'à 50s car  $\Delta M^n = \Delta M_{\text{grnd}}^n$ . Ensuite l'augmentation de  $\Delta M_{\text{grnd}}^n$  fléchit et  $\Delta M_{\text{over}}^n$  devient positive suite à la saturation d'une partie de la surface du sol. De 90s à la fin de la simulation, les variations de  $\Delta M^n$  et  $\Delta M_{\text{over}}^n$  sont les mêmes, indiquant une saturation complète du sol. Enfin, pendant la dernière phase, la masse d'eau infiltrée est constante (la pluie ayant cessé) et la masse d'eau sortant du système est égale à la variation totale de masse.

Afin d'étudier l'influence du nouveau flux à l'interface dans l'algorithme de couplage à deux pas, nous définissons l'algorithme 4' comme l'algorithme 4 dans lequel l'équation de Richards est résolue par la BDF2. Les erreurs commises sur la conservation de la masse obtenues avec l'algorithme 5 et l'algorithme 4' sont comparées sur la figure 4.13. L'algorithme 5 est bien plus précis que l'algorithme 4'. L'erreur produite par l'algorithme 4' est néanmoins faible en comparaison des quantités totales d'eau puisqu'elle est seulement de l'ordre de quelques pourcents des masses d'eau considérées.

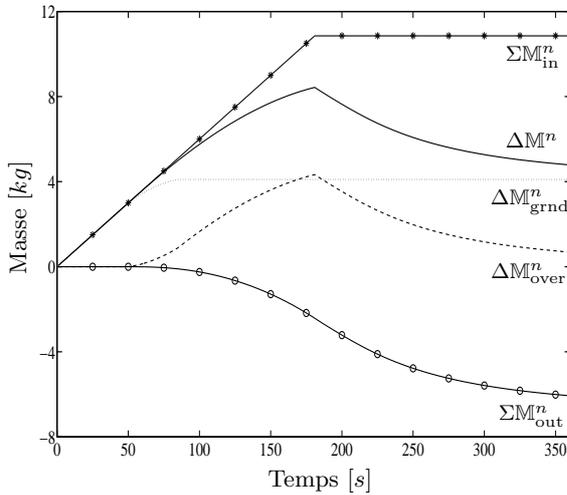


FIG. 4.12: Bilan de masse.

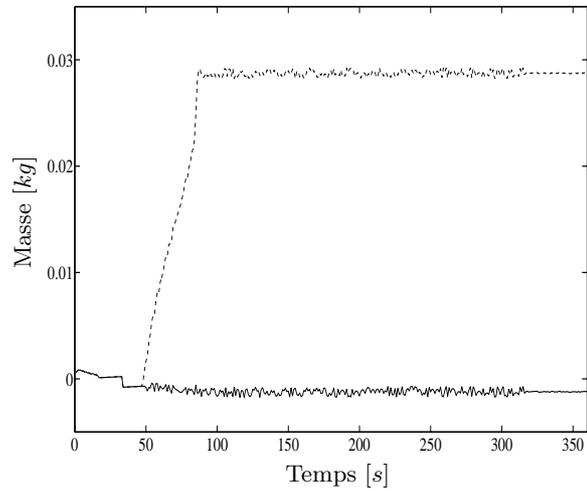


FIG. 4.13: Erreur  $\mathbb{E}^n$  pour l'algorithme 4' (---) et 5 (—).

Enfin, la figure 4.14 détaille les flux de masse dans l'équation de l'onde cinématique. Comme dans la section 3.2.1, le flux de masse  $\tilde{F}_{\mathcal{I}}^n$  est décomposé en un flux d'exfiltration  $\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^n$  et un flux d'infiltration  $\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^n$ . Les quatre quantités  $\rho\delta t\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{in}}^n$ ,  $\rho\delta t\tilde{F}_{\mathcal{I},\text{out}}^n$ ,  $M_{\text{in}}^n$  et  $M_{\text{out}}^n$  sont tracées sur la figure 4.14 en fonction du temps. Nous voyons sur cette figure que les quantités d'eau infiltrée et exfiltrée deviennent faibles lorsque le milieu est saturé.

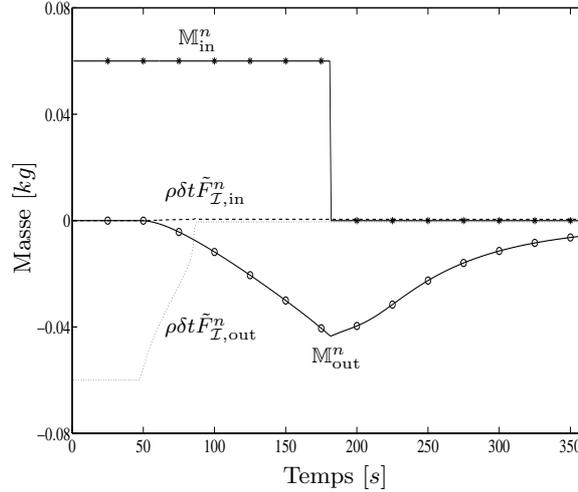


FIG. 4.14: Flux dans l'équation de l'onde cinématique.

### 4.2.3 Ruissellement dû à l'injection d'eau dans le sol

Dans ce troisième cas test, une exfiltration est provoquée par l'injection d'eau sur la moitié gauche du fond. La géométrie et le temps final de simulation sont

$$L = 2m, \quad P = 0.2m, \quad J = 0.2\% \quad \text{et} \quad T = 360s,$$

avec les notations usuelles (voir figure 4.15). La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située à  $0.1m$  et la condition aux limites sur les parois est un flux nul,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.1m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{W} \times [0, T]. \end{aligned}$$

Un flux d'infiltration avec un profil parabolique et une valeur moyenne  $\bar{v}_N$  égale à 5% de la conductivité hydraulique à saturation est imposé pendant 2 minutes sur la partie gauche du fond ( $\mathcal{B}_l = \{(x, z) \in \mathcal{B}, x \in [0, 1]\}$ ). Ce flux d'infiltration est linéaire en temps pendant les 10 premières secondes puis constant,

$$v_N(x, t) = \begin{cases} x(x-1) 0.03K_s t \text{ cm.s}^{-1} & \text{si } (x, t) \in \mathcal{B}_l \times [0, 10], \\ x(x-1) 0.3K_s \text{ cm.s}^{-1} & \text{si } (x, t) \in \mathcal{B}_l \times [10, 120], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour l'écoulement surfacique, la condition initiale et la condition à la limite sont

$$\begin{aligned} h^0 &= 0 \quad \text{sur } \mathcal{I}, \\ h_A &= 0 \quad \text{en } A \times [0, T]. \end{aligned}$$

Un maillage quasi-uniforme avec 1874 triangles (ce qui correspond à des arêtes d'environ  $2.5cm$  de longueur) et des pas de temps  $\delta t = \delta t' = 1s$  sont utilisés. Nous avons vérifié que les vitesses normales à l'interface obtenues avec un maillage plus fin (7310 éléments) et des pas de temps plus petits ( $\delta t = \delta t' = 0.5s$ ) peuvent être superposées à celles présentées ci-après. A nouveau, la précision de la résolution de l'équation de Richards impose un pas de temps comparable à celui donné par la condition CFL.

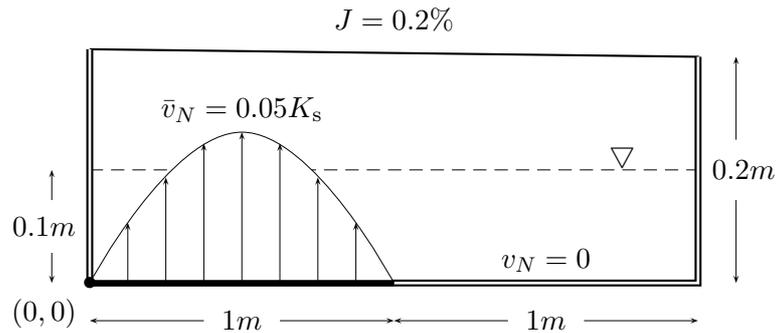


FIG. 4.15: Géométrie et condition initiale.

La figure 4.16 présente la surface libre de l'écoulement surfacique et la vitesse normale le long de l'interface à six temps caractéristiques de la simulation (5s, 35s, 50s, 100s, 150s et 360s). Les mêmes notations sont utilisées que sur la figure 4.7.

La réponse du système peut être divisée en six phases :

1 - *Saturation du milieu* [0, 15s]. Cette phase est due à la position de la nappe au début de la simulation. En effet, à l'instant initial, la nappe occupe la moitié inférieure du domaine et le débit entrant imposé sur la moitié gauche du fond provoque une augmentation de la charge. Lors de cette phase de montée en pression dans le sol, les conditions aux limites sont de type Neumann sur l'ensemble des mailles (figure 4.16 à 5s).

2 - *Exfiltration partielle* [15s, 45s]. Lorsque le sol est suffisamment saturé dans la moitié gauche du domaine, la vitesse normale devient positive et l'eau commence à s'exfiltrer sur les mailles situées au-dessus de cette zone saturée. Les conditions aux limites deviennent de type Dirichlet dans la zone d'exfiltration (figure 4.16 à 35s).

3 - *Exfiltration totale* [45, 100s]. Quand le sol est totalement saturé, la masse d'eau exfiltrée est égale à la masse d'eau introduite par le fond du domaine. L'eau ruisselle sur toutes les mailles puisque les conditions aux limites sont toutes de type Dirichlet. Cependant, la majorité de l'écoulement superficiel s'effectue légèrement en aval du point A (figure 4.16 at 50s).

4 - *Ruissellement* [100, 120s]. Dans cette phase, l'eau de surface se dirige vers l'exutoire situé au point B. Une petite partie de l'eau de surface se réinfiltré dans le sol. Le flux change alors de signe : d'abord positif, il est ensuite négatif sur quelques faces avant de redevenir positif (figure 4.9 à 100s).

5 - *Propagation de la lame d'eau vers l'exutoire* [120, 200s]. Après l'arrêt de l'injection d'eau à 120s, la quantité d'eau exfiltrée diminue presque instantanément et l'eau se réinfiltré dans le sol sur une partie de l'interface située près du point A. Les conditions aux limites sont de type Dirichlet ce qui signifie que la hauteur d'eau reste encore strictement positive sur l'ensemble des mailles (figure 4.16 à 150s).

6 - *Drainage* [200, 360s]. A partir de 250s, le sol se draine progressivement de la gauche vers la droite. Les conditions aux limites sur les mailles redeviennent peu à peu de type Neumann (figure 4.16 à 360s).

La figure 4.17 montre que chaque couple  $(\psi_h^n, h_h^n)$  reste sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ . Comme dans le cas test précédent, les six phases de la simulation sont reconnaissables par la position du nuage de points. Le nuage de points se trouve sur la branche  $\{h = 0\}$  quand le sol est insaturé à l'interface, sur la branche  $\{h = \psi\}$  quand le sol est saturé et sur les deux branches quand il y a des zones saturées et insaturées.

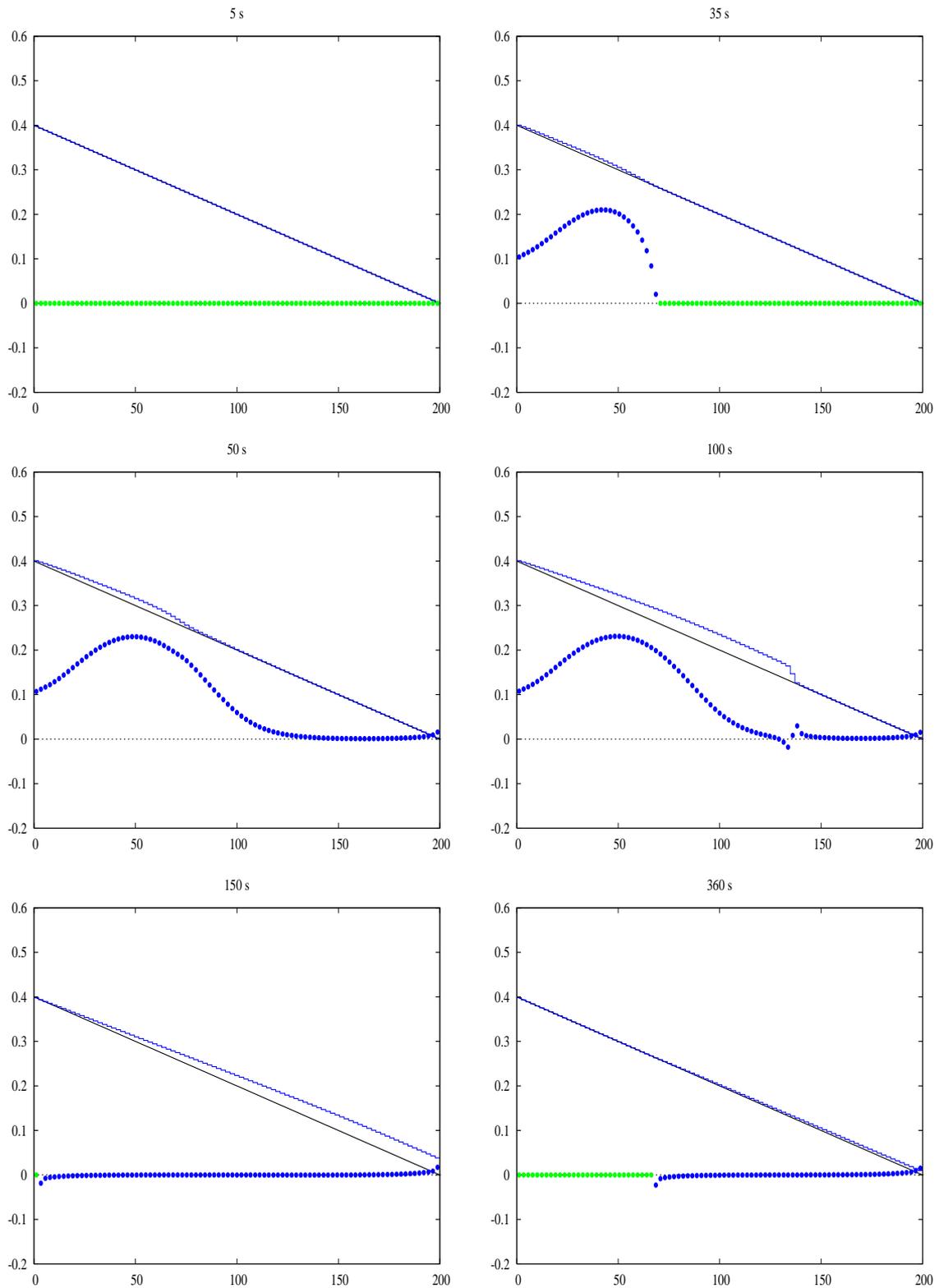
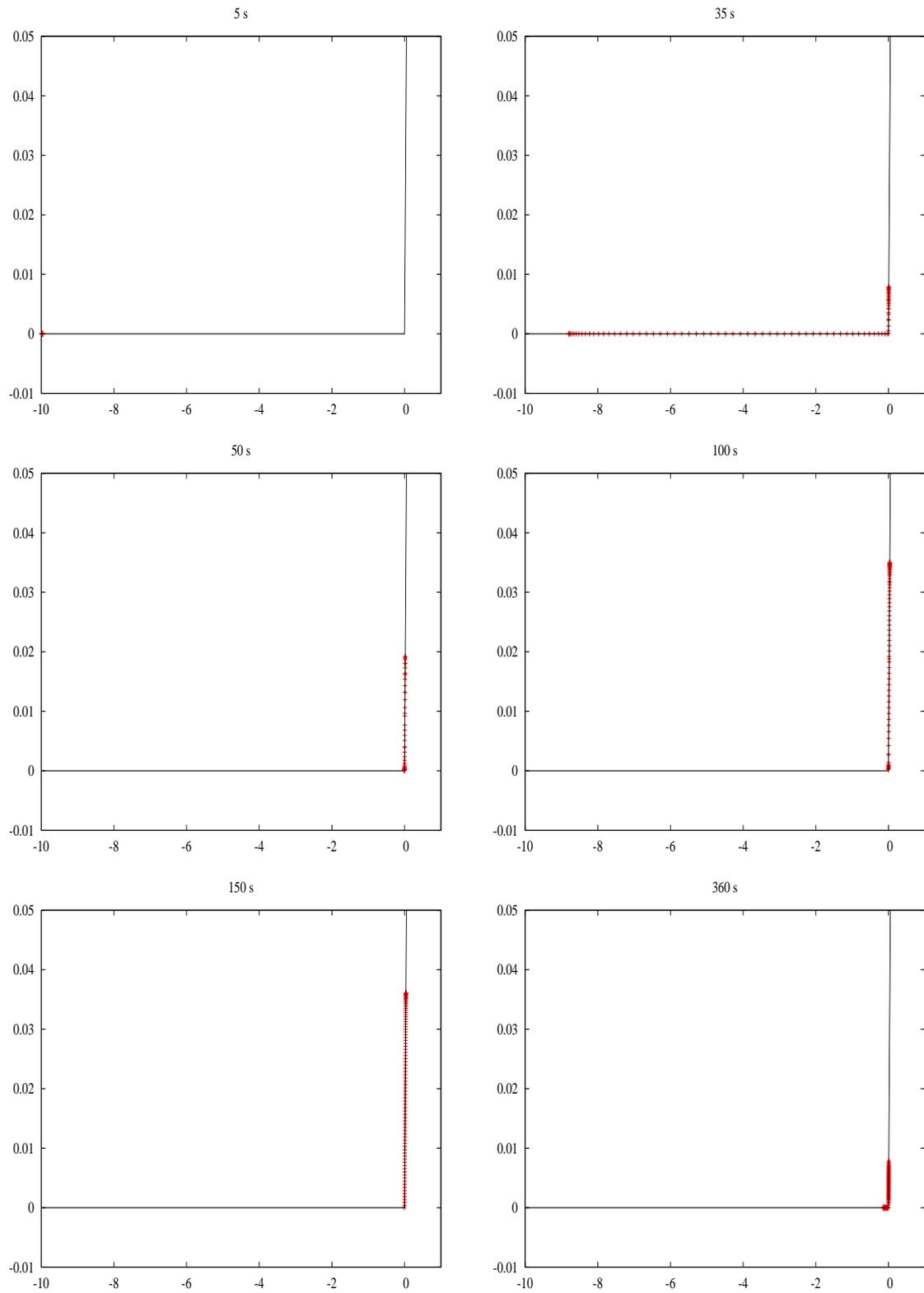


FIG. 4.16: Interface  $\mathcal{I}$  (—), surface libre et vitesse normale  $\bar{v}_\eta^{**}$  en  $cm/6min$  (• si l'arête est mouillée et • sinon).

FIG. 4.17: Nuage de points  $(\psi_{\mathfrak{h}}^n, h_{\mathfrak{h}}^n)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

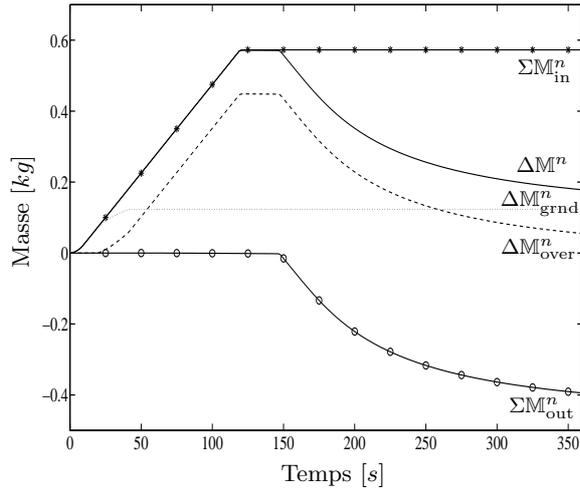


FIG. 4.18: Bilan de masse.

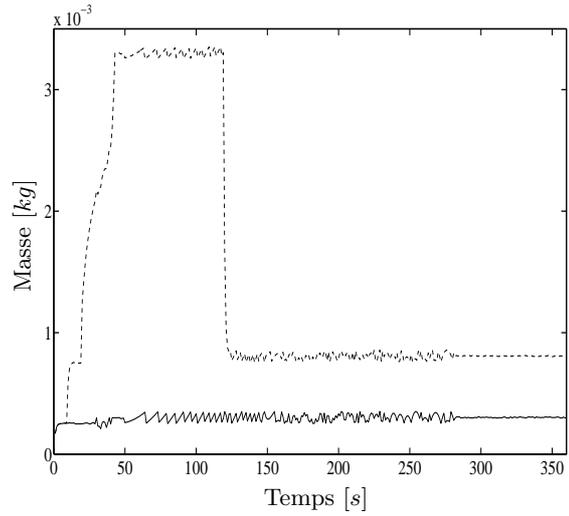
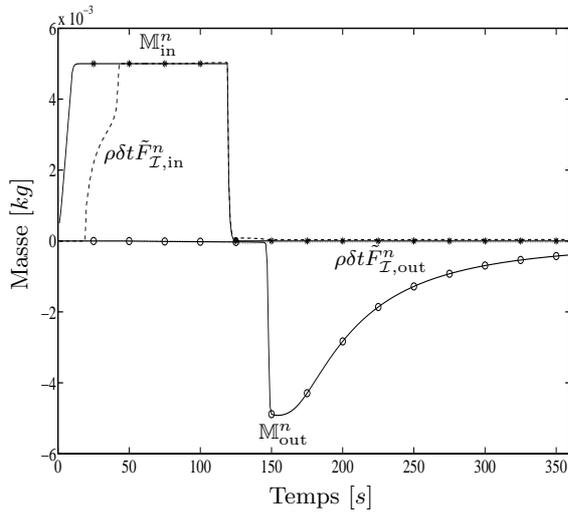
FIG. 4.19: Erreur  $\mathbb{E}^n$  pour l'algorithme 4' (---) et 5 (—).

FIG. 4.20: Flux dans l'onde cinématique.

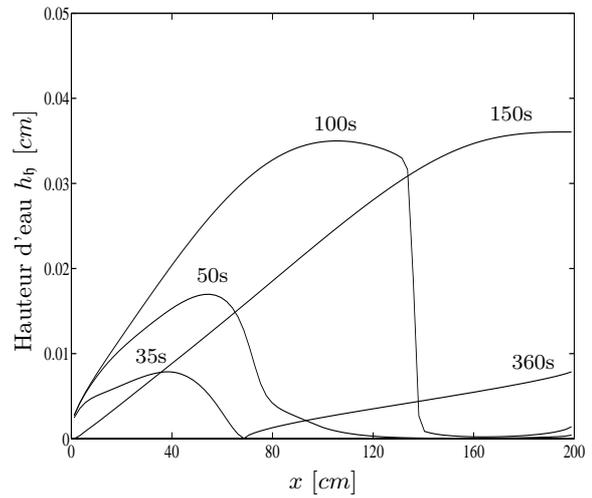


FIG. 4.21: Hauteur d'eau à différents temps.

Les résultats des figures 4.18, 4.19 et 4.20 sont proches de ceux du cas précédents, en particulier dans la comparaison des erreurs sur la conservation de la masse avec (algorithme 5) et sans (algorithme 4') les modifications du flux à l'interface. La figure 4.21 présente la hauteur d'eau  $h_b^n$  à différents instants et permet d'avoir une vision plus directe de l'évolution temporelle de la surface libre.

#### 4.2.4 Ruissellement hortonien

Ce quatrième cas test simule le ruissellement hortonien puisqu'une lame d'eau de 2cm d'épaisseur ruisselle sur un sol insaturé. La géométrie du domaine et le temps final de simulation sont

$$L = 6m, \quad P = 1m, \quad J = 0.5\% \quad \text{et} \quad T = 60s,$$

avec les notations usuelles (voir la figure 4.22). La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située à la cote  $z = 0.6cm$  et des conditions aux limites d'imperméabilité sont imposées

sur les parois et le fond,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.6m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Pour l'écoulement surfacique, la condition initiale est une hauteur d'eau nulle,

$$h^0 = 0 \quad \text{sur } \mathcal{I}.$$

La condition à la limite en A varie quadratiquement en temps de 0 à 2cm pendant les dix premières secondes puis est constante pendant la suite de la simulation,

$$h_A = \begin{cases} 0.02t^2 \text{ cm} & \text{en } A \times [0, 10], \\ 2 \text{ cm} & \text{en } A \times [10, T]. \end{cases}$$

Il est clair que cette simulation ne peut pas être prolongée en temps long sans violer l'hypothèse de validité de l'équation de Richards selon laquelle la pression de l'air dans le milieu poreux est constante et n'influence pas l'écoulement de l'eau. En effet, en continuant la simulation, la pression de l'eau augmenterait sans rencontrer la résistance de l'air emprisonné ce qui est en contradiction avec l'expérience physique.

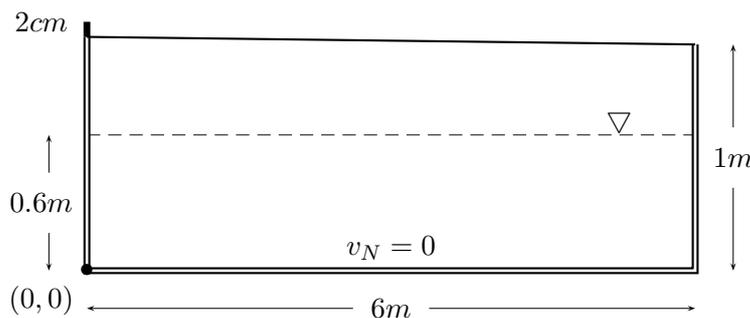


FIG. 4.22: Géométrie et condition initiale.

Le domaine  $\Omega$  étant similaire à celui utilisé dans le cas test d'exfiltration par la pluie de la section 4.2.2, nous utilisons le même maillage. Le pas de temps dans la discrétisation de l'équation de Richards est  $\delta t = 1s$  et celui dans l'équation de l'onde cinématique est de  $\delta t' = 0.1s$ , la condition CFL imposant un pas de temps inférieur à  $0.15s$ .

La figure 4.23 présente la surface libre de l'écoulement et la vitesse normale le long de l'interface à 5s, 15s et 60s. A 5s, l'eau introduite au début de la simulation par la condition à la limite en A est totalement absorbée par le sol puisque les conditions sont de type Neumann sur l'ensemble de l'interface. Les conditions aux limites deviennent progressivement de type Dirichlet en suivant l'avancement du front de ruissellement. Il est clairement visible à 15s que les conditions aux limites sont de type Neumann homogène sur les arêtes où la hauteur d'eau est nulle. Les nuages de points de la figure 4.24 montrent que la continuité de la pression est vérifiée sur l'ensemble de la zone mouillée de l'interface même si certains couples situés probablement au niveau du front s'éloignent légèrement de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

Le bilan de masse de la figure 4.25 permet de vérifier que le débit entrant augmente pendant les dix premières secondes puis est constant dans le temps car la somme de la masse apportée au

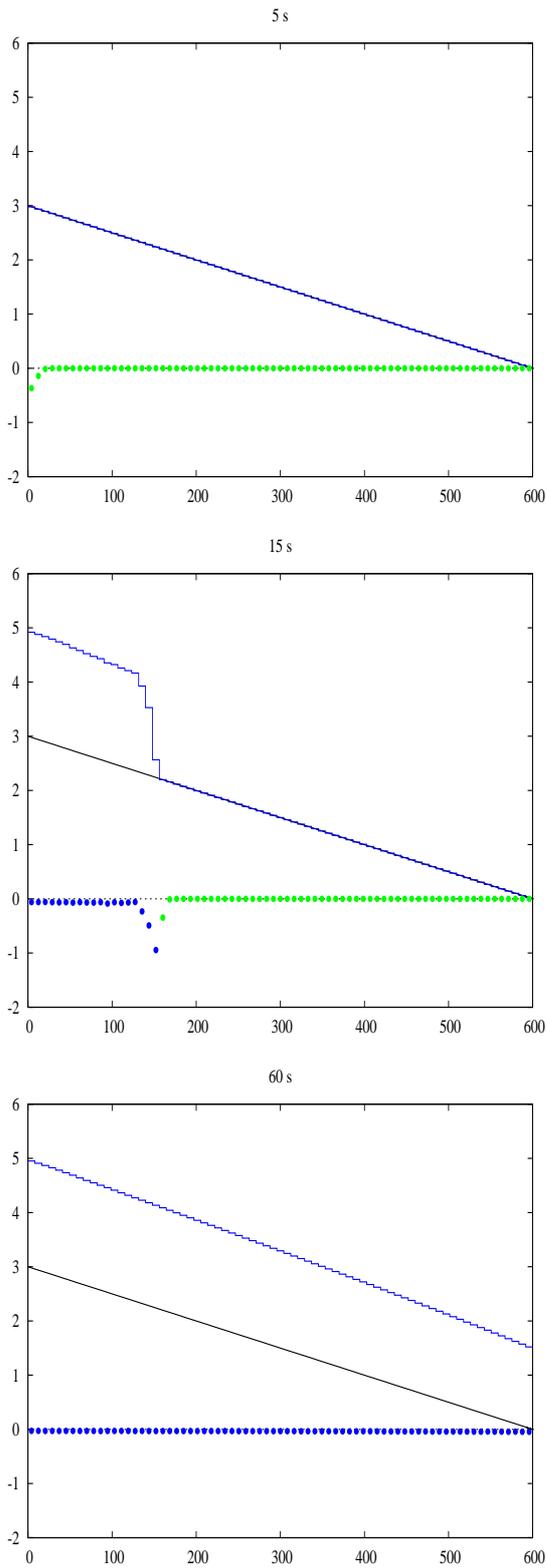


FIG. 4.23: Interface  $\mathcal{I}$  (—), surface libre et vitesse normale  $\bar{v}_b^{**}$  en  $cm.s^{-1}$  (• si l'arête est mouillée et • sinon).

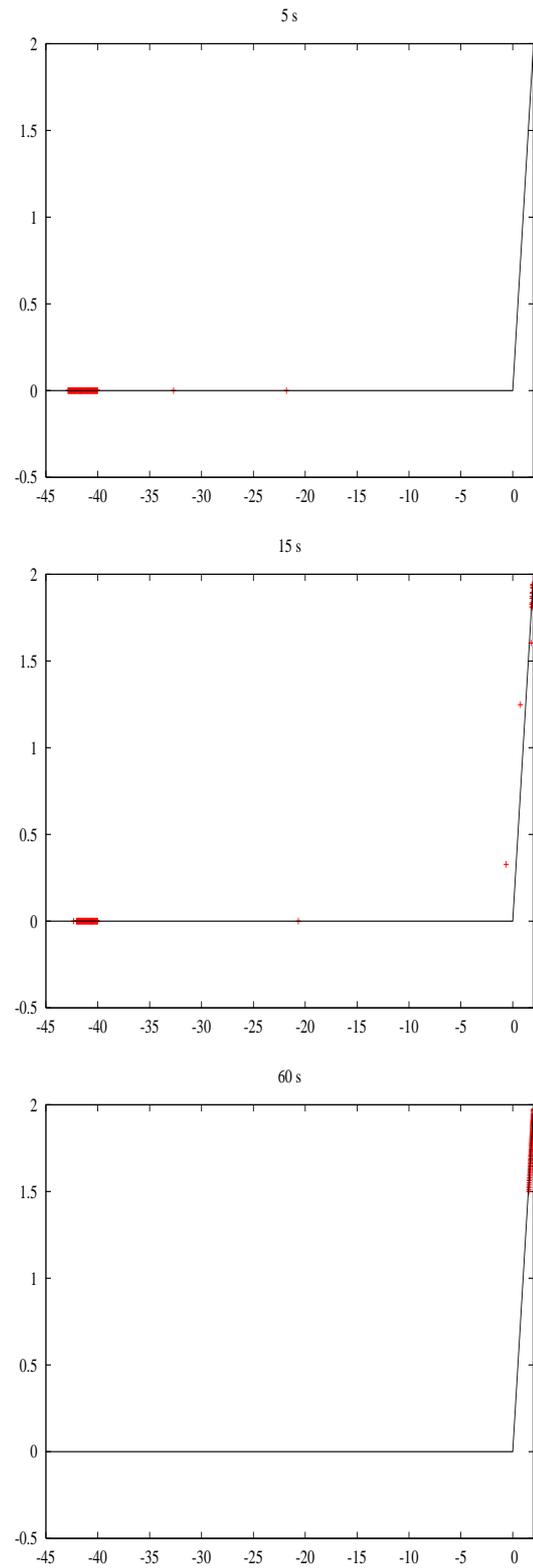


FIG. 4.24: Nuage de points  $(\psi_b^n, h_b^n)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

système est linéaire après 10s. Nous voyons également qu'il y a égalité entre la masse apportée et l'augmentation de masse dans le système tant que l'eau en surface n'a pas atteint l'exutoire. A partir de cet instant (42s), le débit à l'exutoire devient non nul et la masse d'eau totale dans le système augmente moins vite. Comme précédemment, la comparaison des erreurs sur le bilan de masse (figure 4.26) montre l'amélioration obtenue sur la conservation de la masse en adaptant le terme de couplage dans l'équation de l'onde cinématique.

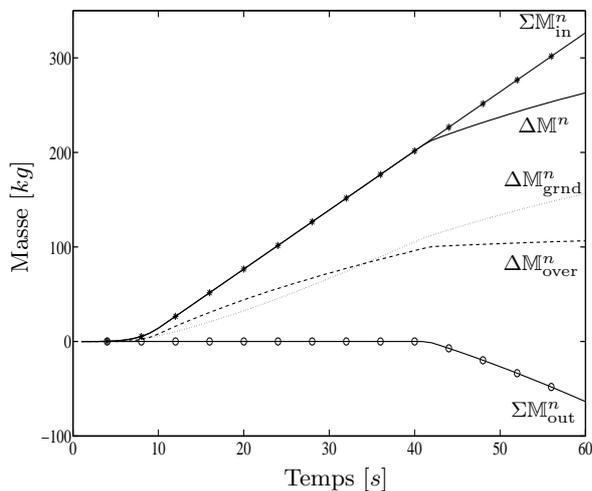
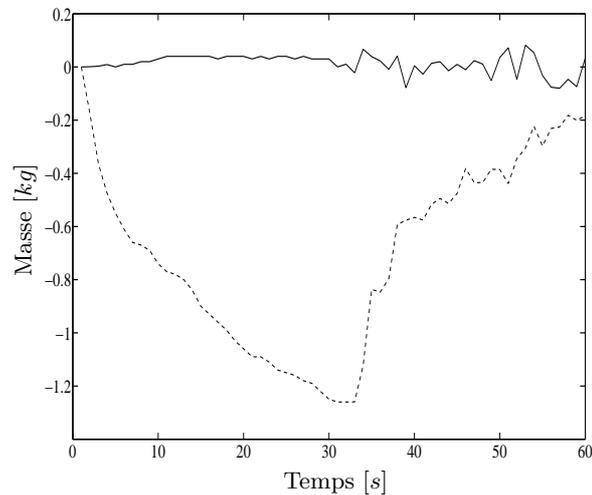


FIG. 4.25: Bilan de masse.

FIG. 4.26: Erreur  $\mathbb{E}^n$  pour l'algorithme 4' ( --- ) et 5 ( — ).

La figure 4.27 concernant la répartition des masses au niveau de l'onde cinématique montre qu'environ la moitié de l'eau apportée ruisselle et que l'autre moitié s'infiltré. Lorsque l'eau de surface atteint l'exutoire, cette répartition change : la masse d'eau infiltrée dans le sol augmente moins vite puisque le milieu se sature et la masse d'eau de surface augmente peu puisqu'il y a ruissellement sur toutes les mailles de surface. Comme nous l'avons déjà précisé, cette situation n'est pas extrapolable en temps long sans rompre l'hypothèse que l'air dans le sol est à la pression atmosphérique. La figure 4.28 présente la hauteur d'eau  $h_b^n$  à différents instants.

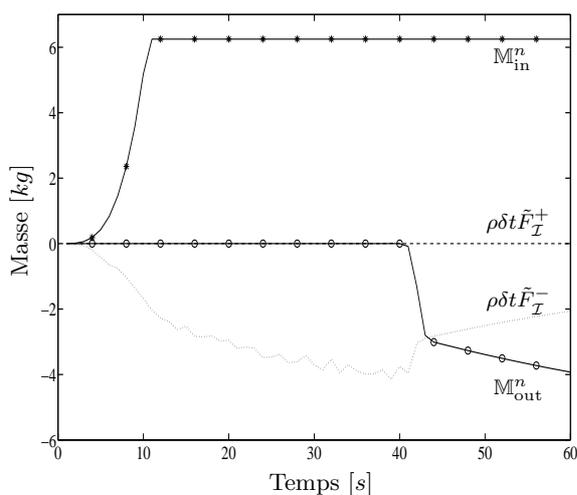


FIG. 4.27: Flux dans l'onde cinématique.

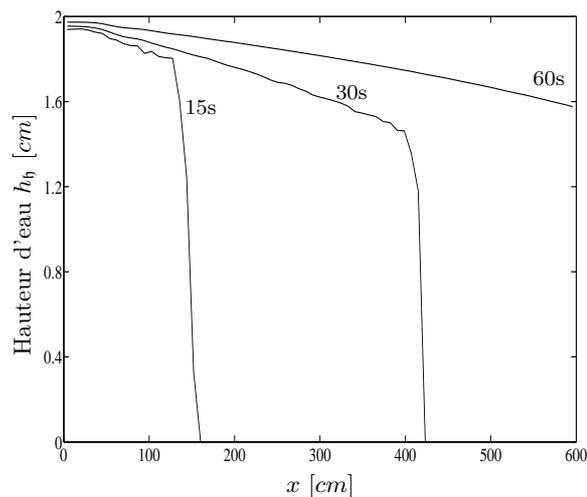


FIG. 4.28: Hauteur d'eau à différents temps.

### 4.3 Application concrète en hydrologie

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, le ruissellement de l'eau de pluie sur le sol accentue les risques d'inondation, d'érosion des terres et de pollution. Ces trois risques environnementaux ont conduit à l'aménagement des terres agricoles en utilisant notamment le drainage pour faciliter artificiellement l'évacuation de l'eau dans le sol. Le principe est d'équiper le terrain d'un réseau de tuyaux enterrés percés pour capter l'eau du sol et la transférer vers un collecteur. A ces aménagements souterrains est associé un drainage en surface qui consiste à creuser des fossés d'assainissement auxquels sont reliés les différents collecteurs. En France, le drainage concerne principalement les moitiés nord et ouest du pays et a connu un essor important de 1950 à 1990. La surface drainée française représente environ 10% de la surface agricole utile. Le fonctionnement du drainage agricole est saisonnier : les infiltrations automnales entraînent la formation d'une nappe superficielle qui repose souvent sur une zone moins perméable présente à quelques mètres de profondeur ; les drains devenant actifs quand la nappe atteint leur niveau. Lorsque ces conditions sont remplies, toute l'infiltration de pluie tendant à provoquer une montée de la nappe superficielle est compensée partiellement ou complètement par les drains enterrés, ceux-ci accélérant par ailleurs le processus de drainage du sol une fois que la pluie s'arrête. Cette période de fluctuations de la nappe à proximité de la surface s'étale d'octobre à mai. L'optimisation du dimensionnement des réseaux de drainage s'appuie sur la prévision des débits de pointe et sur l'évolution du niveau et de la forme de la nappe superficielle. Le développement de modèles numériques, capables de prédire les écoulements d'eau dans le sol en prenant en compte le ruissellement surfacique et en intégrant les drains, est un outil intéressant pour comprendre les phénomènes hydrologiques intervenant par exemple dans le dimensionnement des réseaux de drainage. Nous présentons dans cette section un travail réalisé en collaboration avec le CEMAGREF dont l'objectif est de prendre en compte les processus de ruissellement et de drainage en modélisant une partie du bassin versant expérimental d'Orgeval situé à proximité de Coulommier (77).

#### 4.3.1 Problème continu et ensembles admissibles

Le système que nous résolvons est le système couplé (4.5) considéré dans la section 4.1.1 auquel nous ajoutons les conditions aux limites de Signorini sur l'ensemble des bords des drains  $\mathcal{D}$ . Ainsi, le système que nous résolvons est

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \partial_t[\theta(\psi)] + \nabla \cdot v(\psi) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\
 v(\psi) = -K(\psi)\nabla(\psi + z) & \text{dans } \Omega \times [0, T], \\
 v(\psi) \cdot n_\Omega = 0 & \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T], \\
 v(\psi) \cdot n_\Omega = \omega_v & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{I}^{d,t}\}, \\
 \psi = \omega_\psi & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{I}^{w,t}\}, \\
 v(\psi) \cdot n_\Omega = 0 & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{D}^{d,t}\}, \\
 \psi = 0 & \text{sur } \{(x, t), x \in \mathcal{D}^{w,t}\}, \\
 \psi(\cdot, 0) = \psi^0 & \text{sur } \Omega, \\
 \partial_t h + \partial_x \varphi(h, S) = (v(\psi) - v_r) \cdot n_\Omega & \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T], \\
 h(\cdot, 0) = h^0 & \text{sur } \mathcal{I}, \\
 h(A, \cdot) = 0 & \text{en } A \times [0, T], \\
 (\psi, v(\psi) \cdot n_\Omega) \in \mathcal{A}_1 & \text{sur } \mathcal{D} \times [0, T], \\
 (\psi, h) \in \mathcal{A}_2 & \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T].
 \end{array} \right. \quad (4.16)$$

Les données sont les conditions initiales  $\psi^0$  et  $h^0$ , le flux normal imposé sur les parois et le fond du domaine ainsi que la hauteur d'eau imposée en A. L'algorithme mis en place est une généralisation de l'algorithme 5 en prenant en compte les éléments de l'algorithme 3 concernant la prise en compte de drains.

### 4.3.2 Géométrie et propriétés hydrodynamiques du sol

La géométrie du système proposé est celle d'une parcelle d'un bassin versant expérimental situé au nord de Coulommier dans la Seine et Marne. Le premier mètre de sol est limoneux et repose sur une zone plus riche en argile, entraînant la formation d'une nappe superficielle en hiver. Nous supposons que les drains reposent sur cette zone imperméable et qu'ils sont espacés de 8 mètres. Le diamètre réel des drains est de 5 centimètres mais la perforation n'est pas continue sur leur périmètre ce qui génère des pertes de charge autour du drain. Pour prendre en compte ces pertes de charge, le diamètre des drains modélisés est de 2 centimètres. Une distance de 2 centimètres est par ailleurs imposée entre le bord inférieur du drain et le fond du domaine pour permettre à l'eau d'arriver aux drains de toutes les directions. Pour prendre en compte la propagation du ruissellement, la réinfiltration et la connexion entre deux zones ruisselantes, nous modélisons un domaine d'une longueur de 32 mètres (ce qui correspond à une zone contenant quatre drains), de 1 mètre de profondeur et dont les pentes sur le fond  $J_B$  et à la surface  $J_T$  sont égales à 0.5%,

$$L = 32m, \quad P = 1m \quad \text{et} \quad J_B = J_T = 0.5\%.$$

Le temps final et les pas de temps seront indiqués pour chaque cas. Des conditions aux limites d'imperméabilité sont imposées sur les parois et le fond du domaine,

$$v_N = 0 \quad \text{sur} \quad (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T].$$

Quatre drains ( $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$ ) espacés de 8m se trouvent à l'intérieur du domaine et sont représentés sur la figure 4.29. Leurs frontières sont notées  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ . Le rayon de ces drains est de 1cm et leurs centres sont situés à 3cm du fond,

$$\begin{aligned} c_{d_1} &= (4m, 17cm) & \text{et} & \quad r_{d_1} = 1cm, \\ c_{d_2} &= (12m, 13cm) & \text{et} & \quad r_{d_2} = 1cm, \\ c_{d_3} &= (20m, 9cm) & \text{et} & \quad r_{d_3} = 1cm, \\ c_{d_4} &= (28m, 5cm) & \text{et} & \quad r_{d_4} = 1cm. \end{aligned}$$

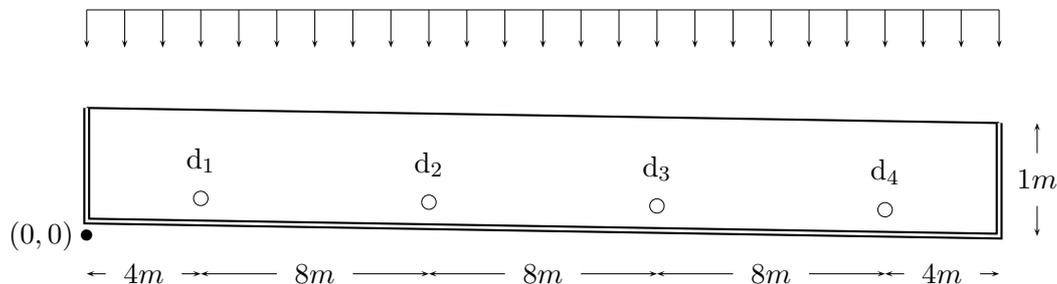


FIG. 4.29: Géométrie de la parcelle drainée.

La condition initiale de la charge hydraulique et l'intensité de la pluie seront précisées ultérieurement car leur influence sur le comportement hydrologique du système sera étudiée.

Les propriétés hydrodynamiques du sol, représentées sur la figure 4.30, sont données par le modèle de Van Genuchten modifié (voir les équations (2.31)) avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.43 & \epsilon &= 0.0094 \text{ cm}^{-1} & n &= 1.13 & h_s &= 2 \text{ cm} \\ \theta_r &= 0.0 & K_s &= 2.7 \cdot 10^{-4} \text{ cm.s}^{-1} & m &= 0.115 \end{aligned}$$

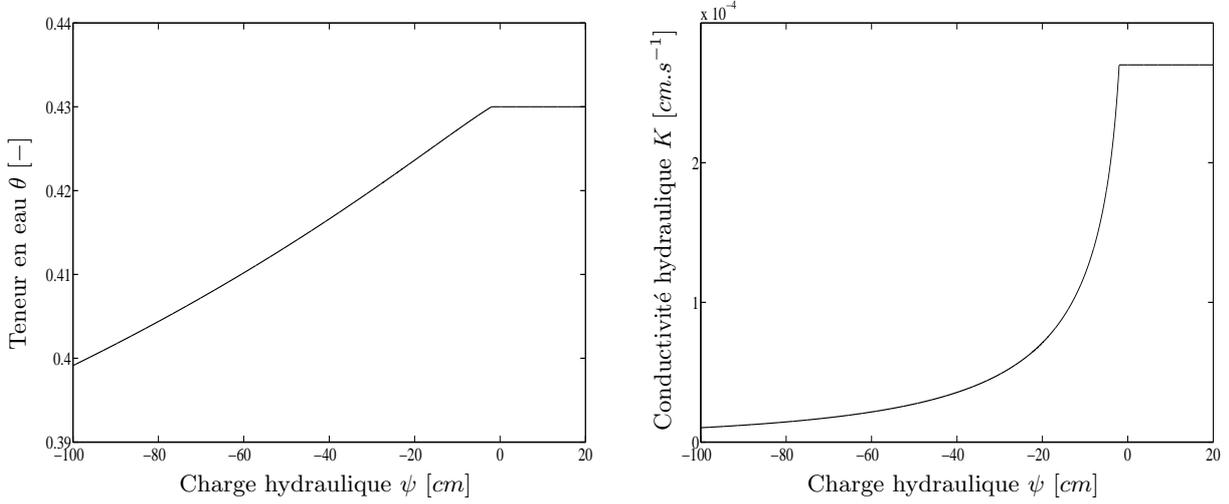


FIG. 4.30: Propriétés hydrodynamiques du sol dans le cas test avec plusieurs drains.

Le coefficient de Strickler  $\mathcal{K}$  est égal à  $30m^{1/3}.s^{-1}$  ce qui correspond à un frottement sur une zone cultivée (pâturage par exemple).

### 4.3.3 Résultats

#### Influence de la condition initiale

Deux simulations sont réalisées en faisant varier uniquement la condition initiale afin d'étudier l'influence de cette donnée sur le comportement hydrologique du système. Le temps final de la simulation et les pas de temps utilisés sont

$$T = 3h, \quad \delta t = 15s \quad \text{et} \quad \delta t' = 0.2s.$$

Une forte intensité de pluie est imposée sur la surface du sol pendant toute la simulation

$$v_r \cdot n_\Omega = -5 \text{ mm.h}^{-1} \quad \text{sur } \mathcal{I} \times [0, T].$$

Pour la première condition initiale (CI 1), les isovaleurs de la charge hydraulique sont horizontales alors que pour la seconde condition initiale (CI 2), les isovaleurs de la charge hydraulique sont parallèles à la surface du sol,

$$\begin{aligned} \text{CI 1 : } \psi^0 &= -0.5z & \text{dans } \Omega, \\ \text{CI 2 : } \psi^0 &= -0.5(z + 0.005(32 - x)) & \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

Les figures 4.31, 4.32 et 4.33 représentent les positions de la nappe obtenues avec les deux conditions initiales à 1h, 1h15 et 1h30. Ces figures illustrent la sensibilité du système à la condition initiale. L'échelle verticale est multipliée par 4 pour avoir une meilleure visualisation.

Les positions de la nappe entre les drains à  $1h$  de simulation sont clairement dans la continuité de la condition initiale : la nappe est horizontale dans le premier cas alors qu'elle est parallèle au fond dans le second cas. A  $1h15$ , la nappe monte plus vite au niveau du bord droit que dans le reste du domaine avec la première condition initiale car la conductivité à la surface du sol est d'autant plus importante que l'on s'éloigne du bord gauche. En revanche, la montée de la nappe s'effectue de la même façon dans la totalité du domaine avec la seconde condition initiale. La différence de position entre les deux nappes est accentuée à  $1h30$ .

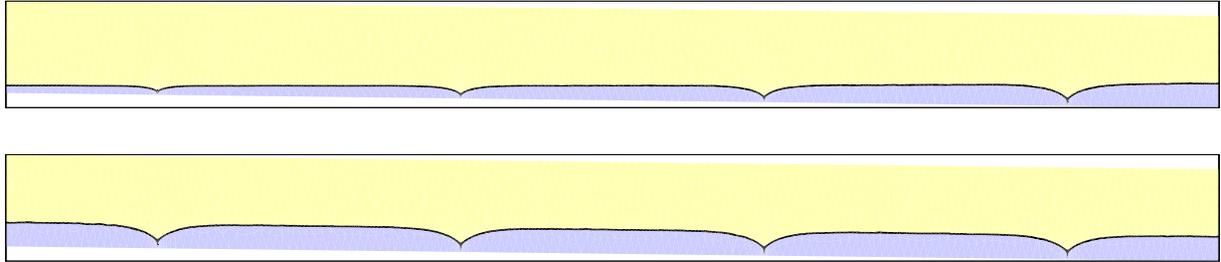


FIG. 4.31: Position de la nappe à  $1h$  avec la CI 1 en haut et la CI 2 en bas.

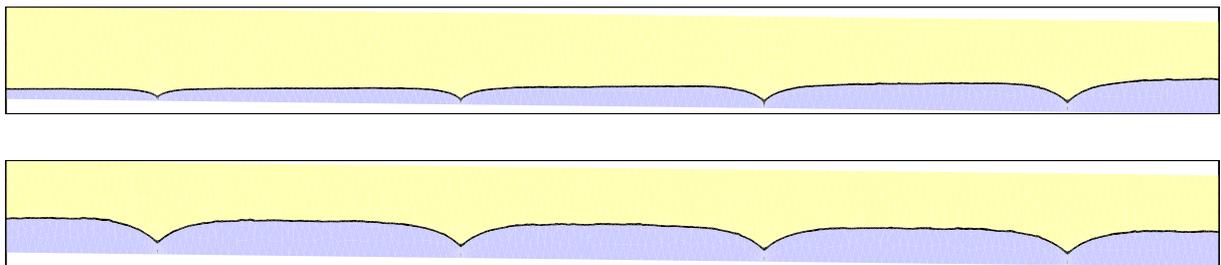


FIG. 4.32: Position de la nappe à  $1h15$  avec la CI 1 en haut et la CI 2 en bas.

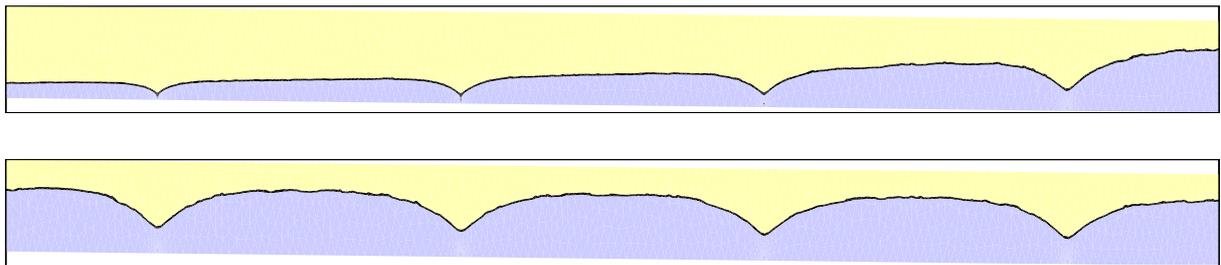


FIG. 4.33: Position de la nappe à  $1h30$  avec la CI 1 en haut et la CI 2 en bas.

Le principe pour obtenir le bilan de masse est identique aux cas tests précédents. Un terme supplémentaire dû à la la présence des drains dans le domaine apparaît dans ce bilan qui s'écrit

$$\underbrace{\rho(V_{\text{grnd}}^n - V_{\text{grnd}}^0)}_{\Delta M_{\text{grnd}}^n} + \underbrace{\rho(V_{\text{over}}^n - V_{\text{over}}^0)}_{\Delta M_{\text{over}}^n} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho \delta t F_{\text{r}}^i}_{M_{\text{in}}^i} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\rho \delta t (F_{\text{B}}^i + F_{\text{D}}^i)}_{M_{\text{out}}^i} + \underbrace{\rho \Delta V^n}_{E^n}.$$

La quantité  $F_{\mathcal{D}}^i$  est le flux d'eau passant par les quatre drains sur l'intervalle  $[(i-1)\delta t, i\delta t]$ ,

$$F_{\mathcal{D}}^i \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{D}_1}^i + F_{\mathcal{D}_2}^i + F_{\mathcal{D}_3}^i + F_{\mathcal{D}_4}^i.$$

Nous rappelons que le flux d'eau autour d'un drain est calculé en intégrant  $-v_b^*$  sur le bord du drain. Les figures 4.34 et 4.35 représentent pour la CI 1 et la CI 2 respectivement les quantités  $M_{\mathcal{D}_j}^n = \rho \delta t F_{\mathcal{D}_j}^n$  ( $j$  étant un entier compris entre 1 et 4) et la quantité  $M_{\mathcal{D}}^n = \sum_{j=1}^4 \rho \delta t F_{\mathcal{D}_j}^n$ . La figure 4.34 montre que les drains n'arrivent pas au régime maximum en même temps avec la première condition initiale. Un décalage d'environ 8 minutes est observé entre chaque drain, conduisant à un écart d'environ 24 minutes entre les drains  $d_1$  et  $d_4$ . Ce résultat confirme que le sol commence à saturer dans la partie droite puisque le drain  $d_4$  est actif le premier. Par contre, la figure 4.35 montre une synchronisation parfaite entre les différents drains avec la seconde condition initiale. Nous voyons également sur cette figure que la masse totale qui sort du système est identique avec les deux conditions initiales quand les quatre drains fonctionnent au régime maximum.

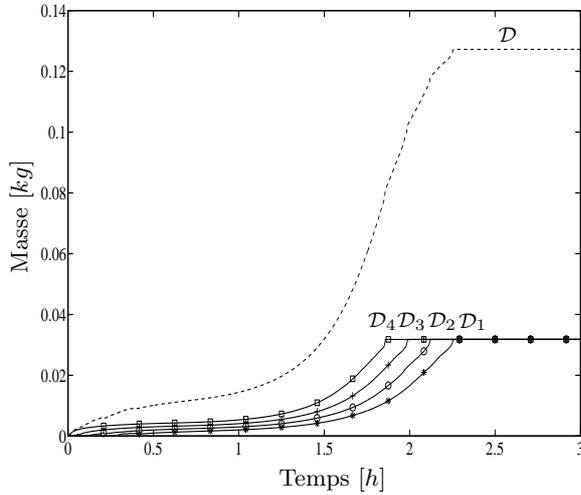


FIG. 4.34: Bilan de masse aux drains - CI 1.

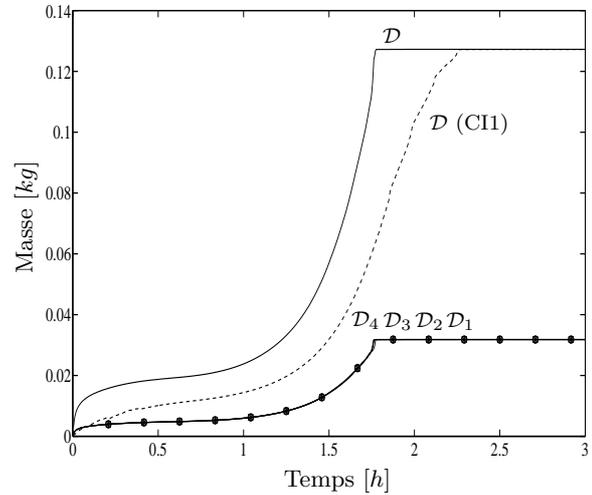


FIG. 4.35: Bilan de masse aux drains - CI 2.

Ces premiers résultats sont particulièrement intéressants puisqu'ils montrent l'importance de la condition initiale sur le comportement du système. La seconde condition initiale semble plus conforme aux observations et expérimentations faites par les hydrologues à savoir une montée de la nappe synchrone dans les différentes zones entre les drains et des transferts de masse simultanés à travers les drains. Les isovaleurs de la charge hydraulique parallèles à la surface du sol paraissent ainsi plus réalistes qu'une répartition linéaire suivant la verticale. Nous approfondissons maintenant les résultats obtenus avec la seconde condition initiale.

La figure 4.36 représente la position de la nappe à deux instants où l'affleurement commence à se produire ( $t = 6000s$  pour la figure du haut et  $t = 6150s$  pour la figure du bas). Comme attendu, la figure du haut montre que la nappe débute l'affleurement aux milieux des zones inter-drains. La symétrie des zones insaturées situées au dessus des drains et à proximité de la surface est également visible sur cette figure. Nous pouvons observer que cette symétrie est brisée sur la figure du bas ce qui met en évidence le ruissellement sur la surface du sol. Il est clair que ce phénomène ne peut pas être détecté sans un modèle de couplage prenant en compte le ruissellement surfacique.

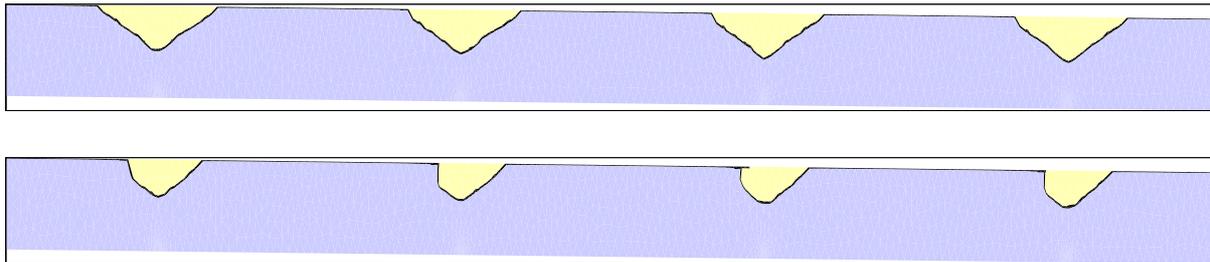


FIG. 4.36: Affleurement de la nappe aux instants  $t = 6000s$  (haut) et  $t = 6150s$  (bas).

La figure 4.37 représente la hauteur d'eau à la surface du sol à quatre instants de la simulation :  $t_1 = 1h40$ ,  $t_2 = t_1 + 7min30s$ ,  $t_3 = t_1 + 15min$  et  $t_4 = t_1 + 1h20min$ . Notons que  $t_1$  désigne le temps où l'affleurement débute et que  $t_4$  correspond au temps final de simulation ( $t_4 = T$ ). Sur cette figure, la hauteur entre le bord inférieur et le bord supérieur du cadre représente  $1.5mm$ . La hauteur d'eau à  $t_1$  est en alternance strictement positive puis nulle. Cela montre que les conditions aux limites sur la surface du sol sont successivement de type Dirichlet ( $h > 0$ ) et de type Neumann ( $h = 0$ ) et que notre algorithme est capable de traiter plusieurs zones d'affleurement en même temps. La hauteur d'eau à  $t_2$  est positive sur l'ensemble de l'interface ce qui montre que notre algorithme a su traiter la connexion de plusieurs zones de ruissellement. La hauteur d'eau à  $t_3$  montre qu'après un quart d'heure d'exfiltration en surface, la hauteur d'eau est assez proche de sa valeur finale.

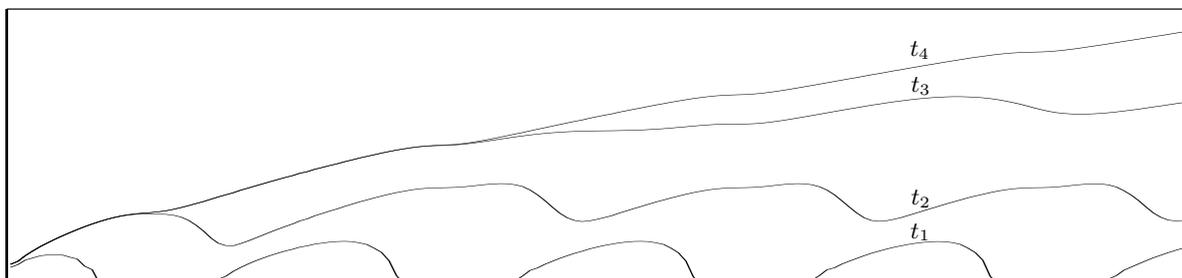


FIG. 4.37: Hauteur d'eau à la surface du sol à différents instants.

La figure 4.38 représente les quantités  $\Sigma M_{in}^n$ ,  $\Delta M^n$ ,  $\Delta M_{grnd}^n$ ,  $\Delta M_{over}^n$  et  $\Sigma M_{out}^n$ . Cette figure confirme que l'eau introduite par la pluie est totalement absorbée par le sol au début de la simulation puisque la masse d'eau à la surface du sol est nulle jusqu'à environ  $1h45min$ . Pendant cette phase de saturation du sol, le drainage augmente puisque l'écart entre la courbe représentant  $\Delta M_{grnd}^n$  et celle représentant  $\Sigma M_{in}^n$  s'accroît progressivement (nous retrouvons le résultat de la figure 4.35). Une phase de transition d'environ un quart d'heure est ensuite visible : l'affleurement se produit puisque la quantité  $\Delta M_{over}^n$  devient non nulle. Le sol se sature complètement car la quantité  $\Delta M_{grnd}^n$  devient constante. Enfin, un état stationnaire semble être atteint après deux heures de simulation : les masses d'eau contenues dans le sol et dans la lame ruisselante semblent être constantes, la masse d'eau introduite dans le système étant alors égale à la masse d'eau sortant du système.

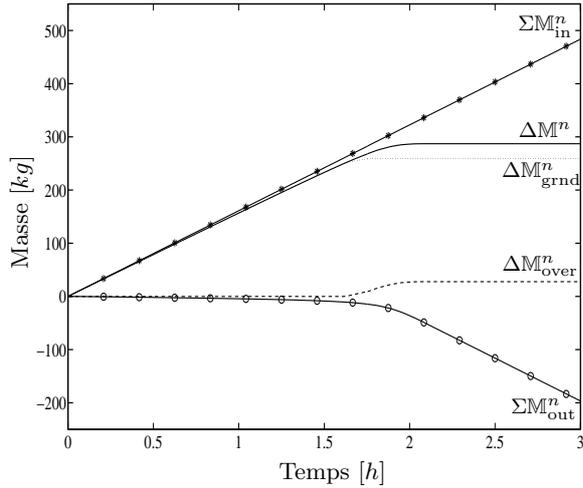


FIG. 4.38: Bilan de masse.

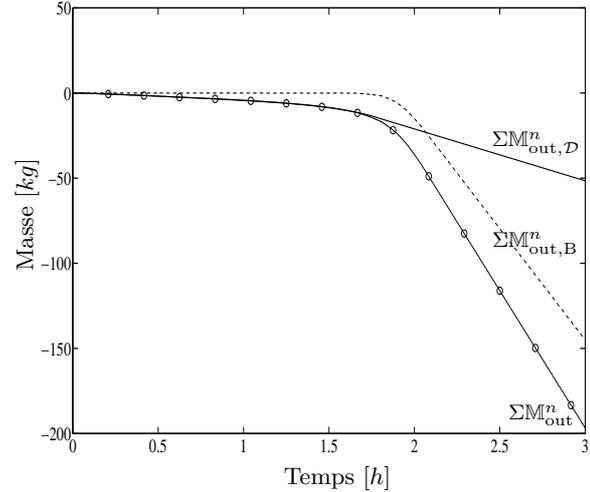


FIG. 4.39: Décomposition de la masse d'eau sortant du système

La masse totale sortie du système à l'instant  $n\delta t$ , notée  $\Sigma M_{\text{out}}^n$ , peut être décomposée suivant que l'eau est sortie au niveau de l'exutoire ou au niveau des drains :

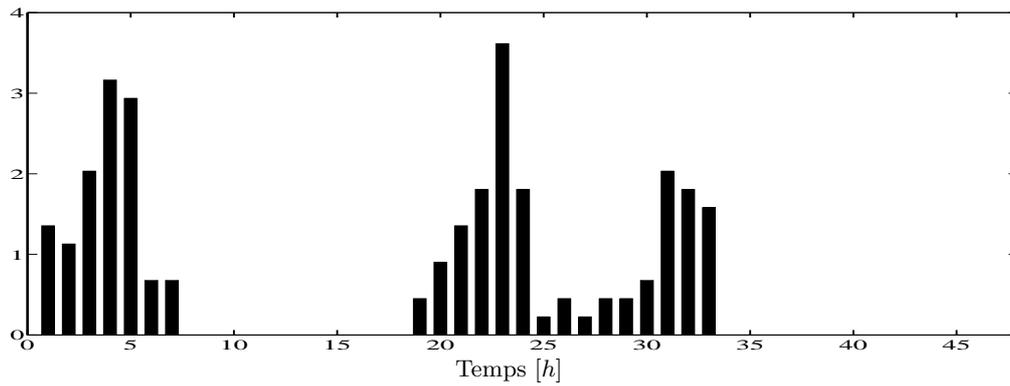
$$\Sigma M_{\text{out}}^n = \sum_{i=1}^n \rho \delta t (F_{\text{B}}^i + F_{\text{D}}^i) = \underbrace{\sum_{i=1}^n \rho \delta t F_{\text{B}}^i}_{\Sigma M_{\text{out,B}}^n} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \rho \delta t F_{\text{D}}^i}_{\Sigma M_{\text{out,D}}^n}$$

La figure 4.39 représente les trois quantités  $\Sigma M_{\text{out}}^n$ ,  $\Sigma M_{\text{out,B}}^n$  et  $\Sigma M_{\text{out,D}}^n$ . Comme attendu, cette figure montre que la masse d'eau qui sort du système est uniquement évacuée par les drains jusqu'à une  $1h45min$  de simulation. A partir de cet instant, l'eau commence à sortir à l'exutoire et il est intéressant de noter que la pente de la droite représentant la quantité  $\Sigma M_{\text{out,B}}^n$  est beaucoup plus importante que celle représentant la quantité  $\Sigma M_{\text{out,D}}^n$ . Cela signifie que les drains retardent l'affleurement de la nappe mais que le débit à l'exutoire est supérieur au débit des drains lorsque le milieu est complètement saturé. *In fine*, la masse totale qui transite à l'exutoire est environ le triple de celle évacuée par les drains.

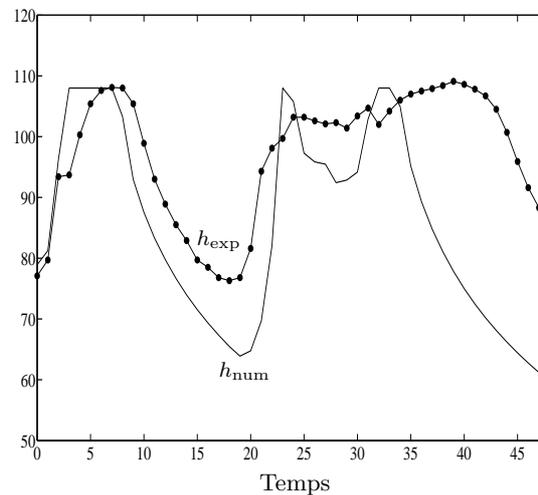
### Pluie variable dans le temps - Comparaison avec des mesures expérimentales

Nous effectuons maintenant une simulation d'une durée de 2 jours au cours de laquelle la pluie est une donnée issue de mesures expérimentales réalisées les 12 et 13 janvier 2004 sur le site d'Orgeval (données CEMAGREF). Les différentes intensités de pluie changent toutes les heures et sont représentées sur la figure 4.40. Nous observons deux événements de pluie sur cet histogramme puisque l'intensité de la pluie est nulle sur les intervalles  $[8h, 17h]$  et  $[34h, 48h]$ . La mesure expérimentale dont nous disposons est la profondeur de la nappe mesurée à l'interdrain (par un tube piezométrique) sur l'une des parcelles constituant le bassin versant. Nous faisons l'hypothèse que le bassin versant, d'une superficie de  $7.1km^2$ , est suffisamment homogène pour être décrit par la géométrie précédente (voir la figure 4.29) *modulo* un simple changement d'échelle spatiale.

Pour obtenir la condition initiale de cette simulation, un premier calcul est réalisé en drainant le sol complètement saturé obtenu au cas test précédent. Nous choisissons alors la charge hydraulique telle que la hauteur de la nappe à l'interdrain corresponde à la hauteur mesurée *in situ*. La simulation est réalisée avec  $\delta t = 1min$  et  $\delta t' = 0.1s$ .

FIG. 4.40: Histogramme expérimental de la pluie en  $mm.h^{-1}$ .

La figure 4.41 représente les hauteurs de la nappe à l'interdrain obtenues par les mesures expérimentales et la simulation. Cette comparaison montre que le sol modélisé est plus conducteur que le sol réel car les affleurements de la nappe issus du calcul se produisent avant les affleurements mesurés.

FIG. 4.41: Hauteur de nappe à l'interdrain en  $cm$ .

### Conclusion

Ce cas test de simulation d'une partie d'un bassin versant expérimental nous a permis de tester notre logiciel R+R\_DG dans une configuration réaliste. La première série de résultats est encourageante puisque nous pouvons traiter l'apparition simultanée de plusieurs zones de ruissellement ainsi que leurs connexions. La propagation du ruissellement est clairement visible par la dissymétrie de la zone saturée sur la figure 4.36. D'un point de vue hydrologique, ce cas test a montré l'impact de la condition initiale sur le comportement du système ce qui motive la nécessité de bien connaître cette donnée d'entrée du modèle. Par ailleurs, le fait que la masse d'eau totale passant par l'exutoire est supérieure à la masse d'eau évacuée par les drains traduit que le réseau de drainage étudié retarde l'affleurement mais n'empêche pas le ruissellement de grandes quantités d'eau. La seconde série de résultats montre des écarts significatifs entre les résultats numériques et les mesures expérimentales. Toutefois, la réalisation d'autres tests en changeant certains éléments de modélisation (rugosité du terrain et propriétés hydrodynamiques du sol) devrait nous permettre d'obtenir des résultats plus proches de ceux mesurés sur le terrain.



# Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié la modélisation numérique des écoulements souterrains en utilisant une méthode de Galerkin discontinue pour la discrétisation en espace et des schémas BDF pour la discrétisation en temps. Nous avons aussi étudié le couplage de ces écoulements avec le ruissellement surfacique discrétisé par une méthode de volumes finis et un schéma d'Euler explicite.

Dans le premier chapitre, l'intérêt de ces travaux en hydrologie a été situé. Les différents modèles disponibles pour décrire les deux types d'écoulements ont été présentés. Nous avons choisi l'équation de Richards pour modéliser les écoulements dans le sol et l'approximation de l'onde cinématique pour décrire les écoulements à la surface du sol.

Le chapitre 2 a permis de présenter la méthode de Galerkin discontinue SIPG, les schémas de discrétisation temporelle ainsi que la linéarisation effectuée. Deux schémas ont été implémentés pour l'initialisation : un schéma de Runge–Kutta diagonalement implicite utilisé lorsque le milieu est insaturé à l'instant initial et le schéma de Crank–Nicolson utilisé dans le cas contraire.

Le chapitre 3 a introduit les problèmes de frontière libre en résolvant l'équation de Richards avec des conditions aux limites de Signorini. Un algorithme pour traiter ce type de condition a été proposé puis testé dans le cas de l'affleurement d'une nappe et dans le cas de la présence d'un drain dans le sol. Des propriétés de conservation de la masse d'eau dans le sol ont été établies pour les schémas BDF d'ordre 1 et 2.

Le chapitre 4 a constitué la partie principale de nos travaux : le couplage des écoulements souterrains et superficiels en prenant en compte la propagation d'une lame d'eau ruisselante. Deux algorithmes de couplage, l'un avec la BDF1 et l'autre avec la BDF2, ont été proposés. Le choix du terme de couplage dans les écoulements superficiels est important pour assurer la conservation de la masse lorsque l'ordre de la BDF est supérieur ou égal à deux.

La méthodologie numérique développée dans cette thèse est précise (conservation de la masse d'eau, taux de convergence optimaux sur solution analytique), flexible (possibilité d'utiliser des maillages non-coïncidants, extension aisée à la dimension 3, pas de temps différents en subsurface et en surface) et robuste (possibilité de traiter les zones de transitions saturées/insaturées du sol, l'affleurement de nappe, le ruissellement hortonien et le drainage, une pluie variable dans le temps). Le logiciel R+R\_DG que nous avons développé est ainsi à même d'être utilisé pour étudier, certes dans des configurations encore simplifiées, le fonctionnement hydrologique de petits bassins versants drainés en milieu agricole. L'identification des conditions initiales d'un système est un exemple d'études actuellement réalisables. La prise en compte de l'hétérogénéité en espace et éventuellement en temps du terrain serait aussi un élément à étudier par un traitement quantitatif des incertitudes par une approche déterministe (analyse de sensibilité, modèle inverse) ou stochastique (polynômes de chaos).



# Annexe A

## Couplage avec les équations de Saint–Venant

Le but de cette annexe est de présenter le couplage des écoulements souterrains avec les écoulements surfaciques qui sont modélisés par les équations de Saint–Venant. Nous commençons par exposer la discrétisation de ce système : le flux numérique est précisé, quatre types de conditions aux limites peuvent être imposés et une modification du flux numérique permet d’obtenir un schéma équilibré. Nous présentons également un cas test de transfert d’eau entre plusieurs sillons qui n’est pas réalisable avec l’approximation de l’onde cinématique. En effet celle-ci ne peut pas modéliser la dynamique de l’écoulement dans un sillon puisque l’hypothèse d’équilibre entre gravité et frottements implique un écoulement des zones ayant l’altitude la plus grande vers les zones ayant une altitude plus faible.

### A.1 Discrétisation des équations de Saint–Venant

Le système des équations de Saint–Venant est constitué des équations (1.9) et (1.10). Il peut s’écrire sous la forme générale

$$\partial_t \mathbf{W} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{W}) = \mathbf{S}(\mathbf{W}, S), \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{S}$  désignent respectivement les variables conservatives, la fonction de flux et le terme source contenant le terme de couplage  $v(\psi) \cdot n_\Omega$  et dans lequel le terme de frottement  $-ghJ$  est négligé :

$$\mathbf{W} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v(\psi) \cdot n_\Omega \\ ghS \end{pmatrix}.$$

La vitesse du fluide est définie comme le rapport  $u \stackrel{\text{def}}{=} q/h$ . Nous rappelons également que les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\partial_{\mathbf{W}} \mathbf{F}$  sont  $u \pm c$  où  $c \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh}$  est la vitesse de propagation des ondes.

La discrétisation des équations de Saint–Venant s’effectue avec les volumes finis mais une méthode DG, comme le font par exemple Aizinger et Dawson [AD02], Tassi, Bokhove et Vionnet [TBV07] ou Ern, Piperno et Djadel [EPD08], est également envisageable. Comme pour la discrétisation de l’équation de l’onde cinématique, nous considérons la trace du maillage  $\mathcal{T}_\eta$  sur l’interface  $\mathcal{I}$ . Les notations sont également identiques :  $x_i$ ,  $l_i$ ,  $x_{i-\frac{1}{2}}$  et  $x_{i+\frac{1}{2}}$  sont respectivement le centre, la longueur, et les sommets gauche et droit d’une arête quelconque  $e_i$  du maillage de  $\mathcal{I}$  (voir la figure A.1). La quantité  $z_i$  désigne la cote du centre de l’arête  $e_i$ .

Le système régissant les écoulements superficiels est composé du système (A.1), d’une condition initiale  $\mathbf{W}^0$  ainsi que de conditions aux limites qui peuvent être imposées aux extrémités A et B de l’interface et qui seront précisées ci-après.

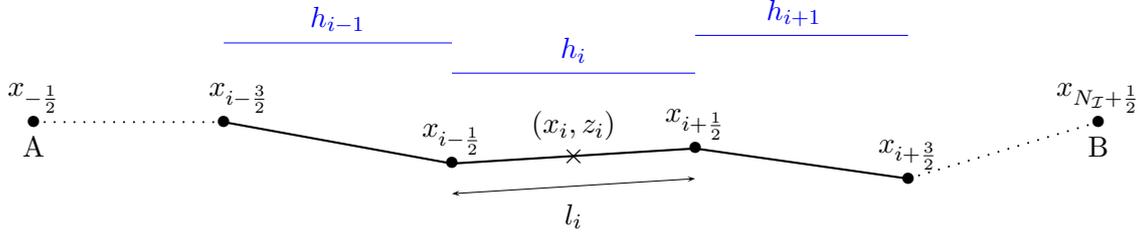


FIG. A.1: Discrétisation de l’interface  $\mathcal{I}$ .

### • Flux HLLLE

Plusieurs flux numériques peuvent être utilisés dans la discrétisation des équations de Saint–Venant. Le flux de Harten, Lax et Van Leer [HLvL83], noté HLL, est une généralisation du flux de Lax–Friedrichs. Le flux HLLLE proposé par Einfeldt [Ein88] est une amélioration du flux HLL puisqu’il préserve la positivité de la hauteur moyenne d’eau dans le cas monodimensionnel. De même, le flux HLLC proposé par Toro [Tor01] assure la positivité de la hauteur moyenne en dimension deux d’espace. Dans notre cas, nous choisissons le flux HLLLE avec un schéma d’Euler explicite en temps. Pour simplifier la présentation, nous supposons que le pas de temps  $\delta t'$  utilisé pour le système de Saint–Venant est égal au pas de temps  $\delta t$  choisi pour l’équation de Richards. Sous cette hypothèse, le schéma s’écrit

$$l_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\delta t'} = \mathbb{F}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_i^n) - \mathbb{F}(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + \int_{e_i} \begin{pmatrix} v_b^{*,n+1} \\ ghS_i \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

où  $\mathbb{F}(\mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R)$  est le flux HLLLE. Ce flux est basé sur le fait que l’approximation de la solution repose sur trois états appelés  $\mathbf{W}_L$ ,  $\mathbf{W}_0$ ,  $\mathbf{W}_R$  et séparés par deux vitesses de propagation des ondes  $c_+$  et  $c_-$ . Partant des deux états

$$\mathbf{W}_L = \begin{pmatrix} h_L \\ q_L \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{W}_R = \begin{pmatrix} h_R \\ q_R \end{pmatrix},$$

les vitesses des ondes suivantes sont déterminées,

$$c_L \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh_L}, \quad c_R \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh_R} \quad \text{et} \quad c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{gh_0} \quad \text{avec} \quad h_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h_L + h_R}{2},$$

ainsi que les vitesses du fluide suivantes :

$$u_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_L}{h_L}, \quad u_R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_R}{h_R} \quad \text{et} \quad u_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_L u_L + c_R u_R}{c_L + c_R}.$$

Les vitesses de propagation des ondes  $c_+$  et  $c_-$  sont calculées à partir des quantités précédentes,

$$c_+ \stackrel{\text{def}}{=} \max(0, u_R + c_R, u_0 + c_0) \quad \text{et} \quad c_- \stackrel{\text{def}}{=} \min(0, u_L - c_L, u_0 - c_0).$$

Le flux HLLE est la somme d'une partie centrée et d'une partie décentrée,

$$\mathbb{F} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{W}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{W}_R)) + \frac{1}{2}\mathbf{Q}(\mathbf{W}_L - \mathbf{W}_R),$$

où la matrice d'ordre deux  $\mathbf{Q}$  est définie par

$$\mathbf{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_+ + c_-}{c_+ - c_-} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_0^2 + gh_0 & 2u_0 \end{pmatrix} - 2\frac{c_+c_-}{c_+ - c_-} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La condition CFL pour le schéma (A.2) est

$$\delta t' = \min_{1 \leq i \leq N_{\mathcal{I}}} \left( \frac{l_i}{|q_i/h_i| + \sqrt{gh_i}} \right).$$

Pour éviter de modifier le pas de temps  $\delta t'$  au cours de la simulation, nous remplaçons cette condition CFL par

$$\delta t' = \frac{1}{2\sqrt{gh_{\max}}} \cdot \min_{1 \leq i \leq N_{\mathcal{I}}} (l_i),$$

dans laquelle  $h_{\max}$  est une borne supérieure *a priori* de la hauteur d'eau  $h$  sur  $\mathcal{I} \times [0, T]$ .

### • Conditions aux limites

Quatre types de conditions aux limites peuvent être imposés aux extrémités de l'interface. On introduit des états fictifs  $\mathbf{W}_A$  en A et  $\mathbf{W}_B$  en B que l'on utilise dans l'évaluation du flux  $\mathbb{F}$ .

– *Un flux nul* est obtenu par symétrie avec les états suivants

$$\mathbf{W}_A = \begin{pmatrix} h_1 \\ -q_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_B = \begin{pmatrix} h_{N_{\mathcal{I}}} \\ -q_{N_{\mathcal{I}}} \end{pmatrix}.$$

– *Une sortie libre* est considérée en imposant

$$\mathbf{W}_A = \begin{pmatrix} h_1 \\ q_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_B = \begin{pmatrix} h_{N_{\mathcal{I}}} \\ q_{N_{\mathcal{I}}} \end{pmatrix}.$$

– *Une hauteur d'eau* est imposée en conservant l'invariant de Riemann  $u - 2c$  en A et l'invariant de Riemann  $u + 2c$  en B. Au point A avec une hauteur d'eau  $h_A$ , on utilise l'état  $\mathbf{W}_1$  pour évaluer l'invariant de Riemann, ce qui donne

$$u_A - 2c_A = u_1 - 2c_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{q_A}{h_A} - 2\sqrt{gh_A} = \frac{q_1}{h_1} - 2\sqrt{gh_1}, \quad (\text{A.3})$$

soit

$$\mathbf{W}_A = h_A \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{gh_A} + q_1/h_1 - 2\sqrt{gh_1} \end{pmatrix}.$$

Au point B avec une hauteur  $h_B$ , on utilise l'état  $\mathbf{W}_{N_{\mathcal{I}}}$ , ce qui donne

$$\mathbf{W}_B = h_B \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{gh_B} + q_{N_{\mathcal{I}}}/h_{N_{\mathcal{I}}} + 2\sqrt{gh_{N_{\mathcal{I}}}} \end{pmatrix}.$$

– *Un débit* est également imposé en conservant les invariants de Riemann. Au point A avec un débit  $q_A$ , on obtient

$$\frac{q_A}{h_A} - 2\sqrt{gh_A} = \frac{q_1}{h_1} - 2\sqrt{gh_1} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{gh_A}h_A + h_A \left( -\frac{q_1}{h_1} + 2\sqrt{gh_1} \right) + q_A = 0, \quad (\text{A.4})$$

soit

$$\mathbf{W}_A = \begin{pmatrix} h_A \\ q_A \end{pmatrix},$$

où  $h_A$  est solution de l'équation (A.4). Au point B avec un débit  $q_B$ , on obtient

$$\mathbf{W}_B = \begin{pmatrix} h_B \\ q_B \end{pmatrix},$$

où  $h_B$  est solution de l'équation

$$2\sqrt{gh_B}h_B - h_B \left( \frac{q_{N_I}}{h_{N_I}} + 2\sqrt{gh_{N_I}} \right) + q_B = 0.$$

### • Schéma équilibré

La préservation d'états d'équilibre est une caractéristique utile des schémas approchant les équations de Saint–Venant. Nous considérons en particulier les états stationnaires au repos caractérisés par les deux conditions

$$h + z = C \quad \text{et} \quad q = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{I} \times [0, T],$$

où  $z$  désigne la cote du fond et  $C$  est une constante. Les schémas préservant de tels états sont dits équilibrés. La modification suivante du schéma (A.2), proposée par Audusse *et al.* [ABB<sup>+</sup>04], permet qu'il soit équilibré en l'absence de terme de couplage,

$$l_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^n}{\delta t'} = \mathbb{F}(\mathbf{W}_{i-1}^n, \mathbf{W}_{i-1}^n) - \mathbb{F}(\mathbf{W}_{i+1}^n, \mathbf{W}_{i+1}^n) + \frac{g}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ (h_{i+1}^n)^2 - (h_{i-1}^n)^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

où  $\mathbf{W}_{i-1}^+ = \begin{pmatrix} h_{i-1}^+ \\ q_{i-1}^+ \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{W}_{i+1}^- = \begin{pmatrix} h_{i+1}^- \\ q_{i+1}^- \end{pmatrix}$ .

Les hauteurs et les débits modifiés sont définis par

$$\begin{aligned} h_{i-1}^+ &\stackrel{\text{def}}{=} \max(0, h_i - \max(z_{i-1} - z_i, 0)), & q_{i-1}^+ &\stackrel{\text{def}}{=} q_i \frac{h_{i-1}^+}{h_i}, \\ h_{i+1}^- &\stackrel{\text{def}}{=} \max(0, h_i - \max(z_{i+1} - z_i, 0)), & q_{i+1}^- &\stackrel{\text{def}}{=} q_i \frac{h_{i+1}^-}{h_i}. \end{aligned}$$

Le schéma (A.5) préserve les états stationnaires au repos au sens suivant :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1 \dots N_{\mathcal{I}}\}, \quad \forall n \in \{0 \dots N_{\mathcal{T}}\}, \quad \forall C \in \mathbb{R}, \\ h_i^n \geq 0, \quad h_i^n + z_i = C \quad \text{et} \quad q_i^n = 0 \quad \Rightarrow \quad h_i^{n+1} \geq 0, \quad h_i^{n+1} + z_i = C \quad \text{et} \quad q_i^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

## A.2 Transfert entre sillons

Dans ce cas test, nous validons l'implémentation dans le logiciel R+R\_DG du schéma (A.5) avec le terme de couplage  $v(\psi) \cdot n_\Omega$  dans l'équation de continuité. Nous proposons une modélisation des hétérogénéités de la surface du sol qui peuvent conduire à la formation de flaques et influencer l'écoulement. Un transfert d'eau est provoqué entre différents sillons représentés au niveau de l'interface  $\mathcal{I}$  par la courbe sinusoidale suivante

$$\forall x \in [0, 3], \quad z = 0.9 + 0.1 \cos(2\pi x).$$

La géométrie et le temps final de simulation sont

$$L = 3m, \quad P_A = P_B = 1m \quad \text{et} \quad T = 2h,$$

avec les notations usuelles (voir la figure A.2). La condition initiale est hydrostatique avec une nappe située au niveau du fond des sillons, c'est-à-dire à  $0.8m$ , et la condition aux limites sur les parois et le fond est un flux nul,

$$\begin{aligned} \psi^0 &= -z + 0.8m \quad \text{dans } \Omega, \\ v_N &= 0 \quad \text{sur } (\mathcal{W} \cup \mathcal{B}) \times [0, T]. \end{aligned}$$

Pour l'écoulement surfacique, la condition initiale est un remplissage du sillon situé à proximité du point A,

$$h^0 = \begin{cases} 1m - z & \text{si } x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

et les conditions aux limites sont

$$\begin{aligned} h_A &= 0 \quad \text{en } A \times [0, T], \\ h_B &= 0 \quad \text{en } B \times [0, T]. \end{aligned}$$

Nous pourrions considérer que l'état initial correspond au remplissage instantané du premier sillon au début de la simulation.

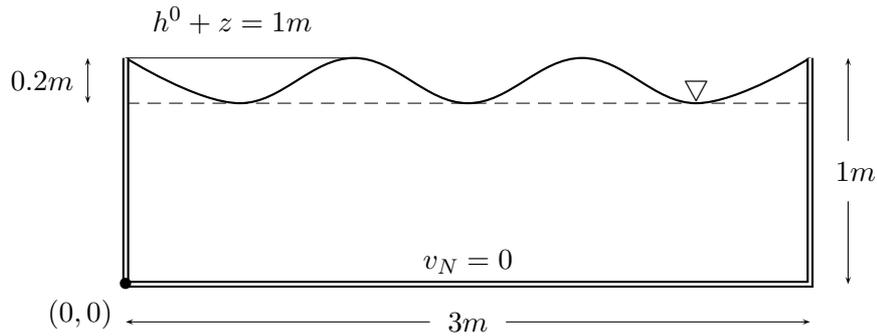


FIG. A.2: Géométrie et condition initiale.

Les propriétés hydrodynamiques du sol sont identiques à celles utilisées dans le chapitre 4, elles correspondent aux relations d'Haverkamp (2.27) avec les valeurs suivantes pour les différents paramètres,

$$\begin{aligned} \theta_s &= 0.5 & \tilde{\alpha} &= 0.028cm^{-1} & K_s &= 10^{-2}cm.s^{-1} & \gamma &= 4 \\ \theta_r &= 0.05 & \beta &= 4 & \tilde{A} &= 0.030cm^{-1} \end{aligned}$$

Un maillage quasi-uniforme avec 3283 triangles, représenté à la figure A.3, est considéré. Les pas de temps  $\delta t = 2s$  et  $\delta t' = 0.2s$  sont utilisés, ce qui conduit à 3600 résolutions de l'équation de Richards pendant la simulation.

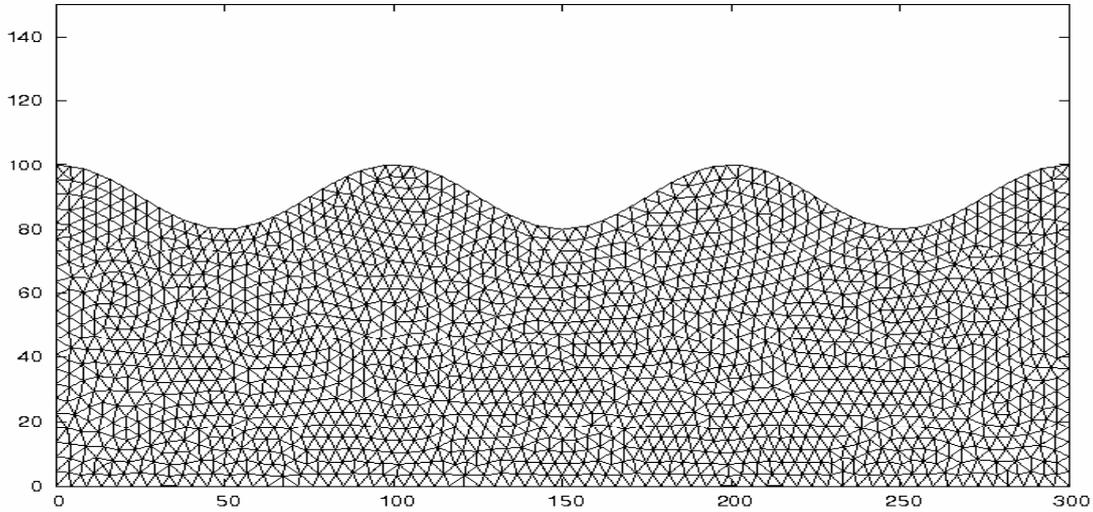


FIG. A.3: Maillage avec sillons au niveau de la surface du sol.

La figure A.4 présente la surface libre de l'écoulement et la vitesse normale au niveau de l'interface à  $2s$ ,  $200s$  et  $2h$ . Au début de la simulation, le premier sillon est complètement rempli et les conditions aux limites des faces correspondantes sont de type Dirichlet. L'exfiltration d'eau débute dans les deux autres sillons notamment dans le sillon du milieu où une hauteur d'eau est visible à  $2s$ . La situation est similaire à  $200s$  puisque la hauteur d'eau du sillon central est plus importante que celle du sillon de droite. A la fin de la simulation, la surface libre dans le premier sillon a considérablement baissé au profit des deux autres sillons. Ainsi, une condition de Neumann est imposée dans le premier sillon sur les arêtes dont le milieu a une cote supérieure à  $95cm$  et une condition de Dirichlet est imposée sur les arêtes centrales des sillons du milieu et de gauche. Il est évident que l'état stationnaire attendu dans ce système est une surface libre (hauteur d'eau + cote) horizontale identique dans les trois sillons.

Les nuages de points de la figure A.5 confirment que l'interface  $\mathcal{I}$  possède des zones saturées et insaturées puisque les couples charge hydraulique/hauteur d'eau se trouvent sur les deux branches de l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$  pendant toute la simulation. Dans ce cas test, il est intéressant de noter qu'un groupe de points situé sur la branche  $\{\psi = h\}$  se déplace sur la branche  $\{h = 0\}$  et inversement. Le premier groupe de points est associé aux arêtes situées près des deux extrémités du premier sillon et le second groupe de points est associé aux arêtes centrales des sillons du milieu et de droite. De plus, étant donné la condition initiale et l'évolution du système, l'étalement du nuage de points sur les deux branches diminue au cours de la simulation.

La figure A.6 montre l'état de saturation du sol au cours de la simulation. A  $2s$ , le sol à proximité du premier sillon est presque saturé et nous observons la condition hydrostatique initiale sur la moitié droite du système. A  $200s$ , le sol à proximité du premier sillon est entièrement saturé et le niveau de la nappe augmente sur la moitié droite du système. A la fin de la simulation, les parties hautes des zones situées entre les sillons sont insaturées et nous retrouvons les résultats de la figure A.4. La figure A.6 à  $7200s$  indique comme attendu que le niveau de la nappe entre les sillons coïncide avec le niveau de la surface libre dans les trois sillons lorsque le système atteint l'état stationnaire.

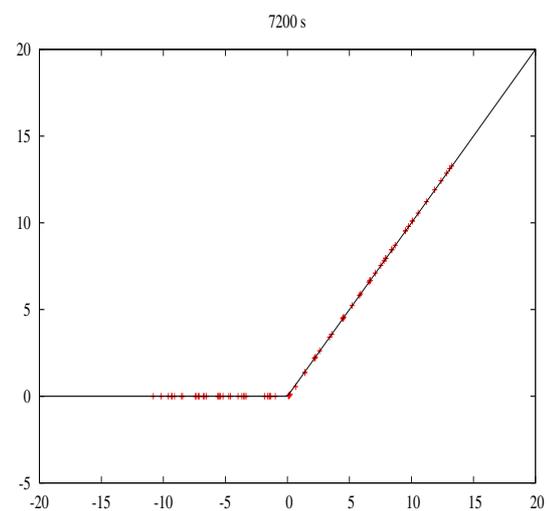
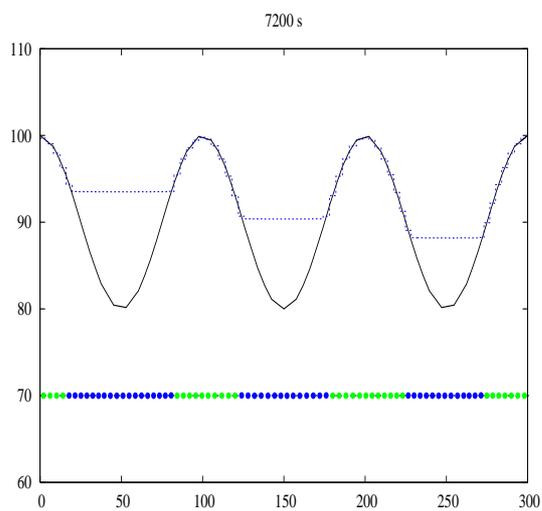
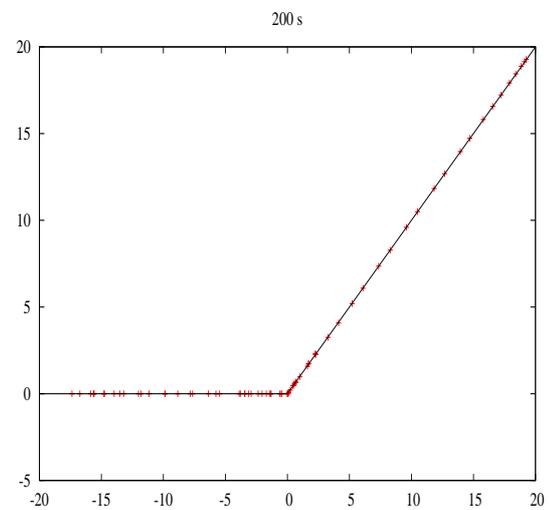
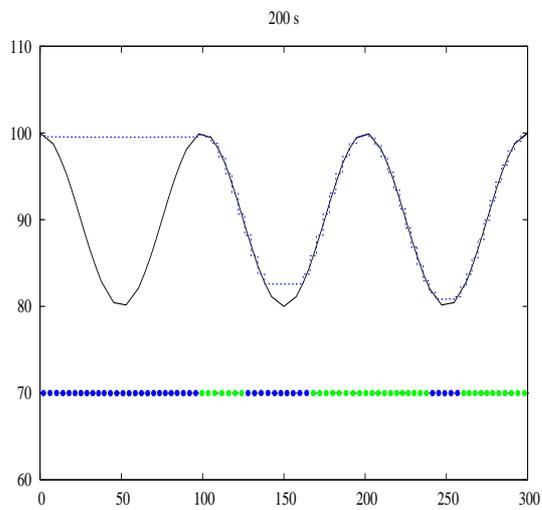
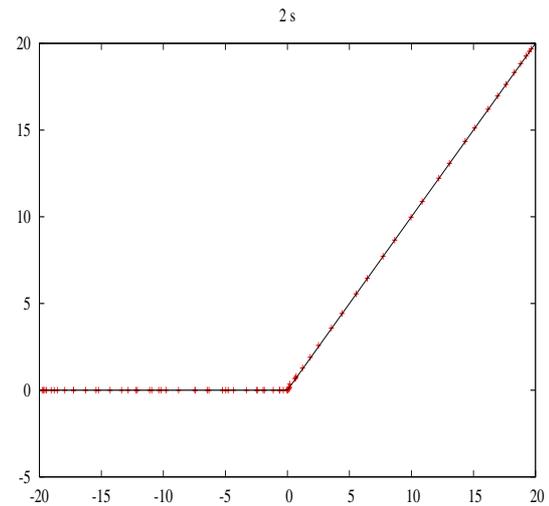
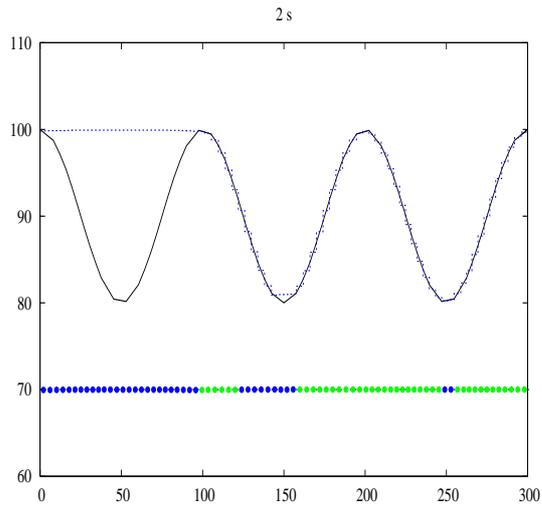


FIG. A.4: Interface  $\mathcal{I}$  (—), surface libre et vitesse normale  $\bar{v}_h^{**}$  en  $cm.s^{-1}$  en  $cm/15min$  (• si l'arête est mouillée et • sinon).

FIG. A.5: Nuage de points  $(\psi_h^n, h_h^n)$  sur l'ensemble admissible  $\mathcal{A}_2$ .

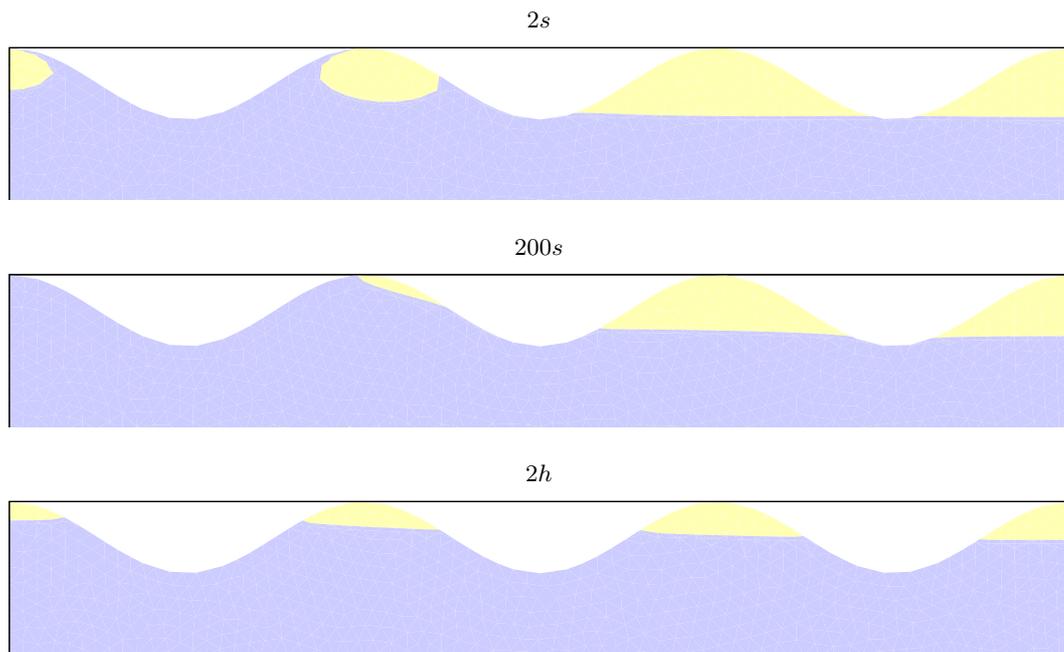


FIG. A.6: Etat de saturation du sol au niveau des sillons à différents instants.

# Annexe B

## Le logiciel R+R\_DG

L'objectif de cette annexe est de présenter le logiciel R+R\_DG que nous avons conçu, développé en C et testé dans plusieurs configurations. Ce logiciel contient environ 9000 lignes (hors routines d'algèbre linéaire) et nous décrivons quelques extraits de nos programmes informatiques pour illustrer la façon dont nous avons implémenté la méthode SIPG ainsi que le couplage. Nous commençons par l'organisation générale du code, puis nous détaillons l'assemblage de la matrice et du second membre. Nous terminons par préciser les éléments nécessaires à la prise en compte du couplage au niveau de la surface du sol.

### B.1 Organisation générale

Pour récapituler les différentes notions introduites dans cette thèse, nous indiquons l'organisation générale du programme principal à la page suivante. Les modèles disponibles dans le logiciel R+R\_DG pour décrire les propriétés hydrodynamiques du sol sont le modèle de Van Genuchten, le modèle de Van Genuchten modifié et le modèle proposé par Haverkamp. Des modèles supplémentaires (comme celui de Brooks–Corey) peuvent être insérés sans aucune difficulté. Avec les différents cas tests réalisés, nous disposons d'une bibliothèque de maillages avec des géométries variables (carré, rectangle, domaine avec pente en surface) et des pas d'espace différents. Certains maillages possèdent des trous pour modéliser les drains. Nous avons utilisé Freefem<sup>©</sup> pour les réaliser mais tout autre logiciel de maillage peut être choisi. La seule condition est de respecter la forme suivante pour le fichier du maillage : **Nombre de noeuds**, **Liste des noeuds avec le label**, **Nombre d'éléments** et **Liste des éléments**.

Le label est un entier permettant de repérer le type de condition aux limites imposé (voir section B.3) : dans notre logiciel, le label associé à une arête est le plus grand label des deux extrémités de l'arête. Les formules d'intégration numérique disponibles dans R+R\_DG sont précisées dans le tableau B.1. La première ligne est l'ordre de la quadrature (le degré maximal des polynômes intégrés exactement), la deuxième ligne est le nombre de points de Gauss pour les intégrales volumiques et la ligne colonne est le nombre de points de Gauss pour les intégrales surfaciques. Il est évidemment possible d'ajouter d'autres formules d'intégration numérique.

$d_{\text{integ}}$	0	2	4	5	8	12	16
$Nb_{2d}$	1	3	6	7	16	33	52
$Nb_{1d}$	1	2	3	4	5	7	9

TAB. B.1: Ordre et nombre de points dans les formules d'intégration.

### Organisation générale du programme principal.

#### Données d'entrée

- Propriétés hydrodynamiques du sol :  $\psi \mapsto K(\psi)$ ,  $\psi \mapsto \theta(\psi)$  et  $\psi \mapsto C(\psi)$
- Maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  : construction avec Freefem<sup>©</sup> et renumérotation avec Matlab<sup>©</sup>
- CI, CL, pluie et coefficient de Strikler :  $\psi^0$ ,  $v_N(x, t)$ ,  $h^0$ ,  $h_A(t)$ ,  $v_r(t)$  et  $\mathcal{K}$ .
- Éléments de discrétisation : degrés  $p$  en espace et  $q$  en temps,  $\eta$ ,  $T$ ,  $\delta t$ ,  $\delta t'$ ,  $\epsilon_{alg1}$
- Intégration numérique : degré, poids et points de Gauss (1d/2d), valeurs des fonctions de base

#### Résolution du problème

- Initialisation de la charge et de la hauteur d'eau :  $\psi^0 \rightarrow \psi_h^0$  et  $h^0 \rightarrow h_h^0$
- Algorithme de couplage à un pas avec le schéma DIRK3 ou CN2 (Algorithme 2)
- Boucle en temps (BDF2)
  - Algorithme de couplage à deux pas (Algorithme 5)
    - Résolution de l'onde cinématique sans terme de couplage
    - Boucle itérative
      - Partition de l'interface et des drains
      - Détermination des conditions aux limites
      - Résolution de l'équation de Richards (Algorithme 1)
      - Evaluation de la vitesse normale  $v_h^*$
      - Calcul de la hauteur d'eau (prise en compte de  $v_h^*$ )
    - Mise à jour de la charge  $\psi_h$  et de la hauteur d'eau  $h_h$
  - Stockage et tracé de la charge et de la hauteur d'eau avec Gnuplot<sup>©</sup> et Plotmtv<sup>©</sup>
  - Calcul des masses d'eau et des flux pour obtenir le bilan de masse

#### Données de sortie

- Bilan de masse avec Matlab<sup>©</sup>
- Animations : isovaleurs de la charge, hauteur d'eau et nuages de points

L'étape qui a nécessité le plus de développement dans la résolution du problème est l'algorithme de couplage que nous avons détaillé dans la section 4.1.4. Cet algorithme comporte une boucle itérative permettant de trouver les variables de couplage (partition de l'interface et données pour les conditions aux limites) en résolvant l'équation de l'onde cinématique par le schéma de Godunov ainsi que l'équation de Richards par l'algorithme itératif 1. Le stockage et le tracé de la charge hydraulique et de la hauteur d'eau au cours de la simulation permettent de suivre l'évolution du calcul en temps réel et de détecter s'il y a un problème (mauvaise CI ou CL, pas de temps  $\delta t$  trop grand) sans attendre la fin de la simulation (cela permet un gain de temps pendant le débogage). La fréquence de tracé des diverses grandeurs (charge hydraulique, hauteur d'eau, isovaleurs, nuages de points, champs de vitesse) est choisie par l'utilisateur. Le post-traitement de nos données de sortie permettant d'obtenir notamment le bilan de masse s'effectue avec Matlab<sup>©</sup> mais pourrait aussi être réalisé avec Scilab<sup>©</sup>.

Ces éléments montrent qu'il est facile d'enrichir les fonctionnalités du logiciel en ajoutant des modèles pour décrire les propriétés hydrodynamiques du sol, en ajoutant des formules d'intégration et en changeant éventuellement le logiciel de maillage et le logiciel de post-traitement des résultats.

## B.2 Assemblage de la matrice et du second membre

Nous présentons dans cette section les boucles effectuées sur les éléments, les faces internes, les faces ayant une condition de Dirichlet et les faces ayant une condition de Neumann pour assembler la matrice et le second membre relatifs à l'approximation de l'équation de Richards. Les différents listings insérés sont des extraits de fichiers de quelques lignes dans lesquelles nous avons supprimé les commentaires pour alléger la présentation.

### Boucle sur les éléments

La contribution dans la matrice provenant d'un élément est constituée de l'intégrale faisant intervenir la capacité capillaire et de l'intégrale faisant intervenir la conductivité hydraulique,

$$M_C = \int_{\tau} C(\psi_h) \psi_h \phi \quad \text{et} \quad M_K = \int_{\tau} K(\psi_h) \nabla \psi_h \cdot \nabla \phi.$$

Nous avons implémenté une conductivité hydraulique tensorielle puisque les termes  $K_{11}$ ,  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  et  $K_{22}$  apparaissent dans le listing ci-après. Ayant remarqué que le temps CPU augmente en prenant en compte tous les termes du tenseur, nous avons introduit une condition (*via* le booléen `tenseur_extradiag`) pour calculer l'apport des termes extradiagonaux seulement si l'utilisateur le souhaite. Cette condition n'a pas été utilisée dans les cas tests présentés dans cette thèse mais l'anisotropie est un élément disponible dans le logiciel R+R\_DG. Des simulations avec des sols hétérogènes pourraient également être réalisées puisque les quatre composantes du tenseur dépendent de l'espace.

### Boucle sur les éléments

---

```

for (int et = 1 ; et <= NT ; et ++ )
{  b_K(et) = zero_v , M_C(et) = zero_m , M_K(et) = zero_m ;
   fonc_dx_2d = inv_T_K(et)(1,1) * val_fonc_dx_2d + inv_T_K(et)(2,1) * val_fonc_dy_2d ;
   fonc_dy_2d = inv_T_K(et)(1,2) * val_fonc_dx_2d + inv_T_K(et)(2,2) * val_fonc_dy_2d ;

   for (int j = 1 ; j <= dim(pds_2d) ; j ++ )
   {  psi = psi_h[et-1].coefft() * fonc_base_2d[j] ;

      b_K(et) -= pds_2d(j) * K22(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) * fonc_dy_2d[j] ;

      if ( terme_source )
      {  b_K(et) += pds_2d(j) * fonc_base_2d[j] * source(x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j),tps) ; }

      for (int i1 = 1 ; i1 <= nb_composantes ; i1 ++ )
      {  M_C(et)[i1] += pds_2d(j) * fonc_base_2d(j,i1) * fonc_base_2d[j]
         * C(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) ;

         M_K(et)[i1] += pds_2d(j)
            * ( fonc_dx_2d(j,i1) * fonc_dx_2d[j] * K11(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) +
               fonc_dy_2d(j,i1) * fonc_dy_2d[j] * K22(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) ) ;

         if ( tenseur_extradiag ) {
            b_K(et) -= pds_2d(j) * K12(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) * val_fonc_dy_2d[j] ;

            M_K(et)[i1] += pds_2d(j) *
               ( fonc_dx_2d(j,i1) * fonc_dy_2d[j] * K21(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) +
                 fonc_dy_2d(j,i1) * fonc_dx_2d[j] * K12(psi,x_pts_2d(et)(j),y_pts_2d(et)(j)) ) ;
         }
      }
   }
   b(et) *= jacobien(et) ;
   M_K(et) = M_K(et) * jacobien(et) ;
}

```

---

La contribution dans le second membre provenant d'un élément est composée d'une intégrale comportant la conductivité hydraulique,

$$b_K = - \int_{\tau} K(\psi_{\mathfrak{h}}) e_z \nabla \phi.$$

Nous rappelons que cette intégrale fait suite à l'intégration par parties effectuée pour éviter d'introduire la dérivée de la conductivité hydraulique (voir la section 2.2.5). Pour vérifier nos programmes lors des tests de convergence avec des solutions analytiques (voir la section 2.2.2), nous avons pris en compte un terme source volumique dépendant de l'espace et du temps (intitulé `source` dans le listing et activé *via* le booléen `terme_source`),

$$s_f = \int_{\tau} f \phi.$$

Dans le listing concernant la boucle sur les éléments, le tableau contenant les valeurs des fonctions de base aux points d'intégration numérique est noté `fonc_base_2d` et permet de calculer la matrice `M_C`. Les tableaux `val_fonc_dx_2d` et `val_fonc_dy_2d` contiennent les valeurs des dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  des fonctions de base aux points d'intégration numérique. En utilisant la transformation linéaire, notée `inv_T_K`, qui permet de passer de l'élément courant `et` à l'élément de référence, ces deux tableaux permettent de calculer la matrice `M_K`.

### Boucle sur les faces internes

Nous rappelons que pour toute face interne, il existe deux triangles  $\tau^+$  et  $\tau^-$  dans  $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}}$  tels que  $F = \partial\tau^+ \cap \partial\tau^-$ . L'opérateur de moyenne  $\{\xi\}_F$  et l'opérateur de saut  $\llbracket \xi \rrbracket_F$  sont définis de la façon suivante : pour une fonction  $\xi$  pouvant prendre deux valeurs sur  $F$ ,

$$\{\xi\}_F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\xi^+ + \xi^-) \quad \text{et} \quad \llbracket \xi \rrbracket_F \stackrel{\text{def}}{=} \xi^- - \xi^+,$$

avec  $\xi^+ = \xi|_{\tau^+}$  et  $\xi^- = \xi|_{\tau^-}$ . Pour une fonction vectorielle, les opérateurs de moyenne et de saut sont définis composante par composante. De plus,  $n_F$  désigne la normale unitaire à  $F$  dirigée de  $\tau^-$  vers  $\tau^+$ . Les intégrales effectuées sur une face interne contiennent les opérateurs de moyenne et de saut et font donc intervenir quatre matrices élémentaires `A_IP`, `B_IP`, `C_IP` et `D_IP` qui traduisent respectivement la contribution de  $\psi^+$  sur  $\tau^+$ , de  $\psi^-$  sur  $\tau^-$ , de  $\psi^+$  sur  $\tau^-$  et de  $\psi^-$  sur  $\tau^+$ .

Les différentes contributions dans la matrice provenant des intégrales contenant le flux scalaire  $F_{\psi}$  sont

$$\begin{aligned} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^+) \nabla \phi \cdot n_{\tau^+} (\{\psi_{\mathfrak{h}}\} - \psi_{\mathfrak{h}}^+) &= \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^+) \nabla \phi \cdot n_{\tau^+} \psi_{\mathfrak{h}}^- - \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^+) \nabla \phi \cdot n_{\tau^+} \psi_{\mathfrak{h}}^+, \\ \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^-) \nabla \phi \cdot n_{\tau^-} (\{\psi_{\mathfrak{h}}\} - \psi_{\mathfrak{h}}^-) &= \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^-) \nabla \phi \cdot n_{\tau^-} \psi_{\mathfrak{h}}^+ - \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^-) \nabla \phi \cdot n_{\tau^-} \psi_{\mathfrak{h}}^-. \end{aligned}$$

Ces quatre intégrales sont prises en compte dans les différentes matrices élémentaires par l'intermédiaire des vecteurs `vec_1`, `vec_2`, `vec_3` et `vec_4` calculés à partir des vecteurs élémentaires `a_elem`, `b_elem`, `c_elem` et `d_elem` et des composantes de la normale `Norm(\cdot, \cdot)` (1) et `Norm(\cdot, \cdot)` (2).

Les différentes contributions dans la matrice provenant des intégrales contenant la première partie du flux  $F_u$  sont

$$\begin{aligned} \int_F \{K(\psi_{\mathfrak{h}})\nabla\psi_{\mathfrak{h}}\}_F \cdot n_{\tau^+} \phi &= \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^+) \nabla\psi_{\mathfrak{h}}^+ \cdot n_{\tau^+} \phi + \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^-) \nabla\psi_{\mathfrak{h}}^- \cdot n_{\tau^+} \phi, \\ \int_F \{K(\psi_{\mathfrak{h}})\nabla\psi_{\mathfrak{h}}\}_F \cdot n_{\tau^-} \phi &= \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^-) \nabla\psi_{\mathfrak{h}}^- \cdot n_{\tau^-} \phi + \frac{1}{2} \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}^+) \nabla\psi_{\mathfrak{h}}^+ \cdot n_{\tau^-} \phi. \end{aligned}$$

Notons que les deux intégrales qui traduisent la contribution de  $\psi^+$  sur  $\tau^+$  ainsi que la contribution de  $\psi^-$  sur  $\tau^-$  sont directement calculées à partir des calculs précédents (en effectuant les transposées des matrices `A_IP` et `B_IP`).

Les différentes contributions dans la matrice provenant des intégrales contenant la seconde partie du flux  $F_u$  sont

$$\begin{aligned} \int_F \llbracket\psi_{\mathfrak{h}}\rrbracket_F n_F \cdot n_{\tau^+} \phi &= \int_F \psi_{\mathfrak{h}}^+ \phi - \int_F \psi_{\mathfrak{h}}^- \phi, \\ \int_F \llbracket\psi_{\mathfrak{h}}\rrbracket_F n_F \cdot n_{\tau^-} \phi &= \int_F \psi_{\mathfrak{h}}^- \phi - \int_F \psi_{\mathfrak{h}}^+ \phi. \end{aligned}$$

Ces quatre intégrales sont ainsi calculées à partir de la matrice de masse élémentaire et multipliées par des matrices de permutations. Elles sont notées `tPk_MM_1d_Pk(.,.)` dans le listing et sont multipliées par le coefficient  $\eta K_s d_F^{-1}$ . Six permutations (en deux dimensions d'espace) sont possibles pour passer de la face courante à la face de référence définie sur l'élément de référence. Les six matrices de permutations `Pk(.)` que l'on trouve dans les trois boucles effectuées sur les faces sont rectangulaires, dépendent du degré d'approximation polynômial (taille  $2 \times 3$  en  $\mathbb{P}_1$ ,  $3 \times 6$  en  $\mathbb{P}_2$ ) et sont calculées en pré-traitement. Ces matrices permettent de sélectionner correctement les degrés de liberté sollicités sur une face (suivant le numéro de permutation) parmi l'ensemble des degrés de liberté du triangle. Pour éviter de calculer à chaque pas de temps et lors des deux boucles itératives (boucle de l'algorithme de couplage et boucle de l'algorithme de linéarisation) les matrices faisant intervenir ces matrices de permutations, nous avons également déterminé en pré-traitement les trente-six matrices `tPk_MM_1d_Pk(.,.)` possibles.

Deux intégrales proviennent de l'intégration par parties réalisées dans le second membre pour éviter d'introduire la dérivée de la conductivité hydraulique :

$$I_1^+ = \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}|_{\tau^+}) e_z \phi n_{\tau^+} \quad \text{et} \quad I_1^- = \int_F K(\psi_{\mathfrak{h}}|_{\tau^-}) e_z \phi n_{\tau^-}.$$

Cette boucle portant sur les faces internes fait intervenir les gradients des fonctions de base qu'il faut déterminer en fonction du numéro de la permutation de la face  $F$  suivant que l'on se place sur le triangle  $\tau^+$  (`fonc_dx_1d` et `fonc_dy_1d`) ou sur le triangle  $\tau^-$  (`fonc_dx_1d_v` et `fonc_dy_1d_v`). Dans ce listing, nous retrouvons également le booléen `tenseur_extradiag` qui permet de prendre en compte la contribution éventuelle des termes extra-diagonaux du tenseur de conductivité.

## Boucle sur les faces internes

---

```

for (int ea_i = 1 ; ea_i <= nb_interne ; ea_i ++ )
{ int ea = arete_interne(ea_i) , et = ARETE[ea-1].voisin(1) , ev = ARETE[ea-1].voisin(2) ;
  int i_et = permut(ea,ind_et) , i_ev = permut(ea,ind_ev) ;
  A_K = zero_m , B_K = zero_m , C_K = zero_m , D_K = zero_m ;
  I_1p = zero_vbis , I_1m = zero_vbis ;

  fonc_dx_1d = inv_T_K(et)(1,1) * fonc_dx_1d_permut(i_et) + inv_T_K(et)(2,1) * fonc_dy_1d_permut(i_et) ;
  fonc_dy_1d = inv_T_K(et)(1,2) * fonc_dx_1d_permut(i_et) + inv_T_K(et)(2,2) * fonc_dy_1d_permut(i_et) ;
  fonc_dx_1d_v = inv_T_K(ev)(1,1) * fonc_dx_1d_permut(i_ev) + inv_T_K(ev)(2,1) * fonc_dy_1d_permut(i_ev) ;
  fonc_dy_1d_v = inv_T_K(ev)(1,2) * fonc_dx_1d_permut(i_ev) + inv_T_K(ev)(2,2) * fonc_dy_1d_permut(i_ev) ;

  for (int j = 1 ; j <= dim(pds_1d) ; j ++ )
  { psi = Pk(i_et) * psi_h[et-1].coefft() * fonc_base_1d[j] ;
    psi_v = Pk(i_ev) * psi_h[ev-1].coefft() * fonc_base_1d[j] ;

    pts_1d = x_1d_permut(i_et)(j) * ( M.maille(et)(2) - M.maille(et)(1) )
            + y_1d_permut(i_et)(j) * ( M.maille(et)(3) - M.maille(et)(1) ) + M.maille(et)(1) ;
    pts_1d_v = x_1d_permut(i_ev)(j) * ( M.maille(et)(2) - M.maille(et)(1) )
              + y_1d_permut(i_ev)(j) * ( M.maille(et)(3) - M.maille(et)(1) ) + M.maille(et)(1) ;

    a_elem = fonc_dx_1d_et[j] * K11(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) ;
    b_elem = fonc_dy_1d_et[j] * K22(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) ;
    c_elem = fonc_dx_1d_ev[j] * K11(psi_v,pts_1d_v(1),pts_1d_v(2)) ;
    d_elem = fonc_dy_1d_ev[j] * K22(psi_v,pts_1d_v(1),pts_1d_v(2)) ;

    I_1p += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K22(psi,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j))* Norm(ea,ind_et)(2) ;
    I_1m += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K22(psi_v,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j))* Norm(ea,ind_ev)(2) ;

    if ( tenseur_extradiag ) {
      a_elem += fonc_dy_1d_et[j] * K12(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) ;
      b_elem += fonc_dx_1d_et[j] * K21(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) ;
      c_elem += fonc_dy_1d_ev[j] * K12(psi_v,pts_1d_v(1),pts_1d_v(2)) ;
      d_elem += fonc_dx_1d_ev[j] * K21(psi_v,pts_1d_v(1),pts_1d_v(2)) ;

      I_1p += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K12(psi,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j))* Norm(ea,ind_et)(2) ;
      I_1m += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K12(psi_v,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j))* Norm(ea,ind_ev)(2) ;
    }

    vec_1 = pds_1d(j) * ( Norm(ea,ind_et)(1) * a_elem + Norm(ea,ind_et)(2) * b_elem ) ;
    vec_2 = pds_1d(j) * ( Norm(ea,ind_ev)(1) * c_elem + Norm(ea,ind_ev)(2) * d_elem ) ;
    vec_3 = pds_1d(j) * ( Norm(ea,ind_et)(1) * c_elem + Norm(ea,ind_et)(2) * d_elem ) ;
    vec_4 = pds_1d(j) * ( Norm(ea,ind_ev)(1) * a_elem + Norm(ea,ind_ev)(2) * b_elem ) ;

    for (int i1 = 1 ; i1 <= nb_composantes ; i1 ++ )
    { A_IP[i1] += fonc_base_1d_permut(i_et)(j,i1) * vec_1 ;

      B_IP[i1] += fonc_base_1d_permut(i_ev)(j,i1) * vec_2 ;

      C_IP[i1] += fonc_base_1d_permut(i_ev)[j] * vec_1(i1)
                - fonc_base_1d_permut(i_et)(j,i1) * vec_3 ;

      D_IP[i1] += fonc_base_1d_permut(i_et)[j] * vec_2(i1)
                - fonc_base_1d_permut(i_ev)(j,i1) * vec_4 ;
    }
  }

  A_IP += transpose(A_IP) ;
  B_IP += transpose(B_IP) ;

  M_K(et) += ARETE[ea-1].longueur() * (-A_IP/2 + eta/max(d_K(et),d_K(ev)) * tPk_MM_1d_Pk(i_et,i_et) ) ;
  N(ea_i,1) = ARETE[ea-1].longueur() * ( C_IP/2 - eta/max(d_K(et),d_K(ev)) * tPk_MM_1d_Pk(i_et,i_ev) ) ;
  N(ea_i,2) = ARETE[ea-1].longueur() * (-B_IP/2 + eta/max(d_K(et),d_K(ev)) * tPk_MM_1d_Pk(i_ev,i_ev) ) ;
  N(ea_i,3) = ARETE[ea-1].longueur() * ( D_IP/2 - eta/max(d_K(et),d_K(ev)) * tPk_MM_1d_Pk(i_ev,i_et) ) ;
  b(et) += ARETE[ea-1].longueur() * tPk(i_et) * I_1p ;
  b(ev) += ARETE[ea-1].longueur() * tPk(i_ev) * I_1m ;
}

```

---

### Boucle sur les faces ayant une condition de Dirichlet

La contribution dans la matrice provenant d'une face ayant une condition de Dirichlet fait intervenir deux intégrales  $E_{IP}$  et  $MM\_1d$  (qui est multipliée par  $\eta K_s d_F^{-1}$ ),

$$E_{IP} = \int_F K(\psi_h) \nabla \phi \cdot n_\Omega \psi_h \quad \text{et} \quad MM\_1d = \int_F \phi \psi_h.$$

La contribution dans le second membre provenant d'une face ayant une condition de Dirichlet est composée de trois intégrales  $I_1, I_2$  et  $I_3$ ,

$$I_1 = \int_F K(\psi_h) \nabla \phi \cdot n_\Omega \psi_D, \quad I_2 = \int_F \phi \psi_D \quad \text{et} \quad I_3 = \int_F K(\psi_h) e_z \phi n_\tau.$$

Nous rappelons que les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  font intervenir les flux numériques et contiennent la valeur de Dirichlet  $\psi_D$  que nous souhaitons imposer sur l'ensemble des faces  $\mathcal{F}_h^D$ . Nous observons dans le listing ci-dessous que cette donnée  $\psi_D$  est une fonction dépendant de l'espace et du temps. Comme pour les faces internes, l'intégrale  $I_3$  provient de l'intégration par parties réalisée dans le second membre pour éviter d'introduire la dérivée de la conductivité hydraulique.

### Boucle sur les faces ayant une condition de Dirichlet

---

```

for (int ea_1 = 1 ; ea_1 <= nb_dirichlet_continu ; ea_1 ++ )
{ int ea = arete_dirichlet_continu(ea_1) , et = ARETE[ea-1].voisin(1) , i_et = permut(ea,1) ;
  E_IP = zero_m , I_1 = zero_v , I_2 = zero_vbis , I_3 = zero_vbis ;

  fonc_dx_1d = inv_T_K(et)(1,1) * fonc_dx_1d_permut(i_et) + inv_T_K(et)(2,1) * fonc_dy_1d_permut(i_et) ;
  fonc_dy_1d = inv_T_K(et)(1,2) * fonc_dx_1d_permut(i_et) + inv_T_K(et)(2,2) * fonc_dy_1d_permut(i_et) ;

  for (int j = 1 ; j <= dim(pds_1d) ; j ++ )
  { psi = Pk(i_et) * psi_h[et-1].coefft() * fonc_base_1d[j] ;

    pts_1d = x_1d_permut(i_et)(j) * ( M.maille(et)(2) - M.maille(et)(1) )
      + y_1d_permut(i_et)(j) * ( M.maille(et)(3) - M.maille(et)(1) ) + M.maille(et)(1) ;

    a_elem = fonc_dx_1d[j] * K11(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) + fonc_dy_1d[j] * K12(psi,pts_1d(1),pts_1d(2));
    b_elem = fonc_dx_1d[j] * K21(psi,pts_1d(1),pts_1d(2)) + fonc_dy_1d[j] * K22(psi,pts_1d(1),pts_1d(2));

    for (int i1 = 1 ; i1 <= nb_composantes ; i1 ++ )
    E_IP[i1] += poids_1d(j) * fonc_1d_permut(i_et)(j,i1)
      * ( Norm(ea,ind_et)(1)*a_elem + Norm(ea,ind_et)(2)*b_elem ) ;

    I_1 += pds_1d(j) * psi_D(pts_1d(1),pts_1d(2),tps)
      * ( Norm(ea,1)(1)*a_elem + Norm(ea,1)(2)*b_elem ) ;

    I_2 += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * psi_D(x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j),tps) ;

    I_3 += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K22(psi,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j)) * Norm(ea,1)(2) ;

    if ( tenseur_extradiag ) {
      I_3 += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * K12(psi,x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j)) * Norm(ea,1)(2) ; }

  }
  E_IP += transpose(E_IP) ;
  E_IP = ARETE[ea-1].longueur() * (-E_IP + eta / h_K(et) * tPk_MM_1d_Pk(i_et,i_et) ) ;

  M_K(et) += E_IP ;
  b(et) += ARETE[ea-1].longueur() * ( -I_1 + eta / d_K(et) * tPk(i_et) * I_2 + tPk(i_et) * I_3 ) ;
}

```

---

## Boucle sur les faces ayant une condition de Neumann

La contribution provenant d'une face ayant une condition de Neumann est simple puisqu'elle ne comporte qu'une seule intégrale au niveau du second membre,

$$I_4 = \int_F v_N \phi.$$

Le listing ci-dessous montre que la donnée dans la condition aux limites de Neumann  $v_N$  dépend de l'espace et du temps. Cette fonctionnalité est utilisée dans les deux cas tests où la pluie s'arrête au cours de la simulation (cas test avec drain de la section 3.2.2 et cas test de ruissellement dû à la pluie dans la section 4.2.2) ainsi que dans le cas test avec l'injection d'eau dans le sol de la section 4.2.3.

---

### Boucle sur les faces ayant une condition de Neumann

---

```
for (int ea_3 = 1 ; ea_3 <= nb_neumann_continu ; ea_3 ++)  
{ int ea = arete_neumann_continu(ea_3) , et = ARETE[ea-1].voisin(1) , i_et = permut(ea,ind_et) ;  
  I_4 = zero_vbis ;  
  
  for (int j = 1 ; j <= dim(pds_1d) ; j ++)  
  { psi = Pk(i_et) * psi_h[et-1].coefft() * fonc_base_segment[j] ;  
    I_4 += pds_1d(j) * val_fonc_base_segment[j] * v_N(x_pts_1d(ea)(j),y_pts_1d(ea)(j),tps) ; }  
  
  b(et) -= ARETE[ea-1].longueur() * tPk(i_et) * I_4 ;  
}
```

---

## B.3 Implémentations spécifiques au couplage

Nous indiquons dans cette section les éléments informatiques développés dans le logiciel R+R\_DG pour imposer les conditions aux limites spécifiques au couplage.

### Classement des faces

Comme nous l'avons précisé précédemment, les données  $\psi_D$  et  $v_N$  des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann sont des fonctions continues connues *a priori* et qui dépendent explicitement des variables d'espace et de la variable temporelle. La situation est différente pour les données relatives au couplage puisque celles-ci sont déterminées pendant le calcul et ne dépendent pas explicitement des différentes variables. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit quatre labels pour prendre en compte toutes les conditions aux limites possibles :

- le label 1 est associé à une CL de Dirichlet quand la donnée est une fonction continue  $\psi_D$ . Cette condition est utilisée pour les drains lorsque le sol est saturé avec  $\psi_D = 0$ .
- le label 2 est associé à une CL de Dirichlet quand la donnée est un champ discret (zone mouillée de l'interface). Cette condition est rencontrée sur la zone mouillée de l'interface pour imposer la continuité de la pression ( $\psi_h = \tilde{h}_h$ ).
- le label 3 est associé à une CL de Neumann quand la donnée est une fonction continue  $v_N$ . Cette condition assure l'imperméabilité sur les parois, le fond et autour des drains lorsque le sol est insaturé en prenant  $v_N = 0$ .
- le label 4 est associé à une CL de Neumann quand la donnée est un champ discret (zone sèche de l'interface). Cette condition est utilisée dans la zone sèche de l'interface.

A chaque pas de temps, les faces sont réparties en fonction de leur label dans les quatre tableaux suivants

- `arete_dirichlet_continu` pour le label 1,
- `arete_dirichlet_discret` pour le label 2,
- `arete_neumann_continu` pour le label 3,
- `arete_neumann_discret` pour le label 4.

Nous précisons que l'initialisation de la première valeur de chaque tableau à `NA+1` (`NA` étant le nombre total de faces) est utile dans la suite des programmes pour savoir si tous les types de conditions aux limites sont utilisés. Nous avons également implémenté un algorithme de tri pour classer les deux groupes de faces situées sur la surface suivant le sens des  $x$  croissants : la fonction `tri_a_bulle` est appliquée aux tableaux `arete_dirichlet_discret` et `arete_neumann_discret` lorsqu'il existe au moins une face ayant le label 2 et 4 respectivement. Cet algorithme de tri, dédié au cas monodimensionnel de l'onde cinématique, permet une écriture plus compacte du flux de Godunov.

---

#### Classement des faces en fonction de la condition aux limites imposée

---

```
int i_dirichlet_continu = 1 , i_dirichlet_discret = 1 , i_neumann_continu = 1 , i_neumann_discret = 1 ;

arete_dirichlet_continu = vecteur_nul , arete_neumann_continu = vecteur_nul ;
arete_dirichlet_discret = vecteur_nul_bis , arete_neumann_discret = vecteur_nul_bis ;
arete_dirichlet_continu(1) = NA+1 ;
arete_dirichlet_discret(1) = NA+1 ;
arete_neumann_continu(1) = NA+1 ;
arete_neumann_discret(1) = NA+1 ;

for (int i = 1 ; i <= Naf ; i ++ )
{ int ea = arete_bord(i) ;

  switch ( ARETE[ea-1].condition() )
  { case 1 : arete_dirichlet_continu(i_dirichlet_continu) = ea ;
        i_dirichlet_continu += 1 ;
        break ;

        case 2 : arete_dirichlet_discret(i_dirichlet_discret) = ea ;
        i_dirichlet_discret += 1 ;
        break ;

        case 3 : arete_neumann_continu(i_neumann_continu) = ea ;
        i_neumann_continu += 1 ;
        break ;

        case 4 : arete_neumann_discret(i_neumann_discret) = ea ;
        i_neumann_discret += 1 ;
        break ;

        default : cout << "Probleme dans les conditions aux limites " << endl ;
        cout << "Programme Conditions_limites.h " << endl ;
        exit(1) ;
  }
}

nb_dirichlet_continu = i_dirichlet_continu -1 ;
nb_dirichlet_discret = i_dirichlet_discret -1 ;
nb_neumann_continu = i_neumann_continu -1 ;
nb_neumann_discret = i_neumann_discret -1 ;

if ( arete_dirichlet_discret(1) != NA+1 )
{ r = tri_a_bulle( arete_dirichlet_discret ) ; }

if ( arete_neumann_discret(1) != NA+1 )
{ r = tri_a_bulle( arete_neumann_discret ) ; }
```

---

## Détermination des champs discrets

L'étape suivante consiste à créer le tableau `val_dirichlet_discret` qui stocke le champ discret pour la condition de Dirichlet sur la zone mouillée et le tableau `val_neumann_discret` qui stocke le champ discret pour la condition de Neumann sur la zone sèche.

Pour remplir ces deux tableaux, il faut connaître au préalable la position des faces ayant un label égal à 2 en créant le tableau `numero_dirichlet` et la position des faces ayant un label égal à 4 en créant le tableau `numero_neumann`. Lorsque l'interface contient au moins une zone mouillée et une zone sèche, il est évident que les tailles de ces tableaux sont inférieures à la taille du tableau `arete_interface` qui contient les numéros de toutes les faces de l'interface. En revanche, si l'interface est entièrement mouillée, la taille de `numero_dirichlet` est égale au nombre de faces sur l'interface, le  $i$ -ème terme de ce tableau étant alors égal à  $i$  et le tableau `numero_neumann` n'est pas créé. Les résultats sont inversés si l'interface est entièrement sèche.

Ce traitement des conditions aux limites sur la zone de couplage est très robuste puisqu'il permet de traiter l'affleurement de plusieurs zones de l'interface simultanément comme nous l'avons observé dans l'application avec les quatre drains (section 4.3). Nous pouvons également traiter la connexion de deux zones ruisselantes sans aucune difficulté. Le tableau `val_dirichlet_discret` comporte deux colonnes pour permettre éventuellement un couplage des écoulements souterrains avec une méthode d'ordre 1 en remplacement des volumes finis pour les écoulements superficiels.

---

### Détermination des champs discrets à appliquer sur l'interface

---

```

if ( nb_dirichlet_discret != 0 )
{ vecteur <int> numero_dirichlet(nb_dirichlet_discret) ; }

if ( nb_neumann_discret != 0 )
{ vecteur <int> numero_neumann(nb_neumann_discret) ; }

int i1 = 1 , i2 = 1 ;

for (int i = 1 ; i <= nb_interface ; i ++)
{ int ea = arete_interface(i) ;

  switch ( ARETE[ea-1].condition() )
  { case 2 : numero_dirichlet(i1) = i ;
      i1 += 1 ;
      break ;

      case 4 : numero_neumann(i2) = i ;
      i2 += 1 ;
      break ;

      default : cout << ARETE[ea-1].condition() << endl ;
      cout << "Probleme dans les conditions aux limites discrettes " << endl ;
      cout << "Programme Conditions_limites.h " << endl ;
  }
}

for (int i = 1 ; i <= nb_dirichlet_discret ; i ++)
{ int ind = numero_dirichlet(i) ;
  val_dirichlet_discret(i,1) = h_1(ind) ;
  val_dirichlet_discret(i,2) = h_1(ind) ;
}

for (int k = 1 ; k <= nb_neumann_discret ; k ++)
{ int ind = numero_neumann(k) ;
  val_neumann_discret(k) = -1.*h_1pred(ind)/delta_tps ;
}

```

---

### Adaptation des boucles pour les faces de l'interface

La dernière étape est de modifier les boucles portant sur les faces de Dirichlet et sur les faces de Neumann pour prendre en compte les champs discrets définis précédemment. Nous ne présentons dans le listing ci-dessous que les modifications par rapport aux premières boucles.

Dans la boucle sur les faces de Dirichlet avec champ, la fonction `psi_D` est remplacée par la valeur adéquate du tableau `val_dirichlet_discret`. Nous voyons dans le listing que le champ linéaire est déjà implémenté (`coord_1d(j)` désigne le  $j$ -ème point de Gauss associé au segment de référence). Dans la boucle sur les faces de Neumann avec champ discret, la fonction `v_N` est remplacée par la valeur adéquate du tableau `val_neumann_discret`. Le tableau `val_neumann_discret` a été modifié par rapport à celui du listing précédent de manière à garantir la conservation de la masse.

#### Boucles pour les faces de l'interface

---

```

for (int ea_2 = 1 ; ea_2 <= nb_dirichlet_discret ; ea_2 ++)
{ int ea = arete_dirichlet_discret(ea_2) , et = ARETE[ea-1].voisin(1) , i_et = permut(ea,1) ;
  .
  .
  reel v_1 = val_dirichlet_discret(ea_2,1) ;
  reel v_2 = val_dirichlet_discret(ea_2,2) ;

  for (int j = 1 ; j <= dim(pds_1d) ; j ++)
  { .
    .
    I_1 += pds_1d(j) * ( v_1 + coord_1d(j) * ( v_2 - v_1 )
                      * ( Norm(ea,1)(1)*a_elem + Norm(ea,1)(2)*b_elem ) ;

    I_2 += pds_1d(j) * fonc_base_1d[j] * ( v_1 + coord_1d(j) * ( v_2 - v_1 ) ) ;
    .
    .
  }
  .
  .
}

for (int ea_4 = 1 ; ea_4 <= nb_neumann_discret ; ea_4 ++)
{ int ea = arete_neumann_discret(ea_4) , et = ARETE[ea-1].voisin(1) , i_et = permut(ea,ind_et) ;
  .
  .
  for (int j = 1 ; j <= dim(poids_1d) ; j ++)
  { .
    .
    val_bord += poids_1d(j) * val_fonc_base_segment[j] * val_neumann_discret(ea_4) ; }
  .
  .
}

```

---



# Bibliographie

- [ABB<sup>+</sup>04] Emmanuel Audusse, François Bouchut, Marie-Odile Bristeau, Rupert Klein, and Benoît Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6) :2050–2065 (electronic), 2004.
- [ABCM01] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779 (electronic), 2001.
- [AD02] V. Aizinger and C. Dawson. A discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water. *Advances in Water Resources*, 25 :67–84, 2002.
- [AG84] A.S. Abdul and R.W. Gillham. Laboratory studies of the effects of the capillary fringe on streamflow generation. *Water Resources Research*, 20(6) :691–698, 1984.
- [Arn82] D.N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(4) :742–760, 1982.
- [Bak77] G. A. Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Math. Comp.*, 31(137) :45–59, 1977.
- [Bas99] P. Bastian. *Numerical computation of multiphase flows in porous media*. Habilitation Thesis, 1999.
- [Bas03] P. Bastian. Higher order discontinuous Galerkin methods for flow and transport in porous media. In *Challenges in scientific computing—CISC 2002*, volume 35 of *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.*, pages 1–22. Springer, Berlin, 2003.
- [BC64] R.H. Brooks and A.T. Corey. Hydraulic properties of porous media. Fort Collins, Colorado : Colorado State University. *Hydrology paper*, 3 :27, 1964.
- [BEE<sup>+</sup>06] H. Beaugendre, A. Ern, T. Esclaffer, E. Gaume, I. Ginzburg, and C.Kao. A seepage face model for the interaction of shallow water tables with the ground water surface : Application of the obstacle-type method. *Journal of Hydrology*, 329 :258–273, 2006.
- [BIR<sup>+</sup>07] P. Bastian, O. Ippisch, F. Rezanezhad, H.J. Vogel, and K. Roth. Numerical simulation and experimental studies of unsaturated water flow in heterogeneous systems. In *Reactive Flows, Diffusion and Transport*, pages 579–597. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [BJ67] G. Beavers and D. Joseph. Boundary conditions at a naturally impermeable wall. *J. Fluid. Mech.*, 30 :197–207, 1967.
- [BK04] M. Bause and P. Knabner. Computation of variably saturated subsurface flow by adaptive mixed hybrid finite element methods. *Advances in Water Resources*, 27 :565–581, 2004.
- [BN82] M.D. Barcelo and J.L. Nieber. Influence of soil pipe networks on catchment hydrology, 1982. paper presented at the Summer meeting, Am. Soc. Agric. Eng., Univ of Wisc., Madison.

- [BR04] P. Bastian and B. Rivière. Discontinuous galerkin methods for two-phase flow in porous media. Technical Report 2004–28, IWR (SFB 359), Universität Heidelberg, 2004.
- [BT78] Z.P. Bazant and W. Thonguthai. Pore pressure and drying of concrete at high temperature. *J. Eng. Mechanics Division. ASCE*, 104 :1059–1079, 1978.
- [CB90] M.A. Celia and E.T. Bouloutas. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*, 26(7) :1483–1496, 1990.
- [Cia02] P.G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. SIAM, 2002.
- [CJ] E. Cuthill and J.McKee. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. Naval Ship Research and Development Center. Washington, D.C. 20007.
- [CKG07] J.P. Carlier, C. Kao, and I. Ginzburg. Field-scale modeling of subsurface tile-drained soils using an equivalent-medium approach. *Journal of Hydrology*, 341 :105–115, 2007.
- [Cor54] A.T. Corey. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. *Producers Monthly*, 19(1) :38–41, 1954.
- [CP88] R.F. Carsel and R.S. Parrish. Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5) :755–769, 1988.
- [CS98a] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2440–2463 (electronic), 1998.
- [CS98b] B. Cockburn and C.-W. Shu. The runge-kutta discontinuous galerkin finite element method for conservation laws v : Multidimensional systems. *J. Comput. Phys.*, 141 :199–224, 1998.
- [Dar56] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. V. Dalmont, Paris, 1856.
- [Daw06] C. Dawson. Analysis of discontinuous finite element methods for ground water/surface water coupling. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(4) :1375–1404, 2006.
- [DB70] T. Dunne and R.D. Black. Partial area contributions to storm runoff in a small new england watershed. *Water resources research*, 7 :1160–1172, 1970.
- [DB02] L. Dormieux and E. Bourgeois. *Introduction à la micromécanique des milieux poreux*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [DLA01] E.B. Diaw, F. Lehmann, and Ph. Ackerer. One-dimensional simulation of solute transfert in saturated-unsaturated porous media using the discontinuous finite element method. *Journal of Contaminant Hydrology*, 51 :197–213, 2001.
- [DMQ02] M. Discacciati, E. Miglio, and A. Quarteroni. Mathematical and numerical models for coupling surface and groundwater flows. *Applied Numerical Mathematics*, 43 :57–74, 2002.
- [DP99] H.-J.G Diersch and P. Perrochet. On the primary variable switching technique for simulating unsaturated-saturated flows. *Advances in Water Resources*, 23 :271–301, 1999.
- [DPEG08] D.A Di Pietro, A Ern, and J.L Guermond. Discontinuous Galerkin methods for anisotropic semidefinite diffusion with advection. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2) :805–831, 2008.
- [dSV71] A.J.C de Saint-Venant. Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Compte-Rendu à l'Académie des Sciences de Paris*, 73 :147–154, 1871.

- [EFGV00] M. Esteves, X. Faucher, S. Galle, and M. Vauclin. Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values. *Journal of hydrology*, 228 :265–282, 2000.
- [EG06] A. Ern and J.L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs’ systems. II. Second-order elliptic PDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(6) :2363–2388 (electronic), 2006.
- [Ein88] B. Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 25 :294–318, 1988.
- [ENV07] A. Ern, S. Nicaise, and M. Vohralík. An accurate  $\mathbf{H}(\text{div})$  flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(12) :709–712, 2007.
- [EPD08] A. Ern, S. Piperno, and K. Djadel. A well-balanced Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for the shallow-water equations with flooding and drying. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 58(1) :1–25, 2008.
- [Esc04] T. Esclaffier. Etude théorique de la formation des débits de crues à l’échelle du bassin versant. Technical report, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [ESZ08] A. Ern, A.F. Stephansen, and P. Zunino. A discontinuous Galerkin method with weighted averages for advection-diffusion equations with locally small and anisotropic diffusivity. *IMA J. Numer. Anal.*, 2008. to appear.
- [FFRH04] S. Fagherazzi, D.J. Furbish, P. Rasetarinera, and M. Youssuff Hussaini. Application of the discontinuous spectral Galerkin method to groundwater flow. *Advances in Water Resources*, 27 :129–140, 2004.
- [FK59] I. Fatt and W.A. Klikoff. Effect of fractional wettability on multiphase flow through porous media. *Trans., AIME (Am. Inst. Min. Metall. Eng.)*, 216 :426–432, 1959.
- [Fre] Logiciel Freefem. <http://www.freefem.org/>.
- [FS86] G. Fipps and R.W. Skaggs. Drains as a boundary condition in finite elements. *Water resources research*, 22(11) :1613–1621, 1986.
- [GA11] W.H. Green and G. Ampt. Studies on soils physics,1. The flow of air and water through soils. *J. Agric. Sci.*, 4(1) :1–24, 1911.
- [GCK04] Irina Ginzburg, Jean-Philippe Carlier, and Cyril Kao. Lattice boltzmann approach to richards equation. In *Proceedings of Computational Methods in Water Resources 2004 International Conference*, 2004.
- [Gen80] M.T. Van Genuchten. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci Soc Am J*, 44 :892–898, 1980.
- [Gin04] V. Ginting. *Computational upscaled modeling of heterogeneous porous media flow utilizing finite volume method*. PhD thesis, Texas AM University, 2004.
- [GKJR96] R.S. Govindaraju, M.L. Kavvas, S.E. Jones, and D.E. Rolston. Use of green–ampt model for analyzing one-dimensional convective transport in unsaturated soils. *Journal of hydrology*, 178 :337–350, 1996.
- [GL96] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, London, 1996.
- [GMMS02] M. Gabbouhy, A. Maslouhi, Z. Mghazli, and Z. Saâdi. Modélisation numérique du transport de soluté dans la zone non saturée d’un sol très sableux. *Math-Recherche et Applications*, 4 :77–99, 2002.

- [GP01] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of viscous saint-venant system for laminar shallow water ; numerical validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems : Series B*, 1(1) :89–102, 2001.
- [GSK78] R. Gharaaty-Sani and L.G. King. Interceptor drains on sloping land, 1978. paper presented at the Summer Meeting, Am. Soc. Agric. Eng., Logan, Utah.
- [GY75] A.B. Gureghian and E.G. Youngs. The calculation of steady-state water-table heights in drained soils by means of the finite element method. *Journal of hydrology*, 27 :15–32, 1975.
- [Haz11] A. Hazen. Discussion : dams on sand foundations. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 73 :199–203, 1911.
- [Hel97] R. Helmig. *Multiphase Flow and Transport Processes in the Subsurface : A Contribution to the Modelling of Hydrosystems*. Springer-Verlag, 1997.
- [Her03] J.M. Hervouet. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre : Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [HG93] S.M Hassanizadeh and W.G. Gray. Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media. *Water Resour. Res.*, 29 :3389–3405, 1993.
- [HLvL83] A. Harten, P.D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25 :35–61, 1983.
- [Hor33] R.E. Horton. The role of infiltration in the hydrologic cycle. *Trans. Am. Geophys. Union*, 14 :446–460, 1933.
- [HR06] X. He and L. Ren. A multiscale finite element linearization scheme for the unsaturated flow problems in heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 42 :W08417, 2006.
- [HVT<sup>+</sup>77] R. Haverkamp, M. Vauclin, J. Touma, P.J. Wierenga, and G. Vachaud. A comparison of numerical simulation models for one-dimensionnal infiltration. *Soil Science Society of America Journal*, 41 :285–294, 1977.
- [JM00] W. Jäger and A. Mikelić. On the interface boundary condition of Beavers, Joseph and Saffmann. *SIAM J. Appl. Math.*, 60 :1111–1127, 2000.
- [JW00] J E Jones and C S Woodward. Newton-krylovmultigrid solvers for large-scale, highly heterogeneous, variably saturated flow problems. manuscript in preparation. In *Advances in Water Resources*, pages 763–774, 2000.
- [KKB<sup>+</sup>02] K. R. Kavanagh, C. T. Kelley, R. C. Berger, J. P. Hallberg, and S. E. Howington. Nonsmooth nonlinearities and temporal integration of richards equation. In *Proceedings of the XIV International Conference on Computational Methods in Water Resources*, S. Majid Hassanizadeh, Ruud J. Schotting, W. G. Gray, and G. F. Pinder, editors, pp 947-954., 2002.
- [KM06] S.J. Kollet and R.M. Maxwell. Integrated surface-groundwater flow modeling : A free-surface overland flow boundary condition in a groundwater flow model. *Advances in Water Resources*, 29 :945–958, 2006.
- [KN08] P.M. Kienzler and F. Naef. Subsurface storm flow formation at different hillslopes and implications for the 'old water paradox'. *Hydrological processes*, 22 :104–116, 2008.
- [Koz27] J. Kozeny. About capillaries conducting water in the earth. *Commitee Report of the Viennese Academy*, 136(2a) :271–306, 1927.

- [KR06] W. Klieber and B. Rivière. Adaptive simulations of two-phase flow by discontinuous Galerkin methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196(1-3) :404–419, 2006.
- [KS02] P. Knabner and E. Schneid. Adaptive hybrid mixed finite element discretization of instationary variably saturated flow in porous media. *High Performance Scientific and Engineering Computing*, 29 :37–44, 2002.
- [LA98] F. Lehmann and Ph. Ackerer. Comparison of iterative methods for improved solutions of the fluid flow equation in partially saturated porous media. *Transport in Porous Media*, 31 :275–292, 1998.
- [Mat] Logiciel Matlab. <http://www.mathworks.fr>.
- [MB96] R. Moussa and C. Bocquillon. Criteria for the choice of flood-routind methods in natural channels. *Journal of Hydrology*, 186 :1–30, 1996.
- [MF04] G. Manzini and S. Ferraris. Mass-conservative finite volume methods on 2-d unstructured grids for the Richards equation. *Advances in Water Resources*, 27 :1199–1215, 2004.
- [MJW92] G. Mayer, F. Jacobs, and F. H. Wittmann. Experimental determination and numerical simulation of the permeability of cementitious materials. *Nuclear Engineering and Design*, 138 :171–177, 1992.
- [MQS03] E. Miglio, A. Quarteroni, and F. Saleri. Coupling of free surface and groundwater flows. *Computers and Fluids*, 32 :73–83, 2003.
- [Mua76] Y. Mualem. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resources Research*, 12(3) :513–522, 1976.
- [Mét] Projet Méthode. <http://www.univ-orleans.fr/mapmo/methode>.
- [Nav23] C. Navier. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoire de l'Académie des Sciences de Paris*, 6 :389–416, 1823.
- [OBB98] J. Tinsley Oden, Ivo Babuška, and Carlos Erik Baumann. A discontinuous *hp* finite element method for diffusion problems. *J. Comput. Phys.*, 146(2) :491–519, 1998.
- [Pet] Librairie Petsc. <http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-2>.
- [PMV01] C. Perrin, C. Michel, and V. Andréassian. Does a large number of parameters enhance model performance? Comparative assessment of common catchment model structures on 429 catchments. *Journal of Hydrology*, 242 :275–301, 2001.
- [PS77] V.M. Ponce and D.B. Simons. Shallow wave propagation in open channel flow. *ASCE J. Hydraul. Div*, 103(HY12) :1461–1476, 1977.
- [QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2000.
- [Ric31] L.A. Richards. Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1 :318–333, 1931.
- [RWG99] B. Rivière, M.F. Wheeler, and V. Girault. Part I. Improved energy estimates for interior penalty, constrained and discontinuous Galerkin method for elliptic problem. *Computational Geosciences*, 3 :337–360, 1999.
- [Saf59] P.G. Saffman. A theory of dispersion in a porous medium. *J. Fluid Mech.*, 6 :321–349, 1959.
- [Saf71] P.G. Saffman. On the boundary condition at the interface of a porous medium. *Std. Appl. Math.*, 1 :93–101, 1971.
- [SB98] V. Singh and S.M. Bhallamudi. Conjonctive surface-subsurface modeling of overland flow. *Advances in Water Resources*, 21 :567–579, 1998.

- [Sto45] G. Stokes. On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8 :287–305, 1845.
- [TBV07] P.A. Tassi, O. Bokhove, and C.A. Vionnet. Space discontinuous Galerkin method for shallow water flows-kinetic and HLLC flux, and potential vorticity generation. *Advances in Water Resources*, 30 :998–1015, 2007.
- [Td06] P. Tardif d’Hamonville. *Modélisation et simulation du transport advectif et diffusif an milieu poreux monophasique et diphasique*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.
- [TdED07] P. Tardif d’Hamonville, A. Ern, and L. Dormieux. Finite element evaluation of diffusion and dispersion tensors in periodic porous media with advection. *Computational Geosciences*, 11(1) :43–58, 2007.
- [Tor01] E.F. Toro. Shock-capturing methods for free-surface shallow flows, Wiley, New York, 2001.
- [VCEL03] P.L. Viollet, J.P. Chabard, P. Esposito, and D. Laurence. *Mécanique des fluides appliquée*. Presses de l’École Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [VGC01] T. Vogel, M.Th. Van Genuchten, and M. Cislerova. Effect of the shape of the soil hydraulic functions near saturation on variably-saturated flow predictions. *Advances in Water Resources*, 24 :133–144, 2001.
- [VL01] J.E. VanderKwaak and K. Loague. Hydrologic-response simulations for the R-5 catchment with a comprehensive physics-based model. *Water Resources Research*, 37(4) :999–1013, 2001.
- [VT62] B.S. Vimoke and G.S. Taylor. Simulating water flow in soil with an electric resistance network. *Soil and Water Conserv. Res. Div., U.S. Agric. Res. Serv., Columbus, Ohio.*, 32 :1–136, 1962. Rep. 41-65, 51pp.
- [WD00] C.S. Woodward and C. Dawson. Analysis of expanded mixed finite element methods for a nonlinear parabolic equation modeling flow into variably saturated porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 37(3) :701–724 (electronic), 2000.
- [Whe78] M.F. Wheeler. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15(1) :152–161, 1978.

