



**HAL**  
open science

# Pedestrian-structure synchronisation : application to swaying footbridges

Joanna Bodgi

► **To cite this version:**

Joanna Bodgi. Pedestrian-structure synchronisation : application to swaying footbridges. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2008. English. NNT: . pastel-00004784

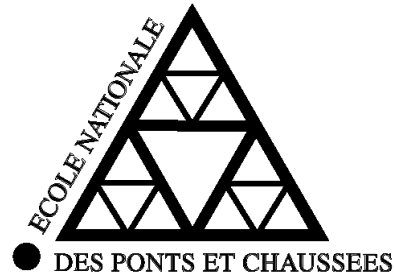
**HAL Id: pastel-00004784**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00004784v1>**

Submitted on 17 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE  
présentée pour l'obtention du diplôme de  
**DOCTEUR**  
**DE**  
**L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : *Structures et Matériaux*

présentée par

**Joanna BODGI**

Sujet de la thèse :

**Synchronisation piétons-structure :**  
**Application aux vibrations des passerelles souples**

Soutenue le 04 septembre 2008

devant le jury composé de :

*Président :* **L. JEZEQUEL**

*Rapporteurs :* **J.H. SAIAC**  
**J.C. GOLINVAL**

*Examineurs :* **T. KRETZ**  
**T. SAYAH**  
**S. ERLICHER**

*Directeur de thèse :* **P. ARGOUL**



A mes parents,  
A mon frère



# Remerciements

Un travail de trois ans durant lesquels j'ai été initiée à la recherche se trouve résumé dans ces pages qui constituent mon rapport de thèse. Mais ce qu'aucun lecteur ne peut détecter en les lisant, c'est le plaisir que j'ai eu à travailler au sein d'une équipe où chacun est attentif aux autres, et où il fait bon vivre, c'est le soutien de mes amis et de mes proches, c'est surtout l'amour de ma famille qui a cru en moi, qui m'a encouragée et aidée dans cette étape de ma vie. C'est pourquoi, je voudrais profiter de ces quelques lignes pour remercier toutes les personnes qui ont fait de cette expérience un très bon souvenir.

Je voudrais exprimer ma gratitude envers M.Pierre ARGOUL, mon directeur de thèse, qui m'a encouragée pour aller jusqu'au bout, pour ses conseils et son suivi, et M.Silvano ERLICHER, mon conseiller d'études, qui m'a consacré beaucoup de temps durant ces années.

Je remercie également M.Louis JEZEQUEL qui a présidé mon jury, M.Jacques-Hervé SAÏAC et M.Jean-Claude GOLINVAL qui ont accepté de rapporter sur ma thèse et M.Thierry KRETZ pour avoir fait partie de mon jury. Je voudrais également remercier M.Tony SAYAH, qui non seulement a fait le trajet depuis le Liban pour être examinateur durant ma soutenance, mais qui aussi m'a accompagnée durant la majorité de mes années d'études.

Un grand merci aussi à M.Karam SAB qui m'a acceptée au sein du LAMI, aux secrétaires qui m'ont facilitée toutes les démarches administratives et à tous les permanents des équipes "Dynamique des structures et identification" et "Structures hétérogènes" dont le dynamisme et la gentillesse ont fait du LAMI un laboratoire si exceptionnel. Merci aussi aux techniciens qui m'ont énormément aidée durant la "semaine d'initiation au design" et dont la bonne humeur est contagieuse! Merci aussi à tous les thésards et stagiaires avec qui j'ai passé de si bon moments.

Je voudrais dire merci à tous mes amis qui m'ont accompagnée durant ma thèse, nous avons formé une grande famille et j'espère qu'il en sera toujours ainsi.

Enfin, je remercie mes parents et mon frère, dont l'amour m'a accompagnée durant cette période. Ils ont su être présents malgré les distances, ils ont cru en moi même durant les périodes les plus difficiles et les plus incertaines de ma thèse et ils m'ont redonné le courage et la confiance en moi lorsque j'en avais besoin. Si j'ai réussi c'est aussi grâce à eux. Ce travail leur est dédié...



# Résumé

L'étude des oscillations latérales des passerelles dues à l'excitation piétonne a suscité beaucoup d'intérêt dans la communauté scientifique durant les dix dernières années. Un nombre important de travaux a été publié : d'un côté, des essais expérimentaux sur des passerelles ont été réalisés, et d'un autre, des modèles qui tentent de reproduire le phénomène ou du moins de cerner certaines de ses caractéristiques ont été proposés. Tous ces modèles mettent l'accent sur le phénomène de synchronisation entre les piétons et la passerelle, mais la plupart n'arrivent pas à s'inscrire dans un cadre mathématique et physique rigoureux. De plus, la majorité de ces modèles néglige l'étude du comportement des piétons sur la passerelle : leur répartition, leur évolution, leur vitesse... bien que celui-ci joue un rôle important dans le déclenchement et le maintien des oscillations.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons un modèle continu foule-structure qui combine une équation aux dérivées ordinaires modélisant les oscillations transverses de la passerelle et deux équations aux dérivées partielles qui représentent le comportement de la foule, avec une prise en compte rigoureuse du phénomène de synchronisation. L'approche adoptée assimile le comportement de la foule à celui d'un fluide compressible, et le travail effectué a permis de développer une équation eulérienne de type Kuramoto pour modéliser le phénomène de synchronisation. Un développement analytique du modèle proposé permet de déterminer certaines caractéristiques du phénomène. Un travail numérique poussé proposant de nouvelles méthodes de résolution du système d'équations, favorise l'implémentation du modèle en limitant les erreurs numériques. L'application à des cas réels comme la passerelle du Millennium à Londres ou la passerelle Solférino à Paris par exemple, permet de comprendre et de reproduire correctement leur comportement dans différentes situations de répartition et de marche des piétons. Les comparaisons avec les données expérimentales montrent une très bonne concordance entre les résultats expérimentaux et les résultats de notre modèle tant analytiques que numériques.

**Mots clés :** Passerelle piétonne, foule de piétons, modèle continu, synchronisation.





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>13</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>19</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>25</b>
<b>1 Etude bibliographique et problématique générale</b>	<b>27</b>
1.1 Introduction . . . . .	29
1.2 Etudes expérimentales liées aux mouvements des piétons . . . . .	29
1.2.1 La marche . . . . .	29
1.2.2 Autres mouvements : la course, le saut, le balancement, le rebondissement . . . . .	33
1.3 Modélisation de la force induite par un ou plusieurs piétons . . . . .	34
1.3.1 Introduction . . . . .	34
1.3.2 Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher rigide . . . . .	34
1.3.3 Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher souple . . . . .	39
1.3.4 Force induite par plusieurs personnes . . . . .	43
1.4 Un travail préliminaire sur la modélisation . . . . .	50
1.4.1 Etude réalisée par l'Association Française de Génie Civil (AFGC) . . . . .	51
1.4.2 Un modèle de foule continu . . . . .	55
1.4.3 Un modèle préliminaire... . . . . .	57
1.5 Conclusion . . . . .	57
<b>2 Analyses expérimentales</b>	<b>59</b>
2.1 Introduction . . . . .	61
2.2 Outils théoriques . . . . .	61
2.2.1 La série de Fourier . . . . .	61
2.2.2 La transformation de Fourier (TF) . . . . .	62
2.2.3 La transformation en ondelettes (TO) . . . . .	62
2.3 Analyse de la force de marche d'un piéton sur un plancher rigide . . . . .	67
2.3.1 Introduction . . . . .	67

2.3.2	Description de l'expérience . . . . .	67
2.3.3	Traitement des données . . . . .	67
2.3.4	Résultats de l'analyse . . . . .	69
2.3.5	Conclusion . . . . .	79
2.4	Analyse des données de la passerelle Simone de Beauvoir . . . . .	81
2.4.1	Introduction . . . . .	81
2.4.2	Description des essais . . . . .	81
2.4.3	Explication du processus d'analyse . . . . .	82
2.4.4	Résultats des analyses pour les données obtenues sur la passerelle non amortie . . . . .	84
2.5	Analyse des données de la passerelle en laboratoire de l'Association Française de Génie Civil (AFGC) . . . . .	86
2.5.1	Introduction . . . . .	86
2.5.2	Description des essais . . . . .	86
2.6	Détermination des fréquences propres et de l'amortissement structural du dispositif . . . . .	87
2.7	Conclusion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Outils théoriques</b> . . . . .	<b>93</b>
3.1	Introduction . . . . .	95
3.2	Equation de la dynamique d'une poutre d'Euler Bernoulli . . . . .	95
3.3	Equation de transport . . . . .	97
3.3.1	Equation de Burger(inviscid) . . . . .	98
3.4	Equation de conservation de la masse . . . . .	99
3.5	La synchronisation . . . . .	99
3.5.1	Introduction . . . . .	99
3.5.2	L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés . . . . .	99
3.5.3	Définition de la synchronisation . . . . .	103
3.5.4	Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure . . . . .	106
3.5.5	Mise en équations . . . . .	107
3.6	Conclusion . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Modèle continu pour le couplage foule-passerelle</b> . . . . .	<b>111</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Formulation du modèle . . . . .	113
4.3	L'équation de la dynamique de la passerelle et la force due à la foule . . . . .	114
4.4	Modélisation du flux de piétons sur la passerelle . . . . .	115
4.5	Modélisation de la longueur de pas des piétons . . . . .	116
4.6	Modélisation de la phase totale des piétons : équation de Kuramoto . . . . .	118

4.6.1	Etude du cas d'un seul piéton soumis à la force exercée par la passerelle . . .	118
4.6.2	Retour au modèle continu . . . . .	121
4.7	Conclusion . . . . .	122
<b>5</b>	<b>Etude analytique</b>	<b>123</b>
5.1	Introduction . . . . .	125
5.2	Conditions de stationnarité et normalisation . . . . .	126
5.3	Equations à temps lent et méthode des petites perturbations . . . . .	127
5.4	Synchronisation partielle . . . . .	129
5.4.1	Repère tournant . . . . .	129
5.4.2	Le cas stationnaire . . . . .	130
5.4.3	Représentation statistique . . . . .	130
5.5	Etude du cas où $g$ est une distribution gaussienne . . . . .	136
5.5.1	Détermination du nombre critique $N_c$ et de la fréquence de synchronisation pour $N \rightarrow N_c$ . . . . .	136
5.5.2	Cas particulier où $g(\Omega)$ est de moyenne nulle . . . . .	137
5.6	Comparaison avec les données expérimentales de la passerelle du Millennium . . .	139
5.7	Détermination de l'évolution de l'amplitude du déplacement de la passerelle après déclenchement de la synchronisation . . . . .	142
5.8	Conclusion . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Modélisation numérique</b>	<b>145</b>
6.1	Introduction . . . . .	147
6.2	La discrétisation . . . . .	147
6.3	L'équation de la dynamique . . . . .	147
6.4	La conservation de la masse et l'équation de transport . . . . .	148
6.4.1	Résolution numérique de l'équation de transport avec vitesse constante . .	148
6.4.2	Schéma numérique pour la résolution de l'équation de conservation de la masse	155
6.4.3	Schéma numérique pour la résolution de l'équation de transport pour la fréquence . . . . .	155
6.5	L'équation de synchronisation . . . . .	160
6.6	L'algorithme général . . . . .	161
6.7	Conclusion . . . . .	163

---

<b>7 Résultats</b>	<b>165</b>
7.1 Introduction . . . . .	167
7.2 Choix des valeurs des différents paramètres . . . . .	167
7.3 Application à la passerelle du Millennium . . . . .	169
7.3.1 Description et caractéristiques de la passerelle . . . . .	169
7.3.2 Détermination de la valeur de $\varepsilon$ . . . . .	170
7.3.3 Comparaison de résultats sur la TN . . . . .	171
7.4 Application à la passerelle Simone de Beauvoir . . . . .	186
7.4.1 Description et caractéristiques de la passerelle . . . . .	187
7.4.2 Détermination du nombre critique de piétons . . . . .	187
7.4.3 Amplitude d'oscillations et simulations numériques . . . . .	190
7.4.4 Concernant le premier mode de la passerelle Simone de Beauvoir... . . . .	191
7.5 Conclusions . . . . .	191
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>195</b>
<b>Annexes</b>	<b>197</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>203</b>

# Table des figures

1.1	Distribution normale de la fréquence d'après Matsumoto <i>et al.</i> [1] . . . . .	30
1.2	La force verticale pour des séquences de marche . . . . .	31
1.3	Courbes typiques de la force pour la marche - (a) composante verticale, (b) composante latérale, (c) composante longitudinale d'après [2] . . . . .	31
1.4	Marche périodique - (a) composante verticale, (b) composante latérale, (c) composante longitudinale d'après [3] . . . . .	32
1.5	Relation entre la longueur du pas, la vitesse, la force maximale et le temps de contact pour différentes fréquences de mouvement d'après [4] . . . . .	33
1.6	Mouvement de course et de saut [5] . . . . .	38
1.7	Les facteurs d'impulsion pour la marche, la course et le saut en fonction de la fréquence du mouvement d'après [5] . . . . .	39
1.8	Les facteurs d'impulsion théoriques et expérimentaux d'après [5] . . . . .	40
1.9	Les forces verticales théoriques et expérimentales d'après [5] (a) pour la marche (b) pour la course avec contact continu (c) pour le saut . . . . .	40
1.10	Les DLFs en fonction du facteur d'impulsion pour la course et le saut . . . . .	42
1.11	Densité spectrale de puissance des deux composantes $F_{l,fi}$ et $F_{l,fb}$ pour des amplitudes de déplacement de $\pm 15mm$ (a), $\pm 30mm$ (b) et $\pm 45mm$ (c) d'après [6] . . . . .	43
1.12	La vitesse moyenne locale en fonction de la densité locale pour différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	56
1.13	La vitesse moyenne locale en fonction de la densité locale et de la vitesse de vibration de la passerelle pour $\beta = 7$ . . . . .	56
1.14	(a) $S_{pp}\left(\frac{\eta}{\eta_{max}}\right)$ , (b) $S_{ps}(\dot{u})$ . . . . .	57
2.1	La transformée en ondelette d'un signal temporel . . . . .	65
2.2	(a) Force latérale appliquée par le pied droit pour une vitesse de $3.75km/h$ , (b) FFT de la force . . . . .	68
2.3	Le filtre de Hamming . . . . .	68
2.4	(a) La fft de la force avant filtrage, (b) La fft de la force après filtrage . . . . .	69
2.5	Les composantes de la force pour une vitesses de marche de $4,5km/h$ : (a) verticale (b) latérale (c)longitudinale . . . . .	70

2.6	(a) La longueur des pas [ $m$ ] pour les différentes vitesses [ $km/h$ ] (b) La longueur moyenne des pas [ $m$ ] en fonction de la vitesse [ $km/h$ ] (c) La durée des pas [ $s$ ] pour les différentes vitesses [ $km/h$ ] (d) La durée moyenne des pas [ $s$ ] en fonction de la vitesse [ $km/h$ ]	71
2.7	La fréquence de la force engendrée par un pied en fonction de la vitesse de la marche	71
2.8	Les signaux des forces modélisées par différents nombres de coefficients de Fourier pour une vitesse de marche de $4,5km/h$ : (a) vertical droit, (b) vertical gauche, (c) latéral droit, (d) latéral gauche, (e) longitudinal droit, (f) longitudinal gauche	73
2.9	La force verticale pour une vitesse de marche de $4,5km$ modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale	76
2.10	La force latérale pour une vitesse de marche de $4,5km$ modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale	77
2.12	Comparaison entre la force verticale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de $5,25km/h$ : (a) le pied droit, (b) le pied gauche	77
2.11	La force longitudinale pour une vitesse de marche de $4,5km$ modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale	78
2.13	Comparaison entre la force latérale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de $5,25km/h$ : (a) le pied droit, (b) le pied gauche	78
2.14	Comparaison entre la force longitudinale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de $5,25km/h$ : (a) le pied droit, (b) le pied gauche	79
2.15	La force latérale totale pour une vitesse de marche de $4,5km$ modélisée avec 1 harmonique	79
2.16	La passerelle de Simone de Beauvoir	81
2.17	Coupe transversale de la passerelle de Simone de Beauvoir	82
2.18	Les signaux enregistrés par les 6 accéléromètres	83
2.19	Les transformées de Fourier des signaux enregistrés par les 6 accéléromètres	83
2.24	Coupe transversale de la passerelle de l'AFGC	86
2.25	(a) Dalle utilisée pour passerelle de l'AFGC, (b) Lame de flexion utilisée pour passerelle de l'AFGC	87
2.26	Coupe transversale de la passerelle de l'AFGC	87
2.20	Les graphiques obtenus par l'algorithme des transformées en ondelettes pour les signaux captés par les accéléromètres suivants : a)l'accéléromètre en A vertical en aval, b)l'accéléromètre en B vertical en aval à gauche et en amont à droite, c)l'accéléromètre en C vertical en aval à gauche et en amont à droite, d)l'accéléromètre en D vertical en aval	89
2.21	Extraction de l'arête de la transformée en ondelettes du signal obtenu par l'accéléromètre positionné en A vertical et en aval	90
2.22	Résultats permettant la détermination des paramètres de la structure selon le protocole expliqué dans 2.2.3 : (a) les fréquences instantanées, (b) les amortissements instantanés, (c) le logarithme des amplitudes instantanées	90

2.23	Les déformées modales du mode 5 : la partie réelle dans la figure du haut et la partie imaginaire dans la figure du bas . . . . .	91
3.1	Solutions exactes du système d'équations (3.16), (3.17), (3.18) . . . . .	97
3.2	Solutions exactes de l'équation (3.15), avec la condition initiale (3.19), la vitesse (3.20) et la condition en $x = 0$ (3.21) . . . . .	98
3.3	(a) Cycle limite dans le plan de phases (repère fixe), (b) stabilité d'un point de phase sur le cycle limite (repère tournant) . . . . .	101
3.4	Oscillateur conservatif . . . . .	102
3.5	Système dissipatif . . . . .	102
3.6	Systèmes dissipatifs : auto-entretenu (a) et forcé (b) . . . . .	103
3.7	Repère tournant : (a) $\omega_0 > \omega$ , (b) $\omega_0 = \omega$ , (c) $\omega_0 < \omega$ . . . . .	106
3.8	Le déphasage selon la position des points par rapport à la région de synchronisation : (a) la position des points par rapport à la région de synchronisation, (b) le déphasage en fonction du temps pour les différents points . . . . .	110
4.1	Courbe représentant $C_\eta$ en fonction de la densité $\eta$ des piétons . . . . .	117
4.2	Courbe représentant $C_s$ en fonction de l'amplitude de l'accélération $\ddot{u}(x, t)$ de la passerelle . . . . .	117
4.3	Courbe représentant la longueur de pas $l_{pas}$ en fonction de la densité $\eta$ des piétons et de l'amplitude de l'accélération $\ddot{u}$ de la passerelle . . . . .	118
6.1	La densité initiale $\varrho(x, 0)$ . . . . .	149
6.2	Solutions numériques obtenues par les méthodes LF et UP . . . . .	150
6.3	Solution numérique obtenue par la méthode CK . . . . .	151
6.4	Solution numérique obtenue par la méthode CKI . . . . .	151
6.5	La densité initiale $\varrho(x, 0)$ discontinue . . . . .	152
6.6	Solution numérique obtenue par la méthode CKI . . . . .	152
6.7	Solution numérique obtenue par la méthode CKINO . . . . .	154
6.8	Comparaison entre les méthodes numériques . . . . .	154
6.9	Evolution de nombre de piétons sur la passerelle pour $L = 81m$ et $\ell = 4m$ . . . . .	155
6.10	La condition initiale $\omega(x, 0)$ . . . . .	157
6.11	Comparaison entre méthodes numériques . . . . .	158
6.12	La condition initiale $\omega(x, 0)$ . . . . .	158
6.13	Comparaison entre les méthodes numériques : (a) solution à $t = 50s$ (b) zoom de la solution . . . . .	159
6.14	La condition initiale $\omega(x, 0)$ . . . . .	159
6.15	Comparaison entre méthodes numériques : a) solution à $t = 15s$ b) zoom de la solution	160
6.16	La condition initiale $\omega(x, 0)$ . . . . .	160



6.17	Comparaison entre méthodes numériques : a) solution à $t = 15s$ b) et c) zoom de la solution . . . . .	161
6.18	Représentation schématique la position des temps d'arrêt . . . . .	162
7.1	La travée centrale de la passerelle du Millennium à Londres . . . . .	169
7.2	Comparaison entre l'amplitude de déplacement de la TN trouvée analytiquement et l'amplitude de déplacement trouvée numériquement lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN . . . . .	176
7.3	Comparaison entre l'état pré-critique avec 150 piétons uniformément répartis sur la TN (à gauche) et l'état post-critique avec 220 piétons (à droite) lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN : les figures (a) et (b) représentent le déplacement de la TN à mi-travée, et les figures (c) et (d) montrent la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée . . . . .	177
7.4	Zoom sur la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (courbe bleu) pour 220 piétons après synchronisation lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN . . . . .	178
7.5	Evolution en temps et en espace de la fréquence instantanée des piétons lorsque leur fréquence moyenne est la fréquence modale du système piétons-TN (a) pour 150 piétons sur la TN, (b) pour 220 piétons sur la TN . . . . .	178
7.6	La force latérale modale des piétons (courbe bleue) et la vitesse modale de la TN à mi-travée (courbe rouge) après synchronisation pour 220 piétons lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN . . . . .	179
7.7	Amplitude de déplacement analytique de la TN lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure et l'écart-type est variable	180
7.8	Comparaison entre l'amplitude de déplacement de la TN trouvée analytiquement d'après [7] et l'amplitude de déplacement trouvée numériquement lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la passerelle seule . . . . .	181
7.9	Comparaison entre l'état pré-critique avec 150 piétons uniformément répartis sur la TN (à gauche) et l'état post-critique avec 220 piétons (à droite) lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule : les figures (a) et (b) représentent le déplacement de la TN à mi-travée, et les figures (c) et (d) montrent la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée . . . . .	182
7.10	Zoom sur la fréquence instantanée de la passerelle (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons (courbe bleue) pour 220 piétons après synchronisation lorsque leur fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule . . . . .	183
7.11	Evolution en temps et en espace de la fréquence instantanée des piétons lorsque leur fréquence moyenne est la fréquence modale de la TN seule (a) pour 150 piétons sur la TN, (b) pour 220 piétons sur la TN . . . . .	183
7.12	La force latérale modale des piétons (courbe bleue) et la vitesse modale de la TN à mi-travée (courbe rouge) après synchronisation pour 220 piétons lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule . . . . .	184

7.13	Le déplacement de la TN à mi-travée pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	184
7.14	La densité des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	185
7.15	La vitesse des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	185
7.16	Evolution du nombre de piétons sur la TN pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	186
7.17	Fréquence instantanée de la passerelle en rouge et fréquence instantanée des piétons à mi-travée en bleu pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	186
7.18	Fréquence instantanée des piétons en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 0,5p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	187
7.19	Le déplacement de la TN à mi-travée pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	187
7.20	La densité des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	188
7.21	La vitesse des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	188
7.22	Nombre de piétons sur la TN pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	189
7.23	Fréquence instantanée de la passerelle en rouge et fréquence instantanée des piétons à mi-travée en bleu pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	189
7.24	Fréquence instantanée des piétons en fonction de l'espace et du temps pour $\eta_0 = 1p/m^2$ (a) pour la distribution de fréquences <i>FR1</i> , (b) pour la distribution de fréquences <i>FR2</i> . . . . .	190
7.25	5000 piétons en marche "normale" sur la passerelle Simone de Beauvoir (a) le déplacement de la passerelle à mi-travée, (b) la fréquence instantanée de la passerelle (rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (bleu) . . . . .	190
7.26	Evolution de la fréquence instantanée des piétons pour 5000 piétons en marche "normale" sur la passerelle Simone de Beauvoir . . . . .	191
7.27	Amplitude de déplacement analytique de la passerelle Simone de Beauvoir lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure et l'écart-type est variable . . . . .	192
7.28	Déplacement de la passerelle Simone de Beauvoir à mi-travée pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons) .	192

- 7.29 Comparaison entre la fréquence instantanée de la passerelle Simone de Beauvoir (rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (bleu) pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons) . 193
- 7.30 Evolution de la fréquence instantanée des piétons à mi-travée pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons) . 193

# Liste des tableaux

1	Les lettres minuscules . . . . .	21
2	Les lettres majuscules . . . . .	22
3	Les lettres grecques . . . . .	23
1.1	Fréquences de marche . . . . .	30
1.2	Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la marche(DLFs) .	36
1.3	Les coefficients de Fourier pour la force latérale engendrée par la marche(DLFs) . .	36
1.4	Valeurs de $A_j$ , $B_j$ et $\left(\tilde{F}_{Lj}^2/\tilde{F}_L^2\right)$ d'après Pizzimenti et Ricciardelli [6] . . . . .	37
1.5	Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la course(DLFs) . .	37
1.6	Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par le saut(DLFs) . . .	38
1.7	Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par le balancement (DLFs)	38
1.8	Les fréquences de mouvement et les facteurs d'impulsion d'après Seiler et Hüttner [5]	40
1.9	Les fréquences de déplacement, les DLFs et les phases proposés par Seiler et Hüttner pour différents types de mouvement . . . . .	42
2.1	Paramètres de l'ondelette de Cauchy . . . . .	64
2.2	Les longueurs et les durées des pas avec les différences d'un pas à l'autre . . . . .	70
2.3	Coefficients de la force verticale pour une vitesse de $3,75km/h$ . . . . .	72
2.4	Coefficients de la force verticale pour une vitesse de $4,5km/h$ . . . . .	72
2.5	Coefficients de la force verticale pour une vitesse de $5,25km/h$ . . . . .	73
2.6	Coefficients de la force verticale pour une vitesse de $6km/h$ . . . . .	74
2.7	Coefficients de la force latérale pour une vitesse de $3,75km/h$ . . . . .	74
2.8	Coefficients de la force latérale pour une vitesse de $4,5km/h$ . . . . .	74
2.9	Coefficients de la force latérale pour une vitesse de $5,25km/h$ . . . . .	74
2.10	Coefficients de la force latérale pour une vitesse de $6km/h$ . . . . .	75
2.11	Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de $3,75km/h$ . . . . .	75
2.12	Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de $4,5km/h$ . . . . .	75
2.13	Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de $5,25km/h$ . . . . .	75
2.14	Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de $6km/h$ . . . . .	76

2.15	Configurations étudiées pour les essais sans amortisseurs . . . . .	82
2.16	Les modes complexes identifiés, les fréquences naturelles et le taux d'amortissement modal trouvé pour chaque signal étudié . . . . .	84
2.17	Résultats de l'analyse par ondelettes sur la passerelle Simone de Beauvoir non amortie	85
2.18	Fréquence propre et taux d'amortissement modal pour le déplacement latéral . . .	88
2.19	Fréquence propre pour le déplacement en torsion . . . . .	88
7.1	Caractéristiques des travées de la passerelle du Millennium à Londres [8], [7] . . . .	170
7.2	Valeurs des fréquences moyennes et des écart-types dans le cas des essais sur la TN	170
7.3	Les différentes valeurs de $\varepsilon[s/m]$ . . . . .	171
7.4	Comparaison entre les valeurs du nombre critique $N_c$ pour la TN trouvée par différents modèles de la littérature et par notre modèle . . . . .	172
7.5	Récapitulatif des caractéristiques des cas étudiés pour la TN . . . . .	173
7.6	La probabilité de synchronisation lorsque $N \geq N_c$ sur la TN lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons+TN . . . . .	175
7.7	Comparaison entre les fréquences de synchronisation pour la TN trouvées analytiquement et les fréquences de synchronisation trouvées numériquement . . . . .	175
7.8	Comparaison entre les amplitudes de déplacement post-critique de la TN trouvées analytiquement et les amplitudes de déplacement post-critique trouvées numériquement	175
7.9	La probabilité de synchronisation lorsque $N \geq N_c$ sur la TN lorsque la fréquence des piétons est centrée sur la fréquence modale de la TN . . . . .	179

# Notations

Dans les tableaux 1, 2 et 3, on fait le point sur les notations qui sont utilisées dans la suite de ce document. Il est utile de préciser que l'indice  $p$  est en rapport avec le piéton, et l'indice  $b$  avec la passerelle (bridge) ou la structure sur laquelle le piéton se déplace.

$a$	amplitude normalisée du déplacement de la passerelle (à mi-travée)
$a_{min}$	accélération de la passerelle à partir de laquelle les piétons ressentent les oscillations
$a_{max}$	accélération de la passerelle à partir de laquelle les piétons s'arrêtent de marcher
$b = \zeta/\gamma$	pourcentage d'amortissement du système passerelle-piétons normalisé
$f_b = \frac{\omega_b}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_b}{K}}$	fréquence propre de la passerelle
$f_l$	fréquence latérale du mouvement du piéton
$f_L$	fréquence longitudinale du mouvement du piéton
$f_m$	fréquence du mouvement du piéton
$f_v$	fréquence verticale du mouvement du piéton
$g$	accélération de la pesanteur
$l(x, t)$	longueur des pas des piétons
$l_{1p}$	longueur de pas d'un piéton
$l_0 = 0,71m$	longueur de pas moyenne pour une marche libre
$m_{1p}$	masse d'un piéton
$m_b$	masse de la passerelle par unité de longueur
$q$	fréquence de "bloquage" normalisée du système passerelle-piéton
$t$	variable de temps
$t_c$	la période de contact entre le piéton et le plancher durant un pas
$t_{nc}$	la période sans contact entre le piéton et le plancher durant un pas
$\mathbf{u}(x, t)$	déplacement de la passerelle
$u(x, t)$	déplacement latéral de la passerelle
$\tilde{u}$	déplacement latéral normalisée de la passerelle (à mi-travée)
$v_M$	vitesse moyenne de marche libre d'un piéton
$x$	variable longitudinale en espace

TABLEAU 1. *Les lettres minuscules*

$A$	amplitude du déplacement de la passerelle (à mi-travée)
$C$	amortissement modal de la passerelle
$C_s$	fonction réductrice de la longueur de pas en fonction des oscillations de la passerelle
$C_\eta$	fonction réductrice de la longueur de pas en fonction de la densité
$F_p$	force induite par un piéton
$F_v$	composante verticale de la force induite par un piéton
$F_l$	composante latérale de la force induite par un piéton
$F_L$	composante longitudinale de la force induite par un piéton
$\mathcal{F}_p$	force induite par un groupe ou une foule de piétons
$\mathcal{F}_v$	composante verticale de la force induite par un groupe ou une foule de piétons
$\mathcal{F}_l$	composante latérale de la force induite par un groupe ou une foule de piétons
$\mathcal{F}_L$	composante longitudinale de la force induite par un groupe ou une foule de piétons
$G = 35N$	amplitude de la force engendrée par un seul piéton
$K$	rigidité modale de la passerelle
$M$	masse modale de la passerelle
$M_p$	masse d'un groupe ou d'une foule de piétons
$M_t = M + M_p$	masse modale du système passerelle-foule
$N$	nombre de piétons total sur la passerelle
$N_c$	nombre critique de piétons
$P = m_{1p}g$	pois d'un piéton
$T = \gamma\tau$	variable de temps lente
$T_m = t_c + t_{nc}$	durée moyenne d'un pas
$T_{pas}$	durée instantanée d'un pas
$U$	déplacement de la passerelle (à mi-travée)

TABLEAU 2. *Les lettres majuscules*

$\alpha$	paramètre définissant la différence de phase entre le déplacement de la passerelle et celui du piéton quand il y a synchronisation.
$\gamma$	paramètre des petites perturbations
$\varepsilon$	paramètre pour la synchronisation
$\zeta$	taux d'amortissement du système passerelle-piétons
$\eta$	densité locale des piétons
$\eta_c$	densité critique des piétons à partir de laquelle les piétons interagissent entre eux
$\eta_{max}$	densité maximale des piétons à partir de laquelle les piétons s'arrêtent de marcher
$\theta = \phi - \omega_0 t$	phase totale des piétons dans le repère rotationnel
$\sigma_\omega$	écart-type de la fréquence de marche libre des piétons
$\sigma_\Omega$	écart-type de la fréquence de marche libre normalisée des piétons
$\mu_\omega$	moyenne de la fréquence de marche libre des piétons
$\mu_\Omega$	moyenne de la fréquence de marche libre normalisée des piétons
$\tau = \omega_0 t$	variable de temps rapide
$\phi$	phase totale des piétons
$\varphi = qT - \theta$	phase total des piétons dans un repère rotationnel
$\psi = \psi_s - \omega_0 t$	phase totale de la passerelle dans le repère rotationnel
$\psi_s$	phase totale de la passerelle
$\omega$	fréquence de marche libre des piétons
$\omega_b = \sqrt{\frac{K}{M_b}}$	pulsation propre de la passerelle
$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M_t}}$	Fréquence libre du système passerelle-piétons
$\Omega = \frac{1}{\gamma}(\omega/\omega_0 - 1)$	fréquence de marche libre normalisée
$\xi = \frac{C}{2\sqrt{KM_b}} = \frac{C}{2M_b\omega_b}$	taux d'amortissement de la passerelle

TABLEAU 3. *Les lettres grecques*





# Introduction générale

Elégance, légèreté et sveltesse sont les maître-mots de toute architecture moderne. Les passerelles piétonnes ne font pas exception à cette tendance. Leurs travées sont de plus en plus élancées et les matériaux qui les constituent de plus en plus légers. Cependant, les conséquences de ces tendances architecturales créent certains “désagréments” du côté des ingénieurs. En effet, l’élancement des passerelles fait apparaître des phénomènes nouveaux ou qui avaient moins d’effets dans le passé. Rappelons l’histoire du pont de la Basse-Chaîne, pont suspendu sur la Maine à Angers : en 1850, une troupe militaire traversant le pont en ordre serré provoqua sa rupture par résonance (oscillations verticales) et la mort de 226 soldats. Pourtant, le règlement militaire interdisait déjà de marcher au pas sur un pont, ce qui laisse à penser que ce phénomène était déjà connu pour les oscillations verticales [9]. Mais qui accordait de l’importance au phénomène d’oscillations latérales des passerelles engendré par l’excitation piétonne avant l’an 2000 ? Les ingénieurs connaissaient sans doute ce phénomène, mais l’importance qu’ils lui accordaient, n’égalait probablement pas celles qu’ils donnaient à d’autres phénomènes mieux connus. Cependant un évènement remarquable est venu propulser ce phénomène au premier rang des intérêts des ingénieurs des bureaux d’études et des chercheurs en dynamique des structures.

En juin 2000, à l’occasion du nouveau millénaire, une nouvelle passerelle est inaugurée à Londres : la passerelle du Millennium. Vu l’évènement qu’elle symbolise, cette passerelle se devait d’être belle, élégante et audacieuse. Beaucoup de personnes sont venues assister à l’inauguration, et il y avait même une fanfare de musique qui a ouvert la marche sur la passerelle. Mais, surprise, la passerelle commence à osciller latéralement. Ces oscillations sont tellement importantes que certaines personnes se sont cramponnées aux rambardes. Par la suite, la passerelle a été fermée au public durant deux ans pour permettre des recherches approfondies afin de remédier à ce problème.

Ces recherches ont mis en évidence que le Millennium a un mode propre latéral dont la fréquence est de l’ordre du  $Hz$ . Or un piéton génère par sa marche une force latérale ayant une fréquence du même ordre. La densité des piétons qui ont traversé la passerelle ce jour-là étant assez élevée (avec des maxima qui ont atteint les 1,3 à 1,5 piétons par mètre carré), les piétons étaient synchronisés entre eux et la force latérale totale qu’ils ont engendrée, avait une amplitude suffisamment importante pour que la passerelle commence à osciller. Les piétons qui ont ressenti le mouvement, ont changé leur façon de marcher de sorte à rester en équilibre. Ils se sont synchronisés alors avec la passerelle et donc de plus en plus entre eux. La force latérale totale qu’ils ont générée, avait une amplitude de plus en plus importante et la passerelle a bougé de plus en plus.

Depuis la mise en évidence de ce phénomène, plusieurs campagnes de mesures ont été lancées et beaucoup de chercheurs ont essayé de l’éclaircir et de le modéliser. Cependant, la plupart des modèles proposés ne donnent pas un contexte mathématique et physique rigoureux. Le but de cette thèse est donc de proposer un modèle qui arrive à reproduire le phénomène observé en prenant en compte l’interaction entre les piétons et l’interaction entre les piétons et la structure, notamment le phénomène de synchronisation.

Pour cela, le rapport de cette thèse est divisé en sept chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l’étude bibliographique. Nous avons souhaité regrouper les informations les plus importantes concernant la marche d’un piéton, son comportement et celui d’une foule sur une passerelle rigide ou souple. De plus, nous présentons brièvement les modèles trouvés dans la littérature. Ce

chapitre nous a permis d'approfondir nos connaissances sur ce phénomène et nous a amenés à un travail préliminaire de modélisation.

Dans le second chapitre, nous étudions des données concernant la marche d'un piéton sur un plancher rigide. Cette étude nous permet de modéliser la force latérale d'un piéton. Ensuite, nous analysons des données expérimentales concernant la passerelle Simone de Beauvoir et la passerelle de laboratoire réalisée par l'Association Française de Génie Civil. Cette analyse nous permet de déterminer les fréquences modales, les amortissements modaux et les formes modales des passerelles à partir de mesures réelles.

Dans le chapitre 3, nous introduisons différents outils théoriques utilisés dans la modélisation du phénomène étudié. Le but de ce chapitre est de "préparer" le lecteur au modèle que nous avons développé au cours de cette thèse.

Un nouveau modèle continu couplé foule-structure est présenté au chapitre 4. Le modèle que nous proposons est formé d'un couplage entre une équation aux dérivées ordinaires et trois équations aux dérivées partielles. Il réalise une modélisation correcte du comportement de la passerelle et de la foule avec une prise en compte rigoureuse du phénomène de synchronisation.

Dans le chapitre 5, nous réalisons une étude analytique pour un cas particulier du modèle. Cette étude nous permet d'une part de déterminer les paramètres du modèle, et d'autre part de déterminer le nombre critique de piétons qui pourrait déclencher la synchronisation, la fréquence de synchronisation et l'amplitude de déplacement post-critique de la passerelle à l'état stationnaire quand cela est possible.

Vu la complexité de notre modèle, l'implémentation numérique elle-même est complexe, et dans certains cas, les méthodes classiques ne permettent pas d'obtenir des résultats satisfaisants. Ceci a entraîné un travail numérique poussé qui est présenté dans le chapitre 6.

Dans le dernier chapitre de cette thèse, nous commençons par fixer les valeurs des différents paramètres du modèle. Puis, nous appliquons le modèle à la passerelle du Millennium et à la passerelle Simone de Beauvoir, après avoir vérifié la correspondance entre le modèle numérique présenté au chapitre 6 et l'étude analytique du chapitre 5.

Enfin nous terminons ce rapport par des conclusions illustrant le travail qui a été réalisé et des perspectives qui ouvrent sur le travail de recherche qui pourrait être poursuivi.

# Chapitre 1

## Etude bibliographique et problématique générale

---

*CE CHAPITRE a pour objectif de faire une synthèse bibliographique sur les problèmes suivants :*

- \* Les caractéristiques des différents mouvements de piétons.*
  - \* Les caractéristiques des forces engendrées par les mouvements de piétons.*
  - \* La modélisation de la force engendrée par un piéton.*
  - \* L'interaction entre les piétons.*
  - \* L'interaction entre les piétons et la structure.*
  - \* La modélisation de la force engendrée par une foule.*
-

## PLAN DU CHAPITRE 1

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>29</b>
<b>1.2</b>	<b>Etudes expérimentales liées aux mouvements des piétons</b> . . . . .	<b>29</b>
1.2.1	La marche . . . . .	29
1.2.2	Autres mouvements : la course, le saut, le balancement, le rebondissement	33
<b>1.3</b>	<b>Modélisation de la force induite par un ou plusieurs piétons</b> . . . . .	<b>34</b>
1.3.1	Introduction . . . . .	34
1.3.2	Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher rigide .	34
1.3.3	Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher souple .	39
1.3.4	Force induite par plusieurs personnes . . . . .	43
<b>1.4</b>	<b>Un travail préliminaire sur la modélisation</b> . . . . .	<b>50</b>
1.4.1	Etude réalisée par l'Association Française de Génie Civil (AFGC) . . . . .	51
1.4.2	Un modèle de foule continu . . . . .	55
1.4.3	Un modèle préliminaire... . . . . .	57
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>57</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente une synthèse de l'étude bibliographique réalisée au cours de cette thèse. Cette étude est divisée en trois parties. La première partie porte sur les résultats expérimentaux des études réalisées sur les différents types de mouvement des piétons. Les modèles développés dans la littérature sont présentés dans la deuxième partie et un travail préliminaire de modélisation dans la dernière.

## 1.2 Etudes expérimentales liées aux mouvements des piétons

Des mesures de la force induite par des personnes sautant, marchant ou courant, ont été effectuées par plusieurs chercheurs [10–12]. La plupart de ces essais ont été réalisés pour des forces verticales, et sur des planchers rigides, *i.e.* ayant des fréquences propres élevées et étant non susceptibles de vibrer en réponse à la force qui leur est imposée par les piétons.

### 1.2.1 La marche

#### 1.2.1.1 Définition

Dans le dictionnaire [13], on trouve que marcher, c'est se déplacer, se mouvoir en mettant un pied devant l'autre.

#### 1.2.1.2 Observations sur la marche

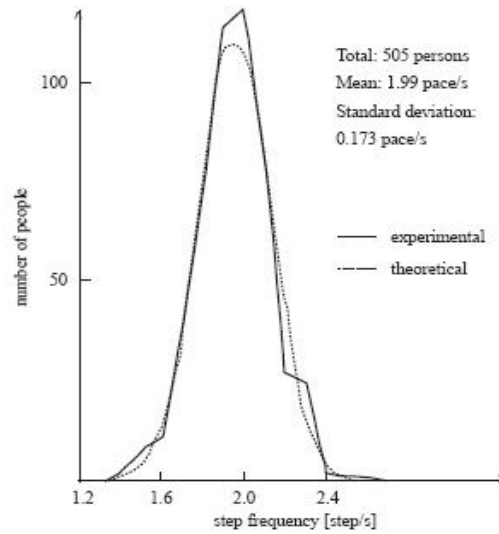
Durant la marche, au moins l'un des deux pieds du piéton est en contact avec le plancher sur lequel il est en mouvement. Dans l'action de marcher, on peut distinguer deux phases : dans la première, les deux pieds sont simultanément en contact avec le plancher alors que dans la deuxième un seul pied est en contact avec le plancher. La première phase permet d'une part, de changer la jambe d'appui et d'autre part, de donner à la deuxième jambe l'élan nécessaire pour se lancer en avant. On définit la durée d'un pas comme étant la période de temps qui sépare le début de deux phases de contact simultané des deux pieds. La longueur d'un pas sera définie comme étant la distance qui sépare les deux pieds durant la phase de contact simultané. La longueur moyenne d'un pas lorsque la marche du piéton est libre *i.e.* lorsqu'il n'est influencé ni par les piétons qui l'entourent ni par le plancher, est supposée suivre une loi normale avec une moyenne de l'ordre de  $l_0 = 0,71m$  et un écart-type de  $0,071m$  [14]. La vitesse de marche peut être définie comme étant le rapport entre la longueur d'un pas et sa durée. La valeur moyenne de la vitesse de marche dans des conditions de marche libre est de l'ordre de  $v_M = 1,5m/s$  [15].

#### 1.2.1.3 Périodicité et fréquences

La marche d'un piéton dans des conditions de marche libre est habituellement supposée périodique [16], *i.e.* la longueur d'un pas et sa durée sont sensiblement identiques d'un pas à l'autre pour un même piéton. La période de la marche  $T_m$  est définie comme étant la durée moyenne d'un pas pour un piéton donné. La fréquence  $f_m = \frac{1}{T_m}$  a été évaluée expérimentalement par plusieurs auteurs et a une valeur voisine de  $2Hz$  (Tableau 1.1). La figure 1.1 montre la courbe de la distribution normale des fréquences selon Matsumoto *et al.* [1] d'après des expériences réalisées sur 505 personnes.

Cependant, cette périodicité est contestée dans les travaux de Sahnaci et Kasper [20] qui affirment que la durée d'un pas diffère selon la jambe d'appui. Ainsi, on aurait deux fréquences et deux périodes différentes.

Auteur(s)	Fréquences
Matsumoto <i>et al.</i> [1](505 personnes)	la fréquence suit une loi de distribution normale de moyenne $2,0Hz$ et de déviation standard de $0,173Hz$
Kerr et Bishop [17](40 personnes)	fréquence moyenne de $1,9Hz$
Leonard [18]	fréquence de la marche normale $1,7 - 2,3Hz$
Bachmann <i>et al</i> [19]	$1,6 - 2,4Hz$
Zivanovic <i>et al.</i> [14] (939 personnes)	loi normale de moyenne $1,87Hz$ et d'écart-type $0,186Hz$

TABLEAU 1.1. *Fréquences de marche*FIGURE 1.1. *Distribution normale de la fréquence d'après Matsumoto et al. [1]*

#### 1.2.1.4 Les forces engendrées par la marche d'un piéton

Durant la marche, chaque pied, lors de son contact avec le plancher, engendre une force à trois composantes. Dans ce qui suit, les indices  $v$ ,  $l$  et  $L$  indiquent respectivement les directions verticale, latérale et longitudinale, l'indice  $d$  indique la jambe droite et l'indice  $g$  la jambe gauche :

$$\vec{F}_{pd}(t) = \begin{bmatrix} F_{vd}(t) \\ F_{ld}(t) \\ F_{Ld}(t) \end{bmatrix} \quad \vec{F}_{pg}(t) = \begin{bmatrix} F_{vg}(t) \\ F_{lg}(t) \\ F_{Lg}(t) \end{bmatrix}$$

La force  $\vec{F}_p$  engendrée par un piéton n'est autre que la somme des forces engendrées par chacune des jambes :

$$\vec{F}_p(t) = \vec{F}_{pd}(t) + \vec{F}_{pg}(t) = \begin{bmatrix} F_{vd}(t) + F_{vg}(t) \\ F_{ld}(t) + F_{lg}(t) \\ F_{Ld}(t) + F_{Lg}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v(t) \\ F_l(t) \\ F_L(t) \end{bmatrix}$$

**La force verticale :** La force verticale est toujours dirigée vers le plancher, elle a donc un signe constant, que ce soit pour la jambe droite ( $F_{vd}$ ) ou la jambe gauche ( $F_{vg}$ ), et qui est le même pour les deux jambes. La force verticale totale  $F_v$  a donc elle aussi le même signe, et elle a pour amplitude moyenne le poids du piéton ( $750N$  à  $800N$  en moyenne) et varie de  $\pm 250N$  [21]. Durant un pas, la jambe qui est en contact avec le plancher engendre une force verticale dont le graphe est en "selle de cheval" et présente deux

extrema [2, 10–12, 16, 22–24], (figures 1.2 et 1.3-a). La première partie de ce graphe s'apparente à un quart de sinus qui est dû au choc du talon sur le plancher et la dernière partie à un quart de sinus dû à la force provoquée par la pointe pour pouvoir lancer la jambe en avant. La force verticale totale  $F_v(t)$  est représentée dans la figure 1.4-a. Comme on peut le voir sur cette figure, si on suppose que les forces verticales engendrées par les deux jambes sont égales (même direction, même sens et même amplitude), la force verticale totale  $F_v(t)$  peut être considérée comme périodique de période égale à la durée d'un pas donc à la période de la marche.

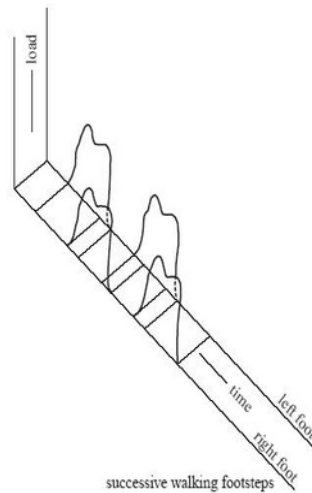


FIGURE 1.2. La force verticale pour des séquences de marche

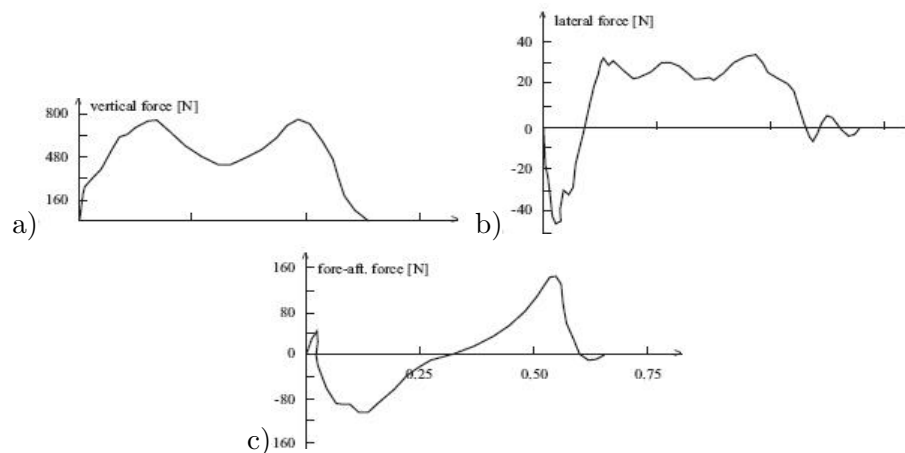


FIGURE 1.3. Courbes typiques de la force pour la marche - (a) composante verticale, (b) composante latérale, (c) composante longitudinale d'après [2]

**La force latérale :** La force latérale a des sens opposés pour chacune des jambes : durant un pas où la jambe gauche est en contact avec le plancher, elle est dans un premier temps dirigée vers la droite puis vers la gauche ; c'est l'inverse dans le cas de la jambe droite. L'amplitude de cette force varie entre  $-35N$  et  $+35N$  d'après [25], et de  $-25N$  à  $+25N$  [8, 21] (figure 1.3-b). La force latérale totale  $\vec{F}_l(t)$  (1.4-b) permet d'identifier les phases de contact simultané et les phases de contact d'une seule jambe. Cette identification est basée sur les maxima et minima de la force ; *i.e.* le passage de l'accélération à la décélération, puis le retour à l'accélération, détermine le début et la fin de la phase de contact des deux jambes. Comme la force engendrée par une jambe est dans le sens contraire à celle engendrée par l'autre, la force latérale totale a



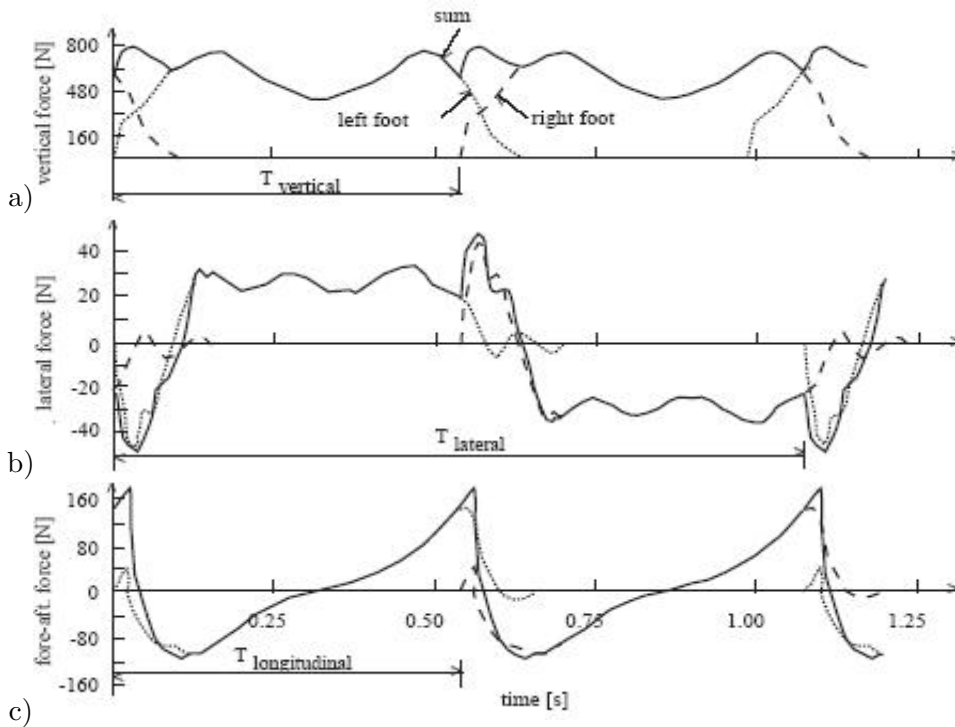


FIGURE 1.4. Marche périodique - (a) composante verticale, (b) composante latérale, (c) composante longitudinale d'après [3]

une période qui correspond à la durée de deux pas. Elle a donc pour valeur le double de la période de la force verticale, entraînant une fréquence de moitié [26].

**La force longitudinale :** La force longitudinale, comme la force verticale est supposée être la même pour les deux jambes. En considérant la force d'une seule jambe (figure 1.3-c), on remarque que la première partie de la force est dirigée vers l'arrière (force négative), ce qui correspond au choc du talon, et la dernière partie est dirigée vers l'avant (force positive), ce qui correspond au choc de la pointe. La force longitudinale totale (figure 1.4-c) est considérée comme étant périodique de période égale à la durée d'un pas. Elle a donc la même période et la même fréquence que la force verticale.

L'hypothèse selon laquelle les forces engendrées par les deux jambes sont identiques est controversée : des mesures faites par Sahnaci et Kasper [20] montrent que les paramètres de la force ne sont pas les mêmes pour les deux jambes. En effet, l'une des deux jambes, qualifiée comme étant la jambe "forte", a une longueur de pas supérieure à celle de l'autre, la jambe "faible" ; la différence entre les deux étant parfois supérieure à 5%. La fréquence des pas n'est pas la même pour les deux jambes, l'une ayant une fréquence supérieure à l'autre.

Des études probabilistes prennent en compte le fait qu'une personne ne peut pas répéter exactement les mêmes forces (en fonction du temps) au cours de différentes expériences. La force d'une seule personne est considérée périodique, mais le caractère aléatoire peut être pris en compte en considérant des fonctions de distribution du poids, de la fréquence, etc... [3].

### 1.2.1.5 Relations entre les différents paramètres

Des études ont montré que l'augmentation de la fréquence entraîne l'augmentation de la vitesse de marche [4, 27], qui à son tour entraîne une augmentation de la longueur du pas ainsi que des maxima d'amplitudes de toutes les composantes de la force engendrée par un piéton [2, 4, 22, 27]. De plus, l'augmentation

de la fréquence entraîne une diminution du temps de contact d'un pied avec le plancher. Ces relations sont illustrées dans la figure 1.5 [27] et sont valables non seulement pour la marche mais aussi pour la course.

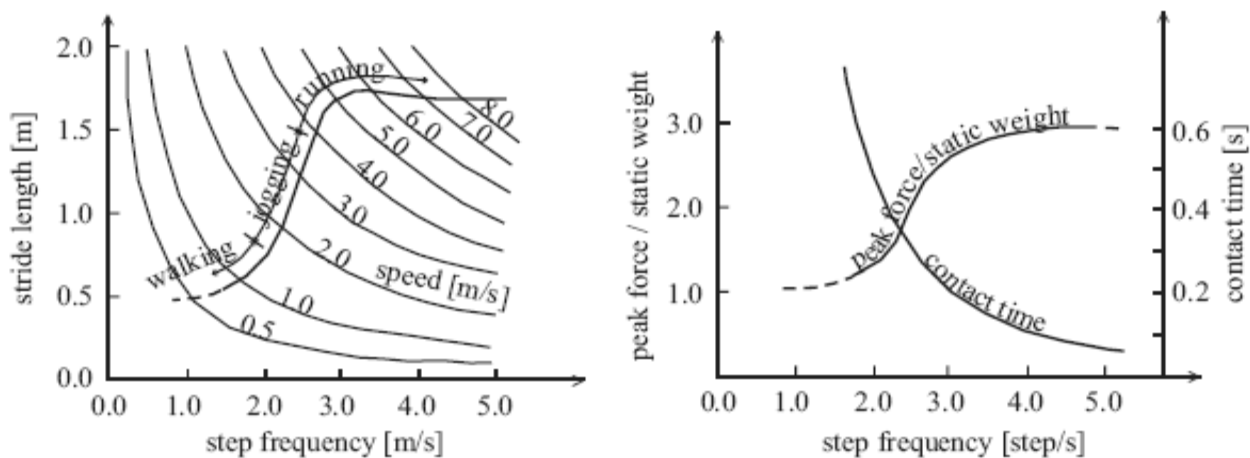


FIGURE 1.5. Relation entre la longueur du pas, la vitesse, la force maximale et le temps de contact pour différentes fréquences de mouvement d'après [4]

### 1.2.2 Autres mouvements : la course, le saut, le balancement, le rebondissement

Des mouvements de piétons autres que la marche existent aussi. On peut citer la course et le saut mais aussi le balancement qu'on peut définir comme étant le fait de basculer son poids d'une jambe à l'autre tout en restant sur place et sans décoller les pieds du plancher. Dans cette partie, on se contente de présenter les principales caractéristiques de ces mouvements sans entrer dans les détails.

#### La course

Contrairement à la marche, la force engendrée par une jambe durant un pas de course présente un seul maximum (Galbraith et Barton [22]). Durant une course, les périodes de contact d'une seule jambe sont séparées par des périodes sans contact où la force induite est supposée nulle. La force engendrée par ce mouvement peut aussi être supposée périodique, et la fréquence fondamentale de la force verticale est dans la bande de fréquences  $1,8 - 3,4\text{Hz}$  (Bachmann et al. [19]).

#### Le saut

Durant le saut, on trouve aussi des périodes de temps avec contact et des périodes sans contact. Le maximum de la force verticale est égal à plusieurs fois le poids de la personne. De plus, des études ont montré que les forces horizontales dues aux sauts verticaux existent aussi, mais la composante longitudinale reste plus importante que la composante latérale. De même que les autres forces, la force engendrée par le saut peut être supposée périodique. La fréquence fondamentale de la force verticale est dans la bande de fréquences  $2,0 - 3,5\text{Hz}$  (Bachmann *et al.* [19]).

#### Le balancement du corps en restant sur place

La force engendrée par le balancement est aussi supposée périodique. La fréquence fondamentale de la force verticale appartient à l'intervalle  $0,4 - 0,7\text{Hz}$  (Bachmann *et al.* [19]).

## Le rebondissement

Rebondir c'est faire un ou plusieurs bonds en touchant à chaque fois un corps solide. La force engendrée par ce mouvement peut être supposée périodique et la fréquence fondamentale de la force verticale appartient à l'intervalle  $1,5 - 3,0 Hz$  (Bachmann *et al.* [19])

## 1.3 Modélisation de la force induite par un ou plusieurs piétons

La plupart des études de modélisation ont été réalisées pour les forces verticales et sur des planchers rigides.

### 1.3.1 Introduction

La modélisation de la force induite par un ou plusieurs piétons est assez compliquée et ceci pour plusieurs raisons (Zivanovic *et al.* [3]) :

1. Les forces dépendent de plusieurs paramètres, tels que le poids de la personne, la fréquence du mouvement, etc.
2. La force dynamique générée par un piéton est un processus à bande étroite assez difficile à modéliser et pas encore bien compris.
3. L'influence du nombre de personnes et leur degré de synchronisation/corrélation sont difficiles à généraliser.

D'après certains auteurs [3, 6], la force est différente suivant que les vibrations sont perceptibles ou non. Cependant, d'après les études réalisées par l'Association Française de Génie Civil [25], l'amplitude de la force engendrée par un piéton est sensiblement la même que le plancher soit rigide ou souple. Par contre, lorsqu'un piéton perçoit les oscillations du plancher, il a tendance à adapter sa fréquence sur celles des oscillations. C'est donc la fréquence de la force qui varie et non son amplitude.

Dans la littérature, on trouve deux types d'approches : la première consiste à modéliser la force d'un seul piéton, et la deuxième celle d'une foule ou d'un groupe de piétons. De plus, à l'intérieur de ces catégories, on rencontre des modèles temporels ou fréquentiels. Dans tous les cas, on distingue une approche déterministe qui propose un modèle général pour chaque type de mouvement, ou une approche probabiliste qui prend en compte le caractère aléatoire de certains paramètres qui influencent la force, tels que le poids, la fréquence du mouvement, etc. La plupart des études réalisées supposent que les deux jambes produisent la même force et que celle-ci est périodique [3]. La force totale engendrée est alors reconstruite à partir des mesures faites pour un pas comme dans la figure 1.4 [28].

Dans ce qui suit, on commence par présenter les modélisations proposées par la littérature pour la force induite par une seule personne sur un plancher rigide puis sur un plancher souple, et on s'intéresse ensuite à la modélisation de la foule.

### 1.3.2 Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher rigide

#### 1.3.2.1 Les forces engendrées par la marche

##### a) La force verticale :

En adoptant l'hypothèse selon laquelle les deux jambes engendrent la même force, et que ces forces sont périodiques, on peut supposer que la force verticale totale  $F_v$  engendrée par un piéton est périodique comme nous l'avons vu dans la section 1.2. De ce fait, on peut développer  $F_v$  en série de Fourier jusqu'à un ordre  $n$  à préciser [3, 19] :

$$\begin{aligned}
F_v(t) &= P \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i \sin(2\pi i f_p t - \phi_i^0) \right) \\
&= P \left( 1 + \sum_{i=1}^n a_i \cos(2\pi i f_p t - (\phi_i')^0) \right)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

où :

$P$  est le poids de la personne ( $N$  (Newton))

$i$  est le numéro de l'harmonique.

$n$  est le nombre total d'harmoniques qui contribuent à la force

$(Pa_i)$  est le coefficient de Fourier du  $i$ -ème harmonique

$a_i$  est le facteur de chargement dynamique (DLF) du  $i$ -ème harmonique

$f_p$  est la fréquence de marche du piéton ( $Hz$ )

$\phi_i^0$  est la phase du  $i$ -ème harmonique pour un développement en sinus. La valeur de  $\phi_1^0$  est arbitraire et peut être nulle par exemple.

$(\phi_i')^0$  est la phase du  $i$ -ème harmonique pour un développement en cosinus. La relation qui lie  $\phi_i^0$  à  $(\phi_i')^0$  est donnée par

$$(\phi_i')^0 = \phi_i^0 + \frac{\pi}{2}$$

Le nombre  $n$  d'harmoniques varie selon les auteurs de 1 à 5. Les valeurs proposées pour les  $a_i$  sont données dans le tableau 1.2. Kerr [23] a trouvé des valeurs expérimentales pour les  $a_i$  dispersées pour différents sujets et même pour un même sujet qui répète l'expérience [28, 29]. D'autre part, les valeurs des phases  $\phi_i$  varient beaucoup pour les harmoniques  $i \geq 2$  [19], ce qui montre le caractère aléatoire du chargement dû à la marche [28].

### b) La force latérale :

De même que pour la force verticale, la force latérale peut aussi être considérée comme périodique. Elle est donc développable en série de Fourier :

$$F_l(t) = P \sum_{i=1}^n a_i \sin(2\pi i f_l t - \phi_i^0) \tag{1.2}$$

On rappelle que  $P$  est le poids du piéton et  $f_l$  la fréquence de la force latérale qui est égale à la moitié de celle de la marche. Les valeurs des  $a_i$  sont données dans le tableau 1.3.

Eriksson [31] a étudié les basses fréquences du spectre ( $< 6Hz$ ), et a trouvé que la marche n'est pas parfaitement périodique, et donc ne peut pas être décrite en utilisant les DLFs comme dans les modèles précédents. En effet, comme les signaux de la force latérale mesurés ne sont pas périodiques, on ne peut pas les développer en série de Fourier, mais on peut obtenir leur spectre de Fourier et en déduire des DLFs "fictifs". Or, dans le spectre, on observe un "étalement" autour de la fréquence d'excitation : au lieu d'avoir un seul pic au niveau de cette fréquence, on en observe plusieurs. Ainsi, le DLF correspondant à cette fréquence, doit être calculé en tenant compte de cet étalement dans une bande de fréquences donnée entourant la fréquence centrale d'excitation. Pour cela, Eriksson, a supposé que le DLF n'est autre que la somme des pics dans une bande de fréquences centrée sur la fréquence  $f_l$  de la force latérale à étudier (*i.e* qui correspond au premier harmonique) et ayant pour largeur  $f_l$  :

$$f \in \left[ \frac{f_l}{2}, \frac{3f_l}{2} \right] \tag{1.3}$$

Auteur(s)	$a_i$	$\phi_i$	Commentaires
Blanchard <i>et al.</i> [16]	$a_1 = 0,257$		le DLF est plus faible pour des fréquences de 4 à $5Hz$
Bachmann et Ammann [26]	$a_1 = 0,4 - 0,5$ $a_2 = a_3 = 0,1$		fréquences entre 2 et $2,4Hz$ fréquences autour de $2Hz$
Schulz [18] (d'après Bachmann et Ammann [26])	$a_1 = 0,37, a_2 = 0,10$ $a_3 = 0,12, a_4 = 0,04$ $a_5 = 0,08$		A $2Hz$
Kerr [23]	$a_1, a_2 = 0,07$ $a_3 \simeq 0,06$		$a_1$ dépend de la fréquence
Young [30]	$a_1 = 0,37(f - 0,95)$ $\leq 0,56$ $a_2 = 0,054 + 0,0044f$ $a_3 = 0,026 + 0,0050f$ $a_4 = 0,010 + 0,0051f$		Valeurs moyennes
Seiler et Hüttner [5]	$a_1 = 0,4$ $a_2 = 0,15$ $a_3 = 0,1$ $a_4 = 0,05$	$\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ $\phi_2 = -\frac{5\pi}{6}$ $\phi_3 = \frac{\pi}{2}$ $\phi_4 = -\frac{5\pi}{6}$	fréquences de l'ordre de 1,4 ÷ 3,4 $Hz$

TABLEAU 1.2. Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la marche(DLFs)

Auteur(s)	DLFs pour les harmoniques considérés	Commentaire
Schulz [18] (d'après Bachmann et Ammann [26])	$a_1 = 0,039, a_2 = 0,01$ $a_3 = 0,043, a_4 = 0,012$ $a_5 = 0,015$	fréquence de l'ordre de $2Hz$
Ricciardelli et Pizzimenti [6]	$a_1 = 0,04$ $a_2 = 0,008$ $a_3 = 0,023$ $a_4 = 0,005$ $a_5 = 0,011$	fréquence de l'ordre de 0,6 ÷ 0,11 $Hz$ fréquence de l'ordre de 1,2 – 2,2 $Hz$ fréquence de l'ordre de 1,8 – 3,3 $Hz$ fréquence de l'ordre de 2,4 – 4,4 $Hz$ fréquence de l'ordre de 3,0 – 5,5 $Hz$

TABLEAU 1.3. Les coefficients de Fourier pour la force latérale engendrée par la marche(DLFs)

Cependant, d'après Pizzimenti et Ricciardelli [6], en prenant une telle bande de fréquences, on risque de surestimer la réponse vibratoire de la passerelle (transitoire dans le cas d'un plancher rigide). Ils expliquent ceci en se basant sur le cas d'un système faiblement amorti, où l'amortissement intervient uniquement dans une bande de fréquences étroite autour de la fréquence de résonance. Ainsi, si dans le calcul des DLFs on prend en compte des composantes qui n'appartiennent pas à cet intervalle, on risque de surestimer la réponse vibratoire de la passerelle. C'est pourquoi, Pizzimenti et Ricciardelli [6] ont préféré prendre pour chaque harmonique, une largeur de bande de fréquences qui dépend de l'amortissement  $\xi$ . Ainsi, pour le

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$
$A_j$	0,96	0,73	0,879	0,55	0,74
$B_j$	0,0616	0,039	0,0288	0,037	0,025
$(\tilde{F}_{Lj}^2/\tilde{F}_L^2)$	0,81	0,050	0,277	0,047	0,072

TABLEAU 1.4. Valeurs de  $A_j$ ,  $B_j$  et  $(\tilde{F}_{Lj}^2/\tilde{F}_L^2)$  d'après Pizzimenti et Ricciardelli [6]

$j$ -ème harmonique, la largeur de bande est :

$$\Delta f_j = j\pi\xi f_l \quad (1.4)$$

On remarque d'après les résultats obtenus (tableau 1.3) que l'excitation due aux harmoniques pairs est inférieure à celle due aux harmoniques impairs.

Mais d'après Pizzimenti et Ricciardelli [6], qui ont étudié aussi les forces latérales des piétons sur les planchers rigides, un modèle probabiliste serait mieux adapté au caractère aléatoire de la marche. Une approche statistique leur a montré que la force latérale  $F_l(t)$  peut être considérée comme étant un processus aléatoire de moyenne nulle, caractérisé dans le domaine fréquentiel par son spectre de densité de puissance  $S_{F_l}$  (PSD, Power Spectral Density). Une régression linéaire sur des données expérimentales montre que la variance du processus est donnée par

$$\text{var}(F_l) = E[F_l^2(t)] - (E[F_l(t)])^2 = (0,034 P)^2 \quad (1.5)$$

où  $E$  désigne l'espérance.

De plus, les PSDs des cinq premiers harmoniques vérifient l'expression gaussienne :

$$\frac{S_{F_l}(f) \cdot f}{\tilde{F}_{Lj}^2} = \frac{2A_j}{\sqrt{2\pi} \cdot B_j} \cdot \exp\left[-2\left(\frac{f/jf_l - 1}{B_j}\right)^2\right] \quad (1.6)$$

où  $j$  est le numéro de l'harmonique considéré,  $\tilde{F}_{Lj}^2$  est l'aire du PSD autour du  $j$ -ème harmonique,  $A_j$  est un paramètre de normalisation du PSD et  $B_j$  est un paramètre de la largeur de bande. Les valeurs des différents paramètres sont données dans le tableau 1.4.

### 1.3.2.2 Forces engendrées par d'autres mouvements

Les forces engendrées par la course, le saut et le balancement peuvent aussi être supposées périodiques. Elles sont donc développables en série de Fourier. Les coefficients de chargement dynamique (DLF) de la force verticale pour ces différents mouvements sont donnés dans les tableaux 1.5, 1.6 et 1.7.

Auteur(s)	DLFs pour les harmoniques considérés	Commentaires
Bachmann <i>et al.</i> [19]	$a_1 = 0,039$ , $a_2 = 0,01$ $a_3 = 0,2$	à 2,0 – 3,0 Hz

TABLEAU 1.5. Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par la course (DLFs)

Seiler et Hüttner [5] ont proposé un modèle de la force verticale de la marche qui est aussi applicable dans le cas de la course ou du saut. Comme on l'a vu plus haut, la course et le saut se caractérisent par des périodes  $t_{nc}$  où il n'y a aucun contact avec le sol, et des périodes de contact  $t_c$ . La durée d'un pas est  $T_m = t_c + t_{nc}$ . Il est évident que durant la période sans contact  $t_{nc}$ , la force engendrée par le piéton est nulle.

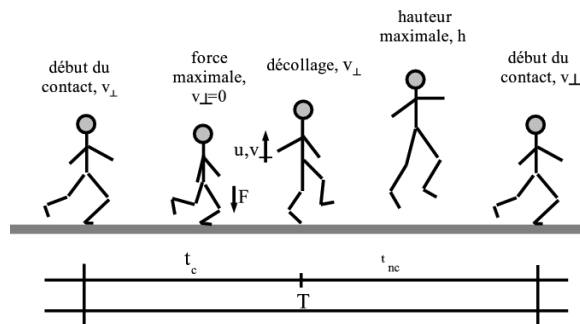
Auteur(s)	$DLFs$ pour les harmoniques considérés	Commentaires
Bachmann <i>et al.</i> [19]	$a_1 = 1, 8/1, 7$ $a_2 = 1, 3/1, 1$ $a_3 = 0, 7/0, 5$	Saut normal à $2, 0/3, 0Hz$
Bachmann <i>et al.</i> [19]	$a_1 = 1, 9/1, 8$ $a_2 = 1, 6/1, 1$ $a_3 = 1, 1/0, 8$	Saut haut à $2, 0/3, 0Hz$

TABLEAU 1.6. *Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par le saut(DLFs)*

Auteur(s)	$DLFs$ pour les harmoniques considérés	Commentaires
Bachmann <i>et al.</i> [19]	$a_1 = 0, 17/0, 38$ $a_2 = 0, 10/0, 12$ $a_3 = 0, 04/0, 02$	à $1, 6/2, 4Hz$

TABLEAU 1.7. *Les coefficients de Fourier pour la force verticale engendrée par le balancement (DLFs)*

Pour déterminer la force verticale  $F_v$  d'un piéton qui court ou qui saute, un modèle de demi-sinus durant la période de contact  $t_c$  a été proposé par Wheeler [4,27] et par Bachmann et Amman [26]. Cependant, dans ces modèles, si la période sans contact  $t_{nc} \rightarrow 0$ , *i.e.* si le mouvement s'approche de la marche, la force ainsi modélisée est formée d'une suite de demi-sinus, ce qui n'est pas conforme aux mesures faites sur la marche (voir la section précédente). Partant de ce constat, Seiler et Hüttner [5] ont proposé un modèle présentant une transition continue quand  $t_{nc} \rightarrow 0$ . Le modèle général est représenté dans la figure 1.6 où  $h$  est la hauteur maximale atteinte par le piéton, et  $v_{\perp}$  est sa vitesse verticale au moment du décollage. Dans ce modèle, la masse  $m_{1p}$  du piéton est concentrée en un seul point et les muscles sont représentés sans

FIGURE 1.6. *Mouvement de course et de saut [5]*

propriétés de tension.

Durant la période sans contact  $t_{nc}$ , le mouvement du piéton est décrit par le théorème de conservation de l'énergie :

$$h = \frac{v_{\perp}^2}{2g}, \quad v_{\perp} = \frac{1}{2} g t_{nc} \quad (1.7)$$

$g$  étant l'accélération de la pesanteur. Ceci implique que la vitesse verticale ne change pas quand le piéton retourne au sol ; elle vaut alors  $v_{\perp}$ .

Durant la période de contact  $t_c$ , le mouvement est décrit par le premier principe de la dynamique, intégré ici entre  $t = 0$  et  $t = \frac{t_c}{2}$  :

$$\int_0^{t_c/2} F_v(t) dt = m_{1p} v_{\perp} + \int_0^{t_c/2} m_{1p} g dt \quad (1.8)$$

La force verticale induite par le piéton est donnée par :

$$F_v(t) = \begin{cases} P [1 + s \cos(2\pi f_G t)] & \text{si } -\frac{t_c}{2} < t \leq \frac{t_c}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{t_c}{2} < t \leq T_m - \frac{t_c}{2} \end{cases} \quad (1.9)$$

$s$  étant un facteur d'impulsion qui dépend du rapport  $\frac{t_c}{T_m}$  :

$$\frac{t_c}{T_m} = \left[ 1 + \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{\arccos(-1/s)} \right]^{-1} \quad (1.10)$$

et  $P$  le poids du piéton. L'amplitude maximale de la force est déterminée par  $s$ . Il est à noter, que la fréquence  $f_G$  n'est pas la fréquence de la marche  $f_p$  du piéton, mais elle est en relation avec  $t_c$  et  $s$  :

$$f_G = \frac{\arccos(-1/s)}{\pi t_c} \quad (1.11)$$

Dans le cas particulier de la marche, le contact avec le plancher étant continu,  $t_{nc}$  tend vers 0. En conséquent, la période de contact  $t_c$  tend vers  $T_m$ ,  $s = 1$  et  $f_G$  coïncide avec  $f_p = \frac{1}{T_m}$ .

L'oscillation résultante est alors un mouvement non amorti libre avec une amplitude maximale égale à la déformation statique due au poids.

D'après les mesures, on remarque que l'amplitude maximale  $s$  et la fréquence  $f_p$  sont indépendantes pour la marche (tableau 1.8) et pour la course. De plus, dans le cas d'une course,  $s$  semble être constante (figures 1.7 et 1.8).

Dans certains essais expérimentaux (figure 1.9), des forces verticales d'amplitudes supérieures à celles obtenues par le modèle de chargement (équation (1.9)) ont été constatées; elles sont dues à l'excitation d'harmoniques supérieures, mais n'influencent pas la réponse du plancher d'après les auteurs.

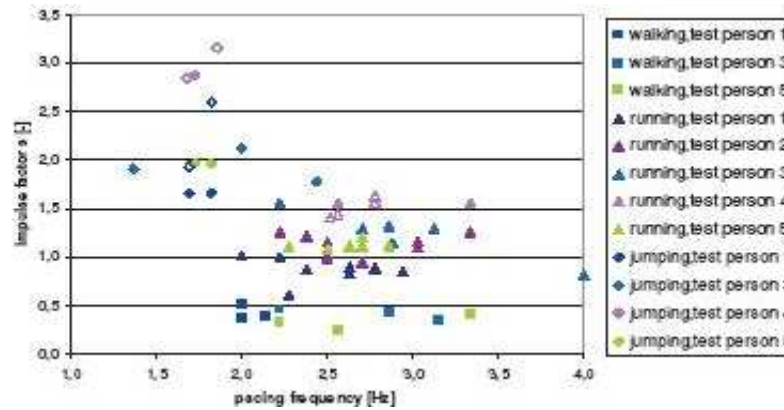


FIGURE 1.7. Les facteurs d'impulsion pour la marche, la course et le saut en fonction de la fréquence du mouvement d'après [5]

### 1.3.3 Force induite par une seule personne : étude du cas d'un plancher souple

#### 1.3.3.1 La perception des vibrations par les humains

Les mesures faites sur des planchers rigides sont différentes de celles qui sont faites sur des planchers ayant des fréquences propres faibles : un piéton qui ressent des vibrations de la passerelle modifie son mouve-



type de mouvement	fréquence du mouvement ( $Hz$ )	facteur d'impulsion $s$
marche	2,0-3,4	0,25-0,5
marche	2,0-3,4(4,0)	0,6-1,6
marche	1,4-2,5	1,7-3,2

TABLEAU 1.8. Les fréquences de mouvement et les facteurs d'impulsion d'après Seiler et Hüttner [5]

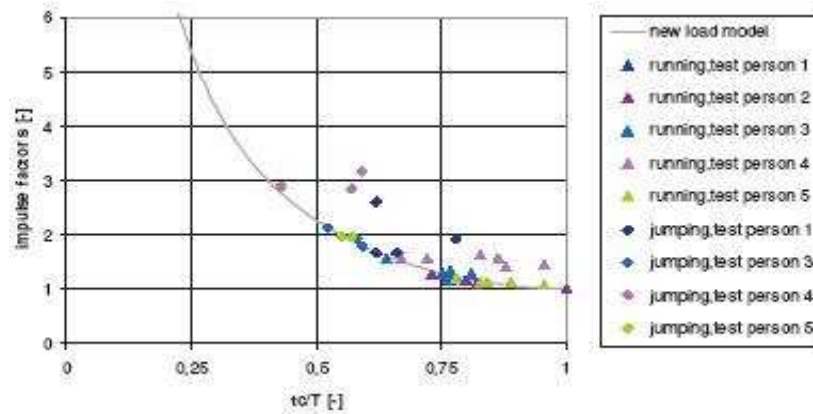


FIGURE 1.8. Les facteurs d'impulsion théoriques et expérimentaux d'après [5]

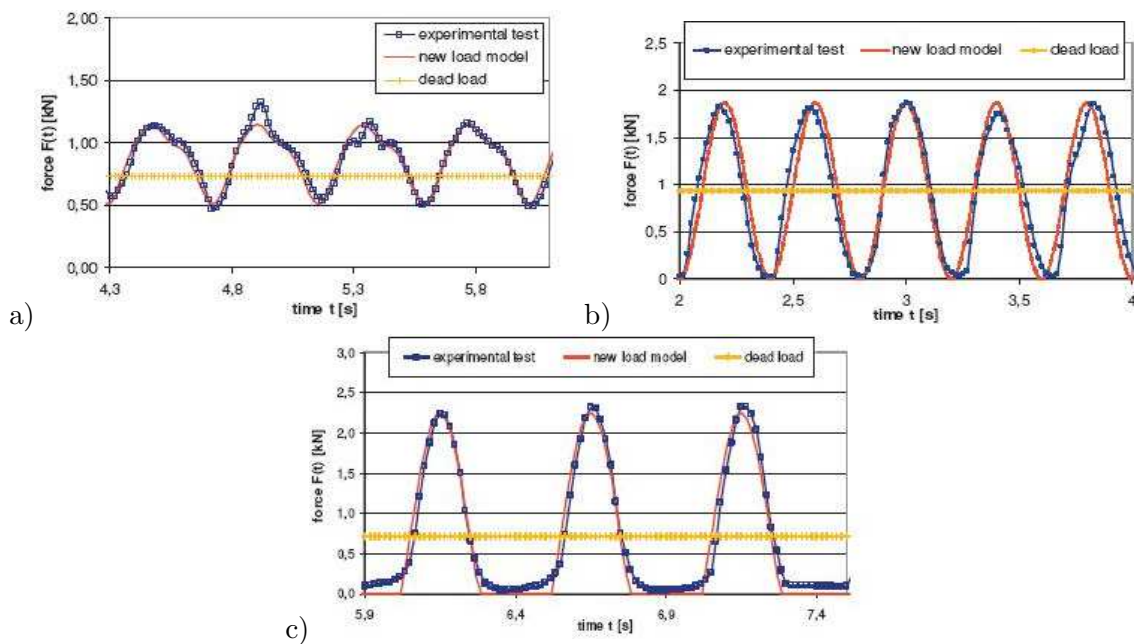


FIGURE 1.9. Les forces verticales théoriques et expérimentales d'après [5] (a) pour la marche (b) pour la course avec contact continu (c) pour le saut

ment en conséquence et se synchronise avec celui de la structure. Il convient donc d'étudier la perception des vibrations par les humains. Cependant, cette notion est très subjective ; en effet, la perception des vibrations est différente d'une personne à l'autre. De plus, il existe plusieurs seuils :

- le seuil de la perception des vibrations
- le seuil d'inconfort des vibrations

- le seuil où elles deviennent nuisibles (elles nuisent à la santé ou elles font perdre l'équilibre).

Des études sur la perception des **vibrations verticales**, montrent que les personnes debout ressentent les vibrations plus qu'une personne en mouvement (Leonard [32]). De plus, le piéton ressent le maximum de vibration à côté de la mi-portée à cause de l'effet de la forme modale (Smith [33]). Kobori et Kajikawa [34] affirment que la vitesse du plancher est le paramètre principal qui influence la perception humaine et que l'on a une même sensibilité face aux vibrations ayant des valeurs efficaces identiques. L'utilisation de la vitesse des vibrations comme paramètre d'évaluation du confort est difficile en pratique, bien qu'utilisée au Japon, parce que généralement les mesures expérimentales sont faites avec des accéléromètres ; le signal mesuré est donc une accélération et il faut l'intégrer pour se ramener à la vitesse. Or cette intégration est parfois très compliquée. C'est pourquoi en général, on se réfère à l'accélération comme critère de confort. Blanchard *et al* [16], qui ont utilisé les résultats de Leonard [32] et Smith [33], ont évalué la limite maximale de l'accélération adaptée au confort du piéton :

$$a_{limite} = 0,5\sqrt{f_b} \text{ (m.s}^{-2}\text{)} \quad (1.12)$$

$f_b$  étant la fréquence fondamentale du mode vertical de la passerelle.

Tilly *et al.* [35] ont affirmé que la valeur  $\sqrt{f_b}$  pourrait être plus appropriée pour des fréquences en dehors de la plage  $1,7 - 2,2\text{Hz}$ , sans donner de détails sur l'élaboration de cette recommandation.

Bien que la perception des vibrations soit plus sensible dans la direction **latérale**, les mesures faites sont très rares, et la plupart d'entre elles portent sur des immeubles. L'AFGC [25] estime que le seuil de perception se situe pour des accélérations ayant des valeurs entre  $0,10\text{m/s}^2$  et  $0,15\text{m/s}^2$ , la valeur  $0,10\text{m/s}^2$  pouvant être retenue comme valeur sécuritaire. Les essais expérimentaux réalisés par Nakamura [36] sur le T-bridge montrent que les piétons marchent normalement pour un déplacement de la passerelle de l'ordre de  $10\text{mm}$  (qui dans son cas correspond à une vitesse de  $60\text{mm/s}$  et à une accélération de  $300\text{mm/s}^2$ ), et s'arrêtent momentanément de marcher lorsque le déplacement atteint les  $45\text{mm}$  (correspondant à une vitesse de  $250\text{mm/s}$  et à une accélération de  $1350\text{mm/s}^2$ ). Pour des fréquences caractéristiques des réponses des tours d'immeubles de grandes hauteurs dues au vent ( $0,067$  à  $0,20\text{Hz}$ ), les facteurs les plus importants qui influencent la perception des vibrations latérales ont été déterminés (Chen et Robertson [37]), mais ce sont des facteurs valables en général : la fréquence des vibrations, le mouvement du corps, l'attente du mouvement (si on s'attend au mouvement, le seuil de perception est plus bas [37] mais on tolère mieux les vibrations (Smith [33])), et la posture du corps. Dans cette bande de fréquences de l'immeuble, la perception des gens qui marchent est supérieure à celle des gens immobiles. Wheeler [4,27] a remarqué que la perception d'une personne dans une foule est différente de celle d'une personne seule. Ainsi, des gens qui sautent en foule, ne se rendent pas compte des vibrations (Ellis et Ji [38]). On ne sait pas exactement la cause de ce phénomène. Ceci pourrait être à cause du bruit, de la présence d'autres personnes ou pour des raisons totalement différentes.

### 1.3.3.2 La force verticale :

Le spectre des forces mesurées sur un plancher flexible est différent de celui obtenu pour un plancher rigide (Ohlsson [24]). Il présente un maximum au niveau de la fréquence propre de la passerelle. Pavic *et al.* [3] ont trouvé que l'amplitude de la force latérale d'un saut sur un plancher rigide est deux fois plus importante que sur un plancher flexible.

Pour modéliser la force verticale induite par un piéton sur une passerelle souple, Seiler et Hüttner ont proposé d'utiliser les équations (1.9), (1.10), (1.11), et de prendre :

$$f_p = f_b \quad (1.13)$$

$f_p$  étant la fréquence du mouvement du piéton et  $f_b$  celle de la passerelle.

Cependant, ils proposent de remplacer l'équation (1.9), par son développement en série de Fourier donné par l'équation (1.1) et qu'on rappelle ici :

$$F_v(t) = P \left[ 1 + \sum_{i=1}^n a_i \cos \left( i 2\pi f_p t - (\phi'_i)^0 \right) \right]$$

La figure 1.10, donne les DLFs en fonction du facteur d'impulsion pour la course et le saut. Dans le tableau

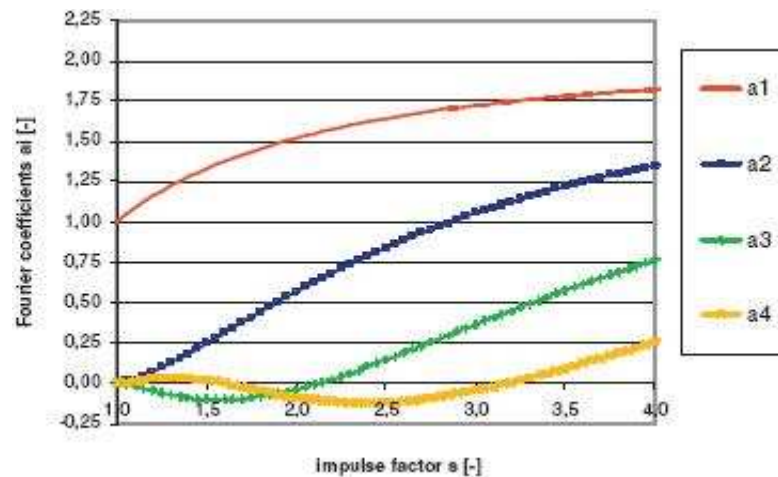


FIGURE 1.10. Les DLFs en fonction du facteur d'impulsion pour la course et le saut

1.9 on donne les valeurs des DLFs et des phases trouvées par les auteurs [5] pour différents mouvements de piétons. Pour les DLFs, des valeurs moyennes sont données dans le cas de la marche. Cependant, d'après les auteurs, les valeurs maximales sont préférables pour la course et le saut.

Mouvement	fréquence du mouvement [Hz]	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
marche	1,4-3,4	0,4	0,15	0,1	0,05
course	1,9-3,4	1,38	0,31	-0,1	0,0
saut	1,3-3,4	1,72	1,05	0,36	-0,04
Mouvement		$(\phi'_1)^0 [rad]$	$(\phi'_2)^0 [rad]$	$(\phi'_3)^0 [rad]$	$(\phi'_4)^0 [rad]$
marche		$\pi$	$-\pi/3$	$\pi$	$-\pi/3$
course et saut <sup>b</sup>		$\phi'_i = i\pi \left\{ 1 + \frac{\sqrt{s^2 - 1}}{\arccos(-1/s)} \right\}^{-1} \quad i = 1, \dots, 4$			
<sup>b</sup> $s$ = facteur d'impulsion					

TABLEAU 1.9. Les fréquences de déplacement, les DLFs et les phases proposés par Seiler et Hüttner pour différents types de mouvement

### 1.3.3.3 La force latérale :

Pizzimenti et Ricciardelli [6] ont mesuré la force latérale sur un plancher en vibration. Ils ont remarqué que deux contributions participent à cette force. L'une agit à la fréquence de la marche, et l'autre à la fréquence de vibration du plancher. Ainsi, il y a deux mécanismes qui contribuent à l'excitation totale. Le premier, est celui d'une marche régulière, semblable à celui obtenu sur un plancher rigide. Le deuxième est centré sur la fréquence de vibration. La force latérale s'écrit donc :

$$F_l(t) = F_{l,f_l}(t) + F_{l,f_b}(t) \quad (1.14)$$

où  $F_{l,f_l}$  est la force ayant une fréquence égale à la fréquence latérale de la marche  $f_l$ , elle est semblable à celle qui est engendrée sur des planchers rigides;  $F_{l,f_b}$  est la force ayant une fréquence égale à la fréquence de vibration du plancher (voir figure 1.11).

Pour des petites amplitudes de déplacement (figure 1.11-a), les deux composantes restent indépendantes pour toutes les fréquences de vibrations indiquant que l'interaction piéton-passerelle est faible. Pour de

plus grandes amplitudes de déplacement (figure 1.11-b et c), lorsque les deux fréquences deviennent égales, l'interaction est plus forte. Dans tous les cas, l'amplitude de la force induite par la vibration augmente lorsque  $f_b$  se rapproche de  $f_l$ . De plus,  $F_{l,f_b}$  se décompose en deux contributions. L'une en phase avec le déplacement du plancher  $u$ , et l'autre déphasée par rapport à  $u$  et en phase avec la vitesse  $\dot{u}$ . Si on suppose que  $u$  est un  $\sin(2\pi f_b t)$ , on peut exprimer ceci par

$$F_{l,f_b} = F_{in} \sin(2\pi f_b t) + F_{out} \cos(2\pi f_b t) \quad (1.15)$$

En posant  $DLF_{in} = \frac{F_{in}}{P}$  et  $DLF_{out} = \frac{F_{out}}{P}$ ,  $-DLF_{in}$  est une rigidité supplémentaire et  $-DLF_{out}$  un amortissement supplémentaire. Les expériences ont montré que la partie en phase avec le déplacement de la passerelle apporte une rigidité positive pour toutes les amplitudes et toutes les fréquences de vibration, ce qui tend à stabiliser le système. Par contre, la partie déphasée apporte un amortissement positif pour de basses fréquences, mais négatif pour les hautes fréquences, ce qui diminue l'amortissement du système, et donc augmente son comportement instable.

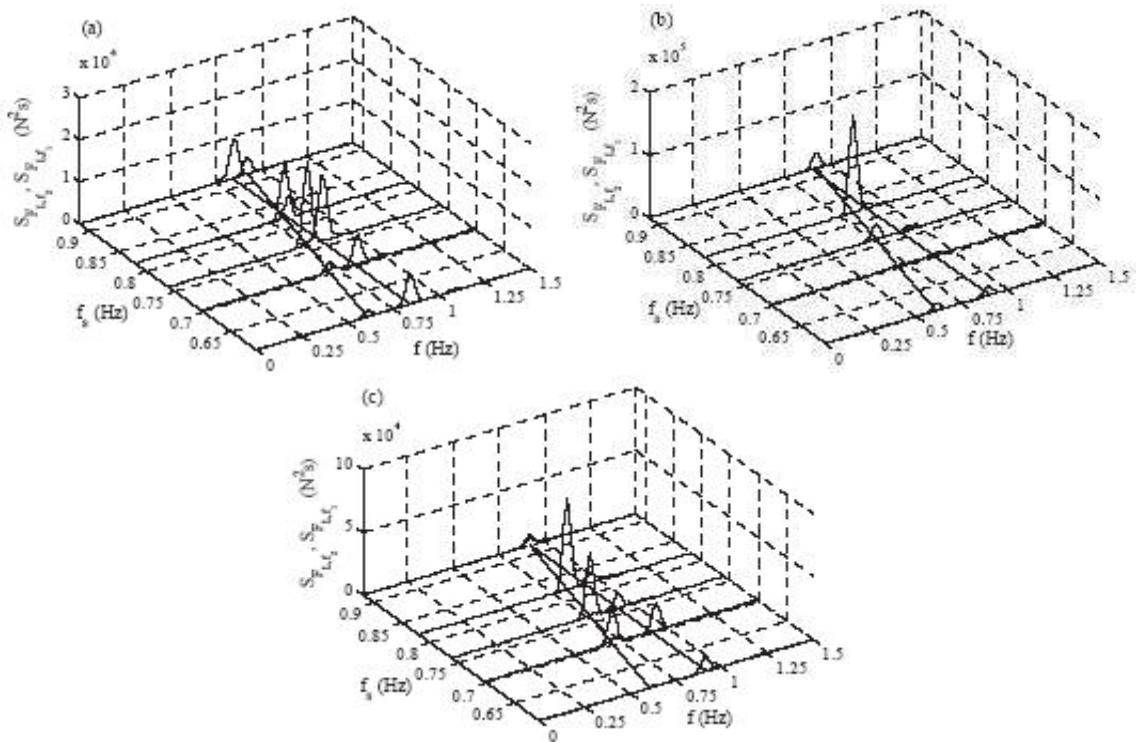


FIGURE 1.11. Densité spectrale de puissance des deux composantes  $F_{l,f_l}$  et  $F_{l,f_b}$  pour des amplitudes de déplacement de  $\pm 15\text{mm}$  (a),  $\pm 30\text{mm}$  (b) et  $\pm 45\text{mm}$  (c) d'après [6]

### 1.3.4 Force induite par plusieurs personnes

Dans le cas où plusieurs piétons sont sur la passerelle, il convient de distinguer entre les terminologies suivantes : on utilise le terme “groupe” de piétons pour des gens qui marchent à une même vitesse, alors que le terme “foule” est utilisé dans le cas où il y a une densité assez élevée de gens, de sorte que les piétons doivent ajuster leurs pas à cause du manque de place (Pavic *et al.* [3]).

#### 1.3.4.1 L'interaction entre piétons

Qu'est-ce qui influence la synchronisation? Comment se manifeste-elle? Comment la prendre en

compte dans les modélisations ? Des réponses tirées de la littérature seront données à ces questions dans cette partie mais aussi dans les différents modèles proposés dans la suite de la thèse.

La vue joue un rôle important dans la synchronisation entre piétons ; ainsi, deux personnes qui sautent ont plus de facilité à se synchroniser si elles sont dans le champ de vision l'une de l'autre, que si elles ne se voient pas (Ebrahimpour et Fitts [39]). D'après Eriksson [31], la fréquence fondamentale peut être complètement corrélée pour un groupe de personnes très bien synchronisées, alors que les harmoniques plus élevés peuvent être complètement indépendants.

Dans une foule, le manque de place pousse les gens à synchroniser leurs pas. Plus la foule est dense, plus ce phénomène devient important. La densité de foule maximale possible, physiquement parlant est de l'ordre de  $1,6 - 1,8$  piétons/ $m^2$  [ $p/m^2$ ], mais une valeur de  $1p/m^2$  est plus probable (Bachmann et Amman [26]), même si les densités observées sur la passerelle du Millénium Footbridge ou le T-Bridge au Japon étaient supérieures.

Sur une passerelle, en présence de plusieurs piétons, différents comportements peuvent se produire :

- dans un petit groupe, les gens marchent à une même vitesse  $v_s$ , mais à des fréquences  $f_p$  et des longueurs de pas  $l_s$  légèrement différentes [40], de telle sorte que :

$$v_s = f_p l_s$$

La synchronisation peut avoir lieu, mais seulement lorsque la fréquence de la passerelle est de l'ordre de la fréquence de marche [40].

- si partout la densité  $\eta$  des piétons est inférieure à une densité critique  $\eta_c = 0,3$  piétons/ $m^2$  alors les piétons sont indépendants les uns des autres [40] et la marche est libre avec une vitesse de l'ordre de  $v_M = 1,5$  m.s<sup>-1</sup> [15].
- si à un endroit donné,  $\eta \geq \eta_c$  un noyau de synchronisation peut apparaître. En effet, dans une foule dense, les piétons ont tendance à accorder leur pas selon l'espace disponible. D'après Pizzimenti et Ricciardelli [6], deux cas de figures peuvent se présenter :
  - Si la masse modale  $M_p$  des piétons (projection de la masse des piétons sur le mode étudié) est inférieure à une masse critique  $M_c$ , le phénomène de résonance de la passerelle n'a pas lieu.
  - Si  $M_p \geq M_c$ , le phénomène de résonance apparaît.

La valeur de la masse critique  $M_c$  n'a pas été précisée.

Afin de tester les réponses des passerelles, Grundmann et al [40] les ont classées en 3 catégories selon l'affluence à laquelle elles peuvent être exposées. Ils ont proposé des configurations différentes de piétons pour chaque catégorie :

- Modèle 1 : ce modèle concerne les passerelles où le flux est très faible mais où les piétons traversent par groupes. Pour ce type de passerelles, il suffit d'après les auteurs de considérer un petit groupe de piétons selon la définition proposée précédemment.
- Modèle 2 : ce modèle concerne les passerelles ayant un faible flux de piétons. La densité maximale suggérée est de  $0,3p/m^2$ . Dans ce cas, la marche est libre.
- Modèle 3 : dans le cas de passerelles exposées à un trafic de  $0,6 - 1p/m^2$ , la marche libre est impossible, et les piétons sont forcés d'ajuster la longueur et la fréquence de leurs pas à celles des autres piétons.

D'après des observations faites sur une foule (enregistrements vidéo et mesure de force), Fujino [41] a conclu que 20% des piétons étaient synchronisés entre eux (synchronisation en fréquences). Il a aussi émis une hypothèse selon laquelle les effets des autres piétons se compensent. Yoshida et al. [42] ont estimé la force latérale d'une foule de 1500 piétons à  $5016N$ , soit en moyenne  $3,34N$  par personne. Dallard *et al.* [8,21] ont supposé que tous les piétons participent de façon égale à la force totale. Ils ont donc identifié la force latérale modale par personne et la dépendance de la force latérale en fonction de la vitesse de déplacement de la passerelle. La force par personne ainsi déterminée est supérieure à celle trouvée par Yoshida *et al* [42] (elle augmente avec la vitesse des oscillations [8,21]).

### 1.3.4.2 Reproductivité des mesures

La question qui se pose dans le cas d'une foule est : peut-on supposer que les piétons marchent de la même façon ? Or si, comme il a été énoncé plus haut, une personne ne peut pas répéter exactement les mêmes forces (en fonction du temps) pour plusieurs expériences, c'est d'autant plus vrai quand on considère deux personnes différentes (Saul, Tuan et McDonald [3, 43]). Dans le cas de plusieurs personnes, on peut aussi utiliser une distribution de la différence de phase entre les différents individus. De cette façon, on peut moyenner des mesures faites sur des individus de sorte à obtenir une bonne estimation de la force engendrée par un groupe. Continuant le travail fait par Tuan et Saul sur les activités typiques sur des gradins (d'un stade ou d'un théâtre par exemple), et plus précisément le saut, Ebrahimpour [3, 44] a identifié le délai entre deux personnes essayant de sauter en étant synchronisées. Il a utilisé cette distribution du délai avec une description statistique de la force individuelle pour déterminer la force exercée par plusieurs personnes. De plus, une simulation par la méthode de Monte Carlo a montré que, pour le saut, l'amplitude maximale de la force par personne diminue lorsque le nombre de personnes augmente (Ebrahimpour). Cette idée n'étant pas applicable en pratique, Ebrahimpour et Sack [3, 45] ont proposé de décrire les trois premiers harmoniques en fonction du nombre de personnes du groupe. Ebrahimpour *et al.* [3, 46] ont essayé d'appliquer le même principe sur des piétons qui marchent, et n'ont exprimé que le DLF fondamental en fonction de la taille du groupe. Cette limitation est probablement due au fait que des mesures de forces non corrélées de personnes, ont montré que seul le premier harmonique est important, et c'est d'autant plus vrai lorsque le nombre de personnes augmente. Mais ces mesures ne tiennent pas compte de la possibilité de synchronisation dans une foule [3].

### 1.3.4.3 Propriétés dynamiques “apparentes” des passerelles piétonnes en présence de piétons

La présence de personnes immobiles, change les propriétés dynamiques de la structure. L'amortissement du système dynamique homme-structure est plus élevé que celui de la structure seule. L'effet est encore plus important si on a plusieurs personnes. Une personne peut donc être considérée comme un système dynamique amortissant. Le corps humain est un système complexe non-linéaire à plusieurs degrés de liberté, qui réagit de plusieurs manières face au mouvement de la structure (Williams *et al* [47]). Certains ont essayé d'approcher le corps humain par un système linéaire à un degré de liberté (comme Zheng et Brownjohn [48]), mais un tel modèle simplifié dépend de la fréquence des oscillations auxquelles il est soumis et ne peut pas être modélisé par des paramètres de masse, de rigidité et d'amortissement constants pour n'importe quelle fréquence d'oscillation du plancher.

Ellis et Ji [49] ont trouvé que le saut et la course d'une personne ne peuvent pas changer les caractéristiques dynamiques de la structure, mais leurs essais ont été faits sur une poutre ayant une première fréquence propre élevée.

Dans le cas d'une structure flexible, Ohlsson [24] a trouvé que la présence de piétons en mouvement augmente la masse et l'amortissement “apparents” de la structure. Cependant, dans ses essais, le rapport de masse des piétons et de la passerelle est élevé d'après [3]. Mais des tests effectués sur le Millennium montrent que la présence d'une foule de piétons augmente l'amortissement dans la direction verticale (Willford [29]). Des études faites par Yao *et al* [50] montrent que le saut et le balancement changent aussi les propriétés dynamiques des structures flexibles, mais là aussi, le rapport de masse entre les piétons et la passerelle est très élevé [3].

### 1.3.4.4 Le couplage entre les piétons et la structure dans le cas d'une passerelle soumise à des vibrations latérales

Quand des vibrations latérales de la passerelle ont lieu, les piétons changent leur façon de marcher pour rester en équilibre. Pour cela, ils se synchronisent avec le mouvement de la passerelle. Ainsi, le mouvement de

la partie supérieure du corps et la force totale induite par les piétons augmentent, ce qui a pour conséquence d'augmenter l'instabilité dynamique de la structure. Il faut aussi remarquer que le couplage avec la passerelle, entraîne une augmentation de la synchronisation entre les piétons.

D'après Yoneda [51], plusieurs facteurs peuvent influencer la synchronisation : la fréquence latérale naturelle de la passerelle, l'amortissement, la position des nœuds dans un mode résonant, la vitesse de la marche, et la longueur de la passerelle. Cependant, l'influence de ces facteurs n'a pas été vérifiée expérimentalement sur des passerelles.

Des observations qualitatives de l'Association Française de Génie Civil (AFGC) [25] ont permis de tirer les informations suivantes :

- Le phénomène de synchronisation forcée se produit pour le premier mode de balancement latéral.
- Il ne semble pas se produire pour les modes de torsion : le mouvement vertical est gênant, mais ne semble pas favoriser le maintien de la marche à la fréquence de résonance. L'accélération verticale masque les effets de l'accélération latérale.
- La notion de nombre critique de piétons est relative : la synchronisation forcée ne peut pas avoir lieu en dessous d'un certain seuil ; cependant au-delà d'un certain seuil (non précisé), il se peut aussi qu'elle n'ait pas lieu.
- La synchronisation forcée semble s'initier et se développer plus facilement à partir d'une fréquence de marche initiale inférieure à la moitié de la fréquence propre à risque de la structure. Si la fréquence de marche est plus élevée, la synchronisation ne se produit pas ; un piéton ayant une marche plutôt rapide ressent différemment et d'une manière atténuée les vibrations latérales.
- L'effet de la foule augmente avec le niveau des oscillations. On peut considérer que les piétons ont une marche libre au dessous d'un seuil compris entre 0, 10 et 0, 15 m/s<sup>2</sup>, et sont partiellement synchronisés au-delà. Le changement de régime est relativement brutal, mais le seuil est variable d'un essai à l'autre.

D'autres études proposent des résultats différents. Ainsi, d'après Barker [52], la réponse vibratoire au mouvement de la foule peut augmenter sans qu'il n'y ait synchronisation entre les piétons. Dinmore [53] propose de considérer la force induite par les piétons comme une onde qui se propage dans la structure. Ainsi, pour contrôler les vibrations de la structure et éviter la synchronisation, il recommande de faire varier la rigidité tout au long de la structure, en utilisant différents matériaux. De cette façon, l'onde subit des réflexions et réfractions sur les différentes surfaces de contact, et perd donc de son énergie.

### 1.3.4.5 Modélisation de la force latérale engendrée par une foule

Après les vibrations survenues le jour de l'inauguration de la passerelle du Millennium, les ingénieurs d'ARUP ont effectué des études concernant la force latérale. Ils en ont déduit que l'amplitude de la force totale engendrée par la foule après synchronisation est proportionnelle à l'amplitude de la vitesse de vibration de la passerelle. Ainsi la force corrélée par personne (*i.e.* quand il y a synchronisation) est

$$\tilde{F}_l(t) = \kappa \dot{u}(\xi_p, t) \quad (1.16)$$

$\kappa$  étant le coefficient de force latérale d'un piéton, supposé 300 N s/m dans la bande de fréquences 0, 5–1, 0 Hz dans le cas de la passerelle du Millenium,  $\xi_p$  étant la position du piéton sur la passerelle. Cependant ce coefficient est peut être différent selon les passerelles et il serait intéressant de pouvoir le déterminer pour d'autres passerelles [3].

Notons  $\psi_m = \{\psi_m^i\}_{i=1, \dots, N}$  le mode propre, où  $\psi_m^i = \psi_m(\xi_i)$  ( $\xi_i$  étant la position du  $i$ -ème piéton). La vitesse locale  $\dot{u}$  est liée à la vitesse modale  $\dot{U}(t)$  par  $\dot{u}(x, t) = \psi_m^i(x) \dot{U}(t)$ . La contribution de la  $i$ -ème personne à la force modale totale est  $\psi_m^i \tilde{F}_l = (\psi_m^i)^2 k \dot{U}$ . La force modale totale est donc :

$$\mathcal{F}_l = k \dot{U} \sum_{i=1}^N (\psi_m^i)^2 \quad (1.17)$$

$N$  étant le nombre de personnes. Or la somme peut être approchée par une intégrale :

$$\sum_{i=1}^N (\psi_m^i)^2 \simeq \int_0^N \psi_m^2 dN = \frac{N}{L} \int_0^L \psi_m^2 dL \quad (1.18)$$

$L$  étant la longueur de la passerelle. En supposant que  $\psi_m$  est sinusoïdal,

$$\frac{N}{L} \int_0^L \psi_m^2 dL = \frac{N}{2}$$

La force latérale totale  $\mathcal{F}_l$  engendrée par une foule de  $N$  personnes peut alors s'exprimer par :

$$\mathcal{F}_l = \frac{N}{2} k \dot{U} \quad (1.19)$$

Les piétons induisent donc un amortissement négatif. En effet, si on revient à l'équation de la dynamique, on a :

$$\begin{aligned} M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) &= \mathcal{F}_l(t) = \frac{N}{2} k \dot{U} \\ M\ddot{U}(t) + \left( C - \frac{N}{2} k \right) \dot{U}(t) + KU(t) &= 0 \end{aligned}$$

De plus, la force (totale) induite avant synchronisation est différente de celle obtenue après la synchronisation ; il convient donc d'étudier les deux cas [3].

### La notion de nombre critique de piétons $N_c$

Des essais réalisés sur le Millennium montrent que même si de plus en plus de personnes marchent sur la passerelle, aucun indice d'instabilité n'apparaît jusqu'à ce qu'un nombre critique  $N_c$  de piétons ne soit atteint [54]. Plusieurs auteurs ont essayé d'identifier ce nombre. Certains d'entre eux se sont basés sur les équations suivantes données par Roberts et par Clough et Penzien [55–57]

$$\begin{aligned} M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) &= \mathcal{F}_l(t) \\ M_p \ddot{y}_p(t) &= -\mathcal{F}_l(t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

où l'indice  $p$  réfère au piéton,  $y_p$  étant le déplacement latéral des piétons. Dallard *et al.* [8, 21, 56] ont supposé que les conditions critiques ont lieu lorsque  $C\dot{U}(t) = \mathcal{F}_l(t)$ .

En admettant les relations théoriques suivantes :

$$\omega_b = 2\pi f_b = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (1.21)$$

$$\xi = \frac{C}{2M\omega_b} \quad (1.22)$$

$\xi$  étant le taux d'amortissement de la passerelle, et en admettant que la force induite par un groupe ou foule de piétons est donnée par l'équation (1.19) [8, 21, 56], le nombre critique de piétons selon Dallard s'écrit :

$$N_c = \frac{8\pi\xi f_b M}{k} \quad (1.23)$$

Un autre calcul du nombre critique a été fait par Newland [56, 58, 59] qui a utilisé la même condition pour le passage à l'état critique, en admettant toutefois que c'est un cas particulier où  $\omega_b = \omega_p$  et la marche des piétons est exactement à  $\pi/2$  par rapport au déplacement de la passerelle. Il a donc supposé que

$$\mathcal{F}_l(t) = G \sin \omega_p t = G \sin \omega_b t \quad (1.24)$$

Ainsi, des solutions particulières au système d'équations (1.20) sont :

$$y_p(t) = \frac{G}{M_p \omega_b^2} \sin \omega_b t \quad (1.25)$$

$$U(t) = \frac{G}{2\xi M \omega_b^2} \sin \left( \omega_b t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.26)$$

De plus, il a considéré que les synchronisations instables ont lieu lorsqu'une proportion  $\beta$  de piétons est synchronisée avec la passerelle, et que l'amplitude  $U$  du déplacement de la structure est proportionnelle à



$y_p$  (on note  $\gamma$  le coefficient de proportionnalité). Ceci se traduit mathématiquement en remplaçant la masse des piétons  $M_p$  par  $\beta M_p$ , et en posant :

$$U = \gamma y_p \quad (1.27)$$

Newland a aussi utilisé la relation donnée par Clough et Penzien (1975) [57], dans le cas où les piétons sont uniformément répartis sur une portée de longueur  $L$  :

$$\frac{M_p}{M} = \frac{\int_0^L \frac{Nm_p}{L} \psi_m^2(x) dx}{\int_0^L m_b \psi_m^2(x) dx} = \frac{Nm_{1p}}{Lm_b} \quad (1.28)$$

$x$  étant la distance le long de la portée,  $m_{1p}$  étant la masse moyenne d'un piéton,  $m_b$  la masse de la passerelle par unité de longueur, et  $\psi_m(x)$  représentant le mode de vibration normalisé (amplitude maximale unitaire). En prenant les valeurs particulières :  $\gamma = 1,5$  et  $\beta = 0,4$ , il a obtenu

$$N_c = \frac{7,5\xi m_b L}{m_{1p}} \quad (L \text{ est la longueur de la portée}) \quad (1.29)$$

Roberts [56,60] a utilisé les équations (1.20), et le fait que  $\mathcal{F}_l(t) = G \sin \omega_p t$ . Des solutions particulières de (1.20) sont

$$y_p(t) = \frac{G}{M_p \omega_p^2} \sin(\omega_p t) \quad u(t) = \frac{GD}{M \omega_b^2} \sin(\omega_p t - \Psi)$$

$$\omega_r = \frac{\omega_p}{\omega_b}, \quad \Psi = \arctan\left(\frac{2\xi\omega_r}{1-\omega_r^2}\right), \quad \text{et } D = \left(\frac{1}{(1-\omega_r^2)^2 + (2\xi\omega_r)^2}\right)^{1/2}.$$

Il a supposé que la synchronisation instable a lieu lorsque le maximum de l'amplitude latérale de la passerelle dépasse le maximum de l'amplitude du mouvement latéral des piétons. Il a obtenu

$$N_c = \frac{1 + \alpha^2}{2} \frac{m_b L}{m_{1p} \omega_r^2 D} \quad (1.30)$$

$\alpha$  étant la proportion de la portée sur laquelle marchent les piétons à la position la plus défavorable (ventre d'un mode).

Les résultats de ces théories ont été comparés avec des mesures expérimentales réalisées sur trois passerelles : la passerelle de Toda Park au Japon (T-bridge), la passerelle de Singapore Changi Airport (C-bridge) et la passerelle du Millenium à Londres. Des différences sont apparues entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux. D'après Roberts [56], ceci s'explique par le fait qu'il y a deux phases de synchronisation. La première phase, stable, peut avoir lieu avec n'importe quel nombre de piétons, et l'amplitude des vibrations ne dépasse pas une valeur limite de 10 – 15mm comme c'est le cas pour le C-bridge et le T-bridge. La phase instable a lieu lorsque l'amplitude des vibrations dépasse la valeur limite (10 – 15mm) ce qui a pour conséquence d'augmenter l'amplitude de la force latérale des piétons parce qu'ils changent leur façon de marcher. C'est ce qui a eu lieu pour le Millenium.

Dans cette optique, Roberts [56] déduit que (1.23) correspond à la phase stable, alors que les deux autres, à la phase instable, (1.30) étant la plus générale car elle n'impose pas de valeurs aux paramètres.

#### La notion de nombre équivalent de piétons $N_{eq}$

L'Association Française de Génie Civil (AFGC) [61] a modélisé une foule réelle constituée de piétons marchant à des fréquences et à des phases différentes, par une foule théorique équivalente. Cette foule équivalente est formée d'un nombre d'individus plus faible, mais qui sont uniformément répartis sur une partie de l'ouvrage, qui marchent sur place, et qui sont tous en phase et à la même fréquence. Les deux foules doivent avoir le même effet sur la structure, *i.e.* les forces latérales engendrées par chacune des foules sont égales ou l'accélération maximale des oscillations de la structure obtenue durant une durée de temps significative est la même pour les deux foules.

D'après l'AFGC [61], l'amplitude de la force d'un piéton ne change pas lorsque la passerelle est en mouvement, mais la fréquence de la marche devient égale à la fréquence propre de la passerelle (synchronisation

piétons-structure), et les fréquences des piétons convergent aussi (synchronisation piétons-piétons). Ainsi, en supposant que la force d'un piéton est donnée par

$$F_l = 35 \sin(2\pi f_l t + \phi) \quad (1.31)$$

La force totale est alors :

$$\mathcal{F}_l = \sum_{i=1}^{N_P} 35 \sin(2\pi f_{li} t + \phi_i^0) \quad (1.32)$$

$f_{li}$  et  $\phi_i^0$  étant la fréquence et la phase de la force latérale de marche du  $i$ -ème piéton.

La connaissance du nombre équivalent de piétons  $N_{eq}$  permet de modéliser la force totale par :

$$\mathcal{F}_l = \sum_{i=1}^{N_P} 35 \sin(2\pi f_{li} t + \phi_i^0) \approx 35 N_{eq} \sin(2\pi f_l t + \phi^0) \quad (1.33)$$

Les valeurs obtenues pour  $N_{eq}$  sont les suivantes :

- $N_{eq} = 10,8\sqrt{N\xi}$  pour une foule peu dense (fréquences et phases aléatoires)
- $N_{eq} = 1,85\sqrt{N}$  pour une foule dense (phases aléatoires seulement)

Le coefficient de corrélation a été défini comme étant  $\frac{N_{eq}}{N}$ . Plus de détails sur les travaux de l'AFGC [25] seront donnés plus loin.

### Une équation différentielle pour la phase totale de la force latérale d'un piéton

Dans [7, 54, 62], les auteurs utilisent la première équation de (1.20). En notant  $\phi_i(t) = 2\pi f_{li} t + \phi_i^0$  la phase totale de la force engendrée par le  $i$ -ème piéton, la force latérale totale engendrée par la foule est donnée par

$$\mathcal{F}_l = \sum_{i=1}^{N_P} G \sin(\phi_i(t)) \quad (1.34)$$

Comme la synchronisation n'est autre qu'une adaptation de la fréquence de la force engendrée par un piéton à la fréquence de la structure, l'idée est d'introduire une équation différentielle gérant l'évolution de la phase  $\phi_i$ . Cette équation devrait permettre de faire converger la pulsation instantanée du  $i$ -ème piéton  $\frac{d\phi_i}{dt}$  vers celle de la structure. L'équation différentielle choisie est appelée équation de Kuramoto [63], elle est développée dans le chapitre 3. Dans le cas particulier de la marche, d'après [7, 54], elle peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \varepsilon_1 A \sin(\psi_s - \phi_i + \alpha) \quad (1.35)$$

- $\omega_i$  est la fréquence naturelle du  $i$ -ème piéton, c'est-à-dire la fréquence qu'il aurait eue dans le cas d'une marche libre. Les  $\omega_i$  sont distribuées aléatoirement avec une densité de distribution  $g(\omega)$  qui reflète la diversité des fréquences naturelles des forces latérales dans une population.
- $\varepsilon_1$  quantifie la sensibilité des piétons aux oscillations de la passerelle ( $\varepsilon = 16$  d'après [54]).
- $A(t)$  est l'amplitude maximale des oscillations.
- $\psi_s(t)$  est la phase totale des oscillations de la passerelle, définie par  $U(t) = A(t) \sin \psi_s(t)$ .
- $\alpha$  est un paramètre de différence de phase ("phase lag") qui indique si la force des piétons se synchronise à la même phase que le déplacement, de la vitesse ou de l'accélération de la passerelle.

Dans le cas où  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $g(\omega)$  est une gaussienne de moyenne  $\omega_b$ , on trouve :

$$N_c = \frac{4\xi}{\pi} \frac{K}{G\varepsilon_1 g(\omega_b)}$$

$\xi = \frac{C}{2\sqrt{MK}}$  est le taux d'amortissement proportionnel. Le seul paramètre inconnu est  $\varepsilon_1$ . En comparant la simulation réalisée et les données obtenues par les essais sur le Millennium,  $\varepsilon$  a été estimé à  $16m^{-1}s^{-1}$ .

Dans les travaux de Eckhardt *et al.* [62], l'équation de Kuramoto utilisée est de la forme suivante :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \varepsilon_2 \ddot{U}(t) \cos(\psi_s(t))$$

Un développement approprié de cette équation conduit à l'équation :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{\varepsilon_2}{2} \omega_b^2 A(t) \sin\left(\psi_s(t) - \phi_i(t) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.36)$$

La valeur de  $\varepsilon_2$  trouvée pour que le modèle corresponde au cas du Millennium est  $\varepsilon_2 = \frac{1}{\tau_0 g_0} \simeq 1,75s/m$ , où  $\tau_0 = 1,9s$  et  $g = 0,3m/s^2$ .

**En résumé :** Les modèles présentés jusqu'ici sont des modèles discrets, dans le sens où on suit le comportement de chaque piéton isolé. Comme on l'a vu, la plupart de ces modèles ont pour but de déterminer un nombre critique de piétons pour lequel des oscillations instables peuvent apparaître. D'autres modèles discrets [64] ont pour but de modéliser le comportement des piétons sans prendre en compte leur force. Ces modèles sont utilisés pour étudier les cas d'évacuation de piétons (alerte, incendie par exemple) ou les cas où les piétons rencontrent des risques dus à la grande affluence (sortie d'un stade de football, pèlerinage à la Mecque, etc. ). Ainsi, la distance entre les piétons est prise en compte ainsi que les différents trajets que peut emprunter un piéton pour atteindre son but sans beaucoup dévier du trajet qu'il aurait pris dans des conditions de marche libre, le but étant de trouver un champ de vitesses des piétons qui soit le plus proche du champ de vitesses souhaitées par ces piétons.

D'autres auteurs ont considéré un modèle continu de foule [15]. Dans cette modélisation, on ne s'intéresse pas au comportement de chaque piéton en tant que tel mais au comportement de la foule à un instant donné et en un point donné. Ainsi la foule peut être assimilée à un fluide compressible et son comportement peut être régi par l'équation de conservation de la masse [15] en  $1D$  qui met en relation la densité locale des piétons  $\eta(x, t)$  et leur vitesse de marche locale  $v(x, t)$  où  $x$  est la coordonnée en espace,  $x \in [0, L]$ ,  $L$  étant la longueur de la passerelle :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta v) = 0 \quad (1.37)$$

Dans ce cas, en notant  $S$  le pourcentage de piétons synchronisés ou la probabilité qu'ils se synchronisent, la force engendrée par les piétons par mètre de longueur est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{F}}_l(x, t) = \eta(x, t) \ell S F_l(t) \quad (1.38)$$

La force totale  $\mathcal{F}(t)$  n'est autre que la projection de  $\tilde{\mathcal{F}}_l(x, t)$ , définie dans l'équation (1.38), sur les modes propres de la passerelle qu'on souhaite étudier. Un modèle de foule basé sur cette approche a été utilisé par Venuti *et al.* [15] et sera présenté dans la section suivante.

Des modèles en  $2D$  basés sur l'idée de considérer la foule comme un fluide compressible ont été également réalisés. Cependant leur but n'est pas de déterminer la force générée par les piétons mais de déterminer le comportement de la foule dans des situations de "traffic" particulières [65, 66].

## 1.4 Un travail préliminaire sur la modélisation

Dans cette partie, on présente un travail préliminaire de la modélisation de la foule. On commence par rappeler le travail effectué par l'AFGC [25] puis le modèle continu proposé dans [15]. La combinaison de ces deux modèles a abouti à la publication d'un article [67].

## 1.4.1 Etude réalisée par l'Association Française de Génie Civil (AFGC)

### 1.4.1.1 Introduction

Le but du travail de l'AFGC [25] est de proposer une méthode simple qui permet d'évaluer le risque d'entrée en vibration des passerelles en réponse à l'excitation piétonne.

Le travail a été divisé en quatre parties :

- Comportement dynamique latéral du piéton seul : présentation des essais en laboratoire
- Comportement statistique d'une foule de piétons composée de "piétons aléatoires"
- Comportement dynamique d'une foule : observations expérimentales
- Conclusions et recommandations pour un code de calcul français sur les passerelles piétonnes.

### 1.4.1.2 Comportement du piéton seul/essais sur plateforme réalisée en laboratoire

Une plateforme a été réalisée en laboratoire afin de réaliser des essais.

#### Description de la plateforme :

C'est un modèle réduit de passerelle ayant des propriétés dynamiques simples avec un seul mode horizontal. Elle est formée d'une dalle en béton précontraint de  $7m$  de long et  $2m$  de large, supportée par quatre lames de flexions métalliques qui se déplacent latéralement et qui sont fixées à deux portiques rigides. La dalle est une structure composée de quatre poutres précontraintes et d'un hourdis précontraint transversalement. Elle est rigide, massive, et sa souplesse est assurée par les quatre lames de flexion. La continuité de la marche est assurée par des rampes d'accès et de sortie. Un circuit a été balisé et l'amortissement (faible) est produit par les lames métalliques. Des réservoirs à eau ont été installés pour simuler un amortissement ajouté, l'amortissement final obtenu étant calibré pour les essais en jouant sur le volume d'eau de sorte à être proche d'un amortissement réel de passerelles.

#### Les essais :

Plusieurs configurations de masse de structure, de fréquence et d'amortissement ont été réalisées. Les déplacements de l'ouvrage ont été mesurés grâce à des capteurs de déplacement, et les hautes fréquences ( $> 4Hz$ ) du signal obtenu ont été filtrés par l'AFGC. Les dérivées première et seconde du signal donnent la vitesse et l'accélération. La force instantanée a été calculée grâce à :

$$\mathcal{F}_l(t) = M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) \quad (1.39)$$

où  $U(t)$  est le déplacement filtré de l'ouvrage.

#### Les résultats :

Les essais réalisés sur un piéton montrent que la force latérale  $F_l(t)$  engendrée par un piéton n'est pas purement sinusoïdale, et que son amplitude est bornée quelles que soient les conditions, et ne dépasse que très rarement  $50N$  en valeur de pic. Le premier harmonique de la série de Fourier donne une valeur de l'ordre de  $30 - 35N$  en moyenne. Indépendamment du niveau de vibrations observé, de la personne, de la fréquence, de la masse ou de l'amortissement,  $F_l(t)$  peut donc être modélisée par

$$F_l(t) = 35 \cos(\omega_p t + \phi) [N] \quad (1.40)$$

où on rappelle que  $\omega_p$  est la fréquence latérale des piétons et  $\phi$  leur phase.

### 1.4.1.3 Comportement aléatoire d'une foule de piétons. Essais statistiques

Le but de ce travail est de modéliser une foule réelle constituée de  $N_p$  piétons marchant à des fréquences et à des phases différentes, par une foule théorique équivalente formée de  $N_{eq}$  piétons équivalents, bien répartis sur la passerelle, marchant en phase, à la même fréquence et sur place, qui produiraient le même effet sur la passerelle.

Dans la suite, les auteurs supposent qu'une foule peu dense est formée de piétons ayant des phases et des fréquences aléatoires alors qu'une foule dense est formée de piétons ayant des phases aléatoires mais une même fréquence. Cependant ils ne donnent pas un critère quantitatif pour distinguer ces deux régimes.

#### Modèle 1 : piétons tous à la même fréquence, marchant sur place, sans interaction avec un mode propre.

Dans ce modèle, la forme modale de la structure n'est pas prise en compte. Le but de cette partie est de déterminer le nombre  $N_{eq}$  de piétons ayant la même phase  $\phi_{eq}$  et la même fréquence  $\omega$  qui seraient équivalents à  $N$  piétons marchant à la même fréquence mais avec des phases aléatoires :

$$\sum_{k=1}^N \cos(\omega t + \phi_k) = N_{eq} \cos(\omega t + \phi_{eq})$$

Après développement et identification :

$$N_{eq} = \sqrt{N}, \text{ et } \phi_{eq} = \arctan \left( \frac{\sum_{k=1}^N \sin(\phi_k)}{\sum_{k=1}^N \cos(\phi_k)} \right)$$

#### Modèle 2 : foule de piétons avec fréquences et phases aléatoires, et recherche de l'effet maximal. Non prise en compte de la déformée modale.

Dans un premier temps, l'AFGC considère une foule formée de  $N$  piétons avec des phases aléatoires  $\phi_i$  et des fréquences aléatoires  $\omega_i$  suivant une distribution normale de moyenne la fréquence propre de la passerelle ( $1Hz$ ) et d'écart type  $0,175Hz$ . L'amplitude de la force exercée par les piétons est supposée la même et vaut  $G$ .

Ainsi, la force totale engendrée par les  $N$  piétons est donnée par

$$\mathcal{F}_l(t) = \sum_{i=1}^N G \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

La résolution analytique de l'équation :

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = \sum_{i=1}^N G \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

permet de déterminer l'accélération de la structure en fonction du temps, mais pas son maximum  $A_{max}$  au cours de la durée de temps considérée  $\Delta t = t_2 - t_1$  (100 périodes *i.e.* 50s pour 2Hz).  $A_{max}$  est estimée par :

$$A_{max} = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \frac{G\omega_i^2}{m_{1p}\omega^2 \sqrt{(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}) + 4\xi^2 \frac{\omega_i^2}{\omega^2}}} \cos(\omega_i t + \phi_i + \Phi) \right) + \text{réponse transitoire} \right]$$

$$\text{Avec } \tan \Phi = -\frac{2\xi \frac{\omega_i}{\omega}}{1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}}$$

La valeur de la réponse transitoire n'est pas prise en compte car elle s'amortit rapidement.

Le nombre équivalent de piétons  $N_{eq}$ , en phase et à la même fréquence, qui produiraient la même accélération maximale vérifie l'égalité :

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{G\omega_i^2}{m_{1p}\omega^2 \sqrt{(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}) + 4\xi^2 \frac{\omega_i^2}{\omega^2}}} \cos(\omega_i t + \phi_i + \Phi) \right) = N_{eq} \frac{G}{m_{1p}} \frac{1}{2\xi} \cos(\omega t + \phi_{eq} + \Phi)$$

Les  $N_{eq}$  piétons produisent une accélération maximale  $N_{eq} \frac{G}{m_{1p}} \frac{1}{2\xi}$ . Donc

$$N_{eq} = \frac{m_{1p}}{G} 2\xi A_{max}$$

Cet essai a été repris 1000 fois avec un nombre de piétons fixé et amortissement fixé. A chaque fois, on fait une extraction de la valeur caractéristique à 95% de  $N_{eq}$ .

Globalement, la valeur à caractéristique à 95% est  $N_{eq} = 8,6\sqrt{N\xi}$  alors que la moyenne est de  $N_{eq} = 6,1\sqrt{N\xi}$ .

Dans le cas où les piétons ont une même fréquence mais des phases aléatoires, la valeur caractéristique à 95% est  $N_{eq} = 1,75\sqrt{N}$ , et la moyenne est légèrement inférieure à  $N_{eq} = \sqrt{N}$ .

### Modèle 3 : Prise en compte de la déformée modale et du déplacement des piétons

#### Principe des essais numériques

Notons  $\ell * [1m]$  la largeur de la passerelle.  $\ell$  piétons entrent sur la passerelle avec des phases et des fréquences aléatoires, et une vitesse de  $1,5m/s$ . Entre temps, à l'autre extrémité  $\ell$  piétons sortent de la passerelle. Tous les  $1m$ , on envoie  $\ell$  piétons et on en retire  $\ell$ . L'accélération maximale de l'essai  $A_{max}^{essai}$  est déterminée sur une période  $T \simeq 100 T_m$  ( $T_m$  étant la durée d'un pas).

On cherche le nombre  $N_{eq}$  de piétons

- marchant sur place
- répartis sur toute la passerelle
- tous à la fréquence propre de la passerelle
- en phase sur le même ventre et en opposition de phase sur des ventres de signes différents.

qui produiraient la même accélération maximale  $A_{max}(N_{eq})$ . Il faut que  $A_{max}^{essai} = A_{max}(N_{eq})$ .  $N_{eq}$  est supposé être de la forme :

$$N_{eq} = k(\text{Longueur})^\alpha (\text{Largeur})^\beta \xi^\gamma (\text{numero mode})^{-\delta}$$

En minimisant  $\sum_{essai\ k} [N_{eq}(essai, k) - N_{eq}(k, \alpha, \beta, \gamma, \delta)]^2$ , on obtient

$$N_{eq} = \frac{13,41(\text{Longueur})^{0,59} (\text{densite} \times \text{Largeur})^{0,42} \xi^{0,59}}{(\text{nombre d'onde})^{0,05}}$$

Cette expression étant difficile à appliquer, on pose

$$k = \frac{13,41}{(\text{nombre d'onde})^{0,05}}$$

et on fait les approximations suivantes

$$(\text{Longueur})^{0,59} \simeq (\text{Longueur})^{0,5}, (\text{densite} \times \text{Largeur})^{0,42} \simeq (\text{densite} \times \text{Largeur})^{0,5} \text{ et } \xi^{0,59} \simeq \xi^{0,5}$$

On obtient alors l'expression :

$$N_{eq} \simeq k(\text{Longueur})^{0,5}(\text{densité} \times \text{Largeur})^{0,5}\xi^{0,5}$$

L'optimisation donne  $k = 10,8$ .

Si les piétons ont la même fréquence,  $\xi$  n'intervient plus, et on aura  $k = 1,85$ .

Ainsi, on modélise une foule peu dense par  $N_{eq,95} = 10,8\sqrt{N\xi}$ , et une foule dense par  $N_{eq,95} = 1,85\sqrt{N}$ .

#### 1.4.1.4 Comportement dynamique d'une foule. Expérience acquise suite aux essais sur la passerelle Solférino et en laboratoire

##### Traitement des résultats

- Le seuil de changement de régime par rapport au régime aléatoire est de l'ordre de  $0,10 - 0,15m/s^2$
- Après dépassement de ce seuil, les accélérations montent de façon importante, mais restent bornées  
On aboutit à un taux de corrélation  $\left(\frac{N_{eq}}{N}\right)$  de 30 à 40%. Cette valeur peut monter à 60% pour une foule compacte

##### Essais réalisés en laboratoire

Force efficace :

$$f_{efficace}(t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(t) \frac{V(t)}{|V(t)|} dt$$

Essais avec 6 et 10 piétons.

- A partir de  $0,15 - 0,20m/s^2$ , la force exercée par les piétons est nettement plus efficace, et un début de synchronisation apparaît.
- La synchronisation est partielle (maximum de  $140 - 160N$  soit 40 – 45% de l'effet de 10 piétons), mais suffisante pour obtenir des oscillations très inconfortables ( $> 0.6m/s^2$ )

#### 1.4.1.5 Conclusion

- L'amplitude de l'action d'un seul piéton ne semble pas augmenter avec la vitesse des oscillations (même pour des accélérations  $> 0,5m/s^2$ ). Le premier harmonique de cette force est de l'ordre de  $35N$  en moyenne
- L'effet d'une foule aléatoire de piétons peut être assimilé à celui de  $N_{eq}$  piétons marchant sur place à la même fréquence et en phase entre eux (la différence de phase par rapport à la structure étant constante) :
  - $N_{eq} = 10,8\sqrt{N\xi}$  pour une foule peu dense (fréquences et phases aléatoires)
  - $N_{eq} = 1,85\sqrt{N}$  pour une foule dense (phases aléatoires seulement)
- L'effet de la foule augmente avec le niveau des oscillations. On peut considérer que la foule de piétons est aléatoire pour des accélérations inférieures à un seuil compris entre  $0,10$  et  $0,15m/s^2$ , et que les piétons sont partiellement synchronisés au-delà. Le changement de régime est relativement brutal, mais le seuil est variable d'un essai à l'autre. Donc il est préconisé de prendre une valeur sécuritaire de  $0,10m/s^2$ .
- Au-delà du seuil de  $0,10m/s^2$ , les piétons sont partiellement synchronisés. Le taux de corrélation est de l'ordre de 40% en régime continu et 60% pour une foule plus dense. Il faut donc éviter le déclenchement de la synchronisation.

## 1.4.2 Un modèle de foule continu

### 1.4.2.1 Description de la foule

Dans ce modèle, les auteurs ont adopté une approche bien connue dans la modélisation du trafic de véhicules [68]. C'est un modèle macroscopique dans le sens où on ne suit pas le comportement de chaque piéton dans la foule mais on regarde le comportement de la foule en un point donné. Ainsi les variables utilisées sont des variables locales qui dépendent du temps  $t$  et de l'espace  $x$  ( $x \in [0; L]$  étant la position longitudinale sur la passerelle). Ainsi le comportement de la foule est assimilé à celui d'un liquide compressible gouverné par l'équation de la conservation de la masse, où  $\eta$  représente la densité locale des piétons et  $v$  leur vitesse locale :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\eta.v) = 0 \quad (1.41)$$

Ayant deux variables, une deuxième équation est nécessaire afin de compléter le système. Elle est généralement connue sous le nom d'équation de fermeture ("closure equation"). Dans cette équation une deuxième relation entre  $v$  et  $\eta$  est développée. Selon les auteurs [15], elle doit prendre en compte la réduction de la vitesse locale de marche par rapport à la vitesse moyenne de marche libre  $v_m$ , selon la densité des piétons mais aussi selon les oscillations de la structure. Ainsi, l'équation de fermeture est donnée par :

$$v(x, t) = v_m \tilde{g}(\eta) h(\dot{u}) \quad (1.42)$$

La première fonction réductrice  $\tilde{g}$  tient compte de l'influence de la densité des piétons sur leur vitesse de marche. Dans [15], elle est donnée par :

$$\tilde{g}(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta \leq \eta_c \\ 1 - \frac{1 - \exp[-\beta.(\eta - \eta_c)/(\eta_M - \eta_c)]}{1 - \exp(-\beta)} & \text{si } \eta_c < \eta \leq \eta_M \\ 0 & \text{si } \eta > \eta_M \end{cases} \quad (1.43)$$

On rappelle que  $\eta_M = 1,8p/m^2$  est la densité maximale admissible par les piétons (à partir de cette densité ils n'arrivent plus à avancer) et  $\eta_c = 0,3p/m^2$  est la densité critique à partir de laquelle les piétons commencent à interagir entre eux.  $\tilde{g}(\eta)$  est une fonction décroissante qui dépend d'un paramètre  $\beta \in [0; 10]$  supposé refléter les conditions initiales de marche sur la passerelle. Des valeurs plus élevées de  $\beta$  indiquent des conditions plus difficiles. Dans la figure 1.12, on trace l'évolution de la vitesse des piétons en fonction de leur densité pour différentes valeurs de  $\beta$ . Il est évident que la décroissance de  $v$  est plus rapide pour des valeurs plus élevées de  $\beta$ . Il est important de noter que cette équation de fermeture a été déterminée qualitativement par manque de données expérimentales. La deuxième fonction  $h$  prend en compte l'influence des oscillations de la structure sur le mouvement des piétons. De même que  $\tilde{g}$ , cette fonction est qualitative, elle est donnée par

$$h(\dot{u}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \max_{t-\tau \leq s \leq t} |\dot{u}(s)| \geq \dot{u}_{max} \\ 1 - \frac{|\dot{u}|}{\dot{u}_{max}} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.44)$$

où  $\dot{u}_{max} = 0,25m/s$  est la vitesse maximale des oscillations admissible par les piétons (valeur expérimentale ( $|\dot{u}| \in [0; \dot{u}_{max}]$ ), et  $\tau = 5s$  la durée de temps que le piéton "garde en mémoire". Si pendant cette durée, la vitesse des oscillations dépasse  $\dot{u}_{max}$ , le piéton n'avance pas.

La figure 1.13 montre l'évolution de la vitesse locale des piétons en fonction de leur densité et de l'amplitude de la vitesse d'oscillations de la structure.

### 1.4.2.2 Modélisation de la force latérale engendrée par la foule

Dans ce modèle [15], on ne prend en compte que les piétons qui sont synchronisés avec la passerelle *i.e.* les piétons dont la fréquence de la force latérale est la même que la fréquence instantanée des oscillations



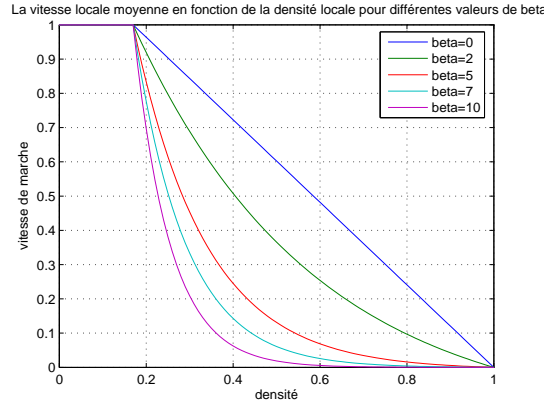


FIGURE 1.12. La vitesse moyenne locale en fonction de la densité locale pour différentes valeurs de  $\beta$

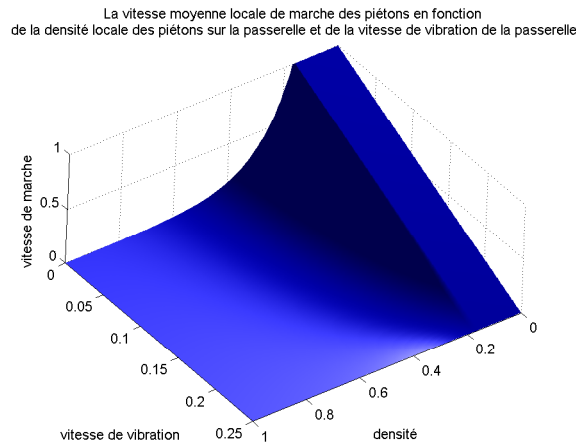


FIGURE 1.13. La vitesse moyenne locale en fonction de la densité locale et de la vitesse de vibration de la passerelle pour  $\beta = 7$

latérales de la passerelle. Ainsi la force latérale locale engendrée par les piétons est donnée par :

$$\tilde{F}_l(x, t) = F_{lp}(t)N_S(x, t) \quad (1.45)$$

$N_S$  étant le nombre de piétons synchronisés localement. Afin de déterminer  $N_S$ , il convient de définir la probabilité de synchronisation  $S(x, t)$ . Selon les auteurs, elle est donnée sous la forme d'une somme de deux fonctions :

$$S(x, t) = Spp(\eta(x, t)) + Sps(\dot{u}(x, t)) \quad (1.46)$$

$Spp$  (figure 1.14-a) est une fonction qui reflète la synchronisation des piétons due à leur densité. À cause du manque de données expérimentales,  $Spp$  a été évaluée qualitativement : pour de faibles densités, les piétons ne se synchronisent pas entre eux, mais à partir de la densité critique  $\eta_c$ , leur synchronisation augmente rapidement, puis cette augmentation devient plus lente au fur et à mesure que la densité s'approche de la densité maximale  $\eta_M$ .

$Sps$  (figure 1.14-b) est une fonction qui reflète la synchronisation des piétons avec la structure. Elle dépend de la vitesse des oscillations latérales de la structure. La première partie de la courbe (en noir sur le graphe de la figure 1.14-b) est une approximation quadratique des données concernant le Millennium. La deuxième partie (en bleu pointillé sur le graphe) est qualitative. Elle reflète le fait qu'à partir d'une certaine vitesse d'oscillations ( $0,15m/s$ ), les piétons commencent à perdre leur synchronisation.  $Sps$  est nulle pour des vitesses d'oscillations supérieures à  $\dot{u}_{max} = 0,25m/s$ .

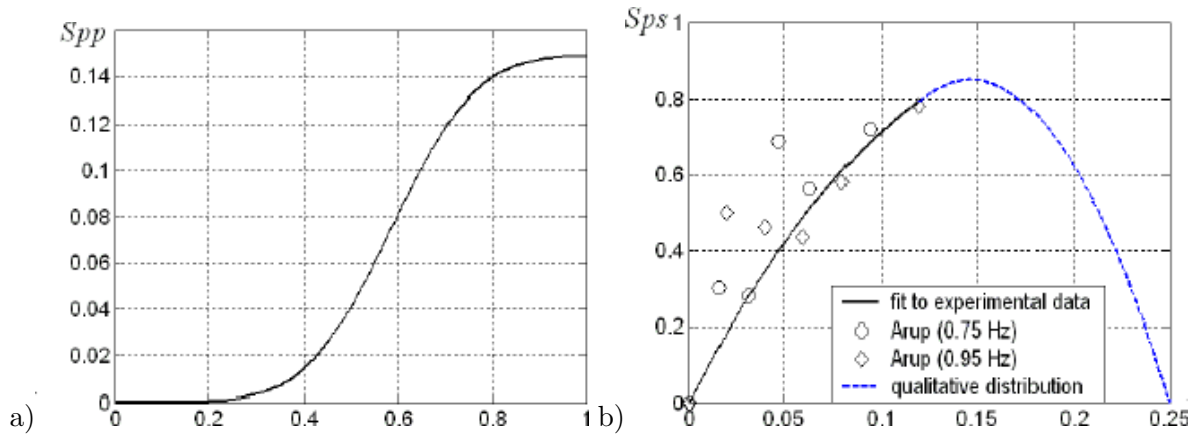


FIGURE 1.14. (a)  $S_{pp}\left(\frac{\eta}{\eta_{max}}\right)$ , (b)  $S_{ps}(\dot{u})$

### 1.4.2.3 Les faiblesses de ce modèle

Ce modèle présente plusieurs points faibles qu'il convient de citer :

- seuls les piétons synchronisés avec la structure sont pris en compte
- la fonction  $S_{pp}$  et l'équation de fermeture sont qualitatives.

### 1.4.3 Un modèle préliminaire...

Dans [67] on présente un premier modèle de foule continu où on essaie d'éliminer les faiblesses du modèle présenté dans 1.4.2 en le couplant avec le modèle proposé par l'AFGC et présenté dans 1.4.1.

Cependant, dans ce modèle, on conserve l'utilisation du taux de piétons synchronisés. On ne voit donc pas vraiment comment s'est déclenchée cette synchronisation. La période transitoire entre l'état non synchronisé et l'état synchronisé est négligée. De plus, le caractère aléatoire des fréquences de marche libre des piétons n'est pas pris en compte. Dans la suite de la thèse on développe et on analyse un nouveau modèle continu de foule-structure qui palie à ces faiblesses.

## 1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les différentes études et les différents travaux trouvés dans la littérature, concernant la marche d'un piéton et la modélisation de la force latérale d'un piéton et d'une foule. A la fin de ce chapitre on a présenté en détails deux modèles trouvés dans la littérature. Ces deux modèles ont été combinés dans [67] pour former un nouveau modèle de foule-structure qui a constitué une première étape dans l'élaboration de cette thèse. Un modèle continu plus complet est présenté dans la suite de la thèse.



## Chapitre 2

# Analyses expérimentales

---

*CE CHAPITRE a pour objectif de présenter des résultats expérimentaux et leurs analyses concernant les mesures suivantes :*

- ★ Forces engendrées par un piéton sur un plancher rigide (Tests Décathlon)*
  - ★ Analyse modale de la passerelle Simone de Beauvoir (Tests CSTB)*
  - ★ Analyse modale d'une passerelle réalisée en laboratoire (Tests AFGC)*
-

---

 PLAN DU CHAPITRE 2
 

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>2.2</b>	<b>Outils théoriques</b>	<b>61</b>
2.2.1	La série de Fourier	61
2.2.2	La transformation de Fourier (TF)	62
2.2.3	La transformation en ondelettes (TO)	62
<b>2.3</b>	<b>Analyse de la force de marche d'un piéton sur un plancher rigide</b>	<b>67</b>
2.3.1	Introduction	67
2.3.2	Description de l'expérience	67
2.3.3	Traitement des données	67
2.3.4	Résultats de l'analyse	69
2.3.5	Conclusion	79
<b>2.4</b>	<b>Analyse des données de la passerelle Simone de Beauvoir</b>	<b>81</b>
2.4.1	Introduction	81
2.4.2	Description des essais	81
2.4.3	Explication du processus d'analyse	82
2.4.4	Résultats des analyses pour les données obtenues sur la passerelle non amortie	84
<b>2.5</b>	<b>Analyse des données de la passerelle en laboratoire de l'Association Française de Génie Civil (AFGC)</b>	<b>86</b>
2.5.1	Introduction	86
2.5.2	Description des essais	86
<b>2.6</b>	<b>Détermination des fréquences propres et de l'amortissement structural du dispositif</b>	<b>87</b>
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>88</b>

---

## 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente des études analytiques réalisées sur différentes données expérimentales qui nous ont été fournies durant cette thèse. Les premières données analysées, fournies par Décathlon, concernent la force engendrée par un piéton sur un plancher rigide suivant différentes vitesses de marche. Des données concernant la passerelle Simone de Beauvoir, récemment inaugurée à Paris ont pu être obtenues après un accord verbal avec la société EIFFEL et la Mairie de Paris, une convention signée avec RFR et une collaboration de recherche avec le CSTB de Nantes. L'Association Française de Génie Civil (AFGC) nous a également fourni des données concernant une passerelle construite en laboratoire. L'analyse de ces données a permis l'identification des paramètres modaux de la passerelle. L'analyse des données correspondantes à la passerelle de laboratoire de l'AFGC et à la passerelle Simone de Beauvoir a fait l'objet d'un rapport de stage de Master de Recherche de P.Pecol [69] <sup>1</sup>.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation des outils théoriques utilisés pour les différentes analyses, notamment la série de Fourier, la transformation de Fourier (TF) et la transformation en Ondelettes (TO). L'analyse des données expérimentales concernant la marche d'un piéton sur un plancher rigide forme la seconde partie de ce chapitre. La troisième partie porte sur l'analyse des données concernant la passerelle Simone de Beauvoir. Les données sur la passerelle de laboratoire de l'AFGC sont analysées dans la quatrième partie, et enfin une conclusion permet de récapituler les principales informations obtenues grâce à ces différentes analyses.

## 2.2 Outils théoriques

Dans cette section, on présente de manière condensée les outils théoriques utilisés pour les différentes analyses réalisées. Dans la première partie, on définit la série de Fourier, dans la deuxième, on présente la transformée de Fourier et enfin dans la troisième, on explique la transformée en Ondelettes.

### 2.2.1 La série de Fourier

Dans ce paragraphe, on introduit la série de Fourier.

Soit  $u(t)$  un signal périodique ayant une période  $T$  et une fréquence  $f = \frac{1}{T}$ .  $u(t)$  peut se développer sous la forme suivante :

$$u(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i \cos(ift) + b_i \sin(ift)) \quad (2.1)$$

$$\text{avec } a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) dt$$

$$a_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \cos\left(\frac{2\pi it}{T}\right) dt, \quad \forall i > 0$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) \sin\left(\frac{2\pi it}{T}\right) dt, \quad \forall i > 0$$

(2.1) s'écrit également

$$u(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \cos(ift + \varphi_i) \quad (2.2)$$

avec

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \text{ et } \varphi_i = \arctan\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$$

---

<sup>1</sup>Le stage de M.Philippe Pecol a été co-encadré par P.Argoul, S.Erlicher et moi-même. Ce stage a eu lieu à l'UR Navier, au sein de l'équipe "Dynamique des structures et Identification".

### 2.2.2 La transformation de Fourier (TF)

Dans ce paragraphe, on fait une présentation succincte de la transformée de Fourier. Les lecteurs désirant obtenir plus de détails pourront se référer à l'un des nombreux ouvrages traitant ce sujet, comme par exemple [70].

Soit  $u(t)$  un signal intégrable,  $t$  étant la variable de temps. La transformée de Fourier permet une représentation de ce même signal dans le domaine fréquentiel. Elle est donnée par :

$$\hat{u}(\omega) = [TF(u)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{i\omega t} dt \quad (2.3)$$

où  $\omega$  est la fréquence angulaire ou pulsation. Inversement, si on connaît la transformée de Fourier  $\hat{u}(\omega)$  d'un signal  $u(t)$ , et si  $\hat{u}(\omega) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ , on peut remonter au signal  $u(t)$  grâce à la transformée de Fourier inverse donnée par :

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (2.4)$$

Le théorème de Parseval-Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\bar{v}(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega)\bar{\hat{v}}(\omega)d\omega \quad (2.5)$$

lie le produit scalaire de deux signaux temporels  $u(t)$  et  $v(t)$  au produit scalaire de leur transformées de Fourier  $\hat{u}(\omega)$  et  $\hat{v}(\omega)$ , où  $\bar{v}(\omega)$  et  $\bar{\hat{v}}(\omega)$  sont les fonctions conjuguées de  $v(\omega)$  et de  $\hat{v}(\omega)$  respectivement. Il permet de déduire une relation entre les normes  $L^2$  d'un signal temporel  $u(t)$  et de sa transformée de Fourier  $\hat{u}(\omega)$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.6)$$

Cette relation entre les normes  $L^2$  de chacune de ces représentations montre l'équivalence du signal temporel  $u(t)$  et du signal fréquentiel  $\hat{u}(\omega)$ . Cependant, la transformée de Fourier est définie par une intégration du signal sur tout l'intervalle de temps. Par cette transformation, le signal perd donc son information temporelle. La transformation en ondelettes permet une représentation temps-fréquence qui remédie à cette "faiblesse" de la TF.

### 2.2.3 La transformation en ondelettes (TO)

#### Introduction

Dans ce paragraphe, on présente la transformation en ondelettes (TO). Plus de détails peuvent être trouvés dans [71–73]. On commence par définir les ondelettes et la transformation en ondelettes puis on précise les choix utilisés pour calculer cette transformation.

#### Définition

Les ondelettes sont des fonctions oscillantes bien localisées en temps et en fréquence. La transformation en ondelettes nous permet d'obtenir une description en temps et en fréquence d'un signal donné comme le ferait un "microscope mathématique réglable" : des informations grossières peuvent être ainsi obtenues mais aussi des informations plus détaillées selon les paramètres choisis.

Soit  $\psi(t)$  une fonction analysante. On construit une famille d'atomes temps-fréquence en traduisant  $\psi$  au temps  $b$  et en la comprimant ou la dilatant à l'échelle  $a$ . Cette famille est formée des fonctions  $\psi_{b,a}$  définies par :

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.7)$$

La transformée en ondelettes d'un signal  $u(t)$  continu par morceaux sur son espace de définition et d'énergie finie est définie par [71] :

$$T_\psi[u](b, a) = \langle u, \psi_{b,a}(t) \rangle = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (2.8)$$

$\bar{\psi}$  est le conjugué de  $\psi$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Cette définition de la transformation en ondelettes est basée sur le choix de  $\psi$  qui sera appelée ondelette mère. Le théorème de Parseval-Plancherel (2.5) permet d'écrire une deuxième forme pour la transformée en ondelettes de  $u(t)$  :

$$T_\psi[u](b, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\omega) \bar{\hat{\psi}}(a\omega) e^{i\omega b} d\omega \quad (2.9)$$

Inversement, à partir de la transformée en ondelettes  $T_\psi[u](b, a)$  d'un signal  $u(t)$ , on peut reconstruire ce signal si

$$C_\psi = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(a\omega) da| \quad (2.10)$$

vérifie la condition d'admissibilité :

$$0 < C_\psi < +\infty \quad (2.11)$$

Dans ce cas,

$$u(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} T_\psi[u](b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) da db \quad (2.12)$$

La transformée en ondelettes dépend fortement du choix de l'ondelette mère  $\psi$ . Dans le paragraphe suivant, on explicite le choix retenu pour notre analyse.

### Choix de l'ondelette mère

Soit  $\psi$  une ondelette mère,  $\omega_\psi$  la moyenne (espérance) de la transformée de Fourier de  $\psi_{b,a}$  normalisée et  $\Delta\omega_\psi$  l'écart type. On définit le facteur de qualité  $Q$  comme étant le rapport entre la fréquence moyenne et la résolution en fréquence [72] :

$$Q = \frac{\frac{\omega_\psi}{a}}{\frac{2\Delta\omega_\psi}{a}} = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} \quad (2.13)$$

Le facteur de qualité ne dépend pas du choix de  $a$ . Pour un signal ayant  $N$  fréquences, un  $Q_j$  est choisi pour analyser chaque fréquence angulaire  $\omega_j$  du signal ( $j \in [1; N]$ ) et doit vérifier pour tout  $j \in [1; N]$  [72] :

$$c_f \frac{\omega_j}{2d\omega_j} \leq Q_j \leq \frac{L\omega_j}{2c_t} \quad (2.14)$$

$d\omega_j$  est la bande de fréquences à étudier autour de  $\omega_j$ ,  $L$  est la longueur du signal,  $c_f$  et  $c_t$  sont des coefficients en relation avec le choix de l'ondelette mère.

Trois types d'ondelettes mère complexes ( $\in \mathbb{C}$ ) sont utilisées : l'ondelette de Morlet, l'ondelette de Cauchy et l'ondelette harmonique. D'après [72], on utilise l'ondelette de Cauchy. Connaissant le facteur de qualité  $Q$ , les paramètres de l'ondelette de Cauchy sont définis d'après les relations présentées dans le Tableau 2.1. Dans ce tableau,  $n$  est un paramètre libre (fixé si on fixe  $Q$ ),  $\mathcal{H}$  est la fonction d'Heaviside,  $t_\psi$  est la moyenne (espérance) de l'ondelette mère normalisée,  $\Delta t_\psi$  son écart type, et  $\mu_\psi$  est le coefficient d'incertitude de Heisenberg. D'après le principe d'indétermination de Heisenberg [71],  $\mu_\psi \geq \frac{1}{2}$ .



$\psi(t) = \left(\frac{i}{t+i}\right)^{n+1}$	$\Delta\omega_\psi = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}$
$\hat{\psi}(\omega) = \frac{2\pi\omega^n e^{-\omega}}{n!} \mathcal{H}(\omega)$	$\Delta t_\psi = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$
$C_\psi = \frac{4\pi^2 (2n-1)!}{2^{2n} (n!)^2}$	$\mu_\psi = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{2n-1}}$
$t_\psi = 0$	$\omega_\psi = n + \frac{1}{2}$
$Q = \frac{\omega_\psi}{2\Delta\omega_\psi} = \frac{n + \frac{1}{2}}{\sqrt{2n+1}}$	$c_f = c_t = 5$

TABLEAU 2.1. Paramètres de l'ondelette de Cauchy

### Effets de bord

Soit  $u(t)$  un signal temporel à variables dans  $\mathbb{R}^+$  et  $[T_1, T_2] \subset \mathbb{R}^+$ . On note  $\tilde{u}(t)$  le signal défini par :

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{si } t \in [T_1, T_2] \\ 0 & \text{si } t \notin [T_1, T_2] \end{cases} \quad (2.15)$$

La transformée en ondelettes de  $u(t)$  et celle de  $\tilde{u}(t)$  sont différentes au niveau de  $T_1$  et de  $T_2$ . C'est ce qu'on appelle effet de bord et peut être expliqué par le fait que la transformée en ondelettes est un produit de convolution :

$$T_\psi[u](b, a) = u * \bar{\psi} \left( \frac{t-b}{a} \right) \quad (2.16)$$

Cependant on peut montrer qu'il existe un domaine où l'effet de bord est négligeable [74, 75]. Il est délimité par :

- deux hyperboles définies par :

$$\omega = \frac{2c_t Q \mu_\psi}{b} \quad (2.17)$$

$$\omega = \frac{2c_t Q \mu_\psi}{L-b}$$

$\mu_\psi$  étant le coefficient de Heisenberg défini dans le Tableau 2.1 et  $L$  la longueur de temps du signal enregistré.

- deux lignes horizontales :

$$\omega = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi f_{Nyquist}}{1 + \frac{c_f}{2Q}} \quad (2.18)$$

$$\text{où } f_{Nyquist} = \frac{1}{2L}.$$

### Identification des paramètres d'une structure

Les caractéristiques modales d'une structure linéaire sont : le taux d'amortissement, la fréquence propre et la déformée modale pour un mode donné. L'analyse par ondelettes facilite la détermination de ces différents paramètres. Dans la suite de ce paragraphe, on précise la méthode utilisée pour cette identification.

**a-Définition des arêtes** Une arête est l'ensemble  $A_1$  des points  $(b, a_r(b))$  du plan temps-fréquence tel que le module de la transformée en ondelettes est maximal [72] :

$$A_1 = \left\{ (b, a_r(b)) ; \forall b \geq 0, \|T_\psi\| (b, a_r(b)) = \max_a |T_\psi[u](b, a)| \right\} \quad (2.19)$$

La restriction de la transformée en ondelettes à l'arête est appelée "squelette" et contient l'information principale parce qu'elle est proche du signal étudié.

Dans la figure 2.1, on a tracé la transformée en ondelettes d'un signal "chirp" (modulé en amplitude et en fréquence). L'arête est tracée en vert, et les deux hyperboles de l'effet de bord en rouge. Les deux lignes horizontales n'apparaissent pas parce qu'elles sont à l'extérieur de l'intervalle de variation de l'ordonnée [Hz] qu'on a tracé.

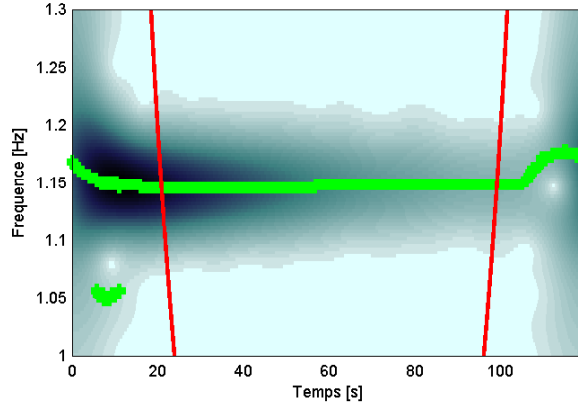


FIGURE 2.1. La transformée en ondelette d'un signal temporel

**b-Extraction des arêtes** Les signaux étudiés ont une durée de temps limitée. L'extraction des arêtes se fait par l'algorithme "Crazy Climber" développé au sein de l'équipe Dynamique et Identification de l'UR Navier. Il est basé sur le principe de "recuit simulé" [73].

### c-Formulation des critères d'identification [75]

Si on suppose que le système a un amortissement non proportionnel linéaire, le déplacement  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_k(t), \dots, u_N(t)]^T$  peut s'écrire comme une somme de  $N$  déplacements modaux :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N u_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (G_j \phi_{kj} e^{s_j t} + \bar{G}_j \bar{\phi}_{kj} e^{\bar{s}_j t}) \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

où  $u_{kj}(t)$  est la  $j$ -ème composante de  $u_k(t)$ ;  $\phi_{kj}$  est le  $k$ -ème élément de la forme modale complexe  $\phi_j$ ;  $G_j$  est le facteur de participation complexe associé au  $j$ -ème mode. L'équation 2.20 montre que chaque déplacement modal réel est défini comme une combinaison linéaire de deux complexes conjugués.

Considérons maintenant le terme  $(\phi_j^T, s_j \phi_j^T) \mathcal{A} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_0 \end{pmatrix}$  où  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$  et  $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{u}}(0)$  sont déduits de l'équation 2.20 et de sa dérivée par rapport au temps à l'instant  $t = 0$ . On peut démontrer que  $G_j$  dépend des conditions initiales [76] :

$$G_j = |G_j| e^{i \arg G_j} = 2 \frac{\phi_j^T (s_j \mathbf{M} \mathbf{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{u}_0 + \mathbf{M} \mathbf{v}_0)}{\phi_j^T (2s_j \mathbf{M} + \mathbf{C}) \phi_j} \quad (2.21)$$

$M$  étant la masse modale de la passerelle et  $C$  son amortissement modal. L'équation 2.20 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^N \text{Re} (G_j \phi_{kj} e^{s_j t}) = \sum_{j=1}^N \text{Re} (z^{(u_{kj})}(t)) \quad (2.22)$$

où  $z^{(u_{kj})}(t)$  est une fonction complexe associée à  $u_{kj}(t) : z^{(u_{kj})}(t) = G_j \phi_{kj} e^{s_j t}$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} z^{(u_{kj})}(t) &:= A^{(u_{kj})}(t) e^{i \alpha^{(u_{kj})}(t)} && \text{avec} \\ A^{(u_{kj})}(t) &= |G_j| |\phi_{kj}| e^{-\xi_j \omega_j t} \\ \alpha^{(u_{kj})}(t) &= \arg G_j + \arg \phi_{kj} + \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t \end{aligned} \quad (2.23)$$

où l'amplitude instantanée  $A^{(u_{kj})}(t)$  est une fonction positive et décroissante exponentiellement ; la phase  $\alpha^{(u_{kj})}(t)$  est la somme de trois termes :  $\arg G_j$  est un terme constant en relation avec les conditions initiales modales ; le second terme prend en compte le fait que les formes modales sont complexes, ses valeurs se trouvent dans l'intervalle  $(-\pi, \pi]$  ; le troisième terme dépend du temps et est en relation avec les oscillations du système.

La vitesse des oscillations s'écrit sous la forme :

$$\dot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \dot{u}_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (s_j G_j \phi_{kj} e^{s_j t} + \bar{s}_j \bar{G}_j \bar{\phi}_{kj} e^{\bar{s}_j t})$$

et l'accélération :

$$\ddot{u}_k(t) = \sum_{j=1}^N \ddot{u}_{kj}(t) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} (s_j^2 \phi_{kj} G_j e^{s_j t} + \bar{s}_j^2 \bar{\phi}_{kj} \bar{G}_j e^{\bar{s}_j t})$$

Des représentations complexes analogues à celles de l'équation 2.23 pour les amplitudes instantanées et les phases sont également possibles :

$$\begin{aligned} \dot{u}_{kj}(t) &= \operatorname{Re} (z^{(\dot{u}_{kj})}(t)) = A^{(\dot{u}_{kj})}(t) \cos(\alpha^{(\dot{u}_{kj})}(t)) && \text{avec} \\ A^{(\dot{u}_{kj})}(t) &= \omega_j A^{(u_{kj})}(t) \\ \alpha^{(\dot{u}_{kj})}(t) &= \alpha^{(u_{kj})}(t) + \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi_j^2}}{-\xi_j} \end{aligned} \quad (2.24)$$

et

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{kj}(t) &= \operatorname{Re} (z^{(\ddot{u}_{kj})}(t)) = A^{(\ddot{u}_{kj})}(t) \cos(\alpha^{(\ddot{u}_{kj})}(t)) && \text{avec} \\ A^{(\ddot{u}_{kj})}(t) &= \omega_j^2 A^{(u_{kj})}(t) \\ \alpha^{(\ddot{u}_{kj})}(t) &= \alpha^{(u_{kj})}(t) + \arctan \frac{-2\xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2}}{-1 + 2\xi_j^2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

L'identification modale peut se faire en trois étapes :

1. D'après [75], la détermination des fréquences modales peut se faire par une minimisation au sens des moindres carrés :

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_j &= \arg [\min F_1(\tilde{\omega}_j)] && \text{avec} \\ F_1(\tilde{\omega}_j) &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}_s} \int_{\mathbb{I}_{kj}} \left( \frac{\omega_{\max}^{(u_{kj})}(b)}{a_r^{(u_{kj})}(b)} - \tilde{\omega}_j \right)^2 db \\ &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}_s} \int_{\mathbb{I}_{kj}} \left( \dot{\alpha}^{(u_{kj})}(b) - \tilde{\omega}_j \right)^2 db \end{aligned} \quad (2.26)$$

2. Comme le signal analytique  $Z_{u_{kj}}(t)$  décroît exponentiellement, on peut déterminer l'amortissement modal  $\xi_j$ . La méthode des moindres carrés permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} (\xi_j \omega_j, |G_j| |\phi_{kj}|) &= \arg [\min F_2(\xi_j \omega_j, |G_j| |\phi_{kj}|)] && \text{avec} \\ F_2(\xi_j \omega_j, |G_j| |\phi_{kj}|) &= \sum_{k=1}^{\tilde{N}_s} \int_{\mathbb{I}_{kj}} (\ln |Z_{u_{kj}}(b)| - (\ln (|G_j| |\phi_{kj}| - \xi_j \omega_j b)))^2 db \end{aligned} \quad (2.27)$$

Les paramètres  $\xi_j \omega_j$  et  $|G_j| |\phi_{kj}|$  peuvent être identifiés. En utilisant la valeur de  $\tilde{\omega}_j$  identifiée à l'étape (1), il est possible de déterminer  $\xi_j$  and  $\omega_j$ .

3. Soient  $Z_{u_{lj}}(b)$  et  $Z_{u_{kj}}(b)$  les signaux analytiques identifiés pour la fréquence  $\tilde{f}_j$ , respectivement en un point de référence  $l$  et au point générique  $k$  de la structure. Le vecteur complexe

$$\mathbf{Z}_{u_j}(b) = \left[ \frac{Z_{u_{1j}}(b)}{Z_{u_{1j}}(b)}, \dots, \frac{Z_{u_{Nj}}(b)}{Z_{u_{1j}}(b)} \right]^T$$

peut être interprété comme une estimation de l'évolution temporelle de la forme modale complexe  $\phi_j$ , normalisée par rapport au point de référence choisi. La forme modale est identifiée grâce à la minimisation suivante :

$$\begin{aligned} \phi_j &= \arg [\min F_3(\phi_j)] \quad \text{avec} \\ F_3(\phi_j) &= \int_{\mathbb{I}_j} \|\mathbf{Z}_{u_j}(b) - \phi_j\|^2 db \end{aligned} \quad (2.28)$$

## 2.3 Analyse de la force de marche d'un piéton sur un plancher rigide

### 2.3.1 Introduction

Des mesures de forces dues à la marche d'un piéton sur un plancher rigide (*i.e.* non susceptible de vibrer sous l'action de la marche) ont été réalisées par Décathlon. Ces données ont été analysées afin de déterminer certaines caractéristiques de la marche d'un piéton et de modéliser la force qu'il engendre. Dans ce qui suit, nous commençons par décrire l'expérience réalisée par Décathlon, puis nous présentons le traitement des données, et enfin les résultats de l'analyse effectuée.

### 2.3.2 Description de l'expérience

Les mesures ont été réalisées sur un tapis roulant [77] équipé de sorte à mesurer les composantes verticale, latérale et longitudinale de la force qui lui est appliquée.

Le piéton est un jeune homme sportif et "en bonne santé", de 24 ans, pesant 73kg.

Des séquences de marche de durée 15s à vitesse de marche constante ont été enregistrées pour différentes vitesses de marche : 3,75km/h, 4,5km/h, 5,25km/h et 6km/h. Il faut savoir que 4,5km/h (= 1,25m/s) est une vitesse proche de la vitesse moyenne de marche libre  $v_M = 1,5m/s$  à laquelle la majorité des personnes marchent confortablement et naturellement. A chaque fois, les différentes composantes de la force engendrée par chacune des jambes du piéton ont été enregistrées avec une fréquence d'acquisition de 200Hz.

### 2.3.3 Traitement des données

Les valeurs transmises par Décathlon ne sont pas filtrées. Comme le signal obtenu est très bruité, on applique un filtre passe-bas à 25Hz en utilisant un filtre de type "Hamming" [78] (figure 2.3). Pour illustrer cette démarche, nous prenons comme exemple, la force latérale appliquée par le pied droit pour une vitesse de marche de 3,75km/h. On voit sur la figure 2.2, le graphe de la force (a) et sa transformée de Fourier obtenue par FFT (b).

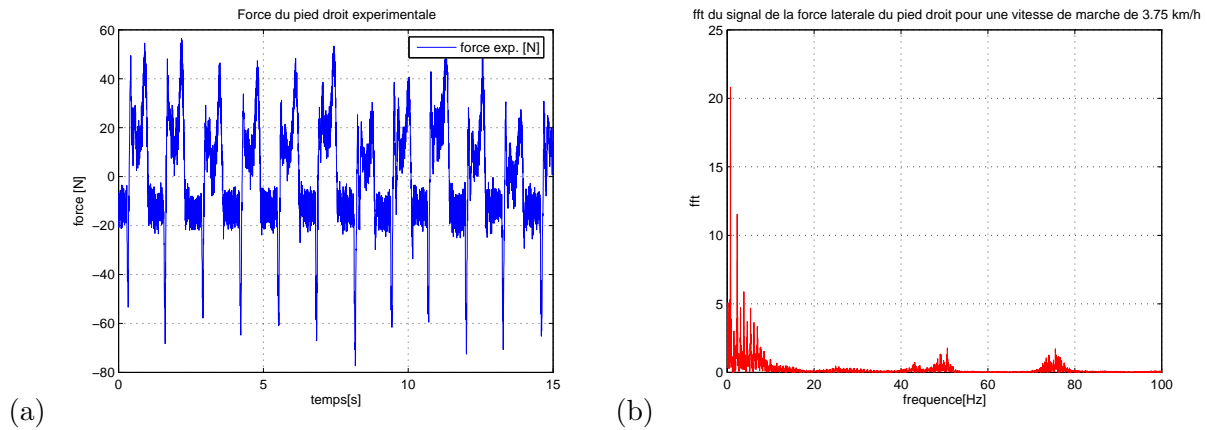


FIGURE 2.2. (a) Force latérale appliquée par le pied droit pour une vitesse de 3.75km/h, (b) FFT de la force

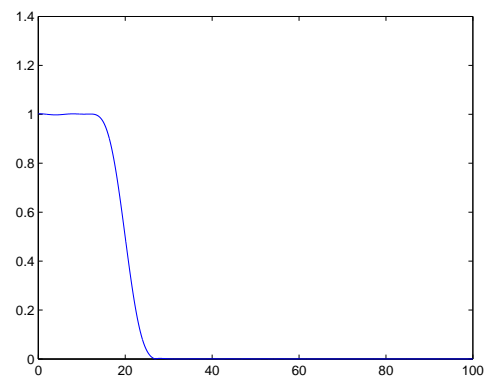


FIGURE 2.3. Le filtre de Hamming

L'idée est de multiplier la transformée de Fourier rapide du signal (Fast Fourier Transform FFT) par le filtre afin de l'annuler à partir de  $25\text{Hz}$  et donc d'éliminer les vibrations correspondantes à ces fréquences. La transformée de Fourier filtrée est représentée avec la transformée de Fourier non filtrée dans la figure 2.4. L'amplitude de la FFT filtrée commence à diminuer par rapport à la FFT non filtrée à partir de  $20\text{Hz}$  pour s'annuler complètement à partir de  $25\text{Hz}$  (2.4-b).

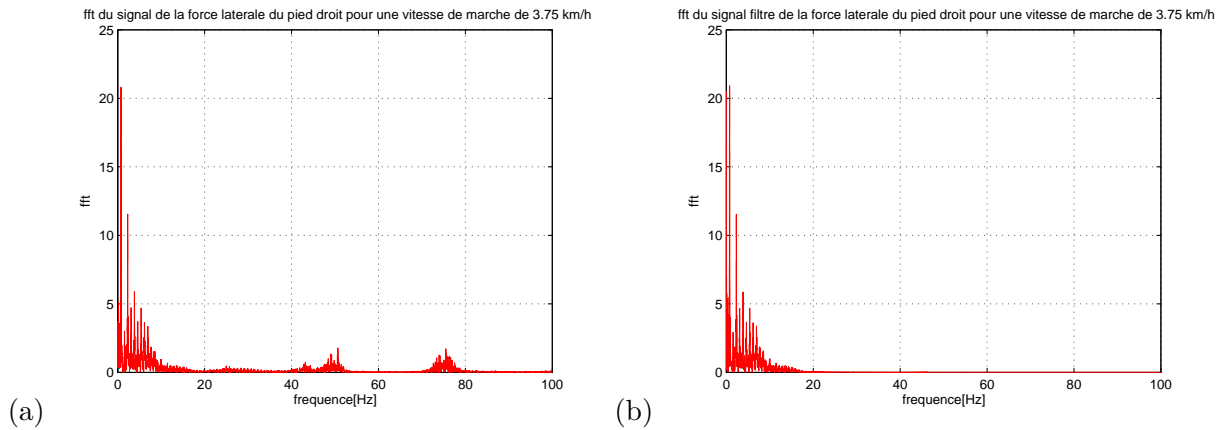


FIGURE 2.4. (a) La fft de la force avant filtrage, (b) La fft de la force après filtrage

Cependant, le filtrage induit un déphasage du signal. Pour résoudre ce problème, MATLAB propose la fonction `filtfilt` qui applique directement le filtre choisi sur le signal initial et élimine ce déphasage.

Afin d'obtenir la force totale appliquée sur le tapis, on a additionné la force engendrée par le pied droit et celle engendrée par le pied gauche. Ceci a permis d'avoir des informations concernant la durée et la longueur des pas, sachant qu'un pas commence au début du contact simultané des deux pieds du piéton avec le plancher. Il est important de rappeler que la force latérale admet des sens opposés pour chacun des pieds (voir chapitre 1). La force latérale totale est donc égale à la différence entre la force du pied droit et celle du pied gauche.

Une analyse de Fourier a été ensuite réalisée afin de déterminer la fréquence de la marche et la fréquence à laquelle chaque pied applique sa force. De plus, on a calculé les différentes composantes de la force (pour chaque pied et pour la force totale) en utilisant les séries de Fourier.

## 2.3.4 Résultats de l'analyse

### 2.3.4.1 Le signal

Les graphiques de la figure 2.5 représentent respectivement les composantes verticale (a), latérale (b) et longitudinale (c) de la force de la marche pour la vitesse  $4,5 \text{ km/h}$  après filtrage des données. Les courbes relatives aux autres vitesses étudiées ont des allures identiques.

Dans ces figures, on voit que durant un pas, la composante de la force correspondant à chaque pied peut être divisée en deux temps : le premier concerne la période où le pied en question est en contact avec le plancher, ce qui correspond sur le graphe à la période où la force est non nulle ; le deuxième temps concerne la période où le pied n'est plus en contact avec le plancher et donc sa force est nulle. Quand le pied est en contact avec le plancher, la force verticale (figure 2.5-a) est en "selle de cheval" et elle est formée de deux pics comme on l'a déjà mentionné dans la partie bibliographique (chapitre 1). On retrouve ces mêmes caractéristiques pour les autres vitesses étudiées.

### 2.3.4.2 Les caractéristiques des forces

Pour une vitesse de marche  $v$  donnée, la durée moyenne des pas  $T_m$  est calculée comme étant la période moyenne de la force verticale totale : à partir du signal de la force verticale totale, on calcule la période correspondant à chaque pas, puis on en fait la moyenne. La longueur moyenne  $L_m$  des pas est calculée par :

$$L_m = vT_m$$

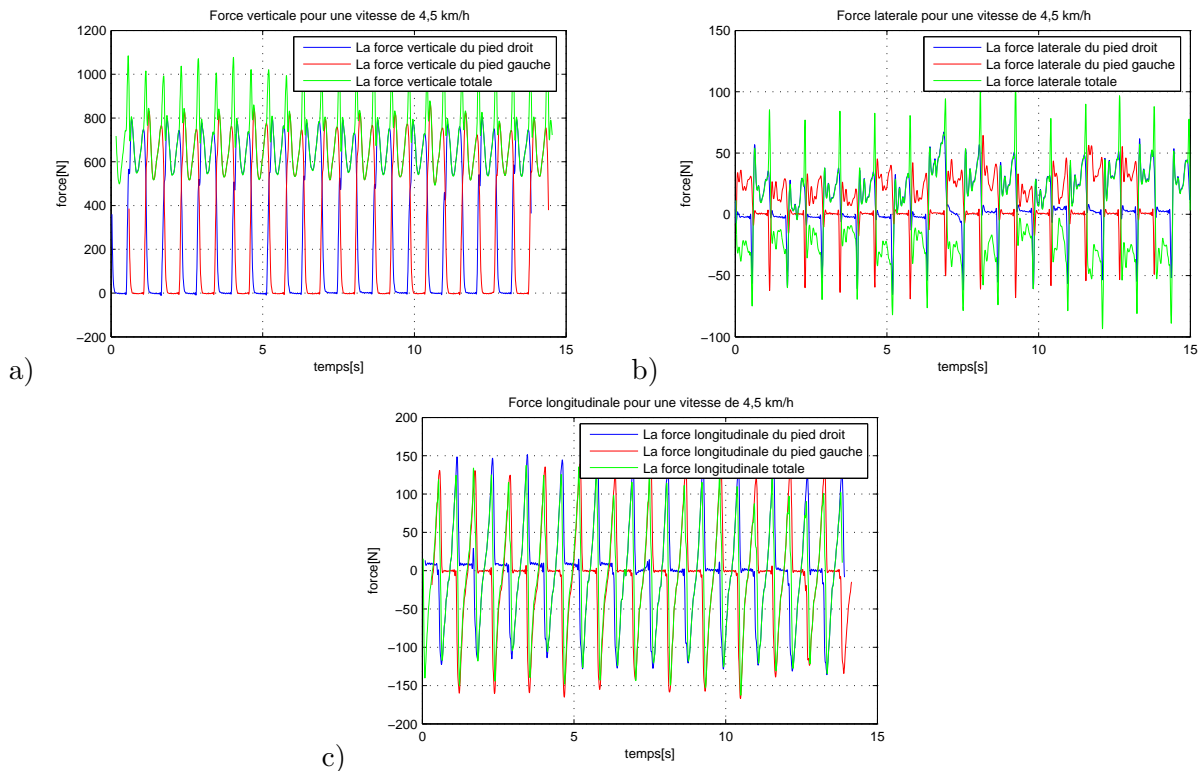


FIGURE 2.5. Les composantes de la force pour une vitesses de marche de 4,5km/h : (a) verticale (b) latérale (c)longitudinale

Cette analyse réalisée pour les différentes vitesses de marche, montre que la longueur moyenne des pas augmente lorsque la vitesse de la marche augmente, alors que la durée moyenne des pas diminue (figure 2.6 et tableau 2.2). Pour une même vitesse, la longueur et la durée d'un pas diffèrent d'un pas à l'autre (figure 2.6, graphes (a) et (c)). De plus, on a déterminé la fonction qui lie la longueur moyenne et la durée moyenne des pas à la vitesse, en utilisant plusieurs approches polynômiales (figure 2.6, graphes (b) et (d)). Le tableau 2.2 présente la longueur et la durée moyennes des pas avec les différences relatives moyennes et maximales (en %) d'un pas à l'autre pour chaque vitesse de marche. Une analyse de Fourier a permis de déterminer

Vitesse ( <i>km/h</i> )	Longueur moyenne(m)	Durée moyenne(s)	Différence moyenne(%)	Différence maximale(%)
3,75	0,67	0,6488	3,1	11,6
4,5	0,73	0,6198	2,86	8,04
5,25	0,77	0,5319	2,28	8,9
6,0	0,88	0,5277	2,79	7,69

TABLEAU 2.2. Les longueurs et les durées des pas avec les différences d'un pas à l'autre

la fréquence des forces appliquées au plancher. Celle-ci est représentée dans la figure 2.7 en fonction de la vitesse. La fréquence de la force totale est égale à la fréquence de la force due à chaque pied dans le cas de la force latérale, mais elle est égale au double dans le cas des forces verticale et longitudinale. Une analyse sur la force latérale engendrée par plusieurs piétons dont celui dont on analyse les forces dans ce chapitre est présentée dans [79]. Dans cet article, on montre notamment que pour une vitesse donnée, la fréquence des piétons est quasiment la même pour tous les piétons étudiés.

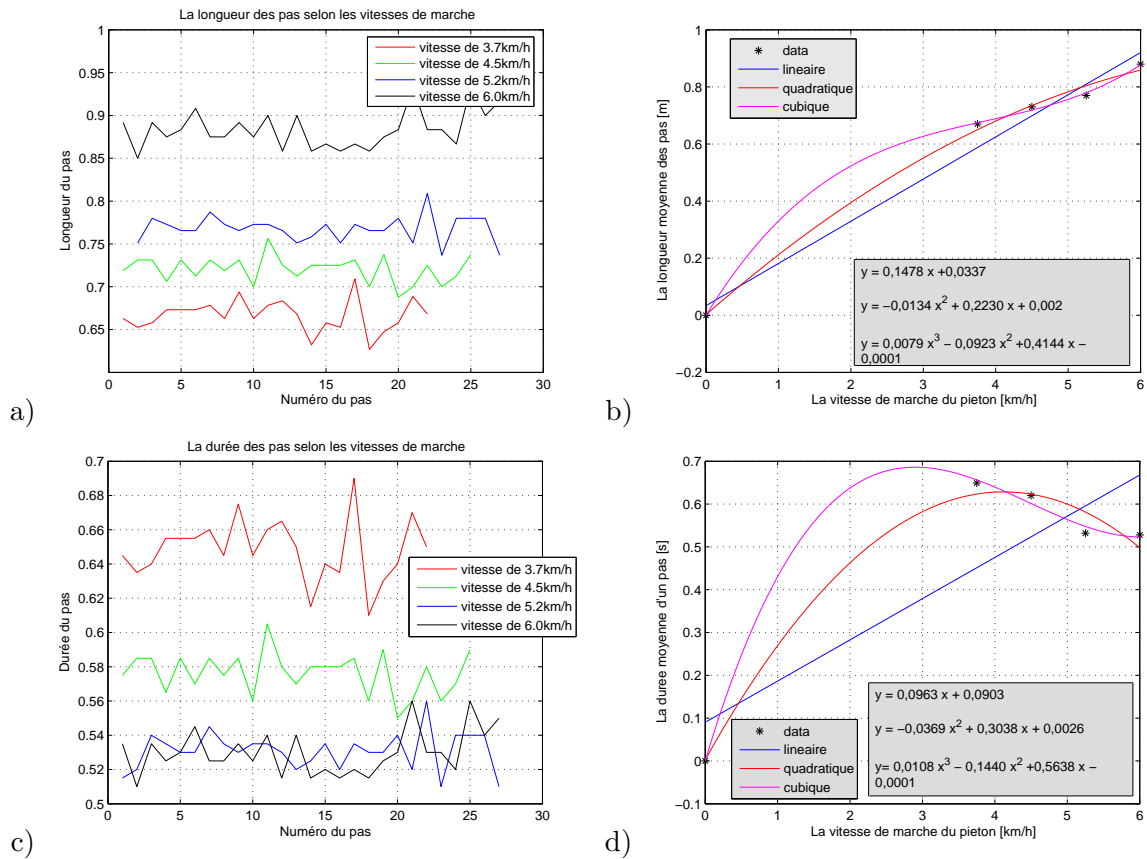


FIGURE 2.6. (a) La longueur des pas [m] pour les différentes vitesses [km/h] (b) La longueur moyenne des pas [m] en fonction de la vitesse [km/h] (c) La durée des pas [s] pour les différentes vitesses [km/h] (d) La durée moyenne des pas [s] en fonction de la vitesse [km/h]

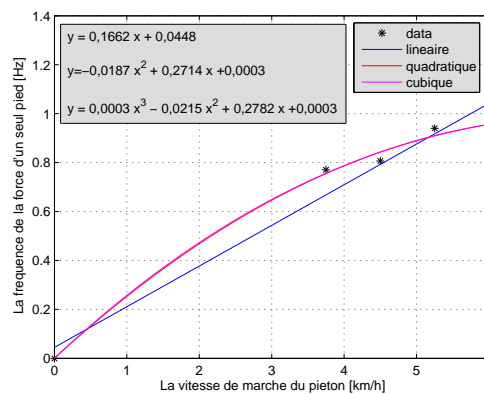


FIGURE 2.7. La fréquence de la force engendrée par un pied en fonction de la vitesse de la marche

Généralement on considère que la force d'un piéton est périodique, et on développe ses différentes composantes en utilisant des séries de Fourier tronquées à un ordre  $n$  donné (équation (2.29)). Ce travail a été fait pour chaque pied et pour la force totale.

$$F(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \cos(2\pi i f t + \phi_i) \quad (2.29)$$



où

$F$  est la force considérée

$f$  est la fréquence de la force

$\alpha_i$  sont les coefficients de Fourier

$\phi_i$  sont les phases, elle dépendent de l'instant initial, mais les  $\phi_i - i\phi_1$  sont intrinsèques

Afin de déterminer pour quelle valeur de  $n$  on peut tronquer la série de Fourier, on a calculé la force pour  $n = 5, 10, 15$ , et  $20$ .

On peut remarquer, d'après les signaux enregistrés, que ces forces ne sont pas exactement périodiques. En effet, pour une même jambe, les amplitudes varient d'un pas à l'autre, de même que la longueur des pas, ce qui affecte directement la durée d'un pas et par conséquent la périodicité du signal. Une approche par coefficients de Fourier sur l'ensemble du signal permet de moyenner l'évolution de la force en fonction du temps. Nous traçons dans la figure (2.8) l'approximation par série de Fourier des différentes forces engendrées par chacune des jambes pour la vitesse de  $4,5\text{km/h}$  suivant le nombre de coefficients pris en compte dans la série de Fourier (5, 10, 15 et 20) sur la première période du signal. On peut remarquer que ces courbes sont très proches les unes des autres pour les composantes verticale et longitudinale, mais on observe des différences plus prononcées pour la composante latérale. On remarque les mêmes caractéristiques pour les différentes vitesses. Par conséquent, si on choisit cette approche de modélisation de la force engendrée par un piéton, on peut se contenter des 5 premiers coefficients de la série de Fourier pour les composantes verticale et longitudinale. Cependant, pour savoir exactement si une telle troncature est suffisante, et s'il est possible de l'appliquer pour la composante latérale, il faut étudier la réponse de passerelles (ou plus simplement de poutres) face à ces forces modélisées afin d'établir avec exactitude l'influence des harmoniques supérieures. Les valeurs des coefficients de Fourier et des phases pour les 5 premiers harmoniques sont regroupés dans les tableaux 2.3 à 2.14 et les courbes obtenues avec une approximation à 5 harmoniques pour les forces engendrées avec une vitesse de marche de  $4,5\text{km/h}$  sont tracées dans les figures 2.9, 2.10 et 2.11.

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 353,38$	$\alpha_0 = 348,78$	$\alpha_0 = 702,15$
$\alpha_1 = 402,82 \phi_1 = 3$	$\alpha_1 = 402,20 \phi_1 = -0,14$	$\alpha_1 = 125,15 \phi_1 = 2,98$
$\alpha_2 = 64,67 \phi_2 = 3,12$	$\alpha_2 = 61,15 \phi_2 = 3,04$	$\alpha_2 = 39,99 \phi_2 = 0,06$
$\alpha_3 = 122,46 \phi_3 = -0,38$	$\alpha_3 = 128,84 \phi_3 = 2,76$	$\alpha_3 = 42,91 \phi_3 = 3,11$
$\alpha_4 = 24,84 \phi_4 = 0,34$	$\alpha_4 = 15,32 \phi_4 = 0,18$	$\alpha_4 = 26,11 \phi_4 = -0,39$
$\alpha_5 = 26,87 \phi_5 = 2,46$	$\alpha_5 = 31,44 \phi_5 = -0,67$	$\alpha_5 = 13,27 \phi_5 = 2,64$

TABLEAU 2.3. Coefficients de la force verticale pour une vitesse de  $3,75\text{km/h}$

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 353,96$	$\alpha_0 = 355,83$	$\alpha_0 = 709,79$
$\alpha_1 = 396,73 \phi_1 = 1,64$	$\alpha_1 = 394,85 \phi_1 = -1,51$	$\alpha_1 = 177,05 \phi_1 = -0,08$
$\alpha_2 = 79,53 \phi_2 = 0,13$	$\alpha_2 = 96,54 \phi_2 = 0,07$	$\alpha_2 = 15,82 \phi_2 = 0,59$
$\alpha_3 = 148,85 \phi_3 = 1,72$	$\alpha_3 = 163,17 \phi_3 = -1,40$	$\alpha_3 = 43,46 \phi_3 = 0,79$
$\alpha_4 = 14,01 \phi_4 = 1,43$	$\alpha_4 = 11,21 \phi_4 = -0,68$	$\alpha_4 = 33,70 \phi_4 = 0,52$
$\alpha_5 = 30,07 \phi_5 = 1,75$	$\alpha_5 = 43,22 \phi_5 = -1,61$	$\alpha_5 = 22,35 \phi_5 = 0,37$

TABLEAU 2.4. Coefficients de la force verticale pour une vitesse de  $4,5\text{km/h}$

Le développement en série de Fourier induit une "moyennisation" qui nous a permis de comparer, pour une même vitesse les forces engendrées par chaque pied, et les forces engendrées pour des vitesses différentes. Premièrement, on peut remarquer que les forces de même type ont la même allure générale,

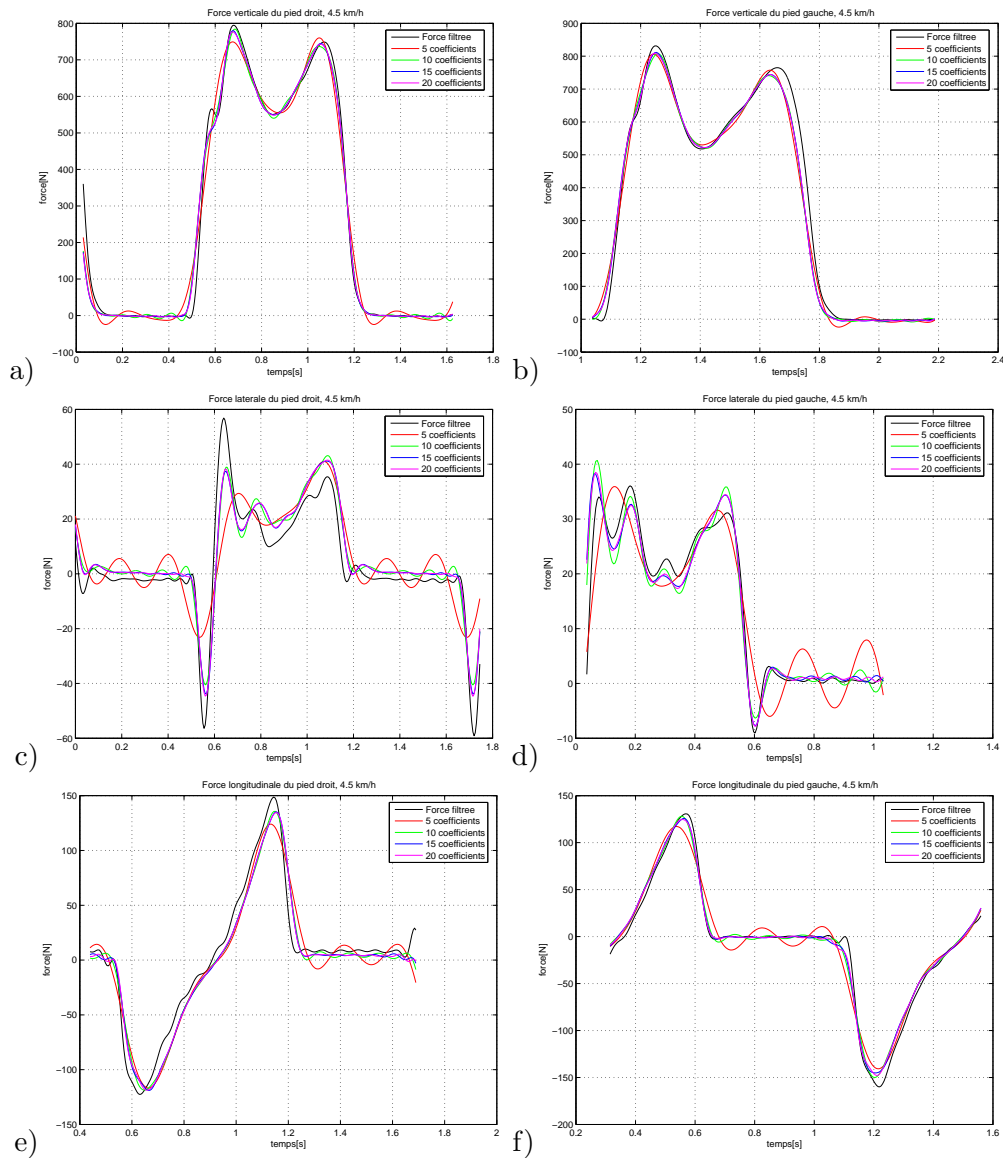


FIGURE 2.8. Les signaux des forces modélisées par différents nombres de coefficients de Fourier pour une vitesse de marche de 4,5km/h : (a) vertical droit, (b) vertical gauche, (c) latéral droit, (d) latéral gauche, (e) longitudinal droit, (f) longitudinal gauche

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 364,01$	$\alpha_0 = 351,54$	$\alpha_0 = 715,55$
$\alpha_1 = 390,54 \phi_1 = -1,28$	$\alpha_1 = 390,42 \phi_1 = 1,85$	$\alpha_1 = 213,93 \phi_1 = 0,23$
$\alpha_2 = 106,35 \phi_2 = 0,38$	$\alpha_2 = 107,37 \phi_2 = 0,32$	$\alpha_2 = 0,99 \phi_2 = 0,57$
$\alpha_3 = 178,20 \phi_3 = -0,82$	$\alpha_3 = 181,04 \phi_3 = 2,24$	$\alpha_3 = 43,84 \phi_3 = 1,97$
$\alpha_4 = 1,32 \phi_4 = 1,48$	$\alpha_4 = 0,56 \phi_4 = -1,76$	$\alpha_4 = 32,01 \phi_4 = 2,07$
$\alpha_5 = 42,03 \phi_5 = -0,39$	$\alpha_5 = 44,45 \phi_5 = 2,57$	$\alpha_5 = 20,08 \phi_5 = 2,34$

TABLEAU 2.5. Coefficients de la force verticale pour une vitesse de 5,25km/h

mais des amplitudes et des périodes différentes selon la vitesse (donc selon la fréquence de marche). De plus, le temps de contact d'un pied avec le plancher diminue lorsque la vitesse augmente. Par conséquent, la

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 351,59$	$\alpha_0 = 358,55$	$\alpha_0 = 710,15$
$\alpha_1 = 376,87 \phi_1 = 1,94$	$\alpha_1 = 379,18 \phi_1 = -1,29$	$\alpha_1 = 270,29 \phi_1 = 0,3$
$\alpha_2 = 131,74 \phi_2 = 0,54$	$\alpha_2 = 138,97 \phi_2 = 0,36$	$\alpha_2 = 23,01 \phi_2 = -2,07$
$\alpha_3 = 198,02 \phi_3 = 2,52$	$\alpha_3 = 217,17 \phi_3 = -0,87$	$\alpha_3 = 33,42 \phi_3 = 2,23$
$\alpha_4 = 7,03 \phi_4 = -2,16$	$\alpha_4 = 16,61 \phi_4 = -1,68$	$\alpha_4 = 30,34 \phi_4 = 2,18$
$\alpha_5 = 43,09 \phi_5 = 3,10$	$\alpha_5 = 52,43 \phi_5 = -0,61$	$\alpha_5 = 20,29 \phi_5 = 2,51$

TABLEAU 2.6. Coefficients de la force verticale pour une vitesse de 6km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 10,06$	$\alpha_0 = 12$	$\alpha_0 = -1,94$
$\alpha_1 = 20,81 \phi_1 = 2,80$	$\alpha_1 = 18,49 \phi_1 = -0,24$	$\alpha_1 = 39,10 \phi_1 = 2,88$
$\alpha_2 = 1,98 \phi_2 = -1,11$	$\alpha_2 = 1,52 \phi_2 = 0,01$	$\alpha_2 = 2,12 \phi_2 = -1,87$
$\alpha_3 = 11,25 \phi_3 = -0,14$	$\alpha_3 = 10,19 \phi_3 = 2,83$	$\alpha_3 = 21,16 \phi_3 = -0,12$
$\alpha_4 = 4,25 \phi_4 = -3,03$	$\alpha_4 = 5,22 \phi_4 = 3,13$	$\alpha_4 = 1,18 \phi_4 = 1,05$
$\alpha_5 = 5,07 \phi_5 = -2,93$	$\alpha_5 = 4,62 \phi_5 = -0,20$	$\alpha_5 = 9,25 \phi_5 = -2,97$

TABLEAU 2.7. Coefficients de la force latérale pour une vitesse de 3,75km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 10,92$	$\alpha_0 = 10,05$	$\alpha_0 = 0,87$
$\alpha_1 = 18,60 \phi_1 = 1,03$	$\alpha_1 = 16,17 \phi_1 = -1,83$	$\alpha_1 = 34,91 \phi_1 = 1,12$
$\alpha_2 = 2,62 \phi_2 = 2,48$	$\alpha_2 = 4,50 \phi_2 = -2,81$	$\alpha_2 = 3,50 \phi_2 = 0,84$
$\alpha_3 = 11,04 \phi_3 = 1,05$	$\alpha_3 = 10,57 \phi_3 = -2,03$	$\alpha_3 = 21,59 \phi_3 = 0,95$
$\alpha_4 = 5,82 \phi_4 = 3,09$	$\alpha_4 = 7,68 \phi_4 = -3,08$	$\alpha_4 = 1,66 \phi_4 = -0,34$
$\alpha_5 = 6,45 \phi_5 = 1,07$	$\alpha_5 = 5,41 \phi_5 = -1,98$	$\alpha_5 = 11,73 \phi_5 = 0,9$

TABLEAU 2.8. Coefficients de la force latérale pour une vitesse de 4,5km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 9,7$	$\alpha_0 = 15,04$	$\alpha_0 = -5,34$
$\alpha_1 = 19,91 \phi_1 = -1,58$	$\alpha_1 = -21,74 \phi_1 = 1,69$	$\alpha_1 = 41,29 \phi_1 = -1,53$
$\alpha_2 = 2,45 \phi_2 = -2,19$	$\alpha_2 = 5,51 \phi_2 = -1,90$	$\alpha_2 = 3,66 \phi_2 = 1,51$
$\alpha_3 = 12,77 \phi_3 = -1,04$	$\alpha_3 = 13,48 \phi_3 = 1,84$	$\alpha_3 = 26,34 \phi_3 = -1,24$
$\alpha_4 = 7,57 \phi_4 = -1,73$	$\alpha_4 = 8,95 \phi_4 = -1,97$	$\alpha_4 = 1,36 \phi_4 = 2,01$
$\alpha_5 = 6,70 \phi_5 = -0,49$	$\alpha_5 = 6,80 \phi_5 = 2,14$	$\alpha_5 = 13,83 \phi_5 = -0,86$

TABLEAU 2.9. Coefficients de la force latérale pour une vitesse de 5,25km/h

durée de temps durant laquelle la force engendrée par un pied est non nulle, diminue. On remarque que les amplitudes des forces verticales et longitudinales sont croissantes en fonction de la vitesse. Ceci n'est pas le cas de l'amplitude de la force latérale qui, pour ce piéton avait un comportement plus "aléatoire". Est-ce un hasard? Des essais supplémentaires sur d'autres piétons sont sûrement nécessaires pour pouvoir tirer des conclusions plus pertinentes. Cependant, si on en réfère à la bibliographie, les différents auteurs s'accordent

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 5,91$	$\alpha_0 = 13,86$	$\alpha_0 = -7,95$
$\alpha_1 = 20,84 \phi_1 = 1,44$	$\alpha_1 = 21,78 \phi_1 = -1,39$	$\alpha_1 = 42,29 \phi_1 = 1,61$
$\alpha_2 = 1,94 \phi_2 = -2,36$	$\alpha_2 = 5,24 \phi_2 = -1,69$	$\alpha_2 = 3,70 \phi_2 = 1,73$
$\alpha_3 = 15,13 \phi_3 = 2,04$	$\alpha_3 = 14,76 \phi_3 = -0,94$	$\alpha_3 = 29,37 \phi_3 = 2,20$
$\alpha_4 = 10,22 \phi_4 = -1,75$	$\alpha_4 = 10,89 \phi_4 = -1,53$	$\alpha_4 = 1,19 \phi_4 = 1,16$
$\alpha_5 = 7,20 \phi_5 = 2,28$	$\alpha_5 = 5,91 \phi_5 = -0,69$	$\alpha_5 = 12,26 \phi_5 = 2,49$

TABLEAU 2.10. Coefficients de la force latérale pour une vitesse de 6km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = -0,21$	$\alpha_0 = -4,21$	$\alpha_0 = -4,41$
$\alpha_1 = 61,33 \phi_1 = 1,21$	$\alpha_1 = 60,87 \phi_1 = -1,77$	$\alpha_1 = 67,11 \phi_1 = -2,03$
$\alpha_2 = 32,85 \phi_2 = -2,12$	$\alpha_2 = 33,96 \phi_2 = -1,76$	$\alpha_2 = 29,01 \phi_2 = 0,72$
$\alpha_3 = 17,91 \phi_3 = -2,25$	$\alpha_3 = 17,17 \phi_3 = 1,27$	$\alpha_3 = 8,56 \phi_3 = -2,96$
$\alpha_4 = 14,01 \phi_4 = 0,55$	$\alpha_4 = 14,60 \phi_4 = 1,23$	$\alpha_4 = 1,04 \phi_4 = -0,34$
$\alpha_5 = 8,30 \phi_5 = 0,54$	$\alpha_5 = 7,70 \phi_5 = -2,06$	$\alpha_5 = 1,31 \phi_5 = -0,11$

TABLEAU 2.11. Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de 3,75km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = -1$	$\alpha_0 = -7,39$	$\alpha_0 = -8,39$
$\alpha_1 = 68,98 \phi_1 = -0,26$	$\alpha_1 = -73,39 \phi_1 = 3,01$	$\alpha_1 = 82,67 \phi_1 = 1,42$
$\alpha_2 = 40,32 \phi_2 = 1,18$	$\alpha_2 = 40,98 \phi_2 = 1,52$	$\alpha_2 = 43,65 \phi_2 = 1,29$
$\alpha_3 = 19,59 \phi_3 = -0,41$	$\alpha_3 = 23,35 \phi_3 = 3,01$	$\alpha_3 = 16,08 \phi_3 = 1,02$
$\alpha_4 = 20,86 \phi_4 = 0,87$	$\alpha_4 = 22,12 \phi_4 = 1,47$	$\alpha_4 = 5,65 \phi_4 = 0,64$
$\alpha_5 = 7,71 \phi_5 = -0,42$	$\alpha_5 = 8,92 \phi_5 = 2,86$	$\alpha_5 = 1,51 \phi_5 = -0,31$

TABLEAU 2.12. Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de 4,5km/h

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 0,15$	$\alpha_0 = -3,65$	$\alpha_0 = -3,50$
$\alpha_1 = 80,39 \phi_1 = 3,11$	$\alpha_1 = 77,7 \phi_1 = 0,02$	$\alpha_1 = 93,11 \phi_1 = 1,75$
$\alpha_2 = 46,92 \phi_2 = 1,74$	$\alpha_2 = 46,53 \phi_2 = 1,70$	$\alpha_2 = 53,75 \phi_2 = 2,02$
$\alpha_3 = 23,26 \phi_3 = -2,82$	$\alpha_3 = 24,06 \phi_3 = 0,32$	$\alpha_3 = 20,79 \phi_3 = 2,09$
$\alpha_4 = 26,47 \phi_4 = 1,99$	$\alpha_4 = 27,87 \phi_4 = 1,93$	$\alpha_4 = 9,22 \phi_4 = 2,24$
$\alpha_5 = 7,40 \phi_5 = -2,55$	$\alpha_5 = 7,64 \phi_5 = 0,5$	$\alpha_5 = 3,50 \phi_5 = 2,32$

TABLEAU 2.13. Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de 5,25km/h

pour dire que l'amplitude maximale est croissante en fonction de la vitesse.

Pour une vitesse donnée, l'amplitude maximale est différente d'un pied à l'autre, avec des différences qui peuvent être assez importantes, comme dans le cas de la force latérale engendrée par la marche à une vitesse de 5,25km/h (figure 2.13) (voir aussi les figures 2.12 et 2.14 pour les forces verticales et longitudinales pour une vitesse de 5,25km/h). Si l'on souhaite prendre cette remarque en considération, les forces verticales et

Pied droit	Pied gauche	Total
$\alpha_0 = 3,72$	$\alpha_0 = -5,80$	$\alpha_0 = -2,07$
$\alpha_1 = 93,80 \phi_1 = 0,04$	$\alpha_1 = 94,25 \phi_1 = -3,01$	$\alpha_1 = 112,17 \phi_1 = 1,76$
$\alpha_2 = 54,74 \phi_2 = 1,84$	$\alpha_2 = 56,96 \phi_2 = 1,97$	$\alpha_2 = 66,79 \phi_2 = 1,93$
$\alpha_3 = 27,98 \phi_3 = 0,35$	$\alpha_3 = 28,80 \phi_3 = -2,68$	$\alpha_3 = 24,03 \phi_3 = 1,94$
$\alpha_4 = 31,09 \phi_4 = 2,10$	$\alpha_4 = 34,87 \phi_4 = 2,31$	$\alpha_4 = 9,55 \phi_4 = 2,12$
$\alpha_5 = 7,40 \phi_5 = 0,56$	$\alpha_5 = 7,28 \phi_5 = -2,51$	$\alpha_5 = 3,00 \phi_5 = 2,28$

TABLEAU 2.14. Coefficients de la force longitudinale pour une vitesse de 6km/h

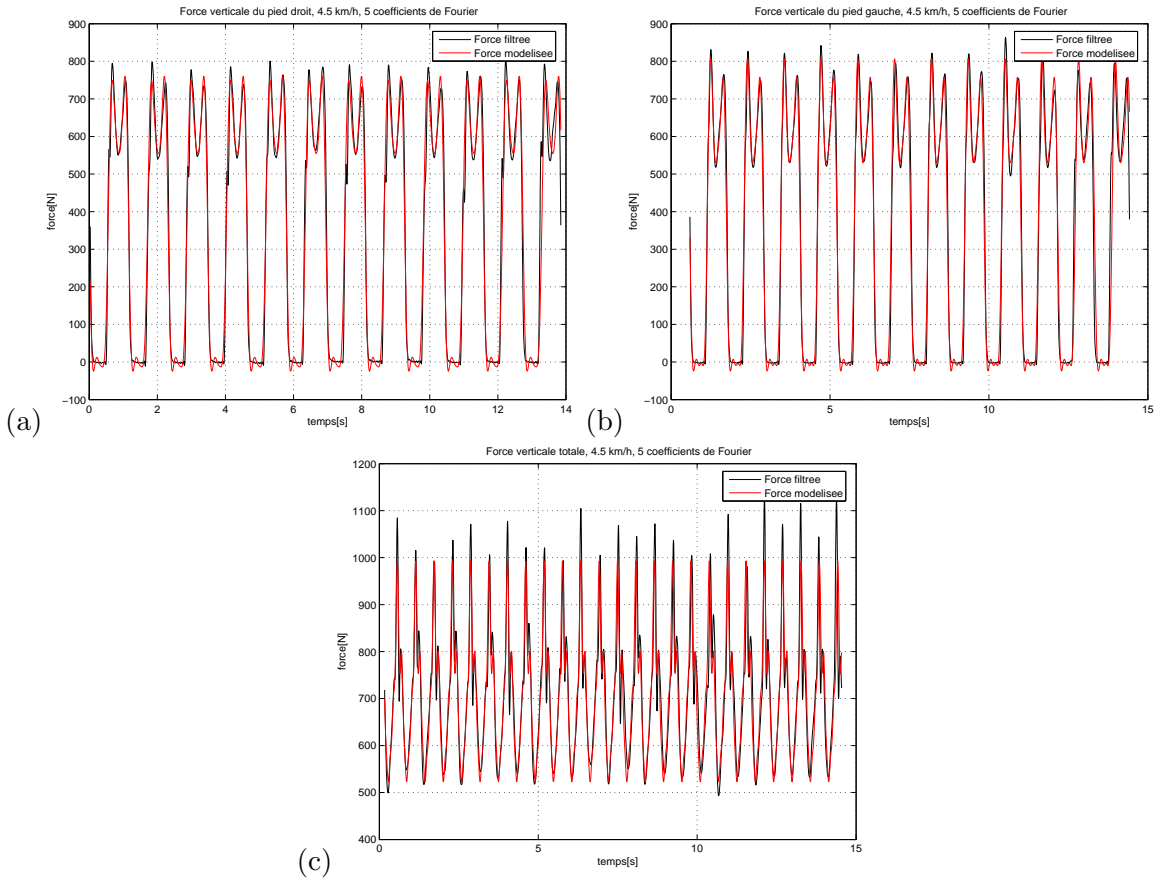


FIGURE 2.9. La force verticale pour une vitesse de marche de 4,5km modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale

longitudinales totales ne doivent pas avoir une fréquence double de celle du pied droit (ou du pied gauche) mais une fréquence qui lui est égale. De plus, cette différence est aussi visible dans le calcul des coefficients de Fourier de la force latérale. En effet, si les forces latérales engendrées par le pied droit et le pied gauche avaient la même amplitude, ces deux forces auraient été symétriques par rapport à zéro et par conséquent, le coefficient  $\alpha_0$  de la force latérale totale engendrée par le piéton devrait être nul. Or, pour toutes les vitesses étudiées on trouve toujours  $\alpha_0 \neq 0$ . Cela peut sans doute s'expliquer par une différence entre les deux jambes du piéton.

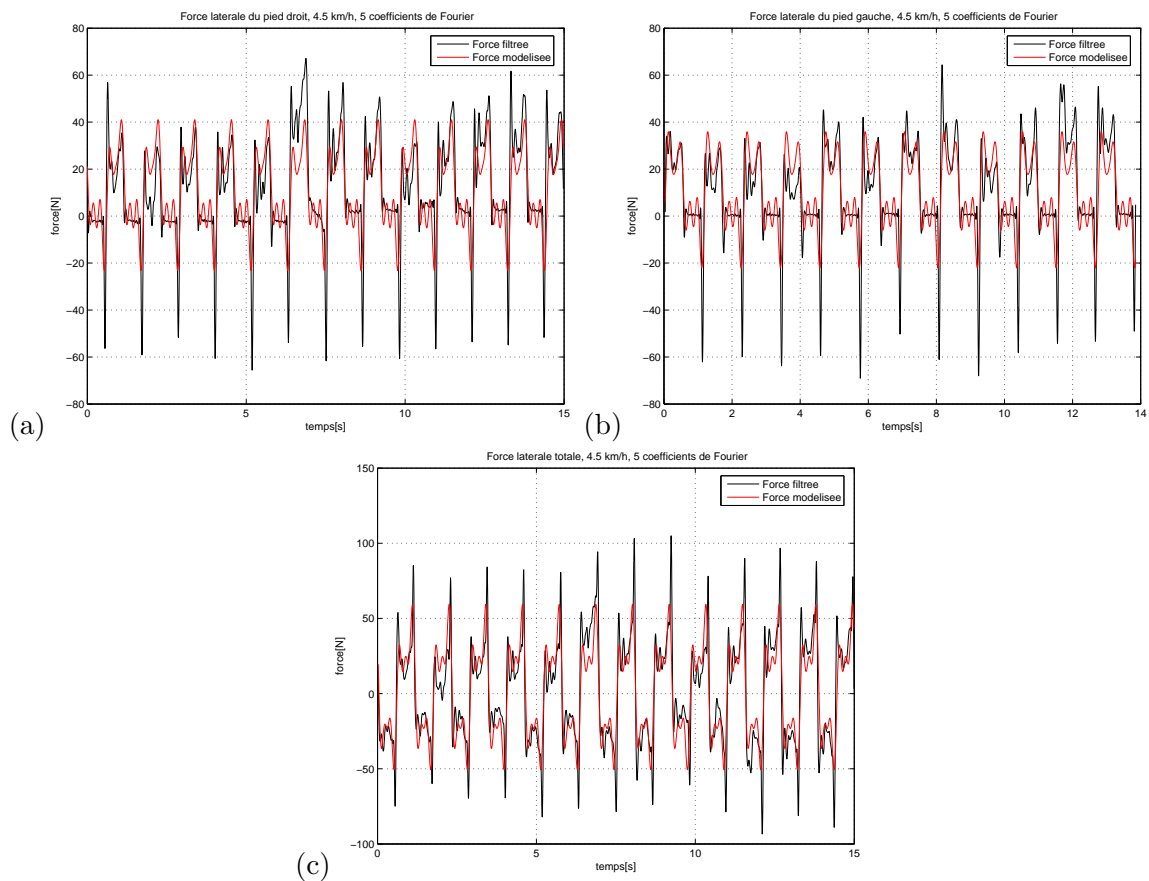


FIGURE 2.10. La force latérale pour une vitesse de marche de 4,5km modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale

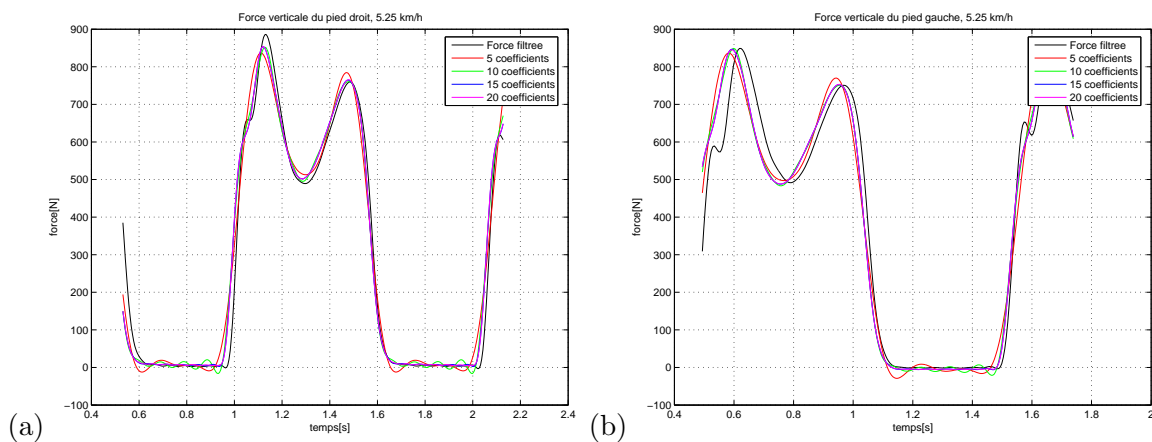


FIGURE 2.12. Comparaison entre la force verticale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de 5,25km/h : (a) le pied droit, (b) le pied gauche

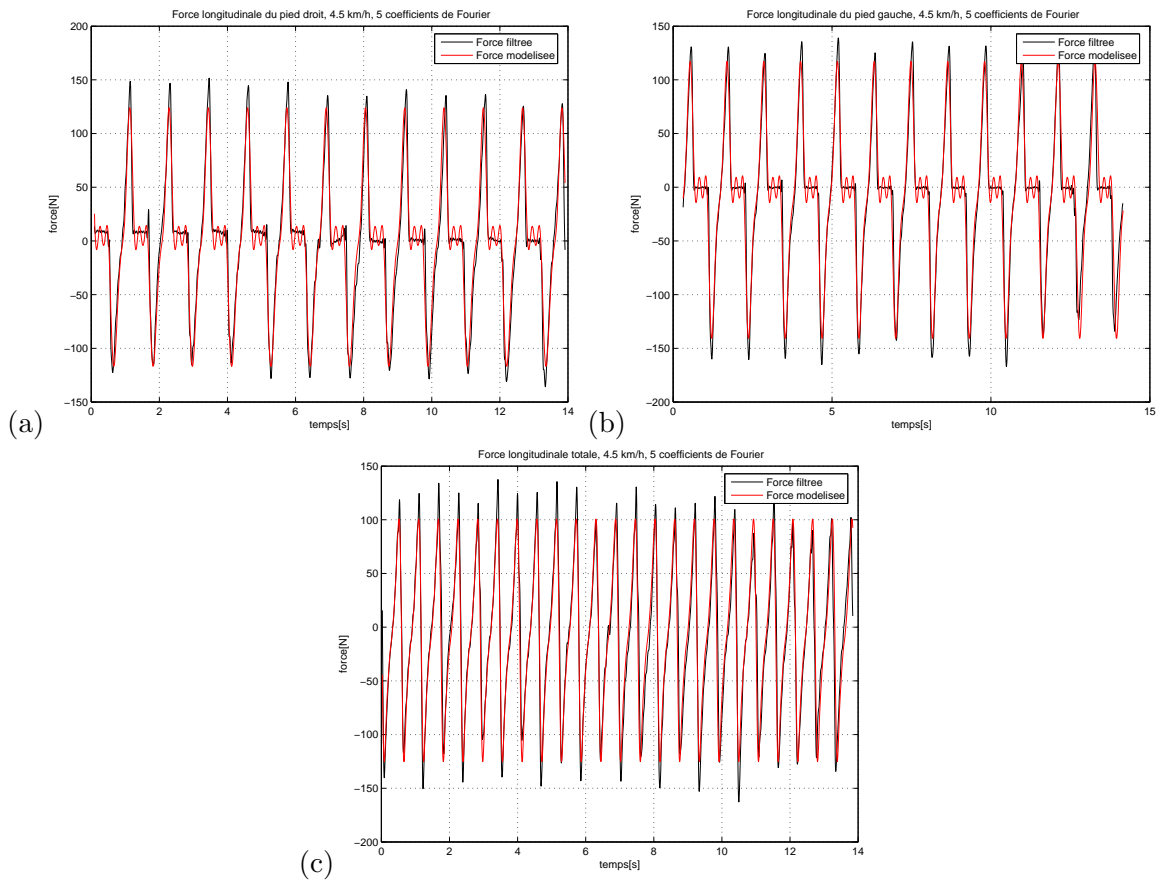


FIGURE 2.11. La force longitudinale pour une vitesse de marche de 4,5km modélisée avec 5 harmoniques : (a) engendrée par le pied droit, (b) engendrée par le pied gauche, (c) totale

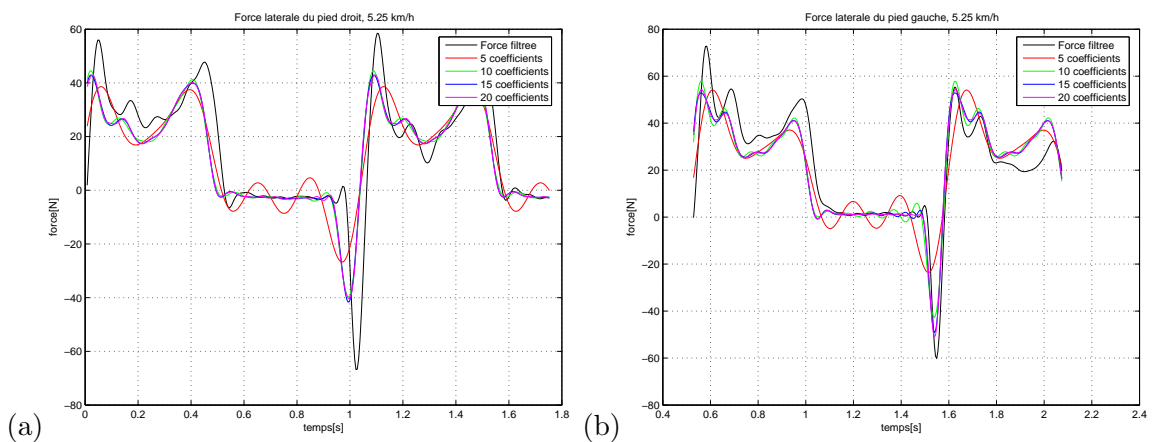


FIGURE 2.13. Comparaison entre la force latérale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de 5,25km/h : (a) le pied droit, (b) le pied gauche

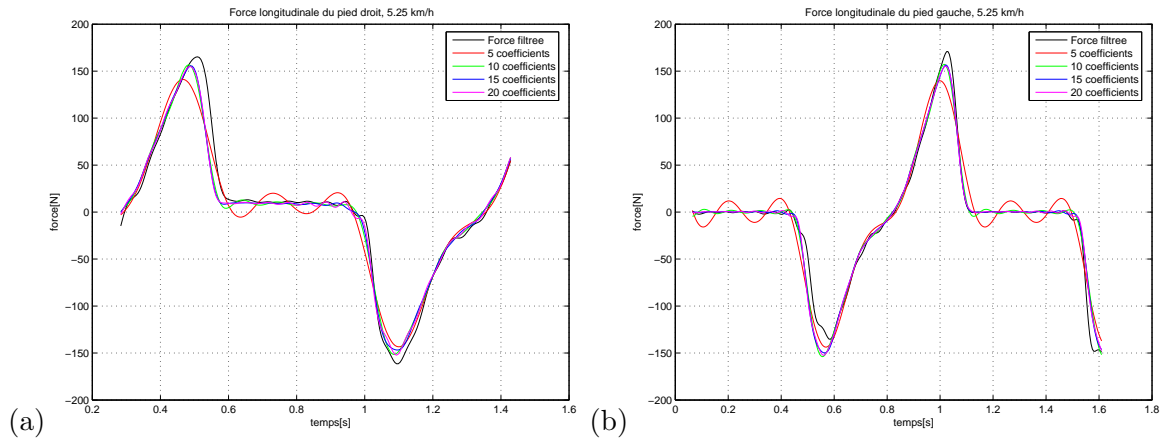


FIGURE 2.14. Comparaison entre la force longitudinale engendrée par chaque pied pour une vitesse de marche de 5,25 km/h : (a) le pied droit, (b) le pied gauche

Dans les modèles de foules sur des planchers rigides, il est habituel de modéliser la force latérale totale d'un piéton par son premier harmonique seul. Comme on peut le voir dans la figure 2.15, cette modélisation est assez restrictive et devient meilleure si on utilise plus d'harmoniques. Cependant, en supposant que le premier harmonique est le plus "influent" sur les passerelles qui ont une fréquence proche du  $Hz$  on peut estimer qu'une telle modélisation est raisonnable. De plus on a vu dans les tableaux 2.7, 2.8, 2.9 et 2.10, que le coefficient du premier harmonique pour la force latérale totale varie de 34,91 N à 42,29 N, la valeur 34,91 N correspondant à une vitesse de marche de 4,25 km/h qui est très proche de la vitesse de marche normale d'un piéton. Dans le modèle proposé dans cette thèse (voir chapitre 4), on approche la force engendrée par un piéton par son premier harmonique dont le coefficient est  $G = 35 N$ .

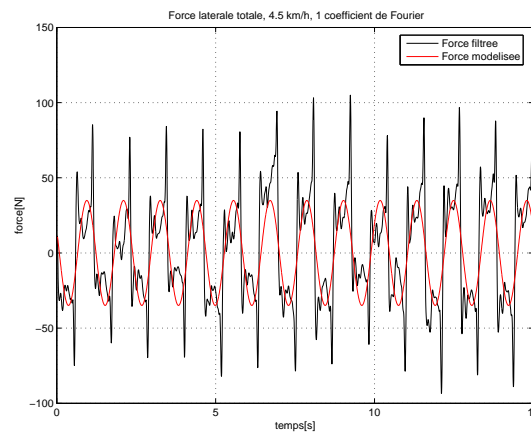


FIGURE 2.15. La force latérale totale pour une vitesse de marche de 4,5 km modélisée avec 1 harmonique

### 2.3.5 Conclusion

Dans cette partie, nous avons analysé des données transmises par Décathlon concernant les forces engendrées par la marche d'un piéton pour différentes vitesses. Certaines caractéristiques ont pu être mises en évidence, mais des incertitudes subsistent encore et des données supplémentaires seraient nécessaires pour pouvoir les éclaircir. Une analyse plus complète et portant sur plusieurs piétons (dont le piéton dont la force est analysée dans ce chapitre) est développée dans [79]. Cet article a été soumis et il est en révision au



moment de la rédaction de cette thèse. Il porte sur l'analyse de la force latérale engendrée par un piéton sur un plancher rigide.

## 2.4 Analyse des données de la passerelle Simone de Beauvoir

### 2.4.1 Introduction

La passerelle Simone de Beauvoir 2.16 est le 37-ème pont de Paris. Elle est située entre le pont de Bercy et le pont de Tolbiac et relie les 12-ème et 13-ème arrondissements de Paris. Elle a une longueur totale de 304m et une largeur de 12m [80].



FIGURE 2.16. *La passerelle de Simone de Beauvoir*

Des accords avec EIFFEL, RFR et le CSTB de Nantes nous ont permis de récupérer les données expérimentales d'essais réalisés par le CSTB. Dans la suite, on décrit les essais réalisés et les configurations étudiées, on présente l'analyse qu'on a faite sur un des signaux enregistrés et les différents résultats obtenus par cette analyse. On rappelle que cette étude a été faite dans le cadre du stage de Mastère de P.PECOL et que toute information supplémentaire peut être trouvée dans [69].

### 2.4.2 Description des essais

Plusieurs essais dynamiques ont été réalisés sur la passerelle Simone de Beauvoir afin de déterminer les fréquences et les amortissements des modes propres de la passerelle. Les modes à identifier sont ceux dont les fréquences se situent au-dessous de  $3Hz$ . La première série d'essais (mai 2006) a été réalisée sur la passerelle sans les amortisseurs, et la deuxième série (juin 2006) a été faite après que les amortisseurs ont été ajoutés (amortisseurs dynamiques accordés (ADA) et amortisseurs visqueux ou hydrauliques). Dans les deux cas, l'excitation de la passerelle est obtenue grâce à un balourd (actuateur inertiel) que l'on règle à la fréquence qu'on souhaite exciter. La réponse de la passerelle est obtenue grâce à un système d'acquisition composé de 9 accéléromètres placés sur les poutres maîtresses de la structure en quatre points dont les positions sont indiquées sur la figure 2.17. Ces points sont notés par A, B, C et D. En chacun de ces points un ou plusieurs accéléromètres sont placés afin de déterminer l'accélération de la passerelle dans les directions suivantes

- A : Aval vertical
- B : Aval vertical, amont vertical, aval latéral
- C : Aval vertical, amont vertical, aval latéral, aval axial
- D : Aval vertical

Position du balourd	Direction de l'excitation	Capteur de référence	Mode recherché
C-amont	verticale	5	2
C-amont	verticale	5	5
C-amont	verticale	5	9
Mi-chemin B-C centré	verticale	1	8
Mi-chemin B-C centré	verticale	1	12
B-aval	verticale	2	4
B-aval	verticale	5	5(B)
B-aval	verticale	1	6
B-aval	verticale	5	9(B)
B-aval	verticale	1	10
B-aval	verticale	2	11
C-centré	verticale	5	16
C-centré	verticale	5	17
C-centré	latérale	7	1
C-centré	latérale	7	3
C-centré	latérale	5	5(H)
C-centré	latérale	7	13
C-centré	latérale	7	15
C-centré	longitudinale	8	14

TABLEAU 2.15. Configurations étudiées pour les essais sans amortisseurs

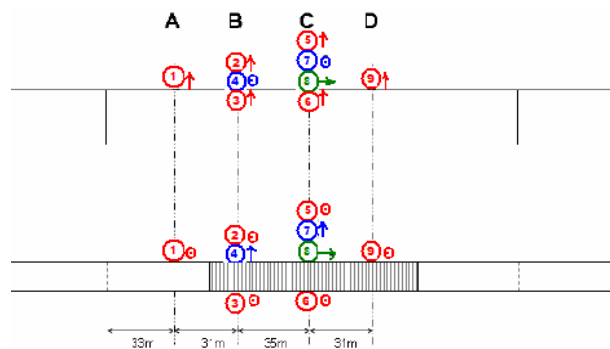


FIGURE 2.17. Coupe transversale de la passerelle de Simone de Beauvoir

Les signaux enregistrés correspondent aux accélérations de la passerelle après l'arrêt brutal des excitations (oscillations libres).

Pour les essais sans amortisseurs (mai 2006), plusieurs configurations ont été étudiées. Elles sont récapitulées dans le tableau 2.4.2. Les différents signaux ont été tracés et ceux qui ont des allures "réalistes" (amplitude qui décroît exponentiellement en fonction du temps) ont été retenus pour être analysés.

### 2.4.3 Explication du processus d'analyse

L'analyse des données de la passerelle Simone de Beauvoir a été faite avec un algorithme basé sur l'analyse en ondelettes présentée dans la partie 2.2.3. Ce programme a été développé au sein de l'équipe

“Dynamique des structures et Identification” de l’UR Navier. Dans cette partie on explique les étapes principales de la procédure utilisée en prenant comme exemple l’étude du mode 5 de la passerelle d’après les signaux enregistrés par les 6 accéléromètres verticaux.

1. Conversion des unités des accélération de *Volts* en  $m.s^{-2}$
2. Une interface d’aide pour l’utilisation du programme nous permet de choisir les signaux qui nous intéressent. Les signaux captés par les 6 accéléromètres verticaux sont tracés dans la figure 2.18.

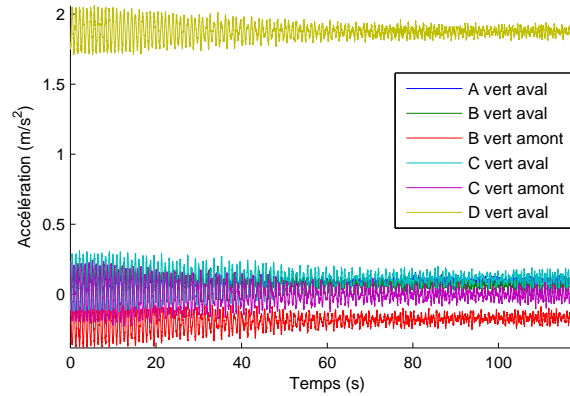


FIGURE 2.18. Les signaux enregistrés par les 6 accéléromètres

3. Tracé des transformées de Fourier des signaux (figure 2.19) avec un échantillonnage de  $50Hz$ . Les pics des transformées de Fourier de ces signaux sont tous situés à une fréquence d’environ  $1,15Hz$  pour le mode 5 considéré ici.

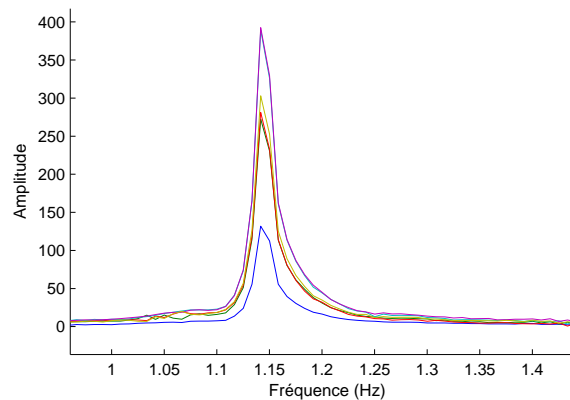


FIGURE 2.19. Les transformées de Fourier des signaux enregistrés par les 6 accéléromètres

4. Choix du capteur de référence : l’accéléromètre dont le signal a le pic de fréquence qui possède l’amplitude la plus élevée. Dans le cas présent c’est l’accéléromètre 5.
5. Obtention d’une liste des différents pics de la FFT en fonction de leur amplitude. Les fréquences associées à ces pics sont aussi indiquées. On choisit le nombre de modes à analyser (un seul dans ce cas) et l’indice du pic qui nous intéresse.
6. Choix de la bande de fréquences à étudier (elle doit bien encadrer le pic de fréquence qui nous intéresse, dans ce cas  $[1Hz ; 1,3Hz]$ ), de la fréquence prévue (ici  $1,15Hz$  obtenue par la FFT du capteur de référence), et de la fréquence voisine à éviter (dans ce cas  $1,3Hz$ ).

7. Choix du facteur de qualité :  $Q_{min} < Q < Q_{max}$ ,  $Q_{min}$  et  $Q_{max}$  étant calculés par l'algorithme.  $Q$  doit être légèrement supérieur à  $Q_{min}$  pour avoir le maximum d'informations. Dans ce cas,  $Q_{min} = 19$ ,  $Q_{max} = 89$  et on a choisi  $Q = 30$ .
8. Les paramètres de l'ondelette de Cauchy sont calculés automatiquement par le programme.
9. Obtention des graphiques des figures 2.20. Chacune des figures de 2.20 est formée de trois tracés : la TF (en haut à gauche), la TO avec les hyperboles rouges de l'effet de bord (en haut à droite) et le signal de l'accélération (en bas à droite).
10. Extraction des arêtes avec l'algorithme du Crazy Climber. On peut voir dans la figure 2.21 l'arête de la transformée en ondelettes du signal enregistré par l'accéléromètre positionné en  $A$  vertical et en aval.
11. Détermination de la fréquence, du taux d'amortissement et des déformées modales d'après les critères d'identifications expliqués dans 2.2.3. Les caractéristiques permettant l'identification des paramètres de la structure sont présentées dans la figure 2.22.
12. Les résultats obtenus sont présentés dans le Tableau 2.16 et les déformées modales sont tracées dans la figure 2.4.3.

Signal	Modes complexes identifiés	Fréquences naturelles [Hz]	Taux d'amortissement modal
1	$-0,3283 + 0,0144i$	1,14542	0,0033
2	$-0,6838 + 0,02921i$	1,14544	0,0032
3	$0,7016 - 0,0350i$	1,14531	0,0032
4	$-0,9759 + 0,0449i$	1,14536	0,0032
5	$0,9871 - 0,0465i$	1,14544	0,0032
6	$-0,7548 + 0,0768i$	1,14528	0,0032

TABLEAU 2.16. *Les modes complexes identifiés, les fréquences naturelles et le taux d'amortissement modal trouvé pour chaque signal étudié*

#### 2.4.4 Résultats des analyses pour les données obtenues sur la passerelle non amortie

Dans cette partie, on récapitule les résultats obtenus par l'analyse en ondelettes sur les différents signaux traités. Ces résultats sont regroupés dans le tableau 2.17. Pour le mode 5, deux valeurs sont données, ceci est dû au fait que deux essais ont été réalisés pour le même mode.

Modes	Direction capteurs	Fréquences propres [Hz]	Taux d'amortissements[%]	Méthodes CSTB (2) Freq[Hz]/Amort[%]	Type
1	verticale			0,550/0,561	Flexion latéral
	latéral	0,56	0,489	0,559/0,558	
	longitudinal				
2	verticale	0,716	0,288	0,717/0,278	Flexion verticale
	latéral			0,716/0,280	
	longitudinal				
5	vertical	1,149 – 1,144	0,288 – 0,292	1,154/0,275	Torsion
	latéral	1,149 – 1,145	0,292 – 0,317	1,149/0,322	
	longitudinal				
6	vertical	1,526	0,151	1,525/0,166	Torsion-Flexion
	latéral	1,526	0,133	1,526/0,169	
	longitudinal				
8	vertical	1,778	0,195	1,770/0,178	Flexion verticale
	latéral			1,777/0,18	
	longitudinal	1,78	0,24		
9	vertical	1.641	0.211	1,642/0,214	Flexion verticale
	latéral			1,641/0,214	
	longitudinal	1,64	0,21		
10	vertical	2,135	0,135	2,142/0,137	Flexion verticale
	latéral			2,135/0,130	
	longitudinal	2,13	0,15		
11	vertical	2,212	0,355	2,208/0,306	Torsion
	latéral	2,212	0,315	2,209/0,297	
	longitudinal				
12	vertical	2,347	0,175	2,350/0,171	Flexion verticale
	latéral	2,347	0,166	2,3447/0,168	
	longitudinal	2,35	0,17		
17	vertical	2,947	0,334	2,922/0,303	Flexion verticale
	latéral			2,922/0,315	
	longitudinal	2,95	0,29		

TABLEAU 2.17. Résultats de l'analyse par ondelettes sur la passerelle Simone de Beauvoir non amortie

## 2.5 Analyse des données de la passerelle en laboratoire de l'Association Française de Génie Civil (AFGC)

### 2.5.1 Introduction

Des essais ont été réalisés par l'AFGC sur une passerelle de laboratoire. Ces essais se sont déroulés au Laboratoire Régional de l'Est Parisien (LREP) sur le site du Bourget en 2003 et 2004. Ils ont pour but de déterminer l'excitation piétonne sur une passerelle.

On commence par décrire les essais réalisés, puis on présente les caractéristiques modales de la structure selon la configuration choisie.

### 2.5.2 Description des essais

La passerelle (figure 2.24) est formée d'une dalle (figure 2.25-a) suspendue en quatre points à deux portiques par l'intermédiaire de lames de flexion (figure 2.25-b). La longueur de ces lames peut être modifiée et des couches supplémentaires de béton peuvent être ajoutées de sorte à changer la fréquence propre de la structure. Trois configurations ont été étudiées :

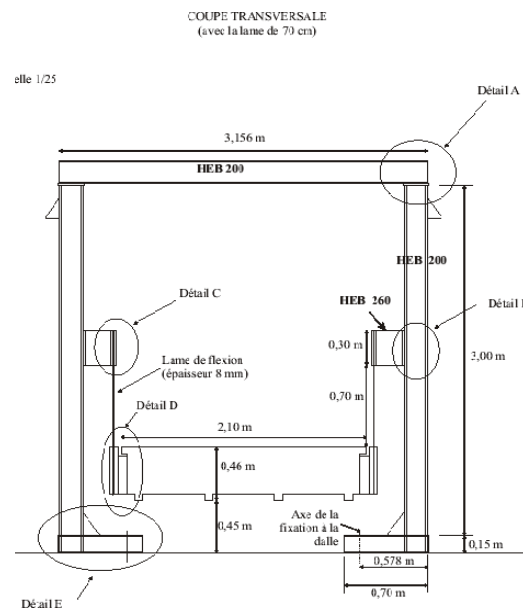


FIGURE 2.24. Coupe transversale de la passerelle de l'AFGC

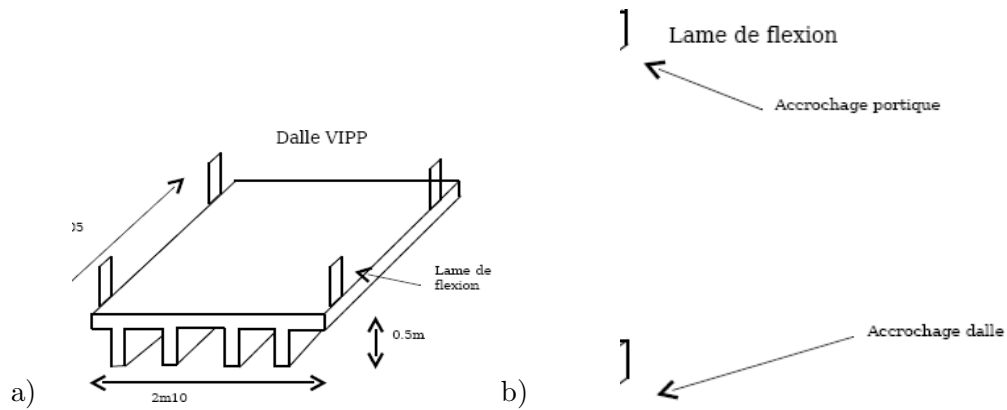


FIGURE 2.25. (a) Dalle utilisée pour passerelle de l'AFGC, (b) Lame de flexion utilisée pour passerelle de l'AFGC

1. dalle de masse  $4,4t$  avec des lames de  $1m$  de longueur pour obtenir des fréquences autour de  $0,5Hz$
2. dalle de masse  $4,4t$  avec des lames de  $0,7m$  de longueur pour obtenir des fréquences autour de  $1,1Hz$
3. dalle de masse  $4,4t$  avec  $10\text{ cm}$  supplémentaires de béton afin d'avoir une masse de  $8t$ , et des lames de  $0,7m$  de longueur pour obtenir des fréquences autour de  $0,95Hz$ .

La maquette est munie de 2 accéléromètres et de 2 capteurs de déplacement (figure 2.26) afin d'enregistrer ses accélérations et ses déplacements latéraux, et d'un accéléromètre permettant de contrôler les accélérations longitudinales [25]. Comme la conception de la structure permet les mouvements de torsion, les capteurs pour les accélérations et les déplacements latéraux sont placés à chaque extrémité de la passerelle, symétriquement par rapport à son milieu, afin d'éliminer les effets de ces mouvements par sommation.



POSITIONNEMENT DES CAPTEURS

FIGURE 2.26. Coupe transversale de la passerelle de l'AFGC

## 2.6 Détermination des fréquences propres et de l'amortissement structural du dispositif

Pour déterminer la fréquence et l'amortissement de la passerelle pour chaque configuration, on a utilisé la méthode de la transformation en ondelettes présentée dans le paragraphe 2.2.3 en appliquant le protocole détaillé dans le paragraphe 2.4.3.

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.18 pour le mouvement latéral et dans le tableau 2.19 pour le mouvement de torsion.



	Fréquence [Hz]	Amortissement	Résultats trouvés par le AFGC Fréquence [Hz]/Amortissement
Configuration 1	0,529	0,0010	0,54/0,0013
Configuration 2	1,123	0,0041	1,12/0,004
Configuration 3	0,946	0,0036	0,95/0,004

TABLEAU 2.18. *Fréquence propre et taux d'amortissement modal pour le déplacement latéral*

	Fréquence [Hz]	Fréquence trouvée par l'AFGC [Hz]
Configuration 1	1,292	1,27
Configuration 2	2,246	2,15
Configuration 3	1,891	1,88

TABLEAU 2.19. *Fréquence propre pour le déplacement en torsion*

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé des analyses sur différentes données expérimentales. Après avoir introduit les outils mathématiques permettant ces différentes analyses, on a détaillé l'étude réalisée sur la force engendrée par un seul piéton sur un plancher rigide. Nous avons ensuite présenté l'analyse faite sur la passerelle Simone de Beauvoir ainsi que les résultats obtenus et les résultats de l'analyse de la passerelle en laboratoire élaborée par l'AFGC.

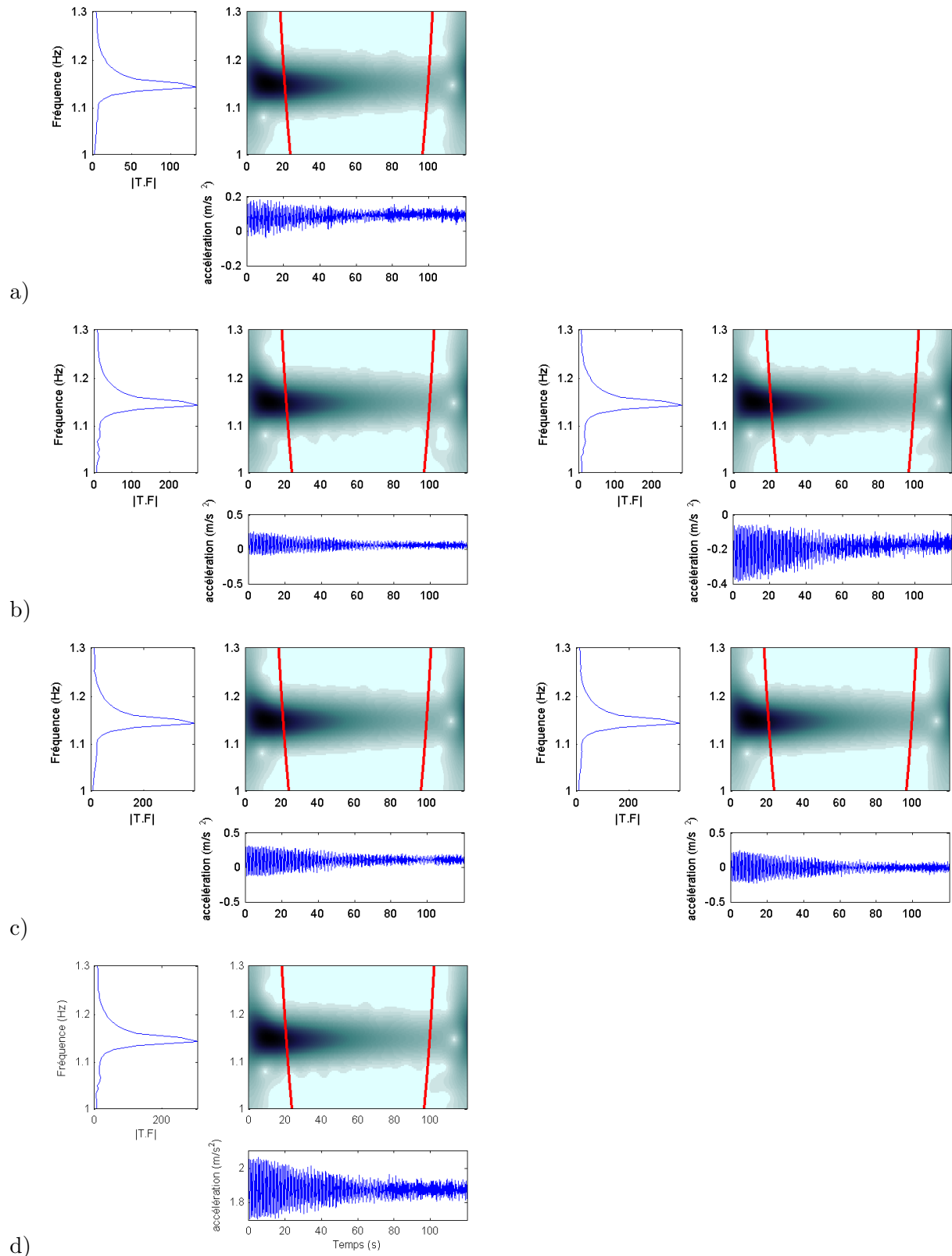


FIGURE 2.20. Les graphiques obtenus par l'algorithme des transformées en ondelettes pour les signaux captés par les accéléromètres suivants : a)l'accéléromètre en A vertical en aval, b)l'accéléromètre en B vertical en aval à gauche et en amont à droite, c)l'accéléromètre en C vertical en aval à gauche et en amont à droite, d)l'accéléromètre en D vertical en aval

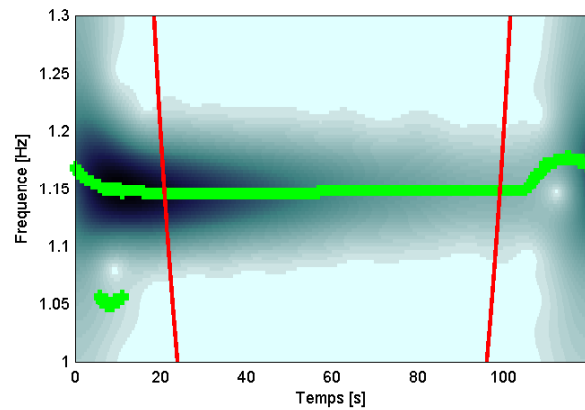


FIGURE 2.21. Extraction de l'arête de la transformée en ondelettes du signal obtenu par l'accéléromètre positionné en A vertical et en aval

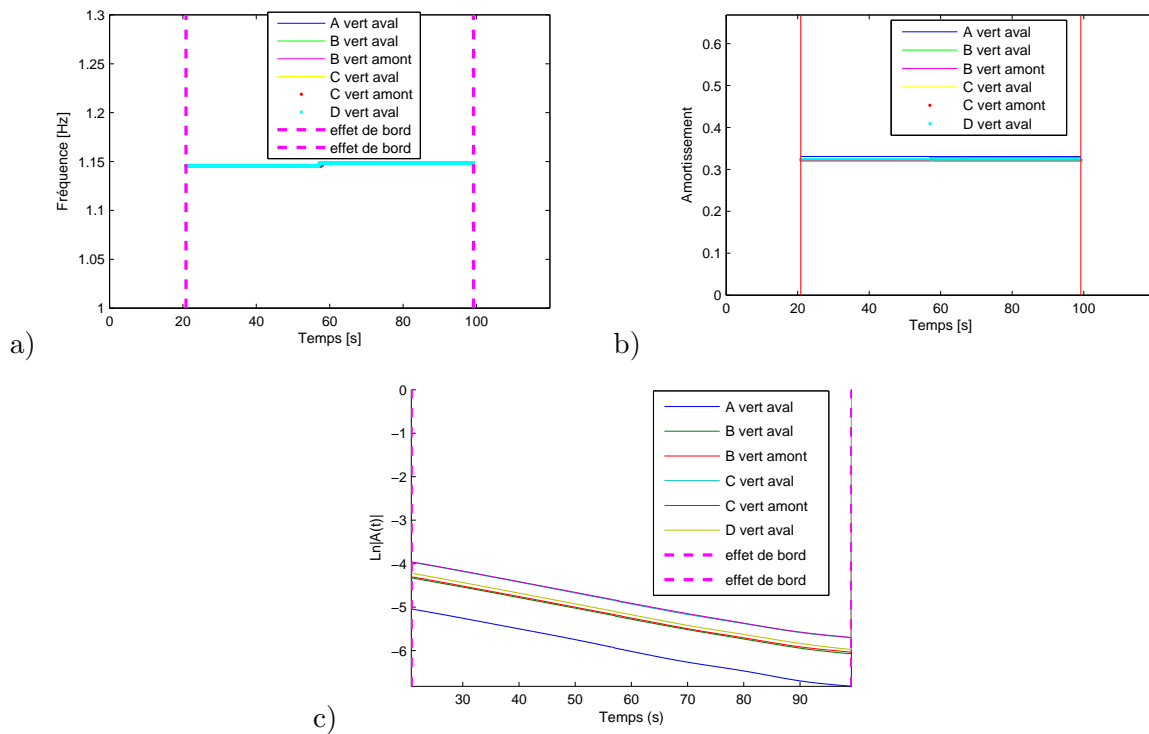


FIGURE 2.22. Résultats permettant la détermination des paramètres de la structure selon le protocole expliqué dans 2.2.3 : (a) les fréquences instantanées, (b) les amortissements instantanés, (c) le logarithme des amplitudes instantanées

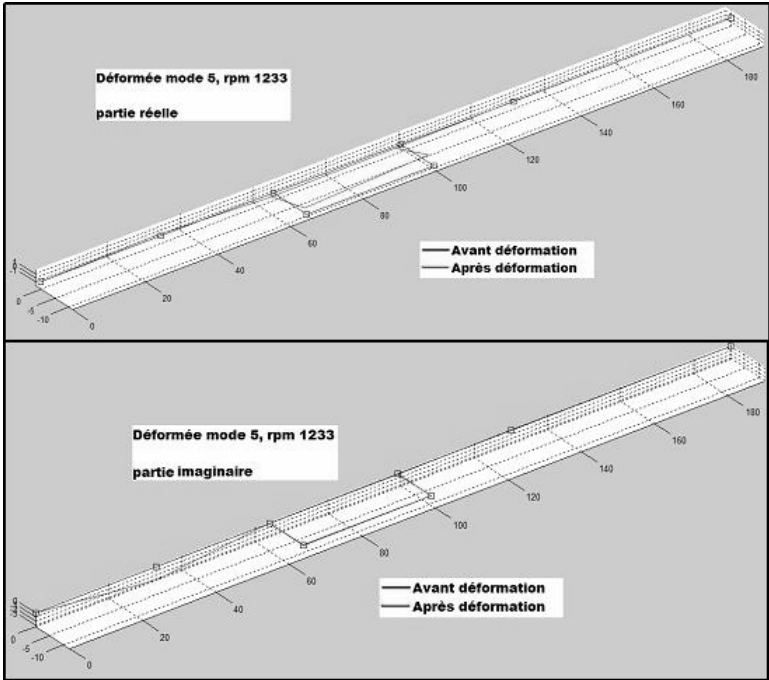


FIGURE 2.23. Les déformées modales du mode 5 : la partie réelle dans la figure du haut et la partie imaginaire dans la figure du bas



## Chapitre 3

# Outils théoriques

---

*CE CHAPITRE a pour objectif de présenter les différentes équations utilisées dans l'élaboration de notre modèle. On présente :*

- ★ l'équation de la dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli*
  - ★ l'équation de transport*
  - ★ l'équation de conservation de la masse*
  - ★ le phénomène de synchronisation et l'équation de Kuramoto*
-

---

 PLAN DU CHAPITRE 3
 

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>95</b>
<b>3.2</b>	<b>Equation de la dynamique d'une poutre d'Euler Bernoulli</b>	<b>95</b>
<b>3.3</b>	<b>Equation de transport</b>	<b>97</b>
3.3.1	Equation de Burger(inviscid)	98
<b>3.4</b>	<b>Equation de conservation de la masse</b>	<b>99</b>
<b>3.5</b>	<b>La synchronisation</b>	<b>99</b>
3.5.1	Introduction	99
3.5.2	L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés	99
3.5.3	Définition de la synchronisation	103
3.5.4	Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure	106
3.5.5	Mise en équations	107
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>110</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on introduit les principales équations qui constituent le modèle d'interaction foule-structure retenu dans cette thèse. Leur interprétation physique est explicitée et certaines solutions particulières illustrées. On commence par introduire l'équation de la dynamique pour une poutre d'Euler Bernoulli dans la section 3.2. L'équation de transport est analysée dans la section 3.3 et l'équation de conservation de la masse dans 3.4. Enfin dans la section 3.5 on explique le phénomène de synchronisation et l'équation de synchronisation de Kuramoto.

Dans ce qui suit, on note par  $x$  la variable en espace (1D) et  $t$  la variable temps.

### 3.2 Equation de la dynamique d'une poutre d'Euler Bernoulli

On présente dans cette partie l'équation de la dynamique d'une poutre d'Euler-Bernoulli sur appuis simples. Ces explications sont tirées de [81]. La modélisation du comportement de cette poutre nous permettra dans le chapitre suivant de modéliser le déplacement de la passerelle projeté sur le mode latéral dont la fréquence propre est la plus proche de la fréquence de la force latérale des piétons.

Dans la suite de ce paragraphe, les indices  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont relatifs respectivement aux directions longitudinale, latérale et verticale.

On note  $\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_x(x, y, z, t), u_y(x, y, z, t), u_z(x, y, z, t))$  le déplacement d'un point  $M(x, y, z)$  de la poutre à l'instant  $t$ . On suppose que cette dernière a un axe rectiligne parallèle à l'axe des  $x$  et qu'elle ne subit pas de torsion. Les déplacements de la poutre peuvent être décrits à partir du déplacement de son axe neutre  $w(x, t)$  :

$$\mathbf{u}(x, t) = (u_x(x, t), u_y(x, t), u_z(x, t))$$

Le comportement de la poutre vérifie l'équation différentielle d'Euler-Bernoulli où on a ajouté un terme dissipatif caractérisé par  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t)$  :

$$\mathbf{E}\mathbf{J} \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial x^4}(x, t) + \boldsymbol{\mu} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x, t) + 2\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\xi}_b \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) = \mathbf{p}(x, t) \quad (3.1)$$

où

$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$  est le vecteur module d'Young de la poutre

$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  est le vecteur moment d'inertie de la poutre

$\boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$  est le vecteur masse linéique de la poutre

$\boldsymbol{\zeta}_b = (\zeta_{bx}, \zeta_{by}, \zeta_{bz})$  est le vecteur des amortissements de la poutre

$\mathbf{p}(x, t) = (p_x, p_y, p_z)(x, t)$  est le chargement appliqué à la poutre

Dans ce qui suit, on se limite au déplacement latéral de la poutre. Dans l'équation de la dynamique (3.1) on ne garde alors que les termes ayant un indice  $y$ . Pour plus de simplicité dans les notations, on omet l'indice  $y$  dans les variables. En supposant que  $E$  et  $J$  sont constants le long de la poutre, l'équation de la dynamique devient :

$$EJ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + 2\mu\xi_b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = p(x, t) \quad (3.2)$$

$L$  étant la longueur de la poutre, les conditions aux bords sont données par :

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \Big|_{x=L} = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$



Soit  $\vartheta(x)$  une fonction test arbitraire appartenant à  $D([0, L])$  où  $D([0, L])$  est l'espace des fonctions continues, indéfiniment dérivables et à support compact dans  $[0, L]$ . On multiplie (3.2) par  $\vartheta(x)$  et on intègre par rapport à  $x$  entre 0 et  $L$ . Après avoir fait quatre intégrations par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} EJ \int_0^L u(x, t) \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4}(x) dx + \int_0^L \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \vartheta(x) dx + 2 \int_0^L \mu \xi_b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \vartheta(x) dx \\ = \int_0^L p(x, t) \vartheta(x) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

On note  $\psi_j(x)$  les formes modales de la poutre. La norme infinie de ces formes modales est

$$\|\psi_j\|_\infty = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_+^* \quad (3.5)$$

Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli  $\psi_j(x) = \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$  et leur norme  $L^2$  est :

$$\|\psi_j\|_2 = \frac{L}{2} \quad \forall j \in \mathbb{N}_+^* \quad (3.6)$$

Il est clair que  $\psi_j(x) \in D([0, L])$ . En prenant  $\vartheta(x) = \psi_j(x)$ , l'équation (3.4) devient :

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \int_0^L u(x, t) \psi_j(x) dx + \int_0^L \mu(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \psi_j(x) dx \\ + 2 \int_0^L \mu(x) \xi_b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \psi_j(x) dx = \int_0^L p(x, t) \psi_j(x) dx \end{aligned} \quad (3.7)$$

On cherche la solution  $u(x, t)$  sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t) \psi_k(x) \quad (3.8)$$

où  $U_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \psi_k(x) \psi_k(x) dx$ . En remplaçant dans (3.7) on a :

$$\begin{aligned} EJ \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(t) \int_0^L \psi_k(x) \psi_j(x) dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \ddot{U}_k(t) \int_0^L \mu(x) \psi_k(x) \psi_j(x) dx \\ + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \dot{U}_k(t) \int_0^L \mu(x) \xi_b \psi_k(x) \psi_j(x) dx = \int_0^L p(x, t) \psi_j(x) dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

Adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \int_0^L \mu(x) \psi_j(x) \psi_k(x) dx \\ C_{jk} &= 2 \int_0^L \mu(x) \xi_b \psi_j(x) \psi_k(x) dx \\ K_{jk} &= EJ \left(\frac{j\pi}{L}\right)^4 \int_0^L \psi_j(x) \psi_k(x) dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.9) s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} M_{jk} \ddot{U}_k(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} C_{jk} \dot{U}_k(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} K_{jk} U_k(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_j(x) dx \quad (3.11)$$

On suppose que les modes sont découplés (hypothèse de Basile sur l'amortissement). Ceci induit que :

$$M_{jk} = \delta_{jk} M_{jj}, \quad C_{jk} = \delta_{jk} C_{jj}, \quad K_{jk} = \delta_{jk} K_{jj} \quad (3.12)$$

L'équation (6.3) devient :

$$M_{jj} \ddot{U}_j(t) + C_{jj} \dot{U}_j(t) + K_{jj} U_j(t) = \int_0^L p(x, t) \psi_j(x) dx \quad (3.13)$$

Dans la suite de cette thèse, on se limite à un seul mode qu'on supposera être le premier. Par souci de clareté on note :

$U(t) = U_1(t)$  le déplacement latéral modal sur le mode 1

$M = M_{11}$  la masse modale sur le mode 1

$C = C_{11}$  l'amortissement modal sur le mode 1

$K = K_{11}$  la rigidité modale sur le mode 1

L'équation différentielle adoptée par la suite est alors :

$$M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = \int_0^L p(x,t)\psi_1(x)dx \quad (3.14)$$

### 3.3 Equation de transport

Dans une foule, la fréquence de marche libre est différente d'un piéton à l'autre. Il faut donc "transporter" cette quantité avec la foule de piétons et ceci est possible grâce à l'équation de transport qu'on explique dans ce paragraphe.

L'équation de transport d'une quantité  $\varrho(x,t)$  avec une vitesse  $v(x,t)$  s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t) + v(x,t)\frac{\partial \varrho}{\partial x}(x,t) = 0 \quad (3.15)$$

Dans le cas simple où la vitesse est constante  $v(x,t) = c$  l'équation de transport se réduit à :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial \varrho}{\partial x}(x,t) = 0 \quad (3.16)$$

On note  $\varrho_0(x) = \varrho(x,0)$  la condition initiale. La solution de l'équation (3.16) est donnée par  $\varrho(x,t) = \varrho_0(x - ct)$ . Ainsi, comme son nom l'indique, l'équation de transport a pour but de représenter le transport d'une quantité donnée sur l'espace. Dans le cas d'une vitesse constante, aucune modification n'intervient sur cette quantité. Dans la suite, on présente quelques exemples de solutions de l'équation (3.15).

Supposons que la vitesse est constante et a pour valeur  $v(x,t) = 1m/s$ . Soit  $x \in [0,100]$ . On considère la condition initiale suivante :

$$\varrho_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.17)$$

et la condition au bord :

$$\varrho(0,t) = 0 \quad \forall t > 0 \quad (3.18)$$

L'évolution de  $\varrho$  est donnée par la figure

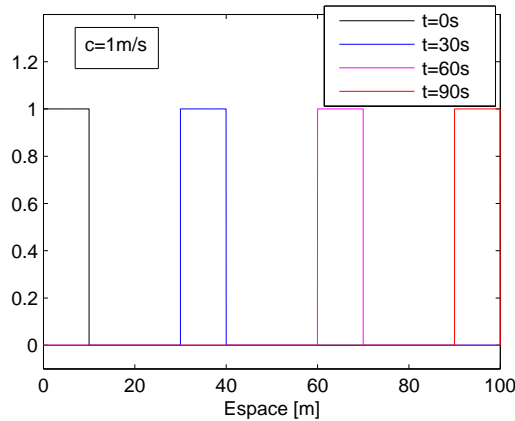


FIGURE 3.1. Solutions exactes du système d'équations (3.16), (3.17), (3.18)

On étudie maintenant le cas où la vitesse n'est pas constante (équation (3.15)). On suppose que  $x \in [-20, 20]$  et on considère la condition initiale suivante :

$$\varrho_0(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.19)$$

Dans le cas où la vitesse est donnée par :

$$v(x, t) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

et en supposant que la condition en  $x = 0$  est :

$$\varrho(0, t) = 1 \quad \forall t > 0 \quad (3.21)$$

la solution de l'équation (3.15) avec la condition initiale (3.19) s'écrit sous la forme :

$$\varrho(x, t) = \begin{cases} \varrho_0(x - t) & \text{si } x \geq t \\ \varrho_0(0) & \text{si } -t \leq x \leq t \\ \varrho_0(x + t) & \text{si } x \leq -t \end{cases} \quad (3.22)$$

La figure 3.2 est une représentation de la solution (3.22).

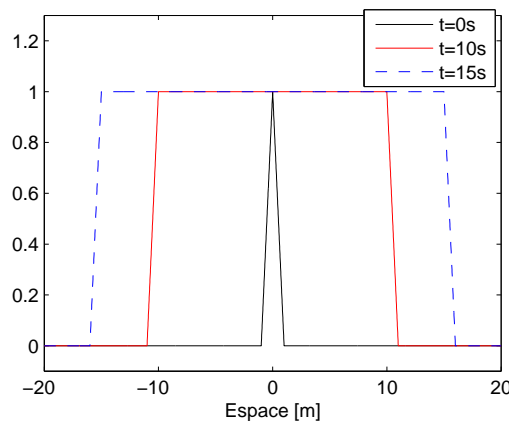


FIGURE 3.2. Solutions exactes de l'équation (3.15), avec la condition initiale (3.19), la vitesse (3.20) et la condition en  $x = 0$  (3.21)

Pour des vitesses et des conditions initiales ayant des expressions plus complexes, il est difficile, et souvent quasiment impossible de trouver une solution analytique à l'équation de transport.

### 3.3.1 Equation de Burger (inviscid)

L'équation de Burger est un cas particulier de l'équation de transport. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (3.23)$$

Cette équation aux dérivées partielles est non linéaire. Sa résolution numérique permet la résolution de l'équation de transport 3.15 comme ceci est expliqué dans le chapitre 6.

Remarque : Nous avons recherché dans la littérature une solution analytique pour l'équation de Burger bien qu'on ne l'ait pas exploitée dans le cadre de cette thèse. Soit la condition initiale  $\varrho(x, 0) = f(x)$ ,  $f$

étant continue et périodique en  $x$ . Comme on peut le voir, l'équation de Burger ressemble à l'équation de transport, mais la vitesse est remplacée par la variable elle-même, comme si la vitesse de déplacement de la quantité étudiée a une valeur "égale" à celle de cette quantité. Une solution "implicite" de cette équation est  $\varrho(x, t) = f(x - \varrho(x, t)t)$  [82]. A  $t = 0$ , cette solution doit vérifier la condition initiale. De plus, une différentiation implicite par rapport à  $x$  montre que l'EDP est satisfaite pour  $t > 0$ . On suppose, sans manque de généralité, que la période de la fonction  $f$  est égale à  $2\pi$ . Dans [82] les auteurs proposent la solution suivante jusqu'à l'instant de singularité :

$$\varrho(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(t)\cos(nx) + b_n(t)\sin(nx)) \quad (3.24)$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) dz \\ a_n(t) &= \frac{1}{\pi n t} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nz + nt f(z)) dz \\ b_n(t) &= -\frac{1}{\pi n t} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nz + nt f(z)) dz \end{aligned}$$

### 3.4 Equation de conservation de la masse

Dans ce paragraphe, on présente l'équation de conservation de la masse. Elle va permettre la modélisation de l'évolution de la densité des piétons sur la passerelle.

Cette équation est surtout utilisée en mécanique des fluides. Elle formalise en une équation aux dérivées partielles l'idée suivante : le fluide n'est ni créé ni détruit. En notant par  $\varrho(x, t)$  la densité du fluide et par  $v(x, t)$  sa vitesse, l'équation de conservation de la masse s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (3.25)$$

Dans le cas particulier où la vitesse  $v(x, t)$  est constante, l'équation de conservation de la masse se ramène à une équation de transport (3.16).

## 3.5 La synchronisation

### 3.5.1 Introduction

Dans cette partie, on explique le phénomène de synchronisation et on donne l'expression de l'équation de Kuramoto utilisée dans le chapitre 4 pour représenter le comportement de la foule. On commence par introduire des oscillateurs particuliers nécessaires pour que la synchronisation ait lieu : les oscillateurs auto-entretenus. Ensuite, on définit qualitativement ce phénomène tout en précisant les situations que l'on peut confondre avec une synchronisation mais qui ne le sont pas. Par la suite, on cite les différents types de synchronisation possibles. Puis on explique, avec plus de détails, un cas particulier où un oscillateur auto-entretenu est soumis à l'action d'une force extérieure, et enfin on introduit les équations qui régissent ce cas de synchronisation. Ces explications sont tirées de [54]. Les lecteurs souhaitant plus de détails peuvent s'y référer.

### 3.5.2 L'oscillateur auto-entretenu et ses propriétés

#### 3.5.2.1 Définition d'un oscillateur auto-entretenu

Afin de bien définir le phénomène de synchronisation, il convient de commencer par présenter des oscillateurs particuliers qu'on appelle oscillateurs auto-entretenus :

- Un oscillateur auto-entretenu est un système actif. Il contient une source interne d'énergie qui génère son mouvement oscillatoire. Lorsque l'oscillateur est isolé, ses oscillations continuent au même rythme jusqu'à l'épuisement de la source d'énergie et son comportement ne dépend pas explicitement du temps. On dit alors que c'est un système dynamique autonome.
- Les caractéristiques des oscillations (amplitude, fréquence) sont déterminées par les paramètres internes de l'oscillateur et ne dépendent ni de la façon dont elles ont été déclenchées, ni de la réponse transitoire de l'oscillateur après leur déclenchement.
- Les oscillations sont stables aux perturbations relativement faibles : si une action extérieure à l'oscillateur vient perturber ses oscillations, après la perturbation, les oscillations reprennent leur forme initiale.

Par exemple, une horloge à pendule est un oscillateur auto-entretenu. L'énergie potentielle du poids suspendu est transformée en mouvement oscillatoire du pendule. Cette oscillation est transférée en une rotation des aiguilles de l'horloge. Le mécanisme prend donc l'énergie de la source et maintient une oscillation stable du pendule jusqu'à l'épuisement de la source d'énergie. Ces oscillations sont entièrement déterminées par les paramètres internes de l'horloge et ne dépendent pas de la façon dont le pendule a été mis en mouvement. De plus, elles ne sont pas influencées par les perturbations faibles ; en effet si une impulsion extérieure perturbe le mouvement du pendule, les oscillations reprennent leur rythme initial après avoir traversé une période transitoire.

### 3.5.2.2 Caractérisation d'un rythme : période et fréquence

Le mouvement d'un oscillateur auto-entretenu est périodique, et sa caractéristique principale est sa période  $T$ . On caractérise le rythme des oscillations par leur fréquence cyclique

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

La pulsation ou fréquence angulaire est donnée par

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

On verra par la suite que la fréquence ou la pulsation d'un oscillateur peut être modifiée à cause d'une action extérieure sur l'oscillateur ou à cause de son interaction avec un autre oscillateur. Pour éviter les confusions, la fréquence et la pulsation d'un oscillateur lorsqu'il est autonome (non soumis à une action extérieure) sont appelées fréquence et pulsation naturelle ou propre ou libre.

### 3.5.2.3 Image géométrique d'oscillateurs auto-entretenus périodiques : cycle limite

Un oscillateur auto-entretenu génère un processus périodique  $x(t)$ .  $x(t)$  seul ne permet pas de décrire l'état de l'oscillateur à un instant donné puisqu'à priori, on ne sait pas dans quel sens  $x(t)$  varie. D'où l'intérêt d'introduire une deuxième variable  $y(t)$ . Dans le cas d'un pendule par exemple,  $x(t)$  est l'angle qu'il forme avec la verticale, et  $y(t) = \dot{x}(t)$  est sa vitesse angulaire. L'évolution du couple  $(x(t), y(t))$  décrit le comportement du pendule et  $x(t)$  et  $y(t)$  sont appelés les coordonnées dans l'espace des phases.

Soit  $G(x(t), y(t))$  la courbe représentant  $y(t)$  en fonction de  $x(t)$ . Un point de la courbe  $G(x(t), y(t))$  est appelé point de phase. Dans le cas d'oscillations périodiques,  $G(x(t), y(t))$  est une courbe fermée appelée **cycle limite**  $\mathcal{C}_\ell$  : il est déterminé par les paramètres internes de l'oscillateur. Le cycle limite "attire" les trajectoires qui sont dans son voisinage. En effet, si un point de  $G(x(t), y(t))$  est au voisinage de  $\mathcal{C}_\ell$ , cela revient à dire que le mouvement périodique de l'oscillateur a été faiblement perturbé. Or l'oscillateur étant auto-entretenu, il retrouve son rythme initial après une période transitoire. Ceci se traduit dans le plan de phases par la convergence de la courbe  $G(x(t), y(t))$  vers le cycle limite.

Dans le cas particulier où le processus périodique est un *sinus*, l'oscillateur est dit **quasilinear** ou **quasiharmonique** et le cycle limite est un cercle.

### 3.5.2.4 Phase : définition et propriétés

#### L'amplitude est stable, la phase est libre

On considère un oscillateur quasilinear. Le processus  $x(t)$  qu'il engendre s'écrit sous la forme :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (3.26)$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$  : fréquence angulaire ou pulsation

$T_0$  : période des pulsations

$f_0 = \frac{1}{T_0}$  : fréquence (cyclique) des oscillations

$A$  : amplitude des oscillations

$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0$  : phase totale des oscillations

La phase totale n'est pas bornée, mais on peut la ramener à l'intervalle  $[0, 2\pi[$  grâce à la périodicité de la fonction *sinus*.  $\phi_0$  est la phase initiale, elle correspond à la réponse transitoire de l'oscillateur lorsqu'il a été mis en mouvement. Dans le cas où on ne s'intéresse qu'au régime stationnaire,  $\phi_0$  ne joue aucun rôle et peut donc être modifiée en changeant l'instant initial.

Dans le plan de phase, le cycle limite d'un oscillateur quasilinear est représenté par un cercle de rayon  $A$ . Le point de phase se déplace sur ce cercle avec une vitesse angulaire  $\omega_0$ , et la droite qui le relie au centre du cercle, forme avec l'axe des abscisses un angle égal à  $\phi(t)$  (3.3-a).  $T_0$  est le temps nécessaire pour que le point de phase réalise un tour complet. Les coordonnées polaires du point de phase sont  $(A, \phi(t))$ .

#### Stabilité d'un point de phase sur le cycle limite : que se passe-t-il si on perturbe légèrement les oscillations d'un oscillateur auto-entretenu ?

Pour mieux illustrer cette partie, on se ramène à un repère qui effectue une rotation avec une vitesse angulaire  $\omega_0$ . Les coordonnées du point de phase dans le nouveau repère sont donc  $(A, \phi(t) - \omega_0 t)$ . Dans le régime stationnaire, les coordonnées seront donc  $(A, \phi_0)$  et le point de phase est fixe. Une perturbation consiste alors à déplacer le point de phase en dehors du cycle limite (3.3-b) :

- Si l'amplitude est perturbée, celle-ci revient à sa valeur initiale  $A$ .
- Si la phase est perturbée, elle garde sa nouvelle valeur : en effet, comme toutes les valeurs initiales sont équivalentes, cela revient à changer  $\phi_0$  en  $\phi_1$ . La phase conserve alors cette nouvelle valeur jusqu'à ce que une nouvelle perturbation ait lieu.

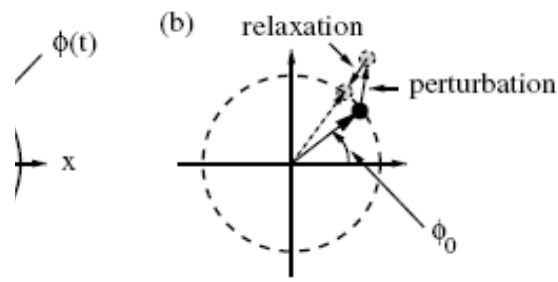


FIGURE 3.3. (a) Cycle limite dans le plan de phases (repère fixe), (b) stabilité d'un point de phase sur le cycle limite (repère tournant)

Dans le cas général d'un oscillateur ayant une période  $T_0$ , la phase est donnée par

$$\phi(t) = \phi_0 + 2\pi \frac{t - t_0}{T_0} \quad (3.27)$$

où  $t_0$  est un instant initial arbitraire. L'amplitude est la variable qui caractérise la déviation transversale par rapport au cycle limite.

### 3.5.2.5 Propriétés d'un oscillateur auto-entretenu : dissipation, stabilité et non-linéarité

Dans ce paragraphe, on cite les principales propriétés d'un oscillateur auto-entretenu.

**Dissipation** : les systèmes macroscopiques naturels dissipent leur énergie. A moins qu'ils soient constamment alimentés en énergie, leurs oscillations diminuent jusqu'à s'arrêter. Un oscillateur auto-entretenu doit donc posséder une source d'énergie interne.

**Stabilité** : la stabilité des oscillateurs auto-entretenus permet de les différencier des oscillateurs conservatifs. En effet, un oscillateur conservatif a un mouvement périodique, mais ne dissipe pas de l'énergie ni n'en gagne. Dans le plan des phases, les oscillations sont représentées par un ensemble de courbes fermées (3.4). Ainsi, si le système subit une perturbation, celle-ci persiste et donc la valeur de l'énergie perturbée est conservée; le système n'oublie donc pas ses conditions initiales. Par conséquent, les oscillations dépendent de la manière dont elles ont été déclenchées, ce qui n'est pas le cas d'un oscillateur auto-entretenu.

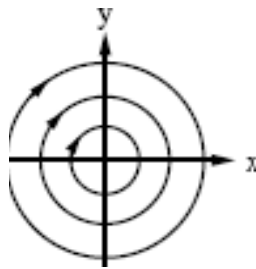


FIGURE 3.4. *Oscillateur conservatif*

**Non-linéarité** : la non-linéarité est essentielle dans le maintien d'un cycle limite stable d'oscillations. La stabilité équivaut à dire que le mouvement périodique existe uniquement avec une amplitude donnée. Les équations qui régissent le mouvement des oscillateurs linéaires sont évidemment linéaires. Ainsi, si  $x(t)$  est une solution périodique de ces équations, pour tout facteur  $a$ ,  $ax(t)$  est aussi une solution périodique ce qui est contraire à la définition de la stabilité. D'où la nécessité de la non-linéarité pour le maintien de la stabilité.

Physiquement parlant, les oscillations stables expriment le fait que quelque soit le mécanisme de dissipation et d'alimentation en énergie, l'énergie de la source est transformée en mouvement oscillatoire : la quantité d'énergie dissipée  $E_d$  compense exactement la quantité d'énergie  $E_a$  fournie à l'oscillateur. En traçant  $E_d$  et  $E_a$  sur un cycle en fonction de l'amplitude des oscillations (figure 3.5), l'amplitude des oscillations stationnaires est donnée par l'intersection de ces deux courbes. Ces courbes peuvent passer par l'origine et avoir une telle intersection uniquement dans le cas d'un système non-linéaire (*i.e.* décrit par des équations différentielles non linéaires).

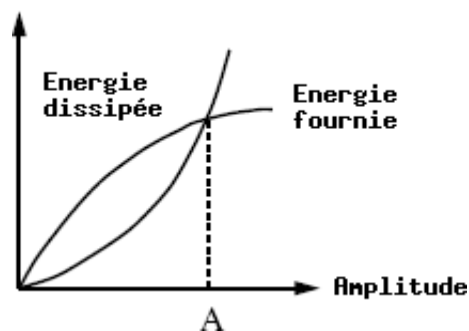


FIGURE 3.5. *Système dissipatif*

## Systèmes auto-entretenus et systèmes forcés : la phase d'un système forcé n'est pas libre

Que le système soit autonome (auto-entretenu) ou forcé (son mouvement est dû à une force extérieure qui lui est appliquée), le mouvement du point de phase forme une courbe fermée qui attire les courbes de son voisinage. La différence essentielle entre un système autonome et un système forcé est que dans le cas d'un système forcé, la phase n'est pas libre et elle est en relation avec la force extérieure appliquée au système. Un oscillateur auto-entretenu peut donc se synchroniser alors qu'un système forcé ne le peut pas. Cette différence peut être mise en évidence lorsque l'on applique une perturbation au système. Dans chacun des cas, on considère 4 états différents de perturbations. Dans la figure 3.6 on représente le plan de phase pour chacun des oscillateurs. Chaque état perturbé est représenté par un point entouré d'un cercle vide dans la figure. Les 4 points correspondant à ces 4 états vont revenir vers le cycle limite (figure 3.6) mais dans le cas du système forcé (figure 3.6-b), ces points vont converger vers le même point, alors que dans le cas du système auto-entretenu (figure 3.6-a), on retrouvera 4 points distincts. Ceci s'explique par le fait que le système auto-entretenu a la mémoire de sa valeur perturbée, alors que le système forcé retrouve une certaine valeur imposée par la force extérieure et ne dépend pas de l'état initial.

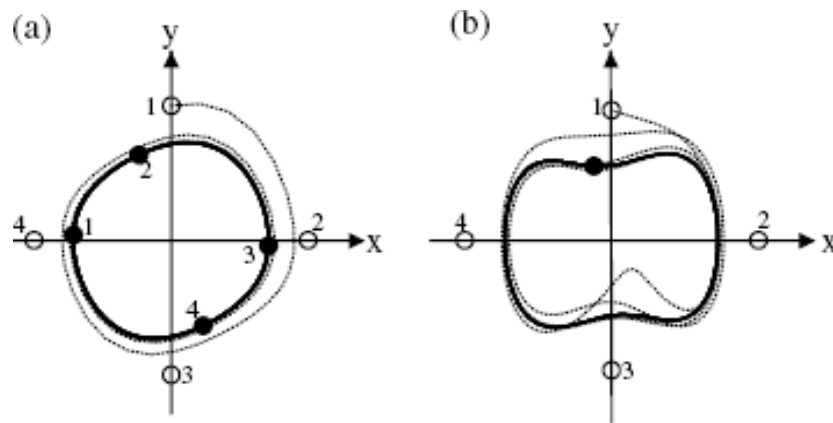


FIGURE 3.6. *Systèmes dissipatifs : auto-entretenu (a) et forcé (b)*

### 3.5.3 Définition de la synchronisation

On désigne par synchronisation un **ajustement des rythmes d'oscillations d'objets, dû à leur faible interaction entre eux**. Pour expliquer qualitativement ce concept, on définit ce qu'est une interaction entre objets oscillants et ce qu'on entend par ajustement de rythmes. Puis on présente des cas où la synchronisation n'a pas lieu mais où la situation prête à confusion, et enfin on présente les différents types de synchronisation.

#### 3.5.3.1 Couplage d'objets oscillants

Supposons qu'on a deux horloges. Même si les deux sont réalisées chez le même fabricant et sont supposées avoir les mêmes paramètres intérieurs, elles sont néanmoins différentes : en effet, à un instant donné, elle ne donnent pas exactement la même heure et leurs pendules ne sont pas à la même position. On suppose maintenant que ces deux horloges sont couplées ; elles sont posées sur une poutre non rigide. L'interaction entre elles se fait à travers les vibrations de leur support commun. Ces vibrations, même faibles modifient le rythme des oscillations des deux horloges.



### 3.5.3.2 Ajustement de rythme : blocage de fréquence et de phase

Les expériences montrent que même une faible interaction peut synchroniser deux oscillateurs. On considère deux oscillateurs ayant des pulsations propres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  différentes quand ils sont isolés. Ils peuvent, s'ils sont couplés, et sous certaines conditions, osciller avec une même fréquence. Leur synchronisation ou leur non-synchronisation dépend des facteurs suivants :

1. La force du couplage : elle décrit si l'interaction est forte ou faible. Expérimentalement, il est souvent difficile de mesurer cette quantité. Dans l'exemple précédent, elle dépend de la souplesse du support. Si la poutre est absolument rigide, elle ne va pas être influencée par les oscillations du pendule, et l'interaction entre les deux horloges est inexistante. Par contre, si la poutre est souple, l'interaction peut avoir lieu.
2. La différence de fréquences  $\omega_1 - \omega_2$  : elle quantifie la différence entre les deux oscillateurs non couplés. Plus elles sont lointaines au départ, et plus il sera difficile que les oscillateurs se synchronisent. Etant couplés, deux oscillateurs ayant au départ des fréquences différentes et des phases indépendantes, ajustent leurs rythmes et commencent à osciller avec la même fréquence, ce qui implique une relation bien définie entre les phases des deux oscillateurs. On rappelle que la convergence vers cette fréquence commune dépend de  $\omega_1 - \omega_2$ .

### 3.5.3.3 Situations que l'on peut confondre avec une synchronisation

#### Il n'y a pas de synchronisation en l'absence d'oscillations de systèmes autonomes

Tout d'abord, il faut différencier le phénomène de synchronisation et le phénomène de résonance. On considère une poutre ayant une pulsation propre  $\omega_0$ . On lui applique une force extérieure ayant une pulsation  $\omega \neq \omega_0$ . La poutre commence à osciller mais ces oscillations ne sont visibles que lorsque  $\omega$  est suffisamment proche de  $\omega_0$ . Dans ce cas on parle de résonance. Ce n'est pas un phénomène de synchronisation parce que la poutre n'oscillerait pas sans action extérieure, elle n'est donc pas un oscillateur auto-entretenu.

#### La variation synchronisée de deux variables n'implique pas nécessairement une synchronisation

Lorsque deux oscillateurs ne sont que des coordonnées différentes d'un même système, on ne parle pas de synchronisation. Par exemple le déplacement et la vitesse du pendule d'une horloge ont une même fréquence et leur différence de phase est bien définie. Cependant on ne peut pas parler d'un phénomène de synchronisation car il n'y a pas de déplacement sans vitesse de déplacement et vice versa. L'absence de synchronisation dans ce cas est évidente mais ce n'est pas le cas dans des exemples plus complexes.

#### Un couplage très fort unifie le système et on ne peut plus supposer qu'il y a une synchronisation

Un couplage très fort entre deux oscillateurs impose des limitations très fortes au mouvement des deux systèmes. C'est comme si les deux systèmes avaient été unifiés pour ne former qu'un seul oscillateur. Ce phénomène ne peut donc pas être considéré comme étant une synchronisation. Par exemple si on relie les pendules de deux horloges par un lien rigide, ces pendules sont "obligés" d'avoir des mouvements identiques et on ne peut plus parler de synchronisation parce qu'on n'a plus qu'un seul système.

L'introduction du couplage ne doit pas changer qualitativement le comportement d'aucun des systèmes qui interagissent entre eux et ne doit pas les priver de leur "individualité". En particulier, l'arrêt des oscillations d'un des systèmes ne doit pas provoquer l'arrêt des oscillations du second système.

## En conclusion...

Ainsi, pour que l'on puisse qualifier un phénomène de synchronisation, il faut que :

- l'analyse porte sur le comportement d'au moins un oscillateur auto-entretenu c.à.d. capable de générer son rythme propre
- les systèmes concernés ajustent leurs rythmes en réponse à un couplage faible
- l'ajustement des rythmes a lieu lorsque les fréquences des deux oscillateurs sont assez proches ; en particulier, si la fréquence des oscillations d'un des oscillateurs varie lentement, la fréquence des oscillations du deuxième oscillateur suit ces variations.

### 3.5.3.4 Les différents types de synchronisations

On peut distinguer plusieurs types de synchronisation. Dans ce paragraphe, on explique brièvement les types les plus fréquents.

#### Synchronisation mutuelle

Quand deux oscillateurs s'influencent mutuellement et de manière égale, ils ajustent leurs rythmes mutuellement. On parle de **synchronisation mutuelle**. Un exemple simple reflétant ce cas est l'exemple des deux horloges à pendule posées sur une poutre. La poutre véhicule les oscillations d'une horloge à l'autre.

#### Ensemble d'oscillateurs

Dans plusieurs cas, l'interaction ne se fait pas uniquement entre deux oscillateurs mais entre plusieurs oscillateurs. Si on prend l'exemple des lucioles, celles-ci constituent un ensemble d'oscillateurs mutuellement couplés qui peuvent s'illuminer de manière synchronisée. Les lucioles communiquent à travers leurs "flashes" lumineux. On parle de couplage **global**.

#### Synchronisation de phases et synchronisation complète d'oscillateurs chaotiques

Les oscillateurs auto-entretenus peuvent générer des signaux chaotiques. Un couplage de ces oscillateurs peut aussi entraîner leur synchronisation. Dans le cas de signaux "presque périodiques" les cycles se ressemblent mais ont des amplitudes et des périodes différentes. Dans ce cas, on peut calculer une fréquence moyenne sur un large intervalle de temps  $\tau$  :

$$\langle f \rangle = \frac{N_\tau}{\tau}$$

où  $N_\tau$  est le nombre de cycles effectués durant l'intervalle  $\tau$ . Cette fréquence moyenne permet de décrire le comportement collectif de ce système chaotique interactif.

Dans le cas d'un couplage assez fort entre deux oscillateurs auto-entretenus "chaotiques", leurs fréquences moyennes deviennent égales, mais cela n'implique pas que les signaux engendrés coïncident aussi. Les couplages faibles n'influencent pas la nature chaotique des oscillateurs : les amplitudes conservent leur caractère irrégulier et restent non liées alors que les fréquences coïncident et on peut parler de différence de phase entre les oscillateurs. Ce phénomène est appelé **synchronisation de phases de systèmes chaotiques**.

Un couplage très fort influence non seulement les fréquences mais aussi les amplitudes. Dans ce cas on parle de **synchronisation complète**.

## Synchronisation par une force extérieure

Un oscillateur peut aussi être influencé par une action extérieure qui lui est appliquée. Ainsi l'ajustement de l'horloge biologique et des rythmes saisonniers des systèmes vivants allant de la bactérie aux humains, est un phénomène de synchronisation appliqué par la nature. Dans le paragraphe, 3.5.4 on s'attarde sur ce type de synchronisation lorsque l'oscillateur est un oscillateur quasilinear, c'est à dire lorsque le processus qu'il génère est sinusoïdal, et dans le paragraphe 3.5.5 on détermine les équations qui régissent ce genre de phénomène.

### 3.5.4 Synchronisation d'un oscillateur auto-entretenu par une force extérieure

Dans ce paragraphe on présente le cas où un oscillateur auto-entretenu se synchronise avec une force extérieure qui lui est appliquée. On étudie le cas particulier d'un oscillateur quasilinear faiblement forcé.

On rappelle qu'un oscillateur quasilinear génère un processus  $x(t)$  qui vérifie  $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$  où  $\omega_0$  est sa fréquence angulaire libre et  $\phi_0$  sa phase initiale. La force extérieure qui lui est appliquée est supposée harmonique de fréquence  $\omega$ . En d'autres termes, la force varie de la même façon que  $\varepsilon \cos(\phi_e)$  où  $\phi_e = \omega t + \bar{\phi}_e$  est la phase totale de la force et  $\varepsilon$  son amplitude. On suppose  $\omega \neq \omega_0$  et on note  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  le "detuning". Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, l'amplitude de l'oscillateur est stable alors que la phase n'est ni stable, ni instable. Donc la force extérieure (faible) agit uniquement sur la phase.

On définit un repère tournant avec une vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens positif (dans le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre). La position du point de phase est déterminée par  $\phi - \phi_e$ . Dans le cas où l'amplitude de la force est nulle, le point de phase dans le nouveau repère peut avoir trois comportements différents :

- il continue à tourner dans le sens positif si  $\omega_0 > \omega$  :  $\phi - \phi_e$  augmente avec une vitesse constante  $\omega_0 - \omega$  (3.7-a)
- il est immobile si  $\omega_0 = \omega$  :  $\phi - \phi_e$  reste constant (3.7-b)
- il tourne dans le sens des aiguilles d'une montre si  $\omega_0 < \omega$  :  $\phi - \phi_e$  diminue avec une vitesse constante  $\omega_0 - \omega$  (3.7-c)

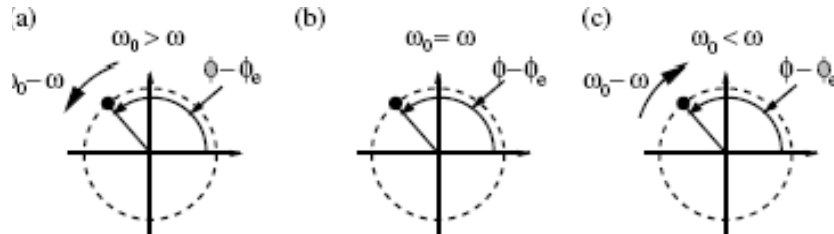


FIGURE 3.7. Repère tournant : (a)  $\omega_0 > \omega$ , (b)  $\omega_0 = \omega$ , (c)  $\omega_0 < \omega$

Revenons au cas qui nous intéresse, lorsque l'amplitude  $\varepsilon \neq 0$ . Deux situations peuvent se présenter :

- $\omega_0 = \omega$  :  
Quelque soit la différence de phase initiale  $\phi^0 = \phi_0 - \bar{\phi}_e$ , cette différence de phase reste constante. La synchronisation dans ce cas trivial se manifeste par le maintien de cette stabilité dans le déphasage (cas 1 dans la figure 3.8).
- $\omega_0 \neq \omega$  :  
On suppose par exemple que  $\omega_0 > \omega$ . Dans ce cas, la force tend à égaliser la phase de l'oscillateur  $\phi(t)$  et la phase  $\phi_e(t) + \phi^0$  ( $\phi(t) - \phi_e(t)$  constante) (cas 2 dans la figure 3.8). Au contraire, le "detuning"  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  tend à les éloigner l'une de l'autre (cas 3, 4 et 5 de la figure 3.8). La relation entre l'amplitude  $\varepsilon$  de la force et le detuning  $\Delta\omega$  détermine laquelle de ces deux actions l'emportera sur l'autre. Ceci sera détaillé dans la suite.

Dans le paragraphe 3.5.5, on précise les équations qui régissent l'influence de la force extérieure sur l'oscillateur quasilinear.

### 3.5.5 Mise en équations

#### 3.5.5.1 Oscillateur auto-entretenu sans influence extérieure

On considère un système discret, autonome (dont le comportement ne dépend pas explicitement du temps) et dissipatif (qui dissipe de l'énergie) dont le mouvement est régi par  $M$  équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M) \quad (3.28)$$

On suppose que ce système a une solution stable périodique de période  $T_0$  :

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T_0) \quad (3.29)$$

On introduit la phase  $\phi(t)$ . Elle augmente de  $2\pi$  à la fin de chaque période :

$$\phi(t + T_0) = \phi(t) + 2\pi \quad (3.30)$$

et vérifie :

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 \quad (3.31)$$

où  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  est la fréquence libre de l'oscillateur. Sur le cycle limite on peut donc écrire :

$$\frac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}_0) = \omega_0 \quad (3.32)$$

On sait que :

$$\frac{d\phi}{dt}(\mathbf{x}) = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \quad (3.33)$$

$x_k$  étant la  $k$ -ième composante de  $\mathbf{x}$ . Or, en notant  $f_k$  la  $k$ -ième composante de  $\mathbf{f}$ , en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  :

$$\frac{dx_k}{dt}(t) = f_k(\mathbf{x}_0(t)) \quad (3.34)$$

Ainsi, d'après (3.32)

$$\sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} f_k(\mathbf{x}_0) = \omega_0 \quad (3.35)$$

#### 3.5.5.2 Influence d'une force extérieure sur l'oscillateur auto-entretenu

Si une force extérieure  $F_e(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  de période  $T \neq T_0$  est appliquée au système, le système forcé vérifie l'équation :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (3.36)$$

$\varepsilon$  est supposé petit. Dans ce cas, à proximité du cycle limite et en utilisant l'équation (3.33), on peut écrire :

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)) \quad (3.37)$$

Le deuxième terme du second membre de cette égalité est proportionnel à  $\varepsilon$ , il est donc petit. De plus, les déviations de  $\mathbf{x}$  par rapport au cycle limite  $\mathbf{x}_0$  sont faibles. D'après l'équation (3.35) on peut donc écrire :

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} (f_k(\mathbf{x}) + \varepsilon p_k(\mathbf{x}, t)) \simeq \omega_0 + \varepsilon \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t) \quad (3.38)$$

On note  $Q(\phi, t) = \sum_k \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} p_k(\mathbf{x}_0, t)$ . Ainsi,

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t) \quad (3.39)$$

$Q$  est  $2\pi$ -périodique en  $\phi$  et  $T$ -périodique en  $t$ . On peut la développer en une double série de Fourier :

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi + il\omega t} \quad (3.40)$$

## Dynamique lente des phases et équation de Kuramoto

En l'absence de la force extérieure  $F_e$ , la phase  $\phi(t)$  solution de l'équation différentielle (3.31) s'écrit :

$$\phi(t) = \omega_0 t + \phi_0 \quad (3.41)$$

En remplaçant dans (3.40), on obtient :

$$Q(\phi, t) = \sum_{l,k} a_{l,k} e^{ik\phi_0} e^{i(k\omega_0 + l\omega)t} \quad (3.42)$$

$Q$  contient des termes oscillants rapidement (en comparaison avec  $1/\varepsilon$ ) et des termes qui oscillent très lentement. Ces derniers vérifient la condition de résonance :

$$k\omega_0 + l\omega \approx 0 \quad (3.43)$$

Dans l'équation (3.39), les termes non résonants entraînent des déviations de la phase de l'ordre de  $O(\varepsilon)$ , alors que les termes résonants entraînent des variations plus importantes de la phase. Ainsi, on ne conserve que ces termes résonants, en faisant une moyenne. Le cas le plus simple est lorsque  $\omega \approx \omega_0$ . Dans ce cas, seuls les termes de  $Q$  où  $l = -k$  sont résonants. La somme de ces derniers est notée  $q$  :

$$\sum_{l=-k} a_{l,k} e^{i(k\phi + l\omega t)} = \sum_k a_{-k,k} e^{ik(\phi - \omega t)} = q(\phi - \omega t) \quad (3.44)$$

$q$  est une fonction  $2\pi$ -périodique. Cette définition de la moyenne  $q$  permet d'écrire :

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t) \simeq \omega_0 + \varepsilon q(\phi - \omega t) \quad (3.45)$$

La différence entre l'équation (3.45) obtenue dans le cas où une force extérieure est appliquée à l'oscillateur auto-entretenu et l'équation (3.31) dans le cas où l'oscillateur auto-entretenu est libre, est le terme  $\varepsilon q(\phi - \omega t)$  présent dans (3.45). Ce terme gère la synchronisation de l'oscillateur avec la force extérieure. Ceci est expliqué dans les paragraphes suivants.

La fonction  $q$   $2\pi$ -périodique la plus simple est la fonction *sinus*. Elle est utilisée dans la formulation du modèle proposé dans cette thèse (voir chapitre 4) :

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon Q(\phi, t) \simeq \omega_0 + \varepsilon \sin(\phi - \omega t) \quad (3.46)$$

Cette équation est une équation de Kuramoto [83].

## Solution analytique

On note  $\psi = \phi - \phi_e = \phi - \omega t$  la différence de phases entre l'oscillateur et la force extérieure, et  $\nu = \omega - \omega_0$ . Ainsi, on obtient :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon q(\psi) \quad (3.47)$$

On peut démontrer que cette équation décrit également le cas général, lorsque  $\omega \approx -\frac{m}{n}\omega_0$  [54]. Dans le cas où  $q(\cdot) = \sin(\cdot)$ , on se ramène à l'équation d'Adler :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\nu + \varepsilon \sin \psi \quad (3.48)$$

La fonction  $q$  étant  $2\pi$ -périodique, elle admet dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$  un minimum  $q_{min}$  et un maximum  $q_{max}$ . Dans le cas du *sinus* par exemple,  $q_{min} = -1$  et  $q_{max} = 1$ .

Si la condition suivante est vérifiée

$$\varepsilon q_{min} < \nu < \varepsilon q_{max} \quad (3.49)$$

l'équation (3.47), admet au moins deux points stationnaires (points fixes  $\frac{d\psi}{dt} = 0$ ), dont l'un est asymptotiquement stable et l'autre instable. Le système est donc entraîné vers l'un des points fixes stables du système. La phase  $\psi$  devient alors constante  $\psi = \psi_{syn}$ , et  $\phi$  a une vitesse de rotation constante égale à la fréquence  $\omega$  de la force extérieure. La fréquence instantanée  $\frac{d\phi}{dt}$  de l'oscillateur devient donc égale à  $\omega$ . Il est à noter que la synchronisation n'entraîne pas un déphasage nul mais un déphasage constant (point 2 de la figure 3.8) :

$$\phi = \omega t + \psi_{syn}$$

On est alors en "régime de synchronisation".

Si  $\nu$  est à l'extérieur de l'intervalle défini par (3.49) (les points 3, 4 et 5 de la figure 3.8), la force est trop faible pour pouvoir entraîner la synchronisation. Dans ce cas, dans le repère tournant, le point de phase est en mouvement avec une fréquence appelée fréquence de battement  $\Omega_{bt} < \omega_0 - \omega$ , de telle sorte que la fréquence moyenne  $\omega_m$  de l'oscillateur dans le repère initial prend la valeur  $\omega_m = \omega + \Omega_{bt}$ .

Ceci peut être démontré aisément : dans ce cas  $\frac{d\psi}{dt}$  est de signe constant ( $< 0$  ou  $> 0$ ) et  $\frac{d\phi}{dt} \neq \omega$ . La solution de (3.47) peut s'écrire :

$$\int_{\psi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} = t \quad (3.50)$$

La fonction  $\psi = \psi(t)$  ainsi définie est périodique de période  $T_\psi$  tel que :

$$T_\psi = \left| \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right| \quad (3.51)$$

La rotation de  $\phi$  est donc non uniforme :

$$\phi = \omega t + \psi(t) \quad (3.52)$$

et la fréquence moyenne  $\omega_m = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d\phi}{dt}(\tau) d\tau$  s'écrit :

$$\omega_m = \omega + \Omega_{bt} \quad (3.53)$$

où la fréquence de battement  $\Omega_{bt}$  est définie par :

$$\Omega_{bt} = \frac{2\pi}{T_\psi} = 2\pi \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\varepsilon q(\psi) - \nu} \right)^{-1} \quad (3.54)$$

Ainsi le processus  $\mathbf{x}(t)$  est quasipériodique, et  $\Omega_{bt}$  dépend de la valeur de  $\nu$ . A proximité de la région de synchronisation, on peut calculer analytiquement cette dépendance. En effet, notons  $\nu_{max} = \varepsilon q_{max}$ , et supposons par exemple, que  $\nu - \nu_{max}$  est très petit. Donc  $|\varepsilon q(\psi) - \nu|$  est très petit.  $q(\psi)$  peut être développé en série de Fourier à proximité de  $\psi_{max}$  :

$$\begin{aligned} |\Omega_{bt}| &\simeq 2\pi \left| \frac{d\psi}{\frac{\varepsilon}{2} q''(\psi_{max}) \psi^2 - (\nu - \nu_{max})} \right|^{-1} \\ &= \sqrt{\varepsilon |q''(\psi_{max})| (\nu - \nu_{max})} \sim \sqrt{\nu - \nu_{max}} \end{aligned} \quad (3.55)$$

### La transition de l'état initial à la synchronisation

Plusieurs cas se présentent :

- $\omega = \omega_0$ , le déphasage  $\phi^0$  est constant. Dans la figure (3.8) il est supposé nul et correspond au point 1.
- $\omega \neq \omega_0$  mais  $\omega$  est dans le domaine de synchronisation. Le déphasage est alors constant mais non nul (point 2 dans la figure (3.8)).

- $\omega$  est à l'extérieur du domaine mais se situe près de la frontière de ce domaine (point 3 dans la figure (3.8)). Dans ce cas, le déphasage passe par des périodes où il est constant et d'autres où il augmente assez rapidement. Cela veut dire que durant les périodes où le déphasage est constant, l'oscillateur est synchronisé avec la force qui lui est appliquée. Cependant, par la suite, il fait un cycle supplémentaire si  $\omega$  se trouve près du bord gauche ou perd un cycle s'il est près du bord droit du domaine de synchronisation. Plus  $|\omega - \omega_0|$  devient important, plus la durée de temps de synchronisation diminue jusqu'à s'annuler.

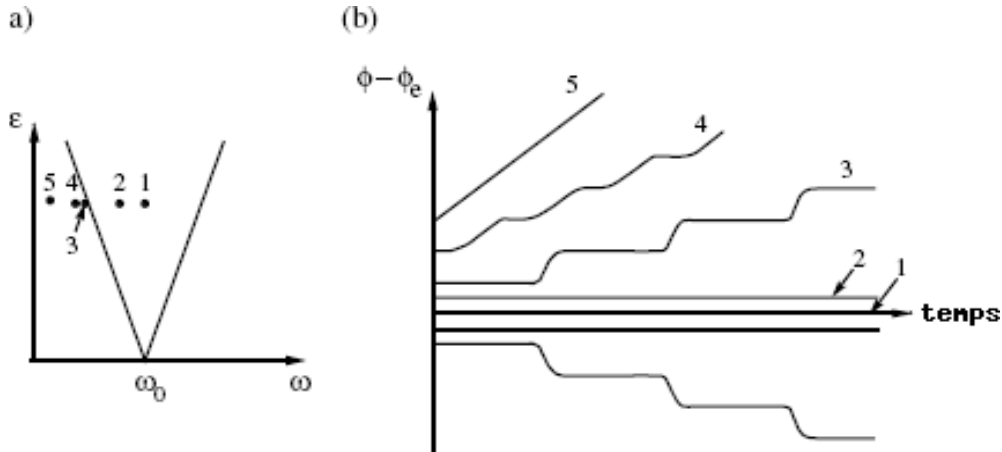


FIGURE 3.8. *Le déphasage selon la position des points par rapport à la région de synchronisation : (a) la position des points par rapport à la région de synchronisation, (b) le déphasage en fonction du temps pour les différents points*

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit les différents outils théoriques qui sont utilisés dans le modèle développé dans cette thèse et qui est explicité dans le chapitre 4. Nous avons donné l'équation de la dynamique régissant le comportement latéral d'une poutre d'Euler Bernoulli, puis l'équation de transport, l'équation de conservation de la masse et l'équation de Burger pour le modèle continu. Enfin, on a défini le phénomène de synchronisation, en s'attardant sur les oscillateurs auto-entretenus et sur leur synchronisation avec une force extérieure qui leur est appliquée. Les équations qui régissent ce phénomène sont rappelées.

## Chapitre 4

# Modèle continu pour le couplage foule-passerelle

---

*CE CHAPITRE a pour objectif de présenter le modèle continu de couplage foule-structure que nous proposons dans le cadre de cette thèse. Dans ce chapitre :*

- ★ on présente le modèle proposé*
  - ★ on explique la démarche utilisée pour aboutir à chacune des équations du modèle*
-



## PLAN DU CHAPITRE 4

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>113</b>
<b>4.2</b>	<b>Formulation du modèle</b>	<b>113</b>
<b>4.3</b>	<b>L'équation de la dynamique de la passerelle et la force due à la foule</b>	<b>114</b>
<b>4.4</b>	<b>Modélisation du flux de piétons sur la passerelle</b>	<b>115</b>
<b>4.5</b>	<b>Modélisation de la longueur de pas des piétons</b>	<b>116</b>
<b>4.6</b>	<b>Modélisation de la phase totale des piétons : équation de Kuramoto</b>	<b>118</b>
4.6.1	Etude du cas d'un seul piéton soumis à la force exercée par la passerelle	118
4.6.2	Retour au modèle continu	121
<b>4.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>122</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on détaille le modèle qui a été développé durant cette thèse.

Le but du modèle proposé est de réussir à représenter le comportement de la passerelle, celui de la foule et le couplage entre les deux, notamment en prenant en compte la synchronisation des piétons avec la passerelle.

Dans le paragraphe 4.2, on présente notre modèle avec les différentes variables et les différents paramètres utilisés. Dans les paragraphes suivants on détaille chacune des équations du modèle. Dans la section 4.3, on donne les équations d'équilibre du système passerelle-foule. Puis, dans 4.4, nous expliquons la modélisation de la foule de piétons. La modélisation de la longueur de pas des piétons est formalisé dans 4.5. Enfin dans 4.6, on modélise la phase totale des piétons.

## 4.2 Formulation du modèle

Le modèle proposé est un modèle continu (ou eulérien), ce qui veut dire qu'il suit le comportement de la foule dans sa globalité sans s'intéresser au comportement particulier de chaque piéton. Mathématiquement, cela revient à utiliser des variables locales, c'est à dire qui dépendent du temps  $t$  et de l'espace  $x$  supposé unidirectionnel. Dans ce modèle, le déplacement de la passerelle est projeté sur le mode latéral qui a la fréquence la plus proche de celle des piétons ; on supposera qu'il s'agit du premier mode. Une équation de conservation de la masse gère la répartition et l'évolution des piétons sur la passerelle. L'interaction piétons-piétons et piétons-passerelle est prise en compte grâce à une équation qui gère la synchronisation en fréquence des piétons entre eux et avec la passerelle, et par une prise en compte de l'ajustement de la longueur des pas des piétons selon la situation qui se présente. Ainsi, ce modèle est formé du couplage entre une équation aux dérivées ordinaires (EDO) et trois équations aux dérivées partielles (EDP) :

$$\begin{cases} (M + M_p(t))\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = \mathcal{F}_l(t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\eta v)}{\partial x}(x, t) = 0 \\ \frac{d\phi}{dt}(x, t) = \omega(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} A_m(t) \psi_1(x) (\dot{\psi}_s(t))^2 \sin\left(\psi_s(t) - \phi(x, t) + \frac{\pi}{2}\right) \\ \quad + \varepsilon_{pp}(x, t) \sin(\phi_{av}(x, t) - \phi(x, t)) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

**L** es principales variables utilisées sont :

- $u(x, t)$  le déplacement de la passerelle. La projection au premier mode propre de la passerelle, nous amène à écrire  $u(x, t) = U(t)\psi_1(x)$  où  $U(t)$  est le déplacement latéral modal de la passerelle tel qu'il a été défini dans la partie 3.2.
- $\eta(x, t)$  la densité des piétons
- $v(x, t)$  la vitesse des piétons modélisée sous la forme :

$$v(x, t) = \frac{l_{pas}(x, t)}{\pi} \frac{d\phi}{dt}(x, t)$$

- $\omega(x, t)$  la fréquence angulaire latérale de marche libre des piétons
- $\phi(x, t)$  la phase totale de la force latérale des piétons. Dans le cas d'une marche libre (sans contraintes extérieures)

$$\frac{d\phi}{dt}(x, t) = \omega(x, t)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \text{ étant la dérivée totale par rapport au temps}$$

Plusieurs paramètres sont introduits dans ce modèle. Certains concernent les caractéristiques de la passerelle, ils sont obtenus par analyse modale ou par simple mesure. D'autres paramètres permettent de prendre en compte l'interaction entre les piétons et leur interaction avec la passerelle. Les valeurs de certains paramètres seront déterminés dans le chapitre 7 d'après une étude analytique réalisée dans le chapitre 5, alors que pour les autres on adoptera les valeurs proposées dans la littérature suite à des essais expérimentaux.

Les paramètres définissant la passerelle sont :

- $L$  la longueur de la passerelle
- $\ell(x)$  largeur de la passerelle en un point donné
- $\psi_1(x)$  la première forme modale de la passerelle
- $M$  la masse modale de la passerelle
- $C$  l'amortissement modal de la passerelle
- $K$  la rigidité modale de la passerelle

Le comportement de la foule de piétons est considéré semblable à celui d'un fluide compressible. Les paramètres régissant l'interaction entre la passerelle et la foule et l'interaction entre piéton et piéton sont les suivants :

- $\eta_c$  la densité critique à partir de laquelle les piétons commencent à interagir entre eux
- $\eta_{max}$  la densité maximale admissible sur une passerelle
- $a_{min}$  l'accélération des oscillations de la passerelle à partir de laquelle les piétons ressentent les oscillations et commencent à modifier leur longueur de pas
- $a_{max}$  l'accélération des oscillations à partir de laquelle les piétons sont forcés de s'arrêter de marcher.
- $\varepsilon$  et  $\varepsilon_{pp}(x, t)$  sont des paramètres intervenant respectivement dans la synchronisation des piétons avec la passerelle et dans leur synchronisation entre eux.

$l_{pas}(x, t)$  étant leur longueur de pas.

De plus,

- $M_p(t) = \int_0^L m_p(x, t)\psi_1^2(x)dx$  est la masse modale des piétons
- $\mathcal{F}_l(t) = \int_0^L G \sin(\phi(x, t))\eta(x, t)\ell(x)\psi_1(x)dx$  est la force latérale totale modale qu'ils engendrent,  $G$  étant l'amplitude moyenne de la force latérale engendrée par un piéton
- $\psi_s(t)$  est la phase totale instantanée du déplacement latéral de la passerelle.

Dans la suite de ce chapitre, on explicite la démarche qui permet de retrouver ce modèle, et on détaille chacune de ses quatre équations ainsi que la modélisation de la longueur de pas des piétons.

### 4.3 L'équation de la dynamique de la passerelle et la force due à la foule

Dans cette partie, on présente les équations d'équilibre qui gèrent le couplage foule-passerelle.

On suppose que le comportement vibratoire de la passerelle peut être approché par celui d'une poutre d'Euler Bernoulli sur appuis simples. Cette modélisation n'a rien de restrictif. Il suffit de connaître le mode qui peut générer de la synchronisation. On note  $u(x, t)$  le déplacement latéral de la passerelle et  $U(t)$  son déplacement latéral modal tel qu'il a été défini dans la partie 3.2. On rappelle que  $u(x, t) = U(t)\psi_1(x)$ , où  $\psi_1(x)$  est la forme modale dont la fréquence est la plus proche de la fréquence de la force latérale des piétons.

On note  $y(x, t)$  l'amplitude des oscillations latérales des piétons autour de leur trajectoire de marche sur la passerelle dans un repère galiléen.  $y(x, t)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$y(x, t) = u(x, t) + y_p(x, t) \quad (4.2)$$

où  $y_p(x, t)$  est l'amplitude des oscillations des piétons dans un repère lié à la passerelle. Dans le cas où la passerelle est rigide  $u(x, t) = 0$  et  $y(x, t) = y_p(x, t)$ .

Les piétons qui traversent la passerelle y exercent une force locale  $p(x, t)$ . Soit  $\eta(x, t)$  leur densité locale sur cette passerelle. On note  $m_p(x, t) = m_{1p}\eta(x, t)\ell(x)$  leur masse locale, où  $m_{1p}$  est la masse moyenne d'un piéton et  $\ell(x)$  la largeur de la passerelle en un point  $x$  donné.

En utilisant l'équation (3.14), les équations d'équilibre régissant le système passerelle-piétons s'écrivent :

$$\begin{aligned} M\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) &= \int_0^L p(x, t)\psi_1(x)dx \\ m_p(x, t) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + \frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2}(x, t) \right) + p(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Soit  $G$  l'amplitude moyenne de la force latérale engendrée par un piéton. On rappelle que la force latérale  $F_l$  engendrée par un piéton sur un plancher rigide peut être modélisée sous la forme (voir chapitre 2) :

$$F_l(t) = G \sin(\phi_{1p}(t))$$

avec

$$\phi_{1p}(t) = \omega_{1p}t + \phi_1$$

où  $\omega_{1p}$  est la fréquence angulaire de marche libre relative à ce piéton ; elle peut être considérée constante pour un même piéton.

Soit  $\phi(x, t)$  la phase totale de la force latérale des piétons.  $\frac{d\phi}{dt}(x, t)$  n'est autre que leur fréquence angulaire latérale.

Le terme  $-m_p(x, t)\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2}(x, t)$  apparaissant dans la deuxième équation de (4.3) est la force d'inertie appliquée par les piétons dans le repère local lié à la passerelle. Dans le cas d'un plancher rigide ( $u(x, t) = 0$ ), on a :

$$-m_p(x, t)\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2}(x, t) = G \sin(\omega(x, t)t + \phi_0)\eta(x, t)\ell(x) \quad (4.4)$$

Pour un plancher mobile, on suppose que la force  $\tilde{F}_l(x, t)$  engendrée par les piétons par unité de longueur de la passerelle s'écrit :

$$\tilde{F}_l(x, t) = -m_p(x, t)\frac{\partial^2 y_p}{\partial t^2}(x, t) = G \sin(\phi(x, t))\eta(x, t)\ell(x) \quad (4.5)$$

La force latérale modale  $\mathcal{F}_l(t)$  engendrée par les piétons est donc :

$$\mathcal{F}_l(t) = \int_0^L F(x, t)\psi_1(x)dx = \int_0^L G \sin(\phi(x, t))\eta(x, t)\ell(x)\psi_1(x)dx \quad (4.6)$$

Les équations d'équilibre (4.3) donnent alors :

$$(M + M_p(t))\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = \mathcal{F}_l(t) \quad (4.7)$$

où  $M_p(t) = \int_0^L m_p(x, t)\psi_1^2(x)dx$  est la masse modale des piétons et  $\mathcal{F}_l(t)$  est donnée par 4.6.

## 4.4 Modélisation du flux de piétons sur la passerelle

Dans ce modèle on a adopté l'approche utilisée dans [65,66], où la foule de piétons est modélisée comme un fluide compressible dont l'évolution est gouvernée par l'équation de conservation de la masse. Dans ces deux articles [65,66], l'équation de la conservation de la masse a été utilisée en  $2D$ , pour étudier l'évolution des piétons dans un espace donné, notamment à la Mecque les jours de pèlerinage.

En s'inspirant des modèles précédemment cités, on suppose que le comportement de la foule est régi par l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\eta v)}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (4.8)$$

où  $v(x, t)$  est la vitesse locale des piétons.

Pour modéliser la vitesse  $v(x, t)$ , on utilise une approche originale, différente de celles qui sont utilisées dans [15, 65, 66] par la prise en compte de la longueur des pas des piétons  $l_{pas}(x, t)$  et de la phase totale  $\phi$  de leur force latérale :

$$v(x, t) = \frac{l_{pas}(x, t)}{\pi} \frac{d\phi}{dt}(x, t) \quad (4.9)$$

On rappelle que :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$

est la dérivée totale.

Cette expression découle de l'expression de vitesse d'un seul piéton. En effet, considérons le cas d'un piéton qui a une phase totale latérale  $\phi_{1p}(t)$  et une longueur de pas  $l_{1p}(t)$ . La vitesse  $v_{1p}(t)$  du piéton peut s'écrire sous la forme :

$$v_{1p}(t) = \frac{l_{1p}(t)}{T_{pas}(t)}$$

$T_{pas}(t)$  étant la durée "instantanée" d'un pas (soit gauche soit droit). Or si  $\phi_{1p}(t)$  est la phase totale de la force latérale du piéton, l'inverse de la fréquence  $\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_{1p}}{dt}(t)$  n'est autre que la moitié de la période d'un pas complet (cycle droite-gauche). Donc

$$T_{pas}(t) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_{1p}}{dt}(t) \right)^{-1} = \pi \left( \frac{d\phi_{1p}}{dt}(t) \right)^{-1}$$

D'où

$$v(t) = \frac{l_{1p}(t)}{\pi} \frac{d\phi_{1p}}{dt}(t)$$

ce qui explique la relation (4.9). Dans la suite de ce chapitre, on modélise la longueur des pas  $l_{pas}(x, t)$  et la phase totale  $\phi(x, t)$ .

## 4.5 Modélisation de la longueur de pas des piétons

Dans cette partie on modélise l'évolution de la longueur de pas des piétons lorsqu'ils traversent une passerelle.

Soit  $l_0$  la longueur de pas moyenne d'un piéton dans le cas d'une marche libre. La longueur de pas  $l_{pas}(x, t)$  est influencée par la densité des piétons et par les oscillations de la passerelle. Ainsi, on la modélise comme étant :

$$l_{pas}(x, t) = l_0 C_\eta(x, t) C_s(x, t) \quad (4.10)$$

où  $C_\eta(x, t)$  et  $C_s(x, t)$  sont des fonctions réductrices qui prennent en compte respectivement l'influence de la densité  $\eta(x, t)$  des piétons sur leur longueur de pas et celle des oscillations de la passerelle.

La fonction  $C_\eta(x, t)$  est définie par (4.11), et sa courbe en fonction de la densité est tracée dans la figure 4.1 :

$$C_\eta(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta(x, t) \leq \eta_c \\ \frac{\eta_{max} - \eta(x, t)}{\eta_{max} - \eta_c} & \text{si } \eta_c < \eta(x, t) < \eta_{max} \\ 0 & \text{si } \eta_{max} \leq \eta(x, t) \end{cases} \quad (4.11)$$

où on rappelle que  $\eta_c$  est la densité critique à partir de laquelle les piétons commencent à interagir entre eux et  $\eta_{max}$  est la densité maximale admissible sur une passerelle. Ainsi, comme on peut le voir dans (4.11),

la longueur de pas n'est influencée par la densité de piétons  $\eta(x, t)$  que lorsque celle-ci est supérieure à la densité critique  $\eta_c$ , alors que pour des densités élevées qui dépassent  $\eta_{max}$ ,  $l_{pas}(x, t)$  s'annule parce que les piétons n'arrivent plus à avancer, ce qui a pour conséquence d'annuler la vitesse de marche.

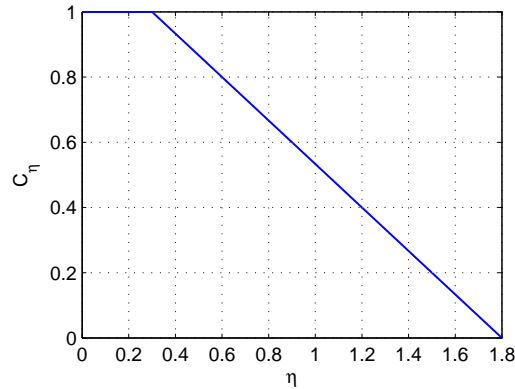


FIGURE 4.1. Courbe représentant  $C_\eta$  en fonction de la densité  $\eta$  des piétons

Pour définir la fonction  $C_s(x, t)$  qui traduit la dépendance entre la longueur de pas  $l_{pas}$  et les oscillations de la passerelle, on commence par introduire la variable  $\ddot{u}(x, t)$  qui est une approximation de l'amplitude de l'accélération maximale ressentie par les piétons durant les 5 dernières oscillations. En effet, on estime que le piéton a une mémoire des oscillations passées et réagit selon le maximum d'oscillations ressenties durant les dernières secondes. Nous proposons d'écrire  $\ddot{u}(x, t)$  sous la forme :

$$\ddot{u}(x, t) = A_m(t) [\dot{\psi}_s(t)]^2 \psi_1(x) \quad (4.12)$$

où  $A_m(t)$  est le déplacement maximal de la passerelle durant ses 5 dernières périodes d'oscillations,  $\psi_s(t)$  est sa phase totale instantanée,  $\dot{\psi}_s(t)$  n'est donc autre que sa fréquence angulaire instantanée, et  $\psi_1(x)$  est la première forme modale. La fonction  $C_s(x, t)$  est définie par (4.13) et sa courbe en fonction de  $\ddot{u}(x, t)$  est tracée dans la figure 4.2 :

$$C_s(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ddot{u}(x, t) \leq a_{min} \\ \frac{a_{max} - \ddot{u}(x, t)}{a_{max} - a_{min}} & \text{si } a_{min} < \ddot{u}(x, t) < a_{max} \\ 0 & \text{si } v_{max} \leq \ddot{u}(x, t) \end{cases} \quad (4.13)$$

On rappelle que  $a_{min}$  est l'accélération des oscillations de la passerelle à partir de laquelle les piétons ressentent les oscillations, et  $a_{max}$  est l'accélération des oscillations à partir de laquelle les piétons sont obligés de s'arrêter de marcher.

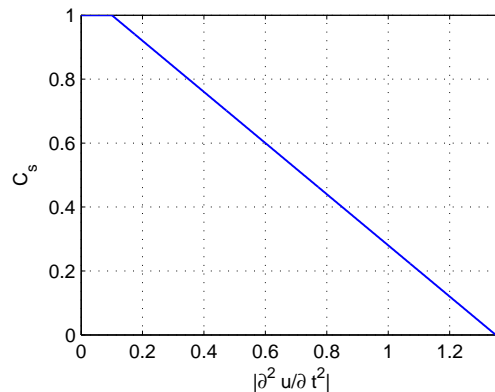


FIGURE 4.2. Courbe représentant  $C_s$  en fonction de l'amplitude de l'accélération  $\ddot{u}(x, t)$  de la passerelle

La courbe représentant l'évolution de  $l_{pas}$  en fonction de  $\eta$  et de  $\ddot{u}$  est tracée dans la figure 4.3.

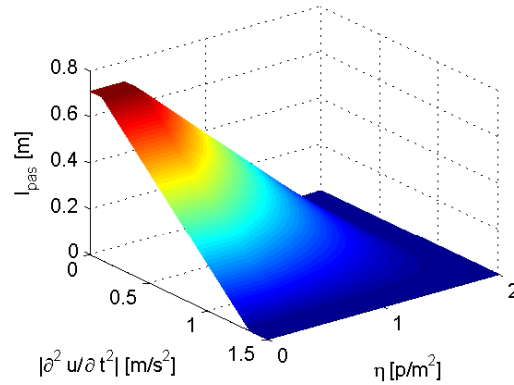


FIGURE 4.3. Courbe représentant la longueur de pas  $l_{pas}$  en fonction de la densité  $\eta$  des piétons et de l'amplitude de l'accélération  $\ddot{u}$  de la passerelle

## 4.6 Modélisation de la phase totale des piétons : équation de Kuramoto

Dans cette partie on modélise l'évolution de la phase totale des piétons. On commence par étudier le cas d'un seul piéton soumis aux oscillations de la passerelle, on en déduit l'évolution de la phase dans le cas du modèle continu, puis, on introduit la synchronisation entre les piétons.

### 4.6.1 Etude du cas d'un seul piéton soumis à la force exercée par la passerelle

On considère le cas d'un piéton. On note  $\phi_{1p}(t)$  la phase totale de sa force latérale et  $\omega_{1p}$  sa fréquence latérale de marche libre. Soit  $F_e(t)$  la force extérieure appliquée au piéton. Dans le cas où cette force est due aux oscillations de la passerelle, elle s'écrit sous la forme (voir la deuxième équation de (4.3)) :

$$F_e(t) = m_{1p}\ddot{u}_{1p}(t) = -m_{1p}A(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2 \sin(\psi_s(t)) \quad (4.14)$$

où  $x_{1p}(t)$  est la position du piéton sur la passerelle,  $u_{1p}(t)$  et  $\ddot{u}_{1p}(t)$  sont respectivement le déplacement de la passerelle et son accélération à l'instant  $t$  et à la position  $x_{1p}(t)$  et  $A(t)$  est son amplitude de déplacement.

Soit  $y_{1p}(t)$  le déplacement du centre de gravité du piéton. L'équation d'équilibre du piéton s'écrit alors :

$$m_{1p}\ddot{y}_{1p} + f(y_{1p}, \dot{y}_{1p}) = F_e(t) \quad (4.15)$$

où  $f(y_{1p}, \dot{y}_{1p})$  est la "force de rappel" du piéton.

On passe en représentation d'état : on pose  $z_{1p}(t) = \dot{y}_{1p}(t)$ . L'équation (4.15) est équivalente au système suivant :

$$\begin{aligned} z_{1p}(t) &= \dot{y}_{1p}(t) \\ \dot{z}_{1p}(t) &= \frac{1}{m_{1p}}(F_e(t) - f(y, z)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

On effectue une transformation de Van der Pol en posant :

$$\begin{aligned} y_{1p}(t) &= r \sin(\phi_{1p}(t)) \\ z_{1p}(t) &= \dot{y}_{1p}(t) = r\dot{\phi}_{1p}(t) \cos(\phi_{1p}(t)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

où on suppose que  $r$  ne dépend pas du temps.

On a

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{1p}(t) &= \frac{d\phi_{1p}}{dt}(t) = \frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}\dot{y}_{1p}(t) + \frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}\dot{z}_{1p}(t) \\ &= \frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}z_{1p}(t) + \frac{1}{m_{1p}}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}(F_e(t) - f(y, z))\end{aligned}\quad (4.18)$$

Dans la suite de cette partie, on cherche à expliciter l'expression (4.18). Pour cela, on approche  $\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}z_{1p}(t) - \frac{1}{m_{1p}}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}f(y, z)$  en s'intéressant au cas où le piéton n'est soumis à aucune contrainte extérieure ( $F_e(t) = 0$ ).

Ensuite, on étudie le cas où  $F_e(t) \neq 0$  et on explicite le terme  $\frac{1}{m}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}F_e(t)$ .

On commence par approcher  $\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}z_{1p}(t) - \frac{1}{m_{1p}}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}f(y, z)$ . Si  $F_e(t) = 0$ , le piéton n'est soumis à aucune contrainte extérieure,  $\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p}$ , et l'équation (4.18) s'écrit :

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}z_{1p}(t) - \frac{1}{m_{1p}}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}f(y, z)$$

D'où sur le cycle limite, on a l'égalité :

$$\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial y_{1p}}z_{1p}(t) - \frac{1}{m_{1p}}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}f(y, z) = \omega_{1p}\quad (4.19)$$

Lorsque la force  $F_e(t) \neq 0$ , on suppose qu'elle induit une petite perturbation sur le point de phase. On peut donc supposer que  $(y, z)$  est très proche du cycle limite et que l'égalité (4.19) reste vérifiée. En remplaçant dans (4.18) :

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p} + \frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}\frac{F_e(t)}{m_{1p}}\quad (4.20)$$

Il reste donc à déterminer  $\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}$ . D'après (4.17), on a :

$$\tan(\phi_{1p}(t)) = \dot{\phi}_{1p}(t)\frac{y_{1p}(t)}{z_{1p}(t)}\quad (4.21)$$

Or

$$\frac{\partial(\tan(\phi_{1p}(t)))}{\partial z_{1p}} = \frac{1}{\cos^2(\phi_{1p}(t))}\frac{\partial\phi_{1p}}{\partial z_{1p}}\quad (4.22)$$

D'après (4.21),

$$\frac{\partial(\tan(\phi_{1p}(t)))}{\partial z_{1p}} = \frac{\partial}{\partial z_{1p}}\left(\dot{\phi}_{1p}(t)\frac{y_{1p}(t)}{z_{1p}(t)}\right) = \frac{\partial\dot{\phi}_{1p}(t)}{\partial z_{1p}}\frac{y_{1p}}{z_{1p}} - \dot{\phi}_{1p}(t)\frac{y_{1p}(t)}{(z_{1p}(t))^2}\quad (4.23)$$

En combinant (4.22) et (4.23), et en utilisant les notations (4.17), on a :

$$\frac{\partial\phi_{1p}(t)}{\partial z_{1p}} = \frac{\sin(2\phi_{1p}(t))}{2\dot{\phi}_{1p}(t)}\frac{\partial\dot{\phi}_{1p}(t)}{\partial z_{1p}} - \frac{\sin(\phi_{1p}(t))}{r\dot{\phi}_{1p}(t)}\quad (4.24)$$

Or on cherche  $\dot{\phi}_{1p}(t)$  sous la forme :

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p} + \varsigma h(y_{1p}(t), z_{1p}(t), F_e(t))$$

où  $\varsigma \ll 1$ . Donc

$$\frac{\partial\phi_{1p}(t)}{\partial z_{1p}} = \varsigma \frac{\sin(2\phi_{1p}(t))}{2(\omega_{1p} + \varsigma h(y_{1p}(t), z_{1p}(t), F_e(t)))} \frac{\partial h(y_{1p}(t), z_{1p}(t), F_e(t))}{\partial z_{1p}} - \frac{\sin(\phi_{1p}(t))}{r(\omega_{1p} + \varsigma h(y_{1p}(t), z_{1p}(t), F_e(t)))}\quad (4.25)$$

Comme  $\varsigma \ll 1$  :

$$\frac{\partial\phi_{1p}(t)}{\partial z_{1p}} = -\frac{\sin(\phi_{1p}(t))}{r\omega_{1p}}\quad (4.26)$$



En remplaçant dans (4.20), on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_{1p}(t) &= \omega_{1p} - \frac{\sin(\phi_{1p}(t))}{r\omega_{1p}m_{1p}} F_e(t) \\ &= \omega_{1p} + \frac{A(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2}{r\omega_{1p}} \sin(\phi_{1p}(t)) \sin(\psi_s(t))\end{aligned}\quad (4.27)$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{r\omega_{1p}}$$

On sait que :

$$\sin(\phi_{1p}(t)) \sin(\psi_s(t)) = \frac{1}{2} (\cos(\psi_s(t) - \phi_{1p}(t)) - \cos(\psi_s(t) + \phi_{1p}(t)))$$

En supprimant les variations rapides, on a :

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p} + \frac{\varepsilon}{2} A(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2 \cos(\psi_s(t) - \phi_{1p}(t)) \quad (4.28)$$

ou encore :

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p} + \frac{\varepsilon}{2} A(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2 \sin(\psi_s(t) - \phi_{1p}(t) + \frac{\pi}{2}) \quad (4.29)$$

On retrouve alors une équation de type Kuramoto (voir la section 3.5). Si on suppose que la force ressentie par le piéton dépend des 5 dernières périodes d'oscillations de la passerelle, alors  $F_e(t) = m_{1p}\ddot{u}_{1p}(t) = -m_{1p}A_m(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2 \sin(\psi_s(t))$  et

$$\dot{\phi}_{1p}(t) = \omega_{1p} + \frac{\varepsilon}{2} A_m(t)\psi_1(x_{1p}(t))(\dot{\psi}_s(t))^2 \sin(\psi_s(t) - \phi_{1p}(t) + \frac{\pi}{2}) \quad (4.30)$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons expliquer le passage de cette forme de l'équation de synchronisation (4.30) à sa forme continue telle qu'elle est adoptée dans cette thèse. Cependant avant de passer au paragraphe suivant, nous faisons le point sur les principales différences existant entre l'équation (4.30) et les équations de synchronisation (1.35) et (1.36) utilisées dans les modèles présentés dans [7, 54, 62].

Pour commencer, dans ces deux modèles, la forme modale  $\psi_1(x)$  n'est pas prise en compte dans la synchronisation des piétons avec la passerelle. Cela revient à dire que les piétons réagissent de la même façon quelle que soit leur position sur leur passerelle, qu'ils soient à son extrémité, à mi-travée ou ailleurs. Or on sait que les oscillations de la passerelle sont différentes selon le point considéré et il est donc judicieux de différencier le comportement des piétons vis à vis des oscillations selon leur position sur la passerelle [33].

De plus, le terme  $A_m(t)\psi_1(x_{1p})(\dot{\psi}_s(t))^2$  qui apparaît dans (4.30) est une expression de l'accélération de la passerelle. Ceci montre que les piétons seraient sensibles à l'accélération. On retrouve cette idée dans [62] (équation (1.36)), alors que dans [7, 54] (équation (1.35)) il est supposé que les piétons sont sensibles au déplacement de la passerelle. On tient à attirer l'attention sur le fait que l'utilisation de l'accélération dans [62] et du déplacement dans [7, 54] ne sont pas validés de manière mathématique mais constituent plutôt un choix des auteurs. Par contre, dans notre modèle,  $A_m(t)\psi_1(x_{1p})(\dot{\psi}_s(t))^2$  découle des équations du système et ne provient pas d'une hypothèse que nous avons prise.

Dans l'équation (4.30), on fait l'hypothèse que le piéton est influencé par l'accélération maximale de la passerelle au cours des dernières oscillations. Dans [62], les auteurs utilisent l'hypothèse selon laquelle le piéton réagit avec un temps de retard  $\tau$ , ce qui veut dire qu'à l'instant  $t$  le piéton est influencé par l'accélération à l'instant  $t - \tau$ , mais cette hypothèse a été simplifiée au cours de l'article et les auteurs ont supposé que la passerelle influence instantanément le piéton. Cette dernière hypothèse est également utilisée dans [7].

Enfin, dans l'équation (4.30) entre les parenthèses de la fonction *sinus*, on trouve  $\frac{\pi}{2}$ , ce qui traduit le fait que le piéton se synchronise avec la phase de la vitesse de déplacement de la passerelle. Ainsi après synchronisation, la force latérale engendrée par le piéton est en phase avec la vitesse de la passerelle. On rappelle que les études expérimentales menées par ARUP [8, 21], ont montré que la force engendrée par des piétons après synchronisation est proportionnelle à la vitesse d'oscillation de la passerelle, ce qui veut

dire notamment que la force des piétons et la vitesse de la passerelle sont en phase. Dans [62] les auteurs utilisent  $\sin(\psi_s(t) - \phi_{1p}(t) + \frac{\pi}{2})$  (voir équation (1.36)) ce qui entraîne que le piéton se synchronise avec la vitesse de la passerelle. Dans [7], les auteurs ont étudié le cas où entre les parenthèses du *sinus*, le terme  $\frac{\pi}{2}$  apparaît ( $\alpha = \frac{\pi}{2}$  dans l'équation (1.35), *i.e.* comme dans notre modèle) et le cas où il n'y est pas ( $\alpha = 0$  dans l'équation (1.35)). Les solutions trouvées sans le terme  $\frac{\pi}{2}$  présentent des dissymétries dans l'évaluation de l'amortissement critique adimensionnalisé  $b_c(\Omega)$ . Or dans le cadre du travail effectué dans [7], la fréquence dimensionnelle des piétons  $\omega$  a pour moyenne la fréquence modale du système (qui est pour l'auteur la fréquence modale de la passerelle seule). Les solutions obtenues doivent donc être symétriques par rapport à cette fréquence moyenne. Pour les variables adimensionnelles, les solutions doivent être symétriques par rapport à 0, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, les auteurs ont jugé ces solutions physiquement inacceptables.

#### 4.6.2 Retour au modèle continu

Dans le cadre de cette thèse, les variables composant le modèle sont des variables locales (qui dépendent de l'espace  $x$  et du temps  $t$ ). Dans l'expression (4.30), on propose donc de remplacer  $x_{1p}$  par  $x$  et  $\phi_{1p}(t)$  par  $\phi(x, t)$ . De plus, la fréquence de marche libre est différente d'un piéton à l'autre. Cette fréquence doit correspondre à l'avancement des piétons. Elle dépend donc du temps et de l'espace. Donc  $\omega_{1p}$  est remplacée par  $\omega(x, t)$  qui vérifie l'équation de transport :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \quad (4.31)$$

où on rappelle que  $v(x, t)$  est la vitesse des piétons. Le passage au modèle continu impose que la dérivée par rapport au temps soit remplacée par une dérivée totale par rapport au temps

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x, t) \frac{\partial}{\partial x}$$

Ainsi, l'équation de Kuramoto (4.30) sous sa forme Eulérienne s'écrit :

$$\frac{d\phi}{dt}(x, t) = \omega(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} A_m(t) \psi_1(x) (\dot{\psi}_s(t))^2 \sin\left(\psi_s(t) - \phi(x, t) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.32)$$

Dans le cas où on introduit l'hypothèse simplificatrice selon laquelle la fréquence de marche libre n'évolue pas en temps ( $\omega(x, t) = \omega(x)$ ), l'équation (4.31) n'a plus besoin d'être utilisée et (4.32) devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} A_m(t) \psi_1(x) (\dot{\psi}_s(t))^2 \sin\left(\psi_s(t) - \phi(x, t) + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.33)$$

Cela simplifie le modèle adopté dans cette thèse, ce qui facilite les études analytiques (voir le chapitre 5). Cependant, cette hypothèse veut dire qu'en un point donné  $x$  de la passerelle, nous avons une fréquence de marche libre  $\omega(x)$  indépendante du temps. En d'autres termes, chaque piéton qui passe en  $x$  a une fréquence de marche libre égale à  $\omega(x)$ .

#### Prise en compte de la synchronisation entre piétons

Pour prendre en compte l'interaction entre les piétons, on définit la phase  $\phi_{av}(x, t)$  "vue" par le piéton qui se trouve au point  $x$ . Pour cela, pour tout point  $x$  on introduit les fonctions  $j_x(s)$  et  $k_x(s, t)$  définies en tout point  $s \in ]x; L]$  par :

$$j_x(s) = 1 - \frac{1}{2} \{erf[2(s - x - 5)] + 1\} \quad (4.34)$$

et

$$k_x(s, t) = \begin{cases} j_x(s)\phi(x, t) & \text{si } \eta(s, t) = 0 \\ j_x(s)\phi(s, t) & \text{si } \eta(s, t) > 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

On note  $J(x) = \int_x^L j_x(s) ds$ . La phase  $\phi_{av}(x, t)$  s'écrit sous la forme :

$$\phi_{av}(x, t) = \frac{1}{J(x)} \int_x^L j_x(s) k_x(s, t) ds \quad (4.36)$$

$\phi_{av}(x, t)$  est donc une moyenne pondérée des phases des piétons qui sont situés devant le piéton localisé au point  $x$ . La pondération est réalisée grâce à la fonction  $j_x(s)$  et traduit le fait que l'influence exercée par un piéton sur un autre marchant derrière lui décroît lorsque la distance qui les sépare augmente.

La synchronisation entre piétons peut être prise en compte en introduisant le terme  $\varepsilon_{pp}(x, t) \sin(\phi_{av}(x, t) - \phi(x, t))$  dans l'équation (4.32) :

$$\frac{d\phi}{dt}(x, t) = \omega(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} A_m(t) \psi_1(x) (\dot{\psi}_s(t))^2 \sin\left(\psi_s(t) - \phi(x, t) + \frac{\pi}{2}\right) + \varepsilon_{pp}(x, t) \sin(\phi_{av}(x, t) - \phi(x, t)) \quad (4.37)$$

La variable  $\varepsilon_{pp}(x, t)$  gère la synchronisation entre piétons. Pour le moment, cette variable est choisie arbitrairement. Cependant, on peut considérer que pour le problème  $1D$ , les piétons se suivent et ne peuvent pas se dépasser. De plus nous supposons qu'un piéton ne se synchronise avec les piétons qui sont devant lui que si ces piétons ont en moyenne une vitesse plus faible que la sienne. On définit donc la vitesse moyenne  $v_{av}(x, t)$  de la même manière que  $\phi_{av}(x, t)$  :

$$v_{av}(x, t) = \frac{1}{J(x)} \int_x^L j_x(s) k v_x(s, t) ds \quad (4.38)$$

où

$$k v_x(s, t) = \begin{cases} j_x(s) v(x, t) & \text{si } \eta(s, t) = 0 \\ j_x(s) v(s, t) & \text{si } \eta(s, t) > 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Dans ce cas, on propose d'écrire :

$$\varepsilon_{pp}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(x, t) < v_{av}(x, t) \\ \iota & \text{si } v(x, t) \geq v_{av}(x, t) \end{cases} \quad (4.40)$$

$\iota$  étant une constante à déterminer numériquement ou analytiquement.

Il est à noter que lorsque deux piétons ayant des vitesses différentes se rencontrent, et lorsque le piéton qui est derrière est plus rapide que le piéton qui est devant, le piéton le plus rapide souhaiterait probablement dépasser le piéton le plus lent. Cependant comme on travaille en  $1D$ , ceci n'est pas possible notamment en présence de l'équation de transport unidirectionnelle (4.31). Le piéton qui est derrière doit donc ralentir sa marche et se synchronise avec les piétons qui sont devant. Cette synchronisation est prise en compte par le terme  $\varepsilon_{pp}(x, t) \sin(\phi_{av}(x, t) - \phi(x, t))$  dans l'équation (4.37), et a pour conséquence que les piétons ne peuvent pas se dépasser. Un modèle  $2D$  avec une équation de transport semblable pourrait gérer le dépassement entre piétons de vitesses différentes. Si la prise en compte du dépassement est importante pour gérer le modèle global, l'équation de transport pourrait être supprimée. Dans ce cas, on peut prendre une distribution initiale de fréquences de marche libre de piétons sur l'espace et supposer qu'on peut garder la même distribution quelque soit l'instant étudié.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a introduit un nouveau modèle foule-passerelle. C'est un modèle continu basé sur des variables locales. Il est formé d'un couplage entre une équation aux dérivées ordinaires et de trois équations aux dérivées partielles. La démarche permettant d'aboutir à ce modèle a également été présentée.

# Chapitre 5

## Etude analytique

---

*CE CHAPITRE a pour objectif d'analyser le modèle proposé dans le chapitre 4 dans un cas particulier. On cherche à*

- ★ déterminer la relation qui lie le nombre critique  $N_c$  de piétons aux autres paramètres du modèle*
  - ★ déterminer la valeur du paramètre  $\varepsilon$  de l'équation de Kuramoto*
  - ★ déterminer l'amplitude stationnaire post-critique du déplacement de la passerelle*
  - ★ déterminer la fréquence de synchronisation dans les cas critique et post-critique*
  - ★ comparer les résultats obtenus pour la passerelle du Millennium avec ceux de ARUP*
  - ★ déterminer la durée de temps qu'il faut à l'amplitude pour augmenter de  $e = \exp(1)$  après le déclenchement de la synchronisation*
-

---

 PLAN DU CHAPITRE 5
 

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>125</b>
<b>5.2</b>	<b>Conditions de stationnarité et normalisation</b>	<b>126</b>
<b>5.3</b>	<b>Equations à temps lent et méthode des petites perturbations</b>	<b>127</b>
<b>5.4</b>	<b>Synchronisation partielle</b>	<b>129</b>
5.4.1	Repère tournant	129
5.4.2	Le cas stationnaire	130
5.4.3	Représentation statistique	130
<b>5.5</b>	<b>Etude du cas où <math>g</math> est une distribution gaussienne</b>	<b>136</b>
5.5.1	Détermination du nombre critique $N_c$ et de la fréquence de synchronisation pour $N \rightarrow N_c$	136
5.5.2	Cas particulier où $g(\Omega)$ est de moyenne nulle	137
<b>5.6</b>	<b>Comparaison avec les données expérimentales de la passerelle du Millennium</b>	<b>139</b>
<b>5.7</b>	<b>Détermination de l'évolution de l'amplitude du déplacement de la passerelle après déclenchement de la synchronisation</b>	<b>142</b>
<b>5.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>144</b>

---

## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous analysons un cas particulier du modèle étudié, dans le but de déterminer le paramètre  $\varepsilon$  du modèle et le nombre critique  $N_c$ . Nous cherchons également à évaluer la fréquence de synchronisation et l'amplitude du déplacement de la passerelle dans les cas critique et post-critique. Enfin nous voulons trouver la durée de temps qu'il faut à l'amplitude pour augmenter de  $e = \exp(1)$  après le déclenchement de la synchronisation.

Le cas particulier étudié concerne la situation où la fréquence angulaire de marche libre des piétons  $\omega$  varie en espace mais est constante en temps :  $\omega(x, t) = \omega(x)$ . Ceci a pour conséquence de simplifier la troisième équation de (4.1) et d'en éliminer la dernière. On introduit donc le système simplifié formé de 4 équations (5.1) régissant le comportement du système passerelle-piétons :

$$(M + M_p(t)) \frac{d^2 U}{dt^2}(t) + C \frac{dU}{dt}(t) + KU(t) = \mathcal{F}_i(t) \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial(\eta v(x, t))}{\partial x} = 0 \quad (5.1b)$$

$$v(x, t) = \frac{l(x, t)}{\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) \quad (5.1c)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \omega(x) + \frac{\varepsilon}{2} A(t) \psi_1(x) (\dot{\psi}_s(t))^2 \sin(\psi_s(t) - \phi(x, t) + \alpha) \quad (5.1d)$$

avec

$$\begin{aligned} M_p(t) &= \int_0^L m_{1p} \eta(x, t) \ell(x) \psi_1(x) dx \\ \mathcal{F}_i(t) &= \int_0^L G \eta(x, t) \ell(x) \psi_1(x) \sin(\phi(x, t)) dx \\ l(x, t) &= l_0 C_\eta(x, t) C_s(x, t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

La signification des différentes variables est donnée dans le chapitre 4. Les conditions initiales de ce système d'équations sont proposées ultérieurement. On commence par normaliser les variables et on passe à un repère rotationnel dans 5.2. Puis on réalise une étude des petites perturbations dans 5.3 et on étudie le cas de la synchronisation partielle dans 5.4. Les différentes phases d'analyse sont inspirées de [7]. Ceci conduit à un nouveau système d'équations vérifié à l'état stationnaire. On en déduit un système particulier lorsque le nombre de piétons est  $N = N_c$ . L'analyse de ces deux systèmes est propre à ce travail de thèse et traite un cas plus général que celui présenté dans [7]. On considère le cas où la fréquence initiale des piétons suit une loi gaussienne dans 5.5. La résolution du système d'équations final obtenu après les différentes transformations permet de trouver une relation entre le nombre critique de piétons  $N_c$  et les autres paramètres du modèle dont  $\varepsilon$ . La connaissance du nombre critique de piétons pour la travée nord de la passerelle du Millennium permet alors la détermination de  $\varepsilon$ . La valeur de la fréquence de synchronisation lorsque  $N = N_c$  est également trouvée. Ensuite, on cherche la valeur de l'amplitude du déplacement de la passerelle et de la fréquence de synchronisation correspondantes à des conditions post-critiques stationnaires. Dans 5.6, on introduit une surface invariante qui détermine des conditions initiales particulières du système qui caractérisent l'état synchronisé (stationnaire ou pas). Ceci permet de faire une comparaison entre les résultats obtenus grâce à cette analyse et les résultats obtenus par Arup. Enfin, dans 5.7, une étude réalisée dans ce cas particulier de conditions initiales permet de déterminer le temps nécessaire à l'augmentation de l'amplitude des oscillations pour un nombre de piétons proche du nombre critique. Les études basées sur la surface invariante s'inspirent de [7].

Avant de commencer l'analyse du modèle, nous tenons à rappeler les principales différences entre le modèle étudié ici et celui proposé dans [7]. Pour commencer, on propose ici un modèle continu (approche Eulerienne), alors que dans [7] il s'agit d'un modèle discret (approche Lagrangienne). De plus, on a ajouté l'effet de la forme modale et la synchronisation des piétons avec la structure est basée sur l'accélération et non sur le déplacement. Enfin, dans [7], la masse modale des piétons est négligée dans l'équation de la dynamique, ce qui modifie la fréquence modale du système.

## 5.2 Conditions de stationnarité et normalisation

On pose

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_0^L \eta(x,t)\ell(x)dx \\ M_t(t) &= M + M_p(t) \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $N$  est le nombre total de piétons sur la passerelle et  $M_t$  est la masse modale totale du système piétons-passerelle. Soit

$$\omega_0(t) = \sqrt{\frac{K}{M_t(t)}} \quad (5.4)$$

la fréquence modale du système passerelle-piétons. On note

$$D(t) = \frac{\varepsilon}{2}\omega_0^2(t) \quad (5.5)$$

Lorsque le système foule-structure atteint un état stationnaire, la densité des piétons, leur fréquence, ainsi que l'amplitude et la fréquence du déplacement de la passerelle ne varient plus en fonction du temps. On commence donc par supposer que la densité  $\eta$  est constante en temps. Ceci a pour conséquence que le nombre de piétons  $N$  est constant de même que la masse modale des piétons  $M_p$ , la masse modale totale  $M_t$ ,  $\omega_0$  et  $D$ .

Le taux d'amortissement s'écrit :

$$\zeta = \frac{C\omega_0}{2K} = \frac{C}{2M_t\omega_0} = \frac{C}{2\sqrt{M_tK}} \quad (5.6)$$

Afin de normaliser le système d'équations (5.1), on introduit les deux longueurs suivantes :

$$L_1 = \frac{NG}{K} \quad L_2 = \frac{\omega_0}{D} \quad (5.7)$$

On pose alors :

$$\tilde{L} = \sqrt{L_1L_2} = \sqrt{\frac{NG\omega_0}{KD}} \quad \text{et} \quad \gamma = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \sqrt{\frac{NGD}{K\omega_0}} \quad (5.8)$$

Ces constantes de normalisation sont inspirées par la thèse de Abrams [7]. Dans les travaux de Eckhardt [62], on trouve une normalisation différente. La constante  $\gamma$  est supposée vérifier  $\gamma \ll 1$ . En effet, on considère le cas de la travée Nord du Millennium ( $K = 2,473.10^7 N/m$ ), et on suppose que  $\omega_0 \simeq \sqrt{\frac{K}{M}} = 6,4684 rad/s$ . On estime que  $\varepsilon$  est de l'ordre de l'unité [62]. Notons que pour que  $\gamma$  soit égale à 1, il faudrait avoir à peu près  $N = 94249$  piétons soit une densité proche de  $290p/m^2$  ce qui est évidemment impossible ! On peut donc supposer que  $\gamma \ll 1$ . Les constantes  $\tilde{L}$  et  $\gamma$  telles qu'elles sont définies dans (5.8) font apparaître  $\gamma$  ( $\ll 1$ ) dans les équations normalisées du système (5.16) qui sont relatives aux équations (5.1a) et (5.1d). Les autres choix de normalisation ne permettent d'avoir une constante  $\ll 1$  que dans l'une des deux équations.

Ceci permet la définition du déplacement normalisé  $\tilde{u}$  et de son amplitude normalisée  $a$

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{U}{\tilde{L}} \\ a &= \frac{A}{\tilde{L}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

On introduit une moyenne pondérée par rapport à la forme modale et à la densité des piétons

$$\langle Y \rangle = \frac{1}{N} \int_0^L Y(x)\ell(x)\psi_1(x)\eta(x)dx \quad (5.10)$$

En effet, dans le cas où  $Y(x) = 1(x) = 1$ , on a

$$\langle 1(x) \rangle = \frac{1}{N} \int_0^L \ell(x)\psi_1(x)\eta(x)dx \leq 1$$

puisque  $N = \int_0^L \ell(x)\eta(x)dx$  est le nombre de piétons et  $\psi_1(x) = \sin(\frac{\pi x}{L})$ .

On introduit la variable de temps “rapide” :

$$\tau = \omega_0 t \quad (5.11)$$

En faisant la normalisation selon les équations (5.3) à (5.9), l'équation (5.1a) devient :

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{d\tilde{u}}{d\tau} + \tilde{u} = \gamma \langle \sin(\phi(x, t)) \rangle \quad (5.12)$$

En supposant  $\gamma \ll 1$ , on définit les variables  $b$  et  $\Omega(x)$  d'après les égalités suivantes :

$$\zeta = \gamma b \quad (5.13)$$

$$\frac{\omega(x)}{\omega_0} = 1 + \gamma \Omega(x) \quad (5.14)$$

Considérons un repère en rotation horaire à une vitesse constante  $\omega_0$  (fréquence circulaire modale du système passerelle-foule). Dans ce nouveau repère, la phase totale des piétons  $\theta$  et celle de la structure  $\psi$  sont définies par :

$$\begin{cases} \theta(x, \tau) = \phi(x, \tau) - \omega_0 t = \phi(x, \tau) - \tau \\ \psi(\tau) = \psi_s(\tau) - \omega_0 t = \psi_s(\tau) - \tau \end{cases} \quad (5.15)$$

Le système formé par les équations (5.1a) et (5.1d) devient donc :

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{d\tau^2}(\tau) + u(\tau) = \gamma \langle \sin(\theta(x, \tau) + \tau) \rangle - 2b \frac{du}{d\tau}(\tau) \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, \tau) = \gamma \left( \Omega(x) + a(\tau)\psi_1(x) \left( \frac{d\psi}{d\tau}(\tau) + 1 \right)^2 \sin(\psi(\tau) - \theta(x, \tau) + \alpha) \right) \end{cases} \quad (5.16)$$

La présence de  $\gamma \ll 1$  dans les deux équations de (5.16) nous permet d'appliquer une méthode des petites perturbations qui est développée dans la section suivante.

### 5.3 Equations à temps lent et méthode des petites perturbations

Dans cette partie, on introduit une variable de temps “lent”, et on obtient un système d'équations avec des variables à évolution lente. Dans la section suivante, l'étude de ces équations permet l'obtention d'une expression liant le nombre critique  $N_c$  de piétons aux autres paramètres du modèle.

On définit la variable de temps à variation lente

$$T = \gamma \tau$$

Ainsi, toute variable  $Y(\tau)$  devient  $Y(\tau, T(\tau))$ , et toute variable  $Z(x, \tau)$  devient  $Z(x, \tau, T(\tau))$ . D'où les dérivées totales par rapport à  $\tau$  s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dY}{d\tau}(\tau, T(\tau)) = \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\tau, T(\tau)) + \frac{\partial Y}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}(\tau, T(\tau)) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial T} \right) Y(\tau, T(\tau)) \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau}(x, \tau, T(\tau)) = \frac{\partial Y}{\partial \tau}(x, \tau, T(\tau)) + \frac{\partial Y}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \tau}(x, \tau, T(\tau)) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial T} \right) Z(x, \tau, T(\tau)) \end{cases} \quad (5.17)$$

Donc, les dérivées totales du déplacement normalisé  $\tilde{u}$  de la passerelle, s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau}(\tau) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial}{\partial T} \right) \tilde{u}(\tau) \\ \frac{d^2 \tilde{u}}{d\tau^2}(\tau) = \left( \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 2\gamma \frac{\partial^2}{\partial T \partial \tau} \right) \tilde{u}(\tau) + O(\gamma^2) \end{cases} \quad (5.18)$$



De plus, en supposant que  $\gamma \ll 1$ , et en utilisant la théorie des petites perturbations, on peut décomposer  $u$  en une somme de plusieurs termes :

$$\tilde{u} = u_0 + \gamma u_1 + \gamma^2 u_2 + \dots \quad (5.19)$$

On utilise (5.19) et on remplace dans la première équation du système (5.16). Comme  $\gamma \ll 1$ , on se limite aux termes d'ordre 1 en  $\gamma$ . En séparant les termes d'ordre 0 et les termes d'ordre 1 en  $\gamma$ , on obtient les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2}(\tau, T) + u_0(\tau, T) & = 0 \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2}(\tau, T) + 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial T \partial \tau}(\tau, T) + u_1(\tau, T) & = f(x, \tau, T) \end{cases} \quad (5.20)$$

où on a posé

$$f(x, \tau, T) = \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \rangle - 2b \frac{du_0}{d\tau}(\tau, T) \quad (5.21)$$

La première équation de (5.20) admet pour solution :

$$u_0(\tau, T) = a(T) \sin(\tau + \psi(T)) \quad (5.22)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial T \partial \tau}(\tau, T) &= \frac{\partial}{\partial T}(a(T) \cos(\tau + \psi(T))) \\ &= \frac{da}{dT}(T) \cos(\tau + \psi(T)) - a(T) \frac{\partial \psi}{\partial T} \sin(\tau + \psi(T)) \end{aligned} \quad (5.23)$$

En remplaçant dans la deuxième équation du système (5.20) on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2}(\tau, T) + u_1(\tau, T) = f(x, \tau, T) - 2 \frac{da}{dT}(T) \cos(\tau + \psi(T)) + 2a(T) \frac{d\psi}{dT}(T) \sin(\tau + \psi(T)) \quad (5.24)$$

La solution de (5.24) doit être bornée. Pour cela, il faut supprimer les termes du second membre qui conduisent à la résonance. Pour satisfaire cette condition, il suffit que le second membre de cette équation soit orthogonal à  $\sin(\tau + \psi(T))$  et à  $\cos(\tau + \psi(T))$ . On commence par assurer l'orthogonalité par rapport au *sinus*. En multipliant le second membre par  $\sin(\tau + \psi(T))$  et en intégrant par rapport à  $\tau$ , on obtient :

$$\oint (f - 2 \frac{da}{dT} \cos(\tau + \psi(T)) + 2a(T) \frac{\partial \psi}{\partial T} \sin(\tau + \psi(T))) \sin(\tau + \psi(T)) d\tau = 0 \quad (5.25)$$

où  $\oint = \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}+2\pi}$ ,  $\bar{\tau}$  étant arbitraire. L'orthogonalité entre le *sinus* et le *cosinus*, réduit l'équation précédente à :

$$\oint f(x, \tau, T) \sin(\tau + \psi(T)) d\tau = -a(T) \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) \quad (5.26)$$

En procédant de la même façon avec le *cosinus*, on obtient

$$\oint f(x, \tau, T) \cos(\tau + \psi(T)) d\tau = \frac{da}{dT}(T) \quad (5.27)$$

On rappelle que  $f(x, \tau, T)$  s'écrit  $f(x, \tau, T) = \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \rangle - 2ba(T) \cos(\tau + \psi(T))$ . Le terme de gauche de l'équation (5.26) s'écrit alors (voir Annexe 1 à l'équation (30)) :

$$\oint f(x, \tau, T) \sin(\tau + \psi(T)) d\tau = \frac{1}{2} \langle \cos(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle \quad (5.28)$$

L'équation (5.26) donne :

$$a(T) \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) = -\frac{1}{2} \langle \cos(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle \quad (5.29)$$

De même, le terme de gauche de l'équation (5.27) s'écrit (voir Annexe 1 à l'équation (31)) :

$$\oint f(x, \tau, T) \cos(\tau + \psi(T)) d\tau = -ba(T) + \frac{1}{2} \langle \sin(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle \quad (5.30)$$

et l'équation (5.27) entraîne que :

$$\frac{da}{dT}(T) + ba(T) = \frac{1}{2} \langle \sin(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle \quad (5.31)$$

En utilisant l'équation (5.27), la deuxième équation de (5.16) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, \tau, T) + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial T}(x, \tau, T) &= \gamma \left[ \Omega(x) + a(T)\psi_1(x) \left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(T) + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) + 1 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \sin(\psi(T) - \theta(x, \tau, T) + \alpha) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

Or

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \tau}(T) + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) + 1 \right)^2 = \left( \gamma \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) + 1 \right)^2 = 1 + \gamma^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) \right)^2 + 2\gamma \frac{\partial \psi}{\partial T}(T)$$

Donc

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau}(x, \tau, T) + \gamma \frac{\partial \theta}{\partial T}(x, \tau, T) = \gamma \left[ \Omega(x) + a(T)\psi_1(x) \sin(\psi(T) - \theta(x, \tau, T) + \alpha) \right] + o(\gamma^2) \quad (5.33)$$

On remarque que le second membre de l'équation (5.33) ne dépend pas de  $\tau$  mais dépend uniquement de  $T$ , ce qui démontre que  $\theta$  dépend uniquement de  $T$ . Ainsi, on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, T) = \Omega(x) + a(T)\psi_1(x) \sin(\psi(T) - \theta(x, T) + \alpha) \quad (5.34)$$

Enfin, on déduit de ce qui précède le système d'équations suivant :

$$a(T) \frac{\partial \psi}{\partial T}(T) = -\frac{1}{2} \langle \cos(\theta(x, T) + \phi_0(x) - \psi(T)) \rangle \quad (5.35a)$$

$$\frac{da}{dT}(T) + ba(T) = \frac{1}{2} \langle \sin(\theta(x, T) + \phi_0(x) - \psi(T)) \rangle \quad (5.35b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, T) = \Omega(x) + a(T)\psi_1(x) \sin(\psi(T) - \theta(x, T) + \alpha) \quad (5.35c)$$

## 5.4 Synchronisation partielle

Dans cette partie, on étudie le cas d'une synchronisation partielle entre les piétons et la passerelle. Ce cas représente le phénomène où un certain nombre de piétons est synchronisé avec la passerelle. On commence par introduire un nouveau repère tournant caractérisé par la fréquence de blocage (ou synchronisation) entre les piétons et la passerelle. La phase totale des piétons  $\theta(x, t)$  et celle de la passerelle  $\psi(t)$  sont définies dans ce nouveau repère, ensuite le cas stationnaire est étudié. Cette étude nécessite le passage à une représentation statistique des fréquences et des phases des piétons sur la passerelle. Elle débouche sur un système d'équations dit "auto-consistant" qui permet dans la section suivante la détermination des valeurs critiques pour le déclenchement de la synchronisation.

### 5.4.1 Repère tournant

Notons  $q$  la fréquence de blocage. On entend par là, la fréquence normalisée de la passerelle et des piétons synchronisés. On introduit alors un nouveau repère qui effectue une rotation avec une vitesse angulaire  $q$ . La fréquence de la passerelle dans le repère précédent étant supposée constante et égale à  $q$ , on peut faire l'hypothèse suivante :

$$\psi(T) = qT - \alpha \quad (5.36)$$

et on introduit la variable  $\varphi(x, T)$  définie par

$$\theta(x, T) := qT + \varphi(x, T) \quad (5.37)$$

où on rappelle que  $\alpha$  a déjà été utilisé dans l'équation de Kuramoto (5.1d). Ainsi, le nouveau système d'équations qui découle de (5.35) est :

$$qa(T) = -\frac{1}{2} \langle \cos(\varphi(x, T) + \alpha) \rangle \quad (5.38a)$$

$$\frac{da}{dT}(T) + ba(T) = \frac{1}{2} \langle \sin(\varphi(x, T) + \alpha) \rangle \quad (5.38b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = \Omega(x) - q - a(T)\psi_1(x) \sin(\varphi(x, T)) \quad (5.38c)$$

### 5.4.2 Le cas stationnaire

Dans ce paragraphe on considère le système dans son état stationnaire. Ce cas est caractérisé par une amplitude normalisée  $a(T)$  constante, et donc par  $\frac{da}{dT} = 0$ . On observe que la fréquence de la structure est déjà supposée constante d'après (5.36). Les équations du système (5.38) deviennent :

$$2qa = - \langle \cos(\varphi(x, T) + \alpha) \rangle \quad (5.39a)$$

$$2ba = \langle \sin(\varphi(x, T) + \alpha) \rangle \quad (5.39b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = \Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi(x, T)) \quad (5.39c)$$

Pour résoudre le système (5.39), il faut pouvoir déterminer la phase  $\varphi(x, T)$ . Or l'évolution de  $\varphi(x, T)$ , déterminée grâce à l'équation (5.39c), est différente si les piétons sont synchronisés avec la passerelle ou ne le sont pas. Ainsi, deux cas sont à traiter :

- les piétons qui sont synchronisés avec la passerelle

- les piétons qui ne sont pas synchronisés avec la passerelle

La phase des piétons synchronisés vérifie  $\frac{\partial \theta}{\partial T} = q$  donc  $\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0$ . Pour que cette synchronisation soit réalisable, il faut donc que la condition suivante soit satisfaite (voir équation (5.39c)) :

$$|\Omega(x) - q| \leq a|\psi_1(x)| \quad (5.40)$$

Elle correspond à

$$|\omega(x) - \omega_b| \leq D(t)A(t)|\psi_1(x)| \quad (5.41)$$

où  $\omega_b = \omega_0(1 + \gamma q)$  est la fréquence de la passerelle et des piétons synchronisés. Selon cette définition  $\omega_b = \omega_0$  si et seulement si  $q = 0$ .

Les piétons non synchronisés avec la passerelle sont ceux qui ont des fréquences naturelles assez éloignées de la fréquence des oscillations de la passerelle :

$$|\Omega(x) - q| > a|\psi_1(x)| \quad (5.42)$$

qui correspond à

$$|\omega(x) - \omega_b| > D(t)A(t)|\psi_1(x)| \quad (5.43)$$

La détermination d'une forme analytique de  $\varphi$  à partir de l'équation (5.39c) est impossible à notre connaissance. On propose donc de faire une étude statistique qui est présentée dans la section suivante. Cette démarche est aussi suivie par [7, 54, 62].

### 5.4.3 Représentation statistique

Pour résoudre le système (5.39), il faut déterminer la fonction de distribution statistique que vérifie  $\varphi(x, T)$ . On note  $g(\Omega)$  la distribution des fréquences normalisées de marche libre des piétons (ou fréquences naturelles des piétons). Comme on l'a vu précédemment,  $\varphi(x, T)$  dépend de l'état de synchronisation des piétons qui lui même dépend de  $\Omega$ . Il faut donc déterminer la distribution de probabilité marginale  $\rho(\varphi|\Omega)$  de

$\varphi(x, T)$  par rapport  $\Omega$ . Il est évident que l'expression de cette densité de probabilité marginale est différente suivant que les piétons sont synchronisés ou pas. Ainsi dans le cas de piétons synchronisés, il existe une valeur préférentielle  $\varphi^*$  (constante par rapport à  $T$   $\frac{\partial \varphi}{\partial T} = 0$ ) ce qui n'est pas le cas des piétons non synchronisés. Si  $Y$  est une fonction de  $\varphi$ , on peut approcher  $Y(\varphi(x, T))$  par son espérance en terme de probabilités :

$$Y(\varphi(x, T)) = \int_{\Omega} \int_{-\pi}^{\pi} \rho(\varphi|\Omega) Y(\varphi) d\varphi d\Omega \quad (5.44)$$

#### 5.4.3.1 Cas des piétons synchronisés

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, les piétons synchronisés vérifient la condition (5.40). De plus,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = 0$$

En effet, si on retourne aux variables dimensionnelles, la synchronisation s'exprime par

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) = \frac{d\psi_s}{dt}(t)$$

On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial T}(qT + \varphi(x, T)) = \frac{\partial}{\partial T}(qT - \alpha)$$

On arrive à la conclusion que  $\frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = 0$ .

Or

$$\frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = \Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi(x, T))$$

Donc

$$\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi^*(x, T)) = 0$$

et

$$\varphi^*(x, T) = \arcsin\left(\frac{\Omega - q}{a\psi_1(x)}\right) \quad (5.45)$$

$\varphi^*$  ne dépend donc pas de  $T$ , on la note alors  $\varphi^*(x)$ . Donc dans ce cas,

$$\rho(\varphi|\Omega) = \delta\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{\Omega - q}{a\psi_1(x)}\right)\right) \quad (5.46)$$

On peut remarquer que  $\oint \rho(\varphi|\Omega) d\varphi = 1$ .

#### 5.4.3.2 Cas des piétons non synchronisés

Les piétons non synchronisés vérifient la condition (5.42). La densité de probabilité  $\rho(\varphi|\Omega)$  suit la condition de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \nabla(\rho \tilde{v}) = 0 \quad (5.47)$$

où  $\tilde{v} = \frac{l_{pas}}{\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T)$  est la vitesse des piétons dans le nouveau repère. Or  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$  et

$$\partial x = \tilde{v} \partial T = \frac{l_{pas}}{\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) \partial T = \frac{l_{pas}}{\pi} \partial \varphi$$

Donc

$$\nabla(\rho \tilde{v}) = \frac{\pi}{l_{pas}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \rho \frac{l_{pas}}{\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \dot{\varphi})$$

L'équation de conservation appliquée à  $\rho$  se réduit donc à

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho \dot{\varphi}) = 0 \quad (5.48)$$

On cherche les solutions où les piétons sont répartis dans un état statistique stationnaire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = 0 \quad (5.49)$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho \dot{\varphi}) = 0 \quad (5.50)$$

$\rho \dot{\varphi}$  est donc constant par rapport à  $\varphi$ , et  $\rho$  est inversement proportionnel à  $\dot{\varphi}$ . Or

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial T}(x, T) = \Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi(x, T))$$

et

$$\rho(\varphi|\Omega) \propto \frac{1}{\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)} \quad (5.51)$$

$\rho(\varphi|\Omega)$  doit vérifier la condition suivante :

$$\oint \rho(\varphi|\Omega) d\varphi = 1 \quad (5.52)$$

L'utilisation de cette condition permet la détermination de la constante de proportionnalité. On sait que

$$\oint \frac{1}{\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)} d\varphi = \frac{2\pi \text{sign}(\Omega - q)}{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}} \quad (5.53)$$

et on a  $|\Omega - q| > a\psi_1(x)$ , donc

$$\rho(\varphi|\Omega) = \frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}}{2\pi |\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} \quad (5.54)$$

### 5.4.3.3 La fonction de distribution marginale de la phase totale des piétons synchronisés et non synchronisés

En regroupant les résultats des deux paragraphes précédents, la distribution marginale de la phase totale des piétons connaissant leur fréquence  $\Omega(x)$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho(\varphi|\Omega) = \begin{cases} \delta\left(\varphi - \arcsin\left(\frac{\Omega - q}{a\psi_1(x)}\right)\right) & \text{si } |\Omega - q| \leq a\psi_1(x) \\ \frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}}{2\pi |\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} & \text{si } |\Omega - q| > a\psi_1(x) \end{cases} \quad (5.55)$$

D'après l'approche définie en (5.44), on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) \psi_1(x) \cos(\varphi(x, T)) dx \\ &= \frac{1}{N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) \psi_1(x) \left[ \int_{\Omega} \left( \oint \cos(\varphi \rho)(\varphi|\Omega) d\varphi \right) g(\Omega) d\Omega \right] dx \end{aligned} \quad (5.56)$$

On peut décomposer l'intégrale sur  $[0, L]$  en :

$$\langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle = I_1 + I_2 \quad (5.57)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x) \ell(x) \psi_1(x) \cos(\arcsin(\varphi^*)) g(\Omega) d\Omega dx \\ I_2 &= \frac{1}{N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) \psi_1(x) \int_{|\Omega - q| > a|\psi_1(x)|} \left( \oint \cos(\varphi) \frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}}{2\pi |\Omega - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi \right) g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned} \quad (5.58)$$

Or

$$\cos(\arcsin(\varphi^*)) = \sqrt{1 - (\varphi^*)^2} = \frac{\sqrt{(a\psi_1(x))^2 - (\Omega - q)^2}}{a(T)\psi_1(x)}$$

et

$$\oint \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega - q - a\psi_1(x)\sin(\varphi)|} d\varphi = 0 \quad (5.59)$$

(voir Annexe 1 pour les détails du calcul)

Donc

$$\langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle = \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x) \frac{\sqrt{(a\psi_1(x))^2 - (\Omega - q)^2}}{a} g(\Omega) d\Omega dx \quad (5.60)$$

Pour le calcul de  $\langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle$ , on utilise également l'écriture proposée dans (5.44), et on décompose l'intégrale sur  $[0, L]$  en deux intégrales :

$$\langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle = J_1 + J_2 \quad (5.61)$$

où  $J_1$  et  $J_2$  sont définis par :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x) \frac{\Omega - q}{a} g(\Omega) d\Omega dx \\ J_2 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| > a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x)\psi_1(x) \left( \oint \sin(\varphi) \frac{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}}{2\pi|\Omega - q - a\psi_1(x)\sin(\varphi)|} d\varphi \right) g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned} \quad (5.62)$$

L'égalité suivante :

$$\oint \frac{\sin(\varphi)}{|\Omega - q - a\psi_1(x)\sin(\varphi)|} d\varphi = \frac{2\pi}{a\psi_1(x)} \left[ \frac{\Omega - q}{\sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2}} - \text{sign}(\Omega - q) \right]$$

donne

$$J_2 = \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| > a|\psi_1(x)|} \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \left[ \Omega - q - \text{sign}(\Omega - q) \sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2} \right] g(\Omega) d\Omega dx \quad (5.63)$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x) \frac{\Omega - q}{a} g(\Omega) d\Omega dx \\ &+ \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| > a|\psi_1(x)|} \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \left[ \Omega - q - \text{sign}(\Omega - q) \sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2} \right] g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned} \quad (5.64)$$

En remplaçant (5.60) et (5.64) dans les équations du système (5.39), on obtient un système algébrique auto-consistant dont les inconnues sont  $a$  et  $q$ . Une étude analytique permet la résolution de ce système pour des distributions  $g(\Omega)$  particulières.

#### 5.4.3.4 Le système d'équations pour $N = N_c$

Théoriquement, on suppose que lorsque le nombre de piétons  $N$  est inférieur au nombre critique  $N_c$ , l'amplitude dimensionnelle  $A$  de la passerelle est nulle et donc par conséquent l'amplitude adimensionnelle  $a = 0$ . Pour  $N > N_c$ , on est dans le cas post-critique donc  $A > 0$  et  $a > 0$ . Donc en supposant que  $a > 0$ , on se place dans le cas post-critique où  $N > N_c$ . En faisant tendre  $a$  vers  $0^+$ , on fait tendre  $N$  vers  $N_c$  et on se place dans le cas critique.

Dans cette partie, nous voulons déterminer le système d'équations vérifié dans les conditions critiques ( $a$  tend vers  $0^+$ ) à partir du système (5.39) et des équations (5.60) et (5.64).

Pour cela, on fait l'hypothèse que  $a \ll 1$  et on commence par étudier l'équation (5.60) :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x) \frac{\sqrt{(a\psi_1(x))^2 - (\Omega - q)^2}}{a} g(\Omega) d\Omega dx \\ &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x)\psi_1(x) \sqrt{1 - \frac{(\Omega - q)^2}{(a\psi_1(x))^2}} g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned} \quad (5.65)$$

Pour les piétons synchronisés, l'inégalité  $|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|$  permet d'effectuer le changement de variables défini par :

$$\Omega = q + a\psi_1(x) \sin \chi$$

donc

$$d\Omega = a\psi_1(x) \cos \chi d\chi$$

Il est à noter que les variables  $\Omega$  et  $x$  étant indépendantes, les variables  $\chi$  et  $x$  le sont aussi.

On note  $q_0$  la limite de  $q$  lorsque  $a$  tend vers 0 (on suppose  $a \ll 1$ ). Donc :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{a}{N} \int_0^L \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 \cos^2 \chi g(q + a\psi_1(x) \sin(\chi)) d\chi dx \\ &\simeq \frac{ag(q_0)}{N} \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \chi d\chi dx \\ &= \frac{a\pi}{2N} g(q_0) \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 dx \end{aligned} \quad (5.66)$$

Ainsi

$$\langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle = \frac{a\pi}{2N} g(q_0) \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 dx \quad (5.67)$$

Dans le cas particulier où la largeur  $\ell$  de la passerelle est constante, la forme modale  $\psi_1(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  et les piétons sont uniformément répartis sur la passerelle ( $\eta(x) = \eta$  est constante sur la passerelle), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{a\pi}{2N} g(q_0) \eta \ell \int_0^L (\psi_1(x))^2 dx = \frac{a\pi}{4N} g(q_0) \eta \ell L \\ \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{a\pi}{4} g(q_0) \end{aligned} \quad (5.68)$$

On calcule maintenant  $\langle \sin \varphi \rangle$  que nous décomposons en

$$\langle \sin \varphi \rangle = I_1 + I_2$$

où on a noté :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|} \eta(x)\ell(x) \frac{\Omega - q}{a} g(\Omega) d\Omega dx \\ I_2 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega - q| > a|\psi_1(x)|} \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \left[ \Omega - q - \text{sign}(\Omega - q) \sqrt{(\Omega - q)^2 - (a\psi_1(x))^2} \right] g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned}$$

On commence par évaluer  $I_1$ . Comme  $a \ll 1$ ,  $|\Omega - q| \leq a|\psi_1(x)|$  implique que  $|\Omega - q| \ll 1$ . On peut donc faire le développement de Taylor suivant :

$$g(\Omega) = g(q) + g'(q)(\Omega - q) + O((\Omega - q)^2)$$

En remplaçant dans l'expression de  $I_1$ , on obtient :

$$I_1 = \frac{1}{N} \int_0^L \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \int_{q - a\psi_1(x)}^{q + a\psi_1(x)} [(\Omega - q)g(q) + (\Omega - q)^2 g'(q) + O((\Omega - q)^3)] d\Omega dx$$

Or

$$\int_{q-a\psi_1(x)}^{q+a\psi_1(x)} (\Omega - q) d\Omega = \left[ \frac{\Omega^2}{2} - \Omega q \right]_{q-a\psi_1(x)}^{q+a\psi_1(x)} = 0$$

et

$$\int_{q-a\psi_1(x)}^{q+a\psi_1(x)} (\Omega - q)^2 d\Omega = \frac{1}{3} [(\Omega - q)^3]_{q-a\psi_1(x)}^{q+a\psi_1(x)} = \frac{2}{3} (a\psi_1(x))^3$$

Donc

$$I_1 = \frac{2a^2 g'(q_0)}{3N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) [\psi_1(x)]^3 dx$$

On évalue maintenant  $I_2$  :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega-q|>a\psi_1(x)} \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \left[ \Omega - q - \text{sign}(\Omega - q) |\Omega - q| \sqrt{1 - \frac{(a\psi_1(x))^2}{(\Omega - q)^2}} \right] g(\Omega) d\Omega dx \\ &= \frac{1}{N} \int_0^L \int_{|\Omega-q|>a\psi_1(x)} \frac{\eta(x)\ell(x)}{a} \left[ \Omega - q - (\Omega - q) \sqrt{1 - \frac{(a\psi_1(x))^2}{(\Omega - q)^2}} \right] g(\Omega) d\Omega dx \end{aligned}$$

Or  $a \ll 1$ , on peut donc écrire  $\sqrt{1 - \frac{(a\psi_1(x))^2}{(\Omega(x) - q)^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{(a\psi_1(x))^2}{(\Omega(x) - q)^2}$

$$I_2 = \frac{a}{2N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) (\psi_1(x))^2 \left[ \int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(x)|} \frac{g(\Omega)}{\Omega - q} d\Omega \right] dx$$

Or

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{|\Omega-q|>a|\psi_1(x)|} \frac{g(\Omega)}{\Omega - q} d\Omega = PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\Omega)}{\Omega - q_0} d\Omega = \pi \tilde{g}(q_0)$$

Où  $PV$  représente la valeur principale de Cauchy et  $\tilde{g}(q_0) = \mathcal{H}[g(\Omega)]$ , avec  $\mathcal{H}[g(\Omega)]$  la transformée de Hilbert de  $g$  en  $q_0$ . Donc :

$$I_2 = \frac{a}{2N} \tilde{g}(q_0) \int_0^L \eta(x) \ell(x) (\psi_1(x))^2 dx$$

Comme on propose de limiter le développement de Taylor à l'ordre 1 en  $a$ , on obtient :

$$\langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle \simeq I_2 = \frac{a}{2N} \tilde{g}(q_0) \int_0^L \eta(x) \ell(x) (\psi_1(x))^2 dx \quad (5.69)$$

Dans le cas particulier où  $\ell(x)$  et  $\eta(x)$  sont constantes, on obtient :

$$\langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle = \frac{a}{4} \tilde{g}(q_0) \quad (5.70)$$

Si on pose

$$n = \frac{1}{N} \int_0^L \eta(x) \ell(x) (\psi_1(x))^2 dx$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{an\pi}{2} g(q_0) \\ \langle \sin(\varphi(x, T)) \rangle &= \frac{an}{2} \tilde{g}(q_0) \end{aligned} \quad (5.71)$$

Les équations (5.39a) et (5.39b) peuvent s'exprimer par :

$$\begin{aligned} 2q_0 a &= \langle \sin(\varphi) \rangle \sin \alpha - \langle \cos(\varphi) \rangle \cos \alpha \\ 2b_c a &= \langle \sin(\varphi) \rangle \cos \alpha + \langle \cos(\varphi) \rangle \sin \alpha \end{aligned}$$



où  $b_c = \lim_{a \rightarrow 0} b$  est l'amortissement critique normalisé. Elles deviennent :

$$\begin{cases} 2q_0 a &= \frac{an}{2} \tilde{g}(q_0) \sin \alpha - \frac{an\pi}{2} g(q_0) \cos \alpha \\ 2b_c a &= \frac{an}{2} \tilde{g}(q_0) \cos \alpha + \frac{an\pi}{2} g(q_0) \sin \alpha \end{cases} \quad (5.72)$$

Considérons le cas  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{cases} 2q_0 a &= \frac{an}{2} \tilde{g}(q_0) \\ 2b_c a &= \frac{an\pi}{2} g(q_0) \end{cases} \quad (5.73)$$

Dans le cas qui nous intéresse,  $a > 0$  on peut donc le simplifier dans les équations :

$$\begin{cases} q_0 &= \frac{n}{4} \tilde{g}(q_0) \\ b_c &= \frac{n\pi}{4} g(q_0) \end{cases} \quad (5.74)$$

## 5.5 Etude du cas où $g$ est une distribution gaussienne

Dans cette partie, on considère le cas où  $g(\Omega)$  est une distribution gaussienne, de moyenne  $\mu_\Omega$  et d'écart-type  $\sigma_\Omega$ . Cela revient à dire que la fréquence dimensionnelle  $\omega$  des piétons suit également une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_\omega = \omega_0(1 + \gamma\mu_\Omega)$  et d'écart type  $\sigma_\omega = \omega_0\gamma\sigma_\Omega$ . L'objectif de cette partie est de déterminer le nombre critique de piétons  $N_c$  à partir duquel les piétons engendrent des oscillations suffisamment importantes de la passerelle pour déclencher la synchronisation. De plus, on veut trouver l'amplitude post-critique  $A$  du déplacement de la passerelle dans le cas stationnaire pour un nombre de piétons  $N$  supérieur à  $N_c$ , et la fréquence de synchronisation piétons-structure dans le cas critique et le cas post-critique. Les résultats obtenus dans cette partie sont utilisés dans le chapitre 7 dans le cas particulier de la passerelle du Millennium pour déterminer le paramètre  $\varepsilon$ . Notons que l'analyse faite pour la détermination de  $N_c$  et de la fréquence de synchronisation est un travail original.

On commence par déterminer le nombre critique  $N_c$  de piétons et la fréquence de synchronisation pour  $N = N_c$ . Ensuite, le cas particulier où  $\mu_\Omega = 0$  est étudié. Ce cas particulier s'exprime en variables dimensionnelles par  $\mu_\omega = \omega_0$ . Cela veut dire que les piétons ont une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-structure : c'est le cas où on risque de déclencher les amplitudes d'oscillations les plus importantes de la passerelle. Pour cette situation particulière, on trouve une expression particulière pour  $N_c$ , puis on étudie le cas post-critique et on détermine l'amplitude de déplacement post-critique de la passerelle et la fréquence de synchronisation à l'état stationnaire.

### 5.5.1 Détermination du nombre critique $N_c$ et de la fréquence de synchronisation pour $N \rightarrow N_c$

Le système (5.74) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} q_0 &= \frac{n}{4\pi} PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\Omega)}{\Omega - q_0} d\Omega \\ b_c &= \frac{n\pi}{4} g(q_0) \end{cases} \quad (5.75)$$

Si la fréquence moyenne adimensionnée des piétons  $\mu_\Omega$  est non nulle, mais reste très petite (ce qui revient à dire que la fréquence moyenne dimensionnelle  $\mu_\omega$  est très proche de  $\omega_0$ ), alors on peut écrire [62] :

$$g(\Omega) = g[(\Omega + \mu_\Omega - q_0) - (\mu_\Omega - q_0)] \quad (5.76)$$

En faisant un développement limité pour " $\mu_\Omega - q_0$ " petit, on obtient :

$$g(\Omega) = g(\Omega + \mu_\Omega - q_0) \left[ 1 + (\mu_\Omega - q_0)(\Omega - q_0)/\sigma_\Omega^2 \right] \quad (5.77)$$

Ainsi,

$$PV \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\Omega)}{\Omega - q_0} d\Omega \cong \frac{\mu_\Omega - q_0}{\sigma_\Omega^2} \quad (5.78)$$

La première équation de (5.75) permet alors d'obtenir la fréquence de synchronisation adimensionnelle  $q_0$  lorsque le nombre de piétons  $N \rightarrow N_c$  :

$$q_0 = \frac{n\mu_\Omega}{n + 4\pi\sigma_\Omega^2} \quad (5.79)$$

En passant aux variables dimensionnelles lorsque  $N \rightarrow N_c$ , la fréquence de synchronisation  $\omega_{sync} = \omega_0 \left( 1 + \frac{n\mu_\Omega}{n + 4\pi\sigma_\Omega^2} \gamma \right)$  devient :

$$\omega_{sync} = \omega_0 \frac{8\pi\sigma_\omega^2 K + n\mu_\omega \omega_0^2 N_c G \varepsilon}{n\omega_0^3 N_c G \varepsilon + 8\pi K \sigma_\omega^2} \quad (5.80)$$

En remplaçant (5.79) dans la deuxième équation de (5.75) on obtient :

$$b_c = \frac{n\pi}{4\sigma_\Omega \sqrt{2\pi}} \left[ 1 - \frac{16\pi^2 \sigma_\Omega^4 \mu_\omega^2}{2\sigma_\Omega^2 (n + 4\pi\sigma_\Omega^2)^2} \right] \quad (5.81)$$

On pose :  $\Gamma = \gamma^2 = \frac{N_c G \omega_0 \varepsilon}{2K}$ . Le passage aux variables dimensionnelles nous amène à un polynôme d'ordre 3 en  $\Gamma$  :

$$a_3 \Gamma^3 + a_2 \Gamma^2 + a_1 \Gamma + a_0 = 0 \quad (5.82)$$

où

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{n^3 \pi K \omega_0^4}{2\sigma_\omega \sqrt{2\pi}} \\ a_2 &= n^2 \omega_0^4 C - \frac{4\pi^2 \sigma_\omega n^2 \omega_0^2 K}{\sqrt{2\pi}} \\ a_1 &= 8\pi C \sigma_\omega^2 n \omega_0^2 - \frac{8\pi^3 \sigma_\omega^3 n K}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4\pi^3 n K}{\sqrt{2\pi}} (\mu_\omega - \omega_0)^2 \sigma_\omega \\ a_0 &= 16\pi^2 C \sigma_\omega^4 \end{aligned} \quad (5.83)$$

La résolution de (5.82) nous donne une expression de  $\Gamma$  en fonction de  $n$ ,  $K$ ,  $\omega_0$ ,  $\mu_\omega$  et  $\sigma_\omega$ . Or  $\Gamma = \frac{N_c G \omega_0 \varepsilon}{2K}$ , ce qui donne une relation entre  $N_c$ ,  $\varepsilon$ ,  $n$ ,  $K$ ,  $\omega_0$ ,  $\mu_\omega$  et  $\sigma_\omega$ . Dans le cas des essais réalisés sur la travée Nord de la passerelle du Millennium, la seule inconnue qui reste est  $\varepsilon$ . Dans le chapitre 7, on résout (5.82) dans le cas du Millennium et on en déduit  $\varepsilon$ . Connaissant  $\varepsilon$ , on peut alors déterminer grâce à (5.82) le nombre critique de piétons pour toute passerelle et pour toute distribution gaussienne de fréquence des piétons.

### 5.5.2 Cas particulier où $g(\Omega)$ est de moyenne nulle

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où  $\mu_\Omega = 0$ , *i.e.*  $\mu_\omega = \omega_0$ . La fréquence moyenne des piétons étant la fréquence modale du système passerelle-piétons, c'est le cas le plus critique pour la passerelle. On commence par déterminer le nombre critique de piétons et la fréquence de synchronisation dans ce cas, puis on détermine l'amplitude du déplacement post-critique de la passerelle et la fréquence de synchronisation dans ce cas.

#### Détermination de $N_c$ et de la fréquence de synchronisation pour $N \rightarrow N_c$

Dans le cas où  $\mu_\Omega = 0$ , l'équation (5.79) implique que la fréquence de synchronisation adimensionnelle est

$$q_0 = 0 \quad (5.84)$$

et par conséquent, l'équation (5.75) donne :

$$b_c = \frac{n\pi}{4}g(0) \quad (5.85)$$

Le passage aux variables dimensionnelles, conduit à l'égalité suivante :

$$N_c = \frac{4\sqrt{2}C\sigma_\omega}{\varepsilon n\sqrt{\pi}G\omega_0} \quad (5.86)$$

Or  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M_t}} = \sqrt{\frac{K}{M + m_{1p} \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 dx}} = \sqrt{\frac{K}{M + nm_{1p}N_c}}$ . En élevant les deux membres de

(5.86) au carré on obtient un polynôme d'ordre 2 en  $N_c$ . Et en posant

$$c_0 = \frac{16C^2\sigma_\omega^2}{\varepsilon^2 n^2 \pi^2 G^2 K} \quad (5.87)$$

on obtient le polynôme suivant :

$$N_c^2 - m_{1p}c_0N_c - 2c_0M = 0 \quad (5.88)$$

Cette équation admet deux solutions : la première est  $\frac{1}{2}(c_0m_{1p} - \sqrt{c_0^2m_{1p}^2 + 8c_0M}) < 0$  et la seconde est  $\frac{1}{2}(c_0m_{1p} + \sqrt{c_0^2m_{1p}^2 + 8c_0M}) > 0$ . Comme  $N_c > 0$  on retient la deuxième solution. Donc :

$$N_c = \frac{1}{2}(c_0m_{1p} + \sqrt{c_0^2m_{1p}^2 + 8c_0M}) \quad (5.89)$$

### Détermination de l'amplitude de déplacement de la passerelle et de la fréquence de synchronisation pour $N > N_c$

Dans cette partie, on détermine la fréquence de synchronisation post-critique ( $N > N_c$ ) et l'amplitude post-critique du déplacement de la passerelle dans le cas stationnaire.

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , les équations (5.39a) et (5.39b) deviennent :

$$\begin{aligned} 2qa &= \langle \sin \varphi \rangle \\ 2ba &= \langle \cos \varphi \rangle \end{aligned} \quad (5.90)$$

En remplaçant dans (5.90)  $\langle \sin \varphi \rangle$  par son expression obtenue dans (5.64), on remarque que  $q = 0$  est une solution du problème. D'après (5.60), on a donc :

$$\langle \cos \varphi \rangle = \frac{1}{N} \int_0^L \eta(x)\ell(x)\psi_1(x) \int_{|\Omega| \leq a|\psi_1(x)|} \sqrt{1 - \left(\frac{\Omega}{a\psi_1(x)}\right)^2} g(\Omega) d\Omega dx \quad (5.91)$$

Comme  $\frac{\Omega}{a\psi_1(x)} \leq 1$ , on pose  $\sin \chi = \frac{\Omega}{a\psi_1(x)}$ . Donc

$$\langle \cos \varphi \rangle = \frac{a}{N} \int_0^L \eta(x)\ell(x)\psi_1^2(x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(a\psi_1(x) \sin \chi) \cos^2 \chi d\chi dx \quad (5.92)$$

$a$  étant strictement positive, la deuxième équation de (5.90), s'écrit :

$$b = \frac{1}{2N} \int_0^L \eta(x)\ell(x)\psi_1^2(x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(a\psi_1(x) \sin \chi) \cos^2 \chi d\chi dx \quad (5.93)$$

Cette expression peut également s'écrire sous la forme :

$$b = \frac{\sqrt{2\pi}}{8N\sigma_\Omega} \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 \exp\left(-\frac{a^2(\psi_1(x))^2}{4\sigma_\Omega^2}\right) \left[ I_0\left(\frac{a^2(\psi_1(x))^2}{4\sigma_\Omega^2}\right) + I_1\left(\frac{a^2(\psi_1(x))^2}{4\sigma_\Omega^2}\right) \right] dx \quad (5.94)$$

$I_0$  et  $I_1$  étant les fonctions de Bessel modifiées.

Le passage aux variables dimensionnelles nous donne l'expression suivante :

$$C = \frac{G\varepsilon\omega_0\sqrt{2\pi}}{8\sigma_\omega} \int_0^L \eta(x)\ell(x)(\psi_1(x))^2 \exp\left(-\frac{A^2(\psi_1(x))^2\varepsilon^2\omega_0^4}{16\sigma_\omega^2}\right) * \left[ I_0\left(\frac{A^2(\psi_1(x))^2\varepsilon^2\omega_0^4}{16\sigma_\omega^2}\right) + I_1\left(\frac{A^2(\psi_1(x))^2\varepsilon^2\omega_0^4}{16\sigma_\omega^2}\right) \right] dx \quad (5.95)$$

Ainsi, si  $g(\omega)$  est une gaussienne ayant pour moyenne la fréquence modale du système piétons-structure, la résolution de (5.95) permet de trouver l'amplitude stationnaire  $A$  du déplacement de la passerelle, lorsque le nombre de piétons  $N$  est supérieur à  $N_c$ .

## 5.6 Comparaison avec les données expérimentales de la passerelle du Millennium

Dans cette partie, on compare les résultats obtenus par le calcul analytique fait ci-dessus avec les résultats des essais expérimentaux réalisés par Arup sur la travée Nord de la passerelle du Millennium. On commence par définir un paramètre d'ordre qui permet d'avoir une nouvelle formulation du système (5.35). Ensuite, on détermine une relation de proportionnalité entre la force des piétons et la vitesse d'oscillations de la passerelle comparable avec la relation trouvée par Arup. Enfin, on introduit une surface invariante et on détermine le coefficient de proportionnalité entre la force latérale des piétons et la vitesse d'oscillations de la passerelle. Le traitement de cette partie s'inspire de [7].

### Définition du paramètre d'ordre

Dans ce paragraphe, on introduit le coefficient d'ordre  $Re^{i\Phi}$  qui constitue une sorte de moyenne sur les phases des piétons. Ce coefficient permet de formuler de manière différente le système d'équations (5.35) régissant le phénomène qu'on étudie. Ce système servira plus tard à déterminer la vitesse de croissance de l'amplitude du déplacement de la passerelle lors du déclenchement de la synchronisation.

On définit le paramètre d'ordre par :

$$R(T)e^{i\Phi(T)} = \langle e^{i(\theta(x,T))} \rangle \quad (R(T) > 0, \quad \Phi(t) \in [0, 2\pi[) \quad (5.96)$$

Donc :

$$\begin{cases} R(T) \cos \Phi(T) = \langle \cos(\theta(x, T)) \rangle \\ R(T) \sin \Phi(T) = \langle \sin(\theta(x, T)) \rangle \end{cases} \quad (5.97)$$

En utilisant le paramètre d'ordre, le système (5.35) s'écrit :

$$a(T)\dot{\psi}(T) = -\frac{R(T)}{2} \cos(\Phi(T) - \psi(T)) \quad (5.98a)$$

$$\dot{a}(T) + ba(T) = \frac{R(T)}{2} \sin(\Phi(T) - \psi(T)) \quad (5.98b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, T) = \Omega(x) + a(T)\psi_1(x) \sin(\psi(T) - \theta(x, T) + \alpha) \quad (5.98c)$$

avec la notation  $\dot{Y} := \frac{dY}{dT}$ .

### Lien avec la relation trouvée par Arup

L'objectif de ce paragraphe est de trouver une relation de proportionnalité entre la force latérale engendrée par les piétons et la vitesse du déplacement de la passerelle. D'après les ingénieurs d'ARUP [8, 21], une telle relation existe et se traduit par :

$$\alpha F_1 = \kappa V_{local} \quad (5.99)$$

où  $\alpha F_1$  est la composante de la force totale en phase avec la vitesse et  $V_{local}$  n'est autre que l'amplitude de la vitesse des oscillations de la passerelle.  $\kappa$  est une constante qui a pour valeur  $\kappa = 300Ns/m$ . Pour éviter des problèmes de notation, on remplace  $\alpha F_1$  par  $\tilde{F}_1$ . Dans la suite de ce paragraphe, nous voudrions trouver d'après notre modèle, une relation semblable à (5.99).

On pose

$$U(t) = A(t) \sin \psi_s(t) = A(T) \sin(\omega_0 t + \psi(T)) \quad (5.100)$$

le déplacement de la passerelle à mi-travée, solution de l'équation de la dynamique de la passerelle (5.1a).

La vitesse de déplacement  $\frac{dU}{dt}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \frac{dA}{dt} \sin(\omega_0 t + \psi(T)) + A \frac{d}{dt}(\omega_0 t + \psi(T)) \cos(\omega_0 t + \psi(T)) \\ &= \omega_0 \gamma \frac{dA}{dT} \sin(\omega_0 t + \psi(T)) + A(\omega_0 + \frac{d\psi}{dT} \omega_0 \gamma) \cos(\omega_0 t + \psi(T)) \end{aligned} \quad (5.101)$$

Pour  $\gamma \ll 1$ , on peut supprimer les termes d'ordre supérieur à 1 en  $\gamma$ . Ainsi

$$\frac{dU}{dt} = A(T) \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi(T)) \quad (5.102)$$

Comme  $V_{local}$  n'est autre que l'amplitude de la vitesse des oscillations de la passerelle, elle s'écrit sous la forme :

$$V_{local} = A(T) \omega_0 = a \omega_0 \sqrt{\frac{NG\omega_0}{KD}} \quad (5.103)$$

Nous cherchons maintenant à déterminer  $\tilde{F}_1$ . On a que :

$$\begin{aligned} G \langle \sin(\phi(x, T)) \rangle &= G \langle \sin(\omega_0 t + \psi + (\theta(x, T) - \psi(T))) \rangle \\ &= G \sin(\omega_0 t + \psi(T)) \langle \cos(\theta(x, T) - \psi(T)) \rangle \\ &\quad + G \cos(\omega_0 t + \psi(T)) \langle \sin(\theta(x, T) - \psi(T)) \rangle \end{aligned} \quad (5.104)$$

donc

$$\tilde{F}_1 = G \langle \sin(\theta(x, T) - \psi(T)) \rangle = G [\langle \sin(\theta(x, T)) \rangle \cos \psi(T) - \langle \cos(\theta(x, T)) \rangle \sin \psi(T)] \quad (5.105)$$

La constante  $\kappa$  d'Arup n'est autre que le rapport  $\frac{\tilde{F}_1}{V_{local}}$  :

$$\kappa = \frac{G}{A(T) \omega_0} [\langle \sin(\theta(x, T)) \rangle \cos \psi(T) - \langle \cos(\theta(x, T)) \rangle \sin \psi(T)] \quad (5.106)$$

En utilisant le paramètre d'ordre défini par (5.96),  $\kappa$  s'écrit :

$$\kappa = \frac{GR(T)}{A(T) \omega_0} \sin(\Phi(T) - \psi(T)) \quad (5.107)$$

$\kappa$  est calculée dans le paragraphe suivant.

## Surface invariante et calcul de $\kappa$

Dans ce qui suit, on détermine la valeur de  $\kappa$ . Pour cela, on introduit une surface invariante sur la phase  $\psi$  de la passerelle et la fréquence  $\Omega$  des piétons et leur phase  $\theta$ , pour le système d'équations à variations lentes (5.39). Par définition, si les conditions initiales du système d'équations sont situées sur une surface invariante, alors à chaque instant  $T$ , la solution de (5.39) se situe sur cette surface, d'où son nom de surface invariante. On considère maintenant que l'abscisse  $x$  varie de  $-\frac{L}{2}$  à  $\frac{L}{2}$ .

Pour  $\alpha = \pi/2$ , la surface définie par :

$$S_0 = \begin{cases} \theta(x, T) = -\theta(-x, T) \\ \Omega(x) = -\Omega(-x) \\ \psi = -\frac{\pi}{2} \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad (5.108)$$

est une surface invariante antisymétrique dans le système de variations lentes en temps (5.39). En effet, si la condition initiale appartient à l'espace  $S_0$ , le système appartient à  $S_0$  pour tout  $T$ . A  $T = 0$ , on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, 0) = \Omega(x) - a\psi_1(x) \sin(\theta(x, 0)) \quad (5.109)$$

Donc  $\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, 0) = -\frac{\partial \theta}{\partial T}(-x, 0)$ . Or  $\Phi = 0$ , donc à  $T = 0$ ,  $\langle \sin(\theta(x, 0)) \rangle = \sin \Phi(0) = 0$  et l'antisymétrie de  $\frac{\partial \theta}{\partial T}(x, 0)$  montre que l'évolution de  $\theta(x, T)$  est aussi antisymétrique. L'antisymétrie de la surface  $S_0$  implique donc que pour chaque piéton ayant une phase croissante  $\theta$ , il y a un piéton qui a une phase décroissante  $(-\theta)$  (à tout instant  $T : \theta(x, T) = -\theta(-x, T)$ ). La valeur moyenne de  $\langle \sin(\theta) \rangle$  est donc toujours nulle.

Comme à  $T = 0$ ,  $\psi(0) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\Phi(0) = 0$ , l'équation (5.98b) montre que :

$$\dot{a}(0) + ba(0) = \frac{R(0)}{2} > 0 \quad (5.110)$$

donc  $a(0) > 0$ . L'équation (5.98a) devient :

$$a(0) \frac{\partial \psi}{\partial T}(0) = 0 \quad (5.111)$$

Donc  $\frac{\partial \psi}{\partial T}(0) = 0$ , et  $\psi$  est alors constante en temps.  $S_0$  est donc une surface invariante.

$\kappa$  s'écrit :

$$\kappa(T) = \frac{GR(T)}{A(T)\omega_0} \sin(\Phi(T) - \psi(T)) = \frac{GR(T)}{A(T)\omega_0} \quad (5.112)$$

$\kappa$  n'est pas constante mais varie lentement avec le temps.

A l'état stationnaire,  $\dot{a} = 0$  lorsque  $T$  tend vers l'infini. L'équation (5.98b) donne :

$$0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{R}{2} - ba \right] \quad (5.113)$$

Donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R(T)}{a} = 2b \quad (5.114)$$

Or

$$\kappa = \frac{GR}{A\omega_0} = \frac{G}{\tilde{L}\omega_0} \frac{R}{a} \quad (5.115)$$

Donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \kappa = \frac{2bG}{\tilde{L}\omega_0} = \frac{C}{N} \quad (5.116)$$

L'équation (5.116) que nous avons obtenue avec notre modèle est la même que celle trouvée dans [7], malgré les différences qui existent entre nos deux modèles. Ceci est dû au fait que ces différences sont "cachées" dans l'expression de la moyenne pondérée  $\langle \cos \theta \rangle$ .

Si on applique cette formule sur la travée centrale du Millennium avant qu'elle ne soit modifiée pour éviter les oscillations (amortissement de l'ordre de 0,7%), on trouve que  $\kappa \approx 300Ns/m$  (valeur proposée par les ingénieurs d'Arup) lorsque  $N \approx 20$ . Cependant, la valeur  $\kappa \approx 300Ns/m$  publiée par Arup a été trouvée après augmentation de l'amortissement  $\xi_b$  de la travée. La nouvelle valeur de  $\xi_b$  est de 2,8%. Dans ce cas, pour que  $\kappa$  soit de l'ordre de  $300Ns/m$ , le nombre de piétons doit être  $N \approx 73$ . Pour les valeurs de  $N$  trouvées dans la littérature, on prédit une valeur de  $\kappa$  de l'ordre de 101 – 132 avec un facteur d'ordre 3 par rapport aux résultats expérimentaux publiés [7].

De plus, d'après [8, 21] la formule proposée par ARUP, est basée sur une régression réalisée sur des valeurs expérimentales. Or on peut remarquer que ces valeurs sont très dispersées ce qui rend cette formule (avec la valeur  $\kappa = 300Ns/m$ ) très approximative.

## 5.7 Détermination de l'évolution de l'amplitude du déplacement de la passerelle après déclenchement de la synchronisation

Le but de cette section est de déterminer le temps  $T_{onset}$  qu'il faut pour que l'amplitude  $a$  du déplacement de la passerelle augmente de  $e = \exp(1)$  après le déclenchement de la synchronisation. En supposant que l'amplitude est un multiple de  $\exp(\lambda T)$ ,  $T_{onset} = \frac{1}{\lambda}$ . Un changement de variables permet de retrouver  $t_{onset}$  à l'échelle du temps  $t$  (le temps réel). Pour déterminer  $\lambda$  et par conséquent  $t_{onset}$ , on travaille sur la surface invariante  $S_0$  déterminée plus haut par le système (5.108), et on utilise pour les calculs le système d'équations obtenu avec le coefficient d'ordre  $Re^{i\Phi}$  dont la définition est donnée par (5.96). Ce travail est également inspiré par [7].

Pour commencer, on rappelle qu'en travaillant sur la surface invariante  $S_0$  qui est localement "attractive", le système adimensionné (5.98) des équations régissant le système passerelle-piétons, en fonction de  $R$  et  $\Phi$  s'écrit :

$$a\dot{\psi} = 0 \quad (5.117a)$$

$$\dot{a} + ba = \frac{R}{2} \quad (5.117b)$$

$$\dot{\theta} = \Omega - a\psi_1 \sin(\theta) \quad (5.117c)$$

On note  $\rho(\theta|T, \Omega)$  la densité de distribution marginale de  $\theta$  par rapport à  $\Omega$  et au temps  $T$ . Elle vérifie

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \dot{\theta}) \quad (5.118)$$

Comme  $\Phi = 0$ ,

$$R = \langle \cos(\theta) \rangle = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\infty}^{\infty} \oint \eta(x)\ell(x)\psi_1(x)\rho(\theta|T, \Omega) \cos(\theta)g(\Omega)d\theta d\Omega dx \quad (5.119)$$

Posons :  $\rho = \frac{1}{2\pi} + \tilde{\rho}$ .  $\rho = \frac{1}{2\pi}$  signifie que  $\theta$  n'a pas de valeur préférentielle et donc qu'il n'y a pas synchronisation. On a  $|\tilde{\rho}| \ll 1$  et  $|a| \ll 1$ . Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial T} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{1}{2\pi} + \tilde{\rho} \right) (\Omega - a\psi_1 \sin(\theta)) \right] \\ &= -\Omega \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \theta} + \frac{a\psi_1}{2\pi} \cos(\theta) + O(a\tilde{\rho}) \end{aligned} \quad (5.120)$$

On pose  $\tilde{\rho} = \rho_0 e^{\lambda T}$  et  $a = a_0 e^{\lambda T}$ . L'équation précédente donne alors :

$$\lambda \rho_0 = -\Omega \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} + \frac{a_0 \psi_1}{2\pi} \cos(\theta) \quad (5.121)$$

$\rho_0$  peut s'écrire sous la forme :  $\rho_0 = \rho_c \cos(\theta) + \rho_s \sin(\theta)$ . En remplaçant dans l'équation précédente et en séparant les termes en  $\cos(\theta)$  et les termes en  $\sin(\theta)$ , on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} \lambda \rho_c &= -\Omega \rho_s + \frac{a_0 \psi_1}{2\pi} \\ \lambda \rho_s &= -\Omega \rho_c \end{aligned} \quad (5.122)$$

Les solutions de ce système sont :

$$\rho_s = \frac{\Omega}{\lambda^2 + \Omega^2} \frac{a_0 \psi_1}{2\pi} \quad (5.123)$$

$$\rho_c = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} \frac{a_0 \psi_1}{2\pi}$$

Ainsi,

$$\rho_0 = \frac{a_0 \psi_1}{2\pi} \frac{\lambda \cos(\theta) + \Omega \sin(\theta)}{\lambda^2 + \Omega^2} \quad (5.124)$$

En utilisant l'égalité  $a = a_0 e^{\lambda T}$  dans l'équation (5.98b), on trouve :

$$\lambda a_0 e^{\lambda T} = \frac{R}{2} - b a_0 e^{\lambda T} \quad (5.125)$$

Revenons à l'équation (5.119). On démontre que (voir les détails du calcul en Annexe 1 à l'équation (34)) :

$$R = \frac{a_0 e^{\lambda T} n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} g(\Omega) d\Omega \quad (5.126)$$

Remplaçons dans l'équation (5.125) :

$$\lambda + b = \frac{n}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} g(\Omega) d\Omega \quad (5.127)$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers 0 dans l'équation (5.127), on obtient :

$$b_c = \frac{n}{4} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} g(\Omega) d\Omega \quad (5.128)$$

Or  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} = \pi \delta(\Omega)$  parce que la fonction  $\frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2}$  se ramène à une distribution de Lorentz avec  $\Gamma = 2\lambda$  [7]. Ainsi,

$$b_c = \frac{n}{4} \pi g(0) \quad (5.129)$$

et on retrouve l'expression (5.85).

Dans le cas où  $g(\Omega)$  est une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_\Omega = 0$ ,

$$g(\Omega) = \frac{1}{\sigma_\Omega \sqrt{2\pi}} e^{-\Omega^2 / (2\sigma_\Omega^2)}$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda + b &= \frac{n}{4\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} e^{-\Omega^2 / (2\sigma^2)} d\Omega \\ &= \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\sigma} e^{\lambda^2 / (2\sigma^2)} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.130)$$

par suite :

$$b = \frac{n\sqrt{2\pi}}{8\sigma} e^{\lambda^2 / (2\sigma^2)} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right] - \lambda \quad (5.131)$$

Cette équation n'est pas résoluble explicitement, mais on peut développer le second membre en une série de Taylor pour  $\lambda \ll 1$  :

$$\begin{aligned} b &\simeq \frac{\pi n}{4} g(0) - \frac{n}{4\sigma^2} \lambda - \lambda \\ b &\simeq \frac{\pi n}{4} g(0) - \lambda \left( 1 + \frac{n}{4\sigma^2} \right) \\ \lambda \left( 1 + \frac{n}{4\sigma^2} \right) &\simeq \frac{\pi n}{4} g(0) - b \\ \lambda &\simeq \left( \frac{\pi n}{4} g(0) - b \right) \left( \frac{4\sigma^2}{n + 4\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (5.132)$$

D'après (5.126),  $R(T)$  s'écrit sous la forme

$$R(T) = R_0 \exp(\lambda T)$$

et la durée de temps nécessaire pour que l'amplitude des oscillations de la passerelle augmente d'une exponentielle est  $T_{onset} = \frac{1}{\lambda}$  :

$$T_{onset} = \left( 1 + \frac{n}{4\sigma^2} \right) \frac{4}{\pi n g(0) - 4b} \quad (5.133)$$



Donc si on se ramène à l'échelle de temps relative au temps  $t$ , on obtient :

$$t_{onset} = \frac{T_{onset}}{\gamma\omega_0} = \left(1 + \frac{n}{4\sigma^2}\right) \zeta^{-1}\omega_0^{-1} \frac{N_c}{N - N_c} \quad (5.134)$$

$$t_{onset} = \frac{T_{onset}}{\gamma\omega_0} = \left(1 + \frac{nNGD\omega_0}{4K\sigma_\omega^2}\right) \zeta^{-1}\omega_0^{-1} \frac{N_c}{N - N_c} \quad (5.135)$$

## 5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié analytiquement une version simplifiée du modèle présenté dans le chapitre 4. Cette étude a permis la détermination de nombre critique  $N_c$  de piétons à partir duquel la synchronisation risque de se déclencher. L'amplitude des oscillations de la structure à l'état stationnaire dans des conditions post-critiques ( $N > N_c$ ) a également été déterminée, et la fréquence de synchronisation dans les cas critique et post-critique ( $N \geq N_c$ ) a été trouvée. Ces résultats généralisent les résultats de [7, 54, 62]. De plus, une comparaison avec les résultats obtenus par Arup pour la travée Nord de la passerelle du Millennium a été réalisée. Enfin, on a déterminé la durée de temps qu'il faut à l'amplitude pour augmenter d'une quantité  $e = \exp(1)$  après le déclenchement de la synchronisation.

# Chapitre 6

## Modélisation numérique

---

*CE CHAPITRE est consacré à l'étude numérique du modèle proposé dans le chapitre 4. Ses objectifs sont les suivants :*

- ★ expliquer les méthodes numériques utilisées pour la résolution des différentes équations du modèle*
  - ★ justifier les choix adoptés*
  - ★ présenter l'algorithme général permettant l'implémentation du modèle*
-

## PLAN DU CHAPITRE 6

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>147</b>
<b>6.2</b>	<b>La discrétisation</b>	<b>147</b>
<b>6.3</b>	<b>L'équation de la dynamique</b>	<b>147</b>
<b>6.4</b>	<b>La conservation de la masse et l'équation de transport</b>	<b>148</b>
6.4.1	Résolution numérique de l'équation de transport avec vitesse constante	148
6.4.2	Schéma numérique pour la résolution de l'équation de conservation de la masse	155
6.4.3	Schéma numérique pour la résolution de l'équation de transport pour la fréquence	155
<b>6.5</b>	<b>L'équation de synchronisation</b>	<b>160</b>
<b>6.6</b>	<b>L'algorithme général</b>	<b>161</b>
<b>6.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>163</b>

---

## 6.1 Introduction

Le modèle continu proposé dans le chapitre 4 est formé d'une équation aux dérivées ordinaires (EDO) couplée à trois équations aux dérivées partielles. C'est un modèle assez complexe d'où l'importance du choix des méthodes numériques destinées à le résoudre. Vu le nombre important des équations et des variables et les différents couplages existants, et comme le domaine étudié est un domaine simple (1D), les méthodes de différences finies ont été préférées aux méthodes d'éléments finis. Dans ce chapitre, on explique les méthodes choisies pour la résolution de chaque équation en explicitant si besoin les motivations qui ont amené au choix d'une méthode au dépend d'une autre. Certaines vérifications basiques sont détaillées afin de montrer la validité de chaque méthode proposée. Enfin l'algorithme complet est présenté.

La section 1 concerne le choix de la discrétisation en temps et en espace. La section 2 traite la résolution de l'équation de la dynamique concernant la passerelle. Dans la section 3, on explique le choix des méthodes utilisées pour la résolution numérique de l'équation de conservation de la masse et l'équation de transport. Dans cette section, on propose trois algorithmes implicites modifiés par rapport à la littérature de sorte à améliorer certains aspects de la solution numérique. Dans la section 4, on résout numériquement l'équation de synchronisation et dans la section 5 on présente l'organigramme complet du modèle. Enfin, une récapitulation est proposée dans la conclusion.

## 6.2 La discrétisation

Le choix de la discrétisation est primordial pour bien refléter le comportement des grandeurs étudiées. Dans ce modèle, les équations en relation avec la structure (équation de la dynamique) sont des équations différentielles ordinaires en temps, alors que les équations en relation avec la foule (conservation de la masse, transport de la fréquence de marche libre, synchronisation) sont des équations aux dérivées partielles en temps et en espace, supposé unidirectionnel (1D).

Pour la discrétisation en espace, il faut choisir des grandeurs caractéristiques des piétons. Le pas en espace  $dx$  est donc défini comme étant l'espace occupé par un piéton lorsque la densité maximale  $\eta_{max} = 1,8p/m^2$  est atteinte [15] :

$$dx = \frac{1}{\ell\eta_{max}} \quad (6.1)$$

On rappelle que  $\ell$  représente la largeur de la structure. Dans le cas où la largeur de la passerelle est variable (ex : la passerelle Simone De Beauvoir), on peut envisager un pas en espace variable sur la longueur de la passerelle.

Le pas en temps doit tenir compte de la passerelle et des piétons. Une grandeur caractéristique de la passerelle est la fréquence de ses oscillations libres  $f_{s_0}$ . Par contre, la grandeur caractéristique du piéton peut être considérée comme étant la fréquence de sa force latérale dans des conditions de marche libre ( $\approx 1Hz$ ) ou bien la durée de traversée de la passerelle dans des conditions de marche libre ( $T = v_M L$ ,  $v_M$  étant la vitesse de marche libre,  $L$  la longueur de la passerelle), qui est de loin la variable la plus grande. Afin de bien cerner le problème, on a choisi d'avoir 20 points pour une oscillation de la passerelle [15], ainsi :

$$dt = \frac{1}{20f_{s_0}} \quad (6.2)$$

## 6.3 L'équation de la dynamique

L'équation de la dynamique est une équation différentielle ordinaire en temps. On suppose pour la passerelle que cette équation est linéaire 1D :

$$(M + M_p(t))\ddot{U}(t) + C\dot{U}(t) + KU(t) = \mathcal{F}_l(t) \quad (6.3)$$

$U$ ,  $M$ ,  $C$  et  $K$  étant respectivement le déplacement, la masse, l'amortissement et la rigidité modaux de la passerelle,  $M_p(t)$  et  $\mathcal{F}_l(t)$  étant respectivement la masse modale des piétons et la force latérale modale qu'ils

gènèrent (voir chapitre 4). Le logiciel MATLAB propose des algorithmes performants pour la résolution d'équations de ce type. On a choisi la fonction ode23 [84]. C'est une méthode explicite de Runge-Kutta d'ordre 2 et 3 basée sur la méthode de Bogacki-Shampine [84].

Cependant, ode23 intègre des équations aux dérivées ordinaires d'ordre 1 et non pas d'ordre 2 comme c'est le cas pour cette équation. Pour surmonter ce problème il suffit de décomposer l'équation (6.3) en un système de deux équations :

$$\begin{cases} \dot{U} &= V \\ \dot{V} &= \frac{\mathcal{F}_l(t) - C\dot{U}(t) - KU(t)}{M + M_p(t)} \end{cases} \quad (6.4)$$

On pose alors :

$$Z = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \text{ et } \dot{Z} = \begin{bmatrix} V \\ \frac{\mathcal{F}_l(t) - C\dot{U}(t) - KU(t)}{M + M_p(t)} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

et ode23 s'applique alors à  $Z$ .

## 6.4 La conservation de la masse et l'équation de transport

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles (EDP) du premier ordre en temps et en espace. On note  $\varrho(x, t)$  la variable à étudier (dans le modèle (voir chapitre 4)  $\varrho = \eta$  pour l'équation de conservation de la masse, et  $\varrho = \omega$  pour l'équation de transport), et  $v(x, t)$  la vitesse. L'équation de transport est :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial \varrho}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (6.6)$$

et l'équation de conservation de la masse est :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (6.7)$$

Dans le cas simple où la vitesse est constante, ces deux équations sont équivalentes à l'équation de convection (appelée aussi advection) :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(x, t) + v \frac{\partial \varrho}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (6.8)$$

Cette équation aux dérivées partielles (EDP) est très connue, cependant elle est très difficile à résoudre numériquement, car des exemples simples peuvent mettre en évidence des erreurs générées par le schéma numérique choisi. On commence donc par trouver un algorithme permettant de résoudre numériquement l'équation (6.8).

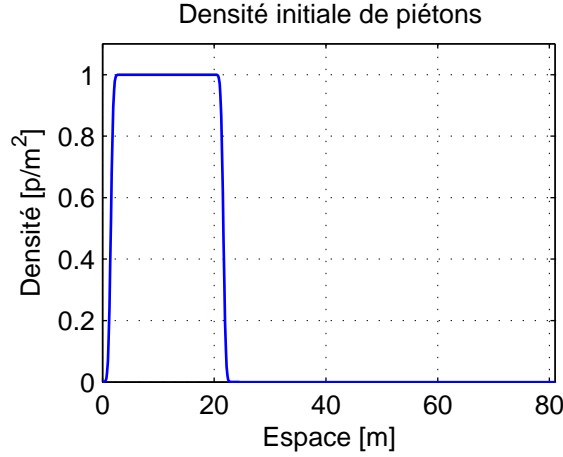
### 6.4.1 Résolution numérique de l'équation de transport avec vitesse constante

Dans cette partie, plusieurs schémas numériques sont testés afin de déterminer lequel est le plus adapté au modèle étudié. On commence par les algorithmes explicite, puis on explique les algorithmes implicites de Crank-Nicolson et de Crank-Nicolson améliorée. Ensuite, on introduit la méthode de Crank-Nicolson non-oscillante et on propose une nouvelle méthode de résolution implicite.

La condition initiale est choisie de la forme suivante :

$$\varrho(x, 0) = \begin{cases} \frac{\operatorname{erf}(2(x - 1.5)) + 1}{2} & \text{si } x \leq \frac{L}{4} \\ \frac{1 - \operatorname{erf}(2(x - \frac{L}{4} - 1.5))}{2} & \text{si } x > \frac{L}{4} \end{cases} \quad (6.9)$$

où  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ . La courbe de  $\varrho(x, 0)$  est tracée dans le graphe de la figure 6.1 dans le cas où  $L = 81$ . Dans le cas de l'équation (6.7),  $\varrho(x, 0)$  représente un groupe de piétons sur une partie de la

FIGURE 6.1. La densité initiale  $\varrho(x, 0)$ 

passerelle. Ce choix a pour but d'éviter les discontinuités qui sont étudiées ultérieurement. La condition aux bords est donnée par :

$$\varrho(0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.10)$$

L'algorithme choisi, doit avant tout donner des résultats satisfaisants pour l'équation (6.8) où la vitesse  $v$  est constante, avec les conditions (6.1) et (6.10). Pour commencer, des algorithmes explicites de type Lax-Friedrichs, upwind, upwind second ordre etc. ont été implémentés [85]. Dans ce qui suit, on en présente quelques uns ainsi que les résultats obtenus sur le cas test.

Soient  $T$  la durée totale étudiée,  $L$  la longueur de la passerelle,  $t = [t_1, \dots, t_n, \dots, t_N]$  le vecteur temps avec  $t_1 = 0$ ,  $t_N = T$  et  $t_n = (n-1)dt$  ( $n \in 1, \dots, N$ ),  $x = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_M]$  le vecteur espace avec  $x_1 = 0$ ,  $x_M = L$  et  $x_i = (i-1)dx$  ( $i \in 1, \dots, M$ ). On note  $\varrho_i^n \approx \varrho(x_i, t_n)$  et  $C = v \frac{dt}{dx}$ .

#### 6.4.1.1 Cas test : algorithmes explicites

Dans ce paragraphe, on explique des algorithmes explicites classiques et on montre les solutions numériques obtenues [85].

On commence par introduire les différentes méthodes que nous souhaitons tester.

- L'algorithme de Lax-Friedrichs (LF) est d'ordre 1 en temps et 2 en espace :

$$\frac{2\varrho_i^{n+1} - \varrho_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n}{2dt} + v \frac{\varrho_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n}{2dx} = O(dt, dx^2/dt) \quad (6.11)$$

$$\varrho_i^{n+1} = \frac{\varrho_{i+1}^n + \varrho_{i-1}^n}{2} - \frac{C}{2}(\varrho_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n) + O(dt^2, dx^2) \quad (6.12)$$

Ce modèle est stable pour  $|C| \leq 1$ .

- Le modèle upwind (UP)(pour  $v \geq 0$ ) est d'ordre 1 en temps et en espace, il est stable pour  $0 \leq C \leq 1$  :

$$\frac{\varrho_i^{n+1} - \varrho_i^n}{dt} + v \frac{\varrho_i^n - \varrho_{i-1}^n}{dx} = O(dt, dx) \quad (6.13)$$

$$\varrho_i^{n+1} = \varrho_i^n - C(\varrho_i^n - \varrho_{i-1}^n) + O(dt^2, dxdt) \quad (6.14)$$

- Le modèle de Lax-Wendroff (LW) est d'ordre 2 en temps et en espace ; il est stable pour  $|C| \leq 1$  :

$$\frac{\varrho_i^{n+1} - \varrho_i^n}{dt} + v \frac{\varrho_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n}{2dx} - v^2 dt \frac{\varrho_{i+1}^n - 2\varrho_i^n + \varrho_{i-1}^n}{2dx^2} = O(dt^2, dx^2) \quad (6.15)$$

$$\varrho_i^{n+1} = \varrho_i^n - \frac{C}{2}(\varrho_{i+1}^n - \varrho_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2}(\varrho_{i+1}^n - 2\varrho_i^n + \varrho_{i-1}^n) + O(dt^3, dx^2 dt) \quad (6.16)$$

- Le modèle upwind second ordre (UP2)(pour  $v \geq 0$ ) est d'ordre 2 en temps et en espace, il est stable pour  $0 \leq C \leq 2$  :

$$\frac{\varrho_i^{n+1} - \varrho_i^n}{dt} + v \frac{3\varrho_i^n - 4\varrho_{i-1}^n + \varrho_{i-2}^n}{2dx} - v^2 dt \frac{\varrho_i^n - 2\varrho_{i-1}^n + \varrho_{i-2}^n}{2dx^2} = O(dt^2, dx^2) \quad (6.17)$$

$$\varrho_i^{n+1} = \varrho_i^n - \frac{C}{2}(3\varrho_i^n - 4\varrho_{i-1}^n + \varrho_{i-2}^n) + \frac{C^2}{2}(\varrho_i^n - 2\varrho_{i-1}^n + \varrho_{i-2}^n) + O(dt^3, dx^2 dt) \quad (6.18)$$

- L'algorithme FTCS (Forward-Time Centered-Space) est d'ordre 1 en temps et 2 en espace, il est stable dans le cas où  $dt = O(dx^2)$ , il est donc à exclure des algorithmes qu'on pourrait utiliser parce que les pas en temps et en espace choisis ne vérifient pas cette condition de stabilité.

Dans ce qui suit, on teste ces algorithmes pour une vitesse  $v = 1m/s$ .

Les méthodes LF et UP, présentent des solutions acceptables mais elles sont dispersives (figure 6.2)(SE désigne la solution exacte). Ceci revient à dire que même si théoriquement la vitesse est constante, la vitesse obtenue numériquement ne l'est pas, les "points" qui sont devant ayant une vitesse plus élevée que sont qui sont à l'arrière.

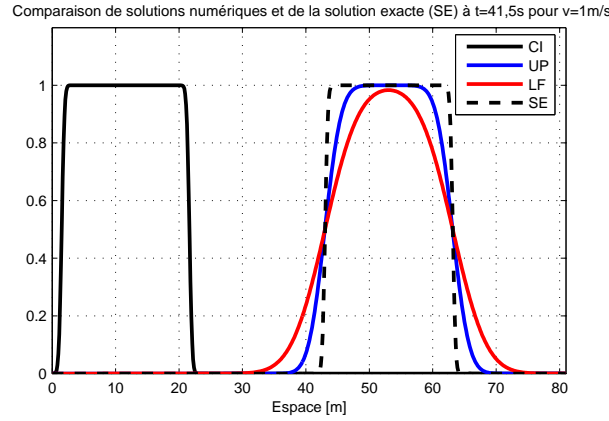


FIGURE 6.2. Solutions numériques obtenues par les méthodes LF et UP

Les modèles UP2 et LW donnent pour certains pas en temps et en espace des solutions très proches de la solution exacte. Cependant, il faut que la condition de stabilité soit vérifiée. Ceci présente des contraintes difficiles à gérer dans notre cas : en effet, on peut proposer un ordre de grandeur pour le pas en temps dans ode23, mais le choix final lui revient.

Ainsi, comme on peut le voir, les méthodes explicites, ne présentent pas de solutions satisfaisantes, car on souhaite que la forme initiale soit conservée (*i.e.* un groupe compact de piétons qui marche avec une vitesse identique doit rester compact), et on voudrait que le choix des pas en temps et en espace soient plus flexibles.

#### 6.4.1.2 Cas test : méthodes implicites classiques-Crank Nicolson

Dans ce paragraphe on teste la méthode implicite de Crank-Nicolson (CK) et sa version améliorée (CKI).

La méthode de Crank Nicolson (CK) est une méthode implicite centrée, qui est basée sur le calcul des solutions à l'instant  $n + \frac{1}{2}$ . Cet algorithme est toujours stable et d'ordre 2 en temps et en espace :

$$\frac{\varrho_j^{n+1} - \varrho_j^n}{dt} + v \frac{\varrho_{j+1}^{n+1} + \varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^{n+1} - \varrho_{j-1}^n}{4dx} = O(dt^2, dx^2) \quad (6.19)$$

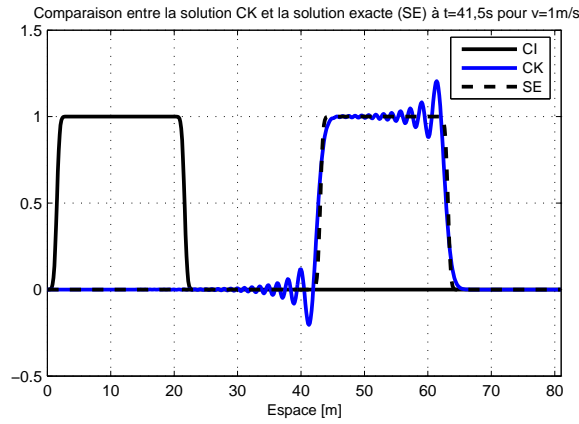


FIGURE 6.3. Solution numérique obtenue par la méthode CK

Cette méthode n'est pas dispersive, mais elle est très "oscillante" (figure 6.3)

La méthode de Crank Nicolson améliorée (CKI=Crank Nicolson Improved) a l'avantage de donner des solutions moins oscillantes et plus proches de la solution exacte (figure 6.4). Elle présente la même caractéristique de stabilité que la méthode de Crank Nicolson et elle est d'ordre 2 en temps et en espace. Son schéma s'écrit sous la forme :

$$\frac{\varrho_{j+1}^{n+1} + 4\varrho_j^{n+1} + \varrho_{j-1}^{n+1} - \varrho_{j+1}^n - 4\varrho_j^n - \varrho_{j-1}^n}{6dt} + v \frac{\varrho_{j+1}^{n+1} + \varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^{n+1} - \varrho_{j-1}^n}{4dx} = O(dt^2, dx^2) \quad (6.20)$$

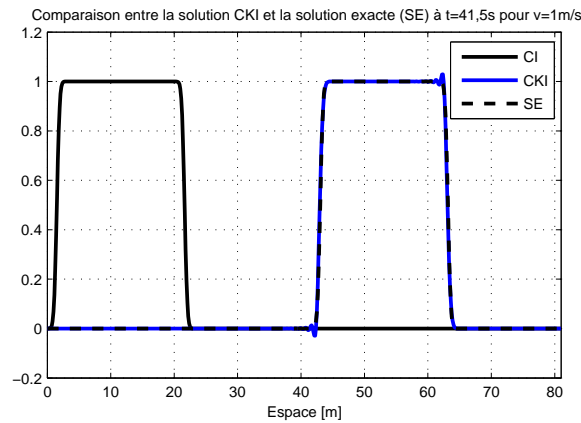


FIGURE 6.4. Solution numérique obtenue par la méthode CKI

La méthode CKI est donc la candidate idéale pour être retenue pour la suite. Cependant, si on teste cette méthode dans le cas où on a des discontinuités dans la condition initiale, des oscillations très importantes apparaissent dans la solution pour  $t > 0$ . En effet, si on considère une densité initiale donnée par l'équation (6.21) et tracée dans la figure 6.5, et la condition au bord donnée par (6.22) :

$$\varrho(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{L}{4} \\ 0 & \text{si } x > \frac{L}{4} \end{cases} \quad (6.21)$$

$$\varrho(0, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad (6.22)$$

la solution obtenue (figure 6.6) est alors très chahutée. Ceci est dû à la méthode choisie pour calculer la dérivée en espace à l'instant  $t_n$ . Dans les équations (6.19) et (6.20), le terme  $\frac{\varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^n}{4dx}$  n'est autre qu'une



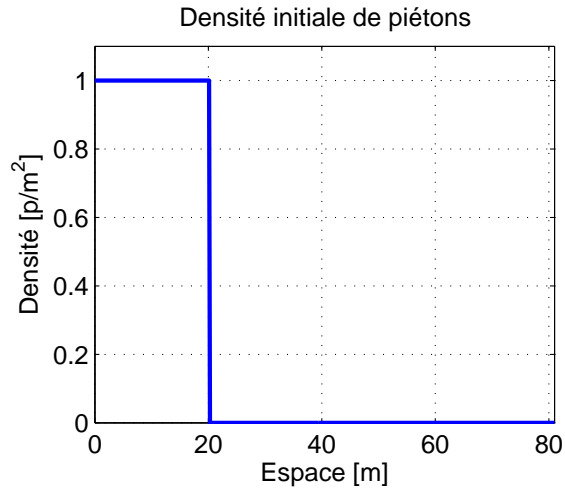


FIGURE 6.5. La densité initiale  $\rho(x, 0)$  discontinue

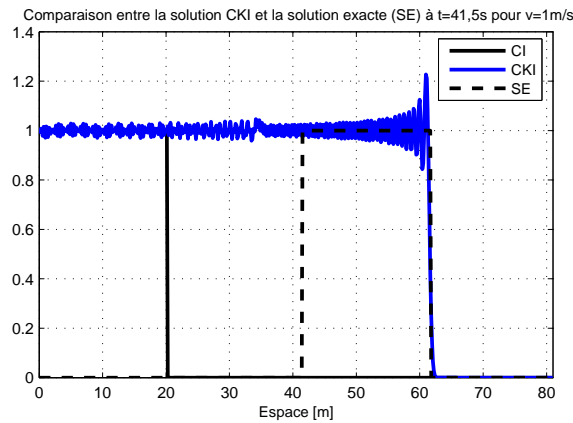


FIGURE 6.6. Solution numérique obtenue par la méthode CKI

approximation de  $\frac{1}{2} \left( \frac{d\rho}{dx} \right)_j^n$ . L'élimination de ces oscillations indésirables passe alors par une meilleure approximation de la dérivée notamment dans les points de discontinuités. L'idée serait donc de permettre à l'algorithme de faire le choix entre différentes façons de calculer la dérivée selon la situation qui se présente.

### 6.4.1.3 Cas test : méthode de Crank Nicolson non oscillante

Dans ce paragraphe, on introduit une méthode d'approximation de la dérivée première en espace qui permet la définition d'un schéma de Crank-Nicolson non-oscillant inspiré de [86] puis on propose une nouvelle méthode combinant le schéma amélioré de Crank Nicolson (CKI) et le schéma non-oscillant.

**Définition de l'approximation d'ordre 2 de la dérivée première en espace et schéma de Crank Nicolson non-oscillant** [86].

Notons  $D_x \varrho_j(t) = \frac{\varrho_j(t) - \varrho_{j-1}(t)}{dx}$  l'approximation d'ordre 1 de la dérivée. L'approximation d'ordre 2  $D_x^{(2)} \varrho_j(t)$  s'écrit de la forme [87] :

$$D_x^{(2)} \varrho_j(t) = D_x \varrho_j(t) + \vartheta(D_x \varrho_j(t)) \quad (6.23)$$

où  $\vartheta(D_x \varrho_j(t))$  n'est autre qu'une approximation de  $\frac{dx}{2} \left( \frac{d^2 \varrho}{dx^2} \right)_j$  adaptée à la situation. Ainsi,  $\vartheta(D_x \varrho_j(t))$

peut prendre 3 valeurs différentes selon le cas :

$$\vartheta(D_x \varrho_j(t)) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\varrho_{j+1}(t) - 2\varrho_j(t) + \varrho_{j-1}(t)}{dx^2} \\ \frac{\varrho_j(t) - 2\varrho_{j-1}(t) + \varrho_{j-2}(t)}{dx^2} \end{cases} \quad (6.24)$$

Le choix est fait selon les valeurs de  $\frac{\varrho_{j+1}(t) - 2\varrho_j(t) + \varrho_{j-1}(t)}{dx^2}$  et  $\frac{\varrho_j(t) - 2\varrho_{j-1}(t) + \varrho_{j-2}(t)}{dx^2}$ . Si les deux sont de signes contraires,  $\vartheta(D_x \varrho_j(t)) = 0$ , sinon  $\vartheta(D_x \varrho_j(t))$  prend la valeur de celle qui est plus petite en valeur absolue. Pour formaliser ceci, on introduit la fonction minmod  $MM$  définie par :

$$MM(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \cdot x_2 \leq 0 \\ \frac{\min(x_1, x_2)}{\text{sgn}(\min(x_1, x_2))} & \text{si } x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

où  $\text{sgn}$  est la fonction signe :

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En d'autres termes la fonction  $MM$  peut s'exprimer de la manière suivante :

$$MM(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \cdot x_2 \leq 0 \\ \min(x_1, x_2) & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ \max(x_1, x_2) & \text{si } x_1 < 0 \text{ et } x_2 < 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

$\vartheta(D_x \varrho_j(t))$  s'exprime alors en fonction de  $MM$  selon la relation :

$$\vartheta(D_x \varrho_j(t)) = MM \left( \frac{\varrho_{j+1}(t) - 2\varrho_j(t) + \varrho_{j-1}(t)}{dx^2}, \frac{\varrho_j(t) - 2\varrho_{j-1}(t) + \varrho_{j-2}(t)}{dx^2} \right) \quad (6.27)$$

$D_x^{(2)} \varrho_j(t)$  peut alors prendre l'une des valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\varrho_j(t) - \varrho_{j-1}(t)}{dx} \\ \frac{3\varrho_j(t) - 4\varrho_{j-1}(t) + \varrho_{j-2}(t)}{2dx} \\ \frac{\varrho_{j+1}(t) - \varrho_{j-1}(t)}{2dx} \end{cases} \quad (6.28)$$

Dans l'équation (6.19), si on remplace  $\frac{\varrho_{j+1}^n - \varrho_{j-1}^n}{4dx}$  par  $\frac{1}{2} D_x^{(2)} \varrho_j(t)$  on obtient une méthode de Crank-Nicolson non-oscillante (CKNO).

### Proposition de méthode implicite : la méthode de Crank Nicolson améliorée non oscillante (CKINO)

Dans le cadre de cette thèse, on propose de combiner (6.27) et (6.20) afin d'obtenir un nouveau modèle. En effet, en utilisant la définition de la dérivée donnée par (6.27), et en remplaçant dans l'équation (6.20) on obtient un nouveau schéma, la méthode de Crank Nicolson améliorée non oscillante (CKINO) qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{\varrho_{j+1}^{n+1} + 4\varrho_j^{n+1} + \varrho_{j-1}^{n+1} - \varrho_{j+1}^n - 4\varrho_j^n - \varrho_{j-1}^n}{6dt} + v \frac{\varrho_{j+1}^{n+1} - \varrho_{j-1}^{n+1}}{4dx} + \frac{1}{2} \left( D_x^{(2)} \varrho \right)_j^n = O(dt^2, dx^2) \quad (6.29)$$

La solution obtenue par cette méthode est donnée dans la figure 6.7. La figure 6.8 montre les solutions obtenues par les méthodes LF, UP et CKINO. Ainsi, la solution trouvée par CKINO est la plus proche de

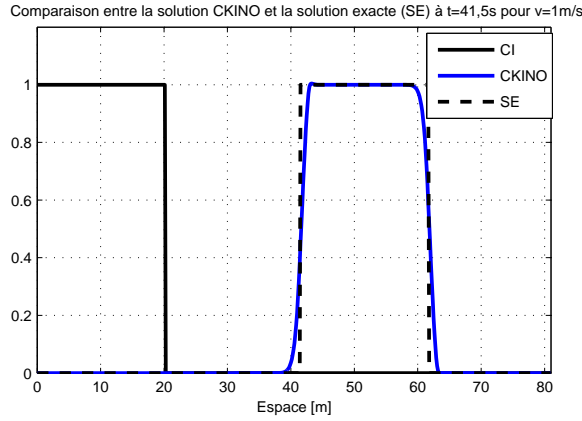


FIGURE 6.7. Solution numérique obtenue par la méthode CKINO

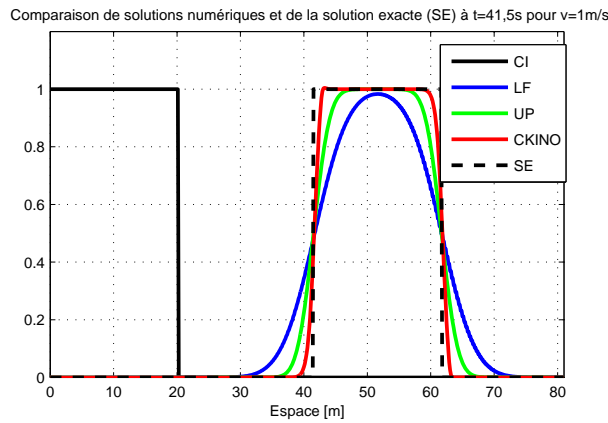


FIGURE 6.8. Comparaison entre les méthodes numériques

la solution exacte (SE) parmi les méthodes numériques testées.

Pour vérifier que cette méthode préserve réellement le caractère conservatif de l'EDP (6.8), on a calculé :

$$I(t) = \int_0^L \varrho(x, t) l dx \quad (6.30)$$

Dans le cas où  $\varrho = \eta$ ,  $I$  est le nombre de piétons sur la passerelle. La conservation de la masse a pour conséquence que  $I(t)$  est constante jusqu'à ce que les piétons commencent à sortir de la passerelle. A partir de cet instant,  $I(t)$  est décroissante et s'annule lorsque tous les piétons sortent de la passerelle. Numériquement, l'intégrale est calculée par la méthode de Simpson. La figure 6.9 montre l'évolution du nombre  $I$  dans le cas où  $L = 81m$  et  $\ell = 4m$ . A  $t = 0$ , les premiers piétons se trouvent en  $x = 20,14m$ . Leur vitesse étant de  $1m/s$ , il leur faut théoriquement  $60,86s$  pour commencer à sortir de la passerelle. Or le nombre  $I$  commence à décroître à  $t \simeq 59s$ , ce qui correspond à une vitesse proche de  $1,0315m/s$ . A  $t = 0$  les derniers piétons sont en  $x = 0$ . Théoriquement, il faut  $81s$  pour que la passerelle se vide. Sur la figure 6.9,  $I \simeq 0$  à partir de  $t \simeq 83s$  ce qui correspond à une vitesse proche de  $0,9759m/s$ . Ainsi, on peut dire que la méthode CKINO donne des résultats acceptables qui respectent le principe de conservation.

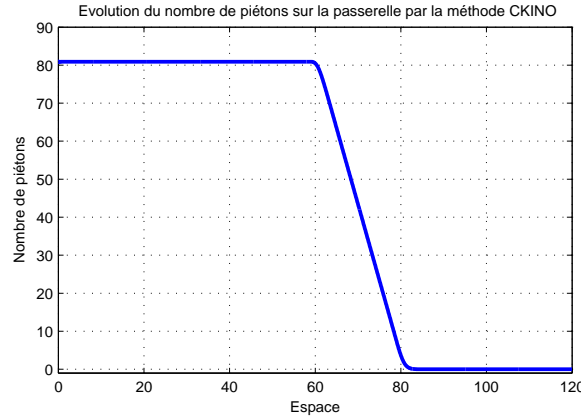


FIGURE 6.9. Evolution de nombre de piétons sur la passerelle pour  $L = 81m$  et  $\ell = 4m$

### 6.4.2 Schéma numérique pour la résolution de l'équation de conservation de la masse

Les résultats obtenus dans la partie précédente nous incitent à choisir la méthode CKINO pour résoudre l'EDP de conservation de la masse (6.7). Le schéma numérique adopté est de la forme :

$$\frac{\eta_{j+1}^{n+1} + 4\eta_j^{n+1} + \eta_{j-1}^{n+1} - \eta_{j+1}^n - 4\eta_j^n - \eta_{j-1}^n}{6dt} + \frac{(\eta v)_{j+1}^{n+1} - (\eta v)_{j-1}^{n+1}}{4dx} + \frac{1}{2} \left( D_x^{(2)}(\eta v) \right)_j^n = O(dt^2, dx^2) \quad (6.31)$$

### 6.4.3 Schéma numérique pour la résolution de l'équation de transport pour la fréquence

Dans ce paragraphe, on étudie l'équation de transport. On présente différentes méthodes de résolution basées sur la méthode de Crank Nicolson et on les compare entre elles.

Le cas de l'équation de transport concernant la fréquence (6.6) présente de grandes similitudes avec l'équation (6.8), avec la différence importante que l'équation utilisée dans le modèle est non-linéaire. En effet, la vitesse s'exprime sous la forme suivante :

$$v(x, t) = \frac{l_{pas}(x, t)}{\pi} \frac{d\phi}{dt}(x, t) \quad (6.32)$$

où on rappelle que  $l_{pas}(x, t)$  est la longueur des pas des piétons et  $\phi(x, t)$  leur phase latérale totale. Or, en vertu de l'équation de synchronisation,  $\frac{d\phi}{dt}(x, t)$  peut être représenté sous la forme suivante :

$$\frac{d\phi}{dt}(x, t) = \omega(x, t) + f(x, t) \quad (6.33)$$

où  $f$  est la fonction qui gère la synchronisation (voir le chapitre 4). En notant  $l(x, t) = \frac{l_{pas}(x, t)}{\pi}$ , on a :

$$v(x, t) = l(x, t)(\omega(x, t) + f(x, t)) \quad (6.34)$$

L'équation (6.7) devient :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + l(x, t)\omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) + l(x, t)f(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (6.35)$$

On note  $\omega_j^n \approx \omega(x_j, t_n)$ ,  $l_j^n \approx l(x_j, t_n)$  et  $f_j^n \approx f(x_j, t_n)$ , et on commence par résoudre (6.35) dans le cas particulier où  $f(x, t) = 0$  (pas de synchronisation) et  $l(x, t) = 1$  (obtenu par changement de variables). Ces simplifications ramènent le problème à un problème de Burger :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (6.36)$$

Comme on l'a vu plus haut, certains des algorithmes classiques explicites provoquent une dissipation importante et parfois un aplatissement des courbes initiales ; le transport n'est donc pas effectué de manière optimale. D'autres algorithmes classiques imposent des limitations sur les pas de discrétisation. D'où l'intérêt de se fonder sur le schéma de Crank Nicolson. Les modèles CK, CKI et CKINO ne sont pas adaptés au modèle de Burger (6.36), mais on peut s'en inspirer pour proposer un autre schéma numérique.

### 6.4.3.1 Résolution numérique de l'équation de Burger basée sur la méthode de Crank-Nicolson

La méthode de résolution proposée dans ce paragraphe est tirée de [88].

L'équation (6.36) peut s'écrire selon l'expression suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{2} \left( \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) + \omega(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x}(x, t) \right) = 0 \quad (6.37)$$

On peut donc la discrétiser sous la forme [88] :

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{dt} + \frac{1}{2} \left[ \left( \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_j^n + \left( \omega \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] = 0 \quad (6.38)$$

En notant  $F = \frac{\omega^2}{2}$ , on obtient :

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{dt} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^n + \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] = 0 \quad (6.39)$$

Le terme  $\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^{n+1}$  se développe de la façon suivante :

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^{n+1} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^n + dt \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) \right]_j^n + O(dt^2) \quad (6.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \omega \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \quad (6.41)$$

Si on utilise les approximations suivantes :

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_j^n = \frac{\omega_{j+1}^n - \omega_{j-1}^n}{2dx} \quad (6.42)$$

$$\left( \frac{\partial \omega^2}{\partial x} \right)_j^n = \frac{(\omega_{j+1}^n)^2 - (\omega_{j-1}^n)^2}{2dx}, \quad (6.43)$$

le schéma final devient de la forme :

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{dt} + \frac{\omega_{j+1}^n \omega_{j+1}^{n+1} - \omega_{j-1}^n \omega_{j-1}^{n+1}}{4dx} - \frac{(\omega_{j+1}^n)^2 - (\omega_{j-1}^n)^2}{8dx} = 0 \quad (6.44)$$

Pour faire référence à ce schéma, on le note CKN (Crank Nicolson Non Linear).

### 6.4.3.2 Propositions d'amélioration du schéma CKN

Comme précédemment, ce schéma peut être modifié de différentes manières. Dans la suite, on présente les différentes possibilités d'amélioration et on les teste afin de choisir la méthode la plus adaptée à notre cas.

La première possibilité est d'approcher la dérivée en temps par

$$\frac{\omega_{j+1}^{n+1} + 4\omega_j^{n+1} + \omega_{j-1}^{n+1} - \omega_{j+1}^n - 4\omega_j^n - \omega_{j-1}^n}{6dt}$$

Ce nouvel algorithme est noté CKNI (Crank Nicolson Non Linear Improved).

Pour éviter que les solutions ne soient oscillantes, on peut remplacer :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_j^n &\text{ par } (D_x^2(\omega))_j^n \\ \left(\frac{\partial \omega^2}{\partial x}\right)_j^n &\text{ par } (D_x^2[(\omega)^2])_j^n \end{aligned}$$

Dans ce cas, le schéma est noté CKNNO ou CKNINO selon si la modification est appliquée au schéma CKN ou CKNI.

Plusieurs essais numériques ont été réalisés avec des conditions initiales différentes afin de déterminer laquelle parmi ces méthodes, il faut retenir. Pour mieux comprendre les résultats obtenus, il faut connaître la signification physique de l'équation (6.36). Si à l'instant  $t = 0$ , un point de la courbe représentative de  $\omega(x, 0)$  a une valeur  $\Omega_0$ , alors ce point se déplace avec une vitesse  $\Omega_0$  et garde la même valeur. Ainsi, si un point a une valeur nulle, il restera à sa place.

Dans tous les cas tests la condition en  $x = 0$  est donnée par

$$\omega(0, t) = \omega(0, 0) \quad \forall t > 0$$

On commence par une condition initiale sinusoïdale donnée dans la figure 6.10.

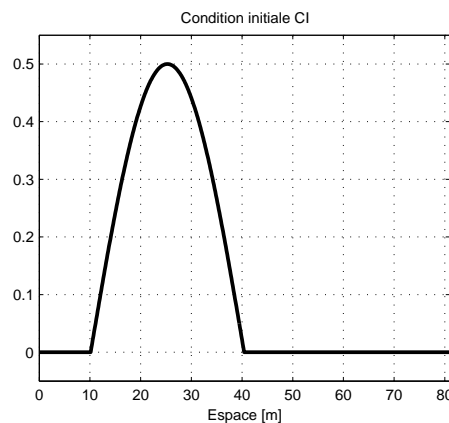


FIGURE 6.10. La condition initiale  $\omega(x, 0)$

La figure 6.11 montre que les 4 méthodes donnent sensiblement le même résultat. A l'instant  $t = 0$ , le point qui a la valeur maximale 0,5 est situé en  $x = 25,28$ . Théoriquement, il doit se déplacer donc à une vitesse de  $0,5m/s$ . Or à  $t = 15s$  il se trouve en  $x = 32,68$ , il a donc traversé une distance de  $7,4m$ , sa vitesse est donc de  $0,4933m/s$ , et il a gardé sa valeur de 0,5. Les points ayant des valeurs nulles à  $t = 0$  ont gardé cette valeur à  $t = 15s$ . Pour ce cas test, les 4 schémas se valent et donnent des résultats acceptables. Pour le deuxième cas test, on prend une condition initiale en dent de scie (figure 6.12). Les résultats obtenus sont montrés dans la figure 6.13. Les solutions obtenues par les différentes méthodes sont très proches l'une de l'autre (figure 6.13-(a)), cependant le maximum qui a une valeur de 0,25 et qui se trouve à  $t = 0$  en  $x = 25,42$ , se retrouve en  $x = 37,78$  avec une valeur de 0,2503 pour les méthodes CKNI et CKNINO, et en  $x = 37,5$  avec une valeur de 0,2502 pour les méthodes CKN et CKNNO (figure 6.13-(b)). Ainsi, la vitesse qui théoriquement est de  $0,25m/s$  est de  $0,2472m/s$  pour les méthodes CKNI et CKNINO, et de  $0,2416m/s$  pour les méthodes CKN et CKNNO.

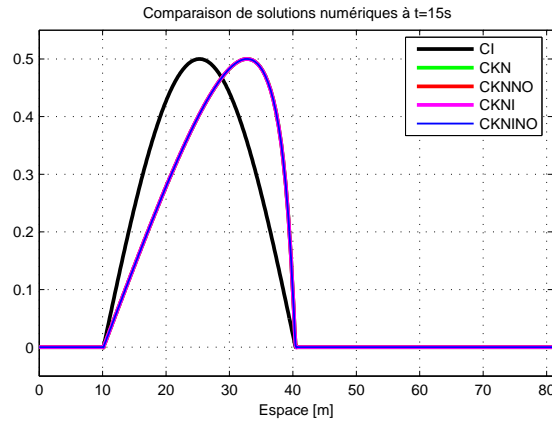
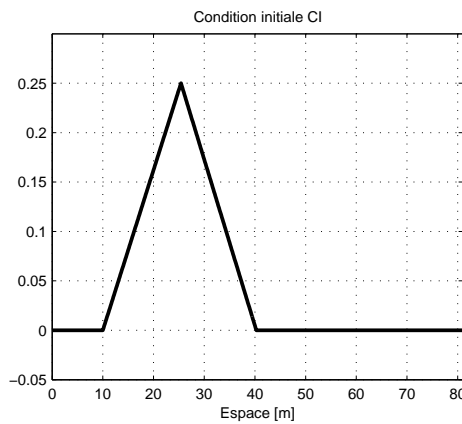


FIGURE 6.11. Comparaison entre méthodes numériques

FIGURE 6.12. La condition initiale  $\omega(x, 0)$ 

Cet exemple montre de légères différences entre les différentes méthodes et donne un avantage aux méthodes CKNI et CKNINO, mais ne permet pas de trancher de manière catégorique sur le choix de la méthode.

Dans les deux autres exemples, on n'aura plus de valeurs nulles, c'est à dire que tous les points sont supposés avancer. Dans le premier cas, on reprend une fonction sinusoïdale (figure 6.14). Les résultats obtenus sont montrés dans la figure 6.15. On remarque que les solutions sont ici encore très proches (figure 6.15-a), mais en faisant un zoom (figure 6.15-b) on peut s'apercevoir que d'une part, le point qui a une valeur 1 à  $t = 0$  et qui est situé en  $x = 40, 42$  se trouve à  $t = 15s$  en  $x = 55, 69$  pour les méthodes CKNI et CKNINO, il a donc une vitesse de  $1, 018m/s$ , et il se trouve en  $x = 56, 53$  pour les méthodes CKN et CKNNO avec une vitesse  $1, 0740m/s$ . D'autre part, les oscillations observées pour les méthodes CKNI et CKNINO sont légèrement inférieures à celles observées pour les deux autres méthodes.

On reprend maintenant une fonction en dent de scie (figure 6.16). Les résultats obtenus sont montrés dans la figure 6.17. Ici encore les solutions sont très proches (figure 6.17-a).

La figure(6.17-b) montre que le pic qui a la valeur 1,5 et la position  $x = 25, 42$  à  $t = 0$  se trouve à  $t = 15s$  en  $x = 47, 63$  pour les méthodes CKNI et CKNINO avec une valeur de 1,498, et il se trouve en  $x = 47, 22$  et  $x = 47, 36$  respectivement pour les méthodes CKN et CKNNO avec une valeur de 1,494. Ainsi, la vitesse qui doit être de  $1, 5m/s$  est de  $1, 4807m/s$  pour CKNI et CKNINO et respectivement  $1, 4533m/s$  et  $1, 4627m/s$  pour CKN et CKNNO.

La figure (6.17-c) montre que le point qui a la valeur 1 et la position  $x = 40, 28$  en  $t = 0$  se trouve à  $t = 15s$  en  $x = 57, 97$  pour les méthodes CKNI et CKNINO et en  $x = 57, 22$  pour les méthodes CKN et

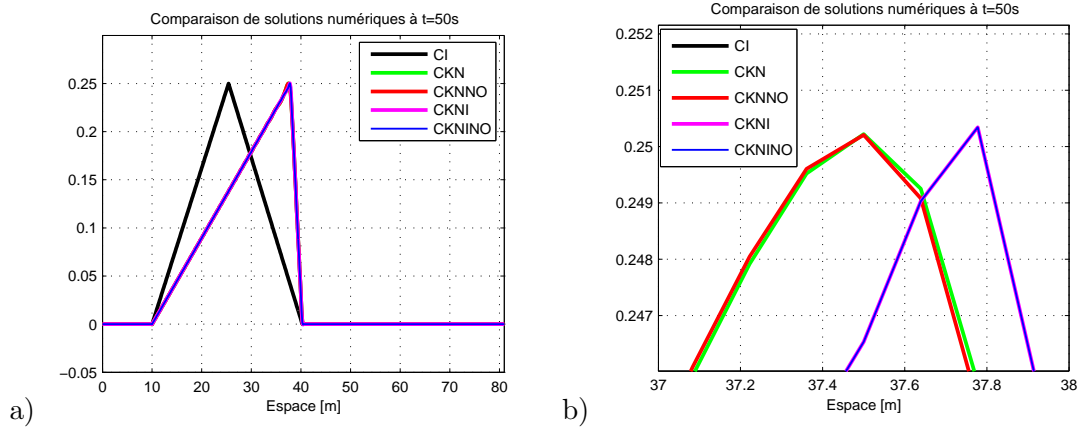


FIGURE 6.13. Comparaison entre les méthodes numériques : (a) solution à  $t = 50s$  (b) zoom de la solution

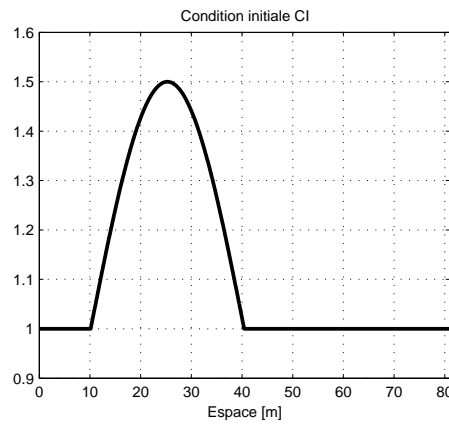


FIGURE 6.14. La condition initiale  $\omega(x, 0)$

CKNNO. Ainsi, la vitesse qui doit être de  $1m/s$  est de  $1,04m/s$  pour CKNI et CKNINO et de  $1,1293m/s$  pour CKN et CKNNO. De plus, les oscillations sont plus légères dans les schémas CKNI et CKNINO.

Cependant, les différences entre les schémas ne sont pas très importantes. C'est pourquoi, la décision finale sur le choix de la méthode est prise après couplage des différentes équations. Il se trouve qu'en raison des différents couplages existant, la méthode CKNINO qui a semblé donner des résultats satisfaisants, n'est pas adaptée au modèle. C'est pourquoi, on a finalement utilisé le schéma CKNNO.

### 6.4.3.3 Schéma numérique pour la résolution de l'équation de transport

Dans ce paragraphe, le modèle numérique pour l'équation (6.6) est explicité en utilisant la représentation donnée dans l'équation (6.35). Ainsi, on discrétise l'équation de transport sous la forme suivante :

$$\frac{\omega_j^{n+1} - \omega_j^n}{dt} + \frac{1}{2} \left[ l_j^n \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^n + l_j^{n+1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \left[ l_j^n f_j^n \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_j^n + l_j^{n+1} f_j^{n+1} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_j^{n+1} \right] = 0 \quad (6.45)$$

Dans le modèle proposé dans le chapitre 4 l'équation de transport (6.6) est donc implémentée sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{l_j^{n+1}}{4dx} (f_j^{n+1} + \omega_{j-1}^n) \right] \omega_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{dt} \omega_j^{n+1} + \left[ \frac{l_j^{n+1}}{4dx} (f_j^{n+1} + \omega_{j+1}^n) + \frac{1}{dt} \right] \omega_{j+1}^{n+1} \\ & = \frac{1}{dt} \omega_j^n - \frac{l_j^n f_j^n}{2} [D_x^2(\omega)]_j^n + \frac{l_j^{n+1} - l_j^n}{4} [D_x^2(\omega^2)]_j^n \end{aligned} \quad (6.46)$$



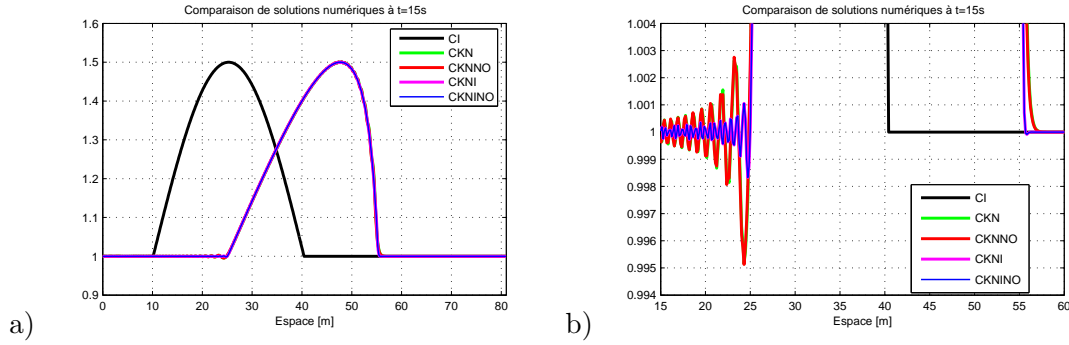


FIGURE 6.15. Comparaison entre méthodes numériques : a) solution à  $t = 15s$  b) zoom de la solution

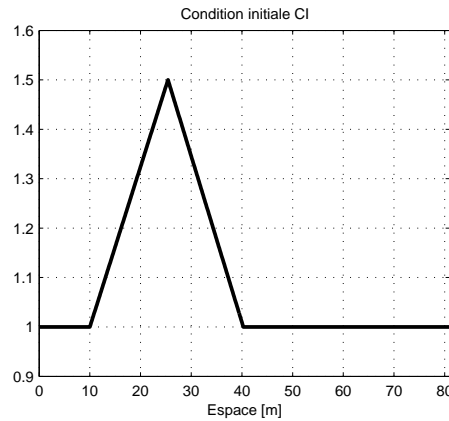


FIGURE 6.16. La condition initiale  $\omega(x, 0)$

## 6.5 L'équation de synchronisation

L'équation de synchronisation porte sur l'évolution de la phase totale des piétons et a une conséquence directe sur l'évolution de la fréquence de marche. On rappelle que cette équation peut s'écrire de façon simplifiée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = \omega(x, t) + \varepsilon \sin(\psi_e(t) - \phi(x, t)) \quad (6.47)$$

$\psi_e(t)$  étant la phase totale de l'oscillateur avec lequel le piéton va se synchroniser (avec un piéton ou avec la structure). On suppose que cet oscillateur a une pulsation constante  $\omega_e$ , par conséquent  $\psi_e(t) = \omega_e t$ . On rappelle que la pulsation instantanée des piétons  $\omega_p(x, t)$  n'est autre que  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$ .

De plus, la vitesse  $v(x, t)$  est fonction de  $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t)$  (équation (6.32)). L'équation (6.47) s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, t) + \frac{l_{pas}(x, t)}{\pi} \frac{d\phi}{dt}(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, t) = \omega_p(x, t) \quad (6.48)$$

$$\omega_p(x, t) = \omega(x, t) + \varepsilon \sin(\psi_e(t) - \phi(x, t) + \alpha) \quad (6.49)$$

$\alpha$  étant une constante.

La résolution numérique de l'équation de synchronisation, se fait grâce à la méthode UP2 expliquée dans le paragraphe 6.4.1.1.

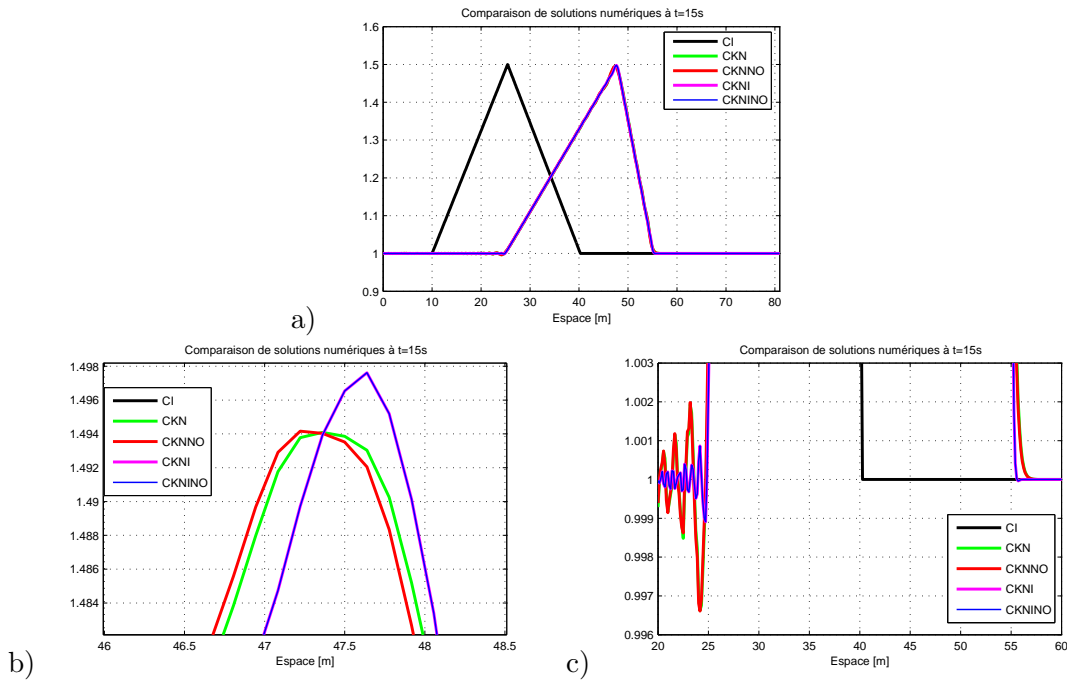


FIGURE 6.17. Comparaison entre méthodes numériques : a) solution à  $t = 15s$  b) et c) zoom de la solution

## 6.6 L'algorithme général

Dans ce paragraphe, on présente de façon simplifiée l'algorithme utilisé pour l'implémentation de notre modèle.

Avant de présenter les étapes principales, nous voudrions préciser certains points qui permettent une meilleure compréhension de l'algorithme et simplifient considérablement sa présentation.

Le programme est formé d'un fichier principal "Main". Dans ce fichier, on fixe l'instant initial, l'instant final et la discrétisation en espace. On détermine également les caractéristiques de la passerelle : longueur, largeur, masse modale, amortissement modal et rigidité modale. De plus, on précise les conditions initiales :

- pour les piétons : leur densité, leur vitesse de marche, leur fréquence de marche, leur fréquence de marche libre, et leur phase totale,
- pour la passerelle : son déplacement, sa vitesse et sa fréquence instantanée.

La fonction `ode23` de MATLAB, permet de résoudre l'équation aux dérivées ordinaires de l'équation de la dynamique de la passerelle. Elle fait appel à une fonction développée par le programmeur, qui permet de calculer la dérivée du vecteur que l'on souhaite intégrer. Dans notre programme, cette fonction s'appelle "deqdin". Pour pouvoir calculer les dérivées nécessaires à la résolution, on calcule à l'intérieur de cette routine la force latérale appliquée par les piétons sur la passerelle, leur vitesse de marche, leur densité locale (par l'équation de conservation), et leur fréquence de marche libre (par l'équation de transport).

Le calcul de la fréquence instantanée de la passerelle et celle des piétons se font dans le fichier principal "Main". En effet, on demande à `ode23` d'arrêter l'intégration lorsque le déplacement de la passerelle passe par 0. Ceci est possible grâce à l'option "events" de `ode23`. Pour mieux expliquer ceci, on se réfère à la figure 6.18. `ode23` détermine le déplacement et la vitesse de la passerelle jusqu'à obtenir un déplacement nul, c'est-à-dire entre les instants  $T_n$  et  $T_{n+1}$ . Arrivé à  $T_{n+1}$ , l'intégration s'arrête et le programme revient au fichier principal "Main". On détermine alors la fréquence instantanée  $f_s$  de la passerelle l'instant  $T_{n+1}$  suivant l'approximation :

$$f_s(T_{n+1}) = \frac{1}{2(T_{n+1} - T_n)}$$

puisque l'on suppose que  $T_{n+1} - T_n$  est la demi-période d'oscillations de la passerelle. La phase totale  $\psi_s(T_{n+1})$

de la passerelle est donnée par :

$$\psi_s(T_{n+1}) = \psi_s(T_n) + \pi$$

On trouve également l'amplitude instantanée  $Ay(T_{n+1})$  du module du déplacement de la passerelle comme étant le maximum du module du déplacement entre les instants  $T_n$  et  $T_{n+1}$ .

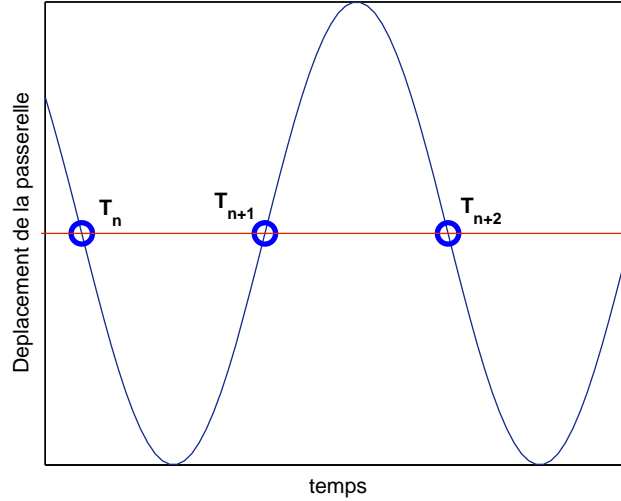


FIGURE 6.18. Représentation schématique la position des temps d'arrêt

Pour calculer la fréquence instantanée des piétons, on calcule la fréquence moyenne  $f_{sm}$  et l'amplitude maximale  $Ay_{max}$  du module du déplacement de la passerelle sur les 10 dernières valeurs calculées (5 dernières périodes), et on calcule la phase moyenne  $\phi_{av}$  des piétons. Ensuite, on applique l'équation de Kuramoto pour déterminer la fréquence angulaire instantanée  $\frac{d\phi}{dt}$  des piétons. En un point  $x_i$  de la passerelle, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt}(x_i, T_{n+1}) = & \omega(x_i, T_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} (2\pi f_{sm})^2 Ay_{max} \sin(\psi_s(T_n) - \phi(x_i, T_n) + \frac{\pi}{2}) \\ & + \varepsilon_{pp} \sin(\phi_{av}(x_i, T_n) - \phi(x_i, T_n)) \end{aligned} \quad (6.50)$$

et on intègre avec la méthode Upwind du second ordre.

Ensuite, on appelle à nouveau la fonction ode23, avec comme instant initial  $T_{n+1}$ , et comme conditions initiales les valeurs du déplacement et de la vitesse à l'instant  $T_{n+1}$  telles qu'elles ont été déterminées par l'intégration entre les instants  $T_n$  et  $T_{n+1}$ . Comme on l'a déjà précisé, ode23 appelle la fonction "deqdn", où on calcule entre autre la force des piétons. On doit donc connaître la phase totale des piétons à un instant  $t_j \in [T_{n+1}, T_{n+2}]$ . On l'approche par :

$$\phi(x_i, t_j) = \phi(x_i, T_{n+1}) + (t_j - T_{n+1}) \frac{d\phi}{dt}(x_i, T_{n+1})$$

### L'algorithme schématisé

On présente maintenant les étapes principales de l'algorithme utilisé.

1. fixer l'instant initial  $T_0$
2. fixer l'instant final  $T_f$
3. préciser les caractéristiques de la passerelle
4. poser les conditions initiales :
  - densité initiale des piétons  $\eta_{init}$

- vitesse initiale des piétons  $v_{init}$
  - phase initiale des piétons  $\phi_0$
  - fréquence angulaire initiale des piétons  $\frac{d\phi_0}{dt}$
  - fréquence angulaire de marche libre  $\omega$
  - déplacement initial de la passerelle  $u_0$
  - vitesse initiale de la passerelle  $v_0$
  - fréquence initiale de la passerelle  $f_{s_0}$
5. initialiser les vecteurs de résultats de la résolution :
- $tout = 0$  (vecteur temps global)
  - $teout = 0$  (vecteur temps pour récupérer les temps d'arrêt)
  - $yout$  (vide, vecteur pour la récupération des résultats de l'intégration par ode23)
  - $yeout$  (vide, vecteur pour la récupération des résultats de l'intégration par ode23 lors de l'arrêt)
6. préciser les conditions initiales et les options de ode23
- $tstart = T_0, tfinal = T_f, tspan = [tstart, tfinal]$
  - $ystart = [u_0, v_0]$
  - $i = 1$  (compteur des demi-périodes)
  - options=odeset('Events',@events,'InitialStep',0.0415,'MaxStep',0.0650)
7. résoudre le système d'équation :
- WHILE  $tstart < tfinal$
- appel de la fonction ode23 :  
 $[t, y, te, ye, ie] = \text{ode23}(@deqdin, tspan, ystart, options, i)$
  - Concaténer les résultats :
    - $nt = \text{longueur de } t$
    - $tout = [tout; t(2 : nt)]$
    - $yout = [yout; y(2 : nt)]$
    - $teout = [teout; te]$
    - $yeout = [yeout; ye]$
    - $ieout = [ieout; ie]$
  - calculer la fréquence instantanée de la passerelle, sa phase totale, la fréquence instantanée des piétons et leur phase totale
  - $tstart = t(nt)$
  - $i = i + 1$
- END

## 6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations du modèle présenté au chapitre 4. Pour l'équation de la dynamique, on utilise l'algorithme ode23 proposé par Matlab. Pour l'équation de transport, on utilise une méthode basée sur la méthode CKINO introduite dans ce chapitre. Le schéma numérique pour la conservation de la masse est donné par l'équation (6.31). L'équation de transport pour la fréquence de marche libre des piétons est résolue grâce au schéma présenté dans (6.46) fondé sur la méthode CKNNO également présentée dans ce chapitre. L'équation de synchronisation de Kuramoto est résolue avec la méthode Upwind d'ordre 2. Dans la dernière section de ce chapitre, nous avons présenté l'algorithme général permettant la résolution du modèle complet.



# Chapitre 7

## Résultats

---

*CE CHAPITRE a pour objectif de :*

- \* déterminer les paramètres du modèle du chapitre 4*
  - \* vérifier la correspondance entre les résultats analytiques et le modèle numérique*
  - \* appliquer le modèle à la passerelle du Millennium et à la passerelle Simone de Beauvoir*
-

## PLAN DU CHAPITRE 7

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>167</b>
<b>7.2</b>	<b>Choix des valeurs des différents paramètres</b>	<b>167</b>
<b>7.3</b>	<b>Application à la passerelle du Millennium</b>	<b>169</b>
7.3.1	Description et caractéristiques de la passerelle	169
7.3.2	Détermination de la valeur de $\varepsilon$	170
7.3.3	Comparaison de résultats sur la TN	171
<b>7.4</b>	<b>Application à la passerelle Simone de Beauvoir</b>	<b>186</b>
7.4.1	Description et caractéristiques de la passerelle	187
7.4.2	Détermination du nombre critique de piétons	187
7.4.3	Amplitude d'oscillations et simulations numériques	190
7.4.4	Concernant le premier mode de la passerelle Simone de Beauvoir...	191
<b>7.5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>191</b>

---

## 7.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus grâce au modèle présenté dans le chapitre 4, et on compare les résultats analytiques, numériques, expérimentaux, et ceux obtenus grâce aux modèles développés dans la littérature. On commence par le cas de la passerelle du Millennium. L'étude réalisée sur cette passerelle permet la détermination du paramètre  $\varepsilon$  utilisé dans le modèle proposé dans cette thèse (chapitre 4). Grâce à ce paramètre, on peut déterminer analytiquement le nombre critique  $N_c$  de piétons dans le cas particulier présenté au chapitre 5 pour différentes distributions gaussiennes de la fréquence de marche libre. De plus, dans le cas où la moyenne de la fréquence de la force latérale des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure, on peut calculer analytiquement l'amplitude de déplacement post-critique de la passerelle à l'état stationnaire. Pour les cas plus compliqués, qu'on ne peut pas gérer analytiquement pour l'instant, des simulations numériques dans lesquelles on utilise la même valeur de  $\varepsilon$  déjà déterminée peuvent être réalisées. Plusieurs situations sont étudiées pour la passerelle du Millennium et une comparaison avec les résultats expérimentaux et les résultats obtenus par d'autres modèles est présentée. Dans le dernier paragraphe, on applique les résultats à la passerelle Simone de Beauvoir (chapitre 2), et on détermine le nombre critique et les amplitudes de déplacement prévus par notre modèle.

## 7.2 Choix des valeurs des différents paramètres

Dans ce paragraphe, nous précisons le choix des paramètres que nous utilisons pour l'application de notre modèle :  $m_{1p}$ ,  $G$ ,  $l_0$ ,  $\eta_c$ ,  $\eta_{max}$ ,  $a_{min}$ ,  $a_{max}$ ,  $\mu_\omega$  et  $\sigma_\omega$ . La valeur de  $\varepsilon$  sera déterminée dans le paragraphe 7.3.2.

### Valeur de $m_{1p}$

$m_{1p}$  est la masse moyenne d'un piéton. Elle varie dans la littérature entre  $70kg$  et  $80kg$ . On choisit pour notre modèle une valeur intermédiaire qui est

$$m_{1p} = 75kg \quad (7.1)$$

### Valeur de $G$

$G$  est la valeur de l'amplitude du premier harmonique de la force latérale engendrée par un piéton sur un plancher rigide. Dans la littérature (voir chapitre 1, tableau 1.3), différentes valeurs ont été proposées.  $G$  est de l'ordre de  $29 - 30N$  d'après [6, 26],  $35N$  d'après l'AFGC [61], mais la valeur utilisée dans [62] est de  $25N$ . En prenant en compte ces valeurs et les résultats que nous avons obtenus expérimentalement (chapitre 2), nous retenons :

$$G = 35N \quad (7.2)$$

### Valeurs de $l_0$

$l_0$  est la longueur de pas moyenne d'un piéton dans le cas d'une marche normale. On retient la valeur [89] :

$$l_0 = 0,71m \quad (7.3)$$

### Valeurs de $\eta_c$ et $\eta_{max}$

$\eta_c$  et  $\eta_{max}$  sont les densités qui caractérisent la dépendance entre la longueur de pas des piétons et leur densité.  $\eta_c$  est la densité critique à partir de laquelle les piétons commencent à interagir entre eux, et  $\eta_{max}$  est la densité à partir de laquelle ils n'arrivent plus avancer. On retient les valeurs suivantes [26, 40] :

$$\begin{aligned} \eta_c &= 0,3p/m^2 \\ \eta_{max} &= 1,8p/m^2 \end{aligned} \quad (7.4)$$



### Valeurs de $a_{min}$ et $a_{max}$

$a_{min}$  est l'accélération de la structure à partir de laquelle les piétons ressentent les oscillations latérales, et  $a_{max}$  est l'accélération à partir de laquelle ils n'arrivent plus à avancer. Les valeurs retenues pour notre modèle sont [25, 36] :

$$\begin{aligned} a_{min} &= 0,1m/s^2 \\ a_{max} &= 1,35m/s^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

### Valeurs de $\mu_\omega$ et $\sigma_\omega$

Dans le cas d'une marche libre, plusieurs études ont permis de déterminer l'écart-type  $\sigma_f$  et/ou la moyenne  $\mu_f$  de la marche d'un piéton (chapitre 1). Ces valeurs sont de  $\mu_f = 1Hz$  et  $\sigma_f = 0,0865Hz$  pour [1] et de  $\mu_f = 0,9350Hz$  et  $\sigma_f = 0,0930Hz$  pour [89]. Dans le cas d'une marche libre, on adopte les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_f &= 0,9350Hz \\ \sigma_f &= 0,0930Hz \end{aligned} \quad (7.6)$$

parce qu'elles sont plus proches des valeurs obtenues lorsque nous avons étudié la force latérale engendrée par un piéton sur un plancher rigide au chapitre 2, et dans [79]. Dans le cas où on demande aux piétons de marcher à une fréquence donnée  $f_d$ , la nouvelle valeur moyenne devient :

$$\mu_f = f_d \quad (7.7)$$

Or si une variable aléatoire  $X$  suit une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_X$  et d'écart-type  $\sigma_X$ , la variable aléatoire

$$Y = aX + b$$

suit une loi gaussienne de moyenne  $\mu_Y$  et d'écart-type  $\sigma_Y$  qui vérifient

$$\begin{aligned} \mu_Y &= a\mu_X + b \\ \sigma_Y &= |a|\sigma_X \end{aligned} \quad (7.8)$$

Ainsi, grâce à ces formules, on peut se ramener au nouvel écart-type. Si on a une moyenne  $\mu_f$  et on veut passer à une moyenne  $\tilde{\mu}_f$ , on peut supposer qu'on a  $\tilde{\mu}_f = a\mu_f$  et le nouvel écart-type  $\tilde{\sigma}_f$  peut s'écrire

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{\tilde{\mu}_f}{\mu_f} \sigma_f \quad (7.9)$$

ou bien on peut supposer qu'il s'agit d'une translation. Dans ce cas

$$\tilde{\sigma}_f = \sigma_f \quad (7.10)$$

Cependant, dans ce chapitre, on a choisi d'utiliser la formule (7.9), parce que nous avons voulu que le coefficient de variation

$$\frac{\sigma_f}{\mu_f}$$

soit conservé. Dans le paragraphe 7.3, nous considérons la travée Nord de la passerelle du Millennium où plusieurs essais ont été réalisés [8, 21]. La fréquence du premier mode propre de cette travée est de  $1,03Hz$ . Pour étudier le cas où les piétons traversent la travée avec une fréquence moyenne de  $1,03Hz$ , nous avons utilisé les formules proposées par les équations (7.9) afin de ramener les valeurs de  $\sigma_f$  vues dans la littérature vers leurs valeurs correspondantes pour cette fréquence. Ensuite, nous avons fait une moyenne pondérée. La raison pour laquelle cette démarche a été adoptée dans ce cas est due au fait que ces essais permettent la détermination du paramètre  $\varepsilon$  dans le paragraphe 7.3.2, et que nous avons préféré moyenniser les valeurs de  $\sigma_f$  pour avoir une meilleure estimation.

On note que le cas le plus critique est lorsque la fréquence des piétons est centrée sur la fréquence modale du système piétons-structure.



FIGURE 7.1. *La travée centrale de la passerelle du Millennium à Londres*

On rappelle que si la fréquence des piétons suit une loi normale de moyenne  $\mu_f$  et d'écart-type  $\sigma_f$ , la fréquence angulaire  $\omega$  des piétons suit une loi normale de moyenne  $\mu_\omega$  et d'écart-type  $\sigma_\omega$  qui vérifient :

$$\mu_\omega = 2\pi\mu_f$$

$$\sigma_\omega = 2\pi\sigma_f$$

## 7.3 Application à la passerelle du Millennium

### 7.3.1 Description et caractéristiques de la passerelle

La passerelle du Millennium (figure 7.1) est formée de trois travées, la travée Nord (TN), la travée centrale (TC) et la travée Sud (TS). Les dimensions et les différentes caractéristiques modales de la passerelle sont données dans le tableau 7.1. Dans ce tableau, les numéros placés à côté de l'abréviation du nom de la travée correspondent au numéro du mode considéré.

	TN1	TC1	TC2	TS1
Longueur [m]	81	144	144	108
Largeur [m]	4	4	4	4
Fréquence modale analytique [Hz]	1	0,49	0,94	0,8
Fréquence modale mesurée [Hz]	1,03	0,48	0,95	0,8
Masse modale analytique [ $kg \times 10^3$ ]	113	144	150	181
Masse modale mesurée [ $kg \times 10^3$ ]	non disponible	128-130	145-148	160
Rigidité modale mesurée [ $kg/s^2 \times 10^3$ ]	4730	1160-1180	5170-5270	4040
Amortissement modal mesuré [ $kg/s \times 10^3$ ]	8,78-11,7	5,91-6	10,4-14,1	9,65-12,9
Taux d'amortissement modal[%]	0,6-0,8	0,765	0,6-0,8	0,6-0,8

TABLEAU 7.1. *Caractéristiques des travées de la passerelle du Millennium à Londres [8], [7]*

### 7.3.2 Détermination de la valeur de $\varepsilon$

Les essais réalisés par Arup sur la TN de la passerelle du Millennium ont permis de déterminer le nombre critique pour cette travée :  $N_c = 166$ . Or on a vu au chapitre 5 que l'équation (5.82) fournit une relation entre les différents paramètres du modèle. Comme on connaît les paramètres de la TN (tableau 7.1), si on connaît  $\mu_\omega$ ,  $\sigma_\omega$  et  $G$ , la seule inconnue qui reste dans l'équation est  $\varepsilon$ . Dans le cas des essais sur le Millennium, on suppose qu'on a demandé aux piétons de marcher à la fréquence de la passerelle. Donc  $\mu_f = 1,03Hz$  et  $\mu_\omega = 2\pi * 1,03rad/s$  (voir tableau 7.1). Au moment où cette thèse est rédigée nous n'avons pas d'informations précises concernant cette hypothèse.

Dans le tableau 7.2, on ramène les valeurs de  $\sigma_f$  de la littérature vers les valeurs qui correspondent à une fréquence moyenne de  $\mu_f = 1,03Hz$  grâce aux formules de conversion (7.8).

		marche libre		marche rythmée à 1,03Hz équation (7.10)	
Références	Nombre de piétons	$\mu_f$	$\sigma_f$	$\mu_f$	$\sigma_f$
[1]	505	1Hz	0,0865Hz	1,03Hz	0,0891Hz
[14]	939	0,9350Hz	0,0930Hz	1,03Hz	0,1024Hz
Moyenne				1,03Hz	0,0977Hz

TABLEAU 7.2. *Valeurs des fréquences moyennes et des écart-types dans le cas des essais sur la TN*

La moyenne pondérée des valeurs de  $\sigma_f$  du tableau 7.2 en fonction du nombre de piétons est calculée selon l'expression :

$$\frac{939 * 0,1024 + 505 * 0,0891}{505 + 393} = 0,0977$$

La valeur adoptée pour  $\sigma_f$  dans ce cas est 0,0940Hz qui est inférieure à la moyenne pour prendre en compte le fait que la marche est rythmée et non pas libre. Donc

$$\sigma_f \simeq 0,094Hz \quad (7.11)$$

On sait que dans le cas de la TN du Millennium, le nombre critique est  $N_c = 166$ . La résolution de l'équation (5.82), permet de trouver le paramètre  $\varepsilon$  à utiliser dans le modèle proposé dans le chapitre 4. Dans le tableau 7.3, on récapitule les valeurs obtenues pour  $\varepsilon$  suivant les différentes valeurs de  $\sigma_f$  et les différentes valeurs de  $G$  possibles. On considère également la valeur  $\sigma_f = 0,0940Hz$ . Pour trouver les valeurs de  $\varepsilon$ , on suppose que les piétons sont uniformément répartis sur la TN dont la forme modale est sinusoïdale, donc  $\eta(x, t)$  est constante et  $n = \frac{1}{2}$ .

$\sigma_f [Hz]$ \backslash $G[N]$	25	30	35
0,0891	1,5759	1,3132	1,1256
0,0940	1,6546	1,3789	1,1819
0,1024	1,7906	1,4922	1,279

TABLEAU 7.3. Les différentes valeurs de  $\varepsilon[s/m]$ 

D'après les valeurs des paramètres préalablement choisis, on obtient :

$$\varepsilon = 1,1819s/m \quad (7.12)$$

### 7.3.3 Comparaison de résultats sur la TN

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus sur la TN.

Plusieurs types de résultats sont présentés. On commence par la détermination du nombre critique de piétons dans différents cas et les comparaisons avec d'autres modèles, puis on passe à l'étude des amplitudes d'oscillations post-critiques de la TN. Des comparaisons entre les résultats analytiques et les résultats numériques sont d'abord présentées, puis des comparaisons avec les amplitudes trouvées par d'autres modèles sont réalisées. Des cas non traités dans la littérature et où on n'a pas développé de solutions analytiques sont également étudiés et les différences avec les situations précédentes sont discutées. De plus on montre l'évolution de la fréquence des piétons dans les cas synchronisés et non synchronisés et on met en évidence la relation qui existe entre la force latérale totale engendrée par les piétons et la vitesse de déplacement de la passerelle après synchronisation.

#### 7.3.3.1 Comparaison entre les nombres critiques obtenus par différents modèles

Les essais réalisés sur la TN ont montré que lorsque la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale de la structure seule ( $1,03Hz$ ), le nombre critique de piétons à partir duquel la synchronisation risque de se déclencher, est  $N_c = 166$  piétons. Dans ce paragraphe, on compare les nombres critiques obtenus par les différents modèles trouvés dans la littérature et notre modèle. Dans le tableau 7.4, on rappelle les différentes formules qui permettent l'estimation de  $N_c$ , avec les valeurs des paramètres utilisés et enfin le nombre critique trouvé. Dans ce tableau, on note par  $\omega_{TN} = 2\pi * 1,03rad/s$  la fréquence modale de la TN seule. Vu l'approche que nous avons utilisée pour la détermination de  $\varepsilon$  dans notre modèle, nous trouvons  $N_c = 166$  piétons ce qui n'est pas le cas des autres modèles.

Ce nombre critique a été déterminé lorsque la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale de la TN seule. Cependant le cas le plus "dangereux" est celui où les piétons ont une fréquence moyenne égale à la fréquence modale du système TN+piétons. La résolution de l'équation (5.82) permet de déterminer le nombre critique  $\tilde{N}_c$  dans ce cas. Avec les paramètres choisis, on obtient

$$\tilde{N}_c \approx 154 \text{ piétons} \quad (7.13)$$

Dans le cas d'une marche libre, ce nombre critique est évidemment plus élevé :

$$\tilde{N}_c \approx 200 \text{ piétons} \quad (7.14)$$

#### 7.3.3.2 Résultats obtenus sur la travée Nord de la passerelle du Millennium (TN) et comparaisons

Dans cette partie, on compare les amplitudes post-critiques obtenues numériquement et analytiquement, de sorte à valider le modèle numérique sur un cas simple, puis on compare les amplitudes obtenues par notre

Référence	Formule	Paramètres	$N_c$
[8, 21]	$\frac{4\xi M\omega_{TN}}{\kappa}$	$\kappa = 300Ns/m$	73
[58, 59]	$\frac{7,5\xi m_b L}{m_{1p}}$	$m_b$ masse modale de la TN par unité de longueur $m_{1p} = 70kg$	181
[56, 60]	$\frac{(1 + \tilde{\alpha}^2)}{2} \frac{m_b L}{m_{1p}\omega_r^2 D}$	$m_b$ masse modale de la TN par unité de longueur $m_{1p} = 70kg$ $\tilde{\alpha} = 1$ $\omega_r = \frac{\omega}{\omega_{TN}} \simeq 1$ $D = [(1 + \omega_r^2)^2 + (2\xi\omega_r)^2]^{-1/2}$	144
[62]	$\frac{8\sqrt{2}\xi M\omega_{TN}\tau g_0\tilde{\sigma}}{G\sqrt{\pi}}$	$\omega_{TN} = 2\pi rad/s$ $g_0 = 0,3m/s^2$ $\tau = 1,9s$ $\tilde{\sigma} = 0,09$	70
[7, 54]	$\frac{8\xi K\sigma_\omega}{G\sqrt{2\pi\tilde{\varepsilon}}}$	$\tilde{\varepsilon} = 16m^{-1}s^{-1}$ $G = 30N$ $\sigma_\omega = 0,63rad/s$	149
Notre modèle	résolution de (5.82)	voir les paragraphes précédents	166

TABLEAU 7.4. Comparaison entre les valeurs du nombre critique  $N_c$  pour la TN trouvée par différents modèles de la littérature et par notre modèle

modèle et celles obtenues par certains modèles de la littérature. Des comparaisons entre différentes situations sont également présentées. Dans cette partie nous allons considérer quatre cas. Nous commençons par les présenter brièvement, puis on présente pour chaque cas les résultats obtenus.

On considère d'abord un cas qui permet une comparaison "efficace" des résultats analytiques et numériques : la densité des piétons est constante en temps et en espace, leur fréquence de marche libre est constante en temps, variable en espace, elle suit une loi de distribution gaussienne centrée sur la fréquence modale du système "passerelle-piétons". Dans ce cas particulier, on a considéré un écart-type constant  $\sigma_f = 0,094Hz$ . On commence par déterminer le nombre critique de piétons pour cette situation. Une comparaison entre les résultats analytiques et numériques permet de valider le modèle numérique que nous avons implémenté. Un cas pré-critique ( $N < N_c$ ) et un cas post-critique ( $N > N_c$ ) sont également comparés. Dans le cas

pré-critique, on met en évidence l'absence de synchronisation et la faible amplitude des oscillations de la passerelle. Dans le cas post-critique, on illustre le phénomène de synchronisation et ses conséquences sur l'amplitude du déplacement, la fréquence des piétons et de la passerelle et la relation entre la force latérale des piétons et la vitesse d'oscillations de la TN.

Cependant, on a supposé dans les paragraphes précédents, que la valeur de  $\sigma_f$  change lorsque la valeur moyenne  $\mu_f$  change. Or on veut étudier le cas le plus critique où  $\mu_f$  est la fréquence modale du système. Mais on sait que lorsque le nombre de piétons change, la masse modale du système change et par conséquent la fréquence modale est modifiée. Il faut donc prendre en compte les modifications qui surviennent sur  $\sigma_f$  et ne pas le choisir constant pour tous les nombres de piétons. Pour ce cas, on présente les amplitudes trouvées analytiquement pour différents nombre de piétons.

On étudie ensuite un cas plus complexe qui permet une comparaison entre les résultats obtenus numériquement par notre modèle et ceux obtenus par [7] : la densité des piétons est constante en temps et en espace, leur fréquence de marche libre est constante en temps, variable en espace, elle suit une loi de distribution gaussienne centrée sur la fréquence modale de la passerelle seule (cas qui correspond à notre avis aux essais réalisés sur la TN par ARUP). Dans les deux cas précédents, les piétons sont supposés uniformément répartis sur la passerelle et donc la densité est constante.

Enfin, dans le dernier cas, des simulations où la densité des piétons évolue elle aussi en fonction des oscillations de la passerelle sont présentées (la deuxième équation de (4.1) est utilisée et l'évolution de la longueur de pas en fonction de la densité et des oscillations de la passerelle est prise en compte (équation (??))).

Les caractéristiques des différents cas étudiés sont regroupées dans le tableau 7.5.

	$\eta(x, t)$	$\omega(x, t)$	$\mu_\omega$	$\sigma_\omega$
Cas 1	constante	$\omega(x)$ constante en temps	$\mu_\omega = \omega_0$	$\sigma_\omega = 2\pi(0,094)rad/s$
Cas 2	constante	$\omega(x)$ constante en temps	$\mu_\omega = \omega_0$	$\sigma_\omega = \frac{0,094}{1,03}\mu_\omega$
Cas 3	constante	$\omega(x)$ constante en temps	$\mu_\omega = 2\pi(1,03)Hz$	$\sigma_\omega = 2\pi(0,094)rad/s$
Cas 4	$\eta(x, 0) = 0$ $\eta(0, t) = 1p/m^2$	$\omega(x)$ constante en temps	$\mu_\omega = 2\pi(1,03)Hz$	$\sigma_\omega = 2\pi(0,094)rad/s$

TABLEAU 7.5. Récapitulatif des caractéristiques des cas étudiés pour la TN

**Cas 1 : la densité de piétons est constante en temps et en espace sur la passerelle et leur fréquence de marche libre est constante en temps, elle suit une loi gaussienne centrée sur la fréquence modale du système "TN-piétons" :**

Dans ce paragraphe, on considère les hypothèses suivantes :

- Un nombre constant  $N$  de piétons uniformément répartis sur la TN, marchent sur la travée. Leur densité  $\eta(x, t)$  est donc constante en temps et en espace :

$$\eta(x, t) = \frac{N}{L\ell} \quad (7.15)$$

où on rappelle que  $L$  est la longueur de la TN, et  $\ell$  sa largeur supposée constante.

- La fréquence de marche libre des piétons n'évolue pas en temps :

$$\omega(x, t) = \omega(x, 0) \quad \forall x \in [0, L], t > 0 \quad (7.16)$$

- $\omega(x, 0)$  suit une loi gaussienne de moyenne égale à la fréquence modale du système piétons-TN :

$$\mu_\omega = \omega_0 \quad (7.17)$$

et d'écart-type  $\sigma_\omega = 2 * \pi * 0,094rad/s$

Le cas considéré est le plus critique pour la passerelle. Pour un nombre donné  $N$  de piétons, uniformément répartis sur la TN, les amplitudes d'oscillations de la passerelle sont les plus élevées lorsque leur fréquence de marche libre est centrée sur la fréquence modale du système. Le nombre critique de piétons obtenu par notre modèle analytique pour ce cas est  $N_c = 159$ .

On compare ensuite les amplitudes trouvées analytiquement grâce à l'équation implicite (5.95), et les amplitudes trouvées numériquement. Pour les résultats numériques, on a considéré les nombres de piétons suivants :  $N = 150, 166, 190, 220, 260, 300$  et  $320$ . Comme la fréquence de marche libre suit une loi gaussienne, on a décidé de considérer différents "tirages" de la fréquence pour chaque nombre de piétons étudié. Cinq tirages différents pour la fréquence ont ainsi été étudiés numériquement. A chaque tirage de la fréquence, on associe un tirage de la phase initiale des piétons. Les fréquences de marche libre et les phases initiales ont été "corrigées" de sorte que les conditions de la surface invariante  $S_0$  introduite dans le chapitre 5 soient vérifiées.

Pour chaque nombre de piétons et pour chaque distribution de fréquence et de phase, on a fait la moyenne de l'amplitude de déplacement de la passerelle et la fréquence de ses oscillations sur les dernières 150s de la simulation numérique (dans les cas où on a synchronisation, on a vérifié que la totalité des 150s correspond à l'état stationnaire). Puis nous avons sélectionné pour chaque  $N > N_c$  les simulations où la synchronisation a été atteinte, et nous avons fait une moyenne de l'amplitude stationnaire sur ces différents essais. Ceci nous a permis d'avoir pour chaque nombre de piétons l'amplitude moyenne qu'on peut atteindre dans le cas où la synchronisation a lieu.

D'après les différentes simulations réalisées, on remarque que lorsque  $N \geq N_c$ , la synchronisation n'a pas lieu pour toutes les distributions de fréquence. La probabilité de synchronisation lorsque  $N - N_c$  est petit, est faible et augmente lorsque  $N - N_c$  augmente (simulations faites jusqu'à 1000s si aucun début de synchronisation n'a été observé) (tableau 7.6). De plus, lorsqu'il y a synchronisation, la moyenne de la fréquence commune des piétons et de la TN est égale à la fréquence modale du système piétons-TN, conformément aux prévisions du chapitre 5 (voir tableau 7.7). On remarque également que pour un même nombre de piétons, lorsque la synchronisation est déclenchée l'amplitude des oscillations à l'état stationnaire est à peu près la même pour les différentes fréquences étudiées. Elle est également très proche de l'amplitude trouvée analytiquement (figure 7.2 et tableau 7.8). Le seul cas où l'erreur entre l'amplitude analytique et l'amplitude numérique est élevée, est lorsque le nombre de piétons est égal à 175. Une explication possible pour cette différence est que le nombre de fois où la synchronisation s'est déclenchée (une fois sur cinq essais) est très faible pour avoir des estimations correctes de l'amplitude. On peut voir aussi, d'après les courbes des amplitudes numérique et théorique (figure 7.2), que le nombre critique pour ce cas est effectivement de 159 piétons.

Nombre de piétons	Nombre d'essais effectués	Nombre d'essais synchronisés	Probabilité de synchronisation [%]
150	5	0	0
166	5	1	20
175	5	1	20
190	5	2	40
220	5	3	60
260	5	5	100
300	5	5	100
320	5	5	100

TABLEAU 7.6. *La probabilité de synchronisation lorsque  $N \geq N_c$  sur la TN lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons+TN*

Nombre de piétons	Fréquence de synchronisation numérique [Hz]	Fréquence de synchronisation analytique [Hz]	Erreur [%]
166	1,0026	1,0025	0,01
175	1,0012	1,0010	0,02
190	0,9988	0,9987	0,01
220	0,9942	0,9940	0,02
260	0,9881	0,9880	0,01
300	0,9821	0,9820	0,01
320	0,9792	0,9790	0,02

TABLEAU 7.7. *Comparaison entre les fréquences de synchronisation pour la TN trouvées analytiquement et les fréquences de synchronisation trouvées numériquement*

Nombre de piétons	Amplitude de déplacement numérique [m]	Amplitude de déplacement analytique [m]	Erreur [%]
166	0,0182	0,0171	6,4
175	0,0319	0,026	22,7
190	0,0386	0,0365	5,8
220	0,051867	0,0525	1,2
260	0,06712	0,07	4,3
300	0,08132	0,0858	5,5
320	0,08838	0,0935	5,8

TABLEAU 7.8. *Comparaison entre les amplitudes de déplacement post-critique de la TN trouvées analytiquement et les amplitudes de déplacement post-critique trouvées numériquement*

Dans la figure 7.3, on compare pour une même distribution de fréquence un cas pré-critique à gauche de la figure ( $N = 150 < N_c$ ) et un cas post-critique à droite ( $N = 220 > N_c$ ). Les deux graphiques du haut présentent le déplacement de la TN à mi-travée. Il est immédiat que dans le cas pré-critique, on n'atteint pas un état stationnaire et les amplitudes d'oscillations sont très faibles. Par contre, dans le cas post-critique, le



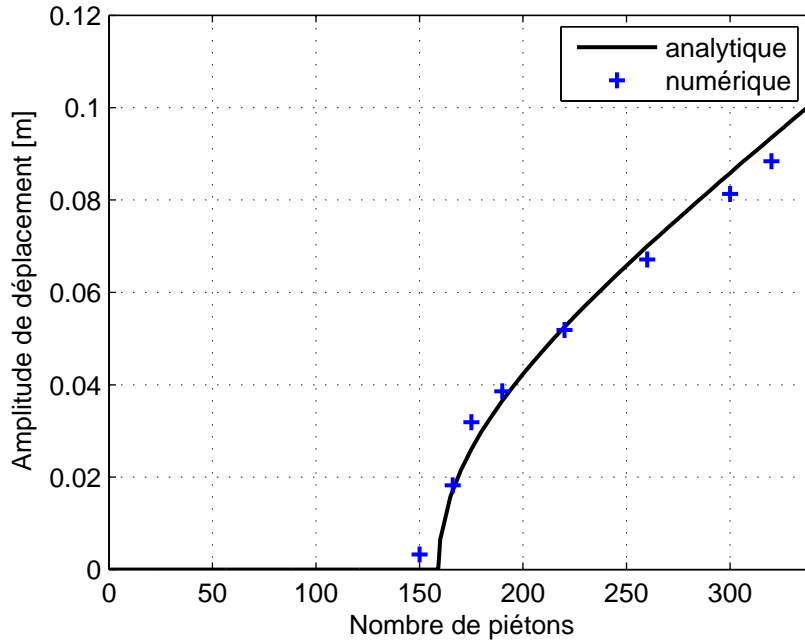


FIGURE 7.2. Comparaison entre l'amplitude de déplacement de la TN trouvée analytiquement et l'amplitude de déplacement trouvée numériquement lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN

déplacement atteint un état stationnaire et son amplitude a une valeur assez élevée. Les graphiques du bas, présentent la fréquence instantanée d'oscillation de la TN en courbe rouge et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée en courbe bleu. Il est manifeste que dans le cas pré-critique (à gauche) les deux courbes sont distinctes, il n'y a donc pas de synchronisation, alors que dans le cas post-critique (à droite), à partir d'un certain instant, ces courbes deviennent quasiment superposées à cause de la synchronisation (voir aussi figure 7.4). La représentation en temps et en espace de l'évolution de la fréquence dans les deux cas est donnée dans la figure 7.5. Dans le cas pré-critique, on remarque que la fréquence des piétons est constante en temps. Le graphique dans le cas post-critique permet de voir l'effet de la forme modale sur la synchronisation. En effet, on remarque un "aplatissement" de la fréquence à mi-travée dû à la synchronisation qui a pour effet de faire converger les fréquences des piétons vers la fréquence de la structure, alors que sur les extrémités de la travée, la fréquence initiale des piétons est quasiment conservée tout le temps.

Dans la figure 7.6, on note que lorsque l'état stationnaire est atteint, la force engendrée par les piétons et la vitesse de déplacement de la TN sont en phase.

**Cas 2 : la densité de piétons est constante en temps et en espace sur la passerelle et leur fréquence de marche libre est constante en temps, elle suit une loi gaussienne centrée sur la fréquence modale du système TN-piétons avec un écart-type non constant.**

Dans ce paragraphe, on considère les hypothèses suivantes :

- Un nombre constant  $N$  de piétons uniformément répartis sur la TN marchent sur la travée. Leur densité  $\eta(x, t)$  est donc constante en temps et en espace :

$$\eta(x, t) = \frac{N}{L\ell} \quad (7.18)$$

où on rappelle que  $L$  est la longueur de la TN, et  $\ell$  sa largeur supposée constante.

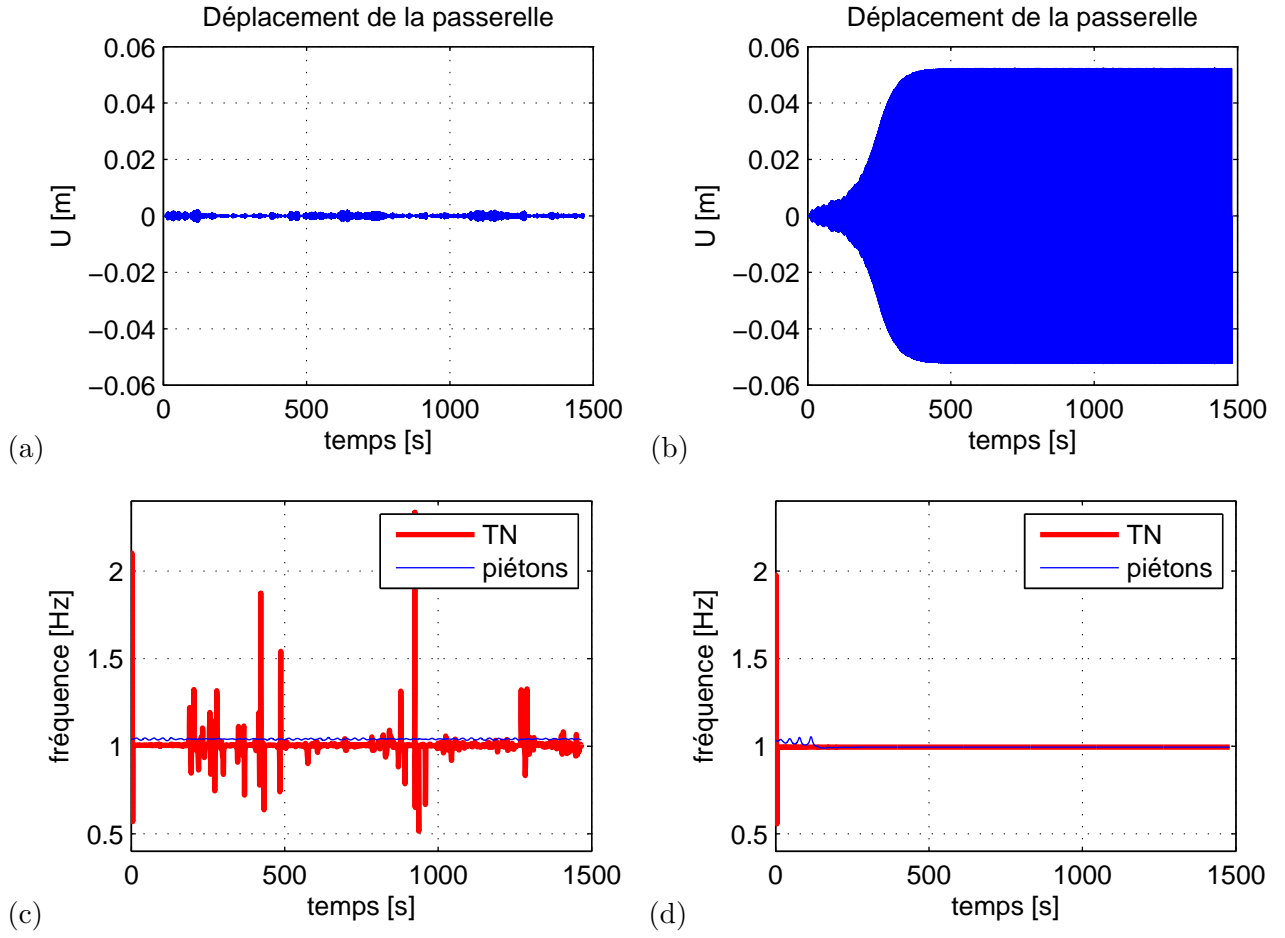


FIGURE 7.3. Comparaison entre l'état pré-critique avec 150 piétons uniformément répartis sur la TN (à gauche) et l'état post-critique avec 220 piétons (à droite) lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN : les figures (a) et (b) représentent le déplacement de la TN à mi-travée, et les figures (c) et (d) montrent la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée

- La fréquence de marche libre des piétons n'évolue pas en temps :

$$\omega(x, t) = \omega(x, 0) \quad \forall x \in [0, L], t > 0 \quad (7.19)$$

- $\omega(x, 0)$  suit une loi gaussienne de moyenne égale à la fréquence modale du système piétons-TN :

$$\mu_\omega = \omega_0 \quad (7.20)$$

et d'écart-type  $\sigma_\omega = \frac{0,094}{1,03} \mu_\omega$

Dans la figure 7.7, on trace l'amplitude de déplacement de la passerelle trouvée analytiquement. On rappelle que le nombre critique trouvé analytiquement dans ce cas est de 154 piétons, ce qui est en concordance avec la courbe tracée dans cette figure.

**Cas 3 : la densité de piétons est constante en temps et en espace sur la passerelle et leur fréquence de marche libre est constante en temps, elle suit une loi gaussienne centrée sur la fréquence modale de la TN seule.**

Dans ce paragraphe, les hypothèses suivantes sont adoptées :

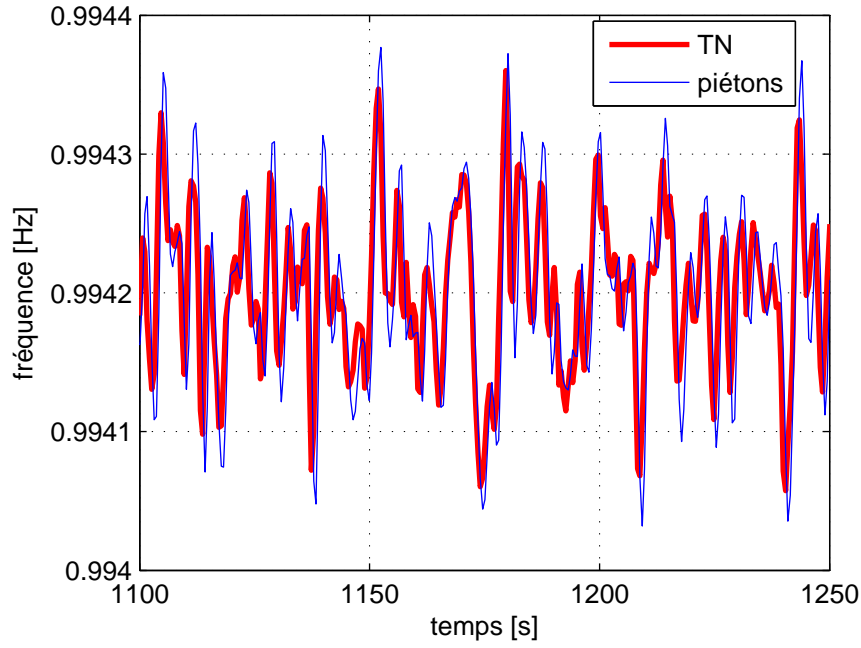


FIGURE 7.4. Zoom sur la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (courbe bleu) pour 220 piétons après synchronisation lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN

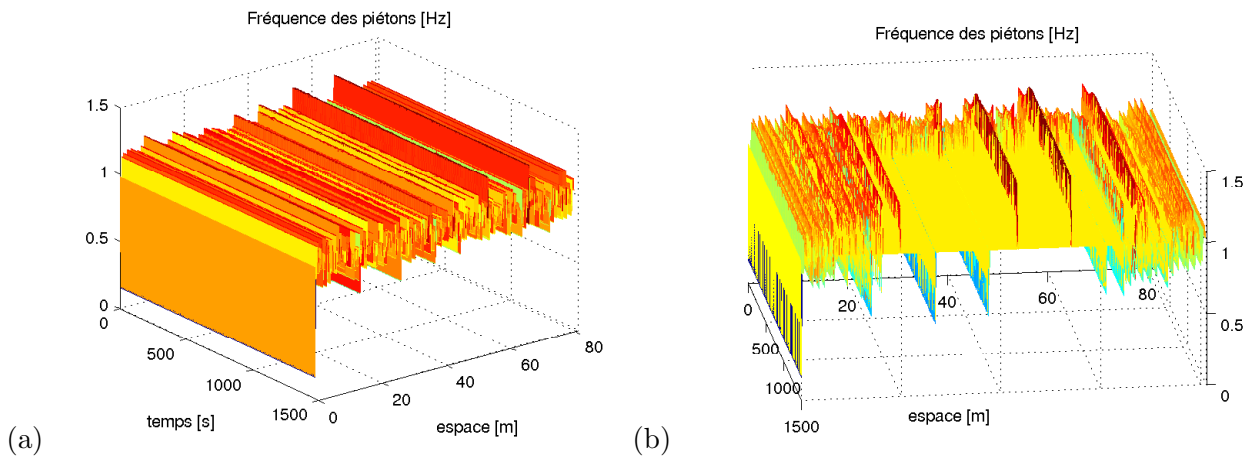


FIGURE 7.5. Evolution en temps et en espace de la fréquence instantanée des piétons lorsque leur fréquence moyenne est la fréquence modale du système piétons-TN (a) pour 150 piétons sur la TN, (b) pour 220 piétons sur la TN

- Un nombre constant  $N$  de piétons uniformément répartis sur la TN marchent sur la travée. Leur densité  $\eta(x, t)$  est donc constante en temps et en espace :

$$\eta(x, t) = \frac{N}{L\ell} \quad (7.21)$$

où on rappelle que  $L$  est la longueur de la TN, et  $\ell$  sa largeur supposée constante.

- La fréquence de marche libre des piétons n'évolue pas en temps :

$$\omega(x, t) = \omega(x, 0) \quad \forall x \in [0, L], t > 0 \quad (7.22)$$

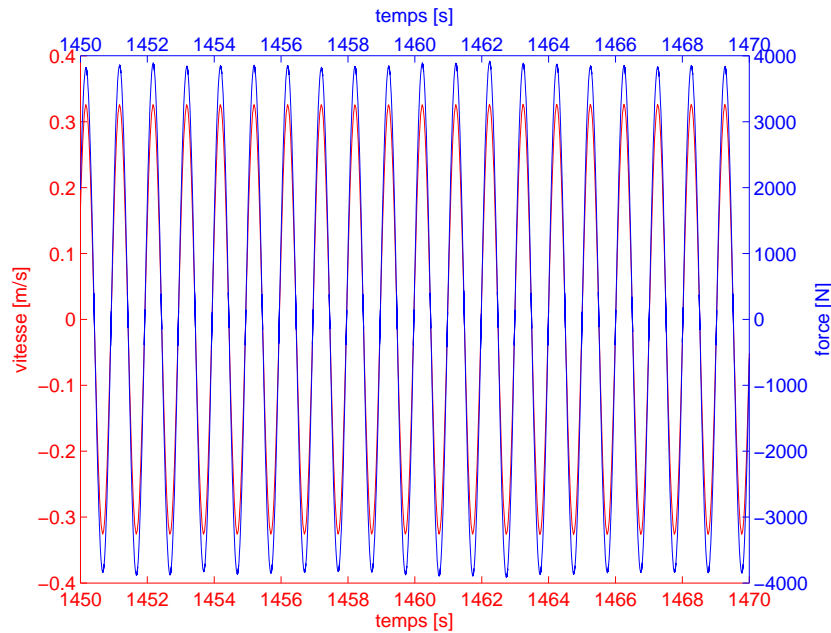


FIGURE 7.6. La force latérale modale des piétons (courbe bleue) et la vitesse modale de la TN à mi-travée (courbe rouge) après synchronisation pour 220 piétons lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN

- $\omega(x, 0)$  suit une loi gaussienne de moyenne égale à la fréquence modale de la TN seule :

$$\mu_{\omega} = 2\pi * 1,03 \text{rad/s} \quad (7.23)$$

et d'écart-type  $\sigma_{\omega} = 2 * \pi * 0,094 \text{rad/s}$

Ce cas correspond à priori aux essais réalisés sur la TN par ARUP et aux travaux présentés dans [7, 54, 62]. Dans le cadre de cette étude, les nombres de piétons considérés sont  $N = 150, 166, 190, 220$  et  $300$  piétons. Plusieurs "tirages" pour la fréquence de marche libre sont également considérés (allant de 10 à 15 selon le nombre de piétons considéré), et on a adopté la même procédure de moyennisation que dans le paragraphe précédent.

Comme précédemment, on remarque que la synchronisation est systématique pour les nombres de piétons élevés, ce qui n'est pas le cas lorsque  $N$  est proche de  $N_c$  (tableau 7.9). De plus, après le déclenchement de la synchronisation, à l'état stationnaire, la force latérale des piétons et la vitesse de déplacement de la TN sont en phase comme on l'a vu dans le paragraphe précédent.

Nombre de piétons	Nombre d'essais effectués	Nombre d'essais synchronisés	Probabilité de synchronisation [%]
150	10	0	0
166	15	1	6,7
175	13	2	15,4
190	10	3	30
220	10	8	80
300	10	10	100

TABLEAU 7.9. La probabilité de synchronisation lorsque  $N \geq N_c$  sur la TN lorsque la fréquence des piétons est centrée sur la fréquence modale de la TN

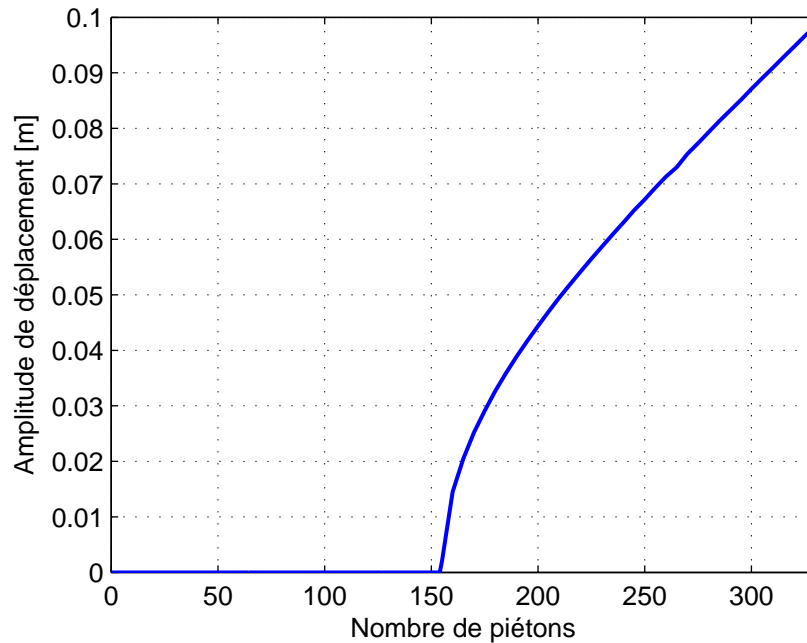


FIGURE 7.7. *Amplitude de déplacement analytique de la TN lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure et l'écart-type est variable*

Dans la figure 7.8, on compare le résultat analytique trouvé dans [7] et les résultats numériques obtenus par notre modèle. Avant d'analyser les différences entre les résultats, on tient à s'attarder un peu sur l'étude réalisée dans [7]. Dans le modèle présenté par Abrams dans sa thèse [7], l'auteur ne prend pas en compte la masse modale des piétons dans l'équation de la dynamique. Ainsi, le cas le plus critique dans son étude, correspond au cas où la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule qui dans son cas est donc la fréquence modale du système. D'où les similitudes entre la formule analytique proposée dans [7] pour la détermination de l'amplitude de déplacement post-critique de la passerelle à l'état stationnaire, et la formule analytique que nous avons trouvée dans cette thèse dans le chapitre 5. Cependant des discussions avec des ingénieurs ayant travaillé sur l'étude de différentes passerelles nous ont confirmé que dans certains cas, si on néglige la masse modale des piétons devant la masse modale de la passerelle, les résultats obtenus sont complètement erronés. D'où l'intérêt d'utiliser nos formules pour la détermination du nombre critique de piétons, de l'amplitude de déplacement de la passerelle et de la fréquence de synchronisation. Revenons maintenant à la figure 7.8. La courbe (trait continu) représente les résultats obtenus dans [7], et les points représentent les résultats obtenus numériquement grâce à notre modèle pour les différents nombres de piétons. L'amplitude du déplacement obtenu par notre modèle, est inférieure à celle obtenue par Abrams. Ceci s'explique par deux points :

- Dans [7] la fréquence modale du système est la fréquence de la TN seule
- Dans [7] la forme modale n'a aucune influence sur la synchronisation. C'est comme si le piéton qui est à l'extrémité de la travée ressentait les mêmes oscillations que celui qui est à mi-travée, ce qui est contraire aux observations de Smith [33]. Le nombre de piétons synchronisés dans son modèle est donc plus élevé, par conséquent l'amplitude de la force engendrée par les piétons aussi.

De plus, on remarque que les amplitudes de déplacement de la TN trouvées dans ce cas sont inférieures à celles trouvées dans le cas 2. Ceci est dû au fait que dans le cas 2 la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-TN et ne l'est pas dans le cas présent. Dans les figures 7.9 à 7.11, on illustre comme précédemment un cas pré-critique (150 piétons) et un cas post-critique (220 piétons). La distribution de fréquences utilisée est la même que pour les figures 7.3 à 7.5. On peut remarquer que par comparaison avec la figure 7.3, dans le cas post-critique, la synchronisation est plus longue à se déclencher.

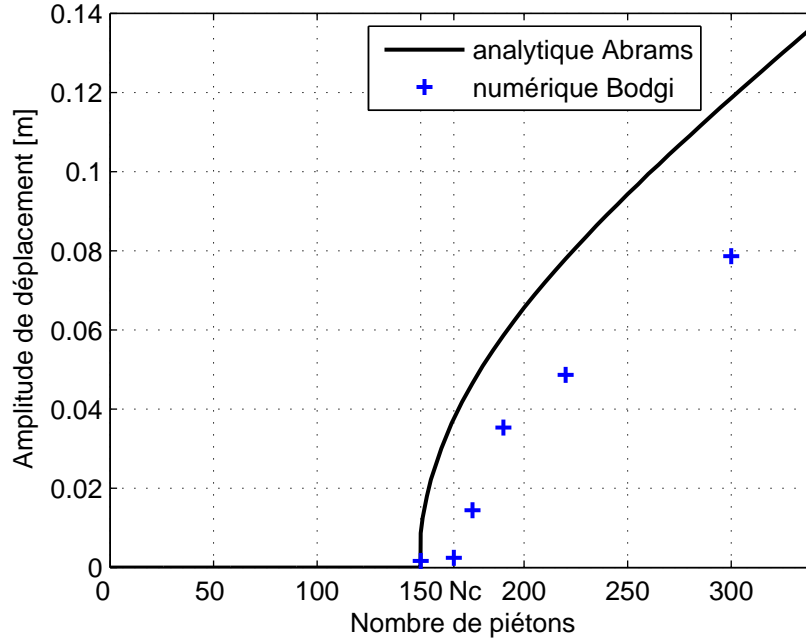


FIGURE 7.8. Comparaison entre l'amplitude de déplacement de la TN trouvée analytiquement d'après [7] et l'amplitude de déplacement trouvée numériquement lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la passerelle seule

Dans la figure 7.10, on montre un zoom de la fréquence instantanée des piétons à mi-travée et de la fréquence instantanée de la TN. Enfin, dans la figure 7.12, on peut voir, comme dans le cas précédent, que lorsque l'état stationnaire est atteint, la force engendrée par les piétons et la vitesse de déplacement de la TN sont en phase.

**Cas 4 : la densité des piétons est constante à l'entrée de la passerelle, elle évolue en temps et en espace, la fréquence des piétons suit une loi gaussienne de moyenne la fréquence modale de la TN seule**

Dans ce paragraphe l'hypothèse sur la fréquence est conservée.

A l'instant initial, la passerelle est vide :

$$\eta(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, L] \quad (7.24)$$

La condition sur la densité en  $x = 0$  est :

$$\eta(0, t) = \begin{cases} \eta_0 & \text{si } \eta(\delta x, 0) < \eta_{max} \\ 0 & \text{si } \eta(\delta x, 0) \geq \eta_{max} \end{cases} \quad (7.25)$$

avec  $\delta x = \frac{1}{\ell \eta_{max}}$ . Dans ce cas, la longueur des pas varie en fonction de la densité et des oscillations de la passerelle. Nous avons considéré pour cette partie deux valeurs différentes de  $\eta_0$  et deux distributions de fréquence libre des piétons sur la passerelle, ayant la même moyenne et le même écart-type.

La première valeur de  $\eta_0$  que nous avons considérée est  $\eta_0 = 0,5p/m^2$ . Si on avait une densité constante de  $0,5p/m^2$  sur toute la TN, le nombre de piétons serait de 162.

Dans la suite, on compare les résultats obtenus pour deux distributions de fréquence différentes. Pour pouvoir les différencier, on notera *FR1* et *FR2* ces deux distributions.

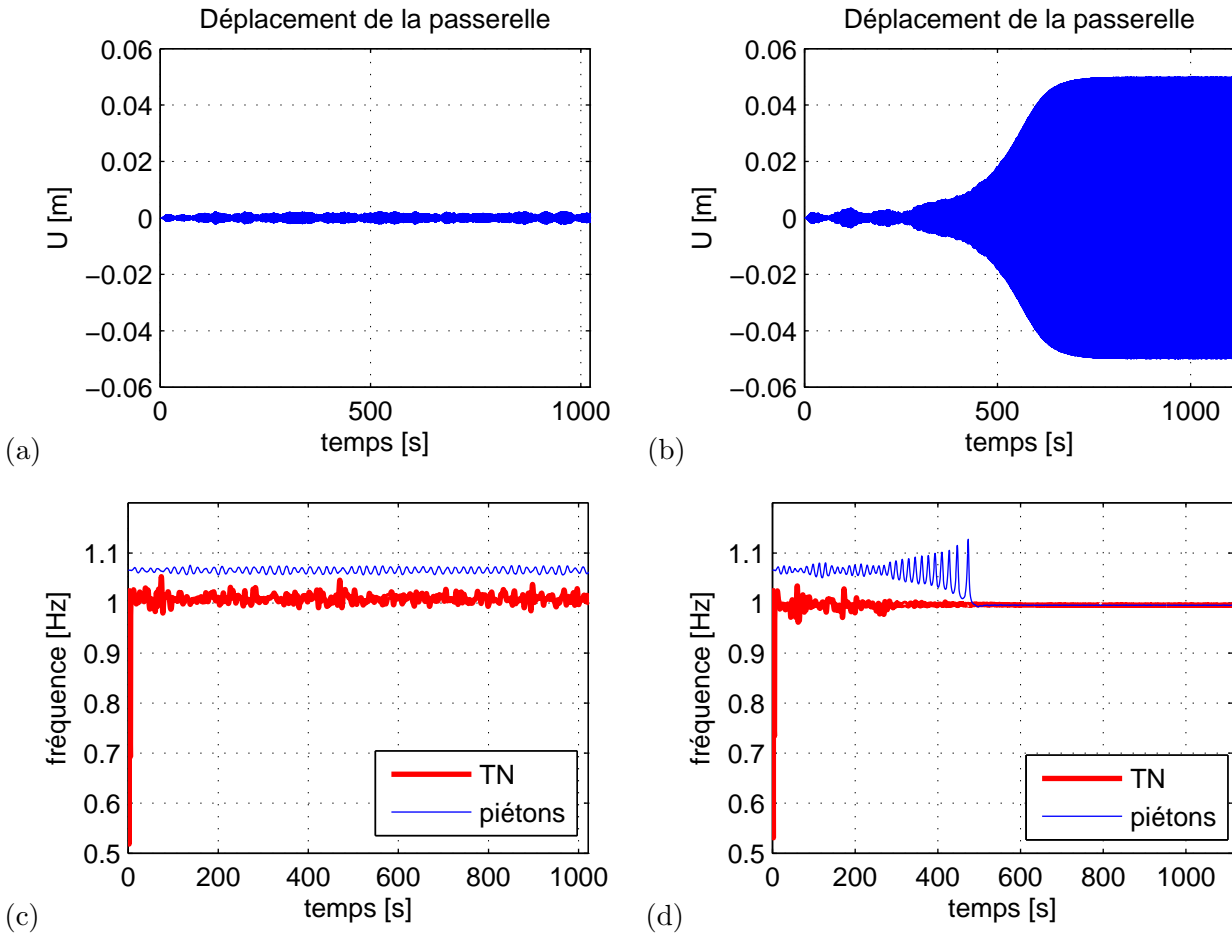


FIGURE 7.9. *Comparaison entre l'état pré-critique avec 150 piétons uniformément répartis sur la TN (à gauche) et l'état post-critique avec 220 piétons (à droite) lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule : les figures (a) et (b) représentent le déplacement de la TN à mi-travée, et les figures (c) et (d) montrent la fréquence instantanée de la TN (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée*

Dans la figure 7.13, on compare le déplacement de la TN à mi-travée pour ces deux fréquences. On remarque que ce déplacement est très faible pour  $FR1$  et assez élevé pour  $FR2$ , ce qui laisse présager que le comportement des piétons diffère d'un cas à l'autre. La répartition des piétons sur la passerelle doit donc être différente; en effet, dans la figure 7.14, il est clair que dans le cas de  $FR1$  (figure de gauche), la densité est quasiment constante en temps, alors que dans le cas de  $FR2$ , la densité des piétons devient très importante dans la première moitié de la TN. En effet, comme la TN commence à osciller, les piétons ralentissent leur marche notamment à mi-travée où les oscillations sont les plus importantes (voir figure 7.15-(b)). Celles-ci devenant de plus en plus fortes, les piétons s'arrêtent alors de marcher, provoquant un bouchon. On remarque que sur les derniers mètres de la passerelle, il n'y a quasiment plus de piétons. En effet, ceux qui étaient présents ont pu sortir avant que les oscillations n'handicapent leur avancement, et les autres piétons n'arrivent plus à avancer à cause de l'importance des oscillations. Pour les deux distributions, le nombre de piétons devient constant (figure 7.16) :  $N = 160$  pour  $FR1$  et  $N = 280$  pour  $FR2$ .

Dans la figure 7.17, on compare dans les deux cas de distributions la fréquence instantanée de la TN (en rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (en bleu). Dans la figure 7.18, on trace l'évolution de la fréquence instantanée des piétons en fonction du temps et de l'espace. On déduit de ces figures, que les piétons sont synchronisés avec la structure pour  $FR2$  et ne sont pas du tout influencés par cette dernière

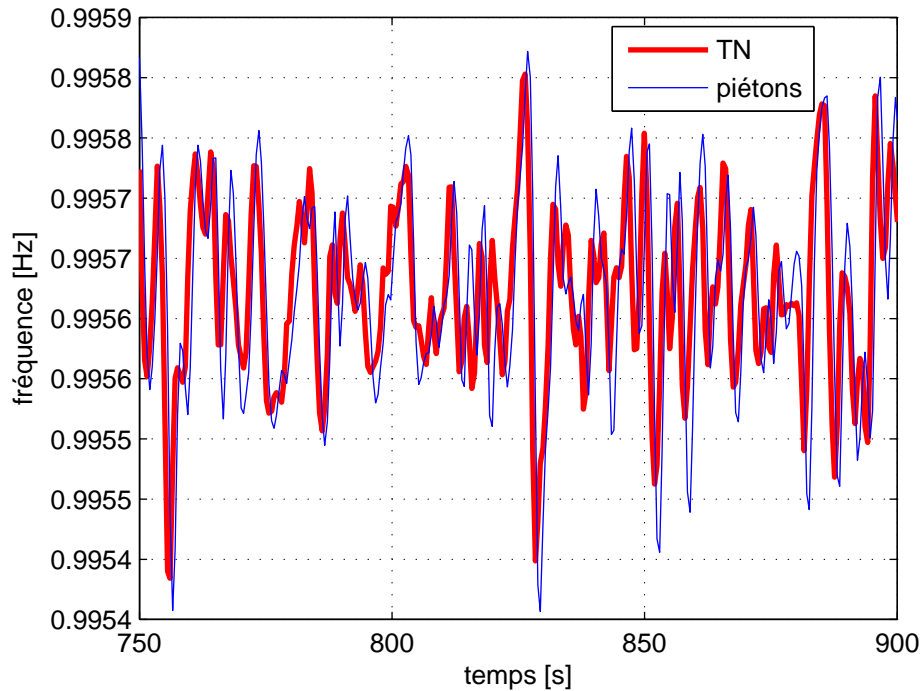


FIGURE 7.10. Zoom sur la fréquence instantanée de la passerelle (courbe rouge) et la fréquence instantanée des piétons (courbe bleue) pour 220 piétons après synchronisation lorsque leur fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule

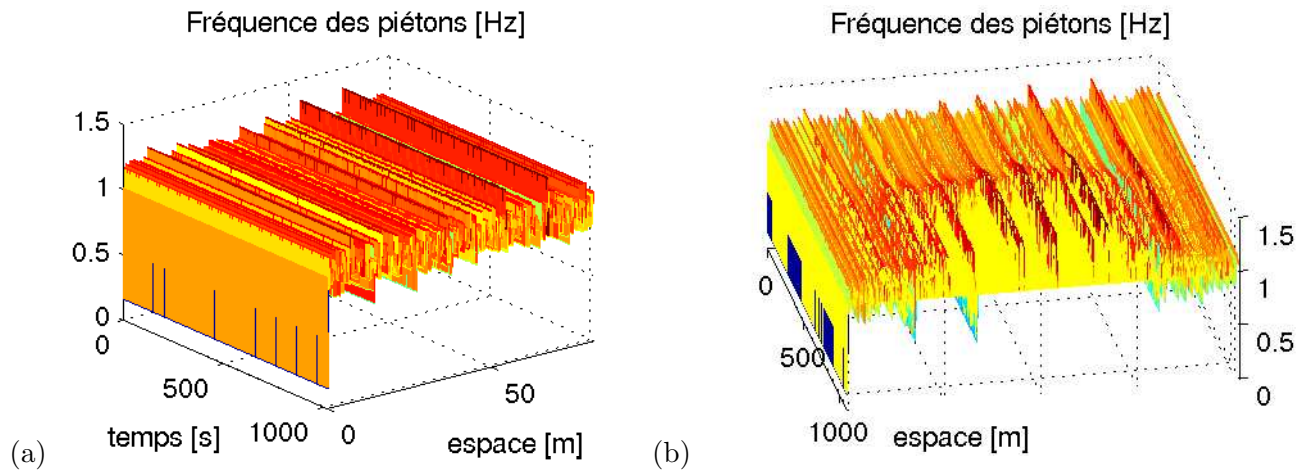


FIGURE 7.11. Evolution en temps et en espace de la fréquence instantanée des piétons lorsque leur fréquence moyenne est la fréquence modale de la TN seule (a) pour 150 piétons sur la TN, (b) pour 220 piétons sur la TN

pour *FR1*.

On tient à attirer l'attention du lecteur que ces deux distributions de fréquence font également partie des distributions utilisées dans le cas 2. Dans les deux cas, pour 150 piétons uniformément répartis sur la TN, la synchronisation ne s'est pas déclenchée. Pour 166 piétons, la synchronisation ne s'est pas déclenchée pour *FR1*, alors que pour *FR2* on a pu observer ce phénomène avec une amplitude stationnaire de  $1,16\text{cm}$ .



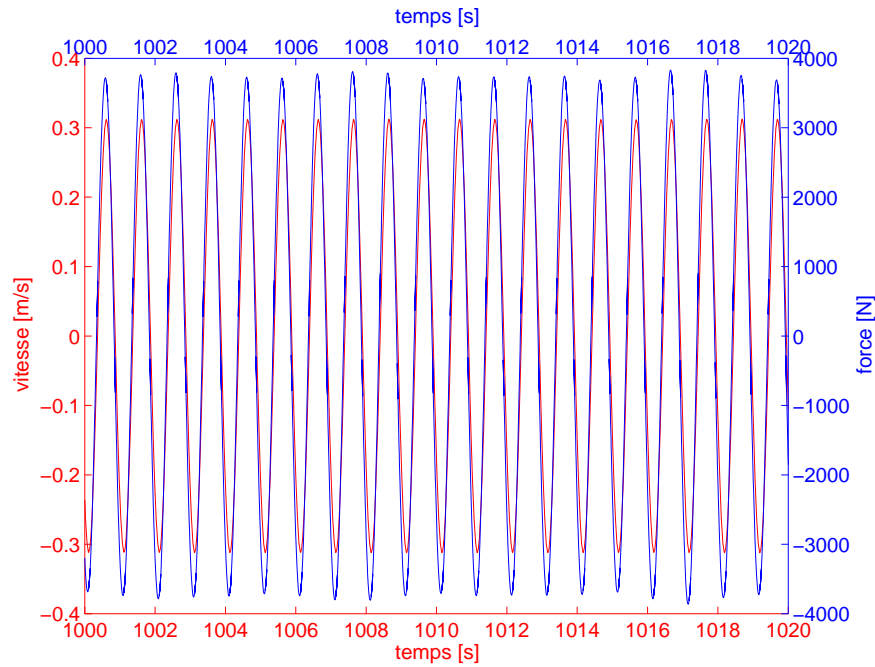


FIGURE 7.12. La force latérale modale des piétons (courbe bleue) et la vitesse modale de la TN à mi-travée (courbe rouge) après synchronisation pour 220 piétons lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la TN seule

Pour 300 piétons, la synchronisation s'est déclenchée dans les deux cas, avec une amplitude de  $7,86\text{cm}$  pour  $FR1$  et  $7,88\text{cm}$  pour  $FR2$ . On considère maintenant le cas où  $\eta_0 = 1p/m^2$ . Si on avait une densité

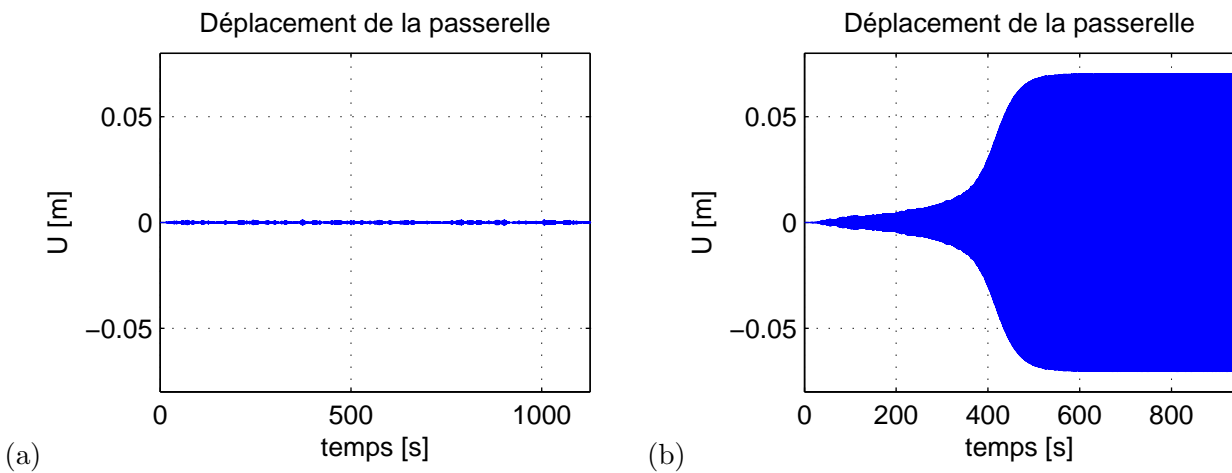


FIGURE 7.13. Le déplacement de la TN à mi-travée pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences  $FR1$ , (b) pour la distribution de fréquences  $FR2$

constante de  $1p/m^2$  sur toute la TN, le nombre de piétons serait de 324 piétons. Dans les figures 7.19 à 7.24, on remarque que pour  $FR2$ , on retrouve le même phénomène que dans le cas où  $\eta_0 = 0,5p/m^2$ . La différence entre les deux cas est que la synchronisation se déclenche plus rapidement dans le cas  $\eta_0 = 1p/m^2$ . Pour la fréquence  $FR1$ , la synchronisation ne s'est pas déclenchée malgré le nombre important de piétons sur la passerelle. Mais contrairement au cas  $\eta_0 = 0,5p/m^2$ , la répartition des piétons sur la TN n'est pas uniforme (ou presque). On remarque que la densité des piétons est assez élevée dans la première moitié de la passerelle, mais elle est moins importante dans la deuxième moitié. Ceci s'explique par le fait que les

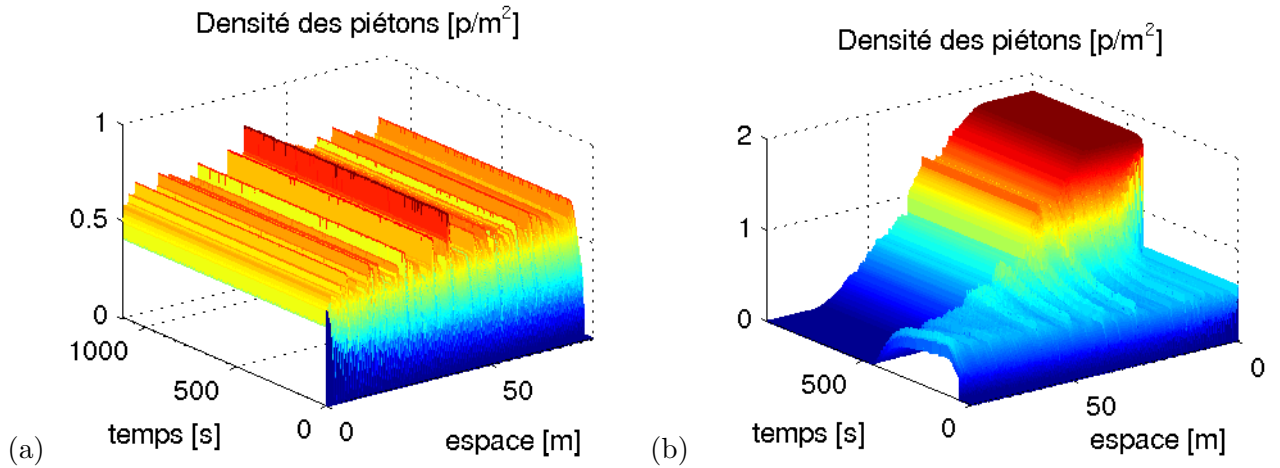


FIGURE 7.14. La densité des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

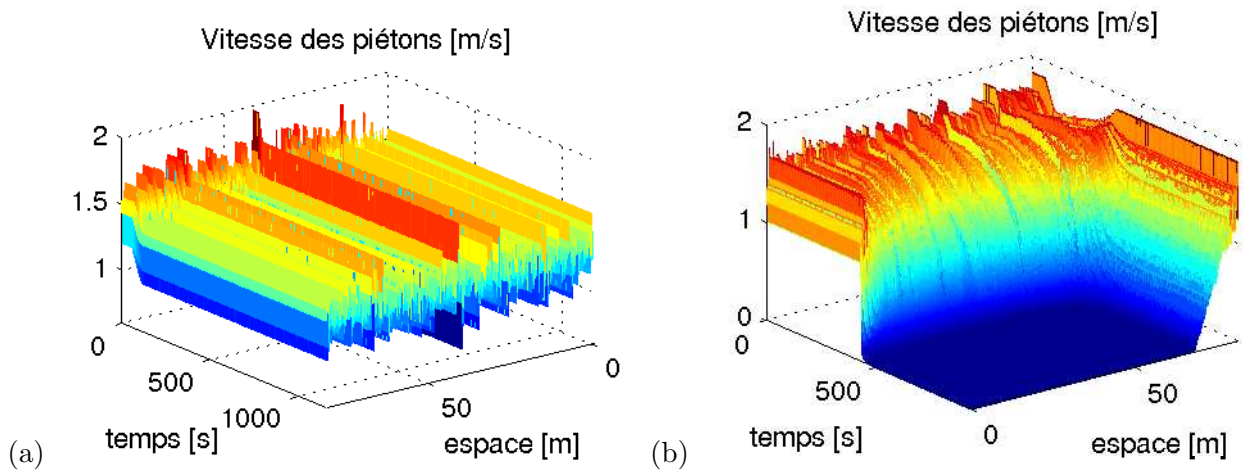


FIGURE 7.15. La vitesse des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

piétons continuent à entrer sur la TN, alors que dans la deuxième moitié les piétons continuent à sortir de la travée de manière “uniforme”, puisqu’aucune oscillation de la TN ne vient perturber l’ordre établi. Après un certain temps, un état “stationnaire” finit par s’installer. On remarque que le nombre de piétons sur la TN pour les fréquences FR1 et FR2 est très similaire. Rappelons que ces deux distributions, ont la même moyenne et le même écart type. Cependant, leur distribution sur la passerelle, fait en sorte que la répartition des piétons et leur comportement sont différents. Ceci est du au caractère aléatoire de la fréquence.

### 7.3.3.3 Discussion

Dans nos essais, on a pu constater que pour ces deux fréquences, lorsque les piétons sont uniformément répartis sur la TN, la synchronisation se déclenche au moins à partir de 190 piétons sur la passerelle. On peut voir alors l’intérêt d’étudier l’évolution du comportement des piétons sur la passerelle. Cependant, dans les modèles rencontrés (à part celui de [15]), les auteurs négligent ce point. Evidemment, pour que notre modèle soit “complet”, il nous faut utiliser également l’équation de transport sur la fréquence ce qui nous permettrait de faire évoluer la fréquence et la “renouveler” lorsque de nouveaux piétons entrent sur

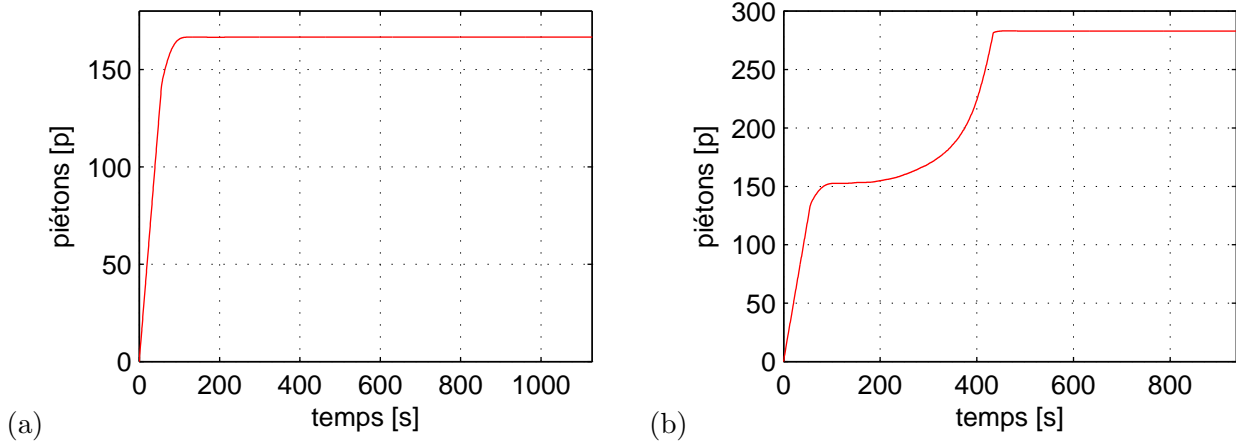


FIGURE 7.16. Evolution du nombre de piétons sur la TN pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

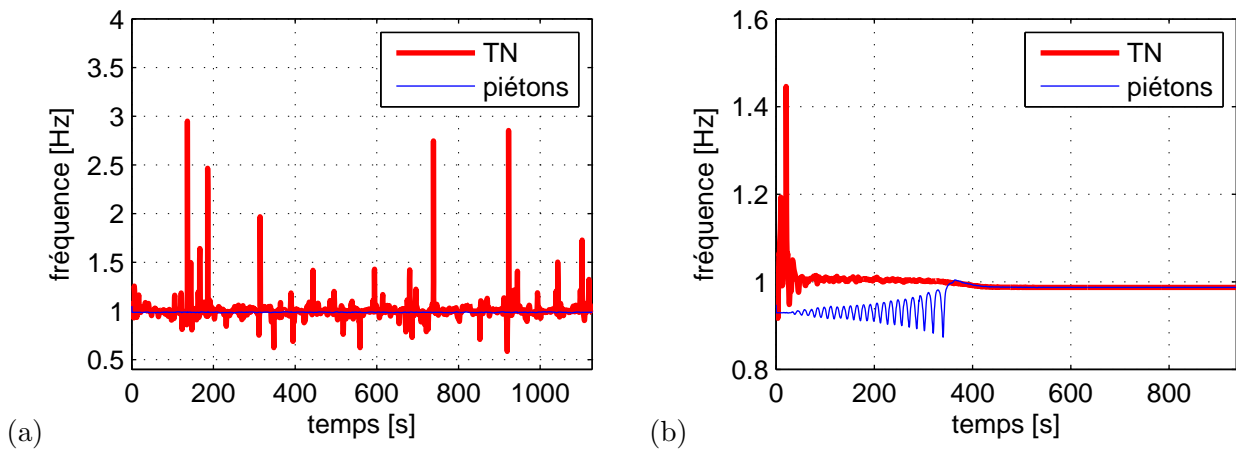


FIGURE 7.17. Fréquence instantanée de la passerelle en rouge et fréquence instantanée des piétons à mi-travée en bleu pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

la passerelle. Ceci fait partie des perspectives du travail que nous voudrions faire dans la suite. De plus, on voudrait faire des comparaisons avec des valeurs expérimentales si nous pouvons obtenir des données exploitables. On attire l'attention du lecteur, que pour le moment, les modèles trouvés dans la littérature, s'intéressent pour la plupart à la détermination du nombre critique de piétons.

## 7.4 Application à la passerelle Simone de Beauvoir

Dans cette partie, on applique notre modèle à la passerelle Simone de Beauvoir à Paris. On commence par décrire la passerelle, puis on s'intéresse à son premier mode latéral. On détermine le nombre critique de piétons pour plusieurs cas de distribution de fréquences, puis on étudie le cas où la moyenne des fréquences des piétons est la fréquence modale du système piétons-passerelle. Ensuite, nous présentons des résultats numériques obtenus sur cette passerelle lorsque la densité des piétons est constante en temps et en espace. On commence par analyser le cas d'une marche libre ( $\mu_f = 0,9350Hz$  et  $\sigma_f = 0,0930Hz$ ), puis le cas d'une marche ayant comme fréquence moyenne, la fréquence modale de la passerelle seule.

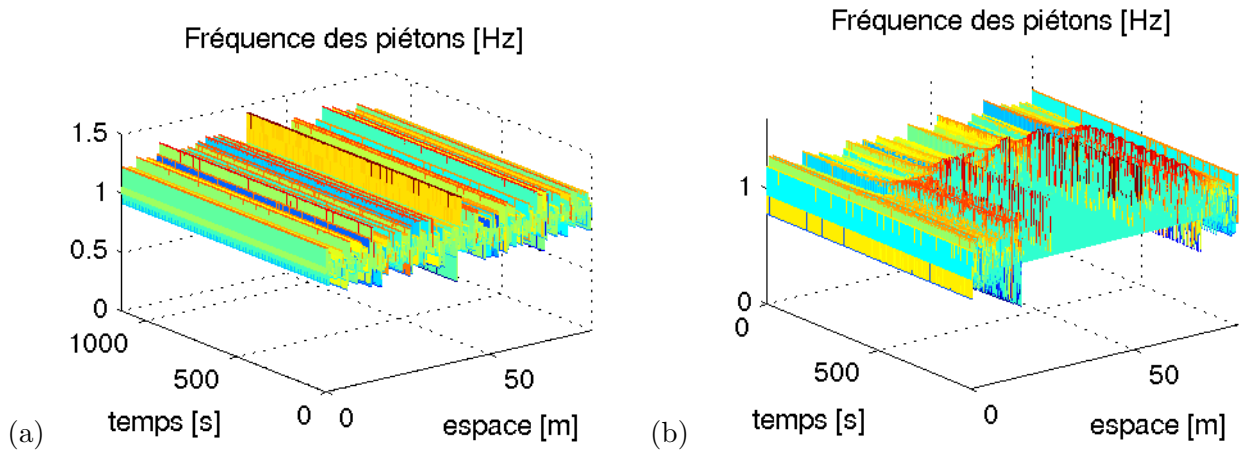


FIGURE 7.18. *Fréquence instantanée des piétons en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 0,5p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2*

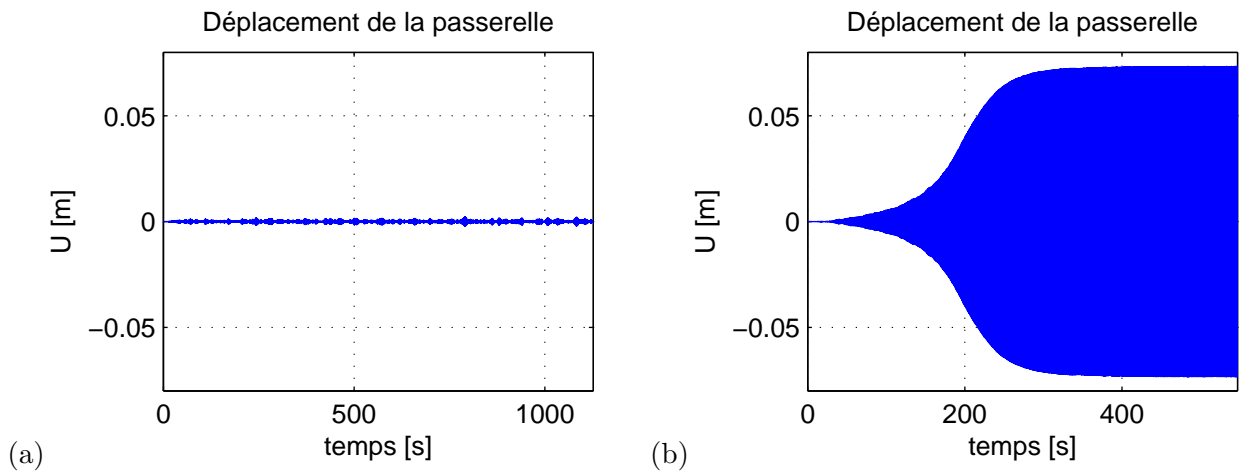


FIGURE 7.19. *Le déplacement de la TN à mi-travée pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2*

#### 7.4.1 Description et caractéristiques de la passerelle

La passerelle Simone de Beauvoir a été inaugurée en 2006. Elle est située dans le treizième arrondissement de Paris. Elle traverse la Seine en une seule travée. Cette passerelle n'est pas symétrique et est constituée de deux "étages". Elle est formée d'une lentille centrale reliée aux deux rives par des "passerelles" latérales. La longueur totale de Simone de Beauvoir est de  $304m$ , sa portée principale est de  $190m$  et la lentille est de  $106m$ . Sa largeur est de  $12m$ .

D'après l'analyse effectuée sur la passerelle, après l'ajout des amortisseurs, le premier mode est un mode de vibration latérale, de fréquence  $0,561Hz$  et son amortissement proportionnel est de  $0,73\%$ . La forme modale correspondant à ce mode peut être approchée par un demi-sinus.

#### 7.4.2 Détermination du nombre critique de piétons

Comme on peut le remarquer d'après le paragraphe consacré au Millennium, le nombre critique de piétons change selon la moyenne et l'écart-type de la fréquence de marche des piétons. On étudie alors les trois cas qui sont les plus susceptibles d'avoir lieu :

1. les piétons ont une marche "normale" (fréquence autour de  $1Hz$ )

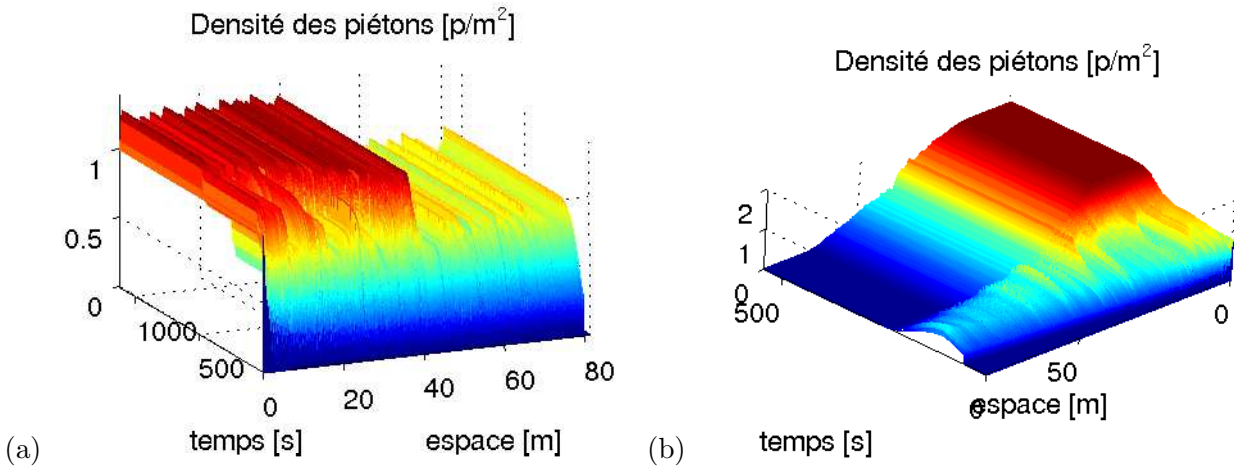


FIGURE 7.20. La densité des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

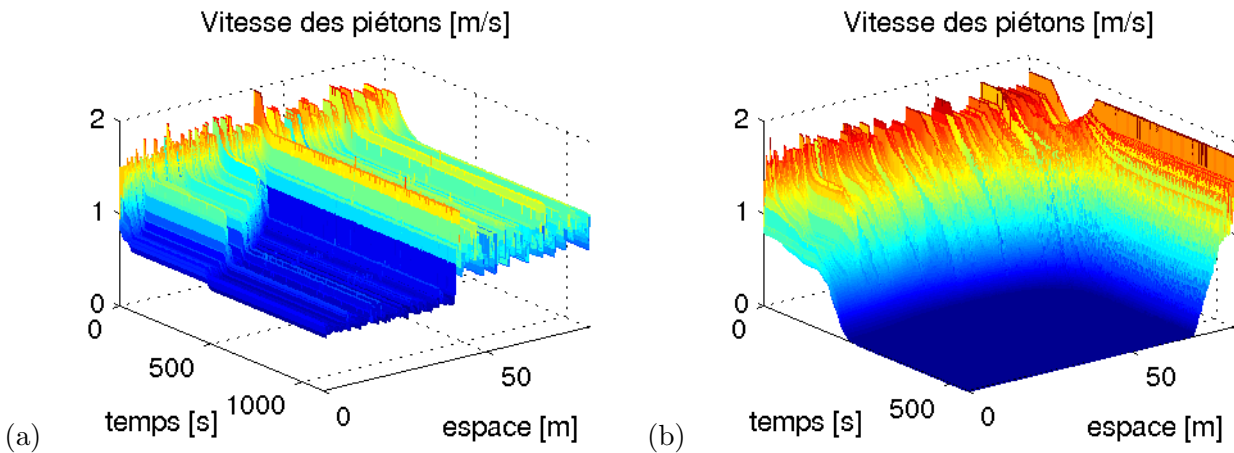


FIGURE 7.21. La vitesse des piétons sur la TN en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

2. la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale de la passerelle seule
3. la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure.

Dans les différents cas que nous allons présenter, on trouve le nombre critique  $N_c$  de piétons grâce à la résolution de l'équation (5.82).

1. On considère le cas d'une marche "normale". La fréquence des piétons suit donc une loi normale de moyenne  $\mu_f = 0,9350Hz$  et d'écart-type  $\sigma_f = 0,093Hz$ . Il est clair que dans ce cas, la fréquence de la passerelle, est très éloignée de la fréquence des piétons et qu'il est improbable qu'une synchronisation se déclenche. Effectivement, dans ce cas, l'équation (5.82) n'admet aucune solution. Nous avons réalisé une simulation numérique pour ce cas. Nous avons considéré le cas où la densité des piétons est constante sur la passerelle et n'évolue pas en temps. Le nombre de piétons sur la travée principale est de 5000 piétons, ce qui correspond à une densité de  $2,1930p/m^2$  et pourtant, comme on peut le voir sur la figure 7.25-(a), le déplacement de la passerelle est très faible et aucune synchronisation ne s'est déclenchée (figures 7.25-(b) et 7.26).
2. Nous considérons maintenant le cas le plus critique, où la fréquence moyenne des piétons est la

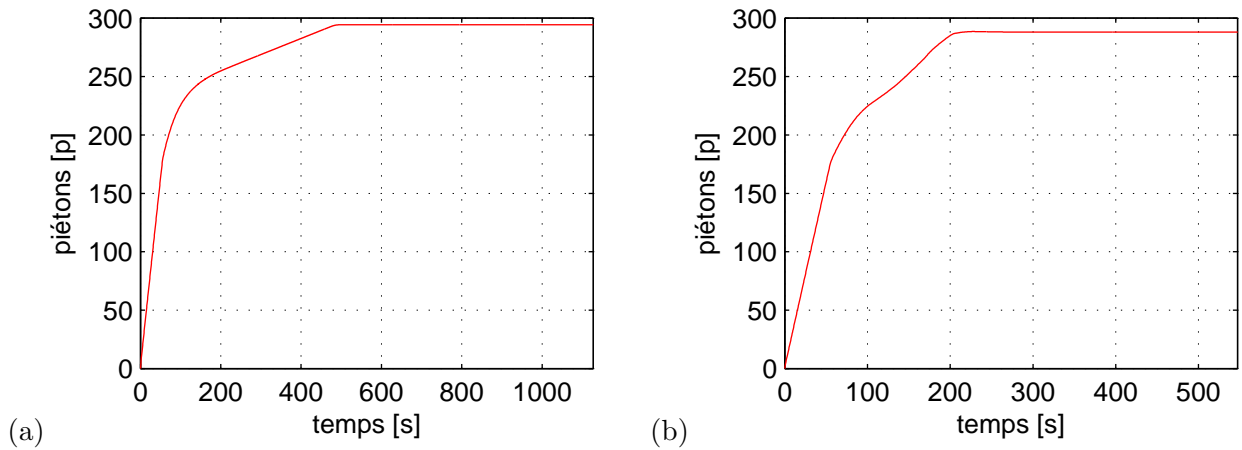


FIGURE 7.22. Nombre de piétons sur la TN pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

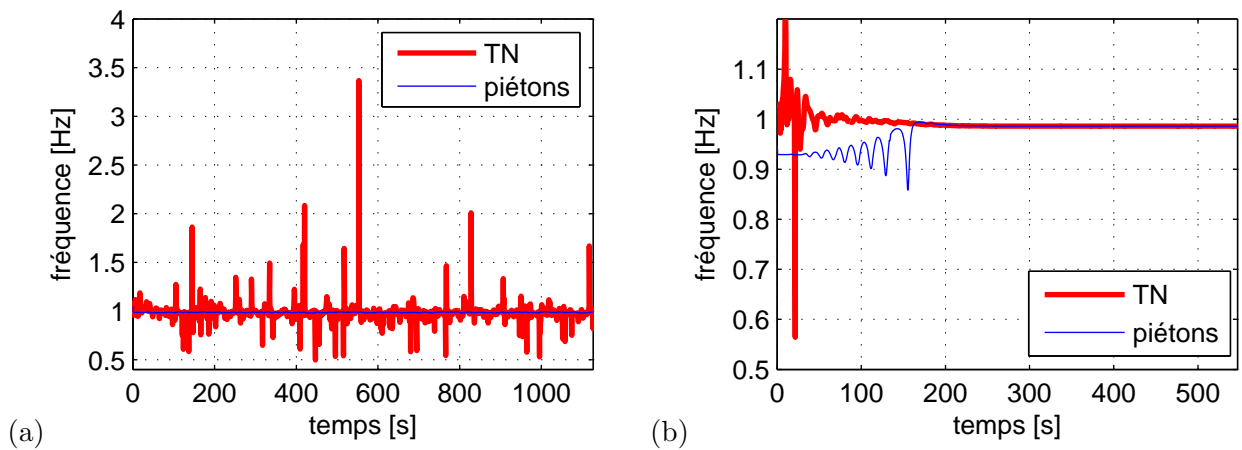


FIGURE 7.23. Fréquence instantanée de la passerelle en rouge et fréquence instantanée des piétons à mi-travée en bleu pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2

fréquence modale du système piétons-structure :

$$\mu_f = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \sigma_f = \frac{0,935}{0,093} \mu_f \quad (7.26)$$

Le nombre critique trouvé est :

$$N_c = 412 \quad (7.27)$$

Il correspond à une densité de  $0,1807p/m^2$  sur la travée principale.

3. Dans le cas où la fréquence moyenne des piétons est égale à la fréquence modale de la passerelle seule, on a :

$$\mu_f = 0,561Hz, \quad \sigma_f = 0,0558Hz \quad (7.28)$$

Le nombre critique est

$$N_c = 423 \quad (7.29)$$

$N_c$  est assez élevé, cependant, la densité correspondante ( $0,1855p/m^2$ ) est très faible, dû aux grandes dimensions de la travée principale.

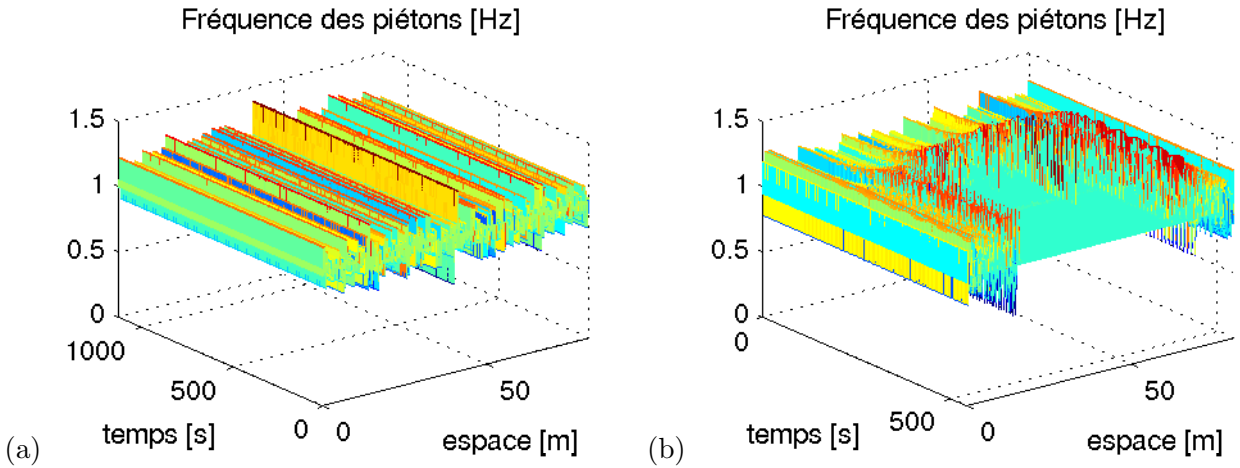


FIGURE 7.24. *Fréquence instantanée des piétons en fonction de l'espace et du temps pour  $\eta_0 = 1p/m^2$  (a) pour la distribution de fréquences FR1, (b) pour la distribution de fréquences FR2*

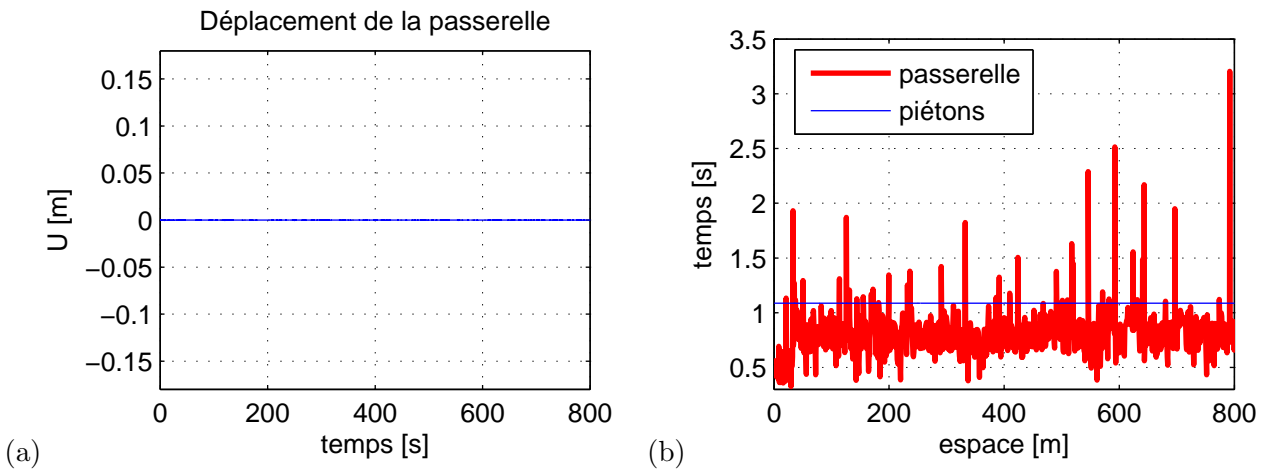


FIGURE 7.25. *5000 piétons en marche "normale" sur la passerelle Simone de Beauvoir (a) le déplacement de la passerelle à mi-travée, (b) la fréquence instantanée de la passerelle (rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (bleu)*

### 7.4.3 Amplitude d'oscillations et simulations numériques

Dans ce paragraphe, on étudie le cas où la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale de la passerelle seule et celui où elle est égale à la fréquence modale du système piétons-structure. Dans les deux cas, on suppose que la densité des piétons est constante sur la passerelle en temps et en espace.

1. Nous allons commencer par la situation la plus critique : la fréquence moyenne des piétons est la fréquence moyenne du système piétons-passerelle. Pour ce cas, nous avons calculé analytiquement, par la résolution de l'équation (5.95), l'amplitude du déplacement de la passerelle, pour différents nombres de piétons. Les résultats sont montrés sous forme de courbe dans la figure 7.27.
2. Le second cas étudié est celui où la fréquence des piétons a pour moyenne la fréquence modale de la passerelle seule. Actuellement, on n'a pas encore de solution analytique nous permettant de déterminer l'amplitude du déplacement de la passerelle pour ce type de situations. On a donc réalisé deux simulations numériques. Pour une même distribution de fréquence sur la passerelle, on a considéré un cas pré-critique (200 piétons) et un cas post-critique (800 piétons). On peut voir sur les figures 7.28, 7.29 et 7.30, que comme prévu, dans le cas pré-critique, le déplacement de la passerelle est très

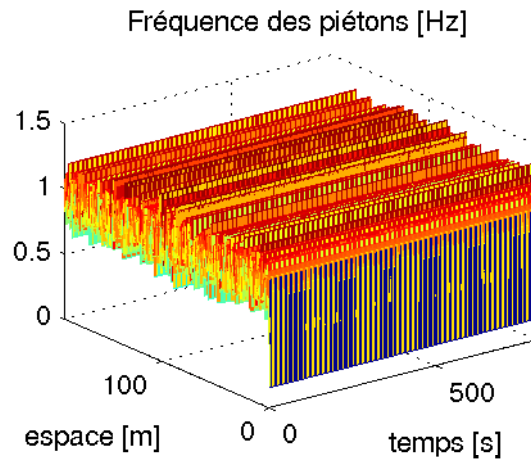


FIGURE 7.26. *Evolution de la fréquence instantanée des piétons pour 5000 piétons en marche “normale” sur la passerelle Simone de Beauvoir*

faible et le phénomène de synchronisation ne se déclenche pas. Dans le cas post-critique, on atteint des amplitudes de déplacement très importantes, avec évidemment la présence du phénomène de synchronisation.

#### 7.4.4 Concernant le premier mode de la passerelle Simone de Beauvoir...

L'étude réalisée sur la passerelle Simone de Beauvoir nous indique que le premier mode ne peut pas être excité dans le cas d'une marche "normale". Ceci est possible si on impose une fréquence proche de la fréquence modale de la passerelle seule ou du système passerelle-piétons. Cependant, cet acte de "vandalisme" ne peut avoir des effets néfastes qu'en présence d'un nombre important de piétons ( $> 400$ ) uniformément répartis sur la travée principale. Une étude plus détaillée concernant le comportement de la passerelle et des piétons lorsque l'on prend en compte l'évolution des piétons sur la passerelle sera réalisée afin de tirer des conclusions définitives sur ce point. De plus, on souhaiterait comparer les amplitudes obtenues par notre modèle et les vraies amplitudes de déplacement de la passerelle si les données nécessaires sont disponibles.

## 7.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les différents paramètres de notre modèle. Ensuite, une comparaison entre le modèle numérique et des solutions analytiques a été réalisée afin de valider notre implémentation. Puis nous avons appliqué notre modèle sur la travée Nord de la passerelle du Millennium et sur la passerelle Simone de Beauvoir. Nous avons déterminé les nombres critiques pour chacune de ces passerelles et nous avons présenté les résultats obtenus (numériques ou analytiques selon les cas). Comme ceci a été précisé au cours de ce chapitre, le manque de données expérimentales ne nous a pas permis de pousser plus loin notre étude. De plus, il serait intéressant de connaître l'évolution de l'écart-type de la fréquence des piétons lorsque ceux-ci doivent marcher à une fréquence donnée. Enfin, on voudrait également lancer des simulations dans le cas où la fréquence libre (ou souhaité) des piétons n'est pas constante en temps, afin de comparer les résultats obtenus avec les résultats actuels.



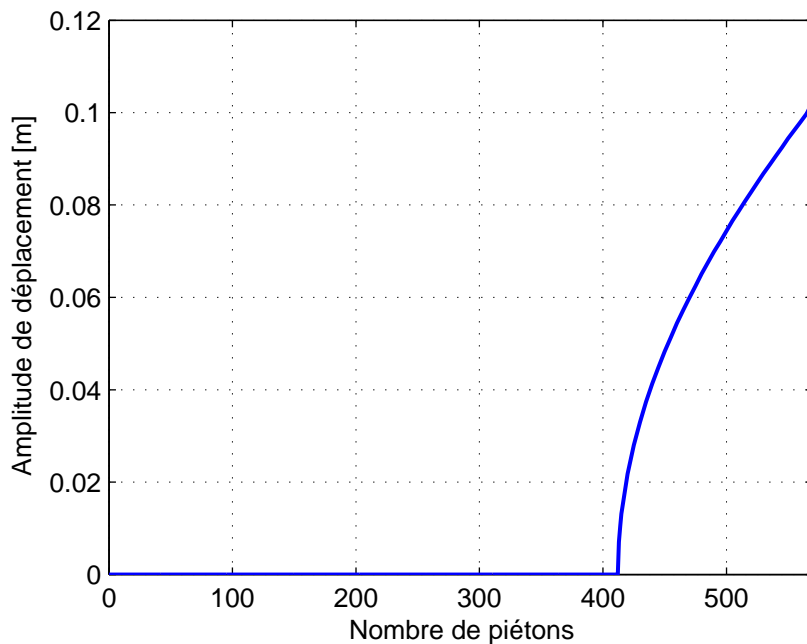


FIGURE 7.27. Amplitude de déplacement analytique de la passerelle Simone de Beauvoir lorsque la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure et l'écart-type est variable

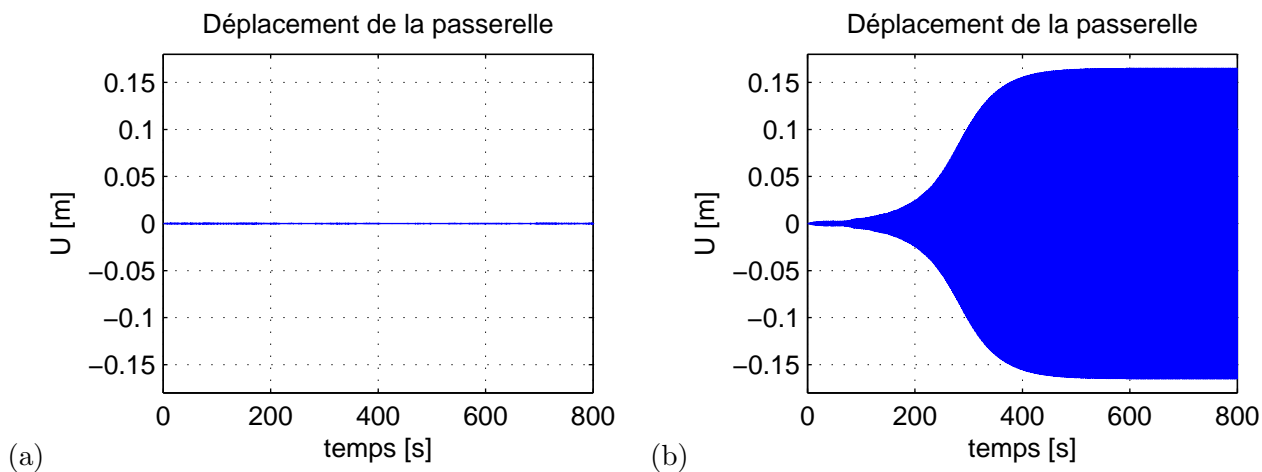


FIGURE 7.28. Déplacement de la passerelle Simone de Beauvoir à mi-travée pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons)

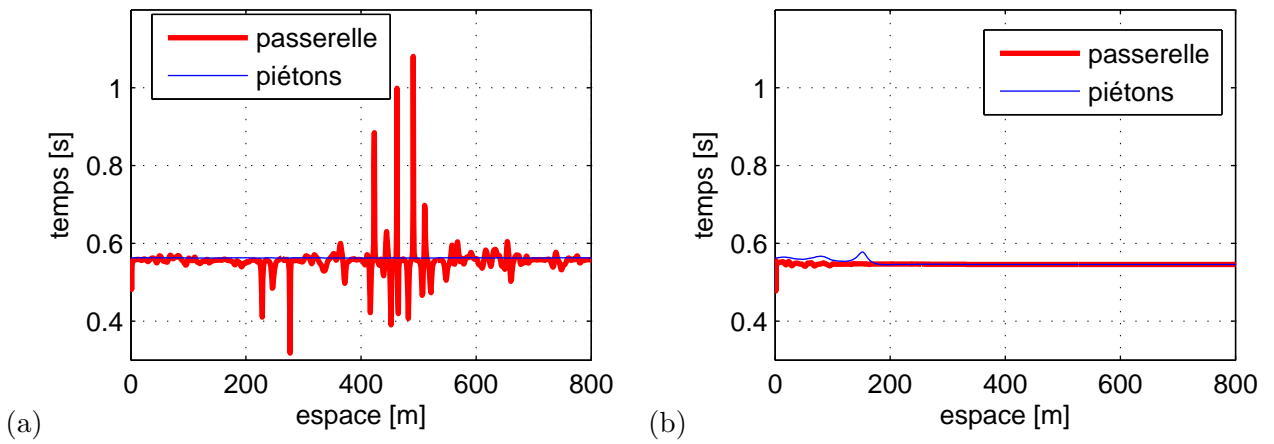


FIGURE 7.29. Comparaison entre la fréquence instantanée de la passerelle Simone de Beauvoir (rouge) et la fréquence instantanée des piétons à mi-travée (bleu) pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons)

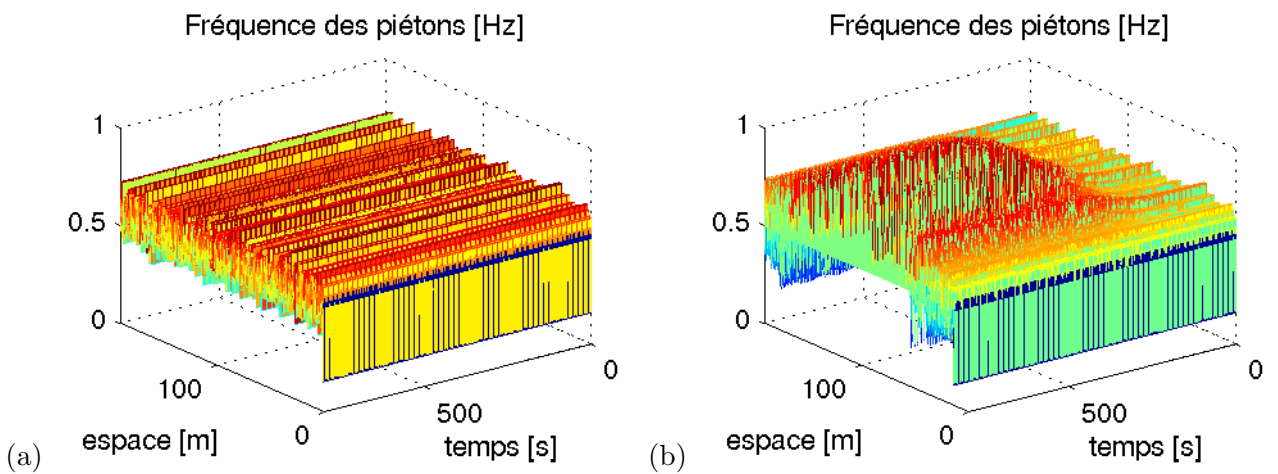


FIGURE 7.30. Evolution de la fréquence instantanée des piétons à mi-travée pour une fréquence moyenne de marche égale à la fréquence modale du système piétons-passerelle (a) dans un cas pré-critique (200 piétons), (b) dans un cas post-critique (800 piétons)



# Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés au phénomène des oscillations latérales des passerelles engendrées par l'excitation piétonne. Le but de ce travail était de développer un modèle couplé foule-structure qui permette de représenter ce phénomène en se basant sur des données physiques et expérimentales, dans un contexte mathématique rigoureux. Ce modèle devait pouvoir simuler le comportement des piétons et de la passerelle en prenant en compte les interactions piétons-piétons et piétons-passerelle qui régissent le couplage entre ces deux systèmes. Nous avons concentré nos efforts sur l'étude de la synchronisation des piétons avec la passerelle.

La première étape de cette thèse est une étude bibliographique nécessaire au démarrage toute recherche. Grâce à cette étude, nous avons pu collecter des informations importantes concernant la marche d'un piéton et comment celui-ci réagit face aux oscillations de la passerelle, ou lorsque la densité des piétons qui l'entourent est importante. De plus, nous nous sommes intéressés aux différents modèles présents dans la littérature pour faire le point sur ce qui avait déjà été fait dans le domaine et ce qui nous restait à faire.

Ensuite nous avons étudié des données expérimentales concernant la force engendrée par un piéton sur un plancher rigide. Cette étude a été faite en utilisant la transformée de Fourier et la série de Fourier. Elle a abouti à la modélisation de la force engendrée par un piéton sur un plancher rigide qui nous a été très utile par la suite. Cette partie concernant l'analyse expérimentale s'est poursuivie avec l'analyse modale de la passerelle Simone de Beauvoir et de la passerelle réalisée en laboratoire par l'Association Française de Génie Civil.

La troisième étape est le développement de notre modèle. Nous proposons un modèle continu couplé foule-structure qui s'intéresse au comportement "global" de la foule et non pas à celui de chaque piéton la constituant. Nous avons supposé que ce comportement est semblable à celui d'un fluide compressible régi par l'équation de conservation de la masse. Le comportement de la passerelle est restreint au mode propre dont la fréquence est proche de celle de la force latérale des piétons (dans notre cas le premier mode). La synchronisation des piétons avec la structure est modélisée grâce à une forme continue particulière de l'équation de Kuramoto. Dans notre modèle, nous avons également pris en compte la synchronisation entre les piétons et l'évolution de la fréquence de marche libre des piétons en fonction du temps et de l'espace.

Dans l'étape suivante, nous avons considéré un cas particulier du modèle, que nous avons étudié analytiquement. Ce travail nous a permis de déterminer certains paramètres du modèle et de valider notre implémentation numérique. De plus, grâce à ce travail nous pouvons déterminer le nombre critique de piétons à partir duquel la synchronisation peut se déclencher, et estimer la fréquence de synchronisation. Dans le cas particulier où la moyenne de la fréquence des piétons est la fréquence modale du système piétons-passerelle, on peut calculer l'amplitude du déplacement de la passerelle après synchronisation à l'état stationnaire.

Vient ensuite l'implémentation numérique du modèle. La complexité du modèle et le couplage qui existe entre les différentes équations ont rendu la tâche assez compliquée. Les méthodes de résolution classiques que l'on trouve dans la littérature, induisent des erreurs numériques qui dans certaines situations peuvent être considérées comme négligeables. Mais dans notre modèle, ces erreurs conduisent à des situations inacceptables, comme par exemple une densité de piétons négative ! Nous avons donc effectué une recherche plus approfondie dans ce domaine et développé des modèles mieux adaptés à notre étude.

Enfin, la dernière partie du travail consistait à déterminer les paramètres du modèle, vérifier que le modèle numérique et les résultats analytiques sont concordants et appliquer ce modèle au cas de passerelles

réelles. Ainsi, nous avons déterminé le nombre critique de piétons pour la travée Nord de la passerelle du Millennium pour différentes situations, et comparé nos résultats avec ceux trouvés dans la littérature lorsque ceci est possible. De plus, nous avons estimé l'amplitude du déplacement de cette travée, analytiquement ou numériquement selon les cas. Nous avons pu constater que la concordance des résultats analytiques et numériques est très satisfaisante. Nous avons pu vérifier qu'après synchronisation, la force latérale des piétons et la vitesse de déplacement latéral de la passerelle sont en phase. L'étude de la passerelle du Millennium nous a permis de mettre en évidence l'importance de la prise en compte de l'évolution de la densité des piétons sur la passerelle. Nous avons également étudié le premier mode latéral de la passerelle Simone de Beauvoir. Nous avons déterminé le nombre critique de piétons sur cette passerelle pour différentes situations, et nous avons calculé l'amplitude du déplacement dans le cas où la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système piétons-structure. Des simulations numériques ont également été réalisées. On a pu constater que ce mode n'est pas excitable dans le cas d'une marche libre. Par contre pour mettre la passerelle en vibration suivant ce mode, il faudrait un nombre très élevé de piétons dont la fréquence latérale moyenne est la fréquence modale de la passerelle ou du système piétons-passerelle. Si nous avions des données expérimentales nous permettant de déterminer les amplitudes de déplacement (ou de vitesse ou d'accélération) obtenues expérimentalement dans les cas qui nous intéressent, nous pourrions les comparer avec celles trouvées par notre modèle.

Notre modèle combine une étude de l'évolution des piétons sur la passerelle et une prise en compte "physique" de leur synchronisation avec la structure, ce qui n'est pas le cas d'autres modèles trouvés dans la littérature. Ainsi, certains modèles tiennent compte du comportement de la foule de piétons [15] mais leur prise en compte de la synchronisation et de la vitesse de marche des piétons est qualitative. Dans d'autres modèles où la synchronisation est modélisée par une équation de type Kuramoto [7, 54, 62], l'évolution des piétons sur la passerelle n'est pas étudiée. De plus, dans ces derniers modèles, la masse modale des piétons est négligée (ou oubliée?) et l'effet de la forme modale de la passerelle n'est pas prise en compte : les piétons ressentent les mêmes oscillations où qu'ils soient sur la passerelle et ont le même effet qu'ils soient sur un ventre ou sur un noeud du mode considéré. De plus, notre étude analytique a permis de déterminer le nombre critique de piétons dans plusieurs cas, alors que dans d'autres modèles ce nombre critique concerne uniquement le cas où la fréquence moyenne des piétons est la fréquence modale du système (qui se limite pour eux à la passerelle seule).

Il serait intéressant pour la suite d'étudier la synchronisation verticale des piétons avec la passerelle. Ceci permet de compléter ce travail pour une meilleure analyse des modes de torsions des passerelles. On pourrait également développer ce modèle en  $2D$  et l'étendre pour qu'il gère des surfaces  $3D$  pour étudier plus finement des passerelles ayant des architectures complexes comme par exemple la passerelle Simone de Beauvoir qui est formée de deux étages. De plus on pourrait étendre l'application de ce modèle à des stades, des salles de concerts, etc... Enfin, dans une thèse débutant en octobre 2008 à l'UR Navier, un modèle discret sera développé.

## **Annexes**



**Annexe A :**  
**Les équations du chapitre 5**





Dans cet Annexe, nous présentons les détails de certains calculs du chapitre 5.

Les détails du calcul permettant d'aboutir à l'équation (5.28) :

Le terme de droite de l'équation (5.26) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \oint f(x, \tau, T) \sin(\tau + \psi(T)) d\tau &= \oint \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \rangle \sin(\tau + \psi(T)) d\tau \\
 &\quad - 2ba(T) \oint \cos(\tau + \psi(T)) \sin(\tau + \psi(T)) d\tau \\
 &= \oint \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \rangle \sin(\tau + \psi(T)) d\tau \\
 &= \frac{1}{2} \langle \cos(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle
 \end{aligned} \tag{30}$$

Les détails du calcul permettant d'aboutir à l'équation (5.30) :

Le terme de droite de l'équation (5.27) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \oint f(x, \tau, T) \cos(\tau + \psi(T)) d\tau &= \oint \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \phi_0 + \tau) \rangle \cos(\tau + \psi(T)) d\tau \\
 &\quad - 2ba(T) \oint \cos(\tau + \psi(T))^2 d\tau \\
 &= -ba(T) + \oint \langle \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \rangle \cos(\tau + \psi(T)) d\tau \\
 &= -ba(T) + \langle \oint \sin(\theta(x, \tau, T) + \tau) \cos(\tau + \psi(T)) d\tau \rangle \\
 &= -ba(T) + \frac{1}{2} \langle \sin(\theta(x, \tau, T) - \psi(T)) \rangle
 \end{aligned} \tag{31}$$

Les détails du calcul permettant d'aboutir à l'équation (5.59) :

$$\oint \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi = 0 \tag{32}$$

à cause des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{-\pi/2} \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi &= \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi \\
 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi &= \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos(\varphi)}{|\Omega(x) - q - a\psi_1(x) \sin(\varphi)|} d\varphi
 \end{aligned} \tag{33}$$

Détermination du paramètre d'ordre complexe  $R$  :

D'après l'équation (5.119) :

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \oint \left( \frac{1}{2\pi} + \bar{\rho} \right) \cos(\theta) g(\Omega) d\theta d\Omega dx \\
&= \frac{1}{2\pi N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \oint \cos(\theta) g(\Omega) d\theta d\Omega dx + \\
&\quad \frac{1}{N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \oint \bar{\rho} \cos(\theta) g(\Omega) d\theta d\Omega dx \\
&= \frac{a_0 e^{\lambda T}}{2\pi N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \oint \frac{\lambda \cos^2(\theta) + \Omega \cos(\theta) \sin(\theta)}{\lambda^2 + \Omega^2} g(\Omega) d\theta d\Omega dx \\
&= \frac{\lambda a_0 e^{\lambda T}}{2\pi N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \oint \frac{\cos^2(\theta)}{\lambda^2 + \Omega^2} d\theta \right] g(\Omega) d\Omega dx \\
&= \frac{\lambda a_0 e^{\lambda T}}{2N} \int_{-L/2}^{L/2} \eta \ell \psi_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\Omega)}{\lambda^2 + \Omega^2} d\Omega dx \\
&= \frac{a_0 e^{\lambda T} n}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} g(\Omega) d\Omega
\end{aligned} \tag{34}$$

# Bibliographie

- [1] Y.Matsumoto, S.Sato, T.Nishioka, and H.Shiojiri. A study on design of pedestrian over-bridges. *Transactions of JSCE*, 4 :50–51, 1972.
- [2] T.P.Andriacchi, J.A.Ogle, and J.O.Galante. Walking speed as a basis for normal and abnormal gait measurements. *Journal of Biomechanics*, 10 :261–268, 1977.
- [3] S.Zivanovic, A.Pavic, and P.Reynolds. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation : a litterature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279 :1–74, 2005.
- [4] J.E.Wheeler. Prediction and control of pedestrian induced vibration in footbriges. *ASCE Journal of the Structural Division*, 108(ST9) :2045–2065, 1982.
- [5] C.Seiler and S.Hüttner. A uniform model for pedestrian induced loads for different types of motion-theory, experimental tests and practical application. *Eurodyn*, pages 1655–1660, 2005.
- [6] A.D.Pizzimenti and R.Ricciardelli. Experimental evaluation of the dynamic lateral loading of footbridges by walking pedestrians. *Eurodyn*, pages 435–440, 2005.
- [7] D.M.Abrams. Two coupled oscillator models : the millennium bridge and the chimera state. *Ph.D dissertation - Cornell University*, 2006.
- [8] P.Dallard, A.J.Fitzpatrick, A.Flint, S.Le Bourva, A.Low, R.M.Ridsdill-Smith, and M.Willford. The london millenium footbridge. *The Structural Engineer*, 79(22) :17–33, 2001b.
- [9] Wikipedia. Résonance. Internet address : <http://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9sonance#Ponts>.
- [10] R.Cross. Standing, walking, running and jumping on a force plate. *American Journal of Physics*, 67(4) :304–309, 1999.
- [11] F.C.Harper, W.J.Warlow, and B.L.Clarke. The forces applied to the floor by the foot in walking. *National Building Studies, Departement of Scientific and Industrial Research, Building Research Station, Research Paper 32*, 1961.
- [12] F.C.Harper. The mechanics of walking. *Research applied in Industry*, 15(1) :23–28, 1962.
- [13] Larousse. *Le petit Larousse illustré*. Larousse, 21, rue du Montparnasse 75283 Paris Cedex 16, 2000.
- [14] S.Živanović, V. Racić, I.El-Bahnasy, and A.Pavić. Statistical characterisation of parameters defining human walking as observed on an indoor passerelle. In *Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVACES'07*, pages 219–225, Porto, Portugal, octobre 2007.
- [15] F.Venuti, L.Bruno, and N.Bellomo. Crowd-structure interaction : dynamic modelling and computational simulations. *Footbridge*, 2005.
- [16] J.Blanchard, B.L.Davies, and J.W.Smith. Design criteria and analysis for dynamic loading of footbridges. *Proceedings of the DEO and DOT TRRL Symposium on Dynamic Behaviour of Bridges, Crowthorne, UK*, pages 90–106, 1977.
- [17] S.C.Kerr and N.W.M.Bishop. Human induced loading on flexible staircases. *Engineering Structure*, 23 :37–45, 2001.
- [18] S.Živanović, A.Pavic, and P.Reynolds. Vibration serviceability of footbridges under human-induced excitation : a litterature review. *Journal of Sound and Vibration*, 279 :1–74, 2005.
- [19] H.Bachmann, A.J.Pretlove, and H.Rainer. Dynamic forces from rythnical human body motions, in. *Vibration problems in structures : practical guidelines, Appendix G*, pages 11–17, 1995.

- [20] C.Sahnaci and M.Kasperski. Random loads induced by walking. *Eurodyn*, pages 441–446, 2005.
- [21] P.Dallard, A.J.Fitzpatrick, A.Flint, A.Low, and R.M.Ridsdill-Smith. The millenium bridge london - problems and solutions. *The Structural Engineer*, 79(8) :15–17, 2001a.
- [22] F.W.Galbraith and M.V.Barton. Ground loading from footsteps. *Journal of Accoustic Society of America*, 48(5) :1288–1292, 1970.
- [23] S.C.Kerr. *Human induced loading on staircases*. PhD thesis, Mechanical Engineering Department, University College Londo, UK, 1998.
- [24] S.V.Ohlsson. Floor vibration and human discomfort. *PhD Thesis, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden*, 1982.
- [25] P.Charles, C.Delavaud, A.Hekimian, J.Renault, and T.Saez. Dispositif d’essais sur un modèle de passerelle - rapport d’essais. *SETRA*, 2005.
- [26] H.Bachmann and W.Ammann. Vibrations in structures - induced by man and machines. *Structural Engineering Documents, International Association of Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 3, 1987.
- [27] J.E.Wheeler. Pedestrian-induced vibrations in footbridges. *Proceedings of the 10th Australian Road Research Board (ARRB) Conference, Sydney, Australia*, 10(3) :21–35, 1980.
- [28] J.M.WBrownjohn, A.Pavic, and P.Omenzetter. A spectral density approach for modelling continuous vertical forces on pedestrian structures due to walking. *Canadian Journal of Civil Engineer*, 31(65-77), 2004.
- [29] M.R.Willford and P.Young. Improved methodologies for the prediction of footfall-induced vibration. *Eurodyn*, pages 461–466, 2005.
- [30] P.Young. Improved floor vibration methodologies. In *ARUP Vibration Seminar*, 2001.
- [31] P.Eriksson. *Vibration of low-frequency floors - dynamic forces and response prediction*. PhD thesis, Chalmers University of Technology, 1994.
- [32] D.R.Leonard. Human tolerance level for bridge vibrations. *TRRL Report No 34, Road Research Laboratory*, 34, 1966.
- [33] J.W.Smith. *The Vibration of Highway Bridges and the effect on Human Comfort*. PhD thesis, University of Bristol, Bristo, UK, 1969.
- [34] T.Kobori and Y.Kajikawa. Ergonomic evaluation methods for bridge vibrations. *Transactions of JSCE*, 6 :40–41, 1974.
- [35] G.P.Tilly, D.W.Cullington, and R.Eyre. Dynamic behaviour of footbridges. *IABSE Surveys S-26/84, IABSE Periodica*, 2/84 :13–24, 1984.
- [36] S.Nakamura. Field measurements of lateral vibration on a pedestrian suspension bridge. *The Structural Engineer*, 81(22) :22–26, 2003.
- [37] P.W.Chen and L.E.Robertson. Human perception tresholds of horizontal motion. *ASCE Journal of Structural Division*, 98(ST8) :1681–1695, 1972.
- [38] B.R.Ellis and T.Ji. On the loads produced by crowds jumping on floors. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Structural Dynamics, Eurodyn*, pages 1203–1208, Munich-Germany, 2008.
- [39] A.Ebrahimpour and L.L.Fitts. Measuring coherency of human-induced rythmic loads using force plates. *Journal of Structural Engineering*, 122(7) :829–831, 1996.
- [40] H.Grundmann, H.Kreuzinger, and M.Schneider. Dynamic calculations of footbridges. *Bauingenieur*, 68 :215–225, 1993.
- [41] Y.Fujino, B.M.Pacheco, S.Nakamura, and P.Warintchai. Synchronization of human walking observed during lateral vibration of a congested pedestrian bridge. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22 :741–758, 1993.
- [42] J.Yoshida, M.Abe, Y.Fujino, and K.Higashiawatoko. Image analysis of human induced lateral vibration of a pedestrian bridge. In *Procceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of Footbridges*, pages 20–22, Paris, France, 2002.

- [43] W.E.Saul, C.Y-B.Tuan, and B.McDonald. Loads due to human movements. *T.T.P.Yao(Ed.), Proceedings of the Structural Safety Studies*, pages 107–119, 1985.
- [44] A.Ebrahimpour. Modeling spectator induced dynamic loads. *PhD thesis, University of Idaho, Moscow, Idaho, USA*, 1987.
- [45] A.Ebrahimpour and R.L.Sack. Design live loads for coherent crowd harmonic movements. *Journal of Structural Engineering*, 118(4) :1121–1136, 1992.
- [46] A.Ebrahimpour, A.Hamman, R.L.Sack, and W.N.Patten. Measuring and modeling dynamic loads imposed by moving crowds. *Journal of Structural Engineering*, 122(12) :1468–1474, 1996.
- [47] C.Williams, M.Y.Rafiq, and A.Carter. Human structure interaction : the development of an analytical model of the human body. In *International Conference : Vibration, Noise and Structural Dynamics'99*, pages 32–39, Venice, Italy, 1999.
- [48] X.Zheng and J.M.W.Brownjohn. Modelling and simulation of human-floor system under vertical vibration. In *Proceedings of SPIE, Smart Structures and Materials*, volume 4327, pages 513–520, Newport Beach, CA, USA, March 2001.
- [49] B.R.Ellis and T.Ji. Floor vibration induced by dance-type loads : verification. *The Structural Engineer*, 72(3) :45–50, 1994.
- [50] S.Yao, J.Wright, A.Pavic, and P.Reynolds. Forces generated when bouncing or jumping on a flexible structure. In *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration*, volume 2, pages 563–572, Leuven, Belgium, September 2002.
- [51] M.Yoneda. A simplified method to evaluate pedestrian-induced maximum response of cable-supported pedestrian bridges. In *Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of footbridges*, Paris, France, Novembre 2002.
- [52] C.Barker. Some observations on the nature of the mechanism that drives the self-excited lateral response of footbridges. In *Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of footbridges*, Paris, France, Novembre 2002.
- [53] G.Dinmore. Dynamic wave behaviour through dense media of varied dynamic stiffness. In *Proceedings of the International Conference on the Design and Dynamic Behaviour of footbridges*, Paris, France, Novembre 2002.
- [54] S.Strogatz, D.Abrams, A.McRobie, B.Eckhardt, and E.Ott. Theoretical mechanics : Crowd synchrony on the millennium bridge. *Nature*, 438 :43–44, Novembre 2005.
- [55] T.M.Roberts. Synchronised pedestrian lateral excitation of footbridges. *iproc ICE Bridge engineering*, 156(BE4) :155–160, 2003.
- [56] T.M.Roberts. Synchronised pedestrian lateral excitation of footbridges. *Eurodyn*, pages 1089–1094, 2005.
- [57] R.W.Clough and J.Penzien. Dynamics of structures. *McGraw-Hill Book Co, New York*, 1975.
- [58] D.E.Newland. Vibration of the london millenium bridge : Cause and cure. *Int T Acoustics and Vibration*, 8(1) :9–14, 2003.
- [59] D.E.Newland. Pedestrian excitation of bridges. *Proc Instn Mech Engrs*, 218 Part C :477–492, 2003.
- [60] T.M.Roberts. Lateral pedestrian excitation of footbridges. *Journal of bridge engineering*, pages 107–112, January-February 2005.
- [61] P.Charles. Comportement dynamique des passerelles piétonnes-comportement latéral d'une foule de piétons.
- [62] B.Eckhardt, E.Ott, S.H.Strogatz, D.M.Abrams, and A.McRobie. Modeling walker synchronization on the millennium bridge. *Physical Review E*, 75(021110), 2007.
- [63] A.Pikovsky, M.Rosenblum, and J.Kurths. Synchronization-a universal concept in nonlinear sciences. *Cambridge University Press*, 12, 2001.
- [64] B.Maury and J.Venel. Un modèle de mouvements de foule (in french). In Jean-Frédéric Gerbeau and Stéphane Labbé, editors, *ESAIM Proceedings*, pages 143–152, July 2007.

- [65] R.L.Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrians. *Transport.Res.B*, 36 :507–535, 2002.
- [66] R.L.Hughes. The flow of human crowds. *Annual review of fluid mechanics*, 35(14) :169–182, 2003.
- [67] J.Bodgi, S.Erlicher, and P.Argoul. Lateral ibration of footbridges under crowd - loading : continuous crowd modelling approach. *Key Engineering Materials*, 347 :685–690, 2007.
- [68] N.Bellomo, V.Coscia, and M.Delitala. On the mathematical theory of vehicular traffic flow i. fluid dynamic and kinetic modelling. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 12(12) :1801–1843, 2002.
- [69] P.PECOL. Comportement dynamique d’une foule traversant une passerelle souple : analyse des données expérimentales. *Rapport de stage de Master Recherche Dynamique des Structures et Acoustique-Ecole Nationale des Ponts et Chaussées - Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et de Microthechniques de Besançon*, 2008.
- [70] K.G.McConnell. *Vibration testing, Theory and Practice*. Wiley, New York, 1995.
- [71] B.Torrésani R.Carmona, W.-L.Hwang. Practical time-frequency analysis. *Academic Press*, 1998.
- [72] T.P. Le. *Auscultation dynamique des structures à l’aide de l’analyse continue en ondelettes*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [73] P.Siarry and G.Dreyfus. La méthode du recuit simulé : théorie et application. *I.D.S.E.T.,Paris*, 1988.
- [74] T.P.Le and P.Argoul. Continuous wavelet transform for modal identification using free decay response. *Journal of sound and vibration*, 227 :73–100, 2004.
- [75] S.Erlicher and P.Argoul. Modal identification of linear non-proportionally damped systems by wavelet transform. *Mechanical Systems and signal processing*, 21 :1386–1421, 2007.
- [76] A.S. Veletsos and C.E. Ventura. Modal analysis of non-classically damped linear systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14 :217–243, 1986.
- [77] A.Belli, P.Bui, A.Berger, A.Geyssant, and J.-R.Lacour. A treadmill ergometer for three-dimensional ground reaction forces measurement during walking. *Journal of Biomechanics*, 34 :105–112, 2001.
- [78] A.V.Oppenheim and R.W.Schafer. *Discrete-Time Signal Processing*, pages 447–448. Prentice-Hall, 1989.
- [79] S.Erlicher, A.Trovato, J.Bodgi, and P.Argoul. Modelling the lateral pedestrian force on a rigid floor by a self-sustained oscillator. *Mechanical Systems and Signal Processing (Soumis)*.
- [80] Wikipedia. Passerelle simone-de-beauvoir. Internet address : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Passerelle\\_simone-de-beauvoir](http://fr.wikipedia.org/wiki/Passerelle_simone-de-beauvoir).
- [81] L.Fryba. Vibration of solids and structures under moving loads. *Thomas Telford*, 1999.
- [82] D.J.Muraki. A simple illustration of a weak spectral cascade. Internet address : <http://www.math.sfu.ca/~dmuraki/research/cascade.pdf>, 2000.
- [83] J.A.Acebrón, L.L.Bonilla, C.J.Pérez Vicente, F.Ritort, and R.Spigler. The kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena. *Reviews of modern physics*, 77(137) :137–185, 2005.
- [84] Matlab Help. ode23, ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb. Internet address : [http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/index.html?access/helpdesk/help/techdoc/ref/ode23.html&http://www.google.com/search?hl=en&rlz=1B3RNFA\\_enFR228FR262&sa=X&oi=spell&resnum=0&ct=result&cd=1&q=ode23&spell=1](http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/techdoc/index.html?access/helpdesk/help/techdoc/ref/ode23.html&http://www.google.com/search?hl=en&rlz=1B3RNFA_enFR228FR262&sa=X&oi=spell&resnum=0&ct=result&cd=1&q=ode23&spell=1).
- [85] L.Van Dommelen. Convection equation. Internet address : <http://www.eng.fsu.edu/~dommelen/courses/cpm/forms/owwform/index.html>.
- [86] S.Kim and E.Tadmor. Non-oscillatory central crank-nicolson schemes, part i : Linear convection diffusion equations. Internet address : [http://www.ms.uky.edu/~skim/preprint/CU2\\_CN\\_ConvDiff.ps](http://www.ms.uky.edu/~skim/preprint/CU2_CN_ConvDiff.ps).
- [87] A.Kurganov and E.Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160 :241–282, 2000.
- [88] Burger’s equation. Internet address : <http://hmf.enseeiht.fr/travaux/CD0001/travaux/optmfn/hi/01pa/hyb56/intro.htm#intro>, 2000-2001.
- [89] S.Zivanovic, A.Pavic, and P.Reynolds. Probability-based prediction of multi-mode vibration response to walking excitation. *Engineering Structures*, 29 :942–954, 2007.