



**HAL**  
open science

# Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites : application aux cymbales

Cédric Camier

► **To cite this version:**

Cédric Camier. Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites : application aux cymbales. Sciences de l'ingénieur [physics]. Ecole Polytechnique X, 2009. Français. NNT: . pastel-00005022

**HAL Id: pastel-00005022**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00005022>**

Submitted on 20 Jul 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites. Application aux cymbales.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 février 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Polytechnique

par

Cédric Camier

### Composition du jury

*Directeur de thèse :* Cyril Touzé  
*Président :* Emmanuel de Langre  
*Rapporteurs :* Bruno Cochelin  
Jean-Claude Golinval  
*Examineurs :* Francis Collino  
Joël Frelat

Mis en page avec la classe thloria.

# Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites. Application aux cymbales.

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 2 février 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Polytechnique

par

Cédric Camier

### Composition du jury

*Directeur de thèse :* Cyril Touzé  
*Président :* Emmanuel de Langre  
*Rapporteurs :* Bruno Cochelin  
Jean-Claude Golinval  
*Examineurs :* Francis Collino  
Joël Frelat

Mis en page avec la classe thloria.

« DANS LE DÉSERT DE LA SCIENCE.— À l'homme scientifique apparaissent durant ses démarches humbles et pénibles qui sont bien souvent par force des marches à travers le désert, ces merveilleux mirages que l'on appelle « systèmes philosophiques » : ils montrent, à la portée de la main, avec la force magique de l'illusion, la solution de toutes les énigmes et la coupe rafraîchissante de la véritable boisson de vie ; le cœur palpite de joie et l'homme fatigué touche déjà presque des lèvres la récompense de sa peine et de sa persévérance scientifiques, en sorte qu'il va presque involontairement, toujours de l'avant. Il est vrai que certaines natures s'arrêtent comme étourdies par le beau mirage : alors le désert les engloutit et elles sont mortes pour la science. D'autres natures encore, celles qui ont souvent fait l'expérience de ces consolations subjectives, sont prises d'un extrême déplaisir et maudissent le goût du sel que ces apparitions laissent à la bouche et d'où résulte une soif ardente, sans que l'on soit d'un pas seulement rapproché d'une source quelconque. »

Friedrich Nietzsche, *Opinions et sentence mêlées (Humain, trop humain, tome II)*.



---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Applications de l'étude . . . . .	1
1.1.1 Applications musicales . . . . .	1
1.1.2 Applications industrielles . . . . .	4
1.2 Cadre de l'étude . . . . .	5
1.2.1 Vibrations non-linéaires de coques . . . . .	5
1.2.2 Modèles récents . . . . .	5
1.2.3 Modèle étendu et organisation du manuscrit . . . . .	7
<b>I Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 2 Imperfections géométriques</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction . . . . .	11
2.2 Expérience sur une coque de laboratoire . . . . .	11
2.3 Comparaison au modèle de coque sphérique mince . . . . .	14
2.3.1 Comparaison sur les modes propres . . . . .	14
2.3.2 Quelques éléments de comparaison sur des coefficients non-linéaires . . . . .	14
2.4 Autres exemples de la littérature . . . . .	15
<b>Chapitre 3 Modèle de plaque circulaire imparfaite</b>	<b>17</b>
3.1 Équations non-linéaires des plaques circulaires minces parfaitement planes . . . . .	19
3.1.1 Hypothèses . . . . .	19
3.1.2 Équations locales . . . . .	19
3.1.3 Conditions aux limites . . . . .	20
3.1.4 Adimensionnement . . . . .	20

3.1.5	Projection modale . . . . .	22
3.2	Équations non-linéaires des plaques circulaires minces imparfaites . . . . .	23
3.2.1	Définition du défaut de forme . . . . .	23
3.2.2	Ajout d'un défaut dans les équations locales du cas parfait . . . . .	24
3.2.3	Projection modale . . . . .	26
3.2.4	Diagonalisation du problème . . . . .	32
3.2.5	Discussion et introduction aux études de convergence . . . . .	33
<b>Chapitre 4 Application à quelques défauts de forme</b>		<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	Calcul de la tendance de non-linéarité . . . . .	36
4.3	Cas d'un défaut de forme sphérique . . . . .	38
4.3.1	Comparaison théorique avec le modèle de coque sphérique mince . . . . .	38
4.3.2	Comparaisons des résultats entre différents modèles analytiques . . . . .	40
4.4	Cas de défauts axisymétriques . . . . .	46
4.4.1	Introduction . . . . .	46
4.4.2	Imperfection de la forme du mode (0,1) . . . . .	46
4.4.3	Imperfection de la forme du mode (0,2) . . . . .	52
4.5	Cas de défauts asymétriques . . . . .	53
4.5.1	Imperfection de la forme du mode (2,0) . . . . .	53
4.5.2	Imperfection de la forme du mode (3,0) . . . . .	59
4.6	Conclusion sur les cas d'imperfections de formes données . . . . .	61
<b>Chapitre 5 Cas de coques de laboratoire</b>		<b>63</b>
5.1	Introduction . . . . .	63
5.2	Mesure de la géométrie . . . . .	64
5.3	Projection géométrique . . . . .	65
5.4	Comparaison sur les fréquences propres . . . . .	67
5.5	Comparaisons dans le domaine non-linéaire . . . . .	71
5.5.1	Cas d'une résonance interne 1 : 1 : 2 . . . . .	71
5.5.2	Coefficients quadratiques . . . . .	72
5.6	Mise en évidence de l'erreur de projection . . . . .	74
5.7	Prise en compte de cette erreur. Retour sur les résultats. . . . .	77
5.7.1	Nouveaux résultats sur les coefficients non-linéaires et développements . . . . .	78
5.7.2	Influence des coefficients cubiques . . . . .	80
5.7.3	Résultats sur d'autres coques de laboratoire . . . . .	82
5.8	Discussion . . . . .	82

---

<b>II Étude numérique de la transition vers le chaos</b>	<b>85</b>
<b>Chapitre 6 Introduction</b>	<b>87</b>
6.1 Expérience à reproduire . . . . .	87
6.1.1 Protocole de mesure . . . . .	87
6.1.2 Observations . . . . .	87
6.1.3 Stratégie . . . . .	88
6.2 Rappel sur la dynamique à intégrer . . . . .	88
6.2.1 Équations . . . . .	88
6.2.2 Difficultés numériques . . . . .	90
<b>Chapitre 7 Schémas numériques</b>	<b>93</b>
7.1 État de l’art . . . . .	93
7.2 Définition de quelques opérateurs aux différences finies . . . . .	95
7.3 Quelques propriétés sur les intégrateurs temporels numériques . . . . .	96
7.3.1 Consistance . . . . .	96
7.3.2 Stabilité . . . . .	96
7.3.3 Convergence . . . . .	97
7.3.4 Ordre . . . . .	97
7.4 Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	97
7.5 Méthodes multi-pas . . . . .	99
7.5.1 Méthodes d’Adams . . . . .	99
7.5.2 Méthodes des différentiations rétrogrades . . . . .	100
7.6 Méthode de Störmer-Verlet . . . . .	101
<b>Chapitre 8 Schémas conservatifs</b>	<b>103</b>
8.1 Propriété des systèmes Hamiltoniens . . . . .	103
8.1.1 Définition du Hamiltonien . . . . .	103
8.1.2 Propriété de symplecticité . . . . .	104
8.2 Exemple de l’oscillateur de Duffing . . . . .	104
<b>Chapitre 9 Application à un oscillateur de Duffing</b>	<b>107</b>
9.1 Expériences numériques tests . . . . .	107
9.2 Écriture des différentes méthodes . . . . .	109
9.2.1 Méthode de Störmer-Verlet . . . . .	109
9.2.2 Méthodes de Runge-Kutta explicites . . . . .	109
9.2.3 Méthode des différentiations rétrogrades . . . . .	109
9.2.4 Implémentation . . . . .	110

9.3	Comparaison des simulations . . . . .	110
9.3.1	Cas d'une excitation harmonique à faible amplitude . . . . .	110
9.3.2	Cas d'une excitation harmonique à forte amplitude . . . . .	112
9.3.3	Cas particulier d'un diagramme de bifurcation jusqu'un forçage très élevé . . . . .	119
9.3.4	Cas d'une excitation impulsionnelle . . . . .	120
<b>Chapitre 10 Application au système à N degrés de liberté</b>		<b>127</b>
10.1	Énergie continue dérivée des équations modales de plaques imparfaites . . . .	127
10.2	Construction du schéma conservatif appliqué à la dynamique des plaques im- parfaites . . . . .	130
10.3	Implémentation . . . . .	131
10.4	Résultats dans le cas d'un flot autonome . . . . .	133
10.4.1	Expérience numérique test . . . . .	133
10.4.2	Méthode de Störmer-Verlet . . . . .	133
10.4.3	Méthode conservative . . . . .	133
<b>Chapitre 11 Conclusions générales et perspectives</b>		<b>137</b>
11.1	Étude de l'effet du défaut de forme . . . . .	137
11.1.1	Principaux résultats . . . . .	137
11.1.2	Applications . . . . .	140
11.1.3	Perspectives . . . . .	140
11.2	Intégrateurs numériques . . . . .	141
11.2.1	Principaux résultats . . . . .	141
11.2.2	Premières conclusions et suite des travaux . . . . .	142
<b>Bibliographie</b>		<b>145</b>
<b>Annexe A Variation de l'épaisseur sur le pourtour de la coque 3</b>		<b>153</b>
<b>Annexe B Imperfections de la forme de cymbales</b>		<b>155</b>

# CHAPITRE 1

---

---

## INTRODUCTION

### Sommaire

---

<b>1.1 Applications de l'étude . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1.1 Applications musicales . . . . .	1
1.1.2 Applications industrielles . . . . .	4
<b>1.2 Cadre de l'étude . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1 Vibrations non-linéaires de coques . . . . .	5
1.2.2 Modèles récents . . . . .	5
1.2.3 Modèle étendu et organisation du manuscrit . . . . .	7

---

## 1.1 Applications de l'étude

### 1.1.1 Applications musicales

L'application première vers laquelle sont orientés les travaux présentés dans ce manuscrit est la compréhension des vibrations de cymbales de percussion. L'étude s'inscrit dans la lignée des travaux de Cyril Touzé, qui a dirigé cette thèse, et d'Olivier Thomas. Leurs travaux, entrepris depuis leur thèses respectives [94, 79] dirigées par Antoine Chaigne étaient motivées par l'étude des instruments de percussion dits « non-linéaires <sup>1</sup> ». Cyril Touzé s'était intéressé à l'interprétation des signaux chaotiques délivrés par de telles structures lorsqu'elles sont soumises à de fortes sollicitations. Olivier Thomas a proposé un modèle complet de vibration de plaque circulaire puis de coque sphérique, ces géométries correspondant aux approximations successives de la cymbale. Cette thèse étend les résultats précédemment obtenus dans deux directions. Premièrement, les modèles mécaniques sont affinés afin de pouvoir prendre en compte les imperfections géométriques et être en mesure de traiter des formes arbitraires. Deuxièmement, la transition vers les régimes chaotiques est étudiée numériquement.

Les résultats de tous ces travaux sont assez généraux pour permettre de dépasser l'application première. La simplicité de la structure étudiée, la coque mince circulaire, lui assure un usage courant et varié : industrie du transport, architecture, nanotechnologies, etc. Avant de se plonger dans les développements mécaniques et numériques associés au sujet, il convient de dire quelques mots sur ces applications principales.

---

1. Le terme vient du fait que les mécanismes de génération sonore ne peuvent être décrit par un modèle linéarisé.

## Cymbales

Les cymbales sont des instruments d'origine asiatique caractérisés généralement par leur forme légèrement incurvée, axisymétrique, et par leur condition libre au bord. Elles possèdent souvent une forme bombée dans leur région centrale, nommée « cloche » et sont trouées au centre afin de pouvoir les fixer sur des pieds ou pour les tenir au moyen de lanières. Les cymbales sont fabriquées en bronze (alliage d'étain et de cuivre, parfois avec ajout d'or), la plupart du temps à l'aide d'un tour. Aujourd'hui leur production est industrielle.

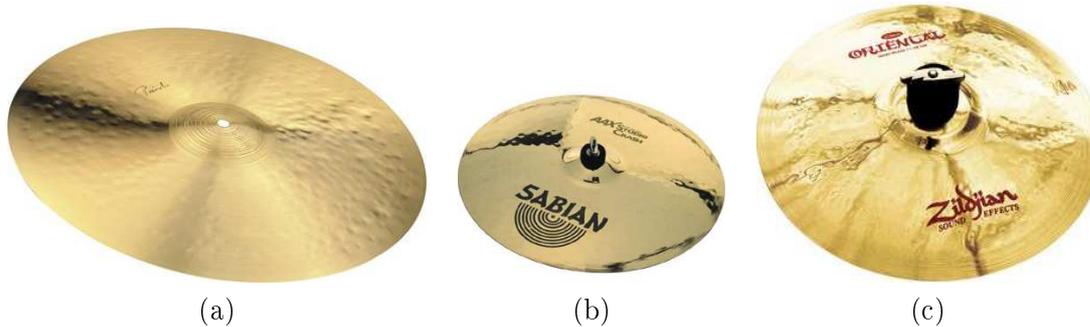


FIGURE 1.1 – *Cymbales de formes usuelles : (a) Ride (PAISTE), (b) Crash (SABIAN) et (c) Chinoise (ZILDJIAN).*

Les cymbales sont présentes dans tous les registres musicaux. Leur timbre enrichit autant les orchestres symphoniques que les formations de Jazz, de Rock, etc. La classification usuelle des cymbales par les batteurs repose sur la spécificité de leur son, elle-même liée à l'utilisation qu'ils en font.

Les 4 principales familles sont décrites ci-dessous.

- La « charleston<sup>2</sup> » est en fait composée de deux cymbales se faisant face, dont la pression de contact, réglée via une pédale, agit sur le son lors de la frappe. Elle peut se jouer également uniquement grâce à la pédale par choc ou frottement entre les deux parties. Son diamètre<sup>3</sup> varie communément de 13" à 14" (soit entre 33 cm et 35.6 cm) et son épaisseur est de 1 mm environ. Son son, précis et grésillant, marque le rythme et souligne le tempo.

- Cette fonction peut également être assurée grâce à la « **ride** » (voir figure 1.1(a)). Son diamètre est compris entre 18" et 22" (45.7 cm et 55.9 cm) et son épaisseur entre 2 à 3 mm. Lorsqu'elle est frappée par l'olive de la baguette, le son qu'elle produit appelé « ping » est précis et scintillant. Elle peut être jouée sur sa cloche, produisant alors un son plus sec et plus puissant comparable à celui d'une cloche de carillon.

- Les « **crashes** » (voir figure 1.1(b)) ponctuent les temps forts de la musique. Leurs diamètres peuvent être compris entre 14" et 20" (35.6 cm et 50.8 cm) et elles sont un peu plus fines que les rides. Elles sont frappées vigoureusement, avec le plat de la baguette de sorte que leur son est caractérisé par une explosion, remplissant l'espace fréquentiel et sans hauteur tonale discernable.

2. appelée ainsi car elle apparut au début du XX<sup>ème</sup> siècle avec la danse du même nom.

3. Dans le commerce, l'unité de référence du diamètre des cymbales et des peaux de batterie est le pouce technique international et vaut 2.54 cm.

– Les « **splashes** » et les « **chinas** » (voir figure 1.1(c)), appelées cymbales d'effet, viennent agrémenter la panoplie du percussionniste. Elles jouent le même rôle que les crashes. Les premières sont fines et petites, de diamètre compris entre 8" et 12" (20.3 cm et 30.5 cm). Leur son est plus brillant et moins sonore que celui des crash. Les secondes présentent la particularité d'être relevées sur le bord. Elles offrent un son agressif et puissant, se rapprochant de celui des gongs.



FIGURE 1.2 – Nouvelles générations de cymbales aux formes exotiques : (a) *Splash bosselée (ISTANBUL)*, (b) *Ride avec cloches décentrées (HAMMERAX)* et (c) *Crash tordue (ZILDJIAN)*.

Les appellations mentionnées ci-dessus viennent pour la plupart d'onomatopées. Ces familles de cymbales composaient jusqu'à présent l'attirail classique des batteries. Avec l'influence des musiques électroniques, les fabricants se sont essayés, ces dernières années, à des formes plus exotiques, tentant ainsi d'obtenir des sonorités originales. Quelques unes de ces nouvelles cymbales sont montrées figure 1.2. On note en particulier l'intérêt porté par les fabricants sur la recherche de formes plus irrégulières, asymétriques. On trouve même parmi les modèles les plus audacieux des formes non circulaires ou découpées.

### Instruments plus complexes

Les coques de formes circulaires sont également présentes dans plusieurs instruments de musique plus élaborés. Quelques uns sont cités ci-dessous.

– Originaire des caraïbes, le **Steel-drum** (voir figure 1.3(a)) est une coque sphérique sertie de creux de différentes tailles et encastrée dans un cylindre métallique clos. Frappé en différents endroits par des mailloches, il produit toute une gamme de notes accordées et riches en harmoniques. L'accord de l'instrument se fait grâce à la forme particulière qu'on lui applique [43].

– Le **Hang-drum** (voir figure 1.3(b)) est un instrument très récent (inventé en 2000) et dérivé du Steel-drum. Il est composé de deux coques circulaires jointes en leurs bords. L'une est accordée à la manière du Steel-drum grâce à la taille et à la forme des creux pratiqués dans le métal et l'autre fait office de résonateur de Helmholtz dont on peut faire varier à la main la taille de l'embouchure [67].

– L'onde Martenot (voir figure 1.3(c)) fut inventée en 1928 et porte le nom de son constructeur. Il s'agit d'un instrument monodique, contrôlé par un clavier et/ou des potentiomètres qui engendrent un signal à partir d'oscillateurs électroniques, traduit acoustiquement grâce à des « diffuseurs » spécifiques. Le **diffuseur « gong »** est l'un d'entre eux. Ce transducteur est constitué

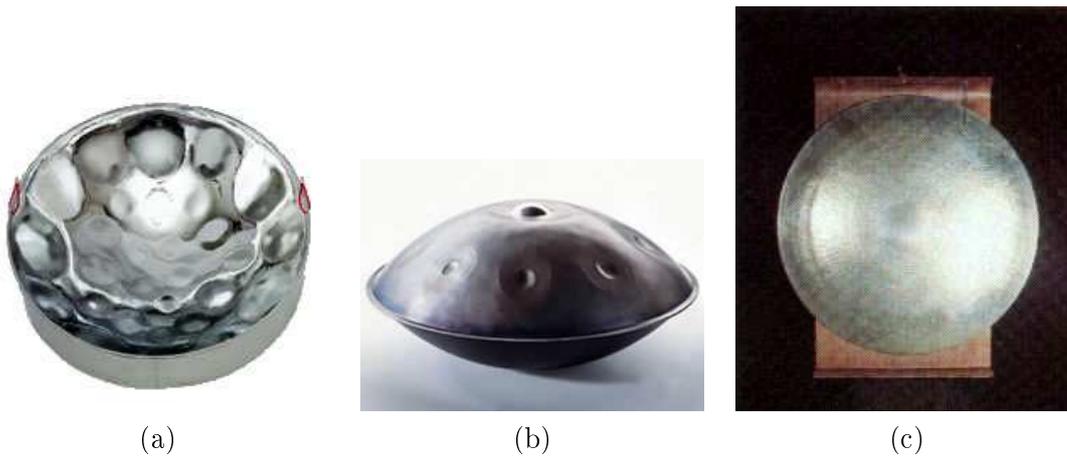


FIGURE 1.3 – *Instruments utilisant des coques de formes particulières : (a) Steeldrum, (b) Hangdrum, (c) Diffuseur « Gong » de l'onde Martenot.*

d'un puissant système bobine-aimant dont le noyau est lié au centre d'une coque mince. À travers la coque, les signaux accrochent des fréquences de résonances puis des phénomènes non-linéaires qui enrichissent le son produit.

### 1.1.2 Applications industrielles

#### Haut-Parleurs

Parmi les secteurs industriels qui utilisent les coques minces en régime de vibration, on trouve en particulier les constructeurs Hi-Fi, qui s'intéressent de près aux propriétés de vibration des membranes de haut-parleurs électrodynamiques. Leur principe est de faire vibrer une structure mince et rigide (membrane) via une bobine dans laquelle circule un courant alternatif et qui est placée dans l'entrefer d'un aimant permanent. Les membranes épousent différentes formes selon qu'elles sont destinées à la restitution de bandes de fréquences situées dans les basses fréquences (boomer), dans les hautes fréquences (tweeter) ou dans les fréquences intermédiaires (medium). La forme agit sur la raideur de la membrane et influe sur son taux de distortion. Elle conditionne également le rayonnement de la source en champ proche et en champ lointain [63].

#### Autres exemples

Les moyens de transport motorisés sont pour la plupart constitués de coques minces qui sont soumises aux vibrations du moteur ou à celles dues au contact du milieu sur lequel ils évoluent. Certaines parties de ces structures telles que les nez d'avion, de sous-marin, de fusée, les cockpits d'hélicoptère (figure 1.4) sont très proches des structures que l'on étudie. De lourdes simulations numériques sont menées pour prévoir le comportement de ces structures et ce afin de réduire les vibrations en vue d'atténuer l'endommagement des matériaux ou d'améliorer le confort des passagers.

Dans le domaine médical, des micro-systèmes mécaniques sont aujourd'hui développés pour élaborer des capteurs et des actionneurs à l'échelle microscopique. Un des capteurs de recon-

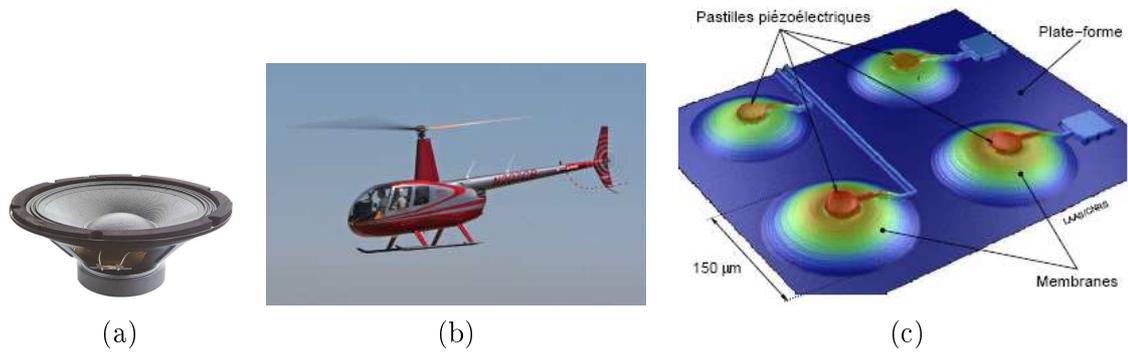


FIGURE 1.4 – Exemples divers de produits industriels comprenant des structures minces circulaires ou approchées : (a) haut-parleur « boomer », (b) hélicoptère Robinson R44, (c) schéma de micro-systèmes électromécaniques.

naissance biomoléculaire actuellement en développement (cf. figure 1.4) utilise les vibrations de petites plaques circulaires pour mesurer des quantités moléculaires [82].

## 1.2 Cadre de l'étude

### 1.2.1 Vibrations non-linéaires de coques

Dans le cas de la cymbale, l'aspect très simple de la structure contraste avec les phénomènes très complexes qu'elle engendre. En régime normal de jeu, les amplitudes de vibration sont grandes devant l'épaisseur de la structure. La non-linéarité géométrique ne peut plus être négligée [56, 77, 105] et c'est cette non-linéarité qui est prise en compte dans ces travaux. Lors d'études expérimentales, plusieurs phénomènes typiquement non-linéaires ont pu être mis en évidence tels que des phénomènes de saut, d'hystérésis, de dépendance de la fréquence de résonance avec l'amplitude de vibration, de couplages internes, synonymes d'échanges d'énergie entre les modes et un comportement chaotique [106, 91, 94].

Le but poursuivi est la modélisation des vibrations de ces structures afin de comprendre et de prédire les comportements observés dans les différents régimes de vibration.

### 1.2.2 Modèles récents

La première approximation faite était de considérer les cymbales comme des plaques circulaires minces à bord libre. Les précédentes recherches [98] avaient notamment conduit au développement analytique des modes propres de cette structure. Quelques uns de ces modes sont d'emblée présentés figure 1.5, ce qui nous donne l'occasion d'introduire une nomenclature qui sera utilisée tout au long de cette monographie. Les modes sont ainsi nommés  $(k, n)$ ,  $k$  pour le nombre de diamètres nodaux et  $n$  pour le nombre de cercles nodaux. Particulièrement, on distingue les modes axisymétriques, à symétrie de révolution, des modes asymétriques.

Les développements avaient pu être poussés jusqu'au cas de la coque sphérique mince [80, 85]. Le modèle dynamique, dérivé des équations de plaque de von Kármán, a été résolu spatialement

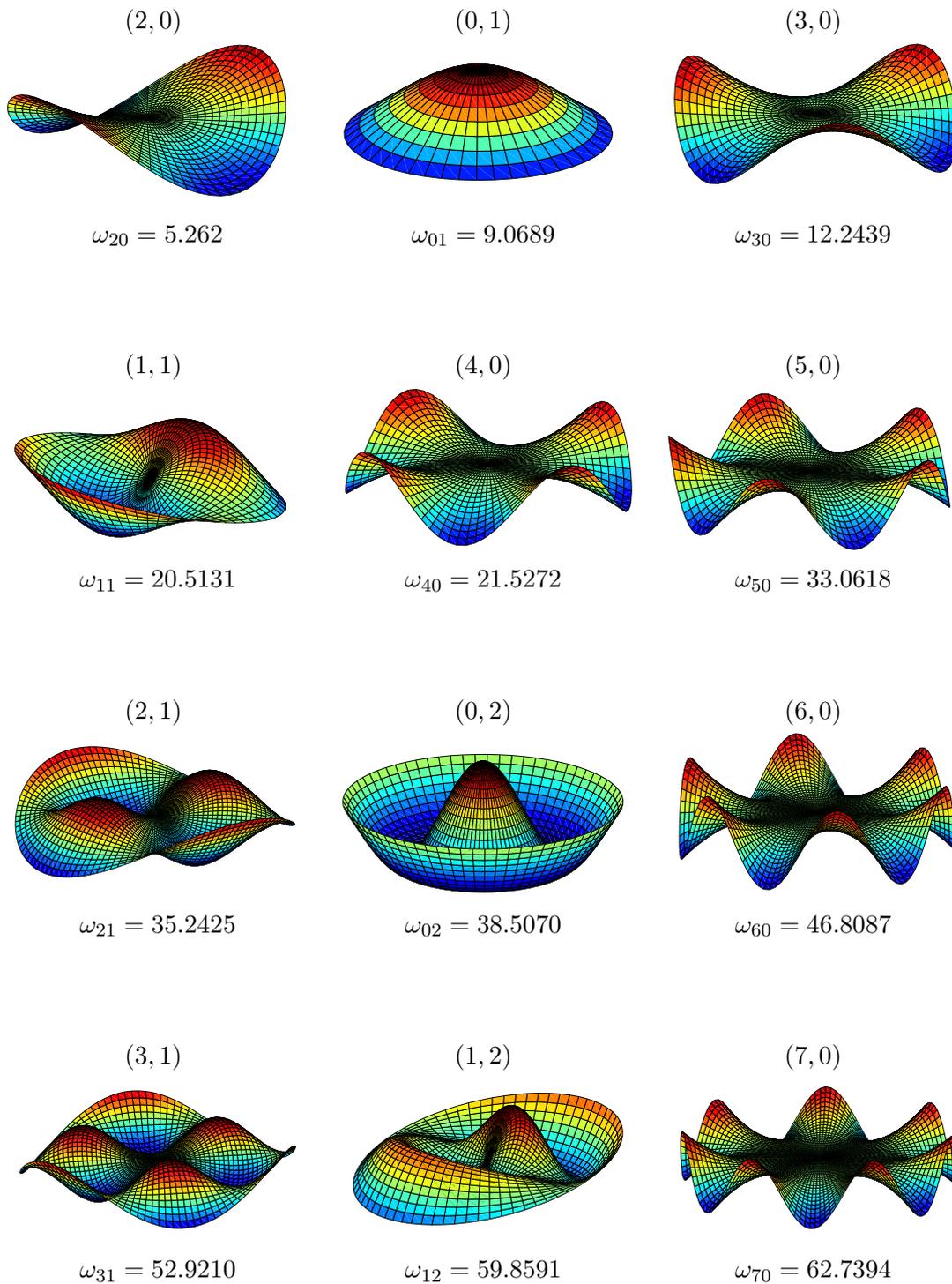


FIGURE 1.5 – Déformées modales et pulsations propres adimensionnées  $\omega_{kn}$  correspondant aux 12 premiers modes propres transverses  $\phi_{(k,n)}$  d'une plaque circulaire mince ( $\nu = 0.33$ ). La nomenclature des modes adoptée dans le présent document est illustrée ici; le mode propre appelé  $(k, n)$  possède  $k$  diamètres nodaux et  $n$  cercles nodaux.

de manière à pouvoir écrire le problème sous forme modale [80, 78, 56]. Dans le domaine non-linéaire, la réduction de modèle ainsi que l'emploi du formalisme des modes non-linéaires [100, 95] ont pu établir des prédictions théoriques sur les échanges d'énergie intermodaux et sur la tendance de non-linéarité de certains modes [86]. Une fois comparées aux résultats expérimentaux décrits plus en détail par la suite, ces prédictions ont révélé qu'un facteur important faisait défaut aux modèles élaborés : les imperfections géométriques.

### 1.2.3 Modèle étendu et organisation du manuscrit

Divers exemples donnés au prochain chapitre de ce manuscrit soulignent l'importance de l'effet des imperfections géométriques, ou défauts de forme, sur les caractéristiques vibratoires.

Le premier objectif de cette thèse était donc l'élaboration d'un modèle étendu incluant ce paramètre. Cette démarche, ainsi que les résultats originaux associés constituent la première partie du présent document. En premier lieu, le chapitre 2 rappelle brièvement le modèle de vibration de plaque parfaite. Les modes propres de plaques circulaires minces à bord libre ainsi introduits servent à discrétiser les équations locales de la plaque imparfaite, selon la méthode de Galerkin. Les nombreuses questions de précision numérique, soulevées dès le début de ces travaux nous ont rapidement conduit à envisager des études de convergence systématiques sur tous les paramètres impliqués dans les étapes de prise en compte analytique du défaut tant la validité des résultats obtenus y était sensible, voire extrêmement sensible pour certains. La précision de ces paramètres de calcul, à l'image de la minutie des défauts de forme expérimentaux à traiter, presque imperceptibles à l'œil nu, a exigé l'optimisation de nos programmes. L'expression des nouveaux coefficients dynamiques est donc explicitée et quelques propriétés remarquables sur ces coefficients (expressions simples, symétries) et sur la projection du défaut (invariance par rotation) sont en particulier développées.

Le chapitre 4 est consacré à l'emploi du modèle élaboré sur des défauts de formes typiques. Tout d'abord, le cas de la coque sphérique sert de validation au modèle de plaque imparfaite. Les termes des modèles sont comparés, ainsi que les résultats, ce qui permet de dégager les limites de l'approximation de faible courbure faite dans le modèle de coque. Ensuite, des défauts de formes simples, axisymétriques et asymétriques sont étudiés. La comparaison avec un code de calcul par éléments finis permet de tester les résultats dans le domaine linéaire. Des nouveaux résultats dans le domaine non-linéaire sont établis.

Les cas de géométries réelles, correspondant à des coques de laboratoire, sont regardés chapitre 5. Une étude complète est proposée, comprenant la mesure de la géométrie tridimensionnelle des coques et des tests de convergence selon plusieurs paramètres ainsi qu'une confrontation avec des résultats expérimentaux provenant d'une analyse modale ou d'expériences sur le comportement non-linéaire.

Une expérience pratique, permettant de questionner de manière reproductible les phénomènes non-linéaires produits par les coques circulaires, consiste à effectuer un forçage harmonique de la coque [45, 94]. L'avantage est de pouvoir contrôler les modes de vibrations en jeu et de pouvoir analyser le mouvement en régime permanent. Lorsqu'on augmente progressivement l'amplitude de forçage, la dynamique montre alors une succession de deux bifurcations [83]. La première marque la fin d'un régime uni-modale et entame un régime quasi-périodique ; la seconde aboutit à un comportement chaotique. La simulation numérique par différences finies de cette expérience constitue le deuxième objectif poursuivi pendant la thèse et fait l'objet de la seconde partie du manuscrit.

La méthode envisagée repose sur les résultats obtenus en première partie. C'est donc le système d'équations modales décrivant la dynamique de la plaque imparfaite qu'il est question d'intégrer. Un descriptif des résultats expérimentaux et des difficultés numériques inhérentes au système et à l'expérience que l'on veut reproduire est donné chapitre 6.

Après avoir dressé un panorama des schémas numériques classiques et de leurs principales propriétés chapitre 7, nous nous penchons plus spécifiquement sur des schémas conservant certaines propriétés spécifiques au système Hamiltonien que l'on discrétise. Le chapitre 8 est dédié au rappel de quelques propriétés utiles de tels systèmes et à l'élaboration d'un schéma aux différences finies préservant l'énergie d'un oscillateur de Duffing.

Un éventail d'expériences numériques sur l'oscillateur de Duffing, à forçage faible puis élevé met en évidence des différences notables entre les dynamiques simulées. Ce résultat original est commenté chapitre 9.

L'extension de la propriété de conservation à un système à  $N$  degrés de liberté couplés est ensuite détaillée puis testée chapitre 10. Les premiers résultats sont établis sur un forçage impulsionnel, n'ayant eu la possibilité de pousser plus en avant l'étude numérique.

*Première partie*

---

Effet des imperfections  
géométriques sur les vibrations  
non-linéaires de plaques  
circulaires minces

---



# CHAPITRE 2

---

---

## IMPERFECTIONS GÉOMÉTRIQUES

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>2.2</b>	<b>Expérience sur une coque de laboratoire</b>	<b>11</b>
<b>2.3</b>	<b>Comparaison au modèle de coque sphérique mince</b>	<b>14</b>
2.3.1	Comparaison sur les modes propres	14
2.3.2	Quelques éléments de comparaison sur des coefficients non-linéaires	14
<b>2.4</b>	<b>Autres exemples de la littérature</b>	<b>15</b>

---

### 2.1 Introduction

Ce chapitre propose de reprendre les principales observations désignant les imperfections géométriques comme un facteur essentiel à intégrer dans les modèles de vibration, d'abord sur l'exemple d'une coque de laboratoire puis à travers quelques exemples tirés de la littérature.

### 2.2 Expérience sur une coque de laboratoire

Les précédents travaux à l'Unité de Mécanique incluent une campagne expérimentale sur les vibrations de coques sphériques minces. À cette fin, une série de coques sphériques de faible courbure a été spécialement usinée. Les caractéristiques géométriques retenues couvrent un panel représentatif de configurations adaptables au modèle de coque sphérique à savoir, 3 courbures différentes et 2 épaisseurs. Ces caractéristiques sont rapportées en détail dans le tableau 2.1. Elles incluent, pour chaque coque, le rayon de courbure stipulé dans le cahier des charges  $R_{th}$  différent de celui  $R_{opt}$  correspondant à l'arc de cercle approchant de manière optimale les cotes d'un profil mesuré au comparateur. Figurent également dans le tableau leurs dénominations adoptées dans le reste du texte : coque peu courbée, coque épaisse, coque de référence (celle sur laquelle on s'attardera dans nos comparaisons et nos développements) et coque fortement courbée.

Les résultats expérimentaux livrés dans la suite de ce paragraphe proviennent de l'analyse modale expérimentale très complète menée antérieurement et que l'on peut trouver dans [80] et [86]. Seuls les résultats essentiels, et qui serviront pour la suite, sont présentés dans ce manuscrit.

Les différences maximales observées entre le profil mesuré et le profil d'une coque sphérique de rayon de courbure optimisé sont de 1.17 mm pour la coque 1, de 0.51 mm pour la coque

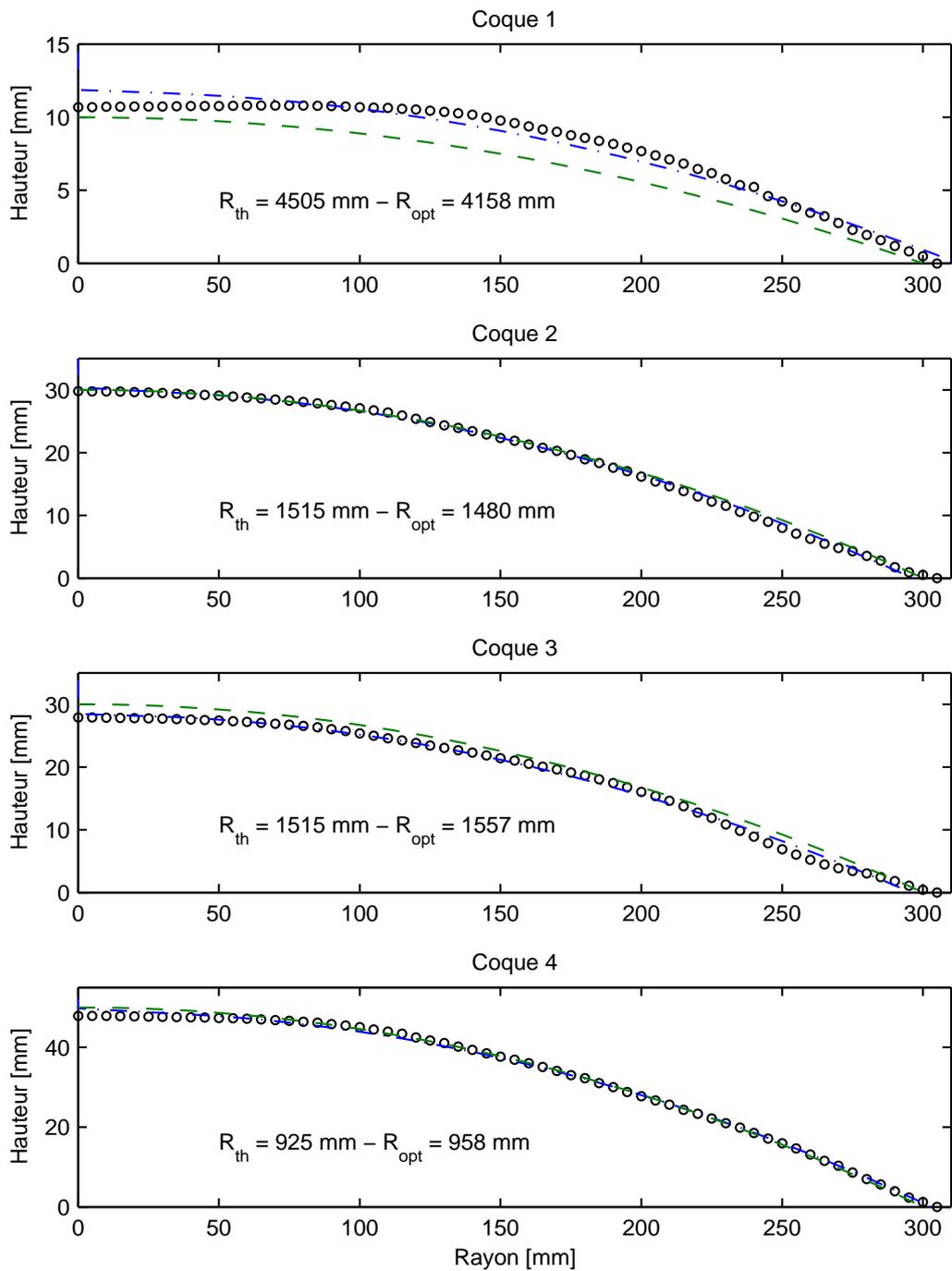


FIGURE 2.1 – Profils des 4 coques de laboratoire présentées.  $R_{th}$  est le rayon fourni par le constructeur et  $R_{opt}$  celui mesuré grâce à arc de cercle passant au plus près des points de mesure (o).

coque n°	Dénomination	$h$ [mm]	$a$ [mm]	$R_{th}$ [mm]	$R_{opt}$ [mm]
1	coque peu courbée	1	300	4505	4158
2	coque épaisse	1.5	300	1515	1480
3	coque de référence	1	300	1515	1557
4	coque fortement courbée	1	300	925	958

TABLE 2.1 – Dénominations et données géométriques des coques du laboratoire.

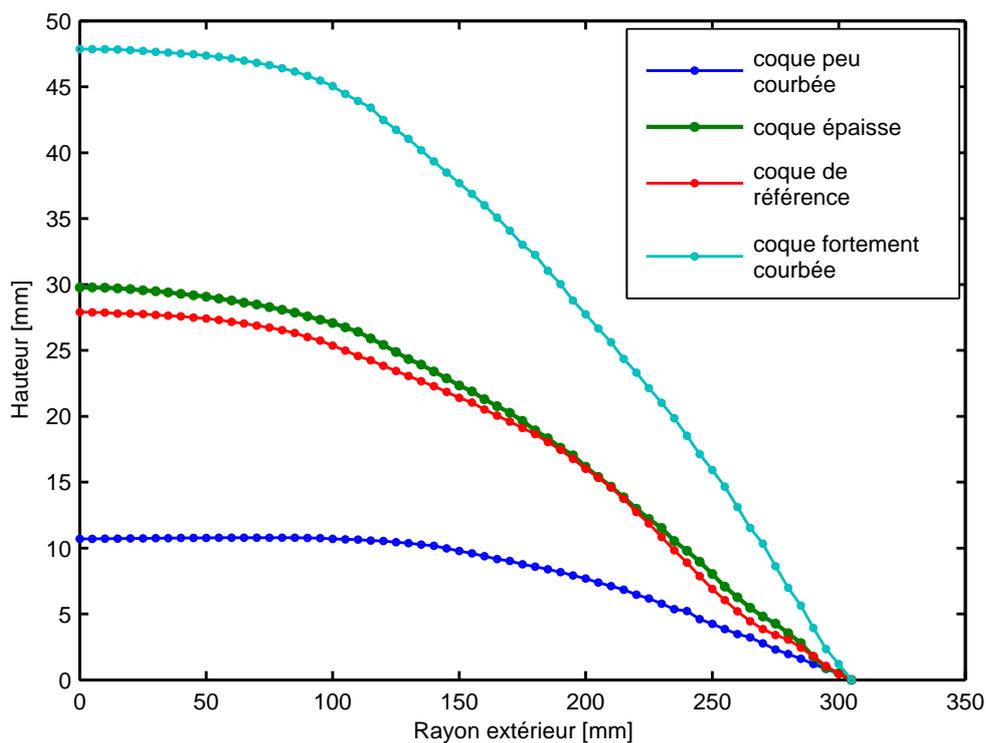


FIGURE 2.2 – Profils des 4 coques de laboratoire ramenés sur une même échelle.

2, de 1.21 mm pour la coque 3 et de 1.91 mm pour la coque 4. Ces différences, de l'ordre de l'épaisseur, semblent petites comparées aux autres dimensions géométriques de la structure étudiée. Cependant elles ont une influence quantitative et qualitative sur la dynamique plus grande qu'on ne pourrait le soupçonner.

## 2.3 Comparaison au modèle de coque sphérique mince

Les résultats présentés dans les paragraphes suivants concernent en particulier la coque de référence. Cet exemple reflète les raisons qui nous ont motivés à nous intéresser à l'effet des imperfections géométriques sur la dynamique des plaques et coques sphériques.

### 2.3.1 Comparaison sur les modes propres

Dans le domaine linéaire, lorsqu'on calcule les fréquences propres théoriques des coques sphériques équivalentes aux coques de laboratoire grâce au modèle de coque sphérique développé par O. Thomas [80, 85], et qu'on les compare aux fréquences mesurées, des erreurs importantes apparaissent. Le tableau 2.2 rassemble les fréquences propres de quelques modes asymétriques et axisymétriques mesurées sur la coque de référence et calculées grâce au-dit modèle. Si les fréquences propres des modes asymétriques semblent être correctement prédites, l'erreur sur les modes axisymétriques est parfois très grande. Elle atteint 70% pour le mode (0,1) par exemple. On remarque par ailleurs la scission des fréquences propres des modes asymétriques compagnons. La coque n'est en effet pas réellement à symétrie de révolution et les valeurs propres de multiplicité 2, issues du problème spatial, se trouvent séparées en deux valeurs propres distinctes, ce que ne décèle pas le modèle de coque sphérique dans lequel le problème spatial respecte la symétrie de révolution. Nous reviendrons par la suite en détail sur l'obtention des valeurs dimensionnées des fréquences issues du modèle théorique. Les résultats sont ici brièvement présentés pour conclure sur l'intérêt d'un modèle de plaque imparfaite.

Toujours dans le domaine linéaire, la figure 2.3 présente les déformées mesurées des modes (0,1) et (0,2) de la coque de référence en comparaison des déformées théoriques calculées à partir du modèle de coque sphérique. La différence entre expérience et théorie y est notable. En effet, dans le cas des déformées mesurées, l'amplitude de la déformée se concentre dans la région centrale de la coque, contrairement à ce que prédit le modèle théorique.

### 2.3.2 Quelques éléments de comparaison sur des coefficients non-linéaires

Dans le domaine non-linéaire, on choisit de ne présenter pour le moment que quelques coefficients non-linéaires. Les effets non-linéaires qui en découlent seront détaillés dans la partie suivante. Les développements expérimentaux qui permettent de les déduire, décrits dans [86], seront également rappelés dans la partie suivante. Néanmoins, on peut noter dès à présent que les comportements non-linéaires typiques observés tels que les comportements raidissants ou assouplissants, les échanges d'énergie intermodaux, sont directement déduits des valeurs de ces coefficients. Les zones de stabilité et de couplage des coordonnées modales y sont d'ailleurs extrêmement sensibles. À titre d'exemple le tableau 2.3 rapporte quelques coefficients non-linéaires mesurés et calculés à partir du modèle de coque sphérique. Sans rentrer dans les détails, on peut noter un facteur multiplicatif entre les ordres de grandeur de l'expérience et de la théorie allant

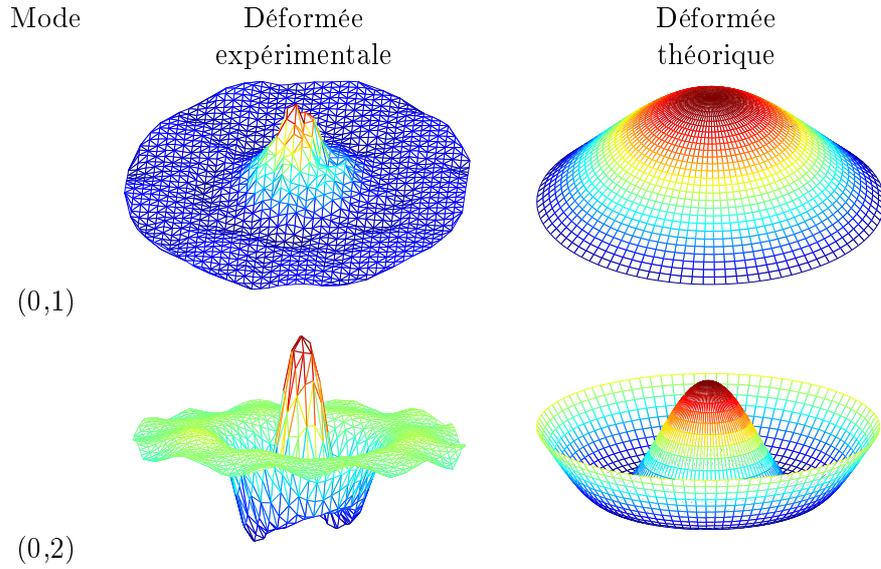


FIGURE 2.3 – Déformées expérimentales des modes  $(0,1)$ ,  $(0,2)$  et calculées d'après le modèle de coque sphérique mince.

de 10 jusqu'à 30.

Mode	(2,0)	(3,0)	(4,0)	(5,0)	(6,0)	(7,0)	(8,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
$F_{exp}$ (Hz)	13.75	34	57.25	83	110	141	172.25	225	354	444.25	555.5
	17.5	35.5	58.25	83.75	111	141.5	176				
$F_{th}$ (Hz)	11.02	26.37	46.90	72.17	101.77	135.45	173.01	386.03	393.11	423.17	495.65

TABLE 2.2 – Valeurs expérimentales et théoriques des fréquences propres de la coque de référence.  $F_{exp}$  sont les fréquences mesurées expérimentalement et  $F_{th}$  sont les fréquences théoriques données par le modèle de coque sphérique parfaite de [86]; les fréquences propres des modes compagnons sont différentes à cause de la partie asymétrique de la géométrie de la coque.

## 2.4 Autres exemples de la littérature

Entre les années 1960 et 1980, de nombreuses études expérimentales sur les coques minces ont désigné les défauts de forme comme étant la cause des divergences entre prédiction à partir d'une forme idéale et mesures sur une structure inévitablement imparfaite [20, 15, 16, 88]. En raison de leur importance dans le génie civil ainsi que dans d'autres domaines de l'ingénierie, les coques cylindriques ont été étudiées en priorité [42, 19, 22]. Les premières études s'astreignaient à des chargements axisymétriques [42, 65]. Puis furent étudiées les imperfections asymétriques [66]. Aujourd'hui, nous trouvons dans la littérature nombre de travaux sur l'effet des imperfections géométriques sur les vibrations à grande amplitude de ces coques, tant sur le plan expérimental que grâce à des modèles théoriques. Nous en devons une bonne part à Amabili [2, 6, 5]. Du fait de leur utilisation courante, les plaques rectangulaires ont également retenu une grande atten-

	Expérience	Théorie
$\varepsilon.\alpha_1$	476	19 057
$\varepsilon.\alpha_2$	455	19 057
$\varepsilon.\alpha_3$	635	8 766
$\varepsilon.\alpha_4$	667	8 766

TABLE 2.3 – Valeurs expérimentales et théoriques de quelques coefficients non-linéaires.

tion dans ce domaine. Ainsi, Hui et Leissa ont utilisé un développement de Galerkin tronqué au premier mode pour regarder l'effet d'un défaut simple sur les fréquences propres [38]. Les études sur les coques cylindriques et les plaques rectangulaires attestent de la grande influence d'un défaut de forme sur les modes propres. Les études expérimentales menées sur des structures réelles montrent que de faibles défauts, de l'ordre de l'épaisseur conditionnent inévitablement et drastiquement les déformées modales et les fréquences propres associées [4, 3, 44]

Dans le domaine non-linéaire, Lin et Chen [46] puis Ostiguy et Sassi [59] montrent que la présence d'imperfections géométriques dans les plaques rectangulaires peut détourner leur comportement classiquement raidissant vers un comportement assouplissant.

Le cas de plaques circulaires minces fut quant à lui moins étudié [24, 30, 77, 89]. Des résultats sur la tendance de non-linéarité ont d'abord été établis par Hui mais avec l'hypothèse trop restrictive d'une dynamique à un seul degré de liberté [37]. Yamaki poussa ensuite l'étude de la plaque encastrée à une dynamique développée sur 3 modes en prenant en compte un défaut axisymétrique [108, 109]. Finalement, Touzé et Thomas développèrent les cas de la plaque circulaire mince à bord libre puis de la coque sphérique mince à bord libre [93, 97]. Un nombre suffisant de modes était conservé dans la dynamique, permettant notamment de mieux prédire le comportement non-linéaire de la structure. Le modèle de coque sphérique mince n'inclut pas à proprement parler de défaut de forme. Cependant, comme nous le verrons par la suite, cette géométrie peut être vue comme une plaque circulaire mince comportant une imperfection de la forme d'une calotte sphérique. Les résultats issus de ce modèle montrent ainsi l'effet de la courbure sur les modes propres d'une part puis sur le calcul de la tendance de non-linéarité et sur les échanges d'énergie d'autre part. La tendance de non-linéarité de certains modes devient assouplissante, ce à partir de légères courbures. La symétrie de la structure, brisée à cause de la courbure, permet des relations de couplages supplémentaires entre les modes, complexifiant ainsi le spectre de réponse de la coque en régime de vibrations à grande amplitude.

# CHAPITRE 3

---

## MODÉLISATION DE LA DYNAMIQUE D'UNE PLAQUE CIRCULAIRE MINCE IMPARFAITE

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Équations non-linéaires des plaques circulaires minces parfaite- ment planes</b>	<b>19</b>
3.1.1	Hypothèses	19
3.1.2	Équations locales	19
3.1.3	Conditions aux limites	20
3.1.4	Adimensionnement	20
3.1.5	Projection modale	22
<b>3.2</b>	<b>Équations non-linéaires des plaques circulaires minces imparfaites</b>	<b>23</b>
3.2.1	Définition du défaut de forme	23
3.2.2	Ajout d'un défaut dans les équations locales du cas parfait	24
3.2.3	Projection modale	26
3.2.4	Diagonalisation du problème	32
3.2.5	Discussion et introduction aux études de convergence	33

---

Les principales grandeurs introduites dans ce chapitre sont répertoriées dans le tableau suivant :

Notation	Signification	Définition
$a$	rayon extérieur	§ 3.1
$h$	épaisseur	§ 3.1
$\rho$	masse volumique	§ 3.1
$E$	module d'Young	§ 3.1
$\nu$	coefficient de Poisson	§ 3.1
$D$	rigidité en flexion	Eq. (3.2)
$F$	fonction de force	Eq. (3.6)
$\chi$	paramètre de courbure du défaut sphérique	Eq. (4.7)
$\varepsilon$	facteur d'adimensionnement des termes nonlinéaires	Eq. (3.10)
$w(r, \theta, t)$	déplacement transverse	§ 3.1
$w_0(r, \theta)$	imperfection géométrique	Eq. (3.27)
$a_p$	projection du défaut sur le mode de plaque parfaite $p$	Eq. (3.35)
$q_p(t)$	coordonnée modale dans la base des modes de plaque parfaite	Eq. (3.23)
$X_p(t)$	coordonnée modale dans la base des modes de plaque imparfaite	Eq. (3.32)
$w_{mp}$	hauteur de l'imperfection	Fig. 4.11a
$G_p$	forces extérieures projetées sur le mode $p$	Eq. (3.32)
$\mu_p$	amortissement modal adimensionné pour le mode de plaque parfaite $p$	Eq. (3.29)
$\zeta_p$	amortissement modal adimensionné pour le mode de plaque imparfaite $p$	Eq. (3.65)
$\omega_p$	pulsation propre adimensionnée du mode de plaque parfaite $p$	Eq. (3.23)
$\Omega_p$	pulsation propre adimensionnée du mode de plaque imparfaite $p$	Eq. (3.64)
$\Phi_p$	$p^{ième}$ mode propre transverse (plaque parfaite)	Eq. (3.19)
$\Psi_p$	$p^{ième}$ mode propre de membrane (plaque parfaite)	Eq. (3.21)
$\beta_{rs}^p$	coefficient quadratique écrit dans la base des modes propres de plaque parfaite	Eq. (3.32)
$\Gamma_{rsq}^p$	coefficient cubique écrit dans la base des modes propres de plaque parfaite	Eq. (3.32)
$g_{rs}^p$	coefficient quadratique écrit dans la base des modes propres de plaque imparfaite	Eq. (3.65)
$h_{rsq}^p$	coefficient cubique écrit dans la base des modes propres de plaque imparfaite	Eq. (3.65)
$N_F$	nombre de modes propres membranaires retenus dans les équations modales	Eq. (3.33b)
$N_0$	nombre de modes propres transverses retenus lors de la projection du défaut	Eq. (3.35)
$N_w$	dimension du système d'équations modales régissant le mouvement	Eq. (3.33a)

### 3.1 Équations non-linéaires des plaques circulaires minces parfaitement planes

Nous considérons une plaque mince de diamètre  $2a$ , d'épaisseur  $h$  constituée d'un matériau homogène et isotrope de densité  $\rho$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et de module d'Young  $E$ . Les équations du mouvement de plaques circulaires minces vibrant à grande amplitude adoptées sont connues comme les analogues dynamiques des équations de von Kármán. Le développement de ces équations peut être trouvé dans [79, 24, 98, 56]. On en rappelle néanmoins ici les principales articulations, afin d'établir un canevas d'équations dans lequel nous insérerons ensuite les développements analytiques découlant de l'ajout de l'imperfection.

#### 3.1.1 Hypothèses

Le modèle est établi sous les hypothèses suivantes :

- 1. La plaque est mince :  $h/a \ll 1$  ;
- 2. Les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love sont respectées : le cisaillement transverse est négligé et ainsi tout segment normal et droit avant déformation reste normal et droit après déformation ;
- 3. Les rotations sont faibles (sinus et cosinus des rotations de tout segment de la plaque sont linéarisés au premier ordre) ;
- 4. Le déplacement transverse  $w$  est de l'ordre de l'épaisseur  $h$  ;
- 5. Le déplacement longitudinal est d'un ordre inférieur au déplacement transverse ;
- 6. Le comportement du matériau est élastique linéaire ;
- 7. Les termes d'inertie longitudinale sont négligés, ainsi que l'inertie de rotation.

#### 3.1.2 Équations locales

Les équations dynamiques locales pour le déplacement transverse  $w$ , relatif au plan médian de la plaque plane circulaire s'écrivent, en un point de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ,  $r \in [0, a]$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  :

$$D\Delta\Delta w + \rho h \ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + p, \quad (3.1a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}L(w, w), \quad (3.1b)$$

où  $D$  est la rigidité en flexion :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (3.2)$$

L'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques est donnée par :

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_{,rr} + \frac{1}{r}(\cdot)_{,r} + \frac{1}{r^2}(\cdot)_{,\theta\theta} \quad (3.3)$$

et  $L$  est l'opérateur quadratique bilinéaire :

$$L(w, F) = w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right). \quad (3.4)$$

$c$  est le coefficient d'amortissement et  $p$  la pression locale normale appliquée à la plaque ;  $\ddot{w}$  et  $w_{,\alpha\beta}$  sont respectivement les dérivées secondes partielles de  $w$  par rapport au temps et aux

coordonnées spatiales. On note que l'opérateur  $L$  est symétrique, c'est à dire que pour toute fonction  $f$  et  $g$ , définie sur  $[0, a] \times [0, 2\pi]$  et de classe  $\mathcal{L}^2$  :

$$L(f, g) = L(g, f). \quad (3.5)$$

La fonction de force  $F$  décrivant les efforts de membrane (ou fonction d'Airy) est définie par :

$$N_r = \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\theta\theta}, \quad N_\theta = F_{,rr}, \quad N_{r\theta} = N_{\theta r} = \frac{1}{r^2}F_{,\theta} - \frac{1}{r}F_{,r\theta}, \quad (3.6)$$

où  $N_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta \in \{r, \theta\}$  sont les efforts de membrane par unité de surface en coordonnées polaires, issues des composantes du second tenseur lagrangien des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\pi_{\alpha\beta}$ , appelé aussi tenseur des contraintes de Kirchhoff-Trefftz :

$$[N_r, N_{r\theta}, N_\theta] = \int_{-h/2}^{h/2} [\pi_r, \pi_{r\theta}, \pi_\theta] dz. \quad (3.7)$$

L'Eq.(3.1b) provient de l'équation de compatibilité qui lie de manière non-linéaire le déplacement transverse  $w$  et l'élongation du plan médian de la plaque et introduit ainsi la fonction de force  $F$ . C'est précisément de ce couplage que naîtra le terme cubique puis, lors de l'introduction d'un défaut, le terme quadratique.

### 3.1.3 Conditions aux limites

Notre étude se restreint au problème de vibration en bord libre. On impose ainsi aux efforts extérieurs d'être nuls sur le bord de la plaque. Ainsi, pour tout  $t$  et  $\theta \in [0; 2\pi]$ , il vient :

$$F \text{ et } w \text{ sont bornés} \quad \text{en } r = 0, \quad (3.8a)$$

$$F_{,r} + \frac{1}{a}F_{,\theta\theta} = 0, \quad F_{,r\theta} + \frac{1}{a}F_{,\theta} = 0, \quad \text{en } r = a, \quad (3.8b)$$

$$w_{,rr} + \frac{\nu}{a}w_{,r} + \frac{\nu}{a^2}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = a, \quad (3.8c)$$

$$w_{,rrr} + \frac{1}{a}w_{,rr} - \frac{1}{a^2}w_{,r} + \frac{2-\nu}{a^2}w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{a^3}w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = a. \quad (3.8d)$$

Ces conditions aux limites sont valables pour la coque sphérique à bord libre ainsi que pour la plaque imparfaite à bord libre.

### 3.1.4 Adimensionnement

Les précédentes études [84, 85] faisaient état de plusieurs adimensionnements possibles. Le mouvement transverse pouvait être adimensionné selon plusieurs facteurs,  $h$ ,  $h^2/a$ ,  $h^3/a^2$ . Le choix de cet adimensionnement était basé sur l'ordre de grandeur des termes non-linéaires adimensionnés. En effet, lors de l'étude de la réduction du modèle et plus particulièrement lors de l'application de la méthode perturbative des échelles multiples, il semblait important d'obtenir des termes quadratiques et cubiques d'un ordre inférieur aux termes linéaires. Cette hypothèse n'a en fait guère d'importance dans l'application de la méthode [55, 56]. De fait l'adimensionnement le plus simple, en  $h$ , est donc adopté pour la suite :

$$w = h\bar{w}. \quad (3.9)$$

La coordonnée radiale est également adimensionnée, selon  $a$  :

$$r = a\bar{r} \quad (3.10)$$

et les facteurs d'adimensionnement suivants sont introduits :

$$F = F_{adim}\bar{F}, \quad t = T_{adim}\bar{t}, \quad p = p_{adim}\bar{p}. \quad (3.11)$$

Selon les nouvelles variables  $\bar{r}$  et  $\bar{F}$ , les opérateurs linéaires de dérivation  $\Delta(\cdot)$  et  $L(\cdot, \cdot)$  deviennent :

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{a^2}\bar{\Delta}(\cdot) \quad (3.12)$$

et

$$L(\bar{w}, \bar{F}) = \frac{1}{a^4}\bar{L}(\bar{w}, \bar{F}). \quad (3.13)$$

Les facteurs adimensionnés peuvent être alors définis :

$$F_{adim} = Eh^3, \quad T_{adim} = \sqrt{\frac{\rho ha^4}{D}}, \quad \varepsilon = \frac{Eh^3}{D} = 12(1 - \nu^2), \quad (3.14a)$$

$$\mu = \frac{a^4}{Eh^3}c, \quad p_{adim} = \frac{h^4E}{a^4}. \quad (3.14b)$$

Les équations (3.1) deviennent alors :

$$\frac{Dh}{a^4}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{w} + \frac{\rho h^2}{T_0^2}\ddot{\bar{w}} = \frac{hF_{adim}}{a^4}\bar{L}(\bar{w}, \bar{F}) - ch\dot{\bar{w}} + p_{adim}\bar{p}, \quad (3.15a)$$

$$\frac{F_{adim}}{a^4}\bar{\Delta}\bar{\Delta}\bar{F} = -\frac{Eh}{2}\left(\frac{h^2}{a^4}\bar{L}(\bar{w}, \bar{w})\right). \quad (3.15b)$$

En choisissant d'ôter la notation  $(\bar{\cdot})$  pour plus de clarté, les équations du mouvement de la plaque parfaite s'écrivent de manière adimensionnée :

$$\Delta\Delta w + \ddot{w} = \varepsilon[L(w, F) - 2\mu\dot{w} + p], \quad (3.16a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{1}{2}L(w, w). \quad (3.16b)$$

Par ailleurs les conditions aux limites (3.8) s'écrivent alors :

$$F \text{ et } w \text{ sont bornés} \quad \text{en } r = 0, \quad (3.17a)$$

$$F_{,r} + F_{,\theta\theta} = 0, \quad F_{,r\theta} + F_{,\theta} = 0, \quad \text{en } r = 1, \quad (3.17b)$$

$$w_{,rr} + \nu w_{,r} + \nu w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = 1, \quad (3.17c)$$

$$w_{,rrr} + w_{,rr} - \frac{1}{a^2}w_{,r} + (2 - \nu)w_{,r\theta\theta} - (3 - \nu)w_{,\theta\theta} = 0, \quad \text{en } r = 1. \quad (3.17d)$$

### 3.1.5 Projection modale

La méthode la plus largement utilisée pour résoudre analytiquement les problèmes de vibration est de discrétiser les équations locales du mouvement sur une base de fonctions (méthode de Galerkin). Une application pertinente de cette méthode consiste donc à projeter les équations dynamiques sur la base formée par les modes propres du problème linéarisé associé [56, 47]. Le problème temporel est alors scindé du problème spatial. Il en résulte un système constitué d'une infinité d'équations différentielles du second ordre, non-linéaires et couplées permettant de résoudre les évolutions temporelles de chacune des coordonnées modales.

Les problèmes de plaque puis de coque ont été traités en détail [79, 99, 85, 80]. Le problème spatial peut être résolu analytiquement dans les cas de géométries simples et de conditions aux limites classiques, telles que la plaque rectangulaire simplement supportée, la plaque circulaire en condition de bord libre, appui simple, bord encastré, etc.

Les développements de ce paragraphe concernent les équations modales du mouvement de la plaque circulaire mince à bord libre et sont issus de [99, 79]. On y trouve également le détail du calcul des modes propres, lui-même inspiré des travaux de [48, 31].

Supposant que le déplacement transverse  $w(r, \theta, t)$  peut être écrit comme le produit d'une fonction spatiale et d'une fonction temporelle et que le comportement non-linéaire du mouvement est porté par la partie temporelle, nous pouvons écrire :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \Phi_p(r, \theta) q_p(t) \quad (3.18)$$

où  $q_p(t)$  est l'amplitude temporelle et où  $\Phi_p(r, \theta)$  est le mode propre linéaire solution du problème spatial associé à

$$\Delta \Delta \Phi_p - \omega_p^2 \Phi_p = 0 \quad (3.19)$$

et aux conditions limites (3.17a,c,d) .

De la même manière, le fonction de force  $F(r, \theta, t)$  peut être écrite sous la forme :

$$F(r, \theta, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \Psi_s(r, \theta) \eta_s(t) \quad (3.20)$$

où  $\eta_s$  est l'inconnu temporelle et où  $\Psi_p(r, \theta)$  est choisie comme la solution de

$$\Delta \Delta \Psi(r, \theta) = \xi^4 \Psi(r, \theta) \quad \text{avec } (\xi \text{ réel}) \quad (3.21)$$

et des conditions aux limites (3.17a-b). De fait, les fonctions  $\Psi_s$  montrent la même dépendance spatiale que les modes propres linéaires d'une plaque circulaire encastrée au bord.

On introduit le produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \iint_S f g \, dS \quad (3.22)$$

valable pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  définies en tout point du domaine  $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$ .

Après avoir substitué (3.18) et (3.20) dans (3.16), et projeté le résultat par (3.22) sur le mode  $\Phi_\alpha$ , nous obtenons les équations modales de la plaque parfaite (3.23).

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t) = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \Gamma_{pqu}^\alpha q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_\alpha \dot{q}_\alpha(t) + Q_\alpha(t) \right] \quad (3.23)$$

avec

$$Q_\alpha = \frac{\iint_S p \Phi_\alpha dS}{\iint_S \Phi_\alpha^2 dS}, \quad (3.24a)$$

$$\omega_\alpha^2 = \frac{\iint_S \Phi_\alpha \Delta \Delta \Phi_\alpha dS}{\iint_S \Phi_\alpha^2 dS} \quad \text{et} \quad (3.24b)$$

$$\Gamma_{upq}^\alpha = -\frac{1}{2} \sum_{b=1}^{\infty} \frac{\iint_S \Phi_\alpha L(\Phi_u, \Psi_b) dS \iint_S \Psi_b L(\Phi_p, \Phi_q) dS}{\xi_b^4 \iint_S \Phi_\alpha^2 dS \iint_S \Psi_b^2 dS}. \quad (3.24c)$$

La simplicité des termes ci-dessus présupposent bien entendu la propriété d'orthogonalité des modes propres transverses  $\Phi_p$  et encastrés  $\Psi_s$ . L'orthogonalité des modes propres de plaque à bord libre par rapport au produit scalaire utilisé est démontrée dans [79]. Le cas particulier des modes de solide rigide méritent cependant de s'y attarder. Ces modes de déplacements non-nuls mais auxquels aucune énergie n'est associée sont solutions du problème spatial. Ils font donc partie de la base des modes propres dynamiques du système et leurs fréquences propres correspondantes est 0. Dans le cas des plaques circulaires minces à bord libre, les modes propres de vibrations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Phi_{0n}(r, \theta) &= R_{0n}(r) & \text{pour } k &= 0, \\ \Phi_{kn1}(r, \theta) & \Big| = R_{kn}(r) & \cos k\theta & \text{pour } k > 0. \\ \Phi_{kn2}(r, \theta) & \Big| = R_{kn}(r) & \sin k\theta & \end{aligned} \quad (3.25)$$

Comme la géométrie du système étudié est à symétrie circulaire, les variables  $r$  et  $\theta$  peuvent être à nouveau séparées.  $R_{kn}(r)$  sont les composantes des déformées modales selon  $r$ . Ils sont solutions d'équations de Bessel ordinaires et modifiées non détaillées ici mais que l'on peut retrouver dans [53, 85, 79, 98]. On retrouve dans ces expressions les *configurations préférentielles* des modes asymétriques  $\Phi_{kn, k \neq 0}$ , l'une en *cosinus* et l'autre en *sinus*. Ce sont des modes propres dégénérés ; leurs valeurs propres possèdent une multiplicité égale à 2. On trouve parmi ces derniers le mode de solide rigide  $\Phi_{(0,0)}$  (le mode piston-plan), et les modes de solide rigide  $\Phi_{(1,0,c)}$  et  $\Phi_{(1,0,s)}$  (correspondant aux deux rotations, radiale et orthoradiale selon l'axe  $\theta = 0$ ). Leurs expressions sont :

$$\Phi_{00}(r, \theta) = 1, \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{(1,0,c)}(r, \theta) & \Big| = r & \cos(\theta) \\ \Phi_{(1,0,s)}(r, \theta) & \Big| = r & \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.26b)$$

## 3.2 Équations non-linéaires des plaques circulaires minces imparfaites

### 3.2.1 Définition du défaut de forme

La plaque imparfaite est vue comme une plaque parfaite dans laquelle est introduite une imperfection géométrique, appelée également défaut de forme. Ce dernier rend compte d'une

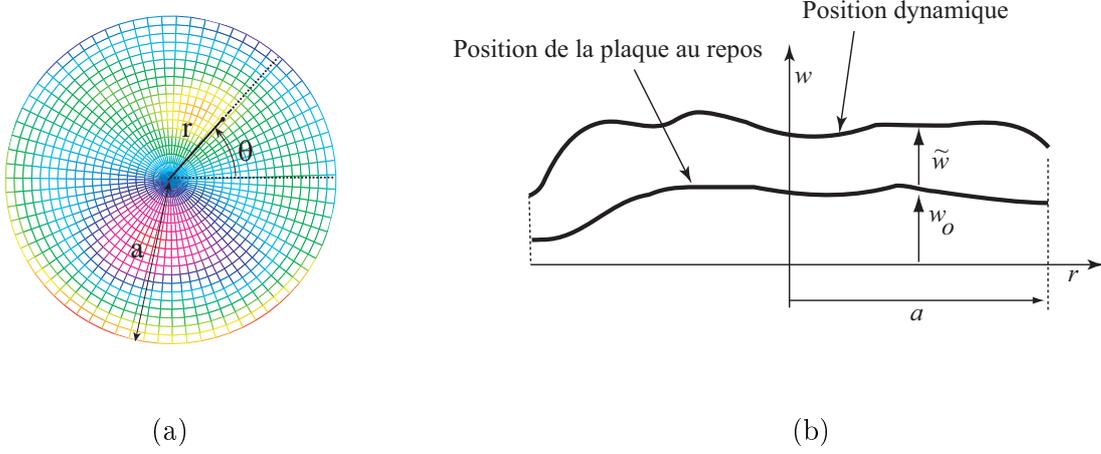


FIGURE 3.1 – *Definition de l'imperfection géométrique  $w_0$ . (a) Vue supérieure et coordonnées polaires. (b) Profil d'une coupe arbitraire.*

position géométrique de la plaque au repos différente du plan médian (figure 3.1). Notre but est d'insérer ce défaut de forme dans les développements analytiques rappelés précédemment. Pour ce faire, le déplacement transverse local de la structure imparfaite est décomposé selon une quantité fluctuante et une composante statique non nulle :

$$w(r, \theta, t) = \tilde{w}(r, \theta, t) + w_0(r, \theta). \quad (3.27)$$

La modification de l'état au repos de la structure impose une compensation statique des contraintes  $F$  et des forces appliquées  $p$  :

$$F(r, \theta, t) = \tilde{F}(r, \theta, t) + F_0(r, \theta), \quad (3.28a)$$

$$p(r, \theta, t) = \tilde{p}(r, \theta, t) + p_0(r, \theta). \quad (3.28b)$$

Ces termes sont ajoutés de manière artificielle afin de retrouver l'équilibre statique sous-jacent aux équations dynamiques (3.1) du cas parfait. En effet, nous voulons étudier ici l'effet d'un défaut géométrique initial, hors de toute précontrainte ou de force appliquée. Ces termes permettent l'équilibrage statique des équations de mouvement alors modifiées. Il conviendra d'ailleurs par la suite de faire abstraction des termes issus de la contrainte ajoutée pour ne s'intéresser qu'à l'effet de la composante géométrique.

### 3.2.2 Ajout d'un défaut dans les équations locales du cas parfait

En substituant (3.28a) et (3.28b) dans (3.1), on obtient :

$$D\Delta\Delta\tilde{w} + D \underbrace{\Delta\Delta w_0}_{T.C.} + \rho h \ddot{\tilde{w}} = L(\tilde{w}, \tilde{F}) + L(w_0, \tilde{F}) + \underbrace{L(\tilde{w}, F_0)}_{T.P.} + \underbrace{L(w_0, F_0)}_{T.C.} - c\dot{\tilde{w}} + \tilde{p} + \underbrace{p_0}_{T.C.}, \quad (3.29a)$$

$$\Delta\Delta\tilde{F} + \underbrace{\Delta\Delta F_0}_{T.C.} = -\frac{Eh}{2} [L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0) + \underbrace{L(w_0, w_0)}_{T.C.}]. \quad (3.29b)$$

### Équilibrage statique des nouvelles équations

L'équilibrage statique de (3.29) établit :

$$D\Delta\Delta w_0 = L(w_0, F_0) + p_0, \quad (3.30a)$$

$$\Delta\Delta F_0 = -\frac{Eh}{2}L(w_0, w_0). \quad (3.30b)$$

Exemptes des termes constants (T.C.) et également du terme non-linéaire issu de la précontrainte ajoutée (T.P.), les équations non-linéaires du mouvement (3.29) deviennent :

$$D\Delta\Delta\tilde{w} + \rho h\ddot{\tilde{w}} = L(\tilde{w}, \tilde{F}) + L(w_0, \tilde{F}) - c\dot{\tilde{w}} + \tilde{p}, \quad (3.31a)$$

$$\Delta\Delta\tilde{F} = -\frac{Eh}{2}[L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0)]. \quad (3.31b)$$

### Discussion sur l'apparition des nouveaux termes

L'inertie longitudinale étant négligée, la fonction de force  $\tilde{F}$  dépend du déplacement transverse selon  $\{\tilde{w}\}$  et  $\{\tilde{w}\}^2$ . En effet, l'opérateur  $L(\cdot, \cdot)$  étant bilinéaire, le terme  $L(w_0, \tilde{F})$  de (3.31a) crée un terme linéaire et un terme quadratique en  $\tilde{w}$ . Ainsi, la première partie du terme  $L(w_0, \tilde{F})$  de (3.31a) traduit le *couplage linéaire* entre le mouvement transverse et l'étirement membranaire résultant de la géométrie non plane du défaut (dépendance en  $w_0$ ). La seconde partie du terme  $L(w_0, \tilde{F})$  quant à lui, ainsi que le terme  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  rendent compte du *couplage non-linéaire* dû aux grandes elongations. Il comporte un terme quadratique issu à la fois de  $L(w_0, \tilde{F})$  et de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  et un terme cubique issu uniquement de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$ , indépendant du défaut  $w_0$ . Ce dernier est donc naturellement égal à celui de la plaque plane circulaire sans défaut. Par contre, le terme quadratique était auparavant absent des équations non-linéaires de plaque [98]. En effet, il a été montré dans [90, 107, 60, 77, 98] que les équations non-linéaires régissant la dynamique d'une structure symétrique présentent des termes non-linéaires seulement d'ordre impair. Les équations régissant les mouvements d'une plaque plane ne présentent d'ailleurs qu'un terme cubique alors que celles régissant les mouvements d'une coque présentent à la fois un terme cubique et quadratique. Ici, le défaut fait perdre à la plaque sa propriété de symétrie, d'où le terme quadratique supplémentaire, résultats également retrouvés dans [60, 62, 83].

### Conditions aux limites et adimensionnement

Les conditions aux limites de la plaque imparfaite à bord libre sont les mêmes que celles de la plaque parfaite à bord libre [98] de même que celles de la coque sphérique mince [80, 85]. Elles proviennent de l'absence de toute force externe sur le bord. Elles sont décrites par les équations (3.8).

De même que pour le cas de la plaque parfaite, on choisit d'adimensionner le mouvement transverse  $\tilde{w}$  et par conséquent le défaut  $w_0$  par l'épaisseur  $h$  de la plaque. Les facteurs d'adimensionnement (3.14) sont donc conservés. En omettant la notation  $(\tilde{\cdot})$ , les équations non-linéaires régissant le mouvement transverse de la plaque avec défaut deviennent :

$$\Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} = \varepsilon[L(\tilde{w}, \tilde{F}) + L(w_0, \tilde{F}) - 2\mu\dot{\tilde{w}} + \tilde{p}], \quad (3.32a)$$

$$\Delta\Delta\tilde{F} = -\frac{1}{2}[L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0)]. \quad (3.32b)$$

### 3.2.3 Projection modale

Afin de pousser au plus loin les développements analytiques, on se propose maintenant de projeter le défaut de forme sur les modes propres transverses de vibration de la structure parfaite dans laquelle il est introduit. Cette opération est rendue possible grâce aux propriétés de base des modes propres et est facilitée par la propriété d'orthogonalité. Comme souligné dans le paragraphe 3.1.5, il est important de noter ici que les modes de solide rigide font partie de la base des modes propres dynamiques de la structure parfaite. Lors de la projection du défaut de forme, la composante piston-plan traduit ainsi la position du centre de masse de la structure non parfaite.

L'objectif de ce paragraphe est d'écrire le système d'équations aux dérivées ordinaires non-linéaires et couplées de la structure imparfaite, de manière similaire aux équations (3.23). L'écriture numérique du système de dimension infinie passe de manière évidente par une troncature, que l'on effectue sur les modes transverses et membranaires :

$$\tilde{w}(t, r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_w} \tilde{q}_p(t) \Phi_p(r, \theta), \quad (3.33a)$$

$$\tilde{F}(t, r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_F} \tilde{\eta}_p(t) \Psi_p(r, \theta). \quad (3.33b)$$

Nous faisons en outre l'hypothèse que les fonctions  $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  et  $(\Psi_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  sont normalisées selon le produit scalaire (3.22), si bien que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\iint_S \Phi_p^2 dS = 1, \quad \iint_S \Psi_p^2 dS = 1. \quad (3.34)$$

### Projection du défaut sur les modes propres dynamiques

Le défaut est discrétisé sur la base tronquée à  $N_0$  des modes propres transverses de la plaque parfaite :

$$w_0 = \sum_{p=1}^{N_0} a_p \Phi_p(r, \theta). \quad (3.35)$$

D'après la propriété d'orthogonalité des modes propres, les amplitudes  $a_p$  des projetés du défaut sur les modes se déduisent par :

$$a_p = \iint_S w_0 \Phi_p dS. \quad (3.36)$$

### Projection du défaut sur les modes de solide rigide

Dans le cas particulier des modes de solide rigide évoqués précédemment,  $\Phi_{(0,0)}$  (3.26a),  $\Phi_{(1,0,c)}$  et  $\Phi_{(1,0,s)}$  (3.26b) qui une fois normalisés deviennent :

$$\Phi_{(0,0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad (3.37a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{(1,0,c)} \\ \Phi_{(1,0,s)} \end{array} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r \left| \begin{array}{l} \cos \theta \\ \sin \theta \end{array} \right. , \quad (3.37b)$$

les projetés modaux associés renseignent d'une part sur la position du centre de masse  $z_g$  et d'autre part sur les composantes angulaires  $\theta_t$  et  $\theta_r$  du plan médian de la structure imparfaite, ainsi :

$$z_g = a_{00} = \iint_S w_0 \Phi_{(0,0)} dS, \quad (3.38a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_t \\ \theta_r \end{array} \right| = \arctan \left| \begin{array}{l} a_{10c} \\ a_{10s} \end{array} \right| \quad \text{avec} \quad \left. \begin{array}{l} a_{10c} \\ a_{10s} \end{array} \right| = \iint_S w_0 \left| \begin{array}{l} \phi_{(1,0,c)} \\ \phi_{(1,0,s)} \end{array} \right| dS. \quad (3.38b)$$

### Écriture des nouvelles équations modales

En injectant les équations de projection (3.35), (3.33b) et (3.33a) dans les équations complètes du mouvement (3.32), on obtient :

$$\sum_{p=1}^{N_w} \tilde{q}_s \Delta \Delta \Phi_s + \sum_{p=1}^{N_w} \ddot{\tilde{q}}_s \Delta \Delta \Phi_s = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \tilde{q}_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} a_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \tilde{q}_p \eta_q L(\Phi_p, \Psi_q) - 2\mu \sum_{s=1}^{N_w} \dot{\tilde{q}}_s \Phi_s + \tilde{p} \right], \quad (3.39a)$$

$$\sum_{s=1}^{N_F} \tilde{\eta}_s \Delta \Delta \Psi_s = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \tilde{q}_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) + 2 \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} a_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) \right]. \quad (3.39b)$$

Les équations (3.39) projetées sur les modes propres fournissent les équations modales de la plaque comportant l'imperfection :

$$\ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) dS (\tilde{q}_p \tilde{\eta}_q + a_p \tilde{\eta}_q) - 2\mu_u \dot{\tilde{q}}_u + \tilde{Q}_u \right], \quad (3.40a)$$

$$\tilde{\eta}_q = -\frac{1}{2\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) \tilde{q}_r \tilde{q}_s dS - \frac{1}{\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) a_r \tilde{q}_s dS, \quad (3.40b)$$

avec  $\tilde{Q}_u = \iint_S \tilde{p} \cdot \Phi_u dS$  et  $\mu_u$  l'amortissement modal associé au mode  $u$ .

Pour visualiser plus aisément l'origine des termes quadratique et cubique issus du défaut de forme, on reprend le système d'équations (3.32) en dressant un parallèle entre chacun des termes

désignés par :

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} &= \varepsilon \left[ \underbrace{L(\tilde{w}, \tilde{F})}_{\text{terme 1}} + \underbrace{L(w_0, \tilde{F})}_{\text{terme 2}} - \underbrace{2\mu\tilde{w}}_{\text{terme 3}} + \underbrace{\tilde{p}}_{\text{terme 4}} \right], \\ \Delta\Delta\tilde{F} &= -\frac{1}{2} [L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0)] \end{aligned} \quad (3.41)$$

et leur projetés :

$$\begin{aligned} \langle \underbrace{L(\tilde{w}, \tilde{F})}_{\text{terme 1}} | \Phi_u \rangle &= - \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \frac{1}{2\xi_q^4} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) dS \cdot \tilde{q}_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s \\ &\quad - \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \frac{1}{\xi_q^4} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) dS \cdot a_r \tilde{q}_p \tilde{q}_s, \\ \langle \underbrace{L(w_0, \tilde{F})}_{\text{terme 2}} | \Phi_u \rangle &= - \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \frac{1}{2\xi_q^4} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) dS \cdot a_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s \\ &\quad - \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \frac{1}{\xi_q^4} \iint_S \Phi_u L(\Phi_p, \Psi_q) \iint_S \Psi_q L(\Phi_r, \Phi_s) dS \cdot a_p a_r \tilde{q}_s, \\ \langle \underbrace{2\mu\tilde{w}}_{\text{terme 3}} | \Phi_u \rangle &= -2\mu\tilde{q}_u, \\ \langle \underbrace{\tilde{p}}_{\text{terme 4}} | \Phi_u \rangle &= \tilde{Q}_u = \iint_S \tilde{p} \Phi_u dS. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ces développements corroborent les prévisions énoncées puisque l'on retrouve bien ici que le terme linéaire provient de  $L(w_0, \tilde{F})$ , que le terme quadratique provient à la fois de  $L(w_0, \tilde{F})$  et de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  et que le terme cubique provenant de  $L(\tilde{w}, \tilde{F})$  n'a aucune dépendance en  $w_0$ . On retrouve d'ailleurs ici l'expression du coefficient cubique des équations modales de la plaque mince circulaire sans défaut introduite équation (3.24c). En substituant l'expression de la variable membranaire (3.40a) dans (3.40b) et en utilisant l'expression du coefficient cubique de plaque (3.24c), les équations modales peuvent ensuite grandement se simplifier.

### Expressions analytiques des nouveaux coefficients

Ainsi, en ajustant les indices de sommation de chaque quadruple somme dans les termes ci-dessus Eq.(3.42), on déduit l'équation suivante :

$$\ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \Gamma_{rsp}^u (\tilde{q}_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s + 2\tilde{q}_p a_r \tilde{q}_s + a_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s + 2a_p a_r \tilde{q}_s) - 2\mu_u \tilde{q}_u + \tilde{Q}_u \right]. \quad (3.43)$$

Nous pouvons ainsi regrouper termes linéaires, quadratiques et cubiques pour former les nouveaux coefficients linéaires et quadratiques  $\alpha_p^u$  et  $\beta_{pr}^u$  :

$$\ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \alpha_p^u \tilde{q}_p + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \beta_{pr}^u \tilde{q}_p \tilde{q}_r + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \Gamma_{rsp}^u \tilde{q}_p \tilde{q}_r \tilde{q}_s - 2\mu_u \tilde{q}_u + \tilde{Q}_u \right] \quad (3.44)$$

avec

$$\alpha_p^u = \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} 2\Gamma_{rps}^u a_r a_s, \quad (3.45)$$

$$\beta_{pr}^u = \sum_{s=1}^{N_w} (\Gamma_{rps}^u + 2\Gamma_{srp}^u) a_s. \quad (3.46)$$

Ces équations constituent un résultat important des travaux présentés. Nous obtenons en effet des expressions analytiques simples (3.45, 3.46) pour décrire les nouveaux coefficients modaux contrôlant la dynamique du nouveau système et ce pour toute structure circulaire imparfaite, sans restriction de symétrie. Les nouveaux coefficients linéaires et quadratiques s'écrivent uniquement en fonction des coefficients cubiques issus du cas parfait et des projetés modaux du défaut de forme. Les coefficients cubiques de la structure modifiée ne subissent quant à eux pas d'altération. Ces formes simples, dérivées des expressions analytiques, faciliteront grandement l'étude des modes propres dans un premier temps puis dans un second temps l'étude du comportement non-linéaire des coques imparfaites.

### Influence d'un décalage angulaire du défaut

La base utilisée pour la projection du défaut nécessite de définir une origine pour la coordonnée  $\theta$ . Dans le cas d'une plaque circulaire parfaite ou bien même dans celui d'une structure à symétrie de révolution telle que la coque sphérique, il ne se pose pas là de problème particulier. Dans le cas d'un défaut quelconque par contre, il devient intéressant de regarder comment la position angulaire du défaut influence sa projection sur une base modale tronquée.

On considère ici les modes  $\{\Phi_p\}_{p \in [1 N_0]}$  sous leur formulation en variables séparées selon  $r$  et  $\theta$  (Eq. (3.25)). On peut donc détailler la projection (3.35) de  $w_\theta$  en introduisant les coordonnées  $a_{knc}$  et  $a_{kns}$  des configurations en *cosinus* et en *sinus* du mode décrit par  $k$  diamètres nodaux et  $n$  cercles nodaux. Les modes axisymétriques peuvent également être pris en compte dans cette notation en considérant qu'ils sont décrits pour  $k = 0$ . Les composantes radiales des modes axisymétriques s'écriront donc  $a_{0nc}$ . Ainsi pour tout  $k \in [0 N_k]$  et tout  $n \in [0 N_n]$ , avec  $(N_k + 1) \times (N_n + 1) = N_0$ , on a :

$$a_{knc} = \iint_S w_0 R_{kn}(r) \cos(k\theta) dS,$$

$$a_{kns} = \iint_S w_0 R_{kn}(r) \sin(k\theta) dS.$$

On peut ainsi écrire :

$$w_0 = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{n=0}^{N_n} R_{kn}(r) (a_{knc} \cos(k\theta) + a_{kns} \sin(k\theta)). \quad (3.48)$$

Et on définit par ailleurs  $\tilde{a}_{kn}$  et  $\theta_{kn}$  :

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{kn} &= \sqrt{a_{knc}^2 + a_{kns}^2}, \\ \theta_{kn} &= \text{atan}\left(\frac{a_{kns}}{a_{knc}}\right),\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$w_0 = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{n=0}^{N_n} R_{kn}(r) \tilde{a}_{kn} \cos(k\theta - \theta_{kn}). \quad (3.50)$$

On considère maintenant le même défaut décalé de  $\theta_0$  :

$$w'_0(r, \theta - \theta_0) = w_0(r, \theta) \quad (3.51)$$

On introduit la variable  $\theta' = \theta + \theta_0$  puis on procède aux mêmes développements. On pose cette fois :

$$w'_0 = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{n=1}^{N_n} R_{kn}(r) \tilde{a}'_{kn} \cos(k\theta - \theta'_{kn}) \quad (3.52)$$

et

$$a'_{knc} = \iint_S w'_0 R_{kn} \cos(k\theta) dS = \iint_S w_0(r, \theta') R_{kn} \cos(k\theta' - k\theta_0) dS, \quad (3.53a)$$

$$a'_{kns} = \iint_S w'_0 R_{kn} \sin(k\theta) dS = \iint_S w_0(r, \theta') R_{kn} \sin(k\theta' - k\theta_0) dS. \quad (3.53b)$$

Les relations fondamentales de la trigonométrie, ainsi qu'un changement de variable  $\theta = \theta' - \theta_0$  sous les intégrales des équations (3.53), nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}a'_{knc} &= a_{knc} \cos(k\theta_0) + a_{kns} \sin(k\theta_0) \\ a'_{kns} &= a_{kns} \cos(k\theta_0) - a_{knc} \sin(k\theta_0)\end{aligned}$$

On cherche à déduire les grandeurs similaires au premier défaut et il vient en développant :

$$\tilde{a}'_{kn} = \sqrt{a'^2_{knc} + a'^2_{kns}} = \sqrt{a^2_{knc} + a^2_{kns}}. \quad (3.55)$$

De même,

$$\tan(\theta'_{kn}) = -\frac{a'_{kns}}{a'_{knc}} = -\frac{\frac{a_{kns}}{a_{knc}} - \tan(k\theta_0)}{1 + \frac{a_{kns}}{a_{knc}} \tan(k\theta_0)} = -\tan\left(k\theta_0 - \text{atan}\left(\frac{a_{kns}}{a_{knc}}\right)\right),$$

ce qui nous permet de déduire  $\theta'_{kn}$  :

$$\theta'_{kn} = \theta_{kn} - k\theta_0. \quad (3.56)$$

Finalement, l'équation (3.52) devient grâce à Eq. (3.55) et Eq. (3.56) :

$$w'_0(r, \theta) = w_0(r, \theta') = \sum_{k=0}^{N_k} \sum_{n=1}^{N_n} R_{kn}(r) \tilde{a}_{kn} \cos(k(\theta + \theta_0) + \theta_{kn}). \quad (3.57)$$

Cette dernière équation est à comparer à (3.50). L'effet d'un décalage en  $\theta_0$  sur le défaut n'intervient pas sur le module  $\tilde{a}_{kn}$ . L'effet sur la composante asymétrique est un décalage uniforme en  $\theta_0$  pour tout couple  $(k, n)$  de  $[1 N_k] \times [1 N_n]$ . En prenant ce résultat en compte à travers les développements des deux paragraphes précédents, il apparaît que tant que la troncature  $N_w$  conserve les deux configurations en *cosinus* et en *sinus* pour chaque mode asymétrique pris en compte, les coefficients linéaires et non-linéaires seront les mêmes quelque soit le décalage  $\theta_0$ . On n'a donc pas *a priori*<sup>4</sup> à se soucier de la position angulaire de la géométrie que l'on veut discrétiser, même sur un nombre réduit de modes. Cette conclusion a par ailleurs été vérifiée numériquement sur des défauts arbitraires introduits dans le modèle et dont on faisait varier le décalage angulaire. Les résultats en terme de modes propres et coefficients non-linéaires, en sortie de modèle, étaient rigoureusement identiques.

### Propriété de symétrie des coefficients non-linéaires

Dans ce paragraphe, sont mises en lumière d'importantes relations de symétrie, utiles à la fois pour la réduction des opérations numériques et également pour les développements des calculs de la seconde partie de la monographie.

La propriété de symétrie (3.5) de l'opérateur bilinéaire  $L$  défini par (3.13) nous permet d'écrire (les termes commutants sont écrits en gras pour une meilleure lisibilité) :

$$\Gamma_{\mathbf{p}\mathbf{ij}}^k = \Gamma_{\mathbf{pji}}^k. \quad (3.58)$$

De plus, d'après les travaux d'O. Thomas [81], l'opérateur  $L$  écrit pour une plaque plane de forme arbitraire vérifie sous certaines conditions aux limites<sup>5</sup>, dont celle de bords libres, la relation de symétrie suivante :

$$\iint_S \Phi_k L(\Phi_p, \Psi_s) dS = \iint_S L(\Phi_k, \Phi_p) \Psi_s dS. \quad (3.59)$$

Il vient ainsi les relations de symétrie suivantes :

$$\Gamma_{\mathbf{p}ij}^{\mathbf{k}} = \Gamma_{\mathbf{k}ij}^{\mathbf{p}} \quad \text{et} \quad (3.60a)$$

$$\Gamma_{\mathbf{p}ij}^{\mathbf{k}} = \Gamma_{j\mathbf{k}\mathbf{p}}^i. \quad (3.60b)$$

Les coefficients  $\Gamma_{\mathbf{p}ij}^k$  respectent donc trois symétries distinctes. Grâce à ces relations, nous pouvons déduire une propriété de symétrie sur les coefficients  $\alpha_i^k$  définis par (3.45). En effet :

4. Cette assertion concerne en effet le domaine continu. Lors d'une projection numérique, il faut prendre garde au placement du maillage en regard des éventuels défauts localisés sur la géométrie étudiée.

5. Les hypothèses que doivent vérifier ces conditions aux limites sont détaillées dans l'article en question.

$$\begin{aligned}
\alpha_i^k &= \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} 2\Gamma_{pij}^k a_p a_j \\
&\quad \Downarrow \text{ relation de symétrie (3.60b)} \\
\alpha_i^k &= \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{j=1}^{N_w} 2\Gamma_{jkp}^i a_p a_j \\
&\quad \Downarrow \text{ permutation des sommes} \\
\alpha_i^k &= \sum_{j=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} 2\Gamma_{pkj}^i a_j a_p
\end{aligned}$$

La relation de symétrie respectée par les coefficients  $\alpha$  est donc :

$$\alpha_i^k = \alpha_k^i \quad (3.61)$$

Une relation particulière peut également être établie sur les coefficients  $\beta_{pp}^k$ . En utilisant les relations de symétrie précédentes, on peut montrer que :

$$2\beta_{pp}^k = \beta_{pk}^p + \beta_{kp}^p. \quad (3.62)$$

### 3.2.4 Diagonalisation du problème

Afin de pouvoir étudier l'influence du défaut de forme sur les caractéristiques linéaires et non-linéaires de la plaque imparfaite, il nous faut écrire les équations modales obtenues dans la nouvelle base des vecteurs propres de la structure déformée.

Soit  $\mathbf{A}$  la matrice de la partie linéaire de (3.44) :

$$\mathbf{A} = \{\varepsilon\alpha_p^u + \omega_u^2\delta_{up}\}_{u,p \in [1 \ N_w]}. \quad (3.63)$$

La relation de symétrie sur les coefficients  $\alpha_p^j$  nous permet de montrer que la matrice  $\mathbf{A}$  est symétrique, propriété généralement retrouvée dans les systèmes mécaniques.

La diagonalisation de  $\mathbf{A}$  permet de calculer numériquement les pulsations propres  $\Omega_p$  et les déformées modales de la plaque avec défaut selon la formule :

$$\{\Omega_u\delta_{up}\}_{u,p \in [1 \ N_w]} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}, \quad (3.64)$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice des vecteurs propres. En appliquant le changement de coordonnées  $\mathbf{q} = \mathbf{P}\mathbf{X}$  avec  $\mathbf{q} = (q_i)_{i \in [1 \ N_w]}$  et  $\mathbf{X} = (X_i)_{i \in [1 \ N_w]}$ , il vient :

$$\ddot{X}_u + \Omega_u^2 X_u = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} g_{pr}^u X_p X_r + \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} h_{rsp}^u X_p X_r X_s - 2\zeta_u \dot{X}_u + \tilde{G}_u \right], \quad (3.65)$$

où  $X_u$  est la coordonnée modale, associée aux modes propres de la plaque imparfaite.  $\zeta_u$ ,  $G_u$  sont respectivement l'amortissement et le forçage modal écrits dans la nouvelle base.  $g_{pr}^u$  et  $h_{rsp}^u$  sont les nouveaux coefficients non-linéaires quadratiques et cubiques. Ils s'écrivent en fonction des termes  $P_{ij}$  et  $P_{ij}^{-1}$  des matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^{-1}$  :

$$g_{pr}^u = \sum_{i,j,k=1}^{N_w} \beta_{jk}^i P_{ui}^{-1} P_{jp} P_{kr}, \quad (3.66a)$$

$$h_{rsp}^u = \sum_{i,j,k,n=1}^{N_w} \Gamma_{jkn}^i P_{ui}^{-1} P_{jr} P_{ks} P_{np}. \quad (3.66b)$$

### 3.2.5 Discussion et introduction aux études de convergence

Dans le cas parfait comme dans le cas imparfait, il n'existe pas de solution exacte au problème non-linéaire de vibration de plaque. Dans le cas de la plaque parfaite, les développements ont été poussés jusqu'à obtenir une formulation analytique de la solution du problème spatial, découplé du problème temporel. Les modes propres sont alors déduits analytiquement. Cet avantage non-négligeable en terme de coût de calcul tient à la simplicité de la géométrie et des conditions limites étudiées. Dans le cas de géométries plus complexes, il est d'usage d'avoir recours à des techniques numériques, telles que les éléments finis. La méthode présentée a pour avantage de permettre le développement analytique des coefficients linéaires et non-linéaires à partir du cas parfait. Le calcul des modes propres de la structure imparfaite impose toutefois de passer par une étape de diagonalisation du problème qui exige de tronquer le système d'équations aux dérivées ordinaires non-linéaires et couplées. Les différentes troncatures appliquées concernent :

- la projection de l'imperfection sur les  $N_0$  modes propres dynamiques de la plaque parfaite,
- la discrétisation des équations locales du mouvement de la plaque imparfaite sur les  $N_w$  modes transverses et sur les  $N_F$  modes de membrane.

La troncature sur les modes de membranes ne fait pas l'objet d'une étude de convergence particulière. Il a été montré au cours des précédents travaux, et vérifié au cours de cette thèse, qu'une troncature à 12 modes de membrane permettait de garantir une précision sur les coefficients non-linéaires cubiques de 4 chiffres significatifs. En revanche, les paramètres  $N_0$  et  $N_w$ , intimement liés à la précision de la reconstruction du défaut grâce à la base de modes propres et à la précision du résultat de la diagonalisation sont laissés libres. Ils seront l'objet d'une attention particulière dans les deux prochains chapitres dans lesquels des défauts de forme typiques puis correspondant à des coques réelles sont étudiés.



# CHAPITRE 4

---

## APPLICATION À QUELQUES DÉFAUTS DE FORME

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>35</b>
<b>4.2</b>	<b>Calcul de la tendance de non-linéarité</b>	<b>36</b>
<b>4.3</b>	<b>Cas d'un défaut de forme sphérique</b>	<b>38</b>
4.3.1	Comparaison théorique avec le modèle de coque sphérique mince	38
4.3.2	Comparaisons des résultats entre différents modèles analytiques	40
<b>4.4</b>	<b>Cas de défauts axisymétriques</b>	<b>46</b>
4.4.1	Introduction	46
4.4.2	Imperfection de la forme du mode (0,1)	46
4.4.3	Imperfection de la forme du mode (0,2)	52
<b>4.5</b>	<b>Cas de défauts asymétriques</b>	<b>53</b>
4.5.1	Imperfection de la forme du mode (2,0)	53
4.5.2	Imperfection de la forme du mode (3,0)	59
<b>4.6</b>	<b>Conclusion sur les cas d'imperfections de formes données</b>	<b>61</b>

---

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, le modèle de coque imparfaite est confronté à deux autres, l'un aux développements analytiques poussés dédié aux coques sphériques minces et l'autre utilisant les éléments finis. Dans le domaine linéaire, une comparaison systématique est menée sur les modes propres. Dans le domaine non-linéaire, lorsque le modèle à comparer nous le permet, nous confrontons, terme à terme, des coefficients quadratiques et cubiques (les résultats de ces travaux peuvent également être trouvés dans [12, 13]). Nous regardons également la tendance de non-linéarité pour quelques modes, afin de mettre en évidence un effet global impliquant un grand nombre de coefficients (ces travaux sont également reportés dans [96, 92]). Cette quantité, ainsi que le moyen de la calculer (grâce au formalisme des modes non-linéaires) sont définis section 4.2.

Le modèle de coque sphérique mince est comparé au modèle de coque imparfaite au sein duquel l'imperfection introduite est une calotte sphérique. On regarde en détail les différences analytiques éventuelles et leurs effets sur les résultats. Ces premières validations sont reportées section 4.3.1.

Ensuite, les cas d'imperfections de formes données sont documentés sections 4.4 et 4.5. Le modèle par éléments finis vient conforter ces résultats dans le domaine linéaire.

Enfin, les géométries complètes des coques de laboratoire (présentées au chapitre 2 de ce manuscrit) sont implémentées dans le nouveau modèle. Dans le cas de la coque de référence, une expérience, détaillée dans le chapitre approprié, a permis de dégager quelques coefficients non-linéaires. Nous pouvons donc comparer les prédictions des modèles théoriques au comportement non-linéaire de la coque.

Dans tous les cas d'étude qui suivent, la convergence sur les troncatrices  $N_0$  et  $N_w$  est regardée ; les résultats importants sont commentés.

## 4.2 Calcul de la tendance de non-linéarité

Dans cette section sont livrés les éléments théoriques des calculs de tendance de non-linéarité effectués pour les défauts typiques de la forme du mode (0,1) et du mode (2,0) et dont les résultats figurent sections 4.4.2 et 4.5.1.

À la différence des oscillateurs linéaires, un des comportements typiques des oscillateurs non-linéaires est la dépendance de la fréquence avec l'amplitude de vibration. La tendance de non-linéarité définit ce comportement, qui peut être raidissant (la fréquence croît quand l'amplitude de vibration croît) ou bien assouplissant (la fréquence décroît quand l'amplitude croît). Une abondante littérature est consacrée à la prédiction de cette tendance de non-linéarité pour les structures continues et spécialement dans le cas de structures comportant une courbure telles que les arches et les coques pour lesquelles les équations comportent un terme quadratique, rendant le calcul plus compliqué. En effet, il est avéré théoriquement et expérimentalement que les structures planes présentent des tendances de non-linéarité raidissantes [88, 107, 60, 77, 98, 84]. La présence d'un terme quadratique peut modifier le comportement raidissant en comportement assouplissant.

La réduction du système d'équations différentielles ordinaires (EDOs) couplées non-linéairement, à un seul degré de liberté représenté par un mode linéaire est trop restrictive et fournit des résultats erronés, comme l'attestent [57, 100]. Pour prédire correctement le type de non-linéarité, il faut soit conserver un grand nombre de modes linéaires, soit utiliser le formalisme des modes non-linéaires afin de réduire le système dynamique à un degré de liberté. Cette méthode a notamment été appliquée avec succès dans le cas de la coque sphérique mince [97] pour lequel la tendance de non-linéarité et l'effet des résonances internes peuvent être correctement prédits avec un seul mode non-linéaire au lieu d'une dizaine de modes linéaires. La démarche consiste à appliquer aux équations *modales* écrites dans la base  $X_p$  un changement de coordonnées non-linéaires afin d'écrire la dynamique dans une base de coordonnées *normales*  $R_p$  décrivant le mouvement dans une variété invariante de l'espace des phases. Le changement de coordonnées est calculé selon les théorèmes de Poincaré et Poincaré-Dulac, en éliminant successivement les termes de couplage superflus dans les équations des oscillateurs non-linéaires. Le changement de coordonnées peut être ainsi écrit :

$$\begin{aligned}
X_p = R_p + & \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1}^N (a_{ij}^p R_i R_j + b_{ij}^p S_i S_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij}^p R_i R_j + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1}^N \sum_{k \geq 1}^N (r_{ijk}^p R_i R_j R_k + s_{ijk}^p S_i S_j S_k) + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq 1}^N (t_{ijk}^p S_i R_j R_k + u_{ijk}^p R_i S_j S_k), \tag{4.1a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_p = S_p + & \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1}^N (\varkappa_{ij}^p R_i R_j + l_{ij}^p S_i S_j) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \varpi_{ij}^p R_i R_j + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j \geq 1}^N \sum_{k \geq 1}^N (\varrho_{ijk}^p R_i R_j R_k + \vartheta_{ijk}^p S_i S_j S_k) + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k \geq 1}^N (o_{ijk}^p S_i R_j R_k + \varsigma_{ijk}^p R_i S_j S_k). \tag{4.1b}
\end{aligned}$$

Une approximation au troisième ordre est appliquée au changement de coordonnées. Les expressions analytiques des coefficients ci-dessus, à savoir  $\{a_{ij}^p, b_{ij}^p, c_{ij}^p, r_{ij}^p, s_{ij}^p, t_{ij}^p, u_{ij}^p\}$  et  $\{l_{ij}^p, \varkappa_{ij}^p, \varpi_{ij}^p, \varrho_{ij}^p, \vartheta_{ij}^p, \varsigma_{ij}^p, o_{ij}^p\}$  ne sont pas détaillées dans ce paragraphe mais peuvent être trouvées dans [100] et [95]. Une fois le changement de coordonnées effectué, des troncatures adéquates peuvent être opérées. En l'occurrence, en ne conservant qu'un seul mode normal non-linéaire  $R_p$ , on peut correctement prédire le type de non-linéarité du  $p^{ime}$  mode. Ainsi réduite à un seul mode non-linéaire, la dynamique s'écrit :

$$\ddot{R}_p + \omega_p^2 R_p + 2\xi_p \omega_p \dot{R}_p + (\varepsilon h_{ppp}^p + A_{ppp}^p) R_p^3 + B_{ppp}^p R_p \dot{R}_p^2 + C_{ppp}^p R_p^2 \dot{R}_p = 0, \tag{4.2}$$

où  $A_{ppp}^p$ ,  $B_{ppp}^p$  et  $C_{ppp}^p$  sont les nouveaux coefficients issus du changement de coordonnées. Leurs expressions font seulement intervenir les coefficients quadratiques  $g_{ij}^l$  et quelques coefficients du changement de coordonnées,  $\{a_{ij}^p, b_{ij}^p, c_{ij}^p\}$  :

$$A_{ppp}^p = \varepsilon \left[ \sum_{l \geq i}^N g_{pl}^p a_{pp}^l + \sum_{l \leq i}^N g_{lp}^p a_{pp}^l \right], \tag{4.3a}$$

$$B_{ppp}^p = \varepsilon \left[ \sum_{l \geq i}^N g_{pl}^p b_{pp}^l + \sum_{l \leq i}^N g_{lp}^p b_{pp}^l \right], \tag{4.3b}$$

$$C_{ppp}^p = \varepsilon \left[ \sum_{l \geq i}^N g_{pl}^p c_{pp}^l + \sum_{l \leq i}^N g_{lp}^p c_{pp}^l \right]. \tag{4.3c}$$

A partir du développement asymptotique au troisième ordre de la dynamique tronquée à un mode non-linéaire (4.2), on peut correctement prédire la tendance de non-linéarité du mode étudié. Un développement perturbatif au 1<sup>er</sup> ordre permet d'exprimer la dépendance de la pulsation non-linéaire d'oscillation  $\omega_{NL}$  en fonction de l'amplitude de vibration  $a$  :

$$\omega_{NL} = \omega_p(1 + T_p a^2), \quad (4.4)$$

où  $\omega_p$  est la pulsation propre de l'oscillateur  $p$ .  $T_p$  est le coefficient traduisant le type de non-linéarité, son expression est (voir [95]) :

$$T_p = \frac{1}{8\omega_p^2} [3(A_{ppp}^p + \varepsilon h_{ppp}^p) + \omega_p^2 B_{ppp}^p]. \quad (4.5)$$

Lorsque  $T_p$  est positif, le comportement est raidissant ; il est assouplissant lorsque  $T_p$  est négatif. Des résultats de calculs de tendance de non-linéarité sont donnés dans les chapitres prochains, dans les cas particuliers de défauts typiques. Sont montrées en particulier les évolutions de ces tendances en fonction de l'amplitude de l'imperfection contenue dans la plaque.

### 4.3 Cas d'un défaut de forme sphérique

#### 4.3.1 Comparaison théorique avec le modèle de coque sphérique mince

##### Équations du modèle de coque sphérique

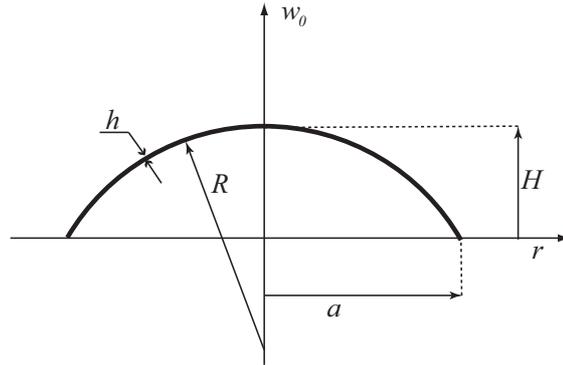


FIGURE 4.1 – *Caractéristiques géométriques d'une plaque comportant un défaut sphérique.*

Afin de valider la méthode d'introduction d'un défaut de forme dans les équations de mouvement de la plaque circulaire, nous nous appliquons à retrouver les termes du modèle de vibration de coque sphérique mince de [85] à partir du modèle de plaque plane circulaire dans lequel est introduit une imperfection de forme sphérique, telle que présentée figure 4.1.

Les équations non-linéaires de vibrations de coques sphériques peu profondes données par [85] sont les suivantes :

$$D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h \ddot{w} = L(w, F) - c\dot{w} + p, \quad (4.6a)$$

$$\Delta\Delta F - \frac{Eh}{R}\Delta w = -\frac{Eh}{2}L(w, w). \quad (4.6b)$$

Les conditions aux limites restent les mêmes que pour la plaque plane circulaire (cf. Eqs (3.8)). On adopte le même adimensionnement que pour la plaque circulaire mince, (3.9), et les facteurs

d'adimensionnement (3.10, 3.11) restent valables. Il convient en outre d'ajouter le paramètre adimensionné :

$$\chi = 12(1 - \nu^2) \frac{a^4}{R^2 h^2}. \quad (4.7)$$

Dans le cas des coques sphériques,  $\chi$  est le seul paramètre géométrique libre car il permet de caractériser entièrement la géométrie courbée.

Les équations (4.6) s'écrivent de manière adimensionnées :

$$\Delta\Delta w + \underbrace{\frac{Rh}{a^2} \chi \Delta F}_{\text{terme coque}} + \ddot{w} = \varepsilon L(w, F) + \varepsilon \frac{a^2}{Rh} [-2\mu \dot{w} + p], \quad (4.8a)$$

$$\Delta\Delta F - \underbrace{\frac{a^2}{Rh} \Delta w}_{\text{terme coque}} = -\frac{1}{2} L(w, w), \quad (4.8b)$$

où la mention « terme coque » désigne les termes supplémentaires par rapport aux équations de plaque mince circulaire parfaite.

### Géométrie du défaut

On se propose maintenant de comparer les « termes coques » aux termes supplémentaires issus de l'introduction d'un défaut sphérique dans les équations de mouvement de plaque mince circulaire. Il suffit pour cela d'explicitier les termes des équations (3.32a) et (3.32b) où apparaît le défaut  $w_0$ . Établissons tout d'abord la géométrie du défaut sphérique. En posant  $H$  la hauteur du défaut et  $R$  son rayon de courbure (voir figure 4.1), un défaut sphérique peut s'écrire de manière adimensionnée :

$$w_0(r) = \frac{1}{h} \left( \sqrt{R^2 - a^2 r^2} + H - R \right), \quad (4.9)$$

avec

$$H = R - \sqrt{R^2 - a^2}. \quad (4.10)$$

### Développement de Taylor de quelques termes

La condition de petite courbure ( $\frac{r}{R/a} \ll 1$ ), respectée par le défaut sphérique, nous permet d'approcher les dérivées première et seconde du défaut  $w_0$  en fonction de  $r$ . Le développement limité au premier ordre de (4.9) implique :

$$w_0(r) = \frac{r}{H} \left( \left(1 - \frac{a^2 r^2}{2R^2}\right) \frac{H}{R} + 1 \right) + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right)$$

puis

$$w_0(r) = \frac{1}{h} \left( H - \frac{a^2 r^2}{2R} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right). \quad (4.11)$$

Les dérivées première et seconde du développement limité du défaut sont :

$$\begin{aligned} w_{0,r} &= -\frac{a^2 r}{Rh} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right), \\ w_{0,rr} &= -\frac{a^2}{Rh} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right). \end{aligned} \quad (4.12a)$$

Les expressions  $L(w_0, \tilde{F})$  et  $L(\tilde{w}, w_0)$  issues de (3.32) deviennent alors :

$$L(w_0, \tilde{F}) = w_{0,rr} \frac{\tilde{F}_{,r}}{r} + \tilde{F}_{,rr} \frac{w_{0,r}}{r}, \quad (4.13a)$$

$$L(\tilde{w}, w_0) = w_{0,rr} \frac{\tilde{w}_{,r}}{r} + \tilde{w}_{,rr} \frac{w_{0,r}}{r}, \quad (4.13b)$$

et finalement :

$$L(w_0, \tilde{F}) = -\frac{a^2}{Rh} \Delta \tilde{F} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right), \quad (4.14a)$$

$$L(\tilde{w}, w_0) = -\frac{a^2}{Rh} \Delta \tilde{w} + \mathcal{O}\left(\frac{a}{R}\right). \quad (4.14b)$$

Tronqués au premier ordre, ces termes sont égaux aux « termes coques » des équations (4.8). Le modèle de coque sphérique est donc parfaitement équivalent au modèle de coque imparfaite qui inclut une imperfection de la forme définie par (4.11).

### Comparaison qualitative au modèle de coque sphérique mince

Ces calculs montrent que les équations de coques sphériques minces ne se déduisent des équations de plaques imparfaites qu'avec l'approximation de développement de Taylor au premier ordre de la géométrie sphérique. On en tire le résultat important suivant : le modèle de coque peu profonde communément admis dans la littérature est en fait un modèle de coque à géométrie parabolique. Le modèle de coque imparfaite dans lequel la géométrie sphérique complète est introduite dépasse, quant à lui, cette restriction et peut ainsi prétendre à des résultats valables sur un plus large intervalle de valeurs pour  $\chi$ .

#### 4.3.2 Comparaisons des résultats entre différents modèles analytiques

Dans les deux prochains paragraphes sont comparés des résultats sur les caractéristiques linéaires et sur les coefficients non-linéaires calculés avec le modèle de coque sphérique mince et avec le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit une géométrie sphérique puis une géométrie parabolique. Ces résultats sur les pulsations propres, déformées modales et coefficients quadratiques et cubiques seront l'occasion de mener des études de convergence sur les paramètres  $N_0$  et  $N_w$ . Lorsque des divergences sont observées dans le domaine linéaire, les comparaisons seront alimentées de résultats obtenus avec le code de calcul par éléments finis CAST3M [102]. La solution numérique est obtenue en utilisant des éléments D.K.T. (« Discrete Kirshhoff Triangle », éléments qui satisfont aux hypothèses de Kirchhoff-Love [9]) et un maillage composé de 3260 nœuds.

#### Comparaison sur les caractéristiques linéaires

La géométrie de l'imperfection sphérique est donnée par (4.9), c'est à dire sans développement limité au premier ordre. Les résultats<sup>6</sup> qui suivent sont établis en fonction du paramètre  $\chi$  introduit par (4.7) et pour une gamme de valeurs s'échelonnant de 0 jusqu'à  $5e4$ . Les pulsations propres calculées grâce au modèle de plaque imparfaite avec ajout de la géométrie sphérique sont

6. Il est à noter que ces résultats sont établis sur plus large gamme de  $\chi$  que ceux présentés dans [85]. La validation de notre modèle pour cette large gamme de  $\chi$  contribuera à justifier son application à la géométrie d'une coque de laboratoire dont le  $\chi$  équivalent est de  $3.57e4$ .

comparées aux résultats provenant du modèle de coque sphérique mince développé dans [85]. Les résultats, présentés sur la figure 4.2, sont en très bonne correspondance sur la famille constituée des modes mixtes et axisymétriques ainsi que sur une bonne partie de la famille constituée des modes propres purement asymétriques. Les profils de quelques modes propres, figure 4.3, calculés selon les deux modèles se superposent parfaitement. Toutefois, des différences conséquentes sont observées sur les pulsations propres des modes asymétriques  $(k, 0)$ ,  $k \neq 7$ . Elles sont attribuées à la troncature (3.33a).

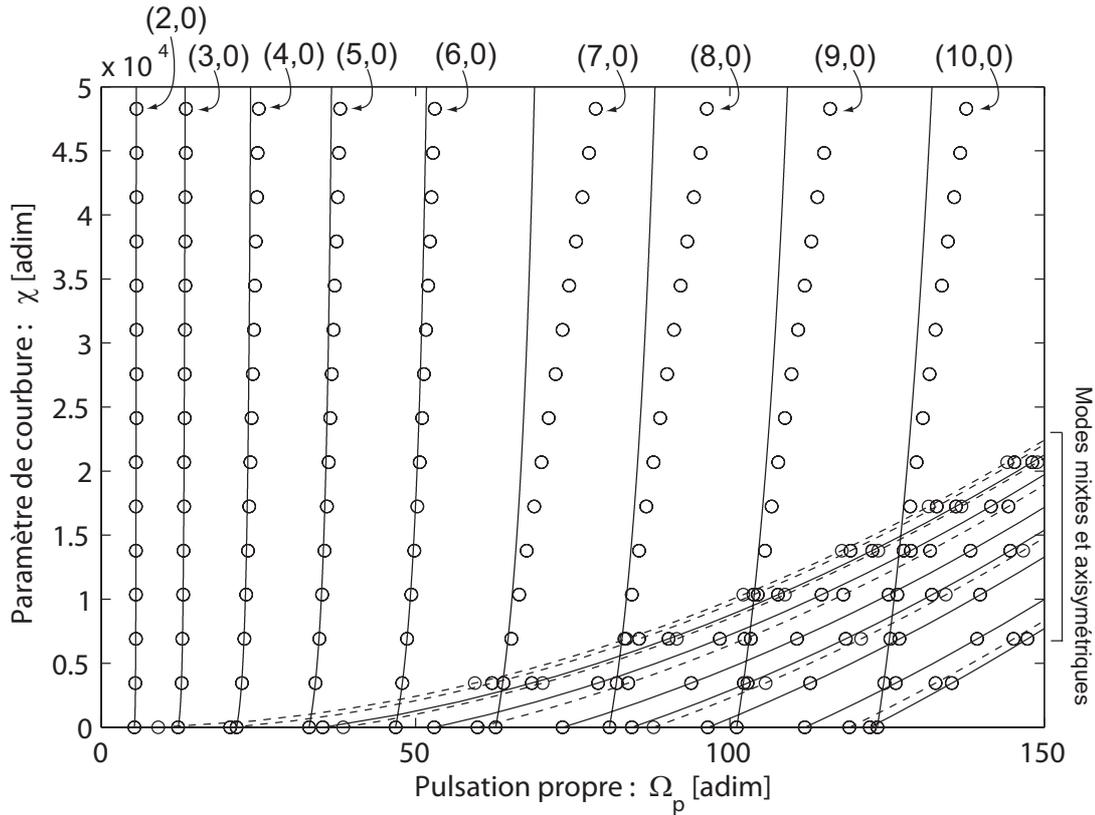


FIGURE 4.2 – Pulsations naturelles adimensionnées  $\Omega_p$  de la coque sphérique par rapport au paramètre de courbure  $\chi$ , d'après le modèle de [85] (–) et calculé avec le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit un défaut sphérique (o). Les modes axisymétriques et mixtes indiqués sur le côté droit sont, de la gauche vers la droite :  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(3,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(4,1)$ ,  $(2,2)$ ,  $(0,3)$ ,  $(5,1)$ ,  $(3,2)$ ,  $(1,3)$  and  $(6,1)$ .

#### Mise en évidence de l'effet de la troncature $N_w$

La diagonalisation (3.64) se fait ici pour un système tronqué à  $N_w = 51$  modes. Ces modes sont : les 13 premiers modes purement axisymétriques, de  $(0, 1)$  à  $(0, 13)$ , les 9 premiers modes purement asymétriques, de  $(2, 0)$  à  $(10, 0)$ , et les modes mixtes  $(1, 1)$  à  $(6, 1)$ ,  $(1, 2)$  à  $(3, 2)$  et  $(1, 3)$ . Ainsi, seul le mode  $(7, 0)$  contribue à l'oscillation orthoradiale comportant 7 diamètres nœuds alors que 2 modes,  $(6, 0)$  et  $(6, 1)$  contribuent à l'oscillation comportant 6 diamètres no-

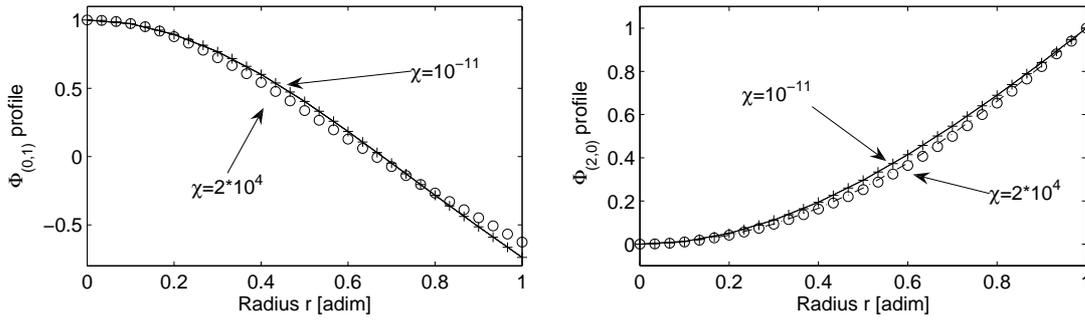


FIGURE 4.3 – Profils des déformées modales des modes  $(0, 1)$  et  $(2, 0)$  pour  $\chi = 10^{-11}$  et  $\chi = 2 \cdot 10^4$  selon le modèle de coque sphérique ((-) et (- · -)), et selon le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit un défaut sphérique ((+) et (o)).

daux. La base modale utilisée ne permet pas de construire correctement le nouveau mode propre correspondant à  $(7, 0)$ .

Pour s'en convaincre, une simulation numérique est calculée sur un défaut de forme sphérique en omettant cette fois le mode  $(6, 1)$  dans la troncature de la diagonalisation. Les résultats sont portés sur la figure 4.4. C'est cette fois à partir de  $k = 6$  que les nouveaux modes purement asymétriques sont mal reconstruits. La base utilisée, privée du mode  $(6, 1)$ , est insuffisante pour prédire correctement le comportement du mode  $(6, 0)$ . L'effet de la troncature  $N_w$  sur le calcul des nouveaux modes propres est donc majeur. La validité des résultats à venir sera donc conditionnée par une étude de convergence systématique sur  $N_w$ .

### Comparaison avec un défaut parabolique

Lorsque la troncature  $N_w$  est suffisante, les résultats montrent un excellent accord entre eux, validant l'approche par le défaut sphérique introduit dans le modèle de plaque imparfaite. Afin d'étayer les conclusions avancées dans la section 4.3.1, sont ajoutées aux résultats précédents les pulsations propres calculées avec le modèle de plaque imparfaite dans lequel on ajoute cette fois l'approximation au premier ordre du défaut sphérique, soit un défaut parabolique. L'expression du défaut est donc celle de (4.11). Le profil de l'erreur entre le défaut sphérique et son approximation au premier ordre sont montrés figure 4.5(a,b). On constate que cette erreur est de l'ordre de 2% de la hauteur de la coque. Les amplitudes des projetés modaux du défaut sphérique sont données figure 4.5(c). Ces mêmes amplitudes, retranchées de celles des projetés modaux de l'approximation du défaut sphérique sont représentées figure 4.5(d). Cette dernière figure montre que la variation des valeurs des projetés est très petite entre le défaut sphérique et son approximation au premier ordre, à l'image de l'erreur commise sur la géométrie, figure 4.5(a). Pourtant, les pulsations propres calculées à partir du développement limité du défaut, rapportées figure 4.6, correspondent sensiblement mieux aux pulsations calculées d'après le modèle de coque sphérique. On peut observer que, s'agissant des caractéristiques linéaires, l'effet des termes supérieurs dans l'approximation de Taylor joue un rôle léger, visible seulement pour des valeurs très élevées du paramètre de courbure.

Ce rôle n'est cependant pas négligeable. La déformée modale du mode  $(0, 1)$  est calculée pour

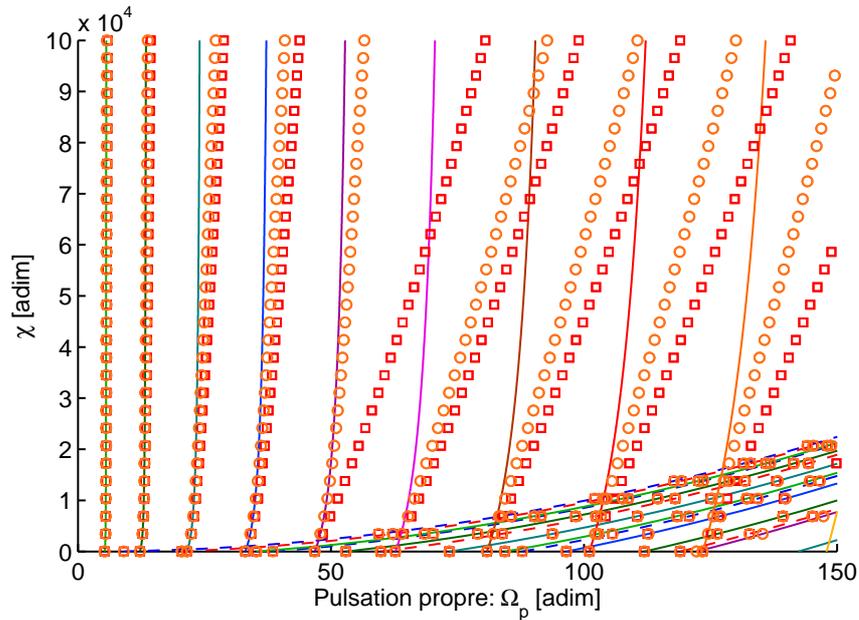


FIGURE 4.4 – Pulsations naturelles adimensionnées  $\Omega_p$  de la coque sphérique par rapport au paramètre de courbure  $\chi$ , d'après le modèle de [85] (—) et calculé avec le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit un défaut sphérique et calculé avec  $N_w = 51$  modes (o) puis sans le mode (6, 1) ( $\square$ ).

un défaut sphérique de paramètre<sup>7</sup> de courbure élevé ( $\chi = 3.57e4$ ) et comparée figure 4.7 à la déformée modale calculée pour le défaut sphérique approché au premier ordre. Cette figure montre que le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit l'approximation au premier ordre du défaut sphérique (correspondant exactement au modèle de coque sphérique mince) rend compte d'un résultat qualitativement différent. Nous le verrons plus en détail par la suite mais on peut d'ores et déjà constater que la déformée modale obtenue avec la géométrie sphérique exacte (et le  $\chi$  adéquat) se rapproche un peu plus de celle mesurée sur la coque de référence (voir figure 2.3, section 2).

### Comparaison sur les coefficients non-linéaires

La figure 4.8 présente l'évolution de quelques coefficients cubiques diagonaux en fonction du paramètre de courbure  $\chi$  selon les différents modèles. L'effet de la troncature en  $N_0$  défini par (3.35) est également représenté. Alors que la convergence semble rapide pour le mode (2, 0), des différences notables subsistent pour les deux autres. Le coefficient cubique du mode (0, 1) semble, qui plus est, converger vers une solution différente de celle du modèle de coque sphérique. En calculant les coefficients cubiques de ces deux modes axisymétriques pour une approximation au 1<sup>er</sup> ordre du défaut sphérique (figure 4.9), une adéquation parfaite est observée avec les coefficients du modèle de coque sphérique. Si les figures 4.6 et 4.5 montraient que dans le cas linéaire, une variation légère sur les projetés  $a_p$  n'a qu'une faible influence, ce n'est pas le cas sur les coefficients non-linéaires où l'on constate qu'une erreur de 20% peut être commise (par exemple

7. Cette valeur n'est d'ailleurs pas prise au hasard. Elle correspond à la géométrie de la coque 3 étudiée en détail à la fin de ce chapitre.

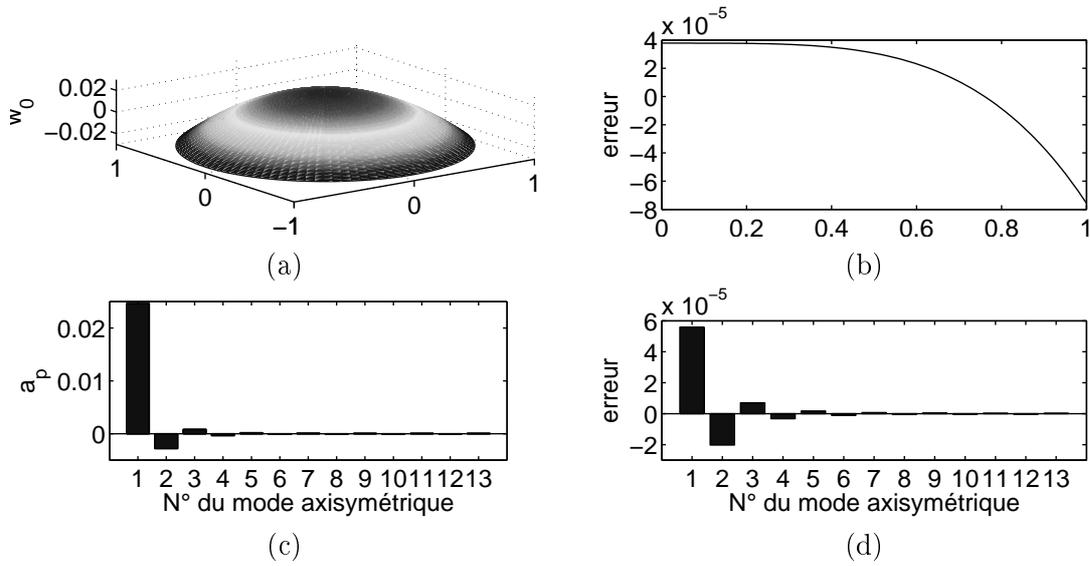


FIGURE 4.5 – (a) Défaut sphérique défini par (4.9) paramétré par  $\chi = 1 * 10^5$ . (b) Profil de l'erreur entre ce défaut et son approximation au 1<sup>er</sup> ordre défini par (4.11). (c) Valeurs des projetés modaux  $a_p$  du même défaut sphérique selon (3.35) sur 13 modes axisymétriques (de (0,1) à (0,13)) et (d) erreur absolue entre ces valeurs et celle des projetés modaux du défaut parabolique s'en approchant (Cette erreur est définie par  $a_p - a'_p$ ).

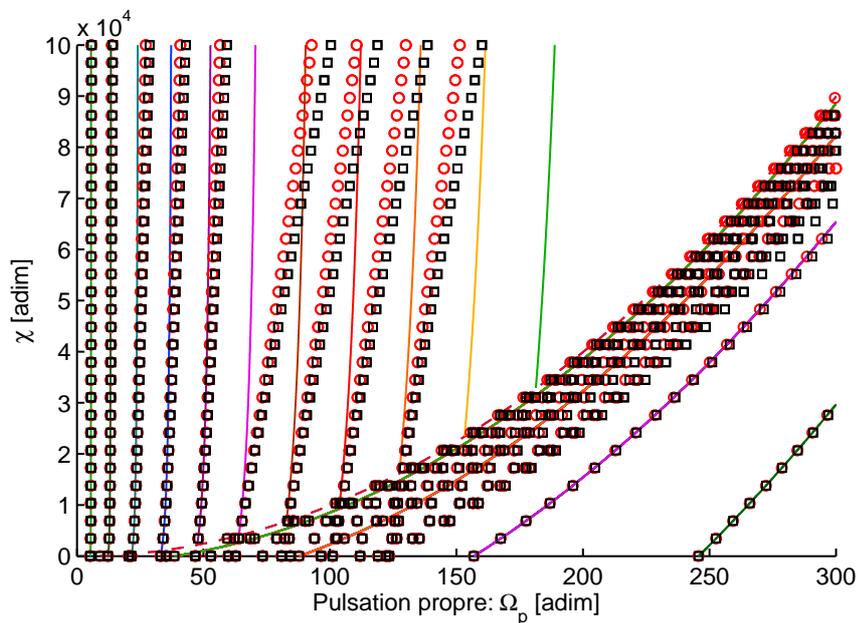


FIGURE 4.6 – Pulsations naturelles adimensionnées  $\Omega_p$  de la coque sphérique par rapport au paramètre de courbure  $\chi$ , d'après le modèle de [85] (—) et calculé avec le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit un défaut sphérique ( $\square$ ) puis le développement limité au premier ordre du défaut sphérique ( $\circ$ ). Les modes suivent le même ordre d'apparition que dans la figure 4.2.

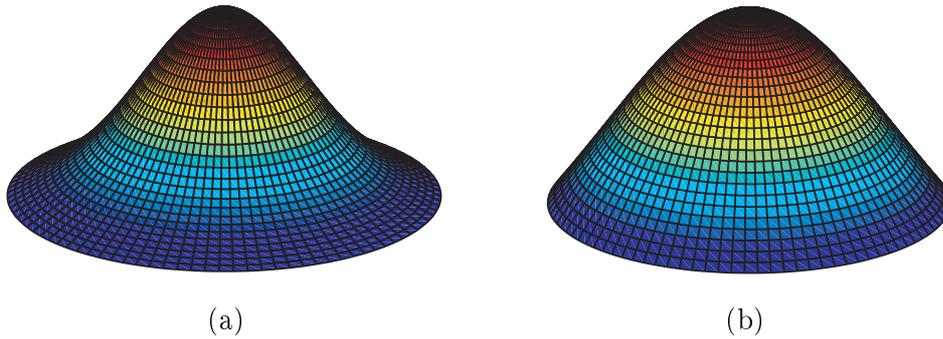


FIGURE 4.7 – Déformées modales du mode  $(0,1)$  calculées selon le modèle de plaque imparfaite (a) dans lequel est introduit un défaut sphérique paramétré par  $\chi = 3.57e4$  et (b) dans lequel est introduit le développement de Taylor au premier ordre de ce défaut.

pour le mode  $(0,1)$  alors même que l'on croit la solution convergée. Pourtant l'erreur entre les projetés du défaut sphérique et ceux de son approximation n'est de l'ordre que de  $10^{-5}$  (voir figure 4.5(d)). Les mêmes conclusions peuvent être tirées sur les quelques coefficients quadratiques calculés et présentés figure 4.10. Dans le cas de l'approximation du défaut sphérique au premier ordre, les valeurs de ces coefficients, tout comme celles des coefficients cubiques, sont systématiquement sous évaluées. Ces conclusions incitent à penser que le modèle de plaque imparfaite dans lequel est introduit le défaut sphérique possède un domaine de validité plus large que le modèle de coque sphérique dans lequel la géométrie s'apparente plus à un défaut parabolique qu'à une calotte sphérique.

Par ailleurs, des études de convergence<sup>8</sup> menées en fonction de  $N_0$  sur plusieurs coefficients cubiques, pas forcément diagonaux, montrent que pour 13 modes axisymétriques, une précision de 3 chiffres peut être garantie.

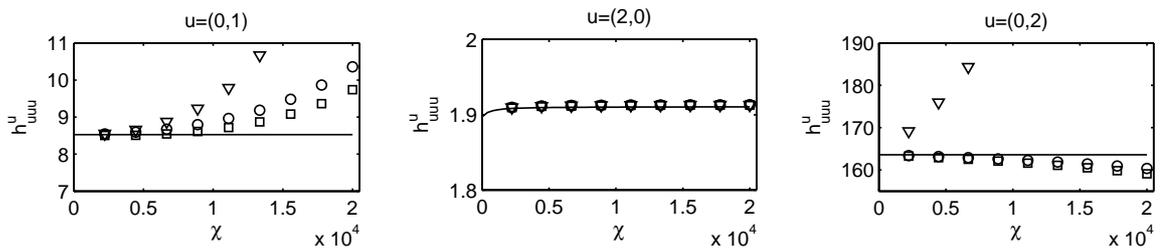


FIGURE 4.8 – Coefficients cubiques diagonaux  $h_{uuu}^u$  des modes  $(0,1)$  et  $(2,0)$  par rapport à  $\chi$  calculés selon le modèle de coque sphérique (—) et selon le modèle actuel au sein duquel un défaut sphérique est considéré (Eq. (4.11)), pour  $N_0 = 4$  ( $\nabla$ ),  $N_0 = 7$  ( $\square$ ) et  $N_0 = 13$  ( $\circ$ ).

8. Ces résultats, lourds pour la lecture, ne sont pas rapportés dans le présent document. On choisit de n'en extraire que l'information essentielle à notre étude, c'est à dire les seuils de convergence pour une précision donnée.

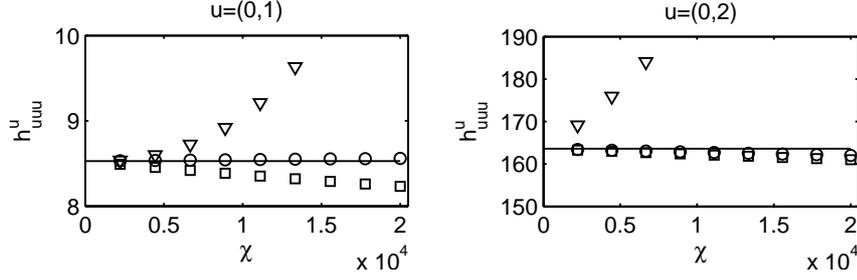


FIGURE 4.9 – Coefficients cubiques diagonaux  $h_{uuu}^u$  des modes (0,1) et (2,0) par rapport à  $\chi$  calculés selon le modèle de coque sphérique (—) et selon le modèle actuel au sein duquel un défaut parabolique est considéré (Eq. (4.11)), pour  $N_0 = 4$  ( $\nabla$ ),  $N_0 = 7$  ( $\square$ ) et  $N_0 = 13$  (o).

## 4.4 Cas de défauts axisymétriques

### 4.4.1 Introduction

Les cas de défauts axisymétriques typiques vont être documentés dans cette section. Les résultats sur le défaut sphérique annoncent d'ores et déjà une bonne correspondance dans le cas de défauts axisymétriques. En effet, les défauts testés, de la forme du mode (0,1) puis du mode (0,2), reviennent à adopter une troncature  $N_0$  à un mode. Les conclusions sont cependant différentes et méritent d'être détaillées dans le domaine linéaire comme dans le domaine non-linéaire.

Des études similaires sont présentes dans la littérature [4, 5, 1, 46, 30, 64, 73] mais elles se limitent à des défauts de l'ordre de l'épaisseur. L'amplitude de l'imperfection introduite ici atteint 10 fois l'épaisseur. Dans le domaine linéaire, les résultats sont systématiquement confrontés à une simulation par éléments finis CAST3M de paramètres de calcul similaires à ceux de la section précédente (éléments D.K.T., 3260 nœuds). Dans le domaine non-linéaire, l'effet sur le type de non-linéarité de quelques modes est étudié.

### 4.4.2 Imperfection de la forme du mode (0,1)

#### Introduction

On considère un défaut axisymétrique de la forme du mode propre de plaque (0,1). L'imperfection, présentée figure 4.11(a,b), s'écrit :  $w_0(r) = a_{(0,1)}\Phi_{(0,1)}(r)$ , où  $a_{(0,1)}$  est la seule composante non nulle de la projection (3.35).

#### Résultats sur les pulsations propres

Sur la figure 4.11(c) sont tracées les pulsations propres de la plaque imparfaite en fonction de la hauteur du défaut  $w_{m(0,1)}$  (définie figure 4.11(b)) pour une plage de valeur s'échelonnant de 0 (cas de la plaque mince parfaitement plane) à 10 fois l'épaisseur  $h$ . Le code de calcul par éléments finis et le modèle de plaque imparfaite présentent une parfaite correspondance dans leurs résultats. On observe que, de la même manière que dans le cas du défaut sphérique, l'évolution des pulsations scinde les modes en deux familles. On n'observe une influence réelle que sur les modes axisymétriques et mixtes alors que les modes asymétriques voient leurs pulsations inchan-

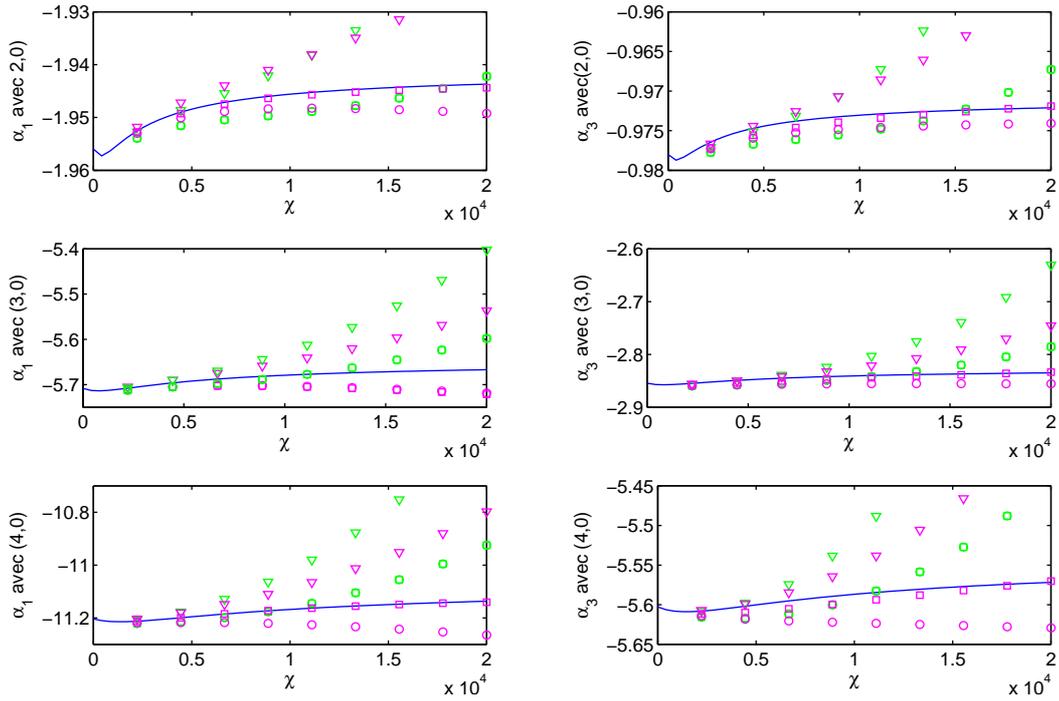


FIGURE 4.10 – Coefficients quadratiques  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  tels que  $\alpha_1 = -g_{3u}^u - g_{u3}^u$  et  $\alpha_3 = -g_{uu}^3$  en fonction de  $\chi$  selon le modèle de coque de [85] (—), avec l'équation complète de calotte sphérique comme défaut injecté dans le modèle (en vert), avec un développement limité de calotte sphérique comme défaut injecté dans le modèle (en magenta); ces deux derniers calculs étant faits pour  $N_p=4$  ( $\nabla$ ),  $N_p=7$  ( $\square$ ) et  $N_p=13$  ( $+$ ). L'indice 3 fait appel au mode (0,1) et  $u$  représente consécutivement les modes (2,0), (3,0) et (4,0).

gées. À la différence de l'imperfection sphérique cependant, la hiérarchie des modes mixtes et axisymétriques varie au fur et à mesure que l'amplitude  $w_{m(0,1)}$  croît. Pour  $w_{m(0,1)} = 3.2$ , on voit par exemple les positions des modes (3,1) et (0,2) s'invertir. L'influence sur certains modes axisymétriques est majeure, la pulsation propre du mode (0,1) par exemple est déjà doublée pour une amplitude de défaut de  $1.5h$  seulement.

Le problème étant complètement axisymétrique, la convergence des résultats selon  $N_w$  se fait sur les modes axisymétriques uniquement. Les seuils de convergence nécessaires pour garantir une précision donnée sur la pulsation propre  $\Omega_{(0,1)}$  et sur le coefficient cubique  $h_{ddd}^d$  avec  $d = (0,1)$  sont rapportés au tableau 4.1. La convergence sur la pulsation propre est rapide. Elle est légèrement plus lente sur les coefficients cubiques. De même que pour le cas sphérique, le seuil de convergence nécessaire pour atteindre une précision de 3 chiffres sur le coefficient cubique diagonal est de 7 modes. Les autres pulsations propres et coefficients cubiques montrent une convergence similaire.

### Résultats dans le domaine non-linéaire

Dans ce paragraphe sont présentés des résultats des calculs de tendance de non-linéarité, dont les principales articulations sont décrites à la section 4.2. L'évolution de la tendance de

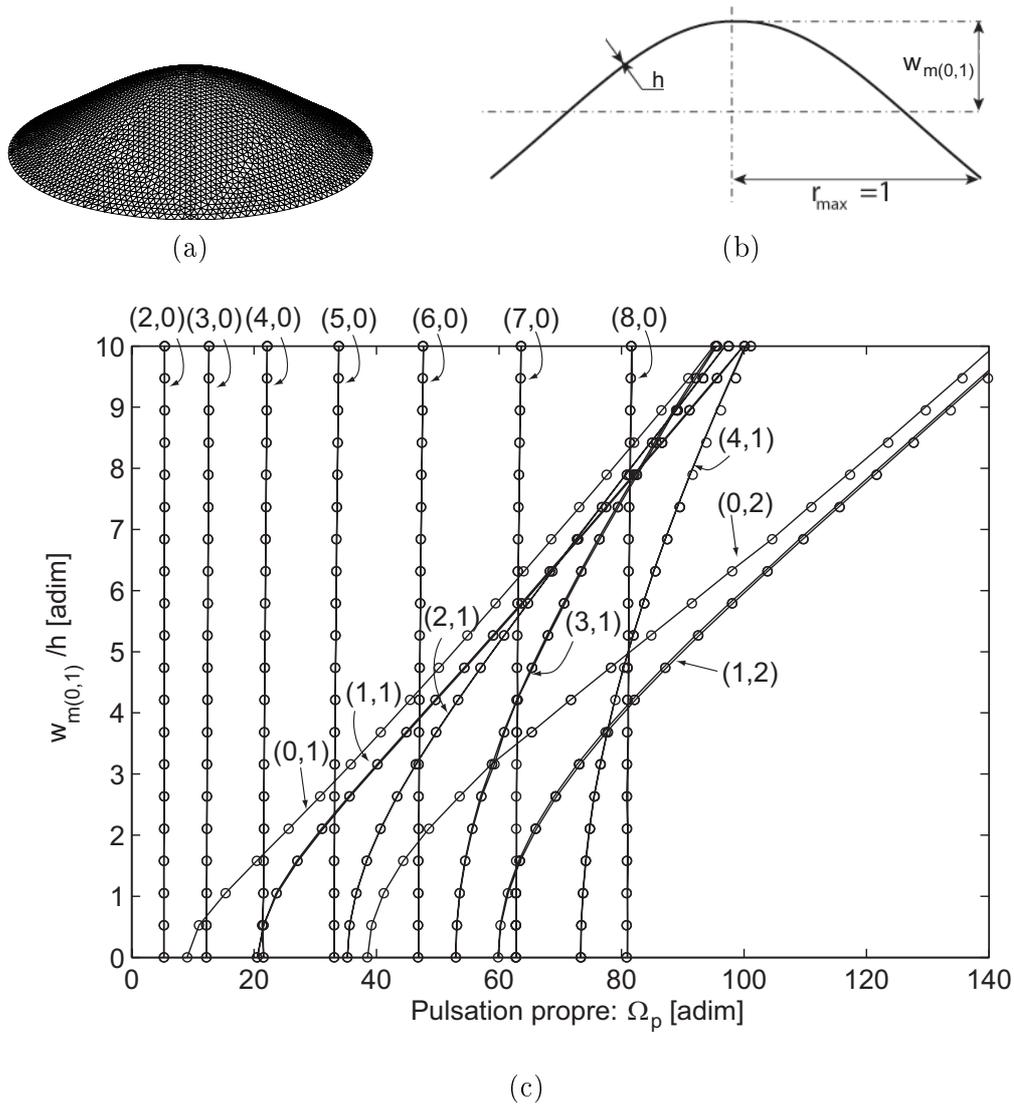


FIGURE 4.11 – (a) Maillage de la plaque comportant l'imperfection de la forme du mode  $(0,1)$  et (b) profil d'une section. (c) Evolution des pulsations propres vis-à-vis de l'amplitude  $w_{m(0,1)}$  de l'imperfection normalisée par rapport à  $h$ , selon CAST3M (—) et calculée grâce au modèle de plaque imparfaite (o).

	Précision à 3 chiffres	Précision à 4 chiffres
$\Omega_{(0,1)}$ [adim]	4	6
	Précision à 2 chiffres	Précision à 3 chiffres
$h_{ddd}^d$ [adim]	5	7

TABLE 4.1 – Nombre  $N_w$  de modes axisymétriques transverses nécessaires pour atteindre la précision correspondante sur les pulsations propres  $\Omega_{(0,1)}$  et sur les coefficients cubiques  $h_{ddd}^d$  du mode  $d = (0, 1)$ . Le défaut, d'amplitude  $10h$ , a la forme du mode  $(0, 1)$ .

$a$	$h$	$\rho$	$E$	$\nu$	$\xi_p$	$\forall p \in [1 N_w]$	$F$
11 cm	1.6 mm	7974 kg.m <sup>-3</sup>	85e9 Pa	0.38		$2e^{-4}$	0.3 N

TABLE 4.2 – Caractéristiques géométriques et matérielles de la plaque testée et paramètres de l'expérience numérique effectuée grâce à AUTO2000.

non-linéarité est calculée en fonction de l'amplitude du défaut pour quelques modes axisymétriques,  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$ , et asymétriques,  $(2, 0)$  et  $(4, 0)$ .

L'effet sur le premier mode axisymétrique est montré figure 4.12. La grande variation de fréquence propre de ce mode que l'on observait au paragraphe précédent se traduit ici par un changement rapide de la tendance de non-linéarité, qui pour une amplitude de  $w_{m(0,1)}$  égale à  $0.38h$ , passe d'un comportement raidissant à un comportement assouplissant. La petitesse de cette valeur explique que dans le cas de mesures sur certaines plaques circulaires minces réelles, comportant inévitablement de faibles imperfections, un comportement assouplissant soit souvent révélé. Ce résultat fait l'écho de ceux obtenus numériquement par Hui [36] qui avait constaté ce changement qualitatif de tendance de non-linéarité pour une amplitude d'imperfection de  $0.28h$  dans le cas de plaques simplement supportées. Par ailleurs, on remarque figure 4.12 que la tendance de non-linéarité subit des discontinuités lorsque le défaut croît. Ce phénomène était déjà observé dans le cas de coques sphériques minces [100]. Ces discontinuités proviennent de résonances internes 2:1, c'est à dire lorsque la pulsation du mode  $(0, 1)$  et celle d'un autre mode  $p$  remplissent la condition :  $2\omega_{(0,1)} = \omega_p$ . Dans le cas du mode  $(0, 1)$ , une résonance 2:1 apparaît avec le mode  $(0, 2)$  à  $1.85h$  et avec le mode  $(0, 3)$  à  $5.66h$ . Il est à noter que lorsque des résonances apparaissent, la solution couplée évince la solution associée à un seul degré de liberté. La notion de tendance de non-linéarité, propre à un mode seul, s'efface donc dans les régions où cet effet prédomine.

Les précédents résultats sont appuyés par l'expérience numérique suivante. La plaque imparfaite, au sein de laquelle est appliqué un défaut de la forme du mode  $(0, 1)$  dont on contrôle l'amplitude, est excitée en son centre par une force harmonique. Le problème reste donc axisymétrique et seule la réponse forcée du mode  $(0, 1)$  est étudiée. La force, distribuée sur les modes propres axisymétriques et dont l'expression était introduite Eq. (3.31), peut être écrite :

$$\tilde{Q}_u = \Phi_u(r=0)F \cos(\Omega t), \quad (4.15)$$

où  $F$  et  $\Omega$  sont respectivement l'amplitude et la pulsation du forçage.

Les caractéristiques géométriques et matérielles de la plaque testée ainsi que les paramètres de l'expérience numérique figurent dans le tableau 4.2.

Le logiciel AUTO2000 [18], utilisant une méthode de continuation par pseudo longueur d'arc, nous permet de calculer les branches de solutions. Une étude de convergence sur la troncature

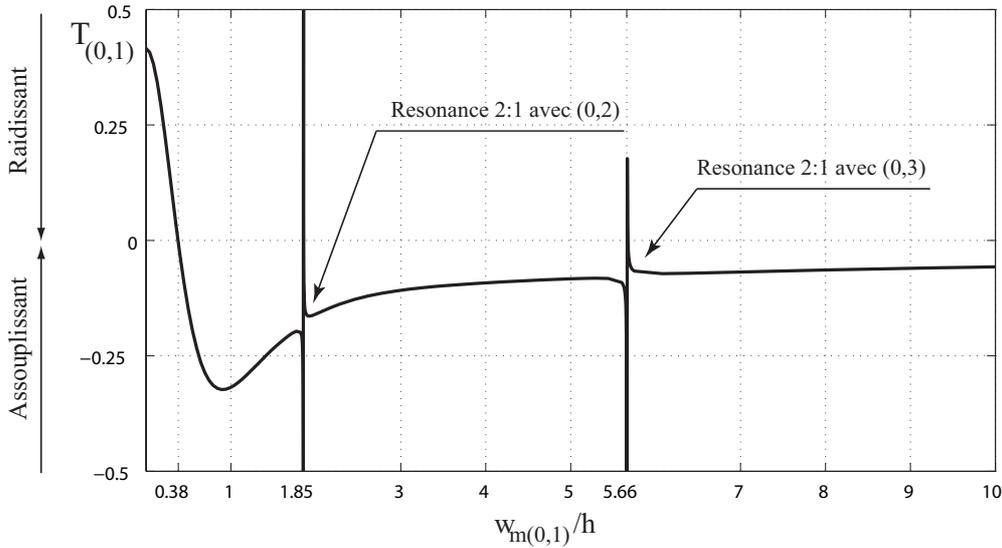


FIGURE 4.12 – Évolution de la tendance de non-linéarité  $T_{(0,1)}$  en fonction de l'amplitude  $w_{m(0,1)}$  de l'imperfection de la forme du mode  $(0, 1)$ .

$N_w$  du nombre de modes à conserver dans la projection de Galerkin permet de vérifier que la courbe de réponse en fréquence est convergée lorsque 3 modes axisymétriques sont conservés. En effet, l'ajout d'un 4<sup>ème</sup> mode axisymétrique ne modifie plus guère la solution ; de plus les modes asymétriques qui ont été inclus en guise de test voient leurs amplitudes rester nulle en tout point (confirmant la nature axisymétrique du problème). L'expérience a été menée sur 4 plaques imparfaites correspondant aux amplitudes d'imperfection égales à  $0h$  (plaque parfaitement plane),  $h/4$ ,  $h/2$ ,  $h$  et  $3h$ . Les courbes de réponse en fréquence constituent la figure 4.13. L'axe des fréquences  $\omega$  est normalisé selon la pulsation propre  $\omega_{(0,1)}$  et l'axe des ordonnées, représentant le maximum de la coordonnée modale  $X_{(0,1)}$  est normalisé par l'épaisseur  $h$ . Le maximum d'amplitude observé lors de cette expérience correspond environ à  $0.15h$ , ce qui est cohérent avec les mesures expérimentales effectuées sur une coque de caractéristiques géométriques et matérielles similaires [84]. Ces résultats d'expérience sur une plaque forcée harmoniquement sont en excellente correspondance avec la courbe d'évolution de tendance de non-linéarité du mode  $(0, 1)$  en réponse libre. On constate en effet un comportement raidissant pour une amplitude d'imperfection égale à  $0h$  et  $h/4$  et un comportement assouplissant pour de plus grands défauts. La figure 4.12 nous indiquait ce changement qualitatif à  $0.38h$ . Par ailleurs, on observe également la diminution en valeur absolue de la tendance de non-linéarité à mesure que le défaut croît, ce qui se traduisait dans la courbe de tendance par un comportement asymptotique global tendant vers 0 par valeur négative.

On regarde maintenant l'influence d'un défaut de la forme du mode  $(0, 1)$  sur les tendances de non-linéarité d'autres modes, à commencer par le mode  $(0, 2)$ , figure 4.14. On constate une fois de plus un effet très important sur ce mode avec un changement qualitatif de tendance de non-linéarité qui intervient pour un défaut très petit :  $w_{(0,1)} = 0.75h$ . De même la première résonance interne 2:1 apparaît assez tôt, créant de fait une petite région où le comportement redevient raidissant. Ces résultats complètent ceux de Hui qui s'était cantonné à une analyse sur le premier mode axisymétrique et dans laquelle était omise la résonance 2:1 à cause d'une

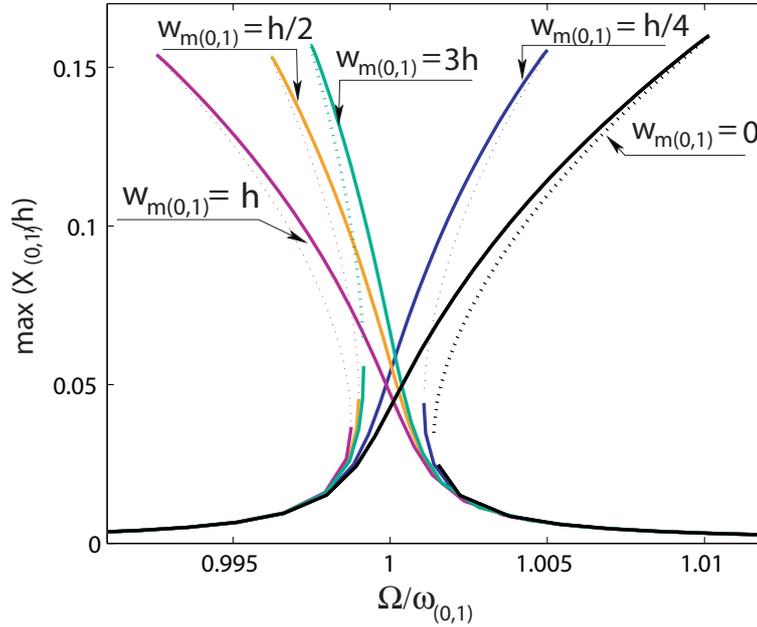


FIGURE 4.13 – Réponse forcée du mode  $(0, 1)$  de plaques imparfaites correspondant à des défauts d'amplitudes  $0h$ ,  $h/4$ ,  $h/2$ ,  $h$  et  $3h$ , pour une excitation harmonique. Le comportement de la plaque devient assouplissant pour un défaut d'amplitude  $0.38h$  (voir figure 4.12).

troncature trop sévère.

L'évolution des tendances de non-linéarité des modes asymétriques  $(2, 0)$  et  $(4, 0)$  en fonction de l'imperfection est montrée figure 4.15. À la différence des modes axisymétriques, on y constate une variation légère de la tendance de non-linéarité en fonction du défaut. Ce moindre effet sur les modes asymétriques vient du fait que la géométrie des modes asymétriques n'est que très peu modifiée par le défaut axisymétrique, comme on pouvait le constater sur les fréquences propres, figure 4.11. Dans le cas du mode  $(2, 0)$ , ce n'est d'ailleurs que dans la petite région environnant la résonance  $2:1$  avec le mode  $(0, 1)$  que l'on observe un changement qualitatif de tendance de non-linéarité. C'est en fait la variation des autres fréquences propres qui est prépondérante dans la variation de ces tendances. En outre, dans le cas du mode  $(4, 0)$ , la première résonance interne à  $w_{(0,1)} = 1.39h$  ne modifie pas le comportement du mode. Cependant la résonance apparaissant à  $w_{(0,1)} = 4h$  change le comportement raidissant en comportement assouplissant.

Même si l'effet sur les modes asymétriques est moins prononcé que sur les modes axisymétriques, ces constatations montrent l'importance de la prise en compte des modes axisymétriques dans l'étude du comportement des modes asymétriques. Ces résultats corroborent ceux obtenus dans le cas de la coque sphérique [97]. De manière générale, le comportement des modes asymétriques devient assouplissant après la résonance interne  $2:1$  avec le mode  $(0, 1)$ . Le mode  $(2, 0)$  déroge cependant à cette règle car son comportement reste très faiblement raidissant après la résonance, résultat que l'on retrouvait également pour les coques sphériques. Il est également observé que pour de grandes valeurs d'amplitude de l'imperfection, tous les comportements tendent

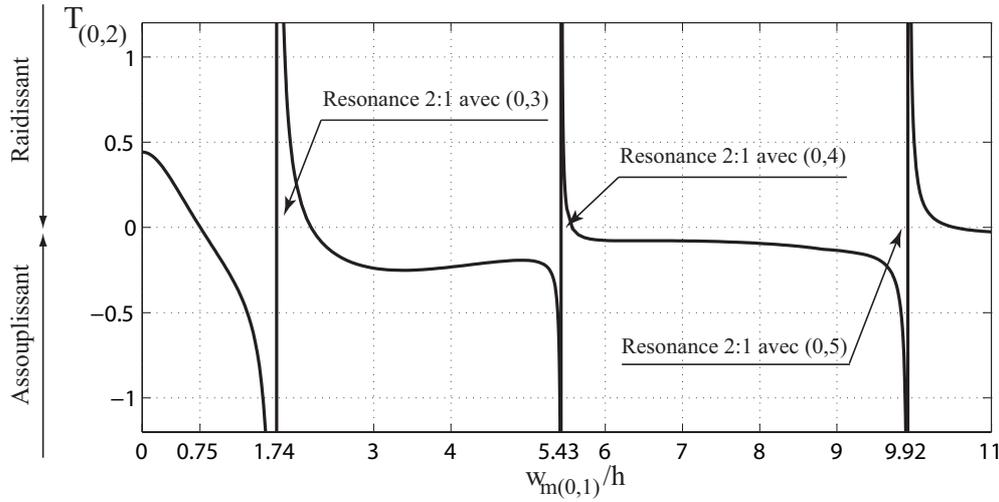


FIGURE 4.14 – Évolution de la tendance de non-linéarité  $T_{(0,2)}$  en fonction de l'amplitude  $w_{m(0,1)}$  de l'imperfection de la forme du mode (0, 1).

à devenir neutres.

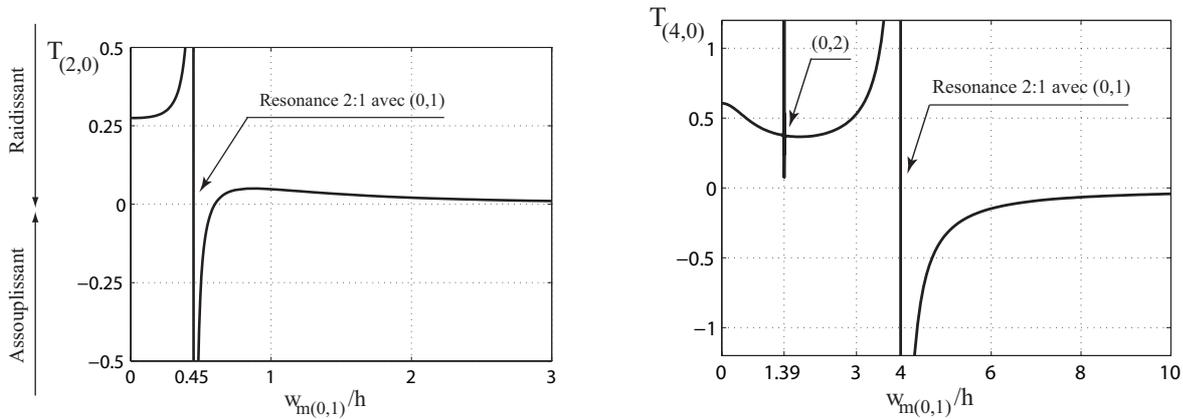


FIGURE 4.15 – Évolution des tendances de non-linéarité  $T_{(2,0)}$  et  $T_{(4,0)}$  en fonction de l'amplitude  $w_{m(0,1)}$  de l'imperfection de la forme du mode (0, 1).

### 4.4.3 Imperfection de la forme du mode (0,2)

#### Introduction

Le cas d'un défaut axisymétrique de la forme du mode (0, 2) est maintenant documenté. Les résultats présentés dans cette section sont ciblés sur les caractéristiques linéaires et sur l'étude de convergence. Ils ne font pas état de l'influence du défaut sur les caractéristiques non-linéaires en terme de tendance de non-linéarité ni en terme de courbe de résonance, dont les principales conclusions à tirer pour un défaut axisymétrique sont au reste largement discutées dans la section

	Précision à 3 chiffres	Précision à 4 chiffres
$\Omega_{(0,2)}$ [adim]	4	8
	Précision à 2 chiffres	Précision à 3 chiffres
$h_{ddd}^d$ [adim]	7	8

TABLE 4.3 – Nombre  $N_w$  de modes axisymétriques transverses nécessaires pour atteindre la précision correspondante sur les pulsations propres  $\Omega_{(0,2)}$  et sur les coefficients cubiques  $h_{ddd}^d$  du mode  $d = (0, 2)$ . Le défaut, d'amplitude  $10h$ , a la forme du mode  $(0, 2)$ .

précédente. On considère donc le défaut présenté figure 4.16(a,b). De même que dans le cas précédent, l'imperfection s'écrit  $w_{m(0,2)} = a_{(0,2)}\Phi_{(0,2)}$  où  $a_{(0,2)}$  est la seule composante non nulle de la projection (3.35).

### Effets sur les caractéristiques linéaires

La figure 4.16(c) montre l'évolution des fréquences propres en fonction de l'amplitude du défaut. On compare à nouveau les résultats du modèle avec ceux délivrés par le code de calcul par éléments finis CAST3M<sup>9</sup>. Une fois encore, les résultats présentent une excellente correspondance.

La première constatation qui est faite figure 4.16(c) est que, à la différence des défauts axisymétriques de la forme du mode  $(0, 1)$  et de forme sphérique, les pulsations propres des modes asymétriques subissent une variation non-négligeable lorsque l'imperfection croît. En effet, la pulsation propre du mode  $(2, 0)$ , qui est de 5.089 pour une plaque plane, atteint 13.035 lorsque l'amplitude de l'imperfection est de  $10h$ . Les modes  $(0, 1)$  et  $(1, 1)$  sont moins affectés que les autres modes axisymétriques et mixtes de sorte que la classification des modes propres en familles par rapport à leur évolution n'est plus aussi évidente.

De même que pour le cas précédent, la convergence des résultats, présentée tableau 4.3, montre que les pulsations propres convergent plus rapidement que les coefficients non-linéaires.

## 4.5 Cas de défauts asymétriques

### Introduction

Les résultats présentés dans cette section concernent l'effet de défauts asymétriques typiques. L'organisation et le détail des résultats sont similaires à ce qui a été écrit précédemment sur les défauts axisymétriques. Les effets sur les caractéristiques linéaires et non-linéaires de coque comportant des défauts de la forme des modes  $(2, 0)$  et  $(3, 0)$  sont détaillés pour des amplitudes d'imperfection s'élevant jusqu'à  $10h$  dans la plupart des cas. L'étude d'un très grand défaut, jusque  $35h$ , est menée dans le cas du premier défaut asymétrique pour évaluer la limite de l'accord entre le modèle et la solution par éléments finis.

#### 4.5.1 Imperfection de la forme du mode $(2,0)$

Comme mentionné lors des développements théoriques de la section 3.1.5, lorsque les structures étudiées sont à symétrie de révolution (telle que la plaque plane ou la coque sphérique), les fréquences propres associées aux modes propres asymétriques possèdent une multiplicité égale

9. le maillage est le même que dans le cas du défaut de la forme du mode  $(0, 1)$ .

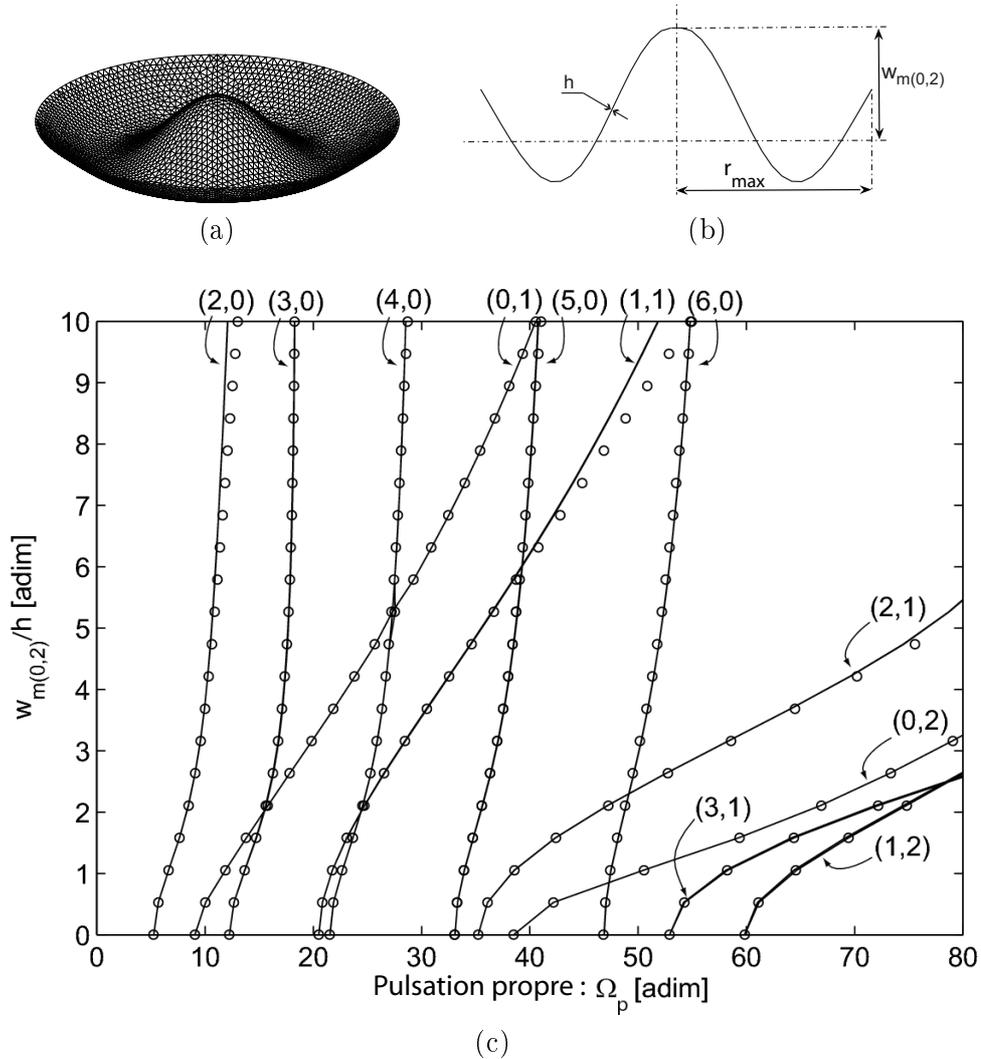


FIGURE 4.16 – (a) Maillage de la plaque comportant une imperfection de la forme du mode (0,2) et (b) profil d'une section. (c) Évolution des pulsations propres vis-à-vis de l'amplitude  $w_{m(0,2)}$  de l'imperfection normalisée par rapport à  $h$ , selon CAST3M (—) et calculée grâce au modèle de plaque imparfaite (o).

à 2, correspondant aux 2 modes dégénérés appelés *modes compagnons*, l'un ayant une configuration en *sinus*  $(.,.,s)$  et l'autre en *cosinus*  $(.,.,c)$ . Lorsqu'un défaut asymétrique est introduit, la symétrie de révolution de la structure est brisée et chacun des modes compagnons, nous le verrons par la suite, est affecté de manière différente. Dans cette étude, nous choisissons de faire porter au défaut de forme une configuration en *cosinus*. Le défaut, décrit figure 4.17(a,b), s'écrit donc de la manière suivante :

$$w_0(r, \theta) = a_{(2,0,c)} \Phi_{(2,0,c)}(r) = a_{(2,0,c)} R_{(2,0)}(r) \cos 2\theta, \quad (4.16)$$

avec  $R_{2,0}(r)$  le profil de la déformée montrée figure 4.17(b).

### Effets sur les caractéristiques linéaires

Les résultats sur les pulsations propres, figure 4.17(c) montrent, comme dans les cas de défauts axisymétriques, une très bonne adéquation entre le modèle et le code de calcul par éléments finis. L'imperfection a un effet majeur autant sur les modes asymétriques qu'axisymétriques. La pulsation propre adimensionnée du mode  $(0, 2)$  par exemple, qui est de 38.5 pour la plaque plane, atteint 72.7 dans le cas d'une imperfection d'amplitude  $10h$ . Le mode  $(2, 0, c)$  voit quant à lui sa pulsation propre déjà doublée pour  $w_{m(2,0,c)} = 1.8h$ .

En ce qui concerne plus précisément les modes asymétriques, on remarque que l'influence de l'imperfection se concentre sur la configuration en *cosinus* lorsque le nombre de diamètres nodaux de ceux ci est multiple de 2. On constate en effet que les configurations des modes  $(3, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(5, 0)$  restent confondues au fur et à mesure de la croissance de l'imperfection. De plus, ces derniers subissent une évolution modérée en regard des autres modes asymétriques. Pour ceux dont le nombre de diamètres nodaux est pair, la configuration en *sinus* n'est que très peu affectée par l'imperfection.

Quelques déformées modales sont présentées figure 4.18. Il s'agit des déformées des modes  $(0, 1)$ ,  $(2, 0, s)$  et  $(2, 0, c)$  calculées pour une plaque comportant différentes amplitudes d'imperfection :  $0h$ ,  $2.1h$  et  $4.75h$ . Comme attendu à la suite de l'étude des pulsations propres, seul le mode  $(2, 0, c)$  parmi ces 3 modes subit un changement notable de forme. Ses diamètres nodaux restent malgré tout identiques. Le mode  $(2, 0, s)$  reste inchangé, tout comme le mode  $(0, 1)$ .

À la différence des cas précédents où la propriété de symétrie de révolution nous permettait de restreindre le problème (3.33) aux seuls modes axisymétriques, le calcul doit ici tenir compte des modes mixtes et asymétriques. Sont ainsi retenus 51 modes transverses de plaque circulaire à bord libre, à savoir les 9 premiers modes purement asymétriques, de  $(2, 0)$  à  $(10, 0)$ , les modes mixtes  $(1, 1)$  à  $(6, 1)$ ,  $(1, 2)$  à  $(3, 2)$  et  $(1, 3)$  et les 13 premiers modes axisymétriques de  $(0, 1)$  à  $(0, 13)$ . Comparativement aux imperfections axisymétriques, un plus grand nombre  $N_w$  de modes doit être conservé pour garantir une solution convergée sur les pulsations propres, comme le montre le tableau 4.4.

### Comparaison des modèles pour une grande amplitude de défaut

Afin d'évaluer la pertinence de la méthode décrite dans cette partie, un grand défaut de forme est testé. L'imperfection introduite, toujours de la forme du mode  $(2, 0, c)$ , est accrue jusqu'à  $35h$ . Nous comparons les pulsations propres délivrées par le modèle actuel à la solution par éléments finis. Ces résultats sont regardés sur 3 modes et sont présentés figure 4.19. Ces calculs servent de préambules au cas des géométries de coques réelles dont les résultats sont présentés à la

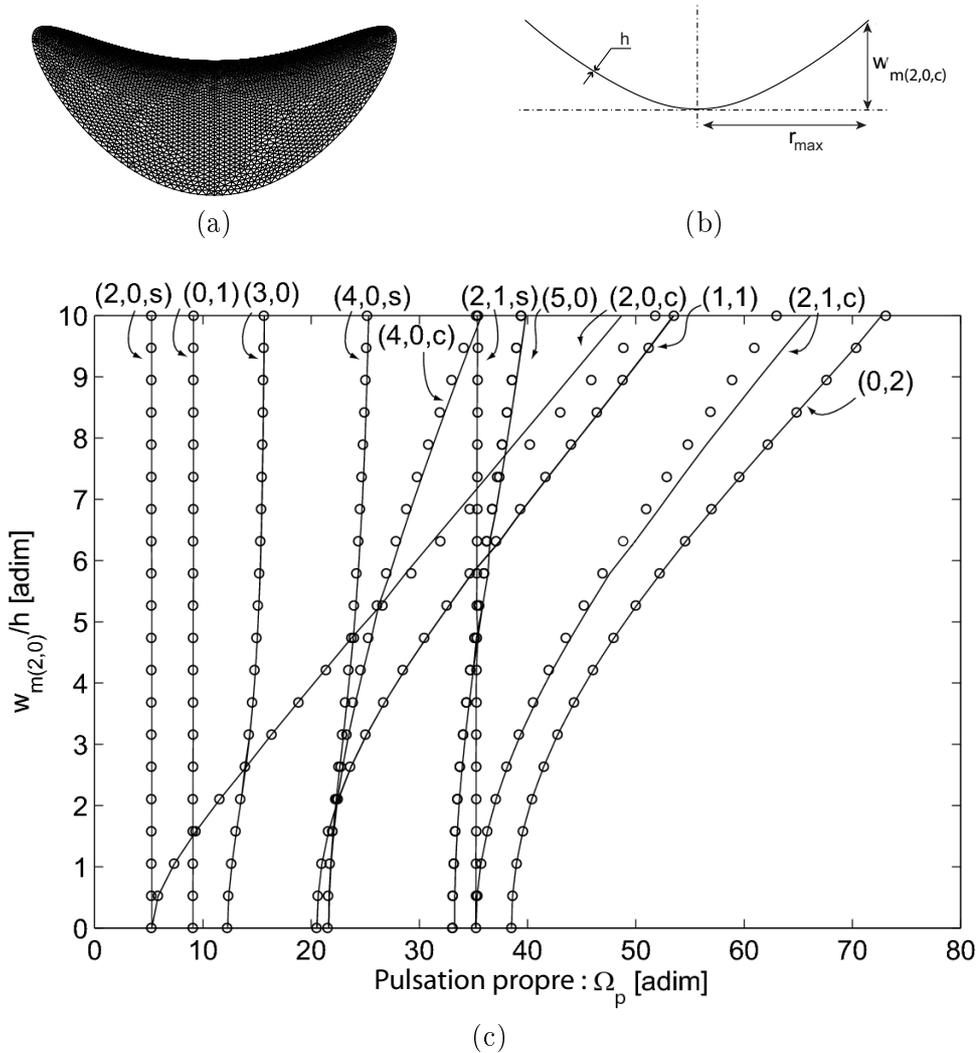


FIGURE 4.17 – (a) Maillage de la plaque comportant une imperfection de la forme du mode  $(2,0,c)$  et (b) profil d'une section. (c) Évolution des pulsations propres vis-à-vis de l'amplitude  $w_{m(2,0)}$  de l'imperfection normalisé par rapport à  $h$ , selon CAST3M (—) et calculée grâce au modèle de plaque imparfaite (o).

	Précision à 3 chiffres	Précision à 4 chiffres
$\Omega_{(d)}$ [adim]	12	15

TABLE 4.4 – Nombre  $N_w$  de modes nécessaires pour atteindre la précision correspondante sur les pulsations propres  $\Omega_d$  du mode  $d = (2,0,c)$  (L'imperfection d'amplitude  $10h$  a la forme du mode  $(2,0,c)$ ).

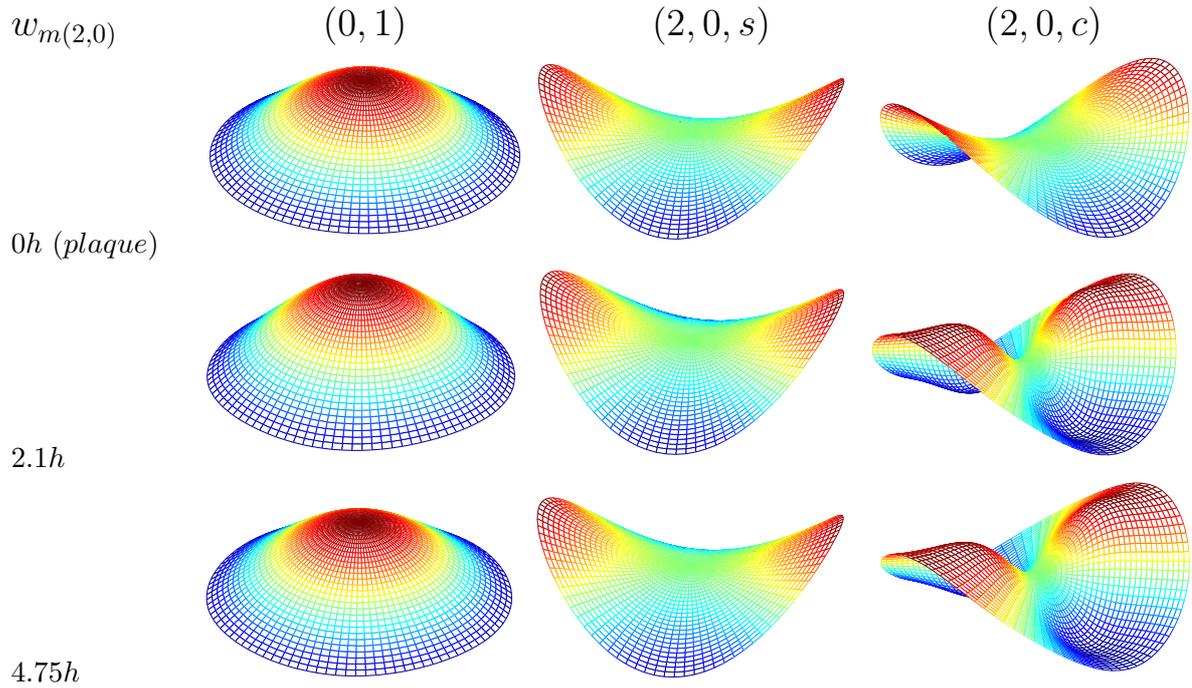


FIGURE 4.18 – Déformées modales des modes  $(0,1)$ ,  $(2,0,s)$ ,  $(2,0,c)$  pour une plaque comportant une imperfection de la forme du mode  $(2,0,c)$  d'amplitude  $w_{m(2,0)}$  successivement égale à  $0h$  (plaque circulaire parfaite),  $2.1h$  puis  $4.75h$ .

section suivante. En effet les composantes modales issues de la projection de la géométrie de certaines coques sont parfois élevées et dépassent, pour certaines, la gamme d'amplitude des études jusque  $10h$ . Cependant, comme nous le voyons sur la figure 4.19, les résultats du modèle de plaque imparfaite appliqué sur un grand défaut montrent une excellente correspondance avec ceux issus du calcul par éléments finis. Ces résultats, ainsi que d'autres similaires concernant d'autres défauts de formes mais non présentés dans ce manuscrit, présagent de la pertinence de notre modèle quant à l'introduction de géométries très courbées.

### Effets sur les caractéristiques non-linéaires

De la même manière que lors de l'étude du défaut de la forme du mode  $(0, 1)$ , ce paragraphe détaille l'effet du défaut de la forme du mode  $(2, 0, c)$  défaut de forme sur la tendance de non-linéarité de quelques modes, fruits de la méthode décrite section 4.2. L'évolution des tendances de non-linéarité des modes  $(2, 0, c)$  et  $(2, 0, s)$  est établie figure 4.20. Comme montré figure 4.17, la pulsation propre du mode  $(2, 0)$  subit une grande variation, ce qui se traduit figure 4.20 par un changement qualitatif rapide du comportement non-linéaire, à  $w_{m(2,0,c)} = 0.54h$ . La résonance interne 2:1 avec le mode  $(0, 1)$  qui intervient ensuite n'introduit pas de modification conséquente. L'intervalle au cours duquel le comportement devient raidissant est en effet petit. À l'inverse, la fréquence du mode  $(2, 0, s)$  n'est pas affectée par le défaut et ainsi la tendance de non-linéarité ne subit de variation notable que lors de la résonance avec le mode  $(2, 0)$ .

L'effet du défaut sur les tendances de non-linéarité des modes axisymétriques  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$  est rapporté figure 4.21. De même que pour le mode  $(2, 0, s)$ , la pulsation propre du mode  $(0, 1)$  n'est presque pas affectée par l'imperfection. La tendance de non-linéarité varie donc assez peu

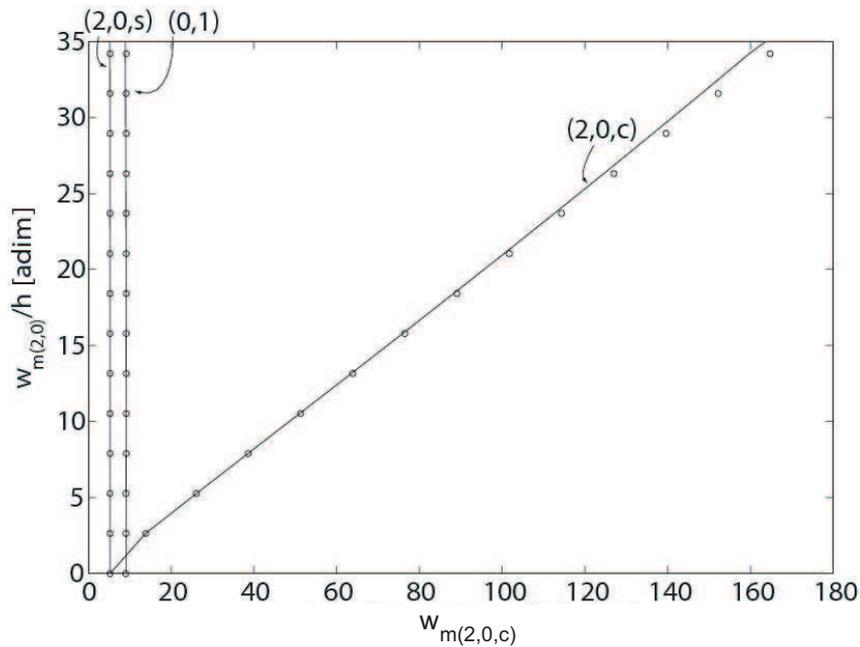


FIGURE 4.19 – Évolution des pulsations propres des modes  $(2,0,s)$ ,  $(0,1)$  et  $(2,0,c)$ , vis-à-vis de l'amplitude  $w_{m(2,0)}$  de l'imperfection normalisé par rapport à  $h$  et s'échelonnant depuis 0 jusqu'à 35, selon CAST3M (—) et selon le modèle de plaque imparfaite (o).

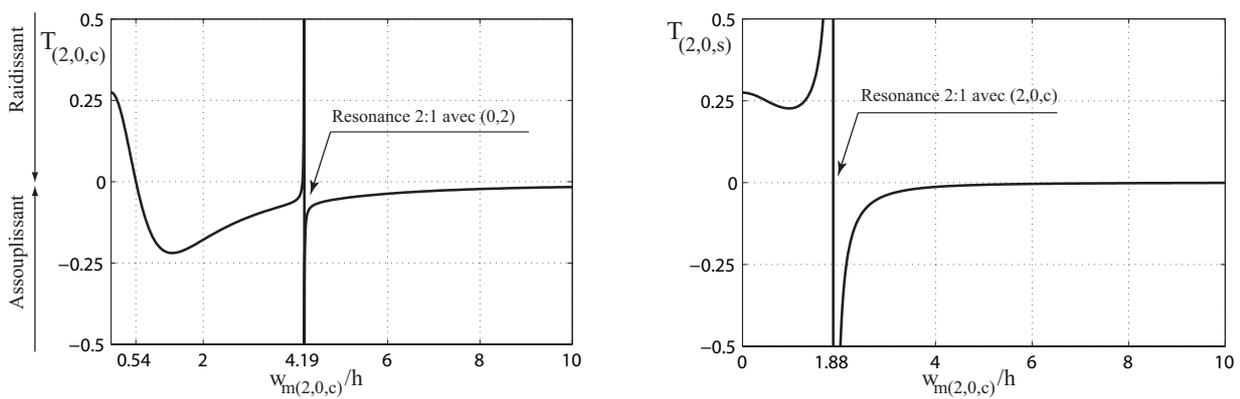


FIGURE 4.20 – Évolutions des tendances de non-linéarité  $T_{(2,0,c)}$  et  $T_{(2,0,s)}$  en fonction de l'amplitude  $w_{m(2,0,c)}$  de l'imperfection de la forme du mode  $(2,0,c)$ .

	Précision à 2 chiffres	Précision à 3 chiffres
$h_{ddd}^d$ [adim]	25	35

TABLE 4.5 – Nombre  $N_w$  de modes nécessaires pour atteindre la précision correspondante sur les coefficients cubiques diagonaux  $h_{ddd}^d$  du mode  $d = (2, 0, c)$  (L'imperfection d'amplitude  $10h$  a la forme du mode  $(2, 0, c)$ ).

jusqu'à ce qu'intervienne la résonance avec le mode  $(2, 0, c)$  et que le comportement devienne assouplissant. On remarque de plus que la tendance de ce mode tend ensuite rapidement vers 0. À l'image de sa pulsation propre, la tendance de non-linéarité du mode  $(0, 2)$  subit une forte décroissance. Bien que des résonances apparaissent avec le mode  $(0, 3)$  pour  $3.51h$  puis avec les modes  $(0, 4)$  et  $(0, 5)$  vers  $8h$ , le comportement reste raidissant.

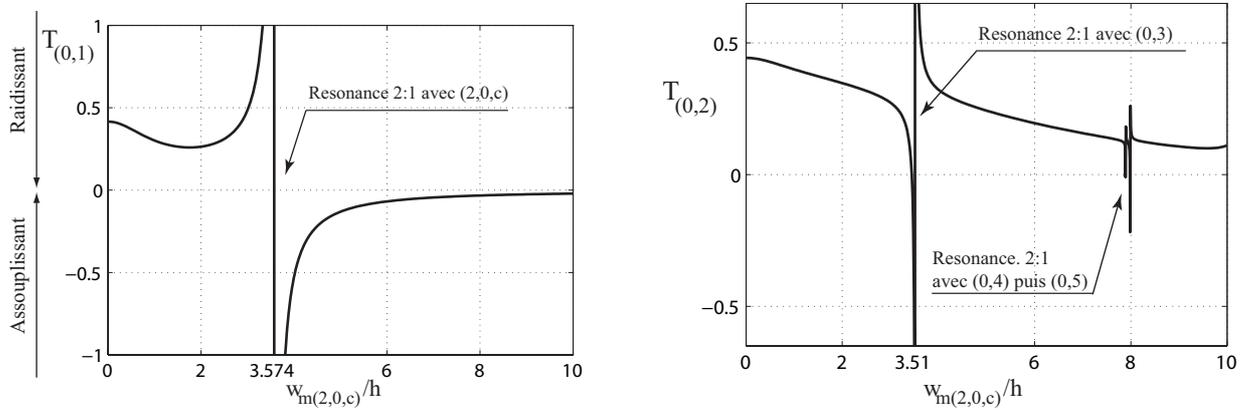


FIGURE 4.21 – Évolutions des tendances de non-linéarité  $T_{(0,1)}$  et  $T_{(0,2)}$  en fonction de l'amplitude  $w_{m(2,0,c)}$  de l'imperfection de la forme du mode  $(2, 0, c)$ .

La convergence des coefficients non-linéaires a également été étudiée pour ce défaut. Comme expliqué précédemment, 51 modes transverses ont été retenus pour ce calcul. Il a été observé sur le tableau 4.5 que 35 modes étaient nécessaires pour garantir une précision de 3 chiffres sur les coefficients cubiques diagonaux. Dans les cas de défauts axisymétriques, la troncature sur  $N_w$  était réduite à 7 modes transverses. La présente méthode est donc moins précise lorsqu'il s'agit de défauts asymétriques. La conséquence de ce résultat est que ce modèle de plaque imparfaite souffrira d'imprécisions lorsqu'il s'agira de rendre compte de l'effet de défauts localisés et décentrés. En pareil cas, un nombre élevé de modes transverses devra être pris en compte pour y pallier, entraînant fatalement un coût numérique plus important.

#### 4.5.2 Imperfection de la forme du mode $(3,0)$

##### Effets sur les caractéristiques linéaires

Dans ce paragraphe, nous regardons l'effet sur les fréquences propres d'une imperfection ayant la forme du mode  $(3, 0, c)$ . La géométrie est définie figure 4.22(a,b) et les résultats sur les pulsations propres figure 4.22(c). Les paramètres du code de calcul par éléments finis sont les mêmes que précédemment et nous observons à nouveau que les résultats des deux modèles

se superposent parfaitement. On constate pour cet autre défaut asymétrique que son influence sur les modes axisymétriques n'est pas négligeable, exception faite du mode  $(0,1)$  qui, tout comme au cas précédent (figure 4.17), voit sa pulsation propre inchangée. En ce qui concerne les modes asymétriques, on remarque cette fois que ce sont les modes propres dont le nombre de diamètres nodaux est multiple de 3 desquels se divisent les configurations préférentielles. En effet, la géométrie de ce défaut ne brise pas la symétrie entre les modes compagnons dont nombre de diamètres nodaux est pair. Ainsi, les pulsations propres des configurations en *sinus* des modes  $(3,0)$  et  $(3,1)$  sont inchangées lorsque croît l'amplitude du défaut alors que les configurations en *cosinus* associées augmentent rapidement. Ce phénomène est atténué sur le mode  $(6,0)$ . Il semble en outre que les deux configurations s'entrecroisent pour une amplitude de défaut supérieure à  $9h$ , singularité qui n'avait pas été observée dans le cas du défaut asymétrique précédent.

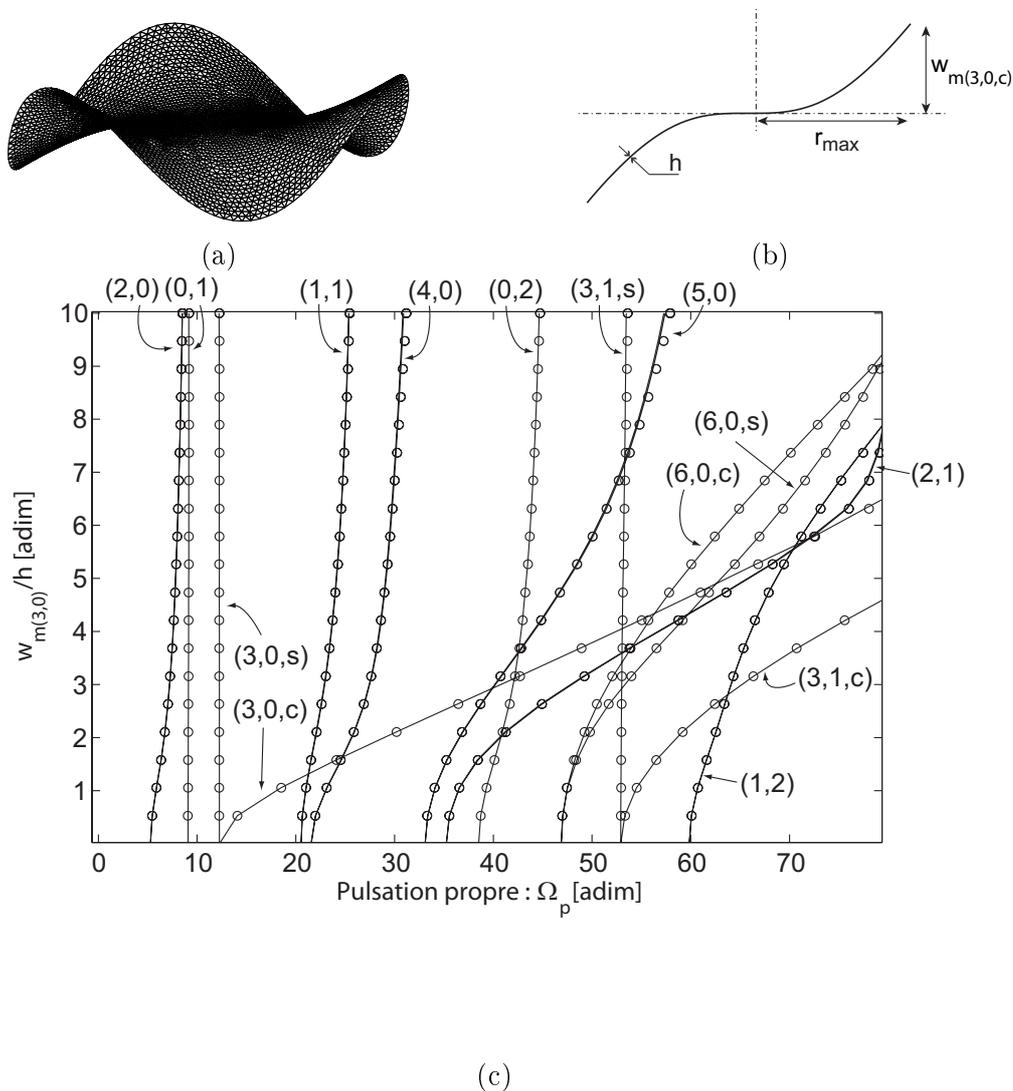


FIGURE 4.22 – (a) Maillage de la plaque comportant une imperfection de la forme du mode  $(3,0,c)$  et (b) profil d'une section. (c) Évolution des pulsations propres vis-à-vis de l'amplitude  $w_{m(3,0)}$  de l'imperfection normalisé par rapport à  $h$ , selon CAST3M (—) et calculée grâce au modèle de plaque imparfaite (o).

## 4.6 Conclusion sur les cas d'imperfections de formes données

Plusieurs résultats marquants ont été révélés par le travail décrit dans ce chapitre. Dans les cas originaux de défauts asymétriques testés, les modes propres axisymétriques sont amplement influencés (l'inverse est moins évident), les modes asymétriques se divisent en plusieurs familles selon la configuration du mode et également selon la relation que présente son nombre de diamètres nodaux avec celui du défaut. La convergence des solutions selon  $N_w$  souligne d'une part la nécessité de conserver un certain nombre de modes propres pour garantir une précision correcte sur les résultats linéaires. Cette remarque est d'autant plus vraie pour le domaine non-linéaire. Les calculs de tendance de non-linéarité l'attestent également, soulignant l'importance des résonances internes.

Les conclusions établies dans cette partie tant dans le domaine linéaire que non-linéaire sur 2 défauts axisymétriques et 2 défauts asymétriques nous permettent d'appréhender avec confiance le cas des coques de laboratoire. En effet, les résultats dans le domaine linéaire, en comparaison du modèle par éléments finis, sont excellents et ce jusqu'à des défauts d'amplitudes très élevées ( $\chi = 5e5$  pour le cas d'un défaut sphérique<sup>10</sup> et  $w_{m(2,0)} = 35h$  pour le cas du défaut asymétrique de la forme du mode  $(2,0)$ ). Comme nous le verrons par la suite, la géométrie des coques testées se situe dans ces gammes d'amplitude de défaut.

---

10. ce qui correspond à une hauteur  $H$  (4.10) d'environ  $35h$ .



# CHAPITRE 5

---

---

## CAS DE COQUES DE LABORATOIRE

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>63</b>
<b>5.2</b>	<b>Mesure de la géométrie</b>	<b>64</b>
<b>5.3</b>	<b>Projection géométrique</b>	<b>65</b>
<b>5.4</b>	<b>Comparaison sur les fréquences propres</b>	<b>67</b>
<b>5.5</b>	<b>Comparaisons dans le domaine non-linéaire</b>	<b>71</b>
5.5.1	Cas d'une résonance interne 1 : 1 : 2	71
5.5.2	Coefficients quadratiques	72
<b>5.6</b>	<b>Mise en évidence de l'erreur de projection</b>	<b>74</b>
<b>5.7</b>	<b>Prise en compte de cette erreur. Retour sur les résultats.</b>	<b>77</b>
5.7.1	Nouveaux résultats sur les coefficients non-linéaires et développements	78
5.7.2	Influence des coefficients cubiques	80
5.7.3	Résultats sur d'autres coques de laboratoire	82
<b>5.8</b>	<b>Discussion</b>	<b>82</b>

---

## 5.1 Introduction

Les coques de laboratoire, qui sont au centre de l'étude présentée dans cette section, avaient été usinées pour mesurer l'effet de la courbure sur les caractéristiques vibratoires de coques minces parfaitement sphériques. Ceci dans le but de confronter cette analyse au modèle de coque sphérique mince développé au laboratoire [84]. Les différences observées sont à la base du travail sur l'effet des imperfections dans les coques. La confrontation des résultats de l'actuel modèle de plaque imparfaite avec l'analyse modale expérimentale menée à l'époque sur les coques fabriquées pour l'occasion fait l'objet de cette section. Dans un souci de clarté, la description des démarches théoriques, calculatoires et expérimentales ainsi que les problèmes soulevés lors de ces travaux seront particulièrement détaillés pour le cas d'une seule coque<sup>11</sup>. Néanmoins quelques résultats sur les autres coques de laboratoire seront soumis, en marge de ce fil rouge.

On trouve dans la littérature quelques cas de comparaisons expérimentales et théoriques dans le domaine linéaire et non-linéaire de structures minces imparfaites. Yamaki et al. [108, 109]

---

11. la coque de référence.

avaient étudié le cas de la plaque circulaire encastrée, avec cependant une restriction du problème à un seul mode axisymétrique et pour un défaut de l'ordre de l'épaisseur. Une bonne correspondance entre mesures et calculs avait été constatée mais des divergences subsistaient lors de grandes amplitudes de vibration. Dans le cas de plaques rectangulaires et de coques cylindriques, Amabili [3, 4] montrait une bonne correspondance entre théorie et expérience. La géométrie de l'imperfection qu'il considérait, de l'ordre de l'épaisseur, n'était projetée toutefois que sur un seul mode. Dans notre cas, la courbure de la coque de référence est telle que l'imperfection à introduire dans le modèle de plaque imparfaite atteint  $28h$ . À la différence des autres études citées, la troncature sur la projection du défaut ne sera pas arbitraire. La projection du défaut fera l'objet d'une étude particulière afin de déterminer le nombre optimal de modes sur lesquelles le défaut doit être projeté. Les comparaisons seront établies dans le domaine linéaire dans un premier temps. On comparera ainsi systématiquement les résultats issus de l'expérience, du modèle de coque sphérique mince, du modèle de plaque imparfaite et du modèle par éléments finis. Dans un deuxième temps, les caractéristiques non-linéaires qu'il est possible de dégager de l'analyse modale expérimentale seront comparées avec les modèles analytiques<sup>12</sup>.

Une partie de ces travaux peut être par ailleurs retrouvée dans [13].

## 5.2 Mesure de la géométrie

L'étude s'axe donc particulièrement autour de la coque de référence, présentée en introduction de cette partie chapitre 2 et que l'on voit photographiée figure 5.1. Ses caractéristiques géométriques sont déjà données tableau 2.1. On rappelle que les coques sont faites en bronze et que les propriétés matérielles sont considérées comme homogènes et isotropes. La condition de bord libre est simulée en attachant la coque par des fils de nylon à partir de trois petits trous équidistants percés près du bord (voir figure 5.1).

Le profil de la coque de référence, figure 2.1, montre d'ores et déjà qu'elle possède des défauts axisymétriques. Afin d'effectuer une mesure précise et complète de la géométrie tridimensionnelle de la coque, la machine à mesurer du laboratoire LURPA<sup>13</sup> de Cachan a été mise à contribution<sup>14</sup>. La photographie de la coque disposée sur le marbre de la machine à mesurer et les 2842 points de mesure composent les figures 5.3(a)-(b). On peut montrer également, figure 5.3(c)-(d), l'erreur commise entre les points de mesure et l'approximation de cette géométrie par une calotte parfaitement sphérique possédant un rayon de courbure optimal ( $R = 1557\text{mm}$ ). Cette erreur est calculée selon :

$$e(r, \theta) = w_0(r, \theta) - w_0^{th}(r, \theta), \quad (5.1)$$

où  $w_0(r, \theta)$  représente la géométrie mesurée et  $w_0^{th}(r, \theta)$  la calotte sphérique approchée. L'erreur commise atteint  $1.4h$ , ce qui semble considérable au regard des études menées précédemment sur quelques défauts typiques.

12. C'est à dire modèle de coque sphérique mince et modèle de plaque imparfaite

13. Laboratoire Universitaire de Recherche en Production Automatisée, 61 avenue du Président Wilson, 94 235 Cachan Cedex, France

14. L'auteur tient au passage à remercier chaleureusement Pierre Breteau, François Thiebaut et Olivier De Smet pour la rapidité avec laquelle les mesures ont été menées.



FIGURE 5.1 – Photo de la coque 3 attachée par des fils de Nylon à son bâti.

### 5.3 Projection géométrique

Afin d'implémenter cette géométrie mesurée au sein des programmes de calcul du modèle de plaque imparfaite, il est nécessaire de projeter les points de mesures sur les modes propres transverses de plaque. Nous procédons par la méthode suivante : une triangulation de Delaunay est appliquée aux points de mesure pour obtenir un maillage de la géométrie. Les projetés modaux  $a_p$  sont ensuite estimés par la formule suivante :

$$a_p = \iint \Phi_p w_o dS \approx \sum_i \Phi_p(x_i y_i) z_i A_i \quad (5.2)$$

où  $(x_i, y_i, z_i)$  sont les coordonnées du centre de gravité de l'élément  $i$  et où  $A_i$  est l'aire de la surface de l'élément  $i$  projetée sur le plan  $z = 0$ . La première information que l'on peut en tirer est la contribution de chaque mode dans la projection de cette géométrie, figure 5.3. La contribution majeure est apportée par les modes  $(0, 1)$  et  $(0, 2)$ . *A contrario*, la contribution des modes asymétriques est faible.

L'erreur entre le défaut reconstruit par (5.2) et la géométrie mesurée est donnée figure 5.4. L'erreur maximale est maintenant réduite à 0.4 mm, ce qui est mieux qu'avec l'approximation par une calotte sphérique où l'erreur était de 1.4 mm. L'erreur axisymétrique constatée est due à la troncature limitée aux 13 premiers modes axisymétriques. L'erreur résiduelle comporte en effet 14 cercles nodaux. Par ailleurs, l'erreur asymétrique est également grande. La coque de référence comporte quelques accidents sur le bord et la troncature des modes asymétriques à 10 rayon nodaux est trop faible pour les reproduire correctement. L'envergure et la forme de l'erreur

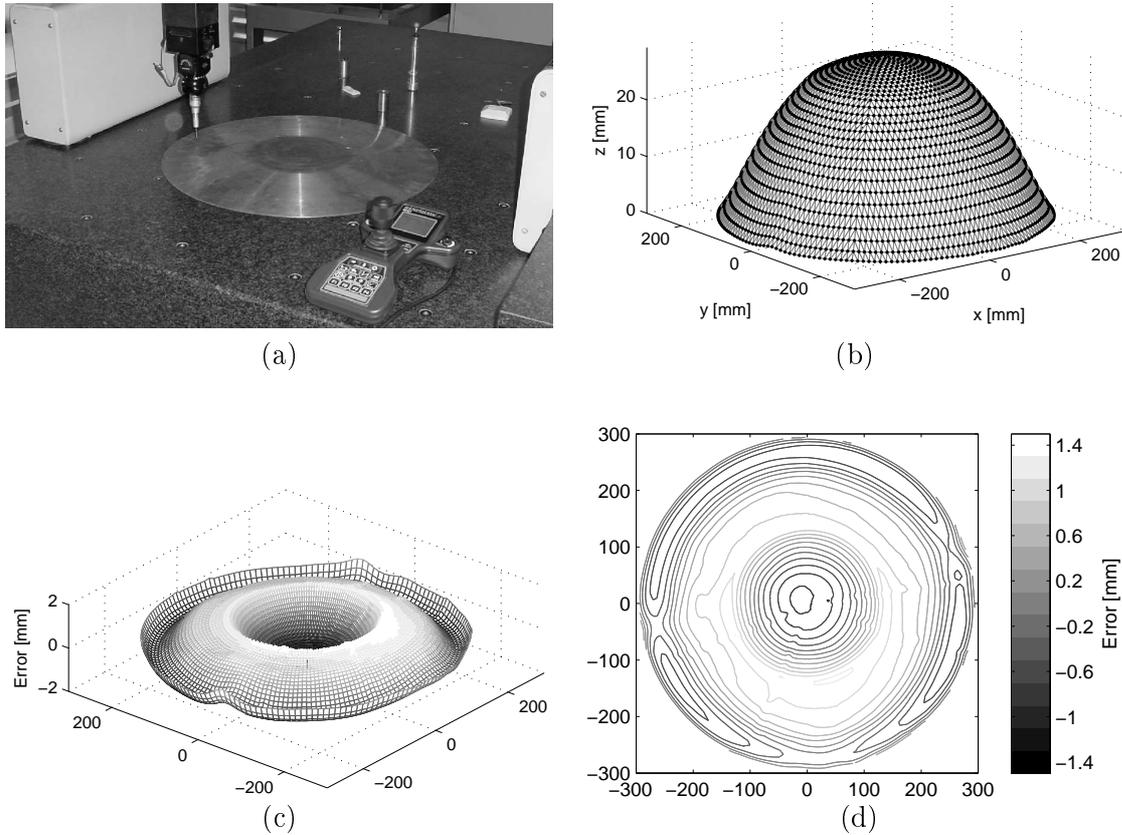


FIGURE 5.2 – Dispositif de mesure de la géométrie de la coque. (a) Photographie de la coque et de la machine à mesurer. (b) Points de mesures donnés par la machine à mesurer. (c) Erreur en mm entre la géométrie de la coque et une calotte sphérique de rayon de courbure optimal. (d) Courbe de niveau de cette erreur.

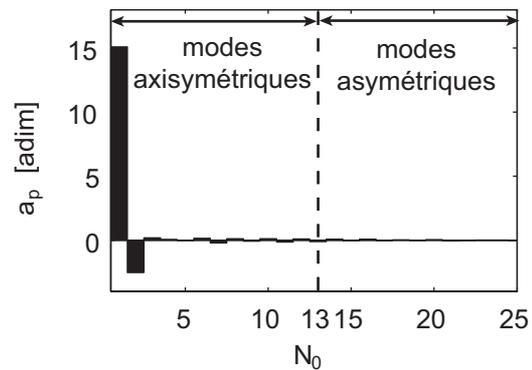


FIGURE 5.3 – Projection de la géométrie de la coque référence sur les modes propres de plaque circulaire mince.

commise montrent ainsi que malgré la tendance des amplitudes des projetés à être de plus en plus faibles au fur et à mesure que s'accroît le nombre de diamètres ou de cercle nodaux (figure 5.3), leur contribution reste importante. Même s'il semble qu'il faille donc peu de modes pour reconstruire correctement le défaut, l'erreur résiduelle est non-négligeable. Nous en verrons les conséquences plus en détail dans la suite de cette étude (voir section 5.6).

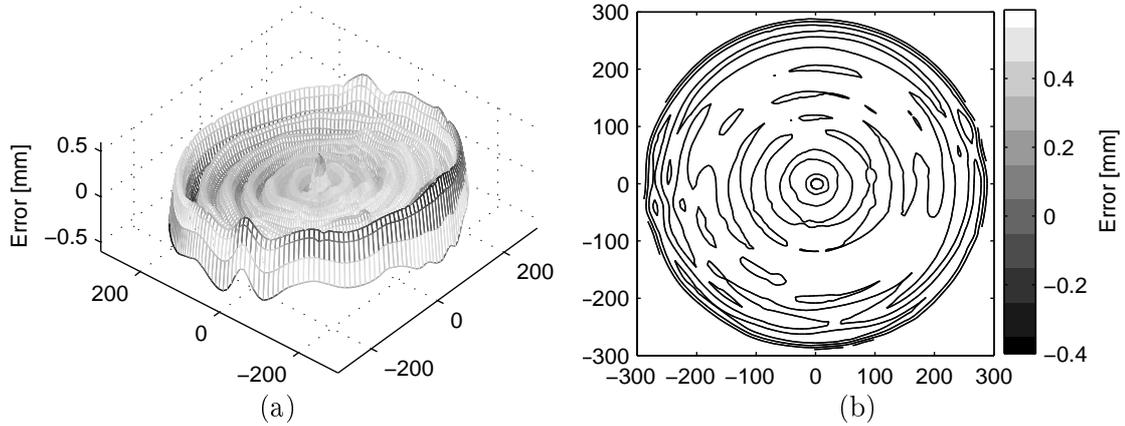


FIGURE 5.4 – (a) Erreur en mm entre la géométrie exacte de la coque de référence et la géométrie reconstruite d'après sa projection sur 51 modes propres. (b) Courbe de niveau de cette erreur.

## 5.4 Comparaison sur les fréquences propres

L'analyse modale de la coque 3 a été menée avec le système d'excitation suivant. Un petit aimant, collé sur la surface de la coque grâce à de la cire d'abeille, est excité harmoniquement par un champ magnétique lui-même créé par une bobine. On aperçoit le dispositif d'excitation figure 5.1. La vérification du comportement linéaire de ce système est détaillée dans [80]. La masse ajoutée par l'aimant a bien sûr un effet sur le comportement de la structure mince mais qui se limite au plus à 2 Hz et ce pour les modes axisymétriques [86].

Selon l'adimensionnement en  $h$  adopté lors de l'élaboration des modèles (voir section 3.1), la pulsation propre adimensionnée est liée à la fréquence propre dimensionnée par la relation :

$$f_p = \underbrace{\frac{h}{2\pi a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}}}_{f^*} \Omega_p. \quad (5.3)$$

Sur la figure 5.5 sont rapportées les fréquences propres expérimentales des 7 premiers modes asymétriques et des 4 premiers modes axisymétriques en fonction de leurs homologues adimensionnés calculés d'après le modèle de plaque imparfaite. Le facteur  $f^*$ , qui traduit dans ce graphe la pente de la droite se rapprochant le mieux des points au sens des moindres carrés, est estimé à 1.805. La masse volumique  $\rho$  du matériau est estimée grâce à la mesure de la masse de la structure et vaut  $8230 \text{ kg.m}^{-3}$ . La valeur du coefficient de Poisson  $\nu$ , en accord avec la littérature, est prise égale à 0.33. On peut ainsi, grâce à Eq. (5.3), estimer la valeur du module de Young du matériau ; on trouve  $E = 97.1 \text{ GPa}$ .

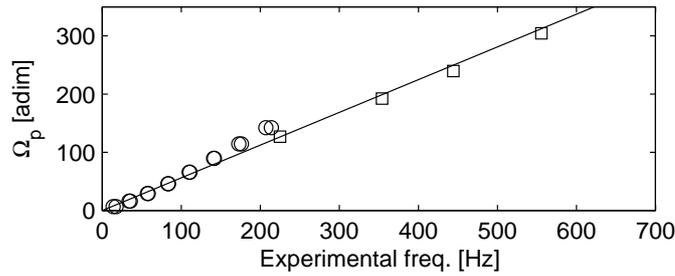


FIGURE 5.5 – Pulsations propres  $\Omega_p$  résultant de l'application du modèle de plaque imparfaite et fréquences expérimentales correspondantes. Les modes considérés sont les 7 premiers modes purement asymétriques, de  $(2, 0)$  à  $(8, 0)$  (o) et les 4 premiers modes axisymétriques, de  $(0, 1)$  à  $(0, 4)$  (□). La pente de la droite approchant le mieux ces valeurs est  $f^* = 1.805$  Hz. .

On peut finalement comparer sur le tableau 5.1 les fréquences dimensionnées de l'expérience et du modèle de plaque imparfaite sur quelques modes asymétriques, mixtes et axisymétriques. Cette comparaison est complétée par des résultats issus du modèle de coque sphérique mince parfaite et d'un calcul effectué par la méthode des éléments finis, sous CAST3M. Les résultats issus du modèle de coque sphérique mince sont ceux de [86] pour la coque 3 et [93] pour les coques 1 et 2. Le calcul par éléments finis a été effectué selon deux méthodes. Dans la première, les points de mesures donnés par la machine à mesurer ont servi à faire la base du maillage des éléments DKT. La géométrie discrète introduite dans ce cas est donc exactement celle qui avait été mesurée. Dans la seconde méthode, c'est la géométrie projetée puis reconstruite à partir des 51 modes transverses de plaque qui est introduite. La géométrie est dans ce cas exactement celle qui est introduite dans le modèle de plaque ; seule diffère ensuite la méthode de résolution des modes propres.

Quelques résultats sur les déformées modales viennent souligner et compléter les résultats sur les fréquences propres. Figure 5.6 sont ainsi montrées les déformées modales des modes  $(2, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ .

Les résultats rapportés tableau 5.1 et figure 5.6 montrent que le modèle de plaque imparfaite améliore considérablement la prédiction des modes propres de la coque de référence. L'erreur relative de 70% commise par le modèle de coque sphérique sur la fréquence du mode  $(0, 1)$  par exemple est maintenant réduite à moins de 0.5%. La déformée modale correspondante s'en trouve également largement modifiée. On observait en effet sur la déformée modale expérimentale du mode  $(0, 1)$  que la déformation se concentrait sur une région centrale de la déformée et qu'une légère oscillation sur le bord dénotait une hybridation<sup>15</sup> avec un mode asymétrique. À la grande différence de la déformée issue du modèle de coque sphérique mince, celle issue du modèle de plaque imparfaite reproduit ces deux phénomènes. De même sur le mode  $(0, 2)$ , l'erreur relative sur la fréquence propre passe de 11.3% à 3% et les deux mêmes phénomènes observés sur la déformée du mode  $(0, 1)$  et présents dans ce cas sont reproduits par le modèle actuel.

Même si les défauts asymétriques sont pris en compte dans le modèle de plaque imparfaite, donnant lieu à une scission des fréquences des modes propres compagnons, des erreurs subsistent sur ces modes. Les fréquences propres expérimentales des modes  $(2, 0, c)$  et  $(2, 0, s)$  diffèrent par exemple de quasiment 4 Hz, ce que peinent à retrouver le modèle analytique et les solutions

15. Le phénomène d'hybridation apparaît lorsque les valeurs propres de 2 modes sont si proches l'une de l'autre que les vecteurs propres correspondants sont difficilement dissociables expérimentalement ou numériquement.

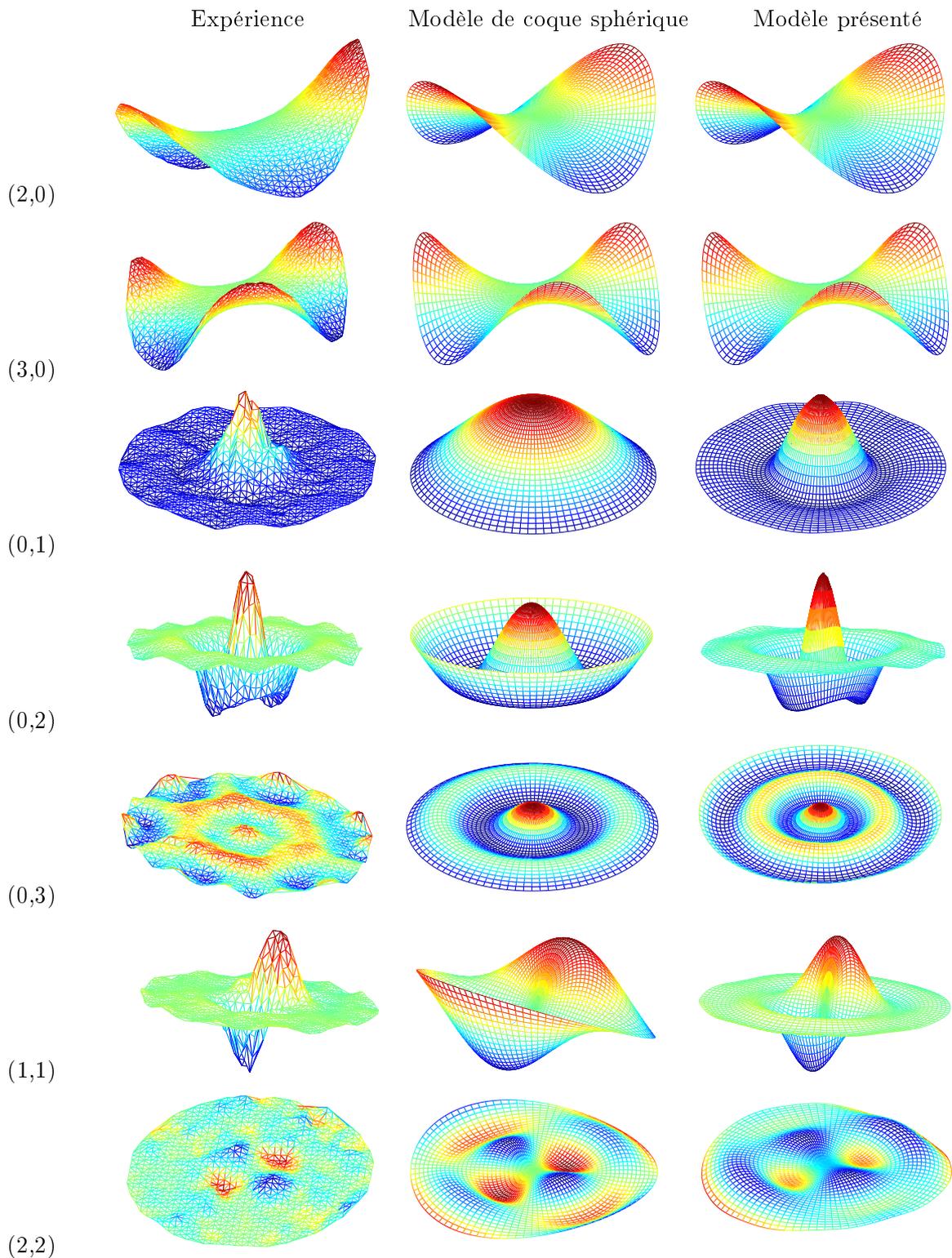


FIGURE 5.6 – Comparaison entre les déformées modales expérimentales (première colonne), calculées selon le modèle de coque sphérique mince (seconde colonne) et calculées selon le modèle de plaque imparfaite (dernière colonne) sur les modes  $(2,0)$ ,  $(3,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,2)$ ,  $(0,3)$ ,  $(1,1)$  et  $(2,2)$ .

Mode	Expérience		Modèle C.S	Modèle actuel		Cast3M 1		Cast3M 2	
(2, 0)	13.75	17.5	11.02	11.46	11.50	11.19	11.32	11.38	11.43
(3, 0)	34	35.5	26.37	28.47	28.50	26.46	26.58	28.51	28.55
(4, 0)	57.25	58.25	46.90	52.07	52.13	46.47	46.86	52.25	52.51
(5, 0)	83	83.75	72.17	81.85	82.03	71.43	71.57	82.56	82.67
(6, 0)	110	111	101.77	117.5	117.6	100.77	100.87	118.42	119.21
(7, 0)	141	141.5	135.45	160.2	160.2	134.40	134.60	160.5	160.6
(1, 1)	259.6	271	378.4	266	271.8	280.89	284.65	261.92	265.45
(2, 2)	310.5	315	411.7	362.1	363.8	338.88	342.58	318.52	320.56
(0, 1)	225		386.03	225.8		243.30		225.8	
(0, 2)	354		393.11	343.8		367.73		341.9	
(0, 3)	444.25		423.17	428.4		N.C.		N.C.	
(0, 4)	555.5		495.65	546.8		N.C.		N.C.	

TABLE 5.1 – *Comparaison des fréquences propres (en Hz) de la coque 3, calculées selon les modèles de coque sphérique, de coque imparfaite et enfin calculées avec CAST3M selon 2 méthodes. Colonne Expérience : Résultats de l'analyse modale expérimentale. Colonne Modèle C.S : Fréquences propres calculés selon le modèle de coque sphérique mince. Colonne Modèle actuel : Fréquences propres calculées à partir du modèle de plaque imparfaite. Colonne Cast3M 1 : Résultats de calculs effectués avec CAST3M ; le maillage et les points implémentés étant exactement ceux de la machine à mesurer. Colonne Cast3M 2 : Résultats de calculs effectués avec CAST3M ; les points implémentés sont une approximation sur une grille formée par CAST3M de la reconstruction du défaut à partir de 51 modes.*

par éléments finis. La scission des fréquences propres du mode (1,1) est par contre bien établie et leur valeurs correspondent bien mieux aux valeurs expérimentales que celle fournie par le modèle de coque sphérique. Concernant les déformées modales, les mêmes constatations que pour les modes (0,1) et (0,2) peuvent d'ailleurs être faites. Des erreurs subsistent néanmoins sur le mode (0,3). La fréquence propre n'étant pas bien reproduite par le modèle de plaque imparfaite (une erreur de 16 Hz est commise), ce dernier passe à côté d'une hybridation avec un autre mode, ce qui apparaît clairement lorsqu'on regarde les déformées modales correspondantes.

La comparaison avec les solutions par éléments finis, tableau 5.1, soulève 3 points essentiels.

- D'un point de vue global, le modèle actuel et les modèles utilisant les éléments finis fournissent des résultats comparables et bien meilleurs que le modèle de coque sphérique mince, surtout pour les modes mixtes et axisymétriques. Cette constatation laisse à penser que l'effet des imperfections géométriques sur les modes propres du système a une contribution majeure et certainement supérieure aux autres imperfections qui peuvent exister dans cette coque (inhomogénéités matérielles, défaut d'épaisseur).

• Les résultats trouvés par CAST3M lorsque c'est le défaut reconstruit qui y est considéré montrent une bien meilleure correspondance avec les résultats du modèle de coque imparfaite comparés à ceux trouvés par CAST3M lorsque les points de mesures sont directement implémentés. Cette constatation est notamment frappante sur les résultats du mode (7, 0) où l'erreur absolue vis-à-vis du modèle actuel passe environ de 26 Hz pour « Cast3M 1 » à moins de 1 Hz pour « Cast3M 2 ». Cette bien meilleure correspondance apparaît globalement sur tous les modes représentés, sauf pour le mode (2, 2). Elle signifie que le calcul des modes propres d'une structure donnée, d'après le modèle de coque imparfaite ou d'après CAST3M, fournissent sensiblement les mêmes résultats. C'est donc l'étape préliminaire à ce calcul, à savoir la prise en compte de la géométrie dans les modèles, qui est à l'origine des différences entre la colonne « Modèle actuel » et la colonne « Cast3M 1 » du tableau. Cette observation met donc en doute la bonne représentation du défaut par sa reconstruction grâce aux modes propres (3.35).

• Par ailleurs, les résultats issus de la première solution par éléments finis restent pour certaines fréquences assez éloignés des résultats de l'expérience (mode (0, 1) par exemple). Les deux facteurs pointés du doigt sont premièrement la présence d'autres inhomogénéités, parmi lesquelles les variations d'épaisseur, les inhomogénéités matérielles, la présence des trous qui permettent de suspendre la coque. Deuxièmement, on estime insuffisant le nombre de points pris en compte pour discrétiser la base de projection de la géométrie. En outre, une étude effectuée avec un autre code de calcul par élément fini, NASTRAN, non présentée ici, justifie les résultats calculés avec CAST3M.

## 5.5 Comparaisons dans le domaine non-linéaire

### 5.5.1 Cas d'une résonance interne 1 : 1 : 2

Les résultats sur les coefficients non-linéaires du modèle de plaque imparfaites sont utilisés dans ce paragraphe pour reproduire une courbe de résonance de la coque 3 soumise à un forçage harmonique. La coque 3 a la particularité de montrer expérimentalement une résonance interne 1:1:2. La fréquence propre du mode (0, 1) est en effet approximativement le double des fréquences propres des modes compagnons (6, 0, c) et (6, 0, s). Cette résonance a été étudiée en détail d'un point de vue expérimental et théorique dans [85, 86]. Les valeurs expérimentales des coefficients non-linéaires, obtenus lors de cette étude, vont maintenant être comparées à celles issues du modèle présenté. Tout d'abord, les principaux points de l'étude théorique et expérimentale de cette résonance sont rappelés.

La dynamique du système Eq. (3.65) est réduite pour ne garder que les oscillateurs impliqués lors de ce phénomène de résonance. Seuls les termes quadratiques résonants sont donc sélectionnés, ce qui permet d'obtenir le modèle réduit le plus simple capable de reproduire correctement le phénomène à étudier. Ce modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= \varepsilon[\alpha_1 q_1 q_3 - 2\mu_1 \dot{q}_1], \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= \varepsilon[\alpha_2 q_2 q_3 - 2\mu_2 \dot{q}_2], \\ \ddot{q}_3 + \omega_3^2 q_3 &= \varepsilon[\alpha_3 q_1^2 + \alpha_4 q_2^2 - 2\mu_3 \dot{q}_3 + Q \cos(\omega t)], \end{aligned} \quad (5.4)$$

avec

$$\alpha_1 = -g_{13}^1 - g_{31}^1 = \alpha_2 = -g_{23}^2 - g_{32}^2 \quad \text{and} \quad \alpha_3 = -g_{11}^3 = \alpha_4 = -g_{22}^3. \quad (5.5)$$

Les indices 1, 2 et 3 se rapportent respectivement aux modes  $(6, 0, c)$ ,  $(6, 0, s)$  et  $(0, 1)$ . Le forçage harmonique d'amplitude  $Q$  et de pulsation  $\omega$  est appliqué au centre de la coque. Les oscillateurs des modes asymétriques, dont le centre est un point nodal, ne comportent donc pas de terme d'excitation. Le détail de l'analyse des équations (5.4) et les résultats de l'application de la méthode des échelles multiples sont donnés dans [85]. Ils aboutissent notamment à l'expression analytique des branches de solutions. Il est ainsi montré que des transferts d'énergie peuvent apparaître depuis le mode  $(0, 1)$  vers le mode  $(6, 0, c)$  (couplage C1) ou vers le mode  $(6, 0, s)$  (couplage C2) sans que ces transferts puissent être simultanés. Les régions d'instabilité peuvent être déterminées analytiquement en fonction de  $\omega_1$ ,  $\mu_1$  et  $\alpha_1$  pour le couplage C1 et en fonction de  $\omega_2$ ,  $\mu_2$  et  $\alpha_2$  pour le couplage C2. En faisant correspondre les régions d'instabilité et les branches de solutions aux mesures expérimentales, il est ainsi possible de déterminer les coefficients quadratiques et les coefficients d'amortissement du modèle réduit Eqs. (5.4).

### 5.5.2 Coefficients quadratiques

	Expérience	Modèle de coque sphérique	Modèle actuel
$\varepsilon.\alpha_1$	476	19 057	2419
$\varepsilon.\alpha_2$	455	19 057	2417
$\varepsilon.\alpha_3$	635	8766	650
$\varepsilon.\alpha_4$	667	8766	650

TABLE 5.2 – Valeurs expérimentales et théoriques des coefficients de couplage quadratique  $\{\alpha_i\}_{i=1,4}$  définis par Eqs. (5.4). Le coefficient  $\varepsilon$  est issu de l'adimensionnement du déplacement transverse par l'épaisseur  $h$  et vaut  $\varepsilon = 12(1 - \nu^2)$ . L'adimensionnement étant différent lors des précédentes études expérimentales et lors de l'établissement du modèle de coque sphérique mince, il vaut  $\varepsilon = 12(1 - \nu^2) \frac{a^2}{Rh}$  pour [85, 86]

Le tableau 5.2 rassemble les coefficients quadratiques impliqués dans le modèle réduit Eqs. (5.4), déduits de l'expérience par la méthode décrite plus haut et calculés selon le modèle de coque sphérique mince et selon celui de plaque imparfaite prenant en compte la géométrie complète du défaut. Alors que les valeurs de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  issues de l'expérience ont un rapport de 30 avec celles fournies par le modèle de coque sphérique mince, ce rapport est réduit à 5 avec les coefficients issus du modèle de plaque imparfaite. Les valeurs expérimentales de  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$ , dont le rapport est de 12 avec celles délivrées par le modèle de coque parfaite, sont quant à elles très justement prédites par le modèle actuel.

Dans le but de comprendre l'origine des erreurs résiduelles sur les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (tandis que les coefficients  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont correctement prédits), on regarde la convergence des coefficients quadratiques  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  en fonction de la troncature  $N_w$ . Les valeurs absolues et relatives de ces coefficients calculées pour différentes troncatures  $N_w$  avec leurs valeurs calculées pour  $N_w = 51$  sont présentées figure 5.7. Afin de mettre en évidence la contribution des modes asymétriques et axisymétriques, la géométrie est projetée sur un nombre croissant de modes mais suivant deux ordres différents. La première étude de convergence se fait en prenant tous les modes asymétriques et en augmentant progressivement le nombre de modes axisymétriques pris en compte dans le calcul. Ces résultats semblent confirmer les observations effectuées sur les défauts typiques, à savoir que la convergence selon les modes axisymétriques est rapide. Elle est atteinte à environ  $(0, 4)$ . L'évolution de la seconde troncature montre là encore une convergence rapide selon les modes axisymétriques, mais un gain de précision de 10% sur l'erreur relative est obtenu lorsque

le mode  $(6, 1)$  est pris en compte. Ce résultat vient appuyer les remarques faites lors de l'étude du défaut sphérique section 4.3.1. A l'image de ce que nous observons sur les modes propres, il est important d'inclure dans le calcul les modes ayant le même nombre de diamètres nodaux que ceux dont on calcule les coefficients, ici les modes  $(6, \cdot, \cdot)$ .

En résumé, un nombre élevé de modes transverses  $N_w$ , surtout asymétriques, doit être conservé pour que les valeurs des coefficients non-linéaires convergent. Toutefois, la prise en compte des 51 modes, nous l'avons constaté lors de l'étude de défauts typiques, nous permet d'assurer une précision d'environ 2 à 3 chiffres sur les coefficients non-linéaires. Ce n'est donc pas la convergence selon  $N_w$  qui est en cause mais on soupçonne l'imprécision de la reconstruction du défaut entachée d'une erreur de 0.4 mm.

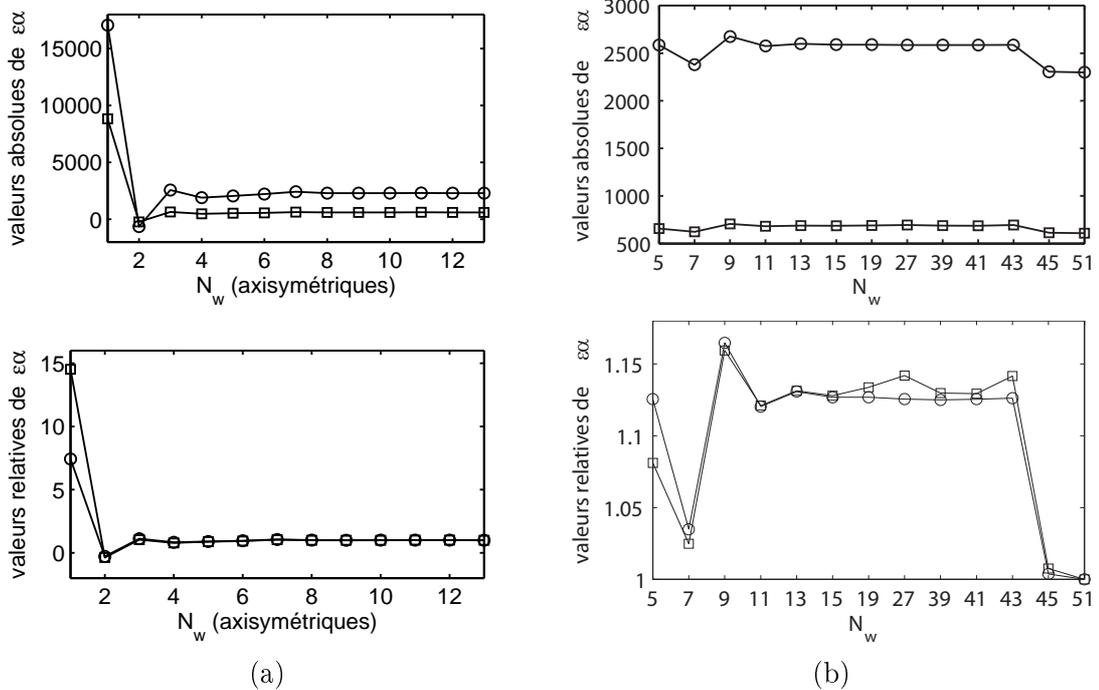


FIGURE 5.7 – Erreurs relatives et absolues des coefficients  $\varepsilon\alpha_1$  (o) et  $\varepsilon\alpha_2$  (□) selon 2 troncatures. (a) La première troncature comprend tous les modes mixtes et asymétriques précédemment cités et le mode  $(0, 1)$  auxquels s'ajoutent successivement les modes axisymétriques de  $(0, 2)$  à  $(0, 13)$ . (b) La seconde comprend les modes  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(0, 3)$  auxquels s'ajoutent successivement les groupes de modes :  $\{(0, 4), (0, 5)\}$ ,  $\{(0, 6), (0, 7)\}$ ,  $\{(0, 8), (0, 9)\}$ ,  $\{(0, 10), (0, 11)\}$ ,  $\{(0, 12), (0, 13)\}$ ,  $\{(2, 0), (3, 0)\}$ ,  $\{(1, 1), (4, 0), (5, 0), (2, 1)\}$ ,  $\{(1, 2), (7, 0), (4, 1), (2, 2), (5, 1)\}$ ,  $\{(3, 2)\}$ ,  $\{(1, 3)\}$ ,  $\{(6, 1)\}$  et enfin  $\{(8, 0), (9, 0), (10, 0)\}$ .

## 5.6 Mise en évidence de l'erreur de projection

Dans l'intention d'assurer une reconstruction optimale du défaut, la troncature (3.35) prise en compte lors de la projection de la géométrie était d'office fixée à 51 modes<sup>16</sup>. Eu égard aux excellents résultats obtenus dans le cas de la coque sphérique mince et au fait que ces derniers convergeaient très rapidement en fonction du nombre de modes axisymétriques utilisés pour la projection de la géométrie sphérique, la première explication que nous donnions aux différences observées dans le cas d'une coque réelle était l'insuffisance du nombre de mode asymétriques utilisés lors de cette projection, ce que semblait corroborer la présence d'accidents sur le pourtour de la coque, comme on peut l'observer sur les points de mesure de la figure 5.2.

Dans une première étape de vérification de cette hypothèse, la validité de la méthode de projection (5.2) a été questionnée. L'approximation faite s'est avérée justifiée en comparant les résultats de projection à ceux obtenus par une méthode des trapèzes, plus exacte.

La seconde étape a consisté à regarder l'évolution de l'erreur commise entre géométrie mesurée et géométrie reconstruite en fonction de la troncature  $N_0$ . Cette nouvelle vérification, fructueuse cette fois a montré que l'erreur n'était pas convergente. Nos doutes se sont donc reportés sur le nombre de points utilisés pour discrétiser la base de projection.

Deux erreurs entre géométrie mesurée  $w_0$  et géométrie reconstruite  $w_r$  sont définies, une erreur maximale  $EM$  et une erreur relative  $ER$  :

$$EM = \max_{x_i, y_i} |w_0(x_i, y_i) - w_r(x_i, y_i)|, \quad (5.6a)$$

$$ER = \frac{\sqrt{\iint_S (w_0 - w_r)^2 dS}}{\sqrt{\iint_S w_0^2 dS}} \quad (5.6b)$$

où  $(x_i, y_i)$  sont les coordonnées du point  $i$ .

La géométrie est projetée sur 38 modes asymétriques (2, 0) à (10, 0), (1, 1) à (6, 1), (1, 2) à (3, 2) et (1, 3) puis sur un nombre croissant de modes axisymétriques, de (0, 1) à (0, 13). Figure 5.8, l'évolution des erreurs  $EM$  et  $ER$  est tracée en fonction de ce nombre. On observe un minimum des erreurs pour (0, 7) (troncature T1) puis un accroissement constant jusque (0, 13) (troncature T0). Cette non-convergence atteste que les 2842 points, utilisés par la machine à mesurer et surtout repris lors de l'opération de projection, sont insuffisants pour projeter correctement la géométrie sur 51 modes. À partir d'un certain seuil les trop petites longueurs d'onde des modes élevés sont mal représentées sur ce maillage et la propriété d'orthogonalité des modes n'est plus respectée numériquement. Pour s'en rendre compte, on trace la matrice de Gram de la base tronquée. Les coefficients de cette matrice  $Gr_{i,j}$  s'obtiennent en calculant numériquement le produit scalaire entre les modes, soit :  $\forall (i, j) \in [1 N_0]^2$ ,  $Gr_{i,j} = (\Phi_i, \Phi_j)$ . La représentation de cette matrice à laquelle on soustrait une diagonale unitaire, figure 5.9(a), montre la dégradation numérique de l'orthogonalité.

On extrapole maintenant la grille définie par les points de mesure sur une grille plus fine comportant 400 lignes suivant la coordonnée angulaire et 120 lignes suivant la coordonnée radiale. Une nouvelle projection, utilisant (5.2) est faite relativement à cette grille. Les coefficients de la matrice de Gram présentés figure 5.9(b) montrent que la propriété d'orthogonalité est mieux vérifiée numériquement. La convergence des erreurs maximale et relative, observées sur les courbes en pointillés figure 5.8, est bien meilleure. Les erreurs minimales sont bien atteintes

16. famille utilisée à plusieurs reprises tout au long de ce manuscrit, voir section 4.3.2.0

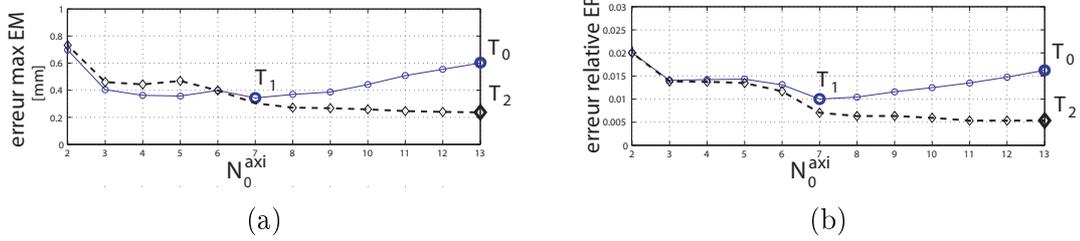


FIGURE 5.8 – (a) Erreur maximale EM et (b) relative ER de la reconstruction de la géométrie de la coque de référence en fonction du nombre  $N_0$  de modes axisymétriques conservés. Projection à partir des points de mesures (-). Projection après une interpolation, augmentant le nombre de points pris en compte dans la projection (-). Définitions des troncutures  $T_0$ ,  $T_1$  et  $T_2$ .

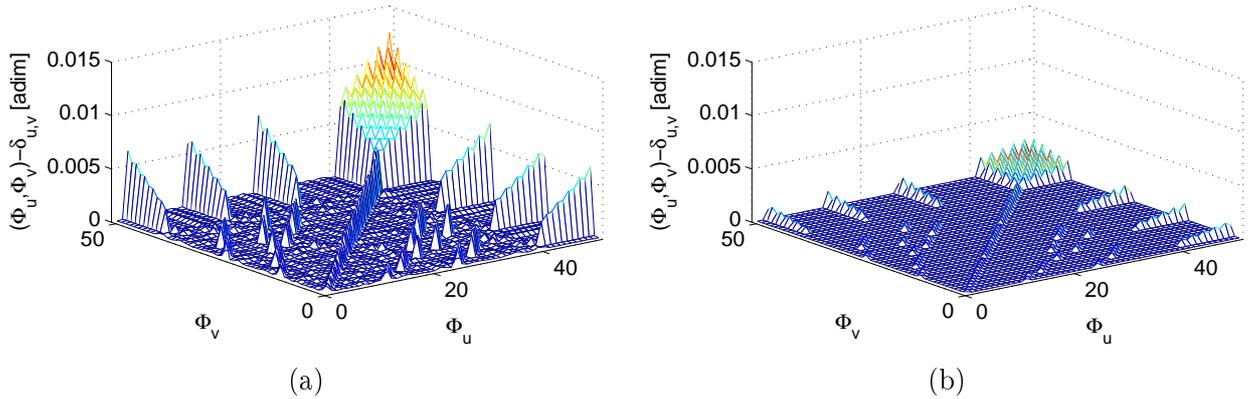


FIGURE 5.9 – Matrices de Gram de la base tronquée à  $N_0 = 51$  modes discrétisée sur 2842 points (a) et sur 48000 points (b), à laquelle on soustrait une diagonale unitaire. Formellement, les coefficients représentés sont  $(\Phi_u, \Phi_v) - \delta_{uv}$  où  $\delta_{uv}$  représentent ici les coefficients de Kronecker.

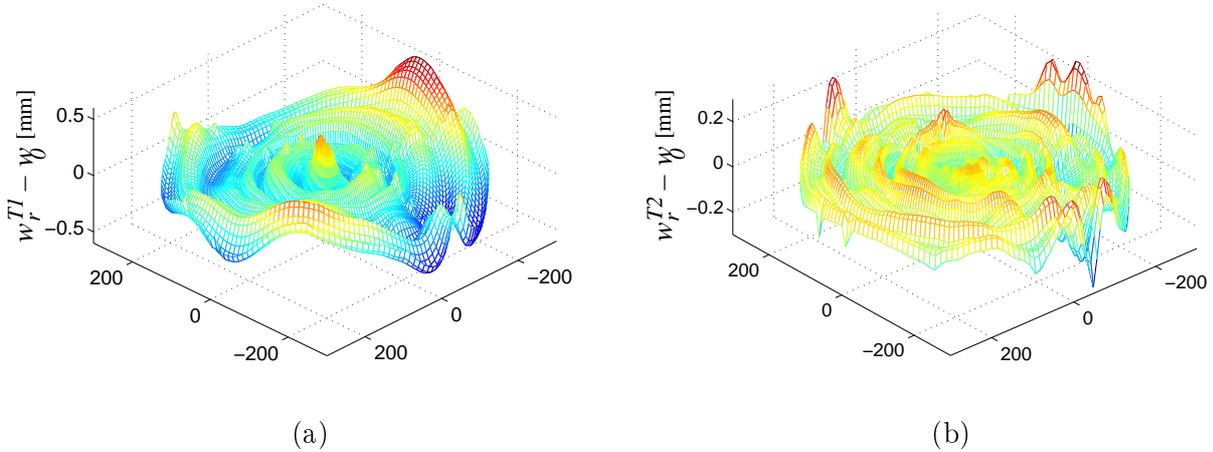


FIGURE 5.10 – Erreur 3D commise entre la géométrie mesurée et les géométries reconstruites  $w_r^{T1}$  et  $w_r^{T2}$  à partir des troncatures T1 et T2 définies figure 5.8.

pour un nombre maximal de modes axisymétriques (troncature T2) et le gain significatif sur l'erreur relative montre que le défaut est globalement mieux reconstruit. On représente figure 5.10 les nouvelles erreurs  $e$  (définies Eq. (5.1)) commises maintenant par les reconstructions  $w_r^{T1}$  et  $w_r^{T2}$  issues des troncatures T1 et T2. L'erreur maximale  $EM$  est abaissée à moins de 0.4 mm pour la troncature T1 et à 0.24 mm pour la troncature T2. On constate également que comparée à l'erreur obtenue avec la troncature T0, figure 5.4, la contribution axisymétrique du défaut est bien mieux représentée et ainsi toute la région centrale.

On retiendra pour la suite la définition des troncatures<sup>17</sup> T1 et T2 données sur la figure 5.8, l'un correspondant au calcul des  $a_p$  effectué sur 7 modes axisymétriques (en plus des 38 modes asymétriques) et à partir des 2842 points de mesures et l'autre correspondant au calcul des  $a_p$  sur 13 modes axisymétriques (en plus des 38 modes asymétriques) à partir d'une extrapolation de la géométrie mesurée sur 48000 points.

Nous ne sommes malheureusement pas allés plus loin dans cette troncature. En effet, accroître le  $N_0$  ne nécessite que peu de calculs supplémentaires mais il est inutile de projeter sur plus de modes que ceux à partir desquels nous effectuons le calcul de diagonalisation et celui des coefficients non-linéaires. Or l'augmentation du nombre  $N_w$  de ces modes implique, lui, de lourds calculs (calcul des tenseurs  $\beta$  et  $\Gamma$ , respectivement de dimension 3 et 4). Nous n'avons pas le temps de les mener à terme. Beaucoup de modes auraient encore été nécessaires pour baisser significativement l'erreur commise.

Ce phénomène révèle également une des limites de la méthode employée. La base de projection formée par les modes propres linéaires de plaque parfaite converge lentement et il faut beaucoup

17. Le vocable est et sera employé de manière un peu abusive. Les appellations « troncatures » T1 et T2 ne désignent pas seulement les modes sur lesquels est projetée l'imperfection, elles se réfèrent également au nombre de points (extrapolés pour le deuxième cas) utilisés lors de l'opération de projection.

de modes pour représenter ce qui semble être, sur la coque de référence (figure 5.2), une double courbure et des défauts localisés (« accidents » sur le bord).

## 5.7 Prise en compte de cette erreur. Retour sur les résultats.

### Nouveaux résultats sur les fréquences propres

La prise en compte de l'erreur due à la projection numérique de la géométrie complète de la coque n'est volontairement pas apparue plus tôt dans ce manuscrit. D'une part, l'ordre de composition respecte ainsi le cheminement historique des problèmes rencontrés et des résultats obtenus. D'autre part, la présence de cette erreur résiduelle a permis l'élaboration de conclusions plus abouties en ce qui concerne la convergence selon  $N_w$  et la cohérence du modèle actuel avec le code de calcul par éléments finis CAST3M, ainsi que développée dans les précédentes sections.

Les résultats sur les fréquences propres et les coefficients non-linéaires détaillés plus haut sont maintenant établis à partir des troncatures  $T1$  et  $T2$ . Les résultats sur les fréquences propres sont actualisés tableau 5.3. Y sont reprises les fréquences propres mesurées (Expérience), celles obtenues avant la correction de l'erreur sur la projection  $T0$  et celles correspondant aux troncatures retenue  $T1$  et  $T2$ . Pour chacune, un nouveau facteur de dimensionnement  $f^*$  a été sélectionné, de manière comparable à la figure 5.5 :  $f^{* T1} = 1.799$  pour  $T1$  et  $f^{* T2} = 1.810$  pour  $T2$ .

Modes	Expérience		T0		T1		T2	
(2, 0)	13.75	17.5	11.46	11.50	10.85	10.91	10.68	10.74
(3, 0)	34	35.5	28.47	28.50	25.70	25.73	25.22	25.26
(4, 0)	57.25	58.25	52.07	52.13	45.21	45.27	44.39	44.40
(5, 0)	83	83.75	81.85	82.03	68.94	69.10	67.88	67.93
(6, 0)	110	111	117.5	117.6	96.73	96.75	95.54	95.56
(7, 0)	141	141.5	160.2	160.2	132.66	132.67	132.73	132.73
(8, 0)	172.75	176	204.6	204.6	165.61	165.64	165.68	165.70
(1, 1)	259.5	271	266	271.8	269.20	275.07	268.27	274.31
(0, 1)		225		225.8		227.93		229.05
(0, 2)		354		343.8		342.46		346.03
(0, 3)		444.25		428.4		426.43		432.80
(0, 4)		555.5		546.8		544.61		550.52

TABLE 5.3 – Nouvelle comparaison des fréquences propres (en Hz) de la coque 3, calculées avec le modèle de coque imparfaite selon 3 troncatures différentes et calculées avec CAST3M. Colonne Expérience : Résultats de l'analyse modale expérimentale. Colonnes T0, T1, T2 : Fréquences propres calculées à partir du modèle de plaque imparfaite selon les troncatures  $T0$  (2842 points et 51 modes),  $T1$  (2842 points et 45 modes (38 modes asymétriques + 7 modes axisymétriques)) et  $T2$  (points et 51 modes).

Comme on peut s'y attendre, les troncatures  $T1$  et  $T2$ , qui proposent une meilleure reconstitution géométrique de la coque de référence, permettent de mieux approcher les fréquences propres mesurées. Les modes purement asymétriques sont représentés jusque (8, 0), ce qui permet de mettre en évidence le gain notable obtenu grâce aux nouvelles troncatures sur les modes purement asymétriques. On regarde plus précisément les résultats des troncatures  $T0$  et  $T1$ . Ces

troncatures ne diffèrent finalement que par 6 modes axisymétriques absents de la reconstruction du défaut pour T2. On note ainsi qu'un léger gain de précision sur la partie axisymétrique de la structure suffit à rectifier les modes asymétriques de manière notable. La modification sur les modes axisymétriques est quant à elle beaucoup plus sensible. Les prédictions de ces modes restent très bonnes avec les nouvelles troncatures sans être encore améliorées, si ce n'est pour la troncature T2 sur le mode  $(0, 3)$ , ce qui semble être au déficit du mode  $(0, 1)$ . Les différences observées entre les troncatures T1 et T2 sont par ailleurs minimales. Le grand nombre de points utilisés pour cette projection permet d'augmenter le nombre de modes axisymétriques pris en compte dans la reconstruction du défaut. Cependant l'influence des modes qu'on a pu rajouter au 7 déjà présents dans la troncature T1 est faible.

La convergence des fréquences propres selon les modes axisymétriques utilisés lors de la projection est donc rapide et de plus ceux-ci ont une influence très importante sur les modes asymétriques.

### 5.7.1 Nouveaux résultats sur les coefficients non-linéaires et développements

Les coefficients quadratiques utilisés pour le modèle réduit Eq. 5.4 sont calculés selon les nouvelles troncatures T1 et T2 et comparés aux précédents résultats du tableau 5.2. Les résultats sont rassemblés dans le tableau 5.4.

	Expérience	Modèle C.S.	T0	T1	T2
$\varepsilon.\alpha_1$	476	19 057	2419	2556	2297
$\varepsilon.\alpha_2$	455	19 057	2417	2252	2294
$\varepsilon.\alpha_3$	635	8766	650	666	608
$\varepsilon.\alpha_4$	667	8766	650	665	607

TABLE 5.4 – Valeurs expérimentales et théoriques des coefficients de couplage quadratique  $\{\alpha_i\}_{i=1,4}$  définis Eqs. (5.4) calculés selon les troncatures T0, T1 et T2.

Les corrections apportées par les troncatures T1 et T2 restent très similaires aux résultats issus de la troncature T0. Les coefficients  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  sont correctement prédits mais l'erreur sur les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , bien que fortement réduite vis à vis du modèle de coque sphérique mince, est encore grossière (d'un facteur 5 par rapport à la mesure). On retient pour la suite les coefficients calculés grâce à la troncature T2.

La conséquence de l'erreur commise peut être analysée plus précisément grâce à la figure 5.11 où sont calculées les régions d'instabilité des deux modèles théoriques, confrontées à la courbe de résonance de la coque de référence. Le modèle réduit ne comportant pas de terme cubique, la solution à un seul degré de liberté ( $q_1 = q_2 = 0, q_3 \neq 0$ ) reste linéaire. Les fréquences propres  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  utilisées sont celles de l'expérience et les amortissements modaux pris en compte sont tous du même ordre de grandeur, ce afin de s'accorder au mieux à l'expérience et ainsi de mieux évaluer l'effet des coefficients quadratiques  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  sur les régions d'instabilité.

On constate sur la figure 5.11 qu'une amélioration notable de la prédiction du comportement de la coque est apportée par les coefficients issus du présent modèle. En effet alors que le modèle de coque sphérique prévoit deux couplages pour cet amplitude de forçage (0.138 N), le modèle actuel anticipe correctement le fait qu'un seul couplage (C1) apparaisse à la fois dans l'expérience.

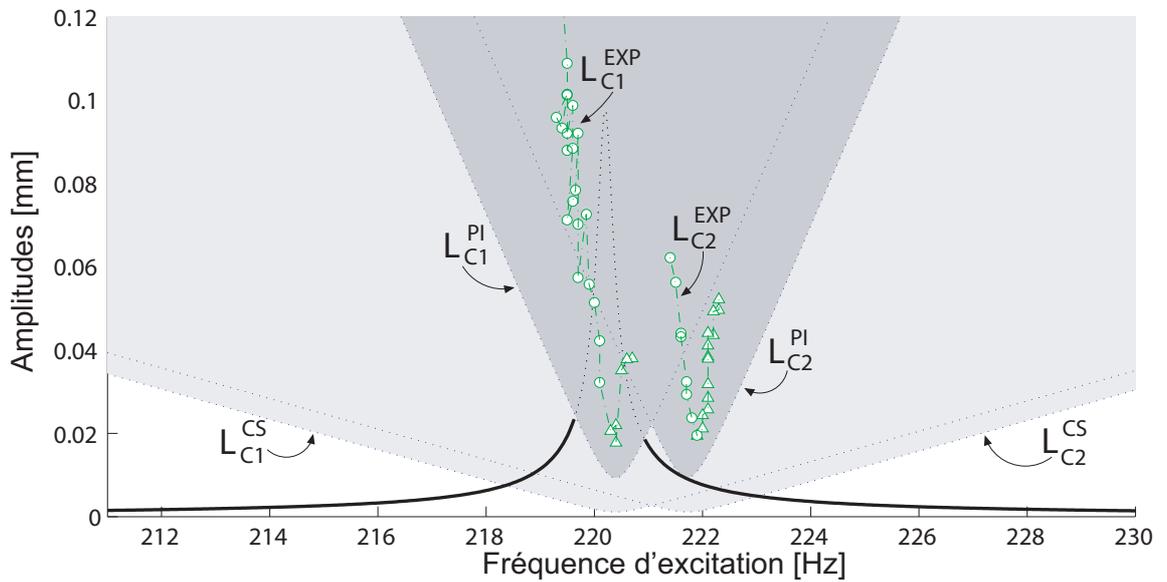


FIGURE 5.11 – Courbe de réponse en fréquence et régions d'instabilité de la coque, forcée harmoniquement autour de la fréquence propre du mode  $(0, 1)$ . La solution à un degré de liberté est tracée en trait plein noir. Les zones ombrées représentent les régions d'instabilité, d'après le modèle de coque sphérique parfaite (en gris clair) et d'après le modèle présenté (en gris foncé). Les exposants  $C1$  et  $C2$  se réfèrent au couplage initié. Les indices  $CS$ ,  $PI$ ,  $EXP$  se rapportent respectivement au modèle de coque sphérique, au modèle de plaque imparfaite et aux mesures expérimentales, obtenu pour un balayage en fréquences croissant ( $\circ$ ) et décroissant ( $\triangle$ ) [86].

Toutefois, le facteur 5 entre les valeurs des coefficients de l'expérience et celles du modèle actuel empêche de prédire correctement les régions d'instabilité.

Les branches de solutions pour la même amplitude de forçage (0.138 N) sont présentées figure 5.12. Les amortissements ont été ajustés pour obtenir des longueurs de branche qui s'accordent avec l'expérience. Les valeurs retenues sont  $\xi_i = 1.4e^{-3}$ . Les erreurs commises sur  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  se traduisent ici par une branche de solutions plus évasée pour  $^{PI}q_3^{C1}$  (branche correspondant à l'amplitude du mode (0, 1) transférant de l'énergie vers le mode (6, 0, c) et calculée avec le modèle de plaque imparfaite). Néanmoins, la branche  $^{PI}q_2^{C1}$  est proche des valeurs expérimentales.

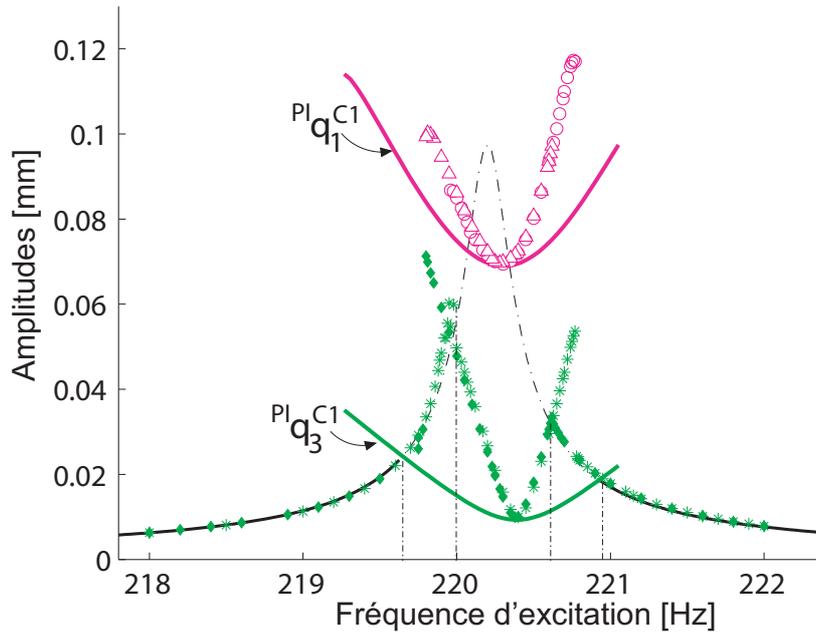


FIGURE 5.12 – Courbe de réponse en fréquence de la coque de référence, excitée harmoniquement autour de la fréquence du mode (0, 1) à une amplitude de 0.138 N. Le modèle présenté (PI) est comparé aux mesures expérimentales, obtenues pour un balayage en fréquences croissant (○ pour le mode (6, 0, c), (\*) pour le mode (0, 1)) et décroissant (Δ pour le mode (6, 0, c), ◇ pour le mode (0, 1)).

### 5.7.2 Influence des coefficients cubiques

Nous cherchons pour finir à évaluer l'influence des coefficients cubiques sur le comportement non-linéaire de la plaque. Le système pris en compte est maintenant le système complet décrit par Eq. (3.65). Des branches de solutions correspondant à une excitation faible (0.0227 N) ont été calculées grâce au logiciel AUTO, et sont montrées sur le graphe de réponse en fréquences 5.13. Les branches correspondant au système complet (TC), avec coefficients cubiques, sont confrontées à celles issues du modèle réduit (TQ) décrit par Eq. (5.4). Les courbes présentées résultent du calcul effectué avec les  $N_w = 13$  oscillateurs couplés : (2, 0) à (6, 0) et (0, 1) à (0, 3). Ce choix a été retenu après plusieurs simulations. La simulation calculée seulement avec les 3 modes impliqués dans la résonance que l'on regarde montrait d'ores et déjà une bonne correspondance

avec les résultats présentés. La simulation calculée sur 22 modes montrait quant à elle une correspondance parfaite avec le système retenu.

Alors que l'expérience ne montre aucun couplage pour cette amplitude de forçage autour de cette fréquence d'excitation, le modèle prévoit un couplage C1. Cette erreur de prédiction est la manifestation de la valeur surestimée du coefficient  $\alpha_1$ . Le modèle comprenant les termes cubiques montre cependant de meilleurs résultats qualitatifs que le modèle réduit. En faisant abstraction du couplage, le modèle plus complet prédit pour le mode (0,1) un comportement assouplissant. Bien que ce comportement traduit par  ${}^{TC}q_3^{1ddl}$  soit exagéré par rapport aux points de mesure, la nature du type de non-linéarité du mode (0,3) est correctement prédite, ce qui est invisible sur la branche  ${}^{TQ}q_3^{1ddl}$  calculée grâce au modèle réduit.

Par ailleurs, dans le modèle plus complet, la branche des solutions couplées du mode (0,1) est désolidarisée de la limite de la région d'instabilité du couplage C1, ouvrant ainsi la voie au couplage C2. Le comportement est en effet retrouvé dans l'expérience, mais pour des amplitudes de forçage plus élevées [86].

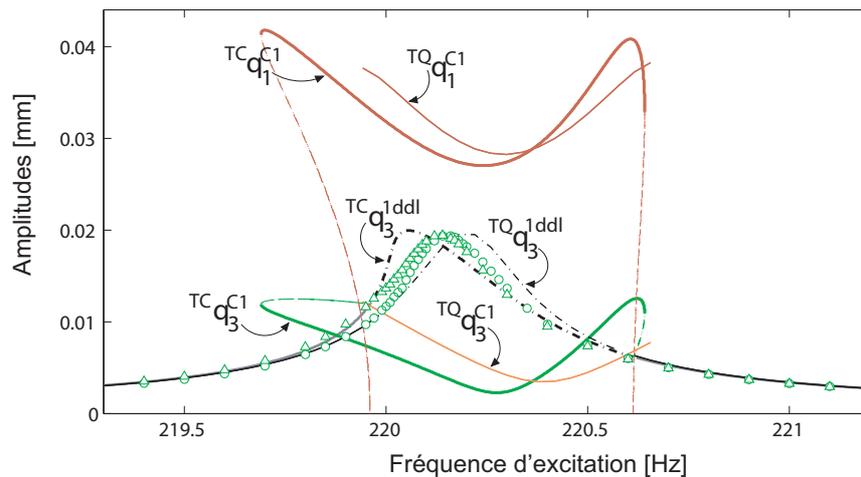


FIGURE 5.13 – Courbe de réponse de la coque excitée harmoniquement autour de la fréquence de résonance du mode (0,1) à une amplitude de 0.0277N. Les résultats issus du modèle de plaque imparfaite prenant en compte les termes cubiques (désignés par l'exposant TC) sont comparés à ceux donnés par le même modèle ne prenant en compte que les coefficients quadratiques (désignés par l'exposant TQ) et également aux points expérimentaux (désignés par  $\circ$  pour un forçage à fréquence croissante et  $\Delta$  pour un forçage à fréquences décroissantes).

L'ajout des termes cubiques a également une influence sur la forme des branches de solutions. La courbure des branches est visiblement modifiée et spécialement à leurs extrémités. Les formes des branches  ${}^{TQ}q_1^{C1}$  et  ${}^{TC}q_1^{C1}$  sont par exemple très différentes autour de 220.6Hz. C'était également une des différences notables qui existaient entre les mesures et le modèle réduit utilisé dans [86]. La prise en compte des coefficients cubiques permet d'approcher bien mieux ce phénomène.

### 5.7.3 Résultats sur d'autres coques de laboratoire

Nous faisons état dans ce paragraphe de quelques résultats concernant d'autres coques de laboratoire. L'essentiel du travail expérimental dans le domaine non-linéaire et tout le travail de calage associé n'a été mené que sur la coque de référence. Pour les coques 1 et 2 que nous traitons ici, nos références se cantonnaient au domaine linéaire. Nous établissons donc les résultats sur les fréquences propres, en comparaison des mesures et du modèle de coque sphérique mince.

Les fréquences propres calculées grâce au modèle de coque imparfaite et comparées aux mesures sont données tableau 5.5 pour la coque peu courbée et tableau 5.6 pour la coque épaisse.

Mode	Expérience		Modèle C.S	Modèle actuel	
(2, 0)	13.09	13.6	7.5	11.7	12.4
(3, 0)	22.4*		17.5	27.0	27.5
(4, 0)	32	33.5	30.7	45.6	47.6
(5, 0)	43.74	47.6	46.9	69.6	70.5
(6, 0)	60.31	66.6	65.9	97.3	97.8
(7, 0)	81.84	84.9	87.8	126.9	128.9
(0, 1)	90.8		90.4	90.8	
(0, 2)	192.1*		103.9	152.4	
(0, 3)	309.4*		149.9	330.2	
(0, 4)	501.8*			510.1	

TABLE 5.5 – Comparaison des fréquences propres (en Hz) de la coque 1, issues de l'analyse modale, calculées selon les modèles de coque sphérique puis selon celui de coque imparfaite. Colonne Expérience : Résultats de l'analyse modale expérimentale. Colonne Modèle C.S : Fréquences propres calculés selon le modèle de coque sphérique mince. Colonne Modèle actuel : Fréquences propres calculées à partir du modèle de plaque imparfaite. Les résultats indicés (\*) sont soumis à quelques doutes.

Le modèle appliqué aux autres coques montre globalement de meilleurs résultats que les prédictions du modèle de coque sphérique. Les mesures sont parfois entachées d'un doute venant de l'identification du mode, rendue difficile par la proximité de la fréquence propre correspondante avec d'autres fréquences propres et parfois même à cause de son hybridation avec d'autres modes. Les comparaisons que l'on observe vont dans le sens des conclusions énoncées pour la coque de référence et sont données à titre indicatif.

## 5.8 Discussion

L'étude de convergence selon  $N_0$  a révélé la présence d'une erreur commise à cause d'un nombre insuffisant de points pour discrétiser la base de projection. La prise en compte de cette erreur, soit l'emploi d'un grand nombre de points lors de la projection, permet d'améliorer les résultats obtenus sur le modèle de plaque imparfaite.

- Dans le domaine linéaire, les résultats obtenus sur les déformées modales offrent une très bonne prédiction des déformées modales mesurées. Les fréquences propres sont également bien

Mode	Expérience	Modèle C.S	Modèle actuel	
(2, 0)	26.9	13.6	20.1	20.2
(3, 0)	57.2	32.4	49.5	49.6
(4, 0)	95.1	57.3	91.2	92.3
(5, 0)	138.9	87.7	137.4	138.1
(6, 0)	186.7	123.4	189.5	189.6
(7, 0)	235	163.9	245.5	245.8
(0, 1)	320	321.8	321.8	
(0, 2)	480	334.8	513.1*	

TABLE 5.6 – *Comparaison des fréquences propres (en Hz) de la coque 2, issues de l'analyse modale, calculées selon les modèles de coque sphérique puis selon celui de coque imparfaite. Colonne Expérience : Résultats de l'analyse modale expérimentale. Colonne Modèle C.S : Fréquences propres calculés selon le modèle de coque sphérique mince. Colonne Modèle actuel : Fréquences propres calculées à partir du modèle de plaque imparfaite. Le résultat du modèle indicé (\*) est soumis à quelques doutes compte tenu de la difficulté d'identifier certains modes selon la nomenclature des modes de coque sphérique.*

prédites dans l'ensemble, malgré quelques erreurs qui subsistent.

- Dans le domaine non-linéaire, les petites différences sur les fréquences propres sont magnifiées. Ce problème provient d'une convergence plus délicate du modèle sur les coefficients non-linéaires.

D'une manière générale, le modèle de plaque imparfaite offre malgré tout un gain notable de précision par rapport à celui de coque sphérique. Une analyse plus précise de la géométrie reconstruite avec un grand nombre de points ainsi que des résultats associés permettent toutefois de soulever les points suivants :

- Malgré les efforts faits sur la projection, la géométrie reconstruite reste entachée d'une erreur de 0.2 mm. Au vu de la pente de décroissance observée sur la courbe de convergence selon  $N_0$ , on peut affirmer que cette erreur géométrique est due à un nombre insuffisant de modes pris en compte dans la troncature  $N_0$ .

- L'augmentation du nombre de points pour la projection a permis de diviser par 2 l'erreur géométrique commise et malgré tout, le gain obtenu sur les résultats du modèle (comparaison faite entre résultats de la troncature T0 et T2) est assez faible. En conséquence, une partie notable des différences observées ne se résorberait pas avec l'augmentation de  $N_0$ . Elle est attribuée aux imperfections non prises en compte dans ce modèle qui sont d'une part :

- Les inhomogénéités matérielles. Une simple observation de la coque présage que son usinage ne fût pas homogène et que la partie centrale a bénéficié d'un traitement différent de la partie circonférentielle.

- Les variations d'épaisseur. Les moyens dont nous disposions étaient insuffisants pour mesurer

cette épaisseur sur la géométrie complète de la coque. Cependant une mesure sur le pourtour (voir annexes) présente des variations de quelques pourcents, assurément non négligeables sur la dynamique.

– La présence des trous qui servent à attacher la coque pour simuler la condition de bord libre. Ils sont synonymes de discontinuité matérielle et géométrique et peuvent engendrer des contraintes locales résiduelles lorsque celle-ci est suspendue (compte tenu de son poids).

*Deuxième partie*

---

Étude numérique de la transition  
vers le chaos

---



# CHAPITRE 6

---

---

## INTRODUCTION

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Expérience à reproduire . . . . .</b>	<b>87</b>
6.1.1	Protocole de mesure . . . . .	87
6.1.2	Observations . . . . .	87
6.1.3	Stratégie . . . . .	88
<b>6.2</b>	<b>Rappel sur la dynamique à intégrer . . . . .</b>	<b>88</b>
6.2.1	Équations . . . . .	88
6.2.2	Difficultés numériques . . . . .	90

---

## 6.1 Expérience à reproduire

### 6.1.1 Protocole de mesure

La coque de référence, sur laquelle nous nous penchions en particulier dans la partie précédente, est soumise à une excitation sinusoïdale d'amplitude croissante. La condition de bord libre est simulée en accrochant la coque à un cadre d'acier par 3 fils de nylon en des points équidistants sur le bord (figure 5.1). Le point d'application de la force est proche du bord de la coque. Cette position permet d'exciter à la fois les modes asymétriques et axisymétriques. L'excitateur consiste en un aimant, de masse faible (environ 2 g), collé à la paroi de la coque grâce à de la cire et excité magnétiquement par une bobine. Il a précédemment été montré qu'une position choisie de l'aimant par rapport à la bobine garantit un signal d'excitation sans distorsion sur la réponse du système [80]. Un vibromètre laser<sup>18</sup> mesure l'évolution de la vitesse en un point choisi de la coque.

### 6.1.2 Observations

L'évolution de l'enveloppe de l'excitation est montrée sur la figure 6.1 [83]. Le spectrogramme de la réponse en vitesse de la coque au point mentionné y est également donné. De manière générale, au fur et à mesure que croît l'amplitude d'excitation, on distingue 3 régimes de vibration séparés par deux bifurcations. La première marque la fin d'un régime unimodal où le spectre de réponse de la structure comporte principalement la fréquence d'excitation. L'influence de la

---

18. Polytec OFV 056 / OFV 3001 S

non linéarité apparaît doucement avec l'émergence d'harmoniques de fréquences multiples de l'excitation. La première bifurcation se manifeste par l'apparition de sous-harmoniques, incommensurables avec la fréquence d'excitation mais satisfaisant à des relations algébriques entre elles. Le spectre de ce régime, à fréquences discrètes, traduit les couplages modaux par résonance interne. La seconde bifurcation aboutit à un comportement encore plus complexe, caractérisé par un spectre continu et large bande. C'est cette série de transitions et ce comportement chaotique que l'on vise à reproduire numériquement.

### 6.1.3 Stratégie

La méthode que nous adoptons pour aborder le problème consiste à utiliser la formulation modale de la dynamique des coques comme base de discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDPs). L'avantage d'une telle approche est double. D'une part, seul le domaine temporel est discrétisé, ce qui nous préserve d'éventuelles contraintes sur le pas d'espace. D'autre part, utiliser une base modale nous permet de décrire plus aisément les couplages par résonance interne (régime quasi-périodique) ainsi que de déterminer le nombre de modes excités dans le régime chaotique.

## 6.2 Rappel sur la dynamique à intégrer

### 6.2.1 Équations

Nous choisissons de nous pencher d'emblée sur le cas de la structure imparfaite. Cette démarche nous permet d'aborder le problème global, en prenant en compte les termes non-linéaires cubiques et quadratiques résultant de l'introduction de l'imperfection géométrique. Cette démarche ne complique que peu le problème à traiter, les développements précédents offrant justement l'avantage de généraliser le problème de vibration de plaque parfaite à celui de plaque imparfaite grâce à une formulation analytique simple. Toutefois, le problème se verra allégé lors des expériences numériques, en agissant sur la troncature et les paramètres d'amortissement du système. La réduction du nombre de paramètres dynamiques en jeu nous permet en effet d'y voir plus clair sur les difficultés numériques à affronter. Les équations modales de la dynamique des plaques parfaites sont rappelées ici :

$$\ddot{q}_\alpha(t) + \omega_\alpha^2 q_\alpha(t) = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \sum_{u=1}^{N_w} \Gamma_{pqu}^\alpha q_p(t) q_q(t) q_u(t) - 2\mu_\alpha \dot{q}_\alpha(t) + Q_\alpha(t) \right]. \quad (6.1)$$

Le problème à résoudre s'inscrit dans le vaste domaine de la résolution numérique du problème de Cauchy. Il peut en effet être écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (6.2)$$

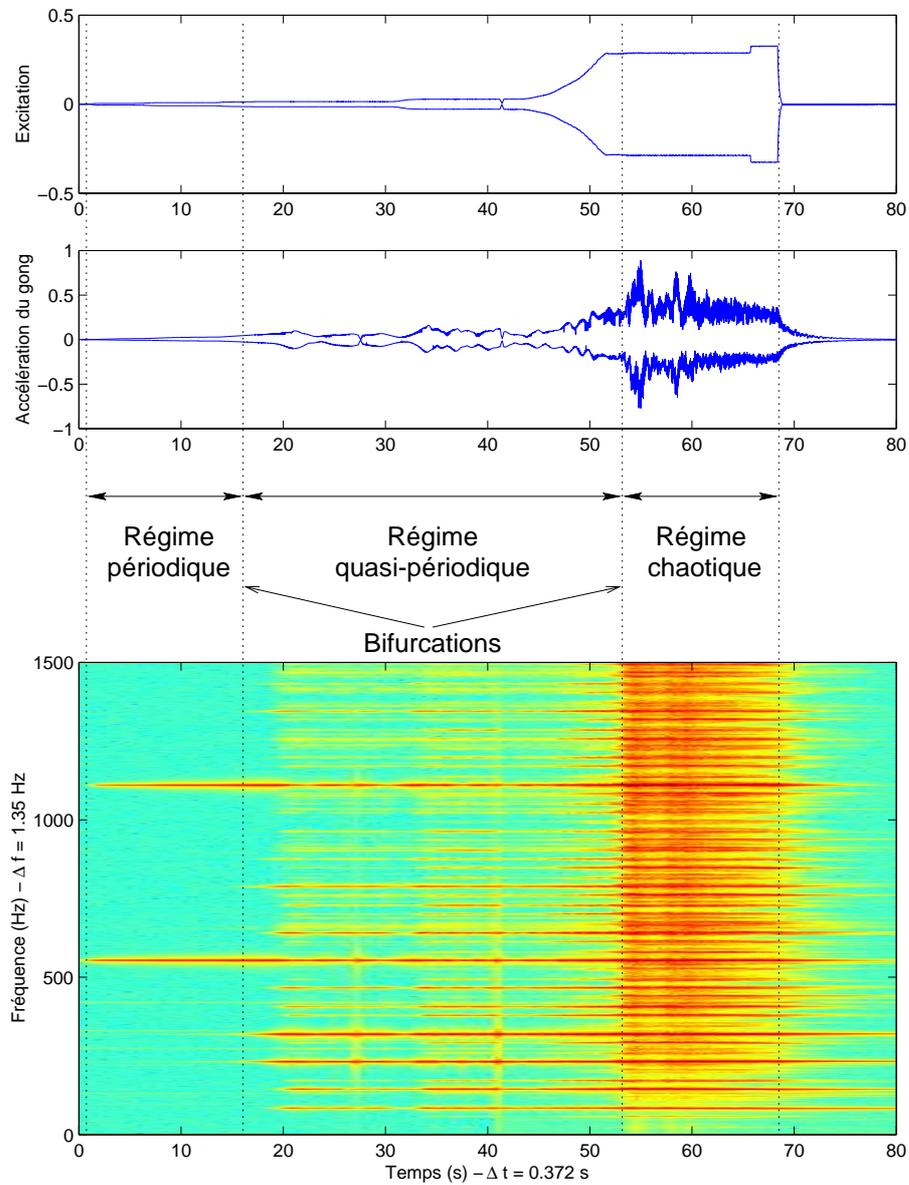


FIGURE 6.1 – Résultats expérimentaux associés au forçage harmonique d’amplitude croissante d’un gong. De haut en bas : évolution temporelle de l’excitation, réponse temporelle de l’accélération en un point du gong et spectrogramme de la vitesse en ce point. (source : [83])

et où

$$\mathbf{y} = \left. \begin{array}{c} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_{N_w} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{N_w} \end{array} \right\} \quad (6.3)$$

### 6.2.2 Difficultés numériques

Réduite à sa forme la plus simple, c'est à dire en ne conservant qu'un seul mode, la dynamique du système peut s'écrire sous la forme d'un oscillateur de Duffing forcé harmoniquement. On retrouve l'oscillateur de Duffing dans beaucoup de systèmes non-linéaires et plus encore concernant les systèmes mécaniques. Nombre d'études précédentes se sont donc intéressées aux transitions d'un oscillateur de Duffing forcé harmoniquement. Ueda a ainsi tenté de proposer un panorama des phénomènes fortement non-linéaires observés depuis les années 1960 [101], rapportant de fait quelques unes des principales bifurcations et des principaux attracteurs étranges obtenus pour certains jeux de paramètres. Dans la même veine, Parlitz et Lauterborn [61], dressent les diagrammes de bifurcations et établissent les structures qualitatives observées pour de relativement grandes amplitudes de forçage, fixant au préalable l'amortissement, études reprises et complétées ensuite par [71, 105, 7] notamment. La compréhension des régimes chaotiques montrés par des oscillateurs de Duffing dans leur contexte physique a été également largement entamée. On peut citer par exemple Moon [52], Dowell [23] pour le cas des poutres, Thomsen [87] pour les cas de pendules paramétriques. Les études de dynamiques plus complexes traduites par des systèmes d'oscillateurs de Duffing modifiés ou couplés sont plus récemment apparues (on peut citer [28] concernant un oscillateur de Duffing modifié par une dérivée fractionnelle, [54] pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté). La question commune soulevée par les études citées était la dynamique des différents systèmes s'écrivant sous la forme d'un oscillateur de Duffing. Jusque dans les années 1980, la question de l'intégrateur utilisé pour les simulations ne fut cependant que peu mentionnée.

La dynamique que nous devons intégrer numériquement est en fait un système d'EDOs couplées non-linéairement. Une des premières difficultés numériques à laquelle nous devons faire face est la troncature  $N_w$ . En effet, un grand nombre de degrés de liberté doit pouvoir être conservé pour représenter correctement le comportement du système. La seconde difficulté inhérente au comportement complexe qu'on veut étudier est qu'il comporte de très hautes fréquences, ce qui impose intuitivement d'appliquer des pas de temps très petits pour prédire avec une précision suffisante des variations rapides ; variations qui, par ailleurs, entrent en compétition avec la présence de basses fréquences dans la dynamique. Ces dernières impliquent que le système suit parallèlement une évolution plus lente. Or la petitesse du pas ne pouvant être prédite avant d'avoir une idée du comportement du système à intégrer, nous sommes face à un problème numériquement *raide*. De plus l'expérience qu'on se donne à reproduire nous impose d'intégrer le système sur des temps longs, afin de retrouver les phénomènes observés. Le quatrième obstacle concerne les coefficients d'amortissement. Les valeurs en moyenne très faibles de ces coefficients imposent à la dynamique des transitoires longs, à calculer à la précision imposée par la dernière remarque.

Ces difficultés, relatives au système étudié et à l'expérience qu'on veut reproduire, rendent

---

délicat le choix de la méthode numérique ; celle-ci doit être robuste vis-à-vis de tous les critères énoncés. Nos premiers essais concernaient plusieurs oscillateurs de Duffing excités avec un haut forçage harmonique et se sont révélés infructueux en utilisant les routines de la suite « ODE » de MATLAB (soit `ode45`, `ode15s`, `ode23s`) [72]. Nos travaux se sont donc orientés vers la recherche d'un intégrateur adapté à l'expérience dynamique que l'on veut simuler. Nous cherchons par définition à résoudre un problème *chaotique*, soit un problème dont une petite variation des données initiales entraîne une variation imprévisible des résultats. En résumé, le schéma de discrétisation choisi doit donc pouvoir rendre compte de la sensibilité de la dynamique, des comportements observés dans la réalité tout en permettant un temps de calcul acceptable.

Les prochains paragraphes reprennent les étapes successives de l'étude, déroulant ainsi le fil des problèmes rencontrés et des méthodes utilisées pour les aborder. On dresse à cette occasion un bref panorama des méthodes numériques adaptées ou non à notre problème. Dans le cas où elles ne le sont pas, il est en effet intéressant de regarder dans quelle mesure le résultat fourni est erroné, ce qui nous permet de souligner l'importance de propriétés idoines vérifiées par certains schémas.



# CHAPITRE 7

---

---

## SCHÉMAS NUMÉRIQUES

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>État de l'art</b> . . . . .	<b>93</b>
<b>7.2</b>	<b>Définition de quelques opérateurs aux différences finies</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>7.3</b>	<b>Quelques propriétés sur les intégrateurs temporels numériques</b> . . . . .	<b>96</b>
7.3.1	Consistance . . . . .	96
7.3.2	Stabilité . . . . .	96
7.3.3	Convergence . . . . .	97
7.3.4	Ordre . . . . .	97
<b>7.4</b>	<b>Méthodes de Runge-Kutta</b> . . . . .	<b>97</b>
<b>7.5</b>	<b>Méthodes multi-pas</b> . . . . .	<b>99</b>
7.5.1	Méthodes d'Adams . . . . .	99
7.5.2	Méthodes des différentiations rétrogrades . . . . .	100
<b>7.6</b>	<b>Méthode de Störmer-Verlet</b> . . . . .	<b>101</b>

---

### 7.1 État de l'art

Les méthodes numériques d'intégration temporelle ont connu un net regain d'intérêt depuis le début des années 1990. De nombreux travaux se sont intéressés aux cas des intégrateurs pour les systèmes mécaniques, lorsque l'on s'est rendu compte que les schémas classiques utilisés jusqu'alors (typiquement les schémas de Runge-Kutta explicite) ne conservaient pas certaines propriétés essentielles de la dynamique continue que l'on souhaitait simuler, comme par exemple l'énergie du système. Des schémas numériques ont alors été développés où l'on forçait la vérification de certaines propriétés par la dynamique discrète au moment de l'écriture du schéma, afin de s'assurer d'un comportement plus proche du système continu initial. Le livre de Hairer, Lubich et Wanner [33] donne un panorama de ces méthodes regroupées sous l'intitulé « structure-preserving algorithms »<sup>19</sup>.

Tous les schémas numériques qui ont été développés s'intéressent soit à la conservation de l'énergie du système, soit à la conservation de la nature symplectique du flot continu lorsque l'on a affaire à une dynamique Hamiltonienne. Certains invariants du premier ordre comme la quantité

---

19. terme que l'on pourrait traduire par « Algorithmes structurellement conservatifs »

de mouvement totale  $P = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$  ou du second ordre comme le moment dynamique  $L = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i \wedge \mathbf{p}_i$  sont aussi des quantités<sup>20</sup> que l'on souhaite conserver dans bien des cas. Un théorème de Ge et Marsden [27] montre que l'on ne peut pas conserver à la fois l'énergie et le caractère symplectique lorsque l'on passe aux équations discrètes, sauf dans certains cas particuliers, par exemple lorsque le système est complètement intégrable. En ce qui concerne les quantités  $P$  et  $L$ , leur conservation pose moins de problèmes algorithmiques, si bien que les schémas se divisent en deux classes : ceux qui conservent l'énergie et les moments (Energy-momentum), et ceux qui sont symplectiques et conservent les moments (symplectic-momentum). Le résultat de Ge et Marsden vaut pour un algorithme à pas de temps fixe, cependant des méthodes à pas de temps variable permettent de conserver simultanément les quatre quantités : énergie, moments  $P$  et  $L$ , et symplecticité, cf. par exemple [40].

Dans la classe des intégrateurs qui conservent l'énergie, les résultats les plus importants ont été obtenus par Simo *et al.* [74, 75, 76]. En écrivant une forme plus générale que le schéma du point milieu implicite avec un paramètre libre supplémentaire, on peut fixer la valeur de ce dernier afin d'imposer la conservation de l'énergie aux pas de temps discrets [74, 33]. Cette idée générale a été ensuite utilisée par Simo *et al.* afin de traiter les cas de l'élastodynamique, en écrivant une pondération adéquate des forces internes [75], ainsi que le cas des coques [76]. Pour des systèmes avec beaucoup de degrés de liberté, des modes numériques à hautes fréquences apparaissent, introduisant des oscillations fictives et des problèmes de convergence. Armero et Romero [8] remédièrent au problème en dissipant l'énergie tout en préservant les moments  $P$  et  $L$ . Ce travail, établi dans le cas de contraintes dérivant d'un potentiel, fut étendu à des matériaux régis par des lois de comportement plus complexes [58]. Un éventail d'algorithmes préservant l'énergie adaptés à la dynamique des plaques modélisée par les équations de von Kármán a été largement entamé par S. Bilbao [10]. Ce travail sur les EDPs régissant la dynamique des plaques est étendu dans ce manuscrit au cas des plaques circulaires imparfaites et modifié afin de travailler sur les équations modales. Dans la classe des intégrateurs symplectiques, les premiers résultats sont dus à Ruth [68] et Feng Kang [26]. Nous avons plus particulièrement utilisé les articles de revue de Sanz-Serna [69], ainsi que les deux monographies [70, 33] qui donnent un panorama complet et détaillé des méthodes existantes. Quelques définitions sont ainsi rappelées section 8.1.2 et l'exemple du schéma de Störmer-Verlet est donné.

Parmi les intégrateurs symplectiques, on distingue la classe des intégrateurs variationnels. Ceux-ci sont obtenus non pas à partir d'une discrétisation des équations du mouvement comme il est d'usage de faire, mais en écrivant une version discrète du principe d'Hamilton. On obtient alors des intégrateurs qui sont « naturellement » symplectiques, et sont souvent bien adaptés aux problèmes mécaniques [104, 33]. En particulier il est montré dans [41] que le schéma de Newmark est un intégrateur variationnel.

Le point de départ des apports originaux présentés par la suite, diffère du travail du Simo en ce sens que les développements sont écrits à partir d'une conservation discrète de l'énergie et non pas de la modification d'un schéma de point milieu. Les travaux présentés dérivent spécifiquement du problème étudié et des résultats obtenus au cours de cette thèse puisqu'ils s'établissent à partir de la formulation modale récemment obtenue. A la différence des développements de Bilbao, on cherche à développer les schéma, non pas sur les EDPs décrivant la dynamique des plaques mais sur le système d'EDOs couplées non linéairement. Le travail a été mené d'abord sur un oscillateur de Duffing puis étendu à un système à  $N_w$  degrés de liberté. Les résultats sont

20. Ces quantités sont respectivement appelées « linear momentum » et « angular momentum » dans la littérature anglo-saxonne.

comparés à différents schémas et notamment au schéma de Störmer-Verlet.

## 7.2 Définition de quelques opérateurs aux différences finies

On donne ici la définition de quelques opérateurs discrets qui serviront dans la suite du document. Pour toutes séries temporelles  $f_n$  et  $g_n$ , la discrétisation est faite selon le pas de temps  $k$ . On note :

$$e_{t+}f_n = f_{n+1} \quad (7.1)$$

$$e_{t-}f_n = f_{n-1} \quad (7.2)$$

On définit les opérateurs temporels discrets suivants :

$$\delta_{tt}f_n = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{k^2} \quad (7.3)$$

$$\delta_t f_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2k} \quad (7.4)$$

$$\delta_{t+}f_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{k} \quad (7.5)$$

$$\delta_{t-}f_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{k} \quad (7.6)$$

$$\mu_t f_n = \frac{f_{n+1} + f_{n-1}}{2} \quad (7.7)$$

$$\mu_{t+}f_n = \frac{f_{n+1} + f_n}{2} \quad (7.8)$$

$$\mu_{t-}f_n = \frac{f_n + f_{n-1}}{2} \quad (7.9)$$

On peut également établir les identités suivantes :

$$\begin{aligned} (\delta_t f_n) \cdot (\delta_{tt} f_n) &= \frac{1}{2k^3} (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}) \\ (\delta_t f_n) \cdot (\delta_{tt} f_n) &= \frac{1}{2k} \left( \frac{f_{n+1}^2 - 2f_{n+1}f_n + f_n^2}{k} \right) \left( \frac{f_n^2 - 2f_n f_{n-1} + f_{n-1}^2}{k} \right) \\ &\Rightarrow (\delta_t f_n) \cdot (\delta_{tt} f_n) = \delta_{t+} \left( \frac{1}{2} (\delta_{t-} f_n)^2 \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \delta_{t+}(\mu_{t-} f_n) &= \frac{1}{2k} (f_{n+1} + f_n - (f_n + f_{n-1})) \\ &\Rightarrow \delta_{t+}(\mu_{t-} f_n) = \delta_t f_n \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} f_n \delta_t g_n + g_n \delta_t f_n &= \frac{1}{2k} ((f_{n+1} g_n + f_n g_{n+1}) - (f_{n-1} g_n + f_n g_{n-1})) \\ &\Rightarrow f_n \delta_t g + g \delta_t f_n = \delta_{t+} \frac{1}{2} (f_n e_{t-} g_n + g_n e_{t-} f_n) \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) &= \frac{f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2}{4k} \\ (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) &= \frac{(f_{n+1}^2 + f_n^2) - (f_n^2 + f_{n-1}^2)}{4k} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) = \delta_{t+} \left( \frac{1}{2} \mu_{t-} (f_n^2) \right) \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} (\mu_t (f_n)^2) \cdot (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) &= \frac{f_{n+1}^2 + f_{n-1}^2}{2} \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2k} \frac{f_{n+1} + f_{n-1}}{2} \\ (\mu_t (f_n)^2) \cdot (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) &= \frac{f_{n+1}^4 - f_{n-1}^4}{8k} \\ \Rightarrow (\mu_t (f_n)^2) \cdot (\delta_t f_n) \cdot (\mu_t f_n) &= \delta_{t+} \left( \frac{1}{4} \mu_{t-} (f_n^4) \right) \end{aligned} \quad (7.14)$$

### 7.3 Quelques propriétés sur les intégrateurs temporels numériques

Le recours à l'intégration numérique est nécessaire dès que l'on n'a pas accès à la solution analytique du problème, ce qui se trouve être souvent le cas pour des systèmes non-linéaires. Sauf mention contraire, les méthodes décrites et employées dans la suite de ce document se fondent sur une discrétisation temporelle à pas invariant  $k$ . Appliquer un schéma de discrétisation revient à remplacer le flot continu associé au problème de Cauchy Eq. (6.2) par l'intégrateur numérique  $\Phi_h$  et les approximations  $\mathbf{y}_i$  auxquels on associe une condition initiale approchée  $\eta_0$  :

$$\begin{cases} \Phi_h : (\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2}, \dots) \longmapsto \mathbf{y}_{n+1} \\ \mathbf{y}_0 \approx \eta_0 \end{cases} \quad (7.15)$$

Afin de juger de la bonne reproduction de la dynamique réelle par l'approximation numérique formulée, on introduit, en préalable à notre étude, quelques notions essentielles sur les propriétés des schémas de discrétisation.

#### 7.3.1 Consistance

D'une manière générale<sup>21</sup>, on parle de consistance d'un schéma pour dire que les quantités introduites sont cohérentes avec leur contrepartie continue, afin d'être certain que l'approximation discrète n'engendre pas de problème de définition des quantités du système. En particulier, on vérifie notamment que le flot numérique approche correctement la notion de dérivée [31] :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n}{k} = \dot{\mathbf{y}}(t_n). \quad (7.16)$$

On note également qu'un schéma est *énergétiquement consistant* lorsqu'il préserve certaines quantités, à savoir les moments linéaires et angulaires et l'énergie du système. Nous reviendrons plus en détail sur les conditions et les lois de conservation dans la section 8.1.

#### 7.3.2 Stabilité

La stabilité d'une méthode numérique implique qu'une petite variation sur les entrées du schéma n'entraîne qu'une petite variation sur la solution. Plus précisément et de manière plus formelle, un schéma d'intégration directe est dit stable s'il existe un pas d'intégration  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $h \in [0, h_0]$ , une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant  $t_n$  n'entraîne qu'une modification non-croissante du vecteur d'état  $\mathbf{y}_{n+j}$  calculé à un instant ultérieur  $t_{n+j}$  [31].

21. Pour une définition plus complète dans le cas de schémas à un pas, on pourra se reporter à [17, chap.4]

### 7.3.3 Convergence

La notion de convergence implique que l'erreur commise entre l'approximation discrète et la solution réelle du problème continu tend à tout pas de temps vers 0 lorsque  $k$  tend vers 0 et  $\eta_0$  vers  $y_0$ , soit :

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ \eta_0 \rightarrow y_0}} \max_{n \in [1, N]} (|y(t_n) - y_n|) = 0. \quad (7.17)$$

### 7.3.4 Ordre

Pour une solution convergente, l'ordre définit la vitesse de cette convergence. Une méthode numérique à un pas est d'ordre  $p$  si l'erreur locale  $\mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n$  satisfait :

$$\text{Pour } k \ll 1, \quad \mathbf{y}(t_n) - \mathbf{y}_n = \mathcal{O}(k^{p+1}). \quad (7.18)$$

## 7.4 Méthodes de Runge-Kutta

Ces méthodes sont une généralisation de la méthode d'Euler. Elles consistent à évaluer le champ de vecteur  $\mathbf{y}$  en des instants intermédiaires entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$  en fonction de  $\mathbf{y}_n$  et/ou d'autres instants intermédiaires puis de prédire  $\mathbf{y}_n$  grâce à une pondération choisie sur ces valeurs. Plus précisément, on choisit une division  $\{c_i\}_{i \in [1, s]}$  de l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ , telle que présentée figure 7.1.

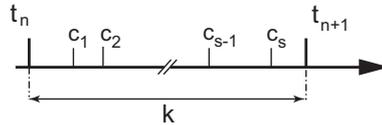


FIGURE 7.1 – Définition des coefficients  $c_i$  divisant l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$

La méthode de Runge-Kutta à  $s$  étapes est ainsi définie par :

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_n + k \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{p}_j, t_n + c_i k\right), \text{ avec } i = 1, \dots, s \quad (7.19a)$$

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + k \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{p}_i. \quad (7.19b)$$

A chaque instant  $c_i$  correspond une approximation  $\mathbf{p}_i$  du vecteur  $\dot{\mathbf{y}}(t_n + c_i k)$ . Les coefficients  $a_{ij}$  déterminent le calcul de ces approximations. Les coefficients  $b_i$  représentent les pondérations permettant d'approcher finalement le calcul de la dérivée intégrée entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

De manière plus pratique et plus lisible, on caractérise une méthode de Runge-Kutta par un

tableau [11] :

$$\begin{array}{c|ccc}
 c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & \dots & b_s
 \end{array} \tag{7.20}$$

On note que lorsque la matrice  $\{a_{ij}\}_{(i,j) \in [1 \ s]^2}$  est triangulaire inférieure, la méthode est explicite. Afin de pouvoir définir une méthode de Runge-Kutta, ces coefficients doivent entretenir entre eux une relation algébrique, qui définit par ailleurs l'ordre de la méthode. On ne détaille pas ici la justification de ces relations mais elles sont rappelées pour les méthodes allant jusqu'à l'ordre 4. Le tableau 7.1 en comporte une représentation sous la forme d'arbres. Chaque arbre  $T$ , dont on décide arbitrairement qu'il se lit de haut en bas, comporte des nœuds liés par des branches. Le nœud au sommet est la *racine* de l'arbre et ceux les plus bas et desquels ne part aucune branche sont les *feuilles*. L'ordre de l'arbre est défini par le nombre de nœuds qu'il comporte. Le tableau 7.1 comporte également les polynômes  $\Psi(T)$  et les coefficients  $\gamma(T)$  associés à chaque méthode. Ils déterminent les conditions à vérifier par les coefficients pour chaque arbre sachant que les conditions sont cumulatives. Ainsi, pour chaque arbre, nous obtenons une condition :

$$\Psi(T) = 1/\gamma(T). \tag{7.21}$$

Le polynôme  $\Psi(T)$  se construit de la manière suivante. A chaque nœud qui n'est pas une feuille est associé un indice  $i, j, k, \dots$ , sachant que l'indice  $i$  est associé à la racine. La séquence de facteurs dont on tient compte en premier sont les  $b_i$ . À chaque feuille est associée une séquence de facteurs  $c_i$  et à chaque nœud qui n'est ni une feuille ni une racine sont associés les facteurs  $a_{jk}$  où  $j$  et  $k$  sont les indices débutant et finissant la branche. Les polynômes résultants figurent tableau 7.1.

Pour calculer la valeur du coefficient  $\gamma(T)$ , il faut associer à chaque nœud un facteur. Pour les feuilles, ce facteur est égal à 1, pour les autres nœuds, il est égal à 1 plus la somme des facteurs des nœuds découlants directement de celui qu'on regarde. Ainsi la méthode de Runge-Kutta sera d'ordre  $p$  si elle satisfait toutes les conditions Eq. (7.21) associées à tous les arbres que l'on peut former à partir de 1 et jusqu'à  $p$  nœuds [103, 11].

Dans le cas particulier d'une méthode d'ordre 4 explicite, la condition  $a_{ij} = 0$  sauf pour  $i \geq j$  se rajoute donc aux conditions détaillées précédemment. La solution la plus simple de ce système est la *Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4* :

$$\begin{array}{c|ccc}
 0 & & & \\
 \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
 \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
 1 & 0 & 0 & 1 \\
 \hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
 \end{array} \tag{7.22}$$

Concernant les problèmes raides, les méthodes explicites en général sont malheureusement mal adaptées. Même en contrôlant la longueur du pas  $k$  par rapport à une tolérance prédéfinie, leur stabilité n'est pas garantie. Wanner en expose les principaux arguments dans [103], citant le théorème de Jeltsh pour les méthodes de Runge-Kutta, celui de Nevanlinna pour les méthodes multi-pas et l'extension de Jeltsh-Nevanlinna [39] pour toutes les méthodes linéaires connues.

Les méthodes de Runge-Kutta implicites montrent quant à elles d'excellentes propriétés de stabilité. Leur construction ardue, due à l'évaluation numérique des coefficients du système à résoudre, a été facilitée grâce aux méthodes de *collocation* [35]. Malgré tout, l'application de ces

Arbre $T$				
Ordre	1	2	3	3
$\Psi(T)$	$\sum_i b_i$	$\sum_i b_i c_i$	$\sum_i b_i c_i^2$	$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j$
$\gamma(T)$	1	2	3	6

Arbre $T$				
Ordre	4	4	4	4
$\Psi(T)$	$\sum_i b_i c_i^3$	$\sum_{ij} b_i c_i a_{ij} c_j$	$\sum_{ij} b_i a_{ij} c_j^2$	$\sum_{ijk} b_i a_{ij} a_{jk} c_k$
$\gamma(T)$	4	8	12	24

TABLE 7.1 – Arbres et valeurs associées pour la construction des schémas de Runge-Kutta d'ordre 4.

méthodes nécessite dans la plupart des cas la résolution d'un système non-linéaire alourdissant la programmation et le coût de calcul.

## 7.5 Méthodes multi-pas

Alors que les précédentes méthodes se regroupaient sous le terme des *méthodes à un pas* et proposaient une approximation de  $\mathbf{y}_{n+1}$  uniquement grâce à la valeur approchée  $\mathbf{y}_n$ , les *méthodes multipas* utilisent à chaque incrémentation plusieurs valeurs approchées précédentes,  $\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_{n-2}$ , etc.

### 7.5.1 Méthodes d'Adams

Les méthodes d'Adams utilisent la propriété dérivée de (6.2) suivante [17] :

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \underbrace{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) dt}_I, \quad (7.23)$$

L'intégrale  $I$  est approchée grâce à :

$$I = \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q(t) dt \quad (7.24)$$

où  $Q$  est un polynôme d'interpolation. Pour une méthode à  $r + 1$  pas implicite, le polynôme  $Q$  de degré inférieur ou égal à  $r$  est défini grâce à :

$$\forall i = 0 \cdots r \quad \begin{aligned} f_{n-i} &= f(y_{n-i}, t_{n-i}), \\ Q(t_{n_i}) &= f_{n-i}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Pour une méthode à  $r + 1$  pas explicite, le polynôme  $Q$  de degré inférieur ou égal à  $r$  est cette fois défini grâce à :

$$\forall i = -1 \cdots r - 1 \quad \begin{aligned} f_{n-i} &= f(y_{n-i}, t_{n-i}), \\ Q(t_{n_i}) &= f_{n-i}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Ces méthodes qu'on appelle Adams-Bashforth lorsqu'elles sont explicites et Adams-Moulton lorsqu'elles sont implicites se montrent très efficaces lorsque le problème est bien conditionné mais coûteuses et inadaptées face aux problèmes raides. La méthode des différentiations rétrogrades est, à l'inverse de ses consœurs multipas, trop lourde pour les problèmes bien conditionnés mais particulièrement efficace pour les problèmes raides [17].

### 7.5.2 Méthodes des différentiations rétrogrades

La démarche sur laquelle s'appuie les méthodes des différentiations rétrogrades<sup>22</sup> est semblable à celle que l'on adopte pour établir les méthodes d'Adams à ceci près que la recherche du polynôme d'interpolation ne s'applique pas directement à  $\mathbf{f}$ .

L'idée originale est que l'on définit le polynôme d'interpolation vis-à-vis de  $\mathbf{y}$  et que l'on en définit ensuite les coefficients par dérivation et par égalité avec la fonction  $\mathbf{f}$  évaluée aux  $q$  pas précédent. De manière formelle, en définissant au pas  $n$  le polynôme d'interpolation  $P$  de tel que :

$$\forall i = 0 \dots r, \quad P(t_{n+1-i}) = y_{n+1-i}, \quad (7.27)$$

la méthode de différentiations rétrogrades est obtenue en écrivant :

$$\frac{d}{dt}P(t_{n+1}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{n+1}, t_{n+1}) \quad (7.28)$$

Les schémas résultants sont par définition implicites. Les schémas explicites dérivés du même processus sont équivalents aux méthodes d'Euler et de point-milieu pour  $r$  respectivement égal à 1 et 2 et sont instables dès que  $r > 3$ . Les méthodes de différentiations rétrogrades sont stables jusque  $r \leq 6$  [34]. Les formules correspondantes sont données table 7.2.

$$\begin{aligned} r = 1 & \quad \mathbf{y}_{n+1} - \mathbf{y}_n = hf_{n+1} \\ r = 2 & \quad \frac{3}{2}\mathbf{y}_{n+1} - 2\mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{y}_{n-1} = hf_{n+1} \\ r = 3 & \quad \frac{11}{6}\mathbf{y}_{n+1} - 3\mathbf{y}_n + \frac{3}{2}\mathbf{y}_{n-1} - \frac{3}{2}\mathbf{y}_{n-2} = hf_{n+1} \\ r = 4 & \quad \frac{25}{12}\mathbf{y}_{n+1} - 4\mathbf{y}_n + 3\mathbf{y}_{n-1} - \frac{4}{3}\mathbf{y}_{n-2} + \frac{1}{4}\mathbf{y}_{n-3} = hf_{n+1} \\ r = 5 & \quad \frac{137}{60}\mathbf{y}_{n+1} - 5\mathbf{y}_n + 5\mathbf{y}_{n-1} - \frac{10}{3}\mathbf{y}_{n-2} + \frac{5}{4}\mathbf{y}_{n-3} - \frac{1}{5}\mathbf{y}_{n-4} = hf_{n+1} \\ r = 6 & \quad \frac{147}{60}\mathbf{y}_{n+1} - 6\mathbf{y}_n + \frac{15}{2}\mathbf{y}_{n-1} - \frac{20}{3}\mathbf{y}_{n-2} + \frac{15}{4}\mathbf{y}_{n-3} - \frac{6}{5}\mathbf{y}_{n-4} + \frac{1}{5}\mathbf{y}_{n-5} = hf_{n+1} \end{aligned}$$

TABLE 7.2 – Formules correspondantes à la méthode de différentiations rétrogrades jusqu'à  $r=6$ .

Ces méthodes sont adaptées aux problèmes raides en vertu de leurs propriétés de stabilité. Elles sont particulièrement utilisées pour des problèmes mal conditionnés [29, 35].

<sup>22</sup>. en anglais : Backward Differentiations Formulas

## 7.6 Méthode de Störmer-Verlet

Le schéma de Störmer-Verlet peut être considéré comme une méthode multi-pas bien qu'une formulation à un pas existe [35]. C'est un schéma extrêmement simple qui, pour les équations différentielles du second ordre de la forme :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}), \quad (7.29)$$

s'obtient en approchant simplement la dérivée seconde par l'opérateur aux différences finies centré  $\delta_{tt}$ , tel que :

$$\mathbf{q}_{n+1} - 2\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{n-1} = k^2 \mathbf{f}(\mathbf{q}_n). \quad (7.30)$$

Ce schéma porte parfois le nom de saute-mouton<sup>23</sup>. Il est d'ordre 2, symétrique et symplectique [33]. La méthode de Störmer-Verlet est stable à condition que le pas de temps vérifie la relation  $|h\omega| \leq 2$  [33]. Les valeurs des dérivées  $\mathbf{p} = \dot{\mathbf{q}}$  sont obtenues simplement par les formules :

$$\mathbf{p}_n = \delta_t \mathbf{q}_n, \quad (7.31)$$

$$\mathbf{p}_{n+1/2} = \delta_{t+} \mathbf{q}_n. \quad (7.32)$$

La formulation à un pas que l'on trouve parfois est :

$$\mathbf{p}_{n+1/2} = \mathbf{p}_n + \frac{k}{2} \mathbf{f}(\mathbf{q}_n) \quad (7.33a)$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + k \mathbf{p}_{n+1/2} \quad (7.33b)$$

$$\mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{p}_{n+1/2} + \frac{k}{2} \mathbf{f}(\mathbf{q}_{n+1}) \quad (7.33c)$$

qui est une méthode explicite à un pas pour Eq. (7.29) écrit au premier ordre. Cette méthode est identique à celle de Newmark de paramètres associés  $\gamma = 1/2$  et  $\beta = 0$ , connue également comme la méthode de la différence centrée. Notons enfin que si l'on n'est pas intéressé par les valeurs des vitesses aux instants  $t_n$ , on ne peut les calculer qu'aux temps moitiés en substituant à la première et la troisième équation de (7.33) la suivante :

$$\mathbf{p}_{n+1/2} = \mathbf{p}_{n-1/2} + k \mathbf{f}(\mathbf{q}_n). \quad (7.34)$$

---

23. en anglais : leap-frog



# CHAPITRE 8

## SCHÉMAS CONSERVATIFS

### Sommaire

<b>8.1</b>	<b>Propriété des systèmes Hamiltoniens . . . . .</b>	<b>103</b>
8.1.1	Définition du Hamiltonien . . . . .	103
8.1.2	Propriété de symplecticité . . . . .	104
<b>8.2</b>	<b>Exemple de l'oscillateur de Duffing . . . . .</b>	<b>104</b>

## 8.1 Propriété des systèmes Hamiltoniens

### 8.1.1 Définition du Hamiltonien

Un système Hamiltonien est défini de la manière suivante :

$$\forall i = 1 \dots N_w : \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (8.1a)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (8.1b)$$

où  $H$  est le Hamiltonien du système et  $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_{N_w}]$  et  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_{N_w}]$  ses coordonnées généralisées. On peut également écrire (8.1) sous les formes équivalentes :

$$\dot{\mathbf{p}} = -H_{\mathbf{q}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (8.2)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = H_{\mathbf{p}}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \quad (8.3)$$

ou encore sous la forme plus compacte :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}^{-1} \nabla H(\mathbf{y}), \quad (8.4)$$

avec  $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$  et  $\mathbf{J}$  la matrice définie par :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

$\mathbf{I}$  est la matrice identité de taille  $N_w$ . Dans le cadre des systèmes mécaniques, le Hamiltonien est séparable et peut s'écrire  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T + U$  avec  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  l'énergie cinétique et  $U(\mathbf{q})$  l'énergie potentielle du système.  $H$  représente alors l'énergie totale du système.

### 8.1.2 Propriété de symplecticité

Ce paragraphe reprend très brièvement la définition de la symplecticité détaillée par Sanz-Serna dans [70, 69] et Hairer dans [33]. Il est commode de définir cette notion de manière géométrique. On introduit des parallélogrammes bidimensionnels de  $\mathbb{R}^{2N_w}$ , que l'on suppose engendrés par deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^p \\ \boldsymbol{\xi}^q \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}^p \\ \boldsymbol{\eta}^q \end{pmatrix},$$

où  $(\boldsymbol{\xi}^p, \boldsymbol{\xi}^q, \boldsymbol{\eta}^p, \boldsymbol{\eta}^q)$  sont dans  $\mathbb{R}^{N_w}$ . Le parallélogramme est alors défini par l'ensemble :

$$P = \{t\boldsymbol{\xi} + s\boldsymbol{\eta}, t \in [0, 1], s \in [0, 1]\}.$$

La propriété de symplecticité fait intervenir la somme des aires orientées des projections de  $P$  sur les plans de coordonnées  $(p_i, q_i)$ , soit :

$$\omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} \xi_i^p & \eta_i^p \\ \xi_i^q & \eta_i^q \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}^t \mathbf{J} \boldsymbol{\eta}. \quad (8.6)$$

Une transformation linéaire  $A : \mathbb{R}^{2N_w} \rightarrow \mathbb{R}^{2N_w}$  est symplectique si :

$$A^t \mathbf{J} A = \mathbf{J},$$

ou, de manière équivalente, si  $\omega(A\boldsymbol{\xi}, A\boldsymbol{\eta}) = \omega(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$  pour tout couple  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^{2N_w}$  ; ce qui signifie que la somme des aires orientées des projections de  $P$  sur les sous-espaces plans  $(p_i, q_i)$  est la même que celle du parallélogramme transformé  $A(P)$ . Par extension, l'application non-linéaire et différentiable  $g : U \subset \mathbb{R}^{2N_w} \rightarrow \mathbb{R}^{2N_w}$  est symplectique si la matrice jacobienne  $g'(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  est partout symplectique. La propriété de symplecticité est plus générale que la simple conservation des volumes. Les systèmes Hamiltonien sont liés à la propriété de symplecticité par le théorème suivant. Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^{2N_w} \rightarrow \mathbb{R}^{2N_w}$  une fonction continûment différentiable, alors le système dynamique  $\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$  est localement Hamiltonien si et seulement si le flot  $\phi_t$  associé à  $f$  est symplectique, pour tout  $\mathbf{y} \in U$  et pour tout  $t$  suffisamment petit.

## 8.2 Exemple de l'oscillateur de Duffing

Une démarche intuitive permettant d'obtenir des schémas conservatifs est de s'inspirer de l'écriture de l'énergie dans le cas continu [10]. L'équation énergétique d'un oscillateur de Duffing simple, Eq. (8.7), peut être déduite de la manière suivante :

$$\dot{q} * \left( \ddot{q} + \omega^2 q + \epsilon \Gamma q^3 \right) = 0, \quad (8.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \dot{q}^2 + \omega^2 q^2 + \epsilon \Gamma \frac{q^4}{2} \right) = 0, \quad (8.8)$$

et ainsi

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad \text{avec} \quad H = T + U \quad T = \frac{1}{2} \dot{q}^2 \quad \text{et} \quad U = \frac{\omega^2}{2} q^2 + \epsilon \Gamma \frac{q^4}{4}. \quad (8.9)$$

Notre but est de trouver un schéma de discrétisation dont les quantités introduites sont consistantes aux quantités continues. En œuvrant judicieusement sur les opérateurs de moyennage (7.7)-(7.9) et en déroulant les calculs, par multiplication à la vitesse discrète et manipulation sur les termes, nous pouvons déduire des quantités discrètes correspondantes aux quantités énergétiques. La méthode décrite ici semble peu reproductible et fait plus appel à l'expérience du numéricien qu'à une méthode mathématique générale. C'est bien que celle-ci n'est pas encore avérée. Elle devrait faire appel aux propriétés des opérateurs de discrétisation en regard de la structure à préserver (symétrie, ordre de la non-linéarité). Mickens en fournit tout au moins quelques recettes pour des oscillateurs de Duffing simples puis couplés [49, 50, 51], mais sans démonstration mathématique satisfaisante.

On présente deux exemples de discrétisation de l'oscillateur de Duffing correspondants à cette approche.

$$\delta_{tt}q_n + \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma q_n^2 \mu_t q_n = 0 \quad (8.10)$$

$$\delta_{tt}q_n + \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma \mu_t q_n^2 \mu_t q_n = 0 \quad (8.11)$$

En suivant la même démarche que dans le cas continu, on multiplie chacune de ces expressions par l'expression discrète de la vitesse (tableau 8.1). Le passage des lignes 2 à 3 se fait grâce aux identités remarquables (7.10-7.14).

Schéma 1 (Eq. (8.10))	Schéma 2 (Eq. (8.11))
$\delta_t q_n * \left( \delta_{tt} q_n + \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma q_n^2 \mu_t q_n \right) = 0$	$\delta_t q_n * \left( \delta_{tt} q_n + \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma \mu_t q_n^2 \mu_t q_n \right) = 0$
$\delta_t q_n \delta_{tt} q_n + \delta_t q_n \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma q_n^2 \delta_t q_n \mu_t q_n = 0$	$\delta_t q_n \delta_{tt} q_n + \delta_t q_n \omega^2 \mu_t q_n + \varepsilon \Gamma \mu_t q_n^2 \delta_t q_n \mu_t q_n = 0$
$\delta_{t+} \left( \underbrace{\frac{1}{2}(\delta_{t-} q_n)^2}_{T_n} + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 \mu_{t-} (q_n^2) + \frac{\varepsilon \Gamma}{4k} (q_n^2 e - q_n^2)}_{U_n} \right) = 0$ <p style="text-align: center; margin-top: -10px;"><math>\underbrace{\hspace{15em}}_{H_n}</math></p>	$\delta_{t+} \left( \frac{1}{2}(\delta_{t-} q_n)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \mu_{t-} (q_n^2) + \frac{\varepsilon \Gamma}{4k} (\mu_{t-} q_n^4) \right) = 0$

TABLE 8.1 – *Déduction de quantités discrètes énergétiques conservées au pas  $n + 1$ , à partir des équations (8.10) et (8.11).*

A partir de ces deux schémas de discrétisation, il nous est permis de déduire des quantités discrètes consistantes aux quantités énergétiques du cas continu. Nous nous concentrons par la suite sur le premier schéma de discrétisation (8.10). On nomme *Hamiltonien discret*  $H_n$  la quantité consistante à l'énergie totale  $H$ . On appelle de la même manière  $T_n$  et  $V_n$  les quantités discrètes consistantes respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie potentielle du système. Les quantités que l'on dérive numériquement, sont toutes positives car peuvent s'écrire sous la forme d'une somme de valeurs élevées au carré. Ainsi :

$$\begin{aligned} T_n &\geq 0 \\ \forall n, U_n &\geq 0 \\ H_n &\geq 0 \end{aligned}$$

L'énergie injectée, simulée par les conditions initiales en vitesse ou/et en déplacement est préservée au pas  $n + 1$ . Si 0 est le premier pas de temps, on a donc :

$$\delta_{t+} H_n = 0 \quad \Rightarrow \quad H_n = H_0$$

En rassemblant ces deux propriétés et en développant les inégalités autour  $\delta_{t-} q_n$  et  $q_n$ . On aboutit, dans le cas du premier schéma aux majorations suivantes :

$$\forall n, \quad |\delta_{t-} q_n| \leq \sqrt{2H_0} \quad \text{et} \quad |q_n| \leq \frac{2}{\omega} \sqrt{H_0} \quad (8.12)$$

ce qui nous permet de garantir la stabilité du schéma. Des majorations équivalentes peuvent par ailleurs être trouvées dans le cas du deuxième schéma (8.11). Ces schémas sont tous deux implicites, conservatifs et inconditionnellement stables. Nous optons cependant pour le premier car une fois implémenté, il ne nécessite qu'une récursion linéaire pour accéder au pas  $n + 1$ . La présence du terme  $\mu_t q_n^2$  dans le second schéma impose en effet une méthode itérative pour obtenir la valeur au pas  $n + 1$ , augmentant de ce fait le coût de calcul.

A titre d'exemple, on donne ici le cas d'un schéma aux différences finies discrétisant la même équation de Duffing mais ne permettant pas d'aboutir à l'expression d'une énergie discrète. Il s'agit du schéma de Störmer-Verlet que l'on verra réapparaître dans les paragraphes suivants :

$$\delta_{tt} q_n + \omega^2 q_n + \varepsilon \Gamma q_n^3 = 0. \quad (8.13)$$

Le terme en  $q_n^3$  ne permet pas en effet de dégager une identité remarquable lorsqu'on le multiplie par  $\delta_t q_n$ . Ce schéma présente néanmoins une propriété très utile, la conservation de la symplecticité (voir 8.1.2), ce qui lui confère une garantie de bons résultats lors des simulations numériques présentées ensuite. Ces deux méthodes présentent un ordre de convergence égal à 2 [10],[35].

# CHAPITRE 9

---

---

## APPLICATION À UN OSCILLATEUR DE DUFFING

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Expériences numériques tests</b> . . . . .	<b>107</b>
<b>9.2</b>	<b>Écriture des différentes méthodes</b> . . . . .	<b>109</b>
9.2.1	Méthode de Störmer-Verlet . . . . .	109
9.2.2	Méthodes de Runge-Kutta explicites . . . . .	109
9.2.3	Méthode des différentiations rétrogrades . . . . .	109
9.2.4	Implémentation . . . . .	110
<b>9.3</b>	<b>Comparaison des simulations</b> . . . . .	<b>110</b>
9.3.1	Cas d'une excitation harmonique à faible amplitude . . . . .	110
9.3.2	Cas d'une excitation harmonique à forte amplitude . . . . .	112
9.3.3	Cas particulier d'un diagramme de bifurcation jusqu'à un forçage très élevé . . . . .	119
9.3.4	Cas d'une excitation impulsionnelle . . . . .	120

---

### 9.1 Expériences numériques tests

Le système dynamique (6.1) est réduit à un degré de liberté afin de tester différentes méthodes d'intégration entre elles et de constater les éventuelles différences lorsque le forçage appliqué est élevé. Ainsi réduit à un simple oscillateur de Duffing dont les paramètres sont ceux du mode propre (0, 1) de la plaque parfaite, le système à intégrer devient :

$$\ddot{q} + \omega^2 q + 2\varepsilon\mu_0\dot{q} + \varepsilon\Gamma q^3 = F \tag{9.1}$$

Le déplacement est ici adimensionné selon  $h^2/a$ . Les formules d'adimensionnement correspondantes, liées aux équations locales (3.31), sont données tableau 9.1 et les valeurs des paramètres fixes liant l'équation (9.1) au mode (0, 1), pour les expériences qu'on se propose de reproduire, sont rapportées dans le tableau 9.2.

La force appliquée est de la forme  $F = \varepsilon f_0 \cos(\Omega t)$ . La pulsation de forçage est égale à la pulsation propre  $\omega$ . L'amplitude  $f_0$  du forçage et l'amortissement varie selon les expériences numériques présentées. Trois expériences numériques clés seront menées selon plusieurs schémas pour en comparer les résultats. Les valeurs de ces paramètres de contrôle sont données dans le tableau 9.3, ainsi que leurs équivalentes dimensionnées.

$$r = a\bar{r} \quad t = a^2\sqrt{\rho h/D}\bar{t} \quad F = (Eh^5/a^2)\bar{F}$$

$$\mu = [2Eh^5/a^4]\sqrt{\rho h/D}\bar{\mu} \quad \varepsilon = 12(1 - \nu^2)h^2/a^2$$

TABLE 9.1 – Formules d'adimensionnement des différentes grandeurs pour un adimensionnement du déplacement transverse en  $w = (h^2/a)\bar{w}$ . La notation  $(\bar{\cdot})$  désigne les grandeurs adimensionnées.

$\omega$	$\Gamma$	$\varepsilon$
9.0689	8.5288	$1.188e - 4$

TABLE 9.2 – Paramètres fixes de l'oscillateur de Duffing simulé numériquement.

	Expérience 1 Forçage harmonique à faible amplitude	Expérience 2 Forçage harmonique à forte amplitude	Expérience 3 Oscillations libres
Forçage (en $N$ )	5	500	0
$f_0$ (Adimensionné)	1.287e7	1.287e9	0
Amortissement (en $s^{-1}$ )	0.02	0.02	0
$\mu_0$ (Adimensionné)	0.9514	0.9514	0

TABLE 9.3 – Paramètres de contrôle des principales expériences numériques.

Sauf pour l'expérience 3, le coefficient d'amortissement  $\mu$  est choisi de manière à être cohérent avec les mesures. L'étude s'intéresse au comportement non-linéaire du système étudié et s'axera autour des séries temporelles, des diagrammes de phase, et des spectres de réponse temporelle. L'expérience 1 présentera des résultats préliminaires qui montreront la cohérence des différentes méthodes entre elles, le comportement observé n'étant que faiblement non-linéaire. L'expérience 2 soulèvera plus particulièrement les divergences entre ces méthodes. La dynamique présentée étant plus complexe, on relèvera des comportements qualitativement différents selon le schéma employé. À travers une étude paramétrique sur le pas de discrétisation, la convergence de chacun et l'évolution du coût de calcul seront évalués. La troisième expérience numérique sera l'occasion d'introduire un schéma conservatif. L'évolution d'une quantité numérique consistante à une énergie sera ajoutée aux graphiques jusqu'alors représentés, ce qui nous donnera un élément supplémentaire de comparaison entre les simulations. Pour les deux premières expériences, le système est forcé progressivement pour éviter l'effet de saut numérique au premier pas. Le forçage est donc pondéré par une demi-fenêtre de Hanning calculée sur les douze premières périodes d'excitation. Pour l'expérience 3, la condition initiale donnée est une condition en vitesse traduisant une force impulsionnelle de 500N. Cette condition permettra de confronter les résultats de l'expérience 3 sur des mêmes ordres de grandeur que pour les solutions du régime forcé.

## 9.2 Écriture des différentes méthodes

### 9.2.1 Méthode de Störmer-Verlet

Appliquée à l'équation dynamique du mode (0,1), le schéma s'écrit :

$$\delta_{tt}q_n + \omega^2 q_n + 2\varepsilon\mu_0\delta_t q_n + \varepsilon\Gamma q_n^3 = \varepsilon f_0 \cos(\Omega t_n) \quad (9.2)$$

La méthode présentée section 7.6 ne tient pas compte de l'amortissement. Un terme d'amortissement discret, centré, a été ajouté dans cette dernière équation.

### 9.2.2 Méthodes de Runge-Kutta explicites

Deux méthodes de Runge-Kutta explicites ont été utilisées pour cette étude. La première est celle définie par Eq. (7.22). La seconde est une méthode d'ordre 6. Elle satisfait des conditions non présentées section 7.4 mais qui peuvent être déduites des règles énoncées précédemment. Il est à noter que pour les méthodes dont l'ordre  $p$  et supérieur à 4, le nombre d'étapes  $s$  nécessaires est strictement supérieur. La méthode choisie est représentée par le tableau 9.4 et fut utilisée par Van Dooren et Janssen pour l'étude d'un système de Duffing en régime chaotique [21]. D'autres méthodes d'ordre 6 et explicites sont présentées dans [11].

### 9.2.3 Méthode des différentiations rétrogrades

La subroutine DIVPAG (ou IVPAG) de la librairie IMSL utilise cette méthode<sup>24</sup> jusque l'ordre 5. Les formules correspondantes ont été présentées tableau 7.2.

<sup>24</sup>. Elles sont aussi appelées aussi « Gear's method », du nom de l'auteur des plus importants travaux sur le sujet.

0	$\frac{1}{9}$						
1	$\frac{1}{9}$						
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$					
3	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$				
4	$-\frac{5}{8}$	$\frac{27}{8}$	$-3$	$\frac{3}{4}$			
5	$\frac{221}{9}$	$-109$	$\frac{289}{3}$	$-\frac{34}{3}$	$\frac{1}{9}$		
6	$-\frac{61}{16}$	$\frac{113}{8}$	$-\frac{59}{6}$	$-\frac{11}{8}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{16}$	
7	$\frac{358}{41}$	$-\frac{2079}{82}$	$\frac{501}{41}$	$\frac{417}{41}$	$-\frac{227}{41}$	$-\frac{9}{82}$	$\frac{36}{41}$
8	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

TABLE 9.4 – Méthode de Runge-Kutta d'ordre 6 utilisée par la suite.

### 9.2.4 Implémentation

A l'exception de la méthode des différentiations rétrogrades programmée sous FORTRAN 90 grâce à la subroutine DIVPAG de la librairie IMSL, les méthodes d'intégration ont été implémentées sous MATLAB. Pour le cas d'un seul degré de liberté, l'implémentation à partir des écritures présentées ci-dessus est quasi-directe.

## 9.3 Comparaison des simulations

### 9.3.1 Cas d'une excitation harmonique à faible amplitude

Les résultats de cette expérience numérique (expérience 1) intégrée grâce aux méthodes de Störmer-Verlet (SV), Runge-Kutta (RK) d'ordre 4 et de conservation de l'énergie (CE) sont présentés à la figure 9.1 en termes de signal temporel, de spectre du déplacement, de diagramme de phase. Les simulations ont toutes été effectuées avec un pas de discrétisation de  $k = 2\pi/50\omega$  et pour 2000 périodes (soit 100 000 points). Le signal temporel est fenêtré pour chaque simulation autour de quelques périodes ; spectres et diagrammes de phase sont obtenus à partir du dernier tiers des points.

Compte tenu de l'amortissement imposé, les représentations graphiques concernent le régime permanent de la dynamique. Les réponses temporelles montrent une bonne correspondance et les spectres et les diagrammes de phases sont parfaitement superposables. Ils montrent que l'oscillateur est en régime périodique et non-linéaire. On observe plus précisément sur les spectres que la réponse est maximale autour de la fréquence d'excitation et montre des contributions autour des harmoniques multiples de 3 de cette fréquence, matérialisées par les bosses centrées autour de 1.44 ( $\omega/(2\pi)$ ), 4.33 ( $3\omega/(2\pi)$ ) et 8.66 ( $6\omega/(2\pi)$ ). On observe également un peigne plus serré qui résulte de la modulation d'amplitude du signal. Ce phénomène se traduit sur les diagrammes de phase qui montrent clairement un tore dont les deux fréquences de parcours correspondent respectivement à la fréquence de forçage et à la fréquence de la modulation.

Les trois méthodes présentées montrent dans ce cas des résultats semblables. D'autres simulations d'oscillateurs de Duffing, correspondant aux paramètres pris par [25], qui sont du même ordre que ceux de cette expérience et non présentés ici, fournissent la même conclusion. Rien n'incite à plébisciter une méthode plutôt qu'une autre dans les cas d'oscillateurs moyennement excités. Nous regardons maintenant leur comportement pour une amplitude de forçage élevée.

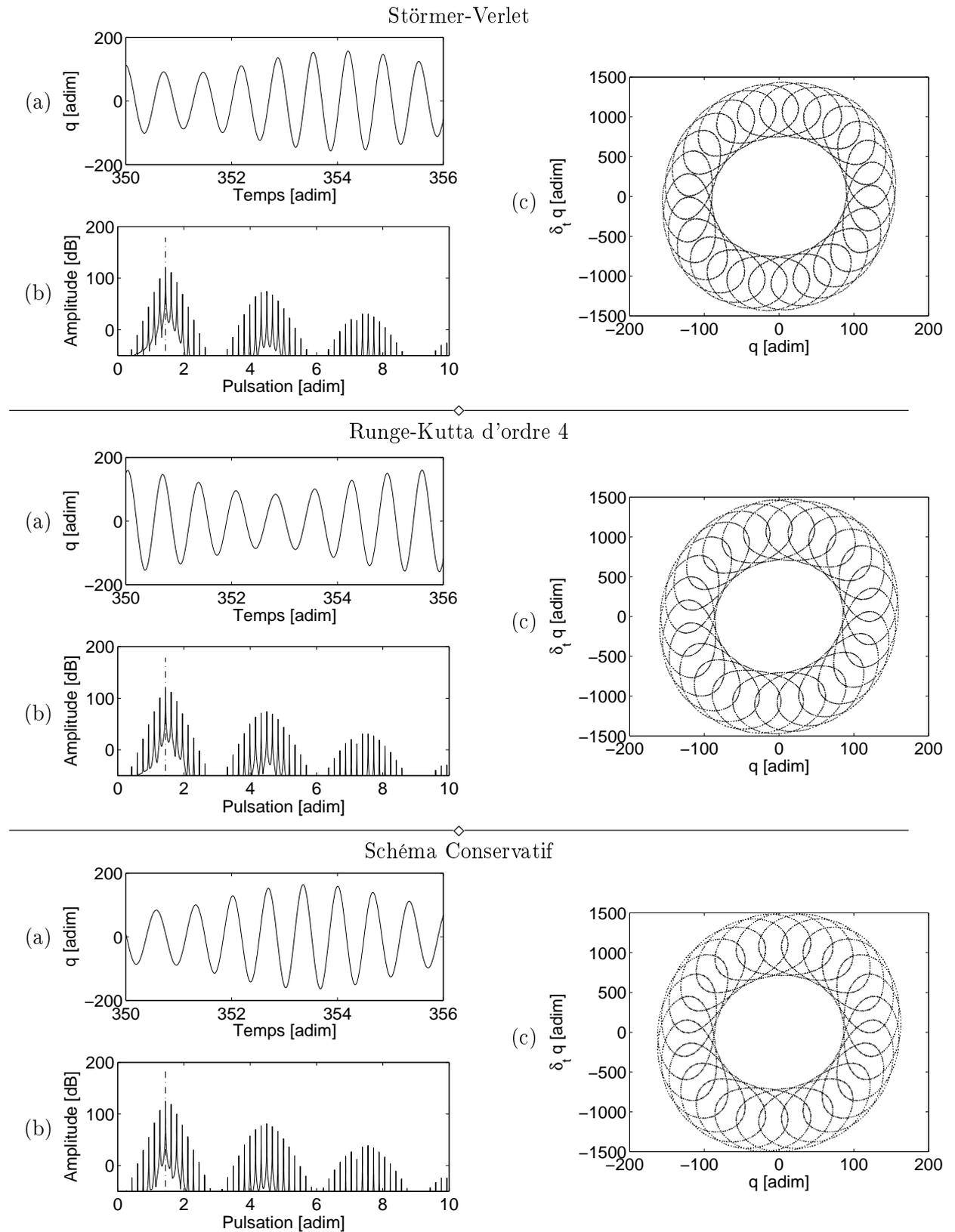


FIGURE 9.1 – Comparaison entre résultats de simulations selon les méthodes numériques suivantes, Sörmer-Verlet, Runge-Kutta d'ordre 4 puis Runge-Kutta d'ordre 6 sur l'expérience de forçage à faible amplitude ( $5N$ ). (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent et (c) diagrammes de phase des simulations calculées pour un pas  $k = 2\pi/50\omega$ .

### 9.3.2 Cas d'une excitation harmonique à forte amplitude

Le forçage harmonique est maintenant porté à une amplitude de 500N. Nous regardons dans ce paragraphe le comportement de chaque méthode relativement au pas de discrétisation imposé. Dans un deuxième temps, nous comparons qualitativement les résultats convergés pour chaque méthode, le pas maximum et le temps de calcul approximatif pour obtenir ces solutions. Une comparaison à pas *grand* sera également proposée, l'objectif étant de sélectionner une méthode robuste pour des pas *grands* (voir l'introduction 6).

#### Méthode de Störmer-Verlet

Les résultats correspondants sont présentés figure 9.2. Sur les signaux temporels, de légères différences sont observées à cause du comportement chaotique de l'oscillateur. Les erreurs numériques varient avec le pas d'incrément et se manifestent par des histoires temporelles différentes. Cependant, le contenu spectral est invariant suivant que le pas soit grand ou petit. Ce résultat est corroboré par les diagrammes de phase. La complexité du comportement dynamique est donc déjà bien traduite pour  $2\pi/50\omega$ . La méthode de Störmer-Verlet présentent de bons résultats qualitatifs, même pour des pas « grands ».

#### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Les résultats de la simulation par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 sont présentés figure 9.3. Les signaux temporels sont différents entre eux et également différents de ceux simulés avec le schéma précédent. Ce résultat peut être attribué au comportement chaotique. Par contre, la dynamique décrite par les spectres et les diagrammes de phases montrent elles aussi des différences par rapport aux simulations précédentes. Les spectres présentés traduisent une dynamique plus ordonnée à cause des raies émergentes et ce jusqu'au plus petit pas. De plus, l'attracteur ne présente une forme convergée qu'à partir de  $k = 2\pi/100\omega$ . La forme convergée étant différente de celle obtenue avec le Schéma de SV.

#### Méthode conservative

Les résultats de cette méthode, présentés figure 9.4 sont très proches de ceux obtenus par la méthode de SV. Le spectre n'est cependant pas convergé pour le pas  $2\pi/50\omega$  de même que le diagramme de phase correspondant à la même simulation. En revanche, pour le pas  $2\pi/100\omega$  les diagrammes de phase des simulations et les spectres correspondants présentent le même comportement que les simulations par la méthode de SV. Pour le pas  $2\pi/500\omega$ , le diagramme de phase présente une trajectoire confinée autour d'un attracteur plus précis que toutes les simulations testées.

#### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 6

Ces résultats sont donnés figure 9.5. En comparaison de ceux correspondant au schéma de Runge-Kutta d'ordre 4, les simulations montrent une convergence plus rapide, en terme de spectres et de diagrammes de phase. La convergence est en effet obtenue pour  $k = 2\pi/50\omega$ . Toutefois, le spectre et le diagramme de phase de la simulation la plus fine sont, pour cette nouvelle méthode de Runge-Kutta, différents de ceux obtenus par les méthodes symplectique et conservatives. Ce schéma converge vers un autre attracteur.

### Comparaison entre les solutions convergées

Qualitativement, deux comportements asymptotiques s'opposent. Ceux obtenus par les méthodes de RK 4 et RK 6 et ceux obtenus par les méthodes CE et de SV.

Dans les deux cas en effet, les solutions sont convergées mais le spectre des régimes permanents pour les solutions les plus fines ( $k = 2\pi/500\omega$ ) ainsi que les attracteurs dessinés par les diagrammes de phase correspondants offrent un point de vue différent sur le comportement de l'oscillateur. Notre confiance se dirige naturellement vers les méthodes préservant des propriétés de notre système Hamiltonien. Elles ne sont pas complètement équivalentes et montrent pourtant une très bonne correspondance entre elles. Nous aurons l'occasion de renouveler cette constatation lors de la campagne suivante de simulations paramétrée par un amortissement nul.

Un autre avantage important des schémas retenus est leur coût de calcul. Tableau 9.5, sont rapportés les temps de calcul des simulations réalisées avec un ordinateur de bureau classique<sup>25</sup>. Empiriquement, le coût de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est multiplié par 4.5 environ par rapport à celui des méthodes retenues, et celui de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 6 est quadratique selon le nombre de points calculés.

Méthode	Nombre d'incrémentations		
	60000	120000	600000
Störmer-Verlet	1.6	3.1	15.6
Runge-Kutta d'ordre 4	7.2	14.4	71.5
Runge-Kutta d'ordre 6	36.5	150.9	3362.6
Schéma conservatif	1.8	3.7	18.5

TABLE 9.5 – Temps de calcul (en secondes) correspondant au nombre d'incrémentations retenues pour la simulation dans le cas du forçage harmonique à 500N.

### Comparaison à pas *grands*

Toujours pour les mêmes paramètres dynamiques de simulation, on compare sur la figure 9.6 les résultats des méthodes de Störmer-Verlet, Runge-Kutta d'ordre 4 et à conservation d'énergie pour des pas « grands ».

On représente un signal temporel fenêtré autour de quelques périodes pour chaque méthode d'intégration et paramétré par un pas d'incrémentations de  $2\pi/10\omega$  puis de  $2\pi/30\omega$ . Ces choix de discrétisation révèlent plusieurs choses. D'abord, le schéma de SV ne devient stable qu'à partir d'un pas inférieur  $2\pi/30\omega$ . Cette valeur est à comparer avec la limite de stabilité *linéaire* du schéma de Störmer-Verlet qui est de  $2/\omega$ . Le régime fortement non-linéaire de ces simulations abaisse donc cette limite d'un facteur  $\pi/30$ , soit à 1% de sa valeur. Ensuite, la méthode de Runge-Kutta montre une très bonne stabilité mais le résultat obtenu est largement erroné. Le schéma conservatif vérifie également sa propriété de stabilité inconditionnelle mais il offre l'avantage de montrer, dès  $2\pi/30\omega$ , un résultat qui converge rapidement vers le bon comportement du système dynamique. Tout comme le diagramme de phase du schéma de SV, on voit apparaître dans le diagramme de phase de la méthode CE l'attracteur de l'expérience.

25. Processeur Intel<sup>©</sup> Pentium<sup>©</sup> 4 de 3GHz.

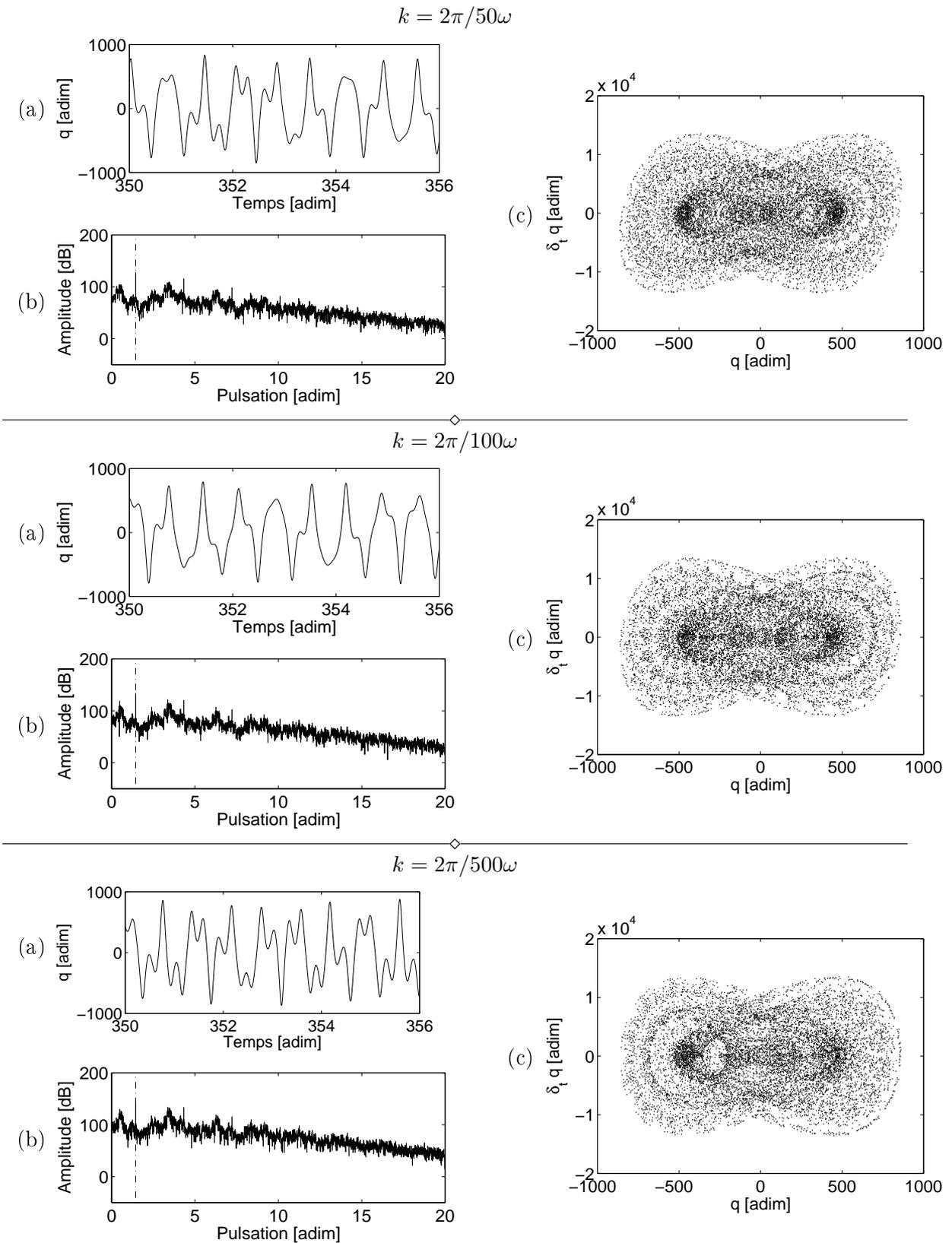


FIGURE 9.2 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent et (c) diagrammes de phase des simulations numériques calculées grâce au **schéma de Störmer-Verlet** pour un forçage de  $500N$  et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/50\omega$ ,  $2\pi/100\omega$  et  $2\pi/500\omega$ .

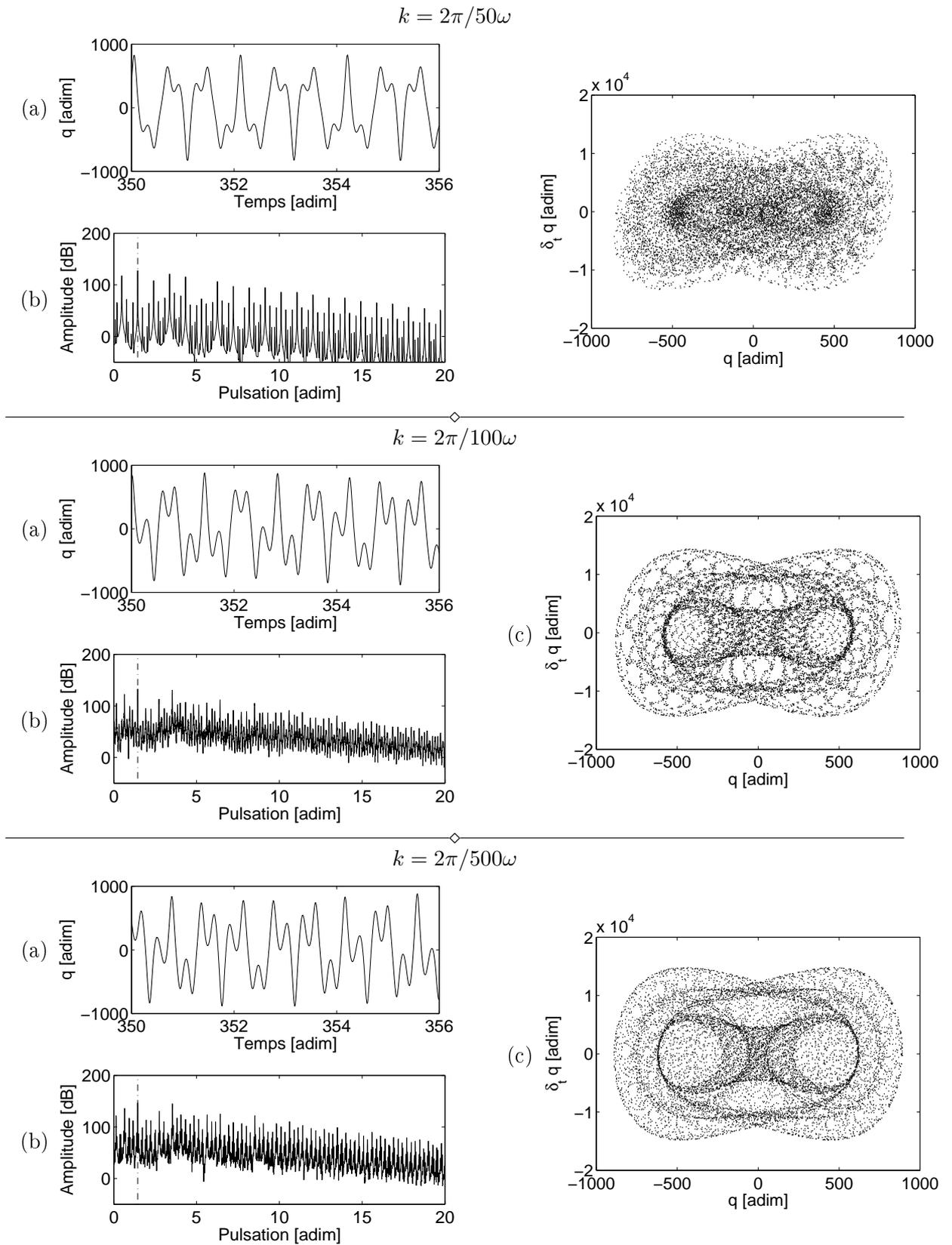


FIGURE 9.3 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent et (c) diagrammes de phase des simulations numériques calculées grâce au schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 pour un forçage de 500N et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/50\omega$ ,  $2\pi/100\omega$  et  $2\pi/500\omega$ .

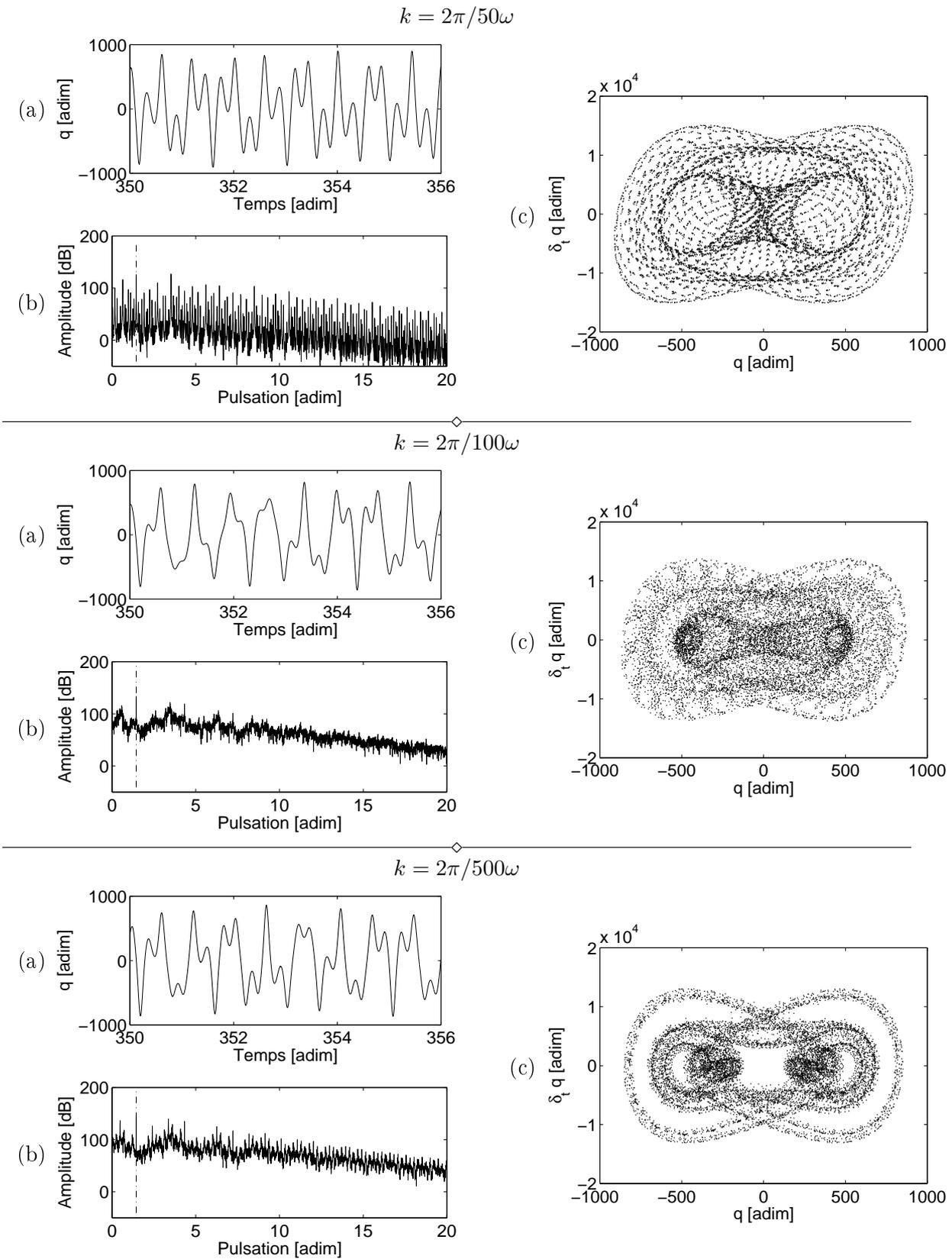


FIGURE 9.4 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent et (c) diagrammes de phase des simulations numériques calculées grâce au **schéma conservatif** pour un forçage de  $500N$  et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/50\omega$ ,  $2\pi/100\omega$  et  $2\pi/500\omega$ .

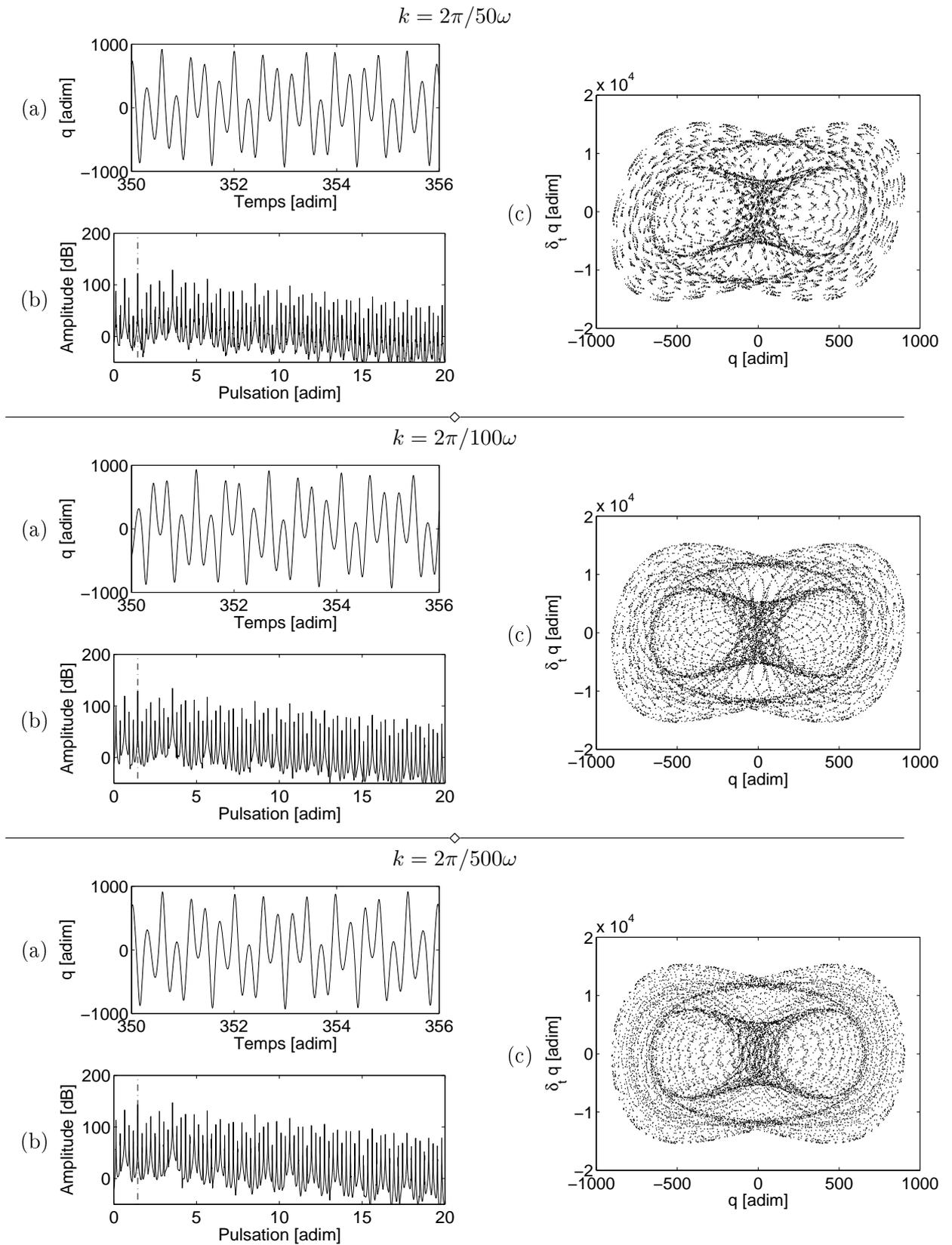


FIGURE 9.5 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent et (c) diagrammes de phase des simulations numériques calculées grâce au schéma de Runge-Kutta d'ordre 6 pour un forçage de 500N et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/50\omega$ ,  $2\pi/100\omega$  et  $2\pi/500\omega$ .

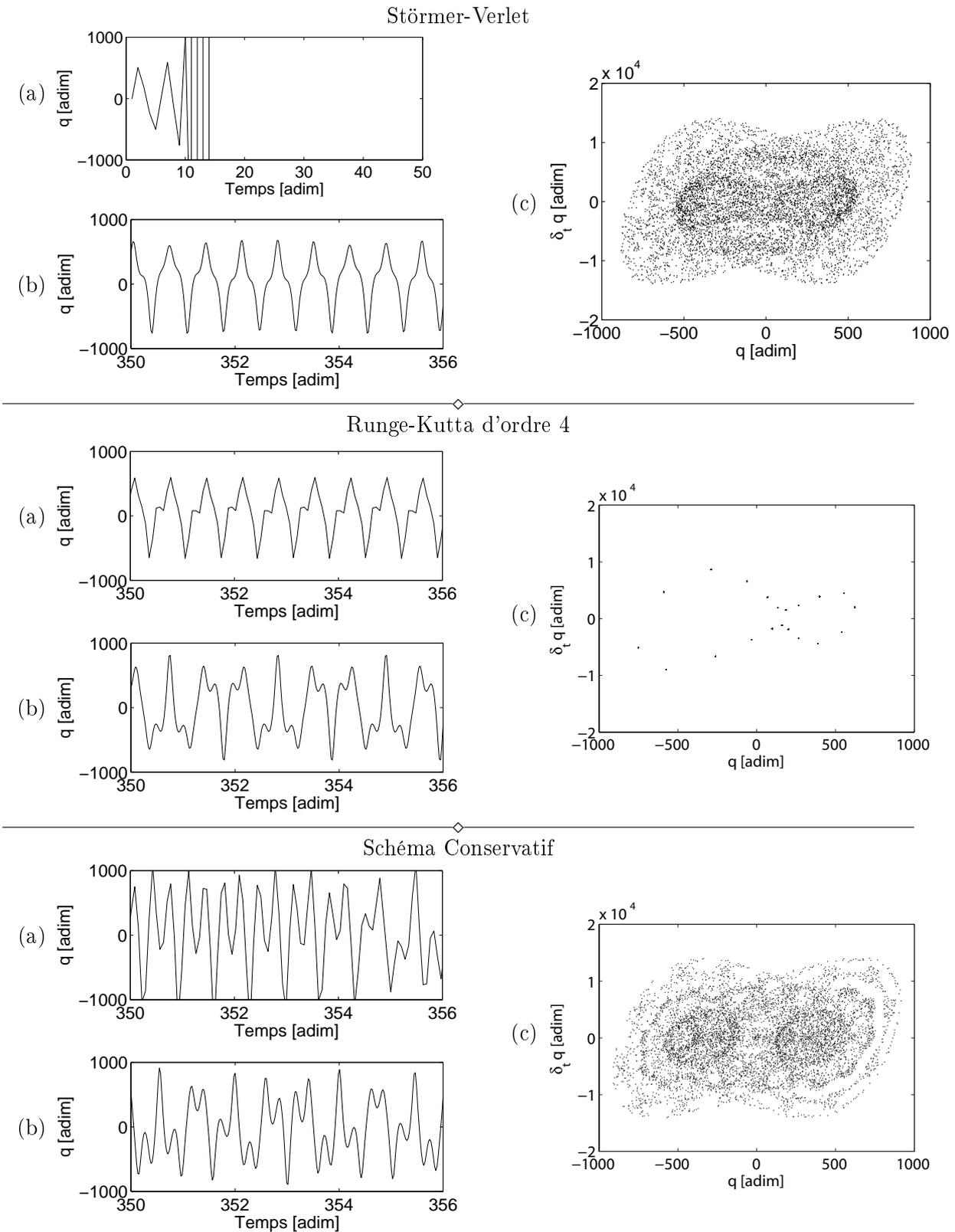


FIGURE 9.6 – Comparaison entre résultats de simulations selon les méthodes numériques suivantes, Störmer-Verlet, Runge-Kutta d'ordre 4 puis schéma conservatif pour des pas grands sur la même expérience que précédemment. (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement avec  $k = 2\pi/10\omega$ , (b) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement avec  $k = 2\pi/30\omega$  et (c) diagrammes de phase des simulations calculées pour  $k = 2\pi/30\omega$ .

### Résultats issus de la méthode des différentiations rétrogrades

Les simulations sont maintenant effectuées grâce à la librairie IMSL et calculées grâce à un code FORTRAN 90 et présentées figure 9.7. Le pas est variable. Il est choisi par la subroutine DIVPAG en fonction d'une tolérance imposée sur la solution (ici  $10^{-6}$ ). L'examen du pas a toutefois montré que ce dernier reste fixe et égal à 0.03464, ce qui est deux fois supérieur au plus petit pas jusqu'à présent testé, c'est à dire  $2\pi/250\omega$ . La réponse temporelle est proche de celles observées précédemment. Le spectre a été calculé par interpolation puis re-échantillonnage avec un pas fixé à 0.01. Le bruit y est moins présent que dans les spectres des solutions convergées issus des méthodes précédentes retenues. Le diagramme de phase montre lui un tout autre visage. L'émergence d'un peigne de raies au dessus du spectre large bande montre que le comportement quasipériodique domine la partie chaotique. Ces résultats soulignent donc la particularité de la méthode de différentiations rétrogrades qui présente une bonne stabilité mais un manque de précision [35].

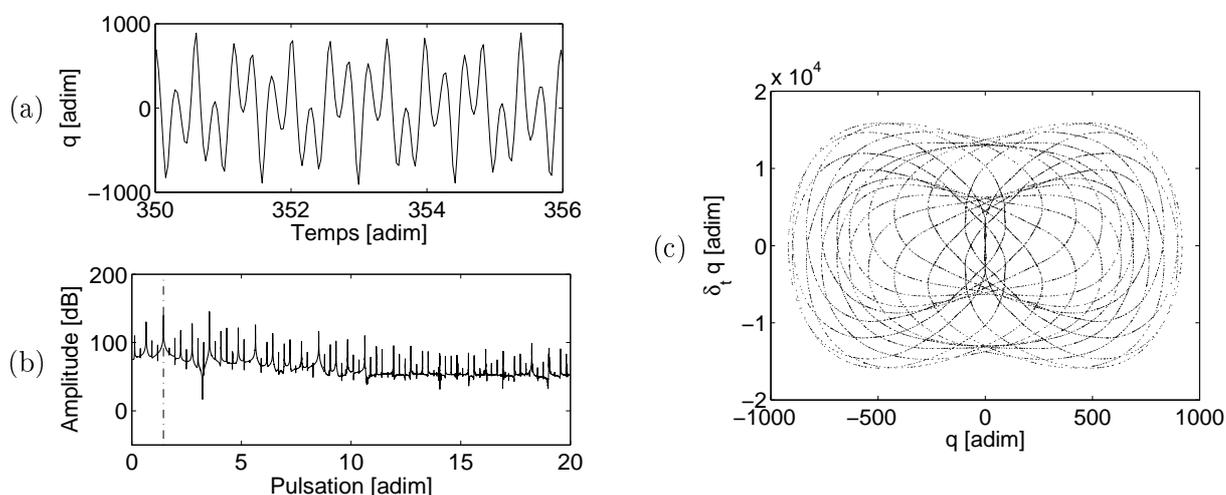


FIGURE 9.7 – (a) Zoom sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectre dans le régime permanent et (c) diagramme de phase numériques calculées grâce à la méthode de différentiations rétrogrades pour un forçage de 500N.

#### 9.3.3 Cas particulier d'un diagramme de bifurcation jusqu'un forçage très élevé

On effectue ici une comparaison particulière entre un résultat calculé grâce à la méthode RK 6 et calculé grâce à la méthode des différentiations rétrogrades. On cherche ici à mettre en évidence les erreurs d'interprétation qui peuvent être engendrées du fait du choix de la méthode d'intégration. La comparaison est menée sur le même oscillateur de Duffing mais dont on a modifié quelque peu les paramètres de calcul. L'amortissement considéré est  $\mu = 10s^{-1}$ , la pulsation de forçage  $\Omega = 9.9758$ . Le pas de discrétisation de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 6 est égal à  $2\pi/500\omega$ . On représente les résultats sur un diagramme de bifurcation paramétré par une amplitude croissante du forçage, figure 9.8. Le transitoire est considéré dépassé au bout de 500 périodes. Les résultats issus de la méthode de RK6 sont représentés en noir et ceux de la méthode de différentiations rétrogrades en rouge. On constate que pour certaines plages de

forçage le comportement peut être interprété comme chaotique ou bien suivant un cycle limite. Cet exemple supplémentaire montre l'importance du choix de l'intégrateur, surtout lors de l'étude de comportements complexes.

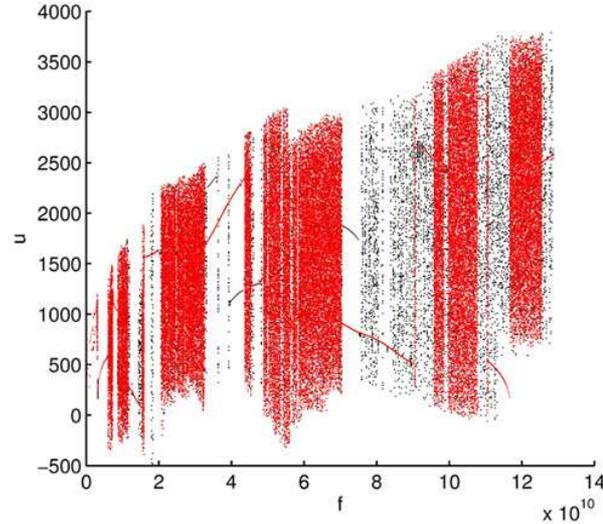


FIGURE 9.8 – Diagramme de bifurcation d'un oscillateur de duffing excité périodiquement calculé grâce à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 6 (noir) et grâce à la méthode de différentiations rétrogrades (rouge). Les paramètres suivants sont adoptés :  $\mu = 10s^{-1}$ ,  $\Omega = 9.9758$

### 9.3.4 Cas d'une excitation impulsionnelle

Le forçage et l'amortissement étant maintenant nuls, le flot est autonome et conservatif. Le système Hamiltonien en présence conserve son énergie en tout point de la trajectoire prise. La quantité d'énergie injectée ne dépend que des conditions initiales. Elles sont prises ici telles que  $q = 6.2413$  et  $\dot{q} = 6.7405e3$ . Ces conditions ont été prises de manière à évaluer le comportement de l'oscillateur sur une plage du même ordre de grandeur dynamique que les simulations précédentes. Ont été tracés dans chacune des simulations qui suivent une fenêtre de l'enveloppe temporelle, le spectre du déplacement en régime permanent (le régime permanent est atteint instantanément puisque il n'y a *a priori* ni gain ni perte d'énergie), le diagramme de phase et une évaluation de l'énergie discrète. Pour le schéma conservatif, nous obtenons une valeur exacte de cette quantité, puisque dérivée des équations discrètes du mouvement. Nous évaluons l'énergie selon la même expression (voir tableau 8.1) pour les autres méthodes. Pour chacune des quatre méthodes de discrétisation suivantes : Störmer-Verlet, Runge-Kutta d'ordre 4, Runge-Kutta d'ordre 6 et conservatif, les simulations sont calculées avec les pas  $2\pi/30\omega$ ,  $2\pi/50\omega$  et  $2\pi/100\omega$ .

#### Méthode de Störmer-Verlet

Les résultats issus de cette méthode sont présentés figure 9.9. L'effet de la non-linéarité est constatée sur les spectres. Le pic principal de résonance se situe plus haut en fréquence que la

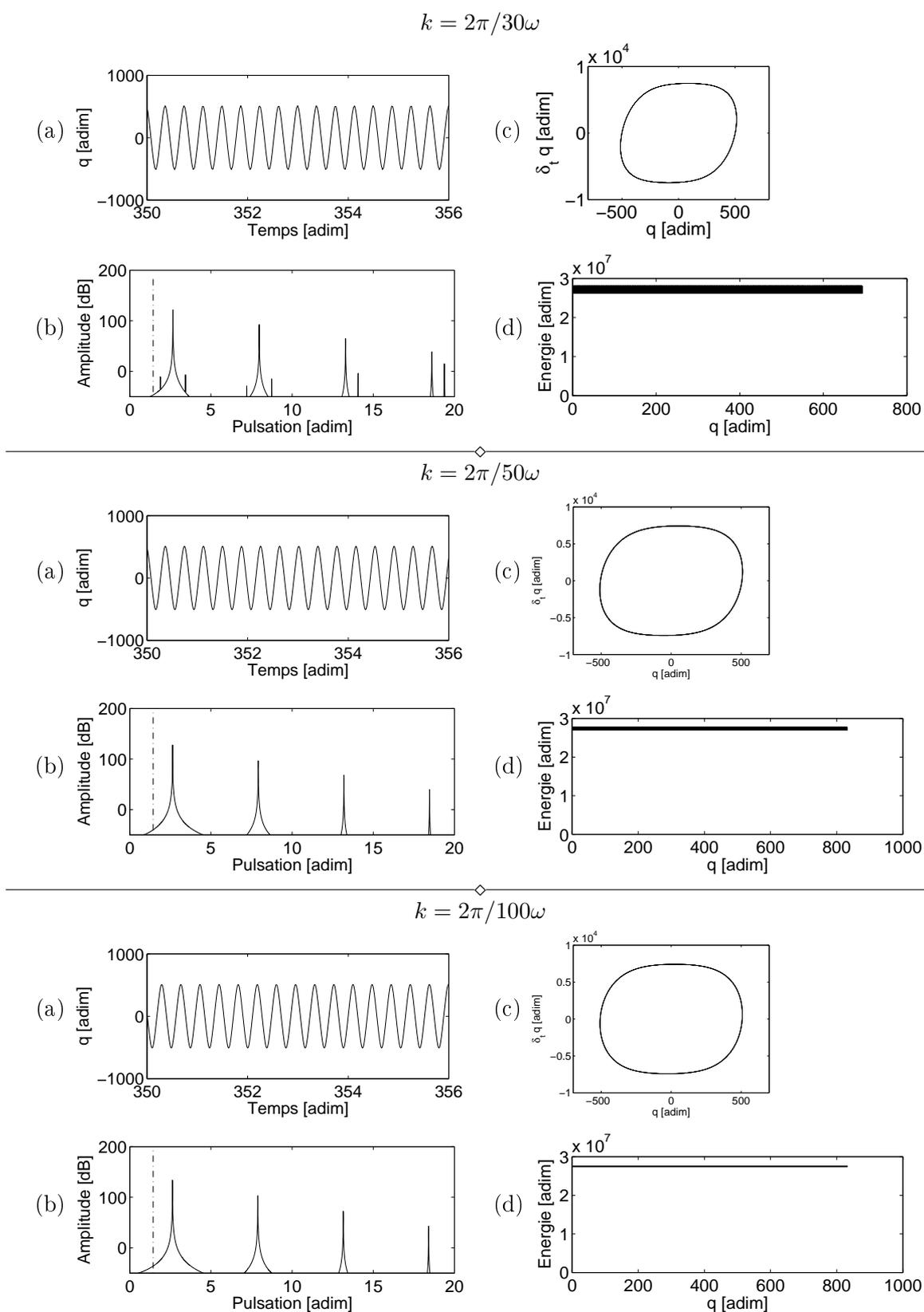


FIGURE 9.9 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent, (c) diagrammes de phase et (d) approximation de l'énergie des simulations numériques calculées grâce au schéma de Störmer-Verlet pour une excitation impulsionnelle et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/30\omega$ ,  $2\pi/50\omega$  et  $2\pi/100\omega$ .

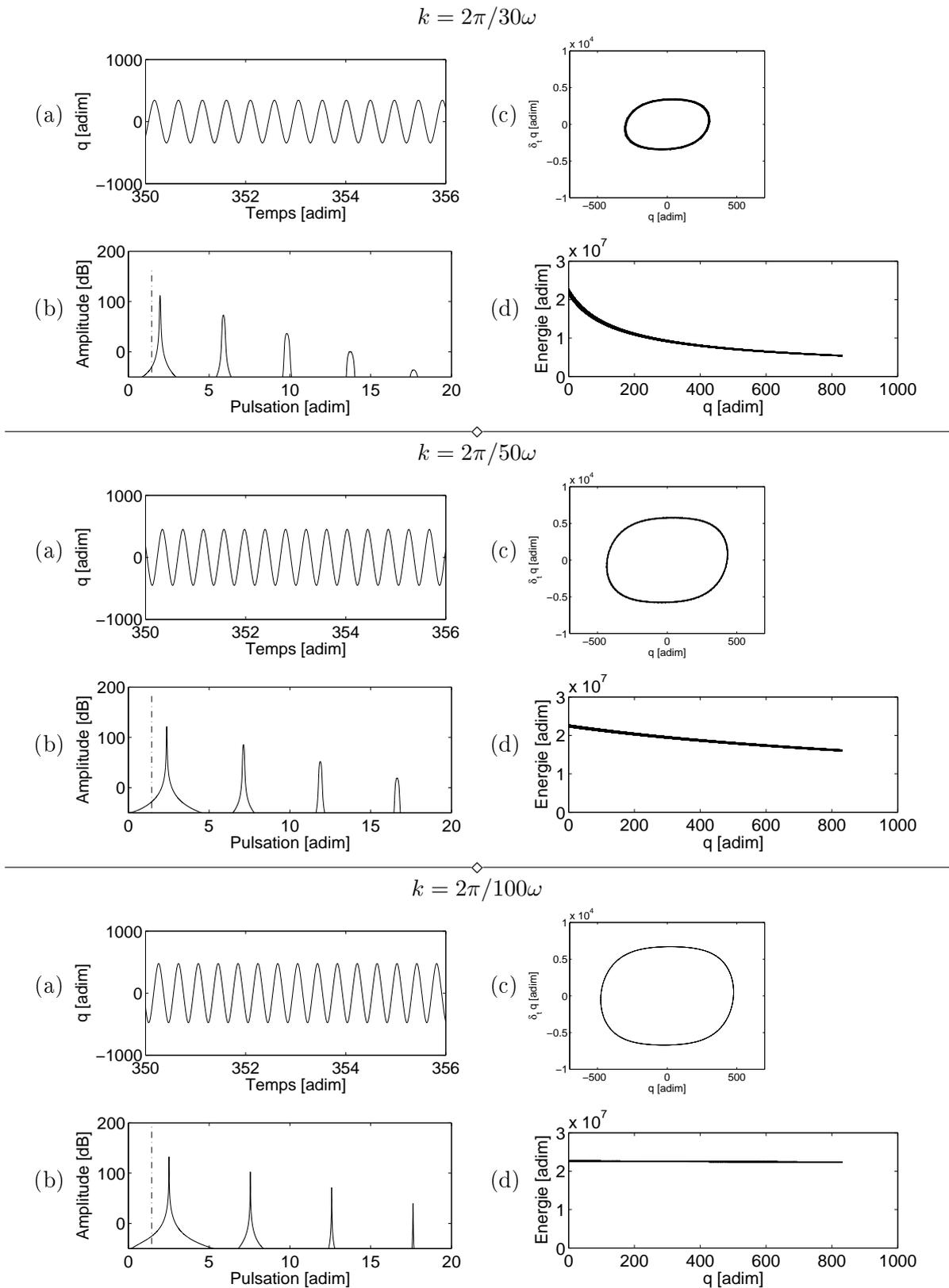


FIGURE 9.10 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent, (c) diagrammes de phase et (d) approximation de l'énergie des simulations numériques calculées grâce à la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4** pour une excitation impulsionnelle et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/30\omega$ ,  $2\pi/50\omega$  et  $2\pi/100\omega$ .

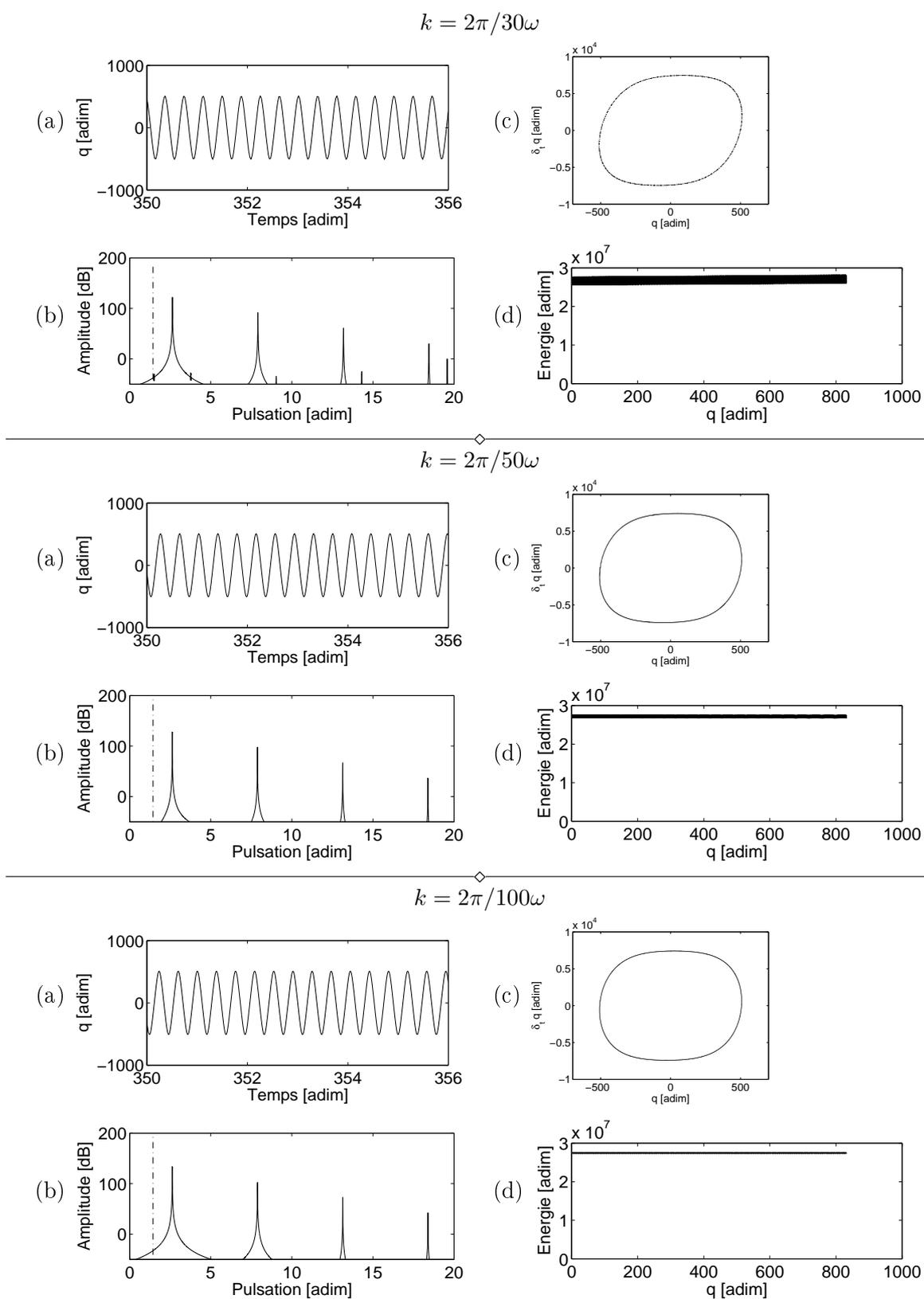


FIGURE 9.11 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent, (c) diagrammes de phase et (d) approximation de l'énergie des simulations numériques calculées grâce à la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 6** pour une excitation impulsionnelle et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/30\omega$ ,  $2\pi/50\omega$  et  $2\pi/100\omega$ .

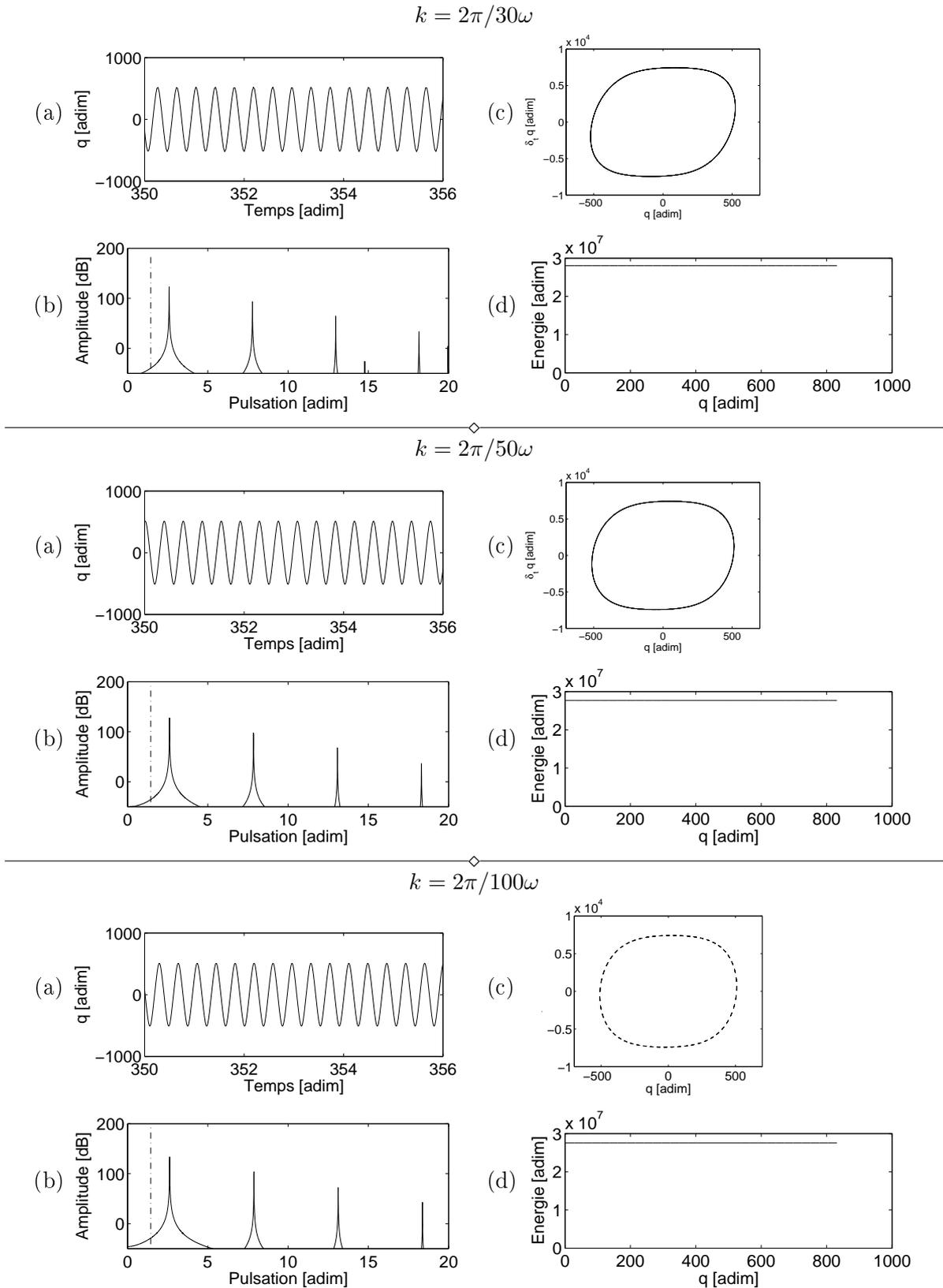


FIGURE 9.12 – (a) Zooms sur l'évolution temporelle du déplacement, (b) spectres dans le régime permanent, (c) diagrammes de phase et (d) approximation de l'énergie des simulations numériques calculées grâce au **schéma conservatif** pour une excitation impulsionnelle et pour un pas de temps  $k$  successivement égal à  $2\pi/30\omega$ ,  $2\pi/50\omega$  et  $2\pi/100\omega$ .

pulsation propre  $\omega$  du système. On vérifie donc le comportement raidissant du système. Les harmoniques qui suivent sont multiples de  $3\omega$ , manifestation du terme d'ordre 3 dans l'équation du mouvement. On voit en outre apparaître un effet de repliement pour le spectre de la simulation effectuée pour  $k = 2\pi/30\omega$ . La simulation converge pour  $2\pi/50\omega$ . L'énergie discrète est bel et bien conservée dans le temps, même si une légère oscillation numérique est observée.

### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et 6

Les résultats issus de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 sont présentés figure 9.10. On voit en comparant les diagrammes de phase l'effet net d'un amortissement numérique, inversement proportionnel au pas de discrétisation. Cet amortissement se retrouve sur les fenêtres temporelles puisque, dans les instants choisis, l'amplitude d'oscillation croît au fur et à mesure que le pas diminue. Cette diminution se traduit par une perte significative d'énergie au cours du temps. Les pics du spectre sont à la fois plus élargis et d'amplitude sous évaluée vers les plus grandes fréquences ; constatation faite pour des pas de discrétisation insuffisamment grands ( $k = 2\pi/30\omega, 2\pi/50\omega$ ). Pour  $k = 2\pi/30\omega$ , on ne peut en effet constater de repliement car les harmoniques des pulsations plus élevée sont trop basses pour être « repliées » de manière visible. Les résultats de la méthode de Runge-Kutta d'ordre 6 sont figure 9.11. Les résultats sont bien meilleurs. Ils sont tout à fait comparables à ceux issus de de la méthode de SV. On y voit apparaître en effet les mêmes phénomènes, repliement et légère oscillation de l'énergie pour des pas trop grands. La conservation de l'énergie est correctement représentée. Cependant, le coût de calcul est grandement amplifié pour cette méthode. Dans le tableau 9.6 sont présentés les temps de calculs approximatifs associés à chaque simulation. Le coût de calcul associé à  $k = 2\pi/50\omega$  soit 600000 points pour 1200 périodes est 200 fois supérieur à celui de la méthode de SV. Bien qu'elle soit convergente, cette méthode est donc inadaptée à cause de son coût.

### Méthode conservative

Les simulations correspondantes, figure 9.12, montrent d'excellents résultats. En effet, la simulation effectuée à  $k = 2\pi/30\omega$  est convergée, à la fois en terme de spectre, de diagramme de phase et (par construction) de conservation de l'énergie. Cette méthode d'intégration présente donc pour cette simulation, le meilleur compromis *qualité des résultats/nombre de pas*.

Méthode	Nombre d'incrémentations		
	60000	120000	600000
Störmer-Verlet	1.6	3.2	16.4
Runge-Kutta d'ordre 4	7.2	14.4	71.7
Runge-Kutta d'ordre 6	35.9	150.4	3285.8
Schéma conservatif	2.5	4.8	23.9

TABLE 9.6 – Temps de calcul (en secondes) correspondant au nombre d'incrémentations retenues pour la simulation dans le cas d'une force impulsionnelle.



# CHAPITRE 10

## APPLICATION AU SYSTÈME À N DEGRÉS DE LIBERTÉ

### Sommaire

---

<b>10.1 Énergie continue dérivée des équations modales de plaques imparfaites</b> . . . . .	<b>127</b>
<b>10.2 Construction du schéma conservatif appliqué à la dynamique des plaques imparfaites</b> . . . . .	<b>130</b>
<b>10.3 Implémentation</b> . . . . .	<b>131</b>
<b>10.4 Résultats dans le cas d'un flot autonome</b> . . . . .	<b>133</b>
10.4.1 Expérience numérique test . . . . .	133
10.4.2 Méthode de Störmer-Verlet . . . . .	133
10.4.3 Méthode conservative . . . . .	133

---

### 10.1 Énergie continue dérivée des équations modales de plaques imparfaites

Dans la section 8.1, nous cherchions à écrire l'énergie d'un oscillateur de Duffing, oscillateur non-linéaire qui n'est autre que la combinaison d'un oscillateur linéaire avec un terme cubique supplémentaire. Nous cherchons ici à étendre ces développements au cas d'oscillateurs non-linéaires comportant à la fois un terme cubique et quadratique qui les lient les uns aux autres. Ce système dérive des travaux présentés dans la première partie de cette monographie qui établissent les équations modales des plaques circulaires minces imparfaites. Ce système dynamique est également un système Hamiltonien non-linéaire. A la différence du cas à 1 degré de liberté où l'on pouvait établir l'énergie à partir de la formulation en terme de mouvement  $q$  uniquement, les termes à manier sont ici plus compliqués et les calculs montrent qu'il est bien plus commode d'utiliser les équations modales sous leur formulation en terme à la fois de déplacements  $q_s$  et de composantes d'efforts membranaires  $\eta_s$ . Nous rappelons tout d'abord les EDPs locales adimensionnées du mouvement de la plaque imparfaite (pour plus de détails, se reporter à la première partie) :

$$\Delta\Delta\tilde{w} + \ddot{\tilde{w}} = \varepsilon[L(\tilde{w}, \tilde{F}) + L(w_0, \tilde{F}) - 2\mu\dot{\tilde{w}} + \tilde{p}], \quad (10.1a)$$

$$\Delta\Delta\tilde{F} = -\frac{1}{2}[L(\tilde{w}, \tilde{w}) + 2L(\tilde{w}, w_0)]. \quad (10.1b)$$

Les équations de projections sont rappelées ici :

$$w_0 = \sum_{p=1}^{N_0} a_p \Phi_p(r, \theta), \quad (10.2)$$

$$\tilde{w}(t, r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_w} \tilde{q}_p(t) \Phi_p(r, \theta), \quad (10.3a)$$

$$\tilde{F}(t, r, \theta) = \sum_{p=1}^{N_F} \tilde{\eta}_p(t) \Psi_p(r, \theta). \quad (10.3b)$$

Une fois les équations (10.1) projetées sur les modes propres puis tronquées, elles deviennent :

$$\sum_{p=1}^{N_w} \tilde{q}_s \Delta \Delta \Phi_s + \sum_{p=1}^{N_w} \ddot{\tilde{q}}_s \Delta \Delta \Phi_s = \varepsilon \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \tilde{q}_p \tilde{\eta}_q L(\Phi_p, \Psi_q) + \sum_{p=1}^{N_0} \sum_{q=1}^{N_F} a_p \tilde{\eta}_q L(\Phi_p, \Psi_q) - 2\mu \sum_{s=1}^{N_w} \dot{\tilde{q}}_s \Phi_s + \tilde{p} \right], \quad (10.4a)$$

$$\sum_{s=1}^{N_F} \tilde{\eta}_s \Delta \Delta \Psi_s = -\frac{1}{2} \left[ \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_w} \tilde{q}_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) + 2 \sum_{p=1}^{N_0} \sum_{q=1}^{N_w} a_p \tilde{q}_q L(\Phi_p, \Psi_q) \right]. \quad (10.4b)$$

En posant :

$$H_{pq}^s = \iint_S \Psi_s L(\Phi_p, \Phi_q) dS, \quad (10.5a)$$

$$G_{ps}^k = \iint_S \Phi_k L(\Phi_p, \Psi_s) dS, \quad (10.5b)$$

et en prenant  $N_0 = N_w$  (hypothèse que l'on justifie plus bas), on écrit plus simplement :

$$\ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u = \varepsilon \left( \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (\tilde{q}_p \tilde{\eta}_q + a_p \tilde{\eta}_q) - 2\mu_u \dot{\tilde{q}}_u + \tilde{Q}_u \right), \quad (10.6a)$$

$$\tilde{\eta}_q = -\frac{1}{2\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (\tilde{q}_r \tilde{q}_s + 2a_r \tilde{q}_s). \quad (10.6b)$$

Afin d'établir la quantité énergétique continue préservée au cours du temps correspondant au Hamiltonien du système tronqué, nous faisons abstraction du terme d'amortissement et de forçage de l'équation Eq. (10.6a). En multipliant le résultat obtenu par  $\dot{\tilde{q}}_u$ , en sommant sur  $u$  on obtient :

$$\sum_{u=1}^{N_w} (\dot{\tilde{q}}_u \ddot{\tilde{q}}_u + \omega_u^2 \tilde{q}_u \dot{\tilde{q}}_u) = \varepsilon \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (\tilde{q}_p \dot{\tilde{q}}_u \tilde{\eta}_q + a_p \dot{\tilde{q}}_u \tilde{\eta}_q) \quad (10.7)$$

Le membre gauche de l'équation ci-dessus est la dérivée temporelle de la partie linéaire du Hamiltonien :

$$H_{lin}(t) = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} [\dot{\tilde{q}}_u^2(t) + \omega_u^2 \tilde{q}_u^2(t)]. \quad (10.8)$$

L'équation (10.7) devient :

$$\dot{H}_{lin} = \varepsilon \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u \left( \tilde{q}_p \dot{\tilde{q}}_u \tilde{\eta}_q + a_p \dot{\tilde{q}}_u \tilde{\eta}_q \right). \quad (10.9)$$

De même que dans le cas des plaques parfaites, on développe de la manière suivante :

$$\dot{H}_{lin} = \varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \tilde{\eta}_q \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \frac{1}{2} \left( G_{pq}^u \tilde{q}_p \dot{\tilde{q}}_u + G_{uq}^p \tilde{q}_u \dot{\tilde{q}}_p + 2G_{pq}^u a_p \dot{\tilde{q}}_u \right). \quad (10.10)$$

Les relations de symétrie étaient écrites dans la première partie du manuscrit spécifiquement pour  $\Gamma_{rps}^u$ . En reprenant les mêmes considérations que dans le paragraphe dédié 3.2.3 à savoir la bilinéarité de l'opérateur  $L(\cdot, \cdot)$ , la commutativité des sommes et la relation de symétrie spécifique décrite dans [86], on peut écrire que les relations suivantes concernant les grandeurs  $H_{pq}^s$  et  $G_{ps}^q$  :

$$H_{pq}^s = H_{qp}^s, \quad (10.11a)$$

$$G_{ps}^q = H_{qp}^s. \quad (10.11b)$$

Nous obtenons par ailleurs  $G_{pq}^u = G_{uq}^p$ . Ainsi, en effectuant les substitutions adéquates,

$$\dot{H}_{lin} = \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \tilde{\eta}_q \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} G_{pq}^u \frac{d}{dt} \left( \tilde{q}_p \tilde{q}_u + a_p \tilde{q}_u \right) \quad (10.12a)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \tilde{\eta}_q \frac{d}{dt} \left( \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} H_{up}^q \left( \tilde{q}_p \tilde{q}_u + 2a_p \tilde{q}_u \right) \right). \quad (10.12b)$$

En se référant à l'équation (10.6b), on obtient :

$$\dot{H}_{lin} = -\varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \xi_q^4 \tilde{\eta}_q \dot{\tilde{\eta}}_q = -\frac{1}{2} \varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \xi_q^4 (\dot{\tilde{\eta}}_q^2). \quad (10.13)$$

Finalement, le problème (10.6) peut s'écrire de manière équivalente :

$$\dot{H}(t) = 0 \quad (10.14a)$$

$$H(t) = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} [\dot{\tilde{q}}_u^2(t) + \omega_u^2 \tilde{q}_u^2(t)] + \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_F} \varepsilon \xi_q^4 \tilde{\eta}_q^2(t), \quad (10.14b)$$

où  $H$  représente l'énergie totale du système tronqué. Il est composé d'une partie cinétique  $\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_w} \dot{\tilde{q}}_u^2(t)$ , d'une partie potentielle linéaire  $\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_w} \omega_u^2 \tilde{q}_u^2(t)$  et d'une partie potentielle non-linéaire

$\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_F} \varepsilon \xi_q^4 \tilde{\eta}_q^2(t)$ . L'énergie totale du système continu, c'est à dire non-tronqué, peut être obtenue sous une formulation modale si l'on n'effectue aucune troncature. Nous aurions obtenu des expressions similaires mais avec le signe  $\infty$  au lieu des différentes troncatures. Les termes en  $q_u$  et  $\eta_q$  auraient alors pu être réunis sous la même somme par un simple changement d'indice. La quantité que l'on trouve ici est néanmoins une énergie mais associée à un système approché et fictif, à  $N_w$  degrés de liberté. La recherche d'un schéma préservant l'énergie de ce système correspond donc tout à fait, aux troncatures ajustables près, à la recherche d'un schéma préservant l'énergie totale du système continu.

D'autre part, l'hypothèse faite en cours de calcul  $N_0 = N_w$ , permettant de simplifier un peu les termes engagés sous les sommes, n'est en rien contraignante. Le paramètre le plus lourd, celui qui déterminera la dimension du système et véritablement le coût de calcul lors de l'implémentation est  $N_w$ . Imposer  $N_0 = N_w$ , revient à négliger des termes lors de la projection du défaut lorsque  $N_0 > N_w$  ou bien à ajouter des coefficients  $a_p$  supplémentaires lorsque  $N_0 < N_w$ .

## 10.2 Construction du schéma conservatif appliqué à la dynamique des plaques imparfaites

Notre but est ici de trouver une quantité discrète consistante à l'énergie totale continue développée ci-dessus. De la même manière que dans le cas à une dimension, c'est le placement judicieux des opérateurs de moyennage  $\mu_t$ ,  $\mu_{t-}$  et de l'opérateur de décalage  $e_{t-}$  qui nous permet ce tour de main. Plusieurs tentatives de discrétisation des équations (10.6) ont été nécessaires avant l'obtention d'une écriture discrète adéquate des équations de mouvement. Nous ne décrivons pas ici ces tentatives infructueuses. Nous détaillons plutôt le calcul permettant d'obtenir l'énergie discrète à partir de la formulation proposée. Le schéma que nous adoptons par la suite est implicite et multi-pas. Par ailleurs, pour alléger l'écriture des équations suivantes, la notation  $(\cdot)$  est omise. Un schéma aux différences finies correspondant aux équations (10.14) peut être écrit :

$$\delta_{tt}q_u + \omega_u^2 q_u = \varepsilon \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (q_p \mu_t \eta_q + a_p \mu_t \eta_q) \quad (10.15a)$$

$$\mu_{t-} \eta_q = -\frac{1}{4\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r e_{t-q_s} + q_s e_{t-q_r} + 4a_r \mu_{t-} q_s) \quad (10.15b)$$

En multipliant l'équation (10.15a) par  $\delta_t q_u$  et en sommant sur  $u$ , on obtient, de même que dans le cas plaque :

$$\delta_{t+} H_{lin} = \varepsilon \sum_{u=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (\delta_t q_u (q_p + a_p) \mu_t \eta_q) \quad (10.16a)$$

$$\text{avec } H_{lin} = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} (\delta_{t-} q_u)^2 + \omega_u^2 \mu_{t-} q_u^2. \quad (10.16b)$$

Ainsi, en suivant les développements du cas continu et en se servant de la propriété de symétrie de  $G$  (données par les équations (10.11a,10.11b)), on peut écrire :

$$H_{lin} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{q=1}^{N_F} \mu_t \eta_q \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{u=1}^{N_w} G_{pq}^u (\delta_t q_u q_p + \delta_t q_p q_u + 2\delta_t q_u a_p). \quad (10.17)$$

Ensuite, d'après (7.12, 7.11),

$$H_{lin} = \frac{\varepsilon}{4} \sum_{q=1}^{\infty} \mu_t \eta_q \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} \delta_{t+} G_{pq}^u (q_u e_{t-q_p} + q_p e_{t-q_u} + 4a_p \mu_{t-q_u}). \quad (10.18)$$

En utilisant l'équation (10.15a) et en identifiant l'expression obtenue à ((10.15b)) puis aux identités remarquables (7.11-7.13), on écrit :

$$H_{lin} = -\varepsilon \sum_{q=1}^{N_F} \xi_q^4 \mu_t \eta_q \delta_{t+} \mu_{t-\eta_q} = -\varepsilon \sum_{q=1}^{N_w} \xi_q^4 \mu_t \eta_q \delta_t \eta_q = -\frac{\varepsilon}{2} \sum_{q=1}^{N_w} \xi_q^4 \delta_{t+} \mu_{t-\eta_q}^2. \quad (10.19)$$

Et finalement, on peut écrire la conservation de la quantité discrète  $H$  :

$$\delta_{t+} H = 0 \quad \text{avec} \quad H = \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} (\delta_{t-} q_u)^2 + \omega_u^2 \mu_{t-q_u}^2 + \sum_{q=1}^{N_F} \varepsilon \xi_q^4 \mu_{t-\eta_q}^2. \quad (10.20)$$

Nous vérifions que la quantité  $H$  est bien consistante à l'énergie  $H$  du système continu. Nous pouvons d'ailleurs en détailler les parties discrètes correspondant à l'énergie cinétique  $\frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} (\delta_{t-} q_u)^2$ , à l'énergie potentielle linéaire  $\frac{1}{2} \sum_{u=1}^{N_w} \omega_u^2 \mu_{t-q_u}^2$  et à l'énergie potentielle non-linéaire  $\frac{1}{2} \sum_{q=1}^{N_F} \varepsilon \xi_q^4 \mu_{t-\eta_q}^2$ . En notant  $H_0$  la quantité d'énergie injectée au système initialement. On peut établir que

$$\forall u \quad |q_u| \leq \frac{\sqrt{2H_0}}{\omega_u} \quad \text{et} \quad |q_u| \leq \frac{\sqrt{2H_0}}{\omega_u},$$

ce qui garantit la stabilité du schéma à tout pas de temps.

### 10.3 Implémentation

Bien que le schéma proposé soit implicite, la dépendance au vecteur  $\mathbf{y}_{n+1}$  peut être écrite de manière linéaire. On montre dans cette partie les calculs qui aboutissent à l'écriture matricielle du problème de résolution du pas  $n+1$ . Écrit explicitement, le système (10.15) devient :

$$\frac{1}{k^2} (q_u^{n+1} - 2q_u^n + q_u^{n-1}) + \frac{\omega_u^2}{2} (q_u^{n+1} + q_u^{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (q_p^n + a_p) (\eta_q^{n+1} + \eta_q^{n-1}) \quad (10.21a)$$

$$\frac{1}{2} (\eta_q^{n+1} + \eta_q^n) = -\frac{1}{4\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r^{n+1} q_s^n + q_s^{n+1} q_r^n + 2a_r (q_s^{n+1} + q_s^n)). \quad (10.21b)$$

En se servant de la relation de symétrie (10.11a), on peut remarquer que :

$$\sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r^{n+1} q_s^n + q_r^n q_s^{n+1}) = 2 \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r^{n+1} q_s^n). \quad (10.22)$$

Ainsi (10.21b) devient :

$$\eta_q^{n+1} = -\eta_q^n - \frac{1}{\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r^{n+1} q_s^n + a_r (q_s^{n+1} + q_s^n)). \quad (10.23)$$

En injectant l'expression de  $\eta_q^{n+1}$  dans (10.21a), on obtient :

$$\begin{aligned} q_u^{n+1} \left( \frac{1}{k^2} + \frac{\omega_u^2}{2} \right) + \underbrace{\frac{1}{k^2} (q_u^{n-1} - 2q_u^n) + \frac{\omega_u^2}{2} q_u^{n-1}}_{Tc1} \\ = \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (q_p^n + a_p) \left( \eta_q^{n+1} - \eta_q^n - \frac{1}{\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q (q_r^{n+1} q_s^n + a_r (q_s^{n+1} + q_s^n)) \right)}_{\textcircled{a}} \end{aligned} \quad (10.24a)$$

où  $Tc1$  est une quantité ne dépendant que des pas précédent  $n$  et  $n-1$ , et où  $\textcircled{a}$  est développé plus en détail ci-après :

$$\begin{aligned} \textcircled{a} = - \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{s=1}^{N_w} q_s^{n+1} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{r=1}^{N_w} G_{pq}^u (q_p^n + a_p) \frac{1}{\xi_q^4} H_{rs}^q (q_r^n + a_r)}_{\textcircled{b}} \\ + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^u (q_p^n + a_p) \frac{1}{\xi_q^4} \left( (\{\eta_q\}_{n-1} - \{\eta_q\}_n) - \frac{1}{\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q q_s^{n+1} (q_r^n + a_r) \right)}_{Tc2} \end{aligned} \quad (10.25a)$$

$\textcircled{b}$  est le terme non-linéaire dans lequel les  $q_s^{n+1}$  sont mis en facteur et  $Tc2$  est le second terme dépendant uniquement des pas précédents.

On peut alors écrire le problème sous forme matricielle, avec pour inconnue le vecteur  $\mathbf{q}^{n+1}$  des composantes modales discrètes au pas  $n+1$  :

$$\mathbf{M}_{(n,n-1)} \cdot \mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{K}_{(n,n-1)} \quad (10.26)$$

Soient  $M(i, j)$  et  $K(i)$  les composantes respectives de la matrice  $\mathbf{M}_{(n,n-1)}$  et du vecteur  $\mathbf{K}_{(n,n-1)}$ , elles répondent aux équations :

$$M(i, j) = \delta_{i,j} \left( \frac{1}{k^2} + \frac{\omega_i^2}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} \sum_{r=1}^{N_w} G_{pq}^i (q_p^n + a_p) \frac{1}{\{\xi_q^4\}_n} H_{rj}^q (\{q_r\}_n + a_r) \quad (10.27a)$$

$$\begin{aligned} K(i) = & \left( -\frac{1}{k^2} (q_i^{n-1} - 2q_i^n) - \frac{\omega_i^2}{2} q_i^{n-1} \right) \\ & + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{p=1}^{N_w} \sum_{q=1}^{N_F} G_{pq}^i (\{q_p\}_n + a_p) \frac{1}{\xi_q^4} \left( (\{\eta_q\}_{n-1} - \{\eta_q\}_n) - \frac{1}{\xi_q^4} \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} H_{rs}^q q_s^{n+1} (\{q_r\}_n + a_r) \right) \end{aligned} \quad (10.27b)$$

## 10.4 Résultats dans le cas d'un flot autonome

### 10.4.1 Expérience numérique test

Bien que les équations soient développées dans le cas général d'une coque imparfaite, on s'astreint ici au cas d'une plaque parfaite. La dynamique est tronquée à 10 oscillateurs<sup>26</sup> et on ne garde donc que les termes non-linéaires cubiques. Le forçage est nul et la condition initiale est  $q_u = 0.1$  et  $\delta_{t+q_u} = 1$  pour tous les oscillateurs sauf pour le mode  $(0, 1)$  (désigné par l'indice 3) où la condition  $\delta_{t+q_3} = 1000$  est imposée, de manière à simuler grossièrement une excitation impulsionnelle au centre de la plaque et de révéler les couplages éventuels entre ce mode axisymétrique et d'autres (axi- ou asymétriques). On cherche par ailleurs à évaluer la préservation de l'énergie des oscillateurs couplés, selon les méthodes sélectionnées. Pour chacune des deux méthodes (Störmer-Verlet et conservative) un pas de  $\omega_3/10^4$  a été adopté<sup>27</sup>, ce qui correspond à un pas de  $\omega_{10}/2.7e3$ ,  $\omega_{10}$  étant la pulsation propre la plus grande du système (l'indice 10 désignant le mode  $(5, 0, s)$ ).

### 10.4.2 Méthode de Störmer-Verlet

Appliqué au cas du système à  $N_w$  degrés de liberté et restreint aux hypothèses énoncées ci dessus, le schéma de discrétisation devient :

$$\delta_{it}\{q_u\}_n + \omega_u^2\{q_u\}_n = -\varepsilon \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} \sum_{p=1}^{N_w} \Gamma_{rsp}^u \{q_r\}_n \{q_s\}_n \{q_p\}_n \quad (10.28)$$

Les résultats de l'expérience numérique sont présentés figure 10.1. Les modes  $(2, 0, c)$ ,  $(0, 1)$ ;  $(3, 0, s)$  ont été retenus afin de fournir un échantillon représentatif du comportements des oscillateurs.

Une première constatation sur les évolutions temporelles des différents modes est que très peu d'énergie est transmise aux modes asymétriques. De plus, on observe une perte rapide de la stabilité du schéma ; perte de stabilité qui se traduit également dans les diagrammes de phase par une divergence des trajectoires et par une explosion de l'énergie. Toutefois, avant l'explosion, l'énergie totale des 10 oscillateurs couplés semble correctement conservée. De sérieux doutes sont émis cependant sur le comportement de l'oscillateur  $(2, 0, c)$  dès le démarrage. Il sont à comparer avec les résultats issus de la méthode conservative.

### 10.4.3 Méthode conservative

Les représentations similaires au cas précédent sont tracées sur la figure 10.2. La simulation semble d'emblée plus stable, alors que le pas de discrétisation est le même pour les deux cas. Les diagrammes de phase montrent des cycles limites très nets. De même que dans le cas précédent, on voit sur les réponses temporelles que peu d'énergie est transmise aux modes asymétriques mais le diagramme de phase du mode  $(3, 0, s)$ , dans lequel on constate une trajectoire évasée montre que cette transmission d'énergie est bien présente. L'énergie du système est bien conservé sur des temps courts. Contrairement au cas précédent, celle-ci n'explose pas, pas même sur un temps plus long de simulation, non présenté ici. Cependant, on observe un accroissement linéaire de cette énergie au cours du temps, qui tend à devenir non négligeable sur des temps longs et nous

26. à savoir les modes  $(2, 0, c)$ ,  $(2, 0, s)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(3, 0, c)$ ,  $(3, 0, s)$ ,  $(1, 1, c)$ ,  $(1, 1, s)$ ,  $(4, 0, c)$ ,  $(4, 0, s)$ ,  $(5, 0, c)$ ,  $(5, 0, s)$ .

27. des problèmes de mémoire vive nous empêchaient d'aller en deçà le cas échéant.

prive de toute prédiction correcte.

Par manque de temps ce phénomène numérique n'a pu être correctement identifié. On sait toutefois qu'il apparaît quelque soit la longueur du pas de discrétisation.

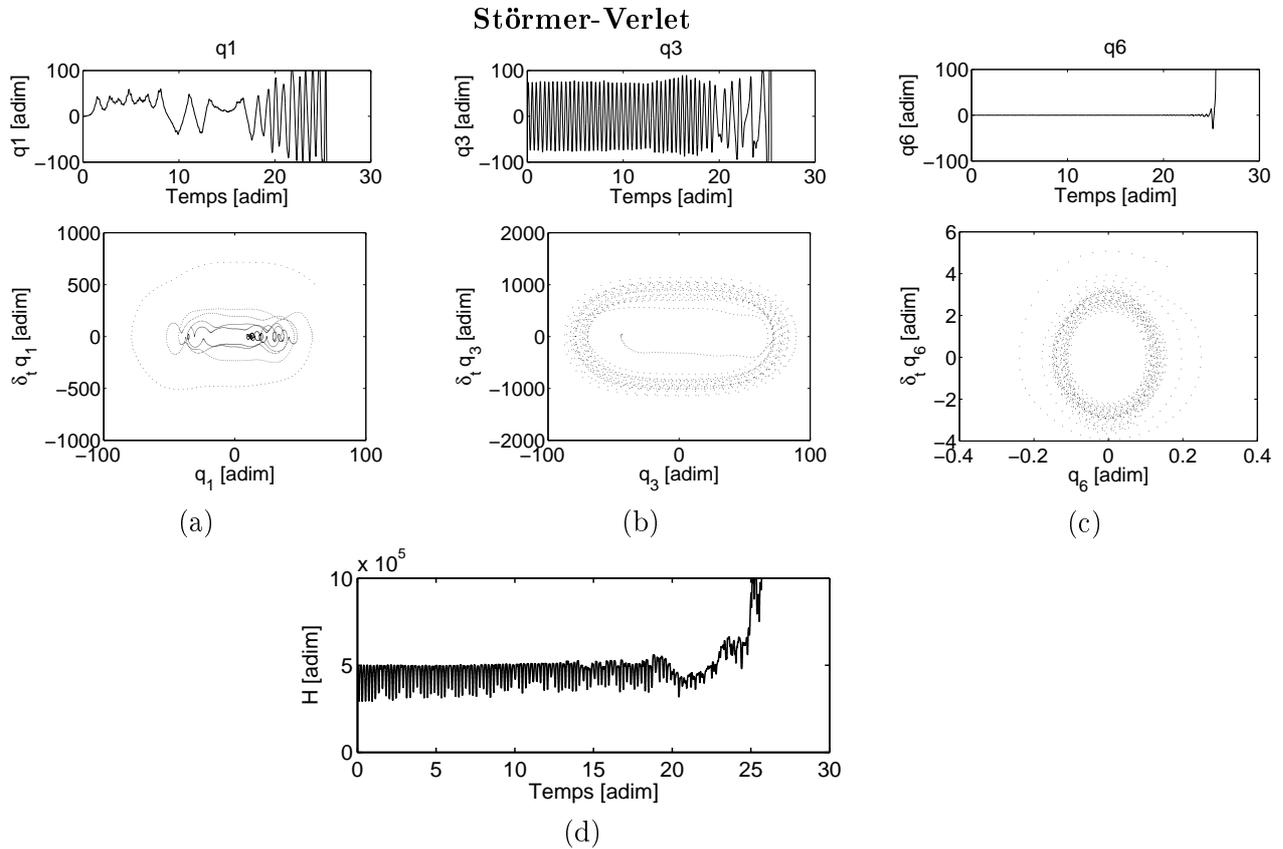


FIGURE 10.1 – Évolutions temporelles et diagrammes de phase des modes  $(2,0,c)$  (a),  $(0,1)$  (b) et  $(3,0,s)$  (c) lors d'une simulation d'un système tronqué à 10 modes discrétisé grâce au schéma de Störmer-Verlet et excité impulsionnellement. (d) Évolution de son énergie totale.

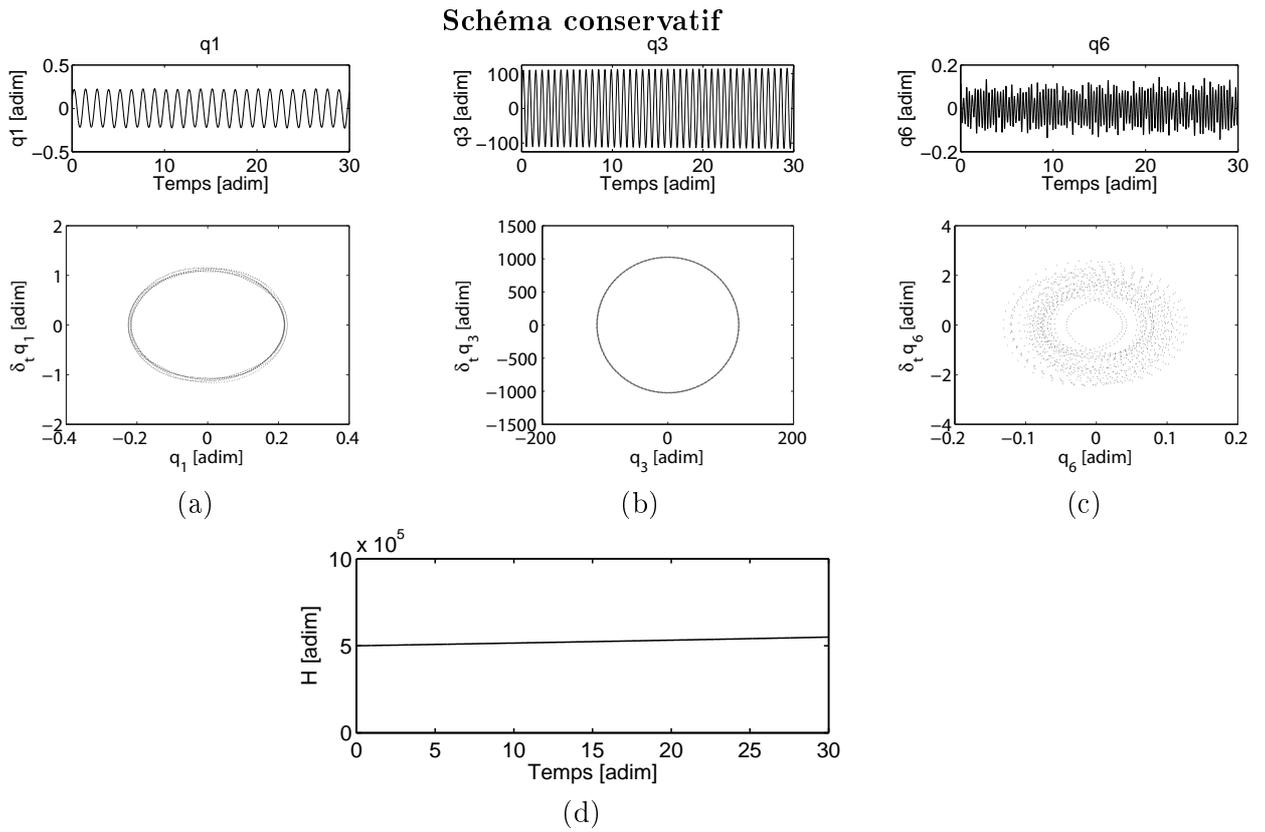


FIGURE 10.2 – Évolutions temporelles et diagrammes de phase des modes  $(2,0,c)$  (a),  $(0,1)$  (b) et  $(3,0,s)$  (c) lors d'une simulation d'un système tronqué à 10 modes discrétisé grâce au schéma conservatif et excité impulsionnellement. (d) Évolution de son énergie totale.



# CHAPITRE 11

---

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES ET PERSPECTIVES

### Sommaire

---

<b>11.1 Étude de l'effet du défaut de forme . . . . .</b>	<b>137</b>
11.1.1 Principaux résultats . . . . .	137
11.1.2 Applications . . . . .	140
11.1.3 Perspectives . . . . .	140
<b>11.2 Intégrateurs numériques . . . . .</b>	<b>141</b>
11.2.1 Principaux résultats . . . . .	141
11.2.2 Premières conclusions et suite des travaux . . . . .	142

---

## 11.1 Étude de l'effet du défaut de forme

### 11.1.1 Principaux résultats

#### Introduction

Un modèle analytique de vibrations de coque mince de forme circulaire quelconque prenant en compte la non-linéarité géométrique due aux grandes amplitudes a été mis en oeuvre et largement questionné durant ce travail de thèse. Les développements ont pour origine les équations locales et modales de vibrations de plaques circulaires minces imparfaites, elles-même dérivées des équations de von Kármán. Le défaut que l'on introduit dans ces équations est vu comme un déplacement statique à contrainte initiale nulle. Les équations locales modifiées sont discrétisées sur la base des modes propres dynamiques de la plaque circulaire parfaite. Les nouvelles équations modales obtenues font apparaître de nouveaux coefficients.

#### Analyse du modèle

Un des résultats significatifs des travaux présentés et qui a permis l'étude systématique de structures circulaires imparfaites tant dans le domaine linéaire que non-linéaire est l'obtention d'expressions analytiques simples pour ces nouveaux coefficients en fonction des projetés modaux et des coefficients cubiques de la plaque circulaire mince. Les expressions des coefficients linéaires et non-linéaires sont rappelées ci dessous :

$$\alpha_p^u = \sum_{r=1}^{N_w} \sum_{s=1}^{N_w} 2\Gamma_{rps}^u a_r a_s,$$

$$\beta_{pr}^u = \sum_{s=1}^{N_w} (\Gamma_{rps}^u + 2\Gamma_{srp}^u) a_s.$$

Il est à noter que les équations modales du cas parfait ne comportaient aucun terme quadratique. Son apparition va de pair avec la perte de symétrie de la structure par rapport au plan médian.

L'écriture de programmes performants permettant le calcul des coefficients régissant la dynamique de toute structure circulaire de forme quelconque est conditionnée par la détermination préalable des coefficients linéaires et non-linéaires du cas parfait. Afin d'optimiser le calcul sur les différents tests menés, il a été nécessaire de se pencher plus en avant sur les relations de symétrie observées par ces coefficients cubiques. Une relation de permutation circulaire sur l'opérateur  $L(\cdot, \cdot)$  a ainsi été dégagée et fait notamment l'objet d'une publication [81]. En effet, l'étude des couplages entre 51 modes nécessite a priori le calcul de  $51^4$  coefficients. La relation s'écrit :

$$\iint_S \Phi_k L(\Phi_p, \Psi_s) dS = \iint_S L(\Phi_k, \Phi_p) \Psi_s dS. \quad (11.1)$$

Il en découle des règles de symétrie sur les nouveaux coefficients linéaires et également sur les nouveaux coefficients quadratiques :

$$\alpha_i^k = \alpha_k^i \quad (11.2)$$

$$2\beta_{pp}^k = \beta_{pk}^p + \beta_{kp}^p. \quad (11.3)$$

Des règles qui ont été bien utiles par la suite car outre le fait qu'elles aient optimisé les programmes associés à cette partie du travail, elles ont permis l'élaboration du schéma numérique conservatif développé lors de la seconde partie de la thèse.

Un autre résultat important a été obtenu lorsque s'est posée la question de savoir si la base tronquée était adaptée à la reproduction de géométries asymétriques. Le calcul analytique a montré que tant que les configurations préférentielles sont toutes deux présentes dans une troncature comprenant des modes asymétriques, **la rotation du défaut par rapport à  $\theta$  n'avait aucune influence** sur le calcul des nouveaux modes propres et des nouveaux coefficients. Cette affirmation fût confirmée également par des calculs numériques concernant un défaut ayant la forme d'une coque de laboratoire que l'on décalait selon  $\theta$ .

### Comparaison au modèle de coque sphérique

Les nouvelles équations dynamiques écrites sous leur forme locale, c'est à dire des EDPs, ont pu être comparées à celles de la coque sphérique mince, modèle immédiatement antérieur à celui développé. Cette comparaison a révélé que l'hypothèse de « petit défaut », ou plus exactement de défaut de faible courbure, adopté précédemment conduisait à quelques erreurs. En effet, **le modèle de coque sphérique mince est exactement équivalent au modèle de coque imparfaite dans lequel une géométrie parabolique (et non sphérique) est considérée.**

L'erreur est faible pour de petites courbures mais se révèle notable pour des courbures équivalentes aux coques de laboratoire testées. Les déformées modales calculées montrent des différences significatives.

### Études systématiques de défauts typiques

Des études systématiques ont été menées sur des défauts s'écrivant uniquement à partir d'un mode propre de plaque parfaite. Elles ont permis de dresser un panel de résultats qui alimentent notre compréhension des effets de défauts axisymétriques et asymétriques. Ces informations sont données en terme de modes propres et de coefficients non-linéaires qui ont également permis le calcul de tendances de non-linéarité de quelques modes via le formalisme des modes non-linéaires. Nous reprenons ci-après les principales conclusions tirées de ces études.

- Les simulations concernaient pour la plupart des défauts dont l'amplitude s'élevaient jusqu'à  $10h$ . Les cas de très grands défauts, sphérique et de la forme du mode  $(2, 0)$  ont également été testés. Dans tous les cas, **les fréquences propres calculées sont quasiment superposées avec celles simulées par éléments finis.**

- D'un point de vue général, **les imperfections influent drastiquement sur les caractéristiques vibratoires de la plaque circulaire mince.** Quelques exemples significatifs sont le doublement de certaines fréquences propres et les changements qualitatifs de tendances de non-linéarité pour des amplitudes de défaut de l'ordre de l'épaisseur.

- Plus spécifiquement, **l'influence des imperfections est différente suivant leur propriété de symétrie.** Ainsi, **les imperfections de formes axisymétriques concentrent leur influence sur les modes axisymétriques et mixtes.** Les fréquences propres des modes asymétriques sont peu affectées lors de l'augmentation de ces défauts. Leur influence sur les tendances de non-linéarité est également moindre concernant les modes asymétriques même si les relations de résonance viennent en modifier le signe. Par ailleurs, **les défauts asymétriques agissent en particulier sur les modes asymétriques de configuration (cosinus/sinus) similaire.** Ce constat est observé autant sur les modes propres que sur les tendances de non-linéarité.

- Concernant les défauts asymétriques on note également que **les modes asymétriques les plus touchés seront ceux qui partagent un nombre de diamètres nodaux qui est multiple ou sous-multiple du nombre de diamètres nodaux de l'imperfection.**

- Une dernière remarque peut être faite. Elle concerne l'interprétation des résultats. Pour des défauts d'amplitudes élevées, de l'ordre de celles qu'on a étudiées, les déformées modales s'en trouvent parfois tellement modifiées que la nomenclature  $(k, n)$  des modes de plaque devient inadaptée. Il était d'ailleurs parfois difficile de reconnaître de quel mode de plaque parfaite étaient dérivées certaines déformées, ce qui nous obligeait à suivre pas à pas les évolutions de ces derniers. Cette observation prouve la difficulté de pouvoir identifier certains modes de coques réelles.

### Études sur des coques réelles

La géométrie complète d'une coque de laboratoire a été introduite dans le modèle de coque imparfaite. Les résultats sur les modes propres et sur quelques coefficients non-linéaires ont été

comparés à ceux de l'analyse modale expérimentale, ainsi qu'au modèle de coque sphérique et à celui par éléments finis. La convergence de la méthode selon ses principaux paramètres a été précisément regardée. La finesse de la projection a d'ailleurs fait l'objet d'une étude particulière. **Dans le domaine linéaire, les résultats obtenus fournissent une bonne prédiction des fréquences propres et des déformées modales expérimentales.** La divergence entre les configurations de modes asymétriques est retrouvée ainsi que l'hybridation de certains modes de la coque de référence. **Dans le domaine non-linéaire, le modèle développé ne permet de retrouver qu'une partie des comportements non-linéaires observés.** Ce résultat est néanmoins notable en regard des modèles précédents.

En outre, **les multiples études de convergence révèlent que les différences qui subsistent sont dues aux facteurs non pris en compte par nos études** à savoir les inhomogénéités du matériau, les variations d'épaisseur et la présence de trous qui servent à attacher la coque.

Les travaux documentant les études systématiques sur les fréquences propres et les coefficients non-linéaires de défauts de formes données joints aux travaux sur la coque de référence ont fait l'objet d'un acte de congrès [12] et d'un article de revue [13]. Les études sur le type de non-linéarité des défauts de formes données ainsi que des travaux complémentaires concernant la prise en compte de l'amortissement dans ces calculs ont également fait l'objet d'un acte de congrès [96] et d'une publication [92].

### 11.1.2 Applications

Dans le cas d'applications sur les instruments de musique, la nécessité de considérer ces imperfections va de pair avec l'emploi que l'on veut faire d'un tel modèle. En effet, obtenir un modèle fin de structure imparfaite permet d'une part de mieux synthétiser les structures existantes et permet d'autre part de réaliser virtuellement des structures trop coûteuses, difficiles à usiner ou bien simplement impossibles à réaliser.

Dans le cas des haut-parleurs, une modélisation du mouvement axisymétrique des membranes en régime linéaire et non-linéaire avait été menée dans le cadre de la thèse de Nicolas Quaegebeur [63]. Une partie de ses travaux reprend le modèle décrit dans ce manuscrit, permettant d'établir précisément l'influence de la forme des membranes sur le rendu vibratoire et acoustique des haut-parleurs, et a pu aboutir à la proposition d'amélioration de facteurs de qualité.

Dans une plus large mesure, ces études prouvent également pourquoi de légères erreurs commises sur la forme de structures minces au sortir d'une chaîne de montage industrielle contredisent les prévisions énoncées sur une structure idéale.

### 11.1.3 Perspectives

#### Sur le modèle

Si nous avons pu traiter certains détails mathématiques en vue d'affiner notre compréhension du modèle de vibrations de plaques minces imparfaites, d'autres sont restés en suspens. Ces détails peuvent s'avérer utiles afin d'élargir ou d'optimiser ce modèle. Ils sont placés ici en perspective.

L'étude des nombreuses formes d'imperfection qui a été menée a montré empiriquement l'effet globalement raidissant de l'ajout d'un défaut sur la structure. Dans les cas de défauts plus exo-

tiques, placés en annexes de ce document, nous avons cependant observé des translations locales de fréquences propres isolées vers les basses fréquences. Il pourrait être intéressant de voir sous quelles conditions ce phénomène pourrait être forcé. Ce calcul, que nous n'avons eu le temps de mener, formellement équivalent à un problème inverse, mériterait d'être posé.

Les études précédentes concernant d'autres facteurs d'inhomogénéité [14], montrent que les inhomogénéités matérielles sont moins influentes que les imperfections de formes ou d'épaisseur. Quelques mesures faites sur le pourtour de la coque de référence montrent que la variation d'épaisseur atteint 10% d'erreur relative. Ce facteur semble donc être le prochain à prendre en compte dans un modèle plus large de vibrations de plaques circulaires imparfaites, étendant les hypothèses à celles de Mindlin. Les développements de [32] ouvrent cette voie dans laquelle les développements analytiques telles que nous les avons menés semblent malheureusement proscris.

### Comparaison avec un modèle par élément finis complet

La présence d'inhomogénéités non prises en compte dans le modèle de plaque imparfaite mais présentes au sein des coques de laboratoire empêche une vérification expérimentale des coefficients non-linéaires calculés. L'élaboration d'un modèle par éléments finis, aboutissant au calcul de ces coefficients permettrait d'évaluer plus aisément la validité des prédictions dans le domaine non-linéaire. L'élaboration d'un code de calcul, basé sur l'utilisation d'éléments MITC (Mixed Interpolation of Tensorial Components), est actuellement menée par Cyril Touzé dans le cadre d'une collaboration avec l'Inria. La confrontation des modèles permettra d'en dire plus sur la précision des coefficients et ainsi sur l'influence des autres imperfections.

## 11.2 Intégrateurs numériques

### 11.2.1 Principaux résultats

#### Introduction

L'objectif visé par ces travaux est la simulation de vibrations de plaques circulaires imparfaites en régime non-linéaire. L'application première étant les cymbales, le modèle visé devrait pouvoir rendre compte de la dynamique chaotique d'une cymbale excitée impulsionnellement. Ce type d'excitation empêchant toute reproductibilité expérimentale dont on maîtriserait la force, le point précis d'application et le temps de contact et ne permettant donc pas d'analyses exploitables du signal chaotique engendré, l'expérience pertinente sur laquelle on se base est l'excitation harmonique de la coque à amplitude de forçage plus ou moins élevée. Cette expérience permet de déterminer les régimes de vibrations d'une coque mince que sont le régime quasi-linéaire ou uni-modale, le régime pseudo périodique faisant apparaître les relations de couplages intermodaux et le régime chaotique caractérisé par un spectre continu et large bande. La bifurcation, séparant les deux premiers régimes avait fait l'objet de précédentes études au laboratoire. L'étude est désormais portée sur la seconde bifurcation. À cette fin, nous avons tenté de simuler numériquement le système dynamique modale, composé d'EDOs couplées non-linéairement et établi en première partie de thèse. L'avantage de travailler à partir de la formulation modale est de choisir le nombre de degrés de liberté du système que l'on veut forcer et ainsi de pouvoir, à terme, mener une étude systématique selon les modes mis en jeu dans la dynamique.

## Difficultés numériques

La dynamique que nous devons intégrer numériquement soulève malheureusement de nombreux problèmes numériques. **Un grand nombre de degrés de liberté doit pouvoir être conservé.** La présence de petites et de grandes périodes définit **notre problème comme étant numériquement raide.** L'expérience que l'on se donne à reproduire exige d'**intégrer le système sur des temps longs et les valeurs en moyenne très faibles des coefficients d'amortissement** impliquent des transitoires longs.

Un bref panorama des schémas aux différences finies classiques est dressé, permettant de mettre en exergue des schémas plus adaptés aux propriétés du système Hamiltonien qu'on étudie, c'est à dire les propriétés de conservation de l'énergie et de symplecticité. La construction d'un schéma conservatif adapté à un oscillateur de Duffing est détaillé, montrant une propriété de stabilité inconditionnelle. L'exemple du schéma de Störmer-Verlet comme schéma symplectique est donné.

## Oscillateur de Duffing

Afin d'approcher pas à pas les problèmes soulevés, le système a été réduit à un seul degré de liberté, soit un oscillateur de Duffing. Différents schémas de discrétisation ont été testés sur cet oscillateur forcé harmoniquement à moyenne puis à grande amplitude. Ces études comparatives aboutissent à des résultats originaux. **Des différences qualitatives ont été observées à haut forçage entre les diagrammes phases calculés avec les méthodes de Runge-Kutta (d'ordre 4 et 6), avec les schémas de Störmer-Verlet et à conservation d'énergie et également avec un schéma à différentiation rétrograde.** Les schémas à conservation d'énergie et de Störmer-Verlet présentent ce double avantage : **une meilleure convergence qualitative de la solution vis-à-vis de la grandeur du pas de temps et un coût de calcul moins élevé à nombre d'incrémentations égal.** Cette constatation prouve que le choix de l'intégrateur est crucial pour une interprétation juste de la dynamique que l'on étudie.

## Système à N degrés de liberté

**Un schéma conservatif appliqué à une dynamique décrite par N oscillateurs couplés non-linéairement a été développé, s'appliquant directement aux équations modales de plaque circulaire mince imparfaite.** La stabilité inconditionnelle du schéma a été avérée théoriquement mais n'est pas retrouvée numériquement. Les résultats ébauchés montrent en effet une dérive de la réponse du système tronqué à 10 modes de plaque dans le cas d'une excitation impulsionnelle. La continuité des travaux est placée en perspective.

### 11.2.2 Premières conclusions et suite des travaux

Les travaux rapportés dans la deuxième partie constituent une étape préliminaire à une étude plus aboutie sur l'intégrateur idéal à utiliser pour décrire la dynamique d'un système d'oscillateurs non-linéaires couplés. Sont soulignées ici les éventuelles erreurs d'interprétation lors d'une étude qualitative des résultats, notamment lorsque la solution regardée n'est pas convergée ou qu'elle est imprécise. Les résultats obtenus sur un oscillateur non-linéaire nous avaient amené à nous intéresser aux méthodes conservatives. On a également attaché un intérêt particulier, mais encore novice, aux méthodes symplectiques dont le schéma de Störmer-Verlet, si simple soit-il,

---

fait partie. L'étude comparative sur ce cas classique a montré les avantages du schéma conservatif, tant sur la qualité des résultats que sur le coût de calcul. Le développement d'un schéma conservatif adapté à un système à  $N$  degrés de liberté fait naturellement le lien avec les travaux de la première partie de cet écrit. Les premiers résultats sont encourageants mais soulèvent des interrogations que nous n'avons pu éclaircir jusqu'à présent.

En effet, bien que la stabilité du système ait été avérée théoriquement dans le cas sans forçage, les calculs de simulations avec excitations harmoniques explosaient systématiquement et très rapidement, nous empêchant toute étude comparative à des valeurs de forçage se rapprochant de l'expérience physique que l'ont veut reproduire. Ces observations invitent donc à regarder de près le conditionnement de la matrice inverse issue de la résolution du pas  $n + 1$  et des pertes ou gains numériques visiblement inhérents à notre schéma quelque soit la petitesse du pas de discrétisation. Les réponses à ces questions permettraient de déterminer si le schéma proposé, bien que parfaitement adapté à la forme modale des équations de plaques circulaires imparfaites, est pertinent ou non dans le cadre de l'étude de la transition vers le chaos.



---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Amabili. A comparison of shell theories for large-amplitude vibrations of circular cylindrical shells : Lagrangian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 264 :1091–1125, 2003.
- [2] M. Amabili. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of empty and fluid-filled circular cylindrical shell with imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 262(4) :921–975, 2003.
- [3] M. Amabili. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of circular cylindrical panel with geometric imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 298 :43–72, 2006.
- [4] M. Amabili. Theory and experiments for large-amplitude vibrations of rectangular plates with geometric imperfections. *Journal of Sound and Vibration*, 291(3-5) :539–565, 2006.
- [5] M. Amabili. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] M. Amabili and M. P. Païdoussis. Review of studies on geometrically non-linear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interactions. *ASME Applied Mechanics Review*, 56(4) :349–381, 2003.
- [7] J.H. Argyris and G. Faust. *An Exploration of Chaos*. Broché, 1994.
- [8] F. Armero and I. Romero. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. part I : low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190 :2603–2649, 2000.
- [9] J.L. Batoz, K.J. Bathe, and L.W. Ho. A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(12) :1771–1812, 1980.
- [10] S. Bilbao. Conservative numerical schemes for the dynamical von karman plate equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1) :193–216, 2008. Sous presses.
- [11] J.C. Butcher. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 2003.
- [12] C. Camier, C. Touzé, and O. Thomas. Effet des imperfections géométriques sur les vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces. In *Proc of 18ème Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, France, August 2007.
- [13] C. Camier, C. Touzé, and O. Thomas. Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 28 :500–515, 2009.

- 
- [14] C. S. Chen, W. S. Cheng, and A. H. Tan. Non-linear vibration of initially stressed plates with initial imperfections. *Thin-Walled Structures*, 43 :33–45, 2005.
- [15] C. Y. Chia. *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill, New-York, 1980.
- [16] A. P. Coppa. Measurement of initial geometrical imperfection of cylindrical shells. *AIAA Journal*, 4(1) :172–175, 1966.
- [17] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.
- [18] E.J. Doedel, R. Paffenroth, A.R. Champneys, T.F. Fairgrieve, Y.A. Kuznetsov, B.E. Oldeman, B. Sandstede, and X. Wang. Auto 2000 : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Technical report, Concordia University, 2002.
- [19] L. H. Donnell. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 56 :795–806, 1934.
- [20] L. H. Donnell. *Beams, Plates and Shells*. McGraw-Hill, New-York, 1976.
- [21] R. Van Dooren and H.Janssen. A continuation algorithm for discovering new chaotic motions in forced Duffing system. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 66 :527–541, 1996.
- [22] E. H. Dowell. Comments on the nonlinear vibrations of cylindrical shells. *Journal of Fluids and Structures*, 12(8) :1087–1089, 1998.
- [23] E.H. Dowell and C. Pezeshki. On the understanding of chaos in Duffing’s equation including a comparison with experiment. *Journal of Applied Mechanics*, 53(5), 1986.
- [24] G. J. Efstathiades. A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin’s procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 16(2) :231–253, 1971.
- [25] T. Fang and E.H. Dowell. Numerical simulation of periodic and chaotic responses in stable Duffing system. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 22(5) :401–425, 1987.
- [26] K. Feng. Difference schemes for Hamiltonian formalism and symplectic geometry. *J. Comput. Math.*, 4 :279–289, 1986.
- [27] Z. Ge and J.E. Marsden. Lie-Poisson Hamilton-Jacobi theory and Lie-Poisson integrators. *Physics Letters A*, 133(3) :134–139, 1988.
- [28] Z.M. Ge and C.Y. Ou. Chaos in a fractional order modified Duffing system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 34 :262–291, 2007.
- [29] C.W. Gear. *Numerical Initial value Problems in ordinary Differential Equations*. 1971.
- [30] P. B. Gonçalves. Axisymmetric vibrations of imperfect shallow spherical caps under pressure loading. *Journal of Sound and Vibration*, 174(2) :249–260, 1994.
- [31] M. Géradin and D. Rixen. *Théorie des vibrations, application à la dynamique des structures*. Masson, 1996.
- [32] U. S. Gupta, R. Lal, and S. Sharma. Vibration of non-homogeneous circular mindlin plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*, 302 :1–17, 2007.
- [33] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geometric numerical integration, structure-preserving schemes for ordinary differential equations*. Springer, 2006.
- [34] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations I : non-stiff problems*. Springer, 1993.

- 
- [35] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations II : stiff and differential-algebraic problems*. Springer, 1996.
- [36] D. Hui. Large-amplitude axisymmetric vibrations of geometrically imperfect circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2(91) :239–246, 1983.
- [37] D. Hui. Large-amplitude vibrations of geometrically imperfect shallow spherical shells with structural damping. *AIAA Journal*, 21(12) :1736–1741, 1983.
- [38] D. Hui and A. W. Leissa. Effects of uni-directional geometric imperfections on vibrations of pressurized shallow spherical shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 18(4) :279–285, 1983.
- [39] R. Jeltsch and O. Nevanlinna. Stability of explicit time discretizations for solving initial value problems. *Numerical Mathematics*, 37 :55–68, 1981.
- [40] C. Kane, J.E. Marsden, and M. Ortiz. Symplectic-energy-momentum preserving variational integrators. *Journal of Mathematical Physics*, 40(7) :3353–3371, 1999.
- [41] C. Kane, J.E. Marsden, M. Ortiz, and M. West. Variational integrators and the Newmark algorithm for conservative and dissipative mechanical systems. *Int. J. for numerical methods in Engineering*, 49 :1295–1325, 2000.
- [42] W. T. Koiter. The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shell under axial compression. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 66 :265–279, 1963. Serie B.
- [43] U. Kronman. *Steel Pan Tuning - a Handbook for Steel Pan Making and Tuning*. Musikmuseet, 1991.
- [44] V. D. Kubenko and P. S. Koval’chuk. Influence of initial geometric imperfections on the vibrations and dynamic stability of elastic shells. *International Applied Mechanics*, 40 :847–877, 2004.
- [45] K.A. Legge and N.H. Flechter. Nonlinearity, chaos, and the sound of shallow gongs. *Journal of Acoustic Society of America*, 86(6) :2439–2443, 1989.
- [46] C. C. Lin and L. W. Chen. Large-amplitude vibration of an initially imperfect moderately thick plate. *Journal of Sound and Vibration*, 135(2) :213–224, 1989.
- [47] P. Manneville. *Instabilités, Chaos et Turbulence*. Les éditions de l’école Polytechnique, 2004.
- [48] L. Meirovitch. *Analytical methods in vibrations*. Macmillian Publishing Co., 1967.
- [49] R.E. Mickens. Construction of finite difference schemes for coupled nonlinear oscillators derived from a discrete energy function. *Journal of Difference Equations and Applications*, 2(3) :185–193, 1996.
- [50] R.E. Mickens. A non-standart finite-diffrence scheme for conservative oscillators. *Journal of Sound and Vibration*, 240(3) :587–591, 2000.
- [51] R.E. Mickens. A numerical integration technique for conservative oscillators combining nonstandard finite-difference methods with hamilton’s principle. *Journal of Sound and Vibration*, 285(3) :477–482, 2005.
- [52] F.C. Moon. *Chaotic vibrations. An introduction for applied scientists and engineers*. John Wiley & sons, 1987.
- [53] H. J.-P. Morand and R. Ohayon. *Fluid structure interaction*. J. Wiley & sons, 1995.

- 
- [54] D.E. Musielak, Z.E. Musielak, and J.W. Benner. Chaos and routes to chaos in coupled Duffing oscillators with multiple degrees of freedom. *Chaos, Solitons and fractals*, 24 :907–922, 2005.
- [55] A. H. Nayfeh. *Nonlinear interactions : analytical, computational and experimental methods*. Wiley series in nonlinear science, New-York, 2000.
- [56] A. H. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear oscillations*. John Wiley & sons, New-York, 1979.
- [57] A. H. Nayfeh, J. F. Nayfeh, and D. T. Mook. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dynamics*, 3 :145–162, 1992.
- [58] L. Noels. *Contribution aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures*. PhD thesis, Université de liège, faculté des sciences appliquées, 2004.
- [59] G. L. Ostiguy and S. Sassi. Effects of initial geometric imperfections on dynamic behaviour of rectangular plates. *Non-linear Dynamics*, 3 :165–181, 1992.
- [60] K. A. V. Pandalai and M. Sathyamoorthy. On the modal equations of large amplitude flexural vibration of beams, plates, rings and shells. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 8(3) :213–218, 1973.
- [61] U. Parlitz and W. Lauterborn. Superstructure in the bifurcation set of the Duffing equation. *Physics letters*, 107(8), 1985.
- [62] G. Prathap and K. A. V. Pandalai. The role of median surface curvature in large amplitude flexural vibrations of thin shells. *Journal of Sound and Vibration*, 60(1) :119–131, 1978.
- [63] N. Quaegebeur. *Vibrations non-linéaires et rayonnement acoustique de structures minces de type haut-parleur*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Techniques Avancées ; École Polytechnique, 2007.
- [64] A. Raman and C. D. Mote Jr. Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 36 :261–289, 2001.
- [65] A. Rosen and J. Singer. Effect of axisymmetric imperfections on the vibrations of cylindrical shells under axial compression. *AIAA Journal*, 12 :995–997, 1974.
- [66] A. Rosen and J. Singer. Effect of asymmetric imperfections on the vibrations of axially compressed cylindrical shells. *Israel Journal of Technology*, 14 :23–36, 1976.
- [67] T.D. Rossing, A. Morrison, U. Hansen, F. Rohner, and S. Schärer. Acoustics of the hang : A hand-played steel instrument. In *ISMA*, 2007.
- [68] R.D. Ruth. A canonical integration technique. *IEEE Trans. Nuclear Science*, 30 :2669–2671, 1983.
- [69] J.M. Sanz-Serna. Symplectic integrators for Hamiltonian problems : an overview. *Acta Numerica*, 1 :243–286, 1992.
- [70] J.M. Sanz-Serna and M.P. Calvo. *Numerical Hamiltonian problems*. Chapman & Hall, 1994.
- [71] R. Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis. From equilibrium to chaos*. Springer-Verlag, 1994.
- [72] L.F. Shampine and M.W. Reichelt. The matlab ode suite. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(1) :1–22, 1997.

- 
- [73] D. K. Shin. Large amplitude free vibration behavior of doubly curved shallow open shells with simply supported edges. *Computers and Structures*, 62(1) :35–49, 1997.
- [74] J. C. Simo, N. Tarnow, and K. K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. *Computer Methods in Applied Mech. and Eng.*, 100 :63–116, 1992.
- [75] J.C. Simo and N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Z. Angew. Math. Phys.*, 43 :757–792, 1992.
- [76] J.C. Simo and N. Tarnow. A new energy and momentum conserving algorithm for the non-linear dynamics of shells. *Int. J. for Numerical Meth. in Engrng*, 37 :2527–2549, 1994.
- [77] S. Sridhar, D.T. Mook, and A.H. Nayfeh. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part I : symmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 41(3) :359–373, 1975.
- [78] S. Sridhar, D.T. Mook, and A.H. Nayfeh. Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II : asymmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 59(2) :159–170, 1978.
- [79] O. Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques, application aux instruments de percussion*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France, 2001. In french.
- [80] O. Thomas. *Vibrations non-linéaires de calottes sphériques minces. Expériences et modélisation*. Rapport de Post-Doctorat, 2003.
- [81] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically non-linear flexural vibrations of plates : in-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :569–590, 2008.
- [82] O. Thomas, L. Nicu, C. Ayela, and C. Touzé. Bucleing and non-linear vibrations of a mems biosensor. In *proc. of Euromech Non-linear Dynamics Conference (ENOC 2008)*, Saint Petersburg, June 2008.
- [83] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Non-linear behavior of gongs through the dynamic of simple rods systems. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics*, pages 173–178, Perugia, Italy, September 2001.
- [84] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part II : experiments. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5) :1075–1101, 2003.
- [85] O. Thomas, C. Touzé, and A. Chaigne. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures*, 42(11-12) :3339–3373, 2005.
- [86] O. Thomas, C. Touzé, and É. Luminais. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells : experiments on a 1:1:2 internal resonance. *Non-linear Dynamics*, 49(1-2) :259–284, 2007.
- [87] J.J. Thomsen. *Vibrations and stability*. Springer, 2003.
- [88] S. A. Tobias. A theory of imperfection for the vibration of elastic bodies of revolution. *Engineering*, 172 :1409–420, 1951.
- [89] S. A. Tobias. Free undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.*, 171 :691–700, 1957.

- [90] S. A. Tobias and R. N. Arnold. The influence of dynamical imperfection on the vibration of rotating disks. *Proc. of the Instn. of Mech. Eng.*, 171 :669–690, 1957.
- [91] S.A. Tobias. Free undamped non-linear vibrations of imperfect circular disks. *PRoc. Inst. Mech. Eng.*, page 691 700, 1957.
- [92] C. Touzé, C. Camier, G. Favraud, and O. Thomas. Effect of imperfections and damping on the type of non-linearity of circular plates and shallow spherical shells. *Mathematical Problems in Engineering*, ID 678307 :19 pages, 2008.
- [93] C. Touzé and O. Thomas. Type of non-linearity of shallow spherical shells using non-linear normal modes. In *proc. of Fifth Euromech Non-linear Dynamics Conference (ENOC 2005)*, pages 852–861, Eindhoven, August 2007.
- [94] C. Touzé. *Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques. Application aux instruments de percussions non-linéaires*. PhD thesis, Université de paris VI, 2000.
- [95] C. Touzé and M. Amabili. Nonlinear normal modes for damped geometrically non-linear systems : application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration*, 298(4-5) :958–981, 2006.
- [96] C. Touzé, C. Camier, and O. Thomas. Type of non-linearity of damped imperfect plates using non-linear normal modes. In *proc. of Euromech of Non-linear Dynamics Conference (ENOC2008)*, Saint Petersburg, June 2008.
- [97] C. Touzé and O. Thomas. Non-linear behaviour of free-edge shallow spherical shells : effect of the geometry. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 41(5) :678–692, 2006.
- [98] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, 2002.
- [99] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 258(4) :649–676, 2002.
- [100] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Hardening/softening behaviour in non-linear oscillations of structural systems using non-linear normal modes. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1-2) :77–101, 2004.
- [101] Y. Ueda. Survey of regular and chaotic phenomena on the forced Duffing oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1 :199–231, 1991.
- [102] P. Verpeaux, T. Charras, and A. Millard. *Calcul des structures et intelligence artificielle*, chapter CASTEM 2000 : Une approche moderne du calcul des structures. Pluralis, ed., Paris, <http://www-cast3m.cea.fr>, 1988. In french.
- [103] G. Wanner. Equations différentielles raides. In *J. Baranger : Analyse numérique*. Hermann, 1991.
- [104] J. Wendlandt and J. E. Marsden. Mechanical integrators derived from a discrete variational principle. *Physica D*, 106 :223–246, 1997.
- [105] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer, 2003.
- [106] C.J.H. Williams and S.A. Tobias. Forced undamped non-linear vibrations of imperfect circular discs. *Journal of Mech. Eng. science*, 5 :645–680, 1963.

- [107] N. Yamaki. Influence of large amplitudes on flexural vibrations of elastic plates. *ZAMM*, 41(12) :501–510, 1961.
- [108] N. Yamaki, K. Otomo, and M. Chiba. Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 79 :23–42, 1981.
- [109] N. Yamaki, K. Otomo, and M. Chiba. Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part II : Experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 79 :43–59, 1981.



# ANNEXE A

## VARIATION DE L'ÉPAISSEUR SUR LE POURTOUR DE LA COQUE 3

La mesure a été effectuée sur la coque de référence grâce à un comparateur. L'épaisseur a été mesurée sur la circonférence de la coque, au bord puis à 1 cm du bord. Les résultats sont donnés figure A.1.

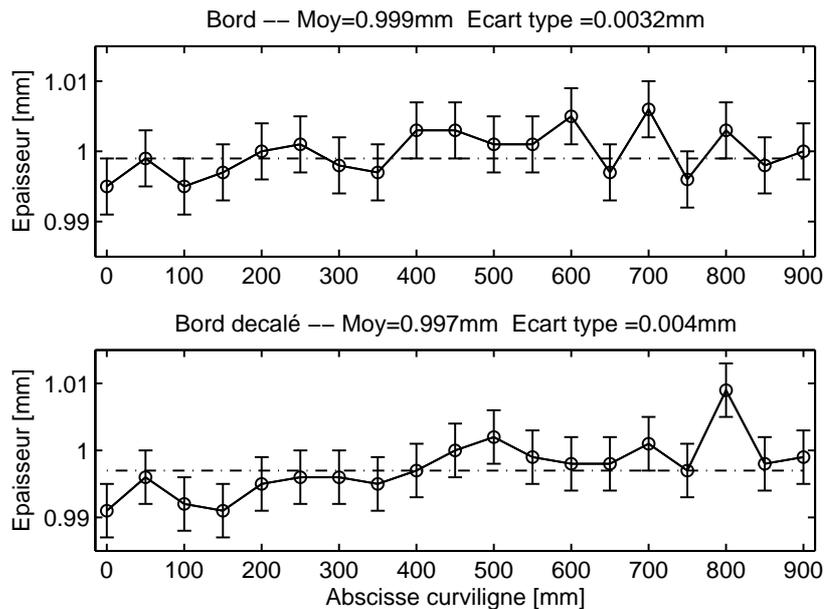


FIGURE A.1 – Épaisseur de la coque 3 mesurée sur la circonférence de la coque de référence au bord et à 1 cm du bord. Les points expérimentaux sont désignés par (o), les fourchettes correspondent à l'erreur de mesure admise par le comparateur et les traits (— · —) correspondent à la valeur moyenne des points mesurés.

On y a fait apparaître l'incertitude de mesure de l'appareil. Cette mesure montre tout d'abord que l'épaisseur de la coque, n'est pas exactement de 1 mm en moyenne sur l'abscisse mesurée. On note quelques écarts visibles, de l'ordre de 10 %, ce qui est non négligeable. L'écart type est de l'ordre de 3 % à 5 %. Les travaux de Gupta [32] ont notamment montré que des variations d'épaisseur de cet ordre ont des conséquences notables sur les fréquences propres. Les variations

prises en compte dans son étude ont des formes étalées sur la surface de la plaque et montrent des variations sur les fréquences propres du simple au triple pour une variation d'épaisseur de 10 %, et ce dans le cas de plaques circulaires à bord libres. On peut donc présager que ce facteur joue un rôle non-négligeable dans les erreurs résiduelles observées entre les résultats expérimentaux et ceux du modèle de plaque imparfaite, études de convergences menées par ailleurs.

# ANNEXE B

## IMPERFECTIONS DE LA FORME DE CYMBALES

Nous regardons ici quelques imperfections se rapprochant des géométries de cymbales. Les résultats sont établis à partir du modèle de plaque imparfaite. Afin de constater l'effet de ces formes particulières, le défaut est amplifié progressivement, à la manière des études de la partie 1 de la thèse.

### Effet de la cloche

La plus grande différence entre la géométrie d'une cymbale classique, de type ride, crash, charleston ou splash, avec l'approximation par une calotte sphérique, est située dans une région centrale appelée « la cloche ». On se propose donc de regarder l'effet de différentes formes de cloche sur les modes propres de la coque sphérique mince déformée. Nous prenons pour base une calotte sphérique de coefficient de courbure adimensionné  $\chi$  égal à  $1.1881e4$  ; cette valeur se situe dans la gamme des coefficients utilisés au début du chapitre 3. La région centrale est maintenant bombée pour reproduire la cloche de la cymbale. La nouvelle géométrie est définie figure B.1(a)-(b). On ne peut plus caractériser la géométrie globale par un seul coefficient adimensionné, étant donné la présence de deux paramètres supplémentaires,  $a_1$  et  $R_1$ , définissant le rayon et le rayon de courbure de la cloche. On mène ensuite deux expériences.

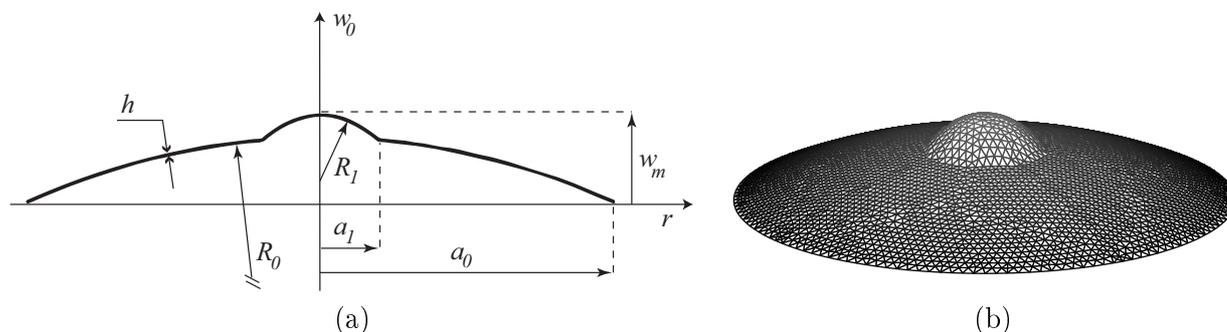


FIGURE B.1 – (a) Définition d'une imperfection correspondant à la géométrie générique d'une cymbale classique. (b) Vue tridimensionnelle.

### Variation du rayon de courbure

Pour la première, nous fixons arbitrairement le rayon  $a_1$  à  $0.2 * a_0$  et nous faisons varier le rayon de courbure de la cloche, en partant de la courbure initiale de la coque sans cloche. Le coefficient  $\tau_{cymbcloche}$  est introduit, définissant le rapport entre le rayon de courbure  $R_1$  de la cloche et celui  $R_0$  du reste de la coque, soit  $\tau_{cymbcloche} = R_0/R_1$ . Les pulsations propres  $\Omega_p$  correspondant à un  $\tau_{cymbcloche}$  croissant sont présentés figure B.2. Conformément aux observations menées sur des défauts de la forme des modes (0, 1) et (0, 2), les modes asymétriques sont faiblement affectés par cette imperfection axisymétrique. Par contre, l'observation importante qui peut être faite est la diminution de la fréquence propre d'un mode (le mode (2, 1)). Cet exemple montre que si l'ajout de raideur peut être considéré comme un facteur globalement raidissant sur les pulsations propres, il ne l'est pas localement et on peut, grâce à un défaut bien choisi, « assouplir » certains modes. Sur la figure B.3 sont représentées les déformées modales d'une calotte sphérique avec une cloche de paramètre  $\tau_{cymbcloche} = 10$ . Le mode (2, 0), à l'image de sa fréquence propre est quasiment égal à celui de la coque sphérique mince sans cloche. On voit apparaître l'effet de la cloche sur les déformées des modes (0, 1) et (0, 2), créant une région centrale plane et un bord aplati pour le mode (0, 1).

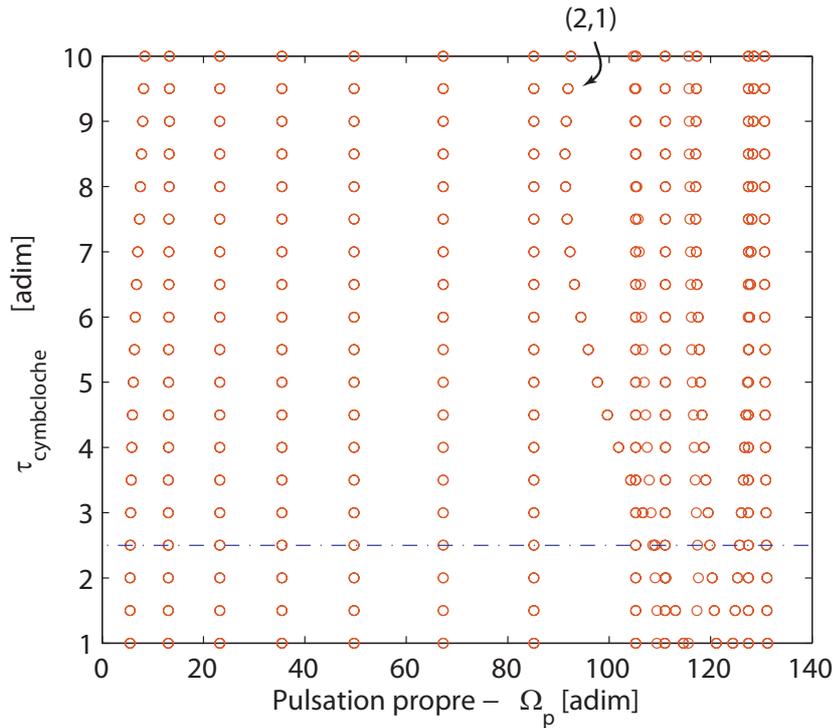


FIGURE B.2 – Pulsations propres adimensionnées de calottes sphériques comportant une cloche de paramètres  $\chi = 1.881e4$ ,  $\tau_{a_1a_0} = 0.2$  et  $\tau_{cymbcloche} = R_0/R_1$  croissant.

### Variation du diamètre

On fixe maintenant le rayon de courbure de la cloche à  $\tau_{cymbcloche} = 2.42$ , représenté sur la figure B.2 par le trait horizontal en pointillé bleu. Le rapport  $\tau_{a_1a_0} = a_1/a_0$  des rayons des calottes

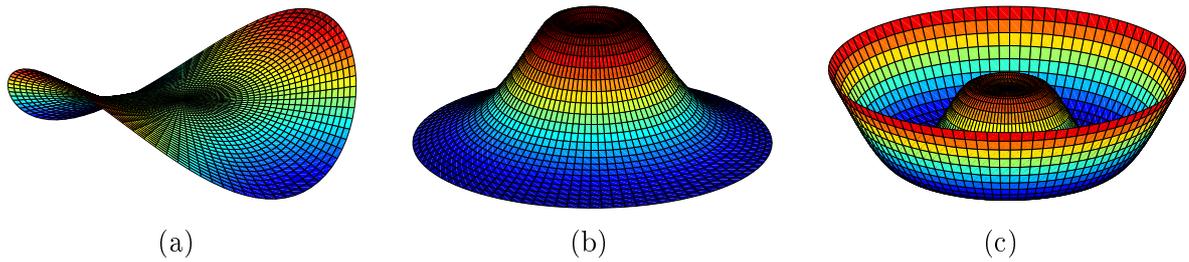


FIGURE B.3 – Déformées modales des modes  $(2,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(0,2)$  pour une imperfection de la forme d'une calotte sphérique de paramètre  $\chi = 1.881e4$  comportant une cloche de paramètre  $\tau_{cymbcloche} = 10$  et  $\tau_{a_1a_0} = 0.2$ .

sphériques composant la géométrie testée est introduit. On fait maintenant varier le rayon de la cloche depuis  $\tau_{a_1a_0} = 0$ , géométrie correspondant à une coque sphérique sans cloche de rayon  $R1 = 30$  m ( $\chi = 1.881e4$ ) jusqu'à  $\tau_{a_1a_0} = 1$ , géométrie correspondant à une coque sphérique sans cloche de rayon  $R1 = 12.39$  m ( $\chi = 6.964e4$ ). Les résultats de calcul des pulsations propres sont donnés figure B.5. On observe un évolution assez complexe des pulsations propres. Plusieurs montrent une augmentation puis une diminution entre les deux états de coques parfaitement sphériques. Les pulsations propres correspondant au rapport  $\tau_{a_1a_0}$  fixé au paragraphe précédant sont désignées par le trait intermittent bleu. La géométrie correspondant à  $\tau_{a_1a_0} = 0.5$  est présentée figure B.4(a). Les pulsations propres correspondantes sont désignées sur la figure B.5 par le trait pointillé vert. Les déformées modales des modes  $(0,1)$ ,  $(0,1)$  et  $(0,2)$  sont montrées figure B.4(b)-(d). Le mode asymétrique est légèrement modifié, son profil se montrant plus rectiligne que celui du même mode associé à une coque sphérique. Les déformées des modes  $(0,1)$  et  $(0,2)$  sont quant à elles largement modifiées. Les différences se situent principalement dans la région centrale, délimitée par le rayon de la cloche ; elles présentent une courbure inverse à celle que l'on observerait dans le cas d'une coque sphérique équivalente.

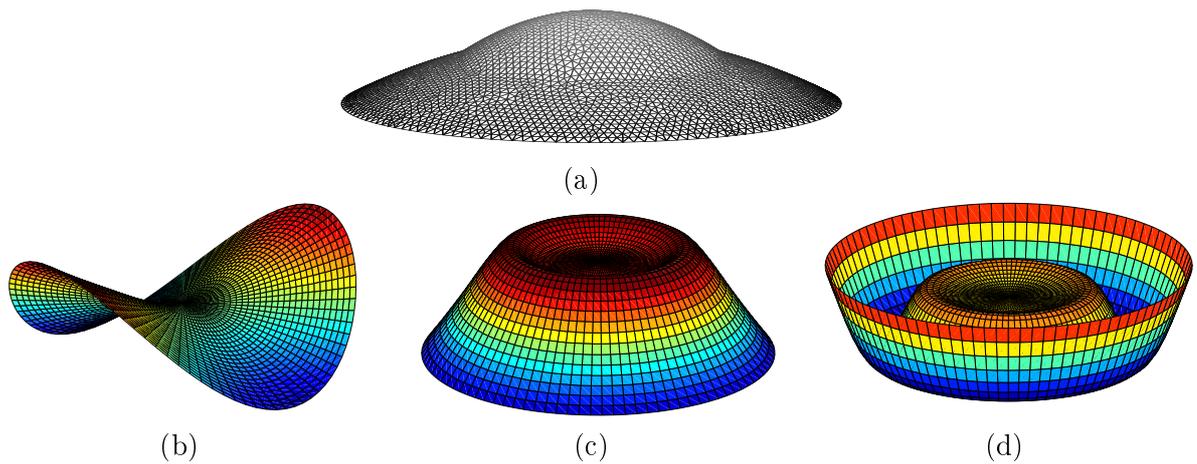


FIGURE B.4 – Géométrie tridimensionnelle d'une imperfection de la forme d'une calotte sphérique de paramètre  $\chi = 1.881e4$  comportant une cloche de paramètres  $\tau_{cymbcloche} = 2.42$  et  $\tau_{a_1a_0} = 0.5$ . Déformées modales des modes  $(2,0)$  (b),  $(0,1)$  (c) et  $(0,2)$  (d) associées.

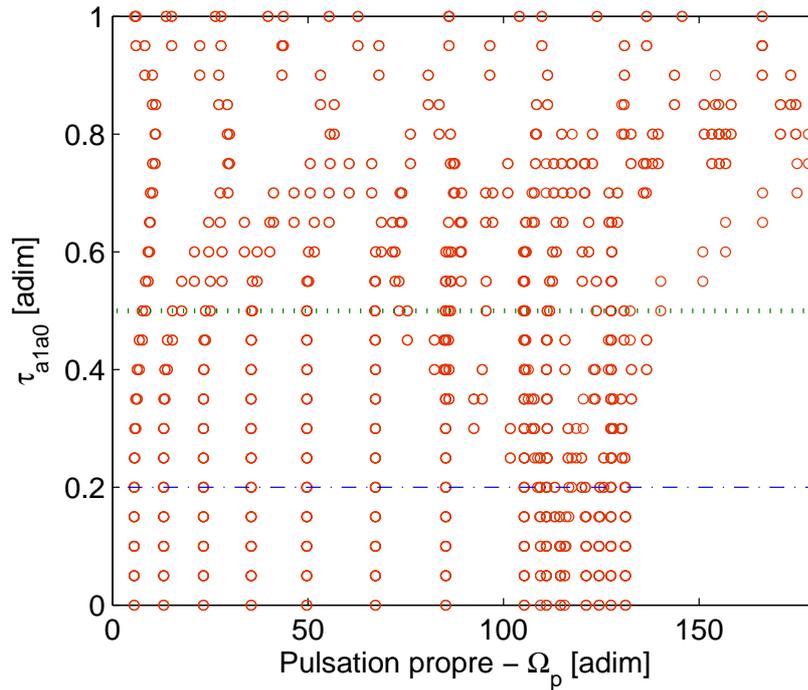


FIGURE B.5 – Pulsations propres adimensionnées de calottes sphériques comportant une cloche de paramètres  $\chi = 1.881e4$ ,  $\tau_{cymbcloche} = 2.42$  et  $\tau_{a_1 a_0}$  croissant.

### Cymbale chinoise

Une imperfection de la forme d'une cymbale chinoise (ou « china ») est introduite dans le modèle de plaque imparfaite. La forme générique que l'on adopte est définie figure B.6(a),(b). Les pulsations propres sont calculées pour une hauteur d'imperfection  $w_{m(chinoise)}$  s'échelonnant

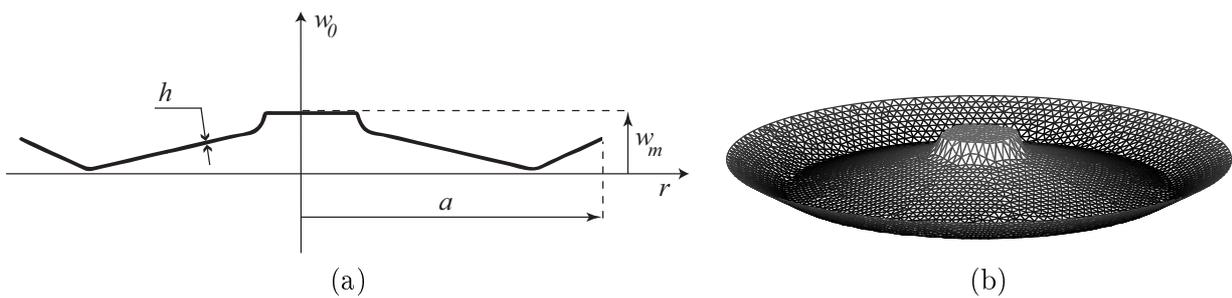


FIGURE B.6 – (a) Définition d'une imperfection correspondant à la géométrie générique d'une cymbale « china ». (b) Vue tridimensionnelle.

de 0 (plaque circulaire mince) à 10 et sont présentées figure B.7. Les déformées modales des modes (2, 0), (0, 1) et (0, 2) sont montrées figure B.8. L'influence est non négligeable sur les pulsations propres des modes asymétriques. La déformée modale du mode (2, 0), à la différence de celle d'une plaque circulaire, comporte une région centrale plane. Plus encore, la forme des modes axisymétriques (0, 1) et (0, 2) est largement modifiée, tant sur la région centrale que sur la

région circonférencielle de la coque. Le déplacement d'une bonne partie des modes propres vers les hautes pulsations contribue à expliquer le son particulier de ce type de cymbale.

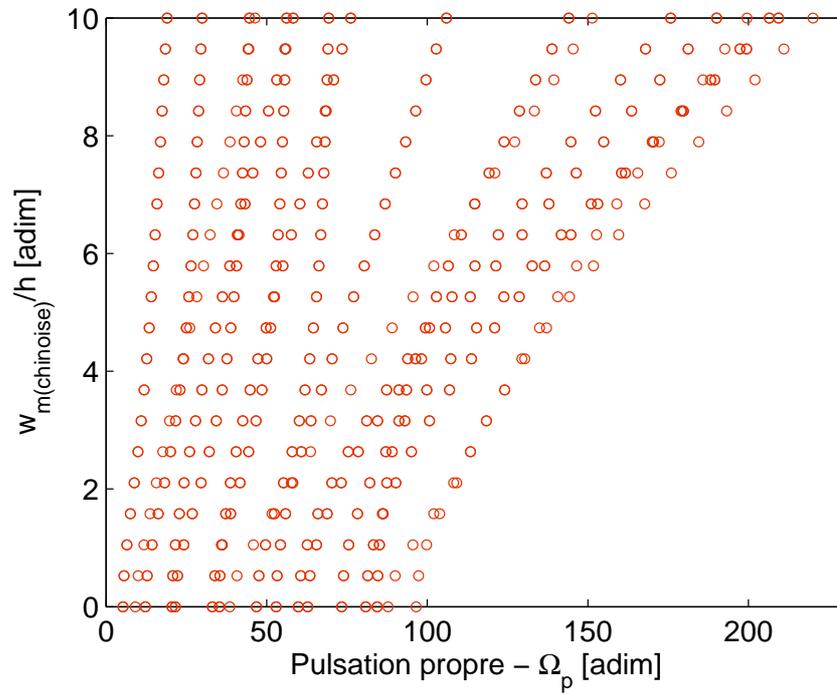


FIGURE B.7 – Pulsations propres adimensionnées de plaques circulaires minces comportant une imperfection de la forme d'une cymbale chinoise d'amplitude  $w_{m(\text{chinoise})}$  croissante.

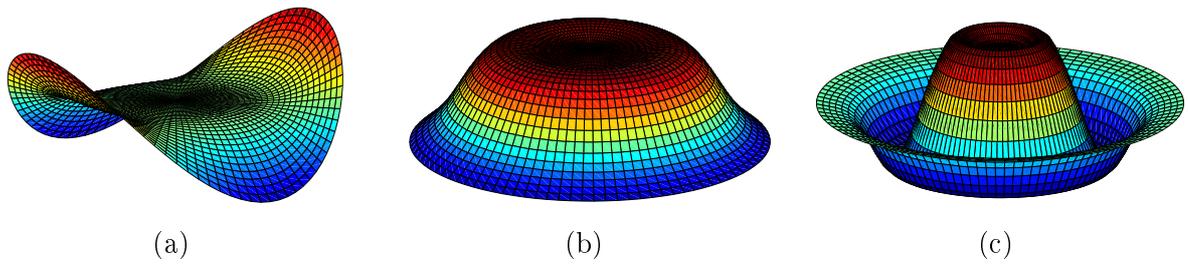


FIGURE B.8 – Déformées modales des modes  $(2,0)$ ,  $(0,1)$  et  $(0,2)$  pour une imperfection de la forme d'une cymbale chinoise paramétrée par  $w_{m\text{chinoise}} = 10 h$ .



## — *Remerciements* —

---

Je ne saurais traduire en quelques lignes l'ampleur du sentiment de gratitude que j'ai envers mon directeur de thèse, Cyril Touzé. Après une simple rencontre préalable, Cyril m'a accueilli comme premier thésard en m'accordant immédiatement et sans retenu sa confiance et son soutien. Le soupçonnant mais sans en mesurer la portée, je gagnais il y a 3 ans un guide plein d'entrain, d'une culture abondante, foncièrement bienveillant, et d'une honnêteté et d'une pertinence qui dénotent une grande finesse de jugement et de propos dans les relations humaines qu'il entretient. Plusieurs périodes n'ont pas été faciles au cours de ma thèse mais j'ai toujours pu compter sur lui pour me donner de bons élans de motivation et parfois un peu de relativité. Outre le vaste et passionnant contenu scientifique que j'en ai tiré, nos nombreux entretiens m'ont réappris les notions de clarté et de patience et ont ébranlé l'élève désordonné et confus que j'étais. C'est ainsi réellement grandi mais un peu triste que je quitte aujourd'hui son sillage.

L'intelligence sociale et scientifique aimant réunir ses prophètes, son estimé compère Olivier Thomas a également été une ressource essentielle à mon travail de thèse. Sa sympathie et sa bonhomie flirtent avec une acuité et une efficacité éclatante, son humilité et sa simplicité contribuant, qui plus est, à le rendre grand pédagogue. Je m'accrochais cependant pour suivre la cadence soutenue des pages d'équations qui défilaient sous sa plume. J'espère que mes incompréhensions, mises en lumière par son exigence, ne l'ont pas trop exaspéré et je lui suis sincèrement reconnaissant de m'avoir offert tout ce temps pendant lequel j'ai profité de ses grandes qualités.

Aux côtés de ces deux mentors, j'ai énormément appris, en science comme plus généralement dans la recherche. Le sujet ardu sur lequel je m'étais engagé sans vraiment l'appréhender m'a à chaque instant passionné. C'est aussi grâce à eux.

Je dois également un bon lot d'enthousiasme et de savoir faire à Stefan Bilbao. Nos discussions, dès les premières fois, ont été prolifiques et enjouées. La semaine passée à Edimbourg a été fructueuse de résultats scientifiques et de moments délicieux, révélant de vraies affinités. Sa liberté d'esprit, sa curiosité et son ardeur resteront pour moi exemplaires.

Placé sous le haut patronage d'Antoine Chaigne, ma thèse a bénéficié de la liberté et du support permettant ces rencontres. Grâce à lui, l'environnement du laboratoire était celui d'une ambiance sereine au sein de laquelle j'étais régulièrement invité à participer aux activités variées qui constituent également la vie du chercheur. Je dois également à Ziad Moumni d'avoir pu aller jusqu'au bout de ma thèse sans encombre.

Le présent manuscrit, dans sa forme actuelle, a été lu et rapporté par Jean-Claude Golinval et Bruno Cochelin. Leurs rapports critiques, élogieux et surtout très pertinents ont prouvé le soin avec lequel ils ont scruté cet écrit. En outre, l'attention et l'intérêt manifestes avec lesquels ces rapporteurs ainsi que mes examinateurs, Joël Frelat, Francis Collino et Emmanuel De Langre m'ont lu et ensuite écouté ont produit d'excellentes questions lors de ma soutenance, dont l'honnêteté était visible, de même que leur sympathie.

Toujours concernant la rédaction de cet ouvrage, j'aimerais mettre ici en exergue le travail méticuleux de mon père qui a su corriger avec une concentration et une précision de moine co-

piste l'orthographe de l'ensemble de ces pages, travail d'autant plus méritant et admirable que ces dernières lui paraissaient charabiesques et pleines d'un vocabulaire pour le moins exotique. De formation plus orientée vers mon domaine, Nicolas Leroy et Jérémie Patin avaient apportés corrections et suggestions en cours de ma rédaction et l'avaient fait promptement, sans en démordre. Ces aides m'ont été très précieuses.

Ma présentation orale s'est vue quand à elle magnifiée grâce à Camille Perrot. Ses facultés d'analyse et d'abstraction ont sublimé mon argumentation recluse aux détails et m'ont aiguillé jusqu'au dernier transparent. Comme promis, je le lui dédie.

Une partie de l'étude décrite s'appuie sur les résultats de Gaël Favraud. Son intervention sur le sujet a été l'occasion d'échanges francs, productifs et d'une grande efficacité. La confrontation expérimentale a pu être faite grâce aux mesures précises et rapides de Pierre Breteau, François Thiebaut et Olivier de Smet, qui ont accueilli ma demande sans la moindre hésitation.

Mes prochains mots seront pour les compagnons de labeur avec qui, finalement, on partage beaucoup : Nico Q et son flegme épatant, qui m'a pas mal aidé lorsqu'il ne tripatoillait avec moi du potar de Vjing ou du filtre bruitiste molutronique. Kevin, compagnon de galère avec qui nous avons, au fil de cette longue marche, égrainé nos plaintes, nos réconforts, nos désarrois et nos victoires, partageant de fait effusions de sarcasme ou d'euphorie. Olivier D dont la liberté de ton, l'oreille bien affûtée et les notes héroïques vont me manquer. Samuel, tout en fraîcheur et en rayonnante jovialité. Lionel et sa clairvoyance, que j'aurais kiffé à côtoyer plus longtemps (lol), de même que Romain P. et son amour inavoué pour Pierre Bachelet. Virginie avec qui j'ai eu le grand plaisir de partager un bureau mais aussi beaucoup de goûts et de réflexions. Karine B et ses remarques ciselés, réconfortantes, pleines d'humour. Nico B et ses histoires folles et furieuses. Thierry et son aura zen toute sympathique. Olivier C, Romain M, Vladimir P, Sylvain S, Jonathan B, Francisco D, Régine T, Lahcene C.

Je n'aurais pu m'investir dans ce travail de longue haleine sans l'émulation de ceux qui ont, pendant cette période, fait danser ma vie sur des airs de fête et d'amitié : Pierre P, proche confident dont la mesure raisonnée n'a d'égale que la précision chirurgicale de ses citations cinématographiques. François H, fidèle compère au bras long, miroir d'aventures et mahatma des temps modernes. Nicolas L avec qui les expérimentations rythmiques et métriques, suintantes d'énergie, prennent un plaisir sans nom. Amragöl, qui tout comme chacun de ses membres, est une allégorie de libre folie. Camille et Ilia, de sincérité et de passion si enivrantes. Mon amie Anne et son collectionneur Yann, brillants et courageux. Loulou, bastion respecté du Positionnisme. Pipouz, à la langue savante et incontrôlée. Mathilde C et sa sollicitude toujours aussi forte et entière. Ben D et sa logorrhée Bearienne. Nicolass V et Pierre L dont nos relations, malgré la distance, restent fusionnels et parfumés aux subtils arômes de Chimay bleu et de frites fraîches.

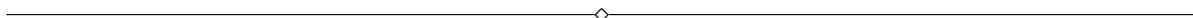
Ce qu'il m'a été permis de faire et d'être ces dernières années résultent bien évidemment de l'appui affectueux, et à la portée inquantifiable, de mon père, de ma mère et de ma sœur, qui ont consenti à laisser passer mes absences répétés et à me conforter dans mes choix. Je leur suis par ailleurs extrêmement reconnaissant d'avoir pu et de pouvoir encore compter sur eux à tout moment. J'ai également une pensée particulière pour les parents de Marianne, les talentueux Jacqueline et Bernard Mondon et pour leur gentillesse et leur générosité infinies.

Mon dernier mot sera pour Marianne qui m'a offert un soutien inconditionnel en essayant

les affres de mon stress avec douceur, qui me prouve une compréhension certaine en me suivant chaque jour dans mes frasques et qui me livre toute sa confiance en épousant de grandes décisions.

Pour les raisons évoquées et tous ces traits que j'honore, j'adresse à ces personnes mes sincères remerciements. Au plaisir procuré s'ajoute une impression de chance et même de fierté de les avoir comptés parmi mon entourage ou mes proches au cours de cette période de doctorat, tout au moins.

Le mot est faible et ne restitue que peu tous les aspects du sentiment qu'il contient lorsque je l'écris mais je leur dis à nouveau merci.







## Résumé

En mode normal de jeu, les instruments de percussion de la famille des gongs et des cymbales sont soumis à de fortes sollicitations qui imposent à ces structures minces un mouvement de grande amplitude (non-linéarité géométrique), siège d'une phénoménologie complexe : dépendance des fréquences avec l'amplitude, sauts, hystérésis, transferts d'énergie entre modes, vibrations chaotiques. Dans le but de raffiner la modélisation de ces comportements, le premier point de ces travaux se concentre sur l'influence d'imperfections géométriques. Le modèle de vibration de plaque circulaire parfaite (von Kármán), en condition de bord libre, a ainsi été modifié de manière à pouvoir formuler analytiquement les nouveaux termes linéaires et non-linéaires. L'étude s'enrichit d'une analyse détaillée de l'influence de défauts de forme typiques décrivant l'effet drastique d'imperfections d'amplitude très petite sur les caractéristiques vibratoires (fréquences propres et tendances de non-linéarité notamment). Le modèle est confronté à des analyses expérimentales effectuées sur des coques de laboratoire. La comparaison offre d'excellents résultats alors que les études minutieuses de convergence révèlent l'influence d'autres types d'imperfections au sein des coques testées. Le second point a trait à l'étude numérique de la transition vers le chaos, observée lorsqu'une cymbale est excitée harmoniquement avec une force d'amplitude croissante. Les travaux menés ont abouti à la définition d'un schéma numérique conservant l'énergie, adapté à la formulation modale de la dynamique de la plaque imparfaite. Une étude complète des performances d'une large panoplie d'intégrateurs temporels, incluant le schéma développé, a été menée avec succès sur un oscillateur de Duffing ; elle révèle que les états limites trouvés par certains intégrateurs, aux temps longs et pour des régimes très fortement non-linéaires, diffèrent qualitativement de ceux obtenus par les schémas structurellement conservatifs. L'extension au cas à plusieurs degrés de liberté est entamée.

**Mots-clés :** Vibrations non-linéaires, non-linéarité géométrique, plaques et coques circulaires minces, défaut de forme, problème numériquement raide, formulation Hamiltonienne, schémas conservatifs.

## Abstract

In their normal use, cymbals are subjected to strong excitations which induce large vibratory displacements. Typical features of the nonlinear behavior observed are amplitude-dependant level of harmonics in the spectrum, pitch glide, bifurcations, intermodal exchanges of energy and chaos. In order to model these behaviors, the first part of this study is devoted to the influence of geometric imperfections on the nonlinear vibrations of free-edge circular plates. The dynamic analog of the von Kármán equations is used to derive the imperfect plate equations of motion as well as the associated nonlinear coupling coefficients. The drastic influence of small typical imperfections is detailed and comparisons with experimental studies on real shells show excellent agreements. Refined convergence studies reveal the influence of other kind of imperfections into the shells. The second part of this work deals with the vibrations of cymbals subjected to a harmonic excitation. Particularly, transition from periodic to chaotic motion is observed experimentally when increasing the amplitude of the external forcing. The present work aims at reproducing this phenomenon numerically. An energy-preserving numerical integrator adapted to the modal formulation has been developed. A large range of numerical integrators, including the previous one, has been successfully tested on Duffing oscillators. It is shown that the converged solutions computed with some integrators for highly nonlinear motions are qualitatively different from results computed with structure-preserving algorithms. The extension to the case of several degrees of freedom is initiated.

**Keywords :** Geometrically non-linear vibrations, thin circular plates and shells, geometric imperfections, stiff numerical problem, Hamiltonian formulation, energy preserving algorithm.

