



HAL
open science

A new approach for periodic structures. Application to the calculation of tire vibrations.

Hong-Hai Nguyen

► **To cite this version:**

Hong-Hai Nguyen. A new approach for periodic structures. Application to the calculation of tire vibrations.. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2008. English. NNT: . pastel-00005240

HAL Id: pastel-00005240

<https://pastel.hal.science/pastel-00005240>

Submitted on 24 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE
L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES**

Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures

Présentée par :

Hong-Hai NGUYEN

Titre :

**Une nouvelle approche pour structures périodiques.
Application au calcul des vibrations d'un pneumatique**

Soutenue le 12 décembre 2008

Devant le jury composé par :

Zhi-Qiang FENG	Président
Michel BERENGIER	Rapporteur
Mohamed ICHCHOU	Rapporteur
Silvano ERLICHER	Examineur
Denis DUHAMEL	Directeur de thèse

À ma femme, à ma famille

À tous ceux qui me sont chers

Remerciements

J'exprime toute ma profonde reconnaissance à Denis Duhamel, mon directeur de thèse, le directeur de l'Équipe Dynamique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique, et qui, par son expérience et sa compétence, m'a transmis, au fur et à mesure, sa passion pour la Dynamique des Structures. Il m'a laissé une grande liberté dans la recherche, mais a été toujours disponible pour mes questions. Sans lui, cette thèse n'aurait certainement jamais vu le jour.

Encore merci Silvano pour avoir encadré cette thèse. J'ai pu bénéficier de tes conseils et commentaires toujours constructifs, et qui ont permis de faire avancer les résultats plus loin que je ne l'imaginais.

Je suis très reconnaissant envers Zhi-Qiang Feng d'avoir accepté de présider le jury. Michel Bérengier et Mohamed Ichchou ont accepté la laborieuse tâche de rapporteur : je ne saurais que trop les remercier du temps et de l'attention qu'ils ont consacrés à la lecture de ce manuscrit.

Un grand merci à toute l'équipe du LAMI, techniciens, permanents et doctorants. Je remercie la patience de Tiffany et Sylvain dans la correction du français de ma thèse. Merci à Duc pour les aides dans les manips. Merci aussi tous les autres doctorants pour les pauses, les restos, l'ambiance, le soutien, ... Je voudrais adresser un merci à Marie qui m'a toujours aidé lorsqu'elle pouvait.

J'exprime enfin ma gratitude à ma famille et à ma femme, le courant d'eau de l'automne, qui étaient toujours à côté de moi aux moments difficiles et qui partagent la vie avec moi.

Résumé

Une nouvelle approche pour structures périodiques. Application au calcul des vibrations d'un pneumatique

Ce travail de thèse propose une approche dynamique pour les structures périodiques et l'application à la modélisation d'un pneumatique. Les propriétés statiques et dynamiques des matériaux constitutifs du pneu sont mesurées. Des modèles spécifiques d'homogénéisation sont aussi utilisés pour déterminer les caractéristiques équivalentes. Les fonctions de réponse en fréquence sont mesurées à plusieurs endroits sur le pneumatique dans les deux cas de force d'excitation : sur la bande de roulement et sur le flanc.

La théorie dynamique utilisant la périodicité des structures est présentée. On propose une transformation en repère cartésien pour les structures ayant la périodicité dans un repère non-cartésien. L'utilisation de cette transformation dans le pneumatique assure les conditions de périodicité dans l'exploitation des matrices des cellules. Les mobilités à plusieurs points du pneu sont calculées et comparées avec les mesures. Ce travail permet d'une part l'étude dynamique d'un pneumatique à haute fréquence et d'autre part l'étude paramétrique de l'influence des propriétés de matériaux et de la pression interne dans le pneu.

Mots clés pneumatique - vibration - comportement dynamique - amortissement
homogénéisation - FRF - périodique - guide d'onde

Abstract

A new approach for periodic structures. Application to the calculation of tire vibrations

This work gives a dynamical approach for periodic structures and the application to tire modellings. The static and dynamic properties of the constitutive materials of the tire have been measured. Some specific models of homogenization have been used to determinate the mechanical equivalent characteristics. The frequency response functions have been measured at several points on the tire in two cases of excitation force : on the tread belt and on the sidewalls.

The dynamical theory of periodic structures is presented. A transformation into the cartesian reference system of the structures having the periodicity in the non-cartesian reference system has been suggested. The utilization of transformation in the case of tire ensures periodic conditions in the exploitation of the matrices of cells. The mobilities at several points of the tire have been calculated and compared with the measurement. This work allows in one side the dynamical studies of tire in the high frequency range and in the other side a parametrical study of the influence of the material properties and the tire inflation pressure.

Keywords tire - vibration - dynamical behavior - damping
homogenization - FRF - periodic - waveguide

Table des matières

Introduction générale	ix
I. Études bibliographiques	1
1. Description des pneumatiques : Géométrie et matériaux	2
2. Modélisation du pneumatique. Méthodes et résultats existants	5
3. Structure guide d'onde et structure périodique	10
4. Conclusion et perspectives	15
II. Propriétés statiques des matériaux constituant du pneumatique	17
1. Généralités	19
2. Caoutchouc	20
3. Couche élémentaire dans le pneu	23
4. Revêtement intérieur	31
5. Flanc	33
6. Bande de roulement	33
7. Conclusion	36
III. Propriétés dynamiques des matériaux constituant du pneumatique	37
1. Comportement dynamique des matériaux viscoélastiques	39
2. Principe d'analyse dynamique	50
3. Essais de relaxation	54
4. Vibration d'une poutre	61
5. Une application dans le calcul de l'aire de contact en fonction de la vitesse	70
6. Synthèse sur les matériaux	71
IV. Mesure des fonctions de réponse en fréquence d'un pneumatique	73
1. Objectifs de la mesure	75
2. Dispositif de mesure	75
3. Erreurs et approximations de la chaîne de mesure	79
4. Premier essai	80
5. Mesures avec le pot vibrant : Pneu sans pression interne	85
6. Mesures avec le pot vibrant : Pneu avec pression interne	87
7. Identification sommaire des types de modes : bande de roulement et section	92
8. Conclusion	96
V. Structures périodiques	99
1. Généralités sur la vibration des structures	100
2. Théorie de la vibration des structures périodiques unidimensionnelles	104
3. Transformation des matrices dans un repère spécifié	110
4. Application à une poutre sollicitée par une force ponctuelle	115
5. Conclusion	117
VI. Modèle numérique périodique pour le pneumatique	119
1. Pneumatique de section homogène	120
2. Pneumatique de section réelle	123
3. Comparaison avec des mesures	128
4. Etudes paramétriques : Sensibilité aux propriétés des matériaux	130

5. Conclusions	133
Conclusion générale et Perspectives	135
Annexe	137
A. Traction d'une couche composite. Modules d'Young et coefficients de Poisson apparents	137
B. Transformation de Laplace et transformation de Fourier	141
C. Estimation des erreurs en fonction de la discrétisation en fréquence	141
Bibliographie	143

Table des figures

I.1.	Procédure de fabrication des pneus	2
I.2.	Forces et moments agissant au centre de la zone de contact et fonctions de conception des pneus (Society of Automotive Engineers, Inc.)	3
I.3.	Paramètres de conception et nomenclature du pneu	4
I.4.	Type de pneu correspondant avec la configuration du sol	4
I.5.	Modèle du pneumatique : plaque orthotrope sur la fondation élastique [1]	6
I.6.	Modèle du pneumatique : plaques orthotropes en traction plane [2]	6
I.7.	Configuration du pneu P195/60R14 [3]	7
I.8.	Cinq premiers modes calculés pour le pneu lisse P195/60R14 [3]	8
I.9.	Calcul des relations entre les paramètres dans le modèle de lien-graphe [4]	8
I.10.	Géométrie des flancs et modélisation de l'effet de roulement [5, 6]	9
I.11.	Structures à symétrie unidimensionnelle : a) symétrie de rotation, b) symétrie de translation, c) périodicité	10
I.12.	Forces et déplacements à gauche et à droite d'une cellule	12
I.13.	Méthode de projection orthogonale	13
I.14.	Schéma d'une structure périodique bidimensionnelle. La charge ponctuelle est appliquée à la position de la flèche.	14
I.15.	Multicouplage des structures périodiques. Une application pour la charpente métallique	15
II.1.	Composants d'un pneu	19
II.2.	Contact bille-caoutchouc	20
II.3.	Évolution de la force en fonction de l'interpénétration dans le contact sphère-caoutchouc	21
II.4.	Dispositif des essais de contact pour déterminer le module élastique du caoutchouc	22
II.5.	Module d'Young du caoutchouc calculé par la loi de contact de Hertz : à la gomme et au flanc	22
II.6.	Module d'Young du caoutchouc calculé par la loi de contact de Hertz : à l'intérieur	23
II.7.	Vis de serrage et module élastique du fil d'acier dans la couche élémentaire	24
II.8.	Module élastique du câble de trois fils dans la couche élémentaire	25
II.9.	Dispositifs des essais de E_L, ν_{LT} (10KN) et E_T, G_{LT} (2KN)	26
II.10.	Module élastique longitudinal E_L et le coefficient de Poisson dans la couche élémentaire	26
II.11.	Module élastique transversal E_T dans la couche élémentaire	27
II.12.	Module élastique E_1 à l'angle 45°	29
II.13.	Modules élastiques longitudinal E_L et transversal E_T de la couche de revêtement intérieur	32
II.14.	Module élastique transversal E_T du flanc	33
II.15.	Constitution de la macro couche	34
II.16.	Modules élastiques de la bande de roulement	35
III.1.	Modèle de Kelvin-Voigt pour les matériaux viscoélastiques [7]	39
III.2.	Viscosité dynamique complexe d'un polymère à température donnée [8]	39
III.3.	Trois modèles d'amortissement, les aires hachurées indiquent l'énergie dissipée par cycle [9]	40
III.4.	Fonction de relaxation dans le domaine temporel	41
III.5.	Valeur absolue et angle de phase du module complexe d'un PVC-Carbonate calcium [10]	43
III.6.	Présentation de la partie réelle du module d'Young complexe et du facteur de perte en fonction de la fréquence [11]	44

III.7. Rigidité dynamique apparente et facteur de perte dépendant des conditions aux bords : ○ : simplement supportée; □ : encastrement-libre; △ : libre - libre [12]	44
III.10 Modules de stockage et de perte d'un sandwich acier-polymère-acier en fonction de la déformation-fréquence réduite $f_\epsilon = f\alpha_\epsilon$: Superposition des résultats des essais effectués à plusieurs déformations. Les petits nombres indiquent les déformations correspondantes[14]	44
III.8. Dépendance du module statique d'un caoutchouc naturel à 46% de carbone en fonction de la réduction relative $\lambda_s = \frac{l_s}{l_0}$ [13]	45
III.9. Modules de stockage et de perte d'un caoutchouc naturel en fonction de la réduction relative $\lambda_s = \frac{l_s}{l_0}$ et de la fréquence [13]	45
III.11 Modules de stockage et de perte d'un sandwich acier-polymère-acier en fonction de la température-fréquence réduite $f_T = f\alpha_T$: Superposition des résultats des essais effectués à plusieurs températures. Les petits nombres indiquent les températures cor- respondantes [14]	45
III.12 Module élastique d'un mélange de phases des polymères-composites [8]	46
III.13 Module complexe obtenu par la transformation de Fourier de la fonction de relaxation	47
III.14 Présentation de la relation modules-fréquence réduite	48
III.15 Amortissement d'un composite en fibre de verre [15] présenté en pourcentage, θ est l'angle d'orientation des fibres	49
III.16 Processus d'analyse dynamique d'une structure	51
III.17 Combinaison des impédances en parallèle	53
III.18 Combinaison des impédances en série	54
III.19 Forme de la partie réelle et de la partie imaginaire du module complexe	54
III.20 Essai de relaxation en temps réel	55
III.21 Résultat de l'essai de relaxation du E_T	56
III.22 Fonction de relaxation identifiée pour la direction T	56
III.23 Déformations dans les essais de relaxation pour la bande de roulement	57
III.24 Identification des fonctions de relaxation pour la bande de roulement	58
III.25 Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction T	59
III.26 Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction x	59
III.27 Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction y	59
III.28 Variation des fonctions de base de la partie réelle du E_x	60
III.29 Déformation dans le domaine fréquentiel	60
III.30 Module complexe du caoutchouc dans le domaine fréquentiel	61
III.31 Schéma général du dispositif des essais dynamiques	62
III.32 Vibration d'une barre avec 2 masses aux extrémités	62
III.33 Racines positives de l'équation $\cot \varphi = \frac{M}{m} \varphi$ [16]	64
III.34 Schéma de l'essai dynamique du module E_T	64
III.35 Schéma de l'impédance équivalente	65
III.36 Modules complexes et amortissements calculés par l'Eq. (III.97)	67
III.37 Constitution de la bande de roulement	68
III.38 Module complexe dans deux directions x, y mesuré par PULSE, calculé par les données de l'essai de relaxation et estimé à partir du modèle multi-couche	69
III.39 Module élastique à plusieurs déformations dynamiques d'un élastomère [17]	69
III.40 Modélisation du contact pneu-chaussée dans ANSYS [18]	70
III.41 Contrainte verticale statique dans le problème de contact pneu-chaussée	71
IV.1. Principe de mesure des signaux dynamiques	76
IV.2. Marteau utilisé pour la génération des vibrations	76
IV.3. Amplificateur de type 2647A	76
IV.4. Etalonneur de type 4294 et accéléromètre de type 4374	77
IV.5. Exemple de fixation de câbles d'accéléromètres	77
IV.6. Conditionneur ENDEVCO 133 pour les accéléromètres	78

IV.7. Boîte portable d'acquisition des données de type 3560-C	78
IV.8. Schéma de mesure des fonctions de réponse en fréquence dans le cas d'un pneumatique.	78
IV.9. Forme générale de l'inertance en fonction de la fréquence	79
IV.10 Positions de la force et des accéléromètres dans l'essai de vibration pneumatique. Les dimensions sont en mm	80
IV.11 Dispositifs de l'essai de vibration de la poutre en aluminium. Les dimensions sont en mm	80
IV.12 Amplitude au niveau de l'accéléromètre 1 dans la mesure de vibration d'une poutre en aluminium	81
IV.13 Phase au niveau de l'accéléromètre 1 dans la mesure de vibration d'une poutre en aluminium	81
IV.14 Signaux temporels de la force et de l'accéléromètre 2 - schéma de mesure le long du contour du pneumatique	82
IV.15 Mobilités mesurées d'un pneu Michelin le long du contour. Position 1 : en trait - -, position 2 : continu -	83
IV.16 Configurations de mesure avec pot vibrant/accéléromètres	85
IV.17 Amplitudes des mobilités mesurées sur la bande de roulement. Pot collé sur la bande de roulement d'un pneu non gonflé	86
IV.18 Amplitudes des mobilités mesurées dans la section. Pot collé sur la bande de roulement d'un pneu non gonflé	86
IV.19 Configuration de mesure dans le cas où le pot vibrant est collé sur le flanc	87
IV.20 Amplitudes des mobilités mesurées sur la bande de roulement. Pot collé sur le flanc d'un pneu non gonflé	87
IV.21 Amplitudes des mobilités mesurées dans la section. Pot collé sur le flanc d'un pneu non gonflé	88
IV.22 Vérification de la symétrie. Deux accéléromètres sont symétriques par rapport à l'axe radial de la force. Ils font avec cet axe des angles $\pm 45^\circ$	88
IV.23 Amplitudes de mobilité sur le contour, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement	89
IV.24 Phases de mobilité sur le contour, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement	89
IV.25 Amplitudes de mobilité dans la section, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement	90
IV.26 Phases de mobilité dans la section, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement	90
IV.27 Amplitudes de mobilité sur le contour du pneu, obtenues par une force au flanc. Courbes séparées	91
IV.28 Phases de mobilité sur le contour du pneu, obtenues par une force au flanc	91
IV.29 Amplitudes des mobilités mesurées dans la section transversale, obtenues par une force au flanc	92
IV.30 Phases des mobilités mesurées dans la section transversale, obtenues par une force au flanc	93
IV.31 Mode de vibration de la bande de roulement à 82Hz	93
IV.32 Mode de vibration de la bande de roulement à 98Hz	94
IV.33 Mode de vibration de la bande de roulement à 114Hz	94
IV.34 Mode de vibration de la section à 32Hz	95
IV.35 Mode de vibration de la section à 82Hz	95
IV.36 Mode de vibration de la section à 98Hz	95
IV.37 Mode de vibration de la section à 116Hz	96
IV.38 Modes propres de la bande de roulement identifiés par PULSE	96
IV.39 Modes propres de la section transversale identifiés par PULSE	97
V.1. Problème dynamique dans un milieu continu	100
V.2. Ondes de compression et ondes de cisaillement	102

V.3. Ondes planes se propageant dans un milieu 3D	103
V.4. Structure périodique. Une cellule avec les vecteurs des forces, des déplacements à gauche et à droite	105
V.5. Structure à N cellules	108
V.6. Transformation géométrique d'un élément à un repère référentiel	110
V.7. Algorithme de transformation géométrique d'une cellule	111
V.8. Rotation d'un noeud à la section de base	111
V.9. Algorithme d'élimination de ddls d'une partie périodique de N cellules	114
V.10.Exemple de poutre : (a)poutre encastée-simplement supportée de longueur L sollicitée par une force F à 2/3L; (b) élément de la poutre	116
V.11.Comparaison de la solution périodique, de la solution de matrice équivalente dans le cas de 1000 cellules et de la solution analytique	117
VI.1. Modèle du pneumatique et une cellule élémentaire	120
VI.2.Processus de modélisation périodique	121
VI.3.Comparaison du calcul fait par ANSYS avec solution périodique et la solution par la technique d'élimination des ddls d'un point au sommet de la bande de roulement	122
VI.4. Comparaison des solutions obtenues par MATLAB dans les cas de cellules de 2°, 4°, 8° avec un point au sommet de la bande de roulement	122
VI.5. Géométrie et distribution de matériaux dans la section du pneumatique modélisé	123
VI.6. Modélisation avec la symétrie cyclique d'une cellule et du pneu total	123
VI.7. Résultats des modes propres du pneu gonflé modélisé dans ANSYS	124
VI.8. Comparaison des mobilités ponctuelles au point d'application de la force, calculées par le modèle périodique et par ANSYS dans le cas sans pression interne	125
VI.9. Etats non déformés, déplacement total et contrainte radiale avec la pression interne de la cellule	126
VI.10Comparaison des mobilités calculées par ANSYS et par la solution périodique d'un cercle. Validation de l'algorithme avec la rigidité géométrique	128
VI.11Comparaison des mobilités calculées par la méthode périodique et par la méthode de superposition modale dans ANSYS	129
VI.12Comparaison des mobilités mesurées et calculées par la méthode périodique. Cas sans pression	129
VI.13Comparaison des mobilités mesurées et calculées par la méthode périodique. Cas avec pression	130
VI.14Sensibilité des modules élastiques du caoutchouc constituant le pneu	131
VI.15Amplitude de la mobilité calculée au point 1 de la section pour plusieurs amortissements. Force radiale au sommet	132
VI.16Amplitude de la mobilité calculée au point d'application de la force pour plusieurs amortissements. Force radiale au sommet	132
VI.17Amplitude de la mobilité calculée au point 1 de la section à plusieurs pressions. Force radiale au sommet	133
VI.18Amplitude de la mobilité calculée à la force à plusieurs pressions. Force radiale au sommet	133
VI.19Influence des rainures sur la mobilité ponctuelle	134
A.1. Traction d'une éprouvette composite et convention des signes des efforts internes	137
A.2. Rotation des coordonnées autour de l'axe e_z	140
A.3. Convention des côtes supérieurs et inférieurs des couches d'un empilement	140
C.4. Erreur de détermination de l'amortissement par la méthode de largeur de bande	142

Liste des tableaux

II.1. Valeurs mesurées du module d'Young du caoutchouc de pneu	22
II.2. Fractions volumiques de l'acier et du caoutchouc dans la couche élémentaire	23
II.3. Convergence des valeurs mesurées du module d'Young apparent du câble	24
II.4. Valeurs mesurées du module élastique longitudinal E_L	27
II.5. Valeurs mesurées du coefficient de Poisson ν_{LT}	27
II.6. Valeurs mesurées du module de "traction à 45°" E_1	28
II.7. Synthèse des mesures des propriétés mécaniques de la couche élémentaire	30
II.8. Propriétés mécaniques des nylons et polyesters	31
II.9. Propriétés mécaniques de la couche intérieure du pneu	32
II.10. Propriétés mécaniques du flanc	33
II.11. Dimensions des éprouvettes pour les essais d'identification des modules E_x, E_y	34
II.12. Résultats de mesures pour le module élastique dans la direction y de la bande de roulement	35
II.13. Synthèse des propriétés mécaniques de la bande de roulement	35
II.14. Synthèse des propriétés mécaniques	36
III.1. Réponses complexes et réponses inverses associées	51
III.2. Relation entre la réceptance, la mobilité et l'inertance	52
III.3. Impédances mécaniques des éléments simples	53
III.4. Amplitudes et temps caractéristiques identifiés pour les fonctions de relaxation	57
III.5. Module complexe calculé à plusieurs fréquences à partir de la mesure de PULSE	66
III.6. Comparaison des valeurs du module E_T dans deux cas $M = 324.4g$ et $M = 92g$. Différents calculs par les méthodes mentionnées	66
III.7. Valeurs de $\Re[E]$ et des amortissements mesurés par PULSE suivant la direction x	68
III.8. Comparaison de l'aire de contact pneu-chaussée à plusieurs vitesses de roulement. Unité : cm^2	70
III.9. Synthèse des propriétés mécaniques utilisées dans les problèmes dynamiques	72
IV.1. Essai de vibration d'une poutre en aluminium : Amortissements aux fréquences de résonances mesurés par PULSE	81
IV.2. Amortissements aux fréquences de résonances mesurés par PULSE	83
IV.3. Mesures associées à plusieurs configurations marteau/accéléromètre	84
IV.4. Formes modales de la bande de roulement associées aux fréquences propres	94
V.1. Valeurs du nombre d'ondes k dans les ondes longitudinales et transversales	103
V.2. Unités des grandeurs	115
VI.1. Propriétés physiques et géométriques du pneumatique	120
VI.2. Propriétés mécaniques introduites dans ANSYS	123
VI.3. Comparaison des modes propres identifiés avec PULSE et calculés avec ANSYS	124
A.1. Modules et coefficients de Poisson apparents	140

Introduction générale

Durant les dernières décennies, les transports routiers se sont beaucoup développés. Les vibrations induisent chez les êtres humains des phénomènes désagréables et indésirables comme des gênes, des nuisances sonores et de la fatigue. Beaucoup de recherches sont réalisées pour contrôler et pour diminuer les influences non souhaitables de ces phénomènes.

Dans la conception des véhicules, le contrôle des roues est un des facteurs importants. Le caoutchouc et la pression de l'air interne assurent une bonne adhérence pneu-chaussée et font diminuer l'influence dynamique. L'optimisation de la conception a posé des thèmes de recherche spécifiques aux grandes entreprises comme Michelin ou Dunlop. Selon le but d'utilisation, divers types de pneu ont été proposés.

Actuellement, la vibration des pneumatiques est une source principale de bruit dans les transports à plus de 50km/h. Cela engendre des bruits intérieurs qui gênent les voyageurs et des bruits extérieurs qui sont une pollution sonore dans l'environnement proche. L'enquête de l'INSEE en 2002 indique que le bruit de la circulation est ressenti comme une gêne par 72 % des habitants de la région parisienne, contre 57 % dans les communes rurales. C'est la raison pour laquelle le développement de l'urbanisme exige une prise de conscience sérieuse des fabricants dans le développement de nouveaux modèles de pneu.

Plusieurs recherches sur la dynamique des pneumatiques ont montré des difficultés dans le domaine des hautes fréquences, où se situe essentiellement le bruit. Les études du comportement vibratoire des structures dans ce domaine posent des problèmes : problème de comportement des matériaux à haute fréquence et problème de modèle numérique lorsque la longueur d'onde est comparable à la taille d'éléments. La motivation initiale de cette thèse est de proposer une méthode de réduction de la dimension du problème. Cette méthode est basée sur la périodicité dans les problèmes dynamiques, qui n'est pas intégrée dans les codes de calcul courants. Dans les logiciels de calcul par éléments finis comme ANSYS ou ABAQUS, la périodicité n'est utilisée que dans les analyses statiques et modales.

Dans le cadre de cette thèse, le problème se ramène à considérer le comportement et essentiellement les réponses en fréquence d'une structure périodique selon une direction sous l'action d'une force harmonique unitaire appliquée à un point sur le pneumatique. La déduction de ce problème de base nous permet de calculer la réponse dynamique dans les cas de chargement plus compliqués.

Cette thèse est constituée en 4 parties :

La première partie consiste en une synthèse bibliographique dans le chapitre 1. On va présenter la description générale sur la fabrication et sur la conception des pneumatiques. Les travaux réalisés par les autres auteurs sur les modèles approchés analytiques et numériques seront également abordés. On présentera aussi l'effet de pression interne, de roulement et de contact pneu-chaussée. Cependant, seulement l'effet de pression de l'air est traité dans la thèse. Les modèles simplifiés montrent que plus la fréquence augmente plus grand est le nombre de facteurs d'influence qui doivent être introduits dans le modèle. Les résultats obtenus divisent le comportement vibratoire d'un pneumatique en trois types (correspondant aux trois intervalles de fréquence) : un type déterminé par une grande influence des flancs, un autre comme celui d'un anneau et le reste où le pneu se comporte comme un milieu continu 3D.

La présentation des études dynamiques dans les structures guidées d'ondes est décrite dans la suite de la bibliographie. Les ondes sont décomposées dans les parties périodiques unidimensionnelles et les problèmes liés sont aussi présentés. L'étude de multicouplage des parties périodiques est proposée à la fin de cette partie comme un principe d'application de la méthode dans le calcul dynamique des structures courantes.

La seconde partie se compose de l'identification des paramètres statiques et dynamiques des matériaux constituant le pneumatique. Dans le chapitre 2, les propriétés statiques sont mesurées par une campagne d'essais au sein du laboratoire. Le module élastique du caoutchouc à plusieurs

endroits est mesuré par les essais de contact en utilisant la loi de Hertz. Le module des câbles en acier dans le pneumatique est déterminé par la relation force-déplacement et il est comparé avec le résultat du modèle de câble torsadé. Cette valeur est utilisée pour déterminer les propriétés mécaniques de la couche élémentaire constituée d'un mélange de caoutchouc et d'acier et aussi pour la bande de roulement qui se compose de plusieurs couches élémentaires et de caoutchouc. Les valeurs calculées sont validées avec l'expérience et elles sont utilisées dans la phase de chargement statique du pneumatique.

Dans le chapitre suivant, une étude des propriétés dynamiques des matériaux est abordée. Le comportement dynamique des matériaux viscoélastiques sera présenté dans les deux domaines temporels et fréquentiels où l'évolution du module élastique est donnée. Le principe d'identification de ces quantités est basé sur la vibration des barres et des poutres. Une méthode de détermination du module complexe en se basant sur la fonction de relaxation est utilisée pour les basses fréquences.

La troisième partie concerne les mesures des fonctions en fréquence sur le pneumatique. Les dispositifs de la mesure sont présentés. Un premier essai est réalisé pour valider la mesure et estimer l'ordre de grandeur des quantités à mesurer. Les mobilités sont mesurées tout d'abord avec un marteau et des accéléromètres. Pourtant, pour obtenir un résultat précis, on effectuera une campagne de mesures avec un pot vibrant, qui génère des signaux de force d'entrée plus réguliers. Il y a deux chaînes de mesures dans ce cas : le pot vibrant collé sur la bande de roulement et sur le flanc. Dans chaque cas de pot vibrant, on mesure les mobilités sur le contour du pneu et dans la section transversale contenant le point de contact avec le pot vibrant. Même si l'on augmente le nombre de points de mesure dans la bande de fréquence considérée, les amortissements modaux ainsi que les modes propres ne sont pas faciles à déterminer. Dans cette thèse, on va identifier seulement les modes propres de la bande de roulement et de la section, correspondants aux basses fréquences.

La quatrième partie se divise en 2 chapitres. Le chapitre 5 présentera une introduction générale sur les structures périodiques et la méthode approchée pour calculer les réponses dynamiques en profitant de la périodicité. On résumera la méthode des éléments finis appliquée aux problèmes dynamiques. La théorie de vibration des structures périodiques unidimensionnelles est abordée en premier par la dynamique des cellules avec la matrice de transfert qui relie les variables aux deux sections de la cellule. Les ondes propagées dans les cellules sont décomposées en ondes entrantes et sortantes. Les propriétés de ces ondes sont utilisées pour établir la matrice de rigidité totale de la structure complète, composée de plusieurs cellules. Les résultats montrent un bon accord entre les solutions calculées par la méthode périodique, par le code d'éléments finis ANSYS et la solution analytique.

Le dernier chapitre détaillera le processus d'application de la théorie dans le cas d'un pneumatique. Il est nécessaire d'étudier la transformation des variables de calcul à partir du repère cartésien en repère cylindrique, où on peut exploiter la périodicité suivant le contour du pneumatique. Dans le cadre de la thèse, on profite des matrices élémentaires calculées par ANSYS et on les introduit dans le programme. Un modèle de pneumatique avec un matériau homogène sera montré et validé avec ANSYS. Ensuite, on réalise le modèle du pneumatique avec la distribution réelle des matériaux dans la section. Ce modèle se concrétise dans deux cas : avec et sans la précontrainte due à la pression interne. Les résultats dans le cas de précontrainte sont utilisés pour comparer avec les mesures montrées dans le chapitre 4. Une étude paramétrique sur la pression interne, sur l'amortissement et sur les modules élastiques est décrite à la fin de cette partie.

Les résultats obtenus dans cette thèse pourraient être utilisés dans le développement des constructions optimales, des modèles "silencieux" de pneumatiques ou des études sur les sources de bruit de transport. Selon l'objectif d'utilisation, il faut détailler la forme géométrique des sculptures pour avoir un modèle tridimensionnel plus précis.

Chapitre I.

Études bibliographiques

La description de la géométrie et des matériaux d'un pneumatique est présentée. Quelques modèles et résultats sur la vibration du pneu sont synthétisés. Une présentation générale de la dynamique des structures guide d'ondes est abordée à la fin.

Sommaire

1. Description des pneumatiques : Géométrie et matériaux	2
1.1. Généralités historiques	2
1.2. Fabrication des pneus	2
1.3. Conception des pneus	3
1.4. Modes propres et fonctions de réponse en fréquence du pneumatique	5
2. Modélisation du pneumatique. Méthodes et résultats existants	5
2.1. Sans contact avec la chaussée	5
2.1.1. Solution analytique	5
2.1.2. Modélisation numérique	7
2.2. Effet de roulement et contact avec la chaussée	8
3. Structure guide d'onde et structure périodique	10
3.1. Descriptions et propriétés	10
3.2. Méthodes d'études pour les structures guides d'ondes uniformes	10
3.3. Méthode d'éléments finis pour les structures périodiques	12
3.3.1. Périodicité unidimensionnelle	12
3.3.2. Périodicité multidimensionnelle	14
3.3.3. Multicouplage des structures partiellement périodiques	15
4. Conclusion et perspectives	15

1. Description des pneumatiques : Géométrie et matériaux

1.1. Généralités historiques

Dans l'histoire humaine, la roue est considérée comme une des inventions les plus importantes, parce que son usage a été trouvé dans une grande variété d'applications telles que les véhicules de transport, les équipements de construction, et les parties internes de machinerie. Comme beaucoup d'inventions, datant de l'Âge du Bronze il y a 5000 ans, la roue, étant une évolution d'éléments plus rudimentaires comme les cylindres, a été utilisée pour déplacer des objets lourds. Des véhicules à roues ont été trouvés à Sumeria (3500 av. J-C), en Assyrie (3000 av. J-C), et en Europe centrale (1000 av. J-C). Les wagons de quatre roues utilisant un essieu avant pivotant pour diriger étaient présents 1500 av. J-C.

Avec l'introduction de chevaux rapides des Steppes asiatiques en Mésopotamie ¹, la charrette y fut adoptée pour les applications militaires. La roue a reçu alors son premier "pneu" consistant en un cuir et puis un cuivre et un fer liant pour empêcher des dommages au cadre de la roue (en bois).

Ce n'est qu'en 1866, que la roue connut une nouvelle évolution majeure, quand Thompson déposa un brevet pour un tube d'air en élastomère, posé sur une roue pour réduire la force due au wagon, le bruit et pour rendre le mouvement plus facile. Ce concept a été beaucoup raffiné dans les années 1880 quand l'usage sur les tricycles du premier pneumatique s'est développé. Les découvertes séparées de la vulcanisation par Charles Goodyear (américain) en 1841, par Thomas Hancock (anglais) en 1843 et l'industrialisation en Europe et en Amérique du Nord a permis au pneu d'évoluer du canevas caoutchouté couvrant un tube de caoutchouc à un composite complexe de tissu, d'acier et d'élastomère.

1.2. Fabrication des pneus

Une chaîne de fabrication de pneus est présentée dans la Fig. I.1 [19]. La fabrication des pneus

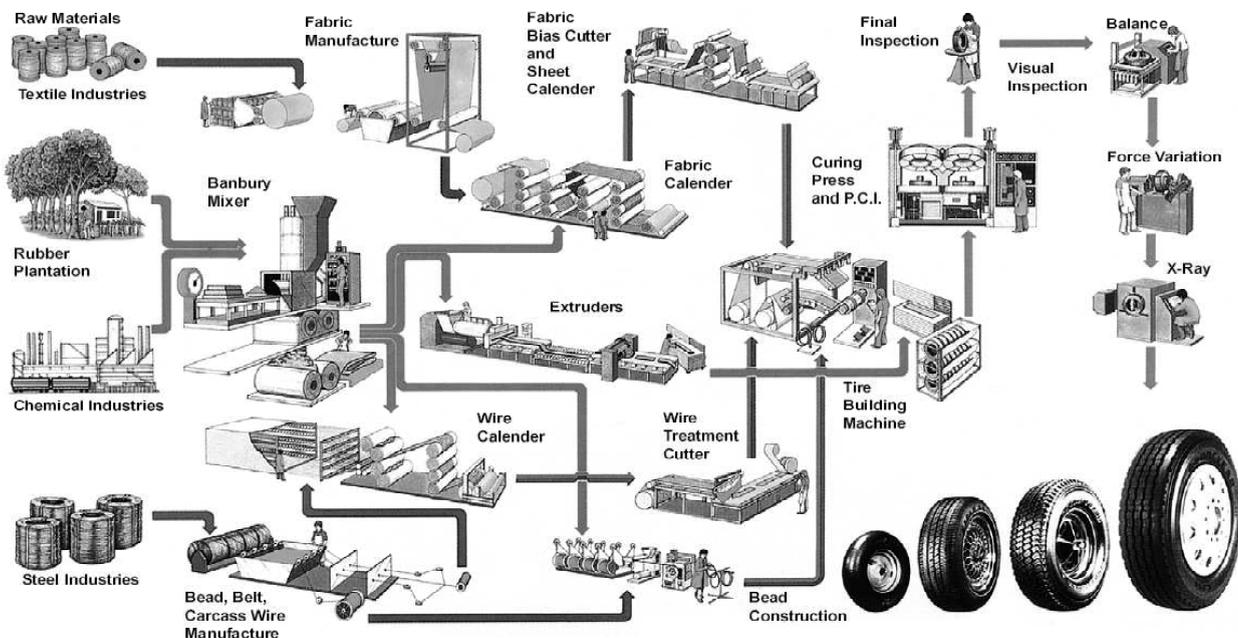


FIGURE I.1. : Procédure de fabrication des pneus

consiste en six étapes principales :

1. Mélanger des élastomères, du carbone noir et des produits chimiques pour former les composés du caoutchouc.

¹Ancienne région d'Asie antérieure, comprenant les vallées du Tigre et de l'Euphrate ainsi que tout le territoire - Dictionnaire Antidote

2. Traiter les textiles, les cordes en aciers et les enduire avec du caoutchouc.
3. Extrusion des tringles, du flanc et des autres composantes du caoutchouc.
4. Assemblage des composantes sur la machine de fabrication des pneus.
5. Séchage du pneu sous chaleur et pression.
6. Finition et inspection finale.

Chaque étape doit être contrôlée avec une exigence élevée. Le contrôle de qualité est effectué en phase de finalisation par l'inspection visuelle ou par rayon X. Les pneus doivent passer également les tests statistiques sur la durabilité, sur l'uniformité et sur la balance dynamique avant d'être vendus.

1.3. Conception des pneus

Tenant compte de la conception ou de l'application du pneu, tous les pneumatiques doivent satisfaire des fonctions fondamentales (voir la Fig. I.2) :

1. Capacité portante
2. Capacité d'amortissement
3. Transmission du moment de torsion de conduite au freinage
4. Permission des virages
5. Stabilité dimensionnelle
6. Résistance au frottement
7. Direction de conduite
8. Petite résistance au roulement
9. Bruit et vibration au minimum
10. Durabilité dans toute la durée de vie du pneu.

Trois paramètres essentiels de performance gouvernent les fonctions du pneu :

- Le profil de mission du véhicule
- Les propriétés mécaniques et performance du revêtement (Ex : résistance à l'usure et la durabilité).
- L'esthétique, le confort, et les caractéristiques comportementales telles que la précision de direction du véhicule.

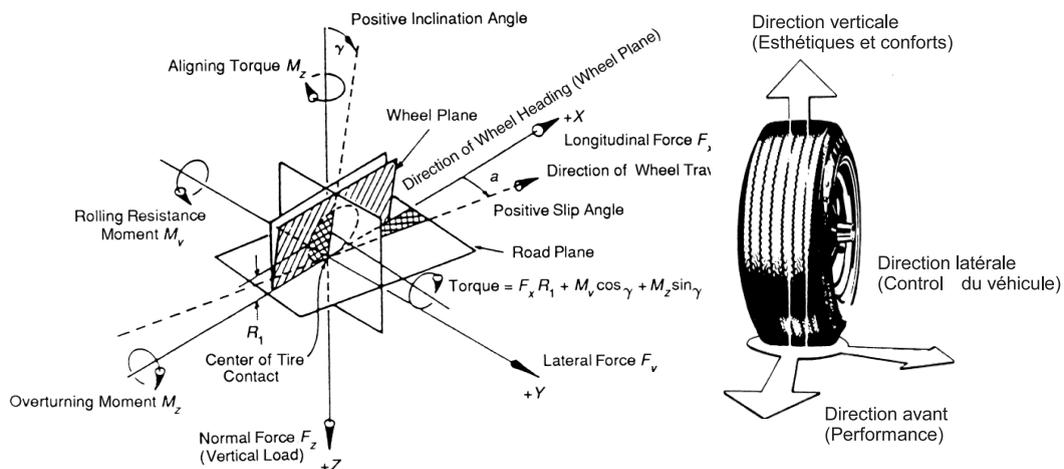


FIGURE I.2. : Forces et moments agissant au centre de la zone de contact et fonctions de conception des pneus (Society of Automotive Engineers, Inc.)

L'analyse détaillée des fonctions de conception des pneus ainsi que les problèmes dynamiques du système global et le contact pneu-chaussée sont présentés dans [20]. La conception et ainsi l'utilisation influencent les paramètres du pneu (Fig. I.3). Ces paramètres sont contenus dans la nomenclature du pneu. A titre d'exemple, un pneu ayant la nomenclature 155/80 R13 79T a les paramètres suivants :

- 155 : largeur de bande de roulement gonflé (en millimètres)
- 80 : hauteur du flanc (en pourcentage)
- R : structure en cascade, R signifie "radial" (B indiquerait une carcasse "bias", D une carcasse diagonale)
- 13 : diamètre de la jante (en pouces)
- 79 : indice de charge, dans ce cas, elle correspond à 437kg.
- T : indice de vitesse maximale, dans ce cas, 190km/h.

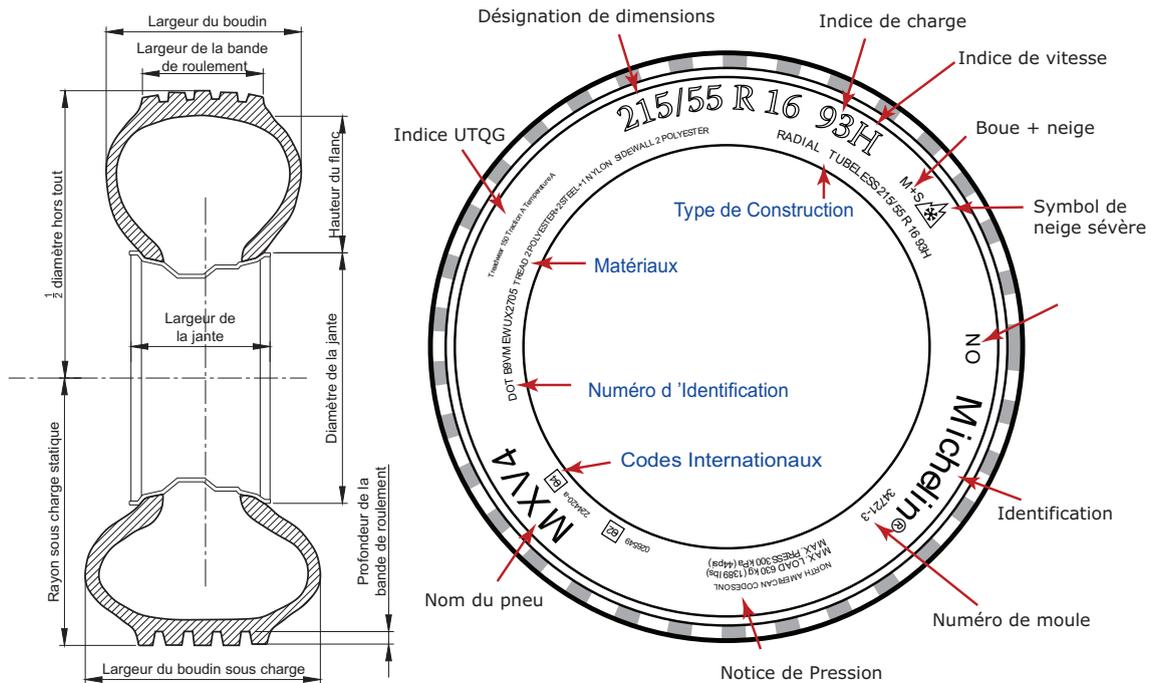


FIGURE I.3. : Paramètres de conception et nomenclature du pneu

Le choix de la sculpture du pneu dépend essentiellement de l'objectif d'utilisation et du type de chaussée, car la force de contact varie suivant la géométrie de la sculpture et de la chaussée. Il existe trois types principaux de sculpture (Voir Fig. I.4) pour les chaussées sèches, mouillées et enneigées. La différence entre les trois types concerne principalement la profondeur des rainures. A titre d'exemple, sur une route mouillée, pour un freinage de 100km/h à 60 km/h, il faut une distance 50m avec des rainures de 7mm. Cette distance est de 70m pour des rainures de 2mm et de 90m pour des rainures de 1mm. Il existe des pneus d'été et d'hiver. Cette distinction ne concerne pas seulement la profondeur



FIGURE I.4. : Type de pneu correspondant avec la configuration du sol

des rainures, mais aussi la forme géométrique autour du pneu.

1.4. Modes propres et fonctions de réponse en fréquence du pneumatique

Les mesures des fonctions de réponse en fréquence du pneumatique sont présentées en détail par Larsson *et al.* [21, 22]. Ces auteurs ont effectué des expériences sur un pneu lisse dans les directions radiale et circonférentielle. La force d'excitation est appliquée à la plaque collée sur le pneu par une aiguille. Le déplacement du point mesuré est la combinaison des actions des forces sur chaque morceau de la plaque. Les réponses en fréquence sont mesurées avec plusieurs cas de dimension et de forme de la plaque pour tenir compte de l'effet de déformation locale lors de l'excitation. Une analyse de l'influence de la masse de l'équipement est aussi présentée avec la présence de l'impédance de la masse et de l'inertie [23]. Le résultat montre que la déformation locale est fortement dépendante de la dimension de la zone d'excitation.

La mobilité ponctuelle mesurée est presque constante à haute fréquence (typiquement au-delà de 400-600Hz) si la zone d'excitation est suffisamment large. Lorsque la fréquence est encore basse, la rigidité locale de la bande de roulement est importante dans les réponses. Le comportement vibratoire du pneu est similaire à celui d'une poutre courbe ou d'une plaque supportée par un système de ressorts. A fréquence plus élevée que la fréquence dite "fréquence d'anneau", la courbure du pneu n'a pas d'influence sur la réponse et donc on peut négliger cet effet. Par conséquent, la réponse du pneu dans cette bande de fréquence est comme celle d'un milieu élastique. La fréquence d'anneau peut être calculée par la formule :

$$f_{\text{anneau}} = \frac{1}{2\pi R} \sqrt{\frac{E_{\text{tot}}}{\rho_{\text{tot}}(1 - \nu_{\text{tot}}^2)}} \quad (\text{I.1})$$

où $R, E_{\text{tot}}, \nu_{\text{tot}}, \rho_{\text{tot}}$ sont le rayon, le module, le coefficient de Poisson et la densité d'un anneau équivalent.

2. Modélisation du pneumatique. Méthodes et résultats existants

2.1. Sans contact avec la chaussée

2.1.1. Solution analytique

Il existe plusieurs modèles simplifiés de modélisation du pneumatique. Hamet [1] a modélisé le pneu composé d'une bande de roulement et de deux flancs comme une plaque orthotrope appuyée sur une fondation élastique. Il est simplement appuyé sur les deux bords latéraux et soumis à une condition périodique aux deux extrémités de la plaque. L'influence de la pression interne est remplacée par une tension aux deux bords. Une force externe concentrée au centre de la plaque est envisagée pour l'analyse. Le modèle du pneumatique est représenté dans la Fig. 1.5

Le déplacement du point soumis à une sollicitation harmonique est donné sous forme de la fonction de Green [1, 24].

$$[(\sqrt{B_x}\partial_x^2 + \sqrt{B_y}\partial_y^2)^2 - T_o(\partial_x^2 + \partial_y^2) + s_a - m''\omega^2]G_\omega(\underline{x} | \underline{x}_o) = \delta(\underline{x} - \underline{x}_o) \quad (\text{I.2})$$

où :

- $\delta(\underline{x} - \underline{x}_o)$ est la fonction de Dirac,
- B_x et B_y sont respectivement les rigidités de flexion de la plaque dans les directions x et y.
- m'' est la masse par unité de surface.
- T_o est la tension et s_a est la rigidité du ressort élastique représentant l'air enfermé dans le pneumatique.

L'expression de la fonction de Green en termes de superposition modale est de la forme [25] :

$$G_\omega(x, y | x_o, y_o) = -\frac{4}{M} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_{yn}y_o) \sin(k_{yn}y) \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\cos[k_{xm}(x - x_o)]}{[(\omega - \Omega_{nm})(\omega + \Omega_{nm})]} \quad (\text{I.3})$$

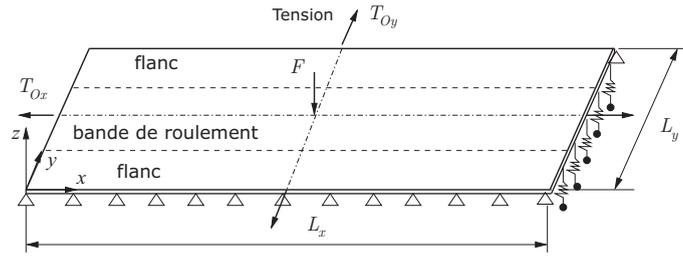


FIGURE I.5. : Modèle du pneumatique : plaque orthotrope sur la fondation élastique [1]

où :

$$\Omega_{nm} = \sqrt{\frac{[(k_{xm}^2 \sqrt{B_x} + k_{yn}^2 \sqrt{B_y})^2 + T_o(k_{xm}^2 + k_{yn}^2) + s_a]}{m''}} \quad (\text{I.4})$$

$$k_{xm} = \frac{2m\pi}{l_x} \quad (\text{I.5})$$

$$k_{yn} = \frac{2n\pi}{l_y} \quad (\text{I.6})$$

avec $M = m'' l_x l_y$, $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ et $\varepsilon_{m \neq 0} = 1$ et $\omega = 2\pi f$, l_x et l_y sont respectivement le contour, la somme des largeurs du flanc et de la bande de roulement du pneumatique.

Mugleton *et al.* [2] ont développé un modèle semi-analytique de plaques orthotropes en traction plane. Les flancs sont modélisés par deux plaques connectées à la bande de roulement en tension dans leurs plans. Cette tension vient de l'action de la pression interne. De même que dans le modèle précédent, la courbure du modèle est négligée, mais les conditions aux extrémités sont prises en compte, ainsi que la fixation au niveau de la jante.

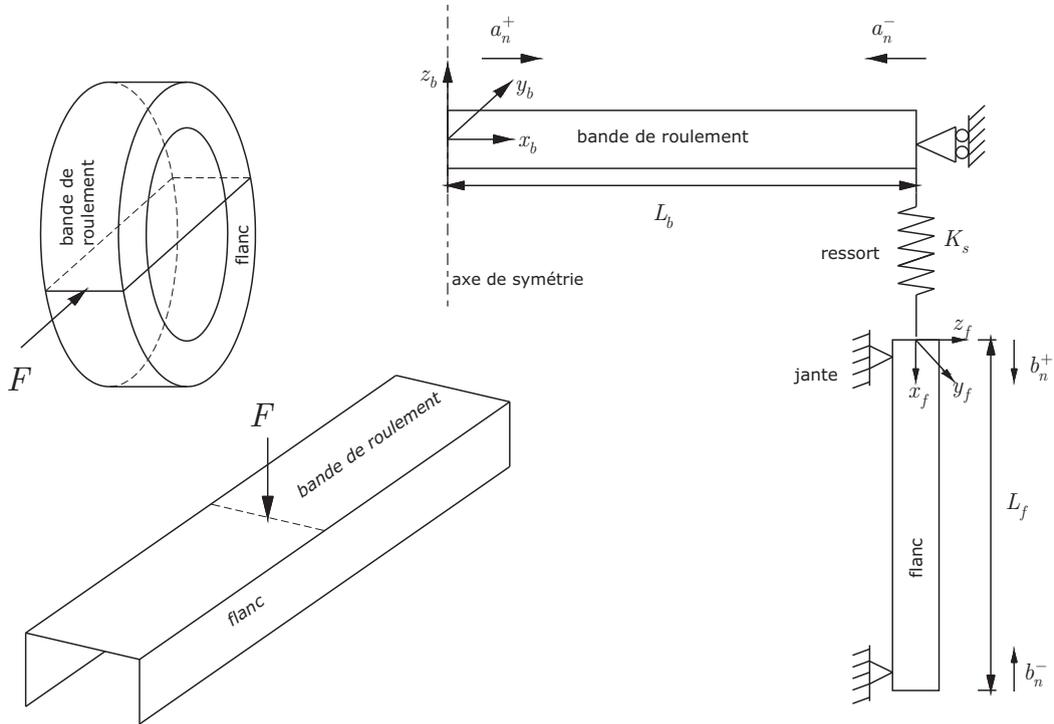


FIGURE I.6. : Modèle du pneumatique : plaques orthotropes en traction plane [2]

La plaque est supposée vibrer en flexion et on néglige le mouvement dans le plan. La rigidité longitudinale des flancs est représentée par un ressort de rigidité K_s (Fig. I.6). Cette rigidité est calculée en combinant les effets de tension-compression, de flexion dans le plan, de cisaillement et de

la pression interne de flancs. Les flancs sont connectés à la jante par un support simple qui est supposé rigide. Pinnington [26] a proposé une méthode pour déterminer la rigidité des flancs au-dessous et au-delà de la fréquence d'anneau. Dans le cas où la fréquence dépasse la fréquence d'anneau, la rigidité des flancs dépend non seulement de la pression interne et de la rigidité en flexion, mais aussi de la rigidité dynamique de transfert des forces dans le plan et hors plan, du nombre d'ondes dans la bande de roulement et dans le flanc. Vu la symétrie de la section du pneumatique, il suffit de modéliser une demi-section.

Le comportement de la bande de roulement s'écrit comme celui d'une plaque sous tension. Le déplacement est décomposé en modes propres et chaque mode propre est la somme de termes exponentiels avec les constantes d'ondes correspondantes. Une forme matricielle dont les variables sont ces constantes est calculée en fonction de l'effort de cisaillement interne, de la matrice de réflexion et de transmission. Lorsque les constantes d'ondes sont calculées, la réponse est également déterminée.

2.1.2. Modélisation numérique

Larsson *et al.* [27] ont développé un modèle hybride numérique-analytique du pneumatique avec le couplage entre les blocs de sculptures et la bande de roulement. Les sculptures sont considérées comme des cubes et le reste du pneu est similaire au modèle de Hamet. La mobilité du système complet équivalent est calculée comme deux systèmes successivement connectés. Le fait que l'on tienne compte de ces blocs améliore essentiellement la mobilité radiale. Dans le cas de mobilité tangentielle, la prédiction est moins bonne à cause de l'inertie des blocs. Une autre raison théorique est que les modes analytiquement calculés de la bande de roulement ne sont que radiaux. Cet auteur a aussi présenté un modèle basé sur le couplage de deux couches élastiques pour les hautes fréquences dans [22].

Maconi a utilisé une technique d'exploitation des données à partir du code d'éléments finis ANSYS pour modéliser les ondes propagées dans les cylindres. Waki [28] *et al.* ont pris la même technique pour modéliser un pneu avec une section assez compliquée. Les études sur la propagation d'ondes dans les guides d'ondes sont les mêmes que celles présentées dans [29]. Les modes de vibration de la section transversale du pneu sont étudiés. Les réponses forcées sont aussi présentées. Elles montrent trois types de vibration du pneu : (i) au-dessous de la première résonance, où la rigidité des flancs domine, (ii) entre la première résonance jusqu'à environ 400Hz, la réponse est similaire à celle d'une poutre, (iii) et le reste, la réponse est comme celle d'un milieu demi-espace élastique.

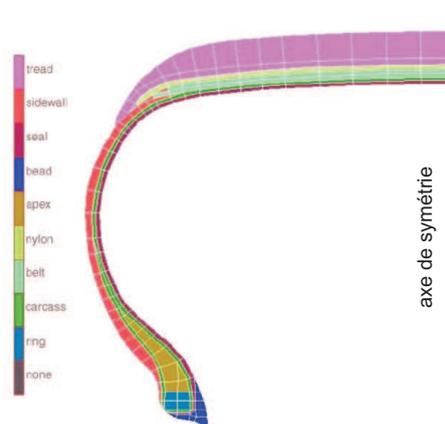


FIGURE I.7. : Configuration du pneu P195/60R14 [3]

Jia *et al.* [3] ont fait une étude sur la géométrie du pneu en utilisant les fonctions de Bezier. La section d'un pneu lisse est modélisée avec la distribution des matériaux réels (Fig. I.7). Les modes propres de la vibration radiale sont présentés (Fig. I.8). Ces auteurs ont aussi fait des études paramétriques sur la pression interne, sur les sculptures de caoutchouc et sur l'angle des fils d'acier dans la bande de roulement.

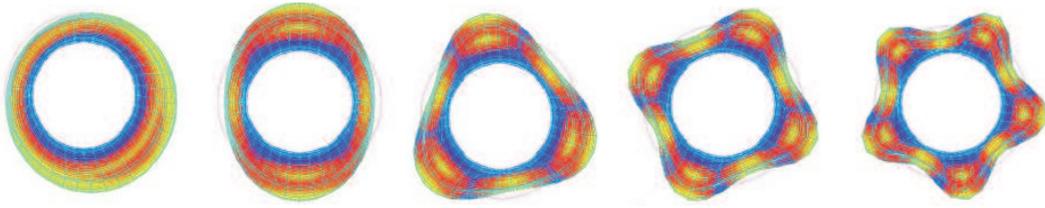


FIGURE I.8. : Cinq premiers modes calculés pour le pneu lisse P195/60R14 [3]

2.2. Effet de roulement et contact avec la chaussée

Merzouki *et al.* [4] ont modélisé le travail du système pneu-chaussée par un système de liens-graphe et ont introduit ces relations dans Simulink de Matlab pour calculer les quantités de contact comme la force, le moment de torsion, la température et la pression. Les variables d'énergie sont (Force, vitesse linéaire) = (F, \dot{x}) , (Température, Flux d'entropie thermique) = (T, \dot{S}) , (Pression, Flux volumique) = (P, \dot{V}) , (Moment de torsion, vitesse angulaire) = (Γ, ω) . Les relations entre ces variables sont analysées séparément pour chaque système conventionnellement équivalent (voir un exemple dans la Fig. I.9). Les paramètres sont calculés par un processus de résolution d'un système dans Simulink modélisé par les blocs avec le comportement donné.

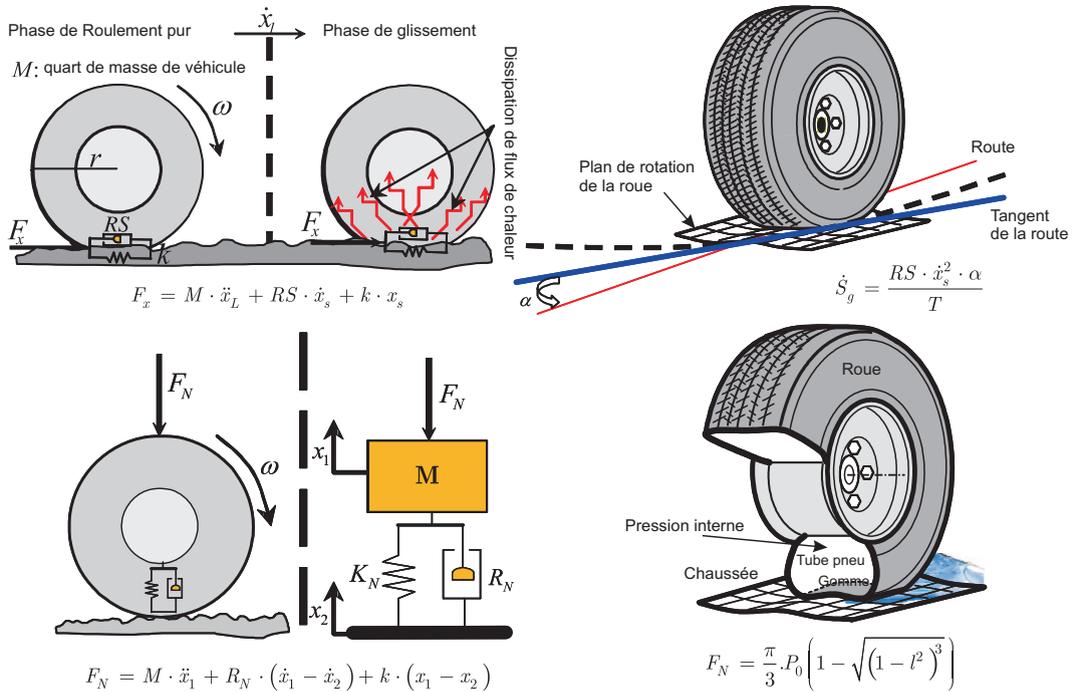


FIGURE I.9. : Calcul des relations entre les paramètres dans le modèle de lien-graphe [4]

Il existe différents auteurs qui modélisent la vibration du pneumatique avec l'effet de roulement par le modèle d'anneau [30, 31]. Les fréquences propres sont recalculées en tenant compte de cet effet. Soedel a proposé une analyse de vibration d'un anneau dans [32] et il l'a développé dans le cas d'une force harmonique et périodique [33] et avec l'effet d'accélération de Coriolis [34]. L'anneau est supposé ne pas avoir d'extension sur sa circonférence. La vitesse de rotation est prise en compte dans le calcul des fréquences propres :

$$\omega_n = \frac{2n}{n^2 + 1} \pm \sqrt{\omega_{fn}^2 + \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2} \Omega^2} \quad (\text{I.7})$$

où Ω est la vitesse angulaire de rotation et ω_{fn} est la fréquence d'anneau sans rotation :

$$\omega_{fn}^2 = \frac{n^2(n^2 - 1)^2 D}{\rho h a^4 (n^2 + 1)} + \frac{n^2 k_z + k_\theta}{\rho h (n^2 + 1)} \quad (\text{I.8})$$

où ρ, a, h sont respectivement la densité, le rayon moyen et l'épaisseur de l'anneau, k_θ, k_z représentent les constantes élastiques de la fondation dans les directions circonférentielles et radiales, $D = Eh^3/12$ est la rigidité en flexion de l'anneau. Par conséquent, chaque fréquence provoque deux autres fréquences avec l'effet de rotation. Huang a utilisé la méthode de réceptance pour examiner le cas de contact avec la fondation. La réceptance est le rapport du déplacement en un point dû à l'action d'une force appliquée à un autre point et la valeur de cette force. Au point de contact, la réceptance est supposée nulle. Cet auteur a présenté les modes propres dans le cas de non-rotation et les formes d'anneau en temps dans différents cas de vitesse de rotation pour chaque mode. Il a conclu que les formes modales sont stables dans le cas de contact permanent.

En dessous de 1kHz, seules la tension et la rigidité en flexion contrôlent les ondes transverses propagées et les modèles avec ces deux paramètres ne sont convenables que pour les bruits intérieurs [50-500Hz]. En réalité, les bruits extérieurs se situent entre 500 et 3000Hz. Au-dessus de 1kHz, il se produit des ondes de cisaillement et de rotation. Dans leurs articles [24, 26], Pinnington *et al.* ont proposé un modèle à quatre paramètres : tension, cisaillement, inertie de rotation et rigidité de flexion. Le comportement dynamique est décrit par une équation d'ondes d'ordre 4. Ils ont modélisé la transmission de la force et les flancs pour étendre le modèle de bande de roulement pour la modélisation du pneumatique (voir Fig. I.10) [5, 6]. Les équations de propagation d'ondes sont établies dans les deux directions radiale et circonférentielle et incluent six paramètres d'influence : la courbure, la rigidité de cisaillement, l'inertie de rotation, la tension, la vitesse de rotation et la pression interne de l'air. L'effet principal de la courbure est de coupler les mouvements radiaux et circonférentiels en incluant les forces normales et tangentielles dans la réponse du pneu. Les flancs sont modélisés comme dans [26]. La dépendance en fréquence est considérée dans [6] en calculant les forces introduites et de transfert à partir des flancs à la bande de roulement. Les ondes dans l'air interne sont aussi négligées (car seulement la pression statique est incluse et on n'a pas de couplage complet structure-acoustique).

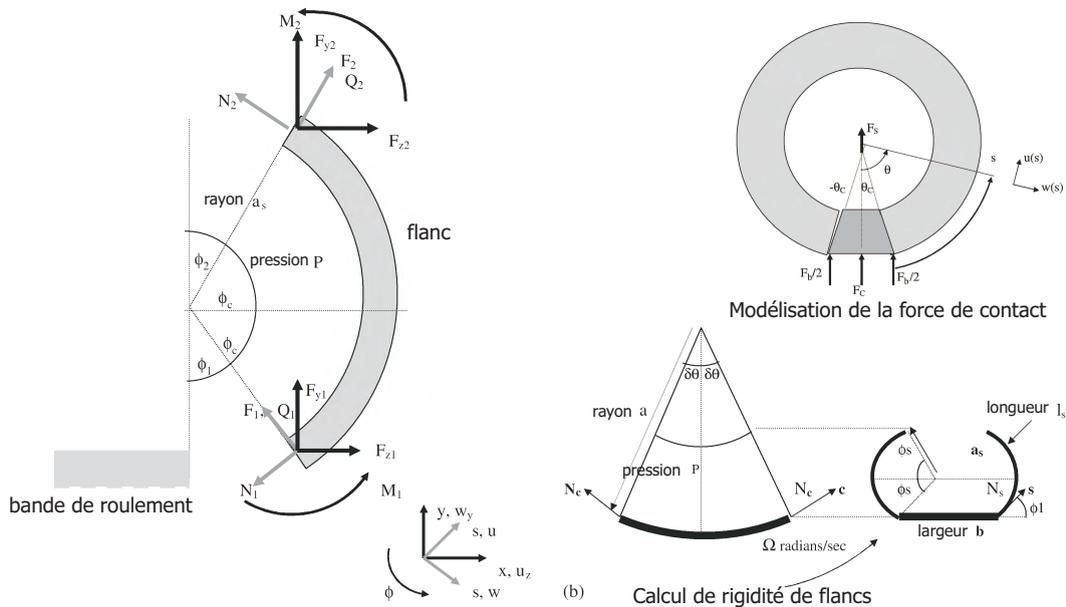


FIGURE I.10. : Géométrie des flancs et modélisation de l'effet de roulement [5, 6]

La rotation du pneu engendre trois effets : modification de la vitesse d'ondes dans la direction de roulement et l'inverse, augmentation de tension dans la bande de roulement due aux forces centrifuge et de Coriolis. L'équation de mouvement combinée avec tous ces paramètres donne à chaque mode transverse d'ordre m une équation d'ondes d'ordre 6 sur la circonférence. La variable de cette équation est le nombre d'ondes normalisé. Dans le cas de vibration libre, sans l'effet de l'accélération de Coriolis, cette équation ne contient que les ordres pairs. Cela signifie qu'il y a trois paires de racines correspondantes à trois paires d'ondes (incidentes et réfléchies, positives et négatives). L'effet de roulement modifie les vitesses d'onde, donc le nombre d'ondes. Les conditions aux limites sont introduites par le contact avec la chaussée et elles donnent les mobilités d'entrée et de transfert pour les excitations

radiales et circonférentielles.

3. Structure guide d'onde et structure périodique

3.1. Descriptions et propriétés

Les guides d'ondes sont des milieux partiellement ou entièrement bornés où les ondes peuvent se propager. Ces ondes peuvent être électromagnétiques, acoustiques ou mécaniques. Dans les études concernant cette thèse, on s'intéresse essentiellement aux ondes mécaniques. La propagation d'ondes dans de tels systèmes mécaniques est largement étudiée. Les systèmes peuvent être des poutres [35], des plaques [36, 37], des tubes [38, 39, 40], des parois minces [41, 42], des systèmes en réseaux (en treillis) [43, 44]. Les caractéristiques fréquemment étudiées pour ce type d'onde sont le nombre d'ondes, la relation de dispersion et la mobilité de la force transmise. Une structure périodique consiste en un

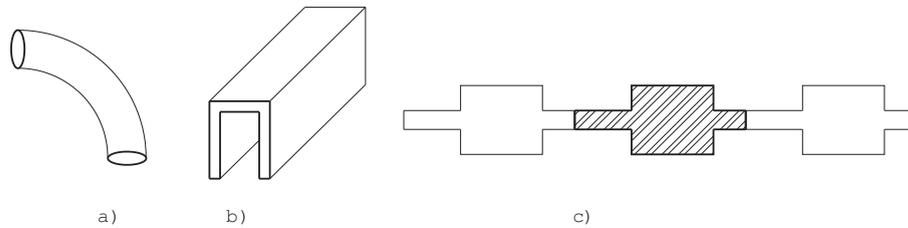


FIGURE I.11. : Structures à symétrie unidimensionnelle : a) symétrie de rotation, b) symétrie de translation, c) périodicité

nombre d'éléments identiques, liés ensemble de façon identique (côte-à-côte ou bout-à-bout) pour former la structure totale. De nombreuses structures possèdent une symétrie unidimensionnelle (Voir Fig. I.11). Cette symétrie peut être une translation suivant la direction principale (a), une rotation autour d'un axe (b) ou une périodicité. Ce type de structure est considéré comme un guide d'ondes. Quelques structures sont considérées comme uniformes dans une direction, le long de l'axe de la structure dont les sections transversales ont les mêmes propriétés physiques et géométriques. Les ondes propagées suivant cet axe sont fonction des caractéristiques de la forme de la section.

La propagation d'ondes dans les structures périodiques a été étudiée premièrement dans le travail de Brillouin [45] pour les systèmes de treillis et pour les lignes électriques. Ces études sont largement développées dans les papiers de Mead [46, 47, 48, 49]. Le travail consiste en des analyses classiques des structures périodiques. L'approche est basée sur le principe de Floquet ou sur la matrice de transfert.

3.2. Méthodes d'études pour les structures guides d'ondes uniformes

Les connaissances sur les caractéristiques de propagation d'ondes de structures sont très importantes. Particulièrement à haute fréquence, les modèles d'éléments finis de la structure totale sont trop complexes pour être utilisés en pratique. Des approches en se basant sur les propriétés d'ondes peuvent être utilisées dans la prédiction de la propagation de perturbations, de la transmission d'énergie ou de la diffusion de la radiation acoustique. Un résumé de ce type de structures courantes est présenté dans [50]. Concernant les méthodes de calcul pour les guides d'ondes, les approches étudiées dans le passé peuvent se diviser en deux parties. Le premier groupe concerne les guides d'ondes uniformes correspondant aux cas a) et b) dans la Fig. I.11 tandis que le deuxième est orienté vers les structures périodiques, type c) dans la Fig. I.11. Le cas de guides d'ondes uniformes est un cas particulier de celui de structures périodiques d'une période arbitraire.

La vibration des structures guides d'ondes est un thème très étudié. Von Flotow [44], Beale [43] et Accorsi ont utilisé une approche par ondes pour étudier la vibration dans les réseaux structuraux composés par des structures uniformes simples. Ils ont résolu le comportement vibratoire des éléments individuels et des jonctions entre les éléments par la méthode analytique. Ils ont décrit le comportement vibratoire des structures en fonction des ondes dans les éléments, des propriétés des jonctions de chaque élément et des conditions aux bords. Des analyses détaillées sur le couplage entre les sous-structures

guides d'ondes sont développées par Mencik et Ichchouc [51]. Une des méthodes utilisées pour les recherches de vibration est la méthode énergétique [52]. La méthode énergétique souvent utilisée pour les hautes fréquences est l'Analyse Statistique de l'Énergie (SEA). Cette méthode est développée par A.Bocquillet *et al.* [38] pour les structures axi-symétriques couplées avec un fluide comme les tuyaux remplis par un fluide ou pour les parois minces avec une technique d'hybridation FEM-SEA.

La méthode des éléments finis spectraux (SFE) se base sur la décomposition spectrale (ou modale) de la réponse sur une base harmonique [53]. Elle permet de déterminer les deux paramètres d'ondes importants : le nombre d'ondes et la vitesse de groupe. L'application de cette méthode est principalement développée par Finnveden *et al.* [54] pour les guides d'ondes de section uniforme plus complexe. Elle est appliquée pour les structures à parois minces où le comportement vibratoire joue un rôle très important par rapport à la capacité portante de ce type de structures. Les équations homogènes de mouvement harmonique pour les structures guide d'ondes unidirectionnelles de sections constantes sont écrites sous la forme matricielle. Dans la méthode SFE, Finneveden [55, 39] a présenté l'équation discrétisée comme

$$\sum_{n=0}^N \mathbf{K}_n \frac{\partial^n \mathbf{U}}{\partial x^n} - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{U} = 0 \quad (\text{I.9})$$

La solution approchée de l'équation discrétisée peut s'écrire :

$$\left[\sum_{i=1}^N k^i \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U} = 0 \quad (\text{I.10})$$

Où \mathbf{M} est la matrice de masse usuelle. La matrice de rigidité est développée suivant la puissance du nombre d'ondes k^i , décrivant la propagation d'ondes suivant la direction de symétrie. Les matrices \mathbf{K}_i ne sont pas les matrices de rigidité normales dans les formules des éléments finis. Elles doivent être déterminées spécialement pour chaque problème par l'équation de Lagrange, le principe de Hamilton ou le principe de travail virtuel. Ainsi, il est difficile d'exploiter les logiciels commerciaux pour calculer ces matrices.

Le déplacement découplé en fonction de la position du point examiné dans la section et la coordonnée de cette section peut être écrit sous la forme $e^{i\lambda x} \mathbf{U}(y, z)$ où x est la direction de symétrie et y, z sont les coordonnées de la section transversale. La fonction de déformation est donc de la forme [54] :

$$w(x, y, z) = \Theta(y, z)^T \Phi \text{diag}(e^{i\lambda x}) \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

où Θ contient des vecteurs propres de la section de la structure dans le cas de modélisation 2D, les colonnes de Φ et les termes de λ sont les vecteurs propres et les valeurs propres données par

$$[\mathbf{K}(ik) - \lambda \mathbf{M}] \Phi = 0 \quad (\text{I.12})$$

où k le nombre d'ondes et \mathbf{A} est donné par les conditions aux limites pour que les déplacements nodaux soient égaux à ceux aux bords.

La première application de la technique de guide d'ondes EF a été faite par Aalami qui a étudié la propagation d'ondes dans des poutres avec la section transversale arbitraire [56]. Les études plus récentes décrivent la propagation d'ondes dans les plaques composites stratifiées, les poutres à parois minces [57], la voie ferroviaire [58, 35], les tubes remplis de fluide [39]. Ainsi, les résultats numériques comparent le nombre d'ondes calculé dans les modèles de poutres à parois minces de Timoshenko et de Vlasov dans [59]. Dans le cas plus compliqué (tunnel de ventilation), ces résultats sur la relation de dispersion ont permis de comparer les théories de poutre de Timoshenko, de structures à parois minces et modèle des éléments finis de guide d'ondes.

F.Birgersson *et al.* [60, 61] ont développé la méthode des super éléments spectraux (SSFE) - une méthode mélangée entre SFE et WFE appliquée pour les structures minces où sont incluses les ondes planes et l'interaction fluide-structure. La matrice de transfert et celle de rigidité dynamique sont aussi utilisées. Shorter [62] a développé la méthode SFE pour les matériaux stratifiés viscoélastiques en utilisant l'équation de Lagrange et a trouvé les relations de dispersion. L.Gry [35] a appliqué une idée similaire pour le calcul de propagation d'ondes dans les rails. Il a calculé la relation de dispersion et les accélérances.

3.3. Méthode d'éléments finis pour les structures périodiques

La méthode des éléments finis guide d'ondes (*WFE - Waveguide Finite Elements*) est similaire à la méthode des éléments finis spectraux à l'exception qu'un code de calcul usuel peut être utilisé dans la modélisation. Avec un code commercial, les structures ayant une géométrie et une distribution de matériaux complexes pourront être analysées relativement facilement. Par rapport à une approche d'éléments finis standard où la totalité de la structure est maillée, avec la méthode des éléments finis guide d'ondes, une seule cellule caractéristique est maillée, donc le coût de calcul est considérablement diminué.

3.3.1. Périodicité unidimensionnelle

Suite aux études de Mead sur les ondes harmoniques propagées dans les systèmes linéaires unidimensionnels périodiques [46], sur les modes propres dans les systèmes mono [47] ou multi couplés [48], la méthode des éléments finis pour les structures guide d'ondes périodiques est essentiellement présentée en détail avec des applications par D. Duhamel [29, 63]. L'idée principale de cette méthode est que la propagation d'ondes dans une structure peut être obtenue par les constantes d'ondes λ dépendant de la fréquence ou de la matrice de transfert \mathbf{T} qui relie les déplacements \mathbf{q} et les forces \mathbf{f} des deux cotés de la cellule par la relation (Fig. I.12) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

où les indices L et R désignent respectivement le côté gauche et le côté droite, λ , la constante de propagation d'ondes, dépendante de la fréquence, est la valeur propre de la matrice de transfert \mathbf{T} . Cette constante peut s'écrire sous la forme $\lambda = e^{ikl}$ dans laquelle l est la longueur de la cellule et k est le nombre d'ondes.

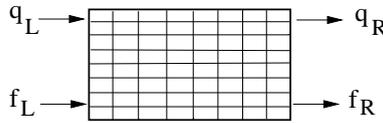


FIGURE I.12. : Forces et déplacements à gauche et à droite d'une cellule

La méthode des éléments finis guide d'ondes a des avantages par rapport à un code d'éléments finis standard. Pourtant, il existe des problèmes intrinsèques à résoudre :

- *Problème de matrices mal conditionnées :*

Mead a montré dans ses papiers [46, 47, 48] que le nombre d'ondes est deux fois le minimum de degrés de liberté à l'interface et peut être décomposé en un même nombre d'ondes positives et négatives. Les constantes d'ondes sont alors divisées en couples $(\lambda, 1/\lambda)$. Houillon [41] et Bocquillet [64] ont développé la méthode WFE pour calculer les réponses en fonction des ondes, mais le résultat numérique n'est pas stable, car les matrices globales données par ces auteurs sont mal conditionnées. Gry et Gontier ont développé une méthode pour réduire le mauvais conditionnement des matrices globales dans [35, 65] en proposant un problème de valeurs propres $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ associées à la matrice $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$ car la matrice de transfert \mathbf{T} est symplectique [66]. Ici, la matrice de rigidité dynamique de la structure complète est facilement construite en connaissant des modes d'ondes et des constantes de propagation calculées pour une cellule.

Luongo *et al.* [67] a proposé une méthode pour éviter le mauvais conditionnement des matrices en séparant les parties réelles et imaginaires des valeurs propres, et en distinguant les valeurs propres réelles et complexes. La représentation matricielle est purement réelle. C'est la méthode des vecteurs d'ondes réels. L'équation dynamique est écrite selon la direction de propagation des ondes réelles de la section A à la section B (N éléments) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_B \\ \mathbf{i}_A \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{re}^N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{im}^N \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_A \\ \mathbf{i}_B \end{pmatrix} \quad (\text{I.14})$$

où $\mathbf{r}_H, \mathbf{i}_H$ sont les vecteurs d'ondes réels et imaginaires, $\mathbf{\Lambda}_{re}, \mathbf{\Lambda}_{im}$ sont les matrices des valeurs propres associées $H = A, B$. Une technique d'application des conditions aux limites similaire est proposée par Duhamel dans [63].

• *Problème de réduction des matrices :*

Avec les méthodes des éléments finis classiques, il est évident qu'une augmentation dans l'analyse fréquentielle exige une taille de maillage diminuée, et un critère général sera d'avoir entre 5 et 10 noeuds par longueur d'onde. Par conséquent, cette condition peut mener à des grands maillages et ainsi à un calcul lourd. Quelques méthodes telles que la réduction de Guyant décrit dans [68] ou de Petyt dans [69] peuvent être utiles pour réduire le nombre de degrés de liberté du système. Elles consistent à négliger l'inertie de degrés de liberté complémentaires et à garder un système avec les degrés de liberté principaux. Cependant, cela exige une sélection judicieuse des degrés de liberté permettant de mener au système évalué de façon suffisamment précise. Une autre méthode classique est proposée par Duhamel *et al.* [63] avec l'idée que l'on effectue une projection orthogonale de l'espace des variables dynamiques à l'espace généré par une base de vecteurs d'ondes associés aux valeurs propres ayant un module proche de l'unité. Comme les ondes avec des constantes petites sont rapidement atténuées, la décomposition spectrale assure une précision suffisante avec un nombre limité de valeurs.

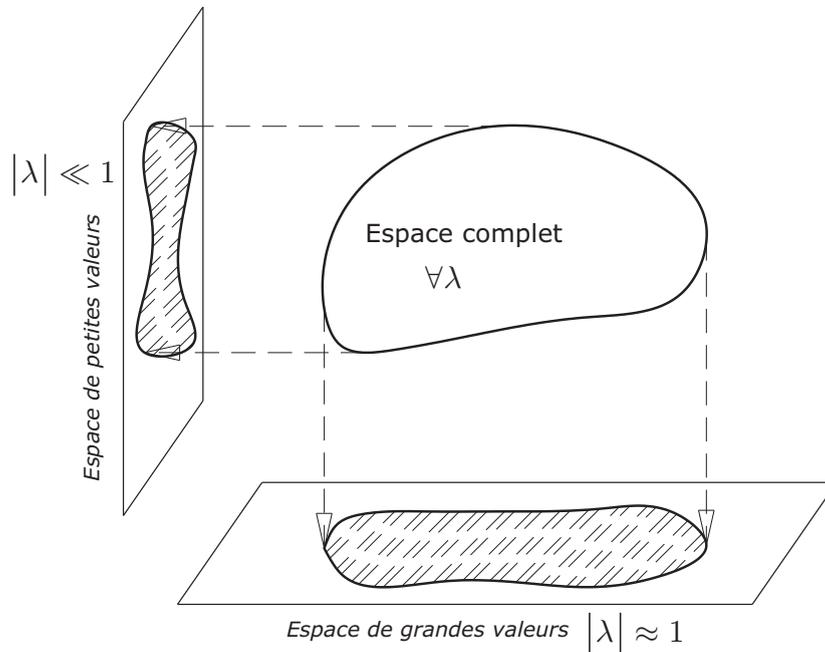


FIGURE I.13. : *Méthode de projection orthogonale*

• *Problème de transformation des coordonnées :*

Ce problème est lié au fait que même si les maillages de deux sections à gauche et à droite sont identiques, la représentation de ces deux sections n'est pas identique. A titre d'exemple, pour les structures de symétrie cyclique, elles ont les mêmes coordonnées dans les plans radiaux, mais dans le repère cartésien, ces coordonnées ne sont pas les mêmes. La solution est soit de reposer le problème dans le repère précédent en recalculant toutes les matrices élémentaires, soit d'effectuer une transformation à une référence dans laquelle les sections ont les mêmes propriétés. Une technique est présentée dans le chapitre sur les structures périodiques avec la présence de la matrice de rotation. Une autre technique est une transformation bijective quelconque [70] qui aligne les deux sections à gauche et à droite. Le problème est donc purement algébrique sans sens physique. Une transformation inverse est requise pour trouver la réponse exacte du problème.

3.3.2. Périodicité multidimensionnelle

A côté des études sur les structures unidimensionnelles périodiques, Brillouin a abordé les problèmes multidimensionnels pour le cas des treillis dans [45]. Langley a effectué une étude théorique et expérimentale sur le même type de structure (grillage de poutres) dans [71]. Il a développé la théorie dynamique pour le cas bidimensionnel dans ses articles dans les deux cas de base : charge impulsive [72] et charge harmonique [73]. Il a posé premièrement le problème 2D à l'infini sollicité par une charge ponctuelle harmonique. Les modes de vibration dépendent des conditions aux limites, celle de Born-von Kármán est utilisée. Le schéma d'une structure périodique 2D est présenté dans la Fig. I.14.

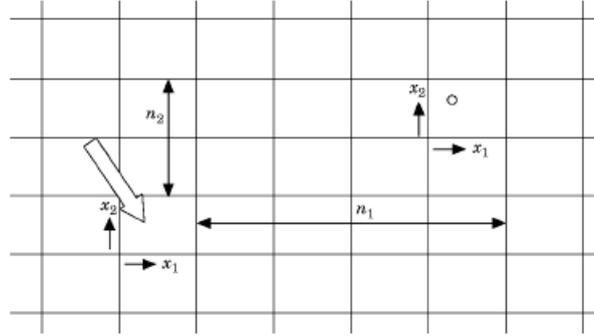


FIGURE I.14. : Schéma d'une structure périodique bidimensionnelle. La charge ponctuelle est appliquée à la position de la flèche.

Le théorème de Bloch [45] est pris dans la décomposition du déplacement sous la forme :

$$\mathbf{w}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) e^{(\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2)} \quad (\text{I.15})$$

où μ_1 et μ_2 sont des constantes de propagation et $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ est la localisation de l'élément. Dans la dynamique des structures, ces constantes sont souvent écrites comme $\mu_i = \delta_i + i\epsilon_i$ où δ_i et ϵ_i sont les constantes d'atténuation et de phase. En imposant les conditions aux limites périodiques "appropriées", il est possible de poser l'équation sur un trio (ω, μ_1, μ_2) . La plupart des applications concernent la propagation d'ondes sans atténuation, donc $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et la procédure d'analyse est de spécifier les constantes de phase ϵ_1, ϵ_2 et de chercher la fréquence de propagation ω .

L'ensemble des modes de vibration sous la condition aux limites de Born-von Kármán est déterminé comme une application d'une paire de 2 nombres entiers (p, q) et la procédure utilisée donne un ensemble de $N_1 N_2$ modes. Chaque mode est associé à une surface de phases constantes représentée par la fonction $\Omega(\epsilon_1, \epsilon_2)$. En utilisant la superposition modale, la solution pour une structure de $N_1 \times N_2$ cellules est calculée par l'intégration par rapport aux phases ϵ_1, ϵ_2 :

$$\mathbf{w}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \frac{N_1 N_2}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathbf{g}^{*t} \mathbf{F} \mathbf{g}_0 e^{-i\epsilon_1 n_1 - i\epsilon_2 n_2} d\epsilon_1 d\epsilon_2}{[\Omega(\epsilon_1, \epsilon_2)]^2 (1 + i\eta) - \omega^2} \quad (\text{I.16})$$

où \mathbf{F} est la charge complexe harmonique ponctuelle, \mathbf{g}^* et \mathbf{g}_0 sont des fonctions de ϵ_1 et ϵ_2 .

Une analyse détaillée énergétique de la réponse est présentée. Deux applications d'un réseau de masses avec des ressorts [73] et d'un système de poutres [71] sont également présentées. La théorie pour le cas de charge impulsive est similaire au cas précédent. La réponse modale est appliquée pour les structures périodiques bidimensionnelles, infinies ou finies dans la période avant que la perturbation atteigne le bord du système. Un exemple pour la plaque à haute fréquence avec le cas particulier de nombre d'ondes complexe est également présenté dans [74] (au lieu de ϵ dans l'expression ci-dessus) $k = k_0 + \frac{i\omega\eta}{2c_g}$ où η, c_g sont le facteur de perte et la vitesse de groupe d'ondes.

L'application de la théorie est présentée par Duhamel [75] dans le calcul de la fonction de Green. L'idée de cette méthode est le même que dans le cas unidimensionnel. Pourtant, l'équation d'équilibre

de l'élément est réécrite en ajoutant les termes dépendant des constantes de propagation de gauche à droite ou de base au sommet. Une généralisation pour les réseaux non orthogonaux est aussi présentée.

En principe, la théorie pour les structures périodiques tridimensionnelles est basée sur les mêmes idées que les problèmes présentés. Pourtant, il n'y a pas encore de recherches concernant ce type d'application.

3.3.3. Multicouplage des structures partiellement périodiques

Le multicouplage des structures a le même principe de résolution que la méthode de sous-structuration. Les sous-structures sont connectées à la partie restante par les degrés de liberté à la jonction (ou à l'interface). Pour un système ayant des parties périodiques, chaque partie est traitée comme une structure périodique avec un nombre réduit de degrés de liberté. Au niveau de la jonction, un maillage classique est utilisé et une jonction est connectée aux parties périodiques par quelques degrés de liberté principaux. Une étude sur ce type de structure est présentée par Mencik dans [51] sur la propagation d'ondes et sur la diffusion à partir d'une jonction. La Fig. I.15 montre l'idée de ce principe à l'application possible pour les structures de type charpente métallique avec les barres qui se joignent aux noeuds. La méthode abordée dans cet article concerne une élaboration de la matrice

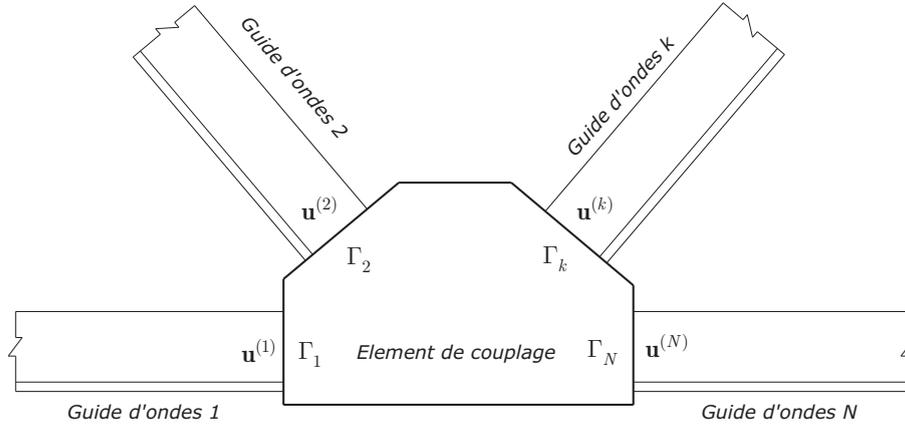


FIGURE I.15. : Multicouplage des structures périodiques. Une application pour la charpente métallique

de couplage \mathbf{C} liant les vecteurs d'amplitudes d'ondes incidentes et réfléchies sur l'élément de couplage, en se basant sur la méthode de multiplicateurs de Lagrange (utilisée pour les contraintes aux surfaces de couplage). La représentation matricielle est sous la forme condensée :

$$\mathbf{Q}_{ref} = \mathbf{C}\mathbf{Q}_{inc} \quad (\text{I.17})$$

avec la matrice de diffusion $\mathbf{C} = -[\mathbf{T}^t \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{ref}^q + \Psi_{ref}^F]^{-1} [\mathbf{T}^t \mathbf{K}^* \mathbf{T} \Psi_{inc}^q + \Psi_{inc}^F]$, Ψ_{ref} , Ψ_{inc} sont les vecteurs d'ondes incidentes et réfléchies normalisées (les indices \mathbf{q} , \mathbf{F} sont associés aux vecteurs d'ondes pour les déplacements et pour les forces d'éléments) et \mathbf{Q}_{ref} , \mathbf{Q}_{inc} sont les vecteurs d'amplitudes des ondes réfléchies et incidentes associées aux sous-structures au niveau des surfaces de liaison. La matrice \mathbf{T} est similaire à la matrice de transfert des guides d'ondes à l'élément de couplage. La matrice \mathbf{K}^* est la matrice de rigidité de l'élément de couplage, condensée pour les degrés de liberté aux surfaces de couplage $\mathbf{K}^* \mathbf{q}_C = \mathbf{F}_C$. Les exemples numériques de couplage longitudinal et transversal entre deux poutres sont également présentés dans cet article.

4. Conclusion et perspectives

Cette thèse se compose de trois parties :

- La première partie consiste en l'identification des paramètres des matériaux constituant du pneu. Au début de cette partie, l'identification des propriétés statiques pour chaque matériau sera présentée. En principe, le processus de gonflement du pneu est considéré comme statique. Par

conséquent, les propriétés statiques sont utilisées pour modéliser et pour calculer les contraintes statiques dans la première phase. Le module élastique du caoutchouc à plusieurs points est déterminé par la loi de contact de Hertz. Une analyse détaillée de la bande de roulement est aussi présentée. Les modules dans les directions de la couche élémentaire sont mesurés et sont déterminés en connaissant le module apparent des câbles. Les propriétés mécaniques de la bande de roulement sont calculées par un modèle de composite.

Le deuxième chapitre aborde les caractéristiques et le comportement dynamique des matériaux. Dans les problèmes dynamiques, les modules complexes seront utilisés pour calculer les fonctions de réponse en fréquence. Les essais dynamiques permettent de déterminer le module élastique dynamique et le coefficient d'amortissement des matériaux.

- La deuxième partie présentera une campagne de mesure des fonctions de réponse en fréquence sur le pneumatique dans plusieurs cas : sur la bande de roulement et dans la section transversale. Quelques premiers modes de la bande de roulement et de la section sont identifiés. Ces fonctions seront vérifiées avec un modèle éléments finis périodiques dans la troisième partie.
- La troisième partie présentera en détail la méthode numérique d'éléments finis périodique et l'application au calcul des fonctions de réponse dynamique d'un pneumatique avec une vraie section ayant la distribution réelle des matériaux. La périodicité dont l'on profite est unidimensionnelle sur le contour du pneumatique. Les réponses en fréquence sont déterminées dans le cas de matériaux homogènes et elles sont validées avec le code d'éléments finis ANSYS. Lorsque la méthode est théoriquement validée, les propriétés réelles de la géométrie et des matériaux sont introduites. Un modèle incluant la pression interne sera présentée à la fin en comparaison avec les mesures réalisées dans la deuxième partie.

Les résultats de la thèse pourraient être utilisés dans l'analyse dynamique des structures ayant une périodicité car dans les logiciels actuels, l'exploitation de la périodicité n'est utilisée que dans les analyses statiques et modales. Pour les périodicités plus compliquées, cette méthode sera aussi applicable.

Quant au domaine du bruit, ce modèle du pneumatique nous donne la possibilité d'étudier les problèmes de bruit de transport, généré par le pneu en ajoutant l'effet de roulement dans ce modèle. L'idée est similaire à celle de la pression interne en la couplant avec le problème de contact pneu-chaussée.

Chapitre II.

Propriétés statiques des matériaux constituant du pneumatique

Dans ce chapitre, les propriétés statiques des matériaux constituant du pneumatique comme le caoutchouc, les câbles, la bande roulement et les tringles sont abordées. Le module élastique du caoutchouc est déterminé par la loi de Hertz tandis que celui de la bande de roulement est mesuré et validé par un modèle de composite. Le module équivalent des câbles est caractérisé par un modèle de Labrosse. Ces caractéristiques seront utilisées dans la phase de chargement statique du pneu.

Sommaire

1. Généralités	19
1.1. Composants d'un pneu	19
1.2. Essais statiques	19
1.2.1. Caoutchouc :	19
1.2.2. Bande de roulement :	20
1.2.3. Textile en nylon et tringles	20
2. Caoutchouc	20
2.1. Généralités. Contact élastique entre le caoutchouc et une bille d'acier	20
2.2. Dispositifs des essais	21
2.3. Résultats et commentaires	22
3. Couche élémentaire dans le pneu	23
3.1. Généralités	23
3.2. Fils d'acier	23
3.3. Câbles de trois fils torsadés	24
3.4. Propriétés d'une couche mélangée de caoutchouc et de câbles ($E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$)	26
3.4.1. Suivant la direction des câbles (E_L, ν_{LT})	26
3.4.2. Perpendiculairement à la direction des câbles (E_T)	27
3.4.3. 45° avec des câbles (G_{LT})	28
3.4.4. Synthèse des mesures de la couche élémentaire	30
4. Revêtement intérieur	31
4.1. Fibre en nylon	31
4.1.1. Compositions chimiques	31
4.1.2. Propriétés mécaniques	31
4.1.3. Dimensions	32
4.2. Propriétés mécaniques de la couche intérieure	32
5. Flanc	33
6. Bande de roulement	33
6.1. Généralités. Constitution de la bande de roulement	33
6.2. Modèle de composite pour la bande de roulement	34
6.3. Validation expérimentale	34

6.3.1.	Dispositifs des essais	34
6.3.2.	Modules apparents et coefficient de Poisson	35
6.4.	Synthèse	35
7.	Conclusion	36

1. Généralités

1.1. Composants d'un pneu

Un pneu est un ensemble de parties ou de sous-ensembles dont chacun a une fonction spécifique. La Fig. II.1 illustre les composantes clés d'un pneu de camion [19].

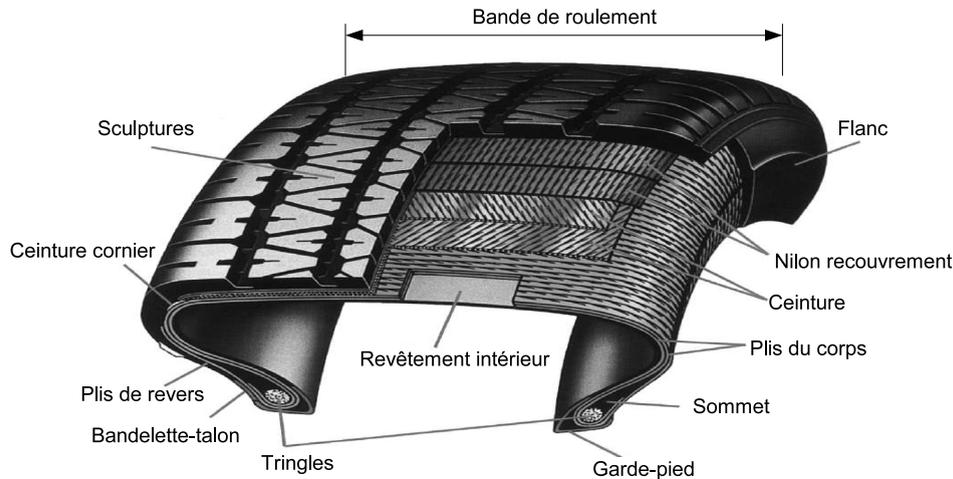


FIGURE II.1. : Composants d'un pneu

- Sculpture : la composante de résistance d'usure du pneu dans le contact avec la chaussée. Il doit fournir aussi la traction, le dérapage, et une bonne distribution des morceaux avec la génération minimale de bruit et de chaleur. Les sculptures sont des mélanges de caoutchouc naturel (NR), polybutadiène (BR), et styrène butadiène (SBR), produit avec du carbone, de la silice, des pétroles, et des produits chimiques vulcanisés.

- Base : une partie de la bande de roulement, cette composition caoutchouteuse garantit une bonne adhésion entre la ceinture et la sculpture, la dissipation de la chaleur et une faible résistance de roulement.

- Flanc : il sert à contrôler la direction de conduite. Il est composé de caoutchoucs naturels, SBR et BR avec du carbone, quelques huiles et des produits organiques.

- Tringles : boucle de fils d'acier inextensible qui ancre les plis et ainsi bloque le pneu sur la roue pour éviter le glissement sur la jante.

- Plis : en tissu ou en cordes d'acier, il est le matériau principal de renforcement du revêtement.

- Ceinture : couches en tissu ou en cordes d'acier au-dessous de la sculpture qui rigidifie le pneu, améliore la résistance à l'endommagement et protège les cordes des plis.

1.2. Essais statiques

Les caractéristiques statiques des matériaux sont utilisées dans l'estimation préliminaire du modèle ou dans l'étape de chargement statique. Comme les matériaux constitutifs du pneu d'une voiture normale sont le caoutchouc, la bande de roulement avec les câbles en acier, les tringles, les textiles en nylon, nous déterminerons les propriétés de ces matériaux. La méthode classique est d'effectuer une traction simple pour déterminer le module élastique. Pourtant, avec les matériaux complexes, on peut utiliser des techniques spécifiques pour chaque élément :

1.2.1. Caoutchouc :

Le caoutchouc est un matériau mou avec un faible module. Il existe divers modèles pour le caoutchouc du pneumatique comme un modèle simple de type Kelvin-Voigt ou plus complexe comme Mooney-Rivlin [76]. Il est considéré souvent comme un matériau hyperélastique. Pourtant, dans le cas d'analyses dynamiques avec une petite perturbation autour de la position d'équilibre, le comportement

du caoutchouc peut être considéré comme viscoélastique. L'essai de traction du caoutchouc exige une précision fine sur la force mesurée. Sameur [77] a utilisé la formule de contact de Hertz [78] qui relie le module élastique du matériau avec le déplacement de contact.

1.2.2. Bande de roulement :

La bande de roulement se compose de trois couches : deux couches élémentaires avec les câbles distribués dans le caoutchouc et une couche de caoutchouc au milieu. Les propriétés mécaniques de cette partie sont identifiées soit par les tests de traction soit par un processus d'homogénéisation en se basant sur les propriétés des câbles et du caoutchouc. Pour les câbles, comme on ne peut pas mesurer la déformation du fil avec les jauges courantes, une relation entre la force et le déplacement sera utilisée. Un modèle de fils torsadés sera utilisé comme dans [79]. C'est le modèle simplifié d'un modèle éléments finis proposé par Labrosse [80]. Les paramètres influençant sont les diamètres de fils et l'angle de torsion des fils autour du fil central. L'estimation avec les fils de renforcement dans le pneu montre une bonne cohérence avec la mesure. Ayant les caractéristiques des câbles et du caoutchouc, les modules élastiques de la couche élémentaire peuvent être obtenus par le modèle d'approche auto-cohérente ou de Mori-Tanaka. Pour cette couche, l'estimation et la mesure montrent aussi un bon accord.

Les modules élastiques de la bande de roulement sont également mesurés avec un processus standard de traction en utilisant des cellules de force et des jauges de déformation. Ils sont aussi calculés par un modèle d'homogénéisation d'un matériau composite multicouche. Ces calculs servent à déterminer les quantités difficilement mesurées par les essais courants pour les introduire dans le modèle numérique.

1.2.3. Textile en nylon et tringles

Le module équivalent des tringles peut être calculé de façon similaire à celui des câbles dans la couche élémentaire. Pourtant, son influence sur le comportement dynamique du pneu n'est pas très importante, car les tringles occupent un faible volume dans le pneu. Ils supportent essentiellement les contraintes statiques dans la phase de gonflement et de la charge dérivée par la voiture. La couche ayant le nylon peut être identifiée de même façon que la couche élémentaire ayant les câbles en acier.

2. Caoutchouc

2.1. Généralités. Contact élastique entre le caoutchouc et une bille d'acier

On considère que le caoutchouc dans la gomme et dans le flanc est isotrope. L'identification des caractéristiques du caoutchouc constituant du pneu est présentée en détail dans la Ref. [77]. La complexité de la géométrie du pneu engendre une difficulté d'y extraire une quantité suffisante pour faire les essais d'identification classique. Le module élastique du caoutchouc est mesuré en utilisant la loi de contact statique de Hertz. Le contact statique d'une bille en acier et un plan en caoutchouc est présenté dans la Fig. II.2. La Fig. II.3 présente l'évolution de la force P en fonction de l'interpénétration. La

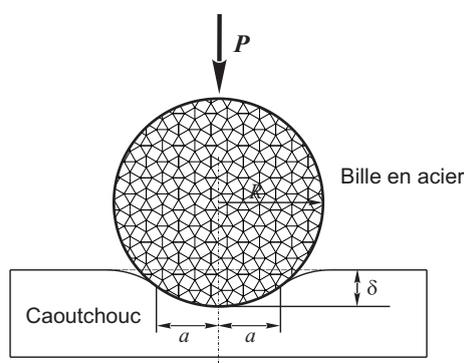


FIGURE II.2. : *Contact bille-caoutchouc*

vitesse de chargement est de 0.1 mm/min.

D'après la loi de contact de Hertz, la relation entre la force et l'interpénétration est sous la forme :

$$P = K\delta^{3/2} \quad (\text{II.1})$$

avec

$$K = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R} \quad (\text{II.2})$$

où P représente la charge normale appliquée, R est le rayon de courbure équivalente, E^* est le module d'Young équivalent et δ est l'interpénétration de la bille sphérique dans le caoutchouc.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{sphère}}} + \frac{1}{R_{\text{caoutchouc}}}; \quad \frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_{\text{sphère}}^2}{E_{\text{sphère}}} + \frac{1 - \nu_{\text{caoutchouc}}^2}{E_{\text{caoutchouc}}}$$

Vu que l'on connaît toutes les propriétés mécaniques de la sphère et $\nu_{\text{caoutchouc}} = 0.5$, on pourra calculer $E_{\text{caoutchouc}}$ par la détermination K . Comme le module élastique du caoutchouc est assez faible, la détermination de l'interpénétration δ au moment où la force est nulle est très sensible. Quelques fois, la mise en position de l'éprouvette n'est pas parfaite tandis que la force a déjà augmenté. Une solution possible est d'appliquer une force initiale P_0 correspondant au déplacement δ_0 . La loi de Hertz nous donne :

$$P(t) = K\delta(t)^{3/2} \quad t : \text{temps}; \quad P_0 = K\delta_0^{3/2}$$

On en déduit :

$$P(t)^{2/3} - P_0^{2/3} = K^{2/3}[\delta(t) - \delta_0] \quad (\text{II.3})$$

Le principe de l'expérience est qu'après avoir mis la sphère en contact avec le caoutchouc avec un déplacement initial δ_0 (négligeable par rapport au rayon de la sphère), on linéarise les points expérimentaux par l'Eq. (II.3) pour déterminer la valeur de K . La valeur du module d'Young du caoutchouc est calculée inversement à partir de K .

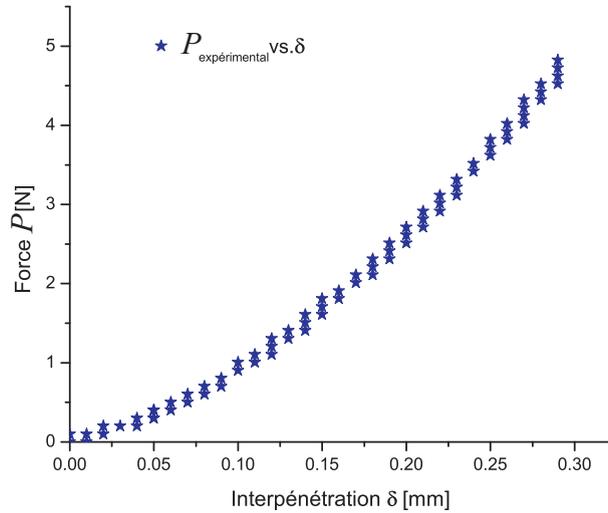


FIGURE II.3. : Évolution de la force en fonction de l'interpénétration dans le contact sphère-caoutchouc

2.2. Dispositifs des essais

On distingue des types de caoutchouc à la bande de roulement (dans la sculpture du pneu), au flanc (où il n'y a pas de câble en acier), et à la surface intérieure du pneu. Les propriétés mécaniques de ces trois types de caoutchouc sont potentiellement différentes car les caoutchoucs sont composés de divers composants chimiques (caoutchouc naturel, abrégé. NR; caoutchouc butadiène, abrégé. BR; ou styrène butadiène, abrégé. SBR). On extrait des morceaux de chaque partie composante dans le pneu et on effectue des essais de contact. Le dispositif des essais est introduit dans la Fig. II.4.

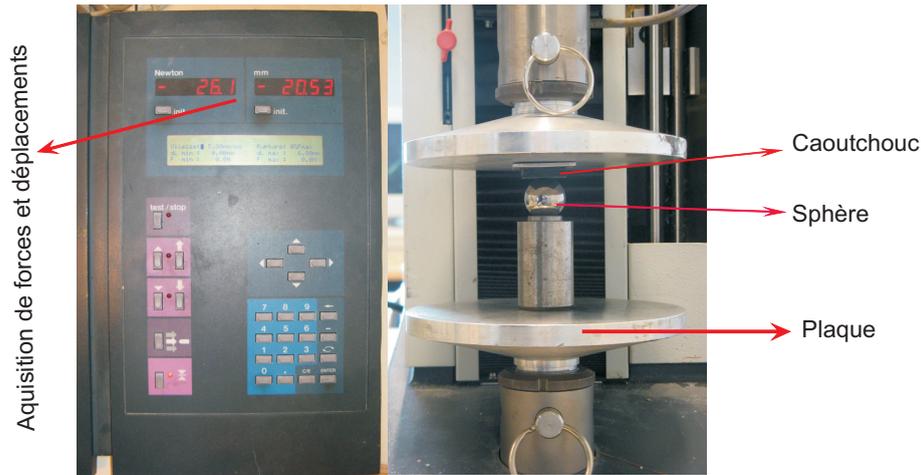


FIGURE II.4. : Dispositif des essais de contact pour déterminer le module élastique du caoutchouc

2.3. Résultats et commentaires

En traçant la représentation entre $P(t)^{2/3} - P_0^{2/3}$ en fonction de $(\delta(t) - \delta_0)$ pour chaque type de caoutchouc, on calcule la valeur de K . Les résultats expérimentaux de cette relation sont présentés dans la Fig. II.5. Le module équivalent est calculé par l'Eq. (II.2). Les valeurs utilisées sont :

- Le rayon de courbure du caoutchouc $R_{\text{caoutchouc}} \rightarrow \infty$
- Le rayon de la bille en acier $R_{\text{sphère}} = 4.75\text{mm} = 0.00475\text{m}$
- Le module d'Young de l'acier $E_{\text{sphère}} = 210\text{GPa}$
- Les coefficients de Poisson $\nu_{\text{caoutchouc}} = 0.5$ et $\nu_{\text{sphère}} = 0.3$

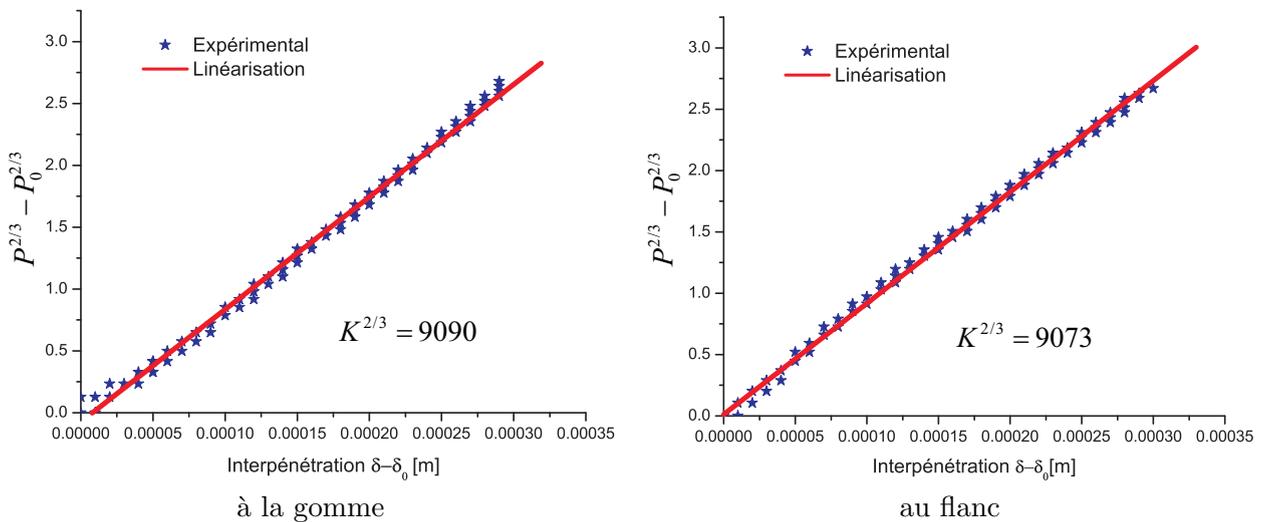


FIGURE II.5. : Module d'Young du caoutchouc calculé par la loi de contact de Hertz : à la gomme et au flanc

Les valeurs mesurées du caoutchouc aux trois positions sont synthétisées dans le Tab. II.1. On a

TABLEAU II.1. : Valeurs mesurées du module d'Young du caoutchouc de pneu

Positions	Intérieur	Bande de roulement	Flanc
$K^{2/3}$	9266	9090	9073
$E_{\text{caoutchouc}}$ [MPa]	7.28	7.07	7.05

identifié par la loi de contact de Hertz les modules d'Young de trois types de caoutchouc à l'intérieur,

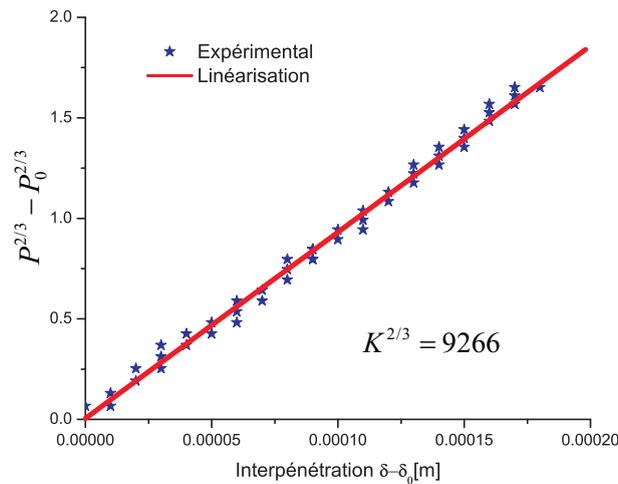


FIGURE II.6. : *Module d'Young du caoutchouc calculé par la loi de contact de Hertz : à l'intérieur*

à la bande de roulement et au flanc du pneu. Les valeurs obtenues sont en bon accord avec la valeur extraite dans [77] et [81] (le module statique à petites déformations est environ 7.1 MPa).

3. Couche élémentaire dans le pneu

3.1. Généralités

Une couche élémentaire du pneu consiste en une couche mélangée de câbles composés de trois fils en acier torsadés avec le caoutchouc comme la matrice dans un modèle fibre-matrice. Le câble de trois fils ne travaille pas comme une fibre avec une section constante le long du fil. Cependant, dans certains cas, quand les déformations restent encore petites (pour qu'il ne se produise pas une grande concentration de contrainte), on peut évaluer les propriétés en prenant un modèle fibre-matrice.

Dans cette section, les essais pour la détermination des propriétés de la couche élémentaire (et ainsi la loi des mélanges) sont présentés. Les modules, les coefficients de Poisson de cette couche sont mesurés et calculés par la loi des mélanges. Les résultats montreront la limite d'application de la loi des mélanges, où les câbles restent parallèles dans l'ensemble matrice-câbles. Dans l'essai d'identification du module de cisaillement ("traction à 45°" donc le couplage cisaillement-traction), le réseau des câbles est déformé et les câbles ne restent plus parallèles. Dans ce cas, la loi de mélange n'est plus valable.

Un facteur qui joue un rôle important dans le modèle fibre-matrice est la fraction volumique de tous les matériaux constitutifs. La fraction volumique des câbles ϕ_c et celle du caoutchouc $\phi_r = 1 - \phi_c$ est calculée après avoir brûlé une éprouvette de forme parallélépipédique de dimensions 0.6 x 18.6 x 125.5 mm, extraite à partir de cette couche en supposant que la masse volumique de l'acier est de 7850 Kg/m³. La masse volumique du caoutchouc est recalculée pour vérifier si elle est raisonnable (cette valeur est raisonnablement comprise entre 950-1150Kg/m³).

TABLEAU II.2. : *Fractions volumiques de l'acier et du caoutchouc dans la couche élémentaire*

	Masses [g]	Masse volumique [g/cm ³]	Volume [cm ³]	Fractions volumiques [%]
Acier	2.38	7.850	0.303	21.65
Caoutchouc	1.13	1.030	1.097	78.35

3.2. Fils d'acier

La détermination du module élastique d'un fil acier n'est pas simple car il n'est pas absolument droit. La contrainte normale n'est pas perpendiculaire à la section transversale et la relation entre la contrainte apparente (rapport entre la force et l'aire de la section) et la déformation apparente

(calculée en connaissant l'allongement $\lambda = 1 + \varepsilon$) ne représente pas exactement le comportement de l'acier. Pourtant, une valeur suffisamment raisonnable nous permet de vérifier que les câbles sont vraiment en acier et de déduire l'effet de diminution de la rigidité dans le cas où les câbles se composent de plusieurs fils torsadés.

Le diamètre du fil d'acier est calculé à partir du volume d'acier mesuré représenté dans le Tab. II.2. Le nombre de câbles est $n_{\text{cable}} = 17$. La longueur de câbles est de $l_{\text{cable}} = 125.5\text{mm}$. Le diamètre est donc :

$$d_{\text{fil}} = \sqrt{\frac{4V_{\text{acier}}}{3\pi n_{\text{cable}} l_{\text{cable}}}} = 0.2456\text{mm} \quad (\text{II.4})$$

On doit assurer la fixation de deux bouts du fil lors de l'essai car la raideur du fil et celui de la machine sont comparables. On utilise des vis de serrage combinées avec des chevilles comme dans la Fig. II.7. Le dispositif des essais de traction d'un fil est le même que pour E_T de la couche élémentaire dans la Fig II.9. Il faut remarquer que nous devons effectuer plusieurs tractions secondaires pour l'aligner le plus possible et pour que les valeurs soient convergentes. Le module élastique mesuré est la pente de la courbe contrainte-déformation linéarisée.

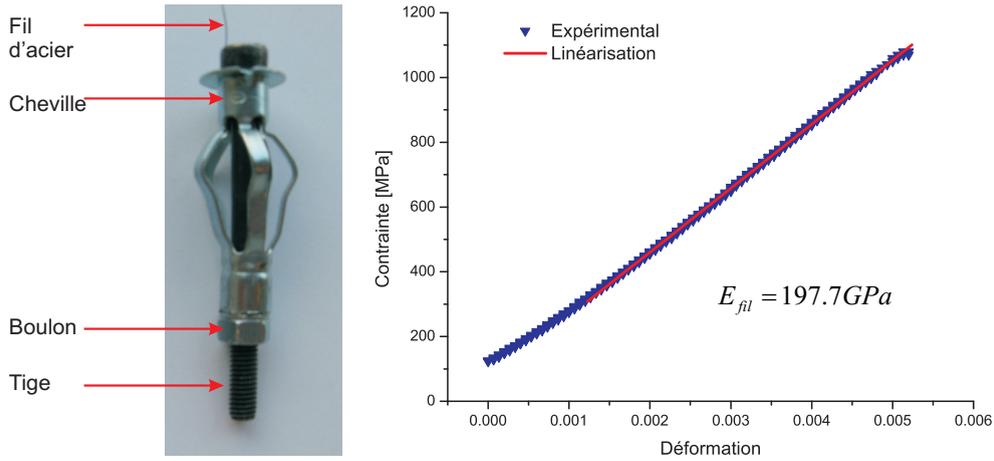


FIGURE II.7. : Vis de serrage et module élastique du fil d'acier dans la couche élémentaire

3.3. Câbles de trois fils torsadés

Le principe de détermination du module d'Young apparent du câble de trois fils torsadés est similaire à celui d'un fil présenté dans la section 3.2. Une remarque à prendre en compte est qu'au fur et à mesure, la valeur mesurée est augmentée selon le nombre de tractions. Ce phénomène vient de la mise en position de deux bouts du câble et de la mise en contact imparfait entre les trois fils. La solution est qu'on peut tirer plusieurs fois sur un câble sans modifier la connexion entre la machine et les deux vis de serrage. Le module mesuré sera convergent à la valeur exacte. L'aire équivalente du câble est prise comme :

$$A_{\text{cable}} = 3A_{\text{fil}} = 3 \frac{\pi d_{\text{fil}}^2}{4} \quad (\text{II.5})$$

Dans [79, 80], un modèle semi-analytique appelé "modèle de Labrosse" est présenté pour calculer le

TABLEAU II.3. : Convergence des valeurs mesurées du module d'Young apparent du câble

Tirage N°	1	2	3	4	5	6
E_{cable} GPa	48.77	101.39	145.81	160.63	163.41	162.55

module élastique équivalent d'un câble synthétique composé de fils torsadés. L'équation de ce modèle s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_z \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon} & k_{\varepsilon\theta} \\ k_{\theta\varepsilon} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{z,z} \\ \theta_{z,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

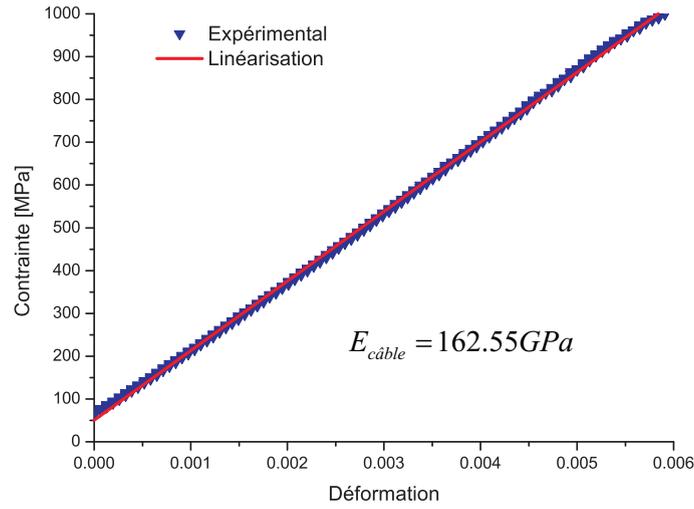


FIGURE II.8. : Module élastique du câble de trois fils dans la couche élémentaire

où $\varepsilon_{z,z}, \theta_{z,z}$ sont respectivement les déformations axiales et de torsion. Dans notre cas, on considère que deux fils sont tournés autour du fil restant faisant deux hélices. Les expressions analytiques des termes de la matrice de rigidité sont :

$$\begin{cases} k_{\varepsilon\varepsilon} = (EA)_f + 2(EA)_f \cos^3 \alpha \\ k_{\varepsilon\theta} = k_{\theta\varepsilon} = 2(EA)_f R_h \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ k_{\theta\theta} = (GI)_f + 2[(EA)_f R_h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha + (GI)_f \cos^5 \alpha + (EI)_f \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha)] \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

où l'indice f représente des propriétés du fil, R_h est la distance du centre d'un fil "hélice" au centre du fil central. Dans ce cas, $R_h = d_{\text{fil}}$, α est l'angle de la tangente de l'hélice avec l'axe du câble.

$$\tan \alpha = 2\pi \frac{R_h}{L_0}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi R_h}{L_0}\right)^2}}$$

où L_0 est la période de l'hélice.

Avec $d_{\text{fil}} = 0.245 \text{ mm}$, $L_0 = 11 \text{ mm}$, on en déduit $\alpha = 8^\circ$.

Retournons à l'Eq. II.6, si le câble est libre en rotation, $M_z = 0$, on peut tirer $\theta_{z,z} = -\frac{k_{\varepsilon\theta}}{k_{\theta\theta}} \varepsilon_{z,z}$. La force est réécrite :

$$F_z = k_{\varepsilon\varepsilon} \varepsilon_{z,z} + k_{\varepsilon\theta} \theta_{z,z} = \left[k_{\varepsilon\varepsilon} - \frac{k_{\varepsilon\theta}^2}{k_{\theta\theta}} \right] \varepsilon_{z,z} = K^* \varepsilon_{z,z} \quad (\text{II.8})$$

Le module équivalent du câble est déterminé par :

$$E_{\text{câble}} = \frac{K^*}{A_{\text{câble}}} = E_{\text{fil}} \cdot f(\alpha) \quad (\text{II.9})$$

En prenant $G_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$, $I_f = \frac{\pi d_f^4}{32}$, $A_f = \frac{\pi d_f^2}{4}$, à partir de l'Eq. (II.7), on calcule la fonction $f(\alpha)$:

$$f(\alpha) = \frac{1}{3} \left[1 + 2 \cos^3 \alpha - \frac{64 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha}{\frac{1}{1+\nu_f} (1 + 2 \cos^5 \alpha) + 36 \sin^2 \alpha \cos \alpha + 4 \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha} \right] \quad (\text{II.10})$$

Avec $\alpha = 8^\circ$, $E_{\text{fil}} = 197.7 \text{ GPa}$ et $\nu_f = 0.33$, on retire $f(\alpha) = 0.8464$ et $E_{\text{câble}} = 167.3 \text{ GPa}$. Si l'on tient compte de la diminution de l'aire équivalente du câble, le module équivalent du câble devient $E_{\text{câble}} = 164.1 \text{ GPa}$. Cette valeur est bien comparable à la valeur mesurée dans la Fig. II.8.

Pour les calculs ultérieurs, on utilisera la valeur $E_{\text{câble}} = 162.5 \text{ GPa}$ dans le modèle mélangé matrice-câble.

3.4. Propriétés d'une couche mélangée de caoutchouc et de câbles ($E_L, E_T, \nu_{LT}, G_{LT}$)

Dans cette section, les propriétés de la couche élémentaire dans la bande de roulement sont discutées. Comme un mélange matrice-fibre, les quantités mécaniques les plus importantes sont les modules longitudinaux et transversaux dans deux directions principales E_L, E_T , le coefficient de Poisson ν_{LT} et le module de cisaillement G_{LT} . On effectuera trois essais pour chaque type de valeur. Les éprouvettes sont sous forme de parallélépipède et elles sont extraites dans le même pneu qui a été utilisé pour les essais avec les câbles. Les dispositifs d'essais sont présentés dans la Fig. II.9. Les valeurs obtenues dans

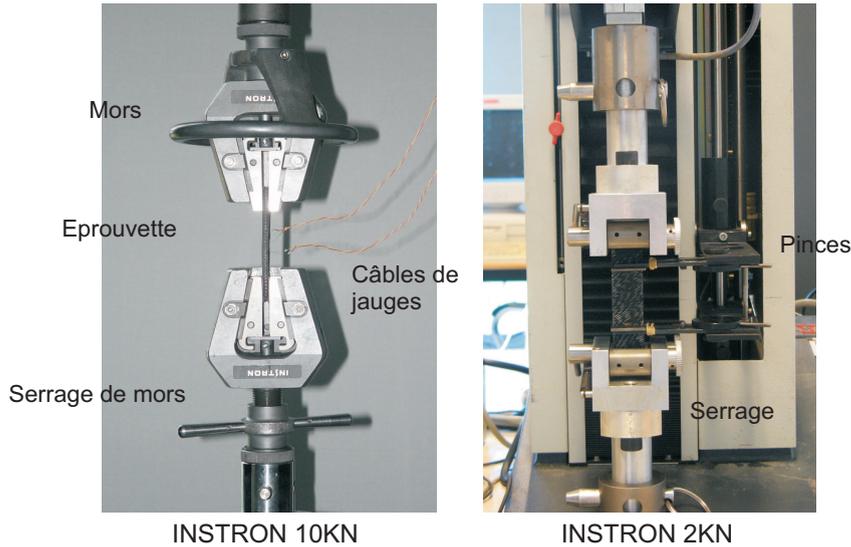


FIGURE II.9. : Dispositifs des essais de E_L, ν_{LT} (10KN) et E_T, G_{LT} (2KN)

les sections précédentes sont utilisées pour estimer les mesures.

3.4.1. Suivant la direction des câbles (E_L, ν_{LT})

L'épaisseur de la couche élémentaire est de 0.6mm. L'échantillon utilisé pour cet essai est extrait de cette couche avec 73mm de longueur, 17.1mm de largeur. La jauge de type $KFG-20-120-C1-11$ [82] est utilisée pour acquérir les déformations longitudinales. La loi des mélanges est utilisée pour analyser les valeurs mesurées. Les valeurs obtenues par les mesures sont présentées dans le Tab. II.4 et dans la Fig. II.10.

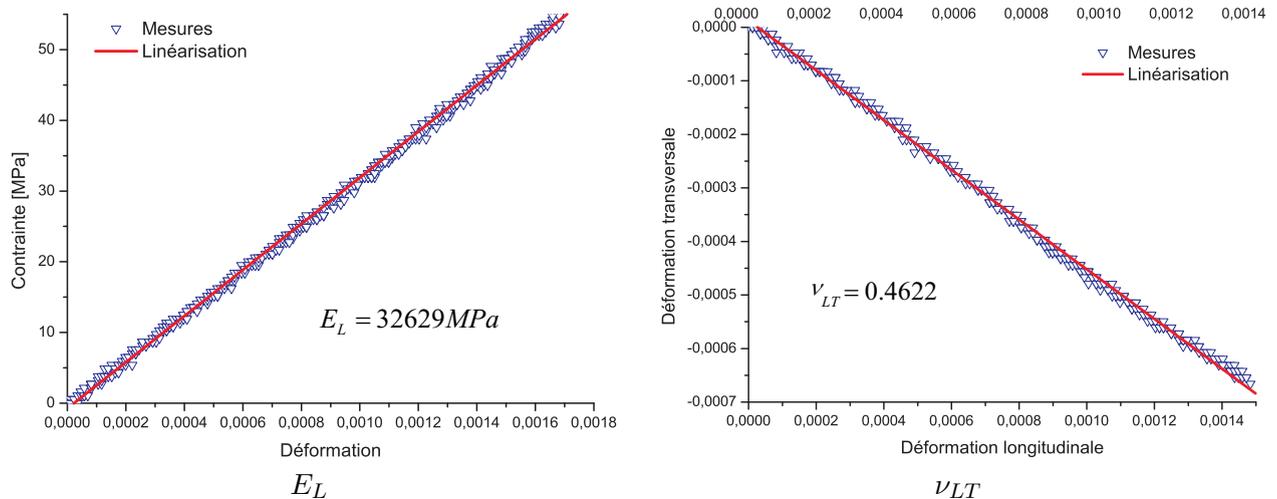


FIGURE II.10. : Module élastique longitudinal E_L et le coefficient de Poisson dans la couche élémentaire

TABLEAU II.4. : Valeurs mesurées du module élastique longitudinal E_L

N°	1	2	3	4	5
E_L [MPa]	34379	30814	32629	34737	36182
$\overline{E_L}$ [MPa]	33748.2				

TABLEAU II.5. : Valeurs mesurées du coefficient de Poisson ν_{LT}

N°	1	2
ν_{LT}	0.4622	0.482
$\overline{\nu_{LT}}$	0.4721	

Exploitant les valeurs calculées précédemment, le module élastique longitudinal et le coefficient de Poisson calculés par la loi des mélanges valent :

$$E_L = \phi_c E_{\text{cable}} + \phi_r E_{\text{caoutchouc}} = 35.14 \text{ GPa} \quad (\text{II.11})$$

$$\nu_{LT} = \phi_c \nu_c + \phi_r \nu_{\text{caoutchouc}} = 0.463 \quad (\text{II.12})$$

L'estimation par la loi des mélanges nous donne un résultat proche des mesures.

3.4.2. Perpendiculairement à la direction des câbles (E_T)

Comme on sait que suivant la direction perpendiculaire à celle des câbles, le module élastique est beaucoup plus petit que celui dans l'autre direction, la jauge n'est plus utilisée. On mesurera les forces et les déplacements et on en déduira la relation contrainte-déformation en connaissant les dimensions de la section de l'échantillon et sa longueur. L'élongation de l'échantillon est déterminée directement à partir du déplacement et de la longueur initiale.

Les dimensions de l'éprouvette sont :

- Longueur : 93mm
- Largeur : 20.8mm
- Épaisseur : 0.6mm

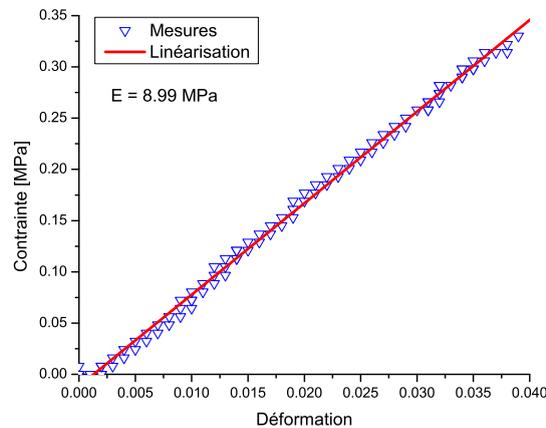


FIGURE II.11. : Module élastique transversal E_T dans la couche élémentaire

La loi de mélange s'écrit :

$$\frac{1}{E_T} = \frac{\phi_s}{E_{\text{cable}}} + \frac{\phi_r}{E_{\text{caoutchouc}}} \longrightarrow E_T = 9.1 \text{ MPa} \quad (\text{II.13})$$

Cette valeur est bien en accord avec les mesures montrées dans la Fig. II.11.

3.4.3. 45° avec des câbles (G_{LT})

Première méthode :

Le module de cisaillement est déterminé en se basant sur l'essai de traction d'un empilement de deux couches élémentaires avec les angles $\theta_i = \pm 45^\circ$. Remplaçant $\theta_1 = 45^\circ$ et $\theta_2 = -45^\circ$ dans le modèle de composite (voir Section 6.2), on calcule les matrices de rigidité $\mathbf{R}_{(e_x, e_y, e_3)}^1$ et $\mathbf{R}_{(e_x, e_y, e_3)}^2$ et on en déduit \mathbf{A}^* par l'Eq (A.20) dans l'annexe. Comme on connaît E_L, E_T et ν_{LT} , les matrices de rigidité contiennent une seule inconnue G_{LT} . Or, la matrice \mathbf{A}^* et donc le module d'Young apparent E_{45} dépendent de G_{LT} (Eqs.(A.20) et (A.11)).

En remplaçant les angles $\theta_i = \pm 45^\circ$, on peut calculer E_{45} d'après [83] :

$$E_{45} = \frac{1}{h} \left(A_{11}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{22}^*} \right) = \frac{4\Sigma G_{LT}}{\Sigma + G_{LT}} \quad (\text{II.14})$$

avec $\Sigma = \frac{E_L + (1 + 2\nu_{LT})E_T}{4(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}$. En connaissant E_{45} mesuré, on peut calculer G_{LT} :

$$G_{LT} = \frac{\Sigma E_{45}}{4\Sigma - E_{45}} \quad (\text{II.15})$$

(Si $G_{LT} \ll \Sigma \rightarrow G_{LT} \approx \frac{E_{45}}{4}$)

Seconde méthode :

Selon la formule de calcul du module "technique" E_1 (d'une couche élémentaire simple, différent de E_{45} avec deux couches mentionné dans la première méthode), après avoir "tourné" d'un angle θ (voir l'Eq. (II.32), θ est l'angle entre la direction des câbles et l'axe de l'éprouvette), on en déduit :

$$\frac{1}{G_{LT}} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} - \frac{\cot^2 \theta}{E_L} - \frac{\tan^2 \theta}{E_T} \quad (\text{II.16})$$

Avec l'angle $\theta = 45^\circ$, la formule est plus simple :

$$\frac{1}{G_{LT}} = 4 \frac{1}{E_1} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} - \frac{1}{E_L} - \frac{1}{E_T} \quad (\text{II.17})$$

Les mesures du module de "traction à 45°" sont présentées dans le Tab. II.6 et dans la Fig. II.12. La

TABLEAU II.6. : Valeurs mesurées du module de "traction à 45°" E_1

N°	1	2	3	4	5
E_1 [MPa]	11.494	12.061	11.867	11.387	11.872
\bar{E}_1 [MPa]	11.7362				

valeur moyenne de E_1 nous donne $G_{LT} = 4.5\text{MPa}$.

Modèles utilisés pour estimer le module de cisaillement :

Actuellement, il y a plusieurs modèles pour estimer le module G_{LT} d'un composite du type des matériaux mélangés. Pour un modèle simple de type fibre-matrice, on utilise souvent la loi des mélanges en connaissant les propriétés des fibres et de la matrice. Pourtant, ce module doit satisfaire les bornes inférieures et supérieures d'un matériau mélange de différents matériaux [83].

$$G_r + \frac{\phi_{cab}}{\frac{1}{G_{cab} - G_r} + \frac{1 - \phi_{cab}}{2G_r}} \leq G_{LT} \leq G_{cab} + \frac{\phi_r}{\frac{1}{G_r - G_{cab}} + \frac{1 - \phi_r}{2G_{cab}}} \quad (\text{II.18})$$

En prenant $G_{cab} = \frac{E_{cab}}{2(1 + \nu_{cab})}$ et $G_r = \frac{E_r}{2(1 + \nu_r)}$, avec $E_{cab} = 163\text{GPa}$ (voir le Tab. II.3), $\nu_{cab} = 0.33$, $E_r = 7.1\text{MPa}$ (Tab. II.1), $\nu_r = 0.5$, cette équation nous donne $G_{LT} \in [3.674, 7407.86]$ MPa. Une analyse plus détaillée sur l'approche des modules ainsi que les bornes est présentée dans [84].

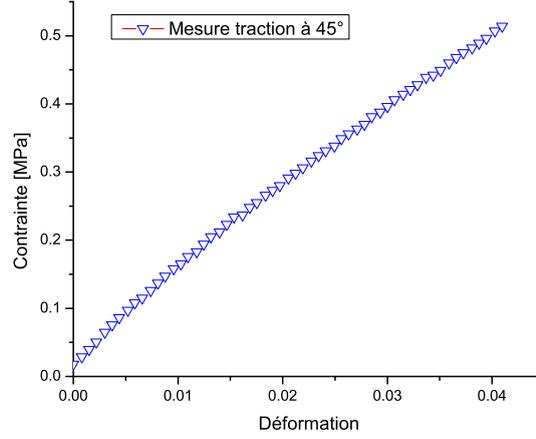


FIGURE II.12. : Module élastique E_1 à l'angle 45°

Comme le rapport volumique entre deux matériaux n'est pas suffisamment faible, on ne peut pas utiliser l'approche de distribution diluée dans laquelle l'inclusion est considérée comme "plongée" dans un milieu dont les propriétés mécaniques sont celles de la matrice. La distance entre les deux câbles consécutifs est assez petite pour qu'il existe des interactions entre leurs zones d'influence. Les approches "raisonnables" sont le modèle d'assemblage cylindrique [83], les estimations auto-cohérentes ou de Mori-Tanaka [85, 86, 87]. On présentera les résultats de ces modèles dans le paragraphe suivant :

- *Assemblage cylindrique :*

Dans ce modèle, on suppose que la zone d'influence de chaque inclusion a la forme d'un cylindre de matrice autour de l'inclusion. D'après [83], le module de cisaillement G_{LT} est calculé :

$$G_{LT} = G_r \frac{G_{cab}(1 + \phi_{cab}) + G_r(1 - \phi_{cab})}{G_{cab}(1 - \phi_{cab}) + G_r(1 + \phi_{cab})} = 3.676 \text{MPa} \quad (\text{II.19})$$

Cette valeur est bien comprise entre les deux bornes mentionnées.

- *Schéma auto-cohérent :*

Le schéma auto-cohérent est une méthode approchée en déformation des milieux hétérogènes de type matrice-inclusion. Le principe de ce schéma est d'appliquer un champ de déformation \mathbf{E} et d'estimer le tenseur de localisation de l'inclusion α . Pour tous les domaines Ω_α , il existe un tenseur de 4^e ordre et symétrique, \mathbf{L}^α , appelé tenseur de localisation des déformations, qui relie linéairement la moyenne du champ de déformation $\langle \varepsilon_E \rangle_\alpha$ sur Ω_α à \mathbf{E}

$$\langle \varepsilon_E \rangle_\alpha = \mathbf{L}^\alpha : \mathbf{E} \quad (\text{II.20})$$

Les tenseurs \mathbf{L}^α doivent satisfaire l'équation suivante :

$$\sum_\alpha f_\alpha \mathbf{L}^\alpha = \mathbf{I} \quad (\text{II.21})$$

où f_α et \mathbf{I} sont respectivement la fraction volumique de l'inclusion α et le tenseur d'identité. Le module de cisaillement du milieu homogénéisé par le schéma auto-cohérent est calculé par :

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + \sum_\alpha \frac{f_\alpha \left(\frac{\mu^\alpha}{\mu} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\mu^\alpha}{\bar{\mu}} - 1 \right) \bar{s}_2} \quad (\text{II.22})$$

où le symbole $\bar{}$ désigne les propriétés du milieu homogénéisé, $\bar{s}_2 = \frac{2(4-5\bar{\nu})}{15(1-\bar{\nu})}$. S'il y a seulement un type d'inclusion, on obtient :

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu} = 1 + \frac{f_\alpha \left(\frac{\mu^\alpha}{\mu} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\mu^\alpha}{\mu} - 1 \right) \bar{s}_2} \quad (\text{II.23})$$

On peut déduire $\bar{\mu}$ en fonction des autres paramètres :

$$(1 - \bar{s}_2) \bar{\mu}^2 + [\bar{s}_2(\mu^\alpha + \mu) - f_\alpha \mu^\alpha - (1 - f_\alpha) \mu] \bar{\mu} - \bar{s}_2 \mu \mu^\alpha = 0 \quad (\text{II.24})$$

Dans notre cas, on peut prendre $\bar{\nu} = \nu_{LT} = 0.472$ le coefficient de Poisson du milieu, $\mu_\alpha = G_{cab}$, $f_\alpha = \phi_{cab}$, $\mu = G_r$, le module de cisaillement longitudinal G_{LT} est estimé par $\bar{\mu}$. Remplaçant toutes les valeurs citées dans l'Eq (II.24), le module de cisaillement estimé vaut 4.96 MPa.

- *Schéma de Mori-Tanaka* :

Dans [86], le module de cisaillement d'un milieu composé de deux matériaux homogènes est estimé par :

$$\frac{\mu - \mu_1}{\mu - \mu_2} = \frac{\phi_2}{1 + (1 - \phi_2) \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + f_1}} \quad (\text{II.25})$$

où $f_1 = \mu_1 \frac{9K_1 + 8\mu_1}{6(2K_1 + 2\mu_1)}$, μ_1, μ_2 sont les modules de cisaillement des matériaux 1 et 2, et ϕ_2 est la fraction volumique du matériau 2 (inclusions). Si la matrice 1 est le caoutchouc le module de compressibilité $K_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \rightarrow \infty$ et f_1 devient $\frac{3}{2}\mu_1$ (où le module de cisaillement du caoutchouc μ_1 est dénoté souvent par G_r dans les calculs). Le module estimé devient :

$$G_{LT} = G_r + \frac{(G_{cab} - G_r) \phi_{cab}}{1 + \frac{2(1 - \phi_{cab})(G_{cab} - G_r)}{5G_r}} = 4\text{MPa} \quad (\text{II.26})$$

Comme l'indiquent les résultats dans [86] ou [87], il y a des différences entre les modèles approchés. Quelquefois, ces différences sont assez grandes. On ne peut pas dire quel modèle est plus exact car le résultat dépend de quel matériau on doit estimer. D'autre part, la couche élémentaire n'est pas suffisamment large pour l'homogénéisation et le câble n'est pas homogène. En conclusion, on prendra la valeur mesurée pour les calculs prochains.

3.4.4. Synthèse des mesures de la couche élémentaire

Le Tab. II.7 représente la comparaison entre les résultats mesurés et calculés. Les valeurs indiquées dans ce tableau sont utilisées dans les calculs ultérieurs.

TABLEAU II.7. : *Synthèse des mesures des propriétés mécaniques de la couche élémentaire*

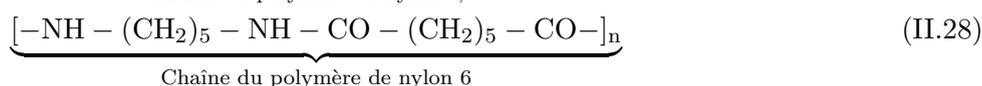
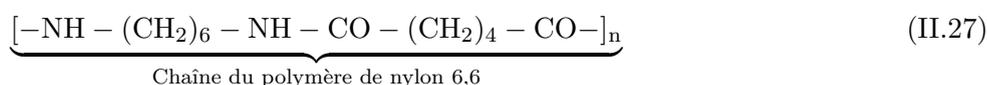
Propriétés	Dispositifs	Mesures	Approche	Commentaires
E_L [GPa]	Cell. 10KN+jauge	33.7	35.1	Loi de mélange
E_T [MPa]	Cell. 2KN	9.0	9.1	Loi de mélange
ν_{LT}	Cell. 10KN+jauge	0.472	0.463	Loi de mélange
G_{LT} [MPa]	Cell. 2KN	4.5	4	Mori-Tanaka

4. Revêtement intérieur

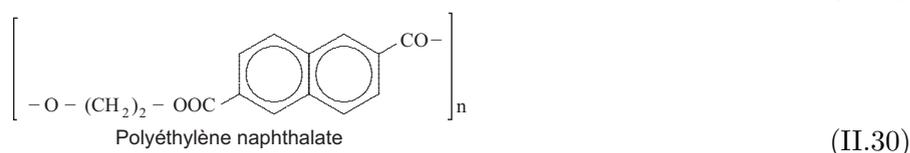
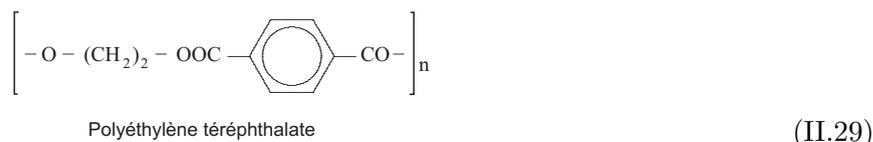
4.1. Fibre en nylon

4.1.1. Compositions chimiques

Les fibres dans la couche de revêtement intérieur sont souvent fabriquées en nylon ou en polyester. Ce sont des polyamides avec la présence du groupe amide $-(CO-NH)-$ dans la chaîne du polymère principal [19]. Une grande variété de nylons sont disponibles, mais il n'y a que deux types qui sont utilisés dans la fabrication des pneus : le nylon 6 et le nylon 6,6. Ils sont présentés dans les formules (II.27) et (II.28). Après l'étape de polymérisation, la marchure (tissage des textiles) peut atteindre 500% pour orienter les chaînes, créer les zones cristallines et augmenter la résistance du nylon.



Comme les nylons, les polyesters sont largement utilisés dans les pneus. On préfère particulièrement utiliser une fibre en polyester thermoplastique, notamment polyéthylène téréphthalate (PET. ¹) et polyéthylène naphthalate (PEN. ²). De la même façon, le PET et le PEN sont formés par un processus de condensation des polymères. Le matériau polymérisé est extrudé à travers une filière pour former des filaments d'environ 0.025mm de diamètre.



4.1.2. Propriétés mécaniques

Les propriétés mécaniques sont présentées en détail dans les articles [88, 89]. Elles dépendent essentiellement du nombre de tours de torsion par mètre, du diamètre des filaments et du processus de fabrication (écriu ou imprégné). Les valeurs de la densité et du module élastique sont présentées dans le Tab. II.8.

TABLEAU II.8. : *Propriétés mécaniques des nylons et polyesters*

Catégories	Module élastique [GPa]		Densité [g/cm ³]
	Écriu	Imprégné	
Nylon 6	2.1	2.5	1.144
Nylon 6,6	2.2	2.9	1.145
Polyester	6.7	8.5	1.394

¹<http://fr.wikipedia.org/wiki/>

²<http://pslc.ws/french/pet.htm>

4.1.3. Dimensions

Dans [90], les fibres en polyester ou en nylon sont extrudées par un processus similaire à celui pour les câbles en acier. Le diamètre est entre 0.2-0.4mm. Alors, on prendra 0.3mm comme diamètre des fibres.

4.2. Propriétés mécaniques de la couche intérieure

On prend une éprouvette de section 2mm x 20mm pour examiner les propriétés mécaniques de cette couche. En sachant que le nombre de fibres dans une bande de 20mm est $N_f = 17$, on peut calculer la fraction volumique des fibres.

La fraction volumique de fibres est calculée par :

$$\phi_f = \frac{S_f}{S_e} = \frac{N_f \pi \frac{d_f^2}{4}}{b_e h_e} = 3\% \quad (\text{II.31})$$

où S_f, S_e sont respectivement les aires totales de fibres et de l'éprouvette, N_f, d_f sont le nombre et le diamètre de fibres, b_e, h_e sont la largeur et l'épaisseur de l'éprouvette.

Le module et la densité des fibres sont pris comme celles du polyester imprégné. La densité du caoutchouc est calculée dans la section précédente $\rho_r = 1.03\text{g/cm}^3$. En résumé, les propriétés de la couche intérieure sont calculées par la loi des mélanges et présentées dans le Tab. II.9.

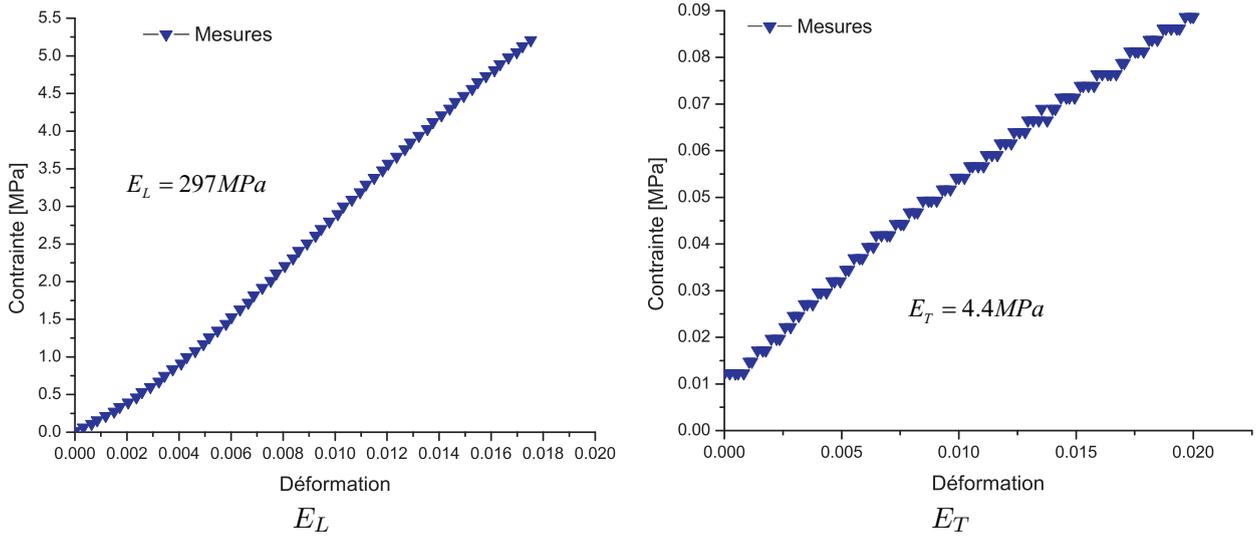


FIGURE II.13. : Modules élastiques longitudinal E_L et transversal E_T de la couche de revêtement intérieure

TABLEAU II.9. : Propriétés mécaniques de la couche intérieure du pneu

Propriétés	Calculs	Mesures
E_L [MPa]	262.24	297
E_T [MPa]	7.32	4.4
ν_{LT}	0.494	-
G_{LT} [MPa]	2.44	-
ρ [g/cm ³]	1.04	-

5. Flanc

De façon similaire à la couche intérieure, on calculera les propriétés mécaniques du flanc en tenant compte de l'épaisseur du flanc. Le mesure nous donne cette épaisseur moyenne de 5mm. La densité de fibres sur une bande reste 17fibres/20mm. Le résultat se présente donc dans le Tab. II.10 et la Fig.II.14.

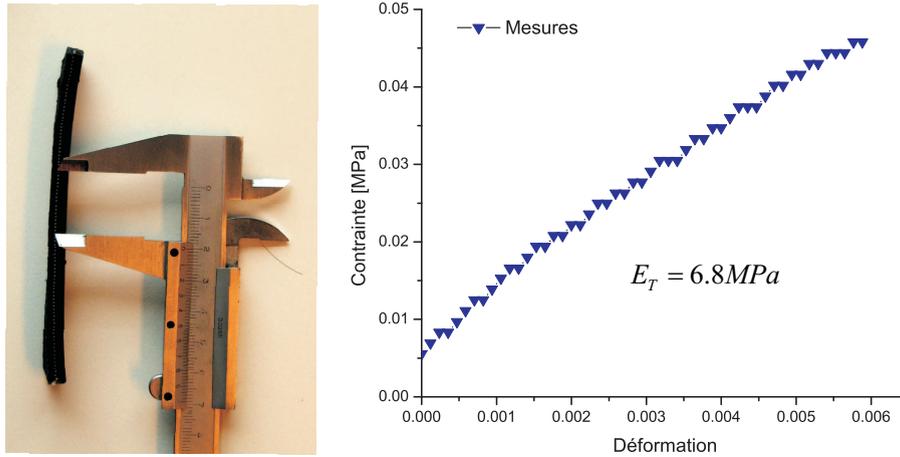


FIGURE II.14. : *Module élastique transversal E_T du flanc*

TABLEAU II.10. : *Propriétés mécaniques du flanc*

Propriétés	Calculs	Mesures
E_L [MPa]	109.16	-
E_T [MPa]	7.186	6.8
ν_{LT}	0.498	-
G_{LT} [MPa]	2.395	-
ρ [g/cm ³]	1.034	-

6. Bande de roulement

6.1. Généralités. Constitution de la bande de roulement

La macro couche est la partie où se trouve les câbles de renforcement. Elle se compose à partir de deux couches élémentaires d'épaisseur 0.6mm avec les angles de rotation $\theta = \pm 20^\circ$ et d'une couche de caoutchouc d'épaisseur 0.6mm. La bande de roulement se trouve au-dessous de la gomme de la sculpture du pneu. Les trois couches constitutives de cette couche sont présentées dans la Fig. II.15.

On suppose que l'on a les propriétés d'une couche élémentaire. Pourtant, les propriétés mécaniques d'une macro couche combinée avec les couches élémentaires avec différents angles de rotation ne sont pas simplement calculées par la loi des mélanges même dans le cas où on peut calculer des valeurs "techniques" des couches élémentaires "tournées". Par exemple, la matrice de souplesse \mathbf{S}' est calculée après avoir "tourné" d'un angle θ et s'écrit :

$$\mathbf{S}' = \mathbf{O}_\varepsilon \mathbf{S} \mathbf{O}_\varepsilon^t$$

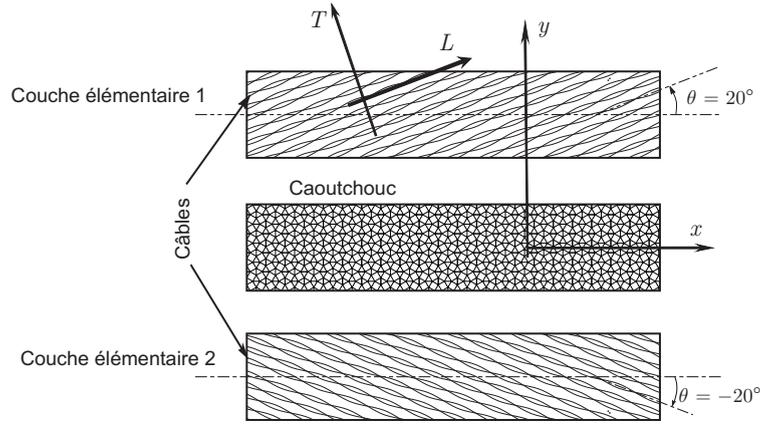


FIGURE II.15. : Constitution de la macro couche

Les valeurs techniques sont déterminées par :

$$\frac{1}{E_1} = \frac{1}{S'_{11}} = \frac{\cos^4 \theta}{E_L} + \frac{\sin^4 \theta}{E_T} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{G_{LT}} - \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (\text{II.32})$$

$$-\frac{\nu_{12}}{E_1} = \left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_{LT}} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\nu_{LT}}{E_L} \quad (\text{II.33})$$

$$\frac{1}{G_{12}} = S'_{66} = 4 \left[\left(\frac{1}{E_L} + \frac{1}{E_T} + \frac{2\nu_{LT}}{E_L} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{G_{LT}} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \right] \quad (\text{II.34})$$

Les propriétés de la macro couche ne sont pas des moyennes pondérées de ces valeurs. Par conséquent, on devrait utiliser un modèle de composite multi-couche pour trouver les valeurs équivalentes de la couche. La section suivante présentera un modèle courant utilisé pour les matériaux multi-couche avec les essais “virtuels” (traction et cisaillement) pour déterminer les valeurs nécessaires.

6.2. Modèle de composite pour la bande de roulement

Ayant les propriétés des couches élémentaires et du caoutchouc, on peut déterminer les modules “apparents” de la bande de roulement en calculant les matrices de comportement bidimensionnel d’un composite de trois couches. Une autre solution est d’utiliser le logiciel MACLAM avec lequel on peut introduire les couches avec les propriétés mécaniques. Ce logiciel va donner les propriétés équivalentes du composite. (Pour les calculs en détail des modules “apparents”, voir l’annexe)

6.3. Validation expérimentale

6.3.1. Dispositifs des essais

Les dispositifs pour déterminer les modules d’Young apparents sont la machine INSTRON 2KN comme on a vu dans la Fig. II.9. Les dimensions des éprouvettes pour ces deux types de mesure sont présentées dans le Tab. II.11. Le coefficient de Poisson est mesuré par la machine INSTRON 10KN avec l’aide des jauges de déformations et du programme d’acquisition LABVIEW.

 TABLEAU II.11. : Dimensions des éprouvettes pour les essais d’identification des modules E_x, E_y

Directions	Longueur [mm]	Largeur [mm]	Épaisseur [mm]
x	120	23	1.8
y	120	22	1.8

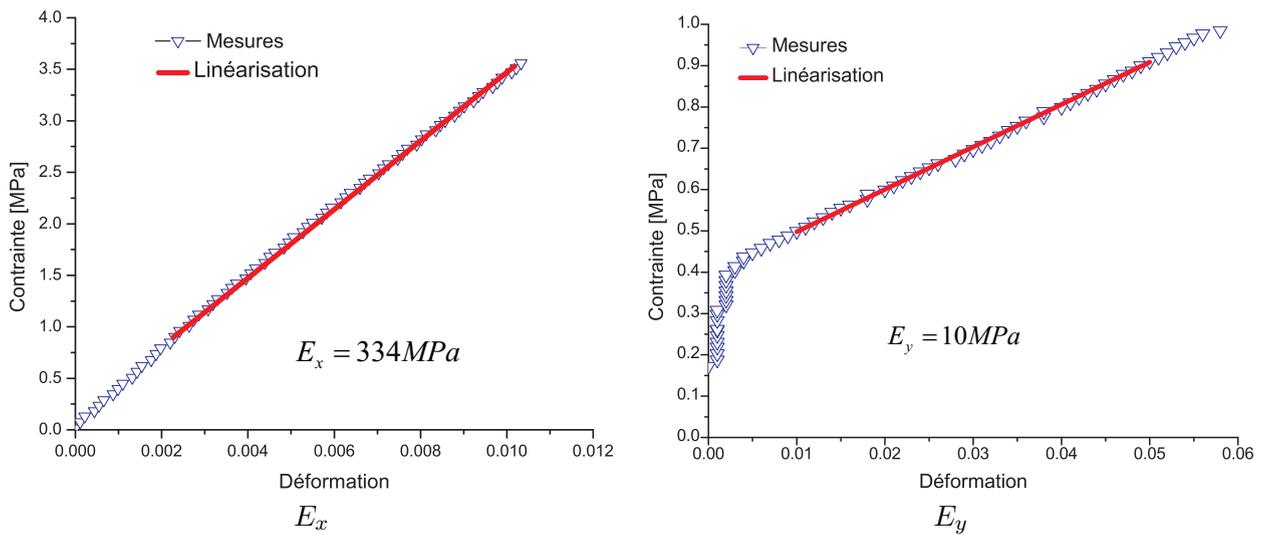


FIGURE II.16. : Modules élastiques de la bande de roulement

6.3.2. Modules apparents et coefficient de Poisson

Les résultats sont présentés dans la Fig. II.16 et le Tab. II.12.

TABLEAU II.12. : Résultats de mesures pour le module élastique dans la direction y de la bande de roulement

N°	1	2	3	4	5
E_y [MPa]	9.918	9.998	9.5	9.521	9.856
\bar{E}_y [MPa]	9.7586				

6.4. Synthèse

Le résumé des résultats obtenus est présenté dans le Tab. II.13 avec l'angle $\theta = 20^\circ$ et compare les mesures, le calcul avec le modèle de composite et le logiciel MACLAM³, développé par l'École Nationale des Ponts et Chaussées et CIMAV. Dans MACLAM, un empilement de trois couches avec les propriétés connues est introduit et une analyse d'un modèle de composite est utilisée pour déterminer les propriétés de la couche équivalente.

TABLEAU II.13. : Synthèse des propriétés mécaniques de la bande de roulement

Valeurs	Dispositif	Mesures	Modèle multi-couche	MACLAM	Commentaires
E_x [MPa]	2KN	334	369.2	370	
E_y [MPa]	2KN	9.76	8.9	8.9	
ν_{yx}	10kN+jauge	0.159	0.133	0.133	
G_{xy} [MPa]	-	-	183.2	183.2	Eq. (A.14)

Les résultats nous montrent que le modèle de composite utilisé est compatible avec l'analyse du logiciel MACLAM. Les valeurs mesurées sont raisonnables, mais elles ne sont pas totalement en accord

³<http://maclam.cimav.edu.mx/maclam3.htm>

avec le calcul. Le module de cisaillement G_{LT} est assez sensible avec la mesure et donc, on prendra la valeur calculée pour les calculs postérieurs.

7. Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié les propriétés statiques des matériaux constituant du pneumatique. Les mesures et les calculs sont réalisés. En réalité, ces quantités statiques peuvent être déterminées par des essais de relaxation comme dans le chapitre suivant. Dans la phase de gonflement du pneu, les propriétés statiques seront utilisées pour calculer les contraintes statiques et la matrice de rigidité additionnelle. Une synthèse des propriétés statiques des matériaux est présentée dans le Tab. II.14.

TABLEAU II.14. : *Synthèse des propriétés mécaniques*

Parties	Endroits	Quantités	Valeurs	Remarques
Caoutchouc	Sculpture et flanc	E [MPa]	7	mesurée
		ν	0.49	estimée incompressible
		ρ [kg/m ³]	1000	
Flanc	-	E_L [MPa]	109.2	calculée
		E_T [MPa]	7	calculée et mesurée
		G_{LT} [MPa]	2.4	calculée
		ν_{LT}	0.49	calculée
		ρ [kg/m ³]	1000	estimée égal caoutchouc
Revêtement intérieur	-	E_L [MPa]	262.2	calculée et mesurée
		E_T [MPa]	7.3	calculée
		G_{LT} [MPa]	2.4	calculée
		ν_{LT}	0.49	estimée égal caoutchouc
		ρ [kg/m ³]	1000	estimée égal caoutchouc
Bande de roulement	Câble	E [GPa]	162.6	calculée et mesurée
		ν	0.33	estimée égal acier
		ρ [kg/m ³]	7850	estimée égal acier
	Couche élémentaire	E_L [MPa]	33748	mesurée
		E_T [MPa]	9	mesurée
		G_{LT} [MPa]	7.5	mesurée
		ν_{LT}	0.47	mesurée
		ρ [kg/m ³]	2510	calculée
	3 couches composites	E_x [MPa]	660	calculée et mesurée
		E_y [MPa]	9	calculée et mesurée
		ν_{xy}	0.4	estimée entre acier et caoutchouc
		G_{xy} Mpa	183	calculée
		ρ [kg/m ³]	2014	calculée

Chapitre III.

Propriétés dynamiques des matériaux constitutants du pneumatique

Dans ce chapitre, on présentera au premier abord des généralités sur le comportement dynamique. Les résultats des essais de relaxation sont utilisés pour déterminer le module complexe aux basses fréquences. Aux fréquences plus élevées, le module est identifié par les essais de vibration d'une barre et d'une poutre. Ces valeurs seront introduites dans la phase dynamique du pneumatique.

Sommaire

1. Comportement dynamique des matériaux viscoélastiques	39
1.1. Études générales pour les modèles des matériaux utilisés dans l'analyse des vibrations	39
1.2. Comportement viscoélastique anisotrope	40
1.3. Concept des modules complexes	41
1.3.1. Définitions et interprétations	41
1.3.2. Quelques expressions du module complexe pour les modèles de matériaux	43
1.3.3. Divers types de concepts et facteurs d'influence de module complexe	43
1.4. Propriétés viscoélastiques pour un matériau multi-couche dans deux domaines temporel et fréquentiel	46
1.5. Principe d'identification des paramètres dynamiques	46
1.5.1. Partie réelle ou module de conservation :	47
1.5.2. Partie imaginaire, facteur de perte ou coefficient d'amortissement :	48
1.5.3. Coefficient de Poisson :	49
2. Principe d'analyse dynamique	50
2.1. Généralités	50
2.2. Réponses complexes en fréquence. Domaine temporel et domaine fréquentiel	50
2.3. Réponse forcée harmonique. Coefficients d'influence dynamique	52
2.4. Impédance mécanique et mobilité de la structure	53
3. Essais de relaxation	54
3.1. Exploitation des données	54
3.2. Couche élémentaire	56
3.3. Bande de roulement	56
3.4. Résultats exploités des essais de relaxation	57
3.5. Sensibilité des paramètres	58
3.6. Intervalle d'application	59
3.7. Cas du caoutchouc	60
4. Vibration d'une poutre	61
4.1. Principe de l'expérience	61
4.2. Vibration longitudinale d'une barre avec des masses	62
4.2.1. Analyse théorique	62

4.2.2.	Exploitation des données	64
4.2.3.	Application à la micro couche	65
4.3.	Vibration transversale d'une poutre.	66
4.3.1.	Quelques formules théoriques	66
4.3.2.	Bande de roulement	67
5.	Une application dans le calcul de l'aire de contact en fonction de la vitesse	70
5.1.	Modélisation du pneumatique et chargement	70
5.2.	Résultat et comparaison	70
6.	Synthèse sur les matériaux	71

1. Comportement dynamique des matériaux viscoélastiques

Le comportement des structures dépend de celui de chaque matériau constitutif. En général, le comportement des matériaux et les caractéristiques mécaniques sont fonction du temps et de la charge appliquée sur la structure. Comme on a vu dans l'équation dynamique

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U} = \mathbf{F}, \quad (\text{III.1})$$

à chaque fréquence ω à examiner, on doit recalculer la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{D}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$. Cette matrice dépend essentiellement de l'amortissement et du module d'Young des matériaux. En réalité, dans la littérature, existent divers types de lois de comportement vibratoire des matériaux. Dans la première partie, on présentera les conceptions alternatives dans les deux domaines : temporel et fréquentiel. Une étude générale du comportement des matériaux viscoélastiques et le concept des modules complexes, qui concernent notre problème de vibration, seront ensuite décrits.

1.1. Études générales pour les modèles des matériaux utilisés dans l'analyse des vibrations

Considérant le matériau comme un mélange de fils d'acier avec une matrice de caoutchouc, on peut prendre comme équivalent un composite viscoélastique linéaire. La viscosité est caractérisée par un "retard" de la réversibilité au cours du temps. Un modèle analogique très simple est le modèle de Kelvin-Voigt (Fig. III.1) : un ressort et un amortisseur linéaire parallèles. La Fig. III.2 montre un exemple d'une viscosité complexe d'un polymère. Le solide de Kelvin-Voigt définit la contrainte en

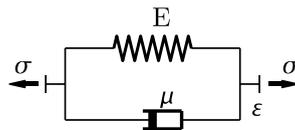


FIGURE III.1. : *Modèle de Kelvin-Voigt pour les matériaux viscoélastiques [7]*

deux parties : la contrainte "élastique" σ^e et la contrainte anélastique σ^{an} associées aux puissances réversible et irréversible.

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^{an} \quad (\text{III.2})$$

Le comportement dans le cas de la traction est simple :

$$\sigma = E\varepsilon + \mu\dot{\varepsilon}$$

L'expérience montre que l'amortissement visqueux est difficile à décrire dans les structures réelles.

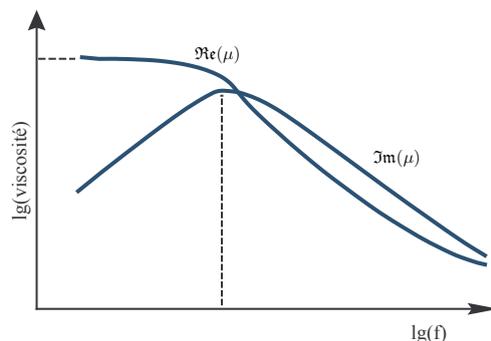


FIGURE III.2. : *Viscosité dynamique complexe d'un polymère à température donnée [8]*

L'énergie dissipée par cycle convient pour comparer les conceptions des modèles d'amortissement en

cas de vibration forcée, ainsi que pour considérer leurs interrelations.
L'énergie dissipée est déterminée par [9] (voir la Fig. III.3)

$$W_d = \oint F_d dx = \alpha A^2 \quad (\text{III.3})$$

où A est l'amplitude de déplacement et F_d la force amortie.

De l'équivalence entre les expressions, on déduit la relation entre l'amortissement visqueux et l'amor-

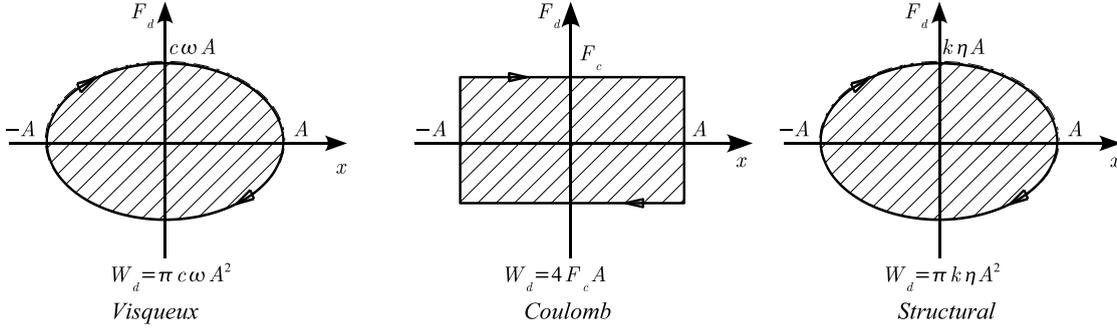


FIGURE III.3. : Trois modèles d'amortissement, les aires hachurées indiquent l'énergie dissipée par cycle [9]

tissement structural (hystérétique).

$$c\omega = k\eta \Leftrightarrow \eta = 2\zeta \quad (\text{III.4})$$

On note que le facteur de perte peut être calculé par

$$\eta = \tan \delta = \frac{\Im(E)}{\Re(E)} \quad (\text{III.5})$$

où E est le module d'Young complexe du matériau, δ le décrément logarithmique de deux amplitudes de deux périodes consécutives p et $p + 1$.

$$\delta = \ln \frac{x_p}{x_{p+1}}$$

Retournons à la relation entre η et ζ , on suppose une vibration à un DDL (degré de liberté) sous l'action d'une force harmonique $F(t) = F \sin \Omega t$, à partir de l'équation du mouvement $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$, la phase φ de vibration s'écrit :

$$\tan \varphi = \frac{2\zeta \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{III.6})$$

Avec l'hypothèse de l'amortissement hystérétique, $c\Omega = k\eta$, l'équation de vibration devient : $[k(1 + i\eta) - m\Omega^2]Z = F$, où $x = \Re(z) = \Re(Ze^{i\Omega t})$, la phase φ est calculée :

$$\tan \varphi = \frac{\eta}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (\text{III.7})$$

On conclut donc, dans le cas de vibration forcée, $\eta = 2\zeta \left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)$. On n'a $\eta = 2\zeta$ que pour les fréquences autour de la fréquence propre ω_n .

1.2. Comportement viscoélastique anisotrope

Pour les matériaux plus compliqués (non isotropes), on utilise le modèle de Maxwell généralisé. Pour un processus isotherme, l'expression de l'énergie libre massique ¹ en fonction de la contrainte et de la

¹L'énergie massique exprimée en fonction de la contrainte et la déformation $\rho \frac{\partial e}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$

déformation permet de déduire le comportement mécanique ([91] et [92]).

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t G_{ijkl}(0, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + G_{ijkl}(0, t) \varepsilon(0) \quad (\text{III.8})$$

En posant $G_{ijkl}(\tau, \eta) = R_{ijkl}(\tau - \eta)$, on a la définition de la fonction de relaxation : $R_{ijkl}(t) = H(t)R_{ijkl}^*(t)$ où $H(t)$ est la fonction de Heaviside et la fonction $R_{ijkl}^*(t)$ décroît suivant le temps. Pour chaque intervalle de continuité de la déformation, on exprime la contrainte sous la forme d'une intégrale de Stieltjes ([93]) :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + R_{ijkl}(t) \varepsilon(0) = R_{ijkl}(0) \varepsilon(t) + \int_0^t \frac{\partial R_{ijkl}(\tau)}{\partial \tau} \varepsilon_{kl}(t - \tau) d\tau \quad (\text{III.9})$$

ou sous la forme tensorielle (III.10) :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{R}(t) * \frac{D\varepsilon}{D\tau} \quad (\text{III.10})$$

où $\mathbf{R}(t)$ est le tenseur de relaxation complexe d'ordre 4, nul pour $t < 0$ (Fig. III.4), $\frac{D\varepsilon}{D\tau}$ est la dérivation au sens des distributions (inclut les discontinuités suivant le temps) et * est le symbole signifiant le produit de convolution. La transformation de Fourier de cette relation nous donne :

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) = \mathcal{F}[\mathbf{R}(t)](\omega) \cdot [i\omega \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega)] \quad (\text{III.11})$$

En comparant avec le comportement viscoélastique dans le domaine fréquentiel d'un composite or-

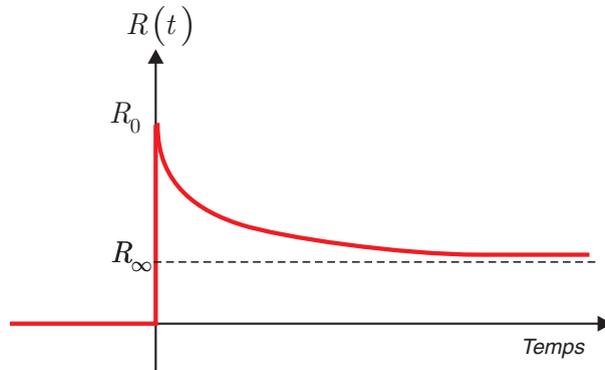


FIGURE III.4. : Fonction de relaxation dans le domaine temporel

thotrope (III.12),

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\omega) = \hat{\mathbf{R}}(\omega) \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\omega) \quad (\text{III.12})$$

on en déduit le tenseur d'élasticité complexe :

$$\boxed{\hat{\mathbf{R}}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}[\mathbf{R}(t)](\omega)} \quad (\text{III.13})$$

1.3. Concept des modules complexes

1.3.1. Définitions et interprétations

On parle de la matrice de relaxation $\mathbf{C}(t)$ ou de la matrice de rigidité complexe $\hat{\mathbf{C}}(\omega)$, qui représente le tenseur de relaxation. On définit la matrice de souplesse $\hat{\mathbf{S}}(\omega)$ par :

$$\hat{\mathbf{C}}(\omega) \hat{\mathbf{S}}(\omega) = \mathbf{I} \quad (\text{III.14})$$

Les modules d'Young complexes $\widehat{E}_k(\omega)$, $k = 1, 2, 3$ sont définis comme :

$$\widehat{E}_k(\omega) = \frac{1}{\widehat{S}_{kk}(\omega)} \quad (\text{III.15})$$

Les modules complexes sont généralement représentés par leurs **modules** $|\widehat{R}_{ijkl}(\omega)|$ et leurs **tangentes de l'angle de perte** ou **amortissements**. On appelle δ_{ijkl} l'angle de perte, la définition de l'amortissement est :

$$\tan[\delta_{ijkl}(\omega)] = \frac{\Im(\widehat{R}_{ijkl}(\omega))}{\Re(\widehat{R}_{ijkl}(\omega))} \quad (\text{III.16})$$

Dans le cas d'un comportement unidimensionnel, il peut être déterminé par le module d'Young complexe

$$\eta(\omega) = \tan \delta_E = \frac{\Im(\widehat{E})(\omega)}{\Re(\widehat{E})(\omega)} \quad (\text{III.17})$$

(A partir d'ici, on appelle E au lieu de \widehat{E} pour simplifier).

Si la mesure des modules complexes dans une large bande de fréquences est une opération relativement complexe (par exemple l'anisotropie des matériaux rend ce problème très délicat), il est donc utile de disposer des indications sur l'évolution des modules complexes en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f . On remarque que toute fonction $F(t)$, nulle pour les valeurs $t < 0$, peut être décomposée analytiquement de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} F(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i e^{-a_i t} \\ F(t) &= B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} B_i (1 - e^{-b_i t}) \\ F(t) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pour } t > 0 \\ \text{pour } t < 0 \end{array} \quad (\text{III.18})$$

Si de plus $F(t)$ présente des valeurs asymptotiques non nulles pour t infini, les nombres a_i, b_i sont nécessairement positifs, sauf a_0 qui est nul. Enfin, si F est une fonction positive décroissante, les nombres A_i sont positifs, et si F est croissante, les nombres B_i sont positifs. Les décompositions (III.18) montrent que la transformée de Fourier $\mathcal{F}(F)$, peut prendre les deux formes suivantes :

$$i\omega \mathcal{F}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i\omega A_n}{a_n + i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^2 A_n}{\omega^2 + a_n^2} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega A_n a_n}{\omega^2 + a_n^2},$$

si F est positive décroissante, $A_n > 0$

$$i\omega \mathcal{F}(F) = B_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n B_n}{b_n + i\omega} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n b_n^2}{\omega^2 + b_n^2} - i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega B_n b_n}{\omega^2 + b_n^2},$$

si F est positive croissante, $B_n \geq 0$

(III.19)

Les fonctions $[R_{ijkl}(t)]$ caractérisant les matériaux viscoélastiques jouissent des mêmes propriétés que la fonction $F(t)$ précédente. En se basant sur celles-là, on peut obtenir des indications des modules complexes en fonction de la pulsation ω .

Aux pulsations extrêmes, ($\omega = 0$ et $\omega = \infty$), les amortissements sont nuls (le matériau est donc élastique). On obtient les relations ci-dessous en considérant l'Eq. (III.18) et (III.19) :

$$\left. \begin{aligned} R_{ijkl}(t=0) &= \widehat{R}_{ijkl}(\omega=\infty) \\ R_{ijkl}(t=\infty) &= \widehat{R}_{ijkl}(\omega=0) \end{aligned} \right\} \text{avec } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (\text{III.20})$$

1.3.2. Quelques expressions du module complexe pour les modèles de matériaux

On peut trouver les expressions différentes du module complexe dans [94].

1. Pour le modèle de Kelvin-Voigt :

$$\widehat{E}(\omega) = E + i\mu\omega \quad (\text{III.21})$$

2. Pour le modèle de Maxwell :

$$\widehat{E}(\omega) = \frac{E\mu i\omega}{E + i\mu\omega} \quad (\text{III.22})$$

3. Quand le nombre de groupes dans un modèle de matériau du type Maxwell tend vers l'infini, on introduit la fonction de relaxation $H(t_R)$ correspondant au temps caractéristique t_R . La fonction de relaxation et le module complexe sont donc décrits par un spectre de la fonction $H(t_R)$:

$$\widehat{E}(\omega) = E_0 + \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau_R) \frac{i\omega\tau_R}{1 + i\omega\tau_R} d\tau_R \quad (\text{III.23})$$

1.3.3. Divers types de concepts et facteurs d'influence de module complexe

Comme les propriétés des réseaux de molécules dans les matériaux polymériques sont largement variables, il n'y a pas une loi pour tous les polymères, surtout pour les polymères composites. Les valeurs mesurées peuvent être la valeur absolue et l'angle de phase du module d'Young en fonction de la fréquence comme dans l'article de Caraciolo *et al.* [10] (Fig. III.5), la dépendance en fonction de la température-fréquence réduite (Fig. III.6) ou déformation-fréquence réduite (Fig. III.10) du module élastique et du facteur de perte. On utilise également les valeurs apparentes en fréquence. Dans la Fig. III.7, on présente la rigidité dynamique D_{app} et le facteur de perte η_{app} apparents obtenus par les calculs et les mesures sur une poutre composite avec différentes conditions aux bords.

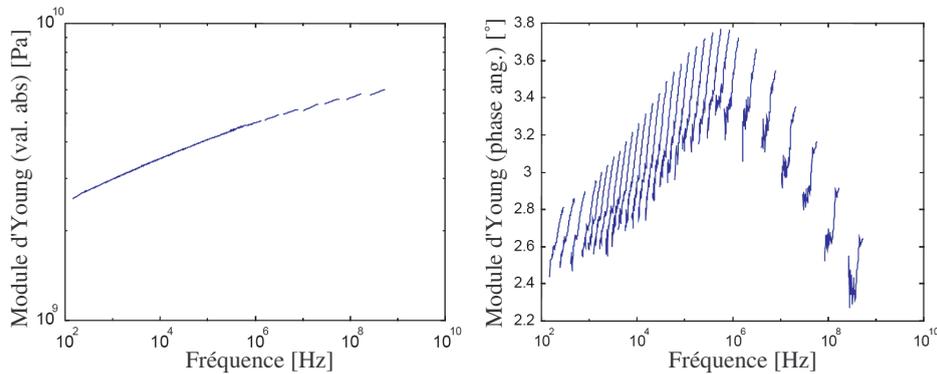


FIGURE III.5. : Valeur absolue et angle de phase du module complexe d'un PVC-Carbonate calcium [10]

Le module complexe des matériaux dépend non seulement de la fréquence mais aussi des charges extérieures appliquées. Cet aspect exprime la non-linéarité des propriétés des matériaux. Le chargement extérieur est souvent présenté sous forme de relations entre les propriétés mécaniques du matériau et les déformations ou la température.

- *Déformation* : La dépendance en fonction des déformations du module de stockage [14] et également du module statique [13] varie selon le signe de la déformation. Cette dépendance peut s'exprimer par la relation fréquence-module complexe dans plusieurs cas de réduction relative $\lambda_s = \frac{l_s}{l_0}$ (Figs.III.9 et III.8) ou par le rapport entre ce module et la déformation-fréquence réduite $f_\epsilon = f\alpha_\epsilon$ (Fig.III.10). La fonction $\alpha_\epsilon = \alpha(\epsilon)$ est une fonction de décalage entre les déformations. Elle est calculée manuellement si l'on a la représentation 3D du module complexe en fonction de la fréquence et de la déformation.

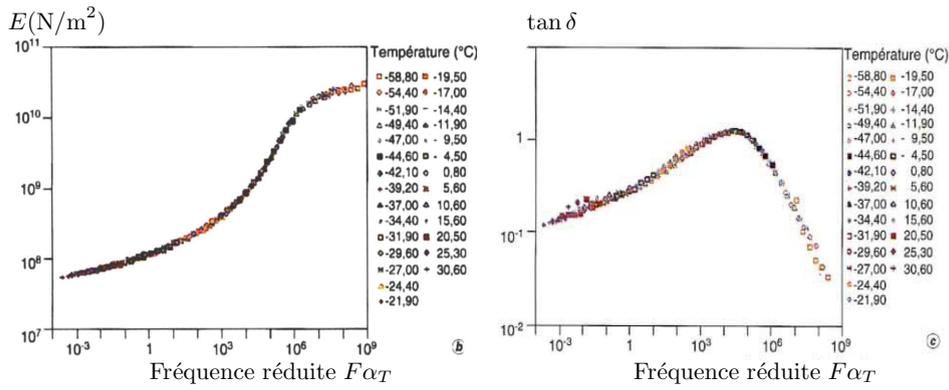


FIGURE III.6. : Présentation de la partie réelle du module d'Young complexe et du facteur de perte en fonction de la fréquence [11]

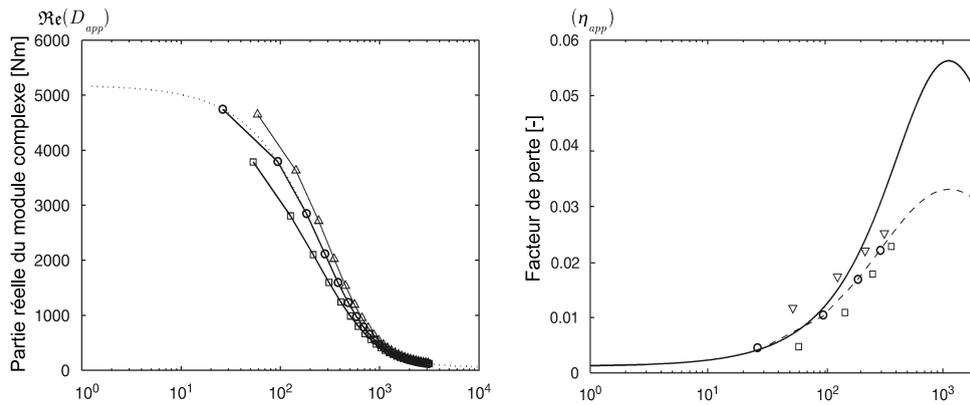


FIGURE III.7. : Rigidité dynamique apparente et facteur de perte dépendant des conditions aux bords : \circ : simplement supportée ; \square : encastrement-libre ; \triangle : libre - libre [12]

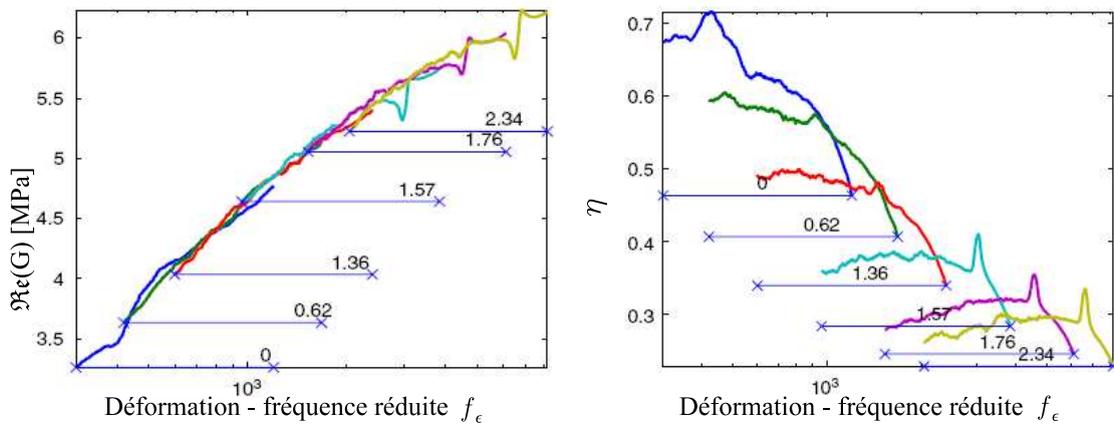


FIGURE III.10. : Modules de stockage et de perte d'un sandwich acier-polymère-acier en fonction de la déformation-fréquence réduite $f_\epsilon = f\alpha_\epsilon$: Superposition des résultats des essais effectués à plusieurs déformations. Les petits nombres indiquent les déformations correspondantes [14]

- *Température* : La dépendance en température des propriétés des matériaux est souvent représentée par la fréquence réduite $f_T = f\alpha_T$. Cette relation est construite par les courbes fréquence-modules à plusieurs températures (Fig. III.11). La fonction de transfert en température α_T est calculée par le

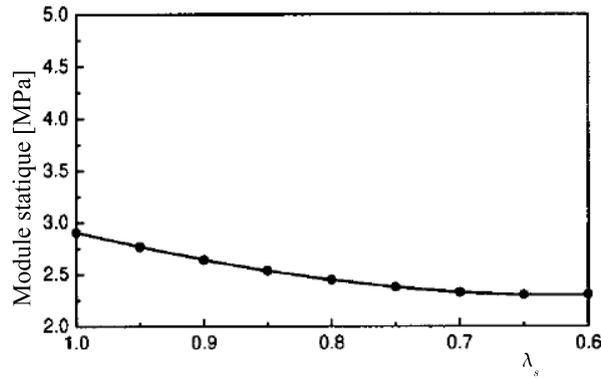


FIGURE III.8. : Dépendance du module statique d'un caoutchouc naturel à 46% de carbone en fonction de la réduction relative $\lambda_s = \frac{l_s}{l_0}$ [13]

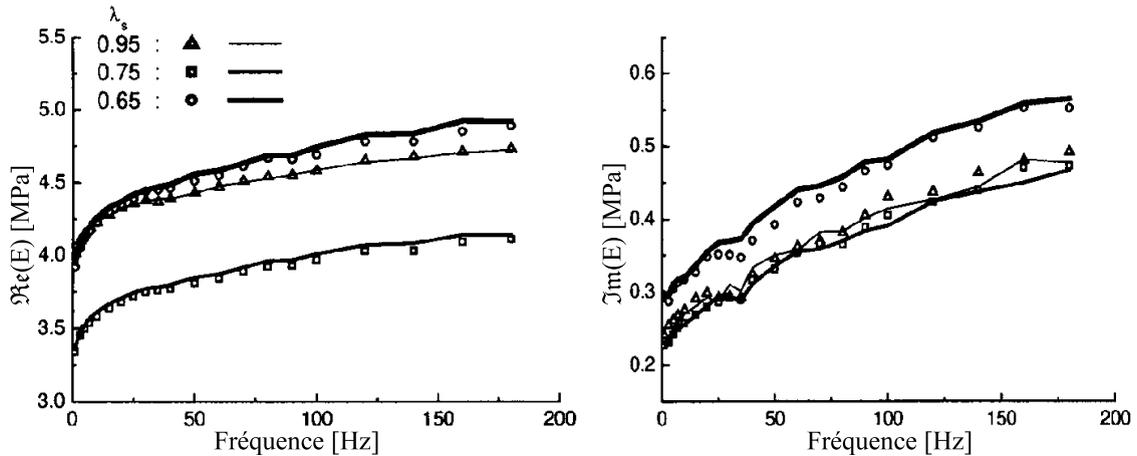


FIGURE III.9. : Modules de stockage et de perte d'un caoutchouc naturel en fonction de la réduction relative $\lambda_s = \frac{l_s}{l_0}$ et de la fréquence [13]

comportement d'Arrhenius (III.24) ou par la loi de Williams-Landel-Ferry (WLF).

$$\log \alpha_T = \frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (\text{III.24})$$

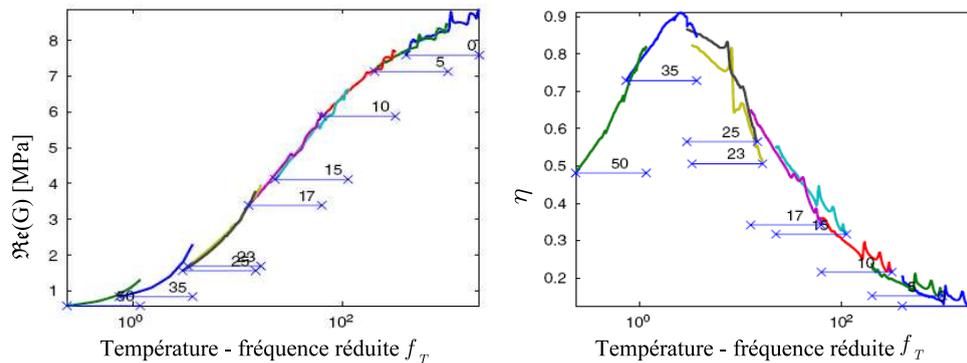


FIGURE III.11. : Modules de stockage et de perte d'un sandwich acier-polymère-acier en fonction de la température-fréquence réduite $f_T = f\alpha_T$: Superposition des résultats des essais effectués à plusieurs températures. Les petits nombres indiquent les températures correspondantes [14]

- Grandeur et direction de la charge d'excitation lors des essais. La raideur dynamique (l'inverse de

la mobilité) change selon la grandeur de la charge. Cela montre que le module apparent est également changé.

- *Microstructure du polymère* : la masse moléculaire ou l'indice de polymolécularité ont des influences sur la dépendance en fréquence du module complexe du matériau.
- *Morphologie du polymère* : le mélange des phases dans les polymères peut exercer un changement de propriétés du matériau global. Le matériau caoutchouc - acier peut être considéré comme un mélange matrice - inclusion (voir la Fig. III.12 extraite dans [8]).

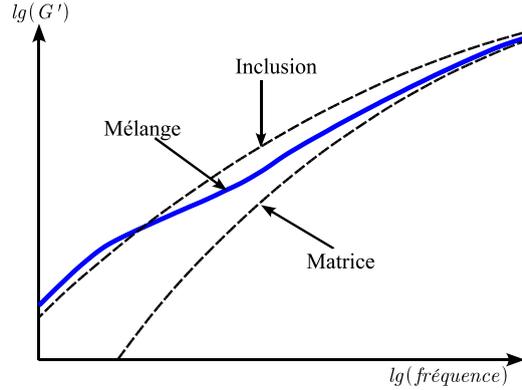


FIGURE III.12. : Module élastique d'un mélange de phases des polymères-composites [8]

1.4. Propriétés viscoélastiques pour un matériau multi-couche dans deux domaines temporel et fréquentiel

On a étudié le modèle de matériaux multi-couches pour déterminer les caractéristiques mécaniques statiques équivalentes de la bande de roulement dans le chapitre précédent. En connaissant les propriétés, on déterminera la matrice de rigidité dans le repère du matériau $\mathbf{R}_{(L,T,N)}^i$. La matrice de rigidité structurale $\mathbf{R}_{(e_1,e_2,e_3)}^i$ dans le repère (e_1, e_2, e_3) est calculée simplement par un changement de repère (multiplier la matrice de rigidité par la matrice de changement de base). Est-ce que ce schéma est encore valable dans le domaine fréquentiel ? La réponse est OUI car :

$$\mathbf{R}_{(L,T,N)}^i(t) \xrightarrow[\text{Transformation.Fou.L}]{t \rightarrow \omega} \widehat{\mathbf{R}}_{(L,T,N)}^i(\omega) \quad (\text{III.25})$$

$$\mathbf{R}_{(e_1,e_2,e_3)}^i(t) \xrightarrow[\text{Transformation.Fou.L}]{t \rightarrow \omega} \widehat{\mathbf{R}}_{(e_1,e_2,e_3)}^i(\omega) \quad (\text{III.26})$$

où les transformations ne dépendent que du temps et de la fréquence tandis que le changement de repère dépend de la géométrie des matériaux dans la structure. Etant donné la validité de ce schéma, on peut déterminer les propriétés de la micro couche en fréquence et appliquer un changement de repère pour obtenir celle de la bande de roulement dans le domaine fréquentiel.

1.5. Principe d'identification des paramètres dynamiques

L'identification de paramètres des matériaux concerne les parties réelle et imaginaire du module complexe de chaque matériau constituant dans un problème dynamique. En principe, le module complexe peut être obtenu par la transformation de Fourier de la fonction de relaxation. La fonction de relaxation exprime la mémoire du matériau et donc elle possède une causalité.

Le principe d'identification du module complexe se base soit sur des essais de relaxation, soit sur des tests dynamiques. On se concentrera sur la bande de roulement et sur le caoutchouc. Pour le caoutchouc, il existe beaucoup d'études sur le comportement dynamique sur ce type de polymère. Huynh [95] a obtenu des résultats sur le caoutchouc en faisant la comparaison sur les modèles rhéologiques classiques, composés, spring-pot, fractionnaires et phénoménologiques. Waki *et al.* [28] ont supposé que le module élastique du caoutchouc croît de façon logarithmique avec la fréquence f et que le facteur de perte varie linéairement avec $\log(f)^2$.

1.5.1. Partie réelle ou module de conservation :

Avec le caoutchouc, le module complexe peut être identifié par des essais de vibration longitudinale [13] ou par l'oscillation (en flexion ou en torsion) d'un pendule [96]. La partie réelle du caoutchouc montre une croissance monotone suivant la fréquence. En général, l'allure de la partie réelle ne change pas pour les matériaux simples mais elle se modifie de manière différente dans le cas de matériaux plus complexes comme des matériaux multicouches dans les poutres [12]. Ce phénomène est dû à l'effet de l'effort tranchant dans la vibration transversale. Une méthode correcte est donc exigée pour bien déterminer le module effectif en tenant compte du travail du matériau dans l'ensemble du système. Dans cette section, une synthèse sur les méthodes d'identification sera présentée.

Premièrement, l'essai de relaxation est utilisé comme une méthode classique. Le comportement d'un matériau est écrit dans le domaine temporel sous la forme d'une relation entre les contraintes de relaxation et la déformation en fonction du temps. Le paramètre à identifier est la fonction de relaxation ou la fonction de mémoire du matériau. La forme de cette fonction dépend du type de matériau. A titre d'exemple, les études sur le caoutchouc dans [95] concernent beaucoup de modèles avec divers types de fonctions comme en puissance ou sous la forme fractionnaire. Une expression générale est sous la forme de la série de Prony ou plus généralement sous la forme d'un spectre de relaxation [94, 97]. L'avantage de cette méthode est qu'elle identifie bien le module élastique (à temps infini) par rapport à la méthode dynamique.

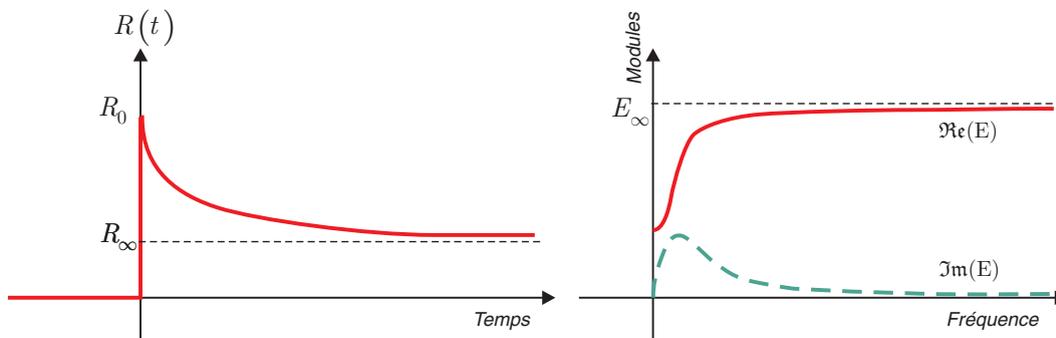


FIGURE III.13. : Module complexe obtenu par la transformation de Fourier de la fonction de relaxation

Lorsque tous les paramètres, par exemple les temps caractéristiques et les amplitudes dans l'expression de la série de Prony sont obtenus, la fonction de relaxation est analytiquement présentée dans le domaine temporel. Avec les fonctions de base courantes, la forme analytique du module complexe est déterminée simplement par une transformation de Fourier de la fonction de relaxation (Fig. III.13). Le problème est donc : comment peut-on déterminer correctement la fonction de relaxation ? La précision du processus dépend du pas de temps Δt de mesure lors de l'essai. On peut déduire que le temps caractéristique le plus petit est de l'ordre de Δt . Lorsqu'on transforme ce signal analytique dans le domaine fréquentiel, les plus petits temps influencent essentiellement le module complexe dans les bandes de haute fréquence.

La méthode dynamique souvent utilisée est basée sur la vibration d'une barre (longitudinale) ou d'une poutre (transversale). Par la théorie, les fréquences propres sont déterminées en fonction du module élastique et de la géométrie de la structure. A partir de la mesure des fréquences propres, la partie réelle du module complexe peut être déterminée [16]. A titre exemple, la n^e fréquence propre d'une poutre est déterminée par :

$$f_n = 2\pi \frac{\varphi_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A}} \quad (\text{III.27})$$

où L, A, J sont respectivement la longueur, l'aire de la section, le moment d'inertie de la poutre, ρ, E sont la densité et le module élastique du matériau constitutif. φ_n est le nombre d'ondes sur la longueur de la poutre, dans le cas de vibration libre, il est déterminé par l'équation :

$$\cos \varphi \cosh \varphi - 1 = 0 \quad (\text{III.28})$$

La méthode d'impédance de la structure est aussi utilisée dans l'identification des paramètres. La structure est représentée par un système d'éléments de base comme des ressorts, amortisseurs et masses. Le comportement de ce système est déterminé à partir de celui des éléments par la loi de Kirchhoff et par les théorèmes de superposition et de réciprocity [98]. En mesurant la fonction de transfert de la structure, les paramètres de ce système peuvent être calculés. Laird *et al.* [99] a utilisé cette méthode pour déterminer les modules complexes en tenant compte de la rigidité de la colle entre la structure et l'accéléromètre. Dans [100], une méthode similaire est montrée pour une manipulation de la fonction en fréquence mesurée en connaissant la masse attachée sur la structure. L'idée de cette méthode est que l'on calcule théoriquement l'impédance équivalente du système structure-masse. L'impédance de la masse est calculée comme $i\omega m$ et on peut calculer inversement celle de la structure.

Une autre méthode pour identifier le module complexe est que l'on peut déterminer les modules complexes à plusieurs températures ou déformation. La courbe de relation module complexe-fréquence réduite (en température ou en déformation) avec la présence du facteur de transition ($\alpha_T, \alpha_\varepsilon$) entre les différentes températures ou déformation [14, 101] est établie. Cette idée est basée sur la loi de Williams, Landel et Ferry [102, 8]. A partir de ces courbes, on peut déterminer le module complexe hors de la limite examinée (Fig III.14).

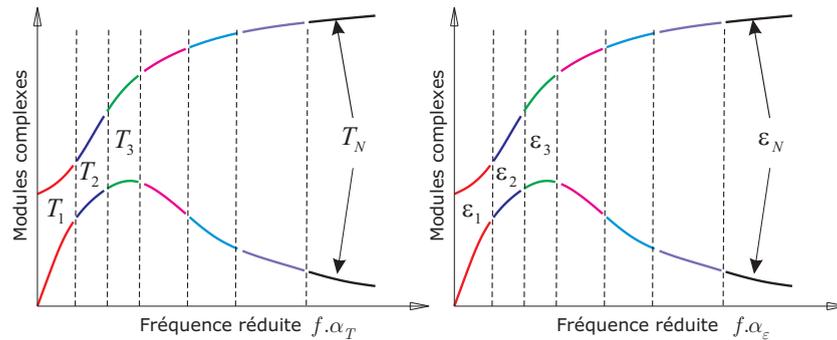


FIGURE III.14. : Présentation de la relation modules-fréquence réduite

Pour un matériau de type composite anisotrope, les modules complexes sont représentés par le tenseur d'élasticité complexe \mathbb{C} [103, 91], l'inverse du tenseur de souplesse. Le module complexe dans une direction est défini par l'inverse du terme correspondant dans la matrice de souplesse associée. Les propriétés viscoélastiques dépendent de la concentration, de la distribution, de la dimension des fils, de l'adhérence entre les fils et la matrice [104] ... La détermination de ce tenseur complet nécessite un grand nombre de mesures compliquées. Une technique possible est d'établir une approche pour le module complexe homogénéisé en connaissant les caractéristiques dynamiques de la matrice et des fils [8]. Le processus d'homogénéisation est effectué dans le domaine complexe et le tenseur de souplesse peut être calculé de cette manière.

Backström *et al.* [12] a établi un modèle de vibration d'une poutre de type sandwich en tenant compte de l'influence de l'effort tranchant. Les fréquences propres sont calculées à partir des caractéristiques des couches et elles sont aussi comparées avec le modèle de poutre de Bernoulli pour déterminer le module de flexion effectif. Le résultat de cet auteur montre une bonne prédiction correspondante à la mesure. Pourtant, son application ne peut être utilisée que dans le cas où l'épaisseur de la peau est beaucoup plus petite que celle du cœur.

1.5.2. Partie imaginaire, facteur de perte ou coefficient d'amortissement :

L'identification de la partie imaginaire du module complexe ou du facteur de perte d'un matériau est similaire à celle de la partie réelle. Cette partie est aussi calculée par la relation de Kramers-Kronig. Cependant, dans plusieurs cas, on peut la déterminer en se basant sur la fonction de la fréquence mesurée. Balmès *et al.* [105, 106] ont utilisé la fonction de corrélation pour déterminer les facteurs de perte pour chaque pôle.

Le facteur de perte est souvent défini par le rapport de l'énergie dissipée sur l'énergie totale dans une période de chargement [107, 23]. Il est aussi déterminé par le rapport entre la partie imaginaire

et la partie réelle du module complexe ou par le décrément logarithmique des amplitudes consécutives de la réponse en fréquence dans le cas d'un système à un seul degré de liberté [108]. Berthelot *et al.* [109, 110, 15, 111, 109] ont développé des modèles de l'amortissement pour les composites avec des couches élémentaires unidirectionnelles. Cette théorie est basée sur le livre de Berthelot [83]. Les amortissements d'une couche élémentaire dans deux directions longitudinale et transversale sont calculés par :

$$\eta_L = \frac{V_f}{V_f + \frac{E_m}{E_f}(1 - V_f)}\eta_f + \frac{1 - V_f}{(1 - V_f) + \frac{E_m}{E_f}V_f}\eta_m; \quad \eta_T = \eta_f \frac{E_T}{E_f}V_f + \eta_m \frac{E_T}{E_m}(1 - V_f) \quad (\text{III.29})$$

où V_f est la fraction volumique des fibres, E_m, E_f sont les modules élastiques de la matrice et des fibres, η_m, η_f sont les amortissements de la matrice et des fibres, E_T est le module élastique équivalent de la couche élémentaire dans la direction transversale. L'amortissement d'un composite équivalent est déterminé à partir de celui de chaque couche élémentaire dans deux directions. L'énergie totale ΔU_d est la somme des termes d'énergie correspondants aux déformations dans le plan et hors plan [15]. L'énergie totale dissipée ΔU est calculée pour chaque couche en connaissant les amortissements de chaque couche dans toutes les directions de la même façon. L'amortissement structural d'un composite est déterminé par :

$$\eta_{lam} = \frac{\Delta U}{U_d} \quad (\text{III.30})$$

La dépendance de cet amortissement en fréquence et en angle de fibres d'un composite avec deux couches symétriques est présentée dans la Fig. III.15. Il est évident que pour les deux angles

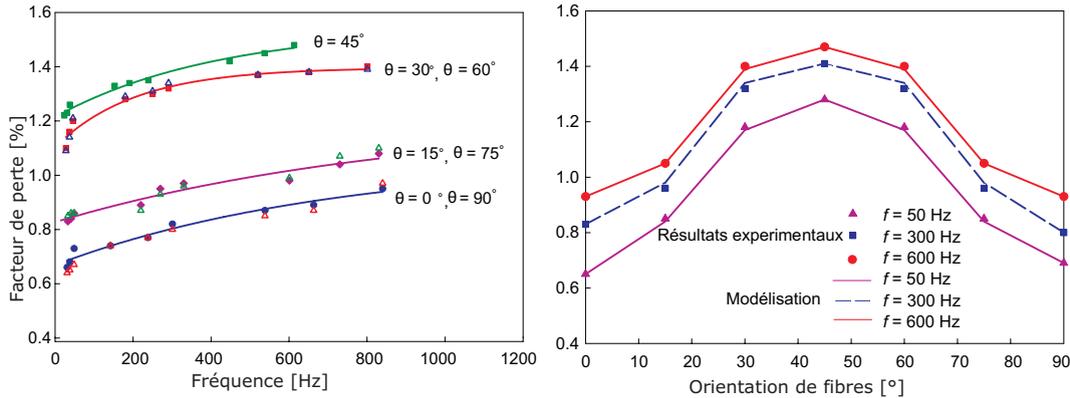


FIGURE III.15. : Amortissement d'un composite en fibre de verre [15] présenté en pourcentage, θ est l'angle d'orientation des fibres

complémentaires (leur somme est égale à 90°), leurs amortissements sont égaux. D'autre part, les amortissements dépendent non seulement de l'angle d'orientation des fibres et de la fréquence mais aussi des modes de vibration. Dans ce cas, l'amortissement dépend de l'interaction entre les parties de la structure et on ne peut pas donner une bonne prédiction sur l'amortissement dans une structure quelconque. L'idée est que l'on détermine l'état de travail des matériaux, par exemple on considère que la distribution des contraintes dans la bande de roulement est homogène et on peut prendre cette méthode pour cette couche.

1.5.3. Coefficient de Poisson :

Dans les analyses dynamiques courantes, les variations des coefficients de Poisson ne sont pas prises en compte. Pourtant, en principe, dans le tenseur d'élasticité complexe \mathbb{C} , les termes non-diagonaux contiennent les coefficients de Poisson. Par conséquent, pour calculer plus précisément, on doit tenir compte de la dépendance de ces coefficients en fréquence. Tschoegl *et al.* [112] et Caracciolo *et al.* [10] ont utilisé un calcul du coefficient de Poisson de façon similaire à celui du module complexe. Tschoegl *et al.* ont développé cette conception dans le cas de déformation plane, dans les domaines temporel et

fréquentiel. Dans le domaine fréquentiel, ce coefficient est exprimé par une série de Prony

$$\nu(t) = \nu_e - \sum_{i=1}^N \nu_i e^{t/\theta_i} \quad (\text{III.31})$$

ou sous la forme de spectre des fonctions de relaxation pour le coefficient de Poisson

$$\nu(t) = \nu_e - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}(\theta) e^{t/\theta} d\theta \quad (\text{III.32})$$

Ces expressions montrent la croissance monotone à partir de la valeur d'équilibre (ou élastique) du coefficient de Poisson. Dans le domaine fréquentiel, le coefficient de Poisson complexe est obtenu par une transformation de Fourier de l'expression ci-mentionnée. La partie réelle montre une décroissance monotone comme dans [10].

$$\hat{\nu}(\omega) = i\omega \mathcal{F}[H(t)\nu(t)] = \nu_e - \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{j\omega\theta_i}{1 + j\omega\theta_i} \quad (\text{III.33})$$

2. Principe d'analyse dynamique

2.1. Généralités

On appelle \mathbf{K} , \mathbf{M} , \mathbf{C} respectivement les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement de la structure, \mathbf{U} est le vecteur de déplacement relatif autour de la position d'équilibre. L'équation dynamique est :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (\text{III.34})$$

Si la force d'application est harmonique de la forme $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}$, la solution stationnaire des déplacements est également harmonique $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 e^{i\omega t}$. L'équation dynamique est réécrite :

$$[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}_0, \quad (\text{III.35})$$

Les valeurs propres sont déterminées en utilisant l'équation de vibration homogène en l'absence d'amortissement :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \quad (\text{III.36})$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre ω_n de l'Eq. (III.36) est désigné par \mathbf{X}_n . On suppose que les déplacements peuvent être décomposés par les modes propres $\mathbf{U} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(\mathbf{x})q_n(t)$ où $q_n(t)$ est la coordonnée généralisée associée au mode propre n . L'équation normale de ce mode est écrite sous la forme :

$$\ddot{q}_n + 2\zeta_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = \frac{Q_n}{\mu_n} \quad (\text{III.37})$$

où ζ_n est le coefficient d'amortissement modal et Q_n la composante des efforts extérieurs dans le mode n ou la projection de la force nodale équivalente sur le mode propre n [113].

$$Q_n = \int_{\Omega} \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{X}_n d\Omega \quad (\text{III.38})$$

2.2. Réponses complexes en fréquence. Domaine temporel et domaine fréquentiel

Dans l'analyse des signaux, on utilise souvent la transformation de Laplace ou de Fourier du domaine temporel au domaine fréquentiel pour étudier les variations des quantités dynamiques en fonction de la fréquence.

On introduit un signal d'entrée (par exemple une force $\mathbf{f}(t)$) et on obtient le signal de sortie (par exemple $\mathbf{x}(t)$) : le déplacement sous l'action de la force mentionnée). L'interprétation de ces deux

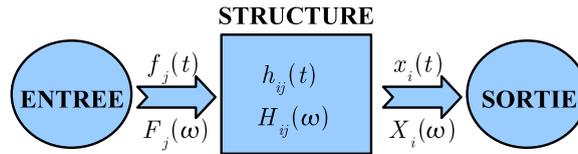


FIGURE III.16. : *Processus d'analyse dynamique d'une structure*

signaux nous donne le comportement vibratoire de la structure.

Si le système mécanique linéaire est excité par un signal harmonique $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$, sa réponse en régime permanent est également un mouvement harmonique de même fréquence. Suivant la pulsation du signal d'entrée, la réponse est modifiée en amplitude et en phase. La réponse complexe en fréquence est la fonction complexe $H(\omega)$ (ou *Fonction de Réponse en Fréquence* (FRF)) définie par :

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} \quad (\text{III.39})$$

où $X(\omega)$ est la réponse de la structure en fréquence. La réponse temporelle est alors donnée par la représentation en intégrale de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{III.40})$$

L'équation souvent utilisée dans le domaine temporel est la *Fonction de Réponse Impulsionnelle* (IRF) $h(t)$ - la réponse sous l'impulsion unité $f(t) = \delta(t)$. On obtient donc :

$$F(\omega) = 1 \rightarrow X(\omega) = H(\omega) \quad (\text{III.41})$$

La formule de Rocard s'écrit [98] :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = f(t) * h(t) \quad (\text{III.42})$$

La IRF et la FRF sont donc reliées par :

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (\text{III.43})$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (\text{III.44})$$

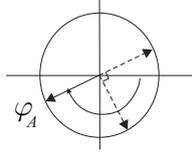
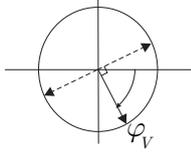
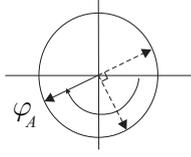
En fonction du contexte, on utilise la *Réceptance* $H(\omega)$, la *Mobilité* $V(\omega)$ ou l'*Inertance* $A(\omega)$ associées à la sortie en déplacements, en vitesses ou en accélérations.

Les définitions des réponses complexes sont introduites dans le Tab. III.1. Une synthèse des relations entre ces valeurs est présentée dans le Tab. III.2.

TABLEAU III.1. : *Réponses complexes et réponses inverses associées*

Dénomination	Expression	Dénomination	Expression
Module dynamique	$\frac{\text{Force}}{\text{Déplacement}}$	Réceptance	
Rigidité		Compliance	$\frac{\text{Déplacement}}{\text{Force}}$
		Admittance	
Impédance mécanique	$\frac{\text{Force}}{\text{Vitesse}}$	Mobilité	$\frac{\text{Vitesse}}{\text{Force}}$
Masse apparente	$\frac{\text{Force}}{\text{Accélération}}$	Inertance	$\frac{\text{Accélération}}{\text{Force}}$

TABLEAU III.2. : Relation entre la réceptance, la mobilité et l'inertance

Valeurs	Réceptance $H(\omega)$	Mobilité $V(\omega)$	Inertance $A(\omega)$
Formule	$H(\omega)$	$i\omega H(\omega)$	$-\omega^2 H(\omega)$
Amplitude	H_0	ωH_0	$\omega^2 H_0$
Phase			
Résonance	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

2.3. Réponse forcée harmonique. Coefficients d'influence dynamique

On désigne la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{D}(\omega) = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$. Pour une excitation harmonique $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 e^{i\omega t}$, l'équation dynamique s'écrit :

$$\mathbf{D}(\omega)\mathbf{U}_0(\omega) = \mathbf{F}(\omega) \quad (\text{III.45})$$

Si la matrice \mathbf{D} n'est pas dégénérée, le vecteur de déplacements dans le domaine fréquentiel s'écrit :

$$\mathbf{U}_0 = (\mathbf{D})^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{S}^D \mathbf{F} \quad (\text{III.46})$$

où \mathbf{S}^D est la matrice de souplesse dynamique. L'Eq. (III.46) nous donne :

$$U_{0l} = S_{lk}^D F_{0k} \quad (\text{III.47})$$

Les coefficients d'influence dynamique (ou les réceptances) sont déterminés :

$$\alpha_{lk} = \frac{U_{0l}}{F_{0k}} = S_{lk}^D \quad (\text{III.48})$$

où k, l sont les indices de discrétisation des éléments. La décomposition modale des déplacements s'écrit $\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n \hat{q}_n(\omega)$. Les coordonnées généralisées \hat{q}_n sont calculées en se basant sur les équations normales (III.37) et la transformation de Laplace dans le domaine fréquentiel.

$$\hat{q}_n = \frac{\hat{Q}_n}{\mu_n \omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta_n \omega \omega_n} \quad (\text{III.49})$$

La force généralisée dans le domaine fréquentiel se détermine par :

$$\hat{Q}_n = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{F}}^e \mathbf{X}_n = \sum_k X_n^{(k)} \hat{F}^{(k)} \quad (\text{III.50})$$

On réécrit les déplacements de ce problème.

$$\hat{\mathbf{U}}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_k X_n^{(k)} \hat{F}^{(k)} \frac{\mathbf{X}_n}{\mu_n \omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta_n \omega \omega_n} \quad (\text{III.51})$$

La matrice des coefficients d'influence dynamique et les réceptances sont déduites pour le cas de la force d'excitation unitaire $\hat{F}^{(k)} = 1$:

$$\alpha_{lk}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^{(l)} X_n^{(k)}}{\mu_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta_n \omega \omega_n} \quad (\text{III.52})$$

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{X}_n^t \mathbf{X}_n}{\mu_n} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta_n \omega \omega_n} \quad (\text{III.53})$$

2.4. Impédance mécanique et mobilité de la structure

La réponse complexe de la structure la plus utilisée est la mobilité. Son inverse s'appelle l'impédance mécanique. On note que pour un système visqueux, les résonances en déplacement ω_1 , en vitesse ω_0 et en accélération ω_2 sont différentes. Pour le système à un seul degré de liberté, ces résonances sont exprimées et reliées par [98] :

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{III.54}$$

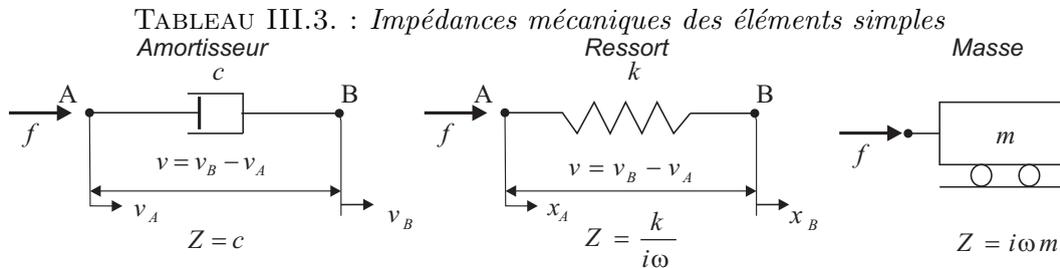
$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2} \tag{III.55}$$

$$\frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{c^2}{k^2} \tag{III.56}$$

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \tag{III.57}$$

où k, c, m sont respectivement la rigidité, l'amortissement et la masse de ce système. On peut déduire que la mobilité représente mieux la vibration de la structure aux résonances.

Les impédances complexes des éléments simples sont présentées dans le Tab. III.3.



On utilise souvent deux combinaisons des impédances suivantes :

- Impédance en parallèle :

La force est distribuée à chaque impédance.

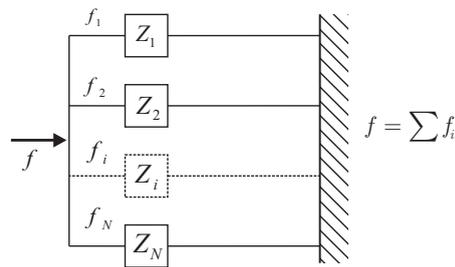


FIGURE III.17. : Combinaison des impédances en parallèle

Dans ce cas, on obtient des relations entre les impédances et les mobilités :

$$Z_{par} = \sum_{i=1}^N Z_i \tag{III.58}$$

$$\frac{1}{V_{par}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{V_i} \tag{III.59}$$

- Impédance en série :

La vitesse au point d'application est la somme des vitesses des impédances.

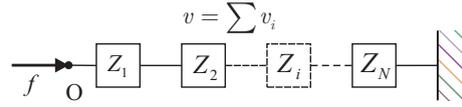


FIGURE III.18. : Combinaison des impédances en série

Les quantités équivalentes s'écrivent :

$$\frac{1}{Z_{ser}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{Z_i} \quad (\text{III.60})$$

$$V_{ser} = \sum_{i=1}^N V_i \quad (\text{III.61})$$

■ THÉORÈME III.1 (LOI DE KIRCHHOF)

La somme de toutes les forces agissant en un point est nulle.

La somme des vitesses relatives d'éléments en série dans une boucle fermée est nulle.

A partir de l'Eq. (III.52), car $V(\omega) = i\omega H(\omega)$, on peut déduire les matrices de mobilité et d'impédance de la structure :

$$\mathbf{V}(\omega) = i\omega (\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \quad (\text{III.62})$$

$$\mathbf{Z}(\omega) = \frac{\mathbf{K}}{i\omega} + \mathbf{C} + i\omega\mathbf{M} \quad (\text{III.63})$$

3. Essais de relaxation

3.1. Exploitation des données

Comme il a été étudié dans la section 1.2, le module complexe peut être calculé en se basant sur la fonction de relaxation $R(t)$ et sur la transformation de Fourier du domaine temporel au domaine fréquentiel. Si la fonction de relaxation a la forme d'une série de Prony (comme la fonction $F(t)$ mentionnée), le module complexe peut être analytiquement représenté à toutes les fréquences (Fig. III.19). En réalité, on ne peut pas effectuer immédiatement un déplacement ou une déformation à l'instant

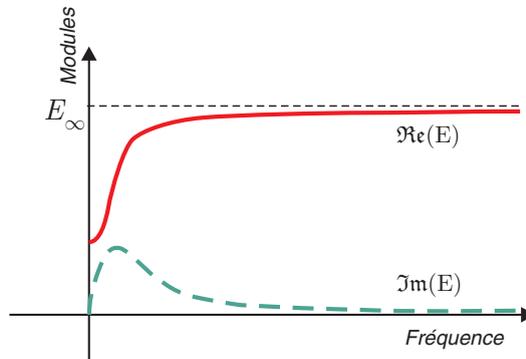


FIGURE III.19. : Forme de la partie réelle et de la partie imaginaire du module complexe

$t_0 = 0$ comme dans la théorie $\varepsilon(t) = H(t)\varepsilon_0$, où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, et par conséquent, la fonction de relaxation dans la Fig. III.4 ne peut être calculée directement. C'est la raison pour laquelle on fera une analyse de l'essai de relaxation réel et on proposera une méthode pour identifier la fonction de relaxation à partir de cette analyse. On suppose que le déplacement ainsi que la déformation $\varepsilon(t)$ varie linéairement en fonction du temps dans l'intervalle $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[H(t - t_0) + \frac{t}{t_0} (H(t) - H(t - t_0)) \right]$

(Fig. III.20). Rappelons que

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau + R(t)\varepsilon(0) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \frac{\partial R(\tau)}{\partial \tau} \varepsilon(t-\tau) d\tau$$

. On établira le comportement viscoélastique dans deux cas :

- $0 \leq t < t_0$:

En faisant l'hypothèse que dans l'intervalle $[0, t_0]$, la déformation varie linéairement, $\varepsilon(t) = t \frac{\varepsilon_0}{t_0}$, on obtiendra :

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^t R(t-\tau) d\tau = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^t R(\tau) d\tau \quad (\text{III.64})$$

- $t_0 \leq t$:

La dérivée de la déformation dans l'intervalle $[t_0, t]$ s'annule.

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \int_0^{t_0} R(t-\tau) d\tau \quad (\text{III.65})$$

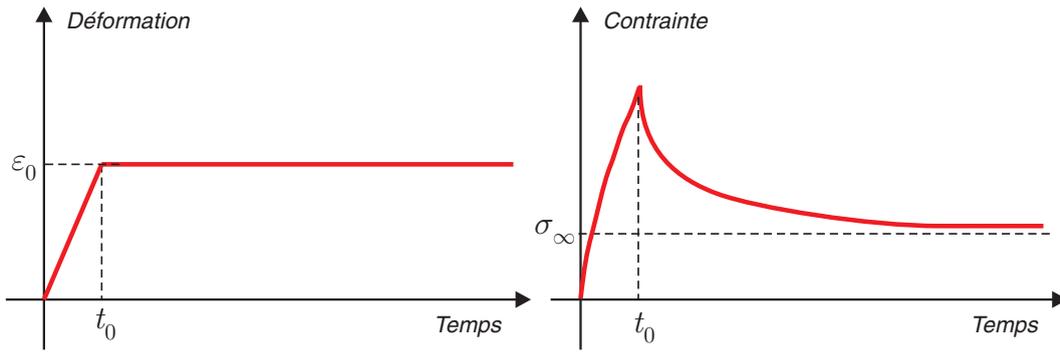


FIGURE III.20. : Essai de relaxation en temps réel

On utilisera la série de Prony pour l'expression de la fonction de relaxation $R(t)$, $R(t) = A_0 + \sum_i A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$. Avec l'hypothèse de déformations :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left[H(t-t_0) + \frac{t}{t_0} (H(t) - H(t-t_0)) \right] \quad (\text{III.66})$$

les contraintes $\sigma(t)$ peuvent être calculées par l'Eq. (III.64),

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \left[H(t-t_0) \left(\sum_{i=1}^N A_i \tau_i \left(e^{\frac{t_0-t}{\tau_i}} - 1 \right) - A_0(t-t_0) \right) - H(t) \left(\sum_{i=1}^N A_i \tau_i \left(e^{-\frac{t}{\tau_i}} - 1 \right) - A_0 t \right) \right] \quad (\text{III.67})$$

Comme la fonction exponentielle est une fonction convexe de base, on ne peut identifier les amplitudes et les temps caractéristiques que sur les intervalles de la contrainte de relaxation dont la convexité est assurée. Dans notre cas, la contrainte se divise en deux intervalles : avant et après l'instant t_0 . Etant donné que le coefficient libre A_0 dans son expression est important car il caractérise la partie élastique du matériau, on va identifier en se basant sur le deuxième intervalle $[t_0, T_{max}]$ et on vérifiera les paramètres identifiés par les données de la mesure dans l'autre. Dans cet intervalle, l'expression analytique de la contrainte est :

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \left[A_0 t_0 + \sum_{i=1}^N A_i \tau_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \left(e^{\frac{t_0}{\tau_i}} - 1 \right) \right] \quad (\text{III.68})$$

Une manière de faire l'identification est d'utiliser le *Toolbox Curve Fitting* dans le logiciel *MATLAB*. Le principe de fonctionnement de ce Toolbox est de minimiser la fonction d'erreur - l'écart entre les valeurs mesurées et les valeurs estimées. Les tableaux de données sont introduits dans la boîte d'outils. Les contraintes utilisées sont $\forall i = \overline{1, N} : A_i > 0, \tau_i > 0$. La valeur N est choisie la plus petite possible pour que la courbe identifiée soit la plus proche des données expérimentales. Premièrement, on choisit $N = 1$ et on l'augmente jusqu'à ce que la courbe identifiée soit suffisamment proche.

3.2. Couche élémentaire

Comme suivant la direction des câbles, les câbles supportent la plupart des contraintes distribuées dans la section transversale de l'éprouvette, les propriétés dans cette direction sont presque indépendantes du temps. Par conséquent, quand on fait les essais, à cause du grand rapport entre les rigidités des deux matériaux (contraste des matériaux), il apparaît des localisations de contraintes dans le caoutchouc, qui sont différentes de l'ensemble caoutchouc-acier dans le pneu. Alors, on prendra la valeur statique de E_L dans les calculs qui suivent.

Le temps initial de la phase d'identification est t_0 , l'instant où la déformation longitudinale atteint son maximum et reste stable. Une comparaison de différents coefficients à identifier est effectuée pour la décision finale du nombre de coefficients dans la série de Prony.

Les résultats des essais sont présentés dans les Figs. III.21 et III.22. Les coefficients et les temps caractéristiques dans la série de Prony sont mis dans le Tab. III.4

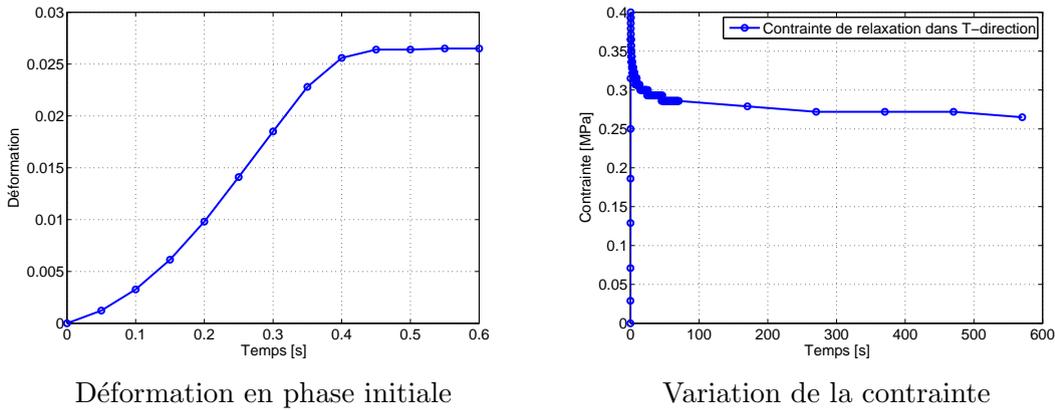


FIGURE III.21. : *Résultat de l'essai de relaxation du E_T*

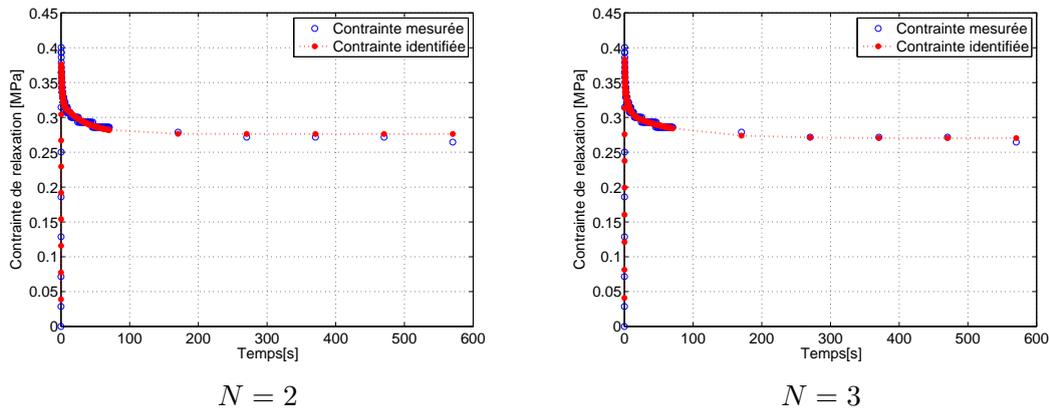


FIGURE III.22. : *Fonction de relaxation identifiée pour la direction T*

3.3. Bande de roulement

De la même façon, on effectuera une identification pour les fonctions de relaxation dans le cas de E_x et E_y de la bande de roulement, qui font des angles $\pm 20^\circ$ et $\pm 70^\circ$ avec les axes des câbles. Les résultats sont donc présentés comme suit :

Les résultats et la comparaison des cas d'identification sont présentés dans les Figs. III.24. En réalité, un nombre élevé de paramètres ne provoquera pas une bonne précision. Dans quelques cas, la présence des paramètres supplémentaires générera des extrêmes locaux. Les algorithmes de minimisation de la fonction d'erreur nous donneront alors des valeurs fausses. Dans ces cas là, on devrait estimer les

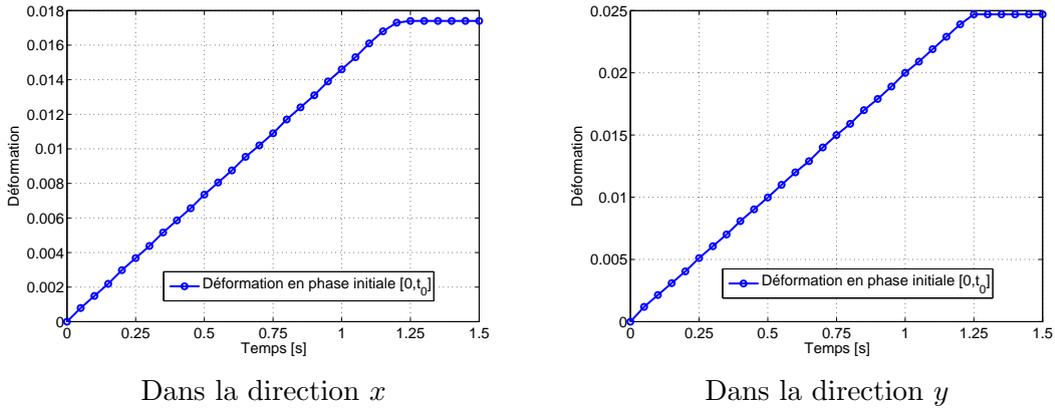


FIGURE III.23. : Déformations dans les essais de relaxation pour la bande de roulement

valeurs fiables (bords supérieurs et inférieurs) et soit on les introduit dans l’algorithme, soit on effectue des cycles de répétition jusqu’au moment où sont sortis les bons résultats.

Les paramètres d’identification des fonctions de relaxation sont donnés dans le Tab. III.4.

TABLEAU III.4. : Amplitudes et temps caractéristiques identifiés pour les fonctions de relaxation

	Valeurs	Amplitudes				Temps caractéristiques			
		A_0	A_1	A_2	A_3	t_0	τ_1	τ_2	τ_3
Micro couche	E_T	9.7431	1.3025	2.4273	1.4045	0.4000	73.9451	5.2443	0.5466
Bande de roulement	E_x	356.5974	34.1506	59.7337	139.8615	1.2000	212.2070	7.3106	0.5625
	E_y	9.9238	1.2488	6.0636	3.1896	1.2000	46.7811	4.2929	0.5652

En se basant sur le comportement des matériaux viscoélastiques dans deux domaines temporel et fréquentiel, on peut déduire les caractéristiques mécaniques en fonction de la fréquence. Avec l’expression des déformations en fonction du temps présentée dans la section précédente (Eq. (III.66)), la transformation de Fourier nous donne l’expression dans le domaine fréquentiel :

$$\widehat{\varepsilon}(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{t_0} \frac{1}{\omega^2} (e^{-it_0\omega} - 1) \quad (\text{III.69})$$

On peut bien vérifier que cette quantité tend vers $\varepsilon_0/i\omega$ lorsque t_0 tend vers 0. Pourtant, cette valeur n’est utilisée que dans le cas de chargement correspondant (transformation de la charge dans l’essai de relaxation). Elle n’est pas applicable dans tous les problèmes dynamiques (voir en détails dans la section “Intervalle d’application” 3.6).

3.4. Résultats exploités des essais de relaxation

Comme mentionné ci-dessus, le module complexe peut être déterminé par la fonction de relaxation :

$$\widehat{E}(\omega) = i\omega \mathcal{F} (R(t))$$

Avec la représentation par la série de Prony de $R(t) = H(t) \left[A_0 + \sum_{n=1}^N A_n e^{-\frac{t}{\tau_n}} \right]$, $\widehat{E}(\omega)$ devient :

$$\widehat{E}(\omega) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \frac{i\omega}{i\omega + \frac{1}{\tau_n}} = \Re\mathfrak{e}[\widehat{E}] + i\Im\mathfrak{m}[\widehat{E}] \quad (\text{III.70})$$

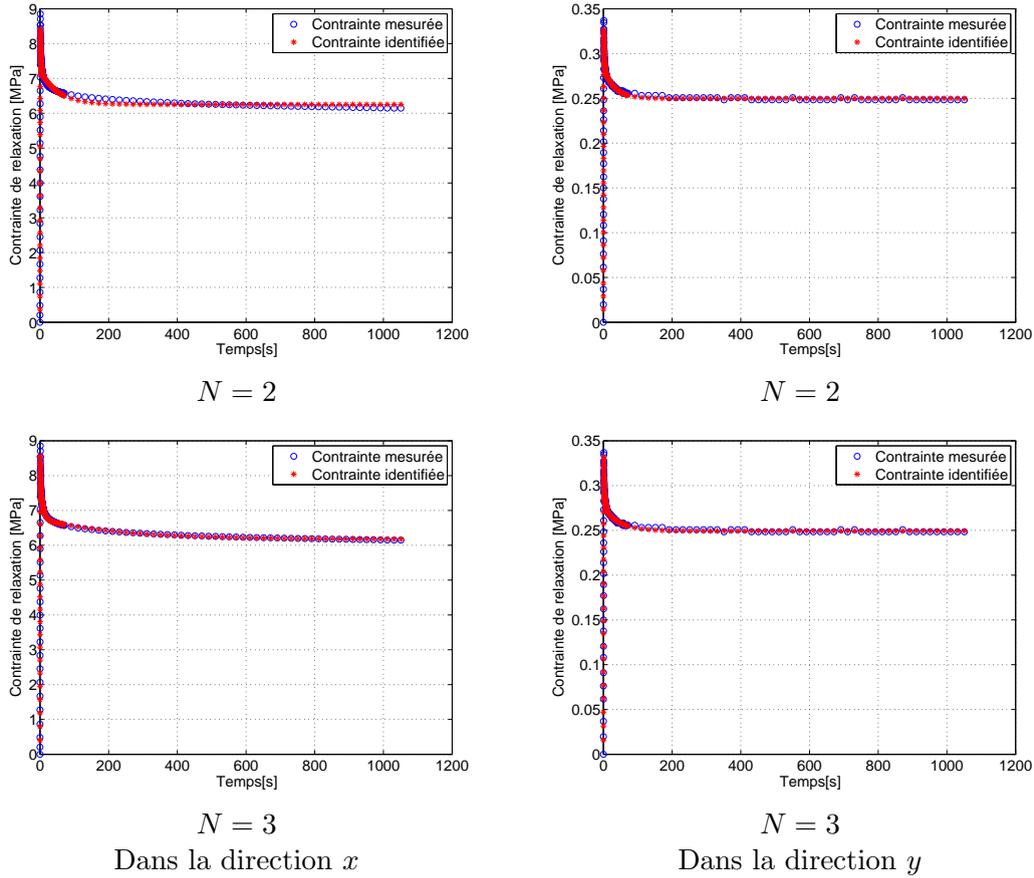


FIGURE III.24. : Identification des fonctions de relaxation pour la bande de roulement

où :

$$\Re\mathfrak{e}[\hat{E}] = A_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n}{1 + \frac{1}{\tau_n^2 \omega^2}} \quad (\text{III.71})$$

$$\Im\mathfrak{m}[\hat{E}] = \sum_{n=1}^N A_n \frac{\frac{1}{\tau_n \omega}}{1 + \frac{1}{\tau_n^2 \omega^2}} \quad (\text{III.72})$$

La présentation des modules complexes dans les directions T, x, y exploités du résultat des essais de relaxation est montrée dans les Figs III.25, III.26 et III.27.

3.5. Sensibilité des paramètres

On trouve dans la partie d'identification des paramètres des fonctions de relaxation que la représentation de la contrainte est divisée en N parties, chaque partie possède une allure principale dominée par les fonctions $A_i \exp -\frac{t}{\tau_i}$, dont les valeurs τ_i petites influencent les intervalles de t petits. De la même façon, le module complexe représente des parties dominées par les fonctions $A_i \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega\tau_i}}$. A titre d'exemple, pour la partie réelle du module d'Young dans la direction x , l'ordre des A_i est le même. Le produit $\tau\omega$ devient sensible. On verra ci-dessous la dépendance de chaque partie de $\Re\mathfrak{e}[\hat{E}]$ dans la Fig. III.28. On divise la courbe de la partie réelle $\Re\mathfrak{e}[\hat{E}]$ en N niveaux caractérisés par la fonction $\frac{1}{1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}}$. On trouve qu'à $\tau\omega = 4$, cette fonction atteint déjà la valeur 0.95. Par conséquent, pour les grandes valeurs de τ_i , son niveau est rapidement atteint. Les petites valeurs de τ_i décident de l'allure aux fréquences plus grandes.

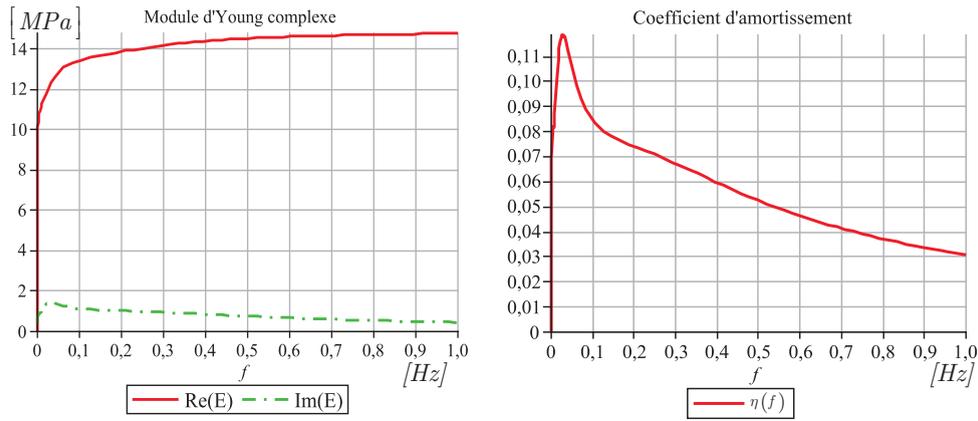


FIGURE III.25. : *Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction T*

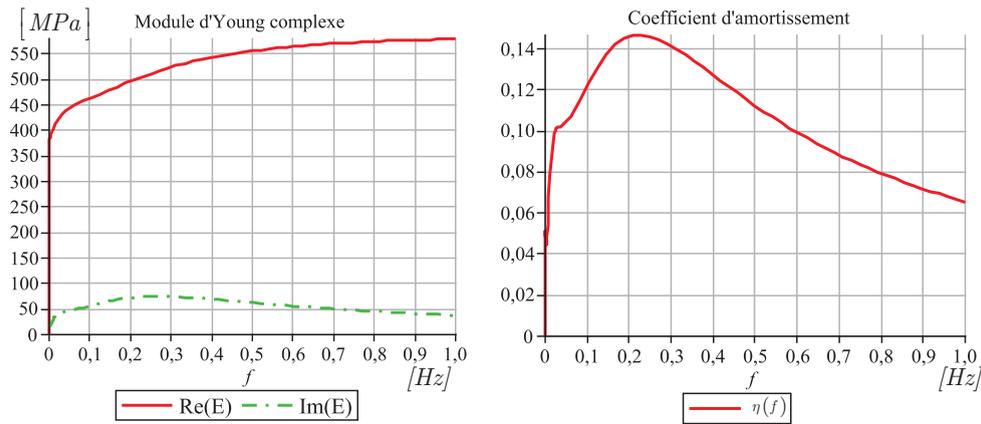


FIGURE III.26. : *Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction x*

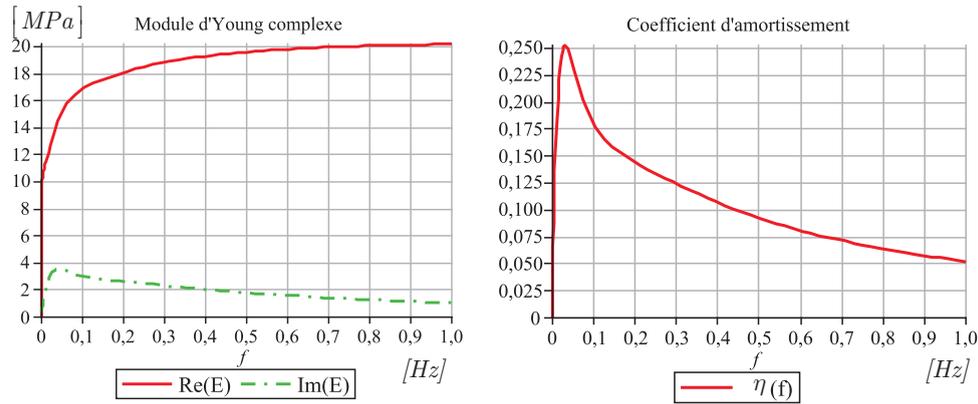


FIGURE III.27. : *Module d'Young complexe et coefficient d'amortissement dans la direction y*

3.6. Intervalle d'application

Dans les essais de relaxation, le temps initial du processus d'identification t_0 est de l'ordre de 1 seconde. Si l'on suppose que la déformation et la contrainte sont des signaux temporels pour calculer le module d'Young complexe, on aura des problèmes numériques lors de la transformation de Fourier. Pour assurer un bon résultat dans le domaine fréquentiel, l'amplitude de la déformation doit être proche de ε_0 . On réécrit la déformation sous la forme :

$$i\omega \frac{\widehat{\varepsilon}(\omega)}{\varepsilon_0} = \frac{i}{t_0\omega} e^{-\frac{it_0\omega}{2}} \left(e^{-\frac{it_0\omega}{2}} - e^{\frac{it_0\omega}{2}} \right) = 2e^{-\frac{it_0\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{t_0\omega}{2}\right)}{t_0\omega} \quad (\text{III.73})$$

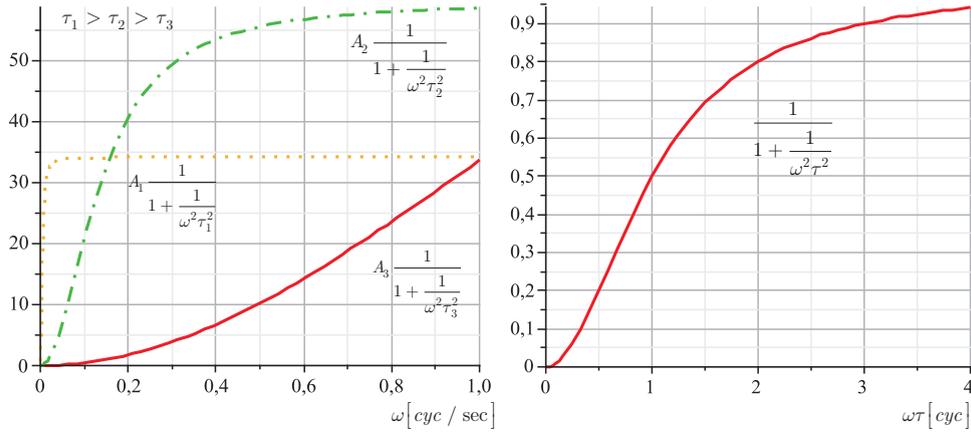
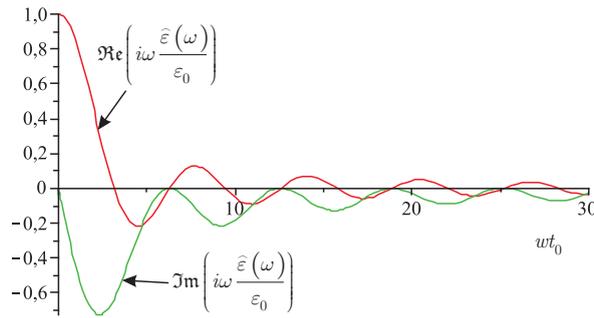

 FIGURE III.28. : Variation des fonctions de base de la partie réelle du E_x


FIGURE III.29. : Déformation dans le domaine fréquentiel

On calcule le point où la déformation s'annule :

$$\hat{\varepsilon}(\omega) = 0 \leftrightarrow \sin\left(\frac{t_0\omega}{2}\right) = 0 \leftrightarrow \omega t_0 = 2k\pi \leftrightarrow \omega = \frac{2k\pi}{t_0} \leftrightarrow f = \frac{k}{t_0} \quad (\text{III.74})$$

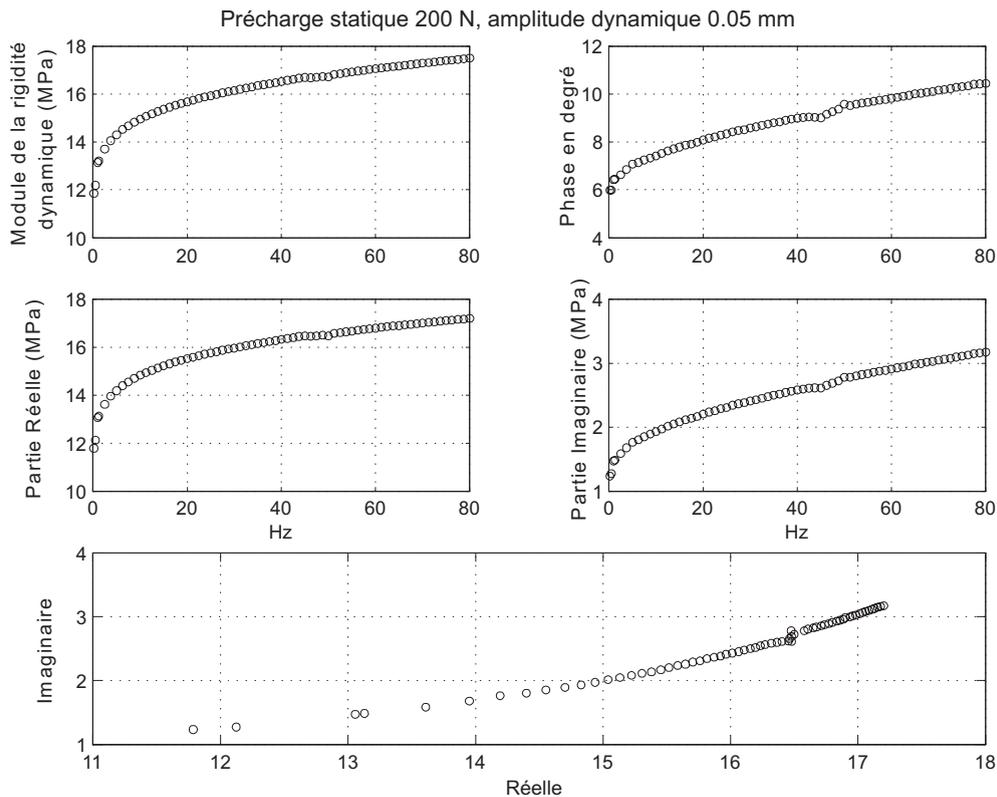
Alors, à la fréquence $f_0 = \frac{1}{t_0}$, la déformation s'annule. On rencontre le problème numérique si l'on calcule le module \hat{E} par la formule :

$$\hat{E} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \quad (\text{III.75})$$

Il faut que la fréquence soit dans l'intervalle $0 \leq f \leq \frac{1}{t_0}$ avec $\frac{1}{t_0}$ est de l'ordre de 1 Hz. Pour les calculs plus fiables, il faut que $f \ll \frac{1}{t_0}$.

3.7. Cas du caoutchouc

Pour le caoutchouc, on ne peut pas extraire un volume suffisant dans le pneu pour réaliser les essais dynamiques. Alors, on prend le résultat des essais dynamiques sur un échantillon de caoutchouc, qui sont réalisés par Huynh [95] (voir Fig. III.30). Dans ce cas, la précharge statique 200N correspond à la pression 3bars (avec le rayon de l'échantillon 14.35mm) qui est de même ordre que la pression interne du pneumatique (2bars). Pour les fréquences plus élevées, on prend la valeur 20MPa comme la valeur du module élastique dynamique. Le coefficient d'amortissement est estimé égal 0.15 pour les fréquences au-delà de 100Hz.

FIGURE III.30. : *Module complexe du caoutchouc dans le domaine fréquentiel*

4. Vibration d'une poutre

4.1. Principe de l'expérience

Les dispositifs d'essais, qui permettent d'estimer les signaux réels en temps ou l'amplitude et la phase de la réponse en fréquence à examiner, se divisent en trois groupes :

- **Dispositifs mécaniques** : Ces dispositifs comprennent les mécanismes de mise à disposition de la structure à examiner (conditions aux limites, directions des charges,...).
- **Dispositifs à transmission** :
 - Générateur : qui produit des forces de type harmoniques, aléatoires, pseudo-aléatoires, ... dans une bande de fréquences donnée (par exemple [0-3200Hz]). Pour avoir une bonne excitation d'entrée, il faut bien lier le générateur à la structure (contact permanent).
 - Amplificateur de puissance avec un gain ajustable.
 - Chaîne de mesure du signal d'entrée : cette partie, qui n'est pas absolument indispensable, inclut des accéléromètres au point d'excitation et des capteurs de force. On utilise souvent les capteurs électroniques intégrés à la tête du pot vibrant (tête d'impédance).
- **Dispositifs à réception** :
 - Amplificateurs de réception.
 - Accéléromètres à plusieurs points à examiner. Ils sont fixés sur la structure mais leurs masses doivent être négligeables par rapport à celle de la structure (< 5%).
 - La fonction de transfert est traitée par un micro ordinateur à partir des signaux d'entrée et de sortie.

Les signaux d'entrée $X(t)$ et de sortie $Y(t)$ sont réels et fonction du temps. La transformation de Fourier est comprise dans le logiciel de traitement PULSE. En réalité, les capteurs étant sous forme d'accéléromètres, on mesure directement les accélérations. Pour les vitesses et les déplacements, on doit faire des intégrations ou des doubles intégrations. La FRF est prise comme le rapport entre les signaux d'entrée et de sortie en fréquence.

La mesure peut être perfectionnée par les techniques de traitement des signaux [114, 115], cette approche est intéressante pour les signaux bruités ou distordus issus par exemple de milieux dispersifs. Le schéma des dispositifs est présenté dans la Fig. III.31

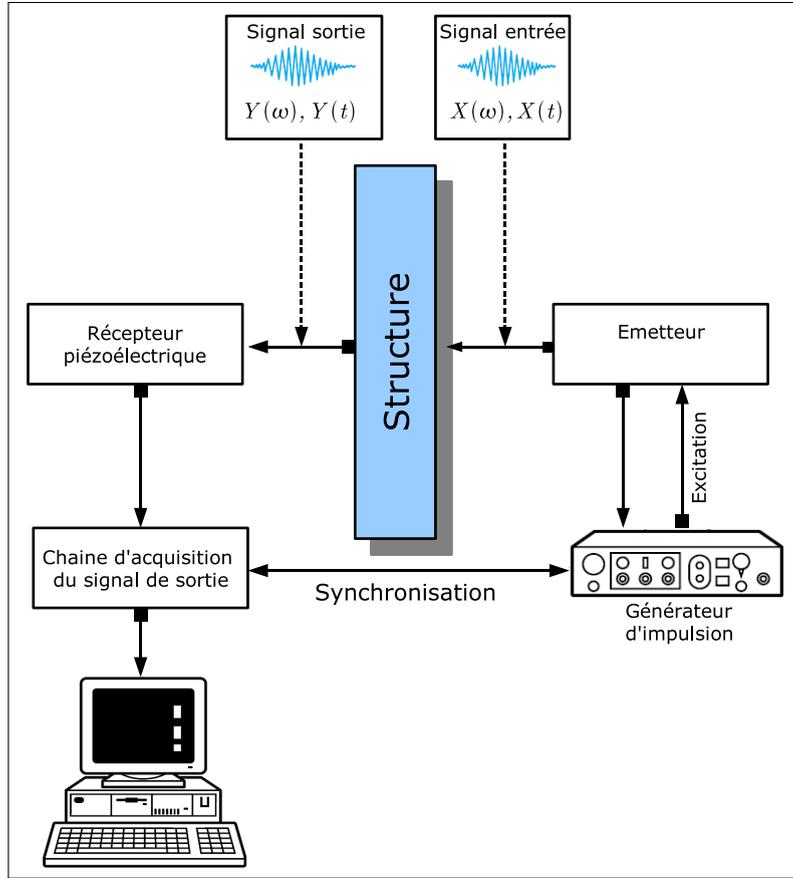


FIGURE III.31. : Schéma général du dispositif des essais dynamiques

4.2. Vibration longitudinale d'une barre avec des masses

4.2.1. Analyse théorique

On examine la vibration d'une barre avec les conditions aux limites comme dans la Fig. III.32.

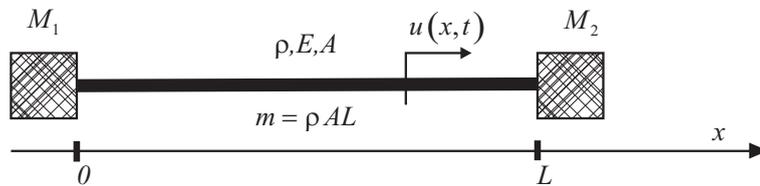


FIGURE III.32. : Vibration d'une barre avec 2 masses aux extrémités

L'équation dynamique de la barre s'écrit :

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + p \quad (\text{III.76})$$

où A, E, ρ sont respectivement l'aire de section, le module élastique et la densité volumique de la barre, p est la charge extérieure appliquée à la barre. Si la section et le module d'Young sont constants, on pose $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ la vitesse des ondes propagées dans la barre. L'équation dynamique est réécrite :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{p}{\rho A} \quad (\text{III.77})$$

La solution peut être calculée par la décomposition modale $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)q_n(t)$.

★ *Expression des formes modales X_n :*

Les formes modales doivent satisfaire l'équation homogène :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} X = 0 \rightarrow X_n = C_n \cos \frac{\omega_n x}{c_0} + D_n \sin \frac{\omega_n x}{c_0} \quad (\text{III.78})$$

Les conditions aux limites doivent être vérifiées :

+ En $x = 0$:

$$M_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=0} = N(0, t) = EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{III.79})$$

+ En $x = L$:

$$M_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L} = -N(L, t) = -EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} \quad (\text{III.80})$$

En tenant compte de l'Eq. (III.78), en posant $\varphi_n = \frac{\omega_n L}{c_0}$, les conditions aux deux extrémités sont réécrites :

+ En $x = 0$:

$$\mathcal{F}_1(\omega_n) = M_1 \omega_n C_n + \frac{EA}{c_0} D_n = 0 \xrightarrow{EAL=mc_0^2} M_1 \varphi_n C_n + m D_n = 0 \quad (\text{III.81})$$

+ En $x = L$:

$$\mathcal{F}_2(\omega_n) = M_2 \omega_n (C_n \cos \varphi_n + D_n \sin \varphi_n) - \frac{EA}{c_0} (D_n \cos \varphi_n - C_n \sin \varphi_n) = 0 \quad (\text{III.82})$$

$$\xrightarrow{EAL=mc_0^2} M_2 \varphi_n (C_n \cos \varphi_n + D_n \sin \varphi_n) - m (D_n \cos \varphi_n - C_n \sin \varphi_n) = 0 \quad (\text{III.83})$$

A partir de l'Eq. (III.83), en remplaçant $C_n = -\frac{m D_n}{M_1 \varphi_n}$ dans l'Eq. III.83, l'élimination du terme commun D_n nous donne :

$$-m \left(\frac{M_2}{M_1} + 1 \right) \cos \varphi_n + \left(M_2 \varphi_n - \frac{m^2}{M_1 \varphi_n} \right) \sin \varphi_n = 0 \quad (\text{III.84})$$

En somme, les conditions aux limites nous donnent la valeur φ_n satisfaisant :

$$\cot \varphi_n = \frac{M_1 M_2 \varphi_n^2 - m^2}{m \varphi_n (M_1 + M_2)} \quad (\text{III.85})$$

Les coefficients C_n et D_n sont calculés en ajoutant l'équation de l'orthonormalisation des modes propres :

$$\int_0^L X_n^2 dx = \frac{L}{2} \left[C_n^2 + D_n^2 + \frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n} (C_n^2 - D_n^2) + C_n D_n \frac{\cos 2\varphi_n - 1}{\varphi_n} \right] = 1 \quad (\text{III.86})$$

En cas d'encastrement à $x = 0$, on peut considérer $M_1 \gg M_2 = M$ ou $M_1 \rightarrow \infty$. On retrouvera l'expression dans [16]. La représentation graphique des racines de l'Eq. (III.87) est montrée dans la Fig. III.33.

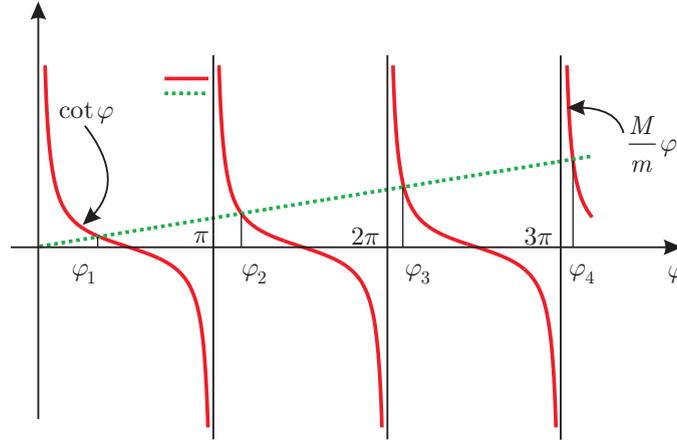
$$\cot \varphi_n = \frac{M}{m} \varphi_n \quad (\text{III.87})$$

Dans ce cas, $C_n = 0$, l'expression de D_n est obtenue par $\int_0^L X_n^2 dx = 1$:

$$D_n^2 = \frac{2}{L \left(1 - \frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n} \right)} \xrightarrow{\text{Eq. (III.87)}} \frac{2}{L \left(1 - \frac{M}{m} \sin^2 \varphi_n \right)} \quad (\text{III.88})$$

Et la forme modale est calculée :

$$X_n = \sqrt{\frac{2}{L \left(1 - \frac{M}{m} \sin^2 \varphi_n \right)}} \sin \frac{\omega_n x}{c_0} \quad (\text{III.89})$$


 FIGURE III.33. : Racines positives de l'équation $\cot \varphi = \frac{M}{m} \varphi$ [16]

Lorsque m est petite devant M , $\varphi_1 \ll 1$. En remplaçant $\tan \varphi_1 = \varphi_1 + \frac{1}{3}\varphi_1^3$, on peut calculer la valeur approchée de la pulsation fondamentale :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{m} + \frac{1}{3}}} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{EA}{L(M + \frac{1}{3}m)}} \quad (\text{III.90})$$

Pour les autres modes, $\varphi_n \simeq (n-1)\pi$.

★ Expression des coordonnées généralisées q_n :

Pour une barre, la masse généralisée est $\mu_n = \rho A$. Sous la sollicitation unitaire harmonique concentrée au point x_k , les coordonnées généralisées dans le domaine fréquentiel s'écrivent :

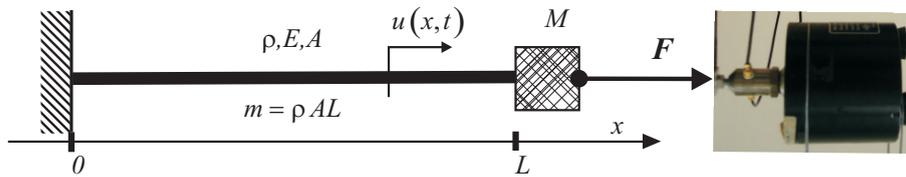
$$\hat{q}_n(\omega) = \frac{X_n(x_k)}{\rho A} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_n} \quad (\text{III.91})$$

Les déplacements ou les réceptances dans le cas d'une masse M valent :

$$\hat{u}(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x_k)X_n(x)}{\rho A} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{\rho A} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_n} \sin \frac{\omega_n x_k}{c_0} \sin \frac{\omega_n x}{c_0} \quad (\text{III.92})$$

4.2.2. Exploitation des données

On mesure la mobilité du système composé d'une éprouvette avec l'axe principal perpendiculaire à la direction des câbles d'acier. Cette éprouvette est attachée à une masse à une extrémité et encastree à l'autre.


 FIGURE III.34. : Schéma de l'essai dynamique du module E_T

On peut calculer la partie réelle du module d'Young complexe E' en connaissant la pulsation propre :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{m} + \frac{1}{3}}} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{E'A}{L(M + \frac{1}{3}m)}} \rightarrow E' = 4\pi^2 f_1^2 \frac{L}{A} \left(M + \frac{1}{3}m \right) \quad (\text{III.93})$$

Quant à la partie imaginaire, on détermine les amortissements au lieu de la mesurer directement. Les amortissements peuvent être calculés simplement par la formule :(cf. [116] ou [105]).

$$\eta_r = \frac{f_b^2 - f_a^2}{2f_r^2}$$

avec f_a, f_b correspondant au niveau de réceptance $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$.

On peut obtenir les amortissements par l'analyse du logiciel PULSE aux résonances. Le principe de mesure du logiciel PULSE est la méthode de largeur de bande en utilisant la transformation des signaux temporels dans le domaine fréquentiel. Une autre méthode d'identification est que l'impédance mécanique de l'éprouvette peut être estimée par la pulsation fondamentale. On a :

$$\hat{u}(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^2}{\rho A} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_n} \sin \frac{\omega_n x_k}{c_0} \sin \frac{\omega_n x}{c_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n \sin \frac{\omega_n x}{c_0} \quad (\text{III.94})$$

Avec $n \geq 2, x_k = L \rightarrow \varphi_n \simeq (n - 1)\pi$, le déplacement peut être estimée par :

$$\hat{u}(x, \omega) = \Gamma_1 \sin \frac{\omega_n x}{c_0} \quad (\text{III.95})$$

La déformation est déterminée par le gradient du déplacement selon la variable d'espace :

$$\rightarrow \hat{\varepsilon}(x, \omega) = \frac{\omega_1}{c_0} \cot \frac{\omega_1 x}{c_0} \hat{u}(x, \omega) \rightarrow \hat{\varepsilon}(L, \omega) = \frac{\varphi_1^2}{L} \frac{M}{m} \hat{u}(L, \omega) \quad (\text{III.96})$$

Le module d'Young complexe est calculé par :

$$\hat{E} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \frac{\hat{F}}{\hat{u}} \frac{L}{A} \frac{1}{\varphi_1^2 \frac{M}{m}} \stackrel{\text{Eq. III.90}}{=} \frac{1}{H} \frac{L}{A} \left(1 + \frac{m}{3M}\right) = i\omega Z_E \frac{L}{A} \left(1 + \frac{m}{3M}\right) \quad (\text{III.97})$$

où Z_E est l'impédance mécanique équivalente à $x = L$ de l'éprouvette. On considère l'impédance de l'éprouvette connectée avec la masse M en parallèle.

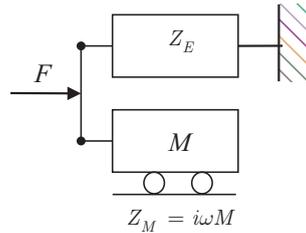


FIGURE III.35. : Schéma de l'impédance équivalente

L'impédance mesurée Z_{mes} est l'impédance équivalente du système (voir Fig. III.35). Z_E est déterminée donc :

$$Z_E = Z_{mes} - Z_M = Z_{mes} - i\omega M \quad (\text{III.98})$$

Cependant, ce calcul est acceptable seulement aux fréquences avoisinantes de la résonance. En réalité, la phase aux résonances de la mobilité n'est pas exactement $-\pi$. On effectuera un décalage de phase en mesurant la phase de la mobilité à la fréquence de résonance et on modifie la phase de la mobilité mesurée en ajoutant ce déphasage.

4.2.3. Application à la micro couche

★ *Suivant la direction des câbles*

Comme les câbles d'acier supportent la plupart des efforts dans cette direction de la couche, on prendra la valeur du module statique du E_L pour les calculs ci-après.

TABLEAU III.5. : *Module complexe calculé à plusieurs fréquences à partir de la mesure de PULSE*

f_n [Hz]	M [g]	L [mm]	ζ	A [mm ²]	$\Re(\widehat{E}_T)$ [MPa]	$\Im(\widehat{E}_T)$ [MPa]
15	324.4	95	0.085	12.6	21.73	3.69
29	92	95	0.070	12.6	23.03	3.22
74	29.3	50	0.067	12.6	25.14	3.37
76	26.7	50	0.065	12.6	24.16	3.14
111	31.2	20	0.031	12.6	24.09	1.49

* *Suivant la direction perpendiculaire aux câbles*

On calcule la partie réelle du module d'Young par la formule de pulsation propre (III.93). On utilise plusieurs masses attachées à la couche et on modifie la longueur de vibration pour obtenir les différentes résonances. Les rapports ζ entre l'amortissement à cette fréquence et l'amortissement critique sont détectés par PULSE. Le résultat est montré dans le Tab. III.5

Le module complexe peut être calculé par la méthode d'impédance équivalente du système barre-masse comme on a montré dans la section précédente. Les coefficients d'amortissement sont calculés par la méthode de largeur de bande. Ces valeurs sont du même ordre que le coefficient d'amortissement du caoutchouc estimé (0.15). La comparaison des modules complexes calculés par les méthodes présentées ci-dessus (matériau suivant la direction T) est présentée dans le Tab.III.6 et dans la Fig. 4.2.3.

 TABLEAU III.6. : *Comparaison des valeurs du module E_T dans deux cas $M = 324.4g$ et $M = 92g$.*

Différents calculs par les méthodes mentionnées

Cas	$M = 324.4g$	$M = 92g$
f_1	15Hz	29Hz
$E' = 4\pi^2 f_1^2 \frac{L}{A} (M + \frac{1}{3}m)$	21.73 MPa	23.03 MPa
$\eta_r = \frac{f_b^2 - f_a^2}{2f_c^2}$	0.170	0.134

4.3. Vibration transversale d'une poutre.

4.3.1. Quelques formules théoriques

L'équation gouvernant la vibration transversale d'une poutre s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (\text{III.99})$$

Pour une section et un module constants le long de la poutre, la solution de l'Eq (III.99) a la forme de la décomposition modale :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) T_n(t) \quad (\text{III.100})$$

où $Y_n(x)$ est la n^e forme modale de l'Eq. (III.99)

$$Y_n(x) = C_1 \sin \beta_n x + C_2 \cos \beta_n x + C_3 \sinh \beta_n x + C_4 \cosh \beta_n x$$

où β_n est associé à la forme modale Y_n et à la fréquence propre ω_n : $\omega_n^2 = \beta_n^4 \frac{EI}{\rho A}$. $T_n(t)$ doit satisfaire l'Eq (III.101).

$$\rho A \frac{d^2}{dt^2} T_n + EI \beta_n^4 T_n = Q_n \quad (\text{III.101})$$

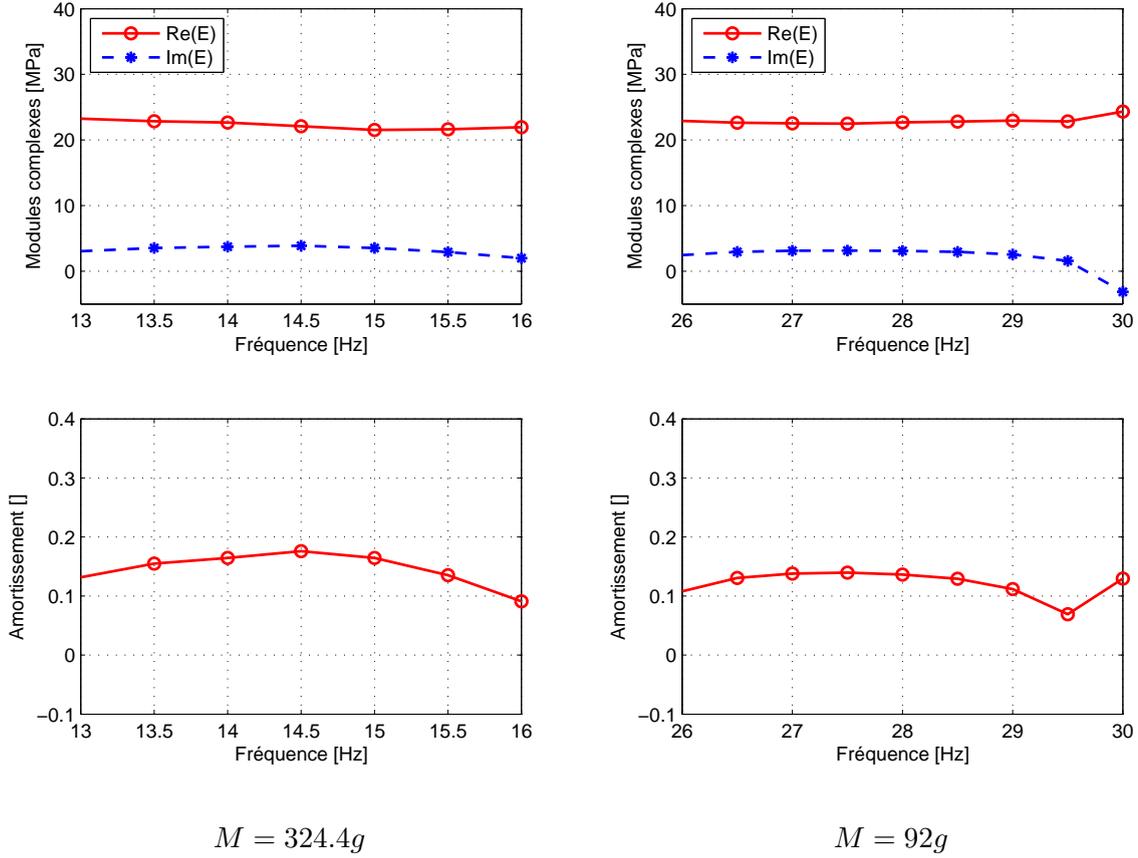


FIGURE III.36. : *Modules complexes et amortissements calculés par l'Eq. (III.97)*

où Q_n est la force généralisée associée au déplacement généralisé T_n :

$$Q_n = \sum_i Y_n(x_i) F_i(t); \quad F_i(t) \text{ est la force concentrée appliquée au point } x_i \quad (\text{III.102})$$

Les fréquences propres de la poutre sont données par :

$$f_n = \frac{(\beta_n l)^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\text{III.103})$$

où $\beta_n l$ est le nombre d'ondes sur la longueur de la poutre. En fonction des conditions aux limites, elle est la racine de l'équation :

$$\bullet \text{ libre-libre : } \cos(\beta_n l) \cosh(\beta_n l) - 1 = 0 \quad (\text{III.104})$$

$$\bullet \text{ encastré-libre : } \cos(\beta_n l) \cosh(\beta_n l) + 1 = 0 \quad (\text{III.105})$$

4.3.2. Bande de roulement

La bande de roulement se compose de trois couches : une couche en caoutchouc au milieu et deux couches élémentaires de propriétés $(E_L, E_T, G_{LT}, \nu_{LT})$. Toutes les trois couches ont pour épaisseur 0.6mm. Les angles de rotation de deux couches élémentaires sont $\pm 20^\circ$ (voir la Fig III.37).

Pour la direction x , on mesure une poutre en vibration transversale. Les résultats obtenus par PULSE sont présentés dans le Tab. III.7 en variant la longueur d'une poutre de section 21mm \times 1.8mm.

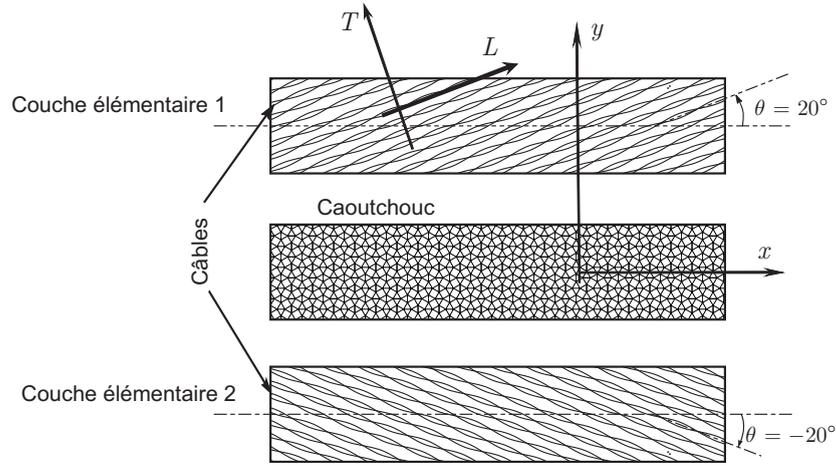


FIGURE III.37. : Constitution de la bande de roulement

Cette poutre est encastree à un bout et libre à l'autre. Les fréquences sont calculées par la formule (III.103) avec les valeurs $\beta_n l$ calculées par l'Eq. (III.105).

 TABLEAU III.7. : Valeurs de $\Re[E]$ et des amortissements mesurés par PULSE suivant la direction x

L [m]	Fréquences [Hz]	ζ_n [%]	$\Re[E]$	$\Im[E]$
0.098	14	13.9	430.74	119.74
	104	3.0	605.14	36.31
	300	2.1	642.12	27.35
0.093	16	13.0	456.27	118.63
	116	5.6	610.56	68.26
0.079	22	9.1	449.16	81.30
	156	2.5	574.96	29.09
0.068	30	9.6	458.49	88.30
	212	5.2	582.90	61.09
0.049	62	4.7	527.98	49.10
	346	5.2	418.62	43.12

Pour la direction y , car le module n'est pas suffisamment grand pour la mesure de vibration transversale, on attache une masse M et on mesure la vibration longitudinale comme avec E_T . La pulsation fondamentale est $f_1 = 13$ Hz et correspond à la masse $M = 2.446$ kg et à la longueur $L = 0.058$ m. La partie réelle du module complexe calculé est de 19.48 MPa.

Une autre façon pour évaluer les propriétés de la bande de roulement est d'utiliser le modèle multicouche d'un composite similaire à celui présenté dans le chapitre précédent. On rappelle que les expressions des modules apparents sont dans l'annexe dont :

$$E_x = \frac{A_{11}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{22}^*}}{e_{tot}}; E_y = \frac{A_{22}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{11}^*}}{e_{tot}}$$

où e_{tot} est l'épaisseur totale de la bande de roulement et la matrice \mathbf{A}^* est calculée en fonction des matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ caractérisant le composite : $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$. G_{LT} est estimé par $E_T/2.5$ et $\nu_{LT} = 0.472$ sont considéré constant selon la fréquence. E_L est supposé constant $E_L = 33.75$ GPa. E_T est calculé par $E_T = \Re(E_T) + i\Im(E_T)$ (Tab. III.6). Tous les résultats du module complexe calculé

par la vibration d'une poutre, par le modèle d'un composite multi-couche et par les données de l'essai de relaxation sont présentés dans la Fig. III.38.

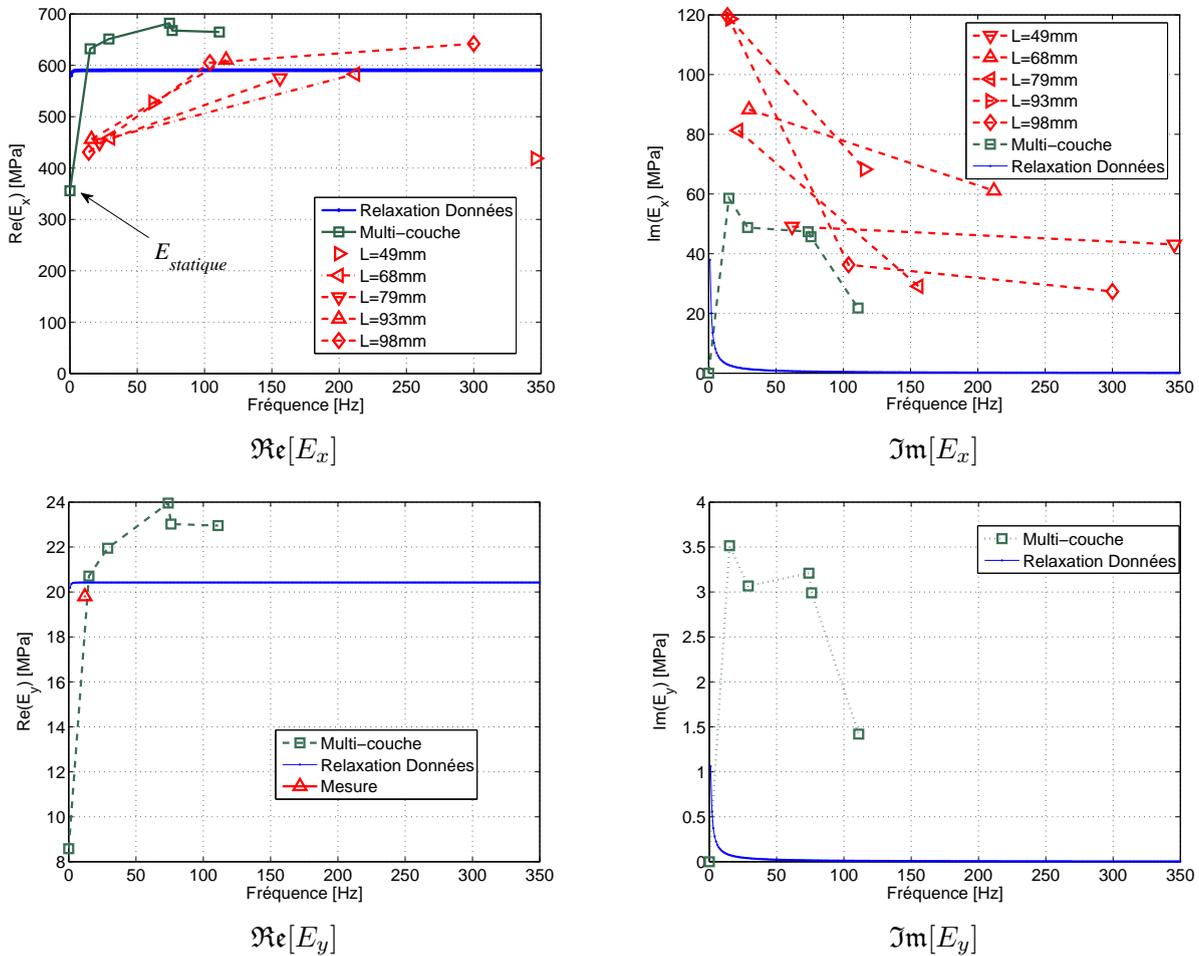


FIGURE III.38. : Module complexe dans deux directions x,y mesuré par PULSE, calculé par les données de l'essai de relaxation et estimé à partir du modèle multi-couche

Une raison pour laquelle les calculs du module complexe ne sont pas cohérents est que pour un matériau élastomère, le module complexe dépend non seulement de la précontrainte mais aussi de l'amplitude de la déformation en vibration. Lorsque cette amplitude augmente, le module complexe diminue (voir la Fig. III.39).

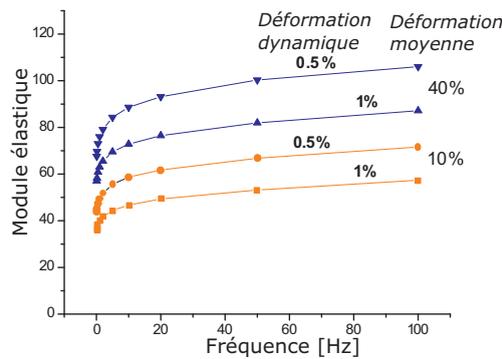


FIGURE III.39. : Module élastique à plusieurs déformations dynamiques d'un élastomère [17]

5. Une application dans le calcul de l'aire de contact en fonction de la vitesse

5.1. Modélisation du pneumatique et chargement

Dans cet exemple, on utilise un pneu lisse, sans sculpture. Pourtant, la distribution réelle des matériaux est appliquée. Les propriétés dynamiques des matériaux sont introduites. Un processus de révolution est appliquée à la section transversale pour obtenir le pneu total. La jante est supposée rigide et elle est remplacée par la condition aux limites fixées. La chaussée est supposée lisse et elle est modélisée par une plaque carrée de côté $a=0.4\text{m}$. Le contact pneu-chaussée est donc un contact entre deux surfaces lisses. Le modèle est montré sur la Fig. III.40.

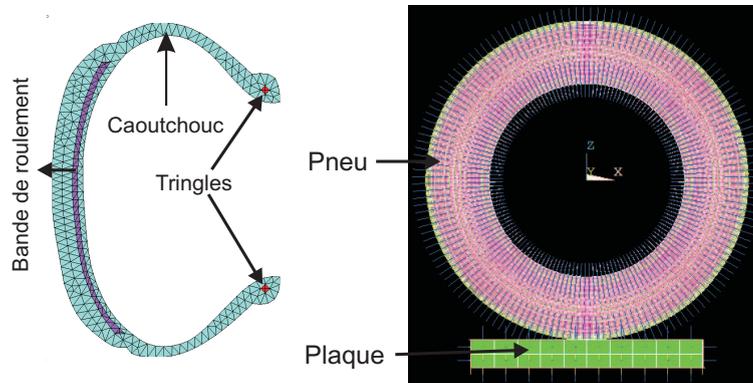


FIGURE III.40. : Modélisation du contact pneu-chaussée dans ANSYS [18]

La force d'application au pneumatique est remplacée par une pression appliquée à la plaque. La pression de l'air interne dans le pneu est prise comme égale à l'expérience (2.2bars). Comme la force expérimentale est de 3300N (correspondant au poids de voiture appliquée à la jante), la pression sur la plaque est calculée comme suit :

$$p = \frac{F}{a^2} = \frac{3300}{0.4^2} = 20625\text{N/m}^2 \quad (\text{III.106})$$

Dans un premier temps, on introduit la pression de l'air interne dans le pneu pour le gonfler. La vitesse de rotation est calculée par $\Omega = \frac{V_{voiture}}{R_{pneu}}$ et est introduite dans ANSYS. Le modèle de contact est utilisé pour le cas de chargement statique et pour chaque cas de vitesse. L'aire de contact est déterminée par les endroits où la pression de contact est suffisamment grande (ou les éléments atteignent la surface de la plaque).

5.2. Résultat et comparaison

Les résultats représentés sur la Fig. III.41 et dans le Tab. III.8 montrent une bonne concordance entre l'expérience et la modélisation. Ils prouvent que les propriétés mécaniques mesurées sont raisonnables. Les résultats expérimentaux ont été obtenus par Cesbron [117] dans le cadre de sa thèse.

TABEAU III.8. : Comparaison de l'aire de contact pneu-chaussée à plusieurs vitesses de roulement.

Unité : cm^2

	Statique	30km/h	40km/h	50km/h
ANSYS	166.7	139.7	129.8	125
Mesures	164	128	124	125

Les essais montrent qu'il y a un couplage entre la dépendance en vitesse et les modules complexes. Lorsque le pneu roule, il vibre à certaines fréquences et les matériaux travaillent à ces fréquences.

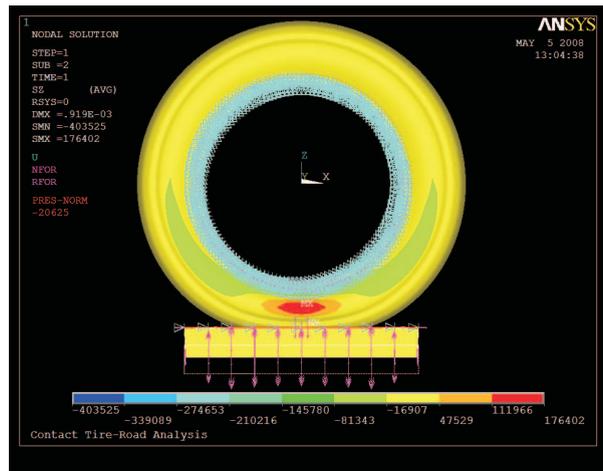


FIGURE III.41. : *Contrainte verticale statique dans le problème de contact pneu-chaussée*

Comme les modules élastiques équivalents augmentent, cela engendre une réduction d'environ 20% de l'aire de contact pneu-chaussée.

6. Synthèse sur les matériaux

Puisque la dépendance en fréquence des modules complexes varie peu à partir des moyennes fréquences, on pourra prendre les valeurs dans cette bande de fréquence comme valeurs utilisées pour le modèle pneumatique qui sera développé par la suite. Dans le Tab. III.9, on présente les valeurs nécessaires à introduire dans le modèle numérique dans les chapitres qui suivent (voir aussi le Tab. III.6 et la Fig. 4.2.3 pour les valeurs de E_T). Les valeurs estimées sont prises en se basant sur les relations des modules statiques sans calculer.

Dans tous les cas, lorsque la fréquence tend vers 0, la partie réelle du module complexe tend vers le module élastique mesuré dans le chapitre précédent ou dans les essais de relaxation. Pourtant, la partie imaginaire n'a pas une bonne variation comme la théorie car l'amortissement dépend du mode de vibration et également de l'interaction entre les câbles d'acier et le caoutchouc. L'identification de cette partie est très sensible à cause de la division en temps et de la limite de variation de la force dans les essais de relaxation. On utilisera les amortissements modaux mesurés dans le chapitre IV.

TABLEAU III.9. : Synthèse des propriétés mécaniques utilisées dans les problèmes dynamiques

Parties	Endroits	Quantités	Valeurs	Remarques
Caoutchouc	Sculpture et flanc	E [MPa]	21	estimée (Section 3.7)
		ν	0.49	estimée
		ρ [kg/m ³]	1000	
Acier	Tringles	E [GPa]	162.6	prise comme statique
		ν	0.33	estimée
		ρ [kg/m ³]	7850	estimée
Bande de roulement	Couche élémentaire	$\Re(E_L)$ [MPa]	33748	prise comme statique
		$\Re(E_T)$ [MPa]	24	mesurée
		G_{LT} [MPa]	7.5	estimée
		ν_{LT}	0.47	estimée comme statique
		ρ [kg/m ³]	2510	calculée
	3 couches composites	$\Re(E_x)$ [MPa]	660	calculée
		$\Re(E_y)$ [MPa]	24	calculée
		ν_{xy}	0.4	estimée
		G_{xy} Mpa	330	estimée
		ρ [kg/m ³]	2014	calculée

Chapitre IV.

Mesure des fonctions de réponse en fréquence d'un pneumatique

L'objectif de ce chapitre est de mesurer les fonctions de réponse en fréquence du pneumatique pour comparer avec le modèle numérique. Les mobilités sont mesurées sur la bande de roulement et dans la section transversale dans deux configurations de force d'excitation : sur la bande de roulement et sur le flanc. L'identification sommaire des modes de la bande de roulement et de la section est montrée à la fin de ce chapitre.

Sommaire

1. Objectifs de la mesure	75
2. Dispositif de mesure	75
2.1. Générateur d'impulsion	75
2.2. Réception des signaux transmis : Accéléromètres	76
2.3. Chaîne d'acquisition	78
2.4. Schéma de la chaîne de mesure	78
3. Erreurs et approximations de la chaîne de mesure	79
3.1. Échantillonnage	79
3.2. Sensibilité des paramètres de mesure	79
4. Premier essai	80
4.1. Description	80
4.2. Validation de la mesure	80
4.3. Vitesses d'ondes dans le pneumatique	82
4.4. Amortissements et fonctions de réponse en fréquence	82
4.5. Investigations de la mobilité	83
4.6. Plusieurs configurations marteau/accéléromètre	84
5. Mesures avec le pot vibrant : Pneu sans pression interne	85
5.1. Pot vibrant collé au sommet de la bande de roulement	85
5.1.1. Configurations	85
5.1.2. Mesures sur la bande de roulement	85
5.1.3. Mesures sur la section transversale	85
5.2. Pot vibrant collé au flanc	86
5.2.1. Configurations	86
5.2.2. Mesures sur la bande de roulement	87
5.2.3. Mesures sur la section transversale	87
6. Mesures avec le pot vibrant : Pneu avec pression interne	87
6.1. Pot vibrant collé au sommet de la bande de roulement	88
6.1.1. Mesures sur la bande de roulement	88
6.1.2. Mesures sur la section transversale	89
6.2. Pot vibrant collé sur le flanc	90
6.2.1. Mesures sur la bande de roulement	90

6.2.2.	Mesures sur la section transversale	91
7.	Identification sommaire des types de modes : bande de roulement et section	92
7.1.	Pneu sans pression interne	93
7.2.	Pneu avec pression interne	94
8.	Conclusion	96

1. Objectifs de la mesure

La vibration du pneumatique est une source importante de bruit généré par les roues. Pour la prédiction du niveau sonore, des modèles et des mesures des vibrations à haute fréquence sont nécessaires pour les industries pneumatiques.

En dépit de la simplicité apparente de la mesure des vibrations d'un pneumatique, l'acquisition de données précises est actuellement compliquée. L'effet local n'apparaît pas dans les bandes de basse fréquence car la longueur d'onde $\lambda = \frac{c_0}{f}$ (où c_0 et f sont la vitesse de propagation d'ondes et la fréquence) est plus grande que l'aspérité de la sculpture. Dans les bandes de haute fréquence, la géométrie et la distribution des matériaux du pneumatique deviennent importantes lorsque la longueur d'onde est comparable avec les dimensions du pneu. En réalité, la sculpture possède des rainures le long du contour et de petites cannelures qui les connectent. Ce système sert à canaliser de l'eau et à minimiser le bruit généré. Pourtant, il rend difficile la mesure car la cohérence aux points à la limite de ces cannelures n'est pas bonne. Mieux vaut donc éviter de disposer les capteurs à ces endroits.

Une autre difficulté dans la mesure est que l'amortissement dans le caoutchouc du pneu est assez grand. Parfois, les pics de résonance ne sont pas bien localisés à haute fréquence. Les ondes se propagent à une courte distance et leurs amplitudes s'annulent rapidement. L'énergie est transmise essentiellement dans la direction le long du pneu dont le module équivalent est plus élevé.

Un autre effet qui doit être pris en compte est la pression de l'air dans le pneu. Les ondes se propagent également dans ce milieu. Elles absorbent une partie de l'énergie et provoquent des ondes réfléchies supplémentaires.

Les objectifs de la mesure des vibrations des pneumatiques sont :

1. *Obtention de la fonction de réponse en fréquence* : Les relations entre les signaux d'entrée et les signaux de sortie. La réponse la plus souvent utilisée est la mobilité. Les accélérations et les forces sont acquises par les accéléromètres et les capteurs de force. La mobilité est le rapport entre la vitesse du point mesuré et la force d'excitation. Cette quantité peut être représentée par des graphiques ou acquise dans des tableaux de données.
2. *Plusieurs échelles d'expérience* : On effectuera les mesures jusqu'à 600 Hz pour avoir en détail la FRF. On s'attachera essentiellement à déterminer les premiers pics qui peuvent être précisément mesurés.
3. *Comparaison des FRF* : Les mesures des FRF en plusieurs points sur la section transversale et le long du pneumatique nous donneront une évaluation de la transmission de l'énergie à partir du point d'application de la force aux autres endroits.
4. *Estimation de l'ordre de la vitesse de propagation d'ondes dans le pneu* : En comparant la longueur d'onde (calculée par la vitesse estimée) et les dimensions du pneu, on peut déterminer la limite entre les moyennes fréquences et les hautes fréquences.

2. Dispositif de mesure

Le principe de la mesure est similaire à celui présenté dans le chapitre III. Le schéma de mesure est montré sur la Fig. IV.1.

2.1. Générateur d'impulsion

Le générateur utilisé est un marteau d'impact de type 8206 de marque Brüel & Kjær (Fig IV.2). Il est convenable pour les petites et moyennes structures. Il est souvent utilisé pour les tests des structures dans l'analyse modale et dans la prédiction de la réponse structurelle. La sensibilité en voltage est définie dans la notice des équipements. Dans notre cas, cette valeur vaut 22.7mV/N. D'autres paramètres sont :

- L'échelle de force de mesure en compression : $[0, 445]$ N
- La force maximale standard en compression : 4448N

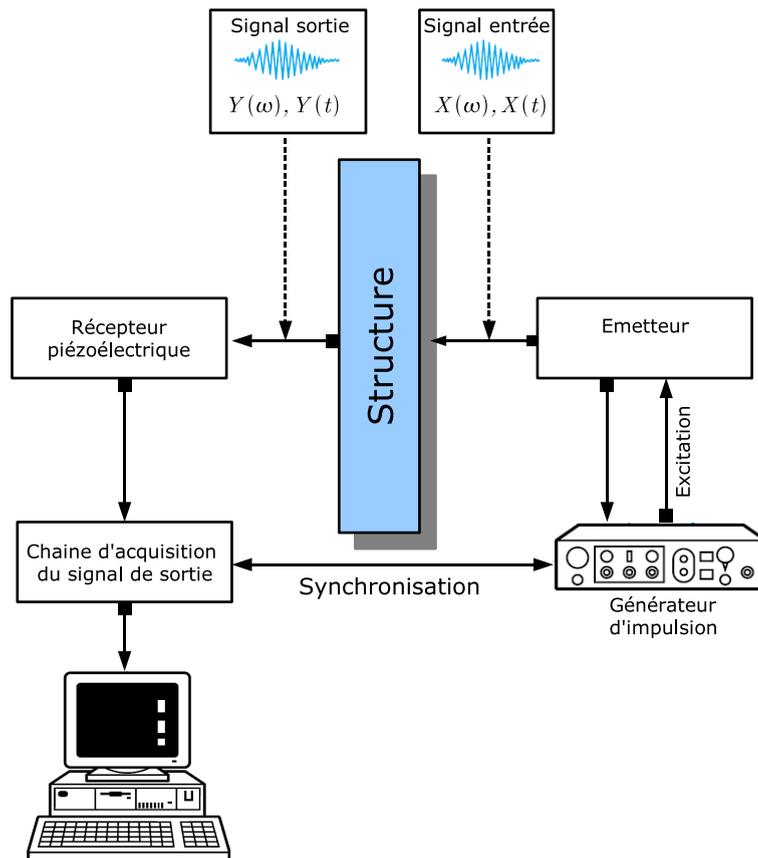


FIGURE IV.1. : Principe de mesure des signaux dynamiques



FIGURE IV.2. : Marteau utilisé pour la génération des vibrations

Ce marteau est connecté à la boîte d'acquisition via l'amplificateur de charge de type 2647A (Fig IV.3¹). Il faut bien configurer le type de connexion CCLD dans le logiciel PULSE pour le marteau.



FIGURE IV.3. : Amplificateur de type 2647A

2.2. Réception des signaux transmis : Accéléromètres

Les signaux de vibration sont mesurés par les accéléromètres de type 4374. Les accéléromètres sont soit calibrés par un étalonneur portable de type 4294 (Fig. IV.4 ²), soit étalonnés par un autre accéléromètre déjà calibré (cf. la norme[118, 119]). L'étalonneur de type 4294 produit un signal si-

¹<http://www.bksv.com/pdf/BP1874.pdf>

²<http://www.bksv.com/default.asp?ID=3101&Type=4294>



FIGURE IV.4. : *Etalonneur de type 4294 et accéléromètre de type 4374*

nusoïdal de fréquence 159.2 Hz à l'accélération $10m/s^2$ et l'accéléromètre doit mesurer cette valeur d'accélération. Les caractéristiques de l'accéléromètre sont :

- Limite inférieure de la bande de fréquence : elle est déterminée par l'amplificateur (0.17Hz pour le type 4294).
- Limite supérieure de la bande de fréquence : 26kHz.
- Fréquence de résonance transverse : 21kHz.
- Masse : 0.65g.

Les accéléromètres sont fixés au pneumatique par collage. La bande adhésive à deux surfaces n'est pas recommandée car elle cause une modification de la fonction de réponse [120]. Les recommandations pour ce type de fixation sont [120] :

- La rugosité de la surface de fixation doit être inférieure à $3\mu m$.
- En général, une fine couche de colle est recommandée car c'est le système qui présente le plus de rigidité.
- La fixation des câbles doit assurer un minimum de contraintes sur le plan de vibration (Voir la Fig. IV.5 comme exemple).

Les capteurs doivent être capables de résister à la gamme d'amplitudes et doivent présenter des caractéristiques de stabilité. On suppose que la masse et les dimensions des capteurs ne perturbent pas le fonctionnement des matériels et la vibration du pneumatique. Son orientation doit être bien alignée à la direction de mesure. Les signaux acquis par les accéléromètres sont amplifiés par l'amplificateur de type conditionneur ENDEVCO de modèle 133 (Fig.IV.6). C'est un amplificateur externe qui doit être configuré "Direct" pour les accéléromètres dans PULSE.

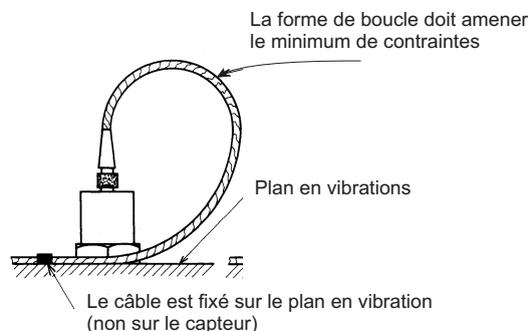


FIGURE IV.5. : *Exemple de fixation de câbles d'accéléromètres*



FIGURE IV.6. : Conditionneur ENDEVCO 133 pour les accéléromètres

2.3. Chaîne d'acquisition

La boîte d'acquisition des données sert à recevoir des signaux capturés par les accéléromètres et par le marteau (Fig. IV.7). Elle transmet les signaux à une unité centrale où le logiciel PULSE est installé.

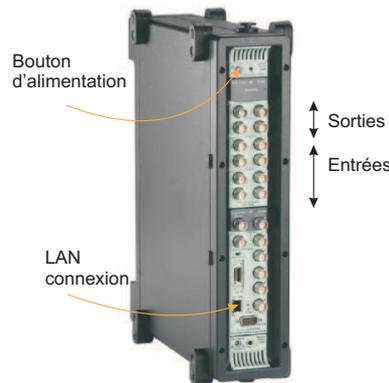


FIGURE IV.7. : Boîte portable d'acquisition des données de type 3560-C

Ce logiciel traite les signaux d'entrée et il crée des fonctions en fréquence nécessaires en sortie. Les accélérations et les forces sont introduites dans ce logiciel sous la forme de signaux temporels. Etant donné le pas de temps introduit dans la configuration de l'analyse FFT (Fast Fourier Transform), les signaux sont transformés dans le domaine fréquentiel. Les résonances et ainsi les amortissements peuvent être calculés par les algorithmes de filtrage et de traitement. Les signaux sont sortis sous forme graphique avec les valeurs indiquées à chaque point ou sous la forme de tableaux de données.

2.4. Schéma de la chaîne de mesure

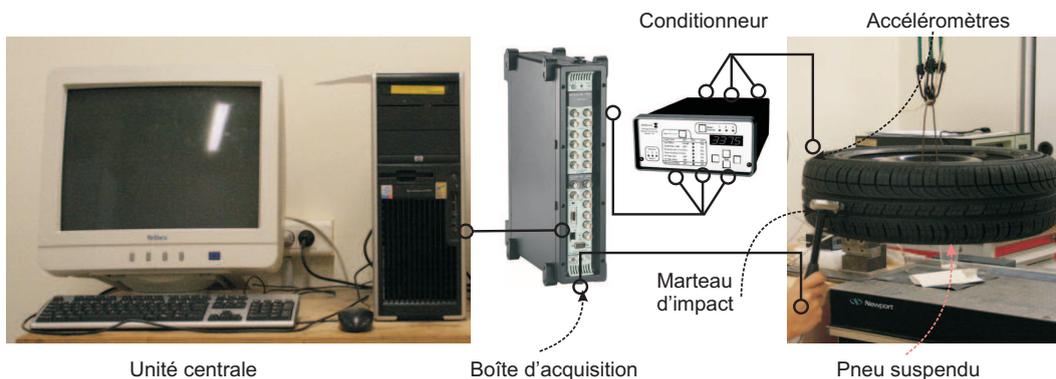


FIGURE IV.8. : Schéma de mesure des fonctions de réponse en fréquence dans le cas d'un pneumatique.

La chaîne de mesure totale est montrée sur la Fig. IV.8. Il n'y a pas de contrainte en direction horizontale. On suppose que la fréquence de la vibration propre de l'élastique est très petite et que

celle de la jante métallique est suffisamment élevée pour qu'il n'y ait pas d'influence dans la bande de fréquence examinée.

Il faut remarquer que l'application de la force d'excitation doit assurer l'uniformité dans les aspects : point et direction d'application, grandeur de la force. Chaque fois qu'on applique une force, le pneu ne reste plus à la position d'équilibre. Alors, il faut l'y remettre avant d'effectuer une autre excitation. L'intervalle fiable est celui où la cohérence mesurée est proche de 1.

3. Erreurs et approximations de la chaîne de mesure

3.1. Échantillonnage

La structure examinée est un pneu Michelin de type 165/65 R13 77T. Les caractéristiques de ce pneu sont :

- Diamètre intérieur : 330.2mm (13pouces)
- Largeur de bande de roulement : 165mm
- Hauteur de flanc : 65mm
- Indice de charge : poids maximal 412kg.
- Indice de vitesse : T - vitesse maximale 190Km/h. La pression interne maximale est de 0.27MPa(2.7bars).

3.2. Sensibilité des paramètres de mesure

Comme on l'a étudié dans le chapitre précédent, l'inertance peut être exprimée par la formule matricielle :

$$\mathbf{A}(\omega) = -\omega^2[\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \quad (\text{IV.1})$$

Lorsque la fréquence ω tend vers l'infini, A_{ij} tend vers M_{ij}^{-1} . La rigidité et l'amortissement n'ont pas beaucoup d'influence. Quand la fréquence tend vers 0, l'inertance est de l'ordre $-\omega^2 K_{ij}^{-1}$. A l'échelle logarithmique, sa représentation graphique est comme sur la Fig. IV.9. Dans le cas des mobilités et des

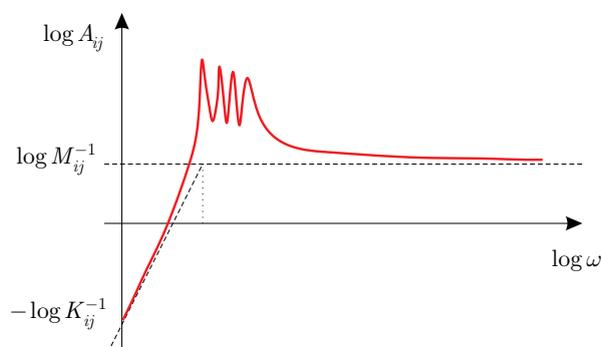


FIGURE IV.9. : *Forme générale de l'inertance en fonction de la fréquence*

réceptances, on peut obtenir des asymptotes comme dans le cas avec les inertances. On trouve qu'aux basses fréquences, c'est la rigidité qui domine le comportement vibratoire de la structure tandis qu'à haute fréquence, la masse joue un rôle très important.

D'après le modèle de matériaux de Maxwell généralisé (peut être représenté par une série de Prony), à partir d'une fréquence suffisamment importante, l'amortissement diminue avec la fréquence. Or, la superposition des modes et leur complexité provoquent une allure ambiguë à haute fréquence car l'énergie dissipée est augmentée.

4. Premier essai

4.1. Description

Les essais de vibration avec le pneumatique sont réalisés au sein du laboratoire sur un pneu Michelin possédant des cannelures le long du contour et radialement. Le pneu est suspendu par un élastique pour qu'il n'y ait pas beaucoup de contraintes dans la direction examinée. On doit bien vérifier l'horizontalité du pneu dans les deux sens du plan symétrique perpendiculaire à l'axe de la jante. En réalité, le pneu est lié au support par une liaison flexible. On peut aussi vérifier que la fréquence de vibration du système total est suffisamment faible par rapport à la bande examinée.

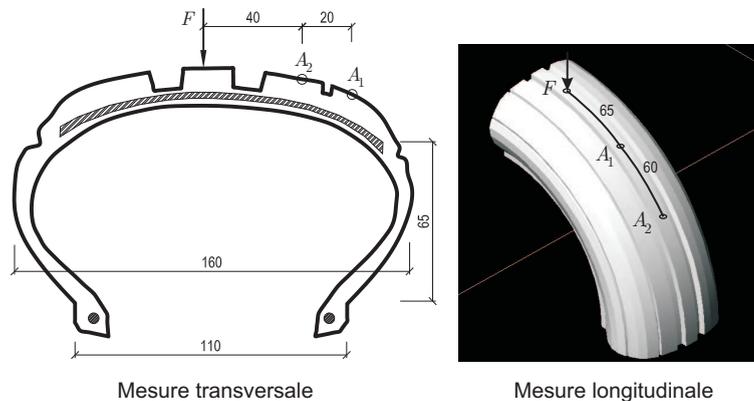


FIGURE IV.10. : Positions de la force et des accéléromètres dans l'essai de vibration pneumatique. Les dimensions sont en mm

La force est appliquée par un marteau d'impact lorsque le pneu reste statiquement à la position d'équilibre. Il faut assurer que le deuxième coup est donné lorsque le pneu ne vibre plus parce que dans le cas contraire, il engendre deux vibrations différentes. La mesure dans un tel cas n'est donc pas fiable. Les coups de marteau sont effectués de façon précise. L'imprécision de la position d'application peut causer de mauvaises cohérences.

Les fréquences de résonance et les amortissements peuvent être lus au niveau des pics des courbes représentatives des FRFs. Les algorithmes de traitement des signaux dans le logiciel PULSE les identifient automatiquement. Les signaux sont acquis en temps réel et ils sont transformés dans le domaine fréquentiel. On suppose que les signaux sont des bruits blancs. La bande de fréquence mesurée est $[0-400]$ Hz. Les positions d'application de la force et de la mesure sont présentées dans la Fig. IV.10.

4.2. Validation de la mesure

La validation de la mesure est effectuée avec une poutre en aluminium. Les accéléromètres sont disposés sur cette poutre de façon similaire au pneu étudié. Le résultat est validé soit avec la solution analytique, soit avec un modèle en éléments finis. Cette poutre est suspendue de sorte qu'elle puisse être considérée comme en vibration libre. Les dispositifs de l'essai avec cette poutre sont montrés dans la Fig. IV.11. La force d'excitation est générée par le même marteau qu'on utilisera avec le pneu. Les accéléromètres sont collés dans le sens d'application de la force pour mesurer la vibration transversale dans cette direction. La validation est effectuée avec le logiciel d'éléments finis ANSYS. On modélise une simulation de la poutre dans ANSYS avec l'amortissement évalué par PULSE.

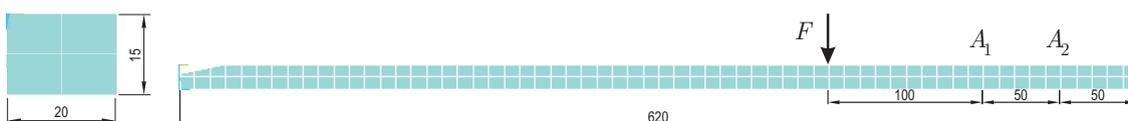


FIGURE IV.11. : Dispositifs de l'essai de vibration de la poutre en aluminium. Les dimensions sont en mm

TABLEAU IV.1. : Essai de vibration d'une poutre en aluminium : Amortissements aux fréquences de résonances mesurés par PULSE

Fréquence [Hz]	Accéléromètre 1 [%]	Accéléromètre 2 [%]
205	2.89	2.91
565	1.05	1.04
1105	0.542	0.542
1810	0.341	0.342

La mesure est réalisée dans la bande $[0,2000]$ Hz divisée en 400 intervalles. Le pas de fréquence est donc de 5Hz. Les fréquences de résonance et les amortissements mesurés sont présentés dans le Tab. IV.1. L'amortissement modal hystérétique introduit dans ANSYS est estimé égal à $\eta = 2\zeta = 1\%$. La comparaison des amplitudes et des phases de la mesure et la modélisation sont présentées en Figs. IV.12 et IV.13. Le résultat nous donne un bon accord entre la mesure et la modélisation.

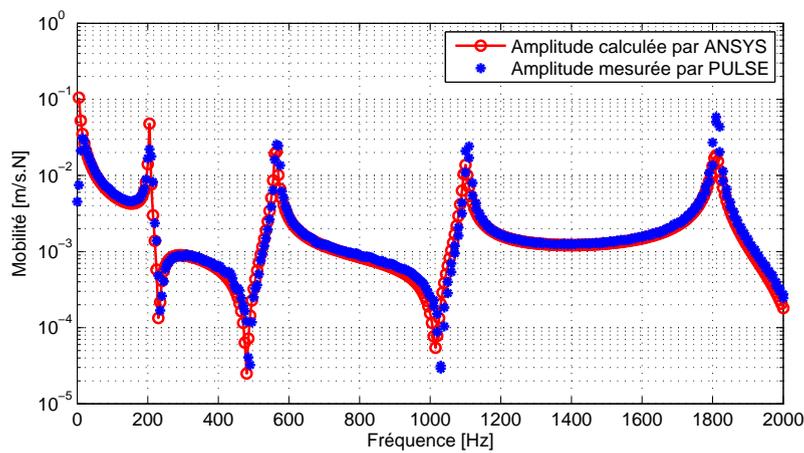


FIGURE IV.12. : Amplitude au niveau de l'accéléromètre 1 dans la mesure de vibration d'une poutre en aluminium

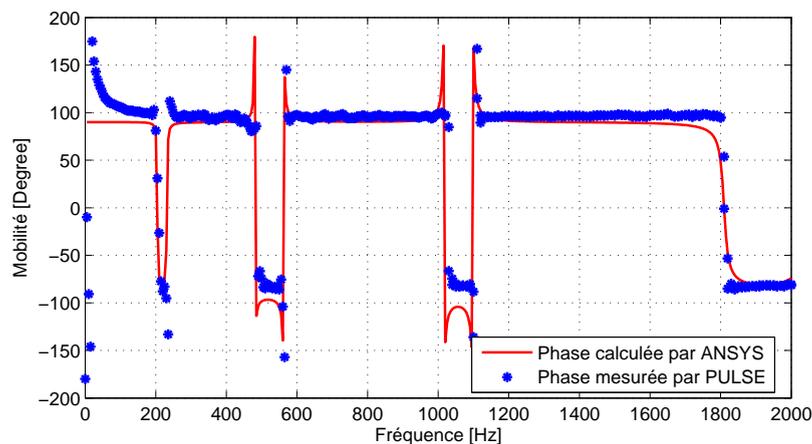


FIGURE IV.13. : Phase au niveau de l'accéléromètre 1 dans la mesure de vibration d'une poutre en aluminium

4.3. Vitesses d'ondes dans le pneumatique

Les signaux temporels expérimentaux de la force d'application et de l'accéléromètre 2 sont montrés sur la Fig. IV.14. La différence entre les instants où l'amplitude de la force et celle de la mobilité sont maximales nous donne une estimation de la vitesse de propagation d'ondes si l'on connaît la distance entre la force et l'accéléromètre. Ces deux temps peuvent être lus par PULSE. Pourtant, à cause de la discrétisation en temps, les temps lus sont des multiples du pas de discrétisation et donc la vitesse calculée n'est utilisée que pour évaluer la longueur d'onde dans le pneumatique.

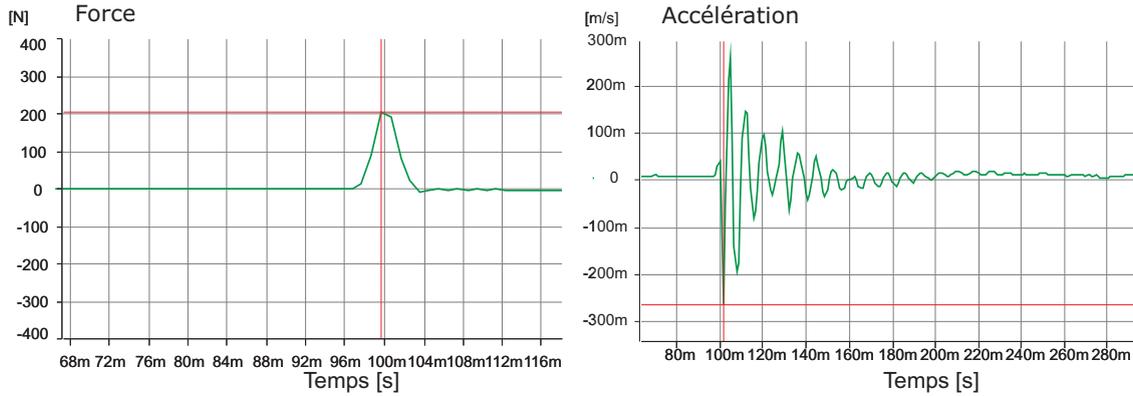


FIGURE IV.14. : Signaux temporels de la force et de l'accéléromètre 2 - schéma de mesure le long du contour du pneumatique

Dans ces figures, le temps de propagation d'ondes à partir de la position de la force au point de mesure est déterminé. La vitesse moyenne de propagation d'ondes dans le pneumatique est estimée par le rapport entre la distance et le temps de propagation. Tout le long du contour du pneumatique, cette vitesse est calculée comme suit :

$$v_{long} = \frac{ds_{long}}{dt_{long}} = \frac{125mm}{(101.6 - 99.61)ms} = 62.81m/s \quad (IV.2)$$

Cette vitesse est du même ordre que la vitesse estimée par la différence en temps de 2 accéléromètres : $v_{12} = \frac{ds_{12}}{dt_{12}} = \frac{60mm}{(99.06 - 98.32)ms} = 81m/s$. Comme la direction de la force est radiale, les ondes propagées du point d'application aux points 1 et 2 (tangentiellement) sont les ondes transverses. Pour un milieu continu, la célérité des ondes transverses est $c_{trans} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Pour le caoutchouc, $\mu = G = \frac{E}{3}$ et à assez grande fréquence, on estime $E_{caoutchouc} = 20MPa$. La célérité est donc dans ce cas :

$$c_{trans} = \sqrt{\frac{E_{caoutchouc}}{3\rho_{caoutchouc}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^7}{3 \cdot 1010}} = 81.24m/s \quad (IV.3)$$

On conclut donc que la vitesse de propagation d'ondes dans le pneu est de l'ordre de 80m/s.

4.4. Amortissements et fonctions de réponse en fréquence

En lisant les "damping ratio" associés aux pics, on peut calculer les amortissements. Les valeurs lues par PULSE sont présentées dans le Tab. IV.2. Si le pic n'est pas bien net, on ne peut pas lire l'amortissement, car on n'arrive pas à déterminer les valeurs de l'inertance au niveau de $H_{max}/\sqrt{2}$.

Puisque l'impédance mécanique est la quantité la plus utilisée dans les calculs vibratoires des structures, les réponses en fréquence du pneumatique sont souvent représentées par la mobilité et la valeur duale de l'impédance mécanique. Les amplitudes, les phases et aussi les cohérences de la mesure le long du contour sont présentées sur la Fig. IV.15.

TABLEAU IV.2. : Amortissements aux fréquences de résonances mesurés par PULSE

Mesure transversale [%]			Mesure longitudinale [%]		
f [Hz]	Accéléromètre 1	Accéléromètre 2	f [Hz]	Accéléromètre 1	Accéléromètre 2
122	3.45	3.49	124	3.33	3.34
148	2.84	2.76	150	3.01	*
176/178	2.92	2.85	178/172	4.23	9
208	3.15	3.08	212/204	*	4.47
240/242	4.21	3.66	234/262	*	3.62

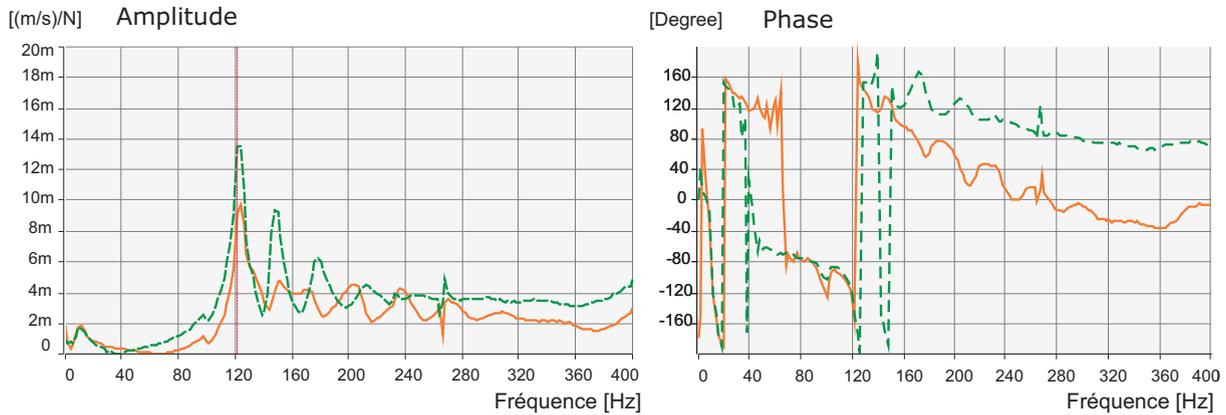


FIGURE IV.15. : Mobilités mesurées d'un pneu Michelin le long du contour. Position 1 : en trait - -, position 2 : continu -

La première fréquence de résonance est de 122Hz. C'est une valeur raisonnable si l'on compare avec les données mesurées dans les références [21, 28, 2]. Pourtant, la cohérence mesurée aux basses fréquences n'est pas très bonne. Les amortissements mesurés dans les deux cas transversal et longitudinal ne sont pas identiques car la force produite par l'excitation manuelle dans les deux cas est différente. D'autre part, si l'on considère les amortissements comme le décrement logarithmique de l'amplitude de vibration dans un mode, la direction de vibration d'un point ne coïncide pas forcément avec celle du capteur.

4.5. Investigations de la mobilité

La mesure de mobilité du pneumatique avec le marteau nous donne de bons résultats aux moyennes fréquences (à partir de la première résonance jusqu'à quelques centaines de Hz). Aux autres fréquences, les résultats ne sont pas très cohérents. A partir de 0Hz jusqu'au premier pic, le pneu a un comportement comme une plaque ayant deux flancs à deux côtés. En réalité, ces flancs ne sont pas plans et leur comportement peut être considéré comme celui d'une coque épaisse et souple. L'imprécision d'application de la force et la rugosité de la sculpture causent de mauvaises cohérences pour cette bande de fréquence. Aux fréquences plus élevées, le comportement vibratoire du pneu est comme celui d'un milieu semi-infini. A partir de 400Hz, la longueur d'onde $\lambda = \frac{c_0}{f}$ (où c_0 , f sont respectivement la célérité et la fréquence) est déjà comparable avec la largeur de la bande de roulement. A 2000Hz, l'ordre de grandeur de la longueur d'onde vaut :

$$\lambda_{2000} = \frac{c_0}{f} \simeq \frac{80}{2000} = 0.04m = 4cm \quad (\text{IV.4})$$

L'ordre de grandeur des dimensions de rugosité de la sculpture est de 1cm. La complexité de la géométrie influence beaucoup la mobilité. On devra réaliser un processus d'expérience plus précis et plus stable. On pourra utiliser le pot vibrant pour les fréquences plus hautes.

4.6. Plusieurs configurations marteau/accéléromètre

On réalise des essais pour plusieurs positions du marteau et de l'accéléromètre pour avoir une synthèse sur le type des modes du pneu. La symétrie de la matrice et aussi le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti sont vérifiés par la permutation du marteau et de l'accéléromètre.

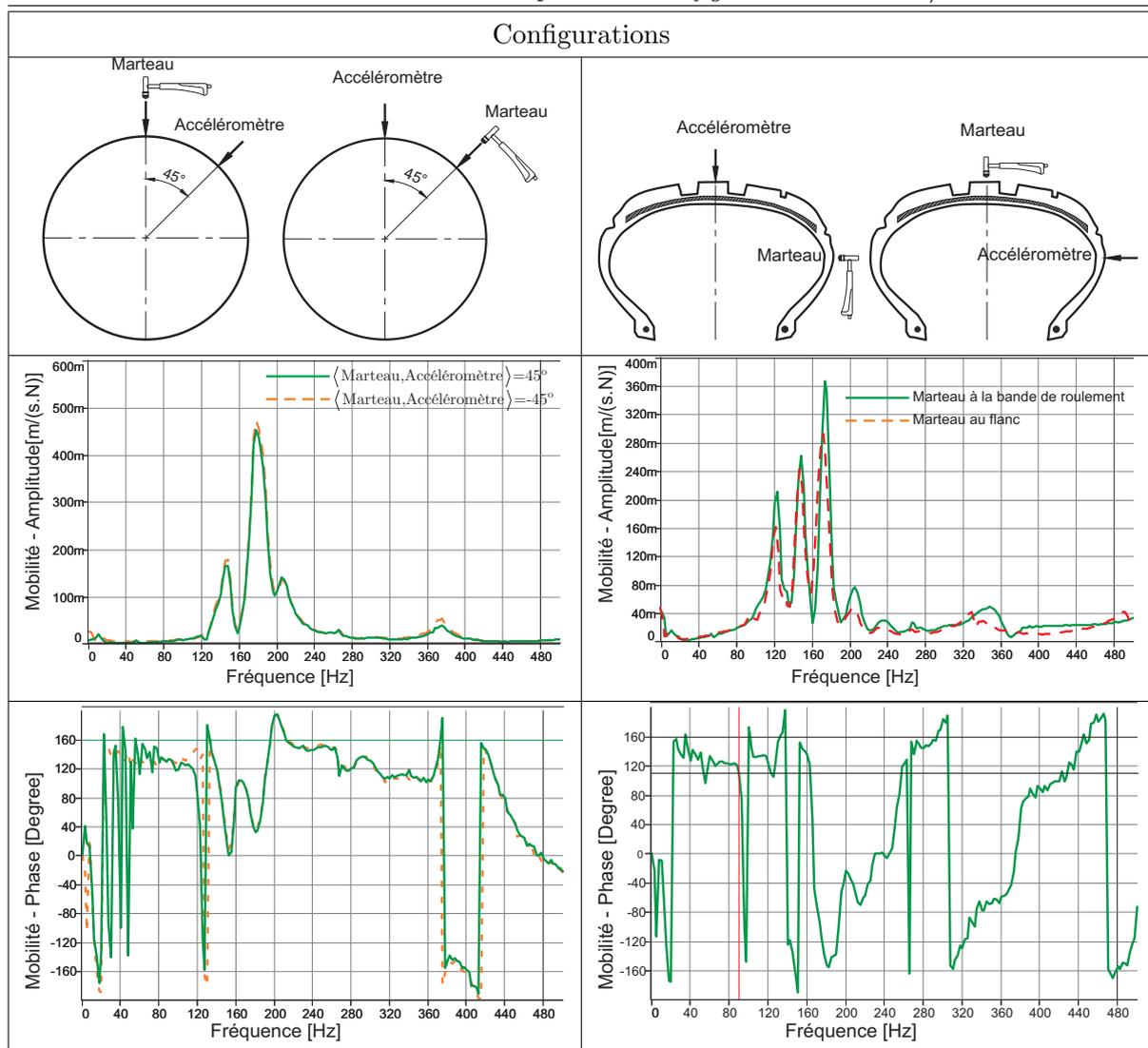
Dans un premier cas, le marteau est posé au sommet de la bande de roulement. On mesure la mobilité à un point qui fait un angle de 45° par rapport à la direction radiale. On permute la position du marteau et de l'accéléromètre pour vérifier la réciprocité.

Dans le deuxième cas, on garde la position du marteau et on mesure la mobilité sur le flanc. Le changement de position est également fait dans ce cas pour la comparaison des FRFs lorsque le marteau est sur la bande de roulement et sur le flanc.

En effet, les FRFs mesurées montrent l'exactitude du principe de réciprocité. D'autre part, le résultat nous permet de conclure que l'énergie se propage plus fortement le long du contour du pneu que dans la direction transverse. Ce phénomène est raisonnable, car le module élastique suivant le contour est plus grand que dans l'autre direction.

Une autre remarque est que les mesures avec le marteau ne sont pas très fiables. L'avantage de cette méthode est qu'elle assure une vibration libre du pneu. Cependant, la qualité de stabilité de la force (en grandeur et en direction) n'est pas suffisamment bonne. C'est la raison pour laquelle les mesures sont effectuées avec le pot vibrant dans la partie suivante. Les configurations et les mesures correspondantes sont montrées dans le Tab. IV.3.

TABLEAU IV.3. : Mesures associées à plusieurs configurations marteau/accéléromètre



5. Mesures avec le pot vibrant : Pneu sans pression interne

Avec le pot vibrant, les signaux sont générés sous forme aléatoire ou par un balayage des sollicitations harmoniques. Si le pot est collé au pneu, la direction et ainsi la grandeur de la force d'excitation sont plus stables que dans le cas où cette force est générée par le marteau. La vitesse de traitement des signaux dépend du nombre d'intervalles avec lequel on divise la bande de fréquence et de la fréquence maximale considérée.

L'avantage de cette méthode est qu'on peut calculer la moyenne d'un grand nombre de FRFs. Cela donne un résultat plus net, plus stable et plus fiable. Les forces d'excitation dans les différents cas sont identiques. Grâce à cela, la réciprocité est montrée de façon convaincante et les bandes modales sont identifiées plus facilement.

La calibration est effectuée avec une masse de 35.16g en acier. En principe, aux basses fréquences, le rapport entre la force et l'accélération mesurée (masse apparente) doit être égal à la masse. Le facteur de calibration est calculé comme le rapport entre la masse réelle et la masse apparente.

Une autre remarque, lorsqu'on mesure les vibrations avec le pot vibrant, est de tenir compte de l'effet local lors de la mesure. Comme la surface du pneu est rugueuse, on visse la tête d'impédance à une petite plaque de dimension 12mm X 12mm. Les positions de collage des accéléromètres doivent éviter les petites rainures ou le bord d'un morceau en caoutchouc.

5.1. Pot vibrant collé au sommet de la bande de roulement

5.1.1. Configurations

On réalise deux configurations de mesure avec le pot vibrant. Suivant le contour du pneu, on applique une excitation et on mesure en plusieurs points faisant successivement des angles de 45°. Dans la section transversale, on excite au milieu de la bande de roulement et les mesures sont réalisées aux points marqués comme sur la Fig. IV.16.

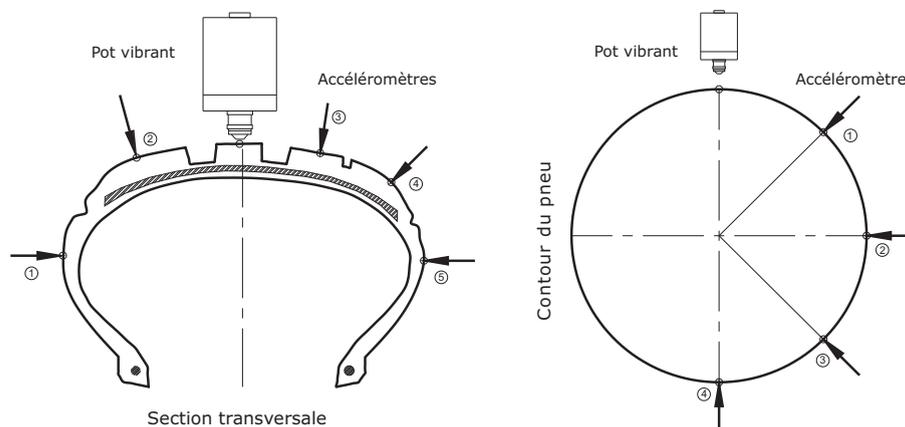


FIGURE IV.16. : Configurations de mesure avec pot vibrant/accéléromètres

5.1.2. Mesures sur la bande de roulement

Les amplitudes des mobilités mesurées le long du contour d'un pneumatique sont représentées sur la Fig. IV.17.

5.1.3. Mesures sur la section transversale

Les amplitudes des mobilités mesurées dans la section transversale d'un pneumatique sont représentées sur la Fig. IV.18.

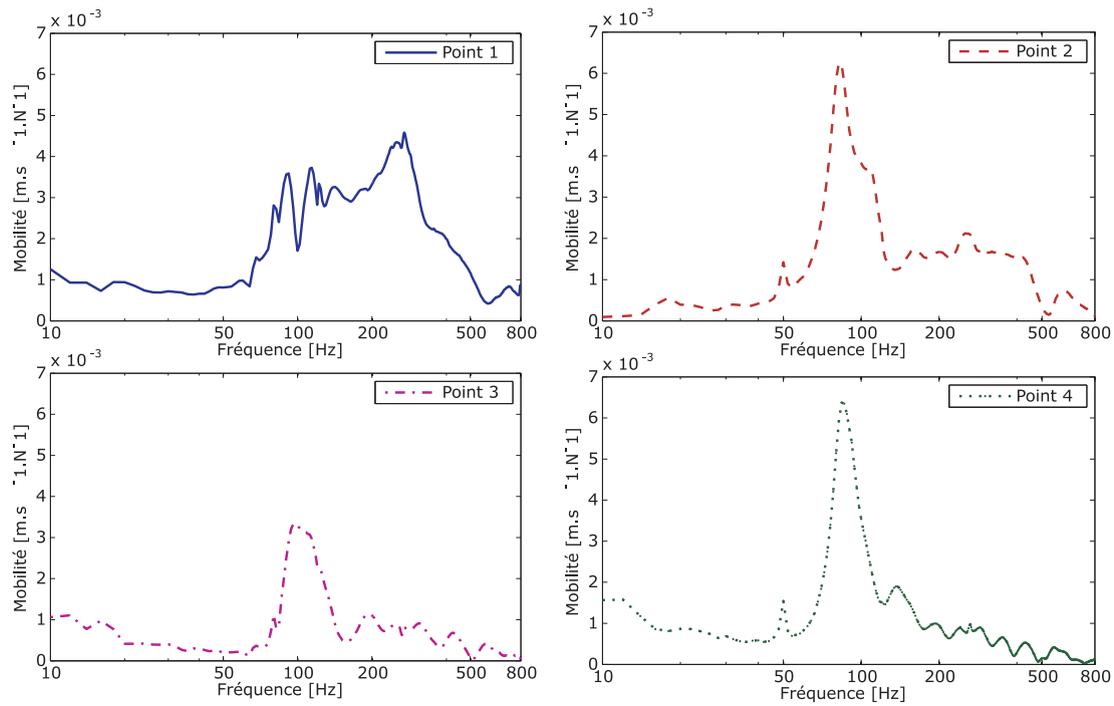


FIGURE IV.17. : Amplitudes des mobilités mesurées sur la bande de roulement. Pot collé sur la bande de roulement d'un pneu non gonflé

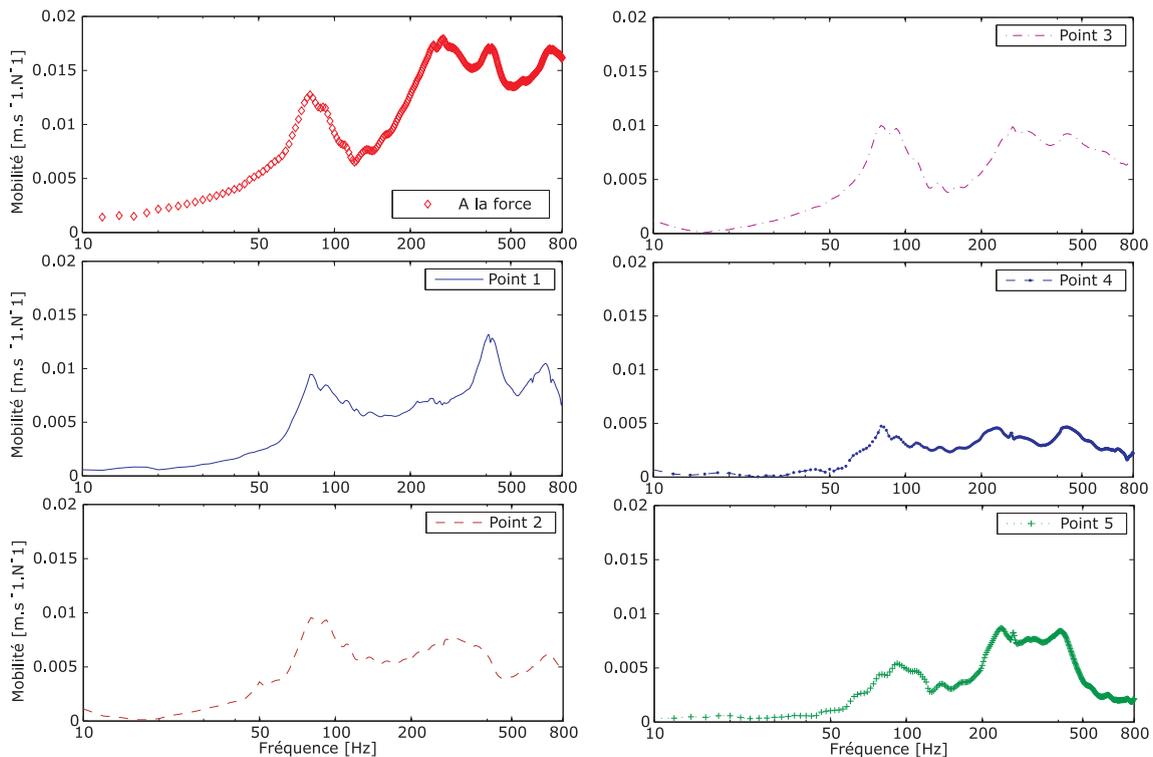


FIGURE IV.18. : Amplitudes des mobilités mesurées dans la section. Pot collé sur la bande de roulement d'un pneu non gonflé

5.2. Pot vibrant collé au flanc

5.2.1. Configurations

Les mesures dans ce cas sont également effectuées dans deux configurations. Dans la première configuration où tous les accéléromètres sont disposés dans une section transversale, on échange la

position du pot vibrant avec celle de l'accéléromètre 1 dans la section 5.1. On renumérote les positions des accéléromètres comme sur la Fig. IV.19. Dans la deuxième configuration, les accéléromètres sont mis de façon identique sur le contour comme dans la section 6.1 mais le pot est collé sur le flanc. Comme le pot vibrant est à gauche de la section transversale, on peut voir l'apparition de modes de torsion suivant le contour et de modes de vibration de la section.

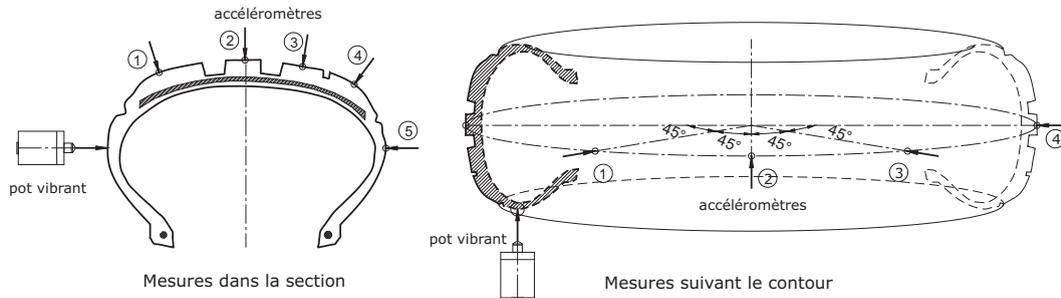


FIGURE IV.19. : Configuration de mesure dans le cas où le pot vibrant est collé sur le flanc

5.2.2. Mesures sur la bande de roulement

Les amplitudes des mobilités mesurées le long du contour d'un pneumatique sont représentées sur la Fig. IV.20.

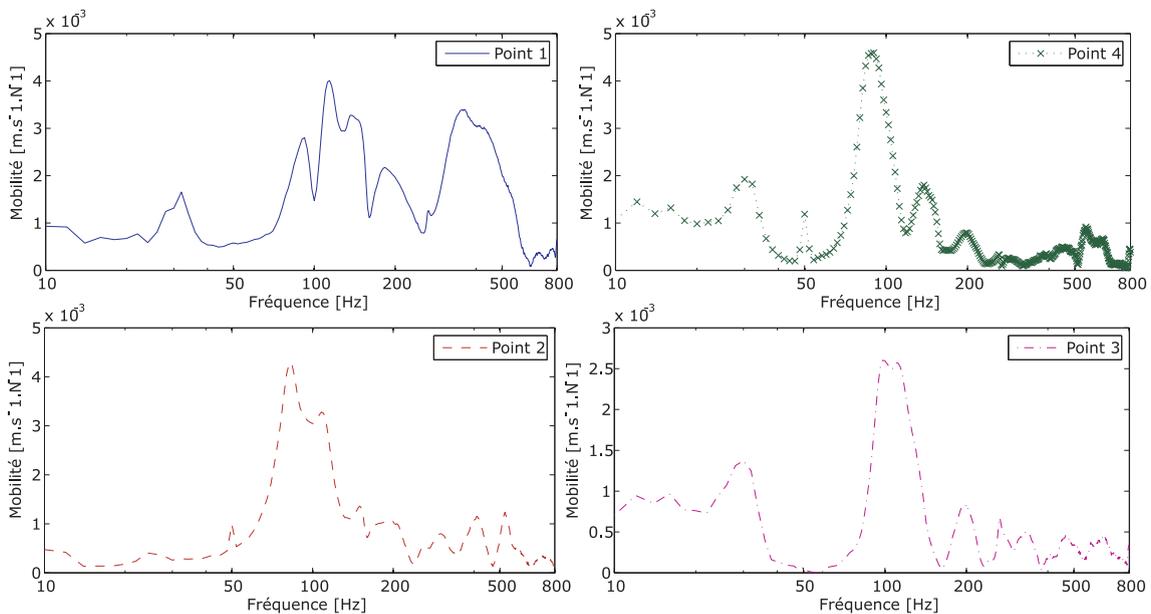


FIGURE IV.20. : Amplitudes des mobilités mesurées sur la bande de roulement. Pot collé sur le flanc d'un pneu non gonflé

5.2.3. Mesures sur la section transversale

Les amplitudes des mobilités mesurées dans la section transversale d'un pneumatique sont représentées sur la Fig. IV.21.

6. Mesures avec le pot vibrant : Pneu avec pression interne

Les configurations de mesure dans le cas du pneu avec la pression interne sont les mêmes que celles dans le cas du pneu sans pression. Le pneu est rigidifié par la pression et le déplacement à une fréquence donnée est plus petit. C'est la raison pour laquelle les amortissements ne sont pas identiques que ceux dans le cas précédent.

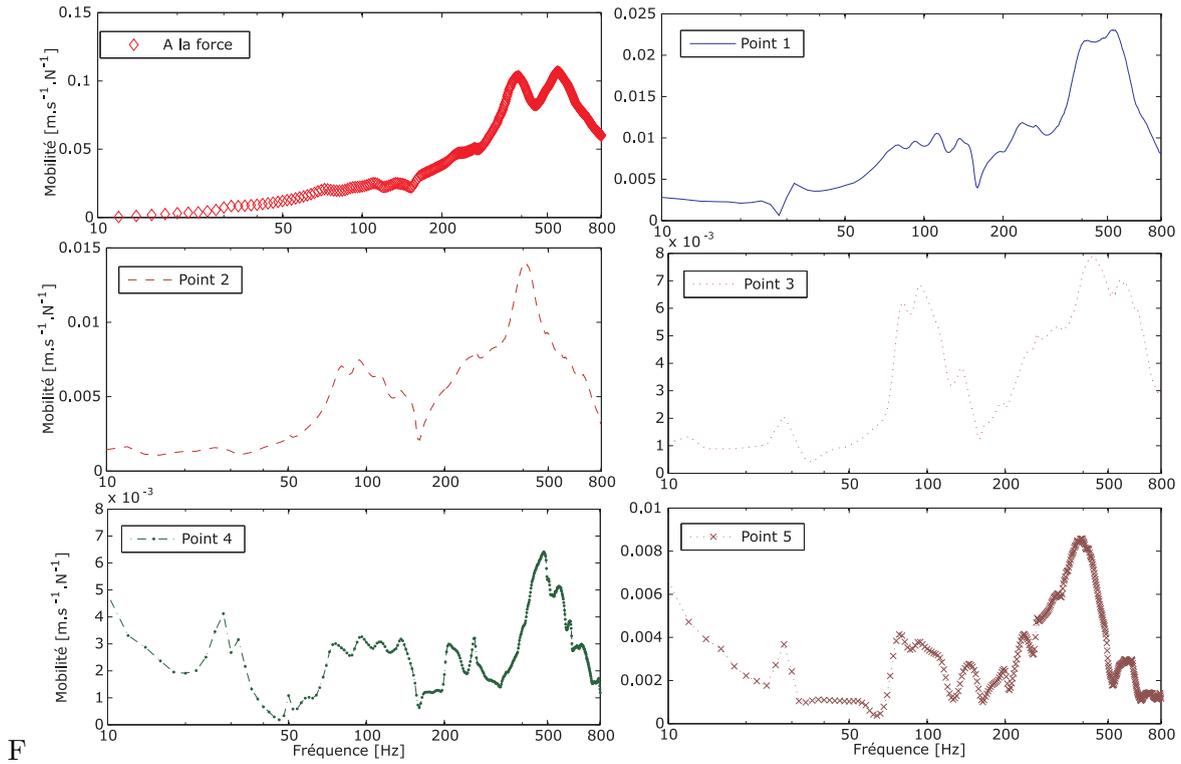


FIGURE IV.21. : Amplitudes des mobilités mesurées dans la section. Pot collé sur le flanc d'un pneu non gonflé

6.1. Pot vibrant collé au sommet de la bande de roulement

6.1.1. Mesures sur la bande de roulement

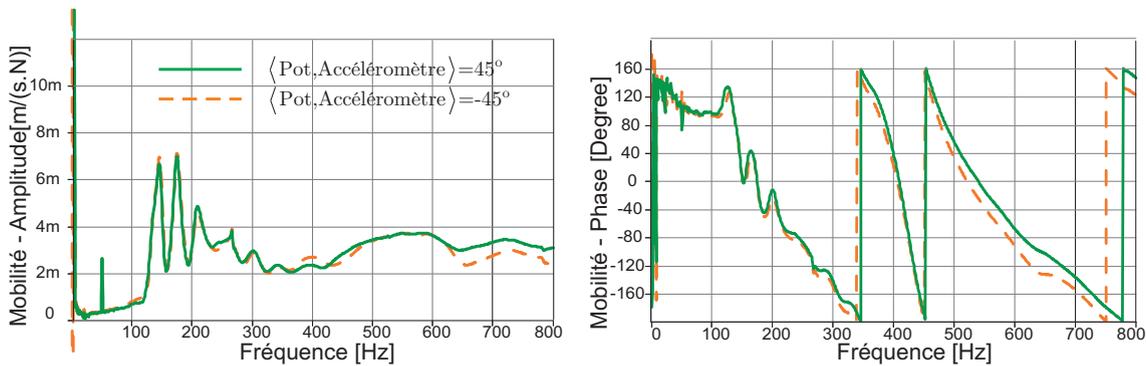


FIGURE IV.22. : Vérification de la symétrie. Deux accéléromètres sont symétriques par rapport à l'axe radial de la force. Ils font avec cet axe des angles $\pm 45^\circ$

Lorsqu'on excite le pneu par une force sur la bande de roulement du pneumatique, les accéléromètres disposés suivant le contour nous permettent d'avoir un résumé sur la propagation d'ondes dans cette direction. Dans ce cas, les accéléromètres sont disposés seulement sur un demi-pneu, car les accéléromètres aux positions symétriques ont les mêmes FRFs (Vérification de la symétrie - Fig. IV.22).

Les amplitudes et les phases de mobilité mesurées sont montrées dans les Fig. IV.23 à IV.24. Le résultat montre que lorsqu'on éloigne l'accéléromètre, l'amplitude ne s'annule pas complètement. Pourtant, plus on est éloigné de la force, plus la phase est rapidement diminuée. Ce phénomène peut être expliqué par la formule de la phase de la mobilité $\phi_V = \omega t - kx - \frac{\pi}{2}$. Lorsque x augmente, la phase diminue. Le sens physique de ce phénomène est que le temps de propagation d'onde à un point plus loin est plus grand. Cette explication est valable lorsque les vibrations dominantes du pneu sont des

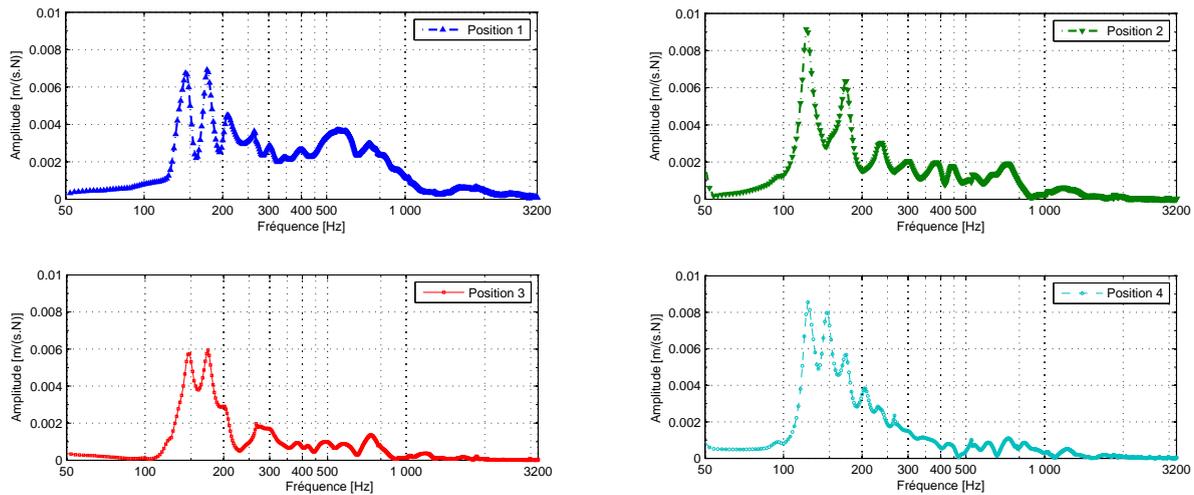


FIGURE IV.23. : Amplitudes de mobilité sur le contour, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement

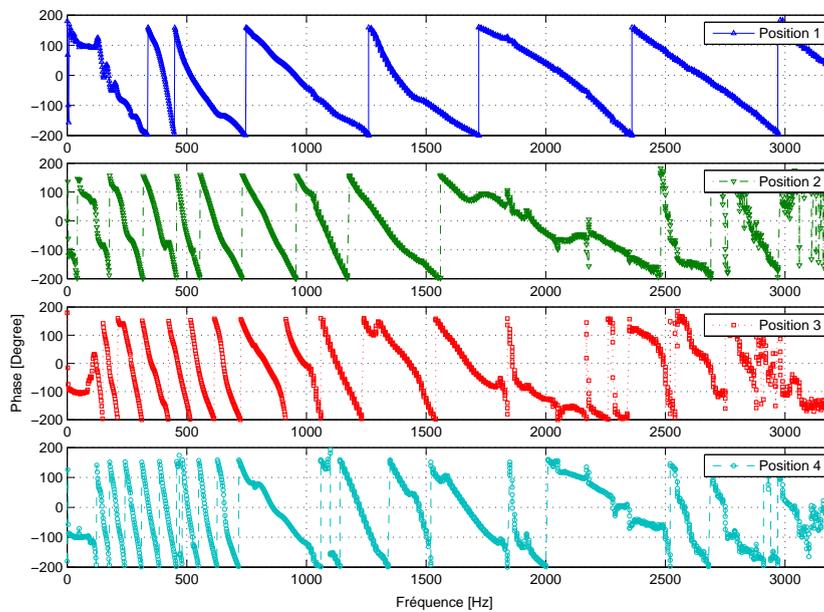


FIGURE IV.24. : Phases de mobilité sur le contour, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement

modes de la bande de roulement. S'il existe de la superposition de modes plus complexes, l'expression graphique de la phase est perturbée (voir la Fig. IV.24).

6.1.2. Mesures sur la section transversale

Dans ce cas, on trouve les mêmes remarques que dans les mesures sur le contour du pneu. Aux points plus éloignés de la force, la phase varie plus rapidement. Ayant l'amplitude et la phase des mobilités mesurées, on peut déterminer les formes des modes de la section en combinant ces mesures avec celles dans le cas du pot vibrant collé sur le flanc. Les courbes de résultats sont présentées dans les Figs. IV.25 et IV.26

Ici, on trouve que les mesures aux positions 1 et 5 ne sont pas identiques. Cela est dû à la dissymétrie de la section et à la distribution des équipements lors de la mesure.

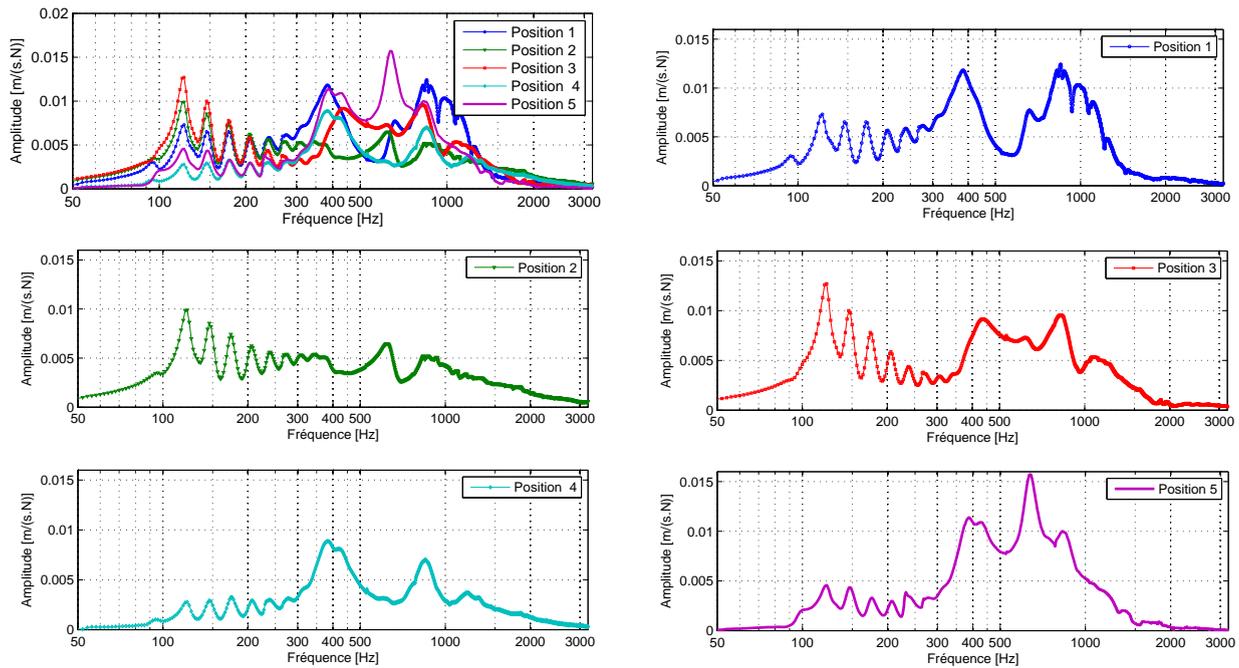


FIGURE IV.25. : Amplitudes de mobilité dans la section, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement

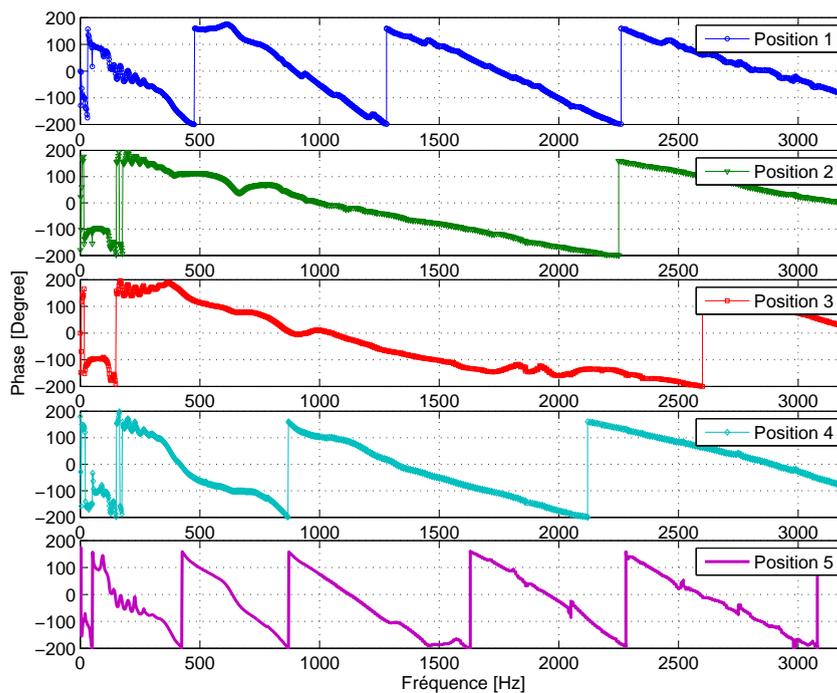


FIGURE IV.26. : Phases de mobilité dans la section, obtenues par une force située au sommet de la bande de roulement

6.2. Pot vibrant collé sur le flanc

6.2.1. Mesures sur la bande de roulement

Normalement, la force appliquée sur le flanc génère des modes de vibration dans la section et également des modes de torsion le long du pneu. C'est la raison pour laquelle les mobilités mesurées dans ce cas ont un ordre de grandeur plus faible que dans les autres cas (voir Fig. IV.27). Le phénomène

de vitesse de diminution de phase est le même que dans les mesures précédentes. Pourtant, l'allure des pics d'une courbe d'amplitude n'est pas régulière en raison de la superposition des modes (position 1- Fig IV.27).

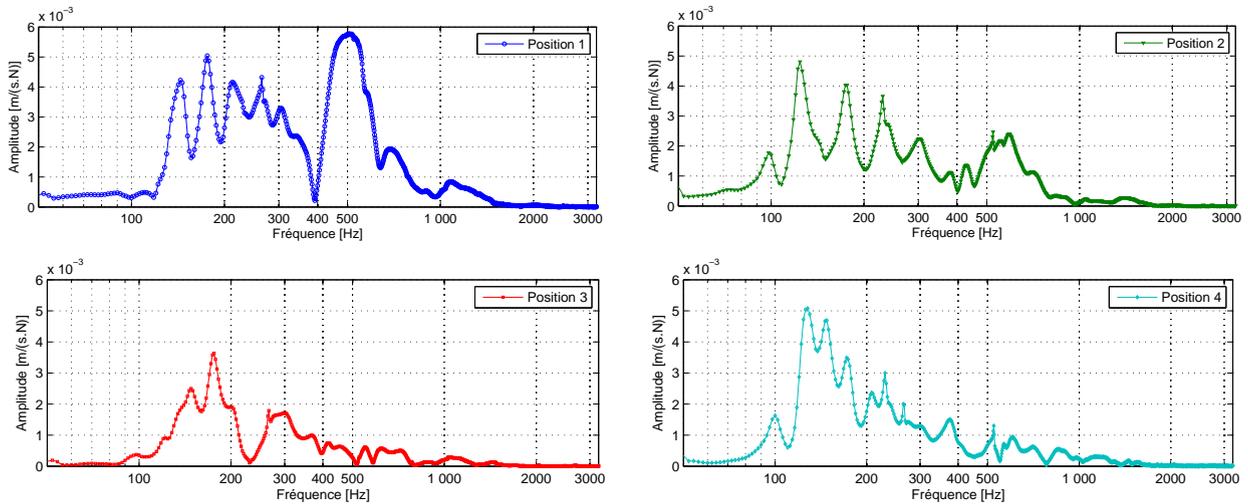


FIGURE IV.27. : Amplitudes de mobilité sur le contour du pneu, obtenues par une force au flanc. Courbes séparées

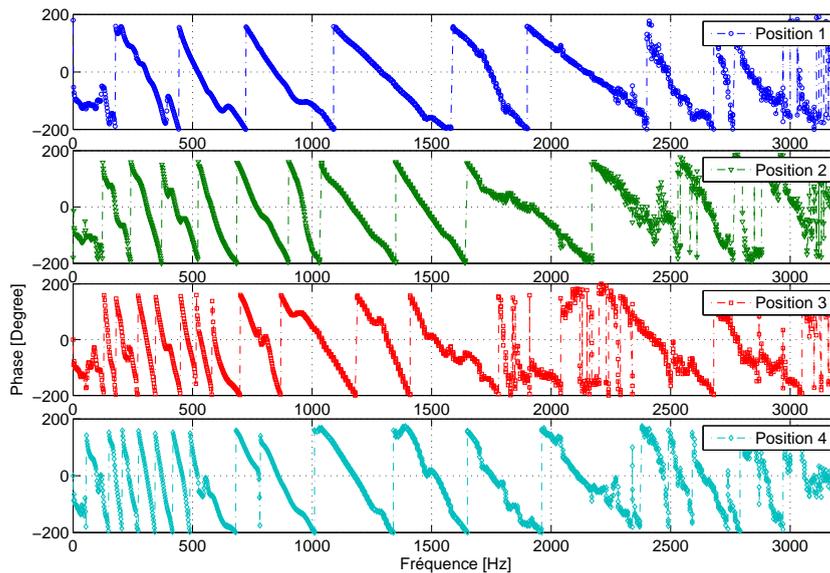


FIGURE IV.28. : Phases de mobilité sur le contour du pneu, obtenues par une force au flanc

6.2.2. Mesures sur la section transversale

Ces résultats de mesure sont utilisés en les combinant avec ceux dans le cas du pot vibrant au sommet de la bande de roulement pour identifier les premières formes modales de la section transversale.

Dans cette chaîne de mesure, on peut bien voir la réciprocité en comparant la mobilité en position 2 (Fig. IV.29) avec celle en position 1 (Fig. IV.25).

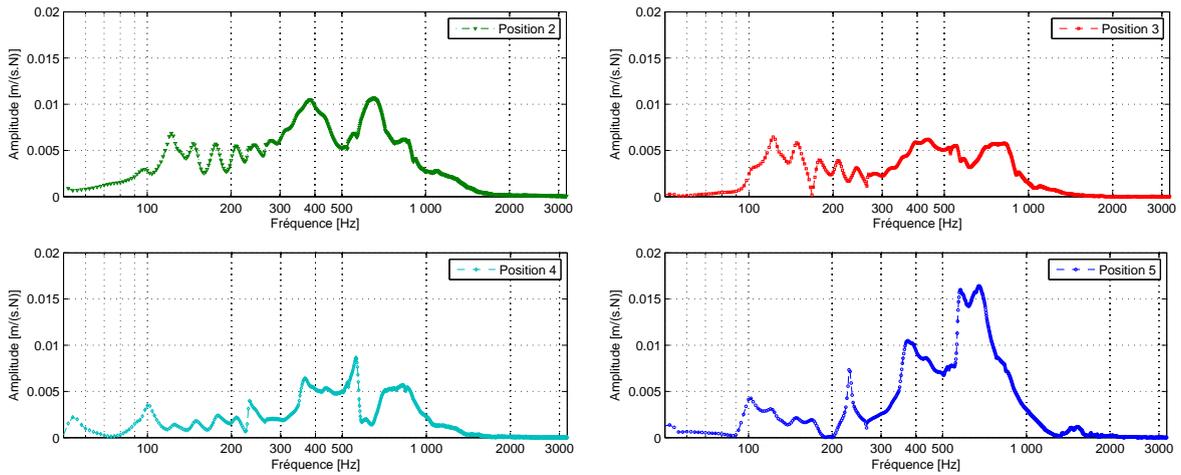


FIGURE IV.29. : Amplitudes des mobilités mesurées dans la section transversale, obtenues par une force au flanc

7. Identification sommaire des types de modes : bande de roulement et section

Les FRFs mesurées sur la bande de roulement nous donnent une figure des modes de vibration où les ondes se propagent essentiellement sur le contour tandis que les mesures dans la section permettent d'identifier les formes de la section où il y a la flexion transverse ou la torsion. Dans les sections suivantes, on distingue les deux types de mesures pour déterminer quelques premiers modes qui correspondent aux fréquences de résonance détectées par PULSE. La combinaison des modes de la section transverse et de la bande de roulement n'est détectée qu'avec une campagne de mesure comportant un grand nombre de points sur le pneu.

En se basant sur les amplitudes et sur les phases des mesures suivant le contour du pneu, on peut en déduire les formes modales de la bande de roulement. Un mode est essentiellement identifié par les phases des réceptances. Comme on mesure des mobilités, les phases des réceptances sont déduites par la relation entre la mobilité et la réceptance dans le cas d'une sollicitation harmonique $H(\omega) = i\omega V(\omega)$ (voir le Tab. III.2). Si la phase de la réceptance balaie 0 (correspondant à la valeur $-\frac{\pi}{2}$ de la mobilité) du point (i) au point (j) , il existe un noeud entre ces deux points. A partir du nombre de noeuds sur la bande de roulement, on peut en déduire le mode associé de la bande \star .

Une autre technique d'identification est que l'on donne un côté positif conventionnel (à l'intérieur ou à l'extérieur du pneu). A chaque point mesuré, on détermine un point conventionnel dans la direction radiale qui représente le déplacement relatif par rapport au contour. La phase détermine le signe positif ou négatif. Avec cette technique, on peut tracer les positions relatives entre les points. On remarque que pour les mesures sur la bande de roulement, on utilise la symétrie et on ne mesure que sur un demi pneu. La symétrie est aussi utilisée pour tracer les courbes de modes. La position de la force est toujours celle où le déplacement est maximal.

A la position d'application de la force, on suppose que la réceptance y atteint la valeur maximale locale. Comme on a présenté dans le chapitre III (Section 2), à la résonance, la phase de la réceptance est $-\frac{\pi}{2}$, on peut utiliser la phase de la réceptance pour définir la direction relative entre les points (voir \star). Concrètement, à la résonance, on va tracer la courbe avec l'ordonnée $|H(\omega_r, \mathbf{x})| \cdot \text{sign}(\varphi_H(\mathbf{x}))$ le long du contour du pneu ou de la section. L'allure de cette courbe nous donne le mode de vibration. Le numéro du mode est déterminé dans deux cas :

- Suivant la bande de roulement, le numéro d'un mode est la moitié du nombre de points à l'intersection entre cette courbe et la bande de roulement.
- Dans la section, le numéro d'un mode est le nombre de point à l'intersection entre cette courbe et le contour de la section (n'est pas inclus le point de fixation)

Dans les cas où les pics des courbes mesurées ne sont pas suffisamment nets pour tous les modes, on

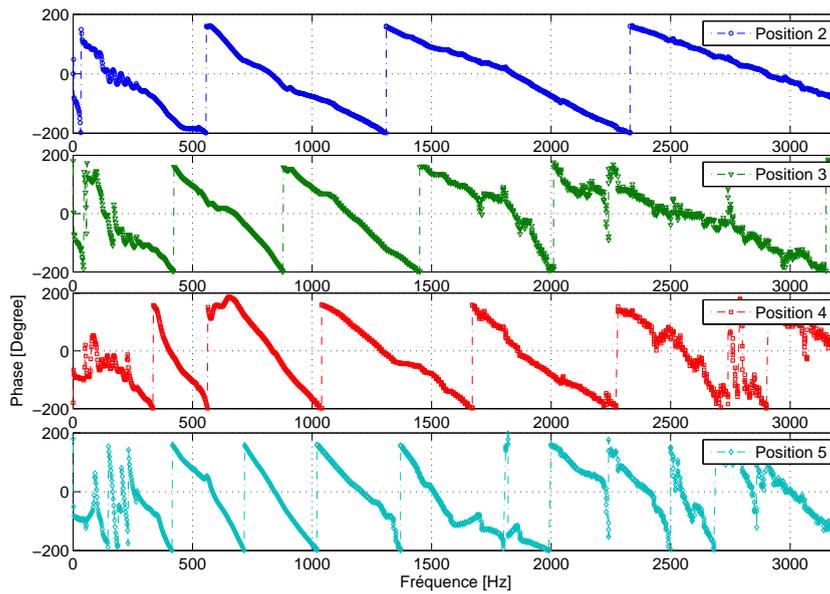


FIGURE IV.30. : Phases des mobilités mesurées dans la section transversale, obtenues par une force au flanc

ne réalisera d'identification que pour les pics bien pointus et distinguables.

7.1. Pneu sans pression interne

Les formes modales pour la bande de roulement sont présentées dans les Figs. IV.31 et IV.32. La force est appliquée de l'extérieur vers l'intérieur, dans le plan à l'angle 0° . Le pneu non déformé est représenté par un cercle continu en rouge et sa déformée est représentée par une courbe en traits bleus. Ces figures montrent une bonne concordance entre deux cas de pot vibrant : sur la bande de roulement et sur le flanc. Le mode 1 (ayant deux intersections avec la bande de roulement) n'apparaît pas car sa distribution dans la décomposition modale n'est pas suffisamment importante et ce mode nécessite une certaine rigidité en flexion le long le contour.

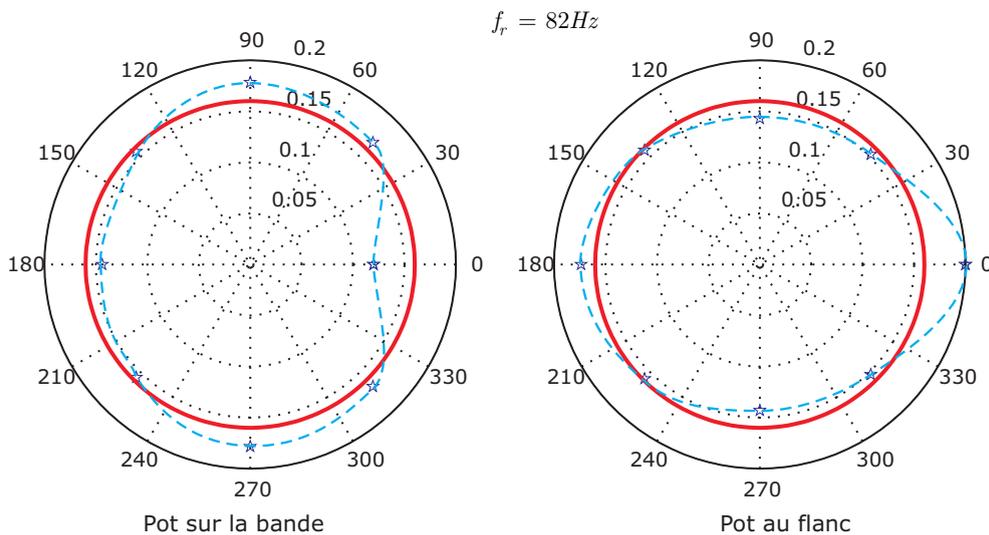
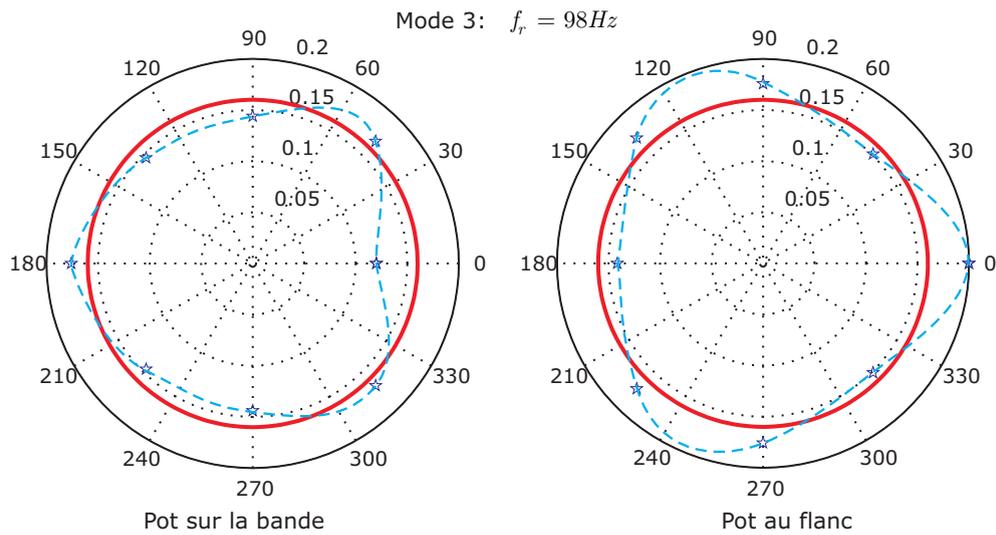
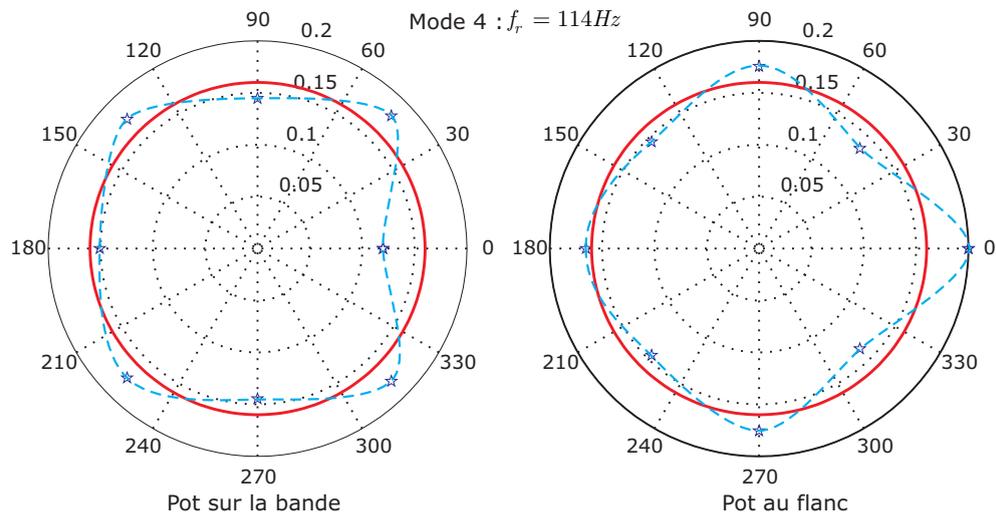


FIGURE IV.31. : Mode de vibration de la bande de roulement à 82Hz

Les résultats des formes modales de la section sont montrés dans les Figs. IV.34, IV.35, IV.36 et IV.37. Ils montrent qu'à la résonance, il y a des combinaisons entre les modes de la section et de la bande de roulement. A titre d'exemple, aux fréquences 82 et 98Hz, le pneu a un seul mode


 FIGURE IV.32. : *Mode de vibration de la bande de roulement à 98Hz*

 FIGURE IV.33. : *Mode de vibration de la bande de roulement à 114Hz*

pour la section mais deux modes différents pour la bande de roulement. Il y a des modes qui ont les mêmes nombres de points d'intersection avec la section mais leurs géométries sont différentes et on les considère comme deux modes distingués.

7.2. Pneu avec pression interne

Les résultats des amortissements sont présentés dans le Tab. 7.2.

 TABLEAU IV.4. : *Formes modales de la bande de roulement associées aux fréquences propres*

Fréquences [Hz]	Formes modales	Coefficients d'amortissement [%]
122	Mode 2	5
146	Mode 3	3.87
174	Mode 4	3.76
208	Mode 5	4.83

Les valeurs mesurées sur la section transversale nous donnent une image des formes modales transverses. Dans le cas où le pot vibrant excite une force sur le flanc, on peut voir le mode de translation

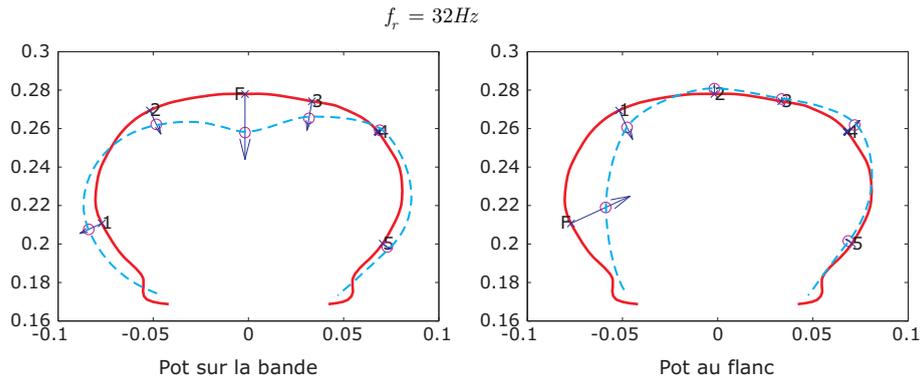


FIGURE IV.34. : Mode de vibration de la section à 32Hz

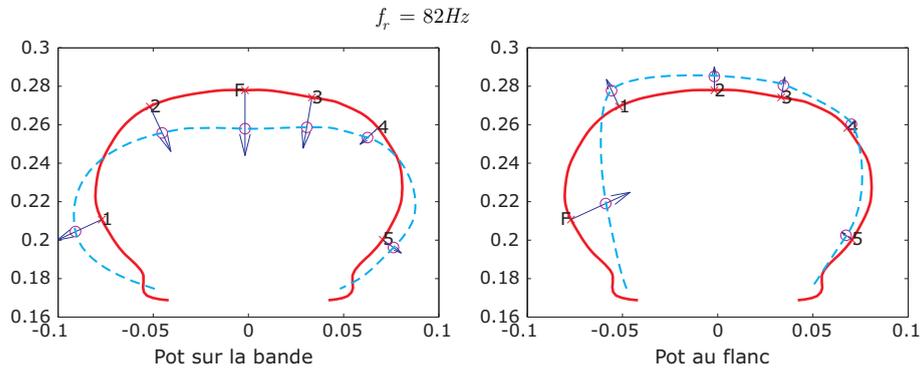


FIGURE IV.35. : Mode de vibration de la section à 82Hz

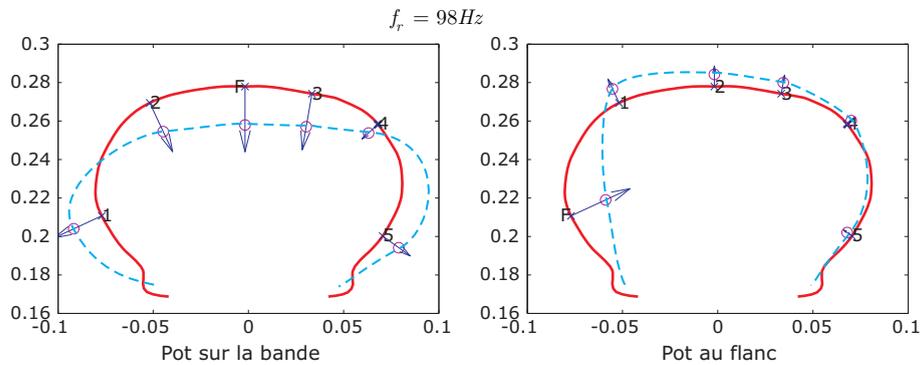


FIGURE IV.36. : Mode de vibration de la section à 98Hz

selon l'axe du pneu. Dans le cas où la force est appliquée au sommet de la bande de roulement, on voit tous les modes de la bande de roulement. Les formes modales de la section dans ce cas sont toujours les mêmes.

Le principe d'identification de modes est identique à celui utilisé pour la bande de roulement. Le sens positif est choisi à l'intérieur de la section du pneu. Les phases sont augmentées de 90° pour déterminer le signe des réceptances. A chaque fréquence fixée, les amplitudes des réceptances sont proportionnelles à celles des mobilités. On peut donc utiliser ces dernières pour la représentation des points de la déformée pour chaque mode.

Ici, les formes modales pour les fréquences 122, 146, 174, 208Hz de la section transversale (Fig. IV.39) confirment les formes modales de la bande de roulement (Fig. IV.38). En réalité, ces fréquences montrent les modes identifiés, combinés entre le mode de la section à 100Hz et les modes de la bande de roulement. Dans le cas où le pot vibrant est collé sur le flanc, on peut voir le mode de vibration suivant l'axe du pneu (à 52 Hz). Pourtant, avec les mesures ci-dessus, on ne peut pas détecter les modes de torsion suivant le contour du pneu.

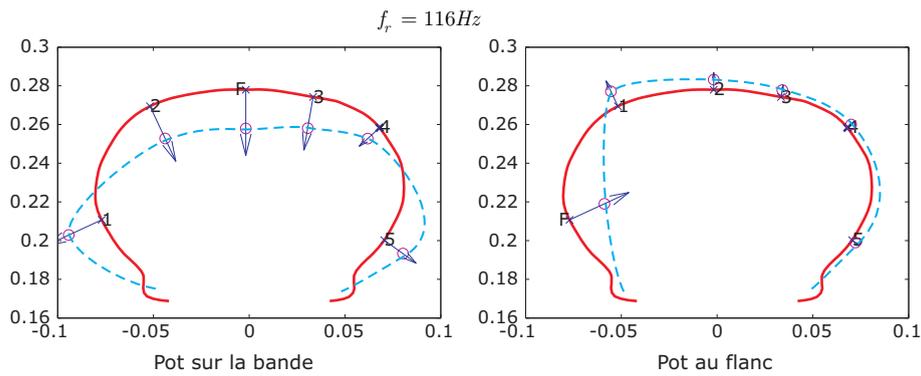


FIGURE IV.37. : Mode de vibration de la section à 116Hz

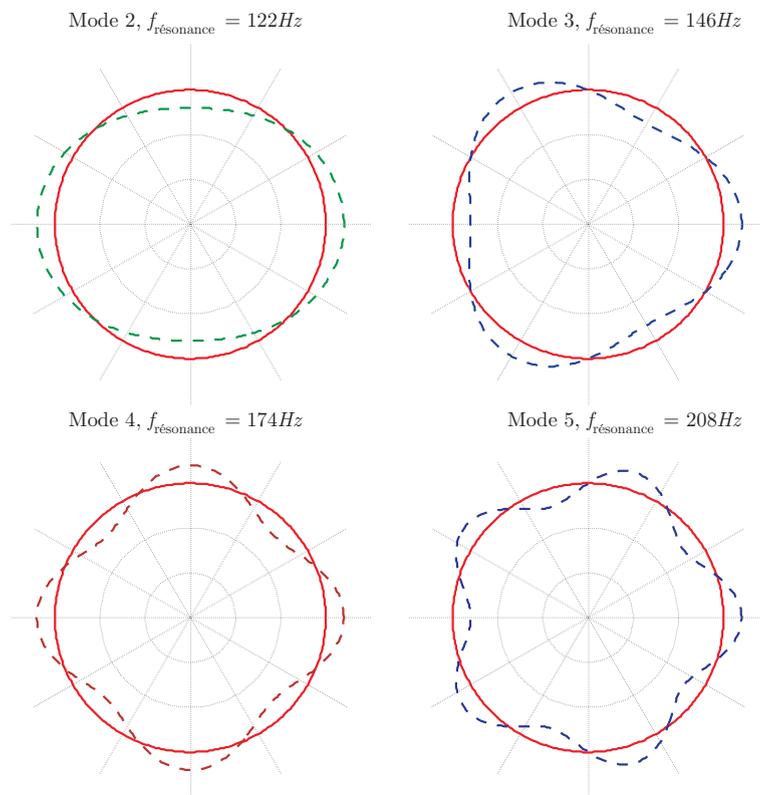


FIGURE IV.38. : Modes propres de la bande de roulement identifiés par PULSE

8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a mesuré la réponse en fréquence, essentiellement la mobilité du pneumatique. Plusieurs mesures sont présentées et acquises dans les graphiques et les tableaux de données pour le post-traitement et pour la validation dans un chapitre suivant. La validation de la mesure assure l'exactitude des dispositifs d'appareillages.

L'identification de quelques modes de base est réalisée. Les modes circulaires (flexion suivant le contour) sont déterminés par les mesures sur la bande de roulement. Les mesures sur une section transversale donnent un mode de base (translation suivant l'axe du pneu) à 52Hz et les modes correspondants à ceux de la bande de roulement. Cela montre une cohérence entre les deux types de mesure.

Cependant, il nous reste des problèmes de cohérence dans les basses et hautes fréquences. Un remède possible est proposé. Il faut noter que la validation numérique dans le chapitre suivant doit tenir compte des modes rigides dans le cas de vibration libre du pneumatique.

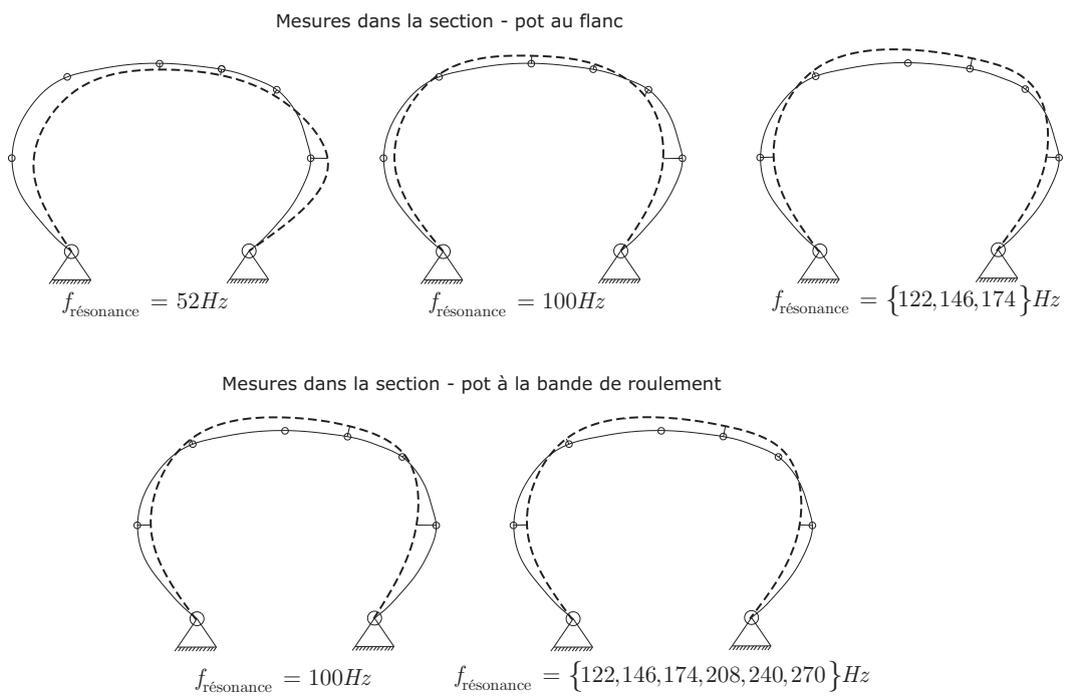


FIGURE IV.39. : Modes propres de la section transversale identifiés par PULSE

Chapitre V.

Structures périodiques

La théorie de la vibration des structures périodiques se base sur la propagation d'ondes dans les cellules selon la direction de périodicité. L'identification des ondes dépend de la matrice de transfert, qui est une fonction de la matrice de rigidité dynamique d'une cellule. En résolvant le problème des ondes, le calcul de la matrice de rigidité totale repose sur les matrices de propagation. Deux exemples simples seront présentés.

Sommaire

1. Généralités sur la vibration des structures	100
1.1. Problème dynamique dans un milieu continu	100
1.2. Vibrations dans les structures	100
1.2.1. Problème aux valeurs propres d'un système continu	100
1.2.2. Orthogonalité des modes propres de vibration	101
1.3. Propagation d'ondes dans les guides d'ondes	101
1.3.1. Ondes volumiques :	102
1.3.2. Ondes planes :	102
1.3.3. Comportement viscoélastique. Ondes harmoniques	102
1.4. Application de la méthode des éléments finis pour les problèmes de vibration des guides d'ondes	103
2. Théorie de la vibration des structures périodiques unidimensionnelles	104
2.1. Analyses par éléments finis des structures périodiques	104
2.1.1. Dynamique des cellules	104
2.1.2. Réduction des matrices.	105
2.2. Ondes propagées dans une cellule	106
2.2.1. Matrice de transfert	106
2.2.2. Propriétés des vecteurs d'ondes	106
2.2.3. Décomposition des ondes dans une cellule	107
2.2.4. Calcul de la base réduite	107
2.3. Analyse de la structure complète	108
3. Transformation des matrices dans un repère spécifié	110
3.1. Généralités sur l'application de la théorie aux structures unidimensionnelles	110
3.2. Détails sur le cas de périodicité selon un cercle	111
3.3. Application aux structures périodiques	113
3.4. Méthode d'élimination des ddl's n'ayant pas de charge. Matrice de rigidité équivalente	113
3.5. Exploitation de matrices élémentaires dans ANSYS	114
4. Application à une poutre sollicitée par une force ponctuelle	115
4.1. Matrice de rigidité dynamique	115
4.2. Solution analytique	115
4.3. Solution périodique	116
4.4. Solution avec la méthode de matrice équivalente	117
5. Conclusion	117

1. Généralités sur la vibration des structures

1.1. Problème dynamique dans un milieu continu

On considère un milieu continu comme un domaine Ω avec le contour $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_f$ (voir la Fig. V.1). Le problème dynamique en petites transformations (linéarisation des déformations) s'écrit :

- *Equations d'équilibre dynamique :*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) &= \rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, T] \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Pour résoudre ce système d'équations, il faut des conditions initiales et aux limites.

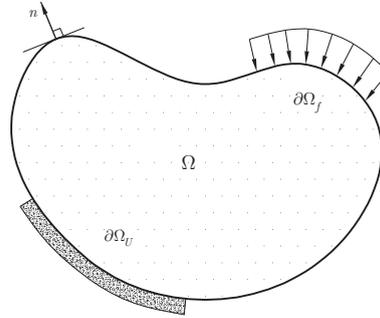


FIGURE V.1. : *Problème dynamique dans un milieu continu*

- *Conditions initiales*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (\text{V.2})$$

- *Conditions aux limites*

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_u \times [0, T] \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t) \quad (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega_f \times [0, T] \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Dans ces équations, on désigne par les symboles " $\dot{\mathbf{u}}$ " et " $\ddot{\mathbf{u}}$ " les dérivées de \mathbf{u} en temps t au premier et au second ordre. \mathbf{u} est le vecteur de déplacement, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont respectivement les tenseurs de contraintes et de déformations. \mathbf{C} est le tenseur d'ordre 4 représentant les propriétés élastiques du milieu dont la loi de comportement est connue. ρ est la densité, \mathbf{g} , $\bar{\mathbf{f}}$, $\bar{\mathbf{u}}$ sont la force volumique, la force extérieure et le déplacement imposé. \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface.

1.2. Vibrations dans les structures

1.2.1. Problème aux valeurs propres d'un système continu

La vibration d'un système continu est exprimée par une représentation harmonique du mouvement $u_i(x_j, t) = u_i(x_j) \cos \omega t$ [52] dans un intervalle temporel $[t_1, t_2]$. Le problème d'équilibre linéaire dynamique devient :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \omega^2 \rho_0 \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{V.4})$$

avec les notations :

- les matrices colonnes

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13}]^T \end{aligned} \quad (\text{V.5})$$

– l'opérateur de dérivation

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.6})$$

– la matrice associée des cosinus directeurs de la normale

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.7})$$

Le système d'équations homogènes (V.4) définit un problème aux valeurs propres de *Sturm-Liouville*, dont les solutions sont notées :

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{u}^{(3)}, \dots \\ 0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \leq \dots \end{cases} \quad (\text{V.8})$$

et vérifient les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^T \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{u}^{(i)} + \omega_i^2 \rho_0 \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{N}^T \mathbf{H} \mathbf{D} \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

où \mathbf{H} est la matrice des coefficients élastiques de Hooke telle que $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}$.

1.2.2. Orthogonalité des modes propres de vibration

Le travail virtuel des forces d'inertie et celui de la force élastique du mode r lors d'un déplacement selon le mode s sont nuls.

$$\int_{V_0} \rho_0 \mathbf{u}_{(s)}^T \mathbf{u}_{(r)} dV = \delta_{sr} \quad (\text{V.10})$$

$$\int_{V_0} (\mathbf{D} \mathbf{u}_{(s)})^T \mathbf{H} (\mathbf{D} \mathbf{u}_{(r)}) dV = \delta_{sr} \omega_i^2 \quad (\text{V.11})$$

où δ est le symbole de Kronecker. Les solutions analytiques du problème de vibration des structures sont souvent obtenues par la méthode de superposition modale ou par la transformation de Laplace et le développement en série d'ondes.

1.3. Propagation d'ondes dans les guides d'ondes

Dans un domaine élastique isotrope, la loi de comportement s'écrit : $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$, dont les coefficients λ et μ sont les constantes de Lamé du matériau, liées au module d'Young et au coefficient de Poisson par :

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{V.12})$$

Le problème dynamique dans ce milieu est exprimé par l'équation de Navier [121] comme suit :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) \quad (\text{V.13})$$

où ∇^2 désigne l'opérateur Laplacien $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ et "∇." est la notation de l'opérateur de divergence $\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ et ρ est la densité du milieu.

1.3.1. Ondes volumiques :

La solution générale du déplacement \mathbf{u} de l'équation de Navier peut être exprimée par deux potentiels de Lamé en utilisant la décomposition de Helmholtz [122, 121] :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\nabla\varphi(\mathbf{x}, t)}_{\text{onde de compression}} + \underbrace{\nabla \times \psi(\mathbf{x}, t)}_{\text{onde de cisaillement}} \quad (\text{V.14})$$

En utilisant la décomposition de Helmholtz de la force $\mathbf{f} = \nabla f + \nabla \times \mathbf{B}$, les deux potentiels de Lamé vérifient 2 équations découplées :

$$c_p^2 \nabla^2 \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + f = 0, \quad c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{V.15})$$

$$c_s^2 \nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \mathbf{B} = 0, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{V.16})$$

Cela montre deux mécanismes de propagation d'ondes à deux vitesses finies dans le milieu :

- **onde de compression** (appelée également *onde de dilatation* ou *onde irrotationnelle*) associée au mouvement des particules suivant la direction de propagation et à la vitesse c_p . Ces ondes sont dues aux efforts de traction-compression parallèles au mouvement (notée par P).
- **onde de cisaillement** (appelée aussi *onde de distorsion* ou *onde équivolumique*) associée au mouvement des particules qui s'effectue perpendiculairement à la direction de propagation et à la vitesse c_s . Ces ondes sont dues au glissement relatif entre les facettes perpendiculaires au mouvement. Composées de deux parties SV et SH dans ce plan, elles se propagent plus lentement que les ondes de compression.

Le rapport des deux constantes d'onde c_p et c_s ne dépend que du coefficient de Poisson, $\frac{c_s}{c_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} < 1$. La solution de ce problème est souvent sous la forme exponentielle.

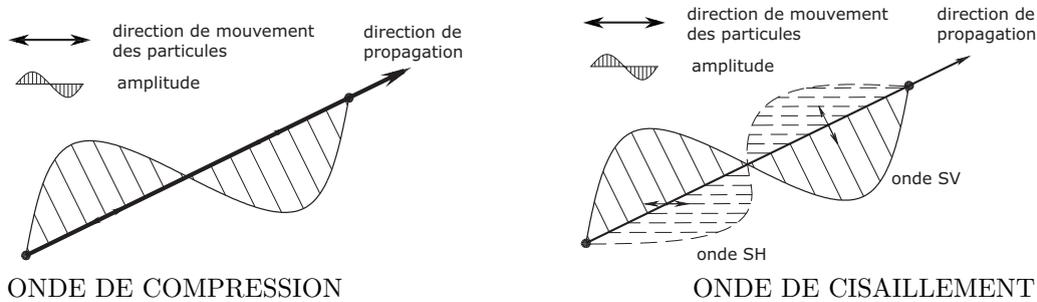


FIGURE V.2. : Ondes de compression et ondes de cisaillement

1.3.2. Ondes planes :

Les ondes planes se propageant dans un milieu continu s'écrivent avec un déplacement exprimé par [122] :

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} f(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - ct) \quad (\text{V.17})$$

où \mathbf{d} est le vecteur de polarisation, \mathbf{n} -le vecteur normal, \mathbf{r} -le vecteur de localisation du point considéré (voir la Fig. V.3) et c -la vitesse de propagation.

1.3.3. Comportement viscoélastique. Ondes harmoniques

Dans un milieu viscoélastique, avec un mouvement harmonique, les déformations s'expriment en fonction de la fréquence ω comme suit [121] :

$$e_{ij} = e_{ij}^* e^{i\omega t} \quad (\text{V.18})$$

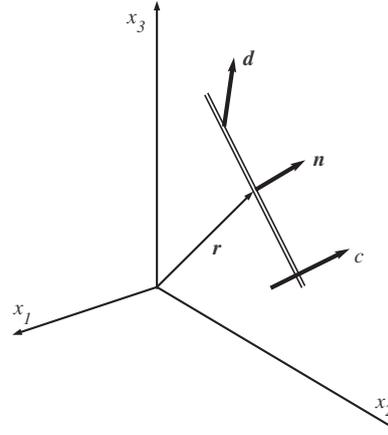


FIGURE V.3. : Ondes planes se propageant dans un milieu 3D

Le déplacement harmonique est sous la forme :

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} e^{i(k\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \quad (\text{V.19})$$

où ω est la fréquence, k est le nombre d'ondes, \mathbf{n} et \mathbf{d} sont respectivement les vecteurs unitaires de propagation et de mouvement. Le nombre d'ondes k est déterminé par :

$$[G_S^*(\omega)k^2 - \rho\omega^2]\mathbf{d} + [G_B^*(\omega) + \frac{1}{3}G_S^*(\omega)]k^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{d})\mathbf{p} = 0 \quad (\text{V.20})$$

dans cette formule, $G_S^*(\omega)$ et $G_B^*(\omega)$ sont les modules complexes au cisaillement et en compression.

TABLEAU V.1. : Valeurs du nombre d'ondes k dans les ondes longitudinales et transversales

Valeur	Ondes longitudinales $\mathbf{d} = \pm\mathbf{n}$	Ondes transversales $\mathbf{n}\cdot\mathbf{d} = 0$
k	$\omega \left[\frac{\rho}{G_B^*(\omega) + \frac{4}{3}G_S^*(\omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$	$\omega \left[\frac{\rho}{G_S^*(\omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$

1.4. Application de la méthode des éléments finis pour les problèmes de vibration des guides d'ondes

La méthode des éléments finis (MEF) dans un guide d'ondes se base sur la méthode des éléments finis classique. Dans la MEF classique, l'équation est sous la forme $\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}$. De cette équation, il y a deux analyses par éléments finis pour les guides d'ondes. Dans la méthode des éléments finis spectraux (MEFS), Finnveden [54, 59] a déduit l'équation discrétisée comme :

$$\left[\sum_{i=1}^{i=N} k^i \mathbf{K}_i - \omega^2 \mathbf{M} \right] \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (\text{V.21})$$

La matrice de rigidité est développée en plusieurs matrices correspondantes aux nombres d'ondes k^i représentant la propagation d'ondes. Cependant, cette méthode contient une difficulté par rapport à la MEF classique. La rigidité \mathbf{K}_i est non standard et les formulations discrétisées sont déterminées par les méthodes normales comme les équations de Lagrange, le principe de Hamilton ou le principe de travail virtuel. C'est la raison qui rend cette approche moins puissante que les autres.

La méthode des éléments finis de guides d'ondes (appelée souvent en anglais : wave guide finite elements (WFE)) est similaire à la MEFS. Le comportement vibratoire est obtenu en appliquant la transformation de Fourier ou de Laplace. Dans l'Eq. (V.19), le déplacement est donc exprimé comme

$\mathbf{U} = \mathbf{U}^* e^{i\omega t}$. A partir d'ici, on note \mathbf{U}^* par \mathbf{U} pour simplifier. En appliquant la description du déplacement, l'équation discrétisée en fonction de la fréquence ω s'écrit donc dans une période :

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (\text{V.22})$$

dont les matrices de rigidité et de masse sont obtenues comme dans la méthode des éléments finis classique :

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (\text{V.23})$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad (\text{V.24})$$

où \mathbf{N} est la matrice d'interpolation des déplacements et \mathbf{B} est la matrice de gradient $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{N}$.

2. Théorie de la vibration des structures périodiques unidimensionnelles

2.1. Analyses par éléments finis des structures périodiques

2.1.1. Dynamique des cellules

La structure est divisée en un certain nombre de cellules avec l'index n (Fig. V.4). Chaque cellule est maillée avec un nombre égal de nœuds à gauche et à droite. L'équation dynamique discrétisée d'une cellule obtenue par la méthode des éléments finis à la fréquence ω est donnée comme :

$$(\mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (\text{V.25})$$

où \mathbf{K} , \mathbf{M} et \mathbf{C} sont respectivement les matrices de rigidité, de masse et d'amortissement, \mathbf{f} est le vecteur de chargement et \mathbf{q} est le vecteur de degrés de liberté de déplacement. En introduisant la matrice de rigidité dynamique $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{K} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$, en décomposant en ddls aux bords à gauche (L) et à droite (R), et ddls à l'intérieur (I), en supposant qu'il n'existe pas de forces aux nœuds de l'intérieur, l'Eq. (V.25) devient :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{II} & \tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{LI} & \tilde{\mathbf{D}}_{LL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RI} & \tilde{\mathbf{D}}_{RL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_I \\ \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (\text{V.26})$$

Les ddls à l'intérieur peuvent être éliminés en utilisant le premier rang de l'Eq. (V.26) avec comme résultat :

$$\mathbf{q}_I = -\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1} (\tilde{\mathbf{D}}_{IL}\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{D}}_{IR}\mathbf{q}_R) \quad (\text{V.27})$$

Cela nous amène à :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{LL} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{LR} - \tilde{\mathbf{D}}_{LI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \\ \tilde{\mathbf{D}}_{RL} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IL} & \tilde{\mathbf{D}}_{RR} - \tilde{\mathbf{D}}_{RI}\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1}\tilde{\mathbf{D}}_{IR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (\text{V.28})$$

On la réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{q}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L \\ \mathbf{f}_R \end{bmatrix} \quad (\text{V.29})$$

La nouvelle matrice dynamique est obtenue après avoir élimination des ddls à l'intérieur. Par la symétrie des matrices de rigidité, de masse et d'amortissement, on peut déduire que ${}^t\mathbf{D}_{LL} = \mathbf{D}_{LL}$, ${}^t\mathbf{D}_{RR} = \mathbf{D}_{RR}$ et ${}^t\mathbf{D}_{LR} = \mathbf{D}_{RL}$.

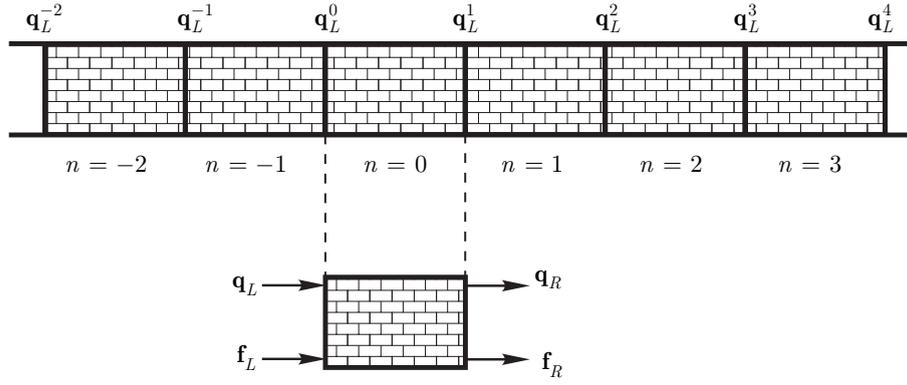


FIGURE V.4. : Structure périodique. Une cellule avec les vecteurs des forces, des déplacements à gauche et à droite

2.1.2. Réduction des matrices.

La matrice de rigidité dynamique introduite dans l'Eq. (V.29) est utilisée pour un nombre limité de ddls. Dans le cas où le nombre de ddls est grand, il vaut mieux réduire la base et les paramètres de déplacements dans la section. En introduisant des fonctions de base indépendantes $\mathbf{Q}_i, 1 \leq i \leq N_s$ dans la section transversale avec N_s ddls, les déplacements s'écrivent

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^{i=N_s} r_i \mathbf{Q}_i \quad (\text{V.30})$$

Si l'on ne retient que n fonctions ($n < N_s$), les déplacements sont approchés par

$$\mathbf{q} \cong \sum_{i=1}^{i=n} r_i \mathbf{Q}_i \quad (\text{V.31})$$

La qualité de l'approximation dépend du choix de la base \mathbf{Q}_i et du nombre de fonctions de base retenues n . On introduit la matrice

$$\mathbf{Q}^+ = [\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_n] \quad (\text{V.32})$$

La matrice de rigidité dynamique réduite est définie par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^r & \mathbf{D}_{LR}^r \\ \mathbf{D}_{RL}^r & \mathbf{D}_{RR}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{r}_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_L \\ \mathbf{g}_R \end{bmatrix} \quad (\text{V.33})$$

avec les projections des matrices de rigidité dynamique sur la nouvelle base définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{LL}^r &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{LL} \mathbf{Q}^+, \\ \mathbf{D}_{LR}^r &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{LR} \mathbf{Q}^+, \\ \mathbf{D}_{RL}^r &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{RL} \mathbf{Q}^+, \\ \mathbf{D}_{RR}^r &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{RR} \mathbf{Q}^+ \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

et les forces réduites sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_L &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{f}_L = {}^t [g_{L1}, \dots, g_{Ln}] \\ \mathbf{g}_R &= {}^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{f}_R = {}^t [g_{R1}, \dots, g_{Rn}] \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

Le comportement de la cellule décrit par l'Eq. (V.33) est similaire à celui de l'Eq. (V.29). Par conséquent, la même approche peut être utilisée pour décrire les ddls de la structure comme dans l'Eq. (V.29) ou par une autre base réduite représentée comme dans l'Eq. (V.33). Dorénavant, il n'existe pas de distinction entre les 2 présentations de la relation forces-déplacements.

2.2. Ondes propagées dans une cellule

2.2.1. Matrice de transfert

On considère les structures comme présentées dans la Fig. (V.4). Si il n'y a pas de forces appliquées aux nœuds à l'intérieur, la continuité des déplacements et l'équilibre des forces aux bords entre les cellules n et $n + 1$ donnent :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_L^{n+1} &= \mathbf{q}_R^n \\ \mathbf{f}_L^{n+1} &= -\mathbf{f}_R^n \end{aligned} \quad (\text{V.36})$$

La matrice de transfert relie les déplacements et les forces aux sections n et $n + 1$ comme suit :

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{f}_L^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R^n \\ -\mathbf{f}_R^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^{n+1} \\ \mathbf{f}_L^{n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.37})$$

En combinant les Eqs. (V.29),(V.36) et (V.37), la matrice de transfert est réécrite en fonction des parties de la matrice de rigidité dynamique comme :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & \mathbf{D}_{LR}^{-1} \\ -\mathbf{D}_{RL} + \mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1}\mathbf{D}_{LL} & -\mathbf{D}_{RR}\mathbf{D}_{LR}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.38})$$

La propagation d'ondes libre dans la structure est exprimée par le problème des valeurs propres et des vecteurs propres

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} \quad (\text{V.39})$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i est indiqué par

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\lambda_i) \\ \mathbf{f}(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (\text{V.40})$$

et est considéré comme un vecteur d'ondes de base.

2.2.2. Propriétés des vecteurs d'ondes

Le premier rang de l'Eq. (V.39) donne

$$(\mathbf{D}_{LL} + \lambda\mathbf{D}_{LR})\mathbf{q}_L = \mathbf{f}_L \quad (\text{V.41})$$

En combinant avec le second rang,

$$\left(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda\mathbf{D}_{LR} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{D}_{RL} \right) \mathbf{q}_L = 0 \quad (\text{V.42})$$

Le vecteur \mathbf{q}_L est donc la solution du problème quadratique des valeurs propres. La transposée de l'Eq. (V.42) donne :

$${}^t\mathbf{q}_L \left(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda\mathbf{D}_{RL} + \frac{1}{\lambda}\mathbf{D}_{LR} \right) = 0 \quad (\text{V.43})$$

où on a utilisé la symétrie de la matrice de rigidité dynamique. \mathbf{q}_L est également le vecteur propre à droite associé à la valeur propre λ et le vecteur propre à gauche associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$. Cela montre que si λ est la valeur propre de l'Eq. (V.42), $\frac{1}{\lambda}$ aussi. Cette démonstration présente un couple d'ondes positive et négative. Cela est vrai pour toutes les formes ou propriétés de la cellule. Le vecteur propre à droite de l'Eq. (V.39) correspondant à la valeur propre λ_i est donné par :

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\lambda_i) \\ (\mathbf{D}_{LL} + \lambda_i\mathbf{D}_{LR})\mathbf{q}(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (\text{V.44})$$

et le vecteur propre à gauche associé à λ_i s'écrit :

$$\Psi_i = \left[{}^t\mathbf{q}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) (\mathbf{D}_{RR} + \lambda_i\mathbf{D}_{LR}) \quad {}^t\mathbf{q}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) \right] \quad (\text{V.45})$$

L'orthogonalité des vecteurs propres donne :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}\Phi_j &= \lambda_j \Phi_j \\ \Psi_i \mathbf{T} &= \lambda_i \Psi_i\end{aligned}\quad (\text{V.46})$$

qui nous amène à

$$\Psi_i \mathbf{T} \Phi_j = \lambda_j \Psi_i \Phi_j = \lambda_i \Psi_i \Phi_j \quad (\text{V.47})$$

Cette quantité doit être égale à 0 si $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc

$$\Psi_i \Phi_j = d_i \delta_{ij} \quad (\text{V.48})$$

où d_i est une constante quelconque. La normalisation des vecteurs propres peut amener à $d_i = 1$, mais on peut également normaliser les vecteurs propres $\mathbf{q}(\lambda_i)$.

2.2.3. Décomposition des ondes dans une cellule

A partir de l'Eq. (V.39), on peut distinguer $2n$ valeurs propres et $2n$ vecteurs propres en 2 ensembles désignés par (λ_i, Φ_i^+) et $(\frac{1}{\lambda_i}, \Phi_i^-)$, avec $|\lambda_i| \leq 1$. Dans le cas où $|\lambda_i| = 1$, le premier ensemble ayant $\Re\{j\omega \mathbf{q}_L^H \mathbf{f}_L\} < 0$ contient les ondes se propageant dans le sens positif tandis que les valeurs propres inverses $\frac{1}{\lambda_i}$ dans le second ensemble sont associées à $\Re\{j\omega \mathbf{q}_L^H \mathbf{f}_L\} > 0$. Dans [48], Mead a montré que les vecteurs propres positifs et négatifs sont égaux $\mathbf{q}(\lambda_i) = \mathbf{q}(\frac{1}{\lambda_i})$. Cela signifie que λ_i et \mathbf{T} sont réels. Dans le cas général, il n'y a pas de relation si simple.

On utilise ces ondes comme une base. Le vecteur d'état à gauche est donné par la somme des ondes positives et négatives d'amplitudes a_i^+ et a_i^- respectivement.

$$\mathbf{x}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \mathbf{f}_L \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} (a_i^+ \Phi_i^+ + a_i^- \Phi_i^-) \quad (\text{V.49})$$

De la même façon, le vecteur d'état à droite est donné par :

$$\mathbf{x}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_R \\ -\mathbf{f}_R \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{i=n} (b_i^+ \Phi_i^+ + b_i^- \Phi_i^-) \quad (\text{V.50})$$

Les relations entre les ondes entrantes et sortantes sont obtenues par $\mathbf{x}_R = \mathbf{T} \mathbf{x}_L$. Comme les vecteurs Φ_i^+ et Φ_i^- sont les vecteurs propres de la matrice \mathbf{T} , cette relation est réécrite :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{a}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{bmatrix} \quad (\text{V.51})$$

où les vecteurs \mathbf{a}^+ , \mathbf{a}^- , \mathbf{b}^+ et \mathbf{b}^- sont les vecteurs d'amplitude des ondes et la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ contient les valeurs propres de module inférieur ou égal à 1.

2.2.4. Calcul de la base réduite

Quand le nombre des ddls dans la section transversale est grand, il vaut mieux utiliser la base réduite comme présenté dans la section 2.1.2. Une possibilité est de prendre les vecteurs $\mathbf{q}(\lambda_i)$ pour une fréquence spécifiée. On utilise f_{max} pour déterminer un nombre limité de vecteurs propres dont le module des valeurs propres est proche de 1. Cela comprend toutes les composantes des ondes de propagation, dont $|\lambda_i| = 1$, et aussi les ondes le moins rapidement atténuées, $|\lambda_i| < 1$. Pour calculer les valeurs propres et les vecteurs propres, il faut résoudre le système (V.37) ou (V.42). Pour un grand nombre de ddls, on peut rencontrer des difficultés, car la matrice de transfert peut être mal conditionnée. Gry et Gontier [65] ou Zhong [66] ont défini le problème en fonction de la valeur propre $(\lambda + \frac{1}{\lambda})$, car la matrice est symplectique. Cela signifie que l'on cherche les valeurs propres de $\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}$ au lieu de \mathbf{T} . Le problème des valeurs propres dans l'Eq. (V.42) est reformulé comme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RL} \\ -\mathbf{D}_{RL} & -\mathbf{D}_{LL} - \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} \quad (\text{V.52})$$

avec $\tilde{\mathbf{q}}_L = \lambda \mathbf{q}_L$. Une autre possibilité s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{LL} - \mathbf{D}_{RR} & -\mathbf{D}_{LR} \\ \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} \quad (\text{V.53})$$

La réorganisation de l'Eq. (V.52) et (V.53) donne :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}} \begin{bmatrix} -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & -(\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) \\ (\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L \\ \tilde{\mathbf{q}}_L \end{bmatrix} \quad (\text{V.54})$$

Le dernier système a des valeurs propres doubles. En indiquant deux vecteurs propres associés à une même valeur propre comme \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 , un vecteur propre de l'Eq. (V.52) associé à la valeur propre λ est décomposé comme :

$$\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2 \quad (\text{V.55})$$

En l'introduisant dans l'Eq. (V.52), on a

$$\begin{bmatrix} \lambda \mathbf{D}_{RL} & -\mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix} (\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2) = 0 \quad (\text{V.56})$$

Le produit scalaire peut donner la relation entre α_1 et α_2 ¹. On prend les vecteurs propres pour la fréquence f_{max} comme la base des vecteurs pour toutes les fréquences. Par conséquent, on peut déterminer la matrice \mathbf{Q}^+ , définie dans l'Eq. (V.32), qui est donnée par

$$\mathbf{Q}^+ = [q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)] \quad (\text{V.57})$$

Seules les valeurs propres $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, dont les modules sont les plus proches de l'unité parmi N_s valeurs propres de l'Eq. (V.39), sont calculées. Dans quelques cas, la base réduite construite par les vecteurs propres pour f_{max} n'est pas suffisante, on doit donc utiliser les matrices \mathbf{Q}_j^+ pour d'autres fréquences $[f_1, f_2, \dots]$.

2.3. Analyse de la structure complète

On examine une structure à N cellules comme dans la Fig. V.5. L'objectif est de calculer la matrice de rigidité dynamique de cette structure. Il faut déterminer la relation entre les déplacements et les forces de chaque côté de la structure.



FIGURE V.5. : Structure à N cellules

En utilisant l'orthogonalité mentionnée dans l'Eq.(V.48) et les Eqs. (V.49) et (V.50), les amplitudes des ondes peuvent être obtenues par les produits scalaires des vecteurs propres à gauche et à droite

$$\begin{aligned} d_i^+ a_i^+ &= \Psi_i^+ \cdot \mathbf{x}_L, & d_i^+ b_i^+ &= \Psi_i^+ \cdot \mathbf{x}_R \\ d_i^- a_i^- &= \Psi_i^- \cdot \mathbf{x}_L, & d_i^- b_i^- &= \Psi_i^- \cdot \mathbf{x}_R \end{aligned} \quad (\text{V.58})$$

où d_i^\pm sont les facteurs retenus par (V.48). La relation (V.51) devient

$$\begin{bmatrix} \Psi^+ \cdot \mathbf{x}_R \\ \Psi^- \cdot \mathbf{x}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^+ \cdot \mathbf{x}_L \\ \Psi^- \cdot \mathbf{x}_R \end{bmatrix} \quad (\text{V.59})$$

¹Pour l'application, on va chercher les deux valeurs propres λ_1 et $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ associées aux vecteurs de type \mathbf{w}_1 et \mathbf{w}_2 . On remplace λ_1 dans V.56 et on a la matrice $\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbf{D}_{RL} & -\mathbf{D}_{RL} \\ \mathbf{D}_{RL} & \mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR} + \lambda_1 \mathbf{D}_{LR} \end{bmatrix}$. L'Eq. (V.52) donne $\mathbf{U}_1 \mathbf{w}_1 = 0$, cela amène aux vecteurs \mathbf{w}_1 qui forment le noyau de la matrice \mathbf{U}_1

où Ψ^+ et Ψ^- sont les matrices dont les lignes sont les vecteurs Ψ_i^+ et Ψ_i^- respectivement.

En généralisant l'Eq. (V.59) pour le cas de N cellules,

$$\begin{bmatrix} \Psi^+ \cdot \mathbf{x}_{N+1} \\ \Psi^- \cdot \mathbf{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^+ \cdot \mathbf{x}_1 \\ \Psi^- \cdot \mathbf{x}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.60})$$

où \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_{N+1} sont les vecteurs comprenant les déplacements et les forces de la première section (numéro 1) et de la dernière section (numéro $N + 1$). Les matrices Φ^+ et Φ^- sont divisées comme suit :

$$\Psi^+ = [{}^t\mathbf{F}^- \quad {}^t\mathbf{Q}^-], \quad \Psi^- = [{}^t\mathbf{F}^+ \quad {}^t\mathbf{Q}^+] \quad (\text{V.61})$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^+ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}(\lambda_1) & \cdots & \mathbf{q}(\lambda_n) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Q}^- &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right) & \cdots & \mathbf{q}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.62})$$

et

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{F}^+ &= {}^t\mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{RR} + \Lambda^{-1t} \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{LR} = -{}^t\mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{LL} - \Lambda^t \mathbf{Q}^+ \mathbf{D}_{RL} \\ {}^t\mathbf{F}^- &= {}^t\mathbf{Q}^- \mathbf{D}_{RR} + \Lambda^t \mathbf{Q}^- \mathbf{D}_{LR} = -{}^t\mathbf{Q}^- \mathbf{D}_{LL} - \Lambda^{-1t} \mathbf{Q}^- \mathbf{D}_{RL} \end{aligned} \quad (\text{V.63})$$

La matrice \mathbf{F}^\pm relie les composants des forces et des déplacements des vecteurs propres à gauche. L'Eq. (V.60) est réécrite :

$$\begin{bmatrix} {}^t\mathbf{F}^- & {}^t\mathbf{Q}^- \\ \Lambda^{Nt} \mathbf{F}^+ & \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{N+1} \\ -\mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{Nt} \mathbf{F}^- & \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^- \\ {}^t\mathbf{F}^+ & {}^t\mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.64})$$

ou sous la forme

$$\begin{bmatrix} \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^- & {}^t\mathbf{Q}^- \\ {}^t\mathbf{Q}^+ & \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Lambda^{Nt} \mathbf{F}^- & {}^t\mathbf{F}^- \\ -{}^t\mathbf{F}^+ & \Lambda^{Nt} \mathbf{F}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.65})$$

En remplaçant \mathbf{F}^\pm dans l'Eq. (V.63), on a :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^- & {}^t\mathbf{Q}^- \\ {}^t\mathbf{Q}^+ & \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^- & {}^t\mathbf{Q}^- \\ -{}^t\mathbf{Q}^+ & \Lambda^{Nt} \mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{D}_{RR} \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Lambda^{N-1t} \mathbf{Q}^- & \Lambda^t \mathbf{Q}^- \\ \Lambda^t \mathbf{Q}^+ & \Lambda^{N-1t} \mathbf{Q}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{D}_{LR} \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{V.66})$$

En multipliant par la matrice inverse à gauche, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{D}_{RR} \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_N^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Q}_N^+ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{N-1}^- & \mathbf{Q}_1^- \\ \mathbf{Q}_1^+ & \mathbf{Q}_{N+1}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{RL} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{D}_{LR} \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.67})$$

avec $\mathbf{Q}_i^+ = ({}^t\mathbf{Q}^+)^{-1} \Lambda^{it} \mathbf{Q}^+$ et $\mathbf{Q}_i^- = ({}^t\mathbf{Q}^-)^{-1} \Lambda^{it} \mathbf{Q}^-$

En se basant sur la symétrie de la matrice de rigidité dynamique de la cellule et les matrices de propagation définies par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l &= \mathbf{Q}^- \Lambda (\mathbf{Q}^-)^{-1} \\ \mathbf{P}_r &= \mathbf{Q}^+ \Lambda (\mathbf{Q}^+)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{V.68})$$

où \mathbf{P}_r est la matrice des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres $\mathbf{q}(\lambda_i)$, et \mathbf{P}_l est la matrice des valeurs propres λ_i et des vecteurs propres $\mathbf{q}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_T \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{V.69})$$

où la matrice \mathbf{D}_T est la matrice de rigidité dynamique de la structure complète calculée par

$$\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LR} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_l^{N-1} & \mathbf{P}_r \\ \mathbf{P}_l & \mathbf{P}_r^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_l^N & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{P}_r^N \end{bmatrix}^{-1} \quad (\text{V.70})$$

Cette matrice est facilement calculée en connaissant les deux matrices de propagation \mathbf{P}_l et \mathbf{P}_r . Le nombre de calculs nécessaire pour obtenir la matrice globale de la structure ne dépend pas du nombre de cellules.

3. Transformation des matrices dans un repère spécifié

3.1. Généralités sur l'application de la théorie aux structures unidimensionnelles

La signification du mot "unidimensionnel" n'est pas uniquement celui d'un axe prédéfini dans un repère cartésien. Dans plusieurs cas, la structure est périodique dans un repère non cartésien tandis que les matrices de rigidité et de masse obtenues par ANSYS sont dans le repère cartésien. Pour obtenir des matrices identiques dans toutes les cellules élémentaires, il faut appliquer une transformation des coordonnées dans le système cartésien vers celles dans le système spécifié dans lequel la représentation des coordonnées et des matrices satisfait les propriétés de périodicité.

On se rappelle que les matrices élémentaires (rigidité, masse, ...) sont calculées en fonction de la matrice des fonctions de forme \mathbf{N} et de la matrice des dérivées des fonctions de forme \mathbf{B} . Ces deux matrices ne dépendent pas seulement du type de fonction d'interpolation mais aussi de la position des éléments. A titre d'exemple, dans l'analyse matricielle par éléments finis, les matrices élémentaires de rigidité et de masse peuvent s'écrire sous la forme générale dans le repère cartésien $Oxyz$ comme suit :

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{H} \mathbf{B} dV \quad (V.71)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (V.72)$$

où \mathbf{H} est la matrice d'élasticité de Hooke, ρ est la densité des matériaux au point d'intégration. Le processus de transformation à partir des éléments réels aux éléments référentiels nous donne les expressions de ces matrices :

$$\mathbf{K}_e = \int_{V_r} \mathbf{B}_r^T \mathbf{H} \mathbf{B}_r \det \mathbf{J} dV_r \quad (V.73)$$

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_r} \rho \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r \det \mathbf{J} dV_r \quad (V.74)$$

où \mathbf{J} est le jacobien de la transformation, calculé par les dérivées de la transformation géométrique du repère réel à celui de référence. Ces expressions montrent que même pour les éléments identiques mais avec des orientations différentes, leurs matrices \mathbf{J} ne sont pas les mêmes. Les matrices élémentaires sont donc différentes.

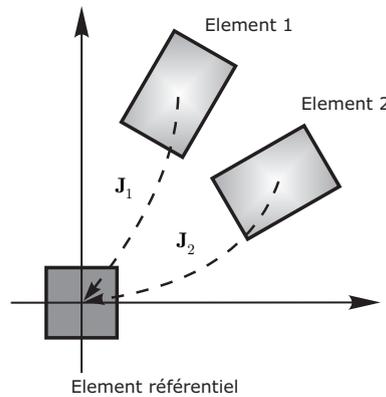


FIGURE V.6. : Transformation géométrique d'un élément à un repère référentiel

Les conditions de périodicité ne peuvent être exprimées dans le repère cartésien que lorsque les déplacements des noeuds des deux sections d'une cellule sont identiques dans le cas de chargement périodique dans ce repère (1). En effet, dans le cas où les deux sections ne sont pas parallèles (donc, même géométriquement, la périodicité n'est pas satisfaite dans le repère cartésien), on cherche une transformation géométrique pour que les cellules transformées aient leurs sections identiques. En tout cas, cette transformation peut être une combinaison des transformations de base. On remarque que la

translation satisfait toujours la condition (1) ². Il est nécessaire donc d'effectuer une transformation géométrique bijective de la cellule de base à une cellule de référence ayant un maillage identique aux deux sections à gauche et à droite. Après avoir appliqué cette transformation, les matrices transformées de rigidité, de masse et d'amortissement doivent être identiques pour toutes les cellules.

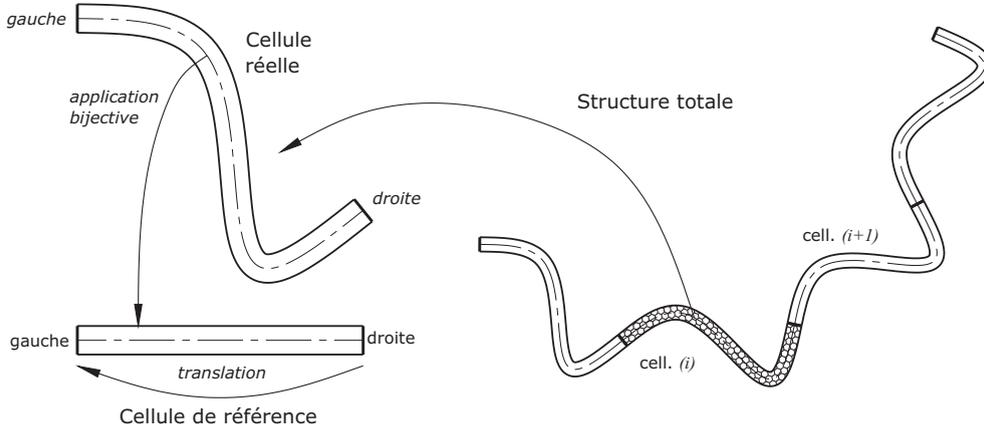


FIGURE V.7. : *Algorithme de transformation géométrique d'une cellule*

3.2. Détails sur le cas de périodicité selon un cercle

Pour assurer la périodicité des cellules, il faut établir une transformation pour obtenir les mêmes propriétés géométriques de toutes les sections transversales. Une méthode possible est de faire tourner tous les noeuds pour qu'ils appartiennent à la section de base. Les matrices des cellules seront donc identiques dans le nouveau repère ³.

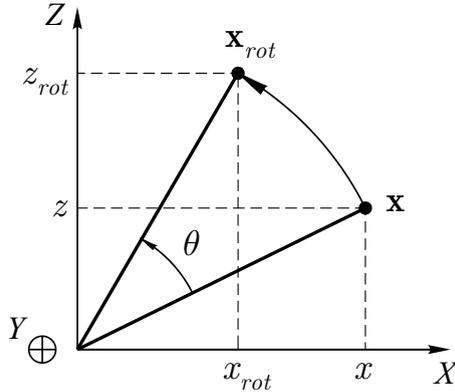


FIGURE V.8. : *Rotation d'un noeud à la section de base*

Dans la Fig. V.8, lorsqu'on tourne un noeud d'un angle θ , il faut uniquement multiplier les coordonnées par la matrice de rotation pour obtenir les nouvelles coordonnées. La matrice de rotation autour de l'axe y s'écrit comme :

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{V.75})$$

Pour chaque point \mathbf{x}_i , il faut déterminer l'angle θ_i correspondant à ce point pour réaliser la rotation. Les coordonnées nouvelles sont obtenues d'après la relation :

$$\mathbf{x}_i^{rot} = \mathbf{R}(\theta_i)\mathbf{x}_i \quad (\text{V.76})$$

²Si $\mathbf{x}_R = \mathbf{x}_L + \mathbf{t}$, où \mathbf{t} est le vecteur de translation, $\rightarrow \Delta \mathbf{x}_R = \Delta \mathbf{x}_L \rightarrow \mathbf{U}_R = \mathbf{U}_L$

³Ce repère est purement mathématique, pas de sens géométrique

L'équation discrétisée de la méthode des éléments finis dans le système cartésien s'écrit :

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{U}_C \quad (\text{V.77})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{f}_1^P \\ \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{f}_2^P \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{x}_n) \mathbf{f}_n^P \end{bmatrix} = \mathbf{K}_C \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{x}_1) \mathbf{u}_1^P \\ \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{x}_2) \mathbf{u}_2^P \\ \vdots \\ \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{x}_n) \mathbf{u}_n^P \end{bmatrix} \quad (\text{V.78})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^P \\ \mathbf{f}_2^P \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{x}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \mathbf{K}_C \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{x}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2^{-1}(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_n^{-1}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^P \\ \mathbf{u}_2^P \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^P \end{bmatrix} \quad (\text{V.79})$$

L'équation discrétisée dans le système transformé s'écrit $\mathbf{F}_P = \mathbf{K}_P \cdot \mathbf{U}_P$, donc, on peut obtenir la relation $\mathbf{K}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{K}_C \cdot \mathbf{T}^{-1}$ en posant :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{x}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_n(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (\text{V.80})$$

Les autres matrices de la cellule s'écrivent de la même façon :

$$\mathbf{M}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{M}_C \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{V.81})$$

$$\mathbf{C}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}_C \cdot \mathbf{T}^{-1} \quad (\text{V.82})$$

REMARQUE 3.1

1. Pour le repère cylindrique, et dans le cas de rotation autour de l'axe Oy , la matrice $\mathbf{R}_i(\mathbf{u}_i)$ devient $\mathbf{R}_i(\theta_i)$ - la matrice de rotation autour de l'axe Oy du système, et θ_i est l'angle de rotation du point i . Dans ce cas, la matrice \mathbf{T} devient :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\theta_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2(\theta_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_n(\theta_n) \end{bmatrix} \quad (\text{V.83})$$

2. Après avoir transformé les matrices dans le nouveau système de coordonnées, les équations du modèle sont exprimées dans ce système. La relation liant les vecteurs entre les deux systèmes est :

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}_C \quad (\text{V.84})$$

$$\mathbf{U}_P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}_C \quad (\text{V.85})$$

3. Les combinaisons, le produit, l'inverse des matrices conservent les propriétés dans le nouveau système. Par conséquent, les matrices de masse \mathbf{M}_P et de rigidité dynamique \mathbf{D}_P (après avoir été transformées) possèdent les mêmes propriétés que dans le système cartésien (symétrie, positivité, ...).

■

3.3. Application aux structures périodiques

Dans le chapitre précédent, on a abordé l'application de la théorie aux structures qui possèdent des parties périodiques. Pour chaque partie périodique k , on calcule la matrice de rigidité totale associée $\mathbf{D}_{\text{tot}}^{(k)}(\omega)$. Pour les parties non périodiques, on prend le maillage normal. L'assemblage des matrices est réalisé comme dans la méthode des éléments finis classique. Pourtant, comment peut-on calculer les réponses aux noeuds qui ne participent pas dans les matrices $\mathbf{D}_{\text{tot}}^{(k)}(\omega)$?

Connaissant les réponses à la première et à la dernière sections de la partie périodique (k), les réponses aux autres sections sont calculées par la relation :

$$\mathbf{T}^{(k)} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{f}_L^n \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^{n+1} \\ \mathbf{f}_L^{n+1} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (\text{V.86})$$

où n est le numéro de la section où l'on veut calculer les réponses correspondantes. Les réponses aux noeuds intérieurs de la cellule (m) dans la partie (k) sont calculées par :

$$\mathbf{q}_I^{(m,k)} = \left[-\tilde{\mathbf{D}}_{II}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{D}}_{IL}\mathbf{q}_L + \tilde{\mathbf{D}}_{IR}\mathbf{q}_R \right) \right]^{(m,k)} \quad (\text{V.87})$$

A une fréquence ω donnée, on peut déterminer la matrice de rigidité dynamique totale de la partie (k) en connaissant celle de la cellule de base $\mathbf{D}_{\text{cell}}(\omega)$, en se basant sur la méthode de propagation d'ondes entre les cellules. La matrice $\mathbf{D}_{\text{tot}}^{(k)}(\omega)$ est calculée par la méthode présentée dans le chapitre précédent. Avec cette méthode, les calculs de valeurs propres et vecteurs propres sont réalisés avec la matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) & -(\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) \\ (\mathbf{D}_{LR} - \mathbf{D}_{RL}) & -(\mathbf{D}_{LL} + \mathbf{D}_{RR}) \end{bmatrix}^{-1}$$

Pourtant, le temps de calcul des valeurs propres pour cette matrice augmente rapidement avec $d = \dim(\mathbf{D}_{LL})$ (de l'ordre $O(8.d^3)$). Cet algorithme est donc appliqué essentiellement pour les problèmes dont le nombre de noeuds d'une section n'est pas important.

REMARQUE 3.2

1. Cette méthode exige des divisions en plusieurs parties périodiques ou non périodiques où les charges sont appliquées. Elle est donc convenable dans les cas de chargement simple.
2. Dans le cas de chargement plus compliqué, pour déterminer la réponse en un point, on applique une force unitaire ponctuelle au point examiné et on calcule toutes les réponses aux endroits où se présentent les charges. Le principe de réciprocité et une somme algébrique nous donnera la réponse au point examiné sous l'action des charges appliquées.

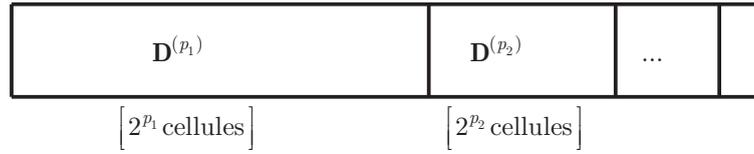
3.4. Méthode d'élimination des dds n'ayant pas de charge. Matrice de rigidité équivalente

Cet algorithme est similaire à celui pour l'élimination des noeuds intérieurs dans le chapitre précédent. L'avantage de cette méthode est que l'ordre de temps de calcul est $O(d^2 \cdot \log N)$. En pratique, dans le cas d'un grand nombre de cellules N , N peut être représenté par une somme de puissance de 2 :

$$N = \sum_i 2^{p_i} \quad \text{avec } p_1 > p_2 > \dots \quad (\text{V.88})$$

où p_i est la position du i^{e} chiffre 1 dans la représentation binaire de N : $N = [1010\dots01]_2$. La matrice de rigidité dynamique totale de la partie périodique est rapidement calculée (Fig.V.9). On suppose que les deux matrices avoisinantes sont de la forme :

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{(1)} & \mathbf{D}_{LR}^{(1)} \\ \mathbf{D}_{RL}^{(1)} & \mathbf{D}_{RR}^{(1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{(2)} & \mathbf{D}_{LR}^{(2)} \\ \mathbf{D}_{RL}^{(2)} & \mathbf{D}_{RR}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.89})$$


 FIGURE V.9. : *Algorithme d'élimination de ddls d'une partie périodique de N cellules*

Les calculs matriciels similaires à la méthode d'élimination des ddls intérieurs nous donnent la matrice équivalente de ces deux matrices.

$$\mathbf{D}^{eq} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{eq} & \mathbf{D}_{LR}^{eq} \\ \mathbf{D}_{RL}^{eq} & \mathbf{D}_{RR}^{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^{(1)} - \mathbf{D}_{LR}^{(1)} \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{RL}^{(1)} & -\mathbf{D}_{LR}^{(1)} \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{LR}^{(2)} \\ -\mathbf{D}_{LR}^{(2)} \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{RL}^{(1)} & \mathbf{D}_{RR}^{(2)} - \mathbf{D}_{RL}^{(1)} \mathbf{D}^* \mathbf{D}_{LR}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (\text{V.90})$$

où $\mathbf{D}^* = [\mathbf{D}_{RR}^{(1)} + \mathbf{D}_{LL}^{(2)}]^{-1}$.

Ayant la matrice de rigidité dynamique d'une cellule, on pourra calculer des matrices de rigidité équivalentes de $2, 4, \dots, 2^{n_b-1}$ cellules (n_b est la longueur de la représentation binaire de N). En se basant sur la représentation binaire de N , on pourra savoir quelles matrices équivalentes présentées dans la décomposition de la matrice \mathbf{D} . Un autre processus d'élimination des ddls donnera la matrice équivalente totale.

REMARQUE 3.3

1. Les algorithmes pour calculer les fonctions de réponse aux autres noeuds sont similaires à ceux de la méthode précédente. Cette méthode est appliquée et comparée dans les prochaines sections avec les résultats obtenus par ANSYS et avec la méthode périodique.
2. Quant au coût de calcul, pour la méthode de propagation d'ondes, il est de l'ordre $O(d^3)$ à cause d'un problème des valeurs propres et des vecteurs propres tandis que pour la méthode des matrices équivalentes, on n'utilise que des inversions des matrices. Le coût de calcul est donc de l'ordre $O(d^2)$ (par exemple pour l'algorithme d'inversion après avoir utilisé la transformation en forme de Hessenberg)

3.5. Exploitation de matrices élémentaires dans ANSYS

Au cours du calcul d'un problème concret dans ANSYS, des fichiers binaires sont générés. Ces fichiers sont utilisés pour stocker des données temporaires ou pour le post-traitement. Lorsqu'on obtient ces fichiers, on peut accéder aux informations du modèle comme les coordonnées, la numérotation des noeuds, des éléments et également des ddls. Les matrices de rigidité, de masse, d'amortissement et aussi de rigidité additionnelle des éléments sont stockées dans le fichier .EMAT. On peut donc les saisir pour les introduire dans un code de programmation pour un post-traitement.

L'avantage de cette exploitation est qu'on peut profiter de la librairie des éléments prédéfinis dans ANSYS. Des types d'éléments convenables sont introduits dans ANSYS avec le maillage, les matrices sont calculées avec la géométrie et les matériaux importés. Cela évite la difficulté de générer le maillage et les matrices élémentaires. Avec un problème dynamique, on n'a besoin que des trois matrices de rigidité, de masse et d'amortissement pour déterminer les déplacements.

L'inconvénient de cette méthode est qu'on ne peut pas calculer les déformations ainsi que les contraintes faute de matrices d'élasticité dynamique \mathbf{H} , des opérations différentielles \mathbf{B} et des fonctions de forme \mathbf{N} . Pourtant, les énergies peuvent être calculées via les déplacements et les matrices obtenues.

Pour générer le fichier .EMAT, il suffit d'écrire la commande EMATWRITE,YES avant d'exécuter une analyse dans ANSYS. Les matrices de rigidité additionnelle sont calculées en utilisant l'option PSTRES,ON (pour l'analyse statique linéaire) ou SSTIF,ON (pour l'analyse statique non-linéaire avec petites perturbation) ou NLGEOM,ON (pour l'analyse statique non linéaire avec grandes déformations). La commande DUMP nous permet de générer les fichiers de données en format texte à partir de ce fichier binaire. La présence des matrices de rigidité, de masse, d'amortissement et de

rigidité additionnelle est notée dans les paramètres *kygst*, *kygm*, *kycd*, *kygss* de l'enregistrement 2. Il faut bien vérifier cette présence pour s'assurer que le pointeur lit exactement la matrice élémentaire dont on a besoin.

Lorsqu'on aura saisi toutes ces données, on pourra renuméroter ou classifier des noeuds, des ddls pour calculer les matrices \mathbf{D}_{LL} , \mathbf{D}_{RR} , \dots . Une bonne numérotation des noeuds et des ddls nous permet de maîtriser les informations géométriques du modèle.

4. Application à une poutre sollicitée par une force ponctuelle

Dans cette section sont présentées quelques applications de la théorie de la méthode des éléments finis pour les structures périodiques. La validation de cette théorie est réalisée dans les cas de structures simples et d'une charge ponctuelle. La méthode se base sur l'hypothèse de non-présence de force sur les noeuds intérieurs et de l'équilibre des forces entre les cellules $\mathbf{f}_R^n = -\mathbf{f}_L^{n+1}$. C'est la raison pour laquelle la division des cellules dépend de la position de la charge. Au noeud chargé, la force de la cellule perd sa réciprocité donc on doit vérifier l'équilibre à la section ayant ce noeud.

4.1. Matrice de rigidité dynamique

La poutre de longueur L encastree à gauche et libre à droite est sollicitée par une force concentrée F à $\frac{2}{3}L$. Elle est divisée en N cellules de longueur l , donc $L = Nl$ et en 2 régions $L_1 = N_1l$ et $L_2 = N_2l$ par la force F . Ce problème est unidimensionnel et chaque noeud a 2 degrés de liberté. Alors, chaque élément de 4 degrés de liberté est représenté sur la Fig. V.10. Les matrices de rigidité et de masse d'un élément sont analytiquement données par Petyt [69].

$$\mathbf{K}_e = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_e = \frac{\rho Sl}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.91})$$

où E est le module d'Young, ρ est la densité du matériau, I le moment d'inertie et S l'aire de la section transversale. L'hypothèse d'amortissement par hystérésis est utilisée; cela donne la matrice d'amortissement $\mathbf{C}_e = \eta \mathbf{K}_e$. Ce résultat donne la matrice de rigidité dynamique $\mathbf{D}_e = \mathbf{K}_e + i\mathbf{C}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e$ dans laquelle le module d'Young complexe $\tilde{E} = (1 + i\eta)E$ est connu.

TABLEAU V.2. : Unités des grandeurs

Déplacement [u]	Rigidité [EI]	Force [F]	Moment [M]
L	$\frac{ML^3}{T^2}$	$\frac{ML}{T^2}$	$\frac{ML^2}{T^2}$

Il est plus commode de travailler avec des grandeurs adimensionnelles. Il est raisonnable de normaliser les quantités en divisant les déplacements par l , les forces et les moments par $\frac{\tilde{E}I}{l^2}$ et $\frac{\tilde{E}I}{l}$ respectivement (voir le Tab. V.2). La matrice de rigidité dynamique est donc :

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} 12 - \frac{156}{420}(kl)^2 & 6 - \frac{22}{420}(kl)^2 & -12 - \frac{54}{420}(kl)^2 & 6 + \frac{13}{420}(kl)^2 \\ 6 - \frac{22}{420}(kl)^2 & 4 - \frac{4}{420}(kl)^2 & -6 - \frac{13}{420}(kl)^2 & 2 + \frac{3}{420}(kl)^2 \\ -12 - \frac{54}{420}(kl)^2 & -6 - \frac{13}{420}(kl)^2 & 12 - \frac{156}{420}(kl)^2 & -6 + \frac{22}{420}(kl)^2 \\ 6 + \frac{13}{420}(kl)^2 & 2 + \frac{3}{420}(kl)^2 & -6 + \frac{22}{420}(kl)^2 & 4 - \frac{4}{420}(kl)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.92})$$

où $k = \sqrt{\rho Sl^2 \omega^2 / \tilde{E}I}$ est le nombre d'ondes.

4.2. Solution analytique

Dans [16], les formes modales normées d'une poutre encastree-articulée sont exprimées par :

$$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\frac{\sinh \xi(\beta l)_n}{\sinh(\beta l)_n} - \frac{\sin \xi(\beta l)_n}{\sin(\beta l)_n} \right) \quad (\text{V.93})$$

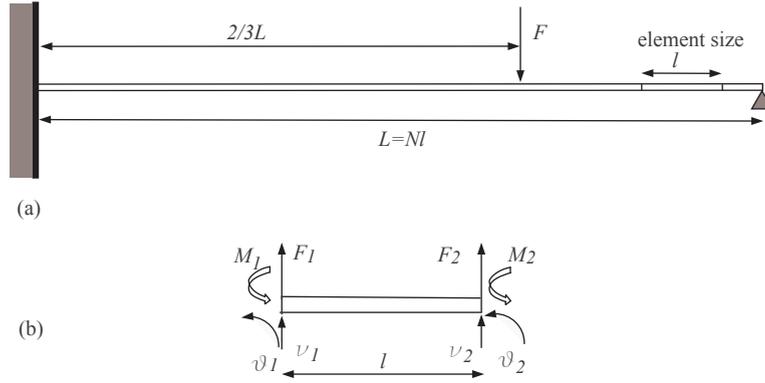


FIGURE V.10. : *Exemple de poutre : (a) poutre encastrée-simplement supportée de longueur L sollicitée par une force F à $2/3L$; (b) élément de la poutre*

où

- βl satisfait : $\tan \beta l = \tanh \beta l$
- $1 - \xi$ est la coordonnée locale du point examiné $x = (1 - \xi)l$
- Fréquences propres : $f_n = 2\pi \frac{(\beta l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$. E, I, ρ, A sont respectivement le module d'Young, le moment d'inertie, la densité et l'aire de la section de la poutre.

La solution analytique en fonction de la fréquence de la poutre sous une charge ponctuelle unitaire au point x_k s'écrit :

$$u(x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) X_n(x_k)}{\rho A} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n} \quad (\text{V.94})$$

Dans notre cas, on calcule la mobilité

$$v(x = \frac{2}{3}l, \omega) = i\omega \cdot u(x = \frac{2}{3}l, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi = \frac{1}{3}) X_n(\xi_k = \frac{1}{3})}{\rho A} \frac{i\omega}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_n} \quad (\text{V.95})$$

.

4.3. Solution périodique

La réponse en fréquence est calculée pour l'excitation F à la position $2/3L$. Les forces et les déplacements des deux parties de la poutre à gauche et à droite sont notés respectivement par les indices 1 et 2. Les équations dynamiques discrétisées pour ces deux parties sont donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_L^1 \\ \mathbf{f}_R^1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^1 \\ \mathbf{q}_R^1 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.96})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_L^2 \\ \mathbf{f}_R^2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^2 \\ \mathbf{q}_R^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.97})$$

où les matrices \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 sont données par l'Eq. (V.70) avec les matrices de propagation d'ondes calculées par l'Eq. (V.68). Les conditions aux limites, de continuation au point de division et les équations d'équilibre des forces à gauche et à droite des deux parties sont déterminées par :

$$\begin{cases} \mathbf{q}_L^1 = 0, \\ \mathbf{q}_R^1 = \mathbf{q}_L^2, \\ \mathbf{f}_R^1 + \mathbf{f}_L^2 + \begin{bmatrix} -F \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \\ M_R^2 = 0, \\ v_R^2 = 0. \end{cases} \quad (\text{V.98})$$

En assemblant les deux matrices \mathbf{D}_1 et \mathbf{D}_2 et en éliminant les degrés de liberté fixés, la matrice de rigidité dynamique de la structure totale est déterminée. Les déplacements et les rotations sont calculés par l'équation :

$$\begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{tot} \begin{bmatrix} v_L^2 \\ \theta_L^2 \\ \theta_R^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{V.99})$$

où \mathbf{D}_{tot} est la matrice totale de rigidité dynamique de la poutre. Dans cette application, la poutre est divisée en 1000 cellules. Elle est en acier avec $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Les propriétés géométriques sont $b = h = 0.001 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$. L'amortissement modal constant est pris avec $\eta = 2\zeta = 0.01$.

4.4. Solution avec la méthode de matrice équivalente

La représentation binaire de 1000 est $[1111101000]_2$. Ayant la matrice de rigidité dynamique d'une cellule calculée dans la section 4.1, on calculera les matrices équivalentes de 8,32,64,128,256,512 cellules (notées $\mathbf{D}^8, \mathbf{D}^{32}, \mathbf{D}^{64}, \mathbf{D}^{128}, \mathbf{D}^{256}, \mathbf{D}^{512}$). La matrice équivalente totale est obtenue par un processus d'élimination des ddl communs de ces matrices. Les résultats obtenus pour les solutions périodiques, de matrice équivalente et analytiques sont présentés dans la Fig. V.11. On constate une très bonne concordance entre les résultats.

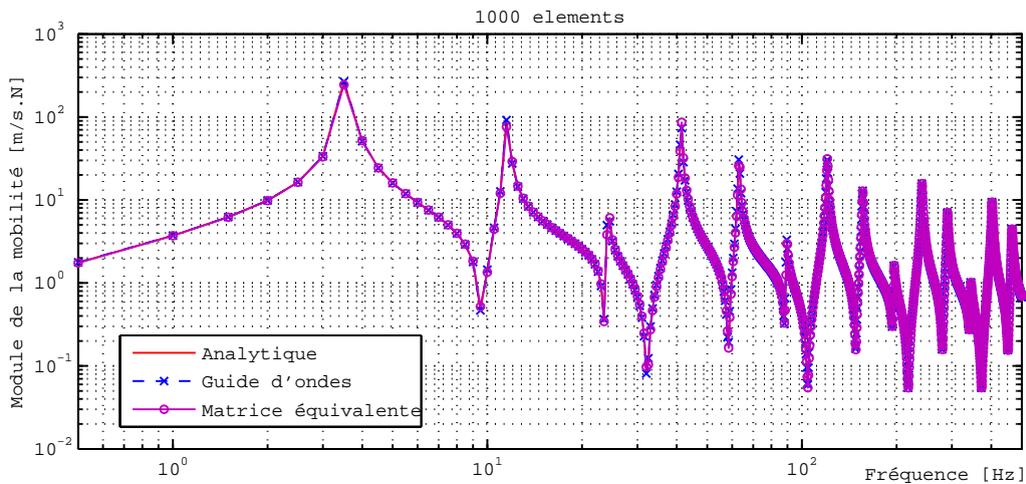


FIGURE V.11. : Comparaison de la solution périodique, de la solution de matrice équivalente dans le cas de 1000 cellules et de la solution analytique

5. Conclusion

Une méthode de type éléments finis pour les calculs de vibration des guides d'ondes et des structures périodiques est présentée. Le point clé de cette méthode est que la géométrie et la matrice de rigidité dynamique de la cellule sont obtenues par un logiciel éléments finis standard comme ANSYS ou ABAQUS avec lequel on peut mailler et calculer les matrices de rigidité, d'amortissement et de masse. On analyse les ondes propagées à travers les cellules et les constantes de propagation et les vecteurs d'ondes sont respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de transfert. Le principe est que les vecteurs d'état sont décomposés dans cette base d'ondes. Or, le comportement vibratoire d'une structure de N cellules peut être exprimé en fonction des amplitudes d'ondes par une somme algébrique des matrices de rigidité dynamique. Simplement, une expression stable et explicite est présentée pour la matrice totale de la structure.

En comparant cette méthode avec celle des éléments finis standard, le coût de calcul par la méthode de guide d'ondes est réduit grâce à un nombre beaucoup plus faible de ddls, qui sont obtenus uniquement avec le maillage d'une cellule au lieu de celui de la structure totale. Un autre avantage de cette méthode par rapport à une méthode d'éléments finis standard est que cette dernière ne profite pas de la périodicité tandis que cette méthode le permet pour les analyses harmoniques. L'exploitation des matrices de rigidité et de masse à partir d'ANSYS permet de modéliser des structures plus complexes que celles présentées dans les exemples.

Chapitre VI.

Modèle numérique périodique pour le pneumatique

On utilise la transformation du repère cylindrique en repère cartésien pour avoir la périodicité des matrices. La théorie dans le chapitre sur les structures périodiques est appliquée dans un premier temps dans le cas d'un pneu homogène pour valider l'algorithme. Le modèle avec la section et les matériaux réels est développé à la suite. Les études paramétriques sont réalisées pour obtenir la dépendance des mobilités en fonction des propriétés mécaniques des matériaux et de la pression interne.

Sommaire

1. Pneumatique de section homogène	120
1.1. Description du modèle	120
1.1.1. Propriétés des matériaux homogènes et de la géométrie	120
1.1.2. Analyse matricielle du modèle	121
1.2. Résultats numériques et comparaisons	121
1.2.1. Validation de résultats avec ANSYS	122
1.2.2. Effet de la taille des éléments	122
2. Pneumatique de section réelle	123
2.1. Géométrie et propriétés des matériaux	123
2.1.1. Validation de modes propres identifiés par le modèle numérique	123
2.1.2. Résultat et discussions	124
2.2. Cas sans précontrainte	124
2.3. Prise en compte de la précontrainte	125
2.3.1. Validation de l'algorithme	127
2.3.2. Résultats en cas de pneu avec la précontrainte	128
3. Comparaison avec des mesures	128
3.1. Sans pression	129
3.2. Prise en compte de la pression interne	130
4. Etudes paramétriques : Sensibilité aux propriétés des matériaux	130
4.1. Modification de modules élastiques	130
4.2. Influence de l'amortissement	131
4.3. Influence de la pression interne	131
4.4. Influence de la géométrie	132
5. Conclusions	133

1. Pneumatique de section homogène

1.1. Description du modèle

Dans tous les modèles mentionnés, on a supposé une simplification de la géométrie du pneumatique et sa courbure a été négligée, ce qui influence la qualité du résultat. En effet, les structures droites se sont montrées moins rigides que la structure complète, de ce fait le premier pic de résonance est apparu à une fréquence plus basse. Ce sont essentiellement la courbure et la forme géométrique avec les parois latérales qui rendent la structure plus rigide. Le pneumatique est considéré comme une structure avec une symétrie de rotation. En général, la section du pneumatique est composée de plusieurs matériaux et avec une géométrie complexe. La première modélisation est utilisée dans le cas d'un pneumatique homogène ayant des propriétés données, on prend donc les valeurs moyennes de ces propriétés.

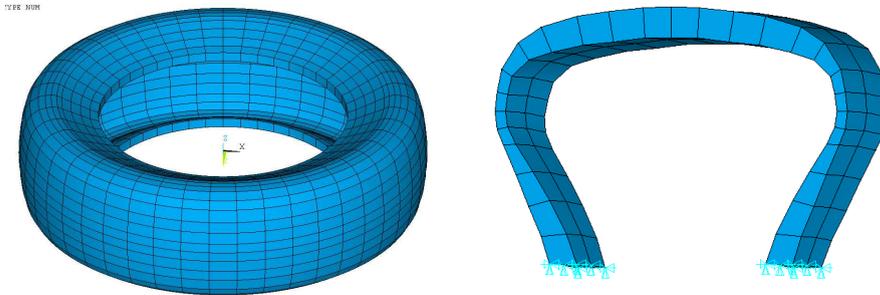


FIGURE VI.1. : *Modèle du pneumatique et une cellule élémentaire*

1.1.1. Propriétés des matériaux homogènes et de la géométrie

Les propriétés géométriques et les matériaux sont complexes. La section transversale du pneumatique se compose de plusieurs parties dont les matériaux constitutifs sont différents. Les rainures sont en général trapézoïdales et les distances entre elles sont variables et dépendent du type de pneu. Les tringles sont en acier composées par 7 fils supposés isotropes. Les couches de nylon et les grilles d'aciers distribuées à l'intérieur de la gomme sont considérées comme des matériaux orthotropes dont les propriétés mécaniques sont différentes dans deux directions transversale et circonférentielle. Pour la gomme, elle est prise comme un caoutchouc isotrope. Ces propriétés vont être déterminées dans la partie expérimentale.

Dans l'analyse de la section homogène, un seul matériau est pris comme isotrope et la géométrie est plus simple que celle dans le cas de section réelle. Ces valeurs sont données dans le Tab VI.1([2]) où R est le rayon extérieur du pneumatique, r , le rayon de la jante, E, ν, ρ, η sont respectivement le module élastique, le coefficient de Poisson, la densité et le facteur de perte du matériau homogénéisé du pneu.

TABEAU VI.1. : *Propriétés physiques et géométriques du pneumatique*

Paramètres	R	r	E	ν	ρ	η
Valeurs(SI)	0.275	0.168	8.E7	0.42	1200	0.1

Les noeuds au niveau de la jante sont fixés. On examinera essentiellement les mobilités radiale et tangentielle ponctuelles du sommet du pneumatique. L'angle entre les deux sections à gauche et à droite est de 8° . La modélisation du pneu total dans le code d'éléments finis ANSYS doit assurer le fait que l'angle des éléments divisés sur le contour est identique dans la cellule pour bien comparer les résultats (voir l'effet de la taille d'éléments sur la réponse).

1.1.2. Analyse matricielle du modèle

Dans ce problème, on examinera les fonctions de réponse en fréquence d'un pneu de matériau homogène, soumis à l'action d'une force unitaire appliquée au milieu de la bande de roulement. Après avoir éliminé les degrés de liberté fixés et calculé la matrice de rigidité dynamique totale du pneumatique, on écrit l'équation dynamique comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^T & \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{D}_{21}^T & \mathbf{D}_{22}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.1})$$

En tenant compte de la périodicité sur le contour du pneumatique, on transforme les matrices de rigidité et de masse à la section 1. Les conditions de continuité et d'équilibre impliquent (Fig VI.2) :

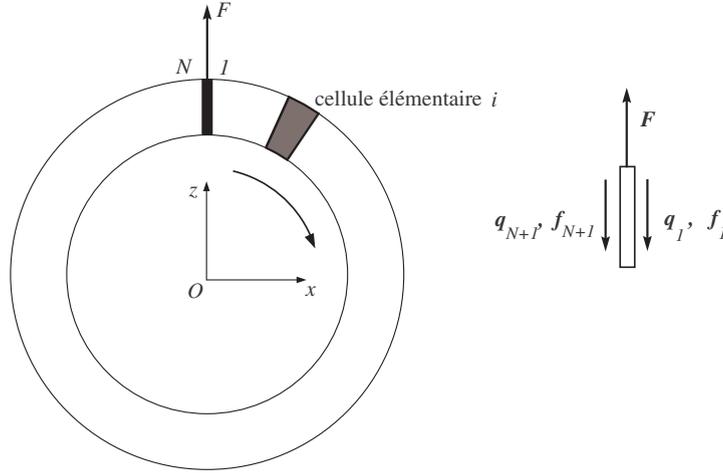


FIGURE VI.2. : *Processus de modélisation périodique*

$$\begin{cases} \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{N+1} = \mathbf{q} \\ \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{N+1} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

Des Eqs. (VI.1) et (VI.2), on obtient :

$$-\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_{N+1} = \mathbf{D}_{11}^T \mathbf{q}_1 + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{q}_{N+1} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{q}_1 + \mathbf{D}_{22}^T \mathbf{q}_{N+1} = (\mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{12}^T + \mathbf{D}_{21}^T + \mathbf{D}_{22}^T) \mathbf{q} \quad (\text{VI.3})$$

En notant $\mathbf{D}_{11}^T + \mathbf{D}_{12}^T + \mathbf{D}_{21}^T + \mathbf{D}_{22}^T = \mathbf{D}_{\text{tot}}$, on obtient l'équation dynamique :

$$\boxed{\mathbf{D}_{\text{tot}} \mathbf{q} = -\mathbf{F}} \quad (\text{VI.4})$$

1.2. Résultats numériques et comparaisons

La solution périodique dans ce cas est obtenue en se basant sur la périodicité du contour du pneumatique. Les démarches sont les mêmes que dans les modèles précédents. Pourtant, il faut remarquer que la solution périodique est applicable lorsque la matrice de rigidité dynamique des cellules possède une même valeur. En plus, les matrices de rigidité et de masse d'une cellule sont calculées dans les coordonnées cartésiennes. La transformation des ddls de la cellule en coordonnées cylindriques est nécessaire. Cela nous permet d'obtenir des cellules de même valeur de rigidité dynamique.

En appliquant la théorie abordée dans le chapitre précédent, les ddls sont transformés en coordonnées cylindriques par les rotations des angles θ_i associés aux noeuds i . La matrice de rotation pour un angle θ_i est comme suit :

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & 0 & \sin \theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_i & 0 & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (\text{VI.5})$$

1.2.1. Validation de résultats avec ANSYS

On a effectué une modélisation du pneu total avec la géométrie simple et un matériau isotrope. Une analyse harmonique est réalisée par ANSYS avec les données introduites. Les mobilités radiales et tangentielles sont calculées dans ANSYS et avec MATLAB.

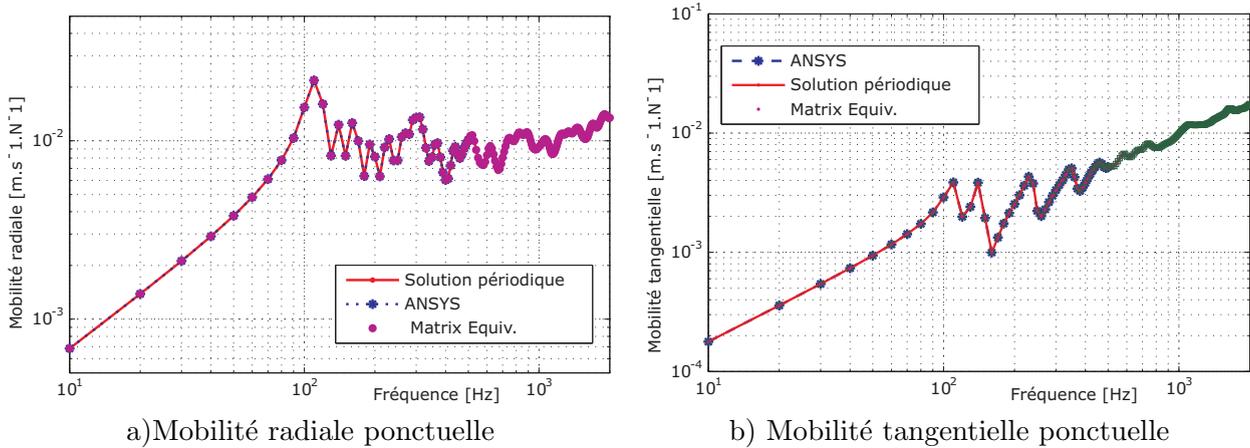


FIGURE VI.3. : Comparaison du calcul fait par ANSYS avec solution périodique et la solution par la technique d'élimination des ddls d'un point au sommet de la bande de roulement

1.2.2. Effet de la taille des éléments

Vu que le comportement vibratoire des solides dépend essentiellement du nombre d'ondes ou de la longueur d'onde, les dimensions des éléments maillés ont une influence sur la réponse. Lorsque la fréquence est basse, le pneu se comporte comme un solide rigide ($f < 100\text{Hz}$) et ces influences peuvent être négligées. Dans la bande de fréquence de poutre ou d'anneau (100-400Hz), la tension et la flexion dominent, les réponses varient en amplitude tandis que la valeur moyenne reste encore stable. Au-dessus de la fréquence d'anneau, il se produit la torsion avec des ondes transverses car la longueur d'onde est comparable à la largeur du pneu. Les modes et donc les réponses sont considérablement différentes pour les hautes fréquences.

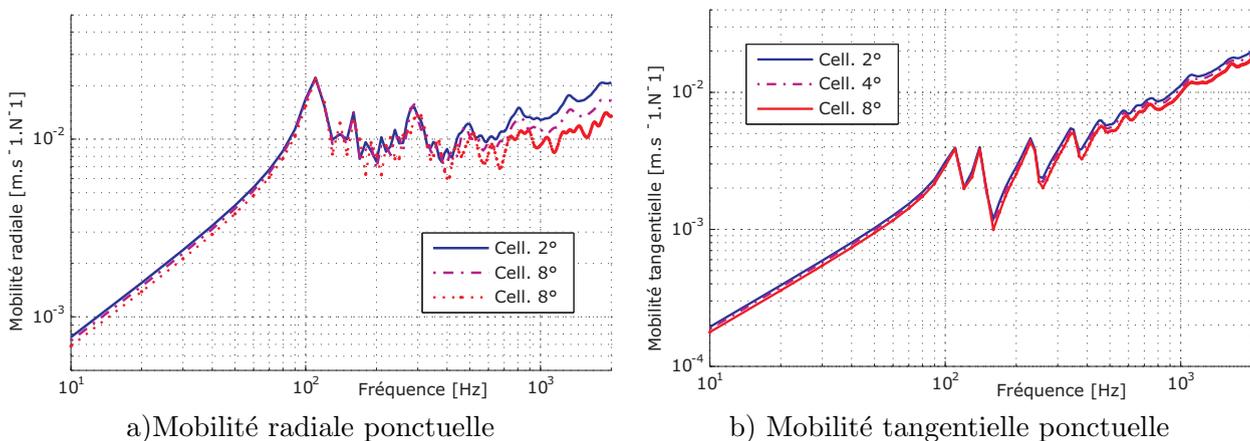


FIGURE VI.4. : Comparaison des solutions obtenues par MATLAB dans les cas de cellules de 2° , 4° , 8° avec un point au sommet de la bande de roulement

2. Pneumatique de section réelle

2.1. Géométrie et propriétés des matériaux

La section transversale du pneumatique et la distribution de matériaux sont présentées sur la Fig. VI.5. On remarque que l'on peut faire varier l'angle de la cellule élémentaire pour obtenir la précision voulue. Le facteur le plus important de la modélisation est le nombre de noeuds dans une section du pneu. Le pneumatique est considéré comme un solide de révolution. Les conditions aux limites sont appliquées dans la zone de contact avec la jante (Fig. VI.5).



FIGURE VI.5. : Géométrie et distribution de matériaux dans la section du pneumatique modélisé

2.1.1. Validation de modes propres identifiés par le modèle numérique

Cette validation numérique est effectuée à travers le logiciel d'éléments finis ANSYS. Comme les fréquences de résonance sont suffisamment élevées, les propriétés dynamiques des matériaux sont prises en compte dans la modélisation. Les modes sont représentés sur des graphiques pour analyser la forme de vibration. Une section réelle est introduite dans ANSYS. Le pneumatique est considéré comme un solide de révolution à partir de la section de base préétablie. Les propriétés sont implémentées dans la bande de roulement et dans la partie en caoutchouc (Tab. VI.2). Les conditions aux limites sont appliquées au niveau de la jante. Dans la simulation, on fixe tous les noeuds correspondant à ce niveau.

TABLEAU VI.2. : Propriétés mécaniques introduites dans ANSYS

Bande de roulement						Caoutchouc	
E_x [MPa]	E_y [MPa]	E_z [MPa]	ν_{xy}	ν_{yz}	ν_{xz}	E_c [MPa]	ν_c
663	24	20	0.4	0.2	0.2	21	0.49

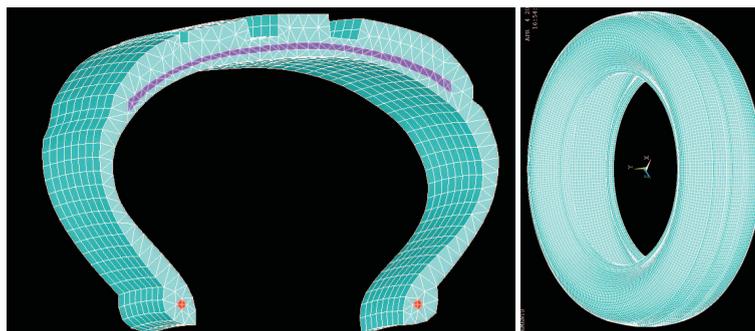


FIGURE VI.6. : Modélisation avec la symétrie cyclique d'une cellule et du pneu total

En cas d'analyse modale, on peut utiliser l'option de symétrie cyclique dans ANSYS pour réduire le temps de calcul. Les résultats sont présentés en groupes d'index harmoniques (pas dans l'ordre

croissant). La pression interne (2 bars, mesurée par une pompe) est introduite comme une étape de chargement et l'analyse modale est réalisée avec la condition initiale précontrainte.

2.1.2. Résultat et discussions

Le résultat de l'analyse modale du pneumatique avec ANSYS est représenté sur la Fig. VI.7. Dans cette série de résultats se présentent les modes de la bande de roulement et le premier mode de glissement selon l'axe du pneu. Ces valeurs de fréquences propres montrent une assez bonne cohérence avec la mesure, car dans le modèle, on néglige les rainures transverses du pneu.

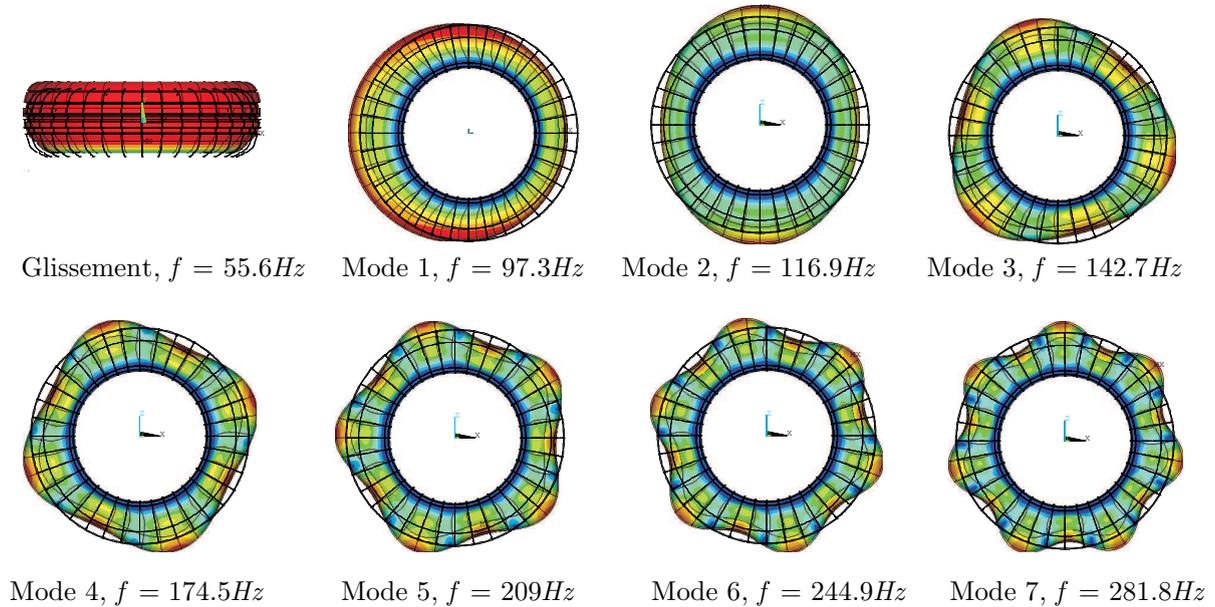


FIGURE VI.7. : Résultats des modes propres du pneu gonflé modélisé dans ANSYS

Retournons à l'identification des modes avec PULSE, on trouve bien que le premier mode de la section transverse correspond au mode de glissement du pneu selon l'axe du pneu. La fréquence 100Hz détectée est associée au mode 1 qui est difficile à déterminer avec les séries de mesures effectuées. Le Tab. VI.3 montre la comparaison des modes propres de la bande de roulement mesurés et calculés avec ANSYS dans deux cas : sans pression et avec pression interne.

TABLEAU VI.3. : Comparaison des modes propres identifiés avec PULSE et calculés avec ANSYS

Sans pression interne			Avec pression interne		
Mode bande	Mesure [Hz]	ANSYS [Hz]	Mode bande	Mesure [Hz]	ANSYS [Hz]
1	*	75	1	*	98.4
2	82	83.5	2	122	117
3	98	95.4	3	146	141
4	114	113	4	174	172
5	*	132	5	208	205

2.2. Cas sans précontrainte

C'est le cas le plus simple de charge car on ne tient pas compte de l'influence de la charge statique dans l'analyse dynamique. Les matrices d'une cellule sont donc les mêmes que celles appartenant à la structure totale. La méthode de résolution du problème est la même que celle dans le cas de la section homogène. La différence principale entre ce cas et le cas mentionné est le traitement de la

géométrie, de la distribution des matériaux hétérogènes et de l'exploitation des conditions aux limites plus compliquées. Dans la modélisation de la cellule avec ANSYS, seulement les noeuds collés à la jante sont fixés. Il n'est pas facile de déterminer ces noeuds. Il vaut mieux exporter une liste de ces noeuds dans un fichier et le lire dans Matlab. Or, lorsqu'on effectue l'élimination de degrés de liberté fixés, seulement les ddls associés à ces noeuds sont pris en compte.

Dans ce cas, on applique une force concentrée à la bande de roulement, à la même position dans le cas de mesure "Pot vibrant à la bande de roulement" dans le chapitre IV. Les mobilités aux autres points sont calculées. Comme toutes les matrices sont représentées dans le repère cartésien, les mobilités sont également présentées dans ce repère.

Il faut remarquer qu'une des directions orthotropes de la bande de roulement est le long du contour. On aura deux difficultés dans la modélisation numérique avec la méthode périodique : dans un premier temps, on ne peut pas modéliser les propriétés des matériaux suivant une courbe et dans un second temps, comme on ne peut définir les propriétés mécaniques suivant une direction d'un élément, lorsque le maillage est assez gros, l'extrapolation engendre des écarts cumulés. C'est la raison pour laquelle on utilisera un matériau homogène au lieu de la bande de roulement orthotrope. Le comportement sera donc similaire et les pics sont différents des modes propres mesurés représentés dans le Tab. VI.3. La Fig. VI.8 montre la comparaison des résultats calculés par la méthode périodique avec une

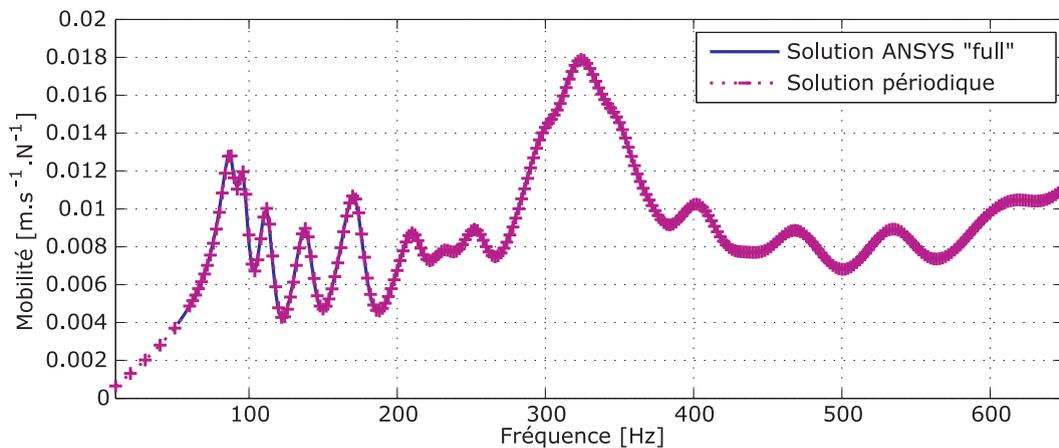


FIGURE VI.8. : Comparaison des mobilités ponctuelles au point d'application de la force, calculées par le modèle périodique et par ANSYS dans le cas sans pression interne

cellule de 6° avec la solution "full" dans ANSYS en modélisant un pneu total. La bande de roulement est remplacée par un matériau homogène avec le module élastique égal à 663 MPa et le coefficient de Poisson égal à 0.4. L'amortissement est pris comme une valeur moyenne des valeurs détectées par PULSE, approximativement estimé égal à 0.1. Ce résultat montre une bonne concordance de la méthode périodique avec un code de calcul largement utilisé dans les problèmes dynamiques.

Concernant le coût de calcul, avec la solution "full" dans ANSYS, il faut un beaucoup plus grand fichier pour sauvegarder les résultats de toutes les fréquences calculées. A titre d'exemple, pour un pneu total, maillé avec 180 sections, chaque section a 173 noeuds, le fichier de résultats dans ANSYS atteint 40GB tandis que la solution périodique a besoin seulement de quelques dizaines de MB pour sauvegarder les variables, car l'espace requis pour cette solution ne dépend pas du nombre de cellules. La solution d'un pas de fréquence nécessite 720 secondes avec ANSYS contre 13 secondes avec la solution périodique. La méthode périodique nous donne donc une grande possibilité de calculer avec le maillage plus fin pour un besoin de précision.

2.3. Prise en compte de la précontrainte

La vibration du système est considérée comme la perturbation autour de l'équilibre établi par la précontrainte σ^0 . D'après [52], une structure est dite précontrainte lorsqu'elle est soumise à un champ de contraintes initial σ^0 . On s'intéresse souvent aux valeurs dans la configuration associée à l'état

précontraint. Les déplacements, déformations et contraintes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^0 + \mathbf{u}^* \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^*\end{aligned}\quad (\text{VI.6})$$

Ils expriment respectivement l'état de déplacements, de déformations et de contraintes dans la configuration \mathbf{V}^0 prise comme référence.

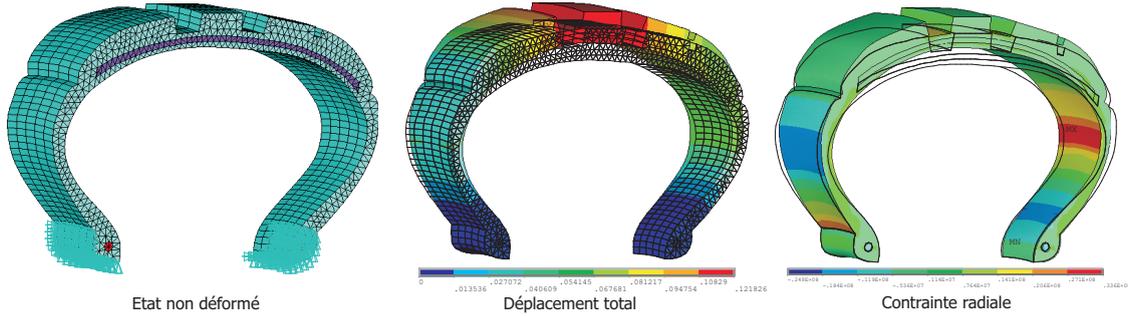


FIGURE VI.9. : *Etats non déformés, déplacement total et contrainte radiale avec la pression interne de la cellule*

En explicitant le principe de Hamilton avec $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(lin)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(nonlin)} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ (non linéaire), dans deux cas de structures extérieurement et intérieurement précontraintes, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\delta \mathbf{u}^* \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{T}^* - \mathcal{V}_{int}^* - \mathcal{V}_g - \mathcal{V}_{ext}^*) dt &= 0 \\ \delta \mathbf{u}^*(t_1) = \delta \mathbf{u}^*(t_2) &= 0\end{aligned}}\quad (\text{VI.7})$$

où \mathcal{T}^* , \mathcal{V}_{int}^* , \mathcal{V}_{ext}^* et \mathcal{V}_g sont respectivement l'énergie cinétique de déplacements additionnels ($\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$), l'énergie potentielle des déformations linéaires additionnelles (correspondant à la partie linéaire $\boldsymbol{\varepsilon}^{(lin)}$), le potentiel des forces externes additionnelles, l'énergie géométrique de précontrainte. En se limitant aux termes du second ordre, ils ont les formes :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^* &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{V}^*} \rho^* \mathbf{u}^* \mathbf{u}^* dV \\ \mathcal{V}_{int}^* &= \int_{\mathbf{V}^*} \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(lin)} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{*(lin)} dV \\ \mathcal{V}_g &= \int_{\mathbf{V}^*} \boldsymbol{\sigma}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^{*(nonlin)} dV \\ \mathcal{V}_{ext}^* &= - \int_{\mathbf{V}^*} \bar{\mathbf{X}}^* \mathbf{u}^* dV - \int_{S_\sigma} \bar{\mathbf{t}}^* \mathbf{u}^* dS\end{aligned}\quad (\text{VI.8})$$

Ici, on peut considérer la vibration de la structure autour de l'état d'équilibre précontraint (correspondant au volume \mathbf{V}^*) comme dans le cas normal (sans précontraintes) en ajoutant le terme de l'énergie géométrique précontrainte. La rigidité totale est donc prise comme la somme de la rigidité normale \mathbf{K} et de la rigidité additionnelle précontrainte \mathbf{K}_G représentant la partie quadratique de la déformation additionnelle non linéaire et déterminée par :

$$\mathcal{V}_g = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{U} \mathbf{K}_G \mathbf{U}\quad (\text{VI.9})$$

Pour chaque élément, si l'on prend la déformation au point \mathbf{x} comme dans l'expression $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U} = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}$ (où \mathbf{D} , \mathbf{N} , \mathbf{B} sont respectivement les matrices d'opérateur différentiel, de

fonctions de forme et de dérivée de \mathbf{N}), la partie non linéaire de la déformation est donc :

$$\varepsilon^{*(nonlin)} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{BU})^t \cdot (\mathbf{BU}) \quad (\text{VI.10})$$

L'énergie additionnelle dépend de la précontrainte et s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{V}_g = \frac{1}{2} \int_{V^*} \boldsymbol{\sigma}^0 : [(\mathbf{BU})^t \cdot (\mathbf{BU})] dV \quad (\text{VI.11})$$

La matrice de rigidité dynamique devient $\mathbf{D} = [\mathbf{K} + \mathbf{K}_G] + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}$ et on traite le problème de façon similaire au cas sans précontrainte en prenant la matrice de rigidité égale à $[\mathbf{K} + \mathbf{K}_G]$. Si l'on suppose que le gonflement est un processus linéaire (la précontrainte varie donc linéairement), on peut déterminer la matrice \mathbf{K}_G à la pression p quelconque sans la recalculer avec les éléments finis en se basant sur :

$$\mathbf{K}_G(p) = \frac{p}{p_0} \mathbf{K}_G(p_0) \quad (\text{VI.12})$$

Avec cette hypothèse, on pourra optimiser la pression de gonflement avec une fonction d'optimisation choisie.

La matrice \mathbf{K}_G peut être obtenue à partir d'ANSYS en utilisant l'option de précontrainte (avec la commande PRES,ON dans ANSYS). Le problème restant est de savoir comment on peut calculer cette matrice pour une cellule en s'assurant que celle-ci ait le même rôle dans la matrice globale du pneu total. On devra ajouter des conditions supplémentaires à la modélisation de la cellule dans ANSYS car les champs de contraintes et de déformation de la cellule sous la charge statique ne sont pas les mêmes que ceux dans la structure totale. La rigidité additionnelle n'est donc pas la même et on ne pourra pas ajouter cette valeur dans la rigidité originale.

En tenant compte de ce phénomène, dans le cas où il n'y a que la pression interne, la charge statique est symétrique, on peut appliquer les conditions de symétrie cyclique (ou condition de périodicité). On impose des contraintes sur les déplacements des noeuds des deux sections de la cellule pour que ces deux sections restent planes (et l'angle entre ces deux sections est conservé) après avoir mis la pression. Avec ces conditions, les déplacements de tous les points sont uniquement radiaux. Or, on remplace la participation de la partie restante sur la cellule par une fixation de déplacements sur les deux sections à gauche et à droite. Les champs de contraintes et de déformations sont donc identiques le long du contour du pneumatique (Fig. VI.9).

Une méthode pour vérifier si la matrice de rigidité fournie par ANSYS a déjà compté l'effet de rigidité additionnelle est de voir le paramètre écrit dans le fichier **.emat** généré. C'est le paramètre **kygss** dans l'enregistrement 2 ou le paramètre **sskey** à chaque groupe des matrices élémentaires de ce fichier. Les matrices de rigidité, de masse, d'amortissement, de rigidité additionnelle du n^{eme} élément sont stockées dans les enregistrements numérotés $2 + 7n + j, j = \overline{1,4}$.

2.3.1. Validation de l'algorithme

On réalisera un modèle d'anneau pour valider et comparer l'algorithme en tenant compte de la rigidité géométrique \mathbf{K}_G . La section est rectangulaire de dimensions 2cm \times 10cm. Le rayon extérieur est de 25cm. Le matériau est considéré comme caoutchouc isotrope ($E=20\text{MPa}, \nu = 0.49$). L'angle des cellules est de 2°. La pression interne est 2bars. Les deux schémas sans pression et avec pression interne sont exécutés et comparés avec le code d'éléments finis ANSYS.

La Fig. VI.10 montre le résultat des mobilités ponctuelles calculées par ANSYS et avec la méthode périodique en cas d'un anneau soumis une force au milieu de la bande. On peut voir un décalage des modes propres de vibration en raison de la pression interne. D'autre part, l'algorithme de calcul des vibrations en tenant compte de la rigidité géométrique est validé par une bonne concordance entre les deux courbes obtenues par ANSYS et avec la méthode présentée ci-dessus. On utilise alors cette méthode pour calculer dans le cas d'un pneumatique gonflé en tenant compte de la pression interne.

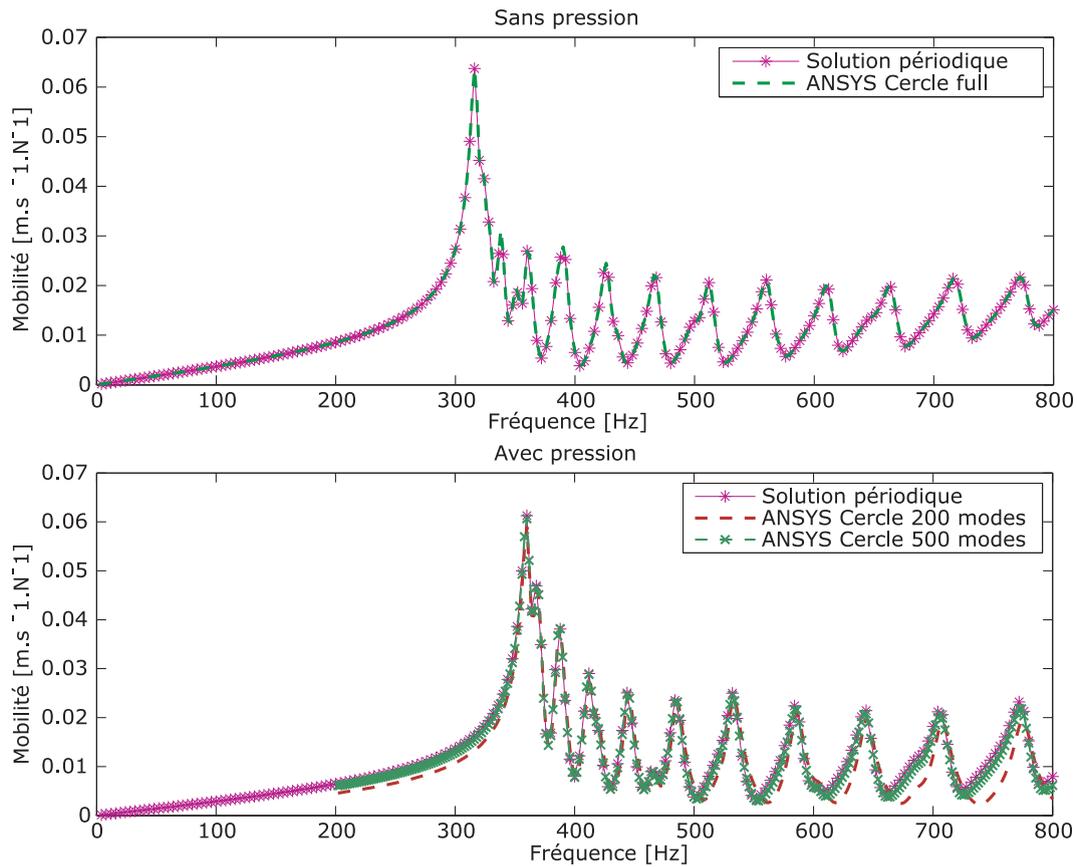


FIGURE VI.10. : Comparaison des mobilités calculées par ANSYS et par la solution périodique d'un cercle. Validation de l'algorithme avec la rigidité géométrique

2.3.2. Résultats en cas de pneu avec la précontrainte

La Fig. VI.11 montre les résultats obtenus par le modèle périodique et ceux obtenus par ANSYS aux points 1 et 5 de la section transversale du pneumatique dans le chapitre IV. Les matériaux utilisés sont les mêmes que ceux dans le cas sans pression. La pression appliquée est de 2bars. Ceux qui sont présentés montrent une bonne cohérence entre la méthode de calcul de la matrice de rigidité totale et ANSYS. On voit bien que les mobilités aux deux points 1 et 5 ne sont pas égales car la section n'est pas symétrique. Le comportement d'anneau se termine à environ 400Hz et il devient à celui d'un milieu continu 3D avec une influence importante des modes de torsion. Le résultat confirme encore une fois l'exactitude de l'implémentation de la matrice de rigidité géométrique dans la méthode périodique.

3. Comparaison avec des mesures

Dans cette section, on utilise les propriétés orthotropes de la bande de roulement pour modéliser la cellule. Cette utilisation est prise en raison de bonnes valeurs des pics que l'analyse modale a donné, malgré des difficultés dans la modélisation des matériaux orthotropes concernant le maillage. Les matériaux utilisés sont comme dans la section 2.1. Les amortissements modaux obtenus par PULSE sont introduits dans le programme. On examine le cas où la force d'application est au milieu de la bande de roulement et les mobilités des positions correspondant à celles de la mesure sont calculées et comparées.

Comme les mobilités sont capturées par les accéléromètres, elles sont donc mesurées dans les directions normales du pneumatique. Alors, à chaque point, on détermine le vecteur normal du pneumatique et la valeur à comparer avec la mesure est calculée par la projection du vecteur mobilité avec le vecteur normal. Cette valeur est simplement calculée par un produit scalaire entre ces deux vecteurs.

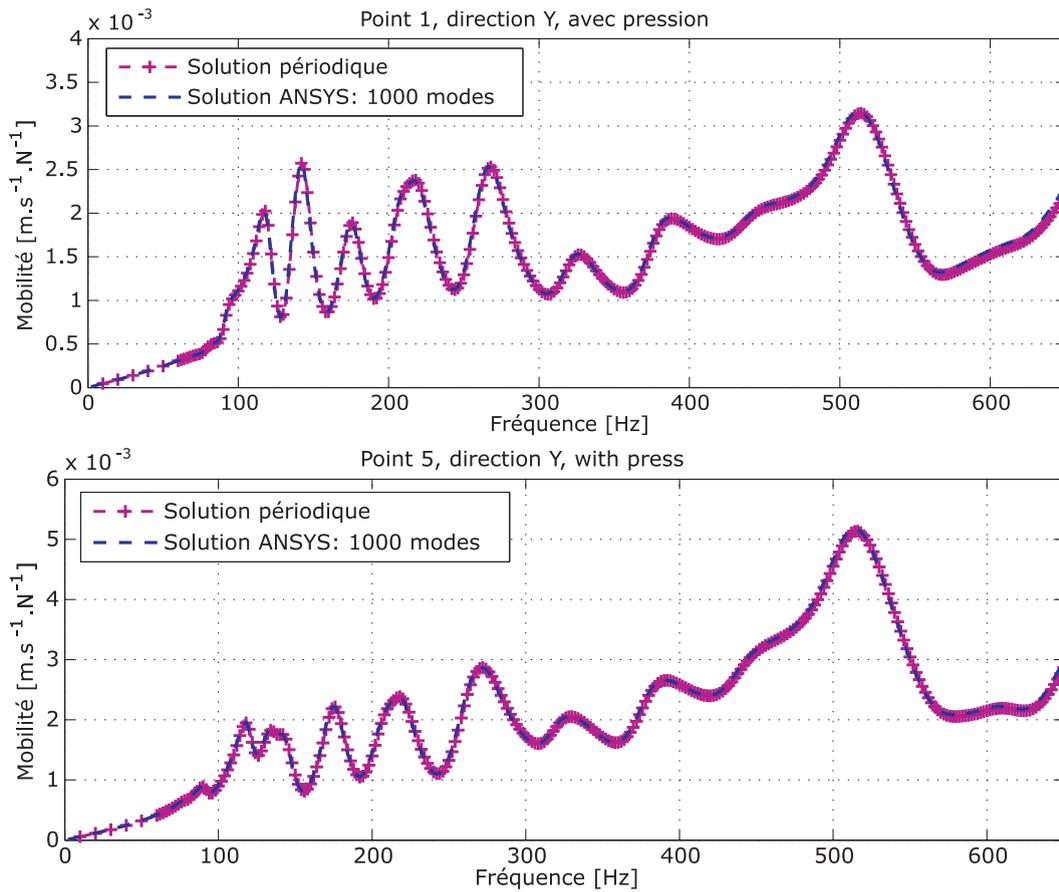


FIGURE VI.11. : Comparaison des mobilités calculées par la méthode périodique et par la méthode de superposition modale dans ANSYS

3.1. Sans pression

Avec la modélisation numérique, les rainures transversales le long du contour ne sont pas prises en compte. On compare seulement les mobilités mesurées et calculées dans la section. La Fig. VI.12

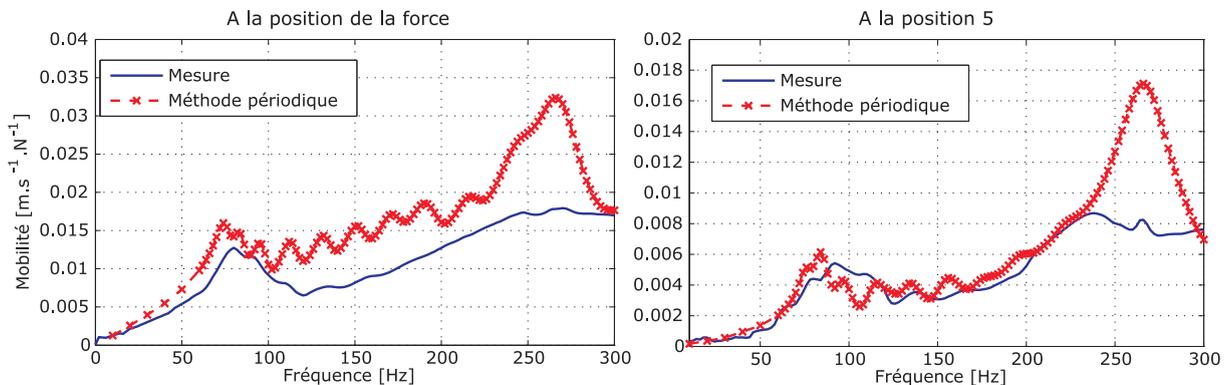


FIGURE VI.12. : Comparaison des mobilités mesurées et calculées par la méthode périodique. Cas sans pression

montre la comparaison des mobilités mesurées dans le cas sans pression interne et calculées avec la méthode périodique à la position d'application de la force et en position 5. Cette figure montre essentiellement le phénomène de l'effet local à la position d'application de la force. Dans le schéma des mesures, le contact entre le pot vibrant et le pneumatique est une zone finie tandis que dans la modélisation, la force est ponctuelle. Les comportements dans ces deux cas sont donc différents.

D'autre part, lorsque la pression est égale à 0, le pneu n'est pas dans un bon contact avec la jante car

la force qui garde le contact n'est pas suffisamment grande. En outre, même à la phase initiale où il n'y a pas la pression interne, le montage du système pneumatique-jante a déjà engendré une précontrainte de flexion dans la section du pneu. Ce phénomène provoque des difficultés et des versatilités dans l'identification des amortissements. La modélisation n'est donc pas proche de la réalité.

3.2. Prise en compte de la pression interne

Le schéma d'application de l'algorithme dans ce cas est similaire à celui appliqué avec l'anneau homogène circulaire. Les conditions aux limites et le maillage sont les mêmes que dans le cas sans pression. La Fig. VI.13 présente la comparaison de mobilités mesurées dans le cas avec la pression interne et

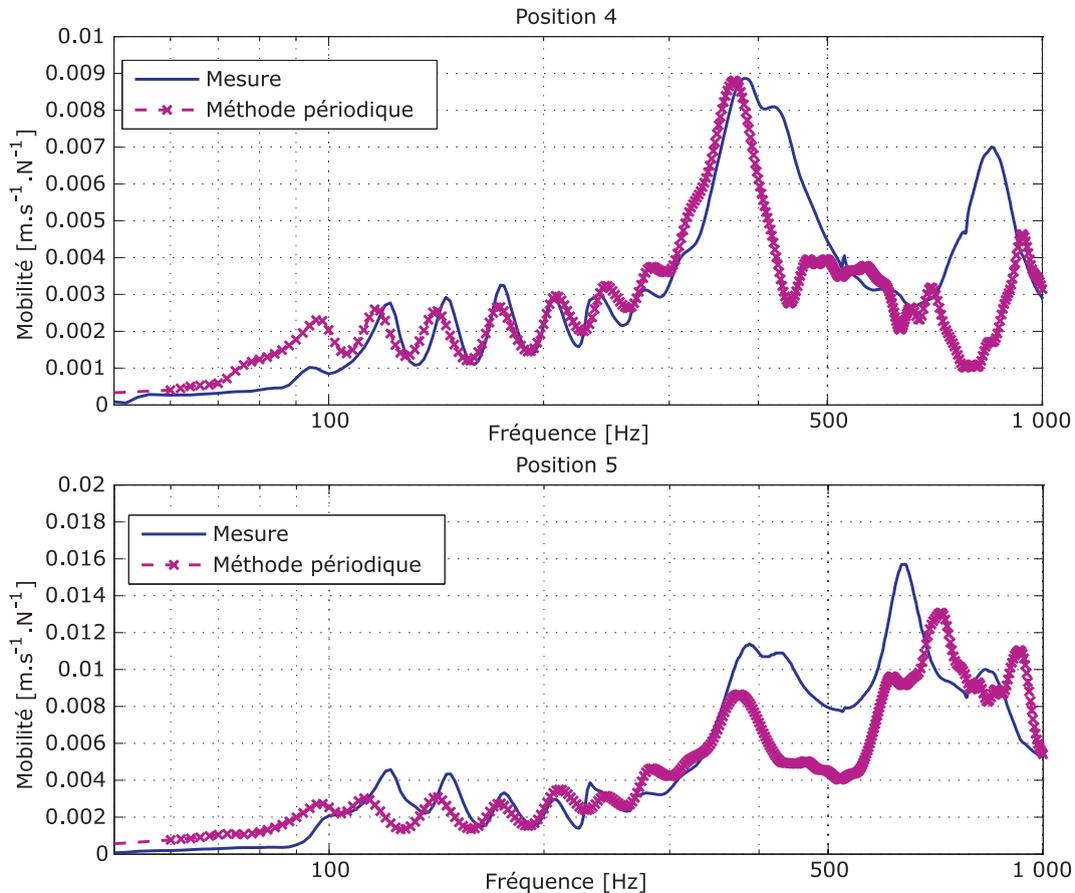


FIGURE VI.13. : Comparaison des mobilités mesurées et calculées par la méthode périodique. Cas avec pression

calculées avec la méthode périodique en tenant compte de la matrice de rigidité géométrique. Cependant, il existe encore des écarts entre les valeurs numériques et expérimentales, pouvant provenir des modules effectifs des matériaux et de la détermination de l'amortissement par PULSE. En réalité, les valeurs des amortissements modaux utilisés sont de type hystérétique. Les résultats montrent que pour les modes de torsion, la mobilité mesurée est plus grande que celle calculée par la méthode numérique. Cela pourrait être dû à l'absence des rainures transversales dans la modélisation. Le manque de ces rainures, rend le pneu plus rigide.

4. Etudes paramétriques : Sensibilité aux propriétés des matériaux

4.1. Modification de modules élastiques

La partie de tringles en acier est très proche des noeuds fixés et donc, elle n'a pas d'influence importante sur le comportement dynamique du pneu total. Le pneu possède un grand volume en

caoutchouc. Celui-ci doit avoir une grande influence sur la réponse. Comme le caoutchouc est considéré incompressible, on modifie seulement le module élastique du caoutchouc avec les coefficients 0.5 et 2. Plus cette valeur est grande, plus la mobilité est petite. On peut voir également un “mouvement” des modes propres. Pourtant, les modes de torsion suivant le contour du pneu sont moins influencés par le changement du module élastique (Fig. VI.14). Ils sont influencés de façon importante par la géométrie.

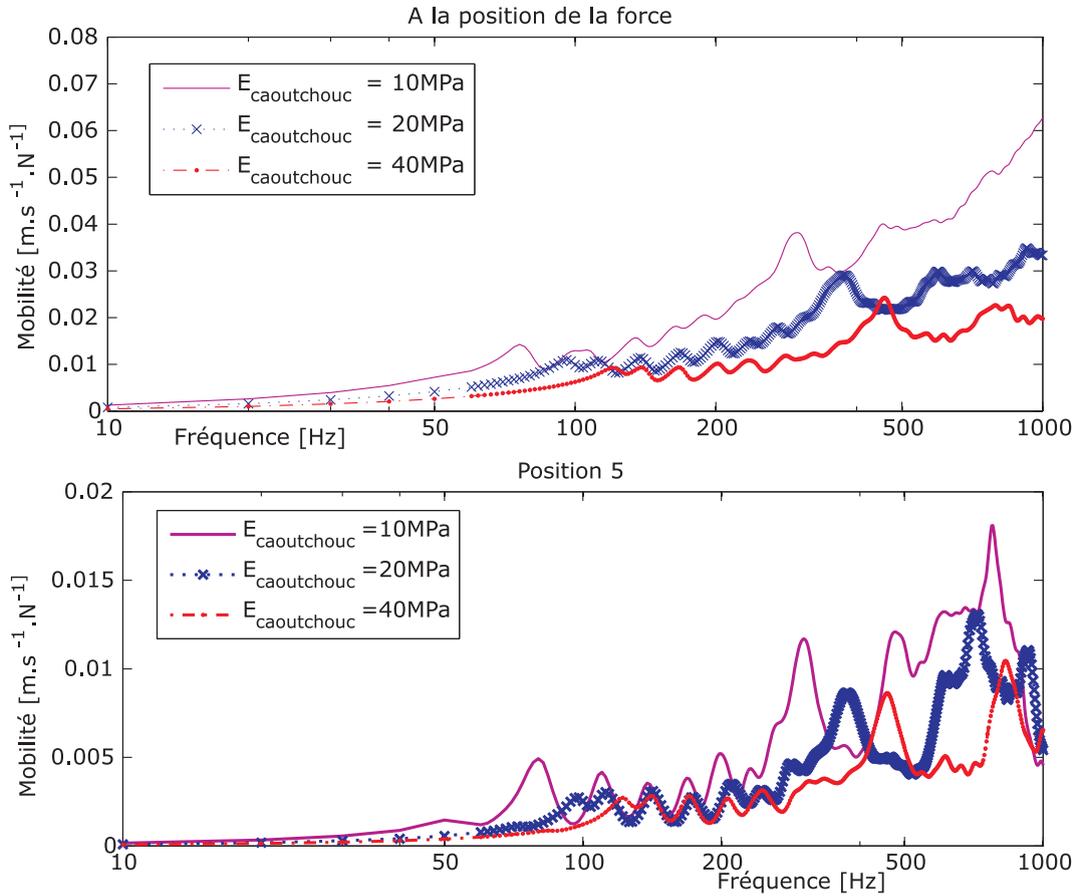


FIGURE VI.14. : Sensibilité des modules élastiques du caoutchouc constituant le pneu

4.2. Influence de l'amortissement

Dans la mesure avec PULSE, le coefficient d'amortissement identifié varie dans l'intervalle [10, 20]%. Il dépend des modes de vibration de chaque partie du pneu et non seulement des modes globaux. C'est la raison pour laquelle il reste un décalage essentiellement aux pics des courbes de réponse.

En introduisant plusieurs valeurs de l'amortissement dans le modèle périodique, on obtiendra les mobilités correspondant à tous les points. Les Figs. VI.15 et VI.16 montrent les résultats calculés au point 1 et à la position de la force sous l'action d'une force unitaire harmonique appliquée au sommet de la bande de roulement. Avec les petits amortissements, on peut bien voir les pics correspondant aux modes propres de vibration du pneumatique. Plus l'amortissement est grand, moins les pics sont pointus. A un certain amortissement, a lieu une disparition de quelque modes car les modes sont trop couplés. A haute fréquence, on ne voit que les modes globaux du pneu car les modes locaux sont beaucoup amortis.

4.3. Influence de la pression interne

En supposant que la contrainte statique est linéairement dépendante de la pression interne, on peut utiliser l'expression

$$\mathbf{K}_G(p) = \frac{p}{p_0} \mathbf{K}_G(p_0) \quad (\text{VI.13})$$

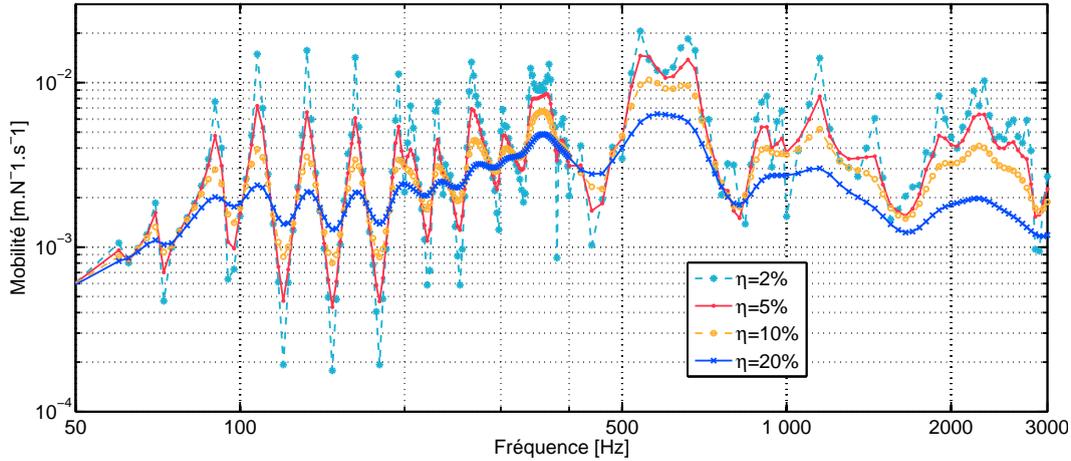


FIGURE VI.15. : Amplitude de la mobilité calculée au point 1 de la section pour plusieurs amortissements. Force radiale au sommet

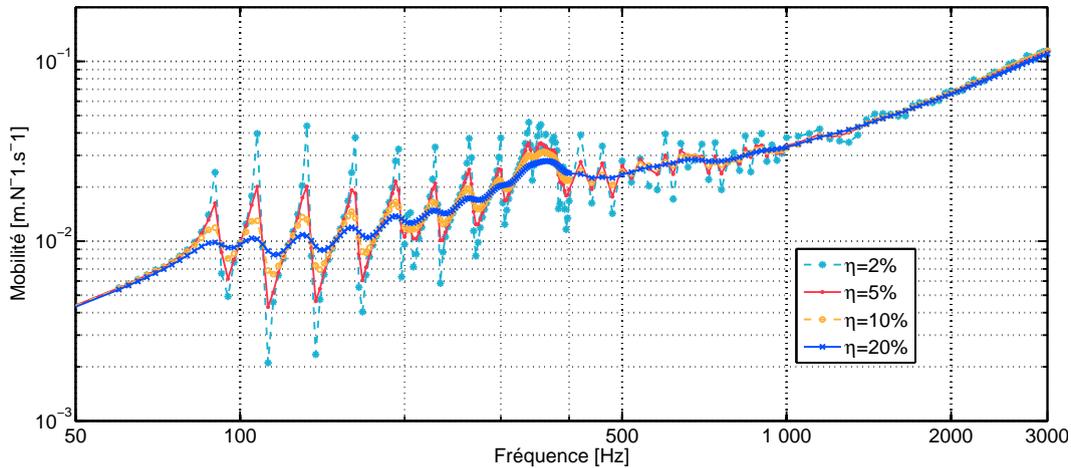


FIGURE VI.16. : Amplitude de la mobilité calculée au point d'application de la force pour plusieurs amortissements. Force radiale au sommet

En modifiant la pression interne, la matrice de rigidité additionnelle \mathbf{K}_G est changée. En introduisant cette quantité dans la modélisation du pneumatique, on obtiendra les fonctions en fréquence en fonction de la pression interne. Les mobilités calculées sont représentées sur les Figs. VI.17 et VI.18. Plus la pression augmente, plus le pneumatique est rigide. Dans l'intervalle [0-3000]Hz, au point d'application de la force, la rigidité du pneu influence considérablement la réponse. L'allure globale de la mobilité tend vers celle d'un système à un degré de liberté.

4.4. Influence de la géométrie

L'influence de la géométrie est abordée par la comparaison des analyses dynamiques dans deux cas : pas de rainures et avec des rainures. Les propriétés mécaniques des matériaux sont conservées constantes comme dans les calculs précédents. Les mobilités à la même position de la force dans les deux cas sont calculées. La Fig. VI.19 montre le résultat de comparaison des mobilités entre deux cas : sans et avec rainures. Dans le cas de calcul avec des rainures, le pneu est plus léger et donc les modes propres sont plus grands.

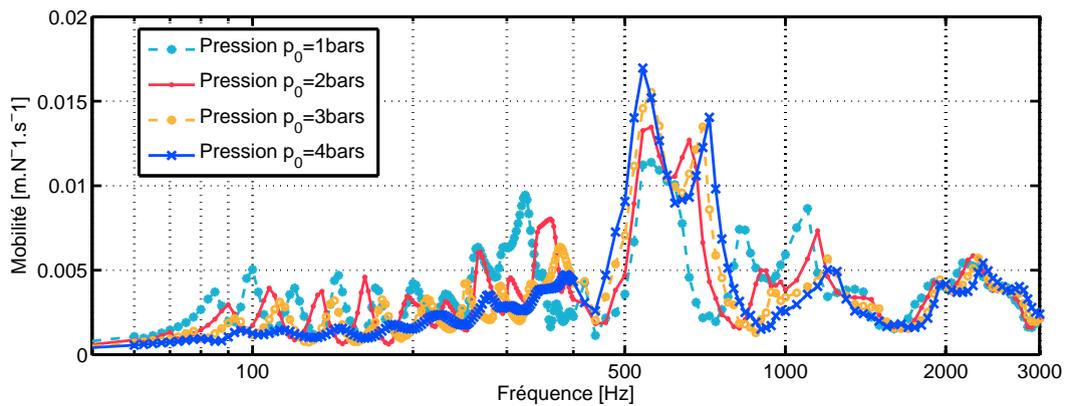


FIGURE VI.17. : Amplitude de la mobilité calculée au point 1 de la section à plusieurs pressions. Force radiale au sommet

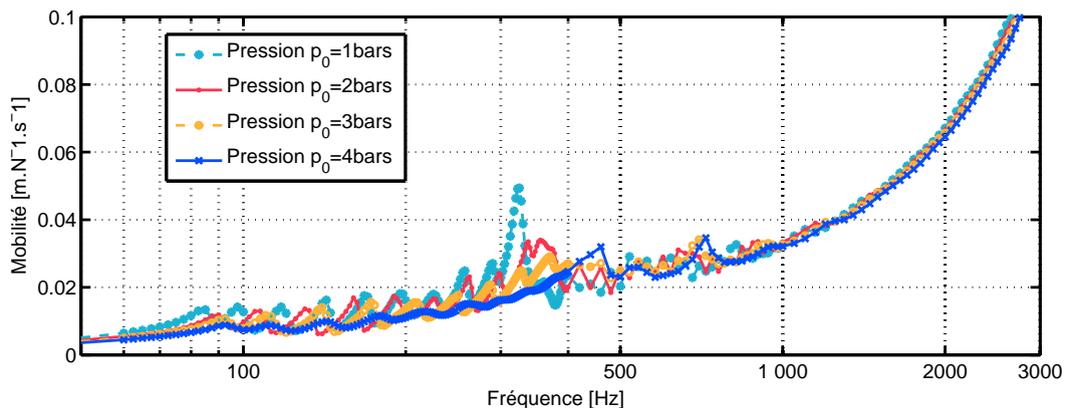


FIGURE VI.18. : Amplitude de la mobilité calculée à la force à plusieurs pressions. Force radiale au sommet

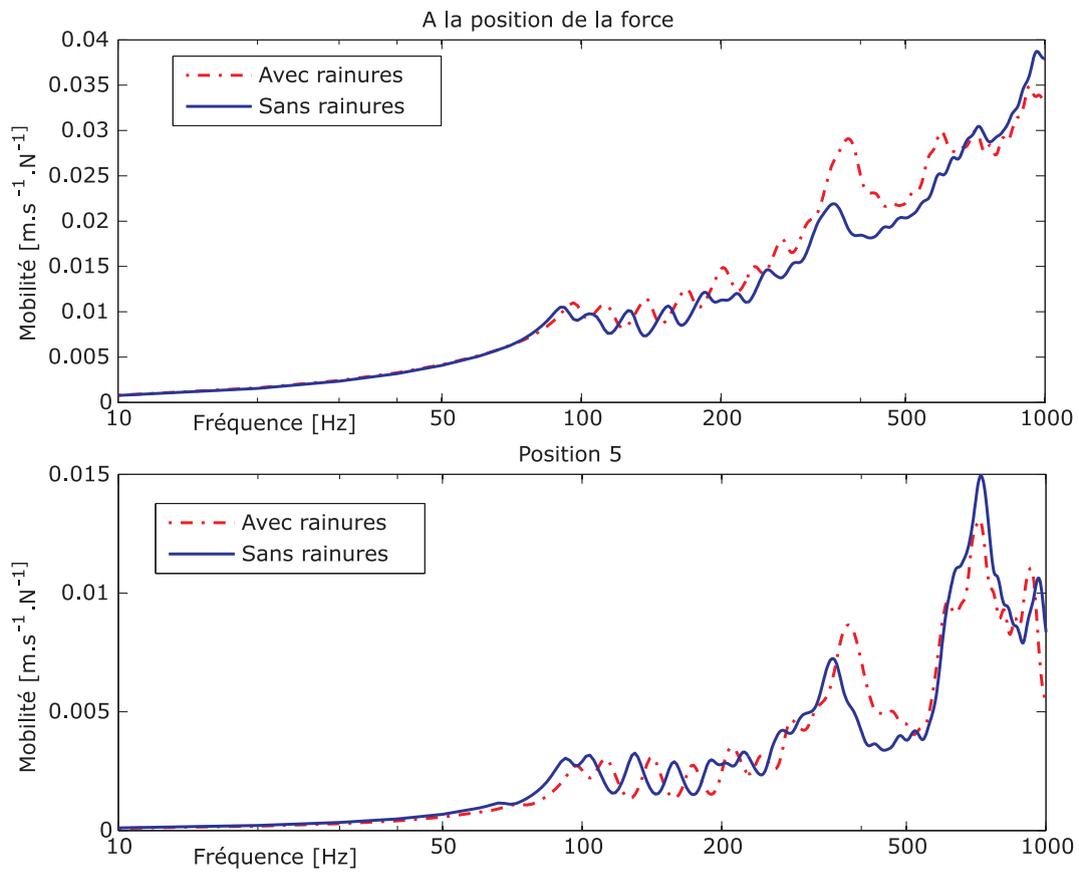
5. Conclusions

Dans ce chapitre, la validation des propriétés des matériaux constituant le pneumatique est réalisée dans un premier temps dans le cas de l'analyse modale. Les propriétés réelles des matériaux et ainsi une vraie section transversale sont introduites dans le code d'éléments finis ANSYS pour calculer les modes propres. Quelques modes d'anneau ont été présentés.

La théorie de la modélisation dynamique du pneu est présentée. Le cas d'une section simple avec le matériau homogène est présenté et validé numériquement avec ANSYS dans le cas de force radiale et circonferentielle. On a abordé le cas de la section réelle avec une vraie distribution des matériaux dans la section. Cependant, les fonctions en fréquence obtenues par la modélisation numérique montrent que le premier pic est inférieur à la valeur mesurée 120Hz comme dans le chapitre IV. Ce phénomène montre un manque de rigidité dans la modélisation du pneumatique. L'influence de la pression interne est introduite dans la matrice de rigidité additionnelle pour améliorer la simulation. Les réponses calculées sont plus cohérentes que dans le cas précédent.

Une étude paramétrique est aussi présentée pour mettre en évidence la dépendance de la réponse en fonction des propriétés des matériaux et de la pression interne. Cela montre que lorsque la pression augmente, l'effet de vibration d'anneau diminue. A une pression suffisamment grande, le comportement vibratoire du pneumatique tend vers celui d'un système à un degré de liberté.

Dans toutes les études sur les paramètres, à basse fréquence, lorsque le module élastique ne change pas, le pneumatique se comporte comme une poutre. Le comportement est donc presque similaire avec la variation des amortissements, de la pression et de la géométrie des rainures.

FIGURE VI.19. : *Influence des rainures sur la mobilité ponctuelle*

Conclusion générale et Perspectives

Conclusions

Les propriétés mécaniques des matériaux constitutants et un modèle tridimensionnel d'un pneumatique ont été étudiés. Le but de la thèse est de trouver une méthode numérique pour calculer les réponses en fréquence d'un pneumatique soumis à un certain chargement. Pour obtenir une réponse plus précise, il faut modéliser une géométrie et une distribution des matériaux la plus proche possible de la réalité.

Les propriétés mécaniques des matériaux ont été identifiées avec une campagne de mesures statiques et dynamiques. On a divisé les matériaux distribués dans la section du pneu en une partie de caoutchouc, une partie d'acier et une partie composite appelée "bande de roulement". Comme la partie "bande de roulement" est la partie la plus compliquée dans le pneu, on la distingue en câbles d'acier et en caoutchouc. Un processus d'homogénéisation de plusieurs niveaux à partir des fils, des câbles et des couches élémentaires à la bande de roulement est réalisé pour déterminer les propriétés mécaniques effectives de la bande de roulement.

Une étude sur le comportement viscoélastique des matériaux est aussi effectuée. Lorsque le pneumatique est soumis à un chargement dynamique, il vibre à certaines fréquences, les matériaux montrent leurs propres comportements à ces fréquences. Il est nécessaire d'implémenter les caractéristiques dynamiques dans la modélisation. Le pneu crée une vibration autour de sa position d'équilibre établie par les chargements statiques. Dans le cadre de la thèse, on n'examine que l'action de la pression interne. Si l'on suppose que la déformation est petite, le problème dynamique est linéarisable.

Une campagne de mesure des fonctions de réponse en fréquence d'un pneumatique est réalisée au sein du laboratoire. À partir des mesures, on a pu identifier les modes de vibrations de la bande de roulement et de certains modes de la section dans les deux cas : sans pression et avec pression interne. Avec les propriétés mécaniques des matériaux obtenues, l'implémentation dans le modèle numérique donne des modes propres raisonnables par rapport à ceux identifiés par la mesure. Cela valide les propriétés dynamiques appliquées dans le problème.

La théorie dynamique des structures périodiques est utilisée dans l'analyse des ondes qui se propagent. Les réponses sont calculées à partir d'une décomposition en ondes entrantes et sortantes. Dans le chapitre sur les structures périodiques, on a proposé un processus pour calculer la matrice de rigidité dynamique totale pour une partie composée de plusieurs cellules périodiques. La dimension de cette matrice est la même que celle d'une cellule et donc elle est beaucoup plus petite que celle de cette partie avec le maillage total. Cette méthode donne alors un bon algorithme de réduction de problème.

Une autre méthode d'élimination des ddls a été également proposée pour calculer la matrice de rigidité totale. Cette méthode est essentiellement convenable dans les cas où il n'y a pas beaucoup de chargement. L'application des deux méthodes périodiques montre une bonne concordance entre les résultats calculés et celui obtenu par ANSYS dans le cas d'une poutre droite encastree articulée soumise à une charge ponctuelle.

La méthode proposée est pratique et concrète dans les structures droites. Cependant, une transformation de repère est proposée pour rendre applicable cette théorie aux structures périodiques dans les repères non cartésiens. Cette transformation est appliquée au cas d'un pneu ayant des cellules identiques le long son contour. Grâce à cette transformation, les propriétés géométriques du pneu sont conservées dans la représentation matricielle.

La première application de la théorie est le calcul des mobilités ponctuelles radiales et tangentielles d'un pneu homogène. L'objectif de cet exemple est de valider la théorie dynamique des structures périodiques avec la transformation dans le repère cartésien. La seconde application est pour un pneumatique sans pression interne avec une vraie distribution des matériaux et une géométrie la plus proche

possible de la réalité.

Le pneu est souvent utilisé en état gonflé par une pression interne. Cette action est représentée par la matrice de rigidité additionnelle ou géométrique. C'est cette rigidité qui modifie les modes de vibrations propres du pneu. Elle est exploitée à partir d'ANSYS et est ajoutée à la rigidité normale dans l'équation dynamique. Des comparaisons de la méthode périodique et des calculs réalisés avec ANSYS montrent un bon accord. Pourtant, avec ANSYS, la modélisation totale d'un pneumatique nécessite un coût de calcul important tandis qu'avec cette méthode, on pourra diminuer le temps de calcul et aussi la mémoire nécessaire pour sauvegarder les données temporaires.

Une comparaison entre les calculs réalisés par la méthode périodique avec les mesures expérimentales a été effectuée. Les résultats numériques donnent quelques premiers pics raisonnables, mais il reste encore des écarts en amplitudes. Ce problème restant est dû à une identification non fiable des amortissements modaux et à des difficultés dans l'implémentation de ces amortissements dans le calcul. Quelle que soit sa complexité, la modélisation ne pourra pas représenter parfaitement la réalité.

Des études paramétriques ont été réalisées sur l'influence de quelques facteurs sur la mobilité ponctuelle d'un pneumatique : modules élastiques du caoutchouc et de la bande de roulement, amortissement et géométrie. Celles-ci pourront être utiles dans les recherches d'optimisation de certaines caractéristiques du pneu.

Perspectives

Ces études effectuées dans la thèse donnent la possibilité de développer une approche numérique dans la vibration des structures périodiques et essentiellement des pneumatiques. Une question posée est : « Comment peut-on appliquer les conditions périodiques aux problèmes dynamiques ? » La réponse possible est que l'on remplace la partie restante, sans chargement, par une partie équivalente correspondant à la matrice de rigidité totale.

Dans les études des vibrations d'un pneumatique à haute fréquence, ce travail pourrait donner une prédiction dans la mesure de source de bruit, des niveaux sonores. Il est également possible de réaliser un processus d'optimisation des sculptures du pneu en aspect acoustique.

Quant à la tendance d'implémentation de l'effet de roulement et de contact dans le modèle d'un pneumatique, on pourrait diviser le pneu en deux parties : une partie en contact avec la chaussée, classiquement maillée et une partie périodique dont la périodicité est utilisée dans la modélisation. Grâce à la réduction d'un grand nombre des ddls sans contact avec la chaussée, les calculs en détail sont possibles avec une unité centrale de performance moyenne (par exemple, dans le calcul des forces de contact). L'effet de l'accélération de Coriolis pourrait être pris en compte dans le cas de roulement.

Pour l'aspect numérique, on peut améliorer le processus de réduction du problème en choisissant bien les bandes de fréquences ou en éliminant les ddls non chargés dans les parties non périodiques (avec le maillage total). La généralisation de la transformation en repère cartésien est applicable aux structures ayant une périodicité plus compliquée (par exemple suivant une courbe).

Une partie importante et réaliste est la partie expérimentale. Avec une nouvelle technique ou une autre méthode (peut être par le laser optique), on pourrait mesurer les réponses sans modifier la structure. Les modes propres plus élevés pourraient être identifiés de façon plus fiable. Ainsi, une identification précise des amortissements modaux nous donnera une bonne prédiction de la mobilité du pneumatique.

Annexe

A. Traction d'une couche composite. Modules d'Young et coefficients de Poisson apparents

L'objectif de cette annexe est de déterminer les propriétés mécaniques équivalentes, appelées "apparentes", d'un matériau composite multi-couche, en connaissant les propriétés de chaque couche constitutive.

On considère une éprouvette de type $(\theta, -\theta)$ (deux couches élémentaires avec les angles de rotation $\pm 20^\circ$ et une couche en caoutchouc au milieu), d'épaisseur totale h , de longueur L et de largeur $b \ll L$. Les caractéristiques mécaniques de cette couche orthotrope sont supposées connues : E_x, E_y, G_{xy} et ν_{xy} . Dans le cadre de la traction unidirectionnelle, on suppose que la flexion de l'éprouvette est négligeable. La loi de comportement nous donne :

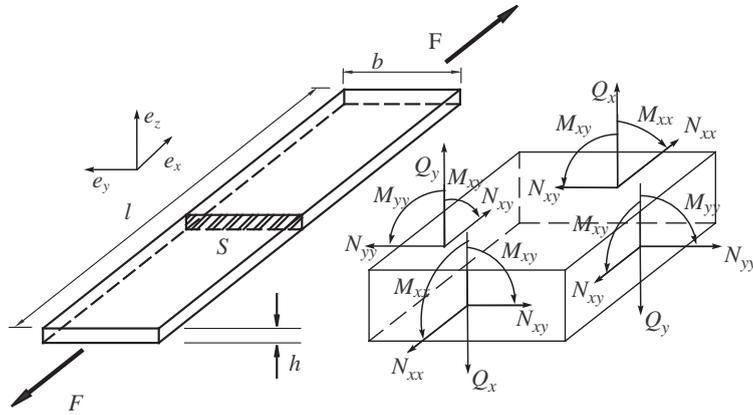


FIGURE A.1. : Traction d'une éprouvette composite et convention des signes des efforts internes

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ d_x \\ d_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

où $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}}, \tilde{\mathbf{Q}}$ sont le moment, l'effort normal et l'effort tranchant, $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\chi}, \tilde{\mathbf{d}}$ sont les déformations en traction, en flexion, et en cisaillement.

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Comme l'épaisseur de l'éprouvette est assez mince, les déplacements et les déformations des deux côtés de l'éprouvette sont presque égales, on peut supposer que le vecteur d'angles de rotation

$$\tilde{\Phi}(x, y) = \frac{\tilde{\mathbf{U}}(x, y, h_n^+) - \tilde{\mathbf{U}}(x, y, h_n^-)}{h} \quad (\text{A.3})$$

est négligeable (où h_n^+, h_n^- sont les deux cotés de la couche n , voir la Fig. A.3). Les déformations généralisées correspondant aux moments et aux efforts tranchants sont :

$$\tilde{\chi} = \text{sym} \left(\widetilde{\text{grad}} \tilde{\Phi} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{d} = \tilde{\Phi}(x, y) + \text{grad} \widetilde{W}_3 \quad (\text{A.5})$$

où \widetilde{W}_3 est le déplacement vertical de l'éprouvette (suivant la direction z). Comme $b \ll L$, dans le cas du problème uniaxial, on déduit $N_{xy} = N_{yy} = M_{xy} = M_{yy} = Q_y = 0$. En simplifiant l'écriture de l'équation d'équilibre du modèle de Reissner-Mindlin, on obtient :

$$\widetilde{\text{div}} \left(\widetilde{\mathbf{N}} \right) + \widetilde{\mathbf{T}}^+ + \widetilde{\mathbf{T}}^- = 0 \longrightarrow N_{xx,x} = 0 \quad (\text{A.6a})$$

$$\widetilde{\text{div}} \left(\widetilde{\mathbf{M}} \right) - \widetilde{\mathbf{Q}} + \frac{e}{2} \left(\widetilde{\mathbf{T}}^+ + \widetilde{\mathbf{T}}^- \right) = 0 \longrightarrow M_{xx,x} + Q_x = 0 \quad (\text{A.6b})$$

$$\text{div} \widetilde{\mathbf{Q}} + T_3^+ + T_3^- = 0 \longrightarrow Q_{x,x} = 0 \quad (\text{A.6c})$$

où $\mathbf{T}^+, \mathbf{T}^-$ sont les forces surfaciques dans les plans supérieurs et inférieurs de la plaque et T_3^+, T_3^- sont les mêmes, mais perpendiculaires à la plaque. En combinant les équations d'équilibre et les conditions aux limites, on a :

$$\begin{aligned} (\text{A.6c}) &\rightarrow Q_x = Q_x|_{x=L} = 0 \\ (\text{A.6b}) &\rightarrow M_{xx} = M_{xx}|_{x=L} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{F}{bh} z dz = 0 \\ (\text{A.6a}) &\rightarrow N_{xx} = N_{xx}|_{x=L} = \frac{F}{b} \end{aligned}$$

La loi de comportement pour la traction unidirectionnelle s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{F}{b} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ d_x \\ d_y \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Pour simplifier, on désigne par $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{F}$ les matrices composant l'équation de comportement et ε, χ les déformations généralisées.

Avec $\mathbf{B}\varepsilon + \mathbf{D}\chi = 0$, on a $\chi = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\varepsilon$. En les introduisant dans (A.7), on obtient

$$[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}]\varepsilon = \mathbf{N} \quad (\text{A.8})$$

En posant $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$, on a

$$\begin{cases} \frac{F}{b} = A_{11}^* \varepsilon_{xx} + A_{12}^* \varepsilon_{yy} \\ 0 = A_{12}^* \varepsilon_{xx} + A_{22}^* \varepsilon_{yy} \\ 0 = 2A_{66}^* \varepsilon_{xy} \rightarrow \varepsilon_{xy} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

On trouve les relations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{F}{b} \frac{A_{22}^*}{A_{11}^* A_{22}^* - [A_{12}^*]^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{F}{b} \frac{A_{12}^*}{[A_{12}^*]^2 - A_{11}^* A_{22}^*} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

En tenant compte de $\frac{F}{S} = E_x \varepsilon_{xx}$ et de (A.10), on trouve :

- Module apparent suivant la direction x :

$$E_x = \frac{1}{h} \left(A_{11}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{22}^*} \right); \quad E_y = \frac{1}{h} \left(A_{22}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{11}^*} \right) \quad (\text{A.11})$$

- Coefficient de Poisson

$$\nu_{xy} = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{A_{12}^*}{A_{22}^*} \quad (\text{A.12})$$

De façon similaire, pour calculer le module de cisaillement équivalent G_{xy} , on effectuera un essai virtuel de cisaillement pur. Le vecteur \mathbf{N} devient :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{b} \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

En prenant le calcul de la contrainte tangentielle $\tau_{xy} = \gamma_{xy} G_{xy} = 2\varepsilon_{xy} G_{xy}$, on obtient :

$$G_{xy} = \frac{A_{66}^*}{h} \quad (\text{A.14})$$

A.1. Détermination des coefficients des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} dans le repère (O, e_x, e_y, e_z)

On suppose que l'on a toutes les caractéristiques mécaniques de chaque couche élémentaire dans le repère (O, L, T, e_z) . On cherche à déterminer les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} dans le repère commun (O, e_x, e_y, e_z) (le repère déterminé par la couche composée de plusieurs couches élémentaires).

Pour la couche i dans le repère (O, L, T, e_z) , la matrice de rigidité est calculée [123] :

$$\mathbf{R}_{(L,T,e_z)}^i = \begin{bmatrix} r_{LL}^i & r_{LT}^i & 0 \\ r_{LT}^i & r_{TT}^i & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_L^i}{1 - \nu_{LT}^i \nu_{TL}^i} & \frac{\nu_{LT}^i E_T^i}{1 - \nu_{LT}^i \nu_{TL}^i} & 0 \\ \frac{\nu_{LT}^i E_T^i}{1 - \nu_{LT}^i \nu_{TL}^i} & \frac{E_T^i}{1 - \nu_{LT}^i \nu_{TL}^i} & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}^i \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

où $\mathbf{R}_{(L,T,e_z)}^i$ caractérise la relation entre les contraintes et les déformations de la couche i dans le repère (O, L, T, e_z) :

$$\boldsymbol{\sigma}_{(L,T,e_z)}^i = \mathbf{R}_{(L,T,e_z)}^i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{(L,T,e_z)}^i \quad (\text{A.16})$$

Le repère (O, e_x, e_y, e_z) est obtenu après avoir tourné d'un angle θ_i autour de l'axe e_z . On a l'angle $(L_i, e_x) = \theta_i$ (le sens de L_i à e_x est positif). La matrice de rigidité dans ce repère vaut :

$$\mathbf{R}_{(e_x,e_y,e_z)}^i = \mathbf{O}_\sigma^i \cdot \mathbf{R}_{(L,T,e_z)}^i \cdot {}^t\mathbf{O}_\sigma^i \quad (\text{A.17})$$

où \mathbf{O}_σ^i est la matrice de rotation d'un angle θ_i de la couche i :

$$\mathbf{O}_\sigma^i = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_i & \sin^2 \theta_i & 2 \cos \theta_i \sin \theta_i \\ \sin^2 \theta_i & \cos^2 \theta_i & -2 \cos \theta_i \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \sin \theta_i & \cos \theta_i \sin \theta_i & \cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

On considère un empilement dont les côtes extrêmes de chaque couche sont comme sur la Fig. A.3.

Les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{D} exprimées dans la loi de comportement sont calculées par [83] :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{i=1}^n [h_i^+ - h_i^-] \mathbf{R}_{(e_x,e_y,e_z)}^i \\ \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^n [(h_i^+)^2 - (h_i^-)^2] \mathbf{R}_{(e_x,e_y,e_z)}^i \\ \mathbf{D} &= \sum_{i=1}^n [(h_i^+)^3 - (h_i^-)^3] \mathbf{R}_{(e_x,e_y,e_z)}^i \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

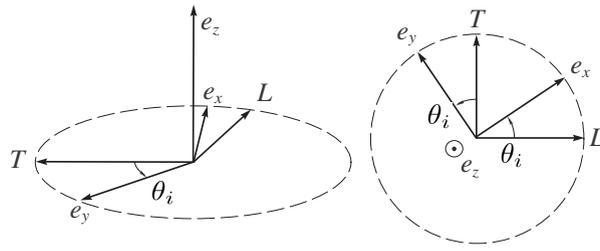
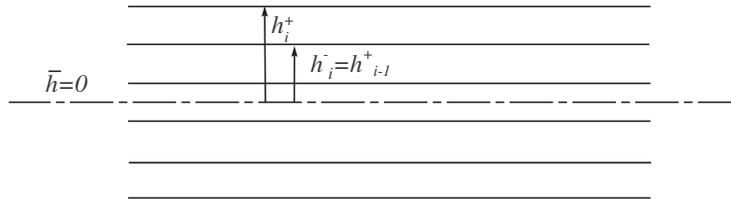
FIGURE A.2. : Rotation des coordonnées autour de l'axe e_z 

FIGURE A.3. : Convention des côtes supérieures et inférieures des couches d'un empilement

A.2. Calcul des coefficients A_{11}^* , A_{22}^* et A_{12}^* , des modules d'Young et des coefficients de Poisson apparents pour la macro couche

On considère un empilement de couches de composite d'épaisseur totale e_{tot} : 2 couches élémentaires d'épaisseur e_A d'angles de rotation $\theta_i = \pm 20^\circ$ et une couche de caoutchouc d'épaisseur $e_{cao} = e_{tot} - 2e_A$. En connaissant les valeurs E_L , E_T , ν_{LT} et G_{LT} de chaque couche, on peut calculer les matrices de rigidité de la couche élémentaire par les formules (A.15) et (A.17). La matrice de rigidité de la couche en caoutchouc est calculée par la formule similaire :

$$\mathbf{R}_{cao} = \begin{bmatrix} \frac{E_{cao}}{1 - \nu_{cao}^2} & \frac{\nu_{cao} E_{cao}}{1 - \nu_{cao}^2} & 0 \\ \frac{\nu_{cao} E_{cao}}{1 - \nu_{cao}^2} & \frac{E_{cao}}{1 - \nu_{cao}^2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{cao} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

En réécrivant (A.20), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e_A (\mathbf{R}(\theta) + \mathbf{R}(-\theta)) + e_{cao} \mathbf{R}_{cao} \\ \mathbf{B} &= \left[\left(e_A + \frac{e_{cao}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e_{cao}}{2} \right)^2 \right] [\mathbf{R}(\theta) - \mathbf{R}(-\theta)] \\ \mathbf{D} &= \left[\left(e_A + \frac{e_{cao}}{2} \right)^3 - \left(\frac{e_{cao}}{2} \right)^3 \right] [\mathbf{R}(\theta) + \mathbf{R}(-\theta)] + 2 \left[\frac{e_{cao}}{2} \right]^3 \mathbf{R}_{cao} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

où $\mathbf{R}(\theta)$ et $\mathbf{R}(-\theta)$ sont calculées par (A.17) avec $\theta = 20^\circ$. La matrice \mathbf{A}^* est calculée par $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$.

Le résultat calculé par le modèle de composite est présenté dans le Tab. A.1

TABLEAU A.1. : Modules et coefficients de Poisson apparents

Modules (MPa)			Coefficients de Poisson	
$E_x = \frac{A_{11}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{22}^*}}{e_{tot}}$	$E_y = \frac{A_{22}^* - \frac{[A_{12}^*]^2}{A_{11}^*}}{e_{tot}}$	$G_{xy} = \frac{A_{66}^*}{h}$	$\nu_{xy} = \frac{A_{12}^*}{A_{22}^*}$	$\nu_{yx} = \frac{A_{12}^*}{A_{11}^*}$

B. Transformation de Laplace et transformation de Fourier

La transformée de Laplace (notée \mathcal{L}) de la fonction $x(t)$ est définie comme une fonction de la variable complexe s , par l'intégrale :

$$\widehat{X}(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (\text{B.22})$$

avec $s = a + i\omega$ ($a > 0$).

La transformée de Laplace d'une fonction tend vers la transformée de Fourier \mathcal{F} quand $a \rightarrow 0$ ou $s \rightarrow i\omega$, si la fonction est nulle pour les temps négatifs.

La transformée de Fourier est définie comme suit [124] :

■ DÉFINITION .1

Soit f une fonction sommable sur \mathbb{R}^N . Le produit de f par une fonction bornée est encore une fonction sommable : par conséquent, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$, on peut calculer la valeur :

$$\mathcal{F}[f] = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-ix\xi} dx \quad (\text{B.23})$$

L'opérateur \mathcal{F} est appelé **transformée de Fourier**.

On note que pour une distribution de Dirac $\delta(t)$, on a : $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$. On peut en déduire pour le cas de la fonction de Heaviside $H(t)$ en se basant sur les propriétés de la transformation des dérivées l'expression suivante :

$$\mathcal{F}[H(t)] = \frac{1}{i\omega}$$

C. Estimation des erreurs en fonction de la discrétisation en fréquence

L'erreur estimée de la fréquence est de $Er(\omega) = 2\pi df$. On évaluera la valeur au pic de la réceptance et de l'amortissement dans le cas de vibration d'un système de 1 ddl. Le déplacement en fréquence dans ce cas est exprimé par [125] :

$$X(\omega) = \frac{F}{k} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_r}\right]^2}} = X_{st} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_r}\right]^2}} \quad (\text{C.24})$$

où F et k sont l'amplitude de la force harmonique appliquée et la raideur du ressort de ce système, X_{st} est la réponse statique du système. La dérivée de $X(\omega)$ en fréquence est :

$$X'(\omega) = -\frac{1}{2}X(\omega) \frac{4\frac{\omega}{\omega_r^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_r^2} + 2\zeta^2 - 1\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_r}\right]^2} \quad (\text{C.25})$$

- *Valeur maximale à un pic* : On suppose que la fréquence avoisine la r^{eme} fréquence propre $\omega \in \epsilon(\omega_r) = [\omega_r^-, \omega_r^+]$. L'erreur de la valeur à la résonance est estimée par :

$$\Delta X_r \simeq Er(\omega)X'(\epsilon(\omega_r)) \stackrel{\omega \simeq \omega_r}{=} -\frac{1}{2}X_r \frac{4}{\omega_r} \frac{2\zeta^2}{4\zeta^2} Er(\omega) = -X_r \frac{Er(\omega)}{\omega_r} \quad (\text{C.26})$$

- *Amortissement* : On suppose que l'amortissement est identifié par la méthode de largeur de bande. Les fréquences ω_1, ω_2 correspondent au niveau de la moitié d'énergie du système. Les fréquences ω'_1, ω'_2 sont les fréquences mesurées "possibles" (les fréquences utilisées lors des erreurs commises).

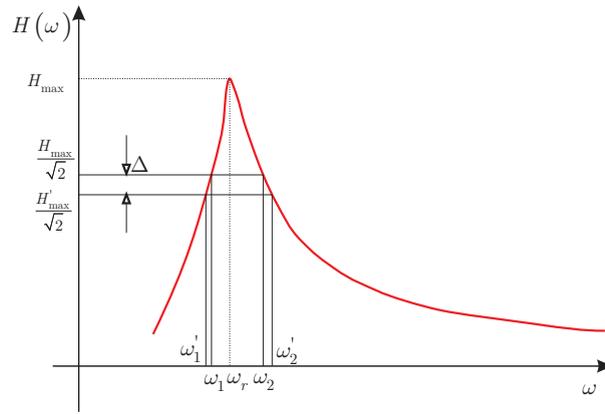


FIGURE C.4. : Erreur de détermination de l'amortissement par la méthode de largeur de bande

Le déplacement $X(\omega)$ devient $H(\omega)$ lorsque la force est l'unité. Par conséquent, on peut utiliser l'expression de $X(\omega)$ au lieu de $H(\omega)$ pour calculer l'amortissement. L'erreur au niveau de la moitié d'énergie est $\Delta = \frac{\Delta X_r}{\sqrt{2}}$. L'amortissement possible est estimé par :

$$\frac{\Delta \omega'}{\omega_r} = \frac{\Delta \omega}{\omega_r} + \frac{\Delta \omega_1 + \Delta \omega_2}{\omega_r} \quad (\text{C.27})$$

$$\eta' = \eta + \frac{\Delta}{\omega_r} \left(\frac{1}{|X'(\omega_1)|} + \frac{1}{|X'(\omega_2)|} \right) \quad (\text{C.28})$$

$$\rightarrow \frac{1}{\eta' - \eta} = \frac{\omega_r}{\Delta} (|X'(\omega_1)| + |X'(\omega_2)|) \quad (\text{C.29})$$

Les fréquences ω_1, ω_2 satisfont donc les équations [125] :

$$X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_r}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.30})$$

$$\frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 \right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_r} \right]^2} = \frac{1}{8\zeta^2} \quad (\text{C.31})$$

d'où

$$\left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta \sqrt{1 + \zeta^2} \quad (\text{C.32})$$

En les remplaçant dans l'Eq. C.25, on obtient :

$$|X'(\omega_1)| + |X'(\omega_2)| = \frac{X_r}{2\sqrt{2}\zeta\omega_r^2} \sqrt{1 + \zeta^2} \quad (\text{C.33})$$

Avec $\Delta = \frac{|\Delta X_r|}{\sqrt{2}}$ et l'hypothèse $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_r$, on peut en déduire :

$$\frac{1}{\eta' - \eta} = \frac{\omega_r \zeta \sqrt{1 + \zeta^2}}{Er(\omega)} \quad (\text{C.34})$$

$$\rightarrow \eta' = \eta + \frac{Er(\omega)}{\omega_r \zeta \sqrt{1 + \zeta^2}} \quad (\text{C.35})$$

Dans le cas de faible amortissement ($\sqrt{1 + \zeta^2} \simeq 1$) et en supposant que $\eta = 2\zeta$, on a finalement :

$$\eta' = \eta + \frac{2Er(\omega)}{\eta\omega_r} \quad (\text{C.36})$$

Bibliographie

- [1] J. F. Hamet. Propagating wave formulation of tire vibrations using the orthotropic plate model. *Inter-Noise*, 2002.
- [2] J. M. Muggleton, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Vibrational response prediction of a pneumatic tyre using an orthotropic two-plate wave model. *Journal of Sound and Vibration*, pages 929–950, 2003.
- [3] L. Jia, Y. Xu, and J. Zhang. Free vibration analysis of radial pneumatic tires using bezier function. *Journal of Sound and Vibration*, 285 :887–903, 2005.
- [4] R. Merzouki, B. Ould-Bouamama, M.A. Djeziri, and M. Bouteldja. Modelling and estimation of tire-road longitudinal impact efforts using bond graph approach. *Mechatronics*, 17(2-3) :93–108, 2007.
- [5] R. J. Pinnington. A wave model of a circular tyre. Part 1 : belt modelling. *Journal of Sound and Vibration.*, 290 :101–132, 2006.
- [6] R. J. Pinnington. A wave model of a circular tyre. Part 2 : side-wall and force transmission modelling. *Journal of Sound and Vibration.*, 290 :133–168, 2006.
- [7] J. Lemaitre and J.-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2004.
- [8] C. CARROT. Viscoélasticité linéaire des polymères fondus. *Techniques de l'Ingénieur*, AM4 - Plastiques et composites(AM3620), 1999.
- [9] Kenneth G. McConnell. *Vibration Testing : Theory and Practice*. Wiley-Interscience, 1995.
- [10] R. Caracciolo, A. Gasparetto, and M. Giovagnoni. An experimental technique for complete dynamic characterization of a viscoelastic material. *Journal of Sound and Vibration*, 272 :1013–1032, 2004.
- [11] B. Garnier. Isolation antivibratoire et antichoc - définitions. principes physiques. *Techniques de l'Ingénieur*, BR2-Bruit et vibrations(B5140), 1994.
- [12] D. Backström and A. C. Nilsson. Modelling the vibration of sandwich beams using frequency-dependent parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 300 :589–611, 2007.
- [13] J. Lee and K. Kim. Characterization of complex modulus of viscoelastic material subject to static compression. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 5 :255–271, 2001.
- [14] G. Kergourlay, E. Balmès, and G. Legal. A characterization of frequency-temperature-prestress effects in viscoelastic films. *Journal of Sound and Vibration*, 297 :391–407, 2006.
- [15] Jean-Marie Berthelot, Mustapha Assarar, Youssef Sefrani, and Abderrahim El Mahi. Damping analysis of composite materials and structures. *Composite Structures*, In Press, Corrected Proof :-.
- [16] Jean Courbon. Vibrations des poutres. *Techniques de l'Ingénieur*, traité Construction, 1984.
- [17] K. Miller. Testing and analysis : Mesuring the dynamic properties of elastomers for analysis. *Axel Product, Inc*, DynamicRev1, 2000.
- [18] H.H. Nguyen, J. Cesbron, F. Anfosso-Ledee, H.P. Yin, S. Erlicher, and D. Duhamel. Dependence of the contact area on the velocity of a rolling tire. In *Acoustics08 - Paris*, 2008.
- [19] James E. Mark and Burak Erman. *Science and Technology of Rubber, Third Edition*. Elsevier - Academic Press, 4 2005.
- [20] Hans B Pacejka. *Tire and Vehicle Dynamics*. SAE International, 12 2005.
- [21] P. Andersson and K. Larsson. Validation of a high frequency three-dimensional tyre model. *Acta Acustica united with Acustica*, 91 :121–131, 2005.

- [22] K. Larsson and W. Kropp. A high frequency three-dimensional tyre model based on two coupled elastic layers. *Journal of Sound and Vibration*, 203 :889–908, 2002.
- [23] N. M. M. Maia and J. M. M. E Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press; 1st edition, 1998.
- [24] R. J. Pinnington and A. R. Briscoe. A wave model for a pneumatic tyre belt. *Journal of Sound and Vibration*., 253 :969–987, 2001.
- [25] J. F. Hamet. Tire/road noise : time domain green’s function for the orthotropic plate model. *Inter-Noise*, 2002.
- [26] R. J. Pinnington. Radial force transmission to the hub from an unloaded stationary tyre. *Journal of Sound and Vibration*, 253(5) :961–983, June 2002.
- [27] K. Larsson, S. Barrelet, and W. Kropp. The modelling of the dynamic behavior of tyre tread blocks. *Applied Acoustics*, 63 :659–677, 2002.
- [28] Y. Waki, B. Mace, and M. Brennan. Vibration analysis of a tyre using the wave finite element method. In *Inter-Noise*, 2007.
- [29] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2005.
- [30] I. Lopez, R.E.A. Blom, N.B. Roozen, and H. Nijmeijer. Modelling vibrations on deformed rolling tyres—a modal approach. *Journal of Sound and Vibration*, 307(3-5) :481–494, November 2007.
- [31] S. C. Huang. The vibration of rolling tires in ground contact. *Int. Journal of Vehicle Design*, 13, 1992.
- [32] Werner Soedel. *Vibrations of shells and plates*. Marcel Dekker, Inc. New York, 2004.
- [33] S. C. Huang and W. Soedel. Response of rotating rings to harmonic and periodic loading and comparison with the inverted problem. *Journal of Sound and Vibration*, 118 :253–270, 1987.
- [34] S. C. Huang and W. Soedel. Effects of coriolis acceleration on the free and forced in-plane vibrations of rotating rings on elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 115 :253–274, 1987.
- [35] L. Gry. Dynamic modelling of railway track based on wave propagation. *Journal of Sound and Vibration*, 195 :477–505, 1997.
- [36] A. Houmat. Three-dimensional free vibration analysis of plates using the h-p version of the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 290(3-5) :690–704, March 2006.
- [37] Y. K. Koh and R. G. White. Analysis and control of vibrational power transmission to machinery supporting structures subjected to a multi-excitation system, part i : Driving point mobility matrix of beams and rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 196(4) :469–493, October 1996.
- [38] A. Bocquillet, M. N. Ichchou, and L. Jezequel. Energetics of axisymmetric fluid-filled pipes up to high frequencies. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :491–510, 2003.
- [39] S. Finnveden. Spectral finite element analysis of the vibration of straight fluid-filled pipes with flanges. *Journal of Sound and Vibration*, 199 :125–154, 1997.
- [40] N. R. Harland, B.R.Mace, and R.W.Jones. Wave propagation, reflection and transmission in tunable fluid-filled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 241 :735–754, 2001.
- [41] L. Houillon, M. N. Ichchouh, and L. Jezequel. Wave motion in thin-walled structures. *Journal of Sound and Vibration*, 281 :483–507, 2005.
- [42] Marcelo T. Piovan, Carlos P. Filipich, and Victor H. Cortinez. Exact solutions for coupled free vibrations of tapered shear-flexible thin-walled composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 316(1-5) :298–316, September 2008.
- [43] L.S. Beale and M.L. Accorsi. Power flow un two- and three- dimensional frame structures. *Journal of Sound and Vibration*, 185 :685–702, 1995.

- [44] Von Flotow. Disturbance propagation in structural networks. *Journal of Sound and Vibration*, 106 :433–450, 1986.
- [45] L. Brillouin. *Wave propagation in periodic structures*. New York, Dover, 1953.
- [46] D. J. Mead. A general theory of harmonic wave propagation in linear periodic systems with multiple coupling. *Journal of Sound and Vibration*, 27 :235–260, 1973.
- [47] D. J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : I. mono-coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 40 :1–18, 1975.
- [48] D. J. Mead. Wave propagation and natural modes in periodic systems : II. multi-coupled systems, with and without damping. *Journal of Sound and Vibration*, 40 :19–39, 1975.
- [49] D. J. Mead. Wave propagation in continuous periodic structures : research contributions from southampton. *Journal of Sound and Vibration*, 190 :495–524, 1996.
- [50] D. Wang, C. Zhou, and J. Rong. Free and forced vibration of repetitive structures. *International Journal of Solids and Structures*, 40 :5477–5494, 2003.
- [51] J.-M. Mencik and M.N. Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24(5) :877–898, 2005.
- [52] M. G eradin. *Th eorie des vibrations. Application   la dynamique des structures*. Masson, Paris, 1993.
- [53] S. Gopalakrishnan, A. Chakraborty, and D. Roy Mahapatra. *Spectral Finite Element Method*. Springer, 2008.
- [54] S. Finnveden. Finite element techniques for the evaluation of energy flow parameters. *Proc. Novem*, pages 235–260, 2000.
- [55] S. Finnveden. Formulas for modal density and for input power from mechanical and fluid point sources in fluid filled pipes. *Journal of Sound and Vibration*, 169 :43–53, 1997.
- [56] B. Aalami. Waves in prismatic guides of arbitrary cross section. *Journal of Applied Mechanics*, 40 :1067–1072, 1973.
- [57] L. Gavric. Finite element computation of dispersion properties of thin-walled waveguides. *Journal of Sound and Vibration*, 173 :113–124, 1994.
- [58] L. Gavric. Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *Journal of Sound and Vibration*, 184 :531–543, 1995.
- [59] S. Finnveden. Evaluation of modal density and group velocity by a finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 273 :51–75, 2004.
- [60] F. Birgersson, S. Finnveden, and C. M. Nilsson. A spectral super element for modelling of plate vibration. Part 1 : general theory. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :297–314, 2005.
- [61] F. Birgersson and S. Finnveden. A spectral super element for modelling of plate vibration. Part 2 : turbulence excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 287 :315–328, 2005.
- [62] P. J. Shorter. Wave propagation and damping in linear viscoelastic laminates. *Journal of the Acoustical Society of America*, 115 :1917–1925, 2004.
- [63] D. Duhamel, B. R. Mace, and M. J. Brennan. Finite element prediction of wave motion in structural waveguides. *Rapport interne, University of Southampton*.
- [64] A. Bocquillet. *M ethode Energ etique de Caract erisations Vibroacoustiques des R eseaux Complexes*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, f evrier 2000.
- [65] L. Gry and C. Gontier. Dynamic modelling of railway track : a periodic model on a generalized beam formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 199 :531–558, 1997.
- [66] W. X. Zhong and F. W. Williams. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures. *Journal of Sound and Vibration*, 181 :485–501, 1995.
- [67] A. Luongo and F. Romeo. Real wave vectors for dynamic analysis of periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 279(1-2) :309–325, January 2005.

- [68] R. J. Guyan. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3 :380–387, 1965.
- [69] M. Petyt. *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, New York USA, 1990.
- [70] Jean Salençon. *Mécanique des milieux continus : Tome 1 : Concepts généraux*. Ecole Polytechnique, 2005.
- [71] R. S. Langley, N. S. Bardel, and H. M. Ruivo. The response of two-dimensional periodic structures to harmonic point loading : A theoretical and experimental study of a beam grillage. *Journal of Sound and Vibration*, 207 :521–535, 1997.
- [72] R. S. Langley. The response of two-dimensional periodic structures to impulsive point loading. *Journal of Sound and Vibration*, 201 :235–253, 1997.
- [73] R. S. Langley. The response of two-dimensional periodic structures to point harmonic forcing. *Journal of Sound and Vibration*, 197 :447–469, 1996.
- [74] R. S. Langley. On the vibration conductivity approach to high frequency dynamics for two-dimensional structural components. *Journal of Sound and Vibration*, 182 :637–657, 1995.
- [75] D. Duhamel. Finite element computation of green’s functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(11) :919–930, November 2007.
- [76] I. Kogevnikov. *Modelling mechanical system with an infinite number of degrees of freedom - Application to the tyre dynamics*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.
- [77] A. Sameur. *Modèle de contact pneumatique-chaussée pour la prévision du bruit de roulement*. PhD thesis, Ecole nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [78] K. L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.
- [79] R. Ghoeshi, P. Cartraud, T. Messenger, and P. Davies. Modélisation du comportement de câbles synthétiques. In *Journée AUM/AFM*, 2004.
- [80] Anne Nawrocki and Michel Labrosse. A finite element model for simple straight wire rope strands. *Computers & Structures*, 77(4) :345–359, July 2000.
- [81] Taylor & Francis Group, editor. *Viscoelastic material property characterization for tyre finite element analysis*. Haris Shankar Sighania Elastomer & Tyre Reseach Institute, India, 2007.
- [82] Company KYOWA. Gages for general stress measurement kfg. <http://www.kyowa-ei.co.jp/english/products/gages/pdf/kfg-01.pdf>.
- [83] J.M. Berthelot. *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures*. 2005.
- [84] Z. Hashin. Analysis of composite materials - a survey. *Journal of Applied Mechanics*, 450 :481–505, 1983.
- [85] Antonio Miravete. *3-D Textile Reinforcements In Composite Materials*. CRC, 1999.
- [86] Senthil S. Vel and R. C. Batra. Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIIAA Journal*, 40(7) :1421–1433, 2002.
- [87] S. Li. *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics*. University of California Berkeley, California, 2006.
- [88] Amit K. Naskar, A. K. Mukherjee, and R. Mukhopadhyay. Studies on tyre cords : degradation of polyester due to fatigue. *Polymer Degradation and Stability*, 83(1) :173–180, January 2004.
- [89] C. J. M. van den Heuvel and E. A. Klop. Relations between spinning, molecular structure and end-use properties of polyethylene naphthalate tyre yarns. *Polymer*, 41(11) :4249–4266, May 2000.
- [90] H. Barguet, B. Chauvin, A. Domingo, and T. Pottier. Câble composite pour le pneumatique. Brevet WO/2007/090603, Société de Technologie Michelin, 8 2007.
- [91] Y. Chevalier. Comportements élastique et viscoélastique des composites. *Techniques de l’Ingénieur, traité Plastiques et Composites*, ARCH1(A7750), 5 1988.

- [92] R. M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity*. Dover Publications, Inc, 2003.
- [93] Jean Salençon. *Viscoélasticité*. 1983.
- [94] Z. Sobotka. *Rheology of Materials and Engineering Structures*. Elsevier Science Publishing Company, 1984.
- [95] Alex Huynh Kim Long. *Analysis of elastomer's dynamic behaviour : modeling and identification*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005.
- [96] Roger Brown. *Physical Testing of Rubber*. Springer, 2005.
- [97] A. Ya. Malkin. *Rheology Fundamentals*. ChemTec Publishing, 1994.
- [98] J. Plusquellec. Vibrations. *Techniques de l'Ingénieur*, Bruit et vibrations :BR200, 2004.
- [99] G. W. Laird and H. B. Kingsbury. A methode of determining complex moduli of viscoelastic materials. *Experimental Mechanics*, 13(3) :126–131, March 1973.
- [100] D. J. Ewins. *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. Taylor & Francis Group, 2 edition, 8 2001.
- [101] S. N. Goyanes, A. Roncaglia, F. Saavedra, and G. H. Rubiolo. About the measurement of dynamic mechanical properties of bi-layer systems. *Materials Science and Engineering A*, 370(1-2) :431–434, April 2004.
- [102] Hans Georg Bossemeyer. Evaluation technique for dynamic moduli. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 5(3) :273–291, 9 2001.
- [103] J. Betten. *Creep Mechanics*. Springer, 2005.
- [104] A.V. Shenoy. *Rheology of Filled Polymer Systems*. Springer, 1999.
- [105] Etienne Balmès. *Méthodes de conception et de validation en vibration*. Laboratoire de Mécanique Sols, Structures et Matériaux, Ecole Centrale Paris, 2 2005.
- [106] E. Balmès, Corus M., and Germès S. Model validation for heavily damped structures. application to a windshield joint. *SDTools*.
- [107] R. F. Gibson and R. Plunkett. A forced-vibration technique for measurement of material damping. *Experimental Mechanics*, 7(8) :297–302, 1977.
- [108] Liming Yu, Yue Ma, Chungen Zhou, and Huibin Xu. Damping efficiency of the coating structure. *International Journal of Solids and Structures*, 42(11-12) :3045–3058, June 2005.
- [109] Jean-Marie Berthelot and Youssef Sefrani. Damping analysis of unidirectional glass and kevlar fibre composites. *Composites Science and Technology*, 64(9) :1261–1278, July 2004.
- [110] Jean-Marie Berthelot. Damping analysis of laminated beams and plates using the ritz method. *Composite Structures*, 74(2) :186–201, July 2006.
- [111] Jean-Marie Berthelot and Youssef Sefrani. Longitudinal and transverse damping of unidirectional fibre composites. *Composite Structures*, 79(3) :423–431, July 2007.
- [112] N.W. Tschoegl, Wolfgang G. Knauss, and Igor Emri. Poisson's ratio in linear viscoelasticity - a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6(1) :3–51, 2002.
- [113] *ABAQUS Theory Manual*. ABAQUS, Inc., 2006.
- [114] S. Gade and H. Herlufsen. Digital Filter Techniques vs. FFT Techniques for Damping Measurements. *Bruel & Kjaer Technical Review*, 1994.
- [115] T. M. Nguyen. *Dynamique non linéaire des systèmes mécaniques couplés : Réduction de modèle et Identification*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- [116] Y. Chevalier. Essais dynamiques sur composites - caractérisation aux basses fréquences. *Techniques de l'Ingénieur, traité Plastiques et Composites*, AM6(AM5400), 7 2002.
- [117] J. Cesbron. *Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique-chaussée*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2007.
- [118] NF E90-150. *Etalonnage des accéléromètres ou chaînes accélérométriques dans la gamme des moyennes fréquences*. Association Française de Normalisation, 1981.

-
- [119] NF E90-151. *Etalonnage des accéléromètres. Etalonnage en continu*. Association Française de Normalisation, 1981.
- [120] NF E90-152. *Vibrations et chocs mécaniques : Fixation mécanique des accéléromètres*. Association Française de Normalisation, 1993.
- [121] J. D. Achenbach. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Elsevier Science Ltd, 1999.
- [122] Karl F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. New York, Dover, 1973.
- [123] A. Ehrlacher. *Modèle de Matériaux Composites*. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.
- [124] T. Lachand-Robert. Analyse harmonique, distributions, convolution. *Technique de l'Ingénieur*, A142 - traité Mathématiques pour l'ingénieur, 1993.
- [125] M. Lalanne, P. Berthier, and J. Der Hagopian. *Mécanique des vibrations linéaires*. Masson, 1995.

