



**HAL**  
open science

# Modèles structurels flous et propagation de contraintes pour la segmentation et la reconnaissance d'objets dans les images: Application aux structures normales et pathologiques du cerveau en IRM

Olivier Nempont

► **To cite this version:**

Olivier Nempont. Modèles structurels flous et propagation de contraintes pour la segmentation et la reconnaissance d'objets dans les images: Application aux structures normales et pathologiques du cerveau en IRM. Mathematics [math]. Télécom ParisTech, 2009. English. NNT: . pastel-00005269

**HAL Id: pastel-00005269**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00005269v1>**

Submitted on 19 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale  
d'Informatique,  
Télécommunications  
et Électronique de Paris

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur  
de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications  
Spécialité : Signal et Images

## Olivier NEMPONT

Modèles structurels flous et propagation  
de contraintes pour la segmentation et la  
reconnaissance d'objets dans les images.  
Application aux structures normales et  
pathologiques du cerveau en IRM.

Soutenue le 27 mars 2009 devant le jury composé de

Aline Deruyver  
Christian Ronse  
Dominique Hasboun  
Grégoire Malandain  
Jean-Michel Jolion  
Isabelle Bloch  
Elsa Angelini

Rapporteurs

Examineurs

Président du jury  
Directrice de thèse  
Codirectrice de thèse



## Résumé

Le cerveau présente une structure complexe. La segmentation et la reconnaissance automatique de ses sous-structures dans des IRM cérébrales est délicate et nécessite donc l'utilisation d'un modèle de l'anatomie. L'utilisation d'atlas iconiques est efficace pour traiter les données de sujets sains mais son adaptation au traitement de cas pathologiques reste problématique. Dans cette thèse nous utilisons un modèle symbolique de l'anatomie proche des descriptions linguistiques qui comprend les principales structures cérébrales. L'agencement spatial de ces structures y est représenté sous forme de relations spatiales et leur apparence est caractérisée par des relations sur leur contraste.

Réaliser la reconnaissance grâce à ce modèle structurel consiste à obtenir pour chaque structure une région de l'image vérifiant les relations et caractéristiques portées par le modèle. Nous formulons ce problème comme un réseau de contraintes dont les variables sont les régions recherchées représentées sous forme d'ensembles flous. Les contraintes sont déduites du modèle en tirant parti de modélisations floues. Une contribution nouvelle porte sur la contrainte de connexité et la proposition de définitions et algorithmes adaptés au cas flou présentant de bonnes propriétés. Nous mettons alors en œuvre un algorithme de propagation de contraintes qui itérativement réduit l'espace de solutions. Enfin nous obtenons un résultat pour certaines structures d'intérêt par l'extraction d'une surface minimale relativement aux résultats de l'algorithme de propagation. Nous appliquons cette approche aux structures internes du cerveau chez des sujets sains.

Finalement nous étendons ce processus au traitement de données de patients présentant une tumeur. Le modèle générique ne correspondant plus aux données à reconnaître, nous proposons un algorithme de propagation recherchant à la fois le modèle spécifique au patient et les structures anatomiques.

## Abstract

The anatomy of brain is complex. Therefore the fully automatic segmentation and recognition of its relevant subparts in brain MRI is a challenging task. It is usually done using a model of anatomy. Iconic atlases are well suited to achieve this task on normal subjects. However the extension to pathological cases remains problematic. In this thesis we use a symbolic model of anatomy, close to linguistic descriptions. It includes the main brain structures and some of their properties. Their spatial layout is encoded as spatial relations and their appearance is represented as relations on their contrast.

We use this structural model to perform the recognition : we have to obtain for each anatomical structure a region of the image that fulfils all relations and characteristics of the model. We formulate this problem as a constraint network whose variables are the sought regions represented as fuzzy sets. The constraints are derived from the model using fuzzy modeling. In particular to obtain the connectivity constraint, we propose a new definition (and the associated algorithms) for the connectivity of fuzzy sets. Then we implement a constraint propagation algorithm which iteratively reduces the solution space. Once the solution space has been reduced, we obtain a final result for some structures. We extract a minimal surface with respect to the outputs of the propagation algorithm. We apply this approach to brain internal structures of healthy subjects.

Finally we propose an extension to handle cases that present brain tumors. The generic model of anatomy does not fit anymore the data to be recognized. Therefore we propose a propagation algorithm that searches simultaneously for the specific model of the patient and for anatomical structures.

---



## Remerciements

En premier lieu je tiens à exprimer mes plus sincères remerciements à Isabelle Bloch qui a admirablement dirigé ma thèse. Ses conseils avisés et sa grande culture scientifique m'ont beaucoup enrichi. Je tiens à saluer sa gentillesse et sa grande disponibilité. Je lui suis aussi extrêmement reconnaissant pour toute l'aide qu'elle m'a apportée. Je remercie aussi Elsa Angelini qui a co-encadré cette thèse. Je salue notamment son implication dans la mise en œuvre des applications développées dans le cadre de la thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement Jamal Atif qui a activement participé à ce travail. Je lui suis reconnaissant non seulement pour le travail accompli, mais aussi pour toutes ces discussions enrichissantes et parfois animées qui nous mettaient souvent au diapason.

Merci à Aline Deruyver et à Christian Ronse, qui ont accepté la lourde tâche de rapporteur. Merci à Jean-Michel Jolion qui a accepté de présider le jury. Enfin merci à Grégoire Malandain et Dominique Hasboun qui ont également participé au jury. Je tiens aussi à remercier Dominique pour ses cours captivants d'anatomie, son enthousiasme et le travail accompli ensemble.

Je tiens par ailleurs à remercier l'INCA qui a financé le projet ayant donné lieu à cette thèse ainsi que tous les partenaires de ce projet : Dominique Hasboun du CHU Pitié-Salpêtrière, Bertrand Devaux et Roger Clodic du C.H. Sainte-Anne, Angel Osorio et Julien Nauroy du LIMSI. Je remercie Jamal Atif, Céline Hudelot, Bénédicte Batrancourt, Nathalie Richard, Vincent Israel-Jost qui ont participé à ce projet lors de leurs post-doctorats à l'ENST, Hassan Khotanlou lors de sa thèse, Elsa Angelini et Isabelle Bloch qui ont encadré le projet.

Une dédicace toute particulière à l'Oursonne et à Jérém pour tous ces bons moments passés ensemble en C29. Ca aura été un immense plaisir de contribuer à l'ambiance studieuse du bureau. Merci aussi à David, Emi, Giovanni, Jean-Baptiste, Céline, Hassan, Antonio, Geoffroy, Nicolas, Carolina et Julien. Merci enfin à tout les membres du département TSI pour leur accueil chaleureux et leur accessibilité.

Je remercie ma famille mais aussi Gillou, Bouch, Frog, Sarah, Phil, Philou et Ben pour leur soutien. Pour finir je tiens à remercier Alexandra qui a su écouter patiemment mes histoires de détection de patates. Merci pour son soutien sans failles notamment pendant la rédaction du manuscrit.

---



---

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Segmentation et reconnaissance de scènes guidées par un modèle de l'anatomie</b>	<b>15</b>
1.1	Segmentation semi-automatique en IRM des structures sous-corticales du cerveau . . . . .	16
1.2	Mise en correspondance d'un atlas iconique . . . . .	20
1.3	Modèles de forme . . . . .	22
1.4	Utilisation d'une représentation structurelle de l'anatomie . . . . .	25
1.4.1	Représentation structurelle de l'anatomie cérébrale . . . . .	25
1.4.2	Annotation d'une segmentation ou d'une sursegmentation . . . . .	29
1.4.3	Segmentation itérative guidée par graphe . . . . .	31
1.4.4	Adaptation du modèle structurel en présence de tumeurs . . . . .	33
1.5	Bilan . . . . .	33
1.6	Approche proposée . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Réseaux de contraintes et segmentation</b>	<b>37</b>
2.1	Réseaux de contraintes . . . . .	37
2.1.1	Définitions générales et notations . . . . .	38
2.1.2	Méthodes de résolution . . . . .	39
2.1.3	Propagation de contraintes . . . . .	40
2.1.4	Exemple : le Sudoku . . . . .	42
2.1.5	Consistance de bornes . . . . .	44
2.1.6	Réseaux de contraintes portant sur des ensembles . . . . .	45
2.2	Segmentation et reconnaissance structurelle par la résolution d'un réseau de contraintes . . . . .	46
2.2.1	Représentation du problème de segmentation et de reconnaissance . . . . .	46
2.2.2	Représentation des domaines . . . . .	48
2.2.3	Définition des contraintes . . . . .	50
2.3	Propagation . . . . .	52
2.4	Définition et modélisation des contraintes spatiales . . . . .	55
2.4.1	Relations ensemblistes . . . . .	55
2.4.2	Position relative directionnelle . . . . .	60
2.4.3	Distance . . . . .	64
2.4.4	Connexité . . . . .	69
2.4.5	Volume . . . . .	70
2.4.6	Adjacence . . . . .	71
2.5	Définition et modélisation des contraintes radiométriques . . . . .	72
2.5.1	Modélisation . . . . .	73
2.5.2	Définition de la contrainte et de la règle de propagation . . . . .	75
2.6	Relations composées . . . . .	77

---



---

2.6.1	Connexité et adjacence . . . . .	77
2.6.2	Connexité et volume . . . . .	79
2.7	Illustrations . . . . .	79
2.8	Conclusion . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Connexité des ensembles flous et contrainte associée</b>	<b>87</b>
3.1	Rappels . . . . .	88
3.1.1	Connexité d'un ensemble flou . . . . .	89
3.1.2	Classes de connexité . . . . .	89
3.2	Une nouvelle classe de connexité . . . . .	93
3.2.1	Mesure de connexité . . . . .	93
3.2.2	Lien avec une hyperconnexion . . . . .	96
3.2.3	Composantes connexes . . . . .	97
3.2.4	Représentation par arbre . . . . .	99
3.3	Définition de la contrainte liée à l'a priori de connexité . . . . .	105
3.4	Filtres connexes . . . . .	107
3.4.1	Définitions générales . . . . .	107
3.4.2	Ouvertures fondées sur un degré de connexité fixe . . . . .	108
3.4.3	Ouvertures fondées sur un degré de connexité variable . . . . .	112
3.5	Définition des filtres . . . . .	115
3.5.1	Connexité seule . . . . .	115
3.5.2	Connexité et volume . . . . .	118
3.5.3	Connexité et adjacence . . . . .	120
3.6	Conclusion . . . . .	121
<b>4</b>	<b>Ordonnement des contraintes pour la propagation</b>	<b>123</b>
4.1	Algorithmes de propagation pour la consistance d'arc . . . . .	123
4.1.1	Algorithmes de propagation grossiers . . . . .	124
4.1.2	Algorithmes de propagation fins . . . . .	126
4.2	Ordonnement des contraintes . . . . .	126
4.2.1	Motivation . . . . .	126
4.2.2	Changement des domaines . . . . .	129
4.2.3	Coût calculatoire des contraintes . . . . .	130
4.2.4	Estimation fine du potentiel de réduction des contraintes . . . . .	132
4.2.5	Combinaison des critères et propagation . . . . .	148
4.3	Illustrations . . . . .	155
4.3.1	Un exemple synthétique simple . . . . .	155
4.3.2	Performances . . . . .	156
4.4	Conclusion . . . . .	160
<b>5</b>	<b>Extraction d'une solution</b>	<b>163</b>
5.1	Motivations . . . . .	163
5.2	Extraction de surfaces minimales . . . . .	165
5.2.1	Formulation . . . . .	165
5.2.2	Optimisation . . . . .	166
5.3	Extraction d'une surface minimale relativement aux résultats de la propagation	168
5.3.1	Prise en compte des relations d'adjacence dans la définition de la fonctionnelle . . . . .	169
5.3.2	Intégration des contraintes relatives aux bornes du domaines . . . . .	171
5.3.3	Optimisation par coupure de graphe . . . . .	172

---

---

5.4	Conclusion . . . . .	172
<b>6</b>	<b>Application à la segmentation des structures cérébrales sous-corticales</b>	<b>175</b>
6.1	Construction de la base de connaissances . . . . .	175
6.1.1	Pour un élément de la base d'apprentissage . . . . .	176
6.1.2	Fusion . . . . .	180
6.2	Exemples synthétiques . . . . .	182
6.2.1	Apprentissage . . . . .	183
6.2.2	Propagation . . . . .	184
6.3	Traitement d'IRM cérébrales de sujets sains . . . . .	188
6.3.1	Apprentissage . . . . .	188
6.3.2	Reconnaissance . . . . .	190
6.3.3	Application du processus en 3D . . . . .	199
6.4	Traitement de données pathologiques . . . . .	207
6.4.1	Adaptation du processus de propagation . . . . .	208
6.4.2	Segmentation et résultats . . . . .	216
6.4.3	Vers un modèle plus général de la prise en compte des tumeurs . . .	219
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>225</b>
7.1	Récapitulatif des contributions . . . . .	225
7.1.1	Représentation structurelle de l'anatomie . . . . .	225
7.1.2	Processus de reconnaissance . . . . .	225
7.1.3	Connexité des ensembles flous . . . . .	226
7.2	Perspectives . . . . .	227
7.2.1	Optimisation du processus de propagation . . . . .	227
7.2.2	Vers un réseau plus contraint . . . . .	227
7.2.3	Représentation des variations importantes de l'anatomie . . . . .	227
7.2.4	Reconnaissance de cas pathologiques . . . . .	228
7.2.5	Prise en compte de contraintes floues . . . . .	228
7.3	Publications . . . . .	228
	<b>Conclusion</b>	<b>224</b>
<b>A</b>	<b>Notations</b>	<b>231</b>
A.1	Tables de notations . . . . .	231
A.2	Définitions relatives aux ensembles flous . . . . .	232
<b>B</b>	<b>Représentation GRAFIP et outil de navigation dans l'anatomie</b>	<b>235</b>
B.1	Représentation GRAFIP . . . . .	235
B.1.1	Base de connaissances générique . . . . .	235
B.1.2	Représentation GRAFIP . . . . .	236
B.2	Description détaillée du format de stockage . . . . .	238
B.2.1	Structure générale . . . . .	239
B.2.2	Sauvegarde des études . . . . .	239
B.2.3	Fichier de description du graphe . . . . .	242
B.3	Outil de navigation dans l'anatomie cérébrale . . . . .	245
B.4	Conclusion . . . . .	245
<b>C</b>	<b>Preuves du chapitre 2</b>	<b>247</b>

---

<b>D Preuves du chapitre 3</b>	<b>265</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>298</b>

---

# Introduction

La reconnaissance et l'interprétation automatiques de données médicales reste un problème difficile en raison notamment de la complexité des structures à reconnaître ou de la variabilité normale et pathologique de ces structures. Cette thèse porte sur la segmentation et la reconnaissance automatique de structures anatomiques, c'est-à-dire l'extraction des régions correspondant aux structures recherchées, dans des examens par imagerie par résonance magnétique (IRM) du cerveau de sujets sains ou de patients présentant une tumeur cérébrale.

Pour réaliser cette reconnaissance, l'utilisation de modèles s'impose. Un atlas iconique peut par exemple être mis en correspondance avec l'image à reconnaître. Même si la transformation recherchée est souvent complexe en raison de la variabilité anatomique, ce type de méthode s'avère efficace pour traiter les données de sujets sains. Cependant l'adaptation au traitement de cas oncologiques reste problématique. La tumeur induit en effet une modification importante de l'anatomie. L'atlas et les données à reconnaître présentent alors des différences importantes et il est difficile d'obtenir une transformation qui mette correctement ces images en correspondance. De plus l'obtention d'un atlas spécifique intégrant la tumeur est problématique à cause de la variabilité de la position des tumeurs et de leur impact sur l'anatomie.

Dans cette thèse nous utilisons un modèle plus compact et plus proche des descriptions linguistiques de l'anatomie. Ces dernières parviennent à décrire en quelques mots et souvent sans ambiguïté l'agencement spatial des différentes structures anatomiques et leur apparence dans les données. Ces deux aspects sont particulièrement importants puisqu'ils restent relativement stables même si les structures anatomiques sont sujettes à une variabilité importante. De plus ils peuvent être représentés simplement sous forme de caractéristiques intrinsèques des structures anatomiques et de relations symboliques entre ces structures. Ces relations peuvent être spatiales. Les noyaux caudés sont par exemple proches des ventricules latéraux. Elles peuvent aussi porter sur l'apparence des structures. Ainsi dans une IRM pondérée en  $T1$ , les noyaux caudés sont beaucoup plus clairs que les ventricules latéraux.

Réaliser la reconnaissance en utilisant ce modèle structurel consiste alors à obtenir une région de l'image pour chaque structure du modèle, ces régions devant satisfaire l'ensemble des relations et caractéristiques portées par le modèle. Ce problème combinatoire est complexe et l'extraction d'une solution n'est pas directement réalisable. Cependant de nombreuses régions ne peuvent de façon évidente pas satisfaire les relations imposées par le modèle. Nous pouvons donc simplifier le problème en éliminant le plus grand nombre possible de régions incohérentes avec le modèle. Les réseaux de contraintes se prêtent particulièrement bien à la formulation de ce type de processus. Nous définissons donc un réseau dans lequel une variable est associée à chaque structure anatomique et prend pour valeurs des régions de l'espace représentées sous la forme d'ensembles flous. Les contraintes portant sur ces variables sont alors dérivées du modèle structurel en tirant parti de modélisations

---

flous de relations spatiales proposées au sein de l'équipe ou en proposant de nouvelles définitions comme pour la contrainte de connexité.

Nous mettons alors en œuvre un algorithme de propagation de contraintes qui élimine itérativement des valeurs (des régions représentées par des ensembles flous sur le domaine spatial dans notre cas) ne satisfaisant pas les contraintes dérivées du modèle et qui réduit ainsi l'espace de solutions. Pour cela nous définissons pour chaque contrainte un opérateur supprimant les valeurs incohérentes relativement à celle-ci. L'algorithme de propagation consiste alors à appliquer successivement ces opérateurs jusqu'à ce que plus aucune valeur incohérente ne puisse être supprimée. L'espace de solutions du problème est de cette façon considérablement réduit. Cependant nous ne pouvons toujours pas extraire de solution satisfaisant à l'ensemble des contraintes car la combinatoire reste trop grande. Nous réalisons donc, pour certaines structures d'intérêt, l'extraction d'une région appartenant à l'espace de solutions réduit sur un critère de surface minimale. Nous appliquons cette approche à la segmentation et la reconnaissance des structures internes du cerveau dans des IRM de sujets sains. Pour cela nous apprenons le modèle structurel sur une base annotée manuellement et nous réalisons la reconnaissance en utilisant ce modèle.

Finalement nous étendons ce processus au traitement de données de patients présentant une tumeur. Le modèle générique ne correspond pas, dans ce cas, aux données à reconnaître puisque la tumeur entraîne une modification importante de l'anatomie. Toutefois nous pouvons obtenir un modèle spécifique par une transformation simple du modèle générique si nous savons quelles structures sont affectées par la tumeur. Nous introduisons donc cette transformation comme variable supplémentaire du réseau de contraintes et nous mettons en œuvre un algorithme de propagation qui réduit à la fois l'espace de solutions du modèle spécifique au patient traité et celui des variables représentant les régions recherchées. Nous proposons quelques illustrations de ce processus pour des cas simples.

## Structure du document

Dans le chapitre 1 nous réalisons une description générale des méthodes de segmentation et de reconnaissance reposant sur des modèles iconiques ou statistiques d'une part ou des modèles structurels d'autre part. En regard de ces travaux, nous situons l'approche proposée dans cette thèse et nous en donnons un aperçu général. Les chapitres suivants détaillent les contributions originales.

Le chapitre 2 est central dans cette thèse. Nous y formulons notre problème de segmentation et de reconnaissance comme la résolution d'un réseau de contraintes et nous montrons qu'il est possible, par un algorithme de propagation, de réduire considérablement l'espace de solutions de ce problème. Nous décrivons comment ce réseau de contraintes est défini à partir du modèle structurel. Nous spécifions notamment les modélisations choisies pour les contraintes et nous dérivons les opérateurs requis pour réaliser la propagation.

Dans le chapitre 3 nous discutons en détail la contrainte de connexité. Puisque nous représentons les régions sous la forme d'ensembles flous, la modélisation de cette contrainte repose sur une définition de la connexité des ensembles flous. Afin d'offrir plus de souplesse dans la modélisation de cette contrainte, nous proposons une extension de la définition de Rosenfeld qui dépend d'un paramètre de tolérance. Nous obtenons alors les opérateurs requis par l'algorithme de propagation de contraintes et nous montrons que ceux-ci peuvent être calculés efficacement en utilisant une représentation par arbres.

Dans le chapitre 4, nous décrivons plus précisément l'algorithme de propagation mis en œuvre. Celui-ci applique séquentiellement des opérateurs élémentaires associés aux contraintes du modèle jusqu'à convergence. L'ordonnancement de l'application de ces opé-

---

rateurs n'influe pas sur le résultat obtenu mais a un impact important sur les performances de l'algorithme. Afin de réduire le temps de calcul de l'algorithme, nous proposons donc un ordonnancement spécifique à notre problème.

Après l'application de l'algorithme de propagation de contraintes, le problème est considérablement simplifié mais pas assez pour que l'extraction d'une solution soit triviale. Cette extraction étant trop coûteuse simplement en utilisant le réseau de contraintes, nous proposons dans le chapitre 5 d'extraire une solution approximative en calculant une surface minimale à partir des résultats du processus de propagation.

Nous illustrons alors dans le chapitre 6 l'ensemble du processus de reconnaissance. Nous décrivons tout d'abord un processus d'apprentissage permettant d'obtenir le modèle structurel. Nous évaluons alors le processus de reconnaissance proposé sur une base de cas synthétiques puis sur des IRM cérébrales de sujets sains. Nous proposons enfin une adaptation du processus proposé pour traiter les données de patients présentant des tumeurs cérébrales. Nous réalisons alors la reconnaissance des structures anatomiques tout en obtenant un modèle spécifique au patient qui comprend la tumeur.

Dans l'annexe B, nous décrivons plus précisément le modèle structurel utilisé et son utilisation pour la structuration des données radiologiques d'un sujet. Nous illustrons aussi brièvement un outil pédagogique reposant sur ce modèle que nous avons développé en collaboration avec le neuroanatomiste Dominique Hasboun. Finalement nous donnons dans les annexes C et D les preuves des propositions des chapitres 2 et 3.

---



## Chapitre 1

# Segmentation et reconnaissance de scènes guidées par un modèle de l'anatomie

La reconnaissance automatique de scènes complexes telles que le cerveau requiert l'utilisation d'un modèle de l'ensemble des structures à reconnaître. Ce modèle doit comporter une représentation de caractéristiques des structures qui permettront la reconnaissance. Ainsi dans le cas d'une scène simple où tous les objets présentent une radiométrie différente, un *a priori* sur la radiométrie peut être suffisant pour réaliser la reconnaissance. Ce n'est pas le cas lorsque nous voulons réaliser la reconnaissance d'une scène complexe telle qu'une IRM cérébrale. En effet la radiométrie des structures du cerveau que nous voulons reconnaître est une caractéristique peu discriminante et nous sommes alors amenés à utiliser d'autres caractéristiques telles que l'agencement spatial de ces structures.

La liste des structures cérébrales à reconnaître dépend du niveau de granularité choisi. La figure 1.1 présente une coupe axiale d'une IRM cérébrale et une segmentation manuelle de celle-ci. Les structures sous-corticales y sont extraites à un niveau de détail plutôt fin alors que le cortex cérébral est uniquement subdivisé en deux parties. Globalement ces structures présentent une forme complexe et une radiométrie peu discriminante. De plus l'anatomie normale présente une variabilité importante (la figure 1.2 présente plusieurs coupes axiales d'IRM cérébrales provenant de la base OASIS [Marcus et al., 2007] et illustrant la variabilité normale). Pour ces raisons, réaliser la segmentation et la reconnaissance de telles scènes n'est pas un problème trivial et nécessite l'utilisation d'un modèle approprié.

La présence de pathologies telles que les tumeurs cérébrales constitue une difficulté supplémentaire. La figure 1.3 présente plusieurs IRM cérébrales de sujets affectés par une tumeur cérébrale<sup>1</sup>, illustrant les modifications induites par cette pathologie (refoulement ou infiltration des structures cérébrales, présence d'un œdème ou d'une nécrose, ...). La position et la forme des tumeurs sont de plus extrêmement variables. Les méthodes utilisées pour réaliser la segmentation et la reconnaissance dans le cas normal doivent donc être adaptées pour traiter les images de ces sujets. En raison notamment de la localisation très variable des tumeurs, il paraît difficile d'apprendre un modèle spécifique. Au cours du processus de reconnaissance, le modèle de l'anatomie normale devra donc être automatiquement adapté à la présence de la tumeur. Cette opération peut poser de nombreux problèmes pour certaines approches et constituera un élément de comparaison entre les

---

1. Une revue des différents types de tumeurs ainsi que leur impact sur l'anatomie cérébrale peut notamment être trouvée dans [Khotanlou, 2008].

---



différentes approches.

Nous décrivons dans ce chapitre deux familles de modèles intégrant une représentation de l'agencement spatial des structures à reconnaître. La première regroupe les atlas et les modèles statistiques du cerveau. Le processus de reconnaissance associé consiste à mettre en correspondance l'atlas et l'IRM à reconnaître ou à estimer les paramètres du modèle de forme. La deuxième correspond aux modèles structurels de l'anatomie cérébrale, représentant explicitement l'agencement spatial (alors qu'il est représenté implicitement dans le cas des atlas et des modèles de formes). Leur motivation repose sur le constat que l'anatomie cérébrale normale présente une variabilité importante, notamment au niveau des formes des structures ou de leur volume, mais que l'agencement spatial des différentes structures anatomiques est relativement stable. Son extraction conduit ainsi à un modèle compact et robuste utilisé pour guider la reconnaissance. La méthode proposée dans cette thèse s'inscrit dans cette deuxième famille. Nous la présentons brièvement dans la section 1.6 après avoir présenté dans les sections 1.2, 1.3 et 1.4 les méthodes reposant respectivement sur un atlas de l'anatomie, sur un modèle de formes ou sur un modèle structurel. Mais tout d'abord, nous réalisons dans la section 1.1 une brève revue des méthodes semi-automatiques proposées pour réaliser la segmentation des structures sous-corticales et ne reposant pas sur un modèle de l'anatomie.

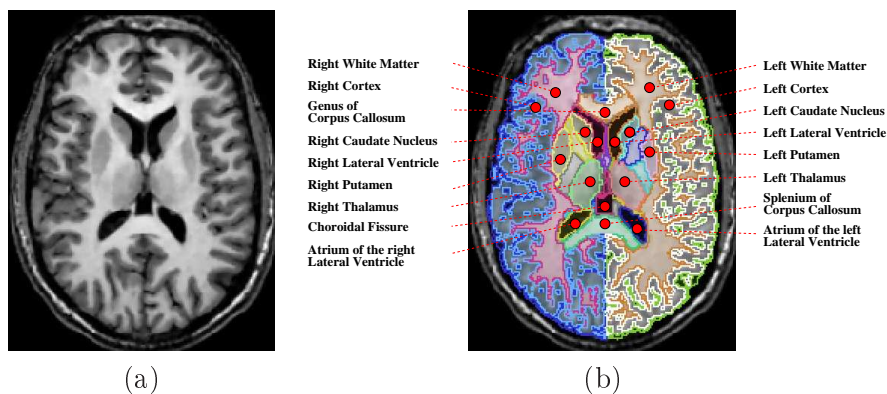


FIGURE 1.1 – (a) Une coupe axiale d'une IRM cérébrale pondérée en T1. (b) Segmentation binaire de la coupe axiale présentée en (a) et annotation des structures segmentées.

## 1.1 Segmentation semi-automatique en IRM des structures sous-corticales du cerveau

La segmentation du cerveau en IRM et notamment des structures sous-corticales est un problème complexe qui présente un cadre applicatif riche allant de la planification préopératoire aux études morphométriques ou fonctionnelles. Même si ce problème de segmentation a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, en pratique cette segmentation est souvent réalisée manuellement. En effet l'obtention d'un algorithme robuste et automatique pour réaliser cette tâche reste un problème difficile notamment en raison :

- des faibles résolutions (et donc des problèmes liés à la discrétisation) et du bruit important,
- des artefacts et notamment de l'hétérogénéité des intensités,
- de la complexité de la scène à reconnaître,
- de la grande variabilité de forme et de taille des structures d'intérêt.

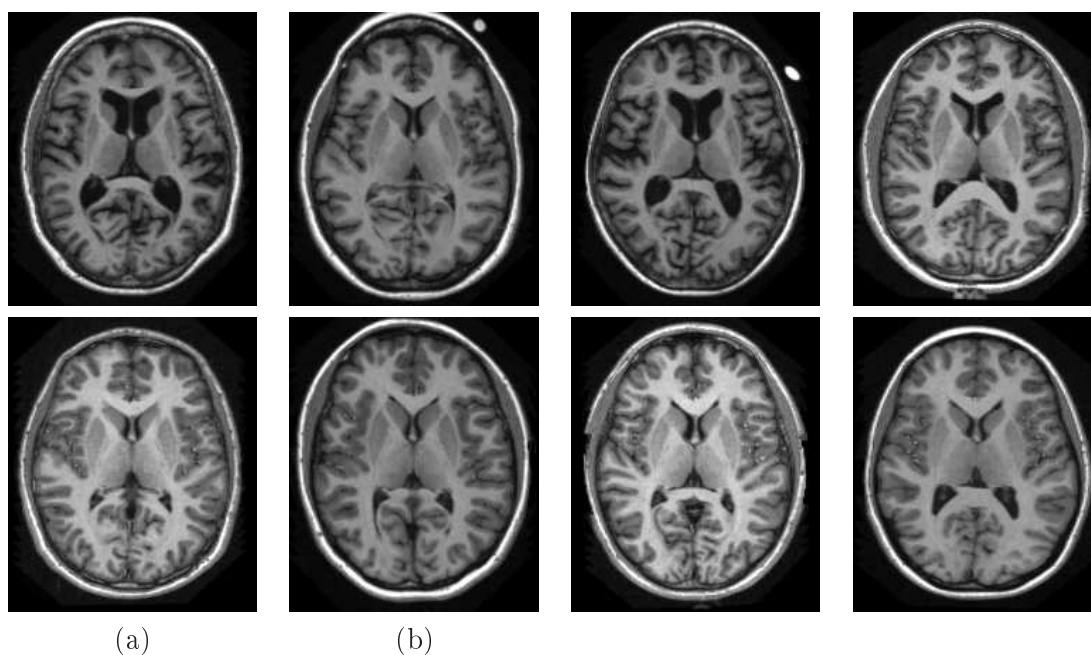


FIGURE 1.2 – Coupes axiales d'IRM de plusieurs sujets provenant de la base OASIS [Marcus et al., 2007] et acquises avec une séquence MP RAGE.

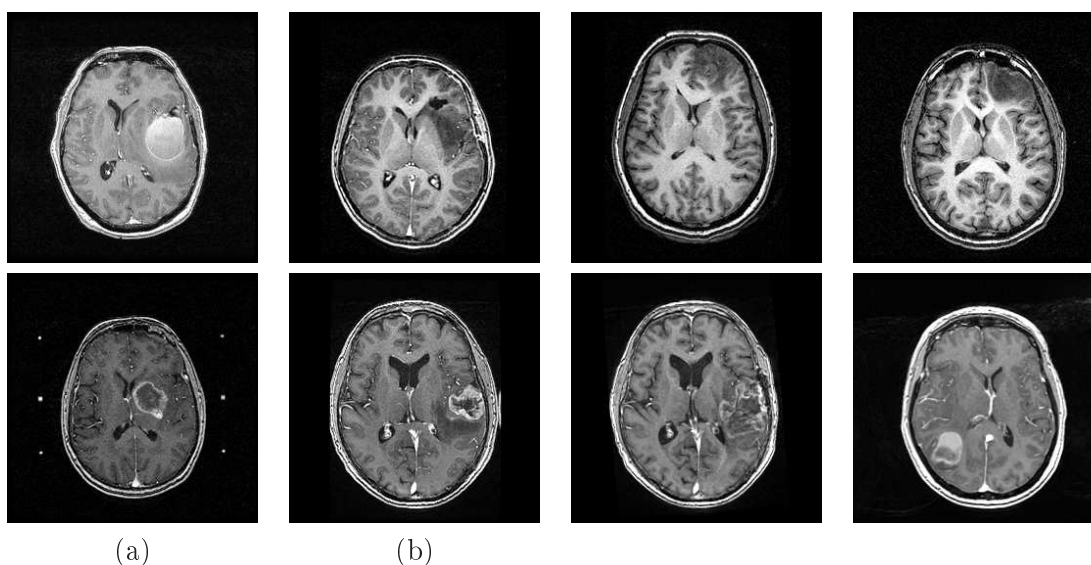


FIGURE 1.3 – Coupes axiales d'IRM cérébrales présentant des tumeurs de formes, tailles, localisations et types variés.

Nous donnons dans cette section un aperçu rapide de méthodes semi-automatiques proposées dans la littérature pour la segmentation des structures sous-corticales. Ces méthodes reposent sur une initialisation fournie par l'utilisateur (i.e. un ensemble de graines ou une solution approximative) à partir de laquelle une solution est extraite. Une interaction avec l'utilisateur étant nécessaire notamment pour fournir l'initialisation (et la corriger si la solution obtenue n'est pas satisfaisante), les performances en terme de temps de calcul sont primordiales et constituent en général un critère de comparaison de ces méthodes.

Les méthodes de croissance de région [Adams and Bischof, 1994, Zhu and Yuille, 1996, Chang and Li, 1994] font partie des méthodes les plus simples qui sont utilisées pour réaliser cette tâche de segmentation. Elles dépendent d'un critère de regroupement et d'un ensemble de graines spécifiées par l'utilisateur qui initialisent les régions à extraire. Itérativement les pixels adjacents à ces dernières et satisfaisant le critère<sup>2</sup> sont ajoutés. Une formulation générale de ce type de processus est proposée dans [Serra, 2006]. Similairement les méthodes de propagation de front [Sethian, 1996] étendent progressivement des graines fournies par l'utilisateur suivant une carte de vitesse généralement définie à partir des gradients de l'image. Une mise en œuvre efficace de ces méthodes est aisément réalisable, ce qui rend possible une utilisation interactive. Cependant elles n'intègrent aucune régularisation spatiale, ce qui peut conduire à des résultats présentant une frontière irrégulière et à une faible robustesse au bruit.

La segmentation par modèles déformables [Kass et al., 1987] permet d'intégrer une telle contrainte de régularité. Son principe consiste à faire évoluer un contour en 2D ou une surface en 3D vers les contours de l'image correspondant à l'objet recherché, une initialisation, en général relativement proche de la solution, devant être fournie par l'utilisateur. Le résultat de segmentation correspond à un minimum local d'une fonctionnelle intégrant régularité de la surface et correspondance aux contours de l'image. Différentes fonctionnelles ont ainsi été proposées dans la littérature afin de modéliser le processus de segmentation comme l'extraction d'un minimum. La plus étudiée a été proposée par Mumford et Shah dans [Mumford et al., 1988] pour le problème d'approximation d'images par une fonction régulière (l'utilisation de fonctions constantes par morceaux conduit à une formulation du problème de segmentation en régions homogènes). L'optimisation de cette fonctionnelle pour la segmentation [Chan and Vese, 2001] notamment d'images médicales peut être réalisée par une formulation sous forme d'ensembles de niveaux [Osher and Sethian, 1988] (modèles déformables représentés sous forme implicite). L'extraction de surfaces minimales [Caselles et al., 1997] a aussi fait l'objet de nombreux travaux. Son principe consiste à définir une métrique sur le domaine de l'image (par exemple à partir des gradients de l'image) et à extraire alors une surface minimale relativement à cette métrique. Différentes stratégies ont été proposées, parmi lesquelles l'extraction d'un minimum local à partir d'une surface initiale [Caselles et al., 1997] ou l'extraction d'un minimum global sous contraintes [Boykov and Kolmogorov, 2003, Grady, 2006a]. De façon générale l'optimisation de telles fonctionnelles est un problème complexe et de nombreux travaux portent sur l'obtention d'algorithmes permettant l'extraction efficace soit d'un minimum global pour certaines classes de fonctionnelles [Boykov et al., 2001, Boykov and Jolly, 2001, Kolmogorov and Zabini, 2004], soit l'extraction d'un minimum local à partir d'une surface initiale par exemple par l'utilisation de méthodes multi-échelles [Corso et al., 2007] pour éviter certains minima locaux. D'autres formulations du problème de segmentation semi-automatique peuvent conduire à des solutions algorithmiques efficaces. Dans [Grady, 2006b] une formulation reposant sur les marches aléatoires est proposée. Une analogie avec un réseau électrique conduit alors à un algorithme de résolution efficace. L'apport de ces méthodes par rapport aux méthodes de croissance de région est important, puisqu'en introduisant la régularisation spatiale, elles présentent une plus grande robustesse au bruit et conduisent à des résultats plus fidèles à la régularité naturelle de la plupart des structures anatomiques. Leur utilisation nécessite cependant toujours l'intervention de l'utilisateur qui doit fournir les graines ou l'initialisation du modèle et éventuellement intervenir pour

---

2. Le critère peut par exemple reposer sur la différence entre le niveau de gris du pixel et la moyenne de niveaux de gris de la région ou être fondé sur une mesure d'affinité floue entre pixels [Udupa and Samarasekera, 1996, Carvalho et al., 1999].

---

guider le processus. Cela est néanmoins acceptable compte tenu des performances atteintes grâce aux développements algorithmiques récents et au développement d'interfaces graphiques spécifiques [Yushkevich et al., 2006].

La figure 1.4 illustre l'application des méthodes proposées dans [Corso et al., 2007] et [Grady, 2006b] à la segmentation des structures sous-corticales. Une bonne solution est obtenue respectivement à partir d'une initialisation approximative et d'un nombre de graines réduit. Le résultat obtenu est cependant sensible à cette initialisation. Les contrastes entre les structures anatomiques à segmenter sont en effet faibles voir inexistantes et sans *a priori* (tel qu'un modèle de la forme recherchée) le processus peut conduire à un résultat erroné, nécessitant l'intervention de l'utilisateur pour réaliser une correction manuelle ou placer des graines supplémentaires.

Le développement de méthodes automatiques de segmentation vise à réduire les interactions imposées à l'utilisateur. Pour cela il est nécessaire d'introduire un modèle de l'anatomie qui guide le processus de segmentation et de reconnaissance. Nous décrivons dans la suite de ce chapitre les principales approches proposées dans la littérature.

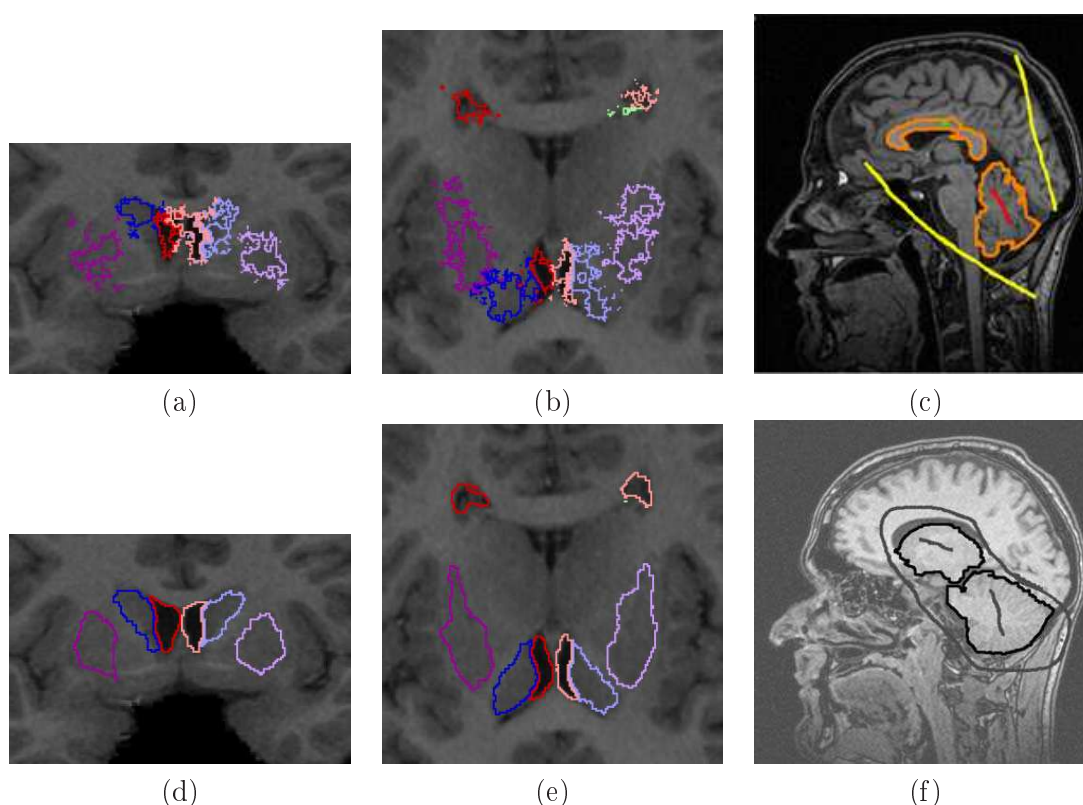


FIGURE 1.4 – Exemples de segmentation semi-automatique. L'algorithme de « graph-shifts » [Corso et al., 2007] permet d'affiner une segmentation initiale (a) et (b). Le résultat est présenté en (d) et (e). Figure extraite de [Corso et al., 2007]. L'algorithme de « random walker » [Grady, 2006b] permet de réaliser une segmentation à partir d'un ensemble de graines fournies par l'utilisateur (c) et (f) (en (c) par exemple une segmentation en trois étiquettes est réalisée. Les graines associées à chacune de ces étiquettes sont respectivement montrées en vert, rouge et jaune. Les frontières de la segmentation obtenue sont montrées en orange). Figure extraite de [Grady, 2005].

## 1.2 Mise en correspondance d'un atlas iconique

L'anatomie cérébrale présente une régularité importante, ce qui a conduit à l'élaboration d'atlas anatomiques et fonctionnels [Talairach and Tournoux, 1988] sous forme iconique. Généralement utilisés comme support des études fonctionnelles ou de la variabilité morphologique, ces atlas le sont aussi pour guider des tâches de segmentation et de reconnaissance automatiques. Pour cela l'image à reconnaître est mise en correspondance avec l'atlas anatomique. Deux principales questions se posent : (i) la construction et la représentation d'un atlas représentant au mieux l'anatomie moyenne (éventuellement répartie en sous-groupes), (ii) l'obtention d'une transformation permettant de mettre en correspondance cet atlas avec un cas particulier. Nous structurons cette section autour de la première question.

Les premières approches proposées [Broit, 1981, Iosifescu et al., 1997, Dawant et al., 1999b] reposent sur un atlas obtenu à partir d'un cas unique annoté manuellement sous l'hypothèse de l'existence d'une correspondance point à point entre les différentes images. L'atlas comporte donc deux images (l'image originale du patient modèle et l'annotation manuelle associée). La reconnaissance d'un nouveau patient consiste donc à estimer la transformation spatiale permettant de passer du modèle au patient. Cette transformation est non linéaire en raison de la variabilité anatomique et son existence est assurée par l'hypothèse de départ. Ce problème est exprimé comme un problème de recalage non linéaire (la transformation étant représentée par exemple sous la forme de splines), mais son calcul est complexe. Classiquement il repose sur la minimisation d'une fonctionnelle intégrant d'une part une mesure de similarité entre l'image et l'image originale de l'atlas à laquelle la transformation est appliquée et d'autre part un terme favorisant les transformations spatialement régulières. La minimisation est alors en général réalisée par un algorithme itératif [Thirion, 1998, Beg et al., 2005].

Cependant l'utilisation d'un atlas obtenu à partir d'un patient unique introduit un biais dans le processus de reconnaissance vers l'anatomie particulière de ce patient. De plus la variabilité anatomique importante notamment au niveau du cortex (certaines circonvolutions ne sont par exemple présentes que chez une partie des sujets) peut mettre en défaut les méthodes de recalage utilisées. Ainsi l'obtention d'atlas « moyens » (réduisant ainsi l'amplitude de la transformation à rechercher) a fait l'objet de nombreux travaux. Parmi ceux-ci nous pouvons distinguer les atlas dits probabilistes et les atlas moyens à proprement parler. L'obtention d'atlas probabilistes est réalisée par un recalage affine d'un ensemble de cas annotés manuellement. Pour chaque structure anatomique, une carte de probabilité est alors déduite du nombre d'occurrences de la structure en chaque pixel. L'atlas probabiliste ICBM [Mazziotta et al., 1995] a par exemple été obtenu à partir d'un jeu de 452 IRM cérébrales et est mis à la disposition de la communauté. L'intégration de ce type d'atlas dans le processus de reconnaissance a notamment été proposée dans [Collins et al., 1999] en s'appuyant sur une classification préliminaire de l'image, dans [Pohl et al., 2002, 2006] par l'estimation du maximum *a posteriori* par espérance-maximisation (EM) ou encore dans [Fischl et al., 2002]. La figure 1.5 illustre à différents stades du processus la mise en correspondance progressive de l'atlas avec une image en considérant la méthode proposée dans [Pohl et al., 2006]. Cependant les atlas probabilistes sont peu précis, en raison du moyennage réalisé, et l'image obtenue par le moyennage des images originales est floue. Pour remédier à cela, des recherches récentes ont porté sur le recalage de groupe [Guimond et al., 2000, Joshi et al., 2004, Bhatia et al., 2004, Blezek and Miller, 2007]. Elles visent à extraire un atlas moyen d'un groupe de sujets, minimisant la déformation à réaliser pour être mise en correspondance avec l'ensemble des éléments de la base. La reconnaissance consiste alors à mettre en correspondance cet atlas moyen avec l'image à reconnaître.

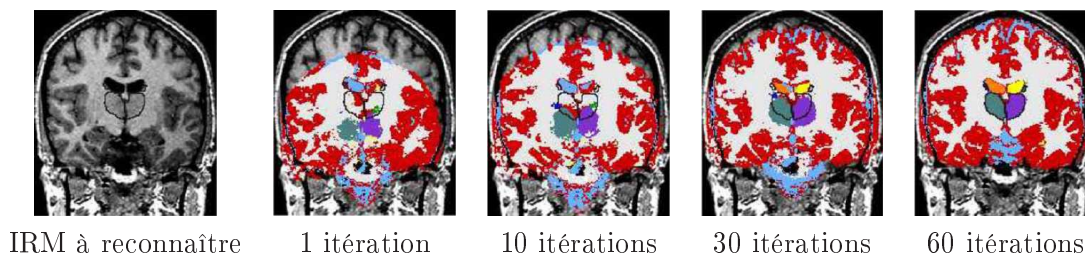


FIGURE 1.5 – Reconnaissance d’une image par mise en correspondance d’atlas selon la méthode proposée dans [Pohl et al., 2006]. L’atlas est recalé itérativement. Figure extraite de [Pohl et al., 2006].

Même si l’obtention d’atlas moyens réduit la distance entre l’atlas et l’image à reconnaître, la gestion des variabilités importantes est toujours problématique. En effet cette variabilité peut par exemple impliquer la présence de circonvolutions supplémentaires (le gyrus paracingulaire par exemple) chez certains individus et les transformations considérées ne permettent pas de prendre en compte une telle variabilité. Pour pallier ce problème, l’image à reconnaître peut être recalée à un ensemble d’atlas. L’atlas le plus semblable est alors sélectionné pour réaliser la reconnaissance. Cette approche étant coûteuse d’un point de vue calculatoire, une base d’atlas aussi restreinte que possible doit être utilisée. L’extraction d’un ensemble d’atlas restreint représentant au mieux la base d’apprentissage peut alors être réalisée par des techniques de classification automatique (« mean shift » par exemple comme proposé dans [Blezek and Miller, 2007]). La reconnaissance est alors réalisée en choisissant globalement le modèle le plus proche ou localement comme proposé dans [Wu et al., 2007].

L’application directe de ces processus en présence de tumeurs cérébrales n’est pas possible. En effet la tumeur induit une déformation de l’anatomie (la disparition ou modification de certaines structures et apparition d’une nouvelle structure) qui ne peut pas être représentée par les transformations utilisées. La tumeur et la déformation induite doivent donc faire l’objet d’un traitement spécifique.

Deux approches différentes ont ainsi été proposées pour adapter le processus. La première consiste à introduire manuellement dans l’atlas une graine de la tumeur présentant l’intensité observée de la tumeur [Dawant et al., 1999a, 2002]. En supposant que la tumeur refoule les tissus sans les infiltrer, la croissance de la tumeur et la déformation induite peuvent être modélisées par une transformation spatialement régulière. L’algorithme des démons [Thirion, 1998] est alors utilisé dans ces travaux pour calculer cette transformation. Dans [Cuadra et al., 2004, Pollo et al., 2005] ce processus est étendu, en supposant que la croissance de la tumeur est radiale à partir d’une graine réduite à un point. Des modèles de déformation différents sont alors considérés à l’intérieur et à l’extérieur de la tumeur. La figure 1.6 illustre les résultats obtenus par cette méthode.

La deuxième approche [Kyriacou et al., 1999, Mohamed et al., 2006, Zacharaki et al., 2008] repose sur une modélisation beaucoup plus fine de l’anatomie et de la déformation induite par la tumeur. Ce modèle prend en compte les propriétés biomécaniques des tissus cérébraux ainsi qu’un modèle de croissance de tumeur et propose une formulation par éléments finis du problème de déformation. Dans sa version originale [Kyriacou et al., 1999], la mise en correspondance de l’atlas est réalisée en deux étapes. Premièrement, à partir d’une segmentation préliminaire de la tumeur, du cerveau et des ventricules, une image simulant l’anatomie du sujet sans la tumeur est obtenue par la contraction de la tumeur. L’atlas est alors mis en correspondance avec cette image et une simulation de croissance

de la tumeur déforme l'atlas. Le même modèle biomécanique est utilisé dans [Mohamed et al., 2006] et [Zacharaki et al., 2008]. Un simulateur reposant sur ce modèle permet d'obtenir un atlas avec tumeur en fonction d'un nombre réduit de paramètres de la tumeur (position et taille). Le processus de mise en correspondance alterne alors entre estimation des paramètres de la tumeur et mise en correspondance de l'atlas simulé avec l'image à reconnaître.

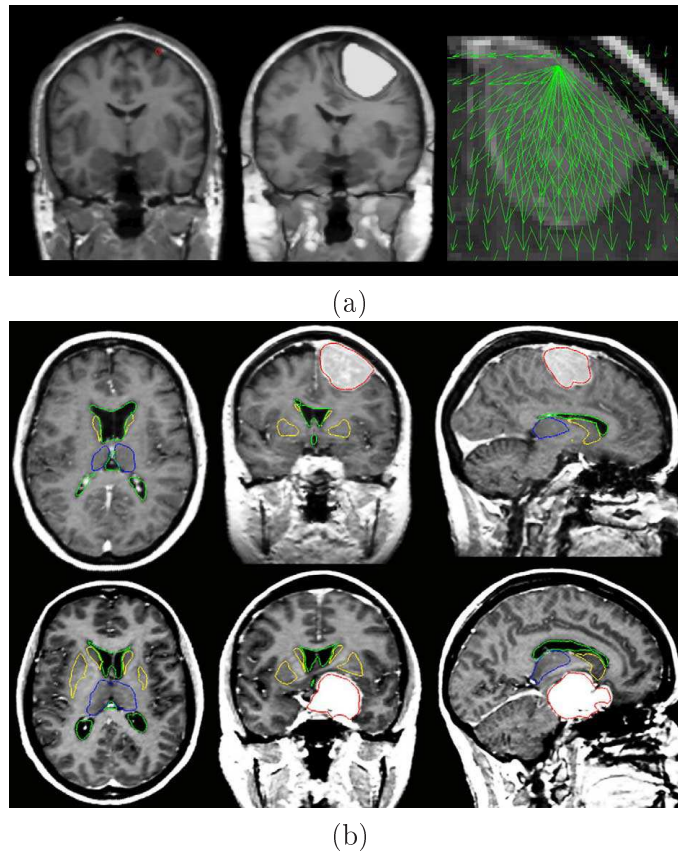


FIGURE 1.6 – Mise en correspondance d'atlas en présence de tumeurs selon la méthode proposée dans [Pollo et al., 2005]. (a) Déformation représentant la déformation induite par la tumeur. (b) Mise en correspondance obtenue pour les structures internes. Figures extraites de [Pollo et al., 2005].

### 1.3 Modèles de forme

Les atlas décrits dans la section précédente représentent en quelque sorte la forme moyenne des structures anatomiques. Cependant la variabilité de la forme de ces structures n'est pas uniforme et il peut être intéressant de réaliser l'apprentissage et la modélisation des principaux modes de variation de chacune des structures.

A notre connaissance le premier modèle de forme statistique a été proposé dans [Cootes et al., 1995] et a été étendu dans [Cootes et al., 2001]. Le contour de l'objet recherché y est représenté par un ensemble de points<sup>3</sup>. L'ensemble des éléments de la base d'apprentissage

3. Une variante a été proposée dans [Staib and Duncan, 1992] où le contour est paramétré par des descripteurs de Fourier elliptiques. Les auteurs font alors l'hypothèse que les coefficients de Fourier suivent une loi normale.

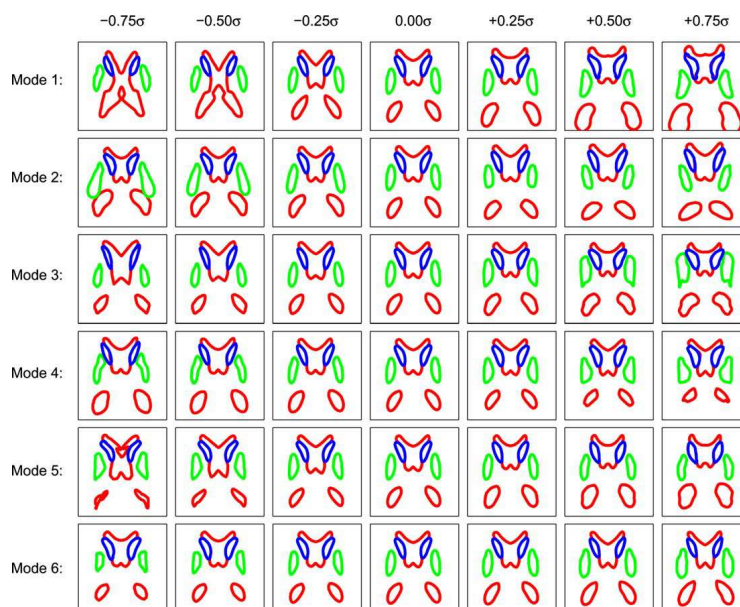


FIGURE 1.7 – Illustration des six premiers modes de variation pour un modèle joint des structures sous-corticales. Figure extraite de [Tsai et al., 2003].

sont alignés et mis en correspondance (les points obtenus pour les différents éléments de la base sont supposés représenter la même partie du contour). Une analyse en composantes principales est alors réalisée sur l'ensemble des contours représentés sous la forme de vecteurs de points. Les vecteurs propres obtenus sont alors interprétés comme les modes de variation de la forme. Généralement il est supposé que les formes considérées suivent une loi normale multidimensionnelle [Leventon et al., 2000, Cremers et al., 2002b] et que toute forme appartenant à cette famille peut être exprimée comme une combinaison linéaire de la forme moyenne et des vecteurs propres. Les valeurs propres correspondent alors à l'écart type du mode de déformation représenté par le vecteur propre et la probabilité d'une forme peut être obtenue à partir des coefficients de la combinaison linéaire.

Dans leur travail initial, Cootes et al. expriment alors la reconnaissance de l'objet représenté par le modèle statistique comme l'obtention des paramètres du modèle, c'est-à-dire des paramètres de position pour replacer le modèle dans l'image et des coefficients associés aux composantes principales correspondant au cas à reconnaître. Une approche similaire a été proposée dans [Wang and Staib, 1998].

Cependant la mise en correspondance des points de chaque échantillon de la base d'apprentissage peut s'avérer fastidieuse [Frangi et al., 2002]. Plutôt que d'utiliser une représentation par un ensemble fixe de points, Leventon et al. [Leventon et al., 2000] ont proposé de représenter l'objet par une carte de distance signée à ses contours. L'analyse en composantes principales est alors réalisée sur l'ensemble des cartes de distance<sup>4</sup> obtenues pour les éléments de la base d'apprentissage préalablement recalés. Ce modèle est alors utilisé pour contraindre l'évolution d'un modèle déformable (représenté sous forme d'ensembles de niveaux) vers la forme la plus probable.

Les structures cérébrales suivent un agencement spatial stable et il peut être intéressant de considérer un modèle de forme joint, plutôt que d'apprendre des modèles indépendamment pour chaque structure. Les travaux présentés dans [Yang and Duncan, 2004b,a]

4. Les cartes de distances sont mises sous la forme de vecteurs pour réaliser l'ACP. Notons que la représentation moyenne obtenue n'est plus une carte de distance.



et [Tsai et al., 2003, 2004] proposent ainsi une extension de [Leventon et al., 2000] permettant de construire un modèle multiformes, intégrant ainsi implicitement l'agencement spatial des structures. Ce modèle est alors intégré dans un processus de segmentation appliqué notamment à la segmentation des structures sous-corticales. Dans ces approches un alignement des éléments de la base d'apprentissage est réalisé. Un vecteur est alors obtenu pour chaque élément de la base en concaténant les cartes de distance signée pour chacune des formes. L'analyse en composantes principales est alors réalisée comme précédemment. La figure 1.7 illustre les six principaux modes de variation d'un modèle joint des structures internes cérébrales. Dans [Yang and Duncan, 2004b], les auteurs proposent alors une formulation bayésienne afin d'intégrer les contraintes multiformes dans une méthode de segmentation par modèles déformables joints. Les résultats obtenus pour la segmentation des structures internes sont présentés dans la figure 1.8 et illustrent l'apport du modèle de forme, qui contrebalance une initialisation éloignée du résultat désiré et des contrastes faibles par endroit. Dans [Tsai et al., 2003], une formulation fondée sur l'information mutuelle est proposée.

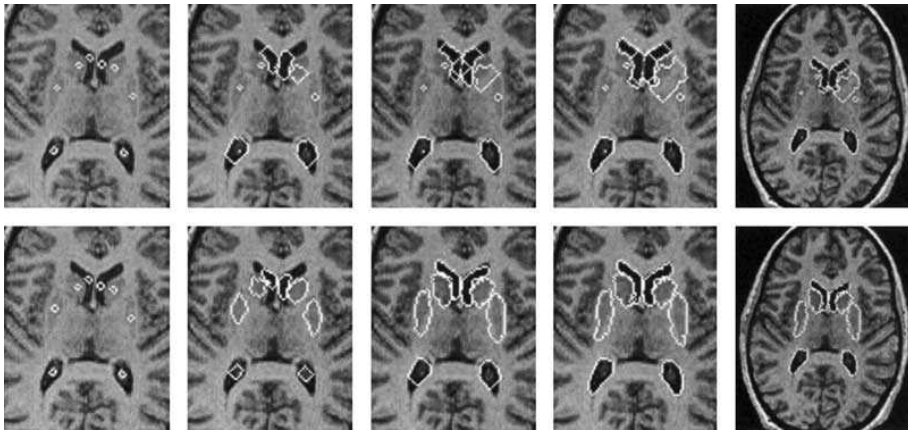


FIGURE 1.8 – Segmentation des structures internes sans modèle de forme (ligne supérieure) et guidée par un modèle de forme joint (ligne inférieure). Figure extraite de [Yang and Duncan, 2004b].

Dans l'ensemble de ces travaux, les auteurs supposent que la forme de l'objet (ou des objets) considéré suit une distribution gaussienne multivaluée et qu'une réalisation de cette forme peut être correctement approchée par la combinaison linéaire d'un nombre réduit de vecteurs propres obtenus sur une base d'apprentissage de taille relativement réduite. Cependant les objets considérés présentent des déformations en général non-linéaires et pour certaines structures l'approximation réalisée n'est pas satisfaisante. Dans [Cremers et al., 2002a, 2003, Dambreville et al., 2008], les auteurs proposent de réaliser une transformation non linéaire dans un espace de dimension supérieure et pour cela d'utiliser des noyaux. L'analyse en composantes principales est alors réalisée dans cet espace en supposant que la densité de probabilité de la distribution de formes  $y$  est gaussienne. Cette approche permet ainsi d'obtenir de meilleures approximations en considérant un nombre réduit de vecteurs propres.

L'incorporation de tels modèles de forme dans le processus de segmentation permet d'améliorer significativement les performances en contraignant le résultat à un nombre de formes réduit qui prend en compte la variabilité anatomique normale. Cependant de tels modèles peuvent difficilement être adaptés aux cas oncologiques et aucune proposition n'a été faite à notre connaissance dans ce sens. En effet les tumeurs présentent une variabilité

---

très importante tant au niveau de leur localisation, qu'au niveau de leur forme et donc des déformations induites sur les autres structures. L'apprentissage d'un modèle pour une base de cas oncologiques ne peut donc pas être réalisé directement par les méthodes présentées dans cette section.

## 1.4 Utilisation d'une représentation structurale de l'anatomie

L'agencement structurel de l'anatomie cérébrale est connu et stable chez des sujets sains. Il reste même relativement stable en présence de pathologies. Cet agencement structurel peut être décrit sous la forme de relations spatiales entre structures comme cela est généralement fait dans les descriptions anatomiques [Waxman, 2000, Hasboun, 2005]. L'ensemble de ces relations spatiales forme ainsi une représentation compacte de l'anatomie (même si cette représentation est incomplète) permettant de s'affranchir partiellement de la variabilité anatomique normale. Il possède ainsi de bonnes propriétés de généralisation.

Nous détaillerons dans cette section un exemple de modèle structurel de l'anatomie cérébrale, modèle sur lequel nous nous appuyerons dans la suite de cette thèse. Ensuite nous décrirons deux familles de méthodes proposées dans la littérature pour réaliser la segmentation et la reconnaissance en s'appuyant sur ce type de modèle.

### 1.4.1 Représentation structurale de l'anatomie cérébrale

Dans sa thèse Olivier Colliot [Colliot, 2003], en collaboration avec le neuroanatomiste Dominique Hasboun, a proposé une modélisation structurale de l'anatomie cérébrale représentée sous la forme d'un hypergraphe hiérarchique de relations spatiales. Ce modèle a par la suite été étendu [Hudelot et al., 2006] à une représentation intégrant différents aspects de l'anatomie tels que la notion de tissu biologique, de fonction ou de pathologie. Ce travail avait un objectif double : (i) l'obtention d'une base de connaissances permettant de guider des processus automatiques de segmentation et de reconnaissance, (ii) une représentation générique de l'anatomie et de ses liens avec l'imagerie afin de permettre une intégration harmonieuse de ces deux éléments dans un dossier médical informatisé [Puentes et al., 2008]. Ci-dessous nous décrivons brièvement ce modèle en mettant l'accent sur son contenu. Une description détaillée de sa mise en œuvre technique sera donnée dans l'annexe B.

L'anatomie cérébrale peut naturellement être représentée sous forme hiérarchique, une partie pouvant être subdivisée en composantes anatomiques plus fines. Différentes hiérarchies anatomiques, en général représentées sous forme d'ontologies, ont été proposées et incorporent les subdivisions anatomiques communément admises dans la littérature médicale ainsi que les différentes appellations pour les structures anatomiques. Nous pouvons notamment citer :

- Neuronames [Bowden and Martin, 1995, Bowden and Dubach, 2003] qui propose une hiérarchie du cerveau comprenant environ 850 éléments pour lesquels les acronymes et synonymes standard sont proposés ainsi que la traduction dans plusieurs langues. De plus un atlas permet la visualisation de ces structures. Un navigateur est disponible à l'adresse <http://braininfo.rprc.washington.edu/enumain.html>,
- MeSH (Medical Subject Headings) [Lipscomb, 2000] qui fournit une représentation de l'anatomie sous forme d'arbre et propose pour chacune des structures une brève description. Cette base est notamment utilisée pour l'indexation de publications afin d'associer au même concept médical les différentes terminologies utilisées. Un navigateur est disponible à l'adresse <http://www.nlm.nih.gov/mesh/2005/index.html>,

- FMA (Foundational Model of Anatomy) [Rosse and Mejino, 2003] qui propose une représentation sous forme d'ontologie de l'anatomie humaine. Un outil de navigation est accessible à l'adresse <http://fme.biostr.washington.edu:8089/FME/index.html>,
- Neuranat [Hasboun, 2005] qui, même s'il ne propose pas une telle nomenclature, présente une description riche de l'anatomie cérébrale (et en particulier de son agencement spatial) agrémentée de nombreuses illustrations, d'un atlas interactif et de vidéos de dissections commentées et illustrées. Ce site est disponible à l'adresse <http://www.chups.jussieu.fr/ext/neuranat/>.

La figure 1.9 présente des captures d'écran des sites internet associés à ces bases. Nous retenons la hiérarchie de structures montrée par la figure 1.10 (obtenue à partir de la nomenclature de Neuronames).

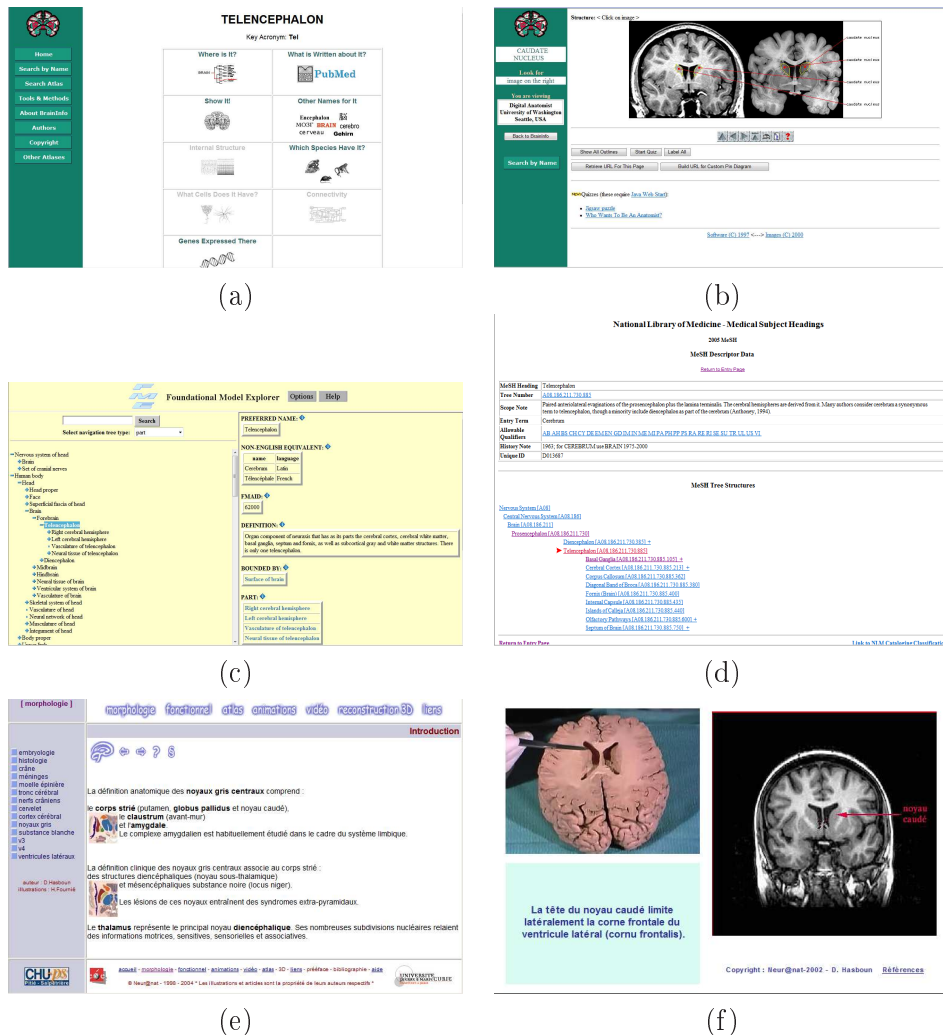


FIGURE 1.9 – Captures d'écran de sites internet proposant une nomenclature de l'anatomie. (a) Neuronames [Bowden and Martin, 1995, Bowden and Dubach, 2003] : <http://braininfo.rprc.washington.edu/enumain.html> et son lien avec l'atlas « Digital Anatomy » de l'université de Washington [Brinkley et al., 1997]. (c) FMA [Rosse and Mejino, 2003] : <http://fme.biostr.washington.edu:8089/FME/index.html>. (d) Mesh [Lipscomb, 2000] : <http://www.nlm.nih.gov/mesh/2005/index.html>. (e) et (f) Neuranat [Hasboun, 2005] : <http://www.chups.jussieu.fr/ext/neuranat/>.

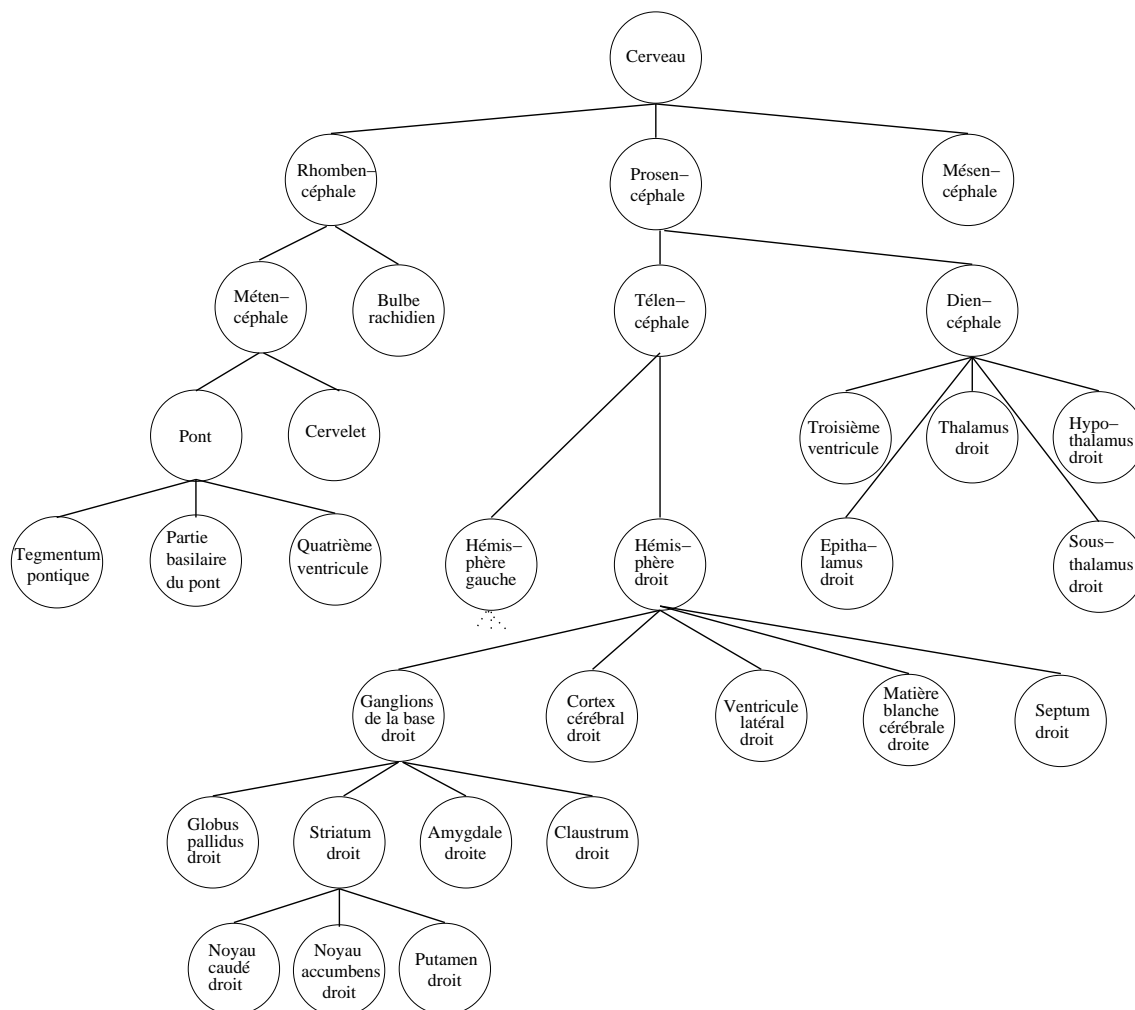


FIGURE 1.10 – Représentation hiérarchique simplifiée du cerveau obtenue à partir de Neuronames [Bowden and Martin, 1995, Bowden and Dubach, 2003].

Cette représentation hiérarchique peut être enrichie de l'ensemble des relations spatiales stables entre les structures [Colliot, 2003] afin de caractériser l'agencement structural du cerveau (par exemple le noyau caudé est toujours adjacent au ventricule latéral et extérieur à celui-ci). Les relations topologiques sont primordiales dans cette description, permettant notamment d'encoder la notion de hiérarchie donnée ci-dessus. Cependant elles ne sont en général pas suffisantes puisque de nombreuses descriptions s'appuient sur des relations de distance ou de direction ou encore des relations plus complexes telles que « entoure » ou « entre ». Ainsi dans [Freeman, 1975], Freeman discute l'encodage par l'homme des relations spatiales entre objets utilisant notamment un ensemble de relations spatiales élémentaires tels que « à gauche de ». Une classification de ces relations spatiales est proposée dans [Kuipers, 1978, Kuipers and Levitt, 1988] dans laquelle apparaissent notamment les concepts de relations topologiques et de relations métriques<sup>5</sup>. La figure 1.11 illustre une

5. Une formalisation de la connaissance structurelle sous forme d'ontologie de relations spatiales a été proposée dans [Hudelot et al., 2008b], fournissant un cadre formel pour la représentation de telles connaissances, mais aussi pour le raisonnement [Hudelot et al., 2008a]. D'autres ontologies intégrant de la connaissance spatiale ont été proposées pour la description de l'anatomie [Schulz et al., 2000, Dameron, 2005, Donnelly et al., 2006].

partie de la hiérarchie qui correspond à l'ensemble de relations élémentaires utilisées dans le modèle pour encoder l'information structurelle de l'anatomie cérébrale. D'autres types de relations plus complexes pourraient bien évidemment être considérés.

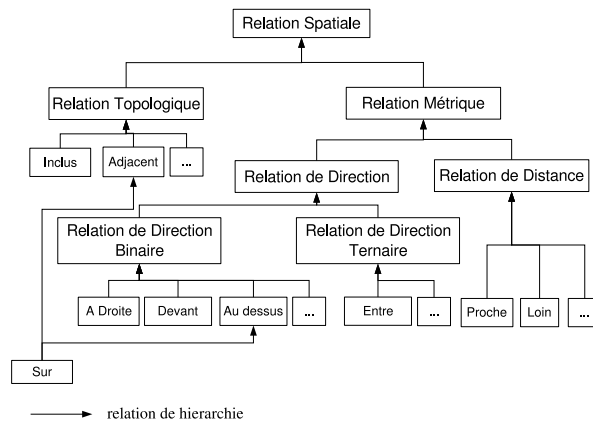


FIGURE 1.11 – Organisation hiérarchique des relations spatiales utilisées dans notre base de connaissance. Figure extraite de [Hudelot et al., 2008c].

Le modèle peut par ailleurs être enrichi d'un ensemble de propriétés relatives aux structures anatomiques. Il peut s'agir de données textuelles telles que des descriptions. Il peut aussi s'agir de propriétés relatives à la région spatiale occupée par la structure comme le volume ou la forme.

La radiométrie de la structure dans l'image dépend de caractéristiques intrinsèques des tissus qui la composent. En imagerie par résonance magnétique, elle dépend des temps de relaxation T1 et T2 de ses tissus (fonctions de l'intensité du champs magnétique) et la densité de proton des tissus<sup>6</sup>. Puisque ces propriétés sont propres aux tissus composant les structures anatomiques, nous créons une base de connaissances spécifique contenant les tissus présents dans le cerveau et auxquels sont associées différentes propriétés biologiques et notamment les propriétés imagées en IRM. Des relations de type « composition » lient alors les structures anatomiques et les éléments de cette base.

Nous traitons similairement la connaissance fonctionnelle associée aux structures anatomiques. Les fonctions peuvent par exemple dans le cas du cerveau être représentées par les aires de Brodmann (l'aire de Brodmann 44 étant par exemple associée au langage) ou des réseaux complexes (tel que la vision) impliquant plusieurs structures anatomiques.

Finalement une base de connaissances pathologiques [Khotanlou, 2008] regroupe les informations relatives aux pathologies et notamment dans le cadre de notre application aux tumeurs. Comme dans le cas des structures anatomiques certaines propriétés génériques de ces tumeurs sont données.

La figure 1.12 présente une vue d'ensemble de ce modèle qui est donc constitué d'un ensemble de structures anatomiques, de types de tissus, de fonctions et de pathologies d'une part et d'un ensemble de relations entre ces éléments d'autre part. Une représentation sous forme d'hypergraphe (une relation hiérarchique peut impliquer plus de 2 éléments) est donc appropriée pour représenter cette base de connaissances. Dans l'annexe B, nous précisons la représentation choisie pour ce modèle ainsi que son instanciation pour un patient spécifique.

6. Des séquences d'acquisition variées permettent d'obtenir des contrastes reflétant une variation d'un ou plusieurs de ces paramètres.

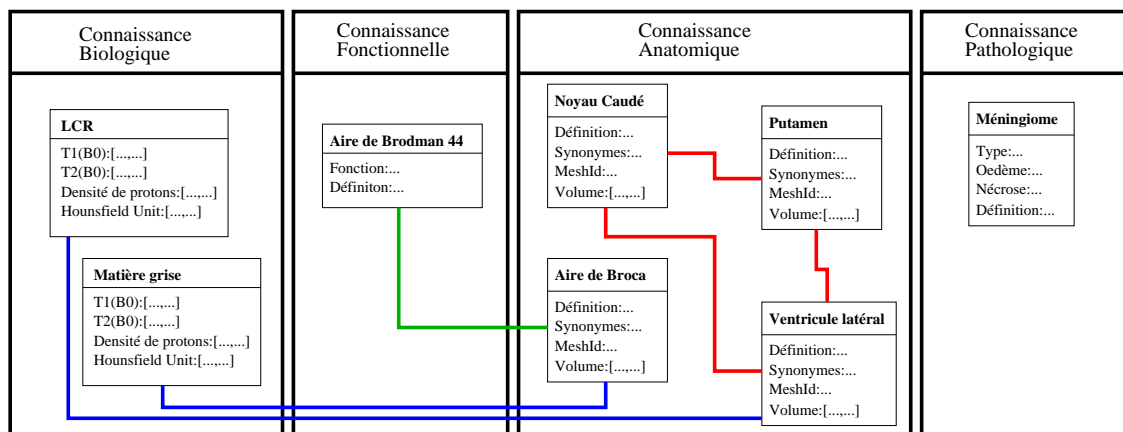


FIGURE 1.12 – Schéma général représentant la base de connaissances anatomiques. Les liens rouges représentent des relations spatiales, les liens bleus des relations de type composition biologique et le lien vert une relation anato-fonctionnelle.

#### 1.4.2 Annotation d'une segmentation ou d'une sursegmentation

Supposons que nous disposions d'une segmentation de l'image dont nous voulons réaliser la reconnaissance. Nous pouvons alors extraire de celle-ci une représentation structurale sous forme de graphe (les nœuds représentant les régions de la segmentation sont valués par des propriétés telles que le volume de la région et les arcs représentent par exemple des relations spatiales satisfaites par les régions de la segmentation). Le processus de reconnaissance de cette segmentation peut alors être exprimé comme la mise en correspondance du graphe représentant la segmentation et du graphe représentant le modèle structural.

La mise en correspondance de graphes est un problème complexe qui a fait l'objet de nombreux travaux dont une synthèse est proposée dans [Bunke, 2000, Conte et al., 2004]. La mise en correspondance recherchée peut être exacte (un isomorphisme est dans ce cas recherché entre les graphes) ou inexacte ce qui permet de mieux prendre en compte les imprécisions et les erreurs entachant l'obtention des graphes dans le cadre d'une application réelle. Nous restreignons notre présentation aux méthodes proposées pour réaliser l'annotation de segmentations ou de sur-segmentations et reposant sur l'agencement spatial des objets à reconnaître.

L'estimation d'une annotation optimale est un problème combinatoire difficile (dans la plupart des formulations il est NP complet). Une alternative consistant à supprimer itérativement les annotations incohérentes est proposée dans [Waltz, 1975] et [Rosenfeld et al., 1976]. Un processus de propagation de contraintes réduit progressivement l'ensemble des annotations possibles pour chaque nœud en considérant les propriétés et relations du modèle. Cette méthodologie a été illustrée pour l'annotation de figures géométriques simples. Notons cependant que cette méthode n'extrait pas nécessairement une annotation unique. Dans [Kitchen, 1978, Srihari and Zhang, 2000, Millet et al., 2005, Saathoff, 2006, Saathoff and Staab, 2008] l'annotation de segmentations d'images naturelles est réalisée suivant cette approche. Un ensemble de contraintes (telle que « le ciel se trouve au-dessus de la mer ») permet alors de supprimer des annotations incohérentes.

Ces approches supposent que la segmentation initiale est correcte. Cependant les images naturelles ou les images médicales sont complexes. Une segmentation réalisée sur des critères d'homogénéité et de régularité est en général imparfaite. Puisque ces erreurs sont

inévitables, en général le choix est fait de sur-segmenter grossièrement la scène<sup>7</sup> et d'adapter le processus de mise en correspondance de graphe, un nœud du modèle pouvant être associé à plusieurs nœuds de la segmentation.

Un tel processus a été proposé dans la thèse d'Aymeric Perchant [Perchant, 2000] et consiste à extraire un morphisme flou [Perchant et al., 1999, Perchant and Bloch, 2002] entre le graphe construit à partir de la sur-segmentation et le graphe modèle obtenu par exemple à partir d'une image segmentée manuellement. La figure 1.13 illustre ce processus. Différentes méthodes d'optimisation ont été proposées pour obtenir le morphisme telles que les algorithmes génétiques [Perchant et al., 1999], l'estimation de distribution [Bengoetxea et al., 2002] ou la recherche par arbre [Cesar et al., 2005]. Le morphisme flou proposé permet d'associer plusieurs nœuds de la segmentation à un seul nœud du graphe modèle (et réciproquement) mais ces nœuds sont traités indépendamment alors que les nœuds associés au même label représentent un objet unique. Les relations spatiales ainsi que les caractéristiques devraient donc être calculées à partir de la réunion de ces nœuds et non individuellement<sup>8</sup>.

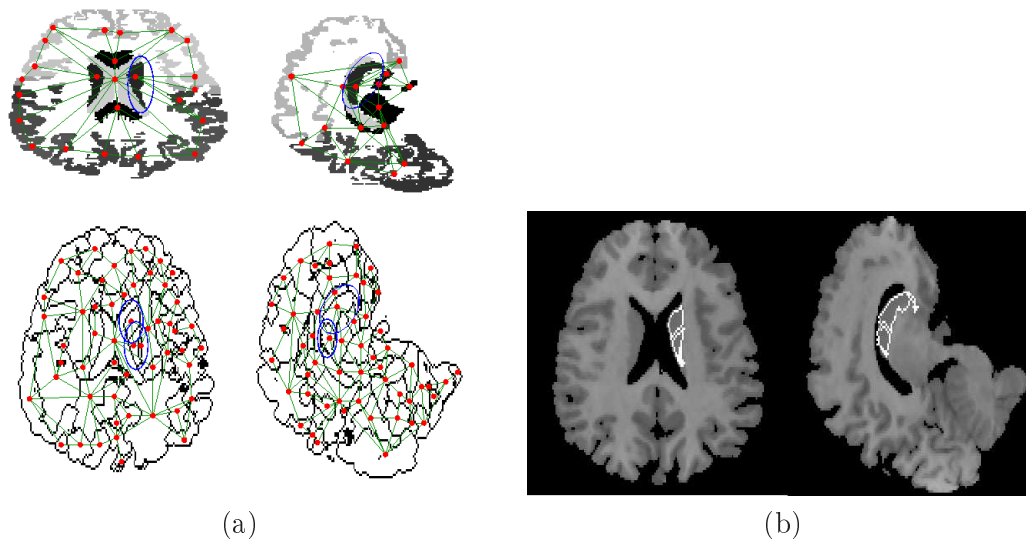


FIGURE 1.13 – Mise en correspondance inexacte de graphes par la méthode proposée dans [Perchant, 2000]. (a) En haut illustration du graphe obtenu à partir de l'atlas et en bas du graphe obtenu à partir de la sursegmentation. (b) Résultat de la mise en correspondance. Les régions de la sursegmentation associées au noyau caudé sont affichées.

Ainsi dans [Deruyver and Hodé, 1997, Hodé and Deruyver, 2007] les auteurs supposent que les données sont sur-segmentées et associent explicitement une structure anatomique du modèle à un ensemble de régions de la sur-segmentation. Le problème de reconnaissance est alors formulé comme un problème de satisfaction de contraintes à deux niveaux. Les variables sont les structures anatomiques à reconnaître et prennent pour valeur un ensemble de régions de la sur-segmentation initiale. Idéalement les contraintes devraient être calculées sur la réunion de l'ensemble des régions représentant les objets. Cependant pour des raisons de complexité les auteurs supposent notamment que les contraintes struc-

7. Des erreurs de sous-segmentation sont plus difficiles à traiter. En effet dans ce cas il faudrait détecter et diviser spatialement les régions sous-segmentées.

8. Considérons par exemple une relation d'adjacence entre  $A$  et  $B$ . La sur-segmentation fournit une subdivision de  $A$  en quatre sous-parties dont une seule est adjacente à  $B$ . Les trois autres sous-parties ne sont pas adjacentes à  $B$  mais doivent tout de même être identifiées à l'objet  $A$  supposé adjacent à  $B$ .

turelles binaires sont satisfaites si elles le sont entre des sous-parties des objets impliqués. Ces contraintes assouplies correspondent au premier niveau de contraintes, le deuxième niveau correspondant à des contraintes de compatibilité entre régions associées à un même objet. Pour rester associée à un objet présentant plusieurs contraintes du premier niveau, une région doit soit satisfaire ces contraintes, soit être compatible avec des régions satisfaisant ces contraintes. Une adaptation de l'algorithme de propagation AC-4 [Mohr and Henderson, 1986] est alors proposée pour résoudre ce problème.

### 1.4.3 Segmentation itérative guidée par graphe

Les approches précédentes reposent sur une sursegmentation initiale dont la correction n'est pas assurée. Il est donc préférable de réaliser simultanément la segmentation et la reconnaissance. Pour cela une possibilité consiste à extraire séquentiellement les structures anatomiques. Le processus débute par l'extraction des structures les plus simples à segmenter. Les relations spatiales du modèle structurel et ces segmentations permettent alors de contraindre l'espace de solutions des structures anatomiques plus délicates à extraire. Plus le processus progresse, plus le nombre de structures segmentées est important et plus l'espace de solutions des structures restant à extraire est alors contraint. Par exemple si nous avons déjà extrait le ventricule latéral (noté *LV* dans la figure 1.14), nous pouvons alors utiliser la connaissance « le noyau caudé est extérieur au ventricule latéral et proche de celui-ci » pour définir la région d'intérêt floue montrée par la figure 1.14 (b) dans laquelle est incluse la solution recherchée pour le noyau caudé.

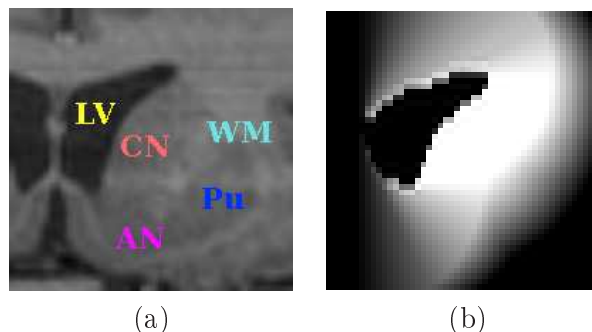


FIGURE 1.14 – (a) Vue coronale du cerveau. (b) A l'extérieur et proche du ventricule latéral.

Une première esquisse d'un tel processus a été proposée dans [Géraud et al., 1999, 2000]. A chaque itération la segmentation d'une structure est réalisée par une classification automatique sur les niveaux de gris dans une zone d'intérêt floue qui est définie à partir de relations spatiales (telles que des relations spatiales directionnelles [Bloch, 1996a, 1999]<sup>9</sup>) calculées à partir de structures préalablement extraites. Le résultat est alors affiné par le recalage d'un patron de la structure sur le résultat de la classification. Une description plus fine de ce processus est proposée dans [Bloch et al., 2003]. Notons que cette méthodologie a par la suite été reprise dans [Barra and Boire, 2001].

Ces travaux ont posé le cadre de la segmentation itérative guidée par un modèle structurel composé de relations spatiales. Cependant la méthode de segmentation utilisée à chaque itération du processus est perfectible et il serait notamment préférable de s'affranchir de la dépendance aux patrons utilisés. Ainsi dans [Colliot et al., 2004, 2006] les auteurs ont proposé une méthode reposant sur l'évolution d'un modèle déformable paramétrique [Xu

9. Une revue de la modélisation de relations spatiales par la morphologie mathématique est proposée dans [Bloch, 2006].



and Prince, 1998] contrainte par une zone d'intérêt floue (obtenue à partir de relations spatiales avec des structures préalablement segmentées). L'évolution obtenue est illustrée par la figure 1.15 et les résultats de segmentation par la figure 1.16. Une approche similaire a été proposée dans [Atif et al., 2006b] et repose sur une formulation géodésique de ce problème et une résolution par un modèle déformable implicite.

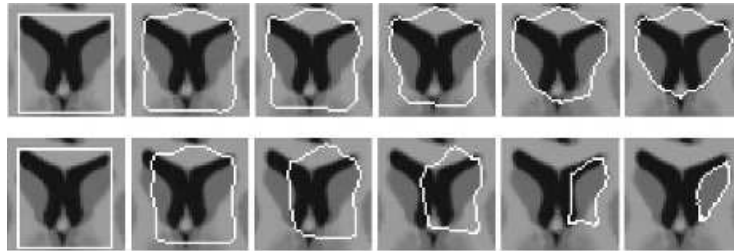


FIGURE 1.15 – Extraction du noyau caudé par un modèle déformable dont l'attache aux données repose uniquement sur les gradients de l'image (ligne supérieure), sur les gradients de l'image et la zone d'intérêt floue dérivée des relations spatiales par rapport au ventricule latéral. Figure extraire de [Colliot et al., 2006].

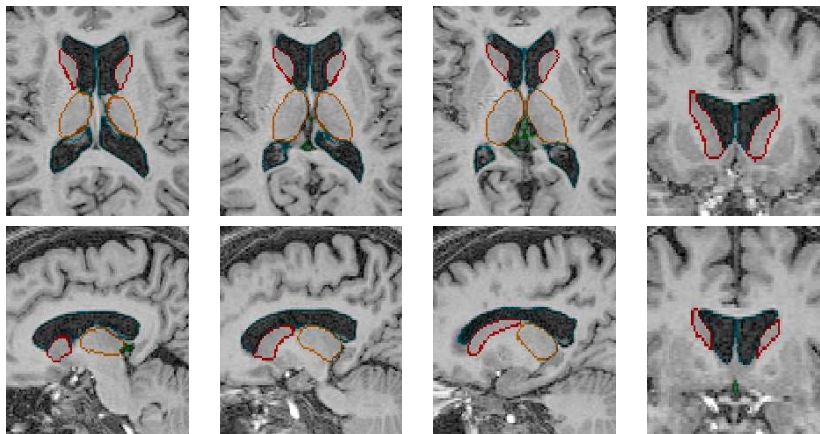


FIGURE 1.16 – Résultats de segmentation pour le noyau caudé et le thalamus par le processus de segmentation itérative décrit dans [Colliot et al., 2006]. Figure extraite de [Colliot et al., 2006].

Les différentes approches présentées ci-dessus dépendent d'un ordonnancement des structures à segmenter. Celui-ci est dans ces travaux déterminé expérimentalement et consiste à extraire dans un premier temps les structures les plus « faciles » (telles que les ventricules latéraux) et à progressivement extraire des structures de plus en plus délicates à segmenter. Une méthode permettant d'obtenir automatiquement cet ordonnancement est cependant préférable, l'objectif étant d'adapter automatiquement l'ordonnancement lorsque les cas traités sortent de la normale et notamment dans des cas pathologiques. Une première approche proposée dans [Fouquier et al., 2007] permet d'obtenir le chemin de segmentation comme un chemin de coût minimal. Ce processus repose sur une valuation préalablement apprise des arcs par une mesure de ressemblance entre le sous-ensemble flou défini par des relations spatiales et l'objet à segmenter (une adaptation aux cas pathologiques est aussi proposée en s'appuyant sur les travaux publiés dans [Atif et al., 2007a] que nous décrirons ci-dessous). Cependant cette approche ne dépend pas réellement de l'IRM qui doit être segmentée. Ainsi une approche s'inspirant des mécanismes préattentionnels a

été proposée dans [Fouquier et al., 2008] et consiste à itérativement sélectionner les structures dont la localisation potentielle (définie par les relations spatiales) maximise un critère de saillance. Un diagramme illustrant la méthode est présenté par la figure 1.17.

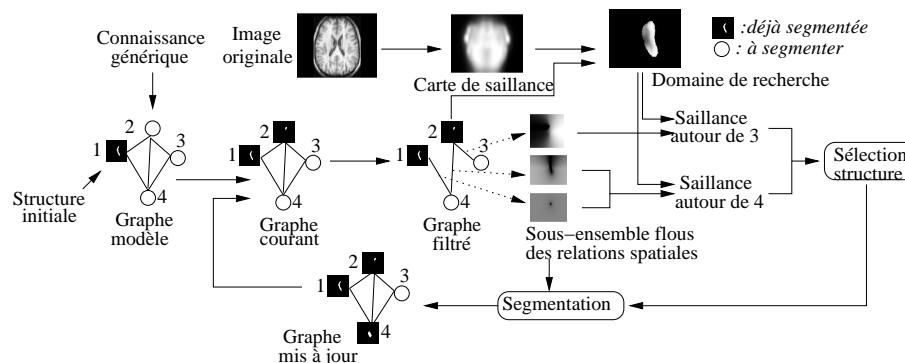


FIGURE 1.17 – Diagramme représentant le processus de segmentation et reconnaissance itérative proposé dans [Fouquier et al., 2008]. Figure extraite de [Fouquier et al., 2008].

#### 1.4.4 Adaptation du modèle structurel en présence de tumeurs

L'anatomie normale présentant un agencement structurel stable, son modèle structurel peut être appris sur un nombre réduit de cas et présentera de bonnes propriétés de généralisation. Cependant les pathologies et notamment les tumeurs peuvent invalider le modèle normal, puisqu'elles peuvent détruire certaines structures, refouler d'autres structures (ce qui peut affecter les relations spatiales) et sont des sous-parties du cerveau n'appartenant pas au modèle.

L'adaptation du processus à la présence de la tumeur consiste donc à introduire la tumeur dans le graphe structurel et à réaliser la modification appropriée des nœuds et arcs du graphe. Une première approche a été proposée dans [Atif et al., 2006a, Khotanlou et al., 2007a]. La stabilité des différents types de relations spatiales (direction, distance, adjacence,...) y est qualifiée en fonction du type de tumeur. Un processus de segmentation itérative reposant uniquement sur les relations stables est alors appliqué. Dans [Atif et al., 2007a], cette approche est développée et formalisée. Le processus de segmentation itérative est notamment adapté plus finement en fonction de la stabilité des relations spatiales. A chaque étape du processus, le choix de la structure suivante à segmenter est alors obtenue en fonction de la stabilité des relations.

Ces approches permettent de réduire l'impact de l'invalidité du modèle en supprimant d'office toutes les relations généralement peu stables en présence de tumeurs. Cependant cette approche conduit à un relâchement global et important des contraintes. Le processus de segmentation et de reconnaissance dispose donc de moins d'informations ce qui peut conduire à son échec. De plus le problème initial, à savoir l'introduction de la pathologie dans le graphe, reste ouvert.

## 1.5 Bilan

L'anatomie cérébrale normale présente à la fois une grande régularité et une variabilité importante. L'obtention d'un modèle représentant finement au moins le premier aspect ne conduit pas à une solution évidente et unique comme nous l'avons vu dans cette présentation.

Les atlas reposent en général sur une anatomie particulière ou médiane. L'adaptation de ce modèle à un cas particulier est obtenue par le calcul d'une transformation dont l'existence même n'est en pratique pas assurée en raison de la variabilité anatomique importante. Cependant ils fournissent une représentation riche intégrant la forme et implicitement l'agencement spatial des structures. En présence de tumeurs, ces méthodes doivent être adaptées pour prendre en compte les déformations importantes, par exemple en simulant un atlas pathologique ou une déformation induite par la tumeur. Pour cela elles requièrent une modélisation de la tumeur, de sa croissance et de son interaction avec les tissus voisins. Les méthodes actuellement proposées se contentent de modèles très simples, parfois contestables. Cependant l'obtention de modèles plus fidèles fait l'objet d'une recherche soutenue, puisqu'ils présentent un intérêt pour la compréhension de la pathologie, le suivi et la planification chirurgicale.

Les modèles de formes permettent une représentation plus fine intégrant une représentation de la variabilité. L'adaptation à un cas particulier est alors réalisée par l'estimation des paramètres du modèle. Ces modèles semblent donc bien adaptés à la représentation de variations morphologiques « gaussiennes » mais pas à des variations importantes et présentant plusieurs modes distincts<sup>10</sup> (le gyrus paracingulaire n'est par exemple présent que chez une partie des sujets). La complexité accrue de cette représentation la rend par ailleurs plus difficilement adaptable aux cas pathologiques.

De leur côté les modèles structurels fournissent une représentation très compacte de l'anatomie, sous la forme d'un ensemble de relations et propriétés toujours satisfaites. Ce type de représentation n'est pas mis en défaut par des variations morphologiques importantes puisque seules les relations structurelles satisfaites sont conservées dans le cas général. Cependant lorsque la variabilité augmente, le nombre de relations structurelles stables décroît et le modèle sera de moins en moins apte à réaliser la reconnaissance. Par ailleurs l'adaptation de tels modèles en présence de pathologie semble réalisable de façon intuitive comme les premières approches proposées le laissent supposer.

Les atlas et les modèles de formes d'une part et les modèles structurels d'autre part constituent des approches en quelque sorte opposées. Les atlas et les modèles de forme proposent une représentation très fine de l'anatomie qui permettra de réaliser la reconnaissance assez simplement. Cependant la variabilité anatomique importante du cerveau peut invalider ces modèles et l'adaptation de ces modèles à la présence de tumeurs peut être délicate. Les modèles structurels comportent uniquement un ensemble de caractéristiques réduit et stable, rendant le modèle plus robuste à la variabilité anatomique. Cependant l'information disponible ne sera pas toujours suffisante pour réaliser la reconnaissance.

## 1.6 Approche proposée

Nous proposons dans cette thèse un processus de segmentation et de reconnaissance à mi-chemin des approches décrites dans les sections 1.4.2 et 1.4.3.

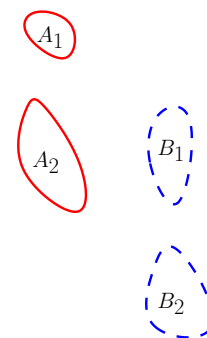
Tout d'abord, nous considérons que les problèmes de segmentation et reconnaissance ne doivent pas être dissociés. En effet une segmentation a pour objectif de diviser l'espace en régions significatives et dépend donc des objets recherchés et de leurs propriétés. Ainsi une segmentation (ou une sursegmentation) obtenue uniquement sur des critères d'homogénéité radiométrique ne produit pas nécessairement le résultat attendu puisque dans certains cas : (i) les structures que nous recherchons ne sont pas contrastées (certaines régions de la segmentation peuvent alors comporter des voxels appartenant à des structures différentes), (ii)

---

10. L'utilisation d'un ensemble de modèles tel que cela a été proposé dans le cadre des atlas pourrait cependant être une solution à ce problème.

certaines structures présentent une radiométrie plus variable que d'autres (il est alors difficile de trouver un seuil adéquat sur un critère d'homogénéité pour l'ensemble de l'image). Or les approches décrites dans la section 1.4.2 dépendent d'une telle sursegmentation, ce qui constitue à notre sens leur principale limitation.

Ensuite nous voulons, sans nécessairement en réaliser la segmentation, utiliser l'information obtenue sur une structure (son espace de solutions réduit) pour restreindre l'espace de solutions de structures en relation avec elle. En effet dans le processus de segmentation itérative décrit dans la section 1.4.3, nous n'avons parfois pas assez d'information pour réaliser correctement la segmentation d'aucune structure. Ce type de situation se produit notamment au début du processus lorsque peu de structures ont déjà été reconnues. Pour contourner ce problème nous pourrions tirer parti des relations impliquant des structures qui n'ont pas encore été segmentées mais dont l'espace de solutions a été réduit. Supposons par exemple que deux structures  $A$  et  $B$  doivent être segmentées mais que les relations spatiales par rapport aux objets préalablement segmentés ne soient pas assez restrictives pour permettre une segmentation correcte de ces structures. Une relation entre  $A$  et  $B$  peut alors permettre de réduire l'espace de solutions de  $B$  en ne conservant que les valeurs satisfaisant la relation avec au moins un élément de l'espace de solutions de  $A$ . La réduction obtenue est certes plus faible que si nous disposions d'une segmentation pour  $A$  mais elle peut être réalisée à tout moment du processus de reconnaissance. Un exemple caricatural est présenté dans la figure ci-contre. Après réduction par rapport aux autres structures, seulement deux valeurs sont encore possibles pour les objets  $A$  et  $B$  ( $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$ ). De plus nous savons que  $A$  est « à gauche de »  $B$  et réciproquement que  $B$  est « à droite de »  $A$ . La première relation permet d'éliminer  $A_1$ . En effet  $A_1$  n'est ni « à gauche de »  $B_1$ , ni « à gauche de »  $B_2$ . Similairement la relation  $B$  est « à droite de »  $A$  nous permet d'éliminer  $B_2$ .



Nous proposons ainsi de réaliser la reconnaissance en réduisant simultanément l'espace de solutions de l'ensemble des variables de notre problème (qui représentent les régions des structures recherchées). Les réseaux de contraintes se prêtent bien à la mise en œuvre de ce type de processus. Nous créerons donc un réseau dans lequel les contraintes sont dérivées du modèle structurel et portent sur des variables prenant pour valeurs des ensembles flous définis sur le domaine spatial de l'image. La réduction progressive de l'espace de solutions des différents objets sera alors réalisée par un algorithme de propagation de contraintes qui supprime autant de valeurs ne satisfaisant pas les contraintes que possible. La figure 1.18 illustre ce processus. Initialement nous disposons d'une part du modèle structurel et d'autre part de l'IRM à reconnaître. *A priori* nous ne faisons aucune hypothèse sur les objets à reconnaître qui peuvent donc occuper n'importe quelle région de l'image. Les contraintes sont alors utilisées séquentiellement pour réduire l'espace de solutions des variables impliquées. Dans la figure nous montrons ainsi la réduction de l'espace de solutions du noyau caudé gauche  $CDI$  (dont nous présentons la borne inférieure  $\underline{CDI}$  et la borne supérieure  $\overline{CDI}$ ) obtenue en considérant la contrainte « le noyau caudé gauche  $CDI$  est extérieur au ventricule latéral gauche  $LVI$  ». Lorsque ce processus s'achève, l'espace de solutions des structures du modèle est en général assez réduit. Pour certaines structures, nous obtenons alors un résultat de segmentation et de reconnaissance final par l'extraction d'une surface minimale relativement aux résultats du processus de propagation.

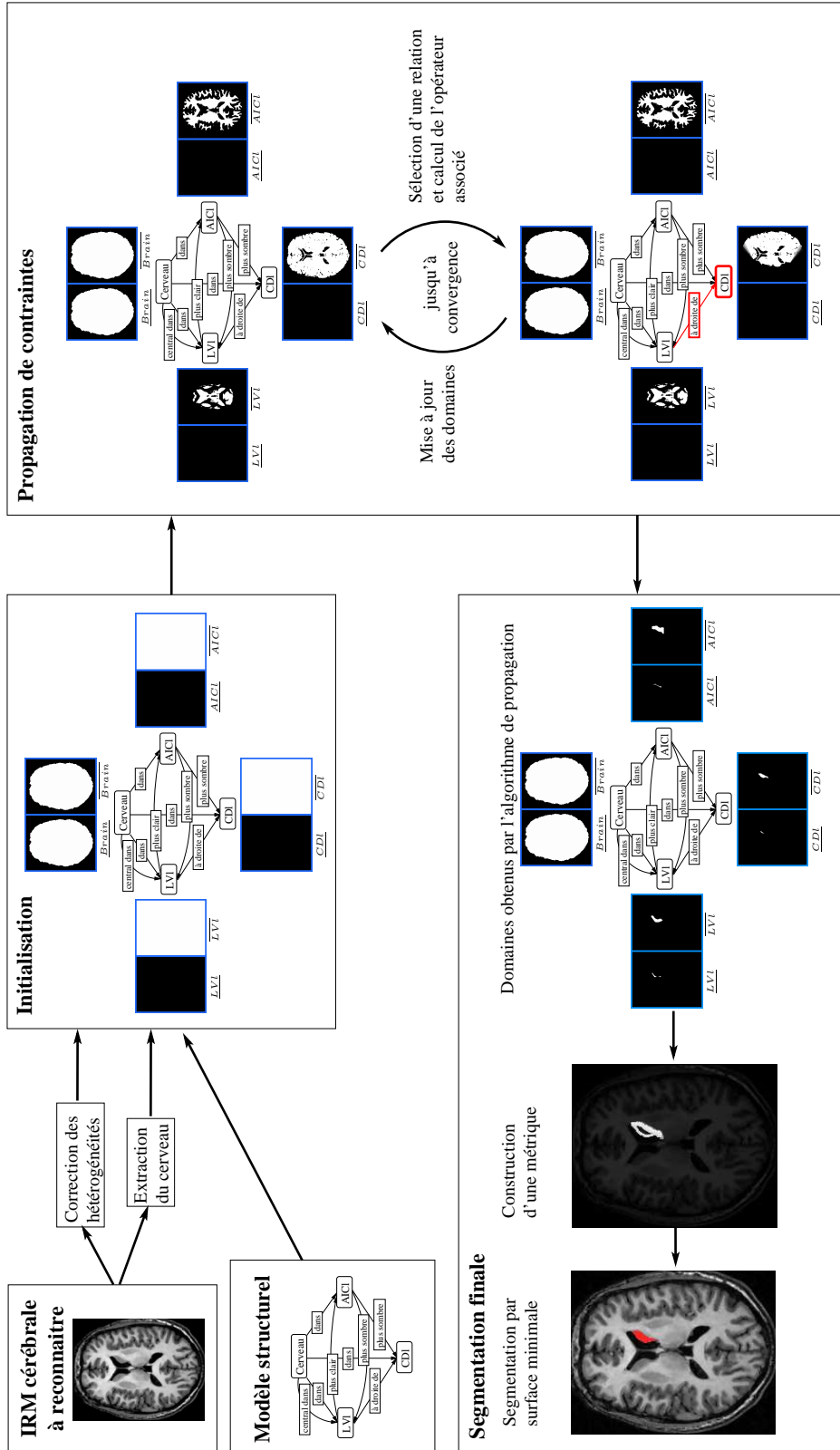


FIGURE 1.18 – Représentation schématique de l'approche proposée.

## Chapitre 2

# Réseaux de contraintes et segmentation

### Introduction

Comme nous l'avons introduit dans le chapitre précédent, le problème de segmentation et de reconnaissance automatique est complexe et nécessite l'utilisation d'un modèle approprié. Nous nous reposons dans cette thèse sur un modèle structural de l'anatomie tel que celui décrit dans la section 1.4.1 et nous voulons extraire une solution (i.e. l'affectation d'une région de l'espace à chaque structure anatomique à reconnaître) satisfaisant les relations du modèle structural.

Pour résoudre ce problème nous réduirons progressivement l'espace de solutions par l'exclusion des affectations incohérentes avec le modèle structural. Les réseaux de contraintes fournissent un cadre approprié pour la formulation de ce type de problèmes et de méthodes d'optimisation. Nous dériverons donc du modèle structural un réseau de contraintes. Un algorithme de propagation réduira alors l'espace de recherche, ce qui nous permettra dans un deuxième temps d'extraire une solution approximative.

Après une brève introduction aux réseaux de contraintes dans la section 2.1, nous proposons dans la section 2.2 une formulation de notre problème de reconnaissance sous la forme d'un réseau de contraintes. La section 2.3 décrit alors le processus de propagation mis en œuvre pour réduire l'espace de recherche. Les contraintes spatiales, les contraintes relatives à la radiométrie des objets et quelques combinaisons intéressantes de contraintes sont ensuite respectivement présentées dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6. Finalement dans la section 2.7 nous illustrons le processus de propagation pour la reconnaissance d'une coupe axiale d'une IRM cérébrale.

### 2.1 Réseaux de contraintes

Les réseaux de contraintes sont un cadre générique et simple de représentation de problèmes d'optimisation sous contraintes. Ils ont fait l'objet de nombreuses recherches notamment dans les domaines de l'intelligence artificielle et de la recherche opérationnelle. Ils ont été employés pour des problèmes de planification, d'ordonnancement [Cesta et al., 2002, Laborie, 2003, Baptiste et al., 2001], de reconnaissance d'images segmentées [Rosenfeld et al., 1976, Waltz, 1975, Deruyver and Hodé, 1997] ou de segmentation d'images [Chen et al., 1991, Deruyver, 2005].

---

### 2.1.1 Définitions générales et notations

Un réseau de contraintes est caractérisé<sup>1</sup> par un ensemble de variables  $\chi = \{x_1, \dots, x_n\}$  définies respectivement sur des domaines  $\mathcal{D}(x_1), \dots, \mathcal{D}(x_n)$ . L'ensemble des domaines est noté  $\mathcal{D}$ . Ces domaines sont en général discrets et finis (un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}$  par exemple) et une variable  $x_i$  associée au domaine  $\mathcal{D}(x_i)$  peut prendre toute valeur appartenant à  $\mathcal{D}(x_i)$ . Les variables sont soumises à un ensemble de contraintes  $\mathcal{C}$ . Une contrainte  $C \in \mathcal{C}$  est définie par une paire  $(vars(C), rel(C))$ , où  $vars(C) = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  est un sous-ensemble de  $\chi$  ( $k$  correspond à l'arité de la contrainte) et  $rel(C)$  est une relation définie sur  $vars(C)$ , i.e. un sous-ensemble du produit cartésien des domaines  $\mathcal{D}(x_{i_1}) \times \dots \times \mathcal{D}(x_{i_k})$ .

**Définition 2.1** (Réseau de contraintes). *Un réseau de contraintes est caractérisé par un triplet  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  où :*

- $\chi$  est un ensemble de variables,
- $\mathcal{D}$  est l'ensemble des domaines associés aux variables de  $\chi$ . Une variable  $x_i \in \chi$  est associée à un domaine  $\mathcal{D}(x_i)$ ,
- $\mathcal{C}$  est un ensemble de contraintes. Chaque contrainte  $C = (vars(C), rel(C))$  implique un ensemble de variables  $vars(C) \subseteq \chi$  et est représentée par la relation  $rel(C)$  définie sur le produit cartésien des domaines associés aux variables  $vars(C)$ .

**Définition 2.2** (Instanciation). *Une instanciation  $I$  d'un ensemble de variables  $Y = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \chi$  est l'affectation de valeurs  $v_1, \dots, v_k$  aux variables  $x_1, \dots, x_k$ . Nous notons  $I = \{(x_1, v_1), \dots, (x_k, v_k)\}$  et  $I(x_i) = v_i$ . Soit  $Y' \subseteq Y$ ,  $I[Y']$  désigne la projection de  $I$  sur les variables de  $Y'$ . Une instanciation  $I$  sur  $Y$  est dite **valide** si  $\forall x_i \in Y, v_i \in \mathcal{D}(x_i)$ , où  $\mathcal{D}(x_i)$  est le domaine associé à  $x_i$ .  $I$  satisfait une contrainte  $C$  telle que  $vars(C) \subseteq Y$  si  $I[vars(C)] \in rel(C)$ .  $I$  est **localement consistante** si elle est valide et que pour toute contrainte  $C \in \mathcal{C}$  telle que  $vars(C) \subseteq Y$ ,  $I[vars(C)]$  satisfait  $C$ . Si  $I$  n'est pas localement consistante, elle est localement inconsistante.*

**Définition 2.3** (Solution). *Une solution d'un réseau  $N$  est une instanciation  $I$  sur  $\chi$  localement consistante. Nous notons  $sol(N)$  l'ensemble des solutions de  $N$ .*

**Définition 2.4.** *Une instanciation  $I$  sur  $Y$  est globalement consistante (ou consistante) si elle peut être étendue à une solution (i.e.  $\exists s \in sol(N)$  tq  $I[Y] = s[Y]$ ).*

**Définition 2.5.** *Un réseau de contraintes est dit satisfiable s'il possède au moins une solution.*

**Exemple 2.1.** *Soit  $N_s = \langle \chi_s, \mathcal{D}_s, \mathcal{C}_s \rangle$  un réseau de contraintes comportant trois variables  $\chi_s = \{x_1, x_2, x_3\}$  associées aux domaines  $\mathcal{D}(x_1) = [1..10]$ ,  $\mathcal{D}(x_2) = [1..10]$  et  $\mathcal{D}(x_3) = [1..5]$ . Ce réseau présente deux contraintes  $C_1$  et  $C_2$  telles que  $vars(C_1) = \{x_1, x_2\}$  et  $vars(C_2) = \{x_2, x_3\}$ . Les relations de ces contraintes sont respectivement définies suivant :*

$$\begin{aligned} rel(C_1) : \mathcal{D}(x_1) \times \mathcal{D}(x_2) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (v_1, v_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } v_1 + v_2 \leq 10, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ rel(C_2) : \mathcal{D}(x_2) \times \mathcal{D}(x_3) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (v_2, v_3) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } v_2 < v_3, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

---

1. Différentes notations ont été proposées pour caractériser ces réseaux. Nous utilisons des notations similaires à celles qui sont utilisées dans [Debruyne and Bessière, 2002, Bessière, 2006, Bessière et al., 2008].

*L'instanciation  $I_1 = \{(x_1, 1), (x_2, 10)\}$  est valide puisque 1 et 10 appartiennent respectivement aux domaines de  $x_1$  et  $x_2$ . Elle est localement inconsistante puisque  $\text{vars}(C_1) \subseteq \{x_1, x_2\}$  et  $\text{rel}(C_1)(I_1) = 0$ . L'instanciation  $I_2 = \{(x_1, 1), (x_2, 6)\}$  est localement consistante puisque  $\text{rel}(C_1)(I_2) = 1$ . Cependant elle est globalement inconsistante puisque qu'elle ne peut être étendue à une solution (en effet aucune valeur appartenant au domaine  $\mathcal{D}(x_3)$  ne satisfait la contrainte  $C_2$  pour  $x_2 = 6$ ). L'instanciation  $I_3 = \{(x_1, 1), (x_2, 4)\}$  est valide, localement consistante et globalement consistante puisqu'elle peut être étendue à l'instanciation  $I_4 = \{(x_1, 1), (x_2, 4), (x_3, 5)\}$  qui appartient à  $\text{sol}(N_s)$ . L'espace de solutions est donc non vide est  $N_s$  est donc satisfiable.*

### 2.1.2 Méthodes de résolution

Trois types de problèmes sont classiquement associés aux réseaux de contraintes :

- décider la satisfiabilité du problème, i.e. le problème possède-t-il une solution,
- extraire une solution,
- extraire l'ensemble des solutions.

Pour résoudre ces problèmes, trois grandes familles de méthodes d'optimisation ont été proposées, chaque problème pouvant être résolu par une combinaison de ces méthodes.

**Retour sur traces** Le retour sur traces [Golomb and Baumert, 1965] est une méthode d'optimisation « complète », obtenant une solution si le problème est satisfiable. Initialement aucune variable n'est assignée. Une variable est alors sélectionnée, et toutes les valeurs du domaine associé sont testées itérativement. Pour chacune de ces valeurs la consistance de l'affectation partielle est testée. Si elle est consistante, l'algorithme essaie de l'étendre en sélectionnant une variable supplémentaire et procède récursivement. Lorsque toutes les valeurs du domaine ont été testées, l'algorithme revient alors à la variable précédente.

Cet algorithme réalise donc une recherche exhaustive dans l'espace de solutions. Il permet, moyennant un ordonnancement judicieux des variables, d'éviter le test de nombreuses hypothèses et présente ainsi de bien meilleures performances qu'un algorithme « brute force » (i.e. le parcours direct de l'ensemble de l'espace de solutions). De nombreux travaux tels que [Stallman and Sussman, 1976, Gaschnig, 1979, Harvey and Ginsberg, 1995, Ginsberg, 1993, Dechter and D., 1999] ont porté sur l'optimisation de ce processus permettant des gains de performance importants. Une revue des principales méthodes peut notamment être trouvée dans [Rossi et al., 2006a] ou [Dechter and D., 1999].

**Propagation de contraintes** Les méthodes de propagation de contraintes transforment itérativement le réseau de contraintes afin de : (i) réduire les domaines des variables, (ii) dériver de nouvelles contraintes. Le réseau de contraintes résultant est beaucoup plus simple à résoudre puisque le domaine de recherche est plus restreint et que les variables sont plus contraintes. Généralement ces méthodes reposent sur une notion de consistance locale telle que la consistance d'arc [Mackworth, 1977a,b]. D'autres notions de consistance locale ont été proposées dont une synthèse est réalisée dans [Bessière, 2006]. Nous décrirons plus précisément ces méthodes dans la section suivante.

**Recherche locale** Certains problèmes trop complexes ne peuvent pas être résolus par les approches précédentes. Une méthode de résolution inexacte consiste à améliorer itérativement une affectation complète des variables. A chaque étape du processus un petit nombre de variables sont choisies et leurs valeurs sont modifiées afin de maximiser le nombre de contraintes satisfaites (des changements aléatoires sont fréquemment introduits dans ce



type de processus et permettent en général d'obtenir de meilleurs résultats). Ces algorithmes n'obtiennent pas nécessairement une solution même si le problème est satisfiable, mais permettent d'obtenir un résultat intéressant pour un coût raisonnable. Une synthèse des principales approches proposées est réalisée dans [Rossi et al., 2006b].

### 2.1.3 Propagation de contraintes

Nous rappelons un ensemble de notions et de définitions sur lesquelles nous nous appuyons pour proposer un algorithme de propagation de contraintes en section 2.2. Pour cela nous suivons l'excellente présentation donnée dans [Bessière, 2006] et en reprenons directement les définitions et les résultats.

**Définitions générales** La propagation de contraintes vise à transformer le réseau de contraintes afin d'en faciliter la résolution ultérieure. A partir d'un réseau  $N$ , nous voulons donc obtenir un réseau  $N'$  présentant les mêmes solutions que  $N$ . Ce réseau sera plus facile à résoudre s'il est davantage contraint ou s'il présente des domaines plus restreints.

**Définition 2.6** (Pré-ordre). Soient  $N = \langle \chi_N, \mathcal{D}_N, \mathcal{C}_N \rangle$  et  $N' = \langle \chi_{N'}, \mathcal{D}_{N'}, \mathcal{C}_{N'} \rangle$  deux réseaux et la relation  $\preceq$  telle que  $N' \preceq N$  ssi  $\chi_N = \chi_{N'}$  et toute instanciation  $I$  sur  $Y \subseteq \chi_N$  localement inconsistante dans  $N$  soit aussi inconsistante dans  $N'$ . La relation  $\preceq$  est un pré-ordre sur les réseaux de contraintes.

**Définition 2.7.** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau de contraintes. L'ensemble  $\mathcal{P}_N$  de toutes les contractions de  $N$  est l'ensemble des réseaux  $\{N' = \langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C}' \rangle \mid \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \text{ et } \forall C \in \mathcal{C}, \exists C' \in \mathcal{C}' \text{ tq } \text{vars}(C) = \text{vars}(C') \text{ et } \text{rel}(C') \subseteq \text{rel}(C)\}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}_N^{\text{sol}}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_N$  préservant l'ensemble des solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_N^{\text{sol}}, \text{sol}(N') = \text{sol}(N)$ .

Obtenir une contraction  $N'$  d'un réseau  $N$  consiste à transformer  $N$  en un réseau plus simple à résoudre, c'est-à-dire un réseau présentant des domaines plus restreints et des contraintes plus restrictives. Pour extraire une solution, il peut ainsi être intéressant d'obtenir dans un premier temps une contraction préservant l'ensemble des solutions et idéalement la plus petite contraction (au sens de la relation de pré-ordre  $\preceq$ ) préservant l'ensemble des solutions.

**Proposition 2.1.** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  et  $G_N \in \mathcal{P}_N^{\text{sol}}$  tel que  $\forall N' \in \mathcal{P}_N^{\text{sol}}, G_N \preceq N'$ . Toute instanciation localement consistante dans  $G_N$  est alors globalement consistante.  $G_N$  est dit globalement consistant.

Toute instanciation localement consistante dans  $G_N$  peut être étendue à une solution. Toute solution peut ainsi être simplement obtenue par l'extension progressive d'une instanciation sans retour sur traces. Cependant l'obtention de  $G_N$  présente en général une complexité exponentielle et n'est en pratique pas réalisable. La propagation de contraintes vise alors à obtenir un élément de  $\mathcal{P}_N^{\text{sol}}$  aussi petit que possible dans un temps raisonnable. Pour cela les domaines des variables sont progressivement réduits et/ou de nouvelles contraintes sont inférées. Nous restreignons la suite de cette présentation aux algorithmes de propagation de contraintes par réduction de domaines.

**Définition 2.8.** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ . L'ensemble  $\mathcal{P}_{N_D}$  de toutes les contractions de domaine de  $N$  est l'ensemble des réseaux  $\{N' = \langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle\}$  satisfaisant  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}_{N_D}^{\text{sol}}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{N_D}$  préservant l'ensemble des solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{N_D}^{\text{sol}}, \text{sol}(N') = \text{sol}(N)$ .

**Définition 2.9.** *Le pré-ordre  $\preceq$  est un ordre partiel sur  $\mathcal{P}_{ND}$  (noté  $\leq_N$ ).*

$\mathcal{P}_{ND}^{sol}$  possède un plus petit élément  $G_{ND}$ . Toutes les valeurs des domaines de  $G_{ND}$  appartiennent à une solution (cependant toute instanciation localement consistante dans  $G_{ND}$  ne peut pas nécessairement être étendue à une solution). L'obtention de  $G_{ND}$  est un problème NP-difficile. La propagation de contraintes par réduction de domaines vise donc à obtenir en temps polynomial un réseau  $N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}$ , aussi petit que possible, tel que :  $G_{ND} \leq_N N' \leq_N N$ . Pour cela les domaines des variables sont progressivement réduits en supprimant des valeurs ne pouvant pas appartenir à une solution.

**Règles de réduction de domaine** La propagation par réduction de domaines est en général réalisée par l'application successive d'opérateurs supprimant les valeurs incohérentes sur des critères de consistance locale.

**Définition 2.10.** *Soit un réseau de contraintes  $N$ . Une règle de réduction de domaines est une fonction  $f$  de  $\mathcal{P}_{ND}$  dans  $\mathcal{P}_{ND}$  telle que  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}, f(N') \in \mathcal{P}_{N'D}$ .*

**Définition 2.11.** *Soit une contrainte  $C$  appartenant à un réseau de contraintes  $N$ . Un propagateur  $f$  associé à la contrainte  $C$  est une règle de réduction réduisant les domaines indépendamment des contraintes autres que  $C$ .*

Un propagateur  $f$  est :

- correct si  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, f(N') \in \mathcal{P}_{N'D}^{sol}$ ,
- monotone si  $\forall N_1, N_2 \in \mathcal{P}_{ND}, N_1 \leq N_2 \Rightarrow f(N_1) \leq f(N_2)$ ,
- idempotent si  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}, f(f(N')) = f(N')$ .

Deux propagateurs  $f$  et  $g$  commutent si  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}, fg(N') = gf(N')$ .

Il est primordial que les propagateurs utilisés soient corrects. En effet cette propriété assure que l'ensemble des solutions soit préservé par les réductions réalisées par les propagateurs.

**Définition 2.12.** *Soit  $N$  un réseau de contraintes et  $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  un ensemble fini de propagateurs sur  $\mathcal{P}_{ND}$ . Une itération de  $F$  sur  $N$  est une séquence  $\langle N_0, N_1, \dots \rangle$  d'éléments de  $\mathcal{P}_{ND}$  tels que :  $N_0 = N, N_j = f_{n_j}(N_{j-1})$ , où  $j > 0$  et  $n_j \in [1..k]$ . Le propagateur  $f_{n_j}$  est activé à l'itération  $j$ .*

La propagation de contraintes est réalisée en appliquant successivement les propagateurs. Les domaines sont ainsi progressivement réduits. Ce processus s'achève lorsque plus aucun propagateur ne permet de réaliser de réduction (les propagateurs sont anti-extensifs ce qui assure la convergence). Si les propagateurs sont monotones ce qui est en général le cas, le réseau obtenu à la convergence ne dépend pas de l'ordre d'application des propagateurs et est appelé plus grand point fixe.

**Définition 2.13.** *Soit  $N$  un réseau de contraintes et  $F$  un ensemble de propagateurs sur  $\mathcal{P}_{ND}$ . Un réseau  $N' \in \mathcal{P}_{ND}$  est stable pour  $F$  ssi  $\forall f \in F, f(N') = N'$ .*

**Proposition 2.2.** *Soit  $N$  un réseau de contraintes et  $F$  un ensemble de propagateurs sur  $\mathcal{P}_{ND}$ . Si  $S = \langle N_0, N_1, \dots \rangle$  est une itération infinie de  $F$ , il existe  $j$  tel que pour  $k \geq j, N_k$  soit stable pour  $F$ . Si de plus tous les propagateurs appartenant à  $F$  sont monotones, alors  $N_k$  est unique et est appelé le plus grand point fixe de  $F$  sur  $N$ .*

Si de plus ces propagateurs sont idempotents et commutent, le plus grand point fixe est atteint après une activation unique de chacun des propagateurs. Malheureusement les propagateurs utilisés commutent rarement.

**Consistance locale** Les règles de réduction de domaine ou les propagateurs sont souvent associés à une notion de consistance locale telle que la consistance d’arc [Mackworth, 1977a,b].

**Définition 2.14** (Consistance d’arc [Mackworth, 1977a, Mackworth and Freuder, 1985]). Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ ,  $C \in \mathcal{C}$  et  $x_i \in \text{vars}(C)$ .

- Une valeur  $v_i \in \mathcal{D}(x_i)$  est **arc-consistante** avec la contrainte  $C$  dans  $\mathcal{D}$  si il existe une instanciation valide  $I$  sur  $\text{vars}(C)$  satisfaisant  $C$  et tel que  $v_i = I[x_i]$ . Une telle instanciation est un **support** pour  $(x_i, v_i)$  dans  $C$ .
- Le domaine  $\mathcal{D}(x_i)$  est **arc-consistant** avec la contrainte  $C$  dans  $\mathcal{D}$  si toutes les valeurs de  $\mathcal{D}(x_i)$  sont arc-consistantes avec  $C$  dans  $\mathcal{D}$ .
- La contrainte  $C \in \mathcal{C}$  est **arc-consistante** dans  $\mathcal{D}$ , si  $\forall x \in \text{vars}(C)$ ,  $\mathcal{D}(x) \neq \emptyset$  et  $\mathcal{D}(x)$  est arc-consistant avec  $C$  dans  $\mathcal{D}$ .
- Le réseau de contraintes  $N$  est **arc-consistant** si toutes les contraintes de  $\mathcal{C}$  sont arc-consistantes.

D’autres notions de consistance locale ont été proposées. Certaines sont plus contraignantes que la consistance d’arc. La consistance de chemin [Montanari, 1974] en est un exemple. Deux valeurs  $(v_1, v_2)$  pour une paire de variables  $(x_1, x_2)$  sont alors dites inconsistantes si il existe une séquence de variables de  $x_i$  à  $x_j$  telle qu’il n’existe pas de séquence de valeurs pour ces variables satisfaisant l’ensemble des contraintes sur la séquence. D’autres telles que la consistance de bornes sont moins contraignantes. Nous décrirons cette notion dans la section 2.1.5. Pour l’instant notons  $\phi$  une notion de consistance locale quelconque.

**Définition 2.15.** Une consistance locale de domaine  $\phi$  est stable par réunion si pour tous réseaux  $\phi$ -consistant  $N_1 = \langle \chi, \mathcal{D}_1, \mathcal{C} \rangle$  et  $N_2 = \langle \chi, \mathcal{D}_2, \mathcal{C} \rangle$ , le réseau  $N' = \langle \chi, \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2, \mathcal{C} \rangle$  est  $\phi$ -consistant.

**Définition 2.16** ( $\phi$ -fermeture). Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau et  $\phi$  une notion de consistance locale de domaines. Soit  $\phi(N)$  le réseau  $\langle \chi, \mathcal{D}_\phi, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\mathcal{D}_\phi = \cup \{ \mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D} \mid \langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle \text{ soit } \phi\text{-consistant} \}$ . Si  $\phi$  est stable par réunion,  $\phi(N)$  est  $\phi$ -consistant et est l’unique réseau dans  $\mathcal{P}_{ND}$  tel que pour tout réseau  $\phi$ -consistant  $N' \in \mathcal{P}_{ND}$ ,  $N' \leq \phi(N)$ .  $\phi(N)$  est appelée la  $\phi$ -fermeture de  $N$ .

La fermeture  $\phi(N)$  préserve les solutions et peut être obtenue par l’itération de règles de réduction de domaine, supprimant itérativement les valeurs ne satisfaisant pas  $\phi$ . Si la consistance locale d’une instanciation peut être vérifiée en temps polynomial,  $\phi(N)$  peut être calculé en temps polynomial.

Par exemple lorsque  $\phi$  correspond à la consistance d’arc, nous pouvons définir pour chaque contrainte  $C$  le propagateur suivant :

$$\forall x_i \in \text{vars}(C), \forall v \in \mathcal{D}(x_i), v \in \mathcal{D}'(x_i) \text{ si } \exists I \text{ valide sur } \text{vars}(C) \text{ tel que } I[\text{vars}(C)] \in \text{rel}(C),$$

où  $\mathcal{D}$  sont les domaines initiaux et  $\mathcal{D}'$  les domaines résultant de la réduction. La  $\phi$ -fermeture correspond alors au plus grand point fixe pour l’ensemble de ces propagateurs.

### 2.1.4 Exemple : le Sudoku

Le jeu du Sudoku est un exemple de problème pouvant être résolu efficacement par un réseau de contrainte. Ce jeu se présente sous la forme d’une grille de taille  $9 \times 9$  subdivisée en sous-grilles  $3 \times 3$ , chaque case devant être associée à un entier entre 1 et 9. Au début du jeu seule une partie des valeurs des cases est connue. Le jeu consiste alors à remplir le reste de la grille sous les contraintes suivantes :

- chaque ligne et chaque colonne comporte une unique occurrence de chaque entier,
- chaque sous-grille comporte une unique occurrence de chaque entier.

Considérons par exemple la grille suivante :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		9			6			1	
2	4			5			3	8	6
3			6						5
4		1	8		3		4		
5				8		2			
6			2		9		5	7	
7	8						6		
8	1	2	9			6			4
9		4			8			5	

A chaque case de la grille nous associons une variable  $x_{i,j}$ , où l'indice  $i$  correspond à la ligne et  $j$  à la colonne. Si la valeur de cette case n'est pas connue le domaine associé  $\mathcal{D}(x_{i,j})$  vaut  $[1..9]$  sinon il est réduit à un singleton :  $\mathcal{D}(x_{i,j}) = \{v_{i,j}\}$ .

Nous définissons une contrainte par ligne, par colonne et par bloc imposant que toutes les valeurs soient différentes. Nous notons respectivement  $C_{l_i}$ ,  $C_{c_i}$ ,  $C_{b_i}$  les contraintes associées à la ligne  $i$ , à la colonne  $i$  et au bloc  $i$ . Nous avons par exemple  $vars(C_{l_1}) = \{x_{1,j} | j \in [1..9]\}$  et  $I[vars(C_{l_1})] \in rel(C_{l_1})$  si  $\forall(j, k) \in [1..9], j \neq k \Rightarrow I(x_{1,j}) \neq I(x_{1,k})$ , avec  $I$  une instantiation sur  $vars(C_{l_1})$ .

Pour résoudre le problème un algorithme de retour sur trace peut être appliqué. La figure ci-contre illustre dans sa version la plus simple le fonctionnement d'un tel algorithme. Tout d'abord la variable  $x_{1,1}$  est sélectionnée et l'instanciation  $I_1 = \{(x_{1,1}, 1)\}$  testée. Celle-ci est localement consistante, nous instancions donc une deuxième variable  $x_{1,2}$  dont le domaine est réduit à un singleton. Puisque l'instanciation  $I_2 = \{(x_{1,1}, 1), (x_{1,2}, 9)\}$  est localement consistante, le processus essaie d'étendre l'instanciation à  $x_{1,3}$ . La valeur 1 est tout d'abord testée, cependant  $I_3 = \{(x_{1,1}, 1), (x_{1,2}, 9), (x_{1,3}, 1)\}$  n'est pas localement consistante<sup>2</sup>. La valeur suivante est alors testée :  $I_4 = \{(x_{1,1}, 1), (x_{1,2}, 9), (x_{1,3}, 2)\}$ . Le processus étend ainsi cette instantiation jusqu'à  $I_5 = \{(x_{1,1}, 1), (x_{1,2}, 9), (x_{1,3}, 2), (x_{1,4}, 3), (x_{1,5}, 6), (x_{1,6}, 4), (x_{1,7}, 5), (x_{1,8}, 1)\}$  qui est localement inconsistante. Puisqu'aucune autre valeur du domaine de  $x_{1,8}$  ne reste à tester, l'algorithme revient sur la variable précédente  $x_{1,7}$  et essaie la valeur suivante. Le processus se poursuit ainsi jusqu'à l'obtention d'une instantiation consistante de l'ensemble des variables (ou jusqu'à ce que toutes les valeurs aient été parcourues). Notons que de nombreuses hypothèses sont inutilement testées par cet algorithme basique (il est par exemple facile de constater que l'affectation  $(x_{1,1}, 1)$  est globalement inconsistante puisque nous avons nécessairement  $(x_{1,8}, 1)$ ).

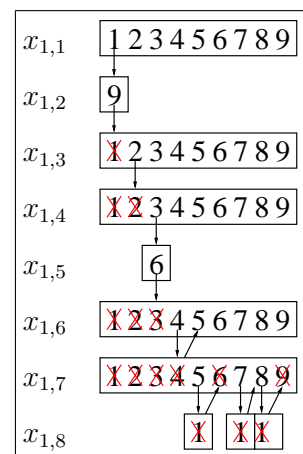


FIGURE 2.1 – Premières étapes d'un algorithme de retour sur traces.

2. Les contraintes peuvent être reformulées sous la forme d'un ensemble de contraintes binaires, ce qui permet de tester la consistance d'instanciation n'impliquant pas nécessairement toute la ligne, colonne ou bloc.

L'application d'un algorithme de propagation permet par exemple de supprimer un grand nombre d'hypothèses incohérentes pour un coût calculatoire relativement faible. Considérons par exemple la consistance d'arc et les propagateurs  $f_{l_i}$ ,  $f_{c_i}$  et  $f_{b_i}$  associés aux contraintes  $C_{l_i}$ ,  $C_{c_i}$  et  $C_{b_i}$ . A partir des domaines initiaux, l'application de  $f_{l_1}$  réduit par exemple le domaine  $\mathcal{D}(x_{1,1})$  de  $[1..9]$  à  $\{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$ , l'application de  $f_{c_1}$  conduit à  $\mathcal{D}(x_{1,1}) = \{2, 3, 5, 7\}$ . L'application de  $f_{l_2}$  et de  $f_{c_2}$  permet de réduire  $\mathcal{D}(x_{2,2})$  au singleton  $\{7\}$ . L'application de  $f_{b_1}$  permet alors d'obtenir  $\mathcal{D}(x_{1,1}) = \{2, 3, 5\}$ . Itérativement les domaines sont donc réduits, réduisant de façon importante l'espace de recherche et peut même permettre d'obtenir la solution (dans certains cas si celle-ci est unique).

### 2.1.5 Consistance de bornes

Durant la propagation de contraintes, les domaines sont passés en revue et réduits à de nombreuses reprises pour en supprimer les valeurs ne satisfaisant pas à un critère donné de consistance locale. Même pour la consistance d'arc, le coût de cette mise à jour est élevé. Afin de réduire ce coût des notions de consistance plus faibles que la consistance d'arc ont été proposées.

Nous discutons ici la consistance de borne qui peut être utilisée lorsque les valeurs des domaines sont ordonnées. Dans ce cas il est en effet possible de représenter les domaines par un (ou plusieurs) intervalle. Les mises à jours réalisées pendant la propagation et notamment la recherche de support peuvent alors, pour certaines contraintes, être calculées uniquement à partir de ces bornes, ce qui permet une réduction de complexité importante. Cette approche a notamment été proposée pour résoudre des problèmes impliquant des contraintes arithmétiques sur des variables réelles [Benhamou et al., 1994, Benhamou and Older, 1997] ou entières. Nous décrivons ci-dessous les définitions proposées pour les variables entières. Pour cela nous nous reposons sur les synthèses données dans [Choi et al., 2006] et [Bessière, 2006] qui font le lien entre les nombreuses définitions et appellations proposées dans la littérature. Nous notons  $\mathcal{D}^I$  l'ensemble de domaines représentés sous la forme d'intervalles obtenus comme la fermeture convexe des domaines de  $\mathcal{D}$  :

$$\forall x_i \in \chi, \mathcal{D}^I(x_i) = [\inf_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)} v_i .. \sup_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)} v_i].$$

Nous notons  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  la représentation sous la forme d'intervalles de valeurs réelles. La manipulation de ces intervalles est beaucoup moins coûteuse que la manipulation directe des domaines. Pour certaines notions de consistance locale données ci-dessous, vérifier l'existence d'un support peut en effet être réalisé en ne manipulant que les bornes des domaines (alors qu'un parcours du domaine est nécessaire dans le cas de la consistance d'arc).

**Définition 2.17** (Consistance de bornes). *Soit  $\langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau dont les variables prennent des valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Les notions de consistance de borne suivantes peuvent être définies :*

- $\mathcal{D}$  est *bounds(D)* consistant pour une contrainte  $C$  si  $\forall x_i \in \text{vars}(C)$ , les bornes du domaine  $\inf_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  et  $\sup_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  possèdent un support dans  $\mathcal{D}$  pour  $C$ .
- $\mathcal{D}$  est *bounds(Z)* consistant pour une contrainte  $C$  si  $\forall x_i \in \text{vars}(C)$ , les bornes du domaine  $\inf_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  et  $\sup_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  possèdent un support dans  $\mathcal{D}^I$  pour  $C$ .
- $\mathcal{D}$  est *bounds(R)* consistant pour une contrainte  $C$  si  $\forall x_i \in \text{vars}(C)$ , les bornes du domaine  $\inf_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  et  $\sup_{v_i \in \mathcal{D}(x_i)}(v_i)$  possèdent un support dans  $\mathcal{D}^{\mathbb{R}}$  pour  $C$ .
- $\mathcal{D}$  est « range » consistant pour une contrainte  $C$  si  $\forall x_i \in \text{vars}(C)$ ,  $\forall v_i \in \mathcal{D}(x_i)$ ,  $(x_i, v_i)$  possède un support dans  $\mathcal{D}^I$ .

Si  $\mathcal{D}$  est  $bounds(D)$ -consistant, il est  $bounds(Z)$ -consistant et si il est  $bounds(Z)$ -consistant il est  $bounds(R)$ -consistant.

Dans le cas général réduire les domaines en prenant pour critère une de ces notions de consistance ne présente pas d'intérêt particulier par rapport à l'utilisation de la consistance d'arc. Cependant il est possible de tirer parti de propriétés particulières des contraintes qui permettent de définir des propagateurs très efficaces, calculés uniquement à partir des bornes des domaines.

### 2.1.6 Réseaux de contraintes portant sur des ensembles

Certains problèmes tels que le problème du sac à dos impliquent des variables prenant pour valeurs des sous-ensembles d'un ensemble de base  $\mathcal{U}$  (par exemple un sous-ensemble fini de  $\mathbb{Z}$ ). Le domaine associé à une telle variable est donc un sous-ensemble de l'ensemble des parties de  $\mathcal{U}$  :  $(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \subseteq)$  dont le cardinal vaut  $2^{|\mathcal{U}|}$ . Sauf lorsque  $\mathcal{U}$  est de taille très réduite, la manipulation directe des domaines n'est pas tractable. Différentes représentations compactes de ce type de domaine ont donc été proposées.

Dans [Puget, 1992, Gervet, 1997] une représentation de ce type de domaines sous forme d'« intervalles » est proposée.

**Définition 2.18.** *Un intervalle d'ensembles  $[A, B]$  (avec  $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ ) est l'ensemble  $\{C \in \mathcal{P}(\mathcal{U}) \mid A \subseteq C \subseteq B\}$ .*

L'utilisation d'intervalles comme mode de représentation présente un double intérêt. Premièrement elle réduit considérablement le coût de représentation des domaines, même si c'est au prix d'une approximation plutôt grossière des domaines. Deuxièmement elle peut être associée à des notions de consistance locale et des propagateurs qui pour de nombreuses contraintes présentent une complexité algorithmique faible.

**Définition 2.19.** *Une contrainte  $C$  est consistante de borne si  $\forall x_i \in vars(C)$ ,*

$$\begin{cases} \cap \{v_i \in \mathcal{D}(x_i)\} &= \cap \{v_i \in \mathcal{D}(x_i) \mid (x_i, v_i) \text{ possède un support dans } \mathcal{D}\} \\ \cup \{v_i \in \mathcal{D}(x_i)\} &= \cup \{v_i \in \mathcal{D}(x_i) \mid (x_i, v_i) \text{ possède un support dans } \mathcal{D}\} \end{cases}$$

Cette notion de consistance locale est l'analogue de la  $bounds(D)$ -consistance définie dans la section précédente. Lorsque tous les domaines sont représentés sous la forme d'intervalles, elle correspond alors à la  $bounds(Z)$ -consistance. En effet dans ce cas les domaines sont convexes et rechercher un support dans  $\mathcal{D}$  est équivalent à rechercher un support dans la fermeture convexe des domaines  $\mathcal{D}^I$  définie ci-dessous.

**Définition 2.20.** *Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ , la fermeture convexe<sup>3</sup> de  $S$  est alors définie suivant :  $conv(S) = [\cap_{x \in S} x, \cup_{x \in S} x]$ . Nous notons  $\mathcal{D}^I$  la fermeture convexe des domaines  $\mathcal{D}$ .*

Cette représentation sous forme d'intervalles est simple et compacte. Cependant elle manque parfois de finesse pour représenter les réductions réalisées par certaines contraintes telles qu'une contrainte sur la cardinalité de l'ensemble par exemple.

Plusieurs voies sont actuellement explorées afin d'obtenir une représentation plus fine des domaines qui reste assez compacte pour pouvoir être manipulée. Dans [Sadler and Gervet, 2004, 2008] les auteurs suggèrent l'utilisation d'une relation d'ordre partielle différente de l'inclusion ensembliste. La représentation sous forme d'intervalle obtenue est

---

3. Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{P}(\mathcal{U})$  est convexe si  $\forall (A, B) \in S^2, \forall C \in \mathcal{P}(\mathcal{U}), A \subseteq C \subseteq B \Rightarrow C \in S$ . Les intervalles sont convexes.

utilisée conjointement avec la représentation donnée ci-dessus et permet de représenter plus finement les domaines et de mieux prendre en compte certaines contraintes.

Dans [Lagoon and Stuckey, 2004, Hawkins et al., 2005] les auteurs proposent une représentation exacte des domaines sous la forme de diagrammes de décision binaire en général utilisés pour représenter des propositions logiques. Ils dérivent alors les opérateurs pour les contraintes correspondant aux opérations ensemblistes usuelles. Cette représentation exacte est beaucoup plus compacte qu’une représentation naïve mais elle reste coûteuse. Elle a donc été adaptée dans [Hawkins et al., 2004, Gange et al., 2008] pour représenter approximativement les domaines.

## 2.2 Segmentation et reconnaissance structurelle par la résolution d’un réseau de contraintes

Nous désirons réaliser la segmentation et la reconnaissance de structures sous-corticales dans des IRM cérébrales. Pour cela nous nous reposons sur le modèle structurel décrit dans la section 1.4.1. Ce dernier comporte d’une part une représentation de l’agencement structurel des objets de la scène (représenté sous forme de relations spatiales) et d’autre part un *a priori* sur certaines propriétés de ces structures. En particulier des propriétés relatives à l’apparence des structures dans les images sont connues (dans le cas de l’IRM ces propriétés sont représentées par la forme de plages de valeurs pour les temps de relaxation  $T1$  et  $T2$  et la densité de protons  $\rho$ ) et permettront de faire le lien entre l’image et le modèle.

### 2.2.1 Représentation du problème de segmentation et de reconnaissance

Soit  $\mathcal{I} : X \rightarrow \mathbb{N}^*$  une image dont le domaine spatial  $X$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$  (où  $n$  vaut typiquement 2 ou 3). Nous voulons obtenir pour un ensemble de  $n$  objets donnés (présents dans cette image) les régions de  $X$  associées. Ces régions sont donc les variables de notre problème et nous notons  $\chi = \{O_i | i \in [1..n]\}$ .

La représentation de ces régions comme des éléments de  $\mathcal{P}(X)$  (i.e. comme des sous-ensembles de  $X$ ) n’est pas pleinement satisfaisante. En effet l’image  $\mathcal{I}$  est une observation discrète d’une scène réelle continue. La discrétisation ainsi que d’autres artéfacts liés au processus d’acquisition introduisent une imprécision dans l’image au niveau des frontières de l’objet. La figure ci-contre (a) illustre l’effet de volume partiel induit par la discrétisation de l’espace. Par exemple la frontière pointée en rouge entre le ventricule latéral (la structure sombre) et la matière blanche (le tissu le plus clair) est diffuse puisque certains voxels contiennent les deux types de tissu. Nous choisissons donc de représenter les objets de l’image sous forme d’ensembles flous [Zadeh, 1975] afin de prendre en compte cette imprécision. Les régions  $O_i$ , variables de notre problème, sont donc représentées par des ensembles flous  $\mu_i \in \mathcal{F}$  de  $X$  (i.e.  $\mu_i : X \rightarrow [0, 1]$ ), où  $\mathcal{F}$  désigne l’ensemble des sous-ensembles flous de  $X$ . Les notations et définitions relatives aux ensembles flous sont données dans l’annexe A.2.

Les domaines  $\mathcal{D} = \{D(A) | A \in \chi\}$  associés à l’ensemble de variables  $\chi$  sont donc des sous-ensembles de l’ensemble des sous-ensembles flous de  $X$  :  $D(A) \subseteq \mathcal{F}$  parmi lesquels se

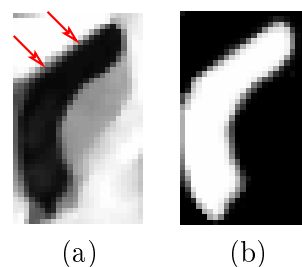


FIGURE 2.2 – (a) Zoom sur le ventricule latéral gauche. (b) Représentation du ventricule latéral sous forme d’ensemble flou.

trouvent (si le problème est satisfiable) les solutions recherchées. Un exemple de domaine pour la corne frontale du ventricule latéral gauche est présenté par la figure 2.3. Ce domaine de taille réduite présente six ensembles flous, le troisième étant la solution recherchée. Cependant ce domaine n'est pas représentatif des domaines que nous manipulerons. En effet  $\mathcal{F}$  présente une taille exponentielle relativement au cardinal de  $X$  ( $k^{|X|}$  où  $k$  correspond au nombre de niveaux discrets utilisés pour représenter les degrés d'appartenance). Initialement les domaines associés aux différentes variables valent  $\mathcal{F}$ . Nous sommes donc amenés à considérer une approximation de ces domaines qui sera décrite dans la section 2.2.2.

Les contraintes sont dérivées d'un modèle structurel de l'anatomie (cf section 1.4.1). Celui-ci comprend un ensemble de relations spatiales stables entre les structures anatomiques et un *a priori* sur les contrastes entre ces structures. Supposons par exemple que ce modèle contienne la relation « $A$  est à droite de  $B$ ». Le processus de reconnaissance a donc pour objectif d'obtenir une affectation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  pour les variables  $A$  et  $B$  (représentant des structures anatomiques) telle que la contrainte  $C_{A,B}^{dir}$  soit satisfaite (i.e.  $(\mu_1, \mu_2) \in rel(C_{A,B}^{dir})$ ). Nous notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des contraintes. L'expression des contraintes sera donnée dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6.

Notre problème de segmentation et de reconnaissance peut donc être représenté par un réseau de contraintes  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$ . Réaliser la segmentation et la reconnaissance correspond alors à extraire une solution de ce problème, c'est-à-dire une instantiation consistante de l'ensemble des variables de  $\chi$  (i.e. satisfaisant à l'ensemble des contraintes). Si aucune solution n'existe, le problème est dit insatisfiable, le modèle n'étant pas adapté à l'image à reconnaître.

Le modèle structurel utilisé est issu d'un apprentissage qui a retenu un ensemble de relations satisfaites sur l'ensemble de la base d'apprentissage. De plus les relations obtenues sont légèrement plus permissives que les relations réellement observées afin d'obtenir de bonnes propriétés de généralisation. Pour ces raisons nous supposons donc que notre problème est satisfiable. Par ailleurs si la base d'apprentissage présentait une forte variabilité, le modèle final ne comprendrait que très peu de relations stables. Or dans le cas de l'anatomie cérébrale l'agencement structurel et l'apparence des structures présentent une grande régularité. De nombreuses relations sont donc vérifiées sur l'ensemble de la base et sont conservées dans le modèle.

L'espace de recherche est de taille  $|\chi| \times k^{|X|}$ , où  $|X|$  prend des valeurs de l'ordre de 10 millions pour une IRM,  $|\chi|$  est le nombre de structures anatomiques considérées et  $k$  est le nombre de niveaux discrets utilisés pour représenter les degrés d'appartenance. Pour des raisons de complexité, un algorithme de retour sur trace ne peut pas être utilisé. Afin d'obtenir une solution nous procédons en deux étapes. Dans un premier temps nous appliquons un algorithme de propagation de contraintes pour réduire les domaines associés aux différentes variables afin d'en exclure le plus grand nombre possible de valeurs ne satisfaisant pas les contraintes, ce qui correspond à obtenir en un temps de calcul raisonnable le plus petit élément possible de  $\mathcal{P}_{ND}^{sol}$ . Pour cela pour chaque contrainte nous proposons dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6 un propagateur réalisant une réduction des domaines. La propagation consiste alors à appliquer itérativement ces propagateurs comme nous le décrirons dans la section 2.3.

Dans une deuxième étape, une fois les domaines réduits, nous réalisons l'extraction d'une solution. Cette solution n'est en général pas unique, le problème étant sous-contraint. La régularité de la surface de la solution fera alors office de critère pour définir une solution optimale. L'extraction de cette solution optimale par un algorithme de retour sur trace n'est cependant toujours pas réalisable, l'espace de recherche étant toujours trop grand même si les domaines ont été considérablement réduits. Nous décrirons une méthode pour extraire



une solution approximative dans le chapitre 5.

### 2.2.2 Représentation des domaines

Il est nécessaire de considérer une représentation plus compacte des domaines puisqu'une représentation naïve conduit à une taille de représentation exponentielle en fonction du nombre de voxels  $|X|$ .

Dans [Papadias et al., 1995], les auteurs représentent ce sous-ensemble par la boîte englobante minimale (MBR) (i.e. le plus petit rectangle en 2D aligné avec les axes du repère et qui inclut tous les éléments du domaine). Cependant cette représentation très compacte ne permet pas de représenter finement la géométrie des objets (il suffit de prendre comme objet une ligne diagonale pour s'en persuader). Elle constitue ainsi une approximation très grossière du domaine considéré ce qui limitera les possibilités et l'efficacité d'un processus de propagation de contraintes par réduction de domaine.

Comme nous l'avons décrit dans les sections 2.1.5 et 2.1.6, de nombreux travaux ont porté sur la représentation compacte des domaines par leurs bornes lorsque les domaines sont munis d'une relation d'ordre (partielle ou totale). Ainsi lorsque ces domaines sont des sous-ensembles de  $\mathbb{Z}$  ou de  $\mathbb{R}$ , ils peuvent être approchés sous forme d'intervalles. Similairement lorsque que ces domaines sont composés de sous-ensembles d'un ensemble de base  $\mathcal{U}$  (i.e. sont des sous-ensembles de  $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ), ils peuvent être approchés par un intervalle (cf section 2.1.6).  $\mathcal{P}(\mathcal{U})$  muni de la relation d'ordre partielle  $\subseteq$  est en effet un treillis complet et les bornes supérieure et inférieure d'un domaine peuvent être respectivement définies comme le supremum et l'infimum sur l'ensemble des éléments du domaine.

Muni de la relation d'ordre usuelle sur les ensembles flous,  $(\mathcal{F}, \leq)$  est un treillis complet. Tout sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  possède donc une borne supérieure et une borne inférieure appartenant à  $\mathcal{F}$ . Nous pouvons définir les bornes d'un domaine comme le supremum et l'infimum des ensembles flous appartenant à ce domaine. Soit  $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{F}$  le domaine associé à une structure  $A$ . La borne supérieure  $\bar{A}$  du domaine  $\mathcal{D}(A)$  est définie suivant :

$$\bar{A} = \vee \{\nu \in \mathcal{D}(A)\}. \quad (2.1)$$

Cette borne peut être interprétée comme une surestimation de l'ensemble flou recherché  $\mu_A$ . Similairement nous définissons la borne inférieure  $\underline{A}$  suivant :

$$\underline{A} = \wedge \{\nu \in \mathcal{D}(A)\}, \quad (2.2)$$

qui peut être interprétée comme une sous-estimation de  $\mu_A$ .

**Définition 2.21.** *Un intervalle d'ensembles flous  $(\underline{A}, \bar{A})$  défini par la borne inférieure  $\underline{A}$  et par la borne supérieure  $\bar{A}$  est un ensemble d'éléments de  $\mathcal{F}$  compris entre ces bornes :*

$$(\underline{A}, \bar{A}) = \{\mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \bar{A}\}.$$

L'intervalle  $(\underline{A}, \bar{A}) = \{\mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \bar{A}\}$  inclut le domaine  $\mathcal{D}(A)$  (i.e.  $\mathcal{D}(A) \subseteq (\underline{A}, \bar{A})$ ). Il correspond à la fermeture convexe<sup>4</sup> de  $\mathcal{D}(A)$  (i.e.  $\text{conv}(\mathcal{D}(A))$ ). Notons que si  $\mu_A$  est la solution recherchée nous avons  $\underline{A} \leq \mu_A \leq \bar{A}$ .

**Définition 2.22.** *La fermeture convexe  $\mathcal{D}^I$  d'un ensemble de domaines  $\mathcal{D}$  est telle que :*  $\forall A \in \mathcal{X}, \mathcal{D}^I(A) = \text{conv}(\mathcal{D}(A)) = (\underline{A}, \bar{A})$ .

Une représentation directe des domaines n'étant pas possible, nous représentons les domaines de notre réseau sous la forme d'intervalles et nous notons maintenant :

$$N = \langle \mathcal{X}, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle.$$

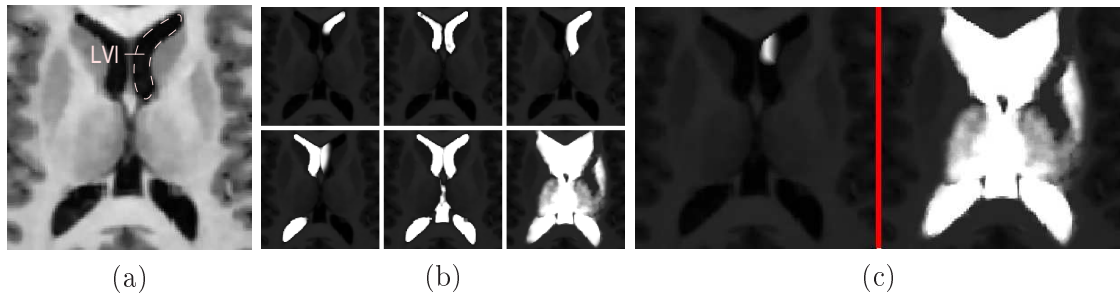


FIGURE 2.3 – Coupe axiale d’une IRM cérébrale. (a) Contour de la corne frontale du ventricule latéral gauche (LVI). (b) Un domaine pour  $LVI$  qui contient six ensembles flous. (c) Borne inférieure  $\underline{LVI}$  et borne supérieure  $\overline{LVI}$ .

La figure 2.3 illustre ces définitions. Nous nous intéressons à la corne frontale du ventricule latéral gauche  $LVI$  montré en (a). Un domaine  $\mathcal{D}(LVI)$  pour  $LVI$  comprenant six éléments est montré en (b). Les bornes inférieures et supérieures de ce domaine sont montrées en (c) et nous pouvons vérifier que  $\mathcal{D}(LVI) \subseteq (\underline{LVI}, \overline{LVI})$ . Le domaine  $(\underline{LVI}, \overline{LVI})$  est donc une surestimation du domaine initial et peut induire une perte d’information importante. La représentation des domaines par leurs bornes est ainsi moins fine que la représentation directe comme sous-ensemble de  $\mathcal{F}$ , mais est un bon compromis entre taille de représentation et finesse de cette représentation.

**Domaine vide** La propagation de contraintes consistant à réduire itérativement les domaines, ces derniers peuvent devenir vides et nous pouvons conclure dans ce cas à l’insatisfiabilité du problème. Un domaine représenté par l’intervalle  $(\underline{A}, \overline{A})$  est vide si  $\underline{A} \not\leq \overline{A}$ . Par convention tout intervalle vide est égal à  $(1_{\mathcal{F}}, 0_{\mathcal{F}})$  (cette convention est utile dans les preuves associées à ce chapitre).

**Cardinal** Le cardinal d’un domaine représenté par ses bornes peut être obtenu suivant :

$$|(\underline{A}, \overline{A})| = \prod_{x \in X} (k(\overline{A}(x) - \underline{A}(x)) + 1), \quad (2.3)$$

où  $k$  correspond au nombre de niveaux discrets utilisés pour représenter les degrés d’appartenance.

**Ordre et opérateurs** Considérons deux intervalles  $(\underline{A}^1, \overline{A}^1)$  et  $(\underline{A}^2, \overline{A}^2)$  associés à la même variable  $A$ . Nous pouvons définir la relation d’ordre partiel suivante :

$$(\underline{A}^1, \overline{A}^1) \preceq (\underline{A}^2, \overline{A}^2) \text{ si } \forall x \in X, \underline{A}^1(x) \geq \underline{A}^2(x) \text{ et } \overline{A}^1(x) \leq \overline{A}^2(x).$$

Cette définition est équivalente à l’inclusion du sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  représenté par  $(\underline{A}^1, \overline{A}^1)$  dans le sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  représenté par  $(\underline{A}^2, \overline{A}^2)$ .

Les opérateurs de supremum et d’infimum associés sont alors respectivement définis suivant :

$$(\underline{A}^1, \overline{A}^1) \vee (\underline{A}^2, \overline{A}^2) = (\underline{A}^1 \wedge \underline{A}^2, \overline{A}^1 \vee \overline{A}^2) \quad (2.4)$$

$$(\underline{A}^1, \overline{A}^1) \wedge (\underline{A}^2, \overline{A}^2) = (\underline{A}^1 \vee \underline{A}^2, \overline{A}^1 \wedge \overline{A}^2) \quad (2.5)$$

---

4. Les définitions de la convexité et de la fermeture convexe sont données dans l’annexe A.

Il existe des relations étroites entre cette définition et la bipolarité [Benferhat et al., 2002] ou les ensembles flous « intuitionnistes » [Atanassov, 1986]. Cependant la sémantique attachée à ces représentations est différente.

### 2.2.3 Définition des contraintes

Les contraintes sont dérivées du modèle structurel de l'anatomie et représentent des relations spatiales entre structures anatomiques, des propriétés impliquant une structure unique (telles que le volume ou la connexité) ou des relations portant sur le contraste entre deux structures. Nous présenterons en détail ces contraintes dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6.

Nous rappelons qu'une contrainte  $C$  est représentée par une paire  $(vars(C), rel(C))$ , où  $rel(C)$  est une relation définie sur les variables  $vars(C)$  (i.e. un sous-ensemble du produit cartésien des domaines associés). Si  $vars(C) = \{O_1, \dots, O_k\}$ , nous caractériserons la relation sous la forme d'une fonction :  $rel(C) : \mathcal{D}(O_1) \times \dots \times \mathcal{D}(O_k) \rightarrow \{0, 1\}$ .

Nous utilisons ces contraintes dans un processus de propagation afin de filtrer des valeurs incohérentes. Pour cela nous associons à chaque contrainte  $C$  un propagateur correct (une fonction  $f_C : \mathcal{P}_{ND}^{sol} \rightarrow \mathcal{P}_{ND}^{sol}$ ) qui réduit les domaines pour en supprimer des valeurs inconsistantes avec  $C$ . Puisque les domaines des variables impliquées dans ces contraintes sont représentés sous forme d'intervalles, nous considérons une notion de consistance locale plus faible que la consistance d'arc. Nous proposons ainsi une définition analogue à la consistance de bornes d'ensembles (cf définition 2.19) ou à la  $bounds(Z)$ -consistance (cf définition 2.17) définies respectivement pour des réseaux dont les variables prennent pour valeurs des ensembles ou des entiers.

**Définition 2.23.** *Une contrainte  $C$  est  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $\mathcal{D}$  si la borne supérieure du domaine de chaque variable impliquée dans la contrainte peut être obtenue comme la réunion d'éléments du domaine qui possèdent un support dans  $\mathcal{D}^I$  pour la contrainte  $C$  :*

$$\forall A_i \in vars(C), \overline{A}_i = \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i, \overline{A}_i) \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}^I \}.$$

**Définition 2.24.** *Une contrainte  $C$  est  $BI_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $\mathcal{D}$  si la borne inférieure du domaine de chaque variable impliquée dans la contrainte peut être obtenue comme l'intersection d'éléments du domaine qui possèdent un support dans  $\mathcal{D}^I$  pour la contrainte  $C$  :*

$$\forall A_i \in vars(C), \underline{A}_i = \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i, \overline{A}_i) \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}^I \}.$$

**Définition 2.25.** *Une contrainte  $C$  est  $B_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $\mathcal{D}$  si elle est  $BI_{\mathcal{F}}$ -consistante et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistante.*

**Définition 2.26.** *Un réseau de contraintes est  $B_{\mathcal{F}}(BS_{\mathcal{F}}, BI_{\mathcal{F}})$ -consistant si toutes les contraintes sont  $B_{\mathcal{F}}(BS_{\mathcal{F}}, BI_{\mathcal{F}})$ -consistantes.*

L'obtention de la  $B_{\mathcal{F}}$ -fermeture (cf définition 2.16) du réseau initial  $N = \langle \chi, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle$  sera réalisée par l'application séquentielle de propagateurs associés aux contraintes de  $N$ . Ce processus sera décrit dans la section 2.3. Nous nous intéressons ici uniquement aux propagateurs. A chaque contrainte  $C$ , nous associons un propagateur correct  $f_C$  tel que  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}$ , la contrainte  $C$  soit  $B_{\mathcal{F}}$ -consistante dans le réseau  $f_C(N')$ . Le propagateur  $f_C$  est dit  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.

Pour une contrainte  $C$  quelconque, nous pouvons définir le propagateur  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant générique :

$$f_C : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{ND}^{sol} & \rightarrow & \mathcal{P}_{ND}^{sol} \\ \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle & \mapsto & \langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle, \end{array}$$

tel que  $\forall A_i \in \text{vars}(C), \forall \mu \in \mathcal{D}(A_i), \mu \in \mathcal{D}'(A_i)$  si  $(A_i, \mu)$  possède un support pour  $C$  dans  $\mathcal{D}^I$ .

Lorsque les domaines sont représentés par des intervalles, ce propagateur réalise uniquement la mise à jour des bornes du domaine. Nous définissons donc le propagateur suivant duquel seront dérivés la plupart des propagateurs donnés dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6.

**Définition 2.27** (Propagateur  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant générique). *Le propagateur générique  $f_C^{gen}$  pour la contrainte  $C$  est défini suivant :*

$$f_C^{gen} : \quad \mathcal{P}_{ND}^{sol} \quad \rightarrow \mathcal{P}_{ND}^{sol} \\ \langle \chi, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle \quad \mapsto \langle \chi, \mathcal{D}^{I'}, \mathcal{C} \rangle,$$

tel que  $\forall A_i \in \text{vars}(C), \mathcal{D}^{I'}(A_i) = (\underline{A}_i', \overline{A}_i')$  avec :

$$\underline{A}_i' = \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i, \overline{A}_i) \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}^I \}, \\ \overline{A}_i' = \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i, \overline{A}_i) \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}^I \}.$$

Pour une contrainte quelconque, le calcul de  $f_C^{gen}$  nécessite le parcours de l'ensemble des valeurs du domaine  $\mathcal{D}^I$  (restreint aux variables  $\text{vars}(C)$ ) ce qui n'est pas réalisable. Par contre lorsque la relation associée à la contrainte est monotone par rapport à l'ensemble des variables, vérifier l'existence d'un support dans  $\mathcal{D}^I$  peut être réalisé efficacement en ne manipulant que les bornes des domaines. Pour les contraintes monotones nous dérivons ainsi un propagateur  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant générique  $f_C^{monotone}$  présentant une complexité beaucoup plus faible que  $f_C^{gen}$ .

Pour simplifier les expressions qui suivront, nous définissons une fonction  $I_A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\text{vars}(C)}$ , avec  $A \in \text{vars}(C)$ . Soit  $\mu \in \mathcal{F}$ ,  $I_A(\mu)$  est une instantiation sur  $\text{vars}(C)$  telle que  $I_A(\mu)(A) = \mu$  et  $\forall B \neq A, I_A(\mu)(B) = \begin{cases} \overline{B} & \text{si } \text{rel}(C) \text{ est croissante par rapport à } B, \\ \underline{B} & \text{si } \text{rel}(C) \text{ est décroissante par rapport à } B. \end{cases}$  Puisque la relation associée à la contrainte  $C$  est monotone par rapport à l'ensemble des variables de  $\text{vars}(C)$ ,  $\mu \in (\underline{A}, \overline{A})$  possède un support pour  $C$  dans  $\mathcal{D}^I$  ssi  $I_A(\mu) \in \text{rel}(C)$ . En effet si une instantiation  $I$  sur  $\text{vars}(C)$  telle que  $I(A) = \mu$  satisfait  $C$ , alors l'instanciation  $I_A(\mu)$  satisfait aussi la contrainte  $C$  en raison de l'hypothèse de monotonie de la relation.

**Définition 2.28** (Propagateur générique pour les contraintes monotones). *Soit  $C_m$  une contrainte dont la relation est monotone par rapport à l'ensemble de ses variables. Nous définissons le propagateur  $f_{C_m}^{monotone}$  suivant :*

$$f_{C_m}^{monotone} : \quad \mathcal{P}_{ND}^{sol} \quad \rightarrow \mathcal{P}_{ND}^{sol} \\ \langle \chi, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle \quad \mapsto \langle \chi, \mathcal{D}^{I'}, \mathcal{C} \rangle,$$

tel que  $\forall A_i \in \text{vars}(C), \mathcal{D}^{I'}(A_i) = (\underline{A}_i', \overline{A}_i')$ .

Si  $\text{rel}(C_m)$  est croissante par rapport à  $A_i$  :

$$\begin{cases} \forall x \in X, \underline{A}_i'(x) = \inf \{ v \in [\underline{A}_i(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C_m) \}, \\ \overline{A}_i' = \overline{A}_i, \end{cases}$$

où  $\delta_x^v \in \mathcal{F}$  est tel que  $\delta_x^v(y) = v$  si  $y = x$  et 0 sinon et  $c$  est la complémentation.

Si  $\text{rel}(C)$  est décroissante par rapport à  $A_i$  :

$$\begin{cases} \overline{A}_i' = \overline{A}_i, \\ \forall x \in X, \underline{A}_i'(x) = \sup \{ v \in [0, \overline{A}_i(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C_m) \}. \end{cases}$$

Si la relation est décroissante par rapport à  $A_i$ , alors si la valeur  $\mu$  possède un support pour  $C_m$  dans  $\mathcal{D}^I$  tous les éléments plus petits que  $\mu$  possèdent aussi un support. La nouvelle borne supérieure du domaine de  $A_i$  peut donc être obtenue en calculant point par point si les ensembles flous  $\delta_x^v$  possèdent un support pour  $C_m$  dans  $\mathcal{D}^I$ .

Similairement si la relation est croissante par rapport à  $A_i$ , alors si la valeur  $\mu$  possède un support pour  $C_m$  dans  $\mathcal{D}^I$  tous les éléments plus grands que  $\mu$  possèdent aussi un support. La nouvelle borne inférieure du domaine de  $A_i$  peut donc être obtenue en calculant point par point si les ensembles flous  $c(\delta_x^v)$  possèdent un support pour  $C_m$  dans  $\mathcal{D}^I$ .

**Proposition 2.3.** *Soit  $C$  une contrainte telle que  $rel(C)$  soit monotone par rapport à l'ensemble de ses variables. Le propagateur  $f_C^{monotone}$  pour  $C$  est correct, idempotent et  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

De nombreuses contraintes traitées dans la suite de ce chapitre sont monotones et il est possible d'utiliser le propagateur générique. Pour ces contraintes, nous fournirons tout de même un propagateur spécifique qui correspondra en général à l'adaptation de ce propagateur générique.

Pour les contraintes non monotones telles que les contraintes de complémentation ou de connexité, il est aussi parfois possible d'obtenir des propagateurs efficaces assurant certains degrés de consistance, mais nous ne disposons pas de définition générique meilleure que le propagateur  $f_C^{gen}$ . Pour la contrainte de connexité par exemple nous obtiendrons un propagateur  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant calculable uniquement à partir des bornes des domaines et donc utilisable.

Les propagateurs  $f_C$  spécifiques à chaque contrainte  $C$  sont présentés dans les sections 2.4, 2.5 et 2.6. Ils y seront décrits sous la forme suivante :

$$\frac{\langle vars(C); \mathcal{D}; C \rangle}{\langle vars(C); \mathcal{D}'; C \rangle},$$

où  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont les domaines associés à l'ensemble de variables  $vars(C)$  et  $\mathcal{D}' \leq \mathcal{D}$ . Nous noterons  $vars(f_C) = vars(C)$ .

Avant d'introduire les contraintes spécifiques à notre problème de reconnaissance, nous décrivons brièvement dans la section suivante le processus de propagation de contraintes et nous en donnons une première illustration.

## 2.3 Propagation

Soit une image  $\mathcal{I}$  définie sur l'espace discret  $X$  dans laquelle est présent un ensemble de structures  $\chi$ . Ces structures peuvent être sélectionnées par l'utilisateur ou fournies par un modèle générique complet correspondant à la région anatomique imagée (un modèle du cerveau dans notre cas). Initialement nous supposons uniquement que ces structures sont présentes dans l'image. Le domaine associé vaut donc  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$  ( $\mathcal{F}$  est l'ensemble des ensembles flous sur  $X$ ). L'ensemble des relations impliquant uniquement des structures de  $\chi$  sont alors extraites de la base de connaissances et conduisent à l'ensemble de contraintes  $\mathcal{C}$ . Nous définissons ainsi le réseau initial  $N_0 = \langle \chi, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle$ . Si certaines structures ont éventuellement été extraites préalablement, les domaines associés sont réduits à des singletons. Leurs bornes supérieures et inférieures sont donc égales.

Nous désirons simplifier ce réseau en un temps de calcul raisonnable en réduisant les domaines associés aux différentes variables. La  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistance semble être un critère adapté à la réalisation de notre objectif. En effet des notions de consistance locale plus fortes telles

que la consistance d'arc conduisent à des propagateurs non calculables, alors que nous pouvons dériver pour toutes les contraintes considérées (ou presque...) des propagateurs  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistants présentant une complexité faible.

Nous calculons donc la  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -fermeture du réseau initial  $N_0$ . Comme la fermeture associée à la consistance d'arc, la  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -fermeture peut être obtenue par une itération (cf définition 2.12) sur les propagateurs  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistants associés aux contraintes. Nous notons cet ensemble de propagateurs  $F = \{f_C \mid f_C \text{ } \mathcal{B}_{\mathcal{F}}\text{-consistant et } C \in \mathcal{C}\}$ ,  $f_C$  calculant la  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -fermeture du réseau  $N_C = \langle \chi; \mathcal{D}; C \rangle$ .

Nous réalisons donc une itération sur  $F$  pour obtenir la  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -fermeture de  $N_0$  qui sera le plus grand point fixe pour  $F$  sur  $N_0$ . Puisque les propagateurs  $f_i$  ne commutent pas nécessairement, l'itération ne peut pas être réalisée par l'application unique de chaque propagateur. Nous appliquerons donc itérativement ces propagateurs jusqu'à convergence. Notons que puisque les propagateurs sont monotones, le réseau obtenu à la convergence est unique et ne dépend pas de l'ordre d'application des propagateurs (cf proposition 2.2). Un algorithme générique classique est présenté dans la figure 2.4.

---

**Données** :  $\langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau de contraintes.  
 $F = \{f_1, \dots, f_k\}$  un ensemble de propagateurs  
**Résultat** :  $\langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle$   $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant avec  $\mathcal{D} \leq_N \mathcal{D}'$

```

1 début
2    $G \leftarrow F$ 
3   tant que  $G \neq \emptyset$  faire
4     sélectionne et supprime un propagateur  $g$  de  $G$ 
5     si  $N \neq g(N)$  alors
6        $G \leftarrow G \cup \{f_i \in F \setminus G \mid vars(f) \cap vars(g) \neq \emptyset\}$ 
7        $N \leftarrow g(N)$ 
8     fin
9   fin
10 fin
```

FIGURE 2.4 – Algorithme de propagation générique

Une illustration de cet algorithme est proposé par la figure 2.5 en considérant quatre variables : le cerveau *Cerv*, le ventricule latéral gauche *LVL*, le noyau caudé gauche *CNI* et la capsule interne gauche *ICL*. Initialement aucune hypothèse n'est faite sur les objets à reconnaître. Les domaines associés valent donc  $\mathcal{F}$  et sont représentés par les bornes  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$  (a). Nous disposons par ailleurs d'une segmentation externe pour le cerveau  $\mu_{Cerv}$ , son domaine est initialisé par un singleton et représenté par les bornes  $(\mu_{Cerv}, \mu_{Cerv})$  (b). Le réseau présente sept contraintes. Nous appliquons alors itérativement les propagateurs associés à ces contraintes (c-j). Chaque propagateur peut être appliqué à plusieurs reprises (à chaque fois que le domaine d'une des variables du propagateur est modifiée, le propagateur est ajouté à la liste  $G$  des propagateurs à mettre à jour par l'opération donnée à la ligne 6 de l'algorithme 2.4). Les bornes sont progressivement mises à jour, le changement des bornes d'un domaine permettant la réduction des bornes d'autres variables. Le processus s'achève lorsque le réseau est stable pour l'ensemble des propagateurs. Un exemple plus complet sera donné dans la section 2.7 de ce chapitre.

L'itération permet le calcul de la  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -fermeture. Cependant pour atteindre le plus grand point fixe, il faudra en général un grand nombre d'itérations. Le calcul des propagateurs étant coûteux (leur complexité est au moins en  $O(|X|)$  où  $|X|$  correspond au nombre

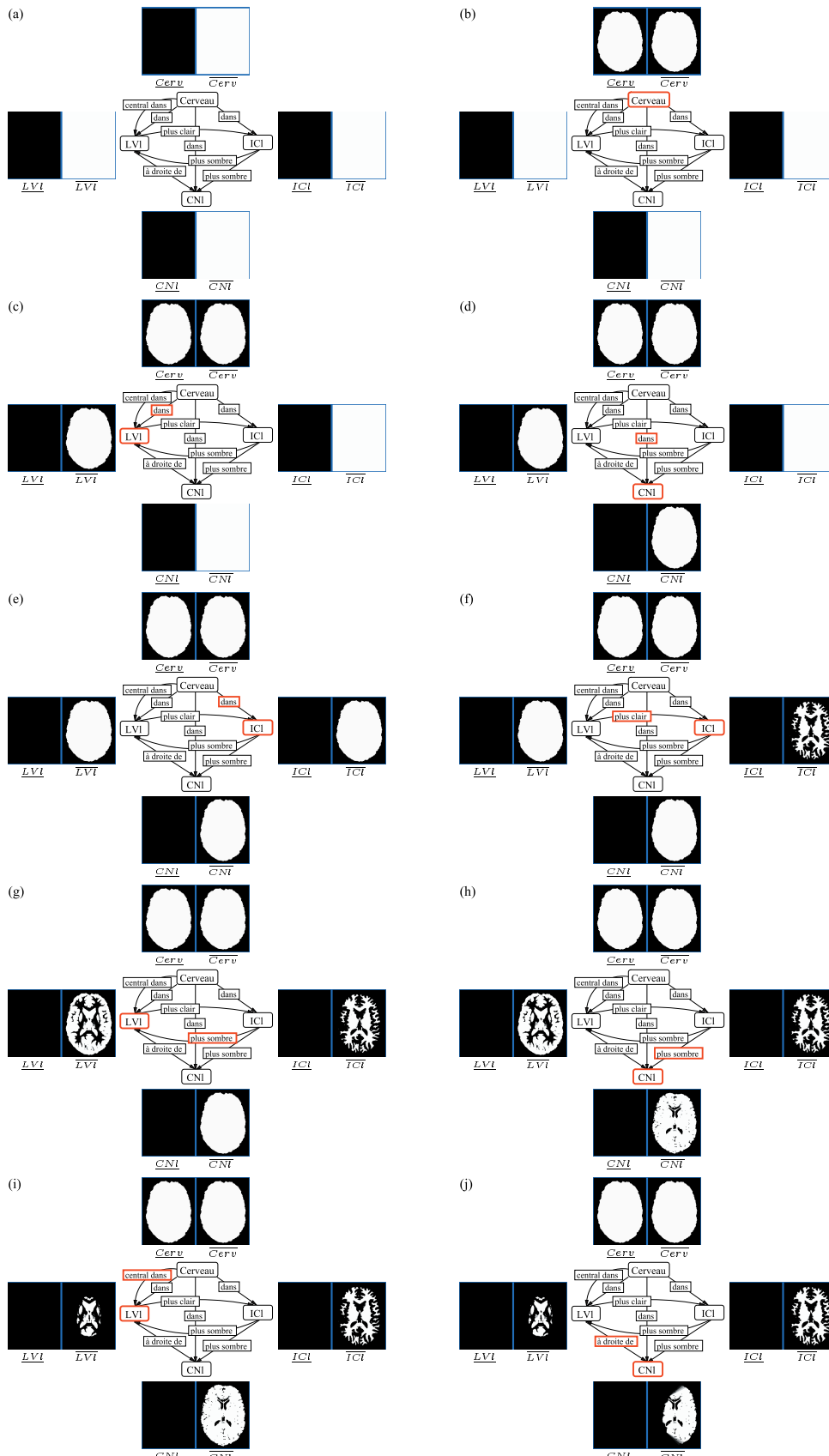


FIGURE 2.5 – Premières itérations d'un algorithme de propagation basique.

de voxels du volume), un ordonnancement approprié de l'application des propagateurs est indispensable et peut être mis en œuvre dans la fonction « sélectionne » de l'algorithme 2.4. Nous proposerons dans le chapitre 4 un tel ordonnancement.

## 2.4 Définition et modélisation des contraintes spatiales

Le modèle structurel utilisé comporte une représentation de l'agencement structurel stable sous forme de relations spatiales entre les structures anatomiques (cf section 1.4.1 et notamment la figure 1.11 qui illustre les différentes relations spatiales considérées) et de propriétés de ces structures. Nous représentons ces relations et propriétés sous forme de contraintes binaires. Néanmoins la prise en compte de contraintes floues serait préférable puisqu'elle permettrait de prendre en compte la non-satisfaction partielle de certaines contraintes et apporterait ainsi plus de robustesse dans le processus de propagation (en gérant mieux les variations importantes par rapport à l'anatomie normale). L'intégration de contraintes floues dans un réseau de contraintes pourrait être réalisée en suivant les travaux décrits dans [Fargier, 1994, Dubois et al., 1996].

Nous décrivons dans cette section les modèles retenus pour les contraintes suivantes :

- relations ensemblistes,
  - inclusion,
  - réunion,
  - intersection,
  - complémentation,
  - non intersection,
  - partition,
- relations directionnelles,
- relations de distance,
- adjacence,
- connexité,
- volume.

Pour chacune d'entre elles nous proposons alors un propagateur qui sera utilisé dans le processus de propagation.

### 2.4.1 Relations ensemblistes

#### Inclusion

L'inclusion est une relation fondamentale de notre modèle structurel puisqu'elle permet de représenter partiellement la notion de hiérarchie anatomique à la base de ce modèle. La simplicité de sa modélisation nous permet de centrer la présentation qui suit sur la dérivation du propagateur associé, en illustrant les notions introduites et discutées dans la section 2.2.3.

**Définition 2.29** (Contrainte d'inclusion). *Soit une relation d'inclusion d'une structure  $A$  dans une structure  $B$ . La contrainte  $C_{A,B}^{dans}$  associée est telle que  $\text{vars}(C_{A,B}^{dans}) = \{A, B\}$  et :*

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{A,B}^{dans}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 \leq \mu_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Une instanciation  $I = \{(A, \mu), (B, \nu)\}$  valide est donc consistante relativement à  $C_{A,B}^{dans}$  si  $\mu \leq \nu$ .



Nous voulons obtenir pour cette contrainte un propagateur  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant présentant une faible complexité calculatoire. La relation  $rel(C_{A,B}^{dans})$  est croissante par rapport à  $B$  et décroissante par rapport à  $A$ . Puisqu'elle est monotone par rapport à l'ensemble des variables, nous pouvons utiliser le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}^{monotone}$  donné par la définition 2.28.

Cependant nous pouvons définir un propagateur spécifique plus simple à calculer. Pour cela, considérons le propagateur générique  $f_c^{gen}$  donné par la définition 2.27.  $f_c^{gen}$  met à jour des bornes des domaines de  $A$  et de  $B$ . La borne supérieure de  $A$  est par exemple modifiée suivant :

$$\bar{A}' = \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \bar{A}) \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dans} \text{ dans } (\underline{A}, \bar{A}) \times (\underline{B}, \bar{B}) \}.$$

Or  $(A, \mu)$  possède un support pour  $C_{A,B}^{dans}$  dans  $(\underline{A}, \bar{A}) \times (\underline{B}, \bar{B})$  si  $\exists \nu \in (\underline{B}, \bar{B}), \mu \leq \nu$ . Puisque l'inégalité est croissante, nous obtenons que  $(A, \mu)$  possède un support si  $\mu \leq \bar{B}$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \bar{A}' &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \bar{A}) \mid \mu \leq \bar{B} \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \bar{A} \wedge \bar{B} \} \\ &= \begin{cases} \bar{A} \wedge \bar{B} & \text{si } \underline{A} \leq \bar{A} \wedge \bar{B} \\ 0_{\mathcal{F}} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

La borne supérieure de la structure incluse peut donc être réduite par la borne supérieure de la structure incluante. En effet tous les valeurs pour  $A$  qui ne sont pas inférieures à  $\bar{B}$  ne peuvent pas satisfaire la contrainte d'inclusion et ne peuvent donc pas appartenir à une solution.

Similairement nous pouvons obtenir des simplifications pour la borne supérieure  $\bar{B}$  ainsi que pour les bornes inférieures  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  (dont le détail sera donné dans la preuve de la proposition 2.4). La borne inférieure de  $B$  peut notamment être mise à jour par  $\underline{B} \vee \underline{A}$ . En effet si une valeur  $\mu$  pour  $B$  ne vérifie pas l'inégalité  $\underline{A} \leq \mu$ , elle ne peut pas satisfaire la contrainte.

**Définition 2.30** (Propagateur pour la contrainte d'inclusion). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  associé à la contrainte d'inclusion de  $A$  dans  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \bar{A}), (\underline{B}, \bar{B}); C_{A,B}^{dans} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \bar{A} \wedge \bar{B}), (\underline{B} \vee \underline{A}, \bar{B}); C_{A,B}^{dans} \rangle}$$

**Proposition 2.4.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  est correct, idempotent et  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

Remarquons que si aucune instantiation valide ne satisfait la contrainte, ce propagateur fournit des domaines vides. En effet il n'existe aucune instantiation valide satisfaisant  $C_{A,B}^{dans}$  ssi  $\underline{A} \not\leq \bar{B}$ . Les domaines résultants pour  $A$  et  $B$  sont donc vides puisque dans ce cas  $\underline{A} \not\leq \bar{A} \wedge \bar{B}$  et  $\underline{B} \vee \underline{A} \not\leq \bar{B}$ .

**Exemple 2.2.** *La figure 2.6 illustre l'application de ce propagateur pour la contrainte d'inclusion du ventricule latéral gauche  $LVL$  dans le cerveau  $Cerv$ . Initialement  $LVL$  et  $Cerv$  valent respectivement  $1_{\mathcal{F}}$  et  $0_{\mathcal{F}}$ . L'application du propagateur  $f_{C_{LVL,Cerv}^{dans}}$  initialise ainsi ces deux bornes et nous obtenons  $\overline{LVL} = 1_{\mathcal{F}} \wedge \overline{Cerv} = \overline{Cerv}$  et  $\underline{Cerv} = 0_{\mathcal{F}} \vee \underline{LVL} = \underline{LVL}$ .*

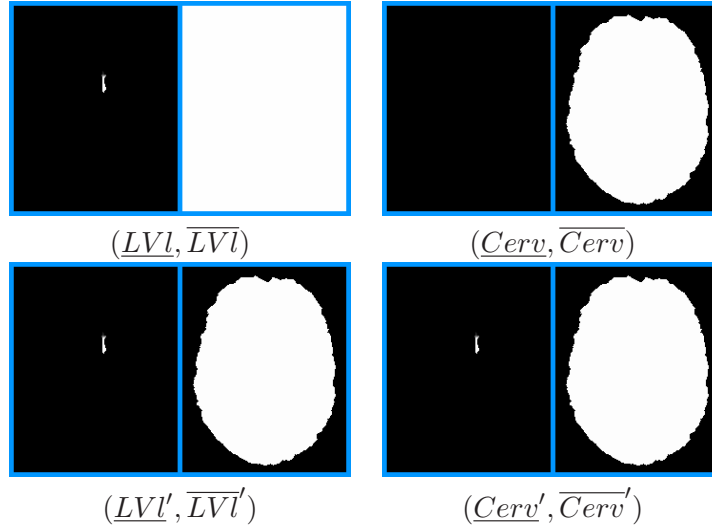


FIGURE 2.6 – Le ventricule latéral gauche  $LVI$  est inclus dans le cerveau  $Cerv$ . Le propagateur  $f_{C_{LVI, Cerv}^{dans}}$  permet de réduire les domaines initiaux de ces structures ( $(\underline{LVI}, \overline{LVI})$  et  $(\underline{Cerv}, \overline{Cerv})$ ) et fournit les bornes  $(\underline{LVI}', \overline{LVI}')$  et  $(\underline{Cerv}', \overline{Cerv}')$ .

### Complémentation

**Définition 2.31** (Contrainte de complémentation). *Soient un objet  $A$  et  $B$  son complémentaire. La contrainte  $C_{A,B}^{compl}$  est définie suivant :*

$$\begin{aligned}
 rel(C_{A,B}^{compl}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\
 (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 = c(\mu_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Définition 2.32** (Propagateur pour la contrainte de complémentation). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{compl}}$  associé à la contrainte de complémentation entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{compl} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A} \vee c(\overline{B}), \overline{A} \wedge c(\underline{B})), (\underline{B} \vee c(\overline{A}), \overline{B} \wedge c(\underline{A})); C_{A,B}^{compl} \rangle}$$

En effet une valeur  $\mu$  pour la variable  $A$  peut satisfaire la contrainte si  $c(\mu)$  appartient au domaine de  $B : (\underline{B}, \overline{B})$ . Puisque la complémentation est décroissante, seules les valeurs appartenant à l'intervalle  $(c(\overline{B}), c(\underline{B}))$  satisfont la contrainte avec au moins un élément du domaine de  $B$ . Le domaine de la variable  $A$  peut donc être restreint à l'intersection de l'ancien domaine et de l'intervalle  $(c(\overline{B}), c(\underline{B}))$ . Le domaine de  $B$  est réduit de manière similaire.

**Proposition 2.5.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{compl}}$  est correct, idempotent et  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

### Réunion

Considérons maintenant une relation entre une structure  $B$  et un ensemble non vide de structures  $\{A_i\}$  satisfaite si  $B$  est la réunion de l'ensemble des structures  $\{A_i\}$  (qui peuvent s'intersecter).

**Définition 2.33** (Contrainte de réunion). Soient  $k$  objets  $\{A_i\}$  et un objet  $B$  tels que  $B = \bigcup_i A_i$ . La contrainte associée peut être exprimée suivant :

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}) : \mathcal{D}(A_1) \times \dots \times \mathcal{D}(A_k) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \dots, \mu_k, \mu) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \perp_{i \in [1..k]} \mu_i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\perp$  est une t-conorme (cf section A.2).

Le choix de la t-conorme a une influence importante sur le résultat obtenu et notamment sur la gestion des degrés d'appartenance. Si nous choisissons le maximum ( $\perp_{\max}$ ), l'imprécision aux frontières représentée par des degrés d'appartenance plus faibles peut conduire à l'apparition de « failles » dans l'ensemble obtenu par réunion. L'exemple 1D illustre cette situation. Deux objets  $A$  et  $B$  présentent une imprécision à leur frontière mais sont adjacents (aucun autre objet n'est présent entre  $A$  et  $B$ ). La réunion  $C$  montrée en pointillés doit donc être connexe. Cependant  $\perp_{\max}(\mu_A, \mu_B)$  montrée en vert est partiellement déconnectée au niveau de la frontière entre  $A$  et  $B$ . La t-conorme de Lukasiewicz ( $\perp_{\text{Luka}}(a, b) = \min(1, a + b)$ ) conduit à des résultats beaucoup plus satisfaisants. L'ensemble  $C$  montré en pointillés est en effet obtenu comme  $\perp_{\text{Luka}}(\mu_A, \mu_B)$ . Nous choisissons donc cette t-conorme (et donc la t-norme associée pour la contrainte d'intersection).

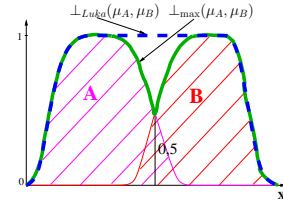


FIGURE 2.7 – Influence de la t-conorme sur la réunion.

**Définition 2.34** (Propagateur pour la contrainte de réunion). Le propagateur  $f_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}$  associé à la contrainte de réunion entre l'ensemble de structures  $\{A_i\}$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i, \overline{A}_i), \dots, (\underline{B}, \overline{B}); C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}} \rangle}{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} A_j))), \underline{A}_i \wedge \overline{B}, \dots, (\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i, \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i); C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}} \rangle}$$

Ce propagateur restreint la borne supérieure  $\overline{B}$  du domaine de  $B$  par l'union des bornes supérieures de l'ensemble  $\{A_i\}$ . La borne inférieure  $\underline{B}$  est étendue par l'union des  $\underline{A}_i$ . Chaque  $\overline{A}_i$  est réduite par  $\overline{B}$  (puisque  $A_i$  est inclus dans  $B$ ) et chaque  $\underline{A}_i$  est étendu de sorte qu'en chaque point  $x$  de l'espace,  $\perp(\underline{A}_i(x), \perp_{j \neq i} \overline{A}_j(x)) \geq \underline{B}$  (si un point appartient à  $B$  et n'appartient à aucune structure  $A_j$  sauf à  $A_i$ , alors ce point appartient nécessairement à  $A_i$ ).

**Proposition 2.6.** Le propagateur  $f_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}$  est correct et idempotent.

## Intersection

Considérons maintenant une relation d'intersection entre un objet d'une part et un ensemble non vide d'objets d'autre part.

**Définition 2.35** (Contrainte d'intersection). Soient un ensemble de  $k$  objets  $\{A_i\}$  et un objet  $B$  tels que  $B$  soit l'intersection de l'ensemble  $\{A_i\}$ . La contrainte associée peut être exprimée suivant :

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{\{A_i\},B}^{\text{intersection}}) : \mathcal{D}(A_1) \times \dots \times \mathcal{D}(A_k) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \dots, \mu_k, \mu) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \top_{i \in [1..k]} \mu_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\top$  est une  $t$ -norme (cf section A.2).

Pour les mêmes raisons que celles discutées dans le cas de la réunion nous choisissons la  $t$ -norme de Lukasiewicz :  $\top_{Luka}(a, b) = \max(0, a + b - 1)$ .

**Définition 2.36** (Propagateur pour la contrainte d'intersection). *Le propagateur associé à la contrainte d'intersection entre l'ensemble de structures  $\{A_i\}$  et  $B$  est noté  $f_{C_{\{A_i\}, B}^{intersection}}$ . Il est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i, \overline{A}_i), \dots, (\underline{B}, \overline{B}); C_{\{A_i\}, B}^{intersection} \rangle}{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i \vee \underline{B}, \overline{A}_i \wedge \perp(\overline{B}, c(\top_{j \neq i} A_j))), \dots, (\underline{B} \vee \top_{i \in [1..k]} \underline{A}_i, \overline{B} \wedge \top_{i \in [1..k]} \overline{A}_i); C_{\{A_i\}, B}^{intersection} \rangle}$$

Les bornes du domaines de  $B$  sont respectivement mises à jour par l'intersection des bornes inférieures et des bornes supérieures des domaines des variables  $A_i$ . La borne inférieure d'une variable  $A_i$  peut être étendue par la borne inférieure du domaine de  $B$  (car  $B$  est inclus dans  $A_i$ ). Sa borne supérieure peut être étendue de sorte qu'en chaque point  $x$  de l'espace,  $\top(\overline{A}_i(x), \top_{j \neq i} \overline{A}_j(x)) \leq \overline{B}$  (si un point n'appartient pas à  $B$  et il n'appartient pas à au moins une des structures  $A_i$ ).

**Proposition 2.7.** *Le propagateur  $f_{C_{\{A_i\}, B}^{intersection}}$  est correct et idempotent.*

Remarquons que la contrainte d'intersection peut être exprimée comme la conjonction d'une contrainte de réunion et de contraintes de complémentation (correspondant à l'équivalence ensembliste  $A_1 \cap A_2 = B \Leftrightarrow \overline{A_1} \cup \overline{A_2} = \overline{B}$ ) :

$$C_{\{A_i\}, B}^{intersection} \Leftrightarrow C_{\{C_i\}, D}^{réunion} \wedge C_{B, D}^{compl} \wedge \forall i, C_{A_i, C_i}^{compl}.$$

La réduction de domaine réalisée par le propagateur  $f_{C_{\{A_i\}, B}^{intersection}}$  peut être obtenue par l'application de l'ensemble des propagateurs  $f_{C_{A_i, C_i}^{compl}}$  et  $f_{C_{B, D}^{compl}}$ , puis de  $f_{C_{\{C_i\}, D}^{réunion}}$  et enfin à nouveau de  $f_{C_{A_i, C_i}^{compl}}$  et  $f_{C_{B, D}^{compl}}$ . Le propagateur  $f_{C_{\{A_i\}, B}^{intersection}}$  peut donc être obtenu comme

une combinaison des propagateurs associés aux contraintes  $C_{\{C_i\}, D}^{réunion}$ ,  $C_{B, D}^{compl}$  et  $C_{A_i, C_i}^{compl}$ . Cependant ce processus n'est pas généralisable. Dans la section 2.6, nous verrons par exemple que la combinaison de la contrainte de connexité et de la contrainte d'adjacence conduit à un propagateur qui ne correspond pas à une combinaison des propagateurs associés à ces deux contraintes.

## Non intersection

**Définition 2.37** (Contrainte de non-intersection). *Soient deux objets  $A$  et  $B$ . La contrainte associée à la non-intersection de ces objets est définie suivant :*

$$\begin{aligned} rel(C_{A, B}^{-int}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 \leq c(\mu_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Notons que cette définition est symétrique même si son écriture ne l'est pas ( $\mu_1 \leq c(\mu_2) \Leftrightarrow \mu_2 \leq c(\mu_1)$ ) et qu'elle pourrait être exprimée par la conjonction d'une contrainte d'inclusion et d'une contrainte de complémentation.

**Définition 2.38** (Propagateur pour la contrainte de non intersection). *Le propagateur  $f_{C_{A, B}^{-int}}$  associé à la contrainte de non intersection entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A, B}^{-int} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A} \wedge c(\underline{B})), (\underline{B}, \overline{B} \wedge c(\underline{A})); C_{A, B}^{-int} \rangle}$$

Ce propagateur réduit les domaines pour en supprimer un ensemble de valeurs s'intersectant nécessairement. Seules les valeurs  $\mu$  du domaine de  $A$  satisfaisant l'inégalité  $\mu \leq c(\nu)$  avec au moins un élément  $\nu$  du domaine de  $B$  sont conservées. Or toutes ces valeurs vérifient  $\mu \leq \overline{A} \wedge c(\underline{B})$  puisqu'elles appartiennent à l'intervalle  $(\underline{A}, \overline{A})$  et que  $\exists \nu \in (\underline{B}, \overline{B}), \mu \leq c(\nu) \Leftrightarrow \mu \leq c(\underline{B})$ . La borne supérieure du domaine de  $A$  peut donc être réduite à l'ensemble  $\overline{A} \wedge c(\underline{B})$ .

**Proposition 2.8.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{-int}}$  est correct, idempotent et  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

### Partition

La base de connaissance utilisée intègre une représentation hiérarchique de l'anatomie (cf section 1.4.1). L'information hiérarchique peut être exprimée sous forme de relation de partition entre une structure et ses sous-parties : l'union des sous-parties forme la totalité de la structure et les sous-parties ne s'intersectent pas.

**Définition 2.39** (Contrainte de partition). *Soient un ensemble de  $k$  objets  $\{A_i\}$  et un objet  $B$  tels que l'ensemble  $\{A_i\}$  forme une partition de  $B$ . La contrainte associée est définie suivant :*

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{\{A_i\},B}^{\text{partition}}) : \mathcal{D}(A_1) \times \dots \times \mathcal{D}(A_k) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \dots, \mu_k, \mu) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \perp_{i \in [1..k]} \mu_i \\ & \text{et } \forall i \neq j, \mu_i \leq c(\mu_j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 2.40** (Propagateur pour la contrainte de partition). *Le propagateur  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{partition}}}$  associé à la contrainte de partition entre l'ensemble de structures  $\{A_i\}$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i, \overline{A}_i), \dots, (\underline{B}, \overline{B}); C_{\{A_i\},B}^{\text{partition}} \rangle}{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A}_j))), \overline{A}_i \wedge \overline{B} \wedge \bigwedge_{j \neq i} c(\underline{A}_j), \dots, (\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i, \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i); C_{\{A_i\},B}^{\text{partition}} \rangle}$$

Ce propagateur met à jour la borne inférieure d'une sous-structure  $A_i$  par complémentarité en considérant les bornes supérieures des autres sous-structures et la borne inférieure de  $B$ . Les bornes supérieures des sous-structures sont réduites pour satisfaire l'inclusion par rapport à  $B$  et la non intersection par rapport aux autres sous-structures. Finalement la mise à jour des bornes de  $B$  est similaire à celle réalisée par le propagateur pour la contrainte de réunion.

**Proposition 2.9.** *Le propagateur  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{partition}}}$  est correct et idempotent.*

### 2.4.2 Position relative directionnelle

**Modélisation de la relation** Les relations directionnelles sont présentes dans de nombreuses descriptions linguistiques et notamment dans les descriptions anatomiques. Par exemple « les cornes frontales du ventricule latéral sont situées dans le lobe frontal en avant du trou de Monro » [Hasboun, 2005]. Ce type de relation décrit en général une position approximative d'une structure par rapport à l'autre (i.e. la corne frontale du ventricule

latéral n'est pas située strictement en avant du trou de Monro) et une représentation souple de cette contrainte est préférable.

De nombreux modèles mathématiques de cette relation ont été proposés, parmi lesquels nous pouvons citer les méthodes fondées sur l'histogramme d'angle [Miyajima and Ralescu, 1994], ou l'histogramme de forces [Matsakis and Wendling, 1999] qui permettent de caractériser une relation directionnelle entre deux objets binaires ou flous. Dans [Bloch, 1996a, 1999] une méthode reposant sur la morphologie mathématique permet d'obtenir en chaque point de l'espace le degré de satisfaction d'une relation directionnelle donnée par rapport à un objet de référence représenté sous la forme d'un ensemble flou. Le degré de satisfaction de la relation entre deux objets peut alors être dérivé de cette représentation. Nous retenons ce modèle puisqu'il possède de bonnes propriétés qui permettront un calcul efficace du propagateur dérivé.

Considérons une relation directionnelle entre deux objets  $A$  et  $B$ . Cette relation peut être perçue à trois niveaux différents [Hudelot et al., 2008b] : l'information de direction seule, l'information de direction par rapport à l'objet  $A$  et finalement la relation de direction entre  $A$  et  $B$ .

Au niveau le plus général, seule la direction est considérée. Celle-ci est caractérisée par un vecteur  $\vec{u}_d$  et une ouverture paramétrée par deux angles  $k_1$  et  $k_2$ . Cette ouverture représente une tolérance autour du vecteur  $\vec{u}_d$  modélisée de façon floue par un demi-trapézoïde (ou une autre fonction de forme similaire). Le paramètre  $k_1$  correspond à l'ouverture associée au noyau de l'élément structurant et le paramètre  $k_2$  correspond à l'ouverture associée au support. Par rapport à l'origine de l'espace, le degré de satisfaction associé à cette direction peut être défini en tout point  $x$  suivant :

$$\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \vec{u}_d}{\|\mathbf{x}\|} \leq k_1, \\ 0 & \text{si } \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \vec{u}_d}{\|\mathbf{x}\|} \geq k_2, \\ \frac{k_2 - \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \vec{u}_d}{\|\mathbf{x}\|}}{k_2 - k_1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si nous considérons maintenant la relation directionnelle par rapport à un objet de référence  $A$  (représenté par l'ensemble flou  $\mu_A$ ), l'ensemble des points de l'espace satisfaisant cette relation peut alors être obtenu par la dilatation floue  $\delta_\nu(\mu_A)$  de l'objet de référence  $A$  par un élément structurant valant  $\nu$  [Bloch, 1996a, 1999]. Plusieurs définitions de la dilatation floue ont été proposées. Une synthèse est réalisée dans [Bloch and Maître, 1995]. Nous utilisons ici la définition suivante [Bloch and Maître, 1992, Bandemer and Näther, 1992] :

$$\delta_\nu(\mu_A)(x) = \max_{y \in X} \min(\mu_A(y), \nu(x - y)), \quad (2.6)$$

correspondant à la somme de Minkowski floue entre  $\mu_A$  et  $\nu$ . La dilatation présente de bonnes propriétés. Elle est notamment croissante par rapport à  $\mu_A$ . Cela justifie en partie le choix de ce modèle (puisque un propagateur calculé uniquement à partir des bornes des domaines peut alors être obtenu simplement).

Finalement nous considérons qu'un objet  $B$  satisfait la relation directionnelle par rapport à un objet  $A$  si tous les points de  $B$  satisfont la relation. Ce choix sévère conduit à une expression simple du degré de satisfaction de la relation entre  $A$  et  $B$ . Celui-ci peut être obtenu comme un degré d'inclusion de  $\mu_B$  dans l'ensemble flou des points satisfaisant la relation directionnelle :

$$\mu_{dir \nu}(A, B) = \inf_{x \in X} \perp(\delta_\nu(\mu_A), c(\mu_B)).$$

**Exemple 2.3.** *Considérons la relation directionnelle « le noyau caudé gauche  $CNI$  est situé à droite<sup>5</sup> du ventricule latéral gauche  $LVI$  » illustrée par la figure 2.8. L'ensemble  $\nu_d$  correspondant à la direction « à droite de » avec pour paramètre d'ouverture  $k_1 = 0$  et  $k_2 = \frac{\pi}{2}$  est montré en (a). Nous pouvons alors obtenir l'ensemble des points à droite du ventricule latéral par la dilatation :  $\delta_{\nu_d}(\mu_{LVI})$  (c). Nous obtenons finalement le degré de satisfaction de la relation directionnelle comme le degré d'inclusion de  $\mu_{CNI}$  dans  $\delta_{\nu_d}(\mu_{LVI})$  valant ici 1.*

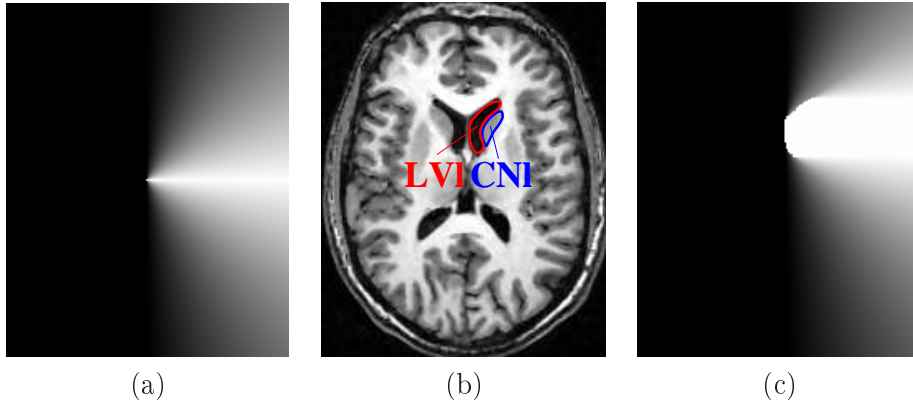


FIGURE 2.8 – (a) Élément structurant  $\nu$  correspondant à la direction « à droite de ». (b) Le noyau caudé gauche  $CNI$  est situé à droite du ventricule latéral droit  $LVI$ . (c) Ensemble flou représentant les points à droite du ventricule latéral gauche.

**Définition de la contrainte et de la règle de propagation** Lors du processus de reconnaissance nous voulons obtenir une solution satisfaisant les relations de la base de connaissance. Ici nous supposons que les relations doivent être pleinement satisfaites.

**Définition 2.41** (Contrainte directionnelle). *Soient deux objets  $A$  et  $B$  suivant une position relative directionnelle stable caractérisée par un élément structurant  $\nu$ . La contrainte  $C_{A,B}^{dir \nu}$  est définie suivant :*

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{dir \nu}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_2 \leq \delta_{\nu}(\mu_1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 2.42** (Propagateur pour la contrainte directionnelle). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  associé à la contrainte de position relative directionnelle entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{dir \nu} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_{\nu}(\overline{A})); C_{A,B}^{dir \nu} \rangle}$$

**Proposition 2.10.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  est correct, idempotent et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

5. La relation anatomique correcte serait « le noyau caudé gauche est extérieur au ventricule latéral gauche » que nous traduisons par « à droite de » puisqu'il apparaît à droite dans la coupe axiale utilisée pour l'exemple.

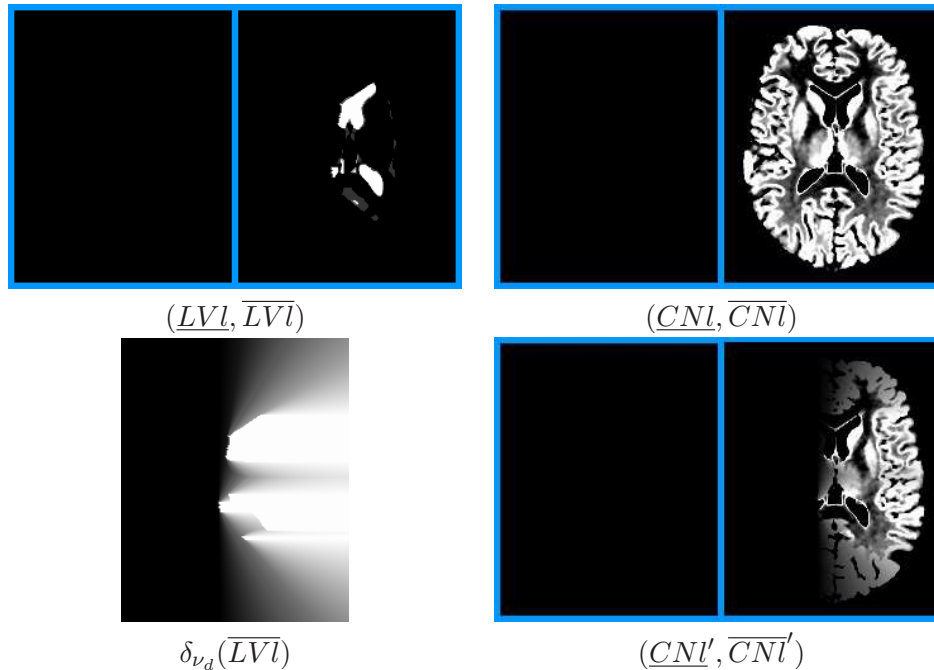


FIGURE 2.9 – Illustration du propagateur  $f_{C_{LVL,CNL}^{dir \nu_d}}$ . La borne supérieure du domaine du noyau caudé  $\overline{CNl}$  est restreinte au sous-ensemble de l'espace à droite des éléments du domaine  $\mathcal{D}(LVL)$  obtenu par la dilatation  $\delta_{\nu_d}(\overline{LVL})$ . La borne supérieure résultante est notée  $\overline{CNl}'$ .

**Exemple 2.4.** *Poursuivons l'exemple 2.3 portant sur la relation directionnelle « le noyau caudé gauche  $CNL$  est situé à droite du ventricule latéral gauche  $LVL$  ». La figure 2.9 illustre le propagateur associé à cette contrainte. Le domaine du noyau caudé  $(\underline{CNl}, \overline{CNl})$  est réduit en ne conservant que les éléments à droite d'éléments du domaine du ventricule latéral  $(\underline{LVL}, \overline{LVL})$ . Cela est simplement réalisé par la mise à jour de la borne supérieure  $\overline{CNl}$  qui est restreinte à la sous-partie de l'espace à droite de la borne supérieure du ventricule latéral  $\overline{LVL}$  obtenue par la dilatation  $\delta_{\nu_d}(\overline{LVL})$ .*

**Calcul** La dilatation présente une complexité calculatoire en  $O(nn_s)$ , où  $n$  correspond au nombre de voxels de l'image et  $n_s$  au nombre de voxels de l'élément structurant. Le calcul du propagateur associé à la relation directionnelle implique le calcul d'une dilatation  $\delta_{\nu}(\mu)$  dont l'élément structurant  $\nu$  est dans chaque dimension deux fois plus grand que l'image.  $n_s$  vaut donc  $2^d n$  où  $d$  correspond à la dimension de l'image. La complexité du calcul du propagateur est donc en  $O(2^d n^2)$ . Puisque nous manipulons des volumes présentant 10 millions de voxels, nous ne pouvons réaliser ce calcul à de nombreuses reprises.

Une méthode de calcul approximatif par propagation a été proposée dans [Bloch, 1999] et présente une complexité en  $O(3^d n)$ . Cependant cette approximation n'est pas croissante par rapport à l'objet de référence. Nous ne pouvons donc pas remplacer la dilatation par cette approximation dans le propagateur.

Nous utilisons donc une approximation moins performante mais croissante du calcul de la dilatation. Pour cela nous réalisons plusieurs dilatations par un noyau de plus petite taille. Si nous choisissons un noyau de taille  $r$ , nous réalisons  $\frac{s}{r}$  dilatations par ce noyau où  $s$  est la taille maximale en nombre de pixels selon un des axes de l'image. Nous obtenons ainsi une complexité calculatoire en  $O(r^{d-1} sn)$ .

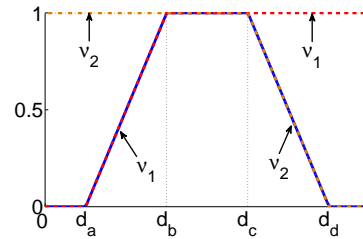


### 2.4.3 Distance

#### Modélisation de la relation

Tout comme les relations directionnelles, l'information de distance est primordiale dans les descriptions linguistiques. Dans les descriptions anatomiques cérébrales nous pouvons par exemple trouver des relations telles que « le noyau caudé reste près du ventricule latéral » [Hasboun, 2005]. En général ces relations sont asymétriques (la totalité du ventricule latéral n'est pas proche du noyau caudé), impliquent deux structures et caractérisent la distance de l'ensemble des points de la structure dite cible (le noyau caudé dans l'exemple précédent) par rapport à la structure dite de référence (le ventricule latéral dans l'exemple). Similairement aux relations directionnelles cette relation peut être représentée à trois niveaux [Hudelot et al., 2008b].

Considérons tout d'abord uniquement l'information de distance. Nous voulons pouvoir représenter des relations entre des objets connexes<sup>6</sup>. Un intervalle flou de distance semble approprié pour représenter ce type d'information et permet notamment d'encoder les descriptions linguistiques classiques telles que « proche de », « loin de » ou « approximativement à ». Nous représentons ainsi l'information de distance comme une trapézoïde de paramètres  $d_a$ ,  $d_b$ ,  $d_c$  et  $d_d$ . Les paramètres  $d_a$  et  $d_b$  correspondent à une distance minimale pouvant représenter une relation telle que « loin de ». Par rapport à l'origine de l'espace un point  $x$  satisfait la relation de distance minimale<sup>7</sup> avec le degré :



$$\nu_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x\| \leq d_a, \\ 1 & \text{si } \|x\| \geq d_b, \\ \frac{d_a - \|x\|}{d_a - d_b} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les paramètres  $d_c$  et  $d_d$  représentent une distance maximale qui peut être associée à une relation telle que « proche de ». Par rapport à l'origine de l'espace un point  $x$  satisfait cette relation avec le degré :

$$\nu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|x\| \leq d_c, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq d_d, \\ \frac{d_d - \|x\|}{d_d - d_c} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons maintenant la relation de distance par rapport à un objet de référence  $A$ . L'ensemble des points de l'espace satisfaisant la relation de distance (appartenant à l'intervalle de distance représenté par la fonction en trapèze  $\min(\nu_1, \nu_2)$ ) peut être obtenu par dilatation floue [Bloch, 2003] (cf équation 2.6) :

$$\mu_{Dist}(\mu_A) = c(\delta_{c(\nu_1)}(\mu_A)) \wedge \delta_{\nu_2}(\mu_A),$$

où les éléments structurant  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont définis ci-dessus.

Finalement comme dans le cas des relations directionnelles, nous considérons qu'un objet  $B$  satisfait la relation de distance par rapport à  $A$  si l'ensemble des points de  $B$  satisfont la relation de distance. Le degré de satisfaction de la relation peut alors être

6. Lorsque les objets sont connexes, la distance des points d'un objet par rapport à l'autre est un intervalle. Ce n'est plus le cas lorsque l'objet n'est pas connexe.

7. La relation est décomposée de cette façon car son calcul ne peut pas être réalisé par une unique dilatation.

obtenu comme de degré d'inclusion de  $\mu_B$  dans l'ensemble flou des points satisfaisant la relation de distance :

$$\mu_{Dist}(\mu_A, \mu_B) = \inf_{x \in X} \perp(\mu_{Dist}(\mu_A), c(\mu_B)).$$

**Exemple 2.5.** *Considérons la relation de distance « le putamen gauche  $PUI$  est situé à approximativement 20 mm du ventricule latéral gauche  $LVI$  » illustrée par la figure 2.10. La trapézoïde représentant cette relation est présentée en (b). L'ensemble des points satisfaisant la relation (e) est obtenu par la fusion de : (c) la dilatation par un élément structurant  $c(\nu_1)$  dérivé de la partie gauche de la trapézoïde et (d) la dilatation par un élément structurant  $\nu_2$  dérivé de la partie droite de la trapézoïde. Nous obtenons finalement le degré de satisfaction de la relation de distance comme le degré d'inclusion de  $\mu_{PUI}$  dans  $\delta_{\nu_2}(\mu_{LVI}) \wedge c(\delta_{\nu_1}(\mu_{LVI}))$  valant ici 1.*

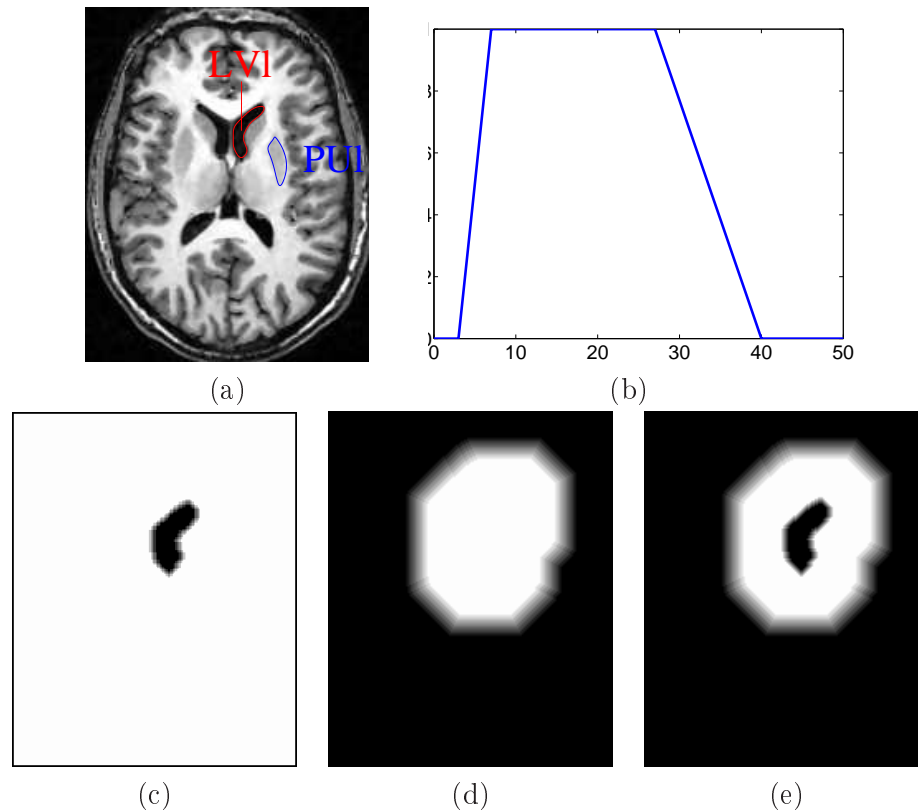


FIGURE 2.10 – (a) Le putamen gauche  $PUI$  est situé à approximativement 20 mm du ventricule latéral gauche  $LVI$ . (b) Trapézoïde représentant l'*a priori* de distance. (c)  $c(\delta_{c(\nu_1)}(\mu_{LVI}))$ . (d)  $\delta_{\nu_2}(\mu_{LVI})$ . (e)  $\delta_{\nu_2}(\mu_{LVI}) \wedge c(\delta_{\nu_1}(\mu_{LVI}))$ .

### Définition de la contrainte et de la règle de propagation

Tout comme les relations directionnelles, nous supposons que les relations de distance du modèle doivent être pleinement satisfaites par les solutions.

**Définition 2.43** (Contrainte de distance). *Soient deux objets  $A$  et  $B$  suivant une relation de distance stable caractérisée par les éléments structurants  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La contrainte  $C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}$*

est définie suivant :

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_2 \leq c(\delta_{c(\nu_1)}(\mu_1)) \wedge \delta_{\nu_2}(\mu_1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 2.44** (Propagateur pour la contrainte de distance). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2}}$  associé à la contrainte de distance entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A} \wedge c(\delta_{\nu_1}(\underline{B}))), (\underline{B}, \overline{B} \wedge c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A})); C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2} \rangle}$$

Nous avons choisi une formulation stricte de la contrainte de distance selon laquelle une valeur  $\mu$  pour  $B$  satisfait la contrainte si tous les points de  $\mu$  satisfont la relation de distance. Nous pouvons donc en déduire que toute valeur  $\mu$  pour  $B$  ne satisfaisant pas l'inégalité  $\mu \leq c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A})$  ne peut pas appartenir à une solution et réduire le domaine de  $B$  par l'intervalle  $(0_{\mathcal{F}}, c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}))$ . Par ailleurs la contrainte de distance minimale est symétrique. Nous pouvons donc aussi réduire le domaine de  $A$  en utilisant la borne supérieure du domaine de  $A$ .

Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2}}$  est correct mais il n'est pas idempotent ni  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant. En effet la mise à jour de  $\overline{A}$  en fonction de  $\underline{B}$  pourrait entraîner une mise à jour plus importante de  $\overline{B}$ <sup>8</sup>. En considérant indépendamment les contraintes de distance minimale (obtenue à partir de l'élément structurant  $\nu_1$ ) et de distance maximale (obtenue à partir de l'élément structurant  $\nu_2$ ) ces propriétés sont satisfaites. Nous notons  $f_{C_{A,B}^{\text{dist min } \nu}}$  et  $f_{C_{A,B}^{\text{dist max } \nu}}$  les propagateurs associés aux contraintes de distance minimale et de distance maximale.

**Proposition 2.11.** *Les propagateurs  $f_{C_{A,B}^{\text{dist min } \nu}}$  et  $f_{C_{A,B}^{\text{dist max } \nu}}$  sont corrects, idempotents et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistants.*

Comme dans le cas de la contrainte de direction, la borne inférieure de  $A$  pourrait être mise à jour dans certains cas très particuliers qui ne justifient pas de réaliser un calcul coûteux. En effet si nous disposons d'une borne inférieure pour  $B$ , la borne inférieure de  $A$  pourrait être mise à jour si par exemple un seul point dans la borne supérieure de  $A$  se trouve à la distance correcte de  $\underline{B}$ .

**Exemple 2.6.** *Poursuivons l'exemple 2.5 portant sur la relation « le putamen gauche PUL est situé approximativement à 20 mm du ventricule latéral gauche LVL ». La figure 2.11 illustre le propagateur associé à cette contrainte. Le domaine du putamen ( $\underline{PUL}, \overline{PUL}$ ) est réduit en ne conservant que les éléments à la distance correcte d'au moins un élément du domaine du ventricule latéral ( $\underline{LVL}, \overline{LVL}$ ). Cela est simplement réalisé par la mise à jour de la borne supérieure  $\overline{PUL}$  qui est restreinte à la sous-partie de l'espace définie par la dilatation  $c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{LVL})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{LVL})$ .*

## Calcul

Comme dans le cas des relations directionnelles, le calcul des dilatations est trop coûteux. Sa complexité est en effet en  $O(nr^d)$ , où  $n$  est le nombre de voxels de l'image et

8. Nous devrions donc réaliser la mise à jour de la borne supérieure de  $B$  suivant :  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A} \wedge c(\delta_{\nu_1}(\underline{B})))$  mais le propagateur serait plus complexe à calculer.

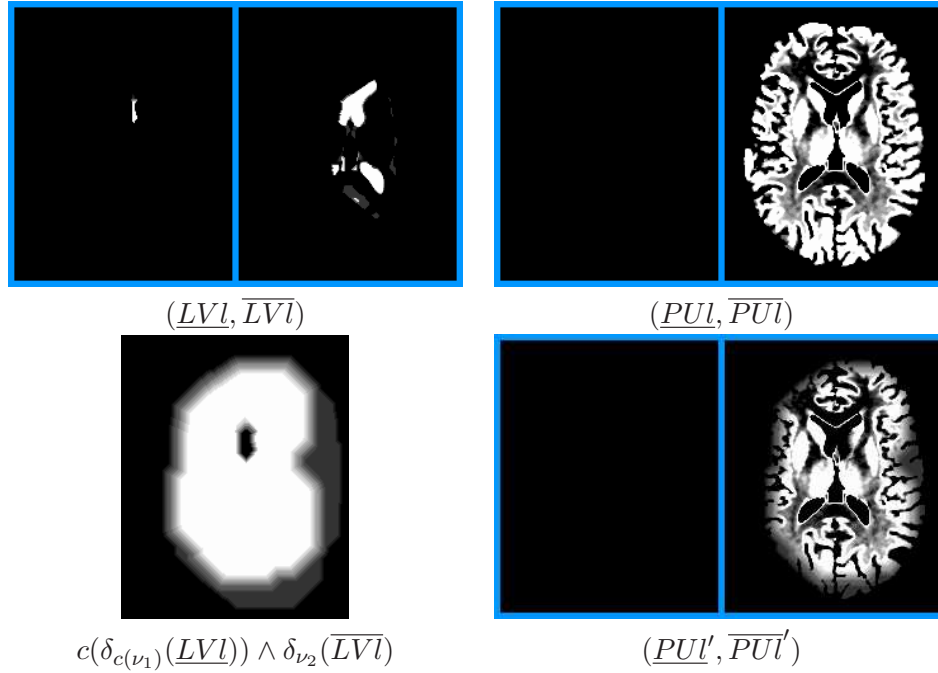


FIGURE 2.11 – Illustration du propagateur  $f_{C_{LVL, PUL}^{dist \nu_1 \nu_2}}$ . La borne supérieure du domaine du putamen  $\overline{PUL}$  est restreinte au sous-ensemble de l'espace approximativement à 20 mm d'au moins un élément de  $\mathcal{D}(LVL)$ . La borne supérieure résultante est notée  $\overline{PUL}' = \overline{PUL} \wedge c(\delta_{\nu_1}(LVL)) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{LVL})$ .

$r = \max(d_b, d_d)$  est la distance maximale considérée dans la relation,  $d_b$  et  $d_d$  étant des paramètres de sa représentation par trapézoïde. Nous devons donc utiliser une approximation.

Une approximation du propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}}$  ne doit pas supprimer de valeurs appartenant à une solution. La mise à jour  $\overline{B}'$  calculée par l'approximation doit donc vérifier l'inégalité  $\overline{B} \wedge c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \leq \overline{B}' \leq \overline{B}$ . Puisque l'opérateur  $c(\delta_{\nu_1}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A})$  est décroissant par rapport à la dilatation  $\delta_{\nu_1}(\underline{A})$  et croissant par rapport à  $\delta_{\nu_2}(\overline{A})$ , nous devons obtenir respectivement une sous-estimation de la première dilatation et une sur-estimation de la seconde.

Les éléments structurants de ces deux dilatations sont des boules floues (leur fonction d'appartenance est radiale et décroissante à partir de l'origine). La complexité d'une dilatation est en  $O(nr^d)$  où  $n$  correspond au nombre de pixels,  $r$  au rayon du support de la boule et  $d$  à la dimension. Dans notre cas  $d$  vaut 3 et le coût calculatoire croît donc rapidement en fonction du rayon  $r$ . Nous proposons ici une approximation permettant de réaliser ce calcul en  $O(nr)$ .

**Proposition 2.12.** *La dilatation  $\delta_\nu$  par une boule floue  $\nu$  peut être obtenue à partir de la dilatation par une boule nette  $B_n$  de rayon  $n$   $\delta_{B_n}(\mu)$  suivant :*

$$\delta_\nu(\mu)(x) = \sup_r \min(\delta_{B_r}(\mu)(x), \mu_\nu(r)),$$

où  $\mu_\nu$  correspond à la fonction d'appartenance radiale de la boule floue.

*Preuve proposition 2.12.* Soit  $\nu$  la boule floue. Nous notons  $\mu_\nu$  sa fonction d'appartenance radiale. Nous supposons cette fonction décroissante.  $B_r$  est la boule nette de rayon  $r$ . Nous

pouvons reformuler l'élément structurant  $\nu$  suivant :

$$\begin{aligned}
\nu(x) &= \sup_r \min(B_r(x), \mu_\nu(r)) \\
\delta_\nu(\mu)(x) &= \sup_y \min(\nu(x-y), \mu(y)) \\
&= \sup_y \min(\sup_r \min(B_r(x-y), \mu_\nu(r)), \mu(y)) \\
&= \sup_y \sup_r \min(B_r(x-y), \mu_\nu(r), \mu(y)) \\
&= \sup_r \min(\sup_y \min(B_r(x-y), \mu(y)), \mu_\nu(r)) \\
&= \sup_r \min(\delta_{B_r}(x), \mu_\nu(r))
\end{aligned}$$

□

La dilatation  $\delta_{B_r}$  par une boule de rayon  $r$  est équivalente dans le cas continu à réaliser  $r$  dilatations par une boule de rayon 1 (si  $r \in \mathcal{N}$ ), ce qui permet de réaliser une réduction de complexité importante. Cependant dans le cas discret la boule associée à la norme  $L_2$  ne peut pas être représentée exactement et ces modes de calcul ne sont pas équivalents. Différentes approximations de  $\delta_{B_r}$  sont possibles :

- $\delta_{B_r^{L_1}}$  est la dilatation par une boule pour une norme  $L_1$ . Le calcul de  $\delta_{B_r^{L_1}}$  est équivalent à  $r$  itérations du calcul de la dilatation élémentaire  $\delta_{B_1^{L_1}}$  réalisée par l'utilisation d'un élément structurant de taille 4 en 2D ou 6 en 3D. Cette dilatation est une sous estimation de la dilatation par une boule  $L_2$ ,
- $\delta_{B_r^{L_\infty}}$  est la dilatation par une boule de taille  $r$  pour la norme  $L_\infty$ . Son calcul peut être réalisé par  $r$  itérations de la dilatation élémentaire  $\delta_{B_1^{L_\infty}}$  réalisée par l'utilisation d'un élément structurant de taille 8 en 2D ou 26 en 3D. Elle correspond à une surestimation de la dilatation  $\delta_{B_r}$ ,
- $\delta_{B_r^{L_{oct}}}$  est la dilatation dite octogonale. Elle est réalisée par une alternance des dilatations élémentaires  $\delta_{B_1^{L_\infty}}$  et  $\delta_{B_1^{L_1}}$  en commençant par  $\delta_{B_1^{L_\infty}}$ . Elle correspond à une surestimation de la dilatation  $\delta_{B_r}$ .

Puisque  $\delta_\nu(\mu) = \sup_r \top(\delta_{B_r}(\mu)(x), \mu_\nu(r))$  et que  $\delta_{B_r^{L_1}}(\mu) \leq \delta_{B_r}(\mu) \leq \delta_{B_r^{L_{oct}}}(\mu)$ , la dilatation floue  $\delta_\nu(\mu)$  peut être approchée par les dilatations suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta_\nu^{L_1}(\mu)(x) &= \sup_{r \in \mathcal{N}} \top(\delta_r^{L_1}(x), \mu_\nu(r)), \\
\delta_\nu^{oct}(\mu)(x) &= \sup_{r \in \mathcal{N}} \top(\delta_r^{oct}(x), \mu_\nu(r)),
\end{aligned}$$

avec  $\delta_\nu^{L_1}(\mu) \leq \delta_\nu(\mu) \leq \delta_\nu^{oct}(\mu)$ . Ces deux approximations présentent une complexité de calcul en  $O(ns)$  (où  $n$  est le nombre de pixels de l'image et  $s$  est le rayon du support de la boule floue  $\nu$ ) qui peut être comparée à la complexité en  $O(ns^d)$  de  $\delta_\nu(\mu)$ . Nous illustrerons dans la figure 2.13 la réduction de complexité obtenue.

Ce processus est illustré par la figure 2.12. Les ensembles correspondant à «très proche de  $B$ » (a-c) et à «proche de  $B$ » (d-f) sont calculés par la dilatation  $\delta_\nu$  (a) et (d) ou par les approximations  $\delta_\nu^{L_1}$  (b) et (e) et  $\delta_\nu^{oct}$  (c) et (f). Nous constatons que plus le rayon de la boule est grand, plus l'approximation réalisée est grossière. Cependant comme le montrent les graphiques présentés par la figure 2.13 cette approximation permet de réaliser ce calcul en un temps raisonnable lorsque le rayon croît.

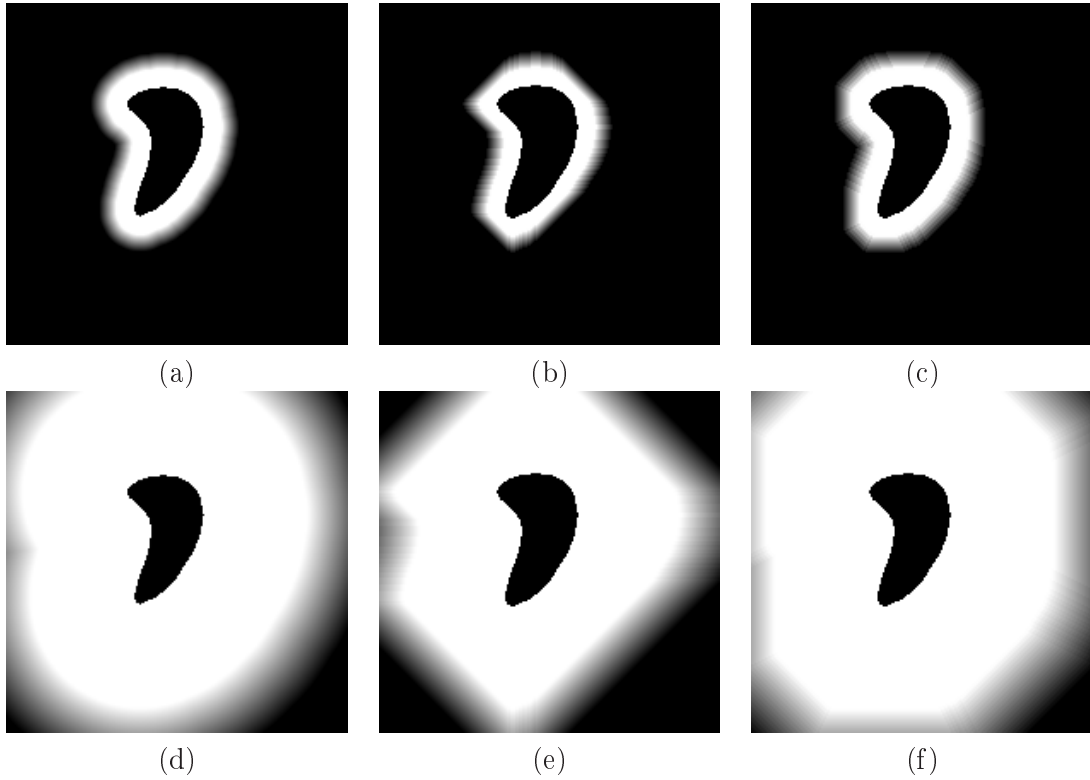


FIGURE 2.12 – (a) «Très proche de  $B$ » calculée par la dilatation  $\delta_\nu$ , (b) par la dilatation  $\delta_\nu^{L1}$  et (c) par la dilatation  $\delta_\nu^{oct}$ . (d-f) «Proche de  $B$ ».

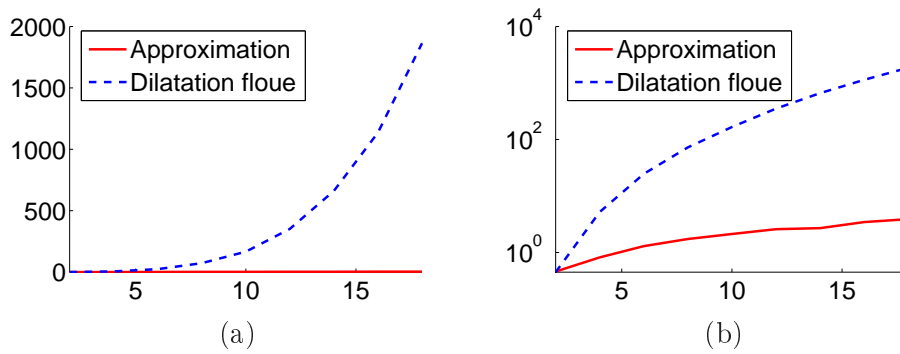


FIGURE 2.13 – (a) Temps de calcul de la dilatation floue classique et de l'approximation en fonction de la taille de la boule, (b) sur une échelle logarithmique.

#### 2.4.4 Connexité

La plupart des objets considérés sont connexes. La connexité des ensembles flous sera abordée plus précisément dans le chapitre 3. Nous notons ici  $\mathcal{H}$  ( $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ ) l'ensemble des ensembles flous connexes.

**Définition 2.45** (Contrainte de connexité). *Soit un objet  $A$  connexe. La contrainte  $C_A^{conn}$  est définie suivant :*

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_A^{conn}) : \mathcal{D}(A) &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mu &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \in \mathcal{H}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous allons alors ne conserver que les éléments connexes du domaine de  $A$  :  $\{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\}$ . Comme nous allons le décrire dans la section 3.5.1, le supremum de cet ensemble peut être obtenu en ne manipulant que les composantes connexes de  $\overline{A}$ . La borne supérieure du domaine de  $A$  peut ainsi être mise à jour efficacement en filtrant les composantes connexes de  $\overline{A}$  qui ne contiennent pas la borne inférieure.

**Définition 2.46** (Propagateur pour la contrainte de connexité). *Le propagateur  $f_{C_A^{conn}}$  associé à la contrainte de connexité d'une structure  $A$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \overline{A}); C_A^{conn} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \xi_{\underline{A}}(\overline{A})); C_A^{conn} \rangle}$$

où  $\xi_{\underline{A}}(\overline{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}\}$ .

**Proposition 2.13.** *Le propagateur  $f_{C_A^{conn}}$  est correct, idempotent et  $\mathcal{BS}_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

Cet opérateur n'est pas  $\mathcal{BS}_{\mathcal{F}}$ -consistant puisque la borne inférieure du domaine de  $A$  ne reste pas de façon générale inchangée suivant l'opérateur  $\bigwedge \{\nu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}\}$ . Cependant nous ne disposons pas d'algorithme efficace pour calculer un tel opérateur. De plus dans la plupart des cas cette borne inférieure reste inchangée.

### 2.4.5 Volume

Le volume (ou la surface) d'un ensemble flou peut être défini comme sa cardinalité :

$$V(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x). \quad (2.7)$$

Cependant cette représentation est plutôt simpliste (considérons par exemple un ensemble flou présentant un grand support et un noyau réduit) et il peut être intéressant de représenter le volume de chaque  $\alpha$ -coupe. Pour cela nous utilisons la mesure floue suivante du volume [Dubois and Prade, 1980] :

$$f_V(\mu)(v) = \sup_{V(\mu_\alpha) \geq v} \alpha. \quad (2.8)$$

Celle-ci représente le plus haut degré d'appartenance tel que toutes les  $\alpha$ -coupes de  $\mu$  jusqu'à ce niveau présentent un volume plus grand que  $v$ . Du fait de l'emboîtement des  $\alpha$ -coupes, cette fonction d'appartenance est décroissante en fonction du volume  $v$ . La figure 2.14 illustre ce calcul.

Lorsque le volume est représenté par le cardinal de l'ensemble flou, un *a priori* sur le volume peut être représenté par une plage de valeurs acceptables. Lorsque le volume est représenté sous la forme d'une fonction d'appartenance, cet *a priori* peut être représenté sous la forme d'un intervalle de fonctions d'appartenance  $[f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$  où  $f_{V_{\min}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  et  $f_{V_{\max}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  sont deux fonctions d'appartenance représentant un volume minimal et un volume maximal. La figure 2.15 illustre un tel critère. Les deux fonctions d'appartenance  $f_{V_{\min}}$  et  $f_{V_{\max}}$  sont les bornes de l'intervalle des fonctions d'appartenance acceptables pour le volume.

**Définition 2.47** (Contrainte de volume). *Soit un objet  $A$  dont le volume se situe dans une plage de valeurs représentée par l'intervalle  $[f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$ . La contrainte  $C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}$  est définie suivant :*

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}) : \mathcal{D}(A) &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mu &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f_{V_{\min}} \leq f_V(\mu) \leq f_{V_{\max}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

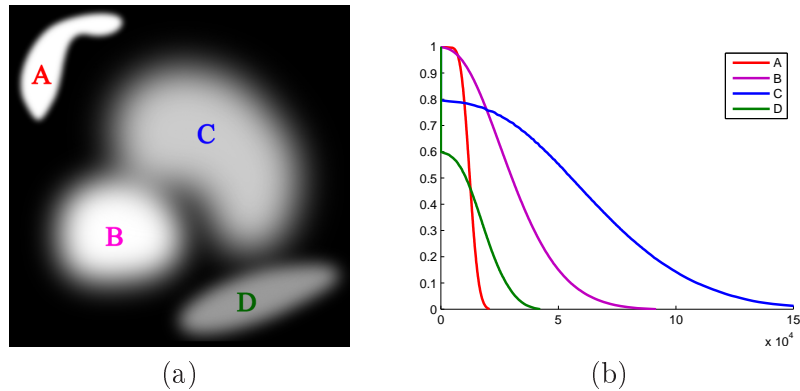


FIGURE 2.14 – (a) Image contenant 4 objets. (b) Volume flou calculé par l'équation 2.8 pour chaque objet indépendamment.

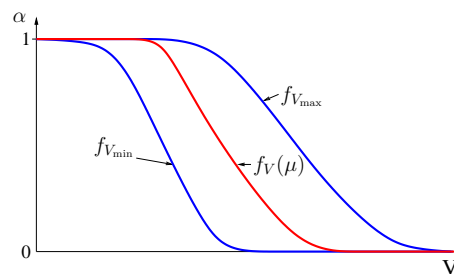


FIGURE 2.15 – Critère de volume représenté par un intervalle de fonctions d'appartenance  $[f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$ .

**Définition 2.48** (Propagateur pour la contrainte de volume). *Le propagateur associé à la contrainte de volume portant sur  $A$  est noté  $f_{C_A}^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}$ . Il est défini suivant :*

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \bar{A}); C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \bar{A}'); C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \rangle}$$

avec  $\bar{A}' = \bar{A}$  si  $f_{V_{\min}} \leq f_V(\bar{A})$  et  $\bar{A}' = 0_{\mathcal{F}}$  sinon.

Contrairement aux contraintes décrites jusqu'à présent cette contrainte ne permet pas de dériver de propagateur intéressant. Le propagateur  $f_{C_A}^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}$  ne permet que de conclure à l'inconsistance du réseau si la borne supérieure  $\bar{A}$  ne satisfait pas au critère de volume minimal. Cependant en combinant cette contrainte à une contrainte de connexité, le propagateur obtenu est beaucoup plus intéressant (cf section 2.6.2).

## 2.4.6 Adjacence

Cette section portant sur les contraintes spatiales s'achève par la relation d'adjacence entre deux structures. Dans [Bloch et al., 1997, Bloch, 2005], une définition de l'adjacence entre deux ensembles flous est proposée. Elle repose sur la conjonction d'un degré de non-intersection et d'un degré de connexité entre ces ensembles flous.

La non-intersection a déjà été discutée dans la section 2.4.1 et peut être caractérisée par l'inclusion d'une structure dans le complémentaire de l'autre ou réciproquement. Le



degré de non intersection entre  $\mu_A$  et  $\mu_B$  peut alors être défini comme le degré d'inclusion de  $\mu_A$  dans  $c(\mu_B)$  :

$$\mu_{\neg int}(\mu_A, \mu_B) = \inf_{x \in X} \perp_{Luka}(c(\mu_A(x)), c(\mu_B(x))).$$

La connexité de deux sous-ensembles flous  $\mu_A$  et  $\mu_B$  est caractérisée dans [Bloch et al., 1997] comme le degré suivant :

$$\mu_{vois}(\mu_A, \mu_B) = \sup_{x, y \in X} \top(\mu_A(x), \mu_B(y), n(x, y)),$$

où  $n(x, y)$  est un degré de connexité entre des points  $x$  et  $y$  dérivé de la distance entre ces points.

Le degré d'adjacence est ainsi modélisé par :

$$\mu_{adj}(\mu_A, \mu_B) = \top[\mu_{\neg int}(\mu_A, \mu_B), \mu_{vois}(\mu_A, \mu_B)].$$

Comme dans le cas des contraintes précédentes, nous imposons la pleine satisfaction de la relation lors de la reconnaissance.

**Définition 2.49** (Contrainte d'adjacence). *Soient deux objets  $A$  et  $B$  adjacents. Nous définissons la contrainte  $C_{A,B}^{adj}$  suivant :*

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{adj}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_{adj}(\mu_1, \mu_2) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition 2.50** (Propagateur pour la contrainte d'adjacence). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{adj}}$  associé à la contrainte d'adjacence entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{adj} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}'), (\underline{B}, \overline{B}'); C_{A,B}^{adj} \rangle}$$

où  $\overline{A}' = \overline{A}$  et  $\overline{B}' = \overline{B}$  si  $\mu_{adj}(\overline{A}, \overline{B}) = 1$  et  $\overline{A}' = 0_{\mathcal{F}}$  et  $\overline{B}' = 0_{\mathcal{F}}$  sinon.

**Proposition 2.14.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{adj}}$  est correct, idempotent et  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

Comme le propagateur associé à la contrainte de volume, ce propagateur ne présente qu'un intérêt limité puisqu'il ne permet pas de réaliser de mise à jour des bornes (hormis pour décider de l'insatisfiabilité du problème). Comme dans le cas du volume, nous pourrions obtenir un propagateur nettement plus intéressant en l'associant à une contrainte de connexité (cf section 2.6.1).

## 2.5 Définition et modélisation des contraintes radiométriques

Nous proposons dans cette section une contrainte relative à la radiométrie des structures dans l'image. Cette contrainte est l'attache aux données du processus de propagation puisqu'elle dépend de l'image à reconnaître. Nous nous intéressons ici uniquement aux données IRM et la contrainte proposée est spécifique à ces données. Des contraintes adaptées à d'autres modalités pourraient bien évidemment être proposées.

Le signal en IRM n'est pas normalisé même pour un protocole d'acquisition fixe. En effet un facteur multiplicatif inconnu intervient dans les équations théoriques de signal. Un même tissu peut ainsi présenter des valeurs d'intensité différentes d'une acquisition à l'autre. Cependant pour un protocole d'acquisition donné les contrastes entre les différents tissus restent relativement stables. Les ventricules latéraux composés de liquide céphalo-rachidien sont par exemple toujours hypointenses par rapport à la matière blanche dans des IRM pondérées en T1. Nous proposons donc d'utiliser une contrainte portant sur le contraste entre les niveaux de gris des voxels de deux structures.

### 2.5.1 Modélisation

Soit  $\mathcal{I} : X \rightarrow \mathbb{N}^*$  l'image dans laquelle nous voulons réaliser la reconnaissance. Nous associons à un ensemble flou  $\mu \in \mathcal{F}$  la fonction d'appartenance  $\mu^{\mathcal{I}} : \mathbb{N}^* \rightarrow [0, 1]$  représentant le degré d'appartenance des niveaux de gris des voxels de  $\mu$  dans l'image  $\mathcal{I}$  :

$$\forall v \in \mathbb{N}^*, \mu^{\mathcal{I}}(v) = \sup_{x \in X, \mathcal{I}(x)=v} \mu(x).$$

Réciproquement nous pouvons obtenir une fonction d'appartenance spatiale  $\mu$  à partir d'une fonction d'appartenance en niveaux de gris  $\mu^{\mathcal{I}}$  par composition :

$$\mu'(x) = \mu^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}(x) = \mu^{\mathcal{I}}(\mathcal{I}(x)).$$

Pour représenter le contraste, nous nous reposons sur la définition de Michelson [Michelson, 1927] selon laquelle le contraste entre deux niveaux de gris  $v_1$  et  $v_2$  peut être obtenu suivant :

$$\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}, \quad (2.9)$$

Cette définition est couramment utilisée pour mesurer le contraste global d'une image qui est alors obtenu suivant :  $\frac{v_{\max} - v_{\min}}{v_{\max} + v_{\min}}$  où  $v_{\max}$  et  $v_{\min}$  sont les niveaux de gris maximum et minimum présents dans l'image.

**Exemple 2.7.** Prenons pour exemple le ventricule latéral et la matière blanche cérébrale. Le premier est composé de liquide céphalo-rachidien et comme nous pouvons l'observer sur la figure 2.16, il est toujours nettement hypointense relativement à la matière blanche en IRM pondérée en T1. Les quatre coupes axiales présentées proviennent de données du même patient et ont été acquises avec la même séquence à des instants différents. Nous avons tracé des régions d'intérêt dans chacun de ces jeux de données dans le ventricule latéral, la matière blanche cérébrale (dans le corps calleux plus précisément) et le noyau caudé et nous présentons dans la table 2.1 la moyenne d'intensité dans chacune de ces régions d'intérêt. Nous observons des variations importantes d'un cas à l'autre. Les trois dernières colonnes de la table présentent respectivement le contraste selon l'équation 2.9 entre les moyennes de la matière blanche et du ventricule latéral, de la matière blanche et du noyau caudé, du ventricule latéral et du noyau caudé. Nous constatons que le contraste entre ces structures reste relativement stable.

Nous voulons caractériser le contraste entre deux régions représentées par des ensembles flous  $\mu$  et  $\nu$  dont la radiométrie dans l'IRM est représentée par les fonctions d'appartenance  $\mu^{\mathcal{I}}$  et  $\nu^{\mathcal{I}}$ . Nous représentons aussi ce contraste sous la forme d'une fonction d'appartenance  $f_{\mu, \nu}^c : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  que nous définissons suivant :

$$\forall c \in \mathbb{R}, f_{\mu, \nu}^c(c) = \sup_{\substack{(v_1, v_2) \in \mathbb{N}^{*2} \\ c = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}}} \min(\mu^{\mathcal{I}}(v_1), \nu^{\mathcal{I}}(v_2)).$$

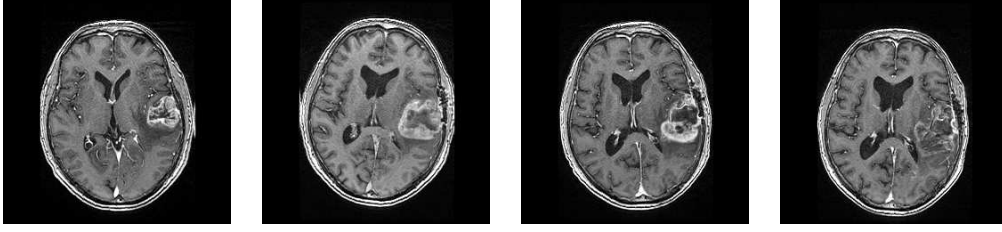


FIGURE 2.16 – Quatre coupes axiales provenant d’images IRM du même patient acquises par la même séquence (SPGR) à des instants différents. Les coupes sont choisies au même niveau.

Cas	$CWM$	$CN$	$LV$	Contraste $CWM/LV$	Contraste $CWM/CN$	Contraste $LV/CN$
1	62	48	19	0,53	0,13	-0,43
2	142	107	43	0,54	0,14	-0,43
3	178	137	52	0,55	0,13	-0,45
4	170	128	52	0,53	0,14	-0,42

TABLE 2.1 – Valeurs moyennes des niveaux de gris dans des régions de la matière blanche cérébrale ( $CWM$ ), du noyau caudé ( $CN$ ) et du ventricule latéral ( $LV$ ) obtenues pour les quatre coupes axiales présentées par la figure 2.16. Le contraste entre ces structures obtenu selon l’équation 2.9 est calculé et présente une bonne régularité.

Réciproquement si  $f_{\mu,\nu}^c$  représente le contraste entre deux ensembles flous  $\mu$  et  $\nu$ , nous pouvons obtenir une fonction d’appartenance  $\nu'^{\mathcal{I}}$  représentant les niveaux de gris présentant un contraste en accord avec  $f_{\mu,\nu}^c$  et  $\mu$  suivant :

$$\nu'^{\mathcal{I}} = \mu^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{\mu,\nu}^{k-1},$$

avec  $\begin{cases} \forall v \in \mathbb{N}^*, \mu^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{\mu,\nu}^{k-1}(v) = \sup_{\substack{(v_1, v_2) \in \mathbb{N}^{*2} \\ v = v_1 \times v_2}} \min(\mu^{\mathcal{I}}(v_1), f_{\mu,\nu}^{k-1}(v_2)), \\ \forall v \in \mathbb{N}^*, f_{\mu,\nu}^{k-1}(v) = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^{+*} \\ v = \frac{1-c}{1+c}}} f_{\mu,\nu}^c(c). \end{cases}$

Si nous composons la fonction d’appartenance obtenue  $\nu'^{\mathcal{I}}$  avec l’image, nous obtenons une sur-estimation de l’ensemble  $\nu$  :  $\nu \leq \nu'^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}$  puisque tous les niveaux de gris présents dans  $\nu$  doivent présenter un degré d’appartenance élevé dans  $\nu'^{\mathcal{I}}$ .

Similairement nous pouvons obtenir la fonction d’appartenance  $\mu'^{\mathcal{I}}$  suivant :

$$\mu'^{\mathcal{I}} = \nu^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{\mu,\nu}^k,$$

avec  $f_{\mu,\nu}^k(v) = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^{+*} \\ v = \frac{1+c}{1-c}}} f_{\mu,\nu}^c(c)$ . Nous avons aussi  $\mu \leq \mu'^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}$ .

Considérons maintenant deux structures anatomiques  $A$  et  $B$ . Nous pouvons représenter un *a priori* de contraste entre ces structures par une fonction d’appartenance  $f_{A,B}^c$  telle que si  $\mu_A$  et  $\mu_B$  étaient les ensembles flous associés à  $A$  et  $B$ , nous aurions  $f_{\mu_A, \mu_B}^c \leq f_{A,B}^c$ . Cependant en pratique cela conduit à des contraintes très permissives. Nous utilisons donc des valeurs pour  $f_{A,B}^c$  plus contraignantes mais qui sont supposées toujours satisfaire les inégalités  $\nu \leq \nu'^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}$  et  $\mu \leq \mu'^{\mathcal{I}} \circ \mathcal{I}$ .

**Exemple 2.8.** *Considérons le ventricule latéral, le noyau caudé et la relation de contraste entre ces deux structures. La figure 2.17 présente une coupe axiale d’une image IRM pondérée en T1 (a) ainsi que deux ensembles flous (b) :  $\mu_{FLV}$  représentant la corne frontale*

du ventricule latéral gauche en bleu et  $\mu_{CNI}$  le noyau caudé en rouge. Les fonctions d'appartenance associées  $\mu_{FLVI}^{\mathcal{I}}$  et  $\mu_{CNI}^{\mathcal{I}}$  sont montrées en (d). Le degré d'appartenance (en ordonnée) associé à chaque niveau de gris (en abscisse) correspond au maximum de degré d'appartenance (de  $\mu_{FLVI}$  ou  $\mu_{CNI}$ ) des voxels qui présentent ce niveau de gris dans l'image. L'a priori de contraste entre ces deux structures est représenté par la fonction d'appartenance  $f_{FLVI,CNI}^c$  montrée en (c). Nous obtenons alors la fonction d'appartenance (e) représentant les intensités satisfaisant la relation de contraste par rapport à  $\mu_{FLVI}$  par :  $\mu_{CNI}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{FLVI,CNI}^k$ . Si nous recombinaisons cet ensemble flou à l'image (f) nous vérifions que  $\mu_{CNI} \leq (\mu_{CNI}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{FLVI,CNI}^k) \circ \mathcal{I}$ .

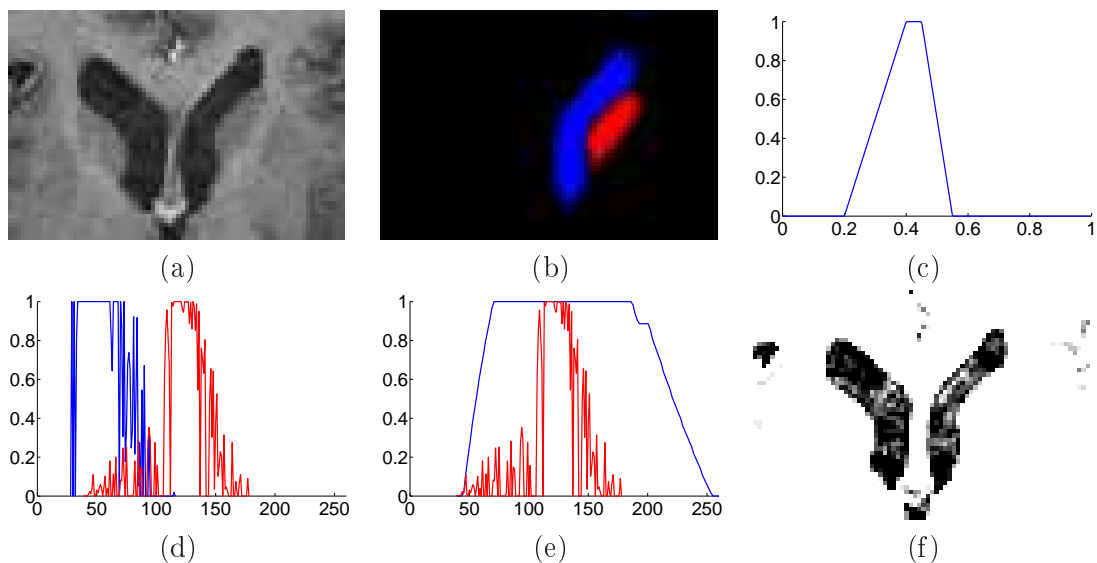


FIGURE 2.17 – (a) Une coupe axiale d'une image originale. (b)  $\mu_{FLVI}$  représentant la corne frontale du ventricule latéral gauche en bleu et  $\mu_{CNI}$  représentant le noyau caudé gauche en rouge. (c) A priori de contraste  $f_{FLVI,CNI}^c$ . (d)  $\mu_{FLVI}^{\mathcal{I}}$  en bleu et  $\mu_{CNI}^{\mathcal{I}}$  en rouge. (e)  $\mu_{CNI}^{\mathcal{I}}$  en rouge et  $\mu_{FLVI}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{FLVI,CNI}^k$  en bleu. (f)  $(\mu_{FLVI}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{FLVI,CNI}^k) \circ \mathcal{I}$ .

## 2.5.2 Définition de la contrainte et de la règle de propagation

**Définition 2.51** (Contrainte de contraste). Soient deux structures  $A$  et  $B$  entre lesquelles le contraste est stable et représenté par une fonction d'appartenance  $f_{A,B}^c$ . La contrainte  $C_{A,B}^{contraste}$  est définie suivant :

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{contraste}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1^I \leq \mu_2^I \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^k \text{ et } \mu_2^I \leq \mu_1^I \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\forall v \in \mathbb{N}^+$ ,  $f_{A,B}^{k-1}(v) = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^{+*} \\ v = \frac{1-c}{1+c}}} f_{A,B}^c(v)$  et  $f_{A,B}^k(v) = \sup_{\substack{c \in \mathbb{R}^{+*} \\ v = \frac{1+c}{1-c}}} f_{A,B}^c(v)$ .

**Définition 2.52** (Propagateur pour la contrainte de contraste). Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{contraste}}$  associé à la contrainte de contraste entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \bar{A}), (\underline{B}, \bar{B}); C_{A,B}^{contraste} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \bar{A} \wedge (\mu_{\bar{B}}^I \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^k \circ I)), (\underline{B}, \bar{B} \wedge (\mu_{\bar{A}}^I \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ I)); C_{A,B}^{contraste} \rangle}$$

Ce propagateur réduit les bornes supérieures des deux domaines en supprimant tous les voxels qui ne peuvent pas satisfaire la relation de contraste. Ces contraintes peuvent être utilisées même lorsque les domaines des structures sont très grands. En effet une fois qu'un domaine est initialisé, sa fonction d'appartenance radiométrique est bornée. Même si elle est très large, elle permettra parfois de réaliser des réductions de domaine intéressantes notamment lorsque le contraste entre les deux structures est grand.

**Proposition 2.15.** *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{\text{contraste}}}$  est correct, idempotent et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant.*

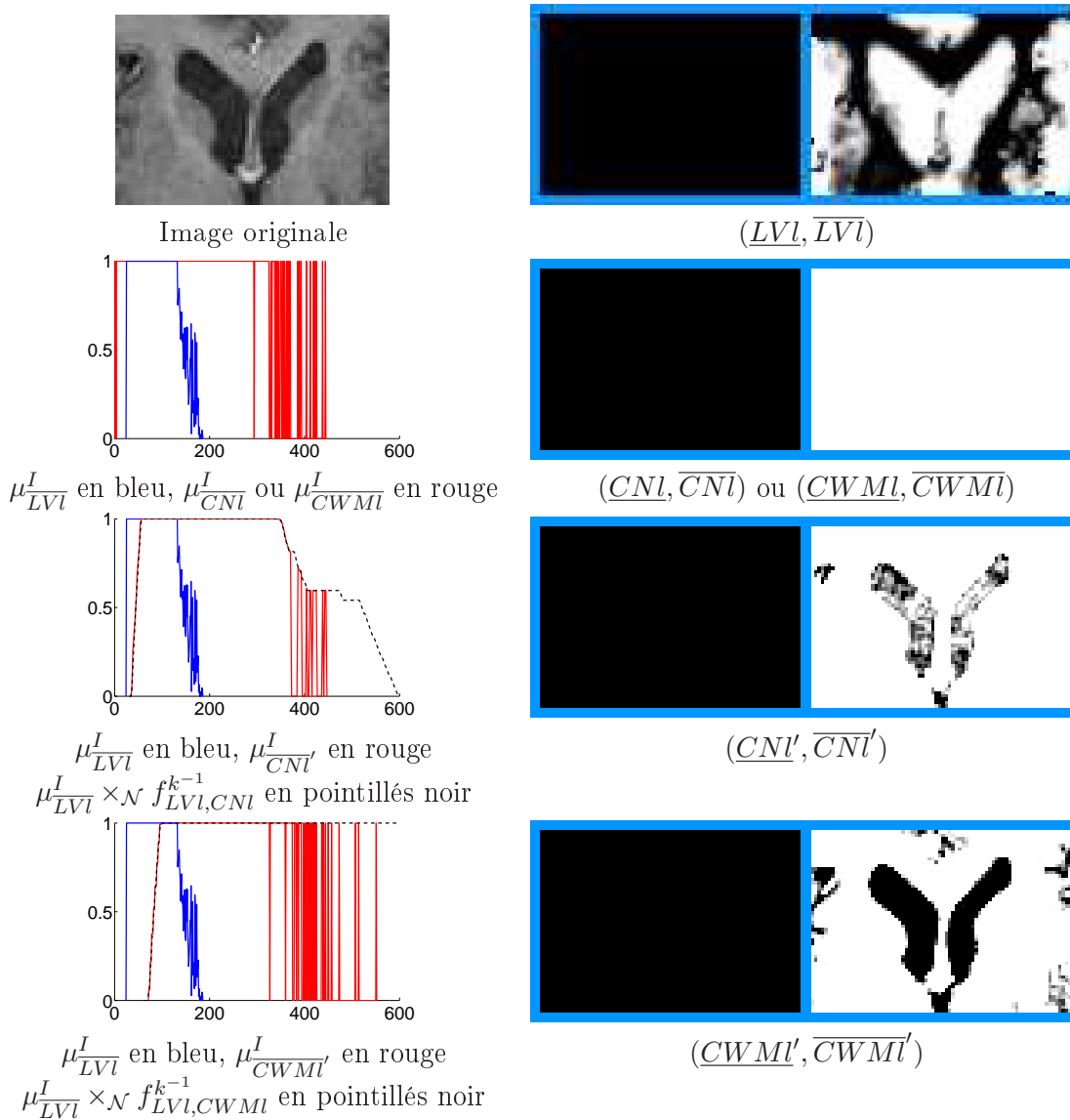


FIGURE 2.18 – Illustration des propagateurs associés aux contraintes de contraste entre le ventricule latéral  $LVI$  et le noyau caudé  $CNI$  ou entre le ventricule latéral et la matière blanche cérébrale  $CWMI$ .

**Exemple 2.9.** *Ce propagateur est illustré par la figure 2.18 pour la contrainte de contraste entre le ventricule latéral  $LVI$  et le noyau caudé  $CNI$  et celle entre le ventricule latéral et la matière blanche cérébrale  $CWMI$ . Initialement le domaine pour le ventricule latéral a été sensiblement réduit alors que les domaines associés au noyau caudé et à la matière blanche*

n'ont pas été initialisés et valent  $\mathcal{F}$ . Pour les deux contraintes, nous obtenons alors l'ensemble des niveaux de gris susceptibles de satisfaire la relation de contraste avec  $\mu_{LVI}^I$  (qui représente les niveaux de gris présents dans  $\overline{LVI}$ ) respectivement suivant  $\mu_{LVI}^I \times_{\mathcal{N}} f_{LVI,CNI}^{k-1}$  et  $\mu_{LVI}^I \times_{\mathcal{N}} f_{LVI,CWMI}^{k-1}$ . Cela nous permet alors d'obtenir les domaines  $(\underline{CNI}', \overline{CNI}')$  et  $(\underline{CWMl}', \overline{CWMl}')$  dont les bornes supérieures ont été restreintes aux voxels satisfaisant la relation de contraste.

Ce modèle très simple ne fait cependant aucune hypothèse sur la distribution statistique de l'intensité des tissus. Cela permet une représentation robuste mais pouvant s'avérer peu contraignante. En effet en présence d'un bruit gaussien par exemple les fonctions d'appartenance couvrent une large plage de niveaux de gris. Il serait donc intéressant de prendre en compte cet aspect.

## 2.6 Relations composées

Considérer plusieurs contraintes simultanément peut conduire à des réductions de domaines plus importantes. La représentation des domaines sous forme d'intervalles est en effet une approximation quelque peu grossière d'un domaine quelconque. Plusieurs domaines différents peuvent ainsi présenter les mêmes bornes et certaines contraintes conduisent à des filtrages qui ne se répercutent pas sur les bornes (la contrainte de volume par exemple). Par ailleurs les bornes de la conjonction de deux domaines quelconques ne peuvent pas toujours être obtenues par la fusion des bornes de ces deux domaines. En effet si nous notons  $\mathcal{D}_1(A)$  et  $\mathcal{D}_2(A)$  deux domaines quelconques pour la variable  $A$ ,  $\overline{A}_1$ ,  $\overline{A}_2$ ,  $\underline{A}_1$  et  $\underline{A}_2$  les bornes de ces domaines et  $\overline{A}_\wedge$  et  $\underline{A}_\wedge$  les bornes de  $\mathcal{D}_1(A) \wedge \mathcal{D}_2(A)$ , nous avons  $\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \leq \overline{A}_\wedge$  et  $\underline{A}_\wedge \leq \underline{A}_1 \wedge \underline{A}_2$  (et non l'égalité).

Cela explique qu'il est parfois intéressant de considérer les contraintes simultanément. En effet dans ce cas nous filtrons les valeurs d'un domaine suivant ces deux contraintes et nous calculons les nouvelles bornes sur cet ensemble. Considérons par exemple deux contraintes  $c_1$  et  $c_2$  impliquant une variable  $A$  dont le domaine est représenté par l'intervalle  $(\underline{A}, \overline{A})$ . Nous notons alors  $(\underline{A}_1, \overline{A}_1)$  et  $(\underline{A}_2, \overline{A}_2)$  les domaines obtenus par les propagateurs génériques associés à  $c_1$  et  $c_2$ . Nous avons alors :

$$\underline{A}_1 \vee \underline{A}_2 \leq \wedge \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \mu \text{ possède un support pour } c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathcal{D}^I \},$$

$$\overline{A}_1 \wedge \overline{A}_2 \geq \vee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \mu \text{ possède un support pour } c_1 \text{ et } c_2 \text{ dans } \mathcal{D}^I \}.$$

Nous donnons ci-dessous quelques exemples pour lesquels cette différence est particulièrement marquée. Nous donnons pour chacun de ces exemples un propagateur associé à la conjonction des contraintes.

### 2.6.1 Connexité et adjacence

Supposons que deux structures  $A$  et  $B$  soient connexes et adjacentes. Comme nous l'avons discuté dans la section 2.4.6, la contrainte d'adjacence seule ne permet pas d'obtenir un propagateur intéressant. En effet la représentation approximative des domaines sous forme d'intervalles ne permet pas de représenter le filtrage réalisé par cette contrainte.

En considérant simultanément une contrainte de connexité portant sur  $B$ , nous pouvons obtenir un propagateur beaucoup plus intéressant. En effet filtrer les valeurs non adjacentes ou non connexes aura en général un impact beaucoup plus grand sur les bornes des domaines. Si nous notons  $\mathcal{H}$  l'ensemble des ensembles flous connexes, l'ensemble des

valeurs du domaine de  $B$  satisfaisant la contrainte de connexité et la contrainte d'adjacence avec  $A$  peut être exprimé suivant :  $\{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{adj}(\mu, \nu) = 1\}$ . La borne supérieure du domaine de  $B$  peut donc être mise à jour suivant :  $\overline{B}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{adj}(\mu, \nu) = 1\}$ . Or comme nous le discuterons dans la section 3.5.3, cette mise à jour revient à filtrer les composantes connexes de  $\overline{B}$  sur le critère d'adjacence, ce qui peut être réalisé efficacement en utilisant une représentation sous forme d'arbre des coupes.

**Définition 2.53** (Propagateur pour la conjonction d'une contrainte d'adjacence et d'une contrainte de connexité). *Le propagateur associé à la conjonction d'une contrainte d'adjacence entre deux structures  $A$  et  $B$  et d'une contrainte de connexité portant sur  $B$  est noté  $f_{C_{A,B}^{adj} \wedge C_B^{conn}}$ . Il est défini suivant :*

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{adj} \wedge C_B^{conn} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}'); C_{A,B}^{adj} \wedge C_B^{conn} \rangle}$$

où  $\overline{B}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{adj}(\mu, \nu) = 1\}$ .

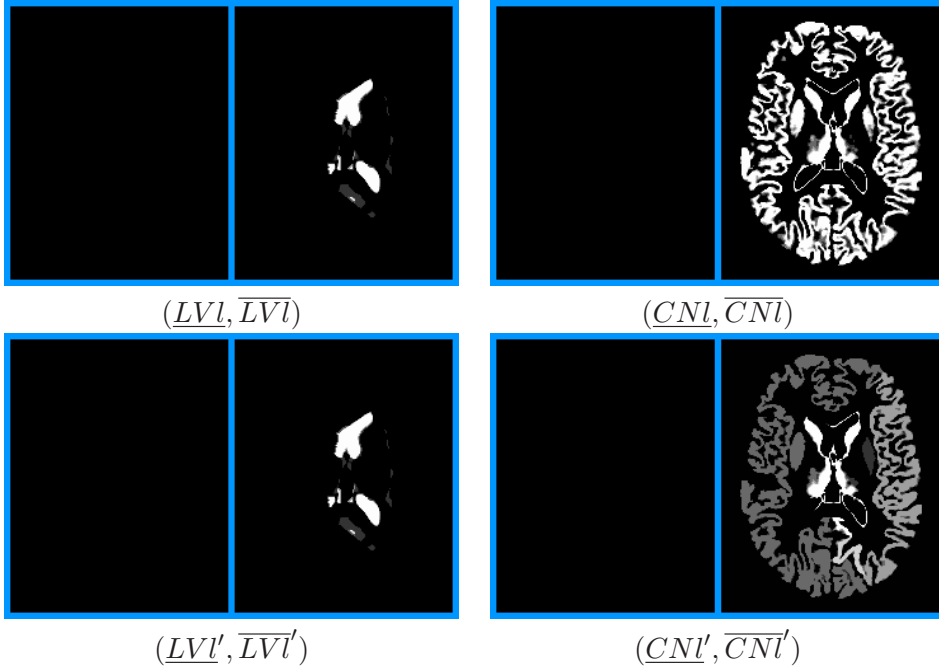


FIGURE 2.19 – Illustration du propagateur  $f_{C_{LVL,CNL}^{adj} \wedge C_{CNL}^{conn}}$ . Les composantes connexes de  $\overline{CNL}$  non adjacentes à  $\overline{LVL}$  sont filtrées.

**Exemple 2.10.** Prenons pour exemple le noyau caudé gauche  $CNL$  et le ventricule latéral gauche  $LVL$  ainsi que les domaines  $(\underline{LVL}, \overline{LVL})$  et  $(\underline{CNL}, \overline{CNL})$  montrés par la figure 2.19. Ces deux structures sont adjacentes et connexes. Nous pouvons alors appliquer le propagateur  $f_{C_{LVL,CNL}^{adj} \wedge C_{CNL}^{conn}}$  qui filtre la borne supérieure  $\overline{CNL}$  en supprimant les composantes connexes non adjacentes à  $\overline{LVL}$ .

## 2.6.2 Connexité et volume

Similairement la contrainte portant sur le volume donnée dans la section 2.4.5 ne conduit pas à un propagateur intéressant. Cependant lorsque nous considérons la contrainte simultanément avec une contrainte de connexité, nous pouvons obtenir un propagateur plus intéressant.

Considérons une variable  $A$  et les contraintes  $C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}$  et  $C_A^{conn}$ . L'ensemble des valeurs du domaine de  $A$  satisfaisant ces deux contraintes est défini suivant :  $\{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \text{ et } f_{V_{\min}} \leq f_V(\mu) \leq f_{V_{\max}}\}$ . La borne supérieure du domaine de  $A$  peut alors être mise à jour suivant :  $\overline{A}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \text{ et } f_{V_{\min}} \leq f_V(\mu)\}$  (le critère de volume maximal n'apporte rien pour la mise à jour de la borne supérieure).

**Définition 2.54** (Propagateur pour la conjonction de la contrainte de volume et de la contrainte de connexité). *Le propagateur  $f_{C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn}}$  associé à la conjonction d'une contrainte de volume et d'une contrainte de connexité sur  $A$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \overline{A}); C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \overline{A}'); C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn} \rangle}$$

où  $\overline{A}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \text{ et } f_{V_{\min}} \leq f_V(\mu)\}$ .

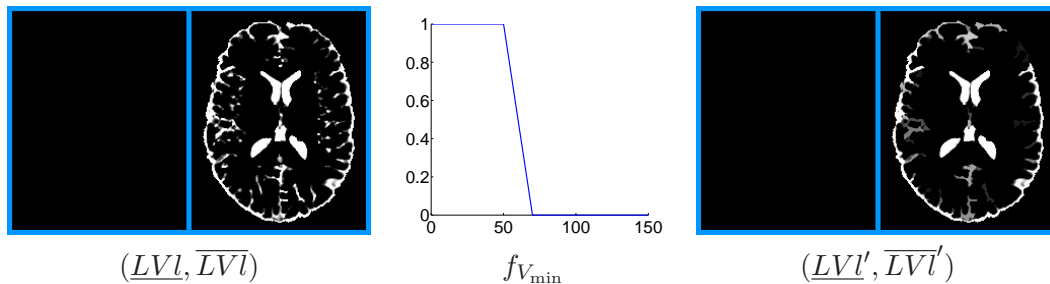


FIGURE 2.20 – Illustration du propagateur  $f_{C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn}}$ . Les composantes connexes de la borne supérieure du ventricule latéral sont filtrées sur le critère de volume minimal.

**Exemple 2.11.** *La figure 2.20 illustre le propagateur  $f_{C_{LVI}^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_{LVI}^{conn}}$  qui réalise la réduction du domaine de ventricule latéral sur un critère de volume minimal en filtrant les composantes connexes de la borne supérieure.*

## 2.7 Illustrations

Nous réalisons maintenant une première illustration de ce processus pour la reconnaissance de la coupe axiale de l'IRM cérébrale montrée par la figure 2.21 (a). Notons qu'une illustration plus détaillée sera donnée dans le chapitre 6. Ici nous voulons réaliser la reconnaissance de 49 structures anatomiques dont la segmentation manuelle est montrée en (b). Le modèle structurel et radiométrique considéré comprend environ 5000 relations et est appris sur une base d'apprentissage. Nous supposons que le cerveau a été préalablement extrait et que son domaine est initialisé par cette segmentation. Cette extraction peut être réalisée en utilisant par exemple les méthodes connues sous les acronymes BET [Smith, 2002] ou BSE [Shattuck et al., 2001].



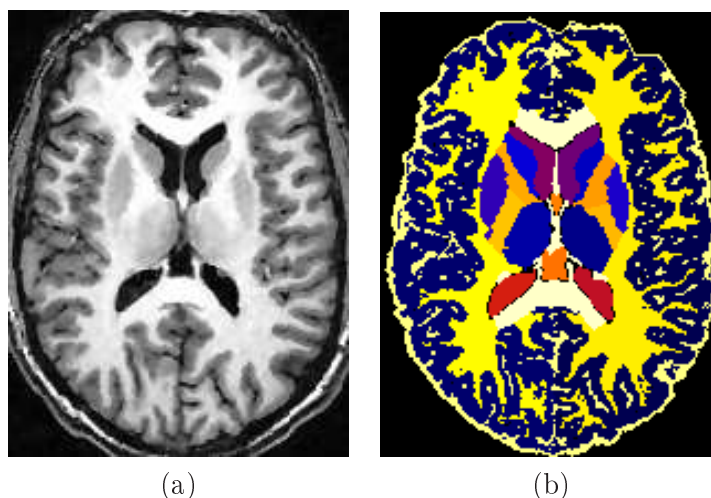


FIGURE 2.21 – (a) Coupe axiale d’une IRM cérébrale pondérée T1. (b) Segmentation manuelle.

Nous réalisons alors la propagation de contraintes. Les figures 2.22, 2.23, 2.24, 2.25 et 2.26 illustrent l’évolution des domaines pour 25 de ces structures au cours du processus. Ces domaines sont progressivement réduits. Leur borne supérieure décroît et pour la plupart des structures converge vers une valeur assez proche de la solution recherchée. Leur borne inférieure ne croît quant à elle que dans un deuxième temps. Même si la valeur obtenue à la convergence du processus n’est généralement pas très proche de la solution recherchée, l’obtention d’une valeur non nulle est très importante notamment pour l’extraction d’une solution approximative par la méthode proposée dans le chapitre 5.

L’algorithme utilisé est cependant peu efficace et converge lentement (environ 55000 itérations pour cet exemple). De nombreux propagateurs sont calculés inutilement du fait de l’ordonnancement rudimentaire de l’application des propagateurs. Dans le chapitre 4 nous proposons un ordonnancement plus efficace de ces propagateurs.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une formulation du problème de segmentation et de reconnaissance guidé par modèle structurel sous la forme de la résolution d’un réseau de contraintes. Pour des raisons de complexité, nous ne pouvons pas réaliser l’extraction d’une solution exacte. Nous simplifions donc dans un premier temps le problème par l’application d’un algorithme de propagation de contraintes. Toujours pour des raisons de complexité, nous représentons les domaines par leurs bornes et la propagation de contrainte est alors exprimée comme la mise à jour itérative des bornes des domaines des différentes variables.

Nous associons aux contraintes des propagateurs qui réalisent la mise à jour des bornes des variables impliquées dans la contrainte afin que le résultat soit consistant localement. Des propagateurs spécifiques ont ainsi été obtenus pour un ensemble de contraintes relatives à l’agencement spatial et à la radiométrie des structures. Seule la contrainte de connexité n’a pas été traitée précisément puisqu’elle fait l’objet du chapitre suivant.

La propagation de contraintes consiste alors à appliquer séquentiellement ces propagateurs jusqu’à convergence. Afin d’accroître l’efficacité de ce processus, nous proposerons dans le chapitre 4 plusieurs heuristiques permettant de réaliser un meilleur ordonnancement de l’application des contraintes.

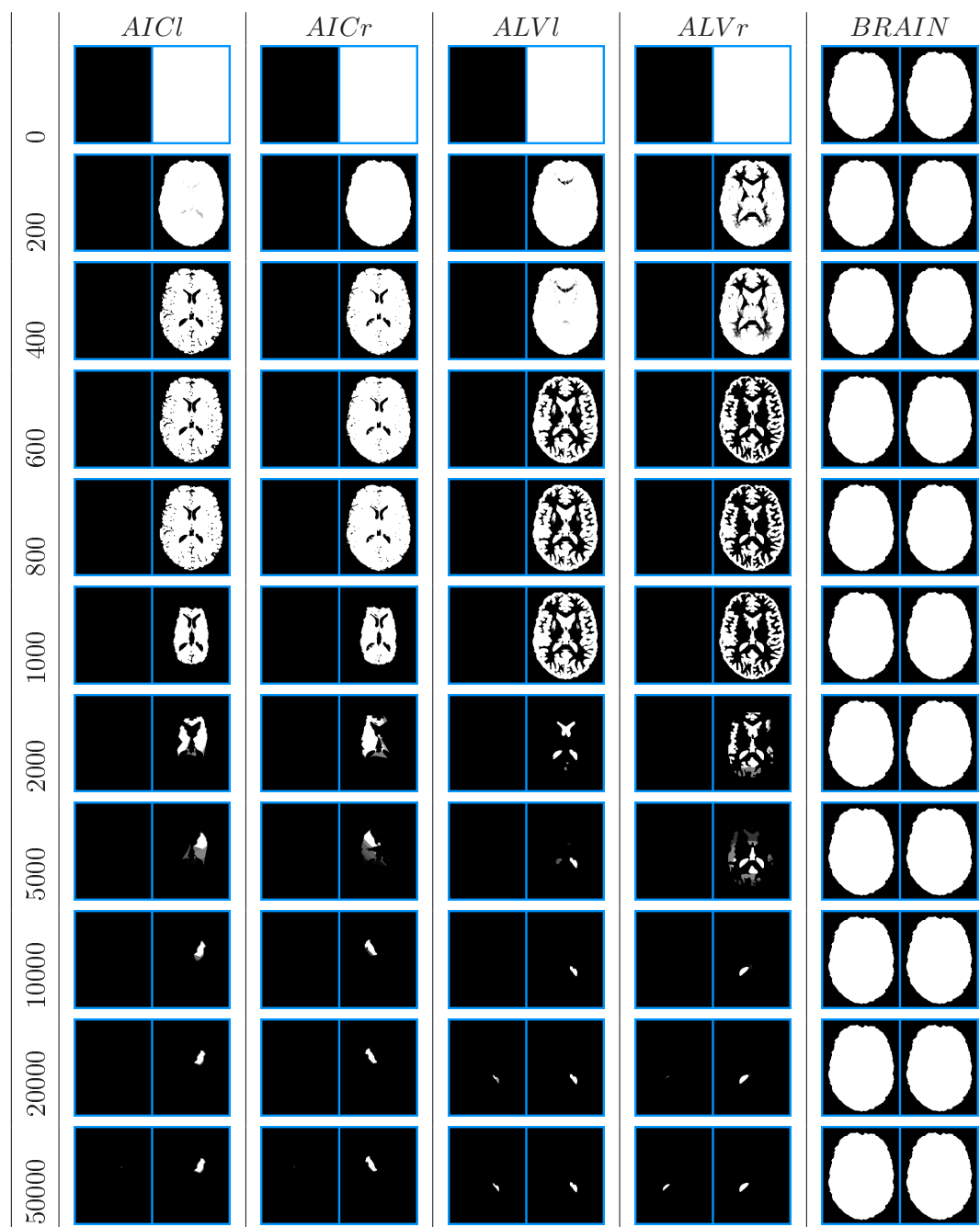


FIGURE 2.22 – Évolution des domaines de la partie antérieure des capsules internes gauche et droite (*AICl* et *AICr*), de l'atrium des ventricules gauche et droit (*ALVl* et *ALVr*) et du cerveau (*BRAIN*) lors du processus de propagation.

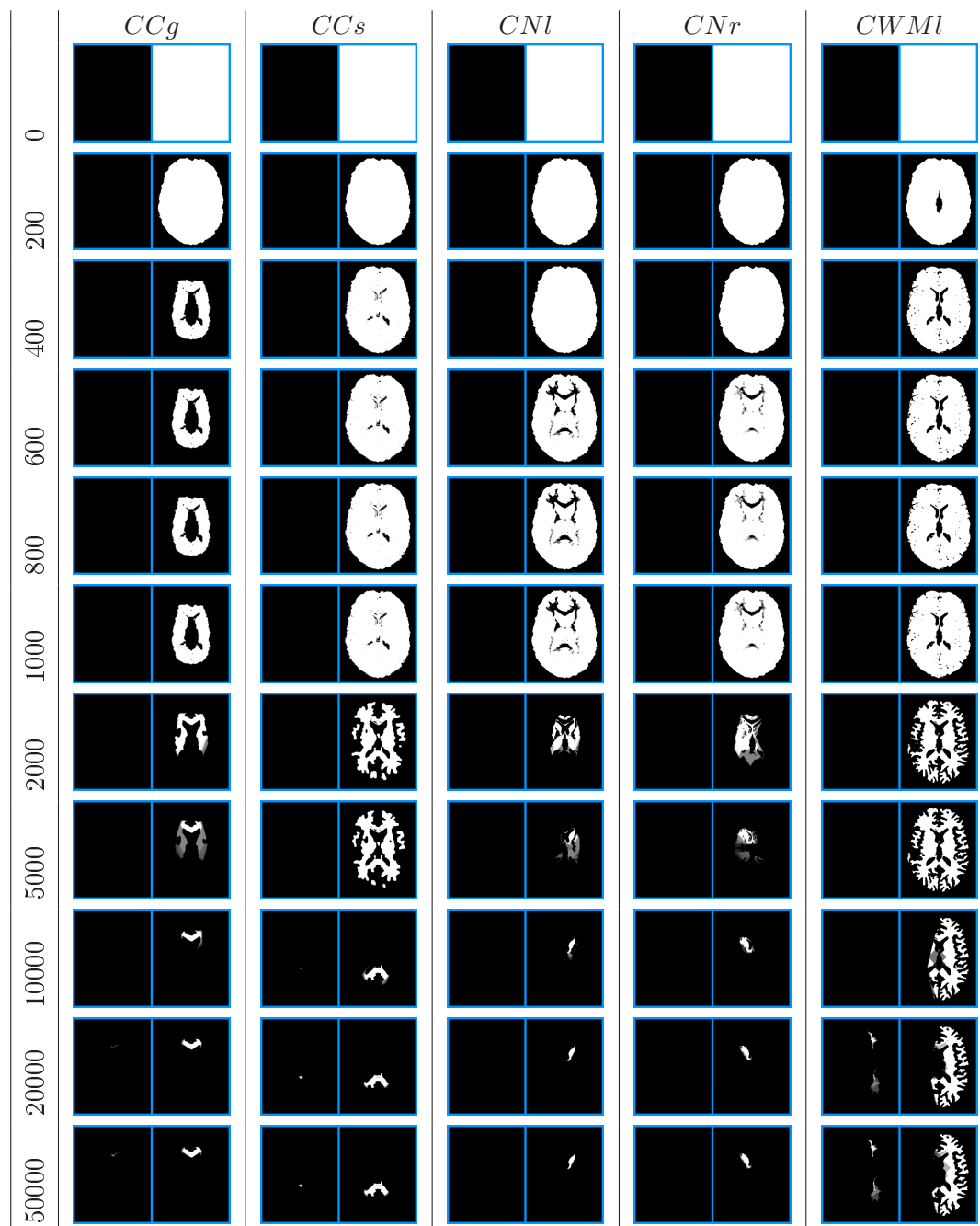


FIGURE 2.23 – Évolution des domaines du genou et du splenium du corps calleux (*CCg* et *CCs*), des noyaux caudés gauche et droit (*CNl* et *CNr*) et de la matière blanche de l'hémisphère gauche (*CWMI*) lors du processus du propagation.

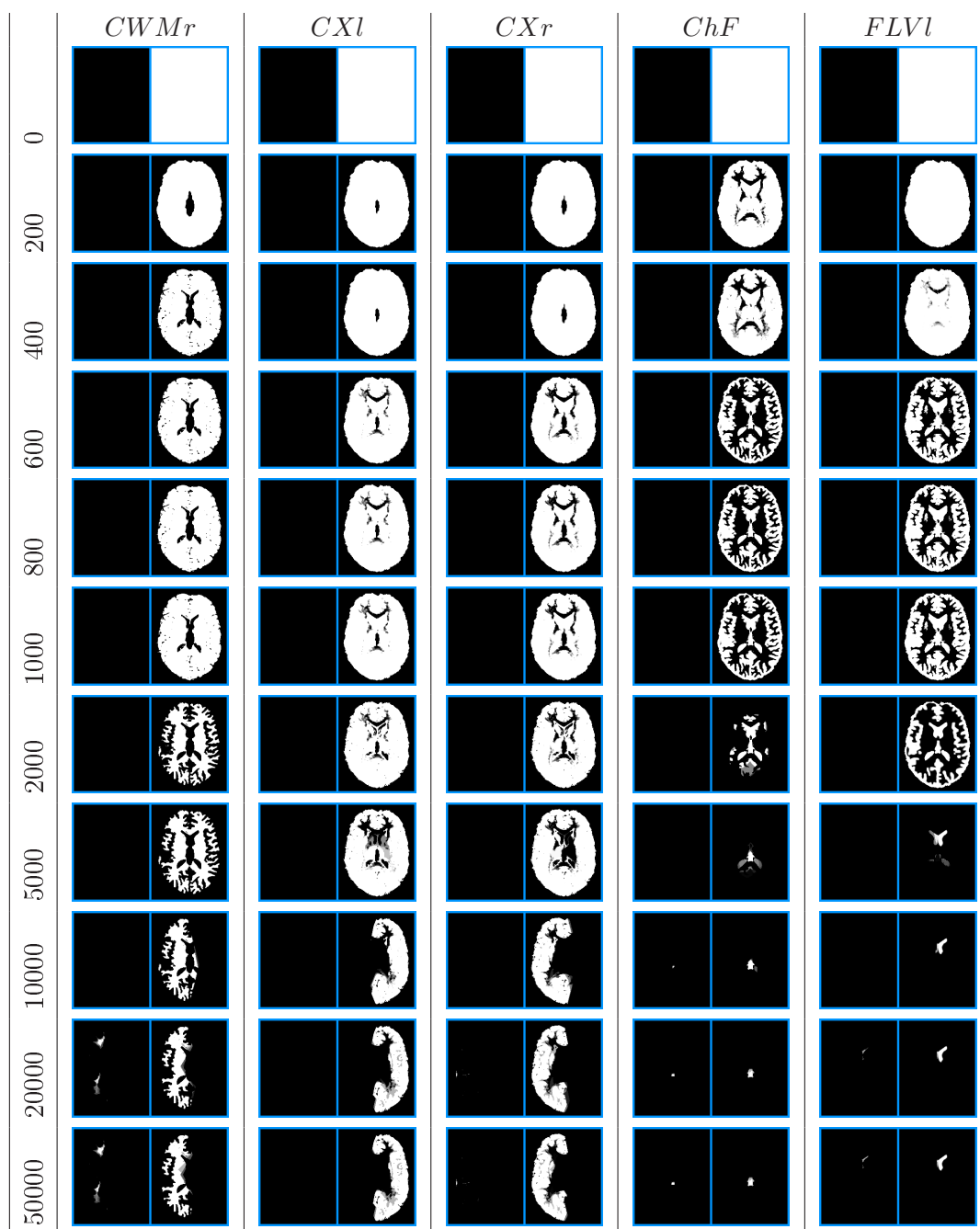


FIGURE 2.24 – Évolution des domaines de la matière blanche de l'hémisphère droit (*CWMr*), du cortex des hémisphères gauche (*CXl*) et droit (*CXr*), de la fissure choroïde (*ChF*) et de la corne frontale du ventricule latéral gauche (*FLVl*) lors du processus de propagation.

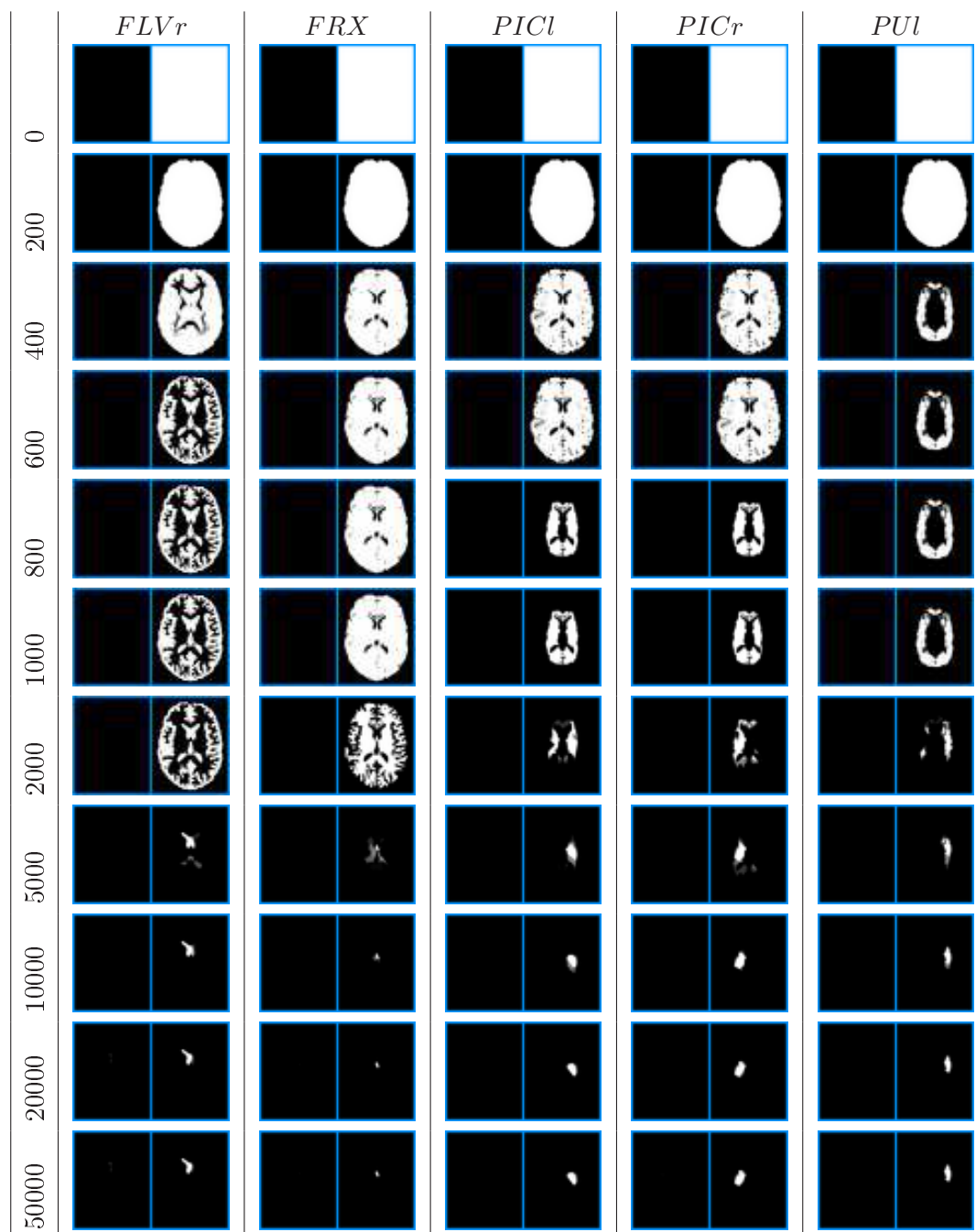


FIGURE 2.25 – Évolution des domaines de la corne frontale du ventricule latéral droit (*FLVr*), du fornix (*FRX*), de la partie postérieure des capsules internes gauche et droite (*PICl* et *PICr*) et du putamen gauche (*PUl*) lors du processus de propagation.

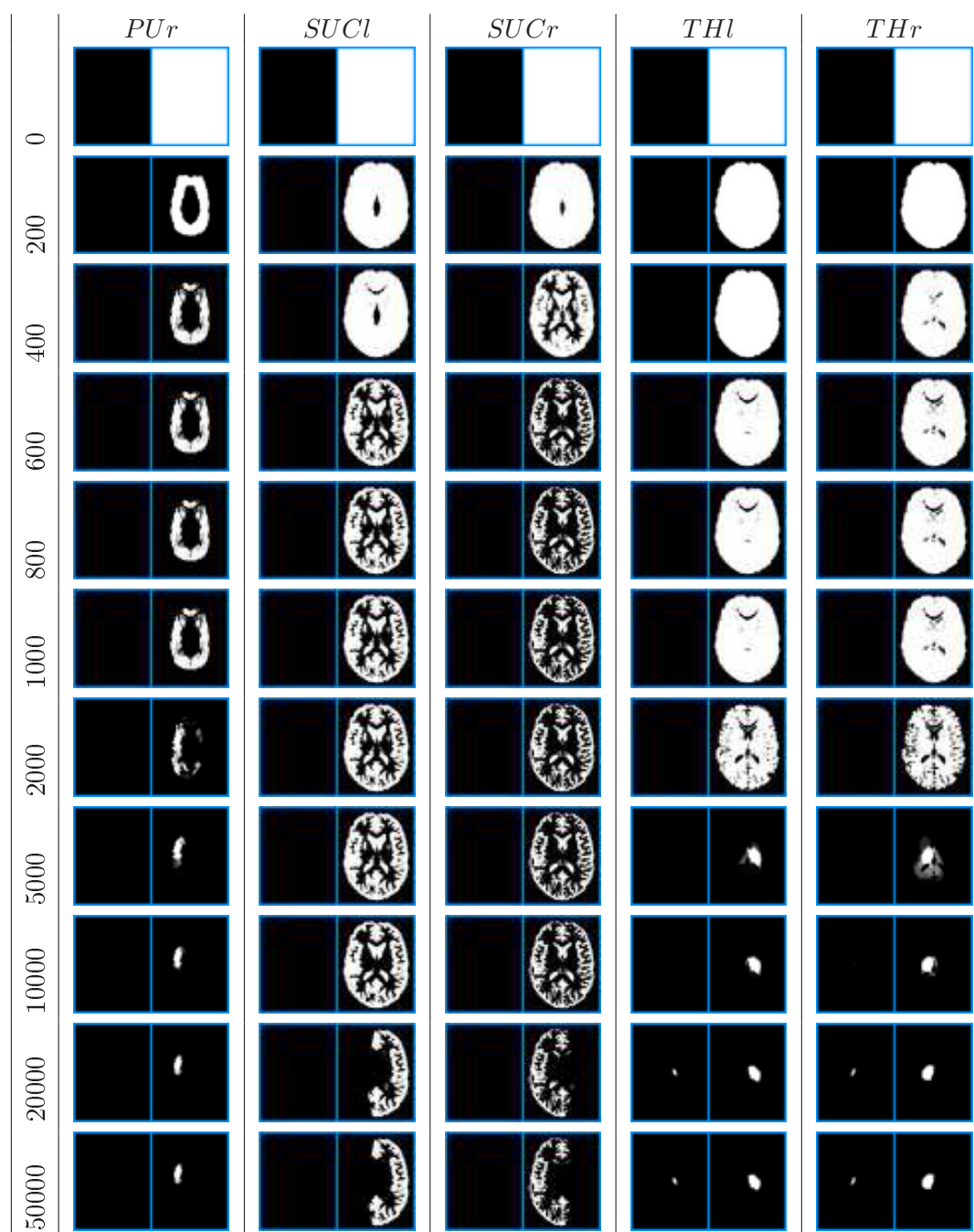


FIGURE 2.26 – Évolution des domaines du putamen droit ( $PU_r$ ) des sillons des hémisphères gauche ( $SUC_l$ ) et droit ( $SUC_r$ ) et des thalamus gauche ( $TH_l$ ) et droit ( $TH_r$ ) lors du processus de propagation.



## Chapitre 3

# Connexité des ensembles flous et contrainte associée

### Introduction

La notion de connexité joue un rôle important dans notre processus de reconnaissance. La plupart des structures du modèle sont en effet connexes et nous voulons que le résultat le soit. De plus comme nous l'avons introduit dans le chapitre précédent, nous obtenons des propagateurs intéressants pour les contraintes de volume et d'adjacence en les combinant à des contraintes de connexité.

Nous devons donc définir une contrainte satisfaite par l'ensemble des valeurs connexes. Nous nous reposons pour cela sur le concept de connexion introduit par Serra comme une axiomatisation des définitions classiques de la notion de connexité [Serra, 1988b]. Une connexion (aussi appelée classe de connexité) sur un espace  $E$  est une famille de sous-ensembles de  $E$  supposés connexes. Ainsi les sous-ensembles connexes d'une image binaire, les sous-ensembles arc-connexes de  $\mathbb{R}^n$  ou les sous-ensembles connexes d'un graphe peuvent être représentés par une connexion. Une axiomatisation équivalente fondée sur la notion de séparation a été proposée par Ronse [Ronse, 1998]. Par ailleurs des connexions plus complexes peuvent être obtenues à partir des connexions dérivées des notions usuelles de connexité. Ainsi un sous-ensemble de  $E$  peut être dit connexe si sa dilatation l'est [Ronse, 1998, Heijmans, 1999], des connexions peuvent être définies dans des espaces d'attributs [Wilkinson, 2007] ou des connexions imbriquées peuvent être utilisées pour obtenir une notion de connexité multi-échelles [Braga-Neto and Goutsias, 2003a].

La notion de connexion est étroitement liée aux filtres connexes (i.e. les opérateurs manipulant seulement les composantes connexes selon une certaine définition de la connexité). Par exemple, en considérant une connexion classique sur l'espace discret, les filtres connexes sur des images binaires [Klein, 1976, Serra, 1982, Heijmans, 1999] ne modifient que des composantes connexes de l'objet ou du fond, sans créer de nouvelles frontières ou déplacer les frontières existantes.

Dans [Serra, 1998] la notion de connexion a été étendue aux treillis complets et à la notion d'hyperconnexion (i.e. fondée sur une définition plus générale du recouvrement), en particulier pour représenter la connexité des images en niveaux de gris [Serra, 2000, Braga-Neto and Goutsias, 2004]. Des propriétés de ces connexions ont été données dans [Ronse and Serra, 2001, Braga-Neto and Goutsias, 2002]. Des filtres connexes pour les images en niveaux de gris [Vincent, 1993, Salembier and Serra, 1995] ont été proposés indépendamment, reposant généralement sur la notion de zones plates (i.e. les plus grandes régions connexes présentant un niveau de gris constant). Ces filtres ont été récemment généralisés

---



à la segmentation connective [Serra, 2006, Ronse, 2008, Ronse and Serra, 2008].

D'un point de vue algorithmique, les filtres connexes peuvent être mis en œuvre efficacement en utilisant une représentation de l'image sous forme d'arbre. L'arbre des coupes (« max-tree », « component tree » [Jones, 1999, Najman and Couprie, 2006] ou « opening tree » [Vincent, 2000]) a été introduit dans [Salembier et al., 1998] pour calculer des ouvertures connexes [Breen and Jones, 1996] et peut être obtenu par des algorithmes efficaces [Meijster and Wilkinson, 2002, Lesage et al., 2006, Najman and Couprie, 2006, Berger et al., 2007, Wilkinson et al., 2008]. La représentation par arbre des coupes a aussi été étendue aux connexions de seconde génération [Ouzounis and Wilkinson, 2007]. L'arbre des formes proposé dans [Monasse and Guichard, 2000] propose une représentation invariante par contraste de l'image qui permet le calcul de filtres plus complexes.

Dans cette thèse nous représentons les régions sous forme d'ensembles flous définis sur l'espace discret  $X$ . La sémantique des valeurs des pixels est différente de celle des images en niveaux de gris. Le concept de connexité des ensembles flous doit donc faire l'objet d'une définition spécifique. Dans [Rosenfeld, 1979, 1984], Rosenfeld a proposé une première définition de la connexité floue entre des points de l'espace discret par rapport à un ensemble flou. A partir de cette définition, il a dérivé une caractérisation de la connexité de l'ensemble flou lui-même, connue sous le nom de connexité topographique et selon laquelle un ensemble flou est connexe s'il présente un maximum régional unique ou de façon équivalente si toutes ses  $\alpha$ -coupes sont connexes. Une définition similaire pour les ensembles flous définis sur des espaces continus a été proposée dans [Li, 2000]. L'extension proposée dans [Braga-Neto and Goutsias, 2003b] conduit à la caractérisation de la connexité par un degré, défini comme le degré d'appartenance du point selle le plus bas. Ce degré n'est cependant pas continu relativement à la fonction d'appartenance.

Nous proposons une nouvelle définition qui présente de meilleures propriétés, en particulier en termes de continuité. Nous montrons que cette définition peut être représentée de façon appropriée par une hyperconnexion que nous utilisons pour modéliser la contrainte de connexité évoquée dans le chapitre 2. Nous dérivons alors le propagateur associé ainsi que les propagateurs correspondant à la combinaison de contraintes de connexité et de contraintes de volume ou d'adjacence.

Premièrement nous rappelons dans la section 3.1 les principales définitions concernant les classes de connexité et la connexité des ensembles flous. Nous illustrons notamment certains défauts de ces dernières. Dans la section 3.2, nous introduisons une nouvelle mesure de connexité qui présente des propriétés intéressantes de continuité et nous montrons que celle-ci mène à une famille d'hyperconnexions imbriquées indexée par un paramètre de tolérance. Les composantes hyperconnexes sont alors définies et nous proposons un processus d'extraction fondé sur une représentation par l'arbre des coupes. La section 3.3 propose une formulation de la contrainte de connexité. Dans la section 3.4 nous discutons des opérateurs qui nous permettront de calculer les propagateurs donnés dans la section 3.5. Les preuves des différentes propositions de ce chapitre sont données dans l'annexe D.

### 3.1 Rappels

Nous supposons que l'espace discret  $X$  (un sous-ensemble borné de  $\mathbb{Z}^n$ ) est muni d'une connexité discrète notée  $c_d$ . Si  $n = 2$ ,  $c_d$  peut par exemple correspondre aux notions classiques de 4- ou 8-connexité définie sur la trame carrée.

### 3.1.1 Connexité d'un ensemble flou

La première définition de la notion de connexité des ensembles flous a été proposée par Rosenfeld [Rosenfeld, 1979]. Plus précisément il a proposé un degré de connexité entre deux points d'un ensemble flou et une caractérisation de la connexité de l'ensemble flou à partir de ce degré.

**Définition 3.1.** [Rosenfeld, 1979] *Le degré de connexité entre deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  relativement à un ensemble flou  $\mu$  ( $\mu \in \mathcal{F}$ ) est défini comme :*

$$c_\mu^1(x, y) = \max_{l \in L_{x,y}} \min_{0 \leq i \leq n} \mu(x_i)$$

$l = \{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y\}$

où  $L_{x,y}$  représente l'ensemble des chemins discrets de  $x$  à  $y$  selon la connexité discrète  $c_d$  définie sur  $X$ .

Le degré de connexité ainsi défini est :

- symétrique :  $\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^1(x, y) = c_\mu^1(y, x)$ ,
- faiblement réflexif :  $\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^1(x, x) \geq c_\mu^1(x, y)$ ,
- max-min transitif :  $\forall (x, y, z) \in X^3, c_\mu^1(x, z) \geq \min(c_\mu^1(x, y), c_\mu^1(y, z))$ .

Ce degré est donc une similitude sur  $X$  (l'analogue flou d'une relation d'équivalence). Il vérifie aussi  $c_\mu^1(x, x) = \mu(x)$  et  $c_\mu^1(x, y) \leq \min(\mu(x), \mu(y))$ . De plus il est croissant par rapport à  $\mu$  :  $\forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{F}^2, \mu_1 \geq \mu_2 \Rightarrow \forall (x, y) \in X^2, c_{\mu_1}^1(x, y) \geq c_{\mu_2}^1(x, y)$ .

Cette définition a été étendue pour être utilisée dans des processus de segmentation à partir de marqueurs [Carvalho et al., 1999, Udupa and Samarasekera, 1996, Herman and Carvalho, 2001]. Pour cela une mesure d'affinité entre les pixels de l'image est définie à partir de l'adjacence de ces pixels et de la similarité de leur niveau de gris.

**Définition 3.2.** [Rosenfeld, 1979] *Un ensemble flou  $\mu$  est connexe si  $\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^1(x, y) = \min(\mu(x), \mu(y))$ .*

**Proposition 3.1.** [Rosenfeld, 1979, 1984] *Un ensemble flou  $\mu$  est connexe ssi toutes ses  $\alpha$ -coupes<sup>1</sup>  $\mu_\alpha$  sont connexes (au sens de la connexité  $c_d$  définie sur  $X$ ).*

**Proposition 3.2.** [Rosenfeld, 1979, 1984] *Un ensemble flou  $\mu$  est connexe ssi il possède un maximum régional unique<sup>2</sup>.*

Ces définitions sont illustrées sur la figure 3.1. Un des chemins optimaux entre  $x$  et  $y$  (réalisant le critère max-min de la définition) est montré en (a), et la valeur minimale sur ce chemin est de 0,5. Cette valeur correspond au degré de connexité entre  $x$  et  $y$ . L'ensemble flou (a) n'est pas connexe puisque le degré  $c_\mu^1(x, y) = 0,5$  est strictement inférieur aux degrés d'appartenance de  $x$  et  $y$  ( $\mu(x) = 1$  et  $\mu(y) = 0,9$ ). L'ensemble flou présenté dans la figure 3.1(b) est connexe.

### 3.1.2 Classes de connexité

La définition 3.2 propose une caractérisation binaire de la connexité d'un ensemble flou. Cependant si un ensemble est flou, il peut être intuitivement plus satisfaisant de définir aussi sa connexité comme un degré. Les notions de connexion et d'hyperconnexion [Matheron, 1985, Matheron and Serra, 1988, Ronse, 1998, Serra, 1988a, 1998] fournissent un cadre

1.  $\mu_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$ .

2. Un maximum régional  $R \subseteq X$  d'un ensemble flou  $\mu$  est une composante connexe (relativement à la connexité discrète  $c_d$ ) d'une  $\alpha$ -coupe  $\mu_\alpha$ , telle que  $\forall x \in R, \mu(x) = \alpha$ .

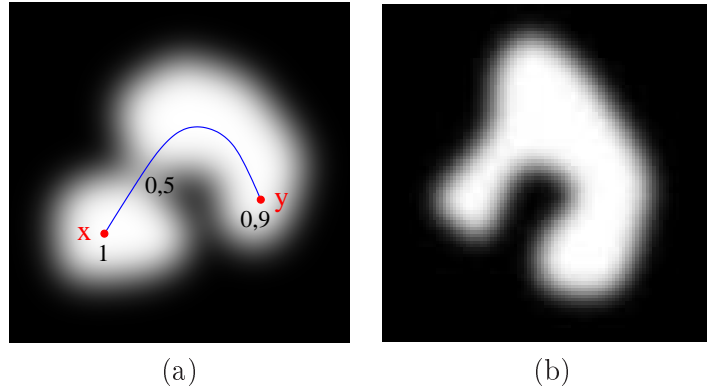


FIGURE 3.1 – (a) Un ensemble flou non connexe au sens de la définition 3.2, et les degrés d'appartenance sur le chemin définissant le degré de connexité entre deux points  $x$  et  $y$ . (b) Un ensemble flou connexe.

approprié à cet effet. Nous considérons ici l'axiomatisation utilisant un ensemble canonique de marqueurs proposée dans la section 2.3 de [Serra, 1998] et qui apparaît aussi dans [Ronse and Serra, 2001, Braga-Neto and Goutsias, 2002].

**Définition 3.3.** [Serra, 1998] Soit  $(L, \leq)$  un treillis complet dont  $S$  est une famille sup-génératrice<sup>3</sup> et  $0_L$  le plus petit élément. Une classe de connexité, ou connexion,  $\mathcal{C}$  est une famille d'éléments de  $L$  telle que :

1.  $0_L \in \mathcal{C}$ ,
2.  $S \subseteq \mathcal{C}$ ,
3. toute famille  $\{C_i\}$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  telle que  $\bigwedge_i C_i \neq 0_L$  vérifie  $\bigvee_i C_i \in \mathcal{C}$ .

Cette définition offre un cadre abstrait pour manipuler le concept de connexité. De nombreuses propriétés peuvent être définies génériquement sans faire explicitement référence aux propriétés spécifiques de l'espace considéré ou à la notion de connexion utilisée. Ainsi comme nous le verrons dans la section 3.2.3, les composantes connexes d'un ensemble  $A$  sont simplement définies comme les plus grands éléments de  $\mathcal{C}$  plus petits que  $A$  (pour la relation d'ordre du treillis).

Prenons pour exemple le treillis  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$  des sous-ensembles de  $X$ . Sur ce treillis nous considérons la connexion usuelle  $\mathcal{C}_d$  [Serra, 1988b] induite par la connexité discrète  $c_d$  sur  $X$ . Un élément de  $\mathcal{C}_d$  est alors simplement un sous-ensemble  $A$  de  $X$  qui est connexe au sens de  $c_d$  (i.e.  $\forall (x, y) \in A^2, \exists x_0 = x, x_1, \dots, x_n = y, \forall i < n, x_i \in A$  et  $c_d(x_i, x_{i+1}) = 1$ ). Nous pouvons vérifier que la famille d'éléments  $\mathcal{C}_d$  vérifie les trois conditions de la définition 3.3 :

1.  $\emptyset \in \mathcal{C}_d$ ,
2. les points sont une famille sup-génératrice de  $\mathcal{P}(X)$  et appartiennent à  $\mathcal{C}_d$ ,
3. si une famille  $\{A_i\}$  d'éléments de  $\mathcal{C}_d$  vérifie  $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ , nous avons  $\bigcup_i A_i \in \mathcal{C}_d$  puisque dans ce cas  $\forall (x, y) \in \bigcup_i A_i$  il est toujours possible de trouver un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $\bigcup_i A_i$  passant par l'intersection  $\bigcap_i A_i$ .

D'autres exemples de connexions définies dans des espaces continus ou des graphes peuvent être trouvés dans [Braga-Neto and Goutsias, 2003b].

---

3. Si  $S$  est une famille sup-génératrice de  $L$ , tout élément  $a$  de  $L$  peut être exprimé suivant  $a = \bigvee \{s \in S \mid s \leq a\}$ .

Une connexion  $\mathcal{C}$  définie sur un treillis complet  $L$  dont  $S$  est une famille sup-génératrice peut être caractérisée par une famille d'ouvertures  $\{\gamma_x, x \in S\}$  appelées ouvertures connexes d'origine  $x$ , satisfaisant les conditions suivantes [Serra, 1998] :

1.  $\forall x \in S, \gamma_x(x) = x$ ,
2.  $\forall A \in L, \forall (x, y) \in S^2, (\gamma_x(A) = \gamma_y(A))$  ou  $(\gamma_x(A) \wedge \gamma_y(A) = 0_L)$ ,
3.  $\forall A \in L, \forall x \in S, x \not\leq A \Rightarrow \gamma_x(A) = 0_L$ .

Ces ouvertures peuvent être définies suivant :

$$\gamma_x(A) = \bigvee \{C \in \mathcal{C} \mid x \leq C \leq A\}.$$

Réciproquement si  $\mathcal{M}$  est une famille sup-génératrice de  $L$  qui correspond aux éléments invariants d'une famille d'ouvertures  $\{\gamma_x, x \in S\}$  (i.e.  $\{\gamma_x(A), x \in S, A \in L\}$ ) satisfaisant les conditions précédentes, alors  $\mathcal{M}$  est une connexion.  $\gamma_x(A)$  est alors la composante connexe de  $A$  (selon la connexion  $\mathcal{M}$ ) incluant  $x$ . Considérons à nouveau le treillis  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , un point  $x \in X$  et un ensemble  $A \subseteq X$ .  $\gamma_x(A)$  est alors la composante connexe de  $A$  contenant  $x$  au sens usuel. La figure 3.8 de la section 3.2.3 illustre cela.

Considérons maintenant le treillis  $(\mathcal{F}, \leq)$ , la caractérisation binaire de la connexité de la définition 3.2 et les exemples d'ensembles flous 1D de la figure 3.2. En (a), chaque ensemble flou est connexe ainsi que leur réunion (donnée par le maximum des fonctions d'appartenance). Cependant, en (b), la réunion n'est pas connexe alors que chaque ensemble flou est connexe et que leur intersection (donnée par le minimum des fonctions d'appartenance) ne vaut pas  $0_{\mathcal{F}}$ . Ainsi la définition 3.2 ne permet pas de représenter la connexité des ensembles flous (selon la définition 3.2). Afin de modéliser ce type de connexité, l'infimum de la condition 3 ( $\wedge$ ) dans la définition 3.3 doit être remplacé par une mesure de recouvrement plus générale [Serra, 1998] (i.e. une fonction décroissante quelconque  $\perp : \mathcal{P}(L) \rightarrow \{0_L, 1_L\}$ ). Cela conduit à la notion d'hyperconnexion.

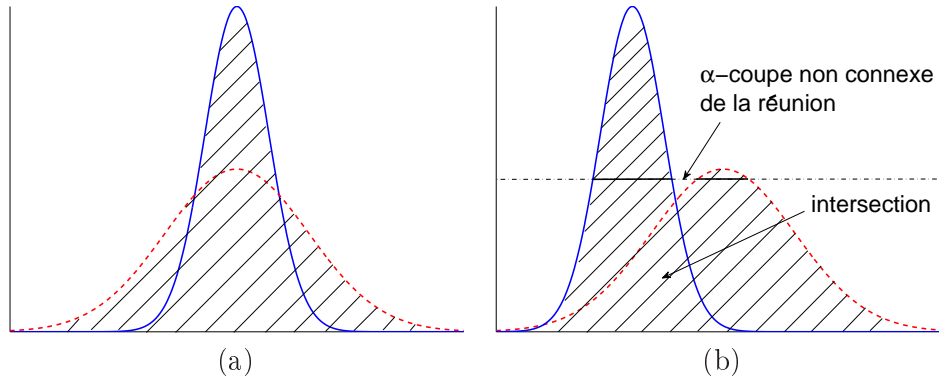


FIGURE 3.2 – Exemples d'ensembles flous 1D. En (a) la réunion est connexe au sens de la définition 3.2, alors qu'elle ne l'est pas en (b).

**Définition 3.4.** [Serra, 1998, Braga-Neto and Goutsias, 2003b] Soit  $(L, \leq)$  un treillis complet. Une hyperconnexion  $\mathcal{H}$  est une famille d'éléments de  $L$  telle que :

1.  $0_L \in \mathcal{H}$ ,
2.  $\mathcal{H}$  contient une famille sup-génératrice  $S$  de  $L$ ,
3. toute famille  $\{H_i\}$  d'éléments de  $\mathcal{H}$  telle que  $\perp_i H_i \neq 0_L$  vérifie  $\bigvee_i H_i \in \mathcal{H}$ .

Similairement au cas des connexions, nous pouvons définir les ouvertures hyperconnexes (d'origine  $x \in S$ ) associées à  $\mathcal{H}$  suivant :

$$\eta_x(A) = \bigvee \{h \in \mathcal{H} \mid x \leq h \leq A\},$$

où  $A \in L$ . Cependant certaines propriétés ne sont plus valables dans le cas des hyperconnexions. En particulier la propriété  $\eta_x(A) \in \mathcal{H}$  n'est en général pas vérifiée et elle ne l'est pas pour les hyperconnexions associées aux ensembles flous.

**Définition 3.5.** *Sur le treillis  $(\mathcal{F}, \leq)$ , l'hyperconnexion :*

$$\mathcal{H}^1 = \{\mu \in \mathcal{F} \mid \forall (x, y) \in X^2, c_\mu^1(x, y) = \min(\mu(x), \mu(y))\},$$

*contient les ensembles flous connexes suivant la définition 3.2.*

Cette hyperconnexion est obtenue pour la mesure de recouvrement  $\perp^1$  suivante [Braga-Neto and Goutsias, 2003b] :

$$\perp^1(\{\mu_i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall \alpha \in [0, 1], \bigcap_i \{(\mu_i)_\alpha \mid (\mu_i)_\alpha \neq \emptyset\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Par souci de simplicité, nous notons 1 et 0 (plutôt que  $1_{\mathcal{F}}$  et  $0_{\mathcal{F}}$ ) les valeurs prises par  $\perp^1$ . Il est facile de vérifier que la réunion d'ensembles flous connexes dont les  $\alpha$ -coupes non vides s'intersectent est connexe au sens de la définition 3.2. Par exemple dans la figure 3.2 (a), les deux ensembles flous appartiennent à  $\mathcal{H}^1$  car ils sont connexes au sens de la définition 3.2. Puisque toutes leurs  $\alpha$ -coupes non vides s'intersectent, nous avons  $\perp^1(\mu_1, \mu_2) = 1$  et leur réunion appartient donc à  $\mathcal{H}^1$ . Les deux ensembles flous en (b) sont aussi connexes mais certaines  $\alpha$ -coupes non vides se s'intersectent pas et leur réunion n'appartient pas à  $\mathcal{H}^1$ .

Nous notons  $\eta_\nu^1(\mu)$  l'ouverture connexe d'origine  $\nu \in \mathcal{F}$  associée à cette hyperconnexion :

$$\eta_\nu^1(\mu) = \bigvee \{h \in \mathcal{H}^1 \mid \nu \leq h \leq \mu\}$$

et  $\delta_x^h$  l'impulsion de hauteur  $h$  au point  $x$  (i.e.  $\delta_x^h(y) = h$  si  $y = x$  et  $\delta_x^h(y) = 0$  sinon).

**Proposition 3.3.** *Si  $y$  appartient à un maximum régional de  $\mu$  alors  $\eta_{\delta_y^{\mu(y)}}^1(\mu)$  appartient à  $\mathcal{H}^1$  et  $\forall x \in X, \eta_{\delta_y^{\mu(y)}}^1(\mu)(x) = c_\mu^1(x, y)$ .*

Dans la figure 3.3 par exemple, l'ensemble flou 1D  $\mu$  présente deux maxima régionaux auxquels appartiennent  $x$  et  $y$ .  $\eta_{\delta_x^{\mu(x)}}^1(\mu)$  (a) et  $\eta_{\delta_y^{\mu(y)}}^1(\mu)$  (b) appartiennent à  $\mathcal{H}^1$  puisque toutes leurs  $\alpha$ -coupes sont connexes. De plus le critère max – min du degré de connexité  $c_\mu^1(x, y)$  entre  $x$  et  $y$  est atteint pour le point selle (dont le degré d'appartenance vaut 0,1) entre les maxima régionaux. Nous vérifions que  $\eta_{\delta_x^{\mu(x)}}^1(\mu)(y) = 0, 1 = c_\mu^1(x, y)$  et  $\eta_{\delta_y^{\mu(y)}}^1(\mu)(x) = 0, 1 = c_\mu^1(y, x)$ .

La mesure de recouvrement  $\perp^1$  a été étendue dans [Braga-Neto and Goutsias, 2003b] à la famille indexée par un paramètre  $\tau$  suivante :

$$\perp_\tau^1(\{\mu_i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall \alpha \leq \tau, \bigcap_i \{(\mu_i)_\alpha \mid (\mu_i)_\alpha \neq \emptyset\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Si l'ensemble de sous-ensembles sur lequel est calculé l'intersection est vide, nous utilisons la règle usuelle  $\wedge \emptyset = 1_L$  (et  $\vee \emptyset = 0_L$ ).

Considérons l'ensemble :

$$\mathcal{H}_\tau^1 = \{\mu \in \mathcal{F} \mid \forall \alpha \leq \tau, (\mu)_\alpha \in \mathcal{C}_d\}. \quad (3.3)$$

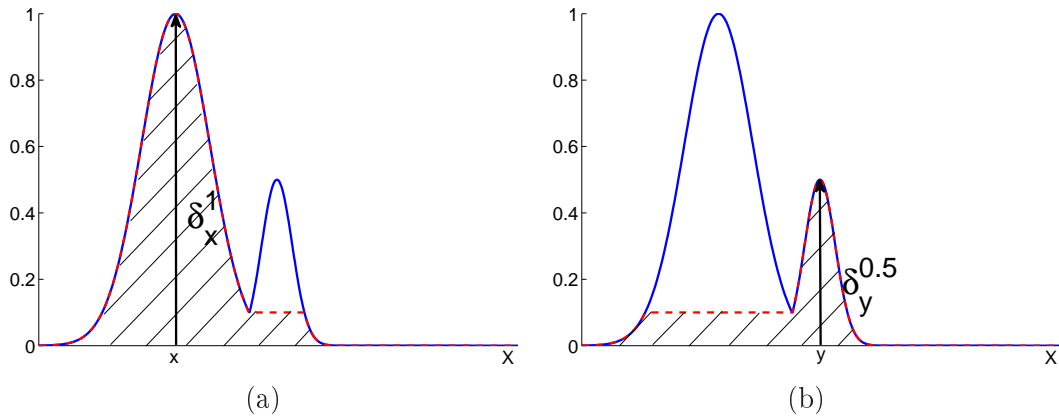


FIGURE 3.3 – Un ensemble flou 1D  $\mu$  (en trait plein). Les deux points  $x$  et  $y$  appartiennent à ses maxima régionaux et sont associés aux ouvertures connexes : (a)  $\eta_{\delta_x^1}^1(\mu)$  (en pointillés) et (b)  $\eta_{\delta_y^{0.5}}^1(\mu)$  (en pointillés).

**Proposition 3.4.** [Braga-Neto and Goutsias, 2003b] Pour chaque  $\tau$ ,  $\mathcal{H}_\tau^1$  est une hyperconnexion, i.e. vérifie toutes les conditions de la définition 3.4, pour la mesure de recouvrement  $\perp_\tau^1$ . Cet ensemble contient en particulier la famille sup-génératrice  $\Delta = \{\delta_x^t, x \in X, t \in [0, 1]\}$ . La famille  $\{\mathcal{H}_\tau^1, \tau \in [0, 1]\}$  est décroissante par rapport à  $\tau$  :  $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\tau_2}^1 \subseteq \mathcal{H}_{\tau_1}^1$ .

Lorsque  $\tau = 1$ , nous avons  $\perp_\tau^1 = \perp^1$  et  $\mathcal{H}_\tau^1 = \mathcal{H}^1$ . La famille  $\{\mathcal{H}_\tau^1, \tau \in [0, 1]\}$  est donc une extension de l'hyperconnexion  $\mathcal{H}^1$  (qui est associée à la caractérisation binaire de la connexité proposée par Rosenfeld). La connexité d'un ensemble flou peut alors être définie comme un degré suivant :

$$c^1(\mu) = \sup\{\tau \in [0, 1] \mid \mu \in \mathcal{H}_\tau^1\} = \sup\{\tau \in [0, 1] \mid \forall \alpha \leq \tau, (\mu)_\alpha \in \mathcal{C}_d\}. \quad (3.4)$$

Dans la figure 3.4, les ensembles flous en (a) et (b) présentent respectivement des degrés de connexité de 0,25 et 0,05. Cependant intuitivement l'ensemble flou en (b) semble plus connexe que celui en (a) qui semble posséder deux parties distinctes. En effet le degré de connexité  $c^1(\mu)$  dépend de la hauteur du point selle de plus faible degré d'appartenance et non de sa profondeur. Par ailleurs une petite modification de l'ensemble flou en (b) conduit à un ensemble flou totalement connexe ce qui illustre la non continuité de cette définition.

## 3.2 Une nouvelle classe de connexité

### 3.2.1 Mesure de connexité

Nous proposons dans cette section une nouvelle extension de la définition de la connexité floue donnée par Rosenfeld [Rosenfeld, 1979]. Selon la définition 3.2, un ensemble flou  $\mu$  est connexe ssi  $\forall(x, y) \in X^2, c_\mu^1(x, y) = \min(\mu(x), \mu(y))$ . Nous proposons de définir le degré de connexité de l'ensemble flou  $\mu$  comme un degré de satisfaction de cette condition.

Si nous considérons dans un premier temps deux points fixes  $x$  et  $y$ , le degré de satisfaction de l'égalité  $c_\mu^1(x, y) = \min(\mu(x), \mu(y))$  peut être caractérisé à partir des opérateurs de Lukasiewicz [Dubois and Prade, 1980] :  $\forall(a, b) \in [0, 1]^2, \mu_=(a, b) = 1 - |a - b|$ . La réécriture de cette expression pour  $a = c_\mu^1(x, y)$  et  $b = \min(\mu(x), \mu(y))$  conduit à la définition suivante.

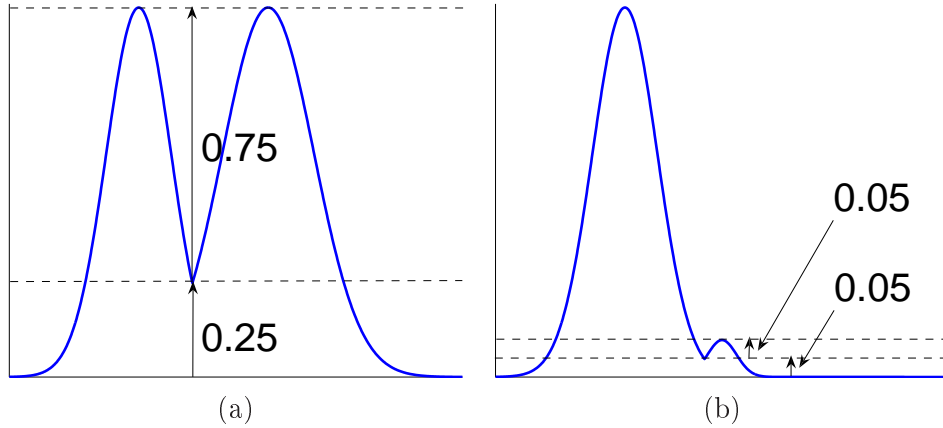


FIGURE 3.4 – (a) Le degré de connexité de l'ensemble flou 1D vaut 0,25 suivant  $c^1$ . (b) Le degré de connexité vaut 0,05 suivant  $c^1$ , bien que cet ensemble flou semble être plus connexe que celui en (a). Suivant le degré  $c^2$  (voir section 3.2.1), nous obtenons un degré de connexité de 0,25 (a) et 0,95 (b).

**Définition 3.6.** *Le degré de connexité entre deux points  $x$  et  $y$  dans un ensemble flou  $\mu$  est défini par :*

$$c_\mu^2(x, y) = 1 - |c_\mu^1(x, y) - \min(\mu(x), \mu(y))| = 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, y), \quad (3.5)$$

puisque par définition  $c_\mu^1(x, y) \leq \min(\mu(x), \mu(y))$ .

Le degré  $c_\mu^2(x, y)$  est obtenu comme 1 moins la différence entre le minimum des degrés d'appartenance de  $x$  et de  $y$  d'une part et le minimum de degré d'appartenance sur le meilleur chemin entre ces points d'autre part.

Cette mesure renvoie des valeurs dans  $[0, 1]$ . Elle est symétrique et réflexive ( $c_\mu^2(x, x) = 1$ ). Cependant elle n'est pas transitive, mais satisfait la propriété plus faible suivante.

**Proposition 3.5.** *Soit  $x_m$  tel que  $\forall x \in X, \mu(x_m) \geq \mu(x)$  (le maximum global de  $\mu$  est toujours atteint puisque nous supposons que le support de  $\mu$  est borné et que  $X$  est discret). L'inégalité suivante est satisfaite :  $\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^2(x, y) \geq \min(c_\mu^2(x, x_m), c_\mu^2(x_m, y))$ .*

Nous pouvons en déduire la propriété suivante.

**Proposition 3.6.**  *$c_\mu^2(x, y)$  atteint son minimum pour  $x$  étant un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint et  $y$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$ .*

Notons que ce minimum peut aussi être atteint pour d'autres valeurs de  $x$  et  $y$ .

La figure 3.5 illustre cette propriété. Le degré de connexité  $c_\mu^2(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  appartenant aux deux maxima régionaux de l'ensemble flou  $\mu$  (a) vaut 0,6 ( $1 - \min(1, 0,9) + c_\mu^1(x, y) = 1 - 0,9 + 0,5$ ). Un des chemins optimaux entre  $x$  et  $y$  (réalisant le critère max – min de la définition de  $c_\mu^1$ ) est affiché en bleu et le degré d'appartenance minimal sur ce chemin vaut 0,5. En (b)  $x$  n'appartient plus à un maximum régional. Le degré de connexité  $c_\mu^2(x, y)$  vaut maintenant 0,9 ( $1 - \min(1, 0,6) + 0,5$ ) ce qui est effectivement supérieur au degré de connexité obtenu pour  $x$  et  $y$  appartenant aux deux maxima régionaux de  $\mu$ .

A partir de ce degré de connexité entre deux points, nous proposons la définition suivante du degré de connexité d'un ensemble flou.

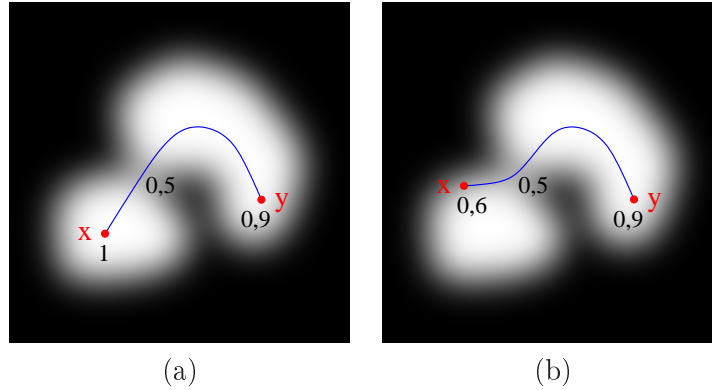


FIGURE 3.5 – (a) Le degré de connexité  $c_\mu^2(x, y)$  vaut 0,6. Un des chemins optimaux est montré en bleu. (b) Le degré de connexité  $c_\mu^2(x, y)$  vaut 0,9.

**Définition 3.7.** Le degré de connexité d'un ensemble flou  $\mu$  est défini comme :  $c^2(\mu) = \min_{(x,y) \in X^2} c_\mu^2(x, y)$ .

Pour  $x$  et  $y$  fixés,  $c_\mu^1(x, y)$  et  $c_\mu^2(x, y)$  sont obtenus pour le même point sur le même chemin de  $x$  à  $y$ , mais  $c^1(\mu)$  et  $c^2(\mu)$  ne sont pas obtenus pour les mêmes points. Intuitivement le degré de connexité d'un ensemble flou dépend maintenant de la profondeur du point selle de degré d'appartenance le plus faible. Sur les exemples de la figure 3.4, l'ensemble flou en (a) est 0,25-connexe (1-0,75), alors que l'ensemble flou en (b) est 0,95-connexe. Dans ces deux cas le minimum ( $c^2(\mu) = \min_{(x,y) \in X^2} c_\mu^2(x, y)$ ) est atteint pour  $x$  et  $y$  correspondant aux deux maxima locaux. Sur ces exemples, si l'un des deux modes est progressivement réduit vers 0, le degré de connexité  $c^2$  évolue régulièrement vers 1. Cela est exprimé formellement par le résultat suivant, en utilisant comme distance entre ensembles flous :  $d_\infty(\mu_1, \mu_2) = \sup_{(x,y) \in X^2} |\mu_1(x, y) - \mu_2(x, y)|$ .

**Proposition 3.7.** Pour  $x$  et  $y$  fixés, la fonction associant  $c_\mu^1(x, y)$  à  $\mu$  est lipschitzienne et donc continue et la fonction associant  $c_\mu^2(x, y)$  à  $\mu$  est 2-lipschitzienne respectivement à la métrique  $d_\infty$  sur  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 3.8.** La fonction associant  $c^2(\mu)$  à  $\mu$  est 2-lipschitzienne.

La figure 3.6 illustre ces définitions pour un exemple 2D. L'ensemble flou présente 3 maxima régionaux de hauteur respective 1, 0,7 et 0,6 auxquels appartiennent les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ( $A$  est un maximum global). Un des chemins optimaux entre  $A$  et  $B$  (réalisant le critère max – min de la définition de  $c_\mu^2(A, B)$ ) est montré. Le degré d'appartenance minimal sur ce chemin vaut 0,4. Nous obtenons  $c_\mu^2(A, B) = 1 - \min(1, 0,7) + 0,4 = 0,7$ . Les chemins optimaux entre  $A$  et  $C$  présentent un minimum de 0. Le degré de connexité selon  $c^1$  entre  $A$  et  $C$  est donc nul. Le degré de connexité selon  $c^2$  vaut alors  $c_\mu^2(A, C) = 1 - \min(1, 0,6) + 0 = 0,4$ <sup>4</sup>. Similairement nous obtenons  $c_\mu^2(B, C) = 1 - \min(0,7, 0,6) + 0 = 0,4$ . Puisque d'après la proposition 3.6 le degré de connexité  $c^2(\mu)$  peut être calculé à partir des maxima régionaux de  $\mu$ , nous obtenons donc  $c^2(\mu) = 0,4$ .

4. Le degré de connexité  $c_\mu^2(A, C)$  n'est pas nul même s'il n'existe aucun chemin entre  $A$  et  $C$  présentant un minimum différent de 0. Il serait nul si les degrés d'appartenance de  $A$  et  $C$  valaient 1 et si le minimum de degré d'appartenance de tous les chemins entre  $A$  et  $C$  valait 0.



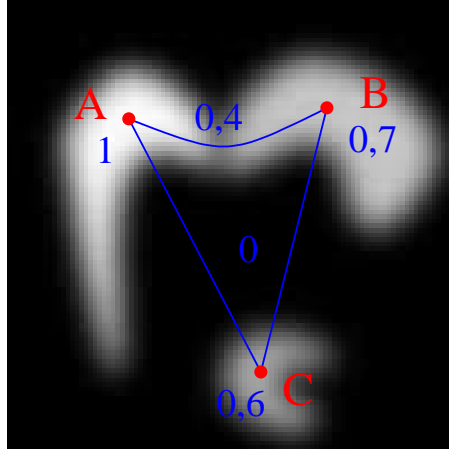


FIGURE 3.6 – Ensemble flou  $\mu$  dont le degré de connexité  $c^2(\mu)$  vaut 0,4.

### 3.2.2 Lien avec une hyperconnexion

**Définition 3.8.** Nous définissons la famille  $\mathcal{H}_\tau^2$  indiquée par le degré de connexité  $\tau$  suivante :

$$\mathcal{H}_\tau^2 = \{\mu \in \mathcal{F} \mid c^2(\mu) \geq \tau\}. \quad (3.6)$$

Chaque ensemble  $\mathcal{H}_\tau^2$  contient tous les ensembles flous dont le degré de connexité selon  $c^2$  est supérieur ou égal à  $\tau$ . Nous allons montrer que cette famille est une famille d'hyperconnexions et nous allons spécifier la famille de mesures de recouvrement associée.

Dans l'exemple de la figure 3.7, nous considérons deux ensembles flous  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . Le degré de connexité selon  $c^2$  de  $\mu_A$  présenté en (a) vaut 0,6 (le minimum est atteint pour  $x$  et  $y$  appartenant aux deux maxima locaux ; dans ce cas  $c_{\mu_A}^1(x, y) = 0,1$  et donc  $c^2(\mu_A) = 1 - \min(1, 0,5) + 0,1 = 0,6$ ). Le degré de connexité de  $\mu_B$  présenté en rouge pointillés en (b) vaut 1. Nous nous intéressons à la famille  $\mathcal{H}_{0,6}^2$ . Nous voulons obtenir une mesure de recouvrement satisfaisante pour deux ensembles flous au moins 0,6-connexes si leur réunion l'est aussi. Sur la figure (b) nous constatons que la réunion de  $\mu_A$  et  $\mu_B$  est 0,4-connexe ( $\mu_A \vee \mu_B \notin \mathcal{H}_{0,6}^2$ ) et que les deux ensembles s'intersectent pour les niveaux inférieurs ou égaux à 0,5. Cependant dans la configuration de la figure (c) la réunion est 0,7-connexe ( $\mu_A \vee \mu_B \in \mathcal{H}_{0,6}^2$ ) alors que les deux ensembles s'intersectent aussi uniquement pour les niveaux inférieurs ou égaux à 0,5.

Contrairement au cas présenté en (c), dans le cas en (b), l'ensemble  $\mu_B$  intersecte un « mode secondaire » (i.e. correspondant à un maximum régional n'étant pas un maximum global) de  $\mu_A$  et non son « mode principal » (i.e. correspondant à un maximum global). La mesure de recouvrement associée à l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$  repose donc sur le recouvrement des « modes principaux » des ensembles flous considérés. Ces derniers peuvent être obtenus par les ouvertures connexes d'origine  $\delta_{x_i}^{h_i} : \eta_{\delta_{x_i}^{h_i}}^1(\mu_i)$ , où  $\mu_i$  est l'ensemble flou,  $x_i$  un point auquel le maximum global de  $\mu_i$  est atteint et  $h_i = \mu_i(x_i)$  (selon la proposition 3.3,  $\eta_{\delta_{x_i}^{h_i}}^1(\mu_i)$  est la composante connexe de  $\mu_i$  selon  $\mathcal{H}^1$  associée à un maximum global de  $\mu_i$ ).

Nous proposons donc la mesure de recouvrement suivante, qui modélise le fait que deux ensembles flous ne se recouvrent pas s'ils ne se recouvrent pas de façon « significative » :

$$\perp_\tau^2(\{\mu_i\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall \alpha \in [0, 1], \bigcap_i \{(\eta_{\delta_{x_i}^{h_i}}^1(\mu_i))_\alpha \mid \alpha \leq h_i - 1 + \tau\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.7)$$

où  $x_i$  est un point auquel le maximum global de  $\mu_i$  est atteint.

Une famille d'ensembles flous  $\{\mu_i\}$  se recouvre selon cette mesure si les  $\alpha$ -coupes pour  $\alpha \leq h_i - 1 + \tau$  de leurs modes principaux s'intersectent. La valeur  $h_i - 1 + \tau$  nous assure que les points selles pouvant apparaître dans  $\vee\{\mu_i\}$  (si  $\forall i, c_{\mu_i}^2 \geq \tau$ ) présentent une « profondeur » maximale  $1 - \tau$ . Or si l'ensemble flou  $\vee\{\mu_i\}$  ne présente aucun point selle de « profondeur » supérieure à  $1 - \tau$  son degré de connexité selon  $c^2$  est supérieur à  $\tau$ .

Considérons à nouveau l'exemple de la figure 3.7 et  $\tau = 0,6$ . Les « modes principaux »  $\eta_{\delta_{x_i}}^1(\mu_i)$  des deux ensembles flous en (c) sont présentés en (d). La hauteur  $h_A$  de  $\mu_A$  (en bleu) vaut 1. Les  $\alpha$ -coupes de  $\eta_{\delta_{x_A}}^1(\mu_A)$  intervenant dans le calcul de la mesure de recouvrement vérifient  $\alpha \leq h_A - 1 + 0,6 = 0,6$ . De même la hauteur  $h_B$  de  $\mu_B$  (en rouge pointillés) vaut 0,8 et les  $\alpha$ -coupes à considérer vérifient  $\alpha \leq h_B - 1 + 0,6 = 0,4$ . Pour  $\alpha$  compris entre 0 et 0,4 les  $\alpha$ -coupes  $(\eta_{\delta_{x_i}}^1(\mu_i))_\alpha$  des deux ensembles s'intersectent. Pour  $\alpha$  compris entre 0,4 et 0,6, la condition  $\alpha \leq h_i - 1 + \tau$  n'est pas satisfaite par  $\mu_B$  et nous ne considérons que  $\mu_A$ . L'intersection est donc non nulle. Pour  $\alpha$  supérieur à 0,6, aucun des deux ensembles ne vérifie la condition  $\alpha \leq h_i - 1 + \tau$ , l'intersection d'une famille vide étant non nulle, la condition de recouvrement est bien satisfaite. Nous avons donc  $c^2(\mu_A) \geq 0,6$ ,  $c^2(\mu_B) \geq 0,6$  et  $\perp_{0,6}^2(\{\mu_A, \mu_B\}) = 1$  et nous vérifions que  $c^2(\mu_A \vee \mu_B) \geq 0,6$ .

Choisissons maintenant  $\tau = 0,8$  et  $\mu_A$  et  $\mu_B$  les deux ensembles flous présentés respectivement en bleu et rouge en (d). Les  $\alpha$ -coupes de  $\mu_B$  intervenant dans le calcul de la mesure de recouvrement vérifient  $\alpha \leq 0,6$ . Or les  $\alpha$ -coupes de  $\eta_{\delta_{x_A}}^1(\mu_A)$  et  $\eta_{\delta_{x_B}}^1(\mu_B)$  ne s'intersectent pas entre les niveaux 0,5 et 0,6. La mesure de recouvrement est donc nulle. Nous pouvons par ailleurs vérifier que le degré de connexité de la réunion des deux ensembles vaut 0,7. Nous avons donc dans ce cas  $c^2(\mu_A) \geq 0,8$ ,  $c^2(\mu_B) \geq 0,8$ ,  $\perp_{0,8}^2(\{\mu_A, \mu_B\}) = 0$  et  $c^2(\mu_A \vee \mu_B) < 0,8$ .

**Proposition 3.9.**  $\mathcal{H}_\tau^2$  définit une hyperconnexion pour la mesure de recouvrement  $\perp_\tau^2$ .

Lorsque  $\tau = 1$ , l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$  contient tous les ensembles flous connexes au sens de la définition 3.2 et nous avons  $\mathcal{H}_1^2 = \mathcal{H}_1^1 = \mathcal{H}^1$ . Par ailleurs la famille  $\{\mathcal{H}_\tau^2, \tau \in [0, 1]\}$  est décroissante par rapport à  $\tau$  :  $\tau_1 \leq \tau_2 \Rightarrow \mathcal{H}_{\tau_2}^2 \subseteq \mathcal{H}_{\tau_1}^2$ . Ces définitions vont nous conduire à une définition des composantes connexes plus intéressante que celle associée à  $\mathcal{H}_\tau^1$ , comme nous allons le voir.

### 3.2.3 Composantes connexes

Dans le cadre des classes de connexité, les composantes connexes d'un élément  $A$  d'un treillis  $(L, \leq)$ , relativement à une connexion  $\mathcal{C}$  sur  $L$ , sont les éléments  $C_i$  de  $\mathcal{C}$  tels que :  $C_i \leq A$  et  $\nexists C \in \mathcal{C}, C_i < C \leq A$  (i.e. les plus grands éléments de  $\mathcal{C}$  plus petits que  $A$ ) [Serra, 1998]. Les composantes connexes peuvent notamment être obtenues par les ouvertures connexes :  $\gamma_x(A)$  est la composante connexe de  $A$  incluant l'élément  $x \in \mathcal{C}$  (voir section 3.1.2).

Si nous considérons par exemple le treillis  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , l'ensemble  $A$  présenté par la figure 3.8 comporte 5 composantes connexes. La composante connexe  $\gamma_{\{x\}}(A)$  obtenue par l'ouverture connexe associée au point  $x$  est montrée en rouge.

Cette définition peut être étendue naturellement aux hyperconnexions [Braga-Neto and Goutsias, 2004]. Soit  $\mathcal{H}$  une hyperconnexion sur  $L$ . Les composantes hyperconnexes de  $A \in L$  sont les éléments  $H_i$  de  $\mathcal{H}$  tels que :  $H_i \leq A$  et  $\nexists H \in \mathcal{H}, H_i < H \leq A$ . Cependant  $\eta_x(A)$  (où  $x \in \mathcal{H}$ ) ne correspond pas nécessairement à une composante hyperconnexe de  $A$  (comme c'était le cas pour une connexion). En effet nous ne sommes pas assurés

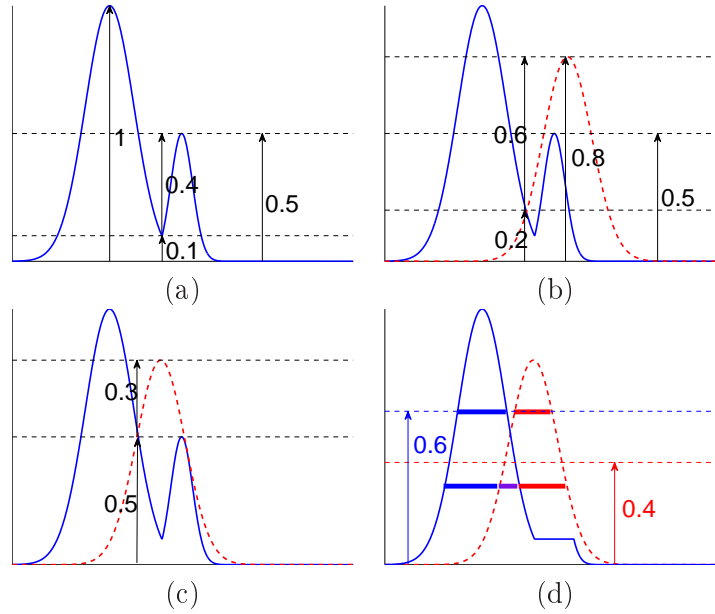


FIGURE 3.7 – (a) L'ensemble flou  $\mu_A$  comprend un « mode principal » et un « mode secondaire ». (b) L'ensemble flou  $\mu_B$  (en rouge pointillé) ne se recouvre pas avec  $\mu_A$  selon  $\perp_{0,6}^2$ . (c) Les ensembles flous se recouvrent selon  $\perp_{0,6}^2$  car les  $\alpha$ -coupes de leurs « modes principaux » (d) s'intersectent au moins pour tous les niveaux inférieurs à 0,4.

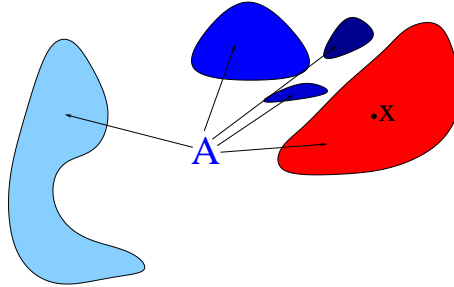


FIGURE 3.8 – Composantes connexes d'un objet  $A \subseteq X$ .

que  $\eta_x(A)$  appartienne à  $\mathcal{H}$ . La figure 3.9 présente un exemple pour lequel le résultat de l'ouverture  $\eta_\nu^1(\mu)$  (associée à l'hyperconnexion  $\mathcal{H}^1$ ) n'appartient pas à  $\mathcal{H}^1$ . Par définition  $\eta_\nu^1(\mu) = \bigvee \{h \in \mathcal{H}^1 \mid \nu \leq h \leq \mu\}$ . Puisque  $\nu \leq \mu_1 \leq \mu$  et  $\mu_1 \in \mathcal{H}^1$ , nous avons  $\mu_1 \leq \eta_\nu^1(\mu)$ . Similairement nous avons  $\mu_2 \leq \eta_\nu^1(\mu)$ . De plus  $\mu = \mu_1 \vee \mu_2$  et donc  $\eta_\nu^1(\mu) = \mu$ , mais  $\mu \notin \mathcal{H}^1$ .

La propriété plus faible suivante est néanmoins satisfaite :

**Proposition 3.10.** [Braga-Neto and Goutsias, 2003b] Soit  $x \in \mathcal{H}$  et  $A \in L$ , si  $\eta_x(A) \in \mathcal{H}$  alors  $\eta_x(A)$  est une composante hyperconnexe de  $A$  selon  $\mathcal{H}$ .

Si  $\perp$  est la mesure de recouvrement associée à l'hyperconnexion, deux composantes hyperconnexes  $H_i$  et  $H_j$  de  $A$  vérifient soit  $H_i = H_j$ , soit  $H_i \perp H_j = 0$ . De plus  $\bigvee_i H_i = A$ , où le supremum est calculé sur toutes les composantes hyperconnexes de  $A$ . Pour l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$ , nous parlons de composantes  $\tau$ -hyperconnexes et nous notons  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  l'ensemble des composantes  $\tau$ -hyperconnexes de  $\mu$ . Nous noterons de manière similaire  $\mathcal{H}^1(\mu) (= \mathcal{H}_1^2(\mu) = \mathcal{H}_1^1(\mu))$  l'ensemble des composantes hyperconnexes de  $\mu$  selon  $\mathcal{H}^1$ .

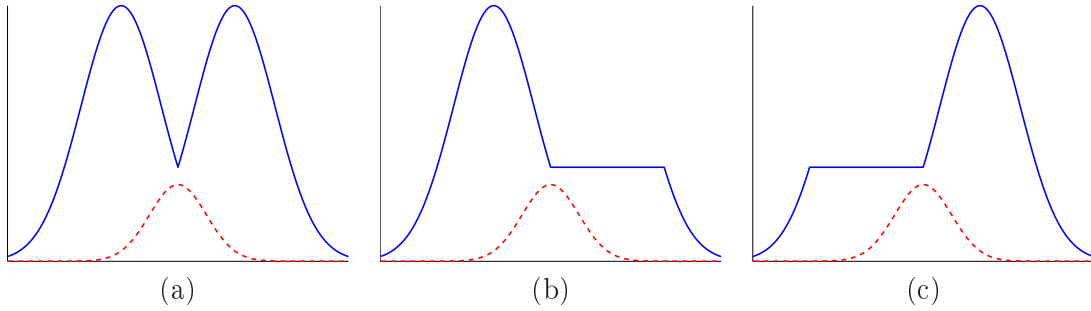


FIGURE 3.9 – (a) Deux ensembles flous 1D,  $\mu$  en bleu et  $\nu$  en pointillés rouges. Le résultat de l'ouverture  $\eta_\nu^1(\mu)$  n'appartient pas à  $\mathcal{H}^1$ . En effet les ensembles flous  $\mu_1$  (b) et  $\mu_2$  (c) sont tels que  $\nu \leq \mu_i \leq \mu$  et  $\mu_i \in \mathcal{H}^1$  et donc  $\eta_\nu^1(\mu) = \mu$ , mais  $\mu \notin \mathcal{H}^1$ .

**Proposition 3.11.** *Si  $x_i$  appartient à un maximum régional de  $\mu$  et  $h_i = \mu(x_i)$ , alors  $\eta_{\delta_{x_i}}^1(\mu)$  est une composante hyperconnexe de  $\mu$  selon  $\mathcal{H}^1$ . Si nous notons  $\{R_i\}$  l'ensemble des maxima régionaux de  $\mu$ ,  $\mathcal{H}^1(\mu)$  est isomorphe à  $\{R_i\}$ .*

Les composantes 1-hyperconnexes sont donc exactement les reconstructions géodésiques dans  $\mu$  des maxima régionaux de  $\mu$ .

**Proposition 3.12.** *Soit  $\mathcal{H}^1(\mu) = \{\mu_i\}$  l'ensemble des composantes hyperconnexes de  $\mu$  selon  $\mathcal{H}^1$  et  $\{x_i\}$  un ensemble de points appartenant aux maxima régionaux associés. Nous avons alors  $c_\mu^1(x_i, x_j) = \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x))$ .*

Ces notions sont illustrées dans la figure 3.10, pour l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$ . L'ensemble flou  $\mu$  montré en (a) possède quatre composantes 1-hyperconnexes, associées à chacun des maxima régionaux de  $\mu$  (b-e), deux composantes 0,5-hyperconnexes (f-g) et une composante 0, 1-hyperconnexe, égale à  $\mu$ . Le calcul de ces composantes hyperconnexes sera détaillé dans la section 3.2.4. Le degré de connexité de  $\mu$  vaut  $c^2(\mu) = 0,2$  et ainsi  $\mu$  est une composante connexe au sens de  $\mathcal{H}_\tau^2$  pour  $\tau \leq 0,2$ . Si nous notons  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les deux composantes 0,5-hyperconnexes montrées en (f) et (g), il est facile de vérifier que  $c^2(\mu_1) = c^2(\mu_2) = 0,5$ . Ce sont donc des éléments de  $\mathcal{H}_{0,5}^2$  ( $\tau = 0,5$ ). Soient  $x_1$  et  $x_2$  des points auxquels les maxima globaux de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont atteints. Nous avons  $h_1 = \mu_1(x_1) = h_2 = \mu_2(x_2) = 1$ . Les deux ouvertures hyperconnexes ponctuelles  $\eta_{\delta_{x_1}}^1(\mu_1)$  et  $\eta_{\delta_{x_2}}^1(\mu_2)$  (h) ne se recouvrent que pour les niveaux inférieurs ou égaux à  $\alpha = 0,2$ , ce qui est effectivement inférieur à  $h_i - 1 + \tau = 0,5$ . Cela montre bien que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ne se recouvrent pas au sens de  $\perp_\tau^2$ .

### 3.2.4 Représentation par arbre

D'un point de vue algorithmique, l'obtention des composantes hyperconnexes et leur traitement peut bénéficier d'une représentation appropriée. Puisque la manipulation des  $\alpha$ -coupes est fondamentale dans nos définitions, nous nous reposons sur une représentation par arbre des coupes [Salembier et al., 1998]. Nous considérons désormais que les valeurs de  $\alpha$  sont quantifiées de façon uniforme. Pour chaque niveau  $\alpha$  de la quantification, des nœuds de l'arbre sont associés aux différentes composantes connexes (au sens de la connexion  $\mathcal{C}_d$ ) de l' $\alpha$ -coupe de l'ensemble flou considéré. Les liens de l'arbre sont induits par la relation d'inclusion entre les composantes connexes pour deux valeurs successives de  $\alpha$ . Un ensemble flou  $\mu$  peut donc être représenté par un arbre  $T(\mu)$  avec :

- $\mathcal{V}$  l'ensemble des nœuds de l'arbre,
- $h(v)$  est la hauteur de  $v \in \mathcal{V}$ , i.e. la valeur de  $\alpha$  correspondant à ce nœud,

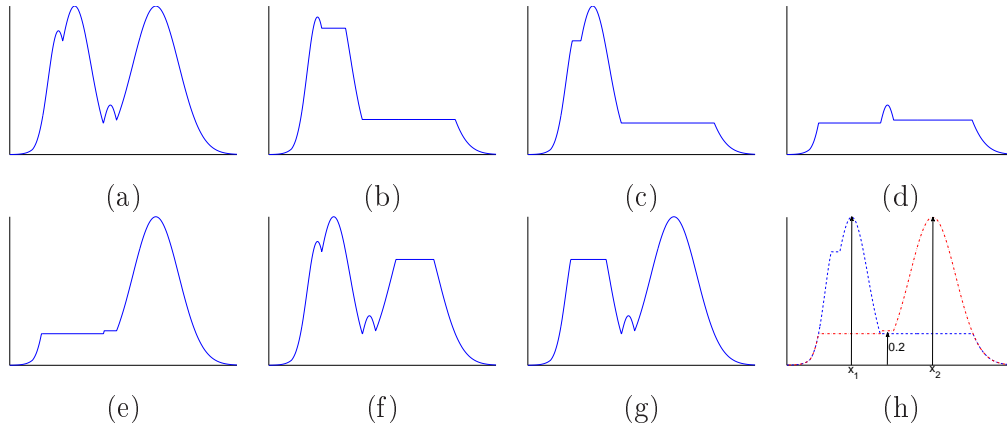


FIGURE 3.10 – (a) Ensemble flou  $\mu$  et la composante  $\tau$ -hyperconnexe pour  $\tau \leq 0,2$ . (b-e) Les quatre composantes 1-hyperconnexes. (f,g) Les deux composantes 0,5-hyperconnexes notées respectivement  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . (h)  $\eta_{\delta_{x_1}}^1(\mu_1)$  en bleu et  $\eta_{\delta_{x_2}}^1(\mu_2)$  en rouge.

- $R$  la racine de l'arbre,
- $\mathcal{L}$  l'ensemble des feuilles,
- $Pt(v)$  l'ensemble des points associés au nœud  $v$  (i.e. l'ensemble des points de la composante connexe de l' $\alpha$ -coupe associée à  $v$ ),
- $\mathcal{E}$  l'ensemble des arcs de l'arbre ( $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ ), définis à partir de la relation d'inclusion,
- $P^v(h)$ , avec  $v \in \mathcal{V}$ , l'ensemble des nœuds de  $T(\mu)$  liant la racine au nœud  $v$  et dont la hauteur est inférieure ou égale à  $h$ .

Un sous-arbre de  $T(\mu)$  est représenté par un sous-ensemble  $G \subseteq \mathcal{V}$  et nous notons  $h(G)$  la hauteur maximale de ses nœuds. Les arcs sont induits par la relation d'inclusion des ensembles de points représentés par les nœuds pour des hauteurs successives.

Plusieurs algorithmes ont été proposés pour calculer l'arbre [Vincent, 1993, Jones, 1999, Salembier et al., 1998, Meijster and Wilkinson, 2002, Lesage et al., 2006, Berger et al., 2007, Wilkinson et al., 2008]. Certaines propositions récentes [Najman and Couprie, 2006] permettent ce calcul en temps quasi-linéaire.

Ces notations sont illustrées dans la figure 3.11 pour un ensemble flou 1D. Dans cet exemple, les degrés d'appartenance sont quantifiés avec un pas de 0,1. Chaque composante connexe d'une  $\alpha$ -coupe est associée à un nœud de l'arbre. Les nœuds rouge  $v_1$  et bleu  $v_2$  de l'arbre sont ainsi associés aux régions binaires représentées en rouge  $Pt(v_1)$  et bleu  $Pt(v_2)$  (qui correspondent respectivement à deux composantes connexes des  $\alpha$ -coupes 0,6 et 0,3). Le nœud racine  $R$  de l'arbre est associé à l'ensemble de l'espace. Les feuilles  $\mathcal{L} = \{l_1, l_2\}$  de l'arbre sont associées aux maxima régionaux de l'ensemble flou. L'ensemble  $P^{l_1}(0,3)$  des nœuds liant la racine et la feuille  $l_1$  et dont la hauteur est inférieure ou égale à 0,3 est encadré en rouge. L'ensemble flou initial peut être obtenu à partir de sa représentation par arbre suivant :  $\mu(x) = \max_{v \in \mathcal{V} | x \in Pt(v)} h(v)$ , si les quantifications des degrés d'appartenance de l'arbre et de l'ensemble flou sont les mêmes. Nous supposons que nous sommes dans ce cas de figure dans la suite de ce chapitre.

Nous allons tirer parti de cette représentation par arbre pour extraire efficacement les composantes  $\tau$ -hyperconnexes d'un ensemble flou  $\mu$  et pour calculer les filtres définis dans la section 3.4.

Considérons dans un premier temps le cas  $\tau = 1$ . La proposition 3.2 nous assure qu'un ensemble flou est connexe s'il possède un maximum régional unique. Or les maxima régionaux de l'image sont isomorphes aux feuilles de l'arbre. Un ensemble flou est donc

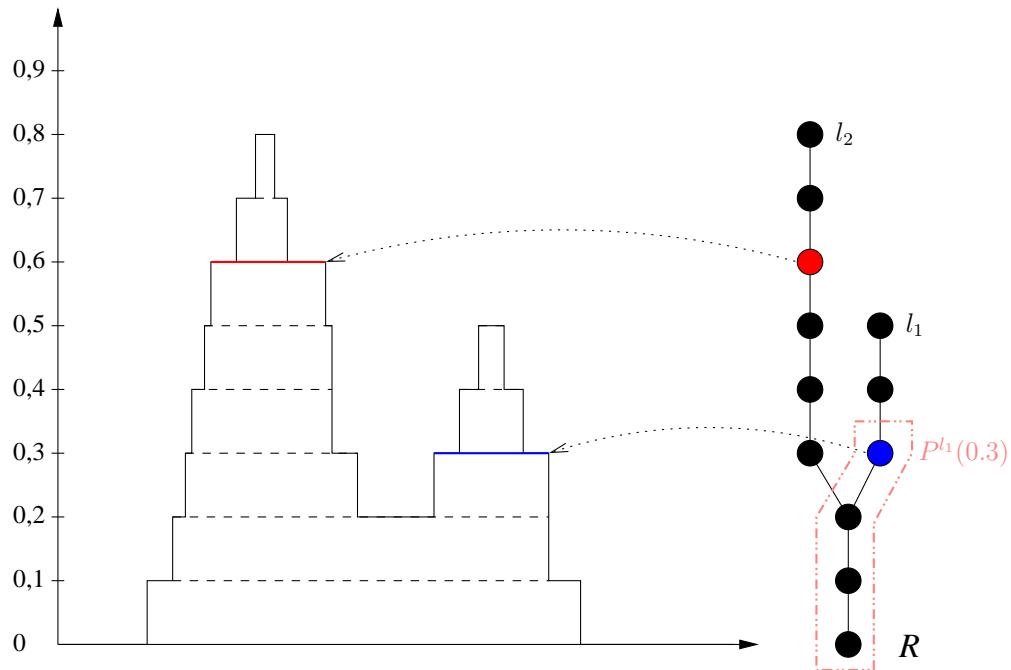


FIGURE 3.11 – Un ensemble flou 1D et l'arbre associé.

1–hyperconnexe si l'arbre associé ne comporte qu'une branche. Nous pouvons aussi montrer que les composantes 1–hyperconnexes d'un ensemble flou sont exactement les branches de sa représentation par arbre.

**Proposition 3.13.** *L'ensemble  $\mathcal{H}^1(\mu) = \{\mu_i\}$  des composantes 1–hyperconnexes de  $\mu$  est isomorphe à l'ensemble des feuilles  $\mathcal{L}$  et  $T(\mu_i) = P^{l_i}(h(l_i))$ , où  $l_i$  est la feuille associée à  $\mu_i$ .*

Les composantes 1-hyperconnexes d'un ensemble flou peuvent donc être obtenues efficacement par des opérations simples sur l'arbre des coupes associé.

L'extraction des composantes  $\tau$ –hyperconnexes pour  $\tau \neq 1$  nous amène à extraire des sous-arbres plus complexes. Ces sous-arbres sont « complets » en ce sens que lorsqu'un nœud appartient au sous-arbre tous ses ascendants aussi. Nous considérons donc l'ensemble des sous-arbres  $S_{T(\mu)}$  de  $T(\mu)$  tels que si  $S \in S_{T(\mu)}$ , alors  $\forall v \in S, P^v(h(v)) \subseteq S$ . Cet ensemble  $S_{T(\mu)}$  est muni de la relation d'ordre partiel suivante :

$$\forall (S_1, S_2) \in S_{T(\mu)}, S_1 \leq S_2 \Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{V}, v \in S_1 \Rightarrow v \in S_2.$$

$(S_{T(\mu)}, \leq)$  est un treillis complet. L'infimum  $\bigwedge$  et le supremum  $\bigvee$  associés sont respectivement définis comme l'intersection et l'union ensembliste des sous-arbres définis comme ensembles de nœuds. Nous avons  $\forall l \in \mathcal{L}, \forall h \in [0, 1], P^l(h) \in S_{T(\mu)}$  et la famille  $\{P^l(h) \mid l \in \mathcal{L}, h \in [0, 1]\}$  est sup-génératrice dans  $(S_{T(\mu)}, \leq)$ . Tout sous-arbre  $S \in S_{T(\mu)}$  peut donc être écrit comme :  $S = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_S^l)$ , où  $h_S^l$  correspond à la hauteur maximale du sous-arbre  $S$  sur la branche correspondant à la feuille  $l$ . Le supremum  $\bigvee$  et l'infimum  $\bigwedge$  peuvent donc être reformulés respectivement suivant :

$$\bigvee_i S_i = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\max_i h_{S_i}^l),$$

$$\bigwedge_i S_i = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\min_i h_{S_i}^l).$$

De plus nous notons  $i^{l_1, l_2} = h(P^{l_1}(1) \wedge P^{l_2}(1))$  la hauteur du sous-arbre commun aux branches associées aux feuilles  $l_1$  et  $l_2$ .

La figure 3.12 illustre ces définitions. L'arbre  $T(\mu)$  (b) représentant l'ensemble flou (a) (les degrés d'appartenance sont quantifiés avec un pas de 0,2) a quatre feuilles  $\mathcal{L} = \{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ . Nous avons par exemple  $i^{l_1, l_2} = 0$  et  $i^{l_2, l_3} = 0,6$ . Un sous-arbre  $S_1 \in S_{T(\mu)}$  est représenté par un ensemble de nœuds (c) (en rouge). Ce sous-arbre peut être exprimé comme  $S_1 = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_{S_1}^l)$ . Les ensembles de nœuds  $P^l(h_{S_1}^l)$  associés aux feuilles  $l_1, l_2, l_3, l_4$  sont encadrés respectivement en pointillés rouge, jaune, bleu et vert et nous avons  $h_{S_1}^{l_1} = 0,4$ ,  $h_{S_1}^{l_2} = 0,8$ ,  $h_{S_1}^{l_3} = 0,6$  et  $h_{S_1}^{l_4} = 0,4$ . Un autre sous-arbre  $S_2$  est présenté en (d). Le supremum  $S_1 \vee S_2$  (e) est obtenu soit comme la réunion de  $S_1$  et  $S_2$  (de l'ensemble des nœuds), soit suivant  $\bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\max(h_{S_1}^l, h_{S_2}^l))$ . Les ensembles  $P^l(\max(h_{S_1}^l, h_{S_2}^l))$  sont encadrés en (e). Similairement l'infimum  $S_1 \wedge S_2$  (f) est obtenu soit comme l'intersection ensembliste, soit suivant  $\bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\min(h_{S_1}^l, h_{S_2}^l))$ .

**Proposition 3.14.** *Le degré de connexité  $c^2(\mu)$  d'un ensemble flou  $\mu$  peut être obtenu à partir de sa représentation par arbre suivant :  $c^2(\mu) = 1 - \max_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (\min(h(l_1), h(l_2)) - i^{l_1, l_2})$ .*

**Proposition 3.15.** *Soient  $\mu \in \mathcal{F}$ ,  $G \in S_{T(\mu)}$  et  $\nu$  l'ensemble flou associé à  $G$ . Nous avons :  $c^2(\nu) = \min(1, 1 - \max_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (\min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) - i^{l_1, l_2}))$ .*

Nous définissons les opérateurs suivants sur  $S_{T(\mu)} \times \mathbb{R}^+$  :

$$\varepsilon_{T(\mu)}(S, r) = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\max(0, h_S^l - r)),$$

$$\delta_{T(\mu)}(S, r) = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\min(h(l), h_S^l + r)).$$

Le premier correspond intuitivement à une contraction du sous-arbre  $S$  dont la longueur des branches est réduite de  $r$  (notons que ce n'est pas une érosion car il ne commute pas avec l'infimum). Le second est une dilatation<sup>5</sup> de taille  $r$  du sous-arbre  $S$ .

Considérons à nouveau l'exemple de la figure 3.12. La dilatation  $\delta = \delta_{T(\mu)}(S_1, 0,4)$  de  $S_1$  (c) est présentée en (g). Elle est obtenue en accroissant la hauteur de  $S_1$  de 0,4 sur toutes les branches. Les nœuds ajoutés sont montrés en bleu et les ensembles  $P^l(\min(h(l), h_{S_1}^l + r))$  sont encadrés. Nous avons exactement  $h_\delta^l = \min(h(l), h_{S_1}^l + r)$  (voir la preuve de la proposition 3.16). La contraction  $\varepsilon = \varepsilon_{T(\mu)}(S_1, 0,4)$  est montrée en (h) (ses nœuds sont colorés en rouge). Elle est obtenue en réduisant la hauteur de toutes les branches de 0,4. Les ensembles  $P^l(\max(0, h_{S_1}^l - 0,4))$  sont encadrés en (h). La contraction est alors obtenue comme le supremum de ces ensembles. Contrairement au cas de la dilatation, l'égalité  $h_\varepsilon^l = \max(0, h_{S_1}^l - 0,4)$  n'est en général pas vérifiée et nous avons  $h_\varepsilon^l \geq \max(0, h_{S_1}^l - 0,4)$  : par exemple  $h_\varepsilon^{l_4} = 0,2$  et  $\max(0, h_{S_1}^{l_4} - 0,4) = 0$ . Les ensembles  $P^l(h_\varepsilon^l)$  sont montrés en (i) et peuvent être comparés à ceux en (h).

**Proposition 3.16.** *Si  $G \in S_{T(\mu)}$  représente un sous-ensemble flou  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$ , alors  $\delta_{T(\mu)}(G, \nu)$  représente un ensemble flou  $\max(0, \tau - \nu)$ -hyperconnexe et  $\varepsilon_{T(\mu)}(G, \nu)$  un ensemble flou  $\min(1, \tau + \nu)$ -hyperconnexe.*

5. Pour montrer que cet opérateur commute avec le supremum nous pouvons vérifier que les hauteurs des sous-arbres  $\delta^1 = \delta_{T(\mu)}(\bigvee_i S_i, r)$  et  $\delta^2 = \bigvee_i \delta_{T(\mu)}(S_i, r)$  sont égales sur chaque branche de l'arbre  $T(\mu)$ . Nous avons  $h_{\bigvee_i S_i}^l = \max_i(h_{S_i}^l)$  et donc  $h_{\delta^1}^l = \min(h(l), \max_i(h_{S_i}^l + r)) = \max_i \min(h(l), h_{S_i}^l + r)$ . Par ailleurs nous avons  $h_{\delta_{T(\mu)}(S_i, r)}^l = \min(h(l), h_{S_i}^l + r)$  et donc  $h_{\delta^2}^l = \max_i \min(h(l), h_{S_i}^l + r)$ .

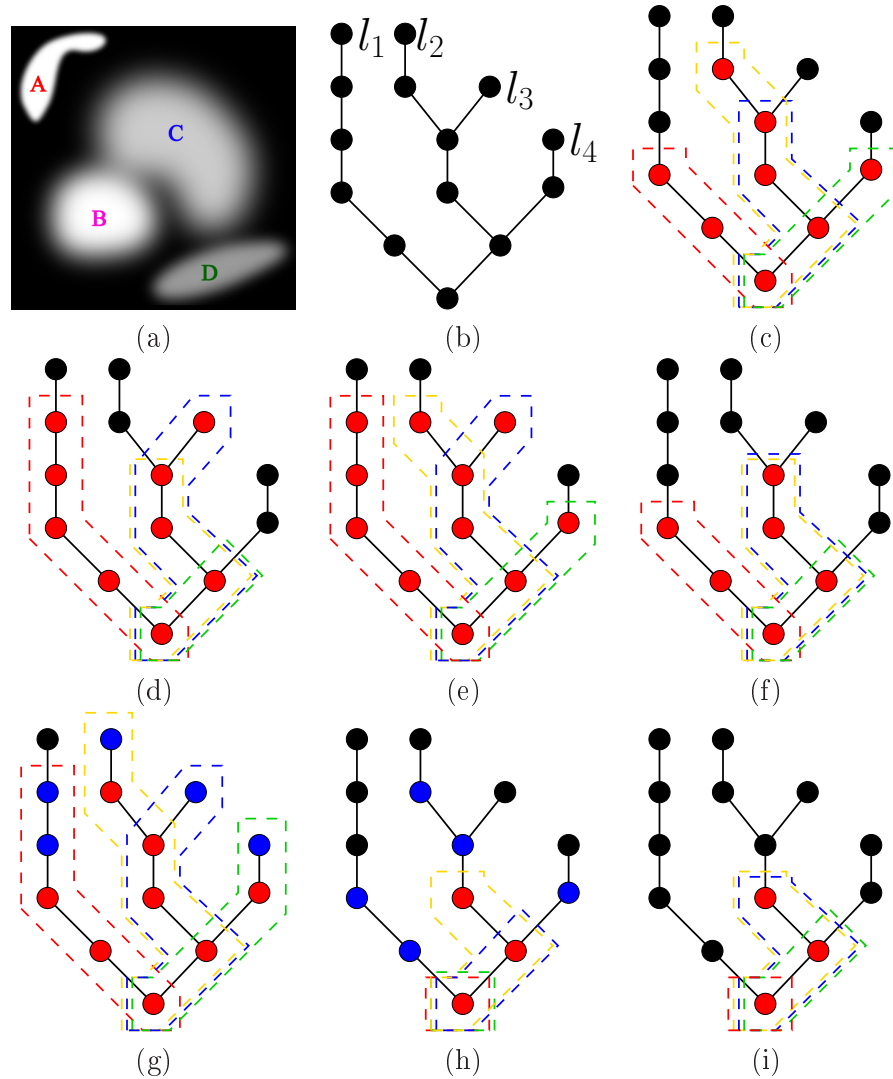


FIGURE 3.12 – (a) Ensemble flou  $\mu$ . (b) Arbre associé  $T(\mu)$  (les  $\alpha$ -coupes sont quantifiées avec un pas de 0,2). (c) Un sous-arbre  $S_1 \in S_{T(\mu)}$  :  $S_1 = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_{S_1}^l)$ . Les ensembles de nœuds  $P^l(h_{S_1}^l)$  associés aux feuilles  $l_1, l_2, l_3$  et  $l_4$  sont respectivement encadrés en rouge, jaune, bleu et vert. (d) Un autre sous-arbre  $S_2 \in S_{T(\mu)}$ . (e)  $S_1 \vee S_2$ . (f)  $S_1 \wedge S_2$ . (g)  $\delta_{T(\mu)}(S_1, 0, 4)$  (les nœuds ajoutés sont présentés en bleu). (h)  $\varepsilon_{T(\mu)}(S_1, 0, 4)$  (les nœuds supprimés sont présentés en bleu). Les ensembles  $P^l(\max(0, h_{S_1}^l - 0, 4))$  intervenant dans le calcul sont encadrés dans cette figure et peuvent être comparés en (i) à ces ensembles obtenus comme en (c).

**Proposition 3.17.** *L'ensemble des composantes  $\tau$ -hyperconnexes  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  de  $\mu \in \mathcal{F}$  est isomorphe à l'ensemble des feuilles de  $\varepsilon_{T(\mu)}(T(\mu), 1 - \tau)$ . Une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$  peut être obtenue par une dilatation de taille  $(1 - \tau)$  d'une composante 1-hyperconnexe de  $\varepsilon_{T(\mu)}(T(\mu), 1 - \tau)$ .*

Si un ensemble flou présente  $k$  composantes  $\tau$ -hyperconnexes, leur extraction est réalisée par une contraction et  $k$  dilatations. Puisque la contraction et la dilatation présentent une complexité en  $O(|\mathcal{V}|)$ , l'extraction de toutes les composantes  $\tau$ -hyperconnexes est réalisée en  $O((k + 1)|\mathcal{V}|)$  (une fois que l'arbre est construit). Les filtres définis dans la section 3.4 reposent sur cette extraction et leur complexité comprend ce coût.



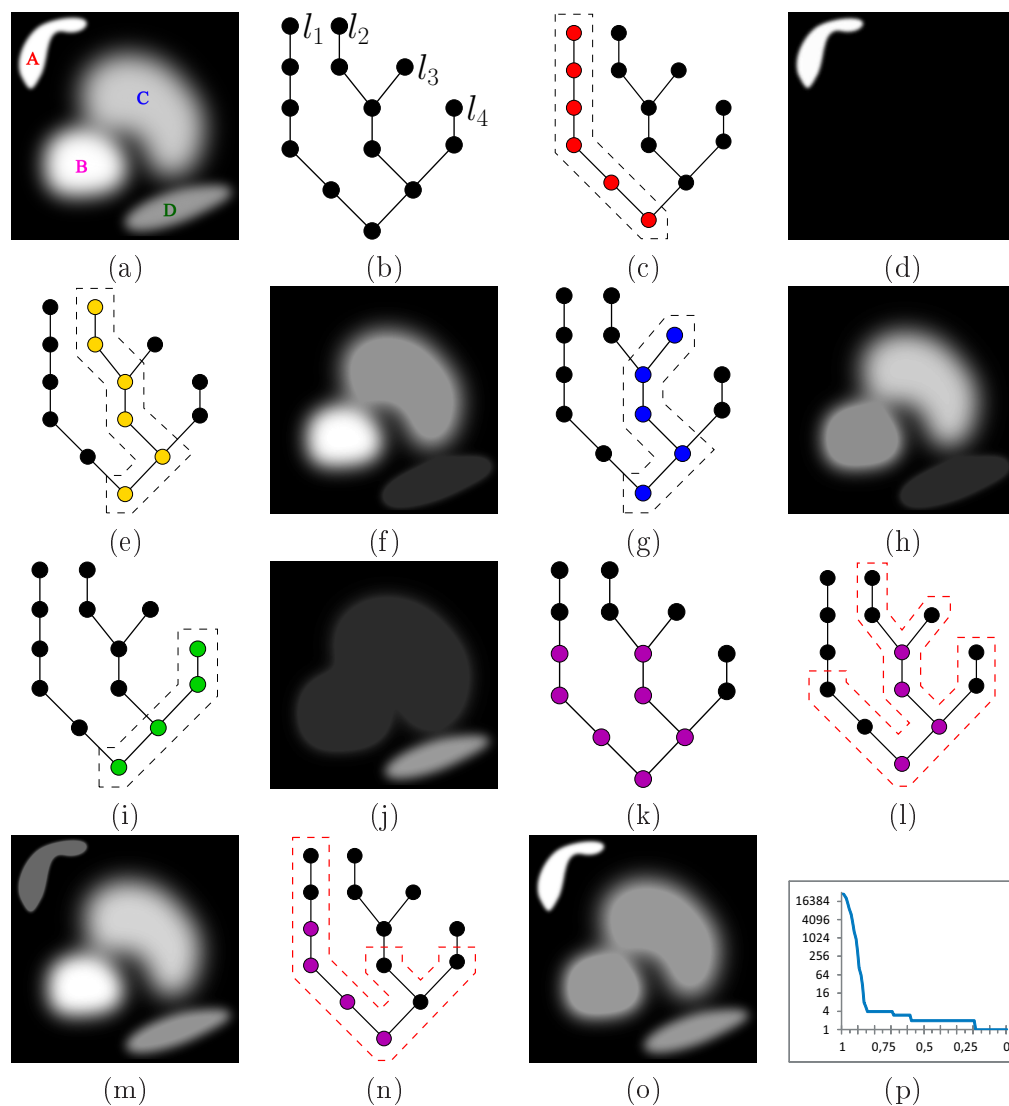


FIGURE 3.13 – (a) Ensemble flou. (b) Arbre associé (les  $\alpha$ -coupes sont quantifiées avec un pas de 0,2). Les quatre composantes 1–hyperconnexes (d), (f), (h) et (j) et les sous-arbres associés (c), (e), (g) et (i). (k) Sous-arbre correspondant à la contraction de taille 0,4 (en mauve). (l) Une composante 0,6–hyperconnexe (entourée en pointillés rouges) obtenue par dilatation d’une composante 1–hyperconnexe (en mauve) de la contraction et l’image correspondante (m). Une autre composante 0,6–hyperconnexe (n) et l’arbre associé (o). (p) Nombre de composantes  $\tau$ –hyperconnexes de l’ensemble flou (a) corrompu par un bruit gaussien en fonction de  $\tau$ .

La figure 3.13 montre en (b) l’arbre  $T(\mu)$  associé à l’ensemble flou (a) en choisissant un pas de quantification de 0,2. Les quatre composantes 1–hyperconnexes (c–j) correspondent aux différents maxima régionaux de (a). Les résultats d’une contraction de taille 0,4 de  $T(\mu)$  et de la dilatation de taille 0,4 d’une de ses composantes 1–hyperconnexes sont montrés respectivement en (k) et (l). Le sous-arbre obtenu correspond exactement à une composante 0,6–hyperconnexe (m) de  $\mu$ . La deuxième composante 0,6–hyperconnexe est montrée en (o) et l’arbre associé en (n). Si l’ensemble flou de la figure 3.13 (a) est dégradé par un bruit gaussien de variance 0,05, nous obtenons plus de 20000 composantes 1–hyperconnexes. L’évolution du nombre de composantes  $\tau$ –hyperconnexes en fonction de  $\tau$  est affiché en (k),

illustrant l'effet de regroupement.

### 3.3 Définition de la contrainte liée à l'a priori de connexité

**Définition de la contrainte** Ces définitions nous permettent de modéliser la contrainte de connexité utilisée dans notre réseau de contraintes. Dans la section 2.4.4 nous avons défini cette contrainte pour un objet  $A$  suivant :

$$\begin{aligned} rel(C_A^{conn1}) : \mathcal{D}(A) &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mu &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \in \mathcal{H}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des ensembles flous connexes que nous n'avons pas spécifié. Les hyperconnexions  $\mathcal{H}^1$ ,  $\mathcal{H}_\tau^1$  ou  $\mathcal{H}_\tau^2$  (pour un paramètre  $\tau$  fixé) peuvent convenir. Nous choisissons l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$  proposée dans ce chapitre pour un paramètre  $\tau$  grand. Le choix d'un degré  $\tau < 1$  permet une tolérance aux erreurs de faible amplitude.

**Extension pour la prise en compte de critères flous** Nous proposons une seconde formulation que nous n'utilisons pas dans le réseau de contraintes mis en œuvre mais qui pourrait l'être dans un réseau prenant en compte des contraintes floues. Nous supposons qu'un ensemble flou  $\mu$  satisfait la contrainte de connexité si  $\max_{x \in X} \mu(x) \leq c^2(\mu)$ , où  $c^2$  est le degré de connexité défini par l'équation 3.7. Cette formulation limite le degré d'appartenance maximal de  $\mu$  en fonction du degré de satisfaction de la contrainte de connexité (modélisée simplement par le degré de connexité  $c^2$ ). Un ensemble flou peut satisfaire ce critère, sans être totalement connexe, si son degré d'appartenance maximal est inférieur à 1. Nous notons  $C_A^{conn2}$  cette contrainte :

$$\begin{aligned} rel(C_A^{conn2}) : \mathcal{D}(A) &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mu &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \max_{x \in X} \mu(x) \leq c^2(\mu), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ce type de formulation n'est pas utilisée dans notre réseau de contraintes puisque toutes les contraintes sont définies en supposant que les degrés d'appartenance représentent une imprécision à la frontière de l'objet et non une satisfaction partielle des relations. Ces deux notions d'appartenance graduelle ne peuvent en effet pas être directement assimilées. Dans le premier cas les degrés d'appartenance intermédiaires sont présents uniquement à la frontière de l'objet alors que dans le second cas si une relation est partiellement satisfaite l'appartenance partielle concerne toute la région et pas uniquement sa frontière. Toutes les contraintes devraient donc être reformulées pour obtenir un tout cohérent.

**Illustration** Nous illustrons ces deux formulations dans la figure 3.14. La satisfaction des contraintes  $C_A^{conn1}$  (pour  $\tau$  égal à 1, 0,75 et 0,5) et  $C_A^{conn2}$  par les ensembles flous présentés est donnée dans la table 3.1. Notons que les ensembles flous (d) et (e) dont le degré de connexité selon  $c^2$  vaut 0,75 satisfont la contrainte  $C_A^{conn1}$  lorsque  $\tau \geq 0,75$  mais que l'ensemble (e) satisfait la contrainte  $C_A^{conn2}$  alors que l'ensemble (d) qui présente un degré d'appartenance maximal plus élevé ne la satisfait pas.

La formulation  $C_A^{conn1}$  permet d'intégrer la contrainte de connexité de façon paramétrable dans notre réseau. En fonction du degré  $\tau$  utilisé cette contrainte est plus ou moins sélective. En choisissant une valeur légèrement inférieure à 1, nous obtenons ainsi une

contrainte tolérante à des variations de faible amplitude du degré d'appartenance et donc un comportement plus robuste dans le processus de propagation.

La formulation  $C_A^{conn2}$  est une ébauche de contrainte floue. Cette fois la contrainte ne dépend plus du paramètre  $\tau$  mais le degré de connexité imposé dépend de la hauteur de l'ensemble flou. Nous pouvons ainsi nous affranchir du seuil strict sur le degré de connexité de la formulation  $C_A^{conn1}$ .

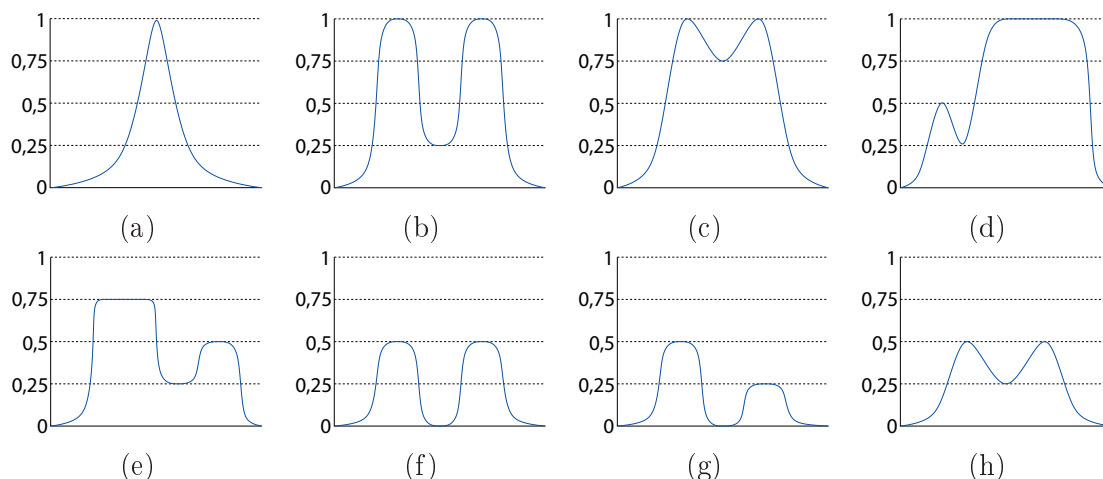


FIGURE 3.14 – (a-h) Huit ensembles flous 1D. La table 3.1 précise s'ils satisfont les contraintes  $C_A^{conn1}$  et  $C_A^{conn2}$ .

TABLE 3.1 – Pour chacun des ensembles flous présentés par la figure 3.14, nous présentons la satisfaction des contraintes  $C_A^{conn1}$  (pour différents paramètres  $\tau$ ) et  $C_A^{conn2}$ .

ensemble flou	$c^2(\mu)$	$C_A^{conn1}$			$C_A^{conn2}$
		$\tau = 1$	$\tau = 0,75$	$\tau = 0,5$	
(a)	1	oui	oui	oui	oui
(b)	0,25	non	non	non	non
(c)	0,75	non	oui	oui	non
(d)	0,75	non	oui	oui	non
(e)	0,75	non	oui	oui	oui
(f)	0,5	non	non	oui	oui
(g)	0,25	non	oui	oui	oui
(h)	0,25	non	oui	oui	oui

**Définitions des propagateurs** Pour intégrer cette contrainte dans un processus de propagation, nous devons obtenir des propagateurs. La suite de cette section en propose une définition générale. Leur mode de calcul est abordé dans la section 3.4 et, dans la section 3.5, nous spécifions plusieurs propagateurs que nous utilisons dans le processus de reconnaissance.

Soit  $A$  un objet connexe de domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$ . L'ensemble des valeurs de ce domaine satisfaisant une contrainte  $C_A^{conn}$  est exprimé suivant :

$$\{\nu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A} \text{ et } rel(C_A^{conn})(\nu) = 1\}. \quad (3.8)$$

Les bornes du domaine de  $A$  peuvent donc être mises à jour suivant :

$$\begin{aligned}\underline{A}' &= \bigwedge \{\nu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \bar{A} \text{ et } \text{rel}(C_A^{\text{conn}})(\nu) = 1\}, \\ \bar{A}' &= \bigvee \{\nu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \bar{A} \text{ et } \text{rel}(C_A^{\text{conn}})(\nu) = 1\}.\end{aligned}$$

En général la borne inférieure du domaine reste inchangée. De plus nous ne disposons pas de méthode permettant de calculer efficacement cet opérateur. Nous nous intéressons donc uniquement à la mise à jour de la borne supérieure et au calcul de l'opérateur donné ci-dessus. Nous précisons son calcul pour les deux formulations  $C_A^{\text{conn}1}$  et  $C_A^{\text{conn}2}$  données dans cette section.

Par ailleurs nous définissons aussi des propagateurs pour la combinaison de contraintes de connexité et d'autres contraintes telles que l'adjacence ou le volume (cf section 2.6). Nous notons une telle contrainte  $C_A$  et  $f_C : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$  la relation associée (l'inégalité  $\underline{A} \leq \nu$  est supposée représentée par cette relation). Nous définissons alors l'opérateur  $\xi$  suivant :

$$\xi(\bar{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{F} \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } \text{rel}(C_A^{\text{conn}})(\nu) = 1 \text{ et } f_C(\nu) = 1\}, \quad (3.9)$$

qui correspond à la mise à jour de la borne supérieure du domaine de  $A$  suivant la conjonction d'une contrainte de connexité et de  $C_A$ . Cet opérateur est idempotent, croissant et anti-extensif. Il s'agit donc d'une ouverture.

Nous considérerons en particulier des contraintes  $C_A$  prenant la forme  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu)$ , où  $\mu_C$  prend des valeurs dans  $[0, 1]$ . Nous parlerons dans ce cas de critère flou.

La section suivante précise la formulation et le mode de calcul du filtre  $\xi(\bar{A})$  pour les contraintes de connexité  $C_A^{\text{conn}1}$  et  $C_A^{\text{conn}2}$  ainsi que pour des contraintes  $C_A$  exprimées par un critère binaire  $f_C(\nu) = 1$  ou sous la forme  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu)$ . Nous montrons que ce calcul est réalisable lorsque le critère ( $f_C$  ou  $\mu_C$ ) est croissant. Dans ce cas les filtres obtenus correspondent en quelque sorte à des filtres connexes et notamment à des ouvertures connexes.

## 3.4 Filtres connexes

### 3.4.1 Définitions générales

Les filtres connexes ont été initialement définis pour les images binaires puis étendus aux images en niveaux de gris. Ces filtres peuvent être caractérisés par deux définitions équivalentes, la première reposant sur la notion de partition.

**Définition 3.9.** [Heijmans, 1999] Une fonction  $P : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  est une partition de  $X$  si :

- $\forall x \in X, x \in P(x)$ ,
- $\forall (x, y) \in X^2, P(x) = P(y)$  ou  $P(x) \cap P(y) = \emptyset$ .

Si  $X$  est muni d'une connexion  $\mathcal{C}$ , une partition  $P$  est connexe si  $\forall x \in X, P(x) \in \mathcal{C}$ . Une telle partition peut être obtenue à partir des ouvertures connexes ponctuelles associées à un objet  $A \subseteq X : P^A(x) = \gamma_x(A) \cup \gamma_x(\bar{A})$  ( $\gamma_x(A)$  ou  $\gamma_x(\bar{A})$  est vide). Nous pouvons définir une relation d'ordre partiel entre les partitions :

$$P_1 \leq P_2 \text{ si } \forall x \in X, P_1(x) \subseteq P_2(x).$$

Nous disons dans ce cas que  $P_1$  est plus fine que  $P_2$ , ou que  $P_2$  est plus grossière que  $P_1$ .

**Définition 3.10.** [Heijmans, 1999] Un opérateur binaire  $\psi$  est connexe si pour tout  $A \subseteq X$  la partition associée  $P^A$  est plus fine que la partition  $P^{\psi(A)}$ .

Les filtres connexes peuvent également être définis comme suit :

**Définition 3.11.** [Heijmans, 1999] Un opérateur binaire  $\psi$  est connexe si la différence symétrique  $A \Delta \psi(A)$  est composée de composantes connexes de  $A$  ou de  $\bar{A}$ .

Ces définitions ont tout d'abord été proposées dans le cas binaire. Dans le cas des images en niveaux de gris la définition précédente peut être étendue en considérant les plus grandes régions connexes de niveau de gris constant (zones plates ou «flat zones») :

**Définition 3.12.** [Salembier and Serra, 1995] Un opérateur  $\psi$  défini sur les fonctions de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  est connexe si quelle que soit la fonction  $f$ , la partition en zones plates de  $\psi(f)$  est moins fine que la partition en zones plates de  $f$ .

La figure 3.15 illustre un tel filtre. L'image binaire (a) est filtrée par un filtre connexe (b) et par un filtre non connexe (c). L'application du filtre connexe n'introduit pas de nouveaux contours ni ne déplace les contours existants.

Aucune définition pour les filtres connexes s'appliquant aux ensembles flous n'a à notre connaissance été proposée à ce jour. Une première approche peut consister à appliquer la contrainte sur toutes les  $\alpha$ -coupes.

**Définition 3.13.** Un opérateur  $\psi$  défini sur  $\mathcal{F}$  est connexe si  $\forall \mu \in \mathcal{F}, \forall \alpha \in [0, 1], P^{(\psi(\mu))_\alpha}$  est moins fine que  $P^{(\mu)_\alpha}$ .

Cependant la notion de connexité utilisée par cette définition est la connexité sous-jacente sur  $X$  et non la connexité des ensembles flous. Comme nous l'avons discuté précédemment, la connexité des ensembles flous n'est pas représentée de façon appropriée par une connexion mais par une hyperconnexion. Les définitions proposées ci-dessus et notamment la définition par partition ne peuvent pas être transposées directement.

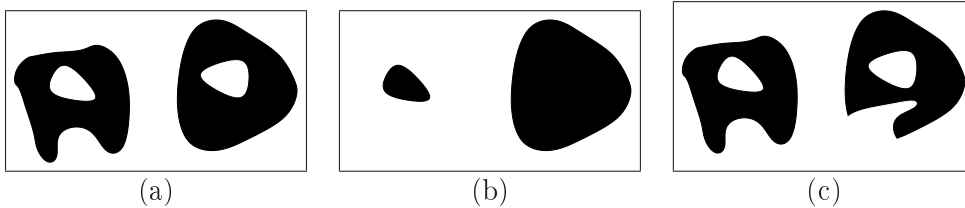


FIGURE 3.15 – (a) Image binaire originale. (b) Exemple de résultat après l'application d'un filtre connexe et d'un filtre non connexe (c).

### 3.4.2 Ouvertures fondées sur un degré de connexité fixe

#### Avec un critère binaire

Considérons dans un premier temps la contrainte de connexité  $C_A^{conn1}$  définie par l'équation 3.8 et une contrainte  $C_A$  associée à un critère binaire  $f_C : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ . L'ouverture donnée par l'équation 3.9 peut alors être réécrite suivant :

$$\xi_{f_C}(\bar{A}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } f_C(\nu) = 1 \}. \quad (3.10)$$

Sans conditions sur  $f_C$ , le calcul de cet opérateur requiert l'évaluation du critère sur tous les éléments de  $\mathcal{H}_\tau^2$  plus petits que  $\bar{A}$  et présente une complexité exponentielle. Pour éviter

- calcul de l'arbre  $T(\bar{A})$ ,
- calcul de la contraction  $\varepsilon_{T(\bar{A})}(T(\bar{A}), 1 - \tau)$ ,
- initialisation du sous-arbre résultant  $Res$  par le nœud racine  $R$  de  $T(\bar{A})$ ,
- pour chaque feuille  $\varepsilon_i$  de  $\varepsilon_{T(\bar{A})}(T(\bar{A}), 1 - \tau)$ ,
  - extraction de la composante  $\tau$ -hyperconnexe  $G_i$  comme la dilatation de taille  $1 - \tau$  de  $\varepsilon_{T(\bar{A})}(T(\bar{A}), 1 - \tau)$ ,
  - calcul du critère binaire  $f_C(G_i)$ ,
  - si le critère est satisfait, ajout de  $G_i$  à  $Res$ ,
- renvoi de l'ensemble flou  $\xi(\bar{A})$  associé au sous-arbre  $Res$ .

FIGURE 3.16 – Algorithme utilisé pour calculer  $\xi(\bar{A})$ .

cela, nous pouvons tirer parti du fait que  $\forall \nu \in \mathcal{H}_\tau^2, \nu \leq \bar{A} \Rightarrow \exists \mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\bar{A}), \nu \leq \mu_i$ . Ainsi si le critère  $f_C$  est croissant, le calcul de  $\xi(\bar{A})$  peut être réalisé sur les composantes  $\tau$ -hyperconnexes de  $\bar{A}$  :

$$\xi_{f_C}(\bar{A}) = \bigvee \{ \mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\bar{A}) \mid f_C(\mu_i) = 1 \}. \quad (3.11)$$

Ce filtre ne traite que les composantes connexes de  $\bar{A}$  et correspond intuitivement à une extension des ouvertures connexes définies pour les images binaires [Breen and Jones, 1996, Heijmans, 1997].

Ce filtre peut être calculé efficacement en utilisant la représentation par arbre. La proposition 3.17 nous assure en effet un isomorphisme entre les feuilles de  $\varepsilon_{T(\bar{A})}(T(\bar{A}), 1 - \tau)$  et les composantes  $\tau$ -hyperconnexes de  $\bar{A}$ . Le calcul peut donc être efficacement réalisé par l'algorithme décrit dans la figure 3.16, où l'opération la plus coûteuse est le calcul de l'arbre [Najman and Couprie, 2006].

Plus précisément, la complexité en temps de calcul de ce filtre est en  $O((k + 1)|\mathcal{V}| + kC_{f_C} + C_T)$ , où  $C_T$  est le coût de construction de l'arbre,  $C_{f_C}$  est le coût de calcul du critère et  $k$  est le cardinal de  $\mathcal{H}_\tau^2(\bar{A})$ . Le calcul du critère peut être coûteux puisqu'il doit être réalisé  $k$  fois et qu'il implique en général un calcul sur tous les nœuds des composantes  $\tau$ -hyperconnexes (un nœud peut appartenir à plus d'une composante  $\tau$ -hyperconnexe et un voxel à plus d'un nœud). Cependant un pré-calcul des attributs est parfois possible selon le critère considéré et peut être réalisé lors de l'initialisation de l'arbre. Par exemple si nous considérons un critère d'aire (l'aire d'un ensemble flou  $\mu$  est définie comme  $S(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)$ ), il est intéressant de pré-calculer pendant l'initialisation de l'arbre l'aire associée à chaque nœud de l'arbre. L'aire des composantes  $\tau$ -hyperconnexes est alors obtenue comme la somme des aires pré-calculées.

Nous présentons dans la figure 3.17 un exemple où le critère est défini comme une aire minimale de 10000 et l'hyperconnexion choisie est  $\mathcal{H}_{0,6}^2$ . Pendant la construction de l'arbre (b) associé avec l'ensemble flou (a), nous calculons pour chaque nœud l'aire associée. Nous calculons alors  $\varepsilon_{T(\mu)}(T(\mu), 0, 4)$  pour obtenir les composantes 0,6-hyperconnexes (c) et (d). Leurs aires respectives sont de 8612 et 11520 et peuvent être facilement obtenues à partir de l'aire des nœuds. La première composante ne satisfait pas le critère. La seconde le satisfait et correspond au sous-arbre résultant dans ce cas (d). L'ensemble flou associé est présenté en (e).

### Extension à un critère flou

Les filtres définis dans la section précédente suppriment ou conservent dans leur ensemble des composantes connexes selon qu'elles satisfont ou non à un critère binaire. Le

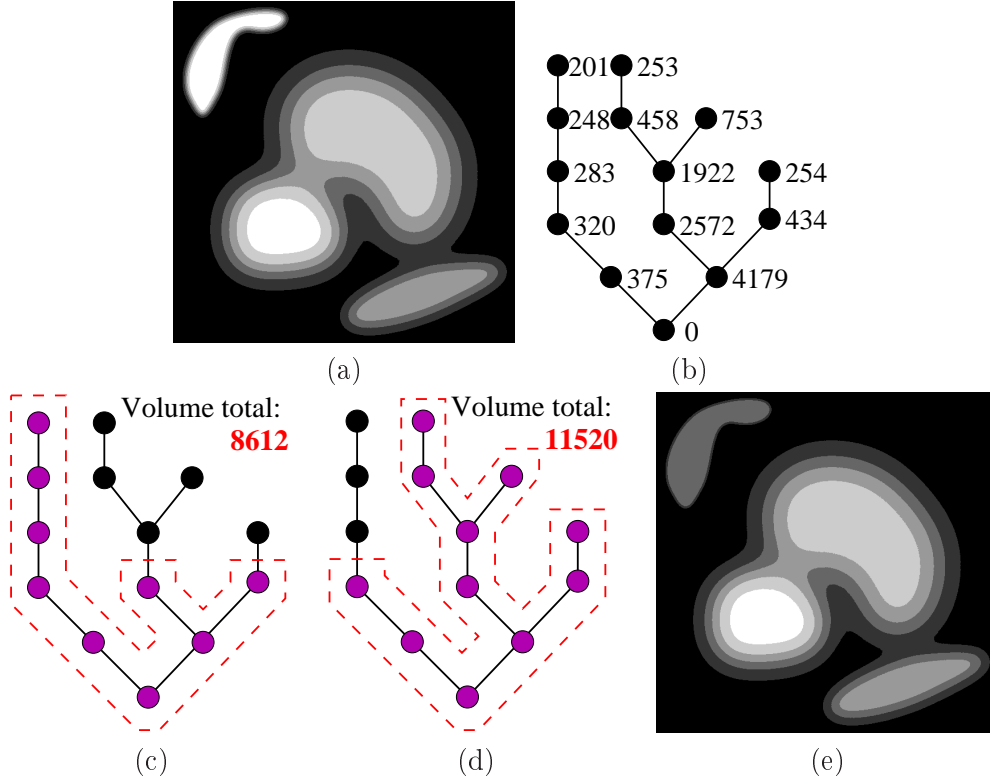


FIGURE 3.17 – Ensemble flou (a) et la représentation par arbre associée (b) (les nœuds sont étiquetés par leur aire). Deux composantes 0,6-hyperconnexes (c) et (d). L’aire de la composante (c) ne dépasse pas le seuil minimal  $S_{\min} = 10000$  et cette composante n’appartient pas au résultat, contrairement à la composante (d). L’ensemble flou résultant (e).

comportement obtenu n’est donc pas continu puisqu’une faible variation de l’ensemble peut conduire à la non satisfaction du critère et donc à la modification de la composante entière. La prise en compte de critères flous prenant la forme  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu)$  peut permettre d’obtenir un comportement plus régulier et ainsi plus de robustesse dans le processus. Dans ce cas le filtre de l’équation 3.9 est réécrit suivant :

$$\xi_{\mu_C}(\bar{A}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu) \}. \quad (3.12)$$

Si  $\mu_C$  est un opérateur binaire alors le filtre 3.12 est équivalent au filtre 3.10. S’il n’est pas binaire et qu’il est continu, le filtre 3.12 présente un comportement régulier exprimé par la propriété suivante (les propriétés de régularité des filtres données dans la suite de ce chapitre supposent que les degrés d’appartenance ne sont pas quantifiés).

**Proposition 3.18.** *Si  $\mu_C$  est lipschitzienne alors la fonction associant  $\bar{A}$  à  $\xi_{\mu_C}(\bar{A})$  est lipschitzienne.*

Comme dans le cas de critères binaires, nous supposons que  $\mu_C$  est croissante ce qui nous permet de simplifier l’équation 3.12<sup>6</sup>.

**Proposition 3.19.** *Si  $\mu_C$  est croissante,  $\xi_{\mu_C}(\bar{A})$  peut être réécrit comme :*

$$\xi_{\mu_C}(\bar{A}) = \bigvee_{\substack{\mu_i \in \\ \mathcal{H}_\tau^2(\bar{A})}} \bigvee_{m \in [0,1]} \{ \min(\mu_i, m) \mid m \leq \mu_C(\min(\mu_i, m)) \}.$$

6. Notons que si  $\mu_C(\nu)$  est croissante à  $\max_{x \in X} \nu(x)$  fixe, la proposition 3.19 est toujours valable.

Le filtre  $\xi_{\mu_C}(\bar{A})$  peut donc être calculé efficacement puisque nous devons simplement traiter les composantes  $\tau$ -hyperconnexes « écrêtées » à  $m$  (i.e.  $\min(\mu_i, m)$ ). Ainsi ce filtre présente une complexité en  $O((k+1)|\mathcal{V}| + \frac{kC_{f_C}}{s} + C_T)$ , où  $C_T$  est le coût de la construction de l'arbre,  $C_{f_C}$  est le coût du calcul du critère,  $k$  est le cardinal de  $\mathcal{H}_\tau^2(\bar{A})$  et  $s$  est le pas de quantification des degrés d'appartenance.

La figure 3.18 reprend l'exemple de la figure 3.17 avec pour critère un seuil minimal flou (représenté par une fonction d'appartenance  $\mu_S : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  (d)) sur l'aire calculée comme le cardinal de l'ensemble flou :  $S(\mu) = \sum_{x \in X} \mu(x)$ . Nous réalisons dans un premier temps l'extraction des composantes 0,6-hyperconnexes de l'ensemble flou (a) représenté par l'arbre (b). Les deux composantes sont montrées en (b) et (c). Ces composantes sont alors progressivement écrêtées (le seuil est fixé à l'origine à 1 puis est réduit progressivement vers 0, les éléments supérieurs à ce seuil étant supprimés). Le degré de satisfaction du critère  $\mu_S$  est calculé pour chaque seuil et pour chacune des composantes (c) et (d) (la table 3.2 présente ces valeurs). Le sous-arbre résultant (e) contient tous les éléments dont le seuil est inférieur ou égal au degré de satisfaction de la contrainte. L'ensemble flou associé est montré en (f).

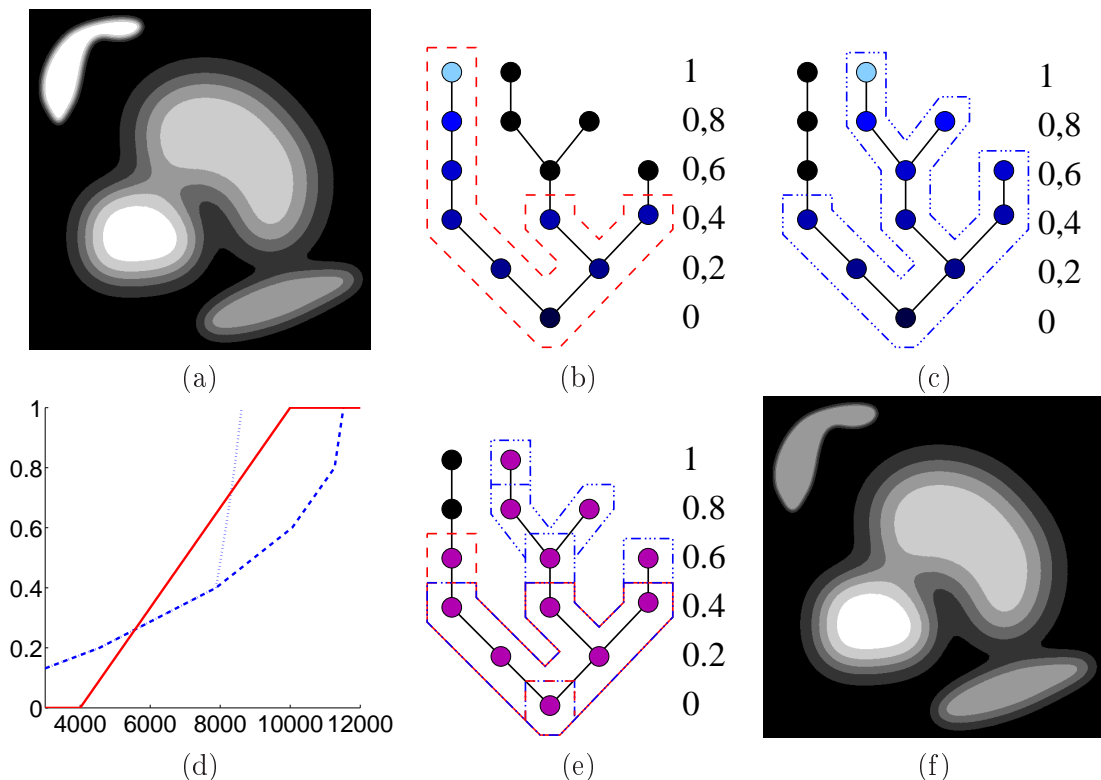


FIGURE 3.18 – (a) Ensemble flou. Deux composantes 0,6-hyperconnexes (b) et (c). (d)  $\mu_S$  en rouge plein, aire des composantes 0,6-hyperconnexes seuillées à différents niveaux en pointillés bleus. La table 3.2 présente pour chaque seuil l'aire de la composante seuillée, ainsi que le degré de satisfaction  $\mu_S(S(\nu))$  et la satisfaction du critère  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(S(\nu))$ . Sous-arbre résultant (e) et ensemble flou associé (f).



TABLE 3.2 – Pour chacune des composantes connexes présentées par la figure 3.18 et pour les différents seuils, l'aire de la composante seuillée, le degré de satisfaction  $\mu_S(S(\nu))$  et la satisfaction du critère  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(S(\nu))$ .

seuil	composante connexe 1			composante connexe 2		
	$S(\nu)$	$\mu_S(S(\nu))$	$\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(S(\nu))$	$S(\nu)$	$\mu_S(S(\nu))$	$\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(S(\nu))$
1	8612	0,7687	non	11520	1	oui
0,8	8411	0,7352	non	11267	1	oui
0,6	8163	0,6938	oui	10056	1	oui
0,4	7880	0,6467	oui	7880	0,6467	oui
0,2	4554	0,0923	non	4554	0,0923	non
0	0	0	oui	0	0	oui

### 3.4.3 Ouvertures fondées sur un degré de connexité variable

#### Avec un critère binaire

Nous nous intéressons dans cette section à la définition des filtres associés à la contrainte de connexité  $C_A^{conn2}$  :

$$C_A^{conn2}(\mu) = \begin{cases} 1 & \text{si } \max_{x \in X} \mu(x) \leq c^2(\mu), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons dans un premier temps un critère binaire  $f_C$ . Le filtre décrit par l'équation 3.9 peut donc être écrit sous la forme :

$$\xi_{f_C}^p(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{F} \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\nu) \text{ et } f_C(\nu) = 1 \}. \quad (3.13)$$

Comme précédemment nous supposons que le critère  $f_C$  est croissant ce qui nous permet de simplifier l'équation 3.13. Si nous décomposons ce calcul selon la hauteur ( $\max_{x \in X} \nu(x)$ ) des éléments de  $\mathcal{F}$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} \xi_{f_C}^p(\mu) &= \bigvee_{\tau \in [0,1]} \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) = \tau \text{ et } f_C(\nu) = 1 \}, \\ &= \bigvee_{\tau \in [0,1]} \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\min(\mu, \tau)) \mid \max_{x \in X} \nu(x) = \tau \text{ et } f_C(\nu) = 1 \}. \end{aligned}$$

Cet opérateur peut donc être calculé en réalisant pour chaque niveau  $\tau$  l'extraction des composantes  $\tau$ -hyperconnexes de l'ensemble  $\min(\mu, \tau)$ .

Ce processus est illustré par la figure 3.19. Comme dans le cas de l'exemple illustré par la figure 3.17, le critère est un seuil minimal de 10000 sur l'aire obtenue comme le cardinal de l'ensemble flou. Nous supposons toujours que les  $\alpha$ -coupes sont quantifiées avec un pas de 0,2. Pour les différents niveaux  $\tau$  de cette quantification (1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2 et 0), les sous-arbres associés aux éléments vérifiant  $\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\min(\mu, \tau))$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) = \tau$  sont présentés respectivement sur les figures (b), (c), (d), (e) et (f). La table 3.3 présente l'évaluation du critère d'aire pour chacun de ces éléments. Le sous-arbre résultant (h) contient tous les éléments satisfaisant le critère.

Une forte dépendance existe entre les éléments  $\nu$  de  $\mathcal{F}$  vérifiant  $\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\min(\mu, \tau))$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) = \tau$  pour des niveaux  $\tau$  successifs. Nous pouvons tirer parti de cette dépendance pour accélérer l'extraction. Nous notons  $p$  le pas de quantification des niveaux

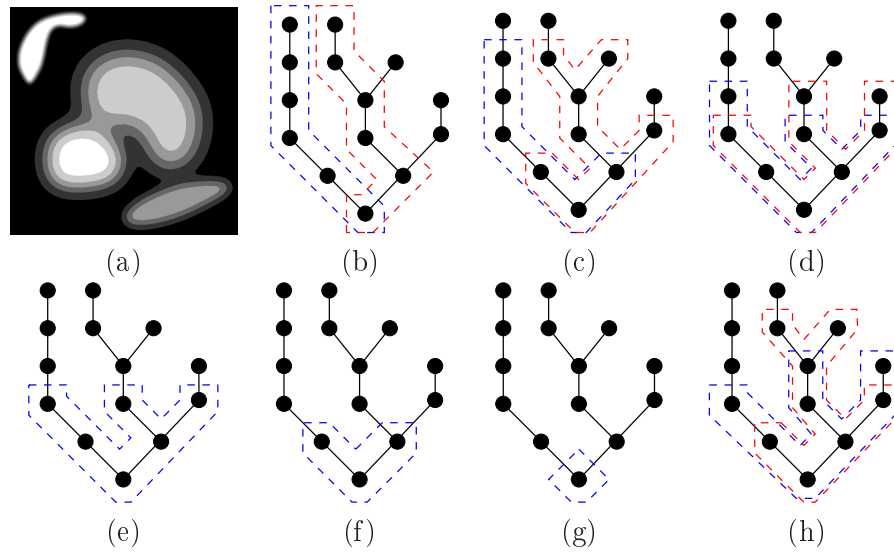


FIGURE 3.19 – (a) Un ensemble flou et l'arbre associé en noir (b). Les éléments de  $\mathcal{F}$  intervenant dans le calcul de  $\xi_{f_C}^p$  sont présentés en (b-g) selon leur hauteur (respectivement 1, 0,8, 0,6, 0,4, 0,2 et 0). Ceux qui satisfont au critère sont ajoutés au sous-arbre résultant (h) (la table 3.3 donne la satisfaction du critère pour les différents sous-arbres présentés).

TABLE 3.3 – Pour chacun des sous-arbres présentés par la figure 3.18(b-g), nous présentons l'aire et la satisfaction du critère  $f_C$ .

hauteur $\tau$	sous-arbres bleus		sous-arbres rouges	
	$S(\nu)$	$f_C(\nu)$	$S(\nu)$	$f_C(\nu)$
1	1427	non	9384	non
0,8	5405	non	10318	oui
0,6	8163	non	10056	oui
0,4	7880	non	-	-
0,2	4554	non	-	-
0	0	non	-	-

et  $\mathcal{E}$  un ensemble de sous-arbres. Les feuilles sont triées selon leur hauteur et une feuille est marquée lorsqu'elle appartient à un élément de  $\mathcal{E}$ . Le filtre  $\xi_{f_C}^p(\mu)$  peut être calculé en réalisant les opérations suivantes :

- extraction de l'arbre  $T(\mu)$  et pré-calcul des attributs lorsque cela est possible (pour l'aire par exemple),
- pour  $\tau$  de 1 à 0 par pas de  $p$  :
  - dilater de  $p$  tous les éléments de  $\mathcal{E}$  et écrêter ceux-ci à  $\tau$ ,
  - dilater de  $\tau$  les branches associées aux feuilles non marquées de hauteur  $\tau$ , écrêter celles-ci à  $\tau$  et les ajouter à  $\mathcal{E}$ ,
  - supprimer de  $\mathcal{E}$  les éléments redondants,
  - tester le critère  $f_C$  pour tous les sous-arbres de  $\mathcal{E}$  et les ajouter au résultat si le critère est satisfait.

### Extension à un critère flou

Considérons maintenant un critère flou  $\mu_C$  et une contrainte exprimée sous la forme  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu)$ . Nous obtenons alors :

$$\xi_{\mu_C}^p(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{F} \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \min(c^2(\mu), \mu_C(\nu)) \}. \quad (3.14)$$

Ce filtre présente un comportement régulier exprimé par la propriété suivante.

**Proposition 3.20.** *Si la fonction  $\mu_C$  est lipschitzienne, alors la fonction associant  $\mu$  à  $\xi_{\mu_C}^p(\mu)$  est lipschitzienne.*

La décomposition niveau par niveau réalisée dans le cas d'un critère binaire reste valable. Nous pouvons donc utiliser le même algorithme pour le calcul du filtre.

Reprenons l'exemple de la figure 3.19 avec pour critère un seuil minimal flou (dont la fonction d'appartenance  $\mu_S$  est représentée par la figure 3.18(d)) sur l'aire calculée comme le cardinal de l'ensemble flou. La table 3.4 présente la satisfaction du critère  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(\nu)$  pour les différents sous-graphes présentés par la figure 3.19 (b-g). Les sous-graphes pour lesquels le critère est satisfait sont ajoutés au résultat présenté par la figure 3.20(c). Le sous-graphe associé est présenté en (b).

TABLE 3.4 – Pour chacun des sous-graphes présentés par la figure 3.19 (b-g), nous présentons l'aire de l'ensemble flou associé, le degré de satisfaction  $\mu_S$  et la satisfaction du critère  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(\nu)$ .

hauteur $\tau$	sous-arbres bleus			sous-arbres rouges		
	$S(\nu)$	$\mu_S(S(\nu))$	$\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(\nu)$	$S(\nu)$	$\mu_S(S(\nu))$	$\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_S(\nu)$
1	1427	0	non	9384	0,8973	non
0,8	5405	0,2342	non	10318	1	oui
0,6	8163	0,6938	oui	10056	1	oui
0,4	7880	0,6467	oui	-	-	-
0,2	4554	0,0923	non	-	-	-
0	0	0	oui	-	-	-

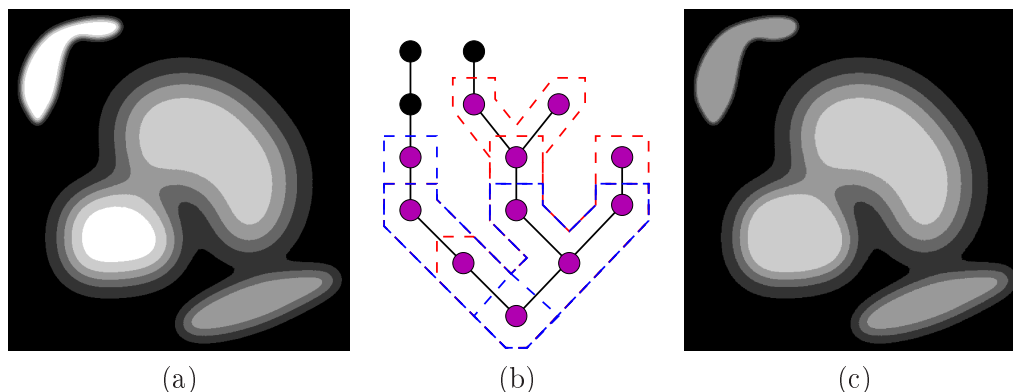


FIGURE 3.20 – (a) Un ensemble flou  $\mu$ . (c)  $\xi_{\mu_C}^p(\mu)$  (avec pour critère un seuil minimal flou sur l'aire) et le sous-arbre associé (b). La table 3.4 donne la satisfaction du critère pour les différents sous-arbres à prendre en compte dans le calcul.

## 3.5 Définition des filtres

Nous spécifions dans cette section les propagateurs associés à la contrainte de connexité seule, combinée à une contrainte d'aire (de volume en 3D) ou à une contrainte d'adjacence. Pour cela nous dérivons les filtres définis dans la section précédente. Nous donnons de plus certaines propriétés de régularité de ces filtres.

### 3.5.1 Connexité seule

Considérons tout d'abord une contrainte de connexité seule portant sur un objet  $A$  de domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$ . Si nous utilisons la modélisation  $C_A^{conn1}$  (cf équation 3.8) avec l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_\tau^2$ , les bornes inférieures et supérieures du domaine de  $A$  peuvent être respectivement mises à jour suivant :  $\bigwedge\{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}\}$  et  $\bigvee\{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}\}$ . Comme nous l'avons discuté dans la section 3.3, la borne inférieure reste généralement inchangée et nous ne disposons pas de méthode pour calculer un tel opérateur. Nous ne réalisons donc pas de mise à jour de cette borne.

La borne supérieure est mise à jour en fonction de la borne inférieure  $\underline{A}$  qui peut être perçue comme un marqueur, le propagateur ne conservant que les composantes connexes de  $\overline{A}$  incluant  $\underline{A}$ . Cette mise à jour est réalisée par l'ouverture donnée par l'équation 3.11 avec pour critère l'inclusion de  $\underline{A}$ . Nous notons  $\xi_{\underline{A}}^1(\mu)$  cette ouverture :

$$\xi_{\underline{A}}^1(\mu) = \bigvee\{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu) \mid \underline{A} \leq \nu\}. \quad (3.15)$$

**Définition 3.14** (Propagateur pour la contrainte de connexité). *Le propagateur  $f_{C_A^{conn1}}$  associé à la contrainte de connexité d'une structure  $A$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \overline{A}); C_A^{conn1} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \xi_{\underline{A}}^1(\overline{A})); C_A^{conn1} \rangle}$$

La figure 3.21 illustre ce filtrage pour l'hyperconnexion  $\mathcal{H}_1^2$ . Le filtre  $\xi_{\underline{A}}^1$  est appliqué sur l'ensemble  $\overline{A}$  (a) en bleu pour différentes valeurs de  $\underline{A}$  (b-f) en pointillés rouge. En (b) seule une composante hyperconnexe satisfait la contrainte d'inclusion et est conservée. En (c) et (d), deux des composantes connexes sont conservées, alors qu'en (e) toutes sont conservées. Lorsque la hauteur du marqueur décroît, le résultat du filtrage est de moins en moins nécessairement connexe. Cela sera exprimé formellement par la proposition 3.21. Par ailleurs des discontinuités apparaissent lorsque  $\underline{A}$  varie (entre (d) et (e) par exemple). Ce filtre n'est donc pas continu. La figure (f) présente un cas où l'ensemble  $\underline{A}$  ne peut être inclus strictement dans une des composantes connexes de  $\overline{A}$ , car le degré de connexité choisi ( $\tau = 1$ ) est trop strict. Dans ce cas  $\xi_{\underline{A}}^1(\overline{A}) = 0_{\mathcal{F}}$  (qui représente ici l'absence de solution satisfaisant la contrainte), ce qui illustre bien la sensibilité au paramètre  $\tau$ .

**Proposition 3.21.** *Soit  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}(x)$ . Le résultat du filtre défini par l'équation 3.15 est  $\max(0, \alpha - 1 + \tau)$ -hyperconnexe.*

Nous choisissons maintenant la formulation  $C_A^{conn2}$  (satisfaite si  $\max_{x \in X} \mu(x) \leq c^2(\mu)$ , cf équation 3.8). La borne supérieure  $\overline{A}$  du domaine de  $A$  est mise à jour par l'ouverture donnée par l'équation 3.13 avec pour critère l'inclusion de la borne inférieure  $\underline{A}$  :

$$\xi_{\underline{A}}^2(\overline{A}) = \bigvee\{\nu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\nu)\}. \quad (3.16)$$

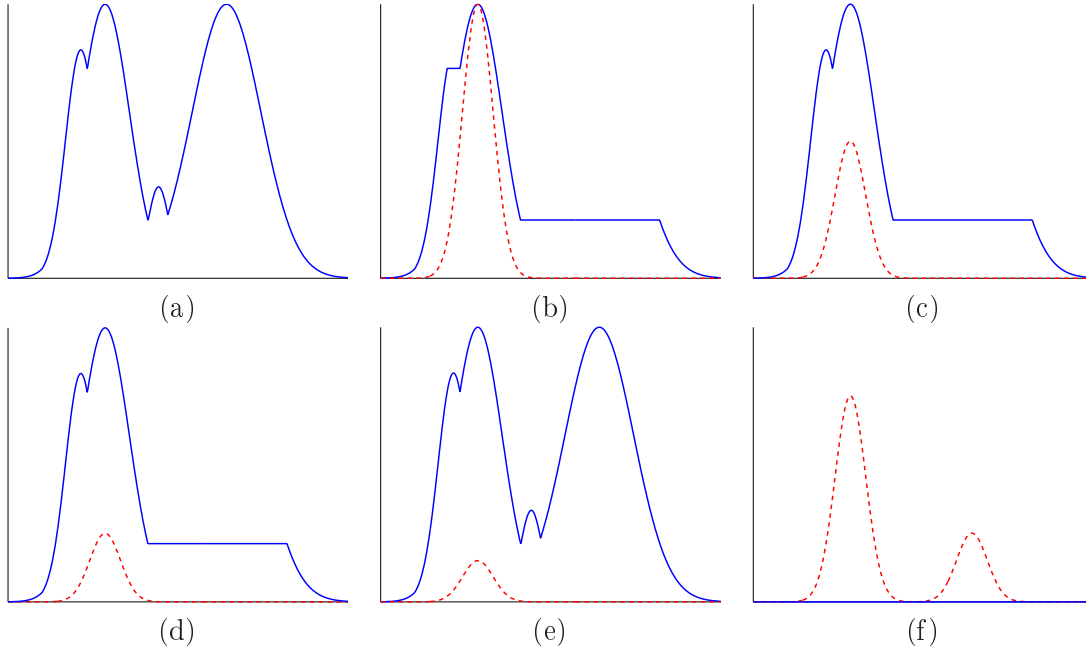


FIGURE 3.21 – Filtrage progressif selon l'équation 3.15 d'un ensemble flou  $\bar{A}$  (a) par un ensemble flou  $\underline{A}$  (en rouge) de hauteur maximale décroissante (b-e) et par un ensemble  $\underline{A}$  présentant 2 modes (f). Le résultat est présenté en bleu sur chaque graphique. En (f) le résultat vaut  $0_{\mathcal{F}}$ .

Nous obtenons dans ce cas le propagateur<sup>7</sup> suivant :

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \bar{A}); C_A^{conn2} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \xi_{\underline{A}}^2(\bar{A})); C_A^{conn2} \rangle}$$

L'exemple 1D présenté par la figure 3.22 illustre ce filtre et peut être comparé aux résultats du filtre donné par l'équation 3.15 et présentés par la figure 3.21. Ce filtre présente un comportement plus régulier que celui de l'équation 3.15. En effet lorsque la hauteur de  $\underline{A}$  décroît, des ensembles flous de degré de connexité plus faible satisfont aux critères du filtre ( $\underline{A} \leq \nu \leq \mu$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\mu)$ ) et lorsque le marqueur ne peut pas être inclus dans une composante 1-hyperconnexe, comme c'est le cas en (f), le filtre renvoie un résultat de hauteur maximale plus faible. Il n'est cependant pas continu (en (f) par exemple, si nous faisons croître le premier mode de  $\underline{A}$  vers 1, le résultat du filtre passe à  $0_{\mathcal{F}}$  de façon non continue). Par ailleurs lorsque  $\underline{A}$  est de hauteur 1, le résultat appartient nécessairement à  $\mathcal{H}_1^2$ . Lorsque la hauteur de  $\underline{A}$  diminue le résultat est moins nécessairement connexe.

**Proposition 3.22.** *Soit  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}(x)$ . Le résultat du filtre connexe défini par l'équation 3.16 est  $\alpha$ -hyperconnexe.*

Un filtre assez similaire peut être obtenu en relâchant le critère strict d'inclusion à un degré d'inclusion. Nous utilisons pour cela les opérateurs de Lukasiewicz pour caractériser le degré d'inclusion d'un ensemble flou  $\mu_A$  dans  $\mu_B$  [Dubois and Prade, 1980] :

$$\mu_{\leq}(\mu_A, \mu_B) = \min_{x \in X} \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(x)).$$

7. Notons que ce propagateur ne sera pas utilisé dans notre processus de propagation.

Si nous récrivons le filtre défini par l'équation 3.12 en utilisant ce critère nous obtenons :

$$\xi_{\underline{A}}^3(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu) \}. \quad (3.17)$$

Ce filtre présente des propriétés de régularité par rapport à  $\underline{A}$  qui se traduisent par la propriété suivante :

**Proposition 3.23.** *La fonction associant  $\underline{A}$  à  $\xi_{\underline{A}}^3(\overline{A})$  est lipschitzienne. La fonction associant  $\overline{A}$  à  $\xi_{\underline{A}}^3(\overline{A})$  est lipschitzienne.*

**Proposition 3.24.** *Soit  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}(x)$ . Le résultat du filtre connexe défini par l'équation 3.17 est  $(\alpha - 1 + \tau)$ -hyperconnexe.*

Les filtres  $\xi_{\underline{A}}^2(\mu)$  et  $\xi_{\underline{A}}^3(\mu)$  ne sont pas équivalents. En particulier si  $\underline{A} \not\leq \mu$ ,  $\xi_{\underline{A}}^2(\mu)$  renvoie un ensemble vide, mais pas nécessairement  $\xi_{\underline{A}}^3(\mu)$ . Cependant si le paramètre de connexité  $\tau$  dans  $\xi_{\underline{A}}^3(\mu)$  est fixé à 1, les résultats de ces filtres sur les exemples de la figure 3.22 sont similaires.

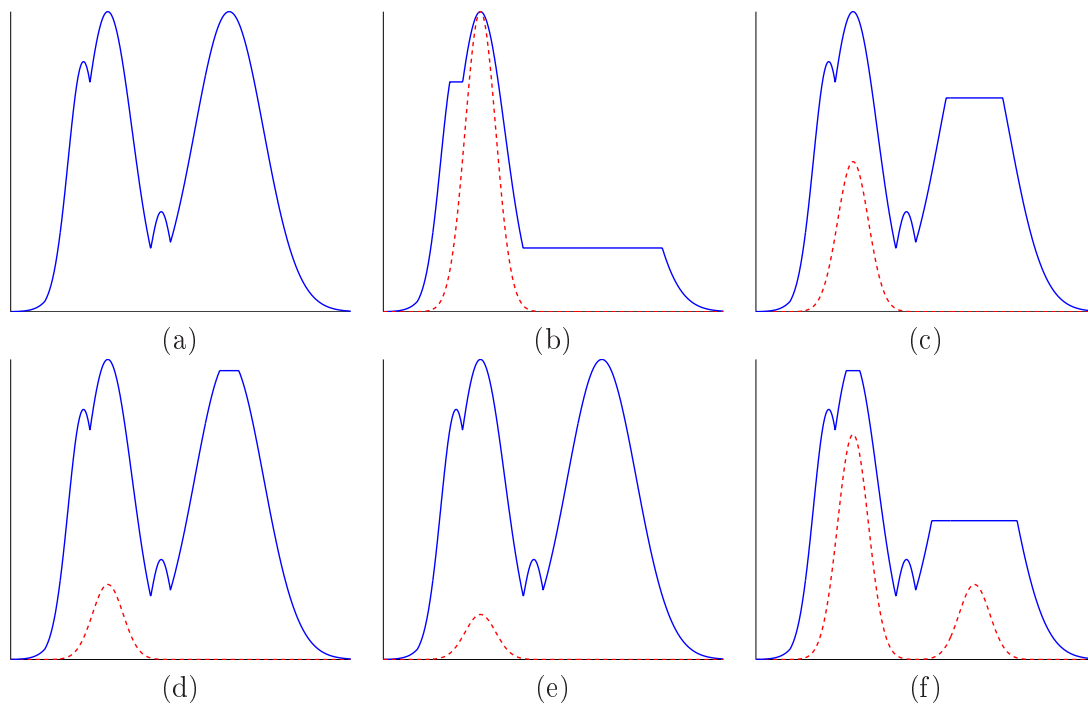


FIGURE 3.22 – Filtrage progressif selon l'équation 3.17 d'un ensemble flou  $\overline{A}$  (a) par un ensemble flou  $\underline{A}$  (en rouge) de hauteur maximale décroissante (b-e) et par un ensemble  $\underline{A}$  présentant 2 modes (f). Le résultat est présenté en bleu.

Nous illustrons dans la figure 3.23 l'application de ce filtre au filtrage du domaine  $(\underline{LVr}, \overline{LVr})$  du ventricule latéral droit. La borne supérieure initiale est présentée en (b). L'ensemble  $\underline{LVr}$  est défini comme un ensemble flou dont le support est réduit à un point centré dans le ventricule latéral droit et dont le degré d'appartenance prend les valeurs 1, 0,5, 0,25 et 0. Le résultat du filtre  $\xi_{\underline{LVr}}^3(\overline{LVr})$  est présenté par la figure 3.23 (c-f). Dans l'exemple (c), le ventricule latéral droit est bien différencié des autres parties. Plus le degré d'appartenance maximal du marqueur diminue et moins cette différence est marquée. En (f) plus aucun filtrage n'est réalisé.

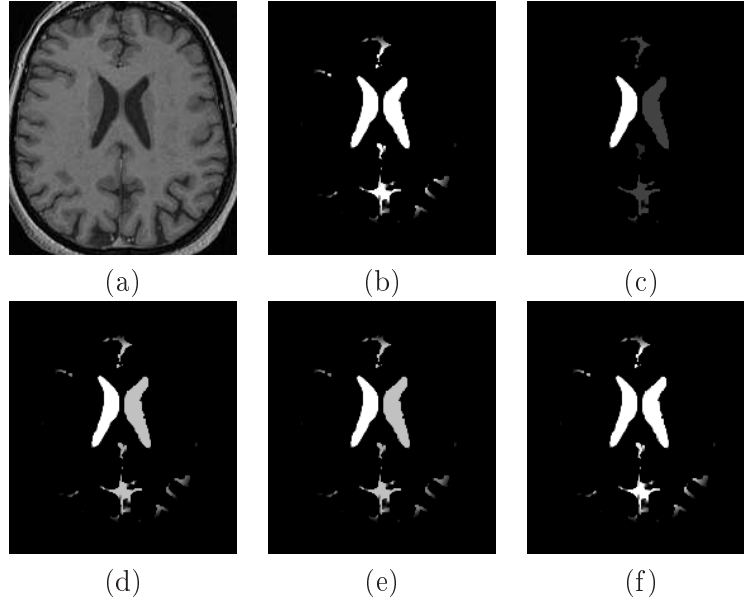


FIGURE 3.23 – (a) Une coupe axiale. (b) Borne supérieure du domaine du ventricule latéral droit  $\overline{LVr}$ . (c-f) Résultats du filtre  $\xi_{\overline{LVr}}^3(\overline{LVr})$  en considérant un marqueur  $\underline{LVr}$  centré dans le ventricule droit, de valeur maximale 1, 0,5, 0,25, 0, respectivement.

### 3.5.2 Connexité et volume

Le critère d'aire minimale (ou de volume en 3D) est classiquement utilisé pour définir des ouvertures connexes [Vincent, 1992, 1993]. Ce type de filtre préserve les composantes connexes si leur aire (ou leur volume) dépasse un seuil minimal et peut être exprimé suivant :

$$\xi_{V_{\min}}(A) = \bigvee \{c \in \mathcal{C} \mid c \leq A \text{ et } V(c) \geq V_{\min}\},$$

où  $\mathcal{C}$  est la connexion considérée et  $V$  est la fonction renvoyant l'aire (ou le volume) de la composante.

Dans les exemples développés dans la section 3.4, nous avons mis en œuvre de tels filtres en utilisant des critères reposant sur l'aire des ensembles flous définie comme leur cardinal. Cependant la représentation de l'aire (ou du volume) d'un ensemble flou par son cardinal est quelque peu simpliste (considérons par exemple un ensemble flou qui présente un support de grande taille et un noyau réduit). Dans la section 2.4.5, nous avons ainsi utilisé une représentation sous forme de fonction d'appartenance :  $f_V(\mu)(v) = \sup_{V(\mu_\alpha) \geq v} \alpha$  (cf équation 2.8) pour définir la contrainte de volume. Un *a priori* sur l'aire ou le volume est alors représenté par un intervalle de fonctions d'appartenance  $[f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$ . Nous discutons dans cette section des filtres reposant sur cette représentation. Puisque nous nous restreignons à des critères croissants, nous n'utilisons que le critère de volume (ou de surface) minimal représenté par la fonction d'appartenance  $f_{V_{\min}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ . Cela correspond à la contrainte :

$$rel(C_A^{vol_{\min} f_{V_{\min}}}) : \mathcal{D}(A) \rightarrow \{0, 1\} \quad (3.18)$$

$$\mu \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f_{V_{\min}} \leq f_V(\mu), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

Nous combinons cette contrainte à une contrainte de connexité pour obtenir un propagateur intéressant. Considérons donc un objet  $A$  associé à un domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$  et les contraintes

$C_A^{volmin}$  et  $C_A^{conn1}$ . Nous pouvons récrire le filtre de l'équation 3.12 suivant :

$$\xi_{f_{V_{\min}}}^1(\bar{A}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } f_{V_{\min}} \leq f_V(\nu) \}. \quad (3.20)$$

**Définition 3.15** (Propagateur pour la conjonction de la contrainte de volume et de la contrainte de connexité). *Le propagateur  $f_{C_A^{volmin} f_{V_{\min}} \wedge C_A^{conn1}}$  associé à la conjonction d'une contrainte de volume minimal et d'une contrainte de connexité sur  $A$  est défini suivant :*

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \bar{A}); C_A^{volmin} f_{V_{\min}} \wedge C_A^{conn1} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \xi_{f_{V_{\min}}}^1(\bar{A})); C_A^{volmin} f_{V_{\min}} \wedge C_A^{conn1} \rangle}$$

Nous pouvons aussi utiliser un degré de satisfaction de l'inégalité  $f_{V_{\min}} \leq f_V(\nu)$  obtenu par les opérateurs de Lukasiewicz [Dubois and Prade, 1980] :

$$\mu_{f_{V_{\min}} \leq f_V(\nu)} = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \min(1, 1 - f_{V_{\min}}(v) + f_V(\nu)(v)).$$

Nous obtenons en dérivant le filtre de l'équation 3.12 :

$$\xi_{f_{V_{\min}}}^2(\bar{A}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{f_{V_{\min}} \leq f_V(\nu)} \}. \quad (3.21)$$

La figure 3.24 illustre ces filtres. L'ensemble flou (a) contient 7 objets de taille croissante. Leur aire définie selon l'équation 2.8 est présentée en (b) et un critère de volume minimal est représenté par la fonction d'appartenance  $f_{V_{\min}}$  en pointillés rouges. Nous appliquons tout d'abord le filtre  $\xi_{f_{V_{\min}}}^1$ . Les deux composantes connexes satisfaisant au critère de volume sont conservées. Cependant ce critère est très strict et une faible variation de l'ensemble flou ou de la fonction  $f_{V_{\min}}$  peut conduire à sa non satisfaction complète. Le filtre  $\xi_{f_{V_{\min}}}^1$  n'est ainsi pas continu. Nous appliquons maintenant le filtre  $\xi_{f_{V_{\min}}}^2$ . Les deux composantes les plus grandes sont toujours conservées, mais deux composantes plus petites le sont aussi partiellement. Le filtre obtenu a un comportement régulier par rapport à la fonction d'appartenance utilisée comme critère et par rapport à l'ensemble d'entrée. Cela est caractérisé par la propriété suivante.

**Proposition 3.25.** *La fonction associant  $\bar{A}$  à  $\xi_{f_{V_{\min}}}^2(\bar{A})$  est lipchitzienne ainsi que la fonction associant  $f_{V_{\min}}$  à  $\xi_{f_{V_{\min}}}^2(\bar{A})$ .*

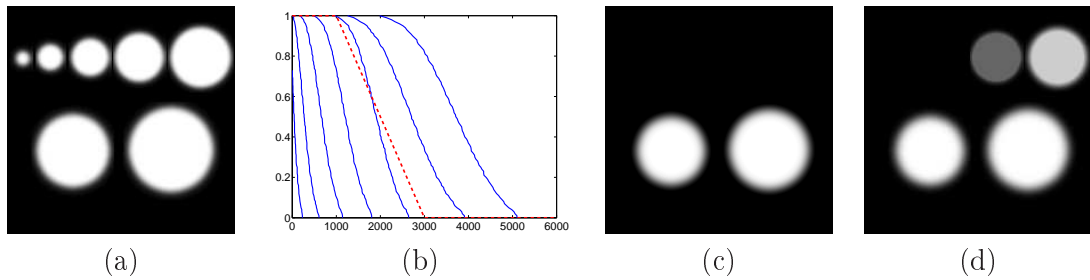


FIGURE 3.24 – (a) Ensemble flou contenant 7 objets de taille croissante. (b) En bleu aire floue calculé par 2.8 pour chaque objet indépendamment, en rouge  $f_{V_{\min}}$ . (c)  $\xi_{f_{V_{\min}}}^1$ . (d)  $\xi_{f_{V_{\min}}}^2$ .



La figure 3.25 illustre ce processus dans le cadre du traitement d'une IRM cérébrale. Une coupe axiale du volume original est présentée en (a). Une surestimation des ventricules latéraux  $\overline{LV}$  est présentée en (b). Le filtrage de  $\overline{LV}$  par  $\xi_{f_{V_{\min}}}^1$  (en choisissant  $\tau = 1$  pour la contrainte de connexité) est présenté en (c). Nous constatons que ce filtre nous permet d'éliminer de nombreuses petites composantes connexes correspondant aux sillons. Nous obtenons donc une nouvelle approximation des ventricules latéraux plus fine que la précédente.

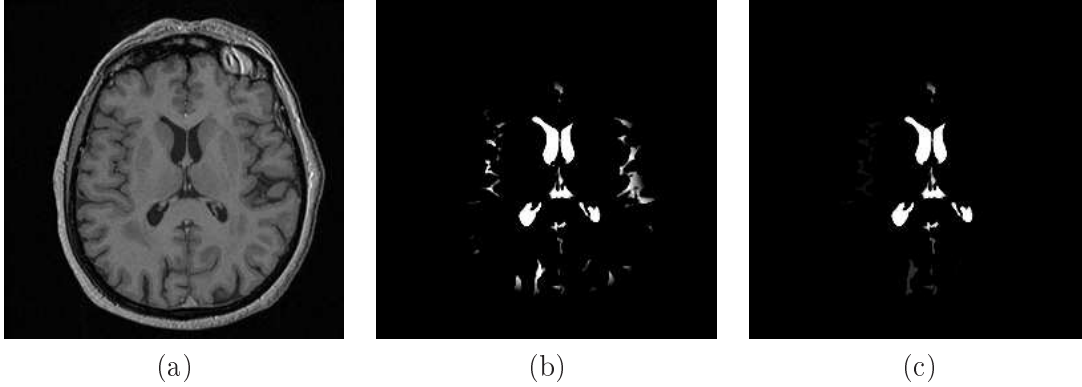


FIGURE 3.25 – (a) Une coupe axiale. (b)  $\overline{LV}$ . (c)  $\xi_{f_{V_{\min}}}^1(\overline{LV})$ .

### 3.5.3 Connexité et adjacence

La contrainte d'adjacence discutée dans la section 2.4.6 ne permet pas d'obtenir seule un propagateur intéressant. Dans la section 2.6.1, nous avons alors proposé de la combiner à une contrainte de connexité. Nous précisons ici ce propagateur.

Considérons deux objets  $A$  et  $B$  associés aux domaines  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$  et les contraintes  $C_{A,B}^{adj}$  et  $C_B^{conn}$ . La borne supérieure du domaine de  $B$  peut alors être mise à jour suivant :  $\overline{B}' = \bigvee \{ \mu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{adj}(\mu, \nu) = 1 \}$ .

Le critère utilisé ( $\exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{adj}(\mu, \nu) = 1$ ) pour réaliser cette mise à jour n'est pas croissant. En effet le degré  $\mu_{adj}(\mu, \nu)$  est défini comme la combinaison d'un critère de connexité de  $\mu$  et  $\nu$  et d'un critère de non-intersection. Or ce dernier n'est pas croissant. Pour permettre le calcul de cette mise à jour nous nous restreignons au critère de connexité croissant  $\mu_{vois}(\mu, \nu) = \sup_{x,y \in X} \top(\mu(x), \nu(y), n(x,y))$ <sup>8</sup> où  $n(x,y)$  est un degré de connexité entre des points  $x$  et  $y$  dérivé de la distance entre ces points.

Nous utilisons la première formulation de la contrainte de connexité  $C_B^{conn1}$  et une contrainte  $C_{A,B}^{vois1}$  satisfaite si  $\mu_{vois}(\mu, \nu) = 1$ . Le filtre de l'équation 3.10 peut alors être réécrit suivant :  $\xi_A^{vois1}(\overline{B}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{B} \leq \nu \leq \overline{B} \text{ et } \exists \mu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu_{vois}(\nu, \mu) = 1 \}$ . Puisque le  $\mu_{vois}$  est croissant nous obtenons :

$$\xi_A^{vois1}(\overline{B}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{B} \leq \nu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{vois}(\nu, \overline{A}) = 1 \}. \quad (3.22)$$

**Définition 3.16** (Propagateur pour la conjonction de la contrainte de voisinage et de contraintes de connexité). *Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{vois} \wedge C_A^{conn} \wedge C_B^{conn}}$  associé à la conjonction de la*

8. Le critère de non-intersection est pris en compte indépendamment soit par la contrainte de non-intersection, soit par la contrainte de partition

contrainte de voisinage entre deux structures  $A$  et  $B$  et des contraintes de connexité portant sur  $A$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{vois} \wedge C_B^{conn} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}'); C_{A,B}^{vois} \wedge C_B^{conn} \rangle}$$

où  $\overline{B}' = \bigvee \{ \mu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{vois}(\mu, \overline{A}) = 1 \}$ .

Nous illustrons ce propagateur dans la figure 3.26. Deux objets adjacents  $A$  et  $B$  sont représentés par les domaines  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$  dont les bornes supérieures sont présentées en (a).  $\overline{B}$  présente plusieurs composantes connexes dont certaines ne sont visiblement pas connexes à  $\overline{A}$ . La fonction  $n(x, y)$  représentant la notion de voisinage est modélisée sous la forme d'une fonction d'appartenance décroissante (b) de la distance euclidienne entre  $x$  et  $y$ .  $\xi_A^{vois1}(\overline{B})$  est présenté en (c) avec pour paramètre  $\tau = 1$ . Nous constatons effectivement que moins le critère d'adjacence est satisfait, plus les composantes connexes sont filtrées.

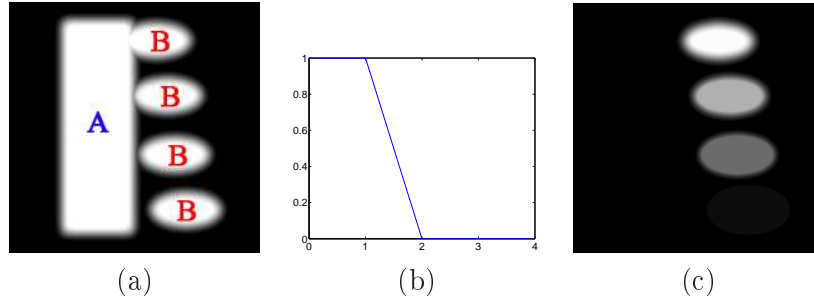


FIGURE 3.26 – (a)  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$ . (b) Fonction d'appartenance représentant à  $n(x, y)$ . (c)  $\xi_A^{vois1}(\overline{B})$ .

Dans la figure 3.27 nous proposons une illustration sur une coupe axiale d'une IRM cérébrale pour la relation d'adjacence entre la corne frontale du ventricule latéral gauche et le noyau caudé gauche. Les bornes supérieures  $\overline{FLVl}$  et  $\overline{CDl}$  des domaines associés sont présentées respectivement en (b) et en (c). Le résultat du filtre  $\xi_{FLV}^{vois1}(\overline{CNr})$  est alors présenté en (d) en choisissant  $\tau = 1$ . La différence  $\overline{CNr} - \xi_{FLV}^{vois1}(\overline{CNr})$  est présentée en (e).

Notons que nous pourrions aussi définir un filtre en utilisant le degré  $\mu_{vois}(\nu, \overline{A})$  comme critère flou.

### 3.6 Conclusion

La connexité joue un rôle important dans notre réseau de contrainte. En effet d'une part les objets d'intérêt sont en général connexes et nous voulons obtenir un résultat satisfaisant cette contrainte. D'autre part elle permet de tirer parti de contraintes telles que le volume ou l'adjacence dans le processus de propagation.

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle définition de la connexité des ensembles flous qui présente de meilleures propriétés notamment en termes de régularité que les définitions précédentes. Cette définition nous permet de modéliser la contrainte associée à la connexité d'une structure et les règles de mise à jour de domaine qui sont utilisées lors du processus de propagation. La représentation par arbre et les méthodes de calcul proposées pour chacun de ces filtres nous permettent un calcul efficace de ces derniers.

Par ailleurs nous utilisons cette notion de connexité dans la définition de filtres pour les images en niveaux de gris [Palma et al., 2008]. En représentant ces derniers sous forme

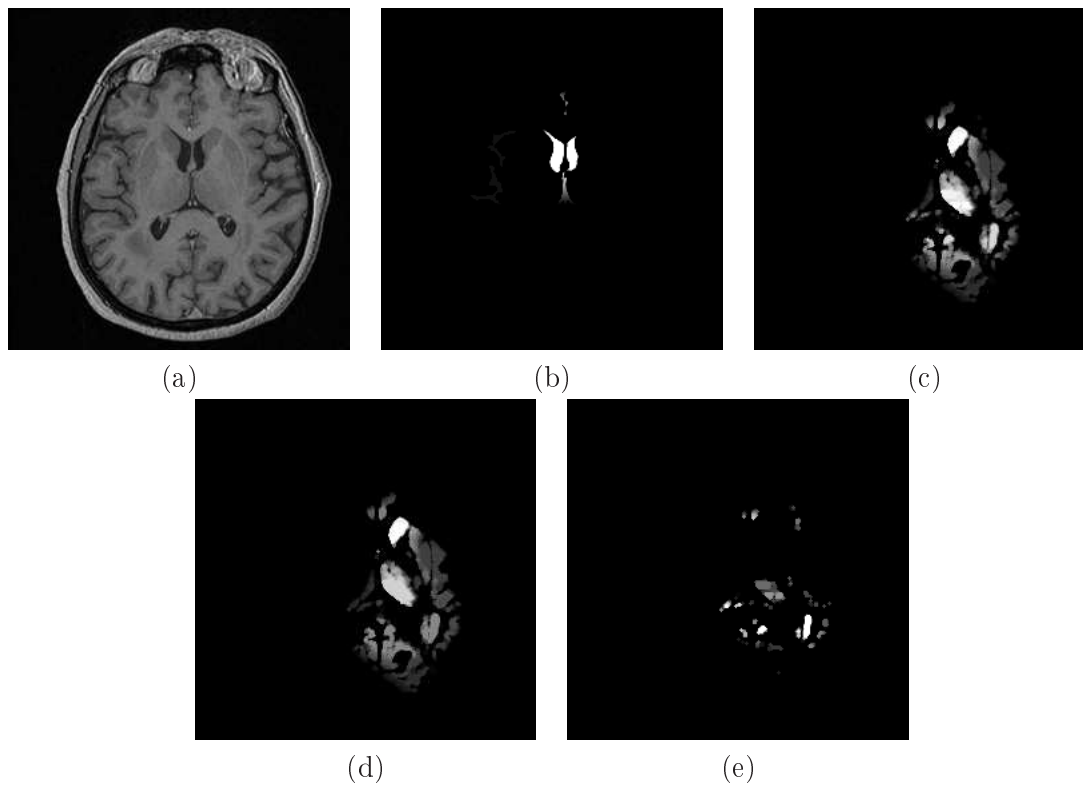


FIGURE 3.27 – (a) Coupe axiale. (b)  $\overline{fLV}$ . (c)  $\overline{CNr}$ . (d)  $\xi_{fLV}^{vois1}(\overline{CNr})$ . (e)  $\overline{CNr} - \xi_{fLV}^{vois1}(\overline{CNr})$ .

de fonction d'appartenance sur les valeurs réelles, nous obtenons une définition des zones plates de l'image reposant sur la connexité d'un ensemble flou spatial (appartenant à  $\mathcal{F}$ ).

## Chapitre 4

# Ordonnancement des contraintes pour la propagation

### Introduction

Dans le chapitre 2 nous avons représenté notre problème de segmentation et de reconnaissance par un réseau de contraintes. Nous avons alors mis en œuvre un algorithme de propagation de contraintes permettant de réduire l'espace de recherche du problème en supprimant de nombreuses valeurs incohérentes avec les contraintes. Cet algorithme consiste à appliquer séquentiellement les propagateurs associés aux contraintes jusqu'à convergence. Le résultat obtenu étant indépendant de l'ordonnancement de l'application des propagateurs, nous avons utilisé un ordonnancement rudimentaire similaire à celui réalisé dans l'algorithme  $AC - 3$  [Mackworth, 1977a].

Cependant cet ordonnancement a un impact important sur les performances de l'algorithme. En effet un ordonnancement simple tel que celui réalisé dans l'algorithme  $AC - 3$  conduit à fréquemment appliquer des propagateurs ne réalisant pas de réduction ce qui réduit l'efficacité du processus. Afin d'obtenir une convergence plus rapide, nous proposons de tenir compte des spécificités de notre problème en estimant la réduction potentiellement réalisée par chaque propagateur. Cela conduit à un meilleur ordonnancement et donc à un processus plus efficace.

Nous rappelons dans la section 4.1 quelques algorithmes classiques de propagation de contraintes. Dans la section 4.2 nous proposons un ordonnancement de l'application des propagateurs spécifique à notre problème. Finalement nous illustrons les résultats obtenus dans la section 4.3.

### 4.1 Algorithmes de propagation pour la consistance d'arc

La littérature relative à la consistance d'arc et aux algorithmes de propagation associés est riche (relativement aux autres notions de consistance locale). Nous rappelons brièvement une partie de ces travaux par rapport auxquels nous situons l'approche proposée.

Les algorithmes de propagation relatifs à la consistance d'arc sont en général répartis en deux classes [Bessière, 2006] selon la finesse de la propagation réalisée. Dans cette section nous décrivons brièvement ces deux familles.

---

### 4.1.1 Algorithmes de propagation grossiers

Les algorithmes de propagation dits grossiers dérivent généralement de l'algorithme AC-3 [Mackworth, 1977a,b]. Ce dernier reste largement utilisé notamment pour sa simplicité de mise en œuvre. Nous montrons dans la figure 4.2 une des variantes de cet algorithme.

A chaque itération une contrainte  $C$  et une variable  $x_i$  sont choisies. Toutes les valeurs ne présentant pas de support pour  $C$  dans  $\mathcal{D}$  sont alors supprimées du domaine associé à  $x_i$  (cette opération est réalisée par la fonction *Revise*). Le couple  $(x_i, C)$  est choisi dans une liste  $L$  correspondant aux mises à jour à réaliser. Dans cet algorithme, ce choix repose sur le principe **FIFO** (premier entré premier sorti). Initialement tous les couples possibles sont ajoutés à la liste  $L$ . A chaque itération le couple mis à jour  $(x_i, C)$  est supprimé de la liste. Si le domaine  $\mathcal{D}(x_i)$  est réduit, les couples à mettre à jour sont ajoutés à  $L$ . L'algorithme s'achève lorsque  $L$  est vide.

---

**Fonction** *Revise*( $x_i : \chi, C : \mathcal{C}$ ) : *Booléen*

---

**Données** :  $\mathcal{D}(x_i)$  : le domaine de  $\mathcal{D}$  associé à la variable  $x_i$

**début**

  changement  $\leftarrow$  faux

**pour chaque**  $v \in \mathcal{D}(x_i)$  **faire**

**si**  $\nexists I \in \mathcal{D}$  tq  $I(x_i) = v$  et  $I[\text{vars}(C)] \in \text{rel}(C)$  **alors**

$\mathcal{D}(x_i) = \mathcal{D}(x_i) \setminus v$

      changement  $\leftarrow$  vrai

**fin**

**fin**

**retourner** changement

**fin**

---



---

**Données** :  $\langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau de contraintes.

$L$  une file de couples variable contrainte :  $(x, C)$

**Résultat** :  $\langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle$  arc consistant tel que  $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$

**début**

$L \leftarrow \{(x_i, C) \mid C \in \mathcal{C}, x_i \in \chi(C)\}$

**tant que**  $L \neq \emptyset$  **faire**

    sélectionne et supprime un élément  $(x_i, C)$  de  $L$

**si** *Revise*( $x_i, C$ ) **alors**

**si**  $\mathcal{D}(x_i) = \emptyset$  **alors**

**retourner** faux

**sinon**

$L \leftarrow L \cup \{(x_j, C') \mid C' \in \mathcal{C}, x_i \neq x_j, x_j \in \text{vars}(C'), x_i \in \text{vars}(C') \text{ et } C' \neq C\}$

**fin**

**fin**

**fin**

**fin**

---

FIGURE 4.2 – Algorithme AC-3

---

Cet algorithme est très simple à mettre en œuvre mais il réalise un nombre très im-

---

portant de calculs inutiles et présente une complexité élevée (dans le pire des cas en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|)^3)$ ). Nous présentons ci-dessous deux types de méthodes proposées pour réduire le nombre de calculs inutiles.

Une première famille d'approches consiste à réduire le coût de révision des contraintes. L'algorithme *AC* – 2001 [Bessière and Regin, 2001, Zhang and Yap, 2001, Bessière et al., 2005] maintient ainsi pour chaque valeur  $v$  de chaque domaine  $\mathcal{D}(x_i)$  le support minimal (les domaines sont supposés ordonnés, les contraintes binaires et le réseau normalisé) dans un tableau  $Last(x_i, v, x_j)$  ( $Last(x_i, v, x_j)$  est la valeur minimale du domaine  $\mathcal{D}(x_j)$  qui soit support de la valeur  $v$  pour  $x_i$  pour la contrainte  $C$  telle que  $vars(C) = \{x_i, x_j\}$ ). Cette information permet alors de réduire le coût de révision d'une contrainte en réduisant le coût de recherche des supports. Cet algorithme est obtenu à partir de l'algorithme *AC* – 3 en intégrant la fonction de révision optimisée **ReviseAC2001** montrée ci-dessous. La complexité de calcul dans le pire des cas est en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|)^2)$  mais l'espace mémoire requis est en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|))$ .

---

**Fonction** `ReviseAC2001( $x_i : \mathcal{X}, C : \mathcal{C}$ ) : Booléen`

---

**Données** :  $\mathcal{D}(x_i)$  : le domaine de  $\mathcal{D}$  associé à la variable  $x_i$

**début**

  changementement  $\leftarrow$  faux

**pour chaque**  $v_i \in \mathcal{D}(x_i)$   *tq*   $Last(x_i, v, x_j) \notin \mathcal{D}(x_j)$  **faire**

$v_j \leftarrow$  plus petite valeur de  $\mathcal{D}(x_j)$  plus grande que  $Last(x_i, v_i, x_j)$   *tq*

$(v_i, v_j) \in rel(C)$

**si**  $v_j$   *existe*  **alors**

$Last(x_i, v_i, x_j) \leftarrow v_j$

**sinon**

      supprime  $v_i$  de  $\mathcal{D}(x_i)$

      changementement  $\leftarrow$  vrai

**fin**

**fin**

**retourner** changementement

**fin**

---

Une seconde famille d'approches consiste à mieux ordonner l'utilisation des contraintes. En effet dans l'algorithme donné dans la figure 4.2, le choix de la contrainte à chaque itération est réalisé sur le principe FIFO. L'ordonnancement obtenu est rudimentaire et inefficace.

Pour réaliser un meilleur choix, des critères peu coûteux à calculer peuvent être utilisés afin d'essayer de choisir la contrainte qui réalisera la réduction la plus importante. Considérons par exemple une contrainte  $C$  qui met à jour une variable  $A$  et qui dépend d'une autre variable  $B$ . Nous pouvons supposer qu'il est d'autant plus intéressant de calculer cette contrainte que le domaine de  $A$  est grand et le domaine de  $B$  est réduit [Wallace and Freuder, 1992, Boussemart et al., 2004]. Nous pouvons aussi supposer que plus le domaine de  $B$  a été réduit depuis la dernière sélection de la contrainte, plus le nombre de valeurs dans le domaine de  $A$  ne présentant plus de support pour  $C$  est grand [Boussemart et al., 2004]. De plus si nous pouvons obtenir simplement la taille de la relation associée à la contrainte, nous pouvons alors, en considérant la taille des domaines impliqués, déterminer si la contrainte va assurément, peut-être ou certainement pas réaliser une réduction [Wallace and Freuder, 1992]. Nous pouvons alors favoriser les contraintes pour lesquelles nous sommes assurés qu'une révision sera réalisée et éviter le calcul de contraintes qui ne réali-

---

seront pas de réduction. Une condition suffisante pour qu'une valeur présente un support peut aussi être obtenue à partir du nombre de valeurs supprimées des domaines [Mehta and van Dongen, 2005].

De plus l'objectif étant de réduire le temps de calcul global, le temps de calcul des propagateurs doit être pris en compte, notamment quand celui-ci est très variable. Dans [Schulte and Stuckey, 2004], les auteurs associent à une contrainte plusieurs propagateurs de coûts différents (tel qu'un propagateur arc-consistant et un propagateur consistant de bornes). La prise en compte du coût de calcul permet alors de favoriser les propagateurs peu coûteux et ainsi de réduire le temps de calcul global de l'algorithme de propagation.

### 4.1.2 Algorithmes de propagation fins

Les algorithmes décrits dans la section précédente réalisent la propagation au niveau des contraintes. Ces algorithmes choisissent à chaque itération une contrainte et testent alors l'ensemble des valeurs d'un domaine. Cette approche conduit à un nombre de calculs inutiles parfois important. Afin d'obtenir une complexité optimale en temps de calcul, la propagation peut être réalisée au niveau des valeurs. L'algorithme  $AC - 4$  [Mohr and Henderson, 1986, Mohr and Masini, 1988] maintient ainsi pour chaque valeur de chaque domaine et pour chaque contrainte le nombre de supports qu'elle présente ainsi que la liste des valeurs supportées (les contraintes sont supposées ici directionnelles). La propagation consiste alors à maintenir une liste de valeurs ne présentant plus de supports. A chaque itération, un élément est prélevé de cette liste, le nombre de supports de toutes les valeurs supportées par cet élément est alors décrémenté et s'il vaut 0, la valeur en question est ajoutée à la liste de valeurs à traiter. L'algorithme  $AC - 4$  permet d'obtenir la consistance d'arc en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|)^2)$  mais au prix d'un espace mémoire aussi en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|)^2)$ . Afin de réduire l'espace mémoire requis pour réaliser la propagation, l'algorithme  $AC - 6$  [Bessière, 1994] maintient uniquement pour chaque valeur et chaque contrainte le support minimal (comme le fait l'algorithme  $AC - 2001$ ). Cela permet de préserver la même complexité dans le pire des cas tout en réduisant l'espace mémoire requis (qui est maintenant en  $O(|\mathcal{C}|(\max_{x \in \mathcal{X}} |\mathcal{D}(x)|))$ ).

## 4.2 Ordonnancement des contraintes

### 4.2.1 Motivation

L'algorithme de propagation  $AC - 3$  peut être aisément adapté à notre problème en modifiant la fonction **Revise** comme nous l'avons fait dans la section 2.3. Cependant cet algorithme est peu efficace comme nous l'illustrons dans la figure 4.4. Nous montrons en (b) le taux de réduction moyen (sur 100 itérations) que réalisent les propagateurs sur les domaines. Ce dernier est obtenu comme le ratio entre le cardinal de l'ensemble des domaines ( $\prod_{A \in \mathcal{X}} |(A, \bar{A})|$ , cf équation 2.3 pour la définition du cardinal d'un intervalle) après et avant l'application du propagateur. Nous constatons des taux de réduction moyens assez faibles (sachant qu'un changement de degré d'appartenance d'amplitude 1 d'une borne en un point de l'espace conduit à un ratio de  $\frac{1}{255}$  pour une quantification des degrés d'appartenance sur 8 bits). En (a) la courbe montre l'évolution du logarithme du cardinal de l'ensemble des domaines (en ordonnée) en fonction du nombre d'itérations. Dans la suite de ce chapitre nous utiliserons cette courbe comme référence pour illustrer le gain obtenu par l'utilisation d'un ordonnancement plus approprié.

Afin d'obtenir une convergence plus rapide, nous ne pouvons pas, comme dans les algorithmes  $AC - 2001$ ,  $AC - 4$  ou  $AC - 6$ , maintenir une information sur les supports

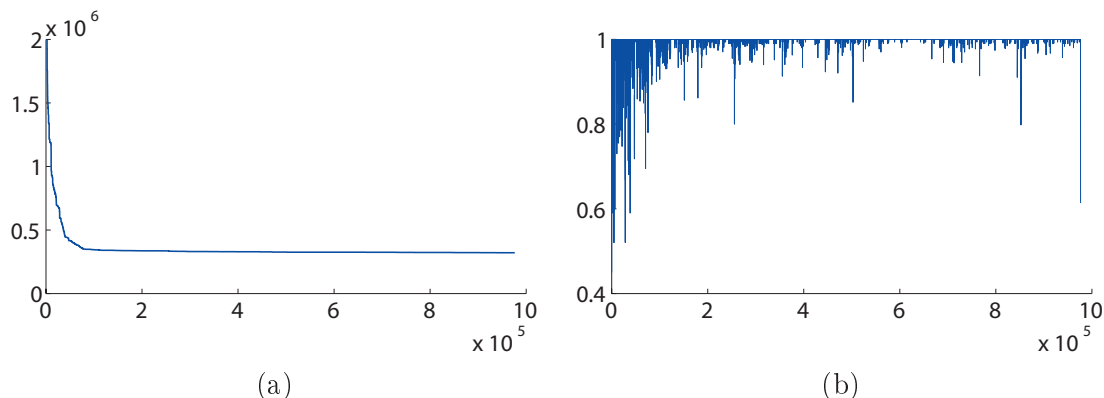


FIGURE 4.4 – Propagation en utilisant un algorithme similaire à  $AC-3$ . (a) Logarithme du cardinal du produit cartésien des domaines en fonction du nombre d'itérations. (b) Réduction moyenne du cardinal des domaines réalisée par les propagateurs en fonction du nombre d'itérations.

de chaque valeur dans les autres domaines pour l'ensemble des contraintes (ce qui requiert un espace mémoire au moins linéaire en fonction de la taille des domaines). Nous allons donc optimiser l'ordonnancement du calcul des propagateurs dans un algorithme de type  $AC-3$ . Pour cela nous estimons pour chaque contrainte le coût calculatoire du propagateur et l'ampleur de la réduction de domaine potentiellement réalisée (qui est liée au nombre de valeurs ne présentant plus de support pour cette contrainte).

Nous évaluons théoriquement le coût calculatoire des contraintes dans la section 4.2.3. L'estimation de la réduction réalisée potentiellement par une contrainte est plus délicat. Dans la section 4.2.2 nous réalisons cette estimation comme dans [Boussemart et al., 2004] en nous reposant sur le changement du cardinal des domaines. En effet lorsqu'un domaine est réduit, des supports pour les valeurs des autres domaines disparaissent probablement. Nous pouvons ainsi lier la priorité d'une contrainte  $C$  à la réduction des domaines des variables de  $vars(C)$  depuis le dernier calcul de la contrainte. Cette approche permet un premier accroissement de l'efficacité moyenne de l'application des propagateurs.

En tenant compte de la spécificité de notre problème, nous pouvons affiner cet ordonnancement. Par exemple si le ventricule latéral et la matière blanche ont été préalablement extraits, le domaine du noyau caudé peut être drastiquement réduit en quelques itérations par un choix avisé des contraintes comme illustré dans la figure 4.5. Nous y montrons le domaine associé au noyau caudé droit après l'application successive des propagateurs associés aux contraintes :

1. « le noyau caudé droit est dans le cerveau »,
2. « le noyau caudé droit présente une radiométrie plus basse que celle de la matière blanche »,
3. « le noyau caudé droit est extérieur au ventricule latéral droit »,
4. « le noyau caudé droit est proche du ventricule latéral droit »,
5. « le noyau caudé droit est connexe et son volume est moyen ».

Nous choisissons ainsi à chaque étape une contrainte qui permet de réaliser une réduction de domaine importante. Ce choix dépend donc de l'état courant des domaines. Ainsi la contrainte « le noyau caudé droit est extérieur au ventricule latéral droit » peut évidemment réduire les domaines pour le noyau caudé droit présentés en (b) et (c) mais pas ceux présentés en (d), (e) ou (f).



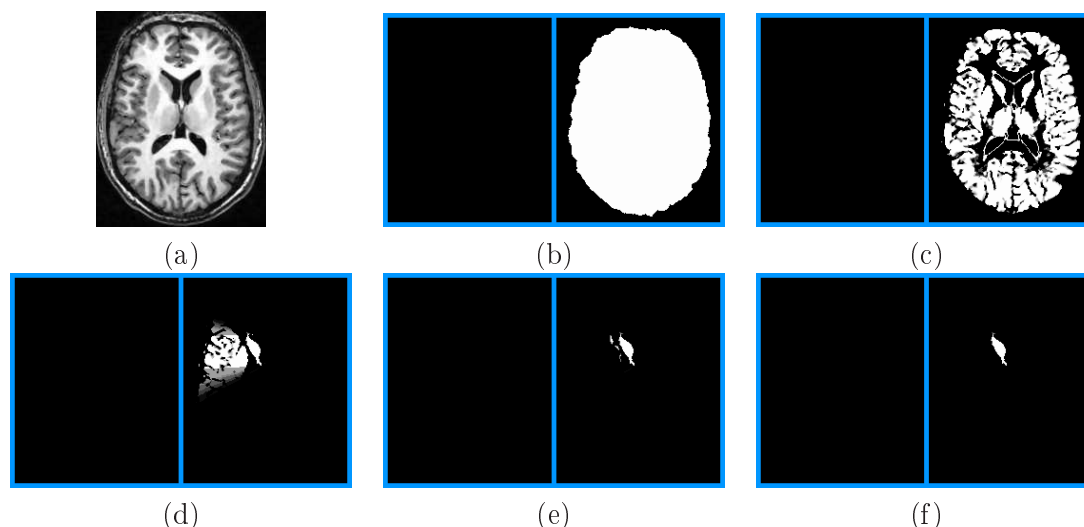


FIGURE 4.5 – Réduction du domaine du noyau caudé droit  $CNr$ . (a) Une coupe axiale d'une IRM cérébrale. Evolution de  $\overline{CNr}$  après la prise en compte successive des contraintes :  $CNr$  est dans le cerveau (b),  $CNr$  présente une radiométrie plus basse que celle de la matière blanche (c),  $CNr$  est extérieur au ventricule latéral droit (d),  $CNr$  est proche du ventricule latéral droit (e) et  $CNr$  est connexe et présente un volume moyen (f).

L'estimation de cette réduction potentielle n'est pas directe puisque nous ne voulons évidemment pas calculer le propagateur pour estimer son intérêt... Pour réaliser efficacement cette estimation, nous nous appuyons sur les autres structures du modèle. Ainsi en (c),  $\overline{CNr}$  contient le noyau caudé gauche  $CNl$  qui ne satisfait pas du tout la relation directionnelle avec le ventricule latéral droit. Nous pouvons donc en déduire que le propagateur permettra de réduire  $\overline{CNr}$  d'au moins la région associée à  $CNl$ . Comme cela nous pouvons estimer la réduction potentielle totale en considérant l'ensemble des structures de l'espace.

Dans l'exemple précédent le ventricule latéral et la matière blanche étaient connus, ce qui permettait d'obtenir des réductions de domaine intéressantes pour le noyau caudé. Cependant pendant le processus de propagation ils ne le sont pas et seuls les domaines associés à ces variables sont disponibles. La réduction du domaine du noyau caudé dépend alors de l'état courant de ces domaines. Plus ils sont grands, moins la réduction obtenue sera importante. Ainsi la contrainte « le noyau caudé droit est extérieur au ventricule latéral droit » ne permet pas de réduire le domaine du noyau caudé présenté en (c) dans la figure 4.6 lorsque nous ne disposons que du domaine  $(\underline{LVr}, \overline{LVr})$  présenté en (b) pour le ventricule latéral droit. Si maintenant nous disposons pour le ventricule latéral du domaine présenté en (d), cette relation permet de réduire le domaine présenté en (c) pour obtenir le domaine en (e). Pour estimer finement la réduction potentiellement réalisée par une contrainte nous devons donc prendre en compte l'état de l'ensemble des domaines des variables impliquées dans la contrainte.

Pour résumer, afin d'établir un ordonnancement plus efficace des contraintes nous prendrons en compte :

- le changement des domaines depuis le dernier calcul de la contrainte (cet aspect est détaillé dans la section 4.2.2),
- le coût calculatoire des contraintes (section 4.2.3),
- une estimation fine de la réduction de domaine que peut potentiellement réaliser la contrainte (section 4.2.4).

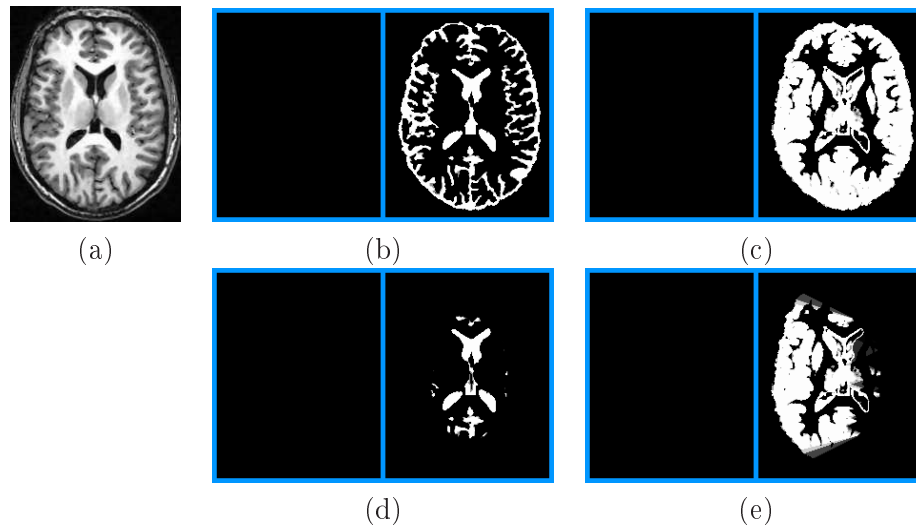


FIGURE 4.6 – (a) Coupe axiale. Dans la configuration des domaines  $(LVr, \overline{LVr})$  (b) et  $(\underline{CDr}, \overline{CDr})$  (c), l'application du propagateur associé à la relation « le noyau caudé droit  $CDr$  est extérieur au ventricule latéral droit  $LVr$  » est inutile. Pour le domaine  $(LVr, \overline{LVr})$  présenté en (d), l'application de ce propagateur permet de réduire le domaine du noyau caudé de (c) à (e).

Ces différents critères sont combinés dans la section 4.2.5 afin de définir un ordonnancement pour la propagation de contraintes. A chaque itération de l'algorithme, la contrainte présentant le meilleur compromis entre ces trois critères est choisie et le propagateur associé est appliqué. Tous les domaines sont ainsi progressivement réduits.

## 4.2.2 Changement des domaines

Il est inutile d'appliquer le même propagateur plusieurs fois successivement. En effet les propagateurs définis dans le chapitre 2 sont idempotents. Une fois réalisé, le calcul d'un propagateur est donc inutile jusqu'à la réduction d'un des domaines des variables de la contrainte. Plus la réduction de ces domaines (depuis le dernier calcul du propagateur) est importante, plus le nombre de valeurs ne présentant plus de support pour la contrainte est potentiellement important et plus il sera en général intéressant de recalculer le propagateur.

Nous associons à chaque contrainte une priorité  $P_{diff}$  liée au changement des domaines des variables de la contrainte. Soit une contrainte  $C$  et  $vars(C)$  l'ensemble des variables de cette contrainte. Nous pouvons caractériser la quantité de changement des domaines par le ratio :

$$\prod_{A \in vars(C)} \frac{|(\underline{A}^2, \overline{A}^2)|}{|(\underline{A}^1, \overline{A}^1)|},$$

où  $(\underline{A}^1, \overline{A}^1)$  est le domaine de  $A$  après le dernier calcul du propagateur associé à  $C$  et  $(\underline{A}^2, \overline{A}^2)$  est le domaine courant de  $A$ . Nous obtenons un degré compris entre 0 et 1. Celui-ci prend des valeurs en général très faibles. En effet lorsque par exemple le degré d'appartenance de la borne supérieure d'une variable change de 1 à 0 en un point unique de l'espace, cet indice ne vaut plus que  $\frac{1}{k}$  (où  $k$  est la taille de la discrétisation des degrés

d'appartenance). Nous définissons donc la priorité  $P_{diff}$  suivant :

$$P_{diff}(C) = -\log \prod_{A \in vars(C)} \frac{|(\underline{A}^2, \overline{A}^2)|}{|(\underline{A}^1, \overline{A}^1)|}. \quad (4.1)$$

Nous calculons cette priorité itérativement au cours du processus de propagation. Soit  $A$  une variable dont le domaine est réduit à l'itération  $i$  du processus de propagation. La priorité de toute contrainte  $C$  telle que  $A \in vars(C)$  est mise à jour suivant :

$$\begin{aligned} P_{diff}^{i+1}(C) &= P_{diff}^i(C) - \log \prod_{A \in vars(C)} \frac{|(\underline{A}^{i+1}, \overline{A}^{i+1})|}{|(\underline{A}^i, \overline{A}^i)|} \\ &= P_{diff}^i(C) + \sum_{A \in vars(C)} \left( \log |(\underline{A}^i, \overline{A}^i)| - \log |(\underline{A}^{i+1}, \overline{A}^{i+1})| \right) \\ &= P_{diff}^i(C) + \sum_{A \in vars(C)} \left( \sum_{x \in X} \log(k(\overline{A}^i(x) - \underline{A}^i(x)) + 1) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{x \in X} \log(k(\overline{A}^{i+1}(x) - \underline{A}^{i+1}(x)) + 1) \right), \end{aligned}$$

où  $(\underline{A}^i, \overline{A}^i)$  et  $(\underline{A}^{i+1}, \overline{A}^{i+1})$  sont les domaines associés à la variable  $A$  aux itérations  $i$  et  $i+1$  (dont le cardinal est donné par l'équation 2.3) et  $P_{diff}^i(C)$  est la priorité de la contrainte  $C$  à l'itération  $i$ . Par ailleurs si à l'itération  $i$  du processus de propagation nous calculons le propagateur associé à la contrainte  $C$ , alors la priorité associée à  $C$  est réinitialisée :  $P_{diff}^{i+1}(C) = 0$ . En d'autres mots la priorité d'une contrainte augmente jusqu'au moment où le propagateur associé est utilisé. Sa priorité est alors remise à 0.

L'algorithme décrit dans la figure 4.7 est une variante de l'algorithme AC-3 en utilisant cet ordonnancement. A chaque itération, la contrainte présentant la priorité la plus élevée est choisie et le propagateur associé est appliqué (par l'appel de la fonction *Propagation(maxContrainte)* dans l'algorithme). Si des domaines sont modifiés par le calcul du propagateur alors la priorité des contraintes impliquant les variables associées est mise à jour.

### 4.2.3 Coût calculatoire des contraintes

Le coût calculatoire des propagateurs est très variable selon les contraintes. L'objectif étant de réduire le coût total du processus de propagation, nous allons tenir compte du coût de chaque contrainte et défavoriser le calcul à répétition de contraintes trop coûteuses. Nous donnons ci-dessous la complexité théorique des différents propagateurs considérés. En général le calcul de ces propagateurs est réalisé sur une sous-partie de l'image correspondant à la boîte englobante du support des différents domaines. Nous notons  $N$  le nombre de pixels de cette boîte englobante et  $s$  sa longueur (sa taille maximale en nombre de pixels selon un des axes). Nous notons  $d$  la dimension de l'espace (3 dans notre cas).

**Direction** Le calcul de l'approximation donnée dans la section 2.4.2 est réalisé par  $\frac{s}{r}$  dilatations de noyau de rayon  $r$ . Nous obtenons donc une complexité calculatoire en  $O(r^{d-1} s N)$ .

**Distance** Le calcul des relations de distance est approché par des dilatations élémentaires (cf section 2.4.3) et est réalisé en  $O(3^d m N)$  où  $m$  est le rayon maximal des dilatations calculées (i.e.  $\max(b, d)$ ) si l'*a priori* de distance est représenté par une fonction trapézoïdale de paramètres  $a, b, c$  et  $d$ ).

**Inclusion** Ce calcul est réalisé en  $O(N)$ .

---



---

**Entrées** :  $\langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau de contraintes.  
**Données** :  $P$  : tableau de taille  $|\mathcal{C}|$  contenant la priorité associée à chaque contrainte.  
*LogCard* : tableau de taille  $\chi$  contenant le logarithme du cardinal du domaine des variables.  
**Résultat** :  $\langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle$  tel que  $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$

**début**

```

  pour chaque  $C \in \mathcal{C}$  faire
  |  $P(C) = 1$ 
  fin
  pour chaque  $A \in \chi$  faire
  |  $LogCard(A) \leftarrow \sum_{x \in X} \log(k(\bar{A}(x) - \underline{A}(x)) + 1)$ 
  fin
  répéter
  |  $maxContrainte \leftarrow \arg \max_{C \in \mathcal{C}} P(C)$ 
  |  $maxpriorite \leftarrow P(maxContrainte)$ 
  | si  $Propagation(maxContrainte)$  alors
  | | pour chaque  $A \in vars(maxContrainte)$  faire
  | | | si  $\underline{A} \not\leq \bar{A}$  alors retourner faux
  | | |  $tmpcard \leftarrow \sum_{x \in X} \log(k(\bar{A}(x) - \underline{A}(x)) + 1)$ 
  | | | pour chaque  $C$  tq  $A \in vars(C)$  faire
  | | | |  $P(C) \leftarrow P(C) - tmpcard + LogCard(A)$ 
  | | | fin
  | | |  $LogCard(A) \leftarrow tmpcard$ 
  | | fin
  | fin
  |  $P(maxContrainte) \leftarrow 0$ 
  jusqu'à  $maxpriorite > 0$  ;
fin
```

FIGURE 4.7 – Algorithme P1

**Partition** Si  $k$  structures sont impliquées dans cette contrainte, le calcul du propagateur est réalisé en  $O(kN)$ .

**Connexité, volume et adjacence** La construction de l'arbre est réalisée dans le pire des cas en  $O(kN)$  (où  $k$  est la taille de la discrétisation des degrés d'appartenance), l'extraction des composantes connexes et leur filtrage en  $O(n)$ , où  $n$  correspond aux nombres de nœuds de l'arbre. Enfin la reconstruction est réalisée en temps linéaire.

**Contraste** Cette complexité dépend essentiellement du pas de discrétisation choisi pour la fonction d'appartenance en niveaux de gris et pour la fonction trapézoïdale représentant l'a priori de contraste. Nous notons leurs tailles respectives  $s_1$  et  $s_2$ . La complexité du calcul est alors en  $O(s_1 s_2) + O(N)$ .

Certains propagateurs, notamment ceux associés aux contraintes de position relative et de distance, restent coûteux malgré les approximations réalisées. En pratique nous pouvons limiter ce coût en sous-échantillonnant l'espace. Le résultat obtenu est ainsi un compromis entre la précision et le temps de calcul du propagateur.

---

Nous définissons donc pour chaque contrainte une priorité calculatoire :  $P_{\text{coût}} = \frac{1}{CC}$ , où  $CC$  représente le coût calculatoire tel qu'il est défini ci-dessus. Ce coût diminue en général lorsque la taille du support des domaines décroît. Il est donc réévalué lorsque le domaine de l'une des variables impliquées dans la contrainte est mis à jour.

#### 4.2.4 Estimation fine du potentiel de réduction des contraintes

Les critères reposant sur le coût calculatoire des contraintes et sur la quantité de changement permettent un ordonnancement plus efficace que l'ordonnancement basique. Cependant en tirant parti de la spécificité du problème nous pouvons obtenir un ordonnancement beaucoup plus fin. Pour cela nous allons, durant le processus de propagation, estimer (pour un coût calculatoire faible) pour chaque contrainte le plus fidèlement possible l'ampleur de la réduction potentiellement réalisée par le propagateur associé.

Les paragraphes suivants décrivent les approximations proposées pour les différentes contraintes. Ces approximations impliquent d'une part un ensemble d'indices appris et d'autre part un ensemble d'indices dépendant des domaines courants. Ces indices sont récapitulés à la fin de cette section.

##### Contrainte de direction

Soient deux objets  $A$  et  $B$  suivant une relation directionnelle stable représentée par la contrainte  $C_{A \rightarrow B}^{\text{dir } \nu}$ . Comme nous l'avons détaillé dans la section 2.4.2, cette contrainte peut être modélisée suivant :

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_{A,B}^{\text{dir } \nu}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_2 \leq \delta_\nu(\mu_1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\nu$  est l'élément structurant donnant la sémantique de la relation directionnelle. Le propagateur associé  $f_{C_{A,B}^{\text{dir } \nu}}$  réduit la borne supérieure du domaine de  $B$  suivant  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})$ . Le nombre de valeurs supprimées du domaine de  $B$  par  $f_{C_{A,B}^{\text{dir } \nu}}$  est lié au changement de la borne supérieure du domaine de  $B$ . Nous voulons donc obtenir à faible coût une estimation de :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| = |\overline{B} - \delta_\nu(\overline{A}) \wedge \overline{B}|.$$

Nous supposons que chaque point de l'espace appartient à au moins une des variables de  $\chi$ . Nous pouvons donc représenter  $\overline{B}$  ou  $\overline{B}'$  comme la réunion des intersections avec les structures de  $\chi$  :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| \approx \left| \bigvee_{O_B \in \chi} (\overline{B} \wedge \mu_{O_B} - \delta_\nu(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}) \right|.$$

Nous pouvons alors approcher le cardinal de la réunion par la somme des cardinaux :

$$\begin{aligned} |\overline{B} - \overline{B}'| &\approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |\overline{B} \wedge \mu_{O_B} - \delta_\nu(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|, \\ &\approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |\mu_{O_B}| \left( \frac{|\overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} - \frac{|\delta_\nu(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right), \end{aligned}$$

où  $\alpha^B(O_B)$  est une pondération correctrice qui exclut les nœuds appartenant à la même branche que  $B$  dans la représentation hiérarchique<sup>1</sup> et qui normalise le poids des nœuds redondants dans cette représentation (les structures de  $\chi$  ne formant pas une partition de l'espace, la somme est une approximation très grossière du cardinal de la réunion). Nous décrivons plus précisément le calcul de ce facteur à la fin de cette section.

Nous approchons alors cette expression en utilisant uniquement des indices appris ou des indices peu coûteux à calculer pendant le processus de propagation. Dans l'équation précédente plusieurs éléments sont actuellement inconnus :  $\mu_{O_B}$  et  $\delta_\nu(\bar{A})$  (que nous ne voulons pas calculer maintenant).

Pendant le processus de propagation nous ne connaissons pas  $\mu_{O_B}$  mais uniquement son domaine  $(\underline{O_B}, \overline{O_B})$ . Nous approchons alors  $\frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$  par  $\frac{|\bar{B} \wedge \overline{O_B}|}{|\overline{O_B}|}$ . Par ailleurs nous apprenons le cardinal de l'ensemble des structures que nous notons  $|O_B^p|$ . Nous obtenons ainsi :

$$|\bar{B} - \bar{B}'| \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| \max(0, (\frac{|\bar{B} \wedge \overline{O_B}|}{|\overline{O_B}|} - \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|})).$$

Reste à obtenir une approximation peu coûteuse du terme  $\frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$ . Premièrement nous approchons la proportion de  $\mu_{O_B}$  appartenant à  $\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B}$  par le produit des proportions de  $\mu_{O_B}$  appartenant respectivement à  $\delta_\nu(\bar{A})$  et  $\bar{B}$  :

$$\frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \approx \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \approx \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\bar{B} \wedge \overline{O_B}|}{|\overline{O_B}|}.$$

Ensuite nous utilisons à nouveau l'ensemble des autres structures pour obtenir une approximation de  $\delta_\nu(\bar{A})$  :

$$\delta_\nu(\bar{A}) \approx \bigvee_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \delta_\nu(\bar{A} \wedge \mu_{O_A}),$$

où  $\chi \setminus \chi_B(A)$  est l'ensemble des variables sauf celles appartenant à la même branche que  $A$  dans la représentation hiérarchique,  $A$  appartenant à cet ensemble. En effet nous voulons réaliser une décomposition sur une partition de l'espace. Nous pouvons donc en exclure les éléments de la représentation hiérarchique appartenant à la même branche que  $A$ . Nous obtenons alors l'approximation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} &\approx \frac{|\bigvee_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \delta_\nu(\bar{A} \wedge \mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}, \\ &\approx \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \frac{|\delta_\nu(\bar{A} \wedge \mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}. \end{aligned}$$

Nous approchons alors la proportion de  $\mu_{O_B}$  appartenant à  $\delta_\nu(\bar{A} \wedge \mu_{O_A})$  ( $\frac{|\delta_\nu(\bar{A} \wedge \mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$ ) par le produit de la proportion de  $\mu_{O_B}$  appartenant à  $\delta_\nu(\mu_{O_A})$  et de la proportion de  $\mu_{O_A}$

1. En effet la prise en compte de ces nœuds peut induire une erreur d'approximation importante. Par exemple dans le cas d'une contrainte directionnelle, si  $B$  est inclus dans  $O_B$  l'approximation réalisée :  $\frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \approx \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$  est en général très grossière et conduira à un mauvais ordonnancement des contraintes.

Supposons par exemple que le domaine de  $B$  soit réduit à un singleton et considérons une variable  $O_B$  telle que  $B$  soit inclus dans  $O_B$ . Dans ce cas nous avons :  $\frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} - \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} = 0$  et la priorité du calcul de la contrainte reste nulle. Si maintenant nous utilisons l'approximation nous obtenons une priorité potentiellement non nulle :  $\frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} - \frac{|\delta_\nu(\bar{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \geq 0$ , ce qui peut provoquer le calcul de la contrainte alors que celui-ci est complètement inutile.

appartenant à  $\delta_\nu(\mu_{O_A})$  ( $\frac{|\delta_\nu(\mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\overline{A} \wedge \mu_{O_A}|}{|\mu_{O_A}|}$ ). En effet la taille du dilaté  $\delta_\nu(\overline{A} \wedge \mu_{O_A})$  est liée à la taille de  $\overline{A} \wedge \mu_{O_A}$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \frac{|\delta_\nu(\overline{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} &\approx \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \frac{|\delta_\nu(\mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\overline{A} \wedge \mu_{O_A}|}{|\mu_{O_A}|}, \\ &\approx \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \frac{|\delta_\nu(\mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\overline{A} \wedge \overline{O_A}|}{|\overline{O_A}|}. \end{aligned}$$

Pour l'ensemble des couples de variables  $(O_1, O_2) \in \chi^2$ , nous apprenons le coefficient  $S_\nu^{dir}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_\nu(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}$  qui correspond à un degré de satisfaction de la relation directionnelle entre  $O_1$  et  $O_2$ . L'apprentissage de ce coefficient (ainsi que des coefficients introduits pour le calcul de la priorité des autres contraintes) sera détaillé à la fin de cette section.

Nous obtenons donc :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| \left( \frac{|\overline{B} \wedge \overline{O_B}|}{|\overline{O_B}|} - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} (S_\nu^{dir}(O_A, O_B) \frac{|\overline{A} \wedge \overline{O_A}|}{|\overline{O_A}|}) \frac{|\overline{B} \wedge \overline{O_B}|}{|\overline{O_B}|} \right).$$

Des termes du type  $\frac{|\overline{O_1} \wedge \overline{O_2}|}{|\overline{O_2}|}$  apparaissent à plusieurs reprises dans ce calcul. Nous maintiendrons pendant le processus de propagation une table contenant ces indices que nous notons :

$$I(O_1, O_2) = \frac{|\overline{O_1} \wedge \overline{O_2}|}{|\overline{O_2}|}. \quad (4.2)$$

Nous définissons alors une priorité  $P_{réduction}$  comme l'approximation de la réduction potentiellement réalisée par le propageur associé à la contrainte de direction :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dir \nu}) = \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} S_\nu^{dir}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right). \quad (4.3)$$

Cette estimation peut être calculée efficacement. En effet tous les termes impliqués sont fixés et obtenus par apprentissage ou sont des indices peu coûteux à calculer.

L'obtention de cet indicateur à faible coût est cependant réalisée au prix d'approximations parfois grossières. Mais puisque l'ordonnancement a uniquement un impact sur les performances et pas sur le résultat final, nous pouvons nous permettre de telles approximations.

Si nous reprenons l'équation 4.3, nous pouvons en donner une interprétation simple. La somme sur  $O_B$  permet de déterminer pour chaque structure du modèle si la borne supérieure du domaine de  $B$  comprend cette structure et si oui si la contrainte directionnelle permet de réduire  $\overline{B}$  sur cette région de l'espace. Pour cela la non-satisfaction de la contrainte de direction entre le domaine courant et  $O_B$  est estimée :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dir \nu}) = \underbrace{\sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B)}_{\text{Réduction potentielle de } \overline{B} \text{ dans la région associée à } O_B} \underbrace{\left( 1 - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} S_\nu^{dir}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right)}_{\text{Non satisfaction de la contrainte par } o_B \text{ relativement au domaine courant de } A}. \quad (4.4)$$

**Exemple 4.1.** Prenons pour exemple la contrainte «  $B$  est à droite de  $A$  » notée  $C_{AB}^{droite}$  et la scène présentée par la figure 4.8. Pour cette contrainte le coefficient  $S^{droite}(O_1, O_2)$  a été appris pour tous les couples  $(O_1, O_2) \in \{A, B, C, D\}^2$ . Ces valeurs représentent la satisfaction de la relation de direction entre  $O_i$  et  $O_j$  (notons que ces valeurs sont données à titre indicatif) et sont présentées dans la table 4.1. Nous disposons aussi du volume moyen de ces structures :  $|A^p| = 50$ ,  $|B^p| = 15$ ,  $|C^p| = 15$  et  $|D^p| = 20$ .

	A	B	C	D
A	1	1	1	0,4
B	0	1	0,1	0
C	0	0,1	1	0
D	0,3	0,8	1	1

TABLE 4.1 – Indices  $S^{droite}(O_i, O_j)$  associés à la contrainte «  $B$  est à droite de  $A$  ».

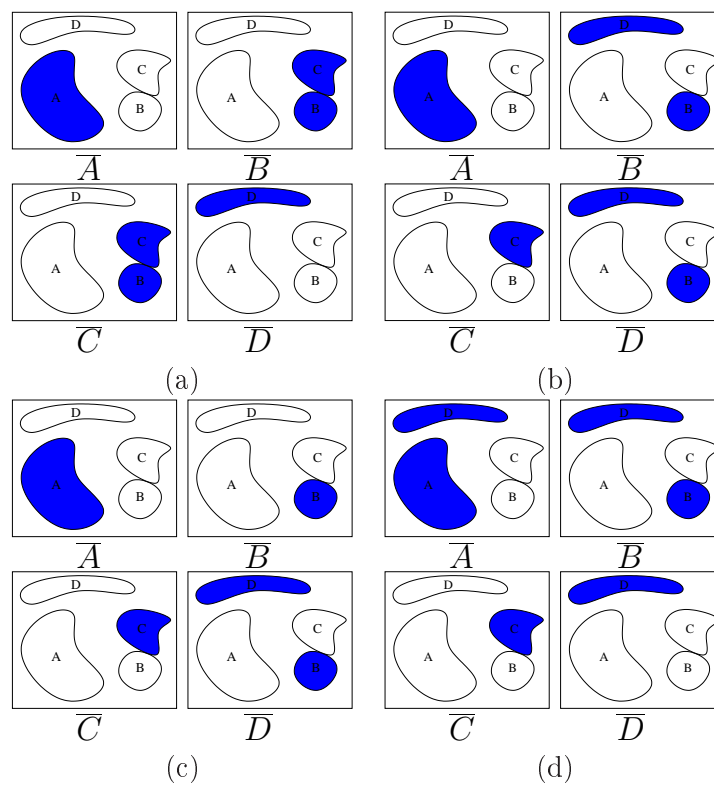


FIGURE 4.8 – (a-d) Quatre configurations des domaines. Le calcul de la contrainte «  $B$  est à droite de  $A$  » est intéressant uniquement dans la configuration (b).

Quatre configurations des domaines (uniquement les bornes supérieures sont montrées) sont présentées en (a), (b), (c) et (d). Le calcul du propagateur associé à la contrainte  $C_{AB}^{droite}$  ne présente un intérêt que dans la configuration (b). Dans toutes les autres configurations il ne modifiera pas la borne supérieure de  $B$ .

Dans chacune de ces configurations nous calculons l'indice donné par l'équation 4.3. Cet indice dépend notamment des valeurs  $I(O_i, O_j) = \frac{|O_i \wedge O_j|}{|O_j|}$  données dans la table 4.2 pour chacune des configurations exhibées et des facteurs de normalisation  $\alpha^B$  valant 1 dans



	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	1	0
C	0	1	1	0
D	0	0	0	1

(a)

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	0	1
C	0	0	1	0
D	0	1	0	1

(b)

	A	B	C	D
A	1	0	0	0
B	0	1	0	0,4
C	0	0	1	0
D	0	1	0	1

(c)

	A	B	C	D
A	1	0,6	0	1
B	0,3	1	0	1
C	0	0	1	0
D	0,3	0,6	0	1

(d)

TABLE 4.2 – Valeur de l'opérateur  $I(O_i, O_j)$  pour les bornes présentées respectivement en (a), (b), (c) et (d) dans la figure 4.8.

*cet exemple. Nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
& (a) \text{ Préduction}(C_{A,B}^{\text{droite}}) \\
&= \alpha^B(A)|A^p|I(B, A)(1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_\nu^{\text{dir}}(O_A, A)I(A, O_A)) + \alpha^B(B)|B^p|I(B, B) \dots \\
&= \alpha^B(A)|A^p|I(B, A)(1 - S_\nu^{\text{dir}}(A, A)I(A, A)) + \alpha^B(B)|B^p|I(B, B)(1 - S_\nu^{\text{dir}}(A, B) \dots \\
&= 1 \times 50 \times 0(1 - 1) + 1 \times 15 \times 1(1 - 1) + 1 \times 15 \times 1(1 - 1) + 1 \times 20 \times 0(1 - 0,4) \\
&= 0 \\
& (b) \text{ Préduction}(C_{A,B}^{\text{droite}}) \\
&= 1 \times 50 \times 0(1 - 1) + 1 \times 15 \times 1(1 - 1) + 1 \times 15 \times 0(1 - 1) + 1 \times 20 \times 1(1 - 0,4) \\
&= 12 \\
& (c) \text{ Préduction}(C_{A,B}^{\text{droite}}) \\
&= 1 \times 50 \times 0(1 - 1) + 1 \times 15 \times 1(1 - 1) + 1 \times 15 \times 0(1 - 1) + 1 \times 20 \times 0,4(1 - 0,4) \\
&= 4,8 \\
& (d) \text{ Préduction}(C_{A,B}^{\text{droite}}) \\
&= 1 \times 50 \times 0,3(1 - 1) + 1 \times 15 \times 1(1 - 1) + 1 \times 15 \times 0(1 - 1) + 1 \times 20 \times 1(1 - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

L'indice obtenu est maximal dans la configuration (b) qui est la seule configuration dans laquelle le calcul du propagateur est utile. Il est nul dans les configurations (a) et (d), mais pas dans la configuration (c) (même s'il est plus faible que l'indice obtenu pour la configuration (b)). Cela est notamment dû à l'approximation de  $\frac{|B \wedge \mu_D|}{|\mu_D|}$  valant 0 par  $\frac{|B \wedge D|}{|D|}$  valant 0,4. Cependant puisque nous ne connaissons pas  $D$  mais seulement son domaine, l'obtention d'une meilleure approximation de ce ratio n'est pas simple. Par ailleurs puisque cet indice n'est pas symétrique ( $I(B, D) = 0,4$  et  $I(D, B) = 1$ ), le calcul d'un propagateur mettant à jour  $D$  sera favorisé.

### Contrainte de distance

Nous traitons similairement les contraintes de distance modélisées dans la section 2.4.3 suivant :

$$\begin{aligned}
\text{rel}(C_{A,B}^{\text{dist } \nu_1 \nu_2}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\
(\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_2 \leq \top(c(\delta_{c(\nu_1)}(\mu_1)), \delta_{\nu_2}(\mu_1)), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}}$  associé à cette contrainte réduit la borne supérieure de  $B$  :  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A})$ . Comme dans le cas des relations directionnelles, nous estimons le cardinal de la réduction potentiellement réalisée par ce propagateur :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| = |\overline{B} - c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \overline{B}|,$$

en décomposant cette expression sur l'ensemble des structures du modèle et nous obtenons l'approximation :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |\mu_{O_B}| \left( \frac{|\overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} - \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right),$$

où  $\alpha^B(O_B)$  est le facteur de correction déjà utilisé pour la contrainte directionnelle et qui sera détaillé à la fin de cette section. En utilisant le cardinal *a priori*  $|O_B^p|$  de la structure  $O_B$  et son domaine de  $(\underline{O}_B, \overline{O}_B)$ , nous obtenons :

$$|\overline{B} - \overline{B}'| \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| \max(0, (I(B, O_B) - \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|})),$$

où  $I(B, O_B) = \frac{|\overline{B} \wedge \overline{O}_B|}{|\overline{O}_B|}$ . Nous devons alors obtenir une approximation peu coûteuse de  $\frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$  que nous décomposons suivant :

$$\begin{aligned} \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} &\approx \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\overline{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}, \\ &\approx \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \frac{|\delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} I(B, O_B). \end{aligned}$$

Comme dans le cas des relations directionnelles, nous approchons  $\frac{|\delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$  par :

$$\frac{|\delta_{\nu_2}(\overline{A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \approx \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \frac{|\delta_{\nu_2}(\mu_{O_A}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} I(A, O_A).$$

Nous apprenons pour toutes les couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$  le coefficient  $S_{\nu_2}^{dist}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_{\nu_2}(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}$  correspondant à un degré de satisfaction de la contrainte de distance maximale entre  $O_1$  et  $O_2$ .

Finalement pour approcher  $\frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$ , la décomposition sur l'ensemble des structures du modèle n'est pas utile puisque ce terme dépend de la borne inférieure. Contrairement à l'approximation réalisée dans le cas de la borne supérieure (qui consistait à estimer de quelle façon la borne supérieure avait été réduite), nous voulons maintenant caractériser l'accroissement de la borne inférieure. Nous choisissons ici un modèle simple reposant uniquement sur le degré d'appartenance maximal de la borne inférieure :

$$\begin{aligned} \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\underline{A})) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} &\approx \frac{|c(\delta_{c(\nu_1)}(\min(\max_{x \in X} \underline{A}(x), \mu_A))) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}, \\ &\approx \frac{|c(\min(\max_{x \in X} \underline{A}(x), \delta_{c(\nu_1)}(\mu_A))) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}, \\ &\approx 1 - \frac{|\min(\max_{x \in X} \underline{A}(x), \delta_{c(\nu_1)}(\mu_A)) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}, \\ &\approx 1 - \max_{x \in X} \underline{A}(x) \frac{|\delta_{c(\nu_1)}(\mu_A) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}. \end{aligned}$$

Nous apprenons pour toutes les couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$  le coefficient  $S_{\nu_1}^{dist}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_{c(\nu_1)}(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}$  lié à la satisfaction de la contrainte de distance minimale entre  $O_1$  et  $O_2$ .

Nous définissons alors la priorité  $P_{réduction}$  suivante :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}) = \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - (1 - \max_{x \in X} \underline{A}(x) S_{\nu_1}^{dist}(A, O_B)) \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} S_{\nu_2}^{dist}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right). \quad (4.5)$$

### Contrainte d'inclusion

L'inclusion de  $A$  dans  $B$  est modélisée par la contrainte (cf section 2.4.1) :

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{dans}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 \leq \mu_2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  associé à cette contrainte met à jour la borne supérieure du domaine de  $A$  et la borne inférieure du domaine de  $B$  :  $\bar{A}' = \bar{A} \wedge \bar{B}$  et  $\underline{B}' = \underline{B} \vee \underline{A}$ . L'estimation de la réduction de la borne supérieure est beaucoup plus simple que pour les deux contraintes précédentes :

$$\begin{aligned} |\bar{A} - \bar{A} \wedge \bar{B}| &= |\bar{A}| - |\bar{A} \wedge \bar{B}|, \\ &= |\bar{A}|(1 - I(B, A)). \end{aligned}$$

Pour estimer le changement de la borne inférieure, nous approchons (comme dans le cas de la contrainte de distance) la borne inférieure en utilisant son maximum de degré d'appartenance :  $\underline{A} \approx \min(\max_{x \in X} \underline{A}(x), \mu_A)$  et  $\underline{B} \approx \min(\max_{x \in X} \underline{B}(x), \mu_B)$ . Nous obtenons donc :  $|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx |\min(\max_{x \in X} \underline{B}(x), \mu_B) \vee \min(\max_{x \in X} \underline{A}(x), \mu_A) - \min(\max_{x \in X} \underline{B}(x), \mu_B)|$  et puisque  $\mu_A$  est inclus dans  $\mu_B$  :  $|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx \max(0, (\max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x))) |\mu_A|$ . En utilisant le cardinal *a priori* de  $A$ , nous aboutissons à :

$$|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx \max \left( 0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x) \right) |A^p|.$$

Pour affiner cette approximation, nous pouvons utiliser le cardinal des bornes inférieures supposé connu pendant le processus de propagation :  $|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx \max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|)$ . En combinant ces deux approches nous obtenons finalement :

$$|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx \frac{\max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|) + \max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x)) |A^p|}{2}.$$

Nous définissons alors la priorité associée à la contrainte d'inclusion comme la somme de ces différences :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dans}) = |\bar{A}|(1 - I(B, A)) + \frac{\max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|) + \max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x)) |A^p|}{2}. \quad (4.6)$$

### Contrainte de complémentation

Nous avons défini dans la section 2.4.1 une contrainte de complémentation  $C_{A,B}^{compl}$  suivant :

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{compl}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 = c(\mu_2), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le propagateur associé  $f_{C_{A,B}^{compl}}$  réalise les mises à jour suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{A}' &= \underline{A} \vee c(\overline{B}), \\ \overline{A}' &= \overline{A} \wedge c(\underline{B}), \\ \underline{B}' &= \underline{B} \vee c(\overline{A}), \\ \overline{B}' &= \overline{B} \wedge c(\underline{A}). \end{aligned}$$

Nous allons donc approcher le cardinal de chacune de ces mises à jour. Tout d'abord la réduction de la borne inférieure de  $A$  est approchée par :

$$\begin{aligned} |\underline{A}' - \underline{A}| &= |\underline{A} \vee c(\overline{B})| - |\underline{A}|, \\ &\approx \max(0, |c(\overline{B})| - |\underline{A}|), \\ &\approx \max(0, |\overline{A}| \frac{|c(\overline{B}) \wedge \overline{A}|}{|\overline{A}|} - |\underline{A}|), \\ &\approx \max(0, |\overline{A}| (1 - \frac{|\overline{B} \wedge \overline{A}|}{|\overline{A}|}) - |\underline{A}|), \\ &\approx \max(0, |\overline{A}| (1 - I(B, A)) - |\underline{A}|). \end{aligned}$$

Ce type d'approximation a déjà été réalisé pour la contrainte d'inclusion ( $|\underline{B} \vee \underline{A} - \underline{B}| \approx \max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|)$ ). Nous la complétons ici par une approximation du cardinal de  $c(\overline{B})$  en fonction de la structure  $A$  complémentaire de  $B$ . La réduction de la borne supérieure de  $A$  peut quant à elle être approchée par :

$$\begin{aligned} |\overline{A} - \overline{A}'| &= |\overline{A}| - |\overline{A} \wedge c(\underline{B})|, \\ &\approx |\overline{A} \wedge \underline{B}|, \\ &\approx |\overline{A} \wedge \overline{B}| \frac{B}{\overline{B}}, \\ &\approx I(A, B) |\underline{B}|. \end{aligned}$$

L'approximation  $|\overline{A} \wedge \underline{B}| \approx |\overline{A} \wedge \overline{B}| \frac{B}{\overline{B}}$  est très grossière lorsque la borne inférieure  $\underline{B}$  n'est pas nulle et n'intersecte pas  $\overline{A}$  et que la borne supérieure  $\overline{B}$  n'a pas été assez réduite et intersecte  $\overline{A}$ . Dans ce cas nous obtenons une estimation non nulle alors qu'aucune réduction n'est effectivement réalisée par le propagateur associé. Cela peut conduire à des erreurs dans l'ordonnancement. Cependant si nous nous limitons à l'approximation  $|\overline{A} - \overline{A}'| \approx |\overline{A} \wedge \underline{B}|$ , nous devons maintenir pendant le processus de propagation une matrice  $I'(A, B) = |\overline{A} \wedge \underline{B}|$  ce qui est plus coûteux que le gain obtenu.

Les réductions des bornes du domaine de  $B$  peuvent être obtenues de façon similaire. Nous définissons alors la priorité associée à la contrainte de complémentation suivant :

$$\begin{aligned} P_{réduction}(C_{A,B}^{compl}) &= \max(0, |\overline{A}| (1 - I(B, A)) - |\underline{A}|) + I(A, B) |\underline{B}| + \\ &\quad \max(0, |\overline{B}| (1 - I(A, B)) - |\underline{B}|) + I(B, A) |\underline{A}|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

### Contrainte de connexité

La connexité des objets étudiée en détails dans le chapitre 3 peut être modélisée par la contrainte :

$$\begin{aligned} \text{rel}(C_A^{\text{conn}}) : \mathcal{D}(A) &\rightarrow \{0, 1\} \\ \mu &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu \in \mathcal{H}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Le propagateur  $f_{C_A^{\text{conn}}}$  associé à cette contrainte réduit la borne supérieure du domaine de  $A$  en supprimant ses composantes connexes n'incluant pas la borne inférieure. Comme pour les contraintes de distance ou de direction, nous utilisons l'ensemble des structures du modèle pour estimer la différence réalisée par la mise à jour :

$$|\bar{A} - \bar{A}'| \approx \sum_{O \in \mathcal{X}} \alpha^A(O) |\mu_O| \left( \frac{|\bar{A} \wedge \mu_O|}{|\mu_O|} - \frac{|\bar{A}' \wedge \mu_O|}{|\mu_O|} \right). \quad (4.8)$$

Nous devons alors déterminer si la région  $\bar{A} \wedge \mu_O$  a ou n'a pas été filtrée par l'application du propagateur. Ce dernier met à jour la borne supérieure du domaine de  $A$  suivant :  $\bar{A}' = \bigvee \{\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \underline{A} \leq \mu_i\}$ . Considérons un point  $x$  fixé et  $\mu_i$  la composante connexe telle que  $\bar{A}'(x) = \mu_i(x)$ . Si nous notons  $x_m$  un point pour lequel le maximum global de  $\underline{A}$  est atteint, nous avons alors  $c_{\mu_i}^2(x, x_m) \geq \tau$  et donc  $1 + c_A^1(x, x_m) - \tau \geq \min(\mu_i(x), \mu_i(x_m))$ . Puisque  $\underline{A} \leq \mu_i$ , nous obtenons  $1 + c_A^1(x, x_m) - \tau \geq \min(\mu_i(x), \underline{A}(x_m))$ . La réduction réalisée dépend donc principalement :

- de la hauteur de la borne inférieure,
- du degré de connexité  $c_A^1(x, x_m)$ .

La hauteur de  $\underline{A}$  est connue mais pas  $c_A^1(x, x_m)$  qui doit être estimé. Dans l'équation 4.8 nous réalisons une décomposition sur l'ensemble des structures du modèle. Supposons donc maintenant que le point  $x$  appartienne à la région associée à  $O$  et que  $x_m$  appartienne à la région associée à  $A$  (en effet nous avons  $\underline{A} \leq \mu_A$ ). Nous approchons alors  $c_A^1(x, x_m)$  en recherchant une chaîne de structures adjacentes appartenant à  $\bar{A}$  plutôt qu'une chaîne de voxels adjacents :

$$\begin{aligned} c_A^1(x, x_m) &= \max_{l \in L_{x,y}} \min_{0 \leq i \leq n} \bar{A}(x_i), \\ &\quad l = \{x_0 = x, x_1, \dots, x_n = x_m\} \\ &\approx \max_{l \in L_{A,O}} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{|\bar{A} \wedge \mu_{O_k}|}{|\mu_{O_k}|} \text{Adj}(O_k, O_{k-1}), \\ &\quad l = \{O_0 = O, O_1, \dots, O_n = A\} \end{aligned}$$

où  $\text{Adj}(O_k, O_{k-1}) = 1$  si les structures  $O_k$  et  $O_{k-1}$  sont adjacentes dans le modèle et 0 sinon. Comme pour les contraintes précédentes nous ne connaissons pas  $\mu_{O_k}$ . Nous approchons  $\frac{|\bar{A} \wedge \mu_{O_k}|}{|\mu_{O_k}|}$  par  $\min(1, \frac{|\bar{A} \wedge O_k|}{|O_k^p|})$ . Nous définissons alors :

$$c_{\bar{A}}(O, P) \approx \max_{l \in L_{O,P}} \min_{1 \leq k \leq n} \min(1, \frac{|\bar{A} \wedge O_k|}{|O_k^p|}) \text{Adj}(O_k, O_{k-1}), \quad (4.9)$$

$$l = \{O_0 = O, O_1, \dots, O_n = P\}$$

qui peut être calculé efficacement par l'algorithme de Dijkstra comme nous le détaillerons à la fin de cette section.

Finalement nous utilisons cet indice pour approcher  $\bar{A}' \wedge \mu_O$ . Le filtrage réalisé est important si  $\max_{x \in X} \underline{A}(x)$  est grand et  $1 + c_{\bar{A}}(A, O) - \tau$  est faible. La conjonction de

ces deux critères peut être exprimée en utilisant les opérateurs de Lukasiewicz suivant :  $\max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) + c(1 + c_{\bar{A}}(A, O) - \tau) - 1) = \max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - 1 - c_{\bar{A}}(A, O) + \tau)$ . Nous approchons alors  $\bar{A}' \wedge \mu_O$  par  $\min(\bar{A} \wedge \mu_O, 1 - (\max_{x \in X} \underline{A}(x) - 1 - c_{\bar{A}}(A, O) + \tau))$ . Nous définissons finalement pour la contrainte de connexité la priorité suivante :

$$Préduction(C_A^{conn}) = \sum_{O \in \mathcal{X}} \alpha^A(O) |O^p| \max(0, \tau - 1 + \max_{x \in X} \underline{A}(x) - c_{\bar{A}}(A, O)) I(A, O). \quad (4.10)$$

### Contraintes de volume et de connexité

La contrainte de volume définie dans la section 2.4.5 est combinée à la contrainte de connexité pour obtenir un propagateur intéressant. Le propagateur  $f_{C_A^{vol} [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn}$  consiste à filtrer les composantes connexes de la borne supérieure du domaine de  $A$  qui ne satisfont pas au critère de volume minimal.

Pour approcher la réduction réalisée par ce propagateur nous allons procéder comme pour la contrainte de connexité. Premièrement nous décomposons la différence suivant :

$$|\bar{A} - \bar{A}'| \approx \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |\mu_{O_A}| \left( \frac{|\bar{A} \wedge \mu_{O_A}|}{|\mu_{O_A}|} - \frac{|\bar{A}' \wedge \mu_{O_A}|}{|\mu_{O_A}|} \right).$$

Nous allons alors déterminer si  $\bar{A} \wedge \mu_{O_A}$  appartient ou non à une composante connexe de  $\bar{A}$  filtrée par le propagateur. Ce filtrage dépend de la taille des composantes connexes. Nous allons donc estimer la taille  $V(O_A)$  de la composante connexe associée à  $\bar{A} \wedge \mu_{O_A}$  en utilisant l'indice de connexité  $c_{\bar{A}}(O_1, O_2)$  défini dans l'équation 4.9 :

$$V(O_A) = \sum_{O \in \mathcal{X}} \alpha^{O_A}(O) c_{\bar{A}}(O_A, O) I(A, O) |O^p|.$$

La réduction réalisée est alors fonction de la non satisfaction du critère de volume minimal ainsi que du degré de connexité  $\tau$  (paramètre de la contrainte  $C_A^{conn}$ ). Nous exprimons la conjonction de ces deux critères par les opérateurs de Lukasiewicz suivant :  $\max(0, \tau + c(f_{V_{\min}}(V(O_A))) - 1) = \max(0, \tau - f_{V_{\min}}(V(O_A)))$ . Nous approchons alors  $\bar{A}' \wedge \mu_{O_A}$  par  $\min(\bar{A} \wedge \mu_{O_A}, 1 - \max(0, \tau - f_{V_{\min}}(V(O_A))))$  et nous obtenons finalement pour la combinaison des contraintes de connexité et de volume la priorité suivante :

$$Préduction(C_A^{vol} [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}] \wedge C_A^{conn}) = \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - f_{V_{\min}}(V(O_A))). \quad (4.11)$$

### Contraintes d'adjacence et de connexité

Similairement nous avons défini dans la section 2.6.1 un propagateur associé à la combinaison d'une contrainte d'adjacence entre deux structures  $A$  et  $B$  et de contraintes de connexité. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{adj} \wedge C_A^{conn} \wedge C_B^{conn}}$  filtre les composantes connexes de la borne supérieure de  $B$  qui ne sont pas adjacentes à la borne supérieure de  $A$  et réciproquement.

Pour estimer la réduction réalisée par ce propagateur nous décomposons à nouveau la différence sur l'ensemble des structures :

$$|\bar{B} - \bar{B}'| \approx \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |\mu_{O_B}| \left( \frac{|\bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} - \frac{|\bar{B}' \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right).$$

Nous devons alors estimer si la composante connexe de  $\bar{B}$  associée à  $\bar{B} \wedge \mu_{O_B}$  est adjacente à  $\bar{A}$ . Pour cela nous nous reposons à nouveau sur l'indice de connexité  $c_{\bar{B}}(O, O_B)$  pour déterminer si  $O_B$  est connexe dans  $\bar{B}$  à une structure  $O$  (qui appartient donc aussi à  $\bar{B}$ ) qui est adjacente à la borne supérieure de  $A$ . Nous estimons l'adjacence de  $O$  à  $\bar{A}$  suivant  $\max_{O_A \in \mathcal{X}} (Adj(O, O_A)I(A, O_A))$ , où  $Adj(O, O_A)$  caractérise l'adjacence de  $O$  et  $O_A$  dans le modèle. Nous obtenons alors l'indice suivant pour la structure  $O_B$  :

$$Deg_{adj}(\bar{A}, O_B) = \max_{O \in \mathcal{X}} c_{\bar{B}}(O_B, O) \max_{O_A \in \mathcal{X}} (Adj(O, O_A)I(A, O_A)).$$

Comme pour la combinaison des contraintes de volume et de connexité, la réduction obtenue est importante si le degré de connexité  $\tau$  (paramètre de la contrainte de connexité) est grand et si  $Deg_{adj}(\bar{A}, O_B)$  est faible. Nous exprimons cette conjonction comme :  $\max(0, \tau + c(Deg_{adj}(\bar{A}, O_B)) - 1) = \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{A}, O_B))$ . Nous obtenons alors la priorité suivante en considérant aussi la mise à jour de la borne supérieure du domaine de  $A$  :

$$\begin{aligned} & P_{réduction}(C_{A,B}^{adj} \wedge C_A^{conn} \wedge C_B^{conn}) \\ &= \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{A}, O_B)) \\ &+ \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{B}, O_A)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

### Contrainte de contraste

Le contraste entre deux structures  $A$  et  $B$  a été défini dans la section 2.5 suivant :

$$\begin{aligned} rel(C_{A,B}^{contraste}) : \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(B) &\rightarrow \{0, 1\} \\ (\mu_1, \mu_2) &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1^{\mathcal{I}} \leq \mu_2^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^k \text{ et } \mu_2^{\mathcal{I}} \leq \mu_1^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

où  $f_{A,B}^k$  et  $f_{A,B}^{k-1}$  sont obtenus à partir du contraste *a priori* entre  $A$  et  $B$  représenté par une fonction trapézoïdale de paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

Le propagateur associé  $f_{C_{A,B}^{contraste}}$  met à jour la borne supérieure du domaine de  $A$  :  $\bar{A}' = \bar{A} \wedge (\bar{B}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^k \circ \mathcal{I})$ , ainsi que la borne supérieure du domaine de  $B$  :  $\bar{B}' = \bar{B} \wedge (\bar{A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I})$ . Nous allons estimer la réduction potentielle de la borne supérieure de  $B$  :

$$|\bar{B} - \bar{B}'| = |\bar{B} - \bar{B} \wedge (\bar{A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I})|.$$

La réduction de la borne supérieure de  $A$  pourra être estimée de la même manière.

Similairement aux approximations réalisées dans le cas des contraintes directionnelles

ou de distance, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& |\bar{B} - \bar{B}'| \\
& \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| \left( I(B, O_B) - \frac{|(\bar{A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \bar{B} \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right), \\
& \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \frac{|(\bar{A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right), \\
& \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \frac{|\bigvee_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} ((\bar{A} \wedge \mu_{O_A})^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} \right), \\
& \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} \frac{|(\mu_{O_A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} I(A, O_A) \right), \\
& \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} S_{a,b,c,d}^{cont}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right).
\end{aligned}$$

L'indice  $S_{a,b,c,d}^{cont}(O_1, O_2) = \frac{|(\mu_{O_A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{A,B}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|} = \frac{|(\mu_{O_A}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,c,d}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_B}|}{|\mu_{O_B}|}$  est appris pour tous les couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$  et représente un degré de satisfaction de la relation de contraste (caractérisée par une fonction trapézoïdale de paramètres  $a, b, c$  et  $d$ ) entre  $O_1$  et  $O_2$ .

En considérant aussi la mise à jour de la borne supérieure de  $A$ , nous obtenons la priorité suivante :

$$\begin{aligned}
P_{réduction}(C_{A,B}^{contraste}) = & \\
& \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left( 1 - \max_{O_A \in \chi \setminus \chi_B(A)} S_{a,b,c,d}^{cont}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right) \\
& + \sum_{O_A \in \chi} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \left( 1 - \max_{O_B \in \chi \setminus \chi_B(B)} S_{a,b,c,d}^{cont2}(O_B, O_A) I(B, O_B) \right), \quad (4.13)
\end{aligned}$$

où l'indice  $S_{a,b,c,d}^{cont2}(O_1, O_2) = \frac{|(\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,c,d}^k \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}$  est aussi supposé appris.

### Contrainte de partition

Dans la section 2.4.1 nous avons défini une contrainte de partition entre un objet  $B$  d'une part et un ensemble de  $k$  sous-structures  $\{A_i\}$  d'autre part :

$$\begin{aligned}
rel(C_{\{A_i\}, B}^{partition}) : \mathcal{D}(A_1) \times \dots \times \mathcal{D}(A_k) \times \mathcal{D}(B) & \rightarrow \{0, 1\} \\
(\mu_1, \dots, \mu_k, \mu) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \perp_{i \in [1..k]} \mu_i \\ & \text{et } \forall i \neq j, \mu_i \leq c(\mu_j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le propagateur associé réalise alors les mises à jour suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall i \in [1..k], \underline{A}_i' &= \underline{A}_i \vee \top(B, c(\perp_{j \neq i} \bar{A}_j)), \\
\forall i \in [1..k], \bar{A}_i' &= \bar{A}_i \wedge \bar{B} \wedge \bigwedge_{j \neq i} c(\underline{A}_j), \\
\underline{B}' &= \underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i, \\
\bar{B}' &= \bar{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \bar{A}_i.
\end{aligned}$$



Pour chacune de ces opérations, nous approchons le cardinal de la réduction réalisée. Tout d'abord pour chaque sous-partie  $A_i$ , la réduction est obtenue en partie par complémentation. Les approximations que nous réalisons sont donc similaires à celles réalisées pour la contrainte de complémentation. Premièrement nous estimons la modification de la borne inférieure suivant :

$$\begin{aligned}
|\underline{A}_i' - \underline{A}_i| &= |\underline{A}_i \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A}_j)) - \underline{A}_i|, \\
&\approx \max(0, |\top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A}_j))| - |\underline{A}_i|), \\
&\approx \max(0, |\mu_{A_i}| \frac{|\top(\underline{B} \wedge \mu_{A_i}, \top_{j \neq i} \mu_{A_i} \wedge c(\overline{A}_j))|}{|\mu_{A_i}|} - |\underline{A}_i|), \\
&\approx \max(0, \min(|A_i^p|, |\overline{A}|) \frac{|\underline{B} \wedge \mu_{A_i}|}{|\mu_{A_i}|} \frac{|\top_{j \neq i} \mu_{A_i} \wedge c(\overline{A}_j)|}{|\mu_{A_i}|} - |\underline{A}_i|), \\
&\approx \max(0, \min(|A_i^p|, |\overline{A}|) (1 - \frac{\overline{B} - \underline{B}}{\overline{B}}) (1 - \max_{j \neq i} \frac{|\overline{A}_j \wedge \overline{A}_i|}{|\overline{A}_i|}) - |\underline{A}_i|).
\end{aligned}$$

Le cardinal de la réduction de la borne supérieure de chaque  $A_i$  est alors approché par la somme des réductions réalisées suivant  $\overline{B}$  et chaque  $\overline{A}_j$  :

$$\begin{aligned}
|\overline{A}_i - \overline{A}_i'| &= |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B} \wedge \bigwedge_{j \neq i} c(\underline{A}_j)|, \\
&\approx |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B}| + |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \bigwedge_{j \neq i} c(\underline{A}_j)|, \\
&\approx |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B}| + \sum_{j \neq i} |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge c(\underline{A}_j)|, \\
&\approx |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B}| + \sum_{j \neq i} |\overline{A}_i \wedge \underline{A}_j|, \\
&\approx |\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B}| + \sum_{j \neq i} |\overline{A}_i \wedge \overline{A}_j| \frac{|\underline{A}_j|}{|\overline{A}_j|}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Notons que l'estimation de  $|\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge c(\underline{A}_j)|$  est similaire à celle réalisée pour la contrainte de complémentation. Finalement le cardinal du changement des bornes de  $B$  est estimé suivant :

$$\begin{aligned}
|\underline{B}' - \underline{B}| &= |\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i - \underline{B}|, \\
&= |\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i| - |\underline{B}|, \\
&\approx \max(0, \sum_{i \in [1..k]} |\underline{A}_i| - |\underline{B}|),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\overline{B}' - \overline{B}| &= |\overline{B} - \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i|, \\
&= |\overline{B}| - |\overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i|, \\
&\approx \max(0, |\overline{B}| - \sum_{i \in [1..k]} |\overline{A}_i|).
\end{aligned}$$

Nous combinons alors ces approximations pour définir la priorité suivante :

$$P_{réduction}(C_{\{A_i\},B}^{partition}) = \quad (4.15)$$

$$\sum_{i \in [1..k]} \max(0, |A_i^p| (1 - \frac{\overline{B} - B}{\overline{B}}) (1 - \max_{j \neq i} I(A_j, A_i)) - |A_i|) \quad (4.16)$$

$$+ \sum_{i \in [1..k]} (|\overline{A}_i - \overline{A}_i \wedge \overline{B}| + \sum_{j \neq i} I(A_i, A_j) |A_j|) \quad (4.17)$$

$$+ \max(0, \sum_{i \in [1..k]} |A_i| - |B|) \quad (4.18)$$

$$+ \max(0, |\overline{B}| - \sum_{i \in [1..k]} |\overline{A}_i|). \quad (4.19)$$

### Indices à calculer pendant le processus de propagation

Les approximations obtenues dans cette section permettent durant l'algorithme de propagation de définir la priorité des contraintes. Ces approximations dépendent d'une part d'un ensemble d'indices appris qui sont listés dans la sous-section suivante et d'autre part d'indices peu coûteux à calculer qui caractérisent l'état courant des domaines. Nous détaillons ces derniers ci-dessous.

**Matrice  $I$**  Premièrement nous maintenons une matrice carrée  $I$  de taille  $|\chi|^2$  :

$$\forall (O_1, O_2) \in \chi^2, I(O_1, O_2) = \frac{|\overline{O}_1 \wedge \overline{O}_2|}{|\overline{O}_2|}. \quad (4.20)$$

Ces indices caractérisent l'état relatif des bornes supérieures des variables de  $\chi$ . Ces indices interviennent dans la plupart des expressions proposées dans cette section notamment pour caractériser l'état des bornes supérieures des domaines. Les approximations obtenues pour les contraintes de direction (équation 4.4), de distance (équation 4.5), de connexité (équation 4.10) ou de contraste (équation 4.13) réalisent ainsi une décomposition de la borne supérieure d'une variable (notée  $O$  ici) sur un ensemble de régions  $\{\mu_{O_i}\}$  (associées aux variables  $O_i$ ) formant une partition de l'espace. Cette décomposition conduit alors à l'évaluation de  $\frac{|\overline{O} \wedge \mu_{O_i}|}{|\mu_{O_i}|}$ . Cet indice prend des valeurs entre 0 et 1. Il vaut 0 lorsque  $\overline{O}$  n'inclut pas  $\mu_{O_i}$  et 1 lorsque  $\overline{O}$  inclut complètement  $\mu_{O_i}$ . Cependant pendant la propagation nous ne connaissons pas  $\mu_{O_i}$  mais seulement le domaine associé. Nous approchons donc  $\frac{|\overline{O} \wedge \mu_{O_i}|}{|\mu_{O_i}|}$  par  $\frac{|\overline{O} \wedge \overline{O}_i|}{|\overline{O}_i|}$ , cette approximation étant d'autant plus grossière que  $\overline{O}_i$  est large.

La matrice  $I$  ne doit pas être recalculée à chaque itération de l'algorithme. Elle est simplement mise à jour à chaque fois qu'un propagateur réduit la borne supérieure d'un domaine. Nous recalculons alors la ligne et la colonne correspondantes.

**Caractéristiques des bornes** Nous maintenons pendant le processus de propagation le cardinal des bornes de l'ensemble des domaines ( $|\overline{A}|$  et  $|\underline{A}|$  pour une variable  $A$ ) et le degré d'appartenance maximal des bornes inférieures ( $\max_{x \in X} \underline{A}(x)$ ).

**Connexité** Pour calculer les priorités des contraintes de connexité (éventuellement combinées à d'autres contraintes), nous utilisons l'indice de connexité entre deux structures  $O_1$

et  $O_2$  dans  $\bar{A}$  défini suivant :

$$c_{\bar{A}}(O_1, O_2) = \max_{\substack{l \in L_{O_1, O_2} \\ l = \{O_1=A, O_1, \dots, O_n=O_2\}}} \min_{1 \leq k \leq n} \min(1, \frac{|\bar{A} \wedge \bar{O}_k|}{|O_k^p|}) Adj(O_k, O_{k-1}),$$

où  $Adj(O_k, O_{k-1})$  est l'adjacence *a priori* entre  $O_k$  et  $O_{k-1}$  obtenue à partir du modèle. Le complémentaire de cet indice peut être écrit sous la forme :

$$1 - c_{\bar{A}}(O_1, O_2) = \min_{\substack{l \in L_{O_1, O_2} \\ l = \{O_1=A, O_1, \dots, O_n=O_2\}}} \max_{1 \leq k \leq n} \max(1 - Adj(O_k, O_{k-1}), 1 - \frac{|\bar{A} \wedge \bar{O}_k|}{|O_k^p|} Adj(O_k, O_{k-1})),$$

et être calculé efficacement par l'algorithme de Dijkstra [Dijkstra, 1959]. Pour cela nous construisons un graphe complet dont les nœuds sont les éléments de  $\chi$  et le poids de l'arc directionnel de  $O_1$  vers  $O_2$  est défini comme  $\max(1 - Adj(O_2, O_1), 1 - \frac{|\bar{A} \wedge \bar{O}_2|}{|O_2^p|} Adj(O_2, O_1))$ .

**Facteur de normalisation  $\alpha^B(O)$**  Finalement pour calculer l'approximation proposée pour de nombreuses contraintes (telles que les contraintes directionnelles ou de distance) nous utilisons un facteur de normalisation  $\alpha^B(O)$  qui permet de réduire l'erreur réalisée lors de l'approximation du cardinal de la réunion par la somme des cardinaux :

$$| \bigvee_{O_B \in \chi} (\bar{B} \wedge \mu_{O_B} - \bar{B}' \wedge \mu_{O_B}) | \approx \sum_{O_B \in \chi} \alpha^B(O_B) |\bar{B} \wedge \mu_{O_B} - \bar{B}' \wedge \mu_{O_B}|.$$

En effet les structures de  $\chi$  ne forment pas une partition de l'espace puisque notre modèle est hiérarchique. La somme est donc dans ce cas une approximation très grossière du cardinal de la réunion. Nous définissons donc pour une structure  $O$  un indice  $\alpha^B(O)$  qui vise à corriger partiellement cette erreur en tenant compte du « nombre de répétitions » de la région associée à la structure  $O$  dans le modèle.

Premièrement puisque la décomposition devrait idéalement être réalisée sur un ensemble de structures formant une partition de l'image et non sur une représentation hiérarchique, nous pouvons ne pas tenir compte dans ce calcul de l'ensemble  $\chi_B(B)$  des nœuds appartenant à la branche de  $B$  (dans la représentation hiérarchique sous forme d'arbre) sauf  $B$ . Pour toute variable  $O \in \chi_B(B)$  nous définissons ainsi  $\alpha^B(O) = 0$ .

Si  $O$  est une feuille de la représentation hiérarchique n'appartenant pas à  $\chi_B(B)$  et qu'elle est liée à la racine de la représentation hiérarchique par  $p$  nœuds n'appartenant pas à  $\chi_B(B)$ , nous définissons alors  $\alpha^B(O) = \frac{1}{p}$ . En effet la région associée à la feuille est comptée  $p$  fois dans la somme.

Finalement si  $O$  est une structure quelconque n'appartenant pas à  $\chi_B(B)$ , nous notons  $\{F_i^O\}$  les feuilles descendantes de  $O$  et nous définissons :

$$\alpha^B(O) = \frac{1}{\sum_{F \in \{F_i^O\}} \frac{|\mu_F|}{|\mu_O|} \frac{1}{\alpha^B(F)}}.$$

$\{F_i^O\}$  représente au niveau de détail le plus fin l'ensemble des sous-parties de  $O$ . L'expression  $\sum_{F \in \{F_i^O\}} \frac{|\mu_F|}{|\mu_O|} \frac{1}{\alpha^B(F)}$  correspond alors au nombre de répétitions moyen de l'ensemble des sous-parties de  $O$  et donc à la répétition de la région associée à  $O$  dans le modèle.

Nous supposons ces indices constants pendant l'algorithme de propagation. Ils sont calculés à l'initialisation de l'algorithme en utilisant le cardinal *a priori* de chaque structure :

$$\alpha^B(O) = \frac{1}{\sum_{F \in \{F_i^O\}} \frac{|F^P|}{|O^P|} \frac{1}{\alpha^B(F)}}. \quad (4.21)$$

Pour chaque  $B \in \chi$ , nous sauvegardons donc les indices  $\alpha^B(O)$  pour chaque  $O \in \chi$ .

### Indices à apprendre

Les approximations réalisées dans cette section utilisent des indices appris. Cet apprentissage est réalisé sur une base de volumes IRM segmentés manuellement. Nous rappelons ici l'ensemble des indices qui doivent être appris. Chacun de ces indices est calculé sur l'ensemble de la base d'apprentissage. Nous retenons finalement la moyenne des indices calculés sur l'ensemble des cas de la base d'apprentissage.

**Cardinal** Le cardinal *a priori* de chaque structure  $O$ , noté  $|O^P|$  dans les expressions précédentes, est obtenu comme la moyenne du cardinal de cette structure dans les éléments de la base d'apprentissage.

**Direction** L'approximation obtenue pour une contrainte de direction  $C_{A \rightarrow B}^{dir \nu}$  dépend des indices :

$$S_{\nu}^{dir}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_{\nu}(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|},$$

pour tous les couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$ . Ces indices doivent être calculés pour chaque contrainte directionnelle (caractérisée par un élément structurant  $\nu$ ) et pour l'ensemble des couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$ . Si le modèle comporte des relations directionnelles entre toutes les structures, l'espace requis pour sauvegarder ces indices est en  $O(|\chi|^4)$  et l'apprentissage est réalisé en  $O(D|\chi|^3) + O(N|\chi|^4)$  où  $D = r^{d-1}sN$  est le coût lié au calcul d'une dilatation  $\delta_{\nu}$ .

Cette complexité élevée peut être réduite si les directions des relations directionnelles appartiennent à un ensemble réduit de  $k_d$  directions élémentaires (les 6 directions parallèles aux axes du repère 3D par exemple). Dans ce cas de nombreuses contraintes sont caractérisées par le même élément structurant  $\nu$  et les indices  $S_{\nu}^{dir}(O_1, O_2)$  associés à ces contraintes sont identiques. Plutôt que de réaliser l'apprentissage des indices  $S_{\nu}^{dir}(O_1, O_2)$  pour chaque contrainte  $C_{A \rightarrow B}^{dir \nu}$ , nous allons donc apprendre les indices  $S_{\nu}^{dir}(O_1, O_2)$  pour l'ensemble des éléments structurants  $\nu$ .

Un élément structurant  $\nu$  est caractérisé par une direction (appartenant à l'ensemble des directions élémentaires) et deux paramètres d'ouverture  $k_1$  et  $k_2$  appartenant à l'intervalle  $[0, \pi]$ . Nous discrétisons cet intervalle en un nombre réduit d'éléments  $[0..k_m]$ . Pour chacune des  $k_d k_m^2$  configurations possibles pour  $\nu$  nous apprenons alors les indices  $S_{\nu}^{dir}(O_1, O_2)^2$ . La taille mémoire requise pour sauvegarder ces indices est maintenant en  $O(k_d k_m^2 |\chi|^2)$  et la complexité en  $O(k_d D |\chi|) + O(k_d k_m^2 N |\chi|^2)$ .

---

2. Lors de l'apprentissage le calcul de la dilatation est l'opération la plus coûteuse. Puisque les structures sont représentées dans la base d'apprentissage par des régions binaires, nous pouvons obtenir la dilatation pour une direction  $d$  et des paramètres d'ouverture  $k_1$  et  $k_2$  par la dilatation pour la direction  $d$  et les paramètres d'ouverture 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . L'apprentissage de l'ensemble des coefficients ne nécessite donc que  $k_d |\chi|$  calculs de dilatations.

**Distance** Pour une contrainte de distance  $C_{A \rightarrow B}^{dist \nu_1 \nu_2}$ , deux indices doivent être appris pour tous les couples de variables  $(O_1, O_2) \in \chi^2$  :

$$S_{\nu_1}^{dist}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_{c(\nu_1)}(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|},$$

$$S_{\nu_2}^{dist}(O_1, O_2) = \frac{|\delta_{\nu_2}(\mu_{O_1}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}.$$

Comme dans le cas des contraintes directionnelles, l'espace mémoire requis pour leur sauvegarde est en  $O(|\chi|^4)$  et la complexité de l'apprentissage de ces indices en  $O(D|\chi|^3) + O(N|\chi|^4)$  où  $D = O(3^d m N)$  est le coût lié au calcul d'une dilatation ( $\delta_{c(\nu_1)}$  ou  $\delta_{\nu_2}$ ). Mais de nombreux calculs sont redondants.

Les fonctions d'appartenance  $\nu_1$  et  $\nu_2$  sont définies par quatre réels. Nous considérons un nombre réduit de  $k_m$  valeurs pour ces paramètres et nous apprenons les indices  $S_{\nu_1}^{dist}(O_1, O_2)$  et  $S_{\nu_2}^{dist}(O_1, O_2)$  pour cet ensemble de valeurs. Nous estimons alors l'indice  $S_{\nu_1}^{dist}(O_1, O_2)$  correspondant à une contrainte donnée  $C_{A \rightarrow B}^{dist \nu_1 \nu_2}$  par interpolation sur les valeurs apprises. L'espace mémoire requis est maintenant en  $O(k_m^2 |\chi|^2)$  et la complexité<sup>3</sup> en  $O(D_m |\chi|) + O(k_m^2 N |\chi|^2)$ .

**Contraste** Afin de calculer l'approximation associée aux contraintes de contraste nous devons calculer deux indices pour l'ensemble des couples  $(O_1, O_2) \in \chi^2$  :

$$S_{a,b,c,d}^{cont}(O_1, O_2) = \frac{|(\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,c,d}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|},$$

$$S_{a,b,c,d}^{cont2}(O_1, O_2) = \frac{|(\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,c,d}^k \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|}.$$

Comme pour les indices des contraintes de direction et de distance, nous discrétisons l'espace de valeurs des paramètres  $a, b, c$  et  $d$  de la fonction trapézoïdale par un ensemble réduit de  $k_m$  valeurs. Les indices  $S_{a,b,c,d}^{cont}(O_1, O_2)$  et  $S_{a,b,c,d}^{cont2}(O_1, O_2)$  étant liés ( $S_{a,b,c,d}^{cont}(O_1, O_2) = S_{-d,-c,-b,-a}^{cont2}(O_1, O_2)$ ), un seul doit donc être calculé. Par ailleurs nous pouvons approcher<sup>4</sup>

$$S_{a,b,c,d}^{cont}(O_1, O_2) \text{ par } \frac{|(\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,1,1}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|} + \frac{|(\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{-1,-1,c,d}^{k-1} \circ \mathcal{I}) \wedge \mu_{O_2}|}{|\mu_{O_2}|} - 1.$$

L'espace mémoire nécessaire à la sauvegarde de ces indices est donc en  $O(k_m^2 |\chi|^2)$  et la complexité en  $O(k_m^2 P |\chi|) + O(k_m^2 N |\chi|^2)$  où  $P$  est le coût calculatoire de l'opération  $\mu_{O_1}^{\mathcal{I}} \times_{\mathcal{N}} f_{a,b,1,1}^{k-1} \circ \mathcal{I}$ .

#### 4.2.5 Combinaison des critères et propagation

Dans les sections précédentes nous avons discuté trois critères d'ordonnancement des contraintes :

---

3. Puisque les structures de la base d'apprentissage sont représentées par des ensembles binaires, nous pouvons réaliser le calcul des dilatations en appliquant la fonction d'appartenance radiale sur une carte de distance. Cette dernière peut être calculée très efficacement [Maurer Jr et al., 2003] et seulement  $|\chi|$  calculs sont nécessaires. Si nous notons  $D_m$  le coût de calcul d'une carte de distance, nous obtenons donc une complexité pour l'apprentissage en  $O(D_m |\chi|) + O(k_m^2 N |\chi|^2)$ .

4. En effet nous pouvons décomposer la contrainte de contraste en une contrainte de contraste minimal et une contrainte de contraste maximal représentées respectivement par les fonctions trapézoïdales de paramètres  $(a, b, 1, 1)$  et  $(-1, -1, c, d)$ . Ces deux contraintes ne sont pas satisfaites en des points différents de  $\mathcal{I}$ . Les réductions réalisées par ces deux contraintes élémentaires ne sont donc pas redondantes et peuvent être cumulées.

---

- $P_{diff}(C)$  représentant le changement des domaines depuis le dernier calcul du propagateur associé à  $C$  (section 4.2.2),
- $P_{coût}(C)$  représentant le coût calculatoire du propagateur (section 4.2.3),
- $P_{réduction}(C)$  représentant la réduction potentielle des domaines induite par le propagateur (section 4.2.4).

Nous allons dans cette section composer ces critères pour définir une priorité pour chaque contrainte. La combinaison de ces critères n'est pas évidente, puisqu'ils représentent des aspects différents du problème qui ne sont pas directement comparables.

Une somme pondérée est peu appropriée pour réaliser cette combinaison puisque nous voulons que tous ces critères soient au moins en partie satisfaits. En effet même si l'estimation de la réduction potentiellement réalisée par un propagateur est importante, il n'est pas utile de calculer ce propagateur si les domaines n'ont pas changé depuis le dernier calcul de celui-ci. Une combinaison conjonctive de ces différents critères est donc préférable.

Un produit de ces trois critères pourrait convenir pour réaliser cette combinaison. Toutefois puisque nous estimons finement la réduction potentiellement réalisée, nous pouvons aussi affiner le critère portant sur le changement des domaines et réaliser une fusion spécifique pour chaque contrainte. En effet le critère  $P_{diff}(C)$  ne prend pas vraiment en compte la spécificité de chaque contrainte. Considérons par exemple la relation «  $B$  est à droite de  $A$  ». Pour cette contrainte il est intéressant de prendre en compte le changement de la borne supérieure du domaine de  $A$  depuis le dernier calcul du propagateur (rappelons que ce dernier réduit la borne supérieure du domaine de  $B$  à partir de la borne supérieure du domaine de  $A$ ). Par contre le changement de la borne inférieure du domaine de  $A$  ou des bornes de  $B$  n'indique pas que la contrainte soit plus intéressante à calculer.

Nous intégrons donc la priorité liée au changement spécifiquement dans les approximations données dans la section 4.2.4. Pour cela nous quantifions indépendamment le changement des deux bornes des domaines. Nous maintenons ainsi pour chaque contrainte  $C$  et pour chaque variable  $A$  de  $vars(C)$ , les indices suivants :

$$P_{diff}^{sup}(C, A) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|A_l|}, \quad (4.22)$$

$$P_{diff}^{inf}(C, A) = 1 - \frac{|A_l|}{|\underline{A}|}, \quad (4.23)$$

où  $(\underline{A}, \overline{A})$  est le domaine courant de  $A$  et  $(A_l, \overline{A}_l)$  est le domaine de  $A$  tel qu'il était après le dernier calcul du propagateur associé à  $C$  (ou  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$  si ce propagateur n'a jamais été calculé). Ces indices représentent respectivement le changement des bornes supérieures et inférieures depuis le dernier calcul de la contrainte. Comme l'indice  $P_{diff}$ , ils peuvent être calculés itérativement.

**Contrainte directionnelle** La priorité d'une contrainte directionnelle associée à la réduction potentiellement réalisée par le propagateur  $f_{C_{A,B}}^{dir \nu}$  a été définie par l'équation 4.4 suivant :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dir \nu}) = \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left(1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu}^{dir}(O_A, O_B) I(A, O_A)\right).$$

Cette estimation correspond à la mise à jour de  $\overline{B}$ . Or cette mise à jour ne dépend que de  $\overline{A}$ . Seul un changement de la borne supérieure de  $A$  peut donc conduire à ce que le propagateur  $f_{C_{A,B}}^{dir \nu}$  réalise une nouvelle réduction. Nous définissons donc la priorité résultante comme la

conjonction du critère de coût, du critère  $P_{diff}^{sup}(C, A)$  de changement de la borne supérieure de  $A$  et de l'estimation fine de la réduction réalisée. En combinant ces trois critères par un produit, nous obtenons :

$$P_{estim}(C_{A,B}^{dir \nu}) = P_{coût}(C_{A,B}^{dir \nu}) \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dir \nu}, A) \left(1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu}^{dir}(O_A, O_B) I(A, O_A)\right).$$

**Contrainte de distance** Similairement nous avons estimé la réduction potentiellement réalisée par une contrainte de distance suivant :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}) = \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left(1 - \left(1 - \max_{x \in X} \underline{A}(x) S_{\nu_1}^{dist}(A, O_B)\right) \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu_2}^{dist}(O_A, O_B) I(A, O_A)\right).$$

Cette réduction correspond à une mise à jour de  $\bar{B}$  qui dépend des bornes inférieure et supérieure du domaine de  $A$ . Selon les paramètres de la contrainte et l'état courant des domaines, l'impact de  $\underline{A}$  et  $\bar{A}$  n'est pas similaire. Nous ne voulons donc pas prendre en compte les changements des deux bornes comme un facteur multiplicatif unique tel que  $\max(P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}, A), P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}, A))$ . Nous préférons combiner le changement de la borne inférieure de  $A$  au terme  $1 - \max_{x \in X} \underline{A}(x) S_{\nu_1}^{dist}(A, O_B)$  qui représente la réduction réalisée sur le critère de distance minimale et qui dépend de la borne inférieure de  $A$ . De même le changement de la borne supérieure doit être combiné au terme  $\max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu_2}^{dist}(O_A, O_B) I(A, O_A)$  qui représente la réduction réalisée sur le critère de distance maximale et dépendant de  $\bar{A}$ . Comme nous l'avons discuté précédemment nous voulons réaliser une fusion conjonctive des critères. Nous estimons donc qu'une réduction est possible si la borne a changé (ce qui correspond à un indice  $P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}, A)$  élevé pour le critère de distance maximale) et si nous estimons une réduction possible (correspondant à un indice  $\max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu_2}^{dist}(O_A, O_B) I(A, O_A)$  faible pour le critère de distance maximale). Nous combinons alors disjonctivement les réductions potentiellement réalisées selon les critères de distance minimale et de distance maximale. Nous obtenons ainsi la priorité suivante :

$$P_{estim}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}) = P_{coût}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}) \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \left(1 - \left(1 - P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}, A) \max_{x \in X} \underline{A}(x) S_{\nu_1}^{dist}(A, O_B)\right) \left(1 - P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}, A) \left(1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{\nu_2}^{dist}(O_A, O_B) I(A, O_A)\right)\right)\right).$$

**Contrainte d'inclusion** La réduction potentiellement réalisée par ce propagateur a été approchée par :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{dans}) = |\bar{A}|(1 - I(B, A)) + \frac{\max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|) + \max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x)) |A^p|}{2}.$$

Le terme  $|\bar{A}|(1 - I(B, A))$  correspond à l'estimation de la réduction de la borne supérieure de  $A$ . Cette dernière ne dépend que de la borne supérieure de  $B$ . Nous combinons donc conjonctivement l'indice  $P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dans}, B)$  de changement de  $\bar{B}$  à ce terme. De même la seconde partie de cette expression correspond à la mise à jour de  $\underline{B}$  qui ne dépend que de  $\underline{A}$ . Nous combinons donc l'indice  $P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{dans}, A)$  à ce terme. Nous définissons ainsi la priorité suivant pour une contrainte d'inclusion :

$$P_{estim}(C_{A,B}^{dans}) = P_{coût}(C_{A,B}^{dans}) \left( P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{dans}, B) |\bar{A}|(1 - I(B, A)) + P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{dans}, A) \frac{\max(0, |\underline{A}| - |\underline{B}|) + \max(0, \max_{x \in X} \underline{A}(x) - \max_{x \in X} \underline{B}(x)) |A^p|}{2} \right).$$

**Contrainte de complémentation** La réduction potentiellement réalisée par le propagateur associé à une contrainte de complémentation a été approchée par :

$$P_{réduction}(C_{A,B}^{compl}) = \max(0, |\bar{A}|(1 - I(B, A)) - |\underline{A}|) + I(A, B) |\underline{B}| + \max(0, |\bar{B}|(1 - I(A, B)) - |\underline{B}|) + I(B, A) |\underline{A}|. \quad (4.24)$$

Comme pour la contrainte d'inclusion, les quatres termes de cette expression sont associés à des mises à jour distinctes qui ne dépendent respectivement que de  $\bar{B}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\bar{A}$  et  $\underline{A}$ . Nous combinons donc ces termes aux indices de changement appropriés. En intégrant de plus le coût calculatoire de la contrainte nous obtenons la propriété suivante :

$$P_{estim}(C_{A,B}^{compl}) = P_{coût}(C_{A,B}^{compl}) \left( P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{compl}, B) \max(0, |\bar{A}|(1 - I(B, A)) - |\underline{A}|) + P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{compl}, B) I(A, B) |\underline{B}| + P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{compl}, A) \max(0, |\bar{B}|(1 - I(A, B)) - |\underline{B}|) + P_{diff}^{inf}(C_{A,B}^{compl}, A) I(B, A) |\underline{A}| \right).$$

**Contrainte de connexité** Nous avons estimé la réduction potentiellement réalisée par le propagateur associé à une contrainte de connexité suivant :

$$P_{réduction}(C_A^{conn}) = \sum_{O \in \mathcal{X}} \alpha^A(O) |O^p| \max(0, \tau - 1 + \max_{x \in X} \underline{A}(x) - c(O)) I(A, O).$$

La réduction réalisée porte sur la borne supérieure de  $\bar{A}$  et dépend des bornes inférieures et supérieures du domaine de  $A$ . Contrairement aux contraintes passées en revue jusqu'ici, cette réduction n'est pas décomposée en sous-parties dépendant uniquement d'une des bornes. Nous intégrons donc ici le critère de changement comme un facteur multiplicatif combinant le changement des deux bornes. Puisque le changement de l'une ou l'autre des bornes peut conduire à de nouvelles réductions<sup>5</sup>, nous combinons ces critères de manière disjonctive (ici une somme algébrique). En intégrant aussi le coût calculatoire de la contrainte nous obtenons :

$$P_{estim}(C_A^{conn}) = P_{coût}(C_A^{conn}) (1 - (1 - P_{diff}^{sup}(C_A^{conn}, A)) (1 - P_{diff}^{inf}(C_A^{conn}, A))) \sum_{O \in \mathcal{X}} \alpha^A(O) |O^p| \max(0, \tau - 1 + \max_{x \in X} \underline{A}(x) - c(O)) I(A, O).$$

5. En effet si la borne inférieure change et notamment si son maximum croît, certaines composantes connexes peuvent ne plus satisfaire le critère d'inclusion et être filtrée. D'un autre côté, si la borne supérieure est réduite, certaines régions peuvent être déconnectées et alors être filtrées.



**Contraintes de volume et de connexité** Nous avons estimé la réduction potentiellement réalisée par la combinaison d'une contrainte de volume et d'une contrainte de connexité suivant :

$$P_{réduction}(C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn}) = \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - f_{V_{\min}}(V(O_A))).$$

La mise à jour réalisée par le propagateur ne dépend que de la borne supérieure du domaine de  $A$ . Nous définissons donc la priorité suivante pour cette combinaison de contraintes  $C = C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]} \wedge C_A^{conn}$  :

$$P_{estim}(C) = P_{coût}(C) P_{diff}^{sup}(C, A) \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - f_{V_{\min}}(V(O_A))).$$

**Contraintes d'adjacence et de connexité** Similairement nous avons estimé la réduction réalisée par la combinaison de contraintes de connexité et d'adjacence suivant :

$$\begin{aligned} & P_{réduction}(C_{A,B}^{adj} \wedge C_A^{conn} \wedge C_B^{conn}) \\ &= \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{A}, O_B)) \\ &+ \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{B}, O_A)). \end{aligned}$$

Les réductions associées à chacun de ces termes dépendent des bornes supérieures de  $A$  et  $B$ . Nous intégrons le critère de changement comme un facteur multiplicatif obtenu comme la disjonction des priorités de changement de l'une ou l'autre des bornes supérieures. Nous obtenons ainsi la priorité suivante pour la combinaison  $C = C_{A,B}^{adj} \wedge C_A^{conn} \wedge C_B^{conn}$  de ces trois contraintes :

$$\begin{aligned} P_{estim}(C) &= P_{coût}(C) (1 - (1 - P_{diff}^{sup}(C, A))(1 - P_{diff}^{inf}(C, A))) \\ &\left( \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{A}, O_B)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) \max(0, \tau - Deg_{adj}(\bar{B}, O_A)) \right). \end{aligned}$$

**Contrainte de contraste** La réduction potentiellement réalisée par une contrainte de contraste a été approchée par :

$$\begin{aligned} & P_{réduction}(C_{A,B}^{contraste}) = \\ & \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| I(B, O_B) (1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{a,b,c,d}^{cont}(O_A, O_B) I(A, O_A)) \\ & + \sum_{O_A \in \mathcal{X}} \alpha^A(O_A) |O_A^p| I(A, O_A) (1 - \max_{O_B \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(B)} S_{-d,-c,-b,-a}^{cont}(O_B, O_A) I(B, O_B)). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression correspond à la mise à jour de  $\bar{B}$  qui ne dépend que de  $\bar{A}$ . De même le second terme est associé à la mise à jour de  $\bar{A}$  qui ne dépend que de

$\overline{B}$ . Nous combinons donc à chacun de ces termes l'indice de changement respectif et nous obtenons la priorité suivante :

$$P_{estim}(C_{A,B}^{contraste}) = P_{coût}(C_{A,B}^{contraste}) \sum_{O_B \in \mathcal{X}} \alpha^B(O_B) |O_B^p| \left( I(B, O_B) P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{contraste}, A) \left( 1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(A)} S_{a,b,c,d}^{cont}(O_A, O_B) I(A, O_A) \right) + I(A, O_B) P_{diff}^{sup}(C_{A,B}^{contraste}, B) \left( 1 - \max_{O_A \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_B(B)} S_{-d,-c,-b,-a}^{cont}(O_A, O_B) I(B, O_A) \right) \right).$$

**Contrainte de partition** Nous avons obtenu l'approximation suivante de la réduction réalisée par une contrainte de partition  $C_{\{A_i\}, B}^{partition}$  :

$$P_{réduction}(C_{\{A_i\}, B}^{partition}) = \sum_{i \in [1..k]} \max(0, \min(|A_i^p|, |\overline{A}|) \frac{B}{B} (1 - \max_{j \neq i} I(A_j, A_i)) - |\underline{A}_i|) + \sum_{i \in [1..k]} (|\overline{A}_i| (1 - I(B, A_i)) + \sum_{j \neq i} I(A_i, A_j) |\underline{A}_j|) + \max(0, \sum_{i \in [1..k]} |\underline{A}_i| - |\underline{B}|) + \max(0, |\overline{B}| - \sum_{i \in [1..k]} |\overline{A}_i|).$$

Chaque élément apparaissant dans la somme du premier terme est associé à une réduction dépendant de  $\underline{B}$  et des bornes supérieures de l'ensemble des sous-parties  $\{A_j \mid A_j \neq A_i\}$ . Chaque élément de la somme du second terme est associé à une réduction dépendant de  $\overline{B}$  et  $\{\underline{A}_j \mid A_j \neq A_i\}$ . Finalement les troisième et quatrième termes dépendent respectivement de  $\{\underline{A}_j\}$  et  $\{\overline{A}_j\}$ . En prenant en compte les indices de changement et la complexité calculatoire de la contrainte nous obtenons (en notant  $C_{\{A_i\}, B}^{partition} = C^p$ ) :

$$P_{estim}(C^p) = P_{coût}(C^p) \left( \sum_{i \in [1..k]} \left( 1 - (1 - P_{diff}^{inf}(C^p, B)) \prod_{j \neq i} (1 - P_{diff}^{sup}(C^p, A_j)) \right) \max(0, \min(|A_i^p|, |\overline{A}|) \frac{B}{B} (1 - \max_{j \neq i} I(A_j, A_i)) - |\underline{A}_i|) + \sum_{i \in [1..k]} \left( P_{diff}^{sup}(C^p, B) |\overline{A}_i| (1 - I(B, A_i)) + \sum_{j \neq i} P_{diff}^{inf}(C^p, A_j) I(A_i, A_j) |\underline{A}_j| \right) + (1 - \prod_{i \in [1..k]} (1 - P_{diff}^{inf}(C^p, A_i))) \max(0, \sum_{i \in [1..k]} |\underline{A}_i| - |\underline{B}|) + (1 - \prod_{i \in [1..k]} (1 - P_{diff}^{sup}(C^p, A_i))) \max(0, |\overline{B}| - \sum_{i \in [1..k]} |\overline{A}_i|) \right).$$

**Propagation de contraintes** Pour réaliser la propagation, nous modifions l'algorithme AC - 3 en ordonnant la liste des contraintes à mettre à jour suivant la priorité définie

---

**Entrées :**  $\langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  un réseau de contraintes.

**Données :**  $P_{fin}, P_{exact}$  : tableaux de tailles  $|\mathcal{C}|$  contenant pour chaque contrainte respectivement l'indice de priorité  $P_{estim}$  et l'indice de priorité  $P_{diff}$

$P_{diff}^{sup}, P_{diff}^{inf}$  : tableaux de tailles  $|\mathcal{C}||\chi|$  contenant pour chaque contrainte le changement de la borne supérieure ou de la borne inférieure des variables

$I, LogCard, UpperBoundCard, LowerBoundCard, Conn$  : tableaux de tailles  $\chi^2, \chi, \chi, \chi$  et  $\chi^3$  contenant respectivement les indices  $\frac{O_1 \wedge O_2}{O_1}, \sum_{x \in X} \log(k(\overline{O}(x) - \underline{O}(x)) + 1), |\overline{O}|, |\underline{O}|, c_{\overline{O}_1}(O_2, O_3)$

$PriorCard, \alpha$  : tableaux de tailles  $\chi$  et  $\chi^2$  contenant respectivement le cardinal *a priori* des structures et les facteurs de normalisation

$S_{\nu}^{dir}, S_{\nu_1}^{dist}, S_{\nu_2}^{dist}, S_{a,b,c,d}^{cont}$  : tableaux de tailles  $k_d k_m \chi^2, k_m \chi^2, k_m \chi^2$  et  $k_d k_m \chi^2$  contenant les indices appris respectivement pour les relations directionnelles, de distance et de contraste

**Résultat :**  $\langle \chi, \mathcal{D}', \mathcal{C} \rangle$  tel que  $\mathcal{D} \preceq \mathcal{D}'$

**début**

lecture de  $PriorCard, S_{\nu}^{dir}, S_{\nu_1}^{dist}, S_{\nu_2}^{dist}, S_{a,b,c,d}^{cont}$

initialisation de  $I, LogCard, UpperBoundCard, LowerBoundCard, Conn, \alpha$

**pour chaque**  $C \in \mathcal{C}$  **faire**

$P_{exact}(C) \leftarrow 1$

    calcul de  $P_{fin}(C)$  par l'équation spécifique au type de contrainte

**fin**

**répéter**

$maxContrainte \leftarrow \arg \max_{C \in \mathcal{C}} P_{fin}(C)$

$maxPriorite \leftarrow P_{fin}(maxContrainte)$

**si**  $maxPriorite = 0$  **alors**

$maxContrainte \leftarrow \arg \max_{C \in \mathcal{C}} P_{exact}(C)$

$maxPriorite \leftarrow P_{exact}(maxContrainte)$

**fin**

**si**  $P_{exact}(maxContrainte) \neq 0$  **alors**

**si**  $Propagation(maxContrainte)$  **alors**

**pour chaque**  $A \in vars(maxContrainte)$  **faire**

**si**  $\underline{A} \not\subseteq \overline{A}$  **alors retourner** faux

                mise à jour de  $I(*, A), I(A, *), UpperBoundCard(A), LowerBoundCard(A), Conn(A, *, *), LogCard(A)$

**pour chaque**  $C$  tq  $A \in vars(C)$  **faire**

                    mise à jour de  $P_{exact}(C), P_{diff}^{sup}(C, A), P_{diff}^{inf}(C, A)$

**fin**

**fin**

**pour chaque**  $C \in \mathcal{C}$  **faire**

                calcul de  $P_{fin}(C)$  par l'équation spécifique au type de contrainte

**fin**

**fin**

$P_{exact}(maxContrainte) \leftarrow 0$

**pour chaque**  $A \in vars(maxContrainte)$  **faire**

$P_{diff}^{sup}(maxContrainte, A) \leftarrow 0$

$P_{diff}^{inf}(maxContrainte, A) \leftarrow 0$

**fin**

**fin**

**jusqu'à**  $maxPriorite > 0$  ;

**fin**

FIGURE 4.9 – Algorithme P2

ci-dessus. A chaque itération de l'algorithme la contrainte de priorité la plus élevée est sélectionnée et le propagateur associé est calculé. L'ensemble des priorités est alors mis à jour. Cependant en procédant de cette façon nous ne sommes pas assurés d'obtenir le plus grand point fixe. En effet les priorités obtenues peuvent être nulles pour des contraintes permettant de réaliser des réductions non nulles. Nous combinons donc l'ordonnancement fin défini dans cette section à l'ordonnancement de l'algorithme  $P1$  qui assure l'obtention du plus grand point fixe.

Les priorités définies dans ces deux cas ne sont pas comparables. De plus nous voulons favoriser les priorités définies dans cette section. Nous maintenons donc deux listes de priorités distinctes que nous notons respectivement  $P_{fin}$  et  $P_{exact}$ . A chaque itération de l'algorithme nous choisissons alors la contrainte de priorité la plus élevée dans la liste  $P_{fin}$ . Si cette priorité est nulle, nous choisissons alors la contrainte de priorité la plus élevée dans  $P_{exact}$ . L'algorithme s'achève lorsque toutes les contraintes dans  $P_{exact}$  présentent une priorité nulle.

L'algorithme obtenu est présenté dans la figure 4.9. Le calcul spécifique des priorités  $P_{fin}$  n'est pas détaillé ici mais consiste simplement à réaliser le calcul spécifique au type de contrainte en utilisant les indices sauvegardés dans les tableaux.

Notons que si le nombre de variables est important, la mise à jour à chaque itération de la liste de priorité  $P_{fin}$  peut devenir coûteux. Nous pouvons nous contenter de recalculer à chaque itération la priorité des contraintes impliquant la variable réduite et supposer que le changement de la priorité des autres contraintes reste faible. Nous réinitialisons alors tout de même périodiquement la priorité de l'ensemble des contraintes.

## 4.3 Illustrations

### 4.3.1 Un exemple synthétique simple

Nous illustrons tout d'abord cet ordonnancement sur l'exemple synthétique de la figure 4.10. La scène présentée en (a) comporte 5 structures  $A - E$ , le fond  $Bg$ , la variable  $Tout$  comprenant l'ensemble de ces structures et une dernière variable  $Autre$  correspondant au reste de l'espace. Nous avons extrait un graphe de contraintes<sup>6</sup> correspondant à ce cas (cet aspect sera discuté dans la section 6.1) et calculé les indices  $|O^p|$ ,  $S_{\nu}^{dir}$ ,  $S_{\nu_1}^{dist}$ ,  $S_{\nu_2}^{dist}$  et  $S_{a,b,c,d}^{cont}$ . Nous montrons une partie de ces contraintes dans le graphe en (b). Des contraintes de contraste sont présentées en bleu et des contraintes spatiales en rouge (les flèches creuses désignent les relations inverses telles que «  $E$  est plus sombre que  $Bg$  » pour «  $Bg$  est plus clair que  $E$  »). Notons que certaines contraintes jouent un rôle primordial comme par exemple les contraintes «  $C$  est au-dessus de  $B$  » et «  $D$  est plutôt en-dessous de  $B$  » puisqu'elles permettent de distinguer  $C$  et  $D$ . D'autres contraintes semblent présenter un intérêt plus limité comme la contrainte «  $E$  est plutôt à gauche de  $C$  ». En effet cette relation semble moins discriminante.

Nous initialisons la variable  $Tout$  (son domaine est réduit à un singleton), puis l'algorithme de propagation est appliqué. Dans la table 4.3.1 sont listées les contraintes successivement sélectionnées et calculées. Nous précisons la priorité de ces contraintes, la réduction de domaine qu'elles réalisent effectivement, la réduction de domaine estimée suivant les équations données dans la section 4.2.4 et finalement le logarithme de la taille de l'ensemble des domaines.

---

6. Pour cet exemple l'apprentissage est réalisé sur le cas traité. Dans le chapitre 6, nous fournissons des illustrations réalisant apprentissage et test sur des bases distinctes.

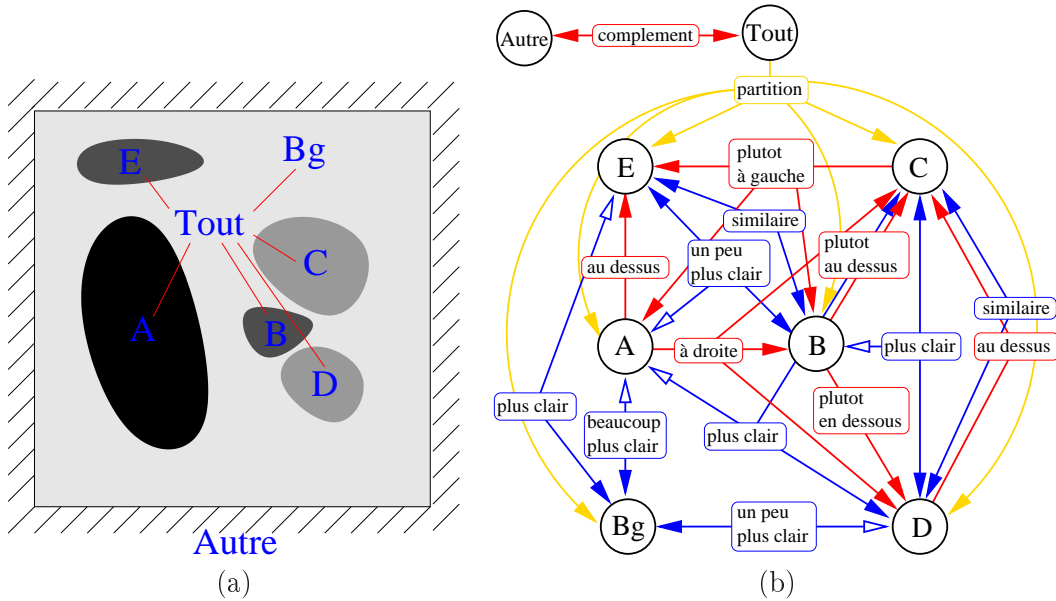


FIGURE 4.10 – (a) Un exemple synthétique. (b) Une partie du graphe de contraintes associé.

L'ordonnancement obtenu sur ce cas simple est presque optimal puisque quasiment toutes les contraintes appliquées conduisent à une réduction de domaine importante. Notons tout d'abord que la réduction estimée des bornes par les équations données dans la section 4.2.4 fournissent ici une approximation relativement précise de la réduction réellement réalisée. Cependant dans 5 cas cette estimation est défailante et conduit au calcul de contraintes ne réalisant pas de réduction.

Deux d'entre elles sont des contraintes de partition aux itérations 21 et 24. Dans ces deux cas l'estimation de la réduction des bornes est non nulle, alors que la réduction effective l'est. Cette erreur peut être imputée à l'approximation de  $|\overline{A}_i \wedge \underline{A}_j|$  par  $|\overline{A}_i \wedge \overline{A}_j| \frac{|A_j|}{|\overline{A}_j|}$  dans l'équation 4.14. En effet à l'itération 21 les bornes supérieures de  $D$  et  $C$  s'intersectent mais pas  $\overline{D}$  et  $\overline{C}$ . La priorité de la contrainte de partition mettant à jour  $D$  est ainsi non nulle car  $|\overline{D} \wedge \overline{C}| \frac{|C|}{|\overline{C}|} > 0$  alors qu'elle devrait être nulle. Cette approximation pourrait être évitée en maintenant à jour une matrice  $|\overline{A}_i \wedge \underline{A}_j|$ . Cependant le coût résultant serait plus élevé que le gain obtenu.

Trois autres erreurs d'approximation importantes sont réalisées aux itérations 25, 26, 27. Dans ce cas il ne reste plus qu'à réduire la borne supérieure de  $E$  qui contient encore  $B$  et à mettre à jour la borne inférieure de  $B$ . Cependant nous ne savons pas si  $\overline{E}$  contient  $B$  ou si  $\overline{B}$  contient  $E$ . Les deux coefficients  $I(B, E)$  et  $I(E, B)$  sont donc non nuls, mais  $I(E, B) > I(B, E)$  ce qui devrait favoriser les relations mettant à jour  $E$ . Toutefois les structures  $C$  et  $B$  étant proches, le calcul des propagateurs entre ces deux structures peut être réalisé sur une région plus petite que le calcul des propagateurs impliquant  $E$ . Le coût calculatoire de ces derniers est donc plus élevé ce qui explique l'ordonnancement obtenu.

### 4.3.2 Performances

Le cas très simple présenté ci-dessus n'est pas représentatif de la complexité des données que nous voulons reconnaître. En pratique l'application d'une contrainte ne permet en général pas de séparer totalement deux structures comme c'est le cas pour plusieurs contraintes de l'exemple précédent. Après une décroissance rapide des domaines l'algo-

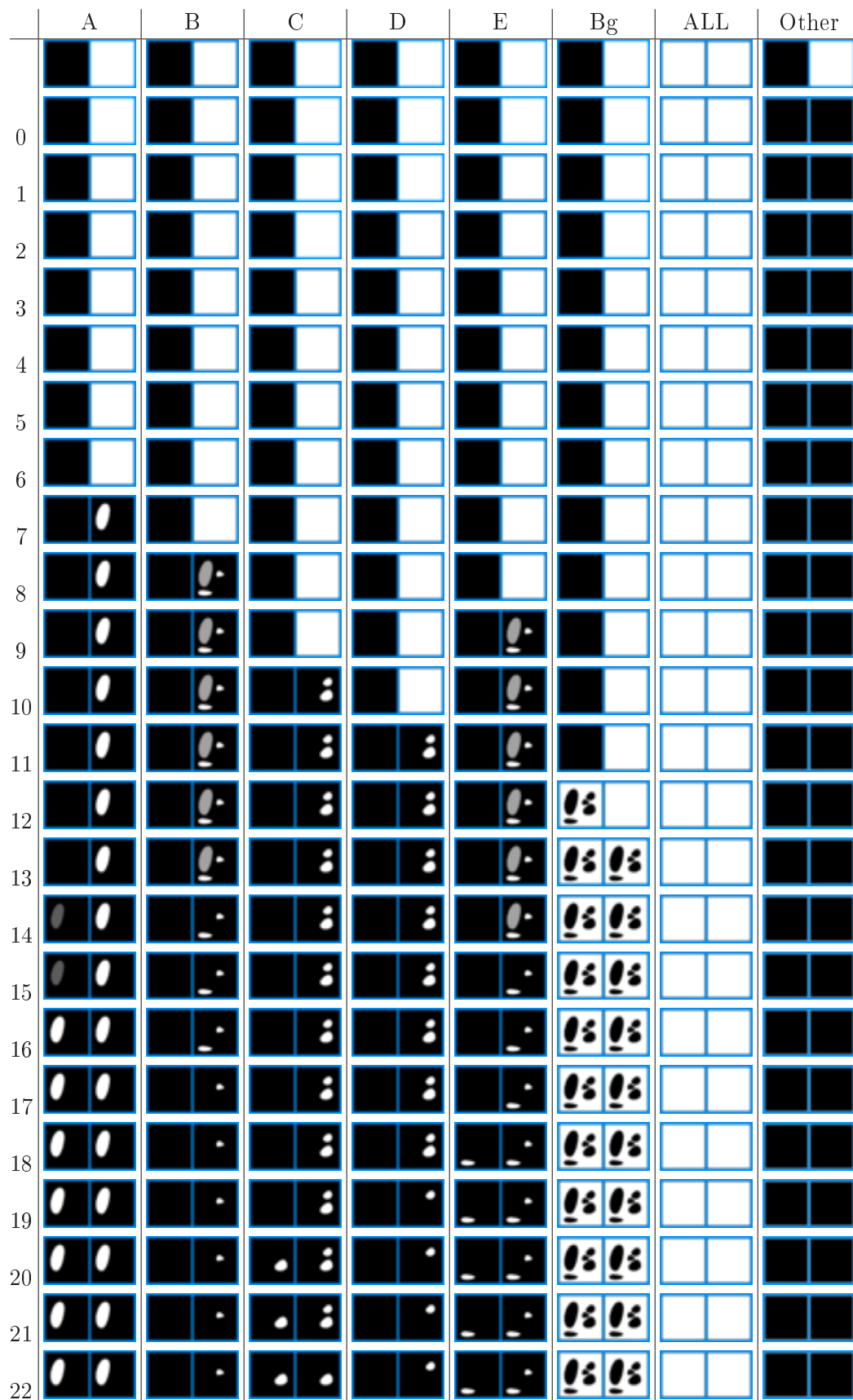


FIGURE 4.11 – Bornes des domaines à chaque itération du processus de propagation.

TABLE 4.3 – Séquence de contraintes appliquées par l'algorithme de propagation pour l'exemple de la figure 4.10.

t	contrainte	priorité	réduction	réduction estimée	taille domaines
0	$C_{Tout,Autre}^{compl}$	0,36	40001	40001	1,33.10 <sup>6</sup>
1	$C_{A,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	1,16.10 <sup>6</sup>
2	$C_{B,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	993762
3	$C_{Bg,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	825206
4	$C_{C,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	656649
5	$C_{D,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	488092
6	$C_{E,Tout}^{Dans}$	0,28	30397	30397	319535
7	$C_{Tout,A}^{Cont}$	0,022	8204	8204	274043
8	$C_{C,B}^{Cont}$	0,021	8256	7745	230463
9	$C_{C,E}^{Cont}$	0,021	8256	7745	186884
10	$C_{Bg,C}^{Cont}$	0,019	8761	6902	138303
11	$C_{Bg,D}^{Cont}$	0,019	8761	6902	89721
12	$C_{Tout,A,B,C,D,E \rightarrow Bg}^{partition}$	0,025	6902	5896	51449
13	$C_{A,Bg}^{Cont}$	0,0073	2702	2702	36465
14	$C_{D,B}^{Cont}$	0,0025	889	889	29334
15	$C_{B,E}^{Cont}$	0,0025	889	889	22203
16	$C_{Tout,B,Bg,C,D,E \rightarrow A}^{partition}$	0,0058	1400	1400	14440
17	$C_{C,B}^{Dist}$	0,00026	296	296	12798
18	$C_{Tout,A,B,Bg,C,D \rightarrow E}^{partition}$	0,00080	296	191	11157
19	$C_{B,D}^{Dir}$	0,00073	546	352	8129
20	$C_{Tout,A,B,Bg,D,E \rightarrow C}^{partition}$	0,0015	546	354	5102
21	$C_{Tout,A,B,Bg,C,E \rightarrow D}^{partition}$	0,00080	0	192	5102
22	$C_{B,C}^{Dir}$	0,00061	297	297	3455
23	$C_{Tout,A,B,Bg,C,E \rightarrow D}^{partition}$	0,0012	297	326	1808
24	$C_{Tout,A,Bg,C,D,E \rightarrow B}^{partition}$	0,00044	0	105	1808
25	$C_{D,B}^{Dist}$	0,00038	0	105	1808
26	$C_{C,B}^{Dir}$	0,00037	0	105	1808
27	$C_{C,B}^{Dist}$	0,00034	0	105	1808
28	$C_{C,E}^{Dir}$	0,00012	163	161	904
29	$C_{Tout,A,Bg,C,D,E \rightarrow B}^{partition}$	0,00068	163	163	0

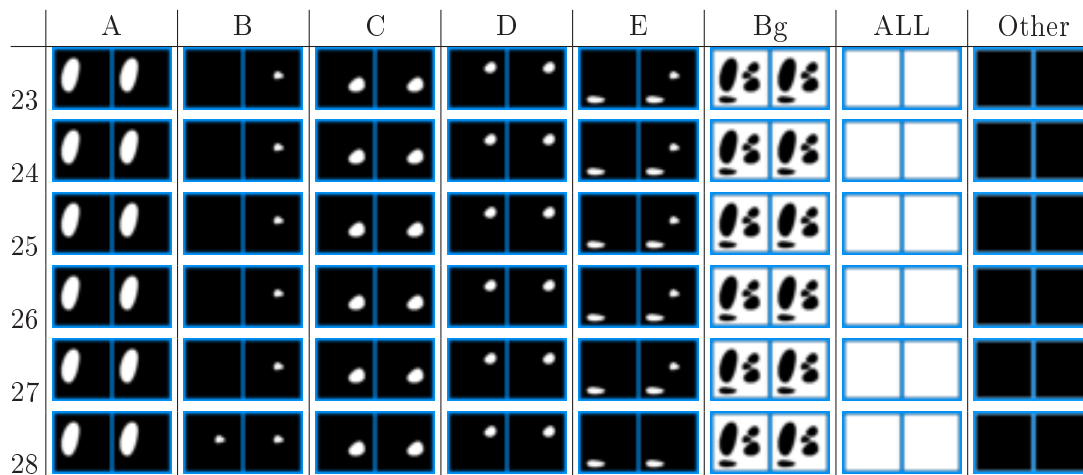


FIGURE 4.12 – Suite de la figure 4.11.

rithme de propagation converge alors plus lentement.

Nous comparons dans cette section les performances obtenues avec un ordonnancement **FIFO** ou avec les algorithmes  $P1$  et  $P2$ . Pour cela nous appliquons le processus de propagation sur la coupe axiale présentée dans la figure 4.13 (a). Le modèle associé comprend 35 structures (la segmentation manuelle de ces structures pour le cas à traiter est montrée en (b)) et environ 4000 contraintes entre ces structures (l'apprentissage de ces contraintes est décrit dans la section 6.1). Comme précédemment nous supposons que le cerveau a été extrait préalablement et nous initialisons la variable associée à un singleton. Tous les domaines des autres variables sont initialisés à  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$ .

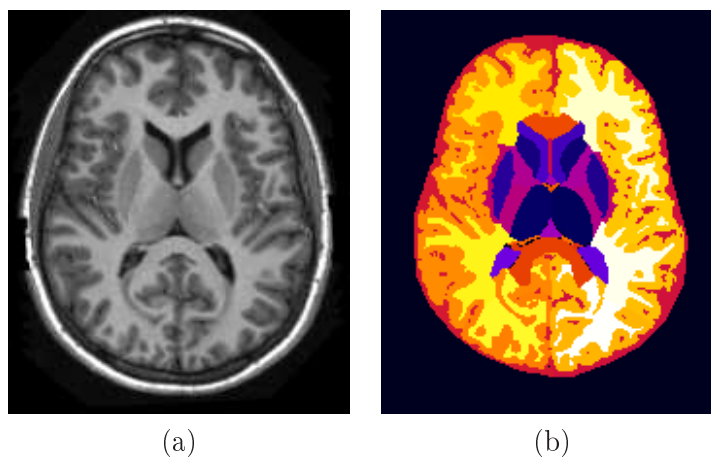


FIGURE 4.13 – Coupe axiale d'une IRM cérébrale (a) et segmentation manuelle associée (b).

Dans la figure 4.14 nous présentons l'évolution du logarithme de la taille des domaines en fonction du temps pour un ordonnancement de type  $AC - 3$  (cet algorithme est noté  $P0$ ) en rouge, l'algorithme  $P1$  en vert ou l'algorithme  $P2$  en bleu. En (a) nous présentons l'évolution pendant l'ensemble du processus. Après une décroissance rapide, les trois algorithmes de propagation convergent lentement. Nous constatons tout de même que l'algorithme  $P2$  converge plus vite que  $P1$  qui lui-même converge plus vite que  $P0$ . En (b) nous montrons plus précisément la première phase du processus. Les algorithmes  $P0$  et  $P1$  réalisent une réduction comparable dans cette phase. L'algorithme  $P2$  réalise lui une réduction beaucoup plus rapide des domaines. En effet les contraintes sont choisies beaucoup plus finement. Le coût de calcul des indices est donc largement compensé par le gain obtenu.

Nous illustrons plus spécifiquement dans la figure 4.15 l'ordonnancement utilisé dans l'algorithme  $P2$  et notamment l'estimation de la réduction réalisée par les propagateurs. Dans la colonne de gauche nous comparons la réduction effective (en bleu) et l'estimation  $P_{réduction}$  donnée dans la section 4.2.4 (en pointillés rouges) en fonction du nombre d'itérations pour les contraintes d'inclusion (a), de direction (b), de distance (c), de contraste (d), de partition (e), de connexité (f) et de volume (g). Dans la colonne de droite nous montrons toujours en fonction du nombre d'itérations dans le processus de propagation et pour ces mêmes contraintes le ratio  $\frac{est-red}{est+red}$  où *est* est la réduction estimée et *red* est la réduction effective. Ce ratio est compris entre 0 et 1 et est faible lorsque l'estimation est correcte.

L'estimation obtenue pour la contrainte d'inclusion est en général très précise, puisque l'estimation du changement de la borne supérieure est exacte et que l'estimation du changement de la borne inférieure est relativement fine. Pour les contraintes de direction, de distance et de contraste la qualité de l'estimation varie au cours du processus de propagation. Initialement cette estimation est relativement bonne même si nous obtenons



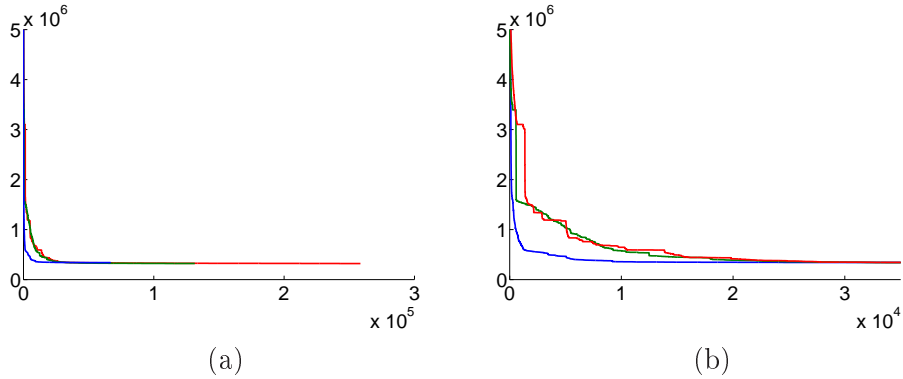


FIGURE 4.14 – (a) Evolution de la taille du logarithme des domaines pour l’algorithme  $P0$  ( $AC - 3$ ) en rouge,  $P1$  en vert et  $P2$  en bleu. (b) Evolution pendant la première phase de l’algorithme.

généralement une sur-estimation de la réduction effective. Cependant en avançant dans de processus de propagation la qualité de cette estimation diminue. En effet nous obtenons une estimation non nulle pour de nombreuses contraintes ne réalisant pas effectivement de réduction. Cela est principalement dû à la satisfaction partielle de ce type de contraintes par de nombreuses structures. Prenons pour exemple une relation directionnelle entre  $A$  et  $B$  qui n’est que partiellement satisfaite par une tierce structure  $C$ . Si pendant le processus de propagation la borne supérieure de  $B$  contient uniquement la partie de  $C$  satisfaisant la contrainte directionnelle par rapport à  $A$  (et que le domaine de  $A$  est réduit à un singleton), alors l’estimation de la réduction est non nulle puisque  $I(B, C)(1 - S_{\nu}^{dir}(A, C)) > 0$  mais la réduction réalisée est nulle puisque nous supposons que  $\bar{B}$  contient la partie de  $C$  satisfaisant la contrainte.

L’estimation obtenue pour la contrainte de partition est moins bonne que celle obtenue pour les contraintes précédentes et pourrait sûrement être améliorée. Cependant le coût des contraintes de partition restant relativement faible par rapport aux autres contraintes, la priorité devrait être mise sur l’affinement de l’estimation des contraintes précédentes.

Finalement l’estimation du calcul des contraintes liées à la connexité semble satisfaisante même si elle reste perfectible. Notons que ces contraintes sont utilisées assez tardivement puisqu’elles présentent un coût calculatoire plus élevé et ne sont utiles que lorsque d’autres contraintes ont créé plusieurs composantes connexes à filtrer.

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé un ordonnancement efficace du calcul des propagateurs afin d’accroître l’efficacité du processus de propagation. Ainsi à chaque itération de l’algorithme nous choisissons une contrainte suivant la conjonction de trois critères : (i) un critère de coût qui permet de favoriser les contraintes dont le propagateur présente un coût calculatoire faible, (ii) un critère de changement favorisant les contraintes n’ayant pas été sélectionnées depuis que des changements importants ont affecté les variables de la contrainte, (iii) une approximation de la réduction potentiellement réalisée par la contrainte. Cet ordonnancement permet un gain d’efficacité important du processus de propagation et notamment une décroissance initiale très rapide.

Cependant des gains importants semblent encore réalisables. Premièrement la phase de décroissance lente finale pourrait être évitée ou tout au moins réduite puisqu’elle n’apporte

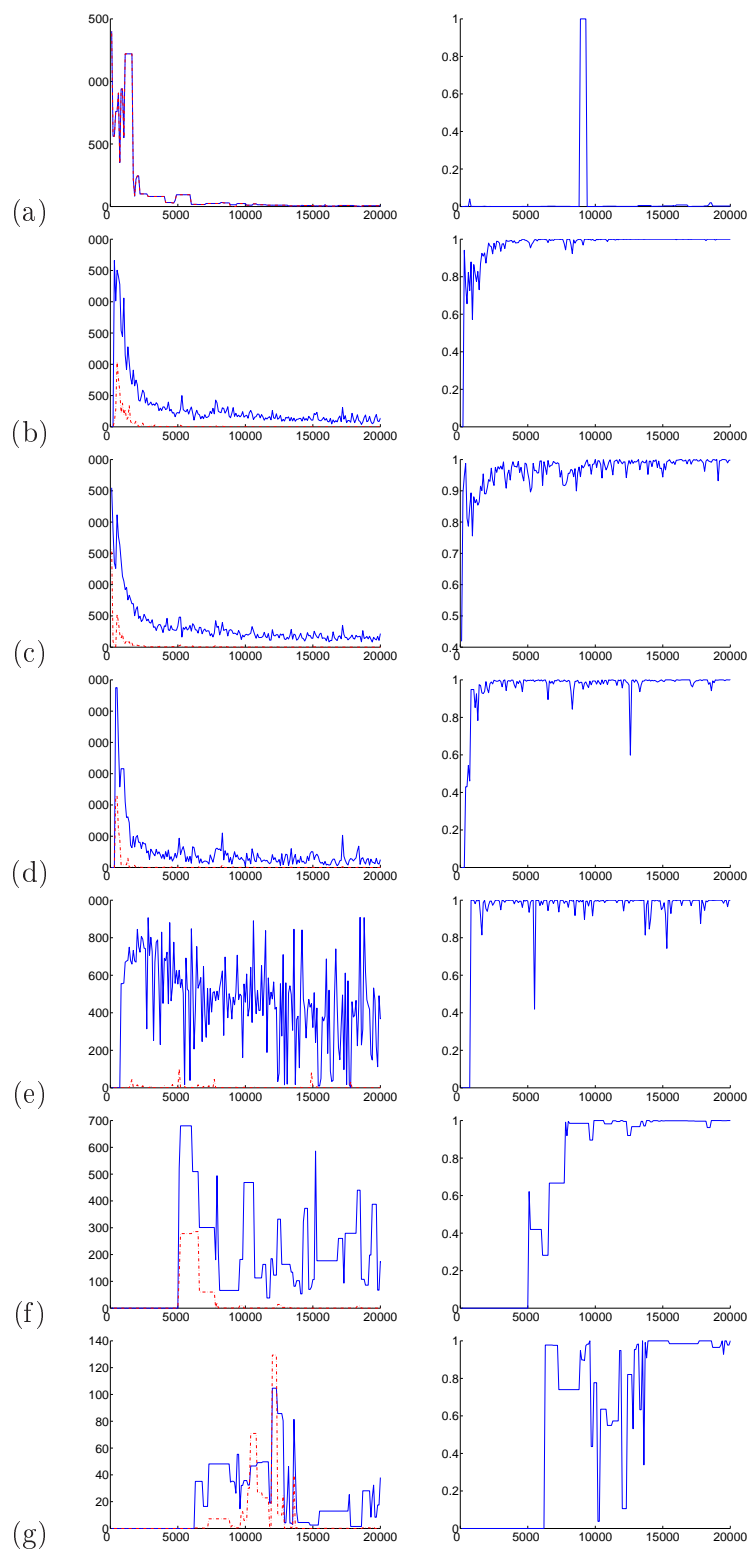


FIGURE 4.15 – A gauche la réduction des bornes réalisée en bleu et la réduction estimée en rouge pour les contraintes d’inclusion (a), de direction (b), de distance (c), de contraste (d), de partition (e), de connexité (f) et de volume (g) en fonction du nombre d’itérations. A droite le ratio  $\frac{est-red}{est+red}$  où *est* est la réduction estimée et *red* est la réduction effective.

que très peu d'information supplémentaire pour un coût élevé. Par ailleurs l'objectif final étant souvent d'extraire un nombre réduit de structures, nous pourrions orienter le processus de propagation vers l'extraction de ces variables. L'intérêt du calcul d'une contrainte serait alors fonction de la réduction potentielle à terme du domaine des structures cibles qui pourrait être obtenue grâce à la réduction réalisée.

---

## Chapitre 5

# Extraction d'une solution

### Introduction

Le processus de propagation réalise une réduction importante des domaines en supprimant un grand nombre de valeurs ne satisfaisant pas les contraintes imposées. Cependant lorsque ce processus s'achève, ces domaines ne sont en général pas réduits à des singletons et nous devons extraire une solution, c'est-à-dire une instantiation satisfaisant l'ensemble des contraintes. Cette solution n'est pas nécessairement unique car plusieurs instantiations peuvent satisfaire l'ensemble des contraintes. Pour faire un choix, nous utilisons un critère classique de surface minimale [Mumford et al., 1988, Caselles et al., 1997] qui favorise les solutions présentant une frontière régulière.

Bien que l'espace des solutions ait été considérablement réduit, l'application d'un algorithme de retour sur trace [Stallman and Sussman, 1976] présente toujours un coût calculatoire excessif. Nous devons donc nous contenter d'une solution approximative au sens des contraintes imposées. Nous choisissons d'extraire indépendamment une région binaire pour un nombre restreint de structures dont le domaine a été réduit de façon importante par l'algorithme de propagation. Nous réalisons cette extraction par l'obtention d'une surface minimale, dépendant des résultats obtenus par l'algorithme de propagation.

Tout d'abord nous discutons dans la section 5.1 des approximations que nous réalisons. Nous rappelons dans la section 5.2 les principales définitions relatives à la segmentation par surface minimale. Dans la section 5.3 nous proposons alors une formulation spécifique à notre problème.

### 5.1 Motivations

L'algorithme de propagation de contraintes a fortement réduit les domaines de nombreuses structures. L'exemple que nous avons proposé dans la section 2.7 nous avait par exemple permis d'obtenir pour le noyau caudé le domaine final présenté dans la figure 5.1. Idéalement nous voudrions obtenir une solution, c'est-à-dire une instantiation consistante de toutes les variables. Cependant même si les domaines des variables ont été considérablement réduits, il n'est toujours pas possible pour des raisons de complexité d'appliquer un algorithme de retour sur trace. En effet même s'il ne restait que 10 voxels d'indécision entre la borne inférieure et la borne supérieure d'un domaine, nous aurions dans le pire des cas  $k^{10}$  valeurs (où  $k$  correspond au nombre de niveaux discrets utilisés pour représenter les degrés d'appartenance) à tester pour ce domaine.

Par ailleurs la solution n'est pas unique. Plusieurs instantiations peuvent satisfaire l'ensemble des contraintes et *a priori* aucune n'est privilégiée par rapport aux autres. Es-

---

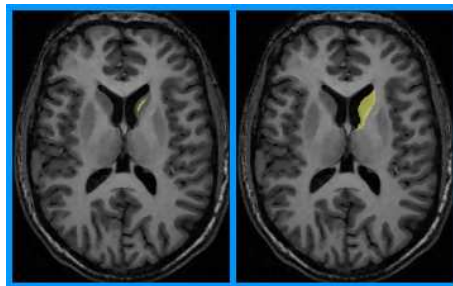


FIGURE 5.1 – En jaune le domaine  $(\underline{CNL}, \overline{CNl})$  pour le noyau caudé obtenu par le processus de propagation.

thétiquement nous préférons obtenir des solutions présentant une surface régulière. Comme critère de décision nous pouvons donc utiliser un critère classique de surface minimale (ou de longueur minimale en 2D) pouvant être représenté par la variation totale de l'ensemble flou considéré.

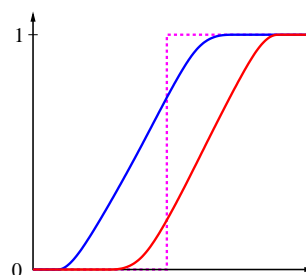
Toutefois la prise en compte de ce critère ne permet pas de réduire la complexité de l'extraction, la recherche d'une solution optimale selon un critère de surface minimale étant même plus complexe. Afin de simplifier le problème, nous réalisons les approximations suivantes :

- nous considérons les structures indépendamment. Nous ne recherchons donc pas une solution globalement consistante mais uniquement pour chaque structure une valeur localement consistante,
- nous supposons que toutes les valeurs des domaines finals sont localement consistantes relativement à toutes les contraintes sauf les contraintes d'adjacence,
- nous recherchons une solution binaire car des algorithmes efficaces existent dans ce cas.

La première hypothèse nous permet d'extraire indépendamment les structures et donc de nous limiter à un sous-ensemble de structures d'intérêt.

La seconde hypothèse est vérifiée à la fin du processus de propagation par la plupart des contraintes (telles que les contraintes directionnelles, de distance, de contraste,...). Seules les contraintes d'adjacence, de volume et de connexité ne sont pas nécessairement satisfaites par toutes les valeurs des domaines. Les résultats de segmentation que nous obtiendrons sont en général connexes et vérifient les *a priori* de volume sans que ces conditions aient été explicitement imposées. Même si nous n'avons aucune garantie quant au résultat obtenu, nous préférons éviter d'alourdir le processus. Restent donc les contraintes d'adjacence qui ne seront pas imposées de façon stricte, mais intégrées dans le critère de choix du résultat.

La dernière hypothèse nous permettra de nous ramener au problème bien connu de segmentation par surface minimale. Cependant la binarisation pose certains problèmes. Comme nous l'illustrons par la figure ci-contre, il n'est pas toujours possible (même si ce cas n'est en pratique pas fréquent) d'obtenir une segmentation binaire (en magenta pointillés) incluant strictement la borne inférieure (en rouge) et incluse strictement dans la borne supérieure (en bleu). Nous devons donc favoriser le respect strict de ces inclusions mais aussi autoriser leur respect partiel.



## 5.2 Extraction de surfaces minimales

### 5.2.1 Formulation

Le problème de segmentation par surface minimale a été formulé dans [Caselles et al., 1997] comme l'extraction d'une surface fermée  $\Gamma$  minimisant la fonctionnelle :

$$E(\Gamma) = \int_{\Gamma} f(\Gamma(s)) ds, \quad (5.1)$$

où  $f$  est une fonction à valeurs positives définie à partir de l'image  $\mathcal{I}$ . Idéalement cette fonction doit être nulle au niveau de la frontière de l'objet recherché et prendre des valeurs non nulles ailleurs. En pratique puisque nous ne connaissons pas l'objet à segmenter, nous essayons d'être aussi proche que possible de cette situation.

La fonction  $f$  est souvent définie comme une fonction positive et décroissante de la norme du gradient de l'image  $\mathcal{I}$  :

$$f_I(\Gamma(s)) = g(\|\nabla\mathcal{I}(\Gamma(s))\|). \quad (5.2)$$

Elle prend donc des valeurs faibles au niveau des contours de l'image et des valeurs élevées lorsque les niveaux de gris sont localement constants. Si l'objet recherché présente un contraste marqué avec les structures qui l'entourent, nous obtenons une fonction  $f_I$  qui prend bien des valeurs faibles au niveau des contours de cet objet mais qui ailleurs ne prend pas nécessairement des valeurs faibles. Dans la figure 5.2, nous montrons une carte de gradient sur une coupe axiale (b) et sur une coupe coronale (e). De nombreux contours sont présents et les contours de l'objet recherché ne présentent pas nécessairement les gradients les plus élevés. Le choix de la fonction  $g$  est donc dans ce cas délicat puisque cette dernière doit prendre des valeurs faibles pour les valeurs de gradient observées pour l'objet mais pas pour des valeurs de gradient plus faibles.

Ce problème de normalisation peut être réduit si nous connaissons les caractéristiques radiométriques de l'objet recherché. A partir de celles-ci nous définissons la fonction  $f_I$  suivante [Colliot et al., 2006] :

$$f_I(x) = g(\|\nabla(p_A(\mathcal{I}))(x)\|) = g(\|p'_A(\mathcal{I}(x))\nabla(\mathcal{I})(x)\|), \quad (5.3)$$

où  $p_A(v)$  est la probabilité qu'un voxel de  $A$  présente le niveau de gris  $v$ . Le choix de la fonction  $g$  est dans ce cas moins délicat que dans l'équation 5.2 puisque nous travaillons sur le gradient d'une image normalisée. Dans la figure 5.2 nous montrons la fonction  $f_I$  obtenue pour le noyau caudé sur une coupe axiale (c) et sur une coupe coronale (f). Notons que sur la vue coronale la fonction  $f_I$  prend des valeurs élevées sur certaines parties du contour (en effet le noyau caudé ne présente pas de contraste relativement au noyau accumbens voisin). D'autre part cette fonction présente de nombreuses valeurs faibles en dehors du contour du noyau caudé. La surface recherchée n'est donc pas nécessairement dans ce cas la surface minimisant  $E$ . Afin d'obtenir la solution recherchée, la fonctionnelle  $E$  n'est en général pas minimisée de façon exacte. Un minimum local peut par exemple être obtenu à partir d'une surface initiale. Cependant le résultat obtenu dépend fortement de cette initialisation surtout lorsque  $E$  présente de nombreux minima locaux.

L'obtention d'une fonction  $f$  correspondant au mieux aux contours de l'objet recherché est donc primordiale puisque la fonctionnelle  $E$  associée présente alors un nombre plus réduit de minima locaux indésirables.

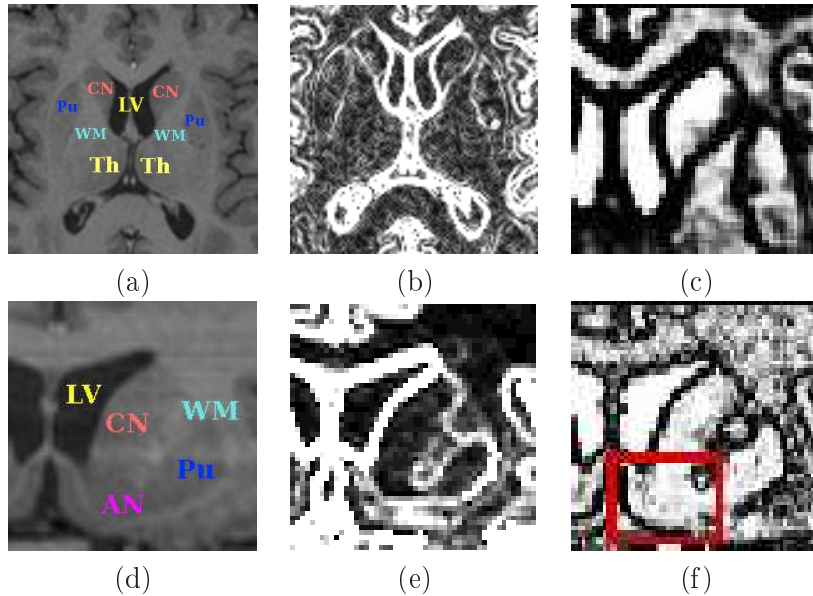


FIGURE 5.2 – (a) Une coupe axiale d’une IRM cérébrale. (b)  $\|\nabla\mathcal{I}\|$ . (c)  $g(\|\nabla(p_{CN}(\mathcal{I}))\|)$  sur une vue axiale. (d-f) Vues coronales.

### 5.2.2 Optimisation

La recherche d’un minimum global de la fonctionnelle  $E$  ne fournit généralement pas la surface recherchée, cette surface n’étant en général qu’un minimum local de  $E$ . Notons de plus que des surfaces réduites à un point sont toujours optimales. Différentes solutions ont été proposées afin d’obtenir des résultats plus satisfaisants. Nous pouvons notamment mentionner :

- l’obtention d’un minimum local à partir d’une surface initiale proche de la solution par l’évolution du modèle déformable représenté sous la forme implicite [Caselles et al., 1997],
- l’obtention d’un minimum global sous contraintes [Boykov and Kolmogorov, 2003] : (i) l’inclusion d’un ensemble de graines représentant l’objet, (ii) l’exclusion d’un second ensemble de graines représentant le fond,
- l’ajout de conditions aux bords [Cohen and Kimmel, 1997, Grady, 2006a] : un contour fermé est donné et une surface de coût minimal bordée par ce contour est alors recherchée.

Nous décrivons brièvement ci-dessous la seconde méthode sur laquelle nous nous appuyons.

#### Segmentation par coupure de graphe

La recherche de flot maximal ou de façon équivalente de coupe minimale dans un graphe attribué est un problème classique de recherche opérationnelle et des algorithmes efficaces existent pour le résoudre [Ford and Fulkerson, 1956, Goldberg and Tarjan, 1988].

La segmentation d’une image en deux labels peut être exprimée comme la recherche d’une coupe dans un graphe [Boykov and Jolly, 2001, Boykov et al., 2001, Kolmogorov and Zabini, 2004, Boykov and Kolmogorov, 2004]. Les nœuds d’un tel graphe sont associés aux pixels de l’image. Deux nœuds spéciaux, la source et le puits, sont alors ajoutés. La source représente le label de l’objet et le puits le label du fond. Un tel graphe est montré dans la

figure 5.3.

La segmentation est alors réalisée par l'extraction d'une coupe de coût minimal entre la source et le puit, le coût de la coupe  $C$  étant défini par les poids  $w_e$  affectés aux arcs  $e$  :

$$|C| = \sum_{e \in C} w_e, \quad (5.4)$$

Le poids  $w_{x_i, x_j}$  des arcs entre les pixels est généralement défini à partir de l'image (comme une fonction décroissante de la différence d'intensité entre les pixels par exemple) relativement à un système de voisinage  $\mathcal{N}$ . Nous obtenons ainsi des arcs de faible coût au niveau des frontières de l'image et la coupe minimale suit donc en général un contour de l'image. Le poids des arcs entre les pixels et la source  $w_{s,x}$  ou entre les pixels et les puits  $w_{x,p}$  caractérisent l'appartenance *a priori* de certains pixels à l'objet ou au fond. Plus ce poids est important moins il est probable qu'une coupe passe par cet arc et donc que le pixel change d'affectation.

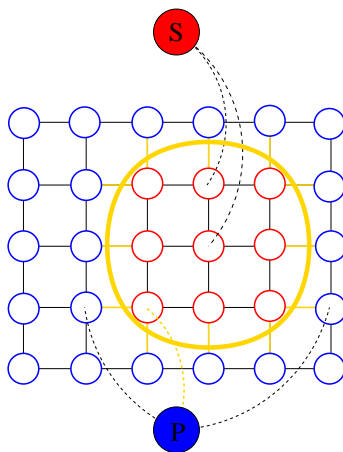


FIGURE 5.3 – Segmentation par coupure minimale. Les arcs correspondant à la coupe de coût minimal sont colorés en jaune. Les nœuds en rouge sont alors associés à l'objet et les nœuds en bleu au fond.

Nous notons  $S$  la région solution, obtenue comme l'ensemble des pixels liés à la source  $s$  par un chemin ne passant pas par la coupe minimale  $C$ . Le coût de cette coupe minimale peut alors être exprimé suivant :

$$E(S) = \sum_{x \in S} w_{x,p} + \sum_{x \in X \setminus S} w_{s,x} + \sum_{\substack{(x_i, x_j) \in \mathcal{N} \\ x_i \in S \text{ et } x_j \in X \setminus S}} w_{x_i, x_j}. \quad (5.5)$$

Par une définition spécifique du système de voisinage et des poids des arcs inter-pixels le terme  $\sum_{\substack{(x_i, x_j) \in \mathcal{N} \\ x_i \in S \text{ et } x_j \in X \setminus S}} w_{x_i, x_j}$  peut approcher la fonctionnelle donnée par l'équation 5.1 [Boykov and Kolmogorov, 2003].

La taille du système de voisinage est choisie en fonction de la qualité désirée de l'approximation. Plus ce système est large, meilleure sera l'approximation obtenue. La figure 5.4 présente ainsi plusieurs exemples de petits systèmes de voisinage en 2D. Pour chaque élément  $e_k$  du système choisi et en chaque pixel  $x$ , nous ajoutons alors au graphe un arc de poids :

$$w_{x, x+e_k} = \frac{\delta^2 |e_k|^2 \Delta \phi_k \det D(x)}{2(e_k^t D(x) e_k)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.6)$$



où  $D$  est une métrique riemannienne sur l'image discrète et où les autres notations sont illustrées dans la figure 5.4. Lorsque cette métrique est définie en chaque pixel  $x$  comme la matrice diagonale  $D(x) = \text{diag}(f(x))$ , nous revenons au problème de minimisation défini par l'équation 5.1. Nous obtenons alors :

$$w_{x,x+e_k} = \frac{\delta^2 \Delta \phi_k \sqrt{f(x)}}{2|e_k|}. \quad (5.7)$$

La minimisation d'une surface en 3D peut être obtenue similairement en définissant le poids des arcs suivant :

$$w_{x,x+e_k} = \frac{\delta^3 |e_k|^3 \Delta \phi_k \det D(x)}{\pi (e_k^t D(x) e_k)^2}, \quad (5.8)$$

et lorsque  $D(x) = \text{diag}(f(x))$  :

$$w_{x,x+e_k} = \frac{\delta^3 \Delta \phi_k f(x)}{\pi |e_k|}. \quad (5.9)$$

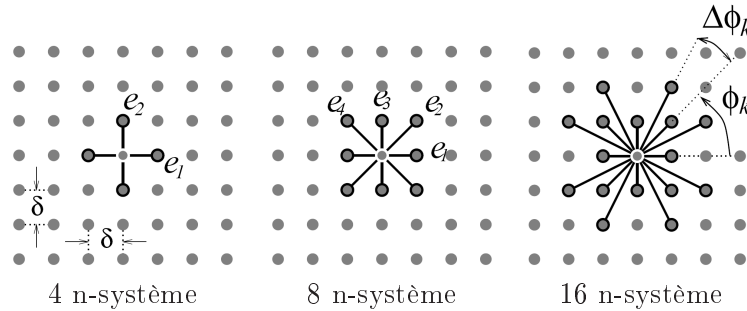


FIGURE 5.4 – Définition du système de voisinage. Figure extraite de [Boykov and Kolmogorov, 2003].

### 5.3 Extraction d'une surface minimale relativement aux résultats de la propagation

Dans la section 5.1 nous avons fait plusieurs hypothèses pour simplifier le problème initial (trouver une solution). Nous nous intéressons donc à l'extraction d'une structure unique  $A$  pour laquelle nous voulons extraire une région binaire  $S$  qui appartient au mieux au domaine associé à  $A$ , qui présente une surface régulière et qui satisfait au mieux les contraintes d'adjacence (i.e. dont la frontière est cohérente avec les domaines obtenus pour les structures adjacentes).

Nous modélisons ce problème d'optimisation comme l'extraction d'une surface minimale sous contraintes. Les contraintes (similaires à celles définies dans le cadre de l'optimisation par coupure de graphe) sont dérivées du critère d'appartenance du résultat au domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$ . Les critères relatifs à la surface de la solution, la régularité et la cohérence avec les structures adjacentes, sont intégrés dans une fonctionnelle comme celle de l'équation 5.1. Nous décrivons en premier lieu ce deuxième point.

### 5.3.1 Prise en compte des relations d'adjacence dans la définition de la fonctionnelle

Nous modélisons l'extraction comme la minimisation d'une fonctionnelle :

$$E(S) = \int_{\partial S} f(\partial S(s)) ds.$$

La fonction  $f$  doit idéalement prendre des valeurs faibles au niveau des frontières de l'objet recherché  $A$  et de grandes valeurs ailleurs (cf section 5.2.1). Si nous connaissions l'ensemble flou  $\mu_A$  représentant l'objet  $A$ , nous pourrions définir  $f$  à partir de la frontière de  $\mu_A$ . Celle-ci peut être obtenue comme la *frontière morphologique floue*<sup>1</sup> [Bloch et al., 1997] :

$$\mu_{\partial A} = \delta_{B_c}(\mu_A) \wedge \delta_{B_c}(c(\mu_A)),$$

où  $\delta_{B_c}$  est la dilatation par l'élément structurant associé à la notion de connexité utilisée. Puisque nous ne connaissons pas  $\mu_A$  mais seulement son domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$ , nous pouvons uniquement déduire la sur-estimation :

$$\mu_{\partial A} \leq \delta_{B_c}(\overline{A}) \wedge \delta_{B_c}(c(\underline{A})). \quad (5.10)$$

Dans la figure 5.5 nous illustrons le résultat d'une telle approximation. La sur-estimation obtenue en (b) pour le domaine montré en (a) est très large et ne serait d'aucune utilité pour réaliser la segmentation.

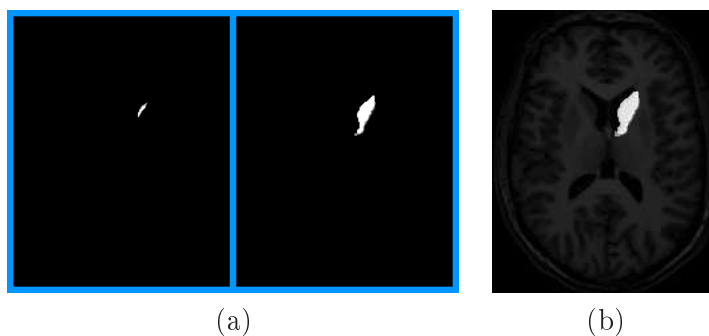


FIGURE 5.5 – (a) Domaine obtenu par l'algorithme de propagation pour le noyau caudé :  $(\underline{CNL}, \overline{CNL})$ . (b) Sur-estimation de la frontière  $\partial\mu_A$  selon l'équation 5.10 :  $\delta_{B_c}(\overline{CNL}) \wedge \delta_{B_c}(c(\underline{CNL}))$ .

Afin d'affiner cette estimation nous allons décomposer la frontière de  $A$  en plusieurs sous-parties correspondant aux frontières communes avec les structures adjacentes, estimer une sur-estimation de chacune de ces sous-parties et enfin recomposer l'ensemble de la frontière de  $A$ .

En effet l'ensemble des structures adjacentes est connu et peut être obtenu à partir du modèle. Pour un objet  $A$  nous pouvons ainsi obtenir l'ensemble des structures adjacentes que nous notons  $Adj(A)$ . Nous pouvons alors exprimer la frontière de l'objet  $A$  comme la réunion des frontières qu'il partage avec l'ensemble des objets adjacents. Puisque cet ensemble est exhaustif, nous pouvons exprimer la frontière de  $A$  comme la réunion des frontières qu'il partage avec les objets adjacents :

$$\mu_{\partial A} = \vee_i \mu_{\partial(A, O_i)}, \quad O_i \in Adj(A),$$

1. La frontière d'un sous-ensemble  $A$  de  $X$  peut être obtenue par son gradient morphologique :  $\partial A = \delta_{B_c}(A) \setminus \varepsilon_{B_c}(A) = \delta_{B_c}(A) \cap \delta_{B_c}(c(A))$  où  $\delta_{B_c}$  et  $\varepsilon_{B_c}$  sont respectivement la dilatation et l'érosion par l'élément structurant associé à la notion connexité utilisée.

où  $\mu_{\partial(A,O_i)}$  représente la frontière entre  $A$  et  $O_i$ . Pour définir cette frontière entre deux ensembles flous  $\mu_A$  et  $\mu_B$  nous pouvons étendre l'équation 5.10 suivant :

$$\mu_{\partial(A,B)} = \delta_{B_c}(\mu_A) \wedge \delta_{B_c}(\mu_B).$$

A partir des domaines  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$  associés aux variables  $A$  et  $B$ , nous pouvons alors obtenir une sur-estimation de leur frontière commune suivant :

$$\mu_{\partial(A,B)} \leq \delta_{B_c}(\overline{A}) \wedge \delta_{B_c}(\overline{B}).$$

Notons que cette définition peut conduire à un ensemble vide ou à un ensemble de taille importante si les objets se recouvrent sur une grande surface.

En recomposant l'ensemble des sur-estimations obtenues pour chacune des sous-parties, nous obtenons finalement la sur-estimation suivante pour la frontière complète de  $A$  :

$$\mu_{\partial A} \leq \bigvee_i \delta_{B_c}(\overline{A}) \wedge \delta_{B_c}(\overline{O_i}), \quad O_i \in Adj(A). \quad (5.11)$$

Nous notons cette sur-estimation  $\overline{\partial A}$ .

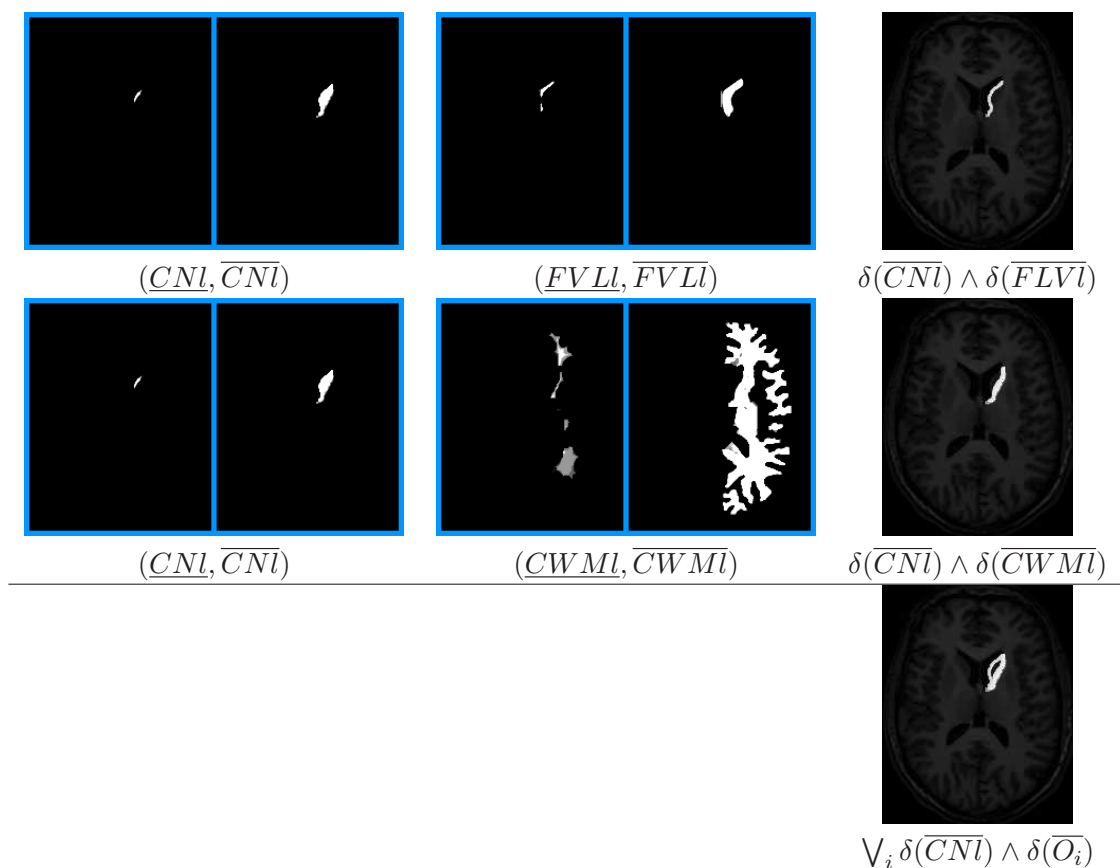


FIGURE 5.6 – Obtention d'une sur-estimation de la frontière du noyau caudé gauche  $CNl$  en obtenant des sur-estimations de sa frontière avec la corne frontale du ventricule latéral  $FLVl$  et avec la matière blanche de l'hémisphère gauche  $CWMI$ . La composition de ces frontières partielles nous permet d'obtenir une sur-estimation de la frontière complète de noyau caudé gauche  $\overline{\partial CNl}$ .

Nous illustrons ce calcul dans la figure 5.6 sur une coupe axiale pour l'extraction du noyau caudé gauche  $CNl$ . Dans cette coupe  $CNl$  est adjacent à la corne frontale du ventricule latéral gauche  $FLVl$  et à la matière blanche de l'hémisphère gauche  $CWMI$  (pour

cet exemple nous ne considérons que les structures adjacentes dans cette coupe axiale). A partir des domaines  $(\underline{CNL}, \overline{CNL})$  et  $(\underline{FVLL}, \overline{FVLL})$  obtenus par le processus de propagation, nous obtenons en premier lieu une sur-estimation de la frontière entre  $CNL$  et  $FVLL$  par l'opération :  $\delta_{B_c}(\overline{CNL}) \wedge \delta_{B_c}(\overline{FVLL})$ . Nous obtenons similairement la frontière entre  $CNL$  et  $CWML$  à partir des domaines  $(\underline{CNL}, \overline{CNL})$  et  $(\underline{CWML}, \overline{CWML})$ . Nous composons alors ces résultats pour obtenir la sur-estimation  $\overline{\partial CNL}$  de la frontière du noyau caudé.

Notons que ce calcul dépend uniquement des résultats de l'algorithme de propagation et pas de l'image. Puisque nous supposons que la connaissance générique utilisée pour réaliser la reconnaissance est correcte, nous obtenons une sur-estimation complète de la frontière sous la forme d'un ensemble flou valant au moins 0,5 sur toute la longueur du contour<sup>2</sup>. En général la fonction d'appartenance obtenue vaudra 1 sur toute la longueur du contour. Par ailleurs les valeurs obtenues en dehors de la frontière recherchée dépendent de la taille des domaines obtenus par l'algorithme de propagation. Des domaines très restreints conduisent à une bonne approximation du contour alors que des domaines très larges ne permettent d'obtenir qu'une sur-estimation très large du contour ne permettant pas d'extraire l'objet recherché.

Nous définissons alors à partir de cette sur-estimation la fonction  $f$  intervenant dans la fonctionnelle  $E(S) = \int_{\partial S} f(\partial S(s)) ds$ . Puisque nous supposons que pour tous les points du contour recherché la sur-estimation obtenue  $\overline{\partial A}$  présente des valeurs toujours supérieures à 0,5 et valant en général 1, nous définissons la fonction  $f$  suivant :

$$f(x) = -\log(\overline{\partial \mu_A}(x)), \quad (5.12)$$

interdisant de fait tous les contours passant par un voxel où  $\overline{\partial \mu_A}$  est nul. Nous notons  $E_{contour}$  la fonctionnelle résultante :

$$E_{contour} = \int_{\partial S} -\log(\overline{\partial \mu_A}(\partial S(s))) ds. \quad (5.13)$$

### 5.3.2 Intégration des contraintes relatives aux bornes du domaines

Nous recherchons un résultat appartenant au domaine  $(\underline{A}, \overline{A})$  obtenu par l'algorithme de propagation. Ce résultat doit donc inclure la borne inférieure du domaine et être inclus dans la borne supérieure. Comme nous l'avons mentionné dans la section 5.1, l'extraction d'une solution binaire  $S$  conduit à assouplir ces conditions en n'imposant strictement que l'inclusion de  $S$  dans le support de la borne supérieure et l'inclusion du noyau de la borne inférieure dans  $S$ , tout en favorisant la satisfaction complète de ces relations. Pour caractériser cette satisfaction, nous utilisons le degré d'inclusion  $incl(\mu_1, \mu_2)$  de  $\mu_1$  dans  $\mu_2$  défini suivant :

$$incl(\mu_1, \mu_2) = \prod_{x \in X} \min(1, 1 - \mu_1(x) + \mu_2(x)).$$

Le degré d'inclusion de la segmentation binaire  $S$  dans  $\overline{A}$  est alors exprimé simplement suivant :

$$incl(S, \overline{A}) = \prod_{x \in S} \overline{A}(x).$$

Similairement le degré d'inclusion de  $\underline{A}$  dans  $S$  est exprimé suivant :

$$incl(\underline{A}, S) = \prod_{x \in X \setminus S} \underline{A}(x).$$

---

2. Selon la définition donnée par l'équation 5.10, le contour d'un ensemble flou est défini sous la forme d'une fonction d'appartenance qui prend des valeurs inférieures à 1 si le contour est diffus mais qui présente pour chaque section de contour un maximum toujours supérieur à 0,5.

Nous voulons que ces deux contraintes soient le mieux satisfaites possible et donc que le produit  $incl(\underline{A}, S) \times incl(S, \overline{A})$  soit maximal. De façon équivalente nous allons minimiser :

$$E_{domaine}(S) = -\log(incl(S, \overline{A}) \times incl(\underline{A}, S)) = -\sum_{x \in S} \log(\overline{A}) - \sum_{x \in X \setminus S} \log(c(\underline{A})). \quad (5.14)$$

Cette formulation présente l'avantage de totalement interdire les résultats ne satisfaisant pas du tout l'une ou l'autre de ces contraintes (le degré d'inclusion valant dans ce cas 0). De plus nous aboutissons à une expression qui s'intégrera directement dans un processus d'optimisation par coupure de graphe.

### 5.3.3 Optimisation par coupure de graphe

Pour obtenir une solution approximative à notre problème nous avons défini une première fonctionnelle représentant les critères de régularité et de cohérence par rapport aux structures adjacentes et une seconde fonctionnelle représentant les contraintes d'inclusion relativement aux bornes des domaines. Le résultat final est alors obtenu par la minimisation de la somme pondérée de ces deux fonctionnelles :

$$E(S) = \lambda E_{contour}(S) + (1 - \lambda) E_{domaine}(S). \quad (5.15)$$

Une solution exacte (en utilisant une approximation de la norme  $L_2$  pour calculer la longueur de la surface dans le terme  $E_{contour}$ ) de cette fonctionnelle est obtenue par l'extraction d'une coupe de coût minimal dans un graphe dont la construction est donnée dans [Boykov and Kolmogorov, 2003] (cf section 5.2.2).

Nous illustrons dans la figure 5.7 l'ensemble de ce processus toujours pour l'extraction du noyau caudé gauche. Tout d'abord nous obtenons la sur-estimation de la frontière  $\partial \overline{CNl}$  par la combinaison des domaines associés à  $CNI$  et à ses voisins. Nous utilisons alors cette sur-estimation pour définir les liens entre les nœuds du graphe représentant les pixels. Pour cela nous suivons la méthode proposée dans [Boykov and Kolmogorov, 2003] en définissant le poids des liens suivant l'équation 5.9. Nous définissons alors le poids des liens entre la source  $s$  et les pixels  $x$  à partir de la borne inférieure  $\underline{CNl} : w(s, x) = -\log(c(\underline{A}(x)))$ . Similairement le poids des liens entre le puits  $t$  et les pixels  $x$  à partir de la borne supérieure  $\overline{CNl} : w(x, p) = -\log(\overline{A}(x))$ . La coupe minimale est alors obtenue par l'algorithme proposé dans [Boykov and Kolmogorov, 2004], la solution étant l'ensemble des pixels restant liés à la source par un chemin ne passant pas par cette coupe.

Dans la figure 5.8, nous montrons plusieurs illustrations de résultats obtenus en 3D pour les noyaux caudés (a) et les thalamus (b). En (c-f), nous montrons simultanément des résultats de segmentation des ventricules latéraux, du troisième ventricule, des putamens, des thalamus, des noyaux caudés et des noyaux accumbens.

## 5.4 Conclusion

Même si le processus de propagation a drastiquement réduit l'espace de solutions, l'extraction d'une solution exacte selon les contraintes portées par le modèle est toujours difficilement réalisable. Nous faisons donc plusieurs hypothèses (notamment l'extraction indépendante de régions binaires) qui permettent de calculer efficacement une solution approximative. Pour une structure donnée, nous obtenons ainsi, par l'extraction d'une surface minimale, un résultat cohérent avec le domaine obtenu par le processus de propagation et les domaines obtenus pour les structures adjacentes.

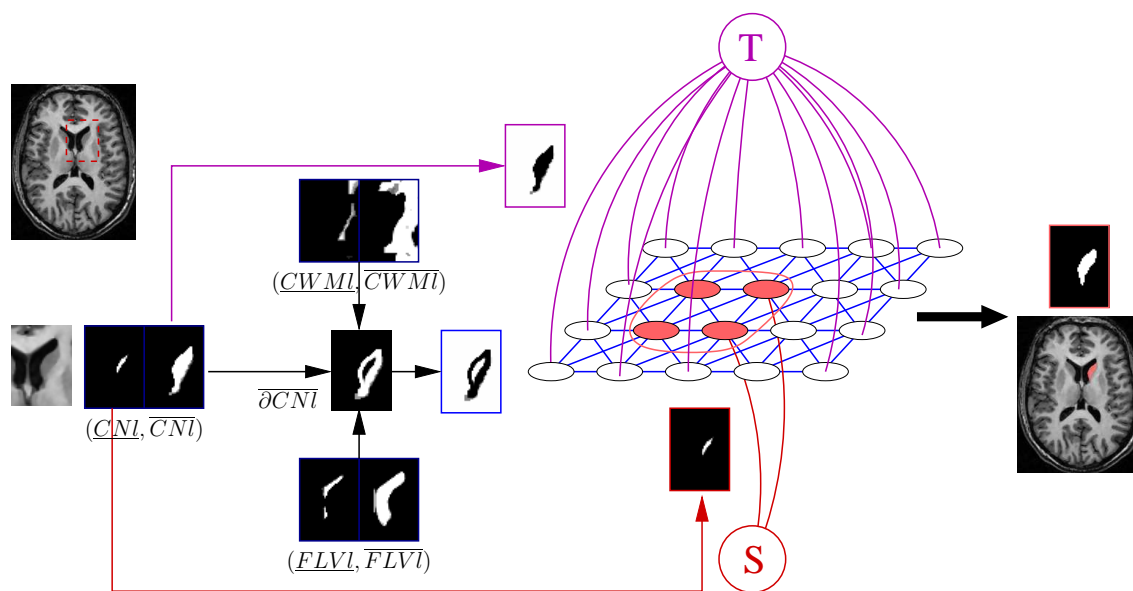


FIGURE 5.7 – Extraction du noyau caudé gauche.

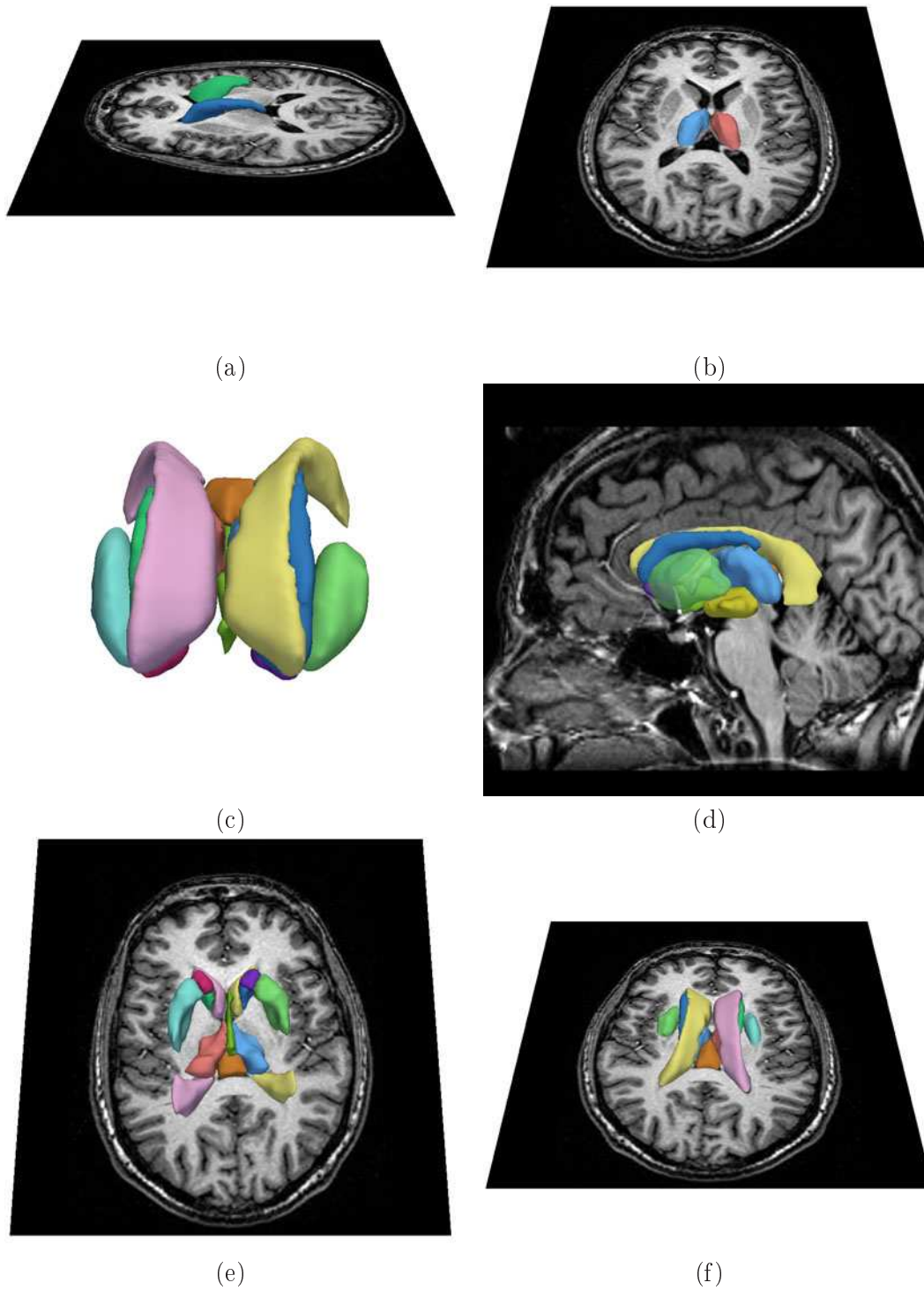


FIGURE 5.8 – Vues 3D de résultats de segmentation. (a) Noyaux caudés. (b) Thalamus. (c-f) Ventricules latéraux, troisième ventricule, putamens, thalamus, noyaux caudés, noyaux accumbens. (c) Vue de dessus et de devant. (d) Vue latérale. (e) Vue de dessous. (f) Vue de dessus.

## Chapitre 6

# Application à la segmentation des structures cérébrales sous-corticales

### Introduction

L'ensemble du processus proposé dépend du modèle structurel de l'anatomie brièvement discuté dans la section 1.4.1. Pour parvenir à réaliser la reconnaissance, ce modèle doit être aussi riche que possible. Cependant la construction manuelle de ce modèle est fastidieuse. Nous avons donc mis en œuvre un processus d'apprentissage simple permettant d'extraire un ensemble de relations stables dans une base de cas annotés.

Nous illustrons alors l'ensemble du processus pour la reconnaissance de cas synthétiques. Nous montrons notamment l'influence de l'apprentissage sur les résultats de reconnaissance obtenus. Nous appliquons ensuite le processus à la reconnaissance des structures internes dans des IRM cérébrales. Dans un premier temps nous sélectionnons une coupe axiale spécifique pour laquelle nous avons réalisé une annotation manuelle sur une petite base de cas. En utilisant le modèle appris sur ces cas, nous réalisons la reconnaissance des structures internes et nous évaluons les résultats obtenus. Nous appliquons dans un deuxième temps le processus sur le volume complet. Dans ce cas nous ne disposons pas de base annotée manuellement. Nous réalisons donc l'extraction du graphe spécifique d'un cas unique et nous appliquons alors le processus de reconnaissance sur ce même cas.

Par ailleurs la présence de pathologies telles que les tumeurs cérébrales peut conduire à l'échec de la reconnaissance. En effet le modèle ne correspond plus dans ce cas à l'image à reconnaître puisqu'une nouvelle structure, la tumeur, est présente et a potentiellement remplacé des structures anatomiques normales. Cette tumeur peut aussi avoir déplacé certaines structures, invalidant partiellement ou complètement des relations du modèle.

Pour traiter ces cas pathologiques nous proposons une extension du processus initial afin de réaliser simultanément la reconnaissance des structures anatomiques normales et la mise à jour de la connaissance générique. Nous décrivons cette adaptation pour le traitement de cas présentant des tumeurs n'induisant pas d'effet de masse important (i.e. de refoulement des autres structures).

### 6.1 Construction de la base de connaissances

Dans la section 1.4.1, nous avons brièvement décrit le modèle structurel à la base du processus de reconnaissance proposé dans cette thèse. Ce modèle a été constitué manuellement à partir d'ouvrages de référence d'anatomie. Cette construction est fastidieuse et ne

---



contient qu'un ensemble réduit de relations significatives. Cependant le processus de reconnaissance proposé requiert un nombre de relations important (plus le modèle est riche, plus la réduction des domaines réalisée par le processus de propagation sera importante). Nous mettons donc en œuvre un processus d'apprentissage afin d'extraire autant de relations utiles pour la reconnaissance que possible.

Nous nous reposons pour cela sur une base d'apprentissage comprenant des données dans lesquelles l'ensemble des structures du modèle ont été segmentées manuellement. Sur cette base nous réalisons en deux étapes distinctes l'extraction de l'ensemble des relations spatiales ou radiométriques stables (celles qui ont été discutées dans le chapitre 2). Premièrement pour chaque cas, nous obtenons l'ensemble des relations satisfaites par les régions de la segmentation manuelle. Cela conduit à une représentation spécifique de ce cas. Deuxièmement nous fusionnons les modèles spécifiques obtenus pour l'ensemble des cas de la base d'apprentissage en ne conservant que les relations stables sur la base. Nous obtenons de cette manière un modèle plus générique.

### 6.1.1 Pour un élément de la base d'apprentissage

Dans un premier temps nous réalisons donc l'extraction du graphe spécifique d'un cas donné de la base d'apprentissage. Pour cela nous testons la satisfaction de toutes les relations possibles (de tous les types considérés dans le chapitre 2) par les régions de la segmentation manuelle et nous ne conservons que celles qui sont satisfaites. Prenons pour exemple le cas présenté dans la figure 6.1. Pour extraire le graphe spécifique correspondant, nous allons notamment tester entre tous les couples de structures si des relations d'adjacence sont satisfaites. Nous testons par exemple si la région associée au noyau caudé est adjacente à la région associée au ventricule latéral. C'est le cas et la relation correspondante est ainsi ajoutée au graphe spécifique. La relation « le ventricule latéral est adjacent au putamen » est aussi testée mais n'est pas satisfaite pour les régions montrées en (b). Cette relation n'est donc pas ajoutée au graphe spécifique.

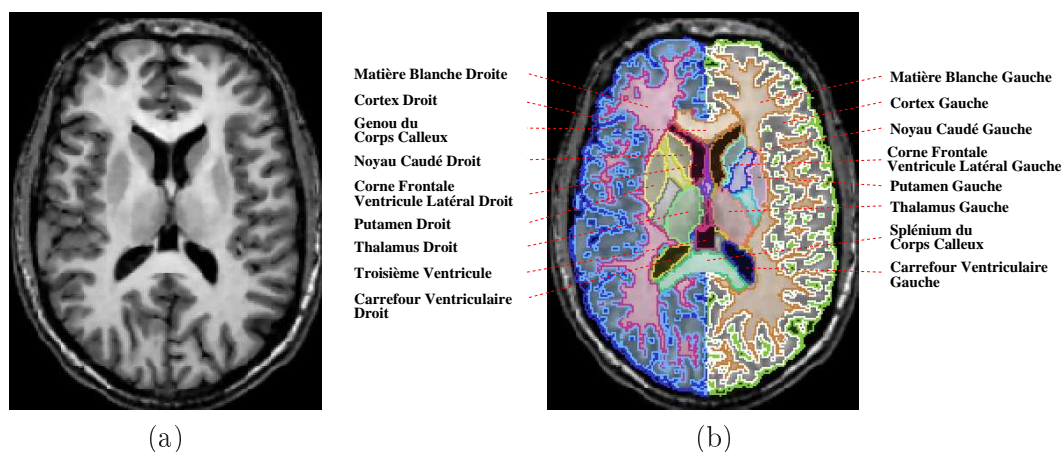


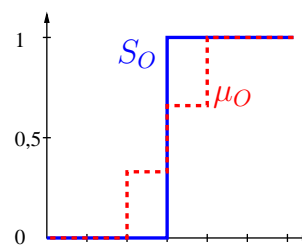
FIGURE 6.1 – Exemple de la base d'apprentissage. (a) Coupe axiale de l'IRM cérébrale. (b) Annotation manuelle associée.

Nous procédons de cette façon pour tous les types de relation présentés dans le chapitre 2. Ainsi pour un type de relation d'arité  $n$  nous passons en revue toutes les combinaisons de  $n$  structures (parmi les structures segmentées manuellement) et nous testons la satisfaction de la relation obtenue pour cette combinaison. Si elle est satisfaite, nous l'ajoutons au graphe spécifique.

Lorsque la relation possède un ou plusieurs paramètres, nous devons aussi affecter une valeur à ces paramètres. Pour cela remarquons qu'il existe parfois un ordre partiel sur ces paramètres tel que si la relation est satisfaite pour un ensemble de paramètres  $p_1$  et que  $p_1 \leq p_2$  alors la relation est satisfaite pour l'ensemble de paramètres  $p_2$ . Prenons par exemple une relation directionnelle pour une orientation fixée. Un tel ordre partiel existe entre les paramètres d'ouverture de la relation ( $k_1$  et  $k_2$ ). Si nous notons  $p_a = (k_1^a, k_2^a)$  et  $p_b = (k_1^b, k_2^b)$  deux jeux de paramètres, nous considérons que  $p_a \leq p_b$  si  $k_1^a \leq k_1^b$  et  $k_2^a \leq k_2^b$ . Cette relation d'ordre partiel est liée à la satisfaction de la relation. En effet pour une orientation donnée si une relation directionnelle est satisfaite entre deux régions pour une valeur des paramètres d'ouverture, elle l'est aussi pour des paramètres d'ouverture plus larges<sup>1</sup>. Cependant un tel ordre n'existe pas nécessairement. Ce n'est pas le cas par exemple pour le paramètre d'orientation d'une relation directionnelle.

Nous distinguons donc deux cas. Premièrement lorsque cet ordre n'existe pas, nous choisissons un nombre réduit de valeurs pour le ou les paramètres. Nous testons alors la satisfaction de la relation pour chacune de ces valeurs et nous incluons dans le graphe toutes les relations satisfaites. Ainsi nous n'obtenons pas nécessairement une seule relation d'un même type entre deux structures données. Nous pouvons par exemple avoir à la fois «  $A$  est à droite de  $B$  » et «  $A$  est au-dessus de  $B$  ». Deuxièmement lorsque cet ordre existe, nous obtenons les plus petits jeux de paramètres (relativement à la relation d'ordre) tels que la relation soit satisfaite. Toutes les autres relations satisfaites, obtenues en faisant varier les paramètres, sont nécessairement moins contraignantes qu'une des relations présentant un des plus petits ensembles de paramètres. Elles sont donc implicitement représentées par ces dernières et il est inutile de les intégrer au graphe. Pour les types de relations que nous considérons nous obtenons plus précisément un unique plus petit jeu de paramètres (qui est donc le plus contraignant) comme nous le décrivons dans les sections suivantes. Nous ajoutons alors au graphe la relation qui présente ces paramètres.

Par ailleurs initialement les segmentations manuelles sont fournies sous la forme d'ensembles binaires. Cependant en raison du volume partiel cette représentation n'est pas adaptée. De plus la tâche de segmentation manuelle est fastidieuse et des imprécisions au niveau de la frontière de l'objet sont courantes. Comme nous l'illustrons dans la figure ci-contre, nous définissons donc un ensemble flou  $\mu_O$  à partir de la segmentation binaire  $S_O$  de la structure  $O$  suivant :  $\mu_O(x) = 1$  si  $x \in \varepsilon(S_O)$ ,  $\mu_O(x) = 0,66$  si  $x \in S_O \setminus \varepsilon(\bar{S}_O)$  et  $\mu_O(x) = 0,33$  si  $x \in \delta(S_O) \cap \bar{S}_O$ , où  $\varepsilon$  et  $\delta$  sont respectivement l'érosion et la dilatation par une boule discrète dont le rayon vaut un voxel.



## Obtention des paramètres des contraintes

**Direction** Soient  $A$  et  $B$  deux structures et  $\mu_A$  et  $\mu_B$  les segmentations manuelles associées de l'exemple d'apprentissage. Nous voulons obtenir l'ensemble des relations directionnelles satisfaites entre ces structures. Ce type de relation, défini dans la section 2.4.2, est caractérisé par une orientation et deux paramètres d'ouvertures. Comme nous l'avons introduit ci-dessus nous considérons un ensemble de valeurs réduit pour le paramètre d'orientation (en effet nous n'avons pas de relation d'ordre sur ce paramètre qui soit liée à la

1. En effet la contrainte directionnelle prend la forme  $\mu_B \leq \delta_\nu(\mu_A)$  et si la relation d'ordre entre les paramètres d'ouverture est satisfaite nous avons  $\forall \mu \in \mathcal{F}, \delta_{\nu_a}(\mu) \leq \delta_{\nu_b}(\mu)$ , donc  $\mu_B \leq \delta_{\nu_a}(\mu_A) \Rightarrow \mu_B \leq \delta_{\nu_b}(\mu_A)$ .

satisfaction de la relation). Dans les exemples développés dans la suite de ce chapitre, nous utilisons les quatre (en 2D) ou les six (en 3D) directions élémentaires. Nous recherchons alors pour chaque valeur  $d$  du paramètre d'orientation l'ensemble des relations directionnelles satisfaites entre  $A$  et  $B$ .

Ces relations ne dépendent alors plus que des paramètres d'ouverture  $k_1$  et  $k_2$  (puisque l'orientation est fixée). Or, comme souligné plus haut, la relation d'ordre partiel  $(k_1^a, k_2^a) \leq (k_1^b, k_2^b)$  (vérifiée lorsque  $k_1^a \leq k_1^b$  et  $k_2^a \leq k_2^b$ ) est liée à la satisfaction de la contrainte. En effet si une relation directionnelle d'orientation  $d$  et de paramètres d'ouverture  $(k_1^a, k_2^a)$  est satisfaite entre  $\mu_A$  et  $\mu_B$  et que  $(k_1^a, k_2^a) \leq (k_1^b, k_2^b)$ , alors la relation directionnelle d'orientation  $d$  et de paramètres d'ouverture  $(k_1^b, k_2^b)$  est aussi satisfaite.

Nous voulons donc obtenir l'ensemble des plus petits paramètres  $(k_1, k_2)$  tels que la relation soit satisfaite entre  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . Nous approchons cette estimation en obtenant indépendamment une valeur optimale pour  $k_1$  et pour  $k_2$  en ne tenant compte respectivement que des noyaux et des supports de  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . En effet le paramètre  $k_1$  caractérise l'ouverture du noyau de l'élément structurant  $\nu$  et le paramètre  $k_2$  son support. Le paramètre  $k_1$  est ainsi obtenu comme la plus petite ouverture telle que la relation directionnelle soit satisfaite par les noyaux de  $\mu_A$  et  $\mu_B$  :  $k_1 = \inf\{k \in [0, \frac{\pi}{2}] \mid (\mu_B)_n \subseteq (\delta_{\nu(k, \frac{\pi}{2})}(\mu_A))_n\}$ , où  $(\mu)_n$  désigne le noyau de  $\mu$  et  $\nu(k, \frac{\pi}{2})$  l'élément structurant de paramètres d'ouverture  $(k, \frac{\pi}{2})$ . Or puisque  $(\delta_{\nu(k, \frac{\pi}{2})}(\mu_A))_n$  peut aussi être obtenu par l' $\alpha$ -coupe  $(\delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}((\mu_A)_n))_{1 - \frac{2k}{\pi}}$ , nous obtenons  $k_1 = \inf\{k \in [0, \frac{\pi}{2}] \mid (\mu_B)_n \subseteq (\delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}((\mu_A)_n))_{1 - \frac{2k}{\pi}}\}$ . Une fois la dilatation  $\delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}((\mu_A)_n)$  calculée,  $k_1$  peut donc être obtenu par un simple passage sur l'image :  $k_1 = \inf\{\frac{\pi}{2}(1 - \delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}((\mu_A)_n)(x)) \mid x \in (\mu_B)_n\}$ . De même nous obtenons une valeur pour  $k_2$  à partir des supports de  $\mu_A$  et  $\mu_B$  (notés  $(\mu)_s$ ) :  $k_2 = \inf\{\frac{\pi}{2}(1 - \delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}((\mu_A)_s)(x)) \mid x \in (\mu_B)_s\}$ .

Si  $k_1$  ou  $k_2$  valent  $\frac{\pi}{2}$ , aucune relation directionnelle d'orientation  $d$  n'est satisfaite (quels que soient les paramètres d'ouverture). Aucune contrainte n'est alors créée pour cette orientation. Sinon la contrainte de direction  $d$  et de paramètres  $k_1$  ou  $k_2$  est créée et ajoutée au graphe.

Notons que le calcul des dilatations  $\delta_{\nu(0, \frac{\pi}{2})}$  ne doit être réalisé qu'une fois pour l'apprentissage de l'ensemble des relations directionnelles prenant la structure  $A$  comme référence. L'obtention de l'ensemble des relations directionnelles est donc réalisée pour un coût raisonnable puisqu'elle ne nécessite après le calcul initial des dilatations qu'une passe sur l'image pour chaque test à réaliser.

**Distance** Une relation de distance entre deux objets  $A$  et  $B$  est paramétrée par quatre réels  $(a, b, c, d)$ ,  $a$  et  $b$  caractérisant une distance minimale des points de  $B$  par rapport à l'objet  $A$  et  $c$  et  $d$  une distance maximale. Comme pour les paramètres d'ouverture des relations directionnelles, nous considérons la relation d'ordre partielle suivante :  $(a_1, b_1, c_1, d_1) \leq (a_2, b_2, c_2, d_2)$  si  $a_1 \geq a_2$ ,  $b_1 \geq b_2$ ,  $c_1 \leq c_2$  et  $d_1 \leq d_2$ . Cette relation d'ordre est liée à la satisfaction de la relation. En effet si une relation de distance de paramètres  $(a_1, b_1, c_1, d_1)$  est satisfaite entre  $\mu_A$  et  $\mu_B$  et que  $(a_1, b_1, c_1, d_1) \leq (a_2, b_2, c_2, d_2)$ , alors la relation de distance de paramètres  $(a_2, b_2, c_2, d_2)$  est aussi satisfaite.

Nous voulons donc obtenir les jeux de plus petits paramètres  $(a, b, c, d)$  tels que la relation de distance associée soit satisfaite pour  $\mu_A$  et  $\mu_B$ , c'est-à-dire que l'inégalité  $\mu_B \leq c(\delta_{c(\nu_{a,b})}(\mu_A)) \wedge \delta_{\nu_{c,d}}(\mu_A)$  soit vérifiée. Comme nous l'avons fait pour les contraintes directionnelles, nous approchons cela par l'obtention de valeurs optimales pour les quatre paramètres indépendamment. Nous réalisons ainsi l'estimation des paramètres  $a$  et  $d$  sur les supports  $(\mu_A)_s$  et  $(\mu_B)_s$  de  $\mu_A$  et  $\mu_B$  et l'estimation des paramètres  $b$  et  $c$  sur leurs

noyaux  $(\mu_A)_n$  et  $(\mu_B)_n$ . Le paramètre  $c$  est par exemple obtenu comme la plus petite valeur vérifiant  $(\mu_B)_n \leq (\delta_{\nu_{c,c}}(\mu_A))_n$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} a &= \sup\{v \in \mathbb{R}^+ \mid (\mu_B)_s \subseteq \overline{\delta_{B(v)}((\mu_A)_s)}\}, & b &= \sup\{v \in \mathbb{R}^+ \mid (\mu_B)_n \subseteq \overline{\delta_{B(v)}((\mu_A)_n)}\}, \\ c &= \inf\{v \in \mathbb{R}^+ \mid (\mu_B)_n \subseteq \delta_{B(v)}((\mu_A)_n)\}, & d &= \inf\{v \in \mathbb{R}^+ \mid (\mu_B)_s \subseteq \delta_{B(v)}((\mu_A)_s)\}, \end{aligned}$$

où  $\overline{\delta_{B(v)}((\mu_A)_s)}$  est le complémentaire de la dilatation par une boule de rayon  $B(v)$  du support de  $\mu_A$ . Pour obtenir ces valeurs il nous suffit donc de calculer les cartes de distance  $D$  par rapport à  $(\mu_A)_s$  et  $(\mu_A)_n$ . Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} a &= \inf\{D_{(\mu_A)_s}(x) \mid x \in (\mu_B)_s\} & b &= \inf\{D_{(\mu_A)_n}(x) \mid x \in (\mu_B)_n\} \\ c &= \sup\{D_{(\mu_A)_n}(x) \mid x \in (\mu_B)_n\} & d &= \sup\{D_{(\mu_A)_s}(x) \mid x \in (\mu_B)_s\}. \end{aligned}$$

Notons que le calcul de ces cartes de distance ne doit être réalisé qu'une seule fois pour toutes les relations de distance prenant l'objet  $A$  comme référence.

**Contraste** La relation de contraste entre deux structures  $A$  et  $B$  définie dans la section 2.5 est caractérisée par une fonction trapézoïdale dont les paramètres sont notés  $(a, b, c, d)$ . Nous considérons la même relation d'ordre sur ces paramètres que celle utilisée pour les contraintes de distance :  $(a', b', c', d') \leq (a'', b'', c'', d'')$  si  $a' \geq a''$ ,  $b' \geq b''$ ,  $c' \leq c''$  et  $d' \leq d''$ . Cet ordre est aussi lié à la satisfaction de la relation de contraste.

Nous voulons donc extraire les plus petits jeux de paramètres  $(a, b, c, d)$  tels que la relation de contraste soit satisfaite entre  $\mu_A$  et  $\mu_B$ . Comme pour la contrainte de distance, nous approchons cette estimation par l'extraction de valeurs optimales pour chacun des paramètres indépendamment. Pour cela définissons  $\min_s^A$ ,  $\max_s^A$ ,  $\min_n^A$ ,  $\max_n^A$  et  $\min_s^B$ ,  $\max_s^B$ ,  $\min_n^B$ ,  $\max_n^B$  les niveaux de gris minimaux et maximaux dans les supports et les noyaux de  $\mu_A$  et de  $\mu_B$ . Nous obtenons alors les valeurs suivantes :

$$a = \frac{\min_s^B - \min_s^A}{\min_s^B + \min_s^A}, \quad b = \frac{\min_n^B - \min_n^A}{\min_n^B + \min_n^A}, \quad c = \frac{\max_s^B - \max_s^A}{\max_s^B + \max_s^A}, \quad d = \frac{\max_n^B - \max_n^A}{\max_n^B + \max_n^A}.$$

Cependant en réalisant l'estimation des paramètres indépendamment, nous pouvons ici obtenir un résultat qui ne vérifie pas  $a \leq b \leq c \leq d$  et donc incohérent. Si c'est le cas nous créons deux contraintes de paramètres :

$$\begin{aligned} a_1 &= \min(b - \epsilon, a), & b_1 &= b, & c_1 &= \max(b + \epsilon, c), & d_1 &= \max(c_1 + \epsilon, d), \\ a_2 &= \min(b_2 - \epsilon, a), & b_2 &= \min(c - \epsilon, b), & c_2 &= c, & d_2 &= \max(c + \epsilon, d). \end{aligned}$$

Le paramètre  $\epsilon$  introduit une tolérance pour éviter une trop grande spécialisation de la relation (nous choisissons  $\epsilon=0,01$  dans les exemples développés dans la suite du chapitre). En effet sinon la fonction d'appartenance pourrait être non nulle en un point unique.

**Volume** La contrainte  $C_A^{vol} [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$  portant sur le volume d'un objet  $A$  (cf section 2.4.5) est aussi caractérisée par quatre paramètres  $(a, b, c, d)$ .  $a$  et  $b$  définissent la fonction  $f_{V_{\min}}$  qui représente un volume minimal et  $c$  et  $d$  la fonction  $f_{V_{\max}}$  qui représente un volume maximal (notons que ces 4 paramètres ne représentent pas une fonction trapézoïdale et que nous avons  $a \leq b$ ,  $c \leq d$ ,  $a \leq c$  et  $b \leq d$ ). Nous pouvons utiliser la même relation d'ordre que pour les relations de distance ou de contraste. En réalisant indépendamment l'extraction de valeurs optimales pour chaque paramètre, nous obtenons  $a = V((\mu_A)_n)$ ,  $b = V((\mu_A)_s)$ ,  $c = V((\mu_A)_n)$  et  $d = V((\mu_A)_s)$ . L'intervalle  $[f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]$  obtenu est donc réduit à un singleton puisque  $a = c$  et  $b = d$  mais sera élargi lors de la fusion.

### 6.1.2 Fusion

Une fois extraits pour chaque cas de la base d'apprentissage, les graphes spécifiques sont fusionnés afin d'obtenir un modèle plus générique. Ici nous réalisons simplement l'extraction du plus grand dénominateur commun de ces représentations spécifiques<sup>2</sup>. Puisque les graphes obtenus pour chaque cas de la base d'apprentissage comportent l'ensemble des relations satisfaites, la fusion consiste simplement à ne conserver que les relations présentes dans tous les cas de la base. Par exemple si tous les graphes possèdent la relation «  $A$  est adjacent à  $B$  » alors le modèle final possède aussi cette relation. Si dans un cas de la base d'apprentissage cette relation n'est pas satisfaite alors le modèle ne l'inclut pas.

Lorsque les relations dépendent de paramètres, nous distinguons les deux cas de figure identifiés lors de l'extraction du graphe spécifique. S'il n'existe pas de relation d'ordre sur les paramètres liée à la satisfaction de la contrainte (comme pour le paramètre d'orientation des relations directionnelles), l'extraction du graphe spécifique est réalisée en testant la satisfaction de la relation pour un nombre réduit de valeurs des paramètres. Nous conservons alors dans le graphe spécifique toutes les relations satisfaites. Dans ce cas la fusion est réalisée en considérant indépendamment chaque valeur du paramètre. Par exemple nous n'ajoutons au modèle une relation «  $A$  est à droite de  $B$  » que si tous les graphes spécifiques possèdent une relation directionnelle entre  $A$  et  $B$  dont le paramètre d'orientation vaut « droite ».

S'il existe une relation d'ordre sur les paramètres qui soit liée à la satisfaction de la contrainte (comme pour les paramètres d'ouverture des relations directionnelles), nous réalisons la fusion des paramètres obtenus dans chacun des cas de la base d'apprentissage (si une relation de ce type est présente dans tous les cas). Prenons par exemple une relation directionnelle entre  $A$  et  $B$  pour une direction donnée, satisfaite dans tous les cas de la base d'apprentissage mais pour des paramètres d'ouverture variables. Les graphes spécifiques ne contiennent que la relation de direction présentant les paramètres d'ouverture les plus contraignants, c'est-à-dire les plus petits (relativement à la relation d'ordre définie dans la section 6.1.1) tels que la relation soit satisfaite pour l'exemple d'apprentissage. Toutes les relations de paramètres d'ouverture plus grands sont donc aussi satisfaites. Le processus de fusion consiste alors à obtenir les plus petits paramètres d'ouverture qui soient plus grands que l'ensemble des paramètres obtenus sur la base d'apprentissage. La relation directionnelle résultante est ainsi satisfaite par tous les cas de la base d'apprentissage.

Plus généralement considérons un type de relation et un ensemble de variables données (par exemple une relation de distance entre  $A$  et  $B$ ). Supposons alors que nous utilisions un ordre partiel sur les paramètres de cette relation tel que si  $p_1 \leq p_2$  et que la relation de paramètres  $p_1$  est satisfaite, alors la relation de paramètres  $p_2$  l'est aussi. Si tous les graphes spécifiques comportent une telle relation de paramètres  $p_i$ , nous incorporons alors au modèle une relation dont les paramètres  $p$  sont les plus petits paramètres tels que  $\forall i, p_i \leq p$ . Nous obtenons ainsi une relation qui est satisfaite dans tous les cas de la base d'apprentissage.

**Distance** Supposons qu'une relation de distance entre  $A$  et  $B$  ait été extraite dans chaque cas de la base. Nous notons les paramètres de cette relation dans le cas  $i$  de la base

---

2. Ce type de fusion conduit à un modèle final pauvre si la base d'apprentissage présente une variabilité importante. Cette variabilité peut résulter de la présence de configurations multiples possibles. Par exemple  $B$  peut être au-dessus de  $A$  dans 50% des cas de la base d'apprentissage et à droite sinon, une structure supplémentaire étant présente dans ce deuxième cas de figure. Aucune relation n'est conservée dans le modèle final si nous ne préservons que les relations stables. Il pourrait donc être intéressant de détecter et de représenter ces différentes configurations.

$(a_i, b_i, c_i, d_i)$ . Nous obtenons alors les paramètres de la relation du modèle suivant :  $a_f = \min_{i \in [1..k]} a_i$ ,  $b_f = \min_{i \in [1..k]} b_i$ ,  $c_f = \max_{i \in [1..k]} c_i$  et  $d_f = \max_{i \in [1..k]} d_i$ . La relation ainsi obtenue est satisfaite pour tous les exemples de la base d'apprentissage et nous ne pouvons pas obtenir de paramètres plus contraignants qui satisfassent cette propriété.

**Direction** Pour ce type de relation nous considérons indépendamment les paramètres d'orientation et d'ouverture. Lors de l'extraction des graphes spécifiques, nous testons la satisfaction de cette relation pour un nombre réduit d'orientations et nous obtenons pour chaque orientation les paramètres d'ouverture optimaux. Nous intégrons donc une relation directionnelle d'orientation  $d$  au modèle final si tous les graphes spécifiques ont une relation directionnelle d'orientation  $d$ . Les paramètres d'ouverture  $((k_1)_f, (k_2)_f)$  de cette relation sont alors obtenus comme les plus grands observés sur la base d'apprentissage :  $(k_1)_f = \max_{i \in [1..k]} (k_1)_i$  et  $(k_2)_f = \max_{i \in [1..k]} (k_2)_i$ , où  $((k_1)_i, (k_2)_i)$  sont les paramètres obtenus dans le cas  $i$  de la base.

**Contraste** Si une relation de contraste entre  $A$  et  $B$  a été extraite dans chaque cas de la base alors nous créons dans le modèle une relation de contraste de paramètres  $(a_f, b_f, c_f, d_f)$ . Si nous notons  $(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, (a_k, b_k, c_k, d_k)$  les paramètres obtenus dans l'ensemble des cas de la base d'apprentissage nous obtenons :  $a_f = \min_{i \in [1..k]} a_i$ ,  $b_f = \min_{i \in [1..k]} b_i$ ,  $c_f = \max_{i \in [1..k]} c_i$  et  $d_f = \max_{i \in [1..k]} d_i$ .

Par ailleurs les relations de contraste sont potentiellement dédoublées (cf paragraphe portant sur les contraintes de contraste de la section 6.1.1). Nous les considérons dans ce cas comme deux types de contraintes différentes et nous réalisons leur fusion indépendamment.

**Volume** La fusion de contraintes de volume est réalisée comme celle des contraintes de contraste et de distance. Si  $(a_1, b_1, c_1, d_1), \dots, (a_k, b_k, c_k, d_k)$  sont les paramètres des relations extraites pour chacun des cas de la base nous définissons dans le modèle la relation de paramètres :  $a_f = \min_{i \in [1..k]} a_i$ ,  $b_f = \min_{i \in [1..k]} b_i$ ,  $c_f = \max_{i \in [1..k]} c_i$  et  $d_f = \max_{i \in [1..k]} d_i$ .

**Adjacence** L'adjacence n'est pas paramétrée et ce n'est pas cela que nous discutons dans ce paragraphe. Pour son utilisation comme contrainte dans le processus de propagation la fusion est réalisée comme pour toutes les autres relations non paramétrées : en préservant la relation si elle est présente dans l'ensemble des éléments de la base. Cependant les relations d'adjacence sont aussi utilisées pour estimer les priorités des contraintes et pour réaliser la segmentation finale. Dans ce dernier cas nous voulons obtenir l'ensemble des structures adjacentes pour reconstruire la frontière complète de l'objet. Si nous ne retenons que les relations d'adjacence toujours satisfaites, l'ensemble des structures adjacentes dans le modèle risque de ne pas comprendre toutes les structures réellement adjacentes. La sur-estimation de la frontière risque donc d'être incomplète. Nous préférons donc utiliser l'ensemble des structures adjacentes dans au moins un des exemples de la base d'apprentissage.

Nous réalisons ainsi deux fusions différentes des relations d'adjacence. La première qui est utilisée pour définir des contraintes du réseau de contraintes ne conserve que les relations toujours satisfaites. La seconde, utilisée pour le calcul des priorités et pour la segmentation, conserve l'ensemble des relations satisfaites dans au moins un cas de la base d'apprentissage.

## 6.2 Exemples synthétiques

Pour illustrer le processus de reconnaissance proposé nous avons généré une base d'exemples synthétiques comprenant 9 objets dont l'agencement spatial et le contraste sont relativement stables. Un élément de cette base ainsi que les identifiants ( $A - I$ ) des structures sont présentés dans la figure 6.2. Nous montrons aussi dans la figure 6.3 plusieurs éléments afin d'illustrer la variabilité des exemples à reconnaître. Nous générons cette base en faisant varier aléatoirement les limites entre les structures et leur niveau de gris moyen.

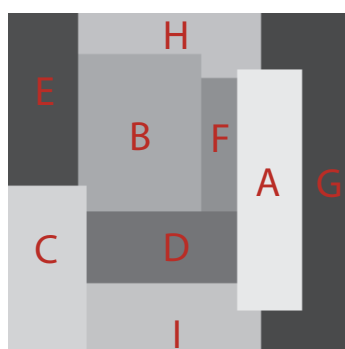


FIGURE 6.2 – Exemple de la base d'images synthétiques.

Certaines relations telles que l'adjacence entre  $G$  et  $H$  sont satisfaites uniquement dans une partie des cas. D'autres relations présentent des paramètres variables. Par exemple la relation «  $B$  est à gauche de  $F$  » est satisfaite de façon stricte dans certains cas. Dans d'autre cas elle l'est mais pour des paramètres d'ouverture plus larges. Par ailleurs chaque structure présente une distribution d'intensité gaussienne dont la moyenne peut varier d'un cas à l'autre. Toutefois les contrastes entre les structures restent relativement stables. Ainsi  $A$  présente des niveaux de gris toujours beaucoup plus élevés que  $G$ . De même  $B$  présente des niveaux de gris toujours légèrement plus élevés que  $F$  même si dans certains cas leurs distributions d'intensité sont presque identiques.

Nous créons deux groupes d'exemples synthétiques. Le premier qui comporte 350 éléments est utilisé pour réaliser l'apprentissage. Le second comporte 100 éléments et est utilisé pour tester le processus de reconnaissance.

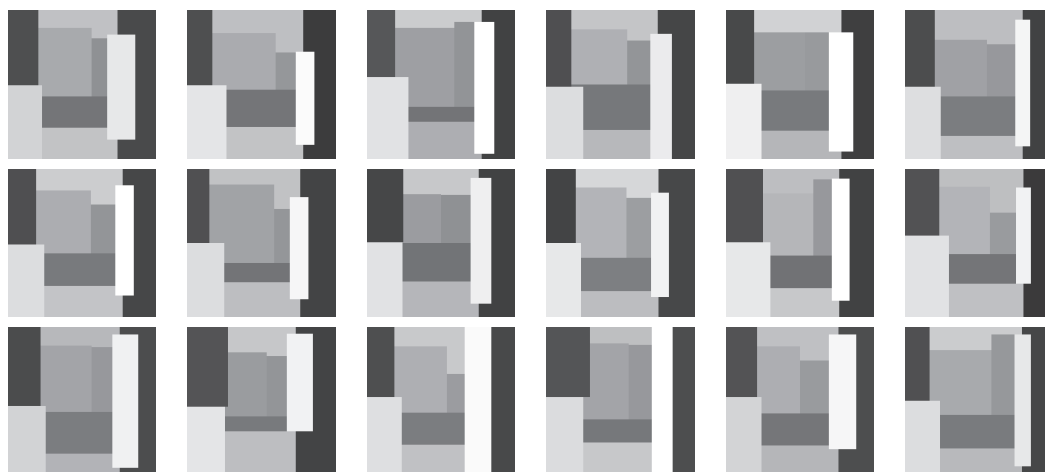


FIGURE 6.3 – Plusieurs éléments de la base d'images synthétiques.

### 6.2.1 Apprentissage

Premièrement nous réalisons l'extraction du graphe spécifique de chaque cas de la base d'apprentissage par la procédure décrite dans la section 6.1. Puisque l'agencement des structures est relativement stable, ces graphes présentent de nombreuses relations semblables. Les structures  $A$  et  $G$  sont par exemple toujours adjacentes et l'ensemble des graphes représentant les cas de la base d'apprentissage possèdent cette relation. Ces graphes présentent aussi de nombreuses différences en raison de la variabilité de l'agencement. Ainsi les structures  $G$  et  $I$  sont adjacentes uniquement dans une partie des cas. Seule une partie des graphes possède donc cette relation. Par ailleurs certaines relations présentent des paramètres différents d'un cas à l'autre. L'objet  $H$  est par exemple parfois strictement à gauche de  $A$  parfois plus relativement. Dans tous les cas le graphe possède donc une relation directionnelle entre  $A$  et  $H$  dont le paramètre de direction vaut gauche mais qui présente des paramètres d'ouvertures variables.

Nous illustrons la variabilité des graphes obtenus pour les exemples de la figure 6.3. Nous présentons ainsi dans la table 6.1 pour chaque cas si la relation d'adjacence entre  $G$  et  $I$  est satisfaite, le paramètre d'ouverture minimal  $k_1$  de la relation directionnelle «  $H$  est à gauche de  $A$  » et les distances minimales et maximales des points de  $B$  relativement à la structure  $A$ .

TABLE 6.1 – Satisfaction de la relation d'adjacence entre  $G$  et  $I$ , paramètre d'ouverture minimal  $k_1$  de la relation de direction «  $H$  est à gauche de  $A$  » et distances minimale et maximale de  $B$  relativement à  $A$  pour les exemples synthétiques présentés dans la figure 6.3.

cas	adjacence de $G$ et $I$	ouverture minimale de la relation « $H$ est à gauche de $A$ »	distances minimale et maximale de $B$ relativement à $A$
1	oui	1.12	(21 , 95)
2	oui	1.43	(27 , 116)
3	oui	0.80	(27 , 108)
4	non	1.12	(31 , 107)
5	oui	1.27	(32 , 102)
6	oui	1.27	(38 , 109)
7	oui	1.05	(33 , 108)
8	oui	1.57	(21 , 110)
9	oui	1.00	(40 , 93)
10	oui	1.57	(33 , 102)
11	oui	1.00	(25 , 94)
12	oui	1.21	(35 , 104)
13	oui	0.48	(28 , 98)
14	oui	0.48	(27 , 84)
15	non	0.01	(24 , 96)
16	non	0.01	(31 , 93)
17	oui	0.48	(39 , 98)
18	oui	0.80	(31 , 115)

Un élément de la base d'apprentissage ne permet donc pas en général de représenter de façon appropriée un autre cas. Ainsi le cas 1 ne peut être représenté (et donc reconnu) en utilisant le graphe du cas 15 par exemple. En effet la relation de direction «  $H$  est à gauche de  $A$  » présente un paramètre d'ouverture plus strict dans le cas 15 que dans le cas 1. Avec les paramètres du cas 15 cette relation n'est donc pas satisfaite dans le cas 1 (mais réciproquement avec les paramètres du cas 1, cette relation est satisfaite dans le cas



15). Inversement la relation d'adjacence entre  $G$  et  $I$  est satisfaite dans le cas 1 mais pas dans le cas 15. Le graphe du cas 15 ne présente donc pas de relation d'adjacence entre ces structures ce qui permet de représenter le cas 1 (l'absence d'une relation d'adjacence dans le modèle n'implique pas la non adjacence de ces structures) mais inversement la relation d'adjacence appartenant au graphe du cas 1 n'est pas satisfaite dans le cas 15.

Nous fusionnons alors les graphes spécifiques des  $k$  premiers cas de la base d'apprentissage par la procédure décrite dans la section 6.1.2. Nous obtenons ainsi le modèle  $G_k$  qui est moins contraignant mais permet de représenter un plus grand nombre de configurations. Plus  $k$  est grand moins les relations du graphe  $G_k$  sont contraignantes mais plus la proportion de cas correctement représentés par  $G_k$  est élevée. Reprenons par exemple les relations de la table 6.1. Le graphe  $G_3$  possède une relation d'adjacence entre  $G$  et  $I$  puisque les trois premiers cas possèdent cette relation. Les cas 4, 15 et 16 ne sont donc pas correctement représentés par ce graphe. Le graphe  $G_4$  ne possède plus cette relation (ce qui laisse la possibilité que  $G$  et  $I$  soient adjacents ou pas) puisqu'elle n'est pas satisfaite dans le cas 4. Tous les cas de la base d'apprentissage sont donc correctement représentés par  $G_4$  (en ne tenant compte que de cette relation d'adjacence). Considérons maintenant la relation de direction «  $H$  est à gauche de  $A$  ». Dans le graphe  $G_1$ , cette relation présente un paramètre d'ouverture  $k_1$  valant 1,12. Le graphe  $G_1$  ne représente donc pas correctement les cas 2, 5, 6, 8, 10 et 12. Dans le graphe  $G_2$ , le paramètre d'ouverture  $k_1$  de cette relation vaut 1,43. Elle n'est alors pas satisfaite par les cas 8 et 10. Dans les graphes  $G_k$  pour  $k \geq 8$  le paramètre d'ouverture vaut 1,57 et la relation directionnelle est satisfaite pour l'ensemble des cas. Dans la section suivante nous utilisons ces graphes pour réaliser la reconnaissance et nous illustrons notamment la dépendance de la proportion de cas correctement représentés par le graphe au nombre de cas utilisés pour réaliser l'apprentissage.

### 6.2.2 Propagation

Nous utilisons alors les graphes  $G_k$  (pour  $k$  allant de 1 à 350) appris pour réaliser la reconnaissance de 100 autres cas. Pour cela nous appliquons le processus de propagation puis nous réalisons l'extraction d'une solution binaire pour chacune des 9 structures.

Pour un graphe  $G_k$  donné, nous initialisons le processus de propagation en associant à chaque structure le domaine  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$ . L'algorithme  $P2$  est alors appliqué. Celui-ci peut

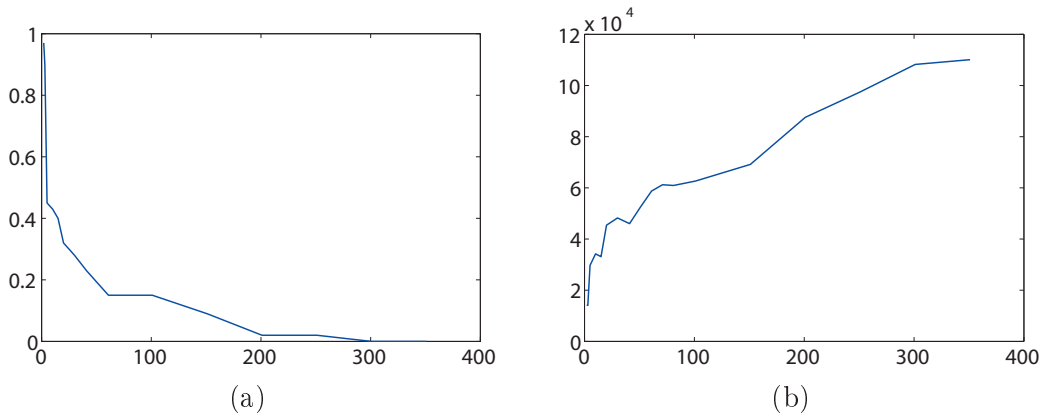


FIGURE 6.4 – (a) Proportion de cas pour lesquels le processus de propagation aboutit à une inconsistance en fonction du nombre de cas utilisés pour réaliser l'apprentissage. (b) Taille finale moyenne des domaines (pour les cas consistants) en fonction du nombre de cas utilisés pour réaliser l'apprentissage.

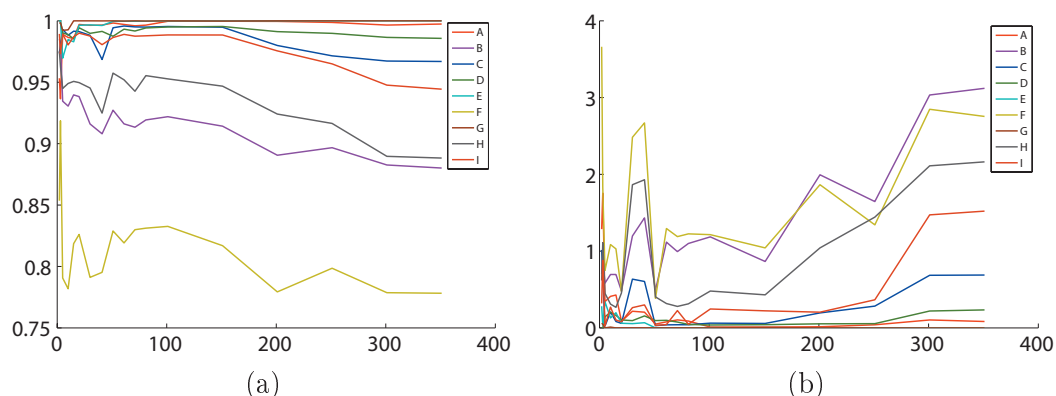


FIGURE 6.5 – (a) Coefficient kappa moyen des résultats du processus de reconnaissance pour les neuf structures. (b) Distance moyenne en nombre de pixels entre les résultats du processus et le résultat désiré.

aboutir à l'inconsistance du problème si le graphe  $G_k$  ne représente pas correctement le cas à reconnaître. Dans la figure 6.4 (a), nous montrons le nombre de cas ayant abouti à l'inconsistance en fonction du nombre de cas utilisés pendant l'apprentissage. Nous vérifions donc que plus le nombre de cas utilisés est grand, moins le nombre de cas inconsistants est important. En effet le graphe  $G_k$  est de moins en moins contraignant lorsque  $k$  croît.

Cependant même si cela permet de représenter de façon appropriée un plus grand nombre de cas, l'utilisation d'un grande base d'apprentissage conduit à un réseau plus faible qui est moins apte à réaliser la reconnaissance. Ainsi le processus de propagation réalise une réduction de domaines moins importante lorsque  $k$  augmente comme nous l'illustrons dans la figure 6.4 (b). Nous y présentons la taille finale des domaines pour les cas n'ayant pas abouti à l'inconsistance. Un compromis doit donc être réalisé.

Une fois les domaines réduits, nous obtenons une solution par l'extraction d'une surface minimale comme nous le décrivons dans le chapitre 5. Nous comparons alors les résultats obtenus aux régions recherchées à l'aide des mesures suivantes :

- le coefficient Kappa :  $\frac{2|A \cap B|}{|A| + |B|}$ , qui mesure la correspondance entre  $A$  et  $B$ , où  $A$  désigne la région obtenue par l'algorithme et  $B$  la vérité,
- la distance moyenne entre les contours de  $A$  et  $B$ .

Nous présentons dans la figure 6.5 la moyenne des résultats obtenus pour les cas consistants. En (a) et en (b) nous donnons respectivement pour chacune des neuf structures les valeurs moyennes du coefficient Kappa et de distance moyenne en fonction du nombre de cas utilisés pour réaliser l'apprentissage. Les résultats obtenus sont globalement meilleurs pour les structures bien différenciables comme  $A$  ou  $G$ . Ils sont moins bons pour des structures présentant une ambiguïté importante avec les structures voisines telles que  $F$  et  $B$  mais le coefficient Kappa reste toujours supérieur à 77%. Par ailleurs la précision des résultats décroît globalement lorsque  $k$  croît. En effet le graphe étant moins contraignant, le processus de propagation conduit à des domaines finals plus larges.

Dans la figure 6.6, nous illustrons l'ensemble du processus pour un cas donné. Nous appliquons tout d'abord le processus de propagation en utilisant les graphes  $G_2$ ,  $G_{50}$  et  $G_{350}$  (pour illustrer l'influence de la taille de la base d'apprentissage). Nous présentons les domaines de l'ensemble des structures à plusieurs stades du processus de propagation. Nous constatons qu'en utilisant le graphe  $G_2$  le processus converge plus rapidement mais aboutit à l'inconsistance du problème. Lorsque nous utilisons les graphes  $G_{50}$  et  $G_{350}$ , le processus n'aboutit pas à une inconsistance et obtient des domaines assez réduits. Notons

que les domaines obtenus lorsque nous utilisons  $G_{50}$  sont plus réduits qu'en utilisant  $G_{350}$  notamment pour les structures  $B$ ,  $F$  et  $H$ . Par ailleurs les domaines obtenus sont plus restreints pour les structures bien différenciées telles que  $A$ ,  $C$ ,  $E$  ou  $G$  que pour les structures présentant une ambiguïté plus importante telles que  $B$  ou  $F$ . Enfin nous utilisons les domaines finals pour extraire une segmentation binaire pour chaque structure (sauf lorsque nous utilisons  $G_2$  puisque le processus à aboutit à l'inconsistance du problème).

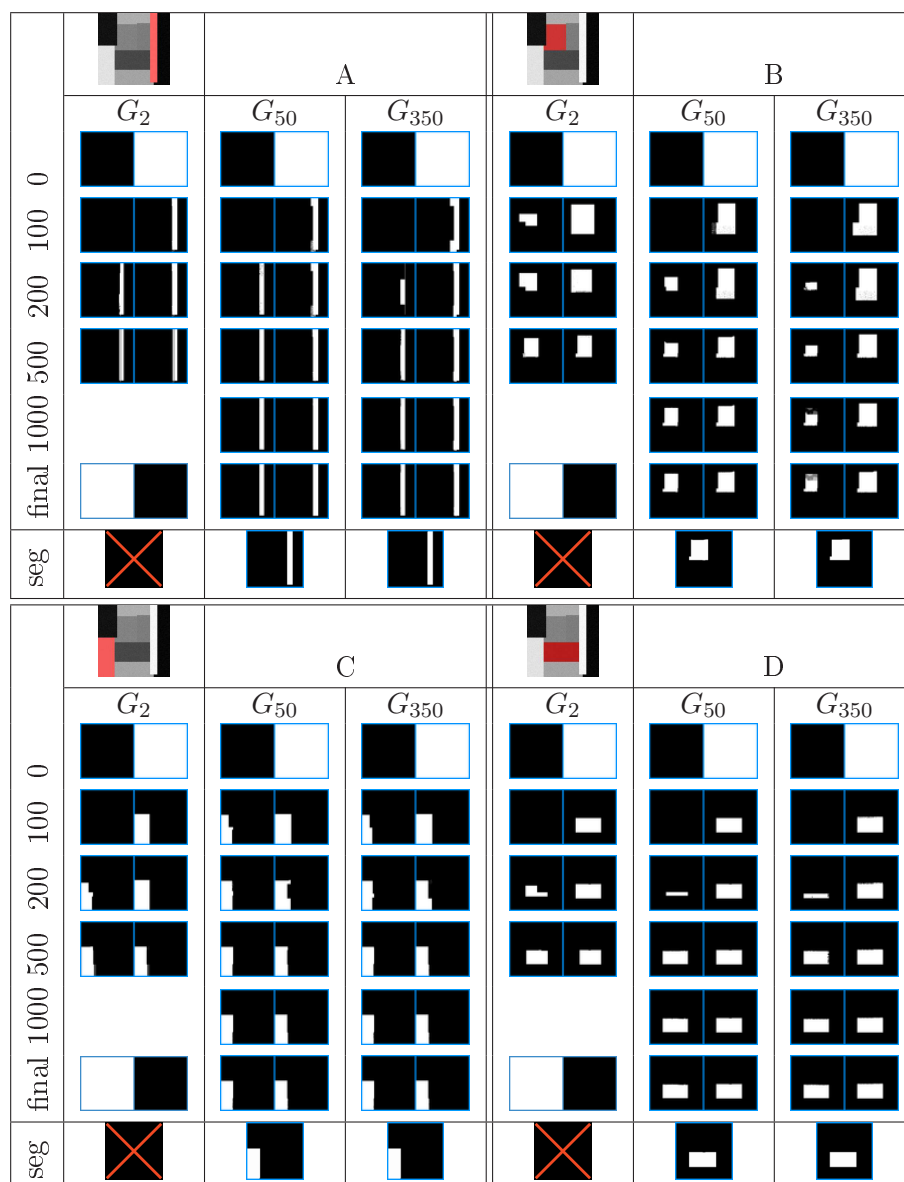
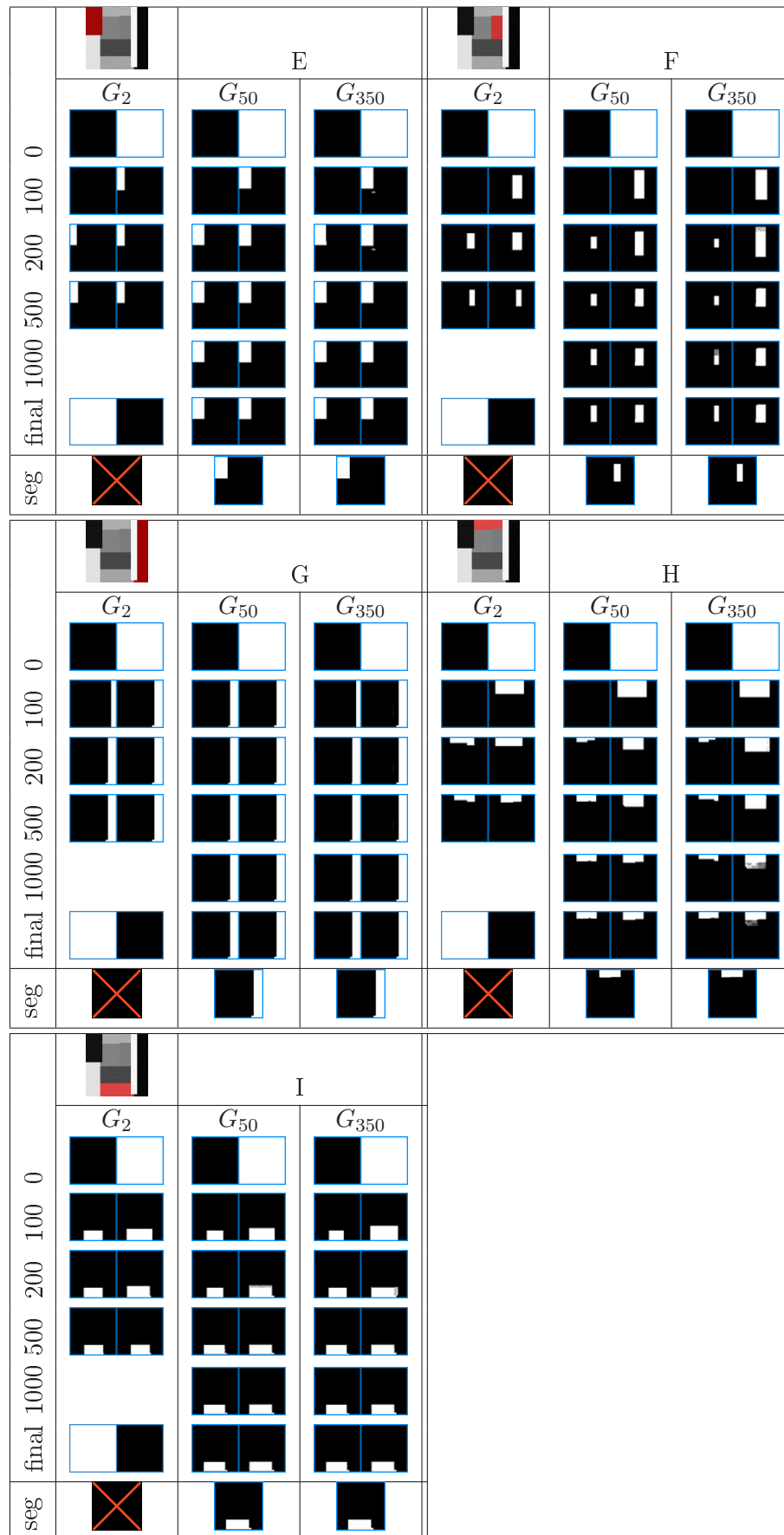


FIGURE 6.6 – Reconnaissance d'un exemple synthétique en utilisant les graphes  $G_2$ ,  $G_{50}$  ou  $G_{350}$ . Pour chaque structure nous montrons les domaines à différents stades du processus de propagation puis nous présentons la segmentation finale. Notons que dans le cas 2, le processus de propagation aboutit à l'inconsistance. Aucune solution n'est donc obtenue dans ce cas.



### 6.3 Traitement d'IRM cérébrales de sujets sains

Nous appliquons maintenant le processus à la reconnaissance des structures internes dans des IRM cérébrales. Dans un premier temps nous sélectionnons une coupe axiale spécifique dans laquelle nous avons réalisé, sur une petite base de cas, une annotation manuelle des structures d'un modèle simplifié du cerveau. Nous illustrons le processus d'apprentissage puis le processus de reconnaissance pour cette coupe axiale spécifique.

Nous appliquons ensuite le processus à la reconnaissance des structures internes dans le volume complet. Dans ce cas nous ne disposons pas de base dans laquelle l'ensemble des structures du modèle a été annotée. Nous ne pouvons donc pas réaliser l'apprentissage du modèle. Afin d'illustrer tout de même le processus de reconnaissance, nous réalisons l'extraction du graphe spécifique d'un cas unique pour lequel nous disposons de cette annotation. Nous appliquons alors le processus de reconnaissance sur ce même cas. De plus nous avons aussi construit un modèle manuellement qui comporte un nombre beaucoup plus réduit de relations. Nous avons alors utilisé ce modèle pour réaliser la reconnaissance du noyau caudé sur la base IBSR<sup>3</sup>.

#### 6.3.1 Apprentissage

Nous avons extrait les coupes axiales présentées dans la figure 6.7 de six volumes IRM provenant de la base Oasis<sup>4</sup>. Dans ces coupes nous avons annoté manuellement 50 structures. Ces annotations manuelles sont aussi présentées dans la figure 6.7. Nous réalisons alors l'apprentissage d'un modèle simplifié sur cette base réduite. Celui-ci comprend 56 structures réparties sur trois niveaux hiérarchiques (sa racine est le nœud représentant le cerveau).

Les structures du modèle présentent un agencement spatial stable. Le noyau caudé est ainsi toujours adjacent au ventricule latéral. Il est aussi toujours proche de celui-ci. Cependant les paramètres de cette relation varient d'un cas à l'autre. Nous montrons dans la table 6.2 les paramètres obtenus dans les exemples de la figure 6.7. Dans le deuxième cas notamment, les paramètres de distance maximale (les paramètres  $c$  et  $d$  de la fonction trapézoïdale) obtenus sont beaucoup plus élevés (car les ventricules latéraux ne longent pas dans ce cas toute la surface interne du noyau caudé). De même le noyau caudé droit est toujours extérieur au ventricule latéral droit (à gauche dans cette coupe axiale) mais les paramètres d'ouverture obtenus sont variables d'un cas à l'autre. Ces données sont acquises en utilisant le même protocole d'acquisition et le contraste entre les niveaux de gris des structures est relativement stable. Nous montrons par exemple dans la table 6.2 les paramètres obtenus pour la relation de contraste  $C_{FLVrCDr}^{cont}$  entre le ventricule latéral et le noyau caudé.

Comme pour les exemples synthétiques traités précédemment, nous obtenons pour chaque cas de la base d'apprentissage le graphe spécifique que nous notons  $G_{cas}^s$ . Nous fusionnons alors ces graphes pour obtenir un modèle plus générique. Puisque dans la section suivante nous évaluons le processus de propagation sur ces mêmes cas, nous construisons le modèle à partir de cinq des six cas. Le modèle obtenu par la fusion des graphes  $G_i^s$  pour

3. La base IBSR, « Internet Brain Segmentation Repository », comporte 18 IRM cérébrales. Elle est mise à disposition à l'adresse <http://www.cma.mgh.harvard.edu/ibsr>. Ces images sont pondérées en  $T_1$  et présentent une résolution de  $1 \times 1 \times 1.5 \text{ mm}^3$ . Une segmentation manuelle de 43 structures réalisée par un expert est aussi disponible. Cependant ces segmentations comportent de nombreux de points aberrants et ne peuvent pas être utilisées pour réaliser l'apprentissage.

4. La base Oasis est disponible à l'adresse <http://www.oasis-brains.org/>. Elle comporte un ensemble d'exams IRM réalisés sur 416 sujets sains âgés de 18 à 96 ans. Cependant aucune segmentation manuelle n'est disponible.

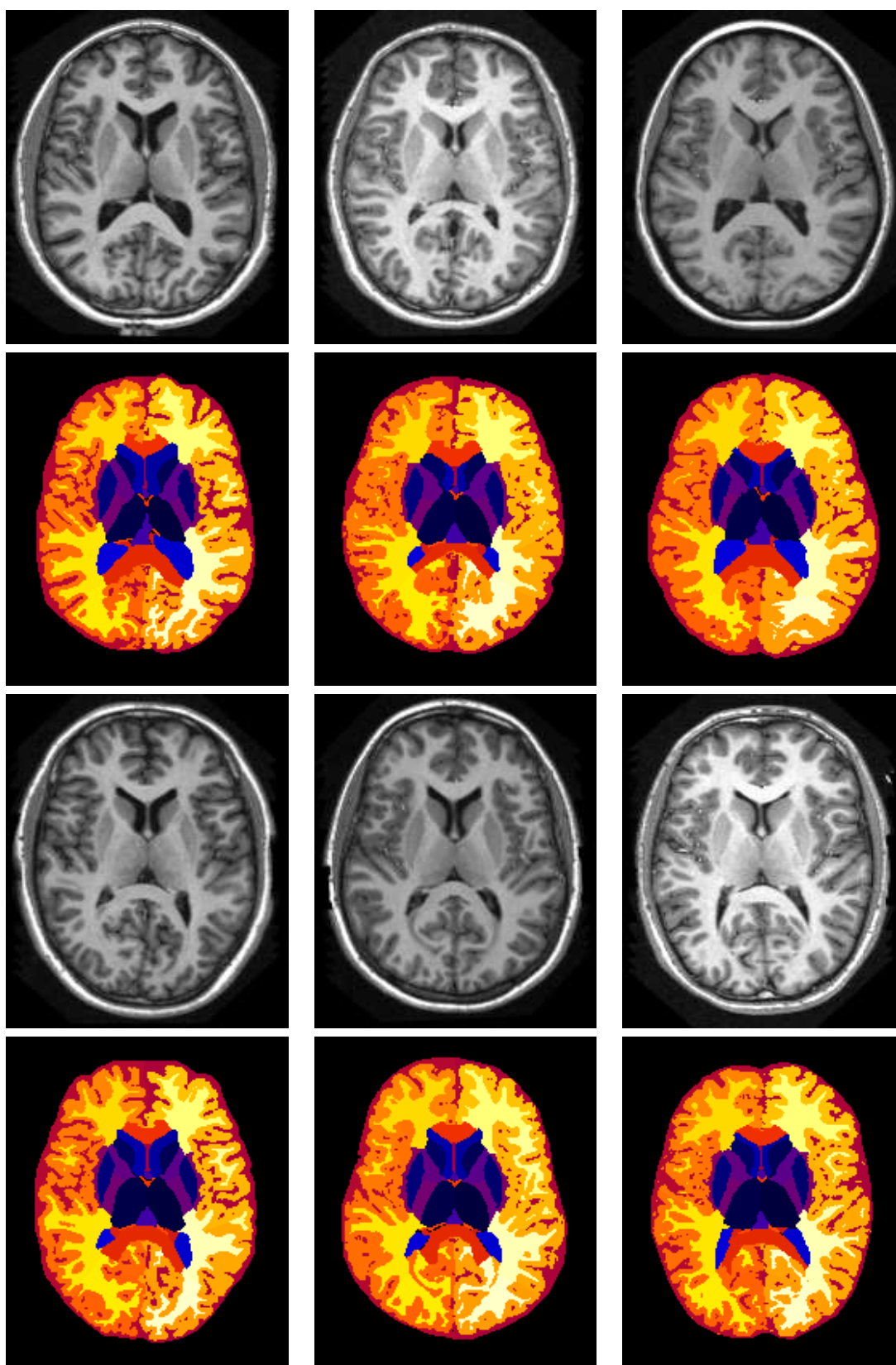


FIGURE 6.7 – Base d'apprentissage comprenant six coupes axiales extraites d'IRM cérébrales de la base Oasis et les segmentations manuelles associées.

TABLE 6.2 – Pour les coupes axiales présentées dans la figure 6.7, nous donnons les paramètres d'ouverture obtenus pour la relation directionnelle  $C_{FLVrCDr}^{gauche}$  entre la corne frontale du ventricule latéral droit  $FLVr$  et le noyau caudé droit  $CDr$ . Nous montrons aussi les paramètres de la relation de distance  $C_{FLVrCDr}^{dist}$  entre  $FLVr$  et  $CDr$  et les paramètres de la relation de contraste  $C_{FLVrCDr}^{cont}$  entre  $FLVr$  et  $CDr$ .

cas	$C_{FLVrCDr}^{dir}$	$C_{FLVrCDr}^{dist}$	$C_{FLVrCDr}^{cont}$
	$(k_1, k_2)$	$(a, b, c, d)$	$(a, b, c, d)$
1	(0,6 , 0,9)	(0 , 0 , 8,5 , 9,8)	(0,20 , 0,21 , 0,30 , 0,31)
2	(1,3 , 1,5)	(0 , 0 , 18 , 19,3)	(0,19 , 0,20 , 0,31 , 0,33)
3	(0,9 , 1,2)	(0 , 0 , 11,7 , 13)	(0,17 , 0,19 , 0,25 , 0,26)
4	(0,9 , 1,2)	(0 , 0 , 11 , 12)	(0,21 , 0,22 , 0,34 , 0,35)
5	(0,6 , 0,9)	(0 , 0 , 10,8 , 12)	(0,15 , 0,16 , 0,24 , 0,26)
6	(0,9 , 1,2)	(0 , 0 , 10 , 11)	(0,17 , 0,18 , 0,30 , 0,32)

$i \neq cas$  est alors noté  $G_{cas}^f$  et sera utilisé pour réaliser la reconnaissance de l'exemple  $cas$ . Nous testerons aussi le processus de propagation lorsque tous les cas de la base sont utilisés pour réaliser l'apprentissage. Nous notons le modèle ainsi obtenu  $G^f$ . Nous résumons ces notations dans la table suivante dans laquelle  $I_i$  représente le cas  $i$  de la base avec  $i \in [1..6]$ .

Modèle	Obtenu à partir de	Utilisé pour reconnaître
$G_i^s$	$I_i$	$I_i$
$G_i^f$	$\{I_j \mid j \neq i\}$	$I_i$
$G^f$	$\{I_j \mid j \in [1..6]\}$	$\{I_j \mid j \in [1..6]\}$

### 6.3.2 Reconnaissance

Nous utilisons alors les graphes obtenus ( $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  et  $G^f$ ) pour évaluer le processus de reconnaissance sur cette même base de cas. Nous réalisons tout d'abord la reconnaissance avec le graphe  $G_{cas}^s$  (obtenu uniquement à partir du cas à reconnaître) afin de montrer quels résultats « optimaux » peuvent être obtenus en utilisant les types de contraintes donnés dans le chapitre 2. Nous appliquons alors le processus en utilisant le graphe  $G_{cas}^f$  obtenu uniquement à partir des autres cas. Puisque la base d'apprentissage est de taille très réduite, nous appliquons aussi le processus en utilisant le graphe  $G^f$  obtenu à partir de l'ensemble des cas dont le cas à reconnaître. Nous initialisons le processus en fournissant une segmentation préliminaire du cerveau. Nous appliquons alors le processus de propagation puis nous réalisons l'extraction d'une solution.

#### Propagation

Initialement le domaine de la variable associée au cerveau est réduit à un singleton et les autres domaines valent  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$ . Nous appliquons alors l'algorithme de propagation  $P2$  en utilisant les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ . Nous montrons dans la table 6.3 pour les six cas de la figure 6.7 la taille finale des domaines résultants.

Lorsque nous utilisons le graphe spécifique  $G_{cas}^s$  pour réaliser la propagation nous obtenons dans l'ensemble des cas des domaines finals de taille assez réduite et dans aucun cas le processus n'aboutit à l'inconsistance du problème. Nous montrons dans la figure 6.9 les domaines finals obtenus pour plusieurs structures dans le premier cas de la figure 6.7. Les bornes supérieures de ces domaines sont en général très proches de la solution recherchée. Cependant les bornes inférieures obtenues le sont en général moins. Elles sont même parfois

TABLE 6.3 – Taille des domaines à la fin du processus de propagation pour les 6 coupes axiales présentées dans la figure 6.7 en utilisant les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ .

Cas	$G_{cas}^s$		$G_{cas}^f$		$G^f$	
	taille	inconsistant	taille	inconsistant	taille	inconsistant
1	221358	non	301818	non	333014	non
2	203317	non	331582	non	342650	non
3	210488	non	266251	non	337126	non
4	219578	non	319547	non	344756	non
5	209833	non	0	oui	312707	non
6	214929	non	342972	non	366959	non

nulles notamment pour les structures étroites<sup>5</sup> ce qui pose problème pour l'extraction de la solution finale.

Lorsque nous utilisons le graphe  $G_{cas}^f$  (obtenu en réalisant l'apprentissage sur tous les cas sauf celui traité) le processus n'aboutit à l'inconsistance que lors de la reconnaissance du cas 5. Même en utilisant un nombre réduit de cas pour réaliser l'apprentissage, nous obtenons donc un modèle présentant apparemment de bonnes propriétés de généralisation (notons que l'agencement des structures cérébrales est moins variable que celui des structures de l'exemple synthétique). Par ailleurs les domaines finals sont plus larges qu'en utilisant  $G_{cas}^s$  mais ils restent proches de la solution recherchée comme nous pouvons le voir dans la figure 6.10. Notons que le graphe  $G_{cas}^f$  a été obtenu à partir d'un nombre réduit de cas. Même si le processus n'aboutit pas à l'inconsistance, la solution recherchée n'appartient donc pas toujours aux domaines obtenus. Dans le cas 1 par exemple, le carrefour ventriculaire gauche  $ALVI$  s'étend presque jusqu'au plan sagittal médian alors que dans tous les autres cas il est nettement plus excentré. Le graphe  $G_1^f$  comporte donc des relations non satisfaites par la région recherchée pour  $ALVI$  et celle-ci n'appartient pas au domaine obtenu par le processus de propagation. Nous montrons ci-contre la borne supérieure de ce domaine à droite et nous pouvons la comparer à la borne obtenue lorsque nous utilisons le graphe spécifique  $G_1^s$  pour réaliser la propagation.

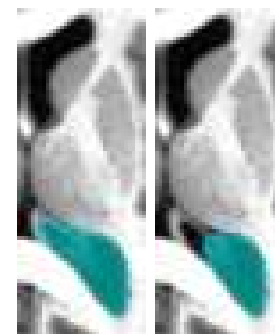


FIGURE 6.8 –  $\overline{ALVI}$  lorsque la propagation est réalisée avec  $G_{cas}^s$  (à gauche) ou  $G_{cas}^f$  (à droite).

Finalement nous utilisons le graphe  $G^f$ , obtenu à partir de l'ensemble des cas (dont le cas à reconnaître) afin d'illustrer les résultats obtenus lorsque le modèle représente correctement le cas à reconnaître tout en étant moins contraignant que le graphe spécifique de ce cas. Ainsi aucun cas n'aboutit à l'inconsistance et les domaines finals présentent une taille assez similaire à celle obtenue lorsque le modèle  $G_{cas}^f$  est utilisé.

Pour comparer les résultats obtenus nous montrons dans la figure 6.11 les domaines obtenus pour le noyau caudé gauche, le thalamus gauche, la corne frontale du ventricule latéral gauche et le putamen gauche dans les six cas de la figure 6.7 en utilisant  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$  pour réaliser la propagation.

5. Les bornes inférieures des domaines sont en général mises à jour par les contraintes de partition. Pour que le processus de propagation soit plus robuste, nous utilisons un propagateur affaibli pour ces contraintes. Celui-ci met toujours à jour la borne inférieure d'un domaine par complémentarité de la réunion des bornes supérieures des autres structures et érode le résultat obtenu.



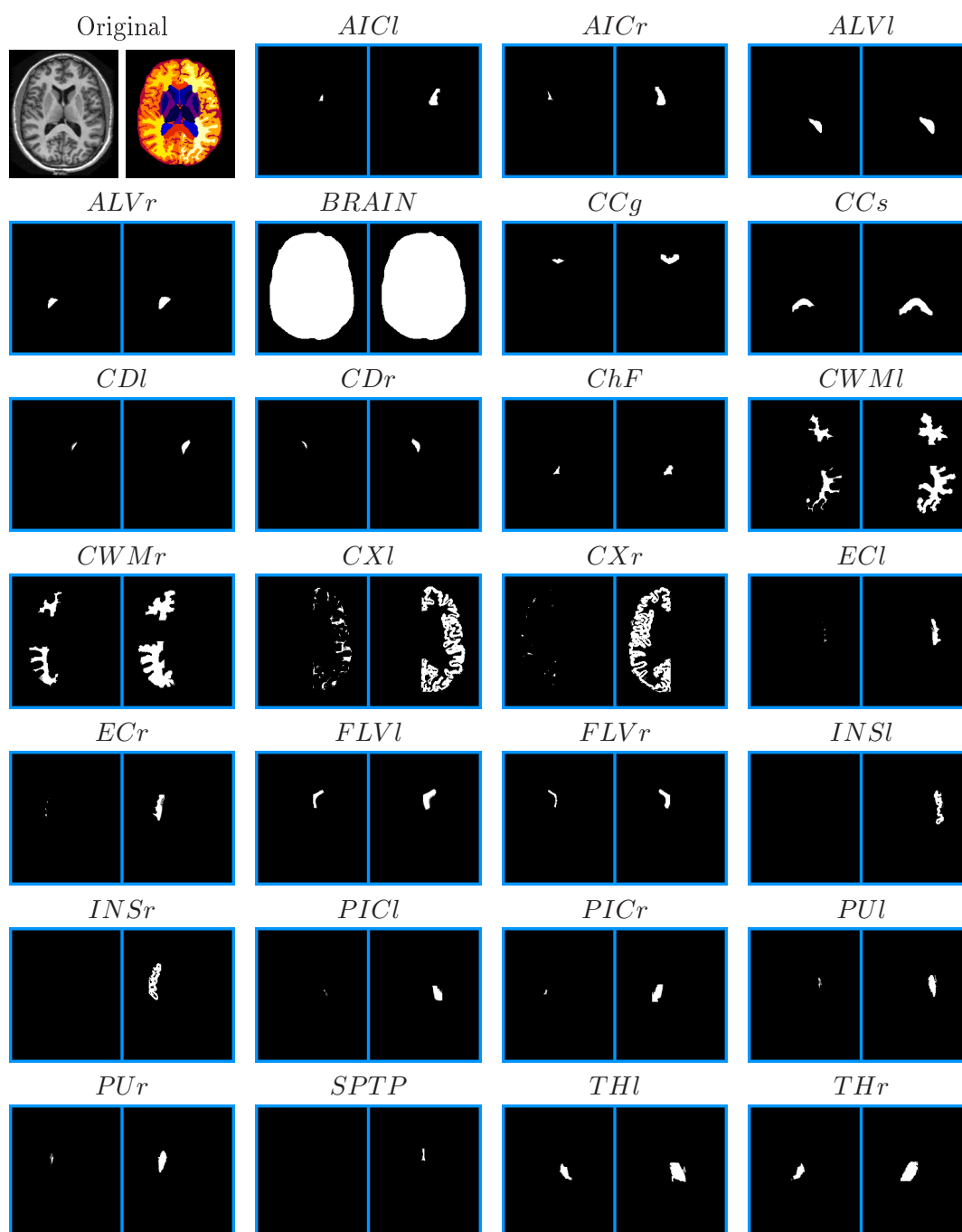


FIGURE 6.9 – Résultat du processus de propagation en utilisant le graphe  $G_1^s$  pour le premier cas de la figure 6.7. Nous montrons les domaines obtenus pour la partie antérieure des capsules internes ( $AICl$  et  $AICr$ ), les carrefours ventriculaires ( $ALVl$  et  $ALVr$ ), le cerveau ( $BRAIN$ ), le genou et le splénium du corps calleux ( $CCg$  et  $CCs$ ), la fissure choroïde ( $ChF$ ), la matière blanche cérébrale ( $CMWl$  et  $CWMr$ ), le cortex cérébral ( $CXl$  et  $CXr$ ), les capsules externes ( $ECl$  et  $ECr$ ), les cornes frontales des ventricules latéraux ( $FLVl$  et  $FLVr$ ), les lobes insulaires ( $INSl$  et  $INSr$ ), la partie postérieure les capsules internes ( $PICl$  et  $PICr$ ), les putamens ( $PUI$  et  $PUR$ ), le septum ( $SPTP$ ) et les thalamus ( $THl$  et  $THr$ ).

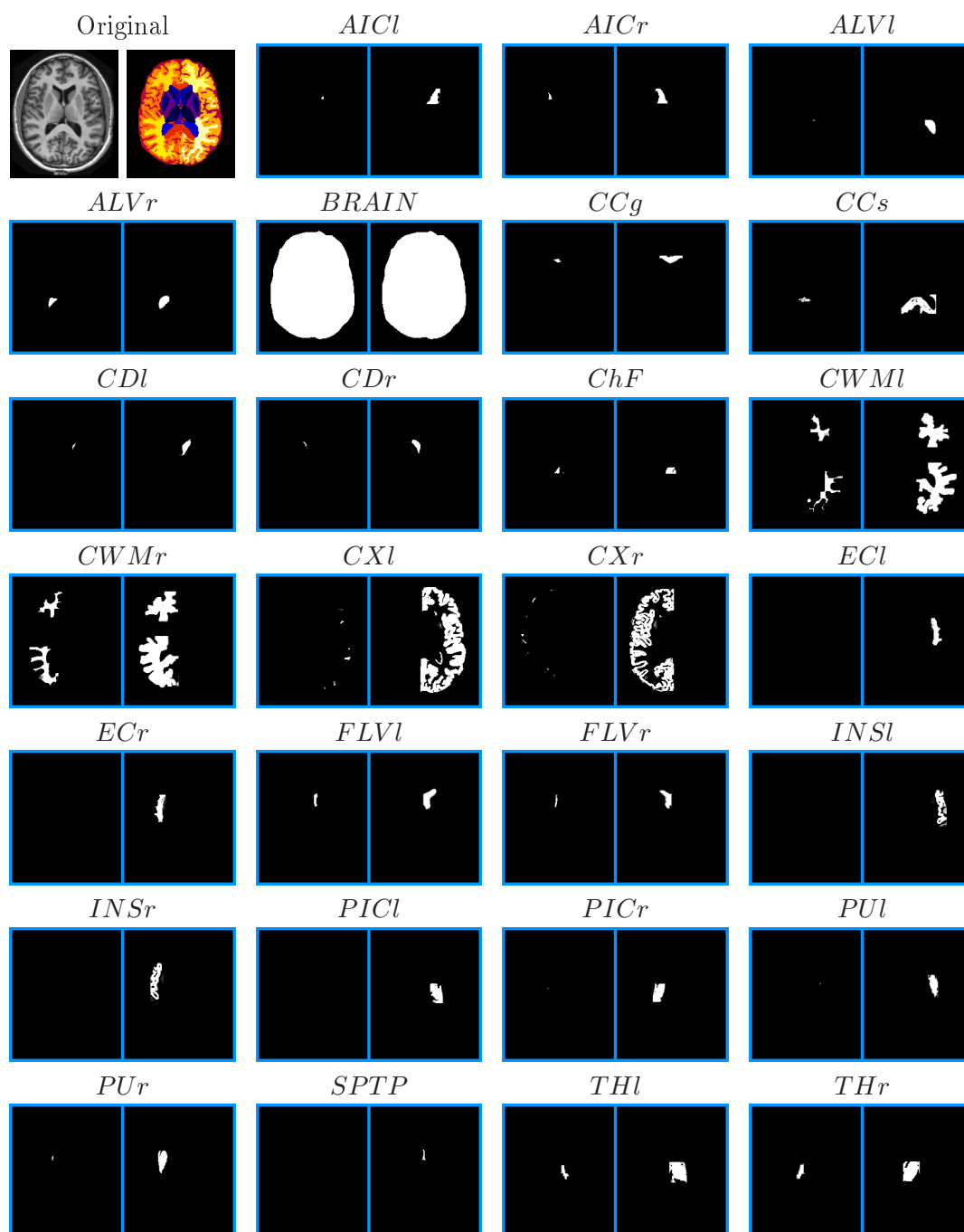


FIGURE 6.10 – Résultat du processus de propagation en utilisant le graphe  $G_1^f$  pour le premier cas de la figure 6.7. Nous montrons les domaines obtenus pour la partie antérieure des capsules internes ( $AICl$  et  $AICr$ ), les carrefours ventriculaires ( $ALVl$  et  $ALVr$ ), le cerveau ( $BRAIN$ ), le genou et le splénium du corps calleux ( $CCg$  et  $CCs$ ), la fissure choroïde ( $ChF$ ), la matière blanche cérébrale ( $CWMl$  et  $CWMr$ ), le cortex cérébral ( $CXl$  et  $CXr$ ), les capsules externes ( $ECl$  et  $ECr$ ), les cornes frontales des ventricules latéraux ( $FLVl$  et  $FLVr$ ), les lobes insulaires ( $INSl$  et  $INSr$ ), la partie postérieure des capsules internes ( $PICl$  et  $PICr$ ), les putamens ( $PUL$  et  $PULr$ ), le septum ( $SPTP$ ) et les thalamus ( $THl$  et  $THr$ ).

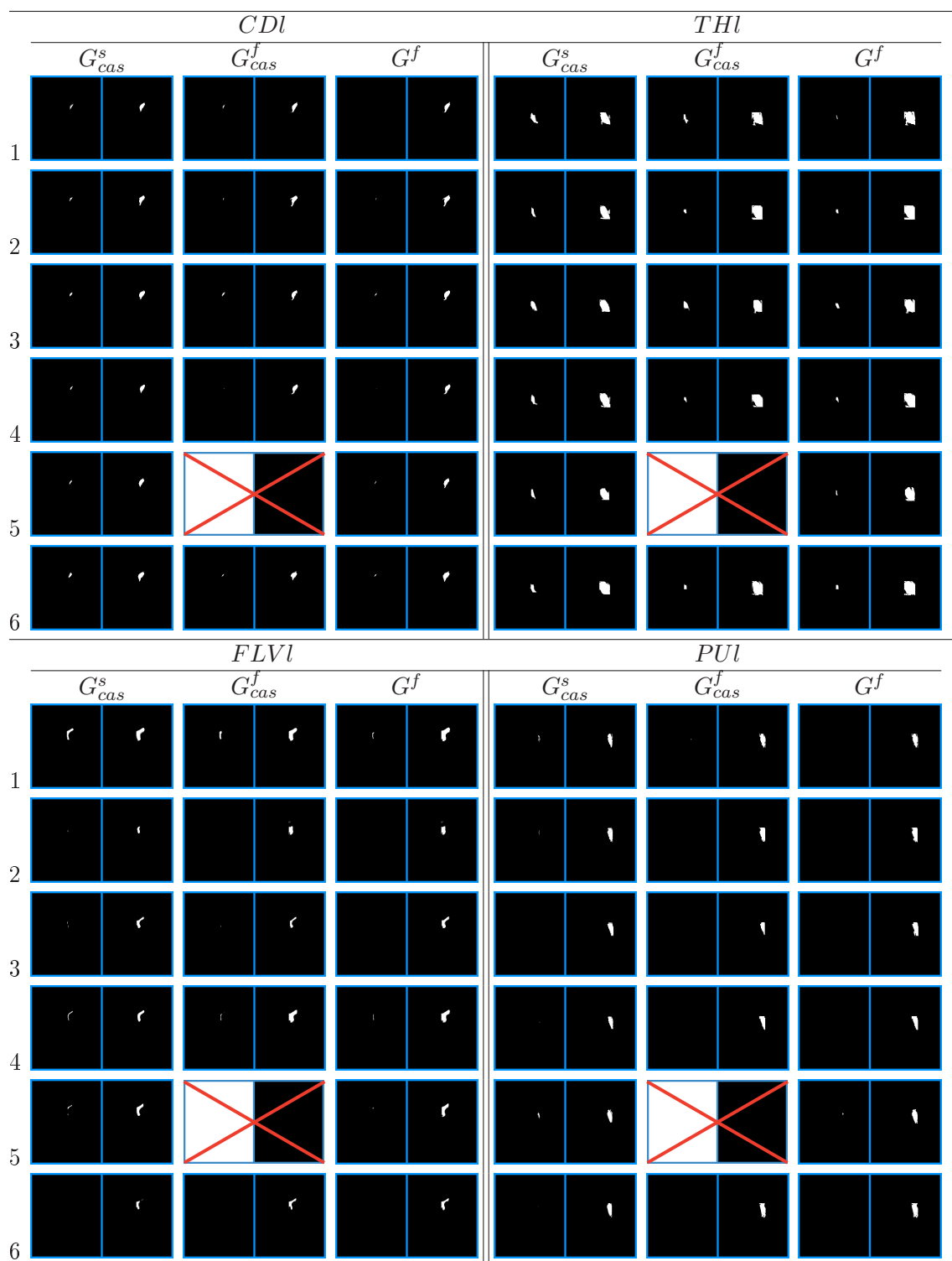


FIGURE 6.11 – Pour les 6 cas présentés dans la figure 6.7, nous présentons les domaines finals pour le noyau caudé gauche *CDI*, le thalamus gauche *THl*, la corne frontale du ventricule latéral gauche *FLVl* et le putamen gauche *PUI* par le processus de propagation en utilisant les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ .

## Segmentation finale

Nous réalisons alors l'extraction d'une solution finale par le processus décrit dans le chapitre 5. Nous montrons dans les figures 6.12 et 6.13 les résultats obtenus pour les noyaux caudés, les ventricules latéraux, les thalamus, les putamens et la figure choroïde dans tous les cas de la figure 6.7 lorsque les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$  sont utilisés pour réaliser la propagation.

Pour extraire une structure  $A$ , nous obtenons l'ensemble des structures adjacentes (à partir du modèle). La combinaison de la réunion des bornes supérieures de ces structures et de  $\bar{A}$  nous permet alors d'obtenir une surestimation de la frontière recherchée. Nous réalisons alors l'extraction d'une solution par coupure de graphe en définissant les liens aux nœuds source et terminal à partir de  $\underline{A}$  et de  $c(\bar{A})$ . Il est donc indispensable de disposer d'une borne inférieure non nulle pour réaliser cette extraction. Or comme nous l'avons illustré dans la figure 6.11 ce n'est pas le cas pour toutes les structures en raison de l'indécision persistant à la fin du processus de propagation mais aussi du fait que nous utilisons un propagateur affaibli pour la contrainte de partition (cf note 5).

Nous réalisons donc tout d'abord l'extraction d'une solution pour les structures pour lesquelles la borne inférieure du domaine présente un maximum de degré d'appartenance de 1 (afin de ne pas obtenir une région vide). Par les propagateurs affaiblis associés aux contraintes de propagation nous mettons alors à jour les bornes inférieures des autres structures et si c'est possible nous réalisons l'extraction de nouvelles structures. Nous itérons comme cela jusqu'à ce que plus aucune structure ne puisse être extraite. Nous mettons alors à jour les bornes inférieures des structures restantes en utilisant le propagateur strict pour la contrainte de partition et nous réalisons si possible l'extraction de nouvelles structures. Similairement nous itérons ce processus jusqu'à ce que plus aucune structure ne puisse être extraite.

Dans certains cas il reste une indécision importante au niveau de la frontière de certains objets. Dans ce cas de nombreuses solutions sont équivalentes compte tenu des critères considérés. En effet l'extraction est réalisée par la minimisation de la fonctionnelle :

$$E(S) = -\lambda \int_{x \in \partial S} \log(\overline{\partial \mu_A}(\partial S(x))) dx - (1 - \lambda) \left( \int_{x \in S} \log(\bar{A}(x)) dx + \int_{x \in X \setminus S} \log(c(\underline{A}(x))) dx \right).$$

Lorsque  $\overline{\partial \mu_A}$  est une surestimation large de la frontière, le minimum de  $E(S)$  peut être atteint par de nombreuses valeurs  $S$  (et vaut 0 en général). Pour différencier ces valeurs nous pouvons imposer une pénalisation minimale dans l'expression  $\int_{x \in \partial S} -\log(\overline{\partial \mu_A}(\partial S(x))) dx$ . En effet lorsque  $\overline{\partial \mu_A}$  vaut 1 en un point,  $\log(\overline{\partial \mu_A}(\partial S(s)))$  vaut 0. Dans ce cas cette fonctionnelle ne représente plus le critère de régularité. Nous ajoutons donc une pénalisation minimale  $\varepsilon$  dans cette expression :

$$E(S) = -\lambda \int_{x \in \partial S} (\log(\overline{\partial \mu_A}(\partial S(x))) + \varepsilon) dx - (1 - \lambda) \left( \int_{x \in S} \log(\bar{A}(x)) dx + \int_{x \in X \setminus S} \log(c(\underline{A}(x))) dx \right).$$

De plus entre différentes solutions cohérentes avec les domaines obtenus, nous préférons en général celles dont les contours correspondent aux contours de l'image. Nous faisons donc dépendre cette pénalisation minimale du gradient de l'image :  $\varepsilon(x) = \frac{\epsilon}{(1 + \nabla I(x))^2}$  avec  $\epsilon$  valant  $10^{-2}$  dans les exemples présentés.

Nous obtenons ainsi pour les structures internes cérébrales et les lobes insulaires les régions montrées dans les figures 6.12 et 6.13. Laissons de côté dans un premier temps les

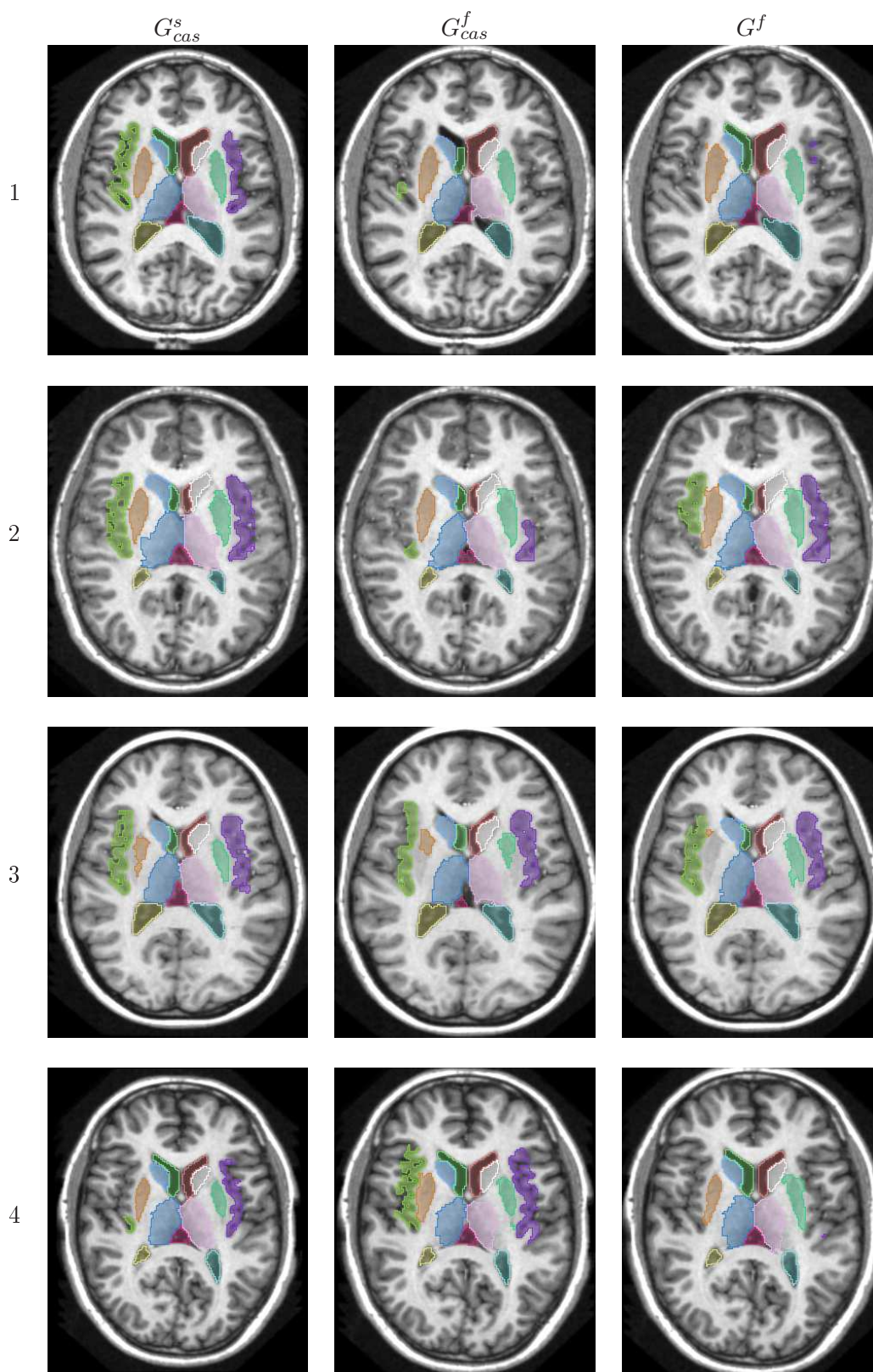


FIGURE 6.12 – Résultats de reconnaissance finals des noyaux caudés, des ventricules latéraux, des thalamus, des putamens, des lobes insulaires et de la fissure choroïde dans les cas de la figure 6.7 lorsque la propagation a été réalisée en utilisant les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ .

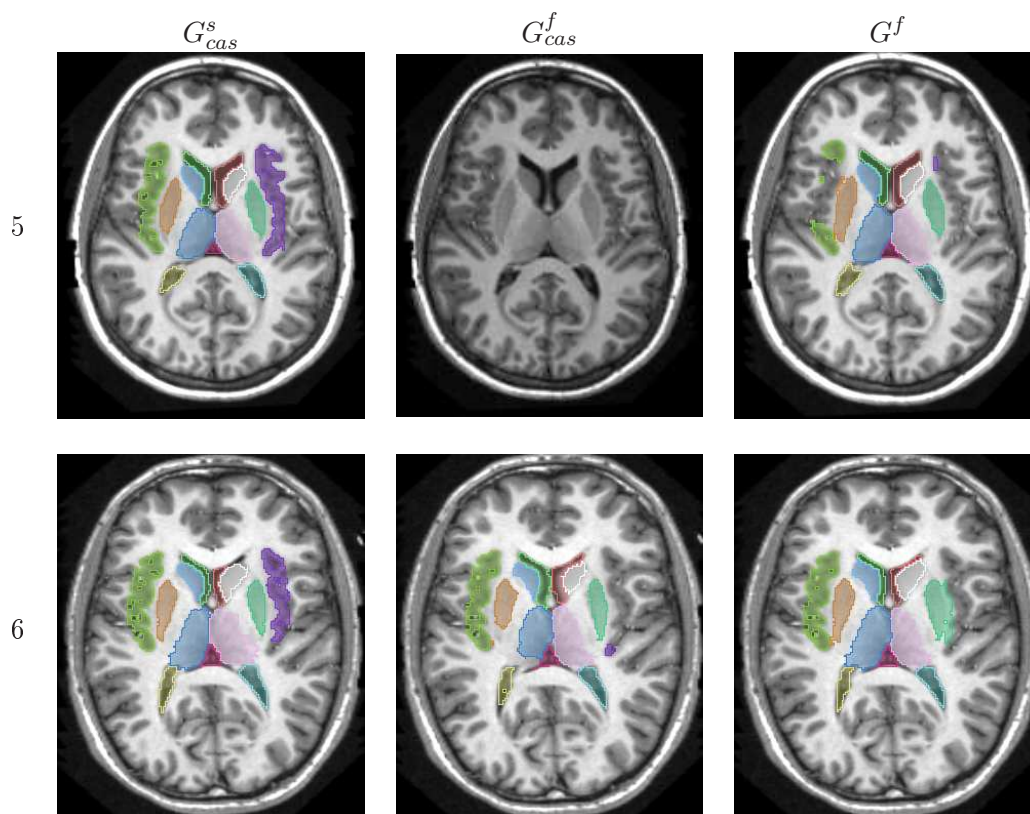


FIGURE 6.13 – Suite de la figure 6.12.

lobes insulaires. Dans la table 6.4, nous comparons les résultats obtenus pour les structures internes aux segmentations manuelles par le coefficient kappa, la distance moyenne et la distance de Hausdorff. Généralement les régions obtenues sont proches de la segmentation manuelle. Les résultats sont évidemment meilleurs lorsque nous utilisons le graphe  $G_{cas}^s$  pour réaliser la reconnaissance. Cependant les résultats de segmentation sont relativement peu dégradés lorsque nous utilisons les graphes  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ .

Par construction le modèle  $G^f$  représente correctement le cas à reconnaître. Le résultat attendu appartient donc nécessairement aux domaines obtenus par le processus de propagation. Ces domaines sont cependant sensiblement plus grands que ceux obtenus en utilisant le graphe  $G_{cas}^s$ . Les résultats sont donc dans certains cas un peu moins bons. Par exemple la région obtenue pour le putamen gauche ( $PUL$  en vert) dans le cas 6 comprend maintenant la capsule externe. Plus grave, la reconnaissance du putamen droit dans le cas 3 a complètement échoué. Ces erreurs s'expliquent par des domaines finals plus larges qui peuvent présenter une borne inférieure nulle. Par la séquence d'extraction décrite plus haut dans cette section, nous obtenons alors une borne inférieure en utilisant les segmentations obtenues pour d'autres structures. Cependant si ces segmentations présentent des erreurs, alors la mise à jour des bornes inférieures peut dans certains cas être erronée et provoquer de petites erreurs, voire un échec complet de l'extraction. C'est le cas pour le putamen droit dans le cas 3.

Lorsque nous utilisons le modèle  $G_{cas}^f$  pour réaliser la reconnaissance nous rencontrons aussi ces problèmes. De plus le modèle  $G_{cas}^f$  ne représente pas nécessairement correctement le cas à reconnaître ce qui introduit d'autres erreurs. Nous avons vu dans la section précédente que la propagation aboutit à l'inconsistance dans le cas 5 mais que dans les autres cas le résultat attendu n'appartient pas toujours aux domaines obtenus. Cela peut conduire

TABLE 6.4 – Comparaison avec les segmentations manuelles des résultats du processus reconnaissance pour les noyaux caudés ( $CDl$  et  $CDr$ ), la corne frontale des ventricules latéraux ( $FLVl$  et  $FLVr$ ), les thalamus ( $THl$  et  $THr$ ), les putamens ( $PUl$  et  $PUr$ ) dans les 6 coupes axiales présentées dans la figure 6.7 en utilisant les graphes  $G_{cas}^s$ ,  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$ .

Cas	Structure	$G_{cas}^s$			$G_{cas}^f$			$G^f$		
		kappa	$D_M$	$D_H$	kappa	$D_M$	$D_H$	kappa	$D_M$	$D_H$
1	$CDl$	0,92	0,3	2,2	0,9	0,5	2,2	0,89	0,5	2,2
	$CDr$	0,93	0,3	2,2	0,91	0,3	1	0,92	0,3	1,4
	$FLVl$	0,94	0,3	1	0,94	0,3	1,4	0,93	0,4	1,4
	$FLVr$	0,95	0,2	1	0,59	5,7	17,8	0,94	0,3	1,4
	$THl$	0,93	0,6	2,2	0,84	1,4	6,3	0,92	0,7	3,6
	$THr$	0,95	0,4	2	0,88	1	4,1	0,92	0,8	4,1
	$PUl$	0,93	0,4	1,4	0,93	0,4	1,4	0,93	0,4	1,4
	$PUr$	0,94	0,3	1,4	0,92	0,5	2,2	0,89	0,9	5
2	$CDl$	0,91	0,4	2	0,89	0,5	2,2	0,92	0,4	2,2
	$CDr$	0,95	0,2	2	0,88	0,6	3	0,95	0,2	1
	$FLVl$	0,94	0,2	1,4	0,94	0,2	1	0,92	0,3	2,2
	$FLVr$	0,94	0,2	1	0,91	0,3	1,4	0,93	0,3	1,4
	$THl$	0,91	1	5	0,92	0,8	4	0,92	0,8	4
	$THr$	0,89	1,1	5,1	0,89	1,1	3,6	0,9	0,9	3,6
	$PUl$	0,9	0,6	2,2	0,89	0,8	5	0,89	0,8	4,2
	$PUr$	0,97	0,2	1	0,94	0,3	2	0,83	1,2	4,5
3	$CDl$	0,94	0,3	2	0,91	0,4	2,2	0,94	0,3	2,2
	$CDr$	0,89	0,6	3	0,89	0,6	3	0,9	0,5	2,2
	$FLVl$	0,93	0,2	1	0,89	0,3	1,4	0,89	0,4	2
	$FLVr$	0,76	3	13	0,73	3,7	14,4	0,68	3,2	13
	$THl$	0,94	0,6	2,8	0,92	0,7	2,8	0,94	0,6	4,5
	$THr$	0,94	0,5	2	0,91	0,9	3	0,93	0,8	4,1
	$PUl$	0,89	0,6	3,2	0,64	3,3	12,3	0,85	1	4,2
	$PUr$	0,77	1,2	5,1	0,6	5,3	18,4	0,02	13,7	30
4	$CDl$	0,95	0,2	1,4	0,97	0,1	1	0,96	0,1	1
	$CDr$	0,99	0,1	1,4	0,94	0,4	3	0,94	0,2	1
	$FLVl$	0,92	0,3	1,4	0,95	0,2	1	0,92	0,4	1
	$FLVr$	0,95	0,2	1,4	0,93	0,3	2	0,96	0,2	1
	$THl$	0,95	0,5	2,2	0,86	1,6	7,2	0,87	1,5	7,3
	$THr$	0,95	0,5	2	0,9	0,9	4	0,91	0,8	4
	$PUl$	0,89	0,7	5	0,84	0,9	3,6	0,78	1,5	5
	$PUr$	0,93	0,4	3	0,81	1,2	5,4	0,89	0,6	3,2
5	$CDl$	0,97	0,1	2	x	x	x	0,96	0,2	1
	$CDr$	0,95	0,2	2,2	x	x	x	0,96	0,2	1
	$FLVl$	0,93	0,3	1	x	x	x	0,89	0,4	1
	$FLVr$	0,96	0,2	1	x	x	x	0,94	0,2	2
	$THl$	0,9	0,9	3	x	x	x	0,92	0,8	3
	$THr$	0,94	0,5	2	x	x	x	0,92	0,7	3,2
	$PUl$	0,96	0,3	2,2	x	x	x	0,94	0,3	2,2
	$PUr$	0,92	0,6	4,1	x	x	x	0,85	1,1	4,1
6	$CDl$	0,95	0,3	2,8	0,87	1	5,8	0,95	0,3	2,2
	$CDr$	0,95	0,2	2	0,95	0,2	1	0,96	0,2	1
	$FLVl$	0,83	1,8	10,2	0,75	0,8	2,8	0,9	0,3	1
	$FLVr$	0,93	0,2	2	0,78	0,8	3,2	0,9	0,3	1,4
	$THl$	0,92	0,8	2,8	0,85	1,5	4,1	0,87	1,4	4,1
	$THr$	0,9	1	2,2	0,79	2,3	7,8	0,91	0,9	3
	$PUl$	0,94	0,3	3,1	0,92	0,4	2	0,76	1,8	5,8
	$PUr$	0,95	0,3	1,4	0,83	1	4,5	0,89	0,7	4,2

à des erreurs relativement importantes. C'est le cas par exemple pour le carrefour ventriculaire droit (*ALVr* en cyan) dans le cas 1. En effet la borne supérieure de son domaine (montrée dans la figure 6.8) ne contient pas toute la structure recherchée, ce qui explique le résultat obtenu.

Nous avons aussi montré dans les figures 6.12 et 6.13 les régions obtenues pour les lobes insulaires. Dans ce cas les résultats sont nettement moins bons. Lorsque nous utilisons le graphe spécifique  $G_{cas}^s$  pour réaliser la reconnaissance, nous parvenons dans la plupart des cas à extraire une solution convenable. Seul le cas 4 a échoué. Cependant lorsque nous utilisons les modèles  $G_{cas}^f$  ou  $G^f$  le processus échoue dans approximativement la moitié des cas. Deux facteurs expliquent ces mauvais résultats. Tout d'abord le processus d'extraction par surface minimale n'est pas adapté à l'extraction de régions filiformes. Deuxièmement notre modèle n'intègre pas de représentation fine de la région corticale (les principaux sillons devraient notamment faire partie de cette représentation) et de contraintes prenant en compte les spécificités de ces structures.

### 6.3.3 Application du processus en 3D

Nous illustrons maintenant le processus proposé pour la reconnaissance de structures dans le volume IRM complet. Dans ce cas, le modèle comprend l'ensemble des structures identifiées dans la figure 1.4.1 de la section 1.10 mais nous ne disposons pas de base dans laquelle l'ensemble de ces structures a été correctement annoté<sup>6</sup>. Nous ne disposons que d'un cas segmenté manuellement. Nous réalisons donc l'apprentissage uniquement sur ce cas et nous appliquons le processus de propagation sur ce même cas afin d'illustrer l'application en 3D et notamment d'aborder la question du temps de calcul.

#### Mise en œuvre

Le processus de propagation conduit au calcul d'un grand nombre de propagateurs (de l'ordre de 40000 lors de la reconnaissance d'une coupe axiale). Le temps de calcul reste raisonnable en 2D (quelques heures sans efforts d'optimisation particuliers) mais il devient excessif en 3D. En effet la complexité de nombreux propagateurs n'augmente pas linéairement en fonction du nombre de voxels mais dépend aussi de la dimension des données traitées. Prenons par exemple le propagateur associé à une contrainte de direction. Sa complexité est en  $O(r^{d-1}sN)$  (cf section 4.2.3) où  $r$  est le rayon du noyau élémentaire utilisé,  $d$  est la dimension de l'espace de l'image,  $N$  est le nombre de voxels et  $s$  est la taille maximale de l'image (selon un des axes). Si le volume 3D comporte  $k$  coupes ( $k$  est supérieur à 100 en général) le coût de calcul de ce propagateur est au moins  $rk$  fois plus élevé que lors du traitement d'une coupe unique. Nous devons donc optimiser le calcul des propagateurs afin de limiter le coût de calcul global du processus de propagation.

De nombreux propagateurs présentent un niveau de granularité élevé. Les contraintes de direction ou de distance par exemple fournissent une localisation très approximative d'une structure relativement à une autre (cf figure 2.8 par exemple). Nous pouvons donc calculer ces contraintes sur une grille sous-résolue. Pour cela nous devons simplement nous assurer que l'approximation obtenue soit correcte, c'est-à-dire que le propagateur modifié

---

6. La base IBSR comporte une annotation manuelle de plusieurs structures dans 18 cas. Cependant ces annotations sont entachées de nombreuses erreurs. Or le processus d'apprentissage est très sensible à la présence de points aberrants. Nous ne pouvons donc pas l'utiliser en l'état. De plus les données originales de cette base sont de qualité moyenne en particulier à cause du lissage induit par le recalage. Les IRM mises à disposition dans la base OASIS sont de meilleure qualité. Cependant aucune annotation manuelle de ces données n'a été réalisée.



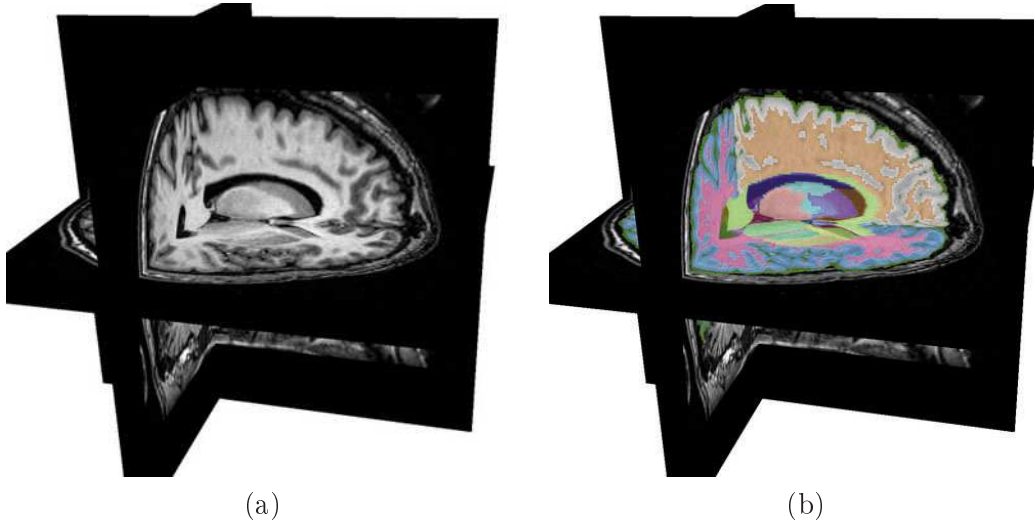


FIGURE 6.14 – (a) Vue 3d d’une IRM cérébrale. (b) Annotation manuelle associée.

préserve toujours les solutions. Si nous notons respectivement  $(\underline{B}, \overline{B})$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ , un domaine pour  $B$ , ce domaine après l’application du propagateur et après l’application du propagateur modifié, nous devons avoir  $(\underline{B}', \overline{B}') \leq (\underline{B}'', \overline{B}'') \leq (\underline{B}, \overline{B})$ . Nous pouvons obtenir un tel propagateur en tirant parti des propriétés de monotonie. Par exemple le propagateur associé à une contrainte directionnelle entre  $A$  et  $B$  met à jour la borne supérieure de  $B$  suivant :  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})$ , où la dilatation  $\delta_\nu$  est croissante par rapport à  $\overline{A}$  et  $\nu$ . Nous notons  $\overline{A}_l^{\max}$  la borne supérieure de  $A$  à une résolution  $l$  fois inférieure à la résolution originale dans laquelle le degré d’appartenance en chaque voxel est le maximum des degrés d’appartenance des voxels de  $\overline{A}$ . De même nous notons  $\nu_l^{\max}$  l’élément structurant  $\nu$  sous-résolu. Nous avons alors  $\delta_\nu(\overline{A}) \leq \delta_{\nu_l^{\max}}(\overline{A}_l^{\max})$  (en échantillonnant  $\delta_{\nu_l^{\max}}(\overline{A}_l^{\max})$  à la résolution originale). Nous pouvons donc utiliser un propagateur modifié mettant à jour la borne supérieure de  $B$  suivant :  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge \delta_{\nu_l^{\max}}(\overline{A}_l^{\max})$ . Celui-ci présente un coût  $l^{d+1}$  fois moindre que le propagateur original. Le niveau de sous-résolution  $l$  est alors un compromis entre la précision désirée et le coût de calcul. Nous ajustons dynamiquement ce paramètre en fonction de la taille de la région sur laquelle nous calculons la dilatation (celle-ci n’est en général pas calculée sur toute l’image mais uniquement sur la boîte englobante des supports de  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$ ).

Nous modifions de cette façon les propagateurs les plus coûteux. Puisque les versions sous-résolues d’un domaine sont utilisées à de nombreuses reprises nous les calculons systématiquement. Ainsi pour chaque borne d’un domaine  $A$  nous calculons deux pyramides d’images sous-résolues :  $\overline{A}_l^{\max}$ ,  $\overline{A}_l^{\min}$  et  $\underline{A}_l^{\max}$ ,  $\underline{A}_l^{\min}$  dans lesquelles les voxels valent respectivement le maximum et le minimum des degrés d’appartenance de tous les voxels de  $\overline{A}$  ou  $\underline{A}$ . De cette façon nous pouvons limiter simplement le temps de calcul des propagateurs les plus coûteux pour un coût additionnel (le calcul des pyramides) raisonnable.

### Illustration du processus de reconnaissance

**Apprentissage** Dans la figure 6.14 (a), nous présentons une IRM cérébrale d’un sujet sain dans laquelle nous avons annoté manuellement l’ensemble des structures de la figure 1.10. Nous montrons en (b) cette segmentation manuelle. Nous obtenons alors la représentation spécifique de ce cas. Cette extraction est coûteuse puisqu’elle implique le calcul de nombreuses relations et notamment le calcul, sur tout le volume, de  $6|\chi|$  dilata-

tions associées aux contraintes directionnelles. Pour limiter le temps de l'extraction, nous pouvons calculer les opérateurs les plus coûteux à des niveaux de résolution plus faibles comme nous l'avons décrit ci-dessus. Le calcul de la dilatation associée à une contrainte directionnelle de  $A$  vers  $B$  est ainsi réalisé en sous-échantillonnant  $\mu_A$  et  $\mu_B$  (respectivement par un minimum et un maximum des degrés d'appartenance). De cette façon l'obtention de la représentation spécifique du cas présenté dans la figure 6.14 est réalisée en environ 14 heures sur un Intel Core2 cadencé à 2,66 GHz.

**Reconnaissance** Nous utilisons alors la représentation spécifique obtenue pour réaliser la reconnaissance de ce même cas, faute de disposer d'un modèle appris sur une base de cas annotés. Nous initialisons le processus en utilisant une segmentation du cerveau. Nous appliquons alors le processus de propagation qui converge en environ 37 heures toujours sur un Intel Core2 cadencé à 2,66 GHz. Nous montrons dans les figures 6.15 et 6.16 les bornes des domaines obtenus pour le noyau caudé droit, le ventricule latéral droit, le thalamus droit et le putamen droit.

Nous réalisons alors l'extraction d'un résultat final par le processus décrit dans le chapitre 5. Nous montrons dans les figures 6.17 et 6.18 les résultats obtenus pour les noyaux caudés, les ventricules latéraux, les thalamus et les putamens. Nous les comparons aux segmentations manuelles dans la table 6.5. Ces résultats sont comparables à ceux obtenus dans le cas 2D. Ils restent meilleurs pour les noyaux caudés et les ventricules latéraux que pour les thalamus et les putamens. En effet ces derniers présentent un contraste plus faible avec les structures voisines ce qui est source d'ambiguïtés, mais même dans ce cas la distance moyenne reste de l'ordre de la taille d'un voxel. Notons aussi que la distance de Hausdorff des résultats obtenus pour les noyaux caudés est élevée bien que le coefficient Kappa et la distance moyenne soient bons. L'extraction du résultat par surface minimale n'est en effet pas adapté à l'extraction de structures fines comme la queue du noyau caudé.

La reconnaissance est ici réalisée en utilisant la représentation spécifique du cas à reconnaître. En utilisant un modèle appris sur une base annotée ne comprenant pas ce cas, les résultats devraient être dégradés. En effet un modèle est moins contraignant que la représentation spécifique. Toutefois les exemples présentés dans ce chapitre et notamment l'illustration réalisée sur les coupes axiales laissent penser que cette dégradation devrait être modérée.

TABLE 6.5 – Comparaison avec les segmentations manuelles des résultats du processus reconnaissance pour les noyaux caudés ( $CDl$  et  $CDr$ ), les ventricules latéraux ( $LVI$  et  $LVr$ ), les thalamus ( $THl$  et  $THr$ ), les putamens ( $PUL$  et  $PUr$ ) dans l'IRM présentée dans la figure 6.7.

	kappa	$D_M$ (mm)	$D_H$ (mm)
$CDl$	0,87	0,6	8,3
$CDr$	0,87	0,8	16,3
$LVI$	0,9	0,4	3,2
$LVr$	0,88	0,4	4,1
$THl$	0,77	1,2	6,3
$THr$	0,76	1,4	7,1
$PUL$	0,87	0,6	3,6
$PUr$	0,82	0,9	6,7

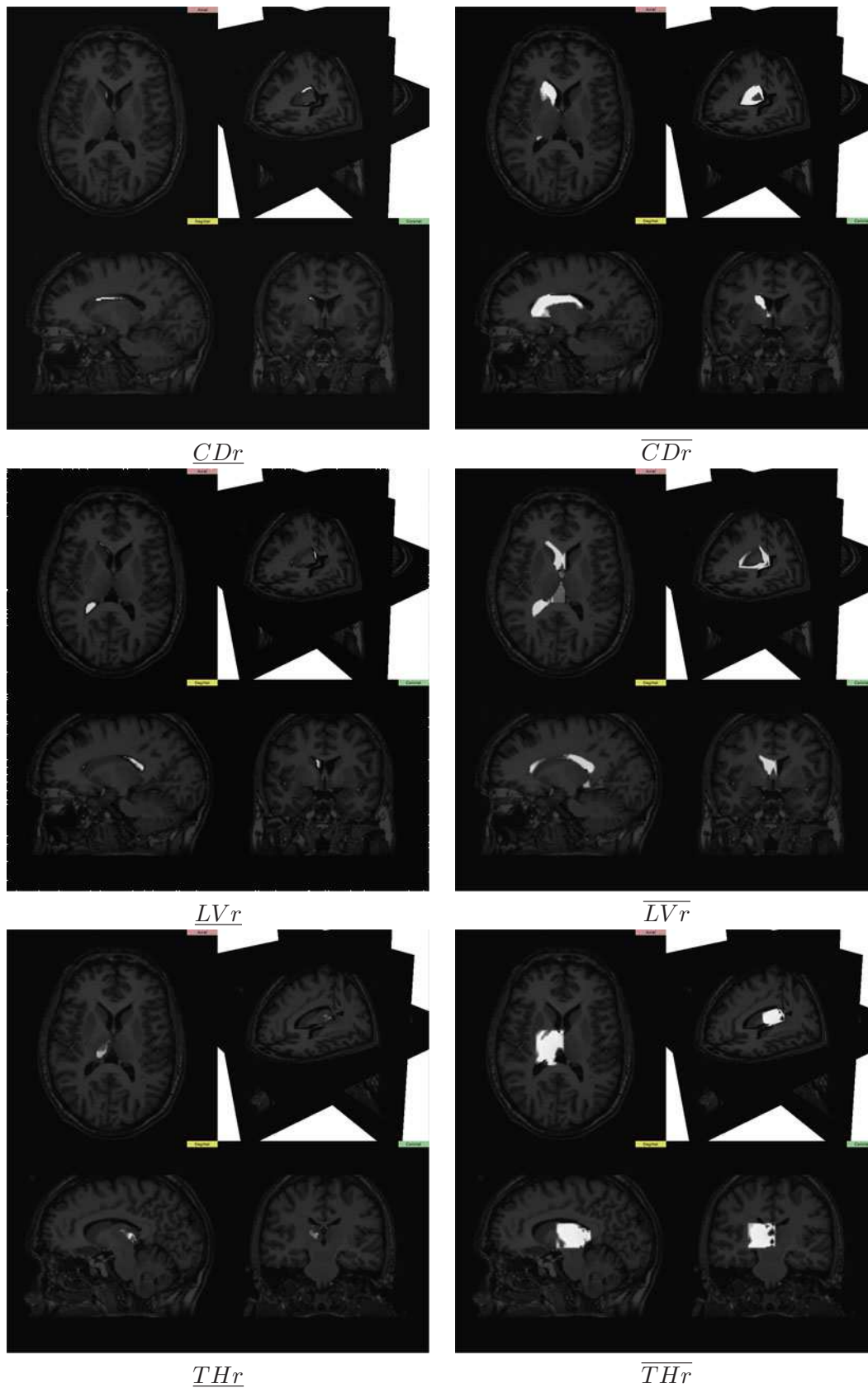


FIGURE 6.15 – Bornes des domaines obtenus par le processus de propagation pour les noyaux caudés, les putamens, les ventricules latéraux et les thalamus.

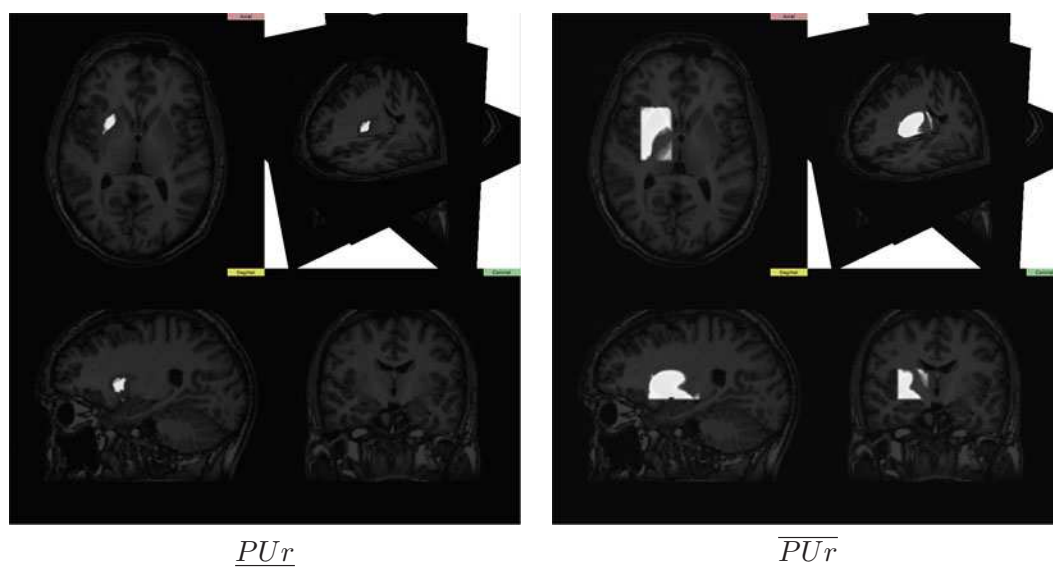


FIGURE 6.16 – Suite de la figure 6.15.

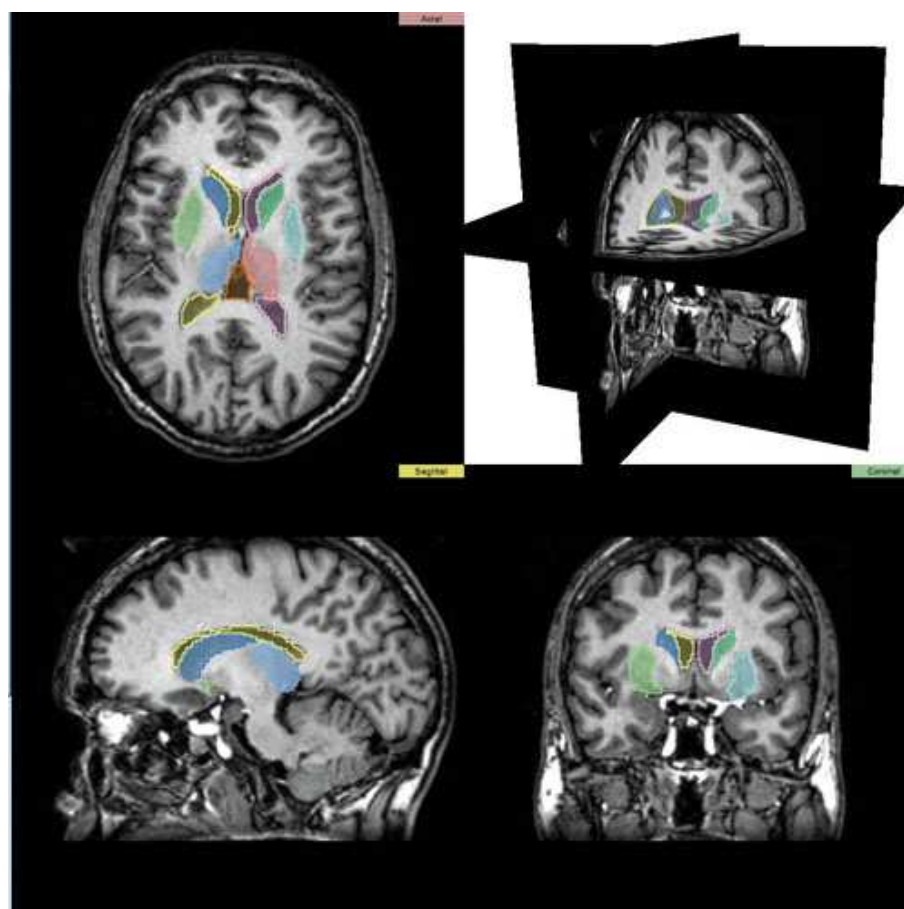


FIGURE 6.17 – Vues axiale, sagittale et coronale des résultats de reconnaissance pour les noyaux caudés, les putamens, les ventricules latéraux et les thalamus.

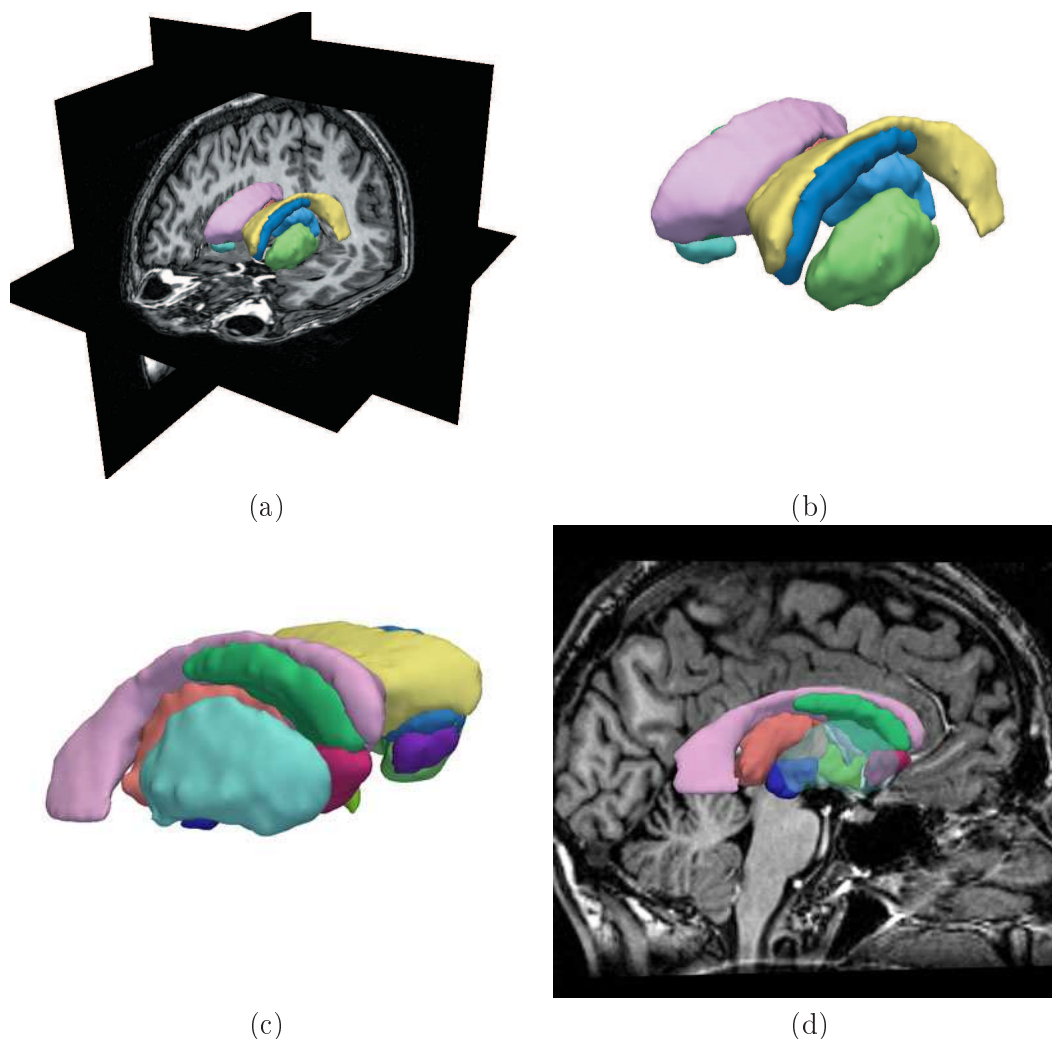


FIGURE 6.18 – Reconstructions 3D des résultats de reconnaissance pour les noyaux caudés, les putamens, les ventricules latéraux et les thalamus. Nous présentons en plus en (c) et (d) les résultats de segmentation du troisième ventricule, des noyaux accumbens et des sous-thalamus.

### Autres illustrations

Nous avons par ailleurs construit un modèle manuellement à partir de descriptions anatomiques [Waxman, 2000, Colliot, 2003, Hasboun, 2005]. Celui-ci comprend un nombre beaucoup plus réduit de relations. Nous utilisons alors ce modèle pour réaliser la reconnaissance des noyaux caudés (sans utiliser l'algorithme de propagation car le modèle comporte trop peu de relations).

Comme dans [Colliot et al., 2006], nous procédons à l'extraction des structures séquentiellement. Ainsi lorsque nous voulons extraire les noyaux caudés nous supposons que les ventricules latéraux et le cerveau ont été préalablement extraits. Nous appliquons alors l'ensemble des propagateurs impliquant ces deux structures (nous n'utilisons ici que les relations par rapport aux structures segmentées). Nous obtenons ainsi une réduction importante des domaines des noyaux caudés puisque les relations relativement au ventricule latéral sont très discriminantes. Dans la figure 6.19, nous montrons sur une coupe coronale les bornes supérieures obtenues pour le noyau caudé droit (b), le noyau accumbens droit (c)

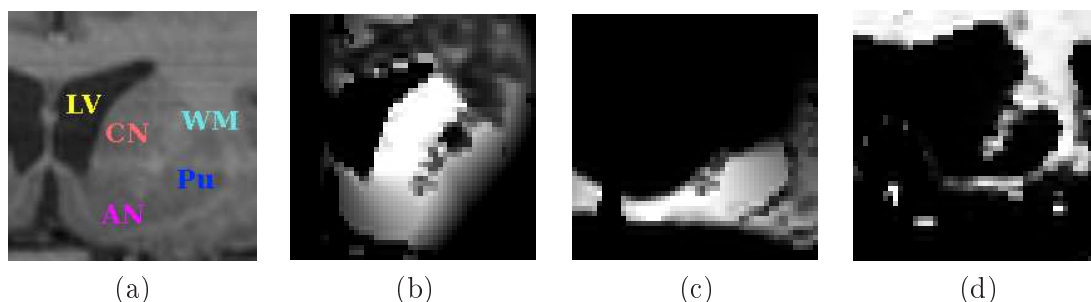


FIGURE 6.19 – (a) Coupe coronale d’une IRM. Bornes supérieures pour le noyau caudé (b), le noyau accumbens (c) et la matière blanche cérébrale (c) obtenues à partir des segmentations préliminaires du cerveau et des ventricules latéraux.

et la matière blanche (d). Notons notamment que même si les noyaux caudés et accumbens ne sont pas contrastés, les relations spatiales permettent de différencier ces structures. Nous appliquons alors le processus de segmentation décrit dans le chapitre 5.

Nous appliquons tout d’abord ce processus sur la base IBSR et nous comparons dans la table 6.6 les résultats obtenus avec une segmentation manuelle. Nous obtenons un kappa moyen de 0,81, une distance moyenne entre les surfaces de 0,64 et une distance de Hausdorff moyenne de 5,5. Ces résultats peuvent par exemple être comparés à ceux reportés dans [Ciofalo and Barillot, 2005] pour la même base de données (les auteurs reportent un

TABLE 6.6 – Evaluation de la segmentation des noyaux caudés sur la base IBSR (par un processus séquentiel figé).

Cas	Kappa		Moyenne (mm)		Hausdorff (mm)	
	gauche	droit	gauche	droit	gauche	droit
1	0,86	0,82	0,68	0,63	6,78	5,74
2	0,81	0,85	0,62	0,43	4,90	3,46
3	0,80	0,74	0,75	0,81	9,89	4,24
4	0,78	0,78	0,77	0,67	5,48	5,48
5	0,85	0,85	0,47	0,47	3,00	3,16
6	0,83	0,78	0,63	0,96	5,10	7,07
7	0,81	0,79	0,50	0,52	4,58	3,61
8	0,74	0,74	0,77	0,65	8,54	8,54
9	0,82	0,83	0,57	0,52	5,39	6,56
10	0,82	0,82	0,66	0,57	5,83	5,10
11	0,78	0,86	0,61	0,42	5,74	3,46
12	0,83	0,84	0,59	0,52	4,90	4,12
13	0,82	0,84	0,78	0,59	9,43	5,48
14	0,84	0,85	0,50	0,54	3,74	3,74
15	0,85	0,85	0,43	0,57	3,00	6,16
16	0,83	0,84	0,57	0,69	3,74	5,66
17	0,83	0,86	0,77	0,59	6,40	5,74
18	0,75	0,75	0,99	1,23	5,48	8,60
Moyenne	0,81		0,64		5,50	

kappa moyen de 0,65 et une distance moyenne de 1,71 mm), ou dans [Pitiot et al., 2004] et [Colliot et al., 2006] pour d'autres bases de données (les auteurs reportent respectivement des distances moyennes de 1,60 mm et 1 mm et un coefficient kappa moyen de 0,87 dans [Colliot et al., 2006]). Notons que la distance moyenne des résultats obtenus est inférieure à la taille du voxel (généralement  $1 \times 1 \times 1,5 \text{ mm}^3$ ) et que le coefficient kappa vaut plus de 0,7 ce qui indique une forte correspondance entre les segmentations [Zijdenbos et al., 1994]. La distance de Hausdorff qui correspond au pire point est beaucoup plus variable. Cela est notamment dû à la délimitation imprécise entre le noyau caudé et le noyau accumbens, conduisant à une coupe arbitraire dans la segmentation manuelle comme dans la segmentation automatique. D'autre part l'extraction d'une surface minimale n'est pas appropriée pour les structures fines et donc pour la queue du noyau caudé (ainsi que pour l'extrémité du corps).

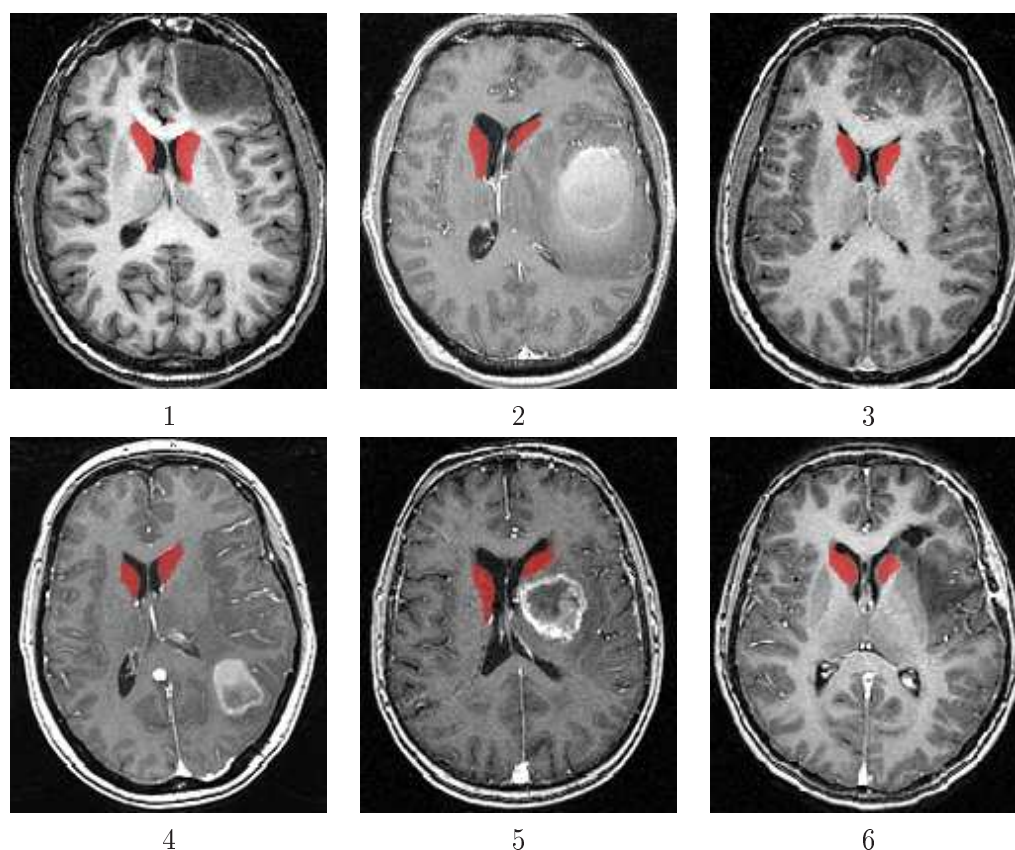


FIGURE 6.20 – Coupes axiales de 6 cas pathologiques. Nous montrons en rouge les résultats de segmentation des noyaux caudés (obtenus par un processus séquentiel).

Nous appliquons ensuite ce processus à 6 examens IRM de cas pathologiques dont nous présentons dans la figure 6.20 une coupe axiale. Nous évaluons les résultats obtenus dans la table 6.7. Parmi les 12 segmentations, 11 présentent une précision similaire à celle obtenue dans les cas normaux. Dans le cas 5 cependant la tumeur est proche du noyau caudé et affecte la segmentation. Le modèle ne correspond plus dans ce cas au problème posé ce qui conduit à de mauvais résultats. Dans les autres cas le processus n'a pas été affecté puisque nous ne nous intéressons qu'au noyau caudé mais la reconnaissance d'un plus grand nombre de structures (et notamment l'application du processus de propagation) aurait probablement échoué. Nous proposons donc dans la section suivante une adaptation du processus pour prendre en compte explicitement la présence de tumeurs cérébrales.

TABLE 6.7 – Evaluation de la segmentation des noyaux caudés dans des cas pathologiques (par un processus séquentiel).

Cas	Kappa		Moyenne (mm)		Hausdorff (mm)	
	gauche	droit	gauche	droit	gauche	droit
1	0,84	0,83	0,67	0,55	10,95	5,83
2	0,78	0,85	0,77	0,55	8,06	6,32
3	0,80	0,82	0,69	0,55	6,78	5,00
4	0,75	0,75	0,67	0,72	5,20	9,00
5	0,72	0,82	1,58	0,70	19,41	9,11
6	0,82	0,85	0,66	0,93	6,17	7,68
Moyenne	0,80		0,75		8,29	

## 6.4 Traitement de données pathologiques

Des pathologies telles que les tumeurs peuvent induire des modifications importantes de l'anatomie. Les tumeurs cérébrales peuvent ainsi refouler ou infiltrer des structures anatomiques, causer un œdème ou une nécrose... Un modèle générique de l'anatomie ne permet donc pas de représenter correctement l'anatomie de patients porteurs de telles pathologies. De plus comme nous l'avons illustré dans la figure 1.3 la position et la forme de ces tumeurs sont extrêmement variables. Il semble donc difficile d'obtenir un modèle spécifique au groupe de patients présentant une tumeur cérébrale. Nous devons donc obtenir un modèle adapté au patient à traiter que nous appelons représentation spécifique à un patient. Cette représentation spécifique présente en général de nombreuses concordances avec le modèle générique, notamment pour les structures éloignées de la tumeur. Il est donc envisageable de l'obtenir par une adaptation du modèle générique.

Nous nous restreignons ici à des cas présentant des tumeurs n'induisant pas d'effet de masse (c'est-à-dire de refoulement) important tels que les cas 1, 3 et 6 de la figure 6.20. La tumeur est donc supposée uniquement infiltrer ou détruire certaines structures anatomiques normales. Une représentation spécifique de l'anatomie de ce patient comprendra donc l'ensemble des structures anatomiques normales ainsi que la tumeur et des liens avec les structures infiltrées ou détruites.

Dans la figure 6.21 nous comparons la représentation obtenue pour un patient présentant une tumeur à la représentation par le modèle générique d'un sujet sain. En (a) plusieurs structures anatomiques du sujet sain ont été reconnues dans l'IRM. Les différentes régions de l'image sont en lien avec les structures anatomiques du modèle générique (les liens en noir représentent les relations du modèle). En (b) cette reconnaissance a aussi été réalisée manuellement chez le patient présentant une tumeur cérébrale. Les régions de l'IRM ne sont plus cette fois associées au modèle générique mais à une représentation spécifique à ce patient dans lequel sont représentés la tumeur et ses liens avec l'anatomie tel que le lien rouge dans la figure qui correspond à la relation « la tumeur affecte le lobe frontal ».

Cette représentation spécifique peut être obtenue à partir du modèle standard en y insérant un nœud représentant la tumeur et en liant ce nœud à toutes les structures anatomiques que la tumeur a infiltrées ou détruites. Nous nommons ce type de relation « affecte ». Par ailleurs toutes les relations du modèle générique ne sont plus nécessairement vérifiées. Une relation avec une structure détruite par la tumeur n'a notamment plus lieu d'être.

Nous faisons donc l'hypothèse que nous pouvons obtenir à partir du modèle générique



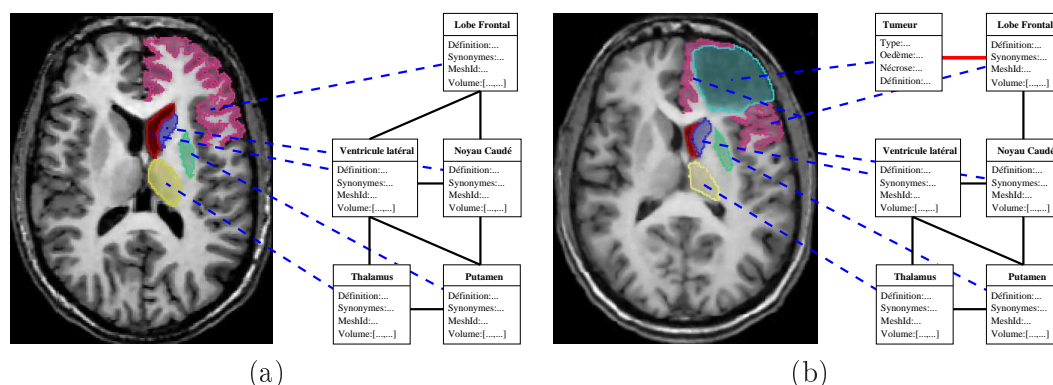


FIGURE 6.21 – (a) Coupe axiale d’une IRM d’un sujet sain. Plusieurs structures ont été reconnues et sont associées avec le modèle générique. (b) Patient présentant une tumeur. Le modèle utilisé pour représenter son anatomie est spécifique.

la représentation spécifique des cas à traiter si nous savons quelles structures sont infiltrées ou détruites. Idéalement nous devons donc disposer pour l’ensemble des structures anatomiques de la région associée dans l’IRM. Cependant pour réaliser cette reconnaissance automatiquement nous avons besoin de la représentation spécifique...

Nous réalisons donc ces deux tâches simultanément. Pour cela nous intégrons dans le processus de propagation de contraintes la représentation spécifique au patient comme inconnue supplémentaire. Compte tenu des hypothèses réalisées, celle-ci est simplement caractérisé par l’ensemble des structures anatomiques affectées par la tumeur. La propagation de contraintes doit donc à la fois :

- réduire les domaines associés aux structures anatomiques,
- réduire l’ensemble des modèles spécifiques possibles en déduisant quelles structures sont affectées par la tumeur.

Pour simplifier ce problème nous supposons que la zone pathologique (la tumeur et l’oedème) a été préalablement extraite par un traitement spécifique. Pour cela nous nous appuyons sur les travaux réalisés dans [Khotanlou et al., 2007b, Khotanlou, 2008] dans lesquels l’extraction repose sur la symétrie du cerveau. La dissimilarité des histogrammes associés aux deux hémisphères cérébraux permet de guider un algorithme de classification. Le résultat obtenu est alors affiné par l’utilisation d’un modèle déformable.

### 6.4.1 Adaptation du processus de propagation

Nous traitons donc simultanément les deux problèmes que sont la reconnaissance des structures anatomiques et l’obtention de la représentation spécifique au patient. Nous les représentons par un réseau de contraintes unique. Les variables de ce réseau sont les structures anatomiques normales du modèle et la tumeur. Les domaines de ces variables sont toujours des sous-ensembles de  $\mathcal{F}$  et sont initialisés comme précédemment, i.e.  $(0_{\mathcal{F}}, 1_{\mathcal{F}})$  pour les structures inconnues et  $(\mu, \mu)$  pour les structures pour lesquelles une segmentation (représentée par un ensemble flou  $\mu$ ) est fournie. Le domaine associé à la tumeur est notamment initialement réduit à un singleton. La représentation du second problème (l’obtention de la représentation spécifique) est réalisée par l’introduction de nouvelles contraintes et par l’adaptation des contraintes du réseau au cours du processus de propagation comme nous allons le décrire dans cette section.

## Nouvelles contraintes

L'obtention de la représentation spécifique au patient consiste (en raison des hypothèses réalisées) à estimer quelles structures anatomiques ont été affectées par la tumeur. Le graphe est alors mis à jour en insérant la tumeur et ses relations avec les structures affectées et en supprimant les relations qui ne sont plus valides.

Nous représentons par deux contraintes complémentaires le fait que la tumeur n'affecte ou n'affecte pas une structure  $A$ . Nous notons respectivement ces contraintes  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  et  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ . La première est satisfaite pour deux valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  appartenant respectivement aux domaines de la tumeur et de  $A$  si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont connexes. La contrainte  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  est satisfaite pour deux valeurs  $\mu_1$  et  $\mu_2$  si  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  n'est pas satisfaite pour ces valeurs. Contrairement aux autres contraintes discutées, nous n'utilisons pas  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  et  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  pour réaliser des réductions de domaines pendant le processus de propagation. Au contraire, comme nous le décrirons dans la suite de cette section, nous utilisons les domaines des structures pour déterminer si une de ces contraintes est nécessairement satisfaite et l'autre nécessairement invalide. Dans ce cas nous dirons simplement que la contrainte est satisfaite ou invalide. Par exemple lorsque la contrainte  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  est satisfaite par toutes lesinstanciations valides (i.e. toutes les valeurs des domaines de  $A$  et de la tumeur vérifient la contrainte), elle est satisfaite ce qui implique que  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  est invalide. Ainsi si pendant le processus de propagation nous pouvons déterminer que  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  ou  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  est satisfaite nous aurons répondu à la question posée puisque nous saurons alors que la solution recherchée vérifie cette contrainte et que celle-ci appartient à la représentation spécifique.

Initialement aucune structure n'a été reconnue en dehors de la tumeur et du cerveau. Nous ne savons donc pas si la structure  $A$  est affectée par la tumeur et donc si  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  ou  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  sont satisfaites. Nous laissons dans ce cas les deux hypothèses ouvertes et nous définissons entre la tumeur et  $A$  une contrainte toujours satisfaite comme la disjonction :  $C_{Tumeur,A}^{affecte} \vee C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ . Notons que dans ce cas ni  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  ni  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  ne sont en général satisfaites, puisque les deux contraintes peuvent être vérifiées par des valeurs différentes des domaines.

Par exemple dans la figure 6.22 nous n'avons pas encore reconnu les structures dans l'IRM du patient. Initialement nous lions donc la tumeur avec toutes les structures anatomiques par une contrainte obtenue comme la disjonction des contraintes d'affectation et de non affectation.

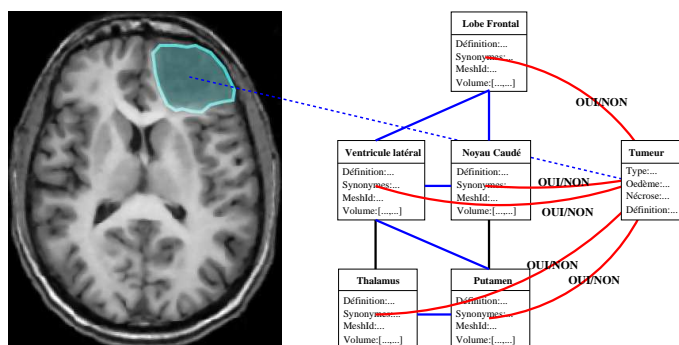


FIGURE 6.22 – Initialisation du processus de reconnaissance. Puisque nous ne savons pas quelles structures sont affectées par la tumeur nous laissons initialement les deux hypothèses ouvertes.

L'obtention de la représentation spécifique consiste aussi à déterminer quelles relations du modèle générique ne sont plus valides. C'est le cas par exemple d'une relation de contraste lorsque l'une ou l'autre des structures impliquées dans la relation est affectée. C'est aussi le cas d'une relation directionnelle (d'une structure  $A$  vers une structure  $B$ ) lorsque  $A$ , la structure de référence, est affectée. Lorsque  $B$  est affectée nous supposons dans ce cas que la relation est toujours valide puisque la partie restante de la structure vérifie toujours cette relation. Dans la section suivante, nous reformulons l'ensemble des contraintes afin prendre en compte l'impact de la pathologie. Pour des questions de simplicité d'écriture, nous définissons deux contraintes :  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  qui impliquent une variable  $A$  et un ensemble de variables  $\{B_i\}$  quelconque. La première est satisfaite lorsque la variable  $A$  est affectée par la tumeur alors que la seconde est satisfaite lorsque la variable  $A$  n'est pas affectée par la tumeur (notons que  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  ne signifient pas que les contraintes entre  $A$  et  $\{B_i\}$  sont ou ne sont plus satisfaites mais elles sont utilisées dans la section suivante pour le déterminer). Initialement nous ne savons pas quelles structures sont affectées donc pour toutes les variables  $A$  et tous les ensembles de variables  $\{B_i\}$  nous définissons la contrainte  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié} \vee C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$ . Ces contraintes « intermédiaires » sont directement liées aux contraintes représentant l'affectation d'une structure par la tumeur :

$$\begin{aligned} C_{Tumeur,A}^{affecte} &\Rightarrow \forall \{B_i\} \in \mathcal{P}(\chi \setminus A), C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié} \\ C_{Tumeur,A}^{-affecte} &\Rightarrow \forall \{B_i\} \in \mathcal{P}(\chi \setminus A), C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié} \end{aligned} \quad (6.1)$$

où  $\mathcal{P}(\chi \setminus A)$  est la famille des ensembles de variables de  $\chi$  ne comprenant pas  $A$ . Plus précisément pour toute instantiation  $I$  de  $\chi$ , nous avons  $I[vars(C_{Tumeur,A}^{affecte})] \in rel(C_{Tumeur,A}^{affecte}) \Rightarrow \forall \{B_i\} \in \mathcal{P}(\chi \setminus A), I[C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}] \in rel(C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié})$  et similairement pour  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ .

Ainsi lorsque  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  est satisfaite (par toutes les instantiations valides), cela signifie aussi que  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  est satisfaite. De même lorsque  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  est invalide,  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  l'est aussi.

### Adaptation des contraintes du modèle générique

Les relations du modèle générique qui ne sont plus satisfaites, c'est-à-dire celles qui n'appartiennent pas à la représentation spécifique de ce patient, ne doivent pas être utilisées comme contrainte lors du processus de propagation.

Puisque nous nous cantonnons au traitement de cas présentant des tumeurs peu refoulantes, l'invalidité d'une relation du modèle générique résulte du « recouvrement » par la tumeur d'au moins une partie d'une structure affectée. Les propriétés de cette structure (notamment radiométriques) sont donc modifiées et une partie de celle-ci a potentiellement été détruite. Nous distinguons les deux parties suivantes d'une structure affectée :

- une partie (éventuellement vide) ne faisant pas partie de la région pathologique qui reste visible et que nous voudrions idéalement extraire,
- une partie appartenant à la région pathologique qui correspond à des tissus infiltrés ou détruits. Cette partie n'étant pas visible ou n'existant plus, il n'est pas possible de la caractériser. Nous supposons donc uniquement qu'elle est comprise entre l'ensemble vide et la structure telle qu'elle aurait été dans le cas normal<sup>7</sup>.

7. Cette deuxième hypothèse n'est pas forcément correcte. Nous devrions plutôt dire que la partie de la structure se trouvant dans la zone pathologique est comprise entre l'ensemble vide et la zone pathologique entière. Cependant cela conduirait à l'invalidité de toutes les contraintes impliquant une structure affectée. En faisant l'hypothèse raisonnable (notamment car nous n'allons pas discerner les structures dans la région pathologique) que la partie se trouvant dans la zone pathologique est soit infiltrée, soit détruite mais pas

Suivant ces hypothèses, une relation impliquant une structure  $A$  reste valide lorsque  $A$  est affectée par la tumeur si elle est décroissante relativement à  $A$  puisqu'elle doit être satisfaite par la partie restante de  $A$ .

Nous passons en revue ci-dessous les contraintes du modèle utilisées dans le processus de propagation. Pour prendre en compte l'impact de la tumeur nous utilisons les contraintes « intermédiaires » définies dans la section précédente. Nous notons aussi  $C_{\{A_i\}}^*$  une contrainte toujours satisfaite que nous utilisons pour invalider des contraintes du modèle générique.

Par ailleurs il est parfois avantageux de considérer les contraintes de façon orientée. Par exemple une contrainte de distance  $C_{AB}^{dist}$  n'est plus satisfaite si  $A$  ou  $B$  sont affectées par la tumeur. La contrainte orientée  $C_{AB}^{dist}$  qui contraint les valeurs de  $B$  relativement à  $A$  n'est quant à elle plus satisfaite si  $A$  est affectée (elle l'est toujours si  $B$  est affectée mais pas  $A$ ). De même  $C_{AB}^{dist}$  n'est plus satisfaite si  $B$  est affectée. Le champ d'utilisation de ces contraintes orientées est donc plus large que celui de la contrainte initiale.

**Contrainte directionnelle** Considérons une contrainte directionnelle  $C_{A,B}^{dir \nu}$  entre les structures  $A$  et  $B$ . Nous supposons que la pathologie n'induit pas d'effet de masse et donc ne déplace pas ou peu ces structures. Nous sommes donc assurés que la relation reste satisfaite si la tumeur n'affecte pas la structure  $A$ . En effet dans ce cas si  $B$  n'est pas affectée par la tumeur alors la relation reste satisfaite. Si  $B$  est affectée alors la partie restante de  $B$  (éventuellement vide) satisfait toujours la relation directionnelle car cette dernière prend la forme  $\mu_B \leq \delta_\nu(\mu_A)$  et est décroissante par rapport à  $\mu_B$ . En revanche si  $A$  est affectée par la tumeur, nous ne sommes plus sûrs que la relation soit toujours satisfaite. Ainsi si  $A$  a été complètement détruite par la tumeur, la relation n'est plus satisfaite. Nous voulons donc invalider la relation directionnelle lorsque  $A$  est affectée par la tumeur et préserver la relation lorsque  $A$  n'est pas affectée par cette tumeur. Nous pouvons représenter cette alternative par les conjonctions  $C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{A,B}^*$  et  $C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{A,B}^{dir \nu}$ . Nous créons alors la contrainte suivante :

$$C = (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{A,B}^{dir \nu}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{A,B}^*).$$

Si nous savons que  $A$  est affectée par la tumeur, la contrainte  $C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}$  n'est jamais satisfaite (elle n'est satisfaite par aucune instanciation) et  $C_{\mathbf{A},B}^{modifié}$  l'est toujours. Nous pouvons donc simplifier cette expression et nous obtenons  $C = C_{A,B}^*$ . La contrainte  $C$  est alors toujours satisfaite. La contrainte directionnelle est donc invalidée. Si nous savons que  $A$  n'est pas affectée par la tumeur,  $C_{\mathbf{A},B}^{modifié}$  n'est jamais satisfaite et  $C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}$  l'est toujours. En simplifiant l'expression de  $C$ , nous obtenons  $C = C_{A,B}^{dir \nu}$ . La relation directionnelle peut donc être utilisée. Finalement si nous ne savons pas si  $A$  est affectée ou non par la tumeur, les deux contraintes  $C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},B}^{modifié}$  peuvent être satisfaites par une partie des instanciations. Nous simplifions dans ce cas  $C$  en approchant  $C_{\mathbf{A},B}^{modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}$  par des contraintes toujours satisfaites (ce qui est possible car cela conduit à une contrainte plus faible). Nous obtenons alors  $C = C_{A,B}^{dir \nu} \vee C_{A,B}^* = C_{A,B}^*$ . Tant que nous n'avons pas plus d'information sur l'affectation de  $A$ , nous n'utilisons donc pas la contrainte directionnelle dans le processus de propagation.

**Contrainte de distance** Similairement une contrainte de distance orientée  $C_{A,B}^{dist \nu_1 \nu_2}$  entre deux structures  $A$  et  $B$  reste valide lorsque  $B$  est affectée par la tumeur mais pas déplacée, nous pouvons supposer qu'elle est comprise entre l'ensemble vide et la structure telle qu'elle aurait été dans le cas normal.

lorsque  $A$  l'est. De même  $C_{\mathbf{A},B}^{dist \nu_1 \nu_2}$  reste valide lorsque  $A$  est affectée mais pas  $B$ . Si dans le modèle générique nous avons la contrainte  $C_{\mathbf{A},B}^{dist \nu_1 \nu_2}$ , nous définissons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^{dist \nu_1 \nu_2}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^*), \\ C_2 &= (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^{dist \nu_1 \nu_2}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^*). \end{aligned}$$

**Inclusion** Une contrainte d'inclusion de  $A$  dans  $B$  reste vérifiée si  $A$  est affectée par la tumeur (en effet la sous-partie restante de  $A$  est aussi incluse dans  $B$ ). De même lorsque  $B$  est affectée la relation reste valide puisque dans ce cas soit  $A$  fait partie de la sous-partie de  $B$  qui n'est pas affectée par la tumeur, soit  $A$  est aussi affectée. Nous préservons donc dans ce cas la contrainte du modèle générique :

$$C = C_{\mathbf{A},B}^{dans}.$$

**Partition** Comme la contrainte d'inclusion une contrainte de partition  $C_{\{A_i\},B}^{partition}$  reste vérifiée si les structures sont affectées. Nous conservons donc cette relation :

$$C = C_{\mathbf{A},B}^{dans}.$$

Nous considérons par ailleurs le cas particulier où nous savons que la tumeur est incluse dans  $B$  (la tumeur est incluse dans le cerveau dans les cas que nous traitons). Dans ce cas nous décrétons que  $B$  n'est pas affectée par la tumeur mais qu'elle inclut la tumeur. La structure  $B$  peut alors être obtenue comme la réunion de l'ensemble  $\{A_i\}$  et de la tumeur. Ce point de vue présente l'avantage de présupposer que  $B$  n'est pas affectée par la tumeur et ainsi de pouvoir utiliser une partie des relations liant  $B$  aux autres structures. Notons cependant que dans ce cas toutes les relations radiométriques impliquant  $B$  ne sont plus nécessairement valides et doivent être invalidées.

**Connexité** Une contrainte de connexité n'est plus nécessairement satisfaite lorsque la structure concernée est affectée par la tumeur. Nous obtenons donc :

$$C = (C_{\mathbf{A}}^{-modifié} \wedge C_A^{conn}) \vee (C_{\mathbf{A}}^{modifié} \wedge C_A^*).$$

**Adjacence** Une contrainte d'adjacence  $C_{A,B}^{adj}$  entre deux structures  $A$  et  $B$  n'est plus nécessairement satisfaite si  $A$  ou  $B$  est affectée par la tumeur. Nous obtenons donc :

$$C = (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{A,B}^{adj}) \vee ((C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \vee C_{\mathbf{A},B}^{modifié}) \wedge C_{A,B}^*)$$

**Volume** Une contrainte de volume  $C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}$  n'est plus nécessairement satisfaite si  $A$  est affectée par la tumeur. Nous obtenons donc :

$$C = (C_{\mathbf{A}}^{-modifié} \wedge C_A^{vol [f_{V_{\min}}, f_{V_{\max}}]}) \vee (C_{\mathbf{A}}^{modifié} \wedge C_A^*).$$

**Contraste** Finalement une contrainte de contraste orientée  $C_{\mathbf{A},B}^{cont}$  n'est plus nécessairement satisfaite si  $A$  est affectée par la tumeur. Nous obtenons donc :

$$C = (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^{cont}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{\mathbf{A},B}^*).$$

De même la contrainte  $C_{\mathbf{A},B}^{cont}$  n'est plus nécessairement satisfaite lorsque  $B$  est affectée par la tumeur.

## Elimination d'hypothèses sur la représentation spécifique

Pendant le processus de propagation les domaines des structures sont progressivement réduits par l'application des propagateurs associés aux contraintes que nous savons valides. Ces réductions peuvent conduire à des domaines ne contenant plus que des valeurs non connexes à la région pathologique. Si  $A$  est une variable associée à un tel domaine, nous pouvons alors conclure que la structure  $A$  n'est pas affectée par la tumeur. Inversement nous pouvons aboutir à des domaines dans lesquels toutes les valeurs intersectent (ou sont adjacentes à) la région pathologique. Dans ce cas nous pouvons conclure que la tumeur affecte  $A$ . Cette situation est illustrée par la figure 6.23. Initialement nous ne savons pas si le putamen gauche  $PUL$  est affecté ou non par la tumeur. Pendant le processus de propagation nous obtenons alors la borne supérieure montrée à droite pour le domaine du putamen. Celle-ci n'est pas connexe à la région pathologique. Aucune valeur du domaine du putamen ne vérifie l'hypothèse « la tumeur affecte le putamen ». La contrainte  $C_{Tumeur,PUL}^{affecte}$  est donc toujours insatisfaite :  $\forall \mu \in (\underline{PUL}, \overline{PUL}), \forall \mu_t \in (\underline{Tumeur}, \overline{Tumeur}), rel(C_{Tumeur,PUL}^{affecte})(\mu_t, \mu) = 0$  et  $rel(C_{Tumeur,PUL}^{-affecte})(\mu_t, \mu) = 1$ . Par conséquent nous pouvons mettre à jour toutes les contraintes impliquant le putamen gauche en réalisant les simplifications possibles. Ainsi nous pouvons maintenant utiliser la contrainte de direction entre le putamen et le ventricule latéral.

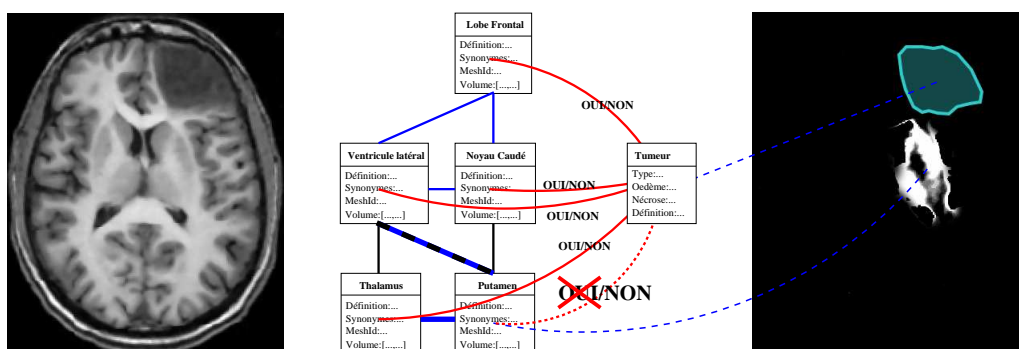


FIGURE 6.23 – Suppression de l'hypothèse « la tumeur affecte le putamen gauche ». La borne supérieure du domaine du putamen n'est en effet pas connexe à la région pathologique (à droite). La contrainte de direction liant le putamen et le ventricule droit peut alors être utilisée.

Nous allons exprimer ces conditions sous la forme de règles. Tout d'abord si les bornes supérieures de la tumeur<sup>8</sup> et d'un objet  $A$  sont non connexes, cela implique que toutes les valeurs des domaines de la tumeur et de l'objet  $A$  sont non connexes. La contrainte  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  est donc toujours satisfaite et nous pouvons conclure que la tumeur n'affecte pas  $A$ . Si nous notons  $\delta_{B_0}$  la dilatation par une boule élémentaire, nous obtenons la règle suivante :

$$\delta_{B_0}(\overline{Tumeur}) \wedge \overline{A} = 0_{\mathcal{F}} \Rightarrow rel(C_{Tumeur,A}^{-affecte}) = 1 \text{ et } rel(C_{Tumeur,A}^{affecte}) = 0, \quad (6.2)$$

où  $rel(C) = 1$  signifie que toute instantiation valide appartient à  $rel(C)$  et inversement  $rel(C) = 0$  signifie qu'aucune instantiation valide n'appartient à  $rel(C)$ .

Si maintenant la borne supérieure de  $A$  est incluse dans le dilaté de la borne inférieure de la tumeur nous pouvons en déduire que la structure est affectée par la tumeur. Nous

8. Nous disposons d'une segmentation de la tumeur. Les bornes inférieure et supérieure du domaine associé à la tumeur sont donc égales à cette segmentation.

obtenons donc :

$$\bar{A} \leq \delta_{B_0}(\underline{Tumeur}) \Rightarrow \text{rel}(C_{Tumeur,A}^{affecte}) = 1 \text{ et } \text{rel}(C_{Tumeur,A}^{-affecte}) = 0. \quad (6.3)$$

Finalement si les bornes inférieures de  $A$  et de la tumeur s'intersectent ou sont adjacentes cela implique que  $A$  et la tumeur s'intersectent ou sont adjacentes et donc que la structure  $A$  est affectée par la tumeur :

$$\delta_{B_0}(\underline{Tumeur}) \wedge \underline{A} \neq 0_{\mathcal{F}} \Rightarrow \text{rel}(C_{Tumeur,A}^{affecte}) = 1 \text{ et } \text{rel}(C_{Tumeur,A}^{-affecte}) = 0. \quad (6.4)$$

Lorsque l'une de ces règles s'applique pendant le processus de propagation, nous pouvons simplifier la contrainte  $C_{Tumeur,A} = C_{Tumeur,A}^{affecte} \vee C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  liant  $A$  à la tumeur en supprimant l'hypothèse non satisfaite. Si par exemple la première règle s'applique,  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  n'est jamais satisfaite et nous pouvons donc simplifier  $C_{Tumeur,A}$  qui vaut maintenant  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ . Dans la représentation spécifique de ce cas,  $A$  n'est ainsi pas affectée par la tumeur. Ce scénario est illustré pour le putamen gauche dans la figure 6.23. Notons que si nous aboutissons à une incohérence alors nous concluons simplement à l'inconsistance du réseau (par exemple si la première règle s'applique alors que  $C_{Tumeur,A}$  vaut  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$ ).

La simplification d'une contrainte  $C_{Tumeur,A}$  peut alors conduire à la simplification d'autres relations du réseau. Par les deux règles de l'équation 6.1, nous déduisons en effet que  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  ou  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  sont toujours satisfaites ou invalides. Nous pouvons alors simplifier toutes les relations dans lesquelles  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  interviennent. Certaines relations du modèle générique deviennent alors définitivement invalidées ou au contraire peuvent être utilisées pendant le processus de propagation. Considérons par exemple la contrainte  $C_{Tumeur,A} = C_{Tumeur,A}^{-affecte}$  et la contrainte de direction modifiée  $C^m = (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{A,B}^{dir}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{A,B}^*)$ . Par l'équation 6.1, nous obtenons que  $\text{rel}(C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}) = 1$  et  $\text{rel}(C_{\mathbf{A},B}^{modifié}) = 0$ . Nous simplifions alors  $C^m$  qui vaut maintenant  $C_{A,B}^{dir}$ . Nous pouvons donc maintenant utiliser normalement la contrainte de direction dans le processus de propagation et celle-ci appartient à la représentation spécifique de ce cas.

### Algorithme de propagation modifié

Nous initialisons le réseau de contraintes en créant pour chaque nœud  $A$  du modèle générique la contrainte  $C_{Tumeur,A} = C_{Tumeur,A}^{affecte} \vee C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ . Pour chaque relation du modèle nous créons alors la contrainte modifiée associée. Les domaines sont ensuite initialisés à  $\mathcal{F}$  et le domaine de la tumeur est réduit à un singleton en fournissant la segmentation préliminaire. D'autres variables sont éventuellement initialisées par des segmentations externes. Si la tumeur est totalement incluse dans la région d'une de ces variables  $A$  (le cerveau dans notre cas), nous réalisons la modification discutée lorsque nous avons traité la contrainte de partition (les contraintes de partition dont la structure principale est  $A$  sont transformées en contraintes de réunion impliquant aussi la tumeur, toutes les relations de contraste impliquant  $A$  sont invalidées et  $C_{Tumeur,A}$  est initialisé à  $C_{Tumeur,A}^{-affecte}$ ). Sinon nous vérifions si les règles données par les équations 6.2, 6.3 et 6.4 s'appliquent. Si c'est le cas la contrainte  $C_{Tumeur,A}$  est simplifiée et nous propageons cette mise à jour à toutes les contraintes impliquant  $A$ .

Nous modifions alors le processus de propagation décrit dans la section 4.2.5 pour réaliser simultanément la réduction des domaines et la mise à jour des contraintes. La mise à jour des contraintes est en général beaucoup moins coûteuse que le calcul des propagateurs. A chaque fois que la borne d'un domaine est mise à jour nous estimons donc si l'une des trois règles décrites par les équations 6.2, 6.3 et 6.4 s'appliquent. Si c'est le

cas nous propageons cette mise à jour à l'ensemble des contraintes impliquant la variable. Des contraintes qui étaient auparavant inutilisables pourront alors être utilisées ou seront définitivement invalidées.

En pratique nous invalidons (temporairement ou définitivement) les contraintes en leur affectant une priorité de calcul nous comme nous le décrivons ci-dessous.

### Modification des priorités des contraintes

Pendant le processus de propagation l'ordonnancement de l'application des propagateurs est déterminé par un indice de priorité calculé pour chaque contrainte. Nous pouvons donc proscrire le calcul du propagateur d'une contrainte en lui affectant une priorité nulle. Nous allons ainsi modifier le calcul des priorités des contraintes pour interdire l'application de contraintes potentiellement invalides.

Pour prendre en compte la tumeur, nous avons reformulé les contraintes du modèle comme une combinaison de contraintes élémentaires. Nous exprimons la priorité de ces nouvelles contraintes à partir des priorités des contraintes élémentaires. Tout d'abord nous affectons une priorité nulle à la contrainte  $C_{\{A_i\}}^*$  (qui est une contrainte toujours satisfaite) :

$$P(C_{\{A_i\}}^*) = 0.$$

Les contraintes intermédiaires  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{-modifié}$  et  $C_{\mathbf{A},\{B_i\}}^{modifié}$  ne réalisant pas non plus de réduction des domaines, nous leur affectons aussi une priorité nulle :

$$\begin{aligned} P(C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}) &= 0 \\ P(C_{\mathbf{A},B}^{modifié}) &= 0. \end{aligned}$$

A partir des priorités des contraintes élémentaires nous exprimons alors la priorité de leur combinaison. Tout d'abord la disjonction de deux contraintes donne une contrainte moins restrictive que chacune de ces contraintes. Nous définissons donc la priorité d'une disjonction de deux contraintes comme la priorité minimale de ces deux contraintes :

$$P(C_1 \vee C_2) = \min(P(C_1), P(C_2)). \quad (6.5)$$

Similairement une contrainte obtenue comme la conjonction de deux contraintes est au moins aussi restrictive que chacune de ces contraintes. Nous définissons donc la priorité de la conjonction comme la priorité maximale de ces contraintes :

$$P(C_1 \wedge C_2) = \max(P(C_1), P(C_2)). \quad (6.6)$$

Reprenons pour exemple la contrainte de direction  $C_{A,B}^{dir \nu}$  entre deux structures  $A$  et  $B$ . Lorsque nous ne savons pas si  $A$  a été affectée par la tumeur cette contrainte est exprimée dans le réseau suivant :  $C^m = (C_{\mathbf{A},B}^{-modifié} \wedge C_{A,B}^{dans}) \vee (C_{\mathbf{A},B}^{modifié} \wedge C_{A,B}^*)$ . Sa priorité vaut donc :

$$\begin{aligned} P(C^m) &= \min(\max(P(C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}), P(C_{A,B}^{dans})), \max(P(C_{\mathbf{A},B}^{modifié}), P(C_{A,B}^*))) \\ &= \min(\max(0, P(C_{A,B}^{dans})), \max(0, 0)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lorsque nous savons que la structure  $A$  n'est pas affectée par la tumeur, cette contrainte est simplifiée et vaut  $C^m = C_{A,B}^{dans}$ . Sa priorité vaut alors :

$$\begin{aligned} P(C) &= \max(P(C_{\mathbf{A},B}^{-modifié}), P(C_{A,B}^{dans})) \\ &= \max(0, P(C_{A,B}^{dans})) = P(C_{A,B}^{dans}). \end{aligned}$$



Dans le premier cas la contrainte présente donc une priorité nulle et n'est pas calculée alors que dans le deuxième cas le calcul de sa priorité est réalisé normalement.

### 6.4.2 Segmentation et résultats

#### Exemples synthétiques

Nous prenons tout d'abord pour exemple un cas de la base d'images synthétiques dans laquelle nous simulons la présence d'une tumeur. Nous construisons les trois cas présentés dans la figure 6.24 (b-d) où la tumeur est placée à des positions variées. En (b) la tumeur est placée dans la structure  $C$ . En (c) elle se trouve à l'intersection de  $B$ ,  $D$  et  $F$ . Enfin en (d) la tumeur se trouve principalement dans la structure  $H$  et intersecte faiblement  $B$ .

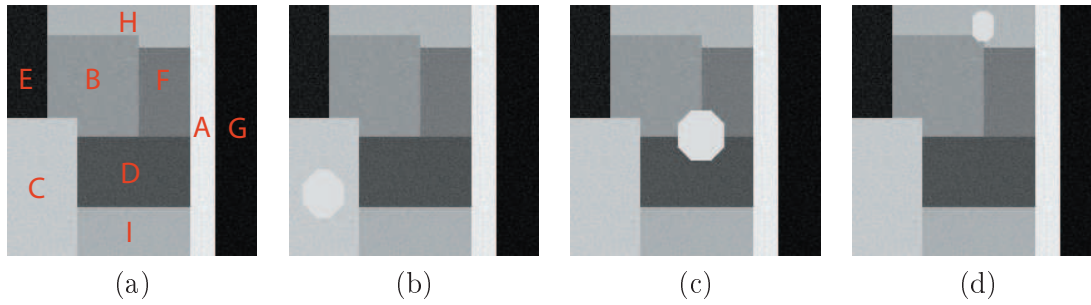


FIGURE 6.24 – (a) Une image synthétique de la base utilisée dans la section 6.2. Nous simulons la présence d'une tumeur dans la structure  $C$  (b), à l'intersection des structures  $B$ ,  $F$  et  $D$  (c) ou des structures  $B$  et  $H$  (d).

Pour chaque cas nous appliquons le processus de propagation modifié en utilisant le modèle  $G_{150}$  (appris sur une base qui ne contient pas ce cas). Nous ajoutons pour cela à ce graphe un nœud  $Tumeur$ , nous créons entre la tumeur et toutes les autres variables  $O$  une relation  $C_{Tumeur,O} = C_{Tumeur,O}^{affecte} \vee C_{Tumeur,O}^{-affecte}$  et nous modifions toutes les relations du modèle générique comme nous l'avons décrit. Nous initialisons alors les domaines de la tumeur et de la variable  $Tout$  (qui est une structure du modèle incluant toutes les autres) respectivement à  $(\mu_{Tumeur}, \mu_{Tumeur})$  et  $(\mu_{Tout}, \mu_{Tout})$ . Puisque que nous avons  $\mu_{Tumeur} \leq \mu_{Tout}$  nous créons la relation  $C_{Tumeur,Tout}^{dans}$ , nous remplaçons la contrainte de partition  $C_{A,B,C,D,E,F,G,H,I \rightarrow Tout}^{part}$  par la contrainte de réunion  $C_{A,B,C,D,E,F,G,H,I,Tumeur \rightarrow Tout}^{réunion}$  et nous mettons à jour  $C_{Tumeur,Tout}$  qui vaut maintenant  $C_{Tumeur,Tout}^{-affecte}$  (comme nous l'avons discuté dans le paragraphe portant sur la modification de la contrainte de partition, nous considérons que les structures du modèle, en général de niveau hiérarchique élevé, pour lesquelles nous disposons d'une segmentation initiale qui inclue la tumeur ne sont pas affectées par celle-ci. En effet cela permet d'utiliser certaines relations spatiales par rapport à cette structure). Nous appliquons alors le processus de propagation modifié. Nous montrons dans la figure 6.25 l'évolution des domaines d'une part et des relations  $C_{Tumeur,O}$  d'autre part au cours du processus<sup>9</sup>. Les premières lignes présentent les domaines à plusieurs stades du processus de propagation appliqué au cas (b) de la figure 6.24. Les premières hypothèses sur l'affectation des structures sont rapidement éliminées notamment grâce aux relations de

9. Notons que nous utilisons ici une contrainte que nous n'avons pas, faute de temps, pu décrire. Nous nommons cette contrainte distance orientée. Pour une orientation donnée, celle-ci contraint relativement les positions minimales et maximales des deux structures (selon cette orientation). En prenant l'axe des  $x$  par exemple, une telle contrainte entre  $A$  et  $B$  lie l'abscisse des points de  $B$  aux abscisses minimales et maximales des points de  $A$  et réciproquement. Cela conduit donc à des réductions d'aspect rectangulaire lorsque les orientations utilisées sont les axes du repère.

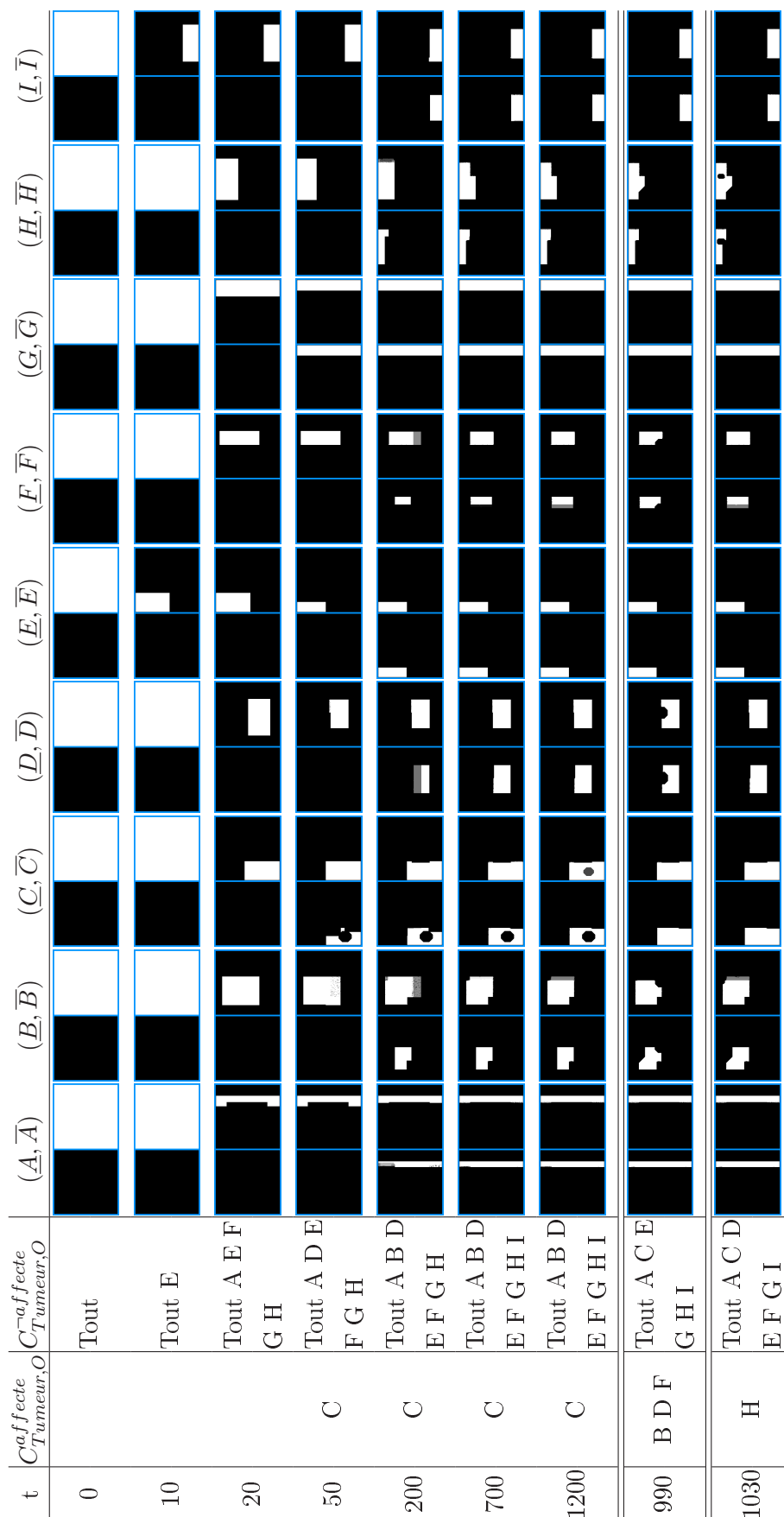


FIGURE 6.25 – Application de l’algorithme de propagation modifié aux images synthétiques de la figure 6.24 dans lesquelles nous avons simulé la présence d’une tumeur. Les premières lignes présentent, pour le cas présenté en (b), les domaines associés aux 9 objets à plusieurs stades du processus de propagation, les structures que nous savons affectées par la tumeur dans la colonne  $C_{Tumeur,O}^{affecte}$  et les structures qui ne le sont pas dans la colonne  $C_{Tumeur,O}^{-affecte}$ . Nous montrons ensuite les résultats du processus de propagation appliqué aux cas présentés en (c) et en (d).

distance orientée relativement à la variable  $Tout$ . Ensuite lorsque la borne inférieure de  $C$  est mise à jour nous obtenons que  $C$  est affectée par la tumeur. Les réductions de domaines suivantes nous permettent de déterminer que  $B$  et finalement  $I$  ne sont pas affectées. Notons que  $I$  est la structure présentant le plus d'ambiguïté avec  $C$  où se trouve la tumeur. Le processus de propagation modifié a donc à la fois réalisé une réduction importante des domaines et obtenu le modèle spécifique de ce cas. En effet le processus a déterminé que  $C$  est affectée par la tumeur et qu'aucune autre structure ne l'est. Les deux dernières lignes de la figure 6.25 présentent alors les résultats obtenus sur les cas (c) et (d) de la figure 6.24. Dans le cas (c), le processus de propagation obtient aussi le modèle spécifique au patient. En effet il déduit que la tumeur affecte  $B$ ,  $D$  et  $F$  et n'affecte pas les autres structures. Dans le cas (d), le processus parvient à déterminer que  $H$  est affecté et qu'aucune autre structure que  $B$  et  $H$  n'est affectée. Il reste donc dans ce cas une indétermination sur le modèle spécifique.

### IRM cérébrales

Nous appliquons maintenant ce processus à la coupe axiale qui est présentée dans la figure 6.26 (a). Nous supposons que la tumeur (b) et le cerveau ont été préalablement extraits et nous utilisons le modèle  $G^f$  obtenu dans la section 6.3 à partir des 6 cas annotés présentés dans la figure 6.7. Nous définissons le réseau de contraintes initial en ajoutant à  $G^f$  un nœud représentant la tumeur, en créant les contraintes  $C_{Tumeur,O} = C_{Tumeur,O}^{affecte} \vee C_{Tumeur,O}^{-affecte}$  pour l'ensemble des variables  $O$  de  $G^f$  et en modifiant toutes les relations. Nous initialisons alors les domaines du cerveau et de la tumeur par les segmentations préliminaires  $\mu_{Tumeur}$  et  $\mu_{Cerv}$ . Puisque la première est incluse dans la seconde, nous créons la relation  $C_{Tumeur,Cerv}^{dans}$ , nous remplaçons la contrainte de partition portant sur le cerveau par une contrainte de réunion impliquant aussi la tumeur et nous décrétons que  $C_{Tumeur,Cerv} = C_{Tumeur,Cerv}^{-affecte}$ .

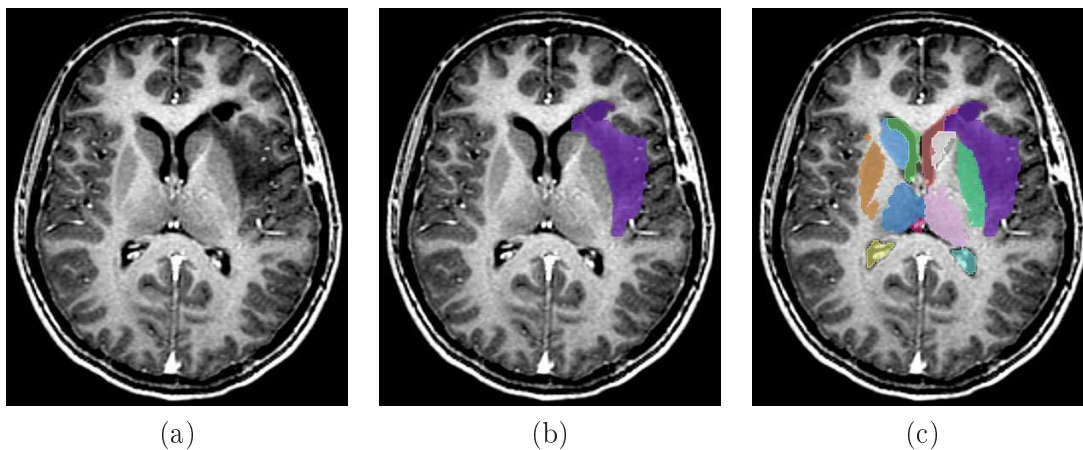


FIGURE 6.26 – (a) Coupe axiale d'une IRM d'un patient présentant une tumeur cérébrale montrée en (b). (c) Résultats de reconnaissance des structures internes.

Nous appliquons alors l'algorithme de propagation modifié. Nous montrons tout d'abord dans la table 6.8, à plusieurs étapes du processus, les structures pour lesquelles la relation  $C_{Tumeur,O}$  vaut  $C_{Tumeur,O}^{-affecte}$ . Sans surprises, les premières structures vérifiant cela sont éloignées de la tumeur. C'est par exemple le cas du thalamus droit  $THr$  qui se trouve dans l'autre hémisphère et du lobe occipital qui est situé à l'arrière du cerveau. En réduisant progressivement les domaines au cours du processus de propagation l'algorithme parvient

ensuite à déterminer que des structures plus proches telles de le thalamus gauche  $THl$  ne sont pas affectées. Cependant il ne parvient pas à le faire pour toutes les structures (pour le putamen gauche  $PUL$  par exemple qui ne semble pas affecté mais qui se trouve très proche de la tumeur ou pour le lobe insulaire qui est affecté). En effet les domaines obtenus à la fin du processus de propagation restent larges (notamment pour les structures affectées dans ce cas et même lors de la reconnaissance chez des sujets normaux) comme nous le montrons dans la figure 6.27. En rendant le processus de propagation plus contraignant, nous pourrions obtenir des domaines plus réduits et par la même occasion éliminer un plus grand nombre d'hypothèses concernant le graphe spécifique, même si dans certains cas cette décision semble être difficile à prendre.

TABLE 6.8 – Structures pour lesquelles  $C_{Tumeur,O}$  vaut  $C_{Tumeur,O}^{-affecte}$  à plusieurs stades du processus de propagation modifié lorsqu'il est appliqué au cas de la figure 6.26.

0	BRAIN
200	BRAIN TH <sub>r</sub>
300	BRAIN OLI TH <sub>r</sub>
400	BRAIN FRX OLI TH <sub>r</sub>
500	BRAIN ChF FRX OLI SPTP TH <sub>r</sub>
1000	AIC <sub>r</sub> ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> ChF FLV <sub>r</sub> FRX OLI SPTP TH <sub>r</sub>
2000	AIC <sub>r</sub> ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> CWMF <sub>r</sub> CWMOI CWMO <sub>r</sub> CWMP <sub>r</sub> CWM <sub>r</sub> CX <sub>r</sub> ChF EC <sub>r</sub> FLV <sub>r</sub> FL <sub>r</sub> FRX INS <sub>r</sub> OLI OLR PIC <sub>r</sub> PLI PL <sub>r</sub> PU <sub>r</sub> SPTP SUC <sub>r</sub> TH <sub>r</sub> TL <sub>r</sub>
5000	AIC <sub>r</sub> ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> CWMF <sub>r</sub> CWMOI CWMO <sub>r</sub> CWMP <sub>r</sub> CWM <sub>r</sub> CX <sub>r</sub> ChF EC <sub>r</sub> FLV <sub>r</sub> FL <sub>r</sub> FRX INS <sub>r</sub> OLI OLR PIC <sub>r</sub> PLI PL <sub>r</sub> PU <sub>r</sub> SPTP SUC <sub>r</sub> TH <sub>r</sub> TL <sub>r</sub>
10000	AIC <sub>r</sub> ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> CWMF <sub>r</sub> CWMOI CWMO <sub>r</sub> CWMP <sub>r</sub> CWM <sub>r</sub> CX <sub>r</sub> ChF EC <sub>r</sub> FLV <sub>r</sub> FL <sub>r</sub> FRX INS <sub>r</sub> OLI OLR PIC <sub>r</sub> PLI PL <sub>r</sub> PU <sub>r</sub> SPTP SUC <sub>r</sub> THl TH <sub>r</sub> TL <sub>r</sub>
20000	AIC <sub>r</sub> ALVI ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> CWMF <sub>r</sub> CWMOI CWMO <sub>r</sub> CWMP <sub>r</sub> CWM <sub>r</sub> CX <sub>r</sub> ChF EC <sub>r</sub> FLV <sub>r</sub> FL <sub>r</sub> FRX INS <sub>r</sub> OLI OLR PIC <sub>r</sub> PLI PL <sub>r</sub> PU <sub>r</sub> SPTP SUC <sub>r</sub> THl TH <sub>r</sub> TL <sub>r</sub>
42800	AIC <sub>r</sub> ALVI ALV <sub>r</sub> BRAIN CD <sub>r</sub> CWMF <sub>r</sub> CWMOI CWMO <sub>r</sub> CWMP <sub>r</sub> CWM <sub>r</sub> CX <sub>r</sub> ChF EC <sub>r</sub> FLV <sub>r</sub> FL <sub>r</sub> FRX INS <sub>r</sub> OLI OLR PIC <sub>r</sub> PLI PL <sub>r</sub> PU <sub>r</sub> SPTP SUC <sub>r</sub> THl TH <sub>r</sub> TL <sub>r</sub>

Nous réalisons finalement l'extraction d'un résultat final. Nous montrons dans la figure 6.26 (c) les résultats obtenus pour les noyaux caudés, les ventricules latéraux, les thalamus et les putamens. Pour prendre en compte la présence de la tumeur lors de l'extraction de la solution nous avons aussi dû adapter le processus. En effet pour obtenir la segmentation d'une structure donnée, nous utilisons l'ensemble des structures adjacentes (dans le modèle) pour recomposer l'ensemble de la frontière de la structure. Lorsque la structure est affectée par la tumeur, nous devons donc ajouter cette dernière à l'ensemble des structures adjacentes. Si nous ne savons pas si la structure est affectée, nous réalisons cette opération par défaut.

### 6.4.3 Vers un modèle plus général de la prise en compte des tumeurs

De façon plus générale les tumeurs peuvent non seulement infiltrer ou détruire des structures anatomiques normales, mais aussi induire un effet de masse (c'est-à-dire provoquer

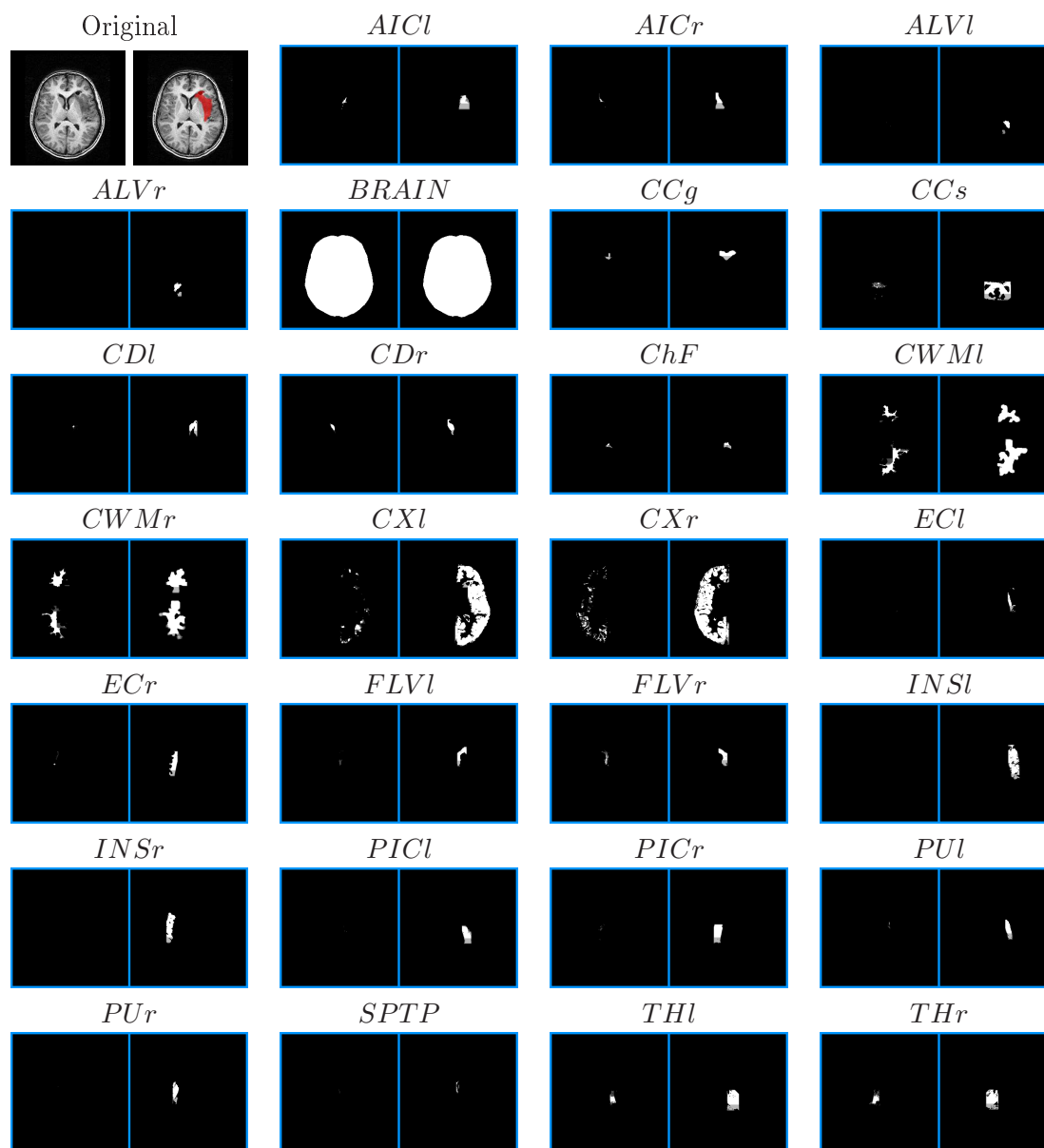


FIGURE 6.27 – Résultat du processus de propagation modifié en utilisant le graphe  $G^f$  obtenu dans la section 6.7. Nous montrons les domaines obtenus pour la partie antérieure des capsules internes ( $AICl$  et  $AICr$ ), les carrefours ventriculaires ( $ALVl$  et  $ALVr$ ), le cerveau ( $BRAIN$ ), le genou et le splénium du corps calleux ( $CCg$  et  $CCs$ ), la fissure choroïde ( $ChF$ ), la matière blanche cérébrale ( $CWMI$  et  $CWMr$ ), le cortex cérébral ( $CXl$  et  $CXr$ ), les capsules externes ( $ECl$  et  $ECr$ ), les cornes frontales des ventricules latéraux ( $FLVl$  et  $FLVr$ ), les lobes insulaires ( $INSl$  et  $INSr$ ), la partie postérieure des capsules internes ( $PICl$  et  $PICr$ ), les putamens ( $PUL$  et  $PUr$ ), le septum ( $SPTP$ ) et les thalamus ( $THl$  et  $THr$ ).

un refoulement de ces structures). Dans ce cas le processus décrit dans cette section n'est plus suffisant. En effet si la tumeur provoque un effet de masse, de nombreuses relations n'impliquant pas nécessairement des structures directement affectées par la tumeur ne sont plus valides.

Prenons pour exemple les coupes axiales présentées dans la figure 6.28. Nous pouvons comparer la coupe axiale d'un patient présentant une tumeur (b) à celle d'un sujet normal (a). La tumeur induit un effet de masse relativement important qui refoule les structures à proximité. Le carrefour ventriculaire droit par exemple est fortement déplacé et certaines relations spatiales telles que la relation de direction par rapport au carrefour ventriculaire gauche peuvent être partiellement invalidées.

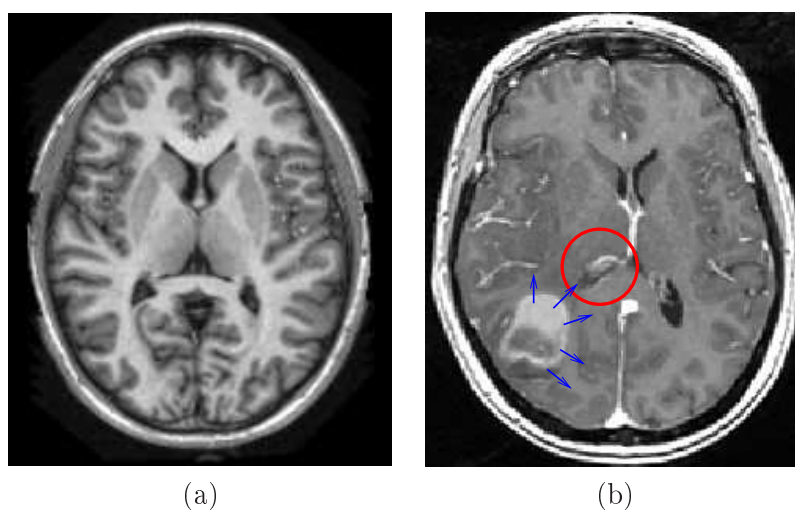


FIGURE 6.28 – Une coupe axiale d'un cerveau sain (a) et d'un cerveau présentant une tumeur cérébrale refoulante (b). Le refoulement des structures dans le cas pathologique peut partiellement invalider certaines relations obtenues dans le cas sain.

Pour prendre en compte de telles modifications, nous pourrions étendre la méthode proposée dans cette section en réalisant une mise à jour plus fine des relations du modèle générique. Nous décrivons ici brièvement comment cette extension peut être réalisée.

Le refoulement induit par la tumeur peut être caractérisé très approximativement en chaque point par une direction et une distance (par rapport à la position normale de la structure). Nous ne voulons pas obtenir une évaluation fine de ces paramètres, nous pouvons donc les représenter grossièrement par des valeurs symboliques. L'espace de valeurs des paramètres est ainsi subdivisé en régions associées à des valeurs symboliques. Par exemple, pour représenter l'information de direction en 2D, l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  peut être divisé en huit sous-parties associées à des valeurs symboliques [Frank, 1991] présentées en bleu dans la figure 6.29. Pour représenter l'information de distance, une subdivision de  $\mathbb{R}^+$  en intervalles annotés par des valeurs telles que « proche de » ou « loin de » peut être réalisée [Hernández et al., 1995]. Dans la figure 6.29 nous avons de cette façon réalisé une subdivision en trois valeurs : « proche » (P), « moyennement proche » (M) et « loin » (L). En combinant ces deux granulations [Clementini et al., 1997] nous obtenons la subdivision de l'espace de paramètres en 24 valeurs symboliques présentée par la figure 6.29. Nous notons  $\mathcal{R}$  l'ensemble de ces valeurs auquel nous ajoutons l'élément  $(0,0)$  représentant l'absence de refoulement.

Pour représenter le refoulement d'une structure  $A$  par la tumeur, nous définissons un nouveau type de contrainte que nous notons  $C_{Tumeur,A}^{refoule(dir\ dist)}$ , où  $(dir\ dist) \in \mathcal{R}$  sont les

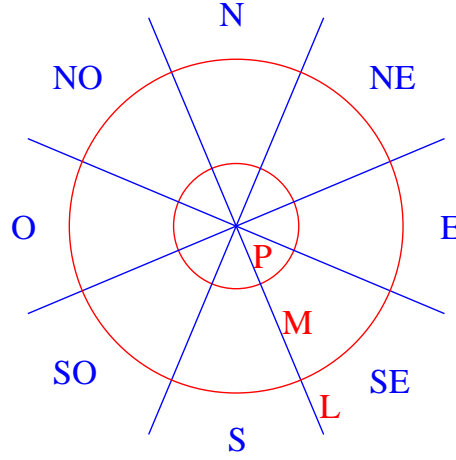


FIGURE 6.29 – Représentation de l'espace de paramètres par un ensemble de valeurs symboliques combinant l'information de distance (en rouge) et d'orientation [Clementini et al., 1997].

paramètres de la relation de refoulement. La valeur symbolique  $dir$  représente une direction et le paramètre  $dist$  l'importance du refoulement. Nous procédons alors comme pour la contrainte  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  en définissant les contraintes du réseau à partir des contraintes du modèle générique et de contraintes  $C_{Tumeur,A}^{refoule(dir dist)}$ . Pendant le processus de propagation nous déterminerons alors, en utilisant les domaines obtenus, si les contraintes  $C_{Tumeur,A}^{refoule(dir dist)}$  sont nécessairement satisfaites ou invalides.

Nous créons donc à partir du modèle générique un réseau de contraintes qui comporte toutes les variables du modèle et la tumeur. Nous lions la tumeur et chaque structure par la contrainte  $C_{Tumeur,A} = C_{Tumeur,A}^{affecte} \vee \bigvee_{(dir dist) \in \mathcal{R}} C_{Tumeur,A}^{refoule(dir dist)}$ . Ensuite pour chaque contrainte du modèle générique nous définissons une contrainte modifiée, prenant en compte un éventuel refoulement. Considérons par exemple une contrainte de distance  $C_{A,B}^{dist}$  entre deux structures  $A$  et  $B$  à partir de laquelle nous définissons deux contraintes assouplies  $C_{A,B}^{dist mod}$  et  $C_{A,B}^{dist très mod}$  en relâchant ses paramètres. Nous définissons alors une contrainte modifiée prenant la forme :

$$C = (C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{modifié} \wedge C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^*) \vee \left[ \bigvee_{(dir dist) \in \mathcal{R}} (C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{refoule(dir dist)} \wedge C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist(dir dist)}) \right],$$

où  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist(dir dist)}$  vaut  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist}$ ,  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist mod}$ ,  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist très mod}$  ou  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^*$  selon la valeur  $(dir dist)$  de la relation de refoulement et  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{refoule(dir dist)}$  est une facilité de notation (l'équivalent de  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{modifié}$  pour la relation de refoulement). Nous présentons dans la table 6.9 un exemple de définition de  $C_{\mathbf{A},\mathbf{B}}^{dist(dir dist)}$  en utilisant les quatre valeurs  $H$  (haut),  $B$  (bas),  $G$  (gauche) et  $D$  (droite) pour les orientations et les trois valeurs  $P$  (proche),  $M$  (moyennement proche) et  $L$  (loin) pour l'importance du refoulement. Pour chaque couple  $(dir dist)$  nous spécifions alors (arbitrairement) si la relation de distance reste satisfaite, est légèrement ou fortement assouplie ou si elle n'est plus du tout satisfaite. Par exemple si  $A$  et  $B$  sont toutes les deux fortement refoulées dans la direction  $H$  (ce qui correspond à la première case du tableau), la relation du modèle devrait être toujours partiellement satisfaite puisque les deux structures devraient subir le même déplacement. Maintenant si  $A$  et  $B$  sont fortement refoulées mais

TABLE 6.9 – Satisfaction totale ( $s$ ), partielle ( $m$ ), très partielle ( $tm$ ) ou non satisfaction  $\neg s$  d'une relation de distance entre deux structures  $A$  et  $B$  en fonction des relations de refoulement de ces structures avec la tumeur. Les valeurs  $H$  (haut),  $B$  (bas),  $G$  (gauche) et  $D$  (droite) représentent la direction de refoulement et les valeurs  $P$  (proche),  $M$  (moyennement proche) et  $L$  (loin) l'importance de ce refoulement.

		$H$			$B$			$G$			$D$		
		$L$	$M$	$P$	$L$	$M$	$P$	$L$	$M$	$P$	$L$	$M$	$P$
$H$	$L$	$m$	$m$	$m$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$
	$M$	$m$	$s$	$s$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$tm$	$m$	$m$	$tm$	$m$	$m$
	$P$	$m$	$s$	$s$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$tm$	$m$	$s$	$tm$	$m$	$s$
$B$	$L$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$m$	$m$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$
	$M$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$s$	$s$	$tm$	$m$	$m$	$tm$	$m$	$m$
	$P$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$s$	$s$	$tm$	$m$	$s$	$tm$	$m$	$s$
$G$	$L$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$m$	$m$	$m$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$
	$M$	$tm$	$m$	$m$	$tm$	$m$	$m$	$m$	$s$	$s$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$
	$P$	$tm$	$m$	$s$	$tm$	$m$	$s$	$m$	$s$	$s$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$
$D$	$L$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$tm$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$m$	$m$
	$M$	$tm$	$m$	$m$	$tm$	$m$	$m$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$s$	$s$
	$P$	$tm$	$m$	$s$	$tm$	$m$	$s$	$\neg s$	$\neg s$	$\neg s$	$m$	$s$	$s$

dans des directions opposées alors la relation n'est probablement plus du tout satisfaite et ne doit pas être prise en compte.

Comme pour les contraintes  $C_{Tumeur,A}^{affecte}$  et  $C_{Tumeur,A}^{\neg affecte}$  nous devons alors pendant le processus de propagation déterminer si les contraintes  $C_{Tumeur,A}^{refoule(dir\ dist)}$  sont nécessairement satisfaites ou invalides. Pour cela nous pouvons nous reposer sur des règles du type :

$$C_{Tumeur,A}^{dir\ N} \wedge C_{Tumeur,A}^{dist\ L} \Rightarrow C_{Tumeur,A}^{refoule(N\ P)} \vee C_{Tumeur,A}^{refoule(00)}$$

où  $C_{Tumeur,A}^{dir\ N}$  est une contrainte directionnelle dont la direction vaut  $N$  et  $C_{Tumeur,A}^{dist\ L}$  est une contrainte de distance associée à la valeur symbolique  $L$ . En d'autres termes si  $A$  se trouve dans la direction  $N$  relativement à la tumeur et qu'elle se trouve loin de la tumeur, alors nous considérons que  $A$  devrait subir un refoulement dans la direction  $N$  de faible amplitude ou ne pas être refoulée. Les relations  $C_{Tumeur,A}^{dir\ N}$  et  $C_{Tumeur,A}^{dist\ L}$  ne font pas partie du modèle et ne sont donc pas connues. Mais en supposant que nous disposons d'une segmentation préliminaire de la tumeur, nous pourrions en fonction du domaine de  $A$  déterminer si ces contraintes sont nécessairement satisfaites.

L'adaptation du processus de reconnaissance au traitement de cas présentant des tumeurs induisant un effet de masse semble donc réalisable. Au-delà de cette application, cela illustre la souplesse du modèle structurel. Cette représentation compacte et facilement interprétable peut en effet être enrichie ou modifiée simplement, cette tâche étant nettement plus délicate à réaliser pour un modèle statistique par exemple.





## Chapitre 7

# Conclusion

### 7.1 Récapitulatif des contributions

Cette thèse propose une contribution au problème de segmentation et de reconnaissance d'images fortement structurées telles que les IRM cérébrales. Pour cela nous utilisons un modèle représentant l'agencement spatial de structures anatomiques sous forme de relations spatiales et leur apparence par un *a priori* sur leur contraste. Le processus de reconnaissance vise alors à associer à chaque structure du modèle une région de l'espace satisfaisant l'ensemble des relations de ce modèle. Nous résolvons ce problème dans le formalisme des réseaux de contraintes. Pour cela nous dérivons un ensemble de contraintes des relations spatiales ou radiométriques du modèle en utilisant des représentations floues de celles-ci. Pour obtenir la contrainte liée à un *a priori* de connexité nous avons ainsi étudié plus en détails la notion de connexité des ensembles flous.

Nous détaillons ci-dessous ces trois contributions : (i) la représentation structurelle de l'anatomie, (ii) le processus de reconnaissance reposant sur ce modèle et (iii) le travail portant sur la connexité des ensembles flous.

#### 7.1.1 Représentation structurelle de l'anatomie

Notre travail repose sur un modèle structurel de l'anatomie. Une première esquisse de ce modèle avait été proposée dans [Colliot, 2003]. Nous l'avons mis en œuvre et enrichi. Nous avons alors réalisé une structuration de l'anatomie d'un patient spécifique autour de ce modèle (cf annexe B). A partir de données radiologiques annotées nous définissons ainsi une représentation spécifique au patient. A des fins pédagogiques nous avons alors développé un outil de navigation dans les modèles individualisés de l'anatomie. Celui-ci nous permet d'explorer conjointement la représentation sous forme de graphe et les données radiologiques annotées du patient. Dans ce cadre nous enrichissons actuellement le graphe de connaissance pour y intégrer les principaux réseaux fonctionnels.

#### 7.1.2 Processus de reconnaissance

Ce modèle de l'anatomie est d'autre part utilisé pour réaliser la segmentation et la reconnaissance d'IRM cérébrales. Nous voulons ainsi associer à chaque structure anatomique recherchée une région de l'espace satisfaisant à l'ensemble des relations du modèle. Nous représentons ce problème par un réseau de contraintes où les variables sont les régions associées aux structures anatomiques recherchées et les contraintes sont dérivées du modèle structurel de l'anatomie. Une solution ne pouvant pas être obtenue directement pour des

---

raisons de complexité, nous avons alors proposé un processus en deux étapes pour obtenir une solution approximative.

Premièrement un algorithme de propagation de contraintes réduit progressivement les domaines de définition de l'ensemble des variables du problème en supprimant de nombreuses valeurs qui ne peuvent pas satisfaire les contraintes et donc pas être solution du problème. Cela est réalisé par la mise à jour des bornes des domaines (puisque une manipulation directe de ces domaines n'est pas possible). L'algorithme de propagation consiste ainsi à choisir séquentiellement une contrainte et à appliquer le propagateur associé, c'est-à-dire l'opérateur réduisant les domaines en supprimant les valeurs inconsistantes avec la contrainte. Pour accélérer la convergence de cet algorithme nous avons alors proposé d'ordonner l'application des propagateurs en estimant la réduction potentiellement réalisée, le coût calculatoire des propagateurs et le changement des domaines depuis leur dernier calcul. Cela nous permet d'obtenir une décroissance nettement plus rapide des domaines et permet ainsi d'accroître l'efficacité du processus.

Les domaines sont considérablement réduits par ce processus. Mais ils sont toujours trop grands pour qu'un algorithme de recherche exact (tel que le retour sur trace) puisse être appliqué. Nous avons donc proposé d'extraire une solution approximative (au sens des contraintes du modèle) par l'extraction, pour chaque structure recherchée, d'une surface minimale définie à partir des domaines obtenus pour cette structure et les structures adjacentes. Ce processus d'extraction obtient efficacement une région dont la frontière est cohérente avec les domaines des structures voisines.

Nous avons alors appliqué l'ensemble de ce processus à la reconnaissance d'IRM cérébrales de sujets sains mais aussi de patients présentant une tumeur cérébrale. Nous avons ainsi réalisé l'extraction des structures internes du cerveau tout d'abord dans une coupe particulière (pour laquelle nous avons construit une base d'apprentissage) afin de valider la méthode proposée. Le processus a ensuite été testé sur le volume complet. Pour traiter les cas pathologiques nous avons alors proposé une adaptation du processus de reconnaissance. En effet le modèle de l'anatomie ne correspond plus dans ce cas à l'image à reconnaître. La tâche à réaliser est donc double dans ce cas. Nous devons à la fois réaliser la reconnaissance des structures anatomiques normales dans l'image et obtenir le modèle spécifique au patient. Pour simplifier le problème nous nous sommes restreint à des tumeurs peu refoulantes. Dans ce cas le modèle spécifique à un patient peut être obtenu par une transformation relativement simple du modèle générique. Nous avons donc considéré l'ensemble de tous les modèles spécifiques possibles et nous avons proposé un processus de propagations de contraintes qui à la fois réduit les domaines des variables spatiales et supprime des hypothèses incohérentes sur le modèle spécifique. Nous réalisons ainsi conjointement la reconnaissance et l'obtention d'un modèle spécifique au patient.

### 7.1.3 Connexité des ensembles flous

Pour représenter la contrainte liée à un *a priori* de connexité et définir le propagateur associé, nous avons été amenés à traiter la notion de connexité des ensembles flous. À partir des définitions existantes, nous avons proposé la définition d'un degré de connexité des ensembles flous nous permettant d'introduire un degré de tolérance dans la modélisation de la contrainte. Nous avons montré que cette notion de connexité est représentée de façon appropriée par une hyperconnexion et qu'elle présente de bonnes propriétés notamment en termes de régularité. Nous avons aussi proposé une méthode d'extraction des composantes connexes relatives à cette définition. Cela nous permet alors de calculer efficacement les filtres connexes intervenant dans la définition des propagateurs associés à la contrainte de

---

connexité.

## 7.2 Perspectives

### 7.2.1 Optimisation du processus de propagation

Malgré les optimisations proposées, le processus de propagation de contraintes reste coûteux et de nombreuses possibilités d'optimisation restent à explorer. Premièrement des réductions de complexité importantes semblent possibles pour de nombreux propagateurs dont le coût calculatoire reste prohibitif. Le calcul des dilatations utilisées dans les propagateurs des contraintes de direction et de distance pourrait notamment être optimisé.

Ensuite le processus de propagation se poursuit jusqu'à convergence. Or, après une phase de décroissance rapide des domaines, le processus converge lentement. Cette phase de convergence lente est très coûteuse pour une réduction de domaines limitée. Elle pourrait donc être évitée. Pour cela des critères robustes permettant de qualifier cet état de quasi-convergence pourraient être proposés.

Enfin nous réalisons la propagation pour l'ensemble des structures du modèle. Or nous ne sommes pas toujours intéressés par l'extraction de l'ensemble de ces structures. En orientant le processus de propagation vers l'extraction d'un sous-ensemble de structures nous pourrions éviter la réduction inutile de nombreux domaines. Cela pourrait être réalisé en adaptant les indices proposés dans le chapitre 4. La priorité d'une contrainte ne serait plus liée à l'estimation de la réduction de domaine que la contrainte peut réaliser, mais à la réduction des domaines des structures cibles qui pourrait être obtenue à terme. Par exemple supposons que nous voulions extraire une structure  $A$ , qu'une autre structure  $B$  présente un domaine large et qu'une contrainte entre  $B$  et  $A$  permette de réduire le domaine de  $A$  si le domaine de  $B$  a été suffisamment réduit. Toute contrainte permettant de réduire  $A$  présente dans ce cas un intérêt, mais si aucune contrainte ne le permet toute contrainte permettant de réduire  $B$  devient alors intéressante puisque cette réduction peut alors permettre de réduire  $A$ .

### 7.2.2 Vers un réseau plus contraint

Nous avons utilisé ici un nombre restreint de types de relations. Nous obtenons un réseau assez contraint pour réaliser la reconnaissance des structures internes mais les résultats obtenus pourraient être améliorés par l'utilisation d'un réseau plus contraint. Nous pourrions ainsi utiliser d'autres contraintes spatiales ou une représentation plus fine de l'*a priori* radiométrique intégrant un modèle de la chaîne d'acquisition. L'intégration de nouvelles contraintes pourrait ainsi non seulement permettre de réduire certaines ambiguïtés mais aussi d'accroître les performances du processus de reconnaissance.

L'intégration de contraintes sur la forme des objets recherchés devrait ainsi être envisagée. Ce type d'*a priori* permettrait d'obtenir un problème beaucoup mieux contraint. Cependant cette intégration semble délicate et nécessiterait probablement un changement du mode de représentation des régions. Une représentation paramétrée serait en effet préférable à la représentation sous forme de tableau de voxels utilisée.

### 7.2.3 Représentation des variations importantes de l'anatomie

Actuellement le modèle est représenté par un ensemble de contraintes qui doivent être satisfaites par l'ensemble des cas à reconnaître. Cependant dans certains cas l'agencement spatial des structures peut présenter des variations connues qu'il pourrait être intéressant

---

de prendre en compte. Plutôt qu'une base de connaissances définie comme une conjonction de contraintes, nous pourrions envisager de prendre en compte des formulations disjonctives comme  $A$  est à droite de  $B$  et  $B$  est à droite de  $C$  ou  $C$  est à droite de  $B$  et  $B$  est à droite de  $A$ . Cela présenterait tout d'abord un intérêt pédagogique puisque nous pourrions alors simplement mettre en évidence dans l'outil navigation développé les principales variations normales de l'anatomie. Par ailleurs nous obtiendrions de cette façon un réseau plus contraint permettant la reconnaissance de cas plus complexes.

#### 7.2.4 Reconnaissance de cas pathologiques

Nous avons proposé une première esquisse de la prise en compte de pathologies dans le processus de reconnaissance. Nous nous sommes pour cela intéressés à des tumeurs peu fongiques. Cette approche doit tout d'abord être étendue à une classe plus large de tumeurs (par exemple par l'approche suggérée dans la section 6.4.3) et éventuellement à d'autres pathologies. Ensuite la segmentation et la reconnaissance de la pathologie pourrait être intégrée dans le processus de reconnaissance. En effet cette tâche est actuellement réalisée par un processus externe mais pourrait bénéficier de l'information accumulée progressivement pendant le processus de propagation.

#### 7.2.5 Prise en compte de contraintes floues

Dans ce travail nous avons considéré une représentation floue des régions mais une définition binaire des contraintes. La prise en compte de contraintes floues [Fargier, 1994, Dubois et al., 1996] rendrait le processus de reconnaissance plus robuste. Cela permettrait notamment la reconnaissance de cas présentant des déviations plus importantes par rapport à l'anatomie standard. Une première approche consisterait à combiner une représentation binaire des régions à une définition floue des contraintes. Dans un second temps la combinaison de contraintes floues à une représentation floue des régions pourrait être envisagée en représentant de façon appropriée l'appartenance partielle aux frontières de l'objet d'une part et la satisfaction partielle des relations d'autre part.

### 7.3 Publications

Les travaux réalisés ont fait l'objet de publications dans plusieurs conférences ainsi que dans une revue internationale. Nous récapitulons ci-dessous l'ensemble des publications que nous classons suivant les principales thématiques abordées. Les travaux portant sur la connexité des ensembles flous ont été publiés dans :

- **O. Nempont**, J. Atif, E. Angelini and I. Bloch. A new fuzzy connectivity measure for fuzzy sets and associated fuzzy attribute openings. In *Journal of Mathematical Imaging and Vision (JMIV)*, 2009 [Nempont et al., 2009],
- **O. Nempont**, J. Atif, E. Angelini and I. Bloch. Fuzzy Attribute Openings Based on a New Fuzzy Connectivity Class. Application to Structural Recognition in Images. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU)*, Malaga, Spain, 2008 [Nempont et al., 2008c],
- **O. Nempont**, J. Atif, E. Angelini and I. Bloch. A New Fuzzy Connectivity Class. Application to Structural Recognition in Images. In *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*, Lyon, France, 2008 [Nempont et al., 2008a],

- 
- G. Palma, **O. Nempont**, I. Bloch et S. Muller. Extraction de « zones plates floues » dans des images de quantités floues. Dans Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), Lens, France, 2008 [Palma et al., 2008].

Nos travaux portant sur la segmentation et la reconnaissance ont fait l'objet de deux publications, une portant sur le processus de propagation et l'autre sur le processus de segmentation finale décrit dans le chapitre 5 :

- **O. Nempont**, J. Atif, E. Angelini and I. Bloch. Structure segmentation and recognition in images guided by structural constraint propagation. In European Conference on Artificial Intelligence (ECAI), Patras, Grece, 2008 [Nempont et al., 2008b].
- **O. Nempont**, J. Atif, E. Angelini and I. Bloch. Combining Radiometric and Spatial Structural Information in a New Metric for Minimal Surface Segmentation. In Information Processing in Medical Imaging (IPMI), pages 283-295, Kerkrade, The Netherlands, 2007 [Nempont et al., 2007].

Une publication porte sur la prise en compte de paysages flous pour contraindre l'évolution de modèles déformables géométriques :

- J. Atif, **O. Nempont**, O. Colliot, E. Angelini, and I. Bloch. Level Set Deformable Models Constrained by Fuzzy Spatial Relation. In Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), pages 1534-1541, Paris, France, 2006 [Atif et al., 2006b].

Finalement la structuration de la base de connaissance et de son instanciation pour des patients normaux ou pathologiques a été décrite dans :

- J. Atif, C. Hudelot, **O. Nempont**, N. Richard, B. Batrancourt, E. Angelini and I. Bloch. GRAFIP : A Framework for the Representation of Healthy and Pathological Cerebral Information. In International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI), pages 205-208, Washington DC, USA, 2007 [Atif et al., 2007b],
  - C. Hudelot, J. Atif, **O. Nempont**, B. Batrancourt, E. Angelini, I. Bloch. GRAFIP : a Framework for the Representation of Healthy and Pathological Anatomical and Functional Cerebral Information. In Human Brain Mapping (HBM), Florence, Italy, 2006 [Hudelot et al., 2006],
  - B. Batrancourt, J. Atif, **O. Nempont**, E. Angelini and I. Bloch. Integrating Information from Pathological Brain MRI into an Anatomico-Functional Model. In 24th IASTED International Multi-Conference on Biomedical Engineering (BIOMED), pages 236-241, Innsbruck, Austria, 2006 [Batrancourt et al., 2006].
-



## Annexe A

# Notations

### A.1 Tables de notations

Ensembles flous	
$X$	domaine discret (i.e. un sous-ensemble borné de $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$ )
$c_d$	connexité discrète sur $X$ (par exemple la 4-connexité sur $\mathbb{Z}^2$ )
$\mu : X \rightarrow [0, 1]$	fonction d'appartenance représentant un ensemble flou sur $X$
$(\mu)_\alpha$	$\alpha$ -coupe de $\mu$ (seuillage de $\mu$ au niveau $\alpha$ )
$\mathcal{F}$	ensemble des ensembles flous sur $X$
$\mu_1 \leq \mu_2$	relation d'ordre partielle sur $\mathcal{F}$ satisfaite si $\forall x \in X, \mu_1(x) \leq \mu_2(x)$
$(\mathcal{F}, \leq)$	treillis des ensembles flous sur $X$
$\wedge$	infimum du treillis $(\mathcal{F}, \leq)$ : $\forall x \in X, (\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x) = \inf_{i \in I} (\mu_i(x))$
$\vee$	supremum du treillis $(\mathcal{F}, \leq)$ : $\forall x \in X, (\bigvee_{i \in I} \mu_i)(x) = \sup_{i \in I} (\mu_i(x))$
$0_{\mathcal{F}}$	plus petit élément de $\mathcal{F}$ (i.e. $\forall x \in X, 0_{\mathcal{F}}(x) = 0$ )
$1_{\mathcal{F}}$	plus grand élément de $\mathcal{F}$ (i.e. $\forall x \in X, 1_{\mathcal{F}}(x) = 1$ )
$\delta_x^t(y)$	$\delta_x^t(y) = t$ si $y = x$ et $\delta_x^t(y) = 0$ sinon
$\mathcal{H}^1$	l'ensemble des ensembles flous connexes selon la définition 3.5
$\mathcal{H}_\tau^1$	l'ensemble des ensembles flous connexes selon l'équation 3.3
$\mathcal{H}_\tau^2$	l'ensemble des ensembles flous connexes selon la définition 3.8
$\mathcal{H}(\mu)$	Composantes hyperconnexes de $\mu$ selon l'hyperconnexion $\mathcal{H}$
$\perp^1, \perp_\tau^1, \perp_\tau^2$	Mesures de recouvrement associées à $\mathcal{H}^1, \mathcal{H}_\tau^1$ et $\mathcal{H}_\tau^2$
$c_\mu^1(x, y)$	Degré de connexité point à point relativement à un ensemble flou $\mu$ (cf définition 3.2)
$c^1(\mu)$	Degré de connexité de $\mu$ défini par l'équation 3.4
$c^2(\mu)$	Degré de connexité de $\mu$ défini par l'équation 3.7



## Réseaux de contraintes

$N = \langle \mathcal{X}, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$	un réseau de contraintes avec : $\mathcal{X}$ les variables $\mathcal{D}$ les domaines associés aux variables $\mathcal{X}$ $\mathcal{C}$ l'ensemble des contraintes portant sur les variables de $\mathcal{X}$
$\mathcal{P}_N$	ensemble de toutes les contractions de $N$ (cf définition 2.7)
$\mathcal{P}_N^{sol}$	ensemble des contractions préservant les solutions
$\mathcal{P}_{ND}$	ensemble des contractions de domaines (cf définition 2.8)
$\mathcal{P}_{ND}^{sol}$	sous-ensemble de $\mathcal{P}_{ND}$ préservant les solutions
$f : \mathcal{P}_{ND} \rightarrow \mathcal{P}_{ND}$	règle de réduction de domaines (cf définition 2.10)
$f_C$	propagateur associé à la contrainte $C$ (i.e. règle de réduction de domaine ne dépendant que de $C$ ) noté : $\frac{\langle vars(C); \mathcal{D}; C \rangle}{\langle vars(C); \mathcal{D}'; C \rangle}$
variables spatiales :	
$A$	une variable prenant des valeurs dans $\mathcal{F}$
$\mathcal{D}(A)$	le domaine associé à $A$ : $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{F}$
$\underline{A}$	la borne inférieure de $\mathcal{D}(A)$ (i.e. $\bigwedge \{\mu \in \mathcal{D}(A)\}$ )
$\overline{A}$	la borne supérieure de $\mathcal{D}(A)$ (i.e. $\bigvee \{\mu \in \mathcal{D}(A)\}$ )
$(\underline{A}, \overline{A})$	le domaine de l'ensemble flou $A$ représenté par deux bornes

## A.2 Définitions relatives aux ensembles flous

Soit  $X$  un ensemble quelconque (dans notre cas,  $X$  désigne un sous-ensemble borné de  $\mathbb{Z}^n$  où  $n$  prend les valeurs 2 ou 3). Tout sous-ensemble  $A$  de  $X$  peut être caractérisé par une fonction caractéristique  $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  qui spécifie de façon binaire l'appartenance de chaque point de  $X$  au sous-ensemble  $A$ . De même un sous-ensemble flou sur  $X$  est caractérisé par une fonction d'appartenance  $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ . L'appartenance de tout point  $x$  au sous-ensemble flou  $\mu$  est ainsi caractérisé par le degré  $\mu(x)$  (ici compris entre 0 et 1). Nous notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des ensembles flous définis sur  $X$  dans  $[0, 1]$ .

Une  $\alpha$ -coupe d'un ensemble flou  $\mu$  est le sous-ensemble de  $X$  des points de degré d'appartenance supérieur ou égal à  $\alpha$  :  $\mu_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$ . Un ensemble flou  $\mu$  est totalement caractérisé par ses  $\alpha$ -coupes.

**Treillis des ensembles flous** Lorsqu'il est muni de la relation d'ordre partiel  $\leq$  satisfaite si  $\forall x \in X, \mu(x) \leq \nu(x)$ ,  $\mathcal{F}$  est un treillis complet. Le supremum  $\vee$  et l'infimum  $\wedge$  sur ce treillis sont définis respectivement comme  $\forall x \in X, (\bigvee_{i \in I} \mu_i)(x) = \sup_{i \in I} (\mu_i(x))$  et  $\forall x \in X, (\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x) = \inf_{i \in I} (\mu_i(x))$ . Le plus petit et le plus grand élément de ce treillis sont respectivement notés  $0_{\mathcal{F}}$  et  $1_{\mathcal{F}}$  et sont les ensembles flous dont la fonction d'appartenance vaut respectivement 0 et 1 partout.

Une famille d'ensembles flous  $\{\mu_i\}$  est sup-génératrice dans  $\mathcal{F}$  si  $\forall \mu \in \mathcal{F}, \mu = \bigvee \{\mu_i \mid \mu_i \leq \mu\}$ . La famille  $\{\delta_{x,\alpha} \mid x \in X, \alpha \in [0, 1]\}$  (où  $\delta_{x,\alpha}(y) = \alpha$  si  $y = x$  et 0 sinon) vérifie cette propriété.

Par ailleurs dans le chapitre 3 nous avons donné plusieurs propriétés de régularité en munissant  $\mathcal{F}$  de la métrique :  $d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B) = \sup_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$ . L'ensemble  $(\mathcal{F}, d_{\mathcal{F}})$  est un espace métrique.

**Intervalles d'ensembles flous** Dans la section 2.2.2, nous avons défini et manipulé des domaines qui sont des sous-ensembles de  $\mathcal{F}$  et nous avons introduit notamment une représentation sous forme d'intervalles de ces domaines.

**Définition A.1.** *Un sous-ensemble  $S$  de  $\mathcal{F}$  est convexe si  $\forall(\mu_1, \mu_2) \in S^2, \forall \nu \in \mathcal{F}, \mu_1 \leq \nu \leq \mu_2 \Rightarrow \nu \in S$ .*

**Définition A.2.** *Un intervalle  $(\mu_1, \mu_2)$  est l'ensemble  $\{\nu \in \mathcal{F} \mid \mu_1 \leq \nu \leq \mu_2\}$ .*

Les intervalles sont convexes.

**Définition A.3.** *Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathcal{F}$ , la fermeture convexe de  $S$  est définie suivant :  $\text{conv}(S) = (\bigwedge_{\mu \in S} \mu, \bigvee_{\mu \in S} \mu)$ .*

La fermeture convexe est :

- extensive ( $S \subseteq \text{conv}(S)$ ),
- idempotente ( $\text{conv}(S) = \text{conv}(\text{conv}(S))$ ),
- monotone ( $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow \text{conv}(S_1) \subseteq \text{conv}(S_2)$ ).

**Opérateurs de fusion [Bloch, 1996b]** Nous notons  $\top$  une t-norme et  $\perp$  une t-conorme.

Une t-norme est une fonction  $\top : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $\top$  est commutative :  $\forall(x, y) \in [0, 1]^2, \top(x, y) = \top(y, x)$ ,
- $\top$  est associative :  $\forall(x, y, z) \in [0, 1]^3, \top(\top(x, y), z) = \top(x, \top(y, z))$ ,
- 1 est l'élément neutre :  $\forall x \in [0, 1], \top(x, 1) = \top(1, x) = x$ ,
- $\top$  est croissante par rapport aux deux variables :  
 $\forall(x, x', y, y') \in [0, 1]^4, (x \leq x' \text{ et } y \leq y'), \top(x, y) \leq \top(x', y')$ .

A chaque t-norme  $\top$  est associée une t-conorme  $\perp$  (pour un opérateur de complémentarité  $c$  donné) :  $\forall(x, y) \in [0, 1]^2, \perp(x, y) = c(\top(c(x), c(y)))$ . Une t-conorme est donc une fonction  $\perp : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telle que :

- $\perp$  est commutative :  $\forall(x, y) \in [0, 1]^2, \perp(x, y) = \perp(y, x)$ ,
- $\perp$  est associative :  $\forall(x, y, z) \in [0, 1]^3, \perp(\perp(x, y), z) = \perp(x, \perp(y, z))$ ,
- 0 est l'élément neutre :  $\forall x \in [0, 1], \perp(x, 0) = \perp(0, x) = x$ ,
- $\perp$  est croissante par rapport aux deux variables :  
 $\forall(x, x', y, y') \in [0, 1]^4, (x \leq x' \text{ et } y \leq y'), \perp(x, y) \leq \perp(x', y')$ .

Nous donnons dans la table A.1 plusieurs t-normes et t-conormes usuelles.

TABLE A.1 – Exemples de t-normes et de t-conormes associées.

$\top_{\min}$	$\min(a, b)$	$\perp_{\max}$	$\max(a, b)$
$\top_{\text{prod}}$	$a \times b$	$\perp_{\text{sommealg}}$	$a + b - ab$
$\top_{\text{Luka}}$	$\max(0, a + b - 1)$	$\perp_{\text{Luka}}$	$\min(1, a + b)$
$\top_{\text{drast}}$	$\begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\perp_{\text{drast}}$	$\begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$



## Annexe B

# Représentation GRAFIP et outil de navigation dans l'anatomie

### Introduction

Le processus de propagation développé dans cette thèse repose sur une base de connaissances que nous avons brièvement décrite dans la section 1.4.1. Celle-ci incorpore non seulement une connaissance anatomique dont nous tirons parti pour réaliser la reconnaissance mais aussi une connaissance fonctionnelle et pathologique. Cette représentation symbolique représente de façon compacte certaines caractéristiques essentielles d'une anatomie et peut être le fondement d'une représentation structurée de l'anatomie spécifique de sujets.

En collaboration avec d'autres membres de l'équipe, nous avons proposé une telle représentation sous l'acronyme de GRAFIP pour graphe de représentation anatomique et fonctionnelle individualisée intégrant les pathologies [Atif et al., 2007b]. Les données radiologiques d'un patient qui ont été annotées sont structurées autour d'une représentation graphique spécifique au patient. Lorsqu'il s'agit d'un sujet normal cette représentation peut être directement dérivée de la base de connaissances générique. Lorsque le sujet présente une pathologie telle qu'une tumeur le modèle générique doit être adapté pour représenter correctement l'anatomie du patient.

Dans cette annexe nous décrivons la structure de graphe utilisée pour représenter la base de connaissances et la représentation GRAFIP de l'anatomie d'un patient. De plus nous avons développé pour l'aide à l'enseignement de la neuro-anatomie un outil de navigation dans ces représentations. Celui-ci permet d'explorer simultanément les images médicales annotées d'un sujet et la représentation de son anatomie sous forme de graphe.

Dans la section B.1 nous décrivons la structure de graphe utilisée pour représenter l'anatomie générique ainsi que la représentation GRAFIP. Nous détaillons alors dans la section B.2 le format informatique de leur sauvegarde. Nous illustrons ensuite dans la section B.3 l'outil de navigation mis en œuvre.

## B.1 Représentation GRAFIP

### B.1.1 Base de connaissances générique

Sur la base des travaux réalisés dans [Colliot, 2003], nous avons construit une base de connaissances que nous avons brièvement décrite dans la section 1.4.1. Cette base comprend notamment une nomenclature anatomique représentée schématiquement dans la figure 1.10, des descriptions textuelles des structures anatomiques et une représentation de

---

leur agencement spatial sous forme de relations spatiales entre les structures. Cet ensemble forme la connaissance anatomique dont une description détaillée est réalisée dans [Colliot, 2003]. Brièvement l'ensemble des structures anatomiques sont représentées sous la forme de nœuds anatomiques. Ces nœuds anatomiques comportent une information intrinsèque (les descriptions textuelles de la structure anatomique par exemple) et sont liés par des relations spatiales.

Cette base de connaissances anatomiques décrit l'agencement spatial des structures anatomiques mais ne comporte pas d'information sur leur apparence dans les données radiologiques. Celle-ci dépend en général de caractéristiques intrinsèques des tissus qui la composent. Par exemple l'intensité d'une structure dans un volume CT dépend de la radiodensité des tissus qui la composent (coefficient d'atténuation quantifié sur l'échelle d'Hounsfield). De même en IRM l'intensité observée dépend notamment des temps de relaxation  $T1$  et  $T2$  de ses tissus. Ces valeurs sont relativement stables d'un individu à l'autre pour un champ magnétique  $B_0$  donné. Des plages de valeurs pour les principaux tissus et fluides du corps humain sont ainsi disponibles dans la littérature. Pour représenter cette connaissance nous créons donc une base de connaissances biologiques comprenant les principaux tissus et fluides dont nous donnons un ensemble de propriétés intrinsèques (notamment les plages de valeurs de  $T1$  et de  $T2$  en fonction du champ magnétique et de la densité de proton). Les nœuds représentant des tissus sont liés à des nœuds anatomiques par des liens de type composition. Un nœud anatomique peut ainsi être lié à un ou plusieurs nœuds tissulaires. Les nœuds représentant les ventricules latéraux sont par exemple liés au nœud représentant le liquide céphalo-rachidien par une relation de type composition.

Une base de connaissances oncologiques, décrivant les types de tumeurs cérébrales les plus répandues, a par ailleurs été développée dans [Khotanlou, 2008]. Celle-ci comporte une description de chaque type de tumeur et en donne des propriétés telles que le grade WHO, l'apparence dans les examens IRM, leur localisation (certaines tumeurs n'apparaissent par exemple que dans le tronc cérébral), la présence d'œdème ou de nécrose, ...

Finalement nous enrichissons actuellement la base d'une connaissance fonctionnelle, principalement pour une utilisation comme support pédagogique. Nous introduisons ainsi les principaux réseaux fonctionnels connus tels que la motricité ou la vision en lien avec la représentation anatomique.

### B.1.2 Représentation GRAFIP

La base de connaissances générique représente une anatomie standard. Elle en offre une description symbolique qui peut être manipulée et interprétée aisément. Elle peut donc être l'ossature d'une représentation spécifique de l'anatomie d'un sujet et permettre la structuration et la manipulation de l'ensemble des données radiologiques associées à ce sujet.

La représentation individualisée GRAFIP comprend d'une part les données radiologiques annotées d'un sujet et d'autre part la représentation symbolique de l'anatomie sous forme de graphe. Comme nous l'illustrons dans la figure B.1, les données radiologiques sont organisées, de façon standard, en études. Chaque étude regroupe un ensemble d'examens qui ont été réalisés dans un intervalle de temps réduit. Une étude peut ainsi contenir plusieurs examens IRM acquis par des protocoles différents (offrant ainsi des contrastes différents entre les structures) comme c'est le cas dans la figure B.1. Elle peut aussi contenir des examens provenant de modalités différentes telles que PET et CT. Nous supposons ici qu'une étude comporte uniquement des examens imageant la même partie de l'anatomie en 3D. Nous recalons ces données dans un référentiel commun. Les différents volumes

---

représentant plusieurs vues de la même scène, une seule annotation est donc associée à l'ensemble de ces données.

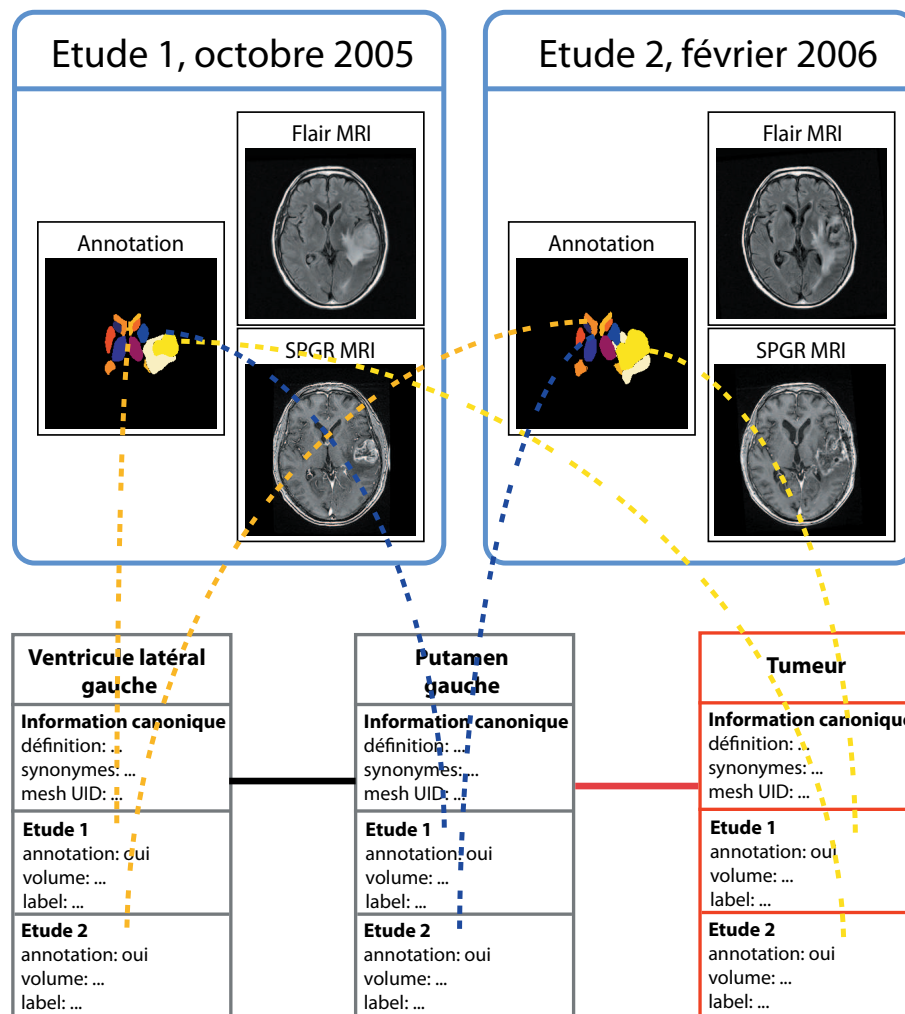


FIGURE B.1 – Représentation GRAFIP de l'anatomie d'un sujet. Deux études sont présentées. Chacune comporte deux examens IRM ainsi qu'une annotation de ces données. Elles sont complétées par une représentation symbolique (sous forme de graphe) de l'anatomie imagée. Chaque structure est représentée par un nœud qui d'une part contient une information générique et qui d'autre part est en lien avec les annotations de cette structure dans chaque étude et donne des propriétés.

Les études contenant les données radiologiques et les annotations sont alors associées à une représentation symbolique de l'anatomie du sujet sous forme de graphe. Cette représentation est dérivée de la base de connaissances générique. Elle comprend ainsi l'ensemble des nœuds anatomiques du modèle (tels que le putamen gauche ou le ventricule latéral gauche). Chacun de ces nœuds comprend maintenant non seulement la connaissance générique (regroupée dans un ensemble nommé information canonique), mais aussi des informations spécifiques à l'état de la structure (telles que le volume) dans chaque étude (si la structure a été annotée). Les relations entre les structures anatomiques normales sont simplement obtenues à partir du modèle générique.

Si le sujet présente une pathologie telle qu'une tumeur cérébrale, le GRAFIP comporte en plus des nœuds spécifiques tel qu'un nœud représentant la tumeur et un nœud représen-

tant l'œdème dans l'exemple de la figure B.1. Ces nœuds sont en lien avec les nœuds associés aux structures anatomiques normales (cf section 6.4) pour représenter par exemple la destruction ou l'infiltration d'une structure par la pathologie. L'obtention de ces liens, et plus généralement l'obtention du graphe spécifique, est un problème complexe. Actuellement nous réalisons cette tâche manuellement ce qui est fastidieux. A terme cela pourrait être en partie réalisé automatiquement par exemple en développant la méthodologie proposée dans la section 6.4.

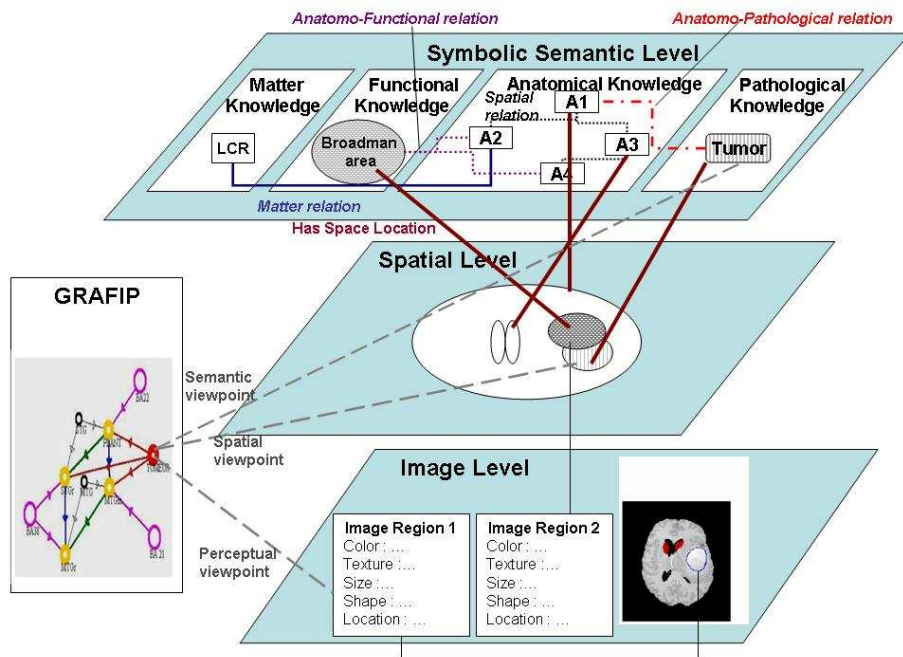


FIGURE B.2 – Représentation GRAFIP de l'anatomie d'un sujet. Figure extraite de [Hudelot et al., 2006].

La représentation GRAFIP offre ainsi un cadre riche de description de l'anatomie d'un sujet et de structuration des données radiologiques. Cette représentation présente 3 niveaux d'interprétation comme nous l'illustrons dans la figure B.2. Chaque structure anatomique peut ainsi être perçue selon :

- un point de vue perceptuel (son apparence dans les données radiologiques),
- un point de vue spatial (la région spatiale qu'elle occupe),
- un point de vue sémantique (sa signification médicale et ses liens avec les autres structures anatomiques).

## B.2 Description détaillée du format de stockage

Nous sauvegardons les représentations GRAFIP de sujets sous forme de fichiers XML. Dans cette section nous décrivons la structure de données mise en œuvre en nous appuyant sur un cas qui comporte une pathologie et plusieurs études contenant chacune plusieurs examens. La base de connaissances est sauvegardée similairement en ne préservant que la connaissance canonique.

## B.2.1 Structure générale

Nous organisons la sauvegarde de la façon suivante (même si cette organisation n'est pas figée). Le répertoire de base du GRAFIP contient le fichier XML représentant le graphe et un répertoire par étude. L'exemple sur lequel nous nous appuyons dans cette section est ainsi associé à l'arborescence suivante :

### ExempleGRAFIP

```

- grafip.xml           -> sauvegarde du graphe
- study_29_11_2005    -> répertoire contenant la première étude
  - Original          -> répertoire contenant les données radiologiques
    - Flair.xml       -> informations relatives à l'examen Flair
    - Flair.nii       -> examen IRM acquis par le protocole Flair
    - SPGR.xml        -> informations relatives à l'examen SPGR
    - SPGR.nii        -> examen IRM acquis par le protocole SPGR
  - Segmentations     -> répertoire contenant les annotations
    - segmentation.xml -> informations relatives aux annotations
    - segmentation.mhd -> en-tête associée au fichier segmentation.raw
    - segmentation.raw -> annotations sauvegardées sous forme d'image
- study_01_01_2006
  ...
- study_16_03_2006    -> répertoires contenant d'autres études
  ...
- study_01_07_2006
  ...

```

## B.2.2 Sauvegarde des études

Chaque étude contient un ensemble d'examens radiologiques et éventuellement une annotation. Ces éléments sont sauvegardés dans un répertoire spécifique (par exemple **study\_29\_11\_2005**) et seront référencés explicitement dans le fichier XML de description du graphe. Nous n'utilisons pas le format dicom (nous ne disposons pas des outils d'écriture nécessaires). Nous sauvegardons donc les données radiologiques au format *NifTI* (<http://nifti.nimh.nih.gov/>). Ce type de fichier possède une en-tête contenant uniquement des informations sur la géométrie de l'image. Pour préserver certaines informations disponibles (telles que le protocole d'acquisition utilisé, la date d'acquisition de l'examen ou l'étude à laquelle il appartient) nous joignons un fichier XML au fichier *NifTI*. Par exemple le fichier **SPGR.xml** associé au fichier **SPGR.nii** et appartenant au sous-répertoire de **study\_29\_11\_2005** est montré ci-dessous.

```

<image>                                     </dataspacing>
  <imageorigin>                             <dataorigin>
    Hopital Sainte-Anne                    <x>0</x>
  </imageorigin>                           <y>0</y>
  <imagename>SPGR</imagename>              <z>0</z>
  <imagecomments></imagecomments>         </dataorigin>
                                           <datasize>
<data>                                     <x>256</x>
  <dataspacing>                             <y>256</y>
  <x>0.9375</x>                             <z>228</z>
  <y>0.9375</y>                             </datasize>
  <z>0.7</z>                               <file>

```



```

    <datatype>NifTI</datatype>                1.5
    <datapath>./</datapath>                  </MagneticFieldStrength>
    <datafilename>SPGR.nii</datafilename>    <FlipAngle>25</FlipAngle>
    <datapixeltype>US</datapixeltype>        <TE>2.1</TE>
    </file>                                    <TR>12</TR>
</data>                                       </protocolparameters>
</modality>
<imageacquisitiondate>
  <adsecond>34</adsecond>                    <study>
  <adminute>51</adminute>                    <studyid>5</studyid>
  <adhour>23</adhour>                        <studyname>Standard</studyname>
  <adday>30</adday>                          <studyreason></studyreason>
  <admonth>10</admonth>                     <studycomments></studycomments>
  <adyear>2005</adyear>                     <studydate>
</imageacquisitiondate>                       <studysecond>0</studysecond>
                                              <studyminute>0</studyminute>
                                              <studyhour>0</studyhour>
                                              <studyday>29</studyday>
                                              <studymonth>10</studymonth>
                                              <studyyear>2005</studyyear>
<modality type="GradientRecall">
  <modalitytype>MR</modalitytype>
  <protocoltype>
    GradientRecall
  </protocoltype>
  <protocolparameters>
    <MagneticFieldStrength>
    </study>
  </modality>
  </image>

```

Les trois premiers éléments (**imageorigin**, **imagenname**, **imagecomments**) représentent respectivement le lieu (ou la personne) ayant généré ces données, un nom pour cet examen et un commentaire sur celui-ci. Le champs **data** contient des informations sur le volume de données et un lien vers le ou les fichiers contenant les données. Dans le cas présenté nous pointons vers le fichier *NifTI SPGR.nii* qui se trouve dans le même répertoire que le fichier XML. Si les données sont sauvegardées sous la forme d'un ensemble d'images 2D (c'est le cas lorsque nous préparons les données pour l'interface présentée à la fin de cette annexe) l'élément **file** prend la forme suivante :

```

<file>
  <datatype>Serie</datatype>
  <datapath>./Axial</datapath>
  <imagetype>png</imagetype>
  <datafilename>GR_*.png</datafilename>
  <indexmin>0</indexmin>
  <indexmax>227</indexmax>
  <orientation>axial</orientation>
  <datapixeltype>UC</datapixeltype>
</file>

```

Notons que l'élément **datapixeltype** représente le type de pixel des données et prend les valeurs **UC** (unsigned char), **C** (char), **US** (unsigned short), **S** (short), **UI** (unsigned int), **I** (int), **UL** (unsigned long), **L** (long), **F** (float), **D** (double) ou **SEG** (unsigned short vector).

L'élément suivant (**imageacquisitiondate**) donne la date d'acquisition de ces données. Le type de données (CT, IRM, Annotation,...) est alors renseigné par l'élément **modality**. Celui-ci peut présenter une structure et des attributs variables. L'exemple présenté correspond à un examen IRM acquis par une séquence d'écho de gradient. Les principaux paramètres de ce protocole d'acquisition (comme le temps d'écho *TE* ou le temps de répétition *TR*) sont donnés. Enfin les informations relatives à l'étude à laquelle cet examen appartient sont données dans l'élément **study**.

Les annotations sont sauvegardées de la même façon que les examens radiologiques : sous la forme d'un volume associé à un fichier de description au format XML. Deux modes de sauvegarde sont proposés : par valeur ou par bit. Dans le premier mode, chaque voxel du volume est associé à une structure unique (pour représenter des régions se recouvrant nous devons alors utiliser plusieurs volumes). Dans le second mode, chaque structure est associée à un bit donné. Par exemple dans une image 16 bits nous pouvons représenter 16 régions, une par bit. Cela nous permet de représenter dans une même image des régions se recouvrant. Ce volume est sauvegardé soit au format *NifTI*, soit au format *MetaImage* (<http://www.itk.org/Wiki/MetaIO/Documentation>) afin d'utiliser un type de pixel vectoriel (pour obtenir plus d'annotations dans le cas d'une représentation par bit). Ce fichier est alors associé à un fichier XML décrivant ces données. Nous montrons ci-dessous le fichier `segmentation.xml` du répertoire `study_29_11_2005`.

```

<image>
  <imageorigin>
    Télécom ParisTech
  </imageorigin>
  <imagename>Segmentation</imagename>
  <imagecomments>
    segmentation manuelle
  </imagecomments>
  <data>
    <dataspacing>
      <x>0.9375</x>
      <y>0.9375</y>
      <z>0.7</z>
    </dataspacing>
    <dataorigin>
      <x>0</x>
      <y>0</y>
      <z>0</z>
    </dataorigin>
    <datasize>
      <x>256</x>
      <y>256</y>
      <z>228</z>
    </datasize>
    <file>
      <datatype>NifTI</datatype>
      <datapath>.</datapath>
      <datafilename>
        segmentation.mhd
      </datafilename>
      <datapixeltype>SEG</datapixeltype>
    </file>
  </data>
  <imageacquisitiondate>
    <adsecond>41</adsecond>
    <adminute>46</adminute>
    <adhour>14</adhour>
    <adday>14</adday>
    <admonth>11</admonth>
    <adyear>2008</adyear>
  </imageacquisitiondate>
  <modality type="Label">
    <label label="CD1" value="0"/>
    <label label="CDr" value="1"/>
    <label label="LV1" value="2"/>
    <label label="LVr" value="3"/>
    <label label="Oedema" value="4"/>
    <label label="PU1" value="5"/>
    <label label="PUr" value="6"/>
    <label label="TH1" value="7"/>
    <label label="THr" value="8"/>
    <label label="Tumor" value="9"/>
    <savetype>bit</savetype>
  </modality>
  <study>
    <studyid>5</studyid>
    <studyname>Standard</studyname>
    <studyreason></studyreason>
    <studycomments></studycomments>
    <studydate>
      <studysecond>0</studysecond>
      <studymminute>0</studymminute>
      <studyhour>0</studyhour>
      <studyday>29</studyday>
      <studymmonth>10</studymmonth>
      <studyyyear>2005</studyyyear>
    </studydate>
  </study>
</image>

```

Notons que la partie relative à l'étude est similaire dans les fichiers `SPGR.xml` et `segmentation.xml`. La partie relative à la modalité contient ici une table d'association entre les valeurs de l'image et des identifiants de structures du graphe. L'élément `savetype` spécifie le type de sauvegarde (par bit ou par valeur).

### B.2.3 Fichier de description du graphe

Les données radiologiques et les annotations sont structurées autour de la représentation symbolique. Nous sauvegardons aussi celle-ci sous la forme d'un fichier XML (le fichier **grafip.xml** dans notre exemple). Ce fichier contient un élément **graph** qui comporte une description des études associées à ce cas, une description des nœuds du graphe et finalement une description de ses arcs :

```
<?xml version="1.0" encoding="iso-8859-1" standalone="no" ?>
<graph>
#description des études

#description des noeuds du graphe

#description des arcs du graphe
</graph>
```

#### Description des études

Le fichier débute donc par une description des études du GRAFIP. Chaque étude est associée à un élément **study** dont les attributs **id**, **date**, **name**, **comments** et **reason** contiennent respectivement un identifiant unique, la date à laquelle l'étude a été réalisée, un nom pour celle-ci, des commentaires et l'objectif de l'étude. Chaque élément **study** référence aussi l'ensemble des données radiologiques de l'étude et l'annotation si elle est disponible. L'élément **original\_image** renvoie ainsi au fichier de description XML d'un examen radiologique et l'élément **segmented\_image** renvoie au fichier XML associé à l'annotation. Dans notre exemple les quatre études sont décrites comme suit :

```
<study comments="" date="20051129" id="5" name="Standard" reason="">
  <original_image filename="./study_29_11_2005/Original/SPGR.xml"/>
  <original_image filename="./study_29_11_2005/Original/Flair.xml"/>
  <segmented_image filename="./study_29_11_2005/Segmentation/segmentation.xml"/>
</study>

<study comments="DDE OK" date="20060101" id="8" name="Standard" reason="">
  <original_image filename="./study_01_01_2006/Original/Flair.xml"/>
  <original_image filename="./study_01_01_2006/Original/SPGR.xml"/>
  <segmented_image filename="./study_01_01_2006/Segmentation/segmentation.xml"/>
</study>

<study comments="DDEOK " date="20060316" id="13" name="Standard" reason="">
  <original_image filename="./study_16_03_2006/Original/SPGR.xml"/>
  <original_image filename="./study_16_03_2006/Original/Flair.xml"/>
  <segmented_image filename="./study_16_03_2006/Segmentation/segmentation.xml"/>
</study>

<study comments="DDEOK " date="20060701" id="17" name="Standard" reason="">
  <original_image filename="./study_01_07_2006/Original/SPGR.xml"/>
  <original_image filename="./study_01_07_2006/Original/Flair.xml"/>
  <segmented_image filename="./study_01_07_2006/Segmentation/segmentation.xml"/>
</study>
```

Notons que le graphe de connaissance générique ne possède aucune étude.

## Description des nœuds

Nous décrivons ensuite les nœuds du graphe. Ces nœuds peuvent être anatomiques, tissulaires, fonctionnels ou pathologiques. Leur sauvegarde est structurée de la même façon. L'information générique issue du modèle est regroupée dans le sous-élément **nodeCanonicalInformation**. Des attributs spécifiques à l'anatomie du sujet dans chaque étude sont regroupés dans les sous-éléments **nodeInternalInformation** (l'attribut **studyId** précise l'étude correspondante).

Prenons pour exemple le nœud anatomique associé au noyau caudé gauche (pour lequel nous disposons d'une annotation dans chaque étude). Celui-ci est représenté dans le graphe de notre exemple suivant :

```
<node className="AnatomicalVertex" id="CD1">
  <nodeCanonicalInformation MeshUID="A08.186.211.730.885.105.487.550.184">
    <name lang="En">Caudate Nucleus(1)</name>
    <name lang="Fr">Noyau caudé(1)</name>
    <name lang="Lt">Nucleus caudatus(1)</name>
    <definition lang="En">
      Nucleus of brain which is an elongated crescent-shaped mass lying
      parallel and adjacent to the lateral ventricle throughout its extent.
    </definition>
    <definition lang="Fr">
      Le noyau caudé est un noyaux gris central, en forme de fer à cheval
      ouvert en avant. Il s'enroule autour du thalamus, repose sur sa face
      supérieure, puis descend en arrière du thalamus.
    </definition>
  </nodeCanonicalInformation>
  <nodeInternalInformation segmentation_index="1" segmented="true"
    studyId="5" volume="3586.2">
    <nodePosition position_mode="BOUNDINGBOX" x="138.75" x_max="134.063"
      x_min="121.875" y="111.563" y_max="153.75" y_min="116.25" z="64.4"
      z_max="100.1" z_min="67.9"/>
  </nodeInternalInformation>
  <nodeInternalInformation segmentation_index="11" segmented="true"
    studyId="8" volume="2305.9">
    <nodePosition position_mode="BOUNDINGBOX" x="136.875" x_max="132.188"
      x_min="121.875" y="107.813" y_max="153.75" y_min="112.5" z="65.1"
      z_max="102.2" z_min="68.6"/>
  </nodeInternalInformation>
  <nodeInternalInformation segmentation_index="21" segmented="true"
    studyId="13" volume="2141.63">
    <nodePosition position_mode="BOUNDINGBOX" x="139.688" x_max="135"
      x_min="122.813" y="108.75" y_max="152.813" y_min="113.438" z="63.7"
      z_max="100.1" z_min="67.2"/>
  </nodeInternalInformation>
  <nodeInternalInformation segmentation_index="31" segmented="true"
    studyId="17" volume="3262.59">
    <nodePosition position_mode="BOUNDINGBOX" x="140.625" x_max="135.938"
      x_min="121.875" y="111.563" y_max="154.688" y_min="116.25" z="65.8"
      z_max="101.5" z_min="69.3"/>
  </nodeInternalInformation>
</node>
```

L'attribut **className** spécifie le type de nœud. Il peut prendre les valeurs **AnatomicalVertex**, **MatterVertex**, **FunctionalVertex** ou **PathologicalVertex**. Chaque nœud

est associé à un identifiant unique donné dans l'attribut **id**.

Le sous-élément **nodeCanonicalInformation** contient des informations générales sur ce nœud. Pour un nœud représentant une structure anatomique il donne notamment l'identifiant MeSH (<http://www.nlm.nih.gov/mesh/meshhome.html>) et plusieurs appellations et définitions dans différentes langues.

Finalement un élément **nodeInternalInformation** est associé à chaque étude (dont l'identifiant est donné par l'attribut **studyId**). Les autres champs dépendent du type de nœud. Pour un nœud anatomique par exemple nous spécifions si une annotation de la structure a été réalisée dans cette étude (par l'attribut **segmented**). Si c'est le cas nous précisons quelques attributs de cette région comme son volume ainsi que des attributs utiles pour la visualisation. Ces derniers sont regroupés dans l'élément **nodePosition**. Les attributs **x**, **y** et **z** donnent la position de l'érodé ultime de la région. Les attributs **x\_min**, **x\_max**,... en donnent la boîte englobante (« BOUNDINGBOX »).

### Description des relations

Finalement nous décrivons les relations du graphe. La structure de leur sauvegarde est similaire à celle des nœuds. Chaque relation est représentée par un élément **hyperedge** qui possède un attribut **className** précisant le type de la relation. Les propriétés génériques de cette relation sont données dans le sous-élément **edgeCanonicalInformation** et des propriétés spécifiques peuvent être données dans les sous-éléments **edgeInternalInformation**. Nous fournissons enfin l'ensemble des nœuds impliqués dans la relation par les sous-éléments **endpoint** dont les attributs **node** et **directed** donnent respectivement l'identifiant d'un nœud du graphe et l'orientation de ce nœud dans la relation (**source**, **dest** ou **undirected**). Par exemple la relation de partition entre le cerveau et ses trois sous-parties (le prosencéphale, le mésencéphale et le rhombencéphale) est représentée suivant :

```
<hyperedge className="PartitionSpatialEdge">
  <edgeCanonicalInformation References_EDGE="(Bowden, 1995),
    NeuroNames Brain Hierarchy"/>
  <edgeInternalInformation studyId="5"/>
  <edgeInternalInformation studyId="8"/>
  <edgeInternalInformation studyId="13"/>
  <edgeInternalInformation studyId="17"/>
  <endpoint directed="source" node="BRAIN"/>
  <endpoint directed="dest" node="FB"/>
  <endpoint directed="dest" node="HB"/>
  <endpoint directed="dest" node="MB"/>
</hyperedge>
```

Notons que les relations du modèle (ainsi que les nœuds) sont représentées de la même manière mais ne comportent pas de sous-élément **edgeInternalInformation**. Prenons maintenant pour exemple une relation de distance :

```
<hyperedge className="DistanceSpatialEdge">
  <edgeCanonicalInformation trapezoid="14:15:38.0789:39.3954"/>
  <endpoint directed="dest" node="AICr"/>
  <endpoint directed="source" node="AICl"/>
</hyperedge>
```

Les quatre paramètres de cette relation de distance sont donnés par l'attribut **trapezoid** de l'élément **edgeCanonicalInformation**.

### B.3 Outil de navigation dans l'anatomie cérébrale

La représentation GRAFIP présente l'anatomie d'un patient à la fois d'un point de vue symbolique (la représentation graphique) et d'un point de vue iconique puisqu'il contient un ensemble d'examens radiologiques annotés. Cette structure de données peut présenter un intérêt pour l'enseignement de l'anatomie. En effet elle nous permet d'explorer simultanément ces deux aspects de l'anatomie.

Avec le Dr Dominique Hasboun, enseignant-chercheur à l'université UPMC et neuroanatomiste au CHU Pitié-Salpêtrière, nous avons ainsi développé un outil de navigation qui sera intégré dans le site internet neuranat [Hasboun, 2005] dédié à l'enseignement de la neuroanatomie (quelques captures d'écran sont montrées dans la figure 1.9).

Plusieurs cas ont actuellement été intégrés, dont un sujet normal pour lequel une annotation fine a été réalisée et un patient présentant une tumeur cérébrale pour lequel nous disposons de quatre études dans le temps. D'autres cas peuvent simplement être ajoutés sans modification de l'outil de navigation. L'utilisateur doit alors choisir le cas qu'il veut consulter dans la fenêtre d'accueil présenté en (a). Il doit aussi choisir un mode de navigation parmi ces trois modes proposés :

- la représentation graphique seule,
- le graphe et une visualisation en trois coupes du volume IRM,
- le graphe et une visualisation temporelle des données.

Le premier mode permet de naviguer dans la représentation graphique seule. La vue est centrée autour d'un nœud courant dont nous montrons les attributs. Ici seuls les voisins à l'ordre un de ce nœud sont présentés afin que l'affichage ne soit pas surchargé. Pour améliorer la navigation et la visualisation, nous étudions actuellement des processus d'affichage de graphes plus élaborés.

Le second mode présenté en (b) est obtenu à partir du premier en ajoutant une visualisation des données radiologiques par une vue classique en trois coupes (axiale, sagittale et coronale). Les annotations des données radiologiques sont présentées en transparence. Elles permettent de faire le lien avec la représentation graphique. Lorsque l'utilisateur clique sur une région annotée, la visualisation du graphe est centrée autour du nœud correspondant. Réciproquement lorsqu'un nœud du graphe (pour lequel nous disposons d'une annotation) est sélectionné, nous replaçons le curseur 3D au centre de la région correspondante (l'érodé ultime de cette région). Par ailleurs il est possible de changer d'étude grâce à une frise chronologique présentée au-dessus de la représentation graphique et de changer d'examen dans une étude en utilisant la table présentée en haut à droite.

Enfin nous proposons une visualisation temporelle du GRAFIP d'un sujet dont deux exemples sont montrés en (c) et (d). Nous présentons horizontalement la même vue (les données sont recalées) du même examen (en utilisant le même protocole d'acquisition pour les examens IRM) de toutes les études disponibles pour ce sujet. Dans l'exemple présenté cela nous permet d'observer l'évolution de la tumeur cérébrale dans le temps.

### B.4 Conclusion

La structure de données GRAFIP que nous avons mise en œuvre représente l'anatomie d'un patient à la fois à un niveau sémantique (par la représentation graphique) et de façon iconique par les examens radiologiques et les annotations associées. Cette représentation a été intégrée dans un prototype de dossier patient électronique [Puentes et al., 2008] et dans le démonstrateur d'applications de traitement d'images médicales PTM3D développé au LIMSI [Osorio et al., 2004].

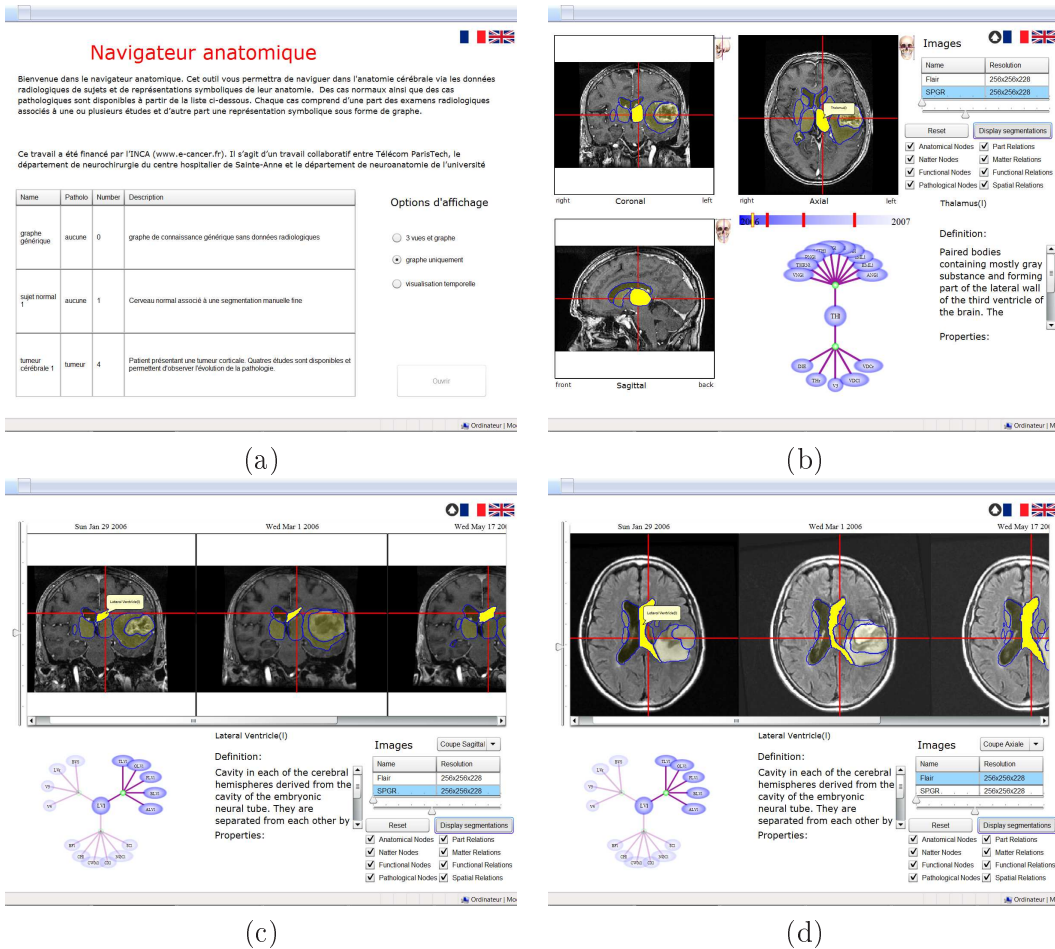


FIGURE B.3 – (a) Page d'accueil. Plusieurs cas sont proposés avec une brève description. (b) Navigation dans le graphe de connaissance et dans un volume IRM annoté. (c-d) Vues temporelles.

Nous avons aussi utilisé cette structure comme support pédagogique. Pour cela nous avons mis en œuvre un outil de navigation permettant d'explorer simultanément les données radiologiques annotées et la représentation graphique. Cette outil sera intégré dans un futur proche dans le site neuranat dédié à l'enseignement de la neuroanatomie.

## Annexe C

# Preuves du chapitre 2

*Preuve proposition 2.3.* Soit  $C$  une contrainte dont la relation est monotone par rapport à l'ensemble de ses variables. Nous définissons le propagateur  $f_C^{monotone}$  suivant :

$$f_C^{monotone} : \quad \mathcal{P}_{ND}^{sol} \quad \rightarrow \mathcal{P}_{ND}^{sol}$$

$$\langle \chi, \mathcal{D}^I, \mathcal{C} \rangle \quad \mapsto \langle \chi, \mathcal{D}^{I'}, \mathcal{C} \rangle,$$

tel que  $\forall A_i \in vars(C), \mathcal{D}^{I'}(A_i) = (\underline{A}_i', \overline{A}_i')$ .

Si  $rel(C)$  est croissante par rapport à  $A_i$  :

$$\begin{cases} \forall x \in X, \underline{A}_i'(x) = \inf\{v \in [\underline{A}_i(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in rel(C)\}, \\ \overline{A}_i' = \overline{A}_i, \end{cases}$$

où  $\delta_x^v \in \mathcal{F}$  est tel que  $\delta_x^v(y) = v$  si  $y = x$  et 0 sinon,  $c$  est la complémentation et  $I_A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{vars(C)}$  où  $A \in vars(C)$  est une fonction telle que  $\forall \mu \in \mathcal{F}, I_A(\mu)$  soit une instanciation sur  $vars(C)$  vérifiant  $I_A(\mu)(A) = \mu$  et  $\forall B \neq A,$

$$I_A(\mu)(B) = \begin{cases} \overline{B} & \text{si } rel(C) \text{ est croissante par rapport à } B, \\ \underline{B} & \text{si } rel(C) \text{ est décroissante par rapport à } B. \end{cases}$$

Si  $rel(C)$  est décroissante par rapport à  $A_i$  :

$$\begin{cases} \underline{A}_i' = \underline{A}_i, \\ \forall x \in X, \overline{A}_i'(x) = \sup\{v \in [0, \overline{A}_i(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in rel(C)\}. \end{cases}$$

Nous voulons montrer  $f_C^{monotone}$  est correct, idempotent et  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $C \in \mathcal{C}$ . Le propagateur  $f_C^{monotone}$  est correct si  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, f_C^{monotone}(N') \in \mathcal{P}_{N'D}^{sol}$  (cf section 2.1.3). Nous avons de toute évidence  $f_C^{monotone}(N') \in \mathcal{P}_{N'D}$  puisque  $f_C^{monotone}(N')$  est obtenu uniquement par la réduction de domaines de  $N'$ . Reste à prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_C^{monotone}(N'))$ . Pour cela notons  $(\underline{A}_i', \overline{A}_i')$  et  $(\underline{A}_i'', \overline{A}_i'')$  les domaines associés à  $A_i$  respectivement dans  $N'$  et  $f_C^{monotone}(N')$  pour  $A_i \in vars(C)$ . Si  $I$  est une solution dans  $f_C^{monotone}(N')$ ,  $I$  est aussi une solution dans  $N'$  puisque les contraintes des deux réseaux sont identiques et que toute instanciation valide dans  $f_C^{monotone}(N')$  l'est aussi dans  $N'$ .

Réciproquement soit  $I \in sol(N')$ . Supposons tout d'abord que  $rel(C)$  soit croissante par rapport à  $A_i \in vars(C)$ . Nous avons donc  $\underline{A}_i' \leq I(A_i) \leq \overline{A}_i' \Rightarrow \underline{A}_i' \leq I(A_i) \leq \overline{A}_i''$  et



il reste à montrer que  $\underline{A}_i'' \leq I(A_i)$ .

$$\begin{aligned}
& I(A_i) \in \text{rel}(C) \\
\Rightarrow & I_{A_i}(I(A_i)) \in \text{rel}(C) \text{ par définition de } I_{A_i} \\
\Rightarrow & \forall x \in X, I_{A_i}(c(\delta_x^{1-I(A_i)(x)})) \in \text{rel}(C) \text{ car } c(\delta_x^{1-I(A_i)(x)}) \geq I(A_i) \\
\Rightarrow & \forall x \in X, \inf\{v \in [\underline{A}_i'(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C)\} \leq I(A_i)(x) \\
\Rightarrow & \underline{A}_i'' \leq I(A_i)
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\text{rel}(C)$  soit décroissante par rapport à  $A_i \in \text{vars}(C)$ . Nous avons donc  $\underline{A}_i' \leq I(A_i) \leq \overline{A}_i' \Rightarrow \underline{A}_i'' \leq I(A_i) \leq \overline{A}_i''$  et il reste à montrer que  $I(A_i) \leq \overline{A}_i''$ .

$$\begin{aligned}
& I(A_i) \in \text{rel}(C) \\
\Rightarrow & I_{A_i}(I(A_i)) \in \text{rel}(C) \text{ par définition de } I_{A_i} \\
\Rightarrow & \forall x \in X, I_{A_i}(\delta_x^{I(A_i)(x)}) \in \text{rel}(C) \text{ car } \delta_x^{I(A_i)(x)} \leq I(A_i) \\
\Rightarrow & \forall x \in X, \sup\{v \in [0, \overline{A}_i'(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C)\} \geq I(A_i)(x) \\
\Rightarrow & \overline{A}_i'' \geq I(A_i)
\end{aligned}$$

$I$  est donc valide dans  $f_C^{\text{monotone}}(N')$  et est aussi une solution. Le propagateur  $f_C^{\text{monotone}}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_C^{\text{monotone}}(f_C^{\text{monotone}}(N)) = f_C^{\text{monotone}}(N)$ . Pour cela notons  $(\underline{A}_i'', \overline{A}_i'')$ ,  $(\underline{A}_i', \overline{A}_i')$ ,  $(\underline{A}_i, \overline{A}_i)$  les domaines associés à  $A_i \in \text{vars}(C)$  respectivement dans  $f_C^{\text{monotone}}(f_C^{\text{monotone}}(N))$ ,  $f_C^{\text{monotone}}(N)$  et  $N$ .

Supposons tout d'abord que  $\text{rel}(C)$  soit croissante par rapport à  $A_i$ . Nous avons alors  $\overline{A}_i'' = \overline{A}_i' = \overline{A}_i$  pour la borne supérieure et pour la borne inférieure :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X, \underline{A}_i''(x) = \inf\{v \in [\underline{A}_i'(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C)\} \\
\Rightarrow & \forall x \in X, \underline{A}_i''(x) = \max(\underline{A}_i'(x), \inf\{v \in [0, 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C)\}) \\
& \text{puisque si la condition } I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C) \text{ est satisfaite pour } v, \\
& \text{elle est satisfaite pour } v' \geq v \\
\Rightarrow & \underline{A}_i'' = \underline{A}_i' \text{ car } \underline{A}_i' \geq \inf\{v \in [0, 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in \text{rel}(C)\}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $\text{rel}(C)$  soit décroissante par rapport à  $A_i$ . Nous avons alors  $\underline{A}_i'' = \underline{A}_i' = \underline{A}_i$  pour la borne inférieure et pour la borne supérieure :

$$\begin{aligned}
& \forall x \in X, \overline{A}_i''(x) = \sup\{v \in [0, \overline{A}_i'(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C)\} \\
\Rightarrow & \forall x \in X, \overline{A}_i''(x) = \min(\overline{A}_i'(x), \sup\{v \in [0, 1] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C)\}) \\
& \text{car la condition } I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C) \text{ est décroissante par rapport à } v \\
\Rightarrow & \overline{A}_i'' = \overline{A}_i' \text{ car } \overline{A}_i'(x) \leq \sup\{v \in [0, 1] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in \text{rel}(C)\}
\end{aligned}$$

**$B_{\mathcal{F}}$ -consistance** Il reste donc à prouver que la contrainte  $C$  est  $B_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_C^{\text{monotone}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}_i, \overline{A}_i)$  et  $(\underline{A}_i', \overline{A}_i')$  les domaines associés à  $A_i \in \text{vars}(C)$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la  $B_{\mathcal{F}}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall A_i \in \text{vars}(C)$  :

$$\begin{cases} \underline{A}_i' & = \bigwedge \{\mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I\}, \\ \overline{A}_i' & = \bigvee \{\mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I\}. \end{cases}$$

Supposons tout d'abord que  $rel(C)$  soit croissante relativement à  $A_i \in vars(C)$  et vérifions cette égalité pour la borne inférieure.

$$\begin{aligned}
\nu &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid I_{A_i}(\mu) \in rel(C) \} \\
\Rightarrow \forall x \in X, \nu(x) &= \inf \{ v \in [\underline{A}_i'(x), \overline{A}_i'(x)] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in rel(C) \} \\
\Rightarrow \forall x \in X, \nu(x) &= \inf \{ v \in [\underline{A}_i'(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in rel(C) \} \\
&\quad (\text{si une solution existe. Nous ferons cette hypothèse dans} \\
&\quad \text{l'ensemble des preuves qui suivront. Notons par ailleurs que si} \\
&\quad \inf \{ v \in [\underline{A}_i'(x), 1] \mid I_{A_i}(c(\delta_x^{1-v})) \in rel(C) \} > \overline{A}_i' \text{ alors } (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \\
&\quad \text{est un domaine vide)} \\
\Rightarrow \nu &= \underline{A}_i'.
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant l'égalité pour la borne supérieure.

$$\begin{aligned}
&\bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid I_{A_i}(\mu) \in rel(C) \} \\
&= \overline{A}_i' \text{ (si une solution existe, car } rel(C) \text{ est croissante relativement à } A_i \text{)}.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $rel(C)$  soit décroissante relativement à  $A_i$  et montrons l'égalité pour la borne inférieure.

$$\begin{aligned}
&\bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid I_{A_i}(\mu) \in rel(C) \} \\
&= \underline{A}_i' \text{ (si une solution existe, car } rel(C) \text{ est décroissante relativement à } A_i \text{)}.
\end{aligned}$$

Vérifions finalement l'égalité pour la borne supérieure.

$$\begin{aligned}
\nu &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid (A_i, \mu) \text{ possède un support pour } C \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}_i', \overline{A}_i') \mid I_{A_i}(\mu) \in rel(C) \} \\
\Rightarrow \forall x \in X, \nu(x) &= \sup \{ v \in [\underline{A}_i'(x), \overline{A}_i'(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in rel(C) \} \\
\Rightarrow \forall x \in X, \nu(x) &= \sup \{ v \in [0, \overline{A}_i'(x)] \mid I_{A_i}(\delta_x^v) \in rel(C) \} \text{ (si une solution existe)} \\
\Rightarrow \nu &= \overline{A}_i'.
\end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 2.4.* Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  associé à la contrainte d'inclusion de  $A$  dans  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{dans} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}), (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B}); C_{A,B}^{dans} \rangle}$$

Nous voulons prouver que ce propagateur est correct, idempotent et  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{dans} \in \mathcal{C}$ . Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  est correct si  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}$ ,  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N') \in \mathcal{P}_{N'D}^{sol}$  (cf section 2.1.3). Nous avons de toute évidence  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N') \in \mathcal{P}_{N'D}$  puisque  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N')$  est obtenu uniquement par la réduction de domaines de  $N'$ . Reste à prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{dans}}(N'))$ . Pour cela notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N')$ . Si  $I$  est une solution dans  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N')$ ,  $I$  est aussi une solution dans  $N'$  puisque les contraintes des deux réseaux sont identiques et que toute instanciation valide dans  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N')$  l'est aussi dans  $N'$  (ce sera le cas pour l'ensemble des preuves qui suivent). Réciproquement si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$  et  $I(A) \leq I(B)$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge I(B) & & I(A) \vee \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \\ \Rightarrow \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge \overline{B}' & & \Rightarrow \underline{A}' \vee \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \end{aligned}$$

Comme  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' \wedge \overline{B}' = \overline{A}''$ ,  $\underline{B}'' = \underline{A}' \vee \underline{B}'$  et  $\overline{B}'' = \overline{B}'$ , nous avons  $\underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}''$  et  $\underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}''$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N')$  et est aussi une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dans}}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous pouvons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{dans}}(f_{C_{A,B}^{dans}}(N)) = f_{C_{A,B}^{dans}}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{dans}}(f_{C_{A,B}^{dans}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{dans}}(N)$  et  $N$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}, \\ \overline{A}'' &= \overline{A}' \wedge \overline{B}' = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{B} = \overline{A}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' \vee \underline{A}' = \underline{B} \vee \underline{A} \vee \underline{A} = \underline{B}', \\ \overline{B}'' &= \overline{B}' = \overline{B}. \end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge \overline{B}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}' \vee \underline{A}'$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}'$ ,  $\underline{A}' = \underline{A}$ ,  $\overline{A}' = \overline{A} \wedge \overline{B}$ ,  $\underline{B}' = \underline{B} \vee \underline{A}$  et  $\overline{B}' = \overline{B}$ .

**$B_{\mathcal{F}}$ -consistance** Il reste donc à prouver que la contrainte  $C_{A,B}^{dans}$  est  $B_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{dans}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{A}', \overline{A}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la  $B_{\mathcal{F}}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in vars(C_{A,B}^{dans})$  :

$$\begin{cases} \underline{O}' &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{O}', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dans} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}, \\ \overline{O}' &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{O}', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dans} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}. \end{cases}$$

Nous avons  $vars(C_{A,B}^{dans}) = \{A, B\}$ . Montrons tout d'abord que ces égalités sont vérifiées pour  $A$  :

$$\begin{aligned} &\bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dans} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\ &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \nu \in (\underline{B}', \overline{B}'), \mu \leq \nu \} \\ &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}) \mid \exists \nu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B}), \mu \leq \nu \} \\ &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}) \} \text{ (car } \underline{A} \leq \underline{B} \vee \underline{A} \text{ et } \overline{A} \wedge \overline{B} \leq \overline{B} \text{)} \\ &= \underline{A} \\ &= \underline{A}'. \end{aligned}$$

Notons que même si le domaine résultant est vide, cette dernière égalité reste correcte en raison de la convention établie dans la section 2.2.2 pour les domaines vides. Selon cette convention tout intervalle vide est égal à  $(1_{\mathcal{F}}, 0_{\mathcal{F}})$ . Ainsi dans l'expression précédente si le domaine  $(\underline{A}', \overline{A}') = (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B})$  est vide nous avons alors  $\underline{A}' = 1_{\mathcal{F}}$  et donc  $\bigwedge\{\mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B})\} = \underline{A}'$ . Dans la suite de cette preuve et dans toutes les preuves qui suivront, le cas de figure où le domaine résultant est vide est pris en charge par cette remarque.

Montrons maintenant cette égalité pour la borne supérieure du domaine de  $A$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee\{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{dans}} \text{ dans } \mathcal{D}^I\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \nu \in (\underline{B}', \overline{B}'), \mu \leq \nu\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}) \mid \exists \nu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B}), \mu \leq \nu\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B})\} \\
&= \overline{A} \wedge \overline{B} \\
&= \overline{A}'.
\end{aligned}$$

Similairement nous devons maintenant vérifier les égalités pour  $B$  :

$$\begin{aligned}
& \bigwedge\{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid (B, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{dans}} \text{ dans } \mathcal{D}^I\} \\
&= \bigwedge\{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid \exists \nu \in (\underline{A}', \overline{A}'), \nu \leq \mu\} \\
&= \bigwedge\{\mu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B}) \mid \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}), \nu \leq \mu\} \\
&= \bigwedge\{\mu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B})\} \\
&= \underline{B} \vee \underline{A} \\
&= \underline{B}'.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bigvee\{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid (B, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{dans}} \text{ dans } \mathcal{D}^I\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid \exists \nu \in (\underline{A}', \overline{A}'), \nu \leq \mu\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B}) \mid \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge \overline{B}), \nu \leq \mu\} \\
&= \bigvee\{\mu \in (\underline{B} \vee \underline{A}, \overline{B})\} \\
&= \overline{B} \\
&= \overline{B}'.
\end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 2.5.* Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{\text{compl}}}$  associé à la contrainte de complémentation entre deux structures  $A$  et  $B$  a été défini dans la section 2.4.1 suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{\text{compl}} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A} \vee c(\overline{B}), \overline{A} \wedge c(\underline{B})), (\underline{B} \vee c(\overline{A}), \overline{B} \wedge c(\underline{A})); C_{A,B}^{\text{compl}} \rangle}$$

Nous allons prouver ici que ce propagateur est correct, idempotent et  $B_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{compl} \in \mathcal{C}$ . Comme dans le cas de la contrainte d'inclusion, pour montrer que  $f_{C_{A,B}^{compl}}$  est correct, il nous faut prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{compl}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{compl}}(N')$ . Si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$ ,  $I(A) = c(I(B))$  et  $I(B) = c(I(A))$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}' \vee c(I(B)) &\leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge c(I(B)) & \underline{B}' \vee c(I(A)) &\leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge c(I(A)) \\ \Rightarrow \underline{A}' \vee c(\overline{B}') &\leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge c(\underline{B}') & \Rightarrow \underline{B}' \vee c(\overline{A}') &\leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge c(\underline{A}') \end{aligned}$$

Comme  $\underline{A}'' = \underline{A}' \vee c(\overline{B}')$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge c(\underline{B}')$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}' \vee c(\overline{A}')$  et  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge c(\underline{A}')$ , nous avons  $\underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}''$  et  $\underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}''$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{compl}}(N')$  et est aussi une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{compl}}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{compl}}(f_{C_{A,B}^{compl}}(N)) = f_{C_{A,B}^{compl}}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{compl}}(f_{C_{A,B}^{compl}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{compl}}(N)$  et  $N$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \overline{A}'' &= \overline{A}' \wedge c(\underline{B}') = \overline{A} \wedge c(\underline{B}) \wedge c(\underline{B} \vee c(\overline{A})), \\ &= \overline{A} \wedge c(\underline{B}) \wedge c(\underline{B}) \wedge \overline{A}, \\ &= \overline{A} \wedge c(\underline{B}) = \overline{A}', \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' \vee c(\overline{B}') = \underline{A} \vee c(\overline{B}) \vee c(\overline{B} \wedge c(\underline{A})), \\ &= \underline{A} \vee c(\overline{B}) \vee c(\overline{B}) \vee \underline{A}, \\ &= \underline{A} \vee c(\overline{B}) = \underline{A}', \\ \overline{B}'' &= \overline{B}' \wedge c(\underline{A}') = \overline{B}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' \vee c(\overline{A}') = \underline{B}', \end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}' \vee c(\overline{B}')$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge c(\underline{B}')$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}' \vee c(\overline{A}')$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge c(\underline{A}')$ ,  $\underline{A}' = \underline{A} \vee c(\overline{B})$ ,  $\overline{A}' = \overline{A} \wedge c(\underline{B})$ ,  $\underline{B}' = \underline{B} \vee c(\overline{A})$  et  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge c(\underline{A})$ .

**$B_{\mathcal{F}}$ -consistance** Nous voulons prouver que la contrainte  $C_{A,B}^{compl}$  est  $B_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{compl}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{A}', \overline{A}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la  $B_{\mathcal{F}}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in vars(C_{A,B}^{compl})$  :

$$\begin{cases} \underline{O}' &= \bigwedge \{ \mu \in (\underline{O}', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{compl} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}, \\ \overline{O}' &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{O}', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{compl} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}. \end{cases}$$

Nous avons  $\text{vars}(C_{A,B}^{\text{compl}}) = \{A, B\}$ . Nous allons montrer que ces égalités sont vérifiées pour  $A$ . Montrons tout d'abord l'égalité pour la borne supérieure du domaine de  $A$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{compl}} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \nu \in (\underline{B}', \overline{B}'), \mu = c(\nu) \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \vee c(\overline{B}) \leq \mu \leq \overline{A} \wedge c(\underline{B}) \\
&\quad \text{et } \exists \nu \in \mathcal{F}, \underline{B} \vee c(\overline{A}) \leq \nu \leq \overline{B} \wedge c(\underline{A}) \text{ et } \mu = c(\nu) \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \vee c(\overline{B}) \leq \mu \leq \overline{A} \wedge c(\underline{B}) \text{ et } c(\overline{B} \wedge c(\underline{A})) \leq \mu \leq c(\underline{B} \vee c(\overline{A})) \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A} \vee c(\overline{B}), \overline{A} \wedge c(\underline{B})) \} \\
&= \overline{A} \wedge c(\underline{B}) \\
&= \overline{A}'.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'égalité pour la borne inférieure du domaine de  $A$  :

$$\begin{aligned}
& \bigwedge \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{compl}} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \underline{A} \vee c(\overline{B}) \\
&= \underline{A}'.
\end{aligned}$$

De façon similaire ces égalités sont vérifiées pour  $B$ . □

*Preuve proposition 2.6.* Le propagateur  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}}$  associé à la contrainte de réunion entre l'ensemble de structures  $\{A_i\}$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i, \overline{A}_i), \dots, (\underline{B}, \overline{B}); C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}} \rangle}{\langle A, B; \dots, (\underline{A}_i \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} A_j))), \overline{A}_i \wedge \overline{B}, \dots, \\ (\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i, \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i); C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}} \rangle}$$

Nous allons montrer que le propagateur  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}}$  est correct et idempotent.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}}$  est correct, nous devons prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{\text{sol}}, I \in \text{sol}(N') \Leftrightarrow I \in \text{sol}(f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}_i', \overline{A}_i')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}_i'', \overline{A}_i'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A_i$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{\{A_i\},B}^{\text{réunion}}}(N')$ . Si  $I \in \text{sol}(N')$ , nous avons  $\forall i \in [1..k], \underline{A}_i' \leq I(A_i) \leq \overline{A}_i', \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$  et  $I(B) = \perp_{i \in [1..k]} I(A_i)$ . Nous obtenons donc pour  $B$  :

$$\begin{aligned}
& \underline{B}' \vee \perp_{i \in [1..k]} I(A_i) \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \perp_{i \in [1..k]} I(A_i) \\
&\Rightarrow \underline{B}' \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A}_i' \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A}_i' \\
&\Rightarrow \underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}''
\end{aligned}$$

Par ailleurs nous avons  $\forall j \in [1..k], \perp_{i \in [1..k]} I(A_i) \geq I(A_j)$  et donc  $I(A_j) \leq I(B)$ . Nous

obtenons donc  $I(A_i) \leq \overline{A_i}' \wedge I(B) \leq \overline{A_i}' \wedge \overline{B}' = \overline{A_i}''$ . Reste à montrer que  $\underline{A_i}'' \leq I(A_i)$  :

$$\begin{aligned}
I(B) &= \perp_{i \in [1..k]} I(A_i) = \perp(I(A_i), \perp_{j \neq i} I(A_j)) \\
\Rightarrow I(B) &= \min(1, I(A_i) + \perp_{j \neq i} I(A_j)) \\
&\text{(car nous utilisons les opérateurs de Lukasiewicz)} \\
\Rightarrow I(B) - \perp_{j \neq i} I(A_j) &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow I(B) - 1 + c(\perp_{j \neq i} I(A_j)) &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow \max(0, I(B) - 1 + c(\perp_{j \neq i} I(A_j))) &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow \top(I(B), c(\perp_{j \neq i} I(A_j))) &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow \top(\underline{B}', c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}')) &\leq I(A_i) \\
\text{Or } \underline{A_i}' &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow \top(\underline{B}', c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}')) \vee \underline{A_i}' &\leq I(A_i) \\
\Rightarrow \underline{A_i}'' &\leq I(A_i)
\end{aligned}$$

$I$  est donc valide dans  $f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(N')$  et est une solution. Le propagateur  $f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(N)) = f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A_i}'', \overline{A_i}'')$ ,  $(\underline{A_i}', \overline{A_i}')$ ,  $(\underline{A_i}, \overline{A_i})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A_i$  et  $B$  respectivement dans  $f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(N))$ ,  $f_{\{A_i\}, B}^{Créunion}(N)$  et  $N$ . Montrons tout d'abord l'égalité pour la borne supérieure de  $B$  :

$$\begin{aligned}
\overline{B}'' &= \overline{B}' \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i}' = \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i} \wedge \perp_{i \in [1..k]} (\overline{A_i} \wedge \overline{B}), \\
&= \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i} = \overline{B}'
\end{aligned}$$

car  $\perp_{i \in [1..k]} (\overline{A_i} \wedge \overline{B}) \geq \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i}$ . En effet puisque nous utilisons les opérateurs de Lukasiewicz, nous avons :

$$\forall x \in X, (\perp_{i \in [1..k]} (\overline{A_i} \wedge \overline{B}))(x) = \min(1, \sum_{i \in [1..k]} \min(\overline{B}(x), \overline{A_i}(x))).$$

Si  $\forall i \in [1..k], \overline{A_i}(x) \leq \overline{B}(x)$  nous avons  $(\perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i} \wedge \overline{B})(x) = (\perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i})(x)$ .

Sinon nous avons  $(\perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i} \wedge \overline{B})(x) \geq \overline{B}(x)$ .

Montrons maintenant l'égalité pour la borne inférieure de  $B$  :

$$\begin{aligned}
\underline{B}'' &= \underline{B}' \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A_i}' = \underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A_i} \vee \perp_{i \in [1..k]} (\underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}))), \\
&= \underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A_i} = \underline{B}'.
\end{aligned}$$

En effet nous allons montrer que  $\perp_{i \in [1..k]} (\underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}))) \leq \underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A_i}$ . En chaque point  $x$  de l'espace, nous avons :  $f(x) = (\perp_{i \in [1..k]} (\underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}))))(x) = \min(1, \sum_{i \in [1..k]} (\max(\underline{A_i}(x), \underline{B}(x) - \sum_{j \neq i} \overline{A_j}(x))))$ .

Supposons que les  $n$  premiers indices (pour des questions de notations) vérifient  $\underline{A_i}(x) < \underline{B}(x) - \sum_{j \neq i} \overline{A_j}(x)$  et pas les suivants. Cette expression prend dans ce cas la forme :  $f(x) = \min(1, n\underline{B}(x) - \sum_{i \in [1..n]} \sum_{j \neq i} \overline{A_j}(x) + \sum_{i > n} \underline{A_i}(x))$ . Si  $n = 0$ , nous obtenons donc  $f(x) = \min(1, \sum_{i \in [1..n]} \underline{A_i}(x))$  et nous avons bien  $f(x) \leq (\underline{B} \vee \perp_{i \in [1..k]} \underline{A_i})(x)$ .

Si  $n > 0$  nous obtenons en réarrangeant les sommes :  $f(x) = \min(1, n\underline{B}(x) - (n - 1) \sum_{i \in [1..n]} \overline{A_j}(x) + \sum_{i > n} (\underline{A_i}(x) - \overline{A_j}(x)))$ . Puisque nous supposons qu'une solution existe nous avons nécessairement  $\underline{B} \leq \sum_{i \in [1..n]} \overline{A_j}$  et donc :  $f(x) \leq n\underline{B}(x) - (n - 1)\underline{B}(x)$ , le dernier terme étant négatif ou nul. Nous montrons donc bien l'inégalité voulue.

Nous montrons maintenant l'égalité pour la borne supérieure d'une des variables  $A_i$  :

$$\begin{aligned}\overline{A_i}'' &= \overline{A_i}' \wedge \overline{B}' = \overline{A_i} \wedge \overline{B} \wedge \overline{B} \wedge \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i} \\ &= \overline{A_i} \wedge \overline{B} = \overline{A_i}'\end{aligned}$$

car  $\overline{A_i} \leq \perp_{i \in [1..k]} \overline{A_i}$ .

Finalement nous montrons l'égalité pour la borne inférieure des variables  $A_i$  :

$$\begin{aligned}\underline{A_i}'' &= \underline{A_i}' \vee \top(\underline{B}', c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}')) \\ &= \underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j})) \vee \top(\underline{B} \vee \perp_{j \in [1..k]} \underline{A_j}, c(\perp_{j \neq i} (\overline{A_j} \wedge \overline{B}))) \\ &= \underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j})) = \underline{A_i}'.\end{aligned}$$

En effet nous allons montrer que  $\top(\underline{B} \vee \perp_{j \in [1..k]} \underline{A_j}, c(\perp_{j \neq i} (\overline{A_j} \wedge \overline{B}))) \leq \underline{A_i} \vee \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}))$ . En chaque point  $x$  de l'espace, nous avons :

$$\begin{aligned}f(x) &= \top(\underline{B} \vee \perp_{j \in [1..k]} \underline{A_j}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j} \wedge \overline{B}))(x) \\ &= \max(0, \max(\underline{B}(x), \min(1, \sum_{i \in [1..k]} \underline{A_i}(x))) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x))) \\ &= \max(0, \max(\underline{B}(x) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x)), \\ &\quad \min(1, \sum_{i \in [1..k]} \underline{A_i}(x) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x)))).\end{aligned}$$

Considérons tout d'abord le premier terme :  $t_1(x) = \underline{B}(x) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x))$ . Si il existe  $j \neq i$  tel que  $\overline{A_j}(x) \geq \overline{B}(x)$  alors  $t_1(x) \leq 0$  et donc nous vérifions l'inégalité recherchée. Sinon nous avons  $t_1(x) = \underline{B}(x) - \sum_{j \neq i} \overline{A_j}(x) \leq \top(\underline{B}, c(\perp_{j \neq i} \overline{A_j}))$  et l'inégalité est aussi vérifiée. Considérons maintenant le second terme :  $t_2(x) = \min(1, \sum_{i \in [1..k]} \underline{A_i}(x)) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x))$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}t_2(x) &\leq \sum_{i \in [1..k]} \underline{A_i}(x) - \sum_{j \neq i} \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x)) \\ &\leq \underline{A_i}(x) + \sum_{j \neq i} (\underline{A_j}(x) - \min(\overline{A_j}(x), \overline{B}(x))) \\ &\leq \underline{A_i}(x) + \sum_{j \neq i} \max(\underline{A_j}(x) - \overline{A_j}(x), \underline{A_j}(x) - \overline{B}(x)) \\ &\leq \underline{A_i}(x)\end{aligned}$$

car  $\underline{A_j}(x) \leq \overline{A_j}(x)$  et  $\underline{A_j}(x) \leq \overline{B}(x)$  puisque nous supposons qu'une solution existe.  $\square$

*Preuve proposition 2.10.* Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  associé à la contrainte de position relative directionnelle entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{dir \nu} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(A)); C_{A,B}^{dir \nu} \rangle}$$

Nous voulons prouver que le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  est correct, idempotent et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant.



**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{dir \nu} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  est correct, il nous faut prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N')$ . Si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$  et  $I(B) \leq \delta_\nu(I(A))$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}' &\leq I(A) \leq \overline{A}' & \underline{B}' &\leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \delta_\nu(I(A)) \\ \Rightarrow \underline{A}'' &\leq I(A) \leq \overline{A}'' & \Rightarrow \underline{B}' &\leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}') \\ & & \Rightarrow \underline{B}'' &\leq I(B) \leq \overline{B}'' \end{aligned}$$

puisque  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}')$  et la dilatation est croissante.  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N')$  et est une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N)) = f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N)$  et  $N$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \overline{A}'' &= \overline{A}' = \overline{A}, \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}, \\ \overline{B}'' &= \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}') = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}) \wedge \delta_\nu(\overline{A}) = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}) = \overline{B}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' = \underline{B}, \end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}')$ ,  $\underline{A}' = \underline{A}$ ,  $\overline{A}' = \overline{A}$ ,  $\underline{B}' = \underline{B}$  et  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})$ .

**BS $\mathcal{F}$ -consistance** Nous voulons prouver que la contrainte  $C_{A,B}^{dir \nu}$  est BS $\mathcal{F}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{dir \nu}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la BS $\mathcal{F}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in vars(C_{A,B}^{dir \nu})$  :

$$\overline{O}' = \bigvee \{ \mu \in (O', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dir \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}.$$

Nous avons  $vars(C_{A,B}^{dir \nu}) = \{A, B\}$ . Montrons tout d'abord cette égalité pour  $A$  :

$$\begin{aligned} &\bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dir \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \nu \in (\underline{B}', \overline{B}'), \nu \leq \delta_\nu(\mu) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \exists \nu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})), \nu \leq \delta_\nu(\mu) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \underline{B} \leq \delta_\nu(\mu) \} \\ &= \begin{cases} \overline{A} & \text{si } \underline{B} \leq \delta_\nu(\overline{A}) \\ 0_{\mathcal{F}} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Lorsqu'une valeur pour  $B$  satisfait la contrainte, la borne supérieure du domaine de  $A$  reste inchangée. Lorsqu'aucune valeur ne satisfait la contrainte, le domaine de  $A$  devrait être vide. Le propagateur ne réalise pas ce changement. Cependant puisque dans ce cas le

domaine de  $B$  résultant est vide, le problème est dit insatisfiable quelle que soit la valeur du domaine de  $A$ .

Vérifions maintenant l'égalité pour  $B$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid (B, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dir \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid \exists \nu \in (\underline{A}', \overline{A}'), \mu \leq \delta_\nu(\nu) \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})) \mid \mu \leq \delta_\nu(\overline{A}) \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})) \} \\
&= \begin{cases} \overline{B}' & \text{si } \underline{B} \leq \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}) \\ 0_{\mathcal{F}} & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais puisque par convention un domaine  $(\underline{O}, \overline{O})$  avec  $\underline{O} \not\leq \overline{O}$  est équivalent à  $(1_{\mathcal{F}}, 0_{\mathcal{F}})$ , l'égalité est toujours vérifiée.

Ce propagateur n'est pas  $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ -consistant puisque dans certains cas particulier la borne inférieure de  $A$  pourrait être mise à jour. Supposons par exemple que  $\overline{A}$  soit réduit à un point, que  $\underline{A} = 0_{\mathcal{F}}$ , que  $\overline{B} \leq \delta_\nu(\overline{A})$  et que  $\max_{x \in X} \underline{B}(x) = 1$ . Dans ce cas nous pourrions en déduire que  $\underline{A} = \overline{A}$ . □

*Preuve proposition 2.11.* Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}$  associé à la contrainte de distance minimale entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{dist \min \nu} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}))), (\underline{B}, \overline{B} \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}))); C_{A,B}^{dist \min \nu} \rangle}$$

Nous allons montrer que  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}$  est correct, idempotent et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{dist \min \nu} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}$  est correct, nous devons prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}(N')$ . Si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$  et  $I(B) \leq c(\delta_\nu(I(A)))$ . Notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned}
I(B) &\leq c(\delta_\nu(I(A))) \\
\Leftrightarrow I(B) &\leq \varepsilon_\nu(c(I(A))) \\
\Rightarrow \delta_\nu(I(B)) &\leq c(I(A)),
\end{aligned}$$

suitant le théorème d'adjonction. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
& \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge c(\delta_\nu(I(B))) & \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge c(\delta_\nu(I(A))) \\
\Rightarrow \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}')) & \Rightarrow \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}')) \\
\Rightarrow \underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}'' & \Rightarrow \underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}''
\end{aligned}$$

puisque  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}'))$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$  et  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}'))$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}(N')$  et est une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist \min \nu}}$  est par conséquent correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(N)) = f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(N)$ .

Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(N)$  et  $N$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\overline{A}'' &= \overline{A}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}')) = \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B})) \wedge c(\delta_\nu(\underline{B})) \\ &= \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B})) = \overline{A}', \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}, \\ \overline{B}'' &= \overline{B}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}')) = \overline{B} \wedge c(\delta_\nu(\underline{A})) \wedge c(\delta_\nu(\underline{A})) \\ &= \overline{B} \wedge c(\delta_\nu(\underline{A})) = \overline{B}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' = \underline{B},\end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}'))$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}'))$ ,  $\underline{A}' = \underline{A}$ ,  $\overline{A}' = \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}))$ ,  $\underline{B}' = \underline{B}$  et  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}))$ .

**BS $\mathcal{F}$ -consistance** Nous voulons prouver que la contrainte  $C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}$  est BS $\mathcal{F}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la BS $\mathcal{F}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in vars(C_{A,B}^{dist\ min\ \nu})$  :

$$\overline{O}' = \bigvee \{ \mu \in (O', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dist\ min\ \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \}.$$

Nous avons  $vars(C_{A,B}^{dist\ min\ \nu}) = \{A, B\}$ . Montrons cette égalité pour  $A$  :

$$\begin{aligned}& \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dist\ min\ \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \omega \in (\underline{B}', \overline{B}'), \omega \leq c(\delta_\nu(\mu)) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}))) \mid \exists \omega \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge c(\delta_\nu(\underline{A}))), \omega \leq c(\delta_\nu(\mu)) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B}))) \mid \underline{B} \leq c(\delta_\nu(\mu)) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{F} \mid \underline{B} \leq c(\delta_\nu(\mu)) \text{ et } \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B})) \} \\ &= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \wedge c(\delta_\nu(\underline{B})) \} \\ & \quad (\text{car } \mu \leq c(\delta_\nu(\underline{B})) \Rightarrow \underline{B} \leq c(\delta_\nu(\mu))) \\ &= \bigvee \{ \mu \in (\underline{A}, \overline{A}') \} \\ &= \overline{A}'\end{aligned}$$

L'égalité pour  $B$  est obtenue de façon similaire.

Notons que comme pour la contrainte de direction, la borne inférieure de  $A$  pourrait être mise à jour dans certains cas particulier. Cependant nous ne disposons pas d'opérateur efficace pour accomplir cette tâche.  $\square$

*Preuve proposition 2.11.* (suite) Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}$  associé à la contrainte de distance maximale entre deux structures  $A$  et  $B$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{dist\ max\ \nu} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\underline{A})); C_{A,B}^{dist\ max\ \nu} \rangle}$$

Nous allons montrer que  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}$  est correct, idempotent et BS $\mathcal{F}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{dist\ max\ \nu} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}$  est correct, nous devons prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{sol}, I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N')$ . Si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$  et  $I(B) \leq \delta_\nu(I(A))$ . Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' & & \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \delta_\nu(I(A)) \\ \Rightarrow \underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}'' & \Rightarrow \underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}') \\ & \Rightarrow \underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}'' \end{aligned}$$

puisque  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$  et  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}')$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N')$  et est une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}$  est par conséquent correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N)) = f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N)$ .

Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N)$  et  $N$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \overline{A}'' &= \overline{A}' = \overline{A}, \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}, \\ \overline{B}'' &= \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}') = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}) \wedge \delta_\nu(\overline{A}) \\ &= \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}) = \overline{B}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' = \underline{B}, \end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$ ,  $\overline{B}'' = \overline{B}' \wedge \delta_\nu(\overline{A}')$ ,  $\underline{A}' = \underline{A}$ ,  $\overline{A}' = \overline{A}$ ,  $\underline{B}' = \underline{B}$  et  $\overline{B}' = \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})$ .

**$BS_{\mathcal{F}}$ -consistance** Nous voulons prouver que  $C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}$  est  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{dist\ max\ \nu}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in vars(C_{A,B}^{dist\ max\ \nu})$  :

$$\overline{O}' = \bigvee \{ \mu \in (\underline{O}', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{dist\ max\ \nu} \text{ dans } \mathcal{D}^I \}.$$

Nous avons  $\text{vars}(C_{A,B}^{\text{dist max } \nu}) = \{A, B\}$ . Montrons tout d'abord cette égalité pour  $A$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee \{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{dist max } \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \omega \in (\underline{B}', \overline{B}'), \omega \leq \delta_\nu(\mu)\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \exists \omega \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})), \omega \leq \delta_\nu(\mu)\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \underline{B} \leq \delta_\nu(\mu)\} \\
&= \bigvee \{\mu \in \mathcal{F} \mid \underline{B} \leq \delta_\nu(\mu) \text{ et } \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\} \\
&= \bigvee \{\mu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\} \\
&\quad (\text{car nous faisons l'hypothèse qu'une solution existe. Dans ce cas la condition} \\
&\quad \underline{B} \leq \delta_\nu(\mu) \text{ est satisfaite pour toute valeur de } \mu \text{ plus grande qu'une solution } \mu_A. \\
&\quad \text{Par ailleurs toutes les valeurs comprises entre } \underline{A} \text{ et } \mu_A \text{ ne satisfont pas} \\
&\quad \text{nécessairement la condition mais comme nous calculons le supremum de cet} \\
&\quad \text{ensemble, nous pouvons les conserver dans l'expression}) \\
&= \overline{A} = \overline{A}'.
\end{aligned}$$

Vérifions maintenant l'égalité pour  $B$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee \{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid (B, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{dist max } \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid \exists \omega \in (\underline{A}', \overline{A}'), \mu \leq \delta_\nu(\omega)\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})) \mid \exists \omega \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu \leq \delta_\nu(\omega)\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A})) \mid \mu \leq \delta_\nu(\overline{A})\} \\
&= \bigvee \{\mu \in (\underline{B}, \overline{B} \wedge \delta_\nu(\overline{A}))\} \\
&= \overline{B}'.
\end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 2.13.* Le propagateur  $f_{C_A^{\text{conn}}}$  associé à la contrainte de connexité d'une structure  $A$  est défini suivant :

$$\frac{\langle A; (\underline{A}, \overline{A}); C_A^{\text{conn}} \rangle}{\langle A; (\underline{A}, \xi_{\underline{A}}(\overline{A})); C_A^{\text{conn}} \rangle}$$

où  $\xi_{\underline{A}}(\overline{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}\}$ . Nous allons montrer que ce propagateur est correct, idempotent et  $\mathcal{BS}_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $A \in \chi$  et  $C_A^{\text{conn}} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_A^{\text{conn}}}$  est correct, nous devons prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{ND}^{\text{sol}}, I \in \text{sol}(N') \Leftrightarrow I \in \text{sol}(f_{C_A^{\text{conn}}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$  les domaines associés à  $A$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_A^{\text{conn}}}(N')$ . Si  $I \in \text{sol}(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$  et  $I(A) \in \mathcal{H}$ . Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
& I(A) \in \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A}' \leq \mu \leq \overline{A}'\} \\
& \Rightarrow \underline{A}' \leq I(A) \leq \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A}' \leq \mu \leq \overline{A}'\} \\
& \Rightarrow \underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}''
\end{aligned}$$

puisque  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}' \wedge \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A}' \leq \mu \leq \overline{A}'\}$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_A^{conn}}(N')$  et est aussi une solution. Le propagateur  $f_{C_A^{conn}}$  est donc correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_A^{conn}}(f_{C_A^{conn}}(N)) = f_{C_A^{conn}}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{A}, \overline{A})$  les domaines associés à  $A$  dans  $f_{C_A^{conn}}(f_{C_A^{conn}}(N))$ ,  $f_{C_A^{conn}}(N)$  et  $N$ .

Nous avons  $\overline{A}'' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}'\}$  et  $\overline{A}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\}$ . En remarquant que  $(\underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \text{ et } \mu \in \mathcal{H}) \Leftrightarrow (\underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}' \text{ et } \mu \in \mathcal{H})$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \overline{A}'' &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A}' \leq \mu \leq \overline{A}'\} \\ &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\} = \overline{A}', \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}. \end{aligned}$$

**$BS_{\mathcal{F}}$ -consistance** Nous voulons prouver que la contrainte  $C_A^{conn}$  est  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_{C_A^{conn}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{A}', \overline{A}')$  les domaines associés à  $A$  dans  $N$  et  $N'$ . Nous devons alors montrer que :

$$\begin{aligned} \overline{A}' &= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_A^{conn} \text{ dans } \mathcal{D}'^I\} \\ &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A}' \leq \mu \leq \overline{A}'\} \\ &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}\} \\ &\quad (\text{car } \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A} \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \underline{A} \leq \mu \leq \overline{A}') \\ &= \overline{A}'. \end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 2.14.* Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{vois} \wedge C_B^{conn}}$  est associé à la conjonction de la contrainte de voisinage entre deux structures  $A$  et  $B$  et d'une contrainte de connexité portant sur  $B$ . Il est défini suivant :

$$\frac{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}); C_{A,B}^{vois} \wedge C_B^{conn} \rangle}{\langle A, B; (\underline{A}, \overline{A}), (\underline{B}, \overline{B}') \rangle; C_{A,B}^{vois} \wedge C_B^{conn}}$$

où  $\overline{B}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{conn}(\mu, \overline{A}) = 1\}$ . Nous allons montrer que le propagateur  $f_{C_{A,B}^{vois}}$  est correct, idempotent et  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistant.

**Correction** Soit  $N = \langle \chi, \mathcal{D}, \mathcal{C} \rangle$  avec  $\{A, B\} \subseteq \chi$  et  $C_{A,B}^{vois} \in \mathcal{C}$ . Pour montrer que  $f_{C_{A,B}^{vois}}$  est correct, nous devons prouver que ce propagateur préserve les solutions, i.e.  $\forall N' \in \mathcal{P}_{N, \mathcal{D}}^{sol}, I \in sol(N') \Leftrightarrow I \in sol(f_{C_{A,B}^{vois}}(N'))$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  et  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $N'$  et  $f_{C_{A,B}^{vois}}(N')$ . Si  $I \in sol(N')$ , nous avons  $\underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}'$ ,  $\underline{B}' \leq I(B) \leq \overline{B}'$ ,  $I(B) \in \mathcal{H}$  et  $\mu_{conn}(I(A), I(B)) = 1$ .

Nous avons pour  $A : \underline{A}' \leq I(A) \leq \overline{A}' \Rightarrow \underline{A}'' \leq I(A) \leq \overline{A}''$  et pour  $B :$

$$\begin{aligned} & I(B) \in \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, I(A)) = 1\} \\ \Rightarrow & \underline{B}' \leq I(B) \leq \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, I(A)) = 1\} \\ \Rightarrow & \underline{B}' \leq I(B) \leq \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}') = 1\} \\ \Rightarrow & \underline{B}'' \leq I(B) \leq \overline{B}'' \end{aligned}$$

puisque  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$  et  $\overline{B}'' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(I(B), \overline{A}') = 1\}$ .  $I$  est donc valide dans  $f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(N')$  et est une solution. Le propagateur  $f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}$  est par conséquent correct.

**Idempotence** Nous allons vérifier que  $f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(N)) = f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(N)$ . Pour cela nous notons  $(\underline{A}'', \overline{A}'')$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$ ,  $(\underline{A}, \overline{A})$  et  $(\underline{B}'', \overline{B}'')$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$ ,  $(\underline{B}, \overline{B})$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  respectivement dans  $f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(N))$ ,  $f_{C_{A,B}^{\text{vois}}}(N)$  et  $N$ .

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \overline{A}'' &= \overline{A}' = \overline{A}, \\ \underline{A}'' &= \underline{A}' = \underline{A}, \\ \overline{B}'' &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}') = 1\} \\ &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}) = 1\} \\ &= \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}) = 1\} \\ &\quad (\text{car } \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}) = 1 \\ &\quad \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}) = 1) \\ &= \overline{B}', \\ \underline{B}'' &= \underline{B}' = \underline{B}, \end{aligned}$$

car  $\underline{A}'' = \underline{A}'$ ,  $\overline{A}'' = \overline{A}'$ ,  $\underline{B}'' = \underline{B}'$ ,  $\overline{B}'' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B}' \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}') = 1\}$ ,  $\underline{A}' = \underline{A}$ ,  $\overline{A}' = \overline{A}$ ,  $\underline{B}' = \underline{B}$  et  $\overline{B}' = \bigvee \{\mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{A}) = 1\}$ .

**$BS_{\mathcal{F}}$ -consistance** Nous voulons prouver que la contrainte  $C_{A,B}^{\text{vois } \nu}$  est  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistante dans  $N' = f_{C_{A,B}^{\text{vois } \nu}}(N)$ . Nous notons  $(\underline{A}, \overline{A})$ ,  $(\underline{A}', \overline{A}')$  et  $(\underline{B}, \overline{B})$ ,  $(\underline{B}', \overline{B}')$  les domaines associés à  $A$  et  $B$  dans  $N$  et  $N'$ . Pour montrer la  $BS_{\mathcal{F}}$ -consistance, nous devons montrer que  $\forall O \in \text{vars}(C_{A,B}^{\text{vois } \nu}) :$

$$\overline{O}' = \bigvee \{\mu \in (O', \overline{O}') \mid (O, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{vois } \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I\}.$$

Nous avons  $\text{vars}(C_{A,B}^{\text{vois } \nu}) = \{A, B\}$ . Montrons tout d'abord cette égalité pour  $A :$

$$\begin{aligned} & \bigvee \{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid (A, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\text{vois } \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I\} \\ &= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}', \overline{A}') \mid \exists \nu \in (\underline{B}', \overline{B}'), \mu_{\text{conn}}(\mu, \nu) = 1\} \\ &= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}, \overline{A}) \mid \mu_{\text{conn}}(\mu, \overline{B}') = 1\} \\ &= \bigvee \{\mu \in (\underline{A}, \overline{A})\} = \overline{A} = \overline{A}' \end{aligned}$$

En effet nous supposons qu'il existe une solution. Si nous notons  $\mu_A$  et  $\mu_B$  les valeurs d'une telle solution pour les variables  $A$  et  $B$ , nous avons alors  $\mu_{conn}(\mu_A, \mu_B) = 1$ ,  $\underline{B} \leq \mu_B \leq \overline{B}'$  et  $\underline{A} \leq \mu_A \leq \overline{A}$ . Toutes les valeurs de  $\mu$  entre  $\mu_A$  et  $\overline{A}$  satisfont donc la condition  $\mu_{conn}(\mu, \overline{B}') = 1$  (puisque  $\mu_{conn}$  est croissant). Par ailleurs nous pouvons laisser dans l'expression les valeurs comprises entre  $\underline{A}$  et  $\mu_A$  puisque nous calculons le supremum sur l'ensemble des valeurs.

Vérifions maintenant l'égalité pour  $B$  :

$$\begin{aligned}
& \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid (B, \mu) \text{ possède un support pour } C_{A,B}^{\nu \text{ vois } \nu} \text{ dans } \mathcal{D}'^I \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}', \overline{B}') \mid \exists \nu \in (\underline{A}', \overline{A}'), \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \mu_{conn}(\mu, \nu) = 1 \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in (\underline{B}, \overline{B}') \mid \exists \nu \in (\underline{A}, \overline{A}), \mu \in \mathcal{H} \text{ et } \mu_{conn}(\mu, \nu) = 1 \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B}' \text{ et } \mu_{conn}(\mu, \overline{A}) = 1 \} \\
&= \bigvee \{ \mu \in \mathcal{H} \mid \underline{B} \leq \mu \leq \overline{B} \text{ et } \mu_{conn}(\mu, \overline{A}) = 1 \} = \overline{B}'
\end{aligned}$$

En effet nous avons  $\mu \in \mathcal{H}$  et  $\underline{B} \leq \mu \leq \overline{B}$  et  $\mu_{conn}(\mu, \overline{A}) = 1 \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{H}$  et  $\underline{B} \leq \mu \leq \overline{B}'$  et  $\mu_{conn}(\mu, \overline{A}) = 1$ .

□





## Annexe D

### Preuves du chapitre 3

*Preuve proposition 3.3.* Nous allons montrer dans un premier temps que si  $x_i$  appartient à un maximum régional  $R_\mu$  de  $\mu$ , alors  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu) \in \mathcal{H}^1$ .

Par définition  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}^1 \mid \delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq \nu \leq \mu \}$ . Nous allons montrer que tous les éléments  $\nu \in \mathcal{H}^1$  vérifiant  $\delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq \nu \leq \mu$  se recouvrent au sens de  $\perp^1$ . Tout d'abord montrons que  $\max_{x \in X} \nu(x) = \mu(x_i)$ . D'après la proposition 3.2, si  $\nu \in \mathcal{H}^1$ ,  $\nu$  possède un seul maximum régional et nous notons  $x_m$  un point appartenant à ce maximum régional. Puisque ce maximum régional est unique et que  $X$  est borné et discret, pour tout point  $x \in X$ , il existe un chemin croissant dans  $\nu$  de  $x$  vers  $x_m$ . Il existe donc un chemin  $l_{x_i, x_m}$  croissant dans  $\nu$  de  $x_i$  vers  $x_m$ . Or  $\nu(x_i) = \mu(x_i)$  et  $\nu \leq \mu$ , donc  $\forall x_k \in l_{x_i, x_m}$ ,  $\mu(x_k) \geq \nu(x_k) \geq \mu(x_i)$  et puisque  $l_{x_i, x_m}$  est croissant,  $\forall x_k \in l_{x_i, x_m}$ ,  $x_k \in R_\mu$  (en effet dans le cas contraire le premier point  $x_k$  n'appartenant pas à  $R_\mu$  vérifierait  $\mu(x_k) < \mu(x_i)$ ). Le point  $x_m$  appartient donc à  $R_\mu$  et  $\mu(x_i) = \mu(x_m)$ .  $\nu$  atteint donc son maximum global en  $x_i$ . Tous les éléments  $\nu$  de  $\mathcal{H}^1$  tels que  $\delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq \nu \leq \mu$  vérifient donc  $\nu(x_i) = \mu(x_i)$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) = \mu(x_i)$ . Ils se recouvrent donc selon  $\perp^1$  (car quel que soit le niveau  $\alpha$ , leurs  $\alpha$ -coupes sont soit vides soit contiennent  $x_i$  et donc s'intersectent en  $x_i$ ) et nous obtenons  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu) \in \mathcal{H}^1$ .

Montrons maintenant que  $\forall x \in X$ ,  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu)(x) = c_\mu^1(x, x_i)$ . Soit  $c \in \mathcal{F}$  tel que  $\forall x \in X$ ,  $c(x) = c_\mu^1(x, x_i)$ . Nous allons dans un premier temps vérifier que  $c$  appartient à  $\mathcal{H}^1$ . Par définition  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,  $(c)_\alpha = \{x \in X \mid c_\mu^1(x, x_i) \geq \alpha\}$ . Soit  $x \in (c)_\alpha$  et  $l_{x, x_i}$  un chemin discret maximisant le critère  $\max_{l=\{x_0=x, x_1, \dots, x_n=y\}} \min_{0 \leq k \leq n} \mu(x_k)$ . Nous avons alors  $\forall x_k \in l_{x, x_i}$ ,  $x_k \in (c)_\alpha$  (car  $\min_{x_k \in l_{x, x_i}} \mu(x_k) \geq \alpha$ ). Pour tout couple de points de  $(c)_\alpha$ , il existe donc un chemin discret dans  $(c)_\alpha$  passant par  $x_i$  et prenant ces points pour extrémités. Nous avons donc  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,  $(c)_\alpha \in \mathcal{C}_d$  et suivant la proposition 3.1,  $c \in \mathcal{H}^1$ . Par ailleurs  $c(x_i) = c_\mu^1(x_i, x_i) = \mu(x_i)$ .  $c$  vérifie donc  $c \in \mathcal{H}^1$  et  $\delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq c \leq \mu$ . Nous obtenons donc  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu) \geq c$ .

Soit  $\nu \in \mathcal{H}^1$  tel que  $\delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq \nu \leq \mu$ . Nous avons donc  $\forall (x, y) \in X^2$ ,  $c_\nu^1(x, y) = \min(\nu(x), \nu(y))$ . Puisque la mesure  $c_h^1(x, y)$  est croissante par rapport à  $h$  et que  $\nu \leq \mu$ , nous obtenons  $c_\mu^1(x, y) \geq \min(\nu(x), \nu(y))$ . Si nous choisissons  $y = x_i$ , nous obtenons  $c_\mu^1(x, x_i) \geq \min(\nu(x), \nu(x_i))$  et puisque  $\nu(x) \leq \nu(x_i)$  (cf première partie de la démonstration), la propriété  $c \geq \nu$  est vérifiée pour tous les éléments  $\nu$  appartenant à  $\mathcal{H}^1$  tels que  $\delta_{x_i}^{\mu(x_i)} \leq \nu \leq \mu$ . Nous avons donc  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1(\mu) \leq c$ .

Nous obtenons donc bien l'égalité  $\forall x \in X, \eta_{\delta_{x_i}}^1(\mu)(x) = c_\mu^1(x, x_i)$ .  $\square$

*Preuve proposition 3.5.* Soit  $x_m$  un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint. Puisque  $X$  est borné et fini, l'existence de  $x_m$  est garantie. Nous voulons montrer que :

$$\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^2(x, y) \geq \min(c_\mu^2(x, x_m), c_\mu^2(y, x_m)).$$

Soient  $(x, y) \in X^2$  quelconques. Par définition :

$$\begin{aligned} c_\mu^2(x, y) &= 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, y) \\ &\geq 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + \min(c_\mu^1(x, x_m), c_\mu^1(x_m, y)) \quad (c_\mu^1 \text{ est max-min transitif}) \\ &\geq \min(1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, x_m), 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x_m, y)) \\ &\geq \min(1 - \min(\mu(x), \mu(x_m)) + c_\mu^1(x, x_m), \\ &\quad 1 - \min(\mu(x_m), \mu(y)) + c_\mu^1(x_m, y)) \quad (\text{car } \mu(x_m) \geq \max(\mu(x), \mu(y))) \\ &\geq \min(c_\mu^2(x, x_m), c_\mu^2(x_m, y)). \end{aligned}$$

$\square$

*Preuve proposition 3.6.* Soit  $\mu \in \mathcal{F}$ . Nous voulons montrer que  $c_\mu^2(x, y)$  atteint son minimum pour  $x$  étant un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint et  $y$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$ . Soit  $x_m$  un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint. La proposition 3.5 nous assure que :  $\forall (x, y) \in X^2, c_\mu^2(x, y) \geq \min(c_\mu^2(x, x_m), c_\mu^2(y, x_m))$ .

Nous obtenons donc :  $\min_{(x, y) \in X^2} c_\mu^2(x, y) \geq \min_{x \in X} c_\mu^2(x, x_m)$ ,

et puisque  $x_m \in X$  :  $\min_{(x, y) \in X^2} c_\mu^2(x, y) = \min_{x \in X} c_\mu^2(x, x_m)$ .

Cela nous assure que  $c_\mu^2(x, y)$  atteint son minimum lorsque  $x$  ou  $y$  sont des points auxquels le maximum global de  $\mu$  est atteint.

Nous allons maintenant montrer que si  $x_m$  est un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint, alors le minimum de  $c_\mu^2(x_m, x)$  est atteint lorsque  $x$  appartient à un maximum régional de  $\mu$ . Soit un point quelconque  $x$  de  $X$ . Soit  $x_i$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$  tel qu'il existe un chemin discret croissant de  $x$  à  $x_i$  dans  $\mu$  (nous avons en particulier  $\mu(x) \leq \mu(x_i)$ ). L'existence de ce maximum local est assurée puisque  $X$  est borné et fini. Nous devons prouver que :

$$c_\mu^2(x, x_m) \geq c_\mu^2(x_i, x_m), \text{ ou de manière équivalente}$$

$$c_\mu^1(x, x_m) - \mu(x) \geq c_\mu^1(x_i, x_m) - \mu(x_i), \text{ ou encore}$$

$$c_\mu^1(x, x_m) + \mu(x_i) \geq c_\mu^1(x_i, x_m) + \mu(x).$$

Nous allons montrer cette dernière inégalité. Puisque  $c_\mu^1$  est max-min transitif, nous avons :

$$c_\mu^1(x, x_m) \geq \min(c_\mu^1(x, x_i), c_\mu^1(x_i, x_m)). \quad (D.1)$$

Supposons dans un premier temps que :

$$\begin{aligned} D.1 \Rightarrow & \quad c_\mu^1(x_i, x_m) \geq c_\mu^1(x, x_i) \\ & \quad c_\mu^1(x, x_m) \geq c_\mu^1(x, x_i) \\ \Rightarrow & \quad c_\mu^1(x, x_m) \geq \mu(x) \quad (\text{car il existe un chemin croissant dans } \mu \text{ de } x \text{ vers } x_i) \\ \Rightarrow & \quad c_\mu^1(x, x_m) + \mu(x_i) \geq c_\mu^1(x_i, x_m) + \mu(x) \quad (\text{car } \mu(x_i) \geq c_\mu^1(x_i, x_m)). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que :

$$\begin{aligned} & \quad c_\mu^1(x, x_i) \geq c_\mu^1(x_i, x_m) \\ D.1 \Rightarrow & \quad c_\mu^1(x, x_m) \geq c_\mu^1(x_i, x_m). \end{aligned}$$

Puisque  $c_\mu^1$  est max-min transitif, nous avons :

$$\begin{aligned} c_\mu^1(x_i, x_m) &\geq \min(c_\mu^1(x_i, x), c_\mu^1(x, x_m)) \\ &\geq \min(\mu(x), c_\mu^1(x, x_m)) \\ &\geq c_\mu^1(x, x_m). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} c_\mu^1(x, x_m) &= c_\mu^1(x_i, x_m) \\ \Rightarrow c_\mu^1(x, x_m) + \mu(x_i) &\geq c_\mu^1(x_i, x_m) + \mu(x) \text{ puisque } \mu(x_i) \geq \mu(x). \end{aligned}$$

La propriété  $c_\mu^1(x, x_m) + \mu(x_i) \geq c_\mu^1(x_i, x_m) + \mu(x)$  est donc toujours vérifiée et :

$$\forall x \in X, c_\mu^2(x, x_m) \geq c_\mu^2(x_i, x_m),$$

où  $x_i$  est un point appartenant à un maximum régional de  $\mu$  et  $x_m$  un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint.  $\square$

*Preuve proposition 3.7.* Nous allons montrer dans un premier temps que la fonction associant  $c_\mu^1(x, y)$  à  $\mu$  est lipschitzienne pour  $x$  et  $y$  fixés, quelconques. Soient  $(\mu_A, \mu_B) \in \mathcal{F}^2$  et  $\eta = d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B)$ . Nous voulons prouver que  $d_{\mathcal{F}_{X^2}}(c_{\mu_B}^1, c_{\mu_A}^1) \leq \eta$  (où  $d_{\mathcal{F}_{X^2}}(f_1, f_2) = \sup_{(x,y) \in X^2} |f_1(x, y) - f_2(x, y)|$ ).

Soient  $(x, y) \in X^2$  quelconques et  $LA, LB$  deux chemins de  $x$  à  $y$  tels que  $c_{\mu_A}^1(x, y) = \min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i)$  et  $c_{\mu_B}^1(x, y) = \min_{x_i \in LB} \mu_B(x_i)$  (ces chemins existent et les minima sont atteints puisque  $X$  est discret et borné). Par ailleurs  $d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B) = \eta \Rightarrow \forall z \in X, |\mu_A(z) - \mu_B(z)| \leq \eta$ .

Soit  $x_a \in LA$  tel que  $\min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) = \mu_A(x_a)$  et  $x_b \in LB$  tel que  $\min_{x_i \in LB} \mu_B(x_i) = \mu_B(x_b)$ . Puisque  $d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B) = \eta$ , nous avons :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |\mu_A(x_a) - \mu_B(x_a)| \leq \eta \\ |\mu_A(x_b) - \mu_B(x_b)| \leq \eta \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} -\eta + \mu_B(x_a) \leq \min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) \leq \eta + \mu_B(x_a) \\ -\eta + \mu_A(x_b) \leq \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i) \leq \eta + \mu_A(x_b) \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} -\eta + \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i) \leq \min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) \\ -\eta + \min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) \leq \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i) \end{cases} \\ \Rightarrow &|\min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) - \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i)| \leq \eta. \end{aligned}$$

Similairement nous pouvons obtenir :

$$|\min_{x_i \in LB} \mu_A(x_i) - \min_{x_i \in LB} \mu_B(x_i)| \leq \eta.$$

Donc nous avons :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |\min_{x_i \in LB} \mu_A(x_i) - \min_{x_i \in LB} \mu_B(x_i)| \leq \eta \\ |\min_{x_i \in LA} \mu_A(x_i) - \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i)| \leq \eta \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} |\min_{x_i \in LB} \mu_A(x_i) - c_{\mu_B}^1(x, y)| \leq \eta \\ |c_{\mu_A}^1(x, y) - \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i)| \leq \eta \end{cases} \\ \Rightarrow &\begin{cases} c_{\mu_B}^1(x, y) \leq \min_{x_i \in LB} \mu_A(x_i) + \eta \\ c_{\mu_A}^1(x, y) \leq \min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i) + \eta. \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque la définition de  $c_\mu^1$  nous assure que  $\min_{x_i \in LB} \mu_A(x_i) \leq c_{\mu_A}^1(x, y)$  et que  $\min_{x_i \in LA} \mu_B(x_i) \leq c_{\mu_B}^1(x, y)$  nous obtenons que  $\forall (x, y) \in X^2$  :

$$\begin{cases} c_{\mu_B}^1(x, y) \leq c_{\mu_A}^1(x, y) + \eta \\ c_{\mu_A}^1(x, y) \leq c_{\mu_B}^1(x, y) + \eta \end{cases} \\ \Rightarrow |c_{\mu_B}^1(x, y) - c_{\mu_A}^1(x, y)| \leq \eta,$$

Nous obtenons donc bien  $d_{\mathcal{F}_{X^2}}(c_{\mu_B}^1, c_{\mu_A}^1) \leq \eta$  et la fonction associant  $c_\mu^1(x, y)$  à  $\mu$  est lipschitzienne.

Nous allons maintenant montrer que la fonction associant  $c_\mu^2(x, y)$  à  $\mu$  est continue et 2-lipschitzienne pour  $x$  et  $y$  fixés. Soient  $(\mu_A, \mu_B) \in \mathcal{F}^2$ ,  $\eta = d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B)$  et  $(x, y) \in X^2$  quelconques.  $c_\mu^1$  est lipschitzienne. Puisque :

$$\begin{aligned} & |c_{\mu_B}^1(x, y) - c_{\mu_A}^1(x, y)| \leq \eta \\ \Rightarrow & -\eta + c_{\mu_B}^1(x, y) \leq c_{\mu_A}^1(x, y) \leq \eta + c_{\mu_B}^1(x, y). \end{aligned} \quad (\text{I1})$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \forall z \in X, |\mu_A(z) - \mu_B(z)| \leq \eta \\ \Rightarrow & \forall z \in X, -\eta + \mu_B(z) \leq \mu_A(z) \leq \eta + \mu_B(z) \\ \Rightarrow & \begin{cases} -\eta + \mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \eta + \mu_B(x) \\ -\eta + \mu_B(y) \leq \mu_A(y) \leq \eta + \mu_B(y) \end{cases} \\ & (\text{pour } z = x \text{ et } z = y) \\ \Rightarrow & -\eta + \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) \leq \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \leq \eta + \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) \\ \Rightarrow & -\eta + 1 - \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) \leq 1 - \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) \\ & \leq \eta + 1 - \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) \quad (\text{I2}) \\ \Rightarrow & -2\eta + 1 - \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) + c_{\mu_B}^1(x, y) \leq 1 - \min(\mu_A(x), \mu_A(y)) + c_{\mu_A}^1(x, y) \\ & \leq 2\eta + 1 - \min(\mu_B(x), \mu_B(y)) + c_{\mu_B}^1(x, y) \end{aligned}$$

(en additionnant (I1) et (I2))

$$\Rightarrow |c_{\mu_A}^2(x, y) - c_{\mu_B}^2(x, y)| \leq 2\eta.$$

La fonction associant  $c_\mu^2(x, y)$  à  $\mu$  est donc 2-lipschitzienne.  $\square$

*Preuve proposition 3.8.* Nous allons montrer que la fonction  $c^2(\mu) = \min_{(x, y) \in X^2} c_\mu^2(x, y)$  est 2-lipschitzienne. Soient  $(\mu_A, \mu_B) \in \mathcal{F}^2$  et  $\eta = d_{\mathcal{F}}(\mu_A, \mu_B)$ . Soient  $(x_A, y_A) \in X^2$  tel que  $c^2(\mu_A) = c_{\mu_A}^2(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B) \in X^2$  tel que  $c^2(\mu_B) = c_{\mu_B}^2(x_B, y_B)$ .

Puisque  $c_\mu^2$  est 2-lipschitzienne :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |c_{\mu_A}^2(x_A, y_A) - c_{\mu_B}^2(x_A, y_A)| \leq 2\eta \\ |c_{\mu_A}^2(x_B, y_B) - c_{\mu_B}^2(x_B, y_B)| \leq 2\eta \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} c_{\mu_B}^2(x_A, y_A) \leq 2\eta + c_{\mu_A}^2(x_A, y_A) \\ c_{\mu_A}^2(x_B, y_B) \leq 2\eta + c_{\mu_B}^2(x_B, y_B) \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} c_{\mu_B}^2(x_A, y_A) \leq 2\eta + c^2(\mu_A) \\ c_{\mu_A}^2(x_B, y_B) \leq 2\eta + c^2(\mu_B) \end{cases} \\ \text{or } & c^2(\mu_B) \leq c_{\mu_B}^2(x_A, y_A) \text{ et } c^2(\mu_A) \leq c_{\mu_A}^2(x_B, y_B) \\ \Rightarrow & \begin{cases} c^2(\mu_B) \leq 2\eta + c^2(\mu_A) \\ c^2(\mu_A) \leq 2\eta + c^2(\mu_B) \end{cases} \\ \Rightarrow & -2\eta + c^2(\mu_B) \leq c^2(\mu_A) \leq 2\eta + c^2(\mu_B) \\ \Rightarrow & |c^2(\mu_A) - c^2(\mu_B)| \leq 2\eta. \end{aligned}$$

La fonction  $c^2$  est donc 2-lipschitzienne.  $\square$

*Preuve proposition 3.9.* Afin de montrer que  $\mathcal{H}_\tau^2$  définit une hyperconnexion sur  $\mathcal{F}$  associée à la mesure de recouvrement  $\perp_\tau^2$ , nous devons montrer que :

- $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{H}_\tau^2$ ,
  - $\mathcal{H}_\tau^2$  contient une famille sup-génératrice  $S$  de  $\mathcal{F}$ ,
  - pour toute famille d'éléments  $\{\mu_i\}$  de  $\mathcal{H}_\tau^2$  telle que  $\perp_\tau^2(\{\mu_i\}) = 1$ ,  $\forall_i \mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2$ .
- 1) Puisque  $\forall(x, y) \in X^2$ ,  $c_{0_{\mathcal{F}}}^1(x, y) = 0$ , nous avons  $\forall(x, y) \in X^2$ ,  $c_{0_{\mathcal{F}}}^2(x, y) = 1$  et donc  $c^2(0_{\mathcal{F}}) = 1$ . Nous vérifions ainsi que  $\forall \tau \in [0, 1]$ ,  $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{H}_\tau^2$ .
- 2)  $\forall x \in X$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $c^2(\delta_x^t) = 1$  et donc  $\forall x \in X$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $\forall \tau \in [0, 1]$ ,  $\delta_x^t \in \mathcal{H}_\tau^2$ . Par ailleurs la famille  $\{\delta_x^t \mid x \in X, t \in [0, 1]\}$  est sup-génératrice dans  $\mathcal{F}$ .
- 3) Soit  $\{\mu_i\}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{H}_\tau^2$  vérifiant  $\perp_\tau^2(\{\mu_i\}) = 1$ . Nous notons  $\mu = \vee_i \mu_i$ . Nous devons montrer que  $c^2(\mu) \geq \tau$ .

Soit  $x_m$  un point auquel le maximum global de  $\mu$  est atteint,  $\mu_m \in \{\mu_i\}$  tel que  $\mu(x_m) = \mu_m(x_m)$  et  $y$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$  tel que  $c^2(\mu) = 1 - \mu(y) + c_\mu^1(x_m, y)$  (l'existence est assurée par la proposition 3.6). Soit  $k$  tel que  $\mu_k(y) = \mu(y)$ , alors :

$$c^2(\mu) = 1 - \mu_k(y) + c_\mu^1(x_m, y).$$

Puisque  $c_\mu^1$  est max-min transitif nous avons :

$$c_\mu^1(x_m, y) \geq \min(c_\mu^1(x_m, x_k), c_\mu^1(x_k, y)), \quad (\text{D.2})$$

où  $x_k$  est un point auquel le maximum global de  $\mu_k$  est atteint.

$$\begin{aligned} & \perp_\tau^2(\{\mu_i\}) = 1 \\ \Rightarrow & \forall \alpha \in [0, 1], \bigcap_i \{(\eta_{\delta_{x_i}^{h_i}}^1(\mu_i))_\alpha \mid \alpha \leq h_i - 1 + \tau\} \neq \emptyset \text{ avec } h_i = \max_{x \in X} \mu_i(x) = \mu_i(x_i) \\ \Rightarrow & \forall \alpha \in [0, 1], \alpha \leq \min(\mu_m(x_m), \mu_k(x_k)) - 1 + \tau, (\eta_{\delta_{x_m}^{h_m}}^1(\mu_m))_\alpha \cap (\eta_{\delta_{x_k}^{h_k}}^1(\mu_k))_\alpha \neq \emptyset \\ & \text{(en restreignant l'intersection aux indices correspondant à } \mu_k \text{ et à } \mu_m) \\ \Rightarrow & \exists l \in L_{x_k, x_m}, l = \{x_0 = x_k, x_1, \dots, x_n = x_m\} \text{ tq} \\ & \min_{0 \leq i \leq n} \left( \eta_{\delta_{x_k}^{h_k}}^1(\mu_k) \vee \eta_{\delta_{x_m}^{h_m}}^1(\mu_m) \right)(x_i) \geq \min(\mu_m(x_m), \mu_k(x_k)) - 1 + \tau, \end{aligned}$$

où  $L_{x_k, x_m}$  est l'ensemble des chemins discrets de  $x_k$  à  $x_m$ , selon la connexité discrète  $c_d$  définie sur  $X$ . En effet selon la proposition 3.3,  $\eta_{\delta_{x_k}^{h_k}}^1(\mu_k) \in \mathcal{H}^1$  et  $\eta_{\delta_{x_m}^{h_m}}^1(\mu_m) \in \mathcal{H}^1$  et donc selon la proposition 3.1, toutes leurs  $\alpha$ -coupes sont connexes au sens de la connexité discrète  $c_d$ . Si nous notons  $\alpha_0 = \min(\mu_m(x_m), \mu_k(x_k)) - 1 + \tau$ , les  $\alpha$ -coupes de  $\eta_{\delta_{x_k}^{h_k}}^1(\mu_k)$  et de  $\eta_{\delta_{x_m}^{h_m}}^1(\mu_m)(x_i)$  de niveau  $\alpha_0$  sont connexes et s'intersectent. Leur union est donc connexe ce qui assure l'existence du chemin  $l$ . Puisque  $c_\mu^1(x, y) = \max_{l \in L_{x, y}} \min_{0 \leq i \leq n} \mu(x_i)$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} & c_{\eta_{\delta_{x_k}^{h_k}}^1(\mu_k) \vee \eta_{\delta_{x_m}^{h_m}}^1(\mu_m)}^1(x_m, x_k) \geq \mu_k(x_k) - 1 + \tau \\ \Rightarrow & c_\mu^1(x_m, x_k) \geq \mu_k(x_k) - 1 + \tau \\ & \text{(puisque } c_\mu^1 \text{ est croissante par rapport à } \mu) \\ \Rightarrow & c_\mu^1(x_m, x_k) \geq \mu_k(y) - 1 + \tau \\ & \text{(puisque } \mu_k(x_k) \geq \mu_k(y)). \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
& \mu_k \in \mathcal{H}_\tau^2 \\
\Rightarrow & c^2(\mu_k) \geq \tau \\
\Rightarrow & 1 - \min(\mu_k(x_k), \mu_k(y)) + c_{\mu_k}^1(x_k, y) \geq \tau \\
& \text{(puisque } \forall (x_1, x_2) \in X^2, c_{\mu_k}^2(x_1, x_2) \geq c^2(\mu_k)) \\
\Rightarrow & 1 - \mu_k(y) + c_{\mu_k}^1(x_k, y) \geq \tau \\
\Rightarrow & c_{\mu_k}^1(x_k, y) \geq \mu_k(y) - 1 + \tau \\
\Rightarrow & c_\mu^1(x_k, y) \geq \mu_k(y) - 1 + \tau \\
& \text{puisque } c_\mu^1 \text{ est croissante par rapport à } \mu.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
D.2 \Rightarrow & c_\mu^1(x_m, y) \geq \min(c_\mu^1(x_m, x_k), c_\mu^1(x_k, y)) \\
\Rightarrow & c_\mu^1(x_m, y) \geq \mu_k(y) - 1 + \tau \\
\Rightarrow & 1 - \mu_k(y) + c_\mu^1(x_m, y) \geq \tau \\
\Rightarrow & 1 - \mu(y) + c_\mu^1(x_m, y) \geq \tau \\
& \text{puisque } \mu(y) = \mu_k(y) \\
\Rightarrow & 1 - \min(\mu(x_m), \mu(y)) + c_\mu^1(x_m, y) \geq \tau \\
& \text{puisque } \mu(y) \leq \mu(x_m) \\
\Rightarrow & c^2(\mu) \geq \tau \\
\Rightarrow & \mu \in \mathcal{H}_\tau^2.
\end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 3.11.* Selon la proposition 3.3, si  $x_i$  appartient à un maximum régional de  $\mu$ , alors  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1 \in \mathcal{H}^1$ . La proposition 3.10 nous assure alors que  $\eta_{\delta_{x_i}^{\mu(x_i)}}^1 \in \mathcal{H}^1(\mu)$ .

Nous devons maintenant prouver que l'ensemble des composantes hyperconnexes  $\mathcal{H}^1(\mu)$  de  $\mu$  selon  $\mathcal{H}^1$  est isomorphe aux maxima régionaux  $\{R_i\}$  de  $\mu$ . Pour cela nous allons montrer que les éléments de  $\mathcal{H}^1(\mu)$  sont exactement les ouvertures connexes  $\eta_{\mu_R}^1(\mu)$  dont l'origine est associée aux maxima régionaux  $\mu_R$  de  $\mu$ . Soit  $R \subseteq X$  un maximum régional de  $\mu$ . Nous notons  $\mu_R(x) = \mu(x) = h_R$  si  $x \in R$  et 0 sinon,  $h_R$  étant la hauteur de cet ensemble. Nous allons montrer que  $\eta_{\mu_R}^1(\mu)$  appartient à  $\mathcal{H}^1(\mu)$  et que l'opérateur  $\eta_{\mu_R}^1(\mu) : \{R_i\} \rightarrow \mathcal{H}^1(\mu)$  est bijectif.

L'ouverture hyperconnexe d'origine  $\mu_R$  peut être obtenue suivant :  $\eta_{\mu_R}^1(\mu) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{H}^1 \mid \mu_R \leq \nu \leq \mu\}$ . L'ensemble des éléments  $\nu$  satisfaisant à ces conditions s'intersectent donc au moins pour les niveaux  $\alpha \in [0, h_R]$  puisqu'ils incluent tous  $\mu_R$ . Par ailleurs ils vérifient nécessairement  $\max_{x \in X} \nu(x) = h_R$  (cf la première partie de la preuve de la proposition 3.3). En effet dans le cas contraire l'ensemble  $\nu$  présenterait au moins deux maxima régionaux et n'appartiendrait donc pas à  $\mathcal{H}^1$  (la figure D.1 illustre ces différentes notations.  $\nu_2$  est un ensemble flou tel que  $\max_{x \in X} \nu_2(x) > h_R$  mais dans ce cas  $\nu_2 \notin \mathcal{H}^1$ ). Nous pouvons en déduire que  $\perp^1(\{\nu \in \mathcal{H}^1 \mid \mu_R \leq \nu \leq \mu\}) = 1$  et donc que  $\eta_{\mu_R}^1(\mu) \in \mathcal{H}^1$ . La propriété 3.10 nous assure alors que  $\eta_{\mu_R}^1(\mu) \in \mathcal{H}^1(\mu)$ .

Prouvons dans un premier temps que l'opérateur  $\eta_{\mu_R}^1(\mu) : \{R_i\} \rightarrow \mathcal{H}^1(\mu)$  est surjectif et donc que chaque composante connexe de  $\mu$  est associée à un maximum régional de  $\mu$ . Soit  $\mu_i \in \mathcal{H}^1(\mu)$  et  $x_i$  un point auquel le maximum global de  $\mu_i$  est atteint (nous avons dans ce cas  $\mu_i(x_i) = \mu(x_i)$ ). Si  $x_i$  appartient à un maximum régional  $R_i$  de  $\mu$ , alors  $\mu_i = \eta_{\mu_{R_i}}^1(\mu)$  et

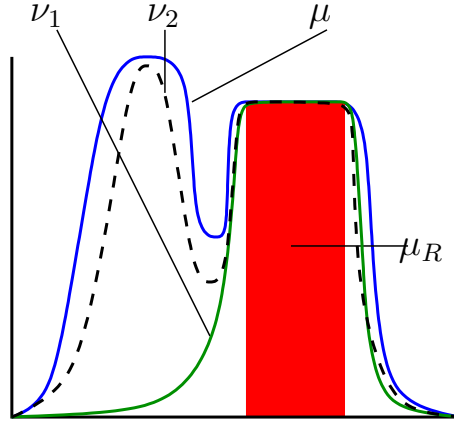


FIGURE D.1 –  $\mu$  un ensemble flou 1D.  $\mu_R$  correspondant à un maximum régional.  $\nu_1$  appartient à  $\mathcal{H}^1$  et  $\mu_R \leq \nu_1$ .  $\nu_2 \notin \mathcal{H}^1$ .

donc  $\mu_i$  est associé à  $R_i$ . Supposons que  $x_i$  n'appartienne pas à un maximum régional de  $\mu$ . Soit  $x_m$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$  tel qu'il existe un chemin croissant de  $x_i$  vers  $x_m$  dans  $\mu$  (ce qui est toujours possible puisque  $X$  est supposé borné). Considérons l'ensemble flou  $\nu$  prenant pour valeur  $\mu(x)$  sur ce chemin et 0 ailleurs. Nous pouvons alors vérifier que  $\perp^1(\mu_i, \nu) = 1$  et donc que  $\mu_i \vee \nu \in \mathcal{H}^1$ . Par ailleurs par construction nous avons  $\mu_i < \mu_i \vee \nu \leq \mu$ , ce qui est en contradiction avec la propriété :  $\nexists \nu \in \mathcal{H}^1, \mu_i < \nu \leq \mu$  vérifiée par tous les éléments de  $\mathcal{H}^1$ . Ce cas n'est donc pas possible et nous avons toujours  $x_i$  appartenant à un maximum régional de  $\mu$  et  $\mu_i = \eta_{\mu_{R_i}}^1(\mu)$ .

Il nous reste donc à montrer que cet opérateur est injectif. Considérons deux maxima régionaux différents  $R_i$  et  $R_j$  et  $\mu_i = \eta_{\mu_{R_i}}^1(\mu)$  et  $\mu_j = \eta_{\mu_{R_j}}^1(\mu)$ . Supposons que  $\mu_i = \mu_j$ . Dans ce cas  $\mu_i \geq \mu_{R_i} \vee \mu_{R_j}$ . Or puisque  $\mu_i \leq \mu$  et que  $R_i$  et  $R_j$  sont des maxima régionaux différents,  $\mu_i$  présente donc au moins deux maxima régionaux, ce qui contredit  $\mu_i \in \mathcal{H}^1(\mu)$ .  $\mu_i$  et  $\mu_j$  sont donc différents.

$\mathcal{H}^1(\mu)$  et l'ensemble de maxima régionaux de  $\mu$  sont donc isomorphes.  $\square$

*Preuve proposition 3.12.* Nous notons  $\mathcal{H}^1(\mu) = \{\mu_i\}$ . La proposition 3.11 nous assure que chaque  $\mu_i$  est associé à un maximum régional de  $\mu$ . Nous notons  $x_i$  un point appartenant au maximum régional associé à  $\mu_i$  et  $x_j$  un point du maximum régional associé à  $\mu_j$ . Nous voulons prouver que :

$$c_\mu^1(x_i, x_j) = \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x)).$$

Prouvons dans un premier temps que  $c_\mu^1(x_i, x_j) \geq \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x))$ . La mesure  $c_\mu^1$  est max-min transitive donc :

$$c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x_j) \geq \max_{x \in X} \min(c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x), c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x, x_j)).$$

Par ailleurs  $c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x) \geq c_{\mu_i}^1(x_i, x)$ , puisque  $c_\mu^1$  est croissante par rapport à  $\mu$ . Puisque par définition  $\mu_i \in \mathcal{H}^1$  et que  $x_i$  est un point auquel le maximum global de  $\mu_i$  est atteint, l'égalité suivante est satisfaite :  $c_{\mu_i}^1(x_i, x) = \min(\mu_i(x_i), \mu_i(x)) = \mu_i(x)$ . Nous obtenons donc  $c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x) \geq \mu_i(x)$  et de même  $c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x, x_j) \geq \mu_j(x)$ .



Donc :

$$\begin{aligned}
& c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x_j) \geq \max_{x \in X} \min(c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x), c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x, x_j)) \\
\Rightarrow & c_{\mu_i \vee \mu_j}^1(x_i, x_j) \geq \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x)) \\
\Rightarrow & c_{\mu}^1(x_i, x_j) \geq \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x)) \\
& \text{car } c_{\mu}^1 \text{ est croissante par rapport à } \mu.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant prouver par l'absurde que  $c_{\mu}^1(x_i, x_j) \leq \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x))$ . Supposons que  $c_{\mu}^1(x_i, x_j) > \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x))$  et soit  $x_a$  le point auquel est atteint le minimum du chemin sur lequel  $c_{\mu}^1(x_i, x_j)$  est atteint (c'est-à-dire sur lequel ce minimum est maximal). Nous avons donc  $\mu(x_a) > \max_{x \in X} \min(\mu_i(x), \mu_j(x))$  et donc  $\mu(x_a) > \mu_i(x_a)$  ou  $\mu(x_a) > \mu_j(x_a)$ . Par ailleurs les composantes connexes  $\mu_i$  (appartenant à  $\mathcal{H}^1$ ) vérifient  $\forall x \in X, \mu_i(x) = c_{\mu}^1(x, x_i)$  (cf propositions 3.3 et 3.11). Nous obtenons donc  $\mu_i(x_a) = c_{\mu}^1(x_a, x_i)$ . Or  $c_{\mu}^1(x_a, x_i) = \mu(x_a)$  (en considérant le chemin utilisé pour calculer  $c_{\mu}^1(x_i, x_j)$ ). De même nous avons  $\mu_j(x_a) = c_{\mu}^1(x_a, x_j) = \mu(x_a)$ , ce qui est en contradiction avec  $\mu(x_a) > \mu_i(x_a)$  ou  $\mu(x_a) > \mu_j(x_a)$ . □

*Preuve proposition 3.13.* Puisque l'ensemble des feuilles  $\mathcal{L}$  de l'arbre  $T = T(\mu)$  est isomorphe aux maxima régionaux  $\{R_i\}$  de  $\mu$  par construction, nous obtenons d'après la proposition 3.11 que  $\mathcal{L}$  est isomorphe à  $\mathcal{H}^1(\mu)$ .

Nous voulons maintenant montrer que chaque composante connexe  $\mu_i$  correspond exactement à la branche  $P^{l_i}(h(l_i))$  de l'arbre. Nous notons  $E(G)(x) = \max_{v \in G | x \in Pt(v)} h(v)$  la fonction retournant l'ensemble flou associé à un sous-arbre de  $T(\mu)$  dont l'ensemble des nœuds est  $G$ . Nous rappelons que les quantifications des degrés d'appartenance des ensembles flous et des arbres associés sont identiques et que dans ce cas  $\forall \mu \in \mathcal{F}, \mu = E(\mathcal{V})$ , où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des nœuds de l'arbre  $T(\mu)$  représentant  $\mu$ . Vérifions tout d'abord que  $E(P^{l_i}) \in \mathcal{H}^1$ . Par construction un nœud de l'arbre de hauteur  $\alpha$  est associé à une composante connexe de l' $\alpha$ -coupe de même hauteur et les arcs de l'arbre sont induits par la relations d'inclusion entre les composantes connexes pour des valeurs successives de  $h$ . Par ailleurs puisque  $P^{l_i}$  correspond à une branche de l'arbre, tous les nœuds de  $P^{l_i}$  possèdent au plus un nœud fils dans  $P^{l_i}$ . Ainsi si  $v \in P^{l_i}$ , tout nœud  $v' \in P^{l_i}$  de hauteur supérieure est descendant de  $v$  et  $Pt(v') \subseteq Pt(v)$ . Soit un niveau  $\alpha$  fixé et  $v_m$  le nœud de  $P^{l_i}$  tel que  $h(v_m) = \alpha$ . Nous avons  $\forall x \in (E(P^{l_i}))_{\alpha}, \exists v \in P^{l_i}$  tel que  $x \in Pt(v)$  et  $h(v) \geq \alpha$ . Puisque pour tout nœud  $v$  de  $P^{l_i}$  tel que  $h(v) \geq \alpha$  nous avons  $Pt(v) \subseteq Pt(v_m)$ , nous obtenons  $\forall x \in (E(P^{l_i}))_{\alpha}, x \in Pt(v_m)$ . Par ailleurs  $\forall x \in Pt(v_m), x \in (E(P^{l_i}))_{\alpha}$ .  $(E(P^{l_i}))_{\alpha}$  correspond donc à la composante connexe représentée par  $v_m$ . Toutes les  $\alpha$ -coupes de  $E(P^{l_i})$  sont connexes. D'après la proposition 3.1,  $E(P^{l_i})$  appartient donc à  $\mathcal{H}^1$ . Il nous reste donc à montrer qu'il n'existe aucun ensemble  $\nu \in \mathcal{H}^1$  tel que  $E(P^{l_i}) < \nu \leq \mu$ . Supposons qu'un tel ensemble existe. Dans ce cas  $\exists \alpha \leq h(l_i), (E(P^{l_i}))_{\alpha} \subset (\nu)_{\alpha}$ . Or par construction  $(E(P^{l_i}))_{\alpha} = Pt(v)$  avec  $h(v) = \alpha$  correspond à une composante connexe de  $(\mu)_{\alpha}$ . Nous pouvons donc en conclure que  $(\nu)_{\alpha}$  comporte deux composantes connexes et donc que  $\nu \notin \mathcal{H}^1$ , ce qui contredit l'hypothèse. Nous obtenons donc  $\forall l_i \in \mathcal{L}, E(P^{l_i}) \in \mathcal{H}^1(\mu)$ . Par ailleurs en tenant compte de l'isomorphisme qui lie  $\mathcal{H}^1(\mu)$  aux feuilles de l'arbre, nous pouvons en déduire que toutes les composantes connexes de  $\mu$  sont représentées chacune par une branche de l'arbre. □

*Preuve proposition 3.14.* Nous voulons montrer que :

$$c^2(\mu) = 1 - \max_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (\min(h(l_1), h(l_2)) - i^{l_1, l_2}).$$

Nous rappelons que  $i^{l_1, l_2} = h(P^{l_1}(h(l_1)) \wedge P^{l_2}(h(l_2)))$ .

La proposition 3.6 nous assure que le degré de connexité  $c^2(\mu) = \min_{(x,y) \in X^2} c_\mu^2(x, y)$  d'un ensemble flou  $\mu$  est atteint pour  $x$  et  $y$  appartenant à des maxima régionaux de  $\mu$ . Or selon la proposition 3.11 si  $x_1$  et  $x_2$  appartiennent à deux maxima régionaux, ils peuvent être associés à deux composantes 1-hyperconnexes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  de  $\mu$ . En notant  $l_1$  et  $l_2$  les feuilles de l'arbre associées à  $x_1$  et  $x_2$ , nous pouvons reformuler  $c_\mu^2(x_1, x_2)$  suivant :  $c_\mu^2(x_1, x_2) = 1 - \min(h(l_1), h(l_2)) + c_\mu^1(x_1, x_2)$ .

Montrons tout d'abord que  $c_\mu^1(x_1, x_2) = i^{l_1, l_2}$ . La proposition 3.12 nous assure que  $c_\mu^1(x_1, x_2) = \max_{x \in X} \min(\mu_1(x), \mu_2(x))$  et selon la proposition 3.13, nous avons  $\mu_1 = E(P^{l_1})$  et  $\mu_2 = E(P^{l_2})$ . De plus nous avons :

$$E(P^{l_1} \wedge P^{l_2})(x) = \max_{v \in P^{l_1} \wedge P^{l_2} \mid x \in Pt(v)} h(v).$$

Puisque  $x$  ne peut pas appartenir à la fois à deux nœuds n'étant pas ascendants l'un de l'autre ou égaux, nous avons :

$$\max_{v \in P^{l_1} \mid x \in Pt(v)} h(v) \leq \max_{v \in P^{l_1} \wedge P^{l_2} \mid x \in Pt(v)} h(v) \text{ ou}$$

$$\max_{v \in P^{l_2} \mid x \in Pt(v)} h(v) \leq \max_{v \in P^{l_1} \wedge P^{l_2} \mid x \in Pt(v)} h(v).$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} E(P^{l_1} \wedge P^{l_2})(x) &= \min\left(\max_{v \in P^{l_1} \mid x \in Pt(v)} h(v), \max_{v \in P^{l_2} \mid x \in Pt(v)} h(v)\right) \\ &= (\mu_1 \wedge \mu_2)(x) \end{aligned}$$

et donc  $i^{l_1, l_2} = h(P^{l_1}(h(l_1)) \wedge P^{l_2}(h(l_2))) = \max_{x \in X} \min(\mu_1(x), \mu_2(x)) = c_\mu^1(x_1, x_2)$ .

Nous avons donc  $c_\mu^2(x_1, x_2) = 1 - \min(h(l_1), h(l_2)) + i^{l_1, l_2}$ . Le degré de connexité  $c^2(\mu)$  est alors obtenu en considérant toutes les feuilles de l'arbre :

$$\begin{aligned} c^2(\mu) &= \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (1 - \min(h(l_1), h(l_2)) + i^{l_1, l_2}) \\ &= 1 - \max_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (\min(h(l_1), h(l_2)) - i^{l_1, l_2}). \end{aligned}$$

□

*Preuve proposition 3.15.* Soit  $\mu$  un ensemble flou et  $G$  est un sous-arbre appartenant à  $S_{T(\mu)}$  (nous rappelons qu'un sous-arbre est assimilé à l'ensemble de ses nœuds). Nous notons  $E(G)$  l'ensemble flou associé à  $G$ . Nous voulons montrer que :

$$c^2(E(G)) = \min(1, \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2})),$$

où  $h_G^{l_i}$  correspond à la hauteur maximale des nœuds de  $G$  sur la branche associée à la feuille  $l_i$ . Par ailleurs nous précisons ici l'arbre dans lequel  $i^{l_1, l_2}$  est calculé, la notation devient donc  $i_{T(\mu)}^{l_1, l_2}$ . Si nous considérons l'exemple de la figure D.2, nous avons par exemple  $h_G^{l_1} = 0, 4$  pour le sous-arbre en rouge.

La proposition 3.14 nous assure que :  $c^2(E(G)) = \min_{(l_1^G, l_2^G) \in \mathcal{L}_G^2} (1 - \min(h(l_1^G), h(l_2^G)) + i_{G, T(\mu)}^{l_1^G, l_2^G})$  (nous précisons dans ce cas qu'il s'agit des feuilles de  $G$  et non de  $T(\mu)$ ). Soient  $l_a^G$  et  $l_b^G$ , des feuilles de  $G$  telles que ce minimum soit atteint :  $c^2(E(G)) = 1 - \min(h(l_a^G), h(l_b^G)) + i_{G, T(\mu)}^{l_a^G, l_b^G}$  (sur l'exemple de la figure D.2, ces feuilles sont  $l_1^G$  et  $l_2^G$ ). Or pour toute feuille  $l^G$  de  $G$ , il existe au moins une feuille  $l$  de  $T(\mu)$  telle que  $l^G \in P^l(h(l))$  et  $h_G^{l^G} = h(l^G)$  (la feuille  $l_4$  satisfait ces condition pour  $l_3^G$  sur l'exemple de la figure D.2).  $l$  est la feuille d'une

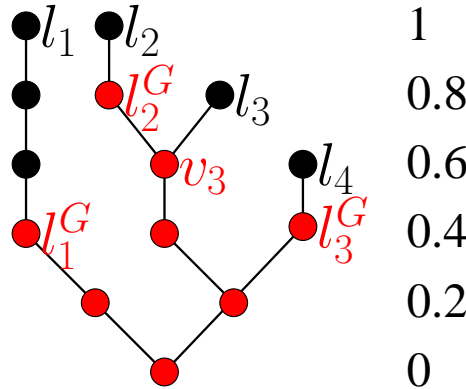


FIGURE D.2 – Un arbre  $T(\mu)$  présentant quatre feuilles  $l_1, l_2, l_3$  et  $l_4$ . Un sous-arbre  $G$  de  $T(\mu)$  est présenté en rouge. Ses trois feuilles sont notées  $l_1^G, l_2^G$  et  $l_3^G$ .

branche de  $T(\mu)$  contenant  $l^G$ . Si nous notons  $l_a$  et  $l_b$  deux feuilles correspondant à  $l_a^G$  et  $l_b^G$ , nous obtenons :  $c^2(E(G)) = 1 - \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b}) + i_G^{l_a, l_b}$ .

Si les feuilles  $l_a^G$  et  $l_b^G$  sont différentes, nous avons  $i_G^{l_a, l_b} = i_{T(\mu)}^{l_a, l_b}$ . En effet nous avons  $i_G^{l_a, l_b} = h(P^{l_a}(h_G^{l_a}) \wedge P^{l_b}(h_G^{l_b}))$  et  $i_{T(\mu)}^{l_a, l_b} = h(P^{l_a}(h(l_a)) \wedge P^{l_b}(h(l_b)))$ . Puisque  $l_a^G$  et  $l_b^G$  sont différentes, nous avons  $h(P^{l_a}(h_G^{l_a}) \wedge P^{l_b}(h_G^{l_b})) < \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b})$  et donc  $P^{l_a}(h_G^{l_a}) \wedge P^{l_b}(h_G^{l_b}) = P^{l_a}(h(l_a)) \wedge P^{l_b}(h(l_b))$ . Sur l'exemple de la figure D.2) nous avons par exemple  $i_G^{l_2^G, l_3^G} = 0, 2 = i_{T(\mu)}^{l_2, l_4}$ .

Si les variables  $l_a^G$  et  $l_b^G$  correspondent à la même feuille, nous avons  $i_G^{l_a^G, l_b^G} = h(l_a^G) = h(l_b^G)$  et  $i_{T(\mu)}^{l_a, l_b} \geq \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b}) = h_G^{l_a} = h_G^{l_b}$ . Nous obtenons donc  $1 - \min(h(l_a^G), h(l_b^G)) + i_G^{l_a^G, l_b^G} = 1 = \min(1, 1 - \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b}) + i_{T(\mu)}^{l_a, l_b})$ .

Dans tous les cas nous obtenons donc  $c^2(E(G)) = \min(1, 1 - \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b}) + i_{T(\mu)}^{l_a, l_b})$ .

Considérons maintenant deux feuilles quelconques  $l_1$  et  $l_2$  de  $T(\mu)$ . Nous notons  $v_1$  le nœud de  $G$  associé à  $l_1$  tel que  $v_1 \in P^{l_1}(h(l_1))$  et  $h(v_1) = h_G^{l_1}$  et  $v_2$  le nœud de  $G$  associé à  $l_2$  (sur l'exemple de la figure D.2, nous avons représenté le nœud  $v_3$  associé à la feuille  $l_3$ ). Les autres feuilles de l'arbre sont associées aux feuilles correspondantes de  $G$  :  $l_1^G$  est associé à  $l_1$ ,  $l_2^G$  à  $l_2$  et  $l_3^G$  à  $l_4$ ). Nous notons  $l_1^G$  et  $l_2^G$  deux feuilles de  $G$  telles que  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent aux branches associées (sur l'exemple de la figure D.2,  $v_3$  est associé à  $l_2^G$ ).

$$\begin{aligned} 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2} &= 1 - \min(h(v_1), h(v_2)) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2} \\ &\geq 1 - \min(h(v_1), h(v_2)) + i_G^{v_1, v_2} \quad (\text{voir *1}) \\ &\geq 1 - \min(h(l_1^G), h(l_2^G)) + i_G^{l_1^G, l_2^G} \quad (\text{voir *2}) \end{aligned}$$

Puisque  $l_a^G$  et  $l_b^G$  sont les feuilles pour lesquelles le minimum de  $1 - \min(h(l_1^G), h(l_2^G)) + i_G^{l_1^G, l_2^G}$  est atteint, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2} &\geq 1 - \min(h(l_a^G), h(l_b^G)) + i_G^{l_a^G, l_b^G} \\ &\geq 1 - \min(h_G^{l_a}, h_G^{l_b}) + i_{T(\mu)}^{l_a, l_b} \end{aligned}$$

Le minimum est donc obtenu pour les feuilles  $l_a$  et  $l_b$ . Nous pouvons donc conclure que :  
 $c^2(E(G)) = \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (\min(1, 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2}))$  et donc :  
 $c^2(E(G)) = \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i_{T(\mu)}^{l_1, l_2})$ .

\*1 :

$$\begin{aligned} i_{T(\mu)}^{l_1, l_2} &= h(P^{l_1}(h(l_1)) \wedge P^{l_2}(h(l_2))) \\ &= h(P^{l_1}(h(l_1)) \wedge P^{l_2}(h(l_2))) \\ &\geq h(P^{l_1}(h(v_1)) \wedge P^{l_2}(h(v_2))) \end{aligned}$$

car  $h(v_1) \leq h(l_1)$  et  $h(v_2) \leq h(l_2)$  et donc  $P^{l_1}(h(v_1)) \wedge P^{l_2}(h(v_2)) \leq P^{l_1}(h(l_1)) \wedge P^{l_2}(h(l_2))$ . Par ailleurs  $P^{l_1}(h(v_1)) = P^{l_1^G}(h(v_1))$  et  $P^{l_2}(h(v_2)) = P^{l_2^G}(h(v_2))$ . Nous obtenons donc  $i_{T(\mu)}^{l_1, l_2} = h(P^{l_1^G}(h(v_1)) \wedge P^{l_2^G}(h(v_2))) = i_G^{v_1, v_2}$ .

\*2 : Nous allons montrer que pour deux nœuds  $v_1$  et  $v_2$  appartenant à la même branche et tels que  $h(v_1) \leq h(v_2)$  nous avons  $\forall v \in T(\mu)$  :

$$\min(h(v_1), h(v)) - i_{T(\mu)}^{v_1, v} \leq \min(h(v_2), h(v)) - i_{T(\mu)}^{v_2, v}.$$

Si  $i_{T(\mu)}^{v_1, v} < h(v_1)$ , nous avons alors  $i_{T(\mu)}^{v_1, v} = i_{T(\mu)}^{v_2, v}$  car  $v_1$  et  $v_2$  appartiennent à la même branche et puisque  $h(v_1) \leq h(v_2)$  l'inégalité est donc vérifiée. Si  $i_{T(\mu)}^{v_1, v} = h(v_1)$ , nous avons alors  $\min(h(v_1), h(v)) - i_{T(\mu)}^{v_1, v} = 0$  et puisque  $\min(h(v_2), h(v)) - i_{T(\mu)}^{v_2, v} \geq 0$ , l'inégalité est aussi dans ce cas satisfaite.

□

*Preuve proposition 3.16.* Nous notons  $E(G)$  l'ensemble flou associé à un sous-arbre  $G \in S_{T(\mu)}$  de  $T(\mu)$ . Nous voulons montrer que :

$$\forall G \in S_{T(\mu)}, c^2(E(G)) \geq \tau \Rightarrow c^2(E(\delta_{T(\mu)}(G, r))) \geq \max(0, \tau - r),$$

$$\forall G \in S_{T(\mu)}, c^2(E(G)) \geq \tau \Rightarrow c^2(E(\varepsilon_{T(\mu)}(G, r))) \geq \min(1, \tau + r).$$

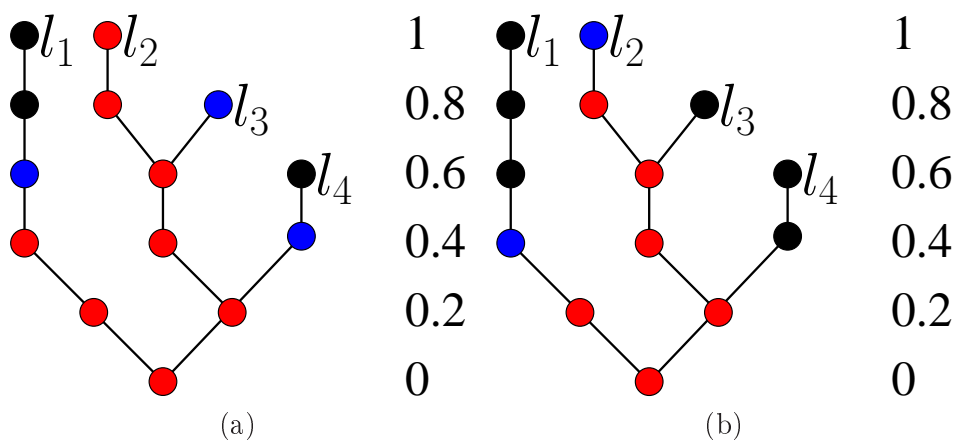


FIGURE D.3 – (a) Un arbre  $T(\mu)$  et un sous-arbre  $G$  en rouge. En bleu et rouge  $\delta_{T(\mu)}(G, 0, 2)$ . (b) En bleu et rouge un sous-arbre  $G$ . En rouge  $\varepsilon_{T(\mu)}(G, 0, 2)$ .

Un exemple est présenté dans la figure D.3. La dilatation  $\delta_{T(\mu)}(G, 0, 2)$  (a) d'un sous-arbre  $G$  (en rouge) est montrée en bleu et rouge. La contraction  $\varepsilon_{T(\mu)}(G, 0, 2)$  de ce sous-arbre est montrée en rouge (b). D'après la proposition 3.15, le degré de connexité de  $G$  vaut :  $c^2(E(G)) = 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i^{l_1, l_2} = 1 - 0,4 + 0 = 0,6$ . Le degré de connexité du dilaté  $\delta_{T(\mu)}(G, 0, 2)$  présenté en bleu et rouge vaut  $c^2(E(\delta_{T(\mu)}(G, 0, 2))) = 1 - \min(h_\delta^{l_1}, h_\delta^{l_2}) + i^{l_1, l_2} = 1 - 0,6 + 0 = 0,4$ . Et nous vérifions bien  $c^2(E(\delta_{T(\mu)}(G, 0, 2))) \geq \max(0, c^2(E(G)) - 0,2)$ .

Nous allons d'abord prouver la propriété pour la dilatation :

$$\forall G \in \mathcal{S}_{T(\mu)}, c^2(E(G)) \geq \tau \Rightarrow c^2(E(\delta_{T(\mu)}(G, r))) \geq \max(0, \tau - r).$$

Nous notons  $\delta = \delta_{T(\mu)}(G, r) = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\min(h(l), h_G^l + r))$ .

$$c^2(E(G)) \geq \tau$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i^{l_1, l_2} \geq \tau$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(h_G^{l_1} + r, h_G^{l_2} + r) + i^{l_1, l_2} \geq \tau - r$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(\min(h(l_1), h_G^{l_1} + r), \min(h(l_2), h_G^{l_2} + r)) + i^{l_1, l_2} \geq \tau - r$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(h_\delta^{l_1}, h_\delta^{l_2}) + i^{l_1, l_2} \geq \tau - r$$

Car  $h_\delta^l = \min(h(l), h_G^l + r)$  (voir \*1).

$$\Rightarrow c^2(E(\delta)) \geq \max(0, \tau - r).$$

Prouvons maintenant la propriété pour la contraction. Un exemple est présenté dans la figure D.3 (b). Un sous-arbre  $G$  est présenté en bleu et rouge et comme en (a) son degré de connexité vaut 0,6. Le degré de connexité de  $\varepsilon_{T(\mu)}(G, 0, 2)$  (b) présenté en rouge vaut  $c^2(E(\varepsilon_{T(\mu)}(G, 0, 2))) = 1 - \min(h_\varepsilon^{l_1}, h_\varepsilon^{l_2}) + i^{l_1, l_2} = 1 - 0,2 + 0 = 0,8$ . Et nous vérifions bien  $c^2(E(\varepsilon_{T(\mu)}(G, 0, 2))) \geq \min(1, c^2(E(G)) + 0,2)$ . Nous allons donc prouver que :

$$\forall G \in \mathcal{S}_{T(\mu)}, c^2(E(G)) \geq \tau \Rightarrow c^2(E(\varepsilon_{T(\mu)}(G, r))) \geq \min(1, \tau + r).$$

Nous notons  $\varepsilon = \varepsilon_{T(\mu)}(G) = \bigvee_{l \in \mathcal{L}} P^l(\max(0, h_G^l - r))$ .

$$c^2(E(G)) \geq \tau$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(h_G^{l_1}, h_G^{l_2}) + i^{l_1, l_2} \geq \tau$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 - \min(h_G^{l_1} - r, h_G^{l_2} - r) + i^{l_1, l_2} \geq \tau + r$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, \min(1, 1 - \min(h_G^{l_1} - r, h_G^{l_2} - r) + i^{l_1, l_2}) \geq \min(1, \tau + r)$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 + i^{l_1, l_2} + \min(-i^{l_1, l_2}, -\min(h_G^{l_1} - r, h_G^{l_2} - r)) \geq \min(1, \tau + r)$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 + i^{l_1, l_2} + \min(0, -\min(h_G^{l_1} - r, h_G^{l_2} - r)) \geq \min(1, \tau + r) \text{ (car } i^{l_1, l_2} \geq 0)$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 + i^{l_1, l_2} - \max(0, \min(h_G^{l_1} - r, h_G^{l_2} - r)) \geq \min(1, \tau + r)$$

$$\Rightarrow \forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 + i^{l_1, l_2} - \min(\max(0, h_G^{l_1} - r), \max(0, h_G^{l_2} - r)) \geq \min(1, \tau + r)$$

Dans le cas général  $h_\varepsilon^l \geq \max(0, h_G^l - r)$  (Sur l'illustration présentée par la figure D.3 (b), nous avons par exemple  $h_\varepsilon^{l_3} = 0,6$  et  $\max(0, h_G^{l_3} - 0,2) = 0,4$ ). Cependant si  $h_\varepsilon^l > \max(0, h_G^l - r)$ , la branche de  $\varepsilon$  associée à la feuille  $l$  ne contient pas de feuille de  $\varepsilon$  (en effet dans ce cas il existe une autre feuille  $l'$  telle que  $P^l(\max(0, h_G^l - r)) < P^{l'}(\max(0, h_G^{l'} - r))$ ) et cette branche n'est pas associée à un maximum régional de  $E(\varepsilon)$ . Le minimum intervenant dans le calcul de  $c^2(E(\varepsilon)) = \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (1 - \min(h_\varepsilon^{l_1}, h_\varepsilon^{l_2}) + i^{l_1, l_2})$  est donc atteint pour  $l_1$  et  $l_2$  vérifiant  $h_\varepsilon^l = \max(0, h_G^l - r)$ .

$$\forall (l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2, 1 + i^{l_1, l_2} - \min(\max(0, h_G^{l_1} - r), \max(0, h_G^{l_2} - r)) \geq \min(1, \tau + r)$$

$$\Rightarrow \min_{(l_1, l_2) \in \mathcal{L}^2} (1 + i^{l_1, l_2} - \min(h_\varepsilon^{l_1}, h_\varepsilon^{l_2})) \geq \min(1, \tau + r)$$

$$\Rightarrow c^2(E(\varepsilon)) \geq \min(1, \tau + r)$$

\*1 : Nous allons montrer que  $h_\delta^l = \min(h(l), h_S^l + r)$ , où  $S$  est un sous-arbre de  $T(\mu)$ ,  $l$  est une feuille de  $T(\mu)$  et  $\delta = \delta_{T(\mu)}(S, r)$ . Puisque par définition  $\delta = \bigvee_{l' \in \mathcal{L}} P^{l'}(\min(h(l'), h_S^{l'} + r))$ , nous avons  $h_\delta^l \geq \min(h(l), h_S^l + r)$ . Montrons que pour toute feuille  $l' \in \mathcal{L}$ , la hauteur de  $P^{l'}(\min(h(l'), h_S^{l'} + r))$  sur la branche associée à  $l$  est plus petite que ou égale à  $\min(h(l), h_S^l + r)$ . Cette hauteur peut être écrite comme  $h_{l'} = h(P^{l'}(\min(h(l'), h_S^{l'} + r)) \wedge P^l(h(l)))$  et nous avons  $h_{l'} \leq h(P^{l'}(h(l'))) \wedge P^l(h(l)) = i^{l, l'}$  et  $h_{l'} \leq \min(h(l'), h_S^{l'} + r)$ .

Si  $h_S^{l'} + r < i^{l, l'}$ , alors les branches de  $S$  associées à  $l$  et  $l'$  sont égales et  $h_S^{l'} = h_S^l$ . Ainsi  $h_{l'} \leq \min(h(l'), h_S^{l'} + r) = h_S^l + r = \min(h(l), h_S^l + r)$  (puisque  $h_S^{l'} + r < i^{l, l'} \leq \min(h(l'), h(l))$ ).

Si  $h_S^{l'} + r \geq i^{l, l'}$ , alors nous avons aussi  $h_S^l + r \geq i^{l, l'}$  (puisque les branches de  $S$  associées à  $l$  et  $l'$  sont identiques en dessous du niveau  $i^{l, l'}$ ) et  $h_{l'} \leq i^{l, l'} \leq \min(h(l), h_S^l + r)$ .

Nous obtenons donc  $h_\delta^l = \min(h(l), h_S^l + r)$ . □

*Preuve proposition 3.17.* Nous noterons indifféremment les ensembles flous et leur représentation par arbre dans cette preuve afin de simplifier les notations. Nous voulons montrer que l'ensemble des composantes  $\tau$ -hyperconnexes (noté  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$ ) d'un ensemble  $\mu$  est isomorphe à l'ensemble des composantes 1-hyperconnexes (noté  $\mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$ ) de la contraction de taille  $1-\tau$ , où  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu) = \varepsilon_{T(\mu)}(T(\mu), 1-\tau)$ . Nous allons tout d'abord montrer que les opérateurs  $\delta_\mu^{1-\tau}$  et  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}$  peuvent être définis respectivement comme des opérateurs de  $\mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$  dans  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  et de  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  dans  $\mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$ . Nous montrerons alors que ces opérateurs sont bijectifs.

Nous montrons dans un premier temps que la contraction de taille  $1-\tau$  d'un élément de  $\mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  appartient à  $\mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$ . Soit  $\mu_i$  une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$ . D'après la proposition 3.16,  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i)$  est  $\min(1, \tau + (1-\tau))$ -hyperconnexe. Il appartient donc à  $\mathcal{H}^1$  et nous allons vérifier qu'il s'agit d'une composante hyperconnexe de  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$  (donc maximal).  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(S)$  et  $\delta_\mu^{1-\tau}(S)$  sont des opérateurs croissants en fonction de  $S$  (puisqu'ils sont exprimés comme le supremum d'opérateurs croissants par rapport à la hauteur des branches de  $S$ ) et donc  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$ . Supposons que  $\nu \in \mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$  soit tel que :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) \leq \nu \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu) \\ \Rightarrow & \delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) \leq \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu) = \mu \text{ (justification 1)} \\ \Rightarrow & \mu_i \leq \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \mu \text{ (justification 2)} \\ \Rightarrow & \mu_i = \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \text{ (justification 3)} \\ \Rightarrow & \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) = \nu \text{ (justification 4)} \end{aligned}$$

La contraction de taille  $1-\tau$  d'une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$  est donc une composante 1-hyperconnexe de la contraction de  $\mu$ .

Montrons maintenant que la dilatation de taille  $1-\tau$  d'une composante 1-hyperconnexe du contracté de taille  $1-\tau$  est une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$ . Soit  $\varepsilon_i$  une composante 1-hyperconnexe de  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$ . Nous voulons donc montrer que  $\delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i)$  est une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$ . Selon la proposition 3.16,  $\delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i)$  est  $\max(0, 1 - (1-\tau))$ -hyperconnexe et appartient donc à  $\mathcal{H}_\tau^2$ . Il nous reste à vérifier qu'il s'agit bien d'une composante  $\tau$ -hyperconnexe (i.e. qu'elle est maximale). Supposons que  $\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  soit tel que  $\delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) \leq \nu \leq \mu$ . Puisque la contraction est croissante nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu). \\ \Rightarrow & \varepsilon_i \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu) \text{ (justification 4)}. \\ \Rightarrow & \varepsilon_i = \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\nu) \text{ (car } \varepsilon_i \text{ est une composante 1-hyperconnexe de } \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)\text{)}. \\ \Rightarrow & \delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) = \delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\nu). \\ \Rightarrow & \delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) = \nu \text{ (justification 2)}. \end{aligned}$$

Nous vérifions donc que  $\delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)$ .

Nous considérons donc les fonctions  $\delta_\mu^{1-\tau} : \mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)) \rightarrow \mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  et  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} : \mathcal{H}_\tau^2(\mu) \rightarrow \mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$ . Celles-ci sont bijectives et inverses l'une de l'autre. En effet soit  $\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  nous avons  $\delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) = \mu_i$  (justification 2). Réciproquement soit  $\varepsilon_i \in \mathcal{H}^1(\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu))$ , nous avons alors  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$  (justification 4).

Justification 1 : L'opérateur  $\delta_\mu^\tau \varepsilon_\mu^\tau$  est extensif. En effet si nous écrivons un ensemble flou  $a$ , sa contraction et le dilaté de celle-ci sous la forme :

$$\begin{aligned} a &= \vee_{l \in \mathcal{L}} P_l(h_a^l), \\ \varepsilon_\mu^\tau(a) &= \vee_{l \in \mathcal{L}} P_l(h_\varepsilon^l), \\ \delta_\mu^\tau \varepsilon_\mu^\tau(a) &= \vee_{l \in \mathcal{L}} P_l(\min(h_l, h_\varepsilon^l + \tau)), \end{aligned}$$

nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} h_\varepsilon^l &\geq \max(0, h_a^l - \tau), \\ h_\delta^l &= \min(h_l, h_\varepsilon^l + \tau). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$h_\delta^l \geq \min(h_l, \max(0, h_a^l - \tau) + \tau).$$

$$\Rightarrow h_\delta^l \geq \min(h_l, \max(\tau, h_a^l)) \geq h_a^l,$$

puisque  $h_l \geq h_a^l$ . L'opérateur  $\delta_\mu^\tau \varepsilon_\mu^\tau$  est donc toujours extensif. Notons que ce n'est pas nécessairement le cas de l'opérateur  $\varepsilon_\mu^\tau \delta_\mu^\tau$ .

Justification 2 : Nous pouvons montrer que l'opérateur  $\delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}$  est extensif (voir justification 1). Nous avons donc  $\mu_i \leq \delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) \leq \mu$ . Puisque  $\mu_i$  est une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$  et que  $\delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i)$  est  $\tau$ -hyperconnexe, nous obtenons donc l'égalité  $\delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu_i) = \mu_i$ .

Justification 3 :  $\mu_i$  est une composante  $\tau$ -hyperconnexe de  $\mu$  et donc par définition  $\nexists \nu \in \mathcal{H}_\tau^2, \mu_i < \nu \leq \mu$ . Puisque  $\delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \in \mathcal{H}_\tau^2$ , nous obtenons l'égalité  $\mu_i = \delta_\mu^{1-\tau}(\nu)$ .

Justification 4 : Pour  $\nu \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$ , nous pouvons vérifier que  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) = \nu$ . En effet si nous écrivons  $\nu, \delta_\mu^{1-\tau}(\nu)$  et  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu)$  sous la forme :

$$\nu = \vee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_\nu^l),$$

$$\delta_\mu^{1-\tau}(\nu) = \vee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_\delta^l),$$

$$\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^\tau(\nu) = \vee_{l \in \mathcal{L}} P^l(h_\varepsilon^l),$$

nous obtenons les inégalités suivantes entre les hauteurs des branches :

$$h_\delta^l = \min(h_l, h_\nu^l + 1 - \tau),$$

$$h_\varepsilon^l \geq \max(0, h_\delta^l - 1 + \tau)^1.$$

Nous pouvons donc en déduire que :

$$h_\varepsilon^l \geq \min(\max(0, h_l - 1 + \tau), h_\nu^l).$$

Or puisque  $\nu \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\nu)$ , nous avons  $h_\nu^l \leq \max(0, h_l - 1 + \tau)$  et nous obtenons donc :

$h_\varepsilon^l \geq h_\nu^l$ . L'opérateur  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}$  est donc dans ce cas extensif :  $\nu \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu)$ . Par ailleurs puisque l'opérateur  $\delta_\mu^{1-\tau}$  est croissant, nous avons  $\delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \delta_\mu^{1-\tau} \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu) \leq \mu$ . Puisque  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}$  est croissant :  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) \leq \varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$ . Or puisque  $\nu$  est une composante 1-hyperconnexe de  $\varepsilon_\mu^{1-\tau}(\mu)$  et que  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu)$  est 1-hyperconnexe, nous obtenons bien  $\varepsilon_\mu^{1-\tau} \delta_\mu^{1-\tau}(\nu) = \nu$ . □

*Preuve proposition 3.18.* Soit  $\mu_C : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  une fonction lipschitzienne. Nous voulons prouver que l'opérateur associant l'ensemble flou  $\mu$  à  $\xi_{\mu_C}(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu) \}$  est lipschitzien. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux ensembles flous et  $\eta = \sup_{x \in X} |\mu_1(x) - \mu_2(x)|$ . Pour tout point  $x$ , il existe un ensemble flou  $\nu_1 \in \mathcal{H}_\tau^2$  tel que  $\xi_{\mu_C}(\mu_1)(x) = \nu_1(x)$ ,  $\nu_1 \leq \mu_1$  et  $\max_{x \in X} \nu_1(x) \leq \mu_C(\nu_1)$ . Nous définissons alors un ensemble flou  $\nu_2$  suivant  $\nu_2 = \max(0, \nu_1 - \eta)$ . Nous avons  $\nu_2 \in \mathcal{H}_\tau^2$ ,  $\sup_{x \in X} \nu_2(x) = \max(0, \sup_{x \in X} \nu_1(x) - \eta) \leq \max(0, \mu_C(\nu_1) - \eta)$  et  $\nu_2 \leq \mu_2$ . Puisque  $\mu_C$  est lipschitzien,  $|\mu_C(\nu_2) - \mu_C(\nu_1)| \leq \sup_{x \in X} |\nu_2(x) - \nu_1(x)|$ . Par ailleurs nous avons  $\sup_{x \in X} |\nu_2(x) - \nu_1(x)| \leq \eta$ , et donc  $\mu_C(\nu_1) - \eta \leq \mu_C(\nu_2)$ . Nous obtenons donc  $\sup_{x \in X} \nu_2(x) \leq \mu_C(\nu_2)$  et :  $\xi_{\mu_C}(\mu_2)(x) \geq \xi_{\mu_C}(\mu_1)(x) - \eta$ .

De la même façon nous pouvons obtenir :  $\xi_{\mu_C}(\mu_1)(x) \geq \xi_{\mu_C}(\mu_2)(x) - \eta$ .

Nous pouvons donc conclure que :  $\forall x \in X, |\xi_{\mu_C}(\mu_2)(x) - \xi_{\mu_C}(\mu_1)(x)| \leq \eta$ . □

*proposition 3.19.* Nous voulons montrer que le filtre défini par l'équation 3.12 peut être calculé sur les composantes  $\tau$ -hyperconnexes de  $\mu$  si le critère  $\mu_C$  est croissant. Le filtre  $\xi_{\mu_C}(\mu)$  est défini suivant (cf équation 3.12) :

$$\xi_{\mu_C}(\mu) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu) \}.$$

Puisque  $\forall \nu \in \mathcal{H}_\tau^2$  tels que  $\nu \leq \mu$ , la propriété  $\nu \leq \mu_i$  avec  $\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)$  est toujours satisfaite, nous pouvons récrire  $\xi_{\mu_C}(\mu)$  comme :

$$\xi_{\mu_C}(\mu) = \bigvee_{\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)} \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu_i \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_C(\nu) \}.$$

En triant les ensembles flous selon leur hauteur  $m$ , nous obtenons :  $\xi_{\mu_C}(\mu) = \bigvee_{\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2(\mu)} \bigvee_{m \in [0, 1]} \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq$

---

1. Dans la section 3.2.4, nous avons montré que l'égalité n'était vérifié que dans le cas de la dilatation.

$\mu_i$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) = m$  et  $m \leq \mu_C(\nu)$ .

Pour  $m \in [0, \max_{x \in X} \mu_i(x)]^2$ , l'inégalité suivante est toujours satisfaite :

$\bigvee \{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \mu_i \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) = m\} = \min(\mu_i, m)$ . En effet  $\min(\mu_i, m) \in \mathcal{H}_\tau^2$  (car  $\mu_i \in \mathcal{H}_\tau^2$ )<sup>3</sup>,  $\min(\mu_i, m) \leq \mu_i$  et  $\max_{x \in X} \min(\mu_i, m)(x) = m$ .

Comme  $\mu_C$  est croissant, nous obtenons :

$$\xi_{\mu_C}(\mu) = \bigvee_{\substack{\mu_i \in \\ \mathcal{H}_\tau^2(\mu)}} \bigvee_{m \in [0, h_i]} \{\min(\mu_i, m) \mid m \leq \mu_C(\min(\mu_i, m))\},$$

où  $h_i = \max_{x \in X} \mu_i(x)$ . □

*Preuve proposition 3.20.* Soit  $\mu_C : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  une fonction lipschitzienne. Nous voulons prouver que la fonction associant  $\mu$  à  $\xi_{\mu_C}^p(\mu) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{F} \mid \nu \leq \mu \text{ et } \sup_{x \in X} \nu(x) \leq \min(c^2(\nu), \mu_C(\nu))\}$  est lipschitzienne.

Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et  $\eta$  tels que  $\forall x \in X, |\mu_1(x) - \mu_2(x)| = \eta$ . Pour tout point  $x \in X$ , il existe  $\nu_1 \in \mathcal{F}$  tel que  $\xi_{\mu_C}^p(\mu_1)(x) = \nu_1(x)$ ,  $\nu_1 \leq \mu_1$  et  $\sup_{x \in X} \nu_1(x) \leq \min(c^2(\nu_1), \mu_C(\nu_1))$ .

Nous définissons alors un ensemble flou  $\nu_2$  suivant  $\nu_2 = \max(0, \nu_1 - \eta)$ . Nous avons  $\nu_2 \leq \mu_2$  et  $\sup_{x \in X} \nu_2(x) = \max(0, \sup_{x \in X} \nu_1(x) - \eta) \leq \max(0, \min(c^2(\nu_1), \mu_C(\nu_1)) - \eta)$ . Puisque  $\mu_C$  est lipschitzienne, nous avons  $|\mu_C(\nu_2) - \mu_C(\nu_1)| \leq \sup_{x \in X} |\nu_2(x) - \nu_1(x)| \leq \eta$  (car  $\sup_{x \in X} |\nu_1(x) - \nu_2(x)| \leq \eta$ ) et donc  $\mu_C(\nu_1) - \eta \leq \mu_C(\nu_2)$ . Par ailleurs nous avons  $c^2(\nu_1) - \eta \leq c^2(\nu_2)$ . En effet par définition  $c^2(\nu_2) = \min_{(x,y) \in X^2} c_{\nu_2}^2(x, y)$  et :

$$\begin{aligned} c_{\nu_2}^2(x, y) &= 1 - \min(\nu_2(x), \nu_2(y)) + c_{\nu_2}^1(x, y) \\ &= 1 - \min(\max(0, \nu_1(x) - \eta), \max(0, \nu_1(y) - \eta)) \\ &\quad + \max_{\substack{l \in L_{x,y} \\ l = \{x_0=x, x_1, \dots, x_n=y\}}} \min_{0 \leq i \leq n} \max(0, \nu_1(x_i) - \eta) \\ &= 1 - \max(0, \min(\nu_1(x), \nu_1(y)) - \eta) \\ &\quad + \max(0, \max_{\substack{l \in L_{x,y} \\ l = \{x_0=x, x_1, \dots, x_n=y\}}} \min_{0 \leq i \leq n} \nu_1(x_i) - \eta) \\ &= 1 - \max(0, \min(\nu_1(x), \nu_1(y)) - \eta) + \max(0, c_{\nu_1}^1(x, y) - \eta). \end{aligned}$$

Supposons dans un premier temps que :  $\min(\nu_1(x), \nu_1(y)) \leq \eta$ . L'inégalité  $c_{\nu_1}^1(x, y) \leq \eta$  est alors aussi vérifiée. Nous obtenons  $c_{\nu_2}^2(x, y) = 1 \geq c_{\nu_1}^2(x, y)$  et donc  $c^2(\nu_1) \leq c^2(\nu_2)$ .

Si nous supposons maintenant que :  $\min(\nu_1(x), \nu_1(y)) \geq \eta$ .

$$\begin{aligned} c_{\nu_2}^2(x, y) &= 1 - \min(\nu_1(x), \nu_1(y)) + \eta + \max(0, c_{\nu_1}^1(x, y) - \eta) \\ c_{\nu_2}^2(x, y) &= 1 - \min(\nu_1(x), \nu_1(y)) + \max(\eta, c_{\nu_1}^1(x, y)) \\ c_{\nu_2}^2(x, y) &\geq 1 - \min(\nu_1(x), \nu_1(y)) + c_{\nu_1}^1(x, y) \\ c_{\nu_2}^2(x, y) &\geq c_{\nu_1}^2(x, y) \end{aligned}$$

2. Pour  $m > \max_{x \in X} \mu_i(x)$ , il n'existe pas d'ensemble flou  $\nu$  tel que  $\nu \leq \mu_i$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) = m$ .

3. Soit  $\mu \in \mathcal{H}_\tau^2$ . Nous avons  $\forall (x, y) \in X^2, 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, y) \geq \tau$ . Soient  $\mu' = \min(\mu, m)$  et  $(x, y) \in X^2$ . Nous avons  $c_{\mu'}^1(x, y) = \min(m, c_\mu^1(x, y))$  et donc  $1 - \min(\mu'(x), \mu'(y)) + c_{\mu'}^1(x, y) = 1 - \min(m, \min(\mu(x), \mu(y))) + \min(m, c_\mu^1(x, y))$ . Si  $c_\mu^1(x, y) \geq m$ , nous avons  $1 - \min(\mu'(x), \mu'(y)) + c_{\mu'}^1(x, y) = 1 - m + m \geq \tau$  (comme  $\min(\mu(x), \mu(y)) \geq c_\mu^1(x, y)$ ). Si  $c_\mu^1(x, y) \leq m$  et  $\min(\mu(x), \mu(y)) \geq m$ , nous avons  $1 - \min(\mu'(x), \mu'(y)) + c_{\mu'}^1(x, y) = 1 - m + c_\mu^1(x, y) \geq 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, y) \geq \tau$ . Finalement si  $c_\mu^1(x, y) \leq m$  et  $\min(\mu(x), \mu(y)) \leq m$ , nous obtenons  $1 - \min(\mu'(x), \mu'(y)) + c_{\mu'}^1(x, y) = 1 - \min(\mu(x), \mu(y)) + c_\mu^1(x, y) \geq \tau$ . Nous obtenons donc  $\forall (x, y) \in X^2, 1 - \min(\mu'(x), \mu'(y)) + c_{\mu'}^1(x, y) \geq \tau$  et ainsi  $\min(\mu, m) \in \mathcal{H}_\tau^2$ .



Nous obtenons donc  $c^2(\nu_1) \leq c^2(\nu_2)$ .

L'ensemble  $\nu_2$  vérifie donc  $\sup_{x \in X} \nu_2(x) \leq \min(c^2(\nu_2), \mu_C(\nu_2))$

et nous obtenons  $\xi_{\mu_C}^p(\mu_2)(x) \geq \xi_{\mu_C}^p(\mu_1)(x) - \eta$ .

De façon similaire nous pouvons obtenir  $\xi_{\mu_C}^p(\mu_1)(x) \geq \xi_{\mu_C}^p(\mu_2)(x) - \eta$ .

Nous vérifions donc que  $\forall x \in X, |\xi_{\mu_C}^p(\mu_2)(x) - \xi_{\mu_C}^p(\mu_1)(x)| \leq \eta$ .

□

*Preuve proposition 3.21.* Soient  $\underline{A}$  un ensemble flou et  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}(x)$  sa hauteur. Nous voulons montrer que  $\xi_{\underline{A}}^1(\overline{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\overline{A}) \mid \underline{A} \leq \nu\}$  est  $\alpha - 1 + \tau$ -hyperconnexe.

Tous les éléments  $\nu \in \{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\overline{A}) \mid \underline{A} \leq \nu\}$  appartiennent à  $\mathcal{H}_{\alpha-1+\tau}^2$  (puisqu'ils appartiennent à  $\mathcal{H}_\tau^2$  et que  $\alpha - 1 \leq 0$ ). Nous allons montrer qu'ils se recouvrent au sens de la mesure  $\perp_{\alpha-1+\tau}^2$ .

Soit  $\nu$  un ensemble flou tel que  $\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\overline{A})$  et  $\underline{A} \leq \nu$ . Soient  $x_m$  un point auquel  $\nu$  atteint son maximum global,  $h = \nu(x_m)$  et  $x_a$  un point auquel  $\underline{A}$  atteint son maximum global (nous avons notamment  $\alpha \leq h$  et  $\nu(x_a) \leq \nu(x_m)$ ).

$$\begin{aligned} & \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \\ \Rightarrow & 1 - \min(\nu(x_m), \nu(x_a)) + c_\nu^1(x_m, x_a) \geq \tau \\ \Rightarrow & 1 - \tau + c_\nu^1(x_m, x_a) \geq \nu(x_a) \geq \underline{A}(x_a) = \alpha \\ \Rightarrow & c_\nu^1(x_m, x_a) \geq \alpha - 1 + \tau \geq h - 1 + (\alpha - 1 + \tau), \end{aligned}$$

car  $h - 1 \leq 0$ . Selon la proposition 3.3, nous obtenons alors pour tout  $\nu$  satisfaisant les conditions  $\eta_{\delta_{x_m}^1}^1(\nu)(x_a) \geq h - 1 + (\alpha - 1 + \tau)$ . Les éléments de  $\{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2(\overline{A}) \mid \underline{A} \leq \nu\}$  se recouvrent donc au sens de  $\perp_{\alpha-1+\tau}^2$ . Le supremum de cet ensemble est donc  $\alpha - 1 + \tau$ -hyperconnexe. □

*Preuve proposition 3.22.* Soit  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}(x)$ . Nous voulons montrer  $\xi_{\underline{A}}^2(\overline{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{F} \mid \underline{A} \leq \nu \leq \overline{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\overline{A})\}$  est  $\alpha$ -hyperconnexe.

Nous allons montrer que tous les éléments  $\nu$  satisfaisant au critère d'inclusion et de connexité  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\overline{A})$  se recouvrent au sens de la mesure  $\perp_\tau^2$  avec  $\tau = \alpha$ .

Soit  $\nu$  tel que  $\underline{A} \leq \nu \leq \overline{A}$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\overline{A})$ . Soient  $x_m$  un point auquel  $\nu$  atteint son maximum global,  $h = \nu(x_m)$  et  $x_a$  un point auquel  $\underline{A}$  atteint son maximum global ( $\nu(x_a) \leq \nu(x_m)$ ).

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \nu(x) \leq c^2(\overline{A}) \\ \Rightarrow & h \leq 1 - \min(\nu(x_m), \nu(x_a)) + c_\nu^1(x_m, x_a) \\ \Rightarrow & h - 1 + \nu(x_a) \leq c_\nu^1(x_m, x_a) \\ \Rightarrow & h - 1 + \alpha \leq c_\nu^1(x_m, x_a). \end{aligned}$$

Selon la proposition 3.3, nous obtenons pour tout  $\nu$  satisfaisant aux critères  $\eta_{\delta_{x_m}^1}^1(\nu)(x_a) \geq h - 1 + \alpha$ . Nous pouvons donc en déduire que cet ensemble d'ensembles flous se recouvrent au sens de  $\perp_\alpha^2$ . Le supremum de cet ensemble est donc  $\alpha$ -hyperconnexe. □

*Preuve proposition 3.23.* Nous voulons prouver que la fonction associant  $\underline{A}$  à  $\xi_{\underline{A}}^3(\overline{A}) = \bigvee \{\nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \overline{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu)\}$  est continue et lipchitzienne, ainsi que la fonction associant  $\overline{A}$  à  $\xi_{\overline{A}}^2(\overline{A})$ . Selon la proposition 3.18, si la fonction associant  $\nu$  à  $\mu_{\leq}(\underline{A}, \nu)$  est lipchitzienne, alors la fonction associant  $\overline{A}$  à  $\xi_{\overline{A}}^3(\overline{A})$  est lipchitzienne. Comme  $\mu_{\leq}(\underline{A}, \nu) = \min_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{A}(x), \nu(x))$  est lipchitzienne, la fonction associant  $\overline{A}$  à  $\xi_{\overline{A}}^3(\overline{A})$  est donc lipchitzienne.

Soient  $A_1, A_2$  deux ensembles flous et  $\eta$  tels que  $\eta = |A_1 - A_2| = \sup_{x \in X} |A_1(x) - A_2(x)|$ . Soit  $\nu_1 \in \mathcal{H}_\tau^2$  tel que  $\xi_{A_1}^3(\bar{A})(x) = \nu_1(x)$ ,  $\nu_1 \leq \bar{A}$  et  $\max_{x \in X} \nu_1(x) \leq \mu_{\leq}(A_1, \nu_1)$ . Nous notons  $h_1 = \max_{x \in X} \nu_1(x)$  la hauteur de  $\nu_1$ . Soit  $\nu_2$  un ensemble flou défini suivant  $\min(\nu_1, \max(0, h_1 - \eta))$ . Nous avons  $\nu_2 \in \mathcal{H}_\tau^2$  et  $\nu_2 \leq \bar{A}$ . Par ailleurs :

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \nu_1(x) \leq \mu_{\leq}(A_1, \nu_1) \\ \Rightarrow & \max_{x \in X} \nu_1(x) \leq \min_{x \in X} \min(1, 1 - A_1(x) + \nu_1(x)) \\ \Rightarrow & \max(0, \max_{x \in X} \nu_1(x) - \eta) \leq \max(0, \min_{x \in X} \min(1, 1 - A_1(x) + \nu_1(x)) - \eta) \\ \Rightarrow & \max_{x \in X} \nu_2(x) \leq \max(0, \min_{x \in X} \min(1, 1 - A_1(x) + \nu_1(x) - \eta)) \\ \Rightarrow & \max_{x \in X} \nu_2(x) \leq \max(0, \min_{x \in X} \min(1, 1 - A_2(x) + \nu_1(x))). \end{aligned}$$

Si  $x \in X$  est tel que  $\nu_1(x) > h_1 - \eta$ , nous avons  $\nu_2(x) = h_2$ . Comme l'inégalité  $h_2 \leq 1 - A_2(x) + h_2$  est toujours vérifiée nous obtenons  $\nu_2(x) \leq 1 - A_2(x) + h_2$ . Sinon nous avons  $\nu_2(x) = \nu_1(x)$  et l'inégalité  $h_2 \leq \min(1, 1 - A_2(x) + \nu_2(x))$  est satisfaite. Nous obtenons  $\max_{x \in X} \nu_2(x) \leq \min_{x \in X} \min(1, 1 - A_2(x) + \nu_2(x))$  et donc  $\xi_{A_2}^3(\bar{A})(x) \geq \xi_{A_1}^3(\bar{A})(x) - \eta$ . Similairement nous pouvons obtenir  $\xi_{A_1}^3(\bar{A})(x) \geq \xi_{A_2}^3(\bar{A})(x) - \eta$ . La fonction associant  $\underline{A}$  à  $\xi_{\underline{A}}^3(\bar{A})$  est donc continue et lipschitzienne.  $\square$

*Preuve proposition 3.24.* Soit  $\underline{A}$  un ensemble flou et  $\alpha = \max_{x \in X} \underline{A}$  sa hauteur. Nous voulons prouver que le résultat du filtre  $\xi_{\underline{A}}^3(\bar{A}) = \bigvee \{ \nu \in \mathcal{H}_\tau^2 \mid \nu \leq \bar{A} \text{ et } \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu) \}$  est  $\max(0, \alpha - 1 + \tau)$ -hyperconnexe.

Pour cela nous allons montrer que tous les éléments  $\nu \in \mathcal{H}_\tau^2$  qui satisfont les critères  $\nu \leq \bar{A}$  et  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu)$  se recouvrent au sens de  $\perp_{\alpha-1+\tau}^2$ .

Soit  $\nu$  un ensemble flou de  $\mathcal{H}_\tau^2$  tel que  $\max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu)$  et  $\nu \leq \bar{A}$ . Soit  $x_a$  un point tel que  $\underline{A}(x_a) = \alpha$ ,  $x_m$  un point tel que  $\nu(x_m) = h$  où  $h = \max_{x \in X} \nu(x)$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} & \max_{x \in X} \nu(x) \leq \mu_{\leq}(\underline{A}, \nu) \\ \Rightarrow & h \leq \min_{x \in X} \min(1, 1 - \underline{A}(x) + \nu(x)) \\ \Rightarrow & h \leq 1 - \alpha + \nu(x_a). \end{aligned}$$

Par ailleurs  $\nu$  est  $\tau$ -hyperconnexe donc :

$$\begin{aligned} & 1 - \min(\nu(x_a), \nu(x_m)) + c_\nu^1(x_a, x_m) \geq \tau \\ \Rightarrow & 1 - \tau + c_\nu^1(x_a, x_m) \geq \nu(x_a). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} & h \leq 1 - \alpha + 1 - \tau + c_\nu^1(x_a, x_m) \\ \Rightarrow & h - 1 + \alpha - 1 + \tau \leq c_\nu^1(x_a, x_m). \end{aligned}$$

Puisque d'après la proposition 3.3  $c_\nu^1(x_a, x_m) = \eta_{\delta_{x_m}^h}^1(\nu)(x_a)$ . Tous les ensembles  $\eta_{\delta_{x_m}^h}^1(\nu)$  s'intersectent donc en  $x_a$  au moins jusqu'au niveau  $h - 1 + \alpha - 1 + \tau$ . L'ensemble des éléments  $\nu$  satisfaisant aux critères du filtre se recouvrent donc selon  $\perp_{\alpha-1+\tau}^2$ . Or puisque ces ensembles présentent un degré de connexité  $\tau \geq \alpha - 1 + \tau$ , le résultat du filtre  $\xi_{\underline{A}}^3(\bar{A})$  est  $\max(0, \alpha - 1 + \tau)$ -hyperconnexe.  $\square$



---

# Bibliographie

- R. Adams and L. Bischof. Seeded region growing. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(6) :641–647, 1994.
- K. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1) :87–96, 1986.
- J. Atif, H. Khotanlou, E. Angelini, H. Duffau, and I. Bloch. Segmentation of Internal Brain Structures in the Presence of a Tumor. In *MICCAI Workshop on Clinical Oncology*, pages 61–68, Copenhagen, oct 2006a.
- J. Atif, O. Nempont, O. Colliot, E. Angelini, and I. Bloch. Level Set Deformable Models Constrained by Fuzzy Spatial Relation. In *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, IPMU*, pages 1534–1541, Paris, France, 2006b.
- J. Atif, C. Hudelot, G. Fouquier, I. Bloch, and E. Angelini. From Generic Knowledge to Specific Reasoning for Medical Image Interpretation using Graph-based Representations. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence IJCAI'07*, pages 224–229, Hyderabad, India, jan 2007a.
- J. Atif, C. Hudelot, O. Nempont, N. Richard, B. Batrancourt, E. Angelini, and I. Bloch. GRAFIP : A Framework for the Representation of Healthy and Pathological Cerebral Information. In *ISBI 2007*, pages 205–208, Washington DC, USA, apr 2007b.
- H. Bandemer and W. Näther. *Fuzzy data analysis, Theory and Decision Library, Serie B : Mathematical and Statistical Methods*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- P. Baptiste, C. Le Pape, and W. Nuijten. *Constraint-Based Scheduling : Applying Constraint Programming to Scheduling Problems*. Springer, 2001.
- V. Barra and J.-Y. Boire. Automatic segmentation of subcortical brain structures in MR images using information fusion. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(7) :549–558, 2001.
- B. Batrancourt, J. Atif, O. Nempont, E. Angelini, and I. Bloch. Integrating Information from Pathological Brain MRI into an Anatomic-Functional Model. In *24th IASTED International Multi-Conference on Biomedical Engineering*, pages 236–241, Innsbruck, Austria, feb 2006.
- M. Beg, M. Miller, and A. Trouvé. Computing Large Deformation Metric Mappings via Geodesic Flows of Diffeomorphisms. *International Journal of Computer Vision*, 61(2) : 139–157, 2005.
- S. Benferhat, D. Dubois, S. Kaci, and H. Prade. Bipolar representation and fusion of preferences in the possibilistic logic framework . In *Proc. of the 8th International Conference*,
-

- 
- Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, Toulouse, France, 22/04/02-25/04/02, pages 421–432, San Francisco, California, avril 2002. Morgan Kaufmann Publishers. BB.
- E. Bengoetxea, P. Larranaga, I. Bloch, A. Perchant, and C. Boeres. Inexact Graph Matching by Means of Estimation of Distribution Algorithms. *Pattern Recognition*, 35 : 2867–2880, 2002.
- F. Benhamou and W. Older. Applying interval arithmetic to real, integer, and boolean constraints. *The Journal of Logic Programming*, 32(1) :1–24, 1997.
- F. Benhamou, D. McAllester, and P. van Hentenryck. Clp(intervals) revisited. In *ILPS '94 : Proceedings of the 1994 International Symposium on Logic programming*, pages 124–138, Cambridge, MA, USA, 1994. MIT Press. ISBN 0-262-52191-1.
- C. Berger, T. Géraud, R. Levillain, N. Widynski, A. Baillard, and E. Bertin. Effective Component Tree Computation with Application to Pattern Recognition in Astronomical Imaging. In *IEEE International Conference on Image Processing, ICIP*, volume 4, pages 41–44, San Antonio, TX, USA, 2007.
- C. Bessière. Arc-Consistency and Arc-Consistency Again. *Artificial Intelligence*, 65(1) : 179–190, 1994.
- C. Bessière and J. Regin. Refining the basic constraint propagation algorithm. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI*, volume 1, pages 309–315, Seattle, WA, USA, 2001.
- C. Bessière, J. Régin, R. Yap, and Y. Zhang. An optimal coarse-grained arc consistency algorithm. *Artificial Intelligence*, 165(2) :165–185, 2005.
- C. Bessière. Constraint propagation. Technical report, LIRMM, UMR 5506 CNRS, University of Montpellier, 2006.
- C. Bessière, K. Stergiou, and T. Walsh. Domain filtering consistencies for non-binary constraints. *Artificial Intelligence*, 172(6-7) :800–822, 2008.
- K. Bhatia, J. Hajnal, B. Puri, A. Edwards, and D. Rueckert. Consistent groupwise non-rigid registration for atlas construction. *Biomedical Imaging : Macro to Nano, 2004. IEEE International Symposium on*, pages 908–911, 2004.
- D. Blezek and J. Miller. Atlas stratification. *Medical Image Analysis*, 11(5) :443–457, 2007.
- I. Bloch. Fuzzy Relative Position between Objects in Images : a Morphological Approach. In *IEEE Int. Conf. on Image Processing ICIP'96*, volume II, pages 987–990, Lausanne, sep 1996a.
- I. Bloch. Information Combination Operators for Data Fusion : A Comparative Review with Classification. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 26(1) :52–67, 1996b.
- I. Bloch. Fuzzy Relative Position between Objects in Image Processing : a Morphological Approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(7) : 657–664, 1999.
-

- 
- I. Bloch. On Fuzzy Spatial Distances. In P. Hawkes, editor, *Advances in Imaging and Electron Physics, Volume 128*, pages 51–122. Elsevier, Amsterdam, 2003.
- I. Bloch. Fuzzy Spatial Relationships for Image Processing and Interpretation : A Review. *Image and Vision Computing*, 23(2) :89–110, 2005.
- I. Bloch. Spatial Reasoning under Imprecision using Fuzzy Set Theory, Formal Logics and Mathematical Morphology. *International Journal of Approximate Reasoning*, 41 :77–95, 2006.
- I. Bloch and H. Maître. Ensembles flous et morphologie mathématique. Technical report, Télécom Paris 92D007, Mar. 1992.
- I. Bloch and H. Maître. Fuzzy Mathematical Morphologies : A Comparative Study. *Pattern Recognition*, 28(9) :1341–1387, 1995.
- I. Bloch, H. Maître, and M. Anvari. Fuzzy Adjacency between Image Objects. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(6) :615–653, 1997.
- I. Bloch, T. Géraud, and H. Maître. Representation and Fusion of Heterogeneous Fuzzy Information in the 3D Space for Model-Based Structural Recognition - Application to 3D Brain Imaging. *Artificial Intelligence*, 148 :141–175, 2003.
- F. Boussemart, F. Hemery, and C. Lecoutre. Revision ordering heuristics for the constraint satisfaction problem. In M. van Dongen, editor, *Proceeding of the first international workshop "Constraint propagation and implementation" of the 10th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP'2004)*, pages 29–43, Toronto, Canada, September 2004.
- D. Bowden and M. Dubach. NeuroNames 2002. *NeuroInformatics*, 1(1) :43–59, 2003.
- D. Bowden and R. Martin. NeuroNames Brain Hierarchy. *Neuroimage*, 2(1) :63–83, 1995.
- Y. Boykov and M. Jolly. Interactive graph cuts for optimal boundary and region segmentation of objects in ndimages. *International Conference on Computer Vision*, 1 :105–112, 2001.
- Y. Boykov and V. Kolmogorov. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts. In *IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV*, pages 26–33, Nice, France, 2003.
- Y. Boykov and V. Kolmogorov. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(9) :1124–1137, 2004.
- Y. Boykov, O. Veksler, and R. Zabih. Fast approximate energy minimization via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11) :1222–1239, 2001.
- U. Braga-Neto and J. Goutsias. Connectivity on complete lattices : New results. *Computer Vision and Image Understanding*, 85(1) :22–53, 2002.
- U. Braga-Neto and J. Goutsias. A multiscale approach to connectivity. *Computer Vision and Image Understanding*, 89(1) :70–107, 2003a.
-

- U. Braga-Neto and J. Goutsias. A Theoretical Tour of Connectivity in Image Processing and Analysis. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 19(1) :5–31, 2003b.
- U. Braga-Neto and J. Goutsias. Grayscale Level Connectivity : Theory and Applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13(12) :1567–1580, 2004.
- E. Breen and R. Jones. Attribute Openings, Thinnings, and Granulometries. *Computer Vision and Image Understanding*, 64(3) :377–389, 1996.
- J. Brinkley, S. Bradley, J. Sundsten, and C. Rosse. The Digital Anatomist Information System and Its Use in the Generation and Delivery of Web-Based Anatomy Atlases. *Computers and Biomedical Research*, 30(6) :472–503, 1997.
- C. Broit. *Optimal registration of deformed images*. PhD thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1981.
- H. Bunke. Recent developments in graph matching. In *International Conference on Pattern Recognition*, volume 2, pages 117–124, Barcelona, Spain, sep 2000.
- B. Carvalho, C. Gau, G. Herman, and T. Kong. Algorithms for Fuzzy Segmentation. *Pattern Analysis and Applications*, 2(1) :73–81, 1999.
- V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro. Geodesic Active Contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, 1997.
- R. Cesar, E. Bengoetxea, I. Bloch, and P. Larranaga. Inexact Graph Matching for Model-Based Recognition : Evaluation and Comparison of Optimization Algorithms. *Pattern Recognition*, 38(11) :2099–2113, nov 2005.
- A. Cesta, A. Oddi, and S. Smith. A Constraint-Based Method for Project Scheduling with Time Windows. *Journal of Heuristics*, 8(1) :109–136, 2002.
- T. Chan and L. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2) :266–277, 2001.
- Y. Chang and X. Li. Adaptive image region-growing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 3(6) :868–872, 1994.
- C. Chen, E. Tsao, and W. Lin. Medical image segmentation by a constraint satisfaction neural network. *Nuclear Science, IEEE Transactions on*, 38(2) :678–686, 1991.
- C. Choi, W. Harvey, J. Lee, and P. Stuckey. Finite Domain Bounds Consistency Revisited. In *19th Australian Joint Conference on Artificial Intelligence*, volume LNCS 4304, pages 49–58, Hobart, Australia, dec 2006. Springer.
- C. Ciofalo and C. Barillot. Brain Segmentation with Competitive Level Sets and Fuzzy Control. In *International Conference on Information Processing in Medical Imaging, IPMI*, pages 333–344, 2005.
- E. Clementini, P. Felice, and D. Hernández. Qualitative representation of positional information. *Artificial Intelligence*, 95(2) :317–356, 1997.
- L. Cohen and R. Kimmel. Global Minimum for Active Contour Models : A Minimal Path Approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1) :57–78, 1997.
-

- 
- D. Collins, A. Zijdenbos, W. Baare, and A. Evans. ANIMAL+ INSECT : Improved cortical structure segmentation. In *Information Processing in Medical Imaging*, volume 1613, pages 210–223, Visegrád, Hungary, 1999. Springer.
- O. Colliot. *Représentation, évaluation et utilisation de relations spatiales pour l'interprétation d'images*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, ENST, 2003.
- O. Colliot, O. Camara, and I. Bloch. Integration of Fuzzy Structural Information in Deformable Models. In *Information Processing and Management of Uncertainty IPMU 2004*, volume 2, pages 1533–1540, Perugia, Italy, jul 2004.
- O. Colliot, O. Camara, and I. Bloch. Integration of Fuzzy Spatial Relations in Deformable Models - Application to Brain MRI Segmentation. *Pattern Recognition*, 39 :1401–1414, 2006.
- D. Conte, P. Foggia, C. Sansone, and M. Vento. Thirty Years of Graph Matching in Pattern Recognition. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 18 (3) :265–298, 2004.
- T. Cootes, C. Taylor, D. Cooper, and J. Graham. Active shape models-their training and application. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :38–59, 1995.
- T. Cootes, G. Edwards, and C. Taylor. Active appearance models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(6) :681–685, 2001.
- J. Corso, Z. Tu, A. Yuille, and A. Toga. Segmentation of Sub-Cortical Structures by the Graph-Shifts Algorithm. In *Information Processing in Medical Imaging, IPMI*, volume LNCS 4584, pages 183–197, Kerkrade, The Netherlands, jul 2007. Springer.
- D. Cremers, T. Kohlberger, and C. Schnorr. Nonlinear shape statistics in Mumford-Shah based segmentation. In *European Conference on Computer Vision, ECCV*, pages 93–108. Springer, 2002a.
- D. Cremers, F. Tischhäuser, J. Weickert, and C. Schnörr. Diffusion Snakes : Introducing Statistical Shape Knowledge into the Mumford-Shah Functional. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :295–313, 2002b.
- D. Cremers, T. Kohlberger, and C. Schnorr. Shape statistics in kernel space for variational image segmentation. *Pattern Recognition*, 36(9) :1929–1943, 2003.
- M. Cuadra, C. Pollo, A. Bardera, O. Cuisenaire, J.-G. Villemure, and J.-P. Thiran. Atlas-based segmentation of pathological MR brain images using a model of lesion growth. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 23(10) :1301–1314, Oct. 2004. ISSN 0278-0062. doi : 10.1109/TMI.2004.834618.
- S. Dambreville, Y. Rathi, and A. Tannenbaum. A framework for image segmentation using shape models and kernel space shape priors. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30(8) :1385–1399, Aug. 2008. ISSN 0162-8828. doi : 10.1109/TPAMI.2007.70774.
- O. Dameron. Symbolic model of spatial relations in the human brain. In *Mapping the Human Body : Spatial Reasoning at the Interface between Human Anatomy and Geographic Information Science*, pages 779–783, Buffalo, USA,, April 2005.
-



- B. Dawant, S. Hartmann, and S. Gadamsetty. Brain Atlas Deformation in the Presence of Large Space-occupying Tumors. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, MICCAI*, volume LNCS 1679, pages 589–596, Cambridge, UK, sep 1999a. Springer-Verlag London.
- B. Dawant, S. Hartmann, J. Thirion, F. Maes, D. Vandermeulen, and P. Demaerel. Automatic 3-D Segmentation of Internal Structures of the Head in MR Images Using a Combination of Similarity and Free-Form Transformations. I. Methodology and Validation on Normal Subjects. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(10) :909–916, oct 1999b.
- B. Dawant, S. Hartmann, S. Pan, and S. Gadamsetty. Brain atlas deformation in the presence of small and large space-occupying tumors. *Comput Aided Surg*, 7(1) :1–10, 2002.
- R. Debruyne and C. Bessière. Domain filtering consistencies. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 14 :215–240, 2002.
- R. Dechter and F. D. Backtracking algorithms for constraint satisfaction problems. Technical report, University of California at Irvine, 1999.
- A. Deruyver. Adaptive pyramid and semantic graph : knowledge driven segmentation. In M. V. Luc Brun, editor, *Gbr 2005, LNCS*, volume 3434, pages 213–223. Springer, 2005. URL <http://lsiit.u-strasbg.fr/Publications/2005/Der05>.
- A. Deruyver and Y. Hodé. Constraint satisfaction problem with bilevel constraint : application to interpretation of over-segmented images. *Artificial Intelligence*, 93(1-2) :321–335, 1997.
- E. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1) :269–271, 1959.
- M. Donnelly, T. Bittner, and C. Rosse. A formal theory for spatial representation and reasoning in biomedical ontologies. *Artificial Intelligence In Medicine*, 36(1) :1–27, 2006.
- D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*. Academic Press, New York, NY, USA, 1980.
- D. Dubois, H. Fargier, and H. Prade. Possibility theory in constraint satisfaction problems : Handling priority, preference and uncertainty. *Applied Intelligence*, 6(4) :287–309, 1996.
- H. Fargier. *Problèmes de satisfaction de contraintes flexibles ; application à l'ordonnancement de production*. PhD thesis, Université de Toulouse 3, Toulouse, France, 1994.
- B. Fischl, D. Salat, E. Busa, M. Albert, M. Dieterich, C. Haselgrove, A. van der Kouwe, R. Killiany, D. Kennedy, S. Klaveness, et al. Whole Brain Segmentation Automated Labeling of Neuroanatomical Structures in the Human Brain. *Neuron*, 33(3) :341–355, 2002.
- L. Ford and D. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8(3) :399–404, 1956.
-

- 
- G. Fouquier, J. Atif, and I. Bloch. Local Reasoning in Fuzzy Attributes Graphs for Optimizing Sequential Segmentation. In *6th IAPR-TC15 Workshop on Graph-based Representations in Pattern Recognition, GbR'07*, volume LNCS 4538, pages 138–147, Alicante, Spain, jun 2007.
- G. Fouquier, J. Atif, and I. Bloch. Sequential Spatial Reasoning in Images based on Pre-Attention Mechanisms and Fuzzy Attribute Graphs. In *European Conference on Artificial Intelligence ECAI*, pages 611–615, Patras, Greece, jul 2008.
- A. Frangi, D. Rueckert, J. Schnabel, and W. Niessen. Automatic construction of multiple-object three-dimensional statistical shape models : application to cardiac modeling. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21(9) :1151–1166, 2002.
- A. Frank. Qualitative Spatial Reasoning about Cardinal Directions. In *7th Austrian Conference on Artificial Intelligence*, pages 157–167, Vienna, Austria, 1991.
- J. Freeman. The Modelling of Spatial Relations. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :156–171, 1975.
- G. Gange, P. Stuckey, and L. V. Fast set bounds propagation using bdds. In *European Conference on Artificial Intelligence ECAI*, volume 178, pages 505–509, Patras, Greece, jul 2008.
- J. Gaschnig. Performance measurement and analysis of certain search algorithms. Technical report, Carnegie-Mellon University, 1979.
- T. Géraud, I. Bloch, and H. Maître. Atlas-guided Recognition of Cerebral Structures in MRI using Fusion of Fuzzy Structural Information. In *CIMAF'99 Symposium on Artificial Intelligence*, pages 99–106, La Havana, Cuba, 1999.
- T. Géraud, I. Bloch, and H. Maître. Reconnaissance de structures cérébrales à l'aide d'un atlas par fusion d'informations structurelles floues. In *RFIA 2000*, volume I, pages 287–295, Paris, France, 2000.
- C. Gervet. Interval propagation to reason about sets : Definition and implementation of a practical language. *Constraints*, 1(3) :191–244, 1997.
- M. Ginsberg. Dynamic backtracking. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 1 :25–46, 1993.
- A. Goldberg and R. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM (JACM)*, 35(4) :921–940, 1988.
- S. Golomb and L. Baumert. Backtrack Programming. *Journal of the ACM, JACM*, 12(4) : 516–524, 1965.
- L. Grady. Multilabel random walker image segmentation using prior models. In *Proceedings of the 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 1 of *CVPR*, pages 763–770, San Diego, June 2005. IEEE, IEEE.
- L. Grady. Computing exact discrete minimal surfaces : Extending and solving the shortest path problem in 3D with application to segmentation. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR*, volume 1, pages 69–78. IEEE, IEEE, June 2006a.
-

- L. Grady. Random Walks for Image Segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 1768–1783, 2006b.
- A. Guimond, J. Meunier, and J. Thirion. Average Brain Models : A Convergence Study. *Computer Vision and Image Understanding*, 77(2) :192–210, 2000.
- W. Harvey and M. Ginsberg. Limited discrepancy search. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI*, pages 607–615, Montréal, Québec, Canada, 1995.
- D. Hasboun. *Neuranat*.  
<http://www.chups.jussieu.fr/ext/neuranat/index.html>, 2005.
- P. Hawkins, V. Lagoon, and P. J. Stuckey. Set bounds and (split) set domain propagation using robdds. In G. I. Webb and X. Yu, editors, *Australian Conference on Artificial Intelligence*, volume 3339 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 706–717. Springer, 2004. ISBN 3-540-24059-4.
- P. Hawkins, V. Lagoon, and P. J. Stuckey. Solving set constraint satisfaction problems using robdds. *J. Artif. Intell. Res. (JAIR)*, 24 :109–156, 2005.
- H. Heijmans. Morphological Grain Operators for Binary Images. In *Proceedings of the 7th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns, CAIP*, pages 392–399, Kiel, Germany, 1997. Springer-Verlag.
- H. Heijmans. Connected morphological operators for binary images. *Computer Vision and Image Understanding*, 73(1) :99–120, 1999.
- G. Herman and B. Carvalho. Multiseeded Segmentation using Fuzzy Connectedness. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(5) :460–474, 2001.
- D. Hernández, E. Clementini, and P. D. Felice. Qualitative distances. In *Spatial Information Theory : A Theoretical Basis for GIS*, volume LNCS 988, pages 45–57, Semmering, Austria, sep 1995. Springer.
- Y. Hodé and A. Deruyver. Qualitative spatial relationships for image interpretation by using semantic graph. In *Graph-Based Representations in Pattern Recognition, GbRPR*, pages 240–250, Alicante, Spain, 2007.
- C. Hudelot, J. Atif, O. Nempont, B. Batrancourt, E. Angelini, and I. Bloch. GRAFIP : a Framework for the Representation of Healthy and Pathological Anatomical and Functional Cerebral Information. In *Human Brain Mapping*, Florence, Italy, jun 2006.
- C. Hudelot, J. Atif, and I. Bloch. A Spatial Relation Ontology Using Mathematical Morphology and Description Logics for Spatial Reasoning. In *ECAI-08 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, pages 21–25, Patras, Greece, jul 2008a.
- C. Hudelot, J. Atif, and I. Bloch. Fuzzy Spatial Relation Ontology for Image Interpretation. *Fuzzy Sets and Systems*, 159 :1929–1951, 2008b.
- C. Hudelot, J. Atif, and I. Bloch. FSRO : une ontologie de relations spatiales floues pour l'interprétation d'images. *RNTI*, 2008c.
- D. Iosifescu, M. Shenton, S. Warfield, R. Kikinis, J. Dengler, F. Jolesz, and R. McCarley. An Automated Registration Algorithm for Measuring MRI Subcortical Brain Structures. *Neuroimage*, 6(1) :13–25, 1997.
-

- 
- R. Jones. Connected Filtering and Segmentation Using Component Trees. *Computer Vision and Image Understanding*, 75(3) :215–228, 1999.
- S. Joshi, B. Davis, M. Jomier, and G. Gerig. Unbiased diffeomorphic atlas construction for computational anatomy. *Neuroimage*, 23 :151–160, 2004.
- M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes : Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1 :321–331, 1987.
- H. Khotanlou. *Segmentation 3D de tumeurs et de structures internes du cerveau en IRM*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, feb 2008.
- H. Khotanlou, J. Atif, E. Angelini, H. Duffau, and I. Bloch. Adaptive Segmentation of Internal Brain Structures in Pathological MR Images Depending on Tumor Types. In *ISBI 2007*, pages 588–591, Washington DC, USA, apr 2007a.
- H. Khotanlou, O. Colliot, J. Atif, and I. Bloch. 3D Brain Tumor Segmentation in MRI Using Fuzzy Classification, Symmetry Analysis and Spatially Constrained Deformable Models. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007b.
- L. Kitchen. Discrete Relaxation for Matching Relational Structures. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 9(12) :869–874, 1978.
- J. Klein. *Conception et réalisation d'une unité logique pour l'analyse quantitative d'images*. PhD thesis, Nancy University, France, 1976.
- V. Kolmogorov and R. Zabini. What energy functions can be minimized via graph cuts? *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2) :147–159, 2004.
- B. Kuipers. Modeling Spatial Knowledge. *Cognitive Science*, 2 :129–153, 1978.
- B. J. Kuipers and T. S. Levitt. Navigation and Mapping in Large-Scale Space. *AI Magazine*, 9(2) :25–43, 1988.
- S. Kyriacou, C. Davatzikos, S. Zinreich, and R. Bryan. Nonlinear elastic registration of brain images with tumor pathology using a biomechanical model. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 18(7) :580–592, Jul 1999. ISSN 0278-0062. doi : 10.1109/42.790458.
- P. Laborie. Algorithms for propagating resource constraints in AI planning and scheduling : Existing approaches and new results. *Artificial Intelligence*, 143(2) :151–188, 2003.
- V. Lagoon and P. J. Stuckey. Set domain propagation using robdds. In M. Wallace, editor, *CP*, volume 3258 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–361. Springer, 2004. ISBN 3-540-23241-9.
- D. Lesage, J. Darbon, and C. Akgul. An Efficient Algorithm for Connected Attribute Thinnings and Thickenings. In *Advances in Visual Computing, Second International Symposium, ISVC*, volume LNCS 4292, pages 393–404, Lake Tahoe, NV, USA, nov 2006.
- M. Leventon, W. Grimson, and O. Faugeras. Statistical shape influence in geodesic active contours. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR*, volume 1, pages 316–323, 2000.
- S. Li. Connectedness in L-fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 116(3) : 361–368, 2000.
-

- C. Lipscomb. Medical Subject Headings (MeSH). *Bulletin of the Medical Library Association*, 88(3) :265, jul 2000.
- A. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, 8(1) :99–118, feb 1977a.
- A. Mackworth. On Reading Sketch Maps. In *International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI*, pages 598–606, Cambridge, MA, USA, 1977b.
- A. Mackworth and E. Freuder. The complexity of some polynomial network consistency algorithms for constraint satisfaction problems. *Artificial Intelligence*, 25(1) :65–74, 1985.
- D. S. Marcus, T. H. Wang, J. Parker, J. G. Csernansky, J. C. Morris, and R. L. Buckner. Open access series of imaging studies (oasis) : Cross-sectional mri data in young, middle aged, nondemented, and demented older adults. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 19(9) :1498–1507, 2007. doi : 10.1162/jocn.2007.19.9.1498. URL <http://www.mitpressjournals.org/doi/abs/10.1162/jocn.2007.19.9.1498>.
- G. Matheron. Remarques sur les fermetures-partitions. Technical report, Centre de Géostatistique et de Morphologie Mathématique, Ecole des Mines de Paris, 1985.
- G. Matheron and J. Serra. Strong filters and connectivity. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, 2 :141–157, 1988.
- P. Matsakis and L. Wendling. A new way to represent the relative position between areal objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(7) :634–643, 1999.
- C. Maurer Jr, R. Qi, and V. Raghavan. A Linear Time Algorithm for Computing Exact Euclidean Distance Transforms of Binary Images in Arbitrary Dimensions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(2) :265–270, 2003.
- J. Mazziotta, A. Toga, A. Evans, P. Fox, and J. Lancaster. A Probabilistic Atlas of the Human Brain : Theory and Rationale for Its Development The International Consortium for Brain Mapping (ICBM). *Neuroimage*, 2(2PA) :89–101, 1995.
- D. Mehta and M. van Dongen. Reducing checks and revisions in coarse-grained mac algorithms. In *Proceedings of the Nineteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'2005)*, pages 236–241, 2005. URL [\url{http://ijcai.org/papers/0820.pdf}](http://ijcai.org/papers/0820.pdf).
- A. Meijster and M. Wilkinson. A comparison of algorithms for connected set openings and closings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 24(4) :484–494, 2002.
- A. Michelson. *A 1927 Studies in Optics*. Chicago University Press, 1927.
- C. Millet, I. Bloch, P. Hède, and P. A. Moellic. Using Relative Spatial Relationships to Improve Individual Region Recognition. In *European Workshop on the Integration of Knowledge, Semantics and Digital Media Technologies, EWIMT'05*, pages 119–126, London, UK, 2005.
- K. Miyajima and A. Ralescu. Spatial Organization in 2D Segmented Images : Representation and Recognition of Primitive Spatial Relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 65 :225–236, 1994.
-

- 
- A. Mohamed, E. Zacharaki, D. Shen, and C. Davatzikos. Deformable registration of brain tumor images via a statistical model of tumor-induced deformation. *Medical Image Analysis*, 10(5) :752–763, 2006.
- R. Mohr and T. Henderson. Arc and path consistence revisited. *Artificial Intelligence*, 28(2) :225–233, 1986.
- R. Mohr and G. Masini. Good old discrete relaxation. In *European Conference on Artificial Intelligence, ECAI*, pages 651–656, Munich, Germany, 1988.
- P. Monasse and F. Guichard. Fast Computation of a Contrast-Invariant Image Representation. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(5) :860–872, 2000.
- U. Montanari. Networks of Constraints : Fundamental Properties and Applications to Picture Processing. *Information Sciences*, 7 :95–132, 1974.
- D. Mumford, J. Shah, and C. for Intelligent Control Systems (US). *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*. Center for Intelligent Control Systems, 1988.
- L. Najman and M. Couprie. Building the Component Tree in Quasi-Linear Time. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(11) :3531–3539, 2006.
- O. Nempont, J. Atif, E. Angelini, and I. Bloch. Combining Radiometric and Spatial Structural Information in a New Metric for Minimal Surface Segmentation. In *Information Processing in Medical Imaging (IPMI 2007)*, volume LNCS 4584, pages 283–295, Kerkrade, The Netherlands, jul 2007.
- O. Nempont, J. Atif, E. Angelini, and I. Bloch. A New Fuzzy Connectivity Class. Application to Structural Recognition in Images. In *Discrete Geometry for Computer Imagery DGCI*, volume LNCS 4992, pages 446–457, Lyon, 2008a.
- O. Nempont, J. Atif, E. Angelini, and I. Bloch. Structure Segmentation and Recognition in Images Guided by Structural Constraint Propagation. In *European Conference on Artificial Intelligence ECAI*, pages 621–625, Patras, Greece, jul 2008b.
- O. Nempont, J. Atif, E. Angelini, and I. Bloch. Fuzzy Attribute Openings Based on a New Fuzzy Connectivity Class. Application to Structural Recognition in Images. In *IPMU'08*, pages 652–659, Malaga, Spain, jun 2008c.
- O. Nempont, J. Atif, E. Angelini, and I. Bloch. A New Fuzzy Connectivity Measure for Fuzzy Sets and Associated Fuzzy Attribute Openings. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 34(2) :107–136, jun 2009.
- S. Osher and J. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
- A. Osorio, B. Devaux, R. Clodic, F. Dargent, J. Atif, X. Ripoche, and F.-X. Roux. A new augmented reality system for brain surgery improvements merging fluoroscopic 2d images, mr and ct 3d segmentations and talairach atlas. In *Annual Congress of the RSNA*, pages Education Exhibit 9102 DS-I., Chicago, dec 2004.
-

- G. Ouzounis and M. Wilkinson. Mask-Based Second-Generation Connectivity and Attribute Filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 29(6) : 990–1004, 2007.
- G. Palma, O. Nempont, I. Bloch, and S. Muller. Extraction de "zones plates floues" dans des images de quantités floues. In *LFA*, pages 364–371, Lens, France, oct 2008.
- D. Papadias, T. Sellis, Y. Theodoridis, and M. Egenhofer. *Topological relations in the world of minimum bounding rectangles : a study with R-trees*. ACM Press New York, NY, USA, 1995.
- A. Perchant. *Morphisme de graphes d'attributs flous pour la reconnaissance structurelle de scènes*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, ENST, 2000.
- A. Perchant and I. Bloch. Fuzzy Morphisms between Graphs. *Fuzzy Sets and Systems*, 128 (2) :149–168, 2002.
- A. Perchant, C. Boeres, I. Bloch, M. Roux, and C. Ribeiro. Model-based Scene Recognition Using Graph Fuzzy Homomorphism Solved by Genetic Algorithm. In *Graph-Based Representations in Pattern Recognition, GbRPR*, pages 61–70, Castle of Haindorf, Austria, 1999.
- A. Pitiot, H. Delingette, P. Thompson, and N. Ayache. Expert knowledge-guided segmentation system for brain MRI. *Neuroimage*, 23(1) :85–96, 2004.
- K. Pohl, W. Wells, A. Guimond, K. Kasai, M. Shenton, R. Kikinis, W. Grimson, and S. Warfield. Incorporating non-rigid registration into expectation maximization algorithm to segment MR images. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, MICAI*, pages 564–572, Tokyo, Japan, 2002. Springer.
- K. Pohl, J. Fisher, W. Grimson, R. Kikinis, and W. Wells. A Bayesian model for joint segmentation and registration. *Neuroimage*, 31(1) :228–239, 2006.
- C. Pollo, M. Bach Cuadra, O. Cuisenaire, J. Villemure, and J. Thiran. Segmentation of brain structures in presence of a space-occupying lesion. *Neuroimage*, 24(4) :990–996, 2005.
- J. Puentes, B. Batrancourt, J. Atif, E. Angelini, L. Lecornu, A. Zemirline, I. Bloch, G. Coatrieux, and C. Roux. Integrated Multimedia Electronic Patient Record and Graph-Based Image Information for Cerebral Tumors. *Computers in Biology and Medicine*, 38(4) : 425–437, 2008.
- J. Puget. PECOS : a high level constraint programming language. In *Proceedings of SPICIS*, volume 92, 1992.
- C. Ronse. Set-Theoretical Algebraic Approaches to Connectivity in Continuous or Digital Spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 8(1) :41–58, 1998.
- C. Ronse. Partial partitions, partial connections and connective segmentation. *Journal of Mathematical Imaging & Vision*, 32(2) :97–125, October 2008. doi : 10.1007/s10851-008-0090-5.
- C. Ronse and J. Serra. Geodesy and connectivity in lattices. *Fundamenta Informaticae*, 46(4) :349–395, 2001.
-

- 
- C. Ronse and J. Serra. Fondements algébriques de la morphologie. In L. Najman and H. Talbot, editors, *Morphologie Mathématique : approches déterministes*, chapter 2, pages 49–96. Hermès / Lavoisier, 2008.
- A. Rosenfeld. Fuzzy Digital Topology. *Information and Control*, 40 :76–87, 1979.
- A. Rosenfeld. The Fuzzy Geometry of Image Subsets. *Pattern Recognition Letters*, 2 : 311–317, 1984.
- A. Rosenfeld, R. Hummel, and S. Zucker. Scene labeling by relaxation operations. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 6(6) :420–433, 1976.
- C. Rosse and J. Mejino. A reference ontology for biomedical informatics : the Foundational Model of Anatomy. *Journal of Biomedical Informatics*, 36(6) :478–500, 2003.
- F. Rossi, P. Van Beek, and T. Walsh. *Handbook of Constraint Programming*, chapter 4, Backtracking search algorithms. Elsevier Science, 2006a.
- F. Rossi, P. Van Beek, and T. Walsh. *Handbook of Constraint Programming*, chapter 5, Local Search Methods. Elsevier Science, 2006b.
- C. Saathoff. Constraint reasoning for region-based image labelling. In *Visual Information Engineering, 2006. VIE 2006. IET International Conference on*, pages 138–143, Bangalore, India, Sept. 2006.
- C. Saathoff and S. Staab. Exploiting Spatial Context in Image Region Labelling Using Fuzzy Constraint Reasoning. In *Ninth International Workshop on Image Analysis for Multimedia Interactive Services, WIAMIS'08*, pages 16–19, Klagenfurt, Austria, May 2008.
- A. Sadler and C. Gervet. Hybrid set domains to strengthen constraint propagation and reduce symmetries. In *Principles and Practice of Constraint Programming, CP 2004*, volume LNCS 3258, pages 604–618. Springer Berlin, sep 2004.
- A. Sadler and C. Gervet. Enhancing set constraint solvers with lexicographic bounds. *Journal of Heuristics*, 14(1) :23–67, 2008.
- P. Salembier and J. Serra. Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(8) :1153–1160, 1995.
- P. Salembier, A. Oliveras, and L. Garrido. Antiextensive Connected Operators for Image and Sequence Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(4) :555–570, 1998.
- C. Schulte and P. Stuckey. Speeding up constraint propagation. In M. Wallace, editor, *Tenth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming*, volume 3258 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 619–633, Toronto, Canada, sep 2004. Springer-Verlag. URL <http://www.it.kth.se/~cschulte/paper.html?id=SchulteStuckey:CP:2004>.
- S. Schulz, U. Hahn, and M. Romacker. Modeling anatomical spatial relations with description logics. In *Annual Symposium of the American Medical Informatics Association. Converging Information, Technology, and Health Care (AMIA 2000)*, pages 779–783, Los Angeles, CA, 2000.
-



- 
- J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, UK, 1982.
- J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Vol. II : Theoretical Advances*. Academic Press, London, UK, 1988a.
- J. Serra. Mathematical morphology for Boolean lattices. In *Image Analysis and Mathematical Morphology, II : Theoretical Advances*, chapter 2, pages 37–58. Academic Press, London, 1988b.
- J. Serra. Connectivity on Complete Lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(3) :231–251, 1998.
- J. Serra. Connections for sets and functions. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2) :147–186, 2000.
- J. Serra. A Lattice Approach to Image Segmentation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(1) :83–130, 2006.
- J. Sethian. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 93(4) : 1591–1595, 1996.
- D. Shattuck, S. Sandor-Leahy, K. Schaper, D. Rottenberg, and R. Leahy. Magnetic Resonance Image Tissue Classification Using a Partial Volume Model. *Neuroimage*, 13(5) : 856–876, 2001.
- S. Smith. Fast robust automated brain extraction. *Human Brain Mapping*, 17(3) :143–155, 2002.
- R. Srihari and Z. Zhang. Showtell : a semi-automated image annotation system. *Multimedia, IEEE*, 7(3) :61–71, Jul-Sep 2000. ISSN 1070-986X. doi : 10.1109/93.879769.
- L. Staib and J. Duncan. Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11) :1061–1075, 1992.
- R. Stallman and G. Sussman. Forward Reasoning and Dependency-Directed Backtracking in a System for Computer-Aided Circuit Analysis. *Artificial Intelligence*, 9(2) :135–196, 1976.
- J. Talairach and P. Tournoux. *Co-Planar Stereotaxic Atlas of the Human Brain : 3-Dimensional Proportional System : An Approach to Cerebral Imaging*. Thieme, 1988.
- J. Thirion. Image matching as a diffusion process : an analogy with Maxwell’s demons. *Medical Image Analysis*, 2(3) :243–260, 1998.
- A. Tsai, W. Wells, C. Tempany, E. Grimson, and A. Willsky. Coupled multi-shape model and mutual information for medical image segmentation. In *Information Processing in Medical Imaging, IPMI*, volume LNCS 4584, pages 185–197, Ambleside, UK, jul 2003. Springer.
- A. Tsai, W. Wells, C. Tempany, E. Grimson, and A. Willsky. Mutual information in coupled multi-shape model for medical image segmentation. *Medical Image Analysis*, 8 (4) :429–445, 2004.
-

- 
- J. K. Udupa and S. Samarasekera. Fuzzy Connectedness and Object Definition : Theory, Algorithms, and Applications in Image Segmentation. *Graphical Models and Image Processing*, 58(3) :246–261, 1996.
- L. Vincent. Morphological area openings and closings for grey-scale images. In *NATO Shape in Picture Workshop*, pages 7–11, Driebergen, The Netherlands, 1992.
- L. Vincent. Grayscale Area Openings and Closings, their Efficient Implementation and Applications. In *First Workshop on Mathematical Morphology and its Applications to Signal Processing*, pages 22–27, Barcelona, Spain, 1993.
- L. Vincent. Granulometries and opening trees. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2) :57–90, 2000.
- R. Wallace and E. Freuder. Ordering Heuristics for Arc Consistency Algorithms. In *Proceedings of the Biennial Conference-Canadian Society for Computational Studies of Intelligence*, pages 163–163. Canadian Information Processing Society, 1992.
- D. Waltz. Understanding line drawings of scenes with shadows. *The Psychology of Computer Vision*, pages 19–91, 1975.
- Y. Wang and L. Staib. Boundary finding with correspondence using statistical shape models. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR*, pages 338–345, 1998.
- S. G. Waxman. *Correlative Neuroanatomy*. McGraw-Hill, New York, 24 edition, 2000.
- M. Wilkinson. Attribute-space connectivity and connected filters. *Image and Vision Computing*, 25(4) :426–435, 2007.
- M. Wilkinson, H. Gao, W. Hesselink, J.-E. Jonker, and A. Meijster. Concurrent computation of attribute filters on shared memory parallel machines. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 30(10) :1800–1813, Oct. 2008. ISSN 0162-8828. doi : 10.1109/TPAMI.2007.70836.
- M. Wu, C. Rosano, P. Lopez-Garcia, C. Carter, and H. Aizenstein. Optimum template selection for atlas-based segmentation. *Neuroimage*, 34(4) :1612–1618, 2007.
- C. Xu and J. Prince. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7(3) :359–369, Mar 1998. ISSN 1057-7149. doi : 10.1109/83.661186.
- J. Yang and J. Duncan. 3D image segmentation of deformable objects with joint shape-intensity prior models using level sets. *Medical Image Analysis*, 8(3) :285–294, 2004a.
- J. Yang and J. Duncan. Joint prior models of neighboring objects for 3d image segmentation. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR*, volume 1, pages I–314–I–319 Vol.1, Washington, DC, USA, July 2004b. doi : 10.1109/CVPR.2004.1315048.
- P. Yushkevich, J. Piven, H. Hazlett, R. Smith, S. Ho, J. Gee, and G. Gerig. User-guided 3D active contour segmentation of anatomical structures : Significantly improved efficiency and reliability. *Neuroimage*, 31(3) :1116–1128, 2006.
-

- E. I. Zacharaki, D. Shen, S.-K. Lee, and C. Davatzikos. Orbit : A multiresolution framework for deformable registration of brain tumor images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 27(8) :1003–1017, Aug. 2008. ISSN 0278-0062. doi : 10.1109/TMI.2008.916954.
- L. Zadeh. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. *Information Sciences*, 8 :199–249, 1975.
- Y. Zhang and R. Yap. Making AC-3 an optimal algorithm. volume 1, pages 316–321, Seattle, WA, USA, 2001.
- S. Zhu and A. Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, and Bayes/MDL for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, 1996.
- A. Zijdenbos, B. Dawant, and R. Margolin. Morphometric analysis of white matter lesions in MR images : method and validation. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4) : 716–724, 1994.
-



