HAL open science

Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur

Guillaume Chapuy

To cite this version:

Guillaume Chapuy. Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur. Computer Science [cs]. Ecole Polytechnique X, 2009. English. NNT : . pastel-00005289

HAL Id: pastel-00005289

https://pastel.hal.science/pastel-00005289v1

Submitted on 4 Sep 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat

Spécialité Informatique

Combinatoire bijective des cartes de genre supérieur

présentée par

Guillaume CHAPUY

pour obtenir le grade de Docteur de l'École Polytechnique.

Directeur de thèse : Gilles Schaeffer.

Rapporteurs :

Mireille Bousquet-Mélou,	Directrice de recherche CNRS,
Jean-François Le Gall,	Professeur, Université Paris-Sud,
Nicholas Wormald,	Professeur, University of Waterloo.

Soutenue le 9 Juin 2009 devant le jury composé de :

Mireille Bousquet-Mélou,	Directrice de recherche CNRS,
Philippe Flajolet,	Directeur de recherche INRIA,
Emmanuel Guitter,	Chercheur CEA, HDR,
Grégory Miermont,	Chargé de recherche CNRS, HDR,
Marc Noy,	Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya,
Gilles Schaeffer,	Directeur de recherche CNRS.

Table des matières

Résumé **vii**

1 Introduction **1**
1.1 Graphes, surfaces, et cartes 1
1.1.1 Cartes topologiques 1
1.1.2 Recollements de polygones 3
1.1.3 Une autre convention : les brins 6
1.1.4 Dualité 7
1.1.5 Réétiquetage et enracinement 7
1.2 Combinatoire énumérative : l'exemple des arbres plans 8
1.3 Court historique de l'étude énumérative et statistique des cartes 10
1.3.1 Des prémices à la théorie des graphes 10
1.3.2 Énumération par des méthodes non bijectives 11
1.3.3 Énumération bijective et limites d'échelle 12
1.4 Organisation de ce document, et aperçu des résultats présentés 14
1.5 Publications scientifiques 18

2 Cartes à une face **19**
2.1 Pour se faire une idée 20
2.1.1 Ça existe vraiment 20
2.1.2 Énumération de cartes à une face : travaux antérieurs 21
2.1.3 Une digression : l'approche par schémas 23
2.2 Entrelacements et trisections 26
2.2.1 L'opération de recollement 26
2.2.2 Où se cachent les entrelacements 27
2.2.3 Autour d'un sommet : montées, descentes, et trisections 29
2.3 Représentation en diagramme d'un sommet 30
2.3.1 Définition 30
2.3.2 Visualisation de l'opération de recollement sur les diagrammes . . 31
2.4 Trisections de type **I** et **II** 33
2.4.1 Recollement de trois sommets 33
2.4.2 Décomposition en blocs, et trisections de type **I** 34

2.4.3 Trisections de type **II** 35
2.5 Où l'on fait la même chose plusieurs fois 36
2.5.1 Cas simple : le genre 1 36
2.5.2 Plus dur : le genre 2 37
2.5.3 Cas général 38
2.6 Quelques conséquences 39
2.6.1 Une identité combinatoire 39
2.6.2 Un algorithme de génération 40
2.6.3 Asymptotique 41
2.6.4 Une expression de R_g 41
2.7 Variantes 42
2.7.1 Cartes à une face biparties 42
2.7.2 Cartes à une face précubiques 43

3 Cartes couvertes **45**
3.1 Les objets 47
3.1.1 Cartes et sous-cartes 47
3.1.2 Recollements bord à bord 51
3.2 Bijection 53
3.2.1 Orientations gauches 53
3.2.2 Règles de découpage 56
3.3 Démonstrations 58
3.3.1 Démonstration de la proposition 23 59
3.3.2 Démonstration du théorème 2 61
3.4 Corollaires énumératifs 66
3.4.1 Cartes couvertes 66
3.4.2 Une identité reliant la formule de Jackson à celle d'Harer et Zagier 66

4 Cartes bicolores et constellations **69**
4.1 Introduction : universalité des exposants de comptage 69
4.2 Principaux résultats de ce chapitre 71
4.3 La bijection de Bouttier, Di Francesco, et Guitter 74
4.3.1 Des cartes bicolores aux mobiles 74
4.3.2 Des mobiles aux cartes bicolores 77
4.3.3 m-constellations, m-hypercartes, et mobiles 79
4.4 Les briques élémentaires des mobiles : étoiles et cellules 80
4.4.1 Étoiles élémentaires 80
4.4.2 Cellules et chaînes de type 0 81
4.4.3 Cellules et chaînes de type $\tau \in [\![1, m-1]\!]$ 82
4.5 Le schéma complet d'un mobile 82
4.5.1 Les superchaînes d'un mobile 83
4.5.2 Schémas typés et loi de Kirchoff 85
4.5.3 Étoiles nodales et schémas décorés 86
4.5.4 Le schéma complet d'un mobile 86
4.5.5 Un algorithme non déterministe 87
4.6 Séries génératrices des cellules et des chaînes 88

4.6.1 Mobiles planaires 88
4.6.2 Le polynôme caractéristique de type 0 89
4.6.3 Les racines du polynôme caractéristique 92
4.6.4 Chaînes de tout type 94
4.7 Séries génératrices des mobiles 96
4.7.1 Conséquences de la proposition 47 96
4.7.2 Un calcul exact 97
4.7.3 Le comportement singulier de $R_{\mathfrak{f}}$ 98
4.7.4 Les paires dominantes 101
4.8 La contribution multiplicative des étoiles nodales 102
4.8.1 Quatre types de nœuds 102
4.8.2 Une simplification magique (et le typage n'apparaît plus) 105
4.8.3 Un « lemme de dépointage » 107
4.8.4 Le cas $D = \{k\}$ 109

5 Profil métrique limite des quadrangulations de genre g 111
5.1 Introduction : convergence des cartes aléatoires 111
5.2 Quadrangulations biparties et arbres étiquetés 113
5.3 Profil des arbres étiquetés et mesure ISE 116
5.4 Une nouvelle expression de t_g 117
5.5 À propos de t_g 118
5.6 Profil métrique limite des quadrangulations 119
5.6.1 Énoncé du théorème limite 119
5.6.2 Démonstration du théorème 8 120

6 Génération aléatoire 125
6.1 Généralités 125
6.2 Un générateur de Boltzmann pour les cartes de genre supérieur 128
6.3 Un générateur approché, rapide et facile à mettre en œuvre 132
6.4 Heuristique de dessin 136

Conclusion 139
Graphes de genre minimal fixé 139
Dimension de Hausdorff des cartes couvertes 141
Interprétation des équations de récurrence pour les nombres t_g 142

Bibliographie 145

Résumé

Cette thèse est une contribution à l'étude énumérative et statistique d'objets combinatoires appelés *cartes*. Une carte est une surface discrète formée par le recollement d'un nombre fini de polygones, ou de manière équivalente un graphe qui a été plongé sans croisements d'arêtes dans une surface orientable. Si de nombreux travaux concernent les cartes *planaires*, nous nous intéressons ici aux *cartes de genre* $g > 0$, c'est-à-dire dont la surface sous-jacente possède g anses indépendantes. Nous utilisons principalement des *méthodes bijectives*, c'est-à-dire que nous exhibons des bijections permettant de relier les cartes à des objets dont la structure est plus simple, comme des arbres. Dans certains cas, ces bijections ne suffisent pas et nous leur associons des techniques de séries algébriques, de combinatoire des chemins sur réseau, ou de probabilités.

Dans le premier chapitre, nous introduisons la notion de carte, et donnons un bref historique des approches antérieures, qui relèvent de nombreux champs de la combinatoire, des probabilités ou de la théorie des graphes. Nous terminons l'introduction par un résumé en quatre pages de ce mémoire, avec une présentation détaillée de nos résultats.

Dans le chapitre 2, nous donnons une méthode bijective permettant de construire et de compter le nombre de recollements de genre fixé d'un polygone, également appelés cartes à une face. Cela donne un nouvel éclairage sur la structure de ces objets, et fournit une alternative aux célèbres formules d'Harer et Zagier, via une nouvelle identité combinatoire permettant d'obtenir très facilement des formules closes d'énumération.

Le chapitre 3, fruit d'une collaboration avec Olivier Bernardi, présente lui aussi une nouvelle bijection permettant de compter simplement des objets, appelés *cartes couvertes*, qui sont des cartes sur lesquelles est distingué une sous-carte couvrante à une face. Notre bijection relie ces objets à une nouvelle notion d'orientation généralisant celle d'orientation planaire minimale. Nous obtenons des formules d'énumération nouvelles, ainsi que des démonstrations simples d'identités combinatoires déjà connues.

Le chapitre 4 est consacré à l'énumération asymptotique de plusieurs familles de cartes de genre g, comme les constellations dont les degrés des faces sont prescrits. À l'aide d'une généralisation de bijections dues à Bouttier, Di Francesco, Guitter, Marcus et Schaeffer, nous relions ces objets à certaines cartes à une face appelées g-mobiles. Le gros du chapitre est consacré à l'énumération de ces objets via des techniques de séries génératrices inspirées de celles utilisées pour étudier les chemins sur réseau. Pour les différentes familles étudiées, nous présentons un traitement algébrique unifié, et nous obtenons des

résultats asymptotiques sous une forme universelle.

Au chapitre 5, nous étudions des quadrangulations de genre g à n faces choisies selon la mesure uniforme. On s'intéresse au *profil métrique* de ces objets, qui donne la répartition de la distance des sommets par rapport à un sommet pris au hasard. On montre la convergence du profil correctement renormalisé vers une mesure aléatoire continue, décrite explicitement en fonction de la mesure ISE introduite par Aldous. On caractérise l'influence du genre g sur cette mesure, en montrant qu'augmenter le genre revient à favoriser les profils les plus « resserrés » au détriment de ceux trop étendus.

Dans le dernier chapitre, issu d'une collaboration avec Mihyun Kang et Gilles Schaeffer, nous nous intéressons à la *génération aléatoire* de cartes de genre g. À l'aide des bijections présentées dans ce mémoire, nous construisons deux générateurs de cartes de genre fixé : l'un à l'intérêt surtout théorique, l'autre très performant en pratique.

En conclusion, nous présentons les grandes lignes d'un travail en cours concernant l'énumération des *graphes* de genre minimal fixé, et nous terminons par deux questions ouvertes qui s'inscrivent naturellement dans la perspective de notre travail.

1

Introduction

1.1 Graphes, surfaces, et cartes

1.1.1 Cartes topologiques

Dans le vaste monde des sciences mathématiques, certains objets possèdent le don d'ubiquité. C'est le cas des cartes, qui apparaissent dans des domaines aussi variés que la combinatoire, la topologie algébrique, les probabilités, les géométries algébrique et algorithmique, la physique théorique. Suivant les cas, elles peuvent s'incarner comme des surfaces discrètes, parfois aléatoires, comme des invariants topologiques ou algébriques, comme des structures de données géométriques, ou comme des modèles d'espace à deux dimension. Plutôt que d'entraîner immédiatement le lecteur dans un panorama risqué et forcément incomplet, nous allons commencer cette courte introduction par une présentation des cartes telles que nous les voyons, et telles que nous en aurons besoin dans la suite de notre travail. Nous espérons ne pas le laisser indifférent aux remarquables propriétés esthétiques de ces objets, tout en donnant les précisions suffisantes pour aborder avec sérénité les questions mathématiques des chapitres suivants.

Tout d'abord, un *graphe* est la donnée d'un ensemble fini (ses *sommets*) et d'un ensemble de paires de sommets (ses *arêtes*). On visualise généralement un graphe en dessinant chaque arête comme une ligne reliant les deux sommets correspondants. Dans ce mémoire, nous autoriserons les arêtes à relier un sommet à lui même (une telle arête sera appelée une *boucle*), et nous autoriserons les arêtes multiples (c'est-à-dire que plusieurs

arêtes pourront relier la même paire de sommets). Cependant, seul un nombre fini de boucles par sommet, et d'arêtes multiples par paire de sommets, sera autorisé. Ainsi, ce que nous appellerons ici un *graphe* sera ce que les théoriciens des graphes appellent généralement un *multigraphe fini*.

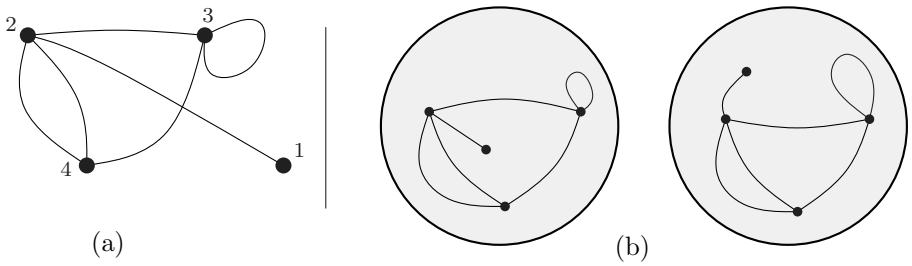


Fig. 1.1 – (a) Une représentation d'un graphe à 4 sommets et 6 arêtes ; son ensemble de sommets est $\{1, 2, 3, 4\}$, et son (multi)ensemble d'arêtes est $\big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}\big\}$. (b) Deux plongements de ce graphe dans la sphère, qui ne sont pas homéomorphes puisque le deuxième possède une face triangulaire, contrairement au premier.

Dans la suite, le mot *surface* désignera toujours une surface compacte connexe orientée, et sans bord. Le théorème de classification des surfaces (voir [71, 75]) affirme qu'à homéomorphisme près, une telle surface est entièrement caractérisée par un unique entier $g \geq 0$ appelé son *genre*. Un représentant de l'unique surface de genre g est donné par le *tore à g anses*. Pour $g = 0$, cette surface n'est autre que la sphère $\mathbb{S}^2$ mais nous parlerons généralement du cas $g = 0$ comme du cas *planaire*, plutôt que *sphérique* (il y aura souvent un point « naturel » à envoyer à l'infini).

Étant donné un graphe G et une surface $\mathbb{S}$, il est parfois possible de dessiner le graphe G sur $\mathbb{S}$, de telle sorte que les arêtes ne se croisent pas. Un tel dessin est appelé un *plongement* de G dans $\mathbb{S}$. Les composantes connexes de $\mathbb{S}$ privée de l'image de G sont appelées les *faces* du plongement. Un plongement est dit *cellulaire* s'il vérifie une condition supplémentaire :

Définition 1. Un plongement est *cellulaire* si toutes ses faces sont homéomorphes à un disque.

Dans le cas planaire, demander que les faces d'un plongement soient homéomorphes à un disque revient à demander que le graphe soit connexe (c'est une variante du célèbre *Lemme de Jordan*). Ainsi, tous les plongements planaires d'un graphe connexe, s'ils existent, sont cellulaires. En genre supérieur, la condition est plus restrictive, comme le montrent les exemples de la figure 1.2 : un plongement d'un graphe connexe dans une surface de genre $g \geq 1$ n'est pas forcément cellulaire. Cependant, l'implication inverse est vraie, et en tout genre, le graphe sous-jacent d'un plongement cellulaire est connexe.

On dit que deux plongements cellulaires sont *homéomorphes* s'il existe un homéorphisme orienté des surfaces sous-jacentes qui les relie. En particulier, ils sont tracés sur des

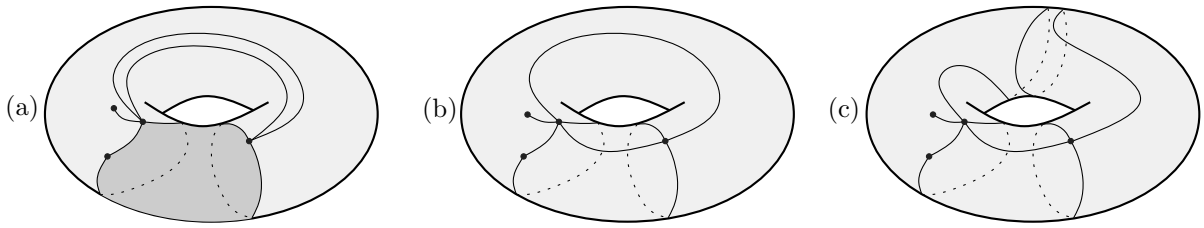


Fig. 1.2 – (a) Un plongement d'un graphe sur le tore, qui n'est pas cellulaire, car la face gris sombre n'est pas homéomorphe à un disque, mais à un cylindre ; (b) Un plongement cellulaire du même graphe, en genre 1, à deux faces. (c) Un plongement homéomorphe au précédent, même s'ils ne sont pas homotopes.

surfaces de même genre, et leurs graphes sous-jacents sont isomorphes. Ces deux conditions ne sont pas suffisantes, et a priori un même graphe admet plusieurs plongements non homéomorphes de même genre, comme en figure 1.1(b). Les plongements cellulaires, considérés modulo homéomorphisme, seront les objets centraux de ce mémoire :

Définition 2. Les *cartes topologiques* sont les classes d'équivalence des plongements cellulaires pour l'action des homéomorphismes orientés.

La remarque suivante vise à éviter une confusion courante :

Remarque 1. Si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont deux plongements d'un même graphe G sur une même surface $\mathbb{S}$ qui sont égaux en tant que cartes, il n'existe pas nécessairement un homéomorphisme de $\mathbb{S}$ *homotope à l'identité* qui envoie $\mathfrak{p}$ sur $\mathfrak{p}'$. Par exemple les deux plongements des figures 1.2(b) et (c) ne sont pas reliés par une homotopie. Cependant, on peut construire un homéomorphisme du tore envoyant l'un sur l'autre : il suffit pour cela de « découper » chacun des deux tores le long des arêtes du graphe, et de remarquer que l'on obtient dans les deux cas deux polygones topologiques, avec les mêmes identifications d'arêtes. L'homéomorphisme voulu se construit alors comme l'homéorphisme induit par l'identité sur chaque polygone. Le lecteur dubitatif devrait mieux comprendre cet argument à la lecture du prochain paragraphe.

1.1.2 Recollements de polygones

Les cartes, que nous avons définies de manière purement topologique, sont en fait des objets de nature combinatoire. Nous allons décrire deux familles d'objets combinatoires, les recollements de polygones, et les cartes combinatoires, dont nous admettrons qu'elles sont en bijection avec les cartes topologiques. Dans les chapitres suivants, tous ces objets seront indistinctement appelés *cartes*. Nous renvoyons aux ouvrages [71, 75] pour les démonstrations, qui ne sont pas si simples, et qui reposent sur des considérations topologiques sans véritable lien avec notre travail. En effet, une fois l'équivalence combinatoire-topologique présentée, nous n'aurons plus vraiment besoin de la notion de plongement, si ce n'est comme support visuel.

Commençons avec une famille finie de polygones $P_1, P_2, \ldots, P_k$ dont la somme des degrés est paire (disons $2n$). Pour simplifier, nous allons considérer que les arêtes de nos polygones sont étiquetées par les nombres de 1 à $2n$ (de n'importe quelle manière). Un

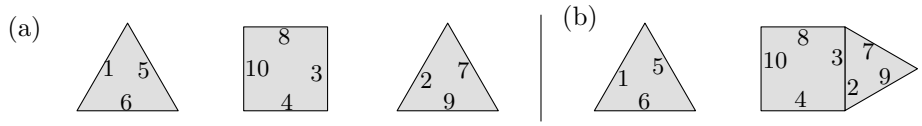


FIG. 1.3 – (a) Une famille de polygones, dont les arêtes sont étiquetées de 1 à 10. La permutation correspondante est $\phi = (1, 5, 6)(3, 4, 10, 8)(2, 7, 9)$. (b) Recollement des arêtes 2 et 3.

appariement de $[\![1, 2n]\!]$ (en anglais, un *matching*) est une involution de $[\![1, 2n]\!]$ qui n'a pas de point fixe, c'est-à-dire une partition de cet ensemble en paires. Étant donné un appariement, nous pouvons facilement construire une surface $\mathbb{S}$ compacte, orientée, sans bords, en *recollant* chacune des paires d'arêtes appariées, selon l'unique manière qui préserve l'orientation (voir les figures 1.3(b) et 1.4). Remarquons que $\mathbb{S}$ n'est pas nécessairement connexe. L'image des arêtes des polygones de départ sur $\mathbb{S}$ forme clairement un graphe plongé sur $\mathbb{S}$, et ce plongement est cellulaire puisque ses faces sont exactement nos polygones de départ. Ainsi, sur chaque composante connexe de $\mathbb{S}$, l'objet obtenu est une carte topologique valide.

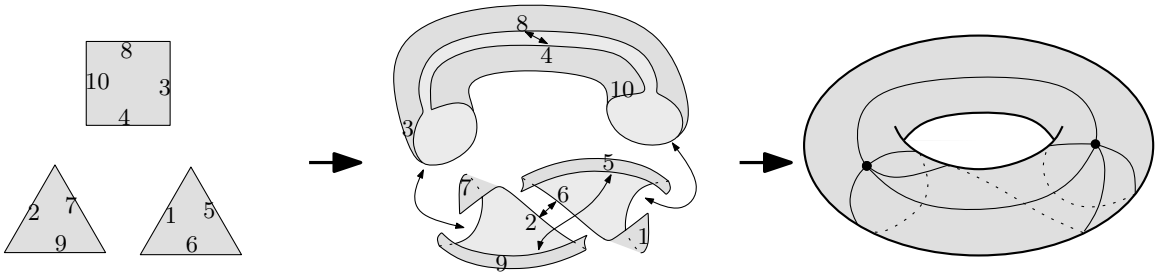


FIG. 1.4 – Formation d'une surface topologique par identification paire à paire des arêtes de la famille de polygones de la figure précédente, via l'involution $(8, 4)(3, 7)(5, 9)(1, 10)(2, 6)$.

Intuitivement, il est assez clair que toutes les plongements cellulaires d'un graphe G dans une surface $\mathbb{S}$ peuvent s'obtenir de cette façon. En effet, si l'on découpe $\mathbb{S}$ le long des arêtes de G, on obtient une famille finie de faces qui sont homéomorphes à des polygones. Pour reconstruire la surface, il suffit de recoller deux à deux les côtés de ces polygones, pour reformer les arêtes du graphe. Cependant, donner une démonstration précise n'est pas si simple, et nous admettrons le théorème suivant :

Théorème ([75])**.** *Toute carte topologique peut être obtenue par un recollement de polygones.*

Il est commode de coder les recollements de polygones au moyen de permutations. Étant donnée une famille de polygones, dont les $2n$ arêtes sont étiquetées, nous notons ϕ la permutation de $[\![1, 2n]\!]$ qui associe à l'arête i l'arête qui la suit dans le sens horaire autour du polygone qui la contient. Autrement dit, chaque cycle de ϕ représente un polygone de la famille, et donne l'ordre d'apparition de ses arêtes, en sens horaire, comme sur la figure 1.3(a). Fixons ensuite une involution sans point fixe α de $[\![1, 2n]\!]$, et effectuons le recollement de polygones correspondant. On peut remarquer les faits suivants :

- Chaque arête de la carte obtenue est formée de la réunion de *deux* arêtes i et $\alpha(i)$ des polygones de départ. Afin d'éviter toute confusion, nous réserverons dorénavant le mot *arête* aux arêtes de la carte ; les arêtes des polygones de départ seront appelées des *demi-arêtes*.
- Afin de mieux visualiser les demi-arêtes, nous pouvons représenter chaque arête de la carte par un « ruban », formé des deux demi-arêtes correspondantes, comme sur la figure 1.5(a). On voit alors que les cycles de la permutation $\sigma := \phi\alpha$ sont en bijection avec les sommets de la carte, comme le montrent les figures 1.5(b) et (c). Remarquons que chaque demi-arête est ainsi canoniquement associée à un sommet de la carte : celui correspondant au cycle de σ qui la contient. Ce sommet est celui qui la précède dans le sens horaire autour du polygone dont la demi-arête est issue. Dans la suite, nous dirons que la demi-arête *appartient* à ce sommet.
- La surface formée par le recollement de polygones est connexe si et seulement si le sous-groupe de $\mathfrak{S}_{2n}$ engendré par α, ϕ (et σ) agit transitivement sur $[\![1, 2n]\!]$.

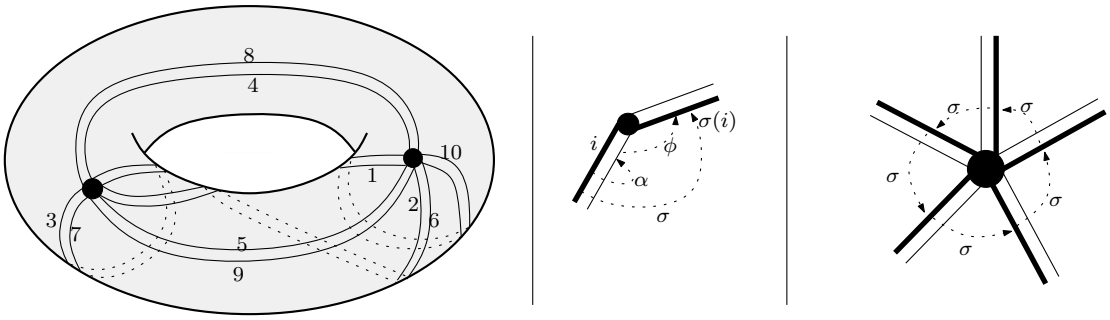


Fig. 1.5 – (a) Représentation des arêtes en rubans. (b) L'application $\sigma = \phi\alpha$. (c) Un cycle de σ.

Remarquons qu'au lieu d'étiqueter les demi-arêtes de nos polygones par les éléments de $[\![1, 2n]\!]$, nous pourrions considérer que les permutations α, ϕ et σ agissent directement sur l'ensemble H de ces demi-arêtes. Cela conduit à la définition :

Définition 3. Une *carte combinatoire* est un quadruplet $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha, \phi)$, où H est un ensemble fini, et où α, σ et ϕ sont trois permutations de H telles que :
- α est une involution sans point fixe ;
- $\sigma = \phi\alpha$;
- le groupe engendré par α, σ et ϕ agit transitivement sur H.

Les cycles des permutations α, σ, et ϕ sont appelés les *arêtes*, les *sommets*, et les *faces* de $\mathfrak{m}$. Le genre de la surface formée par le recollement de polygones associé est appelé *le genre de* $\mathfrak{m}$.

Avant d'aller plus loin, nous pouvons citer la célèbre formule d'Euler, qui permet de voir le genre comme une quantité purement combinatoire :

Formule d'Euler (voir [71]). Les nombres s de sommets, n d'arêtes, f de faces, et le genre g d'une carte sont reliés par la formule :

$$s + f = n + 2 - 2g.$$

Afin de caractériser une carte combinatoire, il suffit de fournir l'information relative à α et σ (ou α et ϕ). Ainsi, il sera commode de représenter un carte de manière graphique, sous la forme d'un graphe dont les arêtes sont des rubans, et où l'on respecte l'ordre des demi-arêtes autour de chaque sommet donné par la permutation σ, mais *sans dessiner* la surface sous-jacente : la figure 1.6(a) donne un exemple d'une telle représentation, que nous appelons la *représentation en rubans* d'une carte. Dans la représentation en rubans, seul importe l'ordre dans lequel les demi-arêtes apparaissent autour de chaque sommet : il ne faut prêter aucune attention aux croisements éventuels, qui sont des artefacts dûs à la représentation planaire. Par exemple, dans la figure 1.6(a), l'arête $(5, 9)$ semble passer au-dessus de l'arête $(2, 6)$, mais il aurait été équivalent de faire l'inverse, ou même de les faire se « croiser » plusieurs fois.

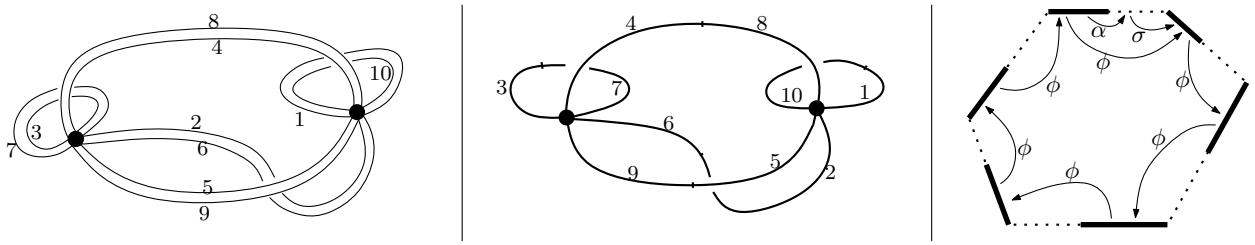


FIG. 1.6 – (a) Représentation de la carte précédente *en rubans* : il n'est pas nécessaire de dessiner la surface. (b) Représentation de la même carte, en brins. (c) Les applications σ et ϕ, dans la représentation en brins.

1.1.3 Une autre convention : les brins

La représentation en rubans d'un carte combinatoire a l'avantage de permettre de lire facilement l'ordre d'apparition des demi-arêtes autour d'une face. En contrepartie, c'est un peu plus compliqué autour des sommets : on est obligé de connaître la règle disant à quel sommet appartient chaque demi-arête pour visualiser σ. Il n'est malheureusement pas possible de s'affranchir de ce petit désagrément. Cela étant, nous pouvons définir une autre représentation, que nous appelons *la représentation en brins*, où ce sont cette fois les sommets qui sont privilégiés.

Partant d'une carte topologique, nous considérons cette fois que chacune de ses n arêtes est formée de deux *brins*, obtenus en coupant l'arête en son milieu. On se retrouve ainsi avec un ensemble H de $2n$ brins. On note α l'involution sans point fixe qui apparie ensemble les deux brins d'une même arête, et σ la permutation de H dont les cycles donnent l'ordre antihoraire des brins autour de chaque sommet. Alors, chaque cycle de la permutation $\phi = \sigma\alpha$ donne l'ordre d'apparition des brins autour d'une face, comme en figure 1.6(c). Là encore, chaque brin appartient de manière canonique à une face : celle qui est à sa droite en quittant le sommet auquel il est attaché. Cela donne une autre description de la correspondance entre cartes combinatoires et cartes topologiques. Il nous arrivera de préférer la représentation *en brins* à la représentation en rubans, comme sur la figure 1.6(b).

1.1.4 Dualité

Les représentations en rubans et en brins sont très similaires : on a simplement échangé le rôle des faces et des sommets. De manière plus générale, dans la notion de carte, les faces et les sommets jouent des rôles symétriques, et l'opération consistant à les échanger s'appelle la *dualité*.

En termes combinatoires, la carte duale d'une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha, \phi)$ est simplement définie comme la carte $\mathfrak{m}^* = (H, \phi, \alpha, \sigma)$, ce qui revient vraiment à échanger les sommets et les faces. Puisque $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}^*$ ont le même nombre d'arêtes, elles ont aussi le même genre, par la formule d'Euler.

Sur la représentation topologique, on obtient la carte $\mathfrak{m}^*$ en ajoutant un nouveau sommet au centre de chaque face de $\mathfrak{m}$, puis en ajoutant, pour chaque arête e de $\mathfrak{m}$ son *arête duale* e^*, qui relie les deux sommets centraux des faces de $\mathfrak{m}$ auxquelles e est incidente, comme sur la figure 1.7(a). Remarquons que cette dualité correspond à la dualité combinatoire décrite ci-dessus, à condition de *renverser les conventions de rotation* autour des sommets et des faces : dans la carte duale, on tourne en sens horaire autour des sommets, et antihoraire autour des faces. Cette convention s'avèrera la plus naturelle, quand il faudra travailler simultanément avec une carte et sa duale.

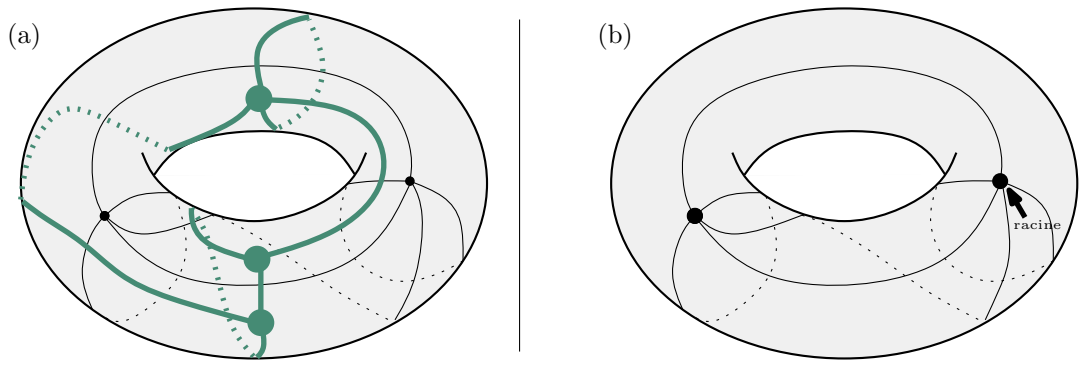


FIG. 1.7 – (a) La carte précédente, et sa carte duale (en gras). (b) Enracinement de la carte en un coin, qui correspond à distinguer la demi-arête 1 sur les figures précédentes.

1.1.5 Réétiquetage et enracinement

Jusqu'à présent, nous avons considéré les cartes sur un ensemble H de demi-arêtes quelconque. Si l'on impose que $H = [\![1, 2n]\!]$, on obtient l'ensemble des cartes combinatoires *étiquetées*. À l'inverse, si l'on considère les cartes *modulo réétiquetage* (c'est-à-dire si l'on identifie deux cartes $(H, \sigma, \alpha, \phi)$ et $(H', \sigma', \alpha', \phi')$ quand il existe une bijection $\pi : H \to H'$ telle que $\sigma'\pi = \pi\sigma$, $\alpha'\pi = \pi\alpha$ et $\phi'\pi = \pi\phi$), on obtient l'ensemble des cartes combinatoires *non étiquetées*. Les cartes combinatoires non étiquetées sont en bijection avec les cartes topologiques définies au paragraphe 1.1.1 (voir encore [71, 75]).

Dans le contexte de la combinatoire énumérative, travailler avec les objets non étiquetés est difficile, car il faut prendre en compte leurs éventuelles symétries. De plus, nous le

verrons, les cartes étiquetées ont de très belles propriétés énumératives, ce qui n'est pas toujours le cas des cartes non étiquetées. Cela dit, il est de tradition, et il est commode, de travailler avec une variante des cartes étiquetées, les *cartes enracinées*.

Définition 4. Un carte combinatoire $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha, \phi)$ est *enracinée* si elle est munie d'une demi-arête distinguée r appelée la racine. Les cartes combinatoires enracinées sont considérées modulo réétiquetage de leur ensemble de demi-arêtes préservant la racine. L'arête, le sommet, et la face contenant la racine sont appelés respectivement *l'arête racine*, *le sommet racine* et *la face racine* de la carte.

Remarque 2. Cartes enracinées et étiquetées sont vraiment des objets de même nature. En effet, puisque le groupe engendré par α et σ agit transitivement, une carte enracinée donnée correspond à exactement $(2n-1)!$ cartes étiquetées différentes. Il n'y a donc qu'un « facteur multiplicatif » entre les deux notions.

Dans la représentation topologique, on représentera l'enracinement en distinguant un *coin* de la carte, c'est-à-dire un secteur angulaire formé d'un sommet et de deux arêtes incidentes[1]. Remarquons que les demi-arêtes (ou les brins) sont en bijection avec les coins : le coin associé à la demi-arête i est l'unique coin de la carte topologique à être incident à la fois à l'arête, au sommet, et à la face contenant i, au sens des permutations α, σ, et ϕ. On distinguera le *coin racine* en le pointant par une petite flèche, comme sur la figure 1.7(b).

Convention : Dans la suite, le mot *carte* désignera toujours une carte *enracinée*. Selon les besoins, les cartes seront représentées comme des objets topologiques ou combinatoires, et dans ce dernier cas elles pourront être interprétées en rubans ou en brins.

Notation : Dans la définition d'une carte combinatoire, les permutations σ et ϕ sont liées par la relation $\phi = \sigma\alpha$. Dans la suite, nous omettrons souvent la permutation ϕ, et nous noterons (H, σ, α) pour la carte $(H, \sigma, \alpha, \sigma\alpha)$. De plus, bien que nos cartes soient toutes enracinées, nous oublierons souvent de nommer la racine, et emploierons des formules telles que *« Soit* (H, σ, α) *une carte enracinée »*, sans plus de précisions.

1.2 Combinatoire énumérative : l'exemple des arbres plans

On peut définir la combinatoire énumérative comme la science du comptage d'objets. Étant donnée une classe combinatoire (arbres, graphes, cartes, permutations excluant certains motifs, etc...) munie de certains paramètres de taille (nombre d'arêtes, de sommets de cycles...), la question que l'on se pose est : *combien cette classe contient-elle d'objets de taille donnée ?* Afin de placer cette question dans un cadre plus formel, on définit une *classe combinatoire* comme un ensemble $\mathcal{A}$, muni d'une fonction de taille, notée $|.|$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $a(n)$ d'éléments de $\mathcal{A}$ de taille n est fini. La combinatoire énumérative s'intéresse donc à la détermination de la

[1] cette convention est due à O. Bernardi. Nous la préférons à la convention habituelle, due à W. Tutte, où l'on distingue et oriente l'arête racine. Mais les deux sont bien sûr équivalentes.

quantité $a(n)$. Suivant les cas, on pourra obtenir des formules exactes ou asymptotiques, des équations de récurrence, ou des algorithmes permettant de calculer ces nombres en un temps raisonnable : tout ce qui nous permettra de *compter* sera bon à prendre.

Comme à peu près toutes les introductions à la combinatoire énumérative, nous allons illustrer notre propos par l'exemple des arbres plans. À notre décharge, l'énumération des arbres plans est directement liée à ce qui suit, en particulier au chapitre 2. Un *arbre plan* est simplement une carte enracinée de genre 0, à une seule face. La formule d'Euler (ou bien le lemme de Jordan) montre que le graphe sous-jacent d'une telle carte n'a pas de cycle, si bien que les arbres plans sont vraiment des arbres (!) au sens de la théorie des graphes : ils sont acycliques et connexes. La figure 1.8 montre la liste des arbres plans à moins de 4 arêtes. Par convention, nous avons décidé qu'il existe un arbre plan à 1 sommet et 0 arête.

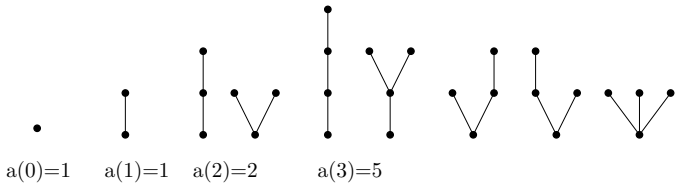


FIG. 1.8 – Les arbres plans à moins de 4 arêtes, et les premiers nombres de Catalan.

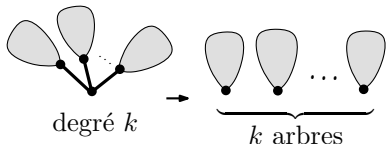


FIG. 1.9 – Décomposition d'un arbre plan au sommet racine.

Il est clair que tout arbre plan dont le sommet racine a degré k peut se décomposer en un k-uplet d'arbres plans de tailles inférieures, comme sur la figure 1.9. Ainsi, le nombre $a(n)$ d'arbres plans à n arêtes est caractérisé par l'équation de récurrence suivante :

$$a(0) = 1 \quad \text{et} \quad a(n) = \sum_{k\geq 1} \sum_{n_1+n_2+\ldots n_k=n-k} a(n_1)a(n_2)\ldots a(n_k) \text{ pour } n \geq 1. \tag{1.1}$$

Vue sous cette forme, cette équation pourrait sembler difficile à résoudre. Elle va en fait devenir très simple dès que nous disposerons des bons outils. Introduisons la *série génératrice* de la classe des arbres plans comme la série formelle suivante :

$$A(z) := \sum_{n\geq 0} a(n)z^n.$$

Alors, à l'aide de produits de Cauchy, le lecteur pourra vérifier que l'équation (1.1) se traduit sur la série par la formule :

$$A(z) = 1 + \sum_{k\geq 1} z^k A(z)^k = \frac{1}{1 - z \cdot A(z)}.$$

Après réduction au même dénominateur, il n'y a là qu'une équation du second degré, et en gardant la seule des deux racines qui soit une série formelle à coefficients positifs, on obtient : $A(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$. En utilisant la formule du binôme de Newton généralisée

$\sqrt{1+y} = \sum_n \binom{1/2}{n} y^n$, on obtient après quelques simplifications le coefficient de z^n dans la série $A(z)$, et donc le nombre $a(n)$:

$$a(n) = [z^n]A(z) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Ces nombres remarquables, qui apparaissent presque partout en combinatoire énumérative, s'appellent les *nombres de Catalan*. Nous les reverrons souvent, et choisissons de noter $\mathrm{Cat}(n) := \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ le n-ième nombre de Catalan.

Généralité de la méthode : On est en droit d'être surpris par l'efficacité de la méthode précédente. La question qui se pose naturellement est : *est-ce une astuce propre aux arbres plans ?* Ou bien : *cela peut-il marcher dans d'autres cas ?* En fait, l'utilisation de séries génératrices est une méthode extrêmement efficace en combinatoire énumérative, assez générale, et qui n'est pas particulière aux arbres plans. Chaque fois (ou presque) qu'une classe combinatoire obéit à des règles de décomposition naturelles, il est possible de *traduire* cette décomposition en une équation sur la série génératrice. Dans la terminologie du livre [48], on peut dire qu'il existe un dictionnaire, le *dictionnaire de la combinatoire symbolique*, permettant de passer de manière automatique des propriétés de décomposition des objets aux équations sur les séries : ainsi, le produit de classes combinatoires correspond au produit de séries, l'union disjointe à la somme, le pointage à la dérivation, etc...

Dans les cas plus généraux, on travaille souvent avec *plusieurs* classes combinatoires simultanément, dont les décompositions dépendent les unes des autres : on obtient alors des *systèmes* d'équations pour les séries génératrices correspondantes. De plus, dans certains cas, on veut contrôler plusieurs paramètres des objets que l'on considère, par exemple le nombre d'arêtes et le degré du sommet racine. Dans ce cas, on introduira des séries génératrices à deux variables, ou plus, où l'exposant de chaque variable « comptera » un paramètre combinatoire différent. Tout cela ne change rien à la validité du dictionnaire, mais peut éventuellement conduire à des équations difficiles à résoudre. Dans le chapitre 4, nous utiliserons de manière intensive les séries génératrices, à une, deux ou trois variables, et le dictionnaire de la combinatoire symbolique.

1.3 Court historique de l'étude énumérative et statistique des cartes

Il faudrait embrasser presque tout le champ des mathématiques pour faire la liste des endroits où apparaissent les cartes. Cela dépasse malheureusement notre culture, et nous nous limiterons donc à un tour d'horizon des approches liées à la combinatoire, à l'énumération ou aux probabilités. Nous nous excusons par avance des inévitables omissions.

1.3.1 Des prémices à la théorie des graphes

On situe généralement la naissance de la théorie des graphes avec l'étude du problème des ponts de Königsberg par Leonhard Euler au dix-huitième siècle [46]. En se demandant

s'il était possible de trouver un itinéraire passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville, Euler introduisit la notion de graphe, puis ce qui deviendra plus tard celle de *parcours Eulérien*. Ainsi, le premier graphe de l'histoire était en fait... une carte : celle de la ville de Königsberg.

L'étude des graphes connut un certain succès, et donna lieu à des développements de la part de Vandermonde, Hamilton, Kempe ou encore Heawood, qui fut le premier à travailler profondément sur les cartes de genre supérieur, pour lesquelles il généralisa la conjecture des quatre couleurs. En faisant un saut audacieux dans le temps, nous arrivons à Whitney, qui s'est le premier intéressé à la question de k-connexité des graphes, en montrant entre de nombreuses autres choses l'unicité de la carte associée à un graphe planaire 3-connexe [99, 98]. Une véritable *théorie des graphes* se développa tout au long du vingtième siècle, et l'on peut citer le nom de Tutte comme l'un de ses grands animateurs. L'une des grandes réalisations de la théorie des graphes fut la démonstration du théorème des quatre couleurs [4, 81], qui énonce que toute carte planaire peut être coloriée « proprement » en utilisant au plus quatre couleurs.

1.3.2 Énumération par des méthodes non bijectives

Cartes planaires. William Tutte est le véritable père de la théorie énumérative des cartes. En quête du théorème des quatre couleurs, il a été le premier à obtenir des formules d'énumération pour les cartes planaires enracinées, dans la série d'articles *A census of...* [92, 91, 90, 89]. Il introduisit de nombreuses techniques d'énumération nouvelles, notamment dans l'utilisation des séries génératrices, et fut l'un des pionniers de l'utilisation systématique du dictionnaire de la combinatoire symbolique. La méthode quadratique de Tutte s'est révélée très robuste et a donné lieu à de nombreux développements, en permettant l'énumération de nombreuses familles de cartes [50, 51, 12]. Son programme a culminé avec la très difficile énumération des triangulations planaires coloriées [94], dans laquelle il a exprimé, outre une certaine persévérance, une admirable inventivité.

Genres supérieurs. Les premiers à s'intéresser à l'énumération des cartes de genre supérieurs furent Walsh et Lehman, dans la série d'articles [95, 96, 97]. À l'aide de décompositions récursives et de manipulations de séries formelles, ils ont obtenu de nombreux résultats fondateurs, par exemple pour les cartes à une face ou les cartes boisées.

Plus tard, Bender et Canfield on appliqué des méthodes similaires à celles de Tutte pour l'énumération des cartes de genre supérieur. Dans leurs travaux des années 1980-90 [10, 11, 8, 13], ils ont obtenu des formules asymptotiques pour les nombres de cartes de genre fixé, et ont montré que leurs séries génératrices avaient des formes relativement simples. Plusieurs auteurs ont ensuite mis en évidence des *résultats d'universalité*, en montrant que de nombreuses familles de cartes de genre fixé avaient des comportements énumératifs asymptotiques similaires à celui des cartes générales énumérées par Bender et Canfield [16, 14, 49].

Intégrales de matrices. Les physiciens furent les premiers à remarquer la connexion entre les intégrales de matrices et l'énumération de cartes, avec les travaux fondateurs de t'Hooft [88] puis Brézin, Itzykson, Parisi et Zuber [30]. Les techniques d'intégrales

de matrices donnent des solutions rapides et élégantes aux problèmes de comptage des cartes, et leur appropriation par les mathématiciens a engendré un vaste champ des mathématiques modernes. On peut citer l'article fondateur d'Harer et Zagier [56], qui ont compté le nombre de *cartes à une face* de genre fixé à l'aide d'intégrales de matrices : c'est là le premier résultat « vraiment mathématique » de la théorie. Ce domaine étant devenu très actif, il nous est impossible de dresser une liste représentative : le lecteur pourra consulter le livre [63] pour une introduction détaillée.

Représentations du groupe symétrique. Puisque les cartes peuvent être représentées en termes de permutations, il est possible de reformuler les problèmes liés aux cartes en termes algébriques. Les questions d'énumération de cartes se ramènent ainsi au calcul du nombre de *factorisations* de permutations vérifiant certaines propriétés. Ces problèmes peuvent être exprimés en termes des caractères du groupe symétrique, ce qui a conduit, sous l'impulsion de Jackson, à de nombreux résultats d'énumération de cartes [57, 59]. Ce domaine est encore très actif, comme le montrent les récents résultats obtenus par Goulden et Jackson sur la hiérarchie d'équations KP satisfaites par les séries génératrices des cartes [54].

1.3.3 Énumération bijective et limites d'échelle

On appelle *méthodes bijectives* l'ensemble des stratégies cherchant à ramener une famille d'objets combinatoires à une famille d'objets plus simples, en exhibant une bijection explicite reliant l'une à l'autre. Dans le cas des cartes, le premier pas dans cette direction est dû à Cori et Vauquelin [40], qui ont montré que les cartes planaires sont en bijection avec certains arbres, dit *bien étiquetés*. Cette bijection laissait entrevoir une interprétation aux remarquables formules d'énumération de Tutte, qui montrent que les nombres de cartes enracinées ressemblent étonnamment à des nombres de Catalan.

C'est Schaeffer qui, dans sa thèse [84], a véritablement donné cette interprétation, en construisant un ensemble de bijections permettant de relier les cartes planaires à différentes familles d'arbres, qui ont permis de retrouver et d'étendre les résultats d'énumération connus. Toutes les « bijections de Schaeffer » sont fondées sur des algorithmes de parcours en largeur de la carte ou de sa duale, associés à des règles de découpage permettant de transformer de manière canonique la carte de départ en un arbre portant certaines décorations. On construit ainsi un processus d'exploration qui « brise » les arêtes de la cartes jusqu'à la transformer en un arbre, les arêtes brisées se transformant en « bourgeons » qui permettent de reconstruire la carte par une opération de clôture. Ces bijections à base d'*arbres bourgeonnants* sont devenues un champ d'étude à part entière, et de nombreuses variantes en sont connues, qui répondent à de nombreux problèmes [83, 25, 78, 17].

Schaeffer a également montré que la bijection de Cori et Vauquelin, au départ décrite de manière récursive, pouvait s'interpréter simplement à l'aide d'un *parcours géodésique* de la carte. En particulier, il a donné un ensemble de règles locales permettant de construire l'arbre bien étiqueté à partir d'un étiquetage des sommets de la carte par leur *distance de graphe* au sommet racine. Ces étiquettes se transportant dans l'arbre

étiqueté final, on disposait ainsi d'un moyen permettant d'étudier la distribution des distances dans une carte planaire. Avant de développer ce dernier point, mentionnons deux généralisations importantes de cette bijection. Le première est due à Bouttier, Di Francesco, et Guitter [27], qui l'ont généralisée à une classe de cartes beaucoup plus grande que les quadrangulations, celles des *cartes bicolores*, qui incluent par exemple les cartes avec n'importe quelle restriction de degré sur les faces. La seconde est la bijection de Bernardi [18], qui concerne les cartes planaires munies d'un arbre couvrant. Outre le fait qu'elle explique de jolies formules énumératives, cette bijection est intéressante car elle donne un cadre général permettant de réinterpréter les autres bijections connues.

Limites d'échelles. Grâce à la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer, Chassaing et Schaeffer [38] ont montré que la distance typique entre deux sommets dans une quadrangulation de taille n est de l'ordre de $n^{1/4}$. Ils ont par ailleurs montré que la distribution des distances à la racine convergeait, après renormalisation par $n^{-1/4}$, vers une distribution aléatoire limite continue. Ce résultat fut le point de départ de l'étude des propriétés métriques asymptotiques des cartes. Dans ce domaine devenu très actif, on peut dégager deux approches principales. D'une part, Bouttier, Guitter, et Di Francesco ont obtenu, en combinant des approches bijectives à de remarquables calculs, des expressions explicites pour les valeurs limites de nombreuses statistiques des cartes, comme les distances entre deux ou trois sommets pris au hasard [26, 29, 28]. D'autre part, les probabilistes, sous l'impulsion de Marckert et Mokkadem [69], puis Le Gall [65, 67] se sont intéressés à la convergence des cartes *elles-mêmes*, en tant qu'espaces métriques aléatoires. On conjecture ainsi l'existence d'une carte continue aléatoire, la *carte brownienne*, qui serait la limite universelle de tous les modèles raisonnables de cartes planaires. Si on ne sait pas encore que la limite est unique, on connaît de nombreuses propriétés presque sûres *des* limites possibles, comme leur topologie (sphérique, voir [67, 73]), leur dimension de Hausdorff (qui est 4, voir [65]), ou des propriétés des géodésiques ([72, 66]). L'approche bijective joue un rôle fondamental dans *tous* ces résultats : les cartes étant des objets trop « rigides », une bijection est toujours nécessaire pour les transformer en des objets plus arborescents afin de pouvoir en dire quelque chose, qu'il s'agisse de la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer originale, ou de l'une de ses généralisations dues à Bouttier-Di Francesco-Guitter [27] ou Miermont [72].

Genre supérieur. Marcus et Schaeffer [70] ont donné une généralisation de la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer au cas des cartes de genre g fixé, mais il leur manquait à l'époque un argument de réenracinement pour pouvoir utiliser cette bijection à des fins énumératives. C'est d'ailleurs l'application de cet argument de réenracinement, apparu entre temps dans le cas planaire [38], qui a été le point de départ de notre travail de thèse [37]. Depuis, Miermont a également travaillé sur les cartes en genre supérieur, dans son article [72] qui donne une nouvelle bijection et des résultats d'unicité des géodésiques dans la limite continue, valables en genre quelconque.

Notre travail. Le but de notre travail de thèse a été de construire une théorie bijective des cartes de genre supérieur, c'est-à-dire de proposer des bijections permettant de résoudre des problèmes énumératifs ou de limite d'échelle pour ces cartes.

1.4 Organisation de ce document, et aperçu des résultats présentés

Chapitre 2 : cartes à une face

Nous étudions les cartes à une face de genre g fixé, également appelées g-arbres, cartes unicellulaires, ou *polygon gluings*. Ces cartes jouent un rôle prépondérant dans tout ce mémoire, où nous montrerons qu'elles sont les objets fondamentaux de la combinatoire des cartes de genre g. Dans ce chapitre, nous donnons la première *méthode bijective* permettant d'énumérer ces cartes.

Nous donnons une procédure permettant de construire une carte à une face de genre g à partir d'une carte de genre inférieur, en recollant ensemble un nombre impair de sommets. Chaque carte à une face de genre g peut être obtenue d'exactement $2g$ façons par cette procédure, ce qui conduit à une nouvelle identité combinatoire reliant le nombre $\epsilon_g(n)$ de cartes à une face de genre g à n arêtes aux nombres correspondants pour les genres inférieurs (Corollaire 7 p. 39) :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3}\epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5}\epsilon_{g-2}(n) + \cdots + \binom{n+1}{2g+1}\epsilon_0(n).$$

En itérant notre bijection jusqu'au genre 0, on montre que *toutes* les cartes à une face de genre g peuvent s'obtenir de manière canonique par recollements successifs de sommets *à partir d'un arbre plan*. En particulier, nous donnons une interprétation combinatoire au fait que le nombre $\epsilon_g(n)$ soit le produit d'un polynôme et d'un nombre de Catalan :

$$\epsilon_g(n) = R_g(n)\mathrm{Cat}(n).$$

Ce résultat, dû à Lehman et Walsh [95], et indépendamment à Harer et Zagier [56], n'avait jusqu'ici été démontré que par des méthodes non constructives. Outre leur existence, nous interprétons de manière combinatoire certaines propriétés des polynômes $R_g(n)$, répondant à plusieurs questions de Zagier (paragraphe 2.6.4 page 41). De plus, notre identité permet de calculer ces polynômes beaucoup plus simplement que les autres formules connues, en particulier que la récurrence d'Harer et Zagier.

Notre construction est robuste et s'adapte sans mal à plusieurs classes de cartes à une face, comme les cartes à une face *biparties*, ou les cartes dont les degrés des sommets sont fixés. Nous illustrons ce dernier point en effectuant l'énumération bijective des cartes à une face *précubiques* (dont tous les sommets sont de degré 1 ou 3). Enfin, notre construction donne le premier algorithme (par ailleurs de complexité linéaire) pour engendrer ces objets. Une adaptation de cet algorithme au cas étiqueté sera présentée au chapitre 6.

Chapitre 3 : cartes couvertes et orientations gauches

Nous présentons un travail commun avec Olivier Bernardi [19, 20], qui généralise un travail de cet auteur pour le cas planaire. Nous faisons le lien, au moyen de bijections

explicites, entre trois notions combinatoires portant sur les cartes de genre g : les cartes couvertes, les orientations gauches, et les cartes à une face biparties.

Les *cartes couvertes* sont des cartes de genre g munies d'une sous-carte couvrante à une seule face, de genre éventuellement inférieur. Les exemples les plus simples de cartes couvertes sont les cartes boisées (cartes munies d'un arbre couvrant) qui ont déjà été étudiées [76, 96, 8]. Nous verrons que la notion de carte couverte est préférable à celle de carte boisée, car elle a l'avantage important d'être *stable par dualité*. En particulier, en genre non nul, les cartes couvertes ont de remarquables propriétés énumératives.

Nous montrons d'abord que les cartes couvertes sont en bijection avec une nouvelle classe d'orientations, les *orientations gauches*. L'introduction de ces orientations est intéressante en soi, car elles semblent être la première généralisation donnée à la notion planaire *d'orientation minimale* qui joue un rôle prépondérant dans de nombreux champs de la combinatoire des cartes planaires [79, 17].

Ensuite, en utilisant les mêmes règles locales que dans le cas planaire [18], nous montrons que toute orientation gauche s'obtient de manière unique par le recollement d'un arbre plan, et d'une carte à une face bipartie. En particulier, cela permet de compter facilement le nombre d'orientations gauches, i.e. de cartes couvertes, à n arêtes de genre fixé. En comparant ce résultat avec celui obtenu par une méthode naïve (qui dit simplement qu'une carte couverte s'obtient en recollant la sous-carte couvrante à sa sous-carte duale), on obtient une nouvelle identité combinatoire, reliant les nombres de cartes à une face biparties et générales. Cette identité fait le lien entre deux formules célèbres, celle d'Harer-Zagier et celle de Jackson-Adrianov, en donnant une dérivation combinatoire de l'une à partir de l'autre.

Chapitre 4 : constellations et hypercartes

Nous effectuons l'énumération asymptotique de deux classes de cartes de genre g, les m-constellations et les m-hypercartes. Pour $m = 2$, elles correspondent respectivement aux cartes biparties et aux cartes dont toutes les faces ont degré pair. Dans les deux cas, nous fixons un ensemble fini de degrés autorisés pour les faces de ces cartes.

Nous obtenons des formules asymptotiques explicites pour les nombres comptant ces cartes, qui n'étaient connues que dans certains cas particuliers. Ces formules sont universelles, dans le sens où elles ne dépendent de la famille considérée que par des « paramètres multiplicatifs ». En particulier, on montre l'universalité de l'exposant de comptage $n^{\frac{5(g-1)}{2}}$ et de la « constante de Bender et Canfield » t_g, définie dans [10]. Un cas particulier de nos résultats démontre des conjectures de Gao [49].

Une nouveauté de ce chapitre est l'introduction du *type* d'une m-hypercarte, qui est un élément de *l'espace des types*, un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension $2g$. Par exemple, pour une 2-hypercarte de genre g, le type code la « congruence modulo 2 » des longueurs de $2g$ cycles fondamentaux de la surface. Nous montrons que quand la taille de la carte

tend vers l'infini, le type est asymptotiquement uniformément distribué dans l'espace des types. Par exemple, la probabilité d'avoir un type nul tend vers $1/4^g$, ce qui montre qu'*une carte dont toutes les faces sont paires est bipartie avec probabilité tendant vers* $1/4^g$. Des résultats analogues sont obtenus pour les m-hypercartes et les m-constellations.

Les résultats de ce chapitre reposent sur deux outils. Tout d'abord, nous généralisons au genre supérieur la bijection planaire de Bouttier, Di Francesco, et Guitter [27], et relions ainsi les cartes de genre g à des objets appelés g-mobiles, qui sont des cartes à une face de genre g, portant plusieurs types de sommets, et dont les sommets portent des étiquettes entières qui sont soumises à des règles de variation locales. Pour effectuer l'énumération de ces objets, nous utilisons des techniques de séries génératrices. Lorsque l'on décompose un mobile, on obtient des « branches » de sommets multitypes étiquetés, qui peuvent se voir comme des *chemins sur réseau dont les pas sont eux-mêmes des chemins sur réseau.* Le plus gros travail de ce chapitre est le calcul des séries génératrices correspondantes au moyen de techniques de combinatoire des chemins. Nous arrivons à des expressions algébriques suffisamment explicites pour effectuer une analyse de singularités, et pour en déduire les résultats énumératifs voulus.

Chapitre 5 : profil métrique limite des grandes quadrangulations

Dans ce chapitre, nous considérons des cartes aléatoires de genre g fixé, choisies selon la mesure uniforme sur les cartes de taille n. Cela donne un modèle de « surface aléatoire discrète » de genre g. Pour des raisons techniques, nous nous restreignons à une classe de cartes particulière : celle des quadrangulations biparties.

Nous étudions le comportement de la distance de graphe sur ces cartes. La distance maximale à un sommet pointé au hasard dans une carte de taille n étant de l'ordre de $n^{1/4}$, il est naturel de *renormaliser* les distances par $n^{-1/4}$. Nous étudions alors le *profil renormalisé*, qui est la mesure aléatoire donnant la distribution des distances renormalisées des sommets à un sommet pointé au hasard dans la carte. Notre résultat principal est la convergence du profil vers une mesure aléatoire entièrement décrite en termes de la mesure aléatoire *ISE* [3], dont Chassaing et Schaeffer ont montré qu'elle est la limite du profil dans le cas planaire. Nous montrons que le profil limite des cartes de genre g est une mesure aléatoire μ^g, qui est en quelque sorte la mesure ISE « pondérée » de manière à privilégier les profils bien resserrés au détriment des profils trop étendus.

Du point de vue combinatoire, le point clé est l'association de la bijection de Marcus et Schaeffer, qui relie les cartes de genre g à des cartes à une face de genre g étiquetées, et de notre bijection du chapitre 2, qui permet de ramener ces cartes à des *arbres plans.* On montre ainsi que (presque toutes) les quadrangulations biparties de genre g s'obtiennent à partir d'un arbre plan étiqueté en recollant ensemble g triplets de sommets de même étiquette. La propriété fondamentale de la bijection étant que les *étiquettes* de l'arbre correspondent aux *distances* dans la carte, cela donne une approche combinatoire à l'étude du profil. De plus, la dépendance en le genre se traduit par le fait que les arbres étiquetés correspondant aux quadrangulations de genre g ne sont pas choisis selon la mesure uni-

forme, mais *proportionnellement au nombre de g-uplets de triplets de sommets de même étiquette qu'ils contiennent.* C'est en examinant la limite continue de cette pondération que l'on exprime la mesure μ^g en termes de la mesure ISE. Du point de vue probabiliste, notre principal outil est un théorème de Bousquet-Mélou et Janson [24], montrant une convergence forte du profil des arbres étiquetés vers la mesure ISE.

Au passage, nous obtenons une nouvelle expression de la constante t_g de Bender et Canfield, exprimée comme une fonctionnelle continue de la mesure ISE : en notant $f_{\text{ISE}}(x)$ la densité (aléatoire) de la mesure ISE sur $\mathbb{R}$, on obtient l'expression :

$$t_g = \frac{2}{2^{5g/2} g! \sqrt{\pi}} \mathbb{E}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{ISE}}(x)^3 dx\right)^g\right] \tag{1.2}$$

ce qui donne une connexion étonnante entre l'énumération des cartes de genre g et des objets purement probabilistes.

Chapitre 6 : génération aléatoire

Nous donnons plusieurs algorithmes de génération aléatoire de cartes de genre g. Le premier est un générateur de Boltzmann, basé sur la bijection de Marcus et Schaeffer. À genre fixé, ce générateur est linéaire en taille approchée, et quadratique en taille exacte. Aucun algorithme n'était précédemment connu pour ce problème.

Le premier algorithme étant assez difficile à utiliser en pratique, en raison de la nécessité de créer un gros dictionnaire de cartes minimales, nous en donnons un deuxième, *rapide mais approché*, qui utilise la bijection du chapitre 2. Nous procédons par génération aléatoire d'arbres étiquetés, que nous pondérons par une fonctionnelle liée à leur profil. Cependant, effectuer cette pondération de manière exacte conduirait à une complexité non-linéaire, et pour éviter cela nous effectuons un *rejet* des cartes dont le profil est trop étendu. Ainsi, pour tout ϵ, nous donnons un générateur aléatoire, uniforme sur une proportion $(1-\epsilon)$ des cartes de taille n, et dont la complexité est linéaire en n. Cet algorithme est *très simple* à implanter en pratique. Nous donnons des images de simulations obtenues au moyen de cet algorithme, où nous représentons de manière tridimensionnelle des cartes aléatoires de genre 0, 1, et 2. Pour effectuer le plongement dans $\mathbb{R}^3$, nous utilisons des algorithmes « ad-hoc », imparfaits, mais qui permettent de se « faire une idée » de la géométrie des grandes cartes.

En conclusion à ce document, nous présentons les grandes lignes d'un travail en cours avec plusieurs collaborateurs concernant l'énumération de *graphes* de genre minimal fixé. Nous terminons par un certain nombre de questions ouvertes qui constituent un prolongement naturel de notre travail.

1.5 Publications scientifiques

Articles dont est issu le contenu de ce mémoire

- Articles acceptés ou soumis :

  [35] *The structure of unicellular maps, and a connection between maps of positive genus and planar labelled trees*, à paraître dans Probability Theory and Related Fields.

  [34] *Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces*, à paraître dans Combinatorics, Probability and Computing.

  [37] *A bijection for maps on orientable surfaces*, avec Michel Marcus and Gilles Schaeffer. Article soumis au SIAM Journal on Discrete Mathematics.

- Articles parus dans des actes de conférences internationales :

  [33] *A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach*, conférence FPSAC, Juillet 2009.

  [32] *Are even maps on surfaces likely to be bipartite ?*, Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science (MathInfo 08), Septembre 2008.

  [19] *A bijection for covered maps on orientable surfaces*, avec Olivier Bernardi. Topological and Geometrical Graph Theory (TGGT), Mai 2008.

- Travail en cours de rédaction :

  [20] *A bijection for covered maps on orientable surfaces, and the shortest path between the Harer-Zagier and the Jackson-Adrianov formulas*, avec Olivier Bernardi.

Autres travaux réalisés pendant la durée de ma thèse

- L'article suivant aborde des questions d'énumération de graphes planaires, et n'a pas été utilisé dans la rédaction de ce mémoire :

  [36] *A complete grammar for decomposing a family of graphs into three-connected components*, avec Éric Fusy, Mihyun Kang and Bilyana Shoilekova, Electronic Journal of Combinatorics, Vol 15, R148, 2008.

- Enfin, cet article paru dans les actes de la conférence AofA correspond à un travail mené au début de ma thèse et n'a aucun rapport avec tout le reste :

  [31] *Random permutations and their discrepancy process*, Analysis of Algorithms (AofA07).

2

Cartes à une face

Les cartes à une face sont les objets centraux de notre travail. En effet, tous les chapitres suivants tendront à montrer que la combinatoire des cartes de genre fixé se ramène à celle des cartes à une face de même genre.

Il est donc d'un intérêt primordial pour notre travail de comprendre comment sont faites ces cartes à une face. Or, bien que le problème de leur énumération (au sens du comptage) ait été résolu par Lehman et Walsh [95] puis Harer et Zagier [56] via des méthodes abstraites, et ait donné lieu à de nombreux développements depuis, aucune méthode vraiment constructive n'existait jusqu'alors qui réponde à cette question. En particulier, la simplicité des formules d'énumération obtenues, faisant intervenir le produit d'un polynôme par un nombre de Catalan, attendait une interprétation combinatoire. L'objet de ce chapitre est de donner une telle interprétation : nous allons décrire une construction canonique permettant de construire toutes les cartes à une face de genre fixé à partir des arbres de Catalan. En plus de conduire à comptage facile de ces objets, qui donne une explication satisfaisante de formules jusque là mystérieuses, notre méthode permet vraiment *d'engendrer* (exhaustivement ou aléatoirement) ces objets. Par ailleurs, elle donne une nouvelle identité combinatoire, qui est une alternative intéressante aux relations de récurrences connues précédemment. Elle aura aussi des conséquences importantes plus tard dans cette thèse (Chapitres 5 et 6). Les résultats principaux de ce chapitre sont la construction bijective (Théorème 1) et la nouvelle identité combinatoire qui s'en déduit (Corollaire 7).

Ce chapitre est basé sur l'article [33], qui est lui-même un raffinement de la partie

combinatoire de [35]. Il contient à la fin certains corollaires et développements qui seront publiés dans une version ultérieure de [33].

2.1 Pour se faire une idée

2.1.1 Ça existe vraiment

Il n'est pas forcément facile, si l'on n'a pas l'habitude, d'imaginer à quoi peut ressembler une carte à une seule face. Rappelons que par la formule d'Euler, ces cartes sont caractérisées par la relation :

$$s = n + 1 - 2g,$$

où s, n, et g désignent respectivement leur nombre de sommets, d'arêtes, et leur genre. Commençons par remarquer que pour $g = 0$, cette formule devient $s = n + 1$, ce qui implique que les cartes planaires à une face sont en fait des *arbres* :

Lemme 1. *Les cartes à une face de genre* 0 *sont exactement les arbres plans.*

En genre plus grand, la manière la plus simple d'imaginer une carte à une face est de penser en termes du recollement d'un polygone, comme au paragraphe 1.1.2. Précisément, toute carte à une face enracinée à n arêtes, s'obtient à partir d'un $2n$-gone portant une arête distinguée, en recollant deux à deux ses arêtes. En particulier, il y a autant de cartes à une face que d'appariements possibles des arêtes de ce polygone, ce qui donne :

Proposition 2. *Le nombre total de cartes à une face enracinées à n arêtes est :* $\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

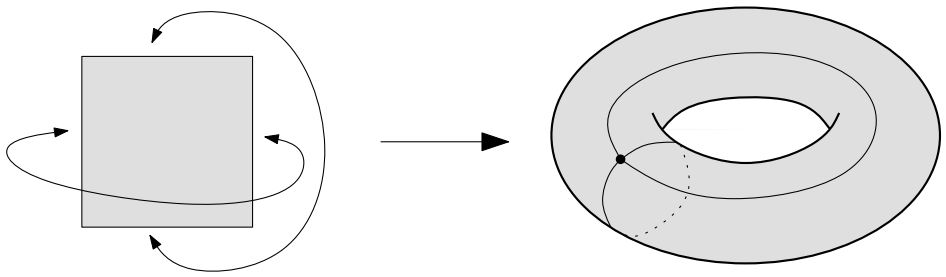


Fig. 2.1 – Une carte à une face très simple, de genre 1, obtenue par identification des arêtes opposées d'un carré.

Bien sûr, tout devient plus compliqué si l'on impose le genre. En effet, d'après la formule d'Euler, contrôler le genre de la surface obtenue revient à contrôler le nombre de sommets restant à la fin du recollement. Or, s'il est clair qu'au cours des identifications d'arêtes, certains sommets vont être identifiés, il n'est pas simple *a priori* de dire combien de (classes d'équivalence de) sommets resteront dans la carte finale : cela dépend profondément de la combinatoire intrinsèque de l'appariement choisi. Ainsi, fixer le genre conduit à un ordre de difficulté supérieur, comme le montre déjà l'exemple du genre 0.

Les figures 2.1 et 2.2 donnent deux exemples de cartes à une face. La première illustre le recollement d'un polygone sur l'exemple bien connu d'un tore, et la seconde montre une

carte à une face plus compliquée, dans ses représentations en rubans, en permutations, et topologique. Dans ce chapitre, nous préférerons la représentation en rubans comme support visuel, mais nous nous tiendrons au langage des permutations pour les énoncés mathématiques.

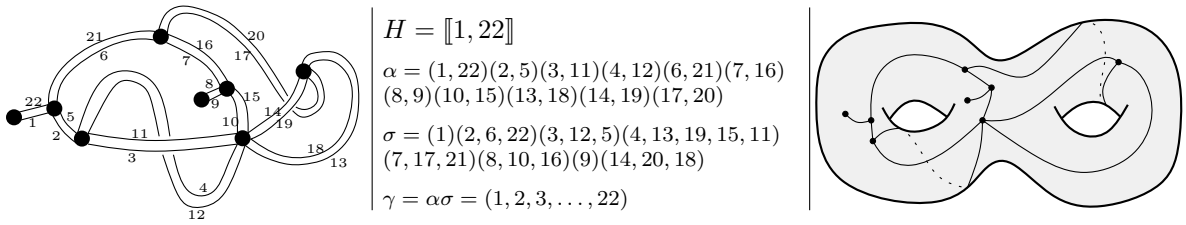


FIG. 2.2 – Une carte à une face de genre 2, dans trois représentations différentes.

2.1.2 Énumération de cartes à une face : travaux antérieurs

Nous l'avons vu, dans le cas planaire, les cartes à une face coïncident avec les arbres plans, comptés par les fameux nombres de Catalan :

$$\mathrm{Cat}(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Les arbres plans ont bien souvent été étudiés en tant qu'objets combinatoires, indépendamment de la notion de carte, et il serait impossible de faire la liste de tous les travaux où ils apparaissent. Le lecteur pourra par exemple consulter le livre [86].

Les premiers à s'attaquer avec succès à l'énumération de cartes de genre supérieur furent Lehman et Walsh, dans la série d'articles [95, 96, 97]. En utilisant une méthode récursive directe, et des manipulations de séries formelles, ils ont exprimé le nombre $\epsilon_g(n)$ de cartes à une face enracinées de genre g à n arêtes sous la forme :

$$\epsilon_g(n) = R_g(n)\mathrm{Cat}(n). \tag{2.1}$$

Ici, R_g est un polynôme de degré $3g$ défini par la formule explicite suivante :

$$R_g(n) = \sum_{\gamma \vdash g} \frac{(n+1)\ldots(n+2-2g-l(\gamma))}{2^{2g}\prod_i c_i!(2i+1)^{c_i}} \tag{2.2}$$

où la somme est prise sur les partages γ de g, et où c_i désigne le nombre de parts de taille i de γ. La formule de Lehman et Walsh a été retrouvée depuis de plusieurs manières, notamment via l'étude des caractères du groupe symétrique [55]. Mentionnons aussi l'article de Bender, Canfield, et Robinson [8] où est démontrée, à partir de (2.2), la formule asymptotique suivante :

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}12^g g!} n^{3g-\frac{3}{2}} 4^n. \tag{2.3}$$

La forme tout à fait remarquable des nombres $\epsilon_g(n)$ a été redécouverte de manière indépendante par Harer et Zagier, dans un article resté célèbre [56]. Ces deux auteurs ont

effectué l'énumération des cartes à une face via des techniques d'intégrales de matrices remontant aux travaux des physiciens [88, 30]. Ils ont obtenu les deux équations suivantes, que nous appellerons respectivement la *récurrence* d'Harer-Zagier et la *formule* d'Harer-Zagier :

$$(n+1)\epsilon_g(n) = 2(2n-1)\epsilon_g(n-1) + (2n-1)(n-1)(2n-3)\epsilon_{g-1}(n-2) \tag{2.4}$$

$$\sum_{g\geq 0} \epsilon_g(n) y^{n+1-2g} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sum_{i\geq 1} 2^{i-1} \binom{n}{i-1}\binom{y}{i}. \tag{2.5}$$

Ces deux formules impliquent en particulier la forme remarquable de l'équation (2.1). Elles permettent aussi de calculer, pour g fixé, la valeur du polynôme $R_g(n)$ (remarquons néanmoins que ce calcul n'est pas simple, et nécessite de resommer des expressions rationnelles). Pour les premiers genres, on trouve par exemple :

$$\epsilon_1(n) = \frac{(n+1)n(n-1)}{12}\mathrm{Cat}(n)\ ,\ \epsilon_2(n) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440}\mathrm{Cat}(n),$$

qui sont des expressions étonnamment simples ! Harer et Zagier furent ainsi les premiers à poser la question de *l'interprétation combinatoire* des polynômes $R_g(n)$. Plus tard, Zagier a posé la question de l'interprétation de certaines de leurs propriétés, comme leur degré ou leurs propriétés de divisibilité [63, p.160].

La première construction bijective reliée aux cartes à une face fut donnée par Goulden et Nica, qui ont donné une démonstration bijective de la formule d'Harer-Zagier (2.5) (leur construction étant reliée à des travaux moins explicites de Lass [64]). Malheureusement, l'interprétation combinatoire du membre de gauche de cette équation conduit à considérer des cartes à une face de genre quelconque, et dont les sommets sont coloriés avec y couleurs différentes : ces objets sont assez différents des cartes à une face non coloriées et de genre fixé. En termes probabilistes, passer des premiers aux seconds nécessite une *dépoissonisation*. Du point de vue énumératif, cette bijection n'explique pas la forme remarquable des nombres $\epsilon_g(n)$. Du point de vue algorithmique, elle ne permet pas d'engendrer ces objets selon la mesure uniforme à genre et taille fixés. Mentionnons que la construction de Goulden et Nica a été généralisée par Schaeffer et Vassilieva dans l'article [85] au cas des cartes biparties, pour donner une démonstration d'une généralisation de l'équation (2.5) due à Jackson [58].

L'objet de ce chapitre est de donner la première interprétation combinatoire des polynômes $R_g(n)$, et donc de répondre à la question d'Harer et Zagier. Nous donnons une construction combinatoire explicite permettant de construire toutes les cartes à une face de genre fixé à partir d'un arbre plan de même taille, par des recollements successifs de sommets. Les polynômes $R_g(n)$ s'interprètent alors comme le nombre de recollements possibles, pondérés par une quantité rationnelle explicite prenant en compte une multiplicité dans la construction. Dans sa formulation la plus simple, notre construction montre que toute carte à une face de genre g peut s'obtenir d'exactement $2g$ façons différentes par le recollement de $2p+1$ sommets dans une carte de genre $g-p$, pour un certain $p<g$. Cela conduit à l'identité combinatoire suivante pour les nombres $\epsilon_g(n)$:

$$2g\cdot\epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3}\epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5}\epsilon_{g-2}(n) + \cdots + \binom{n+1}{2g+1}\epsilon_0(n).$$

Outre son intérêt combinatoire, cette formule permet de calculer la forme close pour le polynôme $R_g(n)$ beaucoup plus facilement que la formule d'Harer et Zagier, ou même que celle de Lehman et Walsh. Nous verrons aussi que de nombreuses propriétés des polynômes R_g apparaissent clairement dans la construction, ce qui répondra à plusieurs des questions de Zagier. Enfin, du point de vue algorithmique, notre construction donne le premier algorithme permettant d'engendrer ces objets. Il est d'une description très simple, et a le mérite d'être linéaire en la taille, à genre fixé.

2.1.3 Une digression : l'approche par schémas

Nous commençons notre étude des cartes à une face par une digression, en présentant une technique formulée dans l'article [37], due à Marcus et Schaeffer, et qui repose sur le concept d'*effeuillage*, récurrent en théorie des graphes [101]. Cette partie est indépendante du reste du chapitre, mais permet de se familiariser avec les objets. Elle sera par ailleurs utilisée aux chapitres 4 et 6, dans un cadre un peu différent.

L'approche par schémas consiste en la réduction de l'étude des cartes à une face de genre fixé à un nombre fini de cas, indexés par certaines cartes minimales appelées *les schémas*. Elle s'applique à de nombreuses variantes du problème, comme en particulier le cas des cartes à une face plus compliquées (les g-mobiles) du chapitre 4. Du point de vue énumératif, cela permet d'écrire la série génératrice des cartes à une face sous la forme d'une somme indexée par les schémas (que ce soit dans le cas simple de ce chapitre, ou dans celui du chapitre 4). Ses deux inconvénients sont, d'une part, que c'est une méthode calculatoire et non « bijective », et qu'elle conduit en général à des expressions qui ne sont pas complètement explicites, car il est difficile de se débarrasser de la somme sur les schémas. Dans la suite, on fixe un entier $g \geq 1$.

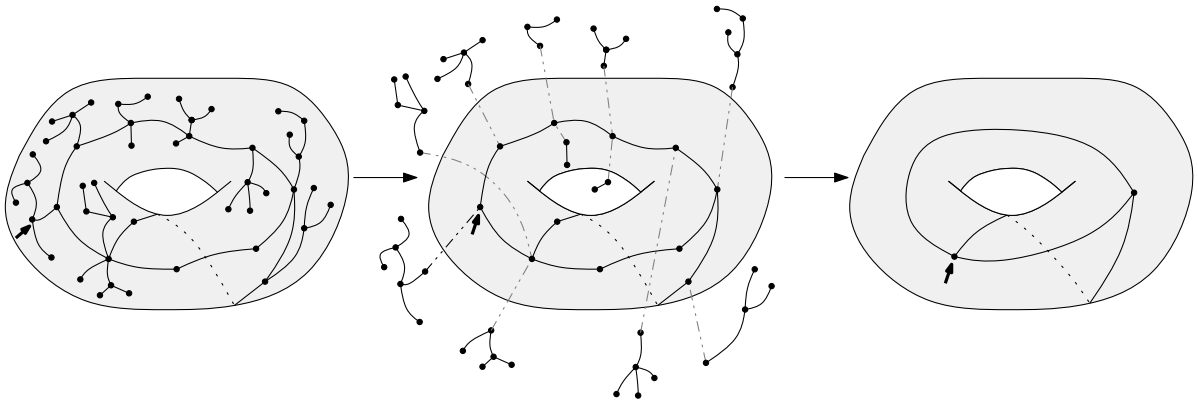


FIG. 2.3 – (a) Une carte à une face de genre 1 ; (b) son cœur ; (c) son schéma.

Définition 5 (Le schéma d'une carte à une face, figure 2.3)**.**
Soit $\mathfrak{m}$ une carte à une face enracinée de genre g. On considère l'algorithme suivant :
Étape 1 : on efface tous les sommets de degré 1 de $\mathfrak{m}$, ainsi que les arêtes incidentes à ces sommets ; on répète cette étape récursivement jusqu'à ce qu'il ne reste plus de sommet de degré 1 dans $\mathfrak{m}$. La carte obtenue à la fin de l'étape 1 est appelée *le cœur* de $\mathfrak{m}$.
Étape 2 : dans le cœur, les sommets de degré 2 sont organisés en chaînes maximales, connectées ensemble en des sommets de degré au moins 3. On remplace maintenant

chacune de ces chaînes par une nouvelle arête : on obtient une carte $\mathfrak{s}$, dont tous les sommets sont de degré au moins 3. La carte $\mathfrak{s}$ est appelée le *schéma* de $\mathfrak{m}$.
Note sur l'enracinement : la racine de $\mathfrak{m}$ induit une racine pour le cœur, qui est soit le coin naturellement pointé par la racine de $\mathfrak{m}$ (si le sommet racine de $\mathfrak{m}$ est toujours présent dans le cœur), soit celui pointé par le sous-arbre dans lequel se trouvait la racine de $\mathfrak{m}$. La racine du cœur induit une racine pour le schéma, définie comme le premier coin du cœur suivant la racine autour son unique face qui soit encore présent dans le schéma.

Définition 6. On note $\mathcal{S}_g$ l'ensemble des schémas de genre g, c'est-à-dire des cartes à une face enracinées qui n'ont pas de sommets de degré 1 ni 2.

Lemme 3 ([37])**.** *Pour tout $g \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{S}_g$ est fini.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{s}$ un schéma de genre g, et notons n_i le nombre de sommets de degré i de $\mathfrak{s}$, pour tout $i \geq 3$. Alors, par le « hand-shaking lemma », le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$ est $\frac{1}{2}\sum_i in_i$. Puisque $\mathfrak{s}$ n'a qu'une face, et que son nombre de sommets est $\sum_i n_i$, on obtient par la relation d'Euler :

$$\sum_{i\geq 3} \frac{i-2}{2} n_i = 2g - 1. \tag{2.6}$$

Or, à g fixé, il n'y a qu'un nombre fini de suites $(n_i)_{i\geq 3}$ satisfaisant cette équation. En particulier, le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$ est borné. Comme le nombre de cartes avec un nombre prescrit d'arêtes est fini, on a démontré le lemme. □

Pour inverser la construction du schéma, et reconstruire toutes les cartes à une face de schéma donné, il suffit de remplacer chaque arête du schéma par une « branche » d'arbre. On obtient la proposition suivante :

Proposition 4. *La série génératrice $U_g(z)$ des cartes à une face de genre g par le nombre d'arêtes est donnée par :*

$$U_g(z) = z \cdot \frac{d}{dz} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathcal{S}_g} \frac{1}{|\mathfrak{s}|} T(z)^{|\mathfrak{s}|} \quad \text{où} \quad T(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4z}} - 1\right).$$

Corollaire 1. *Pour tout $g \geq 1$, le nombre $\epsilon_g(n)$ de cartes à une face de genre g à n arêtes satisfait, quand n tend vers l'infini :*

$$\epsilon_g(n) \sim p_g n^{\frac{6g-3}{2}} 4^n$$

pour une certaine constante $p_g > 0$.

Bien sûr, ce résultat est très faible au regard de ceux énoncés plus haut, et de ce que nous allons montrer dans la suite. Il permet surtout de présenter l'approche par schémas, qui donne une idée assez visuelle de ce que sont les cartes à une face. En particulier, elle permet d'identifier clairement quelles sont les cartes « typiques » (nous utilisons plutôt ici le terme « dominantes ») :

Définition 7. Un schéma est dominant si tous ses sommets sont de degré exactement 3. L'ensemble des schémas dominants de genre g est noté $\mathcal{S}_g^*$.

Lemme 5. *Un schéma dominant de genre g a toujours $6g-3$ arêtes et $4g-2$ sommets. À genre fixé, les schémas dominants sont ceux qui maximisent le nombre d'arêtes.*

Corollaire 2. *À genre fixé, et quand n tend vers l'infini, la proportion de cartes à une face de taille n dont le schéma est dominant tend vers* 1.

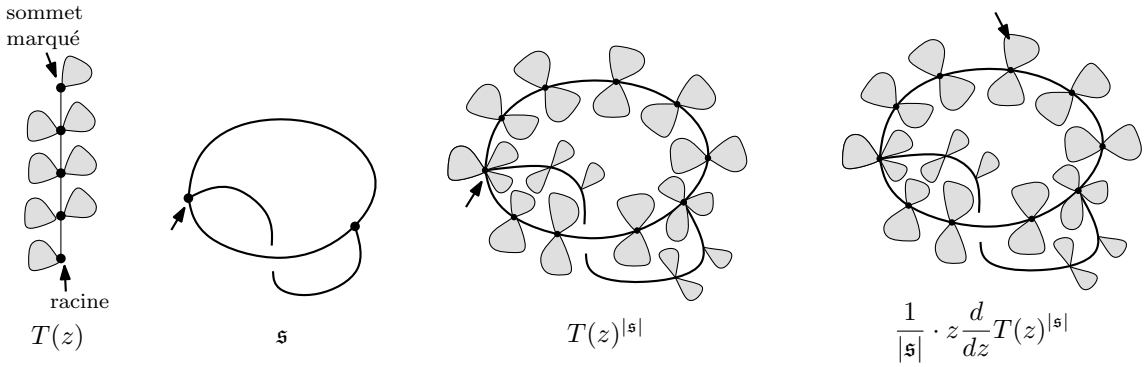


FIG. 2.4 – « Démonstration » de la proposition 4.

Démonstrations. L'énumération des cartes à une face via la méthode des schémas étant présentée ici à titre de digression, nous ne donnerons pas tous les détails, pour lesquels nous renvoyons à l'article [35]. La figure 2.4 illustre les idées principales.

Tout d'abord, la série $T(z)$ donnée dans l'énoncé de la proposition s'obtient à partir de la série des nombres de Catalan par l'opérateur $\frac{z}{2}\frac{d}{dz}$. C'est donc la série génératrice des arbres plans enracinés, portant un sommet marqué différent du sommet racine, tel que l'unique chemin dans l'arbre allant du sommet racine à ce sommet emprunte l'arête racine (pour voir qu'exactement la moitié des arbres portant un sommet marqué sont de cette forme, il suffit d'échanger le sommet racine et le sommet marqué).

Étant donné un schéma $\mathfrak{s}$, la série $T(z)^{|\mathfrak{s}|}$ est donc la série génératrice des cartes à une face enracinées obtenues à partir de $\mathfrak{s}$ par substitution d'un arbre à chaque branche. Ces cartes à une face sont naturellement enracinées sur une arête incidente à un sommet du schéma, comme sur la figure 2.4. En appliquant l'opérateur $2z\frac{d}{dz}$, on distingue une seconde demi-arête dans cette carte. Or, ces cartes bi-enracinées peuvent également être obtenues en partant d'une carte enracinée, et en distinguant ensuite une arête de son schéma, ce qui pour une carte de schéma $\mathfrak{s}'$ peut se faire de $2|\mathfrak{s}'|$ façons différentes. Ainsi, compter les cartes bi-enracinées avec un poids $\frac{1}{2|\mathfrak{s}|}$ est équivalent à compter les cartes enracinées, ce qui démontre la proposition 4.

Il est donc clair que la série génératrice des cartes à une face a une unique singularité dominante en $z = 1/4$, et que les schémas dont la contribution à la singularité est maximale sont ceux qui maximisent le nombre d'arêtes. Or, avec les notations précédentes, maximiser le nombre d'arêtes revient à maximiser la quantité $\sum_{i\geq 3} in_i$ avec la contrainte $\sum_{i\geq 3} \frac{i-2}{2} n_i = 2g-1$ issue de la formule d'Euler. Cela implique que seul n_3 est non nul, c'est-à-dire que le schéma n'a que des sommets de degré 3, puis que $n_3 = 4g-2$. Par la formule d'Euler, un tel schéma a $6g-3$ arêtes. Le corollaire asymptotique se déduit en utilisant les théorèmes de transfert de Flajolet et Odlyzko [47]. □

Nous terminons ici notre digression concernant les schémas, pour entrer dans le vif du sujet : une construction bijective directe pour les cartes à une face.

2.2 Entrelacements et trisections

Les objets que nous considérons dans ce chapitre sont des cartes à une face enracinées, comme définies dans l'introduction. Du point de vue combinatoire, ce sont donc des cartes combinatoires (H, σ, α), telles que $\sigma\alpha$ soit une permutation cyclique. Dans une telle carte, on dispose d'un ordre naturel sur les demi-arêtes :

Définition 8. Étant donnée une carte à une face $\mathfrak{m}$ de face $\phi = \sigma\alpha$ et de racine r, on définit l'ordre total $<_{\mathfrak{m}}$ sur H par :

$$r <_{\mathfrak{m}} \phi(r) <_{\mathfrak{m}} \phi^2(r) <_{\mathfrak{m}} \cdots <_{\mathfrak{m}} \phi^{|H|-1}(r).$$

En d'autres termes, si l'on réétiquette l'ensemble H par les éléments de $[\![1, 2n]\!]$, de telle sorte que la racine soit 1 et que le tour de la face soit donné par la permutation $(1, 2, \ldots, 2n)$, alors l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$ n'est autre que l'ordre naturel sur les entiers. De manière équivalente, l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$ est *l'ordre d'apparition* des demi-arêtes de $\mathfrak{m}$ autour de son unique face, lorsque l'on en fait le tour en commençant par la racine.

2.2.1 L'opération de recollement

Nous commençons par décrire une construction, *l'opération de recollement*, qui permet, étant donnée une carte à une face, de faire augmenter son genre en recollant ensemble certaines demi-arêtes.

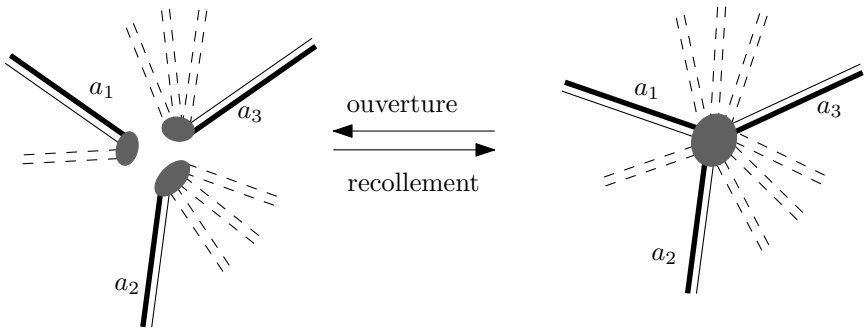


Fig. 2.5 – Les opérations d'ouverture et de recollement.

Soit $M = (H, \sigma, \alpha)$ une carte à une face de genre g, et soient a_1, a_2, a_3 trois demi-arêtes de M *appartenant à trois sommets distincts*. Quitte à réarranger les indices, on supposera que $a_1 <_{\mathfrak{m}} a_2 <_{\mathfrak{m}} a_3$. Chaque demi-arête a_i appartient à un sommet v_i, que l'on peut écrire $v_i = (a_i, h_i^1, \ldots h_i^{m_i})$, pour un certain $m_i \geq 0$ et des demi-arêtes $(h_i^j)_{j \leq m_i}$ de H. Nous définissons alors la permutation :

$$\bar{v} := (a_1, h_1^1, \ldots h_1^{m_1}, a_2, h_2^1, \ldots h_2^{m_2}, a_3, h_3^1, \ldots h_3^{m_3}).$$

Soit maintenant $\bar{\sigma}$ la permutation de H obtenue en effaçant les cycles v_1, v_2, et v_3, et en les remplaçant par le cycle $\bar{v}$. De manière équivalente, $\bar{\sigma}$ est la permutation telle que

$\bar{\sigma}(\sigma^{-1}(a_i)) = a_{i+1}$ pour $i = 1, 2, 3$, et telle que $\bar{\sigma}(h) = \sigma(h)$ pour les autres éléments de H. L'application qui associe $\bar{\sigma}$ à σ s'interprète combinatoirement comme le *recollement* des trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3, comme sur la figure 2.5. Remarquons que l'opération de recollement *tient compte* de l'ordre relatif des trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3, puisque l'on a imposé qu'elles soient rangées dans cet ordre au départ. Cela suffit à contrôler le genre de la nouvelle carte obtenue :

Lemme 6. *La carte* $\overline{\mathfrak{m}} := (H, \bar{\sigma}, \alpha)$ *est une carte à une face de genre* $g + 1$.

Si de plus on écrit la permutation donnant l'unique face de $\mathfrak{m}$ *sous la forme* $\phi = \sigma\alpha = (a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3})$*, alors la permutation donnant l'unique face de* $\overline{\mathfrak{m}}$ *est donnée par :*

$$\bar{\phi} = (a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3}, a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2}).$$

Démonstration. Pour montrer que $\overline{\mathfrak{m}}$ est une carte bien définie et à une face, il suffit de vérifier que sa permutation-face $\bar{\phi} = \bar{\sigma}\alpha$ satisfait l'expression donnée dans l'énoncé du lemme. Or, cela se voit facilement en remarquant que les seuls éléments de H dont les images par $\bar{\phi} = \bar{\sigma}\alpha$ et par $\phi = \sigma\alpha$ diffèrent sont les trois demi-arêtes $\alpha\sigma^{-1}(a_i)$, c'est-à-dire les trois demi-arêtes $\phi^{-1}(a_i) = k_{i-1}^{l_{i-1}}$. Or, pour ces demi-arêtes particulières, on a $\bar{\phi}(k_{i-1}^{l_{i-1}}) = \bar{\sigma}\sigma^{-1}(a_i) = a_{i+1}$, ce qui montre que la face a la forme voulue. On peut aussi se reporter à la figure 2.6 pour une explication plus visuelle du « chemin » que prend le tour de la face dans la nouvelle carte $\overline{\mathfrak{m}}$.

Il reste à voir que $\overline{\mathfrak{m}}$ a genre $g + 1$. Cela peut se voir par un argument de comptage, puisque par construction, $\overline{\mathfrak{m}}$ a deux sommets de moins que $\mathfrak{m}$, et le même nombre d'arêtes : la relation d'Euler implique donc que son genre est $g + 1$. On peut également dire les choses de manière plus concrète : si l'on se contente de recoller les demi-arêtes a_1 et a_2 (sans toucher à a_3), on crée une carte de genre g à deux faces. De plus, les conventions de recollement choisies impliquent que la demi-arête a_3 ne se situe pas dans la même face que la demi-arête a_1. En recollant ensuite a_1 à a_3, on joint à nouveau ces deux faces, ce qui redonne une carte à une face, mais crée une anse supplémentaire. □

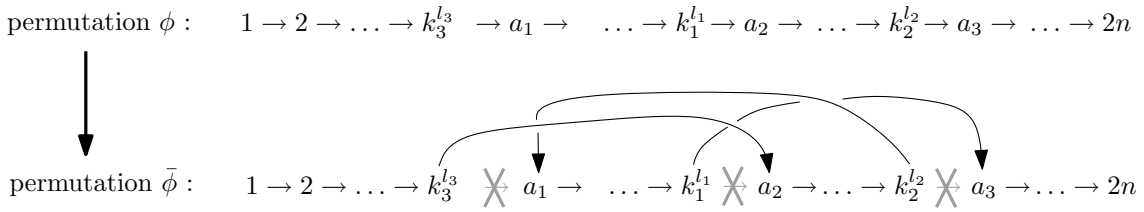


Fig. 2.6 – Effet du recollement sur la permutation ϕ : la carte créée a bien une seule face (on a supposé que la permutation ϕ originale était mise sous la forme $\phi = (1, 2, \dots, 2n)$).

2.2.2 Où se cachent les entrelacements

Nous allons montrer dans ce chapitre que *toutes* les cartes à une face de genre $g + 1$ peuvent être obtenues *d'une manière canonique* à partir de cartes à une face de genre g, par l'opération de recollement ci-dessus. Cela demande de comprendre deux choses :

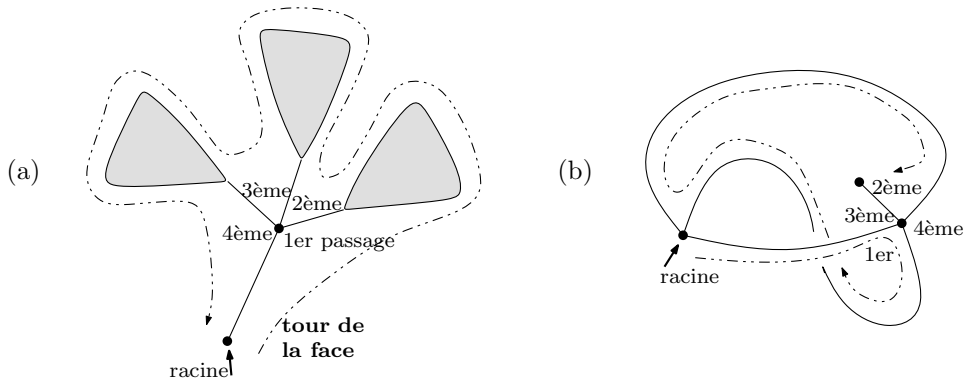


FIG. 2.7 – (a) Dans un arbre plan, le tour de la face visite toujours les demi-arêtes autour d'un sommet en sens antihoraire ; (b) En genre plus grand (ici 1), les choses peuvent être différentes.

d'une part, de définir une opération, que nous appellerons l'*ouverture*, qui agisse comme l'inverse de l'opération de recollement. D'autre part, d'être capable d'identifier, dans une carte à une face de genre $g+1$, quels sommets sont les « bons candidats » pour être découpés afin de reformer une carte de genre inférieur.

Nous commençons par le deuxième point. Il est important de remarquer que dans la carte $\overline{\mathfrak{m}}$ obtenue après leur recollement, les trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3 apparaissent dans cet ordre autour du sommet $\bar{v}$ (dans le sens direct), alors qu'elles apparaissent dans l'ordre inverse autour de la face $\bar{\phi}$. Or, si l'on pense à un exemple planaire, cette situation est assez curieuse ! En effet, si l'on fait le tour d'un arbre, en gardant les arêtes à sa gauche, alors on visite nécessairement les demi-arêtes autour de chaque sommet *dans le sens direct* (voir la figure 2.7). Il est donc naturel de penser que dans une carte à une face de genre supérieur, les endroits où l'ordre direct autour d'un sommet ne coïncide pas avec l'ordre de la face cachent, en un certain sens, un « entrelacement » de la carte. Ce sont ces endroits que nous allons utiliser pour découper la carte en une carte de genre inférieur.

Définition 9. Soit une carte à une face $\overline{\mathfrak{m}} = (H, \bar{\sigma}, \alpha)$ de genre $g+1$, et trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3 de $\overline{\mathfrak{m}}$, appartenant à un même sommet $\bar{v}$. On dit que a_1, a_2, a_3 sont *entrelacées* si elles n'apparaissent pas dans le même ordre (cyclique) dans le cycle $\bar{v}$ et dans le cycle $\bar{\phi} = \bar{\sigma}\alpha$. Dans ce cas, on peut écrire $\bar{v} = (a_1, h_1^1, \dots h_1^{m_1}, a_2, h_2^1, \dots h_2^{m_2}, a_3, h_3^1, \dots h_3^{m_3})$, et l'on construit la permutation σ de H obtenue à partir de $\bar{\sigma}$ en remplaçant le cycle $\bar{v}$ par le produit $(a_1, h_1^1, \dots h_1^{m_1})(a_2, h_2^1, \dots h_2^{m_2})(a_3, h_3^1, \dots h_3^{m_3})$.

On dit alors que la carte $\mathfrak{m} := (H, \sigma, \alpha)$ a été obtenue à partir de $\overline{\mathfrak{m}}$ par l'*ouverture* du triplet $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Lemme 7. *La carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ est une carte à une face bien définie, de genre g. Si l'on écrit l'unique face de $\overline{\mathfrak{m}}$ sous la forme $\bar{\phi} = (a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3}, a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2})$, alors l'unique face de $\mathfrak{m}$ est donnée par : $\phi = \sigma\alpha = (a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3})$.*

En d'autres termes, les opérations de recollement et d'ouverture sont inverses l'une de l'autre.

Démonstration. La démonstration est la même que celle du lemme 6 : il suffit de vérifier l'expression donnée pour ϕ en termes de $\bar{\phi}$, ce qui se fait facilement en examinant les

images de a_1, a_2, a_3. □

2.2.3 Autour d'un sommet : montées, descentes, et trisections

Soit une carte à une face $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$, et soit $\phi = \sigma\alpha$ sa permutation-face. Pour tout sommet v de M, on note $\min_{\mathfrak{m}}(v)$ la demi-arête minimale, pour l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$, appartenant au cycle v de σ. De manière équivalente, $\min_{\mathfrak{m}}(v)$ est la première demi-arête par laquelle on atteint v en faisant le tour de $\mathfrak{m}$, en partant de la racine. Étant donnée une demi-arête h, on note $V(h)$ l'unique sommet auquel elle appartient[1] (l'unique cycle de σ la contenant).

Définition 10. On dit qu'une demi-arête $h \in H$ est une *montée* si $h <_{\mathfrak{m}} \sigma(h)$, et que c'est une *descente* si $\sigma(h) \leq_{\mathfrak{m}} h$. Une descente h est appelée une *trisection* si $\sigma(h) \neq \min_{\mathfrak{m}} V(h)$, c'est-à-dire si ce n'est pas une descente vers le minimum de son sommet.

Remarque 3. Chaque sommet contient toujours au moins une descente : la demi-arête précédant son minimum. Les trisections sont précisément les descentes qui ne sont pas de cette forme, ce sont en quelque sorte les descentes « non triviales ».

Comme on l'a fait remarquer plus haut (figure 2.7), dans le cas planaire, les demi-arêtes apparaissent toujours dans le même ordre autour de v et de ϕ : il n'y a donc qu'une descente par sommet, et aucune trisection. Nous sommes donc bien sur la piste d'une notion propre au genre supérieur, cachant les « entrelacements » de la surface. Soyons beaucoup plus précis, avec le lemme suivant, qui malgré sa simplicité est un des points-clés de ce mémoire :

Lemme 8 (Le lemme des trisections)**.** *Une carte à une face de genre g a toujours exactement $2g$ trisections.*

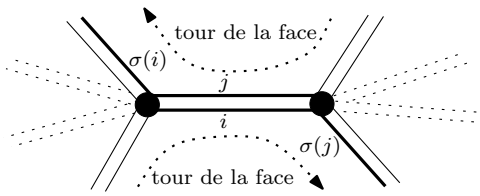


FIG. 2.8 – L'argument principal de la démonstration du lemme 8 : le tour de la face visite i avant $\sigma(i)$ si et seulement s'il visite $\sigma(j)$ avant j, à moins que $\sigma(i)$ ou $\sigma(j)$ ne soit la racine de la carte.

Démonstration. La démonstration se fait par le comptage du nombre total de montées et descentes dans la carte.

Soit $\mathfrak{m} = (H, \alpha, \sigma)$ une carte à une face de genre g, soit $\phi = \sigma\alpha$ sa permutation-face, et soit n son nombre d'arêtes. On note n_+ et n_- les nombres de montées et de descentes

[1] En toute rigueur, nous devrions noter $V_{\mathfrak{m}}(h)$, mais dans la suite, le contexte sera toujours assez clair pour que l'on sache à quelle carte sous-jacente l'on se réfère.

de $\mathfrak{m}$, respectivement. Puisque chaque demi-arête est soit une montée, soit une descente, on a $n_- + n_+ = 2n$.

Nous allons maintenant montrer que chaque arête, à l'exception de l'arête racine, est associée à une montée et une descente. En effet, soit $i \in H$, et soit $j = \alpha(i)$. On a alors $\sigma(j) = \phi(i)$, et $\phi(j) = \sigma(i)$, comme on peut le voir sur la figure 2.8. Sur la figure, il semble clair que si le tour de la face visite i avant $\sigma(i)$, alors il visite $\sigma(j)$ avant j (à moins que la racine ne soit l'une de ces demi-arêtes). Plus précisément, distinguons trois cas.

Si i est une montée, alors on a $i <_{\mathfrak{m}} \sigma(i) = \phi(j)$. De plus, par définition de l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$, le fait que $i <_{\mathfrak{m}} \phi(j)$ implique que $\phi(i) \leq_{\mathfrak{m}} \phi(j)$. On a donc $\sigma(j) \leq_{\mathfrak{m}} \phi(j)$ ce qui, à nouveau par définition de l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$, implique que $\sigma(j) \leq_{\mathfrak{m}} j$ (nous avons utilisé ici que $\sigma(j) \neq \phi(j)$, car α n'a pas de points fixes). On a donc montré que si i est une montée, alors j est une descente.

Supposons maintenant que i soit une descente, *et* que $\phi(j)$ n'est pas la racine de $\mathfrak{m}$. Dans ce cas, on a $j <_{\mathfrak{m}} \phi(j)$ et $\phi(j) = \sigma(i) \leq_{\mathfrak{m}} i = \sigma(j)$. On en déduit que $j <_{\mathfrak{m}} \sigma(j)$, et que j est une montée.

Le troisième et dernier cas est celui où i est une descente et où $\phi(j)$ est la racine r de $\mathfrak{m}$. Dans ce cas, j est l'élément maximal de H pour l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$, il est donc nécessairement une descente.

Par les trois cas ci-dessus, on a démontré que chaque arête de $\mathfrak{m}$ (chaque cycle (i, j) de α) contient exactement une descente et une montée, à l'exception de l'arête $(\phi^{-1}(r), \sigma^{-1}(r))$ qui contient deux descentes. Il y a donc deux descentes de plus que de montées : $n_- = n_+ + 2$. En se rappelant que $n_- + n_+ = 2n$, on obtient alors $n_- = n + 1$.

Enfin, chaque sommet de $\mathfrak{m}$ contient exactement une descente qui n'est pas une trisection (la demi-arête précédant son minimum). Le nombre total de trisections est donc $n_- - v$, où v est le nombre de sommets de $\mathfrak{m}$. Or, par la relation d'Euler, une carte à une face de genre g à n arêtes a $v = n + 1 - 2g$ sommets. Le nombre de trisections est donc $n + 1 - (n + 1 - 2g) = 2g$. □

2.3 Représentation en diagramme d'un sommet

Nous allons maintenant montrer comment, en utilisant les trisections, il est possible de définir dans une carte à une face des triplets canoniques d'arêtes entrelacées, auxquels nous pourrons appliquer l'opération d'ouverture. Pour cela, en plus des notions de descentes, montées, et trisections, nous aurons besoin d'étudier avec précision l'ordre relatif dans lequel toutes les demi-arêtes apparaissent autour de chaque sommet. Afin de simplifier cette tâche, nous commençons par décrire une représentation de cet ordre relatif sous forme de diagramme.

2.3.1 Définition

Soit $\mathfrak{m}$ une carte à une face, et v un sommet de $\mathfrak{m}$. Fixons une demi-arête arête h appartenant à v, et écrivons $v = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, avec $u_1 = h$ et les $u_i \in H$. Considérons alors une grille à m colonnes et $2n$ rangées. Chaque rangée représente un élément de H, et les rangées sont ordonnées de bas en haut selon l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$ (par exemple, la rangée la plus basse correspond à l'arête racine). Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on place alors un point à

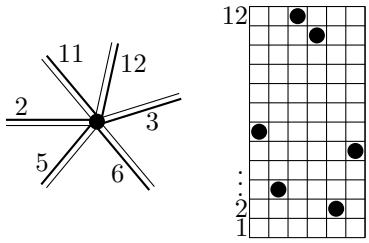


FIG. 2.9 – Un sommet dans une carte possédant 12 arêtes, et sa représentation en diagramme. Ici, l'arête marquée est 6, et la permutation-face est sous la forme $\phi = (1, 2, \ldots, 12)$.

l'intersection de la $i$ème colonne et de la rangée correspondant à l'arête u_i. Le diagramme obtenu est appelé *la représentation en diagramme de v, à partir de h.*

Pour dire la même chose autrement, si l'on identifie H avec l'ensemble $[\![1, 2n]\!]$ via l'ordre $<_{\mathfrak{m}}$, alors la représentation en diagramme de v n'est autre que la représentation graphique de l'ensemble de points du plan $\{(i, u_i),\ i \in [\![1, m]\!]\}$. La figure 2.9 donne un exemple de représentation en diagramme. Remarquons que si l'on change l'arête distinguée h, la représentation en diagramme de v est modifiée par une permutation circulaire de ses colonnes.

2.3.2 Visualisation de l'opération de recollement sur les diagrammes

L'intérêt de la représentation en diagramme vient du fait que l'opération de recollement se visualise relativement facilement sur les diagrammes. Étant donnés trois sommets avec des demi-arêtes marquées, nous allons définir un découpage des diagrammes correspondant en « blocs » : le recollement se traduira alors sur le diagramme par un certain réarrangement de ces blocs, qui conduira au diagramme du sommet recollé.

Soient $a_1 <_{\mathfrak{m}} a_2 <_{\mathfrak{m}} a_3$ trois demi-arêtes appartenant à trois sommets distincts d'une même carte à une face $\mathfrak{m}$, et soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les diagrammes correspondants (le diagramme Δ_i étant considéré à partir de la demi-arête a_i). Si l'on retire les trois rangées horizontales correspondant à a_1, a_2, a_3, et les trois colonnes verticales, on sépare chaque diagramme Δ_i en quatre blocs (dont certains peuvent être d'intérieur vide, en cas de demi-arêtes marquées consécutives). On nomme A_i, B_i, C_i, D_i les quatre blocs issus du diagramme Δ_i, de bas en haut, comme sur la figure 2.10(a).

Nous utilisons les notations du paragraphe 2.2.1. Les colonnes du diagramme Δ_i correspondent donc aux demi-arêtes $(a_i, h_i^1, \ldots h_i^{m_i})$. Juxtaposons maintenant les trois diagrammes $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1$ dans cet ordre, de gauche à droite. On obtient ainsi un nouveau diagramme (figure 2.10(b)), dont les colonnes représentent la permutation $\bar{v} = (a_2, h_2^1, \ldots h_2^{m_2}, a_3, h_3^1, \ldots h_3^{m_3}, a_1, h_1^1, \ldots h_1^{m_1})$, à partir de la demi-arête a_2. Cependant, les *rangées* du diagramme ainsi obtenu représentent toujours la permutation-face ϕ de $\mathfrak{m}$, et non la permutation-face $\bar{\phi}$ de la nouvelle carte $\overline{\mathfrak{m}}$: il nous faut donc réordonner ces rangées selon l'ordre $<_{\overline{\mathfrak{m}}}$ pour obtenir la représentation en diagramme du sommet $\bar{v}$ dans la carte $\overline{\mathfrak{m}}$.

Or d'après le lemme 6, la permutation $\bar{\phi}$ s'obtient à partir de

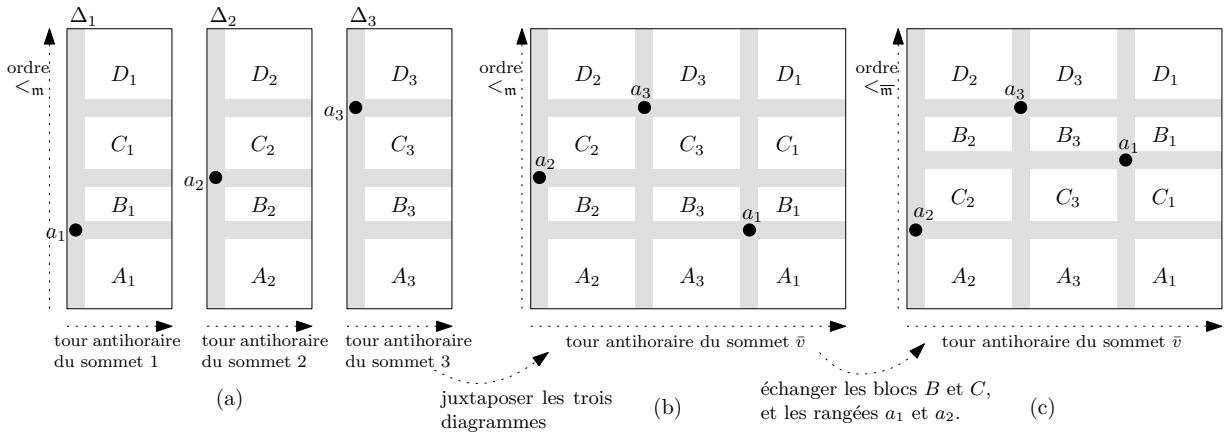


FIG. 2.10 – L'opération de recollement vue sur les diagrammes. (a) les diagrammes avant recollement ; (b) un diagramme temporaire, où les colonnes représentent l'ordre antihoraire des demi-arêtes autour de $\bar{v}$, mais où les colonnes représentent toujours la permutation de départ ϕ ; (c) le diagramme final du nouveau sommet dans la nouvelle carte, où les colonnes représentent la permutation $\bar{\phi}$.

$\phi = \sigma\alpha = (a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3})$, par la formule :

$$\bar{\phi} = (a_2, k_2^1, \dots k_2^{l_2}, a_1, k_1^1, \dots k_1^{l_1}, a_3, k_3^1, \dots k_3^{l_3}).$$

En termes de diagrammes, cela revient à permuter d'une part les rangées correspondant à a_1 et a_2, et d'autre part les rangées correspondant à $(k_1^1, \dots k_1^{l_1})$ avec celles correspondant à $(k_2^1, \dots k_2^{l_2})$. En termes de blocs, cette deuxième opération revient à inverser chaque bloc B_i avec le bloc C_i correspondant (voir figure 2.10(c)). En résumé, on a donc :

Lemme 9 (Figure 2.10)**.** *La représentation en diagramme du sommet $\bar{v}$ dans la carte $\overline{\mathfrak{m}}$ à partir de la demi-arête a_2 s'obtient à partir des représentations en diagramme $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ par les opérations suivantes :*

1. *Juxtaposer $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1$, dans cet ordre.*
2. *Échanger les rangées correspondant à a_1 et a_2 ; pour tout i, échanger le bloc B_i avec le bloc C_i.*

Remarquons que, suivie à l'envers, la procédure illustrée en figure 2.10 permet d'obtenir les trois diagrammes résultant de l'ouverture d'un sommet en un triplet d'arêtes entrelacées $\{a_1, a_2, a_3\}$. Formulons également la remarque suivante, qui jouera un rôle important dans la suite :

Remarque 4. L'opération d'ouverture ne modifie pas l'ordre $<_{\overline{\mathfrak{m}}}$ pour les demi-arêtes apparaissant strictement entre la racine et le minimum des trois sommets $\{a_1, a_2, a_3\}$. Précisément, si $w_1 <_{\overline{\mathfrak{m}}} w_2 <_{\overline{\mathfrak{m}}} \cdots <_{\overline{\mathfrak{m}}} w_r$ sont des éléments de H tels que $w_r <_{\overline{\mathfrak{m}}} a_2$, alors le lemme 7 (ou visuellement, la figure 2.10) implique que l'on a :

$$w_1 <_{\mathfrak{m}} w_2 <_{\mathfrak{m}} \cdots <_{\mathfrak{m}} w_r <_{\mathfrak{m}} a_1$$

dans la carte $\mathfrak{m}$. La réciproque est également vraie.

2.4 Trisections de type I et II

Le problème des opérations de recollement/ouverture que nous avons définies est qu'étant donnée une carte $\mathfrak{m}$ dont on veut diminuer ou augmenter le genre, on ne sait pas quel triplet de demi-arêtes $\{a_1, a_2, a_3\}$ on doit choisir pour l'appliquer. Nous allons désormais montrer qu'en se restreignant à certains triplets d'arêtes $\{a_1, a_2, a_3\}$, on peut « rendre canoniques » ces opérations.

2.4.1 Recollement de trois sommets

La première idée est de se restreindre à recoller des demi-arêtes qui sont chacune le minimum dans son sommet : c'est ce que nous faisons dans cette partie. Soient v_1, v_2, v_3 trois sommets distincts d'une carte à une face $\mathfrak{m}$. On pose $a_i = \min_{\mathfrak{m}} v_i$ et, quitte à réarranger les indices, on suppose que $a_1 <_{\mathfrak{m}} a_2 <_{\mathfrak{m}} a_3$. On note $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les trois diagrammes correspondants (la demi-arête marquée dans chaque v_i étant a_i). Puisque chaque a_i est le minimum dans son sommet, remarquons que les blocs A_1, A_2, B_2, A_3, B_3, C_3 ne contiennent aucun point : nous dirons qu'ils sont *vides*, et nous noterons $A_1 = A_2 = B_2 = A_3 = B_3 = C_3 = \varnothing$.

Recollons maintenant les trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3, par l'opération du paragraphe 2.2.1 : on obtient une nouvelle carte à une face $\overline{\mathfrak{m}}$, avec un nouveau sommet $\bar{v}$ résultant du recollement. Soit maintenant τ la demi-arête précédant a_1 en sens direct autour de v dans $\overline{\mathfrak{m}}$. Puisque $A_3 = B_3 = C_3 = \varnothing$, on a soit $\tau \in D_3$, soit $\tau = a_3$ (il suffit pour s'en convaincre de regarder la figure 2.10(c)). Dans les deux cas, on a donc $a_1 <_{\overline{\mathfrak{m}}} \tau$. De plus, a_1 n'est pas le minimum du sommet $\bar{v}$ (ce minimum est au contraire a_2). Ainsi, par définition, τ est une trisection de la carte $\overline{\mathfrak{m}}$.

Définition 11. Pour tout $g \geq 0$, $n \geq 1$, et $k \geq 1$, on note $\mathcal{U}_g^k(n)$ l'ensemble des cartes à une face de genre g, à n arêtes, portant k sommets distincts marqués (indistinguables les uns des autres).

Définition 12 (L'application Φ)**.** Pour tout $(\mathfrak{m}, v_1, v_2, v_3) \in \mathcal{U}_g^3(n)$, on note $\Phi(\mathfrak{m}, v_1, v_2, v_3) := (\overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ la paire formée de la nouvelle carte $\overline{\mathfrak{m}}$ et de la trisection créée τ.

Il est clair qu'étant donnée la paire $(\overline{\mathfrak{m}}, \tau)$, il est possible d'inverser l'opération précédente. En effet, à partir de τ il est facile de retrouver les trois demi-arêtes a_1, a_2, a_3 : a_2 est le minimum du sommet $\bar{v} = V(\tau)$; a_1 est l'arête qui suit τ autour de $\bar{v}$; enfin, a_3 est la plus petite arête, pour l'ordre $<_{\overline{\mathfrak{m}}}$, qui soit à la fois à la gauche et au-dessus de a_1 dans la représentation en diagramme de $\bar{v}$ (en effet, les blocs B_2 et B_3 sont vides). Une fois le triplet $\{a_1, a_2, a_3\}$ retrouvé, il est simple de reformer la carte $\mathfrak{m}$ et ses trois sommets v_1, v_2, v_3, en appliquant l'opération d'ouverture au triplet $\{a_1, a_2, a_3\}$ dans $\overline{\mathfrak{m}}$. On a donc montré :

Lemme 10. *Pour tous g et n, l'application Φ, définie sur l'ensemble $\mathcal{U}_g^3(n)$ des cartes à une face de genre g à n arêtes portant trois sommets marqués, est injective.*

Se pose ici une question naturelle : obtient-on *toutes* les cartes avec une trisection marquée de cette manière ? Si non, quelle est l'image de l'application Φ ? La réponse à la première question est non, mais fort heureusement, il est possible de répondre avec

précision à la deuxième. Pour cela, nous allons simplement tenter d'inverser la construction précédente, en nous arrêtant au moment où nous aurons besoin de faire des hypothèses supplémentaires.

2.4.2 Décomposition en blocs, et trisections de type I

Soit $\overline{\mathfrak{m}} = (H, \alpha, \bar{\sigma})$ une carte à une face de genre $g+1$, et soit τ une trisection de $\overline{\mathfrak{m}}$. On pose $\bar{v} = V(\tau)$. Afin de tenter d'inverser la construction précédente, on définit les trois demi-arêtes b_1, b_2, b_3 comme suit :
- $b_1 = \bar{\sigma}(\tau)$ est la demi-arête suivant τ autour de $\bar{v}$;
- $b_2 = \min_{\overline{\mathfrak{m}}}(\bar{v})$ est la demi-arête minimale de $\bar{v}$;
- b_3 est la plus petite arête, pour l'ordre $<_{\overline{\mathfrak{m}}}$, qui apparaisse avant b_1 autour de $\bar{v}$, mais qui soit plus grande que b_1 pour l'ordre $<_{\overline{\mathfrak{m}}}$.

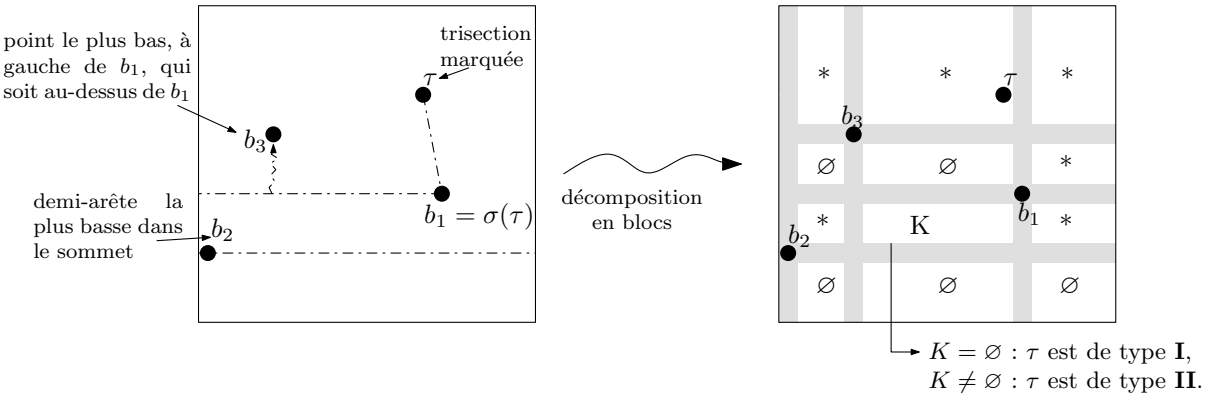


FIG. 2.11 – Trisections de type **I** et **II**.

Les rangées et colonnes contenant b_1, b_2, b_3 séparent le diagramme représentant $\bar{v}$ en douze blocs, comme sur la figure 2.11. Cinq de ces blocs sont nécessairement vides (les trois blocs inférieurs sont vides, car b_2 est le minimum dans $\bar{v}$; les deux blocs situés en dessous à droite et en dessous à gauche de b_3 sont vides par définition de b_3). Soit alors K le bloc apparaissant en dessous à gauche de b_1 (comme en figure 2.11).

Définition 13. On dit que τ est une trisection de type **I** si K est vide, et que τ est une trisection de type **II** sinon.

Définition 14. On note $\mathcal{D}_g(n)$ l'ensemble des paires $(\mathfrak{m}, \tau)$, où $\mathfrak{m}$ est une carte à une face de genre g à n arêtes, et où τ est une trisection de $\mathfrak{m}$. On note $\mathcal{D}_g^I(n)$ (respectivement, $\mathcal{D}_g^{II}(n)$) l'ensemble des éléments $(\mathfrak{m}, \tau)$ de $\mathcal{D}_g(n)$ tels que τ est de type **I** (respectivement, de type **II**).

Dans les définitions ci-dessus, nous avons tout fait pour que la proposition suivante soit vraie :

Proposition 11. *L'application Φ réalise une bijection entre l'ensemble $\mathcal{U}_g^3(n)$ des cartes à une face de genre g portant trois sommets marqués, et l'ensemble $\mathcal{D}_{g+1}^I(n)$ des cartes à une face de genre $g+1$ portant une trisection de type* **I** *marquée.*

Démonstration. On sait déjà que Φ est injective.

De plus, il est clair que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{D}^I_{g+1}(n)$. En effet, si l'on part d'une carte $\mathfrak{m}$ avec trois sommets marqués v_1, v_2, v_3, d'arêtes minimales $a_1 <_{\mathfrak{m}} a_2 <_{\mathfrak{m}} a_3$, et que l'on pose $(\overline{\mathfrak{m}}, \tau) = \Phi(\mathfrak{m}, v_1, v_2, v_3)$, alors il est clair, puisque les blocs A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 sont vides (avec les notations de la figure 2.10), qu'on a : $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, où les b_i sont définis comme ci-dessus. Par conséquent, le bloc K de la figure 2.11 n'est autre que le bloc C_3 de la figure 2.10. Puisque $a_3 = \min_{\mathfrak{m}}(v_3)$, on sait que K est vide, et donc que τ est de type **I**.

Réciproquement, soit $(\overline{\mathfrak{m}}, \tau)$ un élément de $\mathcal{D}^I_{g+1}(n)$, et fixons b_1, b_2, b_3 et K comme ci-dessus. Puisque $b_2 <_{\overline{\mathfrak{m}}} b_1 <_{\overline{\mathfrak{m}}} b_3$ par construction, ces demi-arêtes sont entrelacées : on sait donc que leur ouverture produit une carte à une face $\mathfrak{m}$ bien définie, de genre g. De plus, en comparant une fois encore les figures 2.10 et 2.11, on voit que l'ouverture produit trois sommets v_1, v_2, v_3 tels que chaque b_i est le minimum de v_i. En effet, les blocs A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 sont vides par construction, et le bloc $C_3 = K$ est vide car τ est de type **I**. Il est alors clair que $\Phi(\mathfrak{m}, v_1, v_2, v_3) = (\overline{\mathfrak{m}}, \tau)$, et donc l'image de Φ est exactement $\mathcal{D}^I_{g+1}(n)$. □

2.4.3 Trisections de type II

Bien sûr, nous voudrions être capable de construire *toutes* les cartes de genre $g+1$ munies d'une trisection : il nous faut donc trouver un moyen d'engendrer celles de type **II**. Cette fois, nous procédons de manière inverse, en partant d'une trisection de type **II**, et en tentant d'identifier les objets produits par une opération d'ouverture naturelle.

Soit $(\overline{\mathfrak{m}}, \alpha, \bar{\sigma})$ une carte de genre $g+1$, portant une trisection distinguée τ de type **II**. Soient b_1, b_2, b_3, et K définis comme au paragraphe 2.4.2 et figure 2.11. Soit $\mathfrak{m}$ le résultat de l'ouverture de $\overline{\mathfrak{m}}$ par le triplet $\{b_1, b_2, b_3\}$. En utilisant les notations de la figure 2.10, avec $a_i = b_i$, on obtient trois sommets, de diagrammes $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, tels que $A_1 = A_2 = B_2 = A_3 = B_3 = \varnothing$. Cependant, contrairement à ce qui arrivait dans la section précédente, le bloc $C_3 = K$ *n'est pas* vide : a_3 n'est donc pas le minimum du sommet v_3. On a alors :

Lemme 12. *τ est toujours une trisection dans la carte $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Puisque τ est une trisection de $\overline{\mathfrak{m}}$, on a $a_1 <_{\overline{\mathfrak{m}}} \tau$, et puisque B_3 est vide, cela implique que τ appartient au bloc D_3. Par conséquent, on voit que $a_3 <_{\mathfrak{m}} \tau$ (dans la carte $\mathfrak{m}$). De plus, il est clair que $\sigma(\tau) = a_3$ dans $\mathfrak{m}$ puisque les deux colonnes correspondantes deviennent consécutives après l'ouverture. Or nous avons vu que la demi-arête a_3 n'est pas le minimum autour de v_3 dans $\mathfrak{m}$: τ est donc bien une trisection. □

Définition 15. On note $\Gamma(\overline{\mathfrak{m}}, \tau) := (\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau)$ le quadruplet constitué de la carte $\mathfrak{m}$ résultant de l'ouverture, des deux sommets v_1 et v_2, et de la trisection τ.

Il est clair que l'application Γ est injective sur $\mathcal{D}^{II}_g(n)$. En effet, étant donné (M, v_1, v_2, τ), il est possible de reconstruire la carte $\overline{\mathfrak{m}}$ en posant $a_1 := \min_{\mathfrak{m}}(v_1)$, $a_2 = \min_{\mathfrak{m}}(v_2)$, $a_3 = \sigma(\tau)$, et en recollant le triplet de demi-arêtes $\{a_1, a_2, a_3\}$. Réciproquement, définissons :

Définition 16. Soit $\mathcal{V}_g(n)$ l'ensemble des quadruplets $(\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau)$ tels que $\mathfrak{m}$ est une carte à une face de genre g à n arêtes, et v_1, v_2, τ sont respectivement deux sommets et

une trisection de $\mathfrak{m}$ vérifiant :

$$\min_{\mathfrak{m}}(v_1) <_{\mathfrak{m}} \min_{\mathfrak{m}}(v_2) <_{\mathfrak{m}} \min_{\mathfrak{m}} V(\tau). \tag{2.7}$$

Étant donné $(\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau) \in \mathcal{V}_g(n)$, soit $\overline{\mathfrak{m}}$ la carte obtenue par le recollement du triplet de demi-arêtes $\{\min_{\mathfrak{m}}(v_1), \min_{\mathfrak{m}}(v_2), \sigma(\tau)\}$. On définit l'application Ψ par :

$$\Psi(\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau) := (\overline{\mathfrak{m}}, \tau)$$

Là encore, nous avons tout fait pour obtenir :

Proposition 13. *L'application Ψ définit une bijection entre l'ensemble $\mathcal{V}_g(n)$ des cartes à une face de genre g portant un triplet marqué satisfaisant l'équation (2.7), et l'ensemble $\mathcal{D}^{II}_{g+1}(n)$ des cartes à une face de genre $g+1$ portant une trisection de type* **II** *marquée.*

Démonstration. Dans la discussion précédente, nous avons déjà donné une application $\Gamma : \mathcal{D}^{II}_{g+1}(n) \to \mathcal{V}_g(n)$, telle que $\Psi \circ \Gamma$ est l'identité sur $\mathcal{D}^{II}_{g+1}(n)$.

Réciproquement, soit $(\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau) \in \mathcal{V}_g(n)$, et soient $a_1 = \min v_1$, $a_2 = \min v_2$, et $a_3 = \sigma(\tau)$. Par définition, on sait que $a_2 <_{\mathfrak{m}} \min_{\mathfrak{m}} V(\tau)$, et donc dans la représentation en diagramme des trois sommets $v_1, v_2, V(\tau)$, les blocs A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 sont nécessairement vides. De plus, puisque τ est une trisection, a_3 n'est pas le minimum dans son sommet, et donc le bloc C_3 n'est pas vide. Par conséquent, en comparant les figures 2.10 et 2.11, et en remarquant une fois encore que $K = C_3$, on voit qu'après le recollement, τ est une trisection de type **II** dans $\overline{\mathfrak{m}}$. Enfin, il est clair que $\Gamma(\overline{\mathfrak{m}}, \tau) = (\mathfrak{m}, v_1, v_2, \tau)$. Donc $\Gamma \circ \Psi$ est l'identité sur $\mathcal{V}_g(n)$, ce qui conclut la démonstration. □

2.5 Où l'on fait la même chose plusieurs fois

D'après le lemme des trisections (Lemme 8), l'énumération des cartes à une face de genre $g+1$ est essentiellement équivalente à celle des cartes à une faces de genre $g+1$ munies d'une trisection distinguée. Nous voudrions donc trouver un moyen d'exprimer la cardinalité de l'ensemble $\mathcal{D}_{g+1}(n)$ en termes de quantités relatives à des genres inférieurs, afin d'établir une relation de récurrence. Or si, par ce qui précède, il est simple d'obtenir la cardinalité de $\mathcal{D}^{I}_{g+1}(n)$ (qui est simplement celle de $\mathcal{U}^3_g(n)$), il n'est pas facile a priori de compter le nombre d'éléments de $\mathcal{V}_g(n)$, en raison de la condition donnée par l'équation (2.7). Cela demande un travail supplémentaire : nous allons itérer l'opération d'ouverture, pour ne nous ramener qu'à des trisections de type **I**.

2.5.1 Cas simple : le genre 1

Nous commençons par le cas le plus simple, celui du genre 1. Puisqu'en genre 0, il n'y a pas de trisections, l'ensemble $\mathcal{V}_0(n)$ est vide pour tout n, et donc par la proposition 13, l'ensemble $\mathcal{D}^{II}_1(n)$ est vide. Par conséquent, $\mathcal{D}_1(n) = \mathcal{D}^{I}_1(n)$, et on obtient par la proposition 11 :

Corollaire 3. *L'ensemble des cartes à une face de genre 1 munies d'une trisection marquée est en bijection avec l'ensemble des arbres plans portant trois sommets marqués.*

Or, d'après le lemme des trisections (Lemme 8), chaque carte à une face de genre 1 a exactement 2 trisections. Un arbre plan à n arêtes ayant toujours $n+1$ sommets, on obtient :

Corollaire 4. *Le nombre $\epsilon_1(n)$ de cartes à une face de genre 1 à n arêtes satisfait :*

$$2 \cdot \epsilon_1(n) = \binom{n+1}{3} \mathrm{Cat}(n)$$

ce qui donne une interprétation on ne peut plus claire de la formule donnant $\epsilon_1(n)$.

2.5.2 Plus dur : le genre 2

On s'intéresse maintenant au cas du genre 2. Soit $\mathfrak{m}$ une carte à une face de genre 2, avec une trisection marquée τ. Nous allons réduire le genre de cette carte par une série d'ouvertures, de telle sorte que les objets que nous obtiendrons à la fin seront, cette fois, faciles à compter. Si τ est de type **I**, nous savons que nous pouvons appliquer à $(\mathfrak{m}, \tau)$ l'application Φ^{-1}, pour obtenir une carte à une face de genre 1 avec trois sommets marqués.

Nous allons donc nous intéresser au cas où τ est de type **II**. Dans ce cas, nous pouvons appliquer à $(\mathfrak{m}, \tau)$ l'application Ψ^{-1}, pour nous retrouver avec une carte à une face $\mathfrak{m}'$ de genre 1, avec deux sommets marqués v_1, v_2 tels que $(\mathfrak{m}', v_1, v_2, \tau) \in \mathcal{V}_1(n)$, c'est-à-dire :

$$\min_{\mathfrak{m}'}(v_1) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'}(v_2) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'} V(\tau).$$

La carte $\mathfrak{m}'$ étant une carte à une face de genre 1, et τ étant une trisection de $\mathfrak{m}'$, elle est nécessairement de type **I** : $(\mathfrak{m}', \tau) \in \mathcal{D}_1^I(n)$. Nous pouvons donc utiliser l'application Φ^{-1}, pour obtenir une carte à une face $\mathfrak{m}''$ de genre 0, avec trois sommets marqués v_3, v_4, v_5 tels que :

$$\min_{\mathfrak{m}''}(v_3) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_4) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_5).$$

Remarquons que lors de l'opération d'ouverture conduisant de $\mathfrak{m}'$ à $\mathfrak{m}''$, nous n'avons pas touché aux sommets v_1 et v_2 : ces deux sommets sont donc toujours présents dans la carte $\mathfrak{m}''$. De plus, par la remarque 4, le fait que $\min_{\mathfrak{m}'}(v_1) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'}(v_2) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'} V(\tau)$ dans $\mathfrak{m}'$ implique que $\min_{\mathfrak{m}''}(v_1) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_2) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_3)$ dans $\mathfrak{m}''$. Nous avons donc construit un arbre plan $\mathfrak{m}''$ portant *cinq* sommets marqués tels que :

$$\min_{\mathfrak{m}''}(v_1) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_2) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_3) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_4) <_{\mathfrak{m}''} \min_{\mathfrak{m}''}(v_5)$$

c'est-à-dire, de manière équivalente, un élément de $\mathcal{U}_0^5(n)$.

Réciproquement, étant donné un élément $\mathfrak{m}''$ de $\mathcal{U}_0^5(n)$, dont les sommets marqués $v_1, \ldots, v_5$ sont ordonnés comme ci-dessus, il est toujours possible de recoller les sommets v_3, v_4, v_5 par l'application Φ pour obtenir une carte à une face $\mathfrak{m}'$ de genre 1, portant une trisection τ distinguée et telle que $\min_{\mathfrak{m}'}(v_1) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'}(v_2) <_{\mathfrak{m}'} \min_{\mathfrak{m}'} V(\tau)$. Ensuite, nous pouvons appliquer Ψ à $(\mathfrak{m}', v_1, v_2, \tau)$ pour retrouver une carte à une face $\mathfrak{m}$ de genre 2, où τ est une trisection de type **II**. Nous avons donc montré :

Proposition 14. *L'ensemble $\mathcal{D}_2^{II}(n)$ des cartes à une face de genre 2 munies d'une trisection marquée de type* **II** *est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{U}_0^5(n)$ des arbres plans portant* cinq *sommets marqués.*

Corollaire 5. *L'ensemble $\mathcal{D}_2(n)$ des cartes à une face de genre 2 avec une trisection marquée est en bijection avec $\mathcal{U}_1^3(n) \uplus \mathcal{U}_0^5(n)$.*

Dans tous les cas (que τ soit de type **I** ou **II**), nous nous sommes donc ramenés à des objets de genre inférieurs « faciles à compter ». En effet, la cardinalité de $\mathcal{U}_0^5(n)$ est clairement $\binom{n+1}{5}\mathrm{Cat}(n)$, et puisqu'une carte à une face de genre 1 à n arêtes a toujours $n-1$ sommets, la cardinalité de $\mathcal{U}_1^3(n)$ est $\binom{n-1}{3}\epsilon_1(n)$. Puisqu'une carte de genre 2 a toujours $2 \times 2 = 4$ trisections (Lemme 8), on obtient finalement :

Corollaire 6. *Le nombre $\epsilon_2(n)$ de cartes à une face de genre 2 à n arêtes satisfait la relation :*

$$4 \cdot \epsilon_2(n) = \binom{n-1}{3}\epsilon_1(n) + \binom{n+1}{5}\mathrm{Cat}(n).$$

2.5.3 Cas général

Dans le cas général, nous allons appliquer la même stratégie que pour le genre 2. Lorsque que l'on rencontre une trisection de type **II**, on effectue son ouverture, et l'on recommence jusqu'à trouver une trisection de type **I**. On effectue alors une dernière ouverture, et tout ce qu'il reste est une carte à une face de genre inférieur, avec un certain nombre de sommets marqués. On commencera par définir l'application inverse.

Soient deux entiers $p \geq 0$ et $q \geq 1$, et soit $(\mathfrak{m}, v_*) = (\mathfrak{m}, v_1, \ldots, v_{2q+1})$ un élément de $\mathcal{U}_p^{2q+1}(n)$, c'est-à-dire une carte à une face de genre p portant $2q+1$ sommets marqués. Quitte à réarranger les sommets, on peut supposer que $v_1 <_{\mathfrak{m}} v_2 <_{\mathfrak{m}} \cdots <_{\mathfrak{m}} v_{2q+1}$. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1.

1. On recolle les trois derniers sommets $v_{2q-1}, v_{2q}, v_{2q+1}$ via l'application Φ : on obtient une nouvelle carte $\mathfrak{m}_1$ de genre $p+1$, avec une trisection distinguée τ de type **I**.
2. **pour** i **de** 1 **à** $q-1$ **:**
   Soit $(v_{2q-2i-1}, v_{2q-2i}, \tau)$ le triplet formé des deux derniers sommets non encore utilisés par l'algorithme, et de la trisection τ. On applique Ψ à ce triplet, pour obtenir une nouvelle carte $\mathfrak{m}_{i+1}$ de genre $p+i+1$, avec une trisection distinguée τ de type **II**.
   fin pour.
3. On renvoie la paire $(\mathfrak{m}_q, \tau)$.

Définition 17. On note $\Lambda(\mathfrak{m}, v_*) := (\mathfrak{m}_q, \tau)$ l'élément de $\mathcal{D}_{p+q}(n)$ renvoyé par cet procédure.

Remarquons que la trisection τ de la carte $\mathfrak{m}_q$ est de type **I** si $q = 1$, et de type **II** sinon. Le principal résultat de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 1. *L'application Λ définit une bijection*

$$\Lambda : \biguplus_{p=0}^{g-1} \mathcal{U}_p^{2g-2p+1}(n) \longrightarrow \mathcal{D}_g(n).$$

En d'autres termes, toutes les cartes à une face de genre g avec une trisection distinguée peuvent être obtenues de manière unique en partant d'une carte à une face de genre inférieur avec un nombre impair de sommets marqués, puis en appliquant une fois l'opération Φ, et un certain nombre de fois l'opération Ψ.

Proposition 15. *Soit* $(\mathfrak{m}, \tau) \in \mathcal{D}_g(n)$. *On définit la carte marquée* $\Xi(\mathfrak{m}, \tau)$ *par l'algorithme suivant :*

1. *On pose* $\mathfrak{m}_0 := \mathfrak{m}$ *et* $i := 1$.
2. **Si** τ *est de type* **II** *dans* $\mathfrak{m}_i$, *on pose* $(\mathfrak{m}_{i+1}, v_{2i-1}, v_{2i}) := \Psi^{-1}(\mathfrak{m}_i, \tau)$. *On pose alors* $i := i + 1$ *et l'on retourne à l'étape 2.*
   Sinon, τ *est de type* **I** *dans* $\mathfrak{m}_i$ *et l'on se rend à l'étape 3.*
3. *Soit* $(\mathfrak{m}_{i+1}, v_{2i-1}, v_{2i}, v_{2i+1}) := \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i, \tau)$. *On pose alors*
$$\Xi(\mathfrak{m}, \tau) := (\mathfrak{m}_{i+1}, v_1, v_2, \ldots, v_{2i+1})$$
   et on arrête l'algorithme.

Alors l'application
$$\Xi : \ \mathcal{D}_g(n) \longrightarrow \biguplus_{p=0}^{g-1} \mathcal{U}_p^{2g-2p+1}(n).$$
est une bijection, et est la bijection réciproque de Λ.

Démonstration. Tout d'abord, l'application Ξ est bien définie. En effet, par définition d'une trisection de type **II**, on sait par induction qu'à chaque entrée dans les étapes 2 et 3, τ est bien une trisection de la carte $\mathfrak{m}_i$. De plus, puisque le genre des cartes $\mathfrak{m}_i$ décroît strictement avec i, on est sûr d'atteindre l'étape 3, et donc l'algorithme s'arrête.

Ensuite, il est clair que l'application Λ est injective, puisque les applications Ψ et Φ le sont.

Enfin, pour montrer à la fois que Ξ est injective et que c'est l'application réciproque de Λ, il suffit de montrer que les sommets v_i produits par l'algorithme définissant Ξ satisfont $v_1 <_{\mathfrak{m}} v_2 <_{\mathfrak{m}} \cdots <_{\mathfrak{m}} v_{2q+1}$. En effet, il sera alors clair par construction que $\Lambda \circ \Xi = \Xi \circ \Lambda = Id$.

Or, on déduit de la remarque 4 et d'une induction sur i que juste après le i-ème passage dans l'étape 2, on a $v_1 <_{\mathfrak{m}_{i+1}} v_2 <_{\mathfrak{m}_{i+1}} \cdots <_{\mathfrak{m}_{i+1}} v_{2i}$. Enfin, la même remarque montre qu'après le passage dans l'étape 3, on a $v_1 <_{\mathfrak{m}_{i+1}} v_2 <_{\mathfrak{m}_{i+1}} \cdots <_{\mathfrak{m}_{i+1}} v_{2i+1}$, ce qui conclut la démonstration. □

2.6 Quelques conséquences

2.6.1 Une identité combinatoire

Par la relation d'Euler, une carte à une face de genre p à n arêtes a toujours $n+1-2p$ sommets. De plus, par le lemme des trisections (Lemme 8), un carte à une face de genre g a exactement $2g$ trisections. Le premier corollaire du théorème 1 est donc :

Corollaire 7 (Une nouvelle identité combinatoire)**.** *Le nombre* $\epsilon_g(n)$ *de cartes à une face enracinées de genre* g *à* n *arêtes satisfait :*
$$2g \cdot \epsilon_g(n) = \binom{n+3-2g}{3}\epsilon_{g-1}(n) + \binom{n+5-2g}{5}\epsilon_{g-2}(n) + \cdots + \binom{n+1}{2g+1}\epsilon_0(n).$$

Corollaire 8. *Le nombre $\epsilon_g(n)$ s'écrit $\epsilon_g(n) = R_g(n)\mathrm{Cat}(n)$, où $R_g(n)$ est le polynôme en n défini par la relation de récurrence :*

$$R_0(n) = 1, \text{ et } R_g(n) = \frac{1}{2g}\sum_{p=0}^{g-1}\binom{n+1-2p}{2g-2p+1}R_p(n). \tag{2.8}$$

Remarquons qu'il est très facile de calculer les polynômes R_g (même à la main). Pour les premières valeurs de g, on obtient les formules suivantes, déjà connues par des méthodes non bijectives [95, 56] :

g	0	1	2	3
$R_g(n)$	1	$\frac{(n+1)n(n-1)}{12}$	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(5n-2)}{1440}$	$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(35n^2-77n+12)}{362880}$

2.6.2 Un algorithme de génération

Une conséquence directe du théorème 1 est qu'il donne un algorithme *linéaire* (en la taille) permettant d'engendrer des cartes à une face de genre fixé. Fixons un entier $g > 1$, et considérons l'algorithme semi-récursif[2] suivant :

Algorithme 2.
Entrée : un nombre entier n.
Résultat : une carte à une face de genre g à n arêtes, choisie selon la loi uniforme.
Nécessite : le précalcul des polynômes R_p, pour $p \leq g$.

1. Si $g = 0$, engendrer aléatoirement un arbre enraciné à n arêtes, par exemple par l'algorithme de Rémy [80], et le renvoyer ; sinon, continuer ;
2. tirer un nombre $p \in [\![0, g-1]\!]$, avec probabilité : $\binom{n+1-2p}{2g-2p+1}\frac{R_p(n)}{2gR_g(n)}$;
3. tirer uniformément au hasard une carte à une face $\mathfrak{m}'$ de genre p à n arêtes, via un appel récursif à l'algorithme ;
4. choisir uniformément $2g-2p+1$ sommets distincts $v_1, \ldots, v_{2g-2p+1}$ dans $\mathfrak{m}'$;
5. construire la carte à une face $\mathfrak{m}$ de genre g donnée par $(\mathfrak{m}, \tau) = \Lambda(\mathfrak{m}', v_1, \ldots, v_{2g-2p+1})$;
6. renvoyer $\mathfrak{m}$.

Proposition 16. *L'algorithme 2 engendre une carte à une face de genre g à n arêtes selon la loi uniforme. À g fixé, la complexité de cet algorithme est linéaire en n.*

Démonstration. Le fait que cet algorithme engendre bien une carte à une face de genre g à n arêtes selon la loi uniforme est une conséquence immédiate du théorème 1 et du corollaire 7. La complexité des étapes 1 et 4 étant linéaire, on conclut que l'algorithme est linéaire par une récurrence immédiate sur g. □

[2] nous voulons dire par là que l'algorithme est récursif en g, puisqu'il construit la carte à partir des arbres en augmentant progressivement le genre, mais qu'il n'est pas récursif en n. Cela étant, il n'est pas très difficile de « dérouler la récursivité » pour rendre l'algorithme itératif.

Remarque 5. Nous avons présenté ici un algorithme de génération aléatoire, mais il est bien sûr possible d'utiliser le Théorème 1 pour engendrer exhaustivement toutes les cartes à une face de genre g à n arêtes. Pour cela, il suffit d'engendrer tous les arbres plans à n arêtes, puis d'utiliser le théorème 1 pour engendrer successivement toutes les cartes de genre 1, puis 2, etc... jusqu'à g. Remarquons que par le lemme des trisections, on obtient ainsi chaque carte de genre g au plus $2g \times 2(g-1) \times \cdots \times 2 = 2^g g!$ fois.

2.6.3 Asymptotique

Il est facile de voir par induction, à partir de l'équation (2.8), que le polynôme $R_g(n)$ est de degré $3g$, et que le terme dominant dans l'équation (2.8) est celui correspondant à $p = g-1$. Autrement dit, presque toutes les cartes à une face de genre g munies d'une trisection sont de type **I**. Cela signifie que presque toutes les cartes à une face de genre g avec une trisection marquée peuvent être obtenues de manière unique en recollant trois sommets dans une carte de genre $g-1$, ce qui conduit à :

$$2g \cdot \epsilon_g(n) \sim \frac{n^3}{6}\epsilon_{g-1}(n) \text{ quand } n \to \infty.$$

En se rappelant que les nombres de Catalan satisfont $\mathrm{Cat}(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}} 4^n$, on comprend mieux maintenant la formule de Bender, Canfield et Robinson :

Corollaire 9 ([8]). *Pour tout g, on a quand n tend vers l'infini :*

$$\epsilon_g(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} 12^g g!} n^{3g-\frac{3}{2}} 4^n.$$

Remarque 6. Il n'est pas étonnant que presque toutes les cartes à une face avec une trisection marquée soient de type **I**. En effet, on sait par l'approche par schémas (paragraphe 2.1.3), que presque toutes les cartes à une face ont un schéma dont tous les sommets sont de degré 3. Or, il est clair que ces cartes ne peuvent avoir de trisections de type **II** (puisque les trois sommets résultant de l'ouverture d'une trisection d'une telle carte ne peuvent faire partie du cœur de la carte de genre inférieur créée par l'ouverture, et donc ne portent pas de trisection). Cette observation est utilisée implicitement dans l'article [35], où nous présentions une construction moins élaborée, qui ne permettait pas d'obtenir les nombres $\epsilon_g(n)$, mais qui était suffisante pour obtenir la formule asymptotique du corollaire 9 (ainsi que les développements du chapitre 5).

2.6.4 Une expression de R_g

Le corollaire 7 relie le nombre $\epsilon_g(n)$ aux nombres correspondants pour les genres inférieurs. En itérant cette relation, on exprime directement $\epsilon_g(n)$ en fonction des nombres de Catalan, ce qui donne une expression close de R_g :

Proposition 17. *Le polynôme $R_g(n)$ admet la forme explicite suivante :*

$$R_g(n) = \sum_{0=g_0<g_1<\cdots<g_r=g} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{2g_i} \binom{n+1-2g_{i-1}}{2(g_i-g_{i-1})+1}. \tag{2.9}$$

De manière plus combinatoire, cette expression s'interprète comme la « trace » de l'algorithme récursif de génération présenté au paragraphe 2.6.2. Les nombres $0 = g_0 < g_1 < \cdots < g_r = g$ sont les genres des cartes intermédiaires qui ont été engendrées par les appels successifs à l'algorithme. À chaque étape, il faut choisir $2(g_i - g_{i-1}) + 1$ sommets dans une carte de genre g_{i-1}, ce qui donne le produit de binomiaux de la formule. Les facteurs $\frac{1}{2g_i}$ viennent du lemme des trisections.

En plus de donner une interprétation à l'existence des polynômes $R_g(n)$, notre bijection permet d'interpréter de manière combinatoire certaines de leurs propriétés, ce qui répond à certaines questions de Zagier [63, p. 160]. La première est l'interprétation de leur degré, $3g$, qui est le nombre maximal de sommets distincts que l'on peut choisir dans un arbre de Catalan pour fabriquer une carte à une face de genre g. La seconde repose sur l'observation suivante : quelle que soit la séquence de genres intermédiaires $0 = g_0 < g_1 < \cdots < g_r = g$ que l'on choisit, on doit toujours choisir au moins $2g + 1$ sommets distincts dans l'arbre de départ (ce cas minimal correspondant à $r = 1$). Cela implique la propriété suivante :

Corollaire 10 (Zagier)**.** *$R_g(n)$ est divisible par $(n + 1) \dots (n + 1 - 2g)$.*

Remarque 7. Nous ne savons pas interpréter pour l'instant le fait que $2^g R_g(n)$ soit un nombre entier (Zagier, [63, p.160]). Avec notre construction, on voit que $2^g g! R_g(n)$ est entier, mais il nous manque une « symétrie » permettant de conclure à une divisibilité de ce nombre par $g!$.

Remarque 8. Bien que la formule (2.9) ressemble beaucoup à la formule de Lehman et Walsh (Équation 2.2), nous ne savons pas faire le lien entre les deux pour l'instant.

2.7 Variantes

2.7.1 Cartes à une face biparties

Une carte à une face est *bipartie* si ses sommets peuvent être coloriés en noir et blanc, de telle sorte que seuls des sommets de couleurs différentes soient adjacents. Par convention, on choisira toujours le coloriage donnant la couleur blanche au sommet racine.

Définition 18. On note $\beta_g(i, j)$ le nombre de cartes à une face biparties de genre g à i sommets blancs et j sommets noirs. Une telle carte a $i + j + 1 - 2g$ arêtes.

Il est clair que la construction précédente s'applique au cas des cartes biparties : la seule différence est que, pour que les opérations de recollement Φ et Ψ préservent la bipartition de la carte, on ne doit recoller que des sommets ayant la même couleur. On obtient donc la variante suivante du corollaire 7 :

Proposition 18. *Le nombre $\beta_g(i, j)$ de cartes à une face biparties à i sommets blancs et j sommets noirs peut être calculé via la relation de récurrence :*

$$2g \cdot \beta_g(i, j) = \sum_{p=0}^{g-1} \binom{i + 2g - 2p}{2g - 2p + 1} \beta_p(i + 2g - 2p, j) \; + \; \sum_{p=0}^{g-1} \binom{j + 2g - 2p}{2g - 2p + 1} \beta_p(i, j + 2g - 2p). \tag{2.10}$$

Corollaire 11. *On peut écrire* $\beta_g(i,j) = S_g(i,j)\beta_0(i,j)$*, où* $\beta_0(i,j) = \frac{i+j-1}{ij}\binom{i+j-2}{i-1}$ *est le nombre d'arbres bipartis à* i *sommets blancs et* j *sommets noirs [53], et où* S_g *est le polynôme en* (i,j) *défini par la relation de récurrence :*

$$S_g(i,j) = \frac{1}{2g}\sum_{p=0}^{g-1}\binom{i+2g-2p}{2g-2p+1}S_p(i+2g-2p,j) \ + \ \sum_{p=0}^{g-1}\binom{j+2g-2p}{2g-2p+1}S_p(i,j+2g-2p)$$

avec $S_0 = 1$.

Là encore, on peut calculer les premières valeurs des S_g. On obtient par exemple :

$$S_0 = 1 \ \ ; \ \ S_1(i,j) = \frac{(i+2)(i+1)i + (j+2)(j+1)j}{12} \ \ ; \ \ S_2(i,j) = s_2(i,j) + s_2(j,i)$$

où $s_2(i,j) = \frac{i(i+1)(i+2)(i^5+22i^4+211i^3+2i^2j+998i^2+i^2j^3+3i^2j^2+21ij^2+2248i+7ij^3+14ij+96j^2+1920+64j+32j^3)}{5760}$.

2.7.2 Cartes à une face précubiques

Une carte à une face est *précubique* si tous ses sommets sont de degré 1 ou 3. Dans une telle carte, toutes les trisections sont nécessairement de type **I** : en effet, l'ouverture d'une trisection conduit à trois sommets de degré 1 dans la carte de genre inférieur, qui ne peuvent porter eux-mêmes de trisection nouvelle. Ainsi, toute carte précubique de genre g peut être obtenue d'exactement $2g$ manières différentes à partir d'une carte précubique de genre $(g-1)$ avec trois *feuilles* marquées. En répétant g fois cet argument, on voit que toute carte à une face précubique de genre g à n arêtes peut être obtenue d'exactement $2g \cdot 2(g-1)\ldots 1 = 2^g g!$ manières différentes à partir d'un arbre à n arêtes dont tous les sommets sont de degré 1 ou 3, par g recollements successifs d'un triplet de feuilles.

Or on peut facilement énumérer les arbres précubiques à n arêtes. Remarquons qu'en enlevant une feuille d'un tel arbre, on trouve un arbre binaire à $n-1$ arêtes (et n sommets). Cela implique en particulier que $n = 2m+1$, où m est le nombre de nœuds de l'arbre binaire. De plus, les arbres précubiques dont le sommet racine est une feuille sont en bijection avec les arbres binaires à $n-1$ arêtes, et donc comptés par le nombre de Catalan $\mathrm{Cat}(m)$. Un argument de double comptage montre ensuite que ceux dont le sommet racine a degré 3 sont comptés par le nombre $\frac{3m}{m+2}\mathrm{Cat}(m)$: il suffit pour cela de remarquer que $3m\mathrm{Cat}(m)$ énumère les arbres précubiques qui sont enracinés à la fois sur une feuille et en un sommet de degré 3, et que ces arbres peuvent également s'obtenir en distinguant l'une des $(m+2)$ feuilles dans un arbre enraciné au départ en un sommet de degré 3. Ainsi, le nombre d'arbres précubiques enracinés à n arêtes est égal à $\left(1+\frac{3m}{m+2}\right)\mathrm{Cat}(m)$. On obtient ainsi :

Corollaire 12. *Le nombre* $\xi_g(n)$ *de cartes à une face précubiques de genre* g *à* $n = 2m+1$ *arêtes est donné par :*

$$\xi_g(n) = \frac{1}{2^g g!}\binom{m+2}{3,3,\ldots,3,m+2-3g}\left(1+\frac{3m}{m+2}\right)\mathrm{Cat}(m) = \frac{(4m+2)(2m)!}{12^g g!(m+2-3g)!m!}.$$

Les cartes précubiques qui n'ont pas de feuilles ont nécessairement $6g-3$ arêtes, et sont les schémas dominants du paragraphe 2.1.3. Ainsi, pour $n = 6g-3$, on retrouve une formule due à Lehman et Walsh [95](voir aussi [5]) :

Corollaire 13 ([95])**.** *Le nombre de schémas dominants de genre g, c'est-à-dire de cartes à une face enracinées dont tous les sommets sont de degré 3, est égal à :*

$$\frac{2(6g-3)!}{12^g g!(3g-2)!}.$$

De manière duale, ce nombre compte les triangulations enracinées de genre g à un seul sommet.

3

Cartes couvertes

Ce chapitre présente les fruits d'une collaboration avec Olivier Bernardi [19, 20]. Nous considérons des objets combinatoires que nous appelons les *cartes couvertes*. Une carte couverte est une carte munie d'un sous-ensemble d'arêtes distingué, appelé *sous-carte*, qui couvre tous les sommets et qui forme lui-même une carte à une face, éventuellement de genre inférieur. Par exemple, une carte munie d'un arbre couvrant est un cas particulier de carte couverte, appelée une *carte boisée*.

Les cartes boisées (en anglais, *tree-rooted maps*) ont été considérées dans le cas planaire par Mullin [76]. En considérant à la fois l'arbre couvrant distingué et son arbre couvrant dual, Mullin a montré que les cartes boisées de taille n pouvaient être vues comme le mélange de deux arbres de taille totale n. Grâce à l'identité de convolution de Vandermonde, il en a déduit que le nombre $T_0(n)$ de cartes boisées planaires à n arêtes est le produit de deux nombres de Catalan consécutifs :

$$T_0(n) = \mathrm{Cat}(n+1)\mathrm{Cat}(n). \tag{3.1}$$

Mullin posa alors la question de donner une interprétation bijective à ce résultat, c'est-à-dire d'établir une correspondance explicite entre les cartes boisées de taille n et les paires formées de deux arbres plans de tailles respectives n et $n+1$. Cette explication arriva en deux temps. Cori, Dulucq, et Viennot [39] ont donné une bijection définie récursivement sur la structure de carte combinatoire (à base de permutations), qui démontre la formule de Mullin, mais dont l'action sur les cartes topologiques est difficile à interpréter. Plus tard, Bernardi [18, 17] a donné une bijection explicite, répondant à la question originale

de Mullin. La bijection de Bernardi est fondée sur des règles locales de « découpage », qui transforment une carte boisée donnée en deux arbres : l'un formant une sorte de « squelette » de la carte, et l'autre contenant l'information nécessaire pour « recoller » ce squelette sur lui-même et reformer la carte boisée de départ. Bernardi a par ailleurs montré que sa bijection coïncidait avec celle de [39] (ce qui n'était pas évident).

Le cas des cartes boisées de genre supérieur fut ensuite considéré par Lehman et Walsh, dans le deuxième article [96] de leur série *Counting maps by genus*. En utilisant les résultats de [95] et une approche comparable à celle de Mullin, ils ont pu exprimer le nombre $T_g(n)$ de cartes boisées de genre g à n arêtes sous la forme d'une somme faisant intervenir des partitions de g. Dans le cas du genre 1, leur formule s'écrit :

$$T_1(n) = \frac{(2n-1)!}{12(n-1)!(n-2)!}\mathrm{Cat}(n) = \frac{1}{2}\beta_1(n+1)\mathrm{Cat}(n). \tag{3.2}$$

où nous notons $\beta_g(n)$ le nombre de cartes à une face biparties de genre g à n arêtes. La formule (3.2) rappelle étrangement celle de Mullin (3.1), laissant penser qu'il existe une généralisation de la bijection de Bernardi au cas du tore ; c'est d'ailleurs cette remarque qui a été le point de départ de notre travail. Étrangement, les formules pour les genres suivants (2 et plus) semblent ne pas avoir une forme aussi remarquable.

L'objet de ce chapitre est de montrer que la bijection de Bernardi se généralise *en tous genres*, à condition de remplacer la notion de carte boisée par celle de carte couverte, c'est-à-dire de ne pas fixer à 0 le genre de la sous-carte distinguée, mais de le laisser libre. On montrera ainsi que les cartes couvertes de genre g et de taille n sont en bijection avec des paires, formées d'un arbre de taille n et d'une carte à une face bipartie de genre g et de taille $n+1$. En particulier, on obtiendra pour le nombre $C_g(n)$ de cartes couvertes de genre g à n arêtes la formule :

$$C_g(n) = \beta_g(n+1)\mathrm{Cat}(n).$$

Dans le cas planaire, puisque toutes les cartes couvertes de genre 0 sont en fait des cartes boisées, nous retrouvons la formule de Mullin (c'est le cas traité à l'origine par Bernardi). Dans le cas du tore, un simple argument de dualité montre qu'exactement la moitié des cartes couvertes sont des cartes boisées : nous obtiendrons ainsi la première interprétation bijective de la formule de Lehman et Walsh (3.2). Dans le cas des genres supérieurs, il ne semble pas y avoir de lien aussi clair entre les cartes boisées et les cartes couvertes, ce qui explique, en un sens, pourquoi les formules donnant les nombres de cartes boisées deviennent plus complexes. Mentionnons néanmoins le fait que dans l'article [8], dont nous avons déjà parlé au chapitre précédent, Bender, Canfield, et Robinson montrent à partir des formules de Lehman et Walsh que le nombre de cartes boisées satisfait la formule asymptotique : $T_g(n) \sim \frac{4}{\pi g! 96^g} n^{3g-3} 16^n$. En comparant ce résultat au nôtre, on obtient la proportion asymptotique de cartes boisées parmi les cartes couvertes :

$$T_g(n)/C_g(n) \longrightarrow \frac{1}{2^g}, \text{ quand } n \to \infty,$$

un fait remarquable dont nous n'avons malheureusement pas d'interprétation.

Enfin, notre bijection se trouve avoir une conséquence inattendue. En effet, en utilisant une approche similaire à celle de Mullin, on peut relier les nombres comptant les

cartes couvertes aux nombres de cartes à une face étudiés au chapitre précédent. Or, la bijection présentée dans ce chapitre relie le nombre de cartes couvertes aux nombres de cartes à une face *biparties*. En comparant les deux approches, on obtient une nouvelle identité combinatoire, reliant les nombres de cartes à une face générales et biparties. Cette observation fait le lien entre deux célèbres formules, la formule d'Harer-Zagier pour les cartes à une face générales, et celle de Jackson pour les cartes à une face biparties, qui se déduisent l'une de l'autre par notre identité.

Organisation du chapitre : Dans la section 3.1, nous introduisons les cartes couvertes, et examinons leurs premières propriétés ; en particulier, nous décrivons l'approche « naïve », qui consiste à voir les cartes couvertes comme des recollements bord à bord de cartes à une face, et nous en déduisons des expressions sommatoires pour les nombres comptant ces objets. Dans la section 3.2, nous présentons deux bijections : la première, qui relie les cartes couvertes à certaines orientations, que nous appelons orientations gauches, et qui généralisent au genre supérieur les orientations minimales du cas planaire ; la seconde, qui montre que les orientations gauches s'obtiennent de manière unique par le recollement d'un arbre plan et d'une carte à une face bipartie. Les démonstrations sont données en section 3.3. Enfin, la section 3.4 examine les corollaires énumératifs.

Note : Dans ce chapitre, il sera préférable de se représenter les cartes en termes de brins, comme au paragraphe 1.1.3, plutôt qu'en rubans. Cela facilitera notamment le travail avec les cartes orientées.

3.1 Les objets

3.1.1 Cartes et sous-cartes

Soit $\mathfrak{m}$ une carte. Nous avons vu dans l'introduction qu'il y a plusieurs manières de « voir » $\mathfrak{m}$: soit comme un graphe plongé sur une surface orientable, soit de manière plus combinatoire comme un graphe dont les arêtes sont formées de brins dont un ordre cyclique autour de chaque sommet est imposé (Figure 3.1 (a) et (b)). Dans ce chapitre nous jonglerons entre les deux représentations : lorsqu'il s'agira d'effectuer des opérations de « découpage » ou de « recollement » comme au chapitre précédent, nous préférerons la seconde vision ; mais lorsque nous parlerons de cartes duales, nous adopterons souvent la vision topologique, au moins comme un support visuel guidant l'intuition. Dans les deux cas, nous adopterons la convention de l'introduction pour l'enracinement de la carte : chaque carte comportera un coin distingué, appelé *racine*, et représenté graphiquement par une petite flèche pointant vers un sommet.

Cela dit, du point de vue formel, nous allons à nouveau nous placer dans le formalisme des cartes combinatoires, comme au paragraphe 1.1.2. Fixons donc une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$, où H est l'ensemble des demi-arêtes de $\mathfrak{m}$, et où les permutations σ et α représentent respectivement les sommets et les arêtes de $\mathfrak{m}$. On note $\phi = \sigma\alpha$ la permutation codant les faces de $\mathfrak{m}$, et V l'ensemble des sommets de $\mathfrak{m}$.

Soit maintenant $S \subset H$ un sous-ensemble de demi-arêtes qui soit stable par α (autrement dit, un sous-ensemble d'arêtes). On note $V_{|S}$ l'ensemble des sommets de $\mathfrak{m}$ qui sont

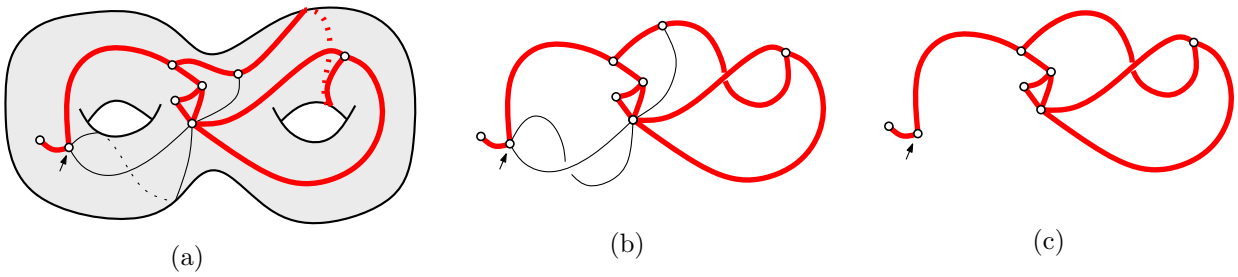


FIG. 3.1 – (a) Une carte de genre 2, dans sa représentation topologique ; (b) la même carte, en représentation combinatoire ; (c) la sous-carte de genre 1 induite par le sous-ensemble d'arêtes dessiné en gras sur les cartes précédentes.

incidents à au moins un élément de S. Autour de chaque sommet v de $V_{|S}$, l'ordre cyclique des éléments de H induit naturellement un ordre cyclique des éléments de S (obtenu simplement par restriction). Le graphe $(V_{|S}, S)$ est donc naturellement muni d'une structure de carte : cette carte est appelé *la sous-carte de* $\mathfrak{m}$ *induite par* S, et notée $\mathfrak{m}_{|S}$. De manière graphique, $\mathfrak{m}_{|S}$ s'obtient à partir de la représentation en brins de $\mathfrak{m}$ en effaçant les arêtes qui ne sont pas dans S (remarquons au passage que $\mathfrak{m}_{|S}$ n'est pas forcément connexe). Pour déterminer la racine de la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$, nous nous contentons de ne pas effacer du dessin original la flèche donnant la racine de $\mathfrak{m}$.

En termes de permutations, on peut dire la même chose comme suit. Si π est une permutation d'un ensemble X, et $Y \subset X$ est un sous-ensemble de X, on définit la *restriction* de π à Y comme la permutation $\pi_{|Y}$ de Y dont les cycles s'obtiennent à partir de ceux de π en effaçant les éléments qui ne sont pas dans Y. Plus formellement, pour $y \in Y$, on pose $\pi_{|Y}(y) := \pi^{k_y}(y)$, où $k_y \geq 1$ est le plus petit entier non nul tel que cette quantité soit dans Y . Alors, en termes de cartes combinatoires, la carte $\mathfrak{m}_{|S}$ est donnée par $\mathfrak{m}_{|S} = (S, \sigma_{|S}, \alpha_{|S})$, et sa racine est $\sigma^i(r)$, où r est la racine de $\mathfrak{m}$ et i est le plus petit entier tel que cette quantité soit dans S. La figure 3.1(c) donne un exemple de sous-carte induite par un sous-ensemble d'arêtes. On dira qu'une demi-arête est *interne* si elle appartient à S, et qu'elle est *externe* sinon.

On dira que la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ est *couvrante* si d'une part, elle est connexe, et si d'autre part, chaque sommet de $\mathfrak{m}$ est incident à au moins une arête de S (c'est-à-dire que $V_{|S} = V$). Par exemple, choisir S égal à H, ou bien à l'ensemble des demi-arêtes d'un arbre couvrant donne une carte couvrante. La sous-carte de la figure 3.1 est couvrante. Il est important de remarquer que la carte couvrante $\mathfrak{m}_{|S}$ n'est pas nécessairement de même genre que $\mathfrak{m}$. En effet, si l'on se place dans la représentation topologique d'une carte, alors la restriction du plongement définissant $\mathfrak{m}$ au graphe $(V_{|S}, S)$ ne définit pas nécessairement une carte valide, car les faces ne sont plus forcément simplement connexes. Il faudrait pour retrouver une carte valide s'autoriser des opérations de « chirurgie » sur la surface : c'est pour éviter cela que nous préférons utiliser la description combinatoire des cartes, en particulier pour les démonstrations.

On s'intéressera dans ce chapitre à un cas particulier de sous-carte couvrante :

Définition 19. Une *carte couverte* est une paire $(\mathfrak{m}, S)$, où $\mathfrak{m}$ est une carte et S est un sous-ensemble des demi-arêtes de $\mathfrak{m}$, stable par α, tel que :

– $\mathfrak{m}_{|S}$ est une sous-carte couvrante (i.e. connexe et qui visite tous les sommets de $\mathfrak{m}$) ;
– la carte $\mathfrak{m}_{|S}$ n'a qu'une seule face.

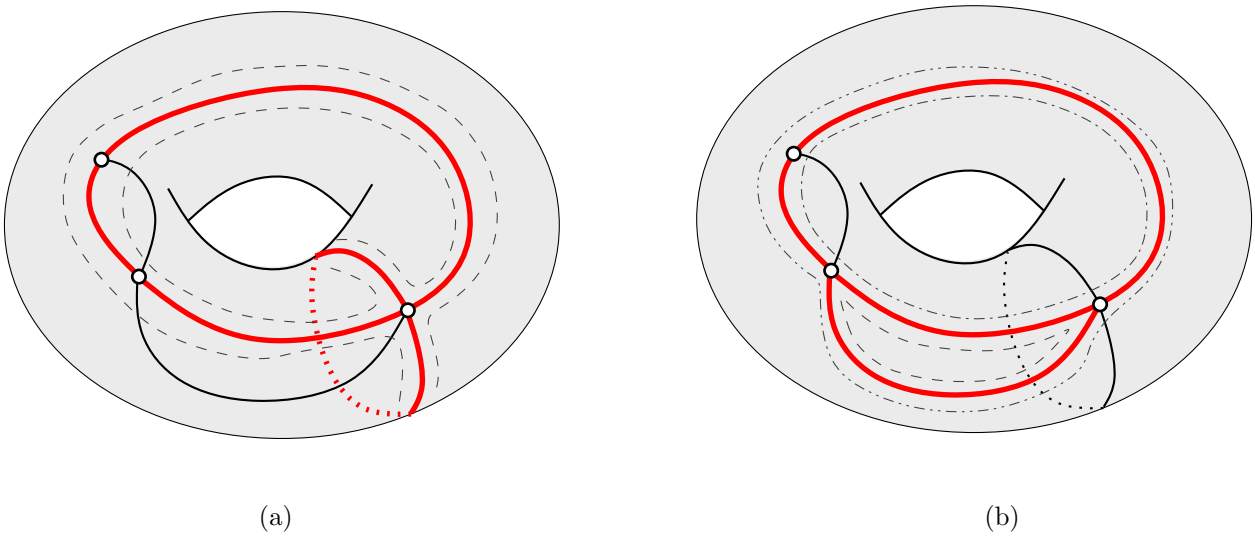


FIG. 3.2 – (a) Une carte de genre 1 munie d'une sous-carte couvrante (en gras) ; cette sous-carte n'a qu'un seul bord (en trait-tiret), et réalise donc une carte couverte valide. (b) La même carte, munie d'une sous-carte couvrante à *trois* bords : ce n'est pas une carte couverte.

Il est utile de comprendre à quoi ressemble une carte couverte dans la représentation topologique. La figure 3.2 donne la représentation topologique de deux cartes $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ portant chacune un sous-ensemble de demi-arêtes distingué, notés S et S' (représentés en gras). Dans les deux cas, la carte induite est couvrante, au sens où elle visite tous les sommets. Nous avons représenté sur la figure les *bords* de chacune des sous-cartes $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}'_{|S'}$: rappelons qu'un bord d'une carte s'obtient en longeant les arêtes de cette carte, en gardant les arêtes à sa gauche. Ici, de même, les traits pointillés représentent les bords des deux cartes $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}'_{|S'}$. Remarquons néanmoins que nous avons dessiné ces bords sur la surface de départ, sur laquelle $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}'_{|S'}$ ne sont pas nécessairement des cartes valides (nous sommes donc en train de mélanger la représentation topologique avec celle en graphes rubans). Alors, une carte couverte valide se caractérise par le fait qu'elle n'a qu'un seul bord.

Un carte couvrante $(\mathfrak{m}, S)$ telle que la carte $\mathfrak{m}_{|S}$ est de genre 0 (autrement dit, une carte $\mathfrak{m}$ munie d'un arbre couvrant) est appelée une *carte boisée*. Le grand intérêt qu'a la notion de carte couverte, par rapport à celle de carte boisée, est qu'elle est stable par dualité. En effet, Mullin avait remarqué dans le cas planaire que le dual d'un arbre couvrant est toujours un arbre couvrant [76], mais cette propriété s'effondre en genre supérieur. À l'inverse, grâce au fait que l'on n'impose pas le genre de la sous-carte, on retrouve cette propriété pour les cartes couvertes.

Précisément, notons $\mathfrak{m}^* = (H, \phi, \alpha)$ la carte duale de $\mathfrak{m}$, comme au paragraphe 1.1.4. Au sous-ensemble S de H, on fait correspondre son complémentaire $\overline{S} := H \setminus S$. La *sous-carte duale* de $\mathfrak{m}_{|S}$ est alors définie comme la sous-carte $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$, c'est-à-dire comme la sous-carte de la carte duale $\mathfrak{m}^*$ induite par les arêtes duales des arêtes qui ne sont pas

dans S. Graphiquement, on obtient la carte $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ à partir de la représentation topologique de $\mathfrak{m}$ en ajoutant un sommet dans chaque face de $\mathfrak{m}$, puis en ne gardant que les arêtes duales d'arêtes $\mathfrak{m}$ qui ne sont pas dans S : on obtient ainsi une représentation graphique où les deux cartes $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ semble être « emboîtées » (voir la figure 3.3(a) pour un exemple planaire). La stabilité par dualité s'énonce comme ceci :

Proposition 19. *Soit une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$, et soit $S \subset H$ un sous-ensemble de demi-arêtes stable par α. Alors $(\mathfrak{m}, S)$ est une carte couverte si et seulement si $(\mathfrak{m}^*, \overline{S})$ est une carte couverte.*

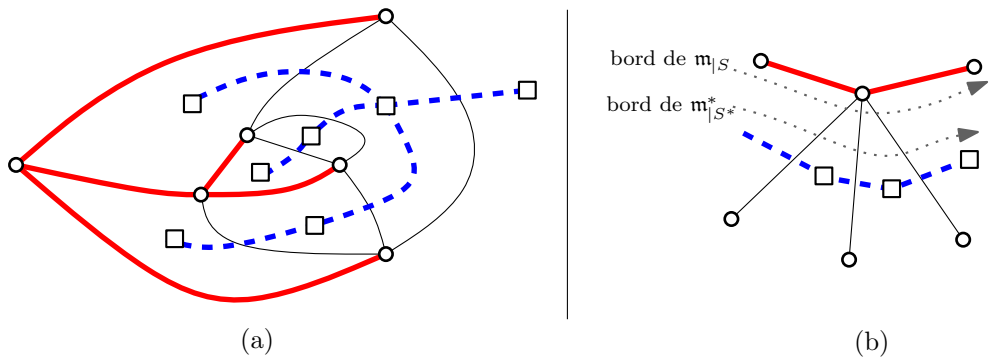


FIG. 3.3 – (a) Une carte planaire, munie d'un arbre couvrant (en trait gras plein), et son arbre couvrant dual (en trait gras pointillé). Les deux arbres semblent être « emboîtés ». (b) Autour de chaque coin de la sous-carte couvrante $\mathfrak{m}_{|S}$, on voit que son bord coïncide avec celui de sa duale $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$, ce qui explique que l'une n'a qu'un bord si et seulement si l'autre n'en a qu'un.

Nous donnerons plus loin (paragraphe 3.3) une démonstration formelle de ce résultat. On peut néanmoins l'interpréter visuellement en termes de bords. En effet, on voit sur la figure 3.3(b) que les bords d'une sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ coïncident avec ceux de sa sous-carte duale $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$: il suffit pour cela de remarquer qu'ils coïncident localement, autour de chaque coin de la carte $\mathfrak{m}_{|S}$ (rappelons que l'on tourne toujours dans des sens différents autour d'une carte et de sa duale, comme expliqué dans l'introduction ; on longe donc le bord de $\mathfrak{m}_{|S}$ avec les arêtes à gauche, mais celui de sa duale avec les arêtes à droite). Ainsi, $\mathfrak{m}_{|S}$ n'a qu'un seul bord si et seulement si $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ n'a qu'un seul bord, ce qui donne une explication de la proposition ci-dessus. On peut également remarquer la propriété suivante :

Proposition 20. *Soit $(\mathfrak{m}, S)$ une carte couverte, de carte couverte duale $(\mathfrak{m}^*, \overline{S})$. Alors les nombres de sommets, arêtes et faces, et le genre de $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ sont reliés par :*

$$v(\mathfrak{m}) = v(\mathfrak{m}_{|S}), \quad f(\mathfrak{m}) = v(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}), \quad e(\mathfrak{m}) = e(\mathfrak{m}_{|S}) + e(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}), \quad \textit{et} \quad g(\mathfrak{m}) = g(\mathfrak{m}_{|S}) + g(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}). \tag{3.3}$$

Démonstration. La relation $v(\mathfrak{m}) = v(\mathfrak{m}_{|S})$ vient du fait que $\mathfrak{m}_{|S}$ est couvrante, et $f(\mathfrak{m}) = v(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}})$ est la propriété duale. La relation $e(\mathfrak{m}_{|S}) + e(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}) = e(\mathfrak{m})$ est évidente et la relation $g(\mathfrak{m}) = g(\mathfrak{m}_{|S}) + g(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}})$ se déduit des précédentes par le fait que $f(\mathfrak{m}_{|S}) = f(\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}) = 1$, et la relation d'Euler appliquée aux cartes $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$. □

La dernière proposition, qui dit que le genre est additif, permet de mieux comprendre pourquoi les cartes boisées ne sont pas stables par dualité : le dual d'une carte boisée de genre g est une carte couverte de genre g dont la sous-carte est elle-même de genre g. Plus généralement, une carte couverte $(\mathfrak{m}, S)$ de genre g est formée d'une carte $\mathfrak{m}_{|S}$ de genre g_1, et d'une carte $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ de genre g_2, telles que $g_2 = g - g_1$.

3.1.2 Recollements bord à bord

Nous allons maintenant montrer qu'en un certain sens, les deux cartes $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ sont *recollées bord à bord*. On se place pour cela dans la représentation topologique. Fixons une arête e^* de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$. Cette arête est traversée par son arête duale $e^{**} = e$. Chaque *côté* de l'arête e^* est naturellement relié par l'arête e à un sommet de la carte $\mathfrak{m}$: pour matérialiser ce fait, nous dessinons une arête fléchée qui relie chaque côté d'arête de e^* au sommet de $\mathfrak{m}$ correspondant, comme en figure 3.4(a). De plus, puisque la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ est couvrante, le sommet en question est un sommet de $\mathfrak{m}_{|S}$: on peut donc considérer que notre nouvelle arête fléchée relie un *côté* de e^* à un *coin* de $\mathfrak{m}_{|S}$.

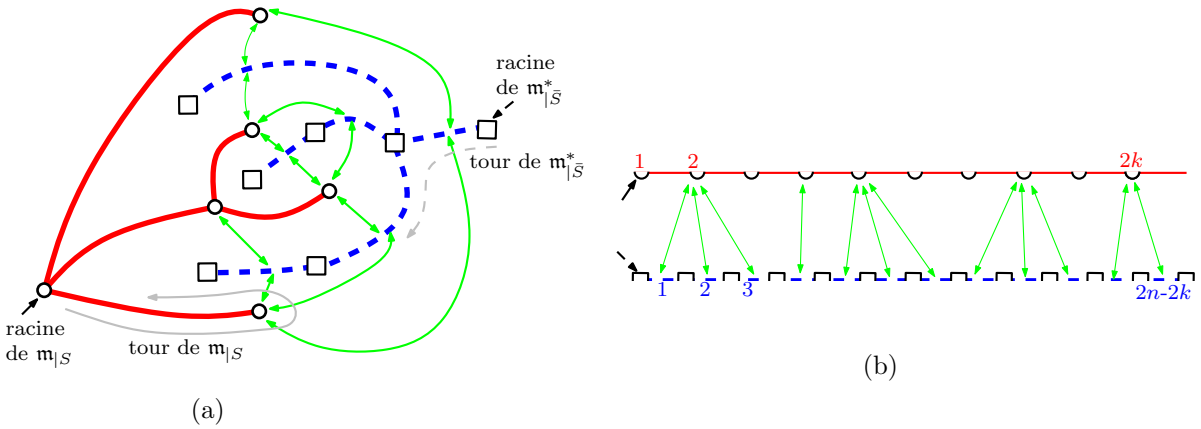


FIG. 3.4 – (a) La carte boisée de la figure 3.3(a), où l'on a remplacé chaque arête de $\overline{S}$ par deux arêtes fléchées, qui matérialisent l'appariement d'un côté d'arête de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ avec un coin de $\mathfrak{m}_{|S}$. (b) Une représentation linéaire du tour de $\mathfrak{m}_{|S}$ et de celui de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$, où l'on voit que les arêtes fléchées définissent une application croissante $[\![1, 2n-2k]\!] \to [\![1, 2k]\!]$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{m}_{|S}$ et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ aient respectivement k et $n-k$ arêtes. Le bord de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ est donc formé de $2(n-k)$ côtés d'arêtes, chacun étant relié par une nouvelle arête fléchée à l'un des $2k$ coins de $\mathfrak{m}_{|S}$. Il est clair que les arêtes fléchées ne se croisent pas. De manière équivalente, si l'on identifie l'ensemble des coins de $\mathfrak{m}_{|S}$ avec $[\![1, 2k]\!]$, de telle sorte que le tour de $\mathfrak{m}_{|S}$ visite les coins dans l'ordre croissant, et celui des côtés d'arêtes de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ avec $[\![1, 2n-2k]\!]$ (de telle sorte que le tour de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ les visite dans l'ordre croissant), alors l'application $\eta : [\![1, 2n-2k]\!] \to [\![1, 2k]\!]$ qui associe à un côté d'arête de $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ le coin de $\mathfrak{m}_{|S}$ correspondant, est *croissante*, voir la figure 3.4(b). Nous laissons au lecteur la démonstration de la proposition suivante, qui est une généralisation assez simple des idées de Mullin :

Proposition 21. *L'ensemble des cartes couvertes* $(\mathfrak{m}, S)$ *telles que* $\mathfrak{m}$ *a* n *arêtes et* S *a* k *arêtes est en bijection avec l'ensemble des triplets* $(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \eta)$*, où :*
- $\mathfrak{t}_1$ *est une carte à une face à* k *arêtes ;*
- $\mathfrak{t}_2$ *est une carte à une face à* $n-k$ *arêtes ;*
- η *est une application croissante* $[\![1, 2n-2k]\!] \to [\![1, 2k]\!]$.

Explorons maintenant les corollaires énumératifs de cette proposition. Rappelons que nous notons $\epsilon_g(n)$ le nombre de cartes à une face de genre g à n arêtes. Nous notons de plus $C_{g_1,g_2}(n_1, n_2)$ le nombre de cartes couvertes $(\mathfrak{m}, S)$, telles que la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ a genre g_1 et n_1 arêtes, et sa duale $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ a genre g_2 et n_2 arêtes. Puisqu'il y a $\binom{2n}{2k}$ applications croissantes $[\![1, 2n-2k]\!] \to [\![1, 2k]\!]$, la proposition précédente donne :

$$C_{g_1,g_2}(n_1, n_2) = \binom{2n_1 + 2n_2}{2n_1} \epsilon_{g_1}(n_1)\epsilon_{g_2}(n_2). \tag{3.4}$$

En particulier, le nombre $C_{g_1,g_2}(n)$ de cartes couvertes $(\mathfrak{m}, S)$ à n arêtes et telles que $\mathfrak{m}_{|S}$ a genre g_1, et $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ a genre g_2, est :

$$C_{g_1,g_2}(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{2n}{2n_1} \epsilon_{g_1}(n_1)\epsilon_{g_2}(n_2). \tag{3.5}$$

En utilisant la relation d'Euler, il est possible de mettre cette équation sous une forme équivalente, où l'on fixe cette fois le nombre de sommets des cartes. En effet, notons $\epsilon^v(n) := \epsilon_{\frac{n-v+1}{2}}(n)$ le nombre de cartes à une face ayant v sommets et n arêtes. Alors, le nombre de cartes couvertes $(\mathfrak{m}, S)$ telles que $\mathfrak{m}$ ait v sommets, f faces, et n arêtes (et genre $g = \frac{n-v-f+2}{2}$) s'écrit :

$$C^{v,f}(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{2n}{2n_1} \epsilon^v(n_1)\epsilon^f(n_2), \tag{3.6}$$

relation que nous réutiliserons au paragraphe 3.4.

L'équation (3.4) est une généralisation des équations utilisées par Mullin [76], Lehman et Walsh [96] pour énumérer les cartes boisées. En effet, le nombre de cartes boisées de genre g à n arêtes s'écrit :

$$T_g(n) = C_{0,g}(n) = \sum_{n_1+n_2=n} \binom{2n}{2n_1} \mathrm{Cat}(n_1)\epsilon_g(n_2) \tag{3.7}$$

qui est l'équation utilisée par ces auteurs dans leurs travaux. Dans l'article [8], Bender *et al.* se sont servi de la formule asymptotique[1] $\epsilon_g(n) = \frac{n^{3g-\frac{3}{2}}}{12^g g! \sqrt{\pi} 4^n}\left(1 + O(n^{-1/2})\right)$ et de l'équation précédente pour obtenir :

$$T_g(n) \sim \frac{4}{\pi g! 96^g} n^{3g-3} 16^n. \tag{3.8}$$

[1] cette formule n'est autre que l'équation (2.3) du chapitre précédent

En appliquant les mêmes techniques que Bender *et al.* à l'équation (3.4), on obtient la formule similaire :

$$C_{g_1,g_2}(n) \sim \binom{g_1+g_2}{g_1} \frac{4}{\pi g! 96^g} n^{3g-3} 16^n. \tag{3.9}$$

En particulier, en sommant sur (g_1, g_2), on voit que le nombre de cartes couvertes satisfait :

$$C_g(n) \sim \frac{4}{\pi g! 48^g} n^{3g-3} 16^n. \tag{3.10}$$

Par conséquent, la proportion de cartes boisées parmi les cartes couvertes de genre g tend vers $1/2^g$ quand la taille n tend vers l'infini. Nous n'avons pas d'interprétation combinatoire de ce fait (qui rappelle étrangement le théorème 5 du chapitre suivant, que nous saurons pourtant interpréter combinatoirement).

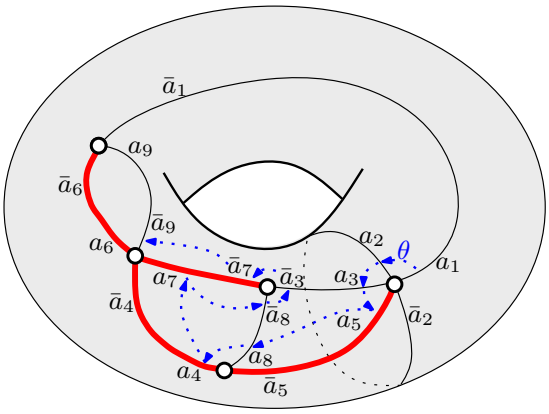
Nous terminons ici cette partie introductive sur les cartes couvertes, pour aborder la description de notre bijection.

3.2 Bijection

Nous allons présenter dans cette partie notre principal résultat. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, il s'agit d'une généralisation de la bijection de Bernardi [18] pour le cas planaire. La bijection fonctionne en deux temps. D'abord, on présente une bijection qui relie les cartes couvertes à certaines cartes orientées, que nous appelons « orientations gauches ». Ensuite, nous décrivons un processus de découpage des orientations gauches, qui les met en bijection avec des paires formées d'un arbre plan et d'une carte à une face bipartie. C'est la composition de ces deux bijections qui constitue notre résultat principal (et qui permet en particulier de compter plus simplement les cartes couvertes). Nous nous contenterons pour l'instant de décrire les résultats, en laissant les démonstrations pour la partie suivante.

3.2.1 Orientations gauches

On dit qu'une carte est *orientée* si l'on a choisi pour chaque arête une orientation, ce qui revient graphiquement à représenter chaque arête par une flèche. Plus formellement, une *orientation* d'une carte $M = (H, \sigma, \alpha)$ est une partition $H = I \uplus O$ de ses demi-arêtes en un ensemble I de demi-arêtes *entrantes* et un ensemble O de demi-arêtes *sortantes*, tels que I et O soient échangés par l'involution α. Une carte orientée est alors une paire $(\mathfrak{m}, (I, O))$ formée d'une carte et d'une orientation de ses arêtes. Une arête d'une carte orientée est toujours formée d'une demi-arête entrante appelée *sa tête*, et d'une demi-arête sortante appelée *sa queue*. Lorsque l'on travaille avec des cartes orientées, il est commode d'utiliser la représentation des cartes *en brins*, comme au paragraphe 1.1.3 : chaque arête est ainsi orientée de sa queue vers sa tête (et la flèche matérialise cette orientation). Nous allons maintenant expliquer comment associer à une carte couverte $(\mathfrak{m}, S)$ une orientation des arêtes de $\mathfrak{m}$.



$$H = \{a_1, \bar{a}_1, a_2, \bar{a}_2, \ldots, a_9, \bar{a}_9\}$$
$$\alpha = (a_1, \bar{a}_1)(a_2, \bar{a}_2)\ldots(a_9, \bar{a}_9)$$
$$\sigma = (a_1, a_2, a_3, a_5, \bar{a}_2)(\bar{a}_3, \bar{a}_7, \bar{a}_8)(a_8, a_4, \bar{a}_5)$$
$$(\bar{a}_9, a_6, \bar{a}_4, a_7)(\bar{a}_1, \bar{a}_6, a_9)$$

$$\theta = (a_1, a_2, a_3, a_5, a_8, a_4, a_7, \bar{a}_8, \bar{a}_3,$$
$$\bar{a}_7, \bar{a}_9, a_6, a_9, \bar{a}_1, \bar{a}_6, \bar{a}_4, \bar{a}_5, \bar{a}_2)$$

FIG. 3.5 – Une carte couverte de genre 1 (qui est en fait une carte boisée). Les éléments de la sous-carte sont représentés en trait épais. La fonction de parcours θ s'obtient en faisant la liste de toutes les demi-arêtes que l'on rencontre lorsque l'on en fait le tour.

Nous commençons par définir une notion importante : celle de fonction de parcours. Si $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ est une carte, et S un sous-ensemble de H stable par α, la fonction de parcours θ est l'application $\theta : H \to H$ définie par :

$$\theta(h) = \begin{cases} \sigma\alpha(h) \text{ si } h \in S, \\ \sigma(h) \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que θ est une permutation de H : en effet, puisque S est stable par α, l'inverse de θ est donnée par $\theta^{-1}(h) = \alpha\sigma^{-1}(h)$ si $\sigma^{-1}(h) \in S$ et $\theta^{-1}(h) = \sigma^{-1}(h)$ sinon. Graphiquement, chaque cycle de la fonction de parcours s'interprète comme la liste des demi-arêtes de H que l'on visite ou que l'on croise lorsque l'on longe un bord de la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ (voir la figure 3.5). En particulier, les cycles de θ sont en bijection avec les faces de $\mathfrak{m}_{|S}$:

Lemme 22. *Soit $\phi = \sigma\alpha$ la permutation-face de $\mathfrak{m}$. Pour tout sous-ensemble $S \subset H$ stable par α, la fonction de parcours θ de la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ satisfait $\theta_{|S} = \sigma_{|S}\alpha_{|S}$, où $_{|S}$ est le symbole de restriction défini page 48. De la même façon, on a $\theta_{|\overline{S}} = \phi_{|\overline{S}}\alpha_{|\overline{S}}$.*

De plus, la fonction de parcours θ n'a qu'un seul cycle si et seulement si $(\mathfrak{m}, S)$ est une carte couverte.

Fixons maintenant une carte couverte $(\mathfrak{m}, S)$ de racine r. La fonction de parcours n'ayant qu'un seul cycle, on peut définir un ordre total $<_\theta$ sur H par :

$$r <_\theta \theta(r) <_\theta \theta^2(r) <_\theta \cdots <_\theta \theta^{|H|-1}(r).$$

Cet ordre, appelé *ordre d'apparition*, est l'ordre dans lequel on découvre les éléments de H lorsque l'on fait le tour de $\mathfrak{m}_{|S}$ en partant de r. On peut maintenant donner la définition suivante :

Définition 20. Soit $(\mathfrak{m}, S)$ une carte couverte d'ensemble de demi-arêtes H. L'application Δ associe à $(\mathfrak{m}, S)$ la carte orientée $\Delta(\mathfrak{m}, S) = (\mathfrak{m}, (I, O))$ définie par :

$$I := \{h \in S : \alpha(h) <_\theta h\} \cup \{h \in \overline{S} : h <_\theta \alpha(h)\} \text{ et } O := H \setminus I. \tag{3.11}$$

En d'autres termes, l'orientation $\Delta(\mathfrak{m}, S)$ est telle que lorsque l'on fait le tour de $\mathfrak{m}_{|S}$ en partant de r, on découvre toujours une nouvelle arête de S par sa queue, et une arête de $\overline{S}$ par sa tête. Cela donne une procédure permettant de construire l'orientation graphiquement (voir la figure 3.6(a)).

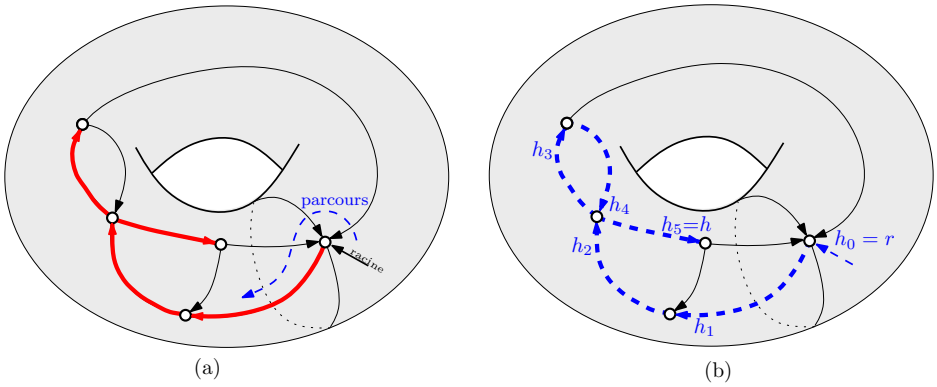


FIG. 3.6 – (a) L'orientation associée à la carte couverte de la figure précédente : lorsque l'on suit la fonction de parcours en partant de la racine, on découvre toujours une arête interne de la sous-carte par sa queue, et une arête externe par sa tête. (b) L'unique chemin gauche d'extrémité h, en trait-tiret.

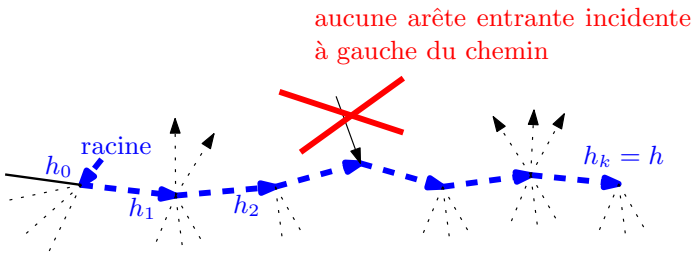


FIG. 3.7 – Un chemin gauche.

Nous allons maintenant caractériser l'image de l'application Δ en définissant la notion d'*orientation gauche*. Soit $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ une carte de racine h_0, et soit (I, O) une orientation de $\mathfrak{m}$. Un *chemin gauche* est une suite d'arêtes entrantes $h_1, h_2, \ldots, h_k$ telles que pour tout $i = 1 \ldots k$, il existe un entier $q_i > 0$ tel que $h_{i-1} = \sigma^{q_i}(\alpha(h_i))$, et $\sigma^p(\alpha(h_i)) \in O$ pour $p = 0, \ldots, q_i - 1$. Autrement dit, un chemin gauche est un chemin dirigé, partant de la racine, et tel qu'aucune arête entrante n'est incidente à la gauche du chemin. La figure 3.7 illustre cette définition, et la figure 3.6(b) donne un exemple de chemin gauche. On dit que l'orientation (I, O) est une *orientation gauche* si toute demi-arête entrante $h \in I$ est l'extrémité d'un chemin gauche $h_1, h_2, \ldots, h_k = h$. Par abus de langage, on appellera alors aussi orientation gauche la paire $(\mathfrak{m}, (I, O))$. On attendra la partie 3.3 pour démontrer le résultat suivant :

Proposition 23. *L'application Δ est une bijection entre les cartes couvertes et les orientations gauches.*

Remarque 9. Dans le cas planaire, Bernardi [18] a montré que l'application Δ réalise une bijection entre les cartes boisées et les orientations qui sont à la fois racine-accessibles

(tout sommet peut être atteint de la racine par un chemin dirigé) et minimales (ne contenant pas de cycle direct si on les dessine dans le plan avec la flèche racine dans la face infinie). Ainsi la proposition 23 montre que dans le cas planaire, les orientations gauches sont exactement les orientations racine-accessibles minimales, ce que l'on pourrait bien sûr démontrer directement. Dans le cas planaire, les orientations minimales jouent un rôle important dans plusieurs domaines [79, 17], et le fait que nous en proposions une généralisation au cas du genre supérieur pourrait donc s'avérer intéressant en soi.

3.2.2 Règles de découpage

Nous allons maintenant définir une procédure, basée sur des règles locales de « découpage », permettant d'associer à une orientation gauche $(\mathfrak{m}, (I, O))$ deux cartes $\Psi_1(\mathfrak{m}, (I, O))$ et $\Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$: un exemple de cette procédure est représenté sur les figures 3.8 et 3.9. La carte $\Psi_1(\mathfrak{m}, (I, O))$ est un arbre plan, et la carte $\Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$ est une carte à une face bipartie, portant des sommets *noirs* et des sommets *blancs*.

Considérons une orientation gauche $(\mathfrak{m}, (I, O))$, et donnons un aperçu des opérations de découpage autour d'un sommet v de $\mathfrak{m}$. Ce sommet correspond à un cycle $v = (h_1, \ldots, h_k)$ de la permutation σ. Nous notons $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_l = k$ les indices des demi-arêtes incidentes à v qui sont entrantes, et nous définissons la permutation $\bar{v} = (h_1, \ldots, h_{i_1})(h_{i_1+1}, \ldots, h_{i_2}) \ldots (h_{i_{l-1}+1}, \ldots, h_{i_l})$. En remplaçant v par $\bar{v}$, nous séparons le sommet v en l nouveaux sommets, comme sur la figure 3.8(a). Chaque nouveau sommet est incident à exactement une arête entrante. Nous définirons $\Psi_1(\mathfrak{m}, S)$ comme la carte obtenue par l'application de ce découpage à tous les sommets de $\mathfrak{m}$.

Remarquons que, de manière équivalente, la permutation $\bar{v}$ de $\{h_1, \ldots, h_k\}$ est définie par $v = \bar{v}\pi_\circ$, où $\pi_\circ$ est la permutation telle que $\pi_\circ(h) = h$ si $h \in O$ et $\pi_\circ(h_{i_j}) = h_{i_{j+1}}$ pour $j = 1, \ldots, l$. Alors, le cycle $(h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_l})$ de $\pi_\circ$ deviendra un des sommets blancs de la carte $\Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$, comme sur la figure 3.8(a). Les sommets noirs de $\Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$ seront définis par une construction du même type, où l'on considérera cette fois la succession des arêtes entrantes et sortantes autour de chaque face de $\mathfrak{m}$ (figure 3.8(b)).

Nous donnons maintenant une description plus formelle de notre construction. On note r la racine de la carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$, et $\phi = \sigma\alpha$ sa permutation-face. Tout d'abord, la carte Ψ_2 que notre construction associera à une carte $\mathfrak{m}$ à n arêtes aura $n + 1$ arêtes. Pour pouvoir définir correctement Ψ_2, nous avons donc besoin d'ajouter deux demi-arêtes à notre ensemble H. Pour cela, on considère deux nouvelles demi-arêtes i et o qui ne sont pas dans H, et l'on définit $I' = I \cup \{i\}$, $O' = O \cup \{o\}$, et $H' = I' \cup O'$. On définit l'involution α' de l'ensemble H' en posant $\alpha'(i) = o$ et $\alpha'(h) = \alpha(h)$ pour $h \in H$. On définit aussi σ' (resp. ϕ') comme la permutation de $H \cup \{i\}$ (resp. $H \cup \{o\}$) obtenue à partir de σ (resp. ϕ) en insérant la nouvelle arête i (resp. o) juste avant la racine r dans le cycle de σ (resp. ϕ) contenant r.

On considère alors les restrictions :

$$\pi_\circ = \sigma'_{|I'} \text{ et } \pi_\bullet = \phi'_{|O'}$$

La figure 3.8 donne l'interprétation graphique des permutations $\pi_\circ$ et $\pi_\bullet$, ainsi qu'un exemple sur l'orientation gauche de la figure 3.6. On définit alors la permutation τ' de

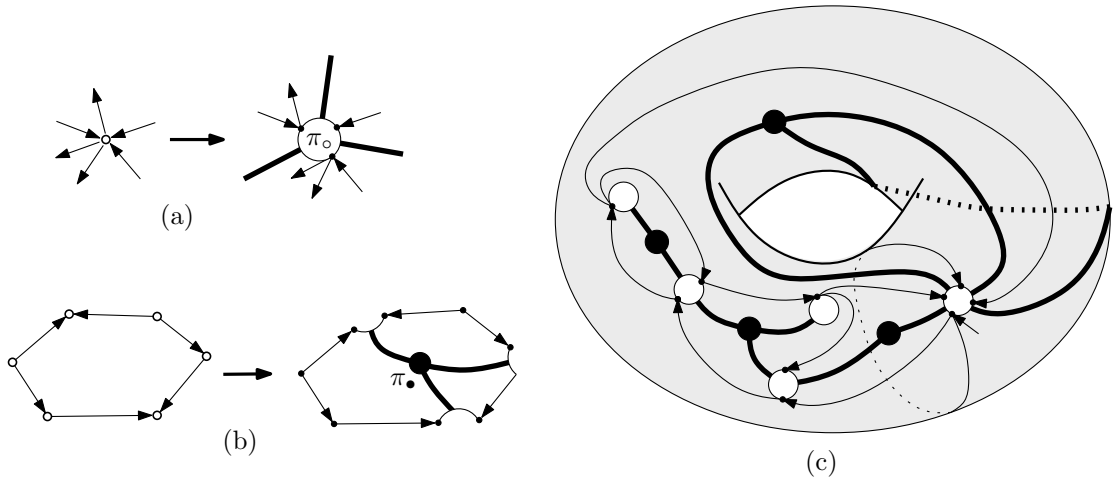


FIG. 3.8 – (a) Un sommet de $\mathfrak{m}$ avec l arêtes entrantes donne naissance à l sommets de la carte $\Psi_1(\mathfrak{m},(I,O))$, et à un sommet blanc de degré l de la carte $\Psi_2(\mathfrak{m},(I,O))$; (b) Chaque face de $\mathfrak{m}$ donne un sommet noir de la carte $\Psi_2(\mathfrak{m},(I,O))$; (c) Cette construction appliquée à la carte orientée de la figure 3.5(b)

H', la permutation τ de H, et la permutation π de H' en posant :

$$\tau' = \sigma'\pi_\circ^{-1}\ ,\ \tau = \tau'_{|H} \text{ et } \pi = \pi_\circ\pi_\bullet^{-1},$$

où l'on commet un léger abus de notations en considérant que $\pi_\circ = \sigma'_{|I'}$ agit comme l'identité sur O', et que $\pi_\bullet = \phi'_{|O'}$ agit comme l'identité sur I'. On définit alors $\Psi_1(\mathfrak{m},(I,O))$ comme la carte (H,τ,α) de racine $t = \tau'(i)$, et $\Psi_2(\mathfrak{m},(I,O))$ comme la carte (H',π,α') de racine i.

Définition 21. L'application Ψ associe à une orientation gauche $(\mathfrak{m},(I,O))$ la paire de cartes $(\Psi_1(\mathfrak{m},(I,O)),\Psi_2(\mathfrak{m},(I,O)))$.

La figure 3.9 montre l'image par l'application Ψ de la carte orientée de la figure 3.6, où l'on a conservé l'étiquetage des demi-arêtes de la figure 3.5. Le résultat suivant complète la proposition 23 :

Proposition 24. *L'application Ψ est une bijection entre les orientations gauches de genre g à n arêtes, et les paires formées d'un arbre plan de taille n et d'une carte à une face bipartie de genre g à $n+1$ arêtes.*

En associant les propositions 23 et 24, on obtient le principal résultat de ce chapitre :

Théorème 2. *L'application $\Psi \circ \Delta$ est une bijection entre les cartes couvertes de genre g à n arêtes, et les paires formées d'un arbre plan de taille n et d'une carte à une face bipartie de genre g à $n+1$ arêtes.*

Remarque 10. De manière informelle, on peut dire que l'application Ψ associe à une orientation gauche $(\mathfrak{m},(I,O))$ deux « squelettes » : l'arbre $\Psi_1(\mathfrak{m},(I,O)$ peut être vu comme un squelette de $\mathfrak{m}$, dont il fournit toutes les arêtes, alors que la carte $\Psi_2(\mathfrak{m},(I,O))$ joue le rôle d'un squelette de la surface sur laquelle $\mathfrak{m}$ est dessinée.

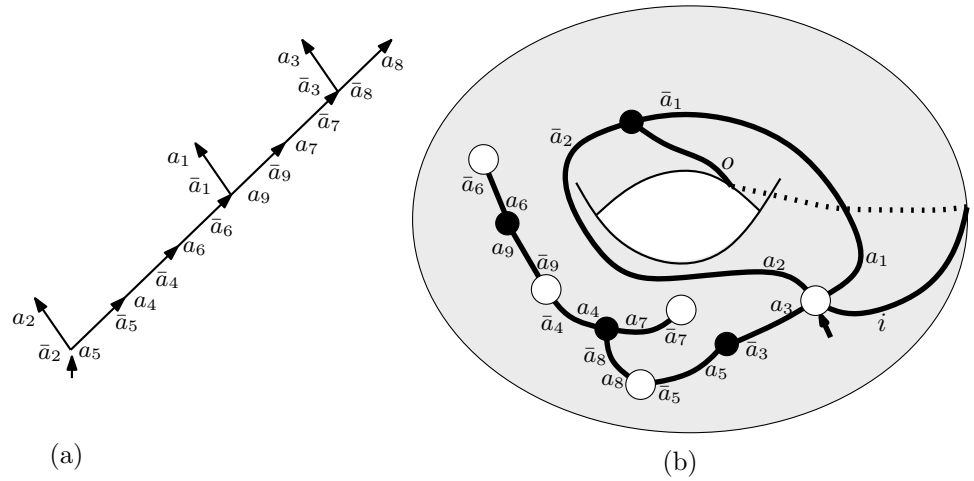


FIG. 3.9 – (a) L'arbre $\Psi_1(\mathfrak{m}, (I, O))$; (b) La carte à une face bipartie $\Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$

3.3 DÉMONSTRATIONS

Nous donnons dans cette partie les démonstrations des énoncés des parties précédentes, notre but étant d'établir le théorème 2. Avant de se lancer, nous invitons le lecteur à s'attarder un peu sur les figures 3.5, 3.8 et 3.9, afin d'avoir en tête les interprétations graphiques des différentes permutations en jeu. Nous commençons par démontrer le lemme 22 :

Démonstration du lemme 22. Soient $h \in S$ et $l = \theta_{|S}(h)$. Par définition de la restriction, il existe une suite de demi-arêtes $h_1, h_2, \ldots, h_{k+1} = l$ telles que $\theta(h) = h_1$, $\theta(h_i) = h_{i+1}$ et $h_i \notin S$ pour $i = 1 \ldots k$. Par définition de θ, on obtient alors $h_1 = \sigma\alpha(h)$, et $h_{i+1} = \sigma(h_i)$ pour $i = 1 \ldots k$. De plus, comme S est stable par α, on sait que la demi-arête $\alpha(h)$ appartient à S, d'où $l = \sigma_{|S}\alpha_{|S}(h)$ ce qui démontre que $\theta_{|S} = \sigma_{|S}\alpha_{|S}$. La propriété $\theta_{|\overline{S}} = \phi_{|\overline{S}}\alpha_{|\overline{S}}$ est similaire.

Montrons maintenant que $(\mathfrak{m}, S)$ est une carte couverte si et seulement si θ est cyclique. Supposons d'abord que $(\mathfrak{m}, S)$ est une carte couverte. Alors, puisque $\mathfrak{m}_{|S}$ est couvrante, chaque cycle de θ contient un élément de S, et donc $\theta_{|S}$ et θ ont le même nombre de cycles. Or par ce qui précède $\theta_{|S}$ est la permutation-face de $\mathfrak{m}_{|S}$, qui n'a qu'une face : on en déduit donc que θ n'a qu'un seul cycle.

Réciproquement, supposons que θ est cyclique. S'il existait un cycle de σ sans élément de S, ce cycle resterait un cycle de θ. C'est impossible (sauf si $S = H$), et la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ est donc couvrante. De plus, la restriction $\theta_{|S}$ est cyclique, et donc $\mathfrak{m}_{|S}$ n'a qu'une seule face. □

On peut maintenant donner une démonstration plus satisfaisante de la proposition 19 :

Démonstration de la proposition 19. Soit $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ une carte et $S \subset H$ stable par α. On note θ la fonction de parcours de la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S}$ de $\mathfrak{m}$. Alors, on déduit directement des définitions que θ est aussi la fonction de parcours de la sous-carte $\mathfrak{m}^*_{|\overline{S}}$ dans la carte duale $\mathfrak{m}^* = (H, \phi, \alpha)$. La proposition est alors une conséquence immédiate du lemme 22. □

3.3.1 Démonstration de la proposition 23

Nous définissons d'abord une application Γ, dont nous montrerons qu'elle est inverse de Δ.

Définition 22. L'application Γ est définie sur les cartes orientées par la procédure suivante, qui, étant donnée une carte orientée $(\mathfrak{m}, (I, O))$ de racine r renvoie un sous-ensemble S de ses demi-arêtes.

1. On pose $S = \emptyset$, $R = \emptyset$ et l'on initialise l'arête courante h à la valeur r.
2. • Si $h \notin S \uplus R$ alors :
   Si $h \in O$ alors on ajoute h et $\alpha(h)$ à S, sinon on ajoute h et $\alpha(h)$ à R.
   • On met l'arête courante h à la valeur $\sigma\alpha(h)$ si h est dans S, et à la valeur $\sigma(h)$ sinon.
   On répète l'étape 2 jusqu'à ce que l'arête courante h soit égale à r.
3. On renvoie la paire $(\mathfrak{m}, S)$.

Nous allons commencer par montrer que l'image d'une carte couverte par Δ est bien une orientation gauche. Étant données une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ et une orientation (I, O) de $\mathfrak{m}$, on définit *l'application arrière* β par $\beta(h) = \sigma(h)$ si $h \in O$ et $\beta(h) = \sigma\alpha(h)$ sinon. Remarquons que (I, O) est une orientation gauche si et seulement si pour toute demi-arête $h \in I$ il existe un entier $k \geq 0$ tel que $\beta^k(h)$ soit la racine de $\mathfrak{m}$.

Proposition 25. *L'image d'une carte couverte par Δ est une orientation gauche.*

Démonstration. Montrons d'abord que pour toute demi-arête $h \in H$, on a soit $\beta(h) = r$, soit $h <_\theta \beta(h)$. On distinguera quatre cas, selon que h est entrante ou sortante, et interne ou externe. On supposera que $\beta(h) \neq r$, ce qui implique en particulier que s'il existe $h' \in H$ telle que $\beta(h) = \theta(h')$, alors $\theta(h') \neq r$ et donc $h' <_\theta \theta(h')$, i.e. $h' <_\theta \beta(h)$.
cas 1 : h est sortante et externe. Puisque $h \in O$ on a $\beta(h) = \sigma(h)$ et puisque $h \notin S$ on a $\sigma(h) = \theta(h)$, et donc $h <_\theta \beta(h)$.
cas 2 : h est sortante et interne. Dans ce cas, $\beta(h) = \sigma(h) = \phi\alpha(h)$, et par construction de l'orientation (I, O), on a $h <_\theta \alpha(h)$. De plus, puisque $\alpha(h) \in S$, on a $\phi(\alpha(h)) = \theta(\alpha(h))$, d'où $\beta(h) >_\theta \alpha(h) >_\theta h$.
cas 3 : h est entrante et externe. Dans ce cas, $\beta(h) = \phi(h) = \sigma\alpha(h)$, et l'on sait de plus, par construction de l'orientation (I, O), que $h <_\theta \alpha(h)$. Or puisque $\alpha(h) \notin S$, on a $\sigma\alpha(h) = \theta(\alpha(h))$, et donc $\beta(h) >_\theta \alpha(h) >_\theta h$.
cas 4 : h est entrante et interne. Dans ce cas, on a $\beta(h) = \phi(h) = \theta(h)$, et donc $\beta(h) >_\theta h$.

Ainsi, pour toute $h \in H$, la suite $h, \beta(h), \beta^2(h), \ldots$ est strictement croissante tant qu'elle n'atteint pas la racine. Puisque H est fini, la racine est nécessairement atteinte, et $(\mathfrak{m}, (I, O))$ est une orientation gauche. □

Lemme 26. *La procédure de la définition 22 s'arrête. De plus, la liste de toutes les demi-arêtes courantes h visitées par la procédure est un cycle de la fonction de parcours θ de la paire $(\mathfrak{m}, S)$ qu'elle renvoie.*

Démonstration. Soit S_∞ le sous-ensemble de H formé de l'ensemble de toutes les demi-arêtes ajoutées à S durant l'exécution de la procédure (a priori, cette exécution pourrait être infinie), et notons θ_∞ la fonction de parcours associée à la sous-carte $\mathfrak{m}_{|S_\infty}$ de $\mathfrak{m}$.

Alors, à chaque étape de l'exécution, la demi-arête courante h est remplacée par la demi-arête $\theta_\infty(h)$: en effet, si à une étape donnée de l'exécution on a $h \in S$ alors $h \in S_\infty$ et $\theta_\infty(h) = \sigma\alpha(h)$, et si $h \in R$ alors $h \notin S_\infty$, et donc $\theta_\infty(h) = \sigma(h)$.

Ainsi, la suite de toutes les demi-arêtes courantes successives forme un cycle de la *permutation* θ_∞. Puisque la procédure commence avec $h = r$, cela implique que r est atteinte une seconde fois, et donc que la procédure termine. Enfin, S ne pouvant que croître, la valeur terminale de S est S_∞, ce qui conclut la démonstration. □

Fixons maintenant une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$, et une orientation gauche (I, O) de $\mathfrak{m}$. On note $(\mathfrak{m}, S) = \Gamma(\mathfrak{m}, (I, O))$, et on note θ sa fonction de parcours. On appelle C le cycle de θ qui contient l'arête racine r de $\mathfrak{m}$: de manière équivalente, C est donc la liste des demi-arêtes courantes vues par la procédure de la définition 22. Le lemme suivant est un point clé de ce chapitre :

Lemme 27. *Soit $h \in H$, et $l = \beta(h)$. Si l apparaît dans C, alors h apparaît dans C.*

Proposition 28. *La paire $(\mathfrak{m}, S) = \Gamma(\mathfrak{m}, (I, O))$ est une carte couverte.*

Démonstration de la proposition. Soit une demi-arête $h \in H$. Puisque $(\mathfrak{m}, (I, O))$ est une orientation gauche, il existe $k_h \geq 0$ tel que $\beta^{k_h}(h) = r$. Or la racine r apparaît dans C, on déduit donc du lemme et d'une induction immédiate que la demi-arête h apparaît dans C. Ainsi, tous les éléments de H apparaissent dans le même cycle C de θ : la fonction de parcours θ est donc cyclique, ce qui par le lemme 22 montre que $(\mathfrak{m}, S)$ est une carte couverte. □

Démonstration du lemme 27. Tout d'abord, par définition de β, on sait que $\sigma^{-1}(l) \in O$. On pose $p = \sigma^{-1}(l)$ et $j = \alpha\sigma^{-1}(l)$. Remarquons que, par définition de β, on a soit $h = p$, soit $h = j$, il est donc suffisant de montrer que p et j apparaissent *toutes les deux* dans C. On note $f = \theta^{-1}(l)$ le prédécesseur de l dans le cycle C, et l'on considère deux cas.

Si f est dans S, on a par construction $l = \sigma\alpha(f)$, donc $f = j$ et en particulier j apparaît dans C. De plus on voit en examinant la définition 22 qu'une demi-arête entrante j ne peut être ajoutée dans S par la procédure que si la demi-arête courante est égale à $\alpha(j)$. Cela implique que $\alpha(j) = p$ a été la demi-arête courante à un moment de l'exécution, et donc que p apparaît dans C.

De la même façon, si $f \in R$, on a $l = \sigma(f)$, donc $f = p$ et p apparaît dans C. Mais une demi-arête sortante p ne peut être ajoutée à R que lorsque la demi-arête courante est $\alpha(p)$, d'où l'on déduit que $\alpha(p) = j$ apparaît dans C. □

Lemme 29. *L'application $\Delta \circ \Gamma$ est l'identité sur les orientations gauches.*

Démonstration. Tout d'abord, les deux propositions ci-dessus montrent que cette composition est bien définie. Ensuite, fixons une orientation gauche $(\mathfrak{m}, (I, O))$, et soit $(\mathfrak{m}, S)$ son image par Γ. On déduit de la définition 22 et du lemme 26 que pour tout $j \in I$ et $p = \alpha(j)$, on a $j, p \in S$ si et seulement si $p <_\theta j$. L'ensemble I est donc exactement l'ensemble des demi-arêtes h telles que soit $h \in S$ et $\alpha(h) <_\theta h$, soit $h \notin S$ et $h <_\theta \alpha(h)$. En comparant avec la définition de Δ, on conclut la démonstration. □

Lemme 30. *L'application $\Gamma \circ \Delta$ est l'identité sur les cartes couvertes.*

Démonstration. Là encore, la composition est bien définie par les deux propositions ci-dessus. Fixons maintenant une carte couverte $(\mathfrak{m}, S)$, et soit (I, O) son orientation gauche associée par l'application Δ. Soit S' le sous-ensemble de H tel que $\Gamma(\mathfrak{m}, (I, O)) = (\mathfrak{m}, S')$; nous allons montrer que $S' = S$.

Supposons au contraire que $S' \neq S$, et soit h la plus petite demi-arête, pour l'ordre $<_\theta$, qui appartienne à la différence symétrique de S et S'. Remarquons que, puisque S et S' sont stables par α, $\alpha(h)$ appartient aussi à cette différence symétrique, et donc $h <_\theta \alpha(h)$. De plus, par construction, les suites de demi-arêtes courantes visitées par les procédures reconstruisant S et S' coïncident jusqu'à la demi-arête h, de sorte qu'on a aussi $h <_{\theta'} \alpha(h)$.

Si $h \in S$, puisque h apparaît avant $\alpha(h)$, on sait que $h \in O$. Mais, alors, h devrait aussi être dans S', puisque lorsque la procédure reconstruisant S' atteint h, l'arête $(h, \alpha(h))$ est visitée pour la première fois. On a donc une contradiction, qui montre que h ne peut appartenir à S.

On montre par un argument similaire que h ne peut appartenir à S', ce qui conclut la démonstration. □

Les deux lemmes précédents concluent la démonstration de la proposition 23. Il reste à démontrer le théorème 2.

3.3.2 Démonstration du théorème 2

Fixons une carte $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ et une orientation gauche (I, O) de $\mathfrak{m}$. On notera $\Psi_1 = \Psi_1(\mathfrak{m}, (I, O))$ et $\Psi_2 = \Psi_2(\mathfrak{m}, (I, O))$.

Lemme 31. *La carte Ψ_1 est connexe.*

Démonstration. Graphiquement, il est clair que le procédé de découpage des sommets ne rompt jamais un chemin gauche. Puisque dans une orientation gauche, toute demi-arête est rejointe par un chemin gauche partant de la racine, cette propriété reste vraie dans Ψ_1, et en particulier Ψ_1 est connexe. □

Lemme 32. *La carte Ψ_1 est un arbre. De plus, (I, O) est l'orientation « racine vers feuilles » de Ψ_1.*

Démonstration. Soit n le nombre d'arêtes de $\mathfrak{m}$. Alors, Ψ_1 a n arêtes. De plus, par définition du procédé de découpage, les sommets de Ψ_1 sont en bijection avec les demi-arêtes de I', et donc Ψ_1 a $n + 1$ sommets. Si l'on note f le nombre de faces de Ψ_1, et g son genre, on a donc par la formule d'Euler :

$$n + 1 + f = n + 2 - 2g,$$

ce qui donne $f + 2g = 1$. Comme $f \geq 1$ et $g \geq 0$, on en déduit que $(f, g) = (1, 0)$, i.e. que Ψ_1 est un arbre.

Or, comme on l'a remarqué dans la démonstration du lemme précédent, le procédé de découpage des sommets ne rompt jamais un chemin gauche. En particulier, dans Ψ_1 muni de l'orientation (I, O), tout sommet peut être atteint par un chemin orienté depuis la racine, ce qui montre que (I, O) est l'orientation « racine vers feuilles » de Ψ_1. □

Nous allons maintenant démontrer que Ψ_2 est une carte à une face bipartie. On note $\phi_1 = \tau\alpha$ et $\phi_2 = \pi\alpha'$ les permutations-faces de Ψ_1 et Ψ_2. On sait maintenant que ϕ_1 est cyclique. On notera également ϕ'_1 la permutation de H' définie par $\phi'_1 = \tau'\alpha'$, où l'on considère que τ' est une permutation de H' qui stabilise o.

Lemme 33. *Soit $u = \alpha\sigma^{-1}(r)$. Alors ϕ'_1 est une permutation cyclique de H', obtenue en ajoutant les demi-arêtes i et o dans cet ordre, juste après u dans le cycle ϕ_1.*

Démonstration. Puisque (I, O) est une orientation gauche, il existe h telle que $r = \beta(h)$, ce qui implique par définition de β que $\sigma^{-1}(r) \in O$, et donc que $u \in I$. Puisque $\sigma'\alpha(u) = i$ par définition de σ', on voit alors que $\phi'_1(u) = \tau'\alpha(u) = i$. On a de plus $\phi'_1(i) = \tau'(i) = o$. Enfin, comme $\alpha(u) \in O$ on a d'un part $\sigma'^{-1}_{|I'}(\alpha(u)) = \sigma'^{-1}_{|I'}(i)$, et d'autre part $\sigma'\sigma'^{-1}_{|I'}(\alpha(u)) \in O$. Cela montre que $\phi_1(u) = \tau\alpha(u) = \sigma'\sigma'^{-1}_{|I'}(i)$, c'est-à-dire que $\phi_1(u) = \phi'_1(o)$. □

Plus concrètement, on peut interpréter la carte (H', τ', α'), de face ϕ'_1 comme l'arbre obtenu en recollant l'arête (i, o) au sommet racine de l'arbre Ψ_1.

Lemme 34 (voir figure 3.10)**.** *Soit $o_1 \in O'$ une demi-arête sortante, et soit $o_2 = \phi'_{1|O'}(o_1)$ la première demi-arête sortante apparaissant après o_1 dans le cycle ϕ'_1.*
Alors si l'on note $i_1 = \alpha'(o_1)$ et $i_2 = \alpha'(o_2)$, on a : ${\phi_2}^2(i_2) = i_1$.

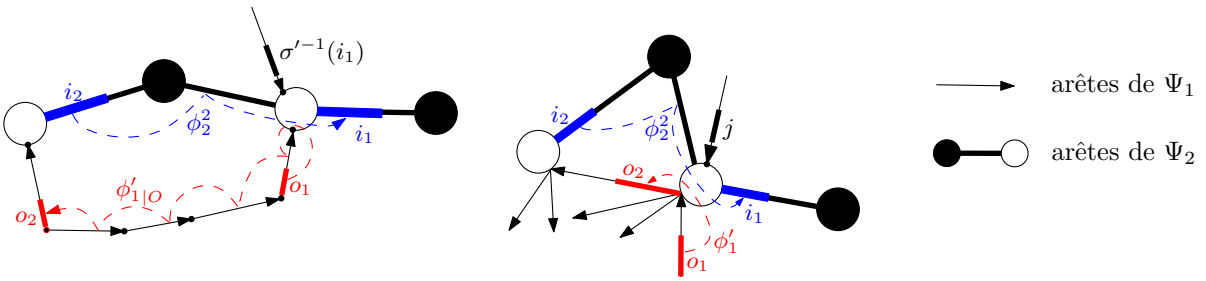


FIG. 3.10 – Les deux cas de la démonstration du lemme 34.

Démonstration. On considère deux cas.
cas 1 : on suppose que $\sigma'^{-1}(i_1) \in I'$. Dans ce cas on a $\tau'(i_1) = i_1$, d'où $\phi'_1(o_1) = i_1$. Par conséquent, $o_2 = {\phi'_1}^l(i_1)$, pour le plus petit l tel que ${\phi'_1}^l(i_1)$ soit sortante. Or, remarquons que ϕ'_1 et ϕ' coïncident sur les demi-arêtes entrantes : on a donc aussi $o_2 = \phi'^l(i_1)$, et l est encore le plus petit entier telle que cette quantité soit sortante. Or, $\phi'^{-1}(i_1) = \alpha'\sigma'^{-1}(i_1) \in O'$ par hypothèse, donc $\phi'_{|O'}[\alpha'\sigma'^{-1}(i_1)] = o_2$. En revenant à la définition de ϕ_2, on obtient : $\phi_2(i_2) = {\phi'_{|O'}}^{-1}(o_2) = \alpha'\sigma'^{-1}(i_1)$. Enfin, on a $\phi_2[\alpha'\sigma'^{-1}(i_1)] = \pi_\circ\pi_\bullet^{-1}\sigma'^{-1}(i_1) = i_1$ par définition de $\pi_\circ$ et $\pi_\bullet$, d'où l'on déduit que ${\phi_2}^2(i_2) = i_1$.
cas 2 : on suppose que $\sigma'^{-1}(i_1) \in O'$. Dans ce cas on pose $j = (\sigma'_{|I'})^{-1}(i_1)$, et l'on sait que $\phi'_1(o_1) = \sigma'(j) \in O'$, d'où $o_2 = \sigma'(j)$. Or, on a $\phi'\alpha'(j) = \sigma'(j) = o_2 \in O'$, d'où $\phi'^{-1}_{|O'}(o_2) = \alpha'(j)$, et donc $\phi_2(i_2) = \phi'^{-1}_{|O'}\alpha'(i_2) = \alpha'(j)$. Ensuite, $\phi_2(\alpha'(j)) = \sigma'_{|I'}(j)$ puisque $j \in I'$, donc $\phi_2\alpha'(j) = i_1$, et finalement ${\phi_2}^2(i_2) = i_1$. □

Lemme 35. *La carte Ψ_2 est connexe et n'a qu'une seule face. Un coloriage propre de ses sommets est obtenu en coloriant en blanc les sommets qui ne sont incidents qu'à des demi-arêtes entrantes, et en noir ceux qui ne sont incidents qu'à des demi-arêtes sortantes.*

Démonstration. Par le lemme précédent et le fait que ϕ_1' est cyclique, tous les éléments de I' appartiennent au même cycle de ϕ_2 : appelons le c. Pour tout $h \in O'$, on a $\phi_2(h) \in I'$ puisque π stabilise I' et O', et donc h est aussi un élément du cycle c. Ainsi, c est le seul cycle de ϕ_2, et la carte Ψ_2 est connexe et n'a qu'une face.

Enfin, le fait que π stabilise I' et O' implique que chaque cycle de π est soit formé de demi-arêtes entrantes seulement, soit de demi-arêtes sortantes seulement, ce qui démontre la deuxième assertion. □

Nous allons maintenant définir une application Ω, dont nous montrerons qu'elle est l'inverse de Ψ. Commençons par donner une idée visuelle de l'action de Ω. Fixons un arbre plan à n arêtes $\mathfrak{m}_1$ et une carte à une face bipartie $\mathfrak{m}_2$ de genre g à $n+1$ arêtes. Nous représentons $\mathfrak{m}_2$ de manière topologique, dessinée sur un tore à g anses, et nous procédons ensuite à la construction suivante :

1. nous collons ensemble les deux racines de $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ comme sur la figure 3.11 (1) ;
2. nous parcourons simultanément le bord de $\mathfrak{m}_1$ et celui de $\mathfrak{m}_2$, et chaque fois que nous découvrons une nouvelle arête de $\mathfrak{m}_1$, nous collons son extrémité avec un nouveau coin blanc du bord de $\mathfrak{m}_2$, comme sur la figure 3.11 (2–5).

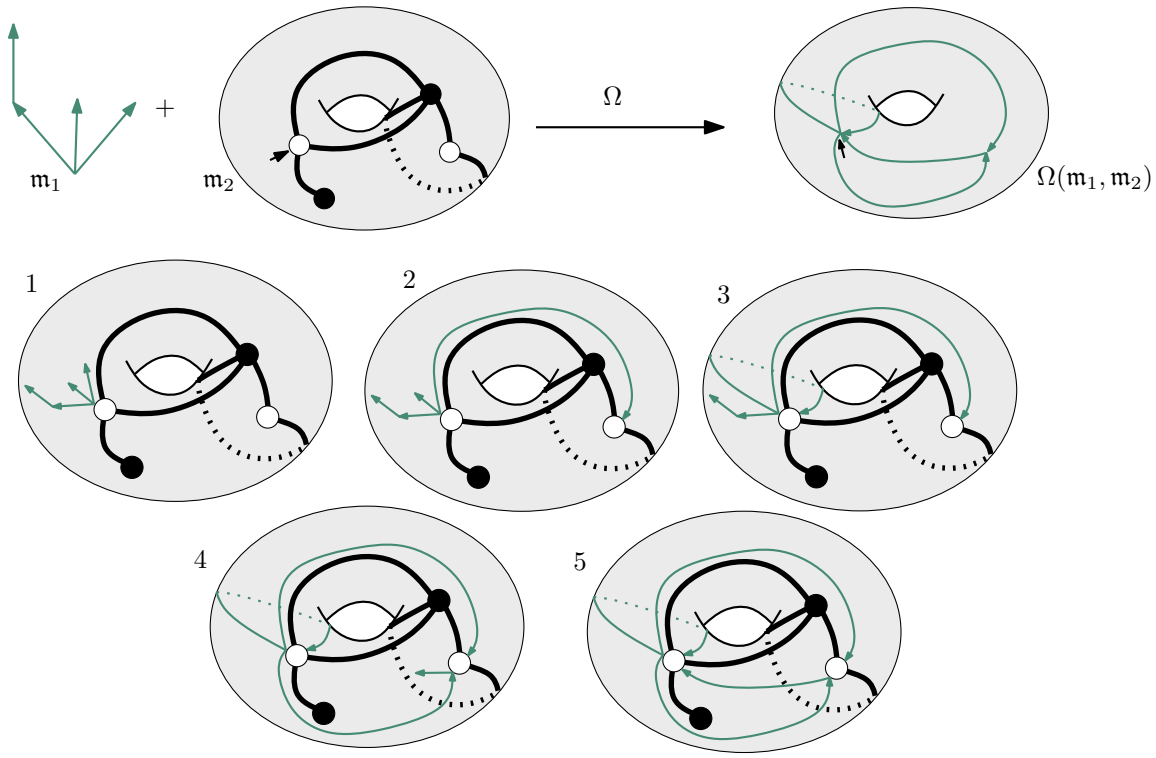


Fig. 3.11 – Le « film » de l'application Ω.

Pour définir Ω plus formellement, nous avons besoin d'être capable de considérer $\mathfrak{m}_1$ et $\mathfrak{m}_2$ sur le même ensemble de demi-arêtes. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 36. *Soit $\mathfrak{m}_1$ un arbre plan à n arêtes, et $\mathfrak{m}_2 = (H', \pi, \alpha')$ une carte à une face bipartie à $n+1$ arêtes. Soit i la racine de $\mathfrak{m}_2$, $o = \alpha'(i)$, et $H = H' \setminus \{i, o\}$. On note $H' = I' \uplus O'$ la bipartition de H' induite par la bipartition des sommets de $\mathfrak{m}_2$ telle que I' contienne i. On pose aussi $I = I' \setminus \{i\}$ et $O = o' \setminus \{o\}$.*
Alors, quitte à changer l'ensemble de demi-arêtes de $\mathfrak{m}_1$, on peut écrire $\mathfrak{m}_1 = (H, \tau, \alpha)$ où :

1. *$\alpha = \alpha'_{|H}$*
2. *(I, O) est l'orientation « racine vers feuilles » de $\mathfrak{m}_1$*
3. *Si on note τ' la permutation de H' obtenue en ajoutant i juste après la racine de $\mathfrak{m}_1$ dans le cycle de τ la contenant, et laissant o invariant, et si l'on note $\phi'_1 = \tau'\alpha'$ et $\phi_2 = \pi\alpha'$, alors pour toute demi-arête $h \in O'$, on a : $\phi_2^2\alpha'\phi'_{1|O'}(h) = \alpha'(h)$ (en d'autre termes, la propriété du lemme 34 est vérifiée).*

On peut alors donner la définition formelle de l'application Ω :

Définition 23. Soient $\mathfrak{m}_1$ un arbre plan à n arêtes et $\mathfrak{m}_2$ une carte à une face bipartie à $n+1$ arêtes, donnés sous la forme du lemme 36. On définit la permutation σ' de H' par

$$\sigma'(h) = \begin{cases} \tau'(h) & \text{si } h \in O' \\ \tau'\pi(h) & \text{si } h \in I'. \end{cases}$$

On pose alors $\sigma = \sigma'_{|H}$, et on définit l'application Ω par :

$$\Omega(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) := ((H, \sigma, \alpha), (I, O))$$

Démonstration du lemme. On suppose que $\mathfrak{m}_1$ est donnée sous la forme $\mathfrak{m}_1 = (\bar{H}, \bar{\tau}, \bar{\alpha})$, et on note $\bar{H} = \bar{I} \uplus \bar{O}$ son orientation « racine vers feuilles ». On construit $\bar{\tau}'$ à partir de $\bar{\tau}$ comme dans l'énoncé du lemme, et on note $\bar{\phi}'_1 = \bar{\tau}'\bar{\alpha}'$. Alors si l'on note $\bar{I}' := \bar{I} \uplus \{i\}$ et $\bar{O}' := \bar{O} \uplus \{o\}$, la permutation $\alpha'\bar{\phi}'_{1|\bar{O}'}\alpha'$ est une permutation cyclique de $\bar{I}'$. On notera alors $\alpha'\bar{\phi}'_{1|\bar{O}'}\alpha' = (j_n, \ldots, j_1, i)$, et on notera également $\phi^2_{2|I'} = (i, i_1, \ldots, i_n)$. Soit maintenant κ l'unique application $\bar{I}' \to I'$ telle que $\kappa(j_k) = i_k$ pour tout k et $\kappa(i) = i$. On étend κ à une application $\bar{H} \uplus \{i, o\} \to H'$ en posant $\kappa(\bar{h}) = \alpha\kappa\bar{\alpha}(\bar{h})$ pour $\bar{h} \in \bar{O}'$. Enfin, on pose $\tau' = \kappa\bar{\tau}'\kappa^{-1}$.

Alors, par construction, la carte (H, τ, α) vérifie les propriétés 1-2-3 de l'énoncé du lemme. Il suffit donc de vérifier que cette carte est isomorphe à $\mathfrak{m}_1$. Puisque $\tau = \kappa\bar{\tau}\kappa^{-1}$ par définition, il suffit de montrer que $\alpha = \kappa\bar{\alpha}\kappa^{-1}$. Or pour une demi-arête sortante $h \in O$, on $\kappa\bar{\alpha}\kappa^{-1}(h) = \kappa\bar{\alpha}\bar{\alpha}^{-1}\kappa^{-1}\alpha(h) = \alpha(h)$. De plus, pour une arête entrante $i_k \in I$, on a $\kappa\bar{\alpha}\kappa^{-1}(i_k) = \alpha\kappa\bar{\alpha}\bar{\alpha}(j_k) = \alpha(i_k)$. On a donc $\alpha = \kappa\bar{\alpha}\kappa^{-1}$, et κ (ou plus précisément, sa restriction $\bar{H} \to H$) donne un isomorphisme entre les deux cartes. □

Proposition 37. *L'application $\Omega \circ \Psi$ est l'identité sur les orientations gauches.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{m} = (H, \sigma, \alpha)$ une carte et (I, O) une orientation gauche de $\mathfrak{m}$. On note $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) = \Psi(\mathfrak{m}, (I, O))$, avec $\mathfrak{m}_1 = (H, \tau, \alpha)$ et $\mathfrak{m}_2 = (H', \pi, \alpha')$. On note également $((H, \tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}), \tilde{I}, \tilde{O}) = \Omega(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$. On utilise la même notation que précédemment pour la permutation σ', et on note $\tilde{\sigma}'$ la permutation de H' donnée dans la définition 23.

Alors, on déduit du lemme 35 que $I = \tilde{I}$ et $O = \tilde{O}$. De plus, par construction, $\tilde{\alpha}$ est égale à la permutation-arêtes de $\mathfrak{m}_1$, de sorte que $\tilde{\alpha} = \alpha$. Ensuite, par définition,

$\tau' = \sigma'\pi_\circ^{-1}$ et σ' coïncident sur les demi-arêtes sortantes. Enfin, on a $\tau'\pi = \sigma'\pi_\bullet^{-1}$, donc σ' et $\tau'\pi$ coïncident sur les demi-arêtes entrantes. Ainsi, $\sigma' = \tilde{\sigma}'$ et la proposition est démontrée. □

Proposition 38. *Ω est une application bien définie de l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des paires formées d'un arbre plan à n arêtes et d'une carte à une face bipartie à $n+1$ arêtes, vers l'ensemble des orientations gauches à n arêtes. De plus, $\Psi \circ \Omega$ est l'identité sur $\mathcal{P}_n$.*

Démonstration. Fixons $(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2) \in \mathcal{P}_n$ et $(\mathfrak{m}, (I, O)) = \Omega(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$, et montrons d'abord que $(\mathfrak{m}, (I, O))$ est bien une orientation gauche. D'abord, le fait que α soit une involution de H qui échange I et O se déduit du fait que $\mathfrak{m}_2$ est bipartie. Ensuite, notons β l'application arrière de la carte orientée $(\mathfrak{m}, (I, O))$. Le fait que τ et σ coïncident sur les arêtes sortantes implique que β est aussi l'application arrière de l'*arbre* orienté $(\mathfrak{m}_1, (I, O))$. Or, il est clair que l'orientation racine-vers-feuilles d'un arbre est une orientation gauche. Ainsi, pour tout h, il existe k_h tel que $\beta^{k_h}(h) = r$, et $(\mathfrak{m}, (I, O))$ est une orientation gauche.

Montrons maintenant que $\Psi \circ \Omega$ est l'identité. On note $\mathfrak{m}_1 = (H, \tau, \alpha)$, $\mathfrak{m}_2 = (H', \pi, \alpha')$, et on définit σ' et $\mathfrak{m} = ((H, \sigma, \alpha), (I, O))$ comme dans la définition 23. On pose $\tilde{\tau}' = \sigma'{\sigma'_{|I'}}^{-1}$ et $\tilde{\pi} = \sigma'_{|I'}{\phi'_{|O'}}^{-1}$. La seule chose à démontrer est que $\tau' = \tilde{\tau}'$, et $\pi = \tilde{\pi}$.

Or, τ' et $\tilde{\tau}'$ coïncident sur les demi-arêtes sortantes, puisque pour $h \in O'$ on a $\tilde{\tau}'(h) = \sigma'(h)$, qui est égal à $\tau'(h)$ par définition de σ'.

Ensuite, fixons $j \in I'$, et posons $h = \sigma'_{|I'}(j)$. Par définition de $\sigma'_{|I'}$, on a $\sigma'^k(j) = h$ pour un certain k, avec $\sigma'^l(j) \in O'$ pour $l < k$. Puisque $j \in I'$, on a $\sigma'(j) = \tau'\pi(j)$, et puisque σ' coïncide avec τ' sur les demi-arêtes sortantes, on a $h = \tau'^k(\pi(j))$. Mais par la propriété 2 de la définition 23, chaque cycle de τ' a exactement une demi-arête entrante, et donc $h = \pi(j)$. On a donc $\pi(j) = \sigma'_{|I'}(j)$, et donc π et $\tilde{\pi}$ coïncident sur les demi-arêtes entrantes.

Soit maintenant $h \in I'$ une demi-arête entrante. Par définition de σ', et par le fait que π stabilise O', on a $\tau'(h) = \sigma'\pi^{-1}(h)$. Par ce qui précède, on sait que $\pi^{-1}(h) = {\sigma'_{|I'}}^{-1}(h)$, et donc $\tau'(h) = \sigma'{\sigma'_{|I'}}^{-1}(h) = \tilde{\tau}'(h)$. Ainsi, τ' et $\tilde{\tau}'$ coïncident sur les demi-arêtes entrantes.

Enfin, soit $h \in O'$ une demi-arête sortante, et montrons que $\pi(h) = \tilde{\pi}(h)$. D'abord, par la propriété 3 de la définition 23, on a $\phi_2^2\alpha'(h) = \alpha'{\phi'_{1|O'}}^{-1}(h)$. En se rappelant que $\phi_2 = \pi\alpha'$, on obtient $\pi\alpha'\pi(h) = \alpha'{\phi'_{1|O'}}^{-1}(h)$, et donc $\pi(h) = \alpha'\pi^{-1}\alpha'{\phi'_{1|O'}}^{-1}(h)$. Soit alors $u = \alpha'\pi^{-1}\alpha'{\phi'_{1|O'}}^{-1}(h)$. Par définition de $\phi'_{1|O'}$, on a ${\phi'_1}^k\alpha'\pi\alpha'(u) = h$ pour le plus petit k tel que cette quantité appartienne à O'. Or, puisque $\phi'_1 = \tau'\alpha'$, on a $\phi'_1\alpha'\pi\alpha'(u) = \tau'\alpha'\alpha'\pi\alpha'(u) = \tau'\pi\alpha'(u)$. De plus, puisque τ' et $\sigma'\pi^{-1}$ coïncident sur les demi-arêtes entrantes, cette dernière quantité est égale à $\sigma'\alpha'(u)$. Par conséquent, $h = {\phi'_1}^{k-1}\sigma'\alpha'(u)$, et k est le plus petit entier tel que cette quantité soit dans O'. Or, pour toute demi-arête entrante $j \in I'$, on a $\phi'_1(j) = \tau'\alpha'(j) = \sigma'\alpha'(j)$ puisque $\alpha'(j) \in O'$. Puisque $\phi' = \sigma'\alpha'$, on obtient donc que $h = \phi'^k(u)$, pour le plus petit k tel que cette quantité soit dans O'. De manière équivalente, $u = {\phi'_{|O'}}^{-1}(h)$, ce qui donne $\pi(h) = {\phi'_{|O'}}^{-1}(h)$, et donc π et $\tilde{\pi}$ coïncident sur les demi-arêtes sortantes.

Nous avons donc montré que $\pi = \tilde{\pi}$ et $\tau' = \tilde{\tau}'$ dans tous les cas, ce qui démontre la proposition. □

Les deux propositions ci-dessus terminent la démonstration de la proposition 24, et donc du Théorème 2.

3.4 Corollaires énumératifs

3.4.1 Cartes couvertes

La première conséquence du théorème 2 est le résultat suivant :

Théorème 3. *Le nombre $C^{v,f}(n)$ de cartes couvertes à n arêtes, v sommets, et f faces est donné par :*

$$C^{v,f}(n) = \mathrm{Cat}(n)\beta^{v,f}(n+1) \tag{3.12}$$

où $\beta^{v,f}(n+1)$ est le nombre de cartes à une face biparties à $n+1$ arêtes, v sommets blancs et f sommets noirs.

Une version plus faible du théorème 3, où l'on contrôle un paramètre de moins, s'énonce comme suit :

Corollaire 14. *Le nombre $C_g(n)$ de cartes couvertes de genre g à n arêtes satisfait :*

$$C_g(n) = \mathrm{Cat}(n)\beta_g(n+1) \tag{3.13}$$

où $\beta_g(n+1)$ est le nombre de cartes à une face biparties de genre g à n arêtes.

En utilisant les expressions connues de $\beta_g(n)$ pour les premiers genres (voir [55]), on obtient les expressions suivantes pour les nombres de cartes couvertes :

$$C_0(n) = \mathrm{Cat}(n)\frac{(2n+2)!}{(n+2)!(n+2)!},\ C_1(n) = \mathrm{Cat}(n)\frac{(2n+1)!}{6(n+1)!(n-2)!},$$
$$C_2(n) = \mathrm{Cat}(n)\frac{(5n^2+3n+4)(2n)!}{1440(n-1)!(n-4)!}.$$

Intéressons-nous maintenant au cas du tore. Puisque les deux seules paires d'entiers naturels de somme 1 sont $(0,1)$ et $(1,0)$, il y a deux familles de cartes couvertes de genre 1 : les cartes boisées, et les duales des cartes boisées. La dualité étant une involution, on en déduit qu'exactement la moitié des cartes couvertes de genre 1 sont des cartes boisées. On obtient ainsi une démonstration bijective d'une formule de Lehman et Walsh :

Corollaire 15 ([96])**.** *Le nombre de cartes boisées à n arêtes sur le tore est :*

$$T_1(n) = \frac{1}{2}C_1(n) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{12(n+1)!^2 n!(n-2)!}.$$

3.4.2 Une identité reliant la formule de Jackson à celle d'Harer et Zagier

Une conséquence inattendue de notre bijection est qu'elle donne une nouvelle identité combinatoire, où les nombres de cartes couvertes n'apparaissent pas, et qui ne concerne que les cartes à une face. En effet, rappelons que grâce à l'approche directe par recollement bord à bord, nous avons obtenu une expression de $C^{v,f}(n)$ en termes des nombres de cartes à une face (équation (3.6)). En comparant cette expression avec celle du théorème 3, on obtient une identité reliant les nombres de cartes à une face biparties aux nombres de cartes à une face générales :

Corollaire 16 (Une nouvelle identité combinatoire)**.** *Les nombres comptant les cartes à une face générales et biparties sont reliés par la formule :*

$$\beta^{v,f}(n+1) = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!(n+1)!}{(2n_1)!(2n_2)!}\epsilon^v(n_1)\epsilon^f(n_2). \tag{3.14}$$

En termes de séries génératrices, la formule de Jackson [58]

$$\sum_{p,q\geq 1} \beta^{p,q}(n+1)y^p z^q = (n+1)! \sum_{i,j\geq 1} \binom{n}{i-1, j-1}\binom{y}{i}\binom{z}{j} \tag{3.15}$$

se déduit de celle d'Harer et Zagier [56] :

$$\sum_{p\geq 1} \epsilon^p(n)y^p = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sum_{i\geq 1} 2^{i-1}\binom{n}{i-1}\binom{y}{i}. \tag{3.16}$$

Remarque : Il existe une variante de la formule de Jackson due à Adrianov [1]. L'article [85] donne une démonstration de l'équivalence des formules de Jackson et d'Adrianov.

Démonstration. L'équation (3.14) s'obtient immédiatement en comparant les équations (3.6) et (3.12). Montrons comment retrouver l'équation (3.15) à partir de (3.16). On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p,q\geq 1} \beta^{p,q}(n+1)y^p z^q \\
&\overset{Eq.\ (3.14)}{=} \sum_{p,q\geq 1}\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!(n+1)!}{(2n_1)!(2n_2)!}\epsilon^p(n_1)\epsilon^q(n_2)y^p z^q \\
&= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!(n+1)!}{(2n_1)!(2n_2)!}\left(\sum_{p\geq 1}\epsilon^p(n_1)y^p\right)\left(\sum_{q\geq 1}\epsilon^q(n_2)z^q\right) \\
&\overset{Eq.\ (3.16)}{=} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!(n+1)!}{2^n n_1! n_2!}\sum_{i,j\geq 1} 2^{i+j-2}\binom{n_1}{i-1}\binom{n_2}{j-1}\binom{y}{i}\binom{z}{j} \\
&= (n+1)!\sum_{i,j\geq 1}\binom{y}{i}\binom{z}{j}2^{i+j-n-2}\sum_{n_1+n_2=n}\binom{n}{i-1, j-1, n_1-i+1, n_2-j+1}
\end{aligned}$$

où la deuxième et la quatrième égalités ne sont que des réarrangements de termes. Or, on a $\binom{n}{i-1,j-1,n_1-i+1,n_2-j+1} = \binom{n}{i-1,j-1}\binom{n-i-j+2}{n_1-i+1,n_2-j+1}$, et donc la formule du binôme de Newton donne :

$$\sum_{n_1+n_2=n}\binom{n}{i-1, j-1, n_1-i+1, n_2-j+1} = \binom{n}{i-1, j-1}2^{n-i-j+2}$$

ce qui démontre la formule de Jackson (équation (3.15)). □

4

Cartes bicolores et constellations

4.1 Introduction : universalité des exposants de comptage

Contrairement au chapitre 2, où nous nous sommes restreints à des cartes à une seule face, et au chapitre 3, où nous avons étudié des cartes munies d'une structure supplémentaire (une sous-carte couvrante), nous allons étudier dans ce chapitre des cartes qui seront simplement *enracinées*. Plus précisément, nous allons considérer plusieurs *familles* de cartes enracinées (en fait, une infinité), et effectuer leur énumération asymptotique, via la combinaison d'une approche bijective et de techniques de séries génératrices. Nous verrons que les résultats obtenus pour les différentes familles ont tous une forme commune, et dépendent peu de la famille considérée : les propriétés de ce type sont connues sous le nom *de résultats d'universalité*.

Dans le cas planaire, le premier à énumérer les cartes enracinées fut W. Tutte, dans l'article fondateur *A census of planar maps* [92]. Les remarquables formules obtenues par Tutte impliquent en particulier que le nombre de cartes planaires enracinées à n arêtes est équivalent à : $\frac{2}{\sqrt{\pi}} n^{-5/2} 12^n$ quand n tend vers l'infini. Plus tard, bien d'autres familles de cartes enracinées ont été considérées par Tutte et ses successeurs (triangulations,

cartes à degrés de faces prescrits, cartes avec des contraintes de connexité plus fortes, voir [12, 53, 51, 50]). L'universalité du comportement asymptotique des cartes planaires se traduit par le fait que dans chacune de ces familles, le nombre de cartes enracinées de taille n croît comme :

$$A \cdot B^n \cdot n^{-5/2}$$

pour des constantes $A, B > 0$ dépendant de la famille considérée. Ainsi, l'exposant $-5/2$ est une caractéristique *universelle* de la classe des cartes planaires, et est, en un sens, plus important que la constante de croissance B, qui n'est qu'un paramètre de normalisation dépendant des particularités « locales » de la famille étudiée.

Dans le cas du genre supérieur, les premiers à avoir effectué l'énumération des cartes enracinées sont Bender et Canfield, dans l'article [10], qui fut prolongé par de nombreux autres travaux [11, 8, 13]. Bender et Canfield ont montré, par une méthode de calcul sur des séries génératrices à plusieurs variables, que le nombre de cartes enracinées de genre g à n arêtes est équivalent à :

$$t_g \cdot 12^n \cdot n^{\frac{5}{2}(g-1)} \tag{4.1}$$

pour une constante $t_g > 0$. Ainsi, l'exposant de comptage des cartes de genre g est linéaire en le genre, de pente $\frac{5}{2}$, un fait remarquable qui avec les méthodes de [10] était difficile à interpréter de manière combinatoire. Plus tard, Gao [49] a généralisé les méthodes de Bender et Canfield au cas des $2k$-angulations, c'est-à-dire au cas des cartes enracinées dont toutes les faces ont un degré pair $2k$ fixé. Il a montré l'existence de deux constantes A_k, B_k, telles que le nombre de telles cartes à n arêtes croisse comme :

$$t_g (A_k n)^{\frac{5}{2}(g-1)} B_k^n.$$

Gao a donc exhibé un *phénomène d'universalité* pour les cartes de genre g, avec un exposant de comptage $\frac{5}{2}(g-1)$, au moins pour les $2k$-angulations. Remarquons aussi que la constante multiplicative t_g, dont nous reparlerons au chapitre suivant, apparaît dans la formule, et est donc elle aussi universelle. Dans le même article, Gao a conjecturé des formules analogues pour les $2D$-angulations, cartes dont les faces ont un degré appartenant à un sous-ensemble fini $2D$ de $2\mathbb{N}$, sans parvenir à les démontrer.

L'interprétation des exposants de comptage passe souvent par des méthodes bijectives, qui permettent d'interpréter les objets étudiés en fonction d'objets plus simples dont les exposants sont bien connus. Ainsi, Schaeffer a donné dans sa thèse [84] une interprétation satisfaisante de l'exposant de comptage des cartes *planaires*, en montrant que de nombreuses familles de cartes enracinées peuvent se décrire comme des classes de conjugaison d'arbres, ce qui conduit à l'exposant $-5/2$ en retranchant 1 à $-3/2$, qui est l'exposant universel pour les arbres [42, 62, 100]. Une des bijections de Schaeffer (remontant à des travaux de Cori et Vauquelin [40]), fut généralisée par Bouttier, Di Francesco et Guitter [27], et permet d'énumérer de nombreuses familles de cartes, dont les degrés des faces sont contraints.

La première bijection en genre supérieur fut donnée par Marcus et Schaeffer [70], qui ont généralisé la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer, et ont montré que les cartes

enracinées de genre donné sont en bijection avec certaines cartes à une face étiquetées de même genre. Dans un travail commun avec ces deux auteurs [37], nous avons utilisé leur bijection pour retrouver le résultat de Bender et Canfield, et donner de l'exposant $\frac{5}{2}(g-1)$ une première interprétation, en montrant que chacun des $2g$ cycles d'une carte à une face étiquetée de genre g contribue à hauteur d'un exposant $\frac{5}{4}$, donné par les propriétés combinatoires de ces objets.

Dans ce chapitre, basé sur l'article [34], nous présentons l'unification du traitement de [37] pour le genre supérieur, à la généralisation de la bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer donnée par Bouttier, Di Francesco, et Guitter dans le cas planaire. Notre premier travail sera donc de donner une bijection générale, reliant une grande famille de cartes à degrés contraints (les cartes bicolores), à certaines cartes à une face étiquetées appelées *mobiles*. D'un point de vue informel, cela suffit à comprendre que toutes les cartes enracinées de genre g appartiennent à une même classe d'universalité (celle des cartes à une face portant des étiquettes contraintes par des règles de variation locales), mais il ne sera pas si simple d'effectuer précisément leur énumération.

Nous allons nous restreindre à deux classes de cartes, les m-constellations, et les m-hypercartes. Ces cartes seront définies plus loin, mais nous pouvons déjà dire que pour $m = 2$, elles correspondent respectivement aux cartes biparties, et aux cartes dont toutes les faces ont un degré pair. Dans les deux cas, nous nous autoriserons à contraindre le degré de leurs faces à appartenir à n'importe quel sous-ensemble fini de $m\mathbb{N}$. Pour chacune de ces familles, nous allons calculer explicitement la série génératrice correspondante, via des techniques reposant à la fois sur des idées issues de [37] et sur des techniques de combinatoire des chemins sur réseau. Nous obtiendrons des résultats asymptotiques complètement explicites, et universels, dans la mesure où nous retrouverons bien l'exposant $\frac{5}{2}(g-1)$ et la constante t_g pour toutes les familles de cartes. Un cas particulier de nos résultats (celui des 2-hypercartes) donne exactement les conjectures de Gao.

4.2 Principaux résultats de ce chapitre

Une *carte bicolore* de genre g est une carte de genre g, portant un coloriage de ses faces en noir et blanc, tel que seules des faces de couleurs différentes soient adjacentes (autrement dit, une carte dont le dual est biparti). Par convention, le coin racine d'une carte bicolore sera toujours à l'intérieur d'une face noire. Nous allons nous intéresser à deux cas particuliers de cartes bicolores, les m-hypercartes et les m-constellations[1] :

Définition 24. Soit un entier $m \geq 2$. Une *m-constellation* de genre g est une carte de genre g, portant un coloriage de ses faces en noir et blanc, et telle que :

(i). seules des faces de couleurs différentes sont adjacentes ;

(ii). chaque face noire a degré m, et chaque face blanche a un degré multiple de m ;

(iii). on peut assigner à chaque sommet une *couleur* dans $\{1, 2, \ldots, m\}$, de telle sorte qu'autour de chaque face noire, les étiquettes des sommets lues dans le sens horaire sont exactement $1, 2, \ldots, m$.

[1] la terminologie « m-hypercarte » est nouvelle, mais les m-constellations sont des objets bien connus [63, 25].

Une carte qui satisfait les conditions **i** et **ii** est appelée une m-hypercarte.

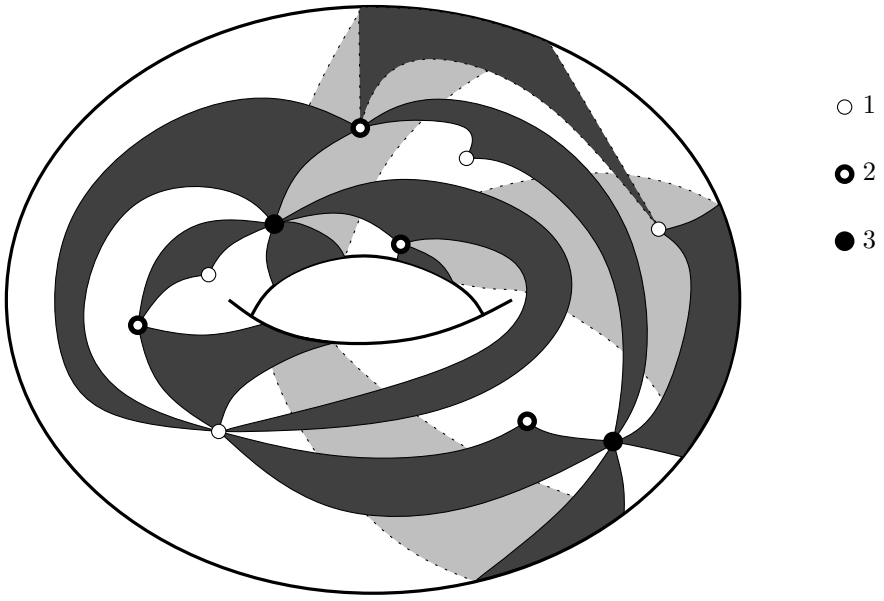


FIG. 4.1 – Une 3-constellation de genre 1.

La première motivation pour étudier les constellations est que, dans le langage des permutations, elles sont une généralisation assez naturelle de la notion de carte. En effet, si l'on étiquette les faces noires d'une m-constellation de 1 à n, et que l'on note σ_i la permutation de $[\![1, n]\!]$ dont les cycles donnent l'ordre horaire des faces noires autour des sommets dont la couleur est i, alors le produit $\phi = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m$ est la permutation correspondant aux faces blanches de la carte. Cette construction donne une bijection entre les m-constellations de genre g à n faces noires étiquetées, et les m-uplets de permutations $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \mathfrak{S}_n$ qui engendrent un sous-groupe transitif de $[\![1, n]\!]$, et dont les nombres de cycles sont reliés par la formule d'Euler :

$$c(\sigma_1) + c(\sigma_2) + \cdots + c(\sigma_m) + c(\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_m) = (m-1)n + 2 - 2g.$$

Remarquons également que les constellations sont une généralisation naturelle des cartes biparties. En effet, la contraction des faces noires d'une 2-constellation donne une bijection entre les 2-constellations et les cartes biparties. De la même façon, les 2-hypercartes sont en bijection avec les *cartes paires*, c'est-à-dire les cartes dont toutes les faces ont degré pair. Or, il est bien connu que dans le cas planaire, une carte est bipartie si et seulement si elle est paire. La même chose est vraie pour m plus grand : les m-hypercartes planaires sont exactement les m-constellations ([25, 27]). Cette propriété n'est plus vraie en genre supérieur, et il est donc naturel de vouloir étudier et comparer les deux cas. Nous verrons que les nombres de m-constellations et de m-hypercartes sont reliés par un facteur asymptotique $1/m^{2g}$, que nous interpréterons comme la probabilité que chacun des $2g$ cycles non contractibles indépendants de la surface de genre g ait une longueur congrue à 0 modulo m (qui est la condition pour qu'un processus de coloriage des sommets par exploration n'échoue pas à colorier une m-hypercarte selon la propriété **iii**).

Dans le reste de ce chapitre, $m \geq 2$ sera un entier fixé, et $D \subset \mathbb{N}_{>0}$ sera un ensemble fini et non vide des entiers strictement positifs. Dans le cas $m = 2$, on supposera de plus que D n'est pas réduit au singleton $\{1\}$. Une m-hypercarte de degrés autorisés mD est une m-hypercarte dont toutes les faces blanches ont un degré qui appartient à mD. La même définition vaut pour les constellations. Par exemple, une 2-constellation de degrés autorisés $2\{2\}$ est (modulo la contraction de ses faces noires en arêtes) une quadrangulation bipartie. Enfin, la *taille* d'une m-hypercarte sera toujours son nombre de faces noires. Les deux principaux résultats de ce chapitre sont les théorèmes suivants :

Théorème 4. *Le nombre $c_{g,m,D}(n)$ de m-constellations enracinées de genre g, de degrés autorisés mD, et de taille n satisfait :*

$$c_{g,m,D}(n) \sim t_g \frac{\mathrm{pgcd}(D)}{2} \left(\frac{(m-1)^{5/2}\sqrt{2\gamma_{m,D}}}{m\beta_{m,D}^{5/2}} \right)^{g-1} n^{\frac{5(g-1)}{2}} \left(z_{m,D}^{(c)}\right)^{-n}$$

quand n tend vers l'infini le long des multiples de $\mathrm{pgcd}(D)$*, où $t_{m,D}^{(c)}$ est la plus petite racine positive du polynôme :*

$$\sum_{k\in D}[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}(t_{m,D}^{(c)})^k = 1,$$

où les quantités $\beta_{m,D}$, $\gamma_{m,D}$ et $z_{m,D}$ sont définies par :

- $\beta_{m,D} = \sum_{k\in D}(m-1)k\binom{mk-1}{k}(t_{m,D}^{(c)})^k$,
- $\gamma_{m,D} = \sum_{k\in D}(m-1)k[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}(t_{m,D}^{(c)})^k$,
- $z_{m,D}^{(c)} = t_{m,D}^{(c)}[\beta_{m,D}]^{1-m}$,

et où t_g est la constante de Bender et Canfield[2]*, définie dans [10].*

Théorème 5. *Le nombre $h_{g,m,D}(n)$ de m-hypercartes enracinées de genre g, de degrés autorisés mD et de taille n satisfait :*

$$h_{g,m,D}(n) \sim m^{2g} c_{g,m,D}(n)$$

quand n tend vers l'infini le long des multiples de $\mathrm{pgcd}(D)$.

Un inconvénient de la méthode proposée dans ce chapitre est qu'elle ne permet pas de calculer t_g (son avantage étant son universalité, puisque les deux théorèmes ci-dessus concernent de grandes familles de cartes). Les physiciens savent depuis longtemps calculer les nombres t_g grâce à une équation différentielle non linéaire satisfaite par leur série génératrice, obtenue par intégrales de matrices [63, p.201]. Récemment, les deux articles [54, 7] ont obtenu une équation équivalente par des méthodes de représentations du groupe symétrique. Ici, on obtiendra t_g comme une somme, indexée par les schémas de genre g, d'une certaine quantité combinatoire. Cependant, le lecteur en apprendra un peu plus sur t_g au chapitre 5, où nous en donnerons une interprétation probabiliste

[2] à propos de t_g, voir aussi pages 117 et 142.

en termes d'arbres étiquetés, en unifiant la bijection de ce chapitre avec celle du chapitre 2.

À notre connaissance, le seul cas précédemment connu du théorème 5 était celui des quadrangulations (dont on sait qu'elles sont biparties avec probabilité tendant vers $1/4^g$, voir [9]). En regroupant les théorèmes 4 et 5, on obtient une formule asymptotique pour le nombre $h_{g,D,m}(n)$, que Gao avait déjà démontrée dans le cas où $m = 2$ et D est un singleton, et conjecturée pour $m = 2$ et D général dans l'article [49]. Tous les autres cas sont, à notre connaissance, nouveaux.

4.3 La bijection de Bouttier, Di Francesco, et Guitter

Dans l'article [27], Bouttier, Di Francesco, et Guitter ont introduit une bijection, généralisant celle de Cori-Vauquelin-Schaeffer [40, 84, 38], qui concernait les quadrangulations, au cas de toutes les cartes planaires bicolores[3]. La bijection de [27] relie ces cartes à certains arbres multitypes, dont les sommets portent des étiquettes dont les variations sont soumises à certaines règles locales, et qui sont appelés des *mobiles*. Nous allons montrer que cette bijection fonctionne *exactement de la même façon* en genre supérieur. En utilisant les mêmes règles de construction locales, nous allons naturellement aboutir à des *g-mobiles*, qui sont simplement des mobiles où la notion d'arbre est remplacée par celle de carte à une face.

4.3.1 Des cartes bicolores aux mobiles

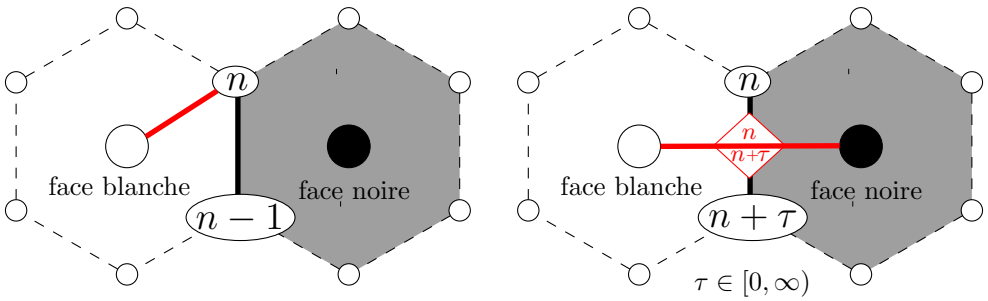


Fig. 4.2 – La construction de Bouttier–Di Francesco–Guitter.

Comme dans le cas des quadrangulations [38], il est plus simple, du point de vue de l'énumération, de présenter la bijection pour des cartes qui sont à la fois enracinées et pointées. Soit donc $\mathfrak{m}$ une carte bicolore enracinée de genre g, portant un sommet pointé (ce sommet pointé étant choisi indépendamment de la racine, et pouvant éventuellement coïncider avec elle). Puisque les noms de Bouttier, Di Francesco, et Guitter seront souvent cités dans ce chapitre, nous prendrons la liberté de les abréger par leurs initiales « BDFG ».

[3]Dans le cas planaire, une carte est bicolore si et seulement si tous ses sommets ont degré pair, ce qui équivaut à dire que son graphe sous-jacent est Eulérien. C'est pourquoi l'article [27] utilise le terme *carte Eulérienne*. Dans notre cas, les deux notions diffèrent, et ce sont bien les cartes *bicolores* que nous considérons.

La construction BDFG :

(1). **orientation et étiquetage des sommets.** Tout d'abord, on oriente chaque arête de $\mathfrak{m}$ pour qu'elle ait une face noire à sa droite. Ensuite, on étiquette chaque sommet de $\mathfrak{m}$ par le nombre minimal d'arêtes orientées qu'il est nécessaire d'emprunter pour l'atteindre depuis le sommet pointé. Remarquons que le long d'une arête orientée, l'étiquette peut soit augmenter de 1, soit rester constante, soit décroître d'une valeur arbitraire.

(2). **construction locale.** À l'intérieur de chaque face de $\mathfrak{m}$, on ajoute un nouveau sommet de la couleur de la face. Ensuite, pour chaque face blanche F de $\mathfrak{m}$, et pour chaque arête e incidente à F, on effectue la construction suivante (figure 4.2) :
- si l'étiquette augmente de 1 le long de e, on ajoute une nouvelle arête entre le nouveau sommet blanc au centre de F, et l'extrémité de e de plus grande étiquette.
- si l'étiquette décroît de $\tau \geq 0$ le long de e, on ajoute une nouvelle arête entre les deux sommets présents dans chacune des faces incidentes à e. De plus, on attache à chaque côté de cette arête un *drapeau*, qui porte l'étiquette de l'extrémité correspondante de e, comme sur la figure 4.2. Nous dirons que e est une *arête drapée*.

(3). **effacement de la carte originale.** On appelle $\bar{\mathfrak{m}}$ la carte obtenue en effaçant les arêtes originales de la carte $\mathfrak{m}$, et le sommet pointé v_0 (c'est-à-dire que l'on ne garde que les nouvelles arêtes, les nouveaux sommets, et les sommets de la carte originale qui ne sont pas le sommet pointé).

(4). **enracinement et translation des étiquettes**. *L'arête racine* de $\overline{\mathfrak{m}}$ est définie comme l'arête de $\overline{\mathfrak{m}}$ associée à l'arête racine de $\mathfrak{m}$ à l'étape **(2)** ; en décidant que le sommet racine est un sommet blanc non étiqueté, cela suffit à enraciner $\overline{\mathfrak{m}}$. Si l'arête racine est incidente à un sommet étiqueté, on définit *l'étiquette racine* comme l'étiquette de ce sommet ; sinon, l'étiquette racine est l'étiquette du drapeau situé à gauche de l'arête racine. On soustrait alors l'étiquette racine à toutes les étiquettes de la carte $\overline{\mathfrak{m}}$, de sorte que la nouvelle étiquette racine soit 0. La carte obtenue de cette façon est notée $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$, et appelée *le mobile associé à* $\mathfrak{m}$. Un exemple planaire est représenté sur la figure 4.3.

Tout l'intérêt de la construction repose dans le lemme suivant :

Lemme 39. $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ *est une carte bien définie, de genre g, et n'a qu'une seule face.*

Démonstration. Notre démonstration est conceptuellement différente de celle de [27], qui utilise la planarité. Par contre, elle suit d'assez près les arguments de [37], pour le cas quadrangulaire.

Appelons $\mathfrak{m}'$ la carte formée de toutes les arêtes originales de $\mathfrak{m}$, et des nouveaux sommets et arêtes ajoutés pendant la construction ; pour éviter les croisements d'arêtes, chaque fois qu'une arête drapée de $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ croise une arête de $\mathfrak{m}$, on coupe ces arêtes en deux, et on considère la paire de drapeaux présente au milieu de ces arêtes comme un sommet tétravalent de $\mathfrak{m}'$, relié aux quatre demi-arêtes créées par le découpage.

Il est clair d'après la construction que chaque sommet non étiqueté de $\mathfrak{m}'$, noir ou blanc, est incident à au moins une arête drapée, de sorte que $\mathfrak{m}'$ est une carte connexe de

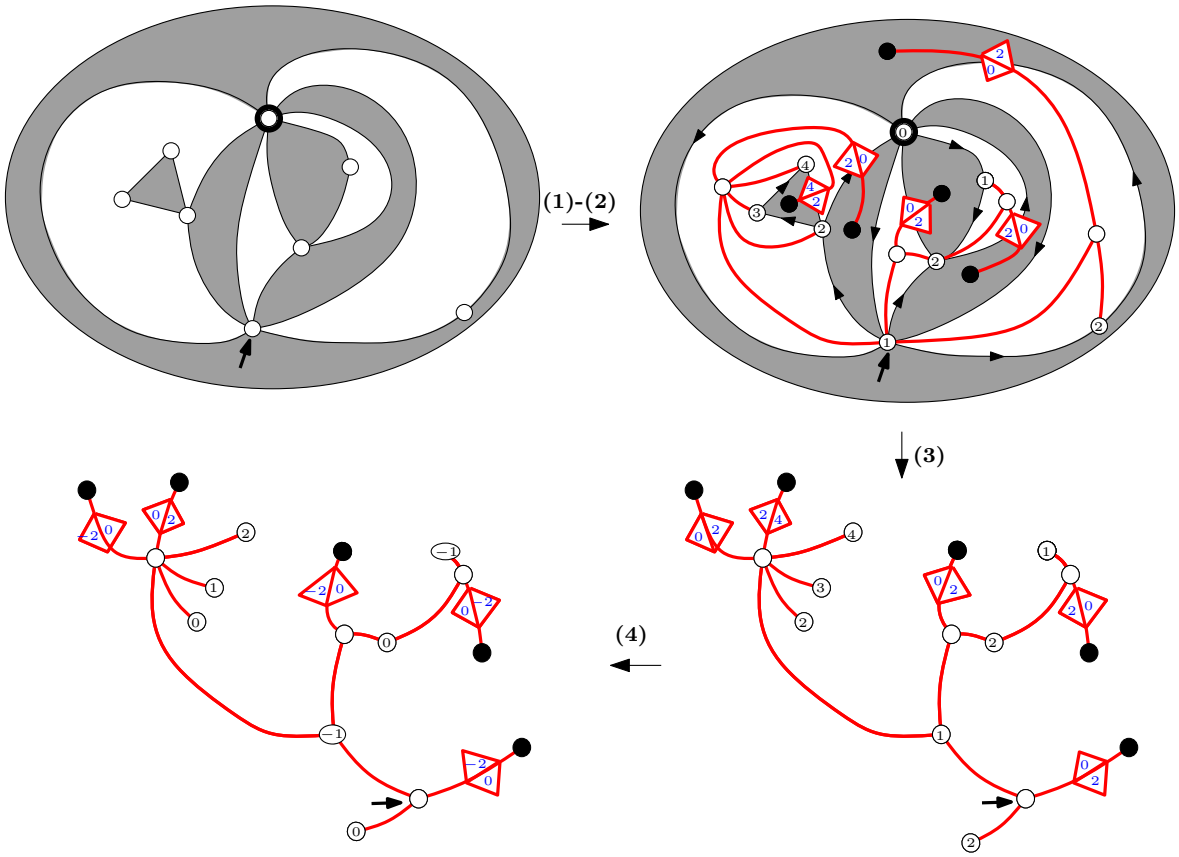


FIG. 4.3 – Une 3 constellation pointée sur la sphère (représentée comme une surface plongée dans $\mathbb{R}^3$), et son mobile associé.

genre g bien définie. Dans l'esprit du chapitre précédent, on peut voir $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ comme une sous-carte de $\mathfrak{m}'$, induite par l'ensemble de toutes les arêtes ajoutées durant la construction. Soit alors $\mathfrak{t}$ la sous-carte duale de $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$, c'est-à-dire la sous-carte de la carte duale de $\mathfrak{m}'$ formée par les arêtes duales des arêtes originales[4] de $\mathfrak{m}$. Nous allons maintenant examiner les cycles de $\mathfrak{t}$.

Pour cela, orientons les arêtes de $\mathfrak{t}$ comme suit : si une arête apparaît entre un sommet et un drapeau, on l'oriente de sorte qu'elle ait le drapeau à sa gauche. Si elle apparaît entre deux sommets, on l'oriente de sorte qu'elle ait le sommet de plus grande étiquette à sa gauche. Alors, par les règles de construction (voir figure 4.4), on voit que chaque face de $\mathfrak{m}'$ porte une unique arête sortante de $\mathfrak{t}$. Par conséquent, si $\mathfrak{t}$ contenait un cycle d'arêtes, ce serait nécessairement un cycle orienté. Or, en examinant les différents cas de la figure 4.4, on voit que le long d'un cycle orienté de $\mathfrak{t}$, l'étiquette présente à la droite du cycle ne peut pas croître. Par conséquent, cette étiquette est nécessairement constante le long du cycle et, en examinant à nouveau les différents cas de la figure 4.4, cela n'est possible que si le cycle encercle un unique sommet. Un tel sommet ne peut être incident, dans $\mathfrak{m}$, à aucun sommet d'étiquette inférieure (sinon, une arête de $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ romprait le cycle), ce qui implique par définition de l'étiquetage par la distance que le sommet encerclé est le sommet pointé v_0.

[4]Insistons sur le fait que chaque arête de $\mathfrak{m}$ coupée par un drapeau produit *deux* arêtes de $\mathfrak{t}$.

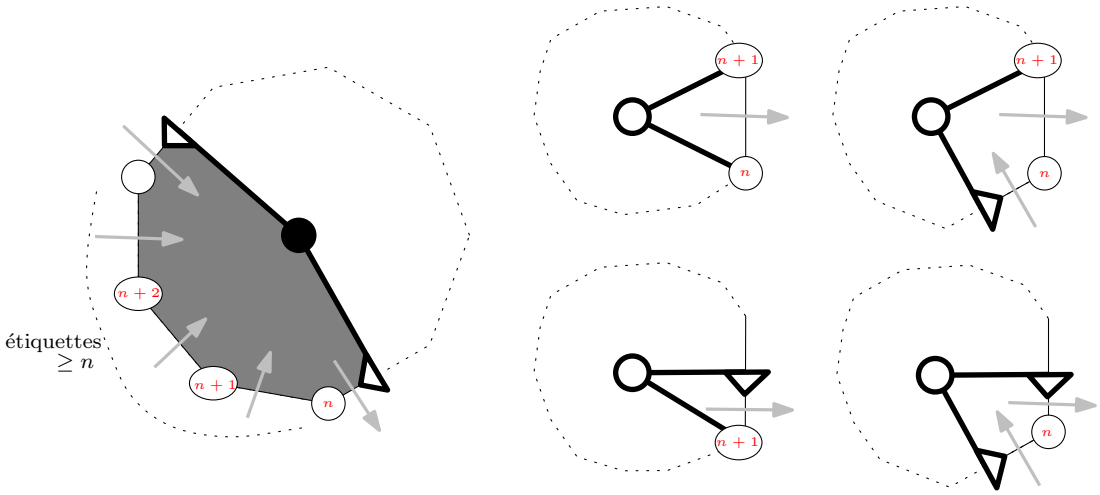


FIG. 4.4 – Une face noire typique, et les quatre types de faces blanches de $\mathfrak{m}'$. Lorsqu'un cycle d'arêtes de $\mathfrak{t}$ traverse une face, l'étiquette présente à sa droite ne peut pas croître. De plus, elle reste constante si et seulement si le cycle tourne autour d'un seul sommet.

On a donc démontré que $\mathfrak{t}$ n'a pas d'autre cycle que celui encerclant le sommet v_0. Si l'on note $\tilde{\mathfrak{m}}'$ (resp. $\tilde{\mathfrak{t}}$) la carte obtenue à partir de $\mathfrak{m}'$ (resp. $\mathfrak{t}$) en retirant l'intérieur de ce cycle, et en le contractant[5], on a donc montré que $\tilde{\mathfrak{t}}$ est un arbre couvrant du dual de $\tilde{\mathfrak{m}}'$. Or, sa carte couvrante duale n'est autre que $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$. Ainsi, par la proposition 19 et l'équation (3.3) du chapitre précédent, $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ est une carte à une face bien définie de genre g. □

4.3.2 Des mobiles aux cartes bicolores

Notre définition d'un mobile est similaire à celle de [27] :

Définition 25. Un g-mobile $\mathfrak{t}$ est une carte à une face de genre g telle que :

i. $\mathfrak{t}$ a des sommets de trois types : des sommets non étiquetés, qui peuvent être noirs ou blancs, et des sommets étiquetés, portant des étiquettes entières.

ii. les arêtes connectent soit un sommet étiqueté à une sommet blanc non étiqueté, soit deux sommets non étiquetés de couleurs différentes. Les arêtes du second type portent sur chaque côté un drapeau, qui porte lui même une étiquette entière.

iii-w. Lorsque l'on tourne dans le sens horaire autour d'un sommet blanc non étiqueté :
- un sommet d'étiquette l est toujours suivi d'une étiquette $l-1$ (sommet ou drapeau).
- deux drapeaux successifs d'étiquettes l et l' appartenant à la même arête sont tels que $l' \geq l$; le second drapeau est suivi d'une étiquette l' (sommet ou drapeau).

iii-b. lorsque l'on tourne en sens horaire autour d'un sommet noir non étiqueté, deux drapeaux successifs d'étiquettes l et l' appartenant à la même arête satisfont $l' \leq l$; le second drapeau est suivi par un drapeau d'étiquette $\geq l'$.

[5] On se place ici dans la représentation topologique d'une carte.

iv. Le sommet racine est un sommet blanc non étiqueté. L'étiquette racine (qui est soit l'étiquette du sommet étiqueté incident à l'arête racine, s'il existe, soit l'étiquette du drapeau présent à sa gauche) est égale à 0.

On vérifie aisément que la construction BDFG conduit à une carte qui satisfait les conditions ci-dessus (les contraintes étant purement locales, tout est similaire au cas planaire traité dans [27]). Ainsi, grâce au lemme 39, pour toute carte bicolore $\mathfrak{m}$ de genre g, $\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})$ est un g-mobile. Décrivons maintenant la construction réciproque, qui permet d'associer une carte bicolore à un g-mobile. Cette construction est basée sur une opération de clôture d'arêtes, qui a lieu à l'intérieur de l'unique face du mobile. En particulier, le mobile étant donné, la construction est de nature purement planaire, et tout est similaire au cas planaire. On renvoie le lecteur à [27] pour les démonstrations.

Soit $\mathfrak{t}$ un g-mobile. La clôture de $\mathfrak{t}$ est définie comme suit :

Construction inverse :

(0) On translate toutes les étiquettes de $\mathfrak{t}$ par un même nombre entier, de sorte que l'étiquette minimum soit soit un drapeau d'étiquette 0, soit un sommet d'étiquette 1.

(1) On ajoute un sommet d'étiquette 0 dans l'unique face de $\mathfrak{t}$. On le connecte par une arête à tous les coins d'étiquette 1 de $\mathfrak{t}$, et à tous les drapeaux d'étiquette 0.

(2) On dessine un arête entre chaque coin étiqueté de $\mathfrak{t}$ d'étiquette $n \geq 2$ et son *successeur*, qui est le premier coin étiqueté ou drapeau d'étiquette $n-1$ que l'on rencontre lorsque l'on fait le tour de $\mathfrak{t}$ en sens anti-horaire.

(3) On dessine une arête entre chaque drapeau d'étiquette n et son successeur, qui est le premier coin étiqueté ou drapeau d'étiquette n que l'on l'on rencontre lorsque l'on fait le tour de l'unique face de $\mathfrak{t}$ en sens anti-horaire.

(4) On efface toutes les arêtes originales, et tous les sommets non étiquetés de $\mathfrak{t}$.

On appelle $\mathrm{Map}(\mathfrak{t})$ la carte obtenue à la fin de cette construction. L'arête racine de $\mathrm{Map}(\mathfrak{m})$ est soit l'arête joignant l'extrémité de la racine de $\mathfrak{t}$ à son successeur (si cette extrémité est un sommet étiqueté), soit l'arête correspondant aux drapeaux attachés à la racine de $\mathfrak{t}$.

Le fait que cette construction soit réciproque de la précédente est démontré dans le cas planaire dans [27], mais comme nous l'avons déjà dit, tous les arguments restent valides en genre supérieur (et la démonstration de [27] pourrait être recopiée ici *verbatim*). En fait, tout le travail spécifique au genre supérieur a été fait dans la démonstration du lemme 39. On a donc

Proposition ([27])**.** *Pour toute carte bicolore* $\mathfrak{m}$*, on a :* $\mathrm{Map}(\mathrm{Mob}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$*. Pour tout* g*-mobile* $\mathfrak{t}$*, on a :* $\mathrm{Mob}(\mathrm{Map}(\mathfrak{t})) = \mathfrak{t}$*.*

On a donc démontré :

Théorème 6. *L'application* Mob *définit une bijection entre l'ensemble des cartes bicolores enracinées et pointées de genre* g *à* n *arêtes, et l'ensemble des* g*-mobiles à* n *arêtes.*

Cette bijection envoie une carte qui a n_i faces blanches de degré i pour tout i, b faces noires, et v sommets, sur un mobile qui a n_i sommets blancs non étiquetés de degré i pour tout i, b sommets noirs non étiquetés, et $v-1$ sommets étiquetés.

4.3.3 m-constellations, m-hypercartes, et mobiles

Les mobiles obtenus à partir des m-hypercartes forment un sous-ensemble de tous les mobiles, et vérifient des propriétés supplémentaires (les degrés de leurs sommets blancs et noirs sont contraints). Pour conserver une terminologie raisonnable, on fait la convention suivante :
Convention : À partir de maintenant, le mot *mobile* désignera uniquement les g-mobiles associés aux m-hypercartes de genre g par la construction BDFG.

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ une m-hypercarte enracinée et pointée, dont les arêtes sont orientées et les sommets sont étiquetés par la distance au sommet pointé, comme dans la construction BDFG. On définit *l'incrément* d'une arête orientée comme l'étiquette de son origine *moins* l'étiquette de son extrémité ; puisque toutes les faces noires ont degré m, par l'inégalité triangulaire, tous les incréments sont dans $[\![-1, m-1]\!]$. De plus, puisque la somme des incréments est nulle autour d'une face, si une face noire est incidente à une arête e d'incrément $m-1$, alors toutes les autres arêtes doivent avoir incrément -1. En particulier, le sommet noir du mobile correspondant a degré 1 : il n'est relié qu'à l'arête drapée associée à e.

Maintenant, soit $\mathfrak{t}$ un mobile. *L'incrément* d'une arête drapée de $\mathfrak{t}$ est l'incrément de l'arête associée dans la m-hypercarte correspondante : c'est donc la différence des étiquettes des deux drapeaux, dans le sens antihoraire autour du sommet blanc. Tous les sommets noirs de degré 1 de $\mathfrak{t}$ sont reliés à une arête drapée d'incrément $m-1$.

Or, une m-hypercarte est une m-constellation si et seulement si l'étiquetage des sommets, pris modulo m, réalise la propriété **iii** de la définition d'une constellation. En effet, dans une m-constellation, la différence modulo m entre l'étiquetage par la distance et celui par les éléments de $[\![1, m]\!]$ donnant la couleur est constant le long de n'importe quel chemin géodésique partant du sommet pointé, puisque tous deux augmentent de 1 modulo m à chaque pas. Ainsi, les arêtes d'une m-constellation ont un incrément qui est soit -1, soit $m-1$. On en déduit donc :

Lemme 40. *Soit $\mathfrak{m}$ une m-hypercarte enracinée et pointée, dont les sommets sont étiquetés par la distance orientée depuis le sommet pointé. Alors $\mathfrak{m}$ est une m-constellation si et seulement si l'une des trois propriétés équivalentes suivantes est réalisée :*

- *toutes ses arêtes ont un incrément -1 ou $m-1$*
- *tous les sommets noirs du mobile associé ont degré 1*
- *dans le sens horaire autour de chaque face noire, l'étiquette par la distance augmente de 1 exactement $m-1$ fois, et décroît de $m-1$ exactement une fois.*

4.4 Les briques élémentaires des mobiles : étoiles et cellules

4.4.1 Étoiles élémentaires

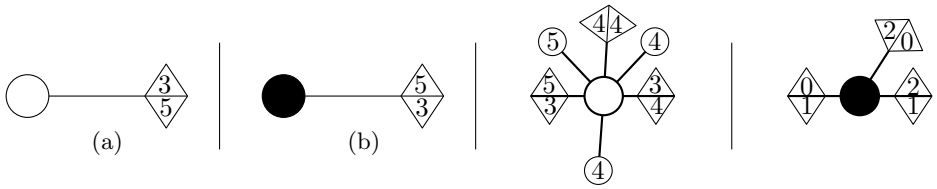


Fig. 4.5 – (a) une arête coupée blanche de type 3 ; (b) une arête coupée noire de type 3 ; (c) une étoile blanche élémentaire ; (d) une étoile noire élémentaire.

On donne maintenant la description des briques de base qui nous permettront de construire les mobiles :

Définition 26. (figure 4.5) Une *arête coupée blanche* est une arête qui relie un sommet blanc non étiqueté à deux drapeaux, attaché chacun sur un côté de l'arête. Chaque drapeau est étiqueté par un entier, et si les étiquettes sont l_1 et l_2, dans le sens horaire autour du sommet blanc, la quantité $l_2 - l_1 + 1$ est appelée le *type* de l'arête coupée. La même définition vaut pour une *arête coupée noire*, mais dans ce cas le type est défini comme $l_1 - l_2 + 1$.

Une *étoile blanche élémentaire* est une étoile formée d'un sommet blanc central, qui est connecté à un certain nombre de sommets étiquetés et à un certain nombre d'arêtes coupées blanches, et qui satisfait la propriété **iii-w** de la définition 25. Les étoiles élémentaires sont considérées à translation près de leurs étiquettes par une valeur commune. La même définition vaut pour les étoiles noires élémentaires, en remplaçant « blanc » par « noir », et la propriété **iii-w** par la propriété **iii-b**.

Le lemme suivant s'avèrera extrêmement utile :

Lemme 41. *Soit $\mathfrak{s}$ une étoile blanche élémentaire de degré km, incidente à r arêtes coupées, de types $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^{r} \tau_i = km.$$

Démonstration. On numérote les drapeaux de 1 à r, dans le sens horaire, à partir d'une position arbitraire. On note l_i et l'_i les étiquettes portées par le i-ème drapeau, dans le sens horaire : on a donc $\tau_i = l'_i - l_i + 1$. Par la propriété **iii-w**, l'étiquette décroît de un après chaque sommet étiqueté, donc $l'_i - l_{i+1}$ est exactement le nombre de sommets étiquetés présents entre les i-ème et $i+1$-ème drapeaux (avec la convention que le $r+1$-ème est aussi le premier). Le degré total de $\mathfrak{s}$ est donc :

$$r + \sum_{i=1}^{r}(l'_i - l_{i+1}) = r + \sum_{i=1}^{r}(l'_i - l_i) = \sum_{i=1}^{r} \tau_i$$

ce qui donne le résultat. □

Remarque 11. Si $\mathfrak{s}$ est une étoile noire élémentaire qui apparaît dans le mobile associé à une m-hypercarte $\mathfrak{m}$, alors la conclusion du lemme est vraie, avec $k = 1$. En effet, si $l_1, l_2, \ldots, l_m$ est la suite antihoraire des étiquettes des sommets apparaissant autour de la face noire correspondante de $\mathfrak{m}$, on a $\sum_{i=1}^{m} \tau_i = \sum_{i=1}^{m}(l_{i+1} - l_i + 1) = m$.

On définit une *m-marche* de longueur l comme un l-uplet d'entiers $(n_1, \ldots, n_l) \in [\![-1, m-1]\!]^l$ tel que $\sum n_i = 0$. Une *m-marche cyclique* est une m-marche considérée modulo permutation circulaire de ses éléments. Soit maintenant $\mathfrak{s}$ une étoile élémentaire de degré l multiple de m. On considère la suite des étiquettes des sommets et drapeaux autour du sommet central, dans le sens horaire. On interprète chaque sommet étiqueté comme le nombre -1, et chaque arête coupée de type τ comme le nombre $\tau - 1$. On obtient une suite d'entiers $(n_1, n_2 \ldots, n_l)$, définie à permutation circulaire près, et qui est clairement une m-marche. Réciproquement, à partir d'une m-marche cyclique, en interprétant ses pas -1 comme des sommets étiquetés, et ses pas $\tau - 1 \geq 0$ comme des arêtes coupées de type τ, on reconstruit une étoile élémentaire, qui est l'unique étoile élémentaire dont la marche associée est la marche de départ. Ainsi, on a :

Lemme 42. *Pour tout l multiple de m, les étoiles blanches élémentaires de degré l sont en bijection avec les m-marches de longueur l.*

À partir de maintenant, on dira qu'une arête coupée est *spéciale* si son type n'est pas égal à m, et qu'elle est *standard* sinon. Remarquons que le lemme 40 peut être reformulé ainsi : une hypercarte est une constellation si et seulement si autour de chaque sommet blanc de son mobile, toutes les arêtes coupées sont standard. Pour cette raison, il nous faudra à certains moments traiter différemment le cas des mobiles associés aux constellations, et de ceux associés aux hypercartes générales. Ce sera le cas dans les deux paragraphes suivants.

4.4.2 Cellules et chaînes de type 0

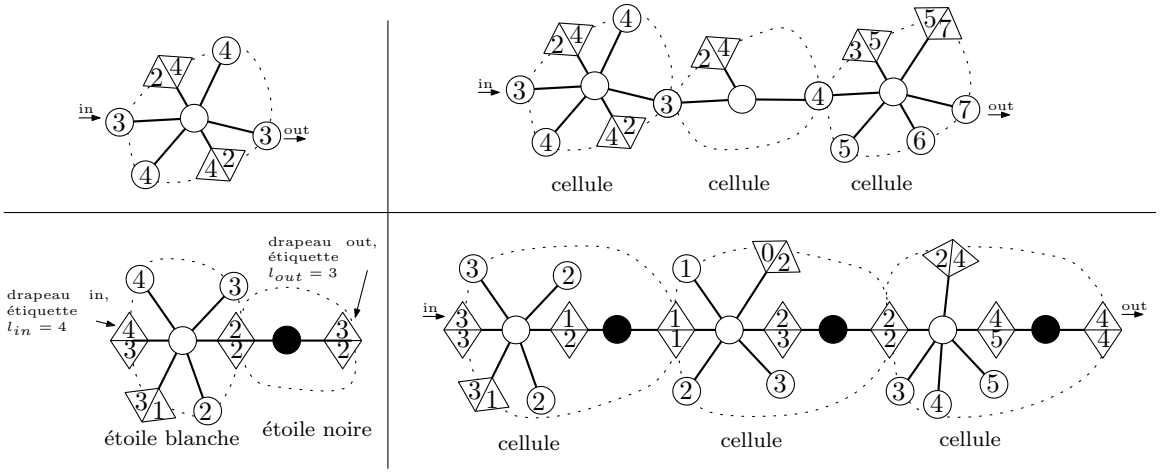


FIG. 4.6 – Quatre exemples dans le cas $m = 3$. En haut, une cellule de type 0, et une chaîne de type 0 ; en bas, une cellule de type 2, et une chaîne de type 1.

Une *cellule de type* 0 est une étoile blanche élémentaire, de degré multiple de m, ne contenant que des arêtes coupées standard, et qui contient deux sommets étiquetés distingués : un sommet *in* et un sommet *out*. *L'incrément* d'une cellule de type 0 est la différence $l_{out} - l_{in}$ des étiquettes de ses sommets *out* et *in*. Sa *taille* est son nombre d'arêtes coupées, et son *degré total* est le degré de son sommet central.

Une *chaîne de type* 0 est une suite finie de cellules de type 0. Sa taille et son incrément sont définis additivement à partir de ceux des cellules qu'elle contient. Son sommet *in* (resp. *out*) est le sommet *in* de sa première cellule (resp. sommet *out* de sa dernière cellule). Graphiquement, on dessine une chaîne de type 0 en identifiant le sommet *out* de chaque cellule avec le sommet *in* de la cellule suivante, comme sur la figure 4.6.

Remarquons que la m-marche correspondant à une cellule de type 0 n'a que des pas -1 et $m-1$, ce qui implique que le degré total d'une telle cellule est égal à m fois sa taille, et que son nombre de sommets étiquetés est égal à $(m-1)$ fois sa taille. En conséquence, dans une chaîne de type 0, le nombre total de coins incidents à un sommet étiqueté est toujours égal à $(m-1)$ fois la taille de la chaîne.

4.4.3 Cellules et chaînes de type $\tau \in [\![1, m-1]\!]$

Si τ est un élément de $\tau \in [\![1, m-1]\!]$, une *cellule de type* τ est une paire $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2)$ telle que :
- $\mathfrak{s}_1$ est une étoile blanche élémentaire, avec exactement deux arêtes coupées spéciales : une arête *in*, de type τ, et une arête *out*, de type $m - \tau$.
- $\mathfrak{s}_2$ est une étoile noire élémentaire, avec exactement deux arêtes coupées spéciales : une arête *in*, de type $m - \tau$, et une arête *out*, de type τ.

Graphiquement, on identifie les deux arêtes coupées de type $m - \tau$, comme sur la figure 4.6. L'arête *in* de la cellule est l'arête *in* de $\mathfrak{s}_1$, et l'arête *out* est l'arête *out* de $\mathfrak{s}_2$; les étiquettes correspondantes l_{in} et l_{out} sont définies avec la convention de la figure 4.6. *L'incrément* de la cellule est la différence l_{out} - l_{in}.

Une *chaîne de type* τ est une suite finie $\mathfrak{c}$ de cellules de type τ. Graphiquement, on identifie les drapeaux de l'arête coupée *out* de chaque cellule avec ceux de l'arête coupée *in* de la cellule suivante. *L'incrément* de la chaîne est défini comme la somme des incréments des cellules qu'elle contient. On note $|\mathfrak{c}|$ le nombre total de sommets étiquetés apparaissant dans $\mathfrak{c}$. On note également $\langle \mathfrak{c} \rangle$ le nombre total de sommets noirs apparaissant dans $\mathfrak{c}$ *plus* son nombre total d'arêtes coupées blanches standard (de manière équivalente $\langle \mathfrak{c} \rangle$ serait le nombre total de sommets noirs de $\mathfrak{c}$ si l'on reliait chaque arête coupée blanche standard à un nouveau sommet noir univalent).

4.5 Le schéma complet d'un mobile

Puisque les g-mobiles sont des cartes à une face, il est possible de leur appliquer l'approche par schémas que nous avons présentée dans le chapitre 2 (paragraphe 2.1.3). Cela dit, les mobiles portant de nombreuses décorations (couleurs des sommets, drapeaux, étiquettes), nous allons leur associer des schémas qui seront eux-mêmes décorés, et que

nous appellerons des *schémas complets*[6].

4.5.1 Les superchaînes d'un mobile

Convention : Pour énoncer notre construction, nous supposerons que tous les schémas de genre g portent un étiquetage et une orientation de leurs arêtes, que nous appelons l'étiquetage et l'orientation *canoniques*, qui sont arbitraires mais fixés une fois pour toutes. On pourra par exemple parler de « la i-ème arête d'un schéma », sans plus de précisions.

Soit maintenant $\mathfrak{t}$ un mobile. On appelle $\mathfrak{s}$ le schéma de $\mathfrak{t}$, obtenu comme au paragraphe 2.1.3. Rappelons que pour obtenir $\mathfrak{s}$, on commence par enlever récursivement toutes les feuilles de $\mathfrak{t}$, jusqu'à aboutir à une carte sans feuilles appelée le *cœur* de $\mathfrak{t}$, puis qu'on obtient le schéma $\mathfrak{s}$ en remplaçant chaque chaîne maximale de sommets de degré 2 du cœur par une arête (cette construction ne tient donc compte ni des étiquettes, ni des drapeaux, mais seulement de la struture de carte à une face de $\mathfrak{t}$). On note k le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$, et pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note $\mathfrak{p}_i$ la chaîne de sommets de degré 2 du cœur correspondant à la i-ème arête de $\mathfrak{s}$, orientée selon l'orientation canonique de $\mathfrak{s}$.

A priori, $\mathfrak{p}_i$ peut contenir des sommets étiquetés ou non, noirs ou blancs, et des arêtes drapées ou non. Le lemme suivant est très important pour la suite :

Lemme 43. *Toutes les arêtes drapées spéciales (i.e. de type $\neq m$) de $\mathfrak{t}$ appartiennent aux chemins $\mathfrak{p}_i$, $i = 1 \dots k$.*

Démonstration. Supposons qu'au contraire il existe une arête spéciale e_0 dans $\mathfrak{t}$, qui ne soit pas une arête du cœur : e_0 appartient à un des sous-arbres qui sont détachés de $\mathfrak{t}$ lors de la construction du cœur. L'arête e_0 est reliée à deux sommets non étiquetés dont l'un, disons v, est le plus éloigné du cœur. Or par le lemme 41, un sommet ne peut pas être connecté à une seule arête spéciale : il existe donc une autre arête spéciale e_1 incidente à v. En itérant l'argument, on construit une suite infinie $e_0, e_1, e_2, \dots$ d'arêtes spéciales, qui s'éloignent strictement du cœur, ce qui contredit la finitude de $\mathfrak{t}$. □

Dans le mobile $\mathfrak{t}$ original, chaque sommet non étiqueté de $\mathfrak{p}_i$ était au centre d'une étoile élémentaire. Nous redessinons maintenant toutes ces étoiles élémentaires (c'est-à-dire que nous ré-attachons à chaque tel sommet les arêtes coupées qui lui était incidentes dans $\mathfrak{t}$) comme sur la figure 4.7. Si les extrémités de $\mathfrak{p}_i$ sont des sommets non étiquetés, on dit que les étoiles élémentaires correspondantes sont des *étoiles nodales* de $\mathfrak{t}$. Pour le moment, nous retirons les étoiles nodales, si elles existent : on obtient ainsi une suite (éventuellement vide) $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \dots, \mathfrak{s}_l$ d'étoiles successives. Nous distinguons alors deux cas :

cas 1 : $\mathfrak{p}_i$ ne contient pas d'arête drapée spéciale.

Dans ce cas $\mathfrak{p}_i$ est formé d'une succession d'arêtes reliant chacune un sommet blanc non étiqueté à un sommet étiqueté (puisque le seul autre cas est celui des arêtes drapées de type m, qui ne sont connectées qu'à des sommets noirs univalents et ne peuvent donc apparaître dans le cœur). Par conséquent, la suite $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \dots, \mathfrak{s}_l$ forme une chaîne d'étoiles

[6] Les schémas complets de ce chapitre généralisent les *schémas étiquetés* de l'article [37], où nous ne considérions que le cas des quadrangulations.

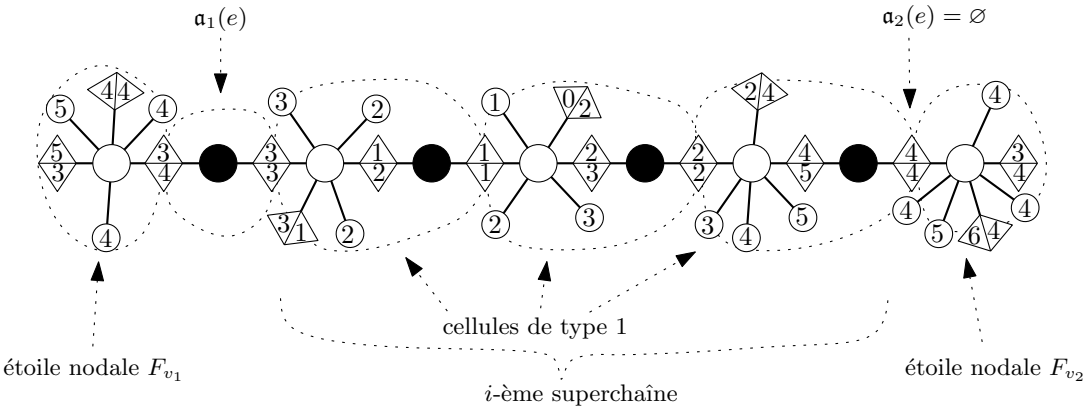


FIG. 4.7 – Une superchaîne de type 1, dans le cas $m = 3$. Elle est entourée de deux étoiles nodales, n'a qu'un seul terme correctif $\mathfrak{a}_1(e)$ ($\mathfrak{a}_2(e)$ est vide), et la superchaîne elle-même est formée de trois cellules de type 1 consécutives.

blanches élémentaires sans arêtes coupées spéciales, recollées ensemble en des sommets étiquetés, c'est-à-dire une chaîne de type 0 dans la terminologie de la partie précédente (figure 4.6). Nous dirons que $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \ldots, \mathfrak{s}_l)$ est *la i-ème superchaîne de* $\mathfrak{t}$.

cas 2 : $\mathfrak{p}_i$ contient au moins une arête drapée spéciale.

Dans ce cas, nous allons également ramener $\mathfrak{p}_i$ à une suite de cellules. Tout d'abord, par le lemme 41, un sommet non étiqueté ne peut être incident à exactement une arête spéciale. Or, par le lemme 43, toutes les arêtes spéciales apparaissent dans le cœur. Par conséquent, l'ensemble des arêtes spéciales de $\mathfrak{p}_i$ forme lui-même un chemin qui a les mêmes extrémités que $\mathfrak{p}_i$: autrement dit, $\mathfrak{p}_i$ est formé uniquement d'arêtes drapées spéciales.

Considérons maintenant la suite d'étoiles élémentaires $\mathfrak{s}_1, \ldots, \mathfrak{s}_l$. Si la première étoile $\mathfrak{s}_1$ est noire, on la note $\mathfrak{a}_1(i)$ et on la retire (sinon on note par convention $\mathfrak{a}_1(i) = \varnothing$). De même, si la dernière étoile est blanche, on la note $\mathfrak{a}_2(i)$ et on la retire. On se ramène ainsi à une suite d'étoiles $\mathfrak{s}'_1, \ldots, \mathfrak{s}'_{l'}$ de couleurs alternées, qui commence avec une étoile blanche et finit avec une étoile noire. Ces étoiles sont des étoiles élémentaires portant chacune exactement deux arêtes coupées spéciales, par lesquelles elle est recollée à ses voisines. Les étoiles étant ordonnées, on peut parler de l'arête *in* et de l'arête *out* de chaque étoile. Soit maintenant τ le type de l'arête coupée *in* de $\mathfrak{s}'_1$. Par le lemme 41, le type de son arête *out* est $m - \tau$, et en appliquant le même lemme à $\mathfrak{s}'_2$, le type de l'arête *out* de $\mathfrak{s}'_2$ est $m - (m - \tau) = \tau$. Par conséquent, la paire $(\mathfrak{s}'_1, \mathfrak{s}'_2)$ est une cellule de type τ, dans le sens de la partie précédente. En appliquant l'argument récursivement, on voit que chaque paire $(\mathfrak{s}'_{2q-1}, \mathfrak{s}'_{2q})$ est une cellule de type τ, et donc que la suite $(\mathfrak{s}'_1, \mathfrak{s}'_2, , \ldots, \mathfrak{s}'_{l'})$ est un chaîne de type τ. Nous dirons que $(\mathfrak{s}'_1, \mathfrak{s}'_2, , \ldots, \mathfrak{s}'_{l'})$ est la i-ème superchaîne de $\mathfrak{t}$.

Définition 27. Dans les deux cas ci-dessus, nous avons associé à la i-ème arête e de $\mathfrak{s}$ une chaîne, que nous avons appelé la i-ème superchaîne de $\mathfrak{t}$. Nous définissons maintenant le *type* de e comme le type de cette chaîne, et nous le notons $\tau(e)$.

Remarquons que le type d'une arête de $\mathfrak{s}$, mais aussi les étoiles correctrices $\mathfrak{a}_1(i), \mathfrak{a}_2(i)$,

et la définition de la superchaîne associée elle-même, dépendent de son orientation canonique (dont nous rappelons qu'elle est arbitraire mais fixée une fois pour toutes). Changer l'orientation reviendrait par exemple à remplacer un type τ par $m - \tau$.

Par souci de cohérence, si la i-ème arête a type 0, on posera $\mathfrak{a}_1(i) = \mathfrak{a}_2(i) = \varnothing$.

4.5.2 Schémas typés et loi de Kirchoff

Soit v un *nœud* de $\mathfrak{t}$, c'est-à-dire un sommet de $\mathfrak{t}$ qui est aussi un sommet de son schéma $\mathfrak{s}$. Si v est étiqueté, alors il n'est connecté à aucune arête drapée, et donc tous les chemins $\mathfrak{p}_i$ qui se rencontrent en v correspondent au cas 1 ci-dessus. De manière équivalente, toutes les arêtes de $\mathfrak{s}$ qui se rencontrent en v sont de type 0.

Supposons maintenant que v soit non étiqueté. Soit e une arête de $\mathfrak{s}$ incidente à v, de type $\tau(e) \neq 0$, et soit $\mathfrak{p}_i$ le chemin du cœur correspondant. On note $\tilde{\tau}(e)$ le type de l'arête coupée de $\mathfrak{p}_i$ qui est incidente à v. D'après les règles de construction de la i-ème superchaîne, on voit que si v est blanc, alors $\tilde{\tau}(e) = \tau(e)$ si e est entrante en v, et que $\tilde{\tau}(e) = m - \tau(e)$ si elle est sortante. Au contraire, si v est noir, alors $\tilde{\tau}(e) = \tau(e)$ si e est sortante en v, et $\tilde{\tau}(e) = m - \tau(e)$ si elle est entrante. Or, dans les deux cas le lemme 41 ou la remarque qui le suit impliquent que $\sum_{e \sim v} \tilde{\tau}(e) = 0 \mod m$. On obtient donc la proposition suivante, qui est un point fondamental de ce chapitre :

Proposition 44 (Loi de Kirchoff)**.** *Autour de chaque sommet v de $\mathfrak{s}$, on a :*

$$\sum_{\substack{e \sim v \\ e \text{ sortante}}} \tau(e) - \sum_{\substack{e \sim v \\ e \text{ entrante}}} \tau(e) = 0 \bmod m. \tag{4.2}$$

Cela nous conduit à définir la notion de *schéma typé*. Si $\mathfrak{s}$ est un schéma, un *typage* de $\mathfrak{s}$ est une application

$$\tau : \{\text{arêtes de } \mathfrak{s}\} \to [\![0, m-1]\!]$$

qui satisfait l'équation (4.2) autour de chaque sommet. Un *schéma typé* est une paire $(\mathfrak{s}, \tau)$ formée d'un schéma est de l'un de ses typages. Si $\mathfrak{s}$ est le schéma associé à un mobile $\mathfrak{t}$, et si τ est l'application qui associe à chaque arête de $\mathfrak{s}$ le type de la superchaîne correspondante, on dira que $(\mathfrak{s}, \tau)$ est *le schéma typé de* $\mathfrak{t}$.

Nous énonçons dès maintenant le lemme suivant, qui est le point clé dans la démonstration du théorème 5 :

Lemme 45. *Soit $\mathfrak{s}$ un schéma de genre g. Alors $\mathfrak{s}$ a exactement m^{2g} typages différents.*

Démonstration. Remarquons que si l'on identifie $[\![0, m-1]\!]$ avec $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, l'ensemble des typages valides de $\mathfrak{s}$ est un $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-espace vectoriel. En fait, cet espace vectoriel n'est autre que l'espace des cycles de $\mathfrak{s}$, dans le sens classique de la théorie algébrique des graphes (voir [93]). Or, il est bien connu que la dimension de l'espace des cycles d'un graphe connexe est égale à son nombre d'arêtes, moins son nombre de sommets, plus 1 (pour voir cela, il suffit de remarquer que les arêtes complémentaires de tout arbre couvrant en forment une base). Puisque $\mathfrak{s}$ n'a qu'une face, la formule d'Euler donne :

$$\#\text{arêtes de } \mathfrak{s} - \#\text{sommets de } \mathfrak{s} = 2g - 1.$$

L'espace des cycles a donc dimension $2g$, et son cardinal est m^{2g}. □

4.5.3 Étoiles nodales et schémas décorés

Fixons à nouveau un nœud v de $\mathfrak{t}$. Si v est non étiqueté, il est situé au centre d'une étoile élémentaire F_v, que nous avons appelée *étoile nodale*. F_v porte un certain nombre d'arêtes coupées spéciales, et un certain nombre de sommets étiquetés qui sont reliés aux chemins $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{t}$. Nous commettrons dans ce qui suit un léger abus de notations, en considérant que F_v désigne non seulement l'étoile élémentaire elle-même, mais l'étoile élémentaire munie de ces arêtes coupées spéciales et sommets étiquetés distingués, ainsi que de l'application qui associe à chacun de ces éléments distingués la demi-arête correspondante de $\mathfrak{s}$. Dans le cas où v est étiqueté, on pose formellement $F_v = \circ$, où $\circ$ doit être compris comme un sommet étiqueté considéré à translation près (de sorte que son étiquette n'importe pas).

Définition 28. On dit que le quadruplet

$$(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}) = \big(\mathfrak{s}, (\tau(e))_{e\in E(\mathfrak{s})}, (F(v))_{v\in V(\mathfrak{s})}, (\mathfrak{a}_1(e), \mathfrak{a}_2(e))_{e\in E(\mathfrak{s})}\big)$$

est le *schéma décoré* de $\mathfrak{t}$.

Dans la suite du chapitre, si $\mathfrak{s}$ est un schéma, on notera toujours $E(\mathfrak{s})$ et $V(\mathfrak{s})$ son ensemble d'arêtes et de sommets, respectivement. Si $|E(\mathfrak{s})| = k$, on identifiera parfois $E(\mathfrak{s})$ avec $[\![1, k]\!]$ sans plus de précisions.

4.5.4 Le schéma complet d'un mobile

Nous aurons besoin de faire la convention suivante : pour tout schéma décoré $(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a})$, et pour tout sommet v de $\mathfrak{s}$, l'étoile F_v porte un sommet étiqueté ou un drapeau distingué. Cet élément distingué est choisi de manière arbitraire mais fixé une fois pour toutes. On l'appellera *l'élément canonique* de v.

Soit maintenant $\mathfrak{t}$ un mobile, de schéma décoré $(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a})$. Pour chaque sommet v de $\mathfrak{s}$, on note l_v l'étiquette, dans le mobile original $\mathfrak{t}$, de son élément canonique. On normalise ensuite les entiers $(l_v)_{v\in V(\mathfrak{s})}$ pour qu'ils forment un intervalle entier de minimum 0. En d'autres termes, on pose $M = \text{card}\ \{l_v,\ v \in V(\mathfrak{s})\} - 1$ et on note λ l'unique application surjective $V(\mathfrak{s}) \to [\![0, M]\!]$ telle que $l_v = l_{v'}$ ssi $\lambda(v) = \lambda(v')$ et $l_v < l_{v'}$ ssi $\lambda(v) < \lambda(v')$.

Définition 29. On dit que le quintuplet $(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda)$ est le *schéma complet* de $\mathfrak{t}$.

En résumé, le schéma complet d'un mobile $\mathfrak{t}$ contient cinq informations : l'arrangement combinatoire des superchaînes, donné par $\mathfrak{s}$; le type des superchaînes, donné par τ ; les étoiles F_v qui sont autour de chaque sommet de $\mathfrak{s}$; les étoiles $\mathfrak{a}_1(i)$ et $\mathfrak{a}_2(i)$ qui permettent de s'assurer que les superchaînes de type non nul commencent par une étoile blanche, et finissent par une étoile noire ; l'ordre relatif des étiquettes des éléments canoniques, donné par λ.

Rappelons que le nombre de schémas de genre g est fini, et que le nombre de typages d'un schéma donné est, lui aussi, fini. De plus, puisque l'ensemble D des degrés autorisés est fini, il n'y a qu'un nombre fini d'étoiles élémentaires de degré total dans mD. En conséquence, on obtient :

Lemme 46. *L'ensemble $\mathcal{F}_g$ de tous les schémas complets de genre g est fini.*

Remarque : Bien sûr, il est implicite dans le lemme précédent que D et m sont fixés, et que l'on ne considère que les schémas complets qui sont associés à des mobiles eux-mêmes associés à des m-hypercartes de degré mD.

Soit $\mathfrak{f} = (\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda)$ un schéma complet de genre g. On dit qu'un étiquetage $(l_v)_{v \in V(\mathfrak{s})}$ de ses éléments canoniques est *compatible* avec $\mathfrak{f}$ si en le normalisant comme on l'a fait plus haut, on obtient l'application λ. On considère les étiquetages canoniques à translation près, ou, de manière équivalente, on suppose que l'étiquette l_v minimale est égale à 0. Alors tous les étiquetages canoniques sont de la forme :

$$l_v = \sum_{i=1}^{\lambda(v)} \delta_i \quad \text{pour un } \delta \in (\mathbb{N}_{>0})^M.$$

Supposons maintenant qu'un tel étiquetage ait été fixé. Pour reconstruire un mobile, nous devons opérer à l'inverse de ce qui précède, et substituer une suite de cellules du bon type à chaque arête de $\mathfrak{s}$. Remarquons que, pour chaque arête e de $\mathfrak{s}$, l'incrément $\Delta(e)$ de la superchaîne associée à e est fixé par le choix des l_v. Précisément, soient e_+ et e_- les extrémités de e, avec la convention $\lambda(e_+) \geq \lambda(e_-)$ (si $\lambda(e_+) = \lambda(e_-)$, n'importe quel choix fixé fera l'affaire). Alors, au signe près, on a $\Delta(e) = l_{e_+} - l_{e_-} + a_{F,\mathfrak{a}}(e)$, où $a_{F,\mathfrak{a}}(e)$ est un terme correctif qui ne dépend pas des l_v, et qui prend en compte le fait que les superchaînes ne commencent ni ne terminent nécessairement par des éléments canoniques. Précisément, $a_{F,\mathfrak{a}}(e)$ est égal à la différence entre l'étiquette de l'élément canonique de e_+ et celle du sommet ou drapeau *out* de $\mathfrak{a}_2(e)$, de laquelle il faut soustraire la quantité correspondante pour e_- (il est important que ces quantités ne dépendent que de F et $\mathfrak{a}$). On peut alors exprimer $\Delta(e)$ en fonction des δ_i :

$$\Delta(e) = a_{F,\mathfrak{a}}(e) + \delta_{e_-+1} + \ldots + \delta_{e_+} = a_{F,\mathfrak{a}}(e) + \sum_j A_{e,j}\delta_j$$

où pour chaque arête e et $j \in [\![1, M]\!]$, on a noté $A_{e,j} = \mathbb{1}_{\lambda(e_-) < j \leq \lambda(e_+)}$.

4.5.5 Un algorithme non déterministe

Algorithme 3. On reconstruit un mobile par la suite d'opérations suivante :

(1). on choisit un schéma complet $\mathfrak{f} = (\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda) \in \mathcal{F}_g$;

(2). on choisit un étiquetage compatible $(l_v)_{v \in V(\mathfrak{s})}$ de $\mathfrak{f}$, ou de manière équivalente un vecteur $\delta \in (\mathbb{N}_{>0})^M$;

(3). pour chaque arête e de $\mathfrak{s}$, on choisit une chaîne de type $\tau(e)$. On remplace e par cette chaîne, éventuellement précédée de l'étoile $\mathfrak{a}_1(e)$ et suivie de l'étoile $\mathfrak{a}_2(e)$ si elles ne sont pas vides ;

(4). à chaque coin incident à un sommet étiqueté, on attache un mobile planaire (éventuellement trivial) ;

(5). on distingue une arête racine, incidente à un sommet blanc non étiqueté ;

(6). on translate toutes les étiquettes pour que la nouvelle étiquette racine soit 0.

On a alors :

Proposition 47. *Tous les mobiles de genre g peuvent être obtenus par l'algorithme 3. Plus précisément, un mobile dont le schéma a k arêtes peut être obtenu d'exactement $2k$ manières différentes par cet algorithme.*

Démonstration. La première affirmation se déduit de la décomposition que l'on a présentée dans ce qui précède : pour reconstruire un mobile, il suffit de rajouter ce qu'on a enlevé dans la construction de son schéma complet.

La seule chose à démontrer est donc la deuxième affirmation. Il est clair que le seul moyen d'obtenir deux fois un même mobile $\mathfrak{t}$ par l'algorithme en faisant des choix différents est de démarrer avec un schéma qui coïncide avec le schéma de $\mathfrak{t}$ en tant que carte non enracinée, mais diffère par l'enracinement. Précisément, appelons *mobile doublement enraciné* un mobile enraciné dont le schéma porte une racine (un coin distingué) supplémentaire. Alors, un mobile enraciné dont le schéma a k arêtes correspond à $2k$ mobiles doublement enracinés (son schéma étant déjà enraciné, il n'a pas de symétries). Or, l'algorithme 3 peut être vu comme un algorithme qui produit un mobile doublement enraciné : la racine secondaire du schéma du mobile obtenu est simplement définie comme la racine du schéma $\mathfrak{s}$ choisi à l'étape **(1)** (nous insistons sur le fait qu'il n'y a aucune raison que la racine du schéma de départ $\mathfrak{s}$ soit la racine du schéma du mobile obtenu à la fin). De plus, il est clair que chaque mobile doublement enraciné ne peut-être obtenu que d'une manière par l'algorithme, puisque la racine secondaire impose le choix de la racine du schéma de départ $\mathfrak{s}$. Cela conclut la démonstration. □

Remarque 12. Considérons une variante de l'algorithme, où à l'étape **(1)**, on ne choisit que des schémas complets dont le type est identiquement nul. Alors, la proposition 47 reste vraie, à condition de remplacer « mobile » par « mobile associé à une m-constellation ». En effet, un mobile est associé à une m-constellation si et seulement s'il n'a pas d'arêtes spéciales, c'est-à-dire si son type est identiquement nul, et l'argument de double enracinement de la démonstration de la proposition reste vrai si l'on se restreint à ce type de mobiles.

4.6 Séries génératrices des cellules et des chaînes

L'algorithme 3 et la proposition 47 ramènent l'énumération des mobiles à celle d'un petit nombre de briques de base : schémas, mobiles planaires, cellules et chaînes de type donné. Nous allons maintenant calculer les séries génératrices correspondantes.
Note : dans ce qui suit, m et D sont fixés. Pour alléger le texte, la dépendance en m et D sera souvent omise dans les notations.

4.6.1 Mobiles planaires

On note $T_\circ(z)$ la série génératrice des mobiles planaires qui sont enracinés en un coin incident à un sommet étiqueté, où la variable z compte le nombre de sommets noirs.

Soit maintenant $\mathfrak{t}$ un tel mobile planaire, tel que l'étoile blanche élémentaire contenant l'arête racine ait degré total mk. Cette étoile est attachée à un mobile planaire en chacun de ses $(m-1)k$ sommets étiquetés ; chacun de ces mobiles est naturellement enraciné en un sommet étiqueté. De plus, étant donnée l'étoile élémentaire et la suite de ces

$(m-1)k$ mobiles, on peut facilement reconstruire le mobile $\mathfrak{t}$. Enfin, en vertu de la correspondance entre étoiles et m-marches, le nombre d'étoiles blanches de degré total mk portant un sommet étiqueté distingué est égal au nombre de marches de longueur mk, qui commencent avec un pas -1, ont $(m-1)k$ pas (-1) et k pas $(m-1)$, qui est $\binom{mk-1}{k}$. Cela conduit à l'équation [25, 27] :

$$T_\circ(z) = 1 + \sum_{k\in D} \binom{mk-1}{k} z^k T_\circ(z)^{(m-1)k}. \tag{4.3}$$

Remarquons que les hypothèses faites sur D assurent que cette équation est de degré au moins 2 en $T_\circ$. Ainsi, $T_\circ$ a un rayon de convergence $z_{m,D}^{(c)}$ strictement positif, et prend en $z = z_{m,D}^{(c)}$ une valeur *finie*. En notant $T_c = T_\circ(z_{m,D}^{(c)})$, on obtient facilement :

$$T_c = (m-1)\sum_{k\in D} k\binom{mk-1}{k}[z_{m,D}^{(c)} {T_c}^{m-1}]^k. \tag{4.4}$$

En retranchant l'équation (4.3) à l'équation (4.4), on voit que $z_{m,D}^{(c)} {T_c}^{m-1} = t_{m,D}^{(c)}$, et que $T_c = \beta_{m,D}$, où $t_{m,D}^{(c)}$ et $\beta_{m,D}$ sont définis dans l'énoncé du théorème 4. Ensuite, en écrivant le développement de Taylor de l'équation (4.3) au voisinage de $z = z_{m,D}^{(c)}$, on obtient le lemme suivant :

Lemme 48. *Quand z tend vers $z_{m,D}^{(c)}$, on a le développement de Puiseux :*

$$1 - \frac{T_\circ(z)}{T_c} = \sqrt{\frac{2\beta_{m,D}}{(m-1)\gamma_{m,D}}}\sqrt{1-\frac{z}{z_{m,D}^{(c)}}} + O\left(z_{m,D}^{(c)} - z\right).$$

4.6.2 Le polynôme caractéristique de type 0

Soit $\mathcal{F}_{m,D}^{\circ\circ}$ l'ensemble des cellules de type 0 dont le degré total appartient à mD. Pour $F \in \mathcal{F}_{m,D}^{\circ\circ}$, on note respectivement $|F|$ et $i(F)$ la taille et l'incrément de F. Le *polynôme caractéristique* de type 0 est le polynôme $1 - P_{m,D}(X,t)$, où le polynôme de Laurent $P_{m,D}$ est défini par :

$$P_{m,D}(X,t) = \sum_{F\in\mathcal{F}_{m,D}^{\circ\circ}} t^{|F|}X^{i(F)}.$$

Par exemple, dans le cas $m = 2$, $D = \{2\}$, la figure 4.8 montre que le polynôme caractéristique est $1 - t^2(X^{-1} + 1 + X)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$, on note $a_{n,i}$ le nombre de chaînes de type 0, de taille n et d'incrément i. Remarquons que pour tout n, $a_{n,i} = 0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de i. Par conséquent, si l'on note $\mathbb{C}[X, X^{-1}][[t]]$ l'anneau des séries formelles en t dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en X, la série génératrice $S_{m,D}(X,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{n,i}t^nX^i$ des chaînes de type 0 par la taille et l'incrément est un élément de $\mathbb{C}[X, X^{-1}][[t]]$. Puisque par définition, une chaîne de type 0 est une suite finie de cellules de type 0, et puisque la taille et l'incrément sont des paramètres additifs, on a :

$$S_{m,D}(X,t) = \frac{1}{1 - P_{m,D}(X,t)}.$$

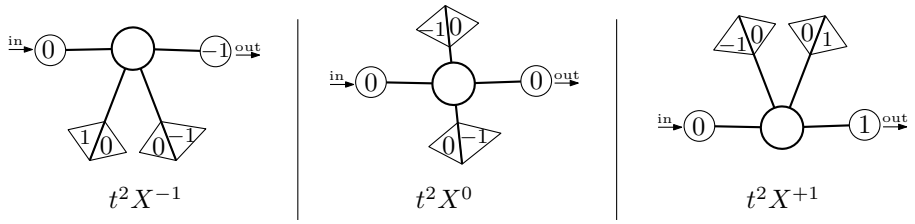


FIG. 4.8 – Les trois cellules de type 0 et de degré total 4, dans le cas $m = 2$.

C'est pourquoi nous allons passer un peu de temps à étudier le polynôme caractéristique $1 - P_{m,D}(X,t)$ (qui est également appelé le *noyau* dans la terminologie des marches sur réseau [6, 23]).

Remarquons que, dans la reformulation en m-marches, une cellule de type 0 est une m-marche circulaire avec deux pas (-1) distingués, ou de manière équivalente, une m-marche commençant par un pas (-1), portant un autre pas (-1) distingué. Par conséquent, le nombre de cellules de type 0 et de degré total mk est égal à $[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}$. On a donc $P_{m,D}(1,t) = \sum_{k\in D}[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}t^k$, et $P_{m,D}(1,t^{(c)}_{m,D}) = 1$. Ainsi, $t^{(c)}_{m,D}$ est le rayon de convergence de la série $S_{m,D}(1,t)$. Nous étudions maintenant les dérivées partielles du polynôme caractéristique au point critique.

Lemme 49. *On a :*

$$\frac{t\partial P_{m,D}}{\partial t}(1,t^{(c)}_{m,D}) = \frac{\gamma_{m,D}}{m-1}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial P_{m,D}}{\partial X}(1,t^{(c)}_{m,D}) = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial^2 P_{m,D}}{\partial X^2}(1,t^{(c)}_{m,D}) = \frac{m}{6}\gamma_{m,D}. \tag{4.7}$$

Démonstration. La première équation vient directement de la définition de $\gamma_{m,D}$ et du fait qu'il y a $[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}$ cellules de type 0 et de taille k.

Pour la seconde équation, il suffit d'observer que, puisque l'opération consistant à échanger les sommets *in* et *out* d'une cellule est une involution de $\mathcal{F}^{\circ\circ}_{m,D}$, on a pour tout t : $P_{m,D}(X,t) = P_{m,D}(X^{-1},t)$, ce qui donne le résultat en dérivant.

Il reste à démontrer la troisième équation. Tout d'abord, dans la reformulation en m-marches, $P_{m,D}$ est le polynôme générateur des m-marches linéaires de longueur mk, commençant par un pas (-1), dans lesquels une position précédant un pas (-1) est distinguée. De plus, puisque la dérivée première est nulle (équation (4.6)), on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P_{m,D}}{\partial X^2}(1,t) &= \sum_{F\in\mathcal{F}^{\circ\circ}_{m,D}} i(F)(i(F)-1)t^{|F|} \\ &= \sum_{F\in\mathcal{F}^{\circ\circ}_{m,D}} i(F)^2 t^{|F|} = \sum_{k\in D} p_k t^k\end{aligned}$$

où $p_k(t) = \sum_{F\in\mathcal{F}^{\circ\circ}_{m,\{k\}}} i(F)^2$.. Fixons maintenant $k \in D$, et notons $\mathcal{W}^{\circ}_{m,k}$ l'ensemble des m-marches de longueur mk commençant par un pas -1. On note $u = (m-1)k$ le nombre de

pas (-1) d'une telle marche, et pour tout $w \in \mathcal{W}^{\circ}_{m,k}$, on note $x_0(w), x_1(w), \ldots, x_{u-1}(w)$ les ordonnées des points précédant un pas (-1) dans w (de sorte que $x_0(w) = 0$). Alors, en choisissant d'abord la m-marche, et en distinguant ensuite un pas (-1), on peut écrire :

$$p_k = \sum_{w \in \mathcal{W}^{\circ}_{m,k}} (x_1(w)^2 + x_2(w)^2 + \ldots x_{u-1}(w)^2) \tag{4.8}$$

On introduit maintenant les *montées* comme les quantités $\lambda_i(w) = x_i(w) - x_{i-1}(w)$, pour $i \in [\![1, u]\!]$. Alors on a les fait suivants :

– Par symétrie, les quantités suivantes sont indépendantes de j :

$$V_k = \sum_{w \in \mathcal{W}^{\circ}_{m,k}} \lambda_j(w)^2 t^k \quad (\text{pour } j = 1..u-1)$$

$$W_k = \sum_{w \in \mathcal{W}^{\circ}_{m,k}} \lambda_1(w)\lambda_j(w) t^k \quad (\text{pour } j = 2..u-1).$$

– Puisque l'on a pour tout w : $\lambda_1(\lambda_1 + \cdots + \lambda_u) = 0$ c'est encore vrai après sommation, et :

$$V_k + [u-1]W_k = 0.$$

En regroupant ce dernier point avec l'équation (4.8), on obtient après remplacement de $x_i(w)$ par $\lambda_1(w) + \cdots + \lambda_i(w)$, et développement :

$$\begin{aligned} p_k = &= \frac{u(u-1)}{2} V_k + \frac{u(u-1)(u-2)}{3} W_k \\ &= \frac{u(u+1)}{6} V_k. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Or, pour tout i, le nombre de m-marches de taille k tels que $\lambda_1 = (m-1)i - 1$ est $\binom{mk-2-i}{k-i}$, d'où :

$$\begin{aligned} V_k &= \sum_i [(m-1)i - 1]^2 \binom{mk-2-i}{k-i} \\ &= [Y^{k-i}] \sum_i [(m-1)i - 1]^2 (1+Y)^{mk-2-i}. \end{aligned}$$

En exprimant cette dernière somme comme une fraction rationnelle explicite de Y, on obtient la valeur exacte de V_k, et en utilisant l'équation (4.9), on a finalement :

$$p_k = \frac{mk(m-1)[(m-1)k-1]}{6} \binom{mk-1}{k}.$$

Ainsi, $\dfrac{\partial^2 P_{m,D}}{\partial X^2}(1,t) = \displaystyle\sum_{k \in D} \frac{mk(m-1)[(m-1)k-1]}{6} \binom{mk-1}{k} t^k$ ce qui, en comparant avec la définition de $\gamma_{m,D}$, conclut la démonstration. □

4.6.3 Les racines du polynôme caractéristique

Dans cette section, on étudie les racines de $1 - P_{m,D}$. Certains arguments sont standard pour les marches sur réseaux, et sont contenus sous des formes équivalentes dans [6],[23].

Commençons par remarquer que pour une cellule de type 0 et de taille k, l'incrément maximal possible est $(m-1)k - 1$, qui correspond au cas où la m-marche associée commence par tous ses pas (-1), le dernier étant le pas distingué. De même, l'incrément minimal possible est $1 - (m-1)k$. De plus par définition, l'exposant maximal de t dans $P_{m,D}$ est égal à $\max(D)$. Par conséquent, si l'on pose

$$r := (m-1)\max(D) - 1$$

alors dans $P_{m,D}(X,t)$ la puissance maximale de X est r, est sa puissance minimale est $-r$. Le (vrai) polynôme $X^r\big(1 - P_{m,D}(X,t)\big)$ est donc de degré $2r$, et possède donc $2r$ racines, avec multiplicité. Puisque $0 \notin D$ on a $P_{m,D}(X,0) = 0$, et l'on voit que pour $t = 0$ exactement r de ces racines sont finies, et valent 0 : appelons-les $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$. Puisque l'inversion des sommets *in* et *out* est une involution de l'ensemble des cellules de type 0, $P_{m,D}$ est symétrique par l'échange $X \leftrightarrow X^{-1}$, et les r autres racines sont $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_r^{-1}$, et elles sont infinies à $t = 0$.

Les $\alpha_i(t)$ sont des séries de Puiseux en t. Pour évaluer leur comportement quand t tend vers 0, nous considérons le polygone de Newton du polynôme $X^r(1 - P_{m,D})$, c'est-à-dire l'enveloppe convexe des points (i,j) du plan pour lesquels le monôme $t^i X^j$ apparaît avec un coefficient non nul (voir [48, p.498]). En vertu de la discussion précédente sur les incréments maximaux des cellules de taille donnée, le polygone de Newton est l'enveloppe convexe de l'ensemble de points suivants :

$$\big\{(0,r)\big\} \bigcup \big\{(k, r + (m-1)k - 1), k \in D\big\} \bigcup \big\{(k, r + 1 - (m-1)k), k \in D\big\}.$$

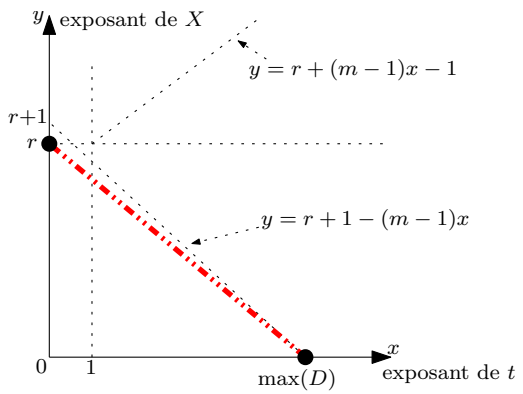


FIG. 4.9 – Le polygone de Newton du polynôme $X^r\big(1 - P_{m,D}(X,t)\big)$.

Puisque r est égal à $(m-1)\max(D) - 1$, on voit facilement (figure 4.9) que le segment inférieur de polygone de Newton a pente $-\frac{r}{\max(D)}$. Ainsi, les r branches $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_r(t)$

ont un développement de Puiseux en 0 dont le premier terme est :

$$\alpha_i(t) = c_0 \cdot (\xi^i t^{1/r})^{\max(D)} + \dots$$

pour une certaine constante non nulle c_0, et une racine r-ième primitive de l'unité ξ. Or, les entiers $\max(D)$ et r sont premiers entre eux, ce qui implique le fait important suivant : les racines $\alpha_i(t)$ sont r séries formelles à exposant fractionnaire *distinctes*. On a de plus :

Lemme 50. *Quitte à renuméroter les racines, on a :*

(i). $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ *pour* $t \in [0, t_{m,D}^{(c)}]$, *et* $\alpha_1(t)$ *est une fonction strictement croissante sur cet intervalle. De plus,* $\alpha_1 \longrightarrow 1$ *quand* $t \longrightarrow t_{m,D}^{(c)}$.

(ii). pour tout $i \neq 1$, *et pour tout* $t \in [0, t_{m,D}^{(c)}]$, $|\alpha_i(t)| < |\alpha_1(t)|$. *Il existe* $\epsilon > 0$ *tel que pour tout* $i \neq 1$ *et pour tout* $t \in [0, t_c]$, $|\alpha_i(t)| < 1 - \epsilon$.

Dans le reste du chapitre, on conservera la numérotation des racines donnée par le lemme. La racine $\alpha_1(t)$ est appelée la *branche principale*.

Démonstration. Nous avons déjà remarqué que 1 est une racine de $P_{m,D}(X, t_c)$ et par le lemme 49, elle est de multiplicité exactement 2.

Or, pour tout $t \in (0, t_c)$ on sait par positivité des coefficients de $P_{m,D}$ que $P_{m,D}(1, t) \leq P_{m,D}(1, t_c) = 1$, et $P_{m,D}(0, t) = \infty$. De plus $X \mapsto P_{m,D}(X, t)$ est décroissante sur $[0, 1]$ (puisque pour tout i, $X^i + X^{-i}$ l'est) donc il existe un unique $\alpha = \alpha(t) \in [0, 1]$ tel que $P_{m,D}(\alpha(t), t) = 1$. Or puisque $P_{m,D}$ a des coefficients positifs, $\alpha(t)$ est une fonction croissante de t. Cela démontre l'assertion (i).

De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $|P_{m,D}(\lambda)| \leq P_{m,D}(|\lambda|)$, avec égalité si et seulement si $\lambda > 0$. Donc si $|\lambda| \leq \alpha_1(t)$ on a $P_{m,D}(\lambda, t) \leq 1$, avec égalité si et seulement si $\lambda = \alpha_1$. Avec un argument de compacité, cela implique l'assertion (ii). □

Le lemme 49 donne alors :

Lemme 51. *Au voisinage de* $t = t_c$, *on a le développement de Puiseux suivant :*

$$\alpha_1(t) = 1 - \sqrt{\frac{12}{m(m-1)}} \left(1 - \frac{t}{t_{m,D}^{(c)}}\right)^{\frac{1}{2}} + o\left(\left(1 - \frac{t}{t_{m,D}^{(c)}}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Le coefficient de X^r dans $1 - P_{m,D}(X, t)$ étant $-t^{\max(D)}$, on a :

$$1 - P_{m,D}(X, t) = -t^{\max(D)} \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)(1 - X^{-1}\alpha_i^{-1}).$$

Définissons maintenant, pour $i \in [\![1, r]\!]$, la série de Puiseux en t suivante :

$$C_i = \frac{1/\alpha_i}{-t^{\max D} \prod_j (1 - \frac{1}{\alpha_i \alpha_j}) \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}. \tag{4.10}$$

Alors on a la décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} S_{m,D}(X,t) &= \frac{1}{1-P_{m,D}(X,t)} && (4.11)\\ &= \frac{1}{-t^{\max(D)}\prod_i (X-\alpha_i)(1-{\alpha_i}^{-1}X^{-1})} && (4.12)\\ &= \sum_i \frac{C_i\alpha_i}{X-\alpha_i} + \sum_i \frac{C_i}{1-X\alpha_i}. && (4.13) \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant extraire le « coefficient » de X^n dans $S_{m,D}$ grâce aux manipulations suivantes (voir [87, sec.6.3]) :

$$\begin{aligned} S_{m,D}(X,t) &= \sum_i \frac{X^{-1}C_i\alpha_i}{1-X^{-1}\alpha_i} + \sum_i \frac{C_i}{1-X\alpha_i}\\ &= \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} C_i{\alpha_i}^{n+1}X^{-n-1} + \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} C_i{\alpha_i}^{n}X^{n}. \end{aligned}$$

Remarquons que les égalités ci-dessus sont bien valides dans l'anneau des séries de Puiseux en t dont les coefficients sont des polynômes de Laurent en X. Ainsi, si pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on note $M_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}t^k$ la série génératrice des chaînes de type 0 et d'incrément n, en fonction de la taille, on a :

$$M_n(t) = \text{"}[X^n]S_{m,D}(X,t)\text{"} = \sum_{i=1}^{r} C_i(t)\alpha_i(t)^{|n|}. \qquad (4.14)$$

Remarquons que dans la série $M_0(t)$, la marche vide de longueur 0 est comptée.

4.6.4 Chaînes de tout type

Nous allons maintenant voir que les séries génératrices des chaînes de type 0 et de type $\tau \neq 0$ sont étroitement reliées. Pour faire apparaître leur relation, nous devons considérer non seulement des chaînes, mais des chaînes dans lesquelles un mobile planaire a été attaché sur chaque sommet étiqueté. Pour tout $\tau \in [\![0, m-1]\!]$, nous notons $H_n^\tau(z)$ la série génératrice des chaînes de type τ, qui portent sur chaque coin incident à un sommet étiqueté un mobile planaire (éventuellement trivial), et d'incrément total n. La variable z compte le nombre total d'arêtes drapées.

Dans le cas $\tau = 0$, cette série est aisément reliée à M_n : puisqu'une chaîne de type 0 et de taille k a $(m-1)k$ sommets étiquetés, et k arêtes drapées, H_n s'obtient à partir de M_n par la substitution $z \leftarrow zT_\circ(z)^{m-1}$.

Définition 30. Dans le reste du chapitre, on notera $t(z) := zT_\circ(z)^{m-1}$.

On a alors : $H_n^0(z) = M_n\left(t(z)\right) = \sum_{i=1}^{r} C_i(t(z))\alpha_i(t(z))^{|n|}$.

Nous examinons maintenant le cas $\tau \in [\![1, m-1]\!]$. Pour un tel τ, on note $P_{m,D}^\tau(X,t,u)$ le polynôme générateur des cellules élémentaires de type τ, où X, t, u comptent respectivement l'incrément, le nombre de sommets noirs, et le nombre de sommets étiquetés.

On note également $r_k^{(\tau)}(X)$ la série des étoiles blanches élémentaires de degré total mk, portant exactement deux arêtes coupées spéciales, une de type τ et une de type $m-\tau$. La variable X compte l'incrément entre les deux arêtes spéciales. Puisqu'une telle étoile a exactement $(m-1)k-1$ sommets étiquetés, $k-1$ sommets noirs, et puisque la série génératrice des étoiles noires de degré m avec deux arêtes spéciales est $1+X+\cdots+X^{m-2}$, on a, en se rappelant qu'une cellule de type τ est la juxtaposition d'une étoile blanche et d'une étoile noire :

$$P_{m,D}^{(\tau)}(X,t,u) = (1+X+\cdots+X^{m-2})\sum_{k\in D} t^k u^{(m-1)k-1} r_k^{(\tau)}(X). \tag{4.15}$$

Or, $r_k^{(\tau)}(X)$ est aussi la série génératrice des m-marches de longueur mk, avec $k-1$

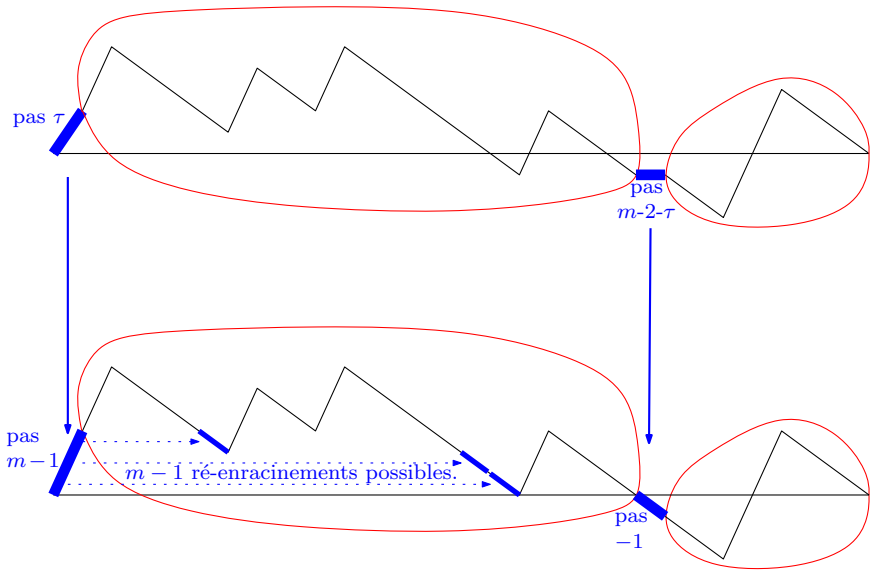


FIG. 4.10 – Les marches avec deux pas spéciaux sont en correspondance avec les marches portant deux pas distingués, l'un $m-1$ et l'autre -1 (flèches verticales). Ces marches peuvent être réenracinées de $m-1$ façons différentes pour obtenir des marches portant deux pas -1 distingués (flèches horizontales). Dans l'opération de réenracinement, l'incrément entre les deux pas est modifié par une quantité parmi $0,\ldots,m-2$, ce qui induit un facteur $1+X+\cdots+X^{m-2}$ entre les séries génératrices.

pas $m-1$, $(m-1)k-1$ pas -1, commençant par un pas $\tau-1$ et portant un pas $m-\tau-1$ distingué. Ces marches sont en bijection avec les marches de longueur mk qui n'ont que des pas -1 et $m-1$, commençant par un pas $m-1$, portant un pas -1 distingué : pour voir cela, il suffit de remplacer les deux pas $\tau-1$, $m-1-\tau$ par deux pas $-1, m-1$. Puisque dans cette marche les seuls pas décroissants sont des pas -1, le pas distingué $m-1$ se trouve en face d'exactement $m-1$ pas -1 (figure 4.10). Par conséquent, $(1+X+\cdots+X^{m-2})r_k^{(\tau)}(X)$ est la série génératrice des marches cycliques portant deux pas -1 distingués, où X compte l'incrément entre eux.

Remarquons que ces deux pas distingués ne sont pas nécessairement distincts. S'ils sont égaux, la marche n'est qu'une marche cyclique avec un pas -1 distingué : il y en a $\binom{mk-1}{k}$. Si les deux pas ne sont pas égaux, l'objet que nous considérons est exactement

(modulo la correspondante étoiles-marches) une cellule de type 0. On a donc :

$$(1+X+\cdots+X^{m-2})r_k^{(\tau)}(X) = \binom{mk-1}{k} + [t^k]P_{m,D}(X,t).$$

Cela donne avec l'équation (4.15) :

$$T_\circ(z)P^\tau_{m,D}(X,z,T_\circ(z)) = \left(\sum_{k\in D}\binom{mk-1}{k}t(z)^k + P_{m,D}(X,t(z))\right)$$

et l'équation (4.3) donne :

$$\frac{T_\circ(z)}{1-P_{m,D}(X,t(z))} = \frac{1}{1-P^\tau_{m,D}(X,z,T_\circ(z))}.$$

Or, le coefficient de X^n dans le membre de droite est exactement $H_n^\tau(z)$. Par ailleurs, le coefficient de X^n dans le membre de gauche est exactement $T_\circ M_n(t(z))$. On obtient donc la proposition suivante, qui est avec le lemme 45 le point clé de la démonstration du théorème 5 :

Proposition 52. *Pour tout $\tau \in [\![1, m-1]\!]$, et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

$$H_n^\tau(z) = T_\circ(z)H_n^0(z). \tag{4.16}$$

Au passage, nous pouvons remarquer que pour $\tau \neq 0$, $H_n^\tau(z)$ ne dépend pas de τ.

4.7 Séries génératrices des mobiles

4.7.1 Conséquences de la proposition 47

Soit $\mathfrak{f} = (\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda)$ un schéma complet de genre g. Nous allons utiliser l'algorithme 3, et remplacer chaque arête de $\mathfrak{s}$ par une chaîne. Nous choisissons un étiquetage compatible $(l_v)_{v\in V(\mathfrak{s})}$ de $\mathfrak{s}$. Avant de continuer, nous devons mener une petite discussion sur un cas particulier. Supposons que l'étiquetage choisi impose que l'on substitue une arête e de $\mathfrak{s}$ par une chaîne de type 0 et d'incrément $\Delta(e) = 0$. Alors, si l'une des extrémités de e est associée à une étoile nodale non triviale, il est possible de remplacer e par la chaîne vide ; sinon, i.e. si les deux extrémités e_- et e_+ sont associées à l'étoile nodale $F_{e_-} = F_{e_+} = \circ$, il est exclu de remplacer e par une chaîne de longueur 0, puisque cela identifierait les deux sommets correspondants du schéma. Ainsi, si e est une arête de $\mathfrak{s}$ on pose :

$$r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e) = \begin{cases} 1 \text{ si } \tau(e) = 0 \text{ et } \Delta(e) = 0 \text{ et } F_{e_-} = F_{e_+} = \circ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors l'arête e peut être remplacée par la chaîne vide si et seulement si $r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e) \neq 1$. Remarquons que, comme la notation l'indique, $r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)$ ne dépend pas seulement du schéma complet $\mathfrak{f}$, mais aussi de l'étiquetage compatible (l_v) choisi.

On pose $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{a}_1|+|\mathfrak{a}_2|$, $\langle\mathfrak{a}\rangle = \langle\mathfrak{a}_1\rangle+\langle\mathfrak{a}_2\rangle$, et de même $|F| = \sum_v |F_v|$ et $\langle F\rangle = \sum_v \langle F_v\rangle$. Alors la série :

$$R_{\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda}(z) := z^{\langle\mathfrak{a}\rangle+\langle\mathfrak{c}\rangle} t(z)^{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{c}|} \sum_{\text{étiquetages}} \prod_{e\in E(\mathfrak{s})} \left(H^{\tau(e)}_{\Delta(e)}(z) - r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)\right)$$

est la série génératrice des objets engendrés par les quatre premières étapes de l'algorithme 3. Dans cette formule, le premier facteur permet de compter les sommets noirs qui apparaissent dans $\mathfrak{f}$, et le second facteur tient compte du fait qu'il faut aussi accrocher des mobiles planaires sur les sommets étiquetés présents dans $\mathfrak{f}$.

On définit maintenant $R_g(z)$ comme la série génératrice des mobiles de genre g, par le nombre de sommets noirs (là encore, la dépendance en m et D est implicite). Puisqu'un mobile à k sommets noirs a un total de mk arêtes, l'étape **(5)** de l'algorithme 3 correspond à un opérateur $m\frac{zd}{dz}$ sur la série génératrice. Par conséquent, la proposition 47 implique :

Corollaire 17. *La série des mobiles de genre g est donnée par :*

$$R_g(z) = m\frac{zd}{dz} \sum_{(\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda)\in\mathcal{F}_g} \frac{1}{2|E(\mathfrak{s})|} R_{\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda}(z). \tag{4.17}$$

Remarque 13. On déduit de la remarque 12 que la série génératrice des mobiles correspondant aux m-constellations de degrés autorisés mD s'écrit :

$$R^{cons}_g(z) = m\frac{zd}{dz} \sum_{(\mathfrak{s},\vec{0},F,\mathfrak{a},\lambda)\in\mathcal{F}_g} \frac{1}{2|E(\mathfrak{s})|} R_{\mathfrak{s},\vec{0},F,\mathfrak{a},\lambda}(z) \tag{4.18}$$

où la somme est restreinte aux schémas complets $(\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda) \in \mathcal{F}_g$ tels que τ associe 0 à chaque arête.

4.7.2 Un calcul exact

Fixons un schéma complet $\mathfrak{f} = (\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda)$. On note E_1 l'ensemble des arêtes de $\mathfrak{s}$ telles que $\lambda(e_+) = \lambda(e_-)$, et E_2 son complémentaire. Remarquons que pour $e \in E_1$, la quantité $r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)$ ne dépend pas de l'étiquetage choisi : pour une telle arête, on pourra donc noter $r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e) = r_{\mathfrak{f}}(e)$.

Pour alléger les notations, on notera $T_\circ$, C_i, α_i pour $T_\circ(z)$, $C_i(t(z))$ et $\alpha_i(t(z))$, respectivement. On notera aussi $z^{\mathfrak{f}} := z^{\langle\mathfrak{a}\rangle+\langle\mathfrak{c}\rangle} t(z)^{|\mathfrak{a}|+|\mathfrak{c}|}$. Alors on a par l'équation (4.16) :

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{f}} &= z^{\mathfrak{f}} \sum_{\delta_1,..\delta_M>0} \prod_{e\in E_1} \left(\sum_{i=1}^r C_i - r_{\mathfrak{f}}(e)\right) \prod_{e\in E_2} \left(T_\circ^{\mathbb{1}_{\tau(e)\neq 0}} \sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{|\Delta(e)|} - r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)\right) \qquad (4.19) \\ &= z^{\mathfrak{f}} T_\circ^{n_\neq} \prod_{e\in E_1} \left(\sum_{i=1}^r C_i - r_{\mathfrak{f}}(e)\right) \sum_{\delta_1,..\delta_M>0} \prod_{e\in E_2} \left(\sum_{i=1}^r C_i \alpha_i^{|a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^M A_{e,j}\delta_j|} - r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)\right) \end{aligned}$$

où $n_\neq$ est le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$ de type $\neq 0$. Or, on peut remarquer que quand les δ_i sont assez grands, toutes les quantités $a_{F,\mathfrak{a}}(e) + \sum_{j=1}^M A_{e,j}\delta_j$ sont positives, et l'on peut

donc enlever les valeurs absolues dans la somme ci-dessus. De la même façon, quand les δ_i sont assez grands toutes les quantités $r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e)$, pour $e \in E_2$, sont nulles. Ainsi, si l'on définit la fraction rationnelle suivante des α_i :

$$\mathfrak{p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) := \sum_{\delta_1,..\delta_M<K} \prod_{e\in E_2} \left(\sum_{i=1}^{r} C_i \alpha_i^{|a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^{M} A_{e,j}\delta_j|} - r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e) \right)$$

où K est en entier assez grand, alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} &\sum_{\delta_1,..\delta_M>0} \prod_{e\in E_2} \left(\sum_{i=1}^{r} C_i \alpha_i^{|a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^{M} A_{e,j}\delta_j|} - r_{\mathfrak{f},(l_v)}(e) \right) \\ = \ & \mathfrak{p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \sum_{\delta_1,..\delta_M\geq K} \prod_{e\in E_2} \left(\sum_{i=1}^{r} C_i \alpha_i^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^{M} A_{e,j}\delta_j} \right). \end{aligned}$$

On a alors, en développant le produit :

$$\begin{aligned} \sum_{\delta_1,..\delta_M\geq K} \prod_{e\in E_2} \sum_{i=1}^{r} C_i \alpha_i^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^{M} A_{e,j}\delta_j} &= \sum_{\delta_1,..\delta_M\geq K} \sum_{i\in[\![1,r]\!]^{E_2}} \prod_{e\in E_2} C_{i_e} \alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)+\sum_{j=1}^{M} A_{e,j}\delta_j} \\ &= \sum_{i\in[\![1,r]\!]^{E_2}} \prod_{e\in E_2} C_{i_e} \alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)} \prod_{j=1}^{M} \frac{\left(\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}\right)^K}{1-\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}} \end{aligned}$$

où l'égalité précédente résulte d'une sommation géométrique sur chaque variable δ_i. Remarquons qu'il ne reste que des sommes et des produits *finis*. On a donc démontré :

Proposition 53. *La série $R_{\mathfrak{f}}(z)$ est une série algébrique de z, donnée par l'expression suivante :*

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{f}}(z) = z^{\mathfrak{f}} T_\circ^{n_\neq} \prod_{e\in E_1} \left(\sum_{i=1}^{r} C_i - r_{\mathfrak{f}}(e) \right) \times \\ \times \left(\mathfrak{p}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) + \sum_{i\in[\![1,r]\!]^{E_2}} \prod_{e\in E_2} C_{i_e} \alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)} \prod_{j=1}^{M} \frac{\left(\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}\right)^K}{1-\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}} \right). \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.7.3 Le comportement singulier de $R_{\mathfrak{f}}$

Lemme 54. *Le rayon de convergence de $R_{\mathfrak{f}}(z)$ est au moins $z_{m,D}^{(c)}$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble des objets obtenus en remplaçant chaque arête e de $\mathfrak{s}$ par une chaîne de type $\tau(e)$, sans aucune contrainte sur les incréments des différentes chaînes. Ces objets ne sont pas tous des mobiles valides (la plupart ne le sont pas), mais clairement cette famille contient tous les mobiles comptés par la série $R_{\mathfrak{f}}(z)$. Or, si $\mathfrak{s}$ a n_0 arêtes de type 0 et n_1 arêtes de type $\neq 0$, la série génératrice de ces objets est

$$z^{\mathfrak{f}} \left(\frac{1}{1-P_{m,D}(1,t(z))} \right)^{n_0} \left(\frac{T_\circ(z)}{1-P_{m,D}(1,t(z))} \right)^{n_1}$$

et donc :

$$R_{\mathfrak{f}}(z) \preccurlyeq z^{\mathfrak{f}} T_\circ(z)^{n_1} \left(\frac{1}{1 - P_{m,D}(1, t(z))} \right)^{n_0+n_1}$$

où $\preccurlyeq$ désigne la comparaison coefficient par coefficient. Puisque ces deux séries sont à coefficients positifs, cela implique que le rayon de convergence de $R_{\mathfrak{f}}$ est au moins $z^{(c)}_{m,D}$ (rappelons que $P_{m,D}(1, t^{(c)}_{m,D}) = 1$ et que $P_{m,D}$ a des coefficients positifs, de sorte que $z^{(c)}_{m,D}$ est en effet le rayon de convergence du second membre). □

Nous étudions maintenant le comportement de $R_{\mathfrak{f}}(z)$ au voisinage de $z = z^{(c)}_{m,D}$. Plusieurs phénomènes apparaissent en $z = z^{(c)}_{m,D}$, qui peuvent créer une singularité. Tout d'abord, $z^{(c)}_{m,D}$ est le rayon de convergence de $T_\circ(z)$ et $t(z)$. Ensuite, on a vu qu'à $t = t^{(c)}_{m,D}$, au moins $\alpha_1(t)$ cesse d'être analytique : nous sommes donc dans un régime de *composition des singularités*. De plus, à $t = t^{(c)}_{m,D}$, $\alpha_1(t^{(c)}_{m,D}) = 1$ et donc les dénominateurs dans l'équation (4.20) peuvent s'annuler. Il ne sera pas très dur de contrôler ces trois facteurs. Il y a cependant un dernier phénomène auquel il faut prendre garde. En effet, si le polynôme $P_{m,D}(X, t^{(c)}_{m,D})$ a d'autres racines multiples que 1, les séries C_i correspondantes divergent au point critique. Cela étant, même dans ce cas, les divergences de ces séries se compensent entre racines conjuguées, de sorte que *tout se passe comme si* 1 *était la seule racine multiple*, comme le montre le lemme suivant :

Proposition 55. *Le seul terme dominant dans l'expression (4.20) est celui qui correspond à $i_e = 1$ pour tout e. Quand z tend vers $z^{(c)}_{m,D}$ on a :*

$$R_{\mathfrak{f}}(z) \quad = \quad c_{\mathfrak{s},\lambda} z^{\mathfrak{f}} {T_c}^{n_\neq} \frac{C_1(t(z))^{|E(\mathfrak{s})|}}{[1 - \alpha_1(t(z))]^M} [1 + o(1)] \tag{4.21}$$

où la constante $c_{\mathfrak{s},\lambda} = \dfrac{1}{\prod_{j=1}^M \sum_{e \in E} A_{e,j}}$ *ne dépend que de* $\mathfrak{s}$ *et* λ.

Démonstration. Tout d'abord, en écrivant le développement de C_1 au voisinage de $t = t^{(c)}_{m,D}$, on a : $C_1(t) \sim \dfrac{1 - \alpha_1}{2(1 - P(1,t))}$ ce qui implique que $C_1(t) = \Theta\Big((t^{(c)}_{m,D} - 1)^{-1/2}\Big)$.

Considérons maintenant la contribution des racines $\alpha_i(t)$ pour $i \neq 1$. La définition de $C_i(t)$ montre que $C_i(t)$ diverge en $t = t^{(c)}_{m,D}$ si et seulement si $\alpha_i(t^{(c)}_{m,D})$ est une racine multiple de $P(X, t^{(c)}_{m,D})$. On note $1 = \rho_1, \ldots, \rho_l$ les racines de $P(X, t^{(c)}_{m,D})$ de module inférieur ou égal à 1, sans multiplicité, et pour $j \leq l$ on note $I_j = \{i \geq 1,\ \alpha_i(t^{(c)}_{m,D}) = \rho_j\}$. Remarquons que l'on a $I_1 = \{1\}$ et $[\![1, r]\!] = \uplus_{j=1}^l I_j$.

Soit maintenant $j \geq 2$. On fixe t dans un voisinage pointé de $t^{(c)}_{m,D}$ sur lequel les $\alpha_i(t)$ soient distinctes. On a, en se rappelant la décomposition en éléments simples de $S(X,t)$:

$$C_i(t)\alpha_i(t) = \mathrm{Res}_{X=\alpha_i(t)} S(X,t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{T_i} S(X,t) dX$$

où l'on considère $S(X,t)$ comme une fonction analytique de la variable X, t étant fixé, et où T_i est un contour entourant $\alpha_i(t)$ et ne contenant aucune autre racine. Soit alors $\epsilon > 0$ tel que pour t assez proche de $t^{(c)}_{m,D}$, les racines $\alpha_i(t)$, $i \in I_j$ soient toutes contenues dans

le cercle C de centre ρ_j et de rayon ϵ, et tel que ce cercle n'entoure aucune autre racine. Alors, en choisissant pour les contours T_i une « tessellation » de C autour des $\alpha_i(t)$, on voit que :

$$\sum_{i\in I_j} C_i(t)\alpha_i(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C S(X,t)dX.$$

Or, quand t tend vers $t^{(c)}_{m,D}$, $S(X,t)$ converge vers $S(X,t^{(c)}_{m,D})$ *uniformément* en $X \in C$. Par conséquent, $\sum_{i\in I_j} C_i(t)\alpha_i(t)$ tend vers $\frac{1}{2\pi i}\oint_C S(X,t^{(c)}_{m,D})dX$, qui est une quantité *finie*. Ainsi, bien que les $C_i(t)$ puissent diverger, on a montré que $\sum_{i\in I_j} C_i(t)\alpha_i(t) = O(1)$ en $t = t^{(c)}_{m,D}$. De la même façon, en considérant cette fois le résidu de $X^{q-1}S(X,t)$, on voit que pour tout $q \geq 0$ on a :

$$\sum_{i\in I_j} C_i(t)\alpha_i(t)^q = O(1) \text{ en } t = t^{(c)}_{m,D}. \tag{4.22}$$

Examinons maintenant les simplifcations que cela implique dans l'équation (4.20). En arrangeant la sommation sur i pour regrouper ensemble les indices dont les racines se rejoignent au point critique, on a :

$$\sum_{i\in[\![1,r]\!]^{E_2}} \prod_{e\in E_2} C_{i_e}\alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)} \prod_{j=1}^{M} \frac{\left(\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}\right)^K}{1-\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}} \tag{4.23}$$

$$= \sum_{w\in[\![1,l]\!]^{E_2}} \sum_{i_1\in I_{w_1}} \cdots \sum_{i_{k'}\in I_{w_{k'}}} \prod_{e\in E_2} C_{i_e}\alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)} \prod_{j=1}^{M} \frac{\left(\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}\right)^K}{1-\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}} \tag{4.24}$$

où l'on a indentifié E_2 avec l'intervalle $[\![1,k']\!]$. Pour $w \in [\![1,l]\!]^{E_2}$, on note $|w|_1$ son nombre de coordonnées égales à 1, et on note $k_w = \{j,\ \forall e\ i_e = 1 \text{ ou } A_{e,j} = 0\}$ le nombre de facteurs tels que le dénominateur diverge dans l'équation précédente. Alors la somme précédente se réécrit :

$$\sum_{w\in[\![1,l]\!]^{E_2}} \frac{C_1(t)^{|w|_1}}{(1-\alpha_1(t))^{k_w}} \sum_{i_1\in I_{w_1}} \cdots \sum_{i_{k'}\in I_{w_{k'}}} \left(\prod_{e,w_e\neq 1} C_{i_e}\right) f_w(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_{k'}})$$

où f_w est une fonction de k' variables *analytique* au point $(\rho_{w_1},\rho_{w_2},\ldots,\rho_{w_{k'}})$. On considère alors le développement de Taylor multivarié de f_w en ce point, jusqu'à un certain ordre. Ce développement est formé d'une combinaison linéaire de monômes de la forme $\alpha_{i_1}^{l_1}\alpha_{i_2}^{l_2}\ldots\alpha_{i_{k'}}^{l_{k'}}$. Or l'équation (4.22) implique que la quantité

$$\sum_{i_1\in I_{w_1}} \cdots \sum_{i_{k'}\in I_{w_{k'}}} \left(\prod_{e,w_e\neq 1} C_{i_e}\right) \alpha_{i_1}^{l_1}\alpha_{i_2}^{l_2}\ldots\alpha_{i_{k'}}^{l_{k'}}$$

reste finie au point critique. En choisissant l'ordre du développement de f_w assez grand pour être sûr que le reste multiplié par le produit $\prod_{e,w_e\neq 1} C_{i_e}$ reste fini, on voit donc que la quantité $\sum_{i_1\in I_{w_1}}\ldots\sum_{i_k\in I_{w_{k'}}}\left(\prod_{e,w_e\neq 1} C_{i_e}\right) f_w(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\ldots,\alpha_{i_{k'}})$ tend vers une valeur

finie en $t = t_{m,D}^{(c)}$.

Cela montre que dans l'équation (4.24), le terme $w = (1, \dots, 1)$ domine strictement tous les autres. En particulier on a :

$$\sum_{i \in [\![1,r]\!]^{E_2}} \prod_{e \in E_2} C_{i_e} \alpha_{i_e}^{a_{F,\mathfrak{a}}(e)} \prod_{j=1}^{M} \frac{\left(\prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}\right)^K}{1 - \prod_e \alpha_{i_e}^{A_{e,j}}} \sim C_1(t(z))^{|E_2|} \prod_{j=1}^{M} \frac{1}{1 - \alpha_1(t(z))^{\sum_e A_{e,j}}}. \quad (4.25)$$

Un raisonnement similaire montre, d'une part, qu'aucune singularité inattendue n'apparaît dans $\mathfrak{p}(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, et donc que cette quantité est négligeable par rapport au terme que nous venons d'examiner, et d'autre part que la quantité $\sum_i C_i(t)$ est équivalente à $C_1(t)$. Par conséquent, l'équation (4.20) implique le résultat annoncé. □

En écrivant le développement de l'équation (4.13) pour $X = 1$ et t tendant vers $t_{m,D}^{(c)}$, on obtient :

$$S_{m,D}(1,t) = \frac{2C_1(t)}{1 - \alpha_1}[1 + o(1)].$$

Puisque le lemme 51 donne le développement singulier de $\alpha_1(t)$, et puisque celui de $S_{m,D}(1,t) = \frac{1}{1 - P_{m,D}(1,t)}$ se déduit du lemme 49, on obtient le développement de Puiseux de $C_1(t)$ quand t tend vers $t_{m,D}^{(c)}$:

$$C_1(t) = \sqrt{\frac{3(m-1)}{m}} \gamma_{m,D}^{-1} \left(1 - \frac{t}{t_{m,D}^{(c)}}\right)^{-1/2} + o\left(\left(1 - \frac{t}{t_{m,D}^{(c)}}\right)^{-1/2}\right). \quad (4.26)$$

En prenant $t = t(z)$, la dernière proposition, les lemmes 48 et 51, et l'équation (4.26) donnent alors :

Lemme 56. *Quand z tend vers $z_{m,D}^{(c)}$, la série $R_{\mathfrak{f}}(z)$ admet le développement de Puiseux suivant :*

$$R_{\mathfrak{f}}(z) = c_{\mathfrak{s},\lambda}(z_{m,D}^{(c)})^{\mathfrak{f}}(T_c)^{n_{\neq}}(m-1)^{\frac{k+m}{4}} m^{\frac{M-k}{2}}$$
$$\times \gamma_{m,D}^{\frac{M-3k}{4}} \beta_{m,D}^{-\frac{k+M}{4}} 3^{\frac{k-M}{2}} 2^{\frac{-k-5M}{4}} \left(1 - \frac{z}{z_{m,D}^{(c)}}\right)^{-\frac{k+M}{4}} [1 + o(1)] \quad (4.27)$$

où k est le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$.

4.7.4 Les paires dominantes

Le lemme précédent montre que le comportement singulier de la somme (4.17) est dominé par les schémas complets $\mathfrak{f}$ qui maximisent la quantité $k + M$. Pour identifier ces schémas, nous pouvons d'abord remarquer qu'un schéma maximisant la quantité $k + M$ est tel que λ est injective, c'est-à-dire que $M = |V(\mathfrak{s})| - 1$. Il nous reste alors à maximiser $|E(\mathfrak{s})| + |V(\mathfrak{s})| - 1$. Or, si un schéma de genre g a n_i sommets de degré i pour tout $i \geq 3$, on a :

$$|E(\mathfrak{s})| + |V(\mathfrak{s})| = \sum_{i \geq 3} \frac{i+2}{2} n_i.$$

Maximiser cette quantité, avec la contrainte de l'équation (2.6) impose de maximiser $\sum_i n_i$ en gardant $\sum(i-2)n_i$ fixe. Cela implique que $n_3 \neq 0$ et $n_i = 0$ pour $i \neq 3$, c'est-à-dire que $\mathfrak{s}$ soit un schéma dominant, dans le sens du paragraphe 2.1.3. Rappelons qu'un tel schéma a $4g-2$ sommets, tous de degré 3, et $6g-3$ arêtes.

Définition 31. Une *paire dominante* de genre g est une paire $(\mathfrak{s}, \lambda)$, telle que $\mathfrak{s}$ soit un schéma dominant de genre g, et λ soit une bijection : $V(\mathfrak{s}) \to [\![0, 4g-3]\!]$.
L'ensemble des paires dominantes de genre g est noté $\mathcal{P}_g$.

Nous avons donc démontré que seules les paires dominantes apparaissent au premier ordre dans la somme (4.17).

4.8 La contribution multiplicative des étoiles nodales

L'équation (4.27) a une forme multiplicative remarquable : la contribution de la paire $(\mathfrak{s}, \lambda)$ est clairement séparée de celle de $(\tau, F, \mathfrak{a})$. Cela va nous permettre d'effectuer une sommation sur $(F, \mathfrak{a})$. En raison des discussions précédentes, nous ne considérerons que le cas des paires dominantes.

4.8.1 Quatre types de nœuds

Fixons un triplet $(\mathfrak{s}, \lambda, \tau)$ tel que $(\mathfrak{s}, \tau)$ est un schéma typé et $(\mathfrak{s}, \lambda) \in \mathcal{P}_g$. On dit qu'une arête $e \in E(\mathfrak{s})$ est *spéciale* si $\tau(e) \neq 0$. Soit $v \in V(\mathfrak{s})$ un sommet $\mathfrak{s}$ incident à l arêtes spéciales, et soient $\tau_1, \ldots, \tau_l$ leurs types. On pose $\tilde{\tau}_i = \tau_i$ si l'arête correspondante est entrante en v, et $\tilde{\tau}_i = m - \tau_i$ si elle est sortante. Alors, par la discussion du paragraphe 4.5.2, dans tout schéma complet de la forme $(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda)$, $\tilde{\tau}_i$ est le type de l'arête coupée correspondante de F_v si F_v est une étoile blanche, et à l'inverse si F_v est un étoile noire, le type correspondant est $m - \tilde{\tau}_i$. On a alors :

Lemme 57. *Les sommets de $\mathfrak{s}$ peuvent être de quatre types :*

1. *des sommets tels qu'aucune des trois arêtes incidentes n'est spéciale ;*

2. *des sommets tels qu'exactement deux arêtes incidentes sont spéciales. Dans ce cas, on a $\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 = m$;*

3.1. *des sommets tels que les trois arêtes incidentes sont spéciales et telles que $\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_3 = m$;*

3.2. *des sommets tels que les trois arêtes incidentes sont spéciales et telles que $\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \tilde{\tau}_3 = 2m$.*

Démonstration. Le lemme est une conséquence directe de la loi de Kirchoff (Proposition 44), et du fait que les $\tilde{\tau}_i$ sont des éléments de $[\![1, m-1]\!]$. □

Remarquons que les sommets de type **3.2** peuvent correspondre à des étoiles nodales noires ou blanches, alors que ceux de type **2** et **3.1** ne peuvent correspondre qu'à des étoiles nodales blanches. On note v_1 (resp. v_2, $v_3^{(1)}$, $v_3^{(2)}$) le nombre de sommets de type **1** (resp. **2**, **3.1**, **3.2**) dans $\mathfrak{f}$.

Lemme 58. *On a :*

$$v_3^{(1)} = v_3^{(2)}.$$

Démonstration. Rappelons que $n_{\neq}$ est le nombre d'arêtes de type non nul. En comptant les demi-arêtes de $\mathfrak{s}$, on obtient :

$$2n_{\neq} = 3v_3^{(1)} + 3v_3^{(2)} + 2v_2.$$

Calculons maintenant la somme, prise sur toutes les arêtes de type non nul, de la quantité $\tau + (m - \tau)$. Cette somme est bien sûr égale à $mn_{\neq}$, mais aussi à la somme des valeurs de $\tilde{\tau}$ autour de tous les sommets de $\mathfrak{s}$, qui est :

$$mv_3^{(1)} + 2mv_3^{(2)} + mv_2.$$

On a donc :

$$\begin{cases} 2n_{\neq} &= 3v_3^{(1)} + 3v_3^{(2)} + 2v_2 \\ mn_{\neq} &= mv_3^{(1)} + 2mv_3^{(2)} + mv_2 \end{cases}$$

et le lemme s'obtient en éliminant $n_{\neq}$. □

On note $D_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}$ l'ensemble des paires $(F, \mathfrak{a})$ telles que $(\mathfrak{s}, \tau, F, \mathfrak{a}, \lambda) \in \mathcal{F}_g$. On dit qu'une telle paire est une *décoration* de $\mathfrak{s}, \tau, \lambda$. On pose :

$$R_{\mathfrak{s},\tau,\lambda}(z) = \sum_{(F,\mathfrak{a})\in D_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}} R_{\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda}(z).$$

Pour évaluer l'expression précédente à partir de l'équation (4.27), on doit calculer la somme :

$$\sum_{(F,\mathfrak{a})\in D_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}} {z_{m,D}^{(c)}}^{(\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda)}. \tag{4.28}$$

Chaque sommet de $\mathfrak{s}$ contribue à hauteur d'un facteur multiplicatif à cette dernière quantité. Nous calculons maintenant cette contribution multiplicative pour chaque type de sommet : **1**, **2**, **3.1**, ou **3.2**.

Sommets type 1

Un sommet v de type 1 est incident à trois arêtes de type 0. Par conséquent, l'étoile F_v peut soit être réduite à un seul sommet $\circ$, soit être une étoile blanche élémentaire avec trois sommets étiquetés distingués. Ces étoiles correspondent à des marches comportant k pas $m-1$ et $(m-1)k$ pas -1, commençant par un pas -1 et portant deux autres pas -1 distingués. La contribution multiplicative correspondante est donc :

$$1 + \sum_{k\in D} \frac{[(m-1)k-2][(m-1)k-1]}{2} \binom{mk-1}{k} {t_{m,D}^{(c)}}^k = \frac{\gamma_{m,D}}{2}$$

où l'on a utilisé la définition de $\gamma_{m,D}$ et le fait que $\sum_{k\in D}[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}{t_{m,D}^{(c)}}^k = 1$. De plus, dans ce cas, les demi-arêtes incidentes à v sont toutes de type 0, elles ne portent donc pas d'étoiles correctrices $\mathfrak{a}$.

Sommets de type 2

Tout d'abord, un sommet v de type **2** ne peut être décoré par un étoile noire, puisqu'il est relié à une arête de type 0. Un tel sommet correspond donc à une étoile blanche avec exactement deux arêtes spéciales, et portant un sommet étiqueté distingué. Ces étoiles correspondant à des marches portant $(m-1)k-1$ pas (-1), $k-1$ pas $m-1$, et deux pas spéciaux, commençant par un pas -1, il y en a $\frac{k[(m-1)k-1]}{2}\binom{mk-1}{k}$. De plus, chaque fois qu'une demi-arête spéciale est sortante en v, nous devons ajouter une étoile correctrice dans $\mathfrak{a}$ pour que la superchaîne correspondante commence par une étoile noire. Le nombre d'étoiles noires étant $(m-1)$, la contribution correspondante au point critique est $(m-1)z_{m,D}^{(c)}$. La contribution multiplicative d'un sommet de type **2** est donc :

$$\begin{aligned}
& [z_{m,D}^{(c)}(m-1)]^{out(v)} \sum_{k\in D} \frac{k[(m-1)k-1]}{2}\binom{mk-1}{k} {z_{m,D}^{(c)}}^{k-1} {T_c}^{(m-1)k-1} \\
= \; & \frac{[z_{m,D}^{(c)}(m-1)]^{out(v)-1}}{T_c}\frac{\gamma_{m,D}}{2}
\end{aligned}$$

où $out(v)$ désigne le nombre d'arêtes spéciales sortantes incidentes à v.

Sommets de type 3.1

Là encore, un tel sommet ne peut correspondre qu'à une étoile blanche. Dans la reformulation en m-marches, cette étoile est une marche de longueur $mk \in mD$, avec $(m-1)k-2$ pas (-1), $k-1$ pas $m-1$, qui commence avec un pas spécial, et porte encore deux autres pas spéciaux. Pour un k donné, le nombre de telles marches est $\binom{mk-1}{(m-1)k-2,k-1,2} = \frac{k[(m-1)k-1]}{2}\binom{mk-1}{k}$. De plus, comme précédemment, pour chaque arête spéciale sortante, nous devons ajouter un polygone noir à $\mathfrak{a}$. La contribution multiplicative d'un sommet de type **3.1** est donc :

$$\begin{aligned}
& [z_{m,D}^{(c)}(m-1)]^{out(v)} \sum_{k\in D} \frac{k[(m-1)k-1]}{2}\binom{mk-1}{k} {z_{m,D}^{(c)}}^{k-1} {T_c}^{(m-1)k-2} \\
= \; & \frac{[z_{m,D}^{(c)}(m-1)]^{out(v)-1}}{{T_c}^2}\frac{\gamma_{m,D}}{2}.
\end{aligned}$$

Sommets de type 3.2

Un tel sommet sommet peut correspondre à une étoile blanche ou noire : nous distinguerons les deux cas.

Si l'étoile correspondante est blanche, elle correspond à une marche de longueur $mk \in mD$ avec $(m-1)k-1$ pas (-1), $k-2$ pas $m-1$, commençant par un pas spécial et portant deux autres pas spéciaux. Le nombre de telles marches étant $\binom{mk-1}{(m-1)k-1,k-2,2} =$

$\frac{k[k-1]}{2}\binom{mk-1}{k}$, la contribution correspondante est donc :

$$\begin{aligned}
& [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)} \sum_{k\in D} \frac{k[k-1]}{2}\binom{mk-1}{k} {z^{(c)}_{m,D}}^{k-2} {T_c}^{(m-1)k-1} \\
= \; & [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)} \left(\frac{1}{{z^{(c)}_{m,D}}^{2} T_c} \frac{\gamma_{m,D}-(m-2)\beta_{m,D}}{2(m-1)^2}. \right).
\end{aligned}$$

Le second cas est celui d'une étoile noire portant trois arêtes spéciales. Puisqu'il y en a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, la contribution correspondante est $\frac{(m-1)(m-2)}{2} z^{(c)}_{m,D}$. De plus, pour chaque arête spéciale *entrante*, nous devons ajouter à $\mathfrak{a}$ une étoile blanche correctrice, portant deux arêtes spéciales distinguées. La contribution multiplicative de cet ajout étant : $\sum_{k\in D}[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k} {z^{(c)}_{m,D}}^{k-1} {T_c}^{(m-1)k} = \frac{1}{(m-1)z^{(c)}_{m,D}}$, la contribution multiplicative du second cas est donc :

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} z^{(c)}_{m,D} \left[\frac{1}{(m-1)z^{(c)}_{m,D}} \right]^{3-out(v)}.$$

En regroupant les deux cas, on obtient la contribution multiplicative d'un sommet de type **3.2** de $\mathfrak{s}$:

$$\begin{aligned}
& [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)} \left(\frac{1}{{z^{(c)}_{m,D}}^{2} T_c} \frac{\gamma_{m,D}-(m-2)\beta_{m,D}}{2(m-1)^2} + \frac{m-2}{2(m-1)^2 {z^{(c)}_{m,D}}^{2}} \right) \\
= \; & [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)-2} \frac{\gamma_{m,D}}{2T_c}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $T_c = \beta_{m,D}$.

4.8.2 Une simplification magique (et le typage n'apparaît plus)

Nous pouvons maintenant évaluer la contribution totale des décorations :

$$\begin{aligned}
& \sum_{(F,\mathfrak{a})\in D_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}} {z^{(c)}_{m,D}}^{(\mathfrak{s},\tau,F,\mathfrak{a},\lambda)} \\
= \; & \prod_{v:type\ 1} \frac{\gamma_{m,D}}{2} \prod_{v:type\ 2} \frac{[z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)-1}}{T_c} \frac{\gamma_{m,D}}{2} \\
& \prod_{v:type\ 3.1} [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)-1} \frac{\gamma_{m,D}}{2{T_c}^2} \prod_{v:type\ 3.2} [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(v)-2} \frac{\gamma_{m,D}}{2T_c} \\
= \; & \left(\frac{\gamma_{m,D}}{2}\right)^{|V(\mathfrak{s})|} [z^{(c)}_{m,D}(m-1)]^{out(\mathfrak{s})-v_2-v_3^{(1)}-2v_3^{(2)}} {T_c}^{-v_2-2v_3^{(1)}-v_3^{(2)}}
\end{aligned}$$

où $out(\mathfrak{s}) = \sum_{v\ type\ 2;3.1;3.2} out(v)$ est le nombre total de demi-arêtes spéciales sortantes de s. Or, chaque arête ayant exactement une sortante et une entrante, $out(\mathfrak{s})$ est aussi le nombre total de demi-arêtes spéciales de $\mathfrak{s}$, i.e. $out(\mathfrak{s}) = n_{\neq}$. De plus, puisque $v_3^{(1)} = v_3^{(2)}$

(lemme 58), on a : $v_2 + v_3^{(1)} + 2v_3^{(2)} = v_2 + \frac{3}{2}v_3 = n_{\neq}$. La contribution multiplicative totale des décorations de $(\mathfrak{s}, \tau, \lambda)$ est donc :

$$\sum_{(F,\mathfrak{a})\in D_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}} {z_{m,D}^{(c)}}^{(\mathfrak{s},\tau,\mathfrak{F},\mathfrak{a},\lambda)} = \left(\frac{1}{T_c}\right)^{n_{\neq}} \left(\frac{\gamma_{m,D}}{2}\right)^{|V(\mathfrak{s})|}.$$

Ce n'est qu'après ces nombreux calculs qu'apparaît une simplification étonnante, qui va faire disparaître le typage τ de nos équations finales. En effet, le facteur $\left(\frac{1}{T_c}\right)^{n_{\neq}}$ dans la dernière équation va se simplifier avec la facteur ${T_c}^{n_{\neq}}$ dans l'équation (4.27). Ainsi, en sommant l'équation (4.27) sur toutes les décorations, on obtient :

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}(z) &= c_{\mathfrak{s},\lambda} \left(\frac{\gamma_{m,D}}{2}\right)^{|V(\mathfrak{s})|} \\ &\times (m-1)^{\frac{k+m}{4}} m^{\frac{M-k}{2}} \gamma_{m,D}^{\frac{M-3k}{4}} \beta_{m,D}^{-\frac{k+M}{4}} 3^{\frac{k-M}{2}} 2^{\frac{-k-5M}{4}} \left(1 - \frac{z}{z_{m,D}^{(c)}}\right)^{-\frac{k+M}{4}} [1+o(1)] \end{aligned}$$

Par conséquent, au premier ordre, $R_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}$ ne dépend pas du typage τ ! C'est cela qui, avec le lemme 45, nous conduira au Théorème 5. En se rappelant que $k = 6g-3$ et $|V(\mathfrak{s})| = M+1 = 4g-2$, on obtient notre estimation principale :

Proposition 59. *Quand z tend vers $z_{m,D}^{(c)}$, on a le développement de Puiseux suivant :*

$$R_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}(z) = c_{\mathfrak{s},\lambda}(m-1)^{\frac{5g-3}{2}} m^{-g} \gamma_{m,D}^{\frac{g-1}{2}} \beta_{m,D}^{\frac{3-5g}{2}} 3^g 2^{\frac{13-21g}{2}} \left(1 - \frac{z}{z_{m,D}^{(c)}}\right)^{-\frac{k+M}{4}} [1+o(1)]. \quad (4.29)$$

Soit maintenant $d = \mathrm{pgcd}(D)$. Alors, pour des raisons combinatoires, la série $T_\circ(z)$ est en fait une série en z^d. Elle a donc au moins d singularités dominantes, qui sont les $z_{m,D}^{(c)}\xi^k$ pour une racine d-ième primitive de l'unité ξ. De plus, la positivité des coefficients de l'équation (4.3) montre facilement que ce sont les seules singularités dominantes de $T_\circ(z)$, et donc de $t(z)$. Ainsi, en raison de la nature « compositionnelle » de $R_{\mathfrak{f}}(z)$ (au préfacteur $z^{\mathfrak{f}}$ près, $R_{\mathfrak{f}}(z)$ est en fait une série à coefficients positifs de $t(z)$), cela implique que les $z_{m,D}^{(c)}\xi^k$ sont les d seules racines dominantes de $R_{\mathfrak{f}}(z)$ pour tout $\mathfrak{f}$, et donc qu'elles sont les d seules racines dominantes de $R_{\mathfrak{s},\tau,\lambda}(z)$. Or, $R_{\mathfrak{s},\tau,\lambda}(z)$ étant une série algébrique, on peut lui appliquer l'analyse de singularité au sens de Flajolet-Odlyzko [47]. Ainsi, l'équation (4.29) et les théorèmes de transfert de [47] impliquent que le coefficient de z^n dans $R_{\mathfrak{s},\tau,\lambda}(z)$ satisfait :

$$[z^n]R_{\mathfrak{s},\lambda,\tau}(z) \sim \frac{d \cdot c_{\mathfrak{s},\lambda}}{\Gamma\left(\frac{5g-3}{2}\right)} (m-1)^{\frac{5g-3}{2}} m^{-g} \gamma_{m,D}^{\frac{g-1}{2}} \beta_{m,D}^{\frac{3-5g}{2}} 3^g 2^{\frac{13-21g}{2}} \cdot n^{\frac{5g-5}{2}} {z_{m,D}^{(c)}}^{-n}$$

quand n tend vers l'infini le long des multiples de d. En utilisant le corollaire 17 et le théorème 6, on obtient ainsi un équivalent du nombre $h^{\bullet}_{g,m,D}(n)$ de m-hypercartes *enracinées et pointées* de degrés autorisés mD à n faces noires, quand n tend vers l'infini le long des multiples de d :

$$h^{\bullet}_{g,m,D}(n) \sim \frac{d \cdot c_g}{\Gamma\left(\frac{5g-3}{2}\right)} (m-1)^{\frac{5g-3}{2}} m^{1-g} \gamma_{m,D}^{\frac{g-1}{2}} \beta_{m,D}^{\frac{3-5g}{2}} 3^g 2^{\frac{11-21g}{2}} \cdot n^{\frac{5g-3}{2}} {z_{m,D}^{(c)}}^{-n}$$

où $c_g = \frac{m^{2g}}{6g-3} \sum_{(s,\lambda)\in\mathcal{P}_g} c_{\mathfrak{s},\lambda}$; remarquons le facteur m^{2g}, qui vient du lemme 45.

De même, la remarque suivant le corollaire 17 implique que le nombre $c^{\bullet}_{g,m,D}(n)$ de m-constellations *enracinées et pointées* de degrés autorisés mD à n faces noires satisfait, quand n tend vers l'infini le long des multiples de d :

$$m^{2g} c^{\bullet}_{g,m,D}(n) \sim h^{\bullet}_{g,m,D}(n).$$

4.8.3 Un « lemme de dépointage »

La dernière chose à faire pour démontrer les théorèmes 4 et 5 est de relier les nombres de cartes qui sont à la fois enracinées et pointées aux nombres de cartes qui sont enracinées seulement. Or, remarquons que chaque carte enracinée à v sommets correspond à exactement v cartes enracinées et pointées distinctes. De plus, les sommets d'une m-hypercarte correspondent, à l'exception du sommet pointé, aux sommets étiquetés de son mobile. Ainsi, pour compter les cartes qui sont enracinées seulement, il suffit de compter les mobiles avec un poids inverse de leur nombre de sommets étiquetés plus 1. Nous allons maintenant montrer que ce nombre est asymptotiquement bien concentré autour de son espérance, de sorte que l'opération de dépointage ne se traduira que par l'ajout d'un nouveau facteur multiplicatif.

Soit $\mathfrak{t}_n$ un mobile (correspondant à une m-hypercarte de degrés autorisés mD) de taille n, choisi selon la loi uniforme. Si on note Y_n son nombre de sommets étiquetés, alors par définition de la mesure uniforme, le rapport entre le nombre de m-hypercartes enracinées, et celui de m-hypercartes enracinées *et* pointées est égal à $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y_n+1}\right]$.

Nous nous restreignons aux mobiles de schéma complet $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}_g$. Remarquons qu'à un facteur multiplicatif près, la série $R_{\mathfrak{f}}(z)$ est en fait une série en $t(z) = zT_0(z)^{m-1}$:

$$R_{\mathfrak{f}}(z) = z^{\mathfrak{f}} T_0^{n_{\neq}} H(t(z))$$

pour une certaine série $H(t)$ donnée par l'équation (4.20). Soit maintenant $T(z,u)$ la série génératrice des mobiles planaires, où z compte les sommets noirs et u compte les sommets étiquetés. Alors la série

$$K(z,u) := (z,u)^{\mathfrak{f}} T(z,u)^{n_{\neq}} H(zT(z,u)^{m-1})$$

est la série comptant les mêmes objets que $R_{\mathfrak{f}}$, en fonction du nombre de sommets noirs et du nombre de sommets étiquetés, où l'on a noté $(z,u)^{\mathfrak{f}}$ le polynôme générateur à deux variables des décorations du schéma. Or on a :

$$\mathbb{E}\left[Y_n\right] = \frac{[z^n]K'_u(z,1)}{[z^n]K(z,1)}. \tag{4.30}$$

De plus, la série $T(z,u)$ est donnée par l'équation suivante :

$$T(z,u) = u + \sum_{k\in D} \binom{mk-1}{k} z^k T(z,u)^{(m-1)k}. \tag{4.31}$$

Un petit calcul montre alors qu'au voisinage de $z = z^{(c)}_{m,D}$, on le le développement suivant :

$$\frac{T'_u(z,1)}{zT'_z(z,1)} = \frac{(m-1)}{\beta_{m,D}}(1+o(1)),$$

ce qui, puisque $t(z) = zT(z,1)^{m-1}$, implique l'équation :

$$\left.\frac{d}{du}\right|_{u=1} H(zT(z,u)^{(m-1)}) = \frac{(m-1)}{\beta_{m,D}} \cdot z\frac{d}{dz}H(t(z))(1+o(1)).$$

Rappelons également que H satisfait à un développement de la forme :

$$H(t) = (cte)(t^{(c)}_{m,D} - t)^{-K}(1+o(1))$$

où $K > 0$. De plus, dans ce qui précède, nous avons déjà examiné les singularités de toutes les séries en jeu. Nous savons donc que toutes nos séries sont des séries algébriques adaptées à l'analyse de singularité au sens de Flajolet et Odlyzko [47], et nous pouvons écrire sans crainte les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
\frac{[z^n]K'_u(z,1)}{[z^n]K(z,1)} &\sim \frac{[z^n]\left.\frac{d}{du}\right|_{u=1} H(zT(z,u)^{(m-1)})}{[z^n]H(t(z))} \\
&\sim \frac{m-1}{\beta_{m,D}} \cdot \frac{[z^n]z\frac{d}{dz}H(t(z))}{[z^n]H(t(z))} \\
&\sim \frac{(m-1)n}{\beta_{m,D}}.
\end{aligned}$$

On a donc démontré la convergence suivante : $\mathbb{E}\left[\frac{Y_n}{n}\right] \to \frac{m-1}{\beta_{m,D}}$.

Le même calcul (en considérant cette fois une dérivée seconde) montre que le second moment vérifie $\mathbb{E}\left[\left(\frac{Y_n}{n}\right)^2\right] \to \left(\frac{m-1}{\beta_{m,D}}\right)^2$. Par conséquent, on déduit de l'inégalité de Tchebychev que la convergence a lieu en probabilité :

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{(\mathrm{P})} \frac{m-1}{\beta_{m,D}}.$$

Cela implique la convergence en probabilité de $\frac{n}{Y_n+1}$ vers $\frac{\beta_{m,D}}{m-1}$, et cette variable étant bornée, on en déduit la convergence :

$$\mathbb{E}\left[\frac{n}{Y_n+1}\right] \to \frac{\beta_{m,D}}{m-1}.$$

En vertu de la discussion précédente, cela donne :

Lemme 60 (Lemme de dépointage)**.** *Les nombres de m-hypercartes (ou m-constellations) enracinées et pointées, et enracinées seulement, sont reliés par les relations suivantes, quand n tend vers l'infini le long des multiples de d :*

$$h_{g,m,D}(n) \sim \frac{\beta_{m,D}}{(m-1)n} h^{\bullet}_{g,m,D}(n) \quad ; \quad c_{g,m,D}(n) \sim \frac{\beta_{m,D}}{(m-1)n} c^{\bullet}_{g,m,D}(n).$$

Ce dernier résultat complète la démonstration des théorèmes 4 et 5, en posant :

$$t_g = \frac{c_g 3^g 2^{7-11g}}{(6g-3)\Gamma\left(\frac{5g-3}{2}\right)}.$$

La dernière chose à faire est de vérifier que t_g est bien la constante définie dans [11]. Nous le ferons dans la section suivante, où nous examinons des cas particuliers des deux théorèmes.

4.8.4 Le cas $D = \{k\}$

Nous examinons maintenant le cas d'un singleton $D = \{k\}$. Dans ce cas, on a $[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k} t_c^k = 1$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} \beta_{m,k} &= \frac{(m-1)k}{(m-1)k-1}, \\ \gamma_{m,k} &= (m-1)k. \end{aligned}$$

On obtient donc :

Corollaire 18. *Soient deux entiers $m \geq 2$ et $k \geq 2$. Alors le nombre $c_{g,m,k}(n)$ de m-constellations enracinées de genre g et taille n, et dont toutes les faces blanches ont degré mk satisfait, quand n tend vers l'infini le long des multiples de k :*

$$c_{g,m,k}(n) \sim t_g \frac{k}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{m-1}[(m-1)k-1]^{\frac{5}{2}}}{mk^2} \right)^{g-1} n^{\frac{5(g-1)}{2}} (z_{m,k}^{(c)})^{-n}$$

où : $z_{m,k}^{(c)} = \left[\frac{(m-1)k}{(m-1)k-1}\right]^{1-m} \left[[(m-1)k-1]\binom{mk-1}{k}\right]^{-\frac{1}{k}}.$

Pour $m = 2$, on obtient le nombre de $2k$-angulations biparties à n arêtes :

$$c_{g,2,k}(n) \sim t_g \frac{k}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(k-1)^{5/2}}{k^2}\right]^{g-1} n^{\frac{5(g-1)}{2}} z_{2,k}^{(c)\,-n}.$$

Si de plus $k = 2$, on retrouve le nombre asymptotique de quadrangulations biparties à $2n$ arêtes, qui est aussi le nombre de cartes à n arêtes, en vertu de la célèbre bijection de Tutte [92] :

Corollaire 19 ([10])**.** *Le nombre $m_n^{(g)}$ de cartes enracinées de genre g à n arêtes satisfait :*

$$m_n^{(g)} \sim t_g n^{\frac{5(g-1)}{2}} 12^n.$$

En particulier, cela démontre que notre constante t_g est bien la même que celle introduite dans [10]. Notre dernier corollaire concerne le nombre total de m-constellations de genre g, sans restriction de degrés. Le lemme suivant est classique et ramène l'étude des m-constellations générales à celle des $(m+1)$-constellations à degrés restreints (voir la démonstration du corollaire 2.4 dans l'article [25])

Lemme 61. *Il existe une bijection entre les m-constellations enracinées à n faces noires et les $(m+1)$-constellations enracinées à n faces noires dont toutes les faces blanches ont degré $m+1$.*

Cela implique :

Corollaire 20. *Le nombre de m-constellations enracinées de genre g à n faces noires est asymptotiquement équivalent à :*

$$\frac{t_g}{2}\left(\frac{\sqrt{2m}(m-1)^{5/2}}{m+1}\right)^{g-1} n^{\frac{5(g-1)}{2}} \left(\frac{m^{m+1}}{(m-1)^{m-1}}\right)^n .$$

5

Profil métrique limite des quadrangulations biparties de genre fixé

5.1 Introduction : convergence des cartes aléatoires

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté des décompositions bijectives permettant de relier plusieurs classes de cartes (cartes à une face, cartes couvertes, constellations et hypercartes) à des objets plus simples, de nature arborescente. Nous avons utilisé ces bijections pour obtenir des résultats d'énumération, exacts ou asymptotiques, et pour expliquer leur universalité.

Or le phénomène d'universalité des objets combinatoires ne se limite pas aux exposants de comptage : dans de nombreux cas, on s'attend à ce qu'il existe un objet continu, universel, qui soit la limite *des objets eux-mêmes*. Par exemple, on sait que sous des hypothèses assez faibles, les marches sur réseau correctement renormalisées convergent vers le mouvement brownien (c'est le théorème de Donsker [41]). De la même façon, les arbres plans de taille n, choisis selon la loi uniforme, convergent quand n tend l'infini vers un objet continu, le *CRT* (pour *continuum random tree* [2]). Là encore, le résultat est valable pour une large classe d'arbres plans, avec le même objet limite. Dans le vocabulaire des probabilités, ces résultats d'universalité de l'objet limite pour une vaste famille d'objets combinatoires sont appelés des *principes d'invariance*.

On est encore assez loin d'un principe d'invariance pour les cartes, mais de nombreux résultats sont déjà connus sur les propriétés limites de ces objets. La motivation principale pour s'intéresser aux propriétés limites des grandes cartes aléatoires vient des physiciens (voir [45]), pour qui les cartes sont un modèle discret de surfaces aléatoires, dont la limite continue est supposée représenter la « gravité quantique à deux dimensions ».

La bijection de Cori-Vauquelin-Schaeffer a permis aux mathématiciens d'aborder ces questions, et a été à l'origine d'un domaine de recherche très actif. Cette bijection (qui est un cas particulier de la bijection présentée au chapitre précédent) relie les quadrangulations planaires enracinées aux *arbres plans étiquetés*, c'est-à-dire aux arbres plans dont chaque sommet porte une étiquette qui diffère d'au plus d'un par rapport à celle de ses voisins. La propriété fondamentale de cette bijection est que les *étiquettes* de l'arbre correspondent aux *distances* au sommet racine dans la quadrangulation, ce qui donne accès à une information *géométrique* de la carte. Ainsi, Chassaing et Schaeffer [38] ont montré que la distance maximale à la racine dans une grande quadrangulation aléatoire de taille n était de l'ordre $n^{1/4}$, et que cette quantité divisée par $n^{1/4}$ convergeait vers une variable aléatoire réelle non nulle. Ils ont de plus montré la *convergence du profil*, c'est-à-dire de la mesure empirique donnant la distribution des distances des sommets à la racine, vers un objet introduit par Aldous et bien connu des probabilistes, la mesure aléatoire *ISE*, pour *Integrated Superbrownian Excursion* [3].

Les travaux de Chassaing et Schaeffer ont ouvert une voie importante. Marckert et Mokkadem [69] ont défini un objet continu, la *carte brownienne*, et ont démontré, en un certain sens, la convergence des quadrangulations aléatoires vers cet objet. D'autres travaux [68, 74] ont généralisé les résultats de Chassaing et Schaeffer à des classes de cartes plus générales, à partir de la bijection de Bouttier, Di Francesco, et Guitter [27]. Bouttier et Guitter [29, 28], au moyen d'une généralisation de la bijection de Schaeffer due à Miermont [72], ont montré le comportement limite en moyenne de nombreuses statistiques des cartes renormalisées, comme les distances mutuelles entre trois points, ou le comportement des géodésiques. Le Gall a proposé d'étudier la convergence des cartes au sens de la *distance de Gromov-Hausdorff*, qui est une distance naturelle entre les espaces métriques compacts. Il a montré que la suite des quadrangulations aléatoires (et d'autres familles plus générales) est relativement compacte pour cette distance, et a donc des valeurs d'adhérence [65]. Il existe donc des « cartes browniennes », et c'est encore un problème ouvert que de montrer que cette valeur d'adhérence est en fait unique, et que les quadrangulations convergent *vraiment*. Le Gall a montré de nombreuses propriétés des valeurs d'adhérence, comme le fait que l'espace limite a dimension de Hausdorff 4 [65], qu'il est toujours homéomorphe à la sphère (Le Gall et Paulin [67], voir aussi la démonstration de Miermont [73]), ou des caractérisations précises du comportement des géodésiques dans ces espaces [66].

Du côté du genre supérieur, moins de travaux ont été menés jusqu'ici. Miermont [72] a étudié les « diagrammes de Voronoï » dans les cartes de genre g. Il a démontré l'existence de valeurs d'adhérence (au sens de Gromov-Hausdorff, et même un peu plus) pour

les grandes quadrangulations biparties de genre g renormalisées, choisies sous des lois de Boltzmann. Il a également obtenu un résultat d'unicité de la géodésique reliant deux points typiques dans ces espaces limites.

Dans ce chapitre, nous allons nous restreindre à une famille de cartes de genre g particulière, celle des *quadrangulations biparties enracinées*, munies d'un sommet pointé. La bijection de Marcus et Schaeffer relie ces quadrangulations à des cartes à une face étiquetées, qui sont l'analogue des arbres étiquetés du cas planaire. En utilisant notre bijection du chapitre 2, nous pourrons relier ces cartes à des arbres plans étiquetés, portant des sommets distingués. Cela nous permettra de montrer la *convergence du profil* des grandes quadrangulations renormalisées de genre g, résultat analogue à celui de Chassaing et Schaeffer dans le cas planaire. De plus, nous caractériserons complètement la limite en termes de la mesure aléatoire ISE, et montrerons que le changement de genre se traduit sur le profil par une « pondération », favorisant les profils bien resserrés au détriment de ceux plus étendus. Au passage, en montrant que les cartes de genre g s'obtiennent en distinguant des sommets de même étiquette dans des arbres plans étiquetés, nous donnerons une nouvelle expression de la constante t_g de Bender et Canfield, exprimée comme une fonctionnelle de la mesure ISE. Les résultats présentés dans ce chapitre sont issus de l'article [35].

5.2 Quadrangulations biparties et arbres étiquetés

Nous commençons par reformuler la bijection du chapitre précédent (théorème 6) dans le cas particulier des quadrangulations biparties. Dans le cas planaire, il s'agit en fait du cas originalement traité par Cori et Vauquelin [40] puis Schaeffer [84], et qui a été le point de départ des nombreux développements des années 2000 (en particulier la bijection de [27]). Dans le cas du genre supérieur, la bijection est due à Marcus et Schaeffer [70] (voir aussi [37]), et a été le point de départ de nos travaux présentés dans le chapitre 4. Ensuite, nous expliquerons comment mettre en série cette bijection avec celle que l'on a obtenue au chapitre 2, pour n'obtenir à la fin que des objets planaires (des arbres).

Nous avons déjà montré (figure 4.8) que dans le cas des quadrangulations biparties, il n'y a que trois types de faces possibles après étiquetage des sommets par la distance, et donc trois types de sommets blancs dans le mobile. De plus, ces sommets étant de degré 2, on peut sans perte d'information les effacer et fusionner les deux arêtes auxquelles chaque sommet est incident. Quant aux sommets noirs, ils sont tous de degré 1 et peuvent être effacés sans perte d'information. On obtient ainsi une description très simple de la bijection BDFG :

Bijection de Marcus et Schaeffer : On part d'une quadrangulation bipartie $\mathfrak{q}$ enracinée et portant un sommet pointé.

1. On étiquette chaque sommet de $\mathfrak{q}$ par sa distance au sommet pointé.
2. À l'intérieur de chaque face de $\mathfrak{q}$, on ajoute un nouvelle arête selon les règles de la figure 5.1.
3. On note $\mathfrak{u}$ la carte formée de toutes les nouvelles arêtes ajoutées, et de tous les

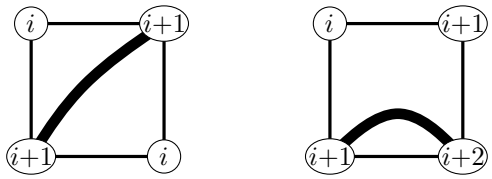


FIG. 5.1 – Les règles locales de la bijection de Marcus et Schaeffer

sommets de $\mathfrak{q}$ à l'exception du sommet pointé.

4. On note e l'arête racine $\mathfrak{q}$, et v_1 l'extrémité de e de plus grande étiquette. La racine de $\mathfrak{u}$ est alors définie comme le coin de $\mathfrak{u}$ pointé par e autour du sommet v_1. Pour retenir l'orientation de e, on définit un signe ϵ par $\epsilon = 0$ si le sommet racine de $\mathfrak{q}$ est v_1, et $\epsilon = 1$ sinon.

Dans la suite, une *carte à une face étiquetée* sera toujours une paire $(\mathfrak{u}, l)$ formée d'une carte à une face enracinée $\mathfrak{u}$ et d'une application $l : V(\mathfrak{u}) \to \mathbb{Z}$ qui associe 0 au sommet racine et varie de $-1, 0$, ou $+1$ le long de chaque arête. Nous notons $\mathcal{L}_g(n)$ l'ensemble des cartes à une face étiquetées de genre g à n arêtes, et nous notons également $\mathcal{Q}_g^\bullet(n)$ l'ensemble des quadrangulations enracinées et pointées de genre g à n faces. On a alors le cas particulier suivant du théorème 6 :

Proposition 62 ([70, 37])**.** *La construction de Marcus et Schaeffer réalise une bijection entre les ensembles $\mathcal{Q}_g^\bullet(n)$ et $\{0,1\} \times \mathcal{L}_g(n)$. De plus, si $l_{\min}$ désigne l'étiquette minimale d'une carte étiquetée $\mathfrak{u}$, alors pour tout sommet v de $\mathfrak{u}$ d'étiquette $l(v)$, la distance de v au sommet pointé dans la quadrangulation associée $\mathfrak{q}$ est $l(v) - l_{\min} + 1$.*

Pour tout $k \geq 1$, nous notons $\mathcal{L}_g^k(n)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_g(n)$ qui portent k sommets distingués *de même étiquette*. Cette définition rappelle celle de l'ensemble $\mathcal{U}_g^k(n)$ donnée au chapitre 2, et de la même manière ici, les k sommets seront supposés distincts et indifférentiables les uns des autres (non ordonnés). Il est clair que la bijection présentée au chapitre 2 reste valide pour les cartes à une face étiquetées, à condition de ne recoller ensemble que des sommets qui ont la même étiquette. On a donc pour le cas étiqueté l'analogue du théorème 1 :

Proposition 63. *L'application Λ du chapitre 2, restreinte au recollement de sommets de mêmes étiquettes, induit une bijection :*

$$\biguplus_{p=0}^{g-1} \mathcal{L}_p^{2g-2p+1}(n) \longrightarrow \mathcal{L}_g^{\mathcal{D}}(n).$$

où $\mathcal{L}_g^{\mathcal{D}}(n)$ est l'ensemble des cartes à une face étiquetées de genre g à n arêtes dont l'une des $2g$ trisections est distinguée.

Nous allons maintenant utiliser la proposition précédente pour nous ramener à des objets purement planaires. Notons $\mathcal{W}_g(n)$ l'ensemble des paires $(\mathfrak{t}, v_*)$, où $\mathfrak{t}$ est un arbre plan étiqueté à n arêtes, et $v_* = (v_1, \ldots, v_{3g})$ est un $3g$-uplet de sommets distincts de $\mathfrak{t}$ tels que pour tout $i = 1 \ldots g$, on ait $l(v_{3i-2}) = l(v_{3i-1}) = l(v_{3i})$, où l est l'application d'étiquetage. Étant donné $(\mathfrak{t}, v_*) \in \mathcal{W}_g(n)$, on construit une carte à une face de genre g

en recollant successivement les triplets de sommets $\{v_1, v_2, v_3\}$, puis $\{v_4, v_5, v_6\}$, etc... via l'application Φ du chapitre 2. On obtient ainsi une carte à une face $\mathfrak{u}$ de genre g à n arêtes. Pour $\epsilon \in \{0, 1\}$, on note $\Pi((\mathfrak{t}, v_*), \epsilon)$ l'image de $(\mathfrak{u}, \epsilon)$ par la bijection de Marcus et Schaeffer. On a alors :

Proposition 64. *Presque toutes les quadrangulations enracinées et pointées de genre g font partie de l'image de l'application Π, au sens où :*

$$|\Pi\left(\mathcal{W}_g(n) \times \{0, 1\}\right)| = \left|\mathcal{Q}_g^\bullet(n)\right| \left(1 - O(n^{-1/4})\right)$$

quand n tend vers l'infini. De plus, pour une proportion au moins $(1 - O(n^{-1/4}))$ des quadrangulations $\mathfrak{q} \in \Pi\left(\mathcal{W}_g(n)\right)$, on a : $|\Pi^{-1}(\mathfrak{q})| = 12^g g!$.

Démonstration. Nous avons montré dans le chapitre précédent (paragraphe 4.7.4) que seuls les schémas dont tous les sommets sont de degré 3 apparaissent au premier ordre dans la série des cartes. Or, comme nous l'avons déjà remarqué au chapitre 2, les cartes à une face qui ont un tel schéma ne peuvent pas avoir de trisections de type **II**. De plus, il est clair que la carte à une face obtenue par l'ouverture d'une trisection de type **I** dans une carte à une face dont le schéma est dominant a elle-même un schéma dominant. Cela montre que $\Pi\left(\mathcal{W}_g(n) \times \{0, 1\}\right)$ contient l'ensemble des quadrangulations dont la carte à une face associée a un schéma dominant, ce qui démontre le premier point.

Par ailleurs, le lemme des trisections (lemme 8) implique qu'une carte à une face dont le schéma est dominant peut toujours s'obtenir exactement de $2^g g!$ façons différentes en recollant des triplets non ordonnés de sommets. Puisque nous considérons ici un $3g$-uple de sommets *ordonnés*, cela induit un facteur $(3!)^g = 6^g$ supplémentaire, ce qui conclut la démonstration. □

On note maintenant $\mathcal{R}_g(n)$ l'ensemble des paires $(\mathfrak{t}, v_*)$, où $\mathfrak{t}$ est un arbre étiqueté à n arêtes, et $v_* = (v_1, \ldots, v_{3g})$ est un $3g$-uplet de sommets de $\mathfrak{t}$ tel que pour tout $i = 1 \ldots g$, on ait $l(v_{3i-2}) = l(v_{3i-1}) = l(v_{3i})$. Cette définition est la même que pour $\mathcal{W}_g(n)$, sauf que l'on ne demande pas que les $3g$ sommets soient distincts. En particulier, $\mathcal{W}_g(n)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{R}_g(n)$. Le résultat suivant nous simplifiera la tâche :

Lemme 65. *Presque tous les éléments de $\mathcal{R}_g(n)$ ont des sommets distingués distincts, c'est-à-dire que quand n tend vers l'infini, on a :*

$$|\mathcal{W}_g(n)| = |\mathcal{R}_g(n)| \left(1 - o(1)\right).$$

Idée de démonstration. On peut adapter les idées de la décomposition en schémas étiquetés présentée au chapitre précédent au cas des arbres portant des sommets marqués. Ainsi, le squelette d'un arbre étiqueté avec k sommets marqués sera obtenu en effeuillant l'arbre pour ne garder que le « squelette » reliant ces sommets. Si l'on impose des relations entre les étiquettes de ces sommets, en se donnant l classes de sommets telles que les sommets d'une même classe doivent avoir la même étiquette, alors on verra par un calcul analogue à celui des sections 4.7.2 et 4.7.3 que la série génératrice de ces arbres étiquetés marqués a une singularité du type $(1 - 12z)^{-\frac{k'+l'}{2}}$, où k' est le nombre d'arêtes du squelette, et l' est le nombre d'étiquettes distinctes dans les l classes. Ainsi, le cas dominant sera celui où les étiquettes sont toutes distinctes (i.e. $l = l'$), et où le squelette a le nombre maximal d'arêtes. Ce dernier point impose que les k sommets soient distincts, ce qui implique le lemme. Pour plus de détails, voir la démonstration du lemme 8 dans [35]. □

5.3 Profil des arbres étiquetés et mesure ISE

Si $\mathfrak{t}$ est un arbre plan étiqueté à n arêtes, et $k \in \mathbb{Z}$ est un entier, on note $X_{\mathfrak{t}}(k)$ le nombre de sommets de $\mathfrak{t}$ d'étiquette k. La suite $(X_{\mathfrak{t}}(k))_k$ est appelée le *profil* de $\mathfrak{t}$. Dans ce qui suit, nous allons vouloir normaliser le profil, et il sera pour cela plus commode d'encapsuler l'information de la suite $(X_{\mathfrak{t}}(k))_k$ dans d'autres types d'objets mathématiques, comme des fonctions ou des mesures. Par exemple, nous définissons le *profil fonctionnel* $f_{\mathfrak{t}}$ *de* $\mathfrak{t}$ par :

$$f_{\mathfrak{t}}(x) := \frac{X_n\left(\left[\gamma^{-1}n^{1/4}x\right]\right)}{\gamma n^{3/4}},$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière, et où $\gamma = 2^{-1/4}3^{1/2}$ est une constante de normalisation choisie pour simplifier les énoncés intervenant dans la suite. La fonction $f_{\mathfrak{t}}$ est un élément de l'ensemble $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ des fonctions *càdlàg* sur $\mathbb{R}$ (i.e. les fonctions continues à droite avec limites à gauche) qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. On munit l'ensemble $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ de la topologie de la norme uniforme, notée $\|.\|$.

La mesure aléatoire ISE, pour *Integrated Superbrownian excursion*, a été introduite par Aldous dans [3], comme une limite naturelle du profil normalisé des arbres étiquetés. Elle intervient dans de nombreux modèles liés aux arbres étiquetés, comme par exemple dans celui des quadrangulations planaires, où Chassaing et Schaeffer [38] on montré qu'ISE décrit exactement la limite du profil métrique des quadrangulations planaires (voir la section suivante). Grâce à notre construction, nous pourrons démontrer un analogue de leur résultat pour le genre supérieur. Pour cela, nous aurons besoin du théorème suivant, dû à Bousquet-Mélou et Janson, qui décrit précisément le comportement du profil fonctionnel des grands arbres étiquetés :

Théorème([24])**.** *Soit μ_{ISE} la mesure ISE 1-dimensionnelle. Alors, μ_{ISE} a presque sûrement une densité $f_{\text{ISE}}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, continue et à support compact. De plus, si pour tout n, $\mathfrak{t}_n$ est un arbre plan étiqueté à n arêtes choisi uniformément, alors on a quand n tend vers l'infini :*

$$f_{\mathfrak{t}_n}(x) \longrightarrow f_{\text{ISE}}(x) \tag{5.1}$$

dans le sens de la convergence faible dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la topologie uniforme.

Nous aurons également besoin du résultat suivant, que nous attribuons à Chassaing et Schaeffer :

Théorème([38])**.** *Pour tout n, notons l_n l'étiquette maximale, et r_n l'étiquette minimale, de l'arbre $\mathfrak{t}_n$. Alors la paire $(n^{-1/4}r_n, n^{-1/4}l_n,)$ converge en loi vers une variable aléatoire finie.*

Rappel sur la convergence en loi

Dans les énoncés précédents, nous avons parlé de *convergence en loi*. Rappelons que si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires, à valeurs dans un espace métrique $\mathcal{E}$ (muni de sa tribu Borélienne), on dit que (X_n) *converge en loi* vers une variable aléatoire X si

et seulement si, pour toute fonction $g : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ continue et bornée, on a quand n tend vers l'infini :

$$\mathbb{E}\left[g(X_n)\right] \to \mathbb{E}\left[g(X)\right].$$

Remarquons que cela ne dépend que de la loi des variables X_n, et qu'on ne demande pas du tout qu'elles soient définies sur un même espace de probabilités.

Dans la suite, nous allons considérer des suites de variables aléatoires qui seront chacune à valeurs dans l'espace $\mathcal{M}_1$ de toutes les mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$. L'espace $\mathcal{M}_1$ sera lui-même équipé de la topologie de la convergence en loi. Le critère suivant est classique (voir par exemple [60, p. 264]) :

Critère : Soient $(\mathfrak{p}_n)_{n\geq 0}$, et $\mathfrak{p}$, des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1$. Alors $(\mathfrak{p}_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers $\mathfrak{p}$ si et seulement si pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, on a la convergence en loi suivante :

$$\langle h, \mathfrak{p}_n\rangle \longrightarrow \langle h, \mathfrak{p}\rangle$$

où pour toute mesure μ on note $\langle h, \mu\rangle := \int_{\mathbb{R}} h(x)d\mu(x)$. L'intérêt de ce critère est qu'il permet de se ramener à l'étude de la convergence en loi de variable aléatoires *réelles*. À propos de convergence de mesures de probabilités, on se référera aux livres [22, 21, 60].

5.4 Une nouvelle expression de t_g

Pour étiqueter les sommets d'un arbre plan, il suffit de donner l'étiquette 0 à la racine, puis de choisir, le long de chaque arête, si l'on veut que l'étiquette augmente de 0, 1, ou -1. Ainsi, le nombre d'arbres plans étiquetés à n arêtes est $3^n\mathrm{Cat}(n)$. Nous noterons $\mathcal{T}(n)$ l'ensemble des arbres plans étiquetés à n arêtes.

Remarquons que le nombre de façons de choisir trois sommets de même étiquette (distincts ou non) dans un arbre étiqueté est égal à $\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3$. Dans la suite, si $\mathfrak{t}$ est un arbre étiqueté à n arêtes, nous noterons $W_{\mathfrak{t}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathfrak{t}}(x)^3dx$, de sorte que $W_{\mathfrak{t}} = \frac{1}{\gamma^2 n^{5/2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3$. Alors, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{R}_g(n)$ s'écrit :

$$|\mathcal{R}_g(n)| = \sum_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(n)}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3\right)^g = |\mathcal{T}(n)|\gamma^{2g}n^{\frac{5g}{2}}\mathbb{E}\left[(W_{\mathfrak{t}_n})^g\right] \tag{5.2}$$

où comme précédemment $\mathfrak{t}_n$ est une variable aléatoire uniforme sur $\mathcal{T}(n)$. On en déduit une nouvelle expression de la constante t_g de Bender et Canfield, reliée à la mesure ISE :

Théorème 7. *La constante t_g introduite par Bender et Canfield dans [10], qui est telle que $\mathcal{Q}_g^\bullet(n) \sim t_g n^{\frac{5g-3}{2}}12^n$, admet l'expression suivante :*

$$t_g = \frac{2}{2^{5g/2}g!\sqrt{\pi}}\mathbb{E}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{ISE}}(x)^3dx\right)^g\right]. \tag{5.3}$$

Au vu de la proposition 64, du lemme 65, de l'équation (5.2), et de l'estimée $|\mathcal{T}(n)| \sim \frac{n^{-3/2}12^n}{\sqrt{\pi}}$, on a :

$$\left|\mathcal{Q}_g^\bullet(n)\right| = \frac{2\gamma^{2g}}{12^g!}\mathbb{E}\left[(W_{\mathfrak{t}_n})^g\right]n^{\frac{5g-3}{2}}12^n\ (1+o(1)). \tag{5.4}$$

Dans la suite, on notera $W = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\text{ISE}}(x)^3 dx$. Le théorème est alors une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 66. *Pour tout $g \in \mathbb{N}$, on a quand n tend vers l'infini :*

$$\mathbb{E}\left[W_n^g\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[W^g\right] < \infty$$

Démonstration.
• On montre d'abord que W_n converge faiblement vers W. En effet, si F est une fonction réelle continue bornée, on a pour tout $m > 0$:

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left[F(W_n)\right] - \mathbb{E}\left[F(W)\right]\right| \leq & \left|\mathbb{E}\left[F\left(\int_{-m}^{m} f_n(x)^3 dx\right)\right] - \mathbb{E}\left[F\left(\int_{-m}^{m} f_{\text{ISE}}(x)^3 dx\right)\right]\right| \\ & +2\|F\| \cdot \mathbb{P}\left(\text{supp}(f) \nsubseteq [-m,m]\right) + 2\|F\| \cdot \mathbb{P}\left(\text{supp}(f_n) \nsubseteq [-m,m]\right)\end{aligned}$$

où pour toute fonction réelle g, supp(g) désigne le support de g. Or, on déduit des résultats de [38] que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $m > 0$ tel que les second et troisième termes soit plus petits que ϵ (pour tout n). De plus, puisque l'application $g \longrightarrow \int_{-m}^{m} g(x)^3 dx$ est continue pour la norme uniforme sur $\mathcal{D}_0$, la convergence faible de f_n vers f_{ISE} (Théorème [24]) implique que pour n assez grand, le premier terme est lui aussi inférieur à ϵ. Par conséquent, $\left|\mathbb{E}\left[F(W_n)\right] - \mathbb{E}\left[F(W)\right]\right| \leq 3\epsilon$ pour n assez grand, i.e. W_n converge faiblement vers W.
• Fixons à nouveau $\epsilon > 0$. On sait par l'équation (5.4), que pour tout K, $\mathbb{E}\left[W_n^K\right]$ tend vers une limite *finie* w_K quand n tend vers l'infini. On a alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[W^g\right] &= \lim_M \mathbb{E}\left[W^g \wedge M\right] \quad \text{[convergence monotone]} \\ &= \lim_M \lim_n \mathbb{E}\left[W_n^g \wedge M\right] \quad \text{[convergence faible de } W_n \text{vers } W\text{]} \\ &\leq w_g < \infty.\end{aligned}$$

En particulier, la quantité $\mathbb{E}\left[W^g \mathbb{1}_{W>L}\right]$ tend vers 0 quand L tend vers l'infini. De plus, on a par l'inégalité de Chebichev $\mathbb{E}\left[W_n^g \mathbb{1}_{W_n>L}\right] \leq \frac{1}{L}\mathbb{E}\left[W_n^{g+1}\right]$ qui, pour L fixé, est plus petit que $\frac{1+w_{g+1}}{L}$ pour n assez grand.

Choisissons maintenant L assez grand pour qu'à la fois $\mathbb{E}\left[W^g \mathbb{1}_{W>L}\right]$ et $\frac{1+w_{g+1}}{L}$ soient inférieurs à ϵ. Quitte à remplacer L par une valeur plus grande, on peut supposer que L n'est pas un atome de la loi de W (si jamais il y en a). Alors, le fait que W_n converge faiblement vers W implique que $\left|\mathbb{E}\left[W_n^g \mathbb{1}_{W_n \leq L}\right] - \mathbb{E}\left[W^g \mathbb{1}_{W \leq L}\right]\right|$ est inférieur à ϵ pour n assez grand. En regroupant les trois termes, on obtient que pour n assez grand, $\left|\mathbb{E}\left[W_n^g\right] - \mathbb{E}\left[W^g\right]\right|$ est inférieur à 3ϵ, ce qui démontre le lemme. □

5.5 À propos de t_g

Comme on l'a évoqué dans l'introduction (chapitre 1), il y a d'autres manières d'énumérer les cartes que les bijections. Si les méthodes bijectives ont des avantages, notamment en donnant accès à certaines propriétés des objets comme les distances (on le verra dans la prochaine section), elles ne permettent pas (encore) de retrouver tous les résultats obtenus par d'autres méthodes. Ainsi, on sait par des méthodes d'intégrales de matrices

(voir [63, p. 201]) donner des relations de récurrence permettant de calculer les nombres t_g très facilement. Précisément, si l'on pose

$$u(y) = -\sum_{g\geq 0} 4^{g-1}\Gamma(\frac{5g-1}{2})t_g y^{\frac{1-5g}{2}}$$

alors $u(y)$ satisfait l'équation de Painlevé-I :

$$y = u(y)^2 + u''(y). \tag{5.5}$$

Une relation similaire a récemment été démontrée par Bender, Gao, Richmond, Goulden et Jackson dans les articles [7, 54]. Remarquons que l'on peut réécrire u comme une transformée fonctionnelle de la mesure ISE :

$$u(y) = -\frac{y^{1/2}}{2\sqrt{\pi}}\mathbb{E}\left[\sum_{g\geq 0}\frac{\Gamma(\frac{5g-1}{2})}{g!}\left(\frac{1}{\sqrt{2}y^{5/2}}W(\mu_{\text{ISE}})\right)^g\right].$$

Cela laisse espérer une redérivation purement probabiliste de l'équation (5.5), via des propriétés des superprocessus. Plus généralement, les deux bijections (celle de Marcus-Schaeffer et celle du chapitre 2) devraient permettre, à terme, de retrouver les équations fonctionnelles satisfaites par les séries génératrices de cartes obtenues par les méthodes abstraites (voir [63, 54]). Il manque certainement pour cela une opération bijective sur les arbres étiquetés à sommets marqués (définissant des opérations canoniques de découpage et recollement permettant de passer d'un arbre à un autre). Nous ne suivrons pas cette voie plus avant dans cette thèse, et la laissons ouverte pour la suite.

5.6 Profil métrique limite des quadrangulations

Si $\mathfrak{q}$ est une quadrangulation enracinée et pointée de genre g à n arêtes, et $k \in \mathbb{N}$ est un entier, on note $Y_{\mathfrak{q}}(k)$ le nombre de sommets de $\mathfrak{q}$ à distance k du sommet pointé. Comme pour les arbres étiquetés, on dira que $(Y_{\mathfrak{q}}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est *le profil de* $\mathfrak{q}$. La quantité $a_n = \max\{k,\ Y_n(k) \neq 0\}$ est appelée le *rayon* de q_n. *Le profil normalisé de* $\mathfrak{q}$ est défini comme la mesure de probabilités :

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}} = \frac{1}{n+2-2g}\sum_{k=0}^{\infty} Y_{\mathfrak{q}}(k)\delta_{\gamma n^{-1/4}k}$$

où δ_x désigne la mesure de Dirac en x. De la même façon, si $\mathfrak{t}$ est un arbre étiqueté à n arêtes, on définira son profil normalisé par :

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_{\mathfrak{t}}(k)\delta_{\gamma n^{-1/4}k}.$$

5.6.1 Énoncé du théorème limite

Notons l et r les bornes droites et gauches du support d'ISE :

$$[l, r] = \cap\{I,\ I \text{ intervalle tel que } \mu_{\text{ISE}}(I) = 1\}.$$

Rappelons que l et r sont presque sûrement finies [24]. La *mesure ISE décalée* est la mesure de probabilité $\overline{\mu}_{\text{ISE}}$ définie (presque sûrement) par :

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) d\overline{\mu}_{\text{ISE}}(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x-l) d\mu_{\text{ISE}}(x)$$

pour toute fonction continue et bornée $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $\overline{\mathcal{L}}_{\text{ISE}}$ la loi de $\overline{\mu}_{\text{ISE}}$ sur $\mathcal{M}_1$. Si une mesure de probabilités $\mu \in \mathcal{M}_1$ a une densité continue f_μ à support compact par rapport à la mesure de Lebesgue, on pose :

$$W(\mu) = \int_{\mathbb{R}} f_\mu(x)^3 dx.$$

Remarquons que $W(\overline{\mu}_{\text{ISE}})$ est bien définie, et finie, presque sûrement.

Définition 32. On définit la mesure de probabilités $\mathcal{L}^g$ sur $\mathcal{M}_1$ par la relation :

$$d\mathcal{L}^g(\mu) = \frac{1}{Z_g} W(\mu)^g d\overline{\mathcal{L}}_{\text{ISE}}(\mu)$$

où $Z_g = \mathbb{E}\left[W(\mu_{\text{ISE}})^g\right]$.

En d'autres termes, $\mathcal{L}^g$ est telle que, pour tout fonctionnelle continue et bornée $h : \mathcal{M}_1 \to \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{\mathcal{M}_1} h(\mu) d\mathcal{L}^g(\mu) = \frac{1}{Z_g} \int_{\mathcal{M}_1} h(\mu) W(\mu)^g d\overline{\mathcal{L}}_{\text{ISE}}(\mu).$$

Le principal résultat de ce chapitre caractérise le profil métrique limite des grandes quadrangulations biparties de genre fixé :

Théorème 8. *Soit $\mathfrak{q}_n$ une quadrangulation enracinée et pointée choisie selon la loi uniforme sur $\mathcal{Q}_g^\bullet(n)$. Alors quand n tend vers l'infini, la loi $\mathcal{L}_n^g$ de $\mathfrak{p}_{q_n}$ converge vers $\mathcal{L}^g$, dans le sens de la convergence faible par rapport à la topologie de la convergence faible sur $\mathcal{M}_1$.*

De plus, soit μ^g une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1$ et de loi $\mathcal{L}^g$, et soit

$$a = \min\{|I|,\ I \text{ intervalle t.q. } \mu^g(I) = 1\}$$

l'écartement de μ^g. Alors a est presque sûrement strictement positif et fini, et le rayon normalisé $\dfrac{a_n}{\gamma^{-1} n^{1/4}}$ converge en loi vers a.

Le reste de cette section est dédié à la démonstration du théorème.

5.6.2 Démonstration du théorème 8

Note : Les démonstrations présentées dans cette partie, issues de l'article [35], ont grandement bénéficié des conseils d'un rapporteur anonyme de la revue *PTRF*.

D'après le critère énoncé à la page 117, pour montrer que $\mathcal{L}_n^g$ converge vers $\mathcal{L}^g$, il suffit de montrer que $\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n} \rangle$ converge en loi vers $\langle h, \mu^g \rangle$ pour toute fonction réelle h

continue à support compact. De plus, il est suffisant de prendre h dans un sous-ensemble dénombrable dense de l'ensemble de toutes les fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$ (cela, pour éviter des problèmes dans la gestion des ensembles de probabilité nulle dans des applications à venir du théorème de représentation de Skorokhod). Fixons maintenant une telle fonction h.

Alors, pour montrer que $\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle$ converge en loi vers $\langle h, \mu^g\rangle$, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] \to \mathbb{E}\left[H(\langle h, \mu^g\rangle)\right] \tag{5.6}$$

pour toute fonction réelle H bornée et *uniformément continue* (voir [21]). Là encore, nous fixons une telle fonction H, choisie dans un sous-ensemble dénombrable dense des fonctions réelle bornées uniformément continues.

Première étape : utilisation de la bijection.

On a par définition :

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] \;=\; \frac{1}{|\mathcal{Q}_g(n)^\bullet|}\sum_{q_n\in\mathcal{Q}^\bullet_{g,n}} H(\langle h, \mathfrak{p}_{q_n}\rangle)$$

La proposition 64 implique donc que :

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] \;\sim\; \frac{1}{12^g g!|\mathcal{Q}_g(n)^\bullet|}\sum_{\substack{w\in W_g(n)\\ \epsilon\in\{0,1\}}} H(\langle h, \mathfrak{p}_{\Pi(w,\epsilon)}\rangle)$$

Si $(\mathfrak{t}, v_*)$ est un élément de $\mathcal{W}_g(n)$, on définit la mesure $\mathfrak{q}_{\mathfrak{t},v_*} = \dfrac{\delta_0 - 2\sum_{i=1}^g \delta_{\gamma n^{-1/4}(l(v_i)-\lambda_t+1)}}{n+1}$. Alors, si $\mathfrak{q} = \Pi((\mathfrak{t}, v), \epsilon)$ désigne la quadrangulation associée à $(\mathfrak{t}, v_*)$ (et $\epsilon = 0$ ou 1), le profil normalisé $\mathfrak{p}_\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{q}$ est donné par :

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{q} = \frac{n+1}{n+2-2g}(\mathfrak{p}_\mathfrak{t} + \mathfrak{q}_{\mathfrak{t},v_*}).$$

En effet, la mesure correctrice $\mathfrak{q}_{t_n,v_*}$ prend en compte d'une part le fait que lors de l'opération de recollement, chaque triplet de sommets de $\mathfrak{t}$ ne donne naissance qu'à un seul sommet de $\mathfrak{q}$ (de sorte que deux sommets disparaissent dans l'opération), et d'autre part le fait que le sommet pointé d'étiquette 0 est présent dans la quadrangulation, mais pas dans l'arbre de départ.

Or, on a $|\langle h, \mathfrak{q}_{\mathfrak{t},v_*}\rangle| \leq \frac{(2g+1)\|h\|}{(n+1)}$, et donc le fait que H soit uniformément continue implique que :

$$\sum_{\substack{w\in W_g(n)\\ \epsilon\in\{0,1\}}} H(\langle h, \mathfrak{p}_{\Pi(w,\epsilon)}\rangle) \;\sim\; \sum_{\substack{(\mathfrak{t},v_*)\in W_g(n)\\ \epsilon\in\{0,1\}}} H(\langle h, \mathfrak{p}_\mathfrak{t}\rangle) \tag{5.7}$$

D'autre part, le lemme 65 et le fait que H soit bornée impliquent :

$$\sum_{(\mathfrak{t},v_*)\in\mathcal{W}_g(n)} H(\langle h, \mathfrak{p}_\mathfrak{t}\rangle) \sim \sum_{(\mathfrak{t},v_*)\in\mathcal{R}_g(n)} H(\langle h, \mathfrak{p}_\mathfrak{t}\rangle)$$

Or, en remarquant qu'un arbre étiqueté $\mathfrak{t}$ à n arêtes correspond à $(\sum_k X_{\mathfrak{t}}(k)^3)^g$ éléments différents de $\mathcal{R}_g(n)$ on obtient :

$$\sum_{w\in R_g(n)} H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}}\rangle) = \sum_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(n)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3\right)^g H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}}\rangle).$$

On a donc démontré :

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] \sim \frac{2}{12^g g!|\mathcal{Q}_g(n)^\bullet|} \sum_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(n)} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3\right)^g H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}}\rangle).$$

En utilisant le fait que $|\mathcal{Q}^\bullet_{g,n}| \sim \frac{2\cdot\gamma^{2g}\cdot Z_g}{12^g g!\sqrt{\pi}} n^{\frac{5g-3}{2}} 12^n$, alors que le nombre d'arbres étiquetés est équivalent à $\frac{2}{\sqrt{\pi}} n^{-\frac{3}{2}} 12^n$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] \sim \frac{1}{Z_g\,|\mathcal{T}(n)|} \sum_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(n)} \left(\frac{1}{\gamma^2 n^{5/2}} \sum_k X_{\mathfrak{t}}(k)^3\right)^g H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}}\rangle)$$

Cette dernière équation peut se réécrire :

$$\mathbb{E}\left[H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{q}_n}\rangle)\right] = \lim_n \frac{1}{Z_g}\mathbb{E}\left[W_n{}^g H(\langle h,\mathfrak{p}_{\mathfrak{t}_n}\rangle)\right]. \tag{5.8}$$

où $\mathfrak{t}_n$ est une variable aléatoire uniforme sur $\mathcal{T}(n)$, de profil fonctionnel $f_n := f_{\mathfrak{t}_n}$, et où $W_n = \frac{1}{\gamma^2 n^{5/2}} \sum X_{\mathfrak{t}_n}(k)^3 = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)^3 dx$.

Deuxième étape : convergence.

On note $[l_n, r_n]$ le support de f_n (i.e. $[l_n, r_n]$ est l'intersection de tous les intervalles réels en dehors desquels f_n est identiquement nulle). On sait (voir [38]) que l_n et r_n convergent en loi vers r et l. Cependant, on aura besoin d'un peu plus, précisément de contrôler la convergence *jointe* de l_n, r_n et f_n. On notera $=_d$ l'égalité en distribution de variables aléatoires, i.e. $A =_d B$ si et seulement si A et B ont même loi. On a :

Lemme 67. *Il existe un espace de probabilités $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$, et des variables aléatoires $\tilde{f}$ et $(\tilde{f}_n)_{n\geq 0}$ sur cet espace, telles que $\tilde{f} =_d f_{\text{ISE}}$, $\tilde{f}_n =_d f_n$ et si $[\tilde{l}_n, \tilde{r}_n]$ et $[\tilde{l}, \tilde{r}]$ désignent respectivement le support de $\tilde{f}_n$ et $\tilde{f}$, alors le triplet $(\tilde{f}_n, \tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$ converge presque sûrement vers $(\tilde{f}, \tilde{l}, \tilde{r})$ dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Nous admettons pour l'instant le lemme, et poursuivons la démonstration du théorème.
• Tout d'abord, définissons la mesure de probabilité :

$$\tilde{\mathfrak{p}}_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k\geq 0} \gamma n^{3/4} \tilde{f}_n \left(\frac{k}{\gamma^{-1} n^{1/4}} + \tilde{l}_n\right) \delta_{\gamma n^{-1/4}(k+1)}.$$

Alors il est clair que le quadruplet $(\tilde{f}_n, \tilde{l}_n, \tilde{r}_n, \tilde{\mathfrak{p}}_n)$ a la même loi que $(f_n, l_n, r_n, \mathfrak{p}_{\mathfrak{t}_n})$. De plus, si l'on définit la mesure de probabilités $\overline{\tilde{\mu}}$ par $\overline{\tilde{\mu}}(dx) = \tilde{f}(x+\tilde{l})dx$, alors $\tilde{\mathfrak{p}}_n$ converge

presque sûrement vers $\overline{\tilde{\mu}}$ (au sens de la convergence faible). En effet, si u est une fonction réelle bornée et uniformément continue, on a :

$$\begin{aligned}\langle u, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle &= \frac{\gamma n^{3/4}}{n+1}\sum_{k\geq 0}\tilde{f}_n\left(\frac{k}{\gamma^{-1}n^{1/4}}+\tilde{l}_n\right)u\left(\frac{k+1}{\gamma^{-1}n^{1/4}}\right)\\ &= \frac{n}{n+1}\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}_n(x+\tilde{l}_n)u\left(\frac{[\gamma^{-1}n^{1/4}x]+1}{\gamma^{-1}n^{1/4}}\right)dx\\ &= \frac{n}{n+1}\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}_n(x)u\left(\frac{[\gamma^{-1}n^{1/4}(x-\tilde{l}_n)]+1}{\gamma^{-1}n^{1/4}}\right)dx.\end{aligned}$$

Puisque u est uniformément continue, et puisque $\tilde{f}_n \to \tilde{f}$ et $\tilde{l}_n \to \tilde{l}$, presque sûrement, cette dernière quantité tend presque sûrement vers $\int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(x)u(x-\tilde{l})dx = \langle u, \overline{\tilde{\mu}}\rangle$. Ainsi, en prenant u le long d'un sous-ensemble dense de l'ensemble des fonctions réelles uniformément continues et bornées, on voit que $\tilde{\mathfrak{p}}_n$ converge p.s. vers $\overline{\tilde{\mu}}$, comme annoncé.

• Notons $\tilde{W}_n := \int_{\mathbb{R}}\tilde{f}_n(x)^3dx$ et $\tilde{W} := \int_{\mathbb{R}}\tilde{f}(x)^3dx$, de sorte que : $\mathbb{E}\left[W_n^g H(\langle h, \mathfrak{p}_{\mathfrak{t}_n}\rangle)\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{W}_n^g H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle)\right]$ et $\mathbb{E}\left[W^g H(\langle h, \overline{\mu}_{\text{ISE}}\rangle)\right] = \mathbb{E}\left[\tilde{W}^g H(\langle h, \overline{\tilde{\mu}}\rangle)\right]$. Écrivons alors :

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\left[\tilde{W}_n^g H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle)\right] - \mathbb{E}\left[\tilde{W}^g H(\langle h, \overline{\tilde{\mu}}\rangle)\right]\right|\\ &\qquad\leq \underbrace{\left|\mathbb{E}\left[(\tilde{W}_n^g - \tilde{W}^g)H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle)\right]\right|}_{T_1} + \underbrace{\left|\mathbb{E}\left[\tilde{W}^g\big(H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle) - H(\langle h, \overline{\tilde{\mu}}\rangle)\big)\right]\right|}_{T_2}.\end{aligned}$$

Afin de majorer le premier terme, on écrit $|T_1| \leq \|H\|\mathbb{E}\left[|\tilde{W}_n^g - \tilde{W}^g|\right]$. Cette dernière quantité tend vers 0 par les deux faits que $\mathbb{E}\left[\tilde{W}_n^g\right] \to \mathbb{E}\left[\tilde{W}^g\right]$, et que $\tilde{W}_n$ converge presque sûrement vers $\tilde{W}$ (qui est une conséquence directe de la convergence p.s. du triplet $(\tilde{f}_n, \tilde{l}_n, \tilde{r}_n)$). En effet, cela se déduit de l'application du lemme de Fatou à la variable aléatoire positive $\tilde{W}_n^g + \tilde{W}^g - |\tilde{W}_n^g - \tilde{W}^g|$ (cet argument est connu sous le nom de lemme de Scheffe).

Quand au second terme T_2, il tend vers 0 par convergence dominée. En effet, $H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle) - H(\langle h, \overline{\tilde{\mu}}\rangle)$ converge presque sûrement vers 0 puisque $\tilde{\mathfrak{p}}_n$ converge p.s. faiblement vers $\overline{\tilde{\mu}}$, et l'intégrande est borné par $2\|h\|\tilde{W}^g$, qui est intégrable.

On a donc démontré que :

$$\left|\mathbb{E}\left[\tilde{W}^g H(\langle h, \overline{\tilde{\mu}}\rangle)\right] - \mathbb{E}\left[\tilde{W}_n^g H(\langle h, \tilde{\mathfrak{p}}_n\rangle)\right]\right| \longrightarrow 0,$$

ce qui avec l'équation (5.8) conduit à l'équation (5.6). Cela conclut (au lemme 67 près) la démonstration de la convergence de $\mathcal{L}_n^g$ vers $\mathcal{L}^g$. La convergence du rayon est contenue dans la démonstration, et il ne reste donc à démontrer que le lemme.

Démonstration du lemme 67. Par [24], on sait que f_n converge en loi vers f_{ISE}, et par [38], que l_n et r_n convergent en loi respectivement vers l et r. Par conséquent, la suite des triplets $(f_n, l_n, r_n)_{n\geq 1}$ est *tendue* dans l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que cette suite converge en loi vers un triplet (f, l', r'), tel que $f =_d f_{\text{ISE}}$, $l' =_d l$, $r' =_d r$. Par le théorème de représentation de Skorokhod

(l'espace $\mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ muni de la norme uniforme n'est pas séparable, mais la loi de f_{ISE} est supportée par le sous-ensemble $\mathcal{C}_K(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact, qui l'est – le théorème de Skorokhod s'applique donc), il existe un espace de probabilités, et des variables aléatoires $\hat{f}_n, \hat{f}, \hat{l}', \hat{r}'$ sur cet espace, telles que $\hat{f}_n =_d f_n$, $\hat{f} =_d f_{\text{ISE}}$, $\hat{l}' =_d l$, $\hat{r}' =_d r$, et telles que si $[\hat{l}_n, \hat{r}_n]$ désigne le support de $\hat{f}_n$, on ait la convergence presque sûre $(\hat{f}_n, \hat{l}_n, \hat{r}_n) \to (\hat{f}, \hat{l}', \hat{r}')$, le long de la sous-suite déjà mentionnée.

Notons alors $[\hat{l}, \hat{r}]$ le support de $\hat{f}$. Le fait que $\hat{f}_n \to \hat{f}$ uniformément implique que (toujours le long de la même extraction) :

$$\limsup_n \hat{l}_n \leq \hat{l} \leq \hat{r} \leq \liminf_n \hat{r}_n,$$

qui, puisque $(\hat{l}_n, \hat{r}_n) \to (\hat{r}', \hat{l}')$, donne : $\hat{l}' \leq \hat{l} \leq \hat{r} \leq \hat{r}'$. Or, puisque $\hat{r}$ et $\hat{r}'$ ont la même loi, on a pour tout $M > 0$, $\mathbb{E}\left[\hat{r}' \wedge M - \hat{r} \wedge M\right] = 0$. La quantité dans l'espérance étant positive, on en déduit que $\hat{r}' \wedge M = \hat{r} \wedge M$ presque sûrement, de sorte qu'en faisant tendre M vers l'infini on obtient que $\hat{r} = \hat{r}'$ presque sûrement. De la même manière on a presque sûrement $\hat{l} = \hat{l}'$. Par conséquent, le long de l'extraction mentionnée, le *triplet* $(\hat{f}_n, \hat{l}_n, \hat{r}_n)$ converge en loi vers $(\hat{f}, \hat{l}, \hat{r})$, ou de manière équivalente (f_n, l_n, r_n) converge en loi vers (f_{ISE}, l, r).

Mais, puisque la limite (f_{ISE}, l, r) ne dépend pas de l'extraction, on en déduit que la convergence a en fait lieu quand n tend vers l'infini, sans devoir considérer d'extraction :

$$(f_n, l_n, r_n) \xrightarrow{d} (f_{\text{ISE}}, l, r), \quad \text{quand } n \to \infty$$

Le lemme s'en déduit par une dernière application du théorème de représentation de Skorokhod. □

6

Génération aléatoire

6.1 Généralités

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la *génération aléatoire* de cartes, c'est-à-dire à la conception d'algorithmes permettant de tirer au hasard des cartes de genre fixé. Du point de vue du chapitre précédent, cela donne un moyen d'évaluer de manière empirique le comportement statistique d'un certain nombre de paramètres des surfaces aléatoires « browniennes ». Du point de vue de l'informatique, les générateurs fournissent en grande quantité des cartes (ou simplement des graphes) pouvant être utilisés dans des protocoles de test d'algorithmes.

Avant de donner un générateur, il est nécessaire de dire ce que nous entendons par *tirer au hasard*, c'est-à-dire préciser la loi de la variable aléatoire produite par le générateur. Bien souvent, la distribution cible (celle que nous voudrions vraiment engendrer) sera la distribution uniforme sur les objets de taille n, mais il ne sera pas toujours simple d'y parvenir. Aussi utiliserons-nous plusieurs stratégies pour contourner le problème. Nous donnerons par exemple un *générateur de Boltzmann*, dont la distribution de sortie est une distribution de Boltzmann en la taille des objets. Cette distribution étant uniforme une fois conditionnée par la taille, on en déduira un générateur uniforme par une opération de rejet, quitte à perdre en efficacité. Le deuxième générateur que nous donnerons sera un générateur *approché*, au sens où la distribution de sortie sera une mesure de probabilité sur les cartes de genre g et de taille n dont la *distance en variation totale* avec la mesure

uniforme pourra être rendue plus petite que n'importe quel nombre ϵ positif. À ϵ fixé, cet algorithme sera linéaire n.

Bien sûr, les bijections joueront un grand rôle dans la conception de ces générateurs, en ramenant le problème de la génération de cartes à celle d'objets arborescents. C'était déjà vrai dans le cas planaire, où la question de la génération aléatoire de cartes a vraiment été résolue dans la thèse de Schaeffer [84]. À notre connaissance, les générateurs donnés ici sont les premiers pour les cartes de genre supérieur.
Note : ce chapitre repose sur un travail commun avec Mihyun Kang et Gilles Schaeffer.

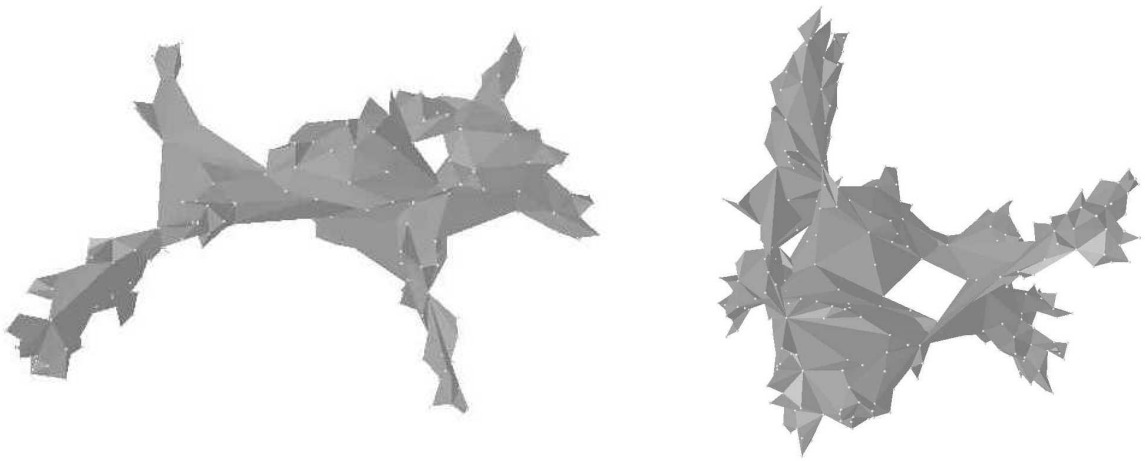


FIG. 6.1 – Deux quadrangulations à environ 250 faces, obtenues par le générateur approché à 5%, pour les genres 1 et 2. Elles sont plongées dans $\mathbb{R}^3$ *en tant que graphes* par un algorithme de ressorts, puis les « faces » sont dessinées a posteriori.

Générateurs de Boltzmann

La notion de générateur de Boltzmann donne un cadre de travail général permettant de construire facilement des générateurs aléatoires. Le fait que la distribution de Boltzmann, bien connue en physique statistique et en probabilités, soit bien adaptée à la génération d'objets combinatoires a été mis en évidence par Duchon *et al.* dans l'article [44]. Cet article démontre de nombreuses propriétés de ces générateurs, et nous allons en énoncer quelques unes.

Soit $\mathcal{A}$ une classe combinatoire dont la série génératrice $A(z) = \sum_{a\in\mathcal{A}} z^{|a|}$ a un rayon de convergence z_A non nul, et soit $z \in]0, z_a[$. La *distribution de Boltzmann* de paramètre z sur $\mathcal{A}$, notée $B^{\mathcal{A}}(z)$, est la loi assignant la probabilité $\dfrac{z^{|a|}}{A(z)}$ à chaque objet a de $\mathcal{A}$. Un *générateur de Boltzmann* est un générateur aléatoire dont la sortie est distribuée selon une loi de Boltzmann. Le lien entre la distribution de Boltzmann sur $\mathcal{A}$ et la série génératrice $A(z)$ de $\mathcal{A}$ est clair : $A(z)$ coïncide avec la *fonction de partition* de la distribution de Boltzmann. Cela a une conséquence importante :

Proposition 68 ([44]). *Le dictionnaire de la combinatoire symbolique, qui transforme de manière automatique les décompositions structurelles des objets en équations sur les séries génératrices, permet également de construire, de manière automatique, les générateurs de Boltzmann correspondants.*

L'énoncé de la proposition étant informel, nous allons tenter de l'illustrer, plutôt que de la démontrer. Supposons par exemple qu'une classe combinatoire $\mathcal{A}$ soit l'union disjointe de deux classes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Alors les séries correspondantes vérifient $A(z) = B(z) + C(z)$. En particulier, sous la loi $B^{\mathcal{A}}(z)$, la probabilité de tirer un élément dans $\mathcal{B}$ est $\frac{B(z)}{A(z)}$. Ainsi, pour construire un générateur de Boltzmann pour $\mathcal{A}$ on peut procéder comme suit : avec probabilité $\frac{B(z)}{A(z)}$, on renvoie le résultat d'un appel à un générateur de Boltzmann pour $\mathcal{B}$, et avec probabilité $\frac{C(z)}{A(z)}$, on renvoie le résultat d'un appel à un générateur de Boltzmann pour $\mathcal{C}$. En conséquence, la construction d'un générateur pour $\mathcal{A}$ se ramène *automatiquement* à celle de générateurs pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

De la même façon, on peut construire un générateur pour le produit de classes combinatoires. Si cette fois $\mathcal{A} = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$, alors l'équation $A(z) = B(z)C(z)$ montre que sous la loi $B^{\mathcal{A}}(z)$, les deux projections sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont *indépendantes*. Pour construire un générateur pour $\mathcal{A}$, il suffit donc d'appeler indépendamment les deux générateurs, celui pour $\mathcal{B}$ et celui pour $\mathcal{C}$. Bien sûr, il est possible que les classes $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{C}$ soient elles-mêmes données par une décomposition faisant intervenir $\mathcal{A}$: dans ce cas, notre générateur de Boltzmann sera *récursif*.

Par exemple, il est très simple de construire un générateur de Boltzmann pour la classe des arbres binaires, définie par l'équation :

$$\mathcal{A} = \{\bullet\} + \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

dont la série est $A(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$, définie pour $z < 1/4$. Le générateur correspondant est défini comme suit :

- avec probabilité $\frac{z}{A(z)}$, renvoyer l'arbre réduit à un seul sommet $\bullet$;
- avec probabilité $\frac{A(z)^2}{A(z)}$, appeler deux fois indépendamment le générateur pour engendrer deux arbres $\mathfrak{t}_1$ et $\mathfrak{t}_2$, et renvoyer l'arbre formé du produit $(\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2)$.

On peut montrer que cet algorithme termine presque sûrement. Remarquons qu'en plus d'être très simple, cet algorithme a un coût amorti $O(1)$, c'est-à-dire qu'il effectue un nombre d'opérations élémentaires linéaire en la taille de l'objet qu'il renvoie.

On pourrait donner des constructions similaires pour d'autres opérations, comme la suite finie, ou la composition de classes combinatoires. De manière générale, toutes les opérations du dictionnaire de la combinatoire symbolique passent de manière immédiate aux générateurs de Boltzmann. Le lecteur qui est arrivé jusque là ne devrait pas avoir trop de mal à s'en convaincre.

L'une des vertus de la distribution de Boltzmann est que si on la restreint aux objets de taille n, elle donne une mesure uniforme. Ainsi, tout générateur de Boltzmann permet de construire un générateur uniforme par une simple opération de rejet : on appelle le générateur jusqu'à obtenir un objet de taille n. S'il est clair que cette opération termine presque sûrement (à condition qu'il existe au moins *un* objet de taille n dans $\mathcal{A}$), on

est en droit de se demander à quelle perte de complexité conduit le rejet. Pour cela, commençons par remarquer que l'espérance de la taille de l'objet renvoyé par le générateur de Boltzmann s'écrit :

$$\mathbb{E}\left[|a|\right] = \frac{\sum_{a\in A} |a| z^{|a|}}{A(z)} = \frac{zA'(z)}{A(z)}.$$

Nous nous placerons dans le cas où cette quantité diverge quand z tend vers le point critique z_A. Alors, pour une valeur de n assez grande, il existera toujours une valeur $z = z_0(n)$ telle que cette espérance vaille n. En choisissant cette valeur de z, on s'assure donc que notre générateur renvoie des objets de *taille moyenne* n. Sous des hypothèses supplémentaires sur la régularité de la série $A(z)$, qui seront largement vérifiées dans notre cas, on peut alors estimer précisément le coût de l'opération de rejet :

Théorème ([44, p.28])**.** *Soit $\mathcal{A}$ une classe combinatoire dont la série $A(z)$ est analytique en 0, avec un rayon de convergence $z_A > 0$. Supposons que $A(z)$ vérifie les deux propriétés suivantes :*

- *z_A est la seule singularité de A sur le cercle $\{|z| = z_A\}$, et elle se prolonge par continuité sur le domaine : $\Delta(r,\theta) = \{z \mid z \neq z_A, |z| < r, \arg(z - z_A) \notin (-\theta,\theta)\}$ pour un certain $r > z_A$ et un certain θ dans $(0, \frac{\pi}{2})$.*
- *Quand z tend vers z_A dans le domaine $\Delta(r,\theta)$, la série $A(z)$ admet un développement singulier de la forme :*

$$A(z) \sim (cte)\Big(1 - \frac{z}{z_a}\Big)^{\alpha} + o\Big(\Big(1 - \frac{z}{z_a}\Big)^{\alpha}\Big)$$

pour un nombre réel $\alpha < 0$.

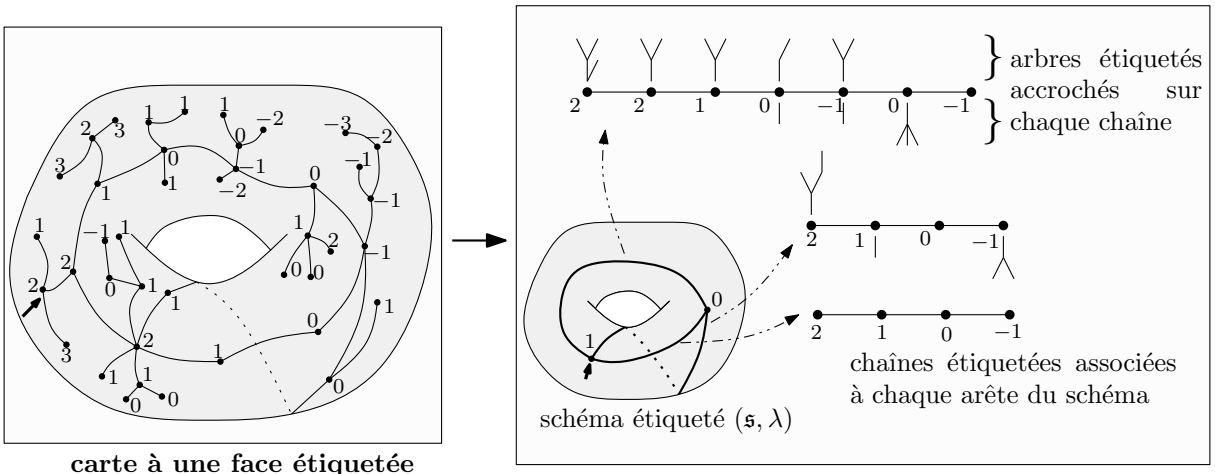
Alors, à partir d'un générateur de Boltzmann pour $\mathcal{A}$ fonctionnant en temps amorti $O(1)$, placé au paramètre $z = z_0(n)$, l'opération de rejet permet de construire un générateur en taille exacte de complexité en moyenne $O(n^2)$.

Il ne faut pas trop nous inquiéter de la forme des hypothèses du théorème précédent : nous travaillerons avec des séries génératrices algébriques simples pour lesquelles il sera clair que le théorème s'applique. Notre générateur de Boltzmann induira donc un générateur de complexité quadratique pour les cartes de genre g. Remarquons que sous les hypothèses du théorème, la quantité $(z_A - z_0(n))$ tend vers 0 à la vitesse $\frac{1}{n}$, ce qui n'étonnera pas les adeptes de la méthode du col, ou de l'analyse de singularités en combinatoire analytique. Signalons enfin que la conception de générateurs de Boltzmann nécessite de disposer d'algorithmes (souvent appelés *oracles*) pour calculer les valeurs des séries génératrices avec une précision suffisante au point considéré. Cette question constitue un domaine de recherche à part entière, mais dans le cas qui nous intéresse, celui des fonctions algébriques données par un système d'équations $\mathbb{N}$-algébriques, elle est largement résolue (voir [77]).

6.2 Un générateur de Boltzmann pour les cartes de genre supérieur

Nous allons maintenant construire un générateur pour les cartes de genre g. Nous nous restreignons aux cartes enracinées générales, qui par une célèbre bijection de Tutte, se ramènent aux quadrangulations biparties. Il suffira donc de construire un générateur

pour ces dernières cartes. En vertu de la discussion qui précède, tout sera automatique, à partir des calculs du chapitre 4. Cela étant, extraire le cas des quadrangulations biparties du chapitre 4 demanderait un peu de travail au lecteur : nous allons donc donner explicitement toutes les séries génératrices, et toutes les étapes du générateur.



carte à une face étiquetée

décomposition en briques élémentaires

FIG. 6.2 – La décomposition du chapitre 4, dans le cas particulier des quadrangulations biparties. Il est facile de construire un générateur de Boltzmann pour chacune des « briques élémentaires » de cette décomposition.

Dans le cas des quadrangulations biparties, les mobiles sont des cartes à une face étiquetées, comme dans le chapitre 5. La figure 6.2 montre les différentes « briques » intervenant dans la décomposition de ces objets. Le *schéma étiqueté* d'une carte à une face étiquetée remplace le schéma complet du chapitre 4 : il s'agit simplement d'une paire $(\mathfrak{s}, \lambda)$, où $\mathfrak{s}$ est le schéma de la carte à une face, et λ est l'application qui donne les étiquettes des sommets du schéma dans la carte, normalisées pour former une intervalle de la forme $[\![0, M]\!]$. Chaque arête du schéma est remplacée par une *chaîne* de sommets étiquetés : l'incrément de cette chaîne est défini comme la différence entre son sommet entrant et son sommet sortant, dans l'orientation canonique. L'union de toutes ces chaînes forme le cœur de la carte. Enfin, à chaque coin du cœur est accroché un arbre plan étiqueté.

Le paramètre de taille que l'on choisit est le nombre de faces de la quadrangulation bipartie, qui est aussi le nombre d'arêtes de la carte à une face associée, et celui de la carte générale correspondante. Le rayon de la série génératrice des cartes de genre fixé étant égal à $\frac{1}{12}$, nous fixons maintenant un paramètre réel $z \in]0, \frac{1}{12}[$.

Génération d'arbre étiquetés

Les arbres étiquetés que nous considérons ici ont un sommet racine d'étiquette 0, et des étiquettes sur les sommets qui varient de -1, 0, ou 1 sur chaque arête, sans contrainte de positivité. On peut donc facilement construire un générateur de Boltzmann pour ces objets, selon la règle :

$$\mathcal{T} = \{\bullet\} + \{-1, 0, 1\} \times \mathcal{T}^2$$

ou le terminal $\bullet$ représente l'arbre à un seul sommet (de taille nulle), et les terminaux $\{-1, 0, 1\}$ représentent chacun une arête, de taille 1. La série génératrice correspondante vérifie l'équation $T(z) = 1 + 3zT(z)^2$, qui permet en particulier d'en calculer une valeur approchée à n'importe quelle précision. Nous notons $G^{\mathcal{T}}(z)$ le générateur de Boltzmann de paramètre z, pour la classe $\mathcal{T}$ des arbres plans étiquetés.

Génération des chaînes

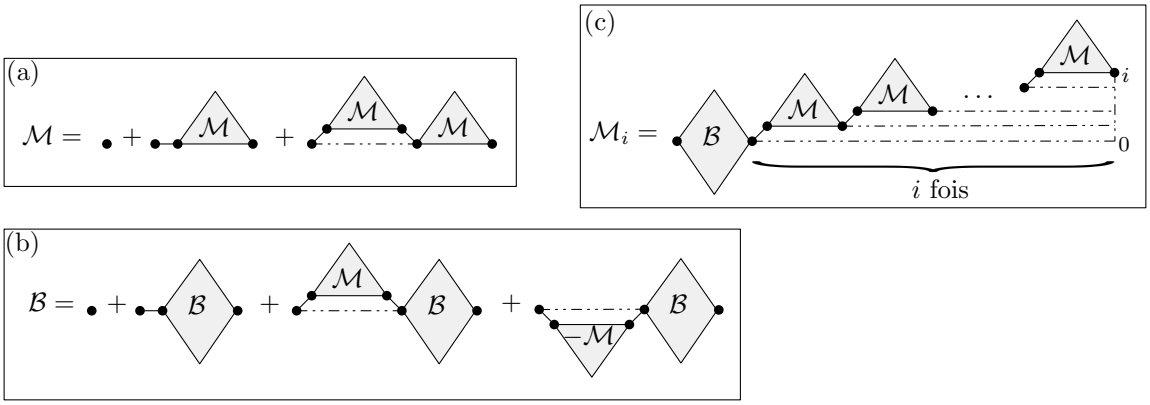


FIG. 6.3 – Décompositions classiques des marches à pas $\{-1, 0, 1\}$.

Les chaînes de sommets étiquetées sont en bijection avec les marches sur $\mathbb{Z}$ commençant en 0, et n'ayant que des pas -1, 0, ou 1. La hauteur finale de la marche correspond à l'incrément de la chaîne. Nous notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des telles marches qui finissent en 0, et $\mathcal{M}$ la série des marches finissant en 0 et qui restent toujours positives. Les figures 6.3 (a) et (b) montrent que les classes combinatoires $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$ vérifient les équations de structure suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{\bullet\} + \{-\} \times \mathcal{M} + \{-\}^2 \times \mathcal{M}^2 \\ \mathcal{B} &= \{\bullet\} + \mathcal{B} \times \Big(\{-\} + 2 \cdot \{-\}^2 \times \mathcal{M}\Big) \end{aligned}$$

où le symbole terminal $\{-\}$ désigne une arête de la chaîne. En assignant à ce symbole le paramètre $t > 0$, on obtient pour les fonctions de partition les équations :

$$\begin{aligned} M(t) &= 1 + tM(t) + t^2 M(t)^2 \\ B(t) &= 1 + tB(t)(1 + 2tM(t)). \end{aligned}$$

Nous notons $G^{\mathcal{M}}(t)$ et $G^{\mathcal{B}}(t)$ les deux générateurs de Boltzmann ainsi construits.

La figure 6.3 (c) montre la décomposition de dernier passage d'une chaîne d'incrément $i > 0$: une telle chaîne est formée d'un élément de $\mathcal{B}$ (précédant son dernier passage en 0) puis de i excursions commençant chacune après le dernier passage en chaque entier de l'intervalle $[\![0, i-1]\!]$. Elle conduit à l'équation suivante pour la classe $\mathcal{M}_i$ des marches d'incrément i :

$$\mathcal{M}_i = \mathcal{B} \times \Big(\{-\} \times \mathcal{M}\Big)^i.$$

Là encore, cela détermine la série génératrice $M_i(t) = B(t)[tM(t)]^i$, et conduit à un générateur de Boltzmann $G^{\mathcal{M}_i}(t)$ pour les marches d'incrément i.

La série des cartes de genre g

En reprenant la décomposition du chapitre 4, on obtient la série des cartes de genre g en sommant sur tous les schémas étiquetés $(\mathfrak{s}, \lambda)$, sur tous les étiquetages possibles des sommets du schéma par des entiers compatibles avec λ, puis en distinguant un coin racine uniformément. Rappelons que si $(\mathfrak{s}, \lambda)$ est un schéma étiqueté, et j et e sont respectivement une étiquette apparaissant dans l'image de λ et une arête de $\mathfrak{s}$, on note $A_{e,j} = \mathbb{1}_{\lambda(e_-)<j\leq\lambda(e_+)}$. Nous noterons aussi $d(j) = \sum_e A_{e,j}$ le « nombre d'arêtes dont les indices des extrémités recouvrent l'indice j ». La série génératrice des quadrangulations biparties de genre g enracinées et pointées s'écrit alors :

$$2z \cdot \frac{d}{dz} \sum_{(\mathfrak{s},\lambda)} \mathfrak{p}_{\mathfrak{s},\lambda}(z)$$

où le « poids » d'un schéma étiqueté est défini par :

$$\mathfrak{p}_{\mathfrak{s},\lambda} = \frac{1}{k}(B-1)^{\lambda_=} B^{\lambda_\neq} \prod_{j=1}^{M} \frac{U^{d(j)}}{1-U^{d(j)}}$$

où k désigne le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$, où λ a pour image $[\![0, M]\!]$, où $\lambda_=$ (resp. $\lambda_\neq$) désigne le nombre d'arêtes de $\mathfrak{s}$ d'incrément 0 (resp. $\neq 0$), et où les quantités B et U sont définies par $B = B(zT(z)^2)$ et $U = zT(z)^2 M(zT(z)^2)$. Rappelons que chaque facteur $\frac{U^{d(j)}}{1-U^{d(j)}}$ a été obtenu au chapitre 4 à partir de la somme sur toutes les valeurs possibles des incréments élémentaires $\delta \in (\mathbb{N}_{>0})^M$ par l'évaluation de la somme $\sum_{\delta_j \geq 1} U^{d(j)\delta_j}$. Cela montre en particulier que sous la distribution de Boltzmann sur les cartes, chaque δ_j a la loi d'une variable géométrique de paramètre $U^{d(j)}$ à laquelle on a ajouté 1, et que les (δ_j) sont indépendants les uns des autres.

Description complète du générateur de cartes

Algorithme 4 (Générateur de Boltzmann pour les cartes de genre g.)**.**

1. **Précalcul : construction d'un dictionnaire.** Construire la liste exhaustive de tous les schémas de genre g, par exemple au moyen de la bijection du chapitre 2. Numéroter arbitrairement ces schémas de 1 à N_g, puis stocker dans une table la fonction de répartition $F(i) = \sum_{j=0}^{i} \mathfrak{p}_{\mathfrak{s}_j,\lambda_j}(z)$.
2. **Tirage d'un schéma étiqueté.** Tirer un schéma étiqueté proportionnellement à son poids. Pour cela, tirer une variable aléatoire X uniforme sur le segment $[0, 1]$, et renvoyer le schéma dont l'indice est l'unique i tel que $F(i-1) \leq X \cdot F(N_g) < F(i)$.
3. **Tirage des étiquettes du schéma.** Tirer M variables géométriques indépendantes $G_1, \ldots, G_M$, de paramètres respectifs $U^{d(1)}, U^{d(2)}, \ldots, U^{d(M)}$. Donner alors à chaque sommet v de $\mathfrak{s}$ l'étiquette $l(v) = \sum_{i=1}^{\lambda(v)} (G_i + 1)$.
4. **Tirage des chaînes.** Pour chaque arête e de $\mathfrak{s}$, tirer une chaîne de sommets étiquetés d'incrément $l(e_+) - l(e_-)$, au moyen du générateur $G^{\mathcal{M}_{l(e_+)-l(e_-)}}(zT(z)^2)$.

5. **Tirage des « parties planaires »** Pour chaque coin de la carte construite à l'étape 4, tirer un arbre plan étiqueté au moyen du générateur $G^{\mathcal{T}}(z)$. Le coller dans le coin correspondant, après avoir translaté ses étiquettes pour que celle du sommet racine de l'arbre corresponde à celle du sommet auquel il va être recollé.
6. **Choix de la racine.** Distinguer uniformément l'un des coins de la carte comme le coin racine.
7. **Bijection de Marcus et Schaeffer.** Appliquer la bijection de Marcus et Schaeffer pour retrouver une quadrangulation bipartie : pour cela, créer un nouveau sommet, relié à chaque coin d'étiquette 1, puis relier chaque coin de la carte d'étiquette i au premier coin rencontré autour de la carte qui ait une étiquette $i-1$.
8. **Bijection de Tutte.** Pour retrouver une carte générale, relier les deux coins de chaque face de la quadrangulation bipartie dont l'étiquette est paire par une arête, puis ne garder que les arêtes ajoutées à cette dernière étape.

Le théorème suivant est une conséquence des décompositions présentées au chapitre 4 :

Théorème 9. *L'algorithme 4 est un générateur de Bolzmann de paramètre z pour la classe des cartes enracinées de genre g, avec pour paramètre le nombre d'arêtes.*

La figure 6.4 donne un résumé du fonctionnement du générateur.

Discussion

Notre générateur de Boltzmann se scinde en deux parties indépendantes : d'une part, la génération du schéma, et d'autre part, la reconstruction de la carte à une face et les bijections. La deuxième partie a tous les avantages : elle est simple à programmer, et a un coût amorti $O(1)$, puisque chaque appel récursif à chaque générateur de Boltzmann mis en jeu engendre au moins un terminal. La première partie est au contraire problématique. En effet, le nombre de schémas de genre g est au moins égal au nombre de schémas dominants, qui par le corollaire 13 explose comme g^{6g}. En pratique, il ne semble donc pas raisonnable de vouloir utiliser cet algorithme au delà du genre 2. Énonçons tout de même, pour son intérêt théorique, le fait suivant :

Proposition 69. *À genre g fixé, notre générateur de Boltzmann a une complexité linéaire en la taille de sa sortie. En ajustant le paramètre du générateur comme au paragraphe 6.1, et en utilisant une méthode de rejet, on obtient un algorithme de génération uniforme sur les cartes de genre g et taille n, de complexité moyenne $O(n^2)$.*

6.3 Un générateur approché, rapide et facile à mettre en œuvre

Au vu des défauts du générateur précédent, il semble nécessaire d'en construire un autre qui soit plus utilisable en pratique, quitte à perdre quelque chose du point de vue théorique. L'algorithme que nous proposons ici est très simple. Il travaille en taille exacte, et est encore basé sur la bijection de Marcus et Schaeffer : il nous faut donc engendrer une carte à une face étiquetée de genre g à n arêtes. Pour cela, nous utilisons la bijection du

Générateur de Boltzmann.
Entrée : un nombre réel $z \in \left(0, \frac{1}{12}\right)$.
Sortie : une carte aléatoire de genre g, sous distribution de Boltzmann de paramètre z.

0 - précalcul. Engendrer exhaustivement tous les schémas étiquetés de genre g, par exemple à l'aide de la bijection du chapitre 2, et les stocker dans un dictionnaire. Pour chaque valeur de z pour laquelle on souhaite utiliser le générateur, calculer le poids $\mathfrak{p}_{\mathfrak{s},\lambda}(z)$, et stocker la valeur de la fonction de répartition de ces poids dans une table.

1. Tirer un schéma étiqueté $(\mathfrak{s}, \lambda)$ dans le dictionnaire, proportionnellement à son poids $\mathfrak{p}_{\mathfrak{s},\lambda}(z)$.

2. Tirer p variables géométriques indépendantes $\delta_1, \ldots, \delta_p$ de paramètres respectifs $U^{d(1)}, \ldots, U^{d(p)}$. Donner à chaque sommet v de $\mathfrak{s}$ l'étiquette $l(v_i) := \sum_{j=1}^{\lambda(v_i)} (\delta_j + 1)$.

3. Pour chaque arête e de $\mathfrak{s}$, engendrer une chaîne étiquetée c_e d'incrément $l(e_+) - l(e_-)$, à l'aide de la grammaire donnée en figure 6.2 et d'un générateur de Boltzmann de paramètre $t = zT(z)^2$. Remplacer chaque arête e de $\mathfrak{s}$ par la chaîne c_e, pour former une nouvelle carte $\mathfrak{r}$.

4. Pour chaque coin de $\mathfrak{r}$, engendrer indépendamment un arbre étiqueté, à l'aide de la règle $\mathcal{T} = \{\bullet\} + 3z\mathcal{T}^2$.
Recoller chaque arbre dans le coin correspondant, après avoir translaté ses étiquettes pour obtenir une carte à une face étiquetée cohérente $\mathfrak{l}$.

5. Choisir un coin racine uniformément dans la carte $\mathfrak{l}$. Translater ensuite toutes les étiquettes pour mettre l'étiquette racine à 0.

à ce stade, $\mathfrak{l}$ est un élement de $\mathcal{L}^g$, sous distribution de Boltzmann de paramètre z.

6. Appliquer la bijection de Marcus et Schaeffer, pour former une quadrangulation enracinée de genre g

7. Appliquer la bijection de Tutte, et renvoyer la carte enracinée de genre g ainsi construite.

Exemple d'éxécution, pour $g = 1$.

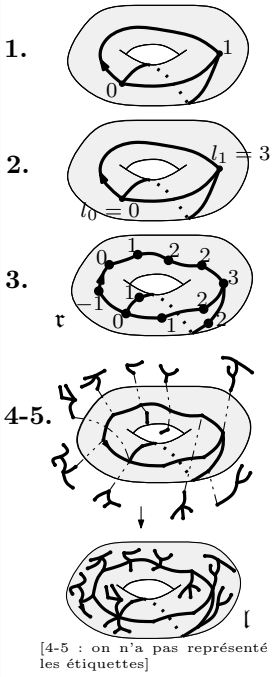


FIG. 6.4 – Un générateur de Boltzmann pour les cartes de genre g.

chapitre 2 : nous commençons par engendrer uniformément un *arbre* étiqueté, puis nous l'acceptons où le rejetons proportionnellement à une fonctionnelle comptant à combien de cartes étiquetées cet arbre correspond via notre bijection. Cet opération de rejet permet de *transporter la mesure uniforme sur les arbres vers la mesure uniforme sur les cartes.*

Cependant, cette opération de transport a un coût. En effet, si l'on note, comme au chapitre précédent, $X_{\mathfrak{t}}(k)$ le nombre de sommets d'étiquettes k dans un arbre étiqueté $\mathfrak{t}$, le nombre de cartes à une face étiquetées de genre g correspondant à $\mathfrak{t}$ est approximativement $\left(\sum_k X(k)^3\right)^g$, qui est de l'ordre de $n^{5g/2}$. Or, la valeur maximale de cette fonctionnelle (pour un arbre dont tous les sommets auraient même étiquette) est de l'ordre de n^{3g}. Ainsi, pour accepter proportionnellement à cette fonctionnelle, nous serions contraints de n'accepter un arbre typique qu'avec une probabilité de l'ordre de $n^{-g/2}$. Il nous faudrait donc en moyenne $n^{g/2}$ tentatives avant d'accepter un arbre, ce qui conduirait à une complexité très mauvaise.

Pour éviter cela, nous allons décider de *rejeter a priori* tous les arbres dont la valeur

de la fonctionnelle n'est pas du bon ordre de grandeur, c'est-à-dire tous ceux pour lesquels elle est plus grande que $K \cdot n^{5g/2}$ pour un certain K. En choisissant K assez grand, nous ne raterons ainsi qu'une petite proportion de cartes étiquetées. Par contre, la valeur maximale de la fonctionnelle sera cette fois du même ordre de grandeur que sa valeur typique, et nous aurons donc une probabilité positive d'accepter à chaque tentative. En moyenne, le nombre de tentatives sera donc fini, et le temps nécessaire pour engendrer une carte à une face étiquetée sera du même ordre de grandeur que pour les arbres : il sera linéaire en n.

Le fait de viser un algorithme approché nous autorise à ne pas trop nous préoccuper des cas *sous-dominants*, c'est-à-dire des événements qui ne produisent qu'avec une probabilité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi, nous allons nous restreindre aux quadrangulations dont la carte étiquetée associée peut s'obtenir à partir d'un arbre portant $3g$ sommets distincts par g recollements successifs. Autrement dit, avec les notations du chapitre précédent, nous allons nous restreindre à l'ensemble : $\Pi\left(\mathcal{W}_g(n) \times \{0,1\}\right)$. Rappelons que cet ensemble contient une proportion $1 - O(n^{-1/4})$ des quadrangulations de genre g et de taille n (proposition 64 p.115). L'algorithme présenté ci-dessous dépend d'un *seuil de rejet* $\lambda_g(\epsilon)$, que nous ajusterons par la suite.

Algorithme 5 (Un générateur approché simple et efficace).
Entrées : un nombre entier n et un seuil $\epsilon > 0$.
Paramètre : un certain nombre $\lambda_g(\epsilon)$, que nous ajusterons par la suite.

1. **Engendrer un arbre plan.** Engendrer uniformément un arbre $\mathfrak{t}$ à n arêtes, par exemple au moyen de la bijection de Rémy [80].
2. **Étiqueter aléatoirement les sommets.** Pour chaque arête e de $\mathfrak{t}$, tirer uniformément un incrément i_e dans $\{-1, 0, 1\}$. Donner à chaque sommet v de $\mathfrak{t}$ l'étiquette $l(v) = \sum_e i_e$, où la somme est prise sur l'unique chemin dans $\mathfrak{t}$ allant de la racine à v.
3. **Calculer le poids de l'arbre $\mathfrak{t}$,** défini comme la fonctionnelle $\mathfrak{q}(\mathfrak{t}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{\mathfrak{t}}(k)^3$, où $X_{\mathfrak{t}}(k)$ est le nombre de sommets de $\mathfrak{t}$ d'étiquette k.
4. **Rejeter les valeurs de $\mathfrak{q}(\mathfrak{t})$ dépassant le seuil voulu :** si $\mathfrak{q}(\mathfrak{t}) > \lambda_g(\epsilon) n^{\frac{5}{2}g}$, rejeter l'arbre $\mathfrak{t}$ et retourner à l'étape 1.
5. **Accepter l'arbre proportionnellement à $\mathfrak{q}(\mathfrak{t})^g$.** Pour cela, tirer une variable aléatoire uniforme $X \in [0,1]$. Si $\left(\dfrac{\mathfrak{q}(\mathfrak{t})}{\lambda_g(\epsilon) n^{\frac{5}{2}g}}\right)^g < X$, rejeter l'arbre $\mathfrak{t}$ et revenir à l'étape 1.
6. **Utiliser la bijection du chapitre 2 :**
   Pour i de 1 à g faire : Choisir un entier k avec probabilité proportionnelle à $X_{\mathfrak{t}}(k)^3$, puis choisir uniformément trois sommets $v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i}$ de $\mathfrak{t}$ d'étiquette k. Si ces sommets sont distincts, et distincts des $3(i-1)$ sommets précédemment choisis, les recoller ensemble à l'aide de la bijection Φ du chapitre 2, afin de transformer $\mathfrak{t}$ en une carte à une face étiquetée de genre i. Sinon, retourner à l'étape 1.
   fin pour.
7. **Utiliser la bijection de Marcus-Schaeffer** pour obtenir une quadrangulation bipartie.

8. **Utiliser la bijection de Tutte** puis renvoyer la carte enracinée de genre g ainsi obtenue.

Avec un bon choix de $\lambda_g(\epsilon)$, notre algorithme produit une mesure quasi-uniforme sur une bonne proportion des cartes enracinées de taille n, comme l'énonce le théorème suivant :

Théorème 10. *Pour tout $\epsilon > 0$, il est possible de choisir $\lambda_g(\epsilon)$ tel que l'algorithme précédent renvoie une quadrangulation dont la loi a une distance en variation totale avec la mesure uniforme sur $\mathcal{Q}_g(n)$ inférieure à $\epsilon + o(1)$.*

Démonstration. Commençons par considérer une variante de l'algorithme où nous supprimons les étapes 4 et 5, c'est-à-dire que nous ne rejetons jamais un arbre parce que son poids est trop grand, et où nous effectuons l'étape 6 sans recoller les triplets de sommets (c'est-à-dire que nous nous contentons de choisir $3g$ sommets dans l'arbre). Alors, avec les notations du chapitre précédent, l'algorithme produit un élément de $\mathcal{R}_g(n)$ sous la loi uniforme conditionné par le fait que ses $3g$ sommets soient distincts : autrement dit, un élément de $\mathcal{W}_g(n)$ sous la loi uniforme.

Si l'on rétablit le collage à l'étape 6, on obtient donc une quadrangulation enracinée pointée aléatoire dans $\Pi\left(\mathcal{W}_g(n) \times \{0,1\}\right)$. D'après la proposition 64, la distance en variation totale entre la loi de cette quadrangulation et la mesure uniforme sur $\mathcal{Q}_g^\bullet(n)$ se comporte comme un $O(n^{-1/4})$. De la même façon, en rétablissant les étapes 4 et 5, on engendre une quadrangulation dont la loi a une distance en variation totale $O(n^{-1/4})$ par rapport à la mesure uniforme sur l'ensemble :

$$\Pi\left(\left\{(\mathfrak{t}, v_*) \in \mathcal{W}_g(n), \mathfrak{q}(\mathfrak{t}) < n^{5g/2}\lambda_g(\epsilon)\right\} \times \{0,1\}\right).$$

Or d'après les estimations du chapitre 5 (lemme 66), pour λ assez grand, on a :

$$\frac{\left|\left\{(\mathfrak{t}, v_*) \in \mathcal{W}_g(n), \mathfrak{q}(\mathfrak{t}) > n^{5g/2}\lambda\right\}\right|}{|\mathcal{W}_g(n)|} < \epsilon \cdot (1 + o(1)).$$

Cela démontre le théorème. □

Des calculs un peu techniques permettent par ailleurs de démontrer le résultat suivant :

Proposition 70. *Avec un bon choix de $\lambda_g(\epsilon)$, on obtient pour l'algorithme précédent une complexité :*

$$O\left(\left(C_1 + C_2 \ln\left(\frac{g}{\epsilon}\right)\right)^g \cdot n\right) \quad \text{où } C_1, C_2 > 0.$$

Remarquons que la dépendance en g est bien meilleure que celle du calcul du dictionnaire pour le générateur de Boltzmann, ce qui fait l'intérêt de notre générateur.

Aperçu du calcul nécessaire pour démontrer cette proposition. On commence par obtenir une borne sur la queue de distribution de la variable W du chapitre précédent. Par l'inégalité de Markov exponentielle, on a pour tout $X > 0$:

$$\mathbb{P}(W > \lambda) \leq e^{-\lambda X} F(X)$$

où $F(X) := \left[e^{WX}\right]$ est la transformée de Laplace de X. Or on sait d'une part que le g-ième moment de W est relié à la constante de Bender et Canfield t_g par le théorème 7, et d'autre part, grâce aux résultats récents de [7], que la constante t_g satisfait :

$$t_g \leq C_4 R^g g^{-g/2} \text{ où } C_4 > 0,\ R = \sqrt{\frac{e}{1440}}.$$

En utilisant cette borne, et en choisissant bien X, on montre que :

$$\mathbb{P}\left(W > \lambda\right) \leq C_5 \exp\left(-\alpha\lambda^2\right) \text{ où } \alpha = 720.$$

À l'aide de cette borne, on montre ensuite que $\mathbb{E}\left[W^g \mathbb{1}_{W>\lambda}\right] < C_6 g 2^{\frac{g-1}{2}} \left(\frac{g-1}{2}\right)! \lambda^{g-1} e^{-\lambda^2/2}$. On choisit alors $\lambda_g(\epsilon)$ comme la valeur de λ telle que cette quantité soit égale à ϵ.

Ensuite, la probabilité d'accepter à chaque passage à l'étape 5 est asymptotiquement $\dfrac{\mathbb{E}\left[W^g\right]}{\lambda_g(\epsilon)}$. En utilisant d'une part la borne sur t_g, et d'autre part la définition de $\lambda_g(\epsilon)$, on aboutit à une borne sur cette probabilité, et au résultat annoncé. □

6.4 Heuristique de dessin

Nous avons programmé, en Java, les deux algorithmes présentés dans ce chapitre. Bien sûr, en raison de taille du dictionnaire nécessaire, nous n'avons implanté le générateur de Boltzmann que dans le cas du genre 1. Quant au générateur approché, il donne de bons résultats au moins jusqu'au genre 7 ; ensuite, la valeur de $\lambda_g(\epsilon)$ devient trop grande, même pour $\epsilon = 1/10$, et le temps de calcul devient trop long en pratique. Par contre, la taille des cartes engendrées n'est pas une limitation, et pour les premiers genres on arrive facilement à $n = 10^7$. Avec les deux générateurs, nous obtenons des cartes, qui sont représentées en machine comme des triplets de permutations (α, σ, ϕ) (nous n'entrons pas dans le détail des structures de données utilisées : on peut soit stocker ces permutations comme des tableaux de nombres, soit utiliser un approche à base de pointeurs).

Cela dit, il est naturel de vouloir représenter ces objets, pour se faire une idée de leur « allure » typique. Or, s'il existe de nombreux algorithmes permettant de dessiner efficacement des cartes planaires, la question est algorithmiquement beaucoup plus difficile en genre supérieur, ne serait-ce que parce qu'il faut décider d'une « projection » de la surface de genre g sur le plan du dessin. Le fait de représenter la surface dans $\mathbb{R}^3$, puis de la projeter en perspective (comme nous l'avons fait pour représenter les exemples de cartes topologiques dans tout ce mémoire) n'est qu'une solution particulière, à laquelle on peut préférer, par exemple, un découpage polygonal ou une représentation du recouvrement universel.

Nous n'aborderons pas ces questions algorithmiques difficiles. Afin de représenter nos cartes, nous utilisons un algorithme *faux*, au sens où l'objet géométrique que nous obtiendrons par le dessin ne sera pas vraiment un carte topologique. Notre heuristique de dessin fonctionne comme ceci :

- Étant donnée une carte $\mathfrak{m}$ de genre g, nous considérons son graphe sous-jacent $G(\mathfrak{m})$;

- Nous plongeons $G(\mathfrak{m})$ dans $\mathbb{R}^3$ au moyen d'un « plongement par ressorts ». Pour cela, nous considérons que les sommets de $G(\mathfrak{m})$ sont soumis à deux types de forces :
  - une force de répulsion électrostatique, qui fait que n'importe quel sommet du graphe repousse n'importe quel autre sommet du graphe. Cette force a une décroissance en $1/r^2$.
  - une force d'attraction, due à la présence d'un « ressort » sur chaque arête de $G(\mathfrak{m})$: deux sommets reliés par une arête sont soumis à une attraction, qui croît linéairement en la distance.

  Pour trouver une configuration stable correspondant à ces forces, nous dispersons nos points de manière aléatoire, puis nous utilisons une méthode du gradient.
- Nous triangulons $\mathfrak{m}$. Après cette étape, chaque face de $\mathfrak{m}$ est un triangle, que nous pouvons voir sur $G(\mathfrak{m})$ comme un triplet de sommets. Nous dessinons alors, dans $\mathbb{R}^3$, le triangle reliant les trois sommets de $G(\mathfrak{m})$ correspondant.

Étonnamment, les dessins obtenus par plongement par ressorts ne sont pas si mauvais. Il y a bien sûr des croisements de « faces », mais il semblent intervenir surtout à petite échelle. Dans le cas des petits genres (0, 1, et 2), dans une proportion importante de dessins, on voit apparaître les g anses d'une surface de genre g. En genre plus grand, les anses ont tendance à s'arranger selon des directions arbitraires, et il est difficile de trouver une projection bidimensionnelle qui fournisse un dessin compréhensible. Les figure 6.1 et 6.5 montrent des images obtenues à l'aide des algorithmes ci-dessus.
Remarque : dans le cas des figures présentées ici, nous n'avons conservé que la « composante 2-connexe principale » des cartes. Cela rend les représentations beaucoup plus lisibles.

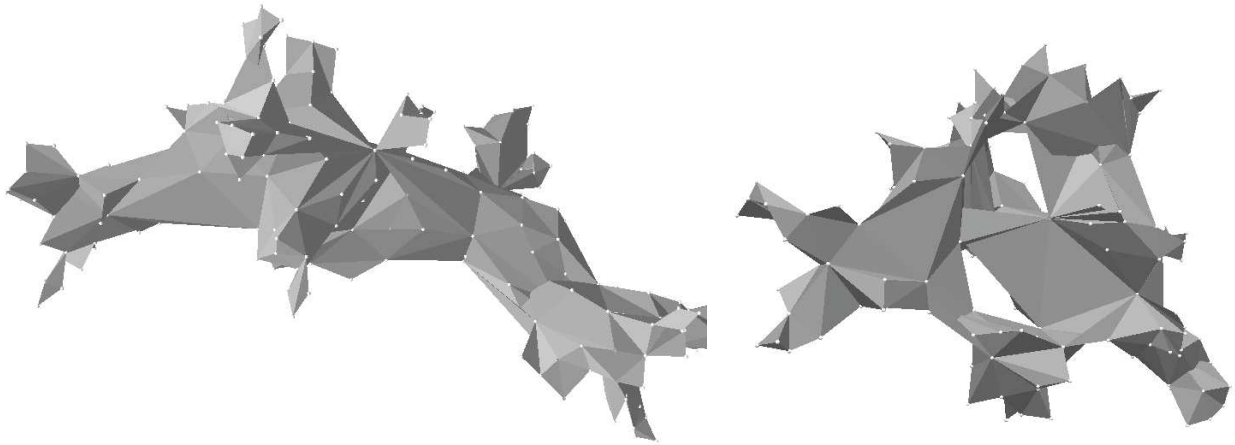


Fig. 6.5 – Une carte planaire, et une carte de genre 2.

Conclusion

Nous concluons ce document en évoquant quelques problèmes qui sont directement liés à notre travail. Nous commençons par présenter le problème de l'énumération des *graphes* en fonction de leur genre minimal, qui correspond à un travail en cours. Nous terminons en donnant deux problèmes ouverts, qui constituent un prolongement naturel des questions abordées dans ce mémoire.

Graphes de genre minimal fixé

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, graphes et cartes sont deux notions étroitement liées. D'une part, on peut voir la notion de carte comme une notion de graphe *enrichie* (par un système de rotation donnant l'ordre des arêtes autour des sommets), et d'autre part nous avons vu que les problèmes fondateurs de la théorie des graphes (des ponts de Königsberg au théorème des quatre couleurs) étaient souvent des problèmes concernant les cartes. Si en général un graphe donné peut être plongé de manière cellulaire dans plusieurs surfaces de genres différents, on peut néanmoins parler du *genre minimal* d'un graphe, qui est le plus petit genre d'un tel plongement. Autrement dit, le plus petit genre d'une carte ayant ce graphe comme graphe sous-jacent.

Du point de vue de l'énumération, il est naturel de vouloir *compter* les graphes de genre minimal fixé. Cette question a été résolue récemment dans le cas planaire par Giménez et Noy [52], et constitue l'aboutissement du travail de nombreux chercheurs, dont les idées générales remontent à Tutte. La stratégie d'énumération des graphes planaires repose sur deux idées principales. La première est le théorème de Whitney [99, 98], qui dit qu'un graphe planaire qui est 3-connexe correspond à une et une seule carte planaire (rappelons qu'un graphe est k-connexe s'il faut lui enlever au moins k sommets pour le déconnecter). Ainsi, au niveau des objets 3-connexes, compter les *graphes* est équivalent à compter les *cartes*. La deuxième idée, remontant à Tutte [92], est qu'il est possible de passer d'un niveau de connectivité à un autre par des *compositions de séries génératrices*. Par exemple, toute carte planaire (1-connexe) peut s'obtenir de manière unique en partant d'une carte planaire 2-connexe, puis en accrochant à chacun de ses coins une carte planaire générale. Cette décomposition se traduit par une équation de composition entre les séries génératrices $H_1(z)$ et $H_2(z)$ des cartes planaires 1 et 2-connexes, ce qui a permis à Tutte de donner un expression de $H_2(z)$, puisqu'il savait déjà calculer $H_1(z)$. La décomposition

reliant les niveaux 2 et 3-connexes, également due à Tutte, est plus compliquée mais a tout de même permis à Tutte d'obtenir la série $H_3(z)$ des cartes et *donc des graphes* planaires 3-connexes. Du côté des graphes, il est ensuite possible de « remonter » jusqu'au niveau de connectivité 1 par des décompositions de plus en plus élaborées. Bender, Gao, et Wormald [15] ont ainsi calculé la série génératrice des graphes planaires 2-connexes par une approche de composition. Une des raisons qui rend les choses beaucoup plus compliquées est que les décompositions imposent de travailler avec *deux* variables (pour les sommets et les arêtes), ce qui rend tous les calculs plus difficiles. Enfin, Giménez et Noy [52] ont franchi la dernière étape, grâce à des calculs impressionnants, et ont donné des expressions explicites pour la série des graphes planaires. Par analyse de singularités, ils ont obtenu :

Théorème (Giménez et Noy [52]). *Le nombre de graphes planaires étiquetés à n sommets est équivalent, quand n tend vers l'infini, à :*

$$c \cdot n^{-7/2} \gamma^n n!$$

où c et γ sont des constantes données par des équations explicites ($\gamma \approx 27, \ldots$).

Rejoints plus tard par Drmota, ils ont également calculé de nombreuses statistiques les grands graphes planaires, comme le nombre moyen de sommets, ou le degré d'un sommet pris au hasard [43].

Dans un travail en cours en collaboration avec Éric Fusy, Omer Giménez, Bojan Mohar, Marc Noy, et Juanjo Rué, nous considérons la question de l'énumération des graphes de genre minimal g quelconque. Le problème devient plus difficile pour de nombreuses raisons :

- Il existe un équivalent du théorème de Whitney pour les graphes 3-connexes de genre minimal g, mais il ne s'applique qu'à ceux dont la *représentativité* (demi-longueur d'un plus petit cycle non contractible dans la quadrangulation associée, en anglais *face-width*) est plus grande que $2g + 1$. Il faut donc démontrer que les graphes de petite représentativité sont négligeables, ce qui n'est pas trivial lorsque l'on compte les cartes selon deux variables.
- Les expressions de départ (celles donnant la série des *cartes* de genre g) ne sont pas complètement explicites, puisqu'elles font intervenir un polynôme dépendant de g qui n'a pas d'expression close. Cela introduit de nombreuses difficultés, notamment dans l'analyse de singularités, où il faut trouver des arguments nouveaux pour localiser les singularités dominantes.
- À tous les niveaux de connectivité, il faut arriver à tenir compte de la représentativité. Un outil important est le théorème de Robertson et Vitray [82], qui relie les représentativités des composantes 2 et 3 connexes d'un graphe de genre g. Malheureusement, ce théorème ne concerne que les représentativités *assez grandes*, et il faut donc démontrer que les petites représentativités sont négligeables pour chaque niveau de connectivité.
- Les notions de 2 et 3-connectivités, bien adaptées pour les graphes, ne le sont pas pour les cartes en genre supérieur. Il faut leur préférer les notions de cartes *non-choppable* [16] et *near-simple* [14]. Montrer que ces notions coïncident asymptotiquement avec celles de connectivité introduit encore une difficulté supplémentaire, surtout lorsqu'il faut tenir compte de deux paramètres.

Malgré ces difficultés, nous espérons être bientôt capables de démontrer le résultat suivant :

Conjecture (Ch.-Fusy-Giménez-Mohar-Noy-Rué-2009+). *Pour tout $g \geq 1$, le nombre de graphes étiquetés de genre minimal g à n sommets est équivalent, quand n tend vers l'infini, à :*

$$s_g \cdot n^{\frac{5g-7}{2}} \gamma^n n!$$

où $s_g > 0$ et $\gamma \approx 27, \ldots$ est la constante de croissance des graphes planaires.

Le sort de la constante s_g dans cette histoire est encore mystérieux, et nous ne savons pas bien qu'en penser. Elle n'est probablement *pas* reliée à la constante t_g de Bender et Canfield, pour la raison suivante : la constante t_g apparaît dans le développement au point critique des cartes de genre g, lorsque l'on les compte selon leur nombre d'arêtes seulement. Mais, en raison de la nature des compositions de séries bivariées que nous avons à considérer, le point critique pour les graphes se transporte sur le point critique sur les cartes *comptées avec un poids* $y \neq 1$ sur chacun de leurs sommets. A priori, chaque valeur de y correspond à un développement différent, et ce n'est donc pas la constante t_g qui devrait apparaître.

À l'exception de ce dernier point, on s'attend à ce que de nombreuses choses se passent bien. Par exemple, les distributions du nombre de sommets ou de leur degré devraient être similaires au cas planaire. Du point de vue métrique, les approches par composition laissent supposer que les graphes et les cartes de genre donné sont dans la même classe d'universalité, et convergent, après renormalisation, vers la même *carte brownienne de genre g* (même si l'on est très loin de pouvoir dire quoi que ce soit sur ce dernier point).

Dimension de Hausdorff des cartes couvertes

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, il est intéressant de considérer les cartes comme des modèles de surfaces discrètes aléatoires, et de s'intéresser à leur propriétés statistiques. On sait ainsi que les distances dans une carte aléatoire de taille n sont de l'ordre de $n^{1/4}$ ([38]), et que la dimension de Hausdorff d'une carte brownienne planaire est 4 ([65]).

Du point de vue de la physique statistique, il est intéressant de munir les cartes aléatoires d'un *modèle*, c'est-à-dire d'un système physique qui interagit avec la surface, comme par exemple un modèle d'Ising ou un marche aléatoire auto-évitante. Les physiciens ont développé une intuition considérable, et savent calculer ou conjecturer les exposants critiques de nombreux modèles (voir [45]). La fameuse formule KPZ [61] relie ces exposants aux exposants correspondants pour des modèles sur réseau, où les classes d'universalité de nombreux modèles sont conjecturées être les processus SLE.

À notre connaissance, la question de savoir comment la distance typique entre les sommets varie sur la carte en fonction du modèle n'est pas comprise, même de manière conjecturale. Il serait donc intéressant de savoir résoudre au moins un modèle de ce type. Nous proposons d'aborder cette question dans le cas des cartes couvertes. Nous préférons formuler le problème dans le cas planaire, où nous rappelons qu'une carte couverte est

la même chose qu'une carte *boisée*, c'est-à-dire munie d'un arbre couvrant. La question suivante a émergé lors de discussions avec Olivier Bernardi :

Question. *Quelle est la distance typique dans une carte boisée planaire de taille n ? Peut-on montrer que c'est un $o(n^{1/2})$, ou encore qu'elle domine $n^{1/4}$?*

Bien sûr, les exposants $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ de l'énoncé sont ceux correspondant respectivement aux arbres et aux cartes. Remarquons que nous disposons de deux moyens pour attaquer cette question : le premier, par l'approche « à la Mullin », en considérant le recollement de l'arbre couvrant avec son arbre couvrant dual. Le second, en utilisant la bijection de Bernardi [18] (celle du chapitre 3), i.e. en recollant sur lui-même un arbre de taille n le long d'un deuxième arbre. Cette deuxième approche évoque l'*arbre collant* des travaux de Marckert et Mokkadem [69], qui contiennent peut-être certaines estimées utiles.

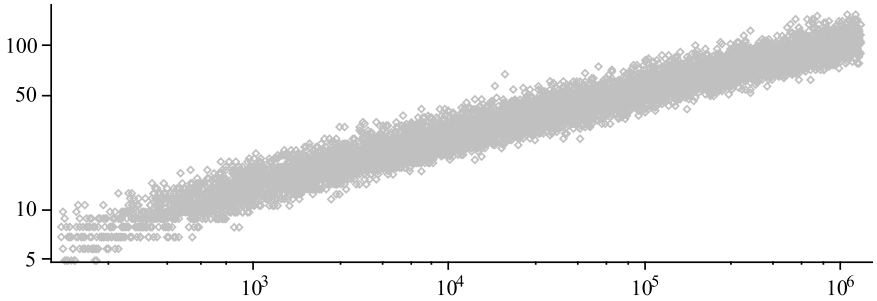


Fig. 6.6 – Distance maximale au sommet racine, en fonction du nombre d'arêtes, pour 7500 cartes boisées choisies uniformément conditionnellement à leur taille (simulations effectuées avec Olivier Bernardi, au moyen de la bijection de [18]). La distance typique serait-elle de l'ordre de $n^{1/4}$?

Interprétation des équations de récurrence pour les nombres t_g

Au cours de cette thèse, nous avons progressé dans la compréhension des résultats énumératifs pour les cartes de genre supérieur. Grâce aux bijections avec les arbres étiquetés, on comprend bien la forme universelle des formules de comptage pour les cartes de genre g à n arêtes. Tout d'abord la constante de croissance exponentielle, qui est celle des mobiles associés à la classe de cartes considérée et ne dépend donc pas du genre. Ensuite, l'exposant de comptage $\frac{5}{2}(g-1)$, qui s'interprète facilement sur les mobiles, mais encore plus via la bijection du chapitre 2, comme l'ordre de grandeur du nombre de triplets de sommets de même étiquette dans un grand arbre étiqueté. Enfin, l'universalité de la constante t_g, qui s'exprime comme un paramètre combinatoire des schémas dominants, et est donc, elle aussi, universelle.

Il serait intéressant maintenant d'arriver à calculer de manière constructive les nombres t_g. Comme nous l'avons dit au paragraphe 5.5, on sait par des méthodes d'intégrales de matrices (plus ou moins rigoureuses, c'est là une question d'expert que nous ne saurons

pas trancher) que ces nombres vérifient des équations remarquables permettant de les calculer facilement. Ainsi, on connaît les équations suivantes (voir [63, p.201]) :

$$\frac{25g^2-1}{12}u_g = \sum_{i=0}^{g+1} u_i u_{g+1-i} \quad \text{où } u_g = \Gamma\left(\frac{5g-1}{2}\right) 4^{g-1} t_g. \tag{6.1}$$

Du point de vue de la combinatoire bijective, il n'est bien sûr pas possible de rester indifférent à ces équations. Étonnamment, le membre de droite fait penser à une carte « isthmique » de genre $g+1$ (c'est-à-dire possédant un petit isthme séparateur distingué), qu'il faudrait relier à une carte générale de genre g. Nous pensons que notre bijection du chapitre 2 associée à la bijection de Marcus et Schaeffer donne un bon angle d'attaque à cette question. Un fois reformulé en termes d'arbres étiquetés portant des sommets de même étiquette marqués, le problème invite à considérer des opérations de « redistribution des branches » d'un arbre étiqueté, permettant de le transformer en un arbre différent par des opérations de découpage et de recollement. Il est probable que des décompositions de dernier passage, similaires à celles utilisées au chapitre 6, mais effectuées directement sur les branches de l'arbre, puissent être utilisées à ces fins. En résumé :

Question. *Peut-on donner une interprétation combinatoire à l'équation (6.1), soit directement en termes de cartes, soit à partir des bijections présentées dans ce mémoire ?*

C'est là un bien joli problème, et nous sommes heureux de conclure avec lui notre mémoire de thèse.

Bibliographie

[1] N. M. Adrianov : An analogue of the Harer-Zagier formula for unicellular two-color maps. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 31(3):1–9, 95, 1997.

[2] David Aldous : The continuum random tree. I. *Ann. Probab.*, 19(1):1–28, 1991.

[3] David Aldous : Tree-based models for random distribution of mass. *J. Statist. Phys.*, 73(3-4):625–641, 1993.

[4] K. Appel et W. Haken : Every planar map is four colorable. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(5):711–712, 1976.

[5] Roland Bacher et Alina Vdovina : Counting 1-vertex triangulations of oriented surfaces. *Discrete Math.*, 246(1-3):13–27, 2002. Formal power series and algebraic combinatorics (Barcelona, 1999).

[6] Cyril Banderier et Philippe Flajolet : Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 281(1-2):37–80, 2002. Selected papers in honour of Maurice Nivat.

[7] E. Bender, Z.C. Gao et L.B. Richmond : The map asymptotics constant t_g. *Electron. J. Combin.*, 15, 2008.

[8] E.A. Bender, E.R. Canfield et R.W. Robinson : The asymptotic number of tree-rooted maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 48(2):156–164, 1988.

[9] Edward Bender : Some unsolved problems in map enumeration. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 3:51–56, 1991.

[10] Edward A. Bender et E. Rodney Canfield : The asymptotic number of rooted maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(2):244–257, 1986.

[11] Edward A. Bender et E. Rodney Canfield : The number of rooted maps on an orientable surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 53(2):293–299, 1991.

[12] Edward A. Bender et E. Rodney Canfield : The number of degree-restricted rooted maps on the sphere. *SIAM J. Discrete Math.*, 7(1):9–15, 1994.

[13] Edward A. Bender, E. Rodney Canfield et L. Bruce Richmond : The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 63(2):318–329, 1993.

[14] Edward A. Bender, Zhicheng Gao, L. Bruce Richmond et Nicholas C. Wormald : Asymptotic properties of rooted 3-connected maps on surfaces. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 60(1):31–41, 1996.

[15] Edward A. Bender, Zhicheng Gao et Nicholas C. Wormald : The number of labeled 2-connected planar graphs. *Electron. J. Combin.*, 9(1):Research Paper 43, 13 pp. (electronic), 2002.

[16] Edward A. Bender et Nicholas C. Wormald : The asymptotic number of rooted nonseparable maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 49(2):370–380, 1988.

[17] Olivier Bernardi : *Combinatoire des cartes et polynôme de Tutte.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2006.

[18] Olivier Bernardi : Bijective counting of tree-rooted maps and shuffles of parenthesis systems. *Electron. J. Combin.*, 14(1):Research Paper 9, 36 pp. (electronic), 2007.

[19] Olivier Bernardi et Guillaume Chapuy : A bijection for covered maps on orientable surfaces. *Electronic Notes In Discrete Mathematics*, 31, 2008.

[20] Olivier Bernardi et Guillaume Chapuy : A bijection for covered maps on orientable surfaces, or the shortest path from Harer-Zagier's to Adrianov's formulae. *Article soumis*, 2009.

[21] Patrick Billingsley : *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1968.

[22] Patrick Billingsley : *Probability and measure.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, third édition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.

[23] Mireille Bousquet-Mélou : Discrete excursions. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 57, 2008.

[24] Mireille Bousquet-Mélou et Svante Janson : The density of the ISE and local limit laws for embedded trees. *Ann. Appl. Probab.*, 16(3):1597–1632, 2006.

[25] Mireille Bousquet-Mélou et Gilles Schaeffer : Enumeration of planar constellations. *Adv. in Appl. Math.*, 24(4):337–368, 2000.

[26] J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter : Geodesic distance in planar graphs. *Nuclear Phys. B*, 663(3):535–567, 2003.

[27] J. Bouttier, P. Di Francesco et E. Guitter : Planar maps as labeled mobiles. *Electron. J. Combin.*, 11(1):Research Paper 69, 27 pp. (electronic), 2004.

[28] Jérémie Bouttier et Emmanuel Guitter : Statistics of geodesics in large quadrangulations. *arXiv :0712.2160 [math-ph]*, 2008.

[29] Jérémie Bouttier et Emmanuel Guitter : The three-point function of planar quadrangulations. *arXiv :0805.2355 [math-ph]*, 2008.

[30] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi et J. B. Zuber : Planar diagrams. *Comm. Math. Phys.*, 59(1):35–51, 1978.

[31] Guillaume Chapuy : Random permutations and their discrepancy process. *AOfA'07 (actes DMTCS)*, 2007.

[32] Guillaume Chapuy : Are even maps on surfaces likely to be bipartite ? *Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science (actes DMTCS)*, 2008.

[33] Guillaume Chapuy : A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. *International Conference FPSAC'09*, 2009.

[34] Guillaume Chapuy : Asymptotic enumeration of constellations and related families of maps on orientable surfaces. *Combinatorics, Probability, and Computing*, à paraître.

[35] Guillaume Chapuy : The structure of unicellular maps, and a link between maps of positive genus and planar labelled trees. *Probability Theory and Related Fields*, à paraître.

[36] Guillaume Chapuy, Eric Fusy, Mihyun Kang et Bilyana Shoilekova : A complete grammar for decomposing a family of graphs into 3-connected components. *Electronic Journal of Combinatorics*, 15:R148, 2008.

[37] Guillaume Chapuy, Michel Marcus et Gilles Schaeffer : On the number of rooted maps on orientable surfaces. *arXiv :0712.3649 [math.CO]*, 2007.

[38] Philippe Chassaing et Gilles Schaeffer : Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2):161–212, 2004.

[39] R. Cori, S. Dulucq et G. Viennot : Shuffle of parenthesis systems and Baxter permutations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43:1–22, 1986.

[40] Robert Cori et Bernard Vauquelin : Planar maps are well labeled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5):1023–1042, 1981.

[41] Monroe D. Donsker : Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Komogorov-Smirnov theorems. *Ann. Math. Statistics*, 23:277–281, 1952.

[42] Michael Drmota : Systems of functional equations. *Random Structures Algorithms*, 10(1-2):103–124, 1997. Average-case analysis of algorithms (Dagstuhl, 1995).

[43] Michael Drmota, Omer Giménez et Marc Noy : Degree distribution in random planar graphs. *en préparation.*

[44] Philippe Duchon, Philippe Flajolet, Guy Louchard et Gilles Schaeffer : Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combin. Probab. Comput.*, 13(4-5):577–625, 2004.

[45] Bertrand Duplantier : Conformal fractal geometry & boundary quantum gravity. *In Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, volume 72 de *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 365–482. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[46] Leonhard Euler : Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 8:128–140, 1741.

[47] Philippe Flajolet et Andrew Odlyzko : Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2):216–240, 1990.

[48] Philippe Flajolet et Robert Sedgewick : *Analytic Combinatorics.* Cambridge University Press, 2009.

[49] Zhicheng Gao : The number of degree restricted maps on general surfaces. *Discrete Math.*, 123(1-3):47–63, 1993.

[50] Zhicheng Gao et Nicholas C. Wormald : Enumeration of rooted cubic planar maps. *Ann. Comb.*, 6(3-4):313–325, 2002.

[51] Zhicheng J. Gao, Ian M. Wanless et Nicholas C. Wormald : Counting 5-connected planar triangulations. *J. Graph Theory*, 38(1):18–35, 2001.

[52] Omer Giménez et Marc Noy : Asymptotic enumeration and limit laws of planar graph. *J. Amer. Math. Soc.*, 22:309–329, 2009.

[53] Ian P. Goulden et David M. Jackson : *Combinatorial enumeration.* Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Reprint of the 1983 original.

[54] I.P. Goulden et D.M. Jackson : The KP hierarchy, branched covers, and triangulations. *arXiv :0803.3980*, 2008.

[55] Alain Goupil et Gilles Schaeffer : Factoring n-cycles and counting maps of given genus. *European J. Combin.*, 19(7):819–834, 1998.

[56] J. Harer et D. Zagier : The Euler characteristic of the moduli space of curves. *Invent. Math.*, 85(3):457–485, 1986.

[57] D. M. Jackson : Counting cycles in permutations by group characters, with an application to a topological problem. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 299(2):785–801, 1987.

[58] D. M. Jackson : Some combinatorial problems associated with products of conjugacy classes of the symmetric group. *J. Combin. Theory Ser. A*, 49(2):363–369, 1988.

[59] D. M. Jackson et T. I. Visentin : A character-theoretic approach to embeddings of rooted maps in an orientable surface of given genus. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 322(1):343–363, 1990.

[60] Olav Kallenberg : *Foundations of modern probability.* Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1997.

[61] V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov et A. B. Zamolodchikov : Fractal structure of 2D-quantum gravity. *Modern Phys. Lett. A*, 3(8):819–826, 1988.

[62] Steven P. Lalley : Finite range random walk on free groups and homogeneous trees. *Ann. Probab.*, 21(4):2087–2130, 1993.

[63] Sergei K. Lando et Alexander K. Zvonkin : *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141 de *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 2004. With an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II.

[64] Bodo Lass : Démonstration combinatoire de la formule de Harer-Zagier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(3):155–160, 2001.

[65] Jean-François Le Gall : The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Inventiones Mathematica*, 169:621–670, 2007.

[66] Jean François Le Gall : Geodesics in large planar maps and in the brownian map. *arXiv :0804.3012*, 2008.

[67] Jean-François Le Gall et Frédéric Paulin : Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere. *Geom. Funct. Anal.*, 18(3):893–918, 2008.

[68] Jean-François Marckert et Grégory Miermont : Invariance principles for random bipartite planar maps. *Ann. Probab.*, 35(5):1642–1705, 2007.

[69] Jean-François Marckert et Abdelkader Mokkadem : Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map. *Ann. Probab.*, 34(6):2144–2202, 2006.

[70] Michel Marcus et Gilles Schaeffer : Une bijection simple pour les cartes orientables. *manuscrit*, 2001.

[71] William S. Massey : *Algebraic topology : An introduction.* Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.

[72] Grégory Miermont : Tessellations of random maps of arbitrary genus. *arXiv :0712.3688 [math.PR]*, 2007.

[73] Grégory Miermont : On the sphericity of scaling limits of random planar quadrangulations. *Electron. Commun. Probab.*, 13:248–257, 2008.

[74] Grégory Miermont et Mathilde Weill : Radius and profile of random planar maps with faces of arbitrary degrees. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 4, 79–106, 2008.

[75] Bojan Mohar et Carsten Thomassen : *Graphs on surfaces.* Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2001.

[76] R. C. Mullin : On the enumeration of tree-rooted maps. *Canad. J. Math.*, 19:174–183, 1967.

[77] Carine Pivoteau, Bruno Salvy et Michèle Soria Soria : Boltzmann oracle for combinatorial systems. *Colloquium on Mathematics and Computer Science : Algorithms, Trees, Combinatorics and Probability*, 2008.

[78] Dominique Poulalhon et Gilles Schaeffer : Optimal coding and sampling of triangulations. *Algorithmica*, 46(3-4):505–527, 2006.

[79] J. Propp : Lattice structure for orientations of graphs. Manuscrit : http ://faculty.uml.edu/jpropp/orient.html, 1993.

[80] Jean-Luc Rémy : Un procédé itératif de dénombrement d'arbres binaires et son application à leur génération aléatoire. *RAIRO Inform. Théor.*, 19(2):179–195, 1985.

[81] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour et Robin Thomas : The four-colour theorem. *J. Combin. Theory Ser. B*, 70(1):2–44, 1997.

[82] Neil Robertson et Richard Vitray : Representativity of surface embeddings. *In Paths, flows, and VLSI-layout (Bonn, 1988)*, volume 9 de *Algorithms Combin.*, pages 293–328. Springer, Berlin, 1990.

[83] Gilles Schaeffer : Bijective census and random generation of Eulerian planar maps with prescribed vertex degrees. *Electron. J. Combin.*, 4(1):Research Paper 20, 14 pp. (electronic), 1997.

[84] Gilles Schaeffer : *Conjugaison d'arbres et cartes combinatoires aléatoires.* Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999.

[85] Gilles Schaeffer et Ekaterina Vassilieva : A bijective proof of Jackson's formula for the number of factorizations of a cycle. *J. Combin. Theory Ser. A*, 115(6):903–924, 2008.

[86] Richard P. Stanley : *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[87] Richard P. Stanley : *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.

[88] Gerard t'Hooft : A planar diagram theory for strong interactions. *Nucl. Phys. B*, 72, 1974.

[89] W. T. Tutte : A census of Hamiltonian polygons. *Canad. J. Math.*, 14:402–417, 1962.

[90] W. T. Tutte : A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14:21–38, 1962.

[91] W. T. Tutte : A census of slicings. *Canad. J. Math.*, 14:708–722, 1962.

[92] W. T. Tutte : A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15:249–271, 1963.

[93] W. T. Tutte : *Graph theory*, volume 21 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA, 1984. With a foreword by C. St. J. A. Nash-Williams.

[94] W. T. Tutte : Chromatic sums revisited. *Aequationes Math.*, 50(1-2):95–134, 1995.

[95] T. R. S. Walsh et A. B. Lehman : Counting rooted maps by genus. I. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13:192–218, 1972.

[96] T. R. S. Walsh et A. B. Lehman : Counting rooted maps by genus. II. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 13:122–141, 1972.

[97] T. R. S. Walsh et A. B. Lehman : Counting rooted maps by genus. III : Nonseparable maps. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 18:222–259, 1975.

[98] Hassler Whitney : Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs. *Amer. J. Math.*, 54(1):150–168, 1932.

[99] Hassler Whitney : 2-Isomorphic Graphs. *Amer. J. Math.*, 55(1-4):245–254, 1933.

[100] Alan R Woods : Coloring rules for finite trees, and probability of monadic second order sentences. *Random structures and algorithms*, 10(4):453–485, 1997.

[101] E. M. Wright : The number of connected sparsely edged graphs. *J. Graph Theory*, 1(4):317–330, 1977.