Upscaling approach to the rheological behavior of a suspension of particles in a yield stress fluid

Trung Kien Luu

▶ **To cite this version:**

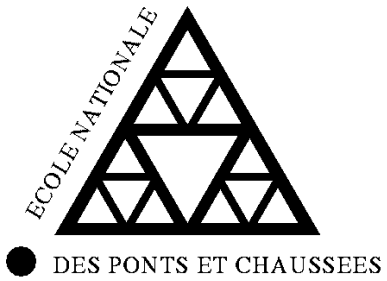
Trung Kien Luu. Upscaling approach to the rheological behavior of a suspension of particles in a yield stress fluid. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2009. English. NNT : . pastel-00005508

HAL Id: pastel-00005508
https://pastel.hal.science/pastel-00005508

Submitted on 22 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

Par :

LUU TRUNG KIEN

Sujet de la thèse :

Approche par changement d'échelle des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules dans un fluide à seuil.

Soutenue à Champs sur Marne, le 02 mars 2009
devant le jury composé de :

Président : Philippe COUSSOT

Rapporteur : Sofiane AMZIANE

Rapporteur : Christophe LANOS

Examinateur : Guillaume OVARLEZ

Examinateur : Sébastien JARNY

Directeur de thèse : Xavier CHATEAU

♡ À mes parents ♡

Remerciements

Je tiens à vivement remercier les membres du jury, M Phillipe Coussot qui m'a fait l'honneur de le présider, Mrs Guillaume Ovarlez et Sébastien Jarny ont examiné le rapport, apportant d'autres regards sur mon travail et enfin, tout particulièrement, deux professeurs Christophe Lanos et Sofianne Amziane, qui ont volontiers rapporté mon travail,

J'aimerais remercier mon directeur de thèse Xavier Chateau qui m'a initié à la recherche et qui a dirigé, suivi cette thèse. Mes sincères reconnaissances pour ses aides, ses conseils tout au long de ce travail de recherche. Je voudrais également exprimer mes gratitudes à M. Nicolai Droniuc (Division MSRGI - LCPC) qui m'a donné des expériences d'implantation numérique sur le code de calcul CESAR en première année de thèse,

Je voudrais remercier tous les membres du LMSGC, qui participent à créer une ambiance très agréable et cordiale pendent mes années de thèse. Particulièrement, Julie, Kad, Laurant ont m'aidé à corriger les fautes d'orthographe ; mes collègues vietnamiens Thao, Viet, Thai Son pour leur aide et leur amitié ; Michele, Carmen, Délia, les secrétaires du LMSGC, pour leur gentillesse et pour tous les aides administratives. Mes sincères reconnaissances sont adressées également à Mme Marine Daniel, le secrétaire de la direction de la recherche de l'ENPC, pour son soutien, sa disponibilité et sa gentillesse,

Je remercie Mme Lan et M Dang, mes deux amis âgés, pour leur encouragement et leur correction d'orthographe,

Spécialement, je voudrais remercier profondément ma femme Huyen pour ses contributions importantes. Grâce à sa relecture complète, sérieuse et soigneuse, elle m'a donné beaucoup d'idées enrichies et des conseils précieux. Ma thèse a donc bien avancé, beaucoup amélioré et finalement achevé.

*

Résumé

Les travaux effectués dans le cadre de cette thèse portent sur la construction d'un modèle qui permet d'estimer les caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules non colloïdales immergées dans un fluide à seuil incompressible (fluide de Herschel-Bulkley) dont les propriétés sont connues. Ce modèle est élaboré dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation non linéaire. Deux approches complémentaires sont utilisées : une approche variationnelle permettant de trouver une borne inférieure du potentiel macroscopique et une méthode d'estimation sécante permettant d'obtenir des estimations des caractéristiques rhéologiques de la suspension.

Compte tenu du caractère non linéaire des problèmes à résoudre, il est nécessaire de procéder à des approximations pour obtenir des estimations des caractéristiques macroscopiques de la suspension. Les estimations proposées ont été obtenues en caractérisant le champ de taux de déformation au sein du domaine fluide par un unique nombre. On obtient les propriétés macroscopiques de la suspension non linéaire à partir de celles d'une suspension linéaire fictive ayant la même microstructure.

On montre que si la suspension est isotrope, elle se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même exposant que celui du fluide porteur. Le seuil d'écoulement de la suspension ne dépend que de la concentration en particules et du seuil du fluide porteur, alors que la viscosité de la suspension dépend de la concentration en particules, de la viscosité du fluide porteur et de l'indice de l'écoulement. En outre, le seuil d'écoulement et la consistance (ou la viscosité) de la suspension sont reliés au module élastique par des lois simples.

Ces résultats sont validés par comparaison avec les résultats expérimentaux de Mahaut, obtenus en utilisant une procédure permettant de se rapprocher au mieux des hypothèses formulées pour élaborer le modèle. Les comparaisons de nos estimations avec d'autres résultats expérimentaux déjà publiés montrent également la pertinence et la solidité de notre modèle.

Notre modèle est capable de prendre également en compte la polydispersité des particules en combinant le modèle non linéaire monodisperse et le modèle de Farris développé pour une suspension polydisperse à comportement linéaire. Le modèle n'est valable qu'avec la condition de bien distinguer la taille des particules.

Enfin, le modèle utilisant un schéma à deux motifs et trois phases est mis en œuvre pour prendre en compte l'hétérogénéité du champ de taux de déformation en divisant le domaine fluide en deux domaines différents.

Ces résultats contribuent à la mise au point d'un outil théorique d'aide à la formulation de divers produits dans le domaine industriel comme les bétons, les pâtes alimentaires,... obtenus en mélangeant des particules non colloïdales à un fluide non Newtonien.

Mots-clefs : Rhéologie, homogénéisation, suspension, particules, non colloïdal, fluide à seuil, fluide de Herschel-Bulkley.

Abstract

The aim of this thesis is to provide a approach to the overall behavior of a suspension of noncolloidal particles immersed in an incompressible yield stress fluid (Herschel-Bulkley fluid). This approach is elaborated in the framework of a nonlinear homogenization method. Two complementary approaches are adopted : the variational approach allows to find a lower bound of the macroscopic potential and the secant method allows to estimate the overall behavior of the suspension.

As the problem to be solved is nonlinear, it was necessary to make some approximations in order to compute simple analytical estimates. Here, the estimates are valid provided that the heterogeneities of the secant modulus can be neglected over the domain filled by the fluid phase. Then, the overall properties of the nonlinear suspension are estimated from that of a fictitious linear suspension having the same microstructure.

We show that if the suspension is isotropic, it behaves as a Herschel - Bulkley fluid with the same exponent as that of the suspending fluid. The dimensionless yield stress and the dimensionless consistency depend on the bead volume fraction only. Moreover, the yield stress/solid volume fraction relationship and the consistency/solid volume fraction relationships are related to the elastic modulus/solid volume fraction relationships through a very simple laws.

These estimates compare well to both experimental data obtained by Mahaut et al. (2007) and to experimental data found in the literature.

Our model is capable of taking into account also the polydisperse systems by combining the nonlinear monodisperse mode and the model of Farris developed for a polydisperse suspension with linear behavior. The model is valid only with the condition to distinguish well the size of particles.

Finally, the model using a plan of two patterns and three phases is studied. It separate the fluid domain in two geometrical domains in order to better describe the heterogeneities over the liquid domain.

Key words : Rheology, homogenization, suspension, particle, noncolloidal, yield stress fluid , Herschel-Bulkley fluid.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale. **18**

1 Rhéologie des suspensions et méthode de changement d'échelle **21**
1.1 Introduction . . . 21
1.2 Caractérisation expérimentale du comportement . . . 21
1.3 Modélisation des caractéristiques rhéologiques d'une suspension . . . 25
1.3.1 Loi de comportement . . . 25
1.3.2 Principaux types de comportement . . . 26
1.3.2.1 Fluide Newtonien . . . 26
1.3.2.2 Fluide à seuil . . . 26
1.3.3 Modèles analytiques . . . 27
1.3.3.1 Modèle de Nielsen . . . 30
1.3.3.2 Modèle de Hobbs . . . 31
1.3.4 Modèles numériques . . . 33
1.4 Méthode de changement d'échelle . . . 34
1.4.1 Méthodologie de la méthode de changement d'échelle . . . 34
1.4.1.1 L'étape de représentation du V.E.R. . . . 36
1.4.1.2 L'étape de localisation . . . 36
1.4.1.3 L'étape d'homogénéisation . . . 39
1.4.1.4 Conclusion . . . 40
1.4.2 Méthodes variationnelles . . . 40
1.4.3 Méthodes d'estimation . . . 40
1.5 Conclusion . . . 41

2 Homogénéisation d'une suspension de particules dans un fluide à seuil **43**
2.1 Introduction . . . 43
2.2 Homogénéisation d'une suspension de particules rigides dans un fluide porteur 44
2.2.1 Représentation du V.E.R. . . . 44

2.2.2 Localisation . . . 45
2.2.3 Homogénéisation . . . 46
2.3 Suspension dans un fluide Newtonien . . . 47
2.3.1 Homogénéisation . . . 47
2.3.2 Approche variationnelle . . . 49
2.3.2.1 Bornes de Voigt et de Reuss . . . 50
2.3.2.2 Borne inférieure de Hashin-Shtrikman . . . 51
2.3.3 Estimation de Jeffery . . . 51
2.3.3.1 Solution de Jeffery . . . 51
2.3.3.2 Prise en compte les caractéristiques morphologiques . . . 52
2.3.3.3 Remarques et conclusions . . . 55
2.3.4 Approche par motifs morphologiques représentatifs . . . 56
2.3.4.1 Approche à un motif . . . 56
2.3.4.2 Modèle à deux motifs et deux phases . . . 58
2.3.4.3 Analyse du comportement . . . 60
2.3.4.4 Validation . . . 63
2.4 Suspension dans un fluide de Herschel-Bulkley . . . 66
2.4.1 Homogénéisation . . . 66
2.4.2 Méthode variationnelle - Borne inférieure du potentiel . . . 67
2.4.3 Estimation sécante du comportement . . . 70
2.4.3.1 Principe de l'estimation sécante . . . 70
2.4.3.2 Examinons les caractéristiques macroscopiques prédites par la méthode sécante modifiée pour notre matériau d'étude . 73
2.5 Conclusions . . . 76

3 Validation et application **81**
3.1 Introduction . . . 81
3.2 Identification des paramètres . . . 82
3.3 Essai de Mahaut . . . 82
3.3.1 Relation module élastique - seuil d'écoulement . . . 83
3.3.2 Seuil d'écoulement . . . 85
3.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux dans la littérature . . . 86
3.4.1 Seuil d'écoulement . . . 86
3.4.2 Viscosité . . . 88
3.5 Conclusion . . . 91

4 Problème polydisperse **93**
4.1 Introduction . . . 93
4.2 Etude expérimentale . . . 93
4.3 Construction le modèle pour suspension polydisperse . . . 96
4.3.1 Suspension de particules dans un fluide Newtonien . . . 96
4.3.2 Suspension de particules dans un fluide à seuil . . . 97
4.3.3 Premières réponses . . . 99
4.4 Validation . . . 101
4.5 Conclusion . . . 101

5 Modèle à deux motifs et trois phases **105**
5.1 Introduction . . . 105
5.2 Homogénéisation linéaire . . . 106
5.3 Homogénéisation non linéaire . . . 110
5.3.1 Estimation sécante . . . 110
5.3.2 Premières estimations . . . 112
5.4 Évaluation le comportement de la suspension . . . 114
5.4.1 Évaluation les champs locaux de taux de déformation . . . 115
5.4.2 Comparaison la réponse du modèle avec la loi de Herschel-Bulkley . 117
5.4.2.1 Le fluide porteur est un fluide rigide plastique ($\eta = 0$) . . 117
5.4.2.2 Le fluide porteur est un fluide visqueux ($\tau_c = 0$) . . . 118
5.4.2.3 Comparaison entre modèle à trois phases et le fluide Herschel-Bulkley . . . 118
5.5 Comparaison entre le modèle utilisant l'estimation à deux phases et le modèle utilisant l'estimation à trois phases . . . 121
5.5.1 Comparaison du taux de déformation effectif . . . 121
5.5.2 Comparaison du seuil réduit . . . 122
5.5.3 Comparaison de la viscosité réduite . . . 124
5.6 Validations expérimentales . . . 127
5.6.1 Seuil de l'écoulement . . . 127
5.6.2 Viscosité . . . 130
5.7 Conclusions . . . 132

6 Conclusions générales et perspectives **133**
6.1 Conclusion . . . 133
6.2 Perspectives . . . 134

A Annexes **137**
A.1 Formules de localisation pour le motif sphérique à deux phases . . . 137
A.2 Lemme pour le modèle à deux motifs et trois phases . . . 139

Références. **141**

TABLE DES FIGURES

1 Exemples de suspension (figure d'après P.Coussot) 19

1.1 Regroupement de données expérimentales rhéologiques pour des suspensions de particules dans un fluide Newtonien (tiré de Thomas 1965) 22
1.2 Comportement du fluide Newtonien et des fluides à seuil 27
1.3 Relations d'Einstein, de Batchelor et de Krieger-Dougherty pour la suspension Newtonienne ($\varphi_m = 60\%$). 29
1.4 Viscosité et seuil de contrainte du béton en fonction de fraction volumique en particules ($\eta^0 = 2,5Pa.s, \tau_c^0 = 1Pa, \varphi_m = 0,65, M(\text{viscosité}) = 1, M(\text{seuil}) = 3,5$) [Nie93]. 32
1.5 Similitude entre le problème solide et le problème fluide 35
1.6 Séparation d'échelle 36
1.7 V.E.R. et conditions homogènes au contour 37

2.1 V.E.R. de suspension avec les conditions aux limites qui lui sont appliquées 45
2.2 Solution de Jeffery pour une sphère 53
2.3 Viscosités réduites prédites par les trois schémas d'homogénéisation comparées aux valeurs prédites par la relation de Krieger-Dougherty 55
2.4 Schéma à 1 motif 57
2.5 Schéma à 2 motifs 59
2.6 Viscosité réduite prédite par le modèle à deux motifs et deux phases en fonction de la concentration pour $\varphi_m < 40\%$ 61
2.7 Viscosité réduite prédite par le modèle à deux motifs et deux phases en fonction de la concentration pour $\varphi_m > 40\%$ 62
2.8 Comparaison entre les prédictions du modèle à deux motifs et deux phases et la relation de Krieger-Dougherty 64
2.9 Comparaison des prédictions du modèle à deux motifs et deux phases et de la relation de Krieger-Dougherty avec les résultats expérimentaux de Mahaut et al 2008. 65

2.10 Approche variationnelle pour le comportement à l'échelle macroscopique d'une suspension de particules dans un fluide de Bingham ($n = 1$) 69
2.11 Définition du module sécant 71
2.12 Module sécant macroscopique de la suspension pour $n = 1.2$ 73
2.13 Module sécant macroscopique de la suspension pour $n = 0.8$ 74
2.14 Seuil réduit prédit utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases (2M2P) et en utilisant la relation de Krieger-Dougherty (KD) pour $\varphi_m > 40\%$. . . . 76
2.15 Viscosité réduite prédite utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases (2M2P) et en utilisant la relation de Krieger-Dougherty (KD) pour $\varphi_m > 40\%$ 77
2.16 Seuil réduit prédit du modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases pour $\varphi_m < 40\%$ 78
2.17 Viscosité réduite prédite du modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases pour $\varphi_m < 40\%$ 79

3.1 Seuil réduit modifié $\log(\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} - 1)$ en fonction du module élastique réduit modifié $\log(\sqrt{(1-\varphi)\frac{G^{hom}}{G}} - 1)$ pour divers matériaux (D'après Chateau et al 2008 [COT08]) 84
3.2 Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration entre le modèle et les points de Mahaut 2008. 85
3.3 Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration en particules pour les résultats d'Ancey et Jorrot et les estimations théoriques. 87
3.4 Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration en particules pour les résultats expérimentaux d'Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques. 88
3.5 Comparaison de la viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules pour les résultats d'Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques (n=1). 89
3.6 Comparaison de la viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules pour les résultats de Geiker [GBTN02] et les estimations théoriques (n=1). 90

4.1 Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de billes de verre. Les diamètres sont 1 et 3 mm ($\alpha = 3$). Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01]. 94
4.2 Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de billes de verre. Les diamètres sont 0.3 et 3 mm ($\alpha = 10$). Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01]. . . 95
4.3 Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de sables. Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01]. 95
4.4 Suspension de particules polydisperses 96
4.5 Evolution du seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m 100

4.6 Comparaison entre les prédictions de l'équation (4.17) utilisant l'approche à deux motifs et deux phases et les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot pour le seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m 102
4.7 Comparaison entre les prédictions de l'équation (4.17) utilisant la relation de Krieger-Dougherty et les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot pour le seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m 103

5.1 Hétérogénéité du taux de déformation au sein d'une suspension de particules concentrées. 106
5.2 Modèle à deux motifs et trois phases 107
5.3 Viscosité réduite en fonction de la concentration pour le modèle à trois phases. 109
5.4 Comportement des suspensions pour $n = 1.2$ 112
5.5 Comportement des suspensions pour $n = 0.8$ 113
5.6 Comportement des suspensions pour $n = 1.2, 1, 0.8$ 114
5.7 Cas seuil nul et viscosité nulle 119
5.8 Comparaison entre modèle à trois phases et le fluide Herschel-Bulkley . . . 120
5.9 Hétérogénéité du champ de vitesse de déformation lorsque la fraction volumique est proche de la fraction volumique maximale. 122
5.10 Comparaison des taux de déformation effectif du modèle deux et trois phases pour $c = 0, 5$. 123
5.11 Comparaison du seuil entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases. 124
5.12 Comparaison de la viscosité réduite entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases pour $n = 2.2$ 125
5.13 Comparaison de la viscosité réduite entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases pour $n = 0.2$ 126
5.14 Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Mahaut et al [MCO08]. 127
5.15 Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Ancey et Jorrot [AJ01]. 128
5.16 Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques. 129
5.17 Viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Erdogan [Erd05]. 130
5.18 Viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Geiker [GBTN02]. 131

LISTE DES TABLEAUX

3.1 Les fluides à seuil utilisés par Mahaut 82
3.2 Les particules utilisées par Mahaut 82
3.3 Caractéristiques des matériaux utilisés par Ancey et Jorrot 2001, Erdogan 2000 et Geiker 2002 86

5.1 Algorithme de point fixe pour résoudre un système d'équations non linéaires 111
5.2 calcul des limites avec $c = 0,7; \varphi_m = 0,6$ 115
5.3 Domaine de valeur de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}}$ et de $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}}$ $(c = 0,7; \varphi_m = 0,6; \tau_c = 1Pa; \eta = 1Pa.s; n = 1,2)$. 116
5.4 Comparaison des champs de taux de déformation effectif 121

Principales notations

Symboles

x	Position à l'échelle microscopique
p	Pression
$\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{D}$	Taux de déformation eulérien à l'échelle microscopique et macroscopique
$\boldsymbol{s}$	Partie déviatorique du tenseur de Cauchy
G	Module élastique de cisailement
n	Exposant de la loi de Herschel-Bulkley
$\widetilde{d}$	Second invariant du taux de déformation eulérien

Lettre grecque

Ω	Volume élémentaire représentatif
Ω_s	Domaine solide
Ω_l	Domaine liquide
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω
$\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Sigma}$	Tenseur de contrainte de Cauchy
μ	Viscosité
η	consistance (lié à la viscosité)
τ_c	Seuil de contrainte
φ	Fraction volumique solide
φ_m	Fraction volumique maximale

hom	Homogénéisation
DL	Dilué
KD	Krieger-Dougherty
HB	Herschel-Bulkley
sct	Sécante
eff	Effective

Introduction générale

Une suspension est définie comme un système hétérogène constitué de particules solides suspendues dans un fluide porteur. On peut rencontrer couramment des suspensions dans la nature comme les boues, les écoulements de débris, les laves ... ou dans le milieu industriel comme les bétons, les pâtes alimentaires, les peintures, les produits cosmétiques ... (Fig 1). Le comportement des suspensions a donc été étudié par de nombreux chercheurs aussi bien d'un point du vue expérimental que d'un point de vue théorique. Néanmoins, à notre connaissance, il ne semble pas exister de méthodologie systématique bien établie permettant d'élaborer un matériau possédant des caractéristiques particulières à partir de composants dont les propriétés sont connues malgré le fait qu'il s'agit d'un problème rencontré dans de nombreux processus industriels. La recherche d'une modélisation idéale pour résoudre le comportement d'un matériau à partir de celui de ses constituants n'a pas encore abouti.

Une source importante de difficultés pour caractériser ou modéliser le comportement des suspensions provient du fait que l'on a en général à traiter un matériau multiéchelle contenant plusieurs constituants qui interagissent. Les méthodes de changement d'échelle paraissent donc tout à fait adaptées, ce type d'approche cherchant à identifier les propriétés macroscopiques du matériau modélisé comme un milieu continu à partir d'une description du comportement du fluide et des caractéristiques des particules.

Le travail présenté dans cette thèse est une contribution visant à caractériser l'influence de l'ajout de particules non colloïdales dans un fluide à seuil. Pour cela, on s'intéresse au comportement des suspensions de particules indéformables infiniment résistantes suspendues dans un fluide de Herschel-Bulkley (fluide à seuil incompressible) et plus particulièrement à l'influence des particules sur la valeur du seuil et de la viscosité à l'échelle macroscopique.

Ce mémoire est composé de 5 chapitres relatifs à chaque aspect du travail effectué. La première partie se veut générale et introductive. Elle a pour objet de décrire les buts et objectifs de notre travail, ainsi que l'environnement dans lequel il se situe. La première partie de ce chapitre s'attache à décrire les principales caractéristiques du comportement des suspensions étudiées. Les différentes modélisations typiques de suspensions déjà publiées sont ensuite décrites et analysées en soulignant leur domaine d'application et aussi leurs restrictions. La dernière partie de ce chapitre introductif est consacrée à la présentation de la méthode de changement d'échelle mise en œuvre pour traiter notre problème.

Le chapitre 2 a pour l'objectif de construire le modèle permettant d'estimer les caractéristiques rhéologiques d'une suspension constituée de particules non colloïdales immergées dans un fluide à seuil dont les propriétés sont connues. Dans un premier temps, cette méthode d'homogénéisation est appliquée étape par étape pour modéliser le comportement d'une suspension de particules non colloïdales immergées dans un fluide porteur dont le comportement est connu.

Ensuite, l'homogénéisation d'une suspension des particules dans un fluide porteur Newtonien est traité. Le comportement de cette suspension est évidemment **linéaire**. Une ap-

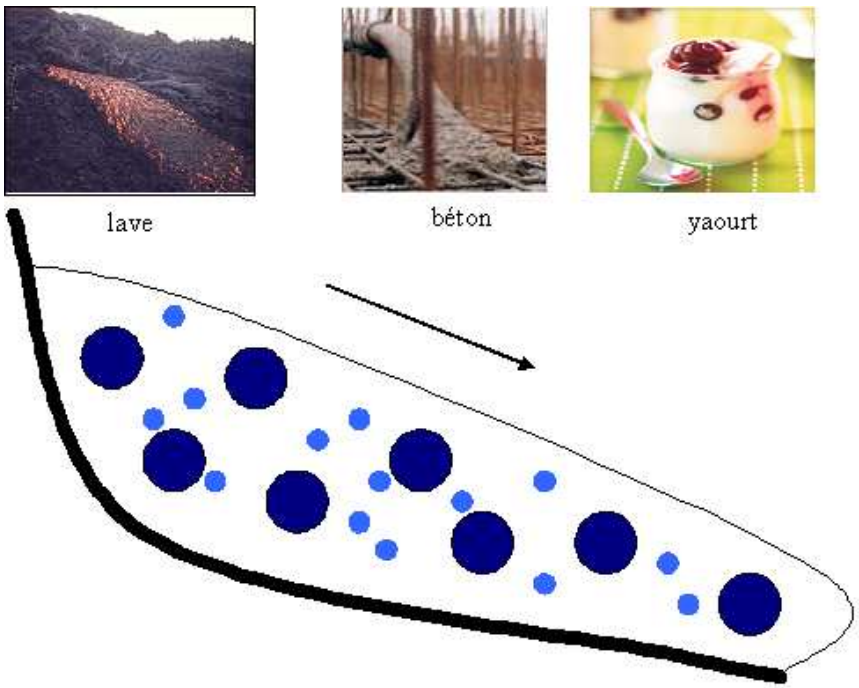


FIG. 1 – Exemples de suspension (figure d'après P.Coussot)

proche variationnelle et une méthode d'estimation sont utilisées pour encadrer et estimer les caractéristiques de viscosité macroscopique de la suspension. Un modèle à deux motifs et deux phases développé dans le cadre de l'approche d'estimation est proposé pour mieux décrire la morphologie de la suspension. La dernière partie de ce chapitre est consacrée au problème d'homogénéisation d'une suspension de particules non colloïdales dans un fluide à seuil dont le comportement est décrit par la loi de Herschel-Bulkley. Ce problème est traité en utilisant la méthode d'homogéisation **non linéaire**, développée initialement pour traiter le comportement non linéaire des matériaux solides. Deux approches sont mises en œuvre : l'approche variationnelle permet de trouver une borne inférieure du potentiel et la méthode d'estimation sécante permet d'obtenir des estimations du seuil d'écoulement et de la viscosité de la suspension.

Le chapitre 3 est consacré aux validations du modèle développé par comparaison avec les résultats expérimentaux. On s'appuie principalement sur les résultats obtenus par Fabien Mahaut, utilisant une procédure qui permet de se rapprocher au mieux des hypothèses formulées pour élaborer le modèle. Les comparaisons de nos estimations avec d'autres résultats expérimentaux d'autres chercheurs montrent la pertinence et la solidité de notre modèle.

Or dans la réalité, les suspensions se composent souvent de particules de tailles différentes c'est pourquoi l'objet du chapitre 4 est de généraliser les résultats obtenus aux chapitres précédents pour aborder cette situation. Pour cela, on utilise le raisonnement de Farris consistant à résoudre le problème polydisperse en considérant une suite de problème monodisperse. Évidemment, le modèle ainsi construit ne peut être appliqué que si on distingue bien les tailles des particules est satisfaite. Une première validation du modèle par comparaison avec des résultats expérimentaux est présentée.

Les estimations proposées reposent sur l'hypothèse que l'on peut caractériser le champ de déformation dans la phase fluide par un unique scalaire. Cette hypothèse paraît difficile à justifier pour les fortes valeurs de la concentration en particules ou dans le cas polydisperse. Le chapitre 5 porte donc sur une prise en compte de l'hétérogénéité du champ des taux de déformation distinguant deux domaine fluide différents. On obtient un modèle morphologique à deux motifs et trois phases plus sophistiqué que celui à deux motifs et deux phases développé au chapitre 2. On espère ainsi mieux décrire la morphologie du volume élémentaire représentatif de suspension et avoir une estimation de meilleure qualité. La construction de ce modèle consiste donc à reprendre le modèle morphologique à deux motifs et deux phases considéré précédemment mais en mettant deux valeurs différentes du module de cisaillement dans chacun des domaines fluides. La comparaison des estimations de ce modèle avec les modèles précédents et avec les résultats expérimentaux est présentée dans ce dernier chapitre.

Enfin, on termine ce mémoire par une conclusion générale faisant le point sur la pertinence, la solidité et ainsi que l'application de ce modèle. On décrit également les axes de développements permettant d'améliorer le modèle.

CHAPITRE

1

Rhéologie des suspensions et méthode de changement d'échelle

1.1 Introduction

Ce chapitre introductif a pour objet de décrire les buts et objectifs de notre travail, ainsi que l'environnement dans lequel il se situe. Pour cela, la première partie de ce chapitre s'attache à décrire les principales caractéristiques du comportement expérimental des suspensions étudiées. Les différentes de modélisations typiques de suspensions de la littérature sont ensuite décrites et analysées en soulignant leur domaine d'application et aussi leurs restrictions. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la présentation de la méthode de changement d'échelle pour traiter notre problème.

1.2 Caractérisation expérimentale du comportement

Beaucoup d'auteurs ont tenté, avec plus ou moins de succès, de mesurer la viscosité de suspensions de particules dans un fluide Newtonien. Tous les résultats expérimentaux montrent que la viscosité de la suspension augmente avec la fraction volumique de particules. Cependant, en comparant les résultats des différents auteurs déjà publiés, il apparaît clairement qu'il y a beaucoup d'écarts entre les résultats disponibles dans la littérature. On pourra les consulter dan les synthèses bibliographiques de Rutgers 1962 [Rut62] et Thomas 1965 [Tho65] pour un exposé exhaustif sur cette question.

Sur la figure 1.1 Thomas montre les écarts entre les données recueillies pour différentes publications antérieures, sur différents types de suspensions. Thomas 1965 et les auteurs comme Rugers 1962, Jeffrey 1976 [JA76] en ont déduit que la viscosité des suspensions n'est pas uniquement fonction de la fraction volumique. Elle dépend également des :

- propriétés mécaniques et physiques des particules (déformable ou pas, forme, taille, surface, ...),
- propriétés du liquide suspendant (Newtonien ou pas),
- interactions entre les particules (colloïdales ou non colloïdales),
- interactions entre les particules et le liquide suspendant.

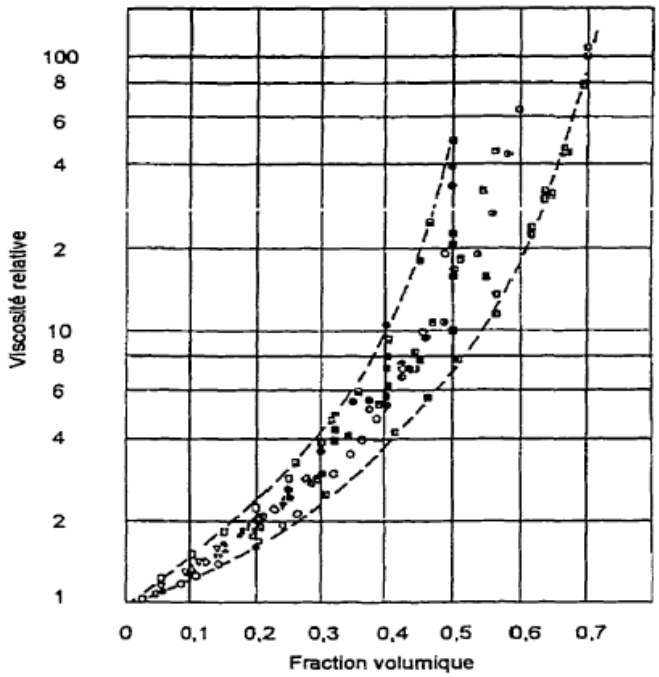


FIG. 1.1 – Regroupement de données expérimentales rhéologiques pour des suspensions de particules dans un fluide Newtonien (tiré de Thomas 1965)

Le comportement d'une suspension bimodale de particules de charbon dispersées dans de l'eau a été étudié expérimentalement par Sengun et Probstein 1989 a,b [SP9a][SP9b]. Les grosses particules ont une taille comprise entre 100 et $300\mu m$ tandis que les plus petites particules ont un diamètre de 2,6 μm. Le système ainsi constitué peut être considéré comme une suspension de grosses particules dans un fluide qui est constitué de la suspension de petites particules dans l'eau. Il a été observé que la viscosité apparente (le rapport de la contrainte de cisaillement sur le taux de cisaillement) de la suspension dépendait de la valeur du taux de cisaillement appliqué. Sengun et Probstein ont proposé d'estimer la valeur de la viscosité relative de la suspension (rapport de la viscosite apparente et la viscosite du fluide suspendant) comme le produit de la viscosité relative de la suspension de grosses particules par la viscosité relative de la suspension de petites particules en tenant compte d'un terme correctif du au fait que la moyenne du taux de déformation " vu " par la suspension

fine était plus grande que le taux de déformation global appliqué au volume élémentaire représentatif (effet de localisation de la déformation). Ils ont proposé de prendre en compte cette localisation par un coefficient qui relie la valeur du taux de déformation effectif de la suspension fine et la valeur du taux de déformation macroscopique appliquée. Ce coefficient est une fonction de la fraction en grosses particules solides et la fraction volumique maximale d'empilement en grosses particules dont la valeur est estimée par l'approche de Frankel et Acrivos 1967 [FA67]. Ce modèle contient deux paramètres (un coefficient scalaire et la fraction volumique maximale d'empilement) dont les valeurs doivent être déterminées à partir de données expérimentales. Les résultats expérimentaux ont permis de valider la modélisation proposée par Sengun et Prostein. Cependant, les résultats obtenus dans ce cadre ne peuvent pas être appliqués à des suspensions de particules dans un fluide à seuil.

Shouche et al 1994 [SCNK94] ont étudié expérimentalement le comportement de suspensions de poudre de marbre dispersée dans des fluides Newtonien et non Newtonien. Ils ont utilisé un rhéomètre capillaire pour mesurer le seuil de contrainte et la viscosité plastique de la suspension en fonction de la fraction volumique à faible de taux de déformation. Ils ont observé que le comportement de la suspension peut être décrit par une loi de Bingham. Etonnamment, ils ont aussi observé que ces suspensions Newtoniennes possèdent un seuil de contrainte même pour une petite valeur de fraction volumique en particules. On peut expliquer ce résultat pour le fait que les particules de marbre utilisées dans ces expériences ne sont pas assez grandes pour écarter l'existence d'interaction colloïdale. Néanmoins, les valeurs des seuils de contrainte mesurées sont très petites.

Il y a très peu de travaux expérimentaux consacrés aux mesures des propriétés rhéologiques des suspensions de particules dans un fluide à seuil.

Ancey et Jorrot 2001 [AJ01] ont étudié expérimentalement l'influence de l'ajout de particules non colloïdales et non browniennes sur le seuil de contrainte d'une suspension d'argile (Bentonite). Comme dans le travail de Mahaut et al 2008 [MCO08], la taille des particuliers ajoutées est suffisamment importante pour que l'on puisse considérer la suspension d'argile comme un fluide homogène à l'échelle des particules. Le seuil de contrainte de la suspension a été mesuré à l'aide d'un slump test pour éviter les problèmes qui se posent quand on utilise un rhéomètre de Couette (migration des particules, localisation de la déformation, anisotropie de la microstructure (Coussot 2005 [Cou05], Ovarlez 2006 [OBR06], Parsy et Galada Maria 1987 [PGM87]). Ils ont montré que dans les situations où la phase granulaire était constituée de grain monodisperse soigneusement triés, la valeur de la contrainte seuil mesurée ne dépendait pas des caractéristiques des particules (matériau constitutif, taille). Ils ont également observé que la contrainte seuil divergeait quand la valeur de la fraction volumique en particules tendait vers la densité d'empilement maximale.

Ancey et Jorrot ont également proposé un modèle simple dans le but de prédire la valeur de la contrainte seuil en fonction de la concentration en particules de la suspension. L'influence des particules sur le seuil est décrit par une relation qui n'est rien d'autre qu'une loi des mélanges. Il est bien connu que ce type de raisonnement ne permet pas d'obtenir des estimations précises des caractéristiques globales d'un milieu hétérogène dans la majorité des situations d'intérêt pratique (Nemat-Nasser et Hori 1993 [NNH93], Torquato 2001 [Tor01]).

Geiker et al 2002 [GBTN02] se sont intéressés expérimentalement à l'influence des granulats sur les caractéristiques rhéologiques d'un béton autoplaçant. Ils ont supposé qu'il était

possible de considérer un béton comme une suspension de grosses particules (les granulats) dans un fluide non newtonien (la pâte de ciment). La pâte de ciment est constituée du ciment, des adjuvants, des fines et de l'eau ; son comportement peut être décrit par une loi de Bingham. La fraction granulaire supérieure est constituée des granulats qui se comportent comme des particules indéformables suspendues dans un fluide à seuil interagissant les unes avec les autres uniquement par des interactions hydrodynamiques non Newtoniennes. Le comportement du béton autoplaçant est également décrit par une loi de Bingham. Il est à noter qu'aucune justification théorique n'est donnée permettant de justifier que la pâte de ciment et le béton se comportent tout deux comme des fluides à seuil de Bingham.

Les données expérimentales de Geiker et al 2002 ont été comparées aux prédictions théoriques d'un modèle proposé par Nielsen 1993 [Nie93] permettant d'estimer la consistance et la contrainte seuil d'une suspension d'ellipsoïdes dans un fluide de Bingham en fonction de la fraction volumique occupée par les particules, du rapport de forme des particules et des caractéristiques rhéologiques du fluide suspendant. Le modèle de Nielsen est une généralisation d'un modèle développé initialement pour estimer les caractéristiques globales d'une suspension de particules ellipsoïdales dans un fluide de Maxwell. Cette généralisation repose sur des règles heuristiques qui nous semblent tout à fait contestables. Ainsi, il est supposé que la suspension commence à s'écouler quand la valeur de la contrainte moyenne dans le fluide suspendant, estimée au moyen d'une relation démontrée dans le cas où le fluide porteur obéit à une loi de Maxwell, dépasse la valeur de la contrainte seuil dans le fluide. Il nous semble que l'utilisation d'une loi démontrée dans le cas où le fluide obéit à une loi de Maxwell ne peut être utilisée pour un fluide dont le comportement est décrit par une loi complètement différente. Dans le même esprit, l'hypothèse formulée pour décrire la mise en écoulement de la suspension nous semble complètement ignorer le phénomène de localisation des contraintes et des déformations qui est central dans les méthodes d'homogénéisation du comportement des matériaux hétérogènes. Bien que Geiker et al 2002 aient réussi à calibrer la théorie pour qu'elle puisse représenter correctement les données expérimentales, il nous semble que la procédure expérimentale utilisée pour obtenir ces points (estimation du seuil de contrainte à partir du comportement de la suspension à fort taux de cisaillement) ne permet pas de considérer que les caractéristiques mesurées soient celle d'une suspension homogène isotrope (du moins pour le seuil).

Erdogan 2005 [Erd05] a étudié l'influence de la forme des particules et de leur rugosité sur les caractéristiques d'un béton frais. Pour cela, il a fabriqué par moulage des particules de formes diverses (sphères, cubes, parallélépipèdes) de tailles centimétriques et de même volume. Un rhéomètre Couette-Vane a été utilisé pour mesurer les caractéristiques rhéologiques globales de la suspension. Il convient de noter que la suspension a été soumise à un fort gradient de cisaillement avant la mesure des caractéristiques rhéologiques. En conséquence, le matériau caractérisé dans le rhéomètre n'est plus homogène ni isotrope. Erdogan 2005 a également mesuré le seuil des bétons qu'il a étudié au moyen d'un slump test. Dans cette étude, il a été observé que aussi bien le seuil d'écoulement que la viscosité plastique augmentaient quand la fraction volumique occupée par les particules augmentait (le comportement de la suspension est encore modélisé en utilisant une loi de Bingham). Cette tendance est observée dans les deux caractérisations expérimentales utilisées (slump test et rhéomètre Couette-Vanne). Par ailleurs, il n'a pas été observé que la rugosité des particules influence les comportements observés.

En comparant les résultats de ces trois auteurs, on constate que les mesures de viscosité donnent des résultats semblables (pour une fraction volumique de particules de 40%, la viscosité relative mesurée est environ de l'ordre de cinq) tandis que les mesures du seuil sont très dispersées (pour une même fraction volumique de particules de 40%, Ancey et Erdogan donnent une valeur du seuil relatif de l'ordre de deux, alors que Geiker donne une valeur très grande, de l'ordre de trente).

1.3 Modélisation des caractéristiques rhéologiques d'une suspension

Une source importante de difficultés pour caractériser ou modéliser le comportement des suspensions provient du fait que l'on a en général à traiter d'un matériau multiéchelle contenant plusieurs constituants qui interagissent.

Dans ce travail, on s'intéresse aux suspensions composées de particules non colloïdales dispersées dans un fluide à seuil. On peut élaborer des suspensions de ce type en dispersant des particules non colloïdales dans une suspension de particules colloïdales. Comme les particules colloïdales sont beaucoup plus petites que les particules non colloïdales, ces dernières interagissent avec les autres constituants de la suspension uniquement par des interactions hydrodynamiques : elles voient un fluide homogène dont le comportement est celui de la suspension colloïdale.

Dans la suite de ce chapitre, on rappelle tout d'abord les lois de comportement usuellement utilisées pour décrire le comportement des fluides à seuil. On passe ensuite en revue quelques modèles utilisés pour prédire les caractéristiques globales des suspensions avant de rappelle la méthode de changement d'échelle utilisée dans la suite du document.

1.3.1 Loi de comportement

La loi de comportement des suspensions est définie par une relation entre les contraintes ($\boldsymbol{\Sigma}$) et les taux de déformations du fluide ($\boldsymbol{D}$) où $\boldsymbol{D}$ est défini comme la partie symétrique du tenseur gradient de vitesse :

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T) \tag{1.1}$$

avec $\underline{u}$ la vitesse d'un point matériel en description eulerienne, ∇ l'opérateur gradient et T la transposition du tenseur gradient.

Le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\Sigma}$ se décompose en deux termes : La pression hydrostatique et le déviateur $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{S} \tag{1.2}$$

avec $p = -\frac{1}{3}\text{tr}\ \boldsymbol{\Sigma}$, la pression et $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité du second ordre.

Notons que lorsque le fluide est incompressible on a :

$$\text{tr}\ \boldsymbol{D} = \text{div}\ \underline{u} = 0 \tag{1.3}$$

↺

où tr désigne l'opérateur de trace.

Dans le cas d'un cisaillement simple on a [Cou05] :

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

où $\dot{\gamma}$ représente le taux de cisaillement. La contrainte tangentielle de cisaillement est définie par τ_{xy} qui sera par la suite notée simplement τ.

1.3.2 Principaux types de comportement

De nombreuses lois de comportement reliant la contrainte de cisaillement au taux de cisaillement ont été développées afin de décrire les comportements rhéologiques les plus couramment rencontrés.

1.3.2.1 Fluide Newtonien

La loi de comportement la plus simple est celle obtenue pour un fluide Newtonien :

$$\boldsymbol{S} = 2\mu\boldsymbol{D} \tag{1.5}$$

qui s'écrit dans le cas d'un cisaillement simple :

$$\tau = \mu\dot{\gamma} \tag{1.6}$$

où μ représente la viscosité du fluide.

1.3.2.2 Fluide à seuil

Dans cette classe de matériaux, les fluides sont caractérisés par une contrainte seuil τ_c. Si la contrainte appliquée au fluide est inférieure à cette contrainte seuil, le fluide se comporte comme un solide et ne coule pas. Dans le cas contraire, le matériau retrouve le comportement d'un fluide. L'écriture tensorielle de ces lois de comportement fait intervenir le second invariant des tenseurs $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ (Poullain 2003 [PRCB03]).

Le fluide de Bingham obéit à la loi de comportement suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = [\tau_c + 2\eta\sqrt{D_{II}}]\frac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{D_{II}}} & \text{si} \quad \sqrt{S_{II}} > \tau_c \\ \boldsymbol{D} = 0 & \text{si} \quad \sqrt{S_{II}} \leq \tau_c \\ \text{tr}\,\boldsymbol{D} = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

↺

Pour un fluide de Herschel-Bulkley, on a :

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = [\tau_c + 2^n \eta \sqrt{D_{II}}^n] \frac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{D_{II}}} & \text{si} \quad \sqrt{S_{II}} > \tau_c \\ \boldsymbol{D} = 0 & \text{si} \quad \sqrt{S_{II}} \leq \tau_c \\ \text{tr}\, \boldsymbol{D} = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

où :

η est la consistance (un paramètre lié à la viscosité), n désigne l'indice d'écoulement.

$D_{II} = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{D}^2)$ et $S_{II} = \frac{1}{2}\text{tr}\,(\boldsymbol{S}^2)$ sont les seconds invariants des tenseurs du gradient de vitesse $\boldsymbol{D}$ et du déviateur de tenseur $\boldsymbol{\Sigma}$.

Remarque : pour le fluide de Bingham, la consistance η est appellée également la viscosité plastique.

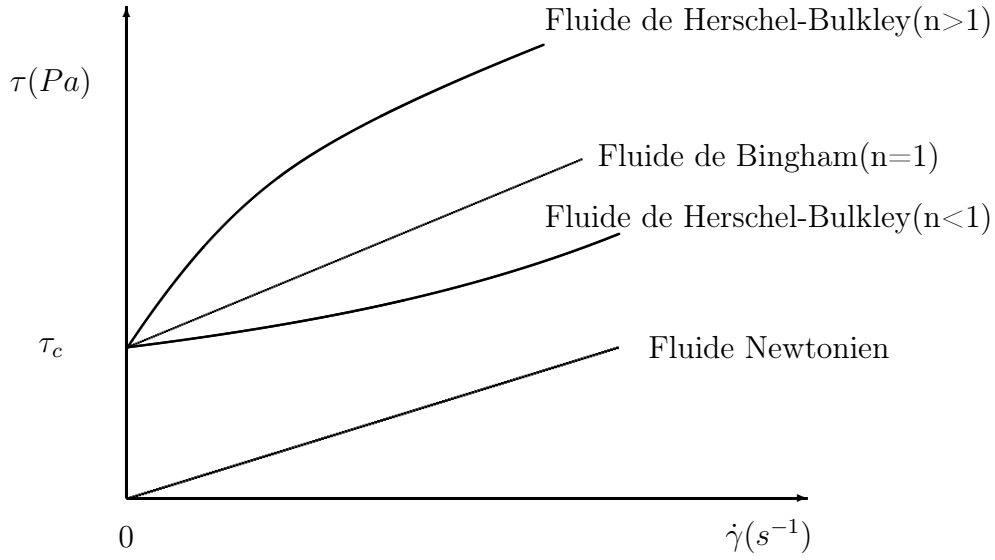


FIG. 1.2 – Comportement du fluide Newtonien et des fluides à seuil

1.3.3 Modèles analytiques

Dès 1906, Einstein a été établi une relation très connue qui relie la viscosité relative d'une suspension Newtonienne diluée à la fraction volumique occupée par les particules. Les particules sont sphériques, indéformables et immergées dans un fluide Newtonien. Cette relation s'écrit :

$$\mu_r = \frac{\mu^{hom}}{\mu} = 1 + 2,5\varphi \tag{1.9}$$

↻

où μ_r est la viscosité relative, μ^{hom} est la viscosité de la suspension, μ est la viscosité du fluide porteur et φ est la fraction volumique en particules.

Batchelor et Green [Bat77] ont obtenu une estimation de la viscosité d'une suspension de particules à l'ordre deux en φ en prenant en compte les interactions hydrodynamiques entre paires de particules. La principale difficulté à résoudre pour obtenir cette estimation est la prise en compte du couplage entre la distribution des particules au sein de la suspension et l'écoulement imposé au matériau. En fait, Batchelor et Green n'ont obtenu la solution exacte du problème que dans le cas où le matériau est soumis à une déformation pure (une élongation) par exemple. Dans ce cas, le matériau reste toujours isotrope et la viscosité relative est donnée par :

$$\mu_r = 1 + 2,5\varphi + 7,6\varphi^2 \tag{1.10}$$

Les deux relations ci-dessus ne sont valables pour une très faible valeur de la concentration en particules.

Pour une suspension concentrée, Krieger-Doughery 1959 [KD59] ont proposé la relation :

$$\mu_r = (1 - \frac{\varphi}{\varphi_m})^{-2,5\varphi_m} \tag{1.11}$$

qui permet de rendre compte du blocage de l'écoulement. Dans cette relation, φ_m représente la compacité maximale en particules, c'est-à-dire le volume maximal de particules par unité de volume total que l'on peut inclure dans la suspension. La fraction volumique maximale φ_m correspond aussi à la valeur pour laquelle la viscosité de la suspension devient infinie. Sa valeur dépend de la forme, de la distribution de taille et de l'arrangement de particules. La relation de Krieger-Dougherty fonctionne très bien pour les suspensions Newtonniennes. Les relations d'Einstein, de Batchelor et de Krieger-Dougherty sont présentées dans la figure 1.3.

Le modèle théorique de Farris 1968 [Far68] permet de calculer la viscosité d'une suspension multimodale à partir de la viscosité de suspensions unimodales. Cette théorie prévoit aussi pour une concentration volumique donnée l'existence d'une distribution de particules produisant la viscosité minimale. Cette propriété est très souvent utilisée en pratique pour réduire la viscosité des suspensions fortement concentrées (Mewis 1994 [MM94]).

De nombreuses études ont été consacrées à l'étude de comportement des suspensions Newtoniennes ; elles ont permis en particulier de prendre en compte l'effet de la forme et de l'orientation des particules (Jeffery 1922 [Jef22], Batchelor 1971 [Bat71], Mewis et Macosko 1994 [MM94]), l'effet de la taille ou l'effet de la surface de particules (Agarwala et al 1992 [APC92]).

Les modèles précédents dits modèles Newtoniens, présentent un bon accord avec les données expérimentales pour de nombreuses suspensions de particules dans un fluide Newtonien.

Cependant ces modèles Newtoniens représentent une restriction importante à la généralité et ne rendent pas compte de la variété des phénomènes rhéologiques complexes rencontrés dans le domaine des suspensions. A titre d'exemple, les suspensions sont souvent des fluides à seuil, rhéofluidifiantes, thixotropes et peuvent présenter des phénomènes de rhéoépaississement pour des taux de cisaillement suffisamment élevés (Coussot 2005 [Cou05]).

↻

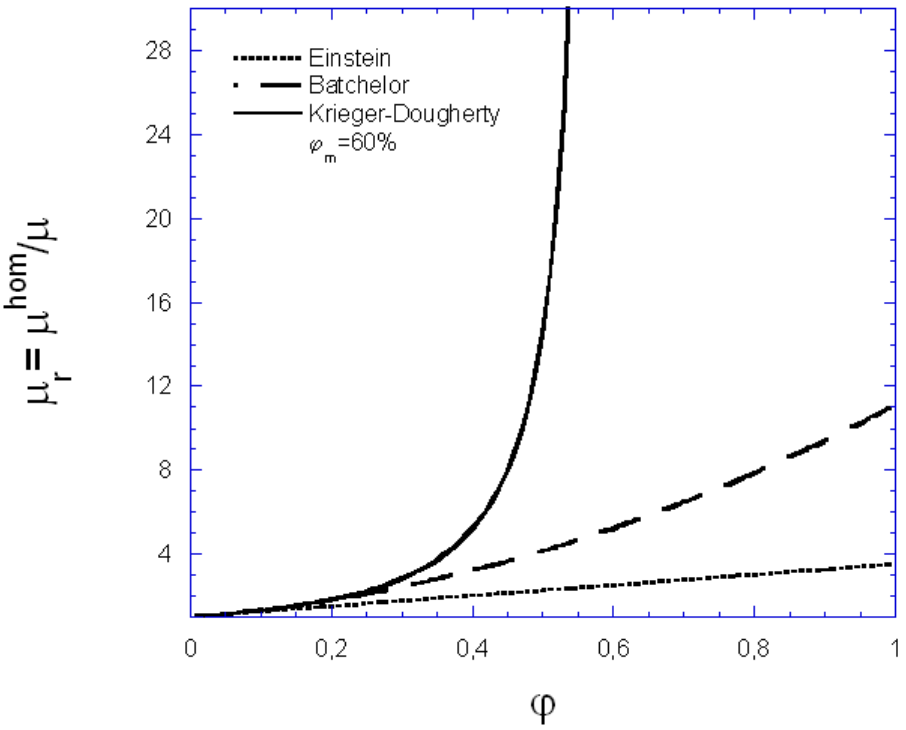


FIG. 1.3 – Relations d'Einstein, de Batchelor et de Krieger-Dougherty pour la suspension Newtonienne ($\varphi_m = 60\%$).

Le comportement rhéologique des suspensions de particules dans un fluide à seuil est souvent assimilé à celui d'un fluide de Bingham ou de Herschel-Bulkley. Ces modèles permettent d'identifier deux paramètres rhéologiques : le seuil de mise en écoulement τ_c et la consistance η. On présente ci-dessous quelques modèles rhéologiques dédiés aux suspensions de particules dans un fluide à seuil.

1.3.3.1 Modèle de Nielsen

Le modèle de Nielsen 1993 [Nie93] est décrit dans l'article de Geiker et al 2002 [GBTN02]. Dans ce modèle, la suspension est un mélange de particules rigides ellipsoïdales (phase r) suspendues dans un fluide à seuil de Bingham (phase ℓ). La fraction volumique en particules est définie par :

$$\varphi = \frac{V_r}{V_r + V_\ell} \tag{1.12}$$

où V_r, V_ℓ désignent respectivement le volume des particules et le volume de fluide porteur.

La suspension se comporte comme un fluide de Bingham, on a donc :

$$\tau = \tau_c + \eta\dot{\gamma} \tag{1.13}$$

Les caractéristiques rhéologiques sont décrites par les expressions suivantes :

Pour le seuil de contrainte :

$$\tau_c = \tau_c^0(1 + \gamma_\infty\,\varphi) \tag{1.14}$$

Pour la viscosité :

$$\eta = \eta^0\,\frac{1 + \gamma_\infty\,\varphi}{1 - \varphi} \tag{1.15}$$

où τ_c^0, η^0 sont les caractéristiques du fluide porteur.

γ_∞ est une fonction géométrique qui dépend de deux fonctions de forme (α_r, α_ℓ). Les principaux paramètres pour la description de la géométrie sont le ratio A (rapport longueur/rayon) et la fraction volumique maximale φ_m. On a :

$$\gamma_\infty = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{\alpha_r + \alpha_\ell - 1}{\alpha_\ell} & \text{si} \quad \varphi < \varphi_m \\ \\ \infty \quad \text{si} \quad \varphi > \varphi_m \end{cases} \tag{1.16}$$

avec :

$$\alpha_\ell = \alpha_\ell^0(1 - \frac{\varphi}{\varphi_m})^M; \alpha_r = \alpha_r^0(1 - \frac{\varphi}{\varphi_r})^M; \quad \text{avec} \quad \varphi_r = -\frac{\alpha_\ell^0}{\alpha_r^0}\varphi_m \tag{1.17}$$

↺

$\alpha_\ell^0, \alpha_r^0$ désignent les facteurs de forme. L'indice de puissance M est une modération de l'interaction entre les particules. Normalement on prend $M = 1$. La faible et la forte interaction peut être décrites par $M < 1$ et $M > 1$ respectivement.

$$\alpha_r^o = \begin{cases} \frac{3A}{A^2+A+1} & \text{si} \quad A \leq 1 \\ \\ 3\frac{A^2-A+1}{4A^2-5A+4} & \text{si} \quad A > 1 \end{cases} \qquad \alpha_\ell^o = - \begin{cases} \alpha_r^o & \text{si} \quad A \leq 1 \\ \\ 4\alpha_r^o - 3 & \text{si} \quad A > 1 \end{cases}$$

Dans le cas d'une suspension de particules monodisperses sphériques on a $A = 1$. Si on suppose que l'indice de puissance $M = 1$, on peut déterminer les paramètres : $\alpha_r^0 = \alpha_\ell^0 = 1$, $\alpha_r = \alpha_\ell = (1 - \frac{\varphi}{\varphi_m})$ et $\gamma_\infty = \frac{3}{2}(1 - \frac{\varphi}{\varphi_m - \varphi})$.

On a alors :

$$\tau_c = \tau_c^0(1 + \frac{3}{2}\varphi - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{\varphi_m - \varphi}) \tag{1.18}$$

$$\eta = \eta^0 \frac{(1 + \frac{3}{2}\varphi - \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{\varphi_m - \varphi})}{1 - \varphi} \tag{1.19}$$

Avec seulement cinq paramètres, y compris trois paramètres pour les particules (la fraction volumique maximale φ_m, le ratio de la forme A, une modération de l'interaction M) et deux paramètres intrinsèques au fluide porteur (τ_c^0, η^0), le modèle de Nielsen est capable de prédire les caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules ellipsoïdales dans un fluide à seuil de Bingham. Ce modèle est une généralisation d'un modèle composite initialement développé pour les suspensions de particules rigides dans un fluide de Maxwell. Cette généralisation repose sur des règles heuristiques qui ne sont pas rigoureusement justifiées. Néanmoins, la théorie peut être calibrée pour décrire les données de Geiker et d'autres [GBTN02] (Fig 1.4).

1.3.3.2 Modèle de Hobbs

Hobbs 1976 [Hob76] considère le béton comme un matériau biphasique constitué d'une pâte de ciment et de granulats. Les lois de comportement de la pâte et du béton sont définies par la loi de comportement de Bingham :

$$\tau_p = \tau_{0p} + \eta_p . \dot{\gamma}_p \tag{1.20}$$

$$\tau_b = \tau_{0b} + \eta_b . \dot{\gamma}_b \tag{1.21}$$

où p et b désignent les indices associés respectivement à la pâte et au béton.

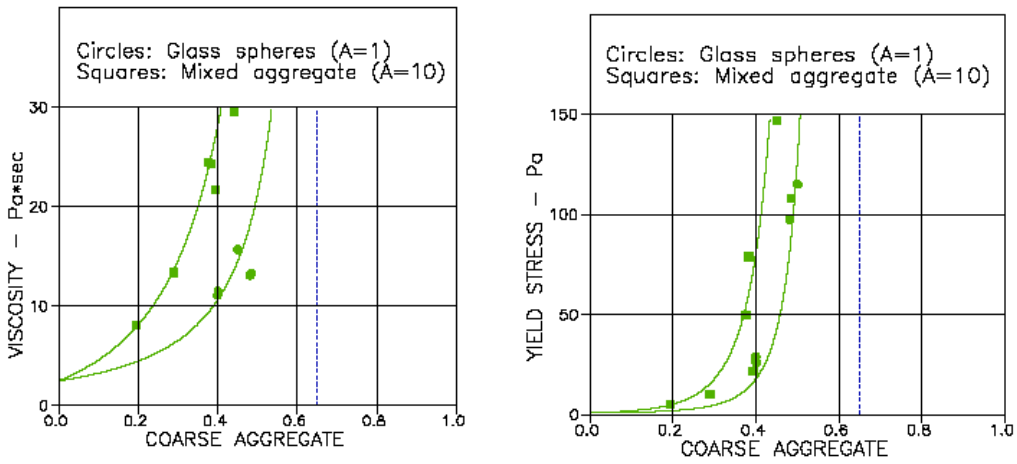


FIG. 1.4 – Viscosité et seuil de contrainte du béton en fonction de fraction volumique en particules ($\eta^0 = 2,5Pa.s, \tau_c^0 = 1Pa, \varphi_m = 0,65$, M(viscosité) $= 1, M$(seuil) $= 3,5$) [Nie93].

L'auteur essaie de prédire les propriétés du béton en fonction de celles de la pâte de ciment. La contrainte moyenne et le seuil de contrainte pour un volume élémentaire représentatif du béton s'écrivent en utilisant la loi des mélanges :

$$\tau_b = \tau_p(1-\varphi) + \tau_g\varphi \tag{1.22}$$

$$\tau_{0b} = \tau_{0p}(1-\varphi) + \tau_{0g}\varphi \tag{1.23}$$

où :
– τ_g désigne la contrainte exercée sur le granulat
– τ_{0g} désigne la contribution du granulat au seuil de contrainte en cisaillement du béton
– φ désigne la concentration volumique en granulat.

En considérant que la pâte est déformable et que les granulats sont rigides, le gradient de vitesse moyenne de déformation dans un volume élémentaire représentatif peut être écrit sous forme : $\dot{\gamma}_b = \dot{\gamma}_p(1-\varphi)$

Les deux hypothèses suivantes sont utilisées pour construire le modèle :

$$\tau_{0g} = k\tau_{0p} \tag{1.24}$$

$$\tau_g = k\tau_p \tag{1.25}$$

où k est une constante dépendante de la concentration en granulats, déterminée par l'expérience. L'auteur propose la relation suivante :

$$k = \frac{2,5\varphi_m}{\varphi_m - \varphi} \tag{1.26}$$

Finalement on obtient :

$$\tau_{ob} = \tau_{op}(1 + \frac{1,5\varphi_m\varphi + \varphi^2}{\varphi_m - \varphi}) \tag{1.27}$$

$$\eta_b = \eta_p[1 + \frac{2,5\varphi_m\varphi}{(\varphi_m - \varphi)(1 - \varphi)}] \tag{1.28}$$

Le modèle de Hobbs suppose que le fluide porteur (la pâte) obéit à une loi de Bingham. Il impose également que la loi du comportement de la suspension (le béton) soit du type Bingham. Les résultats obtenus se basent sur la loi des mélanges avec des hypothèses simplifiées. Pour prédire le seuil de contrainte et la viscosité du béton, ce modèle n'utilise que trois paramètres : le seuil de contrainte et la viscosité de la pâte ainsi que la fraction volumique maximale en particules.

Les deux modèles non Newtonien décrits ci-dessus ont essayé de lier la structure des suspensions et leurs propriétés pour prédire leur comportement rhéologique. Cependant, ces modèles reposent sur des règles heuristiques ou sur des lois et des hypothèses simplifiées. Le modèle de Nielsen donne les valeurs de seuil de contrainte énormes par rapport aux autres modèles. De plus, le comportement du fluide porteur et de la suspension sont forcément du type de la loi de Bingham : une loi de fluide à seuil newtonien qui ne peut pas décrire les fluides plus complexes (par exemple le fluide rhéopaississant ou rhéofluidifiant, ...).

1.3.4 Modèles numériques

A côté des approches expérimentales et des modèles analytiques, plusieurs auteurs ont tenté de modéliser le comportement de la suspension non Newtonien par voie numérique. Cette voie est très prometteuse car elle permet de traiter la localisation des particules dans la suspension et de prendre en compte plusieurs interaction interparticules.

De nos jours, la solution du problème pour les particules non colloïdales immergées dans un fluide Newtonien peut être calculée par simulation numérique (Brady 2001 [Bra01], Beaume 2006 [BLC06]). Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle ne peut être étendue au cas du fluide porteur non newtonien car elle repose sur une évaluation de la force hydrodynamique exercée sur chaque particule en fonction du taux de déformation macroscopique et de la vitesse relative de la particule par rapport au fluide (Bossis et Brady 1984 [BB84], Brady et Bossis 1988 [BB88]). Grâce à ces relations, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation continue de Stocke dans le fluide pour simuler le comportement de la suspension. Cela permet de simuler l'écoulement d'un volume élémentaire représentatif d'une suspension contenant de nombreuses particules. À notre connaissance, une telle équation n'existe pas pour des particules immergées dans un fluide à seuil.

On peut évidemment chercher à résoudre complètement le problème d'écoulement dans le fluide porteur en utilisant une méthode d'éléments finis adaptée aux spécificités des lois de comportement des fluides à seuil. Cette tâche est si coûteuse qu'à ce jour, aucune situation d'intérêt pratique n'a pu être résolue en dimension trois (Johnson et Tezduyar 1997 [JT97], Roquet et Saramito 2003 [RS03], Yu et Wachs 2007 [YW07]).

1.4 Méthode de changement d'échelle

Face à cette situation, la méthode de changement d'échelle apparaît comme un outil pertinent pour estimer les caractéristiques globales d'une suspension (Zaoui 2002 [Zao02], Bornert et al 2001 [BBG01]). Cette technique vise à identifier les propriétés macroscopiques d'un matériau hétérogène à partir de la description des propriétés de ses constituants à l'échelle microscopique.

Par ailleurs, notre problème est tout à fait similaire à ceux abordés dans le domaine du comportement des matériaux solides par Zaoui 2002 [Zao02]. La similitude des deux problèmes avait été identifiée par Batchelor et Green 1972 [BG72] dans le cas de fluide porteur à comportement linéaire. On peut voir également sur la figure 1.5 l'équivalence entre le comportement d'un matériau solide et celui d'un matériau liquide. De nouveaux développements concernant la micromécanique non-linéaire sont apparus dans les vingt dernières années, si bien que des estimations et des encadrements énergétiques sont maintenant disponibles (Ponte Castaneda 1997 [Cas97], Suquet 1997 [Suq97]).

Compte tenu des similitudes existant entre les problèmes d'homogénéisation des matériaux solides et ceux concernant les matériaux fluides, il apparaît naturel d'utiliser les résultats disponibles pour les matériaux solides hétérogènes à comportement non linéaire pour étudier le comportement des suspensions non Newtoniennes.

On présente donc dans la section suivante les principes et les résultats importants de l'approche par changement d'échelle du comportement des matériaux hétérogènes.

1.4.1 Méthodologie de la méthode de changement d'échelle

Le but des méthodes de changement d'échelle (dites aussi méthodes d'homogénéisation) est de prédire le comportement à l'échelle macroscopique de matériaux hétérogènes en partant d'une description de leurs propriétés constitutives se plaçant à une échelle plus fine (qualifiée de " microscopique "). L'objective d'un tel " changement d'échelle " est alors la détermination d'un " comportement effectif " macroscopique d'un " milieu homogène équivalent " pour le matériau hétérogène réel. Ainsi, le matériau hétérogène réel est remplacé par un " milieu homogène équivalent ". Ceci passe par la possibilité de définir un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) du matériau hétérogène et nécessite que l'on puisse distinguer deux échelles d'espace nettement séparées :
– une échelle macroscopique où le matériau est considéré comme homogène,
– une échelle microscopique caractéristique des hétérogénéités.
Le volume élémentaire représentatif (V.E.R.) est défini par assemblage de tous les éléments de petites tailles possédant les caractéristiques mécaniques et géométriques du matériau hétérogène étudié. Il joue le rôle de particule matérielle de milieu continu homogène constitué du matériau hétérogène étudié. Pour cela, le choix de la taille du V.E.R. (notée ℓ) par rapport à la " taille caractéristique " des hétérogénéités prises en compte (notée d) et celle du système mécanique considéré (notée L) doit respecter la double condition suivante (Fig 1.6) :

– $\ell \ll L$ pour que l'on puisse traiter la structure comme un milieu continu homogène et y déterminer des champs de contraintes et de déformations continus.

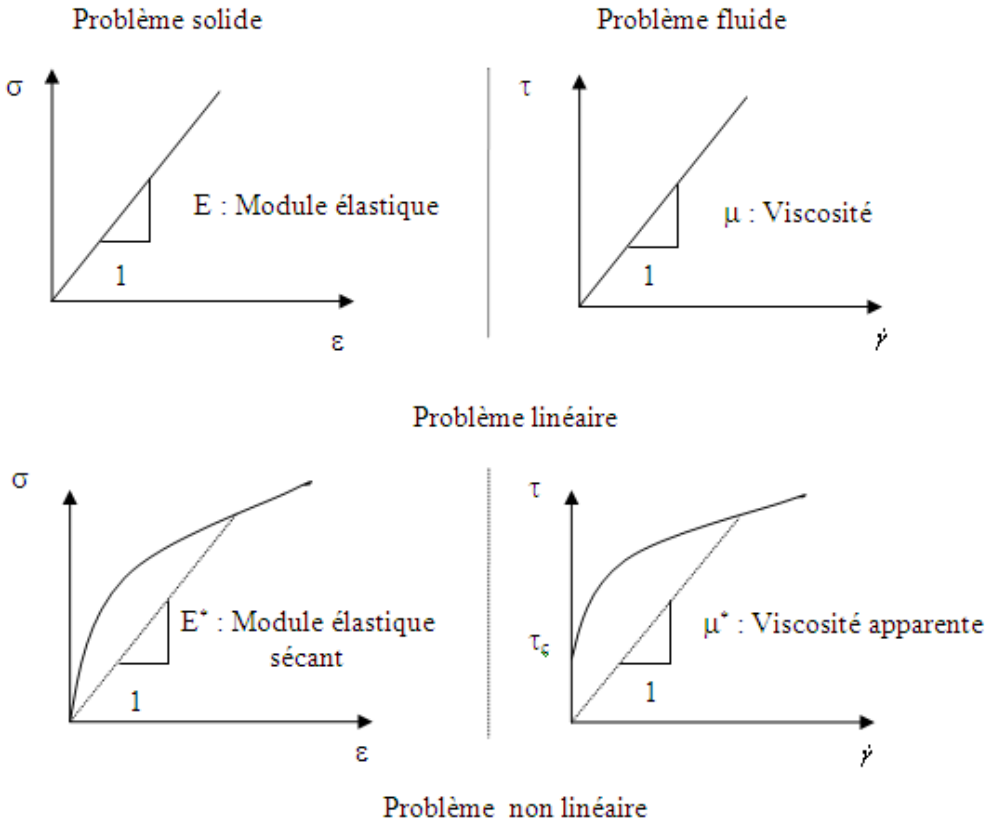


FIG. 1.5 – Similitude entre le problème solide et le problème fluide

– $\ell \gg d$: pour qu'on puisse caractériser le comportement du V.E.R. par une loi de comportement macroscopique homogène.

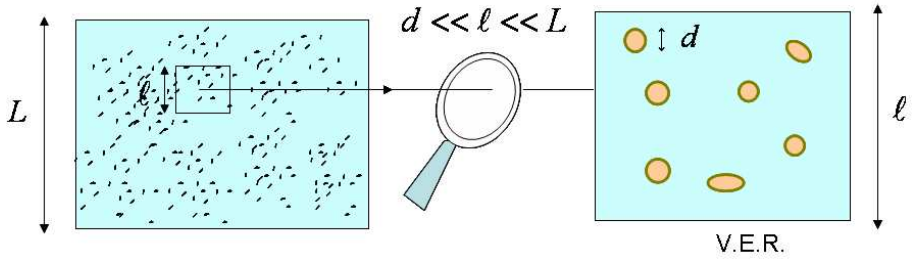


FIG. 1.6 – Séparation d'échelle

Si ces conditions sont satisfaites, on peut appliquer la méthodologie proposée par Zaoui 2000 [Zao00] qui distingue trois étapes successives pour obtenir le comportement homogénéisé d'un matériau hétérogène :

– l'étape représentation du V.E.R.,
– l'étape localisation,
– l'étape homogénéisation.

Dans la section suivante, ces trois étapes sont décrites successivement.

1.4.1.1 L'étape de représentation du V.E.R.

On considère un V.E.R. de matériau hétérogène occupant à l'instant considéré le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$ (Fig 1.7).

L'étape de représentation permet de décrire le V.E.R. à l'échelle microscopique. Pour cela, on précise d'abord les différentes phases constitutives du matériau hétérogène (par exemple les phases matrice et inclusion dans le cas d'une suspension de particules ne se touchant pas). Puis, on décrit les caractéristiques géométriques de chacune de ces phases (fraction volumique, forme, taille,...) ainsi que leurs caractéristiques mécaniques (module élastique, interaction entre phases...). On doit également prendre en compte toutes les autres caractéristiques pouvant influer le comportement macroscopique.

Généralement, l'étape de représentation du V.E.R. est complexe et reste le plus incomplète sauf dans des situations exceptionnelles comme les matériaux à microstructure périodique.

1.4.1.2 L'étape de localisation

Dans le cadre d'une approche par changement d'échelle, l'étape de localisation consiste à définir et à résoudre un problème de structure posé sur le V.E.R. Cette étape permet obtenir les champs locaux de contrainte ou de déformation et permet d'établir le lien entre comportement à l'échelle microscopique et caractérisation du comportement à l'échelle macroscopique.

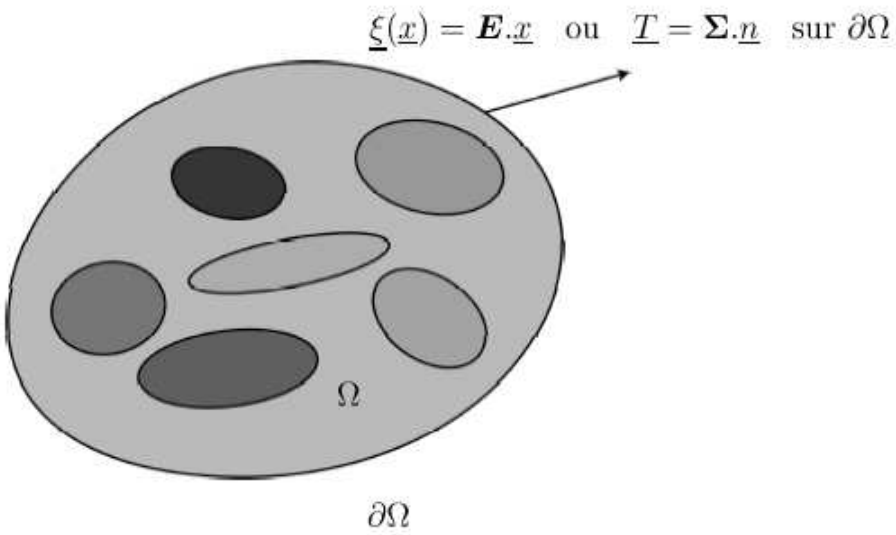


FIG. 1.7 – V.E.R. et conditions homogènes au contour

Pour avoir des problèmes aux limites bien posés dans le cas de matériaux hétérogènes à structures aléatoires, nous avons utilisé les deux modes de chargement classiques pour décrire la sollicitation appliquée au V.E.R. : le mode de chargement en déformation homogène et le mode de chargement en contrainte homogène. Ces deux modes de chargement sont décrits dans la suite de ce chapitre.

Le comportement local du matériau s'exprime sous forme fonctionnelle sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \boldsymbol{R}_x[\boldsymbol{\epsilon}(\underline{x})] \quad (\forall x \in \Omega) \tag{1.29}$$

ou sous la forme :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{Q}_x[\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})] \quad (\forall x \in \Omega) \tag{1.30}$$

où $\boldsymbol{Q}_x$ et $\boldsymbol{R}_x$ désignent deux fonctionnelles telles que $\boldsymbol{Q}_x = \boldsymbol{R}_x^{-1}$.

$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$, $\boldsymbol{\epsilon}(\underline{x})$ désignent respectivement le champ de tenseur des contraintes de Cauchy et le champ de tenseur des déformations à l'échelle microscopique, $\underline{x}$ désigne le vecteur de position à l'échelle microscopique et l'indice "x" attaché à ces fonctionnelles exprime le caractère hétérogène du matériau.

Pour les deux modes de chargement, aucune force à distance ne s'applique sur le V.E.R.. On a donc la condition d'équilibre :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 \quad (\forall x \in \Omega) \tag{1.31}$$

Déformations homogènes au contour :

Dans ce cas, on impose le déplacement, $\underline{\xi}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x}$, sur $\partial\Omega$ avec le tenseur de déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ donné (Fig 1.7). On montre que on a la propriété :

$$< \boldsymbol{\epsilon} >= \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega = \boldsymbol{E} \tag{1.32}$$

où $< >$ désigne l'opérateur de moyenne.

L'équation (1.32) montre que la déformation macroscopique est donc égale à la moyenne spatiale des déformations locales dans le V.E.R.. On définit le tenseur de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ par la même relation de moyenne :

$$\boldsymbol{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma} >= \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \tag{1.33}$$

Contraintes homogènes au contour :

Dans ce cas on impose les forces surfaciques : $\underline{T} = \boldsymbol{\Sigma}.\underline{n}$ sur $\partial\Omega$ avec le tenseur de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ donné, $\underline{n}$ désigne la normale unitaire sortante le long du contour $\partial\Omega$ (Fig 1.7).

On montre également qu'on a la propriété :

$$< \boldsymbol{\sigma} >= \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \boldsymbol{\Sigma} \tag{1.34}$$

L'équation (1.34) montre que la contrainte macroscopique est donc égale à la moyenne spatiale des contraintes locales dans le V.E.R.. On définit alors le tenseur de déformation macroscopique par la même relation de moyenne :

$$\boldsymbol{E} =< \boldsymbol{\epsilon} >= \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \boldsymbol{\epsilon} d\Omega \tag{1.35}$$

A partir de la loi de comportement locale, de la condition d'équilibre et des conditions aux limites, on admet que le problème de localisation admet une unique solution $(\underline{\xi}(\underline{x}), \boldsymbol{\epsilon}(\underline{x}), \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}))$, ce qui assure la validité de la démarche

Pour obtenir une écriture générale des résultats, on considère que la loi de localisation peut s'écrire sous la forme fonctionnelle générique suivante pour les déformations :

$$\epsilon(\underline{x}) = \boldsymbol{A}_x[\boldsymbol{E}, Y(\underline{x})] \tag{1.36}$$

où pour les contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \boldsymbol{B}_x[\boldsymbol{\Sigma}, Y(\underline{x})] \tag{1.37}$$

Dans ces expressions, $\boldsymbol{A}_x$ et $\boldsymbol{B}_x$ désignent les fonctionnelles de localisation et Y l'ensemble des paramètres attachés à la description géométrique et mécanique retenue du V.E.R.

1.4.1.3 L'étape d'homogénéisation

L'étape d'homogénéisation permet de déterminer la loi macroscopique à partir des moyennes des solutions locales calculées à l'étape précédente.

En effet, on peut déterminer le comportement macroscopique en combinant la loi de comportement locale ((1.29) ou (1.30)), la relation de moyenne ((1.32) ou (1.34)) et la loi de localisation ((1.36) ou (1.37)).

Selon que l'on considère la condition aux limites homogène en déformation ou homogène en contrainte on a :

$$\boldsymbol{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma} >=< \boldsymbol{R}_x[\boldsymbol{\epsilon}(\underline{x})] >=< \boldsymbol{R}_x \boldsymbol{A}_x[\boldsymbol{E}] > \tag{1.38}$$

avec

$$\boldsymbol{E} =< \boldsymbol{\epsilon} >=< \boldsymbol{Q}_x[\boldsymbol{\epsilon}(x)] >=< \boldsymbol{Q}_x \boldsymbol{B}_x[\boldsymbol{\Sigma}] > \tag{1.39}$$

On peut donc finalement écrire le comportement macroscopique sous la forme :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{R}_\epsilon^{hom}[\boldsymbol{E}] \tag{1.40}$$

avec

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Q}_\sigma^{hom}[\boldsymbol{\Sigma}] \tag{1.41}$$

où les indices ϵ et σ correspondent respectivement à la condition de déformation homogène au contour et à la condition de contrainte homogène au contour.

On peut également obtenir la relation énergique entre les grandeurs microscopiques et les grandeurs macroscopique en utilisant le lemme de Hill qui assure l'égalité entre le travail macroscopique et la moyenne spatiale du travail microscopique. Utiliser des modes de changement vérifiant ce lemme est fondamental en homogénéisation du comportement des matériaux hétérogènes si l'on veut assurer la cohérence énergétique des lois macroscopiques avec les lois microscopiques. Les deux modes de chargement décrits plus haut vérifient sûrement le lemme de Hill. Ce lemme est rappelé brièvement dans la section suivante.

Lemme de Hill :

Soient $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ et $\boldsymbol{\epsilon}(\underline{x})$ deux champs respectivement de contraintes équilibrées ($\underline{\text{div}}\boldsymbol{\sigma} = 0$ dans Ω) et de déformations compatibles (c'est à dire telles qu'il existe $\underline{\xi}$ vérifiant $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\underline{\xi} + \nabla^T\underline{\xi})$). Alors, si $\boldsymbol{\sigma}$ vérifie des conditions en contraintes homogènes au contour ou si $\boldsymbol{\epsilon}$ vérifie des conditions en déformations homogènes au contour, on a :

$$< \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} >=< \boldsymbol{\sigma} >:< \boldsymbol{\epsilon} >= \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} \tag{1.42}$$

On vérifie donc que les grandeurs définies à l'échelle macroscopique comme la contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$, la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$, l'énergie mécanique macroscopique se calculent à partir de leur contrepartie à l'échelle microscopique en utilisant le même opérateur de moyenne.

1.4.1.4 Conclusion

Les fonctionnelles homogénéisées $\boldsymbol{R}_{\epsilon}^{hom}$ ou $\boldsymbol{Q}_{\sigma}^{hom}$ représentent la solution du problème. La détermination exacte de ces fonctionnelles est en général très difficile car elle dépend de la description du V.E.R. et de la solution locale. En fait, la représentation exacte du V.E.R. est généralement incomplète et le comportement local complexe. Même dans le cas idéal où on dispose de toutes les informations nécessaires, le problème est encore très difficile à résoudre. Ceci explique que dans la majorité des situations d'intérêt pratique, on ne cherche pas à calculer la solution exacte du problème et que l'on se contente de rechercher des encadrements énergétiques ou des estimations du comportement homogénéisé.

Les approches variationnelles et les approches d'estimations classiques sont décrites brièvement dans la suite.

1.4.2 Méthodes variationnelles

Les approches variationelles du comportement effectif d'un matériau hétérogène s'appuient sur des caractérisations énergétiques ou fonctionnelles de la solution du problème de localisation posé sur le V.E.R.. Elles ne peuvent donc être mises en œuvre que dans la mesure où une telle caractérisation existe pour le comportement spécifique du matériau étudié. Dans le cas d'un comportement linéaire du matériau constitutif du V.E.R., il existe deux caractérisations fonctionnelles de la solution du problème de localisation, une en contrainte et l'autre en déformation (ou taux de déformation). A partir de ces formulations et en utilisant des champs d'essais uniformes sur le V.E.R., il est possible d'obtenir les bornes de Voigt et de Reuss (Zaoui 2000[Zao00]), ces bornes ne dépendent que des caractéristiques des différents matériaux constitutifs du V.E.R., et de la fraction volumique occupée par chacune des phases ; elles peuvent donc être calculées dans de nombreuses situations d'intérêt pratique.

Dans les situations où l'on dispose d'informations complémentaires sur la morphologie du V.E.R., il est possible d'obtenir un encadrement plus précis en utilisant des champs d'essais plus élaborés. A titre d'illustration, on peut citer les bornes de Hashin-Shtrikman dans le cas de matériaux constitués de matériaux isotropes dont la distribution spatiale au sein du V.E.R. est également isotrope [ZS62].

1.4.3 Méthodes d'estimation

Les méthodes d'estimation visent à obtenir une estimation des caractéristiques globales du matériau hétérogène considéré. Différentes méthodes plus ou moins élaborées ont été proposées dans littérature pour répondre à cette question. Historiquement, les premières estimations proposées correspondaient aux situations diluées, applicables uniquement dans les situations où les fractions volumiques occupées par les hétérogénéités sont suffisamment faibles pour que l'on puisse négliger les interactions entre hétérogénéités (estimation d'Einstein dans le cas d'une suspension Newtonienne, estimation d'Eshelby dans le cas d'un composite élastique). Dans le but de rendre compte de l'existence d'interaction entre phases, différentes méthodes ont été proposées : on citera en particulier les méthodes en milieu effectif, conduisant aux estimations autocohérentes ainsi que les méthodes en champ

effectif conduisant aux estimations de Mori-Tanaka ou de Maxwell. Il est à noter qu'une interprétation de ces deux grandes classes de méthodes d'estimation à partir de la formulation variationnelle du problème de localisation a été donnée par Bornert 2001 [BBG01] dans le cas d'un comportement linéaire du matériau. Dans ce cadre, il a également été proposé de nouvelles estimations, comme les estimations par motifs morphologiques représentatifs, qui permettent de mieux rendre compte des propriétés morphologiques du V.E.R.. Comme on le verra dans la suite de ce mémoire, il est également possible de proposer des estimations des caractéristiques globales d'un matériau hétérogène que ces constituants obéissent à des lois de comportement non linéaires (Suquet 1997 [Suq97]).

1.5 Conclusion

Dans ce bref chapitre introductif, on a tout d'abord présenté de façon sommaire les principales caractéristiques du comportement des suspensions des particules pouvant être mises en évidence expérimentalement. On a ensuite passé en revue certains modèles déjà connus visant à représentes le comportement de des matériaux ainsi qu'à prédire les caractéristiques globales de la suspension à partir de ces caractéristiques. On s'est ensuite attaché à redonner les principales caractéristiques des méthodes de changement d'échelle visant à obtenir une description homogène équivalente du comportement d'un matériau hétérogène.

Dans le prochain chapitre, on met en œuvre les méthodes de la micromécanique pour traiter le problème que nous intéresse, à savoir le comportement global d'une suspension de particules non colloïdale indéformables dans un fluide à seuil.

CHAPITRE

2

Homogénéisation d'une suspension de particules dans un fluide à seuil

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de construire un modèle permettant d'estimer les caractéristiques rhéologiques d'une suspension constituée de particules non colloïdales immergées dans un fluide à seuil dont les propriétés sont connues. On utilise pour construire ce modèle une méthode d'homogénéisation. En effet, comme on l'a rappelé au chapitre précédent, ces méthodes permettent d'obtenir une caractérisation globale du comportement d'un matériau à partir d'une caractérisation mécanique et morphologique des éléments constitutifs de ce matériau.

Dans un premier temps, on donne une présentation détaillée de l'approche par changement d'échelle du comportement d'une suspension de particules dans un fluide dont le comportement dérive d'un **potentiel**. A ce stade aucune approximation n'est utilisée et on redonne les résultats théoriques exacts qui peuvent être établis dans ce cas.

On s'intéresse ensuite au comportement d'une suspension de particules dans un fluide Newtonien. On établit que le comportement macroscopique de ce matériau est **linéaire** à morphologie donnée. On utilise l'approche variationnelle ainsi que les méthodes d'estimations classiques pour redonner les encadrements et les estimations classiques de la viscosité dans la situation isotrope. On présente également un modèle morphologique à deux motifs et deux phases permettant d'améliorer notablement l'estimation de la viscosité d'une suspension monodisperse isotrope.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on aborde la question principale de ce travail, c'est à dire l'homogénéisation du comportement d'une suspension dans un fluide à seuil dont le comportement est décrit par une loi de Herschel-Bulkley. Pour traiter ce problème, on se place dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation **non linéaire** initialement développée pour traiter du comportement des matériaux solides hétérogènes à comportement non linéaire. De nouveau, on met en œuvre une approche variationnelle, ce qui nous a permis d'obtenir une borne inférieure du potentiel décrivant le comportement global de la suspension, ainsi des estimations du seuil d'écoulement global et de la consistance globale de la suspension étudiée.

2.2 Homogénéisation d'une suspension de particules rigides dans un fluide porteur

On considère une suspension dont la loi de comportement des constituants est connue. On suppose que l'on peut l'exprimer cette loi en tout point du V.E.R. sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{d}(\underline{x})) \tag{2.1}$$

où w désigne l'expression du potentiel microscopique.

On suppose par ailleurs qu'il est possible de distinguer trois échelles caractéristiques : L de l'ordre de grandeur de la taille du domaine sur lequel on résout le problème d'écoulement, ℓ de l'ordre de grandeur de la taille du V.E.R. et d de l'ordre de grandeur des particules. On se place dans la situation où la condition de séparation des échelles $d \ll \ell \ll L$ est vérifiée [Zao02]. Ceci assure que l'on puisse caractériser le comportement du V.E.R. par une loi de comportement et que l'on puisse utiliser cette loi pour résoudre le problème d'écoulement.

Les trois étapes de la méthode d'homogénéisation sont donc appliquées dans la suite pour résoudre le problème de prédiction des caractéristiques rhéologiques de une cette suspension.

2.2.1 Représentation du V.E.R.

On considère un V.E.R. de suspension occupant à l'instant considéré le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. Les particules occupent le domaine Ω_s et le fluide porteur occupe le domaine Ω_ℓ, complémentaire de Ω_s dans Ω. On suppose que la frontière du V.E.R. est uniquement constituée de fluide (Fig 2.1).

Dans la suite, on suppose que les hypothèses suivantes sont toujours satisfaites :

- Les particules sont rigides, indéformables, sphériques, monodisperses et non colloïdales,
- Le fluide porteur est incompressible et homogène,
- Il y a adhérence parfaite (c'est à dire non glissement) entre les particules et le fluide porteur.

↺

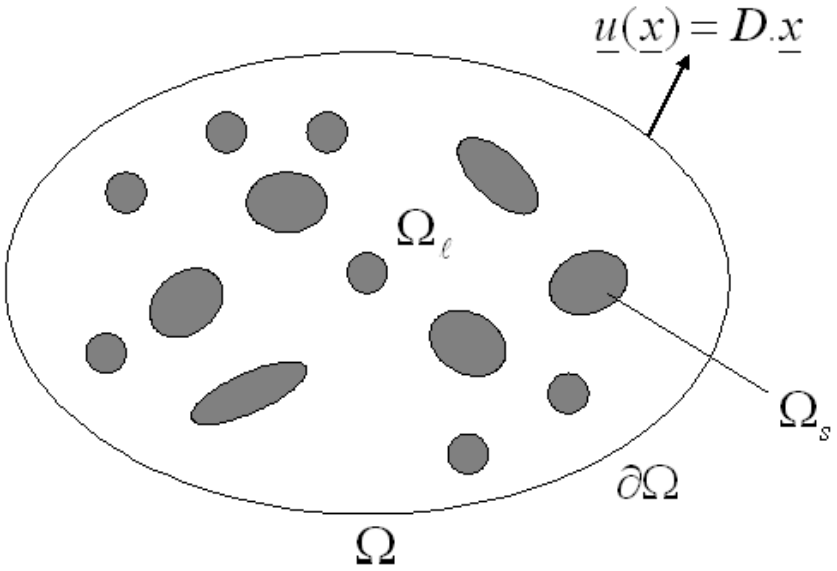


FIG. 2.1 – V.E.R. de suspension avec les conditions aux limites qui lui sont appliquées

2.2.2 Localisation

A l'échelle microscopique, le comportement du matériau est décrit dans le cadre de la mécanique des milieux continus classiques. On désigne par x le vecteur de position à l'échelle microscopique, par $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ le champ de tenseur des contraintes de Cauchy à l'échelle microscopique, par $\underline{u}(\underline{x})$ le champ de vitesse à l'échelle microscopique et par $\boldsymbol{d}(\underline{x})$ le champ des taux de déformation à l'échelle microscopique.

On adopte une représentation eulérienne du mouvement. On se restreint aux situations où les évolutions du système sont quasi-statiques et où les forces à distance sont négligeables à l'échelle microscopique. La loi de comportement macroscopique du milieu homogène équivalente s'obtient en résolvant un problème d'écoulement posé sur le domaine Ω occupé par le V.E.R..

Le chargement macroscopique appliqué sur le V.E.R. est défini par une condition de Hashin (homogène en vitesse), qui relie la vitesse des points situés sur le bord du V.E.R. à la valeur du tenseur taux de déformation eulérien macroscopique $\boldsymbol{D}$ (Fig 2.1) :

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{D}.\underline{x} \tag{2.2}$$

et par la condition d'équilibre sans force de volume :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 \tag{2.3}$$

Le fluide est incompressible et les particules sont indéformables, on a donc :

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \\ \\ \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \Omega_s) \end{cases} \tag{2.4}$$

↺

La condition de limite de Hashin impose que le tenseur des taux de déformation à l'échelle marcroscopique $\boldsymbol{D}$ est égal à la moyenne (sur le domaine Ω) du tenseur des taux de déformation à l'échelle microscopique. En utilisant (2.4) on a :

$$\boldsymbol{D} =< \boldsymbol{d} >= (1-\varphi) < \boldsymbol{d} >_\ell \tag{2.5}$$

où $< . >$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par le V.E.R., $< . >_\ell$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par le fluide Ω_ℓ, φ désigne la fraction volumique occupée par les particules rigides au sein de la suspension et est défini par le rapport volumique des particules Ω_s et du V.E.R. de suspension Ω.

Comme indiqué au chapitre 1, on définit le tenseur de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ à partir du champ de contrainte microscopique $\boldsymbol{\sigma}$ en utilisant le même opérateur de moyenne sur le domaine Ω. En utilisant le fait que le V.E.R. se compose de la phase " fluide " et de la phase " particule " on obtient :

$$\boldsymbol{\Sigma} =< \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) >= (1-\varphi) < \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) >_\ell + \varphi < \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) >_s \tag{2.6}$$

où $< . >_s$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par les particules.

Le problème de localisation associé au mode de chargement en taux de déformation homogène au contour est donc un problème d'écoulement à force de volume nulle défini par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{d}(\underline{x})) \quad (\forall \underline{x} \in \Omega) \\ tr\boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \\ \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad (\forall \underline{x} \in \Omega_s) \\ \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 1/2(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \quad (\Omega_\ell) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{D}.\underline{x} \quad (\partial\Omega) \\ \text{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 \quad (\Omega) \end{cases} \tag{2.7}$$

La résolution de ces équations donne la solution unique du problème de localisation.

2.2.3 Homogénéisation

La loi comportement macroscopique s'obtient en reportant la solution (2.7) du problème dans la relation de moyenne (2.6). On obtient ainsi la valeur du tenseur de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ en fonction du tenseur de taux de déformation $\boldsymbol{D}$ et du champ de variables d'état sur le V.E.R..

Hill a montré que le comportement à l'échelle macroscopique s'écrit également sous la forme fonctionnelle suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{D}) \tag{2.8}$$

↻

où W désigne l'expression du potentiel macroscopique défini par :

$$W(\boldsymbol{D}) = \min_{\boldsymbol{d} \in K(\boldsymbol{D})} < w(\boldsymbol{d}) > \tag{2.9}$$

où $K(\boldsymbol{D})$ désigne l'espace des champs de vitesse cinématiquement admissible avec $\boldsymbol{D}$ défini par :

$$K(\boldsymbol{D}) = \{\boldsymbol{d}, \exists \underline{u} \text{ vérifiant } \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 1/2(\nabla \underline{u} + \nabla^T \underline{u}) \text{ dans } (\Omega) \text{ et } \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{D}.\underline{x} \text{ sur } (\partial\Omega)\} \tag{2.10}$$

La condition d'incompressibilité du fluide porteur et la condition de déformation nulle dans les particules assurent que la suspension est incompressible à l'échelle macroscopique, on a donc :

$$\text{tr } \boldsymbol{D} = 0 \tag{2.11}$$

2.3 Suspension dans un fluide Newtonien

Les principes et démarches de la méthode de changement d'échelle sont appliqués ici pour le cas du fluide Newtonien. Différentes estimations et encadrements sont présentés dans ce paragraphe.

2.3.1 Homogénéisation

Dans ce cas, la représentation du V.E.R. et le problème de localisation est identique à celui présenté à la section précédente sauf que la phase fluide est un fluide Newtonien qui obéit à la loi de Stokes. Cette loi de comportement s'écrit :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \text{tr } \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad et \quad \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 2\mu \boldsymbol{d}(\underline{x}) - p(\underline{x})\boldsymbol{\delta} \tag{2.12}$$

où μ est la viscosité et p est la pression du fluide.

On s'intéresse uniquement à la partie déviatorique de la loi comportement car elle représente la contrainte de cisaillement dans un problème d'écoulement et elle est proportionnelle au taux de déformation du fluide. On note $\boldsymbol{s}(\underline{x})$ la partie déviatorique du tenseur contrainte $\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ microscopique, soit :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \text{tr } \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 \quad et \quad \boldsymbol{s}(\underline{x}) = 2\mu \boldsymbol{d}(\underline{x}) \tag{2.13}$$

On désigne désormais par les tenseurs $\boldsymbol{d}, \boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{s}$ les grandeurs à l'échelle microscopique $\boldsymbol{d}(\underline{x}), \boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ et $\boldsymbol{s}(\underline{x})$

En ne conservant que la partie déviatorique de la relation de moyenne (2.6), on obtient aussi la partie déviatorique, noté $\boldsymbol{S}$, du tenseur contrainte $\boldsymbol{\Sigma}$ marcroscopique :

$$\boldsymbol{S} =< \boldsymbol{s} > \tag{2.14}$$

Compte tenu de la linéarité du problème, le tenseur contrainte de cisaillement dépend linéairement de la valeur du tenseur taux de déformation. A l'échelle macroscopique, le comportement s'écrit :

$$\text{tr}\, \boldsymbol{D} = 0 \quad et \quad \boldsymbol{S} = \mathbb{C}_h : \boldsymbol{D} \tag{2.15}$$

où $\mathbb{C}_h$ désigne le tenseur du quatrième ordre symétrique défini positif, caractérisant le comportement à l'échelle macroscopique.

Si la répartition des particules au sein du V.E.R. est isotrope, la suspension est également isotrope, on a alors :

$$\text{tr}\, \boldsymbol{D} = 0 \quad et \quad \boldsymbol{S} = 2\mu_h \boldsymbol{D} \tag{2.16}$$

Soit $\mathbb{K}$ le tenseur du quatrième ordre permettant d'extraire la partie déviatorique d'un tenseur du second ordre symétrique. Il est défini par relation :

$$\forall \mathbf{a}, \text{ un tenseur du second ordre symétrique, on a : } \quad \mathbb{K} : \mathbf{a} = \mathbf{a} - 1/3 \quad \text{tr}\, \mathbf{a}\ \boldsymbol{\delta} \tag{2.17}$$

où $\boldsymbol{\delta}$ désigne le tenseur unité du second ordre. $\mathbb{K}$ s'interprète que l'application identité sur l'espace des tenseurs symétriques du second ordre dont la trace est nulle. Lorsque l'on prend : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}$ ou $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{D}$, les comportements peuvent s'écrire :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \text{tr}\, \boldsymbol{d} = 0 \quad et \quad \boldsymbol{s} = 2\mu \boldsymbol{d} = 2\mu \mathbb{K} : \boldsymbol{d} \tag{2.18}$$

$$\text{tr}\, \boldsymbol{D} = 0 \quad et \quad \boldsymbol{S} = \mathbb{C}_h : \boldsymbol{D} = 2\mu_h \boldsymbol{D} = 2\mu_h \mathbb{K} : \boldsymbol{D} \tag{2.19}$$

La relation (2.5) permet de calculer la relation entre la moyenne du taux de déformation microscopique dans le domaine fluide et le taux de déformation macroscopique :

$$< \boldsymbol{d} >_\ell = \frac{1}{(1-\varphi)} \boldsymbol{D} \tag{2.20}$$

On peut obtenir une écriture du comportement macroscopique faisant intervenir directement la moyenne des efforts intérieurs dans les particules. En ne conservant que la partie déviatorique de la relation de moyenne sur la contrainte (2.6) et en utilisant le fait que le V.E.R. est constitué de particules et de fluide, on obtient :

$$\mathbf{S} =< \boldsymbol{s} >= (1-\varphi) < \boldsymbol{s} >_\ell + \sum_{i=1,n} \varphi_i < \boldsymbol{s} >_i \tag{2.21}$$

où n désigne le nombre de particules contenues dans la suspension, φ_i désigne la fraction volumique occupée par chaque particule dans la suspension et $< \boldsymbol{s} >_i$ la moyenne de $\boldsymbol{s}$ sur le domaine occupé par le particule numéro i.

↻

En utilisant la loi de comportement $\boldsymbol{s} = 2\mu\boldsymbol{d}$ dans le fluide Newtonien, l'équation (2.21) s'écrit donc :

$$\boldsymbol{S} =< \boldsymbol{s} >= (1-\varphi)2\mu < \boldsymbol{d} >_\ell + \sum_{i=1,n} \varphi_i < \boldsymbol{s} >_i \tag{2.22}$$

En utilisant la relation moyenne de taux de déformation (2.20), on obtient alors :

$$\boldsymbol{S} = 2\mu\boldsymbol{D} + \sum_{i=1,n} \varphi_i < \boldsymbol{s} >_i \tag{2.23}$$

Compte tenu de la linéarité du problème, $< \boldsymbol{s} >_i$ dépend linéairement de $\boldsymbol{D}$, ce qui s'écrit :

$$< \boldsymbol{s} >_i = \mathbb{S}_i : \boldsymbol{D} \tag{2.24}$$

avec $\mathbb{S}_i$, un tenseur de localisation du quatrième ordre.

Donc, à l'échelle macroscopique, le comportement de la suspension Newtonienne s'écrit sous la forme (2.15) avec :

$$\mathbb{C}_h = 2\mu\mathbb{K} + \sum_{i=1,n} \varphi_i \mathbb{S}_i \tag{2.25}$$

Comme on l'a déjà vu au chapitre 1, il est en général difficile de complètement déterminer la répartition spatiale des phases dans le V.E.R.. La détermination exacte de $\mathbb{C}_h$ ou μ_h est donc très difficile et complexe, voire impossible. C'est pour cette raison que l'on met en œuvre dans la suite les méthodes d'encadrement et d'estimation pour traiter ce problème.

2.3.2 Approche variationnelle

Grâce au principe de minimum appliqué pour le problème à vitesse de déplacement imposée [BBG01], on montre :

$$W(\boldsymbol{D}) = \min_{\boldsymbol{d} \in K(\boldsymbol{D})} < w(\boldsymbol{d}) > \tag{2.26}$$

On a également la formulation duale de ce problème :

$$W^*(\boldsymbol{\Sigma}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\boldsymbol{\Sigma})} < w^*(\boldsymbol{\sigma}) > \tag{2.27}$$

où $S(\boldsymbol{\Sigma})$ désigne l'espace des champs de contrainte statiquement admissible défini par :

$$S(\boldsymbol{\Sigma}) = \{\boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega, < \boldsymbol{\sigma} >= \boldsymbol{\Sigma}\} \tag{2.28}$$

↻

On obtient donc la formulation variationnelle en vitesse de loi de comportement (2.15) suivante :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{D} : \mathbb{C}_h : \boldsymbol{D} = \frac{1}{2} \min_{\boldsymbol{d} \in K(\boldsymbol{D})} < \boldsymbol{d} : \mathbb{C} : \boldsymbol{d} > \tag{2.29}$$

ou sous la forme duale :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{S} : \mathbb{C}_h^{-1} : \boldsymbol{S} = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\boldsymbol{\Sigma})} \frac{1}{2} < \boldsymbol{s} : \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{s} > \tag{2.30}$$

Les principes (2.29), (2.30), un choix judicieux de champs admissibles " pertinents " compatibles avec l'information disponible sur le milieu hétérogène, permettent d'encadrer $\mathbb{C}_h$, ou μ_h pour le milieu homogène équivalent. Ils permettent d'obtenir les bornes de Voigt et de Reuss ou les bornes de Hashin-Shtrikman suivantes.

2.3.2.1 Bornes de Voigt et de Reuss

Dans la situation où sont connus les fractions volumiques et les modules des phases constitutives, on obtient les bornes de Voigt et de Reuss qui découlent du choix de champs uniformes pour les champs tests de contraintes ou de déformations dans le V.E.R..

Borne de Voigt

En utilisant un champ de déformations uniformes dans le principe (2.29), on obtient :

$$\forall \boldsymbol{D} \quad \boldsymbol{D} : \mathbb{C}_h : \boldsymbol{D} \leq \infty \tag{2.31}$$

Cette inégalité est obtenue avec un champ de déformations uniformes, ce qui conduit à un taux de déformation non nul dans les particules. Dans ce cas, le potentiel dans les particules est infini, ce qui conduit à l'opérateur $< w(\boldsymbol{D}) >= \infty$.

Borne de Reuss

Cette borne s'obtient en utilisant un champ de contrainte homogène dans le V.E.R. pour la relation (2.30).

Le principe de minimisation de l'énergie complémentaire du problème s'écrit dans le cas d'un fluide suspendant homogène :

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{S} : \mathbb{C}_h^{-1} : \boldsymbol{S} = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in S(\boldsymbol{\Sigma})} (1-\varphi)\frac{1}{4\mu} < \boldsymbol{s} : \boldsymbol{s} >_\ell \tag{2.32}$$

En utilisant le fait que le champ de contrainte est uniforme sur toute le V.E.R., la borne de Reuss est définie par :

$$\forall \boldsymbol{S} \quad \boldsymbol{S} : \mathbb{C}_h^{-1} : \boldsymbol{S} \leq \frac{1-\varphi}{2\mu}\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S} \tag{2.33}$$

↻

Si on suppose que la suspension est isotrope à l'échelle macroscopique, les bornes de Reuss et de Voigt pour la viscosité de la suspension s'écrivent alors :

$$\frac{\mu}{1-\varphi} \leq \mu^{hom} \leq \infty \tag{2.34}$$

2.3.2.2 Borne inférieure de Hashin-Shtrikman

Quand on suppose que la distribution spatiale des particules qui est isotrope dans le V.E.R., on peut utiliser la borne inférieure de Hashin-Shtrikman [ZS62]. Cette borne améliore la borne de Reuss et s'écrit :

$$\mu^{hom} \geq \mu \frac{2+3\varphi}{2(1-\varphi)} \tag{2.35}$$

La borne inférieure de Hashin-Shtrikman a un grand intérêt. En effet, elle peut permettre éventuellement de détecter qu'une suspension n'est pas isotrope à partir de la mesure expérimentale de sa viscosité apparente.

2.3.3 Estimation de Jeffery

On s'intéresse maintenant à l'estimation des caractéristiques de la suspension. On utilise tout d'abord une estimation basée sur la solution de Jeffery pour une inclusion ellipsoïdale. Pour montrer comment on peut prendre en compte les caractéristiques morphologiques des particules, différents schémas d'estimation (Dilué, Mori-Tanaka, Autocohérent) sont présentés.

2.3.3.1 Solution de Jeffery

Comme on l'a vu précédemment (2.25), pour estimer le tenseur de module $\mathbb{C}_h$, il faut estimer le tenseur de localisation par particule $\mathbb{S}_i$. On utilise pour cela la solution de Jeffery [Jef22] qui permet d'estimer la vitesse de rotation et la contrainte $\boldsymbol{s}^i$ dans une particule ellipsoïdale indéformable occupant le domaine I immergé dans un fluide Newtonien de viscosité μ_0 soumis à un taux de déformation uniforme $\boldsymbol{D}_0$ à l'infini. Dans la section suivante, on présente la solution de Jeffery et on indique comment cette solution peut être utilisée pour construire des estimations de $\mathbb{C}_h$ et de la viscosité macroscopique μ^{hom} pour une suspension Newtonienne.

Ce problème est défini par les équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 & (\underline{x} \in I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 2\mu_0 \boldsymbol{d}(\underline{x}) - p(\underline{x})\boldsymbol{\delta} & (\underline{x} \in \Omega - I) \\ \text{tr}\, \boldsymbol{d}(\underline{x}) = 0 & (\underline{x} \in \Omega - I) \\ \boldsymbol{d} \longrightarrow \boldsymbol{D}_0 & (|\underline{x}| \longrightarrow \infty) \\ \text{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega) \\ |[\underline{u}]|=0 \quad \text{et } |[\boldsymbol{\sigma}]|.\underline{n} = 0 & (\forall \underline{x} \in \Omega) \end{cases} \tag{2.36}$$

Compte tenu de la condition d'incompressibilité vérifiée en chaque point du domaine Ω, ce problème n'admet de solution que si tr $\boldsymbol{D}_0 = 0$. Par ailleurs, seule la partie déviatorique de la contrainte solution du problème (2.36) est définie de façon univoque. Compte tenu du caractère indéformable de la particule, la solution en vitesse s'écrit dans le domaine I :

$$(\forall \underline{x} \in I) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{\omega}^I.\underline{x} \tag{2.37}$$

où $\boldsymbol{\omega}^I$ désigne le tenseur taux de rotation qui s'établit dans la particule.

La solution de Jeffery s'écrit :

$$\boldsymbol{s}^I = \mathbb{S}^I : \boldsymbol{D}_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega}^I = \mathbb{R}^I : \boldsymbol{D}_0 \tag{2.38}$$

où $\boldsymbol{s}^I$ désigne le tenseur déviatorique qui s'établit dans la particule.

$\mathbb{S}^I$ et $\mathbb{R}^I$ sont des tenseurs du quatrième ordre dont la valeur dépend de la forme et de l'orientation de l'inclusion mais ne dépendent pas de la taille de la particule. La valeur de $\mathbb{S}^I$ dépend également de la valeur de μ_0.

Dans le cas d'une particule sphérique immergée dans un milieu incompressible dont le comportement est linéaire et isotrope, la première relation de Jeffery s'écrit :

$$\mathbb{S}^I = 5\mu_0 \mathbb{K} \tag{2.39}$$

La solution de Jeffery est évidemment un outil pour valoriser la relation (2.25) permettant de calculer les caractéristiques globales d'une suspension Newtonien. Il faut maintenant choisir un bon schéma d'estimation permettant de rendre compte du mieux possible des caractéristiques morphologiques du V.E.R.. On présente dans la section suivante trois schémas d'estimation d'homogénéisation classiques.

2.3.3.2 Prise en compte les caractéristiques morphologiques

Estimation diluée - Relation d'Einstein

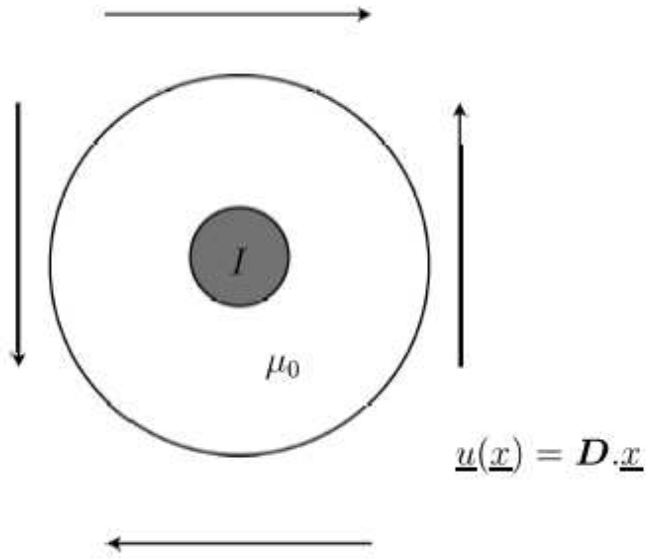


FIG. 2.2 – Solution de Jeffery pour une sphère

Ce schéma s'applique aux situations où la concentration en particules est très faible. Dans ce cas, les particules sont suffisamment éloignées les unes des autres, pour que l'on puisse négliger les interactions entre elles, et considérer que loin des particules, le champ de taux de déformation dans le fluide est très peu différent du champ de taux de déformation $\boldsymbol{D}$ appliqué. Cette description correspondant exactement au problème de Jeffery.

Dans ce cas, on peut utiliser directement la relation de Jeferry $\mathbb{S}^I = 5\mu_0\mathbb{K}$ (2.39) avec $\mu_0 = \mu$ dans la relation (2.25). On retrouve ainsi l'estimation d'Einstein pour une suspension diluée de particules sphériques dans un fluide Newtonien :

$$\mathbb{C}^{DL} = 2\mu^{DL}\mathbb{K} \text{ avec } \mu^{DL} = \mu(1 + \frac{5}{2}\varphi) \tag{2.40}$$

Cette relation n'est valable que pour une très faible valeur de la concentration de l'ordre de quelque pourcents. Elle est exacte au premier ordre en φ [Zao00].

Estimation de Mori-Tanaka

Ce schéma cherche à prendre en compte les interactions entre particules. Pour cela, on suppose que chaque particule voit le fluide cisaillé soumis à l'infini à la moyenne du taux de déformation dans le fluide $\boldsymbol{D}_0$ différente de $\boldsymbol{D}$, la valeur imposée au V.E.R.. Il s'agit donc théorie du type champ effectif.

La relation entre les taux de déformations s'écrit dans ce cas :

$$\boldsymbol{D} = (1 - \varphi)\boldsymbol{D}_0 \tag{2.41}$$

↻

On a donc :

$$\boldsymbol{s}^I = \mathbb{S}^I : \boldsymbol{D}_0 = \frac{\mathbb{S}^I}{1-\varphi} : \boldsymbol{D} \tag{2.42}$$

Dans le cas où la suspension est isotrope on obtient en reportant (2.42) dans (2.25) :

$$\mathbb{C}^{MT} = 2\mu\mathbb{K} + \frac{\varphi}{1-\varphi} 5\mu\mathbb{K} = 2\mu^{MT}\mathbb{K} \tag{2.43}$$

Finalement on obtient :

$$\mu^{MT} = \mu\frac{(2+3\varphi)}{2(1-\varphi)} \tag{2.44}$$

L'estimation de Mori-Tanaka pour un matériau isotrope aux échelles microscopique et macroscopique est identique à la borne inférieur de Hashin-Shtrikman. Le schéma de Mori-Tanaka permet de rendre compte de l'existence d'interactions hydrodynamiques entre particules tant que ces dernières n'entraînent pas de modification de la microstructure de la suspension. En pratique, on admet que l'estimation de Mori-Tanaka est pertinente tant que la valeur de la fraction volumique occupée par la phase solide reste inférieure à une dizaine de pourcents. Pour les très faibles valeurs de la concentration volumique en particules on a :

$$\mu^{MT} = \mu\frac{(1+\frac{3}{2}\varphi)}{(1-\varphi)} \approx \mu\frac{(1+\frac{3}{2}\varphi-\frac{5}{2}\varphi^2)}{(1-\varphi)} = \mu(1+\frac{5}{2}\varphi) \tag{2.45}$$

On retrouve donc la relation du schéma dilué au premier ordre en φ.

Estimation autocohérente

Le schéma autocohérent permet d'aborder la situation où aucune phase ne joue le rôle de matrice au sein du V.E.R.. Dans ce cas, afin de rendre compte des interactions entre phase, on suppose que chaque phase voit le fluide moyen homogénéisé. Il s'agit donc d'une théorie du type milieu effectif. On prend $\mu_0 = \mu^{AC}$ dans la relation de Jeferry (2.39).

On a donc :

$$\mathbb{C}^{AC} = 2\mu\mathbb{K} + \varphi 5\mu^{AC}\mathbb{K} = 2\mu^{AC}\mathbb{K} \tag{2.46}$$

La résolution de l'équation (2.46) fournit l'estimation :

$$\mu^{AC} = \frac{\mu}{(1-\frac{5}{2}\varphi)} = \frac{\mu}{(1-\frac{\varphi}{0{,}4})} \tag{2.47}$$

On trouve que ce schéma permet de retrouver l'estimation de Krieger-Dougherty en admettant que la fraction volumique d'empilement maximale est égale à 40%, alors que ces deux résultats ont été obtenus par des raisonnements différents [KD59]. Cependant, cette

estimation n'est valable que quand la fraction volumique est inférieure à 40 %. Dans le cas où la concentration est très faible (φ tend vers zéro) on a :

$$\mu^{AC} = \frac{\mu}{(1 - \frac{5}{2}\varphi)} \approx \mu(1 + \frac{5}{2}\varphi) \quad \text{lorsque } \varphi \text{ tend vers zéro} \tag{2.48}$$

On retrouve également la relation du schéma dilué au premier ordre en φ.

2.3.3.3 Remarques et conclusions

Les relations (2.40), (2.44), (2.48) sont représentées sur la figure 2.3, ainsi que la relation de Krieger-Dougherty pour deux valeurs de la fraction volumique d'empilement maximale φ_m. Si l'on admet que les données expérimentales sont en générale bien décrites par la relation de Krieger-Dougherty pour des valeurs de φ_m de l'ordre de 60% (Cas d'une suspension monodisperse), il faut bien se rendre à l'évidence qu'aucune des trois relations ne fournit d'estimation valable pour toutes les valeurs de φ.

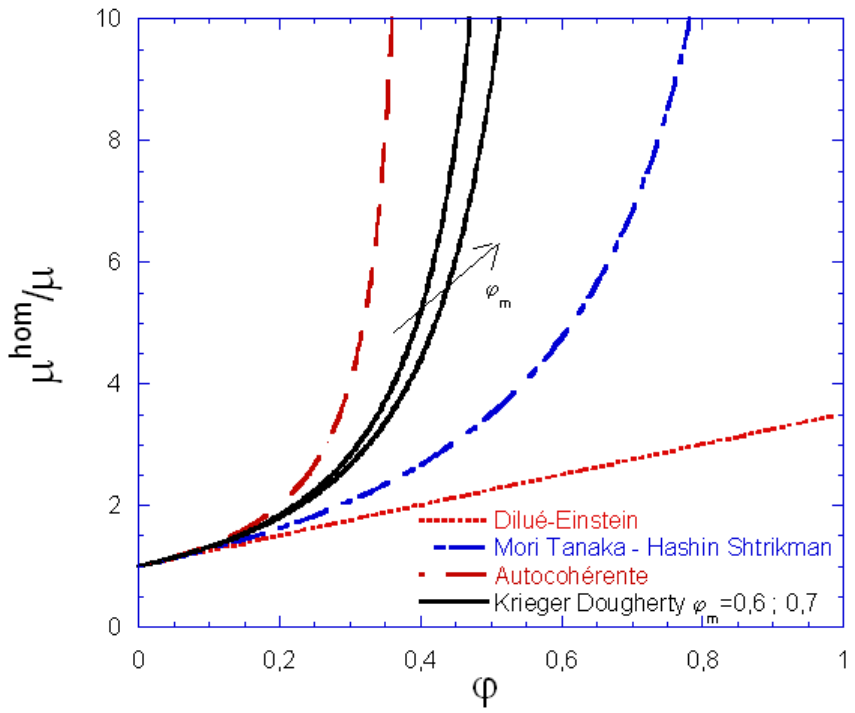


FIG. 2.3 – Viscosités réduites prédites par les trois schémas d'homogénéisation comparées aux valeurs prédites par la relation de Krieger-Dougherty

L'estimation diluée-Einstein est exacte quand la fraction volumique est très faible, celle de Mori-Tanaka est pertinente pour une concentration faible (moins de 10%) et l'estimation

autocohérente permet bien de rendre compte d'un phénomène de blocage de l'écoulement de la suspension pour des valeurs de φ différentes de 100%, mais pour une valeur (40%) physiquement inacceptable. Donc, les estimations présentées ci-dessus ne permettent pas de rendre compte du phénomène de blocage de l'écoulement d'une suspension Newtonienne pour des valeurs de φ différentes de 40% et de 100%.

2.3.4 Approche par motifs morphologiques représentatifs

Compte tenu du fait que les schémas d'homogénéisation classiques ne permettent pas d'obtenir des estimations satisfaisantes des caractéristiques d'une suspension, on adopte une autre approche du problème.

On a choisit l'approche par motifs [Bor96] parce que cette approche est capable de tenir compte à la fois de la forme exacte des particules et de leur répartition au sein de l'espace. Selon Bornert, cette approche permet de décrire un milieu hétérogène aléatoire pour lequel on suppose que l'on peut regrouper des familles de microstructures, caractérisées par une géométrie et une distribution des propriétés mécaniques locales identiques. Ces familles constituent les " motifs morphologiques représentatifs ".

On s'intéresse à la situation où le milieu est défini par des motifs occupant les domaines Dr, de module $\mathbb{C}_r(\underline{x})$. Ces motifs sont éventuellement plongés dans une matrice.

On se restreint aux situations où les motifs sont des sphères et on suppose que l'on sait calculer pour chacun des motifs sphériques immergé dans un milieu infini homogène de module $\mathbb{C}^0$ soumis à l'infini à la sollicitation $\boldsymbol{D}_0$, la moyenne de la contrainte et la moyenne du taux de déformation grâce aux relations :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{Dr} = \mathbb{U}^0_{Dr} : \boldsymbol{D}_0 \tag{2.49}$$

$$\langle \boldsymbol{d} \rangle_{Dr} = \mathbb{V}^0_{Dr} : \boldsymbol{D}_0 \tag{2.50}$$

Les tenseurs $\mathbb{U}^0_{Dr}$ et $\mathbb{V}^0_{Dr}$ peuvent être déterminés en résolvant un problème de structure par voie analytique dans certains cas particuliers ou par voie numérique dans les situations plus complexes.

On considère que notre suspension peut être complètement décrite par des motifs (il n'y a pas de matrice). Dans ce cas, Bornert [BBG01] montre que le comportement effectif est défini par la relation :

$$\mathbb{C}^{hom} = (\sum_{r=2}^{n} \varphi_r \mathbb{U}^0_{Dr}) : (\sum_{r=2}^{n} \varphi_r \mathbb{V}^0_{Dr})^{-1} \tag{2.51}$$

2.3.4.1 Approche à un motif

On considère que toutes les particules sont entourées d'une couche de fluide de viscosité μ, d'épaisseur proportionnelle au rayon de la particule et à la fraction volumique occupée par la phase solide au sein de la suspension.

↻

Chaque motif est constitué d'une particule de rayon a entourée d'une coque de rayon extérieur b constituée d'un matériau linéaire isotrope incompressible de module μ, immergée dans un milieu linéaire isotrope incompressible de module μ_0. On note $\varphi = (a/b)^3$ la fraction volumique et $x = b/a$ le rapport des deux rayons. Les formules de localisation (2.49)et(2.50) pour cette situation sont données en annexe A. (équations (A.1) et (A.2) dans le cas où les matériaux sont isotropes et incompressibles et équations (A.4) dans le cas où la particule de rayon a est indéformable).

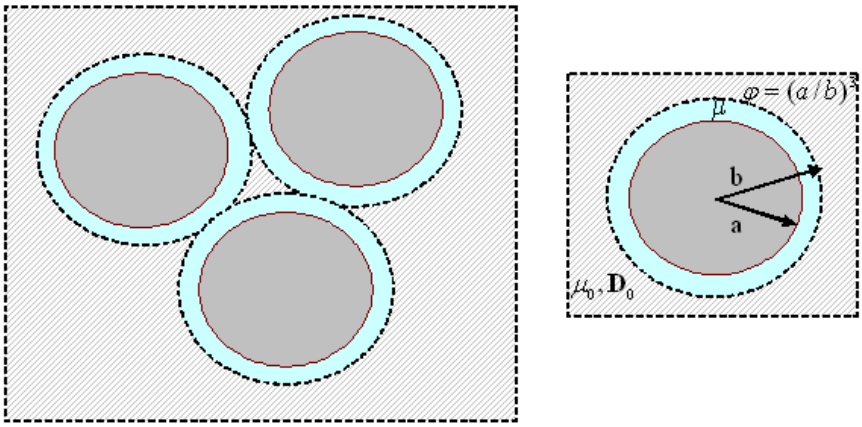


FIG. 2.4 – Schéma à 1 motif

Dans cette situation, l'estimation associée à l'équation (2.51) est définie par le module de cisaillement macroscopique, solution de l'équation :

$$2\mu^{hom} = \frac{U^0}{V^0} \tag{2.52}$$

avec U^0 et V^0 définis en annexe A. Si l'on fait le choix $\mu_0 = \mu$ dans l'équation (2.52), on a alors :

$$\mu^{hom} = \frac{U^0}{2V^0} = \frac{5\mu(70+105\varphi)}{10(35-35\varphi)} = \mu\frac{(2+3\varphi)}{2(1-\varphi)} \tag{2.53}$$

Donc, on retrouve bien l'estimation de Mori-Tanaka. On rappelle que la validité de cette estimation est limitée aux faibles valeurs de la fraction volumique en particules (de l'ordre de 10%).

Par contre, si l'on fait le choix $\mu_0 = \mu^{hom}$. Le module macroscopique s'écrit alors :

$$\mu^{hom} = X_0\mu \tag{2.54}$$

↻

où X_0 est l'unique solution réelle positif de l'équation : $AX_0^2 + 2BX_0 + C = 0$.
Donc :

$$X_0 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{2.55}$$

avec :

$A = 32 - 200\varphi + 336\varphi^{5/3} - 200\varphi^{7/3} + 32\varphi^{10/3}$

$B = 3 - 5\varphi - 336\varphi^{5/3} + 200\varphi^{7/3} + 8\varphi^{10/3}$

$C = -(38 + 225\varphi - 336\varphi^{5/3} + 200\varphi^{7/3} + 48\varphi^{10/3})$

Cette estimation autocohérente diverge pour φ tendant vers 1 (A tend vers 0). Elle est pertinente pour une suspension de particules où toutes les particules sont entourées d'une couche de fluide de viscosité μ d'épaisseur proportionnelle au rayon de la particule et à la fraction volumique occupée par la phase solide au sein de la suspension. Elle ne peut donc être appliquée qu'à une suspension de particules dont la répartition granulométrique correspond à un empilement apollonien de sphères.

2.3.4.2 Modèle à deux motifs et deux phases

L'approche par un motif présenté ci-dessus ne permet pas encore de rendre compte du phénomène de blocage de l'écoulement d'une suspension Newtonien pour des valeurs de φ différente 100% parce que cette approche ne permet pas de rendre compte de l'existence de fluide " coincé " entre les motifs. On propose donc un modèle à deux motifs visant à rendre compte du phénomène de blocage pour des valeurs de φ_m différentes de 100%.

Le premier motif est identique au motif du modèle à un motif décrit au paragraphe précédent. Il est hétérogène et représente les particules entourées par une couche de fluide. Il s'agit donc d'une particule sphérique indéformable de rayon a entourée par une coque de matériau linéaire isotrope incompressible de module μ_1, de rayon extérieur b. La particule occupe la fraction volumique $c = (a/b)^3$ au sein de ce motif et on note de nouveau $x = b/a$.

Le second motif représente le fluide " coincés " entre les premiers motifs, il est constitué d'une sphère homogène isotrope incompressible de module μ_2.

Les deux motifs sont immergés dans un milieu infini homogène linéaire isotrope incompressible de module μ_0. Le premier motif occupe la fraction volumique φ_m au sein de l'assemblage des deux motifs. La fraction volumique occupée par les particules indéformables est donc $\varphi = c\varphi_m$. On fait de plus l'hypothèse que la distribution des centres des motifs est isotrope au sein du composite et que le champ de déformation à l'infini $\boldsymbol{D}_0$ est le même pour les deux motifs (Fig 2.5).

Ce modèle définit donc le modèle à deux motifs et à trois phases. Pour ce qui nous intéresse, on considère que le fluide entourant les particules et le fluide coincé entre les premiers motifs

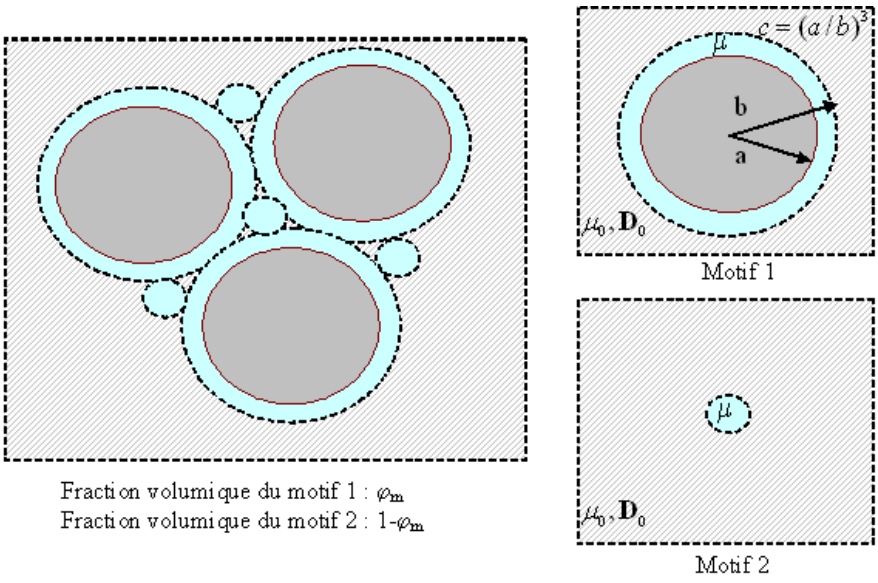


FIG. 2.5 – Schéma à 2 motifs

dans la suspension ont la même viscosité, soit $\mu_1 = \mu 2 = \mu$. Dans ce cas, on a un modèle à deux motifs et à deux phases.

Le comportement effectif du milieu hétérogène est défini par la relation :

$$\mathbb{C}^{hom} = (\varphi_m \mathbb{U}^0_{D1} + (1-\varphi_m)\mathbb{U}^0_{D2}) : (\varphi_m \mathbb{V}^0_{D1} + (1-\varphi_m)\mathbb{V}^0_{D2})^{-1} \tag{2.56}$$

A l'échelle macroscopique, le matériau est donc incompressible et isotrope et sont comportement est caractérisé par le module de cisaillement (ou le module de viscosité) μ^{hom}, solution de l'équation :

$$2\mu^{hom} = (\varphi_m \frac{U^0_1}{D^0_1} + (1-\varphi_m)\frac{U^0_2}{D^0_2})/(\varphi_m \frac{V^0_1}{D^0_1} + (1-\varphi_m)\frac{V^0_2}{D^0_2}) \tag{2.57}$$

où les scalaires U^0_{Dr} et V^0_{Dr} $|r = 1; 2|$ sont définis à partir des relations (2.49) et (2.50) comme indiqué en annexe A. On s'intéresse ici à l'estimation autocohérente obtenue à partir de la relation (2.57) en imposant $\mu_0 = \mu^{hom}$. On montre que l'équation (2.57) se ramène à une équation du troisième en μ^{hom}. Le module macroscopique s'écrit alors $\mu^{hom} = X\mu$, où X désigne l'unique solution réelle positive de l'équation du troisième degré :

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = 0 \tag{2.58}$$

avec :

$$a_0 = 672c^{5/3} - 76 - 96c^{10/3} - 400c^{7/3} - 450c$$

$$a_1 = -400\varphi_m c^{10/3} - 102 - 336c^{5/3} + 288c^{10/3} + 200c^{7/3} - 475\varphi_m c + 300c$$

$$a_2 = 400\varphi_m c^{10/3} - 1344c^{5/3} + 82 + 800c^{7/3} - 288c^{10/3} + 750c - 400\varphi_m c$$

$$a_3 = 96c^{10/3} - 600c^{7/3} - 600c + 96 + 1008c^{5/3}$$

Pour résoudre une équation du troisième degré, on pose classiquement :

$$r = \frac{1}{54}\,\frac{9\,a_1\,a_2\,a_3 - 27\,{a_3}^2 a_0 - 2\,{a_2}^3}{{a_3}^3} \tag{2.59}$$

$$\Delta = r^2 + \frac{1}{729}\,\frac{\left(3\,a_3\,a_1 - {a_2}^2\right)^3}{{a_3}^6} \tag{2.60}$$

et on a alors :

$$X = -1/3\,\frac{a_2}{a_3} + \sqrt[3]{r + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{\Delta}} \tag{2.61}$$

2.3.4.3 Analyse du comportement

On examine dans la suite de ce chapitre les caractéristiques prévues par le schéma à deux motifs et deux phases quand on fait varier les paramètres du schéma.

Influence de φ_m

On trouve que la viscosité relative X est une fonction de c, la fraction volumique en particules au sein de motif 1 et de φ_m, la fraction volumique du motif 1 au sein de l'assemblage des deux motifs. Quand la quantité c varie entre 0 et 1, la fraction volumique occupée par les particules indéformables dans la suspension φ varie entre 0 et φ_m.

Les figures 2.6 et 2.7 présentent les évolutions de la viscosité relative de la suspension en fonction de φ pour le cas $\varphi_m < 40\%$ et pour le cas $\varphi_m > 40\%$. On a également représenté sur ces figures les estimations dilués et autocohérentes. On constate que la viscosité converge vers l'estimation autocohérente classique $\mu/(1 - 2,5\varphi)$ pour les valeurs de φ_m inférieures à 40% (Fig 2.6). Au contraire, la viscosité diverge vers infini quand φ tend vers φ_m pour les valeurs de φ_m supérieures ou égales à 40%. On interprète donc φ_m comme la fraction volumique maximalz d'empilement des particules. On constate également que la viscosité prédite est toujours comprise entre l'estimation autocohérente et la borne inférieure de Hashin-Shtrikman (Fig 2.7).

Cette interprétation, valable pour les valeurs de φ_m supérieure à 40%, repose sur une analyse où l'on choisit la valeur de φ_m et où l'on fait varier la valeur de c. Pour le modèle à deux phases et deux motifs, l'augmentation de la valeur du paramètre c à φ_m fixée, correspond à une augmentation de la valeur de la concentration en particules solides. Cette augmentation de φ s'accompagne d'une diminution de l'épaisseur de la couche de fluide qui provoque une augmentation de la viscosité apparente de la suspension. Lorsque c tend vers 1, alors φ tend vers φ_m et l'épaisseur de fluide en tournant chaque particule tend vers zéro :

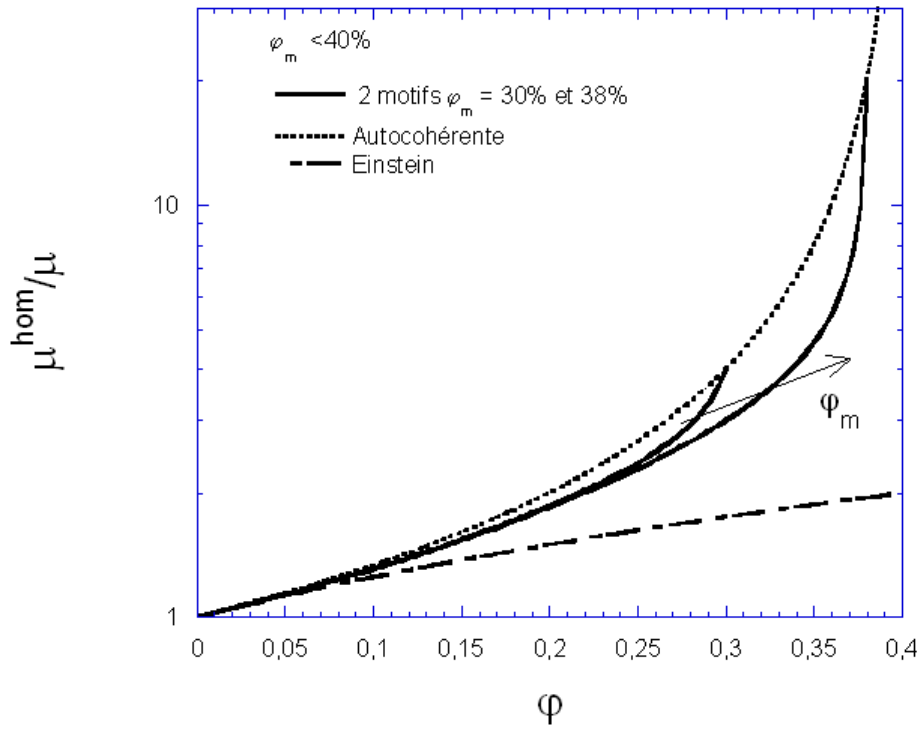


FIG. 2.6 – Viscosité réduite prédite par le modèle à deux motifs et deux phases en fonction de la concentration pour $\varphi_m < 40\%$

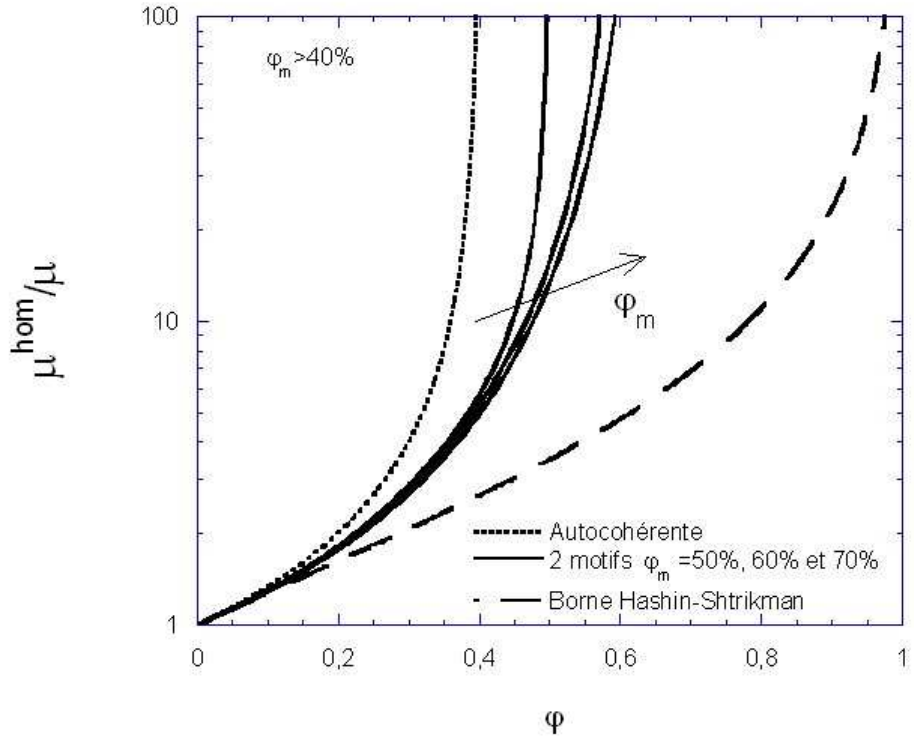


FIG. 2.7 – Viscosité réduite prédite par le modèle à deux motifs et deux phases en fonction de la concentration pour $\varphi_m > 40\%$

on prédit alors que la viscosité de la suspension tend vers l'infini, le fluide restant dans le milieu " coincé " entre les particules ne peut pas participer à la lubrification des contacts. On rappelle que cette interprétation n'est valable que pour les valeurs de φ_m supérieures à 40%

L'intérêt de ce modèle est l'introduction d'un paramètre permettant de contrôler la valeur de fraction volumique maximale d'empilement φ_m. On rappelle que pour une famille de particules données, la valeur du paramètre φ_m ne dépend que de leur arrangement géométrique. La détermination de φ_m pour un arrangement géométrique donné est un problème qui a déjà été étudié ([Lar99], [AJ01]). On peut adopter la valeur couramment rencontrée dans la littérature $\varphi_m = 0,6$ pour un arrangement aléatoire de particules sphériques monodisperses. Pour une répartition géométrique donnée, φ_m est un paramètre à fournir au modèle et non pas un résultat de la méthode d'homogénéisation.

Comparaison entre les prédictions du modèle à deux motifs et deux phases et la relation de Krieger-Dougherty

On compare les prédictions du schéma à deux motifs et deux phases avec les prédictions classiques de Kriger-Dougherty (Fig 2.8). On trouve que pour les faibles valeurs de φ_m, le schéma à deux motifs prévoit une valeur de la viscosité relative plus faible que la relation de Krieger-Dougherty tandis que pour les valeurs plus fortes de φ_m, c'est la relation de Kriger-Dougherty qui est plus " souple ". Les deux relations donnent pratiquement les mêmes valeurs de la viscosité pour les valeurs de φ_m proches de 60%. On constate que la viscosité prédite par le modèle de Krieger-Dougherty varie plus en fonction de φ_m que celle du modèle à deux motifs.

2.3.4.4 Validation

L'approche par motifs proposée ci dessus repose sur l'hypothèse d'isotropie de la suspension, mais dans la littérature la plupart des essais sont menés dans des configurations qui ne vérifient pas cette hypothèse (géométrie Couette en particulier, phénomène migration des particules ...[SP05], [PGM87]). Les seuls résultats expérimentaux qui nous paraissent pertinents pour tester la validité des prédictions du schéma à deux motifs et de la relation de Krieger-Dougherty sont ceux obtenus par Mahault et al. [MCO08]. Ces auteurs ont testé différentes suspensions de particules non colloïdales dans des fluides à seuil en effectuant leurs mesures sur des matériaux au repos non précisaillés. Cette méthode a l'avantage de garantir que la structure du matériau est isotrope. Ils ont mesuré les modules élastiques de différentes suspensions (suspensions monodisperses de billes de polystyrène de 85 μm, 140 μm et 385μm dans trois suspensions différentes de bentonite, suspensions monodisperses de billes de polystyrène de 140 μm et 315 μm dans des émulsions différentes de Carbopol).

Comme on l'a déjà dit précédemment, φ_m c'est un paramètre que l'on doit identifier pour utiliser l'estimation. C'est également le seul paramètre ajoutable du modèle. On va faire la comparaison du modèle et de la relation de Krieger-Dougherty avec les résultats expérimentaux en identifiant le paramètre φ_m de façon à minimiser l'erreur quadratique entre les mesures et les prédictions. La figure 2.9 présente cette comparaison avec les résultats expérimentaux représentés sous forme de points.

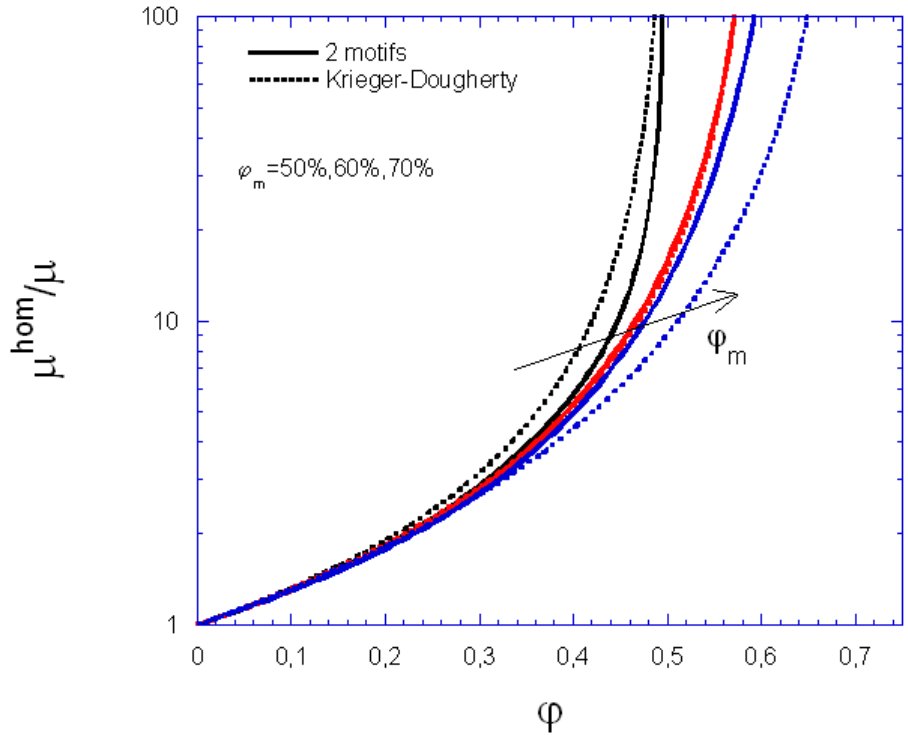


FIG. 2.8 – Comparaison entre les prédictions du modèle à deux motifs et deux phases et la relation de Krieger-Dougherty

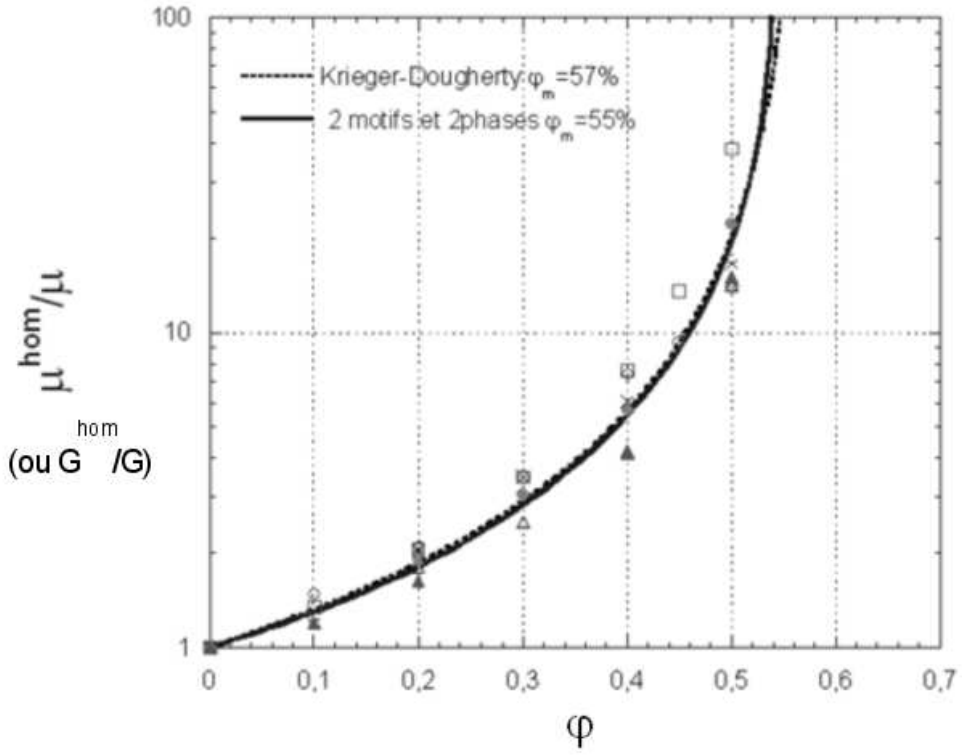


FIG. 2.9 – Comparaison des prédictions du modèle à deux motifs et deux phases et de la relation de Krieger-Dougherty avec les résultats expérimentaux de Mahaut et al 2008.

On obtient une très faible erreur quand φ_m est égal à 57 % pour le modèle de Krieger et Dougherty et quand φ_m est égal à 55 % pour le modèle à deux motifs. Ces valeurs de la fraction volumique maximale sont très proches de la valeur $\varphi_m = 0,605$ mesurée localement dans une suspension de particules non colloïdales dans des fluides Newtoniens par Ovarlez et al [OBR06] par une technique IRM. La relation Krieger-Dougherty et l'estimation à deux motifs et deux phases sont utilisées pour estimer la viscosité de suspension de particules non colloïdales dans les fluides Newtoniens tandis que Mahaut et al mesurent le module élastique. Cependant, ce bon accord n'est pas surprenant car le problème d'élasticité d'une suspension de particules rigides dans un matériau élastique linéaire se pose de la même façon que le problème de viscosité d'une suspension de particules rigides dans un fluide Newtonien.

2.4 Suspension dans un fluide de Herschel-Bulkley

2.4.1 Homogénéisation

Le fluide est homogène et obéit à la loi de comportement de Herschel-Bulkley de contrainte critique τ_c, de consistance η et d'indice d'écoulement n. Cette loi s'écrit :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{d}}(\boldsymbol{d}) \tag{2.62}$$

avec :

$$\begin{cases} w(\boldsymbol{d}) = \tau_c \widetilde{d} + \frac{\eta}{n+1}(\widetilde{d})^{n+1} \quad \text{si} \quad \text{tr}\, \boldsymbol{d} = 0 \\ \\ w(\boldsymbol{d}) = \infty \quad \text{si} \quad \text{tr}\, \boldsymbol{d} \neq 0 \end{cases} \tag{2.63}$$

où $\widetilde{d} = \sqrt{2\boldsymbol{d} : \boldsymbol{d}}$ désigne le second invariant du tenseur des taux de déformation microscopique.

Les particules sont modélisées comme des solides indéformables infiniment résistants ne développant que des interactions hydrodynamiques entre elles. On a donc $\boldsymbol{d} = 0$ dans le domaine Ω_s. Cette condition d'indéformabilité s'écrit également sous la forme (2.62) avec :

$$\begin{cases} w(\boldsymbol{d}) = 0 \quad \text{si } \boldsymbol{d} = 0 \\ \\ w(\boldsymbol{d}) = \infty \quad \text{si } \boldsymbol{d} \neq 0. \end{cases} \tag{2.64}$$

En suppose de plus que le fluide adhère parfaitement aux particules. Le V.E.R. est donc constitué d'un matériau hétérogène dont le comportement s'écrit sous la forme (2.62), w étant défini par (2.63) et (2.64). Le potentiel est strictement convexe pour $n > 0$. Il a été montré que le comportement à l'échelle macroscopique de ce matériau s'écrit ([Hil63],[Cas97],[Suq97]) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{D}}(\boldsymbol{D}) \quad \text{avec} \quad W(\boldsymbol{D}) = \inf_{d \in K(\boldsymbol{D})} \langle\, w(\boldsymbol{d}) \rangle \tag{2.65}$$

↻

où $K(\boldsymbol{D})$ désigne l'ensemble des champs de taux de déformation eulérien cinématiquement admissible avec $\boldsymbol{D}$ vérifiant la condition (2.2).

En utilisant le fait que les particules sont indéformables et que le fluide porteur est homogène, on montre que le potentiel macroscopique est aussi défini par :

$$W(\boldsymbol{D}) = \inf_{d \in G(\boldsymbol{D})} (1-\varphi)[\tau_c \langle \widetilde{d} \rangle_\ell + \frac{\eta}{n+1} \langle (\widetilde{d})^{n+1} \rangle_\ell] \tag{2.66}$$

où $G(\boldsymbol{D})$ désigne l'ensemble des champs de taux de déformation eulérien cinématiquement admissible et vérifiant la condition $\boldsymbol{d} = 0$ dans Ω_s.

L'ensemble $G(\boldsymbol{D})$ étant convexe, le problème de minimisation (2.66) admet une solution unique, ce qui assure la validité de la démarche.

L'identification du comportement macroscopique de la suspension à partir de la relation (2.66) nécessite la résolution d'un problème de minimisation convexe de dimension infinie. Ce problème de minimisation doit être résolu pour chaque morphologie de la suspension définie par la donnée de la forme des particules et de leur répartition au sein de la suspension. Il n'est pas possible de résoudre ce problème dans la plupart des situations d'intérêts pratiques. Pour remédier à cette difficulté, différentes techniques d'estimation du comportement macroscopique ont été développées [Suq97].

Dans la suite de ce travail, on suppose pour simplifier que les particules solides sont réparties de façon isotrope au sein du V.E.R.. Le comportement macroscopique de la suspension est donc également isotrope.

2.4.2 Méthode variationnelle - Borne inférieure du potentiel

On utilise une méthode variationnelle suivante pour obtenir un encadrement énergétique du comportement macroscopique de la suspension et obtenir des bornes des caractéristiques mécaniques effectives de la suspension.

En utilisant la définition du potentiel maccoscopique (2.66) on peut établir sans difficulté que le potentiel $W(D)$ admet la minoration suivante :

$$W(\boldsymbol{D}) \geq \Phi_1(\boldsymbol{D}) + \Phi_2(\boldsymbol{D}) \tag{2.67}$$

avec :

$$\Phi_1(\boldsymbol{D}) = \inf_{d \in \mathcal{G}(\boldsymbol{D})} (1-\varphi)\tau_c \langle \widetilde{d} \rangle_\ell \tag{2.68}$$

$$\Phi_2(\boldsymbol{D}) = \inf_{d \in \mathcal{G}(\boldsymbol{D})} (1-\varphi)\frac{\eta}{n+1} \langle (\widetilde{d})^{n+1} \rangle_\ell \tag{2.69}$$

Les 2 potentiels Φ_1, Φ_2 définissent le comportement effectif de deux matériaux hétérogènes isotropes fictifs biphasiques isotropes constitué d'une phase rigide indéformable occupant le domaine Ω_s et d'une phase déformable occupant le domaine Ω_l.

Φ_1 définit la loi de comportement d'une suspension de particules immergées dans un matériau **rigide plastique** parfait standard dont la loi d'écoulement est décrit par un critère de Von Misès caractérisé par le seuil d'écoulement en cisaillement τ_c , tandis que Φ_2 est le potentiel d'une suspension de particules dans un matériau **visqueux** incompressible obéissant à la loi de comportement non linéaire suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta(\widetilde{d})^{n-1}\boldsymbol{d} - p\delta \quad \text{tr}\,\boldsymbol{d} = 0 \tag{2.70}$$

En utilisant les propriétés des fonctions $\langle(\widetilde{d})^m\rangle_\ell$ pour $m > 1$ et de l'ensemble $\mathcal{G}(\boldsymbol{D})$, on montre que Φ_1 est une fonction positivement homogène de degré 1 tandis Φ_2 est une fonction positivement homogène de degré $n+1$. Le matériau fictif 1 défini par le potentiel Φ_1 est un matériau rigide isotrope incompressible plastique obéissant à une loi d'écoulement standard mais dont la forme du convexe d'écoulement est inconnue. De la même façon, le matériau fictif 2 défini par le potentiel Φ_2 est un matériau visqueux isotrope incompressible donc le comportement global est décrit par une fonction homogène de degré n. Dans la situation où $n = 1$, grâce à la linéarité du problème homogénéisé, il est possible de montrer que le potentiel effectif Φ_2 est celui d'un fluide Newtonien.

Ces résultats permettent donc de montrer que le comportement macroscopique de la suspension isotrope de particules dans un fluide de Herschel- Bulkley est " minoré " énergétiquement par une loi de de comportement d'un fluide à seuil incompressible isotrope fictif de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur, dont le seuil et la viscosité s'obtiennent en résolvant les deux problèmes de minimisation (2.68) et (2.69). Par ailleurs, on observe que pour les faibles valeurs du taux de déformation macroscopique, le terme définissant le matériau 1 est dominant alors que pour les fortes valeurs de taux de déformations, c'est le second terme définissant le matériau 2 qui doit être pris en compte.

Cette propriété permet de montrer que le comportement macroscopique de la suspension n'obéit pas exactement à celui d'un fluide à seuil décrit par deux potentiels. Il tend vers celui d'un fluide à seuil dont le seuil d'écoulement est décrit par le potentiel Φ_1 et dont l'écoulement est décrit par le potentiel Φ_2 respectivement pour les faibles valeurs et fortes valeurs du taux de déformation macroscopique.

Ces résultats sont représentés sur la figure 2.10 dans le cas d'une suspension de particules dans un fluide de Bingham (cas $n = 1$).

Sur le diagramme du haut de la figure 2.10, on a tracé le potentiel macroscopique de la suspension W ainsi que les potentiels Φ_1, Φ_2 et la borne inférieure $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ en fonction du second invariant du tenseur des taux de déformation macroscopique $\widetilde{D}$. La borne inférieure Φ est bien sur plus petite que le potentiel macroscopique W. Les comportements macroscopiques de la suspension, des matériaux fictifs 1 et 2 ainsi que celui bornant intérieurement le comportement réel, associés respectivement aux potentiels W, Φ_1, Φ_2, et Φ sont tracés sur le diagramme du bas de la figure 2.10. $\widetilde{\Sigma}$ désigne le second invariant du tenseur des contraintes déviatoriques. Le matériau fictif 1 est un matériau rigide plastique avec un seuil de contrainte égal à celui de la suspension. Le matériau fictif 2 est un matériau Newtonien. Le comportement associé à la borne inférieure correspond à un matériau de Bingham. La suspension macroscopique se comporte bien comme un fluide à seuil mais

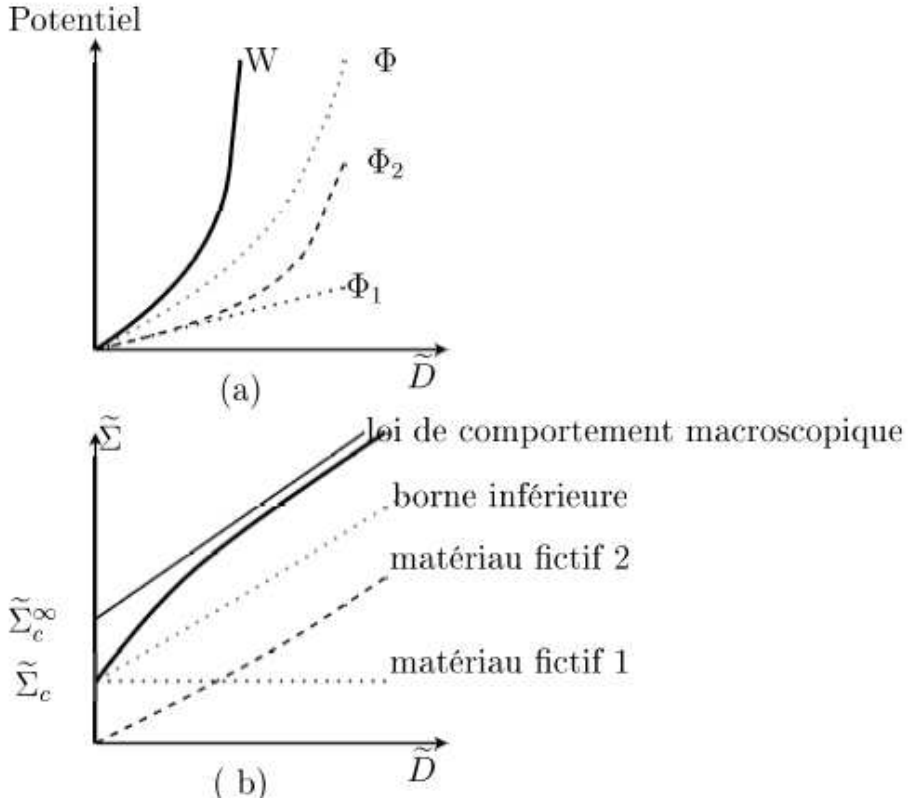


FIG. 2.10 – Approche variationnelle pour le comportement à l'échelle macroscopique d'une suspension de particules dans un fluide de Bingham ($n = 1$)

ce n'est pas un fluide de Bingham. On obtient des diagrammes similaires dans le cas de particules suspendues dans un fluide de Herschel-Bulkley d'indice $n \neq 1$.

La théorie prédit que pour une forte valeur de taux de déformation macroscopique, la présence des particules ne modifie pas l'indice de l'écoulement n du fluide porteur. Ce résultat est en accord avec les mesures expérimentales des propriétés rhéologiques des suspensions concentrées dans un fluide non newtonien (Polinski 1988 [PGRF88]).

2.4.3 Estimation sécante du comportement

Il est clair que le problème posé ci-dessus est équivalent au problème de minimisation traité dans la section précédente. La solution exacte de ce problème est évidemment très difficile, voire impossible à obtenir dans la plupart des situations. Pour résoudre ce problème de manière exacte ou approchée, il est possible d'utiliser une opération de linéarisation qui permet de remplacer les équations de champs non linéaires par des équations de champs linéaires sur le même V.E.R.. La section suivante présente la méthode de linéarisation sécante.

2.4.3.1 Principe de l'estimation sécante

La loi de comportement non linéaire d'une phase peut être écrite en tout point $\underline{x}$ sous la forme [BBG01] :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}^{sct}(\underline{x}, \boldsymbol{d}(\underline{x})) : \boldsymbol{d}(\underline{x}) \tag{2.71}$$

où $\mathbb{C}^{sct}(\underline{x}, \boldsymbol{d}(x))$ désigne le tenseur des modules sécants. Dans le cas d'une phase isotrope incompressible, il est caractérisé par un module de cisaillement sécant μ^{sct}. On utilise cette écriture sécante de la loi de comportement pour estimer le comportement homogénéisé de la suspension. Pour cela, on écrit la loi de comportement d'un fluide de Herschel-Bulkley sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{s} = 2\mu^{sct}(\widetilde{d})\boldsymbol{d} \tag{2.72}$$

où $\mu^{sct}(\widetilde{d})$ est le module sécant défini en chaque point de la phase fluide par :

$$\mu^{sct}(\underline{x}, \widetilde{d}(\underline{x})) = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}(\underline{x})} + \eta(\widetilde{d}(\underline{x}))^{n-1} \tag{2.73}$$

On remplace le problème d'homogénéisation non linéaire original par un problème d'homogénéisation linéaire pour une suspension de particules indéformables suspendues dans un fluide incompressible isotrope hétérogène de viscosité apparente $\eta(\underline{x}) = \mu^{sct}(\underline{x}, \widetilde{d}(\underline{x}))$.

Toute la difficulté consiste maintenant à calculer, ou plutôt à estimer la valeur prise par la grandeur $\widetilde{d}$ au sein du domaine occupé par la phase fluide dans le V.E.R. L'idée la plus

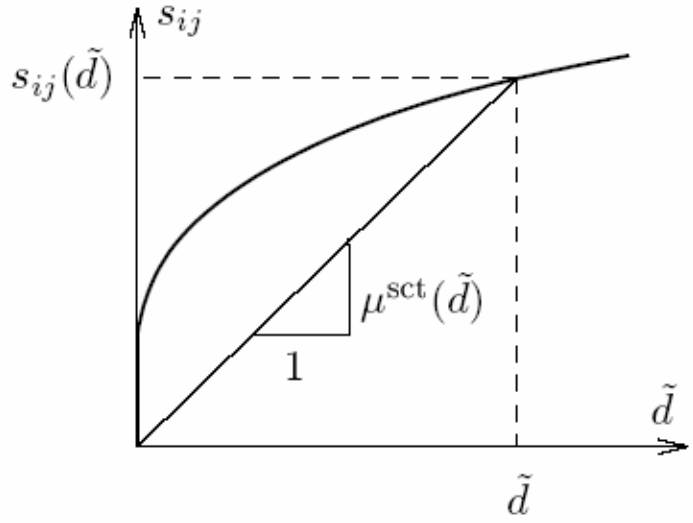


FIG. 2.11 – Définition du module sécant

simple consiste à adopter une estimation du module sécant uniforme par phase. On ne cherche donc à prendre en compte que les hétérogénéités interphases du champ des taux de déformation et on néglige l'influence des hétérogénéités intraphases sur le comportement macroscopique. Cette estimation s'écrit :

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega_\ell) \quad \mu^{sct}(\underline{x}, \widetilde{d}(\underline{x})) = \mu_\ell^{sct}(\widetilde{d}_\ell^{eff}) \tag{2.74}$$

avec $\widetilde{d}_\ell^{eff}$ désigne un taux de vitesse de déformation effective équivalent à définir, dépendant de la valeur moyenne du champ $\widetilde{d}$ dans la phase fluide, et donc de la valeur du taux de déformation macroscopique appliqué. Le fait de remplacer le champ de module sécant hétérogène sur la phase fluide par un champ homogène simplifie considérablement la résolution du problème.

La méthode d'estimation du comportement macroscopique non linéaire comprend donc 3 étapes :

I. Tout d'abord, on résout un problème d'homogénéisation linéaire pour une suspension de particules dans un fluide Newtonien. homogène isotrope de viscosité μ_ℓ. On a rappelé dans le paragraphe précédent que la viscosité macroscopique d'une suspension isotrope de particules dans un fluide Newtonien est caractérisée par un coefficient proportionnel à la viscosité du fluide. Ce coefficient de proportionnalité dépend de la morphologie des particules. On a montré dans les paragraphes précédents que l'estimation à deux motifs et deux phases ou la relation de Krieger-Dougherty permettent d'estimer correctement la viscosité relative d'une suspension isotrope monodisperse en fonction de la concentration volumique en particules. Si on note $g(\varphi)$ le coefficient de proportionnalité entre la viscosité

à l'échelle macroscopique et la viscosité à l'échelle microscopique, on a :

$$\mu^{hom} = \mu_\ell g(\varphi) \tag{2.75}$$

II. Ensuite, on choisit une mesure du taux de déformation effective pour la phase de fluide dans le cas où le matériau est isotrope à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique.

Pour l'extension classique, l'idée consiste à utiliser [Suq97] :

$$\widetilde{d}_\ell^{eff} = \langle \widetilde{d} \rangle_\ell \tag{2.76}$$

L'extension modifiée améliore l'extension classique en adoptant un taux de déformation effectif égal au le moment du second ordre de la quantité $\widetilde{d}$:

$$\widetilde{d}_\ell^{eff} = \sqrt{\langle (\widetilde{d})^2 \rangle_\ell} \tag{2.77}$$

Ce choix correspond l'approche modifiée décrite par Suquet (1997b). Ponte Castaneda (1995) a démontré que ce choix est optimal dans le cadre d'une approche énergique. On a montré également que ce choix est plus exact que celui d'une extension classique.

III. Pour finir, on prend en compte le caractère non linéaire du problème en intégrant dans la relation d'homogénéisation reliant μ^{hom} à la viscosité du fluide porteur μ_ℓ le fait que μ_ℓ est définit par le module sécant et que sa valeur dépend de $\widetilde{d}_\ell^{eff}$. La seule difficulté pratique à lever pour mettre en oeuvre cette démarche est le calcul de $\widetilde{d}_\ell^{eff}$ en fonction de $\boldsymbol{D}$ pour le schéma d'homogénéisation retenu. On a montre que l'on a [Kre90] :

$$< (\widetilde{d})^2 >_\ell = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_\ell} \widetilde{D}^2 = \frac{1}{1-\varphi} g(\varphi) \widetilde{D}^2 \tag{2.78}$$

En combinant l'expression du module sécant (2.73), la relation d'homogénéisation linéaire (2.75) et la relation (2.78), on obtient l'estimation du module sécant macroscopique suivante :

$$\mu^{hom}(\varphi, \boldsymbol{D}) = \frac{\tau_c^{hom}}{\widetilde{D}} + \eta^{hom} \widetilde{D}^{n-1} \tag{2.79}$$

avec :

$$\tau_c^{hom} = \tau_c \sqrt{(1-\varphi) g(\varphi)} \tag{2.80}$$

et :

$$\eta^{hom} = \eta g(\varphi) [\frac{g(\varphi)}{1-\varphi}]^{\frac{n-1}{2}} \tag{2.81}$$

↻

2.4.3.2 Examinons les caractéristiques macroscopiques prédites par la méthode sécante modifiée pour notre matériau d'étude

Influence de D

Sur la figure 2.12, on a tracé la courbe μ^{hom} en fonction du taux de déformation effectif $\widetilde{D}$ dans le cas où le fluide porteur est rhéopaissisant $n = 1,2 > 1$. La fonction $g(\varphi)$ est défini par l'approche à deux motifs et deux phases et pour différentes valeurs de la fraction volumique $(c = 0,7, c = 0,5, c = 0,2)$. Les caractéristiques rhéologiques du fluide porteur sont $\tau_c = 1, \eta = 1$. On constate que pour $\widetilde{D}$ très petit, on a un régime linéaire de pente -1 et que pour $\widetilde{D}$ très grand, on a un régime linéaire de pente 0.2 dans un diagramme $(\log - \log)$. Ces deux régimes correspondent respectivement au comportement rigide plastique pour les faibles valeurs de $\widetilde{D}$ et au comportement visqueux non linéaire en loi puissance pour les fortes valeurs de $\widetilde{D}$. La partie au milieu de la courbe correspond à la transition rigide-liquide dont la pente change progressivement de -1 à 0.2.

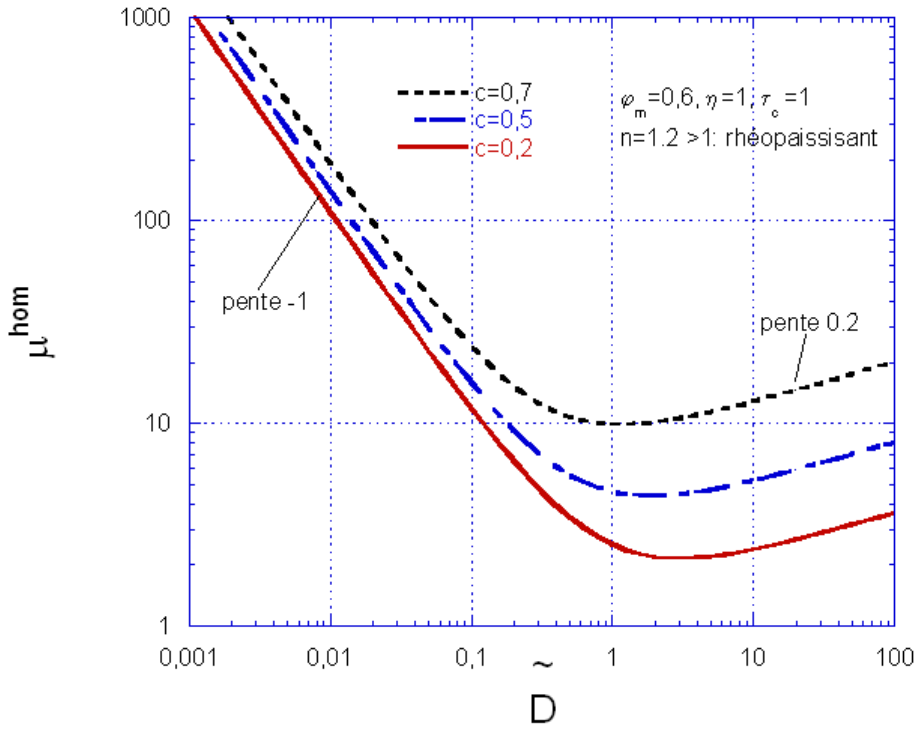


FIG. 2.12 – Module sécant macroscopique de la suspension pour $n = 1.2$

On a tracé également la courbe $\mu^{hom}(\widetilde{D})$ sur la figure 2.13 dans le cas où le fluide porteur est rhéofluidifiant $n = 0.8 < 1$. On constate que le module sécant décroît toujours quand $\widetilde{D}$ augmente. On peut formuler mêmes remarques que dans le cas rhéoépaississant. Pour

$\widetilde{D}$ très petit, on a un régime linéaire de pente -1 qui corresponde au comportement rigide plastique. Pour $\widetilde{D}$ très grand, on a un régime linéaire de pente -0.2 qui correspondent au comportement visqueux non linéaire en loi puissance.

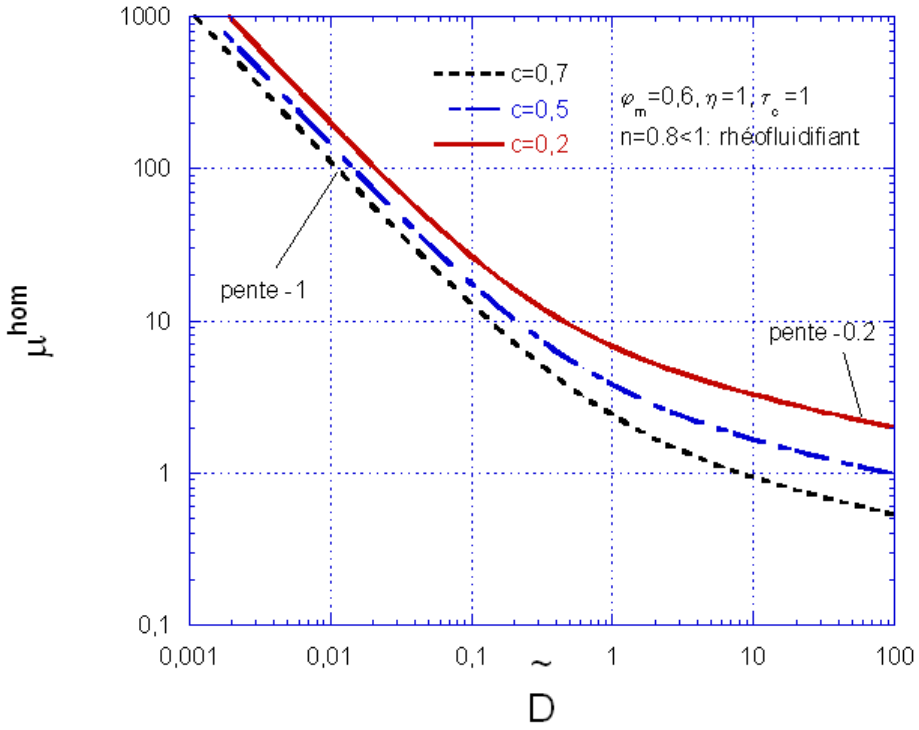


FIG. 2.13 – Module sécant macroscopique de la suspension pour $n = 0.8$

On constate que la distance entre les courbes dépend la valeur de $\widetilde{D}$. En effet, la distance est très faible quand $\widetilde{D}$ est petit, et à l'inverse, elle est plus grande quand $\widetilde{D}$ est grand. Quand $\widetilde{D}$ est petit, le module sécant μ_{sct}^{hom} de la suspension (qui correspond au seuil) est peu sensible de la fraction volumique c, tandis que quand $\widetilde{D}$ est grand, le module sécant μ_{sct}^{hom} de la suspension (qui correspond à la viscosité) dépend plus largement de la fraction volumique.

Conclusion

On prédit donc qu'à l'échelle macroscopique, la suspension se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur et de contrainte critique et de consistance macroscopique définies par (2.80) et (2.81). Ce résultat ne dépend pas du schéma d'homogénéisation retenu pour relier la viscosité du fluide porteur à la viscosité de la suspension.

La qualité de la prédiction dépend donc uniquement de la pertinence de l'approximation consistant à remplacer le champ $\widetilde{d}$ défini sur le domaine occupé par le fluide par $\widetilde{d}^{eff}$.

En comparant avec les résultats obtenus à partir d'approche variationnelle dans la section 2.4.2 on trouve que ce résultat dans cette section n'est qu'un résultat approximatif.

Application

On peut valoriser directement les relations (2.79),(2.80) et (2.81) en utilisant les résultats concernant l'estimation de la viscosité d'une suspension Newtonienne de particules. On peut également se référer aux estimations données en début de ce chapitre. Pour les suspensions à très faible teneur en particules, on dispose de la relation d'Einstein $g(\varphi) = 1 + 5/2\varphi$, exacte au premier ordre en φ. En reportant cette relation dans (2.80) et (2.81) et en ne conservant que les termes du premier ordre, on obtient les estimations :

$$\tau_c^{DL} = \tau_c(1 + \frac{3}{4}\varphi) \tag{2.82}$$

et :

$$\eta^{DL} = \eta(1 + (\frac{3}{4} + \frac{7}{4}(n-1))\varphi) \tag{2.83}$$

Pour le cas de la concentration en particules est importante, on peut évidemment utiliser l'estimation à deux motifs et deux phases ou la relation de Krieger-Dougherty validée précédemment. On obtient alors :

Pour l'estimation à deux motifs et deux phases :

$$\tau_c^{2M} = \tau_c\sqrt{(1-\varphi)g^{2M}(\varphi,\varphi_m)} \tag{2.84}$$

$$\eta^{2M} = \eta\sqrt{\frac{g^{2M}(\varphi,\varphi_m)^{n+1}}{(1-\varphi)^{n-1}}} \tag{2.85}$$

où g^{2M} désigne la solution de l'équation (2.58), notée X.

En utilisant relation de Krieger-Dougherty, on obtient :

$$\tau_c^{KD} = \tau_c\sqrt{(1-\varphi)(1-\varphi/\varphi_m)^{-2.5\varphi_m}} \tag{2.86}$$

$$\eta^{KD} = \eta(1-\varphi)^{\frac{1-n}{2}}(1-\varphi/\varphi_m)^{-1.25(n+1)\varphi_m} \tag{2.87}$$

Sur les figures 2.14 et 2.15, on a tracé le seuil réduit τ_c^{hom}/τ_c et la viscosité réduite η^{hom}/η en fonction de la fraction volumique de prédits en utilisant deux schémas : l'estimation à deux motifs et deux phases et la relation de Krieger et Dougherty. On a tracé les caractéristiques prédites pour différences de fraction volumique maximale $\varphi_m = 50, 70$ et 80% et $n = 1.2$. On trouve que le fuseau de valeurs de la relation de Krieger-Dougherty (zone limitée par les lignes discontinues) contient celui de l'estimation à deux motifs et deux phases (zone limitée

par les lignes continues) et comme dans le cas linéaire, l'estimation à deux motifs et deux phases donne des prédictions très proches de celles de la relation de Krieger-Dougherty pour φ_m de l'ordre de 60%. Pour les valeurs de φ_m inférieur de 40%, les caractéristiques prédites en utilisant le schéma à deux motifs et deux phases convergent vers celles prédites en utilisant l'estimation autocohérente (2.47) dans les relations (2.80) et (2.81) quand φ tend vers φ_m (figures 2.16 et 2.17). Pour les valeurs de φ_m supérieures de 40% le seuil réduit et la viscosité réduite divergent quand φ tend vers φ_m. Dans ce cas, on rend bien compte du phénomène de blocage de l'écoulement.

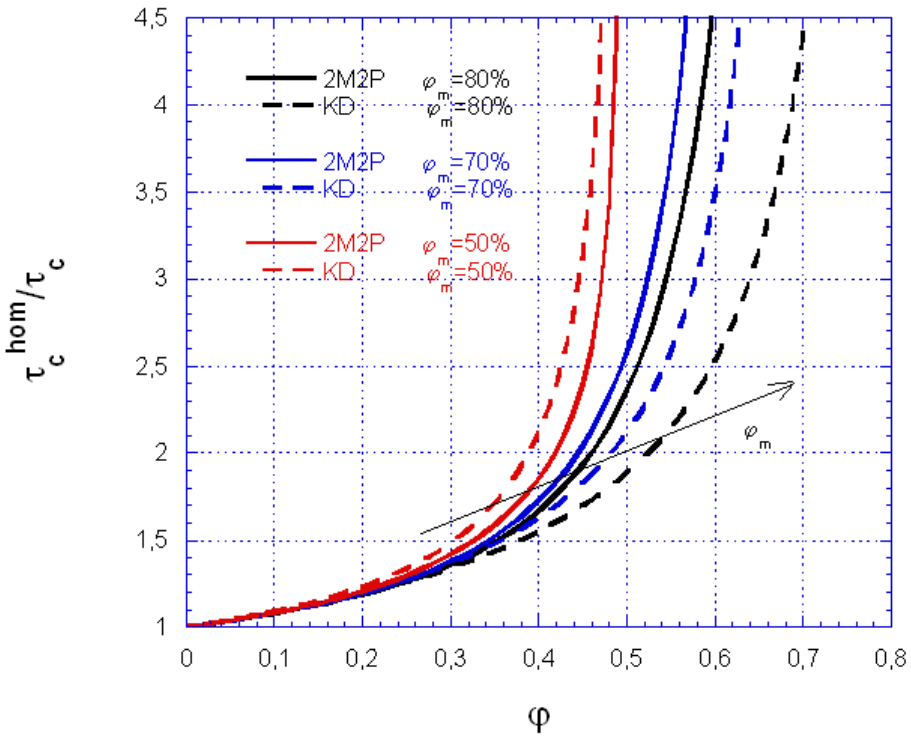


FIG. 2.14 – Seuil réduit prédit utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases (2M2P) et en utilisant la relation de Krieger-Dougherty (KD) pour $\varphi_m > 40\%$.

2.5 Conclusions

On tout d'abord montré que les estimations classiques (dilué, Mori-Tanaka, Autocohérente) construites à partir de la solution de Jeffery ne pouvait pas être utilisées pour prédire la viscosité apparente d'une suspension de particules dans toutes les situations d'intérêt pratique. En effet, ces estimations ne permettent pas de rendre compte du phénomène de blocage de l'écoulement observé quand la fraction volumique en particules tend vers

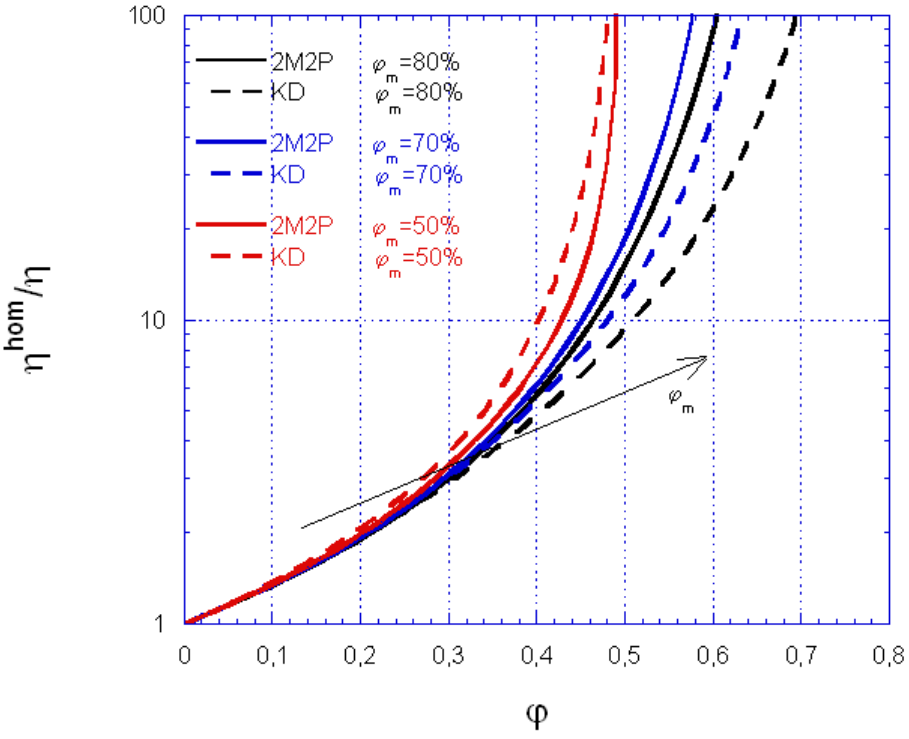


FIG. 2.15 – Viscosité réduite prédite utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases (2M2P) et en utilisant la relation de Krieger-Dougherty (KD) pour $\varphi_m > 40\%$

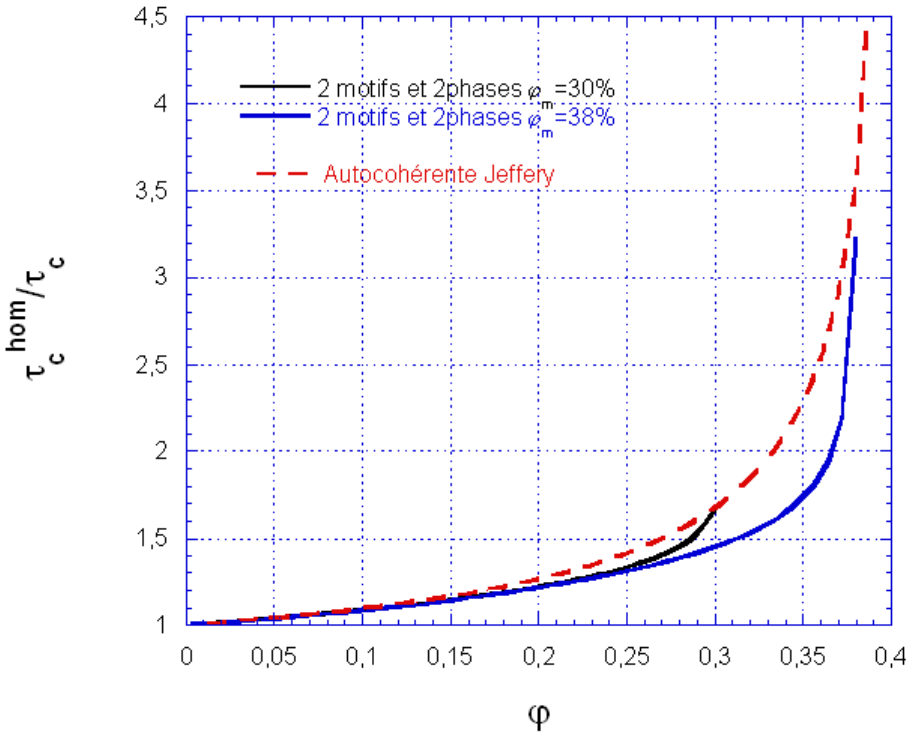


FIG. 2.16 – Seuil réduit prédit du modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases pour $\varphi_m < 40\%$

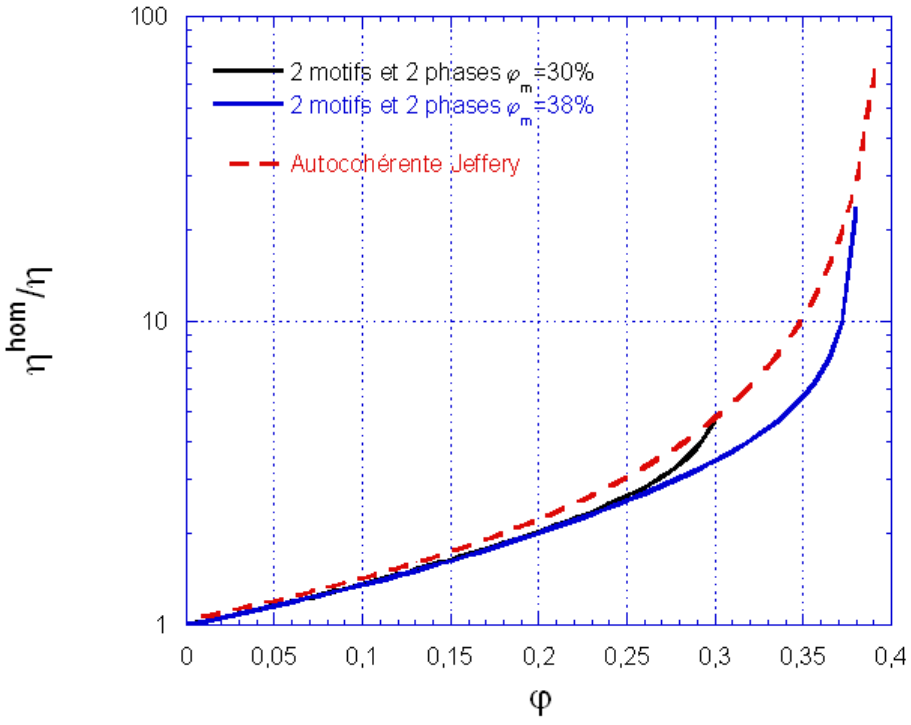


FIG. 2.17 – Viscosité réduite prédite du modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases pour $\varphi_m < 40\%$

soixante pourcents pour une suspension monodisperse. Pour remédier à ce problème, on a construit un schéma à deux motifs et deux phases en utilisant une approche par motifs morphologiques représentatifs. On obtient ainsi une estimation analytique du coefficient de proportionnalité liant la viscosité macroscopique à la viscosité du fluide porteur. Ce résultat est utilisé pour l'étude d'une suspension des particules dans un fluide à seuil.

On a en suite obtenu des estimations des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules non colloïdales dans un fluide de Herschel-Bulkley. A notre connaissance, cette approche et les résultats qu'elle fournit sont originaux en rhéologie. Compte tenu du caractère non linéaire des problèmes à résoudre, il est nécessaire de procéder à des approximations pour obtenir des estimations des caractéristiques macroscopiques de la suspension. Les estimations proposées ont été obtenues en négligeant complètement les hétérogénéités du champ de déformation à l'intérieur de la phase fluide. Pour les situations où cette approximation s'avérerait trop grossière, il est bien sûr possible de chercher à capturer dans l'approche la contribution des hétérogénéités de champ en séparant le domaine occupé par la phase fluide en plusieurs domaines. Il convient de noter que la méthode d'homogénéisation non linéaire présentée ici s'applique à tous les comportements du fluide porteur et des inclusions pouvant être décrites par un potentiel.

CHAPITRE

3

Validation et application

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, on a obtenu des relations permettant d'estimer les caractéristiques macroscopiques d'une suspension de particules dans un fluide à seuil. Les relations obtenues sont particulièrement simples. Dans ce chapitre on s'intéresse à la validation expérimentale de ces relations.

Pour cela, on commence par le principe pour d'identification des paramètres du modèle. En suite, on effectue deux pistes pour valider notre modèle :

La principale validation expérimentale de ce travail a été menée par Fabien Mahaut dans la cadre de la préparation de sa thèse de Doctorat au Laboratoire des Matériaux et de Structures du Génie Civil. Bien que nous n'avons pas participé à ces travaux, il nous semble intéressant de rappeler les résultats obtenus par Fabien Mahaut puisque les expériences qu'il a développées ont été conçues de façon à vérifier du mieux possible les hypothèses utilisées pour construire notre modèle : Suspension isotrope et homogène ; adhérence parfaite du fluide sur les particules ; particules rigides, non colloïdales et monodisperses...

De façon à compléter ces résultats et à mieux évaluer la pertinence et la solidité de notre modèle, nous nous sommes également attachés à rassembler les résultats expérimentaux disponibles dans la littérature pouvant être confrontés à nos prédictions théoriques. Cette comparaison avec les résultats de la littérature fait l'objet de la dernière partie de ce chapitre.

3.2 Identification des paramètres

On trouve que φ_m est le seul paramètre ajoutable du modèle non linéaire. On rappelle que si le modèle non linéaire utilise la relation de Krieger-Dougherty, φ_m est la fraction volumique maximale des particules. Par contre si le modèle non linéaire utilise le schéma à 2 motifs et 2 phases, φ_m est la fraction volumique du motif 1 mais φ_m est également interprété comme la fraction volumique maximale d'empilement des particules (démontration dans le chapitre précédent). Le principe d'identification de ce paramètre est toujours comme dans le problème linéaire que on a précisé dans le chapitre précédent. En effet, pour identifier φ_m, on va minimiser l'erreur quadratique entre le modèle avec les résultats exprérimentaux.

En particulier, si les données expérimentales nous fournissent la valeur de la fraction volumique d'empilement maximale des particules, on va imposer directement cette valeur pour φ_m dans le modèle.

3.3 Essai de Mahaut

On décrit ici brièvement les essais menés par Fabien Mahaut. Le lecteur intéresse est renvoyé aux références suivantes pour plus de détail concernant ce travail :

Fabien Mahaut, Xavier Chateau, Philippe Coussot and Guillaume Ovarlez " *Yield stress and elastic modulus of suspensions of noncoilloidal particles in yield stress fluides* ". Journal of Rheology, Vol 52, (1) : 287-313, 2008.

Fabien Mahaut : " *Influences de l'inclusion de particules rigides sur le seuil de contraintes et le comportement thixotrope d'un fluide à seuil* ". Thèse de doctorat de l'ENPC, en préparation.

L'objectif de ces travaux est d'évaluer expérimentalement l'influence de l'ajout de particules indéformables non colloïdales et non browniennes sur les caractéristiques rhéologiques d'un fluide à seuil. Ces travaux complètent parfaitement notre approche théorique.

Trois types de fluides à seuil et deux types de particules ont été utilisés pour effectuer les essais. Les caractéristiques de ces matériaux sont données dans les tableaux 3.1 et 3.2.

Fluide à seuil	Valeurs du seuil(Pa)	Origine du seuil	Remarques
Carbopol	40, 80	Chaînes de polymère	
Emulsion	10, 40, 70	Tension de surface	
Suspension de bentonite	3, 30, 60	Colloïdale	Thixotrope

TAB. 3.1 – Les fluides à seuil utilisés par Mahaut

Particules	Densité	Diamètres (μm)	Remarques
Billes de polystyrène	1.05	80, 140, 315	
Billes de verre	2.5	2000, 3000	Technique d'abrasion

TAB. 3.2 – Les particules utilisées par Mahaut

.

Il a été vérifié que les particules se comportaient bien comme des particules non browniennes et non colloïdales. Elles ne développent donc que des interactions hydrodynamiques, ou éventuellement de contact quand elles se touchent. On rappelle que Fabien Mahaut a uniquement étudié le comportement de suspension monodisperses. Par ailleurs, il a été vérifié que les tailles caractérisques des hétérogénéités dans le fluide porteur (taille des particules ou des agrégats de particules, taille des gouttes ou taille des blobs) étaient suffisamment petites par rapport à la taille des billes ajoutées pour que les fluides porteurs puissent être considérés comme homogène à cette échelle. On notera également qu'il a été nécessaire d'abraser les billes de verre pour s'assurer que le contact particule-fluide porteur soit parfait dans tous les cas.

Le module élastique et le seuil d'écoulement des suspensions ont été mesurés à l'aide d'un rhéomètre Bohlin C-VOR 200. Il est impossible de mesurer la viscosité d'une suspension isotrope homogène dans une géométrie Couette [OBR06]. Pour remédier à cette difficulté, Fabien Mahaut a mesuré le module élastique de cisaillement de la suspension. Il convient de noter que la procédure de mise en place du matériau dans le rhéomètre a été élaborée de façon à assurer du mieux possible l'isotropie et l'homogénéité du matériau (Mahaut 2008). Les caractéristiques élastiques de la suspension sont déterminées au moyen d'expériences d'oscillations en régime linéaire. La valeur de la contrainte seuil à appliquer pour provoquer l'écoulement de matériau est mesurée en soumettant le matériau à une vitesse de déformation faible. Dans la mesure où l'application d'une sollicitation à taux de déformation non nul induit une migration quasi-instantanée des particules, les mesures sont destructives et chaque essai nécessité l'élaboration et la mise en place d'un nouvel échantillon.

3.3.1 Relation module élastique - seuil d'écoulement

Pour construire les estimations des caractéristiques rhéologiques de la suspension, on a supposé qu'il était possible de rendre compte des phénomènes de localisation des taux de cisaillement au sein du fluide porteur en utilisation un unique scalaire représentant le taux effectif de déformation du fluide porteur. Il s'agit d'une hypothèse forte dont il convient d'estimer la validité. Or il découle directement de cette hypothèse la relation suivante :

$$\tau_c^{hom} = \tau_c \sqrt{(1-\varphi) g(\varphi)} \tag{3.1}$$

reliant le seuil d'écoulement adimensionné de la suspension à la valeur de la fraction volumique occupée par les particules et au module élastique adimensionné qui est défini par :

$$G^{hom}/G = g(\varphi) \tag{3.2}$$

On constate donc qu'il est possible de vérifier expérimentalement la validité de la relation (3.1) dès lors que l'on dispose de mesures expérimentales du seuil de la suspension et de son module élastique à mêmes morphologies.

La comparaison des points expérimentaux mesurés par Fabien Mahaut et de la relation théorique $\log(\sqrt{(1-\varphi)\frac{G^{hom}}{G}} - 1) = \log(\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} - 1)$ obtenue à partir de (3.1) et (3.2) est reportée sur la figure 3.1. (D'après Chateau et al 2008 [COT08]).

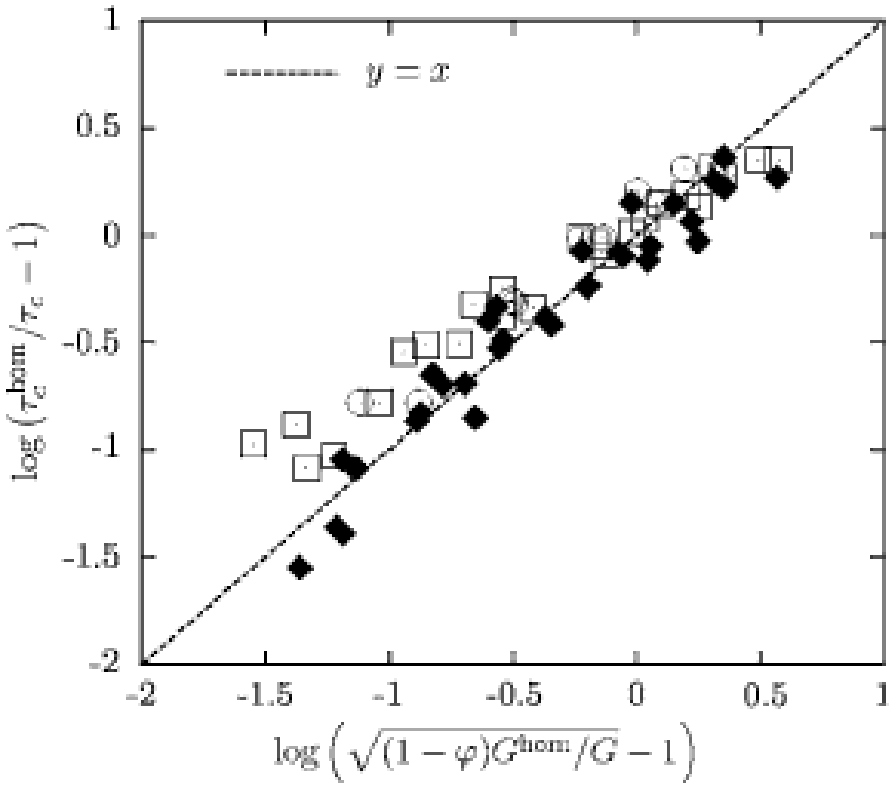


FIG. 3.1 – Seuil réduit modifié $\log(\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} - 1)$ en fonction du module élastique réduit modifié $\log(\sqrt{(1-\varphi)\frac{G^{hom}}{G}} - 1)$ pour divers matériaux (D'après Chateau et al 2008 [COT08])

On constate que l'accord entre résultat théorique et mesures expérimentales est tout à fait satisfaisant. Cet accord valide l'hypothèse consistant à rendre compte des phénomènes de localisation au sein de la phase fluide au moyen d'une unique grandeur scalaire.

3.3.2 Seuil d'écoulement

Dans cette section, on compare les prédictions du seuil d'écoulement de la suspension du modèle avec les mesures de Mahaut et al [MCO08]. On rappelle que dans le cadre d'une approche par homogénéisation du comportement de la suspension, le seuil de contrainte est estimé en utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases du chapitre 2 pour la fonction $g(\varphi)$ de la relation (3.1).

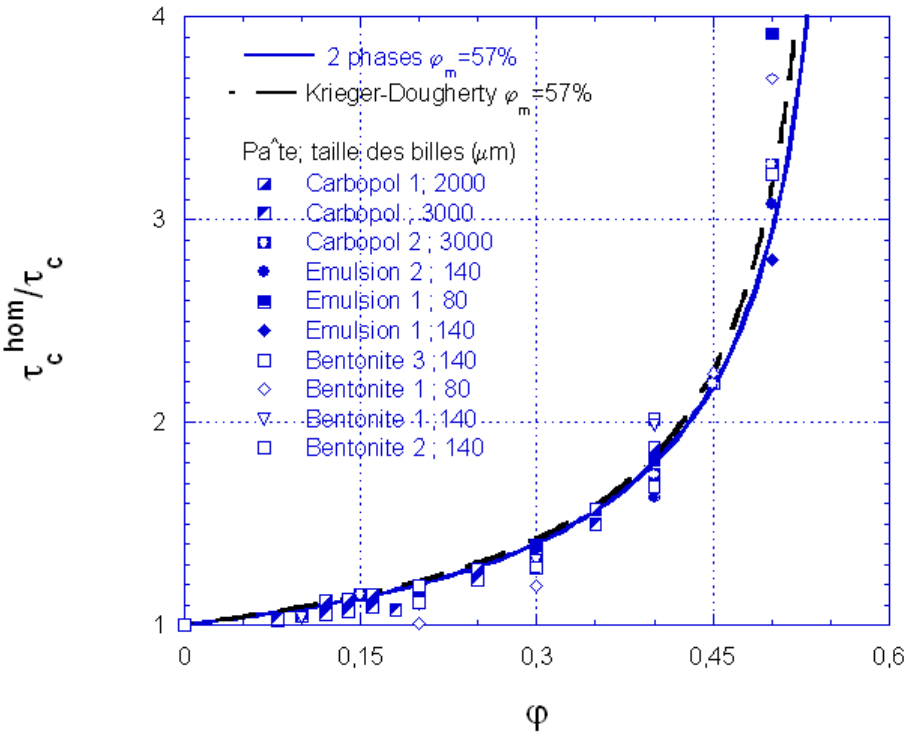


FIG. 3.2 – Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration entre le modèle et les points de Mahaut 2008.

Sur la figure 3.2, on a tracé l'évolution de seuil réduit en fonction de la fraction volumique en particules. Les symboles pleins et vides sont les résultats mesurés. La ligne continue représente le modèle avec $g(\varphi)$ déterminée par l'approche à deux motifs et deux phases $\tau_c^{hom} = \tau_c\sqrt{(1-\varphi)g_{2M}(\varphi)}$. La ligne " point-trait " représente le modèle avec $g(\varphi)$ estimée par la relation de Krieger-Dougherty $\tau_c^{KD} = \tau_c\sqrt{(1-\varphi)(1-\varphi/\varphi_m)^{-2.5\varphi_m}}$. On a ajusté les

valeurs de φ_m pour que le modèle utilisant la relation de Krieger-Dougherty et le modèle utilisant l'approche à deux motifs et deux phases soient les plus proches possibles des points expérimentaux. Dans les deux cas, le meilleur accord entre prédictions théoriques et mesures expérimentales est obtenu avec $\varphi_m = 57\%$.

Les résultats expérimentaux sur la figure 3.2 montrent que le seuil adimensionné dépend très peu du diamètre et de la nature des particules. Il dépend fortement de la concentration en particules et lorsque la concentration tend vers la fraction maximum volumique le seuil augmente très vite.

Ces résultats sont conformes aux prédictions du modèle théorique qui prévoit que le seuil adimensionné ne dépend que des valeurs de φ et de φ_m.

3.4 Comparaison avec les résultats expérimentaux dans la littérature

La comparaison des prédictions du modèle avec les résultats expérimentaux obtenus de Mahaut a montré la capacité du modèle à prédire correctement le seuil et le module d'élasticité en cisaillement d'une suspension monodisperse de sphères du modèle. Dans cette partie du chapitre, on évalue la qualité les prédictions du modèle théorique aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Dans les paragraphes qui suivent, on compare successivement les prédictions du modèle présentées au chapitre 2 aux résultats expérimentaux de Ancey et Jorrot 2001, de Geiker et al 2002 et d'Erdogan 2005. Il est à noter qu'Erdogan n'a pas mesuré, ni estimé la valeur de la fraction volumique d'empilement maximal des particules sphériques qu'il a utilisées. On a donc choisi d'adopter pour les particules sphériques la même valeur que celle mesurée par Ancey et Jorrot (2001), à savoir $\varphi_m = 0,635$.

Les matériaux mis en œuvre dans les trois études sont brièvement décrits dans le tableau 3.3.

	Auteurs	Fluide à seuil	Particules (billes)	Taille(cm)	φ_m
	Ancey et al	Suspension d'argile	Verre ; polystyrène	1,05 ; 2 ; 3	63,5%
	Erdogan	Mortier de ciment Porland	Ciment	4	
	Geiker et al	Pâte de ciment	Verre	0,4 ; 0,8 ; 1,6	65,6%

TAB. 3.3 – Caractéristiques des matériaux utilisés par Ancey et Jorrot 2001, Erdogan 2000 et Geiker 2002

3.4.1 Seuil d'écoulement

Ancey et Jorrot (2001) et d'Erdogan (2005) ont mesuré le seuil d'écoulement des suspensions en utilisant la technique du slump test, une technique garantissant l'isotropie et l'homogénéité de la suspension.

Geiker et al (2002) ont mesuré le seuil des suspensions qu'ils ont étudiées en utilisant le rhéomètre BML, un rhéomètre à béton coaxial qui provoque la migration des particules et leur répartition anisotrope au sein volume de matériau étudié. Par ailleurs, ils ont choisit d'estimer la valeur de seuil de la suspension à partir des valeurs de la viscosité apparente du matériau mesurée pour les fortes valeurs du taux de cisaillement appliqué. Or il a été montré dans Chateau et al 2008 [COT08] que cette procédure conduisait à largement surestimer la valeur de la contrainte nécessaire à la mise en écoulement de la suspension. Ces résultats permettent d'une part de comprendre pourquoi les valeurs du seuil relatif (rapport du seuil de la suspension sur le seuil du fluide porteur) mesurées par Geiker et al sont beaucoup plus importantes que les valeurs mesurées dans les trois autres études (jusqu'à 10 fois plus fortes) et d'autre part justifie le fait que nous avons choisi de ne pas les considérer dans la suite de cette étude.

L'estimation du seuil et les résultats des différents essais sont représentés sur les figures suivantes 3.3 et 3.4. Sur ces deux figures, la ligne continue correspond au modèle utilisant l'approche à deux motifs et deux phases, tandis que la ligne " point-trait " correspond au modèle utilisant la relation de Krieger-Dougherty. Les points représentent les résultats expérimentaux.

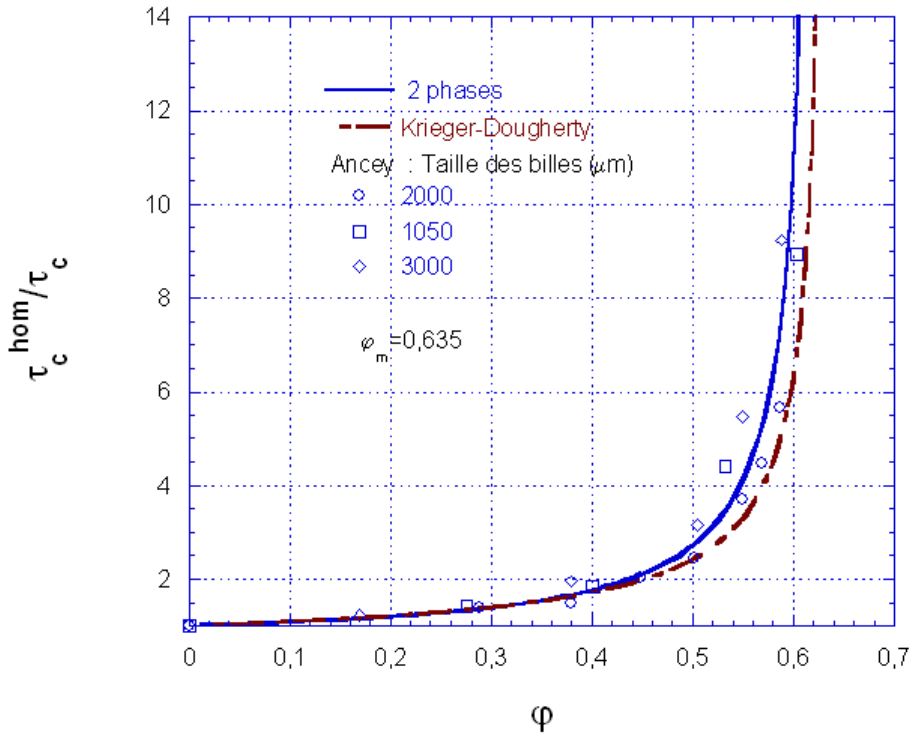


FIG. 3.3 – Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration en particules pour les résultats d'Ancey et Jorrot et les estimations théoriques.

On constate que l'estimation utilisant la relation de Krieger-Dougherty donne des résultats

très proche de l'estimation utilisant le schéma morphologique à deux motifs et deux phases tant que la fraction volumique en particules reste inférieure à 40%. Pour les valeurs de supérieure à 40%, on constate que l'estimation reposant sur le schéma à deux motifs et deux phases représente mieux les résultats expérimentaux.

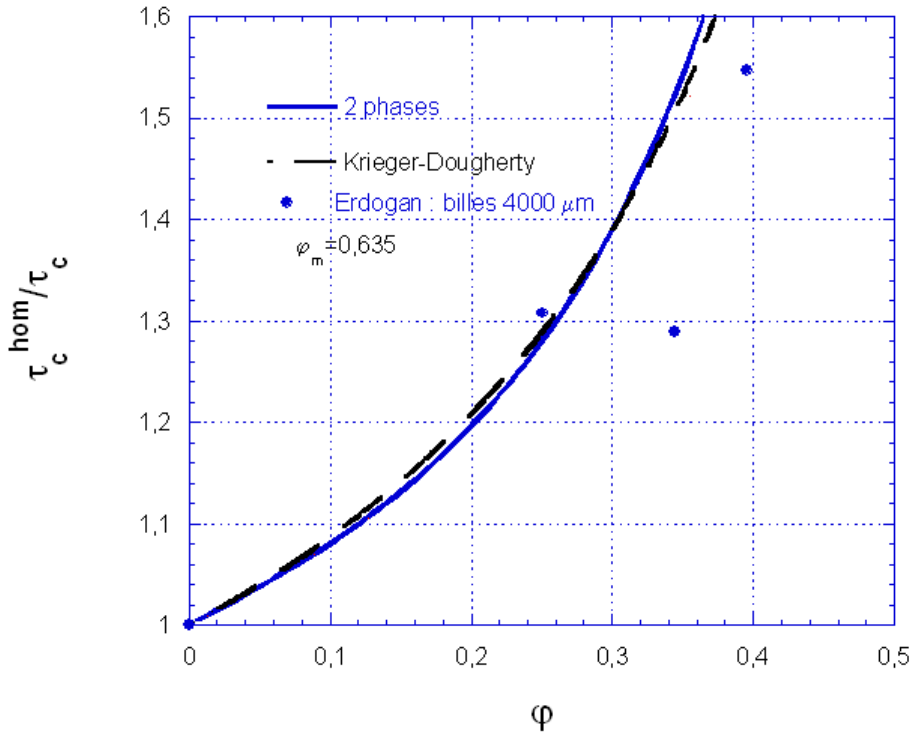


FIG. 3.4 – Comparaison du seuil réduit en fonction de la concentration en particules pour les résultats expérimentaux d'Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques.

On constate que l'accord entre les données d'Erdogan et les estimations théoriques est moins bon que celui obtenu avec les expériences de Mahaut ou celle d'Ancey et Jorrot. Le fait qu'Erdogan ait utilisé une pâte cimentaire comme fluide suspendant peut sans doute expliquer dans une certaine mesure cet écart entre modèle théorique et caractérisation expérimentale. Il est en effet bien connu que la mesure des caractéristiques réduites sur les matériaux cimentaires est un problème difficile qui doit être abordé soigneusement (voir Mahaut et al). Il semble que ces difficultés n'aient pas été prises en comptes dans l'étude expérimentale d'Erdogan.

3.4.2 Viscosité

Les prédictions théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux d'Erdogan et Geiker sur les figures 3.5 et 3.6 :

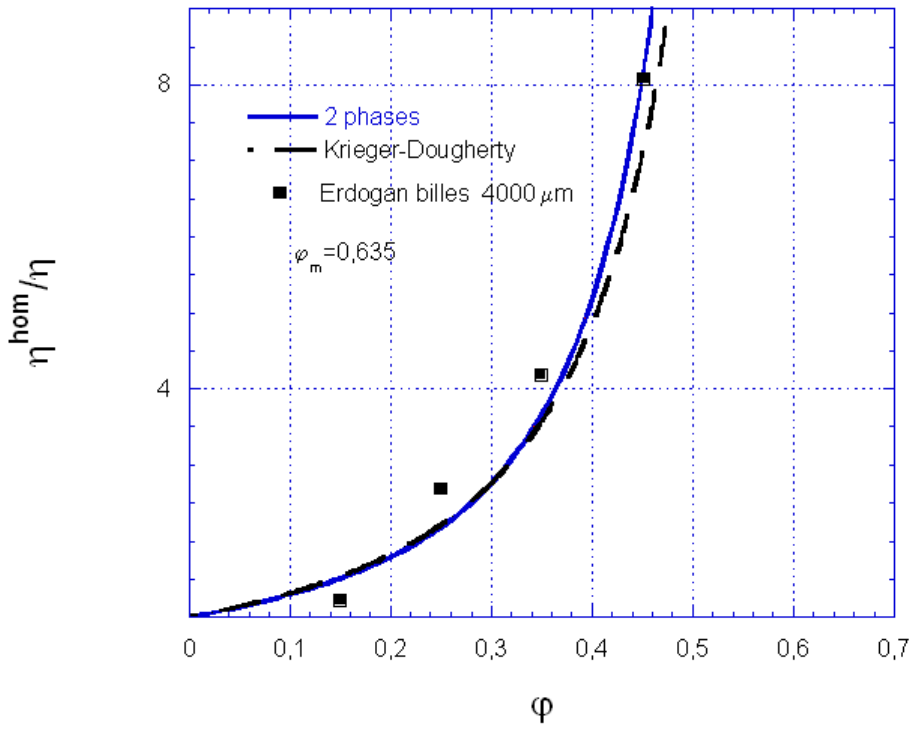


FIG. 3.5 – Comparaison de la viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules pour les résultats d'Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques (n=1).

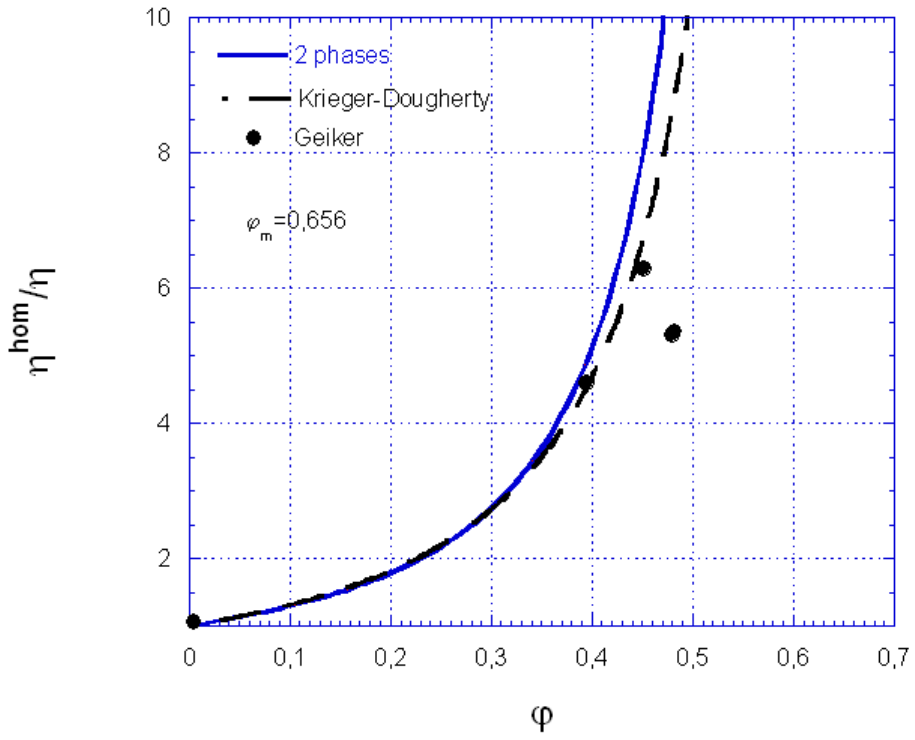


FIG. 3.6 – Comparaison de la viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules pour les résultats de Geiker [GBTN02] et les estimations théoriques (n=1).

Pour les deux jeux de données, on constate que l'accord entre données expérimentales et estimations théoriques est globalement correct. Ce résultat est tout à fait satisfaisant compte tenu du fait qu'il est tout à fait probable que les viscosités plastiques sont mesurées sur des matériaux qui ne satisfont pas entièrement aux hypothèses formulées pour obtenir les estimations (isotropie et homogénéité notamment). Il convient néanmoins de noter qu'aucun point expérimental n'est disponible pour les fortes valeurs de la concentration en particules (supérieure à 50%). Par ailleurs le moins bon accord entre données expérimentales et prédictions théoriques observé pour les points de Geiker peut sûrement s'expliquer par la relative polydispersité des particules utilisées par Geiker (rapport de tailles de l'ordre de 2).

3.5 Conclusion

La comparaison des estimations théoriques et des données expérimentales obtenues par Mahaut nous a permis de valider les hypothèses formulées pour obtenir les différentes estimations (caractérisation du champ des taux de déformation dans la phase par un unique scalaire). Les estimations théoriques se comparent favorablement aux résultats expérimentaux dès lors que ceux-ci ont été obtenus dans des conditions pas trop éloignées d'hypothèses formulées pour construire les estimations (isotropie et homogénéité, interaction hydrodynamique). Les estimations construites en utilisant les modèles morphologiques à deux motifs et deux phases paraissent plus pertinentes que celles obtenues en utilisant la relation de Krieger-Dougherty, particulièrement pour les fortes valeurs des fractions volumiques ($>$ 40%). De façon cohérente avec les observations expérimentales, les estimations proposées prédisent que les caractéristiques globales réduites de la suspension (seuil et viscosité plastique) ne dépendent que de la teneur volumique en particule dans le cas de suspensions monodispenses homogènes et isotropes.

CHAPITRE

4

Problème polydisperse

4.1 Introduction

Dans les chapitres précédents on s'est attaché à prédire les caractéristiques globales d'une suspension de particules **monodisperses** dans un fluide à seuil. Le modèle proposé a été validé par comparaison avec différents résultats expérimentaux. On a montré que ce modèle fournissait des estimations de bonne qualité des caractéristiques rhéologiques globales applicables à des suspensions diverses (particules sphériques constituées de matériaux différents suspendues dans des fluides à seuil variés). Les principales restrictions à la généralisation de l'emploi de ces estimations proviennent des hypothèses formulées pour construire le modèle concernant le forme des particules (sphérique) et le caractère monodisperse de la suspension. On examine dans ce chapitre si ce modèle peut être étendu pour estimer les caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules **polydisperses**.

Pour mener à bien cette étude, on s'appuie sur les essais d'Ancey et Jorrot qui ont étudié l'influence de particules bidisperses sur le seuil d'une suspension de Kaolin. Ensuite, une méthode s'inspirant du modèle de Farris est proposée afin de résoudre le problème polydisperse par superposition de problèmes monodisperses. Une première validation des prédictions du modèle avec les résultats d'Ancey et Jorrot est enfin présentée.

4.2 Etude expérimentale

Les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot [AJ01] permettent de quantifier l'influence de particules polydisperses sur les caractéristiques globales d'une suspension. Ancey et

Jorrot ont effectué des mesures du seuil de suspensions de particules bimodales suspendues dans une dispersion de Kaolin. Les particules bimodales sont des billes de verre de diamètre 1 et 3 mm (ratio $\alpha = 3$) et de diamètre 0,3 et 3mm ($\alpha = 10$) ou des grains de sable de diamètre 0,35 et 1.2 mm. Pour étudier l'influence de la proportion relative de petites particules par rapport aux grosses particules, ils ont choisi d'étudier différentes valeurs du rapport entre le volume de petites particules et le volume total de particules $\xi = \frac{\varphi_{petites particules}}{\varphi_{petites particules} + \varphi_{grosses particules}} = 0{,}8$; 0,6 ; 0,4 ; 0,2. Les résultats obtenus par Ancey et Jorrot sont présentés sur les figures 4.1, 4.2 et 4.3. Dans ces figure, la valeur de la fraction volumique maximale en particules d'une suspension monodisperse $\varphi_m = 0,635$ a été utilisée.

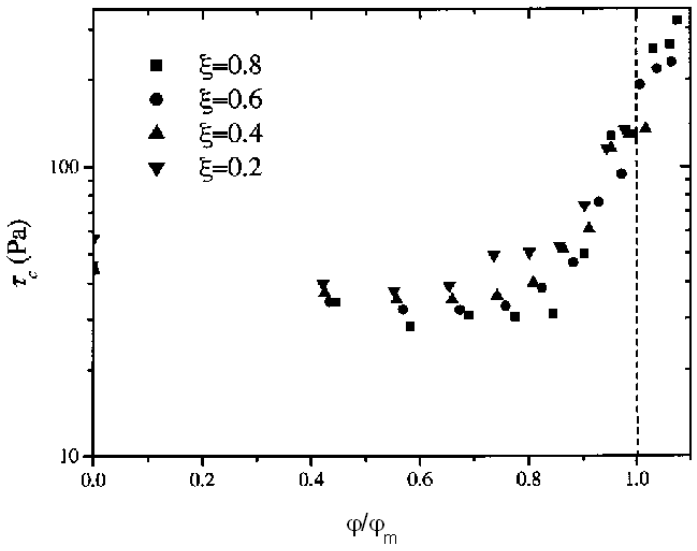


FIG. 4.1 – Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de billes de verre. Les diamètres sont 1 et 3 mm ($\alpha = 3$). Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01].

On trouve que le rapport entre la fraction volumique en particules bidisperses et la fraction volumique maximale d'une suspension monodisperse φ/φ_m peut atteindre une valeur supérieure à 1. Pour les particules de billes de verre, le seuil d'écoulement global de la suspension est inférieur à celui du fluide porteur pour les valeurs de la concentration relative en particules φ/φ_m inférieures à l'ordre de 0,8. Par contre, au delà de cette valeur, le seuil d'écoulement augmente brutalement. Pour les particules de sable, le seuil d'écoulement augmente régulièrement quand φ/φ_m augmente. Les points expérimentaux correspondant à chaque valeur de ξ sont très proches les uns des autres mais ne coïncident pas parfaitement.

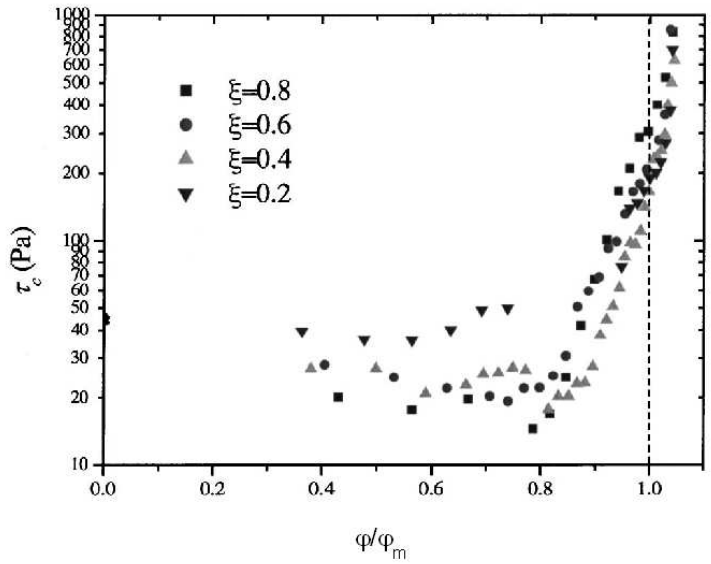


FIG. 4.2 – Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de billes de verre. Les diamètres sont 0.3 et 3 mm ($\alpha = 10$). Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01].

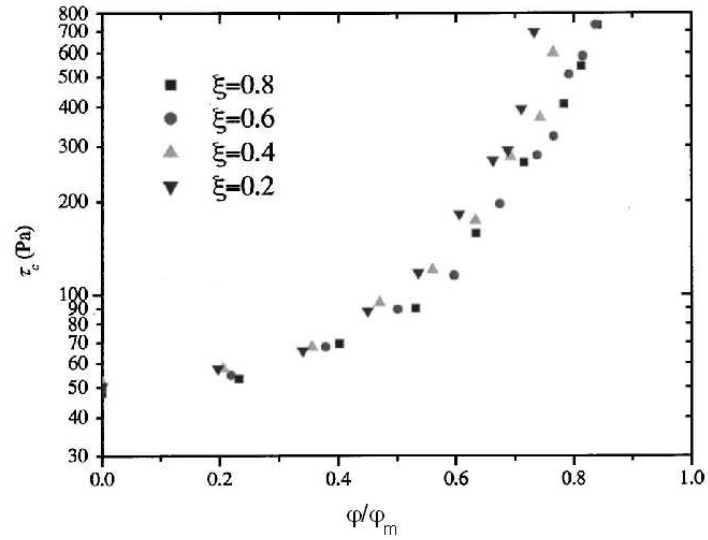


FIG. 4.3 – Evolution de seuil d'écoulement τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour la suspension bidisperse de sables. Figure extraite de Ancey et Jorrot [AJ01].

4.3 Construction le modèle pour suspension polydisperse

L'idée la plus simple pour construire un modèle polydisperse consiste à reprendre l'idée de Farris consistant à considérer que la solution au problème polydisperse s'obtient en superposant plusieurs problèmes monodisperses. Ce modèle suppose que les particules peuvent être classées en N classes caractérisée chacune par des tailles nettement différentes. Les classes sont triées en ordre croisant de taille et repérées par un indice i=1...N dont la valeur correspond à l'ordre de la classe. Dans ce cas, on peut considérer que la suspension de particules de classe i se comporte comme un liquide homogène vis à vis des particules plus grosses appartenant à la classe $i+1$. La solution du problème polydisperse s'obtient donc en résolvant successivement N problème monodisperses.

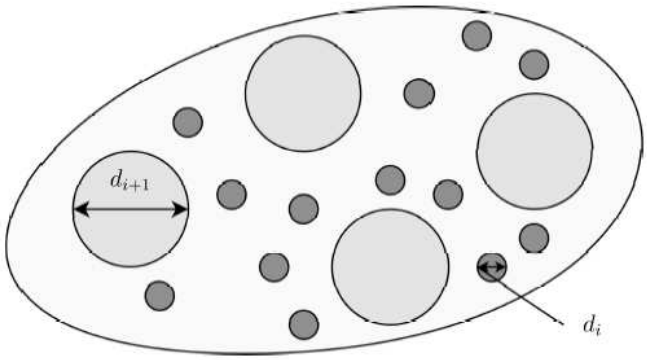


FIG. 4.4 – Suspension de particules polydisperses

On commence par rappeler le modèle de Farris qui permet de prédire les caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules polydisperses dans un **fluide Newtonien**. Ensuite, les résultats obtenus par Farris sont intégrés dans le modèle de suspension monodisperse dans un **fluide à seuil** afin de résoudre le problème d'une suspension de particules polydisperse dans un fluide à seuil.

4.3.1 Suspension de particules dans un fluide Newtonien

Si la taille des particules de la suspension vérifie la condition :

$$d_1 \ll ... \ll d_i \ll d_{i+1} \ll ... \ll d_N \text{ signifie : } \frac{d_{i+1}}{d_i} > 10 \tag{4.1}$$

où d_i désigne le diamètre des particules appartenant à la classe i.

Farris [Far68] a construit un modèle pour cette suspension de particules polydisperse à partir de N problèmes monodisperses en procédant étape par étape :

- Etape 1 : On introduit les particules de plus petite taille (classe numéro 1) en fraction vomumique φ_1 dans le fluide porteur de viscosité μ_0 de fraction volumique φ_f. φ_f désigne la fraction volumique occupée par le fluide pur dans la suspension polydisperse. La viscosité réduite μ_{r1} de cette suspension monodisperse est égale à :

$$\mu_{r1} = \frac{\mu_1}{\mu_0} = g(\frac{\varphi_1}{\varphi_f + \varphi_1}, \varphi_m) \tag{4.2}$$

avec $g(\frac{\varphi_1}{\varphi_f+\varphi_1}, \varphi_m)$ la viscosité réduite calculée en utilisant le modèle à deux motifs et deux phases ou la relation de Krieger-Dougherty (chapitre 2)

....

- Etape i : On introduit les particules de la classe numéro i dans la suspension de viscosité μ_{i-1}. Comme la taille de particules de la classe i est nettement supérieure à celle des particules de la classe numéro i-1, on peut considérer que la suspension de particules de la classe numéro i-1 se comporte comme un fluide homogène vis à vis des particules de la classe numéro i. La viscosité réduite de cette suspension est donc égale à :

$$\mu_{ri} = \frac{\mu_i}{\mu_{i-1}} = g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m) \tag{4.3}$$

....

- Etape N : On introduit les particules de la classe numéro N dans la suspension de viscosité μ_{N-1}. La viscosité réduite de la suspension est :

$$\mu_{rN} = \frac{\mu_N}{\mu_{N-1}} = g(\frac{\varphi_N}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j}, \varphi_m) \tag{4.4}$$

avec $\varphi_f + \sum_{j=1}^{N} \varphi_j = 1$, donc $\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j = 1 - \sum_{j=i+1}^{N} \varphi_j$.

La suspension finale a donc une viscosité réduite correspondant au produit des viscosités réduites associées à chaque suspension monodisperse :

$$\mu_r = \frac{\mu_N}{\mu_0} = \prod_{i=1}^{N} g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m) \tag{4.5}$$

4.3.2 Suspension de particules dans un fluide à seuil

Pour prédire le seuil d'écoulement d'une suspension de particules polydisperse dans un fluide à seuil, on suit le même raisonnement que celui utilisé dans le cas du fluide Newtonien.

On utilise les résultats obtenus au chapitre précédent pour une suspension monodisperse de particules sphériques dans un fluide de Herschel-Bulkley (relation (2.80)).

On a :

$$\frac{\tau_i^{hom}}{\tau_{i-1}^{hom}} = \sqrt{(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j})\mu_i^r} \tag{4.6}$$

On a évidemment :

$$\mu_i^r = g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m) \tag{4.7}$$

En combinant les deux, on obtient :

$$\frac{\tau_i^{hom}}{\tau_{i-1}^{hom}} = \sqrt{(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j})g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m)} \tag{4.8}$$

Ensuite, on obtient une relation pour la suspension complète qui s'écrit :

$$\frac{\tau_N^{hom}}{\tau_f} = \prod_{i=1}^{N} \frac{\tau_i^{hom}}{\tau_{i-1}^{hom}} \tag{4.9}$$

avec $\tau_0^{hom} = \tau_f$.

En reportant (4.8), on obtient :

$$\frac{\tau_N^{hom}}{\tau_f} = \sqrt{\prod_{i=1}^{N}(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}) \prod_{i=1}^{N} g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m)} \tag{4.10}$$

On procède de la même façon pour la viscosité (relation (2.81)) :

$$\frac{\eta_i^{hom}}{\eta_{i-1}^{hom}} = \mu_i^r \sqrt{(\frac{\mu_i^r}{1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}})^{n-1}} \tag{4.11}$$

Et finalement :

$$\frac{\eta_N^{hom}}{\eta_f} = \prod_{i=1}^{N} g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j}, \varphi_m) \sqrt{(\frac{\prod_{i=1}^{N} g(\frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_i}, \varphi_m)}{\prod_{i=1}^{N}(1 - \frac{\varphi_i}{\varphi_f + \sum_{j=1}^{i} \varphi_j})})^{n-1}} \tag{4.12}$$

On applique ces résultats pour estimer les caractéristiques globales d'une suspension bidisperse de particules sphériques. On suppose bien sur la condition (4.1) est vérifiée pour la suspension étudiée. On suppose que la fraction volumique de la classe 1 est φ_1 et que la

↻

proportion volumique de la classe 2 par rapport à la classe 1 est β. Les fractions volumiques des autres constituants de la suspension sont définies par :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \beta\varphi_1, \\ \varphi_f &= 1 - \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned} \tag{4.13}$$

La fraction volumique maximale des deux problèmes monodisperses est égale à φ_m. On a donc les deux inéquations suivantes :

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_1 + \varphi_f} \leq \varphi_m \tag{4.14}$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_f} = \varphi_2 \leq \varphi_m \tag{4.15}$$

A partir de deux inéquations (4.14) et (4.15) on peut trouver la valeur maximale de la fraction volumique pour les deux classes de particules. Ces valeurs assurent que la fraction volumique de particules dans chaque suspension monodisperse est toujours inférieure à la fraction volumique maximale φ_m.

On a alors :

$$\frac{\tau^{hom}}{\tau_f} = \sqrt{(1 - \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}) g(\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}, \varphi_m)(1-\varphi_2) g(\varphi_2, \varphi_m)} \tag{4.16}$$

ou

$$\frac{\tau^{hom}}{\tau_f} = \sqrt{(1 - \varphi_1 - \varphi_2) g(\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}, \varphi_m) g(\varphi_2, \varphi_m)} \tag{4.17}$$

Si on utilise la relation de Krieger-Dougherty pour calculer g on a :

$$g^{KD}(\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}, \varphi_m) = (1 - \frac{\varphi_1}{(1-\beta\varphi_1)\varphi_m})^{-2.5\varphi_m} \text{ et } g^{KD}(\varphi_2, \varphi_m) = (1 - \frac{\varphi_2}{\varphi_m})^{-2.5\varphi_m} \tag{4.18}$$

On peut évidemment également utiliser l'approche à deux motifs et deux phases pour estimer les fonctions g en conservant les mêmes argument que ceux utilisés dans (4.18).

4.3.3 Premières réponses

La figure 4.5 présente l'évolution de seuil d'écoulement réduit τ_c^{hom}/τ_c en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m pour deux jeux de données $\beta = 0,25$ et $\beta = 0,66$. Les lignes continues représentent le modèle utilisant l'approche à deux motifs et deux phases. Les lignes discontinues représentent le modèle utilisant la relation de Krieger-Dougherty. La couleur foncée (noir) correspond à $\beta = 0,66$ et la couleur pâle (bleu) correspond à $\beta = 0,25$.

↻

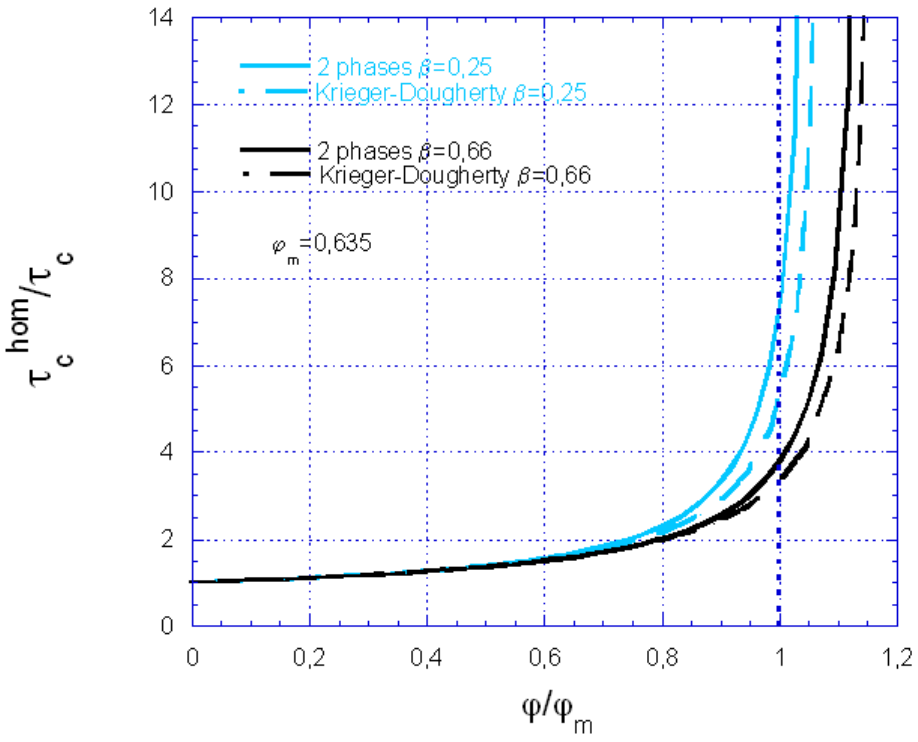


FIG. 4.5 – Evolution du seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m

On trouve d'abord que le modèle utilisant l'approche à deux motifs et deux phases et celui utilisant la relation de Krieger-Dougherty sont cohérents. Les estimations obtenues sont très proches pour les faibles valeurs de la concentration en particules ($\varphi/\varphi_m < 0,8$) et il y a un petit écart entre les prédictions pour les valeurs plus importantes de la concentration en particules. A partir de la valeur approximative $\varphi/\varphi_m = 0,8$, le seuil d'écoulement réduit augmente très rapidement. Evidemment la fraction volumique relative de particules peut atteindre une valeur supérieure à un.

On trouve aussi que la proportion volumique des classes de particules β joue un rôle pour les fortes valeurs de φ car elle influence fortement la valeur de la fraction volumique maximale totale en particules.

Comme dans le cas monodisperse, quand φ/φ_m augmente, le seuil d'écoulement réduit augmente et quand φ tend vers la fraction volumique maximale totale de particules, le seuil d'écoulement réduit tend vers infini.

4.4 Validation

Parmi des essais d'Ancey et Jorrot, seule la suspension de particules bimodale constitué de particules de diamètre 0,3 et 3mm qui satisfait la condition de séparation de taille de particules. C'est pourquoi, les prédictions de l'équation (4.17) ne sont comparées qu'aux résultats de cette série d'essais. Les figures 4.6 et 4.7 présentent successivement les comparaisons entre les prédictions de l'équation (4.17) utilisant l'approche à deux motifs et deux phases et la relation de Krieger-Dougherty avec les résultats expérimentaux d'Ancey.

On trouve que les prédictions de l'équation (4.17) représentent bien les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot pour les fortes valeurs de la concentration relative en particules. Le modèle et les résultats expérimentaux donnent la même tendance : Après une valeur approximative de 0,8 pour la concentration en particules, le seuil d'écoulement réduit augmente rapidement. Cependant pour les faibles valeurs de la concentration, le seuil d'écoulement réduit prédit par le modèle augmente très légèrement tandis que l'on constate qu'expérimentalement le seuil réduit est une fonction décroissante de φ pour φ/φ_m inférieur à 80%. Selon Ancey et Jorrot, cette diminution du seuil réduit est expliquée par le phénomène de déplétion. Ce phénomène ne peut pas provenir de contraintes géométriques, il est probable de résulter de la répulsion des forces superficielles entre le kaolin et des particules ou des changements de structures. Cependant cette réduction du seuil d'écoulement n'est pas toujours pour tous les types matériaux de particule (comme les sables dans les essais d'Ancey et Jorrot).

4.5 Conclusion

On a proposé une estimation du seuil d'une suspension de particules polydisperse en généralisant le raisonnement de Farris au cas de la suspension des particules dans un fluide à seuil.

La première comparaison du modèle avec les essais d'Ancey et Jorrot montre que le modèle ne s'applique que pour les valeurs élevées de la fraction volumique.

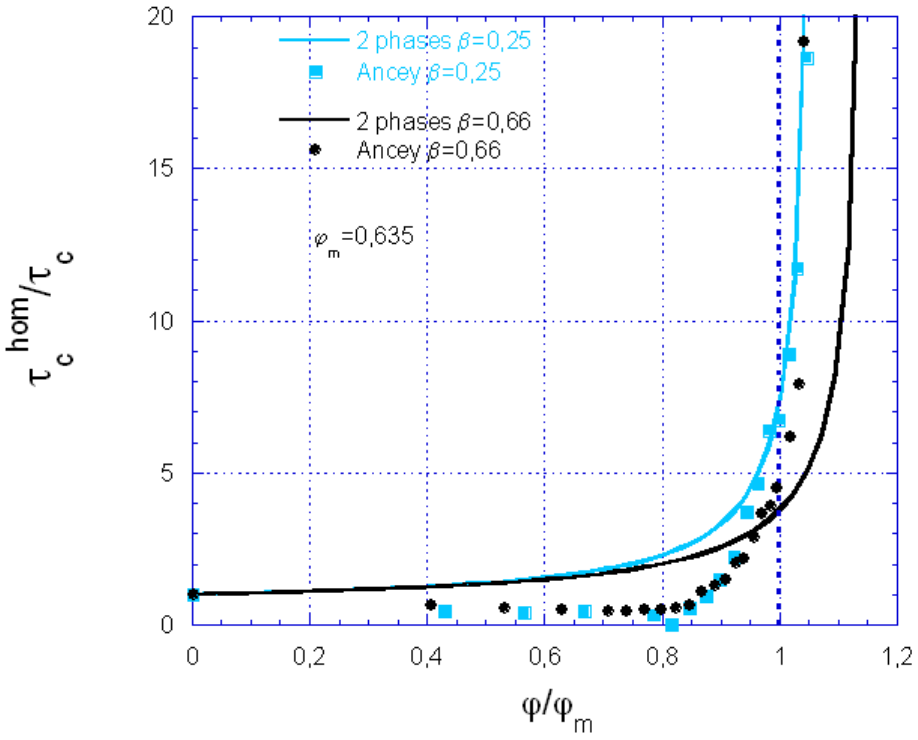


FIG. 4.6 – Comparaison entre les prédictions de l'équation (4.17) utilisant l'approche à deux motifs et deux phases et les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot pour le seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m

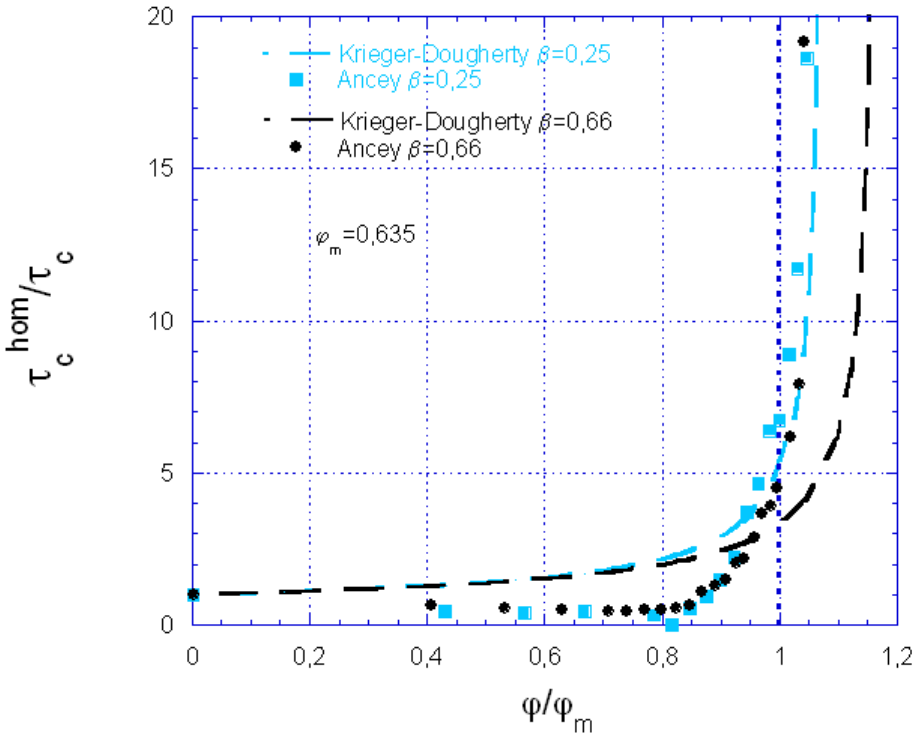


FIG. 4.7 – Comparaison entre les prédictions de l'équation (4.17) utilisant la relation de Krieger-Dougherty et les résultats expérimentaux d'Ancey et Jorrot pour le seuil d'écoulement réduit en fonction de la fraction volumique relative φ/φ_m

Le modèle utilise une hypothèse de distinction de la taille des classes de particules : $d_i \ll d_{i+1}$ signifiant que $\frac{d_{i+1}}{d_i} > 10$. Cela limite le domaine d'application du modèle. Il ne convient plus si cette condition de distinction des particules n'est pas vérifiée. Afin de traiter ce problème, on peut utiliser le modèle de Farris modifié [BPX05]. Ce modèle prend en compte les interactions géométriques des particules en intégrant la description d'interactions de Larrard [Lar99]. Cependant, le problème devient beaucoup plus complexe, donc il n'a pas été traité ici.

CHAPITRE

5

Modèle à deux motifs et trois phases

5.1 Introduction

Les estimations proposées aux chapitres précédents utilisent une approche à deux motifs et deux phases, qui négligent les hétérogénéités du champ des taux de déformation à l'intérieur de la phase fluide. Pour construire cette approche, on a supposé qu'il était acceptable d'utiliser un champ uniforme sur le domaine occupé par la phase fluide pour estimer le module de cisaillement sécant. Ce faisant, on ne distingue pas les parties du fluide coincées entre deux particules des parties du fluide se trouvant dans les " pores " formés par les particules (voir Fig 5.1). Quand la concentration en particules est grande, il est clair que le fluide se trouvant entre deux particules proches est soumis à un taux de cisaillement plus important que le fluide se trouvant dans les espaces interparticules (Fig 5.1). Dans ces situations, l'hypothèse d'uniformité des taux de cisaillement utilisée au chapitre 2 n'est évidemment plus valable.

Dans ce chapitre, on cherche à prendre en compte cette hétérogénéité du champ des taux de déformation en distinguant deux domaines fluides constitués chacun d'une phase fluide différente caractérisée par des modules de cisaillement différents $\mu_1 \neq \mu_2$. On obtient ainsi un modèle morphologique à deux motifs et à trois phases plus sophistiqué que celui à deux motifs et deux phases développé au chapitre 2. On espère que l'amélioration de la description des hétérogénéités des caractéristiques intraphases permettra d'améliorer la qualité des estimations construites.

La construction de ce modèle consiste donc à reprendre le modèle morphologique à deux motifs et deux phases considéré précédemment mais en adoptant deux valeurs différentes du module de cisaillement du fluide dans la couronne entourant la particule et dans le

motif sphérique (voir Fig 5.2). La séparation du domaine fluide en deux sous domaines aux caractéristiques différentes augmente la taille du système. Il n'est plus possible d'obtenir une solution analytique de ce dernier. On met donc en œuvre un algorithme de point fixe pour résoudre numériquement le problème.

Dans la dernière partie de ce chapitre, on compare les prédictions de ce nouveau modèle avec les estimations obtenues en mettant en œuvre le modèle à deux motifs et deux phases ainsi qu'avec les résultats expérimentaux.

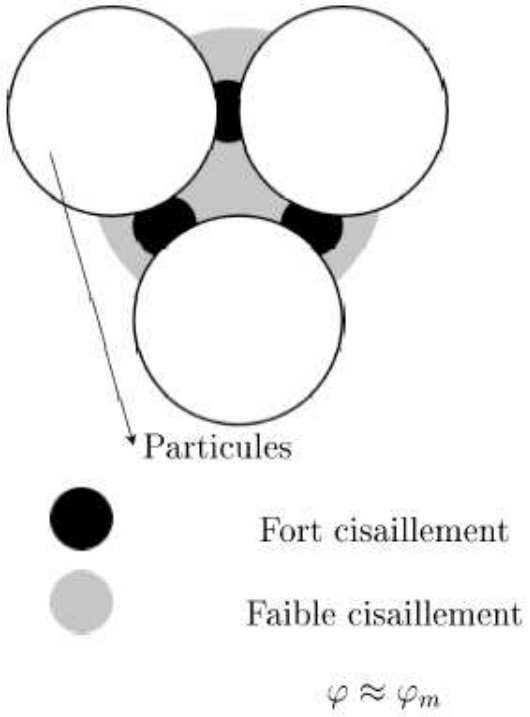


FIG. 5.1 – Hétérogénéité du taux de déformation au sein d'une suspension de particules concentrées.

5.2 Homogénéisation linéaire

La démarche permettant d'obtenir l'estimation correspondant à l'approche à trois phases est tout à fait similaire à celle mise en œuvre dans le cas de l'approche à deux phases puisque les deux approches reposent sur le même modèle. La seule différence entre les deux approches réside dans les valeurs différentes prises par le module de cisaillement dans les différentes phases.

Le comportement effectif de la suspension prédit par le modèle à trois phases est toujours défini par la relation :

$$\mathbb{C}^{hom} = (\varphi_m \mathbb{U}^0_{D1} + (1-\varphi_m)\mathbb{U}^0_{D2}) : (\varphi_m \mathbb{V}^0_{D1} + (1-\varphi_m)\mathbb{V}^0_{D2})^{-1} \tag{5.1}$$

↻

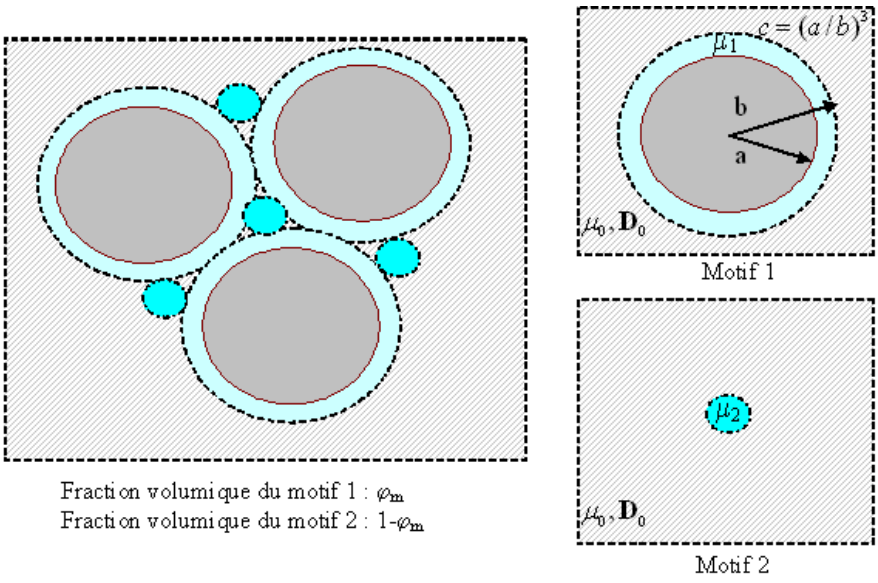


FIG. 5.2 – Modèle à deux motifs et trois phases

A l'échelle macroscopique, le matériau est incompressible et isotrope. Son comportement est caractérisé donc par le module μ^{hom} solution de l'équation :

$$2\mu^{hom} = (\varphi_m \frac{U_1^0}{D_1^0} + (1-\varphi_m)\frac{U_2^0}{D_2^0})/(\varphi_m \frac{V_1^0}{D_1^0} + (1-\varphi_m)\frac{V_2^0}{D_2^0}) \tag{5.2}$$

où D_1^0, D_2^0, U^0, V^0 sont des fonctions de a, b, μ_1 et μ_2 données en annexe A.

On utilise l'estimation autocohérente obtenue à partir de la relation (5.2) en imposant $\mu^0 = \mu^{hom}$. On trouve que μ^{hom} est l'unique solution réelle positive de l'équation $a0 +$

$a1\mu^{hom} + a2(\mu^{hom})^2 + a3(\mu^{hom})^3 = 0$ avec :

$$
\begin{array}{lcl}
a0 & = & -450\,\mu_2 c{\mu_1}^2 - 96\,\mu_2 c^{10/3}{\mu_1}^2 - 76\,\mu_2{\mu_1}^2 - 400\,\mu_2 c^{7/3}{\mu_1}^2 + 672\,\mu_2 c^{5/3}{\mu_1}^2 \\
 & = & (-450c - 96c^{10/3} - 76 - 400c^{7/3} + 672c^{5/3})\mu_2\mu_1^2 \\
 & & \\
a1 & = & 1680\,\varphi_m c^{5/3}{\mu_1}^2 - 240\,\varphi_m c^{10/3}{\mu_1}^2 + 96\,c^{10/3}{\mu_1}^2 - 1125\,\varphi_m c{\mu_1}^2 - 190\,\varphi_m{\mu_1}^2 \\
 & + & 1000\,\varphi_m c^{7/3}\mu_1\mu_2 - 1000\,\varphi_m c^{7/3}{\mu_1}^2 - 150\,\mu_2 c\mu_1 - 1680\,\varphi_m\mu_1 c^{5/3}\mu_2 \\
 & - & 160\,\varphi_m c^{10/3}\mu_1\mu_2 - 672\,c^{5/3}{\mu_1}^2 + 190\,\varphi_m\mu_1\mu_2 + 192\,\mu_2 c^{10/3}\mu_1 + 336\,\mu_2 c^{5/3}\mu_1 \\
 & - & 200\,\mu_2 c^{7/3}\mu_1 + 76\,{\mu_1}^2 + 650\,\varphi_m c\mu_1\mu_2 + 400\,c^{7/3}{\mu_1}^2 - 178\,\mu_2\mu_1 + 450\,c{\mu_1}^2 \\
 & = & (1680\,\varphi_m c^{5/3} - 240\,\varphi_m c^{10/3} + 96\,c^{10/3} - 1125\,\varphi_m c - 190\,\varphi_m - 1000\,\varphi_m c^{7/3} \\
 & - & 672\,c^{5/3} + 76\ + 400\,c^{7/3} + 450\,c)\mu_1^2 \\
 & + & (1000\,\varphi_m c^{7/3} - 150\,c - 1680\,\varphi_m c^{5/3} \\
 & - & 160\,\varphi_m c^{10/3} + 190\,\varphi_m + 192\,c^{10/3} + 336\,c^{5/3} \\
 & - & 200\,c^{7/3} + 650\,\varphi_m c - 178)\,\mu_2\mu_1 \\
 & & \\
a2 & = & 600\,\varphi_m\mu_1 c - 160\,\varphi_m\mu_1 + 240\,\varphi_m\mu_1 c^{10/3} + 600\,\mu_2 c + 178\,\mu_1 - 1000\,\mu_2\varphi_m c^{7/3} \\
 & - & 192\,\mu_1 c^{10/3} + 160\,\mu_2\varphi_m c^{10/3} - 1008\,\mu_2 c^{5/3} + 150\,\mu_1 c + 600\,\mu_2 c^{7/3} \\
 & + & 1000\,\varphi_m\mu_1 c^{7/3} + 160\,\mu_2\varphi_m - 96\,\mu_2 c^{10/3} - 1680\,\varphi_m\mu_1 c^{5/3} + 1680\,\mu_2\varphi_m c^{5/3} \\
 & - & 96\,\mu_2 + 200\,\mu_1 c^{7/3} - 1000\,\mu_2\varphi_m c - 336\,\mu_1 c^{5/3} \\
 & = & (600\,\varphi_m c - 160\,\varphi_m + 240\,\varphi_m c^{10/3} + 178\ - 192\,c^{10/3} + 150\,c + 1000\,\varphi_m c^{7/3} \\
 & - & 1680\,\varphi_m c^{5/3} + 200\,c^{7/3} - 336\,c^{5/3})\mu_1 \\
 & + & (600c - 1000\varphi_m c^{7/3} + 160\,\varphi_m c^{10/3} - 1008\,c^{5/3} + 600\,c^{7/3} + 160\,\varphi_m \\
 & - & 96\,c^{10/3} + 1680\,\varphi_m c^{5/3} - 96\ - 1000\,\varphi_m c)\mu_2 \\
 & & \\
a3 & = & 96\,c^{10/3} + 1008\,c^{5/3} - 600\,c^{7/3} - 600\,c + 96
\end{array}
\tag{5.3}
$$

Remarque : Si l'on impose $\mu_2 = \mu_1 = \mu$, les coefficients ci-dessus sont identiques à ceux de l'estimation à deux phases du chapitre 2.

L'équation du troisième degré définie par les coefficients (5.3) est résolue en utilisant les relations données au chapitre 2. On trouve que μ^{hom} est une fonction de μ_1, μ_2, c et φ_m.

La figure 5.3 présente les évolutions de la viscosité réduite μ^{hom}/μ_1 en fonction de la concentration pour une fraction volumique $\varphi_m = 60\%$ et pour différentes valeurs du rapport $\mu_2/\mu_1 = 100\,;\ 10\,;\ 1\,;\ 0,\ 1\,;\ 0{,}01$.

On trouve que quand le rapport μ_2/μ_1 augmente, la courbe croit plus rapidement quand la concentration tend vers φ_m.

On remarque également que quand $\varphi = 0$, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de particule rigide, on obtient des valeurs de μ^{hom}/μ_1 égale à 8,33 ; 2,75 ; 0,47 ; 0,35 respectivement pour les valeurs de $\mu_2/\mu_1 = 100; 10; 1; 0,1; 0,01$. Dans cette situation, on retrouve donc le schéma autocohérent à deux phases liquides.

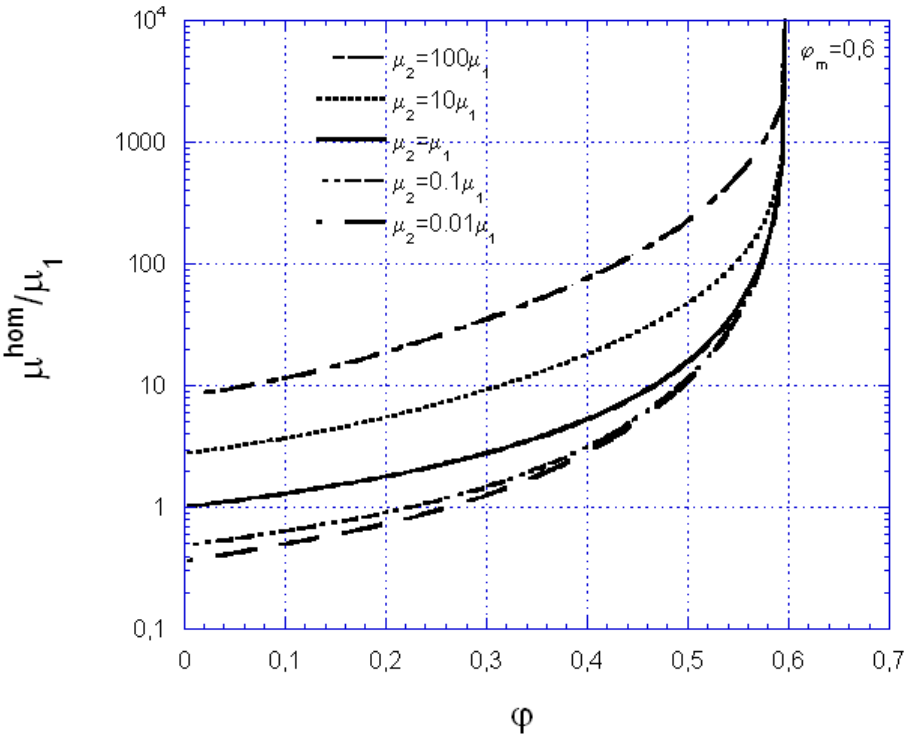


FIG. 5.3 – Viscosité réduite en fonction de la concentration pour le modèle à trois phases.

5.3 Homogénéisation non linéaire

5.3.1 Estimation sécante

Dans la situation non linéaire, le domaine du fluide entourant les particules et le domaine fluide sphérique du motif 2 sont constitués du même fluide. Leur module sécant est donc caractérisé par la même expression $\mu^{sct}(\widetilde{d})$ Par contre, les valeurs de $\widetilde{d}$ sont différentes a priori dans chacun des domaines.

Le module sécant est supposé uniforme dans chacun des deux phases fluides. Pour chaque point de la phase fluide du motif 1, le module sécant est donné par :

$$\mu_1^{sct}(\underline{x}, \widetilde{d}_1(\underline{x})) = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}_1(\underline{x})} + \eta(\widetilde{d}_1(\underline{x}))^{n-1} \tag{5.4}$$

tandis que pour chaque point de la phase fluide du motif 2, le module sécant est donné par :

$$\mu_2^{sct}(\underline{x}, \widetilde{d}_2(\underline{x})) = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}_2(\underline{x})} + \eta(\widetilde{d}_2(\underline{x}))^{n-1} \tag{5.5}$$

Pour résoudre le problème d'homogénéisation non linéaire, on procède en trois étapes comme cela été décrit précédemment.

– D'abord, on résout un problème d'homogénéisation linéaire en utilisant l'estimation décrite par les équations (5.2) et (5.3). Le modules macroscopique μ^{hom} est donc une fonction connue de φ_m, c, μ_1 et μ_2 :

$$\mu^{hom} = f(\varphi_m, c, \mu_1, \mu_2) \tag{5.6}$$

– Ensuite, on choisit une mesure du taux de déformation effective pour chaque phase de fluide.

  Dans le domaine fluide entourant la particule :

$$\widetilde{d}_1^{eff} = \sqrt{\langle(\widetilde{d}_1)^2\rangle} \tag{5.7}$$

  Dans le domaine fluide sphérique du motif 2 :

$$\widetilde{d}_2^{eff} = \sqrt{\langle(\widetilde{d}_2)^2\rangle} \tag{5.8}$$

– Enfin, on relie les valeurs du taux de déformation effectifs $\widetilde{d}_1^{eff}, \widetilde{d}_2^{eff}$ à la valeur de $\widetilde{D}$ en utilisant les relations de Kreher suivantes :

$$\langle(\widetilde{d}_1)^2\rangle = \frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2)\widetilde{D}^2 \tag{5.9}$$

$$\langle(\widetilde{d}_2)^2\rangle = \frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}(\widetilde{d}_1, \widetilde{d}_2)\widetilde{D}^2 \tag{5.10}$$

↻

On obtient le système non linéaire à 2 équations et 2 inconnues $(\widetilde{d}_1^{eff}, \widetilde{d}_2^{eff})$ suivant :

$$\widetilde{d}_1^{eff} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\mu_1, \mu_2)} \widetilde{D} \tag{5.11}$$

$$\widetilde{d}_2^{eff} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}(\mu_1, \mu_2)} \widetilde{D} \tag{5.12}$$

Pour résoudre ce système non linéaire, on utilise un algorithme de point fixe. Cet algorithme est décrit dans le tableau 5.1.

Pour une valeur de $\widetilde{D}$ donnée.

Initiation $\widetilde{d}_1^{0,eff} = \widetilde{D}, \widetilde{d}_2^{0,eff} = \widetilde{D},$

Pour i=1, n :

$$\mu_1^i = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}_1^{i-1,eff}} + \eta(\widetilde{d}_1^{i-1,eff})^{n-1}$$

$$\mu_2^i = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}_2^{i-1,eff}} + \eta(\widetilde{d}_2^{i-1,eff})^{n-1}$$

$$\widetilde{d}_1^{i,eff} = \sqrt{\frac{1}{(1-c)\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\mu_1^i, \mu_2^i)} \widetilde{D}$$

$$\widetilde{d}_2^{i,eff} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}(\mu_1^i, \mu_2^i)} \widetilde{D}$$

$$Erreur = \max(abs(\widetilde{d}_1^{i,eff} - \widetilde{d}_1^{i,eff}), abs(\widetilde{d}_1^{i,eff} - \widetilde{d}_1^{i,eff}))$$

Jusqu'à la convergence : $Erreur < 10^{-30}$

$\mu^{hom}(\widetilde{D})$

TAB. 5.1 – Algorithme de point fixe pour résoudre un système d'équations non linéaires

Finalement, on obtient l'estimation du module sécant à l'échelle macroscopique :

$$\mu_{sct}^{hom}(\widetilde{D}) = f(\varphi_m, c, \mu_1^{sct}(\widetilde{D}), \mu_2^{sct}(\widetilde{D}), n) = h(\varphi_m, c, \widetilde{D}, n, \tau_c, \eta) \tag{5.13}$$

Pour un jeu de valeurs de $\varphi_m, c, \tau_c, \eta$ et n donné on peut identifier la courbe $\mu_{sct}^{hom}(\widetilde{D})$ en résolvant le problème pour différentes valeurs de $\widetilde{D}$.

5.3.2 Premières estimations

Une fois connue les différentes valeurs de $\mu_{sct}^{hom}(\widetilde{D})$, on peut tracer les courbes représentant la loi de comportement macroscopique sous la forme d'un diagramme de τ en fonction de $\dot{\gamma}$:

$$\tau = \mu_{sct}^{hom}(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \tag{5.14}$$

avec $\dot{\gamma} = \widetilde{D}$

On remarque que les allures des courbes $\tau(\dot{\gamma})$ correspondent à comportement proche de celui d'un fluide de Herschel-Bulkley (Fig 5.4 et Fig 5.5).

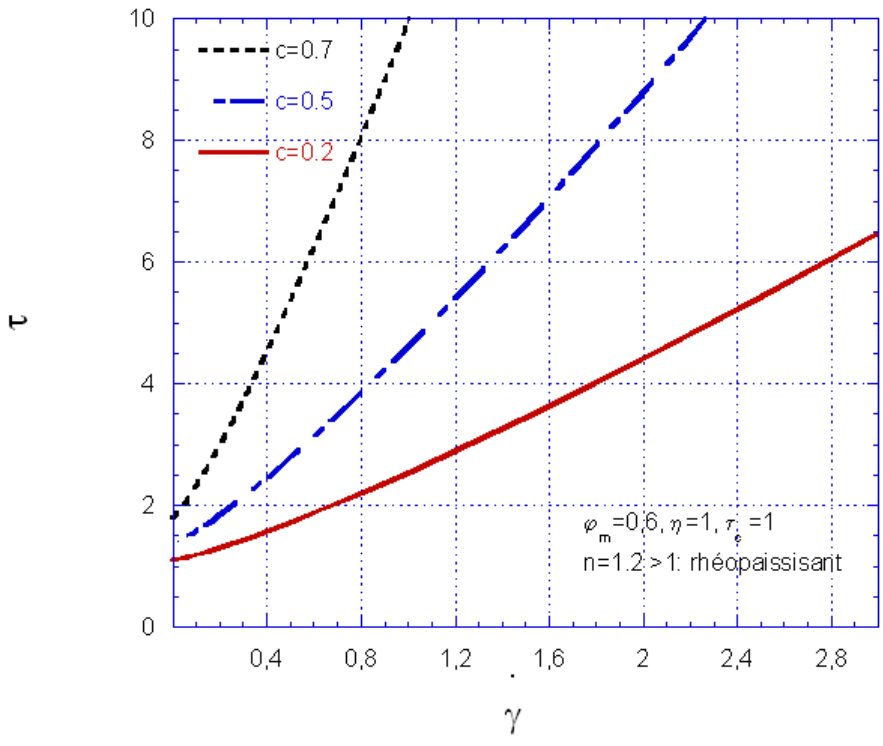


FIG. 5.4 – Comportement des suspensions pour $n = 1.2$

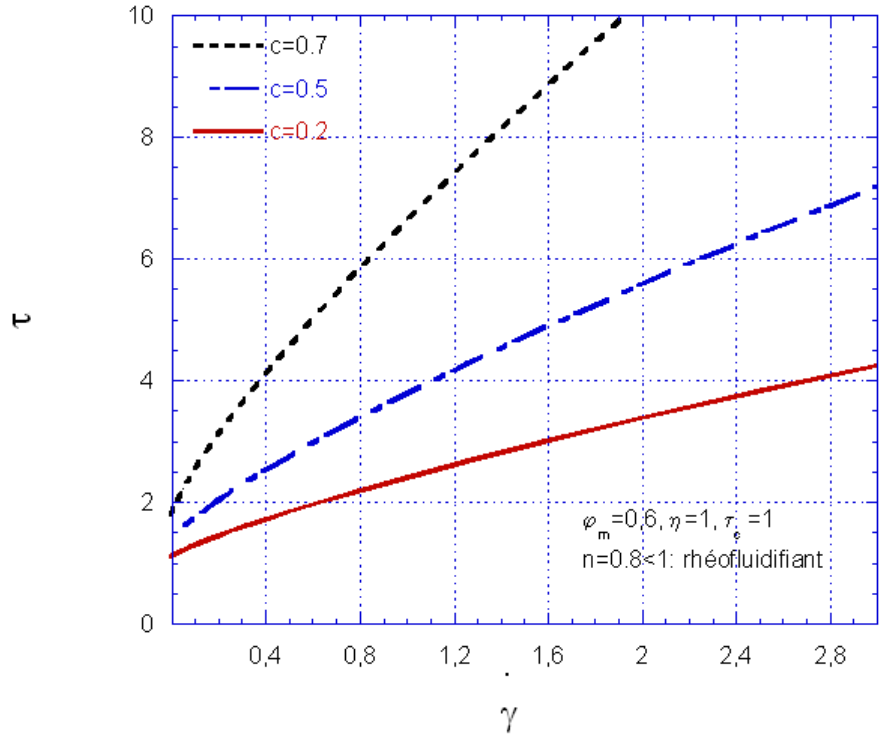


FIG. 5.5 – Comportement des suspensions pour $n = 0.8$

Sur la figure 5.6, on a tracé la loi de comportement $\tau(\dot{\gamma})$ pour différentes valeurs de n $(n = 1.2, n = 0.8, n = 1)$ quand la fraction volumique est fixée $(c = 0.5)$.

On note que le seuil de contrainte de la suspension τ_c ne dépend pas de l'exposant n, tandis que la viscosité de la suspension dépend fortement de n.

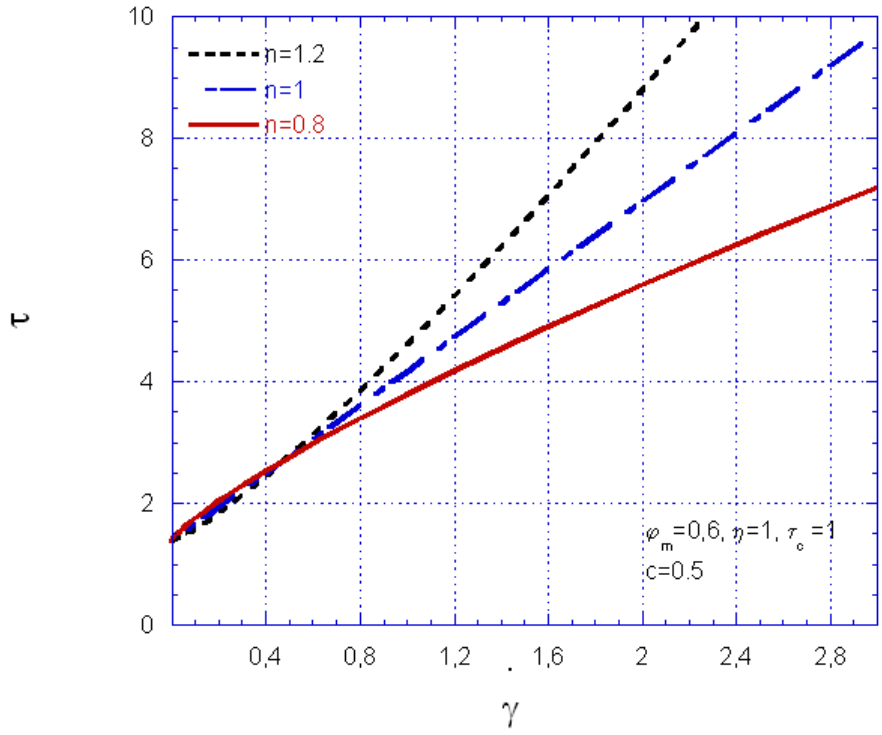


FIG. 5.6 – Comportement des suspensions pour $n = 1.2, 1, 0.8$

Finalement, on observe que le comportement de la suspension ressemble à une loi de Herschel-Bulkley.

5.4 Évaluation le comportement de la suspension

Le paragraphe précédent a montré que le comportement de la suspension ressemble à une loi de Herschel-Bulkley. Cependant, la question qui reste à trouver quantitativement la forme de ce comportement.

Pour cela, on propose deux voies :

Premièrement, on va évaluer les champs locaux de taux de déformations dans les phases fluides car ces champs influence directement au comportement de la suspension. On tente

de trouver quantitativement la corrélation entre ces champs locaux et le taux de déformation macroscopique appliqué $\widetilde{D}$.

Deuxièmement, on cherche à caractériser l'écart entre le comportement obtenu par la solution numérique avec l'algorithme présenté dans la section précédente et la loi de comportement de Herschel-Bulkley. Dans cette voie, on commence d'abord par deux cas le plus simples :

– le fluide porteur est un fluide rigide plastique. Ce cas nous permet d'éliminer l'intervention de la viscosité et de déterminer le seuil de contrainte de la suspension.
– le fluide porteur est un fluide visqueux. Ce cas nous permet d'éliminer l'intervention du seuil et de déterminer la viscosité de la suspension.

En suite, à partir des valeurs du seuil et de la viscosité de la suspension (cas 1, cas 2) on peut établir une loi de Herchel-Bulkley. Cette loi est appelé " la loi de Herchel-Bulkley de référence"

Finalement, on étudie le cas général où le fluide porteur est un fluide de Herschel-Bulkey et on cherche à caractériser l'écart entre le comportement obtenu par notre modèle et "la loi de Herschel-Bulkley de référence" qu'on a déjà identifié précédemment.

5.4.1 Évaluation les champs locaux de taux de déformation

Afin d'évaluer les champs locaux de taux de déformation on va calculer les limites et ainsi les domaines de valeurs de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}}$ et de $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}}$.

Calcul des limites des champs locaux de taux de déformation

μ_1	μ_2	$\lim \frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}} = \lim \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}}$	$\lim \frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}} = \lim \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}}$
->∞	fixe	4,37	3,07
-> 0	fixe	∞	0
fixe	-> ∞	∞	0
fixe	-> 0	4,37	3,07

TAB. 5.2 – calcul des limites avec $c = 0,7; \varphi_m = 0,6$

Bilan : lorsque μ_1 ou μ_2 est un nombre fixe, le rapport $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}}$ varie entre 0 et 3,07.

Tandis que le rapport $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}}$ varie entre 4,37 et ∞.

Remarque : On trouve les valeurs de ces limites ci-dessus lorsqu'il n'y a aucune relation entre μ_1 et μ_2 (μ_1 et μ_2 sont indépendantes). Cependant μ_1 dépend de μ_2 et en revanche μ_2 dépend également de μ_1 (5.4, 5.10). Cette relation interactive conduit donc une réduction du domaine de valeur de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}}$ et de $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}}$

Domaines de valeurs des champs locaux de taux de déformation

Sur le tableau 5.3, on présente le domaine de valeur de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)}\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}}$ et de $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m}\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}}$ en utilisant une large gamme de taux de déformation macroscopique $\widetilde{D} = 10^{-7}...10^{7}$.

$\widetilde{D}$	$\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)}\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}}$	$\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}} = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m}\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}}$
10^{-7}	5,017	2,205
10^{-6}	5,017	2,205
10^{-5}	5,017	2,205
10^{-4}	5,017	2,205
10^{-3}	5,016	2,206
10^{-2}	5,005	2,211
10^{-1}	4,885	2,271
1	4,671	2,416
10	4,628	2,452
100	4,628	2,455
1000	4,628	2,455
10^4	4,628	2,455
10^5	4,628	2,455
10^6	4,628	2,455
10^7	4,628	2,455

TAB. 5.3 – Domaine de valeur de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}}$ et de $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}}$ ($c = 0,7; \varphi_m = 0,6; \tau_c = 1Pa; \eta = 1Pa.s; n = 1,2$).

Donc, on trouve des remarques suivants :

– Il existe un encadrement pour $\alpha = \frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}}$ (borne supérieure = 5,017 ; borne inférieure = 4,628) et pour $\beta = \frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}}$ (borne supérieure = 2,455 ; borne inférieure = 2,205).
– L'écart entre la borne supérieure et la borne inférieure est très petite. Donc quand on augmente ou diminue $\widetilde{D}$, les valeurs de $\frac{\widetilde{d}_1^{eff}}{\widetilde{D}}$ et $\frac{\widetilde{d}_2^{eff}}{\widetilde{D}}$ tombent très vite à ses valeurs limites.

On a également vérifié que ces bornes sont appartiennent le domaine de valeur de α et β. En effet :

$[4,628; 5,017] \subset [4,37; \infty]$
$[2,205; 2,445] \subset [0; 3,307]$

On trouve que la variation de α et β est très petite par rapport la variation de $\widetilde{D}$, on peut donc considérer que :

$$\widetilde{d}_1^{eff} = \alpha * \widetilde{D} \text{ avec } \alpha = \text{constante} = 1/2(\alpha_{max} + \alpha_{min}) \tag{5.15}$$

et

$$\widetilde{d}_2^{eff} = \beta * \widetilde{D} \text{ avec } \beta = \text{constante} = 1/2(\beta_{max} + \beta_{min}) \tag{5.16}$$

On a saisi avec plusieurs valeurs de c, φ_m, n et on trouve toujours que $\widetilde{d}_1^{eff}$ et $\widetilde{d}_2^{eff}$ dépendent quasiment linéaire de $\widetilde{D}$. Cela montre que le comportement macroscopique de la suspension

est considéré comme une loi de Herschel-Bulkley (Démonstration dans l'annexe A.2) avec :

$$\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} = \alpha\varphi_m(1-c) + \beta(1-\varphi_m) \tag{5.17}$$

$$\frac{\eta^{hom}}{\eta} = \alpha^{n+1}\varphi_m(1-c) + \beta^{n+1}(1-\varphi_m) \tag{5.18}$$

Par exemple si $c = 0,7, \varphi_m = 0,6, n = 1,2$ on obtient $\alpha = 4,824, \beta = 2,328$ et on obtient donc :

$$\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} = 1,79 \tag{5.19}$$

$$\frac{\eta^{hom}}{\eta} = 8,3 \tag{5.20}$$

5.4.2 Comparaison la réponse du modèle avec la loi de Herschel-Bulkley

5.4.2.1 Le fluide porteur est un fluide rigide plastique ($\eta = 0$)

On a :

$$\mu_{1,2}^{sct} = \frac{\tau_c}{\widetilde{d}_{1,2}} \tag{5.21}$$

soit sous la forme logarithmique :

$$\lg(\mu_{1,2}^{sct}) = \lg(\tau_c) - \lg(\widetilde{d}_{1,2}) \tag{5.22}$$

Cette expression montre que la relation entre $\lg(\mu_{1,2}^{sct})$ et $\lg(\widetilde{d}_{1,2})$ est linéaire de pente -1.

Sur la figure 5.7, les points indiqués par des cercles représentent μ_{sct}^{hom} en fonction de $\widetilde{D}$ dans le cas où le fluide porteur est un fluide rigide plastique pour une concentration en particules caractérisée par $c = 0,7$, et $\varphi_m = 0,6$. On trouve que ces point sont situés pratiquement sur une droite de pente -1. Cette droite est associée donc à un matériau rigide plastique. On peut identifier le seuil à partir de cette droite. On obtient $\tau_c^{\wedge} = 1,785Pa$. Donc, dans ce cas la suspension se comporte comme un matériau rigide plastique ou type seuil avec $\tau_c^{hom} = 1,785Pa$.

5.4.2.2 Le fluide porteur est un fluide visqueux ($\tau_c = 0$)

On a :

$$\mu_{1,2}^{sct} = \eta \widetilde{d}_{1,2}^{n-1} \tag{5.23}$$

soit sous la forme logarithmique :

$$\lg(\mu_{1,2}^{sct}) = \lg(\eta) + (n-1)\lg(\widetilde{d}_{1,2}) \tag{5.24}$$

On a donc une relation linéaire entre $\lg(\mu_{1,2}^{sct})$ et $\lg(\widetilde{d}_{1,2})$ de pente $n-1$.

Les points indiqués par des carrés sur la figure 5.7 représentent μ_{sct}^{hom} en fonction de $\widetilde{D}$ dans le cas où le fluide porteur est un fluide en loi puissance avec un exposant égale à 1,2. Ce fluide est considère comme un fluide de Herschel-Bulkley caractérisé par $\tau_c = 0Pa$, $\eta = 1Pa.s^{1,2}$ et $n = 1,2$. On trouve de nouveau que ces points sont situés sur une droite de pente $n - 1 = 0,2$. Cette droite représente le comportement d'un matériau visqueux en loi puissance. On peut donc identifier la viscosité à partir de cette droite. On obtient $\eta^{\wedge} = 8,125Pa.s^{1,2}$. Donc, dans ce cas la suspension se comporte comme un matériau visqueux avec $\eta^{hom} = 8,125Pa.s^{1,2}$.

On en conclut que quand le fluide porteur a un seuil nul, le comportement macroscopique de la suspension est celui d'un fluide visqueux de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur.

5.4.2.3 Comparaison entre modèle à trois phases et le fluide Herschel-Bulkley

A partir de $\tau^{hom}, \eta^{hom}, n^{hom}$ obtenus par les résultats du 2 cas simples au dessus , on établit une loi de Herchel-Bulkley de référence :

$$\mu_{ref}^{HB} = \tau^{hom}/\widetilde{D} + \eta^{hom}\widetilde{D}^{(n^{hom}-1)} \tag{5.25}$$

Sur la figure 5.8, on a retracé la figure 5.7 en ajoutant les points indiqués par des croix qui correspondent à μ_{sct}^{hom} en fonction de $\widetilde{D}$ dans le cas où le fluide porteur est un fluide de Herschel-Bulkley caractérisé par $\tau_c = 1Pa$, $\eta = 1Pa.s^{1,2}$ et $n = 1,2$. Ces points se rapprochent " asymptotiquement " des deux droites représentant les fluides de type rigide plastique et en loi puissance visqueux quand $\widetilde{D}$ est respectivement petit et grand. Lorsque l'on " fit " ces points avec la loi de Herschel-Bulkley de référence, on trouve un écart quasiment nul (erreur quadratique $= 0,03\%$)

On a procédé de la même façon avec plusieurs valeurs de la fraction volumique ($c = 0,75, c = 0,9$) et de la fraction volumique d'empilement maximal ($\varphi_m = 0,66, \varphi_m = 0,7$). On trouve toujours des écarts quasiment nulles. Donc, on peut négliger l'écart entre le modèle et le matériau du type Herschel-Bulkley.

On en déduit qu'à l'échelle macroscopique, la suspension se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur. Le seuil de contrainte et la viscosité de la suspension peuvent être estimés en résolvant deux problèmes indépendants.

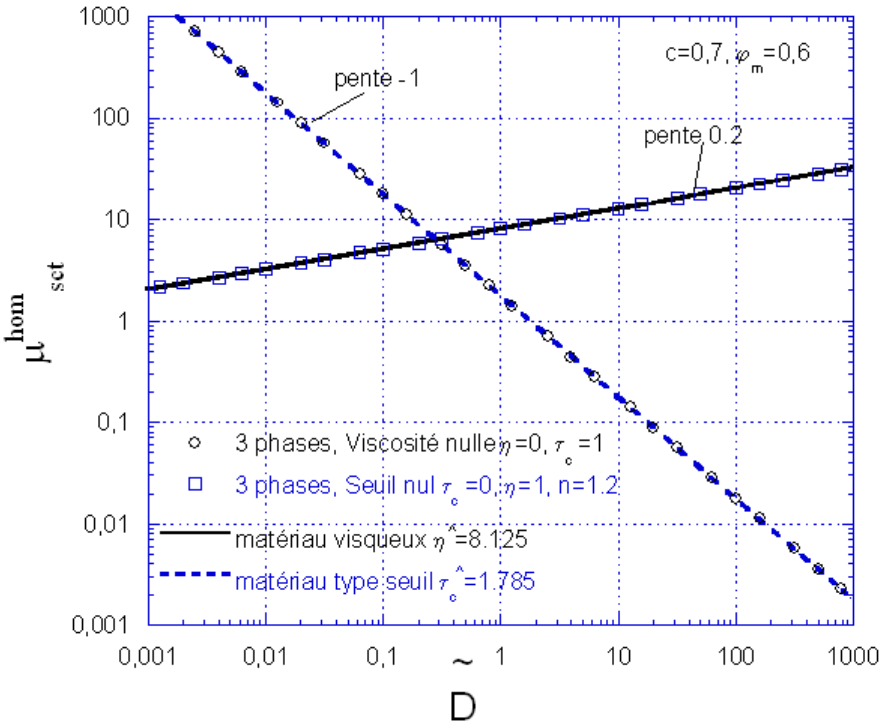


FIG. 5.7 – Cas seuil nul et viscosité nulle

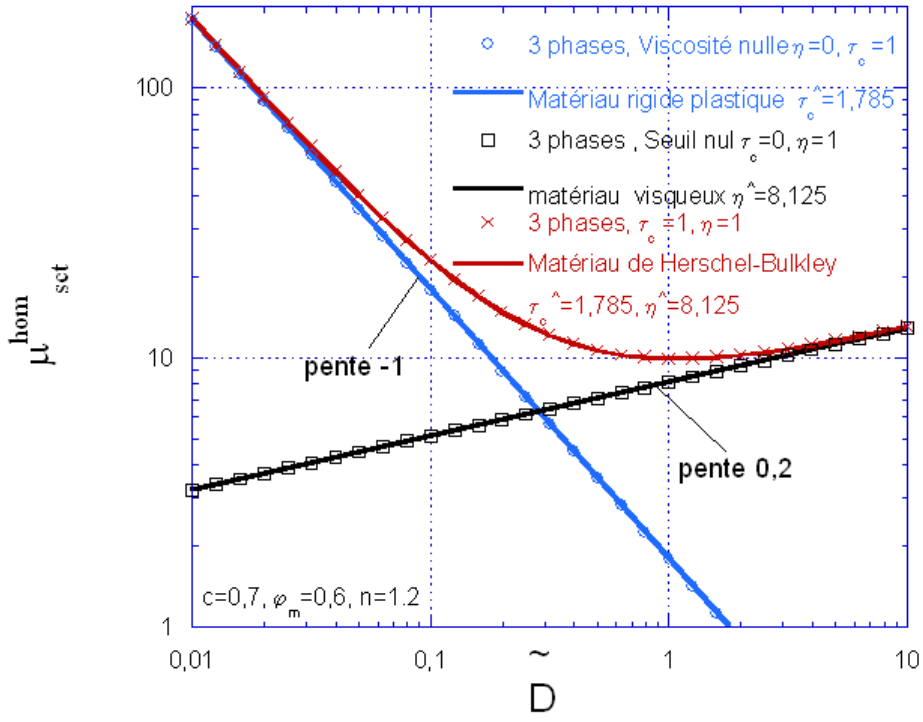


FIG. 5.8 – Comparaison entre modèle à trois phases et le fluide Herschel-Bulkley

– Pour prédire le seuil de contrainte, il suffit simplement de résoudre le problème avec un fluide porteur à viscosité nulle.
– Pour prédire la viscosité, il suffit simplement de résoudre le problème avec un fluide porteur à seuil nul.

5.5 Comparaison entre le modèle utilisant l'estimation à deux phases et le modèle utilisant l'estimation à trois phases

Il est intéressant de comparer les résultats obtenus lorsqu'on divise le fluide en deux domaines différents par rapport à la situation où un seul domaine est considéré pour le fluide.

5.5.1 Comparaison du taux de déformation effectif

Sur le tableau 5.4, on présente récapitule des valeurs prises par les taux de déformation effectif dans le modèle à trois phases ($\widetilde{d_1}$, $\widetilde{d_2}$) et dans le modèle à deux phases ($\widetilde{d}$) pour une large gamme de taux de déformation macroscopique $\widetilde{D} = 0.0001...100$. On prend une valeur de la fraction volumique ($c = 0,5$). L'indice d'écoulement du fluide porteur est choisi égale à 1.2. On prend toujours $\tau_c = 1Pa$ et $\eta = 1Pa.s^n$ pour le fluide porteur afin de faciliter les comparaisons.

On trouve que pour une valeur de $\widetilde{D}$ donnée, les quantités $\widetilde{d_1}$, $\widetilde{d_2}$, $\widetilde{d}$ sont nettement différentes. $\widetilde{d_1}$ est toujours plus grand que $\widetilde{d_2}$, ce qui signifie que le fluide dans la couronne est plus cisaillé que le fluide se trouvant loin de la particule. Ce résultat est tout à fait conforme à l'analyse présentée sur la figure 5.1.

	3phases				2 phases	
$\widetilde{D}$	$\widetilde{d_1}$	$\widetilde{d_2}$	$\frac{\widetilde{d_1}}{\widetilde{D}}$	$\frac{\widetilde{d_2}}{\widetilde{D}}$	$\widetilde{d}$	$\frac{\widetilde{d}}{\widetilde{D}}$
0.00010000	0.00024648	0.00015862	2.4648	1.5862	0.00019970	1.9970
0.0010000	0.0024639	0.0015861	2.4639	1.5861	0.0019970	1.9970
0.010000	0.024619	0.015880	2.4619	1.5880	0.019970	1.9970
.10000	.24354	.16095	2.4354	1.6095	0.19970	1.9970
1.	2.3471	1.6879	2.3471	1.6879	1.9970	1.9970
10.00	23.184	17.164	2.3184	1.7164	19.970	1.9970
100.00	231.58	171.88	2.3158	1.7188	199.70	1.9970

TAB. 5.4 – Comparaison des champs de taux de déformation effectif

Ces résultats sont également présentés dans la figure 5.9.

On trouve que quand $\widetilde{D}$ croît, le rapport $\frac{\widetilde{d_1}}{\widetilde{D}}$ décroît très légèrement , le rapport $\frac{\widetilde{d_2}}{\widetilde{D}}$ croît très légèrement. Tandis que le rapport $\frac{\widetilde{d}}{\widetilde{D}}$ est toujours constant. On observe sur la figure 5.9 (en $\log - \log$) que le courbe $\widetilde{d_1}(\widetilde{D})$ a une pente très proche de 1 mais inférieure à 1 et que

le courbe $\widetilde{d}_2(\widetilde{D})$ a une pente très proche de 1 mais supérieure à 1. On observe également que la localisation évolue très peu en fonction de $\widetilde{D}$. C'est pour cela qu'on retrouve une loi très proche de la loi de Herschel-Bulkley pour le modèle à trois phases.

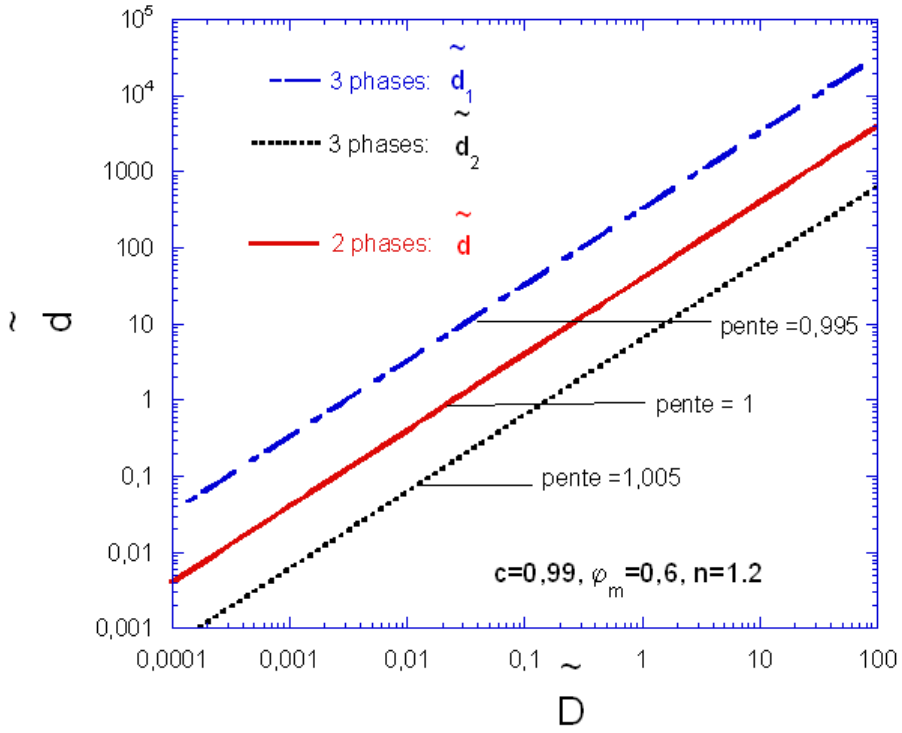


FIG. 5.9 – Hétérogénéité du champ de vitesse de déformation lorsque la fraction volumique est proche de la fraction volumique maximale.

Maintenant, si on prend une la fraction volumique de l'ordre de 30% (voir figure 5.10), les courbes se superposent pratiquement. Dans ce cas on ne peut pas distinguer les deux modèles ou plutôt, le modèle à trois phases n'apporte pas d'amélioration dans la description de la localisation du module sécant au sein de la phase liquide.

5.5.2 Comparaison du seuil réduit

Sur la figure 5.11 on a comparé le seuil réduit des deux modèles en fonction de la concentration en particules pour $\varphi_m = 0,625,\ 0,7$ et $0,8$. On trouve que pour une valeur de φ_m donnée, la courbe du modèle à trois phases est toujours en dessous de celle du modèle à trois phases. Donc, la séparation du domaine fluide provoque une diminution du seuil d'écoulement de la suspension. Cependant, si la concentration en particules est inférieure à une valeur de l'ordre de 40%, il n'y a pas de différence entre les valeurs prédites par les deux modèles. Ce dernier résultat est en accord avec celui obtenue à la section précédente.

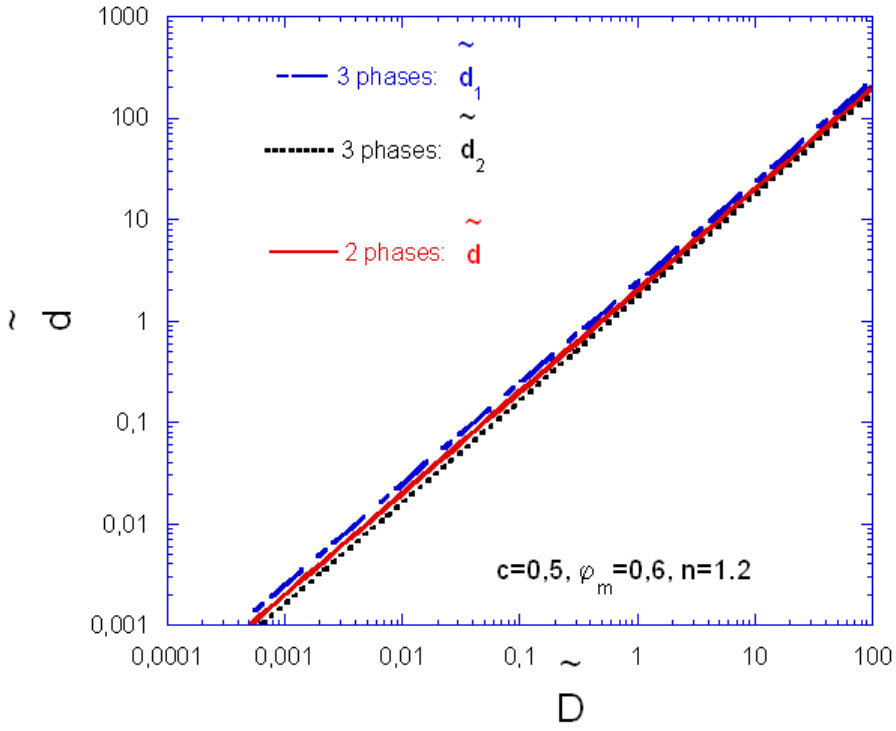


FIG. 5.10 – Comparaison des taux de déformation effectif du modèle deux et trois phases pour $c = 0,5$.

On ne s'intéresse qu'aux situations où φ_m est supérieure ou égale à 0,625 car à partir de cette valeur le seuil réduit diverge quand la fraction volumique en particules tend vers φ_m. Dans ce cas φ_m représente la fraction volumique maximale. Pour les valeur de φ_m inférieures à 0,625, le seuil réduit est converge vers une valeur finie quand la fraction volumique de particules tend vers φ_m.

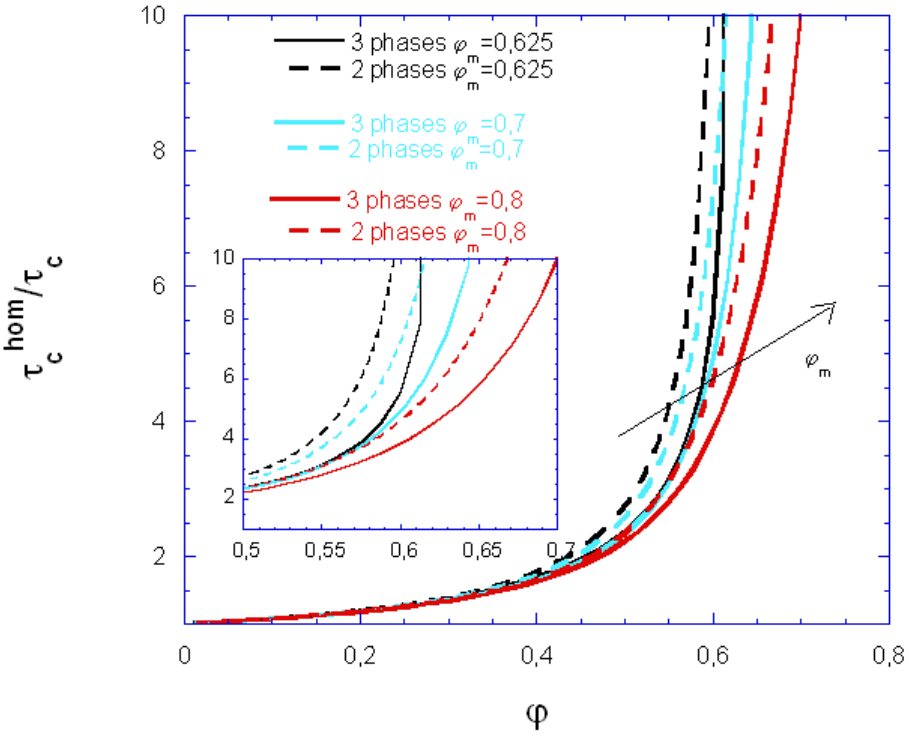


FIG. 5.11 – Comparaison du seuil entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases.

5.5.3 Comparaison de la viscosité réduite

La comparaison les prédictions de la viscosité réduite des deux modèles est présentée sur les figures 5.12 et 5.13. On distingue deux cas différents pour $n > 1$ et pour $n < 1$.

Dans le cas où $n > 1$, on trouve que la courbe du modèle à trois phases est plus raide que celle du modèle à deux phases. Alors que dans le cas $n < 1$, la courbe du modèle à trois phases est plus souple que celle du modèle à deux phases. Donc la séparation du domaine de fluide modifie également les prédictions de viscosité de la suspension. Cependant, comme pour le seuil, si la fraction volumique est inférieure à une valeur de l'ordre de 40%, la différence est négligeable.

On remarque que dans le cas où $n = 1$, les deux modèles donnent les mêmes résultats.

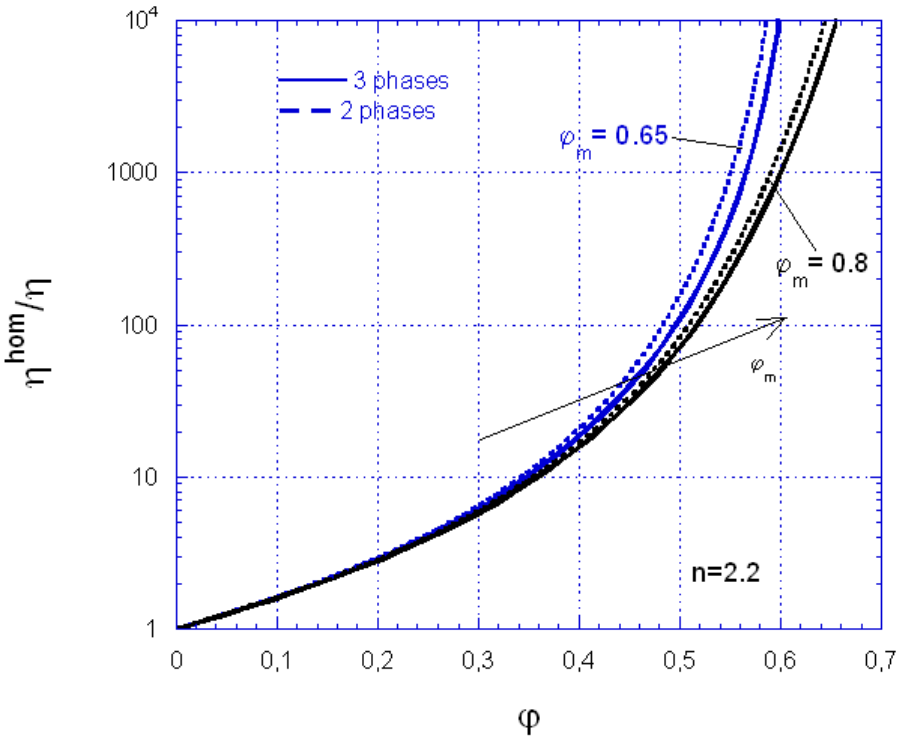


FIG. 5.12 – Comparaison de la viscosité réduite entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases pour $n = 2.2$

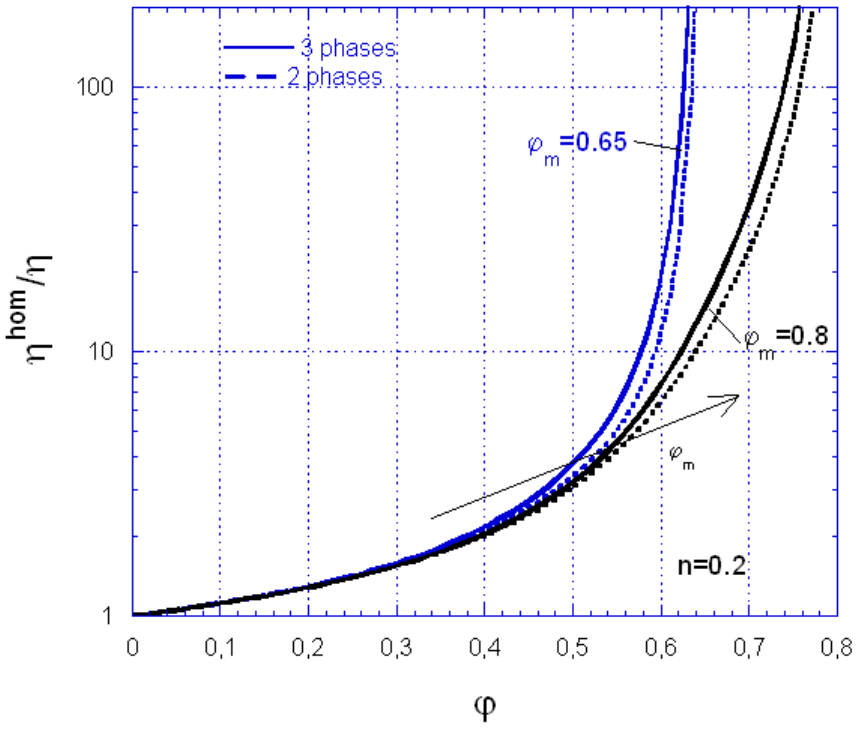


FIG. 5.13 – Comparaison de la viscosité réduite entre le modèle à deux phases et le modèle à trois phases pour $n = 0.2$

5.6 Validations expérimentales

5.6.1 Seuil de l'écoulement

Les prédictions théoriques (trois phases, deux phases et Krieger-Dougherty) et les résultats des différents essais expérimentaux (Mahaut et al, Ancey et al, Erdogan) sont présentés sur les figures 5.14, 5.15 et 5.16. Sur ces trois figures, la ligne continue correspond au modèle utilisant l'estimation à deux motifs et trois phases, tandis que la ligne discontinue correspond au modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases et la ligne " point-trait " correspond au modèle utilisant la relation de Krieger-Dougherty. Les symboles représentent les résultats expérimentaux.

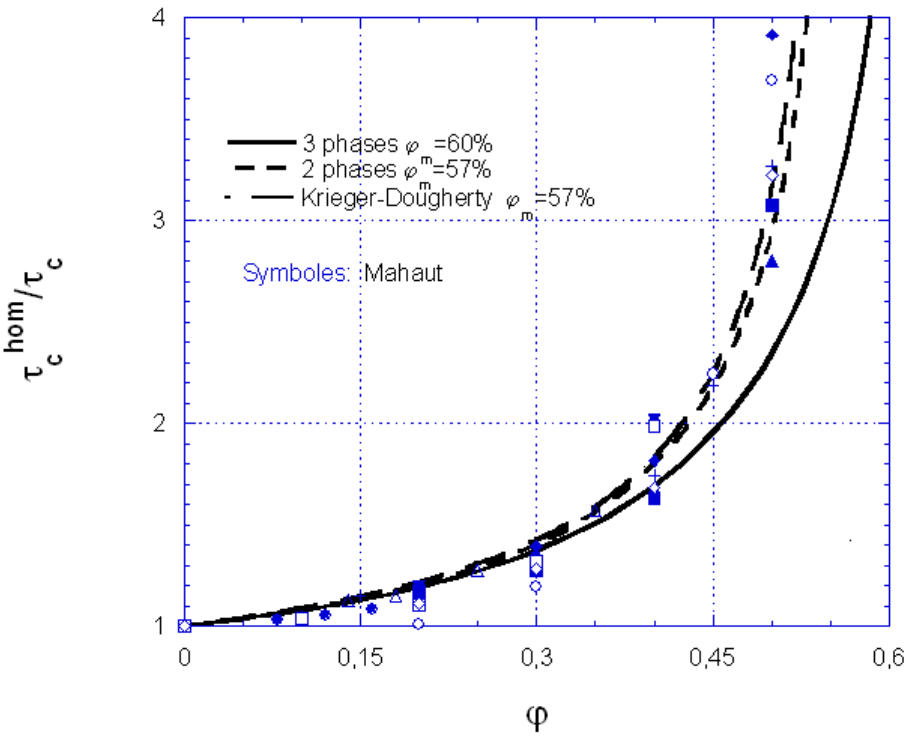


FIG. 5.14 – Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Mahaut et al [MCO08].

On constate que le modèle utilisant l'estimation à deux motifs et deux phases décrit mieux les résultats de Mahaut que celui utilisant l'estimation à deux motifs et trois phases. Cela montre que dans les essais de Mahaut, pour ses types des matériaux et dans la situation où des concentrations en particules ne sont pas trop élevées, une distinction en deux différentes phases dans le domaine fluide est peut être négligeable. Donc le modèle utilisant l'estimation

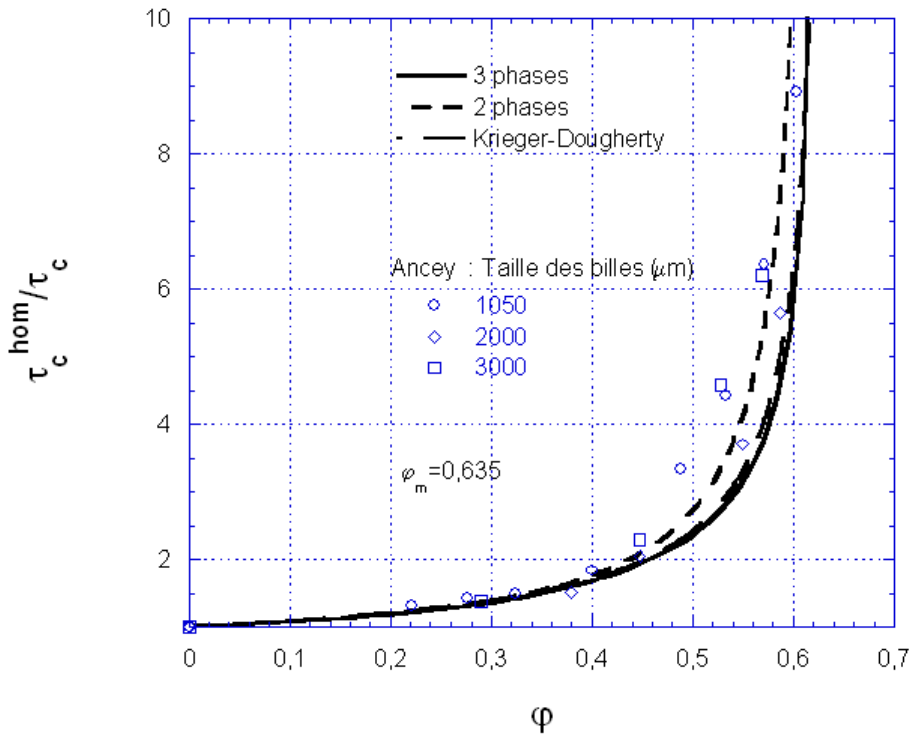


FIG. 5.15 – Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Ancey et Jorrot [AJ01].

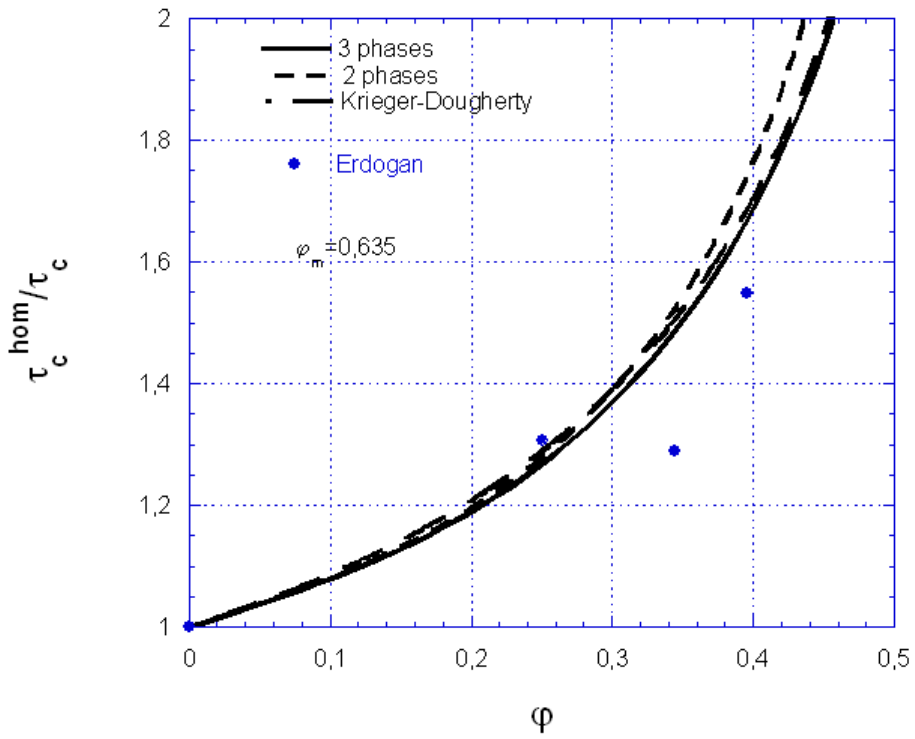


FIG. 5.16 – Seuil réduit en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Erdogan [Erd05] et les estimations théoriques.

à deux motifs et deux phases qui semble plus proche à la réalité par rapport celui utilisant l'estimation à deux motifs et trois phases.

Les trois prédictions théoriques sont cohérentes avec les résultats expérimentaux de Ancey et Jorrot et de Erdogan.

On trouve également que toutes les trois prédictions donnent des résultats très proches les uns des autres lorsque que la fraction volumique en particules reste inférieure à une valeur de l'ordre de 40%.

5.6.2 Viscosité

Les prédictions théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux de Erdogan et à ceux de Geiker et al sur les figures 5.17 et 5.18. On trouve que la prédiction utilisant l'estimation à trois phases et la prédiction utilisant l'estimation à deux phases donnent les mêmes résultats car l'indice de l'écoulement est égal à 1 (Matériau de Bingham). La validation a déjà été présentée au chapitre 3.

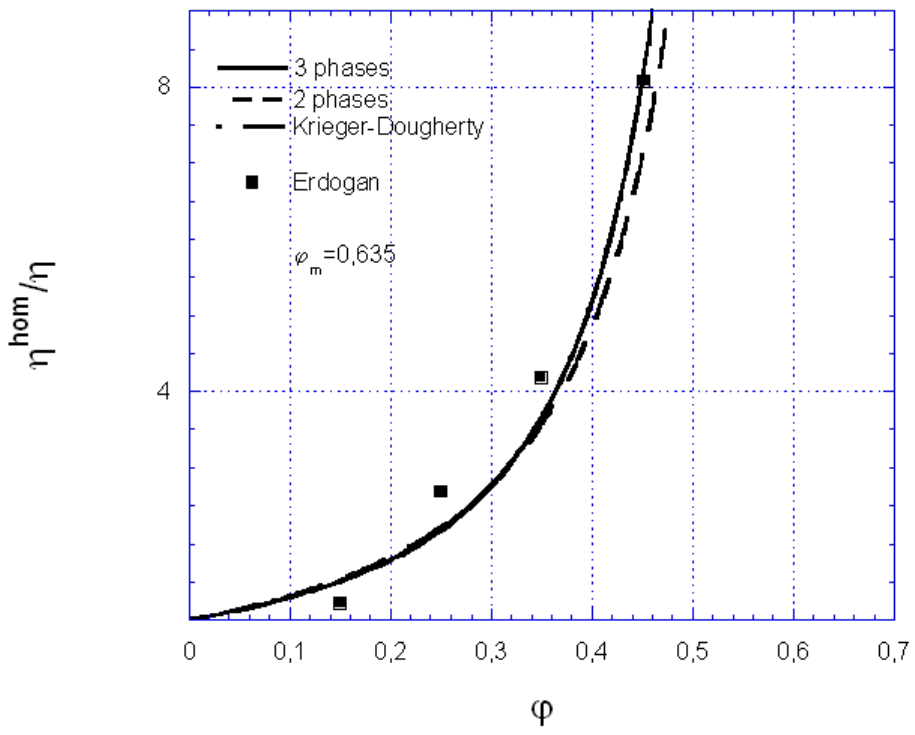


FIG. 5.17 – Viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Erdogan [Erd05].

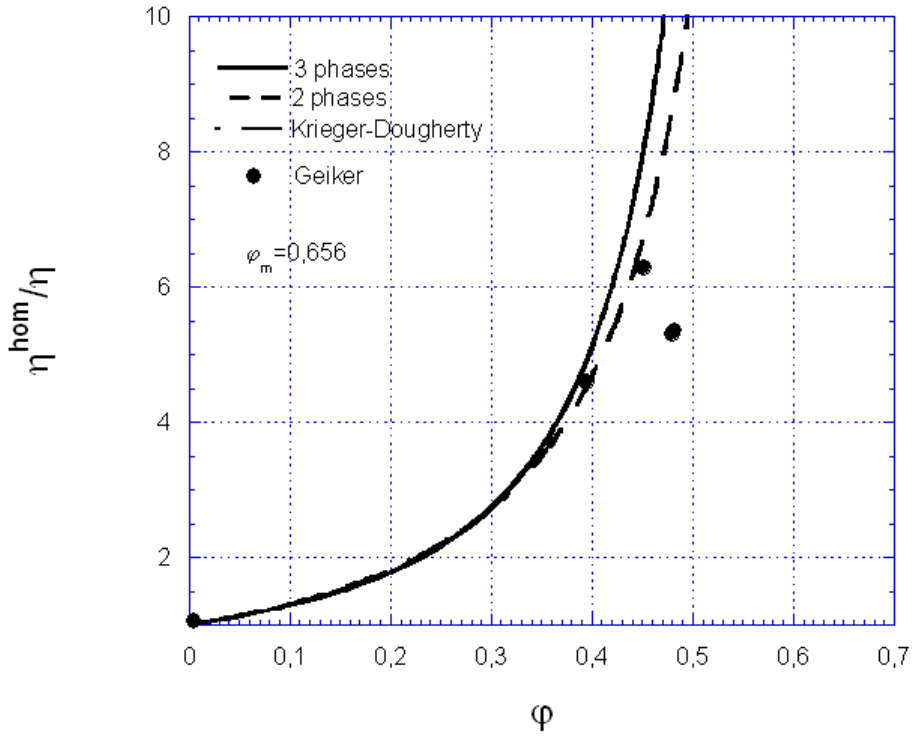


FIG. 5.18 – Viscosité plastique réduite en fonction de la concentration en particules. Comparaison des prédictions théoriques des différents modèles et des résultats expérimentaux de Geiker [GBTN02].

5.7 Conclusions

Le modèle à trois phases est capable de décrire la localisation de l'hétérogénéité des modules sécants dans la phase de fluide. La séparation en deux domaines de la phase fluide permet de prendre en compte des variations des taux de déformation effectifs différents dans les domaines construits en fonction des valeurs du taux de déformation macroscopique imposé. Elle produit également une diminution du seuil de l'écoulement et de la modification de la viscosité de la suspension par rapport au modèle à deux phases. Cependant, on peut considérer qu'il n'y a pas de changement de la loi de comportement : la suspension se comporte toujours comme un fluide de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur. Pour une concentration inférieure à une valeur de l'ordre de 40%, on ne peut pas distinguer les deux modèles. Le modèle à trois phases influence particulièrement sur les caractéristiques de la suspension pour des concentrations comprises entre 40% et la fraction volumique maximale.

CHAPITRE

6

Conclusions générales et perspectives

6.1 Conclusion

Un modèle théorique permettant d'estimer des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules non colloïdales dans un fluide à seuil a été proposé. A notre connaissance, cette approche et les résultats qu'elle fournit sont originaux en rhéologie. Compte tenu des problèmes à résoudre du caractère non linéaire, il est nécessaire de procéder à des approximations pour obtenir des estimations des caractéristiques macroscopiques de la suspension. Les estimations proposées ont été obtenues en négligeant complètement les hétérogénéités du champ de déformation à l'intérieur de la phase fluide.

Dans le cas où le fluide porteur obéit à une loi d'Herschel-Bulkley, les estimations s'écrivent : $\tau_c^{hom} = \tau_c\sqrt{(1-\varphi)g(\varphi)}$ et $\eta^{hom} = \eta g(\varphi)[\frac{g(\varphi)}{1-\varphi}]^{\frac{n-1}{2}}$ où $g(\varphi)$ désigne le coefficient de proportionnalité entre les propriétés à l'échelle macroscopique et celles à l'échelle microscopique de la suspension linéaire.

Les estimations obtenues ont été validées par comparaison avec les résultats expérimentaux de Mahaut et al obtenus en utilisant une procédure permettant de se rapprocher au mieux des hypothèses formulées pour élaborer le modèle. En plus, cette procédure expérimentale permet d'évaluer l'influence purement mécanique des particules au comportement de la pâte, indépendamment des propriétés physico-chimiques des matériaux.

L'estimation obtenue décrit correctement les données expérimentales trouvées dans les publications déjà parues, même si certaines procédures expérimentales utilisées par les auteurs ne sont pas exactement conformes aux hypothèses utilisées pour construire le modèle.

Ce point illustre, à notre avis, la pertinence et la solidité de la méthode de changement d'échelle.

Par ailleurs, seulement quatre paramètres sont nécessaires pour estimer des propriétés globales de la suspension en fonction de la fraction volumique : la fraction volumique maximale d'empilement des particules et les trois propriétés du fluide porteur (seuil de contrainte, viscosité et indice d'écoulement).

Il a été possible de modifier le modèle pour prendre en compte la polydispersité des particules à la condition (assez restrictive) que les tailles des particules soient nettement distinguées.

Pour les situations où l'approximation précédente s'avérerait trop grossière, un modèle utilisant l'estimation à deux motifs et trois phases est capable de prendre en compte la contribution des hétérogénéités du champ en séparant le domaine occupé par la phase fluide en plusieurs domaines.

Il convient de noter que la méthode d'homogénéisation non linéaire présentée ici s'applique à tous les comportements du fluide porteur et des inclusions pouvant être décrits par un potentiel.

Ces résultats ainsi que les vérifications expérimentales présentées dans ce mémoire montrent qu'il est possible d'estimer les caractéristiques rhéologiques d'un béton à partir des caractéristiques du mortier (de la pâte) et de la fraction volumique d'empilement de la fraction solide constituée des granulats. Ces résultats peuvent donc contribuer à la mise au point d'un outil théorique d'aide à la formulation des matériaux obtenus en mélangeant des particules non colloïdales à un fluide non newtonien (bétons, pâtes alimentaires, ...).

6.2 Perspectives

Ces résultats sont loin d'épuiser l'ensemble des problèmes posés par la formulation des produits industriels comme les bétons ou les pâtes alimentaires, matériaux qui ont des comportements très complexes.

Pour cela, il convient d'identifier tous les facteurs ou les phénomènes qui peuvent influencer le comportement de ces suspensions.

Pour conclure, on décrit les axes de développement pouvant permettre d'améliorer les performances du modèle concernant :

– l'influence de la forme de particules. Pour ce problème on peut utiliser les résultats de Jeffery ou de Ponte Castaneda et Willis qui permettent de prendre en compte la forme de particules,

– l'influence d'une distribution anisotrope des particules,

– le problème polydisperse lorsque la condition de distinction de tailles des classes de particules n'est pas vérifiée. Pour cela, on peut utiliser le modèle de Farris modifié (Bournonville 2005). Ce modèle permet de prendre en compte des interactions géométriques entre particules en intégrant la description d'interactions proposée par Larrard 1999,

– la prise en compte des comportements rhéologiques plus complexes comme la thixotropie.

Il nous semble que même si les problèmes à résoudre pour aborder toutes ces questions sont loin d'être simples, les méthodes de changement d'échelle utilisées pour cette étude nous paraissent tout à fait adaptées pour répondre à ces questions.

Nous pensons que d'autres personnes intéressées par cette problématique ferons les recherches nécessaires pour faire progresser ce domaine.

ANNEXE

A

Annexes

A.1 Formules de localisation pour le motif sphérique à deux phases

On considère le motif constitué d'une particule de matériau élastique linéaire isotrope incompressible de module d'élasticité μ_2 de rayon a entourée d'une coque de rayon extérieur de rayon b constituée d'un matériau linéaire isotrope incompressible de module μ_1 et immergée dans un milieu linéaire isotrope incompressible de module μ_0. Les formules de localisations 2.49, 2.50 s'écrivent dans ce cas :

$$\mathbb{U}^0_{Dr} = (\varphi Lc_2 + (1-\varphi)Lc_1)\mathbb{K} \tag{A.1}$$

$$\mathbb{V}^0_{Dr} = 2(\varphi\mu_2 Lc_2 + (1-\varphi)\mu_1 Lc_1)\mathbb{K} \tag{A.2}$$

↻

avec :

$$
\begin{aligned}
B &= -\tfrac{A+C}{2} - \tfrac{525}{8}\alpha\eta_2\varphi \\
A &= -4(\eta_3 - \alpha\varphi)(\eta_1 x^7 - 2\eta_2) - 126\alpha\eta_2\varphi(1-x^2)^2 \\
C &= -(\eta_3 + \tfrac{9}{2}\alpha c)(4\eta_1 x^7 + \tfrac{19}{2}\eta_2) - 126\alpha\eta_2\varphi(1-x^2)^2 \\
X_0 &= \tfrac{\mu_0}{\mu_1} \\
\eta_1 &= 19\alpha \\
\eta_2 &= \tfrac{35+19\alpha}{2} \\
\eta_3 &= \tfrac{15}{2} + 3\alpha \\
\alpha &= \tfrac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \\
\Delta &= (3C + \tfrac{9}{2}AX_0)(X_0 - 1) + \tfrac{525}{4}\eta_2\eta_3 X_0 \\
Lc_1 &= \tfrac{15}{2}\tfrac{X_0}{(1-\varphi)\Delta}((X_0-1)(A + 30\varphi(\eta_1 x^7 - 2\eta_2)) + \tfrac{35}{2}\eta_3\eta_2(1-\varphi)) \\
Lc_2 &= \tfrac{225}{4}\tfrac{X_0}{\Delta}(-4(X_0-1)(\eta_1 x^7 - 2\eta_2) + \tfrac{35}{2}\eta_2)
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

avec $\varphi = (b/a)^3$ et $x = b/a$.

Dans le cas où le noyau du motif est indéformable, les relations 2.49 et 2.50 s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{U}^0_{Dr} &= \frac{U^0}{D^0}\mathbb{K} \\
\mathbb{V}^0_{Dr} &= \frac{V^0}{D^0}\mathbb{K}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
D^0 &= 38 + 89X_0 + 48X_0^2 + 75\varphi(3 + X_0 - 4X_0^2) + \\
&\quad (100x^7 - 168x^5)(2 + X_0 - 3X_0^2) + 48x^{10}(X_0-1)^2 \\
U^0 &= 5\mu_1 X_0(38 + 32X_0 + 15\varphi(15 - 8X_0) + (X_0-1)(336x^5 - 200x^7 - 48x^{10})) \\
V^0 &= 5X_0(19 + 16X_0 + 5\varphi(13 - 20X_0) + (X_0-1)(168x^5 - 100x^7 + 16x^{10}))
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

A.2 Lemme pour le modèle à deux motifs et trois phases

Lemme : Si les taux de déformations locaux dans la phase de fluide sont proportionnés avec le taux de déformation macroscopique, la suspension se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur.

Démonstration :

Si les taux de déformations locaux dans la phase de fluide sont proportionnés avec le taux de déformation macroscopique, on a :

$$\widetilde{d}_1^{eff} = \alpha \widetilde{D} \tag{A.6}$$

$$\widetilde{d}_2^{eff} = \beta \widetilde{D} \tag{A.7}$$

avec α, β=constantes.

Selon (5.11) et (5.12), on a :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{\varphi_m(1-c)} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\mu_1, \mu_2)} \tag{A.8}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1-\varphi_m} \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_2}(\mu_1, \mu_2)} \tag{A.9}$$

soit :

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\mu_1, \mu_2) = \alpha^2 \varphi_m(1-c) = \alpha_1 \tag{A.10}$$

$$\frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu_1}(\mu_1, \mu_2) = \beta^2 (1-\varphi_m) = \beta_1 \tag{A.11}$$

On obtient :

$$\mu^{hom} = \alpha_1 \mu_1 + f(\mu_2) + A \tag{A.12}$$

$$\mu^{hom} = \beta_1 \mu_2 + g(\mu_1) + B \tag{A.13}$$

avec g,f sont des fonctions et A,B sont des constantes.

Soit :

$$\mu^{hom} = \alpha_1 \mu_1 + \beta_1 \mu_2 + C \tag{A.14}$$

avec C= A+B

Lorsque $\mu_1 = \mu_2 = 0$ on a $\mu_{hom} = 0$ donc $C = 0$

Finalement, on obtient :

$$\mu^{hom} = \alpha_1 \mu_1 + \beta_1 \mu_2 \tag{A.15}$$

soit :

$$\mu^{hom} = \alpha_1 (\frac{\tau_c}{\alpha \widetilde{D}} + \eta(\alpha \widetilde{D})^{n-1}) + \beta_1 (\frac{\tau_c}{\beta \widetilde{D}} + \eta(\beta \widetilde{D})^{n-1}) \tag{A.16}$$

Donc, on obtient le module sécant macroscopique :

$$\mu^{hom} = \frac{\tau_c^{hom}}{\widetilde{D}} + \eta^{hom} \widetilde{D}^{n-1} \tag{A.17}$$

avec

$$\tau_c^{hom} = \tau_c (\frac{\alpha 1}{\alpha} + \frac{\beta 1}{\beta}) \tag{A.18}$$

$$\eta^{hom} = \eta(\alpha_1 \alpha^{n-1} + \beta_1 \beta^{n-1}) \tag{A.19}$$

soit :

$$\frac{\tau_c^{hom}}{\tau_c} = \alpha \varphi_m (1 - c) + \beta (1 - \varphi_m) \tag{A.20}$$

$$\frac{\eta^{hom}}{\eta} = \alpha^{n+1} \varphi_m (1 - c) + \beta^{n+1} (1 - \varphi_m) \tag{A.21}$$

Conclusion :

Si les taux de déformations locaux dans la phase de fluide sont proportionnés avec le taux de déformation macroscopique, la suspension se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur et de contrainte critique et de consistance macroscopique définis par A.20 et A.21.

BIBLIOGRAPHIE

[AJ01] C. Ancey and H. Jorrot. Yield stress for particle suspensions within a clay dispersion. *J. Rheol*, 2(45) :297–319, 2001.

[APC92] M.K. Agarwala, B.R. Patterson, and P.E. Clark. Rheological behavior of powder injection molding model slurries. *J. Rheol*, (36 (2)) :319–334, 1992.

[Bat71] G.K. Batchelor. The stress generated in a non-dilute suspension of particles by pure straining motion. *J. Fluid. Mech*, 4(46) :813–829, 1971.

[Bat77] G.K. Batchelor. The effect of brownian motion on the bulk stress in a suspension of spherical particles. *J. Fluid. Mech*, 1(83) :97–111, 1977.

[BB84] G. Bossis and J.F. Brady. Dynamic simulation of sheared suspension general method. *J. Chem. Phys*, 10(80) :5141–5154, 1984.

[BB88] J.F. Brady and G. Bossis. Stokesian dynamics. *Ann. Rev. Fluid. Mech*, (20) :111–157, 1988.

[BBG01] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. Homogénéisation en mécanique des matériaux 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques. *Hermes Science*, pages 133–221, 2001.

[BG72] G.K. Batchelor and J.T. Green. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c2. *J. Fluid. Mech*, 3(56) :401–427, 1972.

[BLC06] G. Beaume, P. Laure, and T. Coupez. Simulations numériques directes à l'échelle microscopique : Application aux écoulements de suspensions polydisperses concentrées. *GFR*, 41 :71–74, 2006.

[Bor96] M. Bornert. Morphologie microstructurale et comportement mécanique ; caractérisations expérimentales, approches par bornes et estimations autocohérentes généralisées. *Thèse de l'ENPC*, 1996.

[BPX05] B. Bournonville, P.Coussot, and X.Chateau. Modification du modèle de Farris pour la prise en compte des interactions géométriques d'un mélange polydisperse de particules. *Rhéologie*, (7) :1–8, 2005.

[Bra01] J.F. Brady. Computer simulation of viscous suspensions. *Chem. Eng. Sci*, (56) :2921–2926, 2001.

[Cas97] P. Ponte Castaneda. Nonlinear composite materials : effective constitutive behavior. *In Continuum Micromechanics, Springer-Verlag*, pages 131–195, 1997.

[COT08] X. Chateau, G. Ovarlez, and K. Luu Trung. Homogenization approach to the behavior of suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids. *J. Rheo*, (2) :489–506, 2008.

[Cou05] P. Coussot. Rheometry of pastes, suspensions and granular materials. *Wiley, New Jersey*, 2005.

[Erd05] T.S. Erdogan. Determination of aggregate shape properties using X-ray tomographic methods and the effect of shape on concrete rheology. *PhD thesis, University of Texas at Austin*, 2005.

[FA67] N.A. Frankel and A. Acrivos. On the viscosity of a concentrated suspension of solid spheres. *Chem. Eng. Soi*, (22) :847–853, 1967.

[Far68] R.J. Farris. Prediction of the viscosity of multimodal suspensions from unimodal viscosity data. *Transactions of the Society of Rheology*, 2(12) :281–301, 1968.

[GBTN02] M.R. Geiker, M. Brandi, L. N. Thrane, and L. F. Nielsen. On the effect of coarse aggregate fraction and shape on the rheological properties of self-compacting concrete. *Cement, Concrete and Aggregates*, 1(24) :3–6, 2002.

[Hil63] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *J. Mech. Phys. Solids*, (11) :357–372, 1963.

[Hob76] D.W. Hobbs. Influence of aggregate volume concentration upon the workability of concrete and some predictions from the viscosity-elasticity analogy. *Magazine of concrete research*, 28(97), 1976.

[JA76] D.J. Jeffrey and A. Acrisvos. The rheological properties of suspensions of rigid particles. *AIChE Journal*, (22(3)) :417–432, 1976.

[Jef22] G.B. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society*, (192) :161–179, 1922.

[JT97] A.A. Johnson and T.E. Tezduyar. 3D simulation of fluid-particle interactions with the number of particles reaching 100. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 3-4(145) :301–321, 1997.

[KD59] I.M. Krieger and T.J. Dougherty. A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid sphere. *Transactions of the Society of Rheology*, (III) :137–152, 1959.

[Kre90] W. Kreher. Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycristals. *J. Mech. Phys. Solids*, (1) :115–128, 1990.

[Lar99] F. De Larrard. Concrete Mixture Proportionning. *Spon Press*, 1999.

[MCO08] F. Mahaut, P. Coussot, and G. Ovarlez. Rheological behavior of suspensions of noncolloidal particles in a yield stress fluid : experimental approach. *J. of Rheol*, (52) :287–313, 2008.

[MM94] J. Mewis and C. W. Macosko. Rheology : principles, measurements and applications. *VCH Publishers*, pages 425–474, 1994.

[Nie93] F. Nielsen. Rheology of some fluid extreme composites such as fresh self-compacting concrete. *Nordic Concrète Resarch*, (2) :83–93, 1993.

[NNH93] S. Nemat-Nasser and M. Hori. Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials. *North-Holland series in applied mathematics and mechanics*, 1993.

[OBR06] G. Ovarlez, F. Bertrand, and S. Rodts. Local determination of the constitutive law of dense suspension of non colloidal particles through magnetic resonance imaging. *J. Rheol*, (50(3)) :259–292, 2006.

[PGM87] F. Parsy and F. Gadala-Maria. Fore-and-aft asymmetry in a concentrated suspension of solid spheres. *J. Rheol*, (31(8)) :725–732, 1987.

[PGRF88] A.J. Polinski, R.K. Gupta, M.E. Ryan, and F.J. Frechette. Rheological behavior of filled polymeric systems i : Yield stress and shear-thinning effects. *J. Rheol*, (32(7)) :703–735, 1988.

[PRCB03] Ph. Poulain, S. Rodts, P. Coussot, and F. Bertrand. Ecoulement tridimensionnel d'un fluide viscoplastique dans une maquette de malaxeur : vélocimétrie par résonance magnétique. *16ème Congrès Français de Mécanique*, 2003.

[RS03] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, (192(31-32)) :3317–3341, 2003.

[Rut62] I.R. Rutger. Relative viscosity of suspensions of rigid spheres in newtonian liquids. *Rheol. Acta*, (2) :202,210, 1962.

[SCNK94] S.V. Shouche, D.K. Chokappa, V.M. Naik, and D.V. Khakhar. Effect of particulate solids on the rheology of a lyotropic gel medium. *J. Rheol*, (38) :1871–1884, 1994.

[SP05] J.J. Stickel and R.L. Powell. Fluid mechanics and rheology of dense suspensions. *Annu. Rev. Fluid Mech*, (37) :129–149, 2005.

[SP9a] M.Z. Sengun and R.F. Probstein. Bimodal of slurry viscocity with application to coal-slurries. Part 1. Theory and experiment. *Rheol. Acta*, (28) :383–393, 1989a.

[SP9b] M.Z. Sengun and R.F. Probstein. Bimodal of slurry viscocity with application to coal-slurries. Part 2. High shear limit behavior. *Rheol. Acta*, (28) :394–401, 1989b.

[Suq97] P. Suquet. Effective properties of nonlinear composites In Continuum Micromechanics. *In P. Suquet editor, Continuum Micromechanics, Springer-Verlag*, (377) :197–264, 1997.

[Tho65] D.G. Thomas. Transport characteristics of suspension : a note on the viscosity of newtonian suspensions of uniform spherical particles. *J. Colloid Sci*, (20) :267–277, 1965.

[Tor01] S. Torquato. Random heterogeneous materials : microstructure and macroscopic properties. *Springer*, 2001.

[YW07] Z. Yu and A. Wachs. A fictitious domain method for dynamic simulation of particle sedimentation in Bingham fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, (145) :78–91, 2007.

[Zao00] A. Zaoui. Matériaux hétérogènes et composites. *Majeure de mécanique, option matériaux et structures, École Polytechnique*, 2000.

[Zao02] A. Zaoui. Continuum micromechanics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, (128 (8)) :808–816, 2002.

[ZS62] Z.Hashin and S. Shtrikman. On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity. *J. Mech. Phy. Solids*, (10) :335–342, 1962.