



**HAL**  
open science

# Crochets de Poisson gradués et applications: structures compatibles et généralisations des structures hyperkählériennes

Paulo Antunes

► **To cite this version:**

Paulo Antunes. Crochets de Poisson gradués et applications: structures compatibles et généralisations des structures hyperkählériennes. Mathematics [math]. Ecole Polytechnique X, 2010. English. NNT : . pastel-00006109

**HAL Id: pastel-00006109**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00006109>**

Submitted on 3 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité : **MATHÉMATIQUES**

Présentée par **Paulo ANTUNES**

Pour obtenir le titre de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

---

**Crochets de Poisson gradués et applications :**  
**structures compatibles et généralisations des structures**  
**hyperkähleriennes**

---

Soutenue le 4 mars 2010 devant le jury composé de :

<b>Yvette KOSMANN-SCHWARZBACH</b>	Directrice de thèse, Professeur des universités honoraire
<b>Vladimir ROUBTSOV</b>	Co-Directeur de thèse, Professeur
<b>Paul GAUDUCHON</b>	Co-Directeur de thèse, Directeur de recherches CNRS
<b>Janusz GRABOWSKI</b>	Rapporteur, Professeur
<b>Olivier SCHIFFMANN</b>	Rapporteur, Chargé de recherches CNRS
<b>Friedrich WAGEMANN</b>	Examinateur, Maître de conférences habilité
<b>Joana NUNES DA COSTA</b>	Examinatrice, Professeur



Com o apoio da Fundação para a Ciência e Tecnologia através da Bolsa de Investigação SFRH/BD/16093/2004.

**FCT** Fundação para a Ciência e a Tecnologia  
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR



# Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier Yvette Kosmann-Schwarzbach et Vladimir Roubtsov pour avoir dirigé ma thèse et pour m'avoir suggéré les thèmes étudiés dans ma thèse. Leurs immenses cultures mathématiques m'ont souvent éclairé et m'ont permis de compléter ce travail. Je les remercie tout particulièrement pour leur patience et leur soutien durant toute cette période.

Je voudrais aussi remercier Paul Gauduchon pour m'avoir accompagné au long de cette thèse et pour avoir accepté d'être un de mes directeurs de thèse. Je le remercie en particulier pour sa disponibilité constante, à mon égard, au sein du CMLS.

Je suis très reconnaissant à Janusz Grabowski et Olivier Schiffmann pour avoir accepté d'établir un rapport sur ma thèse. Je remercie également Joana Nunes da Costa et Friedrich Wagemann pour avoir intégré mon jury de thèse.

Je remercie tout particulièrement Camille Laurent-Gengoux. Il a toujours cru en moi, parfois plus que moi-même, et son soutien pendant les derniers mois de la thèse ont été fondamentaux pour sa conclusion. Sa disponibilité et son énorme générosité m'ont souvent permis d'atteindre des objectifs que je croyais hors de portée. Merci.

Je tiens aussi à remercier Joana Nunes da Costa pour son soutien et ses encouragements constants durant toutes ces années. Je la remercie en particulier pour son invariable disponibilité : son opinion et ses conseils, mathématiques ou autres, sont très importants pour moi.

J'ai préparé cette thèse entre le CMLS et le LAREMA à Angers. Je remercie toutes les personnes des deux labos qui m'ont accueilli et aidé à progresser dans mes travaux. J'aimerais ici remercier à nouveau Volodya pour m'avoir soutenu et reçu à Angers. Je remercie particulièrement Suzanne, Cristina, Ludovic, Rémi et Serge pour les moments passés à Angers.

Em termos institucionais, agradeço também todo o apoio concedido pelo Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra e pelo Centro de Matemática da

Universidade de Coimbra.

À minha família muito obrigado por tudo : pelo apoio, pela compreensão e pela paciência que sempre me demonstraram. Aos meus pais, em particular, muito obrigado por terem sempre feito tudo o que podiam, e mais ainda, pelos filhos.

Por fim, Patricia, muito obrigado pelo teu amor, pela tua paciência e pela tua compreensão. Sei que nem sempre foi fácil. António, obrigado pela tua alegria dia após dia. Aos dois, muito obrigado por tudo o que me deram estes últimos anos.

Merci enfin à tous ceux que j'ai oublié. J'espère qu'ils ne se formaliseront pas et qu'ils me pardonneront ce remerciement collectif.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>Notations</b>	<b>19</b>
<b>1 Approche supergéométrique</b>	<b>21</b>
1.1 Algèbroïdes de Lie et approche supergéométrique . . . . .	21
1.1.1 Algèbroïdes de Lie . . . . .	22
1.1.2 Le superfibré $\Pi A$ . . . . .	23
1.1.3 Hamiltoniens sur $\Pi A$ . . . . .	25
1.1.4 Algèbroïdes de Lie et hamiltoniens sur $\Pi A$ . . . . .	30
1.1.5 Bi, quasi et Courant en approche supergéométrique . . . . .	32
1.2 Tenseurs et crochets sur $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ . . . . .	36
1.2.1 Applications multilinéaires et tenseurs mixtes en grand crochet . . . . .	36
1.2.2 Contraction . . . . .	40
1.2.3 Crochet de Nijenhuis-Richardson . . . . .	41
1.2.4 Crochet de Schouten-Nijenhuis . . . . .	41
1.2.5 Dérivée de Lie . . . . .	43
1.2.6 Crochet de Frölicher-Nijenhuis . . . . .	44
<b>2 Multi-crochets de Courant et algèbre de Rothstein</b>	<b>49</b>
2.1 L'algèbre de Poisson $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ . . . . .	50
2.1.1 Connexions et endomorphismes dérivatifs . . . . .	50
2.1.2 Décomposition de $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . . . . .	54
2.2 Multi-crochets de quasi-Courant . . . . .	59
2.3 Algèbre de Rothstein . . . . .	64
2.4 Théorèmes d'isomorphisme . . . . .	66
2.4.1 Morphisme de Poisson entre $\mathcal{R}(E)$ et $\mathcal{C}(E)$ . . . . .	66
2.4.2 Lien avec $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ : cas $E = A \oplus A^*$ . . . . .	67
2.5 Structure bicroisée d'algèbres de Lie graduées . . . . .	71

<b>3</b>	<b>Structures compatibles</b>	<b>75</b>
3.1	Algèbroïdes de Lie compatibles et bigèbroïdes de Lie . . . . .	76
3.1.1	Algèbroïdes de Lie compatibles et bicomplexes . . . . .	76
3.1.2	Déformation par un bivecteur de Poisson . . . . .	79
3.1.3	Déformation par un tenseur de Nijenhuis . . . . .	81
3.1.4	Compatibilités de tenseurs de degré 2 . . . . .	84
3.2	Poisson quasi-Nijenhuis avec flux . . . . .	93
3.2.1	Définition et cas particuliers . . . . .	94
3.2.2	Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et géométrie généralisée . . . . .	94
3.2.3	Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et quasi-bigèbroïdes de Lie . . . . .	100
3.2.4	Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et tenseurs (de degré 2) compatibles	101
<b>4</b>	<b>Structures para-hypersymplectiques</b>	<b>105</b>
4.1	Définitions et propriétés . . . . .	106
4.1.1	Définitions . . . . .	106
4.1.2	$P\Omega$ , $PN$ et $\Omega N$ -structures induites . . . . .	113
4.1.3	Cas $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . . . . .	116
4.1.4	Structure PHS comme paire de $\Omega N$ -structures . . . . .	120
4.2	Exemples du type $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ : équations de Monge-Ampère . . . . .	120
4.2.1	Lien avec l'équation de Monge-Ampère. . . . .	122
4.3	Exemples du type $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . . . . .	125
4.3.1	Exemples du type hyperproduit : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ . . . . .	125
4.3.2	Exemples du type para-hyperproduit : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ et $\epsilon_3 = 1$ . . . . .	128

# Introduction

L'étude des algèbres de Poisson - dont l'exemple le plus classique est l'algèbre des fonctions sur un fibré cotangent - a mis en évidence de nombreuses autres structures algébriques (crochet de Schouten-Nijenhuis des multivecteurs, complexe de Koszul, algébroïdes et bigébroïdes de Lie, crochet de Courant, et leurs "déformations" éventuelles). Mais toutes ces structures peuvent elles-mêmes être reconstruites à l'aide d'une structure de Poisson que l'on appelle le "grand crochet", qui n'est au fond qu'une structure de Poisson du type le plus classique, à savoir le crochet sur un fibré cotangent, à ceci près que l'on doit considérer le fibré cotangent d'une supervariété. L'objet principal de cette thèse est de convaincre le lecteur que ce grand crochet est en effet le bon outil : non seulement les structures précédemment mentionnées s'expriment à l'aide du grand crochet, mais celui-ci permet d'écrire, de façon remarquablement simple, les déformations et compatibilités de ces structures, et la démonstration de nombre de leurs propriétés se réduit à quelques manipulations algébriques.

Nous divisons cette introduction en deux parties. Dans la première, nous tentons de donner au lecteur une idée de ce qu'est le grand crochet, d'abord en expliquant brièvement son origine, puis en faisant quelques calculs en coordonnées. Enfin nous montrons, à titre d'exemple, combien simples sont les conditions de compatibilités entre algébroïdes et entre tenseurs lorsqu'exprimées à l'aide du grand crochet.

La seconde partie est un résumé de la thèse.

## Présentation du grand crochet

### Historique succinct

Le grand crochet a d'abord été introduit en algèbre multilinéaire, dans ce qui correspond, rétrospectivement, au cas d'un fibré vectoriel de base  $M$ , où  $M$  est un point. La définition de ce crochet est dans ce contexte assez simple : étant donné un espace vectoriel  $E$ , une forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  s'étend de façon unique par bidéivation en un crochet de Poisson de degré  $-2$  sur  $\bigwedge^\bullet E$ . Ce crochet de Poisson a été introduit par Kostant et Sternberg dans [31] et par Henneaux dans [16]. Lorsque  $E = V \oplus V^*$  est muni de son produit scalaire canonique (non-positif), le crochet de Poisson ainsi obtenu a été appelé "grand crochet" par Kosmann-Schwarzbach [21]. Elle justifie ce nom en montrant, après les travaux de Lecomte et Roger [33] sur les bigèbres de Lie, que ce crochet permet non seulement de retrouver sous forme de crochet dérivé [25] diverses structures algébriques

comme les algèbres de Lie, mais encore d'exprimer les compatibilités de ces structures. Elle exprime ainsi de manière compacte et élégante ce qu'est une (quasi-, proto-) bigèbre de Lie. Ce que cette construction a de remarquable est que les structures algébriques deviennent simplement des éléments de  $\bigwedge^\bullet(V \oplus V^*)$  et que les diverses compatibilités requises deviennent des relations de commutation entre ces éléments.

Pour passer des structures d'algèbre de Lie aux structures d'algébroïde de Lie, il faut, pour commencer, remplacer l'espace vectoriel  $E$  par un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$ . Mais, contrairement à ce que l'on pourrait croire, il ne suffit pas de faire la même construction point par point sur  $\bigwedge^\bullet(A \oplus A^*)$ . Par exemple, ainsi que le fait remarquer Roytenberg, (voir section 3.2 de [44]), une structure d'algébroïde de Lie sur  $A$  ne peut pas être encodée dans un tel espace. La clef permettant de généraliser aux fibrés vectoriels est de remarquer que dans le cas des espaces vectoriels, l'algèbre  $\bigwedge^\bullet(V \oplus V^*)$  est l'algèbre des fonctions sur  $T^*(\text{IV})$ , où  $\text{IV}$  est l'espace vectoriel  $V$  considéré comme une supervariété purement impaire. Sous cette identification le grand crochet est simplement le crochet de Poisson canonique de l'espace cotangent. Si l'on considère à présent le fibré vectoriel  $A \rightarrow M$ , il est alors naturel de définir le grand crochet comme étant le crochet de Poisson canonique sur l'algèbre  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  des fonctions sur le cotangent  $T^*(\Pi A)$  de la supervariété  $\Pi A$ . On rappelle que  $\Pi A$  est la supervariété dont  $M$  est la variété de base  $M$  et dont les sections de  $A \oplus A^* \rightarrow M$  sont des coordonnées impaires. Roytenberg a utilisé cet outil pour étendre des algèbres de Lie aux algébroïdes de Lie les résultats de Lecomte, Roger et Kosmann-Schwarzbach et donner ainsi des caractérisations simples des (quasi-, proto-)bigébroïdes de Lie. Comme dans le cas des algèbres de Lie, ce que cette construction a de remarquable est que les structures algébriques deviennent des fonctions sur  $T^*(\Pi A)$ , et que les diverses compatibilités requises deviennent des relations de commutation entre ces fonctions. Dans la suite de ce texte, nous appellerons souvent les éléments de  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  les *hamiltoniens sur  $\Pi A$* .

### Le grand crochet en coordonnées locales.

Le grand crochet est, par définition, le crochet de Poisson canonique sur le cotangent de la supervariété  $\Pi A \rightarrow M$ . Pour donner au lecteur une idée de ce que peut être un tel objet, nous allons en donner l'expression explicite lorsque  $A$  est le fibré trivial de rang  $n$  sur  $\mathbb{R}^m$ . Comme tout fibré vectoriel est localement isomorphe à un tel objet, ce que nous décrivons dans les lignes qui suivent est aussi la description locale du grand crochet.

L'algèbre des fonctions sur  $\Pi A$  est, en ce cas, l'algèbre engendrée par les coordonnées

$$(x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n),$$

où les coordonnées  $x^1, \dots, x^m$  sont paires et les coordonnées  $\xi^1, \dots, \xi^n$  sont impaires. On rappelle qu'une coordonnée paire commute avec toutes les autres et que deux coordonnées impaires anti-commutent :

$$x_i x_j = x_j x_i, \quad x_i \xi_j = \xi_j x_i, \quad \xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i.$$

L'algèbre des fonctions sur  $T^*(\Pi A)$  est alors l'algèbre engendrée par les coordonnées

$$(x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n, p_1, \dots, p_m, \theta_1, \dots, \theta_n),$$

où les coordonnées moment  $p_1, \dots, p_m$  sont paires et les coordonnées moment  $\theta_1, \dots, \theta_n$  sont impaires.

En termes de ces coordonnées locales, le grand crochet s'écrit

$$\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x^i} - (-1)^{|\mathfrak{f}||\mathfrak{g}|} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \theta_a} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi^a} - (-1)^{|\mathfrak{f}||\mathfrak{g}|} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi^a} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \theta_a},$$

pour toutes les fonctions  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in C^\infty(T^*(\Pi A))$ , de parité  $|\mathfrak{f}|$  et  $|\mathfrak{g}|$ .

On peut encore définir le grand crochet comme l'unique bidérivation graduée qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^i, \xi^a\} = \{x^i, \theta_a\} = \{p_i, \xi^a\} = \{p_i, \theta_a\} = 0 \\ \{x^i, x^j\} = \{\xi^a, \xi^b\} = \{p_i, p_j\} = \{\theta_a, \theta_b\} = 0 \\ \{p_i, x^j\} = \delta_i^j \\ \{\theta_a, \xi^b\} = \delta_a^b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i, j \in \{1, \dots, m\} \\ a, b \in \{1, \dots, n\} \end{array}$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

On vérifie que l'antisymétrie graduée ainsi que les identités de Jacobi et Leibniz graduées sont satisfaites, donc que le grand crochet est un crochet de Poisson gradué.

Contrairement au crochet de Poisson usuel, le crochet d'une fonction impaire avec elle-même n'est pas forcément nul. Néanmoins la relation  $\{\mu, \mu\} = 0$  est satisfaite, par exemple, pour les fonctions suivantes

1.  $n = m$  et  $\mu_T = \sum_{i=1}^n \xi^i p_i$ ,
2.  $m = 0$  et  $\mu_{\mathfrak{g}} = \sum_{a,b,c=1}^n C_{ab}^c \xi^a \xi^b \theta_c$ , où les  $C_{ab}^c$  sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

## Simplicité du calcul en grand crochet

Le notion d'algébroïde de Lie ([43], voir aussi [36]) est la "plus petite" notion naturelle qui admet comme cas particuliers algèbres de Lie et fibrés tangents à des variétés différentielles. Par définition, un algébroïde de Lie est un crochet de Lie sur l'espace des sections d'un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  défini par un opérateur bi-différentiel du premier ordre, ce qui revient à dire qu'il existe une application  $\rho : A \rightarrow TM$ , appelée ancre, telle que

$$[a, fb] = (\rho(a) \cdot f) b + f[a, b]$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$ ,  $a, b \in \Gamma(A)$ . Par exemple, une algèbre de Lie est un algébroïde de Lie où  $M$  est un point, et, pour toute variété  $M$ , le crochet des champs de vecteurs munit le fibré tangent  $TM \rightarrow M$  d'une structure d'algébroïde pour laquelle l'ancre est l'identité. Ceci inclut les catégories des algèbres de Lie et des variétés dans la catégorie des algébroïdes de Lie. Les objets usuels du calcul de Cartan (produit intérieur, différentielle de de Rham, dérivée de Lie ...) se généralisent à tout algébroïde de Lie. Le crochet

$[\cdot, \cdot]_{FN}$  de Frölicher-Nijenhuis, défini sur l'espace  $\Omega^\bullet(M, TM)$  des formes sur  $M$  à valeurs dans le fibré tangent, se généralise lui aussi aux algébroïdes de Lie.

Pour définir un algébroïde de Lie, il faut donc deux opérations : une ancre  $A \rightarrow TM$  et un crochet sur  $\Gamma(A)$ . Mais un algébroïde de Lie sur  $A \rightarrow M$  est déterminé, en termes du grand crochet, par une unique fonction  $\mu$  sur  $T^*\Pi A$  qui vérifie la relation de commutation  $\{\mu, \mu\} = 0$ . Par exemple, les fonctions  $\mu_T$  et  $\mu_{\mathfrak{g}}$  (voir la fin du paragraphe précédent) correspondent, respectivement, à l'algébroïde de Lie des champs de vecteurs sur  $T\mathbb{R}^n$  et à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Illustrons la facilité avec laquelle ce dernier point de vue permet de résoudre, sans calcul fastidieux, divers problèmes, à travers le cas d'une déformation d'un algébroïde de Lie par un morphisme  $N : A \rightarrow A$  (au dessus de l'identité de  $M$ ). En transportant la structure d'algébroïde de Lie par  $e^{tN}$ , le terme que l'on obtient au premier ordre en  $t$ , est un nouveau crochet sur  $\Gamma(A)$  donné par

$$[a, b]_N = [Na, b] + [a, Nb] - N[a, b]$$

pour tous  $a, b \in \Gamma(A)$ . La question est de savoir quand ce nouveau crochet définit à son tour une structure d'algébroïde de Lie. Il est facile de voir, que, lorsque tel est le cas, l'ancre ne peut être que l'application  $\rho \circ N$ , mais l'identité de Jacobi n'est pas a priori satisfaite. Écrire une condition nécessaire et suffisante sur  $N$  pour qu'elle le soit n'est pas chose aisée : si l'on prend des coordonnées locales et un triplet de sections arbitraires, on obtient certes des équations, mais comment les interpréter ?

En terme de grand crochet, la condition nécessaire et suffisante s'écrit de façon particulièrement simple. La fonction sur  $T^*\Pi A$  qui correspond au crochet  $[\cdot, \cdot]_N$  est la fonction  $\{N, \mu\}$ , laquelle est, ainsi que nous venons de le voir, un algébroïde de Lie si et seulement si elle commute avec elle-même :

$$\{\{N, \mu\}, \{N, \mu\}\} = 0, \tag{1}$$

(où on a noté  $N$  et  $\mu$  les fonctions sur  $T^*(\Pi A)$  qui encodent le morphisme  $N$  et la structure d'algébroïde de Lie sur  $A$ ).

Par ailleurs, dans la littérature (voir [29]), on trouve qu'une condition suffisante pour que  $[\cdot, \cdot]_N$  soit un crochet d'algébroïde de Lie est que le crochet de Frölicher-Nijenhuis de  $N$  avec lui-même,  $[N, N]_{FN} = 0$ , soit nul, ce qui, comme nous le verrons, en termes du grand crochet, s'écrit sous la forme :

$$\{N, \{N, \mu\}\} = \{N^2, \mu\}.$$

Comme le grand crochet vérifie l'identité de Jacobi graduée et que  $\{\mu, \mu\} = 0$ , la condition (1) est automatiquement satisfaite dans ce cas. Ceci justifie le caractère suffisant de la condition  $[N, N]_{FN} = 0$  pour que  $[\cdot, \cdot]_N$  soit un crochet d'algébroïde de Lie.

## Plan et résumé de la thèse

### Chapitre 1

Dans la première partie du chapitre nous rappelons les définitions des algébroïdes de Lie dans l'approche supergéométrique et du grand crochet. Nous montrons comment les différentes structures d'algébroïde de Lie, de bigébroïde de Lie et d'algébroïde de Courant s'expriment en ces termes. Dans la seconde partie nous reconstruisons, à partir du grand crochet, soit comme restriction, soit comme crochet dérivé [25], un certain nombre de crochets usuels : le crochet de Nijenhuis-Richardson, le crochet de Schouten-Nijenhuis et le crochet de Frölicher-Nijenhuis. L'écriture de ce dernier en termes du grand crochet est particulièrement simple et, pour autant que nous le sachions, originale. Donnons quelques détails. Le crochet de Frölicher-Nijenhuis est une structure d'algèbre de Lie graduée sur les  $(k, 1)$ -tenseurs antisymétriques, c'est-à-dire les sections de  $\bigwedge^\bullet A^* \otimes A$ . Son expression explicite, pour les sections décomposables  $K = \omega_K \otimes X_K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L = \omega_L \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ , est donnée par la formule

$$[K, L]_{FN} = (\omega_K \wedge \mathcal{L}_{X_K} \omega_L) \otimes X_L + (-1)^k (d\omega_K \wedge i_{X_K} \omega_L) \otimes X_L - (-1)^{kl} (\omega_L \wedge \mathcal{L}_{X_L} \omega_K) \otimes X_K - (-1)^{k(l+1)} (d\omega_L \wedge i_{X_L} \omega_K) \otimes X_K + \omega_K \wedge \omega_L \otimes [X_K, X_L].$$

Nous démontrons le théorème suivant

**THÉORÈME** *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie et  $\mu$  la fonction sur  $T^*(\Pi A)$  correspondante. En termes du grand crochet :*

$$[K, L]_{FN} = \{\{K, \mu\}, L\} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\},$$

*pour toutes les sections  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ .*

On remarque que le premier terme dans l'expression de  $[K, L]_{FN}$ , à savoir  $\{\{K, \mu\}, L\}$ , est exactement la formule que l'on utilise pour définir un crochet dérivé. Mais le crochet dérivé est défini sur une sous-algèbre commutative, or  $\bigwedge^\bullet A^* \otimes A$  ne l'est pas. En particulier l'expression  $\{\{K, \mu\}, L\}$  n'est pas antisymétrique. Au contraire, l'identité de Jacobi donne que

$$\{\{K, \mu\}, L\} = \{K, \{\mu, L\}\} + (-1)^{l+1} \{\{K, L\}, \mu\}$$

Le deuxième terme, à savoir  $\{i_L K, \mu\}$  corrige ce défaut d'antisymétrie puisque  $\{K, L\} = i_K L - (-1)^{(k-1)(l-1)} i_L K$ , ce qui implique bien l'antisymétrie graduée de  $[\cdot, \cdot]_{FN}$ . Autrement dit, la formule du théorème ci-dessus est un crochet dérivé, mais adapté au cas où la sous-algèbre n'est pas commutative.

### Chapitre 2

Essentiellement, ce chapitre regroupe, complète, relie et étend des résultats épars dans la littérature à propos des diverses constructions de l'algèbre de Poisson que définit

le grand crochet. Autrement dit nous mettons en évidence le diagramme commutatif suivant d'algèbres de Poisson graduées

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Pol}(T^*(\Pi A)) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{P}/I \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \nabla \cong \\
 \widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*) & \xrightarrow[\nabla]{\cong} & \mathcal{R}(A \oplus A^*)
 \end{array}$$

où

- $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  est l'algèbre des fonctions polynomiales (en les variables de la fibre) sur  $T^*(\Pi A)$ , muni du grand crochet,
- $\mathcal{P}$  est l'algèbre graduée libre engendrée par les fonctions de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  de degré total 0, 1 et 2, et  $I$  est un idéal de Poisson engendré par des relations de degré 2.
- $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$  est l'algèbre des sections de  $\bigoplus_{r=2p+k} \left( \bigwedge^k (A \oplus A^*) \otimes S^p(TM) \right)$ . Si on fixe une connexion  $\nabla$  sur  $A$ , on définit sur  $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$  une structure d'algèbre de Poisson graduée, dite *algèbre de Rothstein*.
- $\widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*)$  est la sous-algèbre de Poisson des multi-crochets de quasi-Courant engendrée par les éléments de degré 0, 1 et 2.

Les isomorphismes  $\mathcal{P}/I \rightarrow \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  et  $\mathcal{P}/I \rightarrow \mathcal{R}(A \oplus A^*)$  sont dûs à Roytenberg [45]. Nous détaillons ces constructions en explicitant le crochet de Poisson sur  $\mathcal{P}/I$  et montrons que l'image de  $\mathcal{P}/I$  par l'isomorphisme annoncé par Roytenberg [45] est bien l'algèbre de Rothstein. L'isomorphisme  $\widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*) \rightarrow \mathcal{R}(A \oplus A^*)$  est dû à Keller et Waldmann [18]. Nous construisons un morphisme d'algèbres de Poisson  $\text{Pol}(T^*(\Pi A)) \rightarrow \widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*)$ , montrons que le diagramme ainsi formé est commutatif et concluons alors que ce morphisme est bijectif.

Nous finissons ce chapitre en vérifiant que, lorsque la connexion fixée sur  $A$  est plate, le grand crochet est le crochet de l'algèbre bicroisée [40, 28] des deux sous-algèbres de Lie de  $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$  suivantes

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \left( \left( \bigwedge^{k+1} A^* \wedge A \right) \right) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \left( \bigwedge^k A^* \otimes TM \right).$$

### Chapitre 3

Dans la première partie de ce chapitre, nous écrivons à l'aide du grand crochet divers types de compatibilités entre structures (évoquées au chapitre 1) et divers types de déformations, par des tenseurs, donnant des structures compatibles. L'idée générale est la suivante : les structures sont des hamiltoniens sur  $\Pi A$  de degré 3 et les déformations se font par des hamiltoniens de degré 2. Les structures sont compatibles si leurs hamiltoniens commutent et les déformations par les tenseurs  $H$  et  $H'$  donnent des structures compatibles sous certaines conditions exprimables sous la forme  $[H, H']_{FN} = 0$ . On unifie

ainsi divers types de compatibilités bien connues : compatibilité entre structures de Poisson (qui apparaît dans les systèmes intégrables), compatibilités à la Magri et Morosi [38] entre bivecteur de Poisson, formes pré-symplectiques et tenseurs de Nijenhuis, paire de Hitchin (définies par Crainic [8]), 2-formes complémentaires de Vaisman [60]. On traduit toutes ces compatibilités en termes du grand crochet et on vérifie certaines relations entre ces compatibilités. Cette section n'introduit pas à proprement parler de nouvelles notions, mais unifie en un même langage toutes ces compatibilités entre tenseurs.

Dans la deuxième partie de ce chapitre on étudie la généralisation suivante de la compatibilité entre un bivecteur de Poisson et un  $(1, 1)$ -tenseur.

**DÉFINITION** *Une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur un algébroïde de Lie  $A$  est un quadruplet  $(\pi, N, \psi, H)$  où  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$ ,  $N \in \Gamma(A \otimes A^*)$ ,  $\psi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$  et  $H \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$  sont tels que  $N \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp \circ {}^t N$ ,  $d\psi = 0$ ,  $dH = 0$  et vérifient les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \pi \text{ est un bivecteur de Poisson,} \\ C_{\pi, N}(\alpha, \beta) = 2 i_{\pi^\sharp \alpha \wedge \pi^\sharp \beta} H, \\ T_N(X, Y) = \pi^\sharp(i_{NX \wedge Y} H - i_{NY \wedge X} H + i_{X \wedge Y} \psi), \\ d_N \psi = d\mathcal{H}, \end{cases}$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ , où  $\mathcal{H}$  est la 3-forme définie par

$$\mathcal{H}(X, Y, Z) = \circlearrowleft_{X, Y, Z} H(NX, NY, Z),$$

pour tous  $X, Y, Z \in \Gamma(A)$ .

Pour  $H = 0$ , on retrouve la définition d'une structure de Poisson quasi-Nijenhuis [52] et si, de plus,  $\Psi = 0$ , alors on retrouve une structure de Poisson Nijenhuis [38].

Cette section a fait l'objet d'une publication [1] dont les principaux résultats sont les suivants. Tout d'abord, voir théorème 3.2.12, les structures complexes généralisées [14] sont des exemples de structures de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. Il en va de même si, au lieu des structures complexes, on considère des structures produits (c'est-à-dire de carré égal à Id) ou des structures sous-tangentes (c'est-à-dire de carré nul). Un deuxième résultat associe une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux à toute paire  $(\pi, \omega)$ , où  $\pi$  est un bivecteur de Poisson et  $\omega$  est une 2-forme quelconque.

**THÉORÈME** *Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson,  $\omega$  une 2-forme et considérons  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$  et  $\omega_N = \omega(N., .)$ . Le quadruplet  $(\pi, N, d\omega_N, -d\omega)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$ .*

Dans la lignée de [52, 7] qui interprètent les structures complexes généralisées ou les structures de Poisson quasi-Nijenhuis en termes de quasi-bigébroïdes de Lie, nous démontrons aussi le théorème suivant.

**THÉORÈME** *Si  $(\pi, N, \psi, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$  alors  $(A_\pi^*, d_N^H, \psi + i_N H)$  est un quasi-bigébroïde de Lie, où  $d_N^H(\alpha) = d_N(\alpha) - i_{\pi^\sharp(\alpha)} H$ , pour tout  $\alpha \in \Gamma(A^*)$ .*

## Chapitre 4

Ce chapitre est consacré aux structures para-hypersymplectiques qui, comme nous le verrons, sont riches en structures compatibles.

**DÉFINITION** Une structure para-hypersymplectique est un quadruplet  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  où  $A$  est un algébroïde de Lie et  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  sont des  $A$ -formes symplectiques telles que les tenseurs  $I_1, I_2$  et  $I_3$  définis par

$$I_j = (\omega_{j-1}^\flat)^{-1} \circ \omega_{j+1}^\flat, \quad j = 1, 2, 3,$$

vérifient

$$I_j^2 = \epsilon_j \text{Id}_A, \quad \text{avec } \epsilon_j = \pm 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

On abrégera parfois la notation et on écrira PHS au lieu de para-hypersymplectique.

Par construction, l'application  $I_j$  est ce que l'on appelle le tenseur de passage de  $\omega_{j-1}$  à  $\omega_{j+1}$ , pour tout  $j = 1, 2, 3$ .

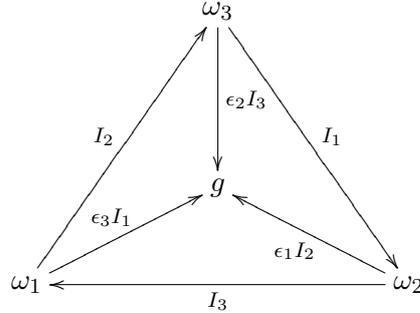
Les structures hyperkähleriennes sont clairement des exemples de structures PHS telles que  $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -\text{Id}$ .

Dans ce chapitre, nous commençons par vérifier que

$$\epsilon_3 \omega_1(J_1, \cdot) = \epsilon_1 \omega_2(J_2, \cdot) = \epsilon_2 \omega_3(J_3, \cdot)$$

et que l'application bilinéaire  $g(\cdot, \cdot)$  ainsi obtenue est symétrique non dégénérée si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$  et symplectique sinon.

On résume les relations entre les quatre formes bilinéaires  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  et  $g$  par le diagramme suivant



où

- les sommets sont considérés comme des morphismes de  $A$  dans  $A^*$  ;
- les flèches sont des morphismes de  $A$  dans  $A$  ;
- une flèche  $I$  relie le morphisme  $F$  au morphisme  $G$  si  $F \circ I = G$ .

Il découle en particulier du diagramme que, pour  $i \neq j$ ,  $I_i$  et  $I_j$  commutent si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$  et anti-commutent sinon.

Nous associons à une structure PHS une série de  $P\Omega$ -structures. Nous résumons dans la proposition suivante plusieurs propositions que nous démontrons au long du chapitre (pour le premier point, voir proposition 4.1.8, pour le second voir proposition 4.1.20).

**PROPOSITION** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS, et  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  les trois structures de Poisson associées à  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

1. Pour tous  $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(\pi_i, \omega_j)$  est une  $P\Omega$ -structure ;
2. Si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ , alors  $(\pi_i, g)$  est une  $P\Omega$ -structure pour  $i = 1, 2, 3$ .

On note que, par des résultats du chapitre 3, chacune de ces  $P\Omega$ -structures induit une  $PN$  et une  $\Omega N$ -structure, que nous détaillerons au long de ce chapitre.

Une autre conséquence de cette proposition est que  $I_1, I_2$  et  $I_3$  sont des tenseurs de Nijenhuis. On démontre en fait que, plus généralement :

**THÉORÈME** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tous  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$[I_j, I_k]_{FN} = 0.$$

Ce théorème est loin d'être évident, et, d'ailleurs, sa preuve n'est pas du tout la même selon que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$  vaut 1 ou  $-1$ .

Nous donnons ensuite un théorème qui montre qu'une structure PHS peut être considérée comme une paire de  $\Omega N$ -structures compatibles en un certain sens.

**THÉORÈME** Un quadruplet  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS si et seulement si  $(\omega_1, I_2)$  et  $(\omega_2, I_1)$  sont des  $\Omega N$ -structures telles que

$$\begin{cases} I_j^2 = \epsilon_j \text{id}_A, & j = 1, 2 \\ \omega_1^b \circ I_2 = \omega_2^b \circ I_1 \\ I_1 \circ I_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 I_2 \circ I_1. \end{cases}$$

À partir d'une paire de  $\Omega N$ -structures comme ci-dessus, on retrouve  $\omega_3$  et  $I_3$  de la façon suivante

$$\begin{cases} \omega_3^b = \omega_1^b \circ I_2 \\ I_3 = \epsilon_2 I_2 \circ I_1. \end{cases}$$

Nous discutons ensuite certains exemples, en distinguant les différents cas de structures PHS. Dans le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ , nous nous plaçons sur  $\mathbb{R}^4$  et nous associons des équations de type Monge-Ampère à des structures PHS. Dans le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ , nous donnons des exemples, et proposons une classification dans le cas  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ , qui consiste à donner un isomorphisme entre un voisinage d'un point de  $M$  et le produit de quatre ouverts de quatre espaces vectoriels symplectiques ; les formes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sont ensuite construites en prenant des combinaisons linéaires bien choisies, à coefficients dans  $\{-1, +1\}$ , de ces formes.



# Notations

Au long de ce texte nous considérerons

- $M$  une variété différentielle de dimension  $m$  ;
- $A \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel de rang  $n$  (de fibre  $F$ ) ;
- $(U; x^1, \dots, x^m)$  une carte locale de  $M$  ;
- $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  une base de l'espace vectoriel  $F$  et  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  la base duale de  $F^*$  ;
- $\mathfrak{X}^k(A) := \Gamma(\bigwedge^k A)$  l'espace des  $A$ -multivecteurs homogènes de degré  $k$  ;
- $\mathfrak{X}^\bullet(A) := \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{X}^k(A)$  l'espace des  $A$ -multivecteurs ;
- $\Omega^k(A) := \Gamma(\bigwedge^k A^*)$  l'espace des  $A$ -formes homogènes de degré  $k$  ;
- $\Omega^\bullet(A) := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(A)$  l'espace des  $A$ -formes ;
- $\mathbb{A}(A)$  est l'algèbroïde d'Atiyah de  $A$  ;
- $\mathcal{D}(A) = \Gamma(\mathbb{A}(A))$  est l'espace vectoriel des endomorphismes dérivatifs de  $A$  ;
- $\text{End}A$  sont les endomorphismes du fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  ;
- $[\cdot, \cdot]_{\text{com}}$  est le commutateur gradué d'endomorphismes sur un espace vectoriel gradué  $V$  défini par

$$[\mathcal{F}, \mathcal{G}]_{\text{com}} = \mathcal{F} \circ \mathcal{G} - (-1)^{|\mathcal{F}||\mathcal{G}|} \mathcal{G} \circ \mathcal{F}.$$

Si  $V$  n'est pas gradué, on considère que tous les éléments sont de degré 0 ;

Toutes les structures apparaissant dans ce texte (variétés, fibrés, etc...) sont considérées de classe  $C^\infty$ .

On utilise, en règle générale, la convention d'Einstein au long de ce texte.



# Chapitre 1

## Approche supergéométrique

Complétant et généralisant les résultats de Lecomte et Roger [33], dans [21] Kosmann-Schwarzbach montre que le grand crochet, sur le double  $E \oplus E^*$  d'un espace vectoriel  $E$ , permet d'encoder les structures usuelles telles que algèbres et bigèbres de Lie et aussi leurs versions plus faibles (quasi- et proto-). Les crochets de ces structures sont alors obtenus comme des crochets dérivés (voir [25]) du grand crochet. Dans [44], Roytenberg généralise les résultats de [21] à un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  et aux structures d'algébroïde de Lie et autres structures associées (bi-, quasi- et proto-). Pour cela Roytenberg (voir aussi [57]) remarque que  $E \oplus E^* \simeq T^*(\Pi E)$  et que dans le cas d'un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  le cadre correct pour généraliser les résultats de [21] est  $T^*(\Pi A)$  muni du crochet de Poisson canonique.

Dans la première partie de ce chapitre nous allons exposer les principaux résultats de [44]. On commence par rappeler la définition et les propriétés principales d'une structure d'algébroïde de Lie sur un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$ . Puis, reprenant les résultats de [62] et [44], on introduit le cadre supergéométrique, c'est-à-dire  $T^*(\Pi A)$  muni du grand crochet, et on vérifie comment les structures d'algébroïde de Lie (et leurs structures associées) s'expriment dans ce cadre.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on s'intéresse à l'espace vectoriel  $\Gamma(\bigwedge^\bullet A^* \otimes A)$  des  $A$ -formes à valeurs vectorielles. On exprime, dans le cadre supergéométrique, plusieurs crochets et opérateurs classiques sur  $\Gamma(\bigwedge^\bullet A^* \otimes A)$ , en particulier le crochet de Frölicher-Nijenhuis [10].

### 1.1 Algébroïdes de Lie et approche supergéométrique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre supergéométrique dans lequel nous exprimerons les structures d'algébroïde de Lie et autres structures associées : bigébroïdes de Lie, quasi-bigébroïdes de Lie et algébroïdes de Courant. Commençons par rappeler la définition et les propriétés fondamentales d'un algébroïde de Lie.

### 1.1.1 Algébroïdes de Lie

Considérons  $M$  une variété différentielle. Une structure d'*algébroïde de Lie* sur un fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$  est un couple  $(\rho, [\cdot, \cdot])$  tel que

- l'*ancree*  $\rho : A \rightarrow TM$  est un morphisme de fibrés vectoriels, au dessus de l'identité de  $M$ ,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho} & TM \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

- le crochet  $[\cdot, \cdot]$  est un crochet de Lie sur l'espace des sections  $\Gamma A$ , et la règle de Leibniz

$$[X, fY] = f[X, Y] + (\rho(X) \cdot f) Y$$

est vérifiée quelles que soient la fonction  $f \in C^\infty(M)$  et les sections  $X, Y \in \Gamma A$ .

#### Exemples:

1. Le fibré tangent est évidemment un exemple d'algébroïde de Lie.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{id} & TM \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

2. Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est également un algébroïde de Lie. Dans ce cas,  $M = \{*\}$  est un point et l'ancree est l'application nulle.
3. Si  $\pi$  est un bivecteur de Poisson de  $M$  (i.e.,  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$  tel que  $[\pi, \pi]_{SN} = 0$ , où  $[\cdot, \cdot]_{SN}$  est le crochet de Schouten-Nijenhuis, voir le paragraphe 1.2.4), alors  $T^*M$  a une structure d'algébroïde de Lie, d'ancree  $\pi^\sharp$ ,

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{\pi^\sharp} & TM \\ & \searrow & \swarrow \\ & M & \end{array}$$

où on définit  $\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM$  en posant  $\pi^\sharp(\alpha) = i_\alpha(\pi)$ , pour tout  $\alpha \in \Gamma(T^*M)$ . Le crochet de Lie sur  $\Gamma(T^*M)$  est défini par

$$[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)),$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M)$  et où  $\mathcal{L}_X = [i_X, d]_{\text{com}}$  est la dérivée de Lie dans la direction de  $X \in \Gamma(TM)$ .

Soit  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algèbroïde de Lie. On définit la *différentielle extérieure*  $d : \Omega^\bullet(A) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(A)$  en posant pour tout  $\eta \in \Omega^k(A)$ ,

$$\begin{aligned} d\eta(X_0, \dots, X_k) := & \sum_{i=0}^k (-1)^i \rho(X_i) \cdot \eta(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ & + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \eta([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $X_0, \dots, X_k \in \Gamma(A)$  et où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  au dessus d'un terme signifie que ce terme est omis.

**PROPOSITION 1.1.1** *Soit  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algèbroïde de Lie.*

1. *L'opérateur  $d$  est une dérivation de degré 1 de l'algèbre extérieure  $(\Omega^\bullet(A), \wedge)$ , i.e.,*

$$d(\eta \wedge \zeta) = d\eta \wedge \zeta + (-1)^k \eta \wedge d\zeta, \quad \forall \eta \in \Omega^k(A), \zeta \in \Omega^\bullet(A).$$

2. *L'opérateur  $d$  est un opérateur de cohomologie, i.e.,*

$$d^2 = 0.$$

La définition (1.1) de  $d$  en fonction de  $\rho$  et  $[\cdot, \cdot]$  est en quelque sorte réversible car on peut définir  $\rho$  et  $[\cdot, \cdot]$  en fonction de  $d$  :

$$\begin{cases} \rho(X) \cdot f = df(X) \\ \langle [X, Y], \eta \rangle = \rho(X) \cdot \eta(Y) - \rho(Y) \cdot \eta(X) - d\eta(X, Y), \end{cases} \quad (1.2)$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,  $\eta \in \Gamma(A^*)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

L'équivalence entre  $d$  et le couple  $(\rho, [\cdot, \cdot])$  est précisée dans le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.2** ([36]) *Soit  $A \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel. Les relations (1.2) définissent une correspondance biunivoque entre les structures d'algèbroïde de Lie sur  $A$ ,  $(\rho, [\cdot, \cdot])$ , et les dérivations de degré 1 de  $(\Omega^\bullet(A), \wedge)$ ,  $d : \Omega^\bullet(A) \rightarrow \Omega^{\bullet+1}(A)$ , qui vérifient  $d^2 = 0$ .*

### 1.1.2 Le superfibré $\Pi A$

Soit  $A \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel de fibre  $F$ , où  $F$  est un espace vectoriel de dimension finie. Dans cette section nous allons construire le superfibré vectoriel  $\Pi A$ . Cette construction est faite localement dans chacune des cartes locales d'un atlas de  $A$ , mais on vérifie qu'elle ne dépend pas de la carte locale considérée et qu'elle peut ainsi être étendue globalement à  $A$ .

Considérons un atlas de  $M$  formé par des cartes locales  $(U; x^1, \dots, x^m)$  et considérons une base  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$  de l'espace vectoriel dual  $F^*$ . On définit une structure de variété

différentielle sur  $A$ , l'espace total du fibré vectoriel, en considérant les cartes locales  $(\pi^{-1}(U); x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n)$ , où par un abus de notation on note  $x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n$  les fonctions

$$\begin{cases} \hat{x}^i &= x^i \circ \text{proj}_1 \circ \phi, & i = 1, \dots, m \\ \hat{\xi}^a &= \xi^a \circ \text{proj}_2 \circ \phi, & a = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Dans les formules précédentes,  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$  est l'homéomorphisme provenant de l'atlas du fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$  et  $\text{proj}_1$  (resp.  $\text{proj}_2$ ) est la projection de  $U \times F$  sur le premier facteur (resp. sur le deuxième facteur).

Dans chacune des cartes locales  $(\pi^{-1}(U); x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n)$  de l'atlas considéré sur  $A$ , attribuons un poids aux fonctions coordonnées : 0 pour les coordonnées correspondant à la base  $M$  et 1 pour les coordonnées correspondant à la fibre de  $A \xrightarrow{\pi} M$ . Ainsi, si on note  $w(f)$  le poids de  $f$ , on a :

$$w(x^i) = 0 \quad \text{et} \quad w(\xi^a) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall a = 1, \dots, n.$$

Il est évident qu'un changement de coordonnées dans cet atlas respecte le poids des coordonnées.

En outre, on peut définir la parité d'une fonction coordonnée en accord avec (la parité de) son poids. Alors l'ensemble des (super)cartes locales  $(\pi^{-1}(U); x^1, \dots, x^m, \xi^1, \dots, \xi^n)$  munit l'espace total du fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$  d'une structure de supervariété que l'on note  $\Pi A$ . Les fonctions coordonnées vérifient

$$x^i x^j = x^j x^i, \quad x^i \xi^a = \xi^a x^i \quad \text{et} \quad \xi^a \xi^b = -\xi^b \xi^a$$

pour tous  $i, j = 1, \dots, m$  et  $a, b = 1, \dots, n$ .

Par construction, les fonctions coordonnées de  $\Pi A$  ont un poids et une parité compatibles, c'est-à-dire qu'une fonction de poids pair (resp. impair) est paire (resp. impaire). Ainsi,  $\Pi A$ , muni de cet atlas est une  $\mathbb{N}$ -variété (voir définition dans [50], voir aussi [62], [45]), c'est-à-dire une supervariété où l'on associe un poids aux fonctions coordonnées, tel que le poids d'une fonction est compatible avec sa parité.

**Remarque:** On démontre que la définition de  $\Pi A$  ne dépend pas des cartes locales initialement choisies sur  $A$ .

### L'espace des fonctions sur $\Pi A$

Soit une fonction  $f \in C^\infty(\Pi A)$ . On peut (localement écrire  $f$  comme une fonction des fonctions coordonnées et) développer  $f$  comme une série de puissances des  $\xi^a, a = 1, \dots, n$ . Mais comme les  $\xi^a$  anti-commutent, on a

$$\xi^a \xi^a = 0, \quad a = 1, \dots, n,$$

et cette série est en fait une somme (finie) :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = f_0(\mathbf{x}) + f_a(\mathbf{x})\xi^a + f_{a_1 a_2}(\mathbf{x})\xi^{a_1} \xi^{a_2} + \dots + f_{a_1 \dots a_k}(\mathbf{x})\xi^{a_1} \dots \xi^{a_k} \quad (1.3)$$

où  $a, a_1, \dots, a_k$  sont des indices parcourant  $\{1, \dots, n\}$  et les variables  $\mathbf{x}$  et  $\boldsymbol{\xi}$  représentent les vecteurs  $(x^1, \dots, x^m)$  et  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ . Les fonctions  $f_{a_1 a_2}, \dots, f_{a_1 \dots a_k} \in C^\infty(M)$  vérifient

$$f_{a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(l)}} = (-1)^{|\sigma|} f_{a_1 \dots a_l}$$

pour tout  $l \in \{2, \dots, k\}$ , où  $\sigma$  est une permutation de  $\{1, \dots, l\}$  de parité  $|\sigma|$ .

Ainsi, tout  $f \in C^\infty(\Pi A)$  s'écrit localement comme dans l'équation (1.3) et peut être considéré localement comme un élément de  $C^\infty(U) \otimes \bigwedge^\bullet(F^*)$ . Donc

$$C^\infty(\Pi A) = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(\bigwedge^k A^*) =: \Omega^\bullet(A).$$

### 1.1.3 Hamiltoniens sur $\Pi A$

Nous appelons *hamiltonien sur  $\Pi A$*  une fonction (à valeurs réelles) sur  $T^*(\Pi A)$ . Dans ce paragraphe nous introduisons la structure de N-variété sur  $T^*(\Pi A)$  induite par la structure de N-variété sur  $\Pi A$ , puis nous définissons le poids et le bidegré d'un hamiltonien sur  $\Pi A$ . Enfin, nous introduisons la structure symplectique canonique sur  $T^*(\Pi A)$  et le *grand crochet* qui est le crochet de Poisson canonique sur  $C^\infty(T^*(\Pi A))$ .

#### Structure de N-variété sur $T^*(\Pi A)$

À partir de la structure de supervariété sur  $\Pi A$ , on peut définir une structure de supervariété sur  $T^*(\Pi A)$ . Considérons l'atlas déjà introduit sur  $\Pi A$ , ayant pour coordonnées locales  $(x^i, \xi^a)$ . Nous allons considérer sur  $T^*(\Pi A)$  l'atlas ayant pour coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$ , où  $p_i$  et  $\theta_a$  sont les coordonnées *moment* associées aux coordonnées  $x^i$  et  $\xi^a$  respectivement.

Afin de mieux comprendre ce que sont les coordonnées "moment"  $p_i$  et  $\theta_a$ , procédons par analogie avec le cas classique (non gradué). Si  $N$  est une variété différentielle, on appelle relèvement hamiltonien de  $\Gamma(TN)$  à  $C^\infty(T^*N)$  l'application

$$\begin{aligned} h : \Gamma(TN) &\rightarrow C^\infty(T^*N) \\ v &\mapsto h(v) \end{aligned}$$

tel que, pour tout  $\alpha_x \in T_x^*N$ , on ait  $h(v)(\alpha_x) = \langle \alpha, v(x) \rangle$ . Dans notre cas on prétend définir le relèvement hamiltonien quand  $N$  est une supervariété (plus précisément  $N = \Pi A$ ). Localement, on définit le relèvement hamiltonien (par analogie avec le cas non-gradué) en posant

$$\begin{aligned} h : \Gamma(T(\Pi A)) &\rightarrow C^\infty(T^*(\Pi A)) \\ v = f^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial x^i} + g^a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^a} &\mapsto h(v) = f^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) p_i + g^a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta_a \end{aligned} \tag{1.4}$$

Afin que la définition locale de  $h$  puisse être étendue globalement, les coordonnées  $p_i$  (resp.  $\theta_a$ ) doivent se comporter, après un changement de cartes, comme les champs de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  (resp.  $\frac{\partial}{\partial \xi^a}$ ). Considérons alors un changement de coordonnées  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$  sur  $\Pi A$  défini par

$$\begin{cases} x^i = x^i(\widehat{\mathbf{x}}) & i = 1, \dots, m \\ \xi^a = T_b^a(\widehat{\mathbf{x}})\widehat{\xi}^b & a = 1, \dots, n \end{cases}$$

et inversement

$$\begin{cases} \widehat{x}^j = \widehat{x}^j(\mathbf{x}) & j = 1, \dots, m \\ \widehat{\xi}^b = \widehat{T}_a^b(\mathbf{x})\xi^a & b = 1, \dots, n, \end{cases}$$

où  $T_c^a \widehat{T}_b^c = \delta_b^a$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} &= \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widehat{x}^j} + \frac{\partial \widehat{\xi}^b}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}^b} \\ &= \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widehat{x}^j} + \frac{\partial \widehat{T}_a^b}{\partial x^i} \xi^a \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}^b} \\ &= \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \widehat{x}^j} + \frac{\partial \widehat{T}_a^b}{\partial x^i} T_c^a(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\xi}^c \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}^b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^a} &= \frac{\partial \widehat{\xi}^b}{\partial \xi^a} \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}^b} \\ &= \widehat{T}_a^b(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) \frac{\partial}{\partial \widehat{\xi}^b}. \end{aligned}$$

Ainsi, un changement de coordonnées  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \rightarrow (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$  sur  $\Pi A$  doit induire un changement de coordonnées  $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{p}, \boldsymbol{\theta}) \rightarrow (\widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}, \widehat{\mathbf{p}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$  sur  $T^*(\Pi A)$ , décrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} x^i = x^i(\widehat{\mathbf{x}}) & i = 1, \dots, m \\ \xi^a = T_b^a(\widehat{\mathbf{x}})\widehat{\xi}^b & a = 1, \dots, n \\ p_i = \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial x^i} \widehat{p}_j + \frac{\partial \widehat{T}_a^b}{\partial x^i} T_c^a(\widehat{\mathbf{x}}) \widehat{\xi}^c \widehat{\theta}_b & i = 1, \dots, m \\ \theta_a = \widehat{T}_a^b(\mathbf{x}(\widehat{\mathbf{x}})) \widehat{\theta}_b & a = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.5)$$

On attribue, sur  $T^*(\Pi A)$ , à chaque coordonnée moment  $p_i$  ou  $\theta_a$  un poids opposé au poids de la fonction coordonnée de  $\Pi A$  correspondante. Ainsi, comme

$$w(x^i) = 0 \quad \text{et} \quad w(\xi^a) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall a = 1, \dots, n,$$

on pose

$$w(p_i) = 0 \quad \text{et} \quad w(\theta_a) = -1, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall a = 1, \dots, n.$$

On vérifie facilement que ces poids sont préservés après un changement de coordonnées. En effet, les coordonnées  $p_i$  sont les seules qui ne se transforment pas en coordonnées du même type, à cause du deuxième terme apparaissant lors du changement de  $p_i$  dans (1.5). Néanmoins ce terme supplémentaire a un poids égal à 0 (car  $w(\xi^c) = 1$  et  $w(\hat{\theta}_b) = -1$ ) et le poids de  $p_i$  (égal à 0) est ainsi maintenu.

En conclusion, les cartes locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$ , telles que les changements de cartes vérifient les équations (1.5), munies des poids définis ci-dessus, confèrent à  $T^*(\Pi A)$  une structure de N-variété.

### Degré total sur $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$

Dans ce paragraphe nous définissons, à partir de la structure de N-variété sur  $\Pi A$ , le degré total d'une fonction polynomiale (en les variables de la fibre) sur  $T^*(\Pi A)$ . Nous vérifions par la suite que le degré total peut aussi s'obtenir à partir de la structure de double fibré vectoriel de  $T^*(\Pi A)$ .

Considérons, sur  $T^*(\Pi A)$ , le champ de vecteurs de Euler :

$$\begin{aligned} \epsilon_w &= \sum_{i=1}^m w(x^i) x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^n w(\xi^a) \xi^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} + \sum_{i=1}^m w(p_i) p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{a=1}^n w(\theta_a) \theta_a \frac{\partial}{\partial \theta_a} \\ &= \sum_{a=1}^n \xi^a \frac{\partial}{\partial \xi^a} - \sum_{a=1}^n \theta_a \frac{\partial}{\partial \theta_a}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'action de  $\epsilon_w$  sur une fonction coordonnée d'une carte locale  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  est égale à la multiplication de cette fonction coordonnée par son poids. En particulier, l'action de  $\epsilon_w$  ne dépend pas du choix des coordonnées sur  $T^*(\Pi A)$ . Le champ de vecteurs de Euler nous permet de définir le poids d'une fonction  $f \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  : on dit que  $f$  est une *fonction homogène de poids  $k$*  si  $\epsilon_w \cdot f = kf$ .

On peut aussi définir, sur  $T^*(\Pi A)$  un "degré en fibre". Si on considère une carte locale  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  sur  $T^*(\Pi A)$ , on construit le degré en fibre  $\kappa$  en posant :

$$\kappa(x^i) = \kappa(\xi^a) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa(p_i) = \kappa(\theta_a) = 1, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall a = 1, \dots, n.$$

On remarque que le degré en fibre  $\kappa$  est préservé après un éventuel changement de coordonnées (voir les équations 1.5).

Considérons le champ de vecteur  $\epsilon_\kappa$ , similaire à  $\epsilon_w$ ,

$$\epsilon_\kappa = \sum_{i=1}^m p_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{a=1}^n \theta_a \frac{\partial}{\partial \theta_a}.$$

On dit alors qu'une fonction  $f \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  est *homogène de degré en fibre  $k$* , si  $\epsilon_\kappa \cdot f = kf$ . En fait, le degré en fibre d'une fonction  $f \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  est (s'il existe) son degré polynômial en les coordonnées  $(p_i, \theta_a)$ .

Dans le tableau suivant nous récapitulons les différents degrés introduits sur (une carte locale de)  $T^*(\Pi A)$  et nous introduisons aussi le degré total  $t = w + 2\kappa$ .

	$x^i$	$\xi^a$	$p_i$	$\theta_a$
$w$	0	1	0	-1
$\kappa$	0	0	1	1
$t = w + 2\kappa$	0	1	2	1

Comme les degrés  $\kappa$  et  $w$  sont préservés par un changement de coordonnées, le degré total  $t = w + 2\kappa$  est aussi préservé. On remarque par ailleurs que le degré total  $t$  (qui a la même parité que  $w$ ) est compatible avec la parité induite par la structure de N-variété sur  $\Pi A$ . Au contraire, le degré en fibre  $\kappa$  ne respecte pas cette parité.

De même que pour les degrés précédents, on définit le champ de vecteurs  $\epsilon_t = \epsilon_w + 2\epsilon_\kappa$  sur  $T^*(\Pi A)$  et on dit qu'une fonction  $f \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  est *homogène de degré total  $k$*  si  $\epsilon_t \cdot f = kf$ . On notera  $\text{Pol}_k(T^*(\Pi A))$  l'ensemble de ces fonctions et on appellera *algèbre des fonctions polynomiales sur  $T^*(\Pi A)$*  l'algèbre graduée

$$\text{Pol}(T^*(\Pi A)) = \bigoplus_{k \geq 0} \text{Pol}_k(T^*(\Pi A)).$$

Pour  $k = 0$  et  $k = 1$ , on a

$$\text{Pol}_0(T^*(\Pi A)) = C^\infty(M) \quad \text{et} \quad \text{Pol}_1(T^*(\Pi A)) = \Gamma(A \oplus A^*).$$

Dans la suite de ce paragraphe, nous allons définir le bidegré d'une fonction  $f \in \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  et nous vérifierons que le degré total, défini ci-dessus, peut s'obtenir à partir du bidegré.

L'application de Legendre (voir [37, 62, 44]) est un isomorphisme (et même un symplectomorphisme) entre  $T^*(\Pi A)$  et  $T^*(\Pi A^*)$  qui, en termes de coordonnées locales, s'écrit

$$\begin{aligned} T^*(\Pi A) &\xrightarrow{\cong} T^*(\Pi A^*) \\ (x^i, \xi^a, p_i, \theta_a) &\longmapsto (x^i, \theta_a, p_i, \xi^a) \end{aligned}$$

Pour  $A = TM$  cet isomorphisme a été découvert par Tulczyjew [54, 55, 56] et permet de donner une formulation géométrique aux mécaniques Lagrangienne et Hamiltonienne.

Ainsi,  $T^*(\Pi A)$  peut être considéré deux fois comme un fibré vectoriel, d'une part sur  $\Pi A$  et d'autre part sur  $\Pi A^*$  :

$$\begin{array}{ccccc} T^*(\Pi A) & \xrightarrow{\cong} & T^*(\Pi A^*) & \longrightarrow & \Pi A^* \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x^i, \xi^a, p_i, \theta_a) & \longmapsto & (x^i, \theta_a, p_i, \xi^a) & \longmapsto & (x^i, \theta_a) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x^i, \xi^a) & \longrightarrow & & \longrightarrow & x^i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Pi A & \longrightarrow & & \longrightarrow & M \end{array}$$

**Remarque:** En fait, sur  $T^*(\Pi A)$  on a une structure de double fibré vectoriel (voir [35]).

On peut alors attribuer deux degrés (en fibre) à une fonction polynomiale  $f \in \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  :

- soit on considère le fibré  $T^*(\Pi A) \longrightarrow \Pi A$  et on prend en compte le degré en fibre  $\kappa(f)$ , défini précédemment ;
- soit on considère le fibré  $T^*(\Pi A) \longrightarrow \Pi A^*$  et on prend en compte le degré en fibre  $\kappa_*(f)$ , défini de façon analogue à  $\kappa(f)$ .

On remarque alors que le degré total de  $f$ , défini précédemment, coïncide avec la somme  $\kappa(f) + \kappa_*(f)$ . Ainsi, pour les fonctions coordonnées, par exemple, on a

	$x^i$	$\xi^a$	$p_i$	$\theta_a$
$\kappa$	0	0	1	1
$\kappa_*$	0	1	1	0
$(\kappa, \kappa_*)$	(0, 0)	(0, 1)	(1, 1)	(1, 0)
$\kappa + \kappa_*$	0	1	2	1

On appellera *bidegré de  $f$*  la paire  $(\kappa(f), \kappa_*(f))$ . Dans  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ , on note  $\text{Pol}_{(a,b)}(T^*(\Pi A))$ , l'ensemble des fonctions de bidegré  $(a, b)$ . Alors, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\text{Pol}_k(T^*(\Pi A)) = \bigoplus_{a+b=k} \text{Pol}_{(a,b)}(T^*(\Pi A)).$$

Ainsi, par exemple,

$$\begin{cases} \text{Pol}_{(0,1)}(T^*(\Pi A)) = \Gamma(A^*) \\ \text{Pol}_{(1,0)}(T^*(\Pi A)) = \Gamma(A) \\ \text{Pol}_1(T^*(\Pi A)) = \Gamma(A \oplus A^*). \end{cases}$$

### Structure symplectique sur $T^*(\Pi A)$ et grand crochet

Tout comme dans le cas non-gradué, le fibré cotangent  $T^*(\Pi A)$  est une supervariété symplectique munie de la forme symplectique canonique  $\Omega$  (voir par exemple [45, 57]). Dans un système de coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$ , la forme symplectique canonique  $\Omega$  s'écrit sous la forme

$$\Omega = dp_i \wedge dx^i + d\theta_a \wedge d\xi^a.$$

L'espace des fonctions  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  est muni d'un crochet de Poisson associé à  $\Omega$ . En termes de coordonnées locales, le crochet de Poisson s'écrit

$$\{\mathfrak{f}, \mathfrak{g}\} = \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial x^i} - (-1)^{|\mathfrak{f}||\mathfrak{g}|} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial x^i} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial p_i} + \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \theta_a} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi^a} - (-1)^{|\mathfrak{f}||\mathfrak{g}|} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi^a} \frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \theta_a},$$

pour toutes les fonctions  $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in C^\infty(T^*(\Pi A))$ , de parité  $|\mathfrak{f}|$  et  $|\mathfrak{g}|$ .

On appellera parfois ce crochet de Poisson sur  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  le *grand crochet* parce que quand  $M$  est un point on retrouve la notion de grand crochet utilisée par Kosmann-Schwarzbach dans [21].

L'algèbre des fonctions  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  munie du grand crochet est donc une algèbre de Poisson graduée, c'est-à-dire que les conditions suivantes sont vérifiées,

1. l'anti-commutativité (graduée)

$$\{f, g\} = -(-1)^{|f||g|} \{g, f\};$$

2. l'identité de Jacobi (graduée)

$$\{f, \{g, h\}\} = \{\{f, g\}, h\} + (-1)^{|f||g|} \{g, \{f, h\}\};$$

3. la règle de Leibniz (graduée)

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{|f||g|} g\{f, h\},$$

pour toutes les fonctions  $f, g, h \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  et où  $|f|$  (resp.  $|g|$ ) est la parité de  $f$  (resp.  $g$ ).

En termes de coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  sur  $T^*(\Pi A)$  on peut définir le grand crochet en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x^i, \xi^a\} = \{x^i, \theta_a\} = \{p_i, \xi^a\} = \{p_i, \theta_a\} = 0 \\ \{x^i, x^j\} = \{\xi^a, \xi^b\} = \{p_i, p_j\} = \{\theta_a, \theta_b\} = 0 \\ \{p_i, x^j\} = \delta_i^j \\ \{\theta_a, \xi^b\} = \delta_a^b \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} i, j \in \{1, \dots, m\} \\ a, b \in \{1, \dots, n\} \end{array}$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

On vérifie ainsi que le grand crochet a un bidegré  $(-1, -1)$  et donc un degré total  $-2$ , c'est-à-dire que

$$\{\text{Pol}_s(T^*(\Pi A)), \text{Pol}_t(T^*(\Pi A))\} \subseteq \text{Pol}_{s+t-2}(T^*(\Pi A)).$$

En particulier, on conclut aussi le résultat suivant

**PROPOSITION 1.1.3** *L'algèbre  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  est une sous-algèbre de l'algèbre de Poisson  $(C^\infty(T^*(\Pi A)), \{\cdot, \cdot\})$ .*

#### 1.1.4 Algébroïdes de Lie et hamiltoniens sur $\Pi A$

Rappelons que nous appelons hamiltoniens sur  $\Pi A$  les fonctions sur  $T^*(\Pi A)$ . Dans cette section, nous allons voir que l'espace des fonctions  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  muni du grand crochet est un cadre approprié pour étudier la géométrie sur le fibré vectoriel  $A$ . Tout d'abord, rappelons de la section 1.1.2 que

$$\Omega^\bullet(A) := \Gamma(\wedge^\bullet A^*) = C^\infty(\Pi A).$$

Or les fonctions sur  $\Pi A$  sont aussi des fonctions (constantes sur les fibres) sur  $T^*(\Pi A)$ . Donc les  $A$ -formes (c'est-à-dire les éléments de  $\Omega^\bullet(A)$ ) sont des hamiltoniens sur  $\Pi A$ ,

$$\Omega^\bullet(A) \subseteq C^\infty(T^*(\Pi A)).$$

De même pour les  $A$ -multivecteurs :

$$\mathfrak{X}^\bullet(A) := \Gamma(\wedge^\bullet A) = C^\infty(\Pi A^*) \subseteq C^\infty(T^*(\Pi A^*))$$

et l'application de Legendre entre  $T^*(\Pi A)$  et  $T^*(\Pi A^*)$  induit une application entre  $C^\infty(T^*(\Pi A^*))$  et  $C^\infty(T^*(\Pi A))$ , qui respecte la parité. Donc les  $A$ -multivecteurs sont aussi des hamiltoniens sur  $\Pi A$ ,

$$\mathfrak{X}^\bullet(A) \subseteq C^\infty(T^*(\Pi A)).$$

Dans la suite de cette section nous allons voir que, en plus des  $A$ -multivecteurs et des  $A$ -formes, les structures d'algèbroïde de Lie sur  $A$  sont des éléments particuliers de l'algèbre des fonctions  $C^\infty(T^*(\Pi A))$ . Considérons alors sur le fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$  une structure d'algèbroïde de Lie définie par sa différentielle extérieure  $d$ . Alors  $d$  est une dérivation de degré 1 de  $(\Omega^\bullet(A), \wedge)$  telle que  $d^2 = 0$ . Mais, comme  $\Omega^\bullet(A) = C^\infty(\Pi A)$ ,  $d$  est une dérivation de  $C^\infty(\Pi A)$ , autrement dit  $d$  est un champ de vecteurs sur  $\Pi A$ , c'est-à-dire que  $d \in \Gamma(T(\Pi A))$ . On considère alors

$$\mu = h(d) \in C^\infty(T^*(\Pi A))$$

où  $h : \Gamma(T(\Pi A)) \rightarrow C^\infty(T^*(\Pi A))$  est le relèvement hamiltonien défini par (1.4).

Afin de mieux comprendre ce qu'est la (super)fonction  $\mu$ , considérons des coordonnées locales  $(x^i, \xi^a)$  sur  $\Pi A$  et les coordonnées locales associées  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  sur  $T^*(\Pi A)$ . Ainsi, un champ de vecteurs  $d$  sur  $\Pi A$  s'écrit localement :

$$d = f^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial x^i} + g^a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial \xi^a},$$

et on a

$$\mu = h(d) = f^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) p_i + g^a(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \theta_a,$$

où  $f^i$  et  $g^a$  appartiennent à  $C^\infty(\Pi A)$  et s'écrivent localement comme en (1.3).

Par ailleurs, on démontre (voir Lemme 3.3.1 dans [44]) que

$$d(\alpha) = \{\mu, \alpha\} \tag{1.6}$$

pour tout  $\alpha \in \Omega^\bullet(A)$ , où les éléments de  $\Omega^\bullet(A) = C^\infty(\Pi A)$  sont considérés comme des fonctions sur  $T^*(\Pi A)$ , constantes sur les fibres. Comme  $d$  est une dérivation de degré 1 de  $(\Omega^\bullet(A), \wedge)$ , si on considère  $d$  comme agissant sur  $\Omega^\bullet(A) \subseteq \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  alors  $d$  est de bidegré  $(0, 1)$ . On conclut donc, de (1.6) et du fait que le grand crochet soit de bidegré  $(-1, -1)$  que  $\mu$  doit être de bidegré

$$(0, 1) - (-1, -1) = (1, 2).$$

Ainsi, l'hamiltonien  $\mu$  doit s'écrire localement de la forme :

$$\mu = f_a^i(\mathbf{x}) \xi^a p_i + f_{bc}^d(\mathbf{x}) \xi^b \xi^c \theta_d,$$

où  $f_a^i$  et  $f_{bc}^d$  appartiennent à  $C^\infty(M)$ .

De plus, à partir de (1.6), on démontre<sup>1</sup> que

$$\begin{cases} \rho(X) \cdot f = \{\{X, \mu\}, f\}, \\ [X, Y] = \{\{X, \mu\}, Y\}, \end{cases} \quad (1.7)$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $X, Y \in \Gamma(A)$  considérés comme des éléments de  $C^\infty(T^*(\Pi A))$ .

On conclut ainsi que

$$\mu = A_a^i(x) p_i \xi^a - \frac{1}{2} C_{ab}^c(x) \xi^a \xi^b \theta_c, \quad (1.8)$$

où les fonctions  $A_a^i, C_{ab}^c \in C^\infty(M)$  définissent (ou sont définies par) la structure d'algébroïde de Lie  $(\rho, [\cdot, \cdot])$  :

$$\begin{cases} \rho(e_a) = A_a^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ [e_a, e_b] = C_{ab}^c(x) e_c \end{cases}$$

où  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$  et  $(e_a)_{a=1, \dots, n}$  est une base locale de  $\Gamma(A)$ .

Enfin, pour conclure cette section, on peut à partir de l'identification  $d = \{\mu, \cdot\}$ , réécrire le théorème 1.1.2 en termes d'hamiltoniens sur  $\Pi A$  et du grand crochet. On obtient ainsi ce qui pourrait être une définition alternative d'un algébroïde de Lie.

**PROPOSITION 1.1.4** ([59, 44]) *Les structures d'algébroïde de Lie  $(\rho, [\cdot, \cdot])$  sur  $A \xrightarrow{\pi} M$  sont en correspondance biunivoque, par le biais des équations (1.7) ou (1.8), avec les hamiltoniens  $\mu \in \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  de bidegré  $(1, 2)$  tels que  $\{\mu, \mu\} = 0$ .*

### 1.1.5 Bi, quasi et Courant en approche supergéométrique

Dans ce paragraphe nous allons introduire des structures plus générales que les algébroïdes de Lie telles que les bigébroïdes de Lie, les quasi-bigébroïdes de Lie et les algébroïdes de Courant. Nous montrerons que  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{\cdot, \cdot\})$  est le cadre adéquat pour étudier la géométrie de ces structures. Les résultats de ce paragraphe sont dus pour la plupart à Roytenberg [44, 46] et à Kosmann-Schwarzbach [22, 26].

D'abord, nous remarquons que le cadre fourni par  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{\cdot, \cdot\})$  permet aussi d'écrire des structures d'algébroïde de Lie sur le fibré dual  $A^* \rightarrow M$ . En effet, en considérant le dual de ce que l'on a fait dans les paragraphes précédents, on peut affirmer qu'un algébroïde de Lie  $(A^*, \rho', [\cdot, \cdot]')$  correspond à un hamiltonien  $\gamma \in \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  de bidegré  $(2, 1)$  tel que  $\{\gamma, \gamma\} = 0$ . L'ancre, le crochet et la différentielle extérieure s'écrivent

$$\begin{cases} \rho'(\alpha) \cdot f = \{\{\alpha, \gamma\}, f\} \\ [\alpha, \beta]' = \{\{\alpha, \gamma\}, \beta\} \\ d'(\alpha) = \{\gamma, \alpha\} \end{cases}$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

Donc, parmi les éléments de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  :

---

1. Pour démontrer ces formules on utilise (1.2) et un peu de calcul tensoriel en termes du grand crochet que l'on étudiera en détail dans la suite de ce texte (voir la proposition 1.2.2).

- les structures d’algèbroïde de Lie sur  $A$  sont les hamiltoniens  $\mu$  de bidegré  $(1, 2)$  qui vérifient  $\{\mu, \mu\} = 0$  ;
- les structures d’algèbroïde de Lie sur  $A^*$  sont les hamiltoniens  $\gamma$  de bidegré  $(2, 1)$  qui vérifient  $\{\gamma, \gamma\} = 0$ .

### Bigébroïdes de Lie

Introduisons la définition suivante.

**DÉFINITION 1.1.5** ([37, 22]) *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  et  $(A^*, \rho', [\cdot, \cdot]')$  deux algèbroïdes de Lie sur le fibré vectoriel  $A \rightarrow M$  et son fibré dual  $A^* \rightarrow M$ . La paire  $((A, \rho, [\cdot, \cdot]), (A^*, \rho', [\cdot, \cdot]'))$  forme un bigébroïde de Lie si*

$$d([\alpha, \beta]') = [d\alpha, \beta]' + [\alpha, d\beta]'$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$  et où  $d$  est la différentielle extérieure induite par l’algèbroïde de Lie  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$ .

Le bigébroïde de Lie  $((A, \rho, [\cdot, \cdot]), (A^*, \rho', [\cdot, \cdot]'))$  sera souvent (abusivement) noté  $(A, A^*)$ , quand il n’y aura pas de doute possible sur les structures considérées.

La proposition suivante caractérise les bigébroïdes de Lie en termes d’éléments de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ .

**PROPOSITION 1.1.6** ([44]) *Considérons deux structures d’algèbroïde de Lie duales  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$ , correspondant à  $\mu \in \text{Pol}_{(1,2)}(T^*(\Pi A))$ , et  $(A^*, \rho', [\cdot, \cdot]')$ , correspondant à  $\gamma \in \text{Pol}_{(2,1)}(T^*(\Pi A))$ . La paire  $(A, A^*)$  est un bigébroïde de Lie si et seulement si  $\{\mu, \gamma\} = 0$ .*

*Démonstration.* En termes du grand crochet, la condition

$$d([\alpha, \beta]') = [d\alpha, \beta]' + [\alpha, d\beta]'$$

s’écrit

$$\{\mu, \{\{\alpha, \gamma\}, \beta\}\} = \{\{\{\mu, \alpha\}, \gamma\}, \beta\} + \{\{\alpha, \gamma\}, \{\mu, \beta\}\}, \quad (1.9)$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ .

D’après l’identité de Jacobi, on peut écrire

$$\{\mu, \{\{\alpha, \gamma\}, \beta\}\} = \{\{\mu, \{\alpha, \gamma\}\}, \beta\} + \{\{\alpha, \gamma\}, \{\mu, \beta\}\}.$$

Si on applique de nouveau l’identité de Jacobi au premier terme du membre de gauche de l’égalité précédente, celle-ci devient

$$\{\mu, \{\{\alpha, \gamma\}, \beta\}\} = \{\{\{\mu, \alpha\}, \gamma\}, \beta\} + \{\{\alpha, \{\mu, \gamma\}\}, \beta\} + \{\{\alpha, \gamma\}, \{\mu, \beta\}\}.$$

En comparant la dernière équation obtenue avec l’équation (1.9), on se rend compte que l’équation (1.9) est satisfaite si et seulement si l’égalité

$$\{\{\alpha, \{\mu, \gamma\}\}, \beta\} = 0$$

est satisfaite pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ . Ainsi, utilisant le fait que  $\{.,.\}$  est non dégénéré<sup>2</sup>, on conclut que la condition (1.9) est satisfaite pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$  si et seulement si

$$\{\mu, \gamma\} = 0. \quad \square$$

Pour une paire d'hamiltoniens  $(\mu, \gamma) \in \text{Pol}_{(1,2)}(T^*(\Pi A)) \times \text{Pol}_{(2,1)}(T^*(\Pi A))$ , on peut exprimer les trois conditions nécessaires et suffisantes pour que  $((A, \mu), (A^*, \gamma))$  soit un bigébroïde de Lie

$$\begin{cases} \{\mu, \mu\} = 0 \\ \{\gamma, \gamma\} = 0 \\ \{\mu, \gamma\} = 0 \end{cases}$$

en une seule condition

$$\{\mu + \gamma, \mu + \gamma\} = 0.$$

On prouve ainsi le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.7** ([44]) *Il existe une correspondance biunivoque entre les structures de bigébroïdes de Lie sur  $(A, A^*)$  et les paires d'hamiltoniens  $(\mu, \gamma) \in \text{Pol}_{(1,2)}(T^*(\Pi A)) \times \text{Pol}_{(2,1)}(T^*(\Pi A))$  satisfaisant*

$$\{\mu + \gamma, \mu + \gamma\} = 0.$$

La caractérisation des bigébroïdes de Lie donnée par le théorème précédent rend trivial le corollaire suivant, où on affirme que la notion de bigébroïde de Lie est autoduale.

**COROLLAIRE 1.1.8**  *$(A, A^*)$  est un bigébroïde de Lie si et seulement si  $(A^*, A)$  est un bigébroïde de Lie.*

### Proto-bigébroïdes de Lie et quasi-bigébroïdes de Lie

On remarque que toute paire  $(\mu, \gamma)$  d'hamiltoniens considérée dans le paragraphe précédent définit un hamiltonien

$$\mu + \gamma \in \text{Pol}_3(T^*(\Pi A)).$$

Mais les éléments de  $\text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  ne sont pas tous de la forme  $\mu + \gamma$ . Un élément général de  $\text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  est du type

$$S = \mu + \gamma + \phi + \psi$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mu &\in \text{Pol}_{(1,2)}(T^*(\Pi A)) \\ \gamma &\in \text{Pol}_{(2,1)}(T^*(\Pi A)) \\ \phi &\in \text{Pol}_{(3,0)}(T^*(\Pi A)) = \Gamma(\bigwedge^3 A) \\ \psi &\in \text{Pol}_{(0,3)}(T^*(\Pi A)) = \Gamma(\bigwedge^3 A^*) \end{aligned}$$

Par analogie avec la caractérisation des algébroïdes de Lie et bigébroïdes de Lie en termes du grand crochet, on introduit la définition suivante

---

2. Pour une justification complète de ce passage voir le lemme 3.1.5

**DÉFINITION 1.1.9** *Un hamiltonien  $S = \mu + \gamma + \phi + \psi \in \text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  est une structure de proto-bigébroïde de Lie sur  $(A, A^*)$  si*

$$\{S, S\} = 0.$$

Si on développe la condition  $\{S, S\} = 0$ , en fonction des composantes  $\mu, \gamma, \phi$  et  $\psi$ , on obtient, en tenant compte du bidegré de chaque terme, le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \{\mu, \mu\} + \{\gamma, \psi\} = 0 \\ \{\mu, \gamma\} + \{\phi, \psi\} = 0 \\ \frac{1}{2} \{\gamma, \gamma\} + \{\mu, \phi\} = 0 \\ \{\mu, \psi\} = 0 \\ \{\gamma, \phi\} = 0. \end{cases}$$

Chacune de ces conditions traduit une "déformation" par  $\phi$  et/ou  $\psi$  du crochet et de l'ancre de  $A$  et  $A^*$  (définis par  $\mu$  et  $\gamma$ ). Afin de simplifier l'étude de ces conditions, considérons le cas particulier où un des termes tensoriels  $\phi$  ou  $\psi$  est nul.

**DÉFINITION 1.1.10** *Une structure  $S = \mu + \gamma + \phi + \psi$  de proto-bigébroïde de Lie sur  $(A, A^*)$  est une structure de quasi-bigébroïde de Lie (resp. bigébroïde de quasi-Lie) si  $\psi = 0$  (resp.  $\phi = 0$ ).*

Considérons  $S = \mu + \gamma + \phi$  une structure de quasi-bigébroïde de Lie sur  $(A, A^*)$ , c'est-à-dire que les équations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \{\mu, \mu\} = 0 \\ \{\mu, \gamma\} = 0 \\ \frac{1}{2} \{\gamma, \gamma\} + \{\mu, \phi\} = 0 \\ \{\gamma, \phi\} = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces conditions se traduisent, en termes des structures définies sur  $A$  et  $A^*$  par  $\mu$  et  $\gamma$ , de la façon suivante :

- $\mu$  définit une structure d'algébroïde de Lie sur  $A$  ;
- $d_\gamma$  est une dérivation de  $[\cdot, \cdot]_\mu$  ;
- $(d_\gamma)^2 = -[\phi, \cdot]_\mu$  ;
- $d_\gamma \phi = 0$ .

Ces conditions constituent la définition classique d'un quasi-bigébroïde de Lie [44].

### Algébroïdes de Courant

**DÉFINITION 1.1.11** *Un algébroïde de Courant est un quadruplet  $(E, \rho, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot])$ , où*

- $E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel ;
- $\rho : E \rightarrow TM$  est un morphisme de fibré vectoriels appelé l'ancre ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un champ différentiable de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur les fibres de  $E$  ;

–  $[\cdot, \cdot]$  est une application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $\Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ,  
tel que les conditions suivantes sont satisfaites

1.  $\rho(\mathcal{X}) \cdot \langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle = \langle [\mathcal{X}, \mathcal{U}], \mathcal{V} \rangle + \langle \mathcal{U}, [\mathcal{X}, \mathcal{V}] \rangle$  ;
2.  $\langle \mathcal{U}, [\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + [\mathcal{Y}, \mathcal{X}] \rangle = \rho(\mathcal{U}) \cdot \langle \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle$  ;
3.  $[\mathcal{X}, [\mathcal{Y}, \mathcal{Z}]] = [[\mathcal{X}, \mathcal{Y}], \mathcal{Z}] + [\mathcal{Y}, [\mathcal{X}, \mathcal{Z}]]$ ,

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \Gamma(E)$ .

La définition originale d'algèbroïde de Courant (voir [44] ou [34] pour la version anti-symétrique) contenait cinq axiomes. En plus des trois axiomes présents dans la définition ci-dessus, les axiomes suivants faisaient partie de la définition originale :

4.  $\rho([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]) = [\rho(\mathcal{X}), \rho(\mathcal{Y})]_{TM}$  ;
5.  $[\mathcal{X}, f\mathcal{Y}] = f[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + (\rho(\mathcal{X}) \cdot f)\mathcal{Y}$ .

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(E)$  et  $f \in C^\infty(M)$ . Mais Uchino [58] a montré que ces deux derniers axiomes se déduisent des trois premiers.

Toutes les structures que l'on a introduites sur  $A$ ,  $A^*$  ou  $(A, A^*)$  induisent des structures d'algèbroïdes de Courant sur  $A \oplus A^*$ . On a en effet le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.12** ([34, 44]) *Une structure de proto-bigébroïde de Lie  $S$  sur  $(A, A^*)$  définit un algèbroïde de Courant  $(A \oplus A^*, \rho_S, \langle \cdot, \cdot \rangle, [\cdot, \cdot]_S)$  par*

- $\rho_S(X + \alpha) \cdot f = \{\{X + \alpha, S\}, f\}$
- $\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \alpha(X) + \beta(Y)$
- $[X + \alpha, Y + \beta]_S = \{\{X + \alpha, S\}, Y + \beta\}$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma(A)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

Dans [45], Roytenberg montre que la réciproque du théorème précédent est vraie et qu'il existe une correspondance biunivoque entre les hamiltoniens  $S \in \text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  tels que  $\{S, S\} = 0$  et les structures d'algèbroïde de Courant sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Dans le chapitre 2 nous explicitons cette correspondance et la généralisons aux multi-crochets de quasi-Courant [18].

## 1.2 Tenseurs et crochets sur $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{\cdot, \cdot\})$

Dans cette section, nous allons développer l'idée que la plupart des opérations de la géométrie différentielle sur un fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$  "vivent" dans l'espace  $\text{Pol}(T^*(\Pi A)) \subset C^\infty(T^*(\Pi A))$ . On sait que les tenseurs (mixtes) sont des éléments de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . Mais nous verrons aussi que plusieurs opérations et crochets entre tenseurs s'expriment dans le cadre de  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{\cdot, \cdot\})$ .

### 1.2.1 Applications multilinéaires et tenseurs mixtes en grand crochet

Soient  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  deux fibrés vectoriels sur  $M$ . Considérons une application

$$T : \bigwedge^r \mathfrak{F} \longrightarrow \bigwedge^s \mathfrak{G}.$$

L'application  $T$  induit une application  $C^\infty(M)$ -multilinéaire sur les sections, que l'on note aussi  $T$  :

$$T : \Gamma(\bigwedge^r \mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(\bigwedge^s \mathfrak{G}).$$

Le premier objectif de ce paragraphe est d'associer à l'application  $T$  un tenseur appartenant à  $\Gamma(\bigwedge^{r+s}(\mathfrak{F}^* \oplus \mathfrak{G}))$ . Le choix de ce tenseur n'est pas unique et a des implications en termes de signes dans beaucoup d'équations dans la suite de ce texte.

Considérons  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  et  $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$  des bases locales de sections de  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$ , respectivement. On définit, pour tous les indices  $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, p\}$  et  $b_1, \dots, b_s \in \{1, \dots, q\}$ , les fonctions  $T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \in C^\infty(M)$  par

$$T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} = \langle T(\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_r}), \zeta^{b_1} \wedge \dots \wedge \zeta^{b_s} \rangle, \quad (1.10)$$

où  $(\zeta^1, \dots, \zeta^q)$  est la base locale de sections de  $\mathfrak{G}^*$ , duale de  $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$ . On peut aussi définir les fonctions  $T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s}$  de façon équivalente en posant

$$T(\phi_{a_1}, \dots, \phi_{a_r})(x) = \frac{1}{s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s}(x) \zeta_{b_1} \wedge \dots \wedge \zeta_{b_s}.$$

Le tenseur  $\widehat{T} \in \Gamma(\bigwedge^r \mathfrak{F}^* \otimes \bigwedge^s \mathfrak{G})$  est alors défini localement par

$$\widehat{T} = \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s}(x) \phi^{a_1} \wedge \dots \wedge \phi^{a_r} \otimes \zeta_{b_1} \wedge \dots \wedge \zeta_{b_s}, \quad (1.11)$$

où  $(\phi^1, \dots, \phi^p)$  est la base locale de sections de  $\mathfrak{F}^*$ , duale de  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$ .

Enfin, la dernière étape de la construction du tenseur associé à l'application  $T$  vient de la proposition suivante.

**PROPOSITION 1.2.1** *Soient  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  deux fibrés vectoriels sur  $M$ . L'application*

$$\begin{aligned} \Psi : \bigoplus_{r+s=q} (\bigwedge^r \mathfrak{F} \otimes \bigwedge^s \mathfrak{G}) &\xrightarrow{\cong} \bigwedge^q(\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}) \\ P \otimes Q &\longmapsto P \wedge Q \end{aligned}$$

définit un isomorphisme de fibrés vectoriels.

Ainsi, l'élément de  $\Gamma(\bigwedge^{r+s}(\mathfrak{F}^* \oplus \mathfrak{G}))$  que l'on associera à une application  $T : \bigwedge^r \mathfrak{F} \longrightarrow \bigwedge^s \mathfrak{G}$  est le suivant

$$\Psi(\widehat{T}) = \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \phi^{a_1} \wedge \dots \wedge \phi^{a_r} \wedge \zeta_{b_1} \wedge \dots \wedge \zeta_{b_s}.$$

Dans la suite de ce texte, la construction précédente est appliquée au cas où  $A \xrightarrow{\pi} M$  est un fibré vectoriel et  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} = A$ . Ainsi, pour une application

$$T : \bigwedge^r A \longrightarrow \bigwedge^s A,$$

on considère, sur  $\Gamma(\wedge^{r+s}(A^* \oplus A))$ ,

$$\Psi(\widehat{T}) = \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s}(x) \xi^{a_1} \wedge \dots \wedge \xi^{a_r} \wedge \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s},$$

où les fonctions  $T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \in C^\infty(M)$  sont définies comme en (1.10).

La proposition suivante montre comment l'évaluation de  $T$  sur une section  $X_1 \wedge \dots \wedge X_r \in \Gamma(\wedge^r A)$  s'effectue dans le cadre de  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ .

**PROPOSITION 1.2.2** *Soit une application*

$$T : \wedge^r A \longrightarrow \wedge^s A.$$

Pour toutes les sections  $X_1, \dots, X_r \in \Gamma(A)$ , on a

$$T(X_1, \dots, X_r) = \left\{ X_r, \dots, \left\{ X_2, \left\{ X_1, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\}.$$

*Démonstration.* Il suffit de prouver l'égalité cherchée pour des  $r$ -uplets  $(X_1, \dots, X_r)$  de la forme  $(\theta_{c_1}, \dots, \theta_{c_r})$ , où  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  forme une base locale de sections de  $A$ . Ainsi, calculons

$$\begin{aligned} & \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\} \\ &= \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \xi^{a_1} \wedge \dots \wedge \xi^{a_r} \wedge \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s} \right\} \right\} \dots \right\}. \end{aligned}$$

En appliquant de façon répétitive la règle de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} & \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \xi^{a_1} \wedge \dots \wedge \xi^{a_r} \right\} \right\} \dots \right\} \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s}. \end{aligned}$$

On peut calculer cette itération de grands crochets en appliquant de nouveau de façon répétitive la règle de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\} \\ &= \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \left( \sum_{\sigma \in S_r} \text{sign}(\sigma) \xi^{a_1}(\theta_{c_{\sigma(1)}}) \dots \xi^{a_r}(\theta_{c_{\sigma(r)}}) \right) \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s}. \end{aligned}$$

Mais, comme  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  sont deux bases duales l'une de l'autre,  $\xi^{a_i}(\theta_{c_{\sigma(i)}}) = \delta_{c_{\sigma(i)}}^{a_i}$  et ainsi

$$\left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\} = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_r} \text{sign}(\sigma) T_{c_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(r)}}^{b_1 \dots b_s} \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s}.$$

Finalement, l'antisymétrie de  $T$  implique  $T_{c_{\sigma(1)} \dots c_{\sigma(r)}}^{b_1 \dots b_s} = \text{sign}(\sigma) T_{c_1 \dots c_r}^{b_1 \dots b_s}$ , et on obtient

$$\begin{aligned} \left\{ \theta_{c_r}, \dots, \left\{ \theta_{c_2}, \left\{ \theta_{c_1}, \Psi(\widehat{T}) \right\} \right\} \dots \right\} &= \frac{1}{s!} T_{c_1 \dots c_r}^{b_1 \dots b_s} \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s} \\ &= T(\theta_{c_1}, \dots, \theta_{c_r}). \end{aligned} \quad \square$$

La même construction peut être faite pour l'application transposée  ${}^t T : \Lambda^s A^* \longrightarrow \Lambda^r A^*$ . On obtient  $\Psi(\widehat{{}^t T})$  qui appartient aussi à  $\Gamma(\Lambda^{r+s}(A^* \oplus A))$ .

La proposition suivante exprime le lien entre  $\Psi(\widehat{{}^t T})$  et  $\Psi(\widehat{T})$ .

**PROPOSITION 1.2.3** *Soit  $T : \Lambda^r A \longrightarrow \Lambda^s A$ . On a l'égalité suivante*

$$\Psi(\widehat{{}^t T}) = (-1)^{rs} \Psi(\widehat{T}).$$

*Démonstration.* Pour tous  $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, p\}$  et  $b_1, \dots, b_s \in \{1, \dots, q\}$ , les fonctions  ${}^t T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \in C^\infty(M)$  sont définies par (1.10). Ainsi,

$$\begin{aligned} {}^t T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} &= \langle {}^t T(\xi^{b_1}, \dots, \xi^{b_s}), \theta_{a_1} \wedge \dots \wedge \theta_{a_r} \rangle \\ &= \langle \xi^{b_1} \wedge \dots \wedge \xi^{b_s}, T(\theta_{a_1}, \dots, \theta_{a_r}) \rangle \\ &= T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \end{aligned}$$

Donc, d'après (1.11), on a

$$\begin{aligned} \Psi(\widehat{{}^t T}) &= \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s} \wedge \xi^{a_1} \wedge \dots \wedge \xi^{a_r} \\ &= (-1)^{rs} \frac{1}{r!s!} T_{a_1 \dots a_r}^{b_1 \dots b_s} \xi^{a_1} \wedge \dots \wedge \xi^{a_r} \wedge \theta_{b_1} \wedge \dots \wedge \theta_{b_s} \\ &= (-1)^{rs} \Psi(\widehat{T}). \end{aligned} \quad \square$$

Dans la suite de ce texte nous omettrons les applications  $\widehat{\phantom{x}}$  et  $\Psi$ . En d'autres termes, on écrira  $T$  pour représenter aussi bien l'application

$$T : \Lambda^r A \longrightarrow \Lambda^s A$$

que le tenseur

$$\widehat{T} \in \Gamma(\Lambda^r A^* \otimes \Lambda^s A),$$

et on identifiera ce dernier avec son image par l'isomorphisme  $\Psi$

$$\Psi(\widehat{T}) \in \Gamma(\Lambda^{r+s}(A^* \oplus A)).$$

### 1.2.2 Contraction

Dans ce paragraphe, nous allons exprimer en termes du grand crochet la contraction d'une  $A$ -forme par une  $A$ -forme à valeurs vectorielles.

**DÉFINITION 1.2.4** *Considérons une  $A$ -forme  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$  et une  $A$ -forme à valeurs vectorielles  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$ . La contraction de  $\omega$  par  $K$  est la forme  $i_K \omega \in \Gamma(\bigwedge^{k+l-1} A^*)$  définie, pour les éléments décomposables  $K = \alpha_K \otimes X_K$ , par*

$$i_K \omega = \alpha_K \wedge i_{X_K} \omega.$$

En termes du grand crochet, on a la proposition suivante.

**PROPOSITION 1.2.5** *Pour toutes sections  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$ , on a*

$$i_K \omega = \{K, \omega\}.$$

*Démonstration.* Soient  $K = \alpha_K \otimes X_K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$ . Par définition,

$$\begin{aligned} i_K \omega &= \alpha_K \wedge i_{X_K} \omega \\ &= \alpha_K \wedge \{X_K, \omega\}, \end{aligned}$$

où, dans le dernier passage, on a utilisé la proposition 1.2.2. Appliquons la règle de Leibniz, on obtient

$$\begin{aligned} i_K \omega &= \{\alpha_K \wedge X_K, \omega\} \\ &= \{K, \omega\}. \end{aligned} \quad \square$$

La contraction d'une  $A$ -forme  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$  par une  $A$ -forme à valeurs vectorielles  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  peut aussi être définie en posant

$$\begin{aligned} i_K \omega (X_1, \dots, X_{k+l-1}) \\ = \frac{1}{k!(l-1)!} \sum_{\sigma \in S_{k+l-1}} \text{sign}(\sigma) \omega (K(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}), X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l-1)}), \end{aligned}$$

pour toutes sections  $X_1, \dots, X_{k+l-1} \in \Gamma(A)$ .

On vérifie facilement que cette définition est équivalente à la définition 1.2.4.

On peut aussi étendre la définition 1.2.4 à la contraction d'une  $A$ -forme à valeurs vectorielles par une  $A$ -forme à valeurs vectorielles.

**DÉFINITION 1.2.6** *Soient  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . On définit, pour les éléments décomposables  $L = \omega_L \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ ,*

$$i_K L = (i_K \omega_L) \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^{k+l-1} A^* \otimes A).$$

### 1.2.3 Crochet de Nijenhuis-Richardson

Dans cette section nous allons exprimer le crochet de Nijenhuis-Richardson ([42, 19]) de deux formes à valeurs vectorielles en termes du grand crochet. Tout d'abord, définissons le crochet de Nijenhuis-Richardson.

**DÉFINITION 1.2.7** Soient  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . On définit le crochet de Nijenhuis-Richardson  $[K, L]_{NR} \in \Gamma(\bigwedge^{k+l-1} A^* \otimes A)$  par

$$[K, L]_{NR} = i_K L - (-1)^{(k-1)(l-1)} i_L K,$$

pour  $L = \omega_L \otimes X_L$  et  $i_K L := (i_K \omega_L) \otimes X_L$ .

**PROPOSITION 1.2.8** Pour toutes sections  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ , on a

$$[K, L]_{NR} = \{K, L\}.$$

*Démonstration.* Considérons les formes à valeurs vectorielles décomposables

$$K = \omega_K \otimes X_K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A) \quad \text{et} \quad L = \omega_L \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A).$$

On a

$$\begin{aligned} \{K, L\} &= \{\omega_K \wedge X_K, \omega_L \wedge X_L\} \\ &= \{K, \omega_L\} \wedge X_L + (-1)^{(k+1)l} \omega_L \wedge \{\omega_K \wedge X_K, X_L\}, \end{aligned}$$

après application de la règle de Leibniz. Si on applique de nouveau la règle de Leibniz au deuxième terme du membre de droite, le terme contenant  $\{X_K, X_L\}$  est nul, et on obtient

$$\begin{aligned} \{K, L\} &= \{K, \omega_L\} \wedge X_L - (-1)^{(k+1)l} \omega_L \wedge \{\omega_K, X_L\} \wedge X_K \\ &= \{K, \omega_L\} \wedge X_L + (-1)^{k+(k+1)l} \omega_L \wedge \{X_L, \omega_K\} \wedge X_K, \end{aligned}$$

où on a utilisé aussi l'anticommutativité graduée de  $\{.,.\}$ . Par une nouvelle application de la règle de Leibniz on obtient

$$\begin{aligned} \{K, L\} &= \{K, \omega_L\} \wedge X_L - (-1)^{(k+1)(l+1)} \{L, \omega_K\} \wedge X_K \\ &= i_K L - (-1)^{(k+1)(l+1)} i_L K \\ &= [K, L]_{NR}. \quad \square \end{aligned}$$

### 1.2.4 Crochet de Schouten-Nijenhuis

Supposons pour la suite que  $A$  est muni d'une structure d'algèbroïde de Lie définie par  $\mu \in C^\infty(T^*(\Pi A))$ . Le crochet de Schouten-Nijenhuis [48, 49, 41] est l'extension, par dérivation, du crochet de Lie défini, par la structure d'algèbroïde de Lie, sur  $\Gamma(A)$  en un crochet sur  $\mathfrak{X}^\bullet(A) = \bigoplus_{k \geq 0} \Gamma(\bigwedge^k A)$ . La définition exacte est la suivante.

**DÉFINITION 1.2.9** *Le crochet de Schouten-Nijenhuis est l'(unique) application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire*

$$[\cdot, \cdot]_{SN} : \mathfrak{X}^\bullet(A) \times \mathfrak{X}^\bullet(A) \rightarrow \mathfrak{X}^\bullet(A)$$

qui vérifie les propriétés suivantes

1.  $[f, g]_{SN} = 0$ ;
  2.  $[X, f]_{SN} = \rho(X) \cdot f$ ;
  3.  $[X, Y]_{SN} = [X, Y]$ ;
  4.  $[P, Q]_{SN} = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P]_{SN}$ ;
  5.  $[P, Q \wedge R]_{SN} = [P, Q]_{SN} \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]_{SN}$ ,
- pour tous  $f, g \in \mathfrak{X}^0(A) = C^\infty(M)$ ,  $X, Y \in \mathfrak{X}^1(A)$ ,  $P \in \mathfrak{X}^p(A)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(A)$ , et  $R \in \mathfrak{X}^\bullet(A)$ .

On déduit immédiatement de la définition que le crochet de Schouten-Nijenhuis est de degré  $-1$ , c'est-à-dire que

$$[\cdot, \cdot]_{SN} : \mathfrak{X}^p(A) \times \mathfrak{X}^q(A) \rightarrow \mathfrak{X}^{p+q-1}(A)$$

$$(P, Q) \mapsto [P, Q]_{SN}.$$

On peut déduire une définition explicite de  $[P, Q]_{SN}$  (en décomposant  $P$  et  $Q$  en sommes de produits extérieurs d'éléments plus simples). Notre objectif est plutôt d'écrire  $[\cdot, \cdot]_{SN}$  en termes du grand crochet. C'est l'objet du théorème suivant.

**THÉORÈME 1.2.10** *Pour toutes sections  $P, Q \in \mathfrak{X}^\bullet(A)$ , on a*

$$[P, Q]_{SN} = \{\{P, \mu\}, Q\}.$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que l'application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $(P, Q) \mapsto \{\{P, \mu\}, Q\}$ ,  $P, Q \in \mathfrak{X}^\bullet(A)$ , vérifie les conditions de la définition 1.2.9. La première propriété est une conséquence de la définition du grand crochet. Les deuxième et troisième propriétés sont des conséquences de la définition de  $\rho$  et de  $[\cdot, \cdot]$  en termes du grand crochet. Enfin les deux dernières propriétés se vérifient en utilisant les propriétés du grand crochet. Vérifions, par exemple, la dernière propriété. Soient  $P \in \mathfrak{X}^p(A)$ ,  $Q \in \mathfrak{X}^q(A)$ , et  $R \in \mathfrak{X}^\bullet(A)$  en utilisant la règle de Leibniz on a

$$\{\{P, \mu\}, Q \wedge R\} = \{\{P, \mu\}, Q\} \wedge R + (-1)^{(p+1)q} Q \wedge \{\{P, \mu\}, R\},$$

ce qui correspond à la dernière propriété.  $\square$

**Remarque:** *En termes du grand crochet, les expressions de  $[\cdot, \cdot]_{SN}$  sur  $\mathfrak{X}^\bullet(A)$  et de  $[\cdot, \cdot]$  sur  $\Gamma(A)$  coïncident. C'était prévisible puisque le grand crochet est une dérivation par rapport au produit extérieur et c'est ce qui permet de passer de  $[\cdot, \cdot]$  à  $[\cdot, \cdot]_{SN}$ .*

### 1.2.5 Dérivée de Lie

Considérons une  $A$ -forme à valeurs vectorielles  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$ . On définit la dérivée de Lie par  $K$ ,

$$\mathcal{L}_K : \Omega^\bullet(A) \longrightarrow \Omega^{\bullet+k}(A)$$

en posant

$$\mathcal{L}_K = [i_K, d]_{\text{com}},$$

où  $d$  est la différentielle extérieure correspondant à la structure d'algèbroïde de Lie sur  $A$  et  $[\cdot, \cdot]_{\text{com}}$  est le commutateur gradué.

**Remarque:** Si  $k = 0$  alors  $K \in \Gamma(A)$  et  $\mathcal{L}_K$  est la dérivée de Lie usuelle.

La proposition suivante montre comment calculer la dérivée de Lie d'une  $A$ -forme par une  $A$ -forme à valeurs vectorielles, en termes du grand crochet.

**PROPOSITION 1.2.11** *Pour toutes sections  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$ , on a*

$$\mathcal{L}_K \omega = \{\{K, \mu\}, \omega\}.$$

*Démonstration.* Soient  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $\omega \in \Gamma(\bigwedge^l A^*)$ , par définition de  $\mathcal{L}_K$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K(\omega) &= [i_K, d]_{\text{com}}(\omega) \\ &= i_K(d\omega) - (-1)^{k-1} d(i_K \omega). \end{aligned}$$

Utilisant la proposition 1.2.5 et l'identification  $d = \{\mu, \cdot\}$ , on écrit

$$\mathcal{L}_K(\omega) = \{K, \{\mu, \omega\}\} - (-1)^{k-1} \{\mu, \{K, \omega\}\},$$

et par l'identité de Jacobi, on obtient

$$\mathcal{L}_K(\omega) = \{\{K, \mu\}, \omega\}. \quad \square$$

**Remarque:** Récapitulons comment s'écrivent les trois dérivations "classiques" de l'algèbre  $(\Omega^\bullet(A), \wedge)$  en termes du grand crochet. Pour tout  $\omega \in \Omega^\bullet(A)$ , on a

$$\begin{aligned} i_K \omega &= \{K, \omega\}, \\ d\omega &= \{\mu, \omega\}, \\ \mathcal{L}_K \omega &= \{\{K, \mu\}, \omega\}, \end{aligned}$$

où  $K$  est une  $A$ -forme à valeurs vectorielles et  $\mu$  est l'hamiltonien correspondant à la structure d'algèbroïde de Lie considérée sur  $A$ . On remarque que les trois dérivations sont des dérivations intérieures du grand crochet.

### 1.2.6 Crochet de Frölicher-Nijenhuis

Dans cette section nous allons écrire en termes du grand crochet le crochet de Frölicher-Nijenhuis (voir [10, 19]). Ce crochet de  $A$ -formes à valeurs vectorielles a un rôle important dans la suite de ce texte car il va nous permettre d'exprimer la torsion de Nijenhuis d'un  $(1, 1)$ -tenseur.

Soient  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . Le crochet de Frölicher-Nijenhuis de  $K$  et de  $L$ , noté  $[K, L]_{FN}$ , est la section de  $\bigwedge^{k+l} A^* \otimes A$  définie par (voir [13]) :

$$[K, L]_{FN} = \mathcal{L}_K \omega_L \otimes X_L - (-1)^{kl} \mathcal{L}_L \omega_K \otimes X_K + \omega_K \wedge \omega_L \otimes [X_K, X_L],$$

pour  $K = \omega_K \otimes X_K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L = \omega_L \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ .

En termes du grand crochet, on "traduit" cette expression par :

$$[K, L]_{FN} = \{\{K, \mu\}, \omega_L\} \wedge X_L - (-1)^{kl} \{\{L, \mu\}, \omega_K\} \wedge X_K + \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\}. \quad (1.12)$$

Le théorème suivant simplifie cette égalité.

**THÉORÈME 1.2.12** *Soient  $(A, \rho, [., .])$  un algébroïde de Lie et  $\mu$  la fonction sur  $T^*(\Pi A)$  correspondante. En termes du grand crochet :*

$$[K, L]_{FN} = \{\{K, \mu\}, L\} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\}, \quad (1.13)$$

pour toutes les sections  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ .

*Démonstration.* Considérons des formes à valeurs vectorielles décomposables  $K = \omega_K \otimes X_K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L = \omega_L \otimes X_L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ .

Développons d'abord  $\{\{K, \mu\}, L\}$  en appliquant la règle de Leibniz :

$$\{\{K, \mu\}, L\} = \{\{K, \mu\}, \omega_L\} \wedge X_L + (-1)^{kl} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\}. \quad (1.14)$$

Le premier terme du membre de droite apparaît déjà dans la définition de  $[., .]_{FN}$  donnée par l'équation (1.12). Intéressons-nous à présent au deuxième terme

$$\omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} = \omega_L \wedge \{\{\omega_K \wedge X_K, \mu\}, X_L\},$$

si on applique la règle de Leibniz, on a

$$\omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} = \omega_L \wedge \{\omega_K \wedge \{X_K, \mu\}, X_L\} - \omega_L \wedge \{\{\omega_K, \mu\} \wedge X_K, X_L\}.$$

Appliquons de nouveau la règle de Leibniz à chacun des termes du membre de droite, on obtient

$$\begin{aligned} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} &= \omega_L \wedge \omega_K \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} + \omega_L \wedge \{\omega_K, X_L\} \wedge \{X_K, \mu\} \\ &\quad - \omega_L \wedge \{\omega_K, \mu\} \wedge \{X_K, X_L\} + \omega_L \wedge \{\{\omega_K, \mu\}, X_L\} \wedge X_K. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est déjà un des termes de la définition de  $[\cdot, \cdot]_{FN}$  donnée par l'équation (1.12). Le troisième terme est nul, car  $\{X_K, X_L\} = 0$ , et, à partir de la règle de Leibniz, on obtient pour les deux autres termes :

$$\begin{aligned} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} &= (-1)^{kl} \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} \\ &\quad + (-1)^{kl} \{\omega_K, \omega_L \wedge X_L\} \wedge \{X_K, \mu\} - (-1)^{kl} \{\omega_K, \omega_L\} \wedge X_L \wedge \{X_K, \mu\} \\ &\quad + (-1)^{l(k+1)} \{\{\omega_K, \mu\}, \omega_L \wedge X_L\} \wedge X_K - (-1)^{l(k+1)} \{\{\omega_K, \mu\}, \omega_L\} \wedge X_L \wedge X_K. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite, les troisième et cinquième termes sont nuls car  $\{\omega_K, \omega_L\} = 0 = \{\{\omega_K, \mu\}, \omega_L\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} &= (-1)^{kl} \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} \\ &\quad - (-1)^k \{L, \omega_K\} \wedge \{X_K, \mu\} + (-1)^k \{L, \{\omega_K, \mu\}\} \wedge X_K. \end{aligned}$$

En utilisant la règle de Leibniz dans le deuxième terme du membre de droite et l'identité de Jacobi dans le dernier terme on obtient :

$$\begin{aligned} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} &= (-1)^{kl} \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} \\ &\quad - (-1)^k \{\{L, \omega_K\} \wedge X_K, \mu\} + (-1)^{k+1} \{\{L, \omega_K\}, \mu\} \wedge X_K \\ &\quad + (-1)^k \{\{L, \omega_K\}, \mu\} \wedge X_K + (-1)^{k+k(l-1)} \{\omega_K, \{L, \mu\}\} \wedge X_K. \end{aligned}$$

Le troisième et le quatrième termes du membre de droite s'annulent entre eux. De plus, comme  $i_L K = \{L, \omega_K\} \wedge X_K$ , on a

$$\begin{aligned} \omega_L \wedge \{\{K, \mu\}, X_L\} &= (-1)^{kl} \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} \\ &\quad - (-1)^k \{i_L K, \mu\} - \{\{L, \mu\}, \omega_K\} \wedge X_K. \end{aligned}$$

Ainsi, en employant l'égalité précédente dans l'équation (1.14), on obtient

$$\begin{aligned} \{\{K, \mu\}, L\} &= \{\{K, \mu\}, \omega_L\} \wedge X_L + \omega_K \wedge \omega_L \wedge \{\{X_K, \mu\}, X_L\} \\ &\quad - (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\} - (-1)^{kl} \{\{L, \mu\}, \omega_K\} \wedge X_K. \end{aligned}$$

En comparant avec l'équation (1.12) qui définit  $[\cdot, \cdot]_{FN}$ , on conclut que

$$[K, L]_{FN} = \{\{K, \mu\}, L\} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\}. \quad \square$$

La propriété prouvée dans la proposition suivante est parfois considérée comme la définition du crochet de Frölicher-Nijenhuis.

**PROPOSITION 1.2.13** *Le crochet de Frölicher-Nijenhuis  $[\cdot, \cdot]_{FN}$  satisfait la condition*

$$[\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L]_{\text{com}} = \mathcal{L}_{[K, L]_{FN}},$$

pour tous  $K, L \in \Gamma(\wedge^\bullet A^* \otimes A)$

*Démonstration.* Considérons  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . Pour tout  $\sigma \in \Gamma(\bigwedge^s A^*)$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}} \sigma &= \left\{ \left\{ [K, L]_{FN}, \mu \right\}, \sigma \right\} \\ &= \left\{ \left\{ \{K, \mu\}, L \right\} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\}, \sigma \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $\{\mu, \mu\} = 0$ , on a  $\{\{i_L K, \mu\}, \mu\} = 0$  et l'égalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}} \sigma &= \{ \{ \{K, \mu\}, L \}, \mu \}, \sigma \\ &= \{ \{K, \mu\}, \{L, \mu\} \}, \sigma, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité de Jacobi et le fait que  $\{\mu, \mu\} = 0$ . Si on applique à nouveau l'identité de Jacobi, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}} \sigma &= \{ \{K, \mu\}, \{ \{L, \mu\}, \sigma \} \} + (-1)^{ls} \{ \{ \{K, \mu\}, \sigma \}, \{L, \mu\} \} \\ &= \{ \{K, \mu\}, \{ \{L, \mu\}, \sigma \} \} + (-1)^{kl} \{ \{L, \mu\}, \{ \{K, \mu\}, \sigma \} \}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{[K,L]_{FN}} \sigma &= \mathcal{L}_K(\mathcal{L}_L \sigma) + (-1)^{kl} \mathcal{L}_L(\mathcal{L}_K \sigma) \\ &= [\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_L]_{\text{com}}(\sigma), \end{aligned}$$

pour tout  $\sigma \in \Gamma(\bigwedge^s A^*)$  □

On constate immédiatement à partir de la formule (1.12) que le crochet de Frölicher-Nijenhuis est antisymétrique gradué, c'est-à-dire que

$$[K, L]_{FN} = -(-1)^{kl} [L, K]_{FN}$$

pour tous  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . Mais cette propriété ne ressort pas immédiatement de la formule (1.13), que nous allons adopter comme définition du crochet de Frölicher-Nijenhuis dans la suite de ce texte. Nous concluons ainsi ce chapitre en vérifiant à partir de la formule (1.13) que le crochet de Frölicher-Nijenhuis est antisymétrique gradué.

Considérons deux formes à valeurs vectorielles  $K \in \Gamma(\bigwedge^k A^* \otimes A)$  et  $L \in \Gamma(\bigwedge^l A^* \otimes A)$ . On a

$$[K, L]_{FN} = \{ \{K, \mu\}, L \} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\}.$$

Si on applique l'identité de Jacobi au premier terme du membre de droite, on obtient

$$[K, L]_{FN} = \{K, \{ \mu, L \} \} + (-1)^{l+1} \{ \{K, L\}, \mu \} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\}.$$

Or, d'après la proposition 1.2.8, on a

$$\{K, L\} = [K, L]_{NR} = i_K L - (-1)^{(k-1)(l-1)} i_L K$$

et si on remplace  $\{K, L\}$  par cette expression dans l'égalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned} [K, L]_{FN} &= \{K, \{\mu, L\}\} + (-1)^{l+1} \{i_K L, \mu\} - (-1)^{k(l-1)} \{i_L K, \mu\} + (-1)^{k(l+1)} \{i_L K, \mu\} \\ &= (-1)^{(l+1)+l(k+1)} \{L, \{\mu, K\}\} + (-1)^{l+1} \{i_K L, \mu\} \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a aussi utilisé l'anticommutativité graduée de  $\{.,.\}$  au premier terme du membre de droite. Cette dernière égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned} [K, L]_{FN} &= (-1)^{(l+1)} \left( (-1)^{l(k+1)} [L, K]_{FN} \right) \\ &= -(-1)^{kl} [L, K]_{FN}. \end{aligned}$$

comme on voulait vérifier.



## Chapitre 2

# Multi-crochets de Courant et algèbre de Rothstein

Le but de ce chapitre est de montrer le lien entre la structure  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$  introduite au chapitre précédent et d'autres structures d'algèbres de Poisson déjà introduites dans la littérature.

Dans un premier temps nous considérons les espaces  $\text{Pol}_k(T^*(\Pi A))$  composés par les éléments de degré total  $k$  de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . Les éléments de degré 0, 1 et 2 engendrent  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . Les éléments de degré 0 sont les fonctions sur  $M$  et les éléments de degré 1 sont les sections de  $\Gamma(A \oplus A^*)$ . Les éléments de degré 2 jouent un rôle très important dans cette décomposition : ils forment une sous-algèbre de Lie de  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$  et coïncident avec les sections de  $\mathbb{A}(A \oplus A^*)$ , l'algèbroïde d'Atiyah du fibré vectoriel  $A \oplus A^*$ , préservant la forme bilinéaire symétrique  $\langle ., . \rangle$ . On peut alors considérer  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  comme l'algèbre graduée libre engendrée par ces éléments de degré 0, 1 et 2, que l'on quotiente par un idéal de relations entre ces éléments. Cet aspect des choses a déjà été étudié par Roytenberg [45].

Une seconde comparaison naturelle est possible avec l'algèbre de Poisson graduée des multi-crochets de quasi-Courant [18]. Ainsi qu'on l'a rappelé au chapitre 1, il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de  $\text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  qui commutent avec eux-mêmes et les structures d'algèbroïde de Courant sur  $(A \oplus A^*, \langle ., . \rangle)$ . Cette correspondance s'étend en une correspondance entre tout  $\text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  et des structures sur  $(A \oplus A^*, \langle ., . \rangle)$  que l'on appelle structures de quasi-Courant dans [18]. La définition des crochets de quasi-Courant s'étend du degré 3 à tout degré pour obtenir des multi-crochets de quasi-Courant. L'ensemble des multi-crochets de quasi-Courant est munie d'une structure d'algèbre de Poisson graduée [18] et on démontre dans ce chapitre que cette algèbre de Poisson contient  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ , comme sous-algèbre de Poisson.

Une troisième idée consiste à "trivialiser"  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . Rappelons que les sections de  $\bigwedge^\bullet(A \oplus A^*)$  s'injectent de manière naturelle dans  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  mais que tel n'est pas le cas des sections de  $S^\bullet(TM)$ , à moins de se donner une connexion sur  $A$ . Le choix d'une

connexion permet alors d'identifier  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  à

$$\mathcal{R}(A \oplus A^*) = \bigoplus_{r \geq 0} \bigoplus_{r=2p+k} \Gamma\left(\bigwedge^k(A \oplus A^*) \otimes S^p(TM)\right)$$

On démontre alors que le grand crochet devient ce que l'on appelle le crochet de Rothstein (voir aussi [18]).

On démontre enfin la commutativité des trois constructions précédentes, ce qui implique que les correspondances annoncées ci-dessus sont toutes bijectives.

Enfin, on conclut ce chapitre en vérifiant que, si la connexion fixée sur  $A$  est plate, le grand crochet correspond au crochet de l'algèbre bicroisée [40, 28] des deux sous-algèbres de Lie de  $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$  suivantes

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma\left(\left(\bigwedge^{k+1} A^* \wedge A\right)\right) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma\left(\bigwedge^k A^* \otimes TM\right).$$

Dans le cas  $A = TM$  on retrouve la structure d'algèbre bicroisée étudiée par Michor [39, 40].

## 2.1 L'algèbre de Poisson $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{., .\})$

Dans cette section, nous allons étudier plus en détail l'algèbre de Poisson  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{., .\})$  et en particulier l'espace vectoriel des polynômes de degré total 0, 1 ou 2, qui engendrent  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ . Nous commençons par introduire la notion de connexion sur un fibré vectoriel et, plus généralement, l'espace des endomorphismes dérivatifs d'un fibré vectoriel qui sera fondamental dans l'étude de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ .

### 2.1.1 Connexions et endomorphismes dérivatifs

#### Connexions

Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel sur une variété différentielle  $M$ .

**DÉFINITION 2.1.1** *Une connexion sur  $E$  est un morphisme d'espaces vectoriels*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(E)$$

*satisfaisant la règle dite de Leibniz*

$$\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla(X),$$

*pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $X \in \Gamma(E)$ .*

Pour chaque  $v \in \Gamma(TM)$  on définit la dérivée covariante (dans la direction de  $v$ ) :

$$\begin{aligned} \nabla_v : \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ X &\longmapsto \langle \nabla(X), v \rangle. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que la dérivée covariante satisfait, pour tous  $f \in C^\infty(M)$ ,  $v, v_1, v_2 \in \Gamma(TM)$  et  $X \in \Gamma(E)$ , les conditions

$$\begin{cases} \nabla_{fv} = f\nabla_v \\ \nabla_{v_1+v_2} = \nabla_{v_1} + \nabla_{v_2} \\ [\nabla_v, m_f]_{\text{com}}(X) = (v \cdot f) X \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $m_f : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  est la multiplication par  $f \in C^\infty(M)$ .

**Remarques:** 1. La réciproque de l'affirmation précédente est vraie. Ainsi, une connexion  $\nabla$  sur  $E$  équivaut à un "champ" de dérivées covariantes,  $\nabla_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ ,  $v \in \Gamma(TM)$ , vérifiant (2.1).

2. La troisième condition de (2.1) peut s'écrire

$$\nabla_v(fX) = (v \cdot f) X + f\nabla_v(X), \quad (2.2)$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$ ,  $v \in \Gamma(TM)$  et  $X \in \Gamma(E)$ .

**DÉFINITION 2.1.2** La courbure  $R^\nabla$  d'une connexion  $\nabla$  sur  $E$  est une 2-forme à valeurs dans  $\text{End}(E)$ <sup>1</sup> définie par :

$$R^\nabla(v_1, v_2) = \nabla_{v_1}\nabla_{v_2} - \nabla_{v_2}\nabla_{v_1} - \nabla_{[v_1, v_2]_{TM}}, \quad \forall v_1, v_2 \in \Gamma(TM). \quad (2.3)$$

### Endomorphismes dérivatifs

Soit  $\nabla$  une connexion sur  $E$ . Alors, pour tout  $v \in \Gamma(TM)$ , la dérivée covariante  $\nabla_v$  est un exemple d'opérateur différentiel d'un type particulier que nous définissons maintenant.

**DÉFINITION 2.1.3** Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel. Un endomorphisme dérivatif de  $E \rightarrow M$  est un endomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire

$$D : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

tel qu'il existe une section  $\sigma_D \in \Gamma(TM)$  vérifiant

$$D(fX) = fD(X) + (\sigma_D \cdot f)X, \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall X \in \Gamma(E).$$

Le champ de vecteurs  $\sigma_D$  est uniquement défini par  $D$  et est appelé le symbole de  $D$ . L'espace vectoriel des endomorphismes dérivatifs de  $E$  est noté  $\mathcal{D}(E)$ .

**Exemple:** Soient  $\nabla$  une connexion de  $E \rightarrow M$  et  $v \in \Gamma(TM)$  alors  $\nabla_v$  est un endomorphisme dérivatif ayant pour symbole  $v$ .

1. D'après la formule (2.3),  $R^\nabla(v_1, v_2)$  agit sur  $\Gamma(E)$ . Mais on vérifie facilement que  $R^\nabla(v_1, v_2)$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire, donc  $R^\nabla(v_1, v_2)$  provient d'un endomorphisme du fibré vectoriel  $E$ .

Les fibrés vectoriels que nous considérerons la plupart du temps sont munis d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**DÉFINITION 2.1.4** *Un produit scalaire pseudo-euclidien<sup>2</sup> sur un fibré vectoriel  $E \rightarrow M$  est une application*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Gamma(E \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique et non dégénérée en chaque point, c'est-à-dire telle que pour tout  $m \in M$  et tout  $X_m \in E_m$

$$\langle X_m, Y_m \rangle = 0, \forall Y_m \in E_m \Rightarrow X_m = 0.$$

De plus, si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  satisfait la condition

$$\langle X, X \rangle \geq 0, \forall X \in \Gamma(E),$$

on dit que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est défini positif et, dans ce cas,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire euclidien.

La définition suivante introduit une notion de compatibilité entre un endomorphisme dérivatif et un produit scalaire.

**DÉFINITION 2.1.5** *Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On dit qu'un endomorphisme dérivatif  $D \in \mathcal{D}(E)$  préserve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  si*

$$\langle D(X), Y \rangle + \langle X, D(Y) \rangle = \sigma_D \langle X, Y \rangle,$$

pour toutes les sections  $X, Y \in \Gamma(E)$ . On dénote  $\mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  l'ensemble des endomorphismes dérivatifs de  $E$  préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Exemple:** Soit  $A \rightarrow M$  un fibré vectoriel. Considérons le fibré vectoriel  $A \oplus A^* \rightarrow M$  muni du produit scalaire standard sur  $\Gamma(A \oplus A^*)$  :

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle := \alpha(Y) + \beta(X),$$

pour toutes les sections  $X, Y \in \Gamma(A)$  et  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ . Soit  $\nabla$  une connexion de  $A \rightarrow M$ . Pour tout  $v \in \Gamma(TM)$  on sait que  $\nabla_v$  est un endomorphisme dérivatif de  $A$  ayant pour symbole  $v$ . Mais on peut étendre  $\nabla_v$  à un endomorphisme dérivatif de  $A \oplus A^*$  préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Il suffit de définir  $\nabla_v^*$  sur  $A^*$  en posant pour toutes sections  $X \in \Gamma(A)$ ,  $\alpha \in \Gamma(A^*)$

$$\langle \nabla_v^*(\alpha), X \rangle = v \langle \alpha, X \rangle - \langle \alpha, \nabla_v(X) \rangle.$$

On définit ainsi une connexion de  $A \oplus A^*$  préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

---

2. Dans la suite de ce texte, par défaut, les produits scalaires considérés sont pseudo-euclidiens. Ainsi, où on écrit "produit scalaire" on devra lire "produit scalaire pseudo-euclidien".

On vérifie facilement la proposition suivante

**PROPOSITION 2.1.6** *Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel.*

1. *L'espace vectoriel des endomorphismes dérivatifs,  $\mathcal{D}(E)$ , muni du commutateur, est une algèbre de Lie.*
2. *De plus, si le fibré vectoriel  $E \rightarrow M$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , alors  $\mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathcal{D}(E), [\cdot, \cdot]_{\text{com}})$ .*

L'algèbre de Lie  $(\mathcal{D}(E), [\cdot, \cdot]_{\text{com}})$  est l'algèbre des sections d'un algébroïde de Lie, appelé algébroïde d'Atiyah de  $E$  [2], voir aussi [27], que l'on notera  $\mathbb{A}(E)$ . Ainsi,  $\mathcal{D}(E) = \Gamma(\mathbb{A}(E))$ .

L'ancre  $\hat{\sigma}$  de  $\mathbb{A}(E)$  induit, sur les sections, l'application symbole

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{D}(E) &\longrightarrow \Gamma(TM) \\ D &\longmapsto \sigma(D) := \sigma_D. \end{aligned}$$

Son noyau est l'espace vectoriel  $\Gamma(E \otimes E^*)$  des endomorphismes  $C^\infty(M)$ -linéaires de  $\Gamma(E)$ . On a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(E \otimes E^*) \longrightarrow \mathcal{D}(E) \xrightarrow{\sigma} \Gamma(TM) \longrightarrow 0, \quad (2.4)$$

qui, du fait que les applications sont  $C^\infty(M)$ -linéaires, provient d'une suite exacte de fibrés vectoriels sur  $M$

$$0 \longrightarrow \text{End}(E) \longrightarrow \mathbb{A}(E) \xrightarrow{\hat{\sigma}} TM \longrightarrow 0. \quad (2.5)$$

En outre, une connexion  $\nabla$  sur  $E$  définit une application  $C^\infty(M)$ -linéaire :

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) &\longrightarrow \mathcal{D}(E) \\ v &\longmapsto \nabla_v, \end{aligned}$$

qui correspond à un morphisme de fibrés vectoriels,  $\hat{\nabla} : TM \longrightarrow \mathbb{A}(E)$ . Alors, comme  $\sigma(\nabla_v) = v$ , le choix d'une connexion  $\nabla$  sur  $E$  équivaut à une scission de la suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \text{End}(E) \longrightarrow \mathbb{A}(E) \xrightarrow{\hat{\sigma}} TM \longrightarrow 0,$$


et définit un isomorphisme (dépendant de  $\nabla$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(E) &\longrightarrow \text{End}(E) \oplus TM \\ D &\longmapsto \left( D - \hat{\nabla}_{\hat{\sigma}(D)} \right) + \hat{\sigma}(D) \\ P + \nabla_v &\longleftarrow P + v. \end{aligned}$$

Par ailleurs, dans la suite de ce texte on devra considérer la suite exacte (2.4) restreinte aux applications préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  :

$$0 \longrightarrow (\Gamma(E \otimes E^*))^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \longrightarrow \mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \xrightarrow{\sigma} \Gamma(TM) \longrightarrow 0.$$

Le fait que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  soit non dégénéré permet d'identifier  $\Gamma(E)$  et  $\Gamma(E^*)$ . Ainsi, on peut considérer

$$0 \longrightarrow (\Gamma(\otimes^2 E))^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \longrightarrow \mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \xrightarrow{\sigma} \Gamma(TM) \longrightarrow 0.$$

Par ailleurs, un endomorphisme  $D \in \mathcal{D}(E)$ , appartenant au noyau de  $\sigma$  et préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , doit satisfaire

$$\langle D(X), Y \rangle + \langle X, D(Y) \rangle = 0,$$

pour toutes sections  $X, Y \in \Gamma(E)$ . En d'autres termes, utilisant à nouveau l'identification  $\Gamma(E) \simeq \Gamma(E^*)$  induite par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $D$  est antisymétrique. Donc, on a la suite exacte de  $C^\infty(M)$ -modules

$$0 \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 E) \longrightarrow \mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \xrightarrow{\sigma} \Gamma(TM) \longrightarrow 0,$$

qui, du fait que les applications sont  $C^\infty(M)$ -linéaires, provient d'une suite exacte de fibrés vectoriels

$$0 \longrightarrow \wedge^2(E) \longrightarrow \mathbb{A}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \xrightarrow{\hat{\sigma}} TM \longrightarrow 0. \quad (2.6)$$

### 2.1.2 Décomposition de $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$

Dans cette section, nous allons décomposer l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $T^*(\Pi A)$  selon le degré total (voir section 1.1.3). Nous verrons que l'algèbroïde d'Atiyah a un rôle important dans cette décomposition.

Tout d'abord, dans la section 1.1.3 nous avons défini  $\text{Pol}_k(T^*(\Pi A))$  comme étant le sous-espace vectoriel de  $C^\infty(T^*(\Pi A))$  contenant les fonctions polynomiales (en les coordonnées des fibres) de degré total  $k$ . L'espace

$$\text{Pol}(T^*(\Pi A)) = \bigoplus_{k \geq 0} \text{Pol}_k(T^*(\Pi A))$$

est une sous-algèbre de Poisson de  $(C^\infty(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ .

De plus, on peut considérer un système de coordonnées locales du type  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  sur  $T^*(\Pi A)$  et on remarque qu'il est composé de fonctions de degré 0, 1 et 2. Ainsi, l'anneau  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  est engendré<sup>3</sup> (comme des polynômes) par les polynômes de degré 0, 1 et 2.

Nous savons (voir la fin de la section 1.1.3) que le crochet de Poisson restreint aux polynômes de degré 0 ou 1 est toujours nul sauf pour  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(A \oplus A^*)$  pour lesquels on a

$$\{\Theta_1, \Theta_2\} = \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle,$$

3. Voir [45], où Roytenberg montre que  $T^*(\Pi A)$  est une  $N$ -variété symplectique de degré 2 et que toute  $N$ -variété symplectique de degré 2 est une (sous-variété d'une) variété de ce type.

où  $\langle ., . \rangle$  est le produit scalaire standard sur  $\Gamma(A \oplus A^*)$ .

Intéressons-nous à présent aux polynômes de degré total 2. Tout d'abord, utilisant le fait que le grand crochet a un degré total  $-2$ , on remarque que

$$\{\text{Pol}_2(T^*(\Pi A)), \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))\} \subseteq \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)).$$

On peut alors énoncer la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.1.7** *L'espace vectoriel  $\text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$  est une sous-algèbre de Lie de  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ .*

Dans la suite de ce paragraphe nous allons caractériser les éléments de  $\text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$ . On verra qu'ils correspondent à des objets déjà introduits précédemment. Soit  $D \in \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$ . Alors  $\{C^\infty(M), D\} \subset C^\infty(M)$  et, si on applique la règle de Leibniz pour  $\{.,.\}$ , on a

$$\{fg, D\} = f\{g, D\} + \{f, D\}g, \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Donc  $\{., D\}$  agit sur  $C^\infty(M)$  comme un champ de vecteurs  $\sigma_D \in \Gamma(TM)$ , que l'on définit en posant

$$\sigma_D \cdot f = \{f, D\}, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

De plus,  $\{\Gamma(A \oplus A^*), D\} \subset \Gamma(A \oplus A^*)$  et, si on applique la règle de Leibniz, on a

$$\begin{aligned} \{f\Theta, D\} &= f\{\Theta, D\} + \{f, D\}\Theta \\ &= f\{\Theta, D\} + (\sigma_D \cdot f)\Theta, \end{aligned}$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $\Theta \in \Gamma(A \oplus A^*)$ . Donc  $\{., D\}$  est un endomorphisme dérivatif de  $A \oplus A^*$ , ayant pour symbole  $\sigma_D$ . En outre, l'identité de Jacobi nous permet d'écrire, pour toutes sections  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(A \oplus A^*)$ ,

$$\{\{\Theta_1, \Theta_2\}, D\} = \{\Theta_1, \{\Theta_2, D\}\} + \{\{\Theta_1, D\}, \Theta_2\},$$

c'est-à-dire,

$$\sigma_D \cdot \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle = \langle \Theta_1, \{\Theta_2, D\} \rangle + \langle \{\Theta_1, D\}, \Theta_2 \rangle.$$

On a ainsi montré que  $\{., D\}$  appartient à  $\mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$ . L'application

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)) &\longrightarrow \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle} \\ D &\longmapsto \{., D\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

est alors bien définie et de plus on a la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.1.8** *L'application  $\Phi$  définie par (2.7) est bijective.*

*Démonstration.* Soit  $D \in \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$ . Dans un système de coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  de  $T^*(\Pi A)$  on peut écrire

$$D = A^i(x)p_i + \frac{1}{2}R_{ab}(x)\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}Q^{ab}(x)\theta_a\theta_b + P_a^b(x)\xi^a\theta_b,$$

où  $A^i, R_{ab}, Q^{ab}$  et  $P_a^b$  sont des fonctions sur  $M$  telles que  $R_{ab} = -R_{ba}$  et  $Q^{ab} = -Q^{ba}$ , pour tous  $i = 1, \dots, m$  et  $a, b = 1, \dots, n$ . Notons  $C_D$  l'image de  $D$  par  $\Phi$ , i.e.,

$$C_D := \Phi(D) = \{., D\} \in \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}.$$

On a alors

$$\begin{cases} \sigma_{C_D} \cdot f = -A^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ C_D(\xi^a) = -P_b^a(x)\xi^b + Q^{ac}(x)\theta_c \\ C_D(\theta_a) = R_{ab}(x)\xi^b + P_a^c(x)\theta_c \end{cases} \quad (2.8)$$

pour toute fonction  $f \in C^\infty(M)$  et où  $(\theta_a)_{a=1, \dots, n}$  (resp.  $(\xi^a)_{a=1, \dots, n}$ ) sont considérés comme des bases locales de sections de  $A$  (resp.  $A^*$ ). Les équations (2.8) s'écrivent, pour toute combinaison linéaire  $\Theta = \sum_{a=1}^n \alpha^a \theta_a + \beta_a \xi^a$ , sous la forme

$$C_D(\Theta) = \begin{bmatrix} P_1^1 & \dots & P_n^1 & Q^{11} & \dots & Q^{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_1^n & \dots & P_n^n & Q^{1n} & \dots & Q^{nn} \\ R_{11} & \dots & R_{n1} & -P_1^1 & \dots & -P_1^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{1n} & \dots & R_{nn} & -P_n^1 & \dots & -P_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^n \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} - \sum_{a=1}^n A^i(x) \frac{\partial \alpha^a}{\partial x^i} - \sum_{b=1}^n A^i(x) \frac{\partial \beta^b}{\partial x^i}$$

Si  $\Phi(D) = 0$  cela signifie que  $\sigma_{C_D} = 0$ , c'est-à-dire que  $A^i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$  et que les coefficients  $P_a^b, R_{ab}$  et  $Q^{ab}$ ,  $a, b = 1, \dots, n$ , de la matrice ci-dessus sont également nuls. Donc (dans chaque carte locale)  $D = 0$ . On a ainsi prouvé que  $\Phi$  est une application injective.

Pour prouver la surjectivité de  $\Phi$ , considérons  $C \in \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$ . Dans tout système de coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  de  $T^*(\Pi A)$ , on a

$$\begin{cases} \sigma_C = A^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ C(\xi^a) = P_b^a(x)\xi^b + Q^{ac}(x)\theta_c \\ C(\theta_a) = R_{ab}(x)\xi^b + S_a^c(x)\theta_c \end{cases}$$

Du fait que  $C$  préserve  $\langle \dots \rangle$ , on a  $P_b^a = -S_b^a$ ,  $Q^{ab} = -Q^{ba}$  et  $R_{ab} = -R_{ba}$ , pour tous  $a, b \in \{1, \dots, n\}$ . Ainsi, on définit dans chaque carte locale

$$D_C = -A^i(x)p_i + \frac{1}{2}R_{ab}(x)\xi^a\xi^b + \frac{1}{2}Q^{ab}(x)\theta_a\theta_b - P_a^b(x)\xi^a\theta_b.$$

D'après la première partie de la preuve, on vérifie que, pour chaque construction locale, on a

$$\Phi(D_C) = C.$$

À partir de ces constructions locales, en utilisant une partition de l'unité, on peut construire  $\overline{D_C}$  sur  $T^*(\Pi A)$  et comme  $\Phi : \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)) \rightarrow \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{<\dots>}$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire, l'égalité

$$\Phi(\overline{D_C}) = C$$

est vérifiée. Donc  $\Phi$  est surjective.  $\square$

La proposition suivante montre que l'application  $\Phi$  préserve le grand crochet.

**PROPOSITION 2.1.9** *L'application  $\Phi$  définie par (2.7) est un anti-isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\Phi : (\text{Pol}_2(T^*(\Pi A)), \{.,.\}) \longrightarrow (\mathcal{D}(A \oplus A^*)^{<\dots>}, [.,.]_{\text{com}})$$

où  $\{.,.\}$  est le grand crochet et  $[.,.]_{\text{com}}$  est le commutateur.

*Démonstration.* La vérification du fait que  $\Phi$  est un morphisme d'algèbres de Lie est immédiate. Soient  $D_1, D_2 \in \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$ , pour tout  $\Theta \in \Gamma(A \oplus A^*)$  on a

$$\begin{aligned} \Phi(\{D_1, D_2\})(\Theta) &= \{\Theta, \{D_1, D_2\}\} \\ &= \{\{\Theta, D_1\}, D_2\} + \{D_1, \{\Theta, D_2\}\} \\ &= \{\{\Theta, D_1\}, D_2\} - \{\{\Theta, D_2\}, D_1\} \end{aligned}$$

où dans les deux dernières égalités on a utilisé l'identité de Jacobi et l'anticommutativité (graduées) du grand crochet. Or, d'après la dernière égalité on a

$$\Phi(\{D_1, D_2\})(\Theta) = \left( \Phi(D_2) \circ \Phi(D_1) - \Phi(D_1) \circ \Phi(D_2) \right)(\Theta),$$

pour tout  $\Theta \in \Gamma(A \oplus A^*)$ . Donc on en conclut l'égalité

$$\Phi(\{D_1, D_2\}) = -[\Phi(D_1), \Phi(D_2)]_{\text{com}}. \quad \square$$

Considérons, pour tout  $k \geq 0$ , l'espace vectoriel

$$\mathcal{P}_k = \bigoplus_{p+2q=k} \Gamma\left(\bigwedge^p(A \oplus A^*) \otimes S^q(\mathbb{A}(A \oplus A^*)^{<\dots>})\right)$$

et soit  $\mathcal{P} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{P}_k$ . Sur l'espace gradué  $\mathcal{P}$  on définit un produit (de degré 0), que l'on note  $\wedge$ , en posant, pour toute paire  $\Theta_1 \otimes C_1$  et  $\Theta_2 \otimes C_2$  d'éléments homogènes de  $\mathcal{P}$ ,

$$(\Theta_1 \otimes C_1) \wedge (\Theta_2 \otimes C_2) = (\Theta_1 \wedge \Theta_2) \otimes (C_1 \vee C_2),$$

où  $\vee$  est le produit symétrique, puis étendant à  $\mathcal{P}$  par bilinéarité. Le produit  $\wedge$  permet d'engendrer  $\mathcal{P}$  à partir des éléments de  $C^\infty(M), \Gamma(A \oplus A^*) \otimes 1$  et  $1 \otimes \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{<\dots>}$ .

On définit l'application

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathcal{P}, \wedge) &\longrightarrow (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge) \\ \sum_i \Theta_i \otimes C_i &\longmapsto \sum_i \Theta_i \wedge \Phi^{-1}(C_i) \end{aligned}$$

où le produit  $\wedge$  de l'algèbre de droite est le produit<sup>4</sup> (gradué) de fonctions sur  $T^*(\Pi A)$  et l'application  $\Phi$ , définie par (2.7), est étendue en un morphisme d'algèbres  $\Phi : (S^\bullet \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)), \wedge) \rightarrow (S^\bullet \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}, \vee)$ . On remarque que le produit gradué  $\wedge$  sur  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ , quand restreint à  $S^\bullet \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$  coïncide avec le produit symétrique.

On vérifie immédiatement que  $\Psi$  est un morphisme d'algèbres graduées de degré 0.

On définit sur  $\mathcal{P}$  un crochet  $\{.,.\}_\mathcal{P}$ , de degré  $-2$ , en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f, g\}_\mathcal{P} = 0, \\ \{f, \Theta \otimes 1\}_\mathcal{P} = \{\Theta \otimes 1, f\}_\mathcal{P} = 0, \\ \{1 \otimes C, f\}_\mathcal{P} = -\{f, 1 \otimes C\}_\mathcal{P} = -\sigma_C \cdot f, \\ \{\Theta_1 \otimes 1, \Theta_2 \otimes 1\}_\mathcal{P} = \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle \otimes 1, \\ \{1 \otimes C, \Theta \otimes 1\}_\mathcal{P} = -\{\Theta \otimes 1, 1 \otimes C\}_\mathcal{P} = -C(\Theta) \otimes 1, \\ \{1 \otimes C_1, 1 \otimes C_2\}_\mathcal{P} = -1 \otimes [C_1, C_2]_{\text{com}}, \end{array} \right.$$

pour tous  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(A \oplus A^*)$  et  $C, C_1, C_2 \in \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$ . Puis, on étend  $\{.,.\}_\mathcal{P}$  à tout  $\mathcal{P}$  par bilinéarité et en demandant à ce que la règle de Leibniz

$$\{P, Q \wedge R\}_\mathcal{P} = \{P, Q\}_\mathcal{P} \wedge R + (-1)^{pq} Q \wedge \{P, R\}_\mathcal{P}$$

soit satisfaite pour tous  $P, Q, R \in \mathcal{P}$  où  $P$  et  $Q$  sont des éléments homogènes de degré  $p$  et  $q$  respectivement.

Le crochet  $\{.,.\}_\mathcal{P}$  satisfait l'identité de Jacobi (on le vérifie rapidement sur les éléments de degré 0, 1 et 2) et constitue un crochet de Poisson sur  $(\mathcal{P}, \wedge)$ . On a la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.1.10** *L'application*

$$\Psi : (\mathcal{P}, \wedge, \{.,.\}_\mathcal{P}) \longrightarrow (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge, \{.,.\})$$

*est un morphisme d'algèbres de Poisson.*

*Démonstration.* On doit vérifier que  $\Psi$  préserve les crochets de Poisson et il suffit de le vérifier pour les éléments de degré 0, 1 et 2 pour lesquels c'est immédiat par construction de  $\{.,.\}_\mathcal{P}$ .  $\square$

4. Le signe de multiplication de ce produit est parfois omis dans nos formules où il est représenté par la juxtaposition des facteurs.

Le noyau de  $\Psi$  est l'idéal de  $(\mathcal{P}, \wedge)$  engendré par les éléments  $\Theta \otimes 1 - 1 \otimes \Theta$ , pour tout  $\Theta \in \wedge^2(\Gamma(A \oplus A^*)) \subset \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$ . Notons  $I$  cet idéal,

$$I = \langle \Theta \otimes 1 - 1 \otimes \Theta, \Theta \in \wedge^2(\Gamma(A \oplus A^*)) \rangle,$$

alors  $\Psi$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées de degré 0,

$$\bar{\Psi} : (\mathcal{P}/I, \wedge) \longrightarrow (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge).$$

Comme  $I$  est le noyau de  $\Psi$ , et  $\Psi$  est un morphisme d'algèbres de Poisson, alors  $I$  est un idéal de Poisson pour  $\{.,.\}_{\mathcal{P}}$ . Alors, le crochet  $\{.,.\}_{\mathcal{P}}$  induit un crochet de Poisson sur  $\mathcal{P}/I$ , que l'on notera aussi  $\{.,.\}_{\mathcal{P}}$ .

Ces quelques considérations démontrent le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.1.11** *L'application*

$$\bar{\Psi} : (\mathcal{P}/I, \wedge, \{.,.\}_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge, \{.,.\})$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Poisson.*

## 2.2 Multi-crochets de quasi-Courant

Dans cette section, nous allons définir l'algèbre de Poisson graduée des multi-crochets de quasi-Courant. Cette section est grandement basée sur l'article [18], où cette algèbre a été introduite, et nous renvoyons le lecteur à cet article pour les démonstrations des résultats que nous présentons ici.

Considérons  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle ., . \rangle$  (voir définition 2.1.4). Définissons à présent l'objet principal de cette section.

**DÉFINITION 2.2.1** *Soit  $r \geq 2$ . Un  $r$ -crochet de quasi-Courant est une application  $\mathbb{R}$ -multilinéaire*

$$C : \underbrace{\Gamma(E) \otimes \dots \otimes \Gamma(E)}_{r-1} \longrightarrow \Gamma(E)$$

*telle qu'il existe une application  $\mathbb{R}$ -multilinéaire*

$$\sigma_C : \underbrace{\Gamma(E) \otimes \dots \otimes \Gamma(E)}_{r-2} \longrightarrow \Gamma(TM),$$

*appelée le symbole de  $C$ , vérifiant, pour toutes sections  $\Theta_1, \dots, \Theta_{r-1}, U, V \in \Gamma(E)$ , les conditions suivantes :*

1.  $\sigma_C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}) \cdot \langle U, V \rangle = \langle C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}, U), V \rangle + \langle U, C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}, V) \rangle;$

2. Si  $r \geq 3$ , pour tout  $1 \leq i \leq r - 2$ ,

$$\begin{aligned} & \langle C(\Theta_1, \dots, \Theta_i, \Theta_{i+1}, \dots, \Theta_{r-1}) + C(\Theta_1, \dots, \Theta_{i+1}, \Theta_i, \dots, \Theta_{r-1}), U \rangle \\ & = \sigma_C(\Theta_1, \dots, \widehat{\Theta}_i, \widehat{\Theta}_{i+1}, \dots, \Theta_{r-1}, U) \cdot \langle \Theta_i, \Theta_{i+1} \rangle, \end{aligned}$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  au dessus d'un élément signifie que cet élément a été retiré.

On note  $\mathcal{C}_r(E)$  l'ensemble des  $r$ -crochets de quasi-Courant ainsi définis. On définit aussi  $\mathcal{C}_0(E) = C^\infty(M)$ ,  $\mathcal{C}_1(E) = \Gamma(E)$  et on pose

$$\mathcal{C}(E) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{C}_r(E).$$

On vérifie dans le lemme suivant qu'un  $r$ -crochet de quasi-Courant  $C$  vérifie, au dernier argument, la règle de Leibniz

**LEMME 2.2.2** Soit  $C \in \mathcal{C}_r(E)$ ,  $r \geq 2$ . Alors, on a

$$C(\Theta_1, \dots, f\Theta_{r-1}) = fC(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-1}) + (\sigma_C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}) \cdot f)\Theta_{r-1},$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $\Theta_1, \dots, \Theta_{r-1} \in \Gamma(E)$ .

*Démonstration.* Le lemme est démontré, dans [58], pour les crochets de Courant (c'est-à-dire pour  $r = 3$  et  $C$  vérifiant l'identité de Jacobi, voir ci-dessous corollaire 2.2.7) mais l'argument n'utilise pas l'identité de Jacobi et est valable pour  $r = 2$  et généralisable pour tout  $r \geq 3$ .  $\square$

La proposition suivante montre que les 2-crochets de quasi-Courant sont des objets que l'on a déjà définis.

**PROPOSITION 2.2.3** Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel tel que  $\Gamma(E)$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Alors

$$\mathcal{C}_2(E) = \mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle},$$

où  $\mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  est l'ensemble des endomorphismes dérivatifs de  $E$  préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

*Démonstration.* L'inclusion  $\mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle} \subseteq \mathcal{C}_2(E)$  est une conséquence immédiate des définitions respectives de ces deux ensembles.

Vérifions à présent l'inclusion  $\mathcal{C}_2(E) \subseteq \mathcal{D}(E)^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ . Soit  $C \in \mathcal{C}_2(E)$ . Alors  $C$  est un endomorphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire  $C : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  tel qu'il existe  $\sigma_C \in \Gamma(TM)$  satisfaisant

$$\sigma_C \cdot \langle U, V \rangle = \langle C(U), V \rangle + \langle U, C(V) \rangle,$$

pour tous  $U, V \in \Gamma(E)$ . De plus, d'après le lemme 2.2.2,  $C$  vérifie

$$C(f\Theta) = fC(\Theta) + (\sigma_C \cdot f)\Theta,$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $\Theta \in \Gamma(E)$ .

Donc l'endomorphisme  $C$  est un endomorphisme dérivatif de  $E$  préservant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .  $\square$

Intéressons-nous à présent au cas  $r = 3$ . On prétend vérifier que  $\mathcal{C}_3(E)$  contient les crochets de Courant sur  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . En effet, un élément de  $\mathcal{C}_3(E)$  est un couple  $(C, \sigma_C)$  où  $C$  est une application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire

$$C : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$$

et

$$\sigma_C : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

est une application  $\mathbb{R}$ -linéaire satisfaisant

1.  $\sigma_C(\Theta) \cdot \langle U, V \rangle = \langle C(\Theta, U), V \rangle + \langle U, C(\Theta, V) \rangle$ ;
2.  $\langle C(\Theta_1, \Theta_2) + C(\Theta_2, \Theta_1), U \rangle = \sigma_C(U) \cdot \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle$ ,

pour toutes les sections  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, U, V \in \Gamma(E)$ . De plus, d'après le lemme 2.2.2, l'application  $C$  vérifie la règle de Leibniz

$$C(\Theta_1, f\Theta_2) = fC(\Theta_1, \Theta_2) + (\sigma_C(\Theta_1) \cdot f)\Theta_2,$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(E)$ .

Les éléments de  $\mathcal{C}_3(E)$  vérifient ainsi 3 des 5 axiomes originellement énoncés dans la définition (voir par exemple [44]) du crochet de Courant. On pose la définition suivante.

**DÉFINITION 2.2.4** *Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel tel que  $\Gamma(E)$  est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On appelle crochets de quasi-Courant sur  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  les éléments de  $\mathcal{C}_3(E)$ .*

Introduisons la définition suivante.

**DÉFINITION 2.2.5** *Une algèbre de Leibniz est une paire  $(V, [\cdot, \cdot])$  où*

- $V$  est un module sur l'anneau des fonctions  $C^\infty(M)$
- l'opération  $\mathbb{R}$ -bilinéaire  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  vérifie l'identité suivante

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]]$$

pour tous  $a, b, c \in V$ .

On remarque immédiatement que les algèbres de Lie sont exactement les algèbres de Leibniz  $(V, [\cdot, \cdot])$  munies d'un crochet  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique.

La proposition suivante nous permet de caractériser les éléments de  $\mathcal{C}_3(E)$  correspondant à une structure de Courant sur  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**PROPOSITION 2.2.6** *Soit  $C \in \mathcal{C}_3(E)$ . Si  $C$  vérifie (la version suivante de) l'identité de Jacobi*

$$C(\Theta_1, C(\Theta_2, \Theta_3)) = C(C(\Theta_1, \Theta_2), \Theta_3) + C(\Theta_2, C(\Theta_1, \Theta_3)) \quad (2.9)$$

pour toutes les sections  $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in \Gamma(E)$ , alors

1.  $(\Gamma(E), C(.,.))$  est une algèbre de Leibniz;
2.  $\sigma_C : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(TM)$  est un morphisme d'algèbres de Leibniz, c'est-à-dire vérifie

$$\sigma_C(C(\Theta_1, \Theta_2)) = [\sigma_C(\Theta_1), \sigma_C(\Theta_2)]_{TM}$$

pour tous  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(E)$ .

*Démonstration.* La première partie de la proposition se vérifie immédiatement. La démonstration de la deuxième partie est identique à la démonstration de la propriété analogue pour les algèbroïdes de Lie (voir [29]). Il suffit de développer  $C(\Theta_1, C(\Theta_2, f\Theta_3))$ , pour tous  $f \in C^\infty(M)$  et  $\Theta_3 \in \Gamma(E)$ , de deux façons différentes en utilisant l'identité de Jacobi (2.9) et la règle de Leibniz démontrée dans le lemme 2.2.2.  $\square$

**COROLLAIRE 2.2.7** ([58, 26]) *Si  $C \in \mathcal{C}_3(E)$  vérifie l'identité de Jacobi (2.9), alors  $C$  est un crochet de Courant sur  $(E, \langle ., . \rangle)$ .*

*Démonstration.* Les cinq axiomes de la définition originale<sup>5</sup> de crochet de Courant (non commutatif) sont vérifiés. En effet, deux des axiomes viennent de la définition de  $r$ -crochet de Courant et un troisième axiome est l'identité de Jacobi. Un quatrième axiome est la règle de Leibniz, mais c'est une conséquence de la définition de  $r$ -crochet de Courant (voir le lemme 2.2.2). Enfin, la proposition 2.2.6 montre que le dernier axiome ( $\sigma_C$  est un morphisme d'algèbres de Leibniz) est aussi vérifié.  $\square$

Le cas  $r = 3$  traité ci-dessus peut motiver la définition suivante

**DÉFINITION 2.2.8** *Un élément  $C \in \mathcal{C}_r(E)$  vérifiant l'identité de Jacobi*

$$\begin{aligned} & C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}, C(\Xi_1, \dots, \Xi_{r-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} C(\Xi_1, \dots, \Xi_{i-1}, C(\Theta_1, \dots, \Theta_{r-2}, \Xi_i), \Xi_{i+1}, \dots, \Xi_{r-1}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

est appelé un  $r$ -crochet de Courant sur  $(E, \langle ., . \rangle)$ .

Dans la suite de cette section, nous allons rappeler des résultats de [18] qui nous permettent de définir une structure<sup>6</sup> d'algèbre de Poisson graduée sur  $\mathcal{C}(E)$ .

On définit pour tout  $\Theta \in \Gamma(E)$  le produit intérieur

$$\begin{aligned} i_\Theta : \mathcal{C}_\bullet(E) &\longrightarrow \mathcal{C}_{\bullet-1}(E) \\ C &\longmapsto i_\Theta C = C(\Theta, ., \dots) \end{aligned}$$

Le théorème suivant permet de définir un produit sur  $\mathcal{C}(E)$ .

---

5. Voir le paragraphe où nous introduisons la définition 1.1.11 d'un algèbroïde de Courant. Voir aussi les définitions originales dans [34, 44].

6. Les signes de nos définitions du produit et du crochet sur  $\mathcal{C}(E)$  diffèrent de ceux employés par [18].

**THÉORÈME 2.2.9** ([18]) *Il existe sur  $\mathcal{C}(E)$  un produit, noté  $\wedge$ ,  $\mathbb{R}$ -bilinéaire, associatif, commutatif gradué, de degré 0, défini de manière unique par*

$$\begin{cases} f \wedge g = fg = g \wedge f \\ f \wedge \Theta = f\Theta = \Theta \wedge f, \end{cases}$$

pour tous  $f, g \in C^\infty(M)$  et  $\Theta \in \Gamma(E)$ , et tel que, pour tout  $\Theta \in \Gamma(E)$ ,  $i_\Theta$  soit une dérivation de  $(\mathcal{C}(E), \wedge)$  :

$$i_\Theta(C_1 \wedge C_2) = i_\Theta C_1 \wedge C_2 + (-1)^r C_1 \wedge i_\Theta C_2,$$

pour tous  $C_1 \in \mathcal{C}_r(E)$  et  $C_2 \in \mathcal{C}(E)$ .

Afin de mieux comprendre ce qu'est le produit  $\wedge$  sur  $\mathcal{C}(E)$  (et de vérifier en particulier qu'il correspond à ce que l'on pouvait prétendre) explicitons la définition de  $\wedge$  pour des éléments de degré 1 et 2. Pour tous  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{C}_1(E) = \Gamma(E)$  et  $C \in \mathcal{C}_2(E)$  on a

$$\begin{cases} \Theta_1 \wedge \Theta_2(U) = \langle \Theta_1, U \rangle \Theta_2 - \langle \Theta_2, U \rangle \Theta_1 \\ \Theta \wedge C(U, V) = \langle \Theta, U \rangle C(V) - \langle \Theta, V \rangle C(U) + \langle C(U), V \rangle \Theta, \end{cases} \quad (2.11)$$

pour tous  $U, V \in \Gamma(E)$ .

Le théorème suivant nous permet de définir un crochet de Lie sur  $\mathcal{C}(E)$ .

**THÉORÈME 2.2.10** ([18]) *1. Il existe une unique application  $\mathbb{R}$ -bilinéaire, anti-commutative graduée*

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{C}_r(E) \times \mathcal{C}_s(E) \longrightarrow \mathcal{C}_{r+s-2}(E)$$

définie par

$$\begin{cases} [f, g] = 0 \\ [f, \Theta] = 0 = [\Theta, f] \\ [f, C] = \sigma_C \cdot f = -[C, f] \\ [\Theta_1, \Theta_2] = \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle \\ i_\Theta D = [\Theta, D] = (-1)^{r+1} [D, \Theta] \end{cases}$$

pour tous  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(E)$ ,  $C \in \mathcal{C}_2(E)$  et  $D \in \mathcal{C}_r(E)$ ,  $r \geq 2$ , et demandant à ce que, pour tout  $\Theta \in \Gamma(E)$ ,  $i_\Theta = [\Theta, \cdot]$  soit une dérivation de  $(\mathcal{C}(E), [\cdot, \cdot])$ , i.e. :

$$i_\Theta[C_1, C_2] = [\Theta, [C_1, C_2]] = [[\Theta, C_1], C_2] + (-1)^r [C_1, [\Theta, C_2]],$$

pour tous  $C_1 \in \mathcal{C}_r(E)$  et  $C_2 \in \mathcal{C}(E)$ .

2. Le crochet  $[\cdot, \cdot]$  vérifie l'identité de Jacobi

$$[C_1, [C_2, C_3]] = [[C_1, C_2], C_3] + (-1)^{rs} [C_2, [C_1, C_3]],$$

pour tous  $C_1 \in \mathcal{C}_r(E)$ ,  $C_2 \in \mathcal{C}_s(E)$  et  $C_3 \in \mathcal{C}(E)$ .

On remarque en particulier que l'on a pour tous  $\Theta \in \mathcal{C}_1(E) = \Gamma(E)$  et  $C, C_1, C_2 \in \mathcal{C}_2(E)$

$$\begin{cases} [\Theta, C] = C(\Theta) = -[C, \Theta] \\ [C_1, C_2] = -[C_1, C_2]_{\text{com}} \end{cases}$$

où  $[\cdot, \cdot]_{\text{com}}$  est le commutateur.

Pour conclure cette section, le théorème suivant montre que le crochet et le produit définis ci-dessus munissent  $\mathcal{C}(E)$  d'une structure d'algèbre de Poisson.

**THÉORÈME 2.2.11** ([18]) *Le triplet  $(\mathcal{C}(E), \wedge, [\cdot, \cdot])$  est une algèbre de Poisson graduée de degré  $-2$ .*

## 2.3 Algèbre de Rothstein

Dans cette section nous allons introduire l'algèbre de Rothstein d'un fibré vectoriel  $E \rightarrow M$ . Nous devons choisir quelques structures sur  $E$ , en particulier une connexion, pour définir le crochet de l'algèbre de Rothstein. Ce crochet s'avérera être un crochet de Poisson gradué de degré  $-2$ . On montre dans la section suivante que cette algèbre de Poisson correspond à une sous-algèbre de  $(\mathcal{C}(E), \wedge, [\cdot, \cdot])$ . Nous remettons le lecteur à l'article [18] pour les démonstrations des résultats que nous présentons ici.

Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel. On définit, pour  $r \geq 0$ , l'espace vectoriel

$$\mathcal{R}_r(E) = \bigoplus_{r=2p+k} \Gamma(\wedge^k(E) \otimes S^p(TM)),$$

et on pose

$$\mathcal{R}(E) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{R}_r(E).$$

L'espace vectoriel  $\mathcal{R}(E)$  est muni d'un produit canonique, noté  $\wedge$ , défini par

$$(\Theta_1 \otimes v_1) \wedge (\Theta_2 \otimes v_2) = (\Theta_1 \wedge \Theta_2) \otimes (v_1 \vee v_2),$$

pour tous  $\Theta_i \in \wedge^{k_i}(\Gamma(E))$  et  $v_i \in S^{p_i}(\Gamma(TM))$ ,  $i = 1, 2$ . Dans la formule ci-dessus on a noté  $\vee$  le produit symétrique sur  $S^\bullet(TM)$ , c'est-à-dire que  $\vee$  est la "symétrisation" du produit tensoriel sur  $\otimes^\bullet TM$ .

La proposition suivante s'obtient immédiatement des définitions de  $\mathcal{R}(E)$  et du produit  $\wedge$ .

**PROPOSITION 2.3.1** ([18]) *L'espace vectoriel  $\mathcal{R}(E)$  muni du produit  $\wedge$  est une algèbre associative et commutative graduée, où  $\mathcal{R}_0(E) = C^\infty(M)$  est une sous-algèbre. De plus  $\mathcal{R}_0(E), \mathcal{R}_1(E)$  et  $\mathcal{R}_2(E)$  engendrent  $\mathcal{R}(E)$ .*

Dans la suite de cette section, on définit sur  $\mathcal{R}(E)$  le crochet de Rothstein

$$\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}_r(E) \times \mathcal{R}_s(E) \longrightarrow \mathcal{R}_{r+s-2}(E).$$

Comme  $\mathcal{R}(E)$  est engendré par  $C^\infty(M)$ ,  $\Gamma(E)$  et  $\Gamma(TM)$ , il suffit de définir  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$  pour une paire quelconque d'éléments générateurs (puis étendre comme une dérivation de  $(\mathcal{R}(E), \wedge)$ , imposant une règle de Leibniz).

La définition de  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$  quand un des arguments appartient à  $C^\infty(M)$  est presque immédiate. En effet, comme  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$  est de degré  $-2$ , on a

$$\{C^\infty(M), C^\infty(M)\}_{\mathcal{R}} = \{C^\infty(M), \Gamma(E)\}_{\mathcal{R}} = \{0\},$$

et il semble naturel de supposer que

$$\{v, f\}_{\mathcal{R}} = \pm v \cdot f,$$

pour tous  $v \in \Gamma(TM)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

La définition de  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$  dans les autres cas présuppose l'existence de certaines applications entre ces ensembles générateurs. Ainsi, considérons sur  $\Gamma(E)$  un produit scalaire, c'est-à-dire une application

$$\langle ., . \rangle : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire, symétrique et non dégénérée. De plus, choisissons une connexion sur  $E$

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (v, \Theta) &\longmapsto \nabla_v(\Theta) \end{aligned}$$

préservant  $\langle ., . \rangle$ , c'est-à-dire qui vérifie<sup>7</sup>

$$\langle \nabla_v(\Theta_1), \Theta_2 \rangle + \langle \nabla_v(\Theta_2), \Theta_1 \rangle = v \cdot \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle,$$

pour tous  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(E)$  et  $v \in \Gamma(TM)$ . La courbure de  $\nabla$  est une application  $R^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  définie par

$$R^\nabla(v_1, v_2)(\Theta) = \nabla_{v_1} \nabla_{v_2}(\Theta) - \nabla_{v_2} \nabla_{v_1}(\Theta) - \nabla_{[v_1, v_2]_{TM}}(\Theta),$$

pour tous  $v_1, v_2 \in \Gamma(TM)$  et  $\Theta \in \Gamma(E)$ . On vérifie que  $R^\nabla(.,.)(.)$  est  $C^\infty(M)$ -linéaire dans les 3 arguments et antisymétrique dans les deux premiers arguments. Ainsi,  $R^\nabla$  est un tenseur appartenant à  $\Gamma\left((\wedge^2 T^*M) \otimes (E^* \otimes E)\right)$ . Mais, comme  $\langle ., . \rangle$  est non dégénéré on peut identifier  $E^*$  à  $E$  et considérer que  $R^\nabla \in \Gamma\left((\wedge^2 T^*M) \otimes (\otimes^2 E)\right)$ . Par ailleurs, on a le lemme suivant

**LEMME 2.3.2** *Si  $\nabla$  est une connexion de  $(E, \langle ., . \rangle)$  préservant  $\langle ., . \rangle$ , alors sa courbure vérifie*

$$\langle R^\nabla(v_1, v_2)(\Theta_1), \Theta_2 \rangle = - \langle R^\nabla(v_1, v_2)(\Theta_2), \Theta_1 \rangle$$

7. On remarque que cette condition est une partie de l'identité de Jacobi que  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$  devra vérifier, quand 2 arguments appartiennent à  $\Gamma(E)$  et un troisième appartient à  $\Gamma(TM)$ .

Ainsi, la courbure de  $\nabla$  est un tenseur  $R^\nabla \in \Gamma\left((\wedge^2 T^*M) \otimes (\wedge^2 E)\right)$  que l'on peut envisager comme une application

$$R^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(\wedge^2 E),$$

$C^\infty(M)$ -bilinéaire et antisymétrique.

On est à présent en condition de définir le crochet de Rothstein,  $\{.,.\}_\mathcal{R}$ , sur  $\mathcal{R}(E)$ .

**THÉORÈME 2.3.3** ([18]) *Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel muni d'un produit scalaire. Choisissons  $\nabla$  une connexion sur  $E$ , préservant  $\langle ., . \rangle$ .*

*Il existe un unique crochet de Poisson gradué, de degré  $-2$ , sur  $\mathcal{R}(E)$ , défini par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f, g\}_\mathcal{R} = 0, \\ \{f, \Theta\}_\mathcal{R} = 0, \\ \{f, v\}_\mathcal{R} = -v \cdot f, \\ \{\Theta_1, \Theta_2\}_\mathcal{R} = \langle \Theta_1, \Theta_2 \rangle, \\ \{\Theta, v\}_\mathcal{R} = -\nabla_v(\Theta), \\ \{v_1, v_2\}_\mathcal{R} = [v_1, v_2]_{TM} - R^\nabla(v_1, v_2), \end{array} \right.$$

pour tous  $f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\Theta, \Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(E)$  et  $v, v_1, v_2 \in \Gamma(TM)$ .

## 2.4 Théorèmes d'isomorphisme

Dans cette section nous allons montrer que les différentes algèbres de Poisson définies dans les sections précédentes sont en correspondance par le biais de morphismes de Poisson.

### 2.4.1 Morphisme de Poisson entre $\mathcal{R}(E)$ et $\mathcal{C}(E)$

Soit  $E$  un fibré vectoriel muni d'un produit scalaire  $\langle ., . \rangle$ . On fixe  $\nabla$  une connexion sur  $E$  préservant  $\langle ., . \rangle$ , et on munit  $(\mathcal{R}(E), \wedge)$  du crochet de Poisson  $\{.,.\}_\mathcal{R}$  défini dans la proposition 2.3.3.

On définit une application

$$\Phi^\nabla : \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E)$$

en posant, pour les générateurs de  $\mathcal{R}(E)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi^\nabla(f) = f, \\ \Phi^\nabla(\Theta) = \Theta, \\ \Phi^\nabla(v) = -\nabla_v \end{array} \right.$$

et en imposant que

$$\Phi^\nabla(\Xi_1 \wedge \Xi_2) = \Phi^\nabla(\Xi_1) \wedge \Phi^\nabla(\Xi_2),$$

pour tous  $\Xi_1, \Xi_2 \in \mathcal{R}(E)$

**THÉORÈME 2.4.1** ([18]) *L'application  $\Phi^\nabla : \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E)$  est un morphisme injectif d'algèbres de Poisson.*

On remarque que  $\Phi^\nabla$  est une correspondance biunivoque entre  $\mathcal{R}_p(E)$  et  $\mathcal{C}_p(E)$  pour  $p = 0, 1, 2$ . Rappelons, par ailleurs que  $\mathcal{R}(E)$  est engendré par  $\mathcal{R}_0(E), \mathcal{R}_1(E)$  et  $\mathcal{R}_2(E)$ . On a alors la proposition suivante

**PROPOSITION 2.4.2** *L'image de  $\Phi^\nabla : \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{C}(E)$  est la sous-algèbre de  $(\mathcal{C}(E), \wedge)$ , notée  $\widehat{\mathcal{C}}(E)$ , engendrée par  $\mathcal{C}_0(E), \mathcal{C}_1(E)$  et  $\mathcal{C}_2(E)$ .*

**COROLLAIRE 2.4.3** *L'application*

$$\Phi^\nabla : \left( \mathcal{R}(E), \wedge, \{.,.\}_{\mathcal{R}} \right) \rightarrow \left( \widehat{\mathcal{C}}(E), \wedge, [.,.] \right)$$

*est un isomorphisme d'algèbres de Poisson.*

#### 2.4.2 Lien avec $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ : cas $E = A \oplus A^*$

Dans ce paragraphe nous montrons que les algèbres de Poisson considérées dans le paragraphe précédent correspondent, quand  $E = A \oplus A^*$ , à l'algèbre de Poisson  $(\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \{.,.\})$ .

Dans la section 2.1 on a construit un isomorphisme d'algèbres de Poisson

$$\overline{\Psi} : \left( \mathcal{P}/I, \wedge, \{.,.\}_{\mathcal{P}} \right) \longrightarrow \left( \text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge, \{.,.\} \right).$$

Dans la section précédente, considérant  $E = A \oplus A^*$  muni du produit scalaire standard, on a montré qu'une connexion  $\nabla$  sur  $A$  définit un isomorphisme d'algèbres de Poisson

$$\Phi^\nabla : \left( \mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge, \{.,.\}_{\mathcal{R}} \right) \longrightarrow \left( \widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*), \wedge, [.,.] \right).$$

L'objectif de cette section est de vérifier que ces algèbres de Poisson sont toutes isomorphes et que l'on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Pol}(T^*(\Pi A)) & \xleftarrow{\cong} & \mathcal{P}/I \\ \downarrow \cong & & \downarrow \nabla \cong \\ \widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*) & \xleftarrow[\nabla]{\cong} & \mathcal{R}(A \oplus A^*) \end{array}$$

### L'isomorphisme de $\mathcal{P}/I$ sur $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$

Considérons  $\nabla$  une connexion sur  $A$ . On prétend définir un isomorphisme, de degré 0, d'algèbres de Poisson graduées

$$\Psi^\nabla : \left( \mathcal{P}/I, \wedge, \{.,.\}_\mathcal{P} \right) \longrightarrow \left( \mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge, \{.,.\}_\mathcal{R} \right)$$

Rappelons que toute connexion sur  $A$ ,  $\nabla : \Gamma(A) \rightarrow \Omega^1(M) \otimes \Gamma(A)$ , peut être étendue de manière unique à une connexion sur  $A \oplus A^*$  préservant  $\langle ., . \rangle$ . Il suffit de définir la connexion  $\nabla^*$  sur  $A^*$  en posant pour toutes sections  $X \in \Gamma(A)$ ,  $\alpha \in \Gamma(A^*)$  et  $v \in \Gamma(TM)$

$$\langle \nabla_v^*(\alpha), X \rangle = v \cdot \langle \alpha, X \rangle - \langle \alpha, \nabla_v(X) \rangle.$$

Alors  $\nabla \oplus \nabla^*$  est une connexion sur  $A \oplus A^*$  préservant  $\langle ., . \rangle$ . Dans la suite de cette section, pour simplifier l'écriture, on écrira  $\nabla$  au lieu de  $\nabla \oplus \nabla^*$ , considérant ainsi que  $\nabla$  est une connexion sur  $A \oplus A^*$  préservant  $\langle ., . \rangle$ .

Toute connexion  $\nabla$  de  $A$  est ainsi une scission de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(\wedge^2(A \oplus A^*)) \longrightarrow \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle} \xrightarrow{\sigma} \Gamma(TM) \longrightarrow 0,$$

$\longleftarrow \nabla \longrightarrow$

et définit une bijection

$$\begin{aligned} \Psi_2^\nabla : \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle} &\longrightarrow \Gamma(\wedge^2(A \oplus A^*)) \oplus \Gamma(TM) \\ C &\longmapsto (C - \nabla_{\sigma(C)}) + (-\sigma(C)) \\ P - \nabla_v &\longleftarrow P + v \end{aligned} \quad (2.12)$$

Remarquons que l'espace image de  $\Psi_2^\nabla$ , l'ensemble  $\Gamma(\wedge^2(A \oplus A^*)) \oplus \Gamma(TM)$ , est exactement  $\mathcal{R}_2(A \oplus A^*)$  qui est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathcal{R}(A \oplus A^*), \{.,.\}_\mathcal{R})$ . On a la proposition suivante.

#### PROPOSITION 2.4.4 *L'application*

$$\Psi_2^\nabla : (\mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}, -[\cdot, \cdot]_{\text{com}}) \longrightarrow \left( \mathcal{R}_2(A \oplus A^*), \{.,.\}_\mathcal{R} \right),$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Rappelons la définition de l'algèbre graduée  $\mathcal{P} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{P}_k$ , où

$$\mathcal{P}_k = \bigoplus_{p+2q=k} \Gamma \left( \wedge^p(A \oplus A^*) \otimes S^q(\mathbb{A}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}) \right).$$

En particulier

$$\mathcal{P}_2 = \Gamma \left( \wedge^2(A \oplus A^*) \otimes \mathbb{R} \right) \oplus \Gamma \left( \mathbb{R} \otimes \mathbb{A}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle} \right)$$

et on peut étendre  $\Psi_2^\nabla$  en un morphisme, de degré 0, d'algèbres graduées

$$\Psi^\nabla : (\mathcal{P}, \wedge) \longrightarrow (\mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge)$$

en posant

$$\begin{cases} \Psi_0^\nabla(f) = f, \\ \Psi_1^\nabla(\Theta) = \Theta, \\ \Psi_2^\nabla(C) \text{ défini par (2.12),} \end{cases}$$

pour tous  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\Theta \in \Gamma(A \oplus A^*)$  et  $C \in \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$ . Puis on demande à ce que  $\Psi^\nabla$  soit linéaire et soit un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire que  $\Psi^\nabla$  vérifie

$$\Psi^\nabla(P \wedge Q) = \Psi^\nabla(P) \wedge \Psi^\nabla(Q),$$

pour tous  $P, Q \in \mathcal{P}$ .

**PROPOSITION 2.4.5** *L'application*

$$\Psi^\nabla : \left( \mathcal{P}, \wedge, \{.,.\}_\mathcal{P} \right) \longrightarrow \left( \mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge, \{.,.\}_\mathcal{R} \right)$$

est un morphisme, de degré 0, d'algèbres de Poisson graduées.

*Démonstration.* Il suffit de vérifier que  $\Psi^\nabla$  préserve les crochets de Poisson mais on le vérifie immédiatement sur les éléments de degré 0, 1 et 2, par construction de  $\Psi^\nabla$  et des crochets  $\{.,.\}_\mathcal{P}$  et  $\{.,.\}_\mathcal{R}$ .  $\square$

Le noyau de  $\Psi^\nabla$  est l'idéal  $I$  de  $(\mathcal{P}, \wedge)$  défini par

$$I = \langle \Theta \otimes 1 - 1 \otimes \Theta, \Theta \in \wedge^2(\Gamma(A \oplus A^*)) \rangle.$$

Alors  $\Psi^\nabla$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées de degré 0

$$\overline{\Psi^\nabla} : \left( \mathcal{P}/I, \wedge \right) \longrightarrow \left( \mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge, \cdot \right).$$

L'idéal  $I$  est déjà apparu dans la section 2.1. On a vu alors que  $I$  est un idéal de Poisson pour  $\{.,.\}_\mathcal{P}$  et que le crochet  $\{.,.\}_\mathcal{P}$  induit un crochet de Poisson, que l'on note aussi  $\{.,.\}_\mathcal{P}$ , sur  $\mathcal{P}/I$ .

On a le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 2.4.6** *L'application*

$$\overline{\Psi^\nabla} : \left( \mathcal{P}/I, \wedge, \{.,.\}_\mathcal{P} \right) \longrightarrow \left( \mathcal{R}(A \oplus A^*), \wedge, \{.,.\}_\mathcal{R} \right)$$

est un isomorphisme, de degré 0, d'algèbres de Poisson graduées.

### L'isomorphisme entre $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ et $\widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*)$

Définissons, pour tout  $p \geq 0$ ,

$$\Phi_p : \text{Pol}_p(T^*(\Pi A)) \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}_p(A \oplus A^*)$$

en posant pour tous  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\Theta \in \Gamma(A \oplus A^*)$ ,  $D \in \text{Pol}_2(T^*(\Pi A))$

$$\begin{cases} \Phi_0(f) = f, \\ \Phi_1(\Theta) = \Theta, \\ \Phi_2 D = \Phi(D), \end{cases}$$

où  $\Phi : \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)) \rightarrow \mathcal{D}(A \oplus A^*)^{\langle \dots \rangle}$  est l'application (bijective) définie par (2.7). De plus, demandons à ce que, pour tout  $p \geq 0$ ,  $\Phi_p$  soit  $C^\infty(M)$ -linéaire et vérifie

$$\Phi_p(Q \wedge R) = \Phi_q(Q) \wedge \Phi_r(R),$$

pour tous  $Q \in \text{Pol}_q(T^*(\Pi A))$  et  $R \in \text{Pol}_r(T^*(\Pi A))$ , avec  $p = q + r$ .

**Remarque:** On vérifie que la règle de Leibniz est satisfaite en degré 0, 1 et 2. En effet, pour tous  $\Theta_1, \Theta_2 \in \Gamma(A \oplus A^*)$ , on a

$$\Phi_2(\Theta_1 \wedge \Theta_2) = \Phi_1(\Theta_1) \wedge \Phi_1(\Theta_2),$$

i.e.,

$$\{., \Theta_1 \wedge \Theta_2\} = \Theta_1 \wedge \Theta_2,$$

où le produit  $\wedge$  du membre de droite est le produit sur  $\mathcal{C}(A \oplus A^*)$  défini par (2.11).

On construit ainsi un morphisme d'algèbres graduées, de degré 0

$$\Phi : (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge) \longrightarrow (\widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*), \wedge).$$

Les applications que l'on a considérées jusqu'à présent forment le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} \text{Pol}(T^*(\Pi A)) & \xleftarrow[\cong]{\bar{\Psi}} & \mathcal{P}/I \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \bar{\Psi}^\nabla \cong \\ \widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*) & \xleftarrow[\cong]{\Phi^\nabla} & \mathcal{R}(A \oplus A^*) \end{array}$$

On vérifie que ce diagramme est commutatif. En effet, comme les applications sont des morphismes d'algèbres, il suffit de le vérifier pour les éléments de degré 0, 1 et 2, où c'est évident par définition des applications. On a ainsi la proposition suivante.

**PROPOSITION 2.4.7** *L'application*

$$\Phi : (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge) \longrightarrow (\widehat{\mathcal{C}}(A \oplus A^*), \wedge)$$

est un isomorphisme, de degré 0, d'algèbres graduées.

Par ailleurs, on vérifie sur les éléments de degré 0, 1 et 2 que  $\Phi$  préserve les crochets de Poisson définis sur  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  et  $\widehat{\mathcal{C}}_p(A \oplus A^*)$ . On a ainsi le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.4.8** *L'application*

$$\Phi : (\text{Pol}(T^*(\Pi A)), \wedge, \{.,.\}) \longrightarrow (\widehat{\mathcal{C}}_p(A \oplus A^*), \wedge, [.,.])$$

est un isomorphisme, de degré 0, d'algèbres de Poisson graduées.

On conclut cette section en remarquant que le diagramme commutatif ci-dessus, formé par des bijections préservant les crochets défini sur chacun des espaces vectoriels gradués, nous permet de donner une démonstration alternative (et plus simple que celle proposée dans [18]) du fait que le crochet de Rothstein, défini dans le théorème 2.3.3, vérifie l'identité de Jacobi.

## 2.5 Structure bicroisée d'algèbres de Lie graduées

Dans cette section, nous définissons la notion de structure bicroisée d'algèbres de Lie graduées (voir [40]; voir [28] pour le cas non-gradué) et montrons que l'algèbre (de Lie graduée)

$$\left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \left( \left( (\wedge^{k+1} A^*) \wedge A \right) \oplus (\wedge^k A^* \otimes TM) \right), \{.,.\}_{\mathcal{R}} \right)$$

a une telle structure.

Considérons deux algèbres de Lie graduées  $(\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k, [.,.]_{\mathfrak{g}})$  et  $(\mathfrak{h} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_k, [.,.]_{\mathfrak{h}})$  et deux applications

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{g} &\rightarrow \text{End}(\mathfrak{h}) & \text{et} & & B : \mathfrak{h} &\rightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ S &\mapsto A_S & & & T &\mapsto B_T. \end{aligned}$$

**DÉFINITION 2.5.1** *On dit que  $(A, B)$  est une paire de représentations bicroisées de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  si  $A$  et  $B$  sont des homomorphismes d'algèbres de Lie graduées satisfaisant les conditions<sup>8</sup>*

8. Ces conditions traduisent le fait que  $A$  (resp.  $B$ ) peut être considéré comme un 1-cocycle de  $\mathfrak{h}$  (resp.  $\mathfrak{g}$ ) à valeurs dans le  $\mathfrak{h}$ -module  $\text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  (resp. le  $\mathfrak{g}$ -module  $\text{Hom}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ ) défini par la représentation  $B$  (resp.  $A$ ). Voir [28].

1.  $A_S([T_1, T_2]_{\mathfrak{h}}) = [A_S T_1, T_2]_{\mathfrak{h}} + (-1)^{|S||T_1|} [T_1, A_S T_2]_{\mathfrak{h}} - (-1)^{|S||T_1|} A_{B_{T_1}(S)}(T_2) + (-1)^{(|S|+|T_1|)|T_2|} A_{B_{T_2}(S)}(T_1)$
  2.  $B_T([S_1, S_2]_{\mathfrak{g}}) = [B_T S_1, S_2]_{\mathfrak{g}} + (-1)^{|T||S_1|} [S_1, B_T S_2]_{\mathfrak{g}} - (-1)^{|T||S_1|} B_{A_{S_1}(T)}(S_2) + (-1)^{(|T|+|S_1|)|S_2|} B_{A_{S_2}(T)}(S_1),$
- pour tous éléments homogènes  $S, S_1, S_2 \in \mathfrak{g}$  et  $T, T_1, T_2 \in \mathfrak{h}$  et où  $|X|$  représente le degré d'un élément  $X$ .

On a le théorème suivant (pour une preuve voir [40]).

### THÉORÈME 2.5.2

1. Soit  $(A, B)$  une paire de représentations bicroisées de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ . Alors  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  muni du crochet

$$[(S_1, T_1), (S_2, T_2)]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} = \left( [S_1, S_2]_{\mathfrak{g}} + B_{T_1}(S_2) - (-1)^{|T_2||S_1|} B_{T_2}(S_1), \right. \\ \left. [T_1, T_2]_{\mathfrak{h}} + A_{S_1}(T_2) - (-1)^{|S_2||T_1|} A_{S_2}(T_1) \right) \quad (2.13)$$

est une algèbre de Lie graduée (où le degré sur  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  est défini par  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h})_k = \mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{h}_k$ ).

2. Réciproquement, si  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}})$  est une algèbre de Lie graduée telle que  $\mathfrak{g} \oplus 0$  et  $0 \oplus \mathfrak{h}$  sont des sous-algèbres de Lie alors les applications  $A$  et  $B$  définies, pour tous  $S \in \mathfrak{g}_s$  et  $T \in \mathfrak{h}_t$ , par

$$[(S, 0), (0, T)]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} = (-(-1)^{st} B_T(S), A_S(T))$$

forment une paire de représentations bicroisées de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

**DÉFINITION 2.5.3** On appelle algèbre de Lie bicroisée de  $\mathfrak{g}$  et de  $\mathfrak{h}$  l'algèbre de Lie graduée  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}})$  définie, comme en (2.13), par une paire  $(A, B)$  de représentations bicroisées de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

Dans la suite de cette section nous allons vérifier que des structures d'algèbres de Lie bicroisées apparaissent dans notre contexte.

Considérons un fibré vectoriel  $A \xrightarrow{\pi} M$ , et  $\nabla$  une connexion sur  $A$ . Alors les espaces vectoriels

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathfrak{g}_k = \Gamma \left( (\wedge^{k-1} A^*) \wedge A \right), & k \geq 2 \\ \mathfrak{g}_1 = \Gamma(A), \\ \mathfrak{g}_0 = C^\infty(M), \\ \mathfrak{g}_k = \{0\}, & k < 0 \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_k, \text{ où } \begin{cases} \mathfrak{h}_k = \Gamma \left( \bigwedge^{k-2} A^* \otimes TM \right), & k \geq 3 \\ \mathfrak{h}_2 = \Gamma(TM), \\ \mathfrak{h}_1 = \{0\}, \\ \mathfrak{h}_0 = C^\infty(M), \\ \mathfrak{h}_k = \{0\}, & k < 0 \end{cases}$$

sont des sous-ensembles de l'algèbre de Rothstein  $\mathcal{R}(A \oplus A^*)$ . En effet, on a

$$\mathfrak{g}_k \oplus \mathfrak{h}_k \subseteq \mathcal{R}_k(A \oplus A^*),$$

pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

La proposition suivante est de vérification immédiate

**PROPOSITION 2.5.4**

1. Les ensembles  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  sont des sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Rothstein  $(\mathcal{R}(A \oplus A^*), \{.,.\}_{\mathcal{R}})$ ;
2. Si  $\nabla$  est une connexion plate, c'est-à-dire ayant une courbure nulle, alors  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre de Lie de  $(\mathcal{R}(A \oplus A^*), \{.,.\}_{\mathcal{R}})$ .

Dans la suite de la section, nous allons supposer que la connexion  $\nabla$  est plate. Ainsi  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  sont des sous-algèbres de Lie de  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, [.,.]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}})$  où le crochet  $[.,.]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}}$  coïncide avec le crochet de Rothstein  $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ . D'après le théorème précédent,  $(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, \{.,.\}_{\mathcal{R}})$  est alors une algèbre de Lie bicroisée de  $\mathfrak{g}$  et de  $\mathfrak{h}$ . Pour identifier la paire de représentations bicroisées  $(A, B)$  définissant cette algèbre bicroisée, considérons

$$\begin{aligned} S &= \xi \wedge X \in \mathfrak{g}_s = \Gamma \left( (\bigwedge^{s-1} A^*) \wedge A \right) \\ T &= \eta \otimes v \in \mathfrak{h}_t = \Gamma \left( \bigwedge^{t-2} A^* \otimes TM \right) \end{aligned}$$

et calculons

$$\begin{aligned} [(S, 0), (0, T)]_{\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}} &= \{\xi \wedge X, \eta \otimes v\}_{\mathcal{R}} \\ &= \{\xi \wedge X, \eta\}_{\mathcal{R}} \otimes v - (-1)^{st} \eta \wedge \{v, \xi \wedge X\}_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Posons alors

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{g} &\longrightarrow \text{End}(\mathfrak{h}) \\ S &\longmapsto A_S : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \\ T = \eta \otimes v &\longmapsto \{S, \eta\}_{\mathcal{R}} \otimes v, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{h} &\longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}) \\ T = \eta \otimes v &\longmapsto B_T : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h} \\ &S \mapsto \eta \wedge \{v, S\}_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.5.2, la proposition suivante est immédiate.

**PROPOSITION 2.5.5** *Les applications  $A$  et  $B$  définies ci-dessus forment une paire de représentations bicroisées de  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  et munissent l'espace vectoriel*

$$\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Gamma \left( \left( (\wedge^{k-1} A^*) \wedge A \right) \oplus \left( \wedge^{k-2} A^* \otimes TM \right) \right)$$

*d'une structure d'algèbre de Lie bicroisée.*

Dans le cas particulier où  $A = TM$ , on retrouve une structure connue d'algèbre bicroisée sur l'espace des dérivations des formes différentielles étudiée par Michor [39, 40].

## Chapitre 3

# Structures compatibles

L'objet de ce chapitre est d'écrire à l'aide du grand crochet divers types de compatibilités et de déformations entre tenseurs de degrés 2, et de démontrer ainsi leurs propriétés.

Cette écriture unifie plusieurs types de compatibilités bien connues, à savoir, étant donné un fibré vectoriel  $A \rightarrow M$ ,

- la compatibilité entre deux structures d'algèbroïde de Lie sur  $A$  (c'est-à-dire entre deux hamiltoniens de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ ) de bidegré  $(1, 2)$  ;
- la compatibilité entre une structure d'algèbroïde de Lie sur  $A$  et une structure d'algèbroïde de Lie sur  $A^*$  (c'est-à-dire entre deux hamiltoniens de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ ) de bidegré  $(1, 2)$  et de bidegré  $(2, 1)$  formant un bigébroïde de Lie  $(A, A^*)$ .

On montre que la condition de compatibilité des bigébroïdes de Lie

$$\{\mu, \mu'\} = 0,$$

où  $\mu$  et  $\mu'$  sont les deux hamiltoniens de degré total 3 qui encodent chacune des deux structures, est en fait une condition générale de compatibilité de structures d'algèbroïde de Lie sur  $A$  ou  $A^*$ .

Ensuite, étant donné  $A \rightarrow M$  un algèbroïde de Lie, on unifie les notions suivantes de compatibilités :

- compatibilité entre structures de Poisson (c'est-à-dire entre deux sections de  $\wedge^2 A \rightarrow M$ ),
- compatibilité entre une structure de Poisson et un tenseur de Nijenhuis (c'est-à-dire entre une section de  $\wedge^2 A \rightarrow M$  et une section de  $A \otimes A^* \rightarrow M$ ),
- compatibilité entre une structure de Poisson et une 2-forme, (c'est-à-dire entre une section de  $\wedge^2 A \rightarrow M$  et une section de  $\wedge^2 A^* \rightarrow M$ )
- compatibilité entre deux structures de Nijenhuis (c'est-à-dire entre deux sections de  $A \otimes A^* \rightarrow M$ ).

On peut montrer que, dans chacun des cas précédents, une des conditions est une condition d'algèbre multilinéaire fibre par fibre tandis que la seconde s'écrit sous la forme :

$$[H, H']_{FN} = 0$$

où  $H$  et  $H'$  sont les deux hamiltoniens de degré total 2 qui encodent les deux tenseurs en question, et  $[\cdot, \cdot]_{FN}$  est le crochet de Frölicher-Nijenhuis, que l'on a exprimé à l'aide du grand crochet au chapitre 1 (voir section 1.2.6). On donne également la signification de cette compatibilité en termes de compatibilité des algébroïdes de Lie obtenus comme déformation, par ces hamiltoniens, de la structure d'algébroïde de Lie sur  $A$ .

Dans la dernière section de ce chapitre, on étudie une généralisation de la compatibilité entre un bivecteur de Poisson et un  $(1, 1)$ -tenseur : les structures de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. Nous introduisons la définition de ces structures qui généralisent les structures de Poisson quasi-Nijenhuis introduites par Stiénon et Xu [52] sur l'algébroïde de Lie standard  $TM$  puis par Caseiro et al. [7] sur un algébroïde de Lie quelconque. On montre en particulier qu'une structure presque complexe sur  $A \oplus A^*$ , c'est-à-dire un morphisme  $J : A \oplus A^* \rightarrow A \oplus A^*$  tel que  $J^2 = -\text{Id}_{A \oplus A^*}$ , est intégrable, c'est-à-dire vérifie  $[J, J]_{FN} = 0$ , si et seulement si  $J$  correspond à une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. Ainsi, cette compatibilité plus générale s'exprime elle aussi, en un certain sens, par une condition de la forme  $[H, H']_{FN} = 0$ . Cette étude a fait l'objet d'une publication [1].

## 3.1 Algébroïdes de Lie compatibles et bigébroïdes de Lie

### 3.1.1 Algébroïdes de Lie compatibles et bicomplexes

Soient  $M$  une variété différentielle et  $A \xrightarrow{\pi} M$  un fibré vectoriel muni de deux structures d'algébroïde de Lie :  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  et  $(A, \rho', [\cdot, \cdot]')$ . Rappelons qu'à chacune de ces structures d'algébroïde de Lie correspondent des hamiltoniens sur  $\Pi A$ ,  $\mu$  et  $\mu'$  respectivement, tels que

$$\{\mu, \mu\} = \{\mu', \mu'\} = 0.$$

**DÉFINITION 3.1.1** *Deux structures d'algébroïde de Lie, sur le même fibré vectoriel,  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  et  $(A, \rho', [\cdot, \cdot]')$ , sont compatibles si, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $(A, \rho_\lambda, [\cdot, \cdot]_\lambda)$  est un algébroïde de Lie, où  $\rho_\lambda$  et  $[\cdot, \cdot]_\lambda$  sont définis par*

$$\begin{aligned} \rho_\lambda &= \rho + \lambda\rho' \\ [\cdot, \cdot]_\lambda &= [\cdot, \cdot] + \lambda[\cdot, \cdot]'. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que, si on note  $\mu_\lambda$  l'hamiltonien de  $\Pi A$  associé au triplet  $(A, \rho_\lambda, [\cdot, \cdot]_\lambda)$ , on a

$$\mu_\lambda = \mu + \lambda\mu'.$$

La proposition suivante traduit, en termes du grand crochet, la compatibilité entre deux structures d'algébroïdes de Lie sur  $A$ .

**PROPOSITION 3.1.2** *Deux structures d'algébroïde de Lie  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  et  $(A, \rho', [\cdot, \cdot]')$  sont compatibles si et seulement si  $\{\mu, \mu'\} = 0$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $(A, \rho, [., .])$  et  $(A, \rho', [., .]')$  sont compatibles si et seulement si  $(A, \rho_\lambda, [., .]_\lambda)$  est un algèbroïde de Lie, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$\{\mu_\lambda, \mu_\lambda\} = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Or, si on utilise la bilinéarité de  $\{., .\}$  et le fait que  $\mu$  et  $\mu'$  correspondent à des structures d'algèbroïde de Lie, on a

$$\begin{aligned} \{\mu_\lambda, \mu_\lambda\} &= \{\mu + \lambda\mu', \mu + \lambda\mu'\} \\ &= \{\mu, \mu\} + \lambda\{\mu, \mu'\} + \lambda\{\mu', \mu\} + \lambda^2\{\mu', \mu'\} \\ &= 2\lambda\{\mu, \mu'\}. \end{aligned}$$

Donc  $\{\mu_\lambda, \mu_\lambda\} = 0$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , si et seulement si  $\{\mu, \mu'\} = 0$ .  $\square$

On remarque qu'en termes du grand crochet, la condition de compatibilité pour que deux structures d'algèbroïde de Lie,  $\mu$  et  $\mu'$  soient compatibles ou forment un bigèbroïde de Lie est la même :  $\{\mu, \mu'\} = 0$ . Cela suggère une généralisation aux structures de Courant : *deux structures de Courant  $S$  et  $S'$  sont compatibles si  $\{S, S'\} = 0$ .*

Dans la suite de la section, nous montrons le lien entre la compatibilité de deux structures d'algèbroïde de Lie et l'existence d'un bicomplexe, une notion que l'on définit ci-dessous.

**DÉFINITION 3.1.3** *Soient  $\mathcal{A}$  une algèbre associative et  $\Omega$  une algèbre graduée sur  $\mathcal{A}$  munie de deux dérivations,  $d$  et  $\delta$ , de degré 1 et telles que  $d^2 = \delta^2 = 0$ . Le triplet  $(\Omega, d, \delta)$  est un bicomplexe si*

$$\delta \circ d + d \circ \delta = 0.$$

**PROPOSITION 3.1.4** *Les algèbroïdes de Lie  $(A, \rho, [., .])$  et  $(A, \rho', [., .]')$  sont compatibles si et seulement si  $(\Omega^\bullet(A), d, d')$  est un bicomplexe, où  $d$  et  $d'$  sont les différentielles extérieures respectives des algèbroïdes de Lie.*

*Démonstration.* On sait que  $d = \{\mu, .\}$  et  $d' = \{\mu', .\}$ . Ainsi, pour tout  $\xi \in \Omega^\bullet(A)$ , on a

$$\begin{aligned} d \circ d'(\xi) &= \{\mu, \{\mu', \xi\}\} \\ &= \{\{\mu, \mu'\}, \xi\} - \{\mu', \{\mu, \xi\}\} \\ &= \{\{\mu, \mu'\}, \xi\} - d' \circ d(\xi). \end{aligned}$$

Donc

$$(d \circ d' + d' \circ d)(\xi) = \{\{\mu, \mu'\}, \xi\}, \quad \forall \xi \in \Omega^\bullet(A).$$

Ainsi, si  $(A, \rho, [., .])$  et  $(A, \rho', [., .]')$  sont compatibles, autrement dit si  $\{\mu, \mu'\} = 0$ , alors  $(\Omega^\bullet(A), d, d')$  est un bicomplexe.

Réciproquement, si  $(\Omega^\bullet(A), d, d')$  est un bicomplexe, c'est-à-dire si  $d \circ d' + d' \circ d = 0$ , alors

$$\{\{\mu, \mu'\}, \xi\} = 0, \quad \forall \xi \in \Omega^\bullet(A),$$

et cela implique (pour une justification plus complète, voir le lemme suivant) que  $\{\mu, \mu'\} = 0$ , c'est-à-dire que  $(A, \rho, [., .])$  et  $(A, \rho', [., .]')$  sont compatibles.  $\square$

Le lemme suivant est assez intuitif, mais comme ce type de résultat est à la base de beaucoup de conclusions dans les preuves en grand crochet, nous allons en présenter une démonstration.

**LEMME 3.1.5** *Si  $F \in \text{Pol}_{(r,s)}(T^*(\Pi A))$ , avec  $r > 0$ , vérifie*

$$\{F, \xi\} = 0, \quad \forall \xi \in \Gamma(A^*),$$

alors  $F = 0$ .

*Démonstration.* Nous allons d'abord montrer qu'un hamiltonien  $F$  dans ces conditions doit être tensoriel, c'est-à-dire que  $F \in \Gamma(\bigwedge^{r+s}(A \oplus A^*))$ . Soit  $f \in C^\infty(M)$ , alors pour tout  $\xi \in \Gamma(A^*)$ , on a

$$\{F, f\xi\} = 0$$

et, si on applique l'identité de Leibniz, l'égalité précédente devient

$$\{F, f\}\xi + f\{F, \xi\} = 0,$$

ce qui équivaut, de par notre hypothèse sur  $F$ , à

$$\{F, f\}\xi = 0.$$

Comme cette égalité doit être vérifiée pour tout  $\xi \in \Gamma(A^*)$ , on doit avoir  $\{F, f\} = 0$ . On a ainsi montré que, pour tout  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\{F, f\} = 0$ . Ceci implique<sup>1</sup> que  $F$  est tensoriel, c'est-à-dire que  $F \in \Gamma(\bigwedge^{r+s}(A \oplus A^*))$ . Si on considère des coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$  sur  $T^*(\Pi A)$ ,  $F$  s'écrit alors sous la forme

$$F = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_s=1 \\ i_1 < \dots < i_s}}^n \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r=1 \\ j_1 < \dots < j_r}}^n F_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_s} \theta_{j_1} \wedge \dots \wedge \theta_{j_r}.$$

où

$$F_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = \left\{ \dots \left\{ \dots \{F, \xi^{j_r}\}, \dots, \xi^{j_1} \right\}, \dots, \theta_{i_s} \right\}, \dots, \theta_{i_1} \right\}$$

d'où on conclut, comme  $\{F, \xi\} = 0, \forall \xi \in \Gamma(A^*)$ , que

$$F_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = 0,$$

donc

$$F = 0. \quad \square$$

Après la démonstration de ce lemme, on peut immédiatement énoncer deux autres lemmes auxiliaires.

1. Cette affirmation peut facilement se vérifier en coordonnées locales. En effet, si on écrit  $F$  dans un système de coordonnées locales  $(x^i, \xi^a, p_i, \theta_a)$ , à partir du fait que  $\{F, x^i\} = 0$  on conclut que tout terme (dans l'écriture locale) de  $F$  contenant la coordonnée  $p_i$  est nécessairement nul.

**LEMME 3.1.6** Si  $F \in \text{Pol}_{(r,s)}(T^*(\Pi A))$ , avec  $s > 0$ , vérifie

$$\{F, \theta\} = 0, \quad \forall \theta \in \Gamma(A),$$

alors  $F = 0$ .

**LEMME 3.1.7** Si  $F \in \text{Pol}_k(T^*(\Pi A))$ , avec  $k > 0$ , vérifie

$$\{F, \Theta\} = 0, \quad \forall \theta \in \Gamma(A \oplus A^*),$$

alors  $F = 0$ .

### 3.1.2 Déformation par un bivecteur de Poisson

Soit  $(A, \mu)$  un algèbroïde de Lie. Soit  $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur. Notons que  $P$  peut être vu comme un morphisme ( $C^\infty(M)$ -linéaire)

$$\begin{aligned} P^\sharp : \Gamma(A^*) &\longrightarrow \Gamma(A) \\ \alpha &\longmapsto i_\alpha P = P(\alpha, \cdot). \end{aligned}$$

L'antisymétrie de  $P$  s'écrit alors  $P^\sharp + {}^t P^\sharp = 0$ .

En termes du grand crochet (voir section 1.2) on a, pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ ,

$$P(\alpha, \beta) = \{\beta, \{\alpha, P\}\} = \{\{\alpha, P\}, \beta\}.$$

Ainsi,

$$P^\sharp(\alpha) = \{\alpha, P\} = -\{P, \alpha\}.$$

Le bivecteur  $P$  permet de munir  $A^* \rightarrow M$  d'une ancre  $\rho_P$  et d'un crochet sur les sections  $[\cdot, \cdot]_P$  définis par

$$\begin{cases} \rho_P = \rho \circ P^\sharp : A^* \rightarrow TM \\ [\alpha, \beta]_P = \mathcal{L}_{P^\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{P^\sharp(\beta)}\alpha - d(P(\alpha, \beta)), \end{cases} \quad (3.1)$$

pour tous  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ . On notera  $A_P^*$  la structure correspondant au triplet  $(A^*, \rho_P, [\cdot, \cdot]_P)$ . Le théorème suivant nous fournit l'élément de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  associé à  $A_P^*$ .

**THÉORÈME 3.1.8** L'hamiltonien de  $\Pi A$  associé à la structure  $A_P^*$  est  $\mu_P := \{P, \mu\}$ .

*Démonstration.* Il suffit de prouver que

1.  $\rho_P(\alpha) \cdot f = \{\{\alpha, \{P, \mu\}\}, f\}$ ;
2.  $[\alpha, \beta]_P = \{\{\alpha, \{P, \mu\}\}, \beta\}$ ,

pour toutes sections  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$  et toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ .

1. Soient  $\alpha \in \Gamma(A^*)$  et  $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned}
\rho_P(\alpha) \cdot f &= \rho \circ P^\#(\alpha) \cdot f \\
&= \left\{ \left\{ P^\#(\alpha), \mu \right\}, f \right\} \\
&= \left\{ \left\{ \alpha, P \right\}, \mu \right\}, f \\
&= \left\{ \left\{ \alpha, \{P, \mu\} \right\}, f \right\} + \left\{ \left\{ \alpha, \mu \right\}, P \right\}, f \\
&= \left\{ \left\{ \alpha, \{P, \mu\} \right\}, f \right\}.
\end{aligned}$$

2. Soient  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ ,

$$\begin{aligned}
[\alpha, \beta]_P &= \mathcal{L}_{P^\#(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{P^\#(\beta)}\alpha - d(P(\alpha, \beta)) \\
&= i_{P^\#(\alpha)}d\beta - i_{P^\#(\beta)}d\alpha + d(P(\alpha, \beta)) \\
&= - \left\{ d\beta, P^\#(\alpha) \right\} + \left\{ d\alpha, P^\#(\beta) \right\} + \left\{ \mu, P(\alpha, \beta) \right\} \\
&= - \left\{ \left\{ \mu, \beta \right\}, \left\{ \alpha, P \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \mu, \alpha \right\}, \left\{ \beta, P \right\} \right\} + \left\{ \mu, \left\{ \beta, \left\{ \alpha, P \right\} \right\} \right\} \\
&= - \left\{ \left\{ \mu, \beta \right\}, \left\{ \alpha, P \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \mu, \alpha \right\}, \left\{ \beta, P \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \mu, \beta \right\}, \left\{ \alpha, P \right\} \right\} - \\
&\quad \left\{ \beta, \left\{ \mu, \left\{ \alpha, P \right\} \right\} \right\} \\
&= \left\{ \left\{ \mu, \alpha \right\}, \left\{ \beta, P \right\} \right\} - \left\{ \left\{ \beta, \left\{ \mu, \alpha \right\} \right\}, P \right\} - \left\{ \left\{ \mu, \alpha \right\}, \left\{ \beta, P \right\} \right\} \\
&\quad + \left\{ \left\{ \alpha, \left\{ P, \mu \right\} \right\}, \beta \right\} \\
&= \left\{ \left\{ \alpha, \left\{ P, \mu \right\} \right\}, \beta \right\} \quad \square
\end{aligned}$$

La proposition suivante montre que les structures  $\mu$  et  $\mu_P$  sont toujours ‘‘compatibles’’.

**PROPOSITION 3.1.9** *Considérons  $(A, \mu)$  un algébroïde de Lie,  $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur et la structure  $\mu_P = \{P, \mu\}$ , induite par  $P$  sur  $A^*$ . On a alors*

1.  $\{\mu, \mu_P\} = 0$
2.  $(A, A_P^*)$  forme un bigébroïde de Lie si et seulement si  $A_P^*$  est un algébroïde de Lie.

*Démonstration.* La démonstration de 1. est immédiate parce que  $\{\mu, \mu\} = 0$  et la démonstration de 2., en termes du grand crochet, est une conséquence immédiate de 1.  $\square$

Pour quels bivecteurs  $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$  le triplet  $(A^*, \rho_P, [\cdot, \cdot]_P)$  est-il un algébroïde de Lie? En termes du grand crochet et en utilisant le théorème précédent on peut affirmer que  $A_P^*$  est un algébroïde de Lie si et seulement si

$$\left\{ \left\{ P, \mu \right\}, \left\{ P, \mu \right\} \right\} = 0.$$

En appliquant l’identité de Jacobi et le fait que  $\{\mu, \mu\} = 0$ , on obtient

$$\left\{ \left\{ \left\{ P, \mu \right\}, P \right\}, \mu \right\} = 0,$$

i.e.,

$$\left\{ \mu, [P, P]_{SN} \right\} = 0,$$

où  $[\cdot, \cdot]_{SN}$  est le crochet de Schouten-Nijenhuis. Ainsi, si  $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$  est un bivecteur de Poisson, c'est-à-dire un bivecteur tel que  $[P, P]_{SN} = 0$ , alors  $(A^*, \rho_P, [\cdot, \cdot]_P)$  est un algèbroïde de Lie. Plus généralement, on a démontré le théorème suivant.

**THÉORÈME 3.1.10** *Soit  $P \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur. La structure  $A_P^*$  définie par (3.1) est un algèbroïde de Lie si et seulement si*

$$\left\{ \mu, [P, P]_{SN} \right\} = 0.$$

*En particulier, si  $P$  est un bivecteur de Poisson alors  $A_P^*$  est un algèbroïde de Lie.*

### 3.1.3 Déformation par un tenseur de Nijenhuis

Soit  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels. On considérera aussi  $N$  comme une application  $C^\infty(M)$ -linéaire  $N : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$  ou comme un  $(1, 1)$ -tenseur  $N \in \Gamma(A^* \otimes A)$ . Le tenseur  $N$  permet de déformer la structure d'algèbroïde de Lie  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  en un triplet  $(A, \rho_N, [\cdot, \cdot]_N)$  défini par

$$\begin{cases} \rho_N = \rho \circ N : A \rightarrow TM \\ [X, Y]_N = [NX, Y] + [X, NY] - N[X, Y], \end{cases} \quad (3.2)$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ . Cette déformation de la structure d'algèbroïde de Lie est aussi appelée contraction par  $N$ , voir [5, 6]. On notera  $A_N$  la structure  $(A, \rho_N, [\cdot, \cdot]_N)$ . Le théorème suivant nous fournit l'élément de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  associé à  $A_N$ .

**THÉORÈME 3.1.11** *L'hamiltonien de  $\Pi A$  associé à la structure  $A_N$  est  $\mu_N := \{N, \mu\}$ .*

*Démonstration.* Il suffit de prouver que

1.  $\rho_N(X) \cdot f = \{\{X, \{N, \mu\}\}, f\}$ ;
2.  $[X, Y]_N = \{\{X, \{N, \mu\}\}, Y\}$ ,

pour toutes sections  $X, Y \in \Gamma(A)$  et toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ .

1. Soient  $X \in \Gamma(A)$  et  $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} \rho_N(X) \cdot f &= \rho \circ N(X) \cdot f \\ &= \rho(\{X, N\}) \cdot f \\ &= \{\{\{X, N\}, \mu\}, f\} \\ &= \{\{X, \{N, \mu\}\}, f\} + \{\{\{X, \mu\}, N\}, f\} \\ &= \{\{X, \{N, \mu\}\}, f\}. \end{aligned}$$

2. Soient  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,

$$\begin{aligned} \{\{X, \{N, \mu\}\}, Y\} &= \{\{\{X, N\}, \mu\}, Y\} + \{\{N, \{X, \mu\}\}, Y\} \\ &= [NX, Y] + \{N, \{\{X, \mu\}, Y\}\} + \{\{N, Y\}, \{X, \mu\}\} \\ &= [NX, Y] - N([X, Y]) + [X, NY] \\ &= [X, Y]_N \end{aligned} \quad \square$$

La proposition suivante montre que les structures  $(A, \mu)$  et  $(A, \mu_N)$  sont toujours compatibles.

**PROPOSITION 3.1.12** *Considérons  $(A, \mu)$  un algébroïde de Lie,  $N \in \Gamma(A^* \otimes A)$  et la structure  $\mu_N = \{N, \mu\}$ , induite par  $N$  sur  $A$ . On a alors*

1.  $\{\mu, \mu_N\} = 0$
2.  $(A, \mu)$  et  $(A, \mu_N)$  sont des algébroïdes de Lie compatibles si et seulement si  $(A, \mu_N)$  est un algébroïde de Lie.

*Démonstration.* La démonstration de 1. est immédiate parce que  $\{\mu, \mu\} = 0$  et la démonstration de 2., en termes du grand crochet, est une conséquence immédiate de 1.  $\square$

Pour quels  $(1, 1)$ -tenseurs  $N \in \Gamma(A^* \otimes A)$  le triplet  $(A, \rho_N, [\cdot, \cdot]_N)$  est-il un algébroïde de Lie? Dans une première tentative de réponse, on pourrait de demander que  $N : (\Gamma(A), [\cdot, \cdot]_N) \rightarrow (\Gamma(A), [\cdot, \cdot])$  soit un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire tel que soit vérifiée la condition

$$N[X, Y]_N = [NX, NY]$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ . En effet, dans ce cas comme  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  est un algébroïde de Lie,  $(A, \rho \circ N, [\cdot, \cdot]_N)$  est aussi un algébroïde de Lie. Les morphismes  $N$  satisfaisant cette condition vont être particulièrement importants dans la suite de ce texte et on introduit la notion suivante.

**DÉFINITION 3.1.13** *Soit  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels. La torsion de Nijenhuis de  $N$  est un morphisme  $T_N : \Gamma(\wedge^2 A) \rightarrow \Gamma(A)$ ,  $C^\infty(M)$ -bilinéaire défini par*

$$T_N(X, Y) = [NX, NY] - N([X, Y]_N),$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ . On dit que  $N$  est un tenseur de Nijenhuis si  $T_N = 0$ .

On a, par définition de  $T_N$  la proposition suivante.

**PROPOSITION 3.1.14** *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie et  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels. Alors  $T_N = 0$  si et seulement si  $(A, \rho_N, [\cdot, \cdot]_N)$  est un algébroïde de Lie et  $N : (A, \rho_N, [\cdot, \cdot]_N) \rightarrow (A, \rho, [\cdot, \cdot])$  est un morphisme d'algébroïdes de Lie.*

Dans la proposition précédente on voit que la condition  $T_N = 0$  est trop restrictive et ne répond pas à notre question de savoir pour quels  $(1, 1)$ -tenseurs  $N$  la structure  $(A, \mu_N)$  est un algébroïde de Lie. Si on se pose la question en termes du grand crochet, on sait que  $(A, \mu_N)$  est un algébroïde de Lie si et seulement si

$$\{\mu_N, \mu_N\} = 0$$

i.e.,

$$\{\{N, \mu\}, \{N, \mu\}\} = 0.$$

En appliquant l'identité de Jacobi et le fait que  $\{\mu, \mu\} = 0$ , on obtient

$$\{\{\{N, \mu\}, N\}, \mu\} = 0.$$

Or rappelons que le crochet de Frölicher-Nijenhuis (voir paragraphe 1.2.6) de  $N$  avec lui-même s'écrit en termes du grand crochet

$$[N, N]_{FN} = \{\{N, \mu\}, N\} + \{N^2, \mu\},$$

ainsi, utilisant de nouveau le fait que  $\{\mu, \mu\} = 0$ , on voit que l'équation précédente est équivalente à

$$\{\mu, [N, N]_{FN}\} = 0.$$

On a prouvé ainsi le théorème suivant.

**THÉORÈME 3.1.15** *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie et  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels. La structure  $(A, \rho \circ N, [\cdot, \cdot]_N)$  définie par (3.2) est un algébroïde de Lie si et seulement si*

$$\{\mu, [N, N]_{FN}\} = 0.$$

Afin d'unifier les résultats précédents, démontrons le lemme suivant.

**LEMME 3.1.16** *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie et  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels. On a*

1.  $T_N(X, Y) = \frac{1}{2} \left( ([X, Y]_N)_N - [X, Y]_{N^2} \right);$
2.  $T_N(X, Y) = \left\{ \left\{ X, -\frac{1}{2} [N, N]_{FN} \right\}, Y \right\},$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ .

*Démonstration.* 1. Soient  $X, Y \in \Gamma(A)$ , on a

$$\begin{aligned} T_N(X, Y) &= [NX, NY] - N \left( [X, Y]_N \right) \\ &= [NX, NY] - N \left( [NX, Y] + [X, NY] - N([X, Y]) \right) \\ &= [NX, NY] - N([NX, Y]) - N([X, NY]) + N^2([X, Y]). \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} ([X, Y]_N)_N &= [NX, Y]_N + [X, NY]_N - N([X, Y]_N) \\ &= 2 \left( [NX, NY] - N([NX, Y]) - N([X, NY]) \right) \\ &\quad + [N^2X, Y] + [X, N^2Y] + N^2([X, Y]) \\ &= 2 \left( [NX, NY] - N([NX, Y]) - N([X, NY]) + N^2([X, Y]) \right) \\ &\quad + [N^2X, Y] + [X, N^2Y] - N^2([X, Y]) \\ &= 2T_N(X, Y) + [X, Y]_{N^2}. \end{aligned}$$

On conclut donc que

$$T_N(X, Y) = \frac{1}{2} \left( \left( [X, Y]_N \right)_N - [X, Y]_{N^2} \right).$$

2. On traduit l'égalité du point précédent en termes du grand crochet

$$\begin{aligned} T_N(X, Y) &= \frac{1}{2} (\{ \{ X, \{ N, \{ N, \mu \} \} \}, Y \} - \{ \{ X, \{ N^2, \mu \} \} \}, Y \}) \\ &= \frac{1}{2} (\{ \{ X, \{ N, \{ N, \mu \} \} \} - \{ N^2, \mu \} \}, Y) \end{aligned}$$

Or, rappelons que pour tout  $(1, 1)$ -tenseur  $N$  on a

$$\begin{aligned} [N, N]_{FN} &= \{ \{ N, \mu \}, N \} + \{ i_N N, \mu \} \\ &= - \{ N, \{ N, \mu \} \} + \{ N^2, \mu \}. \end{aligned}$$

Donc

$$T_N(X, Y) = -\frac{1}{2} \left( \left\{ \left\{ X, [N, N]_{FN} \right\}, Y \right\} \right)$$

et, dans ce sens, on peut dire que, en termes d'hamiltoniens sur  $\Pi A$ , on a

$$T_N = -\frac{1}{2} [N, N]_{FN}. \quad \square$$

Nous réécrivons en termes de  $T_N$  les principaux résultats que nous avons montrés dans ce paragraphe.

**THÉORÈME 3.1.17** *Soient  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie et  $N : A \rightarrow A$  un morphisme de fibrés vectoriels.*

1. *La structure  $A_N$  définie par (3.2) est un algébroïde de Lie si et seulement si*

$$\{ \mu, T_N \} = 0,$$

*où  $T_N$  est la torsion de Nijenhuis de  $N$ .*

2. *En particulier, si  $N$  est un tenseur de Nijenhuis alors  $A_N$  est un algébroïde de Lie.*

3. *On a  $T_N = 0$  si et seulement si  $(A, \rho \circ N, [\cdot, \cdot]_N)$  est un algébroïde de Lie et  $N : (A, \rho \circ N, [\cdot, \cdot]_N) \rightarrow (A, \rho, [\cdot, \cdot])$  est un morphisme d'algébroïdes de Lie.*

### 3.1.4 Compatibilités de tenseurs de degré 2

Considérons  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$  un algébroïde de Lie. Dans ce paragraphe, nous définissons différentes notions de compatibilités entre tenseurs appartenant à  $\Gamma(\wedge^2(A \oplus A^*))$ . Rappelons d'abord les définitions des tenseurs que nous allons considérer.

**DÉFINITION 3.1.18** 1. Une 2-forme présymplectique est une section  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  fermée, c'est-à-dire telle que

$$d\omega = 0,$$

où  $d$  est la différentielle extérieure induite par  $(A, \rho, [\cdot, \cdot])$ .

2. Un bivecteur de Poisson est une section  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  telle que

$$[\pi, \pi]_{SN} = 0,$$

où  $[\cdot, \cdot]_{SN}$  est le crochet de Schouten-Nijenhuis.

3. Un tenseur de Nijenhuis est une section  $N \in \Gamma(A^* \otimes A)$  telle que

$$[N, N]_{FN} = 0,$$

où  $[\cdot, \cdot]_{FN}$  est le crochet de Frölicher-Nijenhuis.

Rappelons aussi que, en termes du grand crochet, on écrit

$$\begin{aligned} \omega^b(X) &= \{X, \omega\}, & \forall X \in \Gamma(A); \\ \pi^\sharp(\alpha) &= \{\alpha, \pi\}, & \forall \alpha \in \Gamma(A^*); \\ N(X) &= \{X, N\}, & \forall X \in \Gamma(A). \end{aligned}$$

Les différentes compatibilités entre ces tenseurs furent étudiées par de nombreux auteurs entre lesquels Magri et Morosi [38], Gutkin [15], Magri et Kosmann-Schwarzbach [29], Vaisman [60] et Crainic [8]. Nous exprimons dans cette section les différentes compatibilités en termes du grand crochet, et nous en profitons pour généraliser à un algèbroïde de Lie  $A$  quelconque ce qui était souvent défini et démontré seulement pour l'algèbroïde de Lie standard  $A = TM$ .

### Bivecteurs de Poisson compatibles

**DÉFINITION 3.1.19** Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux bivecteurs de Poisson. On dit que  $P_1$  et  $P_2$  sont compatibles si

$$[P_1, P_2]_{SN} = 0.$$

**Remarque:** La condition  $[P_1, P_2]_{SN} = 0$  équivaut à dire que  $P_1 + \lambda P_2$  est un bivecteur de Poisson pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 3.1.20** Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux bivecteurs de Poisson.

1. Les algèbroïdes de Lie  $A_{P_1}^*$  et  $A_{P_2}^*$  sont compatibles si et seulement si  $\left\{ \mu, [P_1, P_2]_{SN} \right\} = 0$
2. En particulier, si  $P_1$  et  $P_2$  sont compatibles alors les algèbroïdes de Lie  $A_{P_1}^*$  et  $A_{P_2}^*$  sont compatibles.

### Tenseurs de Nijenhuis compatibles

**DÉFINITION 3.1.21** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux tenseurs de Nijenhuis. On dit que  $N_1$  et  $N_2$  sont compatibles si

$$[N_1, N_2]_{FN} = 0.$$

**Remarque:** La condition  $[N_1, N_2]_{FN} = 0$  équivaut à dire que  $N_1 + \lambda N_2$  est un tenseur de Nijenhuis pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**PROPOSITION 3.1.22** Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux tenseurs de Nijenhuis.

1. Les algébroïdes de Lie  $A_{N_1}$  et  $A_{N_2}$  sont compatibles si et seulement si  $\left\{ \mu, [N_1, N_2]_{FN} \right\} = 0$
2. En particulier, si  $N_1$  et  $N_2$  sont compatibles alors les algébroïdes de Lie  $A_{N_1}$  et  $A_{N_2}$  sont compatibles.

On pourrait penser que deux tenseurs de Nijenhuis compatibles,  $N_1$  et  $N_2$ , commutent en termes de déformation de l'algébroïde de Lie  $A$ . Mais, en fait, on voit facilement que l'on a le résultat suivant.

**PROPOSITION 3.1.23** Soit  $A \rightarrow M$  un algébroïde de Lie et considérons  $N_1$  et  $N_2$  deux  $(1, 1)$ -tenseurs. On définit alors, comme dans (3.2), différentes structures déformées qui, à priori, ne sont pas des structures d'algébroïde de Lie mais vérifient les relations suivantes.

1. Supposons que  $[N_1, N_2]_{\text{com}} = 0$ , où  $[\cdot, \cdot]_{\text{com}}$  est le commutateur sur  $\text{End}(A)$ . Alors les égalités suivantes sont satisfaites

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{N_1 \circ N_2} = A_{N_2 \circ N_1}, \\ \left( A_{N_1} \right)_{N_2} = \left( A_{N_2} \right)_{N_1}, \end{array} \right.$$

2. Si  $[N_1, N_2]_{FN} = 0$  on a l'égalité suivante,

$$\left( A_{N_1} \right)_{N_2} = A_{N_1 \circ N_2}.$$

3. En particulier, si  $N_1$  et  $N_2$  sont deux tenseurs de Nijenhuis satisfaisant  $[N_1, N_2]_{\text{com}} = [N_1, N_2]_{FN} = 0$  alors les quatre structures déformées sont égales

$$A_{N_1 \circ N_2} = A_{N_2 \circ N_1} = \left( A_{N_1} \right)_{N_2} = \left( A_{N_2} \right)_{N_1}$$

et cette structure déformée est un algébroïde de Lie.

**$P\Omega$ -structure (à la Magri-Morosi)**

Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson et  $\omega$  une 2-forme présymplectique. On définit

$$N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$$

et on considère  $N$  comme un élément de  $\Gamma(A^* \otimes A)$ .

**DÉFINITION 3.1.24** *Soit  $A$  un algèbroïde de Lie. Considérons  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur de Poisson et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  une 2-forme présymplectique. Le couple  $(\pi, \omega)$  forme une  $P\Omega$ -structure si*

$$d(i_N \omega) = 0,$$

où  $d$  est la différentielle extérieure induite par la structure d'algèbroïde de Lie sur  $A$ .

**Remarque:** On remarque que comme  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$  on définit bien une 2-forme  $\omega_N$  en posant

$$\omega_N^\flat = \omega^\flat \circ N.$$

Et de plus  $i_N \omega = 2\omega_N$ .

**PROPOSITION 3.1.25** *Soit  $A$  un algèbroïde de Lie. Considérons  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur de Poisson et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  une 2-forme présymplectique. Si le couple  $(\pi, \omega)$ , forme une  $P\Omega$ -structure, alors  $N$  est un tenseur de Nijenhuis. La réciproque est vraie si le bivecteur  $\pi$  est non dégénéré.*

Avant de démontrer la proposition (et afin de simplifier la démonstration) énonçons le lemme suivant.

**LEMME 3.1.26** *Considérons  $\pi$  un bivecteur de Poisson,  $\omega$  une 2-forme fermée et  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$ . Alors on a<sup>2</sup>*

$$\{\pi, \{N, \mu\}\} = -\{N, \{\pi, \mu\}\} = -\frac{1}{2} \{\{N, \pi\}, \mu\}.$$

La démonstration du lemme est directe. Démontrons à présent la proposition.

*Démonstration.* Le tenseur  $N$  est de Nijenhuis si et seulement si

$$[N, N]_{FN} = 0. \tag{3.3}$$

En utilisant la caractérisation de  $[\cdot, \cdot]_{FN}$  en grand crochet, cette égalité est équivalente à

$$\{\{N, \mu\}, N\} = -\{N^2, \mu\}.$$

---

2. Si on utilise les notations du paragraphe suivant sur les  $PN$ -structures, cette égalité se traduit par  $C(\pi, N) = 0$ .

On sait que, en termes du grand crochet,  $N = \{\omega, \pi\}$  et on peut vérifier que  $N^2 = \frac{1}{2} \{\{N, \pi\}, \omega\}$ . Ainsi, en appliquant l'identité de Jacobi au membre de gauche de l'égalité précédente, on obtient

$$\{\{\{N, \mu\}, \omega\}, \pi\} + \{\omega, \{\{N, \mu\}, \pi\}\} = -\frac{1}{2} \{\{\{N, \pi\}, \omega\}, \mu\}.$$

En utilisant le fait que  $\omega$  est fermée, c'est-à-dire  $\{\mu, \omega\} = 0$ , et l'identité de Jacobi on peut échanger  $\omega$  et  $\mu$  dans le terme du membre de droite. Au second terme du membre de gauche, on applique le lemme précédent et on obtient ainsi l'égalité

$$\{\{\{N, \mu\}, \omega\}, \pi\} + \frac{1}{2} \{\omega, \{\{N, \pi\}, \mu\}\} = -\frac{1}{2} \{\{\{N, \pi\}, \mu\}, \omega\},$$

qui se simplifie immédiatement pour obtenir

$$\{\{\{N, \mu\}, \omega\}, \pi\} = 0.$$

On applique de nouveau l'identité de Jacobi et l'égalité  $\{\mu, \omega\} = 0$  pour obtenir

$$\{\{\{N, \omega\}, \mu\}, \pi\} = 0.$$

Or  $\{\{N, \omega\}, \mu\} = d(i_N \omega)$ . On a ainsi démontré que

$$[N, N]_{FN} = 0 \iff \{d(i_N \omega), \pi\} = 0.$$

Alors, si  $(\pi, \omega)$  est une  $P\Omega$ -structure, i.e., si  $d(i_N \omega) = 0$  on a  $[N, N]_{FN} = 0$ .

Réciproquement, supposons que  $[N, N]_{FN} = 0$ . Si  $\pi$  est non dégénéré, il existe une 2-forme  $\omega_\pi$  telle que  $\{\pi, \omega_\pi\} = \text{Id}_{A^*}$  et dans ce cas, on peut appliquer  $\{., \omega_\pi\}$  aux deux membres de l'égalité

$$\{d(i_N \omega), \pi\} = 0,$$

et on obtient

$$d(i_N \omega) = 0,$$

c'est-à-dire que  $(\pi, \omega)$  est une  $P\Omega$ -structure. □

### ***PN-structure (à la Magri-Morosi)***

Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson et  $N$  un  $(1, 1)$ -tenseur. On définit un tenseur  $\pi_N \in \Gamma(\otimes^2 A)$ , c'est-à-dire une application  $\pi_N : A^* \otimes A^* \rightarrow M \times \mathbb{R}$  en posant

$$\pi_N(., .) = \pi({}^t N(., .)),$$

ou, de forme équivalente, en posant

$$\pi_N^\sharp = \pi^\sharp \circ {}^t N.$$

**LEMME 3.1.27** *Si  $\pi_N$  est antisymétrique, c'est-à-dire si  $\pi^\sharp \circ {}^t N = N \circ \pi^\sharp$ , alors en termes du grand crochet, on a*

$$\pi_N = -\frac{1}{2} \{N, \pi\} = \frac{1}{2} i_N \pi.$$

**DÉFINITION 3.1.28** *On dit que les tenseurs  $\pi$  et  $N$  sont compatibles si*

1.  $\pi^\sharp \circ {}^t N = N \circ \pi^\sharp$ ;
2.  $C(\pi, N) := \{\pi, \{N, \mu\}\} + \{N, \{\pi, \mu\}\} = 0$ .

*Un couple de tenseurs compatibles  $(\pi, N)$  forme une PN-structure<sup>3</sup> si  $N$  est un tenseur de Nijenhuis.*

Les deux conditions que les tenseurs  $\pi$  et  $N$  doivent vérifier pour être compatibles peuvent se traduire par

1. Le tenseur  $\pi_N(\cdot, \cdot) = \pi({}^t N(\cdot), \cdot)$  est antisymétrique ;
2. La structure d'algèbroïde de Lie sur  $A$ ,  $\mu$ , déformée par  $N$  puis transportée sur  $A^*$  par  $\pi$  est égale à la structure  $\mu$  transportée sur  $A^*$  par  $\pi$  puis déformée par  ${}^t N$ .

Cette deuxième condition peut être représentée sous la forme d'un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mu & \xrightarrow{\pi} & \mu_\pi \\ \left. \begin{array}{c} \downarrow N \\ \downarrow \end{array} \right\} & & \left. \begin{array}{c} \downarrow {}^t N \\ \downarrow \end{array} \right\} \\ \mu_N & \xrightarrow{\pi} & (\mu_N)_\pi = (\mu_\pi)_{t_N} \end{array}$$

**PROPOSITION 3.1.29** *Soit  $(\pi, N)$  un couple de tenseurs compatibles. Si  $N$  est de Nijenhuis alors  $\pi_N = \frac{1}{2} i_N \pi$  est un bivecteur de Poisson. La réciproque est vraie si le bivecteur  $\pi$  est non dégénéré.*

Avant de démontrer la proposition, énonçons deux lemmes auxiliaires de vérification immédiate.

**LEMME 3.1.30** *Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson et  $N$  un  $(1,1)$ -tenseur.*

1. *On a les égalités suivantes*

$$\{\pi, \{\{\pi, N\}, \mu\}\} = \{\pi, \{N, \{\pi, \mu\}\}\} = \frac{1}{2} \{\pi, \{\pi, \{N, \mu\}\}\}.$$

2. *Les affirmations suivantes sont équivalentes*

- $\pi$  est de Poisson pour  $\mu_N$  ;
- $\pi$  et  $i_N \pi$  sont compatibles ;
- $\pi$  est une "2-forme fermée" sur  $A^*$  pour  $(\mu_\pi)_{t_N}$ .

---

3. Un couple  $(\pi, N)$  dans ces conditions est aussi appelé une structure de Poisson Nijenhuis.

**LEMME 3.1.31** *Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson et  $N$  un  $(1,1)$ -tenseur. Alors*

$$C(\pi, N) = 0 \implies \pi \text{ est de Poisson pour } \mu_N.$$

Démontrons à présent la proposition

*Démonstration.* Le tenseur  $N$  est de Nijenhuis si et seulement si  $T_N = 0$ , ou en termes du grand crochet,

$$\{N, \{N, \mu\}\} - \{N^2, \mu\} = 0.$$

Si on applique  $\{\pi, \cdot\}$  à chacun des membres on obtient

$$\{\pi, \{N, \{N, \mu\}\}\} - \{\pi, \{N^2, \mu\}\} = 0.$$

Comme  $\pi$  et  $N$  commutent ( $\pi^\# \circ {}^t N = N \circ \pi^\#$ ) on vérifie que l'on a l'égalité  $\{\{\pi, N\}, N\} = 2\{\pi, N^2\}$ . Ainsi, après quelques applications de l'identité de Jacobi, l'égalité précédente s'écrit

$$\{\{\pi, N^2\}, \mu\} + \{N, \{\{\pi, \mu\}, N\}\} - \{N^2, \{\pi, \mu\}\} = 0.$$

Appliquons de nouveau  $\{\pi, \cdot\}$  à chacun des membres. Alors, si on applique l'identité de Jacobi et le fait que  $\pi$  est de Poisson, on obtient l'égalité

$$\{\{\pi, N^2\}, \{\pi, \mu\}\} + \{\pi, \{N, \{\{\pi, \mu\}, N\}\}\} - \{\{\pi, N^2\}, \{\pi, \mu\}\} = 0$$

que l'on simplifie immédiatement pour écrire

$$\{\pi, \{N, \{N, \{\pi, \mu\}\}\}\} = 0.$$

On applique l'identité de Jacobi, et on obtient

$$\{\{\pi, N\}, \{N, \{\pi, \mu\}\}\} + \{N, \{\pi, \{N, \{\pi, \mu\}\}\}\} = 0.$$

D'après les lemmes auxiliaires précédant cette démonstration, comme  $C(\pi, N) = 0$ , on peut conclure que le second terme est nul. Quant au premier terme, la condition  $C(\pi, N) = 0$  peut s'écrire  $\{N, \{\pi, \mu\}\} = -\frac{1}{2}\{\{\pi, N\}, \mu\}$ . Ainsi, l'égalité précédente s'écrit

$$\{\{\pi, N\}, \{\{\pi, N\}, \mu\}\} = 0.$$

Donc,  $\pi_N$  est un bivecteur de Poisson. □

### **$\Omega N$ -structure (à la Magri-Morosi)**

Soient  $\omega$  une 2-forme présymplectique et  $N$  un tenseur de Nijenhuis. On définit un tenseur  $\omega_N \in \Gamma(\otimes^2 A^*)$ , c'est-à-dire une application  $\omega_N : A \otimes A \rightarrow \mathbb{R}$  en posant

$$\omega_N(\cdot, \cdot) = \omega(N(\cdot), \cdot),$$

ou, de forme équivalente, en posant

$$\omega_N^b = \omega^b \circ N.$$

**LEMME 3.1.32** *Si  $\omega_N$  est antisymétrique, c'est-à-dire si  $\omega^b \circ N = {}^t N \circ \omega^b$ , alors en termes du grand crochet, on a*

$$\omega_N = \frac{1}{2} \{N, \omega\} = \frac{1}{2} i_N \omega.$$

**DÉFINITION 3.1.33** *Le couple  $(\omega, N)$  forme une  $\Omega N$ -structure si*

$$\begin{cases} \omega^b \circ N = {}^t N \circ \omega^b; \\ \{\mu, \{N, \omega\}\} = 0. \end{cases}$$

**PROPOSITION 3.1.34** *Le couple  $(\omega, N)$  forme une  $\Omega N$ -structure si et seulement si  $\omega_N$  est une 2-forme présymplectique.*

*Démonstration.* La démonstration est immédiate si on applique le lemme précédent.  $\square$

**Remarque:** Dans [38], la condition de compatibilité est l'annulation du tenseur  $S(\omega, N) \in \Gamma(\otimes^3 A^*)$  que l'on peut définir par (voir [38], p.149)

$$S(\omega, N)(X, Y, Z) = \frac{1}{2} (-i_N d\omega + d(i_N \omega))(X, Y, Z) + d\omega(X, Y, NZ),$$

pour tous  $X, Y, Z \in \Gamma(A)$ .

Quand  $d\omega = 0$ ,  $S(\omega, N) = 0$  est équivalent à  $d(i_N \omega) = 0$  et on retrouve la condition de compatibilité de la définition ci-dessus.

### Hitchin pairs (Crainic)

**DÉFINITION 3.1.35** *Une paire de Hitchin sur  $A$  est un couple  $(\omega, T)$  tel que*

- $\omega$  est une forme symplectique, c'est-à-dire une forme présymplectique non dégénérée;
- $T \in \Gamma(A^* \otimes A)$ ;
- $\omega^b \circ T = {}^t T \circ \omega^b$ ;
- $d(\omega_T) = 0$ .

On voit immédiatement que les conditions de compatibilités d'une  $\Omega N$ -structure,  $(\omega, N)$ , ou d'une paire de Hitchin,  $(\omega, T)$ , sont les mêmes : la 2-forme déformée par le tenseur,  $\omega_N$  ou  $\omega_T$ , doit être antisymétrique et fermée. Les différences entre les deux structures sont dans les conditions exigées pour la 2-forme :

- présymplectique dans le cas d'une  $\Omega N$ -structure et symplectique dans le cas d'une paire de Hitchin ;

ou pour le  $(1, 1)$ -tenseur :

- tenseur de Nijenhuis dans le cas d'une  $\Omega N$ -structure et tenseur quelconque dans le cas d'une paire de Hitchin.

### Formes complémentaires (Vaisman)

**DÉFINITION 3.1.36** Soit  $\pi$  un bivecteur de Poisson sur  $A$ . Une 2-forme  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  est dite une 2-forme complémentaire de  $\pi$  si

$$[\omega, \omega]_\pi = 0$$

où  $[\cdot, \cdot]_\pi$  est le crochet sur  $\Omega^\bullet(A)$  induit par la structure d'algèbroïde de Lie  $A_\pi^*$  définie par (3.1).

**PROPOSITION 3.1.37** Soit  $\pi$  un bivecteur de Poisson sur  $A$  et  $\omega$  une 2-forme. Alors

$$[\omega, \omega]_\pi = -d(i_N\omega) + 2i_N(d\omega),$$

où  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$ .

*Démonstration.* En termes du grand crochet et d'éléments de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$ , on a

$$[\omega, \omega]_\pi = \{ \{ \omega, \{ \pi, \mu \} \}, \omega \},$$

et, si on applique deux fois l'identité de Jacobi, on obtient

$$[\omega, \omega]_\pi = 2 \{ N, \{ \mu, \omega \} \} - \{ \mu, \{ N, \omega \} \},$$

ce qui correspond à

$$[\omega, \omega]_\pi = 2i_N d\omega - 2d(\omega_N). \quad \square$$

**COROLLAIRE 3.1.38** Si  $\omega$  est fermée (ou, plus généralement, si  $i_{\pi^\sharp \alpha} d\omega = 0$ ,  $\forall \alpha \in \Gamma(A^*)$ ) on a

$$[\omega, \omega]_\pi = 0 \iff d(i_N\omega) = 0.$$

### Relations entre les différentes compatibilités

Dans ce paragraphe, nous mettons en évidence certaines relations entre les différentes compatibilités étudiées dans cette section.

**PROPOSITION 3.1.39** Considérons  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ . Si  $(\pi, \omega)$  est une  $P\Omega$ -structure, alors  $(\omega, N)$  est une  $\Omega N$ -structure, où  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$ .

*Démonstration.* La preuve est immédiate car, dans ce cas, la condition de compatibilité entre  $(\pi, \omega)$  et  $(\omega, N)$  est la même :  $d(\omega_N) = d(i_N\omega) = 0$ . Par ailleurs, la proposition 3.1.25 garantit que  $N$  est un tenseur de Nijenhuis et le fait que  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$  implique que  $\omega$  et  $N$  commutent au sens où  $\omega^\flat \circ N = {}^t N \circ \omega^\flat$ .  $\square$

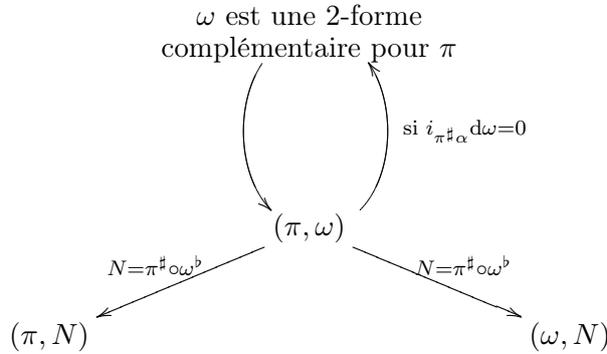
**PROPOSITION 3.1.40** Considérons  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ . Si  $(\pi, \omega)$  est une  $P\Omega$ -structure, alors  $(\pi, N)$  est une  $PN$ -structure, où  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$ .

*Démonstration.* Comme  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$ ,  $\pi$  et  $N$  commutent au sens où  $\pi^\sharp \circ {}^t N = N \circ \pi^\sharp$ . De plus, d'après la proposition 3.1.25,  $N$  est un tenseur de Nijenhuis. Enfin, on a

$$\begin{aligned} C(\pi, N) &= \{\pi, \{N, \mu\}\} + \{N, \{\pi, \mu\}\} \\ &= \{\pi, \{\{\omega, \pi\}, \mu\}\} + \{\{\omega, \pi\}, \{\pi, \mu\}\}. \end{aligned}$$

Appliquons l'identité de Jacobi à plusieurs reprises sur le premier terme du membre de droite. Alors, utilisant le fait que  $\pi$  est un bivecteur de Poisson ( $\{\{\pi, \mu\}, \pi\} = 0$ ) et que  $\omega$  est fermée ( $\{\mu, \omega\} = 0$ ), on conclut rapidement que  $C(\pi, N) = 0$ .  $\square$

Nous regroupons les résultats obtenus dans le diagramme suivant. Certaines flèches manquantes dans ce diagramme sont valables sous des conditions de non-dégénérescence de  $\pi$  ou de  $\omega$  (pour le diagramme complet, voir [30]).



### 3.2 Poisson quasi-Nijenhuis avec flux

Dans cette section, nous définissons, sur un algèbroïde de Lie, la notion de structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. Les structures de Poisson quasi-Nijenhuis (sans flux) ont été introduites par Stiénon et Xu [52] sur l'algèbroïde de Lie standard  $TM$  puis par Caseiro et al. [7] sur un algèbroïde de Lie quelconque. En physique, la géométrie des structures de Poisson quasi-Nijenhuis a été étudiée par Zucchini [65]. Dans cet article, Zucchini s'est aussi intéressé aux structures de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux mais nous remarquons ici qu'il manque une condition dans la définition de Zucchini de ces structures. Cette condition, manquante dans [65], était déjà considérée dans [52] et apparaît naturellement ici quand on demande à ce que certaines structures (par exemple presque complexes) soient intégrables (ou que certains crochets vérifient l'identité de Jacobi).

Le flux qui apparaît dans ces structures est une 3-forme fermée, notée  $H$ , qui déforme en un certain sens les conditions satisfaites par une structure de Poisson quasi-Nijenhuis (voir [52, 7]). Au lieu de l'expression "avec flux" ("with background" en anglais) certains auteurs utilisent le terme "tordu" ("twisted" en anglais). Dans ce texte nous avons voulu éviter la terminologie de "torsion" (ou "twist") à cause du résultat de la proposition 3.2.18. En effet, on prouve qu'une classe particulière de structures de Poisson quasi-Nijenhuis

avec flux est obtenue en tordant, par un procédé expliqué dans [46, 53, 20], une structure d'algèbroïde de Lie par un bivecteur de Poisson puis par une 2-forme. Ainsi, nous réservons la terminologie "tordu" (ou "twisted") quand on tord des structures par une 2-forme ou un bivecteur, comme expliquée dans [46, 53, 20].

### 3.2.1 Définition et cas particuliers

Dans cette section, nous introduisons la structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur un algèbroïde de Lie  $A$ . C'est une généralisation des structures de Poisson Nijenhuis (voir [38, 29]) et des structures de Poisson quasi-Nijenhuis (voir [52, 7]).

**DÉFINITION 3.2.1** *Une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur un algèbroïde de Lie  $A$  est un quadruplet  $(\pi, N, \psi, H)$  où  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$ ,  $N \in \Gamma(A \otimes A^*)$ ,  $\psi \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$  et  $H \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$  sont tels que  $N \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp \circ {}^t N$ ,  $d\psi = 0$ ,  $dH = 0$  et vérifient les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \pi \text{ est un bivecteur de Poisson,} \\ C_{\pi, N}(\alpha, \beta) = 2i_{\pi^\sharp} \alpha \wedge \pi^\sharp \beta H, \\ T_N(X, Y) = \pi^\sharp(i_{NX \wedge Y} H - i_{NY \wedge X} H + i_{X \wedge Y} \psi), \\ d_N \psi = d\mathcal{H}, \end{cases} \quad (3.4)$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ , où  $\mathcal{H}$  est la 3-forme définie par

$$\mathcal{H}(X, Y, Z) = \circlearrowleft_{X, Y, Z} H(NX, NY, Z), \quad (3.5)$$

pour tous  $X, Y, Z \in \Gamma(A)$ .

On vérifie aisément que si on considère  $H = 0$ , alors on obtient la définition de structure de Poisson quasi-Nijenhuis [52] et si, de plus, on considère  $\psi = 0$  alors on obtient une structure de Poisson Nijenhuis.

Les conditions (3.4) s'expriment, en termes du grand crochet, de la forme suivante :

$$\begin{cases} \{\{\pi, \mu\}, \pi\} = 0, \\ \{\{\pi, \mu\}, N\} + \{\{N, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, H\}, \pi\} = 0, \\ \{\{N, \mu\}, N\} + \{N^2, \mu\} - 2\{\pi, \psi\} + \{\{\pi, H\}, N\} + \{\{N, H\}, \pi\} = 0, \\ 2\{\{N, \mu\}, \psi\} = \{\mu, \{N, \{N, H\}\} - \{N^2, H\}\}. \end{cases} \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et géométrie généralisée

Dans cette section, nous considérons que le fibré vectoriel  $A \oplus A^*$  est muni du produit scalaire standard  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  défini par

$$\langle X + \alpha, Y + \beta \rangle = \beta(X) + \alpha(Y)$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$  et  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ . Sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , considérons une structure d'algèbroïde de Courant définie par l'hamiltonien  $S$ , c'est-à-dire que  $S$  est une fonction

appartenant à  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  de degré total 3 et telle que  $\{S, S\} = 0$ . Notons  $[\cdot, \cdot]$  le crochet de Courant-Dorfman induit par  $S$  sur  $\Gamma(A \oplus A^*)$  et défini par

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \{\{\mathcal{X}, S\}, \mathcal{Y}\}$$

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ .

Considérons un morphisme de fibrés vectoriels

$$J : A \oplus A^* \rightarrow A \oplus A^*.$$

On verra souvent  $J$  comme un tenseur de type  $(1, 1)$  sur  $A \oplus A^*$ , c'est-à-dire  $J \in \Gamma((A \oplus A^*)^* \otimes (A \oplus A^*))$ .

**DÉFINITION 3.2.2** *Le tenseur  $J$  est orthogonal si*

$$\langle J(\mathcal{X}), \mathcal{Y} \rangle + \langle \mathcal{X}, J(\mathcal{Y}) \rangle = 0,$$

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire standard sur  $A \oplus A^*$ .

**Remarque:** Le morphisme  $J$  est un endomorphisme dérivatif, c'est-à-dire  $J \in \mathcal{D}(A \oplus A^*)$ , de symbole nul. Ainsi, dire que  $J$  est orthogonal équivaut à dire que  $J$  préserve  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  (voir définition 2.1.5) et, d'après ce que l'on a déjà vu précédemment, cela équivaut à dire que

$$J \in \Gamma\left(\bigwedge^2(A \oplus A^*)\right) \subset \text{Pol}_2(T^*(\Pi A)).$$

On peut déformer, par le tenseur  $J$ , la structure de Courant considérée sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Le crochet déformé est défini en posant

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_J = [J\mathcal{X}, \mathcal{Y}] + [\mathcal{X}, J\mathcal{Y}] - J[\mathcal{X}, \mathcal{Y}],$$

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ , où  $[\cdot, \cdot]$  est le crochet de Courant-Dorfman défini sur  $\Gamma(A \oplus A^*)$ .

**LEMME 3.2.3** *Soit  $J$  un endomorphisme orthogonal de  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Le crochet déformé par  $J$ ,  $[\cdot, \cdot]_J$ , correspond à l'hamiltonien*

$$S_J := \{J, S\} \in \text{Pol}(T^*(\Pi A)),$$

au sens où

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_J = \{\{\mathcal{X}, S_J\}, \mathcal{Y}\},$$

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ .

**PROPOSITION 3.2.4** ([5]) *Soit  $J$  un endomorphisme orthogonal de  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . L'hamiltonien  $S_J := \{J, S\}$  définit une structure de Courant sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  si et seulement si  $\{S, \{J, \{J, S\}\}\} = 0$ .*

Notons que la condition de la proposition précédente se traduit en termes de structures de Courant compatibles :  $([\cdot, \cdot]_J)_J$  est compatible avec  $[\cdot, \cdot]$ .

On peut aussi définir la torsion de Nijenhuis de  $J$ ,  $T_J \in \Gamma(\Lambda^2(A \oplus A^*)^* \otimes (A \oplus A^*))$ , en posant

$$T_J(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = [J\mathcal{X}, J\mathcal{Y}] - J([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_J),$$

pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ .

**LEMME 3.2.5** *Pour tous  $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \Gamma(A \oplus A^*)$ , on a*

$$T_J(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \frac{1}{2} \left( ([\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_J)_J - [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_{J^2} \right).$$

**COROLLAIRE 3.2.6** ([5]) *Soit  $J$  un endomorphisme orthogonal de  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . L'endomorphisme  $J$  est un morphisme de Courant de  $(A \oplus A^*, S_J)$  vers  $(A \oplus A^*, S)$  si et seulement si l'hamiltonien  $\{J, \{J, S\}\}$  correspond à  $[\cdot, \cdot]_{J^2}$ .*

**DÉFINITION 3.2.7** *Un endomorphisme  $J$  orthogonal sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est une structure presque c.p.s. si  $J^2 = \lambda \text{Id}_{A \oplus A^*}$ , pour un certain  $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ . Une structure presque c.p.s.  $J$  est intégrable (et est appelée une structure c.p.s.) quand  $T_J = 0$ .*

L'abréviation "c.p.s." est due à Vaisman [61] et correspond aux trois différentes structures que l'on considère<sup>4</sup> : si  $\lambda = -1$ ,  $J$  est une structure presque complexe ; si  $\lambda = 1$ ,  $J$  est une structure presque produit ; et si  $\lambda = 0$ ,  $J$  est une structure presque sous-tangente.

**PROPOSITION 3.2.8** *Considérons un hamiltonien  $S$ , définissant une structure d'algébroïde de Courant sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et  $J$  une structure presque c.p.s. Alors on a*

$$T_J(X, Y) = \left\{ \left\{ X, \widehat{T}_J \right\}, Y \right\}$$

où<sup>5</sup> :

$$\widehat{T}_J = \frac{1}{2} (\{J, \{J, S\}\} - \lambda S). \quad (3.7)$$

Dans la suite de ce texte on omettra le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  et  $T_J$  représentera aussi bien l'élément de  $\Gamma(\Lambda^2(A \oplus A^*)^* \otimes (A \oplus A^*))$  que l'hamiltonien sur  $\Pi A$  défini par (3.7).

**Exemples:** Soit  $\mu$  une structure d'algébroïde de Lie sur  $A$ . Dans les exemples suivants, on considère  $S = \mu$  et le crochet sur  $\Gamma(A \oplus A^*)$  s'écrit

$$[X + \alpha, Y + \beta] = [X, Y]_\mu + \mathcal{L}_X \beta - i_Y \text{d}\alpha,$$

4. Dans [12], Grabowski introduit la notion d'algébroïde de Courant irréductible comme un algébroïde de Courant où tout tenseur de Nijenhuis orthogonal est proportionnel à une structure c.p.s.. On prouve, par exemple, que la structure d'algébroïde de Courant classique sur  $TM \oplus T^*M$  est irréductible.

5. Sans l'hypothèse  $J^2 = \lambda \text{Id}_{A \oplus A^*}$ , cette formule ne pouvait pas être obtenue directement de  $[J, J]_{FN} = 0$  ou du lemme 3.2.5 parce que, quand  $J$  est orthogonal,  $i_J J = J^2$  est "anti-orthogonal" (au sens où  $\langle J^2 \mathcal{X}, \mathcal{Y} \rangle = \langle \mathcal{X}, J^2 \mathcal{Y} \rangle$  et  $J^2 \notin \text{Pol}(T^*(\Pi A))$ ).

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$  et  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ .

1. Soit  $N : A \rightarrow A$  un endomorphisme de fibrés vectoriels tel que  $N^2 = \epsilon \text{id}_A$ , avec  $\epsilon = \pm 1$ . On étend  $N$  en un morphisme orthogonal sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  si on définit, pour tout  $\alpha \in \Gamma(A^*)$ ,  $N(\alpha) \in \Gamma(A^*)$  en posant

$$\langle N(\alpha), X \rangle = - \langle \alpha, N(X) \rangle,$$

pour tout  $X \in \Gamma(A)$ . Alors

$$N^2 = \epsilon \text{id}_{A \oplus A^*}$$

et  $N$  est une structure presque c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . De plus, si  $N : A \rightarrow A$  a une torsion de Nijenhuis nulle alors  $N$  est une structure c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle, S = \mu)$  avec  $\lambda = \epsilon$ .

2. Considérons  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  un bivecteur et le morphisme de fibrés vectoriels associé  $\pi^\sharp : A^* \rightarrow A$ . On peut étendre  $\pi^\sharp$  à  $A \oplus A^*$  si on pose  $\pi^\sharp|_A = 0$ . Alors  $\pi^\sharp$  est un morphisme orthogonal de  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  tel que  $(\pi^\sharp)^2 = 0$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} T_{\pi^\sharp} &= \frac{1}{2} (\{\pi, \{\pi, \mu\}\}) \\ &= -\frac{1}{2} [\pi, \pi]_{SN}. \end{aligned}$$

Donc, tout bivecteur  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  est une structure presque c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  avec  $\lambda = 0$  et  $\pi$  est intégrable, pour  $S = \mu$ , si et seulement si  $\pi$  est un bivecteur de Poisson.

3. Considérons  $\sigma \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  une 2-forme et le morphisme de fibrés vectoriels associé  $\sigma^\flat : A \rightarrow A^*$ . On peut étendre  $\sigma^\flat$  à  $A \oplus A^*$  si on pose  $\sigma^\flat|_{A^*} = 0$ . Alors  $\sigma^\flat$  est un morphisme orthogonal de  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  tel que  $(\sigma^\flat)^2 = 0$ . Par ailleurs,  $\sigma^\flat$  est toujours intégrable car

$$\begin{aligned} T_{\sigma^\flat} &= \frac{1}{2} (\{\sigma, \{\sigma, \mu\}\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc, toute 2-forme  $\sigma \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  est une structure c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  avec  $\lambda = 0$ .

**PROPOSITION 3.2.9** *Considérons un hamiltonien  $S$ , définissant une structure d'algébroïde de Courant sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et  $J$  une structure presque c.p.s. Alors*

1.  $J$  définit une structure de Courant,  $S_J$ , sur  $A \oplus A^*$  si et seulement si  $\{S, T_J\} = 0$ ;
2. [5] La torsion de Nijenhuis de  $J$  est nulle, i.e.,  $\{J, \{J, S\}\} = \lambda S$ , si et seulement si  $S_J$  est une structure de Courant et  $J$  est un morphisme de Courant de  $(A \oplus A^*, S_J)$  vers  $(A \oplus A^*, S)$ .

Dans la proposition suivante nous allons décomposer les structures presque c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  en (somme de) structures plus simples sur  $A$  ou sur  $A^*$ .

**PROPOSITION 3.2.10** ([8, 61]) *1. Un tenseur de type  $(1, 1)$  sur  $A \oplus A^*$  est orthogonal si et seulement si on peut le représenter sous la forme matricielle suivante, pour toutes sections  $X \in \Gamma(A)$  et  $\alpha \in \Gamma(A^*)$ ,*

$$J \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \pi^\sharp \\ \sigma^\flat & -{}^t N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

où  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$ ,  $\sigma \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  et  $N \in \Gamma(A \otimes A^*)$ .

*2. Un tenseur  $J$  dans ces conditions est une structure presque c.p.s. si et seulement si*

$$\begin{cases} N \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp \circ {}^t N, \\ \sigma^\flat \circ N = {}^t N \circ \sigma^\flat, \\ N^2 + \pi^\sharp \circ \sigma^\flat = \lambda \text{Id}_A. \end{cases}$$

**LEMME 3.2.11** *En termes du grand crochet, on a*

$$J = \pi + N + \sigma$$

dans le sens que

$$J(\cdot) = \{., \pi + N + \sigma\}.$$

Dans la suite de la section, nous allons considérer  $S = \mu + H$ , où  $\mu \in C^\infty(T^*(\Pi A))$  définit une structure d'algèbroïde de Lie sur  $A$ , et  $H \in \Gamma(\wedge^3 A^*)$  est une 3-forme fermée. Alors on vérifie facilement que  $\{S, S\} = 0$ , et  $S$  définit une structure d'algèbroïde de Courant sur  $A \oplus A^*$ .

Le théorème suivant est le résultat principal de ce paragraphe puisqu'il établit le lien entre les structures c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \mu + H)$  et les structures de Poisson quasi-Nijenhuis sur  $A$  ayant pour flux  $H$ .

**THÉORÈME 3.2.12** *Si un endomorphisme  $J$ , défini par (3.8), est une structure c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \mu + H)$ , alors  $(\pi, N, -d\sigma, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'écrire la condition d'intégrabilité  $T_J = 0$  pour  $J = \pi + N + \sigma$  et  $S = \mu + H$ , c'est-à-dire

$$\{\pi + N + \sigma, \{\pi + N + \sigma, \mu + H\}\} - \lambda(\mu + H) = 0.$$

Si on utilise la bilinéarité de  $\{., \cdot\}$  et que l'on décompose l'équation précédente en fonction du bidegré des termes qui la composent, on obtient le système d'équations

$$\begin{cases} \{\{\pi, \mu\}, \pi\} = 0, \\ \{\{\pi, \mu\}, N\} + \{\{N, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, H\}, \pi\} = 0, \\ \{\{N, \mu\}, N\} + 2\{\pi, \{\mu, \sigma\}\} + \{\{\pi, \sigma\}, \mu\} + \{\{\pi, H\}, N\} + \{\{N, H\}, \pi\} + \lambda\mu = 0, \\ \{\{N, \mu\}, \sigma\} + \{\{\sigma, \mu\}, N\} + \{\{N, H\}, N\} + \{\{\pi, \sigma\}, H\} + \lambda H = 0. \end{cases}$$

Dans les deux dernières équations du système, on utilise les conditions algébriques pour que  $J$  soit une structure c.p.s. et plus précisément la condition  $N^2 + \pi^\sharp \circ \sigma^\flat = \lambda \text{Id}_A$  qui s'écrit en termes du grand crochet

$$\{\pi, \sigma\} = N^2 - \lambda \text{Id}_A.$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\{\pi, \mu\}, \pi\} = 0, \\ \{\{\pi, \mu\}, N\} + \{\{N, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, H\}, \pi\} = 0, \\ \{\{N, \mu\}, N\} + \{N^2, \mu\} + 2\{\pi, \{\mu, \sigma\}\} + \{\{\pi, H\}, N\} + \{\{N, H\}, \pi\} = 0, \\ \{\{N, \mu\}, \sigma\} + \{\{\sigma, \mu\}, N\} + \{\{N, H\}, N\} + \{N^2, H\} - 2\lambda H = 0. \end{array} \right.$$

On peut enfin interpréter le système d'équations précédent comme l'ensemble des conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi \text{ est un bivecteur de Poisson,} \\ C_{\pi, N}(\alpha, \beta) = 2i_{\pi^\sharp \alpha \wedge \pi^\sharp \beta} H, \\ T_N(X, Y) = \pi^\sharp(i_{NX \wedge Y} H - i_{NY \wedge X} H - i_{X \wedge Y} d\sigma), \\ 2i_N d\sigma - d(i_N \sigma) = 2(\mathcal{H} + \lambda H), \end{array} \right. \quad (3.9)$$

pour tous  $X, Y \in \Gamma(A)$  et  $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$  et où  $\mathcal{H}$  est définie par (3.5).

Finalement, pour conclure la démonstration, on applique  $d$  aux deux membres de la dernière condition de (3.9) et on obtient la dernière condition de (3.4) pour  $\psi = -d\sigma$ .  $\square$

**Remarque:** Dans [61], Vaisman a étudié l'intégrabilité de structures presque c.p.s. sur  $TM \oplus T^*M$  muni de la structure de Courant standard et aussi le cas où la structure de Courant standard est déformée par une 3-forme  $H$ . Les conditions obtenues dans la Remarque 1.5 de [61] coïncident avec le système de conditions (3.9).

Dans la démonstration précédente, on voit que la dernière équation de (3.9) est une condition suffisante pour que soit vérifiée la dernière équation de (3.4). On peut obtenir une équivalence si l'on impose des conditions supplémentaires au quadruplet  $(\pi, N, \sigma, H)$ .

**THÉORÈME 3.2.13** *Soit  $J$  un endomorphisme défini par (3.8).  $J$  est une structure c.p.s. sur  $(A \oplus A^*, \mu + H)$  si et seulement si*

1.  $(\pi, N, -d\sigma, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$ ,
2.  $\left\{ \begin{array}{l} N^2 + \pi^\sharp \circ \sigma^\flat = \lambda \text{Id}_A, \\ \sigma^\flat \circ N = {}^t N \circ \sigma^\flat, \\ 2(i_N d\sigma - \mathcal{H}) = d(i_N \sigma) + 2\lambda H. \end{array} \right.$

### 3.2.3 Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et quasi-bigébroïdes de Lie

Dans cette section nous allons généraliser un résultat prouvé, pour des structures de Poisson quasi-Nijenhuis (sans flux), dans [52, 7]. Soit  $(A, \mu)$  un algébroïde de Lie sur une variété différentielle  $M$ .

**DÉFINITION 3.2.14** *Un quasi-bigébroïde de Lie est un triplet  $(E, \delta, \varphi)$  où  $E \rightarrow M$  est un fibré vectoriel muni d'une structure d'algébroïde de Lie,  $\delta$  est une dérivation de degré 1 de l'algèbre de Gerstenhaber  $(\mathfrak{X}^k(E), \wedge, [\cdot, \cdot]_{SN})$  et  $\varphi \in \Gamma(\wedge^3 E)$ , tel que*

$$\begin{cases} \delta^2(\cdot) = [\varphi, \cdot]_{SN} \\ \delta\varphi = 0. \end{cases}$$

Le résultat suivant généralise un résultat de Stiénon et Xu [52] ou plus généralement de Caseiro et al. [7]. C'est le résultat principal de ce paragraphe.

**THÉORÈME 3.2.15** *Si  $(\pi, N, \psi, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$  alors  $(A_\pi^*, d_N^H, \psi + i_N H)$  est un quasi-bigébroïde de Lie, où  $d_N^H(\alpha) = d_N(\alpha) - i_{\pi^\sharp(\alpha)}H$ , pour tout  $\alpha \in \Gamma(A^*)$ .*

*Démonstration.* L'élément de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  qui induit la structure  $(A_\pi^*, d_N^H, \psi + i_N H)$  est  $\tilde{S} = \{\pi + N, \mu + H\} + \psi$ . Alors  $(A_\pi^*, d_N^H, \psi + i_N H)$  est un quasi-bigébroïde de Lie si et seulement si

$$\{\tilde{S}, \tilde{S}\} = 0.$$

Or, si on décompose l'équation précédente en fonction du bidegré de chaque terme qui la compose on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \{\{\pi, \mu\}, \{\pi, \mu\}\} = 0, \\ \{\{\pi, \mu\}, \{\pi, H\}\} + \{\{\pi, \mu\}, \{N, \mu\}\} = 0, \\ \{\{\pi, H\}, \{\pi, H\}\} + \{\{N, \mu\}, \{N, \mu\}\} + 2\{\{\pi, \mu\}, \{N, H\}\} \\ \quad + 2\{\{\pi, H\}, \{N, \mu\}\} + 2\{\{\pi, \mu\}, \psi\} = 0, \\ \{\{\pi, H\}, \{N, H\}\} + \{\{N, \mu\}, \{N, H\}\} + \{\{\pi, H\}, \psi\} + \{\{N, \mu\}, \psi\} = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Il suffit à présent de vérifier que les équations (3.6) impliquent les équations (3.10). Or si on applique  $\{\mu, \cdot\}$  à chaque équation de (3.6) on obtient l'équation respective de (3.10).  $\square$

**COROLLAIRE 3.2.16** *Si  $(\pi, N, -d\sigma, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$  alors  $\{\pi + N + \sigma, \mu + H\}$  est une structure de quasi-bigébroïde de Lie sur  $(A^*, A)$  ou, de façon équivalente, une structure d'algébroïde de Courant sur  $A \oplus A^*$ , induisant une structure d'algébroïde de Lie sur  $A^*$ .*

*Démonstration.* Dans la preuve précédente, si  $\psi = -d\sigma$  alors  $\tilde{S} = \{\pi + N + \sigma, \mu + H\}$  et on a prouvé que  $\{\tilde{S}, \tilde{S}\} = 0$ .  $\square$

**Remarque:** Dans le corollaire précédent,  $J = \pi + N + \sigma$  n'est pas nécessairement intégrable. Autrement dit, la torsion de Nijenhuis  $T_J$  n'est pas nécessairement nulle (voir le théorème 3.2.13 où sont énoncées les conditions nécessaires, dans le cas où  $J$  est presque c.p.s., pour que l'intégrabilité soit vérifiée). Mais le corollaire précédent prouve que l'hamiltonien (déformé)  $\tilde{S} = S_J$  définit une structure d'algébroïde de Courant sur  $A \oplus A^*$ , c'est-à-dire que  $\{S, T_J\} = 0$  (voir la proposition 3.2.6), où  $S = \mu + H$ .

### 3.2.4 Poisson quasi-Nijenhuis avec flux et tenseurs (de degré 2) compatibles

Dans cette section nous considérons un bivecteur de Poisson  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  et une 2-forme  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ . De plus nous notons

$$\begin{aligned} \pi^\sharp(\alpha) &= \pi(\alpha, \cdot), \quad \forall \alpha \in \Gamma(A^*), & \omega^\flat(X) &= \omega(X, \cdot), \quad \forall X \in \Gamma(A), \\ N &= \pi^\sharp \circ \omega^\flat, & \omega_N &= \omega(N, \cdot). \end{aligned}$$

Alors le principal résultat de cette section est le suivant. Notons que l'unique hypothèse est que le bivecteur  $\pi$  soit de Poisson.

**THÉORÈME 3.2.17** *Soient  $\pi$  un bivecteur de Poisson,  $\omega$  une 2-forme et considérons  $N$  et  $\omega_N$  définis comme ci-dessus. Le quadruplet  $(\pi, N, d\omega_N, -d\omega)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux sur  $A$ .*

*Démonstration.* Notons  $\psi = d\omega_N$  and  $H = -d\omega$ . Nous avons les correspondances suivantes en termes d'éléments de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$

$$\begin{cases} N = \{\omega, \pi\}, \\ \psi = \frac{1}{2} \{\mu, \{N, \omega\}\}, \\ H = \{\omega, \mu\}. \end{cases}$$

On vérifie facilement que  $\psi$  et  $H$  sont fermées et que  $N \circ \pi^\sharp = \pi^\sharp \circ {}^t N$ . Pour prouver que  $(\pi, N, \psi, H)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux on doit vérifier les conditions (3.4) (ou, en termes du grand crochet, les conditions (3.6)).

1.  $\pi$  est un bivecteur de Poisson par hypothèse.
2. Utilisons le fait que  $\pi$  est un bivecteur de Poisson, c'est-à-dire que

$$\{\{\pi, \mu\}, \pi\} = 0$$

et appliquons  $\{\omega, \cdot\}$  aux deux membres de cette équation pour obtenir

$$\{\omega, \{\{\pi, \mu\}, \pi\}\} = 0.$$

On applique l'identité de Jacobi et on obtient

$$\{\{\omega, \{\pi, \mu\}\}, \pi\} + \{\{\pi, \mu\}, \{\omega, \pi\}\} = 0.$$

Si on applique de nouveau l'identité de Jacobi au premier terme du membre de gauche, on obtient

$$\{\{\{\omega, \pi\}, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, \{\omega, \mu\}\}, \pi\} + \{\{\pi, \mu\}, \{\omega, \pi\}\} = 0,$$

qui est la seconde équation de (3.6)

$$\{\{N, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, H\}, \pi\} + \{\{\pi, \mu\}, N\} = 0.$$

3. Comme précédemment, on part de la dernière équation

$$\{\{N, \mu\}, \pi\} + \{\{\pi, H\}, \pi\} + \{\{\pi, \mu\}, N\} = 0,$$

et on applique  $\{\omega, \cdot\}$  aux deux membres de l'équation. On obtient

$$\{\omega, \{\{N, \mu\}, \pi\}\} + \{\omega, \{\{\pi, H\}, \pi\}\} + \{\omega, \{\{\pi, \mu\}, N\}\} = 0,$$

et si on applique l'identité de Jacobi deux fois, on obtient l'équation cherchée

$$\{\{N, \mu\}, N\} + \{N^2, \mu\} - 2\{\pi, \psi\} + \{\{\pi, H\}, N\} + \{\{N, H\}, \pi\} = 0.$$

4. Nous prouvons cette condition de la même manière que pour les conditions précédentes. On part de la dernière condition

$$\{\{N, \mu\}, N\} + \{N^2, \mu\} - 2\{\pi, \psi\} + \{\{\pi, H\}, N\} + \{\{N, H\}, \pi\} = 0,$$

et on applique  $\{\omega, \cdot\}$  aux deux membres. Puis, si on applique l'identité de Jacobi, on obtient

$$\{\{N, H\}, N\} + \{N^2, H\} - 2\{N, \psi\} - \{\{N^2, \omega\}, \mu\} = 0. \quad (3.11)$$

Enfin, si on applique  $\{\mu, \cdot\}$  aux deux membres de l'équation précédente on obtient

$$\{\mu, \{\{N, H\}, N\} + \{N^2, H\}\} - 2\{\mu, \{N, \psi\}\} = 0.$$

On applique de nouveau l'identité de Jacobi et le fait que  $\psi$  est fermée pour obtenir

$$2\{\{N, \mu\}, \psi\} = \{\mu, \{N, \{N, H\}\} - \{N^2, H\}\}. \quad \square$$

La démonstration du théorème précédent suggère que la composition itérative d'une 2-forme, en un certain sens, avec un bivecteur de Poisson, fournit toutes les conditions de la définition de structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. Afin de mieux comprendre comment un bivecteur de Poisson et une 2-forme engendrent ce type de structures, considérons la construction suivante (voir pour plus de détails [20]).

Soient  $S \in \text{Pol}(T^*(\Pi A))$  et  $\sigma \in \text{Pol}_{0,2}(T^*(\Pi A))$  ou  $\sigma \in \text{Pol}_{2,0}(T^*(\Pi A))$ . Considérons la série

$$e^\sigma S = S + \{S, \sigma\} + \frac{1}{2!} \{\{S, \sigma\}, \sigma\} + \frac{1}{3!} \{\{\{S, \sigma\}, \sigma\}, \sigma\} + \dots$$

Comme  $\{.,.\}$  a un bidegré  $(-1, -1)$  et  $\sigma$  un bidegré  $(0, 2)$  ou  $(2, 0)$ , la série ci-dessus est finie. De plus, si  $S$  est de degré total  $k$  alors  $e^\sigma S$  aussi. Enfin, il suit des propriétés de l'exponentielle que si  $\{S, S\} = 0$ , on a aussi  $\{e^\sigma S, e^\sigma S\} = 0$ . En particulier, si  $S$  est une structure sur  $A \oplus A^*$ , c'est-à-dire si  $S \in \text{Pol}_3(T^*(\Pi A))$  et vérifie  $\{S, S\} = 0$ , alors  $e^\sigma S$  est aussi une structure sur  $A \oplus A^*$ . On dit que la structure  $e^\sigma S$  est la structure  $S$  tordue par  $\sigma$ .

La proposition suivante détaille la construction apparaissant dans la démonstration du théorème précédent.

**PROPOSITION 3.2.18** *Si on note  $S$  la structure de quasi-bigébroïde de Lie induite par la structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux  $(\pi, N, d\omega_N, -d\omega)$ , alors*

$$S = e^{-\omega} \circ (e^{-\pi} \mu - \mu),$$

ou, de forme équivalente

$$S = e^{-\omega}(\mu_\pi),$$

où  $\mu_\pi$  est l'hamiltonien correspondant à la structure d'algébroïde de Lie définie par (3.1).

Dans la proposition suivante nous montrons que la structure de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux  $(\pi, N, d\omega_N, -d\omega)$  est induite (comme indiqué dans le théorème 3.2.12) par une structure sous-tangente.

**PROPOSITION 3.2.19** *Le tenseur de type  $(1, 1)$*

$$J = \begin{pmatrix} N & \pi^\sharp \\ -\omega_N^\flat & -{}^t N \end{pmatrix}$$

est une structure sous-tangente (c'est-à-dire une structure c.p.s. avec  $\lambda = 0$ ) sur  $(A \oplus A^*, \mu - d\omega)$ .

*Démonstration.* D'après les théorèmes 3.2.17 et 3.2.13 il suffit de prouver

$$\begin{cases} N^2 - \pi^\sharp \circ \omega_N^\flat = 0, \\ \omega_N^\flat \circ N = {}^t N \circ \omega_N^\flat, \\ 2(i_N d\omega_N + \mathcal{H}) = d(i_N \omega_N). \end{cases}$$

Mais la vérification des deux premières conditions est directe et, d'après le fait que  $i_N \omega_N = i_{N^2} \omega$ , la dernière condition est équivalente à (3.11).  $\square$

Dans la suite de cette section, on remarque que, dans le théorème 3.2.17, si on impose certaines restrictions à la 2-forme  $\omega$  alors on obtient des structures déjà connues, plus contraignantes que les structures de Poisson quasi-Nijenhuis avec flux. On remarque aussi que les couples  $(\pi, \omega)$ ,  $(\pi, N)$  et  $(\omega, N)$  ainsi obtenus correspondent à (ou généralisent légèrement) certains couples compatibles déjà connus.

**COROLLAIRE 3.2.20 (Poisson Nijenhuis)** *Si  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  est un bivecteur de Poisson et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  est une 2-forme fermée telle que  $d\omega_N = 0$ , alors  $(\pi, N)$  est une structure de Poisson Nijenhuis sur  $A$ .*

- Remarques:**
1. Un couple  $(\pi, \omega)$  dans les conditions du corollaire précédent est une  $P\Omega$ -structure (voir définition 3.1.24 ou [38]).
  2. La condition  $d\omega_N = 0$  est la condition de compatibilité pour que  $(\omega, N)$  soit une  $\Omega N$ -structure (voir définition 3.1.33 ou [38]). De plus, dans ces conditions, on vérifie que le tenseur  $N = \pi^\sharp \circ \omega^\flat$  a une torsion de Nijenhuis nulle et le couple  $(\omega, N)$  est une  $\Omega N$ -structure.
  3. La condition  $d\omega_N = 0$  est aussi la condition de compatibilité pour que  $(\omega, N)$  soit une paire de Hitchin (voir définition 3.1.35 ou [8] pour  $A = TM$ ). Cependant le couple  $(\omega, N)$  ci-dessus est plus général car  $\omega$  n'est pas nécessairement symplectique.
  4. Utilisant la proposition 3.1.37 et le fait que  $\omega$  soit une forme fermée, on prouve que, dans le corollaire précédent, la condition  $d\omega_N = 0$  signifie que  $\omega$  est une 2-forme complémentaire pour  $\pi$  (voir définition 3.1.36 ou [60]).

**COROLLAIRE 3.2.21 (Poisson quasi-Nijenhuis)** *Si  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  est un bivecteur de Poisson et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  est une 2-forme fermée alors  $(\pi, N, d\omega_N)$  est une structure de Poisson quasi-Nijenhuis sur  $A$  (sans flux).*

On peut aussi définir une *structure de Poisson Nijenhuis avec flux*  $(\pi, N, H)$  en considérant  $\psi = 0$  dans la définition 3.2.1. À notre connaissance, ce type de structures n'a jamais été étudié jusqu'à présent. On a le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 3.2.22 (Poisson Nijenhuis avec flux)** *Si  $\pi \in \Gamma(\wedge^2 A)$  est un bivecteur de Poisson et  $\omega \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$  est une 2-forme telle que  $d\omega_N = 0$ , alors  $(\pi, N, -d\omega)$  est une structure de Poisson Nijenhuis avec flux sur  $A$ .*

**Remarque:** Dans toute cette section, le bivecteur  $\pi$  est un (vrai) bivecteur de Poisson. La structure obtenue dans le dernier corollaire ne provient donc pas d'une éventuelle compatibilité entre un tenseur de Nijenhuis et une structure de Poisson avec flux (voir [51]).

## Chapitre 4

# Structures para-hypersymplectiques

Les formes symplectiques étant non dégénérées, étant données deux formes symplectiques  $\omega_1, \omega_2$  sur une même variété  $M$ , il existe un tenseur de passage de  $\omega_2$  à  $\omega_1$  défini par :

$$\omega_1(., .) = \omega_2(J_3., .)$$

Étant données à présent 3 formes symplectiques  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sur une variété donnée, on dispose de 3 tenseurs de passages, que l'on note  $J_1, J_2, J_3$ , qui permettent de passer, respectivement de  $\omega_3$  à  $\omega_2$ , de  $\omega_1$  à  $\omega_3$  et de  $\omega_2$  à  $\omega_1$ , et qui satisfont donc la relation  $J_3 J_2 J_1 = \text{Id}$ . Si l'on impose que les carrés de ces tenseurs valent respectivement  $\epsilon_1 \text{Id}, \epsilon_2 \text{Id}, \epsilon_3 \text{Id}$ , où  $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$  pour  $i = 1, 2, 3$ , on obtient ce que l'on appelle une structure para-hypersymplectique (souvent notée PHS dans la suite de ce chapitre). On peut alors vérifier que

$$\omega_1(J_1., .) = \omega_2(J_2., .) = \omega_3(J_3., .)$$

et que l'application bilinéaire  $g(., .)$  ainsi obtenue est, selon le cas, symétrique non dégénérée ou symplectique. Les structures hyperkähleriennes sont clairement des exemples de telles structures : ce sont en fait des structures PHS telles que  $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -\text{Id}$ , et telles que  $g$ , qui est alors toujours symétrique, est défini positif.

Les structures PHS peuvent sans difficulté être définies pour un algèbroïde de Lie quelconque : ce sera dans ce cadre que nous travaillerons.

À une structure PHS sont donc associés 9 hamiltoniens de degré 2 : trois sont associés aux formes, trois sont associés aux tenseurs de passages et trois sont associés aux bivecteurs qui inversent les formes symplectiques. De plus, un dernier peut être associé au tenseur  $g$  lorsque celui-ci est antisymétrique. Nous étudions dans ce chapitre les compatibilités entre ces hamiltoniens de degré 2. Nous tentons de mener notre étude sans distinguer selon les signes de  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , toutefois, nous serons rapidement amenés à séparer le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$  du cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ , c'est-à-dire le cas où  $g$  est symétrique du cas où  $g$  est symplectique.

On donne ensuite des exemples nouveaux dans le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ , exemples que nous relierons aux équations de Monge-Ampère. Pour le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ , on donne des exemples, et nous donnons une classification locale dans le cas des variétés quand  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ .

## 4.1 Définitions et propriétés

Considérons  $A \rightarrow M$  un algébroïde de Lie.

Dans toute cette section, nous écrirons souvent que les indices (notés généralement  $i, j$  ou  $k$ ) appartiennent à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , mais pour opérer sur les indices on considérera qu'ils appartiennent à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

### 4.1.1 Définitions

Soient  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Gamma(\wedge^2 A^*)$ , des  $A$ -formes symplectiques. On définit trois applications  $C^\infty(M)$ -linéaires  $I_j : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , en posant

$$I_j = (\omega_{j-1}^\flat)^{-1} \circ \omega_{j+1}^\flat. \quad (4.1)$$

**Notation:** Rappelons que l'on définit  $\omega_j^\flat : \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A^*)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , en posant

$$\omega_j^\flat(X) = i_X \omega_j = \omega_j(X, \cdot), \quad \forall X \in \Gamma(A).$$

On définit aussi l'application  $\pi_j^\sharp : \Gamma(A^*) \rightarrow \Gamma(A)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , en posant

$$\pi_j^\sharp = -(\omega_j^\flat)^{-1}$$

et le bivecteur  $\pi_j \in \Gamma(\wedge^2 A)$  par

$$\pi_j(\alpha, \beta) = \langle \pi_j^\sharp(\alpha), \beta \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma(A^*).$$

On peut alors considérer que la 2-forme  $\omega_j$  et le bivecteur  $\pi_j$  sont inverses l'un de l'autre dans le sens que

$$\pi_j(\alpha, \beta) = \omega_j(\pi_j^\sharp(\alpha), \pi_j^\sharp(\beta)), \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma(A^*).$$

En tenant compte de la notation rappelée ci-dessus, la formule (4.1) définissant  $I_i$  peut être réécrite

$$I_j = -\pi_{j-1}^\sharp \circ \omega_{j+1}^\flat. \quad (4.2)$$

**Observation:** 1. A partir des équations (4.1), définissant les applications  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , on déduit immédiatement

$$I_i \circ I_{i-1} = I_{i+1}^{-1}. \quad (4.3)$$

2. Dans la suite de cette section, on omettra le symbole  $\circ$ , on écrira par exemple  $I_i I_{i-1}$  au lieu de  $I_i \circ I_{i-1}$ .

**DÉFINITION 4.1.1** Une structure para-hypersymplectique est un quadruplet  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  où  $A$  est un algébroïde de Lie et  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  sont des  $A$ -formes symplectiques telles que les tenseurs  $I_1, I_2$  et  $I_3$  définis par (4.1) vérifient

$$I_i^2 = \epsilon_i \text{Id}_A, \quad \text{avec } \epsilon_i = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.4)$$

On abrégera parfois la notation et on écrira PHS au lieu de para-hypersymplectique. Il y a quatre type de structures PHS, auxquels on donne les noms suivants

- quaternionique lorsque les trois tenseurs sont de carré  $-\text{Id}_A$ ,
- para-quaternionique lorsque un tenseur est de carré  $-\text{Id}_A$  et deux de carré  $\text{Id}_A$ ,
- para-hyperproduit lorsque deux tenseurs sont de carré  $-\text{Id}_A$  et un de carré  $\text{Id}_A$ ,
- hyperproduit lorsque les trois tenseurs sont de carré égal à  $\text{Id}_A$ .

Évidemment les structures hyperkähleriennes sont des exemples des structures PHS de type quaternioniques.

Dans toute la suite de cette section on étudie, en termes d’algèbre linéaire sur chaque fibre de  $A \rightarrow M$ , les conséquences des conditions (4.4).

**LEMME 4.1.2** *Considérons une structure PHS  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ . Les tenseurs  $I_1, I_2$  et  $I_3$  vérifient*

1.  $(I_i)^{-1} = \epsilon_i I_i$  ;
2.  $I_3 I_2 I_1 = \text{Id}_A$  et  $I_1 I_2 I_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \text{Id}_A$  ;
3.  $I_i = \epsilon_i I_{i-1} I_{i+1} = \epsilon_{i+1} \epsilon_{i-1} I_{i+1} I_{i-1}$  ;
4.  $I_j I_k = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 I_k I_j$ ,  $j \neq k$ ,

où les indices  $i, j, k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* 1. La démonstration vient immédiatement des égalités (4.4).

2. Il suffit d’écrire les définitions de  $I_1, I_2$  et  $I_3$  pour vérifier que

$$I_3 I_2 I_1 = \text{Id}_A.$$

Puis, si on calcule l’inverse des applications de chacun des membres de l’égalité précédente on obtient rapidement

$$I_1 I_2 I_3 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \text{Id}_A.$$

3. La première égalité est une vérification immédiate à partir de la définition de  $I_i$ . La seconde égalité s’obtient de la première en calculant l’inverse de chacun des membres.
4. De 3. on déduit que

$$I_{i-1} I_{i+1} = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 I_{i+1} I_{i-1}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

et on voit facilement que si  $j \neq k$  toute paire  $(I_j, I_k)$  est une paire du type  $(I_{i-1}, I_{i+1})$  ou  $(I_{i+1}, I_{i-1})$ . □

On peut facilement démontrer de nombreuses égalités entre les tenseurs  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  et/ou les formes  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Nous nous efforçons simplement de regrouper ici les propriétés que nous utiliserons le plus fréquemment dans les démonstrations de cette section.

Parmi ces propriétés les applications transposées  ${}^tI_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , apparaissent régulièrement. D'après la définition de  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , on vérifie que, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on a<sup>1</sup>

$${}^tI_j = -\omega_{j+1}{}^b \circ \pi_{j-1}{}^\sharp. \quad (4.5)$$

Par ailleurs les applications transposées vérifient aussi

$$({}^tI_j)^2 = \epsilon_j \text{Id}_A, \quad (4.6)$$

et par conséquent

$$({}^tI_j)^{-1} = \epsilon_j {}^tI_j, \quad (4.7)$$

ou en d'autres termes :

$$\omega_{j-1}{}^b \circ \pi_{j+1}{}^\sharp = \epsilon_j \omega_{j+1}{}^b \circ \pi_{j-1}{}^\sharp. \quad (4.8)$$

**DÉFINITION 4.1.3** *On définit un morphisme de fibrés vectoriels*

$$g : A \longrightarrow A^*$$

en posant

$$g = \epsilon_3 \epsilon_2 \omega_3{}^b \circ (\omega_1{}^b)^{-1} \circ \omega_2{}^b. \quad (4.9)$$

On peut permuter les indices dans la définition de  $g$  comme le montre la proposition suivante.

**PROPOSITION 4.1.4** *Les applications  $g, \omega_j{}^b$  et  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , vérifient les égalités suivantes*

1.  ${}^t g = -\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 g$
2.  $g = \epsilon_{j-1} \epsilon_{j+1} \omega_{j-1}{}^b \circ (\omega_j{}^b)^{-1} \circ \omega_{j+1}{}^b$
3. 
$$\begin{cases} g = \epsilon_{j-1} \omega_j{}^b \circ I_j \\ \omega_j{}^b = \epsilon_j \epsilon_{j-1} g \circ I_j \\ I_j = \epsilon_j \epsilon_{j-1} g^{-1} \circ \omega_j{}^b \end{cases}$$
4. *Pour toutes sections  $X, Y \in \Gamma(A)$ ,*

$$g(I_j X, I_j Y) = \epsilon_{j-1} \epsilon_{j+1} g(X, Y),$$

où, avec un léger abus de notation, on note  $g(X, Y) := \langle g(X), Y \rangle$ .

---

1. On utilise ici l'antisymétrie des tenseurs  $\omega_j$  et  $\pi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

*Démonstration.* 1. À partir de la définition de  $g$  et utilisant l'antisymétrie des formes  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , on écrit

$${}^t g = -\epsilon_3 \epsilon_2 \omega_2^b \circ (\omega_1^b)^{-1} \circ \omega_3^b.$$

Si on traduit l'égalité  $I_2 = \epsilon_2 (I_2)^{-1}$  en termes de formes symplectiques et que l'on substitue dans l'équation précédente, on a

$${}^t g = -\epsilon_3 \omega_2^b \circ (\omega_3^b)^{-1} \circ \omega_1^b.$$

Puis, en utilisant l'égalité (4.8) avec  $j = 1$ , on obtient

$${}^t g = -\epsilon_3 \epsilon_1 \omega_3^b \circ (\omega_2^b)^{-1} \circ \omega_1^b.$$

Finalement, en utilisant l'égalité  $I_3 = \epsilon_3 (I_3)^{-1}$ , on peut écrire

$${}^t g = -\epsilon_1 \omega_3^b \circ (\omega_1^b)^{-1} \circ \omega_2^b,$$

d'où, en utilisant la définition de  $g$ ,

$${}^t g = -\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 g.$$

2. En utilisant le même type d'arguments que dans le point précédent (basés sur des permutations des  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), et à partir de la définition de  $g$  (voir l'équation (4.9)) on peut permuter  $\omega_2$  avec  $\omega_1$  puis avec  $\omega_3$  pour obtenir

$$g = \epsilon_1 \epsilon_2 \omega_2^b \circ (\omega_3^b)^{-1} \circ \omega_1^b.$$

3. Utilisant le fait que les indices appartiennent à  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , on peut réécrire l'égalité du point précédent sous la forme

$$g = \epsilon_j \epsilon_{j-1} \omega_j^b \circ (\omega_{j+1}^b)^{-1} \circ \omega_{j-1}^b,$$

c'est-à-dire

$$g = \epsilon_j \epsilon_{j-1} \omega_j^b \circ I_j^{-1}.$$

Enfin, utilisant la première égalité du lemme précédent, on conclut que

$$g = \epsilon_{j-1} \omega_j^b \circ I_j.$$

Les expressions restantes pour  $\omega_j^b$  et  $I_j$  se déduisent facilement de cette expression pour  $g$ .

4. Soient  $X, Y \in \Gamma(A)$ . Si on voit  $g$  comme une section de  $\otimes^2 A^*$  alors

$$g(I_j X, I_j Y) = \langle g(I_j X), I_j Y \rangle,$$

et, utilisant la deuxième égalité du point précédent, on écrit

$$g(I_j X, I_j Y) = \langle \epsilon_j \epsilon_{j-1} \omega_j^b(X), I_j(Y) \rangle.$$

Comme  $\omega_j$  est antisymétrique, on obtient

$$g(I_j X, I_j Y) = -\epsilon_j \epsilon_{j-1} \langle X, \omega_j^b \circ I_j(Y) \rangle .$$

Puis, utilisant la première égalité du point précédent, on a

$$\begin{aligned} g(I_j X, I_j Y) &= -\epsilon_j \epsilon_{j-1} \langle X, \epsilon_{j-1} g(Y) \rangle \\ &= -\epsilon_j \langle {}^t g(X), Y \rangle . \end{aligned}$$

Enfin, utilisant l'égalité de 1. on obtient

$$\begin{aligned} g(I_j X, I_j Y) &= \epsilon_{j-1} \epsilon_{j+1} \langle g(X), Y \rangle \\ &= \epsilon_{j-1} \epsilon_{j+1} g(X, Y). \end{aligned} \quad \square$$

Les égalités de la proposition précédente nous permettent de distinguer deux cas très différents de structures PHS :  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$  et  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ . En effet,

- Si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ , alors  $g$  (vu comme une forme bilinéaire sur  $A_m$ , pour tout  $m \in M$ ) est symétrique et est ainsi un produit scalaire pseudo-euclidien (voir la définition 2.1.4). De plus  $I_j$  est hermitien (par rapport à  $g$ ) au sens que

$$g(I_j X, I_j Y) = -\epsilon_j g(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(A)$$

ce qui, utilisant la relation  $I_j^2 = \epsilon_j \text{Id}_A$ , équivaut à

$$g(I_j X, Y) = -g(X, I_j Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(A).$$

- Si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ , alors  $g$  est antisymétrique et définit donc une 2-forme. De plus  $g$  et  $I_j$  commutent au sens que<sup>2</sup>

$$g(I_j X, Y) = g(X, I_j Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(A),$$

ou, en d'autres termes,

$$g \circ I_j = {}^t I_j \circ g,$$

où  $g$  est vu comme un morphisme de fibrés vectoriels  $g : A \longrightarrow A^*$ .

On peut représenter sous forme de diagrammes certaines des relations de la proposition précédente et en particulier le fait que les tenseurs  $I_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sont des “tenseurs de passage” entre les  $\omega_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , et  $g$ .

---

2. Les deux différents types de compatibilité, dépendant du signe de  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$ , peuvent être énoncées par la même relation :

$$g(I_j X, Y) + g(I_j Y, X) = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(A),$$

autrement dit,  $g \circ I_j$  définit un tenseur antisymétrique.

$$\begin{array}{c}
 \omega_3 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \nearrow^{I_2} & \\
 & g & \\
 & \searrow_{I_1} & \\
 \omega_1 & \xleftarrow{\epsilon_3 I_1} & \omega_2 \\
 & \xrightarrow{I_3} & 
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.10)$$

Dans le diagramme précédent :

- les sommets sont considérés comme des morphismes de  $A$  dans  $A^*$  ;
- les flèches sont des morphismes de  $A$  dans  $A$  ;
- une flèche  $I$  relie le morphisme  $F$  au morphisme  $G$  si  $F \circ I = G$

On peut, dualement, déduire des formules équivalentes entre les applications inverses. En termes de diagramme, on obtient

$$\begin{array}{c}
 \pi_3 \\
 \begin{array}{ccc}
 & \xleftarrow{t I_2} & \\
 & g^{-1} & \\
 & \xrightarrow{t I_1} & \\
 \pi_1 & \xleftarrow{-\epsilon_2 t I_1} & \pi_2 \\
 & \xrightarrow{t I_3} & 
 \end{array}
 \end{array}$$

Dans les deux résultats suivants on traduit les diagrammes précédents en termes de produits intérieurs de  $A$ -formes par des  $A$ -formes à valeurs vectorielles (voir les définitions de la section 1.2).

**COROLLAIRE 4.1.5** *Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on a :*

1.  $(i_{I_j} \omega_j)^b = \epsilon_{j-1} (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) g$ ;
2.  $(i_{I_j} \omega_{j-1})^b = 2 \omega_{j+1}^b$ ;
3.  $(i_{I_j} \omega_{j+1})^b = 2 \epsilon_j \omega_{j-1}^b$ .

*Démonstration.* 1. À partir de la définition de la contraction  $(i_{I_j} \omega_j)$  et du fait que  $\omega_j$  est antisymétrique, on peut écrire

$$(i_{I_j} \omega_j)^b = \omega_j^b \circ I_j + {}^t I_j \circ \omega_j^b.$$

Et utilisant la proposition précédente, on en déduit que

$$\begin{aligned} (i_{I_j} \omega_j)^b &= \epsilon_{j-1} g - \epsilon_{j-1} {}^t g \\ &= (\epsilon_{j-1} + \epsilon_j \epsilon_{j+1}) g. \end{aligned}$$

2. La démonstration est directe, comme pour le point précédent.

$$\begin{aligned} (i_{I_j} \omega_{j-1})^b &= (\omega_{j-1}^b \circ I_j) - {}^t(\omega_{j-1}^b \circ I_j) \\ &= \omega_{j+1}^b - {}^t(\omega_{j+1}^b) \\ &= 2\omega_{j+1}^b \end{aligned}$$

3. La démonstration est analogue à celle du point précédent.  $\square$

Le point de vue dual du corollaire précédent, en termes de produit intérieur de  $\pi_j^\sharp$ ,  $j = 1, 2, 3$ , par  ${}^t I_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , est le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 4.1.6** *Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on a :*

1.  $(i_{I_j} \pi_j)^\sharp = -\epsilon_{j+1} (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) g^{-1}$ ;
2.  $(i_{I_j} \pi_{j-1})^\sharp = 2 \epsilon_j \pi_{j+1}^\sharp$ ;
3.  $(i_{I_j} \pi_{j+1})^\sharp = 2 \pi_{j-1}^\sharp$ .

*Démonstration.* Les démonstrations sont analogues à celles du corollaire précédent.  $\square$

Dans la proposition suivante nous énonçons, en termes de fonctions de  $\text{Pol}(T^*(\Pi A))$  et du grand crochet, les résultats obtenus jusqu'à présent.

**PROPOSITION 4.1.7** *Pour tous  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , on a :*

1.  $\{\pi_j, \omega_i\} = \begin{cases} \text{id}_A & , i = j \\ \epsilon_{j+1} I_{j-1} & , i = j + 1 \\ I_{j+1} & , i = j - 1 \end{cases}$
2.  $\{I_j, I_{j+1}\} = -\{I_{j+1}, I_j\} = \epsilon_{j-1} (1 - \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) I_{j-1}$
3.  $\{I_i, \omega_j\} = \begin{cases} \epsilon_{i-1} (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) g & , i = j \\ 2 \omega_{i+1} & , i = j + 1 \\ 2 \epsilon_i \omega_{i-1} & , i = j - 1 \end{cases}$
4.  $\{I_i, \pi_j\} = \begin{cases} \epsilon_{i+1} (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3) g^{-1} & , i = j \\ 2 \epsilon_i \omega_{i+1}^{-1} & , i = j + 1 \\ 2 \omega_{i-1}^{-1} & , i = j - 1 \end{cases}$

### 4.1.2 $P\Omega$ , $PN$ et $\Omega N$ -structures induites

Dans cette section nous allons étudier les nombreuses paires de tenseurs compatibles induites par une structure para-hypersymplectique.

Tout d'abord il est évident que les 3 paires  $(\pi_j, \omega_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , sont des  $P\Omega$ -structures "triviales" au sens que le tenseur  $N = \pi_j^\sharp \circ \omega_j^\flat$  est égal à  $-\text{Id}_A$ . Chacune de ces  $P\Omega$ -structures induit ainsi une  $PN$ -structure et une  $\Omega N$ -structure triviale (avec  $N = -\text{Id}_A$ ).

Dans la proposition suivante, on montre qu'une structure para-hypersymplectique induit 6  $P\Omega$ -structures (en général non-triviales).

**PROPOSITION 4.1.8** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

1.  $(\pi_{j+1}, \omega_j)$  est une  $P\Omega$ -structure ;
2.  $(\pi_{j-1}, \omega_j)$  est une  $P\Omega$ -structure.

*Démonstration.* 1. Par définition, la paire  $(\pi_{j+1}, \omega_j)$  est une  $P\Omega$ -structure si et seulement si

$$d(i_N \omega_j) = 0,$$

où  $N = \pi_{j+1}^\sharp \circ \omega_j^\flat = -(\omega_{j+1}^\flat)^{-1} \circ \omega_j^\flat = -I_{j-1}$ . Ainsi, la condition précédente s'écrit

$$d(i_{I_{j-1}} \omega_j) = 0,$$

et, utilisant un des résultats précédents, peut être réécrite

$$d(\omega_{j+1}) = 0.$$

Or cette dernière condition est vérifiée, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , car  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS.

2. La démonstration est analogue avec  $N = \pi_{j-1}^\sharp \circ \omega_j^\flat = -\epsilon_{i+1} I_{i+1}$ .

□

On a ainsi montré qu'une structure PHS  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  définit 6  $P\Omega$ -structures non-triviales. De plus, comme les formes  $\omega_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont fermées chacune de ces  $P\Omega$ -structures correspond à une 2-forme complémentaire pour un bivecteur de Poisson. D'après les propositions 3.1.39 et 3.1.40, ces  $P\Omega$ -structures induisent aussi 6  $PN$ -structures et 6  $\Omega N$ -structures (non-triviales), comme énoncé dans les corollaires suivants.

**COROLLAIRE 4.1.9** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

1.  $(\pi_j, I_{j+1})$  est une  $PN$ -structure ;
2.  $(\pi_j, I_{j-1})$  est une  $PN$ -structure.

**COROLLAIRE 4.1.10** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

1.  $(\omega_j, I_{j-1})$  est une  $\Omega N$ -structure ;

2.  $(\omega_j, I_{j+1})$  est une  $\Omega N$ -structure.

À partir de la proposition précédente, on déduit aussi le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 4.1.11** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,

1.  $I_j$  est un tenseur de Nijenhuis ;
2.  $(\mu_{I_j})_{I_j} = \epsilon_j \mu$ .

*Démonstration.* 1. C'est une conséquence directe de la proposition précédente et de la proposition 3.1.25.

2. Comme  $I_j$  est un tenseur de Nijenhuis, on a  $T_{I_j} = 0$ , c'est-à-dire, en termes du grand crochet,

$$\{\{I_j, \mu\}, I_j\} - \{I_j^2, \mu\} = 0.$$

Mais  $I_j^2 = \epsilon_j \text{id}_A$  et l'égalité précédente s'écrit

$$\{I_j, \{I_j, \mu\}\} = \epsilon_j \mu. \quad \square$$

Le théorème suivant permet d'établir une correspondance entre deux structures de Poisson compatibles et un tenseur de Nijenhuis (voir résultats similaires dans [15, 38]).

**THÉORÈME 4.1.12** Soit  $A \rightarrow M$  un algébroïde de Lie muni de trois formes symplectiques  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ . Considérons les tenseurs  $I_i, i = 1, 2, 3$ , définis par (4.1). On a

1.  $[I_i, I_i]_{FN} = \epsilon_i \left\{ \left\{ [\pi_{i+1}, \pi_{i-1}]_{SN}, \omega_{i-1} \right\}, \omega_{i+1} \right\};$
2.  $[\pi_{i+1}, \pi_{i-1}]_{SN} = \frac{1}{3} \epsilon_i \left\{ \left\{ [I_i, I_i]_{FN}, \omega_{i+1}^{-1} \right\}, \omega_{i-1}^{-1} \right\};$
3.  $[I_i, I_i]_{FN} = 0$  si et seulement si  $[\pi_{i+1}, \pi_{i-1}]_{SN} = 0$ .

*Démonstration.* En utilisant la formule (1.13) pour le crochet  $[\cdot, \cdot]_{FN}$ , la démonstration de 1. et 2. est calculatoire mais directe, et 3. s'en déduit.  $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe des résultats précédents.

**COROLLAIRE 4.1.13** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tous  $i, j \in \{1, 2, 3\}$

1. Les bivecteurs  $\pi_i$  et  $\pi_j$  sont compatibles ;
2. Les structures d'algébroïde de Lie  $A_{\pi_i}$  et  $A_{\pi_j}$  sont compatibles.

*Démonstration.* 1. Si  $i = j$ , comme la forme  $\omega_i$  est fermée, le bivecteur  $\pi_i$  est de Poisson (ou, en d'autres termes, est compatible avec lui-même). Si  $i \neq j$  alors le résultat est une conséquence du fait que les tenseurs  $I_j, j \in \{1, 2, 3\}$ , soient de Nijenhuis et du théorème précédent.

2. C'est une conséquence immédiate du point précédent.  $\square$

Le lemme suivant est utilisé dans différentes démonstrations dans la suite du chapitre.

**LEMME 4.1.14** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Les égalités suivantes sont satisfaites :*

$$\{I_j, \{\pi_j, \mu_A\}\} = -\epsilon_{j-1} \{\pi_{j-1}, \{I_{j-1}, \mu_A\}\} = -\epsilon_j \{\pi_{j+1}, \{I_{j+1}, \mu_A\}\}. \quad (4.11)$$

*Démonstration.* La double égalité est obtenue, en deux temps, en remplaçant  $I_j$  par  $\{\pi_{j-1}, \omega_{j+1}\}$  ou par  $\epsilon_j \{\pi_{j+1}, \omega_{j-1}\}$ .  $\square$

Le théorème suivant généralise la propriété 1. du corollaire 4.1.11.

**THÉORÈME 4.1.15** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ . Pour tous  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,*

$$[I_j, I_k]_{FN} = 0.$$

*Démonstration.* Soient  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ . Si  $j = k$  nous sommes dans le cas du corollaire 4.1.11. Si  $j \neq k$  on peut supposer sans perte de généralité que  $k = j + 1$  (si ce n'est pas le cas il suffit d'utiliser l'antisymétrie du crochet de Frölicher-Nijenhuis). Calculons  $[I_j, I_{j+1}]_{FN}$  en recourant au grand crochet :

$$\begin{aligned} [I_j, I_{j+1}]_{FN} &= \{\{I_j, \mu_A\}, I_{j+1}\} + \{i_{I_{j+1}} I_j, \mu_A\} \\ &= -\{\{I_j, \mu_A\}, \{\omega_{j-1}, \pi_j\}\} + \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{I_{j-1}, \mu_A\}, \end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a remplacé  $I_{j+1}$  par  $-\{\omega_{j-1}, \pi_j\}$  et employé l'égalité  $i_{I_{j+1}} I_j = I_j \circ I_{j+1} = \epsilon_j \epsilon_{j+1} I_{j-1}$ . Si on applique l'identité de Jacobi on obtient

$$[I_j, I_{j+1}]_{FN} = -\{\{\{I_j, \mu_A\}, \omega_{j-1}\}, \pi_j\} - \{\omega_{j-1}, \{\{I_j, \mu_A\}, \pi_j\}\} + \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{I_{j-1}, \mu_A\}.$$

Si on applique l'identité de Jacobi au premier terme du membre de droite on s'aperçoit que les deux termes qui apparaissent sont nuls : le premier car  $\omega_{j-1}$  est fermée et le deuxième parce que la paire  $(\omega_{j-1}, I_j)$  est une  $\Omega N$ -structure. Appliquons à présent la deuxième égalité du lemme 4.1.14 au second terme du membre de droite, on obtient :

$$[I_j, I_{j+1}]_{FN} = \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{\omega_{j-1}, \{\pi_{j-1}, \{I_{j-1}, \mu_A\}\}\} + \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{I_{j-1}, \mu_A\}.$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'identité de Jacobi au premier terme et le fait que  $\{\omega_{j-1}, \pi_{j-1}\} = -\text{id}_A$  pour obtenir

$$[I_j, I_{j+1}]_{FN} = \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{\pi_{j-1}, \{\omega_{j-1}, \{I_{j-1}, \mu_A\}\}\}.$$

On applique de nouveau l'identité de Jacobi et le fait que  $\omega_{j-1}$  soit une forme fermée. On obtient

$$[I_j, I_{j+1}]_{FN} = \epsilon_j \epsilon_{j+1} \{\pi_{j-1}, \{\{\omega_{j-1}, I_{j-1}\}, \mu_A\}\}.$$

enfin, si  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$  alors  $\{\omega_{j-1}, I_{j-1}\} = 0$  et on conclut que

$$[I_j, I_{j+1}]_{FN} = 0. \quad \square$$

Dans la section suivante nous verrons que le résultat du théorème précédent reste valable dans le cas  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . En effet on montrera dans la section suivante que, quand  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ , les paires  $(\omega_j, I_j)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , sont des  $\Omega N$ -structures et ainsi le dernier passage de la démonstration est aussi vrai dans ce cas.

Le corollaire suivant est immédiat.

**COROLLAIRE 4.1.16** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ . On a, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

1.  $(\mu_{I_j})_{I_{j+1}} = \epsilon_j\epsilon_{j+1}\mu_{I_{j-1}}$  ;
2.  $(\mu_{I_{j+1}})_{I_j} = \epsilon_{j-1}\mu_{I_{j-1}}$ .

*Démonstration.*

1. Il suffit de réécrire, en termes du grand crochet, l'égalité  $[I_j, I_{j+1}]_{FN} = 0$  :

$$\{\{I_j, \mu_A\}, I_{j+1}\} + \epsilon_j\epsilon_{j+1} \{I_{j-1}, \mu_A\} = 0$$

ou, en termes de structures d'algèbroïde de Lie,

$$(\mu_{I_j})_{I_{j+1}} = \epsilon_j\epsilon_{j+1}\mu_{I_{j-1}}.$$

2. La vérification est immédiate et s'appuie sur la proposition 4.1.7 et l'égalité obtenue en 1.

$$\begin{aligned} (\mu_{I_{j+1}})_{I_j} &= \{I_j, \{I_{j+1}, \mu_A\}\} \\ &= \{\{I_j, I_{j+1}\}, \mu_A\} + \{I_{j+1}, \{I_j, \mu_A\}\} \\ &= (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j\epsilon_{j+1}) \{I_{j-1}, \mu_A\} + \epsilon_j\epsilon_{j+1} \{I_{j-1}, \mu_A\} \\ &= \epsilon_{j-1}\mu_{I_{j-1}}. \end{aligned} \quad \square$$

### 4.1.3 Cas $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$

Dans la section précédente, on a montré que si  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS alors les paires  $(\pi_j, I_k)$ ,  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ , avec  $j \neq k$ , sont des  $PN$ -structures. En est-il de même pour les couples  $(\pi_j, I_j)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ ? On s'aperçoit rapidement que ce n'est pas toujours le cas : la première condition de la définition de structure de Poisson-Nijenhuis pour un couple  $(\pi_j, I_j)$ , c'est-à-dire la condition  $I_j \circ \pi_j^\sharp = \pi_j^\sharp \circ {}^t I_j$ , est équivalente à la condition  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . En effet,

$$I_j \circ \pi_j^\sharp = (\epsilon_j\epsilon_{j-1}g^{-1} \circ \omega_j^b) \circ \pi_j^\sharp = -\epsilon_j\epsilon_{j-1}g^{-1};$$

et par ailleurs,

$$\pi_j^\sharp \circ {}^t I_j = \pi_j^\sharp \circ (-\epsilon_j\epsilon_{j-1}\omega_j^b \circ {}^t(g^{-1})) = -\epsilon_j\epsilon_{j-1}{}^t(g^{-1}) = -\epsilon_{j+1}g^{-1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_j \circ \pi_j^\sharp &= \pi_j^\sharp \circ {}^t I_j && \iff \epsilon_j \epsilon_{j-1} = \epsilon_{j+1} \\ &&& \iff \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1. \end{aligned}$$

Donc, dans le cas  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ , les paires  $(\pi_j, I_j)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , ne peuvent pas être des  $PN$ -structures et, dans ce cas, une structure PHS  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  n'induit que les 6  $PN$ -structures de la proposition 4.1.9. En particulier, dans le cas hyperkählerien, où  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$  le nombre de  $PN$ -structures induites est 6 et non 9 comme affirmé par Camacaro et Cariñena dans [4].

Le théorème suivant assure que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$  est aussi une condition suffisante pour que  $(\pi_j, I_j)$  soit une structure de Poisson-Nijenhuis, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ .

**THÉORÈME 4.1.17** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(\pi_j, I_j)$  est une structure de Poisson-Nijenhuis et*

$$(\mu_{I_j})_{\pi_j} = (\mu_{\pi_j})_{t I_j} = \epsilon_{j+1} \mu_{g^{-1}},$$

où, par analogie avec les notations précédentes, on note  $\mu_{g^{-1}} := \{g^{-1}, \mu_A\}$ .

Afin de simplifier la démonstration du théorème démontrons d'abord le lemme suivant.

**LEMME 4.1.18** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

$$- \{I_j, \{\pi_j, \mu_A\}\} = \{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = -\epsilon_{j+1} \{g^{-1}, \mu_A\}.$$

*Démonstration.* Utilisons le lemme 4.1.14. La deuxième égalité de (4.11) peut s'écrire :

$$\epsilon_j \{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = \epsilon_{j+1} \{\pi_{j-1}, \{I_{j-1}, \mu_A\}\}.$$

Si on emploie à présent la première égalité de (4.11) on obtient :

$$\epsilon_j \{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = -\epsilon_{j+1} \epsilon_{j-1} \{I_j, \{\pi_j, \mu_A\}\}.$$

Comme  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$  on parvient à la première égalité cherchée :

$$\{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = - \{I_j, \{\pi_j, \mu_A\}\}. \quad (4.12)$$

D'autre part, si on applique l'identité de Jacobi, on a

$$\{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = \{\{\pi_j, I_j\}, \mu_A\} + \{I_j, \{\pi_j, \mu_A\}\}.$$

On emploie la proposition 4.1.7 et l'égalité (4.12) pour obtenir

$$\{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = -2 \epsilon_{j+1} \{g^{-1}, \mu_A\} - \{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\},$$

donc

$$\{\pi_j, \{I_j, \mu_A\}\} = -\epsilon_{j+1} \{g^{-1}, \mu_A\}. \quad \square$$

Démontrons à présent le théorème 4.1.17.

*Démonstration.* La première condition de la définition de structure de Poisson-Nijenhuis pour  $(\pi_j, I_j)$  vient directement de l'hypothèse  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$  et de l'observation faite dans le paragraphe précédant le théorème 4.1.17.

La deuxième condition se déduit directement du lemme précédent. En effet, l'égalité du lemme 4.1.18 peut se traduire en termes de structures d'algèbroïde de Lie par

$$(\mu_{\pi_j})_{tI_j} = (\mu_{I_j})_{\pi_j} = -\epsilon_{j+1} \mu_{g^{-1}}. \quad \square$$

Le corollaire suivant est une conséquence du théorème 4.1.17 et de la proposition 3.1.29.

**COROLLAIRE 4.1.19** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . Alors,  $g^{-1}$  est un bivecteur de Poisson (ou, en d'autres termes,  $g$  est une 2-forme symplectique).*

**PROPOSITION 4.1.20** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$*

1.  $(\pi_j, g)$  est une  $P\Omega$ -structure ;
2.  $(g^{-1}, \omega_j)$  est une  $P\Omega$ -structure.

*Démonstration.* 1. Par définition, la paire  $(\pi_j, g)$  est une  $P\Omega$ -structure si et seulement si

$$d(i_N g) = 0,$$

où  $N = \pi_j^\# \circ g = -\epsilon_{j-1} I_j$ , en utilisant les égalités de la proposition 4.1.4. Ainsi, la condition précédente s'écrit

$$d(i_{I_j} g) = 0,$$

et, utilisant un des résultats précédents, peut être réécrite

$$d(\omega_j) = 0.$$

Or cette dernière condition est vérifiée, pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , car  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS.

2. La démonstration est analogue. Dans ce cas,  $N = g^{-1} \circ \omega_j^\flat = \epsilon_j \epsilon_{j-1} I_j$ , et  $i_N \omega_j = 2\epsilon_j g$  est fermée d'après le corollaire précédent. □

D'après les propositions 3.1.39 et 3.1.40, ces  $P\Omega$ -structures induisent des  $PN$ -structures et  $\Omega N$ -structures (non-triviales), comme énoncé dans les corollaires suivants.

**COROLLAIRE 4.1.21** *Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,*

1.  $(\pi_j, I_j)$  est une PN-structure ;
2.  $(g^{-1}, I_j)$  est une PN-structure.

**COROLLAIRE 4.1.22** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ . Pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,

1.  $(g, I_j)$  est une  $\Omega N$ -structure ;
2.  $(\omega_j, I_j)$  est une  $\Omega N$ -structure.

Comme conséquence du corollaire précédent, et plus précisément du fait que  $(\omega_j, I_j)$  soit une  $\Omega N$ -structure pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on peut améliorer le théorème 4.1.15 en omettant la condition  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ .

**THÉORÈME 4.1.23** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS. Pour tous  $j, k \in \{1, 2, 3\}$ ,

$$[I_j, I_k]_{FN} = 0.$$

**PROPOSITION 4.1.24** Soit  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  une structure PHS telle que  $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = 1$ . Les bivecteurs  $\pi_i$  et  $g^{-1}$  sont des bivecteurs de Poisson compatibles, c'est-à-dire que

$$[\pi_i, g^{-1}]_{SN} = 0,$$

pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

*Démonstration.* Soit  $i \in \{1, 2, 3\}$ . En termes du grand crochet

$$[\pi_i, g^{-1}]_{SN} = \{\{\pi_i, \mu_A\}, g^{-1}\}.$$

On emploie l'égalité 4. de la proposition 4.1.7 en remplaçant  $g^{-1}$  par  $-2\epsilon_i \{I_{i-1}, \pi_{i-1}\}$  puis on applique l'identité de Jacobi. On obtient

$$\begin{aligned} [\pi_i, g^{-1}]_{SN} &= -2\epsilon_i \{\{\pi_i, \mu_A\}, \{I_{i-1}, \pi_{i-1}\}\} \\ &= -2\epsilon_i \{\{\{\pi_i, \mu_A\}, I_{i-1}\}, \pi_{i-1}\} - 2\epsilon_i \{I_{i-1}, \{\{\pi_i, \mu_A\}, \pi_{i-1}\}\}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite s'annule car

$$\{\{\pi_i, \mu_A\}, \pi_{i-1}\} = [\pi_i, \pi_{i-1}]_{SN} = 0,$$

et dans le premier terme on emploie l'égalité 2. du lemme 4.1.14 qui peut s'écrire  $-\{I_{i-1}, \{\pi_i, \mu_A\}\} = \{\pi_{i+1}, \mu_A\}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} [\pi_i, g^{-1}]_{SN} &= -2\epsilon_i \{\{\pi_{i+1}, \mu_A\}, \pi_{i-1}\} \\ &= -2\epsilon_i [\pi_{i+1}, \pi_{i-1}]_{SN} \\ &= 0. \end{aligned} \quad \square$$

#### 4.1.4 Structure PHS comme paire de $\Omega N$ -structures

Nous finissons cette section en donnant un théorème que l'on peut considérer comme une définition alternative des structures PHS dans laquelle une structure PHS devient une paire de  $\Omega N$ -structures,  $(\omega_1, I_2), (\omega_2, I_1)$  compatibles en un certain sens. Remarquons que cette compatibilité de  $\Omega N$ -structures ne fait intervenir que des relations linéaires sur les fibres.

**THÉORÈME 4.1.25** *Un quadruplet  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS si et seulement si  $(\omega_1, I_2)$  et  $(\omega_2, I_1)$  sont des  $\Omega N$ -structures telles que*

$$\begin{cases} I_j^2 = \epsilon_j \text{id}_A \\ \omega_1^b \circ I_2 = \omega_2^b \circ I_1 \\ I_1 \circ I_2 = \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 I_2 \circ I_1. \end{cases} \quad (4.13)$$

À partir d'une paire de  $\Omega N$ -structures comme ci-dessus, on retrouve  $\omega_3$  et  $I_3$  de la façon suivante

$$\begin{cases} \omega_3^b = \omega_1^b \circ I_2 \\ I_3 = \epsilon_2 I_2 \circ I_1. \end{cases}$$

*Démonstration.* Étant donnée une structure PHS  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ , les paires  $(\omega_1, I_2)$  et  $(\omega_2, I_1)$  sont des  $\Omega N$ -structures, par le corollaire 4.1.10. Les relations (4.13) sont soit vérifiées par définition d'une structure PHS soit découlent de la commutativité du diagramme (4.10).

Inversement, si  $(\omega_1, I_2)$  et  $(\omega_2, I_1)$  sont des  $\Omega N$ -structures vérifiant (4.13) alors les formes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont symplectiques par définition, et  $\omega_3$ , définie par  $\omega_3^b = \omega_1^b \circ I_2$  est symplectique car  $(\omega_1, I_2)$  est une  $\Omega N$ -structure. Enfin, les relations (4.13) impliquent que les tenseurs  $I_1, I_2, I_3$  sont de carré  $\pm \text{Id}_A$ .  $\square$

## 4.2 Exemples du type $\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 = -1$ : équations de Monge-Ampère

On note  $(x, y, p, q)$  les coordonnées canoniques de  $\mathbb{R}^4$  et on introduit les 6 formes symplectiques suivantes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= dx \wedge dp + dy \wedge dq & \omega_4 &= dx \wedge dp - dy \wedge dq \\ \omega_2 &= dx \wedge dq + dp \wedge dy & \omega_5 &= dx \wedge dq - dp \wedge dy \\ \omega_3 &= dx \wedge dy + dp \wedge dq & \omega_6 &= dx \wedge dy - dp \wedge dq \end{aligned}$$

Ces 2-formes sur  $\mathbb{R}^4$  sont linéairement indépendantes et engendrent tout l'espace vectoriel  $\Gamma(\wedge^2(\mathbb{R}^4))$ .

La proposition suivante classe les 20 structures PHS différentes que l'on peut former à partir des 2-formes  $\{\omega_1, \dots, \omega_6\}$ .

**PROPOSITION 4.2.1** *Pour tout  $1 \leq i < j < k \leq 6$ , le triplet  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  est une structure PHS de type  $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = -1$ .*

*Plus précisément :*

1. les triplets  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  et  $(\omega_4, \omega_5, \omega_6)$  sont du type quaternionique ;
2. les 9 triplets  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  avec  $1 \leq i < j \leq 3$  et  $k \in \{4, 5, 6\}$  sont du type para-quaternionique, l'unique tenseur de passage de carré  $-\text{Id}$  étant celui qui relie  $\omega_i$  à  $\omega_j$ .
3. les 9 triplets  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  avec  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $4 \leq j < k \leq 6$  sont du type para-quaternionique, l'unique tenseur de passage de carré  $-\text{Id}$  étant celui qui relie  $\omega_j$  à  $\omega_k$ .

*Démonstration.* Pour déterminer si un triplet  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  est une structure PHS (et de quel type), il faut déterminer les 3 tenseurs de passage et vérifier si leur carré est égal à  $\text{Id}$  ou à  $-\text{Id}$ .

Pour tous  $a, b \in \{1, \dots, 6\}$ , on note  $I_{ab}$  le tenseur de passage de  $\omega_a$  à  $\omega_b$ , c'est-à-dire tel que

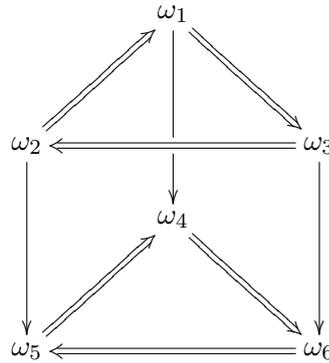
$$\omega_b(\cdot, \cdot) = \omega_a(I_{ab}, \cdot, \cdot).$$

On a alors  $I_{ab} = (\omega_a^b)^{-1} \circ \omega_b^b$  et on peut évaluer  $I_{ab}$  sur la base  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\right)$  des sections de  $T(\mathbb{R}^4)$ . Par exemple, pour le tenseur  $I_{12}$ , on a

$$\begin{aligned} I_{12} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} & I_{12} \left( \frac{\partial}{\partial p} \right) &= -\frac{\partial}{\partial q} \\ I_{12} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} & I_{12} \left( \frac{\partial}{\partial q} \right) &= \frac{\partial}{\partial p} \end{aligned}$$

On vérifie alors que  $(I_{12})^2 = -\text{Id}$ .

Si on évalue tous les tenseurs de passage pour savoir si leurs carrés est égal à  $\text{Id}$  ou à  $-\text{Id}$  on obtient le diagramme (tridimensionnel) suivant, où les doubles flèches indiquent un tenseur de passage de carré  $-\text{Id}$  et les flèches simples un tenseur de passage de carré  $\text{Id}$ .



Autrement dit, le tenseur de passage  $I_{ab}$  entre  $\omega_a$  et  $\omega_b$  est de carré  $-\text{Id}$  si  $a, b \in \{1, 2, 3\}$  ou  $a, b \in \{4, 5, 6\}$  et est de carré  $\text{Id}$  dans tous les autres cas.  $\square$

### 4.2.1 Lien avec l'équation de Monge-Ampère.

Étant donnée une 2-forme  $\eta$  sur  $\mathbb{R}^4$  et une application  $\alpha$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$\alpha(x, y) := (P(x, y), Q(x, y)).$$

On note  $\Delta_\eta(\alpha)$  la restriction de  $\eta$  au graphe de  $\alpha$ , c'est-à-dire l'image réciproque de  $\eta$  par l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^4$  suivante

$$(x, y) \mapsto (x, y, P(x, y), Q(x, y)).$$

Dans le lemme suivant nous considérons  $\eta = \omega_1$  et interprétons la condition  $\Delta_{\omega_1}(\alpha) = 0$ . Dans la suite, on note  $f_x, f_y, f_{xy}$ , etc... les dérivées partielles d'une fonction  $f$  de variables  $x$  et  $y$ .

**LEMME 4.2.2** ([32]) *La condition  $\Delta_{\omega_1}(\alpha) = 0$  équivaut à l'existence d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$P = f_x \text{ et } Q = f_y.$$

*Démonstration.* Écrivons explicitement la 2-forme, sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Delta_{\omega_1}(\alpha)$  :

$$\begin{aligned} \Delta_{\omega_1}(\alpha) &= dx \wedge dP + dy \wedge dQ \\ &= dx \wedge P_y dy + dy \wedge Q_x dx \\ &= (P_y - Q_x) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

L'équation  $\Delta_{\omega_1}(\alpha) = 0$  est équivalente à la condition  $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ . Par le lemme de Poincaré, cette condition équivaut à l'existence d'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$P(x, y) = f_x(x, y) \quad \text{et} \quad Q(x, y) = f_y(x, y). \quad \square$$

Pour toute 2-forme  $\eta$  sur  $\mathbb{R}^4$ , la 2-forme  $\Delta_\eta(\alpha) \in \Omega^2(\mathbb{R}^2)$  est proportionnelle à  $dx \wedge dy$ . Nous donnons ci-dessous, en termes des fonctions  $P(x, y)$  et  $Q(x, y)$ , le coefficient de proportionnalité

$$E_i(\alpha) = \frac{\Delta_{\omega_i} \alpha}{dx \wedge dy},$$

pour chacune des formes  $\omega_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(\alpha) = P_y - Q_x \\ E_2(\alpha) = P_x + Q_y \\ E_3(\alpha) = 1 + P_x Q_y - P_y Q_x \\ E_4(\alpha) = P_y + Q_x \\ E_5(\alpha) = Q_y - P_x \\ E_6(\alpha) = 1 - P_x Q_y + P_y Q_x \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Ainsi que nous venons de le voir dans le lemme 4.2.2,  $E_1(\alpha) = 0$  si et seulement s'il existe une fonction  $f$  telle que  $P = f_x, Q = f_y$ . Dans ce cas on peut identifier  $\alpha = df$  et, sous cette hypothèse, les cinq  $E_i$  restants sont donnés par

$$\begin{cases} E_2(df) &= f_{xx} + f_{yy} = \Delta(f) \\ E_3(df) &= 1 + f_{xx}f_{yy} - f_{yx}^2 = 1 + \text{Hess}f \\ E_4(df) &= 2f_{xy} \\ E_5(df) &= f_{yy} - f_{xx} \\ E_6(df) &= 1 - f_{xx}f_{yy} + f_{yx}^2 = 1 - \text{Hess}f \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $\Delta(f)$  et  $\text{Hess}f$  sont le laplacien et le hessien de  $f$ .

Soit  $\eta := \sum_{i=1}^6 A_i \omega_i$  une 2-forme quelconque sur  $\mathbb{R}^4$ , où  $(A_i(x, y, p, q))_{i=1, \dots, 6}$  sont des fonctions sur  $\mathbb{R}^4$ . Les solutions  $\alpha$  des deux équations

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_1} \alpha = 0 \\ \Delta_{\eta} \alpha = 0 \end{cases}$$

sont nécessairement, d'après le lemme 4.2.2, des solutions de la forme  $P = f_x(x, y), Q = f_y(x, y)$ . La seconde condition équivaut alors à

$$A f_{xx} + 2B f_{xy} + C f_{yy} + D(f_{xx}f_{yy} - f_{yx}^2) + E = 0 \quad (4.16)$$

où les fonctions  $A, B, C, D, E$  sont les fonctions de  $(x, y, f_x, f_y)$  données par :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(A_2 - A_5) \\ B &= \frac{1}{2}A_4 \\ C &= \frac{1}{2}(A_2 + A_5) \\ D &= \frac{1}{2}(A_3 - A_6) \\ E &= \frac{1}{2}(A_3 + A_6) \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'équation (4.16) est ce que l'on appelle *équation de Monge-Ampère*.

On remarque que  $A_1$  n'intervient pas dans l'équation de Monge-Ampère obtenue. Pour fixer  $A_1$  on lui impose d'être l'unique fonction telle que

$$\eta \wedge \omega_1 = 0.$$

En fait, on appelle *effective* une 2-forme  $\eta$  vérifiant cette condition. Étant donnée une équation du type (4.16), il existe donc une unique 2-forme effective  $\eta$  qui lui corresponde.

On démontre (voir [32]) que si  $\eta$  est effective, le tenseur de passage de  $\eta$  à  $\omega_1$  est de carré proportionnel à l'identité. Le coefficient de proportionnalité est  $-\text{Pf}(\eta)$ , où le pfaffien de  $\eta$  est donné par

$$\eta \wedge \eta = \text{Pf}(\eta) \omega_1 \wedge \omega_1.$$

On dit qu'une équation de Monge-Ampère est *elliptique* (resp. *hyperbolique*) en un point  $m \in \mathbb{R}^4$  si  $\text{Pf}(\eta)|_m > 0$  (resp.  $\text{Pf}(\eta)|_m < 0$ ). Dans ce cas, comme la fonction

$\text{Pf}(\eta) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, l'équation de Monge-Ampère est *elliptique* (resp. *hyperbolique*) dans un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  contenant  $m$ .

Dans la suite de cette section nous allons considérer les solutions d'un système de deux équations de Monge-Ampère correspondant, comme nous le verrons, à une structure PHS du type suivant :

**DÉFINITION 4.2.3** Une structure PHS  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  est dite *effective* si

$$\eta_i \wedge \eta_j = \eta_j \wedge \eta_k = \eta_k \wedge \eta_i = 0.$$

Parmi les 20 structures PHS données par la proposition 4.2.1, celles qui sont effectives sont les 8 structures  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$ , où  $i \in \{1, 4\}$ ,  $j \in \{2, 5\}$  et  $k \in \{3, 6\}$ .

On appelle *système de Jacobi* associé à la structure PHS effective  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  le triplet d'équations :

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_i}(\alpha) = 0 \\ \Delta_{\omega_j}(\alpha) = 0 \\ \Delta_{\omega_k}(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Quitte à remplacer, sur  $\mathbb{R}^4$ , les variables  $(p, q)$  par leurs opposées, on peut toujours se ramener aux cas où la structure PHS effective  $(\omega_i, \omega_j, \omega_k)$  considérée est telle que  $i = 1$  (au lieu de  $i = 4$ ). Ainsi nous avons 4 systèmes de Jacobi engendrés par des structures PHS effectives sur  $\mathbb{R}^4$ . Ces 4 systèmes de Jacobi se réduisent, par le lemme 4.2.2, à des paires d'équations de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \Delta_{\omega_j}(df) = 0 \\ \Delta_{\omega_k}(df) = 0 \end{cases}$$

où  $j \in \{2, 5\}$  et  $k \in \{3, 6\}$ . La première de ces équations est elliptique (resp. hyperbolique) si  $j = 2$  (resp.  $j = 5$ ). La seconde de ces équations est elliptique (resp. hyperbolique) si  $k = 3$  (resp.  $k = 6$ ). Les quatre systèmes d'équations de Monge-Ampère ainsi obtenus sont

• Cas  $j = 2, k = 3$  :

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = 0 \\ 1 + f_{xx}f_{yy} - f_{yx}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est formé par deux équations de Monge-Ampère de type elliptique. Les solutions sont les fonctions harmoniques qui vérifient la deuxième équation.

• Cas  $j = 2, k = 6$  :

$$\begin{cases} f_{xx} + f_{yy} = 0 \\ 1 - f_{xx}f_{yy} + f_{yx}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est formé par une première équation de type elliptique et une seconde de type hyperbolique. Il n'y a aucune solution à ce système qui implique la relation impossible  $1 + f_{xx}^2 + f_{yx}^2 = 0$

- Cas  $j = 5, k = 3$  :

$$\begin{cases} f_{yy} - f_{xx} = 0 \\ 1 + f_{xx}f_{yy} - f_{yx}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est formé par une première équation de type hyperbolique et une seconde de type elliptique. Les solutions de ce système sont les fonctions de la forme  $f(x, y) = h(x + y) + k(x - y)$  où  $h(u)$  et  $k(u)$  sont des polynômes de degré 2 dont le produit des coefficients dominants est égal à  $-\frac{1}{8}$ .

- Cas  $j = 5, k = 6$  :

$$\begin{cases} f_{yy} - f_{xx} = 0 \\ 1 - f_{xx}f_{yy} + f_{yx}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est formé par deux équations de Monge-Ampère de type hyperbolique. Les solutions de ce système sont les fonctions de la forme  $f(x, y) = h(x + y) + k(x - y)$  où  $h(u)$  et  $k(u)$  sont des polynômes de degré 2 dont le produit des coefficients dominants est égal à  $\frac{1}{8}$ .

### 4.3 Exemples du type $\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3 = 1$

#### 4.3.1 Exemples du type hyperproduit : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ .

Nous donnons un exemple de structure PHS sur un algébroïde produit, et démontrons que, sur l'algébroïde des champs de vecteurs d'une variété, toutes les structures PHS du type hyperproduit sont localement de ce type.

On note  $\mathfrak{G}$  le sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$  noyau de l'application  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  donnée par  $(a, b, c) \mapsto a + b + c$ . Le groupe  $\mathfrak{G}$  est alors formé de quatre éléments :  $\mathfrak{G} = \{(0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ .

On se donne, pour tout triplet  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$ , un algébroïde de Lie  $(A^{abc} \rightarrow M^{abc}, [\cdot, \cdot]^{abc}, \rho^{abc})$  (noté en général simplement  $A^{abc}$ ), et on considère l'algébroïde de Lie produit  $A \rightarrow M$  où

$$\begin{aligned} M &= \prod_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} M^{abc} \\ A &= \bigoplus_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} p_{abc}^* A^{abc}, \end{aligned}$$

où  $p_{abc}$  est la projection canonique de  $M$  sur  $M^{abc}$ . On notera encore, pour tout  $m \in M$ , avec un léger abus de notation,  $A_m^{abc}$ , le sous-espace vectoriel de  $A$ , que l'on devrait noter  $(p_{abc}^* A^{abc})(m)$ .

On définit des  $(1, 1)$ -tenseurs  $I_1, I_2, I_3$  sur  $A$ , pour tout  $m \in M$ , par :

$$\begin{aligned} I_1|_m &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^a \text{Id}_{A_m^{abc}} \\ I_2|_m &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^b \text{Id}_{A_m^{abc}} \\ I_3|_m &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^c \text{Id}_{A_m^{abc}} \end{aligned}$$

Par construction, les relations  $I_1^1 = I_2^2 = I_3^3 = \text{Id}$  sont satisfaites et ces  $(1, 1)$ -tenseurs commutent. Plus précisément, on a  $I_i I_j = I_k$  pour tous  $i, j, k$  distincts dans  $\{1, 2, 3\}$ . On suppose maintenant que l'on se donne, pour tout  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$ , une 2-forme  $g^{abc}$  symplectique sur l'algébroïde  $A^{abc}$ , et on considère

$$g = \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} p_{abc}^* g^{abc}$$

qui est, par construction, une forme symplectique sur l'algébroïde  $A$ .

On introduit alors des 2-formes sur l'algébroïde  $A$  en posant

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^a p_{abc}^* g^{abc} \\ \omega_2 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^b p_{abc}^* g^{abc} \\ \omega_3 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^c p_{abc}^* g^{abc} \end{aligned}$$

Il découle directement de leurs définitions respectives que, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $((\omega_{i-1})^b)^{-1} \circ \omega_{i+1}^b$  restreint à  $A^{abc}$  est égal à  $I_i$ , et donc que  $(A, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS.

Nous avons associé un exemple de structure PHS avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$  à tout quadruplet d'algébroïdes de Lie munies de structures symplectiques. La structure PHS ainsi obtenue sera appelée *structure PHS canonique d'un produit direct d'algébroïdes symplectiques*. En particulier, si l'on se donne pour tout  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$  une variété symplectique  $M^{abc}$ , nous pouvons construire une structure PHS sur l'algébroïde  $TM \rightarrow M$  où  $M = \prod_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} M^{abc}$ , que nous allons appeler *structure PHS canonique d'un produit direct de variétés symplectiques*.

Nous allons voir que, toute structure PHS avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$  sur un algébroïde  $TM \rightarrow M$  de champs de vecteurs est localement de ce type.

**PROPOSITION 4.3.1** *Soit  $M$  une variété connexe munie d'une structure PHS  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  sur  $TM \rightarrow M$ , avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ . Il existe une application  $n : \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{N}$*

telle que  $\sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} n(a,b,c) = \frac{1}{2} \dim(M)$  et, pour tout point  $m \in M$ , il existe un isomorphisme de structures PHS entre un voisinage de  $m$  dans  $M$  et un voisinage de 0 dans la variété  $\prod_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} \mathbb{R}^{2n(a,b,c)}$  munie de la structure PHS du produit direct des variétés symplectiques où chaque variété  $\mathbb{R}^{2n(a,b,c)}$  est munie de la forme symplectique canonique.

*Démonstration.* Les formes symplectiques  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  définissent les  $(1,1)$ -tenseurs  $I_1, I_2$  et  $I_3$  dont le carré est égal à Id, qui commutent deux à deux et vérifient  $I_1 I_2 I_3 = \text{Id}$ . Ceci implique que, en chaque point  $m \in M$ , on a une décomposition du type

$$T_m M = \bigoplus_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} V_m^{abc}$$

où  $V_m^{abc} \subset T_m M$  est le sous-espace sur lequel  $I_1, I_2$  et  $I_3$  valent  $(-1)^a \text{Id}, (-1)^b \text{Id}$  et  $(-1)^c \text{Id}$ , respectivement. Ces espaces sont orthogonaux pour chacune des formes symplectiques  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$ . En effet si on considère, par exemple,  $\omega_1$  on a, pour  $x \in V^{abc}$  et  $y \in V^{a'b'c'}$ ,

$$\begin{aligned} \omega_1(x, y) &= \omega_2(I_3 x, y) \\ &= (-1)^c \omega_2(x, y) \\ &= (-1)^c \omega_1(x, I_3(y)) \\ &= (-1)^c (-1)^{c'} \omega_1(x, y). \end{aligned}$$

Donc  $\omega_1(x, y) = 0$  si  $c \neq c'$ . De même, on montre que si  $b \neq b'$  ou  $a \neq a'$  alors  $\omega_1(x, y) = 0$ . On peut ensuite démontrer le même résultat pour  $\omega_2$  et  $\omega_3$ .

Par ailleurs on définit une 2-forme sur  $M$  en posant

$$g(x, y) = \omega_1(I_1 x, y) = \omega_2(I_2 x, y) = \omega_3(I_3 x, y).$$

pour tous  $x, y \in \Gamma(TM)$ . On sait d'après le corollaire 4.1.19 que  $g$  est symplectique.

La distribution  $V^{abc}$  est par ailleurs de classe  $C^\infty$  pour tout  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$ . Cela découle de l'égalité suivante

$$\text{Id} = \frac{(\text{Id} - I_1)(\text{Id} - I_2)}{4} + \frac{(\text{Id} - I_1)(\text{Id} + I_2)}{4} + \frac{(\text{Id} + I_1)(\text{Id} - I_2)}{4} + \frac{(\text{Id} + I_1)(\text{Id} + I_2)}{4}$$

où les quatre opérateurs du membre de droite sont les projections sur les espaces  $V^{abc}$ , pour  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$ . Ceci permet de construire des trivialisations locales du fibré tangent qui prennent leurs valeurs dans ces espaces. On définit  $n(a, b, c)$  comme étant le rang de la distribution  $V^{abc}$ .

D'après le corollaire 4.1.11, la torsion de Nijenhuis de chacun des tenseurs  $I_1, I_2, I_3$  est nulle, ce qui implique l'intégrabilité de  $V^{abc}$ , pour tout  $(a, b, c) \in \mathfrak{G}$ . En effet, étant donnée une paire  $(x, y)$  de sections de  $V^{abc}$ , le fait que  $T_{I_1}(x, y) = 0$  s'écrit

$$I_1([x, y]_{I_1}) = [I_1 x, I_1 y],$$

i.e.,

$$I_1([I_1(x), y] + [x, I_1(y)] - I_1([x, y])) = [I_1x, I_1y],$$

et, comme  $I_1|_{V^{abc}} = (-1)^a \text{Id}|_{V^{abc}}$  et  $I_1^2 = \text{Id}$ , on obtient

$$I_1([x, y]) = (-1)^a [x, y].$$

Autrement dit,  $[x, y]$  est encore dans le sous-espace propre associé à la valeur propre  $(-1)^a$ . On raisonne ensuite avec  $I_2$  et  $I_3$  pour vérifier que  $[x, y] \in V^{abc}$  et obtenir que  $V^{abc}$  est intégrable.

Localement donc, la variété est isomorphe à  $\prod_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} \mathbb{R}^{2n(a,b,c)}$  et via cet isomorphisme, les distributions  $V^{abc}$  deviennent les distributions tangentes aux composantes  $\mathbb{R}^{2n(a,b,c)}$ .

Nous avons ici besoin d'un résultat général sur les formes symplectiques, que nous ne démontrerons pas. Soient  $N_1$  et  $N_2$  deux ouverts connexes de  $\mathbb{R}^{2n_1}$  et  $\mathbb{R}^{2n_2}$  et  $\omega$  une forme symplectique sur  $N_1 \times N_2$  telle que  $\omega(X, Y) = 0$  si  $X \in T_n N_1$  et  $Y \in T_n N_2$  pour tout  $n \in N = N_1 \times N_2$ . Alors  $\omega = p_1^* \omega_{N_1} + p_2^* \omega_{N_2}$  où  $p_i$  est la projection de  $N_1 \times N_2$  sur  $N_i$  et  $\omega_{N_i}$  est une forme symplectique sur  $N_i$ ,  $i=1,2$ . Ceci reste vrai pour le produit de quatre variétés symplectiques. Donc la forme symplectique  $g$  est de la forme

$$g = \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} p_{abc}^* g^{abc}$$

où  $g_{abc}$  est une forme symplectique sur  $\mathbb{R}^{2n(a,b,c)}$ . Par le théorème de Darboux, quitte à se restreindre à un ouvert de ce dernier espace, on peut supposer que  $g^{abc}$  est écrit sous forme canonique. On en déduit que

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^a p_{abc}^* g^{abc} \\ \omega_2 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^b p_{abc}^* g^{abc} \\ \omega_3 &= \sum_{(a,b,c) \in \mathfrak{G}} (-1)^c p_{abc}^* g^{abc} \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

### 4.3.2 Exemples du type para-hyperproduit : $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ et $\epsilon_3 = 1$ .

Nous donnons un exemple de structure PHS du type para-hyperproduit sur un algébroïde produit. Cet exemple est connu pour être, localement, le seul possible sur l'algébroïde des champs de vecteurs sur une variété (voir [3]).

Soient  $A \rightarrow N$  et  $A' \rightarrow N'$  deux algébroïdes de Lie munies chacune d'une  $\Omega N$ -structure  $(\omega, I)$  et  $(\omega', I')$  telle que  $I^2 = -\text{Id}_A$  et  $(I')^2 = -\text{Id}_{A'}$ . Par définition les 2-formes  $\omega$  et  $\omega'$  sont symplectiques et, d'après la proposition 3.1.34 les 2-formes  $\omega_I$  et  $\omega'_{I'}$  déformées par les  $(1, 1)$ -tenseurs sont également symplectiques. Nous définissons une

structure PHS avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$  et  $\epsilon_3 = 1$  sur l'algébroïde produit  $A \times A' \rightarrow N \times N'$  de la manière suivante. D'abord, nous définissons trois  $(1, 1)$ -tenseurs  $J_1, J_2, J_3$  sur  $A \times A'$  en posant

$$\begin{cases} J_1 = I \times I' \\ J_2 = I \times (-I') \\ J_3 = \text{Id} \times (-\text{Id}) \end{cases} \quad (4.18)$$

Ces tenseurs vérifient évidemment  $J_1^2 = J_2^2 = -\text{Id}_{A \times A'}$  et  $J_3^2 = \text{Id}_{A \times A'}$ . On définit aussi la forme symplectique

$$g = p^*(\omega) + (p')^*(\omega'),$$

où  $p$  et  $p'$  sont les projections de  $A \times A'$  sur  $A$  et  $A'$ . Définissons les formes  $\omega_1, \omega_2$  et  $\omega_3$  en posant

$$\begin{cases} \omega_1 = p^*(\omega_I) + (p')^*(\omega'_{I'}) \\ \omega_2 = p^*(\omega_I) - (p')^*(\omega'_{I'}) \\ \omega_3 = p^*(\omega) - (p')^*(\omega'). \end{cases}$$

Ces 2-formes sont évidemment symplectiques et on vérifie que les tenseurs de passages sont bien les tenseurs  $J_1, J_2$  et  $J_3$  définis par (4.18). Donc  $(A \times A', \omega_1, \omega_2, \omega_3)$  est une structure PHS avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$  et  $\epsilon_3 = 1$ .

En particulier, on peut choisir pour  $A \rightarrow N$  et  $A' \rightarrow N'$  des algébroïdes de champs de vecteurs sur des variétés symplectiques holomorphes : on définit  $I$  et  $I'$  comme étant les structures presque complexes sous-jacentes et  $\omega$  (resp.  $\omega'$ ) la partie réelle de la forme symplectique sur  $N$  (resp.  $N'$ ). Ceci implique que  $\omega_I$  (resp.  $\omega'_{I'}$ ) est la partie imaginaire de cette forme symplectique sur  $N$  (resp.  $N'$ ). On obtient alors une structure PHS avec  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$  et  $\epsilon_3 = 1$  sur le produit de deux variétés symplectiques holomorphes.



# Bibliographie

- [1] P. Antunes, *Poisson quasi-Nijenhuis structures with background*, Lett. Math. Phys. **86** (2008), no. 1, 33–45.
- [2] M. F. Atiyah, *Complex analytic connections in fibre bundles*, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 181–207.
- [3] G. Bande and D. Kotschick, *The geometry of recursion operators*, Comm. Math. Phys. **280** (2008), no. 3, 737–749.
- [4] J. R. Camacaro and J. F. Cariñena, *Hyper-complex structures and Lie algebroids*, Proceedings of the XI Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. R. Soc. Mat. Esp., vol. 6, R. Soc. Mat. Esp., Madrid, 2004, pp. 197–202.
- [5] J. F. Cariñena, J. Grabowski, and G. Marmo, *Courant algebroid and Lie bialgebroid contractions*, J. Phys. A **37** (2004), no. 19, 5189–5202.
- [6] José F. Cariñena, Janusz Grabowski, and Giuseppe Marmo, *Contractions : Nijenhuis and Saletan tensors for general algebraic structures*, J. Phys. A **34** (2001), no. 18, 3769–3789.
- [7] R. Caseiro, A. De Nicola, and J. Nunes da Costa, *On Poisson quasi-Nijenhuis Lie algebroids*, math.DG/0806.2467v1.
- [8] M. Crainic, *Generalized complex structures and Lie brackets*, math.DG/0412097v2.
- [9] M. Crainic and I. Moerdijk, *Deformations of Lie brackets : cohomological aspects*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **10** (2008), no. 4, 1037–1059.
- [10] A. Frölicher and A. Nijenhuis, *Theory of vector-valued differential forms. I. Derivations of the graded ring of differential forms*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. **59** = Indag. Math. **18** (1956), 338–359.
- [11] K. Grabowska, J. Grabowski, and P. Urbański, *Lie brackets on affine bundles*, Ann. Global Anal. Geom. **24** (2003), no. 2, 101–130.
- [12] J. Grabowski, *Courant-Nijenhuis tensors and generalized geometries*, Groups, geometry and physics, Monogr. Real Acad., vol. 29, Acad. Cienc. Exact. Fís. Quím. Nat., Zaragoza, 2006, pp. 101–112.
- [13] J. Grabowski and P. Urbański, *Lie algebroids and Poisson-Nijenhuis structures*, Rep. Math. Phys. **40** (1997), no. 2, 195–208.
- [14] M. Gualtieri, *Generalized complex geometry*, Ph.D. thesis, Oxford University, 2004.

- [15] D. Gutkin,  *$\Lambda$ -cohomologie et opérateurs de récursion*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **47** (1987), no. 4, 355–366.
- [16] M. Henneaux, *Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom*, Phys. Rep. **126** (1985), no. 1, 1–66.
- [17] N. J. Hitchin, *Hypersymplectic quotients*, La “Mécanique analytique” de Lagrange et son héritage, Atti della Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze fisiche, Matematiche e Naturali, Supplemento al numero 124, Accademia delle Scienze di Torino, Torino, 1990, pp. 169–180.
- [18] F. Keller and S. Waldmann, *Deformation theory of Courant algebroids via the Rothstein algebra*, arXiv :0807.0584v3 [math.QA].
- [19] I. Kolář, P. W. Michor, and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [20] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Poisson and symplectic functions in Lie algebroid theory*, to appear in Progress in Mathematics, Festschrift in honor of Murray Gerstenhaber and Jim Stasheff.
- [21] ———, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Mathematical aspects of classical field theory (Seattle, WA, 1991), Contemp. Math., vol. 132, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, pp. 459–489.
- [22] ———, *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*, Acta Appl. Math. **41** (1995), no. 1-3, 153–165.
- [23] ———, *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), no. 5, 1243–1274.
- [24] ———, *The Lie bialgebroid of a Poisson-Nijenhuis manifold*, Lett. Math. Phys. **38** (1996), no. 4, 421–428.
- [25] ———, *Derived brackets*, Lett. Math. Phys. **69** (2004), no. 1, 61–87.
- [26] ———, *Quasi, twisted, and all that...in Poisson geometry and Lie algebroid theory*, The breadth of symplectic and Poisson geometry, Progr. Math., vol. 232, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, pp. 363–389.
- [27] Y. Kosmann-Schwarzbach and K. C. H. Mackenzie, *Differential operators and actions of Lie algebroids*, Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001) (T. Voronov, ed.), Contemp. Math., vol. 315, pp. 213–233.
- [28] Y. Kosmann-Schwarzbach and F. Magri, *Poisson-Lie groups and complete integrability. I. Drinfel’d bialgebras, dual extensions and their canonical representations*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **49** (1988), no. 4, 433–460.
- [29] ———, *Poisson-Nijenhuis structures*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **53** (1990), no. 1, 35–81.
- [30] Y. Kosmann-Schwarzbach and V. Rubtsov, *Compatible structures on Lie algebroids and Monge-Ampère operators*, to appear in Acta Appl. Math., arXiv :0812.4838.
- [31] B. Kostant and S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras*, Ann. Physics **176** (1987), no. 1, 49–113.

- [32] A. Kushner, V. Lychagin, and V. Rubtsov, *Contact geometry and non-linear differential equations*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 101, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [33] P. Lecomte and C. Roger, *Modules et cohomologies des bigèbres de Lie*, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **310** (1990), 405–410.
- [34] Z.-J. Liu, A. Weinstein, and P. Xu, *Manin triples for Lie bialgebroids*, J. Differential Geom. **45** (1997), no. 3, 547–574.
- [35] K. C. H. Mackenzie, *Double Lie algebroids and second-order geometry. I*, Adv. Math. **94** (1992), no. 2, 180–239.
- [36] ———, *General theory of Lie groupoids and Lie algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 213, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [37] K. C. H. Mackenzie and P. Xu, *Lie bialgebroids and Poisson groupoids*, Duke Math. J. **73** (1994), no. 2, 415–452.
- [38] F. Magri and C. Morosi, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, Quaderno S.19, Univ. of Milan, 1984.
- [39] P. W. Michor, *Graded derivations of the algebra of differential forms associated with a connection*, Differential geometry (Peñíscola, 1988), Lecture Notes in Math., vol. 1410, Springer, Berlin, 1989, pp. 249–261.
- [40] ———, *Knit products of graded Lie algebras and groups*, Proceedings of the Winter School on Geometry and Physics (Srní, 1989), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl., no. 22, 1990, pp. 171–175.
- [41] A. Nijenhuis, *Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields I*, Indag. Math. **17** (1955), 390–397.
- [42] A. Nijenhuis and R. Richardson, *Deformations of Lie algebra structures*, J. Math. Mech. **17** (1967), 89–105.
- [43] J. Pradines, *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Calcul différentiel dans la catégorie des groupoïdes infinitésimaux*, C. R. Acad. Sci. Paris **264 A** (1967), 245–248.
- [44] D. Roytenberg, *Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds*, Ph.D. thesis, UC Berkeley, 1999.
- [45] ———, *On the structure of graded symplectic supermanifolds and Courant algebroids*, Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001), Contemp. Math., vol. 315, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 169–185.
- [46] ———, *Quasi-Lie bialgebroids and twisted Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **61** (2002), no. 2, 123–137.
- [47] V. N. Rubtsov, *Cohomology of the Der-complex*, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 4(214), 209–210.
- [48] J. A. Schouten, *Ueber Differentialkomitanten zweier kontravarianter Grössen*, Indag. Math. **2** (1940), 449–452.

- [49] ———, *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italia, 1953, Edizioni Cremonese, Roma, 1954, pp. 1–7.
- [50] P. Ševera, *Some title containing the words “homotopy” and “symplectic”, e.g. this one*, Trav. Math., Luxembourg, **16** (2005), 121–137.
- [51] P. Ševera and A. Weinstein, *Poisson geometry with a 3-form background*, Progr. Theoret. Phys. Suppl. (2001), no. 144, 145–154, Noncommutative geometry and string theory (Yokohama, 2001).
- [52] M. Stiénon and P. Xu, *Poisson quasi-Nijenhuis manifolds*, Comm. Math. Phys. **270** (2007), no. 3, 709–725.
- [53] Y. Terashima, *On Poisson functions*, J. Symplectic Geom. **6** (2008), no. 1, 1–7.
- [54] W. M. Tulczyjew, *The Legendre transformation*, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.) **27** (1977), no. 1, 101–114.
- [55] ———, *A symplectic formulation of relativistic particle dynamics*, Acta Phys. Pol. B **8** (1977), no. 6, 431–447.
- [56] ———, *Geometric formulations of physical theories*, Monographs and Textbooks in Physical Science. Lecture Notes, vol. 11, Bibliopolis, Naples, 1989, Statics and dynamics of mechanical systems.
- [57] G. M. Tuynman, *Supermanifolds and supergroups*, Mathematics and its Applications, vol. 570, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004, Basic theory.
- [58] K. Uchino, *Remarks on the definition of a Courant algebroid*, Lett. Math. Phys. **60** (2002), no. 2, 171–175.
- [59] A. Yu. Vaintrob, *Lie algebroids and homological vector fields*, Uspekhi Mat. Nauk **52** (1997), no. 2(314), 161–162.
- [60] I. Vaisman, *Complementary 2-forms of Poisson structures*, Compositio Math. **101** (1996), no. 1, 55–75.
- [61] ———, *Reduction and submanifolds of generalized complex manifolds*, Differential Geom. Appl. **25** (2007), no. 2, 147–166.
- [62] T. Voronov, *Graded manifolds and Drinfeld doubles for Lie bialgebroids*, Quantization, Poisson brackets and beyond (Manchester, 2001), Contemp. Math., vol. 315, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 131–168.
- [63] ———, *Higher derived brackets and homotopy algebras*, J. Pure Appl. Algebra **202** (2005), no. 1-3, 133–153.
- [64] P. Xu, *Hyper-Lie Poisson structures*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **30** (1997), no. 3, 279–302.
- [65] R. Zucchini, *The Hitchin model, Poisson-quasi-Nijenhuis, geometry and symmetry reduction*, J. High Energy Phys. (2007), no. 10, 075, 29.