



**HAL**  
open science

# Contribution a l'étude aérodynamique d'une éolienne par une méthode de sillage libre

Said Chkir

► **To cite this version:**

Said Chkir. Contribution a l'étude aérodynamique d'une éolienne par une méthode de sillage libre. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2010. Français. NNT : 2010ENAM0025 . pastel-00510801

**HAL Id: pastel-00510801**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00510801>**

Submitted on 21 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

**Doctorat ParisTech**

**T H È S E**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité “ Génie énergétique ”**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Saïd CHKIR**

19 Juillet 2010

**CONTRIBUTION A L'ETUDE AERODYNAMIQUE D'UNE EOLIENNE  
PAR UNE METHODE DE SILLAGE LIBRE**

Directeur de thèse : **Fawaz MASSOUH**  
Co-Directeur de la thèse : **Patrick KUSZLA**

**Jury**

**M. Farid BAKIR**, Professeur, Arts et Métiers ParisTech  
**M. Gilles NOTTON**, Maître de Conférences HDR, Université de Corse  
**Mme. Ferial AIGHO**, Professeur, Université de Latakia  
**M. Georges DESCOMBES**, Professeur, CNAM, Paris  
**M. Fawaz MASSOUH**, Maître de Conférences HDR, Arts et Métiers ParisTech  
**M. Patrick KUSZLA**, Professeur agrégé, Dr, Arts et Métiers ParisTech

Examineur  
Rapporteur  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur

**T  
H  
È  
S  
E**

*A mes parents...*



---

## Remerciements

Ce mémoire est l'aboutissement d'un travail, certes personnel, mais qui n'aurait pu voir le jour sans l'aide de nombreuses personnes. Je tiens donc ici à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette étude. Et tout d'abord, M. Fawaz MASSOUH, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité et la qualité de son encadrement.

Je tiens également à remercier mon co-directeur M. Patrick KUSZLA pour ses précieux conseils ainsi que M. Ivan DOBREV, chercheur au Laboratoire Mécanique de fluide pour son aide et ses conseils avisés.

J'exprime mes vifs remerciements à M. le Professeur Gérard COFFIGNAL, Directeur de l'Ecole Doctorale à Arts et Métiers-ParisTech pour son écoute. Nos travaux ont été effectués à l'école Arts et Métiers ParisTech : merci donc à tout le personnel de l'établissement. M. Gilles NOTTON, Maître de Conférence HDR à l'Université de Corse, et Mme le Professeur Ferial AIGHO de l'Université de Tishreen ont accepté d'être rapporteurs de thèse et leurs remarques et conseils ont été de la plus grande importance.

Que soient également remerciés ici MM. les Professeurs Farid BAKIR d'Arts et Métiers-ParisTech et Georges DESCOMBES du CNAM-Paris d'avoir accepté de participer au jury, ainsi que pour tous leurs conseils et encouragements.

J'adresse mes remerciements à M. Philippe PLANARD et à sa femme Lian pour leur aide et leurs encouragements constants.

Des remerciements particulièrement chaleureux sont ici adressés à Mme Martine PORTOLAN pour sa contribution au manuscrit. Enfin, je n'oublie pas Hussam, José, Esther, Amal, Asif, Munif, Bassem, Jérémie, Thomas, Thibaut, Xavier, DU Xi, qui ont tous contribué à rendre cette période plus agréable.

Mille mercis à Sophie SPYRIDAKIS pour sa disponibilité et ses conseils quant à la rédaction du manuscrit et son soutien dans les moments difficiles.

De manière plus personnelle, mes pensées les plus émues vont vers ma famille :

- Ma mère Nahieh, pour son amour et son indéfectible soutien.
- Mon père Fawaz, pour ses encouragements et son assistance, aussi bien matérielle que morale, grâce à qui cette thèse a pu être menée à terme dans de bonnes conditions.
- Ma femme Rana, toujours présente, à mon écoute, qui ma soutenu avec patience et délicatesse pendant cette période souvent difficile.

---

– Mes frères : Chadi, Fadi, Yamen, et mes soeurs Lamis et Iman pour leur infini soutien.

# Table des matières

Table des matières	v
Table des figures	vii
Liste des symboles	xi
<b>1 Méthodes de calcul d'un rotor éolien</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Les enjeux de la modélisation aérodynamique instationnaire des éoliennes	7
1.2.1 Aérodynamique du rotor éolien . . . . .	8
1.2.2 Sillage éolien . . . . .	8
1.2.3 Sources d'instationnarité . . . . .	9
1.3 Méthodes de modélisation aérodynamique d'une éolienne . . . . .	12
1.3.1 Théorie de Froude-Rankine . . . . .	12
1.3.2 Théorie de l'élément de pale . . . . .	13
1.3.3 Théorie de l'élément de pale-quantité de mouvement . . . . .	14
1.3.4 Méthodes "Dynamic Inflow" . . . . .	15
1.3.5 Méthodes basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes (CFD) . . . . .	16
1.3.6 Méthodes tourbillonnaires . . . . .	17
1.4 Choix de la méthode de calcul . . . . .	20
1.5 Conclusion . . . . .	21
<b>2 Développement d'un modèle de calcul des charges aérodynamiques   utilisant l'approche de sillage libre</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Systèmes de coordonnées . . . . .	28
2.3 Modèle aérodynamique de la pale . . . . .	29
2.4 Mise en œuvre de la méthode de sillage libre . . . . .	29
2.5 Résolution de l'équation du mouvement des marqueurs . . . . .	33
2.5.1 Discrétisation de l'équation gouvernant le sillage . . . . .	33
2.5.2 Calcul de la vitesse induite . . . . .	37
2.5.3 L'avancement dans le temps avec le schéma prédicteur-correcteur	47
2.5.4 Traitement de la croissance du noyau du tourbillon marginal . .	51

2.6	Calcul de la charge aérodynamique . . . . .	52
2.6.1	Algorithmme de calcul . . . . .	52
2.6.2	Application du code de sillage libre à différents cas d'écoulement	58
2.7	Conclusion . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Validation à l'aide de solutions analytiques connues</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Validation du calcul de la vitesse induite . . . . .	65
3.2.1	Filament tourbillonnaire rectiligne infini . . . . .	66
3.2.2	Anneau tourbillonnaire . . . . .	68
3.2.3	Tourbillon hélicoïdal . . . . .	71
3.3	Validation du calcul de la vitesse auto-induite . . . . .	77
3.3.1	Tourbillon parabolique . . . . .	77
3.4	Influence du nombre de divisions et du rayon du noyau tourbillonnaire sur l'évolution de la vitesse induite et auto-induite . . . . .	79
3.4.1	Influence du nombre de divisions de l'anneau tourbillonnaire . .	80
3.4.2	Influence du rayon du noyau tourbillonnaire . . . . .	80
3.5	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Application du modèle de sillage libre pour le fonctionnement d'une éolienne face au vent</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	85
4.2	Description du dispositif expérimental . . . . .	85
4.2.1	Rotor éolien testé . . . . .	86
4.2.2	Soufflerie d'Arts et Métiers ParisTech . . . . .	87
4.3	Vélocimétrie par image de particules PIV . . . . .	88
4.4	Déroulement des essais . . . . .	91
4.5	Application du modèle de sillage libre pour l'éolienne Rutland . . . . .	92
4.5.1	Répartition de la circulation et de la vitesse axiale le long de la pale . . . . .	96
4.5.2	Les positions des centres des tourbillons marginaux . . . . .	101
4.5.3	Calcul de la puissance de l'éolienne testée . . . . .	102
4.6	Conclusion . . . . .	103
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>105</b>
	<b>Annexes</b>	<b>109</b>
	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>113</b>



# Table des figures

1.1	Le développement du tourbillon marginal à partir des tourbillons libres.	9
1.2	Expérience réalisée par le Centre danois de recherche sur l'énergie "Risø", montrant le sillage d'une éolienne à une seule pale [63]. . . . .	10
1.3	Sources de charges aérodynamiques instationnaires sur un rotor éolien .	10
1.4	Les effets de la couche limite terrestre sur l'écoulement autour d'une éolienne, source [42] . . . . .	11
1.5	Remplacement de la surface balayée par les pales du rotor par un disque perméable . . . . .	13
1.6	Efforts subis par un élément de pale d'un rotor éolien soumis à un vent.	14
1.7	Un élément de pale et un anneau balayé par cet élément . . . . .	15
1.8	Écoulement autour d'une éolienne obtenu par la méthode (CFD) d'après [43]	16
1.9	Sillage prescrit de forme cylindrique d'une éolienne . . . . .	19
1.10	Sillage tourbillonnaire d'une éolienne composé de tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. . . . .	20
2.1	Écoulement sur une pale d'éolienne à faible incidence, présence d'un tourbillon libre dû à la longueur finie de la pale . . . . .	26
2.2	Visualisation du sillage d'une éolienne par la fumée, [NREL] . . . . .	27
2.3	Vitesses et forces agissant sur le profil d'une pale . . . . .	28
2.4	Systèmes de coordonnées cartésiennes et azimutales utilisées dans la méthode de sillage libre . . . . .	29
2.5	Modèle physique du sillage d'une éolienne équipée d'une seule pale tournante . . . . .	31
2.6	Description lagrangienne du sillage d'une éolienne équipée d'une seule pale tournante . . . . .	31
2.7	Modèle physique du sillage par la méthode de sillage libre . . . . .	33
2.8	Schéma de discrétisation . . . . .	34
2.9	Discrétisation par l'utilisation d'un schéma explicite de 5 points . . . . .	36
2.10	Vitesse induite par un segment infinitésimal $ds$ de ligne tourbillonnaire	37
2.11	Évaluation de la vitesse induite d'un segment tourbillonnaire par la loi Biot-Savart . . . . .	39
2.12	Organigramme de calcul de la vitesse induite. . . . .	41
2.13	Calcul de la vitesse auto-induite . . . . .	42
2.14	Champ de vitesses auto-induit au sein d'un tourbillon incurvé . . . . .	44
2.15	Organigramme de calcul de la vitesse auto-induite. . . . .	46

2.16	Création d'une valeur approximative de la position d'un marqueur lagrangien . . . . .	48
2.17	Correction de la position d'un marqueur lagrangien après un avancement dans le temps . . . . .	48
2.18	Récapitulatif des étapes du schéma prédicteur-correcteur (première partie)	49
2.19	Récapitulatif des étapes du schéma prédicteur-correcteur (seconde partie)	50
2.20	Profil de la vitesse tangentielle autour un noyau tourbillonnaire de rayon $r_c$ . . . . .	51
2.21	Élément de pale : triangles des vitesses ; composantes de la force aérodynamique . . . . .	53
2.22	Premier pas temporel : un tourbillon se détache de l'extrémité de la pale	54
2.23	Triangle de vitesse du profil $i$ à la première itération . . . . .	55
2.24	Trois cas de fonctionnement d'une éolienne avec trois distributions différentes de circulation . . . . .	56
2.25	Deuxième pas temporel : un nouveau tourbillon se détache de l'extrémité de la pale avec une circulation $\Gamma_1$ . . . . .	57
2.26	Triangle de vitesses du profil $n$ au $i^{eme}$ itération . . . . .	58
2.27	Récapitulatif des étapes du programme informatique relatif à la méthode de sillage libre . . . . .	60
3.1	Filament tourbillonnaire rectiligne infini . . . . .	66
3.2	Vitesse induite par un filament tourbillonnaire rectiligne infini . . . . .	67
3.3	Vitesse induite désingularisée par un filament tourbillonnaire rectiligne infini . . . . .	67
3.4	Tourbillon circulaire divisé en plusieurs segments . . . . .	69
3.5	Vitesse induite désingularisée par un anneau tourbillonnaire . . . . .	70
3.6	Influence du rayon de noyau tourbillonnaire sur la vitesse induite par un anneau tourbillonnaire . . . . .	70
3.7	Tourbillon hélicoïdal de rayon et de pas constants . . . . .	71
3.8	Vitesse induite par un tourbillon hélicoïdal de pas variable au point de contrôle 1 . . . . .	73
3.9	Erreur absolue dans le cas 1 en fonction du pas du tourbillon hélicoïdal	73
3.10	Vitesse binormale induite au point de contrôle 2 pour différents pas . .	75
3.11	L'erreur absolue dans le cas 2 pour différents pas d'hélice . . . . .	75
3.12	Vitesse binormale induite au point de contrôle 3 pour différents pas . .	76
3.13	L'erreur absolue dans le cas 3 pour différents pas d'hélice . . . . .	76
3.14	Tourbillon parabolique divisé en plusieurs segments . . . . .	77
3.15	Vitesse auto-induite d'une parabole . . . . .	78
3.16	Schéma montrant un point de contrôle situé sur l'anneau tourbillonnaire	79
3.17	Vitesse induite d'un anneau tourbillonnaire pour différentes valeurs de rayon de noyau tourbillonnaire, et pour différents nombres de segmentations . . . . .	80
3.18	Vitesse induite d'un anneau tourbillonnaire pour différentes valeurs de rayon de noyau tourbillonnaire, et pour différents nombres de segmentations . . . . .	81

---

---

4.1	Rotor éolien Rutland 503 testé dans la veine d'essai de la soufflerie d'Arts et Métiers ParisTech . . . . .	86
4.2	Maquette de l'éolienne testée dans la veine d'essai . . . . .	87
4.3	Soufflerie du Laboratoire de Mécanique des Fluides à Arts et Métiers ParisTech . . . . .	88
4.4	Principe de la méthode de vélocimétrie par image de particules . . . . .	89
4.5	Schéma de l'installation pour les mesures par <i>PIV</i> . . . . .	90
4.6	Coefficients de portance pour l'éolienne Rutland 503. . . . .	93
4.7	Coefficients de traînée pour l'éolienne Rutland 503. . . . .	93
4.8	Forme du sillage calculé à l'aval de l'éolienne. . . . .	94
4.9	Champ calculé de vitesse axiale induite par les tubes tourbillonnaires marginaux à l'aval de l'éolienne . . . . .	95
4.10	Variation de la vitesse axiale dans le plan de rotation du rotor éolien. . . . .	95
4.11	Distribution de la circulation le long de la pale à $\lambda=3$ . . . . .	97
4.12	Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à $\lambda=3$ . . . . .	97
4.13	Distribution de la circulation le long de la pale à $\lambda=3.5$ . . . . .	98
4.14	Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à $\lambda=3.5$ . . . . .	98
4.15	Distribution de la circulation le long de la pale à $\lambda=4$ . . . . .	99
4.16	Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à $\lambda=4$ . . . . .	99
4.17	Distribution de la circulation le long de la pale à $\lambda = 4.5$ . . . . .	100
4.18	Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à $\lambda = 4.5$ . . . . .	100
4.19	Comparaison entre les positions des centres des tourbillons marginaux du rotor éolien testé et ses positions calculées à l'aide de la méthode de sillage libre . . . . .	101
4.20	Comparaison du coefficient de puissance calculée par la méthode de sillage libre et le coefficient de puissance mesurée de l'arbre du rotor éolien testé . . . . .	102



# Liste des symboles

$\vec{r}$	Vecteur position du marqueur, $[m]$ .
$\alpha$	Angle d'incidence, $[rad]$ .
$\beta$	Angle d'écoulement en amont du profil, $[rad]$ .
$\beta_1$	Angle défini sur la figure (2.11), $[rad]$ .
$\beta_2$	Angle défini sur la figure (2.11), $[rad]$ .
$\Delta S_1, \Delta S_2$	Distance défini sur la figure(2.14), $[m]$ .
$\delta$	Angle limite (cutoff), $[rad]$ .
$\delta_s$	Coefficient de diffusion effective, $[-]$ .
$\Gamma$	Circulation, $[m^2s^{-1}]$ .
$\Omega$	Vitesse de rotation du rotor, $[rads^{-1}]$ .
$\psi_b$	Angle azimutal de la pale lorsque l'élément tourbillonnaire est émis, $[rad]$
$\psi_w$	Angle azimutal de l'élément tourbillonnaire, $[rad]$
$\rho$	Masse volumique de l'air, $[kg/m^3]$ .
$E(s)$	Intégrale elliptique de deuxième espèce.
$K(s)$	Intégrale elliptique de première espèce.
$\theta$	Angle de calage, $[rad]$ .
$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$	Vecteur unitaire.
$\vec{F}_D$	Force de traînée aérodynamique, $[N]$ .
$\vec{F}_L$	Force de portance aérodynamique, $[N]$ .
$\vec{V}_\infty$	Vitesse à l'infini amont, $[ms^{-1}]$ .
$\vec{V}_{ind} = (u, v, w)$	Vitesse induite par le système tourbillonnaire, $[ms^{-1}]$ .
$\vec{V}_i$	Vitesse auto-induite dans le point de contrôle $i$ , $[ms^{-1}]$ .
$\vec{W}$	Vitesse relative du vent, $[\frac{m^2}{s}]$ .
$a_1$	Paramètre de diffusion effective.

$B$	Nombre des pales.
$C_D$	Coefficient de traînée, [-].
$C_L$	Coefficient de portance, [-].
$c_n^i$	Corde de l'élément de la pale $n$ dans l'itération $i$ , [ $m$ ].
$d$	Distance entre le point et le segment tourbillonnaire, [ $m$ ].
$D_{\psi_b}$	Opérateur de différence finie temporelle.
$D_{\psi_w}$	Opérateur de différence finie spatiale.
$dF_t$	Force tangentielle de l'élément de la pale, [ $N$ ].
$dF_z$	Force axiale de l'élément de la pale, [ $N$ ].
$ds$	Élément infinitésimal de filament tourbillonnaire, [ $m$ ].
$i$	Indice d'itération, [-].
$N$	Nombre des éléments de la pale, [-].
$n$	Indice la nombre d'élément de la pale, [-].
$N_s$	Nombre de segments tourbillonnes.
$P$	Puissance extraite par une éolienne, [ $W$ ].
$p$	Pas d'un tourbillon hélicoïdal, [ $m$ ].
$r_c$	Rayon du noyau du tourbillon, [ $m$ ].
$r_m$	Rayon du moyeu, [ $m$ ].
$r_p$	Rayon du rotor éolien. [ $m$ ].
$Re_\nu$	Nombre de Reynolds du tourbillon.
$s$	Argument de l'intégrale elliptique.
$t$	Temps, [ $s$ ].
$t_0$	L'instant auquel le marqueur est émis, [ $s$ ].
$U_b$	Vitesse binormal, [ $m/s$ ].
$V_r$	Composante radiale du vecteur vitesse induit, [ $m.s^{-1}$ ].
$V_z$	Composante axiale du vecteur vitesse induit, [ $m.s^{-1}$ ].
$W(\pi, p)$	Intégrale de l'équation 2.10 de [79].
$W(p)$	Intégrale de l'équation 4.1 de [14].
$\alpha_s$	Coefficient d'Oseen = 1.25643.
$\nu$	Viscosité cinématique, [ $m^2s$ ].

# Introduction générale

## Présentation générale de la recherche

Cette étude s'intéresse au développement d'une méthode de sillage libre pour le calcul de l'écoulement tridimensionnel instationnaire au travers d'une éolienne à axe horizontal. L'objectif est d'évaluer la charge aérodynamique et la puissance du rotor éolien dans différents régimes de fonctionnement.

Dans cette démarche, l'écoulement réel au travers du rotor est remplacé par un écoulement de fluide parfait, au travers d'un système tourbillonnaire équivalent. Ce système tourbillonnaire comporte des tourbillons attachés aux pales et des tourbillons libres détachés des pales. Pour simplifier, la vorticité issue des pales est supposée concentrée dans deux tourbillons libres, à l'extrémité et au pied de chaque pale. Afin de calculer l'écoulement résultant et évaluer les efforts dynamiques exercés sur la structure du rotor, une méthode de sillage libre a été mise en œuvre. Cette méthode préconise l'utilisation d'une description lagrangienne de l'écoulement. L'évolution du sillage à l'aval du rotor est obtenue en suivant l'évolution spatio-temporelle de marqueurs, eux-mêmes représentatifs des tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. La résolution de l'équation gouvernant l'évolution du sillage et l'obtention des positions des marqueurs, nécessitent la mise en œuvre d'une méthode utilisant un schéma explicite prédicteur-correcteur du deuxième ordre. La vitesse induite par les filaments tourbillonnaires est calculée à l'aide de la loi de Biot-Savart pour les effets générés par les tourbillons voisins du point de contrôle. Sur le point de contrôle, où la loi de Biot-Savart devient singulière, on a recours à une correction locale basée sur les rayons de courbure du filament tourbillonnaire.

La méthode de sillage libre suppose un fluide parfait mais ce travail ne saurait être complet s'il n'intégrait pas les effets visqueux. En effet, l'hypothèse de fluide parfait introduit une valeur infinie de la vitesse au centre des tourbillons. Pour lever cette singularité, on considère un rayon fini des noyaux tourbillonnaires. Ceci permet de limiter la vitesse induite à une valeur maximale située sur ce rayon. La diffusion des lignes tourbillonnaires et l'accroissement du rayon du noyau tourbillonnaire sont modélisés en fonction de l'âge du tourbillon. Les coefficients nécessaires pour représenter l'influence de la viscosité sont obtenus expérimentalement.

Les résultats numériques permettent ainsi de visualiser les trajectoires des tourbillons

marginiaux émis à partir des extrémités des pales.

Afin d'effectuer la validation du code de calcul réalisé, les résultats obtenus numériquement sont, dans un premier temps, comparés à ceux donnés par des solutions analytiques connues. Les cas étudiés sont ceux du tourbillon rectiligne infini, de l'anneau tourbillonnaire et du tourbillon hélicoïdal, d'une importance capitale pour l'étude du sillage à l'aval d'une éolienne. La validation de l'algorithme, destiné à calculer la vitesse auto-induite aux points singuliers, s'effectue sur un filament tourbillonnaire parabolique, pour lequel on dispose d'une solution analytique.

Notre démarche de validation requiert un travail expérimental mené sur une maquette d'éolienne par des essais en soufflerie, afin de mesurer les positions des foyers tourbillonnaires des tourbillons marginaux et la puissance mesurée sur l'arbre du rotor éolien testé. La validation de la méthode de sillage libre dans un régime de fonctionnement face au vent, est réalisée par comparaison avec les résultats expérimentaux concernant quatre paramètres : la répartition de la circulation et la vitesse axiale le long de la pale, les positions des foyers tourbillonnaires et la puissance de l'éolienne. Les résultats des simulations sont comparés avec les données expérimentales et confirment la faisabilité et l'efficacité du modèle développé.

## Aperçu de la thèse

Le mémoire est divisé en quatre chapitres.

**Le premier chapitre** identifie certaines sources d'instationnarité de l'écoulement réel, nous paraissent predominantes dans le fonctionnement instationnaire du rotor, ainsi que la nature physique complexe du sillage qui en découle. Ce chapitre présente aussi les différentes théories aérodynamiques appliquées aux rotors éoliens. L'accent est mis sur la méthode d'élément de pale et les théories tourbillonnaires car elles constituent la base de notre modélisation.

Les théories tourbillonnaires "méthode de sillage prescrit et méthode de sillage libre", désormais prisées dans notre domaine, modélisent mieux l'écoulement au travers du rotor éolien et tiennent compte des singularités créées lors de l'advection de chacun des tourbillons marginaux issus des extrémités des pales. Suivant la représentation des pales du rotor, il existe deux groupes de méthodes tourbillonnaires dans lesquelles les pales sont remplacées par une ligne portante ou par une surface portante. L'avantage de la méthode de la ligne portante est l'utilisation des caractéristiques des profils, prenant en compte les effets visqueux et l'effet de compressibilité. La justification du choix de la méthode de sillage libre conclut ce chapitre.

**Le deuxième chapitre** pose la méthodologie de cette étude. La méthode de sillage libre utilisée ici est une méthode potentielle, initialement utilisée dans l'analyse des rotors d'hélicoptères. Elle est basée sur le remplacement de l'écoulement réel autour d'un rotor éolien, par l'écoulement d'un fluide parfait à travers un système tourbillonnaire équivalent.

Une description lagrangienne de l'écoulement est appliquée dans laquelle des marqueurs



sont placés le long de chaque tourbillon marginal. Après discrétisation des trajectoires des tourbillons marginaux, les marqueurs successifs sont connectés deux à deux par un segment tourbillonnaire linéaire. Le sillage tourbillonnaire à l'aval du rotor est déterminé, en supposant que le vecteur tourbillonnaire de celui-ci soit parallèle au vecteur de la vitesse. Après sélection du système de coordonnées utilisé dans cette modélisation, on développe l'équation régissant le sillage, sa résolution, et le choix du type de discrétisation. Ensuite, à partir de la loi Biot-Savart, on développe la technique de calcul des vitesses induite dans le sillage. Il est à noter que la représentation du tourbillon marginal, par des segments tourbillonnaires linéaires, diminue la précision du calcul au voisinage du point de contrôle. Ce problème requiert une correction incluant la courbure de la ligne tourbillonnaire. Cette correction est réalisée par le recours à la vitesse auto-induite (self-induced velocity), et s'effectue uniquement pour les segments situés à gauche et à droite du point de contrôle. A cause des effets de viscosité de l'air, le noyau de chaque tourbillon marginal s'accroît au fur et à mesure de son avancement vers l'aval du rotor. Le traitement de ce gradient diamétral du tube tourbillonnaire a été intégré dans cette méthode, ainsi que le traitement de la singularité. Un code numérique basé sur la méthode de sillage libre et la méthode de l'élément de pale a été développé, afin de déterminer les efforts aérodynamiques appliqués par les pales sur le fluide. Le calcul est itératif et donne la valeur de la puissance à chaque pas temporel, et cela se poursuit jusqu'à la convergence du calcul. Ce chapitre s'achève par une description graphique de l'algorithme numérique développé dans ce travail.

**Le troisième chapitre** présente une étude systématique de la précision du calcul de la vitesse induite, par la méthode de sillage libre. Il s'agit notamment d'évaluer la précision liée à l'utilisation des segments rectilignes afin de remplacer les tourbillons marginaux.

Pour des cas spécifiques, les résultats obtenus par le code numérique issu de la méthode de sillage libre sont comparés avec ceux donnés par une solution analytique connue. La validation est d'abord effectuée sur des exemples relativement simples (filament tourbillonnaire rectiligne infini et anneau tourbillonnaire) puis sur un cas de tourbillon hélicoïdal infini, ainsi que sur un cas de tourbillon parabolique. Aux points singuliers, où les tourbillons marginaux se détachent de l'extrémité de la pale, la précision du calcul est évaluée en fonction du nombre de divisions et du rayon du noyau tourbillonnaire. Cette étude permet de justifier le choix de la valeur de ces deux paramètres.

**Le quatrième chapitre** concerne l'exploration de l'écoulement à la sortie d'une maquette de rotor éolien. L'étude de l'écoulement autour de ce dernier a nécessité la mise en œuvre d'un dispositif expérimental dans la soufflerie du laboratoire LMF-Arts et Métiers ParisTech. Cette exploration a pour objet de mesurer les efforts aérodynamiques s'appliquant sur le rotor éolien pour un cas d'éolienne Rutland face au vent. La technique de vélocimétrie par image de particules (*PIV*) a été utilisée pour obtenir le champ de vitesses dans le sillage. Le traitement des images issues de cette technique a permis de visualiser l'écoulement dans un repère lié au rotor et de montrer la forme du sillage, ainsi que de déterminer les positions des foyers tourbillonnaires dans le sillage proche du rotor. La performance énergétique du rotor éolien prévue par la méthode

de sillage libre, ainsi que les positions des tourbillons marginaux, sont comparés avec les résultats mesurés dans la soufflerie du laboratoire LMF-Arts et Métiers ParisTech, sous des conditions de vent contrôlées, tout ceci étant réalisé en fonction de la vitesse spécifique.

Les expériences portant sur cette éolienne ont donné lieu à une vaste base de données expérimentales. Notre étude a deux objectifs : définir la variation de l'angle d'incidence autour du profil et l'évolution du coefficient de force normale le long de la pale, en fonction de son angle azimutal d'une part ; déterminer la performance de l'éolienne en fonction de la vitesse du vent d'autre part. Les valeurs calculées sont comparées avec les données expérimentales disponibles pour cette éolienne.

Le mémoire se termine par une conclusion générale résumant l'ensemble des résultats obtenus au cours de ce travail.

# Chapitre 1

## Méthodes de calcul d'un rotor éolien



## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Les enjeux de la modélisation aérodynamique instationnaire des éoliennes</b>	<b>7</b>
1.2.1	Aérodynamique du rotor éolien	8
1.2.2	Sillage éolien	8
1.2.3	Sources d'instationnarité	9
<b>1.3</b>	<b>Méthodes de modélisation aérodynamique d'une éolienne</b>	<b>12</b>
1.3.1	Théorie de Froude-Rankine	12
1.3.2	Théorie de l'élément de pale	13
1.3.3	Théorie de l'élément de pale-quantité de mouvement	14
1.3.4	Méthodes "Dynamic Inflow"	15
1.3.5	Méthodes basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes (CFD)	16
1.3.6	Méthodes tourbillonnaires	17
1.3.6.1	Méthodes de sillage prescrit	19
1.3.6.2	Méthodes de sillage libre	19
<b>1.4</b>	<b>Choix de la méthode de calcul</b>	<b>20</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>21</b>

---

## 1.1 Introduction

Ce chapitre identifie dans un premier temps certaines sources d'instationnarité de l'écoulement réel, qui nous paraissent prédominantes dans le fonctionnement instationnaire du rotor, ainsi que la nature physique complexe du sillage qui en découle. Sont présentées ensuite les différentes théories aérodynamiques appliquées aux rotors éoliens. La méthode d'élément de pale et la théorie tourbillonnaire de sillage libre font l'objet d'une attention particulière car elles constituent la base de notre modélisation. La justification du choix de ces deux méthodes conclut ce chapitre.

## 1.2 Les enjeux de la modélisation aérodynamique instationnaire des éoliennes

L'éolienne est, par définition, un dispositif mécanique utilisant la force motrice du vent. Cette force peut être utilisée mécaniquement (dans le cas d'une éolienne de pompage), ou produire de l'électricité (dans le cas d'un aérogénérateur). La limite de Betz (voir annexe 5) prouve qu'une partie seulement de la puissance cinétique du vent peut être transformée en puissance mécanique via le rotor éolien. Par ailleurs, la plupart des codes actuels de calcul des efforts aérodynamiques reposent sur des simplifications susceptibles de nuire à la précision des résultats. Afin de proposer des éoliennes fiables

et performantes, et de les dimensionner correctement, les constructeurs doivent donc disposer d'outils capables de calculer rapidement les efforts en service.

Les enjeux actuels de la modélisation aérodynamique du rotor éolien peuvent être classifiés en trois niveaux :

### 1.2.1 Aérodynamique du rotor éolien

L'estimation du champ de vitesses et des angles d'incidence par rapport aux profils des pales est un élément fondamental de prédiction de la charge dynamique sur le rotor ainsi que de la puissance produite par l'éolienne [70, 40]. En effet, les paramètres régissant les forces aérodynamiques (portance, trainée) sur chaque section transversale de la pale sont : la vitesse relative, l'angle d'incidence, les propriétés physiques du fluide en écoulement et la géométrie de la pale.

Le sillage induit une vitesse sur chaque section de pale. Cette vitesse induite est à l'origine d'une évolution de la charge aérodynamique supportée par les pales, car elle engendre une modification de la valeur de l'angle d'incidence sur chaque section transversale de la pale.

### 1.2.2 Sillage éolien

L'expérience prouve qu'une aile fixe sans rotation, installée dans un écoulement, produit à ses extrémités des tourbillons dits marginaux, advectés par l'écoulement. Par ses effets induits, cette vorticité influence la charge aérodynamique sur l'aile. Néanmoins, les effets induits n'ont plus d'influence sur la charge à une distance supérieure et à une valeur équivalente à quelque corde.

Dans le cas d'un rotor d'éolienne, les tourbillons marginaux prennent une forme hélicoïdale. Par conséquent, cette influence limitée n'est pas observée. Au contraire, ce phénomène doit être pris en compte de façon complète afin de permettre le calcul de la charge du rotor de l'éolienne.

La structure du sillage dépend fortement des conditions de fonctionnement de l'éolienne. Dans ce sillage, la nappe tourbillonnaire, issue du bord de fuite de la pale, s'enroule rapidement avec les tourbillons marginaux issus de l'extrémité des pales (figure1.1). Après une certaine distance, la forme hélicoïdale du sillage commence à disparaître et les tourbillons s'entrelacent et se désorganisent (figure1.2). Chaque changement de la forme du sillage s'accompagne d'un changement des valeurs des vitesses induites et donc de la charge sur le rotor.

Lors d'un fonctionnement en dérapage au face au vent, les tourbillons marginaux sont à l'origine d'effets tels que la génération de bruit et la vibration des pales. Quand les tourbillons marginaux sont dans une zone voisine du rotor, les vitesses induites locales au rotor modifient l'angle d'incidence, qui produit à son tour des fluctuations temporelles de la charge.

L'exploration de la structure du sillage du rotor éolien, indispensable au calcul des charges sur les pales et de la puissance utile, constitue un défi dans leur prédiction.

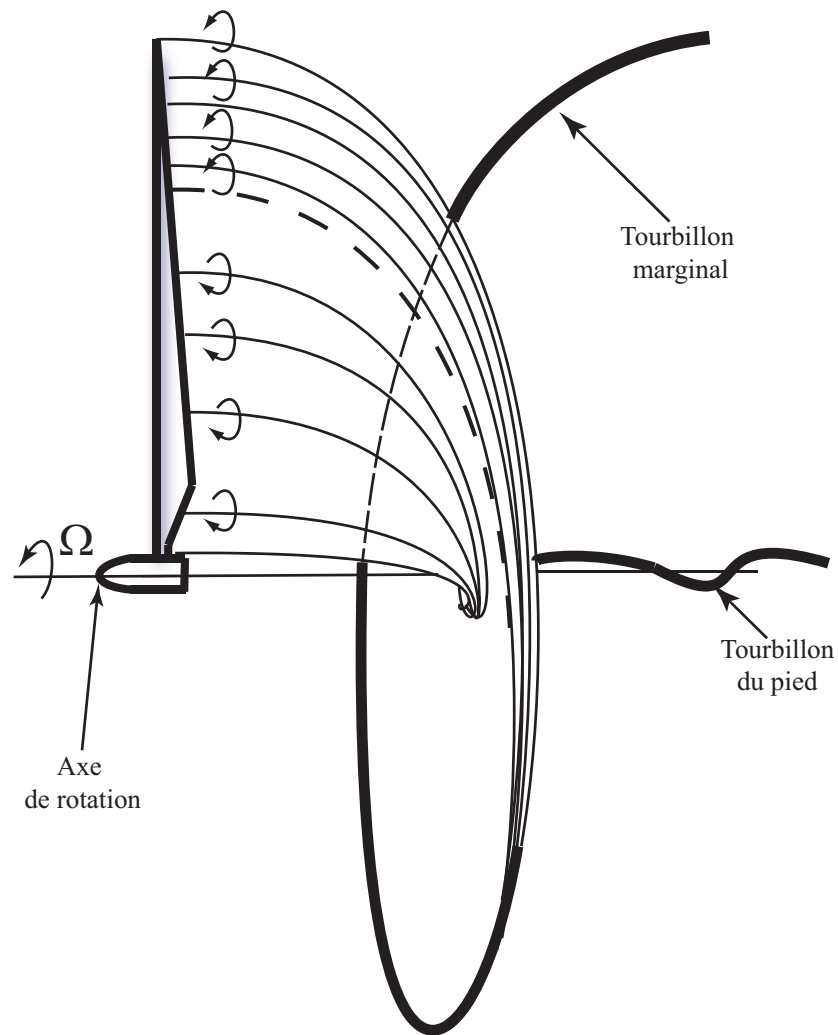


FIGURE 1.1 – Le développement du tourbillon marginal à partir des tourbillons libres.

Elle présente en effet des difficultés à deux niveaux : sur le plan des mesures expérimentales (mesures non intrusives comme le LDV, le PIV) ainsi que sur le plan des outils de simulation actuels, car ces derniers ne permettent pas encore de prédire le sillage et la puissance de manière satisfaisante.

### 1.2.3 Sources d'instationnarité

Les éoliennes fonctionnent généralement au sein d'un écoulement instationnaire. La figure 1.3 résume les sources en apparence prédominantes, des charges aérodynamiques instationnaires sur le rotor éolien. En effet, la charge sur chaque élément de pale varie dans le temps à cause de divers effets. Les sources spécifiques prises ici en considération pour l'éolienne, sont les suivantes [41, 28, 34, 20] :

1. Vitesse et direction du vent : le vent souffle généralement à une vitesse rarement constante. Cet effet peut produire un changement significatif de l'angle d'incidence aux profils des pales. Ce changement est considérable dès lors qu'il



FIGURE 1.2 – Expérience réalisée par le Centre danois de recherche sur l'énergie "Risø", montrant le sillage d'une éolienne à une seule pale [63].

### Sources des charges aérodynamiques instationnaires sur un rotor éolien

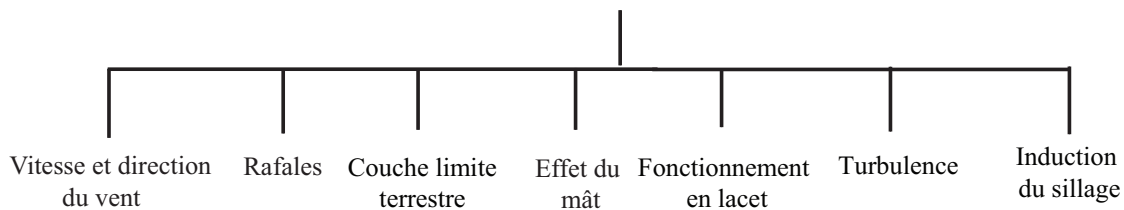


FIGURE 1.3 – Sources de charges aérodynamiques instationnaires sur un rotor éolien

s'accompagne d'une modification de la vitesse induite produite par le sillage, celui-ci changeant de forme en fonction de la vitesse du vent. Il en résulte donc un changement permanent des forces locales appliquées au rotor et une puissance variable en fonction du temps.

2. Couche limite terrestre : lors du fonctionnement de l'éolienne (surtout pour une éolienne de grande taille), la partie inférieure est alimentée par une vitesse de vent plus faible que sa partie supérieure (figure.1.4). Cela correspond à l'effet de la couche limite terrestre, qui freine l'écoulement de l'air en raison de la rugosité de la surface du sol, du relief ou des vagues où l'éolienne a été installée.
3. Rafales de vent : les rafales de vent peuvent engendrer, sur plus d'une seconde, des pics de vitesse de vent supérieurs à la vitesse du vent moyennée en cours de fonctionnement de l'éolienne. Ces variations soudaines dégradent de manière significative les composants mécaniques et électriques. Les charges mécaniques subissent aussi les effets de ces pics, facteurs d'importants couples dans le rotor de l'éolienne et engendrent des échauffements anormaux, voire de bris dans l'arbre de transmission.



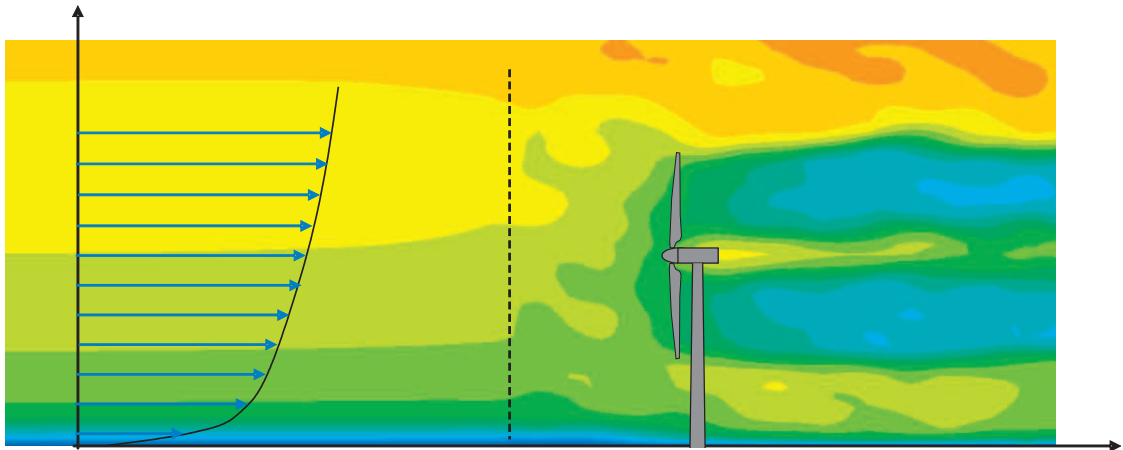


FIGURE 1.4 – Les effets de la couche limite terrestre sur l'écoulement autour d'une éolienne, source [42]

4. Fonctionnement en dérapage : quand l'éolienne fonctionne dans une position où la direction du vent n'est pas perpendiculaire au plan du rotor, des variations instationnaires importantes des vitesses locales appliquées sur les pales peuvent se produire [36, 75, 55].  
En effet, l'éolienne fonctionne souvent en dérapage, le mécanisme de contrôle du positionnement du rotor face au vent ne pouvant assurer une position idéale du rotor à tout moment. Dans le cas d'un fonctionnement de l'éolienne à une vitesse spécifique faible, une grande déviation de l'écoulement axial est susceptible de se produire, amplifiant ainsi ces effets instationnaires, malgré le vrillage des pales.
5. Effet du mât : le mât influence indiscutablement sur l'état des charges aérodynamiques au moment du passage des pales dans son sillage [58, 19, 45].  
En effet, à chaque passage au voisinage du mât, les pales rencontrent une zone où la vitesse du vent est plus faible. L'écoulement est alors bloqué par la production d'une zone de réduction de la vitesse du vent à l'amont et à l'aval du mât. La chute de vitesse dans cette zone dépend du type de mât (tubulaire en acier, en treillis, mât haubané) et de ses dimensions. Un changement transitoire de l'angle d'incidence de chaque élément de pale se produit à chaque tour de pale, modifiant ainsi les charges appliquées par l'écoulement.
6. Turbulence : la turbulence atmosphérique est un phénomène majeur et un facteur important. Elle est généralement provoquée par des déplacements d'air de températures inégales [10], dans des régions présentant une surface de terrain très accidentée ou des obstacles.  
Les turbulences rendent plus difficile la récupération de l'énergie cinétique et augmentent les charges aérodynamiques appliquées aux composants mécaniques de l'éolienne. En général, on essaye donc d'augmenter la hauteur de la tour afin d'éviter que la turbulence engendrée près du sol influence la surface balayée par le rotor.

7. L'induction instationnaire du sillage : la variation temporelle des conditions aérodynamiques (vitesse, incidence, circulation) au rotor produit un effet sur la force et les positions des tourbillons émis et advectés dans le sillage à l'aval de l'éolienne. Ce processus d'évolution a un effet héréditaire dans le temps car il continue à se reproduire dans le développement du sillage.
8. Les effets tridimensionnels autour des profils des pales : L'existence d'une composante radiale d'écoulement engendre le développement d'une couche limite  $3 - D$  sur la pale, ce qui complique un peu plus le comportement aérodynamique théoriquement prévu en  $2 - D$ .

L'asymétrie des efforts de ces sources instationnaires se traduit par la présence de couples parasites. Ces couples augmentent les vibrations engendrées par le couple axial instationnaire sur l'ensemble rotor-ligne d'arbre, dangereuses pour la tenue mécanique des pales du rotor, elles mêmes soumises alors à une fatigue sous contraintes cycliques. Ces facteurs (couples parasites, vibrations et contraintes cycliques) sont en partie transmis par voie solide à l'ensemble du système (ligne d'arbre, génératrice), et au-delà, à la structure elle-même, au travers des paliers, de la butée et du berceau de la génératrice. Ce phénomène, à transmission purement solide, est directement relié aux fluctuations de charges aérodynamiques, ou portance instationnaire, de chacune des sections de pales.

## 1.3 Méthodes de modélisation aérodynamique d'une éolienne

Habituellement, les modèles d'écoulement autour du rotor éolien, supposent un fluide parfait et incompressible [21]. Parmi les méthodes les plus utilisées, on distingue :

### 1.3.1 Théorie de Froude-Rankine

Dans la théorie de Froude-Rankine [15], le rotor est considéré tel un appareil modifiant l'énergie cinétique du fluide qui le traverse.

Cette théorie suppose un écoulement monodimensionnel et un fluide parfait et incompressible à travers le rotor. La surface balayée par les pales du rotor est remplacée par un disque perméable facteur d'une discontinuité de pression.

Dans le cas d'une éolienne, ce disque extrait l'énergie cinétique du vent et provoque un ralentissement de l'air. Selon l'équation de continuité, le tube de courant enveloppant le disque augmentera son diamètre de l'amont à l'aval en traversant le rotor.

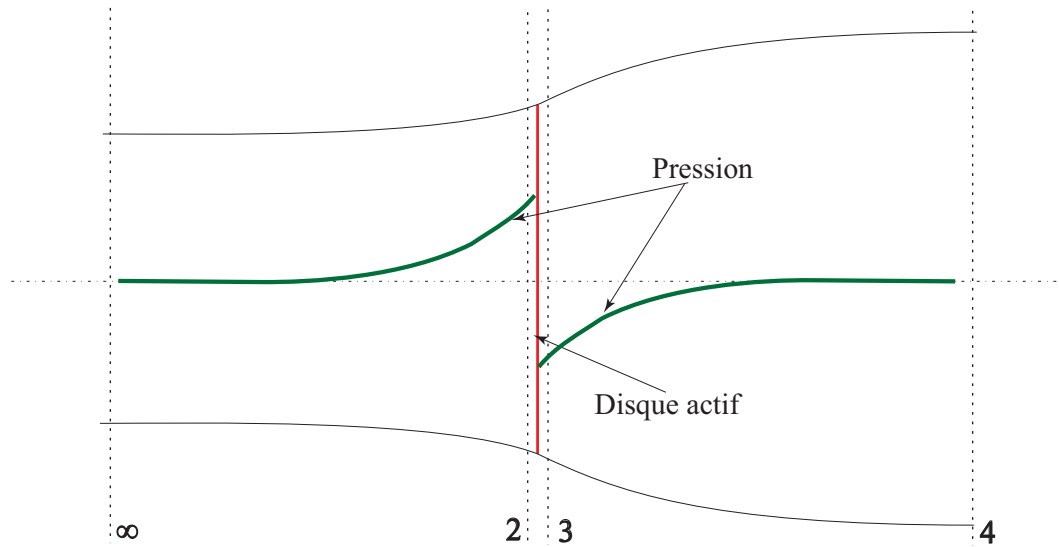


FIGURE 1.5 – Remplacement de la surface balayée par les pales du rotor par un disque perméable

Afin d'exprimer la puissance du rotor  $P$  en fonction du coefficient de vitesse axiale induite, on utilise la théorie de quantité de mouvement et l'équation de Bernoulli. Grâce à cette méthode, il est possible de formuler la puissance du rotor en fonction du coefficient de vitesse axiale induite. Il est de même possible de démontrer que la puissance maximum extraite par le rotor n'excède pas  $16/27$  de la puissance disponible (loi de Betz), pour une vitesse induite égale à un tiers de la vitesse à l'infini amont [48]. Cette méthode ne tenant pas compte de la présence des pales est souvent, pour cette raison, simultanément utilisée avec la théorie de l'élément de pale.

### 1.3.2 Théorie de l'élément de pale

Cette théorie repose sur le découpage de la pale en plusieurs tranches à l'aide de surfaces cylindriques et sur une étude de l'écoulement menée tranche par tranche (figure 1.6). On suppose que l'écoulement dans un anneau est indépendant des autres anneaux. En conséquence, si on obtient les forces de traînée et de portance pour chaque tranche, on peut évaluer les caractéristiques intégrales du rotor. Pour obtenir les forces élémentaires, chaque tranche de la pale est présentée comme une aile cylindrique soumise au vent relatif créé par la vitesse du vent à l'infini et par la rotation.

Les forces aérodynamiques sont calculées à partir des coefficients de traînée et de portance du profil dépendants de l'angle d'incidence [15, 29]. Les coefficients aérodynamiques sont obtenus à partir des essais et prennent en compte les effets de viscosité. L'intégration des forces aérodynamiques le long de la pale permet d'obtenir la force axiale, le couple et la puissance du rotor.

La théorie de l'élément de pale donne des résultats satisfaisants à condition que les vitesses induites soient faibles. Or ce n'est pas le cas des éoliennes, qui fonctionnent souvent à une vitesse induite relativement grande, voisine d'un tiers de la vitesse à l'infini, afin d'approcher le point maximum d'énergie récupérable.

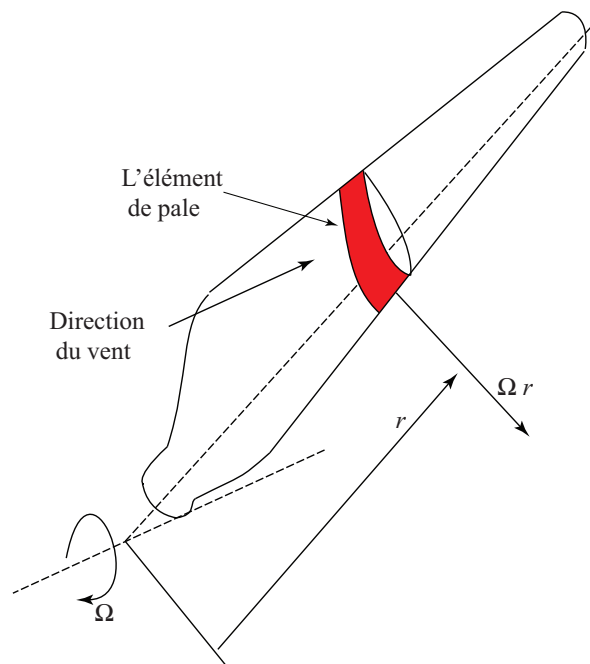


FIGURE 1.6 – Efforts subis par un élément de pale d'un rotor éolien soumis à un vent.

Cette méthode est donc souvent associée à des approches permettant de calculer la vitesse induite [50, 25], telles la méthode de Glauert [29] ou la loi Biot-Savart.

### 1.3.3 Théorie de l'élément de pale-quantité de mouvement

Cette approche est basée sur la théorie de l'élément de pale, mais la vitesse relative au profil est corrigée par les vitesses induites. Ici, la vitesse induite axiale est calculée pour chaque anneau élémentaire en appliquant le théorème de quantité de mouvement dans la direction axiale (figure 1.7).

La vitesse induite tangentielle est calculée à l'aide du théorème de quantité de mouvement angulaire. On tient ainsi compte du champ de vitesses perturbé par le rotor. Contrairement à la théorie monodimensionnelle de Froude-Rankine, les vitesses induites varient le long de la pale [15, 66, 29]. Par contre, elles sont moyennées dans la direction azimutale. Cette théorie est actuellement améliorée à l'aide de différentes corrections prenant en compte le nombre fini de pales [71].

La prise en compte des effets tridimensionnels nécessite le recours aux polaires  $2D$  corrigés ou aux polaires des profils tournants. Il existe également des corrections pour le fonctionnement de l'éolienne en dérapage (cas non axisymétriques), aux résultats satisfaisants et à faibles angles de désalignement.

En raison de son calcul rapide et fiable, cette théorie est fréquemment utilisée par les fabricants d'éoliennes pour la conception et les études préliminaires et cela, en vue d'obtenir des résultats initiaux propices à lancer d'autres méthodes plus précises comme la méthode de sillage libre.

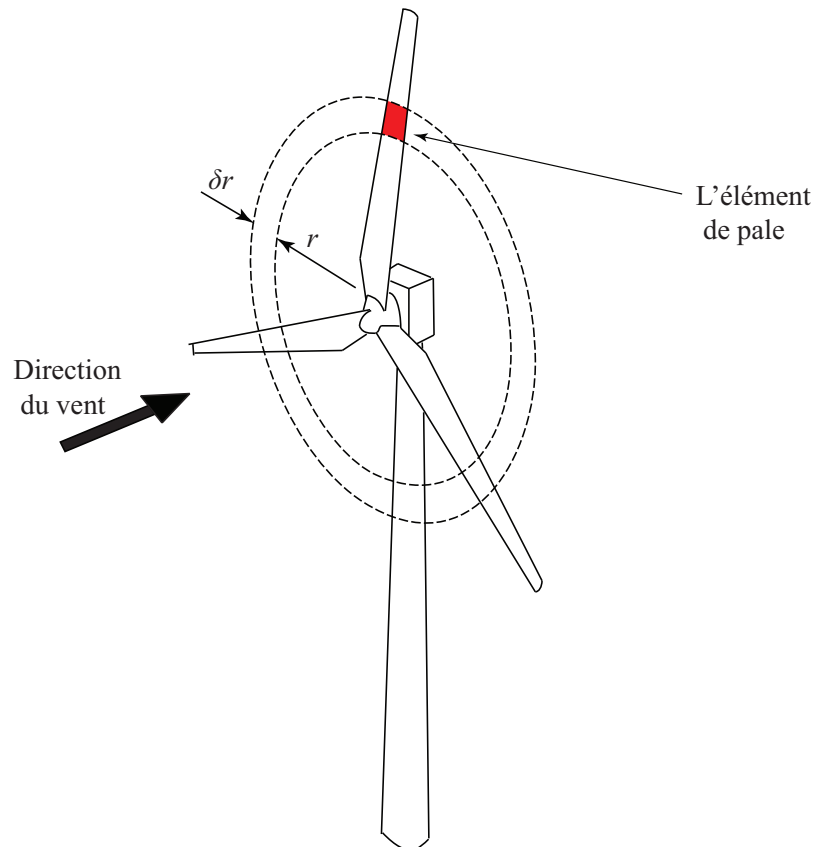


FIGURE 1.7 – Un élément de pale et un anneau balayé par cet élément

### 1.3.4 Méthodes "Dynamic Inflow"

La théorie de l'élément de pale-quantité de mouvement donne de bons résultats dans les cas simples. Néanmoins, les résultats obtenus à l'aide de cette théorie ne sont pas satisfaisants pour les écoulements complexes, en cas de fonctionnement de l'éolienne en dérapage ou durant les rafales de vent [50, 68]. Des méthodes spécifiques ont donc été développées pour aborder les cas instationnaires et non-symétriques. Ces méthodes prennent en compte l'irrégularité de la vitesse induite dans le plan du rotor et la variation temporelle du vent en amont et présentent la vitesse induite comme une série de polynômes orthogonaux [18, 61].

Afin d'évaluer les effets instationnaires, la notion de masse apparente est introduite dans l'équation de quantité de mouvement. Ce terme permet en considération l'inertie du fluide associé au rotor. Une modélisation du décalage temporel entre le changement de la vitesse à l'infini et la puissance du rotor est ainsi possible. Ce modèle conduit à un système d'équations différentielles ordinaires quant à la relation entre les vitesses induites, la charge aérodynamique des pales et la vitesse en amont.

L'utilisation la plus répandue de ce modèle dans le domaine de l'éolienne est basée sur la méthode de Pitt et Peters [16]. Malheureusement, les méthodes "dynamic inflow" recourent à plusieurs constantes empiriques [50].

En conséquence, les résultats obtenus ne sont donc fiables que si on en connaît les constantes temporelles liées au fonctionnement du rotor.

### 1.3.5 Méthodes basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes (CFD)

Avec l'augmentation de la puissance des ordinateurs, ces dernières années ont vu un recours croissant aux équations de Navier-Stokes, la résolution de ces équations constituant désormais la méthode de référence dans tous les domaines de la mécanique des fluides [73]. Les avantages de cette méthode sont d'autant plus connus dans les cas d'écoulements très complexes [27, 67].

Dans le cas de l'écoulement autour d'une éolienne (figure 1.8), plusieurs travaux confirment la performance de cette méthode. Les résultats sont bons pour des vitesses de vent faibles et modérées [71] mais malheureusement moins fiables dans le cas de grandes vitesses, la différence avec les essais devant alors non négligeable.

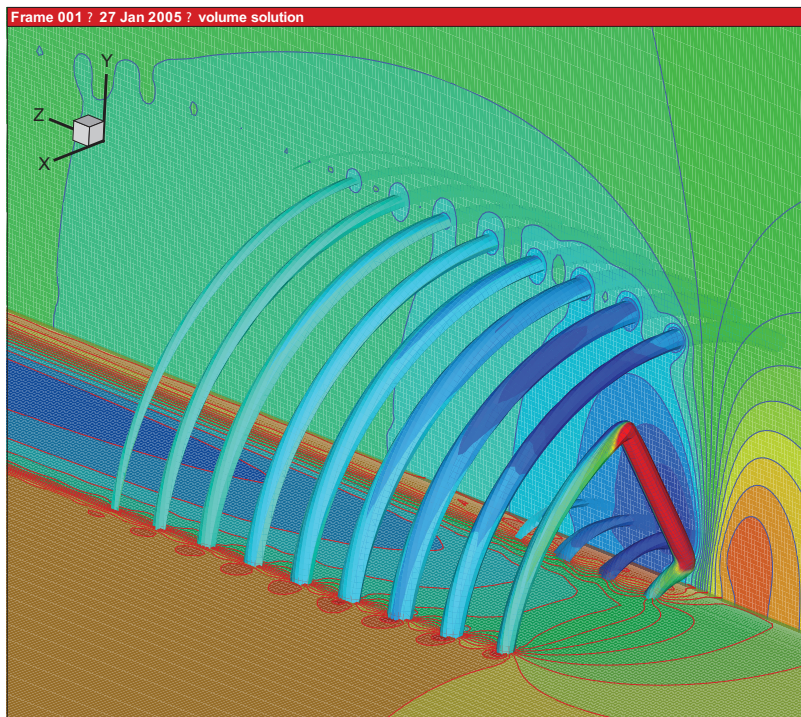


FIGURE 1.8 – Écoulement autour d'une éolienne obtenu par la méthode (CFD) d'après [43]

Malgré de bons résultats dans la plupart des cas, les méthodes basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes sont difficiles à associer à un code de calcul mécanique. En effet, pour calculer la puissance d'une éolienne sous l'effet d'une rafale de vent, les normes exigent une durée de simulation de 10 secondes.

Pour satisfaire aux conditions de convergence, le pas de temps de calcul doit être de

l'ordre de  $1.10^{-4}$  ce qui exige un temps du calcul prohibitif [17].

Actuellement, Les théories du disque actif [72, 24] et de la ligne active [44, 57] sont les théories les plus utilisées, avec les équations de Navier-Stokes, dans l'étude du sillage visqueux à l'avale des éoliennes. La progression actuelle dans ce domaine permet d'illustrer la géométrie réelle d'une éolienne par un modèle hybride beaucoup plus simple et facile à réaliser.

### 1.3.6 Méthodes tourbillonnaires

Les méthodes tourbillonnaires sont des méthodes potentielles basées sur le remplacement de l'écoulement réel au travers du rotor par un écoulement de fluide parfait au travers d'un système tourbillonnaire équivalent [50]. Ce système comporte des tourbillons attachés aux pales et des nappes de tourbillons libres détachées des pales. Les tourbillons attachés qui remplacent les pales sont rotatifs comme ces dernières et exercent des forces équivalentes sur le fluide.

L'apparition de la nappe des tourbillons libres vient du théorème de Helmholtz selon lequel les lignes tourbillonnaires doivent être soit fermées, soit prendre naissance ou disparaître aux frontières du domaine de l'écoulement. Par exemple, lors du remplacement d'une aile par une ligne tourbillonnaire, la ligne tourbillonnaire ne peut pas se terminer aux extrémités de l'aile. Selon le théorème de Helmholtz, deux tourbillons marginaux apparaissent aux extrémités et sont émis pour se connecter entre eux à l'infini [11].

Il est à noter qu'au travers d'une nappe tourbillonnaire libre, il se crée uniquement une discontinuité de la vitesse tangentielle, et non de la pression. Ainsi, les tourbillons libres ne subissent aucune force, et selon le théorème de Kutta-Joukowski, le vecteur de la vitesse et le vecteur du tourbillon libre sont parallèles [64].

Suivant la représentation des pales du rotor, il existe deux groupes de méthodes tourbillonnaires :

1. **Le premier groupe remplace la pale par une ligne portante** : l'avantage de la méthode de la ligne portante repose sur l'utilisation des caractéristiques des profils, donc sur la prise en compte des effets de viscosité et de compressibilité. L'inconvénient réside dans l'écoulement aux extrémités de la pale : il est tridimensionnel et l'application des caractéristiques aérodynamiques de profil ne peut donc pas être justifiée. La méthode de la ligne portante est largement utilisée pour les rotors d'éoliennes et d'hélicoptères où l'allongement de la pale est important [11].
2. **Le second groupe de méthodes remplace la pale par une surface portante** : largement utilisée dans le cas des hélices marines où les effets marginaux sont importants, les profils sont peu chargés et le fluide est incompressible. Chaque pale est remplacée par une surface de discontinuité de pression. Cette distribution de pression varie le long de la corde. La représentation de la pale et des conditions initiales au développement du sillage est ainsi améliorée par rapport aux méthodes de ligne portante.

Suivant la représentation de la forme du sillage tourbillonnaire, il existe deux différentes approches.



### 1.3.6.1 Méthodes de sillage prescrit

Les méthodes de sillage prescrit supposent que la forme du sillage est connue [50, 23].

Dans le cas d'une hélice d'avion, les vitesses induites à l'aval du rotor sont habituellement faibles. En conséquence, les nappes tourbillonnaires adoptent une forme hélicoïdale.

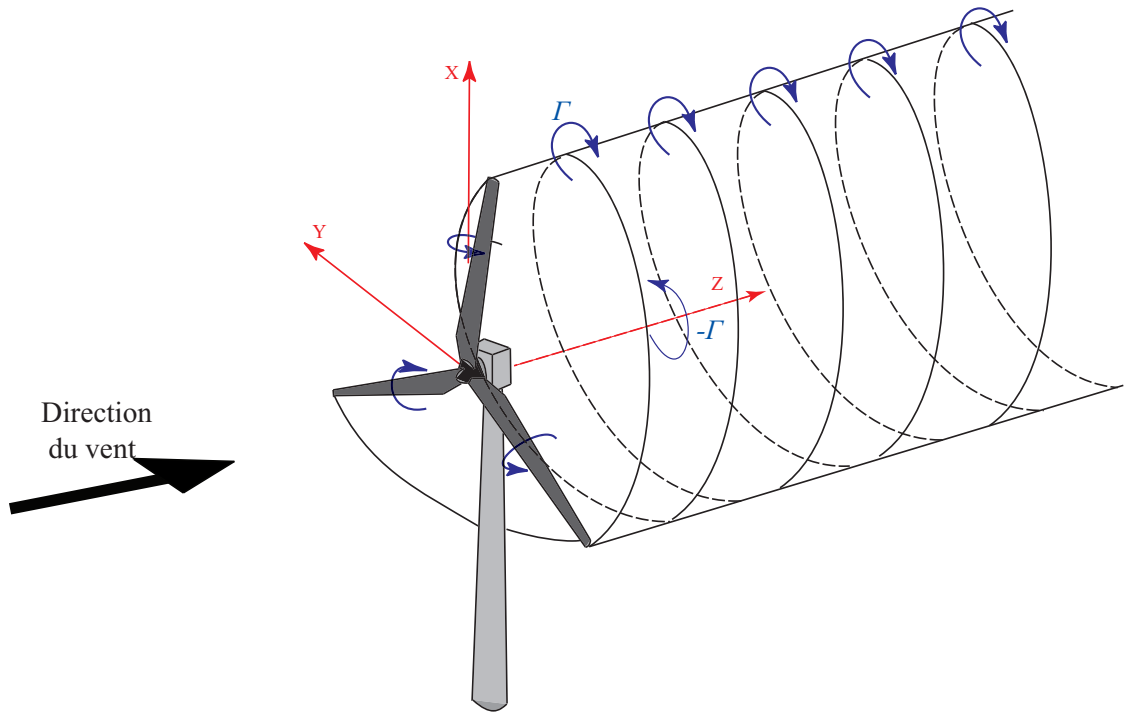


FIGURE 1.9 – Sillage prescrit de forme cylindrique d'une éolienne

Dans le cas des éoliennes, les vitesses induites sont importantes et les nappes tourbillonnaires sont déformées (figure 1.10). Ici, on suppose que la forme du sillage est connue, soit à partir des essais, soit à partir d'un calcul approché. Les résultats obtenus par ce type de calculs sont bons dans les cas stationnaires ou pour les rotors peu chargés. Néanmoins, dans le cas instationnaire d'une éolienne, quand les vitesses induites sont importantes, la forme des surfaces tourbillonnaires varie au cours du temps et la méthode de sillage prescrit ne peut être appliquée. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser le second groupe de méthodes, celles de sillage libre.

### 1.3.6.2 Méthodes de sillage libre

Les méthodes de sillage libre ont initialement été utilisées dans l'analyse des rotors d'hélicoptères [47, 31, 50]. Ces modèles créés pour les hélicoptères ont été adaptés par Gohard [30] pour le calcul des rotors éoliens. Dans cette méthode, les tourbillons libres, sont déplacés comme des lignes matérielles à la vitesse locale du sillage (seconde loi de Helmholtz).

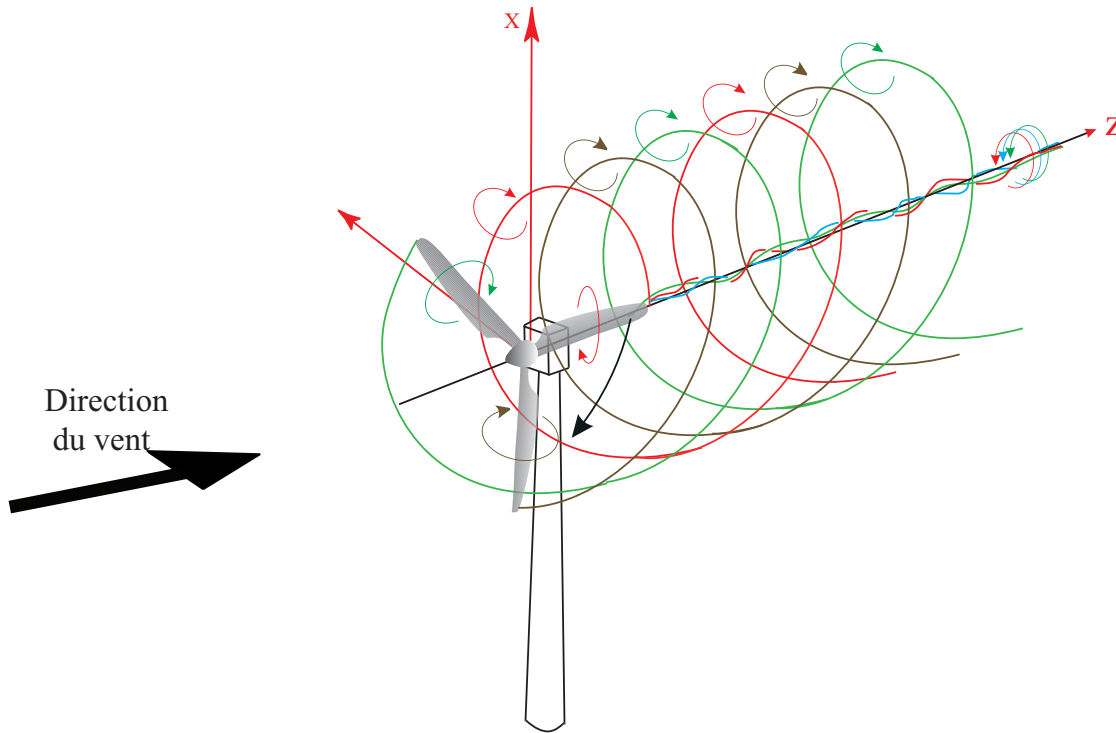


FIGURE 1.10 – Sillage tourbillonnaire d'une éolienne composé de tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale.

Contrairement à la méthode de sillage prescrit, il est procédé à un calcul explicite de la trajectoire des tourbillons marginaux. On suppose par ailleurs que l'écoulement à l'aval de l'éolienne est essentiellement composé de filaments tourbillonnaires issus des extrémités de chaque pale. Ces tourbillons marginaux sont advectés par un champ de vitesses supposé ici potentiel.

## 1.4 Choix de la méthode de calcul

Au vu de toutes ces méthodologies de modélisation des charges aérodynamiques, notre choix de travail s'est porté sur la méthode de sillage libre. Cette dernière utilise en effet une description lagrangienne de l'écoulement. L'évolution du sillage à l'aval du rotor sera obtenue en suivant l'évolution spatio-temporelle de marqueurs représentant les tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale.

L'équation gouvernant l'évolution du sillage et qui nous aidera à obtenir les positions des marqueurs sera ensuite développée avant de recourir à la méthode de discrétisation. La vitesse induite par les filaments tourbillonnaires sera calculée à l'aide de la loi de Biot-Savart pour une identification des effets générés par les tourbillons voisins du point de contrôle. Et sur le point de contrôle, où la loi de Biot-Savart devient singulière, une correction locale basée sur les rayons de courbure du filament tourbillonnaire sera requise. La résolution de l'équation gouvernant l'évolution du sillage nous permettra enfin à l'aide de la méthode de l'élément de pale, de calculer les efforts aérodynamiques

et d'obtenir la puissance du rotor.

## 1.5 Conclusion

Une brève description des enjeux de la modélisation aérodynamique instationnaire des éoliennes a été présentée dans ce chapitre, ainsi que les sources d'instationnarité qui doivent être prises en compte dans le calcul. Les différentes méthodes de modélisation des chargements dynamiques des éoliennes ont de même été exposées ainsi que leurs limites.

Un intérêt particulier est porté sur la méthode de sillage libre : cete dernière présente en effet de grands avantages aux niveaux du coût, de la sûreté de fonctionnement et de la fiabilité. La mise en œuvre de cette méthode sera l'objectif principal de ce travail. Le chapitre suivant mettra en œuvre la méthode de sillage libre permettant la modélisation de l'écoulement tridimensionnel à travers un rotor éolien. Il développera dans un premier temps le modèle aérodynamique représentatif de la pale, puis la méthode utilisée pour résoudre l'équation de l'évolution du sillage afin d'aboutir à l'organigramme du code de calcul développé.



## Chapitre 2

Développement d'un modèle de calcul des charges aérodynamiques utilisant l'approche de sillage libre



## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>Systèmes de coordonnées</b>	<b>28</b>
<b>2.3</b>	<b>Modèle aérodynamique de la pale</b>	<b>29</b>
<b>2.4</b>	<b>Mise en œuvre de la méthode de sillage libre</b>	<b>29</b>
<b>2.5</b>	<b>Résolution de l'équation du mouvement des marqueurs</b>	<b>33</b>
2.5.1	Discrétisation de l'équation gouvernant le sillage	33
2.5.2	Calcul de la vitesse induite	37
2.5.2.1	Calcul de la vitesse induite par un segment tourbillonnaire rectiligne	38
2.5.2.2	Vitesse auto-induite	42
2.5.3	L'avancement dans le temps avec le schéma prédicteur-correcteur	47
2.5.4	Traitement de la croissance du noyau du tourbillon marginal	51
<b>2.6</b>	<b>Calcul de la charge aérodynamique</b>	<b>52</b>
2.6.1	Algorithme de calcul	52
2.6.1.1	Première itération	54
2.6.1.2	Calcul la circulation initiale	54
2.6.1.3	$i^{eme}$ itération	57
2.6.2	Application du code de sillage libre à différents cas d'écoulement	58
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>61</b>

---

## 2.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'exposer la mise en œuvre de la méthode de sillage libre dans le cadre de l'étude d'un rotor éolien. Cette méthode permet en effet, par le recours au traitement lagrangien des tourbillons marginaux issus des extrémités des pales, de modéliser l'écoulement tridimensionnel d'un fluide parfait incompressible, à travers un rotor éolien.

Ce travail s'effectue en trois étapes : la présentation, dans un premier temps, du système de coordonnées utilisé dans la simulation, du modèle aérodynamique représentatif de la pale et de l'exposé du calcul des vitesses induites et auto-induites ; l'application de cette méthode, dans un deuxième temps, au cas d'une éolienne, pour laquelle le sillage est obtenu en suivant l'évolution de marqueurs représentatifs des tourbillons marginaux. La méthode de résolution de l'équation de l'évolution du sillage nécessaire à l'obtention de la position de chaque marqueur achève l'analyse.

Le déroulement de cette méthode s'inscrit dans la stratégie de calcul de la charge aérodynamique appliquée au rotor éolien. Ce chapitre se termine par la présentation de l'organigramme du code de calcul développé dans le cadre de l'application de cette méthode.

## Origine du tourbillon marginal

Les pales d'une éolienne fonctionnent sur le même principe que les ailes d'un avion [15]. L'ensemble des efforts sur l'intrados et l'extrados correspond à la force aérodynamique que l'on décompose en un effort de trainée et un effort de portance (figure 2.1).

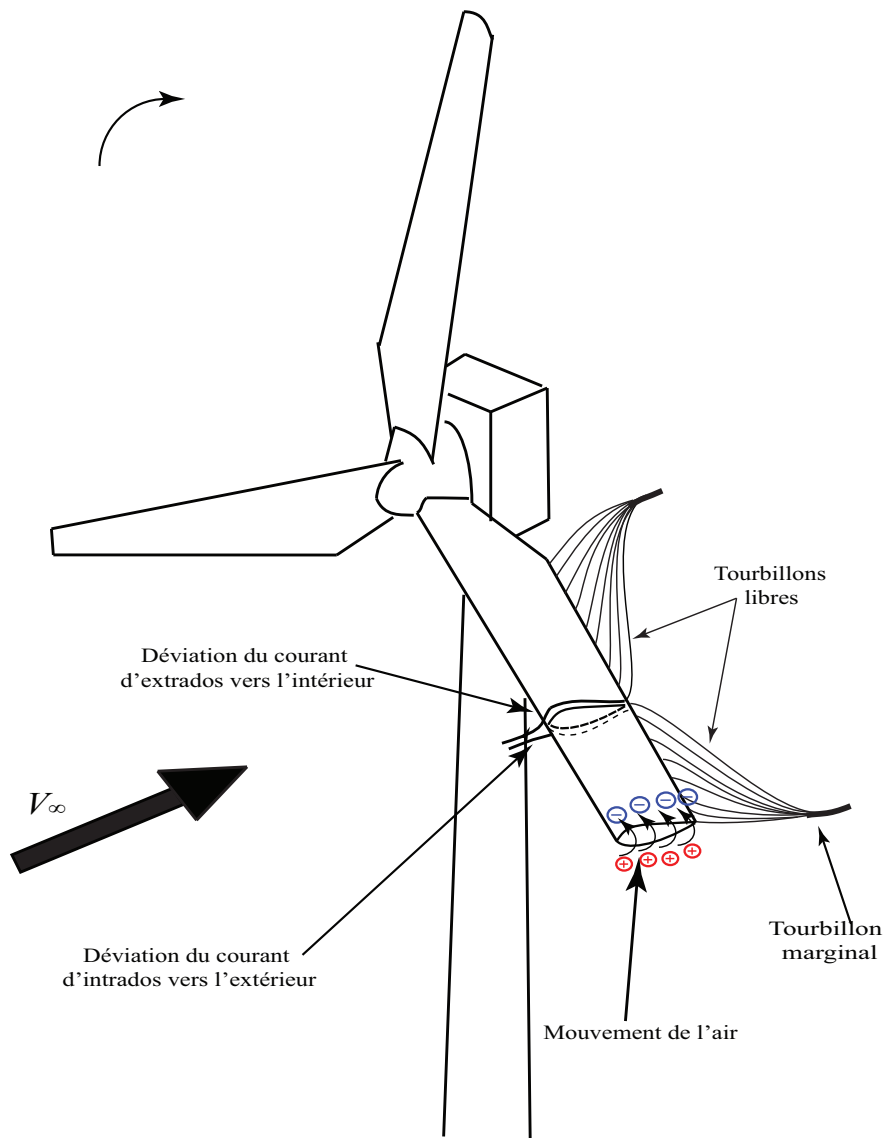


FIGURE 2.1 – Écoulement sur une pale d'éolienne à faible incidence, présence d'un tourbillon libre dû à la longueur finie de la pale

Dans l'hypothèse d'une pale infiniment longue, les dépressions s'établissant sur l'extrados et les surpressions d'intrados sont uniformes sur toute l'envergure [15, 76]. Cependant, en cas réel (longueur finie de la pale), un courant d'air secondaire se produit en bout de pale et tend à combler la différence de pression entre l'intrados et l'extrados [1]. Il en résulte qu'à l'intrados, le flux d'air général se trouve dévié de quelques



degrés vers le pied de la pale, et que sur l'extrados le flux d'air se trouve dévié vers le centre de la pale (figure 2.1).

Ce phénomène engendre des tourbillons, dits tourbillons libres, sur toute la longueur du bord de fuite. Ces derniers perturbent sévèrement la répartition du champ de pressions sur le pourtour du disque balayé par le rotor. Il en résulte une chute de pression générale suivie par une dégradation du rendement de l'hélice [64, 65].

L'écoulement au travers des rotors ou des hélices peut être considéré comme un écoulement d'un fluide parfait [52]. Les effets visqueux, qui influencent le sillage, sont importants à partir de certains nombres de diamètres à l'aval du rotor.

Les expériences montrent que le sillage de l'éolienne est dominé par les tourbillons marginaux (figure 2.2).



FIGURE 2.2 – Visualisation du sillage d'une éolienne par la fumée, [NREL]

Cette expérience a été réalisée au Laboratoire américain sur les énergies renouvelables (NREL) sur une éolienne composée d'une seule pale avec, à l'extrémité de celle-ci, un générateur de fumée.

La figure 2.2 montre une forte concentration du tourbillon marginal issu de l'extrémité de la pale au moment de sa sortie du sommet de cette pale. D'après l'image, le tourbillon se dégrade au fur et à mesure qu'il s'éloigne du plan du rotor, pour se dissiper et perdre sa forme au bout de quelques tours. Il est à noter que la viscosité de l'air influe sur le diamètre de ce tourbillon, ce dernier augmentant au cours du temps. Un effet de couche limite terrestre, dû au freinage de l'écoulement de l'air en raison de la rugosité

de la surface du sol, est ici clairement visible : la partie supérieure du tourbillon est en effet investie en vitesse par rapport à la partie inférieure.

La méthode de sillage libre s'attache donc à modéliser avec soin la ligne tourbillonnaire marginale de chaque pale [52]. A chaque instant, en connaissant le champ de vitesses induites sur le rotor on peut définir l'angle d'incidence du vent relatif sur chaque section des pales. Chaque changement d'angle d'incidence (figure 2.3) s'accompagne d'un changement de valeur et de direction de la force de portance sur le rotor [64].

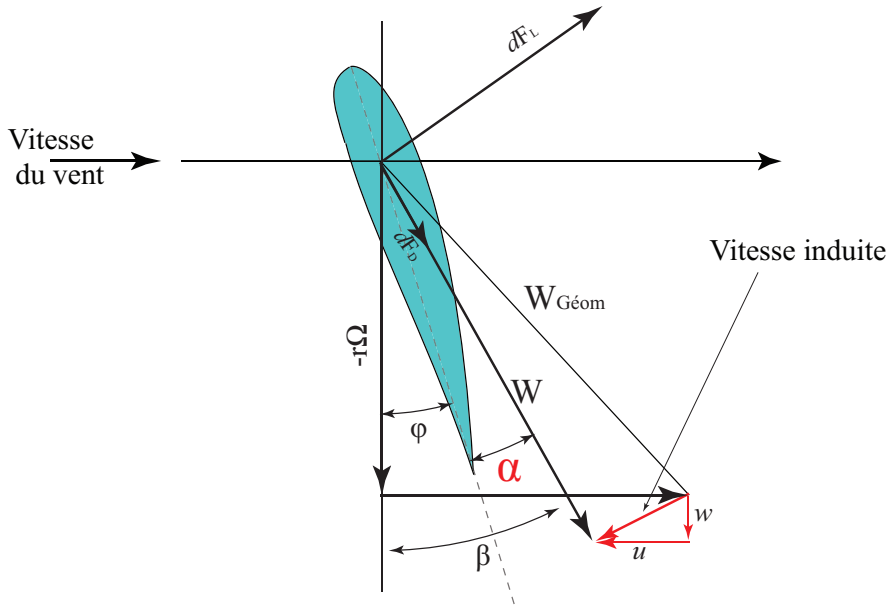


FIGURE 2.3 – Vitesses et forces agissant sur le profil d'une pale

L'estimation du champ de vitesses et des angles d'incidence par rapport aux profils des pales, constituent donc la clé pour prédire la charge aérodynamique sur le rotor ainsi que la puissance produite par l'éolienne.

## 2.2 Systèmes de coordonnées

La figure 2.4 expose le système de coordonnées cartésiennes utilisé dans la présente étude. L'axe- $x$  et l'axe- $z$  sont parallèles au sol, l'axe- $z$  dans la même direction que le vent à l'infini  $V_\infty$ . L'axe- $y$  est vertical et dirigé vers le haut.

Des coordonnées azimutales ont de même été utilisées. La position azimutale de la pale en cours de mouvement est déterminée par l'angle azimutal  $\psi_b$ , qui donne l'angle en radian entre l'envergure de la pale et l'axe  $X$ .

De plus, l'avancement du tourbillon au cours du temps est donné par l'âge du tourbillon  $\psi_w$ . Cette coordonnée définit l'angle entre la position instantanée du tourbillon au cours du temps et l'axe de la pale.

## 2.3 Modèle aérodynamique de la pale

La pale est représentée par une ligne portante [49, 60, 4]. Celle-ci est entourée d'une série de tourbillons liés à la pale et présentant un axe parallèle à l'envergure de la pale (figure 2.4).

L'écoulement dans une section de la pale est défini par la théorie de Kutta-Joukowski [5]

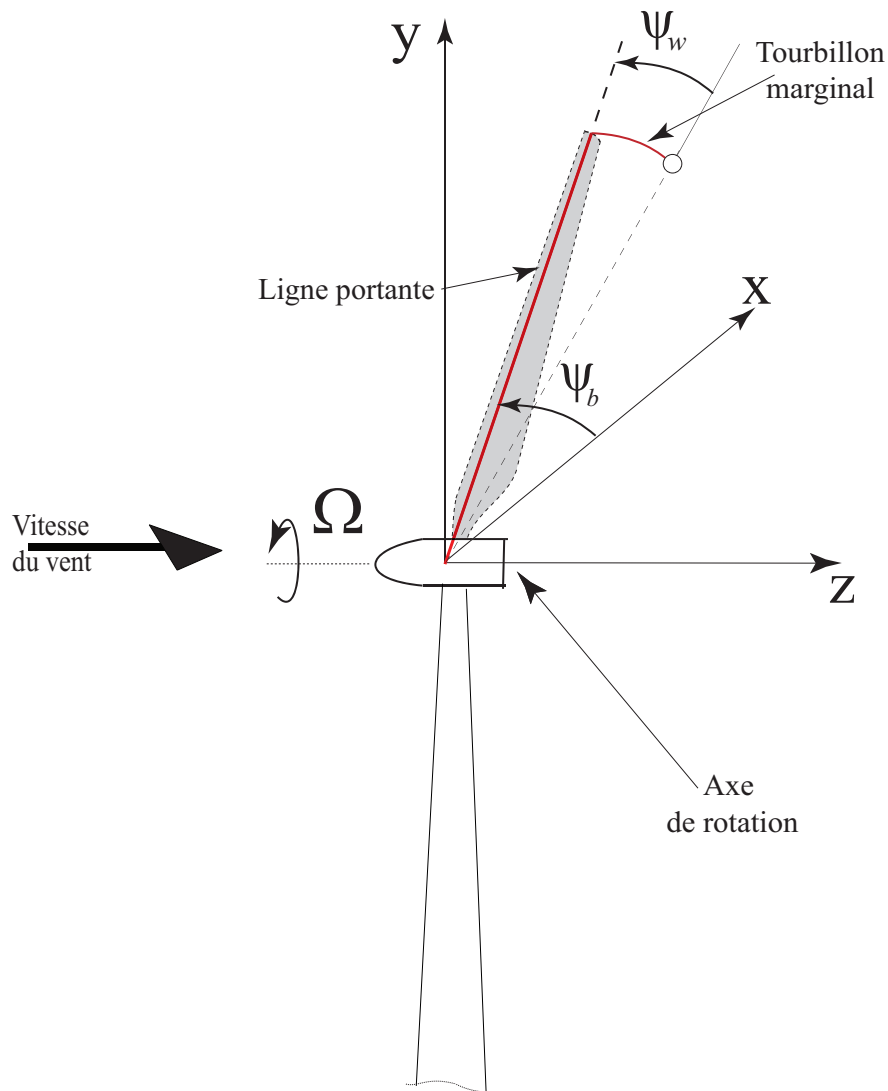


FIGURE 2.4 – Systèmes de coordonnées cartésiennes et azimutales utilisées dans la méthode de sillage libre

et la théorie de l'élément de la pale.

## 2.4 Mise en œuvre de la méthode de sillage libre

La méthode de sillage libre a initialement été utilisée dans l'analyse des rotors d'hélicoptères [47, 49, 31]. Les modèles créés pour les hélicoptères ont été adaptés pour le

calcul des rotors éoliens. Il s'agit d'une méthode tourbillonnaire basée sur le remplacement de l'écoulement réel autour d'une éolienne (figure 2.5) par l'écoulement d'un fluide parfait à travers un système tourbillonnaire équivalent (figure 2.6). Ce système comporte :

1. des tourbillons liés aux pales, exerçant sur le fluide des forces équivalentes à celles exercées par les pales.
2. un sillage libre composé uniquement des tourbillons marginaux détachés des extrémités des pales.

Notre étude utilise une description lagrangienne de l'écoulement. Des marqueurs lagrangiens sont donc placés le long de chaque tourbillon marginal (figure 2.6). Ainsi, les tourbillons marginaux sont discrétisés et les marqueurs le long des lignes sont connectés à l'aide de segments linéaires [3, 33, 78, 2]. La forme du sillage est ici déterminée en supposant que le vecteur tourbillonnaire du sillage est parallèle au vecteur de la vitesse. Cette condition vient du deuxième théorème de Helmholtz, énonçant que le tube tourbillonnaire se meut avec l'écoulement. La vitesse induite par chaque segment tourbillonnaire est calculée à l'aide de la loi de Biot-Savart.

Afin d'analyser, à l'aide de la description lagrangienne de l'écoulement, le déplacement d'un élément de la ligne tourbillonnaire émis par la pale, on peut décrire la formule suivante :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} \quad (2.1)$$

Le tourbillon libre se déplace telle une ligne matérielle à la vitesse locale du sillage (deuxième loi de Helmholtz) en vérifiant toujours la condition suivante :

$$\vec{V} \parallel \Gamma \quad (2.2)$$

Le vecteur  $\vec{r}$  de position du marqueur peut être présenté comme une fonction de deux variables angulaires  $(\psi_w, \psi_b)$ , représentant respectivement l'évolution spatiale et temporelle de la position des marqueurs lagrangiens :

$$\vec{r} = \vec{r}(\psi_w, \psi_b) \quad (2.3)$$

Dans l'équation (2.3),  $\psi_w$  est l'angle azimutal correspondant à l'âge de l'élément émis quand la pale a été en position  $\psi_b$ . Cet angle azimutal est donc égal à :

$$\psi_w = \Omega t \quad (2.4)$$

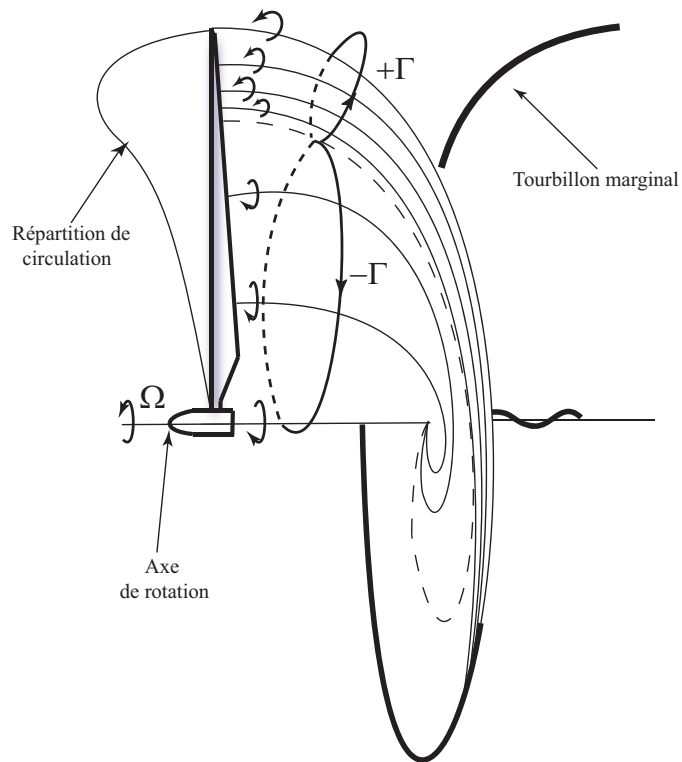


FIGURE 2.5 – Modèle physique du sillage d’une éolienne équipée d’une seule pale tournante

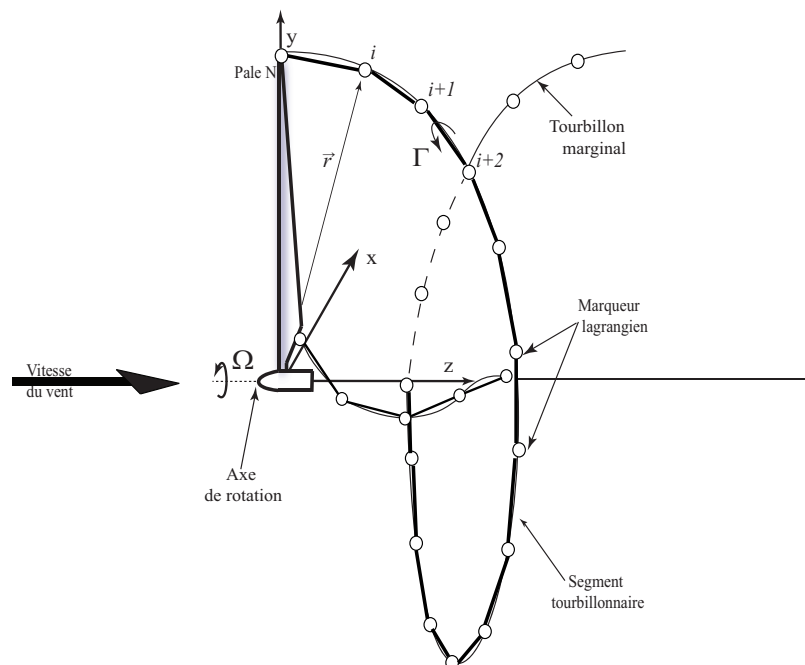


FIGURE 2.6 – Description lagrangienne du sillage d’une éolienne équipée d’une seule pale tournante

L'angle azimutal de la pale est égal à :

$$\psi_b = \Omega (t - t_0) \quad (2.5)$$

Où  $t_0$  correspond au temps de la position initiale de la pale. La dérivation du terme à gauche de l'équation (2.1) donne :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_w} \frac{d\psi_w}{dt} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_b} \frac{d\psi_b}{dt} \quad (2.6)$$

Cette équation peut être simplifiée en prenant en compte la valeur de la dérivée en temps de l'angle azimutal et de l'âge du tourbillon :

$$\frac{d\psi_w}{dt} = \frac{d\psi_b}{dt} = \Omega \quad (2.7)$$

Par conséquent, l'équation (2.1) décrivant le vecteur de position de la ligne tourbillonnaire se transforme en :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_w} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_b} = \frac{1}{\Omega} \vec{V}(\vec{r}, t) \quad (2.8)$$

L'équation (2.8) est une équation aux dérivées partielles non-linéaires du premier ordre. La partie homogène (la partie gauche) de cette équation est hyperbolique, mais la partie droite, qui comporte les vitesses induites par les tourbillons attachés et libres, est hautement non-linéaire. En assumant que chaque filament tourbillonnaire est convecté dans le sillage par sa vitesse locale, l'équation (2.8) s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_w} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_b} = \frac{\vec{V}_\infty}{\Omega} + \frac{1}{\Omega} \sum_{j=1}^{N_s} \vec{V}_{ind}(\vec{r}, t) \quad (2.9)$$

En raison des effets d'induction importants, issus de la géométrie complexe du sillage, de la non-linéarité et de la singularité des lignes tourbillonnaires, l'équation du sillage libre (2.9) est difficile à résoudre. La simplification du calcul nécessite deux approches :

- avant toute chose, le remplacement de la surface de la pale par une seule ligne tourbillonnaire (figure 2.7) avec une intensité variable. Cette simplification peut être justifiée dans le cas d'un allongement important de la pale, comme dans le cas des hélicoptères ou des éoliennes.

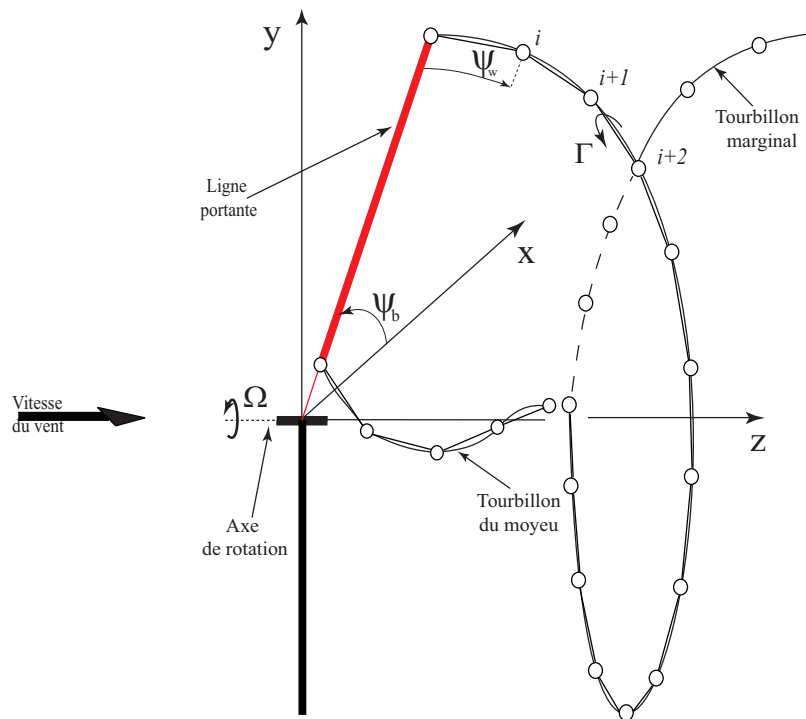


FIGURE 2.7 – Modèle physique du sillage par la méthode de sillage libre

- l’hypothèse qu’un seul tourbillon marginal sort de la pale, malgré la variation de la circulation le long de la pale. Cette simplification peut être justifiée expérimentalement. En effet, les essais montrent que la nappe tourbillonnaire issue de la pale s’enroule après un parcours azimutal de l’ordre de  $120^\circ$ , en gardant à l’esprit que les effets visqueux dégradent rapidement les tourbillons issus des pieds des pales.

## 2.5 Résolution de l’équation du mouvement des marqueurs

Afin de préparer le programme requis pour la méthode de sillage libre, une boucle de discrétisation de deux côtés de l’équation (2.9) a été créée. Cette boucle permet de déterminer progressivement la forme du sillage.

### 2.5.1 Discrétisation de l’équation gouvernant le sillage

L’équation (2.9) prend la forme d’une équation d’advection linéaire scalaire d’onde. Afin de la résoudre ; une discrétisation spatiale et temporelle de la partie hyperbolique est créée, où le domaine du calcul est défini sous forme de grille de temps  $\psi_b$  et d’espace  $\psi_w$ .

La résolution de cette équation s’effectue par l’abaissement du nombre de variables afin de ramener cette équation à une seule variable (équation différentielle ordinaire). Le terme de gauche de l’équation (2.9) représente une combinaison linéaire d’une dérivée

dans la direction  $\psi_b$  et d'une dérivée dans la direction  $\psi_w$ . Il s'agit donc de réaliser une dérivée dans une direction intermédiaire (figure 2.8).

Dans le cas particulier (avec pas de discrétisation temporel et spécial équivalents) où :

$$\frac{d\psi_w}{d\psi_b} = 1 \quad (2.10)$$

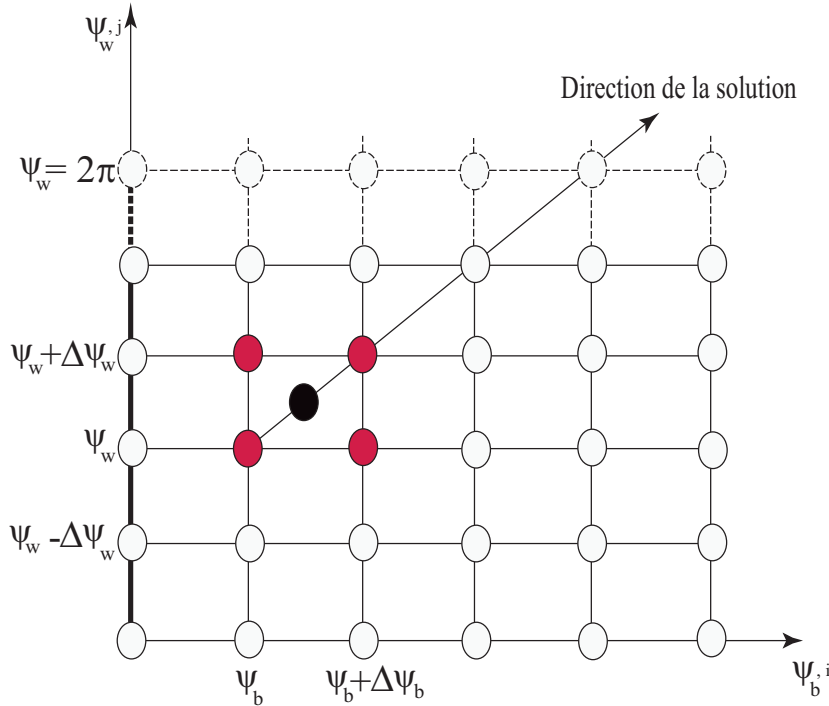


FIGURE 2.8 – Schéma de discrétisation

Par conséquent, l'ensemble des courbes caractéristiques montrées sur la figure 2.8 sont orientées à un angle de 45 degrés, définissant la direction de la propagation de l'information. Dans la figure 2.8, la discrétisation du domaine azimutal du rotor se fait en un nombre fini de pas angulaires notés  $\psi_b$ . De la même manière, chaque tourbillon marginal est divisé en plusieurs parties de même pas, notés  $\psi_w$ . Les dérivées partielles des termes gauches de l'équation (2.9) doivent être discrétisées suivant les deux domaines  $\psi_b$  et  $\psi_w$ . Pour cela, on a divisé le domaine azimutal  $\psi_b$  du rotor en un nombre fini de pas angulaires notés  $\Delta\psi_b$ , et chaque tourbillon marginal en plusieurs parties de même pas, notés  $\Delta\psi_w$ . La partie gauche de l'équation (2.9) peut être écrite sous forme de différence finie :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_w} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi_b} \approx D_{\psi_b} + D_{\psi_w} \quad (2.11)$$

Tel que :

- $D_{\psi_b} \approx \frac{d\vec{r}}{d\psi_b}$  : Opérateur de différence finie temporelle.
- $D_{\psi_w} \approx \frac{d\vec{r}}{d\zeta}$  : Opérateur de différence finie spatiale.



Une première approche consiste à réaliser une approximation de l'équation précédente en utilisant une solution d'ordre 1 sur un point  $(\psi_b, \psi_w)$ . Pour faciliter la mise en équation, on note l'indice  $j$  pour l'axe représentant le domaine  $\psi_b$  et l'indice  $i$  pour l'axe représentant le domaine  $\psi_w$ . On obtient :

$$D_{\psi_b} = \frac{\vec{r}_{i,j} - \vec{r}_{i-1,j-1}}{\Delta\psi_b} \quad (2.12)$$

$$D_{\psi_w} = \frac{\vec{r}_{i,j} - \vec{r}_{i-1,j-1}}{\Delta\psi_w} \quad (2.13)$$

La solution d'ordre 1 étant susceptible d'entraîner des erreurs trop importantes dans le résultat final, la solution est donc d'augmenter la précision de calcul. La technique de discrétisation basée sur un point situé au centre d'une cellule est appliquée, et accompagnée des valeurs obtenues au niveau des points périphériques. Une autre technique de discrétisation consiste à calculer la vitesse induite d'un point, à partir de la valeur de vitesse induite dans les 3 points voisins [22]. Dans ce cas, la solution au point  $(i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$  est obtenue en utilisant les points  $(i - 1, k - 1)$  et  $(i, k)$ . Cette thèse repose sur la technique de discrétisation proposée par [7] et sur l'utilisation du schéma explicite de 5 points où on obtient les dérivées évaluées au point  $(i - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$  en utilisant les points  $(i, k), (i - 1, k), (i, k - 1)$  et  $(i - 1, k - 1)$  (figure 2.8). Ce schéma est stable et d'une précision d'ordre 2 augmentant la stabilité numérique du code développé. La figure 2.8 illustre la discrétisation d'une cellule en 5 points (un point central obtenu à partir des 4 autres). Cette discrétisation à été effectuée par un développement de Taylor de chaque terme autour du point d'évaluation, dans lequel le point central sert de référence pour les autres points. On trouve ainsi que les opérateurs de différence finie temporelle et spéciale sont :

$$D_{\psi_b} \approx \frac{d\vec{r}}{d\psi_b} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\vec{r}_{i,j+1} - \vec{r}_{i,j}}{\Delta\psi_b} + \frac{\vec{r}_{i+1,j+1} - \vec{r}_{i+1,j}}{\Delta\psi_b} \right) \quad (2.14)$$

$$D_{\psi_w} \approx \frac{d\vec{r}}{d\psi_w} \Big|_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\vec{r}_{i+1,j} - \vec{r}_{i,j}}{\Delta\psi_w} + \frac{\vec{r}_{i+1,j+1} - \vec{r}_{i,j+1}}{\Delta\psi_w} \right) \quad (2.15)$$

La discrétisation à été réalisée par un développement de Taylor de chaque terme autour du point d'évaluation. En effet, le point central sert de référence pour les autres points. Pour faciliter la notation, les domaines de discrétisation sont remplacés par les indices  $\psi_b \rightarrow n$  et  $\psi_w \rightarrow j$  :

$$\vec{r}_{(\psi_w, \psi_b)} = \vec{r}_j^n \quad (2.16)$$

On obtient (figure 2.9) :

$$\vec{r}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left[ r + \frac{\Delta\psi_b}{2} r_{\psi_b} - \frac{\Delta\psi_w}{2} r_{\psi_w} + \frac{\Delta\psi_b^2}{8} r_{\psi_w\psi_w} + \frac{\Delta\psi_w^2}{8} r_{\psi_b\psi_b} - \frac{\Delta\psi_b \times \Delta\psi_w}{4} r_{\psi_b\psi_w} \right] \quad (2.17)$$

$$+ O(\Delta\psi_w^3) + O(\Delta\psi_b^3)$$

$$\vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = \left[ \vec{r} - \frac{\Delta\psi_b}{2} \vec{r}_{\psi_b} - \frac{\Delta\psi_w}{2} \vec{r}_{\psi_w} + \frac{\Delta\psi_b^2}{8} \vec{r}_{\psi_w\psi_w} + \frac{\Delta\psi_w^2}{8} \vec{r}_{\psi_b\psi_b} - \frac{\Delta\psi_b \times \Delta\psi_w}{4} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] \quad (2.18)$$

$$+ O(\Delta\psi_w^3) + O(\Delta\psi_b^3)$$

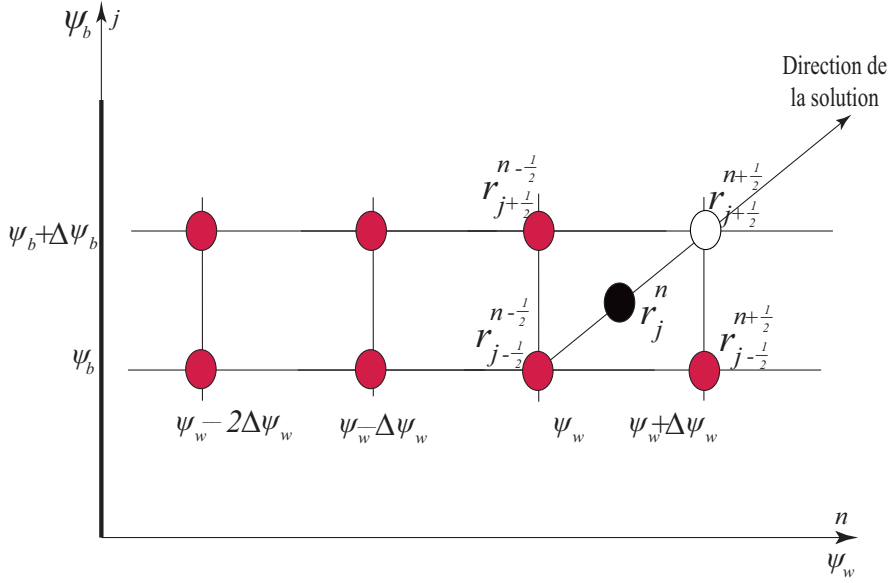


FIGURE 2.9 – Discrétisation par l'utilisation d'un schéma explicite de 5 points

$$\begin{aligned} \vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = & \left[ \vec{r} + \frac{\Delta\psi_b}{2} \vec{r}_{\psi_b} + \frac{\Delta\psi_w}{2} \vec{r}_{\psi_w} + \frac{\Delta\psi_b^2}{8} \vec{r}_{\psi_w\psi_w} + \frac{\Delta\psi_w^2}{8} \vec{r}_{\psi_b\psi_b} + \frac{\Delta\psi_b \times \Delta\psi_w}{4} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] \\ & + O(\Delta\psi_w^3) + O(\Delta\psi_b^3) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = & \left[ \vec{r} - \frac{\Delta\psi_b}{2} \vec{r}_{\psi_b} - \frac{\Delta\psi_w}{2} \vec{r}_{\psi_w} + \frac{\Delta\psi_b^2}{8} \vec{r}_{\psi_w\psi_w} + \frac{\Delta\psi_w^2}{8} \vec{r}_{\psi_b\psi_b} + \frac{\Delta\psi_b \times \Delta\psi_w}{4} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] \\ & + O(\Delta\psi_w^3) + O(\Delta\psi_b^3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

En soustrayant l'équation (2.20) de l'équation (2.17) et en divisant par  $\Delta\psi_b$ , on obtient :

$$\frac{\vec{r}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{r}_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta\psi_b} = \left[ \vec{r}_{\psi_b} - \frac{\Delta\psi_w}{2} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] + O(\Delta\psi_w^2) + O(\Delta\psi_b^2) \quad (2.21)$$

On procède de la même manière avec les équations (2.18) et (2.19) et en divisant toujours par  $\Delta\psi_b$  :

$$\frac{\vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta\psi_b} = \left[ \vec{r}_{\psi_b} + \frac{\Delta\psi_w}{2} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] + O(\Delta\psi_w^2) + O(\Delta\psi_b^2) \quad (2.22)$$

De façon similaire pour le domaine temporel on obtient :

$$\frac{\vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\psi_w} = \left[ \vec{r}_{\psi_w} - \frac{\Delta\psi_b}{2} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] + O(\Delta\psi_w^2) + O(\Delta\psi_b^2) \quad (2.23)$$

Et

$$\frac{\vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \vec{r}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta\psi_w} = \left[ \vec{r}_{\psi_w} + \frac{\Delta\psi_b}{2} \vec{r}_{\psi_b\psi_w} \right] + O(\Delta\psi_w^2) + O(\Delta\psi_b^2) \quad (2.24)$$

Qui donne après développement :

$$D_{\psi_b} + D_{\psi_w} = \vec{r}_{\psi_b} + \vec{r}_{\psi_w} + O(\Delta\psi_w^2) + O(\Delta\psi_b^2) \quad (2.25)$$

On remarque que les termes de l'approximation précédente de la partie gauche de l'équation (2.9), sont d'ordre 2 pour  $\psi_b$  et pour  $\psi_w$ .

Cette expression représente l'erreur de discrétisation, elle est de forme :

$$erreur = \left( \frac{\Delta\psi_b^2}{24} \times \frac{\partial r^3}{\partial \psi_b^3} - \frac{\Delta\psi_b^2}{8} \times \frac{\partial r^3}{\partial \psi_b^3} + \frac{\Delta\psi_w^2}{8} \times \frac{\partial r^3}{\partial \psi_b^3} - \frac{\Delta\psi_w^2}{24} \times \frac{\partial r^3}{\partial \psi_b^3} \right) \quad (2.26)$$

Comme vu précédemment,  $\Delta\psi_w = \Delta\psi_b$  intervient dans le problème physique. L'application de cette condition entraîne l'annulation de chaque terme de l'équation (2.26), avec, pour conséquence, l'exactitude du schéma de différence finie.

### 2.5.2 Calcul de la vitesse induite

La vitesse induite en un point  $A$  par un élément infinitésimal  $d\vec{s}$  de ligne tourbillonnaire d'intensité  $\Gamma$ , est calculée par la loi de Biot-Savart [64, 48, 35] comme représentée sur la figure 2.10.

$$d\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.27)$$

L'équation (2.27) calcule le champ de vitesse induite engendré par une ligne tourbillon-

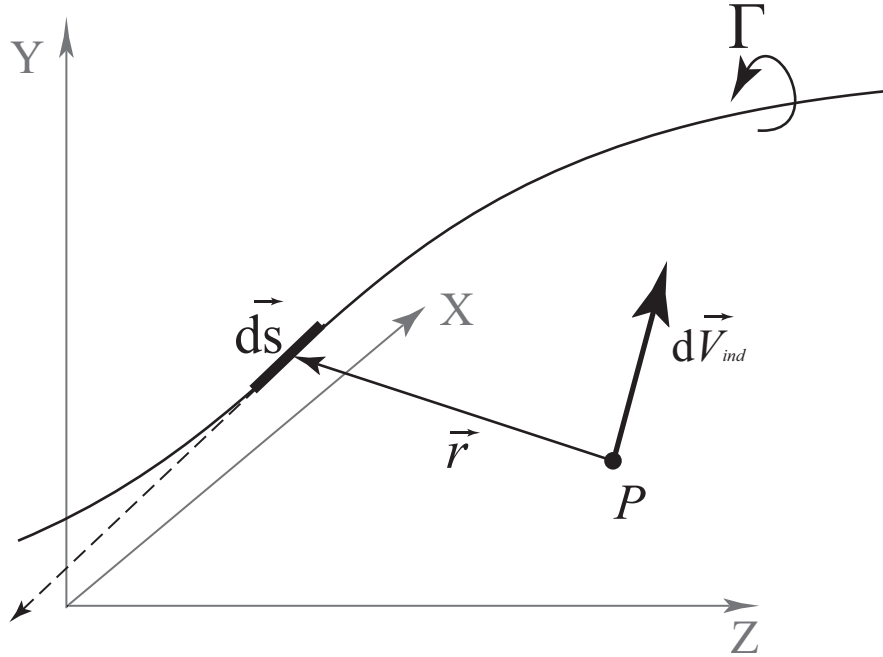


FIGURE 2.10 – Vitesse induite par un segment infinitésimal  $d\vec{s}$  de ligne tourbillonnaire dans un écoulement par l'intégration de l'équation (2.27) tout au long de cette

dernière. On obtient donc la vitesse induite par la formule suivante :

$$\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (2.28)$$

### 2.5.2.1 Calcul de la vitesse induite par un segment tourbillonnaire rectiligne

On considère un segment tourbillonnaire rectiligne de longueur finie  $L$  placé à une distance  $d$  d'un point  $A$ . La formule de Biot-Savart (2.27) permet de calculer la vitesse induite  $d\vec{V}_{ind}$  au point  $A$ . On définit la vorticité infinitésimale  $\Gamma_v$  par :

$$\Gamma_v = \frac{\Gamma}{d} \quad (2.29)$$

D'après le schéma de la figure 2.11, on peut réécrire la formule (2.27) de la manière suivante :

$$d\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot r \cdot \sin \beta}{|r|^2} \quad (2.30)$$

Où :

$$\left. \begin{array}{l} d = r \sin(\beta) \\ \tan(\pi - \beta) = \frac{d}{dl} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} l = \frac{-d}{\tan \beta} \\ dl = \frac{-d}{\sin^2 \beta} d\beta \end{array} \right. \quad (2.31)$$

Après simplification de l'équation (2.30) on trouve :

$$d\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot \frac{\sin \beta}{d} \cdot d(\beta) \quad (2.32)$$

Si on intègre cette formule (2.32) sur un segment tourbillonnaire fini  $P_1P_2$ , où les positions respectives de ces deux extrémités par rapport au point  $A$  sont  $r_1$  et  $r_2$ , la vitesse s'écrit :

$$V_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi d} \cdot \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sin \beta}{d} \cdot d\beta \quad (2.33)$$

Ce qui donne :

$$V_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi d} \cdot (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \quad (2.34)$$

Cette équation peut être écrite de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_x \\ V_y \\ V_z \end{array} \right\} = \frac{\Gamma_v}{4\pi d} \cdot (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \cdot \left\{ \begin{array}{l} e_x \\ e_y \\ e_z \end{array} \right\} \quad (2.35)$$

Où :

$$\vec{e} = (e_x, e_y, e_z) \quad (2.36)$$

Le vecteur de la vitesse induite au point  $A$  dépend du produit scalaire de  $\vec{r}$  et  $d\vec{l}$ . Par conséquent, la vitesse est perpendiculaire au plan contenant le segment  $P_1P_2$  et le point  $A$ . Son vecteur directeur est donné par :

$$\vec{N}_A = \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|} \quad (2.37)$$

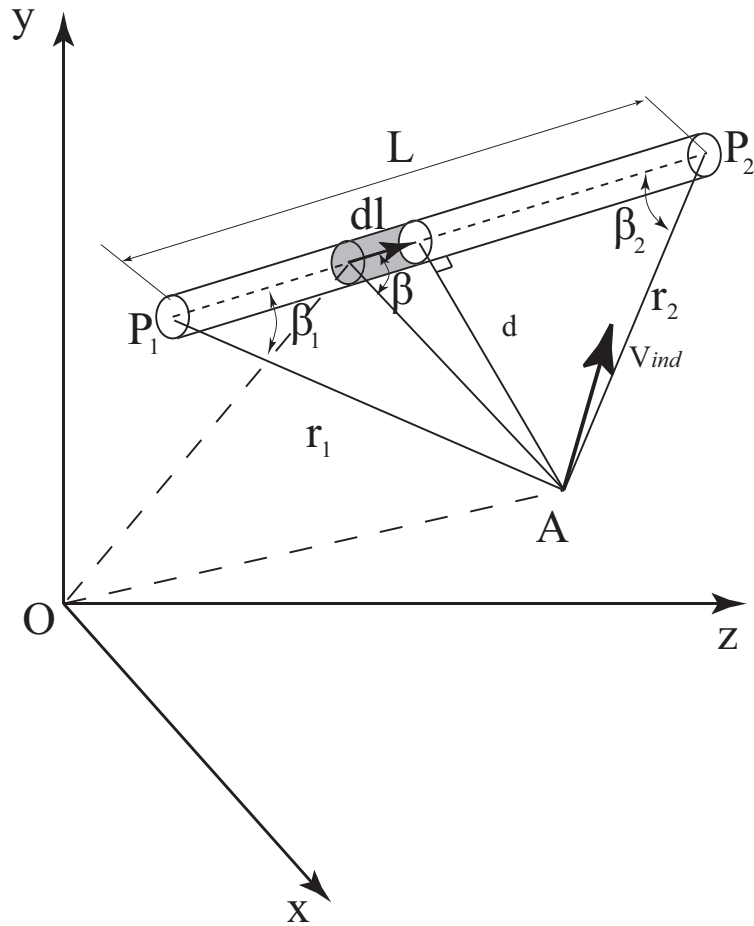


FIGURE 2.11 – Évaluation de la vitesse induite d'un segment tourbillonnaire par la loi Biot-Savart

La distance  $d$  peut être calculée par l'équation suivante :

$$d = \frac{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|}{|\vec{r}_0|} \quad (2.38)$$

D'après le schéma de la figure 2.11, on a :

$$\cos \beta_1 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_1|} \quad (2.39)$$

$$\cos \beta_2 = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_0| |\vec{r}_2|} \quad (2.40)$$

Où :

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{P_1} - \vec{r}_{P_2}, \quad \vec{r}_1 = \vec{r}_A - \vec{r}_{P_2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_A - \vec{r}_{P_1} \quad (2.41)$$

Donc finalement, le vecteur de la vitesse induite est donné par :

$$\vec{V}_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|^2} \cdot \vec{r}_0 \cdot \left( \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} \right) \quad (2.42)$$

Le produit vectoriel de  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  vaut :

$$\begin{aligned}
 |\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2|^2 &= r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot \sin^2(\theta) \\
 &= r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot (1 - \cos^2(\theta)) \\
 &= r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot (1 - \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2}{r_1^2 \cdot r_2^2}) \\
 &= r_1^2 \cdot r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Par conséquent, en utilisant (2.41) :

$$\vec{V}_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \cdot \left[ \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{r_1^2 \cdot r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2} \right] \cdot \left[ \frac{\vec{r}_1}{r_1} - \frac{\vec{r}_2}{r_2} \right] \tag{2.44}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \cdot \left[ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \cdot (r_1 \cdot r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)} \right] \\
 \cdot \left[ r_1 + r_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Après la transformation de l'équation précédente :

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi} \cdot (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \cdot \left[ \frac{1}{(r_1 \cdot r_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) \cdot (r_1 \cdot r_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)} \right] \\
 \cdot \left( \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \cdot [r_1 \cdot r_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2]
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

On trouve finalement :

$$\vec{V}_A = \frac{\Gamma_v}{4\pi} (\vec{r}_1 \wedge \vec{r}_2) \left[ \frac{1}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2| + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2} \right] \cdot \left[ \frac{|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|}{|\vec{r}_1| \cdot |\vec{r}_2|} \right] \tag{2.47}$$

Dans la perspective d'une vue globale de l'algorithme de calcul de la vitesse induite, celui-ci est récapitulé dans la figure 2.12.

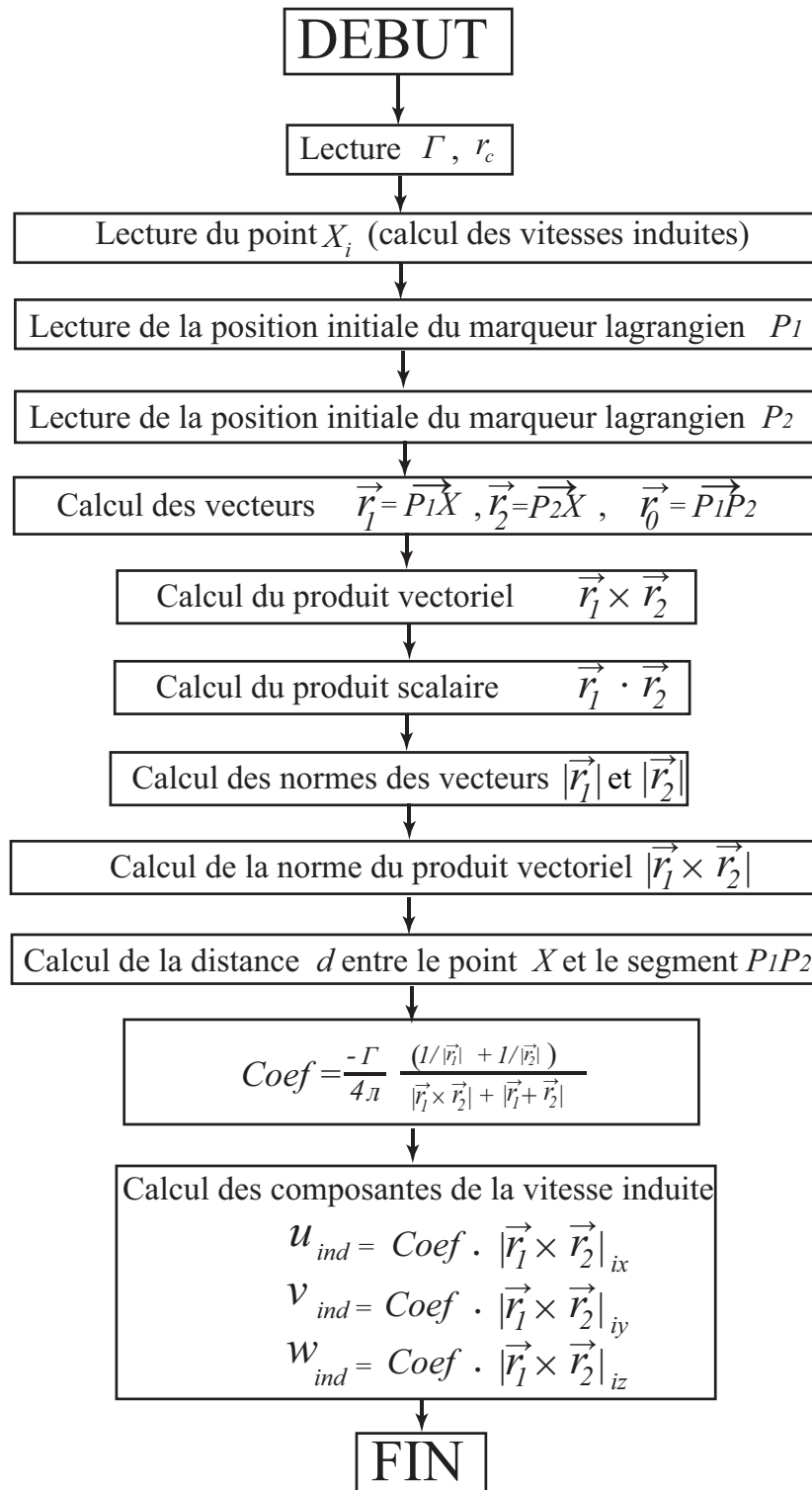


FIGURE 2.12 – Organigramme de calcul de la vitesse induite.

### 2.5.2.2 Vitesse auto-induite

La représentation du tourbillon marginal par des segments linéaires diminue la précision du calcul au voisinage du point de contrôle. Un tourbillon rectiligne ne pouvant induire une vitesse sur lui-même, l'apport des segments linéaires à gauche et à droite du point de contrôle est donc nul. Pour une meilleure précision, on peut appliquer une correction au point de contrôle, qui prend en compte la courbure du tourbillon [78]. La correction se fait uniquement pour les segments situés à gauche et à droite du point de contrôle, où la vitesse auto-induite est calculée. Le rayon du noyau  $r_c$  a été utilisé comme limite inférieure pour traiter la singularité dans l'intégrale du tourbillon incurvé (figure 2.13). La vitesse auto-induite, le mouvement et la déformation de la ligne tourbillonnaire incurvée ont été étudiés par Hama et Nutant [38]. L'équation de base est la loi de Biot-Savart (2.27) qu'on peut écrire comme suit :

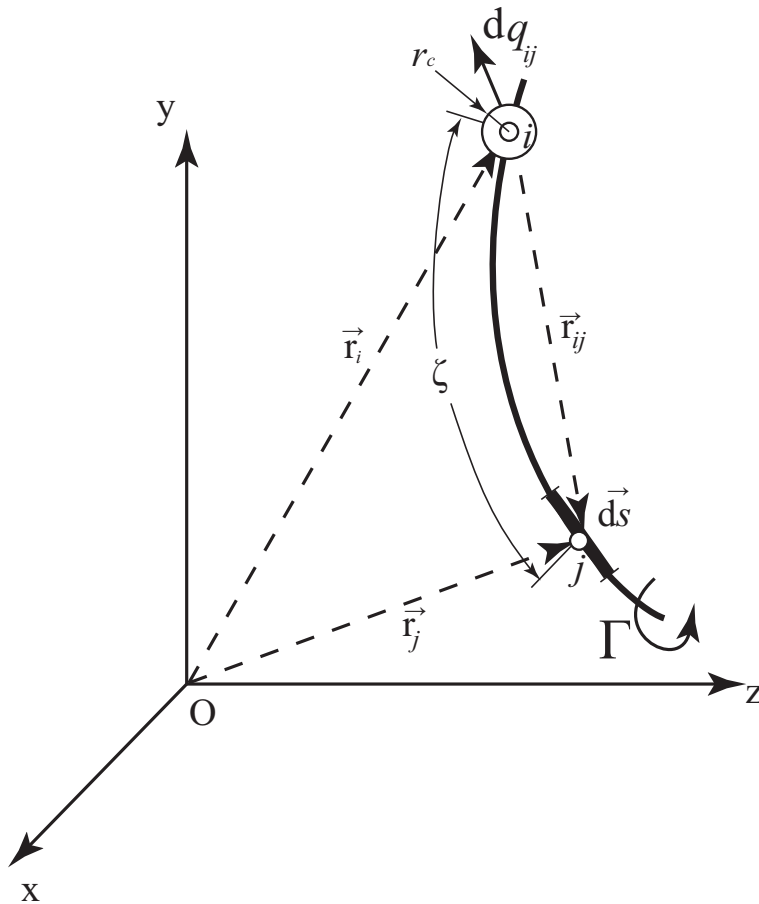


FIGURE 2.13 – Calcul de la vitesse auto-induite

$$d\vec{V}_{ij} = -\frac{\Gamma}{4\pi} r_{ij}^{-3} \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial s_j} \times \vec{r}_{ij} ds_j \quad (2.48)$$

Où  $d\vec{V}_{ij}$  est la vitesse induite au point situé à une distance  $\vec{r}_i$  du segment  $ds_j$  au point situé dans la  $\vec{r}_j$  d'une ligne tourbillonnaire curviligne. Ici,  $\vec{r}_{ij}$  représente la distance



vectorielle entre ces deux points. Pour cette raison, la vitesse induite due au tourbillon entier est :

$$\vec{V}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int r_{ij}^{-3} \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial s_j} \times \vec{r}_{ij} ds_i \quad (2.49)$$

La valeur  $\vec{r}_{ij}$  du dénominateur donne une singularité logarithmique et produit une instabilité dans le calcul numérique. Cette instabilité s'accroît au fur et à mesure que  $\vec{r}_{ij}$  approche de 0. Un noyau tourbillonnaire de rayon  $r_c$ , relativement petit, a été choisi afin d'éliminer cette singularité et l'instabilité qui en découle. En utilisant  $\zeta$  comme distance de départ le long du tourbillon (figure 2.13), la distance vectorielle sera égale à :

$$\vec{r}_{ij}(\zeta, t) = \vec{r}_i(s_i, t) - \vec{r}_j(s_i + \zeta, t) \quad (2.50)$$

Par extension de la série de Taylor au point de contrôle  $\zeta = 0$  de la formule (2.50) [6] :

$$\vec{r}_{ij}(\zeta) = \vec{a}_1 \zeta + \vec{a}_2 \zeta^2 + \dots \quad (2.51)$$

Où :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial \zeta} \\ \vec{a}_2 &= \frac{\partial^2 \vec{r}_{ij}}{\partial \zeta^2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Le tourbillon ayant une épaisseur finie, ses dérivées sont :

$$\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial s_j} = \frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial \zeta} = \vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \zeta + \dots \quad (2.53)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{r}_{ij}}{\partial s_j} \times \vec{r}_{ij} &= (\vec{a}_1 \zeta + 2\vec{a}_2 \zeta^2 + \dots) \times (\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 \zeta + \dots) \\ &= (\vec{a}_1 \times \vec{a}_1) \zeta + (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1 + 2\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \zeta^2 + O(\zeta^3) \\ &= (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \zeta^2 + O(\zeta^3) \\ &= (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) |\zeta|^2 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} |\vec{r}_{ij}|^2 &= |(\vec{a}_1 \zeta + \vec{a}_2 \zeta^2 + \dots)|^2 \\ &= |\vec{a}_1|^2 |\zeta|^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \zeta^3 + \dots \\ r_{ij} &= |\vec{a}_1| |\zeta| \left(1 + \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \zeta + \dots\right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Et par conséquent :

$$r_{ij}^{-3} = |\vec{a}_1|^{-3} |\zeta|^{-3} \left(1 - 3 \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^2} \zeta + \dots\right) \quad (2.56)$$

On remplace l'équation (2.55) et l'équation (2.56) par leurs valeurs dans l'équation (2.49). L'intégration dans l'intervalle  $r_c \leq \zeta \leq 1$  donne :

$$\vec{V}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_1^{r_c} \left[ \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^3} \frac{1}{|\zeta|} + O(1) \right] d\zeta \quad (2.57)$$

Par conséquent :

$$\vec{V}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1|^3} \ln \frac{1}{|r_c|} + O(1) \quad (2.58)$$

On remplace  $\vec{a}_1$  et  $\vec{a}_2$  par leurs valeurs dans l'équation (2.52) et on obtient la formule finale permettant de calculer la vitesse auto-induite :

$$\vec{V}_i = \frac{\Gamma \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \times \left( \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \right)}{4\pi \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|^3} \ln \frac{1}{|r_c|} + O(1) \quad (2.59)$$

Et après l'arrangement, on arrive à :

$$\vec{V}_i = - \frac{\Gamma \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right) \times \left( \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} \right)}{4\pi \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \right|^3} \ln r_c \quad (2.60)$$

La valeur de  $r_c$ , de l'ordre de  $0,01 \div 0,03$  du rayon  $R$  du rotor, représente le rayon du noyau de tourbillon visqueux et permet de prendre en compte la structure réelle de ce dernier (figure 2.14).

### Calcul de la vitesse auto-induite

La solution numérique de la formule (2.60), à l'approche des lignes tourbillonnaires par le nombre fini de marqueurs [38, 37], nécessite le calcul des dérivées  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial s}$  et  $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2}$  dans chaque marqueur : Sur la figure 2.14, on considère que  $r_A$ ,  $r_B$  et  $r_C$  sont les vecteurs

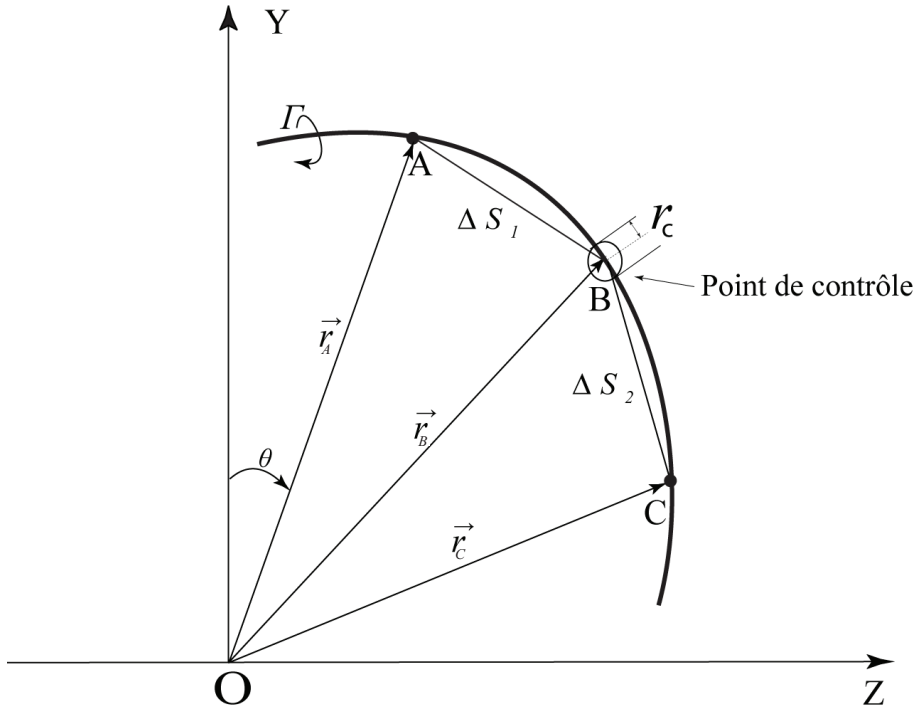


FIGURE 2.14 – Champ de vitesses auto-induit au sein d'un tourbillon incurvé

de position des trois points adjacents dans la direction positive du filament  $ds$ ,  $r_A$  et  $r_C$ . Ils peuvent être présentés en utilisant la série de Taylor au point  $B$  :

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B - \Delta S_1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \frac{(\Delta S_1)^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} + \dots \quad (2.61)$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_B + \Delta S_2 \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} + \frac{(\Delta S_2)^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} + \dots \quad (2.62)$$

Où :

$$\begin{cases} \Delta S_1 = |\vec{r}_A - \vec{r}_B| \\ \Delta S_2 = |\vec{r}_C - \vec{r}_B| \end{cases} \quad (2.63)$$

En multipliant l'équation (2.61) par  $(\Delta S_2)^2$  et l'équation (2.62) par  $(\Delta S_1)^2$ , et par soustraction, on obtient la dérivée première :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} &= \frac{1}{(\Delta S_1 + \Delta S_2)} \\ &\left\{ \frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} [(x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} + (z_C - z_B)\vec{k}] - \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} [(x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}] \right\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

On multiplie l'équation (2.61) par  $(\Delta S_2)$  et l'équation (2.62) par  $(\Delta S_1)$ , et par soustraction, on obtient la dérivée secondaire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial s^2} &= \frac{2}{(\Delta S_1 + \Delta S_2)} \\ &\left\{ \frac{1}{\Delta s_2} [(x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} + (z_C - z_B)\vec{k}] + \frac{1}{\Delta s_1} [(x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} + (z_A - z_B)\vec{k}] \right\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

En remplaçant l'équation (2.64) et l'équation (2.65) dans l'équation (2.58) on peut obtenir la vitesse auto-induite du point  $B$ , dont la composante sur l'axe de  $x$  est :

$$\begin{aligned} V_{ix} &= \frac{-\Gamma(\Delta s_1 + \Delta s_2)^2 \ln r_c}{2\pi \Delta s_1 \Delta s_2} \\ &\left\{ (\Delta s_1)^2 + (\Delta s_2)^2 - 2[(x_C - x_B)(x_A - x_B) + (y_C - y_B)(y_A - y_B) + (z_C - z_B)(z_A - z_B)] \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ &[(y_C - y_B)(z_A - z_B) + (y_A - y_B)(z_C - z_B)] \end{aligned} \quad (2.66)$$

De même, on peut calculer la composante de la vitesse induite suivant l'axe des  $y$  :

$$\begin{aligned} V_{iy} &= \frac{-\Gamma(\Delta s_1 + \Delta s_2)^2 \ln r_c}{2\pi \Delta s_1 \Delta s_2} \\ &\left\{ (\Delta s_1)^2 + (\Delta s_2)^2 - 2[(x_C - x_B)(x_A - x_B) + (y_C - y_B)(y_A - y_B) + (z_C - z_B)(z_A - z_B)] \right\}^{-\frac{3}{2}} \\ &[(y_C - y_B)(z_A - z_B) + (x_A - x_B)(z_C - z_B)] \end{aligned} \quad (2.67)$$

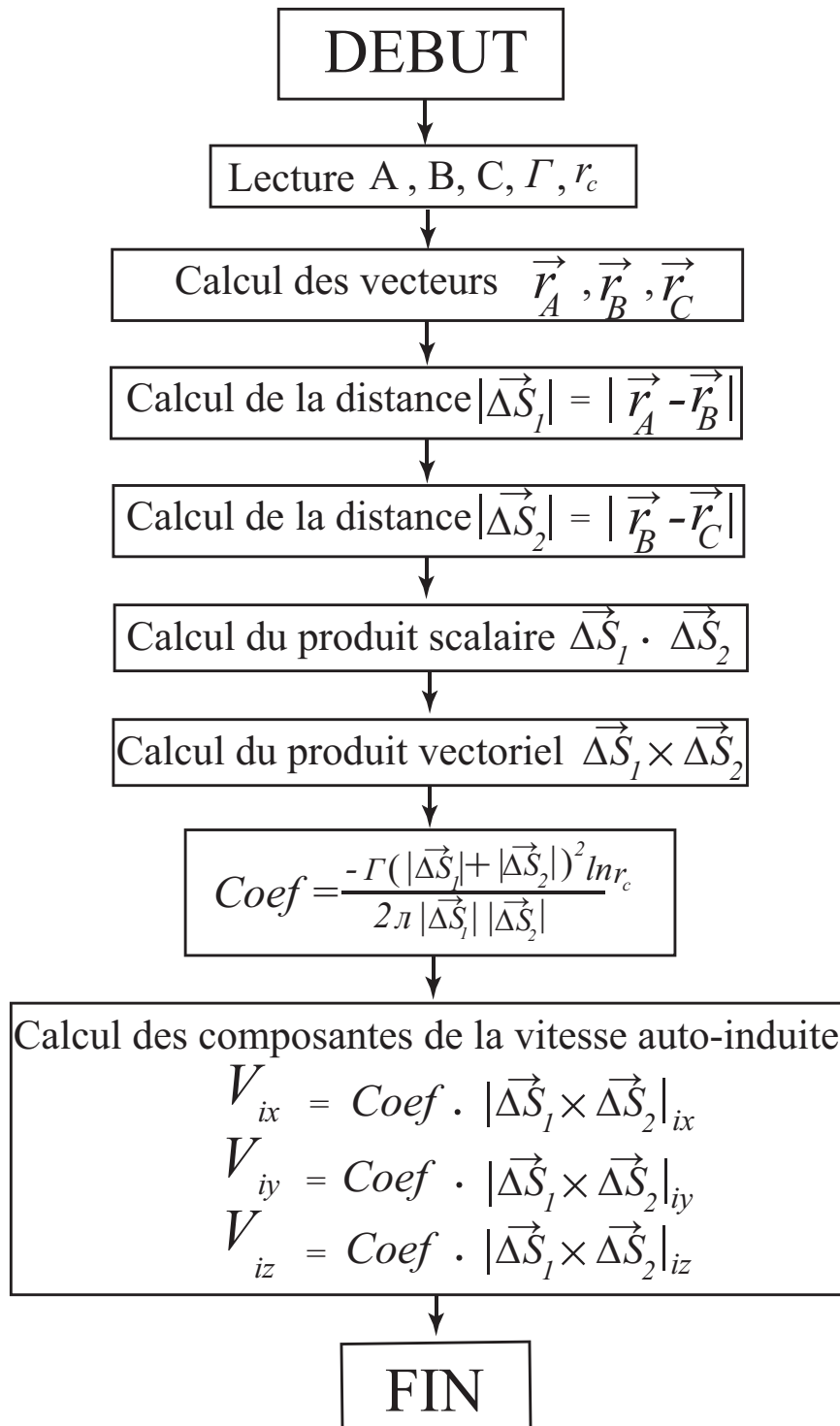


FIGURE 2.15 – Organigramme de calcul de la vitesse auto-induite.

Et celle suivant l'axe  $z$  :

$$V_{iz} = \frac{-\Gamma(\Delta s_1 + \Delta s_2)^2 \ln r_c}{2\pi\Delta s_1\Delta s_2} \left\{ (\Delta s_1)^2 + (\Delta s_2)^2 - 2[(x_C - x_B)(x_A - x_B) + (y_C - y_B)(y_A - y_B) + (z_C - z_B)(z_A - z_B)] \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ [(y_C - y_B)(z_A - z_B) + (y_A - y_B)(x_C - x_B)] \quad (2.68)$$

### 2.5.3 L'avancement dans le temps avec le schéma prédicteur-correcteur

La méthode d'avancement dans le temps offre en pratique l'un des meilleurs niveaux d'approximation du sillage du rotor éolien, avec de plus, le moins de limitations dans l'application. L'évolution temporelle de la position du marqueur lagrangien peut y être exprimée de la façon suivante [51] :

$$\frac{d\vec{r}}{\Omega\psi_b}(d\psi_b, \psi_w) = D_{\psi_w} + \vec{V}(\vec{r}(d\psi_b, \psi_w)) \Big|_{discrete} \quad (2.69)$$

Une application directe du schéma numérique vu précédemment risque de provoquer un problème de stabilité [13, 8, 12]. La courbe caractéristique (figure 2.8) indique la possibilité d'avoir une vitesse induite à n'importe quel point  $V(\vec{r}^n) = V_j^n$  calculée par la loi Biot-Savart. Ce qui nous permet de calculer le vecteur de position au même point par la formule :

$$\vec{r}_{j+1}^{n+1} = \vec{r}^n + \frac{2}{\Omega} \frac{\Delta\psi_b\Delta\psi_w}{(\Delta\psi_b + \Delta\psi_w)} \vec{V}_j^n \quad (2.70)$$

La précision n'est ici que d'ordre 1. L'amélioration de la précision passe par la mise en œuvre d'une méthode explicite prédicteur-correcteur du deuxième ordre [52, 9].

Dans l'étape "prédicteur" (figure 2.16), on génère une valeur approximative du vecteur de position en commençant par calculer la vitesse induite  $\vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n$ , à l'aide de la loi de Biot-Savart, puis on calcule le vecteur de position par la formule suivante :

$$\vec{r}_{j+1}^n = \vec{r}_j^n + \frac{2}{\Omega} \left( \frac{\Delta\psi_w\Delta\psi_b}{\Delta\psi_w + \Delta\psi_b} \right) \vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n \quad (2.71)$$

Dans l'étape "correcteur", on utilise la valeur précédente (2.71) afin de générer la valeur exacte du vecteur de position. On calcule d'abord la moyenne de  $\vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n$ , et  $\vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n$  :

$$\tilde{V}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left( \vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n + \vec{V}_{j+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (2.72)$$

Toujours dans l'étape "correcteur" (figure 2.17), on ajoute la valeur obtenue dans la formule (2.71) :

$$\vec{r}_{j+1}^{n+1} = \vec{r}_j^n + \frac{2}{\Omega} \frac{\Delta\psi_b\Delta\psi_w}{(\Delta\psi_b + \Delta\psi_w)} \tilde{V}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.73)$$

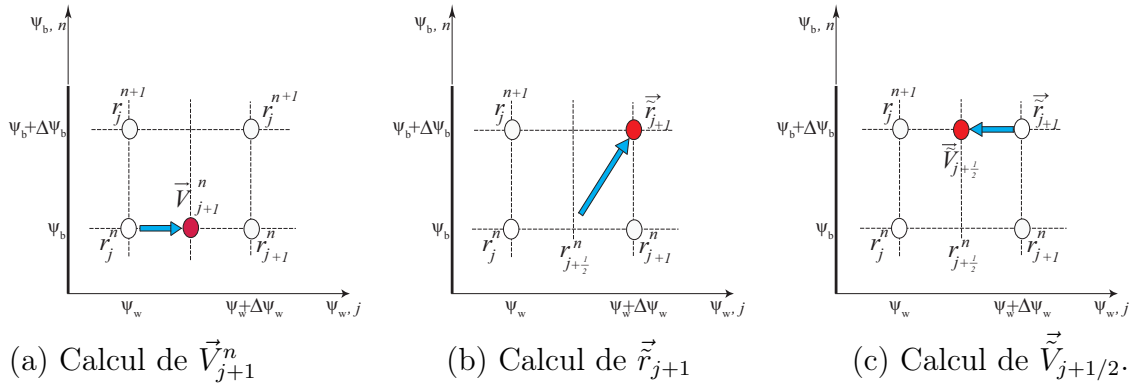


FIGURE 2.16 – Création d'une valeur approximative de la position d'un marqueur lagrangien

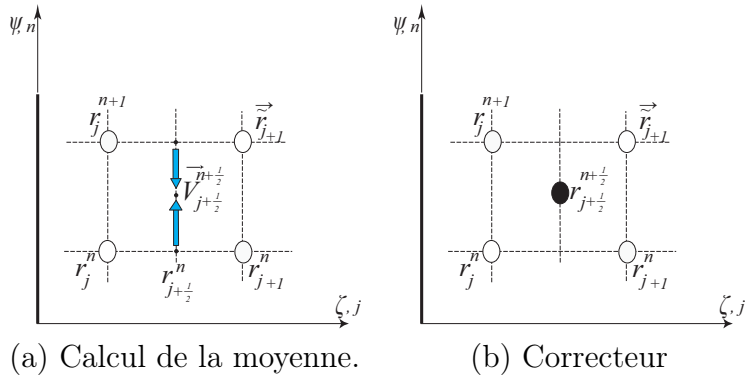


FIGURE 2.17 – Correction de la position d'un marqueur lagrangien après un avancement dans le temps

La méthode explicite "prédicteur-correcteur" présente une erreur d'ordre  $(\Delta t^3)$  par étape, et montre une stabilité numérique considérable. Mais elle exige le calcul de deux champs de vitesses pour chaque étape temporelle. Les figures 2.18 et 2.19 présentent un récapitulatif des étapes du schéma prédicteur-correcteur utilisé dans le code du sillage libre.

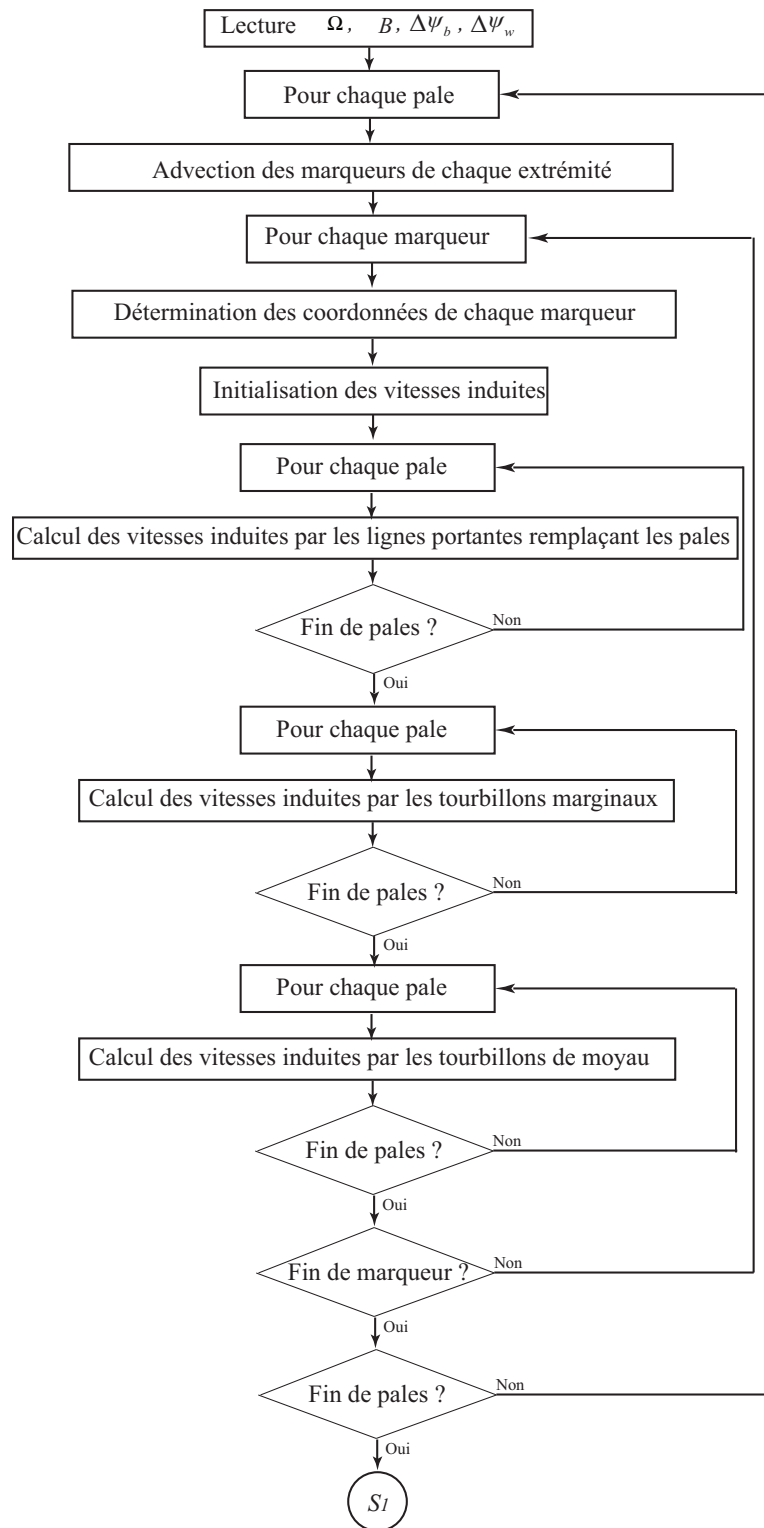


FIGURE 2.18 – Récapitulatif des étapes du schéma prédicteur-correcteur (première partie)

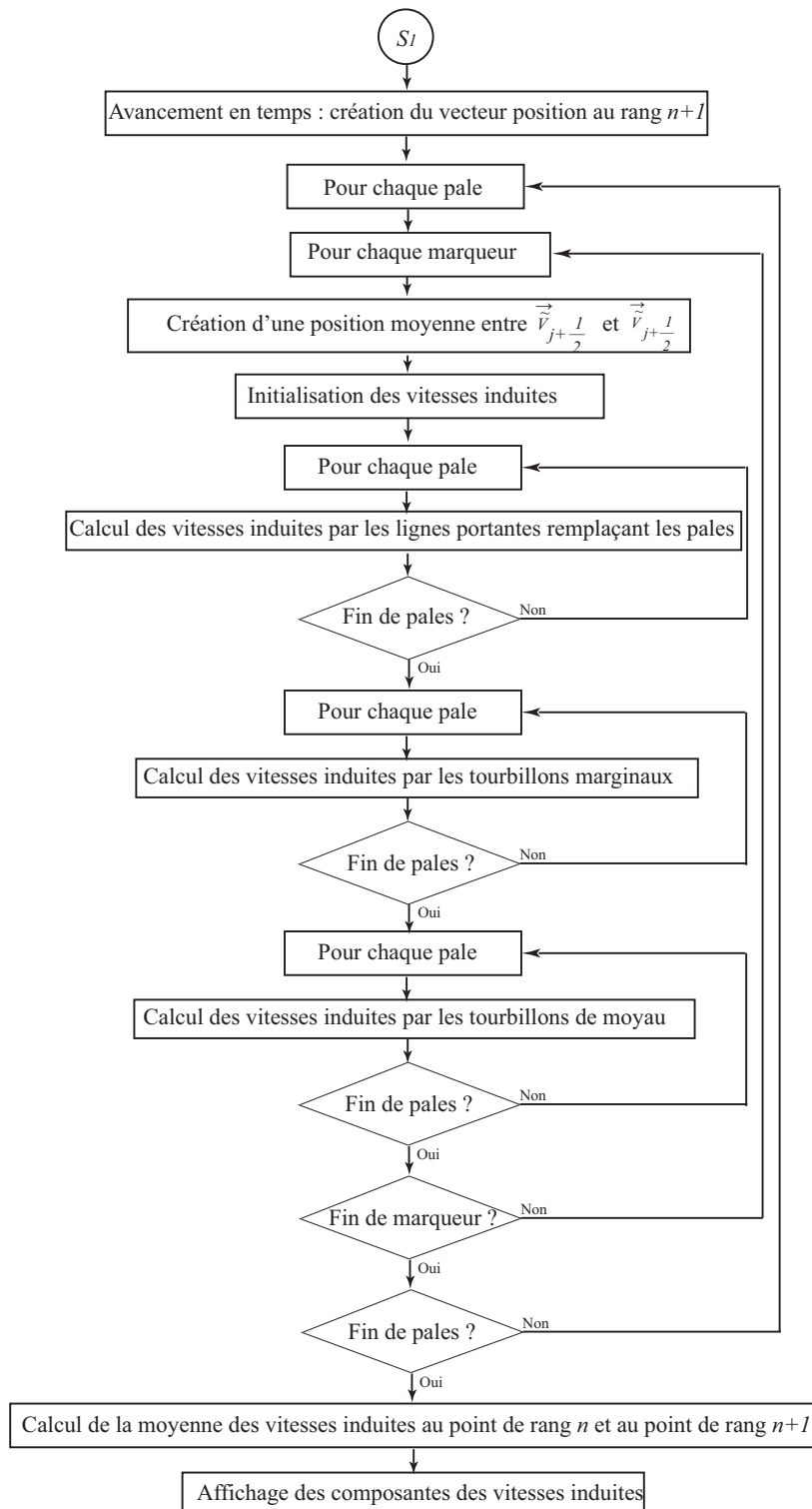


FIGURE 2.19 – Récapitulatif des étapes du schéma prédictor-correcteur (seconde partie)



### 2.5.4 Traitement de la croissance du noyau du tourbillon marginal

De par les effets de viscosité, le noyau du tourbillon marginal (figure 2.20) n'est pas constant et s'accroît au fur et à mesure de son avancement vers l'aval de l'écoulement. Leishman et Bhagwat [52] traitent la croissance du noyau du tourbillon marginal le long de son parcours et proposent la formule empirique suivante :

$$r_c(\psi_w) = \sqrt{r_0^2 + \frac{4\alpha_s \delta_s \nu \psi_w}{\Omega}} \quad (2.74)$$

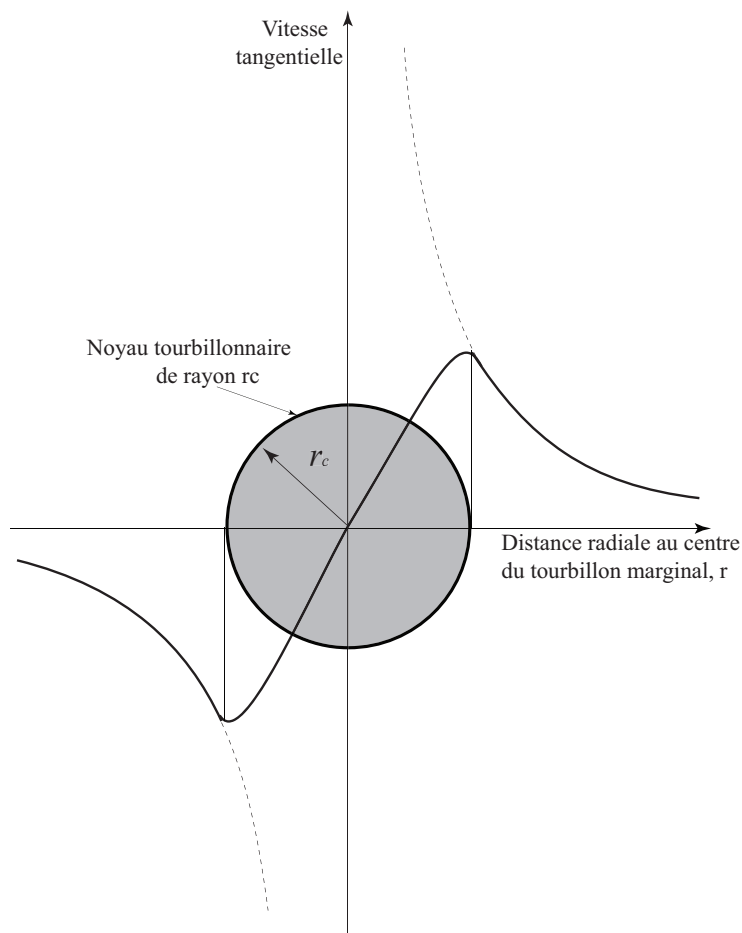


FIGURE 2.20 – Profil de la vitesse tangentielle autour un noyau tourbillonnaire de rayon  $r_c$

Ici, le paramètre  $\delta$  permet de quantifier le taux de diffusion du filament issu du bout de la pale, qui est fonction du //nombre de Reynolds  $Re_\nu = \frac{\Gamma}{\nu}$  tel que [62] :

$$\delta = 1 + a_1 Re_\nu \quad (2.75)$$

Le valeur expérimentale de paramètre  $a_1$  est obtenue par [52]. On peut aussi noter que la circulation diminue le long du tourbillon en raison de la viscosité. Ce phénomène entraîne des modifications importantes sur les vitesses induites. En effet, la diminution de la circulation peut être prise en compte à partir des données expérimentales.

## 2.6 Calcul de la charge aérodynamique

On considère une éolienne avec  $B$  pales et on divise chaque pale en un nombre  $n$  d'éléments indépendants. A chaque pas temporel, de nouveaux tourbillons se détachent de l'extrémité des pales et chaque élément du sillage tourbillonnaire se déplace dans la direction de la vitesse locale.

### 2.6.1 Algorithme de calcul

On suppose que la force d'un élément de pale est la seule responsable de la variation de quantité de mouvement de l'air passant dans l'anneau balayé par cet élément. La vitesse relative à l'amont du profil peut être calculée par la formule suivante :

$$W_n^i = \sqrt{V_\infty^2(1 - u_n^i)^2 + \Omega^2(r_n^i)^2(1 + w_n^i)^2} \quad (2.76)$$

Les vitesses relatives des sections de la pale nous permettent d'obtenir l'angle d'écoulement  $\beta$  grâce à la relation suivante :

$$\begin{cases} \sin\beta_n^i &= \frac{V_\infty(1-u_n^i)}{W_n^i} \\ \cos\beta_n^i &= \frac{\Omega r_n^i(1+w_n^i)}{W_n^i} \end{cases} \quad (2.77)$$

Considérant l'angle de calage de la pale  $\theta$ , l'angle d'incidence est calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\alpha_n^i = \beta_n^i - \theta_n^i \quad (2.78)$$

Grâce aux caractéristiques aérodynamiques du profil, issues soit des essais ou bien d'une simulation numérique par un solveur d'équations de Navier-Stokes, on peut obtenir le coefficient de portance  $C_L$  et de traînée  $C_D$  de chaque section. Le coefficient de portance  $C_L$  et de traînée  $C_D$  servent à calculer la force de portance  $(dF_L)_n^i$  générée par un élément de pale de longueur  $dr$ . Cette force est normale à la direction de  $W_n^i$ , et égale à :

$$(dF_L)_n^i = 0.5\rho(W_n^i)^2(C_L)_n^i c_n^i dr \quad (2.79)$$

La force de traînée  $(dF_D)_n^i$ , parallèle à la direction de  $W_n^i$ , est égale à :

$$(dF_D)_n^i = 0.5\rho(W_n^i)^2(C_D)_n^i c_n^i dr \quad (2.80)$$

Afin d'obtenir les composantes axiales et tangentielles, on reprojette ces deux efforts sur l'axe  $Z$  et  $X$  (figure 2.21). La force axiale  $(dF_z)_n^i$  est calculée avec la formule suivante :

$$(dF_z)_n^i = (dF_L)_n^i \cos\beta_n^i + (dF_D)_n^i \sin\beta_n^i \quad (2.81)$$

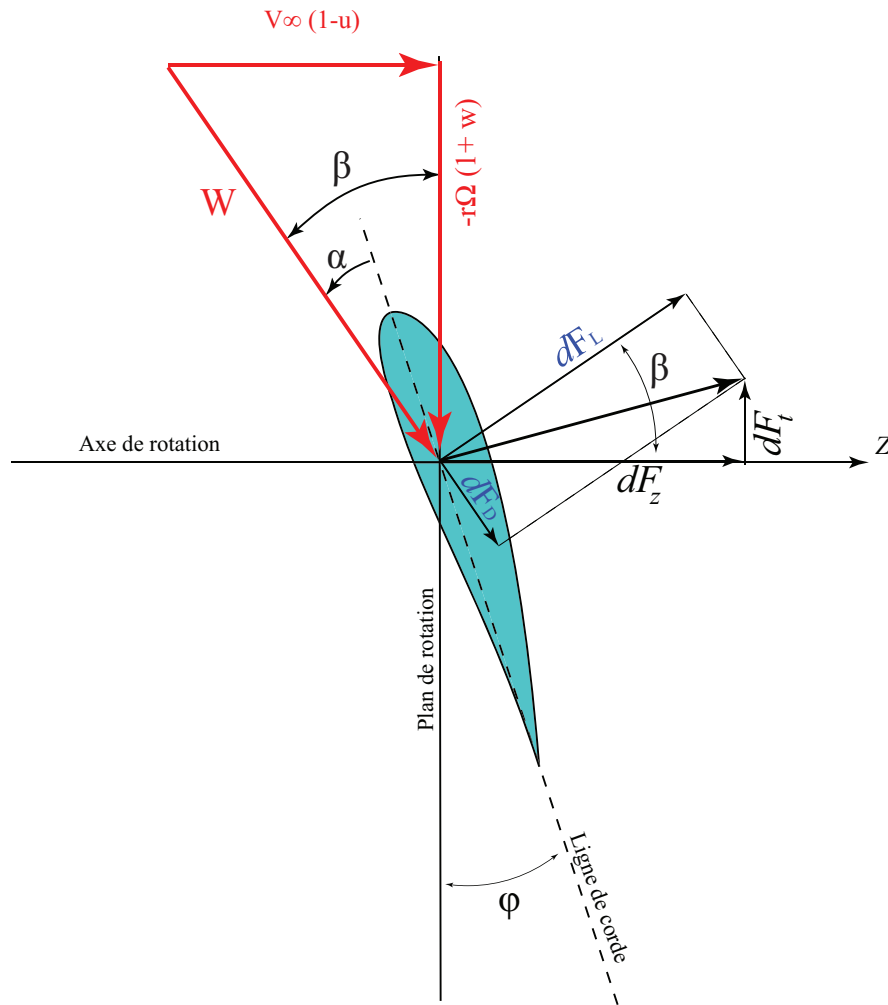


FIGURE 2.21 – Élément de pale : triangles des vitesses ; composantes de la force aérodynamique

La force tangentielle  $(dF_t)_n^i$  est ainsi calculée par :

$$(dF_t)_n^i = (dF_L)_n^i \sin \beta_n^i - (dF_D)_n^i \cos \beta_n^i \quad (2.82)$$

La force aérodynamique produite par l'élément  $i$  de la pale du rotor est égale à :

$$(dF)_n^i = \frac{1}{2} \rho c_n^i (W_n^i)^2 \{ (C_L)_n^i \cos \beta_n^i + (C_D)_n^i \sin \beta_n^i \} dr \quad (2.83)$$

La puissance de cette section est donc égale à :

$$(dP)_n^i = \frac{1}{2} \rho c_n^i (W_n^i)^2 \{ (C_L)_n^i \sin \beta_n^i - (C_D)_n^i \cos \beta_n^i \} r_n^i \Omega dr \quad (2.84)$$

Par intégration de cette puissance le long de la pale, du pied de la pale  $r_m$  à l'extrémité de la pale  $r_p$ , on obtient la puissance du rotor avec  $B$  dans l'itération  $i$  :

$$P^i = \frac{1}{2} \rho \Omega B \int_{r_m}^{r_p} c_n^i (W_n^i)^2 \{ (C_L)_n^i \sin \beta_n^i - (C_D)_n^i \cos \beta_n^i \} r_n^i dr \quad (2.85)$$

### 2.6.1.1 Première itération

Dans la première itération, un tourbillon se détache de l'extrémité de chaque pale (figure 2.22) et se déplace dans la direction de la vitesse locale. On suppose ici que

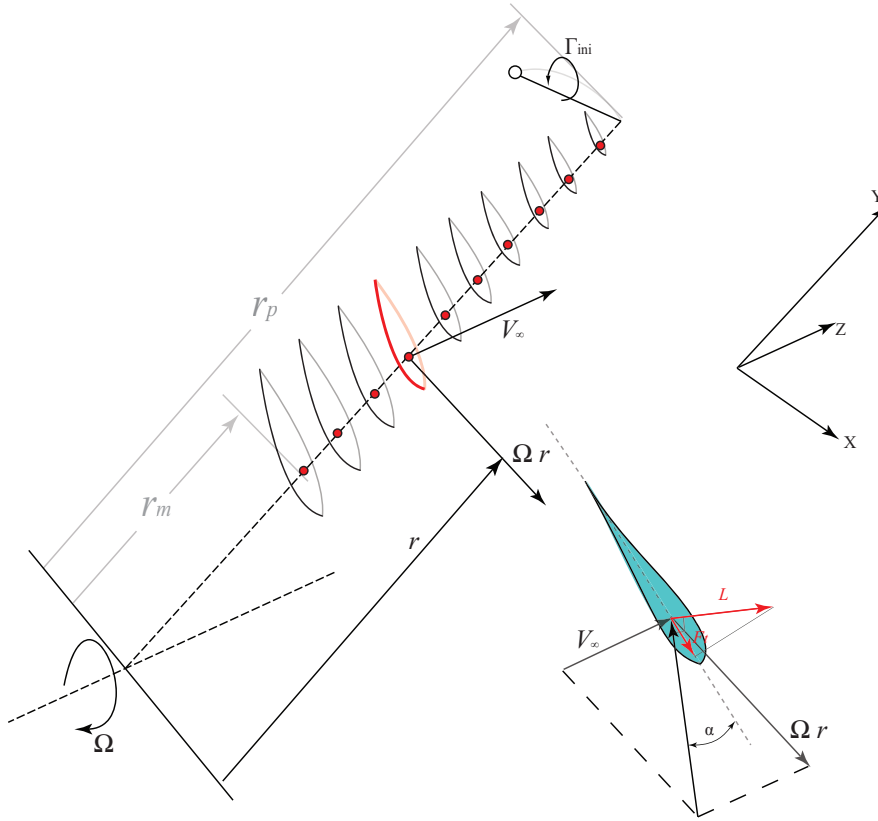
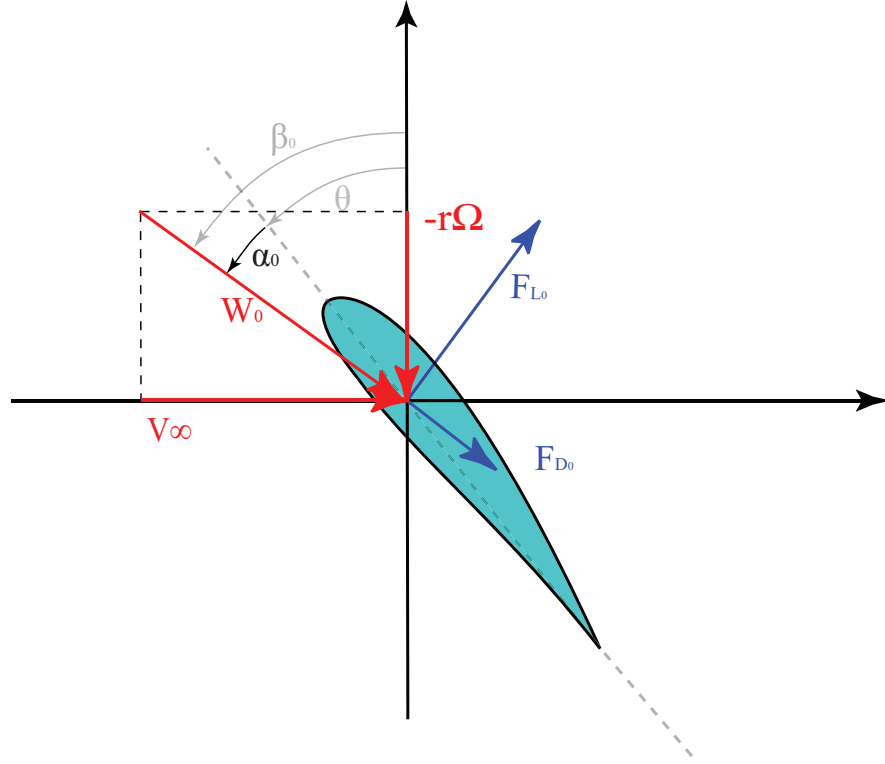


FIGURE 2.22 – Premier pas temporel : un tourbillon se détache de l'extrémité de la pale

les vitesses induites par ces tourbillons sont nulles dans toutes les sections  $N$  de la pale. Par l'équation (2.76), on peut calculer pour chaque section de la pale la vitesse relative géométrique à l'aide du triangle de vitesse  $W_n^1$ , les résultats sont ensuite stockés dans un fichier spécial sous le nom de "*répartition de la vitesse relative le long de pale*". On calcule l'angle d'écoulement  $\beta_n^1$  par (2.77). L'angle d'incidence est calculé à l'aide de la relation (2.78). La puissance du rotor dans l'itération  $i$  peut facilement être déterminée par l'équation (2.85). Cette puissance correspond à une circulation définie. Pour évaluer cette circulation, on identifie une éolienne produisant la même puissance pour la même vitesse de vent. Le calcul de la circulation associée au tourbillon suivant nécessite de développer une nouvelle formule. Celle-ci permet de calculer la nouvelle circulation à partir de la puissance générée à l'itération précédente.

### 2.6.1.2 Calcul la circulation initiale

Dans la littérature, plusieurs techniques permettant d'obtenir la circulation sont proposées mais manquent de précision. Dans l'article de [3] il est proposé de considé-


 FIGURE 2.23 – Triangle de vitesse du profil  $i$  à la première itération

rer que la circulation du tourbillon issu de l'extrémité de la pale est égale à la valeur maximum de celle-ci le long de la pale (figure 2.24, cas 1). Les mesures expérimentales [26, 39, 69] de la puissance pour les trois cas de fonctionnement d'une éolienne montrent que la puissance n'est pas la même, car elle dépend de la distribution de la circulation le long de la pale (figure 2.24). Ce choix n'est pas justifié lors du fonctionnement d'une éolienne en dérapage car il donne des résultats erronés. En fait, la circulation du tourbillon marginal dépend de la puissance du rotor éolien. La démarche suivante expose cette réalité physique.

La forme vectorielle de la loi de Kutta-Joukowski donne :

$$\rho \vec{W} \wedge \vec{\Gamma} = \vec{L} \quad (2.86)$$

Après développement :

$$\rho(W_a \cdot \vec{i} + W_t \cdot \vec{j}) \wedge |\Gamma| \cdot \vec{k} = L_n \vec{i} + L_t \vec{j} \quad (2.87)$$

La projection de cette force aérodynamique  $\vec{L}$  sur la direction tangentielle donne :

$$L_t = \rho W_a \Gamma \quad (2.88)$$

Par conséquent, la puissance créée par la force de portance d'un élément de la pale est :

$$dP = L_t \Omega r dr \quad (2.89)$$

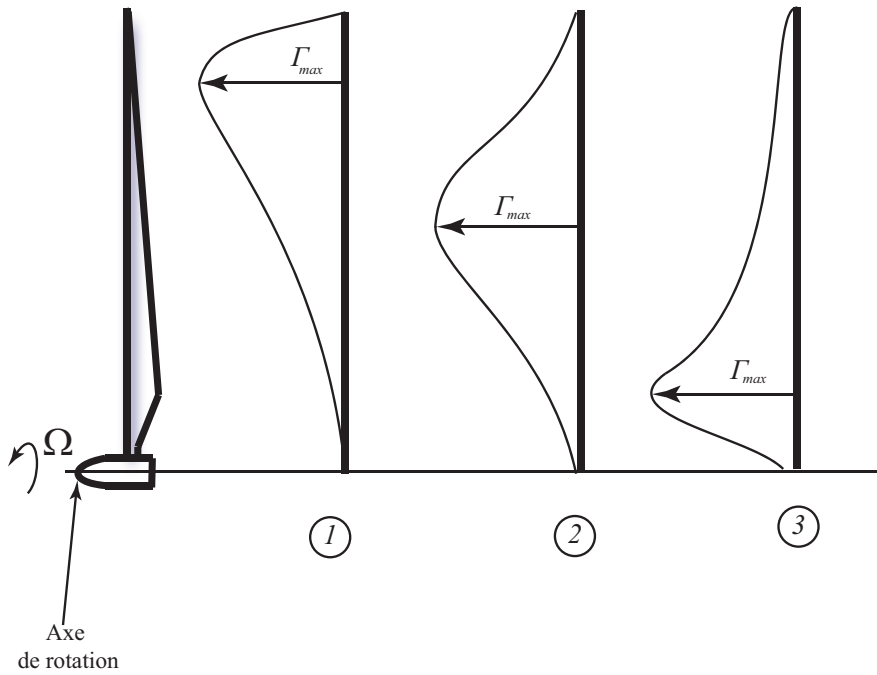


FIGURE 2.24 – Trois cas de fonctionnement d'une éolienne avec trois distributions différentes de circulation

En respectant l'équation (2.88), la puissance élémentaire peut être calculée par :

$$dP = \rho W_a \Gamma \Omega r dr \quad (2.90)$$

Par intégration de cette puissance le long de la pale, du pied de la pale  $r_m$  à l'extrémité de la pale  $r_p$ , on obtient la puissance du rotor avec  $B$  pales :

$$\int_{r_m}^{r_p} dP(r) = \rho \Omega B \int_{r_m}^{r_p} W_a(r) \Gamma(r) r dr \quad (2.91)$$

En supposant une circulation uniforme et constante le long de la pale, on peut la sortir de l'intégrale dans l'équation (2.91) :

$$P = \rho \Omega B \Gamma \int_{r_m}^{r_p} W_a(r) r dr \quad (2.92)$$

L'intégrale dans l'équation (2.92) peut être évaluée par la méthode des trapèzes. La circulation peut donc être calculée par la formule suivante :

$$\Gamma = \frac{P}{\rho \Omega B \int_{r_m}^{r_p} W_a(r) r dr} \quad (2.93)$$

Cette circulation est portée par le deuxième tourbillon qui se détache de l'extrémité des pales.

---

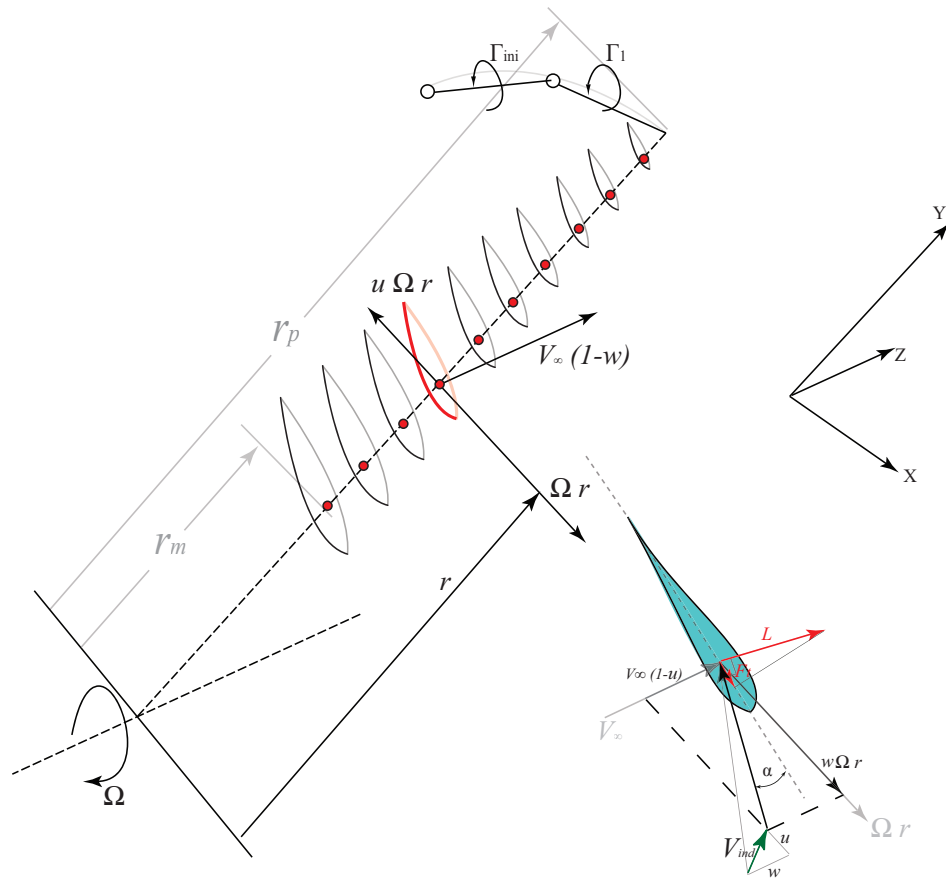


FIGURE 2.25 – Deuxième pas temporel : un nouveau tourbillon se détache de l'extrémité de la pale avec une circulation  $\Gamma_1$

### 2.6.1.3 $i^{\text{eme}}$ itération

A chaque itération, un nouveau tourbillon se détache de l'extrémité de chaque pale (figure 2.25). La démarche numérique est la suivante, pour chaque pas de temps  $i$  :

- .
- Division de chaque pale à  $N$  éléments.
- Calcul de la vitesse relative et de l'angle d'incidence  $\alpha_n^i$  (figure 2.26) de l'écoulement dans la ligne portante représentant la pale pour chaque azimut  $\psi_w$  par l'équation (2.77) et l'équation (2.78).
- Calcul des angles d'écoulement  $\beta_n^i$  et d'incidence de chaque section.
- Récupération des valeurs de  $C_L$  et  $C_D$  de chaque élément de pale à partir de fichiers comportant les caractéristiques aérodynamiques du profil.
- Calcul de la position actuelle du sillage par le schéma "prédicteur correcteur".
- Calcul de la vitesse induite par la formule de Biot-Savart dans l'élément  $n$ .

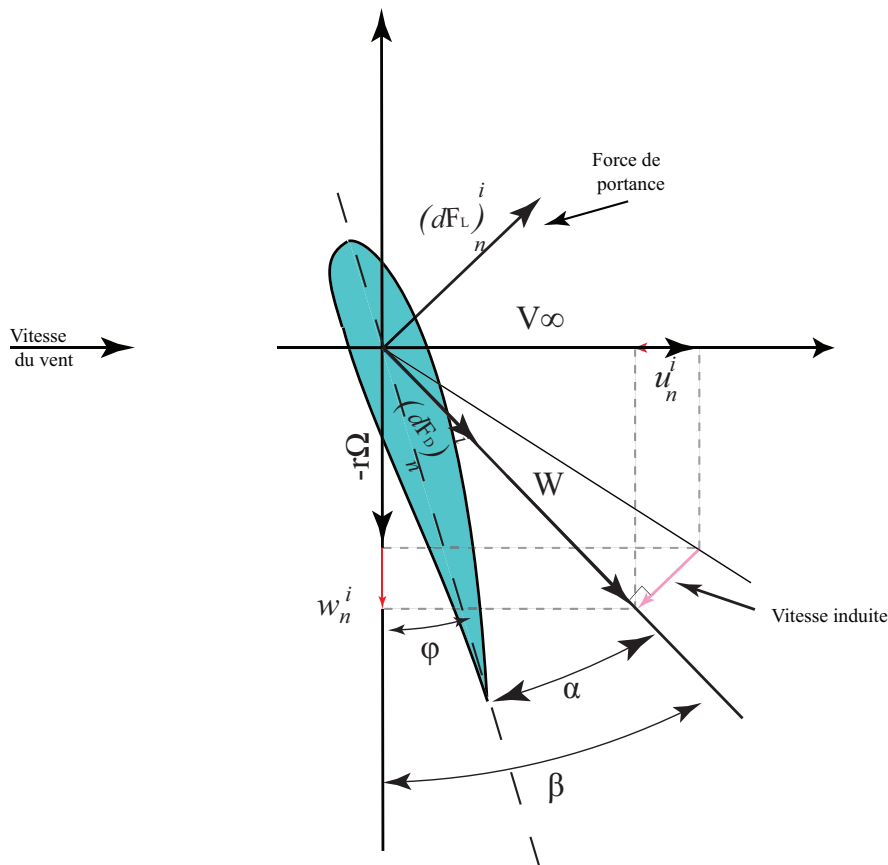


FIGURE 2.26 – Triangle de vitesses du profil  $n$  au  $i^{eme}$  itération

- Calcul des vitesses auto-induites aux points singuliers une fois par tour par la méthode de *Hama*.
- Calcul des forces de portances et de trainées.
- Calcul de la puissance du rotor éolien.
- Calcul de la circulation du tourbillon marginale.

## 2.6.2 Application du code de sillage libre à différents cas d'écoulement

L'étude du comportement aérodynamique des rotors éoliens dans des écoulements instationnaires peut permettre l'optimisation de sa régulation en agissant sur la charge du générateur ainsi que sur celle de la charge sur le calage des pales. Cette étude permet aussi le dimensionnement des différents éléments du rotor subissant des efforts instationnaires.

En effet, l'étude du rotor éolien dans des conditions de vent réelles demeure un problème complexe de par la difficulté à modéliser la variation du vent au cours du temps. Rappelons ici que l'intérêt essentiel de la méthode de sillage libre, permettant une représentation convenable des phénomènes physiques, est sa "rapidité" par rapport à un calcul Navier-Stokes.

L'application de la méthode de sillage libre dans différents cas d'écoulement autour du



rotor éolien est exposée en trois étapes ci-dessous.

- Pour un écoulement stationnaire uniforme : l'action aérodynamique du vent sur chaque élément de pale demeure constante dans toutes les positions angulaires, la vitesse relative et l'angle d'incidence étant de même constants. Dans ce cas, le code numérique de sillage libre s'arrête après la convergence et affiche la valeur de puissance et les valeurs des effets aérodynamiques.
- Pour un écoulement instationnaire d'un régime périodique : les coefficients de poussée et de couple deviennent instationnaires (dans le cas du fonctionnement d'une éolienne en dérapage). Elles dépendent de la position angulaire de la pale et de la fluctuation périodique de vitesse angulaire due au dérapage. Tous les paramètres instationnaires, fonction de la position angulaire du rotor, sont repérés par l'angle  $\theta$  de la pale maîtresse. Dans ce cas le code numérique de sillage libre commence par une vitesse constante. Le code parcourt ensuite le profil de vitesse du vent connu à l'amont, et s'arrête seulement quand la puissance de vent périodique.
- Pour un écoulement instationnaire en cas de rafale de vent : les rafales de vent peuvent engendrer, sur plus d'une seconde, des pics de vitesse de vent supérieurs à la vitesse du vent moyennée pendant le fonctionnement de l'éolienne. Ce changement peut être très rapide et conduire à des variations de charge correspondantes. Dans ce cas, le code numérique de sillage libre, qui commence par une vitesse constante, reconnaît le caractère très pointu du profil des rafales, et continue le calcul jusqu'au retour à la valeur moyenne initiale de la vitesse du vent. Le code affiche alors la puissance de l'éolienne pendant le régime en rafale.
- Pour un écoulement instationnaire : la mise en équilibre du sillage est effectuée de façon itérative jusqu'à la sortie du premier segment émis dans le sillage du domaine de calcul. A cette étape, le calcul selon le temps souhaité.

La figure 2.27 offre un récapitulatif de l'algorithme de calcul. Notons que ce programme a été conçu de façon évolutive, afin de pouvoir le modifier sans déstructurer le reste du code.

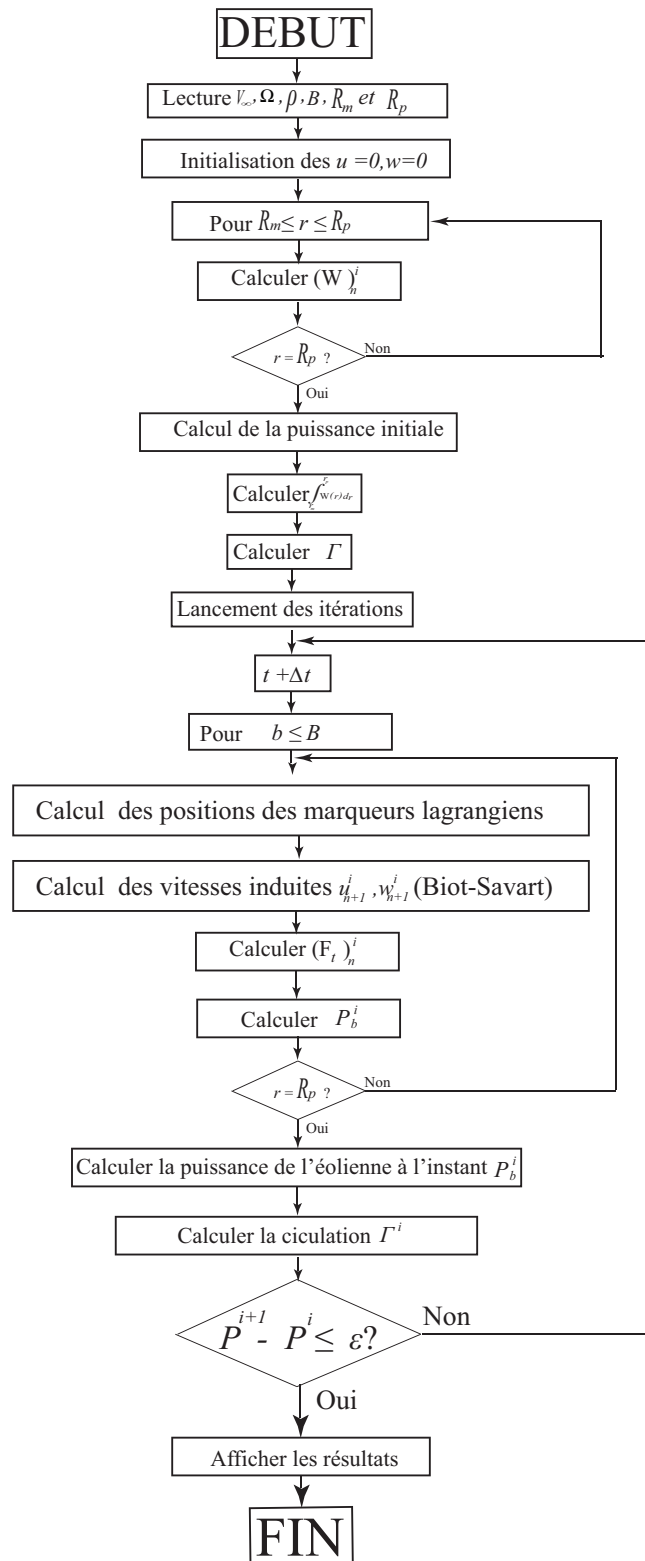


FIGURE 2.27 – Récapitulatif des étapes du programme informatique relatif à la méthode de sillage libre

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode de sillage libre a été mise en place afin de calculer l'écoulement à l'aval d'une éolienne à axe horizontal. L'écoulement réel au travers du rotor éolien a été remplacé par un écoulement de fluide parfait au travers d'un système tourbillonnaire équivalent. Ce dernier comporte des tourbillons attachés aux pales et des tourbillons libres détachés des pales. Dans une description lagrangienne de l'écoulement, il a été supposé que la vorticité issue des pales est concentrée dans deux tourbillons libres à l'extrémité et au pied de chaque pale.

L'évolution du sillage à l'aval du rotor a été obtenue en suivant l'évolution spatio-temporelle de marqueurs représentatifs des tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. Cette méthode a permis également d'évaluer la vitesse dans le plan du rotor et ainsi, de calculer les efforts aérodynamiques. Les étapes nécessaires à l'obtention de l'équation gouvernant le sillage ont été exposées avant d'analyser la particularité de cette équation. Le schéma de discrétisation utilisé pour résoudre cette équation a, de même, été détaillé.

Les équations nécessaires au calcul des efforts aérodynamiques appliqués aux pales du rotor éolien ont été employées afin d'aboutir à l'écriture d'un code de calcul en langage **C**.

Les résultats numériques obtenus à partir du code développé dans ce chapitre peuvent désormais faire l'objet d'une comparaison avec des résultats analytiques connus.



## Chapitre 3

### Validation à l'aide de solutions analytiques connues



## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>65</b>
<b>3.2</b>	<b>Validation du calcul de la vitesse induite</b>	<b>65</b>
3.2.1	Filament tourbillonnaire rectiligne infini	66
3.2.2	Anneau tourbillonnaire	68
3.2.3	Tourbillon hélicoïdal	71
<b>3.3</b>	<b>Validation du calcul de la vitesse auto-induite</b>	<b>77</b>
3.3.1	Tourbillon parabolique	77
<b>3.4</b>	<b>Influence du nombre de divisions et du rayon du noyau tourbillonnaire sur l'évolution de la vitesse induite et auto-induite</b>	<b>79</b>
3.4.1	Influence du nombre de divisions de l'anneau tourbillonnaire	80
3.4.2	Influence du rayon du noyau tourbillonnaire	80
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>82</b>

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, la méthode relative au comportement du sillage à été développée, aboutissant ainsi à l'écriture d'un code de calcul pour déterminer les vitesses induites par les structures tourbillonnaires considérées. Ce code a permis d'évaluer cette vitesse tout au long de chaque pale. La mise en œuvre de tous les modèles relatifs à la pale et à son sillage tourbillonnaire et le mouvement de chaque marqueur lagrangien conduisent à l'étape suivante : la validation du code de calcul.

Cette validation exige une comparaison entre les résultats obtenus numériquement et ceux issus des solutions analytiques connues. Une première vérification de la validité des résultats de l'algorithme utilisé pour calculer les vitesses induites à l'aide de la loi de Biot-Savart est nécessaire.

Les cas étudiés seront ceux du tourbillon rectiligne infini, de l'anneau tourbillonnaire et du tourbillon hélicoïdal. Cette dernière est d'une importance capitale dans l'étude du sillage à l'aval d'une éolienne. La validation de l'algorithme destiné à calculer la vitesse auto-induite aux points singuliers constituera un second niveau de vérification. Elle sera testée sur un filament tourbillonnaire parabolique pour lequel on dispose d'une solution analytique.

## 3.2 Validation du calcul de la vitesse induite

Le calcul de la vitesse induite utilise uniquement la loi de Biot-Savart. De nombreux exemples de solutions analytiques permettent de mener à bien notre travail de validation. En voici trois illustrations :

### 3.2.1 Filament tourbillonnaire rectiligne infini

On considère un filament tourbillonnaire rectiligne infini tel que présenté sur la figure 3.1. Celui-ci engendre un champ de vitesses bidimensionnel dans un plan per-

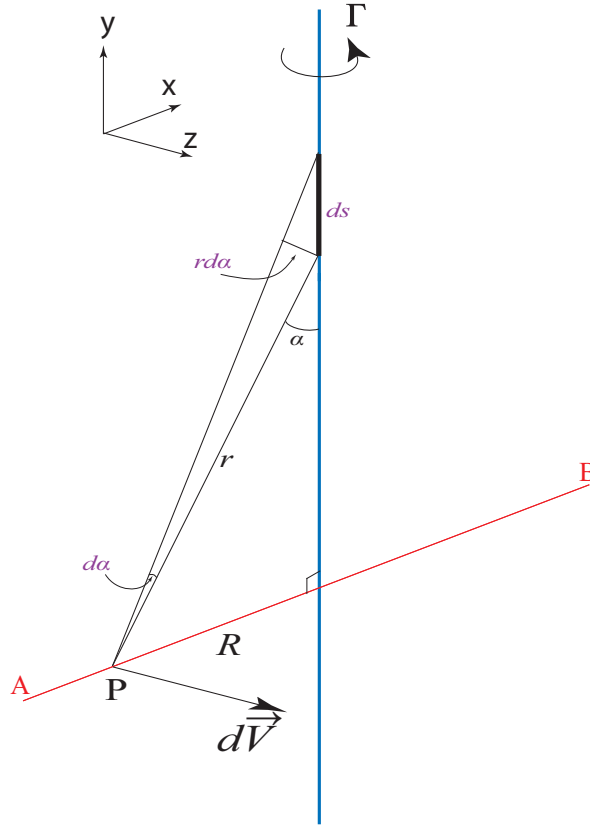


FIGURE 3.1 – Filament tourbillonnaire rectiligne infini

pendiculaire au filament. A partir de la loi de Biot-Savart, la vitesse élémentaire induite en un point par un élément de ce filament tourbillonnaire s'écrit :

$$d\vec{V}_{ind} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.1)$$

On peut ici exprimer simplement le produit vectoriel  $\vec{r} \times d\vec{s}$  :

$$\left| \vec{r} \times d\vec{s} \right| = r \cdot ds \cdot \sin \alpha = r \cdot ds \frac{R}{r} = R ds \quad (3.2)$$

Et en prenant en compte les relations suivantes :

$$ds = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} \quad (3.3)$$

Et

$$r = \frac{R}{\sin \alpha} \quad (3.4)$$



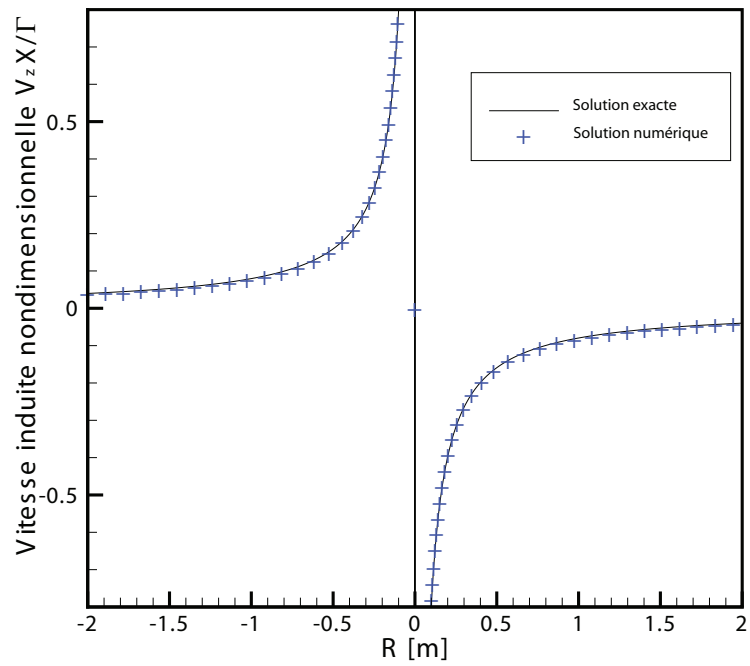


FIGURE 3.2 – Vitesse induite par un filament tourbillonnaire rectiligne infini

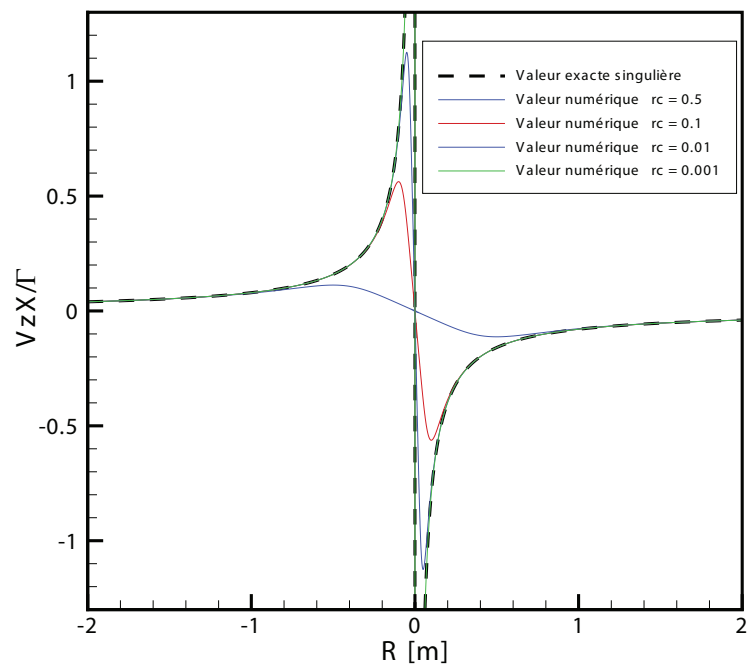


FIGURE 3.3 – Vitesse induite désingularisée par un filament tourbillonnaire rectiligne infini

Par substitution dans l'équation (3.1), on obtient :

$$|\vec{V}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\pi \frac{R}{r^3} \frac{r d\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (3.5)$$

La vitesse induite par ce filament tourbillonnaire à été calculée sur un segment de droite  $[A, B]$  perpendiculaire à celui-ci (figure 3.1). Les résultats issus du programme et de la solution exacte sont tracés sur la figure 3.2. On constate que la vitesse de l'écoulement autour du fil tourbillonnaire est inversement proportionnelle au rayon  $R$  [64, 35]. A la limite, quand ce dernier tend vers zéro, la vitesse tend vers l'infini.

Les résultats numériques sont parfaitement conformes au résultat analytique sauf au point singulier où notre algorithme fournit naturellement une vitesse nulle. La solution exacte n'est pas définie sur le filament tourbillonnaire où existe une singularité logarithmique. On introduit donc ici un processus de désingularisation présenté dans le chapitre 2.

La figure 3.3 présente les résultats numériques à l'issue de cette désingularisation en utilisant différents valeurs de rayon du noyau tourbillonnaire  $r_c$ . On observe alors la disparition de la singularité ainsi que l'influence du paramètre  $r_c$  sur le profil de vitesse.

### 3.2.2 Anneau tourbillonnaire

Pour un anneau tourbillonnaire de rayon  $R$  et de circulation  $\Gamma$  (figure 3.4), la solution analytique exacte de la vitesse induite donnée par [53, 51] est :

$$V_r(r, z) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{Rz \cos \theta}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (3.6)$$

$$V_z(r, z) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{R(R - r \cos \theta)}{(R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (3.7)$$

L'angle limite (cutoff)  $\delta$  égale (figure 3.4) à :

$$\delta = \frac{r_c}{R} \quad (3.8)$$

Ces formules sont obtenues à partir de l'intégration de la formule de Biot-savart (3.1) sur un cercle de rayon  $R$  et en excluant la zone singulière sur une distance  $r_c$ . Les résultats de cette intégration ont été obtenus grâce à l'utilisation des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce [54] pour  $\delta = 0$  comme suit :

$$V_z(r, z) = \frac{-\Gamma}{2\pi\sqrt{z^2 + (r+R)^2}} \left[ K(s) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{z^2 + (R-r)^2} E(s) \right] \quad (3.9)$$

$$V_r(r, z) = \frac{-\Gamma z}{2\pi r\sqrt{z^2 + (r+R)^2}} \left[ K(s) - \frac{R^2 + r^2 + z^2}{z^2 + (R-r)^2} E(s) \right] \quad (3.10)$$

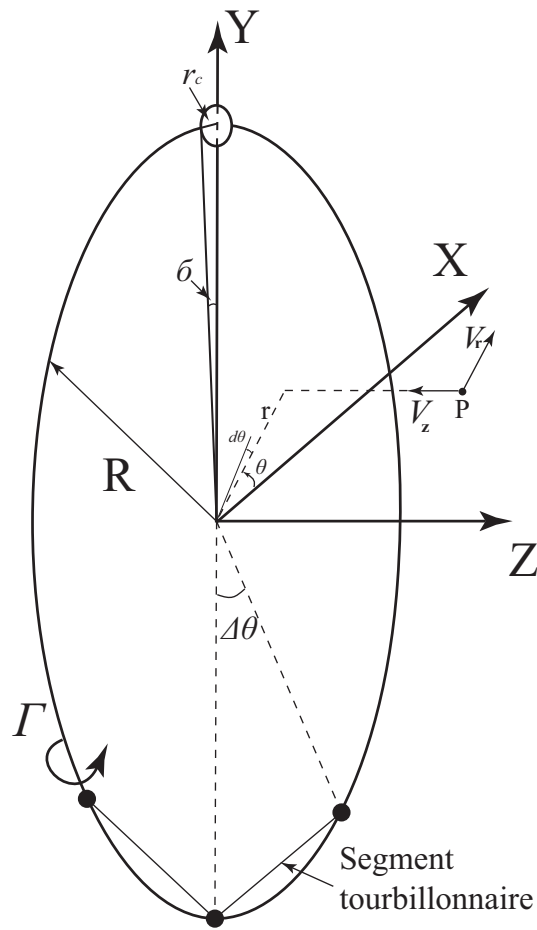


FIGURE 3.4 – Tourbillon circulaire divisé en plusieurs segments

L'argument  $s$  se donne par l'équation suivante :

$$s = \sqrt{\frac{4rR}{z^2 + (r+1)^2}} \quad (3.11)$$

Les résultats exacts sont exposés dans les figures 3.5 et 3.6 comme une ligne continue. L'anneau tourbillonnaire a été divisé en  $M$  segments. De cette manière, la vitesse induite par cet anneau est égale à la somme des vitesses induites par chaque segment. La figure 3.5 illustre la comparaison entre la solution analytique (3.9) et (3.10) et la solution obtenue numériquement pour différentes discrétisations. Sur cette figure, la vitesse induite a été calculée le long du diamètre dans le plan de l'anneau tourbillonnaire.

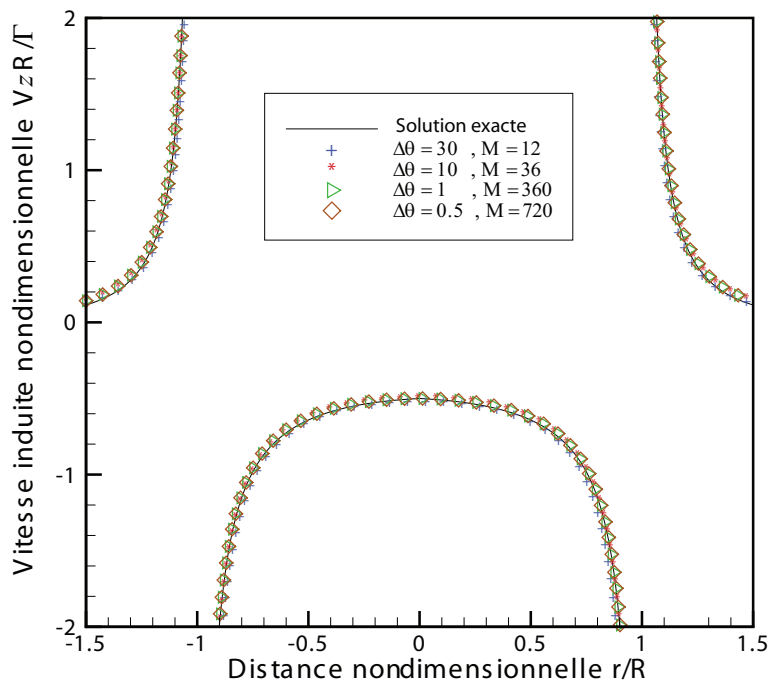


FIGURE 3.5 – Vitesse induite désingularisée par un anneau tourbillonnaire

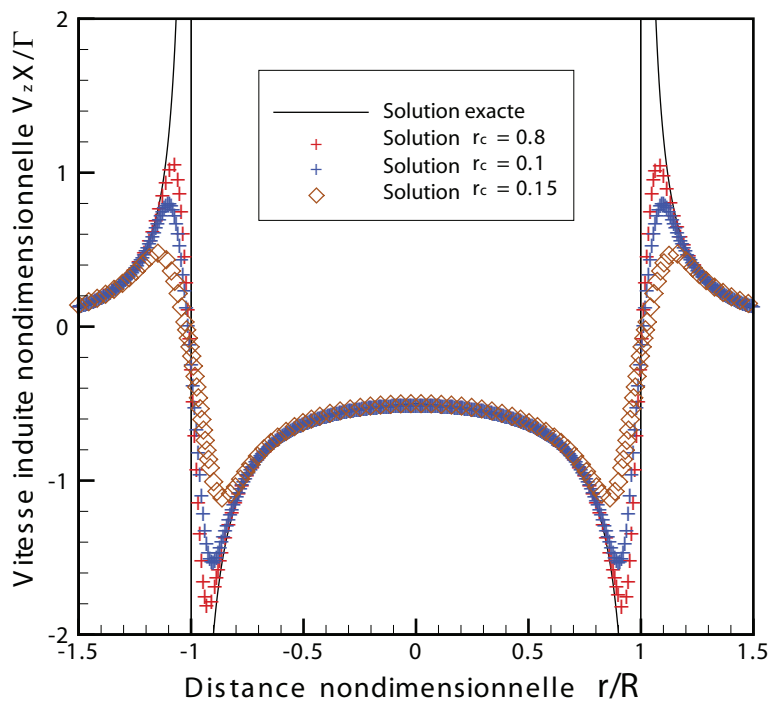


FIGURE 3.6 – Influence du rayon de noyau tourbillonnaire sur la vitesse induite par un anneau tourbillonnaire

Dans le plan de l'anneau tourbillonnaire, les composantes radiales de la vitesse induite sont nulles et seul demeure la composante axiale  $V_z$ . On observe que, même pour des discrétisations grossières, la comparaison entre la solution numérique et la solution exacte reste très satisfaisante.

### 3.2.3 Tourbillon hélicoïdal

Dans un écoulement stationnaire parallèle à l'axe de rotation d'une éolienne, le tourbillon d'extrémité de chaque pale se détache pour se transformer en un tourbillon hélicoïdal [32, 46]. Ce phénomène se retrouve aussi dans le sillage réel d'une éolienne en fonctionnement.

Afin d'approcher au maximum les conditions de fonctionnement idéales d'une éolienne,

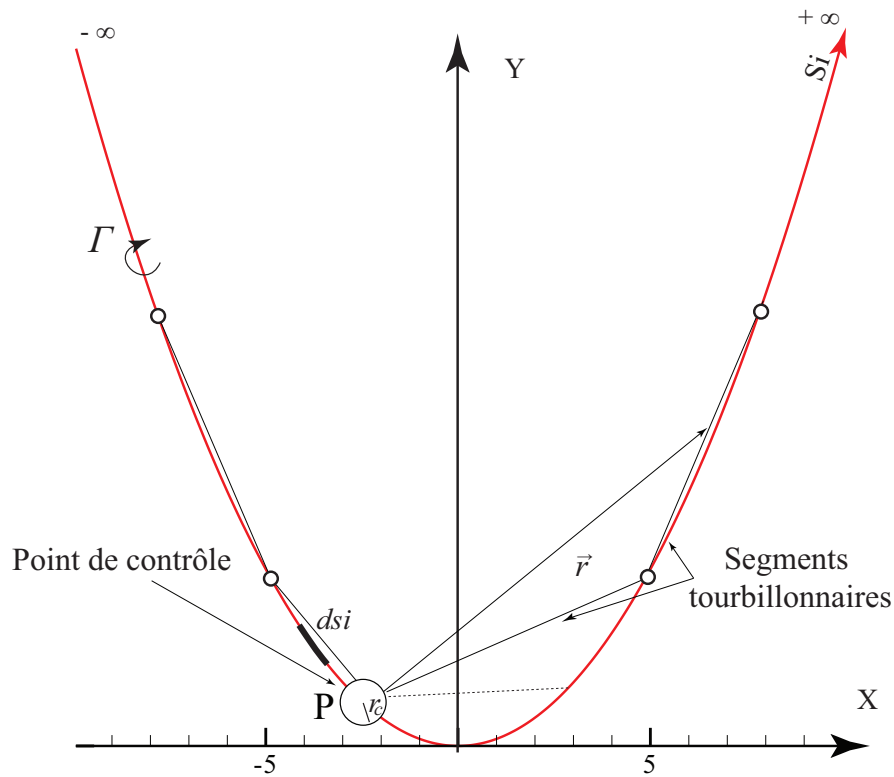


FIGURE 3.7 – Tourbillon hélicoïdal de rayon et de pas constants

notre étude met en exergue le cas test d'un tourbillon hélicoïdal de diamètre et de pas constants. Dans ce cas test, le calcul numérique de la vitesse induite sera effectué sur trois points de contrôle situés à différentes positions par rapport au tourbillon hélicoïdal semi-infini [81, 59]. Ce tourbillon débute au point  $(x, y, z) = (0, R, 0)$  (un rayon unitaire sera pris par la suite) et est discrétisé en  $M$  segments, l'axe de rotation étant l'axe  $x$ .

Pour ces cas de test, nous allons utiliser la vitesse dite "binormale". La vitesse binormale est définie comme le produit vectoriel de deux composantes de la vitesse induite :

- Vitesse induite sur l'axe  $x$
- Vitesse induite sur l'axe  $z$

Les points de contrôle (figure 3.7) sont les suivants :

1. point (1) : situé sur l'axe de rotation en  $(0, 0, 0)$ . C'est le seul cas où la solution exacte peut être obtenue facilement par l'application directe de la loi de Biot-Savart. La solution exacte de la vitesse induite peut se calculer analytiquement en ce point :  $U = p^{-1}$ .

La figure 3.8 expose la comparaison entre cette solution exacte et notre solution numérique. Dans le cas d'une éolienne fonctionnant à sa puissance maximale donnée par la limite de Betz, le pas est de l'ordre de  $p \cong 0.05$  [80].

La figure 3.9 illustre l'erreur absolue pour différents pas d'hélice. Wood et Li montrent que l'erreur est approchée par  $\frac{2\pi^3}{3M^3}$  dans le cas d'un pas de 0.05 qui représente dans les faits le fonctionnement d'une éolienne en puissance maximale. Nos résultats affichés (figure 3.8) pour le reste des valeurs de pas correspondent aux solutions exactes.

2. point (2) : situé en  $(0, -1, 0)$  au même diamètre du tourbillon hélicoïdal et à un déplacement axial de  $\frac{p}{2}$  du point le plus proche du tourbillon hélicoïdal.

Pas de d'hélic $p$	$W(\pi, p)$	$W(p)$	$U_b$ pour le cas 2	$U_b$ pour le cas 3
0.01	99.3069	95.7022	49.6459	48.1901
0.05	19.3086	17.3173	9.61642	8.96711
0.1	9.31407	8.01822	4.58076	4.28018
0.2	4.33908	3.70710	-	-
0.3	9.31407	2.39240	-	-
0.4	9.31407	1.74543	-	-
0.5	1.53777	1.34138	0.412426	0.735271
0.6	9.31407	1.05695	-	-
0.7	9.31407	0.844909	-	-
0.8	9.31407	0.682350	-	-
0.9	9.31407	0.555822	-	-
1.0	0.790427	0.456367	-0.148190	0.202238
2.0	9.31407	0.0928365	-	-
3.0	9.31407	0.0308916	-	-
4.0	9.31407	0.0136084	-	-
5.0	0.190702	0.0711198	-0.494384	-0.0189082

TABLE 3.1 – Valeurs de  $W(\pi, p)$  et de  $W(p)$  pour des pas d'hélice différents [80]

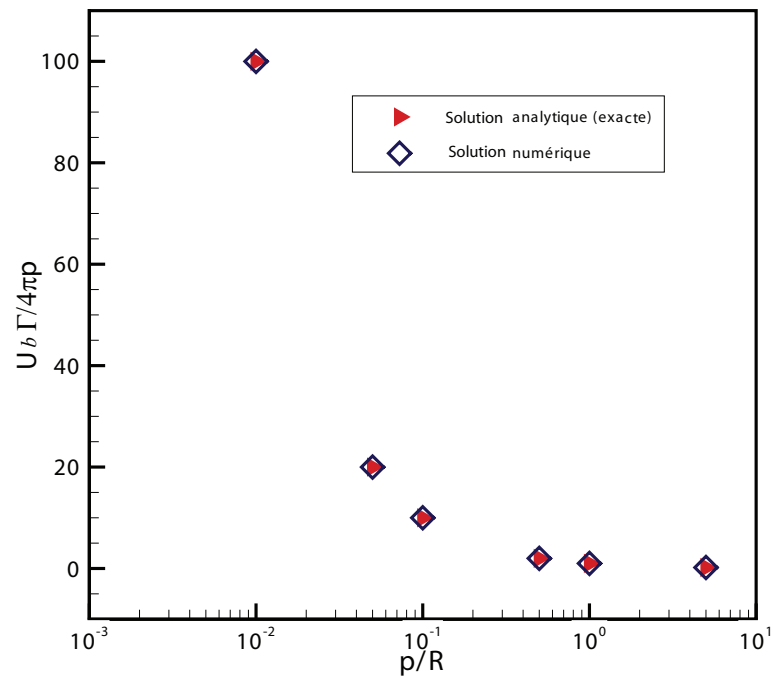


FIGURE 3.8 – Vitesse induite par un tourbillon hélicoïdal de pas variable au point de contrôle 1

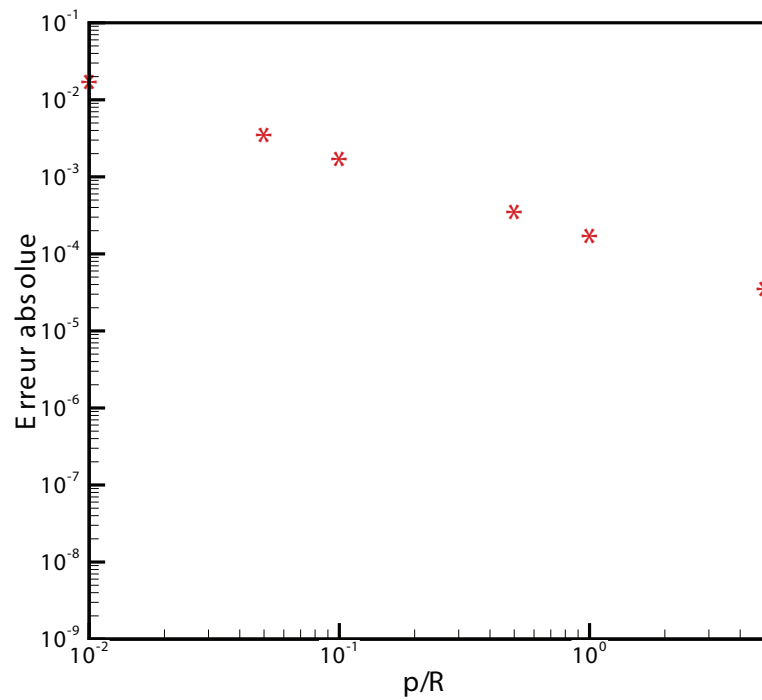


FIGURE 3.9 – Erreur absolue dans le cas 1 en fonction du pas du tourbillon hélicoïdal

Pour ce cas de test, le calcul de la vitesse binormale est  $U_b$ . Selon [80] cette vitesse est égale à :

$$U_b = \frac{1}{(p^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty \frac{-p^2 \theta \sin \theta + (p^2 + 1)(1 + \cos \theta)}{[p^2 \theta^2 + 2(1 + \cos \theta)]^{\frac{3}{2}}} d\theta \quad (3.12)$$

Cette formule à été simplifiée par [79] :

$$U_b = \frac{(p^2 + 1)^{\frac{1}{2}} W(\pi, p)}{2} - p(p^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

et les valeurs de  $W(\pi, p)$  sont données dans le tableau 3.1. La vitesse binormale est reliée à la composante de la vitesse induite sur l'axe  $x$  et sur l'axe  $z$  (3.10) par la formule suivante :

$$U_b = \frac{U + pW}{(p^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.14)$$

La figure 3.10 expose une comparaison entre les résultats numériques obtenus par le code développé dans ce travail et les résultats exacts de la vitesse induite obtenue analytiquement (tableau 3.1).

Dans cette figure l'axe des ordonnées contient la valeur de la vitesse binormale normalisée par  $\frac{4\pi p}{\Gamma}$  et l'axe des abscisses contient le pas de ce tourbillon hélicoïdal normalisé par son rayon.

3. point (3) : situé en  $(0, 1, 0)$ , il représente la vitesse auto-induite, à l'endroit où le tourbillon marginal se détache de l'extrémité de la pale. Ce point présente une singularité de par sa situation au sein du tourbillon hélicoïdal même  $r = 0$ . Pour cette raison, cette singularité doit être traitée avant toute chose en utilisant la méthode de Hama [37]. La vitesse induite n'est calculée qu'ensuite. La vitesse binormale dans ce cas égale à :

$$U_b = \frac{U - pW}{(p^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.15)$$

Les résultats de ce calcul sont montrés dans la figure 3.12. Ils correspondent à la solution exacte obtenue analytiquement suite aux travaux de [80].



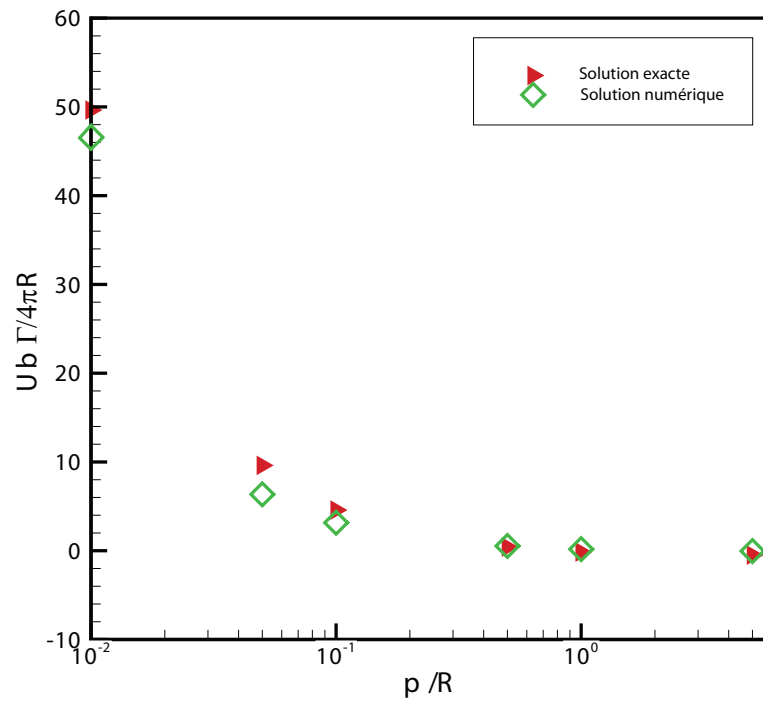


FIGURE 3.10 – Vitesse binormale induite au point de contrôle 2 pour différents pas

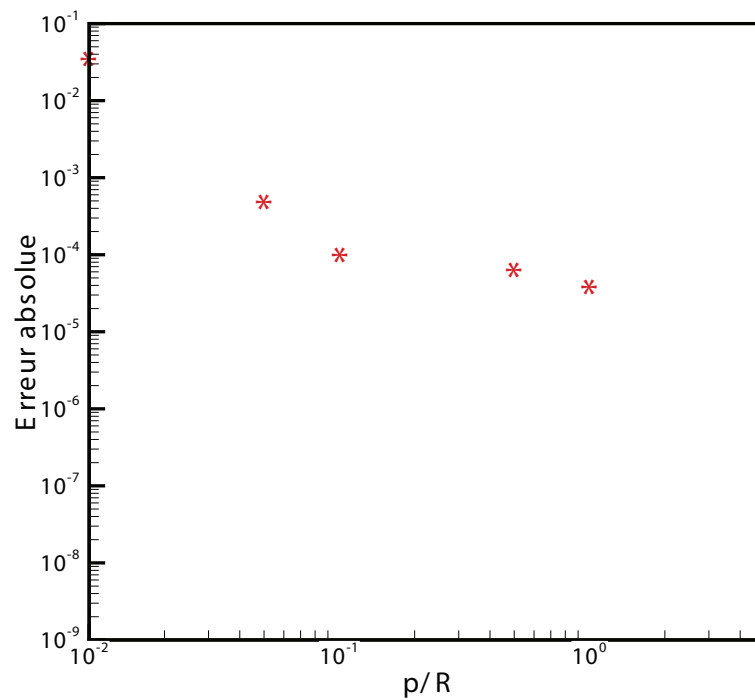


FIGURE 3.11 – L'erreur absolue dans le cas 2 pour différents pas d'hélice

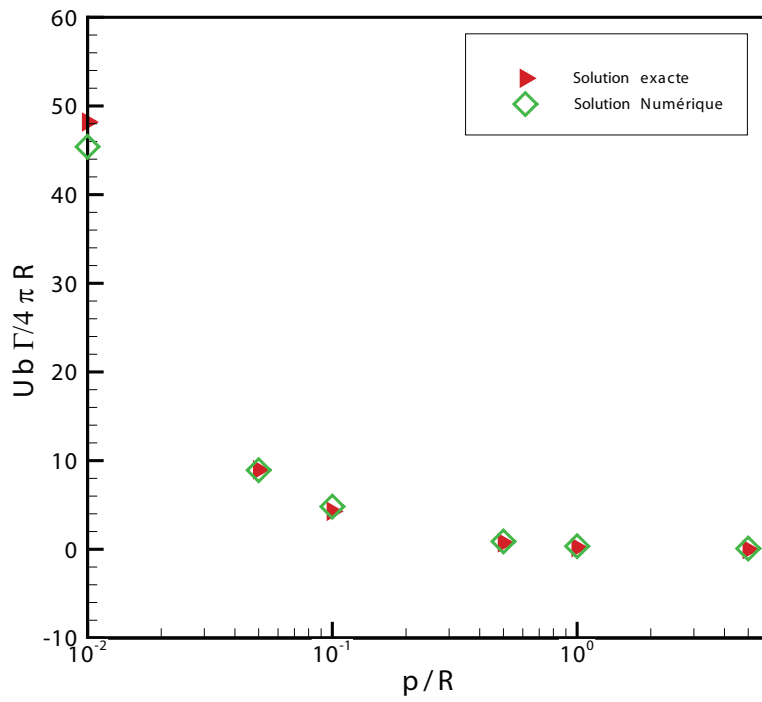


FIGURE 3.12 – Vitesse binormale induite au point de contrôle 3 pour différents pas

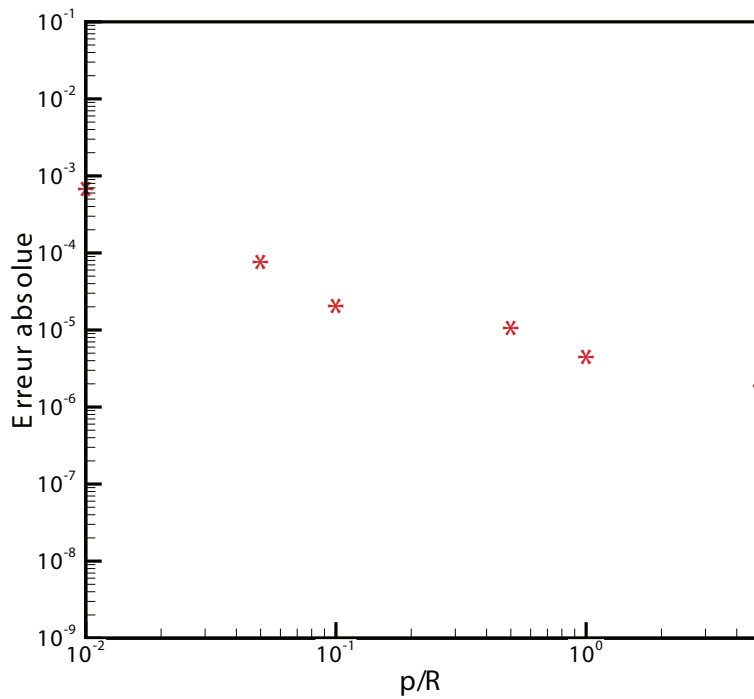


FIGURE 3.13 – L'erreur absolue dans le cas 3 pour différents pas d'hélice

### 3.3 Validation du calcul de la vitesse auto-induite

La vitesse auto-induite utilisée précédemment est obtenue à l'aide de la formule Hama [37] présentée dans le chapitre 2 dans l'équation (2.60). Cette vitesse est calculée uniquement aux points de contrôle trouvés sur le tourbillon même. La validation numérique est ici réalisée sur un filament tourbillonnaire parabolique.

#### 3.3.1 Tourbillon parabolique

Le cas traité ici est celui d'une parabole infinie dans le plan (figure 3.14). il s'agit d'un tourbillon parabolique dans le plan  $x, y$ , sa forme géométrique étant donnée par la formule suivante :

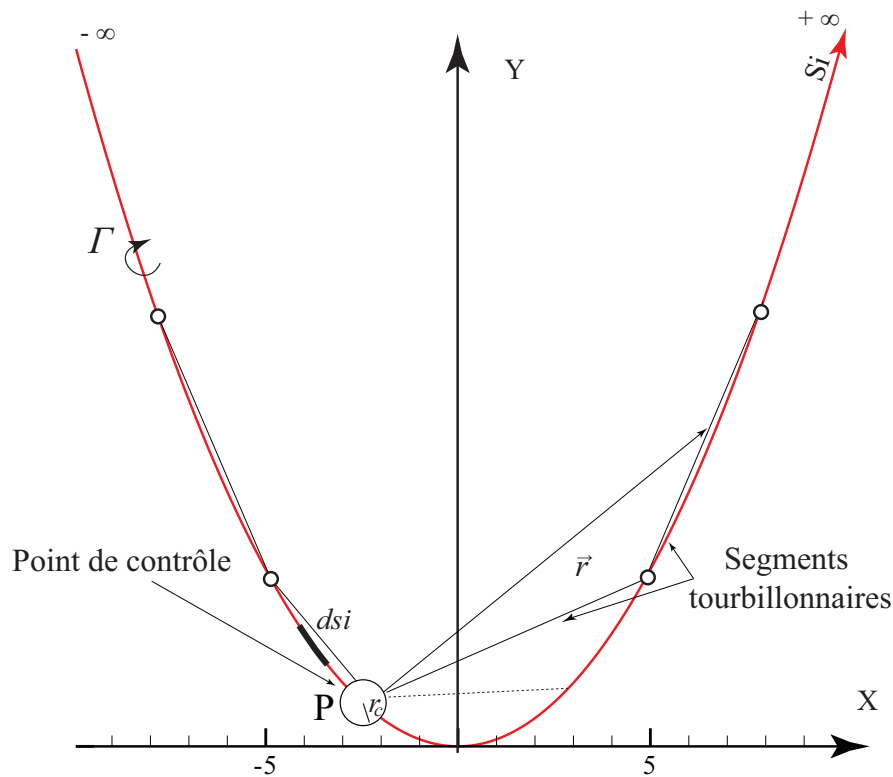


FIGURE 3.14 – Tourbillon parabolique divisé en plusieurs segments

$$y = c \cdot x^2 \quad (3.16)$$

Les paramètres  $y$  et  $x$  sont normalisés, pour généraliser ce cas de test. En appliquant la loi de Biot-Savart, la vitesse auto-induite  $q$  dans un point  $P$  est produite par l'équation :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{s}_i \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.17)$$

Pour traiter la singularité logarithmique, l'intégration est effectuée comme suit :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \left( \int_{-\infty}^{S_i - r_c} + \int_{S_i + r_c}^{\infty} \right) \frac{d\vec{s}_i \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (3.18)$$

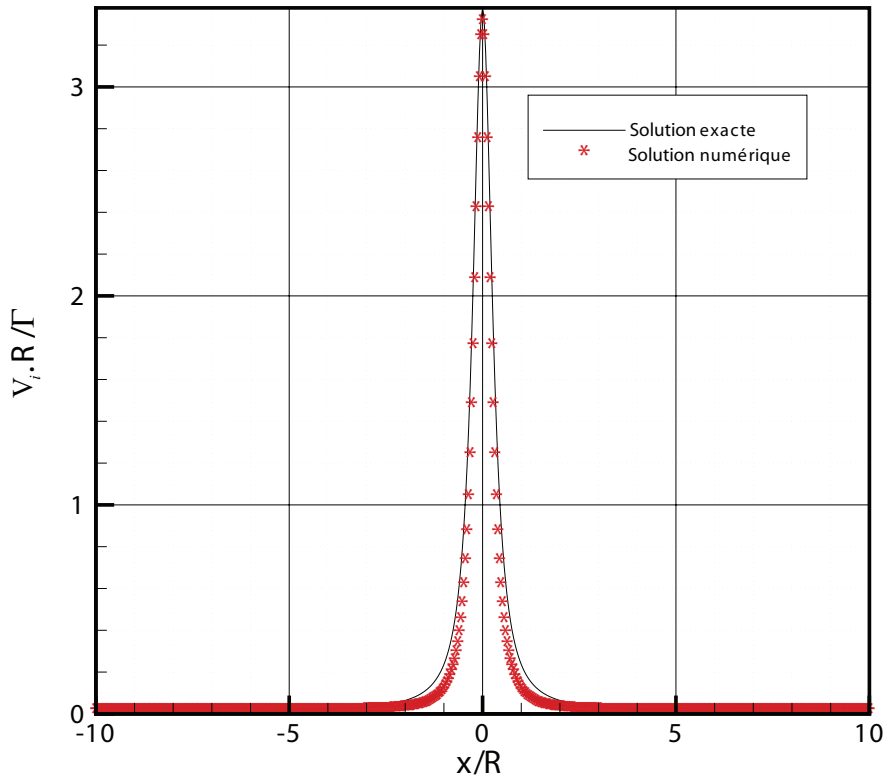


FIGURE 3.15 – Vitesse auto-induite d'une parabole

D'où la vitesse auto-induite au point  $P$  de la figure 3.14, selon [37], égale à :

$$\begin{aligned}
 V = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{1}{4x^2 + 1} & \left\{ \frac{4x^2 - 2xr_c - 1}{(4x^2 - 4xr_c + r_c^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4x^2 + 2xr_c - 1}{(4x^2 + 4xr_c + r_c^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{(4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \ln \frac{[(4x^2 + 1)(4x^2 - 4xr_c + r_c^2 + 1)]^{\frac{1}{2}} + (4x^2 - 2xr_c + 1)}{[(4x^2 + 1)(4x^2 + 4xr_c + r_c^2 + 1)]^{\frac{1}{2}} - (4x^2 + 2xr_c + 1)} \right\} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

et le vecteur de la vitesse auto-induite s'oriente vers la direction positive de  $z$  et atteint son maximum à son vertex. Dans les cas de petites valeurs de  $r_c$ , l'équation (3.19) se simplifie comme suit :

$$V = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2}{4x^2 + 1} \left[ 4x^2 - 1 + \ln \frac{2(4x^2 + 1)}{r_c} \right] \quad (3.20)$$

La figure 3.15 représente la solution exacte de la vitesse induite et la solution obtenue numériquement. La comparaison entre les deux solutions montre des correspondances satisfaisantes.

### 3.4 Influence du nombre de divisions et du rayon du noyau tourbillonnaire sur l'évolution de la vitesse induite et auto-induite

Il s'agit ici d'un cas particulier où le point de contrôle est situé sur l'anneau tourbillonnaire (Cas de singularité, figure 3.16). Deux formules de vitesses induites sont utilisées : d'abord l'équation (2.60) calculant la vitesse auto-induite qui dépend uniquement des segments gauche et droit du point de contrôle, et l'équation (2.27) calculant la vitesse induite par tout le reste des segments tourbillonnaires.

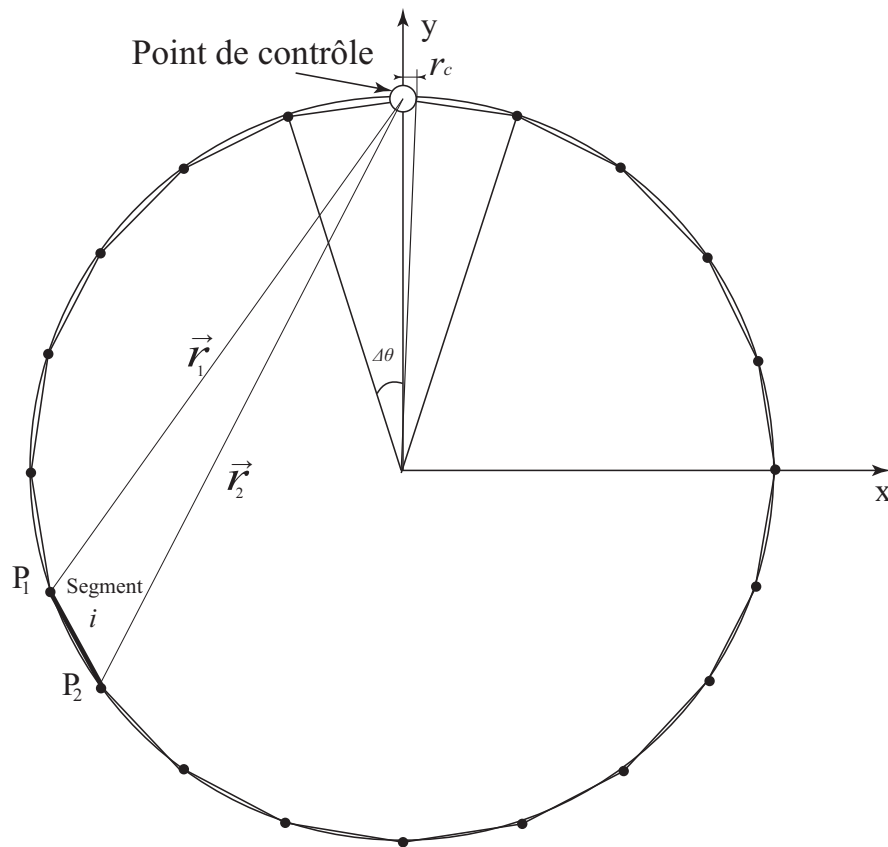


FIGURE 3.16 – Schéma montrant un point de contrôle situé sur l'anneau tourbillonnaire

Le calcul de la vitesse induite dans ce cas impose un choix de valeur de rayon du noyau tourbillonnaire  $r_c$  et le nombre de division. Afin de choisir ces deux valeurs, il faut évaluer la vitesse induite nondimensionnelle  $V_z R / \Gamma$  en fonction du rayon du noyau tourbillonnaire  $r_c$  et le nombre de divisions  $M$ .

### 3.4.1 Influence du nombre de divisions de l'anneau tourbillonnaire

Le calcul par la méthode de sillage libre impose une division des tourbillons marginaux. Afin de déterminer le nombre de divisions satisfaisant, la valeur de la vitesse induite par l'anneau tourbillonnaire doit être évaluée (figure 3.16) en fonction de la finesse de la segmentation choisie. On effectue cette étude sur le rayon de noyau tourbillonnaire  $r_c = 0.05$ .

La figure.3.17 expose le résultat de cette étude.

Il est à noter qu'à partir de 200 , la vitesse induite est proportionnelle au nombre

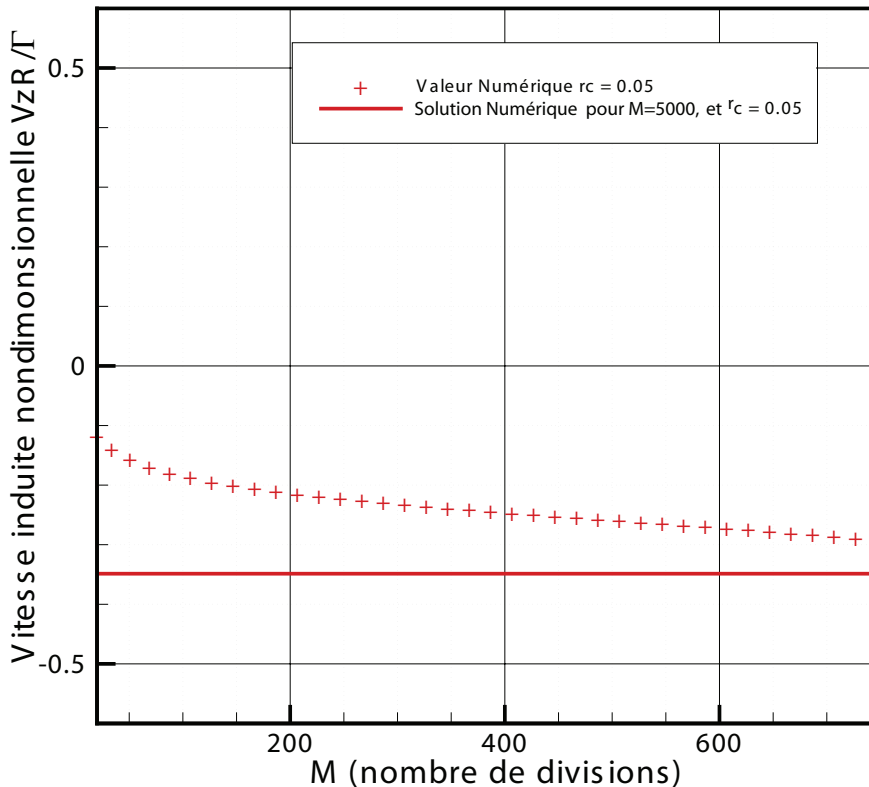


FIGURE 3.17 – Vitesse induite d'un anneau tourbillonnaire pour différentes valeurs de rayon de noyau tourbillonnaire, et pour différents nombres de segmentations

de divisions et que la courbe devient linéaire. Cependant, cette courbe présente une certaine cambrure et la segmentation varie de 15 à 200.

### 3.4.2 Influence du rayon du noyau tourbillonnaire

Les résultats issus du programme développé dans ce travail et la solution numérique de l'anneau tourbillonnaire (figure 3.16), avec du nombre de divisions égale à 5000, sont tracés sur la figure (figure 3.18), pour différentes valeurs du rayon du noyau tourbillonnaire, avec  $r_c = 0.05, 0.01, 0.001$  et  $0.0001$ . Pour chaque valeur de ce rayon, la solution numérique est obtenue grâce à la formule (3.7) pour  $\delta = 0$ .

3.4. INFLUENCE DU NOMBRE DE DIVISIONS ET DU RAYON DU NOYAU  
TOURBILLONNAIRE SUR L'ÉVOLUTION DE LA VITESSE INDUITE ET AUTO-INDUITE

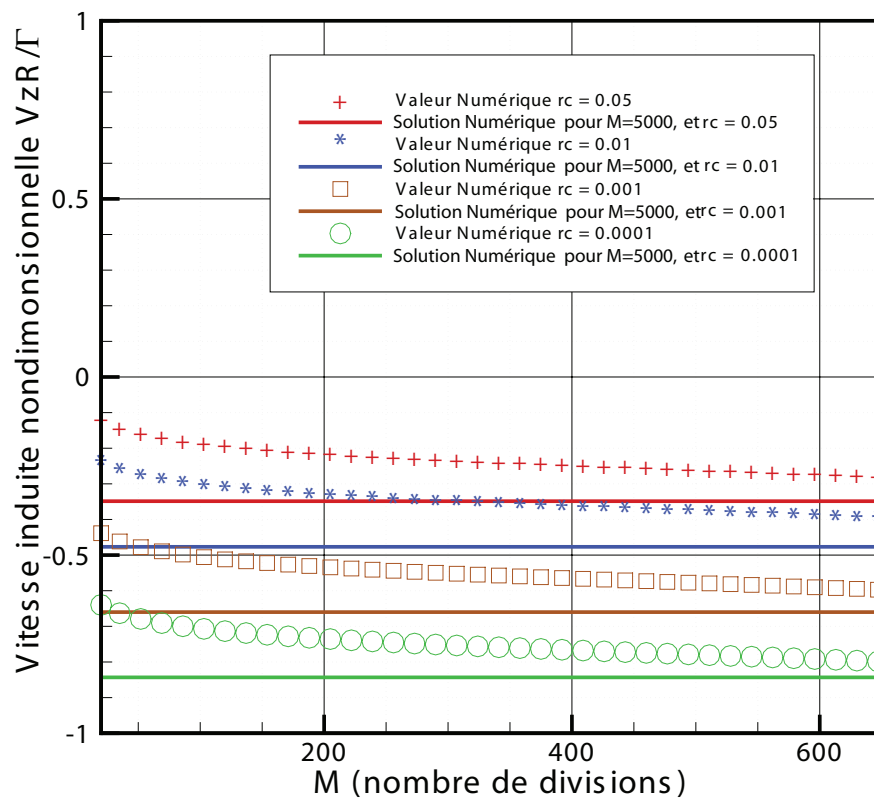


FIGURE 3.18 – Vitesse induite d'un anneau tourbillonnaire pour différentes valeurs de rayon de noyau tourbillonnaire, et pour différents nombres de segmentations

La vitesse induite par l'écoulement autour de l'anneau tourbillonnaire augmente en diminuant la valeur du rayon de noyau tourbillonnaire. A la limite, quand ce dernier tend vers zéro, la vitesse tend vers la valeur infinie.

## 3.5 Conclusion

Ce chapitre présente une étude systématique de la précision du calcul de la vitesse induite par la méthode de sillage libre. Il s'agit notamment d'évaluer la précision liée à l'utilisation des segments rectilignes pour remplacer les tourbillons marginaux. Pour des cas spécifiques, les résultats obtenus par le code numérique issu de la méthode de sillage libre ont été comparés avec ceux donnés par une solution analytique connue. La validation est d'abord effectuée sur des exemples relativement simples (filament tourbillonnaire rectiligne infini et anneau tourbillonnaire), et ensuite sur un cas de tourbillon hélicoïdal infini puis de tourbillon parabolique. Les conclusions issues de cette comparaison sont les suivantes :

1. le code numérique issu de la méthode de sillage libre est considéré comme acquis pour le cas de tourbillon rectiligne infini, ainsi que celui de l'anneau tourbillonnaire.
2. dans l'étude du tourbillon hélicoïdal, et concernant les différentes valeurs du nombre de segments et le rayon du noyau tourbillonnaire, on constate que la précision du calcul numérique relatif au tourbillon hélicoïdal est de moindre importance.
3. un pas de  $\Delta\theta = 10$  degrés dans la discrétisation est nécessaire afin de maintenir l'erreur du calcul de la vitesse induite inférieure à 10%.
4. aux points singuliers, là où les tourbillons marginaux se détachent de l'extrémité de la pale, la précision du calcul a été évaluée en fonction du nombre de divisions et du rayon du noyau tourbillonnaire. Cette étude a permis de justifier le choix de la valeur de ces deux paramètres.

On constate enfin que les résultats numériques obtenus par le code de la méthode de sillage libre sont valides car comparables avec les données expérimentales.



## Chapitre 4

Application du modèle de sillage libre  
pour le fonctionnement d'une éolienne  
face au vent



## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>85</b>
<b>4.2</b>	<b>Description du dispositif expérimental</b>	<b>85</b>
4.2.1	Rotor éolien testé	86
4.2.2	Soufflerie d'Arts et Métiers ParisTech	87
<b>4.3</b>	<b>Vélocimétrie par image de particules PIV</b>	<b>88</b>
<b>4.4</b>	<b>Déroulement des essais</b>	<b>91</b>
<b>4.5</b>	<b>Application du modèle de sillage libre pour l'éolienne Rutland</b>	<b>92</b>
4.5.1	Répartition de la circulation et de la vitesse axiale le long de la pale	96
4.5.2	Les positions des centres des tourbillons marginaux	101
4.5.3	Calcul de la puissance de l'éolienne testée	102
<b>4.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de mener une étude expérimentale de l'écoulement autour du rotor éolien par des essais en soufflerie. Cette étude permet de rassembler les données expérimentales nécessaires à la validation de notre modèle du sillage libre, notamment pour un cas d'écoulement du rotor face au vent.

Après la présentation du dispositif expérimental mis en œuvre, il sera procédé à la description du déroulement des essais réalisés à la soufflerie du laboratoire LMF Arts et Métiers - ParisTech.

L'exposition de la démarche suivie pour appliquer le modèle de sillage libre, afin de modéliser l'éolienne testée, constitue la seconde étape de notre étude.

Ce chapitre se termine par une comparaison entre le calcul et les résultats expérimentaux pour :

- la répartition de la circulation et de la vitesse axiale le long de la pale.
- les positions des foyers tourbillonnaires
- la puissance de l'éolienne Rutland 503.

## 4.2 Description du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental utilisé dans cette étude s'articule essentiellement autour de trois éléments :

- le rotor éolien Rutland 503 utilisé et son équipement.
- la soufflerie du laboratoire LMF Arts et Métiers - ParisTech.
- la chaîne de mesure et la méthode de mesure par vélocimétrie par image de particules PIV (Particle Image Velocimetry).

### 4.2.1 Rotor éolien testé

Le rotor éolien testé ici est une version modifiée du modèle Rutland 503 de la société Marlec. L'éolienne Rutland 503 d'origine avait 6 pales, mais trois pales et le carénage du moyeu ont été ôtées afin d'obtenir une éolienne tripale (Figure 4.1).



FIGURE 4.1 – Rotor éolien Rutland 503 testé dans la veine d'essai de la soufflerie d'Arts et Métiers ParisTech

Le diamètre de cette éolienne est de 50 cm avec un moyeu de 13.5 cm de diamètre. La corde du profil est de 6.8 cm au pied et de 4.8 cm à l'extrémité de la pale. Les pales ne sont pas vrillées et sont montées avec un angle de calage constant de 10 degrés. L'axe de rotation de cette éolienne est placé à une hauteur de 70 cm au milieu de la veine d'essai, à l'aide d'un mât de 3.7 cm de diamètre pour éviter l'influence du plafond et du plancher sur le comportement du sillage, et pour permettre aux lasers fixés sur le plafond transparent de la veine d'essai, d'éclairer le plan d'exploration avec une intensité suffisante. Durant les essais, la vitesse de rotation est réglable de 1200 tr/min à 1800 tr/min pour une vitesse d'écoulement de 9.3 m/s. Le rotor est installé sur un arbre (Figure 4.2), celui-ci étant couplé avec un générateur de courant continu.

Le contrôle de la vitesse de rotation et de la charge du rotor est assuré par un rhéostat connecté à la sortie de la génératrice équipant l'éolienne.

Le couplage entre l'arbre du rotor et le générateur se fait par l'intermédiaire d'un couplemètre qui permet de mesurer le couple mécanique et d'émettre un signal carré à chaque degré. Afin de localiser le passage de la pale prise comme référence, un codeur optique visant une cible tournante sur l'arbre est monté. De cette manière, en comptant le nombre de signaux carrés venant du couplemètre après le passage du signal de référence, on peut connaître la position angulaire du rotor avec une précision de 1 degré. L'acquisition des données issues du codeur se fait grâce à une carte d'acquisition, qui émet un signal *TTL* servant à déclencher les mesures *PIV*, pour une position azimutale donnée du rotor.

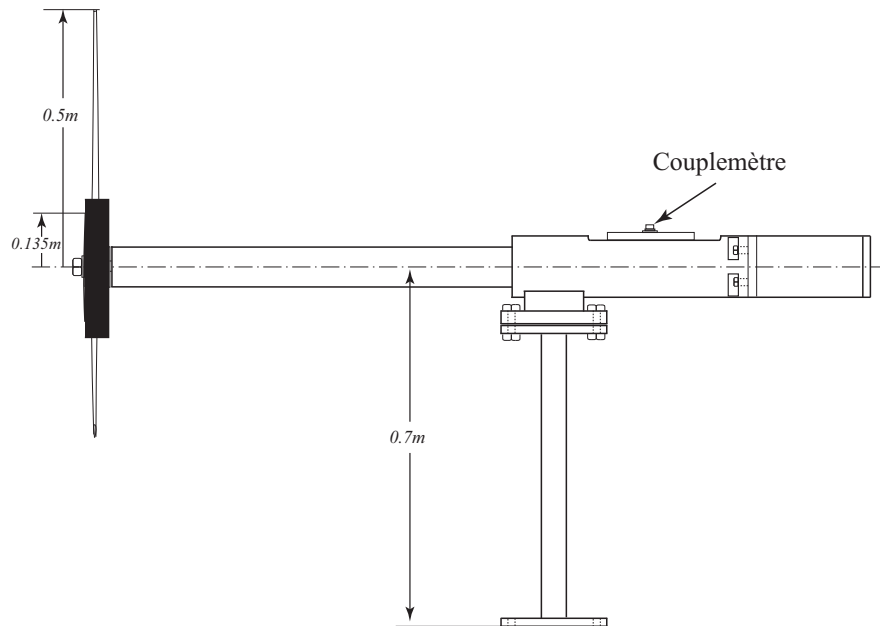


FIGURE 4.2 – Maquette de l'éolienne testée dans la veine d'essai

L'instrumentation de la maquette est prévue pour mesurer la puissance en temps réel.

#### 4.2.2 Soufflerie d'Arts et Métiers ParisTech

La soufflerie du Laboratoire de Mécanique des Fluides, Arts et Métiers ParisTech centre de Paris, (figure 4.3) est de type Prandtl avec une veine d'essai semi guidée ouverte à la pression atmosphérique et un canal de retour. La veine d'essai possède une section rectangulaire de 1.35m x 1.65m sur une longueur de 2 m. L'alimentation de la

veine d'essai se fait à partir d'une chambre de tranquillisation à travers un convergent d'un rapport de 1 : 12.5, ce qui permet de rendre l'écoulement globalement uniforme. La vitesse maximale dans cette veine est d'environ 40 m/s. La présence d'un explorateur tridimensionnel permet d'effectuer des explorations 3D du champ de vitesses dans la veine.

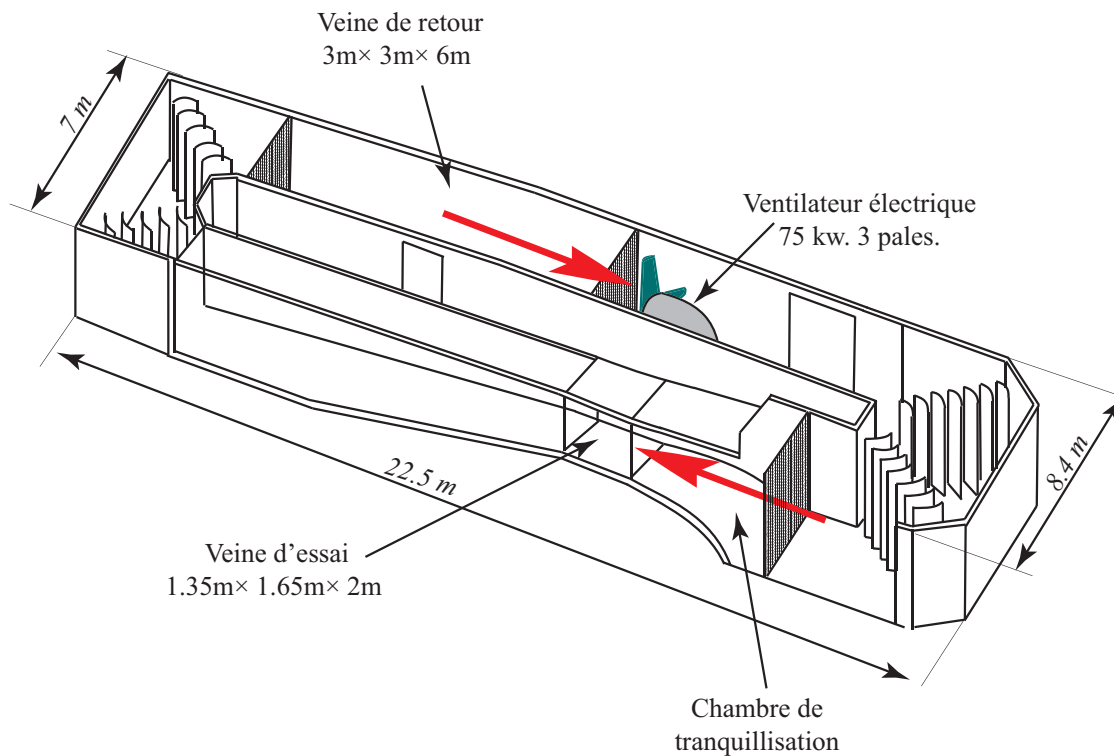


FIGURE 4.3 – Soufflerie du Laboratoire de Mécanique des Fluides à Arts et Métiers ParisTech

L'équipement de la veine d'essai comporte un explorateur commandé par ordinateur et capable de se déplacer dans les trois directions de l'espace. La veine est prolongée par un diffuseur avec un angle d'ouverture voisin de 7 degrés afin d'éviter les décollements de l'écoulement sur les parois.

La veine de retour possède une section carrée de 3 m x 3 m sur une longueur de 6 m et la vitesse maximale d'écoulement est d'environ 10 m/s.

### 4.3 Vélocimétrie par image de particules PIV

D'une façon générale, le principe de mesure par la méthode de vélocimétrie par image de particules *PIV* est d'enregistrer sur un capteur vidéo deux images successives de particules illuminées par une nappe laser. À partir de ces deux images, un champ de vitesses locales et instantanées est calculé par l'intermédiaire du déplacement des particules, comme le montre la figure 4.4. Son intérêt principal réside dans

le fait qu'aucune sonde matérielle n'est introduite à l'endroit où s'effectuent les mesures.

Il est à noter que les propriétés des particules constituent un paramètre fondamental car la lumière qu'elles diffusent conditionne la qualité de la mesure [26]. De plus, il est nécessaire qu'elles se mélangent sans produire de perturbations. En amont de la zone de mesure, sont introduites des particules très légères qui suivent, pratiquement sans aucun retard, les accélérations et décélérations de l'écoulement, ainsi que les fluctuations turbulentes.

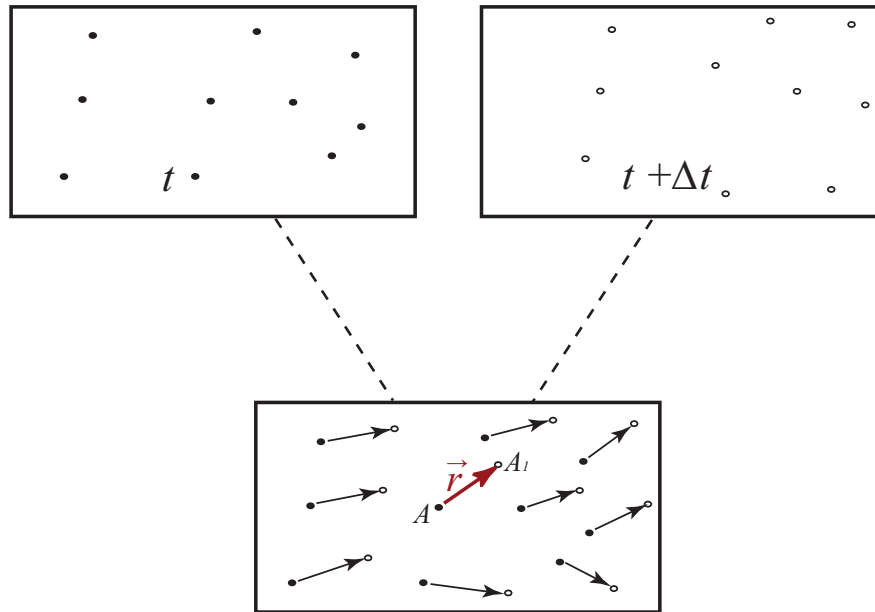


FIGURE 4.4 – Principe de la méthode de vélocimétrie par image de particules

La caméra utilisée est une caméra de Dantec Flowsence 4 M, objectif Nikkor AF-S 105 mm f/2.8G ED IF, fixée sur un support inclinable. Sa résolution est de 2048 x 2048 pixels avec une dynamique de niveaux de gris de 12 bits. La durée d'exposition de la première image est quasi instantanée (inférieure à la microseconde) et la seconde image commence dès que la première est transférée dans la zone de stockage. Cette durée d'exposition est fixe. Elle correspond au temps nécessaire à la caméra pour transférer les informations de la zone de stockage sur la mémoire vive de l'ordinateur. Ce transfert s'effectue par fibres optiques, d'une longueur d'environ un mètre, et équipées d'une connexion CameraLink. Le temps d'exposition de la seconde image est relativement important, c'est pourquoi il est nécessaire de masquer toutes les sources de lumière potentielles de la soufflerie.

En effet, même si leur intensité est faible par rapport à celle du laser, elles ont tendance à augmenter le bruit de l'image, le fond de l'image ayant tendance à devenir plus lumineux.

La puissance du laser est un élément déterminant dans la mesure par *PIV* car elle détermine, avec la sensibilité du capteur *CCD*, la taille minimum des particules pou-

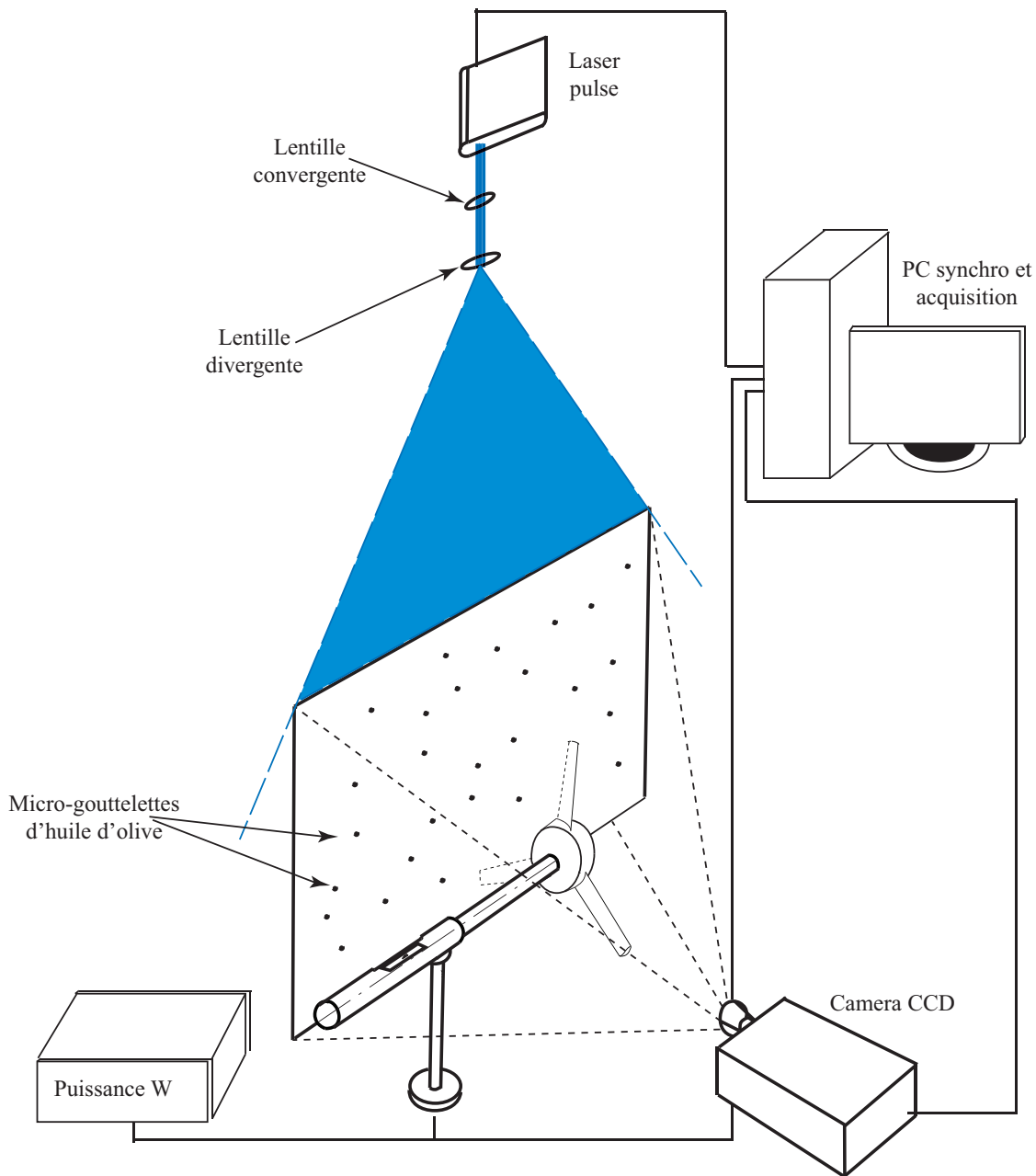


FIGURE 4.5 – Schéma de l'installation pour les mesures par *PIV*

vant être exploitables pour une mesure de qualité. Le laser est de type Litron Nano-L 200-15 et l'énergie qu'il génère est de 200 mJ. L'intervalle de temps  $\Delta t$ , entre les deux flashes lasers, est de  $20\mu s$ , avec une vitesse de l'écoulement amont de 9.3 m/s. Ce paramètre est crucial : d'une part, il ne doit pas être trop petit, car si le déplacement des particules est trop faible, le bruit vient parasiter la mesure ; d'autre part, le  $\Delta t$  ne doit pas être trop important, car les particules ne doivent pas dépasser les limites de la fenêtre d'interrogation, sous peine de détériorer les calculs de corrélation.



La coordination des différents éléments constitutifs de la mesure nécessite une carte permettant de contrôler un boîtier de synchronisation, celui-ci gérant les décalages entre les pulses laser et les retards de la caméra de manière automatique. Les erreurs liées aux retards de synchronisation sont mineures, ce qui est parfaitement vérifié par la qualité des calculs de corrélation.

L'ensemencement de l'écoulement est réalisé par des micro-gouttelettes d'huile d'olive créées par un générateur de brouillard (10F03 de *DANTEC*). Elles sont générées en amont du convergent de la soufflerie et un temps de latence, nécessaire à l'homogénéisation des particules dans la veine, doit être respecté avant chaque mesure. La densité des particules injectées dans l'écoulement est déterminante et le débit des particules doit être adapté à la vitesse de la soufflerie. Ce réglage est affiné par un zoom sur la caméra, qui permet de contrôler le nombre de particules, sachant qu'il faut un nombre suffisant des particules par fenêtre d'interrogation pour obtenir une bonne mesure. Le traitement numérique des images est géré par le logiciel de Dantec DynamicStudio 2.21 et à l'aide d'un algorithme itératif multi-résolutions [56].

## 4.4 Déroulement des essais

La maquette Rutland 503 a été installée dans la veine d'essai de la soufflerie. Les lasers ont ensuite été positionnés au-dessus grâce à la partie en plexiglas transparente. Le matériel *PIV* a été placé à l'extérieur de la veine d'essai afin d'obtenir un écoulement non perturbé, L'ensemencement a ensuite commencé grâce à un générateur de gouttelettes d'huile d'olive dans le diffuseur de la soufflerie. Un codeur optique a été utilisé afin de viser la cible tournante collée sur le moyeu d'une part, et d'émettre un signal de référence temporelle indiquant la position angulaire du rotor d'autre part. Ce signal permet de contrôler le déclenchement des tirs laser et la prise d'images. La prise d'images est déclenchée quand l'axe de la pale devient perpendiculaire au plan d'acquisition. Le délai entre la première et la seconde image de chaque paire d'images est réglé à  $20\mu s$ .

Pour explorer le sillage et définir les positions des foyers tourbillonnaires, plusieurs plans azimutaux sont utilisés avec les angles 0, 30, 60, et 90 °; la position initiale correspond à la position verticale de la pale. Afin d'élargir la surface explorée, le champ de vitesses est divisé en six fenêtres voisines (3 horizontales x 2 verticales) avec certains chevauchements. L'échelle des fenêtres et leur position par rapport au rotor sont définies à l'aide de mire placée dans le plan de l'exploration après chaque série d'essais [44, 25]. Après obtention d'un nombre suffisant d'images, celles-ci sont traitées à l'aide des logiciels DynamicStudio de DantecDynamics [74, 77].

La puissance du rotor éolien Rutland 503 est mesurée directement sur son arbre à l'aide d'un couplemètre *HBM* 05. Les essais seront menés pour différentes valeurs de la vitesse de rotation afin de définir la courbe caractéristique de l'éolienne et le coefficient de puissance en fonction de la rapidité spécifique.

## 4.5 Application du modèle de sillage libre pour l'éolienne Rutland

Une fois chargés les paramètres de la géométrie de l'éolienne Rutland (tableau 4.1), le code du calcul issu du modèle de sillage libre commence par une initialisation consistant à supposer que les vitesses induites axiales et tangentielles sont nulles. Ensuite, on calcule la répartition de la vitesse relative le long de la pale, ce qui permet de calculer la circulation initiale (voir le 3.6.1.2). Cette circulation va initialiser les premiers tourbillons émis dans l'écoulement à partir de l'extrémité de chaque pale. Ensuite, la procédure itérative est lancée jusque la convergence du calcul.

On utilise les caractéristiques aérodynamiques du profil du rotor éolien Rutland. Les

Paramètre	Symbole	Valeur
Nombre des pales	$B$	3
Diamètre du rotor[cm]	$r_p$	50
Diamètre du moyeu [cm]	$r_m$	13.5
Corde au pied de la pale [cm]	$c_m$	6.5
Corde à l'extrémité de la pale [cm]	$c_p$	4.5
Angle de calage	$\alpha$	10°

TABLE 4.1 – Géométrie du rotor

coefficients de portance et de trainée sont affichés sur les figures 4.6 et 4.7. Il est à noter que ces caractéristiques, qui dépendent de la géométrie du profil, sont obtenues par une simulation numérique *CFD* suite aux travaux de thèse de [44].

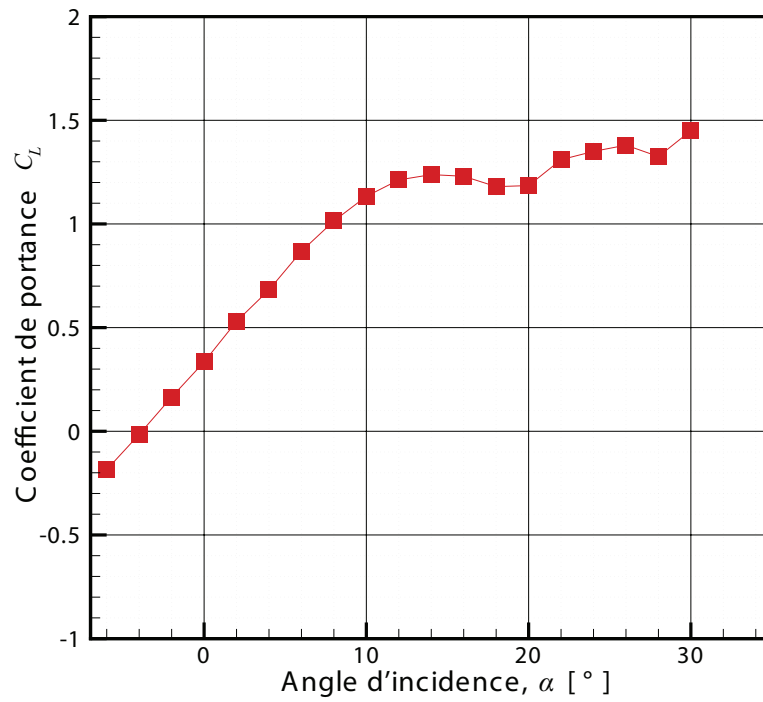


FIGURE 4.6 – Coefficients de portance pour l'éolienne Rutland 503.

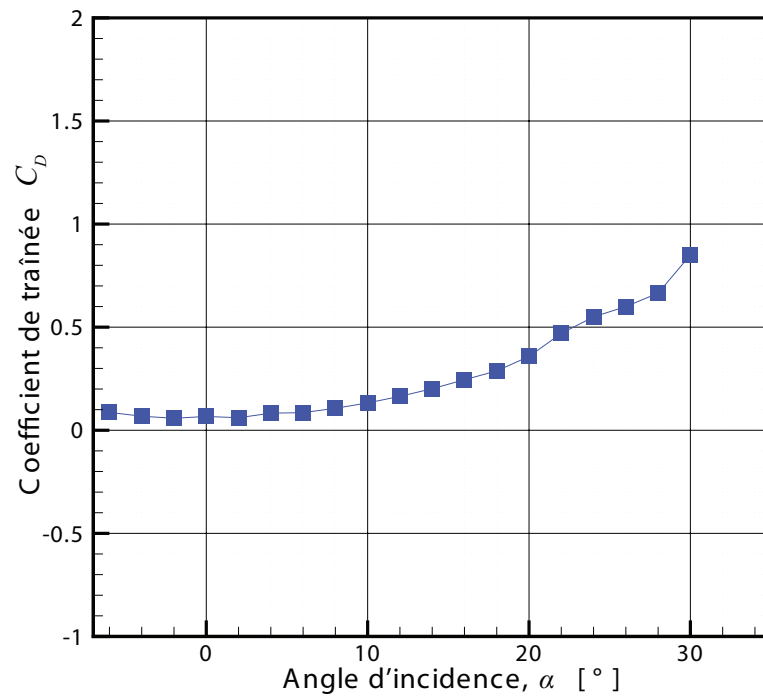


FIGURE 4.7 – Coefficients de traînée pour l'éolienne Rutland 503.

Les figures 4.8, 4.9 et 4.10 présentent les résultats obtenus par la méthode de sillage libre.

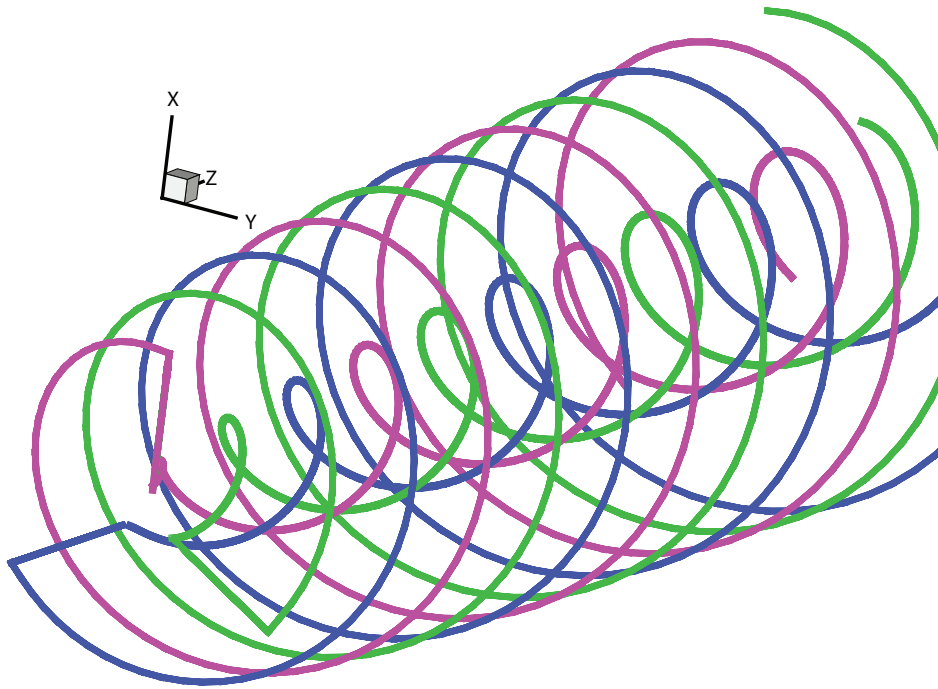


FIGURE 4.8 – Forme du sillage calculé à l'aval de l'éolienne.

La figure 4.8 illustre parfaitement le développement des tourbillons marginaux issus de chaque pale, ainsi que des tourbillons du moyeu. On remarque également l'élargissement de la section du sillage selon la direction  $Z$  (en s'éloignant du plan de rotor dans le sens du vent).

La figure 4.9 montre, qu'à l'extérieur du sillage, le vent est accéléré par la composante axiale de la vitesse induite par les tourbillons. Par contre, à l'intérieur du sillage, la vitesse induite ralentit l'écoulement.

Dès lors que le fluide traverse le rotor, il ralentit. Ce ralentissement est le résultat du fonctionnement du rotor, qui transforme l'énergie cinétique du vent en énergie mécanique.

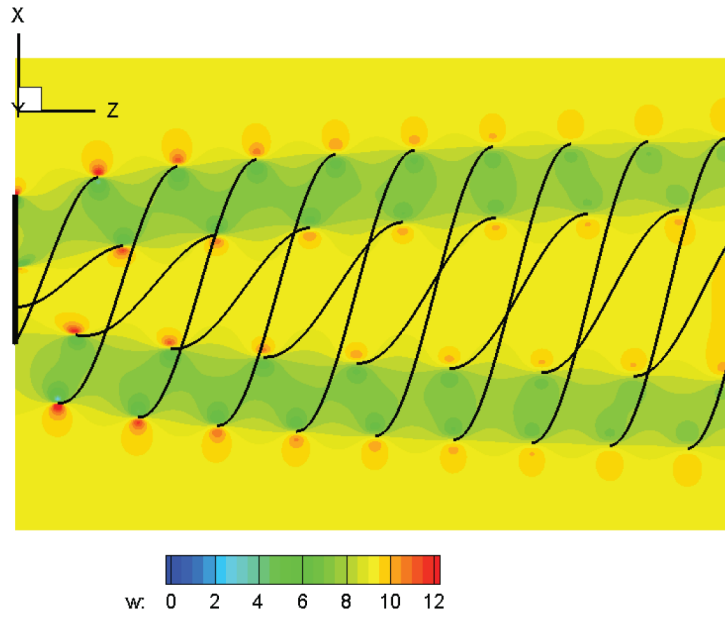


FIGURE 4.9 – Champ calculé de vitesse axiale induite par les tubes tourbillonnaires marginaux à l'aval de l'éolienne

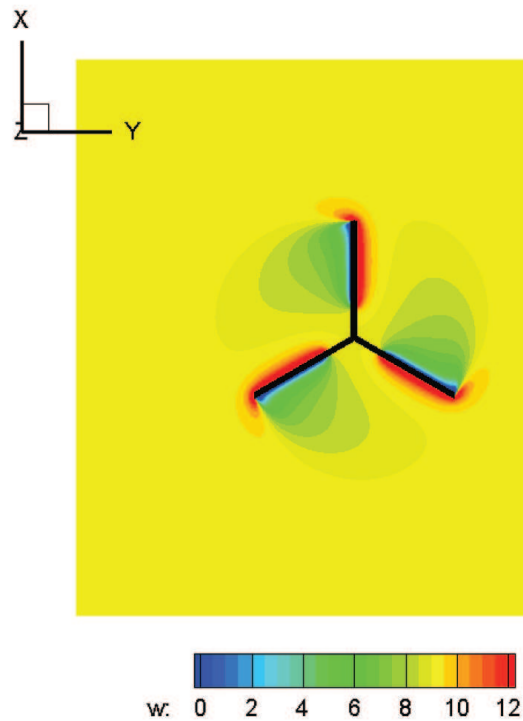


FIGURE 4.10 – Variation de la vitesse axiale dans le plan de rotation du rotor éolien.

En conséquence, à l'aval de l'éolienne, avec éloignement du rotor, le diamètre du sillage augmente. Après une certaine distance vers l'infini, le diamètre du sillage reste constant dans la simulation comme dans l'expérience.

Afin d'analyser les résultats obtenus de l'application du modèle de sillage libre pour ce cas d'éolienne fonctionnant face au vent, on compare ici les résultats de simulation et des mesures pour trois cas différents :

#### 4.5.1 Répartition de la circulation et de la vitesse axiale le long de la pale

Les essais réalisés dans le laboratoire *LMF* d'Arts et Métiers ParisTech portent sur trois sections de pale (0.5R, 0.7R et 0.9R) et permettent l'obtention de données expérimentales quant à la circulation et à la vitesse axiale le long de la pale, pour différentes vitesses de rotations afin d'étudier la variation des caractéristiques de l'éolienne en fonction de la vitesse spécifique. Il est alors procédé à l'extraction des résultats numériques illustrant la répartition de la circulation et de la vitesse axiale le long de la pale, pour les mêmes vitesses spécifiques utilisées dans les essais.

Les figures 4.11 à 4.17, représentent la répartition de la vitesse axiale et la circulation le long de la pale. L'étude numérique est menée pour 22 positions différentes le long de la pale. Dans tous les cas de test on conserve la vitesse de vent à l'amont constante et égale à 9.3 m/s. La première étude est réalisée avec une vitesse spécifique relativement faible égale à  $\lambda = 3$ .

Pour une vitesse spécifique égale à  $\lambda = 4$ , les résultats pour la circulation exposés en figure 4.15, sont issus de la simulation d'une part et des essais de l'autre part. On observe une cohérence intéressante même si un écart de l'ordre de 6% est constaté pour la valeur de la circulation entre la simulation et les essais. Pour la répartition de la vitesse axiale l'écart est négligeable.

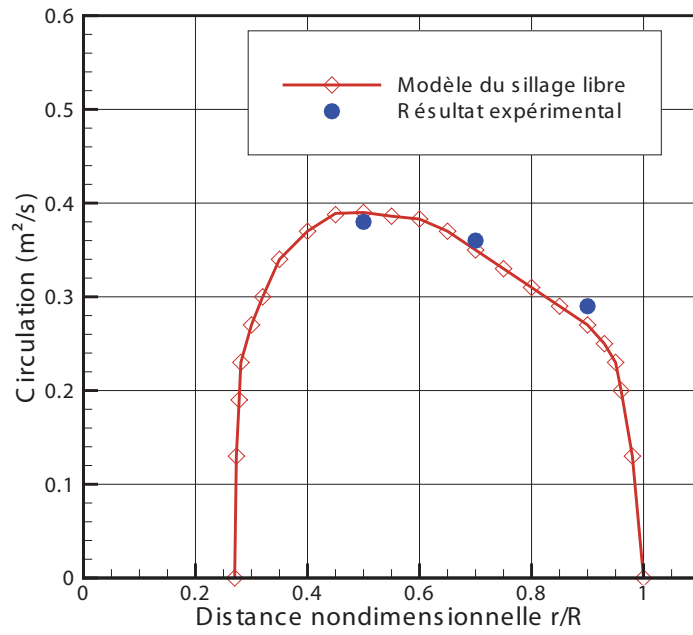


FIGURE 4.11 – Distribution de la circulation le long de la pale à  $\lambda=3$

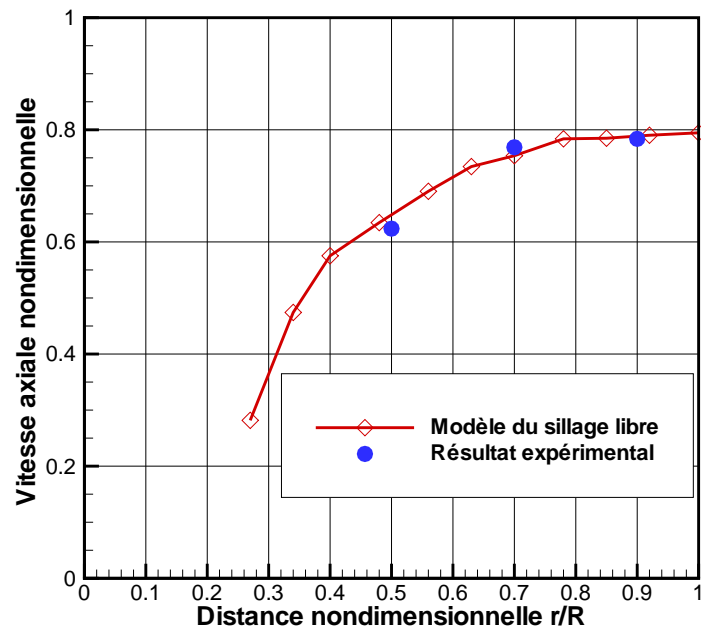


FIGURE 4.12 – Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à  $\lambda=3$

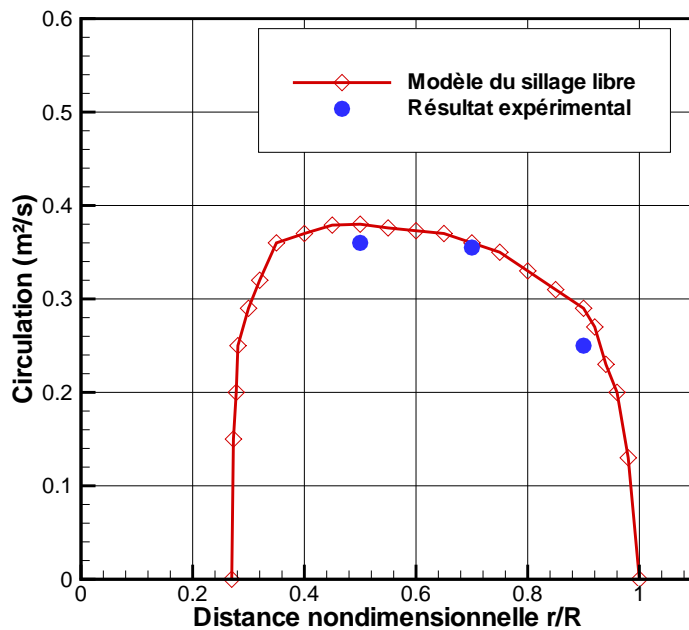


FIGURE 4.13 – Distribution de la circulation le long de la pale à  $\lambda=3.5$

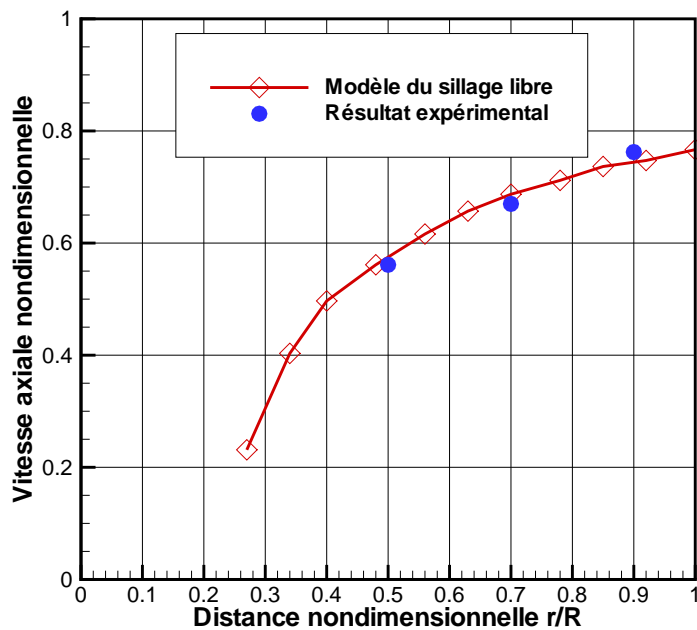


FIGURE 4.14 – Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à  $\lambda=3.5$



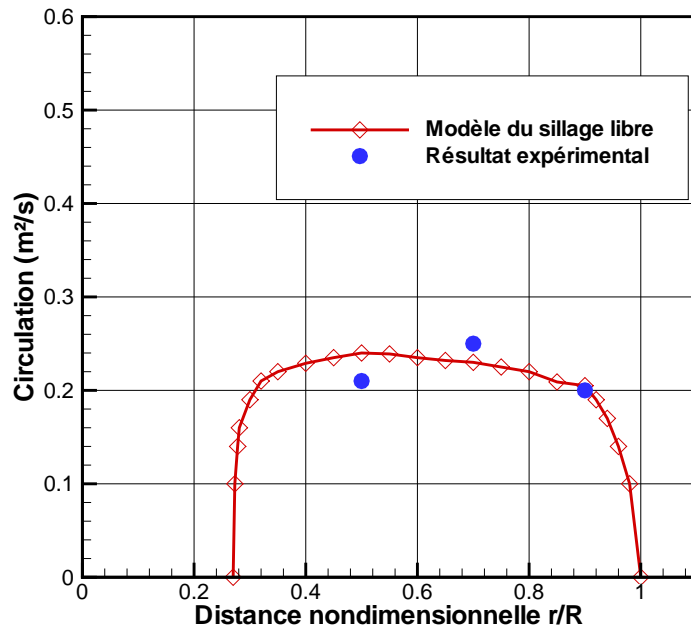


FIGURE 4.15 – Distribution de la circulation le long de la pale à  $\lambda=4$

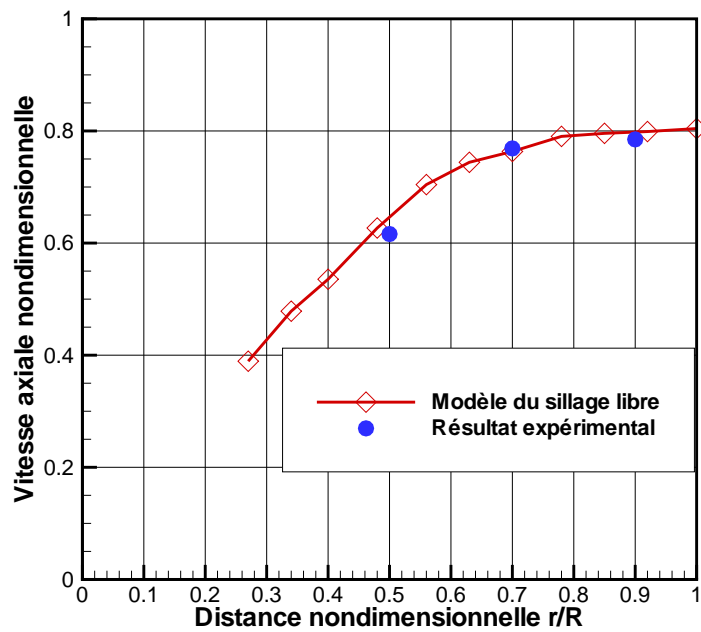


FIGURE 4.16 – Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à  $\lambda=4$

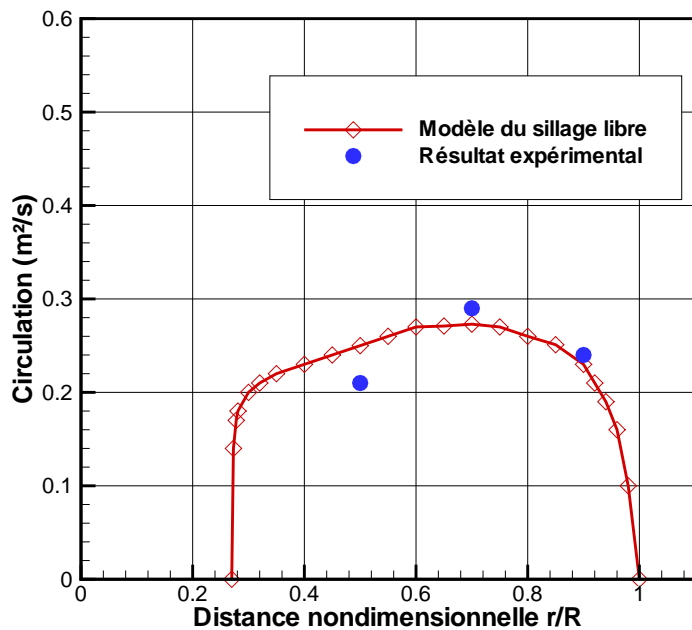


FIGURE 4.17 – Distribution de la circulation le long de la pale à  $\lambda = 4.5$

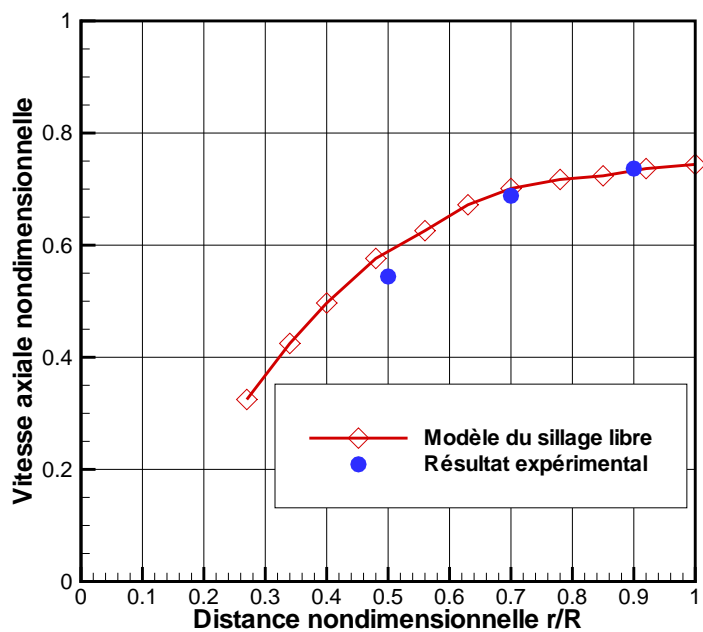


FIGURE 4.18 – Distribution de la vitesse axiale le long de la pale à  $\lambda = 4.5$

Pour une grande vitesse spécifique de l'ordre  $\lambda = 4.5$ , l'écoulement est ralenti. La circulation des profils placés entre  $0.6R$  et  $0.75R$  est quasi constante, étant donné que l'écoulement n'est pas décollé. Dans ce cas, le calcul numérique par le modèle de sillage libre, relatif à la répartition de la circulation, affiche un écart acceptable en comparaison avec les données expérimentales disponibles (figure 4.17), ce qui n'est pas le cas lorsqu'on s'approche de l'extrémité de pale, où l'on observe une concordance entre les résultats numériques et les données expérimentales.

On constate que la valeur calculée de la vitesse axiale d'écoulement s'améliore à l'approche de l'extrémité de la pale, (figure 4.18).

Dans un cadre global, les écarts entre les résultats numériques et les résultats des essais prouvent la bonne qualité du calcul, y compris pour des vitesses spécifiques élevées.

### 4.5.2 Les positions des centres des tourbillons marginaux

Les explorations précédentes ont permis de visualiser les tourbillons marginaux émis des extrémités des pales, figure 4.19. L'intersection entre les plans d'exploration azimutaux et les filaments tourbillonnaires hélicoïdaux, a permis de visualiser les foyers tourbillonnaires et le champ de vitesses induite par chaque foyer. Ainsi, la position des tourbillons marginaux a pu être localisée et leur pas déterminé. Le rayon du sillage tourbillonnaire augmente en aval du rotor suite au ralentissement de l'écoulement créé par l'éolienne.

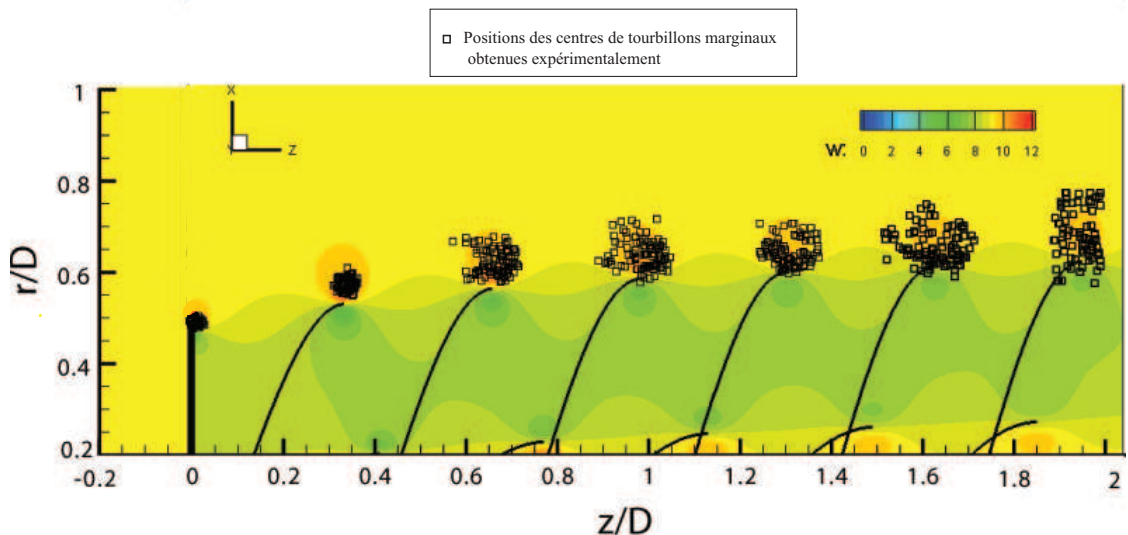


FIGURE 4.19 – Comparaison entre les positions des centres des tourbillons marginaux du rotor éolien testé et ses positions calculées à l'aide de la méthode de sillage libre

La figure 4.19 illustre la comparaison entre les foyers tourbillonnaires obtenus par les données expérimentales *PIV* et les résultats obtenus par la méthode de sillage libre

développée dans cette étude pour une vitesse spécifique égal à  $\lambda = 3$ .

La figure 4.19 expose l'emplacement des foyers tourbillonnaires déterminé à partir des explorations *PIV* dans le plan azimutal comportant la pale de référence. On constate d'après ces résultats une fluctuation du foyer tourbillonnaire qui augmente de plus en plus vers l'aval. Sur la même figure, nous avons projeté les trajectoires des tourbillons marginaux calculées à partir de notre modèle.

On peut noter que le modèle de sillage libre définit suffisamment les positions des centres des tourbillons marginaux pour le sillage proche du plan du rotor. On observe au contraire, un écart qui va en s'amplifiant dans le sillage lointain au fur et à mesure qu'il s'éloigne du plan du rotor.

### 4.5.3 Calcul de la puissance de l'éolienne testée

La figure 4.20 représente le coefficient de puissance mécanique mesurée sur l'arbre du rotor éolien testé et les résultats issus de l'application de la méthode de sillage libre. On remarque qu'il existe un écart entre la valeur du coefficient de puissance calculée et celle mesurée pour des vitesses spécifiques faibles. Cet écart diminue tout en augmentant la vitesse spécifique de l'éolienne. Une bonne corrélation est constatée

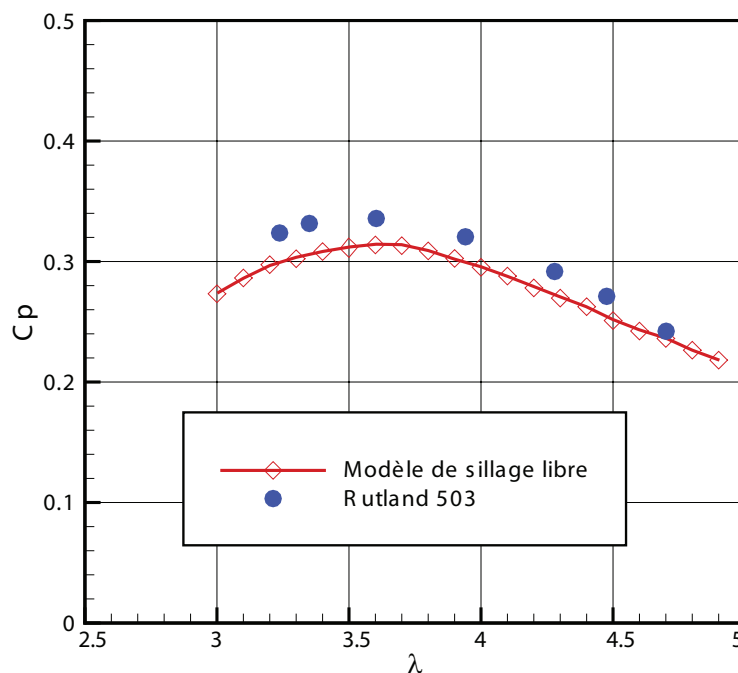


FIGURE 4.20 – Comparaison du coefficient de puissance calculée par la méthode de sillage libre et le coefficient de puissance mesurée de l'arbre du rotor éolien testé

pour les vitesses spécifiques élevées entre 4 et 5. L'écart maximal n'est que de l'ordre de 8%.

## 4.6 Conclusion

L'étude réalisée ici a permis l'analyse de l'écoulement grâce à une éolienne réelle. Par une exploration du champ de vitesse du sillage, un rotor éolien à axe horizontal de type Rutland a été testé en soufflerie dans des conditions de vent constant. Afin d'obtenir le champ de vitesses dans le sillage, une technique *PIV* a été utilisée pour l'exploration en soufflerie de l'écoulement à travers le rotor éolien. Le traitement des images issues de cette technique a permis de représenter l'écoulement dans un repère lié au rotor et de montrer la forme du sillage.

Les résultats des calculs confirment une forme très complexe du sillage. Les tourbillons marginaux issus des extrémités des pales ne sont pas situés sur une surface cylindrique, comme le suppose la théorie tourbillonnaire linéaire. Ils se déplacent vers l'extérieur en augmentant le diamètre du tube tourbillonnaire.

La validation de la méthode de sillage libre est ici effectuée sous de trois manières différentes :

- l'étude de la distribution de la vitesse axiale et de la circulation le long de la pale en fonction de la vitesse spécifique.
- l'étude de la puissance du rotor éolien en fonction de la vitesse spécifique : une corrélation forte est observée entre les données expérimentales et les résultats du calcul par la méthode de sillage libre. Cette corrélation est valable pour toutes les valeurs de vitesses spécifiques utilisées.
- l'étude des positions des tourbillons marginaux : la validation est faite entre les positions des foyers tourbillonnaires calculées par la méthode du sillage libre et les positions mesurées dans la soufflerie en aval du rotor éolien testé. Les résultats montrent que les positions sont comparables dans le sillage proche du rotor et la différence augmente en s'éloignant du plan du rotor.

En conclusion, les résultats obtenus par la méthode du sillage libre sont comparables avec les données expérimentales. La validation de cette méthode est considérée comme acquise.



## Chapitre 5

### Conclusion générale





---

## Conclusion générale

Les travaux réalisés dans cette thèse ont porté sur la modélisation de l'écoulement à travers une éolienne à axe horizontal à l'aide de la méthode de sillage libre. Dans cette méthode, l'écoulement réel au travers du rotor est remplacé par un écoulement de fluide parfait au travers d'un système tourbillonnaire équivalent. Ce système comporte des tourbillons attachés aux pales, et des tourbillons libres détachés des pales. En d'autres termes, on suppose que la vorticité issue des pales est concentrée dans les tourbillons à l'extrémité et au pied de chaque pale. L'objectif recherché est la simulation de l'écoulement à l'aval de l'éolienne et l'évaluation du champ de vitesses dans le plan du rotor, ce qui permet de calculer les efforts aérodynamiques et de déterminer le couple et la puissance de la machine. L'étude bibliographique a permis de passer en revue les différentes méthodes de calcul et de justifier le choix de la méthode de sillage libre pour le calcul des efforts instationnaires appliqués sur un rotor éolien. En effet, cette méthode permet de décrire le comportement aérodynamique de l'éolienne et offre la possibilité de représenter le sillage éolien sans exiger un temps excessif de calcul. Contrairement à la méthode de sillage prescrit, la trajectoire des tourbillons marginaux est ici explicitement calculée. Il est supposé que les vitesses induites par les lignes tourbillonnaires sont limitées par une vitesse maximale du noyau tourbillonnaire. Cette méthode a été largement utilisée dans l'analyse des rotors d'hélicoptères et notre travail a porté sur son adaptation à notre problématique.

Dans une description lagrangienne de l'écoulement, l'évolution du sillage à l'aval du rotor est obtenue grâce au suivi de l'évolution spatio-temporelle de marqueurs qui représentent les tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. Pour la résolution de l'équation qui détermine l'évolution du sillage et l'obtention des positions des marqueurs, nous avons mis en œuvre une méthode utilisant un schéma explicite de type prédicteur-correcteur de deuxième ordre.

Bien que la méthode de sillage libre présuppose un fluide parfait, les effets visqueux constituant un critère réel incontournable et ont donc été pris en compte dans notre travail. Il est supposé que les vitesses induites par les lignes tourbillonnaires sont limitées par une vitesse maximale du noyau tourbillonnaire. La diffusion des lignes tourbillonnaires et l'accroissement du rayon du noyau tourbillonnaire sont modélisés en fonction de l'âge du tourbillon. Les coefficients nécessaires pour représenter l'influence de la viscosité sont obtenus expérimentalement. Le code de calcul issu de cette méthode a été validé à partir des résultats numériques obtenus pour différents cas tests de référence, dont les solutions analytiques sont connues. La validation a été effectuée d'abord sur des cas relativement simples (filament tourbillonnaire rectiligne infini et anneau tourbillonnaire), puis sur un cas de tourbillon hélicoïdal infini, et pour finir sur celui d'un tourbillon parabolique. Les résultats de cette validation montrent que le modèle de sillage libre donne des champs de vitesses induites comparables à ceux produits par les solutions analytiques.

Afin d'obtenir les données expérimentales nécessaires pour valider le modèle de sillage libre, on a exploré le sillage proche et lointain à l'aval d'un rotor d'éolienne. Pour mener cette étude, un banc d'essai a été mis au point dans la soufflerie d'Arts et Métiers-ParisTech dans des conditions de vent constant. Une technique PIV été utili-

sée pour obtenir le champ de vitesses dans le sillage, Le traitement des images issues de cette technique a permis de représenter l'écoulement dans un repère lié au rotor et de montrer la forme du sillage. Les résultats des calculs confirment une forme hélicoïdale du sillage. Les tourbillons marginaux issus des extrémités des pales ne sont pas situés sur une surface cylindrique, comme le suppose la théorie tourbillonnaire linéaire. Ils se déplacent vers l'extérieur en augmentant le diamètre du tube tourbillonnaire.

La validation de notre modèle est effectuée en deux temps : l'étude de la distribution de la vitesse axiale et de la circulation le long de la pale en fonction de la vitesse spécifique, puis l'analyse de la puissance du rotor éolien en fonction de la vitesse spécifique. Une corrélation forte est observée entre les données expérimentales et les résultats du calcul par la méthode de sillage libre. Cette corrélation est valable pour toutes les valeurs de vitesses spécifiques utilisées. Enfin, la validation est faite entre les positions des foyers tourbillonnaires calculées par la méthode de sillage libre et les positions mesurées dans la soufflerie à l'aval du rotor éolien testé. Les résultats montrent que les positions sont comparables dans le sillage proche du rotor et que la différence augmente au fur et à mesure l'on s'éloigne du plan du rotor.

Le travail présenté dans ce mémoire a contribué à mettre au point une méthode de simulation numérique, capable de simuler l'aérodynamique du rotor de l'éolienne, en fonctionnement instationnaire. Les résultats numériques indiquent une bonne concordance globale avec les mesures expérimentales. Cette étude s'inscrit donc dans le cadre de l'amélioration des capacités et d'applicabilité de la méthode de sillage libre à l'analyse des différents régimes de fonctionnement des rotors éoliens.

L'aboutissement naturel de cette étude pourrait consister à affiner les conditions de simulation afin de tendre, au maximum, à la réalité physique du comportement des rotors éoliens. Ce modèle demeure toutefois limité dans ses capacités, du fait d'un temps important de calcul (par la loi de Biot-Savart) de la vitesse induite, . Ce temps de calcul peut ainsi être réduit par l'exploitation d'un algorithme numérique de calcul parallèle. La discrétisation choisie ici est acceptable pour l'analyse aérodynamique du rotor éolien mais une discrétisation plus fine serait nécessaire à l'amélioration des prévisions quantitatives.

Par ailleurs, des données expérimentales sont toujours nécessaires pour d'autres régimes de fonctionnement. Il serait souhaitable de prendre en compte la présence du gradient de vitesse crée par la couche limite terrestre. De même, la présence du mât de l'éolienne doit être prise en compte dans la simulation. Ces mesures sont nécessaires à la validation des prédictions de la méthode de sillage libre.

# Annexes



# Limite de Betz

L'énergie fournie par le vent est une énergie cinétique, fonction de la masse et de la vitesse du volume d'air. En considérant la masse volumique de l'air constante, on peut dire que l'énergie fournie par le vent est fonction uniquement de sa vitesse. L'énergie cinétique de la masse d'air en mouvement est égal à :

$$E = \frac{1}{2}m_a V_\infty^2 \quad (1)$$

Considérons un dispositif quelconque de récupération de cette énergie de surface est  $S$ . En faisant l'hypothèse que la vitesse du vent est constante en chaque point de cette surface, la puissance théoriquement récupérable est donc égal à :

$$P = \frac{1}{2}\rho_a S V_\infty^3 \quad (2)$$

Malheureusement, toute cette énergie ne peut être captée car la vitesse en aval du dispositif de récupération n'est jamais nulle et le théorème de Betz montre que le maximum d'énergie pratiquement récupérable est égal à  $\frac{16}{27}$  ( $\approx 60\%$ ) de l'énergie totale. Soit une puissance  $P = 0.37 S V_\infty^3$  maximale récupérable : c'est la limite de Betz.

Dans le cas d'une hélice,  $S$  est la surface balayée par cette hélice. Pour une éolienne de diamètre  $D$ , la limite de Betz est égal à :  $P = 0.29 D^2 V_\infty^3$ .

L'énergie fournie par l'aéromoteur est toujours de l'énergie mécanique que l'on utilise directement (pompage) ou que l'on transforme selon les besoins.

La limite de Betz doit donc être affectée de tous les rendements propres aux différentes transformations (l'hélice, le multiplicateur ou le réducteur, l'alternateur...). De plus le rendement de chaque élément varie avec le régime de fonctionnement lié 'a la vitesse de rotation de l'hélice, ce qui, en dehors du régime nominal, diminue encore le rendement global du dispositif.

Pour les aérogénérateurs classiques actuellement commercialisés, le rendement en énergie électrique varie entre 30% et 50% de la limite de Betz (pour leur vitesse nominale). Les aérogénérateurs de grande puissance ( $> 100kW$ ), dont chaque étage était très soigné, avaient un rendement d'environ 80% de la limite de Betz.



# Bibliographie

- [1] I.H. ABBOTT et A.E. VON DOENHOFF : *Theory of wing sections*. Dover Publications New York, 1959.
- [2] AA AFJEH : Wake effects on the aerodynamic performance of horizontal axis wind turbines. Rapport technique, DOE/NASA-0005-1-84, Toledo Univ., OH (USA), 1984.
- [3] AA AFJEN et TG KEITH JR : A simplified free wake method for horizontal-axis wind turbine performance prediction. *ASME applied mechanics, bioengineering and fluid engineering conference*, 14, 1987.
- [4] MB ANDERSON : A vortex-wake analysis of a horizontal-axis wind turbine and a comparison with a modified blade-element theory. pages 357–374, 1980.
- [5] Leroy ANNIE : Une methode generale de calcul des systemes portants et/ou propulsifs minces. *Thèse de doctorat à Universit2 d’Orléans*, 1997.
- [6] R.J. ARMS et Francis R. HAMA : Localized-Induction Concept on a Curved Vortex and Motion of an Elliptic Vortex Ring. *Physics of Fluids*, 8:553, 1965.
- [7] A. BAGAI et JG LEISHMAN : Rotor free-wake modeling using a relaxation technique- Including comparisons with experimental data. *AHS, Annual Forum, 50 th, Washington, DC, Proceedings.*, 2:1175–1196, 1994.
- [8] A. BAGAI et J.G. LEISHMAN : Rotor Free-Wake Modeling Using a Pseudo-Implicit Technique Including Comparisons with Experimental Data. *Journal of the American Helicopter Society*, 40:29, 1995.
- [9] A. BAGAI et J.G. LEISHMAN : Free-Wake Analysis of Tandem, Tilt-Rotor and Coaxial Rotor Configurations. *Journal of the American Helicopter Society*, 41:196, 1996.
- [10] S. BENJANIRAT, L.N. SANKAR et G. XU : Evaluation of turbulence models for the prediction of wind turbine aerodynamics. *AIAA paper*, 517:2003, 2003.
- [11] J. BHAGWAT et J. LEISHMAN : Free-Vortex Filament Methods for the Analysis of Helicopter Rotor Wakes. *Journal of aircraft*, 39(5), September–October 2002.
- [12] M.J. BHAGWAT et J.G. LEISHMAN : Stability analysis of helicopter rotor wakes in axial flight. *Journal of the American Helicopter Society*, 45:165, 2000.
- [13] M.J. BHAGWAT et J.G. LEISHMAN : Stability, consistency and convergence of time-marching free-vortex rotor wake algorithms. *American Helicopter Society, Journal*, 46(1):59–71, 2001.

- [14] J. BOERSMA et DH WOOD : On the self-induced motion of a helical vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 384:263–279, 1999.
- [15] T. BURTON *et al.* : *Wind Energy Handbook*. John Wiley and Sons, 2001.
- [16] Y. CAO : Modeling the unsteady aerodynamic forces of a maneuvering rotor. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 71(5):444–450, 1999.
- [17] Y. CAO, Z. YU et Y. SU : A coupled free wake - CFD method for the simulation of helicopter rotor flow. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 48(4):251–258, 2002.
- [18] PJ CARPENTER et B. FRIDOVICH : Effect of a rapid blade-pitch increase on the thrust and induced-velocity response of a full-scale helicopter rotor. *NACA TN*, 3044, 1953.
- [19] J.J. CHATTOT : Tower shadow modelization with helicoidal vortex method. *Computers and Fluids*, 37(5):499–504, 2008.
- [20] S CHKIR, I DOBREV, P KUSZLA et M. MASSOUH : Unsteady Loads Evaluation for a Wind Turbine Rotor. *Diagnostyka journal*, 2009.
- [21] A. CRESPO, J. HERNANDEZ et S. FRANSEN : Survey of modelling methods for wind turbine wakes and wind farms. *Wind energy*, 2(1):1–24, 1999.
- [22] GL CROUSE : A new method for improved rotor free-wake convergence. 1993.
- [23] H.D. CURRIN, F.N. COTON et B. WOOD : Dynamic Prescribed Vortex Wake Model for AERODYN/FAST. *Journal of Solar Energy Engineering*, 130:031007, 2008.
- [24] I. DOBREV, F. MASSOUH et M. RAPIN : Actuator surface hybrid model. *In Journal of Physics : Conference Series*, volume 75, page 012019. Institute of Physics Publishing, 2007.
- [25] Ivan DOBREV : Modèle hybride de surface active pour l’analyse du comportement aérodynamique des rotors éoliens a pales rigides ou déformables . *Thèse de doctorat à l’école nationale supérieure d’Arts et Métiers*, 2009.
- [26] Troldborg. N Massouh. F DOBREV. I, Maalouf. B : Investigation of the wind turbine vortex structure. *14th Int Symp on Applications of Laser Techniques to Fluid Mechanics*, 2008.
- [27] E.P.N. DUQUE, M.D. BURKLUND et W. JOHNSON : Navier-Stokes and Comprehensive Analysis Performance Predictions of the NREL Phase VI Experiment. *Journal of Solar Energy Engineering*, 125:457, 2003.
- [28] L.L. FRERIS : *Wind energy conversion systems*. Prentice Hall, 1990.
- [29] H. GLAUERT : Airplane propellers. *Aerodynamic theory*, IV:169–360, 1963.
- [30] J.C. GOHARD : *Free Wake Analysis of Wind Turbine Aerodynamics*. ASRL TR-184-14, Aero. And Struc. Research Lab., Dept. of Aeronautics and Astronautics, MIT, 1978, 1978.
- [31] RB GRAY et GW BROWN : A Vortex-Wake Analysis of a Single-Bladed Hovering Rotor and a Comparison with Experimental Data. *In AGARD Conference on Aerodynamics of Rotary Wings*, AGARD-CPP-111, 1972.



- 
- [32] BP GUPTA et RG LOEWY : Theoretical analysis of the aerodynamic stability of multiple, interdigitated helical vortices. *AIAA Journal*, 12(10):1381–1387, 1974.
- [33] S. GUPTA et J.G. LEISHMAN : Validation of a Free-Vortex Wake Model for Wind Turbines in Yawed Flow. *AIAA Journal*, (389):1–15, 2006.
- [34] C. GUY : Eoliennes & Aerogenerateurs, Guide de l'énergie éolienne, Edisud. *La Calade, Aix-en-Provence*, 1979.
- [35] E. GUYON, J.P. HULIN et L. PETIT : *Hydrodynamique physique*. CNRS Éditions, 2001.
- [36] W. HAANS, P.D. STUDENT, T. SANT, G. van KUIK et G. van BUSSEL : Stall in yawed flow conditions : A correlation of blade element momentum predictions with experiments. *Journal of Solar Energy Engineering*, 128:472, 2006.
- [37] F. R. HAMA : Progressive Deformation of a Curved Vortex by Its Own Induction. *Physics of fluids*, pages 1156–1162, 1962.
- [38] F.R. HAMA et J. NUTANT : Self-induced velocity on a curved vortex. *Physics of Fluids*, 4:28, 1961.
- [39] MM HAND, DA SIMMS, LJ FINGERSH, DW JAGER, JR COTRELL, S. SCHRECK et SM LARWOOD : Unsteady aerodynamics experiment phase VI : Wind tunnel test configurations and available data campaigns. Rapport technique, NREL/TP-500-29955, National Renewable Energy Lab., Golden, CO.(US), 2001.
- [40] AC HANSEN et CP BUTTERFIELD : Aerodynamics of horizontal-axis wind turbines. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1):115–149, 1993.
- [41] S. HEIER : *Grid integration of wind energy conversion systems*. John Wiley & Sons Inc, 1998.
- [42] S. IVANELL : Numerical Computations of Wind Turbine Wakes, Lic. *Thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, ISRN/KTH/MEK/TR/-05/10-SE*, 2005.
- [43] S. IVANELL, J. SØRENSEN et D. HENNINGSON : Numerical computations of wind turbine wakes. *Wind Energy*, pages 259–263, 2007.
- [44] Munif JOURIEH : Développement d'un modèle représentatif d'une éolienne afin d'étudier l'implantation de plusieurs machines sur un parc éolien. *Thèse de doctorat à l'école nationale supérieure d'Arts et Métiers*, 2007.
- [45] Y. KAMADA, T. MAEDA, K. NAITO, Y. OUCHI et M. KOZAWA : Measurement of Unsteady Aerodynamics Load on the Blade of Field Horizontal Axis Wind Turbine. *Journal of Fluid Science and Technology*, 3(3):335–343, 2008.
- [46] PA KUIBIN et VL OKULOV : Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament. *Physics of Fluids*, 10:607, 1998.
- [47] A.J. LANDGREBE : An analytical method for predicting rotor wake geometry. *Journal of the American Helicopter Society*, 14(4):20–32, 1969.
- [48] D. LE GOURIÈRES : *Énergie éolienne : Théorie, conception et calcul pratique des installations*. Eyrolles, 1982.
- [49] J.G. LEISHMAN : Principles of helicopter aerodynamics, 2000.
-

- [50] J.G. LEISHMAN : Challenges in modelling the unsteady aerodynamics of wind turbines. *Wind Energy*, 5(2-3):85–132, 2002.
- [51] J.G. LEISHMAN : *Principles of helicopter aerodynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- [52] J.G. LEISHMAN, M.J. BHAGWAT et A. BAGAI : Free-vortex filament methods for the analysis of helicopter rotor wakes. *Journal of Aircraft*, 39(5):759–775, 2002.
- [53] S LEISHMAN, J.G. and Guptz : Accuracy of the Induced Velocity from Helicoidal Vortices Using Straight-Line Segmentation. *AIAA Journal*, 43(1), 2005.
- [54] RI LEWIS : *Vortex element methods for fluid dynamic analysis of engineering systems*. Cambridge University Press, 1991.
- [55] T. MAEDA, Y. KAMADA, J. SUZUKI et H. FUJIOKA : Rotor blade sectional performance under yawed inflow conditions. *Journal of Solar Energy Engineering*, 130:031018, 2008.
- [56] C. MASSON, A. SMALI et C. LECLERC : Aerodynamic analysis of HAWT's operating in unsteady conditions. *Wind Energy*, 4(1):1–22, 2001.
- [57] F. MASSOUH, I. DOBREV et M. RAPIN : Numerical Simulation of Wind Turbine Performance Using a Hybrid Model. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, pages 1–10, 2006.
- [58] X. MUNDUATE, F.N. COTON et R.A.M.D. GALBRAITH : An investigation of the aerodynamic response of a wind turbine blade to tower shadow. *Journal of Solar Energy Engineering*, 126:1034, 2004.
- [59] VL OKULOV et JN SØRENSEN : Stability of helical tip vortices in a rotor far wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 576:1–25, 2007.
- [60] R. OUZIAUX, J. PERRIER et J. PERRIER : *Mécanique des fluides appliquée*. Dunod, 1966.
- [61] K. PIERCE et AC HANSEN : Prediction of wind turbine rotor loads using the Beddoes-Leishman model for dynamic stall. *Journal of Solar Energy Engineering*, 117:200, 1995.
- [62] M. RAMASAMY et J.G. LEISHMAN : Interdependence of Diffusion and Straining of Helicopter Blade Tip Vortices. *Journal of Aircraft*, 41(5):1014–1024, 2004.
- [63] P.D. RES, I.A. RISØ, S.F. RISØ, H.K. DEWI, A.A. DEWI et W.K.L. NEL : European Wind Turbine Testing Procedure Developments Task 1 : Measurement Method to Verify Wind Turbine Performance Characteristics.
- [64] I.L. RYHMING : *Dynamique des fluides*. Pr. Polytechn. et Univ. Romandes, 1985.
- [65] JM SAVINO et TW NYLAND : Wind turbine flow visualization studies. *In Proceedings of the Windpower Conference, Washington, DC : American Wind Energy Association*, pages 559–64, 1985.
- [66] DJ SHARPE : A general momentum theory applied to an energy-extracting actuator disc. *Wind Energy*, 7(3):177–188, 2004.
- [67] W.Z. SHEN, J.N. SØRENSEN et R. MIKKELSEN : Tip Loss Correction for Actuator/Navier–Stokes Computations. *Journal of Solar Energy Engineering*, 127:209, 2005.

- 
- [68] W. SHENG, R.A.M.D. GALBRAITH et FN COTON : A modified dynamic stall model for low Mach numbers. *Journal of Solar Energy Engineering*, 130:031013, 2008.
- [69] DA SIMMS, MM HAND, LJ FINGERSH et DW JAGER : Unsteady aerodynamics experiment phases II-IV test configurations and available data campaigns. *National Renewable Energy Laboratory, NREL/TP-500-25950, Golden, CO*, 1999.
- [70] H. SNEL : Review of aerodynamics for wind turbines. *Wind energy*, 6(3):203–211, 2003.
- [71] JN SØRENSEN et R. MIKKELSEN : On the validity of the blade element momentum method. *In Proceedings of the EWEC, Copenhagen*, 2001.
- [72] J.N. SØRENSEN et W.Z. SHEN : Numerical modeling of wind turbine wakes. *Journal of fluids engineering*, 124(2):393–399, 2002.
- [73] NN SORENSSEN, JA MICHELSEN et S. SCHRECK : Navier-Stokes predictions of the NREL phase VI rotor in the NASA Ames 80 ft × 120 ft wind tunnel. *Wind Energy*, 5, 2002.
- [74] J.K. SVEEN : An introduction to MatPIV v. 1.6. 1. *eprint series (Department of Mathematics, University of Oslo, Oslo, Norway, 2004)*.
- [75] C. TONGCHITPAKDEE, S. BENJANIRAT et L.N. SANKAR : Numerical simulation of the aerodynamics of horizontal axis wind turbines under yawed flow conditions. *Journal of solar energy engineering*, 127:464, 2005.
- [76] P.L. VIOLLET, J.P. CHABARD, P. ESPOSITO et D. LAURENCE : Mécanique des fluides appliquée. *Écoulements Incompressibles dans les Circuits, Canaux et Rivières, autour des Structures et dans l'Environnement.* Presses des Ponts et Chaussées, Paris, France,, 2002.
- [77] J. WHALE, KH PAPADOPOULOS, CG ANDERSON, CG HELMIS et DJ SKYNER : A study of the near wake structure of a wind turbine comparing measurements from laboratory and full-scale experiments. *Solar energy*, 56(6):621–633, 1996.
- [78] DH WOOD : Generic vortex modelling for horizontal-axis wind turbines. *Wind Engineering Journal*, 26(2):71–84, 2002.
- [79] DH WOOD et J. BOERSMA : On the motion of multiple helical vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 447:149–171, 2001.
- [80] DH WOOD et D. LI : Assessment of the accuracy of representing a helical vortex by straight segments. *AIAA Journal*, 40(4):647–651, 2002.
- [81] DH WOOD et C. MEYER : Two methods for calculating the velocities induced by a constant diameter far-wake. *Journal of Aircraft*, 28(8):526–531, 1991.

## Contribution à l'étude aérodynamique d'une éolienne par une méthode de sillage libre

**Résumé :** Ce travail présente une méthode de calcul de l'écoulement tridimensionnel instationnaire autour d'un rotor éolien. L'écoulement réel au travers du rotor est remplacé par un écoulement de fluide parfait au travers d'un système tourbillonnaire équivalent. Ce système comporte des tourbillons attachés aux pales et des tourbillons libres détachés des pales. Pour simplifier, la vorticité issue des pales est supposée concentrée dans deux tourbillons à l'extrémité et au pied de chaque pale. Pour calculer l'écoulement résultant et évaluer les efforts instationnaires exercés sur la structure du rotor, une méthode de sillage libre a été mise en œuvre. Dans cette méthode on utilise une description lagrangienne de l'écoulement. L'évolution du sillage à l'aval du rotor est obtenue en suivant l'évolution spatio-temporelle de marqueurs qui représentent les tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. Pour résoudre l'équation qui gouverne l'évolution du sillage et pour obtenir les positions des marqueurs, une méthode utilisant un schéma explicite prédicteur-correcteur du deuxième ordre est mise en œuvre. La méthode de sillage libre suppose un fluide parfait mais dans ce travail les effets visqueux sont pris en compte. Les vitesses induites par les lignes tourbillonnaires sont supposées limitées par une vitesse maximale du noyau tourbillonnaire. Les coefficients nécessaires pour représenter l'influence de la viscosité sont obtenus expérimentalement. La validation de la méthode proposée est réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux où l'écoulement en aval du rotor est exploré en utilisant la technique de vélocimétrie par image de particules (PIV).

**Mots-clés :** *  olienne, aérodynamique instationnaire, tourbillon, sillage, PIV.*

## Contribution to aerodynamic study of wind turbine using a free wake method

**Abstract:** This thesis presents a method for calculating the unsteady three-dimensional flow around a wind turbine rotor. The real flow is replaced by a free stream past a vortex model of the rotor. This model consists of lifting vortex lines which replace the blades and a trailing free vorticity. For simplicity the vorticity shed from the blade trailing edge is concentrated in two vortices issued from tip and root. To compute the resulting flow and to evaluate the unsteady forces exerted on the rotor, a free wake method is used. This method consists of a Lagrangian representation of the flow field. The evolution of the wake downstream of the rotor is obtained by tracking the markers representing the vortices issued from the blade tips and roots. To solve the wake governing equation and to obtain the marker positions, a time-marching method is applied and the solution is obtained by a second order predictor-corrector scheme. The free wake methods are usually inviscid, but in the present approach, the viscous effects are taken into account. It is supposed that the induced velocity on vortex line is limited by a maximum velocity in the viscous vortex core. The diffusion of the vortex lines and the vortex core growth are supposed to depend on vortex age. All constants needed to represent the viscosity effects are extracted from experiments. To validate the proposed method a comparison is made with experimental data obtained in the case of a model of wind turbine where the flow field immediately behind the rotor is measured by means of particle image velocimetry (PIV). It is shown that the numerical simulation captures correctly the near wake development.

**Keywords:** *Wind turbine, Unsteady aerodynamics, Vortex, Wake, PIV.*

---







## Contribution à l'étude aérodynamique d'une éolienne par une méthode de sillage libre

**RESUME :** Ce travail présente une méthode de calcul de l'écoulement tridimensionnel instationnaire autour d'un rotor éolien. L'écoulement réel au travers du rotor est remplacé par un écoulement de fluide parfait au travers d'un système tourbillonnaire équivalent. Ce système comporte des tourbillons attachés aux pales et des tourbillons libres détachés des pales. Pour simplifier, la vorticité issue des pales est supposée concentrée dans deux tourbillons à l'extrémité et au pied de chaque pale. Pour calculer l'écoulement résultant et évaluer les efforts instationnaires exercés sur la structure du rotor, une méthode de sillage libre a été mise en œuvre. Dans cette méthode on utilise une description lagrangienne de l'écoulement. L'évolution du sillage à l'aval du rotor est obtenue en suivant l'évolution spatio-temporelle de marqueurs qui représentent les tourbillons issus de l'extrémité et du pied de chaque pale. Pour résoudre l'équation qui gouverne l'évolution du sillage et pour obtenir les positions des marqueurs, une méthode utilisant un schéma explicite prédicteur-correcteur du deuxième ordre est mise en œuvre. La méthode de sillage libre suppose un fluide parfait mais dans ce travail les effets visqueux sont pris en compte. Les vitesses induites par les lignes tourbillonnaires sont supposées limitées par une vitesse maximale du noyau tourbillonnaire. Les coefficients nécessaires pour représenter l'influence de la viscosité sont obtenus expérimentalement. La validation de la méthode proposée est réalisée par comparaison avec des résultats expérimentaux où l'écoulement en aval du rotor est exploré en utilisant la technique de vélocimétrie par image de particules (PIV).

**Mots clés :** Eolienne, aérodynamique instationnaire, tourbillon, sillage, PIV.

## Contribution to aerodynamic study of wind turbine using a free wake method

**ABSTRACT :** This thesis presents a method for calculating the unsteady three-dimensional flow around a wind turbine rotor. The real flow is replaced by a free stream past a vortex model of the rotor. This model consists of lifting vortex lines which replace the blades and a trailing free vorticity. For simplicity the vorticity shed from the blade trailing edge is concentrated in two vortices issued from tip and root. To compute the resulting flow and to evaluate the unsteady forces exerted on the rotor, a free wake method is used. This method consists of a Lagrangian representation of the flow field. The evolution of the wake downstream of the rotor is obtained by tracking the markers representing the vortices issued from the blade tips and roots. To solve the wake governing equation and to obtain the marker positions, a time-marching method is applied and the solution is obtained by a second order predictor-corrector scheme. The free wake methods are usually inviscid, but in the present approach, the viscous effects are taken into account. It is supposed that the induced velocity on vortex line is limited by a maximum velocity in the viscous vortex core. The diffusion of the vortex lines and the vortex core growth are supposed to depend on vortex age. All constants needed to represent the viscosity effects are extracted from experiments. To validate the proposed method a comparison is made with experimental data obtained in the case of a model of wind turbine where the flow field immediately behind the rotor is measured by means of particle image velocimetry (PIV). It is shown that the numerical simulation captures correctly the near wake development.

**Keywords :** Wind turbine, Unsteady aerodynamics, Vortex, Wake, PIV.