HAL
open science

Application du retournement temporel en micro-ondes à l'amplification d'impulsions et l'imagerie

Matthieu Davy

To cite this version:

Matthieu Davy. Application du retournement temporel en micro-ondes à l'amplification d'impulsions et l'imagerie. Optique [physics.optics]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. Français. NNT : . pastel-00543221

HAL Id: pastel-00543221

https://pastel.hal.science/pastel-00543221v1

Submitted on 6 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris 7 - Denis Diderot

UFR de Physique

Ecole Doctorale :

Matière Condensée et Interfaces

Présentée par :

Matthieu DAVY

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris 7

Application du retournement temporel en micro-ondes à l'amplification d'impulsions et l'imagerie

---

sous la direction de Mathias FINK

Soutenue le 20 octobre 2010

Devant le jury composé de :

Mme. Anne Sentenac	Présidente du Jury
M. Mathias Fink	Directeur de thèse
M. Jean-Yves Dauvignac	Rapporteur
M. Marc Saillard	Rapporteur
M. Eric Larose	Examinateur
M. Marc Lesturgie	Examinateur
M. Julien de Rosny	Examinateur

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mes deux directeurs de thèse : Mathias Fink et Julien de Rosny pour m'avoir accueilli dans leur laboratoire. J'ai beaucoup apprécié la passion, les nombreuses idées ainsi que l'enthousiasme de Mathias durant ces trois années. Quant à Julien, ces quelques lignes ne suffiront pas à traduire toute la reconnaissance que je lui porte. Son encadrement fut, tant d'un point de vue scientifique qu'humain, en tout point parfait. Je le remercie chaleureusement pour tout ce temps passé chaque jour à m'orienter dans mes recherches. Cette thèse n'aurait pas non plus été possible sans ses qualités scientifiques tout à fait exceptionnelles.

Je remercie par ailleurs Marc Saillard et Jean-Yves Dauvignac pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour toute l'attention qu'ils ont portée à mon manuscrit. Mes remerciements se dirigent naturellement aussi vers les autres membres du jury : Mme Anne Sentenac et MM. Eric Larose et Marc Lesturgie.

Plusieurs personnes ont collaboré aux travaux de recherche exposés dans ce manuscrit. Merci à Claire Prada pour son soutien durant ces trois années ainsi que pour m'avoir fait découvrir les joies de la méthode DORT. J'ai aussi eu le plaisir de travailler successivement avec Jean-Gabriel Minonzio et Thomas Lepetit que je remercie tout particulièrement pour leur constante bonne humeur.

Beaucoup d'autres personnes ont contribué à rendre ces trois années de thèse au laboratoire très agréables : Alice (co-bureau depuis la première heure en stage dans la « cave »!), Rédha dit René, Alexandre l'arrageois, Nicolas fan de l'ASSE, Franck, Fabrice, Sébastien, Geoffroy, Alexandre A., Abdel, Gilles ou encore Bastounet. Merci aussi à tous ceux qui ont partagé mon bureau : Jérôme, Etienne, les deux Eric, Sébastien et Nicolas. J'adresse également de chaleureux remerciements à Patricia pour sa présence bienveillante ainsi qu'à toutes les personnes (chercheurs, ingénieurs et gestionnaires) qui animent en permanence le laboratoire et que j'ai eu le plaisir de côtoyer.

D'un point de vue plus personnel, je n'oserai oublier de remercier mes parents, mon frère, mes sœurs et le reste de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements permanents. Plusieurs amis ont de plus énormément compté pour moi, au premier rang desquels mes compagnons de voyage les rennais Julien, Antoine et Nico, mais aussi Clément, Guillaume,

Florie, Julie, Hélène, les parisiens Gilles, Victoire, Xavier, Julia, les lillois Astrid, Laurent, Franco, Schneb, Claire et mes partenaires de ping des clubs de Lys et Neuilly.

Je finirai ces remerciements par une énorme pensée à Caroline pour son soutien continu et son écoute durant ces trois belles années. Je tiens à lui témoigner tout le bonheur que j'ai eu, que j'ai et que j'aurai, je l'espère encore longtemps, à partager à ses côtés tous ces moments de joie comme de doutes. Merci aussi à elle pour avoir corrigé avec enthousiasme mon anglais hésitant lors des premières publications.

TABLE DES MATIERES

Introduction 7
I. Introduction au retournement temporel (RT) 11
I.1 Ondes scalaires 11
I.1.1 La cavité à retournement temporel 12
I.1.2 Propriétés dans le domaine temporel 15
I.2 Transposition à l'électromagnétisme 15
I.3 Retournement temporel en milieux complexes 19
I.3.1 Cavité réverbérante 19
I.3.2 Milieux aléatoires 22
I.4 Méthode de caractérisation de milieux diffusants 24
I.4.1 Retournement temporel itératif 24
I.4.2 Méthode DORT 25
I.4.3 Repropagation des vecteurs singuliers 27
I.4.4 Dispositifs expérimentaux 29
II. Amplificateur de micro-ondes par RT 32
II.1 Contexte de l'étude et configurations envisagées 32
II.2 Théorie du retournement temporel en chambre réverbérante ouverte 34
II.2.1 RT et champ diffus 34
II.2.2 Retournement temporel 1-bit 38
II.3 Performances du démonstrateur 40
II.3.1 Dispositif expérimental 40
II.3.2 Réponse à une impulsion et Retournement temporel 42
II.3.3 Atténuation du signal transitoire 44
II.3.4 Influence du nombre d'antennes émettrices et de la bande passante 44
II.3.5 Mesure de la tache focale en fonction de l'ouverture de la cavité. 46
II.3.6 Ouverture optimale de la cavité 48
II.3.7 Comparaison des performances avec une antenne cornet seule 51
II.3.8 Gain du système 54
II.4 Détection et focalisation à partir de la chambre réverbérante 56
II.4.1 Simulations 57
II.4.2 Réalisation expérimentale 59
II.5 Détection à l'intérieur d'un missile 61
II.5.1 Simulations 62
II.5.2 Résultats expérimentaux 65
II.6 Conclusion générale du chapitre 69
III. Imagerie en micro-ondes par la méthode DORT 71
III.1 Caractérisation de cylindres diélectriques à l'aide de deux réseaux distincts 71
III.1.1 Théorie 72
III.1.2 Dispositif de mesure 75
III.1.3 Invariants de l'opérateur de retournement temporel 76
III.1.4 Repropagation numérique des vecteurs singuliers 78
III.1.5 Problème inverse 81
III.1.6 Conclusion 83
III.2 Imagerie sub-longueur d'onde 84
III.2.1 Dispositif expérimental 85
III.2.2 Invariants expérimentaux et théoriques 86
III.2.3 Algorithme MUSIC et imagerie sub-longueur d'onde 89
III.2.4 Perturbation des vecteurs singuliers 92

III.2.5 Développement des vecteurs singuliers en série de Taylor 93
III.2.6 Application à l'estimateur MUSIC 94
III.2.7 Profil de la courbe 97
III.2.8 Résolution limite en présence de bruit 99
III.2.9 Discussion 100
III.3 Localisation de personnes à travers les murs 108
III.3.1 Matrice d'acquisition 109
III.3.2 Paramètres du mur 110
III.3.3 Localisation d'une personne derrière le mur 114
III.3.4 Suivi du déplacement d'une cible 120
III.3.5 Conclusion et perspectives 121
III.4 Invariants d'une cible mobile durant l'acquisition de la matrice **K** 122
III.4.1 Cadre de l'étude 122
III.4.2 Mouvement parallèle aux réseaux : déplacement suivant l'axe *x* 123
III.4.3 Mouvement perpendiculaire au réseau 133
III.4.4 Discussion 134
IV. Imagerie passive par corrélations de bruit 137
IV.1 Fonction de Green et corrélations 138
IV.2 Imagerie passive de diffuseurs 144
IV.2.1 Lien avec le théorème optique 144
IV.2.2 Résultats expérimentaux 147
IV.2.3 Temps de convergence 149
IV.3 Imagerie fréquentielle 151
IV.3.1 Approche théorique 151
IV.3.2 Résultats expérimentaux 154
IV.4 Conclusion et perspectives 157
Conclusion générale et perspectives 161
Bibliographie 164

Introduction

Un processus de retournement temporel consiste à imposer des conditions aux limites appropriées afin qu'un système puisse évoluer en chronologie inverse, c'est-à-dire que le film de son évolution se rembobine pour revenir à sa situation initiale. Bien que microscopiquement réversibles, de nombreux systèmes se révèlent non-réversibles à l'échelle macroscopique. Cette irréversibilité est liée à la théorie du chaos, les trajectoires sont en effet trop sensibles aux conditions initiales. La moindre erreur sur l'inversion de la vitesse entraîne une évolution erratique du système. Il s'avère par exemple utopique d'imaginer qu'une rivière puisse remonter à sa source si l'on inversait le sens de la vitesse des particules composant son cours d'eau. Néanmoins, en physique ondulatoire, cette sensibilité est bien moindre. La précision nécessaire est en effet de l'ordre de la longueur d'onde. Sur ce constat se fonde le principe du retournement temporel (RT), une méthode élégante de focalisation spatio-temporelle développée, initialement en acoustique, par Mathias Fink depuis 1992 [1].

Concrètement, un processus de retournement temporel se compose de deux phases. La première phase dite « d'écoute » consiste à enregistrer et numériser sur un réseau d'antennes, appelé Miroir à Retournement Temporel, les signaux provenant d'une onde émise par une source. Lors de la seconde phase, les signaux sont réémis en chronologie inverse simultanément sur tous les éléments du miroir. Du fait de la réversibilité de l'équation de propagation, l'onde générée se focalise tant temporellement que spatialement au niveau de la source initiale. La robustesse du RT a été largement éprouvée en acoustique. Pour des réseaux d'antennes d'ouverture faible, des propriétés remarquables au niveau de la compression spatio-temporelle des ondes par RT ont été démontrées en milieux multiplement diffusants ainsi que dans des cavités réverbérantes. Les applications du RT sont nombreuses à ce jour et concernent de multiples domaines, tels que l'imagerie médicale, les télécommunications, le contrôle non-destructif ou encore la domotique.

La première expérience de retournement temporel en micro-ondes a été menée au sein d'une cavité réverbérante, lors de la thèse de Geoffroy Lerosey en 2003 au laboratoire. Il est de nouveau apparu que le RT constitue un processus très robuste. Ma thèse s'inscrit dans la continuité de cette étude, dans le cadre d'un contrat de « Recherche Exploratoire et Innovation » (REI) entre la Direction Générale de l'Armement (DGA) et l'Institut Langevin.

Deux thématiques principales sont ciblées par le REI, d'une part, le développement d'un amplificateur d'impulsions électromagnétiques de forte amplitude et d'autre part, la détection de cibles diffusantes à l'aide de la méthode DORT (décomposition de l'opérateur de retournement temporel). Mes travaux de thèse ont toutefois largement débordé de ce seul cadre.

Le premier chapitre de ce manuscrit est dédié à la théorie du retournement temporel pour des ondes scalaires (ondes acoustiques), puis à sa transposition aux ondes vectorielles dans le cas de l'électromagnétisme. Le principe de cavité à retournement temporel puis les propriétés de compression d'impulsion spatio-temporelle en chambres réverbérantes et dans des milieux multi-diffusants en espace libre sont notamment examinés. La fin du chapitre traite du retournement temporel itératif et de la méthode DORT. A l'aide de deux réseaux d'antennes, un en émission et un en réception, ces deux méthodes mènent à la détection, la localisation ou encore la caractérisation de cibles diffusantes.

Lors du second chapitre, un prototype d'amplificateur d'impulsions micro-ondes par RT est développé. L'objectif consiste à générer des impulsions de forte amplitude à partir d'une électronique de faible puissance. Une chambre réverbérante ouverte sur sa face avant permet d'engendrer un champ diffus à l'intérieur, tout en laissant s'échapper l'énergie afin de focaliser le champ par RT à l'extérieur. La compression spatio-temporelle après RT du champ diffus produit une impulsion de forte amplitude et confère au dispositif un caractère auto-adaptatif tant en position qu'en polarisation. L'influence des différents paramètres expérimentaux est étudiée afin de maximiser l'amplitude de l'impulsion après RT. En lien avec le REI, la focalisation à l'intérieur d'un missile est abordée parallèlement par l'intermédiaire de la méthode DORT. L'idée est de focaliser l'impulsion sur un circuit électronique du missile, afin de générer une tension de claquage le rendant inactif. Les limitations ainsi que les perspectives d'évolution du prototype concluent enfin ce chapitre.

Le troisième chapitre traite du développement de la méthode DORT en micro-ondes. La première application considérée concerne la caractérisation de cibles à l'aide des invariants de l'opérateur de retournement temporel. Le cas de cylindres diélectriques illuminés par deux réseaux d'antennes en émission et réception distincts est examiné. En particulier, nous

montrons la possibilité de retrouver les paramètres des cylindres dans le cadre de la résolution du problème inverse. Par la suite, l'imagerie de deux cibles proches, c'est-à-dire séparées d'une distance sub-longueur d'onde, est abordée tant expérimentalement que théoriquement. L'influence du bruit est examinée et un critère de résolution en fonction de son niveau est extrait afin de valider, ou non, l'imagerie des deux cibles proches.

Ces travaux initiaux sur l'application de la méthode DORT en micro-ondes permettent d'aborder un cas concret d'imagerie radar : la détection et la localisation de personnes mobiles derrière les murs. Les propriétés de réflectivité du corps humain aux ondes électromagnétiques décimétriques permettent en effet la localisation de la personne. La possibilité de suivre son déplacement est illustrée en prenant en compte la propagation à l'intérieur du mur. La détection de cibles mobiles conduit aussi à déterminer l'influence d'un déplacement de la cible pendant l'acquisition sur les invariants de l'opérateur de retournement temporel. L'étude est menée tant théoriquement qu'expérimentalement pour une cible ponctuelle.

Dans le dernier chapitre, une technique d'imagerie fondée sur les corrélations du bruit ambiant est expérimentalement mise en évidence pour la première fois, à notre connaissance, en micro-ondes. Cette thématique ouvre le domaine de radars totalement passifs, et donc indétectables, dans le domaine des micro-ondes. D'une part, nous montrons que le produit de corrélation de signaux de bruit large bande enregistrés sur deux antennes mène à la réponse impulsionnelle entre celles-ci. L'interprétation du phénomène physique se fonde sur les principes du RT. La détection et la localisation de cibles découle de ce principe. D'autre part, l'imagerie passive est également abordée grâce à la corrélation de signaux pseudo-aléatoires « bande étroite ». A partir de l'émission d'une borne WIFI, nous montrons que la diffusion de l'onde sur le corps humain permet d'envisager la localisation d'une personne.

I. Introduction au retournement temporel (RT)

Le retournement temporel a été développé au laboratoire depuis 1993 [1]. Son principe se fonde sur la réversibilité de la propagation des ondes. Lorsqu'une source émet une onde, il consiste à mesurer et numériser sur un réseau d'antennes le signal généré puis le réémettre en chronologie inverse. Une onde convergente est créée et se focalise tant spatialement que temporellement sur le point source initial. Dans ce chapitre, nous étudions les implications de ce principe, tout d'abord pour des ondes scalaires puis pour des ondes vectoriels (électromagnétisme). Nous introduisons notamment le concept de cavité à retournement temporel puis nous exposons les remarquables propriétés de focalisation en cavité réverbérante et en milieux multi-diffusants ouverts.

I.1 Ondes scalaires

Nous considérons dans un premier temps que l'onde peut être décrite par un scalaire, le champ $\psi(\mathbf{r},t)$. L'équation d'onde se décompose comme la somme de deux opérateurs $\hat{L}_r$ et $\hat{L}_t$:

$$\left(\hat{L}_r + \hat{L}_t\right)\psi(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.1}$$

Le premier opérateur ($\hat{L}_r$) agit sur la dépendance spatiale de l'onde alors que le second ($\hat{L}_t$) agit sur la dépendance temporelle du champ. Pour les milieux réversibles, l'opérateur $\hat{L}_t$ est invariant par changement de t en $-t$. Il fait seulement apparaître la dérivée seconde par rapport au temps, $\partial^2/\partial t^2$. Lorsque le champ $\psi(\mathbf{r},t)$ est solution de l'équation d'onde, le champ $\psi(\mathbf{r},-t)$ le devient naturellement aussi. Ainsi, si le champ et sa dérivée temporelle sont mesurés en chaque point de l'espace, il est possible de construire une onde convergente revenant à la source initiale en réémettant tous les signaux en chronologie inverse.

Néanmoins, une mesure sur l'ensemble d'un volume est parfaitement utopique. L'idée consiste à enregistrer le champ et sa dérivée spatiale sur une surface fermée, la dénommée cavité à retournement temporel, entourant le volume dans lequel l'onde convergente est recréée.

I.1.1 La cavité à retournement temporel

Le concept de cavité à retournement temporel, développé par D. Cassereau et M. Fink [2], se fonde sur le théorème de Helmotz-Kirchhoff. Les auteurs ont montré que l'on pouvait contrôler le champ dans un volume *V* à partir de la connaissance de celui-ci et de sa dérivée spatiale sur une surface fermée *S*. Le champ $\psi(\vec{\mathbf{r}},t)$ dans le volume *V* est décrit par une intégrale de surface :

$$\psi(\mathbf{r},t)=\oint_S\left[G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},t)\otimes\nabla\psi(\mathbf{r}_S,t)-\nabla G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},t)\otimes\psi(\mathbf{r}_S,t)\right]\mathrm{d}S \tag{1.2}$$

Dans cette équation, ∇ est l'opérateur de dérivée normale au niveau du point $\mathbf{r}_S$ de la surface *S*, orientée vers l'extérieur de *V* et $G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},t)$ représente la fonction de Green monopolaire entre les points $\mathbf{r}_S$ et $\mathbf{r}$. Elle est solution de l'équation d'onde en prenant comme source un Dirac spatial et temporel au point $\mathbf{r}_S$:

$$\left(\hat{L}_r+\hat{L}_t\right)G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},t)=\delta(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_S) \tag{1.3}$$

Deux phases composent un processus de retournement temporel. Lors d'une première phase, une source active émet une impulsion. Le champ sortant $\psi(\mathbf{r}_S,t)$ et sa dérivée normale $\nabla\psi(\mathbf{r}_S,t)$ sont mesurés sur l'ensemble de la surface *S* entourant la source active.

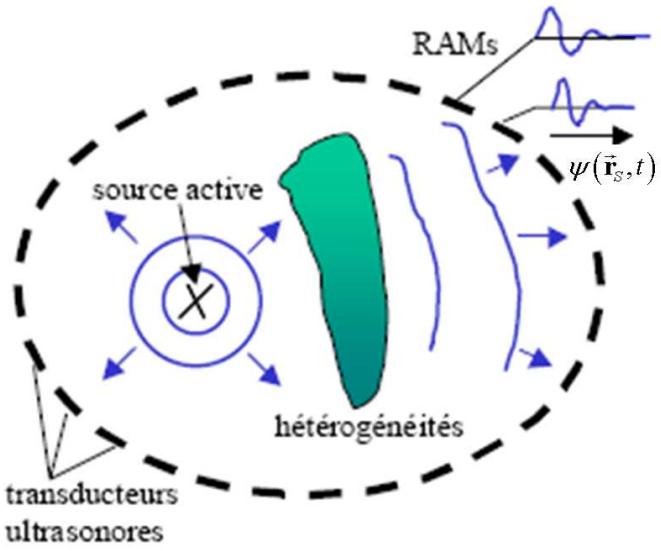


Figure I.1: Première phase, enregistrement de l'onde divergente produite par la source active sur tout le réseau entourant le milieu.

Lors de la seconde étape, les signaux sont retournés temporellement (i.e. $\psi(\mathbf{r}_S,-t)$ et $\nabla\psi(\mathbf{r}_S,-t)$), puis réémis par le MRT.

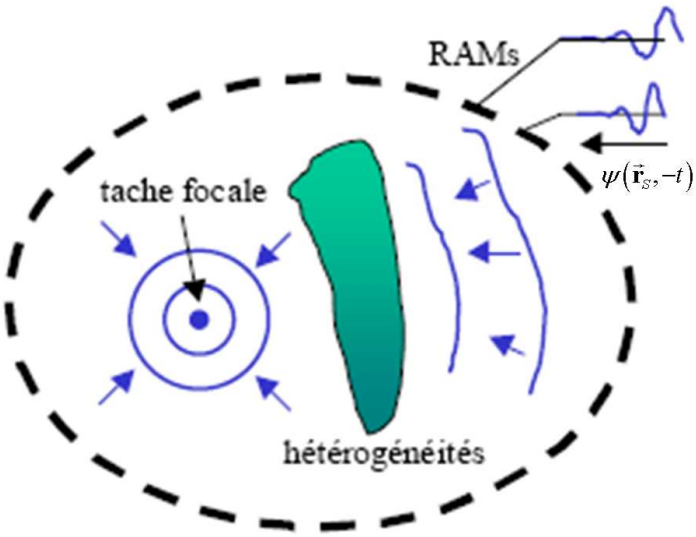


Figure I.2: Seconde phase, réémission des signaux inversés temporellement et création d'une onde convergente focalisant au niveau de la source initiale.

Les équations menant à l'expression du champ après retournement temporel sont exprimées dans le domaine fréquentiel (après transformée de Fourier). Une inversion temporelle, c'est-à-dire une transformation de t en –t, produit une conjugaison de phase dans le domaine de Fourier : $G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},-t)$ devient $G^*(\mathbf{r}_S,\mathbf{r},\omega)$. Un produit de convolution induit pour sa part une simple multiplication. Le champ ψ est lié à la fonction de Green par la relation : $\psi(\mathbf{r})=\iiint_V \rho(\mathbf{r}_0)G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})dV_0$. Dans cette expression $\rho(\mathbf{r}_0)$ représente le terme source donnant naissance au champ ψ.

Dans un milieu réciproque, pour un point source au point **r**, la fonction de Green obéit en régime monochromatique à l'équation de Helmoltz, c'est-à-dire :

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})+k^2 G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_S) \tag{1.4}$$

Une équation équivalente est écrite pour un point source en $\mathbf{r}_0$:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)+k^2 G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)=-\delta(\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_0) \tag{1.5}$$

La fonction de Green en espace libre est définie par $G_0(r)=\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ et est homogène à l'inverse d'une distance. Pour obtenir l'expression du champ créé après retournement temporel, la première expression (1.4) est multipliée par $G^*(\mathbf{r}_S,\mathbf{r}_0)$, puis le conjugué de la seconde (1.5) est multiplié par $G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})$. Une soustraction de ces deux nouvelles expressions mène à :

$$G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\nabla^2 G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})-G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\nabla^2 G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)=-\delta(\mathbf{r}_S-\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)+\delta^*(\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_0)G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r}) \quad (1.6)$$

Cette expression est intégrée sur le volume *V*. Le théorème de Green-Ostrogradski[1] permet de ramener le terme de gauche à une intégrale de surface sur *S*. L'équation se transforme en :

$$\begin{aligned}\oint_S\left[G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\nabla_{r_S}G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})-G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\nabla_{r_S}G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\right]dS=&-\iiint_V\delta(\mathbf{r}_S-\mathbf{r})G^*(\mathbf{r}_S,\mathbf{r}_0)dV\\&+\iiint_V\delta^*(\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_0)G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})dV\end{aligned} \quad (1.7)$$

Finalement, les deux membres de l'équation (1.7) sont exprimés seulement à partir des fonctions de Green :

$$\oint_S\left[G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\nabla_{r_S}G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})-G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\nabla_{r_S}G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\right]dS=\left[-G^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)+G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right] \quad (1.8)$$

ou encore :

$$\oint_S\left[G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\nabla_{r_S}G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)-G^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_S)\nabla_{r_S}G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\right]dS=-2\mathbf{i}\Im\{G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\}. \quad (1.9)$$

Cette équation traduit un processus mathématique de retournement temporel. Sous l'intégrale de surface apparaît le conjugué de la fonction de Green entre $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}_S$: les signaux émis par une source en $\mathbf{r}_0$ sont enregistrés sur la surface *S* et retournés temporellement. La fonction de Green reliant $\mathbf{r}_S$ à $\mathbf{r}$ permet ensuite de calculer le champ créé après RT à l'intérieur de la cavité. Selon le terme de droite, le champ créé est proportionnel à la partie imaginaire de la fonction de Green entre le point source $\mathbf{r}_0$ et le point $\mathbf{r}$.

Pour la fonction de Green en espace libre $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)=\frac{e^{ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|}}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|}$, le champ s'écrit près du point focal comme un simple sinus cardinal :

$$\psi_{RT}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r},\omega)=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\frac{\sin\left(k\|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}\|\right)}{\|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}\|} \quad (1.10)$$

[1] Pour deux scalaires A et B, ils vérifient $\int_V\left[A\nabla^2B-B\nabla^2A\right]dV=\oint_S\left[A\nabla B-B\nabla A\right]dS$

La largeur de la tache focale associée est par conséquent égale à $\lambda/2$. Cette taille respecte le critère physique de la diffraction pour un réseau entourant parfaitement le point focal.

I.1.2 Propriétés dans le domaine temporel

Lorsque la source est spatialement ponctuelle avec une excitation temporelle $f(t)$, le champ au point $\mathbf{r}$ s'écrit alors $\psi(\mathbf{r},t) = G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r},t) \otimes f(t)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$. La transformée de Fourier inverse de l'équation (1.9) conduit à :

$$\psi_{RT}(\mathbf{r},t) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,-t) \otimes f(-t) - G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,t) \otimes f(-t) \tag{1.11}$$

Deux termes apparaissent. Le champ après retournement temporel est le résultat de la somme d'une onde convergente et d'une onde divergente retardée au niveau du point focal $\mathbf{r}_0$.

Dans le cas d'un signal d'excitation symétrique à moyenne nulle, le signal après retournement temporel possède une symétrie qui lui est opposée, paire si $f(t)$ est impaire et inversement. Cette propriété peut en fait être déduite facilement pour une propagation en espace libre. La fonction de Green s'écrit alors $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,t) = \dfrac{\delta\left(t - \|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|/c_0\right)}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|}$, et l'équation (1.11) devient :

$$\psi_{RT}(\mathbf{r},t) = \frac{f\left(-t - \|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|/c_0\right) - f\left(t - \|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|/c_0\right)}{4\pi\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\|}. \tag{1.12}$$

Ainsi au voisinage du point $\vec{\mathbf{r}}_0$, la fonction d'onde après retournement temporel s'apparente à la dérivée du signal d'excitation. De plus, au niveau du point focal, toutes les fréquences de la bande passante se somment de façon cohérente à un instant donné pour donner naissance à une impulsion et ce quel que soit le milieu considéré (il peut être abbérateur ou dispersif). Cette propriété met en évidence la dépendance du retournement temporel à la bande passante. Plus celle-ci est large et plus la qualité de la focalisation augmente.

I.2 Transposition à l'électromagnétisme

Lors premier paragraphe, le champ était considéré comme scalaire, à l'image des ondes acoustiques. La transposition des équations au problème vectoriel de l'électromagnétisme est traitée en régime monochromatique. Dans la suite, la dépendance des différents termes à la fréquence angulaire ω est implicite afin de ne pas surcharger les équations. La théorie du

champ créé par une cavité à retournement temporel est issue de la thèse de Geoffroy Lerosey [3] et de l'article de Carminati *et al.* [4].

En se basant sur les équations de Maxwell, il est bien connu que le champ électrique obéit, dans un milieu diélectrique, à une équation de Helmholtz :

$$\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) - \frac{\omega^2}{c_0^{\,2}} \overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{r}_S) \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) = -\mu_0 \omega^2 \delta(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_0) \mathbf{p} \tag{1.13}$$

Dans cette équation, **p** représente l'amplitude du dipôle source à la fréquence angulaire ω, $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ est le tenseur relatif de permittivité, μ_0 la perméabilité du vide et $\mathbf{r}_0$ la position de la source. Nous notons $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ le tenseur dyadique des fonctions de Green, réciproque, du milieu entre les points $\mathbf{r}_S$ et $\mathbf{r}$. Il obéit naturellement à une équation similaire :

$$\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x}\, \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) - \frac{\omega^2}{c_0^{\,2}} \overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{r}_S) \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \overleftrightarrow{\mathbf{I}} \tag{1.14}$$

La propriété suivante est de plus utilisée :

$$\nabla.(\mathbf{A} \mathrm{x} \mathbf{B}) = \mathbf{B}.(\nabla \mathrm{x} \mathbf{A}) - \mathbf{A}.(\nabla \mathrm{x} \mathbf{B}), \tag{1.15}$$

Elle est appliquée aux champs $\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)$ et $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})\mathbf{n}_1$, avec $\mathbf{n}_1$ un vecteur arbitraire (il peut notamment être choisi suivant les composantes de l'espace *x*, *y* ou *z*). Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'obtenir l'équation intégrale suivante[2] :

$$\begin{aligned} \int_V \Big[\mathbf{E}(\mathbf{r}_S).\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \Big(\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 \Big) - \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 . \nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \Big(\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) \Big) \Big] \mathrm{d}V \\ = \oint_S \Big[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 \mathrm{x} \Big(\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) \Big) - \mathbf{E}(\mathbf{r}_S) \mathrm{x} \Big(\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x} \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \mathbf{n}_1 \Big) \Big] . \mathbf{n} \mathrm{d}^2 r_S \end{aligned} \tag{1.16}$$

Le vecteur **n** représente le vecteur normal à la surface *S*. Une combinaison des équations de Helmholtz permet ensuite de simplifier le premier membre. En effet, en multipliant l'équation (1.14) par $\mathbf{E}(\mathbf{r}_S, \omega)$ et l'équation (1.13) par $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S, \omega)\mathbf{n}_1$ puis en les retranchant l'une à l'autre, il vient :

[2] Pour deux champs **A**(**r**) et **B**(**r**), la seconde identité de Green s'écrit
$\int_V [\mathbf{A}.\nabla \mathrm{x} \nabla \mathrm{x} \mathbf{B} - \mathbf{B}.\nabla \mathrm{x} \nabla \mathrm{x} \mathbf{A}] d^3\mathbf{r} = \oint_S [\mathbf{B} \mathrm{x} \nabla \mathrm{x} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathrm{x} \nabla \mathrm{x} \mathbf{B}].\mathbf{n} d^2 r_S$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}_S).\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1-\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1.\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)\\ =-\mathbf{E}(\mathbf{r}_S).\mathbf{n}_1\delta(\mathbf{r}_S-\mathbf{r})+\mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1.\mathbf{p}\delta(\mathbf{r}_S-\mathbf{r}_0)\\ +\frac{\omega^2}{c_0{}^2}\left[\overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{r}_S)\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1.\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)-\overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{r}_S)\mathbf{E}(\mathbf{r}_S).\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\right]\end{aligned} \tag{1.17}$$

Le dernier terme entre crochet s'annule en réalité. En effet, si **U** et **V** sont deux vecteurs, pour tout tenseur dyadique $\overleftrightarrow{\mathbf{D}}$, ils vérifient la relation :

$$\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\mathbf{V}.\mathbf{U}=\overleftrightarrow{\mathbf{D}}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}.\mathbf{V} \tag{1.18}$$

En posant $\mathbf{U}=\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)$ et $\mathbf{V}=\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\mathbf{n}_1$, le résultat est retrouvée du fait de la symétrie du tenseur de permittivité relative $\overleftrightarrow{\varepsilon}(\mathbf{r}_S)=\overleftrightarrow{\varepsilon}^T(\mathbf{r}_S)$, provenant de la réciprocité du milieu. De plus, le tenseur dyadique des fonctions de Green est aussi réciproque, i.e. $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}^T(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})=\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_S)$. En injectant ces résultats dans l'équation (1.16), l'intégrale volumique (membre de gauche) se simplifie aisément, et mène à :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1=\mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\mathbf{p}.\mathbf{n}_1\\ -\oint_S\left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\mathrm{x}\left(\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)\right)-\mathbf{E}(\mathbf{r}_S)\mathrm{x}\left(\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\right)\right].\mathbf{n}\mathrm{d}^2r_S\end{aligned} \tag{1.19}$$

La relation étant valable pour tout vecteur $\mathbf{n}_1$. Le terme à l'intérieur de l'intégrale s'annule pour des champs sortants et nous retrouvons de ce fait le champ $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ induit par une source **p** en $\mathbf{r}_0$ provenant de l'équation (1.13) :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\mathbf{p} \tag{1.20}$$

Un processus de retournement temporel est maintenant envisagé. L'expression du champ $\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r})$ créé grâce à un miroir parfait provient de l'émission d'un champ $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)$ au niveau de la surface *S* délimitant la cavité. Le champ au niveau d'un point $\mathbf{r}$ s'écrit comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1=-\oint_S[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\mathrm{x}\left(\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)\right)\\ -\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)\mathrm{x}\left(\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\right)\Big].\mathbf{n}\mathrm{d}^2r_S\end{aligned} \tag{1.21}$$

Afin d'interpréter l'expression de l'intégrale, la surface *S* est positionnée en champ lointain. Une approximation paraxiale peut de ce fait être réalisée, et selon la condition de rayonnement de Sommerfeld pour le champ sortant $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r},\omega)\mathbf{n}_1$:

$$\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\,\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r},\omega)\mathbf{n}_1\approx\mathrm{i}\vec{\mathbf{k}}\,\mathrm{x}\,\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r},\omega)\mathbf{n}_1 \tag{1.22}$$

Le vecteur $\vec{\mathbf{k}}$ représente le vecteur d'onde du champ sortant. Pour sa part, le champ rentrant $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)$ vérifie la même condition mais en inversant $\vec{\mathbf{k}}$ en $-\vec{\mathbf{k}}$, c'est-à-dire :

$$\nabla_{\mathbf{r}_S} \mathrm{x}\, \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s) \approx -\mathrm{i}\vec{\mathbf{k}}\ \mathrm{x}\ \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s) \tag{1.23}$$

L'équation (1.21) s'exprime ainsi par :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1 = -\oint_S [&-\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1 \mathrm{x}\left(\mathbf{k}\ \mathrm{x}\ \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)\right) \\ &-\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)\,\mathrm{x}\left(\mathbf{k}\ \mathrm{x}\ \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\right)\Big].\mathbf{n}\mathrm{d}^2 r_S\end{aligned} \tag{1.24}$$

Nous développons les termes à l'intérieur de l'intégrale en se fondant sur [3]. Le vecteur $\vec{\mathbf{k}}$ est perpendiculaire à $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)$ et $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r},\omega)\mathbf{n}_1$. Ces considérations mènent à :

$$\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1 = -2\mathrm{i}\oint_S \left[\left(\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1.\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)\right)\mathbf{k}\right].\mathbf{n}\mathrm{d}^2 r_S \tag{1.25}$$

Dans cette hypothèse de champ lointain, l'interprétation de l'intégrale se révèle plus évidente. L'expression (1.25) fait apparaître le champ retourné temporellement sur la surface *S*, i.e. le conjugué du champ $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_s)$. Le produit scalaire avec $\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r},\omega)\mathbf{n}_1$, dirigé suivant le vecteur d'onde rentrant (**-k**), permet de calculer le champ résultant à l'intérieur du volume.

L'expression de l'intégrale présente dans l'équation (1.21) ressort en appliquant le même raisonnement mis en œuvre pour l'équation (1.19) avec maintenant $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_S)$. Ce raisonnement produit directement:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^*(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1 = \mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\mathbf{p}^*.\mathbf{n}_1 \\ -\oint_S\left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_S,\mathbf{r})\mathbf{n}_1 \mathrm{x}\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\mathbf{E}^*(\mathbf{r}_S) - \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_S)\,\mathrm{x}\nabla_{\mathbf{r}_S}\mathrm{x}\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r}_s,\mathbf{r})\mathbf{n}_1\right].\mathbf{n}\mathrm{d}^2\mathbf{r}_S\end{aligned} \tag{1.26}$$

Ainsi, à partir des équations (1.20) et (1.21), le champ après renversement du temps se simplifie en :

$$\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r}).\mathbf{n}_1 = \mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\mathbf{p}^*.\mathbf{n}_1 - \mu_0\omega^2\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\mathbf{p}^*.\mathbf{n}_1 \tag{1.27}$$

Finalement, la relation fondamentale liant le champ au tenseur des fonctions de Green émerge telle que :

$$\mathbf{E}_{TR}(\mathbf{r}) = -2\mathrm{i}\mu_0\omega^2\Im\left[\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right]\mathbf{p}^* \tag{1.28}$$

[3] En partant de **u** x (**v** x **w**) = (**u**.**w**)**v** - (**u**.**v**)**w** pour tous vecteurs **u**,**v** et **w**

Comme dans le cas des ondes scalaires, le champ après RT est de nouveau dicté par la partie imaginaire des fonctions de Green du milieu diélectrique. Le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques lui est ajouté. Lorsqu'un dipôle émet avec une certaine polarisation (contenue dans le vecteur **p**) au point $\mathbf{r}_0$ et que le champ est retournée temporellement suivant toutes les polarisations sur une surface fermée, le champ engendré à l'intérieur de la cavité est égal à la partie imaginaire du tenseur dyadique des fonctions de Green entre $\mathbf{r}_0$ et **r**, avec un facteur multiplicatif $-2\mathrm{i}\mu_0\omega^2$. Les propriétés de focalisation des ondes scalaires sont conservées, notamment concernant la taille de la tache focale.

En repassant dans le domaine temporel, l'expression (1.28) s'écrit :

$$\mathrm{E}_{TR}(\mathbf{r},t) = \mu_0\left(\overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,t) - \overleftrightarrow{\mathbf{G}}(\mathbf{r},\mathbf{r}_0,-t)\right) \otimes \frac{\partial^2 \mathbf{p}(-t)}{\partial t^2} \tag{1.29}$$

Cette équation fait de nouveau ressortir la somme d'une onde convergente et d'une onde divergente. Le champ est proportionnel à la dérivée seconde du dipôle source, à l'image du champ rayonné par celui-ci.

I.3 Retournement temporel en milieux complexes

Pour un miroir entourant totalement le milieu considéré, les vecteurs d'onde $\vec{k}$ décrivent un angle solide égal à 4π stéradians. L'onde convergente provient de ce fait de toutes les directions de l'espace et la tache focale obtenue est égale $\lambda/2$. Toutefois, il est généralement peu probable d'avoir concrètement accès à une telle ouverture, tant du fait du milieu considéré que des moyens mis à disposition. L'ouverture du réseau demeure la plupart du temps limitée. Dans les milieux faiblement abbérateurs, les propriétés du retournement temporel peuvent en partie compenser la perte d'information spatiale due à cette faible ouverture. Cette remarquable propriété sera largement utilisée dans la partie II et nécessite naturellement une introduction de certains travaux fondateurs. Deux cas de figure sont approfondis dans cette section : le RT en cavité réverbérante fermée et le RT en espace ouvert à travers une forêt de tiges.

I.3.1 Cavité réverbérante

Au niveau de l'ouverture d'une cavité réverbérante est disposé est disposé un réseau d'émetteurs-récepteurs (Figure I.3). Lorsqu'une source émet une onde à l'intérieur de la cavité, les signaux enregistrés sur le réseau prennent la forme d'une coda (signal très étalé

temporellement) du fait des nombreuses réflexions à l'intérieur de la cavité. Le signal peut être interprété comme provenant, en espace libre, d'une infinité de sources virtuelles disposées tout autour de la cavité. Elles sont les images de la source initiale par rapport aux parois. Après retournement temporel, le champ va subir les mêmes réflexions en chronologie inverse. L'onde convergente va sembler ainsi isotrope au moment de la focalisation spatio-temporelle.

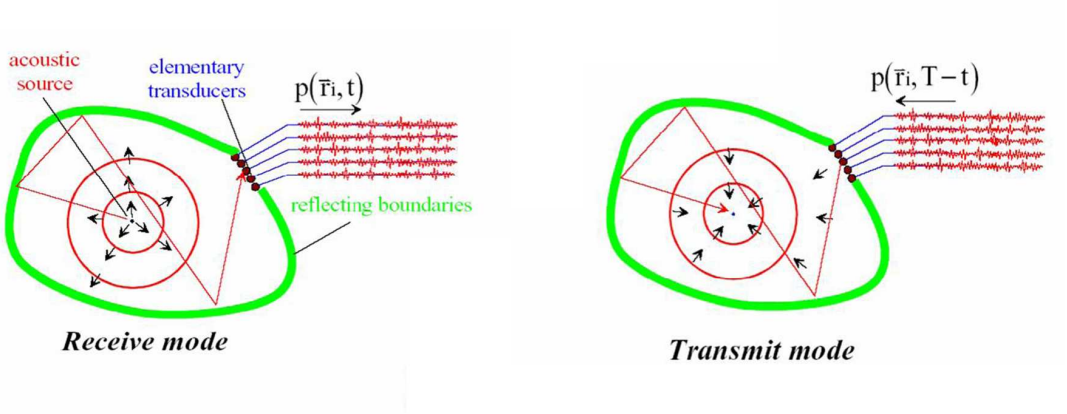


Figure I.3: (gauche) Phase initiale : enregistrement des signaux sur le réseau, (droite) Réémission des signaux retournés temporellement à partir du réseau (figure provenant de [5]).

L'information spatiale contenue par les vecteurs d'onde $\vec{k}$ est transformée en information temporelle contenue dans la longueur du signal. La perte de diversité spatiale due à l'ouverture limitée du miroir est compensée par les différentes réflexions à l'intérieur de la cavité. La focalisation isotrope au niveau de la source initiale induit une tache focale de nouveau égale à $\lambda/2$.

Carsten Draeger et Mathias Fink ont appliqué ce principe à une plaque de Silicium à l'aide d'ondes élastiques [6]. Le miroir à RT est composé d'un seul élément. Les ondes sont générées par des transducteurs liés à des pointes en aluminium au contact de la plaque (Figure I.4). Le signal source émis au point A consiste en une impulsion de forme gaussienne de largeur 0,5 µs à 1 MHz. La différence d'impédance très importante entre le silicium et l'air garantit des pertes d'énergie par rayonnement très faibles à l'intérieur de la plaque. Par conséquent, la coda reçue sur un point de la cavité s'étale sur une très longue durée en comparaison de l'excitation. Le signal reçu au point B a en effet été enregistré durant 700 µs.

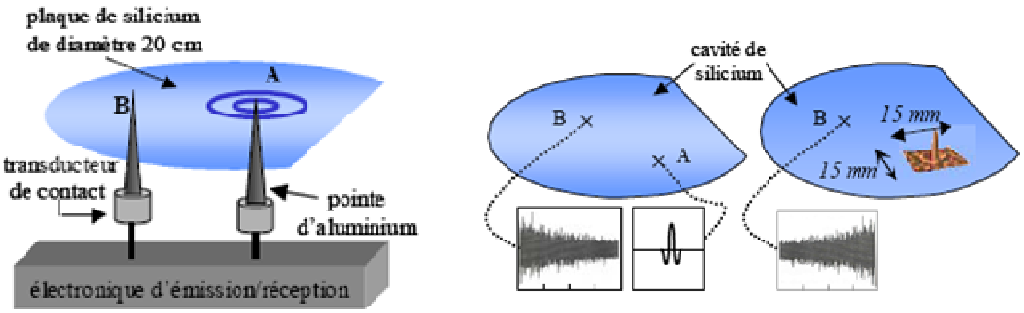


Figure I.4: (Gauche) Dispositif expérimental de retournement temporel utilisant un MRT ne contenant qu'un seul élément. (Droite) Retournement temporel et champ cartographié. La mesure de la tache focale est réalisée à l'aide d'un interféromètre hétérodyne.

Après retournement temporel effectué au point B, le champ est scanné au point A à l'aide d'un interféromètre hétérodyne. On observe bien sur la Figure I.5 une tache focale isotrope, mesurée égale à une demi-longueur d'onde, $\delta = \lambda/2$. Celle-ci résulte de plus de la superposition d'une onde convergente et d'une onde divergente.

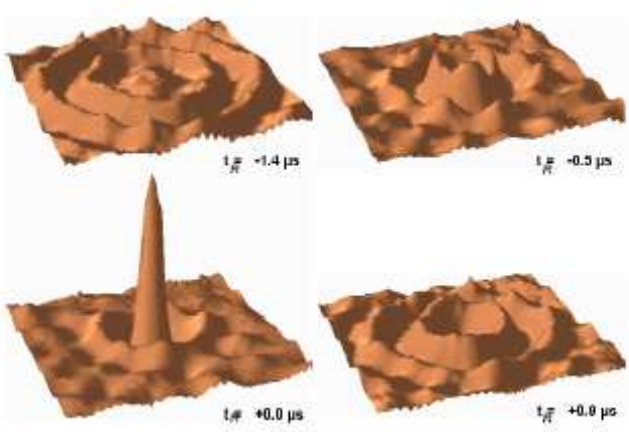


Figure I.5: Cartographie du champ après RT proche du point de focalisation.

Comme décrit dans le paragraphe précédent, la perte d'information spatiale due à l'utilisation d'un seul élément pour le MRT est compensée par la durée de la réponse transitoire dans la plaque. En réalité, pour obtenir une bonne focalisation, il n'est pas nécessaire de réémettre l'intégralité du signal mesuré. Il suffit en effet de s'assurer de posséder une largeur de fenêtre temporelle durant laquelle les rayons générés par la source ont atteint au moins une fois la surface complète de la cavité. La focalisation après RT est dans ce cas isotrope ($\delta = \lambda/2$). Cette durée minimale est appelée temps de mélange de la cavité. Le RT en cavité réverbérante

est ainsi équivalent à la disposition d'un miroir à retournement temporel *complet*, c'est-à-dire possédant une ouverture d'angle solide de 2π stéradians (en 2D) ou 4π stéradians (en 3D).

Il existe une seconde durée à partir de laquelle le rapport entre l'amplitude de la focalisation et les lobes secondaires est constant. La largeur de cette fenêtre est reliée à la densité de modes dans la cavité et est nommée *Temps d'Heisenberg*. Ce temps de saturation dépend de la distance moyenne entre deux modes de la cavité $\Delta\omega$ par la relation $\tau_{Heisenberg} = 1/\Delta\omega$.

En électromagnétisme, les premières études de renversement du temps dans une cavité réverbérante ont été menées par Lerosey *et al.* en 2004 dans une chambre dont les parois étaient couvertes de feuilles d'aluminium. Les expériences étaient réalisées en bande de base avec tout d'abord avec une très faible bande passante (5 MHz) [7], puis plus large bande (150 MHz) [8]. Les auteurs ont vérifié que la tache focale obtenue était bien de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

I.3.2 Milieux aléatoires

Après avoir étudié les propriétés du retournement temporel en cavité réverbérante, nous nous intéressons aux espaces ouverts. Pour un milieu homogène ou faiblement abbérateur, dans l'approximation de Fresnel, la tache focale due à un MRT linéaire d'ouverture D à une distance focale F est égale à $\delta = \frac{\lambda F}{D}$, si $F >> D$. Dans le cas d'un milieu complexe, même en espace ouvert, la taille *virtuelle* du réseau peut être largement augmentée. La première expérience de retournement temporel à travers un milieu aléatoire a été menée en 1995 par Derode *et al*. [9].

Dans cette expérience, un échantillon de tiges distribuées aléatoirement est situé entre une source et le miroir à retournement temporel (Figure I.6). Bien que la source émette une impulsion brève (de l'ordre de 1 µs), le signal enregistré sur le MRT dure plus de 160 µs. En effet, l'onde à l'intérieur de la forêt de tige est placée en régime de diffusion multiple, ce qui crée une coda à sa sortie.

Le signal ainsi enregistré et stocké en mémoire est retourné temporellement et réémis (Figure I.6). L'onde après avoir traversé de nouveau la forêt de tiges vient se compresser tant temporellement que spatialement au niveau de la source initiale.

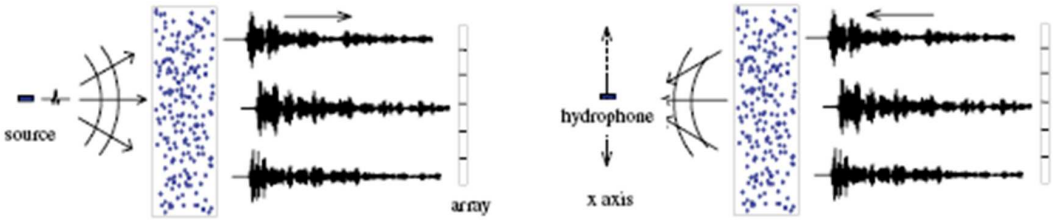


Figure I.6: (Gauche) Phase initiale : enregistrement des signaux sur le réseau de transducteurs. (Droite) Réémission des signaux retournés temporellement à partir du réseau (figure provenant de [10]).

En déplaçant un hydrophone parallèlement au MRT et à la distance du point source initial, les auteurs ont mesuré une tache focale à -6 dB égale à 1,5 mm, à comparer avec sa valeur en eau libre égale à 20 mm (voir Figure I.7). En présence du milieu aléatoire et contrairement aux milieux homogènes, la taille de la tache focale n'est plus dictée par l'ouverture angulaire du réseau. En effet, grâce à la diffusion multiple à l'intérieur du milieu, la diversité spatiale du signal est plus importante qu'en espace libre.

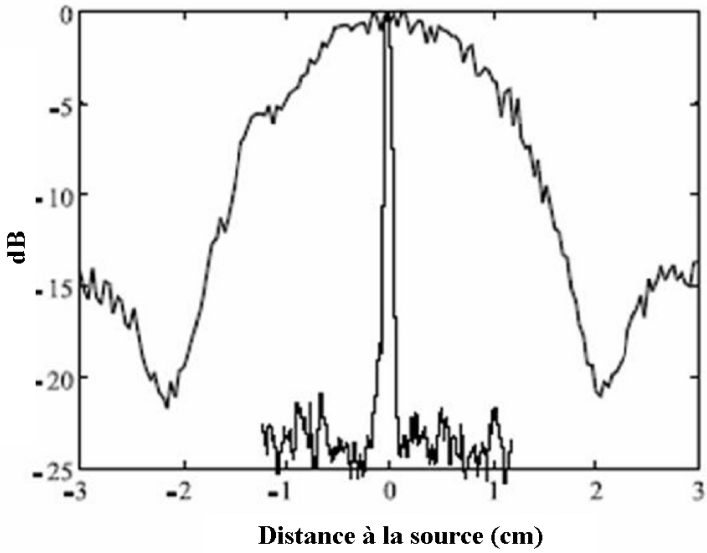


Figure I.7: Focalisation spatiale du MRT en présence de la forêt de tiges (trait épais) et seulement dans l'eau (trait fin).

L'onde convergente après RT provient de toutes les directions qui avaient été excitées lors de la phase « aller ». La largeur de la tache est alors limitée par l'ouverture angulaire de l'échantillon.

Les remarquables résultats du retournement temporel en milieu complexe seront largement utilisés dans la partie sur l'amplificateur d'ondes électromagnétiques afin de créer des impulsions de forte amplitude à partir d'une chambre réverbérante ouverte.

I.4 Méthode de caractérisation de milieux diffusants

I.4.1 Retournement temporel itératif

Initialement, le retournement temporel avait été développé pour focaliser une onde à l'emplacement d'une source active. Dans ce qui suit, le RT est appliqué à la détection et l'imagerie de cibles passives. Afin d'en illustrer le principe, nous considérons en premier lieu un milieu dans lequel sont situées, à la même distance d'un réseau émetteur/récepteur de N antennes, deux cibles 1 et 2. La cible 1 possède un coefficient de réflexion d'amplitude λ_1 et la cible 2 d'amplitude de $\lambda_1/2$. Le milieu est tout d'abord illuminé par une émission arbitraire, par exemple une onde plane. Les signaux enregistrés sur le réseau en rétrodiffusion proviennent alors de l'écho de deux cibles. L'amplitude du front d'onde provenant de A est proportionnelle à λ_1 et celle provenant de B proportionnelle à $\lambda_1/2$.

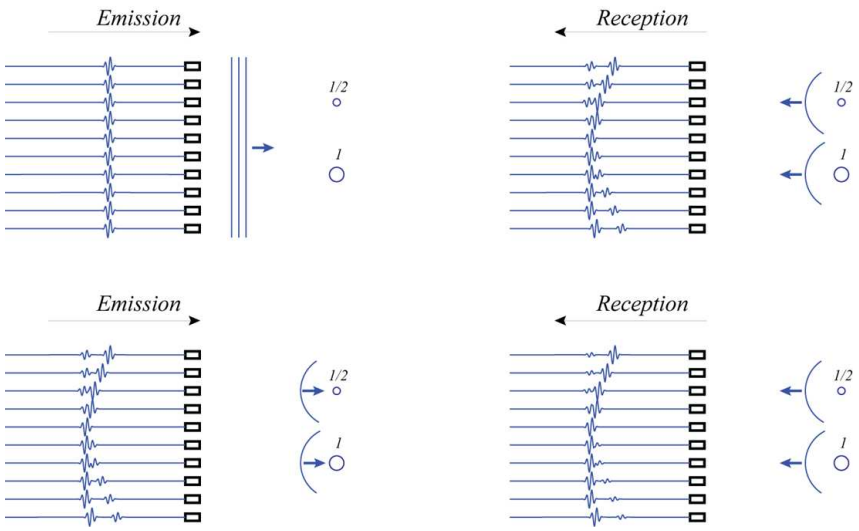


Figure I.8: Principes du retournement temporel itératif et focalisation sur la cible la plus forte.

Un retournement temporel est ensuite appliqué aux signaux. Grâce à ce principe, chaque front d'onde focalise sélectivement sur la cible correspondante. L'amplitude de la focalisation est

respectivement proportionnelle à λ_1 et $\lambda_1/2$ pour les cibles 1 et 2. Les signaux sont de nouveau rétrodiffusés et enregistrés sur réseau. Les fronts d'onde sont maintenant d'amplitude λ_1^2 pour la cible 1 et $\lambda_1^2/4$ pour la cible 2.

Au $n^{\text{ème}}$ processus de RT, les deux amplitudes deviennent λ_1^n et $\lambda_1^n/2^n$. De ce fait, lorsque n est grand, la contribution résultant de la cible 1 devient beaucoup plus importante que celle associée à la cible 2. Prada et *al.* ont démontré que l'écho de la cible la plus échogène pouvait ainsi être isolée [11]. En retranchant l'écho de la cible 1 obtenu après n itérations aux signaux enregistrés après la première itération, l'écho provenant de la cible 2 peut elle-même être isolée. Ces deux échos des cibles constituent les invariants du processus de RT. La méthode demeure notamment efficace si les cibles sont placés derrière un milieu abbérateur [12], un cas de figure courant en acoustique médicale notamment.

Toutefois, la séparation des cibles peut se faire plus efficacement en travaillant sur la matrice de transfert reliant les réponses en émission et en réception. Ceci constitue le principe de la méthode DORT détaillée dans le paragraphe suivant.

I.4.2 Méthode DORT

Dans l'exemple précédent, le retournement temporel itératif était effectué à l'aide d'un unique réseau en émission/réception. La méthode DORT (acronyme pour décomposition de l'opérateur de retournement temporel) avait été initialement développée dans ce type de configuration en acoustique. Néanmoins elle s'applique aussi dans le cas de deux réseaux distincts en émission en réception. Les premières expériences dans cette nouvelle configuration ont été menées en acoustique par Prada *et al.* pour la détection de défauts à l'intérieur d'échantillons solides [13]. Dans le domaine des micro-ondes, ce dispositif fut plus récemment mis en œuvre par Moura et Jin pour la détection de cibles à l'intérieur d'une forêt de diffuseurs [14, 15]. Pour des raisons techniques, nous nous sommes placés dans cette configuration pour les expériences en micro-ondes exposées dans ce manuscrit. Les deux réseaux nommés A et B sont formés respectivement de N^A et N^B antennes. Lorsque l'antenne j du réseau A émet un signal de la forme $e_j(t)$, la réponse $r_i(t)$ mesurée sur l'antenne i du réseau B est donnée par :

$$r_i(t) = K_{ij}(t) \otimes e_j(t) \tag{1.30}$$

Le symbole $\otimes$ représente le produit de convolution. Le terme $K_{ij}(t)$ contient la réponse du milieu à un Dirac (réponse impulsionnelle), entre les antennes *j* et *i*. L'étude est par la suite réalisée dans le domaine de Fourier. En effet, un produit de convolution dans le domaine temporel se transforme avantageusement en une simple multiplication dans le domaine fréquentiel. Ainsi, l'équation précédente s'écrit sous la forme d'une relation matricielle :

$$\mathbf{R}_1(\omega) = \mathbf{K}(\omega)\mathbf{E}_0(\omega) \tag{1.31}$$

Le vecteur d'émission $\mathbf{E}_0$, le vecteur en réception $\mathbf{R}_1$ et la matrice $\mathbf{K}(\omega)$ sont de dimensions respectives N^Ax1, N^Bx1 et N^BxN^A. La dépendance fréquentielle est implicite par la suite. Contrairement au cas d'un seul réseau en émission/réception, la matrice **K** contenant les réponses inter-éléments n'est a priori plus symétrique.

Un processus de retournement temporel peut être décrit à partir de la matrice **K**. Le vecteur conjugué en phase de $\mathbf{R}_1$ (i.e. retourné temporel) est transmis par le réseau B. Le vecteur en réception sur le réseau A s'écrit alors $\mathbf{R}_2 = {}^t\mathbf{K}\mathbf{K}^*\mathbf{E}_0^*$. Une nouvelle conjugaison de phase fait apparaître le vecteur $\mathbf{E}_2 = \mathbf{R}_2^* = \mathbf{K}^H\mathbf{K}\mathbf{E}_0$ [4]. Celui-ci est linéairement lié au vecteur initial en émission par l'intermédiaire de la matrice $\mathbf{K}^H\mathbf{K}$. En réalisant le même processus avec une émission initiale par le réseau B, une seconde matrice $\mathbf{K}\mathbf{K}^H$ est mise en évidence. Ces deux matrices $\mathbf{K}^H\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}\mathbf{K}^H$, dénommées Opérateurs de Retournement Temporel (ORT), sont à symétrie hermitienne et *de facto* diagonalisables.

La diagonalisation des deux ORT s'écrit comme :

$$\begin{cases} \mathbf{K}^H\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{N_A} \mathbf{U}_j \lambda_j \mathbf{U}_j^H \\ \mathbf{K}\mathbf{K}^H = \sum_{j=1}^{N_B} \mathbf{V}_j \lambda_j \mathbf{V}_j^H \end{cases} \tag{1.32}$$

Les vecteurs propres $\mathbf{U}_j$ et $\mathbf{V}_j$ constituent les invariants des ORT pour les réseaux A et B. Ils sont associés aux valeurs propres réelles et positives λ_j et distribuées telles que $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n$.

Les invariants de l'ORT peuvent en fait être directement extraits de la décomposition en valeurs singulières (« singular value decomposition », *svd*, en anglais) de la matrice **K**. La *svd* s'écrit à partir de l'équation (1.32) par :

[4] L'exposant ^{H} signifie complexe-conjugué ($\mathbf{K}^H = {}^t\mathbf{K}^*$)

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{\min(N_A,N_B)} \mathbf{U}_j \sigma_j \mathbf{V}_j^H \tag{1.33}$$

Les valeurs singulières σ_j sont de nouveau réelles et positives et égales aux racines carrées des valeurs propres λ_j, telles que $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$.

Dans le cas de cibles ponctuelles, de diffusion isotrope et résolues dans le milieu, Prada *et al.* ont montré qu'à chaque cible correspondait un invariant [16]. L'émission des vecteurs $\mathbf{U}_j$ et $\mathbf{V}_j$ à partir des réseaux respectivement A et B génère un front d'onde qui focalise sur la cible qui leur est associée.

<u>Quelques Propriétés de la *svd*</u> :

- Les vecteurs singuliers sont normés et orthogonaux, i.e. $\langle \mathbf{V}_j \mid \mathbf{V}_i \rangle = \mathbf{V}_j^H \mathbf{V}_i = \delta_{ij}$, où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. Il est égal à 1 si $i = j$, 0 sinon. Les vecteurs singuliers forment donc une base orthonormée de l'espace.
- La relation définie par la *svd* peut aussi s'écrire $\mathbf{K}\mathbf{V}_j = \sigma_j \mathbf{U}_j$ et réciproquement $\mathbf{K}^H \mathbf{U}_j = \sigma_j \mathbf{V}_j$.
- Dans le domaine fréquentiel, les vecteurs singuliers sont définis à un terme de phase près. En effet, puisque $\mathbf{K}\mathbf{V}_j = \sigma_j \mathbf{U}_j$, alors ils vérifient aussi $\mathbf{K}\mathbf{V}_j e^{i\phi} = \sigma_j \mathbf{U}_j e^{i\phi}$, $\forall \phi$. Cette indétermination arbitraire est levée différemment suivant l'algorithme utilisé pour la *svd*. Dans ce manuscrit, la *svd* est réalisée avec le logiciel Matlab©. Son algorithme fixe la phase du premier élément de $\mathbf{V}_1$ à 0 ou π.

I.4.3 Repropagation des vecteurs singuliers

Pour des cibles ponctuelles isotropes et résolues, les invariants des ORT fournissent les fronts d'onde qui permettent de focaliser séparément sur chaque cible du milieu. Ils peuvent donc être utilisés pour les localiser. Pour ce faire, les vecteurs singuliers sont comparés aux fonctions de Green du milieu entre les deux réseaux d'antennes et chaque point **r** du milieu.

Pour le n^{ème} vecteur singulier $\mathbf{U}_n$, associé au réseau en réception, la carte des corrélations est fournie (à une fréquence) par :

$$W_1(\mathbf{r}) = \left|\left\langle \mathbf{U}_n \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right|^2 \tag{1.34}$$

Le produit scalaire <**A**|**B**> s'écrit $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{B}$. La $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r})$ est la fonction de Green entre la $i^{\text{ème}}$ antenne en réception et le point **r** de l'espace. Une opération identique peut être réalisée avec le réseau en émission. Ainsi, W_1 est maximum lorsque **r** est positionné au niveau de la cible associée au vecteur $\mathbf{U}_n$. On peut interpréter l'équation (1.34) comme étant la repropagation numérique du conjugué complexe du vecteur $\mathbf{U}_n$ dans un milieu décrit par les fonctions de Green contenues dans $\mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r})$.

Pour tirer parti de la repropagation à partir des deux réseaux, une méthode consiste à additionner de façon incohérente les deux contributions, i.e. sommer directement leurs modules :

$$W_1(\mathbf{r}) = \left(\left|\left\langle \mathbf{U}_n \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right| + \left|\left\langle \mathbf{V}_n^{*} \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right|\right)^2 \tag{1.35}$$

Dans ce cas, la résolution latérale est déterminée par l'ouverture la plus faible des deux réseaux. Néanmoins, le croisement des deux faisceaux permet d'améliorer sensiblement la résolution axiale de la tache.

Afin d'améliorer la résolution latérale en profitant de l'ouverture totale des réseaux, il est possible de procéder à une sommation cohérente des contributions. Cependant, l'existence de la phase arbitraire engendrée par la *svd* entre les vecteurs singuliers en émission et en réception (voir la section I.4.2) induit un décalage de phase au point focal. Deux manières existent pour lever l'indétermination. La première se fonde sur une hypothèse de cohérence des signaux provenant des deux réseaux au point focal. La phase arbitraire $\delta\varphi$ s'écrit alors comme la différence de phase en ce point entre les deux repropagations. La carte du champ repropagé est donnée par :

$$W_1(\mathbf{r}) = \left(\left|\left\langle \mathbf{U}_n \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle + e^{i\delta\varphi}\left\langle \mathbf{V}_n^{*} \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right|\right)^2 \tag{1.36}$$

Les deux contributions seront bien en phase au niveau du point focal et la largeur de la tache focale sera dictée par l'ouverture totale des deux réseaux. Cependant cette approche se révèle quelque peu artificielle car on détermine le point focal et donc la phase $\delta\varphi$ à partir d'une repropagation incohérente, c'est-à-dire à partir de l'équation (1.35). Si la tache focale latérale est artificiellement réduite, la méthode n'améliore pas l'incertitude sur l'emplacement de la cible.

La seconde approche consiste à enchevêtrer les deux réseaux, c'est-à-dire intercaler une antenne en réception entre deux antennes en émission et inversement. L'hypothèse de continuité de la phase sur l'ensemble des deux réseaux à une fréquence donnée permet alors de recaler l'évolution de la phase et de déterminer la phase arbitraire $\delta\varphi$.

I.4.4 Dispositifs expérimentaux

Les expériences ont été réalisées à l'aide de deux dispositifs différents. Comme nous l'avons précédemment mentionné, les deux réseaux y sont distincts. Les deux montages présentés ci-dessous possèdent des spécificités particulières. Ainsi, le choix du dispositif employé dépendra des spécificités de chaque situation. L'utilisation d'un analyseur de réseau N5230A PNA-L (Agilent) afin de mesurer la transmission entre chaque couple d'antennes est toutefois commun aux deux montages. Les signaux sont donc enregistrés dans le domaine fréquentiel.

a) Réseau synthétique avec les antennes cornet

Un premier montage met en jeu des antennes cornet guidées par un rail. Leur bande passante s'étale entre 1,5 et 3,5 GHz et leur ouverture angulaire est de 28°. Elles sont polarisées suivant un champ E vertical. Le déplacement de chaque antenne crée deux réseaux virtuels et la réponse en transmission entre chaque couple de positions permet d'acquérir la matrice **K**. Les antennes étant très directives, leur socle est automatisé en rotation afin de pointer vers la cible. Des panneaux anéchoïques sont placés derrières les cibles pour diminuer les échos parasites provenant des murs.

Comme les expériences ne sont pas toujours réalisées en chambre anéchoïque et grâce à la directivité des antennes, ce montage possède un avantage certain lorsque la manipulation requiert de très bons rapports signal/bruit. De plus, le nombre de positions n'est pas dicté par le nombre de voies disponibles mais par le nombre de déplacements réalisés. La longueur du rail autorise à une ouverture totale de 3m. Ces caractéristiques confèrent une grande souplesse dans l'acquisition de la matrice **K**. En revanche, le principal inconvénient réside dans le long temps d'acquisition de la matrice (de l'ordre de la demi-heure) du fait du déplacement des antennes entre les mesures.

Dans la suite, il sera pris en compte que les antennes cornet se comportent comme des guides d'onde. En mesurant la réponse en transmission de deux antennes face à face, le temps d'arrivée de l'impulsion présente un décalage temporel par rapport à une propagation en espace libre. Pour caractériser ce décalage, une vitesse de phase équivalente égale

2,48 10^8 m.s^{-1} est introduite. Cette différence avec la vitesse de phase dans l'air (3 10^8 m.s^{-1}) est à prendre en compte notamment pour la repropagation numérique des vecteurs singuliers.

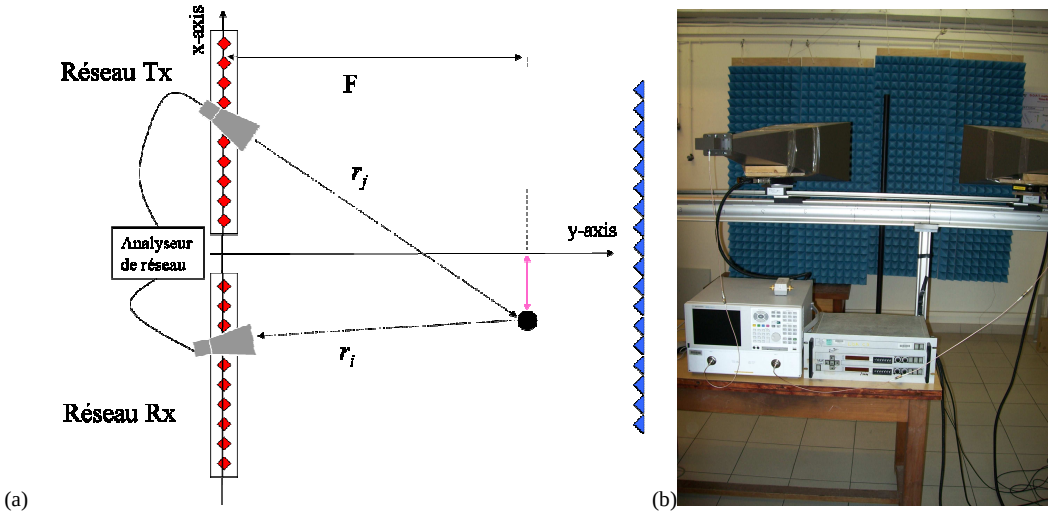


Figure I.9: (a) Configuration expérimentale pour une cible placée devant un panneau anéchoïque. (b) Photographie du premier montage dans le cas d'un cylindre.

b) Réseau effectif avec commutateurs

La seconde configuration ne nécessite plus de déplacement des antennes à la main. En effet, deux réseaux linéaires contenant jusque huit antennes sont connectés à l'analyseur de réseau par l'intermédiaire de deux commutateurs électromécaniques. Ces derniers permettent de choisir successivement tous les couples d'antennes composant la matrice **K**. La calibration de l'analyseur est réalisée sur la sortie de la première voie des commutateurs. Cette méthode suppose néanmoins que chaque voie du commutateur possède un comportement identique en fréquence.

Les deux réseaux distincts sont formés soit par des antennes Vivaldi (voir Figure I.10), assez peu directives mais large bande (1.5 à 8 GHz), soit par des antennes fouet dipolaires de plus faible bande passante, 2 à 4 GHz (mais moins encombrantes). Ce montage peut être placé à l'intérieur de la chambre anéchoïque d'un m^3 présente au laboratoire. Avec ce dispositif, pour une acquisition de 6401 points avec un filtre IF de 30 kHz et un temps de balayage de 700 µs pour chaque couple d'antenne, la mesure de la matrice **K** dure moins de 3 minutes. Toutefois, la faible directivité des antennes peut diminuer nettement le rapport signal/bruit de l'écho des cibles.

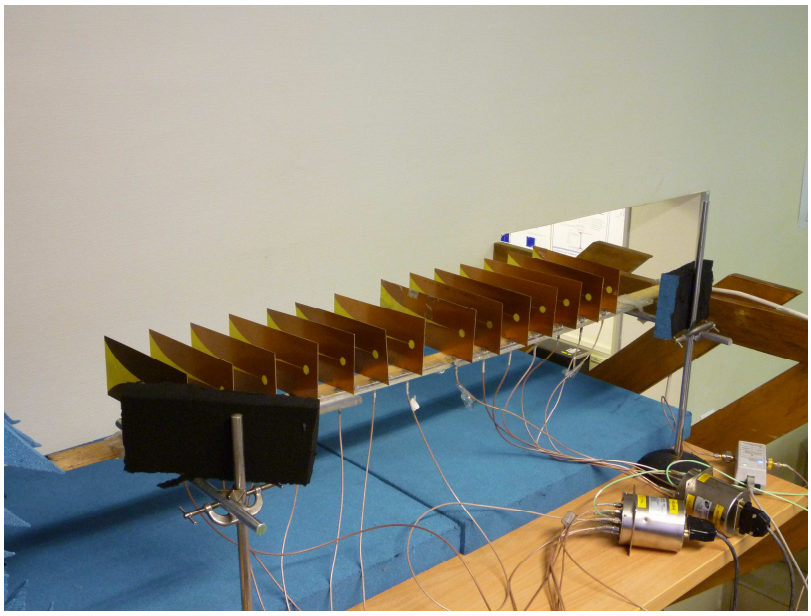


Figure I.10: Photographie du second montage utilisé pour l'application de la méthode DORT.

II. Amplificateur de micro-ondes par RT

II.1 Contexte de l'étude et configurations envisagées

Financé par la Direction Générale de l'Armement (DGA), le projet exposé dans ce chapitre consiste à développer un amplificateur d'ondes électromagnétiques par retournement temporel. Il doit permettre la génération d'impulsions de forte amplitude. Cette étude s'inscrit dans le contexte de la guerre électromagnétique. Selon la DGA, le développement des Impulsions Electromagnétiques Intentionnelles (IEMI : International Electromagnetic Interference) pourrait révolutionner la défense du territoire. En effet, ces armes serviront à la perturbation ou encore la destruction des circuits électroniques qui commandent les dispositifs modernes. La possession de cette technologie conférera un avantage tactique certain aux pays qui la maîtriseront.

Plus précisément, la protection anti-missile, le déminage d'un couloir sécuritaire ou encore la paralysie d'un réseau de transmission forment une liste non exhaustive d'applications concernées par les IEMI. Les technologies existantes (Klystrons, Magnétrons…) nécessitent de fortes puissances pour fonctionner et restent très lourdes à mettre en œuvre. Ainsi, le développement de prototypes intégrables concrètement dans des volumes plus réduits intéresse fortement la DGA.

Dans ce contexte, l'utilisation des propriétés de focalisation spatio-temporelle du retournement temporel paraît pertinente. En effet, lorsqu'un signal de durée longue est focalisé par RT, la compression d'impulsion de l'onde engendre un gain au niveau de l'amplitude du signal focalisé. La première étude menée sur cette thématique a été accomplie par Montaldo *et al.* [17]. Leur objectif consistait à générer en acoustique des ondes de choc à la sortie d'un guide d'onde. Dans un premier temps, une impulsion de durée égale à 2 µs, à la fréquence de 1 MHz pour une bande passante de 75%, est engendrée en un point source S à l'extérieur du guide (Figure II.1). Les signaux sont enregistrés à l'autre bout du guide à l'aide de 7 transducteurs piézo-électriques constituant le Miroir à Retournement Temporel (MRT). Du fait de la réverbération sur les parois du guide, les signaux reçus sur le MRT possèdent un étalement temporel important, ici de l'ordre de 2000 µs, soit 1000 fois la durée de l'impulsion initiale.

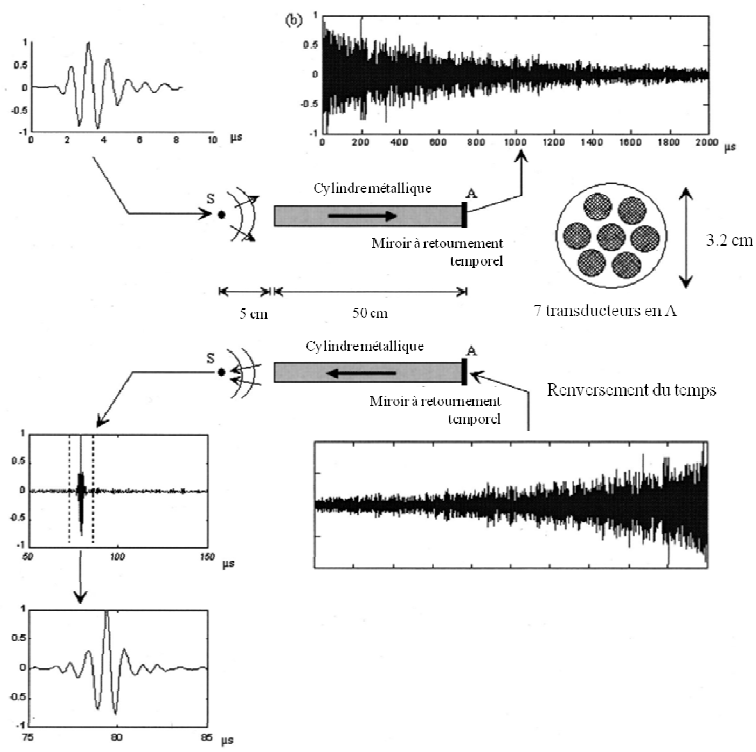


Figure II.1: Dispositif expérimental de la génération d'ondes de choc en sortie de guide d'onde par retournement temporel (Montaldo *et al.* [17]).

Après réémission du signal renversé temporellement, une remarquable compression temporelle est obtenue au niveau du point S. La durée de l'impulsion générée après RT est identique à l'impulsion initiale, soit 2 µs. Le point clef pour obtenir une amplitude importante consiste à réémettre le signal retourné temporellement avec une puissance maximale. Les effets de compressions spatiale et temporelle assurent alors une impulsion de forte amplitude. En comparant le signal après RT avec celui qui aurait été obtenu sans le guide (émission en eau libre), de remarquables gains (de l'ordre de quinze) sont mesurés.

Pour notre projet en micro-ondes, à l'image du dispositif expérimental employé par Montaldo *et al.*, le premier prototype envisagé était constitué d'un guide d'onde. La gamme de fréquence est centrée sur 2,7 GHz, elle correspond donc à des longueurs d'onde décimétriques. Pour obtenir des performances intéressantes, la longueur du guide est estimée à une centaine de longueur d'onde, soit au minimum 10 m. Cette dimension était incompatible avec une étude dans les pièces de notre laboratoire, de tailles trop réduites. Pour obtenir des signaux étalés temporellement, nous nous sommes alors dirigés vers une cavité réverbérante possédant une ouverture sur une des faces. Cette ouverture permet de laisser s'échapper une

partie de l'énergie hors de la cavité afin que la focalisation s'accomplisse à l'extérieur de celle-ci. Le schéma de principe est illustré sur la Figure II.2.

Les premières manipulations ont été réalisées avec une chambre réverbérante constituée d'un bac de 1 m^3 dont les parois sont recouvertes de papier aluminium. Dans un second temps, l'achat d'une chambre à la société SIEPEL a permis de diminuer les pertes à travers les parois et ainsi d'augmenter le temps de réverbération des signaux à l'intérieur de la cavité.

Lors de ce chapitre, la première partie consiste en une approche théorique de la focalisation par retournement temporel grâce à la cavité réverbérante. Les résultats expérimentaux sont par la suite développés et nous examinerons les performances du démonstrateur. Enfin, lors des deux dernières sections, la détection de diffuseurs à l'aide d'un réseau d'antennes dans la cavité et la focalisation à l'intérieur d'un missile sont abordées.

II.2 Théorie du retournement temporel en chambre réverbérante ouverte

II.2.1 RT et champ diffus

Nous considérons une cavité réverbérante ouverte, de volume *V* possédant une ouverture *S* sur sa face avant. Le principe expérimental est le suivant. Tout d'abord, une antenne source émet une impulsion à l'extérieur de la cavité et les signaux sont mesurés sur un réseau d'antennes placé à l'intérieur. Du fait des multiples réflexions sur les parois, ces signaux transitoires présentent une coda, c'est-à-dire qu'ils possèdent une durée longue. Ils sont ensuite normalisés puis réémis en chronologie inverse sur le réseau. L'onde générée se focalise tant spatialement que temporellement sur la position initiale de la source.

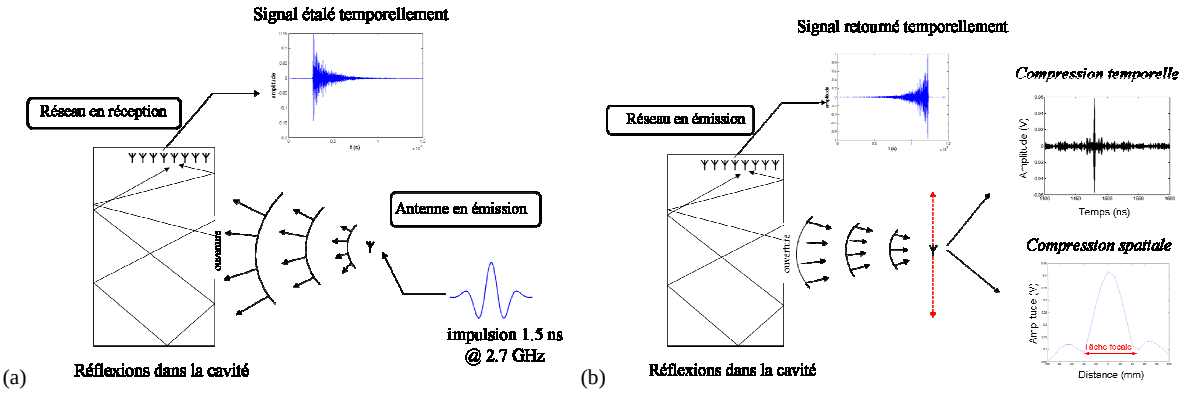


Figure II.2: Schéma de principe des conditions expérimentales. (a) phase d'écoute du retournement temporel. (b) ré-émission et compression d'impulsion.

L'impulsion initiale est émise à l'extérieur de la cavité par un dipôle source repéré par le vecteur $\mathbf{r}_0$. Le signal est mesuré au point $\mathbf{r}_A$ dans la cavité. La réponse transitoire enregistrée s'écrit :

$$f(t) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, t) \otimes h_0(t) \otimes e_0(t), \tag{2.1}$$

Dans cette expression, $e_0(t)$ représente la forme d'excitation transmise au dipôle et $h_0(t)$ la réponse de l'ensemble générateur-oscilloscope-antennes-amplificateur à un Dirac. Enfin, le scalaire $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, t)$ est la fonction de Green entre les points $\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}_A$. Une technique de compression d'impulsion est utilisée afin d'améliorer le rapport signal sur bruit de la réponse transitoire. Fréquemment utilisée pour des applications de type radar, elle consiste à convoluer le signal reçu par le retourné temporel de son signal d'excitation :

$$f(t) \otimes e_0(-t) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, t) \otimes h_0(t) \otimes \left[e_0(t) \otimes e_0(-t) \right] \tag{2.2}$$

Le signal $e_0(t)$ est choisi comme un signal de même bande passante qu'une impulsion brève mais d'énergie plus importante, à l'exemple d'une rampe en fréquence. Nous noterons par la suite $s_0(t)$ l'auto-corrélation du signal initial : $s_0(t) = e_0(t) \otimes e_0(-t)$.

Le signal transitoire est mesuré par une antenne dans la cavité sur une durée T suffisamment grande pour garantir l'enregistrement de la totalité du signal. Après renversement, le signal réémis s'écrit alors :

$$s_1(t) = \frac{G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, T-t) \otimes h_0(T-t) \otimes s_0(T-t)}{\max_t \left(\left| G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, T-t) \otimes h_0(T-t) \otimes s_0(T-t) \right| \right)} \tag{2.3}$$

On notera que l'on a pris en compte la normalisation. Le maximum du signal émis est fixé à 1. Le dispositif en émission/réception lors de la phase de réémission est réciproque à celui employé lors de la phase d'écoute. Cette hypothèse implique que le signal enregistré après retournement temporel est convolué lui-aussi par $h_0(t)$. Après retournement temporel, la réponse en un point $\mathbf{r}$ se formalise comme :

$$s_{RT}(t) = \frac{\left[G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}, t) \otimes G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, T-t) \right] \otimes \left[h_0(t) \otimes h_0(T-t) \right] \otimes s_0(T-t)}{\max\left(\left| f(t) \otimes e_0(-t) \right| \right)} \tag{2.4}$$

La bande passante de notre système est fixée par le produit $\left[h_0(t) \otimes h_0(T-t) \right] \otimes s_0(T-t)$. Lors d'un processus de retournement temporel, toutes les fréquences au sein de la bande

passante se somment de façon cohérente au niveau du point focal. Ainsi, il est important de s'assurer de la plus grande largeur de bande possible afin de maximiser l'amplitude du signal après RT.

En première approximation, le champ transitoire peut être considéré comme diffus, c'est-à-dire d'amplitude et de polarisation statistiquement homogènes dans tout le volume de la cavité. Un modèle classique issu de l'acoustique des salles consiste à considérer que l'enveloppe du signal $s(t)$, notée $a(t)$, décroît exponentiellement :

$$a(t) = a_0 \exp(-\alpha t) \tag{2.5}$$

Le coefficient α est égal à l'inverse du temps de Sabine :

$$\alpha = \frac{1}{\tau_{sabine}} = \frac{c_0 S}{V} \tag{2.6}$$

Le coefficient c_0 représente naturellement la vitesse de la lumière et α est bien homogène à l'inverse d'un temps. Plus la surface d'ouverture est grande et plus la décroissance du champ sera importante.

La fonction de Green est réciproque : $G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_A, t) = G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_0, t)$. Le même signal est donc obtenu en permutant les antennes d'émission et de réception. Lorsqu'un dipôle source émet un signal dans la cavité, le champ hors de la cavité résulte de la diffraction par la surface d'ouverture S selon le principe de Huygens-Fresnel :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\left(\int_\omega \left[\frac{-\mathrm{i}}{\lambda} \iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}_S, \omega) \frac{e^{\mathrm{i}k\|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}\|}}{\|\mathbf{r}_S - \mathbf{r}\|} dS \right] e^{-\mathrm{i}\omega t} d\omega \right) \tag{2.7}$$

L'antenne hors de la cavité se trouve en champ lointain par rapport à l'ouverture. Le champ au niveau de l'ouverture est statistiquement homogène par hypothèse de champ diffus. La décroissance exponentielle de l'enveloppe du champ est équivalente à l'intérieur et l'extérieur de la cavité. L'amplitude du champ sur l'ouverture de la cavité et donc, par hypothèse de champ diffus, à l'intérieur de la cavité est représentée par le coefficient A. Il dépend de l'amplitude du signal émis par le dipôle source. La diffraction par l'ouverture induit par ailleurs un facteur multiplicatif au niveau de l'enveloppe du signal transitoire. Celle-ci peut être estimée par :

$$a(t) = \frac{AS}{\lambda D} \exp(-\alpha t) \tag{2.8}$$

Afin de prédire l'amplitude du champ après retournement temporel, un modèle de shock-noise est appliqué. Le signal diffus $s(t)$ se divise en une somme infinie d'impulsions $\delta(t)$ d'une durée τ correspondant à l'inverse de la bande passante du système. Le signal $s(t)$ s'écrit donc :

$$s(t) = \frac{AS}{\lambda D}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}(\beta_n)\exp(-\alpha\tau n)\,\delta(t-n\tau) \tag{2.9}$$

Dans cette expression, β_n représente un coefficient complexe aléatoire. Il possède une variance moyenne égale à l'unité : $\left\langle |\beta_n|^2 \right\rangle = 1$. Le signal est ensuite re-normalisé avant l'émission de son retourné temporel. Le signal de RT est alors donné par le produit de convolution $s_{RT}(t) = \dfrac{s(t)\otimes s(T-t)}{s(t=0)}$. La normalisation s'effectue par rapport à la valeur maximale de l'amplitude du signal transitoire afin d'envoyer la plus forte amplitude crête à crête possible, c'est-à-dire la même que lors de la phase d'apprentissage. Cette amplitude est typiquement 1 V en sortie du générateur dans nos expériences. Le signal $s_{RT}(t)$ est centré en $t = 0$ pour des raisons de facilité d'écriture ici.

Pour une durée d'acquisition T grande devant le temps de réverbération $1/\alpha$, son amplitude maximale devient :

$$s_{RT}(0) = \frac{AS}{\lambda D}\sum_{i=0}^{\infty}\exp(-2\alpha\tau n) = \frac{AS}{\lambda D}\frac{1}{\left[1-\exp(-2\alpha\tau)\right]} \tag{2.10}$$

De plus, nous supposons que $\alpha\tau << 1$, c'est-à-dire que le temps de réverbération $1/\alpha$ est très supérieur à la durée de l'impulsion initiale τ. L'équation (2.10) se simplifie en :

$$s_{RT}(0) = \left(\frac{A}{\lambda D}\right)\cdot\left(\frac{V}{2c_0\tau}\right) \tag{2.11}$$

Cette expression est composée d'un terme rendant compte de la diffraction des ondes par l'ouverture de la cavité $AS/\lambda D$ multiplié par un second relié à l'effet de compression d'impulsion du retournement temporel $V/2c_0S\tau$. L'impulsion créée par RT ne dépend en théorie pas de la surface d'ouverture.

Toutefois, l'hypothèse de champ diffus n'est vérifiée dans la cavité qu'à partir d'un certain temps de mixage dans la cavité τ_{mix}. Ce temps est défini comme étant l'instant à partir duquel le nombre de réflexions N de l'onde est suffisamment important pour considérer le champ

comme diffus. Reichardt [18] a notamment montré que pour une cavité fermée τ_{mix} évoluait en $\sqrt{V}$. A l'intérieur de la cavité réverbérante fermée, le nombre d'écho est prédit par le ratio entre le volume créé par les sources virtuelles au temps *t* et le volume de la cavité. Les sources virtuelles se trouvent à l'intérieur d'une sphère de rayon $R=c_0t$, soit :

$$N = \frac{4\pi c_0{}^3 t^3}{3V} \tag{2.12}$$

La densité d'échos est égale à la dérivée temporelle de *N*, i.e. :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{4\pi c_0{}^3 t^2}{V} \tag{2.13}$$

Cette formule est équivalent à celle fournie par Kuttruff [19]. Le temps de mixage est ensuite défini par le moment où le temps d'arrivée entre deux échos est égal à la durée d'une impulsion, soit $dN/dt = 1/\tau$. Le temps de mixage s'écrit ainsi comme :

$$\tau_{mix} = \sqrt{\frac{V}{4\pi c_0{}^3 \tau}} \tag{2.14}$$

Pour les instants précédents le temps de mixage, le champ peut être prédit par un modèle image/source. La densité d'échos devient ensuite trop forte pour appliquer un tel modèle et le champ est considéré comme diffus. Plus l'ouverture de la chambre s'accroît, plus la densité de réflexions en fonction du temps diminue et par conséquent plus le temps de mixage est élevé. La dépendance du pic de RT à l'ouverture est débattue en fonction de l'ouverture dans la partie expérimentale II.3.6.

II.2.2 Retournement temporel 1-bit

Afin d'encore améliorer l'amplitude la focalisation, le retournement temporel 1 bit est employé. Son principe est le suivant : au lieu de réémettre le signal renversé temporellement *s*(-*t*), seul la polarité (le signe) de ce signal est pris en compte. Le signal réémis est défini ainsi par $b(t)$ tel que :

$$b(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } s_1(t) < 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

Suivant l'étude de Derode *et al.*, les propriétés de compression spatiale et temporelle ne diffère que peu par rapport à un RT « classique » [20]. Cependant, le pic de focalisation possède une amplitude absolue plus élevée dans le cas du retournement temporel 1 bit.

L'énergie du signal réémis est en effet plus importante puisque la décroissance exponentielle du signal transitoire est en partie compensée. Nous comparons théoriquement ci-dessous l'amplitude de la focalisation entre le RT 1bit et le RT classique.

L'amplitude M est définie comme le maximum du signal transitoire. Après un retournement temporel « classique », le signal s'écrit tel que :

$$r(t) = \frac{1}{M} s(t) \otimes s(-t) = \frac{1}{M} \int s(\tau) s(t+\tau) d\tau \tag{2.16}$$

Ce signal est centré en $t = 0$. L'amplitude du pic du signal de retournement temporel devient de ce fait :

$$r(0) = \frac{1}{M} \int s^2(\tau) d\tau \tag{2.17}$$

Dans le cas du retournement temporel 1 bit, seul la phase du signal renversé est réémise, c'est-à-dire :

$$u(t) = b(-t) \otimes s(t) = \int b(\tau) s(t+\tau) d\tau \tag{2.18}$$

Au point focal, l'amplitude du signal s'exprime par :

$$u(0) = \int |s(\tau)| d\tau \tag{2.19}$$

La comparaison de l'efficacité des 2 méthodes est réalisée grâce au ratio suivant :

$$\frac{u(0)}{r(0)} = \frac{\int |s(\tau)| d\tau}{\frac{1}{M} \int s^2(\tau) d\tau} = \frac{\int \frac{|s(\tau)|}{M} d\tau}{\int \frac{s^2(\tau)}{M^2} d\tau} > 1 \tag{2.20}$$

Ce ratio assure que le RT 1-bit donne un pic plus élevé puisque $s(t) \leq M$. En considérant une décroissance exponentielle du de l'enveloppe du signal, un ratio de 2 en amplitude est calculé. Dans le cadre de notre projet, afin d'estimer ses performances, l'implémentation du RT 1-bit permet donc de gagner plusieurs décibels au niveau du gain.

II.3 Performances du démonstrateur

II.3.1 Dispositif expérimental

Une chambre réverbérante de type parallélépipède rectangle a été initialement choisie afin de briser des symétries néfastes pour le retournement temporel. Deux chambres réverbérantes ont servies pour les mesures, une première artisanale, déjà présente au début de l'étude, et construite à partir d'un bac couvert de feuilles d'aluminium ; et une seconde fabriquée par la société SIEPEL, réputée pour la fabrication de telles installations. Les dimensions latérales de la cavité sont 1,8 m par 1,24 m par 1,1 m. Toutes les faces sont fabriquées en acier galvanisé et l'intérieur est recouvert d'aluminium. Elle possède de plus une ouverture rectangulaire de 1 m par 0,4 m sur la face avant (Figure II.3). Cette ouverture est modulable à l'aide de feuilles d'aluminium rigides. Ce dispositif se révèle notamment utile pour étudier l'évolution des performances du système en fonction de la taille de l'ouverture dans les paragraphes II.3.5 et II.3.6.

Figure II.3: Photographies de la chambre réverbérante.

Pour l'émission des signaux, un générateur Tektronix de la série AWG7000 est employé, ses principales caractéristiques sont les suivantes :

- 10 GEchantillons/s sur 2 voies ou 20GEch/s sur 1 voie
- Bande passante de 4GHz
- Mémoire de 1 Méga échantillons

Pour enregistrer les signaux, l'oscilloscope DSO5000, également fabriqué par la société Tektronix, est utilisé. Il possède une bande passante comprise entre 0Hz et 4GHz. Le shéma de principe du montage global est représenté sur la Figure II.4 ci-dessous :

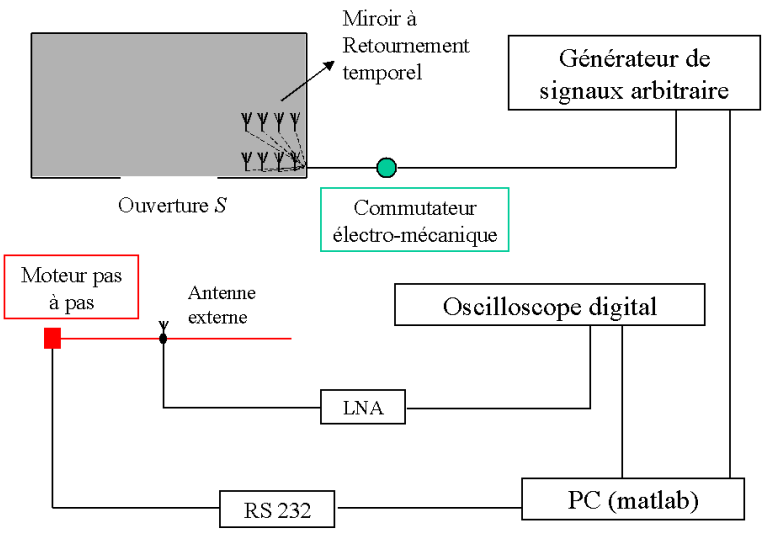


Figure II.4: Schéma de principe de l'amplificateur d'ondes à retournement temporel.

L'antenne dans la cavité est reliée au générateur et l'antenne extérieure à l'oscilloscope. Du fait de la réciprocité de la fonction de Green ($G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A,t)=G(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0,t)$), le même signal est obtenu en inversant l'émission et la réception. Ce principe permet de ne pas changer les connexions du dispositif à la fin de la phase d'apprentissage. Afin d'améliorer le rapport signal/bruit, un amplificateur large bande et faible bruit (LNA) est disposé entre l'antenne réceptrice et l'oscilloscope. Sa fréquence centrale est de 2,45 GHz et il possède une bande passante de 1,2 GHz. L'antenne extérieure est montée sur un banc moteur un axe pour mesurer la focalisation spatiale de l'onde.

Toute l'instrumentation est contrôlée par l'intermédiaire du logiciel MATLAB. Afin de simuler un réseau, les antennes dans la cavité sont connectées au générateur grâce à des commutateurs électromécaniques 8 voies pilotés par l'ordinateur. Huit antennes demi-onde, de fréquence centrale 2,7 GHz et de bande passante 1,5 GHz, sont situées à l'intérieur de la cavité. Elles sont séparées les unes des autres d'une distance de 10 cm, c'est-à-dire près d'une longueur d'onde. Une antenne réceptrice se trouve à 90 cm de l'ouverture de la chambre. Des antennes cornet large-bande (1 à 18 GHz) pourront aussi être utilisées à la place des antennes fouet.

II.3.2 Réponse à une impulsion et Retournement temporel

Cette première expérience est réalisée avec la plus grande ouverture de la cavité (0.4x1 m). Les réponses transitoires (avant retournement temporel) sont obtenues grâce à une technique de compression d'impulsion. Le signal initial envoyé consiste en un « chirp », ici une rampe linéaire en fréquence modulée par une Gaussiènne. Le signal reçu est ensuite convolué par le retourné temporel de ce « chirp » (Figure II.5).

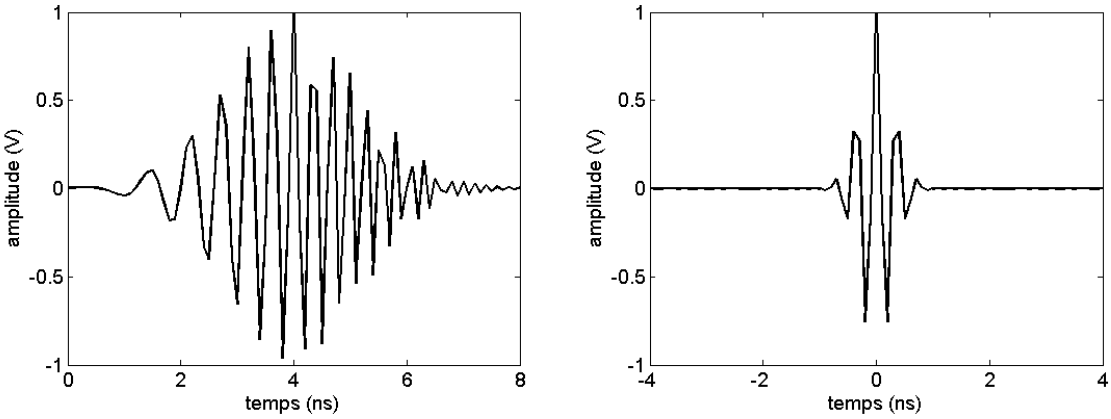


Figure II.5: (Gauche) chirp envoyé pour des fréquences entre 1,5 et 4 GHz. (Droite) : auto-corrélation du chirp.

En effet, sans technique de compression d'impulsion et même en présence du LNA, le signal mesuré sur l'antenne réceptrice est dominé par le bruit ambiant (i.e. bornes WIFI, téléphones portables, etc.) lorsque l'antenne extérieur est trop éloignée de la cavité.

Le signal transitoire après compression d'impulsion est représenté sur la Figure II.6, il a été normalisé de telle manière à ce que l'amplitude soit équivalente à celle obtenue si l'impulsion compressée avait été émise par l'AWG avec l'amplitude maximale, c-à-d 1V. La décroissance exponentielle du signal transitoire est nettement visible. Le logarithme de l'enveloppe décroit bien linéairement (en noir sur la figure). Le temps de réverbération typique est égal à environ 400 ns, soit l'équivalent de plus de 100 m de réflexions dans la cavité avant extinction du signal !

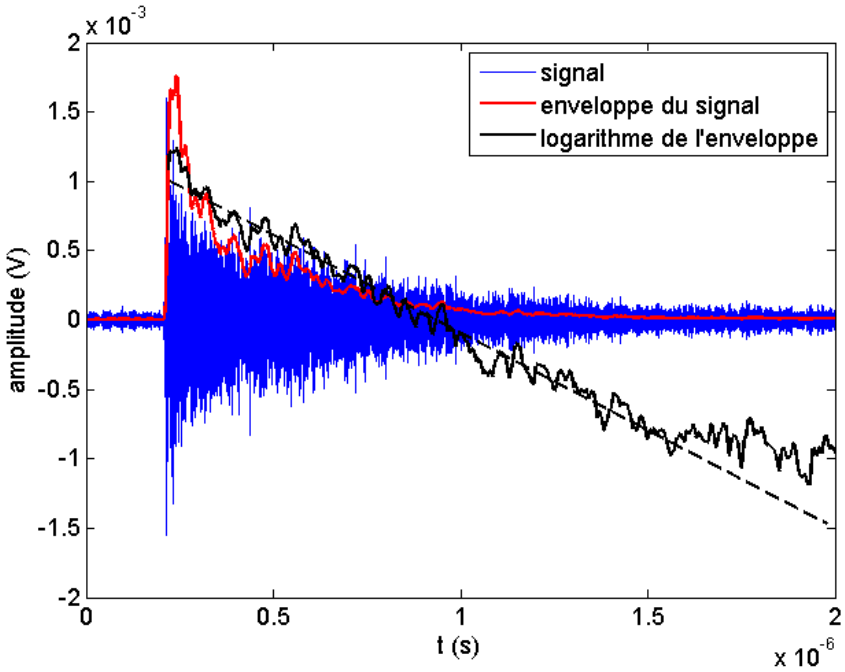


Figure II.6: Signal reçu sur l'antenne extérieure lorsqu'une impulsion de 1,6ns à 2,7GHz est émise. L'enveloppe du signal est tracée en rouge et, en noir, la linéarité du logarithme de cette enveloppe illustre sa décroissance exponentielle.

Après retournement temporel, l'effet naturel de compression est suffisant pour se passer de la technique décrite précédemment. L'impulsion créée est maintenant parfaitement symétrique (Figure II.7).

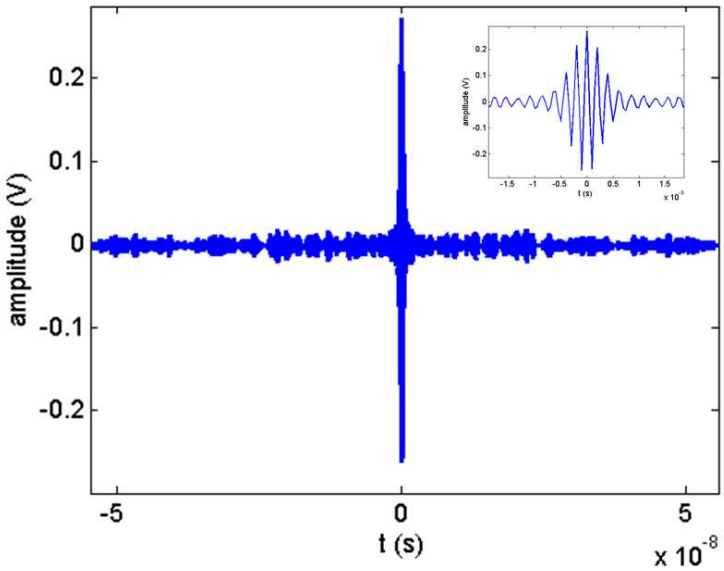


Figure II.7: Signal reçu sur l'antenne extérieur après retournement temporel. En médaillon : zoom autour du temps t=0 ns.

Cette symétrie est révélatrice de la qualité de la chaîne d'instrumentation puisque étant intimement liée à la linéarité de l'électronique analogique. Une première observation réside dans le gain d'environ de 32dB obtenu entre l'amplitude maximum du signal avec RT et du signal transitoire.

II.3.3 Atténuation du signal transitoire

Lorsque le champ à l'intérieur de la cavité est diffus, c'est-à-dire statistiquement homogène en amplitude et en polarisation, la décroissance de l'enveloppe du signal est exponentielle (paragraphe II.2). L'enveloppe du champ transitoire s'écrit alors $s(t) = \frac{AS}{\lambda D}\exp\left(-(\alpha - \alpha_F)t\right)$.

La constante α_F a été ajoutée pour prendre en compte les pertes autres que le rayonnement par l'ouverture (effet de peau, fuites…). Cette soustraction est principalement nécessaire lorsque les expériences sont effectuées dans la première version artisanale de la chambre réverbérante pour laquelle les fuites se révèlent non négligeables. Le coefficient $\alpha - \alpha_F$ représente l'inverse du temps de Sabine : $\alpha - \alpha_F = cS/V$. La linéarité de $\alpha - \alpha_F$ et du maximum de l'enveloppe en fonction de l'ouverture sont illustrées ci-dessous sur la Figure II.8.

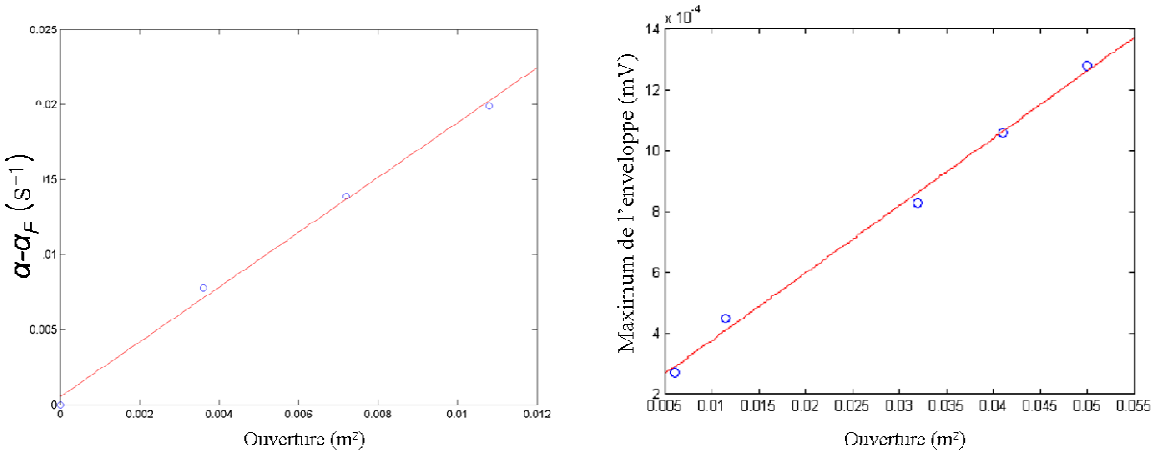


Figure II.8: évolution de $\alpha - \alpha_F$ (gauche) et de l'amplitude du maximum de l'enveloppe (droite) en fonction de l'ouverture de la cavité.

II.3.4 Influence du nombre d'antennes émettrices et de la bande passante

Nous cherchons dans ce paragraphe la dépendance l'amplitude de la focalisation au nombre d'antennes composant le miroir. La propagation des ondes étant un processus linéaire, la mesure du pic de RT est réalisée pour chaque voie composant le commutateur

électromécanique. Les signaux sont sommés les uns aux autres. Comme attendu, l'amplitude du pic de RT est bien linéaire par rapport aux nombre d'antennes du miroir (Figure II.9(a)).

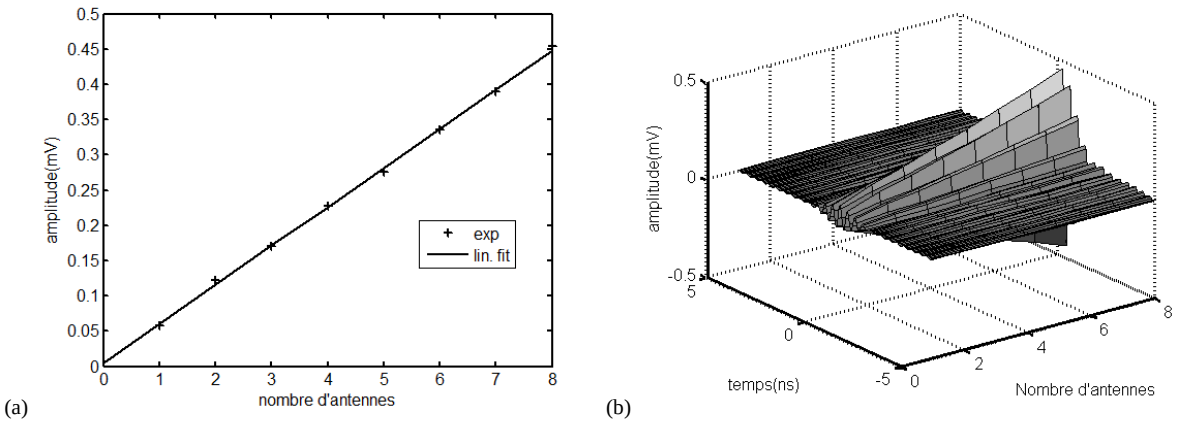


Figure II.9: (a) Amplitude du pic de focalisation (croix) en fonction du nombre d'antennes. La ligne continue correspond à un ajustement linéaire. (b) Représentation de l'impulsion compressée après retournement du temps en fonction du nombre d'antennes.

Dans un processus de retournement temporel, à l'instant de la focalisation spatio-temporelle, toutes les fréquences mises en jeu se somment de façon cohérente, i.e. en phase [1]. Ainsi l'amplitude du pic de RT est d'autant plus élevée que le spectre de l'impulsion initiale est large. Cette propriété est contenue dans l'équation (2.11). Le gain du RT est proportionnel à $1/\tau$, τ étant la durée minimale d'impulsion du système (et donc l'inverse de sa bande passante). Sur la Figure II.10, les signaux au moment de la focalisation sont tracés en fonction de la durée de l'impulsion initiale.

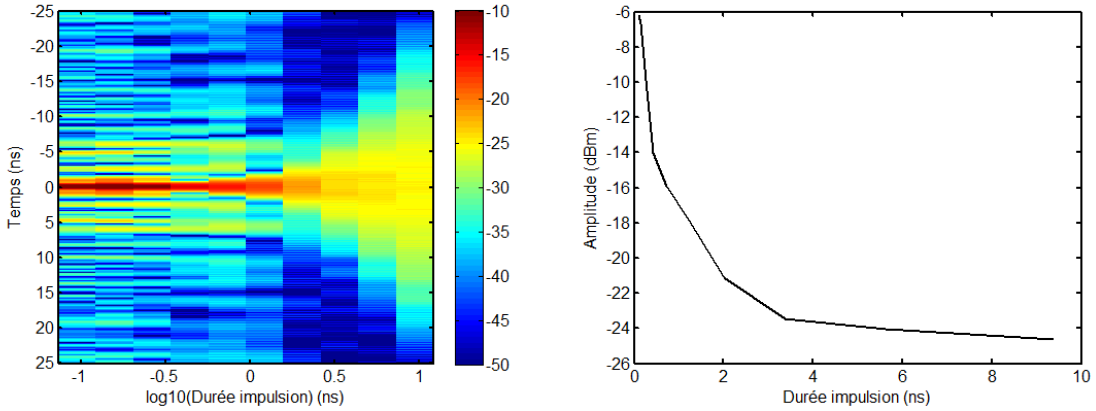


Figure II.10: A gauche B-Scan (en dBm) de l'impulsion recrée par retournement temporel. A droite amplitude de l'impulsion recrée par retournement temporel en fonction de la durée de l'impulsion initiale.

La figure fait apparaître l'importance de travailler avec de larges bandes passantes pour obtenir de bonnes compressions temporelles et de fortes amplitudes. La diminution de la durée de l'impulsion initiale permet de plus de réduire le rapport entre l'amplitude de focalisation et les lobes secondaires.

Durée (ns)	9,4	5,6	3,4	2,0	1,2	0,73	0,44	0,26	0,16	0,094
Amplitude (mV)	13.2	14.1	15.1	19.6	28.9	35.8	44.6	71.7	104.6	109.9

Tableau II.1: Amplitude de l'impulsion crée par retournement temporel d'une impulsion de durée donnée par la cellule 'durée'.

Lors de la réémission, la normalisation s'effectue par rapport au maximum de la réponse transitoire reçue. Dans ce cas de figure, pour une impulsion de 9,4ns, l'amplitude du pic est de -24,6 dBm (13mV) alors qu'elle atteint -6.1663dBm (100mV) pour une durée 0,1ns. On atteint ainsi un gain de près de 20dB entre les deux mesures.

Toutefois, comme observé sur le tableau II.1, l'amplitude ne varie plus beaucoup pour des impulsions très brèves. En effet, le signal est saturé par la bande passante propre du système formé par les antennes, les LNA, le générateur et l'oscilloscope. Expérimentalement, les antennes fouet possèdent la plus faible bande passante. On préférera donc utiliser à l'avenir les antennes cornet afin d'obtenir de meilleures performances. Les amplificateurs faible bruit (LNA) deviennent dans ce cas le facteur limitant. Ils limitent la bande passante à 700 MHz.

II.3.5 Mesure de la tache focale en fonction de l'ouverture de la cavité.

a) Tache focale latérale

Dans l'hypothèse de champ diffus, la focalisation en champ lointain par RT résulte de la diffraction par l'ouverture de la cavité. Par conséquent, la taille de la tache focale dépend uniquement de cette ouverture. Sa dimension latérale est égale à $\lambda F/D$, avec D l'ouverture latérale, λ la longueur d'onde et F la distance entre l'antenne et l'ouverture. La linéarité de cette tache focale en fonction des paramètres λ et $1/D$ est mise en valeur sur la Figure II.11. Dans ce cas, la distance focale est F=90 cm. La largeur de la tache focale est mesurée à mi-hauteur.

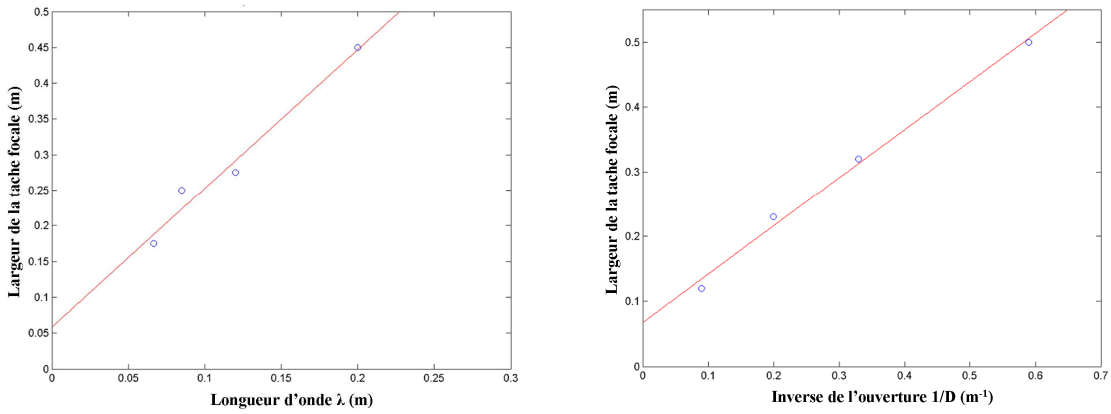


Figure II.11: évolution de la tache focale latérale en fonction de la longueur d'onde pour D=60 cm (gauche) et de l'inverse de la taille de l'ouverture latérale pour λ=11 cm (droite). Pour ces deux figures, F=90 cm.

La longueur d'onde λ dictant la largeur de la tache correspond à une fréquence légèrement inférieure à la fréquence centrale. Concernant l'évolution en fonction de la distance à l'ouverture, lorsque l'on se place suffisamment loin de l'ouverture, la dépendance est bien linéaire par rapport à *F*. Nous retrouvons aussi la limite de diffraction pour des distances focales faibles. En effet, la largeur de la tache sature à $\lambda/2$ (Figure II.12).

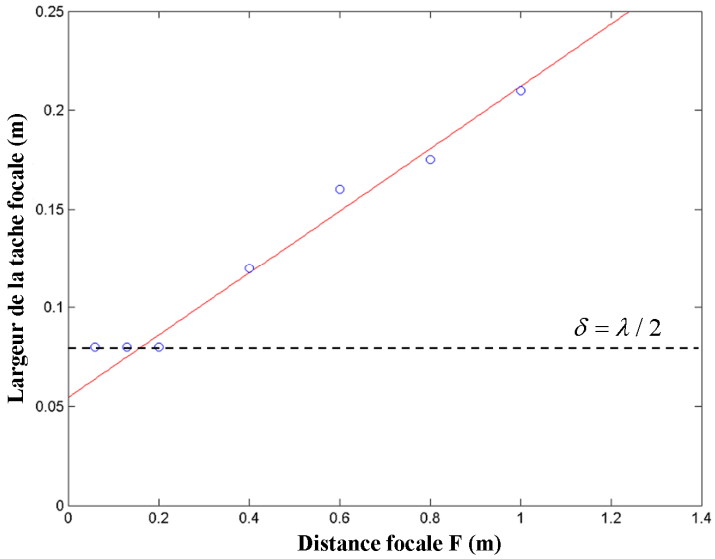


Figure II.12: tache focale latérale en fonction de la distance de l'antenne source à l'ouverture, pour λ=14 cm et D=60 cm.

b) Tache focale axiale

La tache focale en profondeur est représentée sur la Figure II.13. La source initiale est placée à la position d=0 mm lors de la phase d'acquisition. L'amplitude du signal correspondant au point focal est globalement du même niveau que celle d'un point décalé de 30 cm dans la direction de la cavité. Malgré la focalisation spatiale, la décroissance en 1/r du champ impose que l'amplitude du champ soit plus importante près de la cavité qu'au point focal.

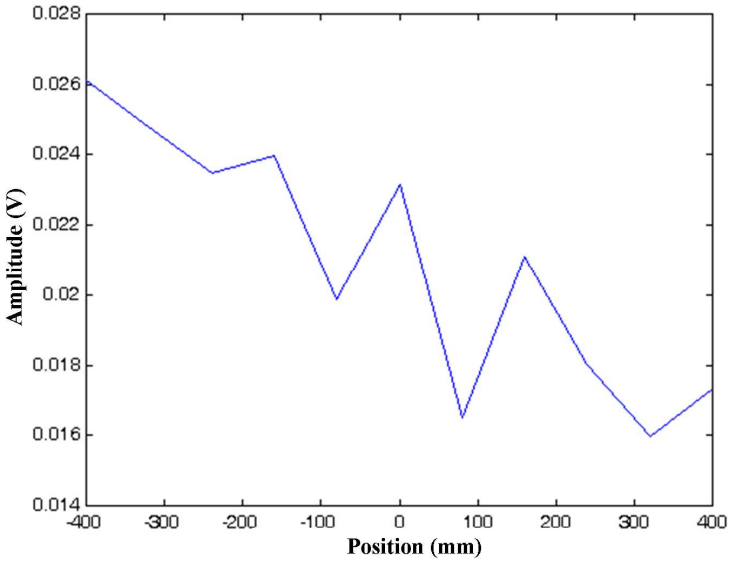


Figure II.13: Tache focale en fonction de la profondeur, la source initiale était placée dans l'axe de l'ouverture à la position d=0 mm.

Néanmoins, en champ proche de l'ouverture, notre dispositif permet de limiter le champ électromagnétique en amont de la cible par rapport à une technique « classique », c'est-à-dire utilisant une seule antenne cornet rayonnant dans la direction de la cible.

II.3.6 Ouverture optimale de la cavité

Dans cette section, l'influence de l'ouverture de la cavité sur l'impulsion après RT est étudiée dans le cadre du projet de génération d'impulsions de fortes amplitudes. Sur la Figure II.14 sont illustrées deux taches focales latérales, pour deux ouvertures différentes (16 et 52 cm). Il apparaît que, si la tache focale est plus large pour la petite ouverture, l'amplitude du signal de focalisation est a contrario plus importante.

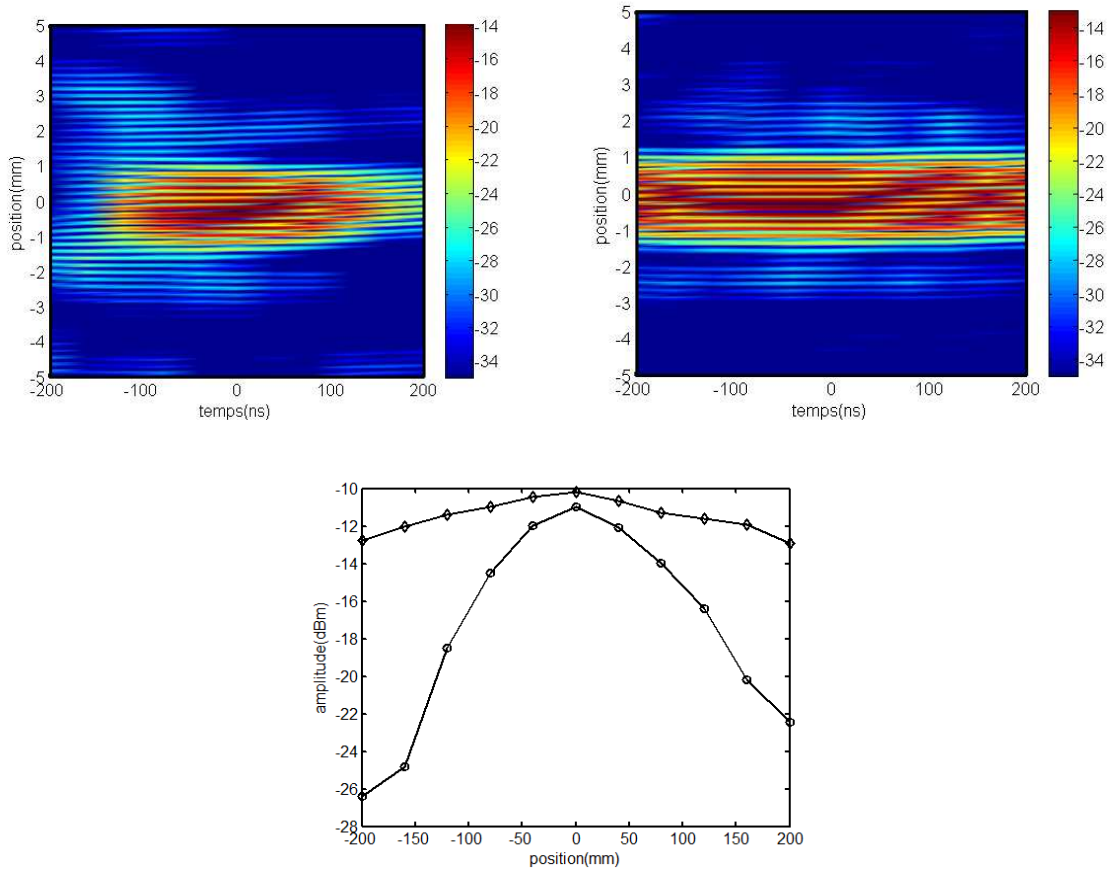


Figure II.14: En haut à gauche, focalisation pour une ouverture de 52cm de large et à droite pour une ouverture de 16cm. L'échelle de couleur est en dBm (calculé sur 50Ohms). Figure en bas : Tache focale en dBm pour l'ouverture de 52 cm (ronds) et l'ouverture de 16cm (diamants).

Théoriquement, et en hypothèse de champ diffus, le pic ne dépend pas de l'ouverture puisque $S_{RT} = \left(\frac{A}{\lambda D}\right) \cdot \left(\frac{V}{c\tau}\right)$ (paragraphe II.2.1). Expérimentalement, nous avons étudiée de manière systématique l'effet de la largeur de l'ouverture sur le pic de RT. Elle varie entre 0.01 m² et 0.4 m² et chaque pic est moyenné sur 10 acquisitions. La courbe montre clairement une surface d'ouverture optimale proche de $S=\lambda^2$ (Figure II.15(a)).

L'explication de cette évolution tient dans le temps d'établissement du champ diffus dans la cavité, appelé temps de mixage. Le modèle de champ diffus n'est valable qu'à partir du moment où $t > \tau_{mix}$. Pour $t < \tau_{mix}$, le signal peut s'interpréter comme une superposition d'échos séparés dans le temps. La densité temporelle du signal est alors inférieure à celle obtenue en champ diffus. Or plus l'ouverture s'élargit, plus le temps de mixage augmente (et tend vers l'infini dans le cas limite d'une ouverture totale). Comme la compression temporelle

du RT est d'autant plus efficace que cette densité est forte, le pic de RT en devient d'autant plus fort que l'ouverture est faible.

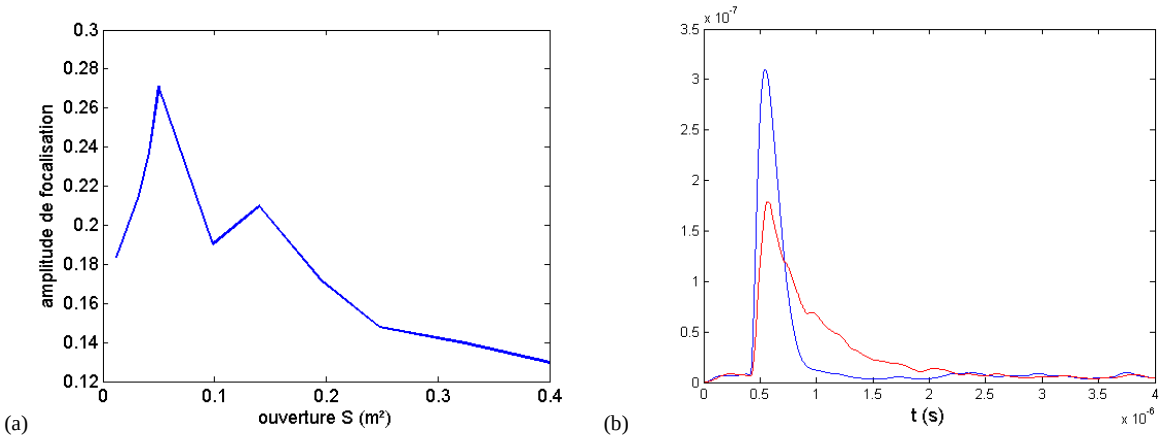


Figure II.15: (a) amplitude du pic de RT en fonction de la surface d'ouverture de la cavité et (b) enveloppe du signal pour des ouvertures S=0,32 m² (en bleu) et S=0,05 m² (en rouge).

De plus, un second effet participe à amplifier ce phénomène. Lorsque l'ouverture s'agrandit, avec le modèle de champ diffus, la partie initiale du signal devient prépondérante dans l'efficacité du RT : l'amplitude maximale du signal transitoire est plus grande mais le temps de réverbération plus court (Figure II.15(b)). Ainsi, comme le RT est moins efficace avant établissement du champ diffus, il est préférable en première approche de limiter au maximum la contribution des temps courts et donc de travailler avec une ouverture faible.

Cependant, la diffraction du champ pour des ouvertures sub-longueur d'onde impose une limite inférieure. Le coefficient de transmission du champ décroît exponentiellement avec la surface si $S < \lambda^2$. On retrouve ici le principe de la cage de Faraday : le champ est confiné à l'intérieur de la cavité pour des ouvertures faibles devant la longueur d'onde. Finalement, l'ouverture optimale nous donnant le pic de focalisation le plus important est estimée à $S \sim \lambda^2$.

Le raisonnement reste en tout point valable dans le cas du retournement temporel 1-bit (Figure II.16). L'ouverture optimale pour générer l'amplitude maximale reste toujours proche de λ^2, la même forme de courbe est obtenue. Ce raisonnement montre de plus que nous avons tout à fait intérêt à s'affranchir de l'onde balistique et à favoriser une installation rapide du champ diffus. Cette considération est prise en compte lors du positionnant de l'antenne dans la cavité. Dans la suite, l'antenne est de préférence placée face à un coin pour multiplier les réflexions dès les temps courts et ainsi supprimer les échos directs.

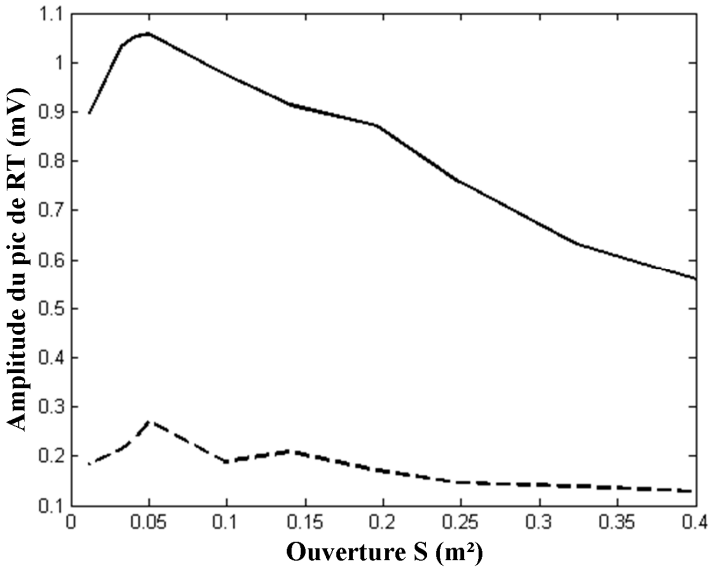


Figure II.16: amplitude du pic de RT en fonction de la surface d'ouverture de la cavité pour le RT-1 bit (trait plein) et le RT « classique » (pointillés).

Par ailleurs, sur la Figure II.16, l'écart relatif entre les deux courbes justifie l'utilisation de la méthode de RT-1 bit par rapport au RT classique. L'amplitude du pic se révèle expérimentalement près de quatre fois plus élevée dans le cas du 1 bit. Cette méthode est bien évidemment mise en place par la suite pour comparer les performances du démonstrateur avec des systèmes classiques.

Nous pouvons maintenant étudier en détails les plus-values de notre méthode lors des prochains paragraphes, c'est-à-dire le gain en amplitude par rapport à un système *classique* mais aussi son caractère auto-adaptatif.

II.3.7 Comparaison des performances avec une antenne cornet seule

Le gain du système en performances par rapport à un système classique est quantifié dans cette section. L'évolution de l'amplitude du champ après RT avec l'antenne cornet située dans la cavité est comparée aux performances d'une antenne cornet placée au niveau de l'ouverture et fonctionnant sans la réverbération dans la cavité (voir les deux schémas de principe sur la Figure II.17). Dans le second cas, l'acquisition avec RT est tout de même mise en œuvre afin de ne pas biaiser l'étude du fait des réflexions extérieures à la cavité (sur le sol ou sur les objets environnants). Le RT tire en effet aussi parti de ces réflexions pour augmenter l'amplitude de la focalisation.

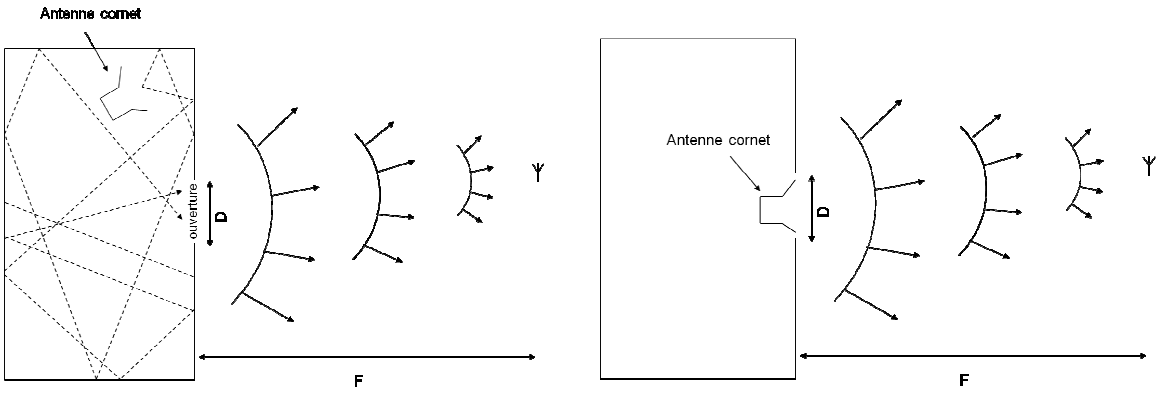


Figure II.17: Les deux dispositifs utilisés pour la comparaison. Sur la figure de gauche l'antenne est placée dans la chambre réverbérante alors que sur la figure de droite, elle est placée au niveau de l'ouverture et dirigée vers l'extérieure de la chambre. L'ouverture de la chambre est identique à l'ouverture de l'antenne.

En premier lieu, en faisant varier la distance de l'antenne en réception à l'ouverture, l'amplitude du signal après RT décroît en 1/r (Figure II.18). Bien que le signal soit auto focalisant, il ne peut compenser cette décroissance en champ lointain. Cette dernière est identique pour une antenne cornet seule.

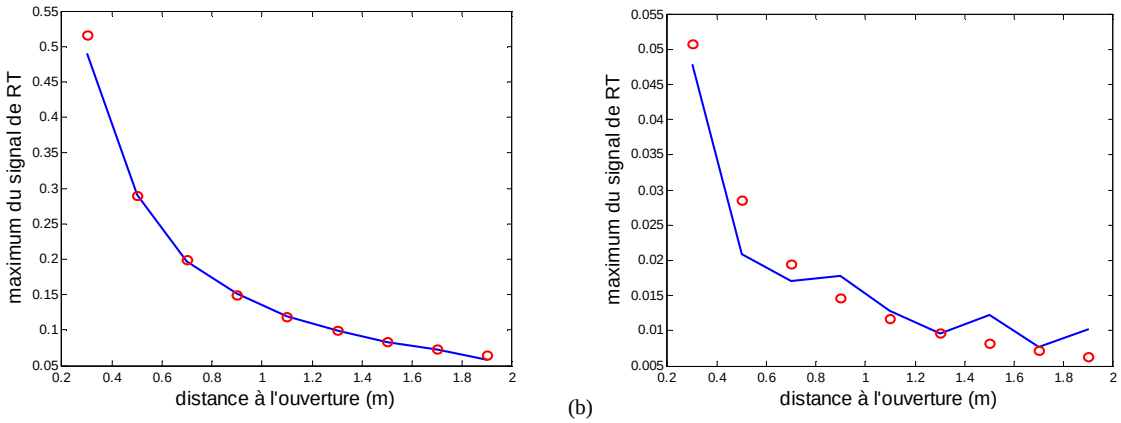


Figure II.18: pic de retournement temporel en fonction de la distance de l'antenne de réception à l'ouverture. Courbe expérimental (bleu) et décroissance en 1/r (marqueurs rouges), (a) pour l'antenne dans la cavité, et (b) pour l'antenne seule hors de la cavité.

Un avantage crucial du RT tient à son caractère auto-adaptatif en position ainsi qu'en polarisation. En effet, si l'antenne source initiale se déplace, la focalisation spatiale se déplacera en fonction. A contrario, lorsque la génération d'impulsions se fait par l'intermédiaire d'une antenne cornet directive, celle-ci doit être dirigée vers le point focal afin de garder une même efficacité.

a) Adaptabilité en position

Une première différence entre les deux dispositifs apparaît lors de l'étude de l'évolution du pic de retournement temporel en fonction de l'angle entre la direction de l'antenne extérieure et l'axe de l'ouverture (à partir de son centre). L'antenne réceptrice est placée à une distance constante de 2,50 m du centre de l'ouverture, en polarisation parallèle. La Figure II.19 met en évidence le caractère auto-focalisant de notre méthode puisque le pic de RT ne décroît que peu même si l'antenne s'écarte de l'axe.

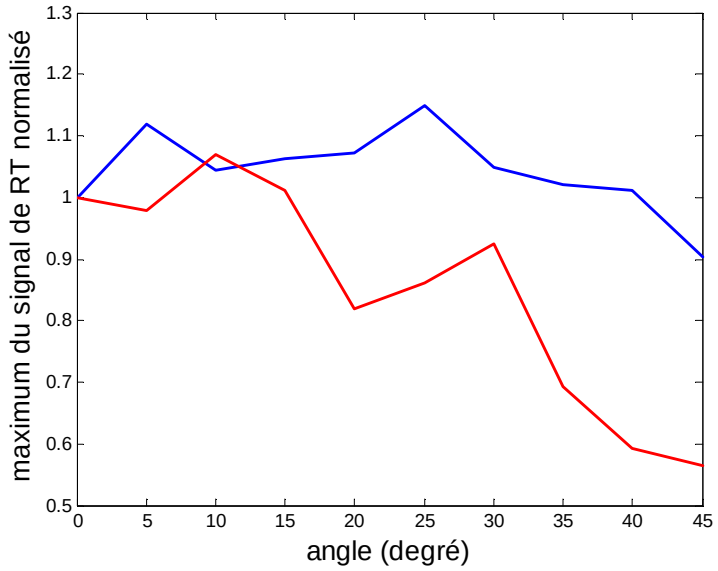


Figure II.19: dépendance angulaire du pic de retournement temporel, avec la cavité (bleu) et pour une antenne cornet seule (rouge). Chaque courbe est normalisée par rapport à sa valeur en θ=0°.

En réalité, la directivité du système complet est dictée par la surface effective de la cavité par rapport au point focal. Lorsque θ est défini comme le cosinus de l'angle entre la direction de la cible et la normale à l'ouverture de la cavité, cette surface s'écrit : $S_{eff}=S*\cos(\theta)$. L'amplitude du pic varie de ce fait aussi en $\cos(\theta)$. Cette dépendance apparaît faiblement sur la figure, en partie à cause de réflexions sur les parois de la pièce proches du point focal. En comparaison, du fait de sa directivité, l'efficacité de l'antenne cornet seule de la cavité décroît plus rapidement.

L'amplitude maximale avec l'antenne directive est plus fort pour l'angle θ=10° que sur l'axe, ce qui paraît surprenant en première approche puisque l'on devrait idéalement retrouver son diagramme de directivité en espace libre. En fait, comme le retournement temporel est tout de

même appliqué à l'antenne directive seule, elle tire elle-aussi parti d'une réflexion sur un objet ou un mur proche du point cible pour augmenter son efficacité.

b) Adaptabilité en polarisation

Le second caractère auto-adaptatif du système concerne la polarisation de l'onde. Du fait du champ diffus, les trois polarisations sont statistiquement homogènes à l'intérieur de la cavité. Ceci assure de garder une amplitude de focalisation constante quelle que soit la polarisation initiale à l'extérieure de la cavité. La polarisation doit toutefois rester identique entre la phase d'apprentissage et la phase de réémission. La même étude est présentée sur la Figure II.20 en ajoutant les performances pour une antenne source tournée de 90°, c'est-à-dire en polarisation perpendiculaire à celle de l'antenne directive. Les courbes sont seulement normalisées par la première valeur du pic avec la cavité. L'efficacité de l'antenne cornet seule chute alors de 17 dB en polarisation parallèle alors que le niveau de notre dispositif reste globalement constant.

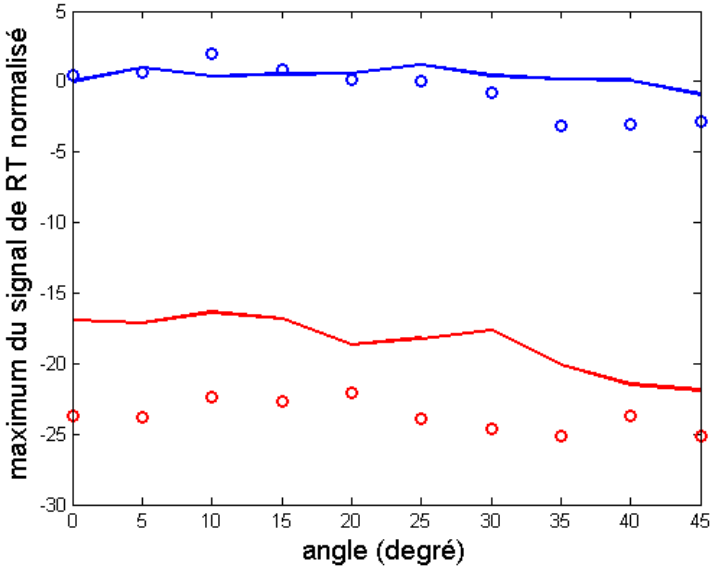


Figure II.20: dépendance angulaire du pic de retournement temporel, avec la cavité (bleu) et pour une antenne cornet seule (rouge), en polarisation parallèle (marqueurs) et perpendiculaire (lignes) à l'antenne cornet de référence. Chaque courbe est normalisée par rapport à la valeur en θ=0° du pic avec la cavité pour une polarisation parallèle.

II.3.8 Gain du système

Une première méthode pour définir le gain consiste à comparer l'amplitude du pic de RT avec le maximum du signal transitoire. On obtient alors dans le cas du RT-1bit un gain de 46 dB

pour une ouverture de la cavité égale λ^2. Cette ouverture donne l'amplitude du pic le plus fort comme décrit dans le paragraphe II.3.6.

Toutefois, il est plus cohérent de comparer l'amplitude du pic avec le niveau de champ obtenu grâce à une antenne directive. La surface d'ouverture de la cavité est identique à celle du cornet. Le RT-1bit est appliqué dans les deux cas afin de ne pas fausser l'interprétation. La taille de la tache focale étant donnée par l'ouverture de l'antenne, la focalisation spatiale due aux deux systèmes est comparable. Un gain à 2,50 m de 18 dB est obtenu entre la cavité et l'antenne cornet seule. Ce gain constitue sans nul doute le résultat majeur de l'étude. Il valide l'emploi de la cavité et du retournement temporel.

II.4 Détection et focalisation à partir de la chambre réverbérante

Dans cette section, une méthode active de détection est mise en place avec la chambre réverbérante en appliquant la méthode DORT. L'objectif consiste à détecter une cible hors de la cavité puis à déterminer le signal à appliquer au réseau d'antennes à l'intérieur de la cavité afin de focaliser sur cette cible. Cette méthode permet de profiter simultanément des propriétés de détection de la méthode DORT et d'amplification et de compression spatio-temporel du RT couplé avec la cavité.

Deux réseaux d'antennes sont positionnés dans la cavité (un en émission et un en réception). La cible se trouve pour sa part l'extérieur de celle-ci. Le problème posé ici est de faire ressortir l'écho de la cible. Pour une acquisition, celui-ci est très fortement dominé par les réflexions à l'intérieur de la cavité. Ainsi, une acquisition unique des réponses entre chaque couple d'antennes dans la cavité ne permet pas d'isoler un signal exploitable. La méthode proposée consiste à soustraire les réponses avec ou sans la cible. Elle se révèle pertinente dans le cas de la surveillance d'apparition de cibles ou afin de détecter et localiser des cibles en mouvement.

Dans un premier temps, la matrice $\mathbf{K}_1$, sans la cible, des réponses inter-éléments entre chaque couple d'antennes en émission et réception est acquise. Cette matrice de référence est ensuite soustraite à la matrice $\mathbf{K_2}$ acquise en présence de la cible. La matrice $\mathbf{K}$, telle que $\mathbf{K}=\mathbf{K}_2-\mathbf{K}_1$, est alors engendrée. Sans soustraction, la réflexion sur la cible se révèle trop faible pour être distinguée des signaux provenant des réflexions dans la cavité.

Après soustraction, même si l'onde réfléchie sur la cible subit de nombreuses réflexions dans la cavité, une seule valeur singulière lui sera associée. Cette propriété est liée à la cohérence des différentes réflexions provenant de la même cible. En effet, si la cible ponctuelle possède un coefficient de réflexion égal à R_0, la matrice $\mathbf{K}$ s'écrit comme :

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}_D^{Rx} R_0^T \mathbf{G}_D^{Tx} \tag{2.21}$$

Dans cette expression, $\mathbf{G}_D^{Tx}$ (respectivement $\mathbf{G}_D^{Rx}$) représente le vecteur des fonctions de Green entre les éléments du réseau en émission (resp. en réception) et la cible. Ces fonctions de Green prennent en compte les différentes réflexions à l'intérieur de la cavité pour parvenir à la cible. Ainsi, la *svd* de la matrice $\mathbf{K}$ donne :

$$\mathbf{K} = \left(R_0 \left\| \mathbf{G}_D^{Rx} \right\| \left\| \mathbf{G}_D^{Tx} \right\| \right) \frac{\mathbf{G}_D^{Rx}}{\left\| \mathbf{G}_D^{Rx} \right\|} \frac{{}^T\mathbf{G}_D^{Tx}}{\left\| \mathbf{G}_D^{Tx} \right\|} \tag{2.22}$$

Une seule valeur singulière est associée à la matrice **K** : $\sigma_1 = R_0 \left\| \mathbf{G}_D^{Rx} \right\| \left\| \mathbf{G}_D^{Tx} \right\|$. Les vecteurs singuliers en émission et en réception s'écrivent de plus $\mathbf{U}_1^{Tx} = \frac{\mathbf{G}^{Tx}}{\left\| \mathbf{G}^{Tx} \right\|}$ et $\mathbf{U}_1^{Rx} = \frac{\mathbf{G}_D^{Rx*}}{\left\| \mathbf{G}_D^{Rx} \right\|}$.

La validation de cette approche est menée tant en simulation qu'expérimentalement. Le principal obstacle expérimental à cette méthode réside dans le rapport signal/bruit après soustraction.

II.4.1 Simulations

Les simulations sont réalisées avec le logiciel MEEP, créé par le MIT et disponible en accès libre sur internet [21]. La cavité consiste en un cube de 0,42 m^3 couvert d'aluminium et la cible en une boule de 1 cm de diamètre placée à 40 cm de l'ouverture. La fréquence centrale est choisie égale à 3 GHz avec une bande passante de 2 GHz. Deux réseaux de 8 antennes monopolaires sont placés à l'intérieur de la cavité, un réseau en émission et un en réception. La réponse de la cible après soustraction de la réponse sans la cible est illustrée sur la Figure II.21. L'enveloppe du signal peut toujours être décrite comme une exponentielle décroissante.

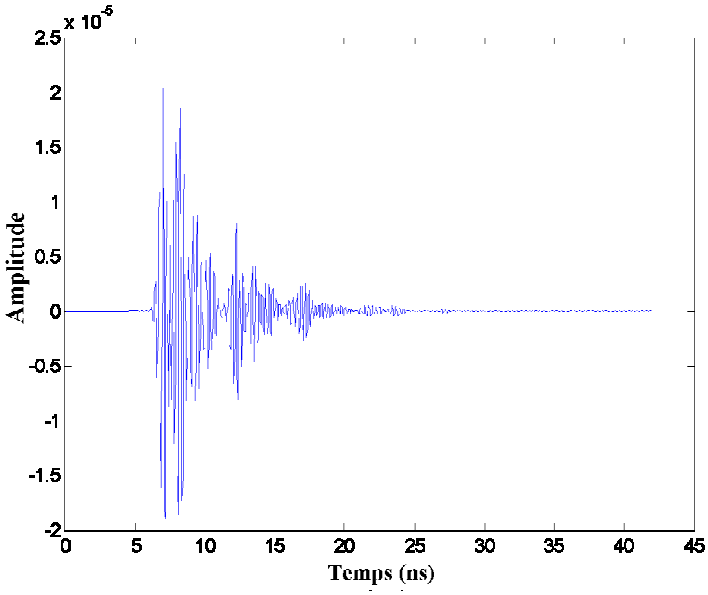


Figure II.21: réponse de la cible après soustraction de la réponse de la cavité, entre 2 antennes.

La décomposition en valeurs singulières de **K** est ensuite réalisée :

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{8} \mathbf{U}_i^{Rx} \sigma_i^T \mathbf{U}_i^{Tx*} \tag{2.23}$$

Avant soustraction, les valeurs singulières correspondent aux multiples réflexions sur les parois de la cavité et un continuum de valeurs singulières apparaît. A contrario, après soustraction une seule valeur singulière principale se dégage (Figure II.22). Son niveau est toutefois très inférieur aux valeurs singulières avant soustraction. Un facteur de 30 dB les sépare.

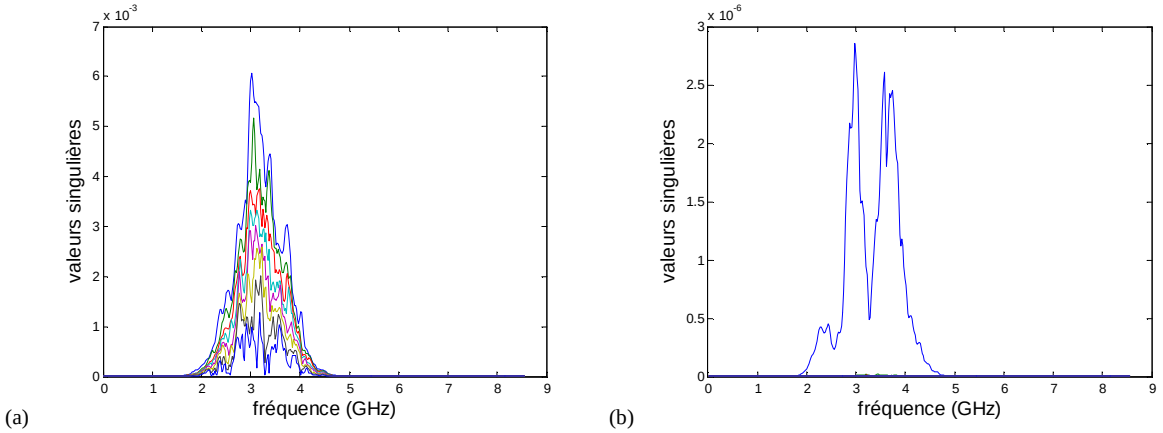


Figure II.22: valeurs singulières en fonction de la fréquence. (a) pour la cible sans soustraction, (b) après soustraction.

Nous pouvons ensuite « repropager » numériquement le vecteur singulier associé à la première valeur singulière non nulle. Dans ce cas, la fonction de Green à laquelle doit être comparé le vecteur singulier n'est pas celle en espace libre, mais la fonction de Green réelle entre chaque antenne et chaque point de l'espace. Ainsi, lors de la simulation, les réponses entre chaque antenne et une matrice de point autour de la position de la cible ont été enregistrées. Afin de s'affranchir de la décroissance en 1/r de l'onde qui fausse l'estimation de la position de la cible, seule la phase des fonctions de Green est utilisée. L'image est donc calculée à partir de :

$$W_1(\mathbf{r}) = \left(\left| \left\langle \frac{\mathbf{G}^{Rx}(\mathbf{r})}{\left|\mathbf{G}^{Rx}(\mathbf{r})\right|} \middle| \mathbf{U}_1^{Rx} \right\rangle \right| + \left| \left\langle \frac{\mathbf{G}^{Tx}(\mathbf{r})}{\left|\mathbf{G}^{Tx}(\mathbf{r})\right|} \middle| \mathbf{U}_1^{Tx*} \right\rangle \right| \right)^2 \tag{2.24}$$

La repropagation suivant les deux réseaux est sommée de façon incohérente. Une sommation cohérente n'est ici pas nécessaire. Elle est en effet utilisée généralement pour diminuer la

taille de la tache focale ou les lobes secondaires de réseau. Or dans notre cas, la largeur de la tache focale est dictée par la surface d'ouverture de la cavité et non l'ouverture du réseau.

Le nombre de positions composants le réseau sert seulement expérimentalement à améliorer le rapport signal/bruit par l'intermédiaire de la *svd* de la matrice **K**.

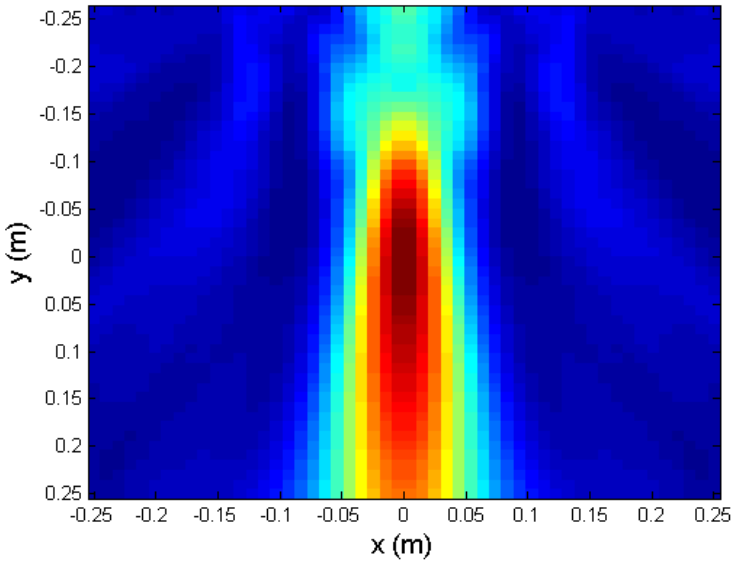


Figure II.23: repropagation du premier vecteur singulier, sommé de façon incohérente sur les fréquences. Le repère est centré sur la position de la cible dans la simulation.

La tache focale est bien centrée au niveau de la position initiale de la cible : en x=0 m, y=0 m (Figure II.23). Elle confirme la bonne détection de cette cible.

II.4.2 Réalisation expérimentale

Dans cette expérience, nous avons utilisé la configuration avec les antennes Vivaldi, installées dans la cavité réverbérante. Nous ne cherchons ici pas à repropager numériquement les vecteurs singuliers. L'objectif de cette expérience est de montrer qu'une valeur singulière se détache pour la matrice après soustraction. L'ouverture de la cavité est de l'ordre de 0,8 m en hauteur et 0,1 m en largeur.

La principale difficulté expérimentale réside dans la faible amplitude du signal réfléchi par la cible par rapport à la réponse de la cavité. Ainsi, les signaux mesurés après soustraction possèdent un mauvais rapport signal sur bruit, notamment au niveau de la queue de l'exponentielle décroissante. Afin de caractériser ce phénomène, l'évolution des valeurs singulières (à une fréquence donnée) en fonction de la taille de la fenêtre temporelle choisie

est déterminée. Pour chaque réponse inter-éléments, les signaux temporels $K_{ij}(t)$ sont découpés en fenêtres temporelles de durée T entre 0 et 60 ns :

$$K_{ij}(t,T) = \begin{cases} K_{ij}(t) & \text{pour } t \in [t_S, t_S + T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.25}$$

La durée t_S correspond à l'instant premier auquel l'écho de la cible apparaît. Une transformée de Fourier et une *svd* sont ensuite réalisées sur les matrices $\mathbf{K}(t,T)$ pour chaque valeur de T.

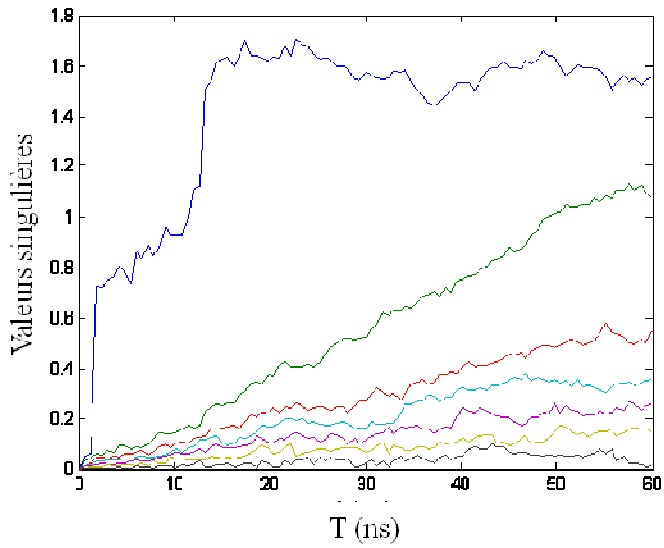


Figure II.24: Valeurs singulières en fonction de la durée de la fenêtre choisie, à la fréquence de 5,5 GHz.

Sur la Figure II.24, l'évolution des valeurs singulières à la fréquence centrale (2,7 GHz) est représentée en fonction de la durée de la fenêtre T. Deux régimes se distinguent pour la première valeur singulière. Dans une première phase, entre 0 et 14 ns, le signal temporel correspond bien à la réponse de la cible et la valeur singulière augmente très fortement avec la durée de la fenêtre. Dans une seconde phase, la soustraction est déficiente et le signal mesuré correspond à du bruit. Ainsi la première valeur singulière n'augmente plus, voir même décroît légèrement, car le réseau ne reçoit plus de signal constructif provenant de la cible.

Le comportement des valeurs singulières suivantes (augmentation linéaire en fonction de la taille de la fenêtre) sont caractéristiques de valeurs associées au bruit. Durant la seconde phase, la seconde valeur singulière se rapproche alors de plus en plus de la première valeur singulière. Ainsi, il serait une erreur de considérer la totalité du signal afin de détecter une cible. Les valeurs singulières donneraient dans ce cas l'impression de correspondre à du bruit

(continuum de valeurs). Le choix de la fenêtre s'avère finalement important dans la détection avec la chambre réverbérante.

II.5 Détection à l'intérieur d'un missile

Initialement, le prototype de génération d'impulsions de forte amplitude devait servir à la perturbation, la neutralisation ou la destruction des circuits électroniques à l'intérieur d'un missile hostile. L'objectif consiste ainsi à focaliser des micro-ondes à l'intérieur de ce missile. L'axe focalisation au sein du missile est ici abordé par la méthode DORT, mais est détaché de l'axe amplification avec la cavité réverbérante. La détection se fait grâce à un réseau d'antennes en espace libre (sans la cavité). Nous étudions dans cette section l'impact de la géométrie du missile sur la détection et la focalisation. Du point de vue du missile, la détection doit être réalisée non pas sur la coque extérieure sur laquelle l'émission des ondes n'aurait que peu d'impact, mais plutôt sur un point brillant (le circuit électronique) à l'intérieur. En l'absence de données sur la réponse des circuits à une excitation et devant la complexité du problème, nous nous intéressons à la détection d'un objet diffusant seul dans la coque.

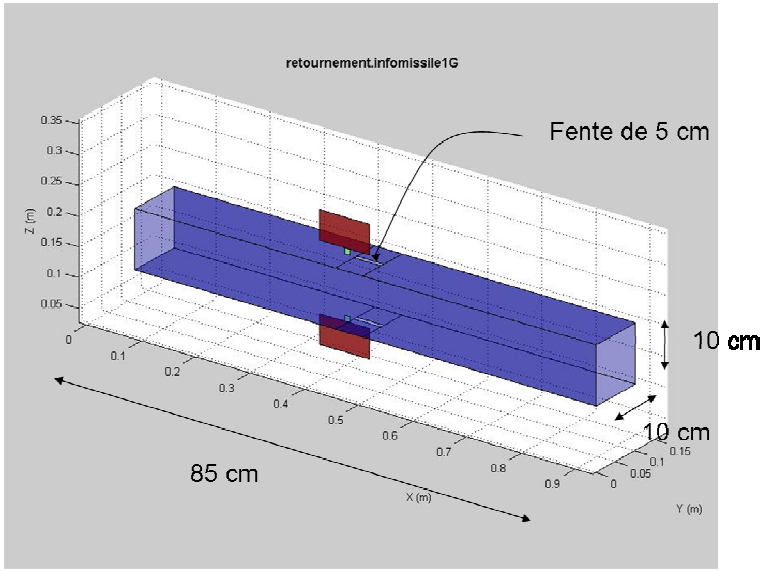


Figure II.25: Modèle de missile fourni par la DGA.

En première approximation, le missile est modélisé comme un parallélépipède à section carrée ouvert sur ses faces avant et arrière, comme le montre la Figure II.25 réalisée par la DGA. Les dimensions latérales des ouvertures avant et arrière sont de taille égale à la longueur d'onde à 3 GHz. Nous considérons qu'il sera possible de travailler à des plus hautes fréquences par la

suite. De ce fait, elles sont élargies dans cette étude. Deux fentes de 5 cm de longueur sont présentes aussi sur le dessus et le dessous. Elles ne sont néanmoins pas prises en compte dans l'étude car fines par rapport à la longueur d'onde.

Lors de l'étude, le réseau d'antennes est placé en face de l'ouverture avant du missile. Le problème est réduit à deux dimensions pour étudier l'impact des réflexions sur les faces latérales. En effet, les antennes sont polarisées en champ E parallèle (axe *z*) et les réseaux sont disposés dans le plan *xy*. La localisation de la cible ne peut donc pas se réaliser suivant l'axe *z*. Le problème devient similaire au cas de l'acoustique sous-marine pour lequel les interfaces air/mer et mer/sol forment un guide d'onde. De nombreux travaux ont concerné l'application de la méthode DORT à des fins de détection d'objets en mer [22-25]. Ils ont inspiré les développements dans cette étude.

La cible placée dans le missile consiste simplement en un objet diffusant. Pour des raisons pratiques, une boule recouverte d'aluminium est choisie. L'étude est menée tant en simulation qu'expérimentalement.

II.5.1 Simulations

Les différentes simulations qui suivent sont réalisées de nouveau avec le logiciel MEEP. Un seul réseau de 11 antennes en émission-réception, avec une distance inter-antennes de λ dans la direction *x*, produit une ouverture totale de 10λ. La face avant du missile est placée à 5λ du réseau dans la direction *y* et est large de $4{,}5\lambda$. La boule est située à 4λ de la face avant. Les sources émettent des signaux gaussiens de fréquence centrale 3 GHz et l'échantillonnage des signaux se fait à 30 GHz.

Dans cette simulation, les parois du guide sont métalliques et fines ($0{,}1\lambda$). Par conséquent, le signal rétrodiffusé provient majoritairement des réflexions sur la boule puisque la direction du missile est perpendiculaire à la direction globale du réseau. Après transformée de Fourier, la décomposition en valeur singulière de l'opérateur de retournement temporel $\mathbf{K}(\omega)=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{U}_i\sigma_i\mathbf{V}_i^H$ fait ressortir une valeur singulière très importante et une seconde plus faible (Figure II.26). En effet, dans le cas d'objets spatialement étalés (i.e. non ponctuels), le nombre de valeurs singulières significatives associés à l'objet augmente. Dans notre situation, les deux premières valeurs singulières correspondent aux termes monopolaires et dipolaires

de la diffusion de la boule. Ces termes de diffusion seront plus largement étudiés, lors de du prochain chapitre, pour le cas proche des cylindres diélectriques.

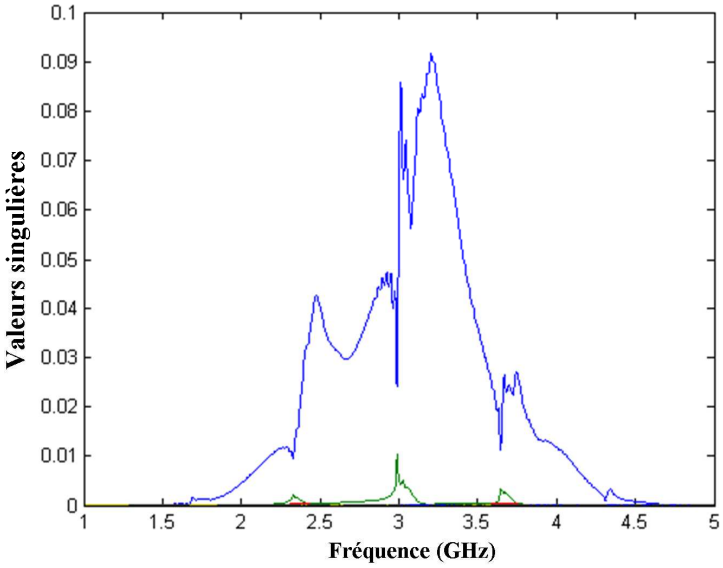


Figure II.26: (gauche) valeurs singulières en fonction de la fréquence. (droite) repropagation du premier vecteur singulier à 3 GHz.

Le premier vecteur singulier $\mathbf{U}_1$ est repropagé en espace libre et à une fréquence. L'image donne naissance à une tache focale principale située au niveau de la cible (Figure II.27).

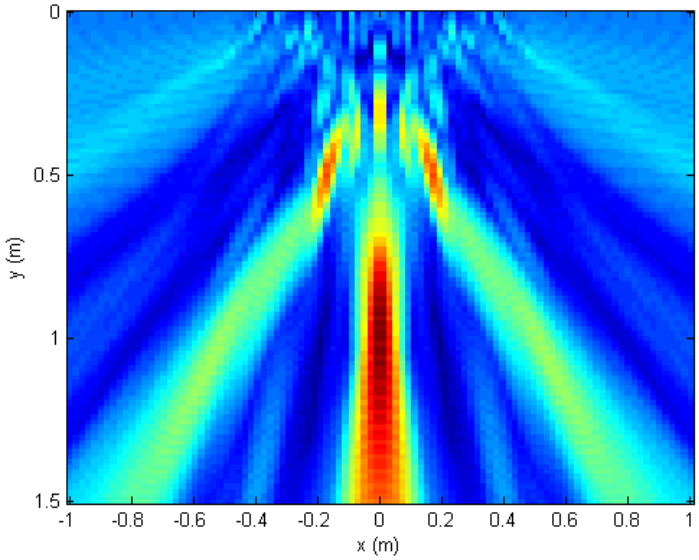


Figure II.27: Somme sur les fréquences des repropagations du vecteur singulier $\mathbf{U}_1$.

Du fait des réflexions sur la face avant du missile, deux spots plus légers apparaissent à 0.4 m. La figure révèle aussi deux taches focales virtuelles, qui sont les images de la cible par rapport aux parois du guide. Leur résolution axiale reste toutefois faible du fait de l'ouverture du réseau. En effet, la fonction de Green en espace libre ne tient pas compte de l'existence du missile. Ces taches focales image sont dues aux différentes réflexions sur les parois du guide (Figure II.28). Théoriquement le nombre d'images correspond au nombre de réflexions dans le guide. La longueur du missile ne permet qu'une seule réflexion au maximum sur ses faces.

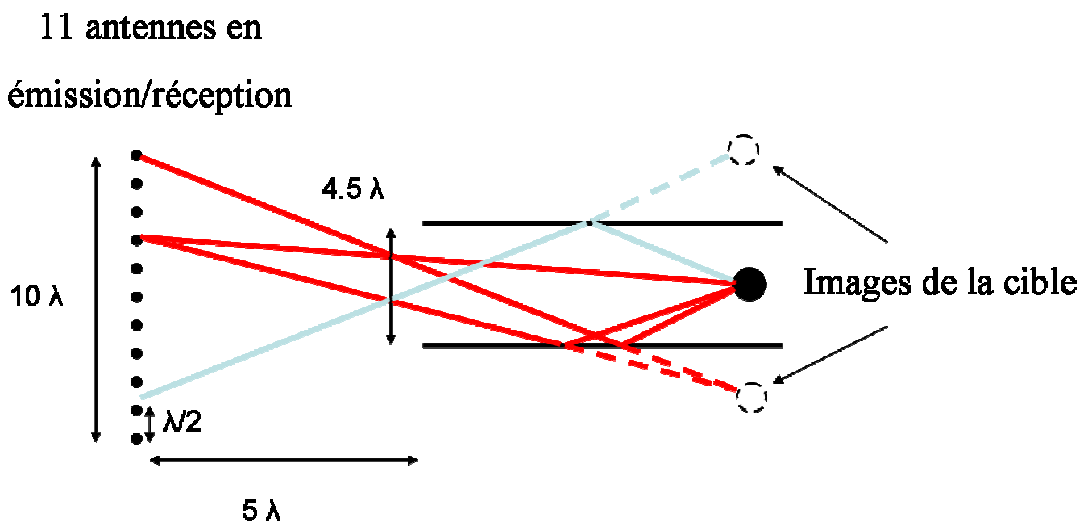


Figure II.28: Réflexions dans le missile et création des taches focales images.

Dans le domaine temporel, le front d'onde qui permet la focalisation sur la cible est mis en évidence sur la Figure II.29(a). Pour obtenir les signaux temporels après repropagation des vecteurs singuliers en espace libre, nous calculons la transformée de Fourier inverse du produit scalaire entre vecteur singulier et le vecteur des fonctions de Green à chaque fréquence :

$$s(t,\mathbf{r}) = \int_0^{\infty} \langle \mathbf{U}_1 \,|\, \mathbf{G}(\mathbf{r}) \rangle \mathrm{e}^{-i\omega t}\, d\omega \qquad (2.26)$$

Seule la phase des fonctions de Green est réellement prise en compte car l'atténuation en 1/r fausse l'estimation de la position. Le signal temporel après réémission du vecteur singulier fait apparaître un pic à t = 4,62 ns au niveau de la cible. A cet instant, on constate que les pics *image* de la boule par rapport au missile sont déphasés par rapport au pic principal (Figure II.29(d)). En effet, une réflexion dans le guide induit un déphasage de π sur l'onde. Ce déphasage est retrouvé lors de la repropagation en espace libre. Il assure que les parcours de l'onde suivant les différents chemins produisent bien une focalisation cohérente au niveau de

la cible dans le cas d'une repropagation réel, i.e. une réelle réémission temporelle des vecteurs singuliers en présence du missile.

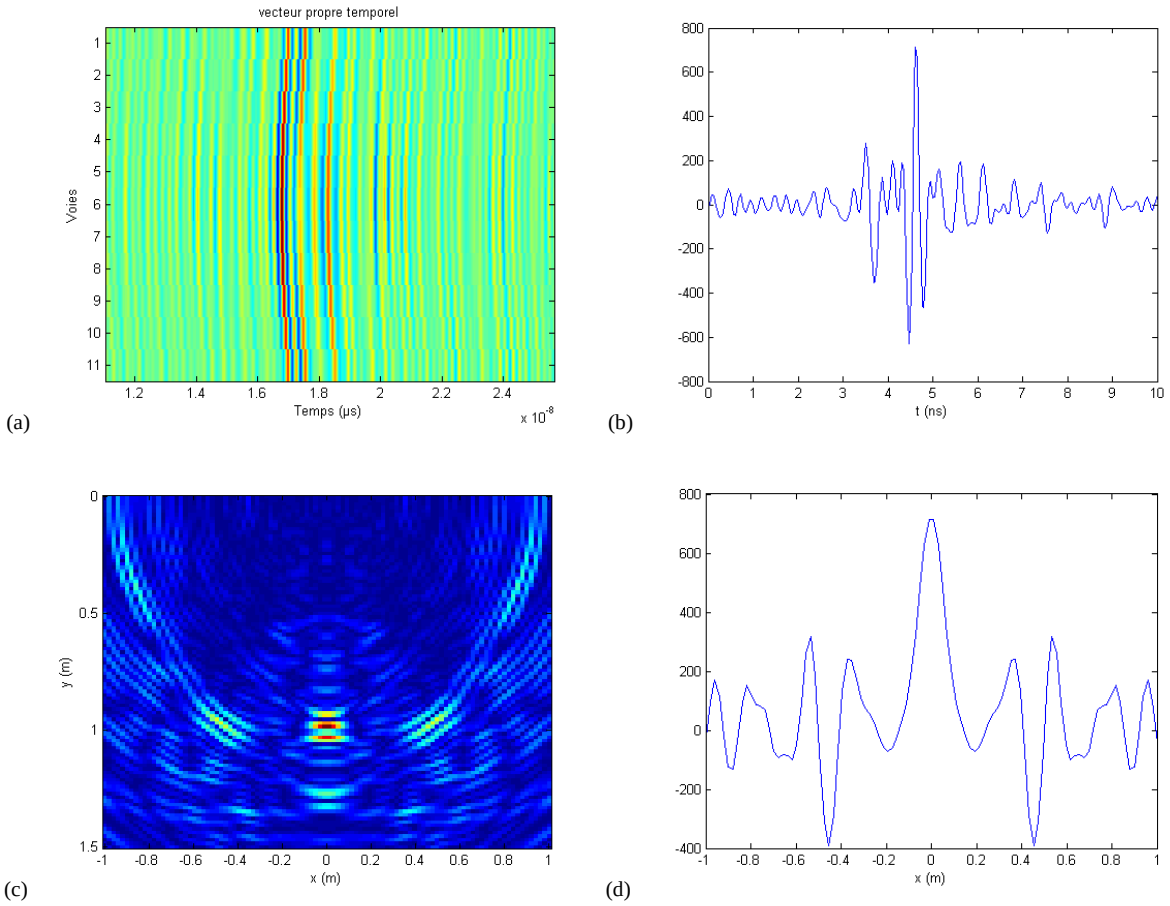


Figure II.29: (a) vecteur singulier temporel en fonction de l'antenne d'émission (b) signal temporel au point de focalisation, x=0 m, y=0,9 m, (c) image à t=4,62 ns, (d) coupe de l'amplitude du signal à t=4,62 ns, à la profondeur y = 0,9 m.

II.5.2 Résultats expérimentaux

La partie expérimentale a été réalisée en chambre anéchoïque à l'aide de deux réseaux de huit antennes « fouet » omnidirectionnelles. Le missile est fabriqué à partir d'un assemblage de plaques d'aluminium qui garantissent un très bon coefficient de réflexion. Les dimensions de la face avant sont 30*30 cm et la longueur de la plaque égale 50 cm. La cible est constituée par une boule de diamètre 8 cm recouverte d'aluminium. Elle est placée à l'intérieur du missile au niveau de la face arrière. Nous utilisons deux réseaux distincts d'antennes, placés de façon symétrique face au missile (Figure II.30). L'analyseur de réseau est calibré dans la bande fréquentielle de 2 à 4 GHz correspondant à la bande passante des antennes.

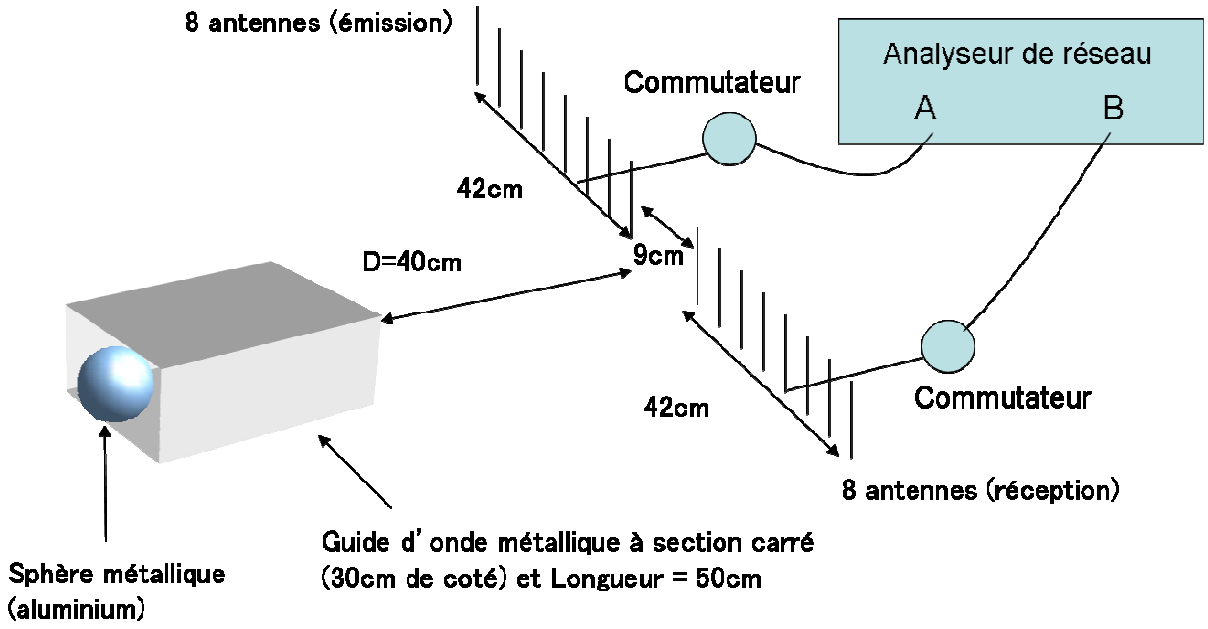


Figure II.30: Dispositif expérimentale pour la détection au sein d'un missile.

La première étape de traitement du signal consiste à s'affranchir des réflexions directes sur les parois d'entrée du missile. Une transformée de Fourier inverse est appliquée à chaque signal pour passer dans le domaine temporel et la première partie du signal (de 0 à 12 ns sur la Figure II.31(a)) ne provenant pas des réflexions sur la boule est supprimée. Après transformée de Fourier pour repasser au domaine fréquentiel, une décomposition en valeurs singulières est appliquée à l'opérateur de retournement temporel (Figure II.31(b)).

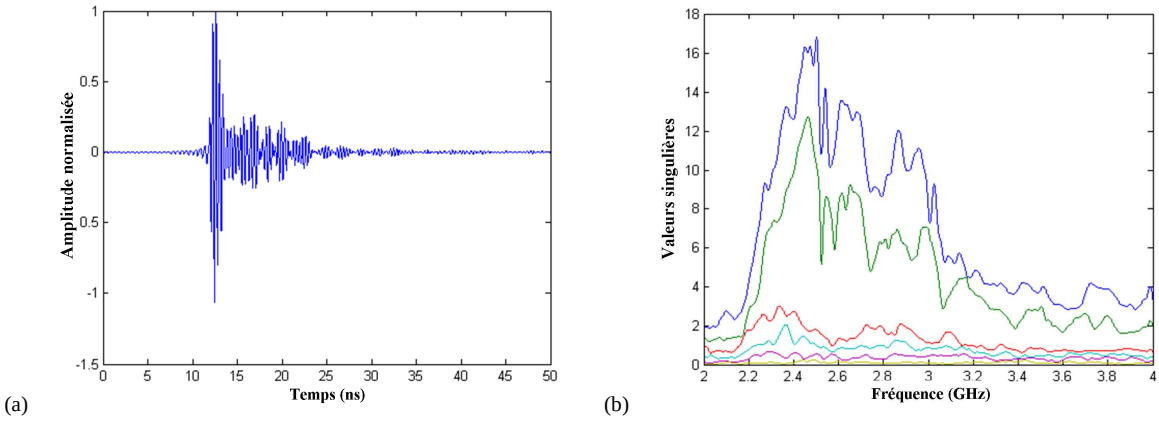


Figure II.31: (a) tracé de l'amplitude du signal entre l'antenne 2 du réseau en émission et l'antenne 3 du réseau en réception. Après traitement, le signal est mis à zéro entre 0 et 12 ns. (b) tracé des valeurs singulières en fonction de la fréquence.

Deux valeurs singulières se détachent nettement du niveau de bruit. Elles correspondent aux termes monopolaires et dipolaires de diffusion par la boule. Le diamètre de la boule est plus élevé que lors des simulations afin d'obtenir un meilleur rapport signal/bruit. Ce diamètre explique l'augmentation relative de la seconde valeur singulière.

La repropagation numérique des vecteurs singuliers est réalisée à partir de l'équation (1.35) (repropagation incohérente). Les mêmes propriétés se dégagent par rapport à la simulation. La repropagation du premier vecteur singulier en espace libre génère une tache focale sur la cible, mais aussi des spots sur les images de la cible par rapport au missile, comme expliqué à la section précédente. Leur localisation en profondeur se révèle encore une fois pauvre du fait de la faible ouverture des réseaux. Toutefois, leurs directions restent très bien définies.

Lorsque les vecteurs ne sont repropagés qu'à partir d'un seul réseau non centré par rapport à l'axe du guide, une seule tache focale « image » apparaît. Elle est due à la réflexion sur la paroi en vis-à-vis du réseau décentré. L'apparition des deux taches provient de la superposition des deux repropagations. Dans notre expérience, l'amplitude des taches focales images sont particulièrement élevées. En effet, l'amplitude de l'onde balistique est nulle pour les antennes le plus désaxées de chaque réseau, du fait de leur position relative à l'ouverture du guide. Seule une réflexion à l'intérieur du guide leur permet d'illuminer la boule. L'amplitude de la tache focale centrale reste néanmoins plus importante sur la Figure II.32(a) car elle provient de la sommation incohérente des contributions des deux réseaux.

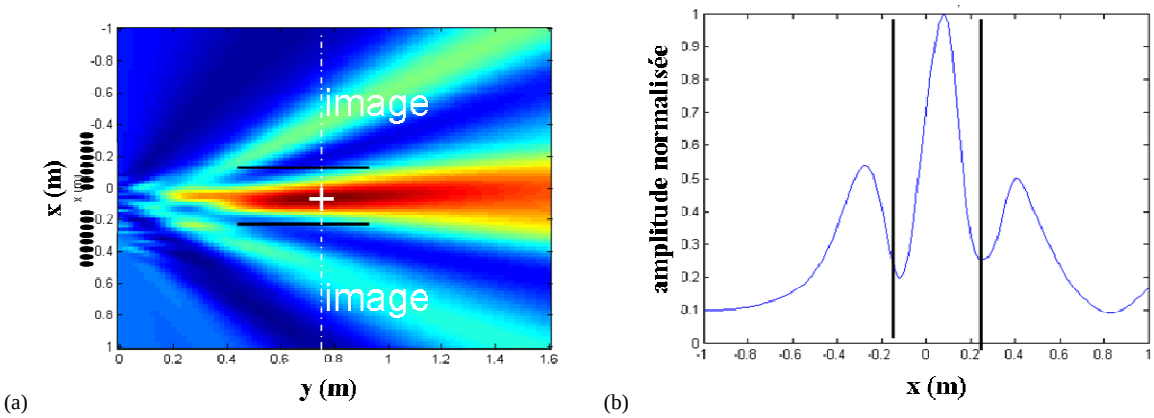


Figure II.32: (a) Sommation sur toutes les fréquences de la repropagation incohérente à partir des 2 réseaux. (b) Profil de l'image en fonction de x au niveau du point focal en profondeur. Le positionnement des parois du guide est symbolisé par les traits pleins noirs.

Finalement, l'étude expérimentale et numérique a montrée la possibilité de détecter un objet à l'intérieur d'un missile modélisé par un guide d'onde. Compte tenu de la modélisation très simplifiée de notre cas de figure, l'étape suivante consiste à remplacer la boule par un modèle plus réaliste du point brillant. Suivant sa signature, soit temporelle soit fréquentielle, des techniques d'identification et de caractérisation pourront être employées.

II.6 Conclusion générale du chapitre

En conclusion de ce chapitre, nous avons isolé les différents paramètres rentrant en ligne de compte pour un prototype de « bazooka électromagnétique » par retournement temporel grâce à l'utilisation d'une chambre réverbérante ouverte. Des gains de l'ordre de 18 dB ont été obtenus par rapport à l'utilisation d'une antenne directive *classique*, et de 46 dB par rapport au signal transitoire du RT. Le caractère auto-adaptatif en position et en polarisation du RT permet en outre de ne pas avoir à changer la disposition suivant les paramètres de focalisation exigées, à la différence d'une antenne cornet seule.

De plus, l'étude a montrée que la largeur de la tache focale et l'amplitude du signal de focalisation par RT sont deux grandeurs intimement liées par la surface d'ouverture. La taille latérale de la tache focale est donnée par l'ouverture latérale D, la longueur d'onde λ et la distance du récepteur à l'ouverture F. L'amplitude de l'impulsion après RT est, pour sa part, maximal pour une surface d'ouverture proche de la longueur d'onde au carré. Toutefois, si certaines applications nécessitent de diminuer la taille de la tache focale pour ne pas illuminer une zone proche du point de focalisation, une solution consiste à augmenter l'ouverture de la cavité. L'efficacité du RT diminuera certes, mais assez faiblement. La Figure II.16 indique que lorsque l'ouverture est par exemple doublée, le pic de RT ne diminue que seulement de 8%. Suivant la situation, il est possible de garder des performances satisfaisantes tout en affinant la tache focale.

Concernant la durée de l'impulsion recrée après RT, elle est égale à l'inverse de la bande passante du système globale (700 MHz dans notre montage). Des impulsions courtes de forte amplitude sont donc créées. En contrepartie, l'énergie déposée sur la cible reste faible. Le prototype se dirige donc plus vers des applications nécessitant une tension de « claquage » afin d'endommager des dispositifs électroniques (mines antipersonnel par exemple). Pour obtenir le même gain en amplitude avec des signaux de plus forte énergie, le volume de la cavité peut être augmenté du même facteur que la durée de l'impulsion. L'amplitude de la focalisation est en effet proportionnel au volume de la cavité et à la bande passante (équation (2.11)). Toutefois, pour que le dispositif reste aussi efficace, il faut s'assurer d'un champ diffus à l'intérieur de la cavité. Si l'on augmente son volume, le temps de mixage définissant le début du champ diffus augmente lui aussi. Il évolue en $\sqrt{V}$. Pour contourner ce problème, des diffuseurs sans perte qui permettent d'homogénéiser plus rapidement le champ peuvent

être ajoutés dans la cavité. La fabrication de parois à bords rugueux constitue également une solution possible.

Durant la première partie de cette étude, nous avons réalisé l'hypothèse d'une cible émettant un signal exploitable pour le retournement temporel. Lors de la seconde, nous avons appliqué la méthode DORT pour des cibles mobiles. Pour des cibles fixes, la méthode DORT se révèle a priori inefficace. Néanmoins, le bazooka peut être utilisé si la cible est détectée par l'intermédiaire d'une autre méthode. A cette fin le champ à la sortie de la cavité est mesuré en tout point. A partir de la formule de diffraction de Fresnel, il est ensuite possible de déterminer les signaux permettant de focaliser sur la position déterminée auparavant. Les travaux de Nicolas Quieffin sur le retournement temporel synthétique présentent dans ce domaine un intérêt certain [26]. Ainsi, l'acquisition d'une base de données, pour chaque polarisation, des réponses entre la cavité et un plan proche de l'ouverture permettrait une focalisation en n'importe quel point de l'espace, tout en gardant un gain élevé au niveau de l'amplitude du signal de focalisation après RT.

III. Imagerie en micro-ondes par la méthode DORT

Durant ce chapitre, la détection, la localisation et la caractérisation de cibles sont abordées grâce à la méthode DORT. Les premiers travaux sur la méthode datent de 1993 par Prada *et al.* [27]. L'intérêt de la méthode DORT réside notamment dans la séparation des contributions dues aux différents diffuseurs présents dans le milieu. La matrice **K**, formée par les réponses inter-éléments entre deux réseaux, est décomposée en valeurs singulières : $\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{\min(N_A,N_B)} \mathbf{U}_j \sigma_j \mathbf{V}_j^H$. Sous l'approximation de diffusion simple et pour des diffuseurs ponctuels, isotropes et bien résolus, une valeur singulière non nulle de la matrice **K** correspond à chaque diffuseur. Les vecteurs singuliers forment une base orthonormée de l'espace signal. Ils permettent de focaliser à partir des réseaux sur chaque diffuseur séparément. Ses applications en acoustique concernent notamment l'imagerie radar [28], le contrôle non-destructif [13, 29] ou encore l'acoustique sous-marine [22, 25]. Plus récemment, des travaux en imagerie médicale ont été développés [30, 31].

Les études sur la méthode DORT en micro-ondes ont débuté en 1999 avec les travaux de Tortel *et al.* [32]. Ils étudièrent le rôle des différentes polarisations pour des diffuseurs diélectriques. La détection et la localisation d'objets enfouis a été abordée par Micolau et Saillard [33], ainsi que par Dubois *et al.* [34]. En technologie radar, Ziade *et al*. ont appliqué la méthode DORT à la détection en milieux forestiers [35]. Plusieurs études ont de plus été conduites par Yavuz et Texeira afin de déterminer l'influence du bruit, de la dispersion ou encore des pertes à l'intérieur du milieu sur les invariants de l'opérateur de retournement temporel [36-38].

Plusieurs thématiques concernant la méthode DORT en micro-ondes sont développées dans ce chapitre, telles que la caractérisation de cibles diélectriques, la résolution sub-longueur d'onde ou l'étude des invariants pour une cible mobile au cours de l'acquisition de la matrice **K**. Ces méthodes servent par la suite au développement d'un dispositif d'imagerie du déplacement de personnes à travers les murs.

III.1 Caractérisation de cylindres diélectriques à l'aide de deux réseaux distincts

Lors des premiers travaux sur la méthode DORT, seul le cas de cibles ponctuelles possédant une diffusion isotrope était considéré. A chaque cible est alors associé un seul invariant de

l'ORT. Plusieurs cas de figure mènent à une augmentation du nombre d'invariants associés à une cible.

Pour une cible étendue, le nombre de valeurs singulières dépend fortement de ses caractéristiques et de la géométrie du problème. Komilikis *et al.* ont observé expérimentalement ce phénomène pour un cylindre d'acier creux [39]. Prada et Fink ont aussi appliqué la méthode DORT à un cylindre immergé rempli d'air [40]. Ils ont notamment montré que chaque mode de Lamb était associé à deux invariants de l'ORT. L'expression des invariants a par ailleurs été développée par Aubry *et al.* pour un cylindre rigide étendu en fonction de polynômes de Legendre et de Hermite-Gauss [41].

D'autre part, en acoustique, le nombre de valeurs singulières augmente pour des diffuseurs élastiques. En effet, Chambers *et al.* ont démontré que le nombre d'invariants pouvait être supérieurs à quatre même pour une petite cible élastique [42]. Minonzio *et al.* ont aussi étudié les invariants pour des cylindres ou des sphères élastiques mais pour un réseau d'ouverture limitée [43]. Ils montrèrent que la géométrie du réseau a un fort impact sur les invariants.

En micro-ondes, Tortel *et al.* ont montré en 1999 que les vecteurs propres de l'ORT correspondent aux modes normaux de diffusion d'un cylindre diélectrique lorsque le réseau circulaire d'émetteurs/récepteurs entoure complètement le milieu [32]. Les modes normaux forment une base orthogonale pour décrire la diffusion de l'onde sur le cylindre. Par la suite, Chambers et Berryman déterminèrent analytiquement les invariants pour des sphères de faible diamètre [44] et des ellipsoïdes [45].

Dans cette section, la diffusion par un cylindre diélectrique est envisagée en micro-ondes dans le cas de deux réseaux distincts (un en émission et un en réception). Les invariants de l'opérateur de retournement temporel sont déterminés tant théoriquement qu'expérimentalement. L'étude théorique se fonde sur la décomposition du champ diffusé en modes normaux.

III.1.1 Théorie

Nous considérons le cas d'un cylindre diélectrique positionné face aux deux réseaux (voir Figure III.1). Le réseau en émission de N^{Tx} éléments est désigné par l'exposant ^{Tx} et le réseau en réception de N^{Rx} éléments par l'exposant ^{Rx}. On note la distance entre le cylindre et le réseau F, le décalage du cylindre avec le centre des deux réseaux dx. La distance entre l'antenne #j du réseau Rx (respectivement Tx) et le cylindre est notée r_j^{Rx} (resp. r_j^{Tx}). Un

élément de la matrice **K** des réponses inter-éléments entre les deux réseaux peut s'écrire comme la somme de *m+1* modes cylindriques :

$$K_{ji} = O_j^{\mathrm{Rx}} O_i^{\mathrm{Tx}} \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n R_n \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r_j^{\mathrm{Rx}}\right) \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_0 r_i^{\mathrm{Tx}}\right) \cos\left(n\left(\alpha_j^{\mathrm{Rx}} - \alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right)\right) \tag{3.1}$$

avec $1 \leq j \leq N^{\mathrm{Rx}}$ et $1 \leq i \leq N^{\mathrm{Tx}}$. Le terme d'oscillation $e^{-\mathrm{i}\omega t}$ est implicite afin de ne pas surcharger l'écriture. La dépendance angulaire du $n^{\text{ème}}$ mode cylindrique s'écrit $\cos(n\,(\alpha_j^{\mathrm{Rx}} - \alpha_i^{\mathrm{Tx}}))$. La fonction H_n désigne la fonction de Hankel d'ordre n. Chaque mode est pondéré par le coefficient de réflexion R_n qui dépend de la permittivité de l'air ε_0, de la permittivité du cylindre ε_2, du diamètre du cylindre a et enfin de la pulsation ω. Quant au coefficient de Neumann ε_n, il est égal à 1 pour $n = 0$ et 2 pour $n \geq 1$.

La somme dans l'équation (3.1) devrait être formellement infinie. Cependant, du fait de l'atténuation du coefficient de réflexion R_n, les ordres tels que $n \geq m+1$ sont négligeables, avec m de l'ordre de grandeur de $k_0 a$.

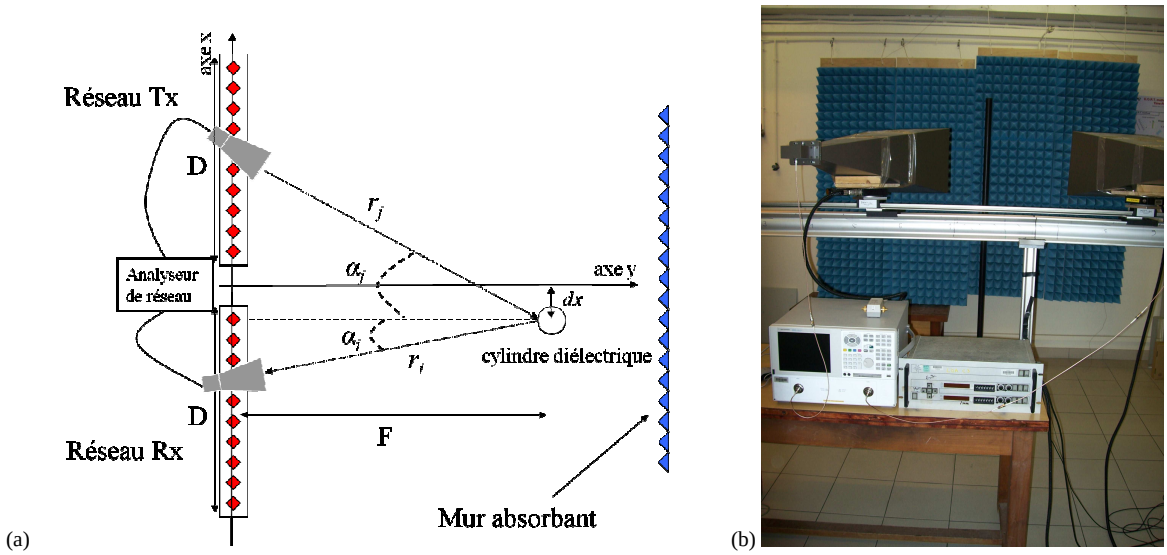


Figure III.1 : schéma (a) et photographie (b) du dispositif expérimental.

La dépendance angulaire sous le cosinus dans l'équation (3.1) peut être développée sous la forme :

$$\cos\left(n\left(\alpha_j^{\mathrm{Rx}} - \alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right)\right) = \cos\left(n\alpha_j^{\mathrm{Rx}}\right)\cos\left(n\alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right) + \sin\left(n\alpha_j^{\mathrm{Rx}}\right)\sin\left(n\alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right) \tag{3.2}$$

Ainsi, l'équation (3.1) se divise en une somme de termes symétriques et anti-symétriques par rapport à l'axe y. Nous posons par la suite:

$$\begin{cases} h_{n0,i}^{\mathrm{Tx}} = \mathrm{i}^n O_i^{\mathrm{Tx}} \cos\left(n\alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right) \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_1 r_i^{\mathrm{Tx}}\right) \\ h_{n1,i}^{\mathrm{Tx}} = \mathrm{i}^n O_i^{\mathrm{Tx}} \sin\left(n\alpha_i^{\mathrm{Tx}}\right) \mathrm{H}_n^{(1)}\left(k_1 r_i^{\mathrm{Tx}}\right) \end{cases}, \tag{3.3}$$

avec $1 \leq i \leq N^{\mathrm{Tx}}$. Nous introduisons les vecteurs normalisés $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Tx}} = \dfrac{\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Tx}}}{\left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Tx}}\right\|}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Rx}} = \dfrac{\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Rx}}}{\left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Rx}}\right\|}$.

L'équation (3.1) se décompose sous la forme de *m+1* harmoniques symétriques et *m* harmoniques anti-symétriques:

$$\mathbf{K} = \sum_{n=0}^{m} \tilde{\mathbf{u}}_{n0}^{\mathrm{Rx}} \; \tilde{\sigma}_{n0} \left(\tilde{\mathbf{u}}_{n0}^{\mathrm{Tx}}\right)^{\mathrm{T}} + \sum_{n=1}^{m} \tilde{\mathbf{u}}_{n1}^{\mathrm{Rx}} \; \tilde{\sigma}_{n1} \left(\tilde{\mathbf{u}}_{n1}^{\mathrm{Tx}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{3.4}$$

avec :

$$\tilde{\sigma}_{nl} = \varepsilon_n \left(-1\right)^n R_n \; \left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Rx}}\right\| \; \left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Tx}}\right\| \tag{3.5}$$

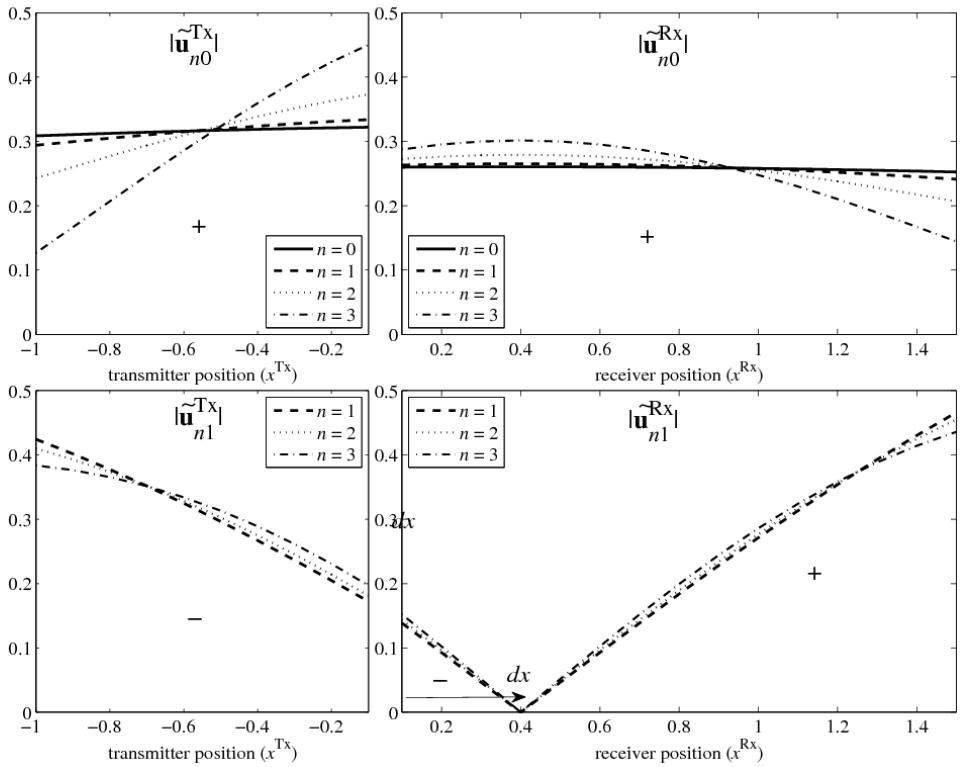


Figure III.2: Module des 4 premiers harmoniques projetés ($0 \leq n \leq 3$) $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Tx}}$ pour le réseau en transmission (gauche) et réception $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Rx}}$ (droite), avec N^{Tx} = 10, N^{Rx} = 15. Les distances *dx* et *F* sont égales à 0,4 m et 3 m, avec respectivement *l*=0 en haut et l=1 en bas. Les signes + ou – indiquent si la phase des harmoniques possède (-) ou non (+) un saut de π.

$2m+1$ termes apparaissent ainsi dans l'équation (3.4). Les modules des quatre premiers harmoniques projetés $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Rx}}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Tx}}$ sont illustrés sur la Figure III.2.

En regroupant les harmoniques sous les matrices $\tilde{\mathbf{U}}^{Rx}$ et $\tilde{\mathbf{U}}^{Tx}$ de tailles respectives N^{Rx}x$(2m+1)$ et N^{Tx}x$(2m+1)$, la matrice **K** s'écrit sous une forme condensée telle que :

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{U}}^{\mathrm{Rx}}\ \tilde{\mathbf{\Sigma}}\ \left(\tilde{\mathbf{U}}^{\mathrm{Tx}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.6}$$

Minonzio e*t al.* ont alors montré que le problème initialement de dimension N^{Rx}xN^{Tx} se réduisait à la dimension $(2m+1)$x$(2m+1)$ lorsque $2m+1$ est inférieur à N^{Tx} ou N^{Rx} [46]. Les vecteurs singuliers issus de la *svd* de **K** sont alors combinaison linéaire des harmoniques $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Rx}}$ et $\tilde{\mathbf{u}}_{nl}^{\mathrm{Tx}}$.

Durant cette thèse, nous avons validé expérimentalement la théorie développée par Jean-Gabriel Minonzio. Pour ce faire, les valeurs singulières expérimentales sont notamment comparées aux valeurs singulières théoriques issues de la décomposition en modes cylindriques.

III.1.2 Dispositif de mesure

Le premier dispositif formé par les antennes cornet est utilisé afin d'obtenir un bon rapport signal à bruit (voir paragraphe I.4.4). Il permet de faire ressortir un maximum de valeurs singulières du bruit ambiant. Les mesures sont réalisées entre 2,6 et 3,9 GHz. Chaque élément de la matrice **K** correspond à la mesure en transmission entre les deux antennes pour chaque position. Le déplacement des antennes crée deux réseaux virtuels de dix éléments, d'ouverture 1,3 m et séparés de 0,4 m. Ainsi le pas de chaque réseau correspond à une distance de $\lambda/2$, à la fréquence de 3,75 GHz. D'après le théorème d'échantillonnage de Nyquist–Shannon, cette distance assure un échantillonnage optimal du champ le long du réseau.

Le cylindre est disposé devant des panneaux anéchoïques permettant de réduire fortement l'écho du mur. La polarisation verticale du champ généré par les antennes est parallèle à l'axe du cylindre. Des cylindres constitués de trois matériaux différents sont utilisés expérimentalement : du PVC (∅ 2.5 cm, ∅ 3 cm et ∅ 4 cm), de l'Ertaflon (∅ 4 cm) et du Plexiglas (∅ 10 cm). Les cylindres sont suffisamment longs par rapport au faisceau des antennes pour qu'ils soient considérés comme infini.

III.1.3 Invariants de l'opérateur de retournement temporel

a) Valeurs singulières

Lors de la première expérience, la matrice **K** est acquise pour les trois cylindres de PVC de diamètres 2,5 cm, 3 cm et 4 cm. Leur permittivité relative est estimée à 3 à la fréquence de 3 GHz. Pour chaque cylindre, les valeurs singulières sont divisées par leur rayon *a* et les courbes sont tracées en fonction de *ka* (voir Figure III.3). En effet, nous avons montré précédemment que les valeurs singulières sont des combinaisons linéaires de $\tilde{\sigma}_{nl} = \varepsilon_n (-1)^n R_n \left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Rx}}\right\| \left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Tx}}\right\|$, $0 \le n \le m$, $0 \le l \le 1$ [43, 46, 47]. Le coefficient de réflexion R_n dépend de *ka*, alors que les normes des fonctions de Hankel $\left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Rx}}\right\| \left\|\mathbf{h}_{nl}^{\mathrm{Tx}}\right\|$ dépendent seulement de l'inverse du nombre d'onde $1/k$. Ainsi, en introduisant une fonction *f* bien définie, σ_n peut s'écrire comme $\sigma_n = \frac{1}{k} f(ka)$. Lorsque les valeurs singulières sont divisées par *a*, elles deviennent par conséquent seulement fonction de *ka* [46]. Cette considération permet de tracer les courbes pour les trois cylindres de PVC sur la même Figure III.3. Les valeurs singulières expérimentales y sont comparées aux valeurs singulières théoriques.

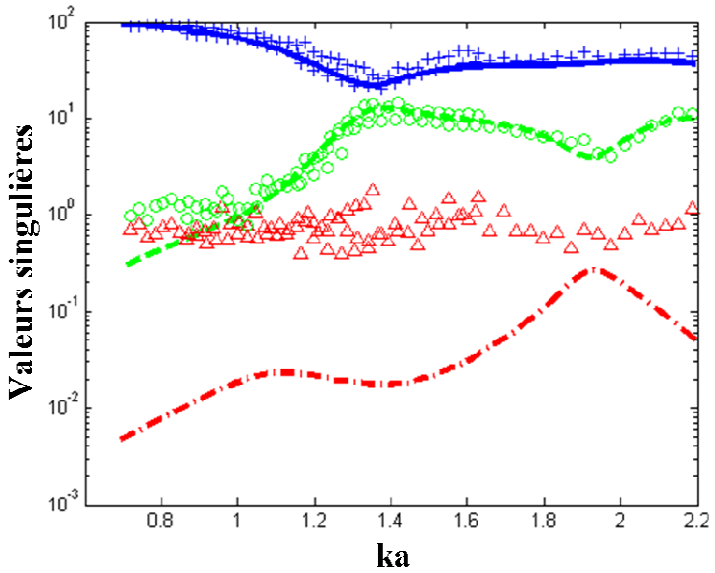


Figure III.3: Valeurs singulières normalisées pour des cylindres de PVC de 3 diamètres (2,5 cm, 3 cm et 4 cm) en fonction de *ka*. Les marqueurs (croix, ronds, triangles) désignent les résultats expérimentaux alors que les traits représentent les valeurs singulières théoriques.

Une bonne adéquation entre les courbes expérimentales et théoriques apparaît pour les deux premières valeurs singulières pour $ka > 1$. Pour les basses fréquences, la seconde valeur singulière atteint le niveau de la troisième valeur singulière (~0 dB). Celle-ci correspond au niveau de bruit, qui est ici relativement plat en fonction de la fréquence. Il domine la troisième valeur singulière théorique sur toute la gamme fréquentielle.

Dans le cas du cylindre en Ertaflon, un bon accord apparaît de nouveau pour les deux premières valeurs singulières (Figure III.4(a)). Le cas de la troisième valeur singulière se révèle intéressant. Expérimentalement celle-ci est pratiquement associée au bruit puisque la quatrième valeur lui est très proche. Toutefois, sa dépendance fréquentielle met en avant un couplage avec la valeur singulière théorique. Ce comportement est particulièrement marqué pour $ka = 1.9$ et $ka = 2.7$. Alors qu'une valeur singulière associée uniquement à du bruit devrait relativement peu dépendre de la fréquence, celle-ci présente une inflexion car la valeur singulière théorique s'en rapproche fortement.

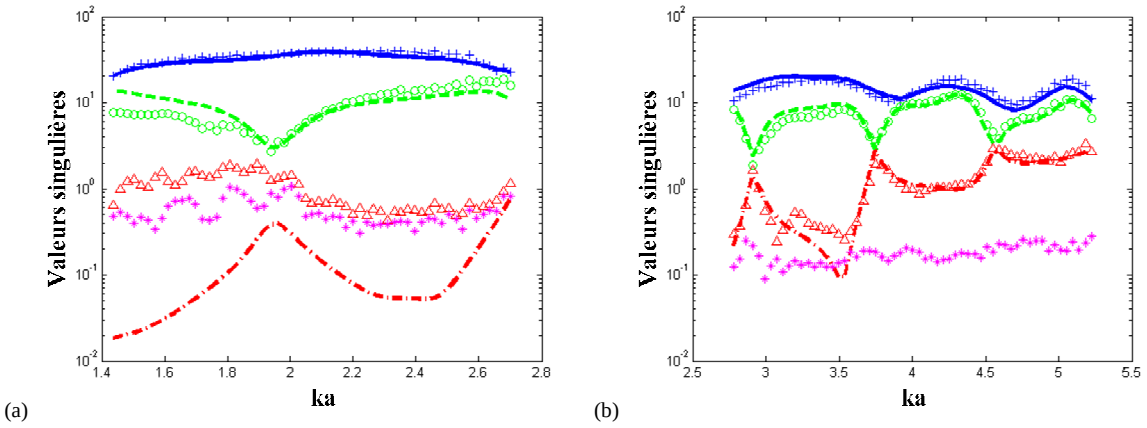
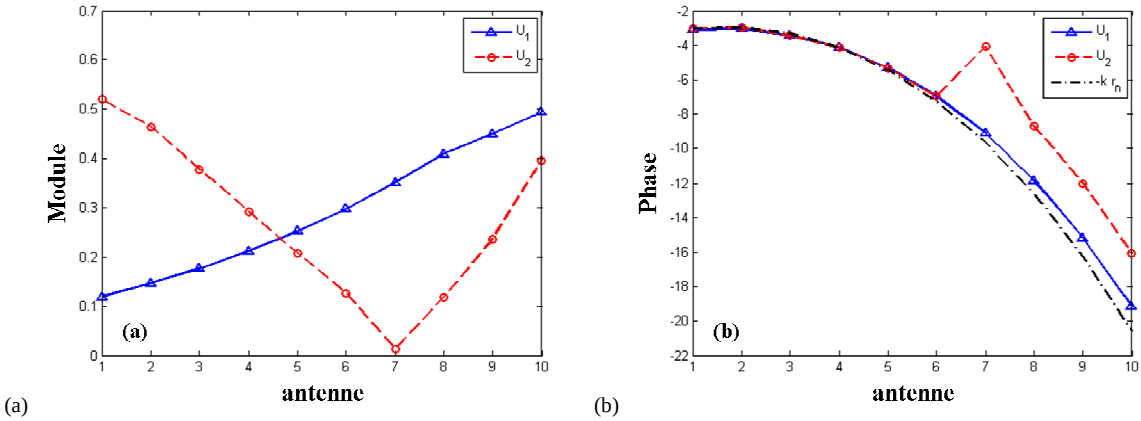


Figure III.4: Valeurs singulières normalisées pour des cylindres d'Ertaflon de diamètre 3 cm (a) et de Plexiglas de diamètre 10 cm (b), en fonction de *ka*.

On observe, sur la Figure III.4(b), que les valeurs singulières associées au cylindre de Plexiglas de diamètre 10 cm varient plus fortement. Un grand nombre de croisements entre elles apparaît également. Ce comportement est du aux fortes résonances du cylindre, conformément à l'étude de Minonzio *et al.* présentée dans [43]. Nous verrons dans la section concernant la repropagation des vecteurs singuliers que ces croisements entre valeurs singulières induisent une permutation entre ces derniers.

b) Comportement des vecteurs singuliers

Le module et la phase des deux premiers vecteurs singuliers sont tracés sur la Figure III.5 pour le cylindre de PVC de diamètre 4 cm. Théoriquement, l'évolution des vecteurs singuliers est simplifiée dans la limite de petit objet, c'est-à-dire de taille inférieure à la cellule de résolution du réseau, donnée par $\lambda F / D$ où F désigne la distance focale et D l'ouverture du plus petit des deux réseaux. Pour notre cylindre, F = 1,73 m et D = 2,6 m, ce qui donne une largeur pour la tache focale de 6,5 cm. Dans ce régime, il a été montré que l'amplitude du vecteur $\mathbf{U}_1$ pouvait être considérée comme constante sur le réseau [46]. Sa phase varie en $-kr_n$, où r_n représente la distance au cylindre de la $n^{\text{ème}}$ antenne du réseau. Quant au second vecteur singulier, son amplitude évolue linéairement, et présente un passage à zéro. Ce passage à zéro induit un saut de π sur sa phase. Ces résultats se retrouvent sur la Figure III.5(b) entre les 7ème et 8ème antennes.



(a) (b)

Figure III.5: Module (a) et phase (b) des premiers et seconds vecteurs singuliers à la fréquence de 3.9 GHz pour le réseau en émission Tx. Ces résultats proviennent de la mesure avec le cylindre de PVC de diamètre 4 cm.

III.1.4 Repropagation numérique des vecteurs singuliers

Dans cette partie, nous montrons qu'il est possible de localiser voir d'imager les cylindres à l'aide de la méthode DORT. Les vecteurs singuliers correspondent à ceux obtenus avec le cylindre de Plexiglas de diamètre 10 cm. Comme les deux réseaux sont séparés et du fait de la phase arbitraire introduite par la *svd* (voir la partie I.4.2), les contributions provenant des deux réseaux sont additionnées de façon incohérente. Les modules des deux contributions sont sommés. Ainsi, pour le $n^{\text{ème}}$ vecteur singulier, l'image $W_1(\mathbf{r})$ est donnée par :

$$W_1(\mathbf{r}) = \left(\left| \left\langle \mathbf{U}_n \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right| + \left| \left\langle \mathbf{V}_n^* \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right| \right)^2 , \tag{3.7}$$

avec $\mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r})$ et $\mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r})$ les vecteurs constitués des fonctions de Green entre les antennes des réseaux Rx et Tx et un point **r** de l'espace. La dépendance de la phase en $-kr_n$ du premier vecteur singulier (aussi bien pour le réseau en émission qu'en réception) assure que la somme incohérente de deux spots associés aux réseaux donne naissance à une seule tache focale (Figure III.6(a)). Les premiers vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{V}_1$ sont associés à une focalisation monopolaire.

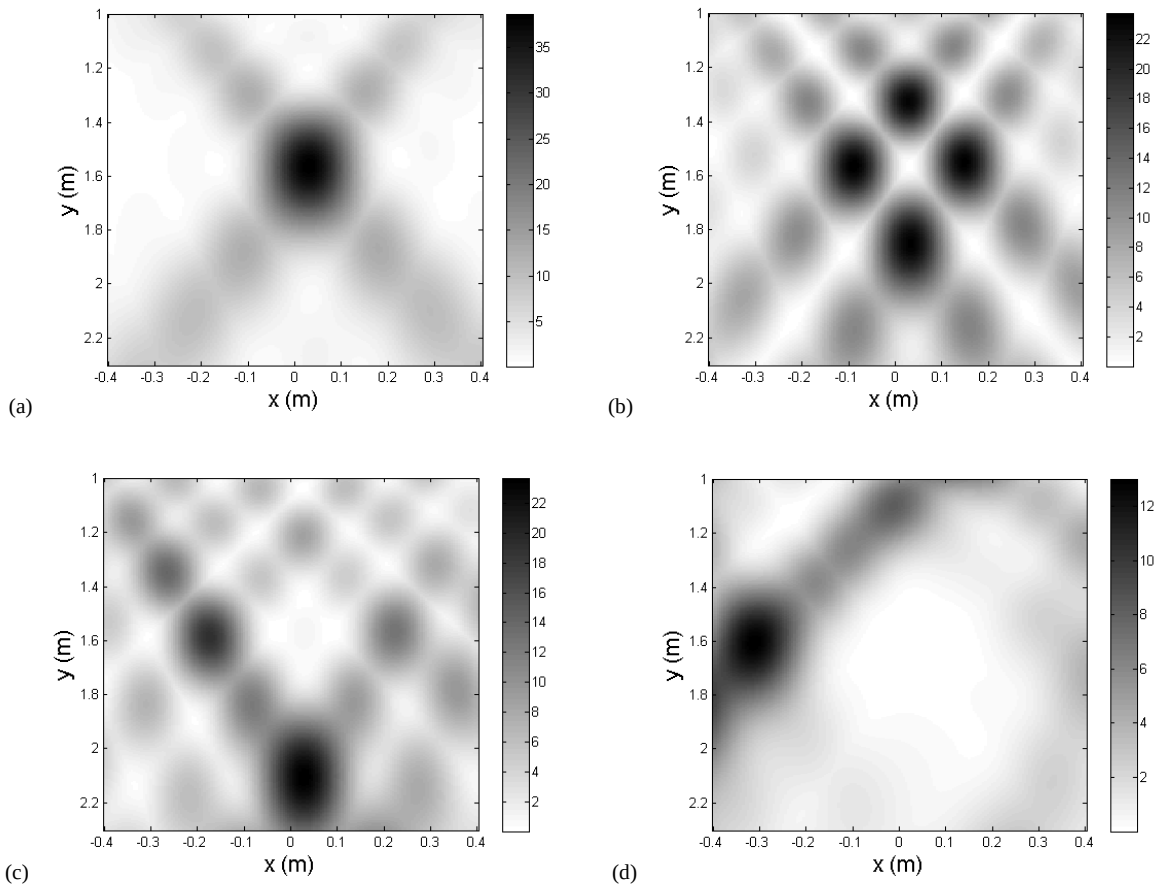


Figure III.6: Repropagation dans l'ordre des 4 premiers vecteurs singuliers du cylindre de Plexiglas à la fréquence de 3,1 GHz.

Quant aux vecteurs $\mathbf{U}_2$ et $\mathbf{V}_2$, le saut de π sur la phase implique une focalisation dipolaire. La repropagation des second vecteurs singuliers crée deux lobes chacun. La sommation incohérente de ces lobes génère par conséquent quatre spots (Figure III.6(b)). L'interprétation devient plus compliquée pour la repropagation du 3ème vecteur singulier (Figure III.6(c)). Bien que sa valeur singulière se détache clairement du bruit, son caractère multipolaire est plus

difficilement interprétable du fait de la repropagation incohérente. Le 4ème vecteur singulier appartient à l'espace bruit. Néanmoins, du fait de l'orthogonalité entre les vecteurs singuliers, le niveau d'intensité est pratiquement nul au niveau de la position du cylindre (Figure III.6(d)).

Lorsque les contributions des deux réseaux sont sommées de façon incohérente, la distribution de la phase sur un seul réseau est prise en compte. Ainsi, la tache focale est dictée par l'ouverture du plus petit réseau, i.e. 13 cm. Toutefois, il est possible de sommer de façon cohérente les deux contributions.

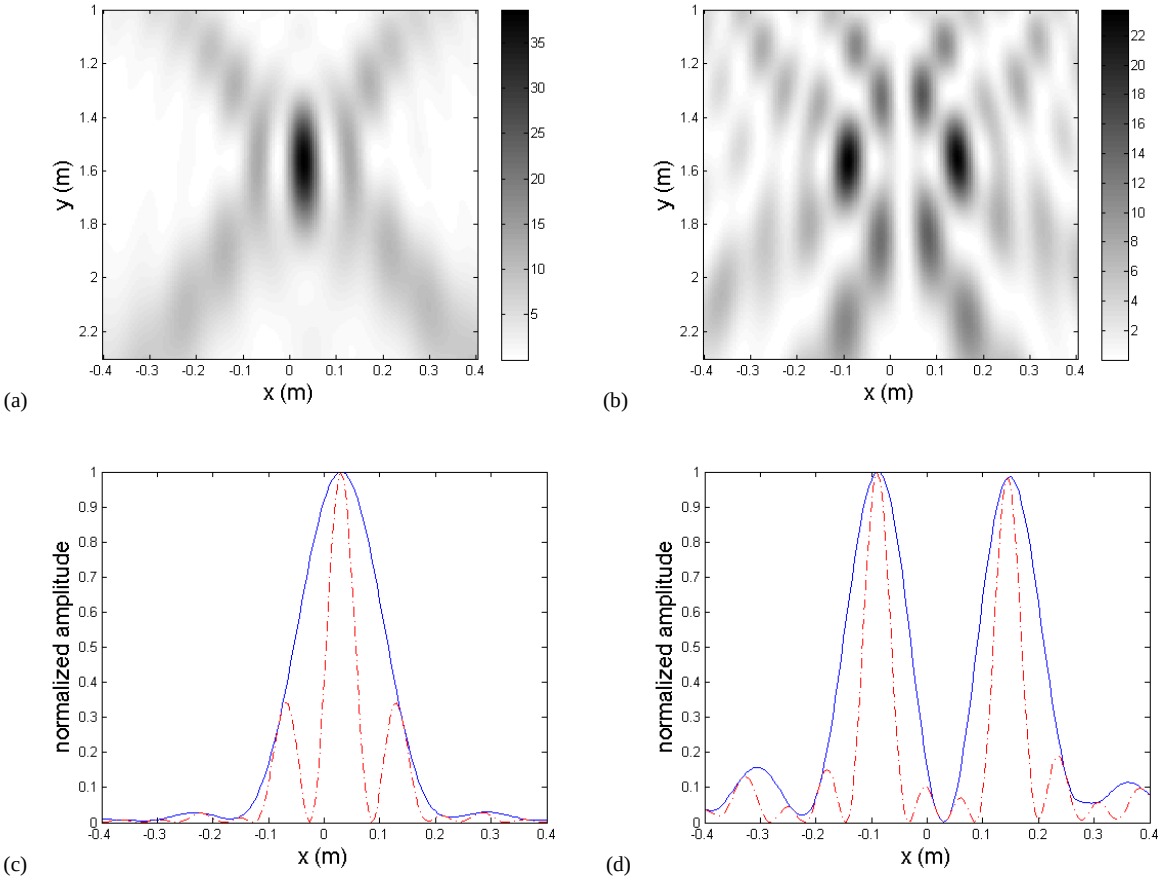


Figure III.7: Repropagation cohérente de deux premiers vecteurs singuliers ((a) et (b)) à 3,1 GHz. Sur les figures (c) et (d) sont comparées les repropagations cohérentes et incohérentes pour ces deux vecteurs singuliers.

La phase arbitraire $\delta\phi$ est déterminée en supposant que les deux contributions se somment de manière cohérente au point focal. La somme cohérente des deux réseaux est alors donnée par :

$$W_2(\mathbf{r}) = \left| \left\langle \mathbf{U}_n \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle + e^{\mathrm{i}\delta\phi} \left\langle \mathbf{V}_n^{\ *} \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2 . \tag{3.8}$$

La largeur de la tache focale est maintenant divisée par un facteur deux (i.e. 6,5 cm) puisque la phase sur les deux réseaux profite à la construction de l'image (Figure III.7). Les natures symétriques et antisymétriques des repropagations des vecteurs singuliers ne diffèrent pas.

Nous venons de constater que le premier vecteur singulier est associé à un rayonnement symétrique et le second à un rayonnement antisymétrique. Cette distinction n'est plus toujours valable lorsque les valeurs singulières se croisent. De tels croisements sont particulièrement présents lorsque la cible est résonnante. Sur le Figure III.8(a), le premier vecteur singulier est « repropagé » en fonction de x et de ka dans le plan focal ($y = F$). Le vecteur singulier passe d'un comportement monopolaire à un comportement dipolaire suivant les croisements des valeurs singulières. Un comportement similaire est observé pour le second vecteur singulier. L'interprétation est toutefois rendue plus délicate du fait des croisements avec la troisième valeur singulière (Figure III.8(b)).

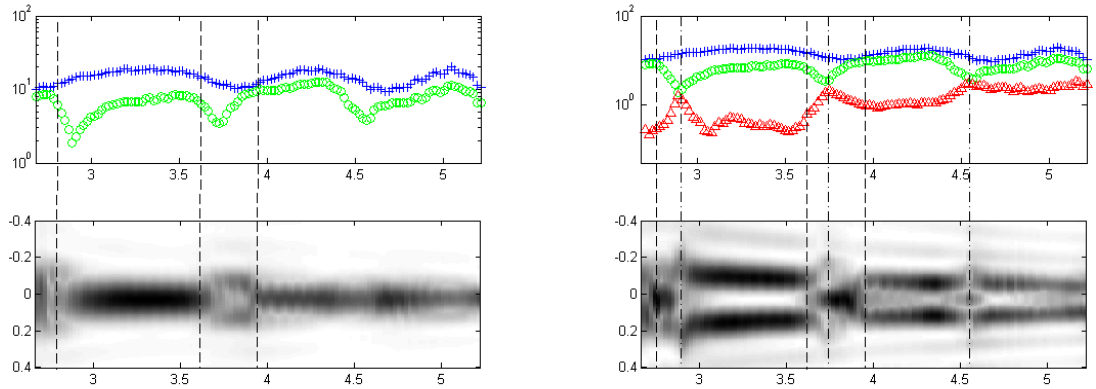


Figure III.8: (a) Représentation de l'évolution des deux premières valeurs singulières avec, en vis-à-vis, la repropagation incohérente du premier vecteur singulier en fonction de *x*, pour *y=F* (plan focal). (b) Même figure avec les courbes de trois premières valeurs singulières et la repropagation du second vecteur singulier. Les lignes verticales en pointillés représentent la position des croisements entre les deux premières valeurs singulières alors que les pointillés séparés par des points sont utilisés pour les seconde et troisième valeurs singulières.

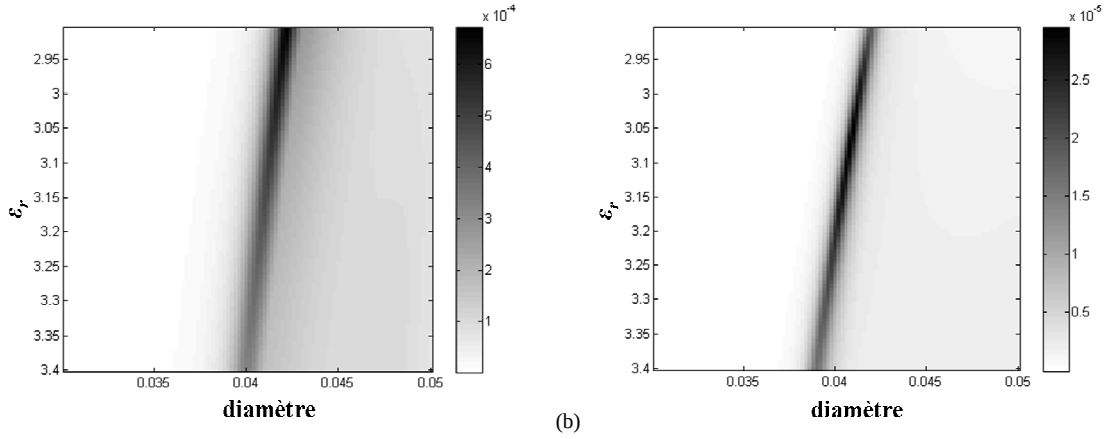
III.1.5 Problème inverse

La position du cylindre a été déduite de la repropagation des vecteurs singuliers. Dans cette partie, une méthode est mise au point afin de retrouver la permittivité et le rayon du cylindre à partir des valeurs singulières. Celles-ci dépendent non-linéairement des caractéristiques du cylindre. Par conséquent, celles-ci ne peuvent être extraites analytiquement.

Nous nous appuyons sur la minimisation d'une fonction coût tirant partie de l'évolution des valeurs singulières. La méthode consiste à déterminer le vecteur X=(ε, a) minimisant la fonction M(X) définie telle que :

$$M(\mathbf{X}) = \frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \left[\sum_{i=1}^{N^{\max}} \frac{(\sigma_i^{\exp} - \sigma_i^{\text{theo}}(\mathbf{X}))^2}{\left(\sigma_i^{\exp}\right)^2} \right] df \ . \tag{3.9}$$

Le paramètre $N^{\max}$ représente le nombre de valeurs singulières prises en compte. Typiquement, $N^{\max}$ est égal à la dimension de l'espace signal. La fonction M(X) est définie comme étant l'erreur relative commise sur l'évaluation des valeurs singulières théoriques par rapport aux valeurs singulières expérimentales. La différence des deux valeurs singulières est en premier lieu normalisée par la valeur expérimentale, puis sommée sur les valeurs singulières de l'espace signal et enfin intégrée sur la bande-passante. Un algorithme de type simplex implémentée sous Matlab© sert à estimer le minimum de la fonction coût. Les résultats sont présentés dans le Tableau 2, suivant le nombre de valeurs singulières inclues dans le calcul pour le cylindre de PVC de 4 cm de diamètre.



(a) (b)

Figure III.9: Représentation de la fonction coût *M*(X) en fonction de la permittivité *εr* et du diamètre *d* pour un cylindre de PVC. Les images sont obtenues avec $N^{\max}$=1 (a) et $N^{\max}$=2 (b).

Lorsque la seconde valeur singulière est contenue dans la fonction coût, non seulement l'erreur est réduite, mais aussi l'incertitude devient plus faible. Sur la Figure III.9 sont représentées les cartes de l'inverse de la fonction coût en fonction de ε_r et a, autour du point de convergence de l'algorithme, pour $N^{\max}$=1 et $N^{\max}$=2. Le spot associé au point de convergence est clairement plus réduit pour $N^{\max}$=2. En effet, la variation de la seconde valeur singulière en fonction de la fréquence est plus marquée que celle de la première. Celle-

ci possède un profil plus « plat ». L'algorithme en devient plus efficace en incluant deux valeurs singulières.

	ε_r (largeur)	d (cm) (largeur)
Avec seulement σ_1	2.095 (0.018)	4.64 (0.04)
Avec σ_1 et σ_2	3.042 (0.0185)	4.09 (0.01)
Avec seulement σ_2	3.078 (0.018)	4.08 (0.01)
Valeurs théoriques	$2 < \varepsilon_r < 5$	4.0

Tableau 2 : Comparaison des résultats suivant le nombre de valeurs singulières injectées dans l'algorithme de minimisation pour un cylindre de PVC. La valeur entre parenthèses représente la largeur de l'estimation à 90% du maximum.

Pour l'exemple, une valeur de d=4,64 cm a été déduite en utilisant seulement la première valeur singulière, alors qu'avec les deux d=4,09 cm (théoriquement d=4 cm). L'erreur commise est ainsi réduite à 2.25% au lieu des 16% initiaux.

III.1.6 Conclusion

La caractérisation de cibles a été abordée sous l'angle de l'évolution fréquentielle des valeurs singulières. Pour des cylindres diélectriques, la décomposition théorique du champ diffusé en modes normaux permet de faire ressortir des harmoniques symétriques et antisymétriques. De cette décomposition sont extraits les vecteurs singuliers de la matrice **K**. L'utilisation de réseaux distincts en émission et réception confère aussi à cette étude son originalité. Un bon accord entre les valeurs singulières théoriques et expérimentales a été obtenu. Nous avons aussi montré que cette approche menait à la caractérisation de cibles. Les paramètres d'un cylindre ont été déterminés par l'intermédiaire de l'évolution fréquentielle des valeurs singulières. Plus la dimension de l'espace signal est importante et plus la précision de notre algorithme est élevé.

III.2 Imagerie sub-longueur d'onde

Lors de cette section, la résolution de deux diffuseurs séparés d'une distance sub-longueur d'onde est abordée grâce à la méthode DORT. La première étude concernant la séparation de deux diffuseurs avec la méthode DORT a été réalisée en 1996 par Prada *et al*. [16]. Pour des cibles isotropes, ponctuelles et résolues (c'est-à-dire séparées d'une distance respectant le critère de Rayleigh), une valeur singulière de la matrice **K** est associée à chaque cible. La repropagation numérique du vecteur singulier associé permet alors de localiser la cible. Néanmoins, chaque vecteur singulier est perturbé par des contributions provenant des autres diffuseurs. Ces contributions sont négligeables dans le cas de diffuseurs résolus mais augmentent fortement lorsqu'ils se rapprochent. Pour une distance de séparation sub-résolution entre deux cibles, le couplage est maximum. Une repropagation « classique » des vecteurs singuliers ne permet plus de localiser les deux diffuseurs.

Cependant, en 2003, Prada *et al.* ont montré que la méthode DORT combinée à des méthodes non-linéaires de traitement du signal, les estimateurs Maximum Likehood et Multiple Signal Classification (MUSIC), permettait de résoudre deux diffuseurs séparés d'une distance sub-longueur d'onde [48]. La méthode DORT-MUSIC s'avère toutefois très sensible au bruit ambiant et aux erreurs de mesure. La meilleure résolution obtenue expérimentalement en acoustique avec deux fils de cuivre atteignait une distance de $\lambda/3$. Pour améliorer cette résolution, Baussard a introduit une méthode numérique récursive et projective de l'algorithme MUSIC (RAP-MUSIC) [49].

Le formalisme associé à la méthode DORT-MUSIC a été développé par Devaney pour des diffuseurs isotropes dans des travaux non publiés mais toutefois disponibles [50]. Le cas de réseaux en émission et réception distincts fut par la suite étudié par Lehman et Devaney [51]. Toujours dans le cadre des réseaux bistatiques, Miwa et Arai ont implémentés l'algorithme MUSIC en positionnant les deux réseaux distincts de chaque côté de l'espace à imager pour une mesure en transmission [52].

Simonetti a aussi contribué au développement tant expérimentalement que théoriquement du sujet [53-55]. Dans ses papiers, il étudie la résolution de deux fines inclusions sur un solide à l'aide d'ondes élastiques de surface ou de deux petits diffuseurs avec des ondes acoustiques. Pour des diffuseurs proches, il considère la diffusion multiple entre les deux diffuseurs comme un facteur clef de la résolution. Cette interprétation donna lieu par la suite à une polémique [56]. En effet, dans le cas d'un bruit nul, la méthode DORT-MUSIC permet

théoriquement de résoudre deux diffuseurs ponctuels et isotropes quelque soit la distance entre ceux-ci. En présence de bruit, les signaux multiplement diffusés peuvent s'avérer soit constructifs soit destructifs par rapport aux échos directs. La diffusion multiple n'améliore donc pas nécessairement la résolution des diffuseurs proches [57].

L'originalité de l'étude présentée dans ce manuscrit est double. En premier lieu, elle se révèle être la première expérience d'imagerie de deux diffuseurs proches en micro-ondes par la méthode DORT-MUSIC. En effet, les nombreux travaux traitant de la méthode restent pour la plupart numériques et théoriques. En second lieu, la sensibilité de la méthode DORT-MUSIC au bruit est étudiée dans ce chapitre. Pour ce faire, le développement des vecteurs singuliers en loi de puissance par rapport à la variance du bruit mène à quantifier l'impact du bruit sur l'estimateur MUSIC. Un critère de résolution entre les valeurs singulières est ainsi extrait. Expérimentalement, ce critère permet de déterminer si la résolution sub-longueur d'onde peut ou non être atteinte en fonction du niveau de bruit.

III.2.1 Dispositif expérimental

Nous utilisons lors de cette étude le réseau formé par les antennes cornet, toujours pour obtenir de bons rapports signal/bruit. La matrice **K** est de nouveau acquise à l'aide de deux réseaux distincts.

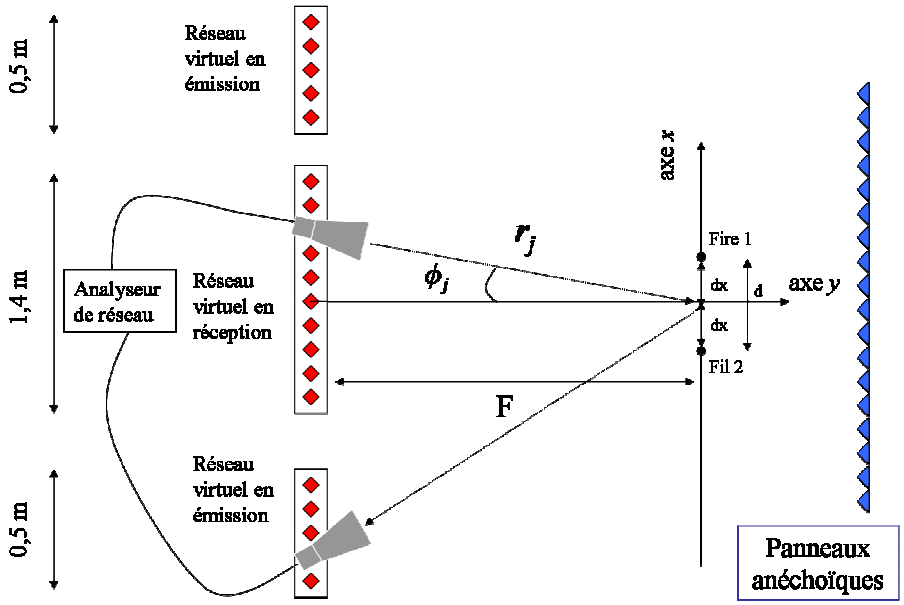


Figure III.10: Dispositif expérimental et définition des paramètres de l'étude.

Le réseau récepteur de dix antennes est centré par rapport à la position de deux fils de cuivre. Le réseau d'émission est, quant à lui, divisé en deux parties de cinq antennes, de chaque côté du réseau récepteur (Figure III.10). Seuls les vecteurs singuliers en réception sont utilisés dans les développements suivants pour la localisation des fils grâce à l'algorithme MUSIC.

Afin de minimiser les échos parasites provenant de l'espace environnant, non seulement le mur arrière est couvert de panneaux anéchoïques, mais la matrice **K** acquise sans les fils est aussi soustraite à la matrice acquise avec les fils. La distance F entre le rail et les fils atteint 1,35 m. Comme l'ouverture du réseau en réception, noté D, est du même ordre de grandeur que F, la cellule de résolution associée au réseau est proche de λ. L'orientation des fils est identique à la polarisation des antennes (verticale) et le problème se réduit à deux dimensions. Les diffuseurs consistent en deux fils de cuivre de diamètre 0,6 mm, soit approximativement $\lambda/200$. Leur diffusion est supposée isotrope. Le rang de la matrice **K** est alors égal au nombre de diffuseurs. Minonzio *et al.* ont montré que l'anisotropie pouvait grandement changer les valeurs singulières [58]. Dans notre cas, le faible diamètre des fils et leur caractère conducteur assure que les termes de diffusion non-isotrope soient négligeables. La distance entre les fils est notée d (d=2dx) et varie expérimentalement entre $\lambda/10$ et $\lambda/4$.

III.2.2 Invariants expérimentaux et théoriques

Lors de la première expérience, les deux fils sont espacés de 22 mm. Une valeur singulière dominante de la matrice **K** ressort clairement (Figure III.11). La seconde, beaucoup plus faible, augmente quant à elle avec la fréquence. Elle se détache peu à peu de l'amas des valeurs singulières associées au bruit de mesure.

Le même formalisme théorique que dans l'article de Minonzio *et al.* est employé [58]. Pour un seul fil présent (par exemple le gauche représenté par l'indice $_L$), le rang de la matrice est égal à 1 puisque la matrice s'écrit $\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{U}}_L \sigma \tilde{\mathbf{V}}_L^{\,H}$. Les vecteurs $\tilde{\mathbf{V}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_L$ représentent les vecteurs normalisés de propagation au fil depuis le réseau en émission et le réseau en réception. En remplaçant l'indice L par R, l'expression correspond au fil de droite. Le coefficient σ tient compte du coefficient de réflexion du fil. Quand les deux fils sont simultanément placés face aux réseaux, la matrice **K** devient :

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{U}}_L \sigma \tilde{\mathbf{V}}_L^{\,H} + \tilde{\mathbf{U}}_R \sigma \tilde{\mathbf{V}}_R^{\,H} . \tag{3.10}$$

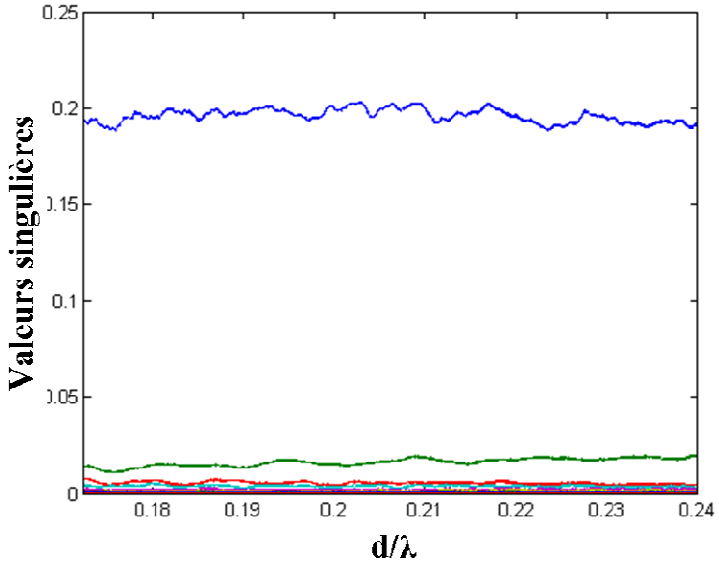


Figure III.11: Valeurs singulières expérimentales λ_n pour une distance entre les deux fils *d* = 22 mm.

Cette expression néglige toutefois la diffusion multiple entre les deux fils. Inclure la diffusion simple au premier ordre ajoute des termes croisés et conduit à :

$$\mathbf{K} = \frac{1}{1-(R_0 h)^2}\left(\tilde{\mathbf{U}}_L \sigma \tilde{\mathbf{V}}_L{}^H + \tilde{\mathbf{U}}_R \sigma \tilde{\mathbf{V}}_R{}^H + \tilde{\mathbf{U}}_L \sigma h R_0 \tilde{\mathbf{V}}_R{}^H + \tilde{\mathbf{U}}_R \sigma h R_0 \tilde{\mathbf{V}}_L{}^H\right), \tag{3.11}$$

Ici, R_0 représente le coefficient de réflexion d'un fil et $h = \frac{e^{ikd}}{\sqrt{kd}}$ la fonction de Green entre les deux fils. En l'absence de bruit, la matrice de dimension initiale $N^{\mathrm{Rx}} \times N^{\mathrm{Tx}}$ se réduit à un problème de rang 2 (matrice 2x2). Les deux valeurs singulières de **K** s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_1 = |\sigma| \sqrt{1 + w_{LR}{}^{\mathrm{Tx}} + w_{LR}{}^{\mathrm{Rx}} + w_{LR}{}^{\mathrm{Tx}} w_{LR}{}^{\mathrm{Rx}}} \left| \dfrac{1}{1 - R_0 h} \right| \\ \sigma_2 = |\sigma| \sqrt{1 - w_{LR}{}^{\mathrm{Tx}} - w_{LR}{}^{\mathrm{Rx}} + w_{LR}{}^{\mathrm{Tx}} w_{LR}{}^{\mathrm{Rx}}} \left| \dfrac{1}{1 + R_0 h} \right| \end{cases} \tag{3.12}$$

Elles sont associés aux vecteurs singuliers $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, combinaison linéaire de $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$, tels que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 \approx \dfrac{(\tilde{\mathbf{U}}_L + \tilde{\mathbf{U}}_R)}{\left\| \tilde{\mathbf{U}}_L + \tilde{\mathbf{U}}_R \right\|} \\ \mathbf{u}_2 \approx \dfrac{(\tilde{\mathbf{U}}_L - \tilde{\mathbf{U}}_R)}{\left\| \tilde{\mathbf{U}}_L - \tilde{\mathbf{U}}_R \right\|} \end{cases} \tag{3.13}$$

$\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont les vecteurs singuliers en réception de **K**. Dans l'équation (3.12), le terme w_{LR}^{Tx} (respectivement w_{LR}^{Rx}) correspond au produit scalaire entre $\tilde{\mathbf{V}}_L$ et $\tilde{\mathbf{V}}_R$ (respectivement $\tilde{\mathbf{U}}_L$ and $\tilde{\mathbf{U}}_R$). Si la distance entre les deux fils décroît, w_{LR}^{Rx} et w_{LR}^{Tx} augmentent pour atteindre l'unité dans le cas de fils confondus. Par conséquent, la première valeur singulière croît elle aussi pour atteindre un maximum de $2|\sigma|\left|\frac{1}{1-R_0 h}\right|$. La seconde valeur singulière décroît et s'annule dans le cas limite. La difficulté pour résoudre deux fils très proches apparaît. Si la seconde valeur singulière est trop faible, elle se confond avec le niveau de bruit. Le second vecteur singulier devient de ce fait très sensible au bruit et dégrade la qualité de l'image générée. Nous quantifierons dans la suite cet effet.

Les fils sont supposés dans le champ lointain des réseaux. La composante #*j* du vecteur normalisé $\tilde{\mathbf{U}}_L$ entre le réseau et le fil de gauche s'écrit :

$$\{\tilde{\mathbf{U}}_L\}_j \approx \frac{1}{\sqrt{N^{Tx}}} e^{ikr_{jL}^{Rx}}, \tag{3.14}$$

où r_{jl}^{Rx} représente la distance entre l'antenne Rx #*j* et le fil de gauche (voir Figure III.12). La même expression est obtenue pour le fil de droite en replaçant *L* par *R*. Dans la suite, l'exposant ^{Rx} est implicite car seuls les vecteurs singuliers en réception servent à former l'image. La directivité des antennes n'est pas inclue dans les expressions. Les antennes pointent en effet toujours vers le centre des deux fils grâce à leur automatisation en rotation. Du fait de la configuration symétrique de notre problème, les distances réseau/fils s'écrivent au premier ordre :

$$\begin{cases} r_{Rj} \approx r_j - dx\sin\left(\phi_j\right) \\ r_{Lj} \approx r_j + dx\sin(\phi_j) \end{cases} \tag{3.15}$$

Les paramètres r_j, dx et ϕ_j sont représentés sur la Figure III.12. A partir des équations (3.13) et (3.15), les vecteurs singuliers s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{1j} = \dfrac{1}{\left\|\tilde{\mathbf{U}}_L + \tilde{\mathbf{U}}_R\right\|} e^{ikr_j} \cos\left(kdx\sin\left(\phi_j\right)\right) \\ u_{2j} = \dfrac{1}{\left\|\tilde{\mathbf{U}}_L - \tilde{\mathbf{U}}_R\right\|} e^{ikr_j} \sin\left(kdx\sin\left(\phi_j\right)\right) \end{cases} \tag{3.16}$$

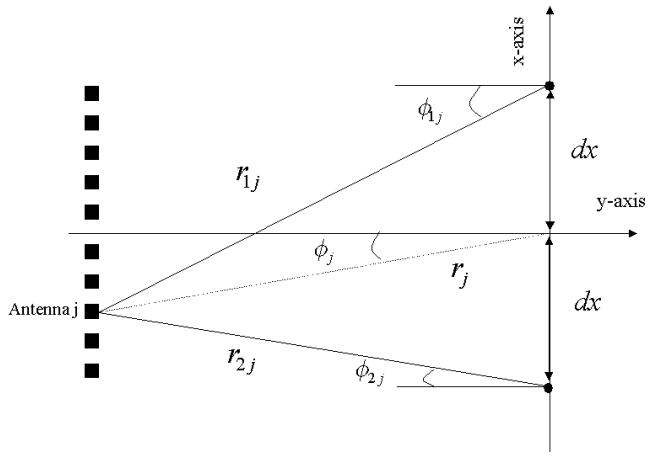


Figure III.12: Configuration expérimentale du réseau Rx pour des fils distants de 2*dx*.

Un bon accord entre valeurs théoriques et expérimentales est démontré sur la Figure III.13. Le saut de π sur la phase du second vecteur singulier au niveau de la phase du second vecteur entre les 5ème et 6ème antennes s'explique par l'orthogonalité des vecteurs singuliers.

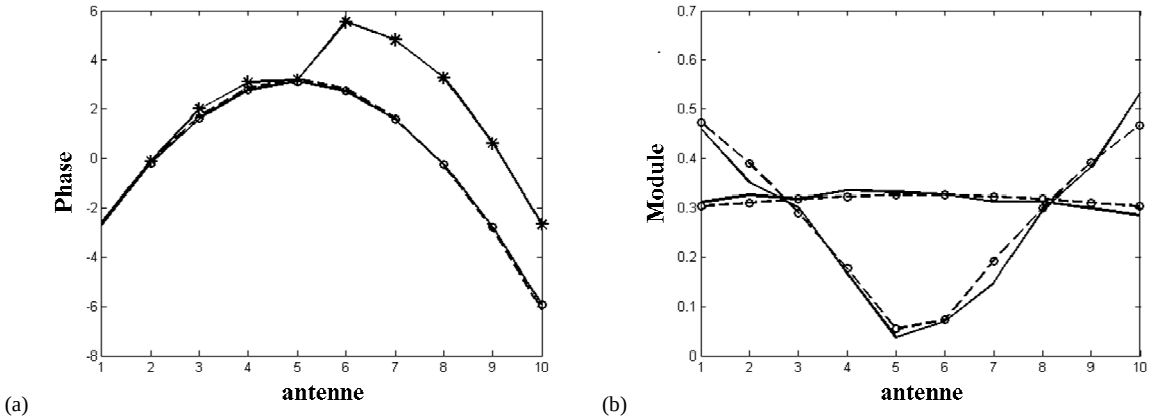


Figure III.13: (a) Comparaison entre la phase expérimentale du premier vecteur singulier (marqueur o, ligne continue), du second (marqueur *, ligne continue) et de leur valeur théorique –kr_j (ligne pointillée). (b) Module des deux premiers vecteurs singuliers théoriques (pointillés, marqueur o) et expérimentaux (continue).

III.2.3 Algorithme MUSIC et imagerie sub-longueur d'onde

L'application d'une méthode conventionnelle d'imagerie comme la formation de voie limite la résolution spatiale latérale à $\lambda/2$. Ce critère de Rayleigh peut être dépassé en utilisant des estimateurs non-linéaires de type MUSIC.

Comme montré dans les annexes de [59], la diffusion par un cylindre métallique de faible diamètre dans un champ **E** parallèle correspond à une condition de Dirichlet : la diffusion est monopolaire. Seule la fonction de Green monopolaire en champ libre est par conséquent employée dans l'algorithme. La dimension du sous-espace signal *p*, i.e. le rang de la matrice **K**, égale le nombre de diffuseur du milieu : $p = 2$. L'estimateur MUSIC s'écrit alors :

$$I_{MU}(\mathbf{r}) = \frac{1}{1 - \sum_{n=1}^{2} \left| \left\langle \mathbf{u}_n \middle| \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2} \tag{3.17}$$

Selon les propriétés de la *svd*, cette expression est équivalente à :

$$I_{MU}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sum_{n=3}^{N^{\mathrm{Rx}}} \left| \left\langle \mathbf{u}_n \middle| \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2} \tag{3.18}$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ représente le vecteur normalisé des fonctions de Green (i.e. $\mathbf{G}(\mathbf{r}) / \|\mathbf{G}(\mathbf{r})\|$). La $i^{\text{éme}}$ composante de $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ est donnée par $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$. Dans l'équation (3.18), la somme $\sum_{n=3}^{N^{\mathrm{Rx}}} \left| \left\langle \mathbf{u}_n \middle| \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2$ revient à calculer la distance du vecteur normalisé des fonctions de Green $\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})$ à l'espace signal de la mesure. Les vecteurs singuliers sont formés théoriquement par une combinaison linéaire des vecteurs de propagation du réseau à la position des fils. En l'absence de bruit, cette distance est par conséquent nulle sur leur position, l'estimateur I_{MU} diverge et présente une singularité. En présence de bruit, l'estimateur reste fini mais deux pics se détachent tout de même.

Sur la Figure III.14(a), la repropagation « classique » des vecteurs singuliers séparément donne lieu à une tache focale symétrique située entre les deux fils et une tache focale antisymétrique dont les deux maxima sont séparés de $\lambda/2$. Cette propriété est contenue dans les équation (3.13) et (3.16). L'estimateur MUSIC génère deux maxima au niveau de la position des deux fils, bien espacés de $\lambda/3{,}5$ sur la Figure III.14(b). La courbe est comparée avec une repropagation classique dans le cas de fils pris séparément (pour chaque courbe le second fil est absent au moment de l'acquisition). Elle illustre la bonne localisation des diffuseurs.

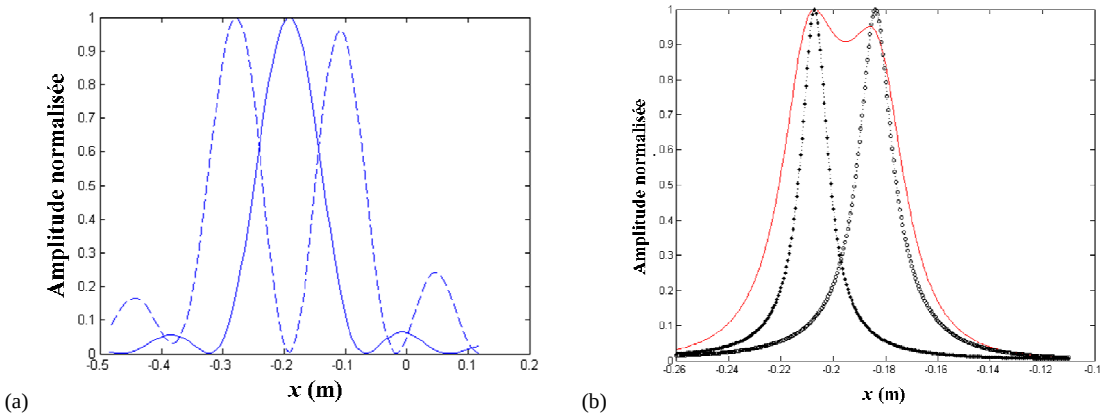


Figure III.14: (a) Représentation "classique" du premier vecteur singulier (ligne continue) et du second (pointillés). (b) Estimateur MUSIC normalise appliqué aux cas des deux fils (ligne continue), du fil de gauche seul (pointillés) et enfin du fil de droite seul (cercles).

Expérimentalement, la résolution la plus fine atteinte est égale à $d = \lambda/6$ (Figure III.15). En effet, pour des espacements entre les fils faibles, le contraste entre le creux présent au milieu des deux fils et les pics situés sur les fils se réduit fortement. Il est ainsi de plus en plus compliqué de distinguer les deux spots.

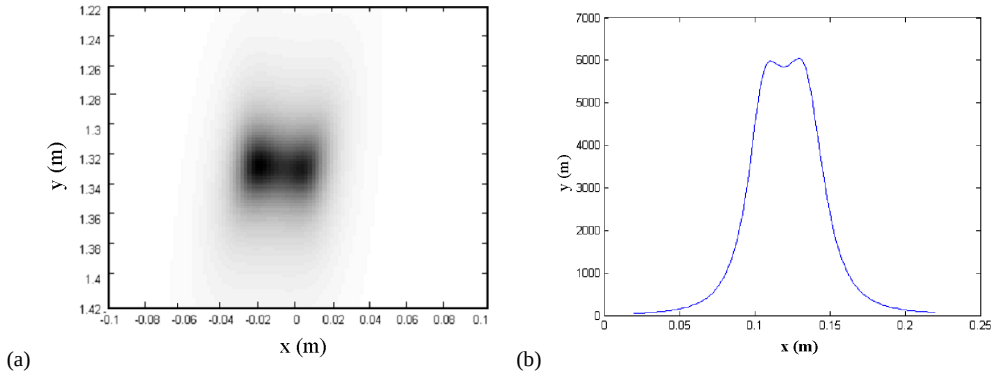


Figure III.15: Images obtenues avec MUSIC pour (a) $d = \lambda / 5$ et (b) $d = \lambda / 6$ (λ=11,5 cm à la fréquence de 2,6 GHz).

Pour une expérience donnée, afin de déterminer l'espacement à partir duquel l'estimateur MUSIC échoue à imager les deux fils, la projection sur l'axe x au point focal $y = F$ est illustrée sur la Figure III.16 en fonction de l'axe d / λ. Tant que d / λ est suffisamment important, deux spots apparaissent sur la position des deux fils. Néanmoins, leur distinction est moins évidente pour des valeurs plus faibles de d / λ, même si, de façon globale, les deux pics restent distinguables. Enfin à partir d'une valeur limite (pour cette expérience

$(d/\lambda)_{\lim} = 0{,}195$), le système n'est plus résolu et une seule image entre les deux fils apparaît. Comme la seconde valeur singulière est trop proche du niveau de bruit, son vecteur associé est très perturbé. L'espace signal n'est plus composé que de la première valeur singulière, la seconde valeur singulière est noyée dans l'espace bruit.

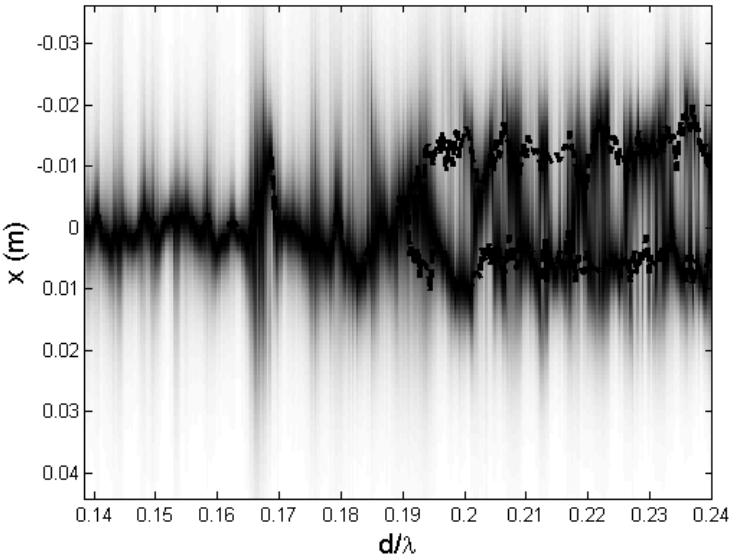


Figure III.16: algorithme MUSIC projeté sur l'axe *x* en fonction de d/λ pour deux fils séparés de la distance *d* = 2 cm.

Dans l'article de Prada *et al.* [48], il est mentionné que la séparation des deux fils devient impossible à partir du moment où la seconde valeur singulière atteint le niveau de bruit. A contrario, l'interprétation diffère ici en comparant la Figure III.11 et la Figure III.16. Cette expérience souligne que les fils ne sont plus résolus alors que la seconde valeur singulière se détache encore de l'amas de valeurs singulières associées au bruit. Durant la section suivante, nous montrons que le niveau de bruit peut suffisamment perturber le second vecteur singulier pour empêcher la résolution des cibles alors même que la seconde valeur singulière se détache encore du bruit.

III.2.4 Perturbation des vecteurs singuliers

La sensibilité de la méthode DORT-MUSIC au niveau de bruit est maintenant discutée. Sans bruit et du fait de son caractère fortement non-linéaire, l'estimateur MUSIC diverge au niveau des fils, quel que soit leur écartement. On ne prend pas en compte ici une éventuelle inadéquation entre les fonctions de Green calculées et leurs valeurs réelles. Cependant, si du

bruit est ajouté à la matrice **K**, l'estimateur MUSIC reste fini et la séparation des fils peut ne plus avoir lieu.

Analytiquement, un bruit Gaussien de variance σ_B est ajouté à la matrice **K**. Ce bruit est décorrélé entre chaque couple d'antennes. Les vecteurs singuliers sont développés en série de Taylor fonction de σ_B puis sont injectés à l'intérieur de l'estimateur MUSIC. Un critère est ensuite introduit pour considérer les fils comme résolus ou non.

Pour valider l'expression théorique déterminée analytiquement, des simulations simples sous Matlab© sont développées. La propagation entre les antennes et les fils est modélisée par la fonction de Green en espace libre et les coefficients de réflexion des deux fils sont égaux (diffusion isotrope). Un bruit Gaussien est ensuite ajouté à chaque élément de la matrice **K**. Le nombre d'antennes en émission et réception est suffisamment large pour permettre un traitement statistique du bruit ($N^{Rx} = N^{Tx} = N = 100$). La longueur d'onde est fixée à 0,1 m. La distance entre les fils reste notée d, avec $d = 2dx$. L'ouverture D du réseau récepteur est de 0,2 m et les fils sont placés à une distance $F = 5$ m des réseaux. La distance entre les fils varie entre $\lambda/10$ et $\lambda/2$ dans les simulations.

III.2.5 Développement des vecteurs singuliers en série de Taylor.

Nous considérons la matrice théorique **K** initiale (et sa décomposition en valeurs singulières) à laquelle un bruit aléatoire est ajouté. La matrice perturbée $\mathbf{K}^p$ s'exprime par :

$$\mathbf{K}^p = \mathbf{K} + \sigma_B \Delta\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{2} (\mathbf{u}_i)\sigma_i(\mathbf{v}_i)^H + \sigma_B \Delta\mathbf{K} \tag{3.19}$$

L'exposant ^{p} indique que l'entité est perturbée par le bruit, par opposition aux entités théoriques non bruitées. La matrice $\Delta\mathbf{K}$ est une matrice aléatoire de norme de Frobenius[5] égalant 1. La matrice $\mathbf{K}^p$ est de rang N du fait de la perturbation. Sa décomposition en valeurs singulières se note telle que :

$$\mathbf{K}^p = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{u}_i^p)\sigma_i^p(\mathbf{v}_i^p)^H \tag{3.20}$$

L'analyse d'une perturbation de type bruit Gaussien sur les vecteurs singuliers est bien documentée dans la littérature [60-64]. Cette perturbation a notamment été établie au second

[5] La norme de Frobenius est définie pour une matrice **A** par $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$

ordre pour les vecteurs singuliers appartenant à l'espace signal initial [61, 62]. Le développement en série de puissance des vecteurs singuliers perturbés de la matrice $\mathbf{K}^p$ en fonction du paramètre σ_B s'écrit comme :

$$\mathbf{u}_i^p = \mathbf{u}_i + \sigma_B \mathbf{w}_i^{(1)} + \sigma_B{}^2 \mathbf{w}_i^{(2)} + o\left(\sigma_B{}^2\right) \qquad \left(1 \le i \le 2\right) \tag{3.21}$$

Les expressions de $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$ en fonction de la matrice $\Delta\mathbf{K}$ sont exprimées dans l'annexe I. Leurs valeurs moyennes sont fournies. Ces valeurs moyennes sont utilisées dans la suite pour estimer l'impact de la perturbation sur l'estimateur MUSIC.

Quand les fils sont très rapprochés, l'expression (3.12) montre que la première valeur singulière se détache largement de la seconde. Par conséquent, conformément à l'expression fournie par Jun *et al.* [63], la perturbation sur le premier vecteur singulier peut être considéré comme nulle aux premier et second ordres :

$$\mathbf{u}_1^p \simeq \mathbf{u}_1 + o(\sigma_B{}^2) \tag{3.22}$$

Ainsi, seule la perturbation du second vecteur singulier a une influence sur l'estimateur MUSIC et par conséquent sur le pouvoir de résolution.

III.2.6 Application à l'estimateur MUSIC

Pour simplifier l'écriture des développements suivant, nous introduisons la fonction L telle que:

$$L(\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})) = \left|\left\langle \mathbf{u}_1^p \middle| \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \mathbf{u}_2^p \middle| \tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r}) \right\rangle\right|^2 \tag{3.23}$$

Cette fonction L représente le carré de la projection du vecteur des fonctions de Green sur le sous-espace signal engendré par $\mathbf{u}_1{}^p$ et $\mathbf{u}_2{}^p$. Elle correspond à une méthode de type beamforming. Cette définition permet d'écrire simplement l'estimateur MUSIC :

$$I_{MU}\left(\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})\right) = \frac{1}{1 - L\left(\tilde{\mathbf{G}}(\mathbf{r})\right)} \tag{3.24}$$

Ainsi, l'estimateur MUSIC I_{MU} accroît intrinsèquement le contraste de la fonction L du fait d'une relation fortement non-linéaire, mais il ne change pas la capacité à séparer les deux fils. En l'absence de bruit, lorsque l'on se place au niveau des deux fils, la projection sur les fonctions de Green est égale à 1 et l'estimateur I_{MU} diverge car les vecteurs singuliers s'écrivent comme une combinaison linéaire de $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$.

A partir de l'expression (3.13), un changement de base pour le vecteur $\tilde{\mathbf{U}}_L$ est réalisé. Ce vecteur est exprimé dans le sous espace signal non bruité $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ tel que:

$$\tilde{\mathbf{U}}_L = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_1 \left\|\tilde{\mathbf{U}}_L + \tilde{\mathbf{U}}_R\right\| + \mathbf{u}_2 \left\|\tilde{\mathbf{U}}_L - \tilde{\mathbf{U}}_R\right\|\right) \tag{3.25}$$

avec $\left\|\tilde{\mathbf{U}}_L + \tilde{\mathbf{U}}_R\right\| = \sqrt{2(1+w)}$ et $\left\|\tilde{\mathbf{U}}_L - \tilde{\mathbf{U}}_R\right\| = \sqrt{2(1-w)}$. w représente le produit scalaire entre $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$. Dans l'approximation de champ lointain, w est réel. Comme nous connaissons la valeur moyenne de la perturbation sur chaque vecteur singulier en fonction des vecteurs singuliers initiaux, le calcul de la perturbation sur $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ et $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_R\right)$ se simplifie.

Comme on suppose le bruit de moyenne nulle, le premier ordre des perturbations n'a strictement aucun effet sur les valeurs moyennes de $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ et $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_R\right)$. Seul le second ordre en σ_B^2 a un impact. Le calcul est développé dans l'annexe I et mène finalement à :

$$E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)\right] = \frac{1+w}{2} + \frac{1-w}{2}\left(1 - \frac{(N-2)\sigma_B^2}{\lambda_2^2}\right) + o\left(\sigma_B^2\right) \tag{3.26}$$

En l'absence de bruit ($\sigma_B^2 = 0$), on retrouve bien une valeur égale à 1 qui assure que I_{MU} diverge. La valeur moyenne de $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ décroît quand le niveau de bruit augmente.

Nous définissons encore le vecteur $\tilde{\mathbf{U}}_M$ comme le vecteur des fonctions de Green entre le réseau récepteur et le point positionné exactement entre les deux fils. A l'aide de la Figure III.14 et de la Figure III.15, nous comprenons que la résolution est atteinte en moyenne tant que la valeur de l'estimateur entre les fils est inférieure à la valeur sur les fils. Le second vecteur singulier étant associé à un terme antisymétrique, il ne contribue pas à la valeur moyenne de $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_M\right)$, même en présence de bruit. Il advient ainsi que $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_M\right)$ est donné par:

$$E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_M\right)\right] = \left|\left\langle \mathbf{u}_1 \middle| \tilde{\mathbf{U}}_M \right\rangle\right|^2 \tag{3.27}$$

Nous possédons maintenant les outils nécessaires à définir le critère de résolution. Il est donné par le niveau de bruit à partir duquel la valeur moyenne sur les fils est inférieure à la valeur moyenne entre les fils. Ce critère présuppose que la variance de L est faible devant sa valeur moyenne, ce qui est le cas dans l'approximation initiale réalisée dans l'annexe I.

Au lieu d'exprimer le critère de résolution suivant σ_B, dans la pratique il est plus intéressant de prendre en compte le rapport entre la troisième valeur singulière (σ_3) et la seconde (σ_2). Le calcul de σ_3 s'appuie sur la théorie des matrices aléatoires. Nous faisons l'hypothèse d'un bruit complètement décorrélé entre chaque voie composant la matrice $\mathbf{K}^p$. Une bonne approximation d'un point de vue statistique consiste à estimer les valeurs singulières d'ordre supérieur à 2 comme celles d'une matrice aléatoire de dimensions (N-2)*(N-2). La loi du quart de cercle fournit alors la distribution des valeurs singulières, notamment la valeur moyenne de la première (i.e., σ_3), donnée par:

$$\sigma_3 = 2\sqrt{N-2}\sigma_B \tag{3.28}$$

La loi du quart de cercle est valable seulement pour de grandes valeurs de N. Sur la Figure III.17 est tracée l'évolution de 1-L pour les points $\tilde{\mathbf{U}}_M$ et $\tilde{\mathbf{U}}_L$ en fonction de σ_3/σ_2. Une très bonne adéquation apparaît entre la formule analytique liée aux équations (3.26) et (3.28) et les simulations sous Matlab©.

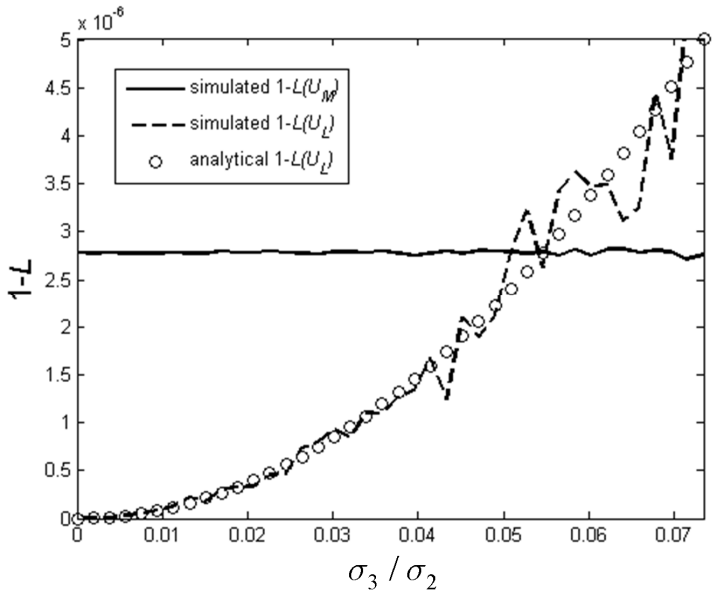


Figure III.17: Valeurs simulées de 1-$L\left(\tilde{\mathbf{U}}_M\right)$ (ligne continue) et 1-$L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ (ligne pointillée), comparées aux courbes obtenues grâce à la formule analytique (3.26) (marqueurs). Le paramètre de simulation *d* est: *d* = 0,39λ.

De plus, l'hypothèse de variance faible de $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ devant sa moyenne est vérifiée en simulation (globalement égale à σ_2/σ_1). Par conséquent, pour un tirage expérimental, la valeur de $L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)$ est proche de sa valeur moyennée sur un grand nombre d'expériences.

III.2.7 Profil de la courbe

Il est également possible de prédire le profil moyen de la courbe obtenu avec l'estimateur DORT-MUSIC en chaque point du voisinage des fils. Pour un point de coordonnées $\mathbf{r}=[x\ ,\ F]$, le vecteur $\left(\tilde{\mathbf{U}}_x\right)_i=\dfrac{e^{ik(r_i-x\sin(\phi_i))}}{\sqrt{N}}$ est très proche de $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$. Par conséquent, les contributions à $E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_x\right)\right]$ proviennent principalement des vecteurs singuliers composant le sous espace signal de la matrice **K**, c'est-à-dire $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2^p$. Nous négligeons les projections de $\tilde{\mathbf{U}}_x$ sur l'espace bruit, en particulier dans l'expression de $\left|\left\langle\tilde{\mathbf{U}}_x\,|\,\mathbf{u}_2^p\right\rangle\right|^2$.

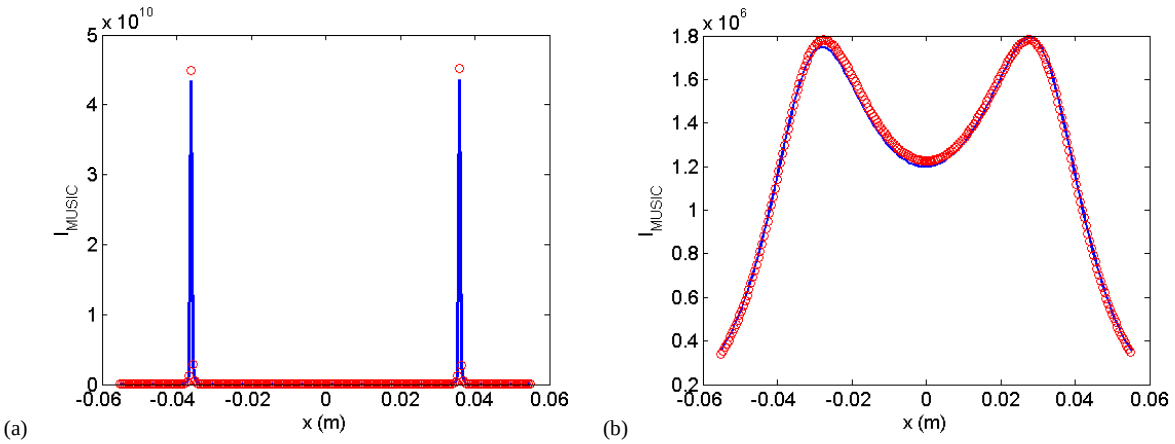


Figure III.18: Estimateur DORT-MUSIC pour deux fils espacés de 0,36λ en simulation (ligne continue) et formule analytique à partir de l'équation (3.29) (marqueurs o). La figure (a) est obtenue sans ajout de bruit alors que pour la figure (b) le ratio entre les secondes et troisièmes valeurs singulières est σ_3/σ_2=0,36.

Toujours en faisant l'hypothèse de champ lointain, mais aussi que le pas entre deux antennes est suffisamment faible (c'est-à-dire inférieur à $\lambda/2$ afin de transformer une somme sur les antennes en intégrale), la valeur moyenne de l'estimateur se met sous la forme (voir l'annexe II) :

$$E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_x\right)\right]=\frac{1}{2\left(1+\mathrm{sinc}\left(kdxD/F\right)\right)}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{k\left(dx-x\right)D}{2F}\right)+\mathrm{sinc}\left(\frac{k\left(dx+x\right)D}{2F}\right)\right]^2$$
$$+\frac{1}{2\left(1-\mathrm{sinc}\left(kdxD/F\right)\right)}\left[\mathrm{sinc}\left(\frac{k\left(dx-x\right)D}{2F}\right)-\mathrm{sinc}\left(\frac{k\left(dx+x\right)D}{2F}\right)\right]^2\left(1-\frac{\lambda_3^{\,2}}{4\lambda_2^{\,2}}\right) \tag{3.29}$$

Nous retrouvons les valeurs moyennes présentées précédemment au niveau de la position des fils $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$.

Sur la Figure III.18, les profils des courbes de l'estimateur DORT-MUSIC à partir des simulations Matlab© sont comparés à la formule analytique ci-dessus. Une bonne adéquation entre les courbes est mise en évidence et confirme la validité de notre approche.

L'expression analytique de I_{MU} est aussi comparée avec les résultats expérimentaux sur la Figure III.19. Cette comparaison révèle un excellent accord lorsque dans le modèle le ratio σ_3/σ_2 est fixé à 0,24 au lieu de 0,22 mesuré expérimentalement.

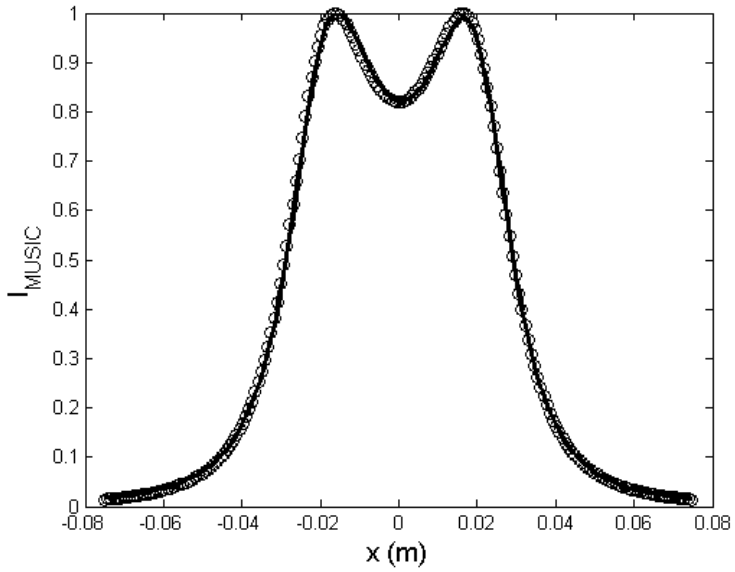


Figure III.19: Expression analytique de l'estimateur DORT-MUSIC à partir de l'équation (3.29) (cercles) en prenant σ_3/σ_2 = 0,24, comparée au résultat expérimental (ligne continue) pour un ratio mesuré de σ_3/σ_2 = 0,22. La distance entre les fils est égale à d=0,3λ.

Expérimentalement, un écart entre la position estimée et la position réelle des antennes peut générer une source de bruit supplémentaire dont le niveau n'est pas pris en compte dans le ratio σ_3/σ_2. Il est donc logique de trouver un rapport légèrement inférieur expérimentalement. Le nombre d'antennes du réseau récepteur dans l'expérience (dix) est aussi un peu faible pour considérer N comme suffisamment grand afin d'appliquer la loi des grands nombres aux matrices aléatoires.

III.2.8 Résolution limite en présence de bruit

La dernière étape consiste maintenant à évaluer le ratio σ_3/σ_2 limite correspondant au critère de résolution. A partir d'un certain niveau, le niveau entre les deux fils (niveau le plus faible en moyenne pour une situation résolue) devient supérieur à celui sur les deux fils. Dans ce cas, un seul maximum apparaît sur l'image entre ce point, comme nous l'avons expérimentalement observé. Le critère de résolution s'écrit par conséquent tel que :

$$E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_L\right)\right] > E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_M\right)\right] \tag{3.30}$$

A partir des équations (3.26), (3.27) et (3.28), nous en déduisons que :

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2} \leq \left.\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right|_{\lim} \simeq 2\sqrt{\frac{2\left(1-\left\langle \mathbf{u}_1 \,|\, \tilde{\mathbf{U}}_M \right\rangle^2\right)}{1-w}} \tag{3.31}$$

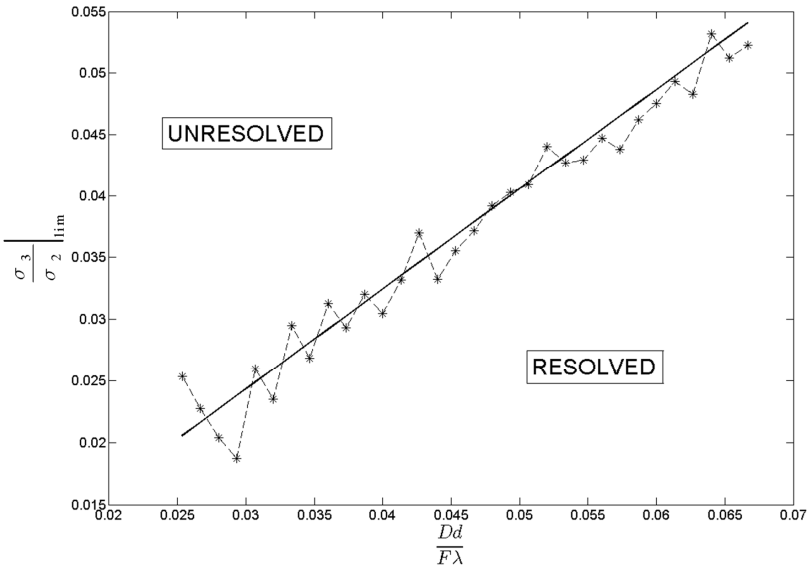


Figure III.20: Ratio limite $\left.\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right|_{\lim}$ en simulation (marqueurs) et analytiquement (ligne continue) en fonction du paramètre $\frac{D}{F}\frac{d}{\lambda}$.

Cette expression reste cependant difficile à interpréter en tant que telle. A partir d'une hypothèse de champ lointain et en supposant que la distance entre les fils est faible devant la cellule de résolution du réseau, le critère s'exprime suivant l'annexe III par :

$$\left.\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right|_{\lim} = \frac{\pi}{\sqrt{15}}\frac{D}{F}\frac{d}{\lambda} + o\left(\frac{D}{F}\frac{d}{\lambda}\right) \tag{3.32}$$

Le ratio limite évolue ainsi linéairement en fonction de d/λ, comme le montre la Figure III.20.

Finalement, l'équation (3.32) quantifie le niveau de bruit à partir duquel la résolution échoue. Un des résultats principaux réside dans fait que même si la seconde valeur singulière se détache du niveau de bruit, il n'est pas évident que la résolution sub-longueur d'onde puisse être atteinte. En effet, le rapprochement de la troisième valeur singulière a une influence non-négligeable sur le second vecteur singulier. De fortes perturbations sur l'image proviennent de la sensibilité de l'algorithme MUSIC au bruit. Toutefois, pour des distances entre les fils proches de $\lambda/2$, le ratio limite se rapproche de 1, ce qui signifie que la résolution est atteinte tant que la seconde valeur singulière émerge du bruit de fond.

III.2.9 Discussion

Dans le paragraphe précédent, nous venons de voir que le système devenait de plus en plus sensible à mesure que l'écart entre les deux fils diminuait. Une explication réside dans l'amplitude de la réponse entre deux éléments. A partie de l'équation (3.10), la matrice de transfert entre deux antennes #*i* et #*j* pour des fils proches s'écrit :

$$K_{ij} = 2\frac{e^{\mathrm{i}k\left(r_i^{Tx}+r_j^{Rx}\right)}}{r_i^{Tx}r_j^{Rx}}\cos\left(k\frac{d}{2}\left(\frac{X_i^{Rx}}{F}+\frac{X_j^{Tx}}{F}\right)\right) \tag{3.33}$$

Pour simplifier l'explication, la diffusion multiple entre les deux fils est négligée. Dans cette expression, r_j^{Rx} et r_i^{Tx} donnent la distance entre les antennes et le barycentre des deux fils. La phase $e^{\mathrm{i}k\left(r_i^{Tx}+r_j^{Rx}\right)}$ ne dépend alors que du barycentre des deux fils. Elle ne contient de ce fait pas d'information sur leur écartement. Cette considération est cohérente avec la limite classique de diffraction. L'évolution de la phase fixe la taille de la tache focale. Seule l'amplitude d'un élément de **K** est affectée par la distance *d*, par l'intermédiaire de la fonction cosinus.

L'intégration de cette fonction (notamment dans le calcul du paramètre clef *w*) fait survenir un sinus cardinal de la distance *d* divisée par la cellule de résolution $\lambda F / D$. La sensibilité du sinus cardinal à une variation de $Dd / \lambda F$ varie linéairement en première approximation (pour des valeurs de $Dd / \lambda F$ faibles). Or plus cette fonction est sensible, plus il sera aisé de séparer les deux fils. Il n'est donc pas étonnant de retrouver dans le critère de résolution la dérivée de ce sinus cardinal : $Dd / \lambda F$.

L'estimateur *L* développé précédemment correspond à la projection des fonctions de Green en espace libre sur l'espace signal mesuré. Cet estimateur est en fait comparable à la superposition de deux repropagations « classiques » en ayant au préalable séparé les contributions des deux fils. En théorie, la superposition des deux images formées ferait tout de même apparaître deux pics au niveau des fils, mais les taches focales se chevaucheraient. La méthode DORT-MUSIC surmonte cette difficulté par un traitement non-linéaire. En contrepartie, elle devient très sensible à de faibles variations dues au niveau de bruit. La résolution sub-longueur d'onde devient de facto d'autant plus complexe que la distance *d* se réduit.

Concernant l'influence de la diffusion multiple, le critère de résolution développé au paragraphe précédent reste toujours valable si celle-ci est prise en compte. En l'absence de bruit, les vecteurs singuliers associés ne changent pas avec ou sans diffusion multiple puisque le signal provient exclusivement de la réflexion sur les deux fils. Celle-ci change cependant le niveau de la seconde valeur singulière. Elle l'augmente dans le cas d'interférences constructives ou la diminue dans le cas contraire. Simonetti propose que la diffusion multiple puisse s'avérer déterminante dans le cas où le niveau de bruit est critique [55]. Le critère de résolution en régime de diffusion multiple ne diffère toutefois pas de celui-exprimé dans cette étude puisque l'on se base sur une situation dans laquelle les valeurs singulières sont données au préalable.

Le dernier point abordé dans cette partie concerne le nombre de valeurs singulières à inclure dans l'espace signal afin d'obtenir la meilleure résolution possible. Prada *et al.* ont observé que la prise en compte de sept valeurs singulières au lieu de deux dans l'espace signal *virtuel* permettait d'améliorer l'imagerie des deux fils [48]. Leur réseau en émission/réception était composé de 128 transducteurs. Nous avons observé expérimentalement un phénomène similaire, bien que le nombre d'antennes composant le réseau en réception soit inférieur (N=10). Les vecteurs singuliers à ajouter dans l'espace signal ne s'avèrent pas nécessairement les mêmes selon la fréquence. Les vecteurs singuliers de l'espace signal théorique (notamment le second) contiennent une partie provenant de l'espace bruit. La réciproque est aussi vraie. L'ajout de vecteurs singuliers de l'espace bruit dans l'espace signal virtuel peut parfois s'avérer bénéfique si ils contiennent eux-mêmes de l'information provenant de l'écho

des fils. Le nombre de positions dans notre expérience est toutefois trop faible pour déterminer quels vecteurs singuliers sont à ajouter.

En conclusion, l'étude de la perturbation des valeurs singulière a permis de mieux interpréter les résultats expérimentaux obtenus. Ceux-ci ont prouvé l'efficacité de la méthode DORT-MUSIC pour résoudre deux diffuseurs proches. L'influence du bruit a aussi été quantifiée. Un critère de résolution des deux fils a pu être extrait. Celui-ci prouve que même si la seconde valeur singulière se détache du niveau de bruit, les deux diffuseurs peuvent être impossibles à localiser à l'aide de notre méthode.

ANNEXE I

Le développement en série de puissance est valide si la norme (de Frobenius) de la matrice de perturbation est très inférieure à la norme de la matrice initiale, c'est-à-dire que $E\left[\left\|\sigma_B \Delta\mathbf{K}\right\|_F\right] \ll \left\|\sum_{i=1}^{2}(\mathbf{u}_i)\sigma_i(\mathbf{v}_i)^H\right\|_F$, ou encore :

$$N\sigma_B << \sqrt{\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}} \tag{3.34}$$

Dans ce chapitre, les distances entre les fils sont faibles devant la longueur d'onde. Ainsi, l'équation (3.12) montre que la seconde valeur singulière σ_2 est très inférieure à la première. Comme la seconde valeur singulière ressort tout de même du niveau de bruit (même par contre du même ordre), l'inégalité $\sigma_1 >> \sigma_2 > \sigma_B$ permet de réaliser une hypothèse supplémentaire utile dans la suite des développements:

$$\frac{\sigma_1^{\,2}+\sigma_2^{\,2}}{\left(\sigma_1^{\,2}-\sigma_2^{\,2}\right)^2} \simeq \frac{1}{\sigma_1^{\,2}} << \frac{N-2}{\sigma_2^{\,2}} \tag{3.35}$$

A partir des propriétés de la *svd* (projection sur le sous-espace signal et orthogonalité des vecteurs singuliers), la perturbation au premier ordre à partir des équations (3.19) et (3.21) s'écrit :

$$\mathbf{w}_1^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_2^{\,H}\left(\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^H + \mathbf{K}\Delta\mathbf{K}^H\right)\mathbf{u}_1}{\sigma_1^{\,2}-\sigma_2^{\,2}}\mathbf{u}_2 + \sum_{k=3}^{N}\frac{\mathbf{u}_k^{\,H}\left(\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^H + \mathbf{K}\Delta\mathbf{K}^H\right)\mathbf{u}_1}{\sigma_1^{\,2}}\mathbf{u}_k \tag{3.36}$$

$$\mathbf{w}_2^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_1^{\,H}\left(\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^H + \mathbf{K}\Delta\mathbf{K}^H\right)\mathbf{u}_2}{\sigma_2^{\,2}-\sigma_1^{\,2}}\mathbf{u}_1 + \sum_{k=3}^{N}\frac{\mathbf{u}_k^{\,H}\left(\Delta\mathbf{K}\mathbf{K}^H + \mathbf{K}\Delta\mathbf{K}^H\right)\mathbf{u}_2}{\sigma_2^{\,2}}\mathbf{u}_k \tag{3.37}$$

Deux contributions séparables composent les vecteurs $\mathbf{w}_1^{(1)}$ et $\mathbf{w}_2^{(1)}$. La première provient du sous-espace signal (premier terme) et donc, dans le cas de deux vecteurs y appartenant, du vecteur singulier d'indice différent. Quant à la seconde, elle est générée par les vecteurs singuliers de l'espace bruit et est responsable de la dégradation de l'estimateur MUSIC.

La valeur moyenne de leurs composantes est décrite par Jun Liu et *al.* dans la référence [63] et aboutit à:

$$E\left[\left\langle \mathbf{w}_2^{(1)} \,|\, \mathbf{u}_1 \right\rangle\right] = 0 \tag{3.38}$$

$$E\left[\left\|\left\langle \mathbf{w}_2^{(1)} \mid \mathbf{u}_1 \right\rangle \mathbf{u}_1\right\|^2\right] = \frac{\sigma_1^{\ 2} + \sigma_2^{\ 2}}{\left(\sigma_1^{\ 2} - \sigma_2^{\ 2}\right)^2} \approx 0 \tag{3.39}$$

$$E\left[\left\|\sum_{k=3}^{N} \left\langle \mathbf{w}_2^{(1)} \mid \mathbf{u}_k \right\rangle \mathbf{u}_k\right\|^2\right] = \frac{N-2}{\sigma_2^{\ 2}} \tag{3.40}$$

Dans ces équations, E représente toujours la valeur moyenne statistique sur un nombre infini de tirages aléatoires du bruit blanc. Du fait de l'approximation réalisée dans l'équation (3.35), la contribution du sous-espace signal au second vecteur perturbé (calculée dans l'équation (3.39)) devient en moyenne bien moins importante que la contribution du sous-espace bruit (dans (3.40)).

Les calculs à réaliser pour le développement de $\mathbf{u}_1^{\mathrm{p}}$ et $\mathbf{u}_2^{\mathrm{p}}$ au second ordre se révèlent beaucoup plus fastidieux. Leur exact expression est fournie dans la référence [62]. Malgré tout, les vecteurs de perturbation au second ordre $\mathbf{w}_1^{(2)}$ et $\mathbf{w}_2^{(2)}$ se décomposent dans la base des vecteurs $\mathbf{u}_k$:

$$\mathbf{w}_i^{(2)} = \sum_{k=1}^{N} a_{ki} \mathbf{u}_k \tag{3.41}$$

Pour le second vecteur singulier, ($i = 2$), les deux coefficients au second ordre s'écrivent à partir de $\mathbf{w}_2^{(1)}$ comme:

$$a_{12} = \frac{\sigma_1 \mathbf{u}_1^{\ H} \Delta \mathbf{K} \mathbf{w}_2^{(1)} + \sigma_2 \mathbf{u}_1^{\ H} \Delta \mathbf{K}^H \mathbf{w}_2^{(1)} - \left(\sigma_1 c_1 + \sigma_2 c_2\right)}{\sigma_2^{\ 2} - \sigma_1^{\ 2}} \tag{3.42}$$

$$a_{22} = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_2^{(1)H} \mathbf{w}_2^{(1)}\right) \tag{3.43}$$

Pour simplifier l'équation (3.42), deux coefficients c_1 et c_2 ont été introduits. Ils vérifient $E\left[c_k\right] = 0$ ($1 \le k \le 2$). Les autres coefficients de l'équation (3.41) ne sont pas développés dans ce paragraphe car ils ne servent pas au calcul de l'estimateur MUSIC au second ordre de la perturbation.

Les valeurs moyennes de a_{12} et a_{22} sont :

$$E\left[a_{12}\right] \simeq 0 \ \text{ et } \ E\left[a_{22}\right] = -\frac{1}{2}\frac{N-2}{\sigma_2^{\ 2}} \tag{3.44}$$

Pour appliquer ensuite l'algorithme MUSIC, les normes des vecteurs singuliers perturbés doivent être égales à 1. Si cette considération est évidente pour le premier, pour le second, elle vérifie :

$$\left\|\mathbf{u}_2^p\right\|^2 = \left(\mathbf{u}_2^p / \mathbf{u}_2^p\right) = \left\langle \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_2 \right\rangle + 2\sigma_B \left\langle \mathbf{w}_2^{(1)} \mid \mathbf{u}_2 \right\rangle + \sigma_B{}^2 \left(\left\|\mathbf{w}_2^{(1)}\right\|^2 + 2\left\langle \mathbf{w}_2^{(2)} \mid \mathbf{u}_2 \right\rangle \right) + o\left(\sigma_B{}^2\right) \quad (3.45)$$

Comme $\{\mathbf{u}_k\}$ constitue une base orthonormée, et du fait des équations (3.40) et (3.44), cette expression devient:

$$\left\|\mathbf{u}_2^p\right\|^2 \simeq 1 + o\left(\sigma_B{}^2\right) \quad (3.46)$$

Les deux vecteurs singuliers sont donc bien orthogonaux et normalisés au second ordre.

ANNEXE II

Les fils sont positionnés dans le champ lointain des antennes des réseaux. De plus, comme le pas du réseau est suffisamment petit (i.e. inférieur à $\lambda/2$), le produit scalaire entre $\tilde{\mathbf{U}}_L$ et $\tilde{\mathbf{U}}_R$ peut s'écrire :

$$w \approx \frac{1}{N} \int_{-D/2}^{D/2} e^{2ikdx\frac{s}{F}} \frac{ds}{p} \quad (3.47)$$

L'intégration est réalisée le long de l'axe x, la variable muette s est toutefois utilisée dans cette intégrale pour ne pas confondre l'axe avec la distance *dx*. Après calculs, cette intégrale mène à :

$$w \approx \operatorname{sinc}\left(\frac{kdD}{2F}\right) \quad (3.48)$$

Par ailleurs, avec les mêmes hypothèses et en s'appuyant sur l'équation (3.16) et afin de tracer le profil de la courbe, la valeur moyenne du produit scalaire entre le premier vecteur singulier et $\tilde{\mathbf{U}}_x$ se calcule par l'intégrale :

$$E\left[\left|\left\langle \mathbf{u}_1^p \mid \tilde{\mathbf{U}}_x \right\rangle\right|^2\right] = \left(\sqrt{\frac{2}{1+w}} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{\cos\left(kdx\frac{s}{F}\right) e^{-ikx\frac{s}{F}}}{N} \frac{ds}{p} \right)^2 \quad (3.49)$$

Ainsi :

$$E\left[\left|\left\langle \mathbf{u}_1^p \mid \tilde{\mathbf{U}}_x \right\rangle\right|^2\right] = \frac{1}{2(1+w)}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx-x)D}{2F}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx+x)D}{2F}\right)\right]^2 \tag{3.50}$$

De la même façon, pour le second vecteur singulier,

$$E\left[\left|\left\langle \mathbf{u}_2^p \mid \tilde{\mathbf{U}}_x \right\rangle\right|^2\right] = \left(1-\frac{\sigma_3{}^2}{4\sigma_2{}^2}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{(1-w)}}\int_{-D/2}^{D/2}\frac{\sin\left(kdx\frac{s}{F}\right)e^{-ikx\frac{s}{F}}}{N}ds\right)^2 \tag{3.51}$$

Cette expression mène ensuite à :

$$E\left[\left|\left\langle \mathbf{u}_2^p \mid \tilde{\mathbf{U}}_x \right\rangle\right|^2\right] = \frac{1}{2(1-w)}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx-x)D}{2F}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx+x)D}{2F}\right)\right]^2\left(1-\frac{\sigma_3^2}{4\sigma_2^2}\right) \tag{3.52}$$

Le profil de la courbe est finalement fournit en additionnant les deux termes :

$$\begin{aligned} E\left[L\left(\tilde{\mathbf{U}}_x\right)\right] = {} & \frac{1}{2(1+w)}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx-x)D}{2F}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx+x)D}{2F}\right)\right]^2 \\ & + \frac{1}{2(1-w)}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx-x)D}{2F}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{k(dx+x)D}{2F}\right)\right]^2\left(1-\frac{\sigma_3{}^2}{4\sigma_2{}^2}\right) \end{aligned} \tag{3.53}$$

ANNEXE III

Dans cette dernière annexe, les calculs du critère de résolution en fonction des valeurs singulières σ_3 et σ_2 sont développés.

En premier lieu, nous rappelons que la contribution du second vecteur singulier au point exactement entre les deux fils est nulle et que le produit scalaire entre le premier vecteur singulier et ce même point s'écrit :

$$\left\langle \mathbf{u}_1 \mid \tilde{\mathbf{U}}_0 \right\rangle \approx \sqrt{\frac{2}{1+w}}\operatorname{sinc}\left(kdx\frac{D}{2F}\right) \tag{3.54}$$

A partir du développement de w en fonction des paramètres du problème et des équations (3.31) et (3.54), le ratio limite se met sous la forme développée :

$$\left.\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right|_{\lim} = 2\sqrt{\frac{2\left\{1-2\left[\operatorname{sinc}\left(kdx\frac{D}{2F}\right)\right]^2 / \left[1+\operatorname{sinc}\left(kdx\frac{D}{F}\right)\right]\right\}}{1-\operatorname{sinc}\left(kdx\frac{D}{F}\right)}} \tag{3.55}$$

Cette équation peut ensuite se simplifier pour arriver à une forme finale plus sympathique. Son caractère linéaire apparaît en développant la fonction sinus cardinal à son quatrième ordre en $\left(kdx\frac{D}{F}\right)$:

$$\left.\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\right|_{\lim} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}\frac{D}{F}\frac{dx}{\lambda} + o\left(\frac{D}{F}\frac{dx}{\lambda}\right) \tag{3.56}$$

III.3 Localisation de personnes à travers les murs

Durant ces dernières années, la recherche en micro-ondes concernant la localisation de personnes à travers les murs s'est intensifiée. Cette thématique intéresse notamment les applications militaires telles que la sécurité du territoire, les opérations anti-terroristes ou encore le sauvetage à l'intérieur d'un bâtiment en feu. Deux papiers de Baranovski [65] et Griffiths et Baker [66] proposent un résumé du contexte historique et des enjeux dans le domaine. Ils abordent aussi les systèmes développés et les perspectives scientifiques.

Dans cette partie, nous nous concentrons sur la détection d'une personne se déplaçant derrière un mur à l'aide de la méthode DORT. La soustraction des signaux entre deux acquisitions permet d'isoler les échos provenant de la cible des forts échos du mur. Deux raisons justifient l'étude du cas de cibles mobiles par rapport à un cas statique. En premier lieu, dans un cas statique, les échos provenant des diffuseurs derrière le mur sont dominés par le fort écho de la face avant du mur ainsi que les réflexions multiples entre la face avant et la face arrière. En second lieu, la gamme de fréquence envisagée s'étale entre 1 et 4 GHz. Avec des longueurs d'onde décimétriques, il est compliqué de distinguer une personne d'objets métalliques environnants dans la pièce. A des fréquences plus élevées, l'atténuation due à la propagation à travers le mur est trop importante pour détecter une personne. Plusieurs papiers traitent de la détection de cibles mobiles à l'intérieur de milieux complexes [15, 67, 68]. Ils insistent notamment sur la possibilité de soustraire les signaux entre deux instants afin d'extraire la réponse de la cible mobile.

Le renversement du temps a été étudié auparavant pour la localisation à travers les murs tant en simulation [69], qu'expérimentalement [67]. Toutefois dans ces travaux, une antenne source unique servait à l'émission. La plus-value amenée ici par l'utilisation de deux réseaux en émission et réception grâce à la méthode DORT est double. Elle tient tout d'abord dans le rapport signal/bruit amélioré par l'ajout d'antennes en émission. Ce rapport évolue en effet en racine carré du nombre d'antennes du plus petit des deux réseaux, $\sqrt{\min\left(N^{\mathrm{Tx}}, N^{\mathrm{Rx}}\right)}$. En second lieu, en présence de plusieurs cibles, son caractère sélectif permet de séparer les contributions de chacune. L'association de la méthode DORT avec l'algorithme MUSIC (MUltiple SIgnal Classification) facilite la distinction de cibles proches, comme nous l'avons vu lors de l'étude précédente sur la résolution sub-longueur d'onde de deux diffuseurs. De

précédents articles ont soulignés l'intérêt de l'algorithme MUSIC pour la localisation derrière les murs [70, 71].

Lors de cette partie, après avoir introduit le dispositif expérimental, l'étude de la propagation dans le mur est menée. A partir des signaux rétrodiffusés, les paramètres du mur (épaisseur, permittivité) sont extraits. Une fois que la personne mobile est détectée, ces paramètres permettent de construire la fonction de Green prenant en compte la propagation dans le mur afin de localiser la personne avec précision. Le suivi du déplacement d'une cible valide enfin notre dispositif.

III.3.1 Matrice d'acquisition

Contrairement au dispositif utilisé pour l'étude des invariants de cylindres diélectriques et de la résolution sub-longueur d'onde, le montage est constitué de deux réseaux de sept antennes Vivaldi (voir Figure III.21). L'intérêt de ce dispositif est de pouvoir acquérir rapidement la matrice **K** à l'aide de commutateurs électromécaniques. En effet, la détection de cibles mobiles, par exemple des personnes, nécessite une durée d'acquisition courte.

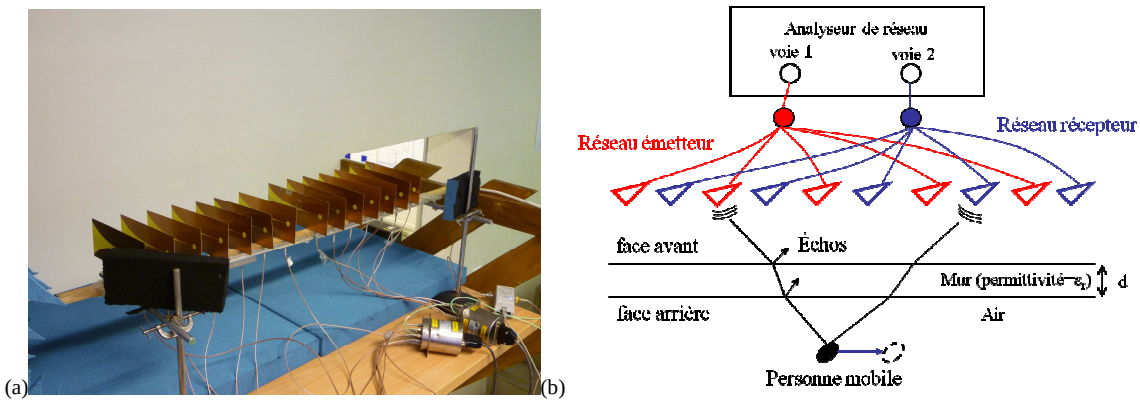


Figure III.21: (a) Photographie du montage expérimental formé d'Antennes Vivaldi. (b) Dispositif expérimental. Les antennes sont reliées à l'analyseur de réseau par l'intermédiaire de commutateurs électromécaniques permettant de choisir le couple d'antennes de mesure.

Pour cette étude, les antennes des réseaux en émission (Tx) et en réception (Rx) sont entremêlées. Une antenne Rx succède à une antenne Tx et inversement. La distance entre deux antennes Rx et Tx est égal à 6 cm, i.e. $\lambda/2$ à 2,5 GHz. Les réseaux ne sont pas collés au mur (ce qui réduirait fortement les échos du mur du fait de la directivité des antennes) pour

simuler des conditions réalistes d'un dispositif embarqué. Ils sont placés à une distance de 40 cm de la face avant.

La détection s'effectue au travers d'un mur de béton de 27,5 cm d'épaisseur (Figure III.22). La cible placée derrière le mur consiste soit en une personne, soit en un cylindre en aluminium de 5 cm de diamètre. Ce dernier est utilisé afin de conduire l'étude sur la résolution d'un court déplacement.

Figure III.22: Photographie du mur et d'un cylindre métallique placée derrière.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, la *svd* est effectuée sur la matrice **δK** résultant de la différence de deux matrices de rétrodiffusions mesurées à deux instants différents. La matrice **δK** s'écrit par conséquent :

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(\tau+\delta\tau)=\mathbf{K}(\tau+\delta\tau)-\mathbf{K}(\tau). \tag{3.57}$$

Durant nos expériences, les cibles (une personne ou un cylindre métallique) sont considérées comme fixes durant l'acquisition de **K**.

III.3.2 Paramètres du mur

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer les paramètres du mur (i.e. sa permittivité ε_r ainsi que son épaisseur d) grâce à la matrice **K**. Cette dernière contient les échos du mur. Nous verrons que cette détermination au préalable est nécessaire pour correctement localiser les cibles mobiles. Au premier ordre, le paramètre crucial est l'épaisseur effective du mur, soit le produit $d\sqrt{\varepsilon_r}$ [72]. Il agit sur le temps de propagation dans le mur. La réfraction est également prise en compte. Une erreur sur l'estimation des paramètres d et ε_r induit un décalage sur la position estimée de la cible par rapport à la

position réelle, ceci indépendamment de la technique d'imagerie utilisée (formation de voies, temps d'arrivée, repropagation numérique…) [73].

Différentes méthodes de caractérisation du mur ont été proposées dans la littérature. Elles s'avèrent plus ou moins pertinentes pour notre problématique. Par exemple, une mesure en transmission depuis les deux faces du mur suppose d'avoir accès à sa partie arrière, ce qui n'est pas compatible avec un système embarqué. Une estimation des temps de vol de l'écho d'une cible sur un réseau d'antennes se révèle plus réaliste [72, 74, 75]. Cependant, dans le cas de cibles étendus, les temps de vol peuvent être mal évalués.

Dans cette étude, nous proposons de se servir des échos de la face arrière du mur. Les temps d'arrivée expérimentaux de ces échos $\tau_{i,j}^{\exp}$ sont comparés avec leurs valeurs théoriques $\tau_{i,j}^{\text{theo}}$ pour chaque couple d'antennes (i,j) en fonction de la valeur de d et ε_r. Un algorithme de minimisation de la fonction coût $C(d,\varepsilon_r)$ est utilisé. La fonction C est définie par :

$$C\left(d,\varepsilon_r\right)=\sum_{i,j}^{N^{\text{Tx}},N^{\text{Rx}}}\left(\tau_{i,j}^{\text{theo}}-\tau_{i,j}^{\exp}\right)^2 \tag{3.58}$$

Dans des conditions idéales, seuls deux couples d'antennes sont nécessaires pour déterminer les deux paramètres. L'utilisation des deux réseaux est équivalente à une moyenne sur tous les couples d'antennes disponibles. Notre méthode suppose que la bande passante des antennes est suffisamment large afin de distinguer temporellement les échos de la face avant et de la face arrière. Le temps de propagation aller-retour dans le mur doit par conséquent être supérieur à la durée d'une impulsion. Sur la Figure III.23 est tracée l'enveloppe de la réponse temporelle entre deux antennes pour un mur porteur du laboratoire d'épaisseur mesurée égale à 27,5 cm. Quatre forts échos se distinguent nettement entre 0 et 10 ns.

Le premier écho (à 3 ns) provient de l'onde balistique entre les deux antennes. Les antennes Vivaldi sont effectivement peu directives. Le second écho (à 3,4 ns) est du à la réflexion sur la face avant du mur. Il sert à déterminer précisément la distance entre les réseaux et le mur. Le troisième écho provient d'une inhomogénéité à l'intérieur du mur (à 4.95 ns). Malgré sa présence, nous considérons tout de même le mur comme homogène dans notre modèle. Enfin, le quatrième écho correspond à la réflexion sur l'interface arrière du mur (à 6.7 ns).

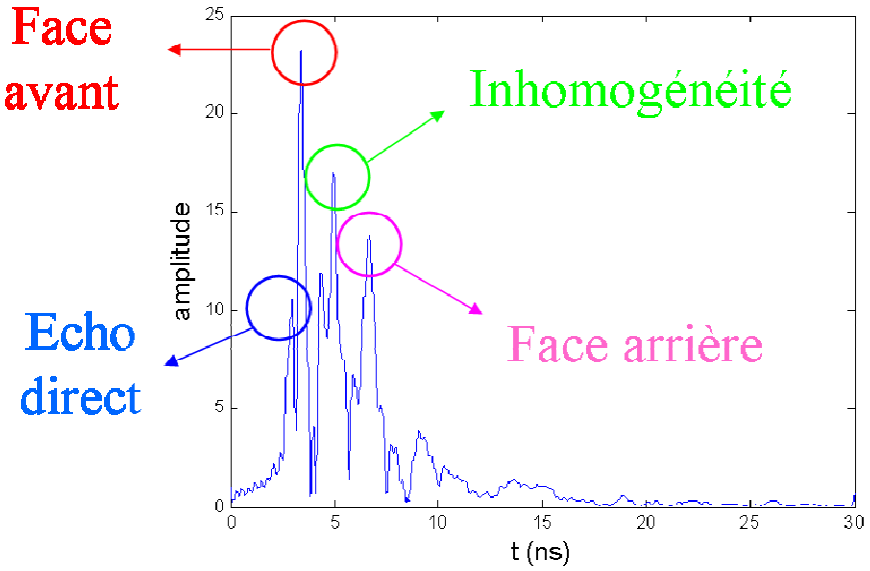


Figure III.23: Enveloppe de la réponse temporelle entre l'antenne #5 du réseau en émission et l'antenne #1 du réseau en réception.

L'approximation de l'optique géométrique est mise en œuvre afin de calculer les temps de propagation théoriques entre les antennes et la face arrière en fonction de d et ε_r [76, 77]. Suivant les notations de la Figure III.24, une antenne est placée en A et la cible en P.

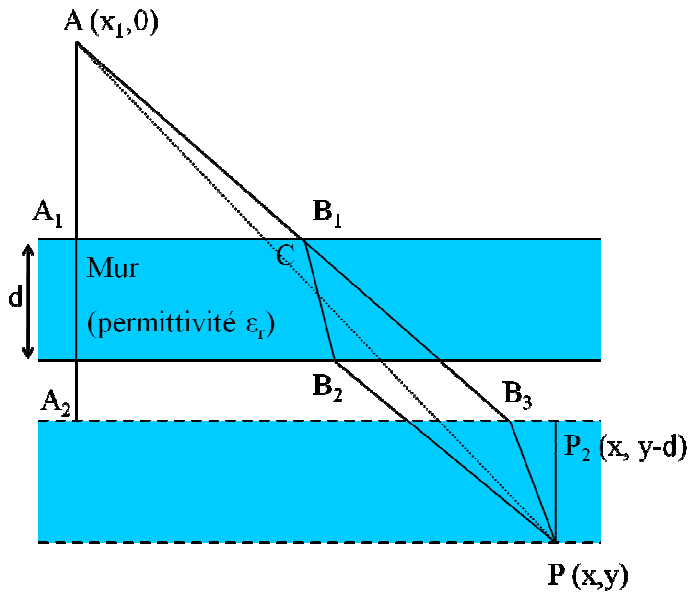


Figure III.24: Chemin géométrique des rayons et représentation du point d'inflexion induit par la réfraction définies dans [76], pour deux interfaces.

Selon des considérations géométriques, les deux articles montrent que les distances parcourues ne diffèrent pas si nous imaginons le mur collé au diffuseur placé au point P (mur

en trait pointillé sur la Figure III.24). Les coordonnées du point d'inflexion B_3 est déterminé en fonction des coordonnées des points A et P. Il permet de calculer les distances « optiques » AB_3 et B_3P :

$$\left|\overrightarrow{AB_3}\right| = \sqrt{\left(1-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}}\frac{d}{y}\right)^2 (x-x_1)^2 + (y-d)^2} \text{ et } \left|\overrightarrow{B_3P}\right| = d\sqrt{1+\frac{1}{\varepsilon_r}\frac{(x-x_1)^2}{y^2}} \tag{3.59}$$

Les nombres d'onde dans l'air et dans le mur sont égaux à:

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0} \text{ et } k_1 = \sqrt{\varepsilon_r}\frac{2\pi f}{c_0} \tag{3.60}$$

A partir de ces relations, les temps d'arrivées de la face arrière sont aisément estimés en fonction de la position des antennes et des caractéristiques du mur. Il est nécessaire d'ajouter le temps de trajet à l'intérieur de l'antenne Vivaldi, depuis la sortie du commutateur électromécanique à sa face avant. La calibration de l'analyseur de réseau est en effet réalisée en sortie du commutateur. La durée mesurée est égale à 0,85 ns.

La carte de l'inverse de la fonction de coût C, pour d variant entre 20 et 70 cm et ε_r entre 1 et 5, est représentée sur la Figure III.25.

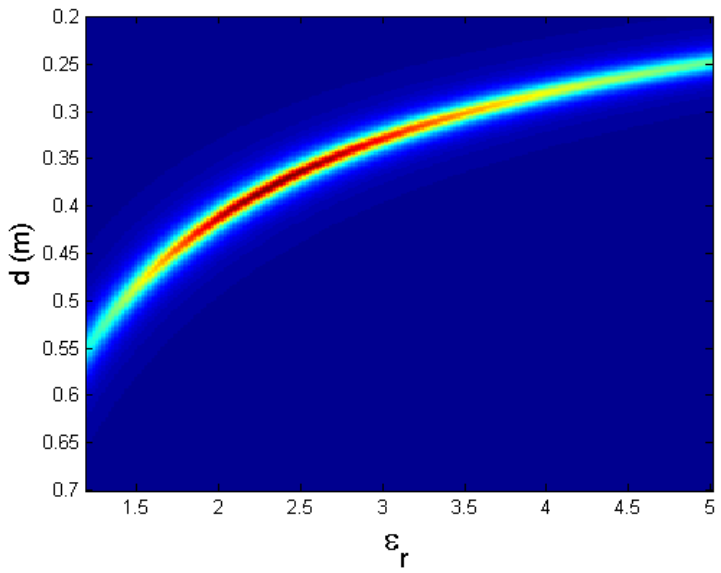


Figure III.25: Evolution de l'inverse de la fonction de coût *C* en fonction de la permittivité ε_r et de l'épaisseur du mur *d*.

La minimisation de la fonction coût fournit une épaisseur d = 36 cm et une permittivité ε_r = 2,36. Comparativement, l'épaisseur du mur est mesurée (à la main) égale à d_{th}=27,5cm et

une mesure en transmission à travers le mur fournit ε_r =4,22. Les temps d'arrivée dépendent principalement de l'épaisseur effective du mur $d\sqrt{\varepsilon_r}$. Cette propriété est clairement visible sur la carte de l'évolution de la fonction coût par rapport à d et ε_r. Ainsi, la valeur dégagée de $d\sqrt{\varepsilon_r}$ grâce aux échos de la face arrière est égale à 0,55 m. Elle est très proche de la valeur estimée grâce à la mesure en transmission de 0,56 m.

Une fois les paramètres du mur déterminés, la fonction de Green entre les antennes et un point de l'espace peut être déterminée. Elle est utile lors de la phase de repropagation numérique des vecteurs singuliers permettant de localiser les objets mobiles derrière le mur.

III.3.3 Localisation d'une personne derrière le mur

a) Valeurs singulières

La matrice $\delta\mathbf{K}$ provient de la soustraction de la matrice **K** entre deux instants. Dans ce paragraphe, la personne n'est pas présente lors de la première acquisition de la matrice, elle apparaît entre les deux acquisitions. Après soustraction, la matrice $\delta\mathbf{K}$ n'est par conséquent associée qu'à une position de cette cible. Les échos provenant du mur ainsi que des objets environnants sont théoriquement supprimés grâce à la soustraction.

Le corps humain est constitué à 65% d'eau et sa permittivité relative peut être estimée aux alentours de 80 à 3 GHz, ce qui en fait un bon diffuseur. Un signal rétrodiffusé type après soustraction est tracé sur la Figure III.26(a).

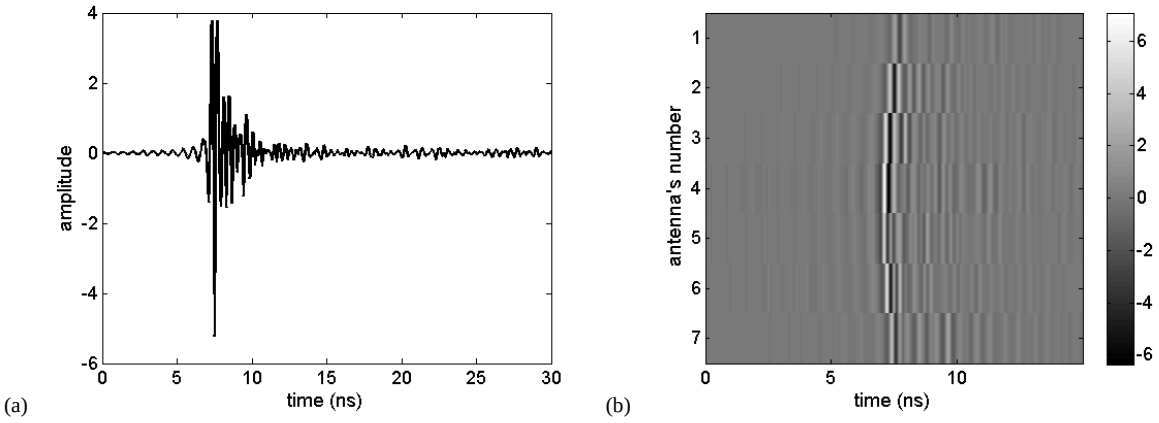


Figure III.26: (a) Signal après soustraction entre l'antenne #3 du réseau d'émission et l'antenne #4 du réseau en réception. (b) Bscan sur le réseau en réception après émission par l'antenne #4.

L'écho de la cible se distingue clairement à 6,8 ns. Le front d'onde associé au niveau des antennes réceptrices est représenté sur la Figure III.26(b). La soustraction des échos du mur y est quasiment parfaite sur toutes les voies. En réalité, ce n'est expérimentalement pas toujours vérifié. Certaines voies possèdent de forts échos correspondant à la face avant du mur. Ces artefacts peuvent être induits par un léger déplacement d'une antenne. La dynamique de l'analyseur est alors insuffisante pour assurer une bonne soustraction.

Du fait de l'atténuation de l'onde dans le mur, la première valeur singulière de la matrice **K** décroît avec la fréquence (Figure III.27). Seules les fréquences entre 2 et 4 GHz sont prises en compte par la suite puisque, au dessus de 4 GHz, le rapport signal sur bruit diminue fortement. De plus, les antennes Vivaldi présentent certaines résonances et par conséquent les valeurs singulières de fortes variations. Dans la suite, nous choisirons les basses fréquences auxquelles l'antenne est la mieux adaptée (typiquement 2,55 GHz) pour localiser les cibles.

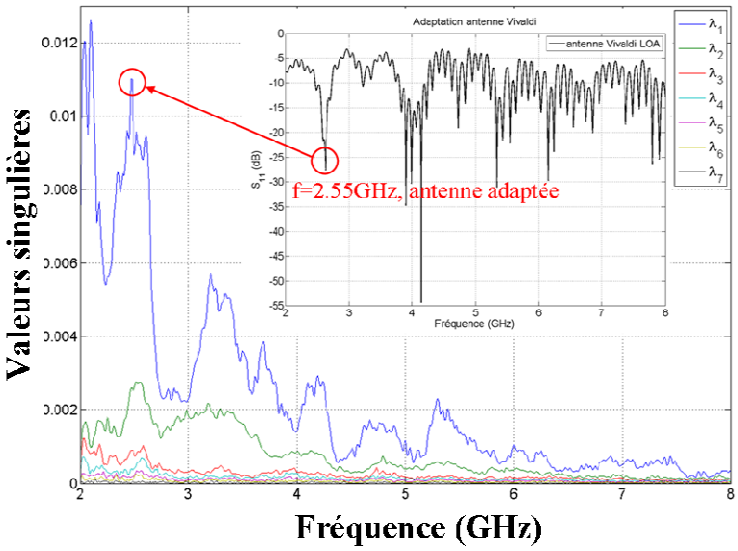


Figure III.27: Valeurs singulières en fonction de la fréquence. En haut à droite est tracé l'amplitude de S_{11} pour une antenne Vivaldi.

Les signaux de la matrice temporelle $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(t)$ sont ensuite divisés en fenêtres temporelles, i.e. $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(t,T)=\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(t)$ pour $t\in[T,T+\Delta T]$. La durée de la fenêtre ΔT correspond à deux fois la durée d'une impulsion (inverse de la bande passante), soit 1 ns. La matrice $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(f,T)$ est calculée à partir de la transformée de Fourier des matrices $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(t,T)$ sur la variable t, puis la *svd* est réalisée pour chaque fenêtre : $\boldsymbol{\delta}\mathbf{K}(f,T)=\sum_{n=1}^{7}\mathbf{U}_n^{\mathrm{Rx}}(f,T)\sigma_n(f,T)\mathbf{U}_n^{\mathrm{Tx}^H}(f,T)$. Les valeurs

singulières sont tracées sur la Figure III.28 en fonction de la fenêtre T à la fréquence de 2,5 GHz.

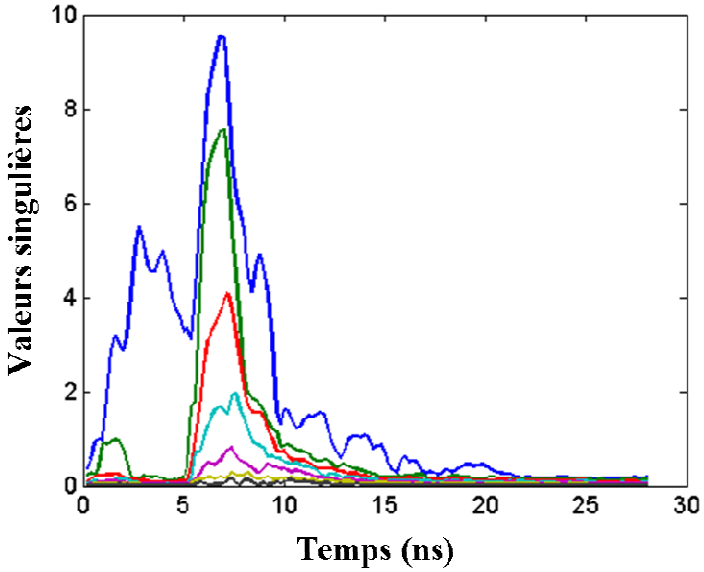


Figure III.28: Valeurs singulières $\sigma_n(f,T)$ pour f = 2,5 GHz en fonction de la fenêtre temporelle T pour un corps humain place derrière le mur.

Deux maxima émergent significativement. Le premier est du à la mauvaise soustraction de l'écho du mur sur une voie (à 3 ns). Une valeur singulière s'y détache nettement.

Le second maximum correspond au temps d'aller retour entre le réseau et la personne (à 6,8 ns). Plusieurs valeurs singulières sont associées à la diffusion par le corps humain. Les études pour des cibles cylindriques ou des objets plats grands devant la cellule de résolution du réseau ont montré que les valeurs singulières forment tout d'abord un plateau de m valeurs singulières puis décroissent exponentiellement [41, 78]. Le paramètre m est approximativement donné par le nombre de taches focales contenues dans la largeur du diffuseur, c'est-à-dire $m = aD/\lambda F$ en champ lointain (ou $m = 2a/\lambda$ si $D > F$), où a est la taille latérale du diffuseur, D la largeur du réseau et F la distance focale. Dans cas de figure, à 2,5 GHz, D = 78 cm, F = 60 cm, λ = 12 cm et a = 50 cm, soit $m \approx 7$. Néanmoins, comme pour les cylindres diélectriques, le premier vecteur singulier est associé principalement à une diffusion monopolaire. La repropagation numérique d'un vecteur monopolaire donne directement accès à la position moyenne de la cible.

b) Repropagation cohérente

Afin de ne pas induire d'erreur sur la localisation de la cible, la fonction de Green tenant compte de la propagation dans le mur est calculée. Seule la phase de la fonction de Green est prise en compte. Nous considérons le mur comme homogène. Grâce à l'équation (3.59), la phase de la fonction de Green entre une antenne de position (X_i,0) et un point **r**(x,y) derrière le mur s'écrit :

$$G(x,y) = e^{ik_0\sqrt{(1-\frac{d}{\sqrt{\varepsilon_r}y})^2(x-X_i)^2+(y-d)^2}}\, e^{ik_0 d\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1+\frac{(x-X_i)^2}{\varepsilon_r y^2}}} \tag{3.61}$$

Les paramètres ε_r et d ont été estimés dans la partie III.3.2. Les réseaux en émission et en réception ont été intercalés pour tirer profit de l'ouverture totale de l'ensemble des antennes. Pour procéder à une repropagation cohérente, la phase arbitraire $\delta\phi$ induite par la *svd* entre les deux vecteurs singuliers doit être calculée afin que les contributions des deux réseaux interfèrent constructivement. La phase doit être continue sur les deux réseaux.

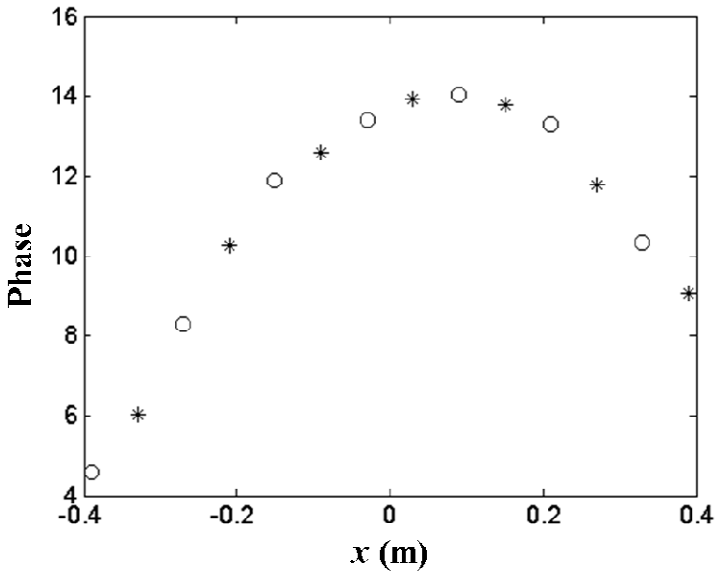


Figure III.29: reconstruction de la phase sur le réseau entier à 2,6 GHz. Les cercles noirs désignent la phase de $\mathbf{U}_1^{Tx}$ et les étoiles la phase de $\mathbf{U}_1^{Rx}$.

En « déroulant » (unwrap en anglais) les phases des vecteurs singuliers $\mathbf{U}_1^{Tx}$ et $\mathbf{U}_1^{Rx*}$ en fonction de la position des antennes, les deux courbes présentent la bonne évolution de la phase pour chaque réseau mais sont décalées de $\delta\phi$. Ce décalage est retrouvé en minimisant la distance entre les deux courbes. Le résultat obtenu sur la phase des deux vecteurs singuliers

est tracé sur la Figure III.29. Nous constatons une bonne reconstruction de la phase sur l'ensemble des deux réseaux.

Lors de l'étude des cylindres diélectriques, la phase arbitraire était estimée en supposant les contributions des deux réseaux en phase au point focal. Cette opération supposait de connaître au préalable sa position et permettait de réduire la largeur de la tache focale. Le gain sur cette taille dépendait donc de la localisation initiale du point focal et donc de la largeur de la tache focale lors d'une repropagation incohérente. Dans ce paragraphe, la reconstruction de la phase n'est plus dépendante d'une estimation initiale. Cette méthode s'avère donc plus efficace que la première.

Néanmoins, elle est valable seulement si les réseaux sont suffisamment bien échantillonnés. Le déphasage de la propagation depuis la cible à deux antennes consécutives doit être inférieur à 2π. Sous l'hypothèse de champ lointain, cette condition se traduit par : $\delta < \sqrt{\lambda F}$, avec δ la distance entre les deux antennes, λ la longueur d'onde et F la distance focale.

L'estimateur numérique $W_2(\mathbf{r})$ de repropagation cohérente est donnée par :

$$W_2(\mathbf{r}) = \left| \left\langle \mathbf{U}_n^{\mathrm{Tx}} \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Tx}}(\mathbf{r}) \right\rangle + e^{\mathrm{i}\delta\phi} \left\langle \mathbf{U}_n^{\mathrm{Rx}*} \middle| \mathbf{G}^{\mathrm{Rx}}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2 \tag{3.62}$$

Pour une reconstruction parfaite de la phase, les deux contributions focalisent en phase sur la position de la cible. L'intensité de l'image est comparée au point focal avec une repropagation incohérente (somme des modules des deux contributions). Les deux niveaux sont ici égaux (Figure III.30(a) et (b)), ce qui assure une bonne reconstruction de la phase sur tout le réseau.

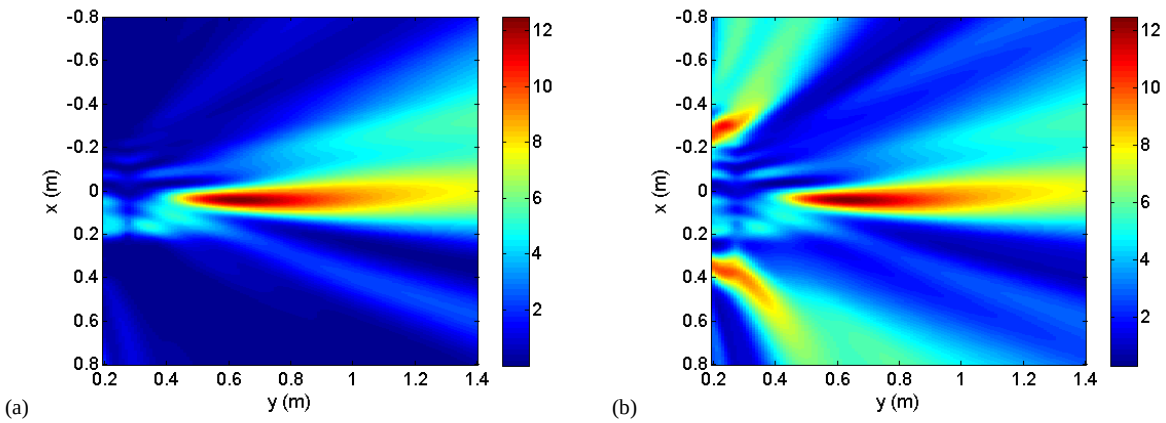


Figure III.30: Repropagation cohérente (a) et incohérente (b) du premier vecteur singulier en fonction de *x* et *y*. L'échelle de couleur est identique pour les deux figures.

Par rapport à une repropagation incohérente, la repropagation cohérente ne diminue pas la largeur de la tache focale, puisque l'ouverture totale n'est pas supérieure à l'ouverture d'un seul réseau. Néanmoins, les lobes secondaires de réseau sont significativement réduits. Le réseau entier est deux fois mieux échantillonné que chaque réseau pris séparément. Cette propriété se révèle essentielle pour ne pas confondre les lobes avec la présence simultanée d'une seconde cible. Durant la suite de l'étude, seule cette repropagation cohérente est adoptée.

c) Estimateur MUSIC et résolution sub-longueur d'onde

Contrairement au paragraphe précédent, la cible est maintenant présente à deux positions différentes lors de l'acquisition des deux matrices **K**. Cette configuration est plus réaliste dans le cas d'une mise en œuvre opérationnelle. Nous étudions la résolution atteinte expérimentalement avec la méthode DORT-MUSIC. Par résolution, nous entendons la capacité à résoudre spatialement deux diffuseurs proches. Lorsqu'une cible se déplace entre deux acquisitions, elle est associée à deux positions différentes. Sa résolution minimale correspond donc au plus petit déplacement pouvant être imagé en différenciant les deux positions.

Afin de conduire cette étude, la personne est remplacée par un cylindre de 5 cm de diamètre recouvert d'aluminium. Après soustraction, la dimension de l'espace *signal* (rang de la matrice $\delta\mathbf{K}$), est égal à deux, ce qui correspond aux deux positions de la cible. L'estimateur MUSIC s'écrit donc :

$$I_{MU}(r) = \frac{1}{\sum_{n=3}^{7} \left| \left\langle \mathbf{U}_n^{\mathrm{Rx}} \middle| \tilde{\mathbf{G}}^{Rx}(\mathbf{r}) \right\rangle + e^{\mathrm{i}\delta\phi} \left\langle \mathbf{U}_n^{\mathrm{Tx}*} \middle| \tilde{\mathbf{G}}^{Tx}(\mathbf{r}) \right\rangle \right|^2} \tag{3.63}$$

Un résultat expérimental est représenté sur la Figure III.31(a). La localisation est réalisée à la fréquence de 1,95 GHz, i.e. λ = 15,4 cm. La cible a été déplacée de seulement 5,1 cm, soit $\lambda/3$. Deux spots distincts apparaissent sur la Figure III.31(a), correspondant au centre des deux cibles. Sur la Figure III.31(b), l'amplitude normalisée de l'image est affichée en fonction de l'axe x pour y = 0,48 m. Une distance de 5,1 cm entre les deux cibles est alors retrouvée comme prévu.

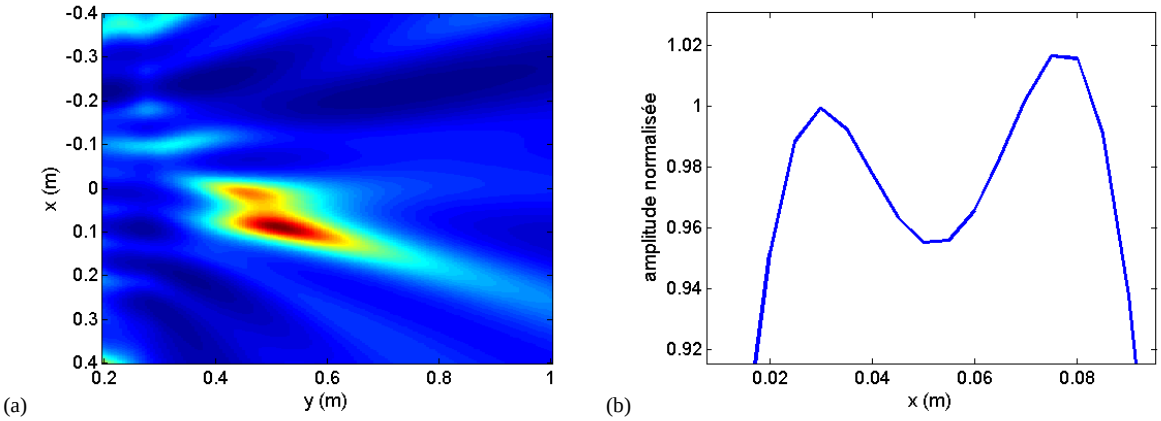


Figure III.31: Repropagation cohérente dans le cas de deux cylindres (de diamètre 5cm) espacés par 5,1 cm à 1,95 GHz (λ=15,4 cm), (a) sur tout l'espace et (b) pour y=0,5 m.

III.3.4 Suivi du déplacement d'une cible

Afin de valider l'emploi de la méthode DORT-MUSIC, il est nécessaire de pouvoir suivre la cible pendant son déplacement. Le cylindre recouvert d'aluminium constitue de nouveau la cible. Les matrices **K** sont acquises pour onze positions différentes et la soustraction est effectuée entre les acquisitions successives.

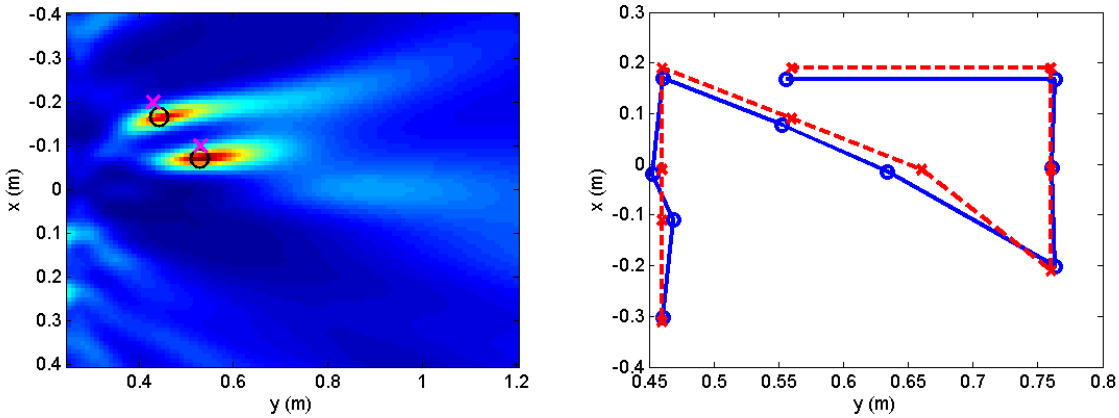


Figure III.32: (a) les deux positions associées au déplacement #4. (b) Reconstruction du déplacement derrière le mur. La ligne en pointillés avec les marqueurs x représente les positions théoriques et la ligne pleine avec les marqueurs o les positions reconstruites.

L'algorithme MUSIC est utilisé afin d'estimer la position de la cible. Deux maxima ressortent sur chaque image (Figure III.32(a)). Les positions déterminées par MUSIC sont comparées aux positions réelles du cylindre. Ce procédé mène à une bonne reconstruction du mouvement comme illustré sur la Figure III.32(b).

III.3.5 Conclusion et perspectives

La faisabilité de l'imagerie à travers les murs avec la méthode DORT a été démontrée expérimentalement lors de cette étude. Une nouvelle méthode pour déterminer les paramètres du mur (épaisseur et permittivité) a été mise en place. Elle utilise les échos de la face arrière du mur et ne suppose donc pas la présence d'une cible. La détection et la localisation de personnes ont ensuite été réalisées grâce aux vecteurs singuliers. L'emploi de la méthode DORT-MUSIC permet d'imager plus finement les déplacements de personnes.

Toutefois, de nombreuses pistes restent à explorer afin de parvenir à un dispositif embarqué d'imagerie. Le premier point réside dans l'amélioration du temps d'acquisition de la matrice. Le système ne se justifie que pour une détection en temps réel. Ce point impose de diminuer le temps de commutation entre chaque couple d'antennes. Durant nos expériences, la matrice était acquise en 3 minutes. De nouveaux systèmes de commutation ultra-rapide (de l'ordre de 100 ns) existent, tout en gardant une bande passante entre 2 et 8 GHz. Leur emploi couplé à une amélioration du temps de calcul des codes développés pourrait permettre de réduire considérablement le temps de formation d'une image. Ainsi une localisation de personne à travers les murs en temps réel peut être envisagée.

Une diminution du temps d'acquisition de la matrice **K** ouvre la possibilité de réaliser de nouvelles études. La sensibilité de la soustraction à un déplacement très réduit (de l'ordre du centimètre) est essentielle. Une personne que l'on considérait comme immobile n'est en réalité jamais statique, puisqu'elle se déplace toujours légèrement sous l'effet de sa respiration. On peut considérer que son déplacement est alors de l'ordre de 2 cm. Cette distance pourrait suffire à localiser la personne efficacement.

III.4 Invariants d'une cible mobile durant l'acquisition de la matrice **K**

Deux situations précédemment abordées dans ce manuscrit justifient l'étude du déplacement d'une cible pendant la durée d'acquisition de la matrice **K** : la détection au sein d'un missile en vol et la détection de personnes en mouvement derrière un mur. En effet, plusieurs valeurs singulières apparaissent lorsque la cible est mobile. Dans cette partie, nous considérons un mouvement rectiligne d'une cible ponctuelle. L'objectif consiste à exprimer les valeurs singulières et les vecteurs singuliers de **K** en fonction de la vitesse de déplacement.

Pour une cible ponctuelle non-stationnaire en acoustique sous-marine, Franck Philippe a déterminé durant sa thèse l'évolution des vecteurs propres en fonction de la variance du déplacement de la cible [79]. La possibilité de suivre la cible tout au long de l'acquisition a été démontrée. L'amplitude des vecteurs propres en réception y est comparée aux polynômes de Legendre.

Nous nous appuyons de plus sur les études des invariants dans le cas de cibles étendues fixes. Les résultats y sont en effet similaires. Aubry *et al.* ont étudié en acoustique les invariants d'un large cylindre rigide (immobile) [41]. Les auteurs ont montré que les polynômes de Hermite-Gauss forment une bonne approximation de l'amplitude des vecteurs propres lorsque le diamètre du cylindre est supérieur à la largeur de la tache focale. Dans le cas inverse, ils sont approximés par les polynômes de Legendre. Par la suite, Robert et Fink ont examiné les invariants pour des diffuseurs étendus, toujours en acoustique [78]. Les vecteurs propres sont exprimés comme des fonctions prolate sphéroïdales. Les polynômes précédemment déterminés par Aubry *et al.* constituent des limites asymptotiques de ces fonctions.

Nous abordons conjointement une partie théorique, une partie simulation réalisée sous Matlab© et enfin une partie expérimentale. Dans la partie théorique, l'expression de la matrice **K** est développée analytiquement. Ses valeurs singulières et ses vecteurs singuliers sont extraits pour le réseau en réception. Ils sont comparés avec les résultats expérimentaux et en simulation.

III.4.1 Cadre de l'étude

Nous nous limitons ici une situation à 2 dimensions (Figure III.33). La cible ponctuelle se déplace en face de deux réseaux distincts d'antennes Tx et Rx. Nous supposons, que pour une antenne Tx en émission, les signaux sont acquis simultanément sur toutes les antennes du réseau Rx. De ce fait, la position de la cible ne dépend plus que de l'indice de l'antenne en

émission j. Cette position est notée S^j dans l'étude. La cible se déplace de façon linéaire et rectiligne avec une vitesse v. Elle parcourt une distance L durant la durée totale de l'acquisition. Le déplacement entre deux acquisitions est noté δx ou δy en fonction de l'axe suivant lequel la cible se déplace. Nous considérons des cibles dont la vitesse est constante tout au long de l'acquisition.

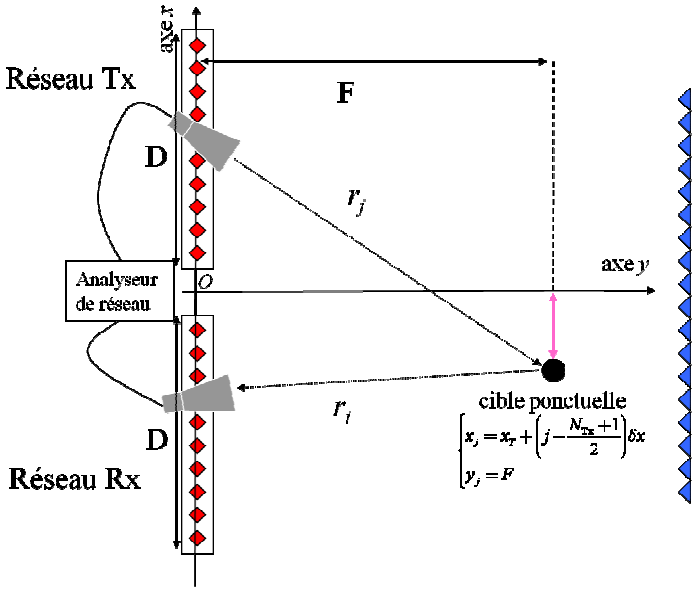


Figure III.33 : montage expérimental de l'étude. Le déplacement est illustré suivant l'axe *x*.

Les deux réseaux sont linéaires suivant l'axe Ox. L'origine du repère est fixée entre les deux réseaux. Nous construisons deux réseaux virtuels de onze éléments grâce à deux antennes cornet montées sur des rails afin d'obtenir un bon rapport signal/bruit et de dégager un maximum de valeurs singulières significatives (voir le paragraphe I.4.4). L'ouverture de chaque réseau est égale à 1,40 m et ils sont séparés de 42 cm. Différents pas δx ou δy sont étudiés par la suite.

III.4.2 Mouvement parallèle aux réseaux : déplacement suivant l'axe *x*

a) Développement analytique de la matrice **K**

Dans les calculs suivants, l'expression de la matrice des réponses inter-éléments **K** est développée pour exprimer ses vecteurs singuliers et valeurs singulières. L'indice ^{Tx} (respectivement ^{Rx}) correspond aux grandeurs associées au réseau en transmission (resp. en réception). Nous posons le nombre d'antennes en émission et en réception égaux : $N^{Tx} = N^{Rx} = N$. La distance δx est parcourue suivant l'axe x entre deux émissions successives.

Nous notons $S=\left(x_T,F\right)$ la position de la cible à la moitié du temps d'acquisition total de la matrice. Dans ces conditions, la position $S_j\left\{x_j,y_j\right\}$ de la cible au moment de l'émission par l'antenne *j* s'exprime par :

$$\begin{cases} x_j = x_T + \left(j-\dfrac{N+1}{2}\right)\delta x \\ y_j = F \end{cases} \tag{3.64}$$

La coordonnée x_0^{Tx} du réseau suivant l'axe *x* correspond à la position centrale du réseau en transmission et p_{Tx} à son pas entre deux éléments. La position de son antenne *j* devient :

$$x_j^{\mathrm{Tx}} = x_0^{\mathrm{Tx}} + (j-\frac{N+1}{2})p_{\mathrm{Tx}} \tag{3.65}$$

La même expression est obtenue pour le réseau en réception en remplaçant Tx par Rx. Pour une cible ponctuelle, un terme K_{ij} correspond à l'émission sur la $j^{\text{ème}}$ antenne du réseau Tx et à la réception sur la $i^{\text{ème}}$ antenne du réseau Rx, tel que :

$$K_{ij} = \frac{1}{16\pi^2\left|M_i^{\mathrm{Rx}}S^j\right|\left|M_j^{\mathrm{Tx}}S^j\right|}e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_i^{\mathrm{Rx}}S^j\right|+\left|M_j^{\mathrm{Tx}}S^j\right|\right)} \tag{3.66}$$

Par souci de simplicité, le coefficient de réflexion de la cible $R_0(\omega)$ est omis. Il peut en effet être mis en facteur de la matrice **K**. En considérant que l'ouverture des réseaux ainsi que le déplacement *L* sont faibles devant la distance *F*, le dénominateur est proche de *F*. Un vecteur singulier en réception de **K** est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{KK}^H$. Cette dernière est définie par :

$$\left(KK^H\right)_{ij} = \frac{1}{256\pi^4F^4}\sum_{m=1}^{N}e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_i^{\mathrm{Rx}}S^m\right|+\left|M_m^{\mathrm{Tx}}S^m\right|\right)}e^{-\mathrm{i}k\left(\left|M_j^{\mathrm{Rx}}S^m\right|+\left|M_m^{\mathrm{Tx}}S^m\right|\right)} \tag{3.67}$$

Soit :

$$\left(KK^H\right)_{ij} = \frac{1}{256\pi^4F^4}\sum_{m=1}^{N}e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_i^{\mathrm{Rx}}S^m\right|-\left|M_j^{\mathrm{Rx}}S^m\right|\right)} \tag{3.68}$$

Nous définissons la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ par $\tilde{K}_{ij} = \dfrac{1}{16\pi^2F^2}e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_i^{\mathrm{Rx}}S^j\right|\right)}$. Les deux opérateurs de retournement temporel en réception de ces matrices sont égaux : $\mathbf{KK}^H = \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^H$. Suivant l'annexe IV, la distance $\left|M_i^{\mathrm{Tx}}S^j\right|$ est approchée par :

$$\left|M_i^{\mathrm{Rx}} S^j\right| = r_i^{\mathrm{Rx}} - \left(i - \frac{N+1}{2}\right)\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\frac{p_{Rx}\delta x}{F} \tag{3.69}$$

Dans cette expression, r_j^{Rx} est définie comme la distance entre l'antenne j du réseau en réception et la position de la cible au milieu de l'acquisition (Figure III.33). L'approximation réalisée pour ce développement limité est $\lambda F >> L^2$. La matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ est ensuite définie par :

$$\tilde{Q}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 F^2} e^{-\mathrm{i}k\left(j-\frac{N+1}{2}\right)\left(i-\frac{N+1}{2}\right)\delta x \frac{p_{Rx}}{F}} \tag{3.70}$$

Suivant l'annexe IV, nous obtenons la relation $\left(KK^H\right)_{ij} = e^{ikr_i^{Rx}}\left(\tilde{Q}\tilde{Q}^H\right)_{ij} e^{-ikr_j^{Rx}}$. La décomposition en valeurs singulières de la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ s'écrit $\tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathbf{V}}_i^{Rx} \sigma_i \tilde{\mathbf{V}}_i^{Tx*}$. Les matrices $\tilde{\mathbf{Q}}$ et $\mathbf{K}$ possèdent les mêmes valeurs singulières. Un vecteur singulier en réception $\tilde{\mathbf{V}}_i^{Rx}$ de la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ dépend du vecteur singulier en réception $\mathbf{V}_i^{Rx}$ de $\mathbf{K}$ tel que $\left(\tilde{V}_i\right)_j = e^{\mathrm{i}kr_j^{\mathrm{Rx}}}\left(V_i\right)_j$. Le terme de phase $e^{\mathrm{i}kr_j^{\mathrm{Rx}}}$ correspond à la propagation entre l'antenne j et la position centrale de la cible. Nous cherchons maintenant les vecteurs singuliers en réception de $\tilde{\mathbf{Q}}$. Grâce à la largeur de la tache focale du réseau en réception $T_{foc} = \lambda F / D$, un élément de la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ s'exprime comme :

$$\tilde{Q}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 F^2} e^{-\mathrm{i}\left(j-\frac{N+1}{2}\right)\left(i-\frac{N+1}{2}\right)\frac{2\pi}{(N-1)^2}\frac{L}{T_{foc}}} \tag{3.71}$$

Cette matrice est symétrique. Deux cas de figure limites sont envisagés. Ils dépendent du ratio L/T_{foc} entre la taille totale de déplacement L et la largeur de la tache focale. Dans le cas où le déplacement de la cible est « bien résolu », L/T_{foc} >1 et dans le cas inverse, « mal résolu », L/T_{foc} <1.

b) Cas bien résolu : polynômes de Hermite-Gauss

Afin de calculer les vecteurs singuliers de $\tilde{\mathbf{Q}}$, nous examinons les propriétés de l'opérateur de la transformée de Fourier inverse, défini tel que:

$$S\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\frac{x}{\sigma}\right) e^{-\mathrm{i}\frac{Xx}{\sigma^2}} dx \tag{3.72}$$

Dans cette expression, les grandeurs X/σ et x/σ sont adimensionnées. Pour des signaux continus, les fonctions propres de cet opérateur sont les fonctions de Hermite-Gauss: $H_m(x/\sigma)e^{-x^2/2\sigma^2}$. La fonction $H_m(x/\sigma)$ correspond au polynôme de Hermite d'ordre *m*. Pour *m*=0, nous retrouvons la propriété bien connue que la transformée de Fourier d'une gaussienne est elle-même une gaussienne.

Toutefois, les signaux ne sont ici pas continus mais échantillonnés par le réseau. En considérant l'opérateur de la transformée de Fourier discrète (DFT), pour des valeurs suffisamment élevés de *N*, ses fonctions propres sont obtenues simplement en échantillonnant les polynômes de Hermite-Gauss [80-82]. Ces derniers vérifient en effet :

$$(-1)^m g_m(l) \approx \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} g_m(n) e^{-\mathrm{i}T^2 ln}, \tag{3.73}$$

avec :

$$g_m(n) = H_m(nT) e^{-\frac{(nT)^2}{2}} \tag{3.74}$$

Le paramètre *T* fixe la largeur des polynômes de Hermite-Gauss. De plus, lorsque *N* tend vers l'infini, les valeurs singulières de la DFT sont constantes. Elles sont égales à $T/\sqrt{2\pi}$. Cette formule s'applique à la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$, lorsque le réseau d'antenne est suffisamment large et suffisamment bien échantillonné : $(-1)^m \mathbf{g}_m = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \tilde{\mathbf{Q}} \mathbf{g}_m$. Les vecteurs singuliers en réception sont donc les polynômes de Hermite-Gauss. Seul un terme de phase du au facteur $(-1)^m$ apparaît. La matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ est symétrique et un vecteur singulier $\mathbf{V}_\mathrm{m}$ doit vérifier la relation $\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{V}_m = \sigma_m \mathbf{V}_m^*$. Par conséquent, ceci mène à $\mathbf{V}_m = e^{i\pi/4}\mathbf{g}_m$.

Par identification, la largeur des polynômes est donnée par :

$$T = \frac{1}{N-1}\sqrt{\frac{L}{T_{foc}}} \tag{3.75}$$

La valeur absolue des vecteurs singuliers fournit, par comparaison avec les polynômes de Hermite, un accès direct à la vitesse parallèle de la cible. Elle est contenue dans la distance parcourue *L* pendant la durée de l'acquisition.

Les expressions déterminées sont ensuite comparées aux valeurs expérimentales mesurées. Le déplacement total de la cible durant l'acquisition est en premier lieu égal à *L* = 40 cm. La

cible est placée à 1,30 m des réseaux. La distance *L* correspond à trois fois la taille de la tache focale latérale associée au réseau en réception. Six valeurs singulières se détachent du bruit. Les valeurs absolues des vecteurs singulières en réception $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_n^{Rx}$ sont tracées sur la Figure III.34 et comparées avec les vecteurs singuliers de la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ analytiquement développée ainsi qu'aux polynômes de Hermite-Gauss. Un bon accord existe entre expérience et théorie.

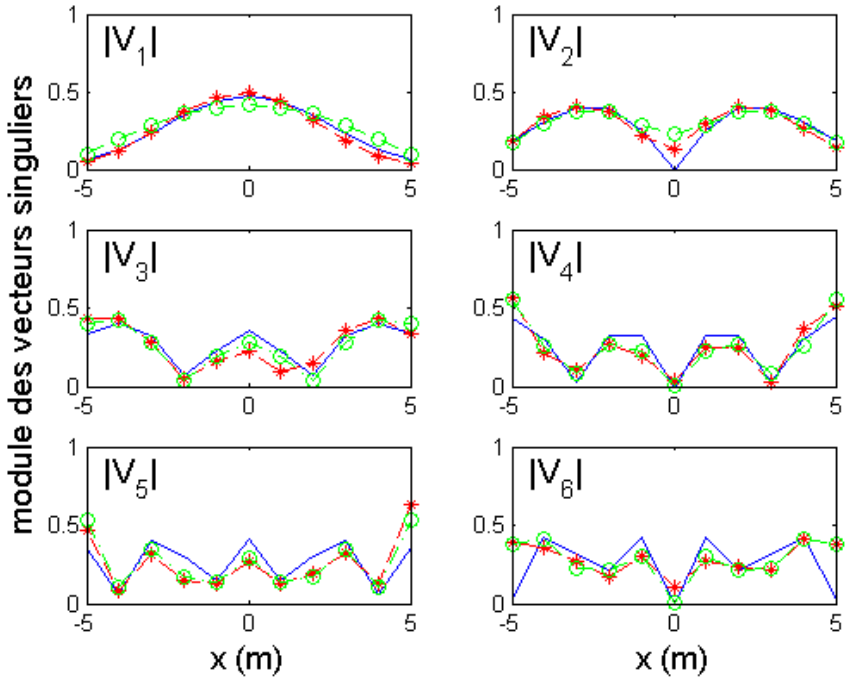


Figure III.34: Les six premiers vecteurs singuliers V*n* à la fréquence de 3 GHz sont tracés pour une distance totale de déplacement de la cible *L*=40 cm, expérimentalement (* en rouge), en simulation (o en vert). Les polynômes de Hermite Gauss sont aussi représentés (bleu, trait plein).

Toutefois, un décalage apparaît sur les bords du réseau à partir de la 4e valeur singulière. Celui-ci provient de la taille finie du réseau et de l'orthogonalité entre les vecteurs singuliers. Cette dernière est forcée par la décomposition en valeurs singulières. Quant à eux, les polynômes d'Hermite Gauss sont orthogonaux seulement pour des tailles infinies de réseau. La fonction $g_m(t)$ peut être approchée par la fonction $t^m e^{-t^2/2}$ pour de grandes valeurs de *t*. Ainsi, plus le degré du polynôme est important, plus sa décroissance est lente sur les bords du réseau. Les polynômes de Hermite-Gauss projetés sur le réseau sont ainsi d'autant moins orthogonaux que *m* est grand. La différence entre les vecteurs singuliers expérimentaux et les polynômes augmente avec l'indice.

Pour des réseaux infiniment grands, les vecteurs singuliers sont parfaitement égaux aux polynômes d'Hermite Gauss. Les valeurs singulières associées sont alors toutes constantes, comme celles de l'opérateur de la DFT pour *N* infini. Le cas de réseaux finis diffère. Pour de grandes valeurs de *m*, la différence entre les vecteurs singuliers et les polynômes s'accroît du fait de l'orthogonalité forcée par la *svd*. Deux régimes existent. Les valeurs singulières forment tout d'abord un plateau de valeurs constantes tant que l'orthogonalité des polynômes de Hermite-Gauss est respectée, puis décroissent exponentiellement (voir Figure III.35). Cette considération est identique à l'étude de cibles étendues[41].

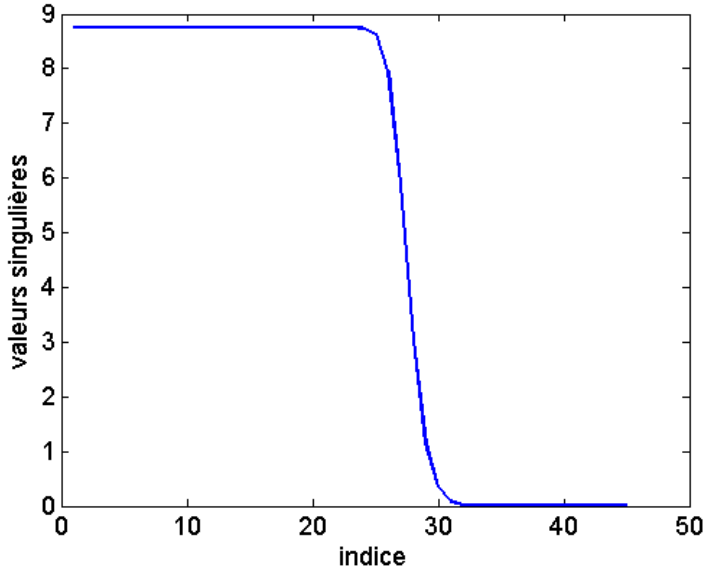


Figure III.35: Valeurs singulières en simulation pour *L*=0,86 m. La dimension du réseau atteint 8,5 m et le nombre d'antennes *N*=45 à la fréquence de 3 GHz.

Nous cherchons maintenant l'indice correspondant à la fin de ce plateau, i.e. le début de la décroissance exponentielle. Cet indice est lié à la largeur des polynômes de Hermite-Gauss. La largeur du polynôme est définie comme étant la taille du faisceau d'illumination associée au polynôme. La décroissance exponentielle débute à partir du moment où le faisceau est plus large que le réseau. Les quatre premiers polynômes de Hermite-Gauss et leur largeur sont présentés sur la Figure III.36. Selon Carter [83], la largeur du $m^{\text{ème}}$ polynôme de Hermite-Gauss $g_m(x) = H_m\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$ dépend du paramètre σ_x tel que :

$$W = 2\sigma_x, \tag{3.76}$$

Selon l'expression de *T* définie auparavant :

$$\sigma_x^{\ 2} = \frac{1}{4}\frac{T_{foc}p^2N^2}{L}(2m+1) \tag{3.77}$$

La décroissance exponentielle des valeurs singulières débute quand cette largeur est supérieure à la taille du réseau, c'est-à-dire:

$$W^2 > (Np)^2 \tag{3.78}$$

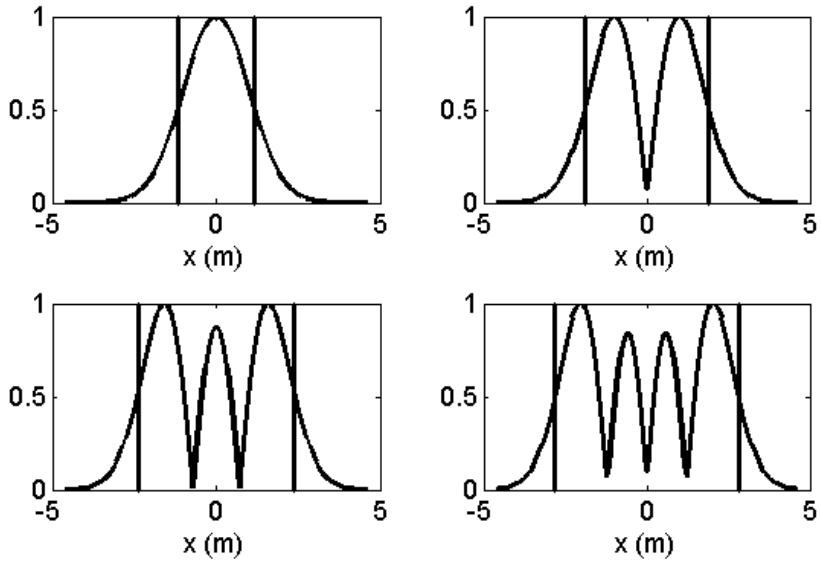


Figure III.36: largeur des quatre premiers polynômes d'Hermite Gauss.

L'indice décrivant le début de la décroissance s'écrit comme la partie entière du ratio déterminé :

$$m \approx E\left[\frac{L}{T_{foc}} - \frac{1}{2}\right] \tag{3.79}$$

Celui-ci est dépendant du nombre de taches focales contenues dans le déplacement total. Ce ratio est un paramètre prépondérant dans l'étude de la méthode DORT pour des objets étendus [41]. L'expression (3.79) est vérifiée numériquement sur la Figure III.37. Le premier ordre de décroissance exponentielle en simulation est en effet comparé avec le premier ordre à partir duquel le polynôme d'Hermite Gauss est plus large que le réseau. Un bon accord existe entre la théorie et la simulation.

Tant que la taille du faisceau associé au vecteur singulier est inférieure au déplacement total de la cible, la cible est dite "bien résolue" par le polynôme de Hermite-Gauss. Les valeurs singulières sont constantes. Pour des indices supérieurs, la cible n'est plus résolue par le

faisceau issu du polynôme de Hermite-Gauss et les valeurs singulières décroissent exponentiellement.

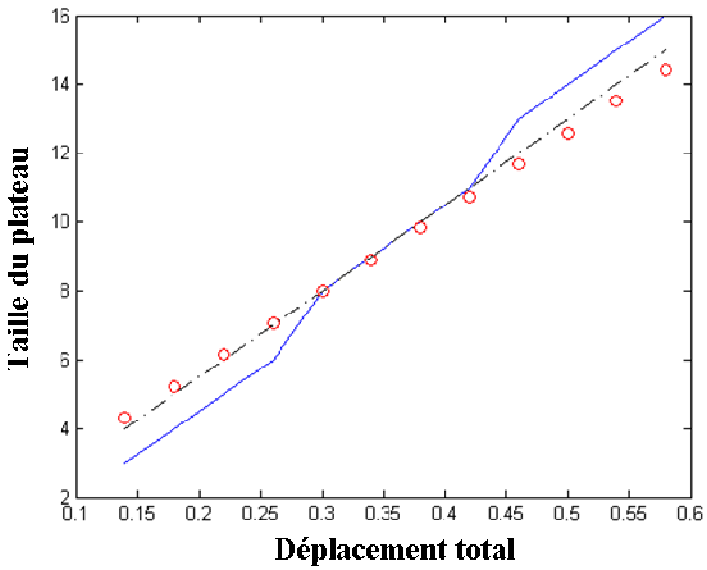


Figure III.37: Nombre d'indices formant le plateau de valeurs singulières en fonction de L. Le dernier ordre du plateau est trace en ligne bleue continue, le dernier ordre pour lequel la largeur du polynôme de Hermite Gauss est inférieure à la taille du réseau en pointillés et le résultat de l'équation (3.79) en cercles rouges.

Expérimentalement, cette évolution apparaît sur la Figure III.38 en comparant les valeurs singulières pour différentes longueurs de déplacement *L*. Sur la courbe correspondant à *L* = 40 cm, la décroissance légère des valeurs singulières à l'intérieur du plateau provient de la directivité des antennes.

L'influence de la directivité a été pointée dans le cas de cylindres étendus en acoustique par Aubry *et al.* [41]. Pour des déplacements inférieurs à une tache focale, le plateau de valeurs singulières disparaît. Les valeurs singulières décroissent toutes exponentiellement. L'approximation $L/T_{foc}>1$ réalisée pour obtenir l'équation (3.73) n'est en effet plus valable. Nous allons maintenant étudier le cas de cible "non résolues", c'est à dire que leur déplacement total est inférieur à la tache focale du réseau.

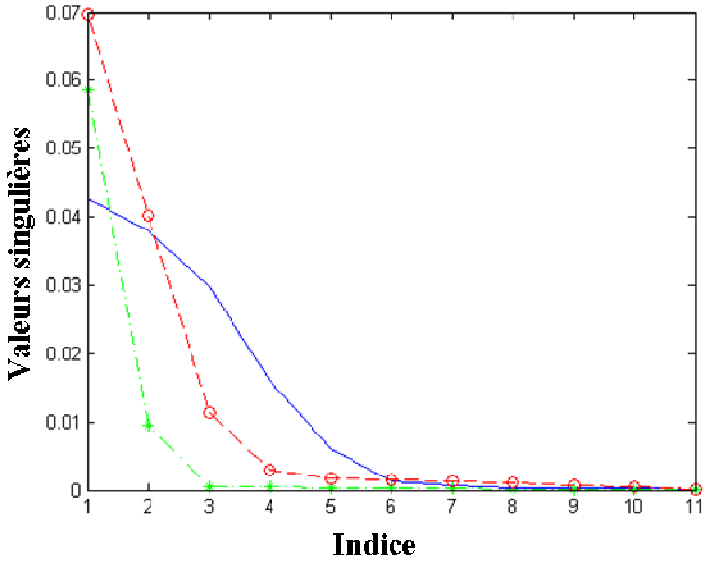


Figure III.38: Valeurs singulières expérimentales pour *L*=5 cm (* ligne pointillée verte), *L*=20 cm (o ligne pointillée rouge) et *L*=40 cm (ligne continue bleue).

c) Cas "non-résolu" : les polynômes de Legendre

Pour ce second cas limite, la cible reste durant tout le temps de l'acquisition dans la tache focale du réseau en réception. Aubry *et al.* ainsi que Franck Philippe durant sa thèse ont montré que le champ diffusé peut alors être développé suivant une série de Taylor [41, 79]. Les polynômes de Legendre sont une approximation des vecteurs singuliers d'autant meilleur que les coefficients de Taylor décroissent suffisamment vite. De façon concomitante, les valeurs singulières décroissent très rapidement.

Expérimentalement, du fait de cette décroissance rapide des valeurs singulières, nous n'avons pu obtenir que 3 valeurs au dessus du niveau de bruit (Figure III.39). La distance parcourue par la cible durant l'acquisition est L = 5 cm, alors que la tache focale est de l'ordre de 10 cm. Un bon accord ressort entre les trois premiers vecteurs singuliers et les polynômes de Legendre. A partir du quatrième, ils sont associés au bruit.

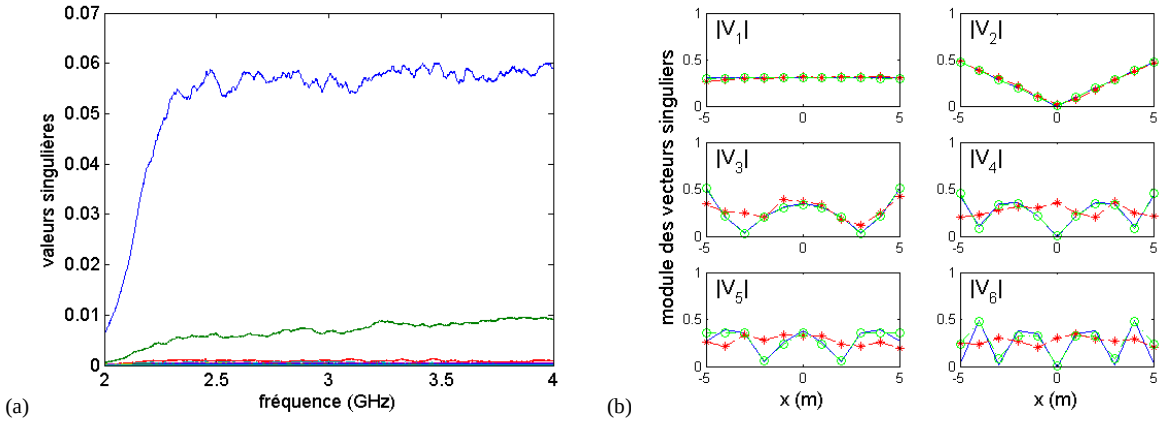


Figure III.39: (a) Valeurs singulières en fonction de la fréquence (b) Les 6 premiers vecteurs singuliers V_n à la fréquence de 3 GHz pour une distance totale de déplacement de la cible *L*=5 cm, expérimentalement (* en rouge), en simulation (o en vert). Les polynômes de Legendre sont représentés en bleu, trait plein.

d) Repropagation des vecteurs singuliers

La repropagation des vecteurs singuliers est réalisée ici de façon incohérente, c'est-à-dire en sommant la valeur absolue des contributions de chaque réseau en émission et réception. On constate sur la Figure III.40 que pour le premier vecteur singulier, le spot principal est situé au niveau de la position de la cible au milieu de l'acquisition. De plus, comme dans le cas des cibles étendues, le premier vecteur singulier focalise de façon monopolaire et le second de façon dipolaire.

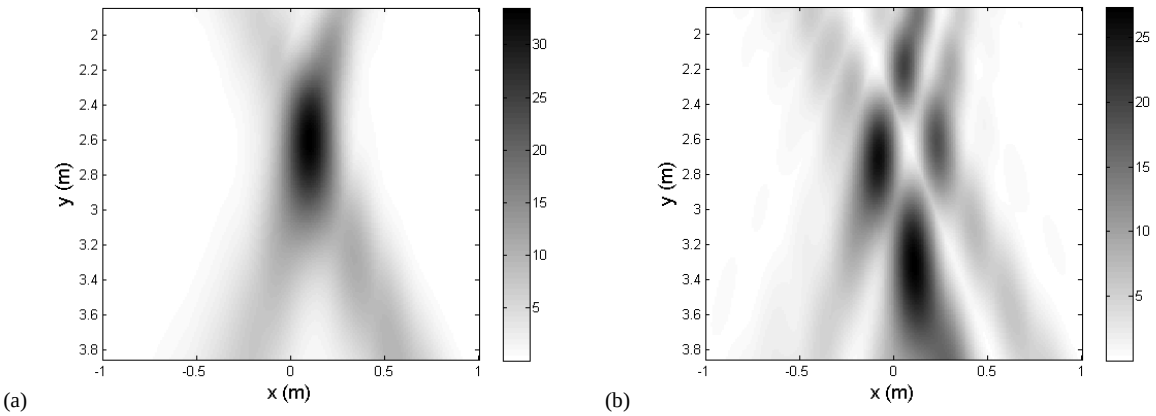


Figure III.40: Repropagation du premier (a) et du second (b) vecteur singulier pour un mouvement parallèle avec *L*=40 cm à 3,25 GHz

La repropagation numérique des vecteurs singuliers permet donc de retrouver la position moyenne de la cible, c'est-à-dire sa position au milieu de l'acquisition.

III.4.3 Mouvement perpendiculaire au réseau

La cible se déplace toujours dans un plan du réseau, mais maintenant suivant l'axe *y*, perpendiculaire à l'axe des réseaux. En reprenant les notations de la partie précédente, ses coordonnées sont exprimées par :

$$\begin{cases} x_j = 0 \\ y_j = \left(j - \dfrac{N+1}{2} \right) \delta y \end{cases} \tag{3.80}$$

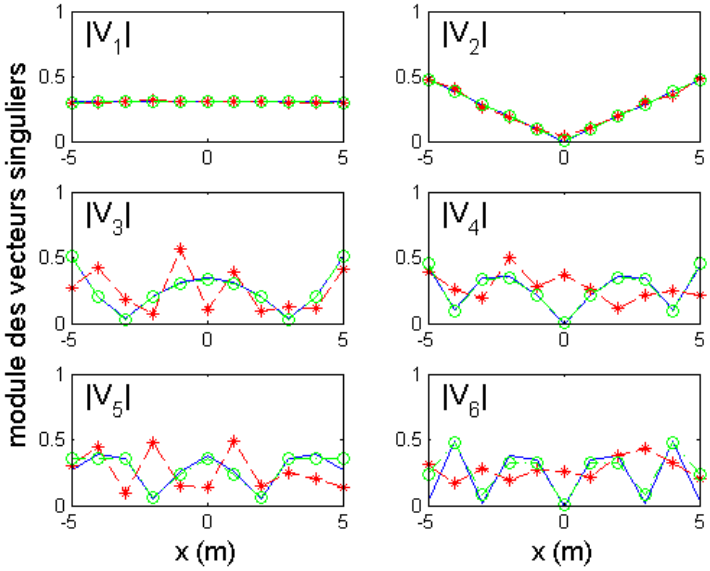


Figure III.41 : Les six premiers vecteurs singuliers V*n* à la fréquence de 3 GHz pour une distance totale de déplacement perpendiculaire de la cible *L*=20 cm, expérimentalement (* en rouge), simulés (o en vert). Les polynômes de Legendre sont représentés (bleu, trait plein).

Le détail du développement de **K** est présenté dans l'annexe V. Ils aboutissent à la construction de la matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ dont un élément est défini tel que :

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{-ik\frac{\delta y p}{F^2}\left(j-\frac{N+1}{2}\right)\left(i-\frac{N+1}{2}\right)\left(2x_0+\left(i-\frac{N+1}{2}\right)p\right)} \tag{3.81}$$

Aucune expression « simple » des vecteurs singuliers ne ressort de cette équation du fait d'un terme dépendant de $\left(i-\frac{N+1}{2}\right)^2$.

Néanmoins, en champ lointain, la taille de la tache focale en profondeur est beaucoup plus large que la taille de la tache focale latérale. Comme pour le cas du déplacement parallèle, le champ diffusé peut être développé suivant une série de Taylor. Naturellement, nous retrouvons la décroissance exponentielle des valeurs singulières en fonction de leur ordre. Les vecteurs singuliers correspondent aux polynômes de Legendre. Les résultats expérimentaux et numériques sont en bon accord avec ces polynômes (Figure III.41).

III.4.4 Discussion

En conclusion, plusieurs valeurs singulières sont induites par le déplacement d'une cible lors de l'acquisition de la matrice **K**. A l'image de l'étude des invariants pour une cible étendue, deux comportements limites se distinguent, un déplacement supérieur à la largeur de la tache focale et un déplacement inférieur à celle-ci. Nous avons pu confirmer cette considération en développant analytiquement les vecteurs singuliers et en les comparant avec les résultats expérimentaux. Leurs amplitudes sont exprimées soit en fonction des polynômes de Hermite-Gauss dans le cas « résolu », soit en fonction des polynômes de Legendre dans le cas contraire.

Cette étude est notamment importante pour étudier le cas d'une cible mobile derrière un mur. Elle sert à estimer le temps de commutation maximal entre deux couples d'antennes. En effet, dans le cas « résolu », les valeurs singulières induites par le déplacement sont proches de la première valeur singulière. L'interprétation est ainsi perturbée car elles peuvent être confondues avec le déplacement d'une seconde cible. Ainsi nous préférons nous placer dans la configuration générant une décroissance exponentielle des valeurs singulières. Le déplacement total de la personne ne doit ainsi pas dépasser la taille de la tache focale associée au réseau en réception. Lorsque la personne se déplace à la vitesse v, le temps de commutation δt doit vérifier $\delta t < \dfrac{\lambda F}{(N-1)vD}$.

ANNEXE IV

Nous réalisons une hypothèse de champ lointain. Celle-ci permet de simplifier le dénominateur de l'expression (3.66). Celui-ci ne dépend plus que de la distance focale *F*, i.e. :

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi F^2} e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_j^{\mathrm{Tx}} S^j\right| + \left|M_i^{\mathrm{Rx}} S^j\right|\right)} \tag{3.82}$$

La distance entre une antenne et la cible est égale à :

$$\left|M_i^{\mathrm{Tx}} S^j\right| = \sqrt{F^2 + \left(\left(x_i^{\mathrm{Tx}} - x_T\right) - \left(j - \frac{N+1}{2}\right)\delta x\right)^2}\ , \tag{3.83}$$

La distance totale parcourue par la cible durant l'acquisition s'écrit $L = \left(N^{Tx} - 1\right)\delta x$. Le déplacement élémentaire de la cible est suffisamment faible pour que $k\frac{L^2}{F} << 1$, soit $\lambda F >> L^2$. Sous cette hypothèse de champ lointain, un développement au premier ordre donne :

$$\left|M_i^{\mathrm{Tx}} S^j\right| = r_i^{\mathrm{Tx}} - \frac{\left(x_i^{\mathrm{Tx}} - x_T\right)}{r_i^{\mathrm{Tx}}}\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\delta x \tag{3.84}$$

De plus, nous avons $\left(x_i^{\mathrm{Tx}} - x_T\right) = \left(i - \frac{N+1}{2}\right)\delta x$. La matrice $\tilde{\mathbf{K}}$ est définie par $\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 F^2} e^{\mathrm{i}k\left(\left|M_i^{\mathrm{Rx}} S^j\right|\right)}$, soit:

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 F^2} e^{ikr_i^{Rx}} e^{-\mathrm{i}k\left(i - \frac{N+1}{2}\right)\left(j - \frac{N+1}{2}\right)p_{Rx}\delta x} \tag{3.85}$$

Nous avons obtenu que $\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{K}}^H = \mathbf{K}\mathbf{K}^H$. Nous définissons finalement la matrice $\tilde{\mathbf{Q}}$ en éliminant le déphasage $e^{ikr_i^{Rx}}$ entre les antennes et la position centrale de la cible :

$$\tilde{Q}_{ij} = \frac{1}{16\pi^2 F^2} e^{-\mathrm{i}k\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\left(i - \frac{N+1}{2}\right)\delta x \frac{p_{Rx}}{F}} \tag{3.86}$$

ANNEXE V

Dans le cas d'un déplacement perpendiculairement à l'axe du réseau, l'expression d'un élément de la matrice est toujours $K_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{ik\left(\left|M_j S^j\right| + \left|M_j S^j\right|\right)}$. La distance entre l'élément #*m* du réseau et la cible pour une émission avec l'antenne #*k* s'écrit:

$$\left|M_m S^k\right| = \sqrt{\left(F - \left(k - \frac{N+1}{2}\right)\delta y\right)^2 + x_m{}^2} \tag{3.87}$$

Et en faisant les mêmes approximations que précédemment:

$$\left|M_m S^k\right| = r_m + \frac{\left(k - \frac{N+1}{2}\right)\delta y F}{r_m} \tag{3.88}$$

On définit ensuite l'angle α_m par $\cos\left(\alpha_m\right) = F / r_m$, ce qui donne:

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{ik\left(r_i + r_j\right)} e^{ik\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\delta y\left(\cos\left(\alpha_j\right) + \cos\left(\alpha_i\right)\right)} \tag{3.89}$$

L'hypothèse de champ lointain permet ensuite un développement limite de l'angle α_m :

$$\cos\left(\alpha_m\right) \approx 1 - \frac{x_m{}^2}{F^2} \tag{3.90}$$

Nous parvenons alors à :

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{ik\left(r_i + r_j\right)} e^{2ik\left(j - \frac{N+1}{2}\right)dy} e^{-ik\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\delta y\left(\frac{x_j{}^2}{F^2} + \frac{x_i{}^2}{F^2}\right)} \tag{3.91}$$

En appliquant le même principe que pour le cas de la cible résolue avec un vecteur de déphasage $e^{-i\phi_i} = e^{-ikr_i}$, on cherche les vecteurs singuliers de la matrice **K** à partir de la matrice:

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{-ik\delta y\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\frac{\left(x_0 + \left(i - \frac{N+1}{2}\right)p\right)^2}{F^2}} \tag{3.92}$$

Et encore:

$$\tilde{K}_{ij} = \frac{1}{4\pi L^2} e^{-ik\frac{\delta y p}{F^2}\left(j - \frac{N+1}{2}\right)\left(i - \frac{N+1}{2}\right)\left(2x_0 + \left(i - \frac{N+1}{2}\right)p\right)} \tag{3.93}$$

IV. Imagerie passive par corrélations de bruit

Lors des études présentées dans le chapitre précédent, la détection et la localisation de cibles se fondaient sur l'utilisation d'antennes en émission et en réception. L'analyse des échos des cibles menait au dénombrement des diffuseurs présents ainsi qu'à leur localisation. Nous proposons, lors de ce chapitre, d'aborder la localisation passive de cibles. Elle s'affranchie *de facto* de l'émission de signaux. Seul un réseau récepteur est utilisé. La méthode consiste à « écouter » le bruit ambiant sur N antennes simultanément. La corrélation des signaux enregistrés permet de remonter à la réponse entre les antennes, comme si une des antennes en réception était remplacée par une antenne émettant une impulsion brève. Cette réponse est alors employée afin de localiser une cible passive.

Les travaux sur la corrélation de bruit est un sujet de recherche très actif [84-87]. Historiquement, cette méthode a été utilisée pour la première fois en héliosismologie [88]. La corrélation des fluctuations aléatoires de l'intensité lumineuse à la surface du soleil a permis de sonder le cœur du soleil par l'intermédiaire d'ondes sismiques. Par la suite, Weaver *et al.* ont généralisé la méthode. Ils ont extrait la réponse impulsionnelle entre deux points dans un bloc d'aluminium à partir de l'enregistrement du bruit avec des ondes élastiques [89]. En sismologie, Campillo et Paul ont démontré que les signaux enregistrés par deux stations mènent à la réponse entre celles-ci [90]. On comprend l'intérêt des techniques de corrélation en sismologie puisque dans ce domaine il se révèle presque impossible d'utiliser des émissions contrôlées. Cette approche se révèle particulièrement pertinente en tomographie à l'échelle régionale [91, 92]. Pour finir, la technique a été appliquée en acoustique dans un guide d'onde sous-marin. La corrélation du bruit a permis de mettre en évidence l'onde balistique ainsi que les réflexions au niveau du fond marin et de la surface de l'eau [93, 94].

Ce domaine de la recherche a fait l'objet de nombreux travaux théoriques pour différents types d'onde [85, 95-97]. En électromagnétisme, Slob et Wapenaar ont démontré la relation entre la corrélation et la partie imaginaire de la fonction de Green à partir des équations de Maxwell [98].

Dans ce manuscrit, nous présentons, à notre connaissance, la première expérience de « corrélation du bruit » en micro-ondes. Son application à l'imagerie permet de former un dispositif totalement passif de détection et de localisation de cibles. Ce chapitre s'articule

autour de trois axes. Dans la première partie, nous rappelons les principaux résultats théoriques sur la technique de corrélation de bruit lorsque les sources sont isotropes. En particulier, nous interprétons ceux-ci à l'aide du retournement temporel. Des résultats expérimentaux en micro-ondes sont exposés et comparés aux développements théoriques. Dans une seconde partie, nous montrons que la fonction de Green permet de détecter et de localiser des cibles grâce à un réseau d'antennes réceptrices. Nous validons expérimentalement la technique avec la localisation d'une plaque métallique.

Enfin, lors de la dernière partie, la localisation passive de personnes est abordée grâce à la corrélation des signaux émis par une borne WIFI. Cette section diffère des corrélations de bruit précédentes car une seule source de bruit de faible bande passante est prise en compte (le routeur WIFI) et le bruit n'est plus isotrope. Les diffuseurs se comportent comme des sources secondaires.

IV.1 Fonction de Green et corrélations

Une forte analogie existe entre les corrélations de bruit et le principe du retournement temporel. Elle a été développée pour la première fois par Derode *et al.* [99, 100]. Nous considérons dans un premier temps deux antennes réceptrices *A* et *B*, entourées par un grand nombre de sources de bruit. Ces sources sont repérées par la lettre *C* par la suite. Elles forment une surface *S* fermée, suffisamment bien échantillonnée, qui entoure le volume *V* dans lequel se trouvent les deux antennes réceptrices. Le signal enregistré au niveau de l'antenne *A* provient de la somme des contributions de chaque point source, c'est-à-dire :

$$s(t) = \sum_C G_{AC}(t) \otimes n_C(t) \tag{4.1}$$

Dans cette expression, $G_{AC}(t)$ désigne la fonction de Green temporelle entre une source de bruit *C* et l'antenne *A*, alors que $n_C(t)$ est la forme du signal de bruit émis par *C*. La corrélation entre les signaux enregistrés sur les antennes *A* et *B* s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} C_{AB}(t) &= \left(\sum_C G_{AC}(t) \otimes n_C(t) \right) \otimes \left(\sum_C G_{BC}(-t) \otimes n_C(-t) \right) \\ &= \sum_C G_{AC}(t) \otimes G_{BC}(-t) \otimes n_C(t) \otimes n_C(-t) + \sum_C \sum_{C' \neq C} G_{AC}(t) \otimes G_{BC'}(-t) \otimes n_C(t) \otimes n_{C'}(-t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Il a été démontré que lorsque la durée d'observation est suffisamment longue, $C_{AB}(t) \approx \langle C_{AB}(t) \rangle$, où < > représente l'espérance mathématique de la variable C_{AB}(t) [100]. En

d'autres termes, la variable C_{AB}(t) est ergodique. Les sources sont supposées décorrélées les unes des autres, i.e. :

$$< n_C(t) \otimes n_{C'}(-t) >= \delta_{CC'}.\left(n_C(t) \otimes n_C(-t)\right), \tag{4.3}$$

L'espérance mathématique des termes croisés de (4.2) s'annule. Ainsi l'espérance de la corrélation des deux signaux devient :

$$C_{AB}(t) = \sum_C G_{AC}(t) \otimes G_{BC}(-t) \otimes n_C(t) \otimes n_C(-t) \tag{4.4}$$

Cette équation peut être interprétée comme un processus de retournement temporel. Nous notons $e(t)$ l'autocorrélation des signaux émis par les sources de bruit (i.e. $e(t) = n_C(t) \otimes n_C(-t)$, avec $e(t)=e(-t)$). Une source émet au point B le signal $e(t)$. Le champ est mesuré sur la surface S formée par tous les points C et s'écrit par conséquent $G_{BC}(t) \otimes e(t)$. Ce signal est alors réémis en chronologie inverse par le réseau. La surface est l'équivalent du miroir à retournement temporel (MRT). Le champ acquis par l'antenne A s'exprime par :

$$C_{AB}(t) = \sum_C G_{CA}(t) \otimes G_{BC}(-t) \otimes e(-t) \tag{4.5}$$

La seule différence entre les équations (4.4) et (4.5) réside dans la permutation des indices entre G_{AC} et G_{CA}. Cependant, nous supposons le milieu comme réciproque et les deux fonctions de Green sont alors identiques. Il en va de même pour les équations (4.4) et (4.5).

Suivant les développements présentés lors du premier chapitre, le signal obtenu est la somme d'une onde convergente et d'une onde divergente au point B. Plus précisément, la dérivée du produit de corrélation mesuré au point A est égale à la différence des réponses causales et anti-causales entre les deux antennes, convoluées par $e(t)$ [97] :

$$\frac{dC_{AB}(t)}{dt} = G_{AB}(t) \otimes e(t) - G_{AB}(-t) \otimes e(t) \tag{4.6}$$

Une condition pour que $G_{AB}(t)$-$G_{AB}(-t)$ émerge est que les sources C soient distribuées de façon isotrope, de telle sorte à former un miroir à retournement temporel complet. Le raisonnement présenté est valable pour n'importe quel milieu (homogène, réverbérant, multiplement diffusant…), tant que la propagation est réversible et réciproque et qu'une approximation paraxiale au niveau des sources de bruit peut être réalisée.

Les parties causales et anti-causales dans (4.6) peuvent être interprétées à partir de l'emplacement des sources de bruit par rapport aux antennes. Sur la Figure IV.1 sont présentés deux cas de figure différents. Lorsqu'une source émet un front d'onde dans l'axe des deux antennes A et B mais provenant du côté de l'antenne A, la corrélation $C_{AB}(t)$ engendre l'onde causale. En effet, les deux antennes reçoivent le même signal mais avec un décalage $\tau > 0$ (où $\tau = |AB|/c$). La corrélation des signaux mesurés simultanément génère ainsi une impulsion avec un retard égal à τ. Inversement si le front d'onde provient de l'autre côté, la corrélation donne naissance à la partie anti-causale. L'impulsion est par conséquent décalée de $-\tau$.

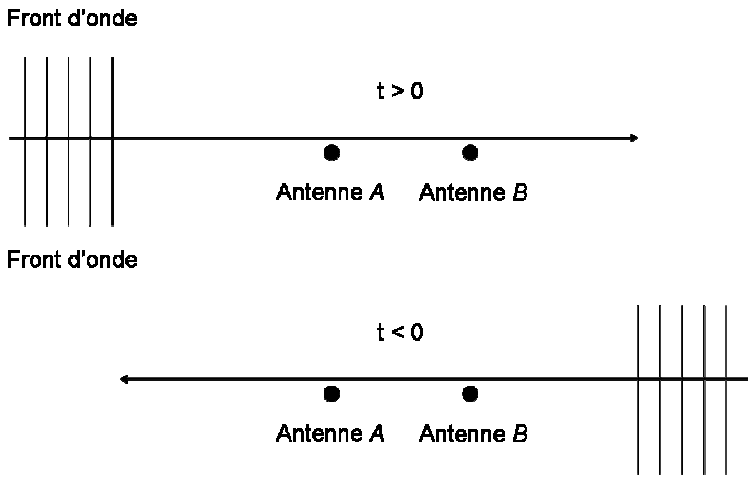


Figure IV.1: fronts d'onde donnant naissance aux ondes causales (haut) et anti-causales (bas).

Notre première expérience consiste à retrouver la fonction de Green balistique entre deux antennes. Deux antennes cornet large bande (entre 1 et 18 GHz) sont utilisés. Elles sont chacune reliées à l'oscilloscope par des amplificateurs faible bruit qui représentent un gain de 20 dB (LNA). Les amplificateurs possèdent une bande passante de 700 MHz, centrée sur 2,7 GHz. Le bruit ambiant est acquis à 20 GSample/s pendant 0,1 ms (2 millions de points) sur deux voies de l'oscilloscope (Figure IV.2).

La corrélation entre les deux signaux enregistrés est moyennée 100 fois. Ceci est équivalent à l'acquisition du signal durant 10 ms. Cependant, on n'observe pas clairement la réponse entre les deux antennes sur la Figure IV.2. Ceci s'explique à partir du spectre de puissance du bruit. Il présente des raies étroites dues au GSM, au WIFI, à l'oscilloscope, etc… (Figure IV.3(a)). Ces raies possèdent de faibles bandes passantes. La bande passante du WIFI est par exemple égale à 20 MHz. Ainsi, la corrélation directe des signaux génère une réponse très étalée dans le temps, qui ne permet ainsi pas de résoudre le temps de trajet entre les antennes.

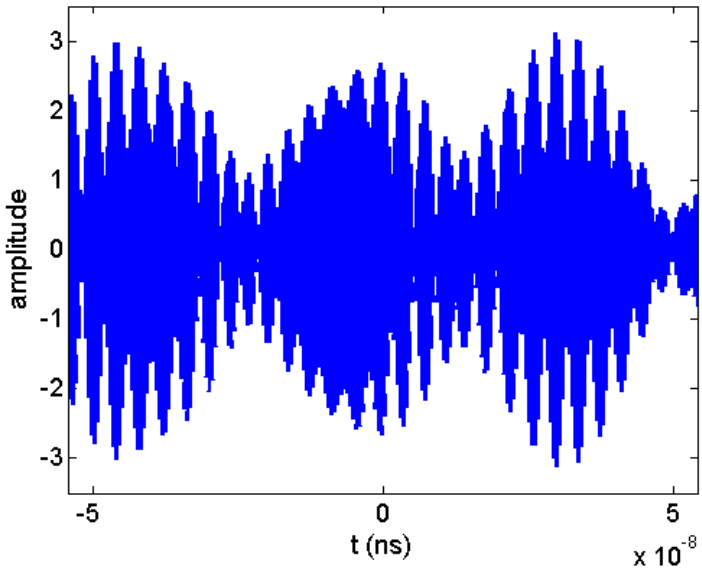


Figure IV.2: Corrélation directe de deux signaux mesurés simultanément sur deux antennes pendant 0,01 ms.

Pour s'affranchir de cette contrainte, nous appliquons un filtre fréquentiel. Il consiste à ne conserver que la phase des corrélations. La bande passante des amplificateurs faible bruit est prise en compte en multipliant ce nouveau spectre par une fonction gaussienne de fréquence centrale 2,7 GHz et de bande passante 2 GHz (Figure IV.3(b)). Cette méthode permet d'égaliser l'amplitude du bruit (modulo la gaussienne). Nous éliminons de plus toutes les fréquences dont l'amplitude est supérieure à un certain seuil (en rouge sur la Figure IV.3(a)). En effet, pour ces fréquences, le bruit provient d'une direction privilégiée, ce qui va à l'encontre de l'hypothèse d'isotropie des sources.

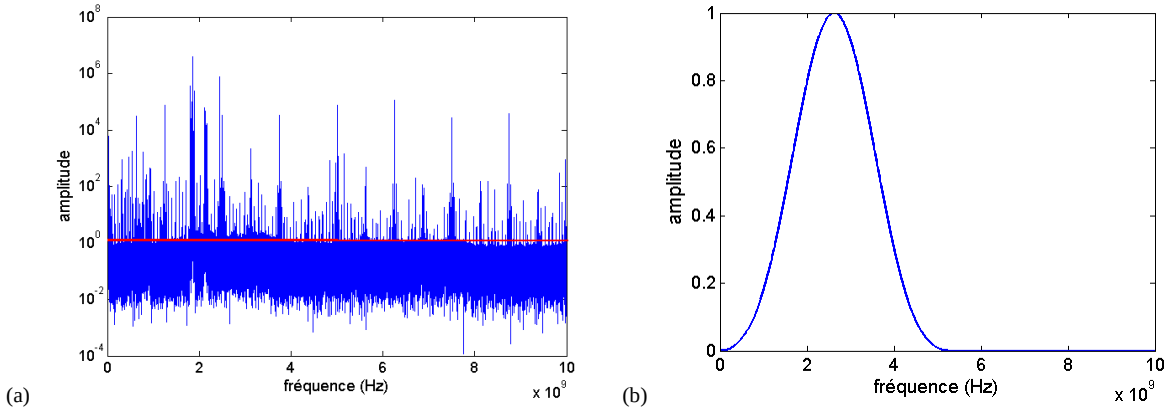


Figure IV.3: (a) spectre moyenné sur 100 acquisitions de la corrélation des signaux provenant des deux voies. (b) fonction gaussienne centrée sur 2,7 GHz de largeur de bande 2 GHz.

Lors de la première expérience, les antennes cornet sont placées face à face et éloignées de 0,01 m. Le signal temporel sur la Figure IV.4 présente les réponses impulsionnelles causales et anti-causales. Elles se situent respectivement à 12 et -12 ns. En effet, les antennes cornet se comportent comme des guides d'onde et le temps de trajet de l'onde dans le cornet est plus important qu'en espace libre. Il est aussi nécessaire de prendre en compte la longueur de câble entre l'oscilloscope et les antennes. La durée de l'impulsion mesurée est de 1,4 ns. Elle correspond à une bande-passante de 700 MHz, soit celle des amplificateurs.

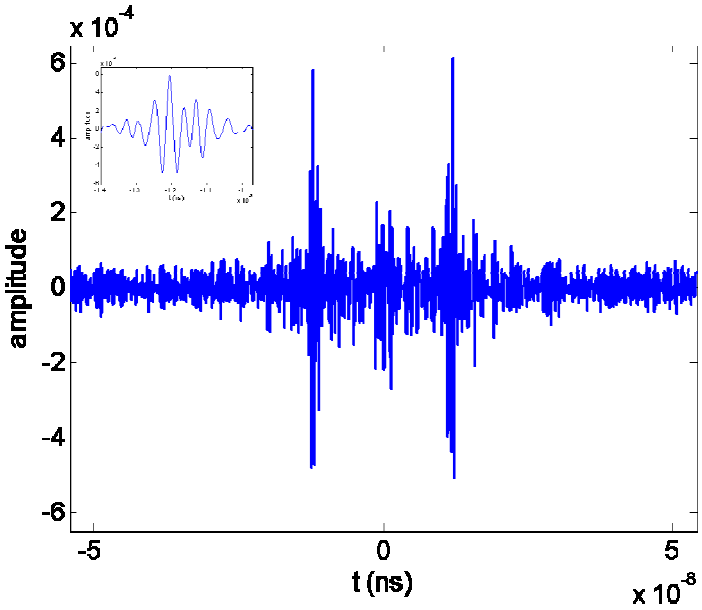


Figure IV.4: Signal pour des antennes écartées de 0,01 m. Dans le coin gauche en haut est représenté un agrandissement du signal à -12 ns.

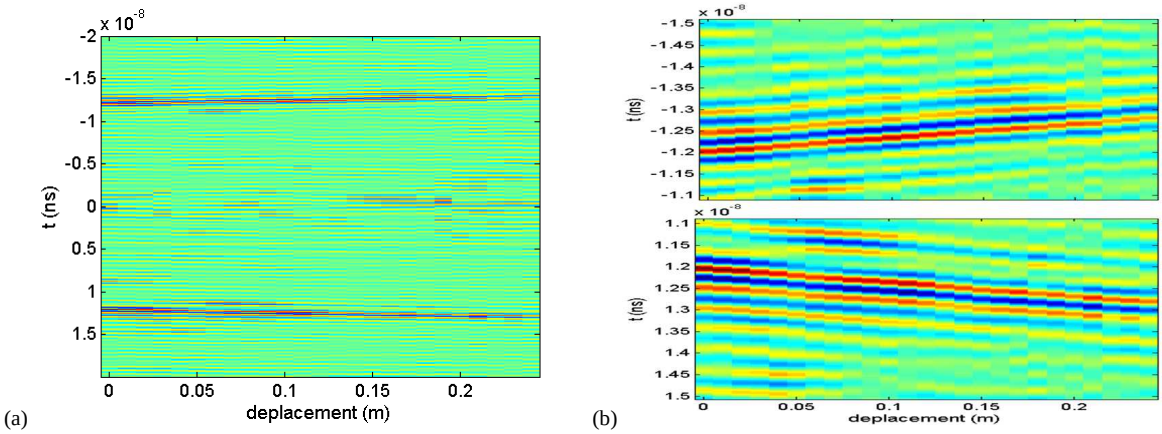


Figure IV.5: (a) Bscan de l'évolution de la corrélation des deux voies, moyennée sur 100 acquisitions. L'espacement maximal entre antennes est de 24 cm. (b) Agrandissement des parties causales et anti-causales.

Afin de s'assurer que l'impulsion correspond bien à la réponse entre antennes, nous les éloignons par pas successifs de 1 cm, sur 25 positions. Sur la Figure IV.5, le décalage en fonction de la distance des fronts d'onde associés aux fonctions de Green causales et anti-causales est retrouvé. L'évolution de l'impulsion correspond bien au déplacement de l'antenne. L'impulsion est décalée de 0,8 ns, soit 24 cm, lorsque les deux antennes sont elles-mêmes écartées de 24 cm par rapport à la position initiale.

La dérivée de la partie causale de la corrélation de bruit est ensuite comparée avec la réponse à un dirac entre la première antenne en émission et la seconde en réception sur la Figure IV.6. L'accord entre les deux signaux est très bon. Les lobes secondaires temporels sont légèrement plus élevés pour la réponse au dirac. Ce phénomène provient de la bande passante du générateur. En effet, lors d'une corrélation de bruit, seule la réponse impulsionnelle de l'ensemble antenne-amplificateur-oscilloscope intervient. La réponse impulsionnelle du générateur doit de plus être prise en compte lors de l'émission d'un dirac.

Nous pouvons noter qu'un signal parasite apparaît sur la dérivée de la corrélation à 1,1 ns, juste avant l'impulsion. Ce signal provient en fait du traitement du signal appliqué au spectre des corrélations : l'utilisation uniquement de la phase, mais aussi la suppression de certaines bandes de fréquences (celles de plus forte amplitude).

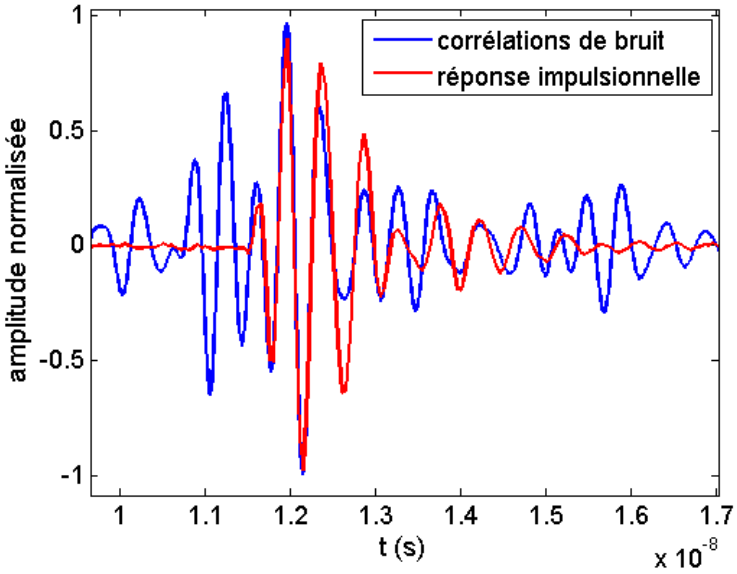


Figure IV.6: la dérivée du signal causal de la corrélation de bruit (bleu) est comparée avec la réponse impulsionnelle à un dirac émis avec le générateur. Les antennes cornet sont face à face et espacées de 1 cm.

Cette étude préalable a confirmé expérimentalement la possibilité en micro-ondes de retrouver la fonction de Green entre deux antennes grâce à l'acquisition de signaux provenant du bruit ambiant. Ce concept est appliqué lors de la partie suivante à la localisation d'objets en isolant le signal provenant de la réflexion sur celui-ci.

IV.2 Imagerie passive de diffuseurs

L'objectif de cette partie est de localiser un diffuseur à partir des corrélations de bruit. Dans un premier temps, le lien entre les corrélations et le théorème optique est réalisée en s'appuyant sur les principes du retournement temporel. La pertinence de cette approche est démontrée expérimentalement avec la localisation d'une plaque métallique.

IV.2.1 Lien avec le théorème optique

Nous développons l'expression du produit de corrélations des signaux en présence d'une cible. Le champ $\phi(\mathbf{r})$ est donné $\phi(\mathbf{r})=\phi^i(\mathbf{r})+\phi^S(\mathbf{r})$, où $\phi^i(\mathbf{r})$ est l'onde directe et $\phi^i(\mathbf{r})$ l'onde diffusée par la cible. Dans l'approximation de la diffusion simple, la fonction de Green entre une source en **r** et l'antenne en $\mathbf{r}_A$ est donnée par :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)=G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)+G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A) \tag{4.7}$$

Le terme $f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)$ représente l'amplitude diffusé par la cible, avec $\hat{\mathbf{r}}$ et $\hat{\mathbf{r}}_A$ les vecteurs unités décrivant les directions de l'onde incidente et de l'onde diffusée. Le bruit est supposé isotrope, c'est-à-dire que ses sources (aux points **r)** forment la surface fermée *S*. La moyenne du produit de corrélation s'écrit $C_{AB}=\oint_S \phi_A(\mathbf{r})\phi_B^*(\mathbf{r})e_r(\omega)dS=\oint_S G(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})G^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)e_r(\omega)dS$, où $e_r(\omega)$ représente le spectre de puissance des sources de bruit, i.e. $e_r(\omega)=|n_r(\omega)|^2$. Ce terme est omis par la suite dans les développements puisqu'il est réel. Dans le cas d'un diffuseur présent dans le milieu, C_{AB} s'écrit :

$$\begin{aligned}\oint_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS=&\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS\\&+\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)dS\\&+\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS\\&+\oint_S |G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|^2\,f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)\,f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)dS\end{aligned} \tag{4.8}$$

Quatre termes apparaissent dans le produit de corrélation. Nous nous attachons à déterminer et interpréter chaque terme. Nous nous plaçons en régime monochromatique. A partir des

développements présentés dans le paragraphe I.1.2, une opération de retournement temporelle s'écrit formellement :

$$\oint_S \left[G(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)\nabla_r G^*(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}) - G^*(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})\nabla_r G(\mathbf{r},\mathbf{r}_B) \right] d^2 r = -8\mathrm{i}\pi \Im\{G(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B)\} \tag{4.9}$$

La surface S est positionnée en champ lointain. Une approximation paraxiale est réalisée. Selon la condition de rayonnement de Sommerfeld, cette hypothèse se traduit pour le champ sortant par :

$$\nabla_r G(\mathbf{r},\mathbf{r}_B) \approx -\mathrm{i}kG(\mathbf{r},\mathbf{r}_B) \tag{4.10}$$

La condition de rayonnement de Sommerfeld pour le champ anti-causal est donné par le complexe conjugué de l'équation (4.10), i.e. $\nabla_r G^*(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}) \approx \mathrm{i}kG^*(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})$. Ainsi l'expression du champ après retournement temporel s'exprime par :

$$\oint_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS = -\frac{4\pi}{k}\Im\{G(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B)\} \tag{4.11}$$

De plus, la fonction de Green en espace libre G_0 est solution de l'équation de Helmoltz en milieu inhomogène, i.e. :

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r}) + k^2 G(\mathbf{r}_S,\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}_S - \mathbf{r}) \tag{4.12}$$

La fonction de Green en espace libre est maintenant donnée par $G_0(r) = \frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}$. Une expression similaire à (4.11) la concerne :

$$\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS = -\frac{4\pi}{k}\Im\{G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B)\} \tag{4.13}$$

Nous obtenons une première simplification de l'équation (4.8) *via* les équations (4.11) et (4.13) :

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{k}\Im\{G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0)\, f(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)\} &= G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)dS \\ &+ G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)dS \\ &+ G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)\oint_S \left|G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\right|^2 f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)dS \end{aligned} \tag{4.14}$$

L'intégrale $\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)dS$ peut aussi être interprétée comme un processus de retournement temporel. La diffusion de l'onde par l'objet placé $\mathbf{r}_0$ (sous le terme $G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)$) se comporte comme une source secondaire possédant un diagramme

de directivité égal à $f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)$. Ce diagramme de directivité virtuel est égal à l'amplitude de diffusion de l'objet pour une onde incidente suivant la direction $\hat{\mathbf{r}}_B$. Le signal issu de cette source secondaire est reçu sur la surface *S* (le miroir à retournement temporel). Le champ est ensuite réémis en chronologie inverse et reçu par une antenne isotrope au point $\mathbf{r}_A$. Selon l'annexe VI :

$$\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)\,dS = -\frac{4\pi}{k} f^*(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B)\Im\{G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)\} \tag{4.15}$$

La seconde intégrale est de même interprétée comme un nouveau processus de retournement temporel et devient : $\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\, f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)\,dS = -\frac{4\pi}{k} f(\hat{\mathbf{r}}_B,\hat{\mathbf{r}}_A)\Im\{G(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)\}$. Pour le calcul du dernier terme, nous supposons que les sources sont placées en champ lointain. De ce fait, le champ décroît en 1/r, soit $|G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|^2 = 1/r^2$. La troisième intégrale du membre de droite s'exprime ainsi par : $\oint_S |G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)|^2 f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)\,dS = \oint_S f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)\,d\Omega$. Dans cette expression, Ω représente l'angle solide. Après identification des termes, l'équation (4.14) s'écrit :

$$G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)\left\{-\frac{2\pi}{\mathrm{ik}}\left[f(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B) - f^*(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B)\right] + \oint_S f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)\,d\Omega\right\} = 0 \tag{4.16}$$

Nous retrouvons alors l'expression du théorème optique généralisé, i.e. :

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left[f(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B) - f^*(\hat{\mathbf{r}}_A,\hat{\mathbf{r}}_B)\right] = \frac{k}{4\pi}\oint_S f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)\,d\Omega \tag{4.17}$$

La définition de la section efficace de diffusion σ_e de l'objet et l'expression du théorème optique sont un cas particulier de l'expression (4.17). Ils sont obtenus en posant $\hat{\mathbf{r}}_A = \hat{\mathbf{r}}_B = \hat{\mathbf{r}}_0$:

$$\sigma_e = \oint_S \left| f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_0)\right|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k}\Im\{f(\hat{\mathbf{r}}_0,\hat{\mathbf{r}}_0)\} \tag{4.18}$$

La section efficace de diffusion d'un objet est le rapport entre la puissance électromagnétique diffusée et l'énergie incidente. Ce lien entre l'imagerie à partir des corrélations de bruit et le théorème optique généralisée a été souligné par Snieder *et al.* [101, 102]. L'originalité de cette partie est d'avoir interprété la diffusion par l'objet comme la présence d'une source secondaire directive. Cette source secondaire est utilisée au sein d'un processus de retournement temporel.

Néanmoins, lorsque la surface des sources de bruit n'entoure pas complètement le volume (i.e. ne décrit pas un angle solide de 4π stéradians), Snieder *et al.* ont montré que des échos résiduels proviennent de termes croisés entre G_0 et G_D [101]. En d'autres termes, lorsque l'hypothèse d'isotropie de la distribution des sources de bruit n'est pas vérifiée, le théorème optique généralisé n'est plus valable. Ainsi certains résidus dépendants de $G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)$ dans l'équation (4.14) ne s'annulent plus. Ils peuvent conduire à une mauvaise interprétation des signaux qui en résultent. Ces contributions supplémentaires sont comprises entre les ondes balistiques causales et anti-causales.

IV.2.2 Résultats expérimentaux

Nous avons vu que pour du bruit isotrope, toute l'information est contenue dans la partie réelle des corrélations de bruit[6]. Seule cette partie réelle est par conséquent prise en compte lors de la transformée de Fourier inverse. Les signaux temporels sont dès lors symétriques par construction. Nous avons constaté une bonne amélioration du ratio signal à bruit grâce à cette méthode, notamment pour le front d'onde anti-causal (augmentation de 57% du ratio).

Figure IV.7: Photographie de la configuration expérimentale. L'antenne supérieure est automatisée en translation grâce à un moteur trois axes.

Afin de procéder à la détection d'une plaque recouverte d'aluminium, un réseau synthétique est formé en déplaçant une des deux antennes. Le pas entre chaque position est égal à 0,06 m. La seconde antenne est pour sa part fixe. Elle est placée au dessus du réseau synthétique.

[6] La corrélation des signaux est : $\oint_S G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_B)\,dS = -\frac{4\pi}{k}\Im\{G(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_B)\}$

Cette configuration permet de centrer cette antenne par rapport au réseau « virtuel ». Une plaque recouverte d'aluminium est disposée face aux antennes (voir Figure IV.7).

Un signal est de nouveau acquis pendant 0,1 ms avec un échantillonnage de 20 GSample/s. Le produit de corrélation entre les deux signaux est moyenné 400 fois. Les deux impulsions causales et anti-causales associées à la diffusion par la plaque se détachent sur la Figure IV.8 à +/- 17 ns. Du fait de la directivité des antennes, l'amplitude de l'onde balistique est très inférieure à l'onde réfléchie par la plaque. Elle n'apparaît ainsi pas sur la Figure IV.8 car elle est dominée par le bruit.

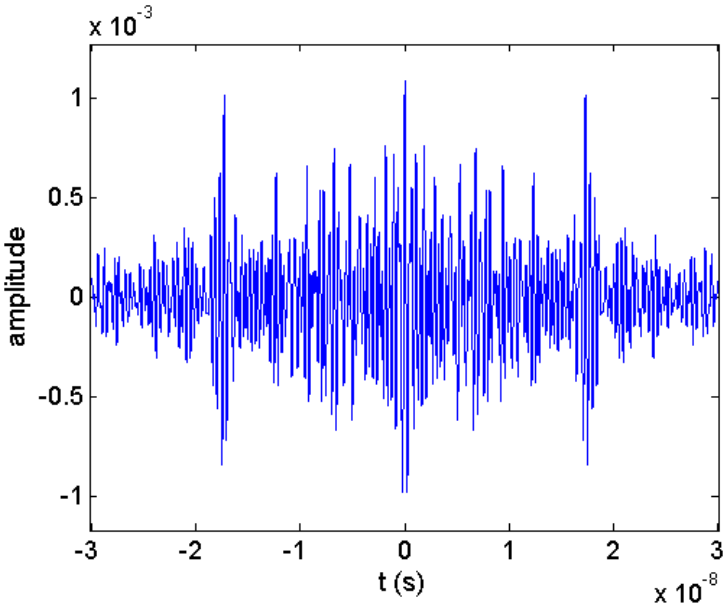


Figure IV.8: (a) B-Scan des corrélations temporelles expérimentales pour la détection de la plaque et (b) signal sur la voie 5 à la position x=-0,03 m.

Le front d'onde associé à la partie causale du signal est illustré pour une plaque placée à deux positions différentes sur les Figure IV.9(a) et Figure IV.9(b).

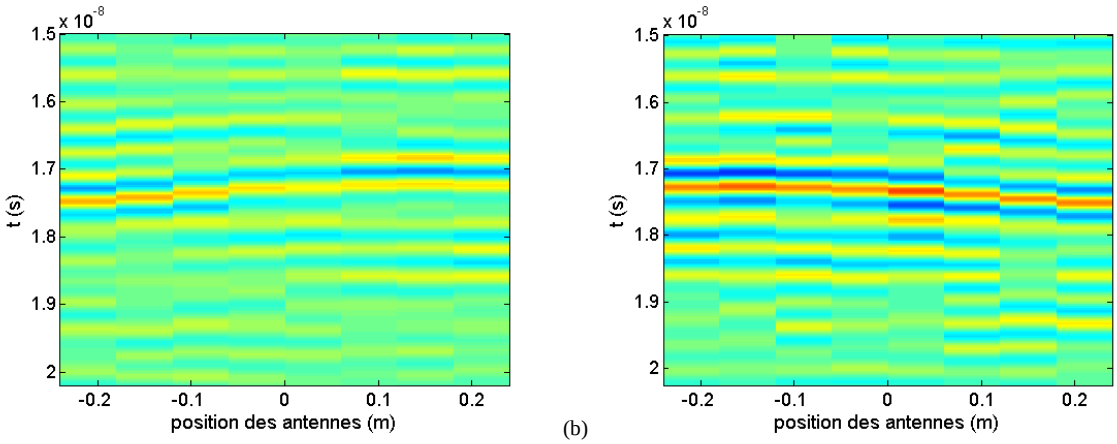


Figure IV.9: Agrandissement du front d'onde causal (t > 0) pour deux positions de la plaque différentes. La plaque est située en (a) *x*=0,2 m et *y*=0,75 m et (b) *x*=-0,2 m et *y*=0,75 m.

La plaque est située à une distance de 0,75 m du réseau et décalée de 20 cm à droite et à gauche respectivement. Une méthode de formation de voie permet de localiser la position de la plaque en utilisant cette partie causale (t > 0).Le temps de trajet de l'onde à l'intérieur de l'antenne cornet est pris en compte. Cette durée est déterminée par corrélation de bruit en collant les deux antennes face à face. L'impulsion parvient à la seconde antenne après un temps de propagation de 12 ns. Il correspond à l'axe *y*=0 m sur la Figure IV.10.

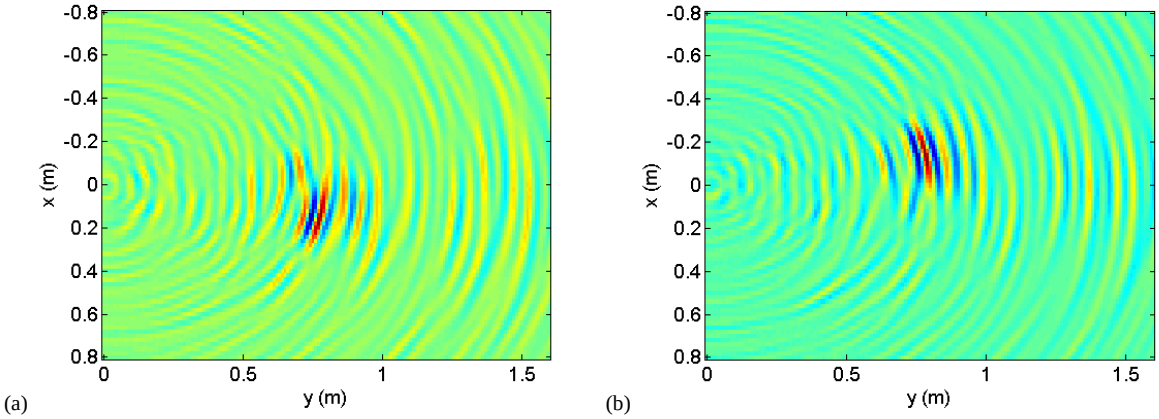


Figure IV.10: Localisation de la plaque par formation de voie. La position de la plaque est estimée à *x*=0,17 m et *y*=0,77 m (a) puis *x*=-0,17 m et *y*=0,77 m (b). L'origine de l'axe *y* est placée au niveau de la face avant des antennes.

La localisation de la plaque est efficace dans le domaine temporel sur la Figure IV.10. Les deux cartes de champ font apparaître une impulsion au niveau de sa position. La résolution axiale est fixée par la durée de l'impulsion obtenue après corrélations de bruit (1,4 ns, soit ~40 cm).

IV.2.3 Temps de convergence

L'application visée par ce type de dispositif est l'imagerie passive de personnes. L'intensité du signal rétrodiffusé est plus faible que dans le cas de la plaque métallique. Il est nécessaire d'enregistrer les signaux de bruit sur une durée plus importante. Avec notre dispositif actuel, une détection en temps réel n'est pour l'instant pas envisageable.

Par conséquent, il est intéressant d'étudier le temps de convergence des corrélations. La vitesse de convergence dépend du degré de corrélation du bruit. Sur la Figure IV.11, le rapport signal sur bruit est tracé en fonction de la durée totale d'acquisition des signaux. Deux

antennes cornet sont placées face à face à une distance de 40 cm. Le rapport signal sur bruit est défini comme l'amplitude de l'onde balistique sur la variance du bruit.

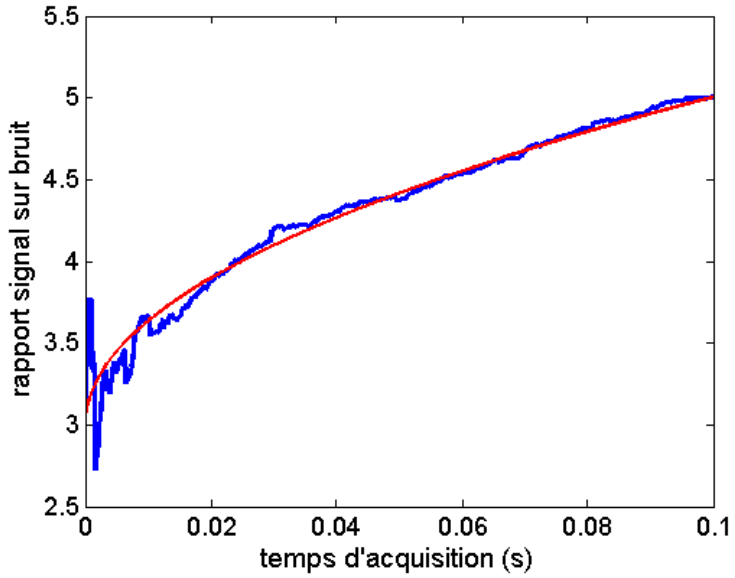


Figure IV.11: Rapport signal sur bruit en dB en fonction de la durée d'acquisition des signaux. Les résultats expérimentaux en bleu sont comparés à une évolution en fonction de la racine carrée du temps d'acquisition en rouge.

Le rapport signal sur bruit des corrélations évolue selon la racine carrée du temps d'acquisition. Ce point a été souligné auparavant par Snieder *et al.* [95], Sabra *et al.* [103] ou encore Larose *et al.* [104]. Il nous permet d'évaluer le nombre d'acquisitions nécessaires à la détection d'une personne. Expérimentalement nous avons mesuré, à une distance de 1 m des antennes émettrice et réceptrice, un ratio d'amplitude de 3,2 entre le signal rétrodiffusé par la plaque et le signal rétrodiffusé par une personne. Une durée totale de 40 ms était suffisante afin de localiser efficacement la plaque. Nous pouvons ainsi estimer dans nos conditions que la durée nécessaire pour une personne est de l'ordre de 320 ms. Cette durée est compatible avec une imagerie en temps réel du déplacement de la personne. Nous n'avons toutefois pas réalisé expérimentalement la détection d'une personne dans ces travaux, car le temps maximum d'acquisition de l'oscilloscope est de seulement 100 µs.

Durant cette partie, nous avons exploité un spectre de faible amplitude mais de large bande passante. Les raies fines de forte intensité (voir Figure IV.3) qui correspondent à la téléphonie mobile (GSM) ou au WIFI notamment, sont éliminées. Cette méthode nous permet de garantir l'isotropie des sources de bruit et d'atténuer la contribution des signaux de bande étroite et de

forte amplitude. Dans la partie suivante, nous exploitons au contraire la raie spectrale du WIFI afin de permettre une localisation en temps réel de personnes. La source de bruit considérée ne provient plus que d'un seul point de l'espace (le routeur WIFI), mais possède une forte puissance. Toujours grâce à la corrélation des signaux reçus sur un réseau d'antennes réceptrices, nous abordons une localisation de cible quasi-monochromatique grâce à cette source.

IV.3 Imagerie fréquentielle

IV.3.1 Approche théorique

Une seconde méthode de localisation de cibles à partir du bruit est exposée dans cette section. Précédemment, nous retrouvions la partie imaginaire de la fonction de Green en tirant profit notamment de l'isotropie des sources de bruit. La quasi-totalité du spectre des corrélations de bruit était pris en compte afin de générer les signaux temporels. Maintenant, seule la raie de forte intensité due à la présence d'un routeur WIFI est considérée. Elle est exploitée afin de localiser une personne. L'interprétation n'est plus réalisée en fonction de la partie imaginaire des fonctions de Green, car le bruit provient d'une seule direction de l'espace. La corrélation des signaux diffusés par une personne dans la bande passante du WIFI permet de remonter à sa position. La méthode présentée ici est directement reliée aux techniques de détection et de localisation de sources actives à l'aide de la matrice de covariance [105, 106]. Cette dernière est fréquemment utilisée en radar ou en sonar « passifs ». Le lien entre ces deux méthodes est réalisé lors de la discussion finale de ce chapitre.

Comme la bande passante des signaux émis par le WIFI est très faible (de l'ordre de 20 MHz), la cohérence temporelle des signaux est longue. La résolution axiale des cibles ne peut donc pas être abordée temporellement. Une approche fréquentielle est mise en œuvre. Elle consiste à exploiter l'évolution de la phase des corrélations sur un réseau d'antennes.

Les cibles se comportent comme des sources secondaires vis-à-vis du routeur WIFI. Les signaux provenant de la diffusion de l'onde générée par le WIFI sont corrélés sur deux antennes réceptrices. Expérimentalement, un réseau « virtuel » est formé par le déplacement d'une des deux antennes. Une seule source de bruit est présente dans le milieu, il n'y a donc pas à décorréler les différentes sources de bruit (termes croisés dans l'équation (4.2)). Il suffit par conséquent d'acquérir les signaux sur une durée égale à l'inverse de la bande passante des signaux du WIFI.

Nous notons $n(\omega)$ le signal émis par une source placée en $\mathbf{r}$ (le routeur) à la fréquence angulaire ω. Aucune information sur ce signal n'est nécessaire pour la détection de la cible. Le signal reçu par l'antenne A s'exprime comme :

$$h_A(\omega) = G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)\, n(\omega) \tag{4.19}$$

La fonction de Green monochromatique $G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)$ prend en compte l'onde balistique $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)$, ainsi que les réflexions sur les cibles aux positions $\mathbf{r}_i$. Sous l'hypothèse de diffusion simple, elle s'exprime comme :

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}_A) = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A) + \sum_i G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\, f_i(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, G_0(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_A) \tag{4.20}$$

L'objectif de l'étude consiste à détecter l'emplacement des diffuseurs présents dans le milieu et non pas la position du routeur WIFI. Ainsi, seule la composante diffusée de l'onde par la cible sert à sa localisation. Nous nous affranchissons expérimentalement de l'écho direct en plaçant un panneau absorbant (Figure IV.12) entre le routeur et les antennes. Sa position ne réduit pas l'amplitude de l'écho de la cible. La faible largeur de la bande passante exclut de filtrer temporellement cette composante.

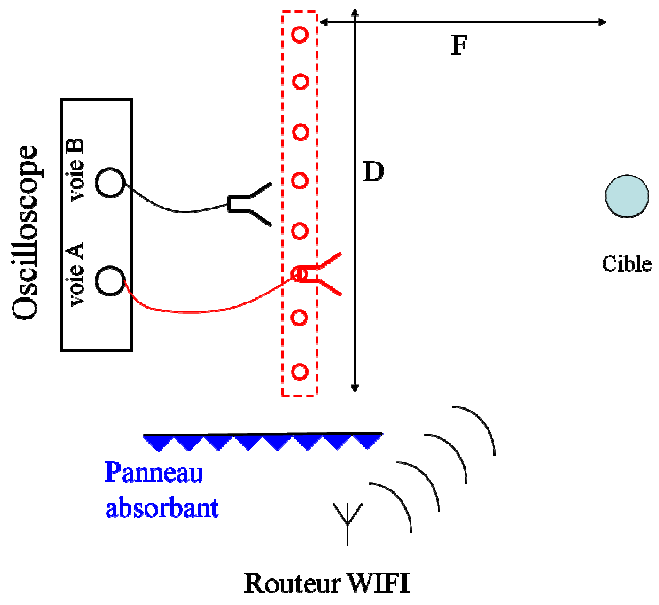


Figure IV.12: Montage expérimental.

La corrélation entre les signaux enregistrés sur les antennes A et B devient :

$$C_{AB} = \left(\sum_i G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\, f_i(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A) G_0(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_A) \right) \left(\sum_i G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_i)\, f_i(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B) G_0^*(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_B) \right) |n|^2 \qquad (4.21)$$

La dépendance à la fréquence angulaire ω est omise par la suite, de même que le terme $|n|^2$ mis en facteur dans cette expression. L'équation (4.21) peut être développée sous la forme :

$$\begin{aligned} C_{AB} = & \sum_i \left| G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_i) \right|^2 f_i(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f_i^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B) G_0^*(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_B) G_0(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_A) \\ & + \sum_{j \neq i} G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_i) G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_j)\, f_i(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f_j^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B) G_0^*(\mathbf{r}_j,\mathbf{r}_B) G_0(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_A) \end{aligned} \qquad (4.22)$$

Afin de vérifier que cette corrélation mène à la localisation de l'objet, nous examinons en premier lieu le cas d'une unique cible placée en $\mathbf{r}_1$. La somme croisée (second terme) de l'expression précédente est inexistante. Ainsi, la phase de la corrélation des deux signaux dépend uniquement de la fonction de Green entre l'antenne A et la cible ($G_0(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_A)$) et du conjugué de la fonction de Green entre l'antenne B et la cible ($G_0^*(\mathbf{r}_i,\mathbf{r}_B)$) : $C_{AB} = \left| G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) \right|^2 f_1(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_A)\, f_1^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B) G_0^*(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_B) G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_A)$.

L'antenne B placée en $\mathbf{r}_B$ est fixe, alors qu'un réseau est formé à partir du déplacement de l'antenne A. Soit $\mathbf{R}$ le vecteur contenant les N positions $\mathbf{r}_A$ des antennes du réseau. Ainsi, nous construisons un vecteur $\mathbf{C}(\mathbf{R})$ de N éléments formé par les produits de corrélation C_{AB} pour chaque position du point A. Par l'intermédiaire d'un produit scalaire, ce vecteur est comparé avec le vecteur des fonctions de Green en espace libre $\mathbf{G}_0(\mathbf{R},\mathbf{r}_m)$ entre le point $\mathbf{r}_m$ et le réseau de N éléments:

$$I(\mathbf{r}_m) = \left| \left\langle \mathbf{C}(\mathbf{R}) \middle| \mathbf{G}_0(\mathbf{R},\mathbf{r}_m) \right\rangle \right|^2 \qquad (4.23)$$

i.e. :

$$I(\mathbf{r}_m) = \left| G(\mathbf{r},\mathbf{r}_1) \right|^4 \left| G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_B) \right|^2 \left| \sum_A G_0(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_A) G_0^*(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_m) \right|^2 \qquad (4.24)$$

Cette formule justifie bien l'apparition d'un point focal lorsque $\mathbf{r}_m$=$\mathbf{r}_1$. La taille de la tache focale associée est dictée par l'ouverture du réseau.

Nous devons par la suite nous assurer de retrouver la bonne position des points focaux pour plusieurs diffuseurs. Nous développons l'expression (4.22) pour deux diffuseurs isotropes et identiques, placés en $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$. Ceux-ci sont considérés comme résolus par rapport au réseau,

c'est-à-dire séparés d'au moins une tache focale. Quatre termes forment la corrélation entre les deux signaux :

$$\begin{aligned} C_{AB} = {} & G_0\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_A\right)\left(\left|G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_1\right)\right|^2 G_0^*\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_B\right)+G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_1\right)G_0^*\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_2\right)G_0^*\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_B\right)\right) \\ & +G_0\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_A\right)\left(\left|G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_2\right)\right|^2 G_0^*\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_B\right)+G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_1\right)G_0^*\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_2\right)G_0^*\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_B\right)\right) \end{aligned} \tag{4.25}$$

Pour évaluer la contribution du second diffuseur, le point $\mathbf{r}_m$, au niveau duquel l'image est calculée est proche de $\mathbf{r}_1$. Puisque les deux diffuseurs sont bien résolus, l'influence du second terme de cette équation sur l'intensité de l'image en $\mathbf{r}_m$ est considérée comme nulle :

$$\sum_A G_0\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_A\right)G_0^*\left(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_m\right)\approx 0 \tag{4.26}$$

Ainsi, l'intensité de l'image, lorsque $\mathbf{r}_m \sim \mathbf{r}_1$ est estimée à :

$$\begin{aligned} I\left(\mathbf{r}_m\right) = {} & \left|\sum_A G_0\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_A\right)G_0^*\left(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_m\right)\right|^2 \text{ x} \\ & \left|\left|G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_1\right)\right|^2 G_0^*\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_B\right)+G_0\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_1\right)G_0^*\left(\mathbf{r},\mathbf{r}_2\right)G_0^*\left(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_B\right)\right|^2 \end{aligned} \tag{4.27}$$

L'influence de la présence de la seconde cible apparaît ici. Suivant sa position, le second terme peut s'avérer constructif ou destructif et décaler légèrement le point focal de l'image. Ceci peut conduire à une mauvaise interprétation. Néanmoins, lorsque l'émetteur WIFI et l'antenne réceptrice *B* sont placés en champ lointain des cibles, son influence se réduit considérablement. Le point focal correspond alors bien à la position du diffuseur.

IV.3.2 Résultats expérimentaux

Les résultats suivants proviennent d'un montage similaire à l'imagerie temporelle par corrélations de bruit. La cible consiste en une personne humaine. Une antenne réceptrice est fixe (placée en x=0 m). La seconde est placée sur un rail afin de former un réseau linéaire de huit antennes. Le pas entre deux positions égale 6 cm. L'ouverture du réseau est par conséquent D=42 cm. Les antennes sont de nouveau reliées à l'oscilloscope par l'intermédiaire d'amplificateurs faible bruit. Des panneaux anéchoïques sont situés entre le routeur et les antennes afin de diminuer fortement l'amplitude de l'onde associée au chemin balistique entre l'émetteur WIFI et les antennes cornet. Ainsi, le signal mesuré provient principalement de la réflexion sur le corps de la personne.

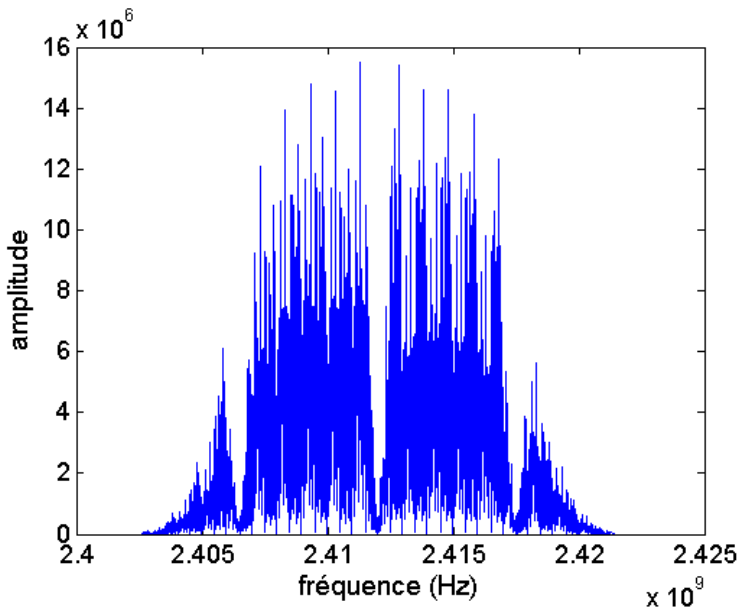


Figure IV.13: Spectre fréquentiel des corrélations dans la bande passante du WIFI.

Les corrélations sont moyennées sur dix acquisitions pour obtenir un bon rapport signal/bruit. Le spectre d'un produit de corrélation dans la bande du WIFI est représenté sur la Figure IV.13. Sa bande passante est de 20 MHz et s'étale entre 2,4 et 2,42 GHz. Le routeur utilise la norme IEEE 802.11n. La bande passante est divisée en différents canaux. Le signal temporel sur la Figure IV.14 provient de la transformée de Fourier inverse de ce spectre.

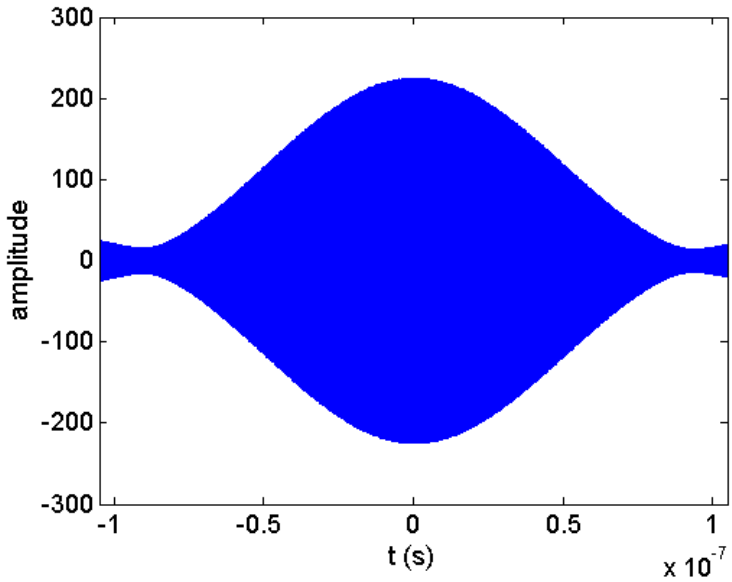


Figure IV.14: Signal temporel issu des corrélations dans la bande passante du WIFI. Le signal est étalé sur une période de 100 ns.

La durée du signal est de l'ordre 100 ns. Cela correspond à une bande passante de l'ordre de 10 MHz. Du fait de la division de la bande en canaux, le signal est plus long que pour une bande passante de 20 MHz totalement utilisée.

Lors de la première réalisation expérimentale, la personne est placée en face du réseau, à une distance F de 45 cm. Sur la Figure IV.15 est tracée la phase de la corrélation des signaux. Puisque les corrélations ne fournissent aucune information temporelle, seule l'évolution de la phase sur le réseau est prise en compte.

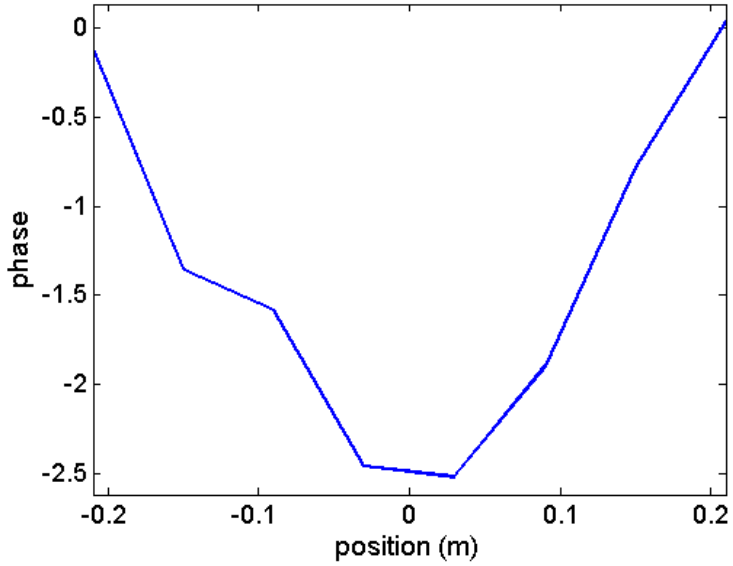


Figure IV.15: Loi de phase associée à la corrélation de bruit sur le réseau en fonction de la position des antennes, à la fréquence *f*=2,409 GHz. La personne est placée en *x*=0 m, *y*=0,5 m.

La comparaison de cette phase avec la phase de la fonction de Green en espace libre (équation(4.23)) permet de former l'image illustrée sur la Figure IV.16. Le point focal correspond bien à la position de la personne pendant l'acquisition. La résolution axiale est nettement inférieure à la résolution latérale. La taille de la tache focale latérale de 13 cm correspond bien à la formule de la diffraction : $\delta = \lambda F / D$, avec λ=12,5 cm à 2,4 GHz.

Afin de valider la méthode, l'acquisition a été réalisée par la suite pour trois positions différentes de la personne. Sa distance au réseau est de 50 cm. Chaque position est séparée de 30 cm latéralement. L'amplitude normalisée de $I(\mathbf{r}_m)$ est tracée sur la Figure IV.17 en fonction de l'abscisse x. Les positions des maxima permettent bien de retrouver le déplacement de la personne.

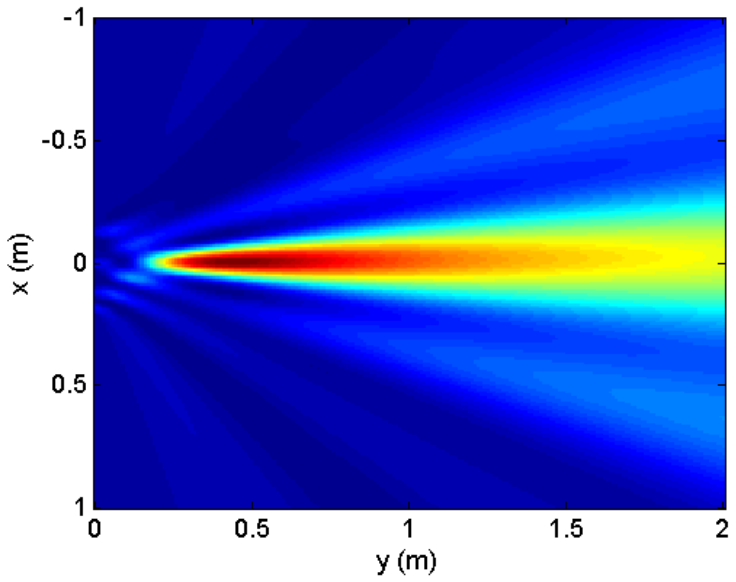


Figure IV.16: Image formée à partir de la comparaison des corrélations des deux signaux sur un réseau avec la fonction de Green en espace libre. La personne était placée face au centre du réseau (*x*=0 m) à une distance de 50 cm du réseau.

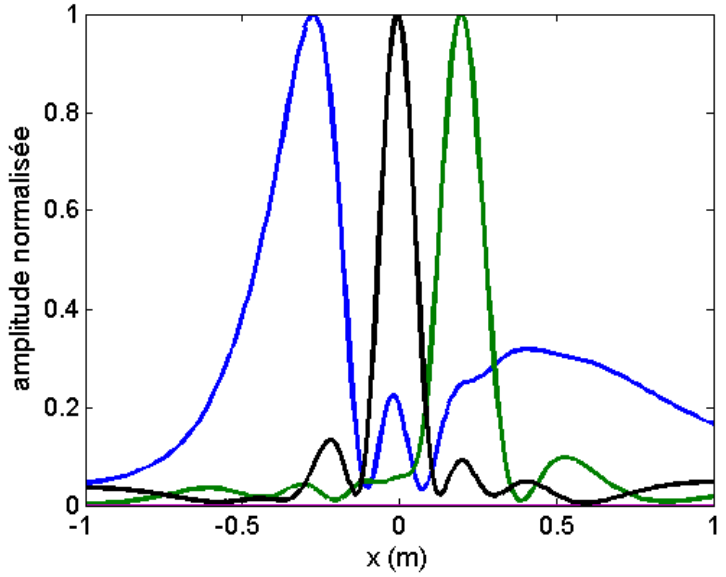


Figure IV.17: Amplitude normalisée de l'image pour trois positions différentes en fonction de l'abscisse *x*. La personne est placée à une distance *F*=50 cm du réseau et en *x*=30 cm (courbe verte), *x*=0 cm (courbe noire) et *x*=-30 cm (courbe bleue).

IV.4 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, la première expérience de corrélations de bruit en micro-ondes a été réalisée. Des résultats probants ont été obtenus concernant l'imagerie de cibles. Une plaque de

métal a pu être localisée tant temporellement que spatialement à partir des corrélations de bruit sur un très large spectre. La prochaine étape consiste à détecter une personne. La difficulté consiste à augmenter le temps d'acquisition des signaux. Avec notre oscilloscope, chaque signal est enregistré durant 100 µs à un taux d'échantillonnage de 20 GSample/s. De plus, une durée de 1 s est nécessaire à la sauvegarde des signaux sur les deux voies. Une acquisition de 400 ms demande 4000 corrélations, soit plus d'une heure ! Une imagerie de personnes en temps réel nécessite par conséquent l'acquisition d'un oscilloscope plus puissant, pouvant idéalement réaliser directement les corrélations instantanément.

Plusieurs solutions existent afin de diminuer également la durée totale de signal nécessaire à un bon rapport signal sur bruit. L'amplitude des corrélations dépend fortement de la bande passante du système, similairement à un processus de retournement temporel. Celle des amplificateurs faible bruit (LNA) est relativement faible (700 MHz). De nouveaux LNA peuvent atteindre 7,5 GHz de bande entre 0,5 et 8 GHz. De plus, des antennes cornet plus directives peuvent aussi être employées lorsque la personne est recherchée dans une certaine direction.

Concernant l'imagerie de cibles à partir d'une raie (WIFI, GSM, DECT…), un dispositif pourrait être aisément réalisé et utilisable dans tout endroit dans lequel un routeur est actif. Dans notre étude, l'onde balistique entre le routeur et le réseau a été supprimée grâce à l'ajout d'un panneau anéchoïque. Il est bien évidemment peu probable que l'on se trouve dans une telle configuration « sur le terrain ». Lorsque la position de l'émetteur est inconnue, un montage tel quel se révèle bien entendu inefficace. Néanmoins, similairement à la détection à travers les murs, l'onde balistique peut être fortement réduite en soustrayant les signaux mesurés à deux instants distincts. Seuls les échos de personnes mobiles subsisteront.

Si l'on considère deux réseaux d'antennes, notre cas de figure est similaire à la construction de la matrice de covariance. Les diffuseurs forment un ensemble de sources secondaires. Toutefois, une seule source active de bruit est utilisée : le routeur WIFI. Cela permet de s'affranchir du passage à la moyenne, mais en contre partie on ne peut séparer les contributions provenant de chaque diffuseur.

ANNEXE VI

Nous cherchons ici à calculer l'intégrale $\oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)G_0^*(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f^*(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)dS = \oint_S G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_A)\phi_B^{S*}(\mathbf{r})dS$. Elle peut aussi être interprétée comme un processus de retournement temporel. La diffusion de l'onde par l'objet placé $\mathbf{r}_0$ (égale à $G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)$) se comporte comme une source secondaire en $\mathbf{r}_0$ possédant un diagramme de directivité égal à $f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B)$. Ce diagramme de directivité virtuel est égal à l'amplitude de diffusion de l'objet pour une onde incidente suivant la direction $\hat{\mathbf{r}}_B$. Le signal issu de cette source secondaire est reçu sur la surface S (le miroir à retournement temporel). Le champ est ensuite réémis en chronologie inverse et reçu par une antenne isotrope au point $\mathbf{r}_A$.

Le champ total $\phi_B(\mathbf{r})$ s'écrit comme la somme du champ incident et du champ diffusé : $\phi_B(\mathbf{r}) = \phi_B^i(\mathbf{r}) + \phi_B^S(\mathbf{r})$. Ce champ obéit en régime monochromatique à l'équation de Helmholtz, c'est-à-dire :

$$\nabla^2\phi_B(\mathbf{r}) + k^2\phi_B(\mathbf{r}) = \delta k^2\phi_B(\mathbf{r}) - 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_B) \tag{4.28}$$

Suivant ces notations et la théorie de la diffraction, le champ diffusé peut d'écrire tel que :

$$\phi_B^S(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}_0)\,f(\hat{\mathbf{r}},\hat{\mathbf{r}}_B)G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_B) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \delta c_0{}^2\phi_B(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')d^3r' \tag{4.29}$$

On peut ainsi déduire que l'onde diffusée $\phi_B^S(\mathbf{r})$ obéit à :

$$\nabla^2\phi_B^S(\mathbf{r}) + k^2\phi_B^S(\mathbf{r}) = \delta k^2\left(\phi_B(\mathbf{r})\right) \tag{4.30}$$

L'équation de Helmholtz est ensuite écrite pour la fonction de Green $\mathbf{G}_0$ en espace libre pour un point source en $\mathbf{r}_A$:

$$\nabla^2 G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}) + k^2 G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A) \tag{4.31}$$

Comme lors du premier chapitre d'introduction au retournement temporel, la première expression (4.30) est conjuguée, puis multipliée par $G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})$. La seconde (4.31) est de nouveau multipliée par $\phi_B^{S*}(\mathbf{r})$. Après avoir retranché la seconde équation obtenue à la

première, l'expression est intégrée sur le volume *V*. Le théorème de Green-Ostrogradski[7] permet de ramener le terme de gauche à une intégrale de surface sur *S*.

Nous appliquons alors l'approximation de Sommerfeld au premier membre ($G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}) = -\mathrm{i}kG_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})$ et $\nabla_r \phi_B^{S*}(\mathbf{r}) = \mathrm{i}k\phi_B^{S*}(\mathbf{r})$) :

$$-2ik\oint_S \left[\phi_B^{S*}(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})\right]dS = \iiint_V \delta c_0^{\,2}\phi_B^{\,*}(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})d^3r - 4\pi\iiint_V \phi_B^{S*}(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_A)d^3r \quad (4.32)$$

Nous cherchons ensuite à calculer le terme $\iiint_V \delta c_0^{\,2}\phi_B^{\,*}(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})d^3r$. Nous obtenons que $G_0^{\,*}(\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_0)\,f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \delta c_0^{\,2}\phi_B^{\,*}(\mathbf{r}')G_0^{\,*}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}')\frac{\left(G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0)\right)^2}{\left|G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0)\right|^2}d^3r'$ grâce à la formule (4.29). Dans l'hypothèse d'une cible placée en $\mathbf{r}_0$ de dimension faible devant la longueur d'onde, nous pouvons réaliser l'approximation $G_0^{\,*}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}') \approx G_0^{\,*}(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0)$ à l'intérieur de l'intégrale puis par $G_0^{\,*}(\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_0)\,f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\hat{\mathbf{r}}_A)G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}_0) \approx \frac{1}{4\pi}\iiint_V \delta c_0^{\,2}\phi_B^{\,*}(\mathbf{r}')G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r}')d^3r'$. Du fait de la réciprocité de la diffusion sur notre cible, nous parvenons à :

$$\oint_S \left[G_0^{\,*}(\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_0)G_0^{\,*}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\,f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})\right]dS = -\frac{4\pi}{k}f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\hat{\mathbf{r}}_A)G_0^{\,*}(\mathbf{r}_B,\mathbf{r}_0)\Im\left\{G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)\right\} \quad (4.33)$$

Et ainsi :

$$\oint_S \left[G_0^{\,*}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\,f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}_A,\mathbf{r})\right]dS = -\frac{4\pi}{k}f^*(\hat{\mathbf{r}}_B,\hat{\mathbf{r}}_A)\Im\left\{G_0(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}_A)\right\} \quad (4.34)$$

[7] Pour deux scalaires A et B, ils vérifient $\int_V \left[A\nabla^2 B - B\nabla^2 A\right]dV = \oint_S \left[A\nabla B - B\nabla A\right]dS$

Conclusion générale et perspectives

Au cours de cette thèse, les méthodes de retournement temporel au sens large du terme ont été explorées dans le domaine des micro-ondes. Dans le cadre d'un contrat de recherche financé par la Direction Générale de l'Armement, un système d'amplification d'impulsions électromagnétiques par retournement temporel a été conçu et testé. Nous avons exploité les remarquables propriétés de focalisation spatio-temporelle du RT en champ diffus. Un gain de 18 dB par rapport à une antenne directive de même ouverture a notamment été mesuré. Notre dispositif possède un avantage comparatif important par rapport aux systèmes actuels puisqu'il se révèle auto-adaptatif tant en position qu'en polarisation. Dans la continuité de ces travaux, trois études semblent essentielles à réaliser. La première concerne l'ajout de diffuseurs sans perte dans la cavité pour établir plus rapidement un régime de champ diffus. La seconde consiste à s'affranchir de l'émission d'une source initiale à l'extérieur de la cavité. A cette fin, une méthode de retournement temporel synthétique pourrait être mise en œuvre. L'acquisition de toutes les réponses impulsionnelles entre l'antenne dans la cavité et un plan proche de l'ouverture permet de reconstruire le signal à appliquer quelque soit la position désirée du point focal. Enfin, la production de champs de plus forte amplitude nécessite l'intégration d'un générateur deux états « un bit » de forte puissance. Technologiquement, le temps de montée de ce type de générateur est pour l'instant trop important dans notre gamme de fréquence pour garantir un gain similaire à celui mesuré durant l'étude.

La seconde partie de cette thèse traite de la méthode DORT en micro-ondes. Plusieurs thématiques ont été abordées parallèlement. Lors de la première étude, nous nous sommes intéressés à la localisation et la caractérisation de cylindres diélectriques par l'étude des invariants de l'opérateur de retournement temporel, dans le cas de deux réseaux en émission et en réception distincts. Un bon accord a été observé entre l'expression analytique et la mesure expérimentale des valeurs singulières. Les paramètres du cylindre, i.e. son diamètre et sa permittivité, ont aussi pu être déterminés à partir de l'évolution des valeurs singulières.

La seconde thématique a concerné l'imagerie sub-longueur d'onde de deux diffuseurs proches. Expérimentalement, deux fils de cuivre séparés d'une distance de $\lambda/6$ ont été résolus grâce à la méthode DORT-MUSIC (Multiple Signal Classification). De plus, un critère de résolution prenant en compte l'influence du bruit a été extrait à partir du développement des

vecteurs singuliers en série de Taylor en fonction de la variance du bruit. Cette approche pourrait plus généralement être appliquée à d'autres situations nécessitant le calcul des invariants du retournement temporel à partir d'une situation non perturbée.

Enfin, la matrice de transfert **K** a été décomposée analytiquement en valeurs singulières lorsqu'une cible ponctuelle se déplace au cours de son acquisition. Les vecteurs singuliers ont notamment été comparés aux polynômes de Hermite-Gauss ou de Legendre en fonction de la vitesse de cette cible. Les résultats expérimentaux présentent de nouveau un bon accord avec les développements théoriques.

Ces travaux ont par la suite permis d'appliquer la méthode DORT à un cas concret d'imagerie radar : la détection et la localisation de personnes mobiles derrière un mur. A l'aide d'une soustraction de la matrice **K** à deux instants distincts, l'écho de la personne à deux positions est isolé du fort signal rétrodiffusé par le mur. Afin d'estimer précisément la position de la personne, les paramètres du mur (épaisseur et permittivité) doivent être déterminés. Nous avons proposé de les extraire des temps de réponse de la face arrière du mur. Les valeurs estimées sont en adéquation avec les valeurs mesurées par une technique classique en transmission. Le suivi d'une cible derrière le mur illustre enfin le bon fonctionnement de notre système.

Cette application se révèle pour le moins prometteuse et la prochaine étape consiste à développer un système d'imagerie en temps réel. Cette évolution nécessite l'acquisition de commutateurs large bande ultra-rapides afin de diminuer le temps de calcul de la matrice **K**.

Enfin, lors du dernier chapitre de cette thèse, nous avons effectué la première expérience de corrélations de bruit en micro-ondes. A partir du bruit ambiant, une localisation totalement passive de cibles est réalisée. Dans une première partie, nous avons étudié le cas de sources de bruit isotropes. La moyenne du produit de corrélation entre deux antennes mène alors à la réponse impulsionnelle entre ces deux antennes. Ce domaine de la physique est actuellement en pleine expansion et concerne de nombreux domaines tels que la sismologie ou en encore l'acoustique sous-marine. Dans un milieu réciproque, les corrélations de bruit sont analogues à un processus de retournement temporel dans une cavité fermée. Cette analogie se révèle un outil précieux à l'interprétation des signaux obtenus. Des corrélations de bruit large bande (entre 1 et 3 GHz) ont permis de détecter et localiser temporellement et spatialement des

plaques métalliques. Nous avons bon espoir d'aboutir dans le futur à la localisation de personnes. Pour ce faire, le temps d'acquisition des signaux par l'oscilloscope doit être largement amélioré. Des amplificateurs faible bruit de plus large bande passante pourront en outre être utilisés afin de diminuer le temps de convergence des corrélations.

Puis, dans une seconde partie, nous avons considérés des sources de bruit directionnelles et de bande étroite. Grâce à cette approche, nous avons réussi à localiser une personne à partir de la corrélation des signaux émis par une borne WIFI. La détection ne se fonde plus sur l'obtention de la réponse impulsionnelle comme pour une répartition isotrope des sources de bruit. Le bruit provient en effet d'une seule source, le routeur WIFI. L'évolution, sur un réseau d'antennes, de la phase des corrélations des signaux rétrodiffusés par le corps humain mène à la position de ce dernier. Cette approche passive est uniquement fréquentielle puisque la faible largeur de bande ne permet pas d'obtenir d'information sur le temps de propagation des ondes.

Pour les deux types de corrélations de bruit (i.e. large bande et isotropes ou provenant d'un routeur WIFI), une prochaine étape consiste à développer une électronique à même de former l'image en temps réel.

Bibliographie

[1] M. Fink, "Time Reversed Acoustics," *Physics Today,* vol. 50, pp. 34-40, 1997.

[2] D. Cassereau and M. Fink, *Time-reversal of ultrasonic fields. III : Theory of the closed time-reversal cavity* vol. 39. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1992.

[3] G. Lerosey, "manuscript de thèse," 2006.

[4] R. Carminati, R. Pierrat, J. d. Rosny, and M. Fink, "Theory of the time reversal cavity for electromagnetic fields," *Opt. Lett.,* vol. 32, pp. 3107-3109, 2007.

[5] M. Fink, "Time-reversal waves and super resolution," *Journal of Physics: Conference Series,* vol. 124, p. 012004, 2008.

[6] C. Draeger and M. Fink, "One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2D-Silicon Cavity," *Physical Review Letters,* vol. 79, p. 407, 1997.

[7] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, G. Montaldo, and M. Fink, "Time Reversal of Electromagnetic Waves," *Physical Review Letters,* vol. 92, p. 193904, 2004.

[8] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, A. Derode, and M. Fink, "Time reversal of wideband microwaves," *Applied Physics Letters,* vol. 88, pp. 154101-3, 2006.

[9] A. Derode, P. Roux, and M. Fink, "Robust Acoustic Time Reversal with High-Order Multiple Scattering," *Physical Review Letters,* vol. 75, p. 4206, 1995.

[10] M. Fink and C. Prada, "Acoustic time-reversal mirrors," *Inverse Problems,* vol. 17, pp. R1-R38, 2001.

[11] C. Prada, F. Wu, and M. Fink, "The iterative time reversal mirror: A solution to self-focusing in the pulse echo mode," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 90, pp. 1119-1129, 1991.

[12] G. Montaldo, M. Tanter, and M. Fink, "Real time inverse filter focusing through iterative time reversal," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 115, pp. 768-775, 2004.

[13] C. Prada, M. Tanter, and M. Fink, "Flaw detection in solid with the D.O.R.T. method," *Ultrasonics Symposium,* vol. 1, pp. 679-683, 1997.

[14] J. M. F. Moura and J. Yuanwei, "Detection by time reversal : Single antenna," *IEEE transactions on signal processing,* vol. 55, pp. 187-201, 2007.

[15] J. M. F. Moura and J. Yuanwei, "Time Reversal Imaging by Adaptive Interference Canceling," *Signal Processing, IEEE Transactions on,* vol. 56, pp. 233-247, 2008.

[16] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink, "Decomposition of the time reversal operator: Detection and selective focusing on two scatterers," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 99, pp. 2067-2076, 1996.

[17] G. Montaldo, P. Roux, A. Derode, C. Negreira, and M. Fink, "Generation of very high pressure pulses with 1-bit time reversal in a solid waveguide," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 110, pp. 2849-2857, 2001.

[18] W. Reichardt and U. Lehmann, "Raumeidruck als oberbegriff von raumlichkeit und halligkeit, erlauterungen des raumeindrucksmasses," *Acoustica,* vol. 40, pp. 174-183, 1978.

[19] H. Kuttruff, *Room Acoustics, Elsevier Science Publishers, 3e edition,* 1991.

[20] A. Derode, A. Tourin, and M. Fink, "Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering," *Journal of Applied Physics,* vol. 85, pp. 6343-6352, 1999.

[21] MEEP est en accès libre à l'adresse http://ab-initio.mit.edu/wiki/index.php/Meep.

[22] N. Mordant, C. Prada, and M. Fink, "Highly resolved detection and selective focusing in a waveguide using the D.O.R.T. method," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 105, pp. 2634-2642, 1999.

[23] T. Folegot, C. Prada, and M. Fink, "Resolution enhancement and separation of reverberation from target echo with the time reversal operator decomposition," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 113, pp. 3155-3160, 2003.

[24] T. Folegot, J. de Rosny, C. Prada, and M. Fink, "Adaptive instant record signals applied to detection with time reversal operator decomposition," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 117, pp. 3757-3765, 2005.

[25] C. Prada, J. de Rosny, D. Clorennec, J.-G. Minonzio, A. Aubry, M. Fink, L. Berniere, P. Billand, S. Hibral, and T. Folegot, "Experimental detection and focusing in shallow water by decomposition of the time reversal operator," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 122, pp. 761-768, 2007.

[26] N. Quieffin, S. Catheline, R. K. Ing, and M. Fink, "Real-time focusing using an ultrasonic one channel time-reversal mirror coupled to a solid cavity," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 115, pp. 1955-1960, 2004.

[27] C. Prada and M. Fink, "Eigenmodes of the time reversal operator: a solution to selective focusing in multiple-target media," *Wave Motion* vol. 20, pp. 151–163, 1994.

[28] E. Kerbrat, R. K. Ing, C. Prada, D. Cassereau, and M. Fink, "The D.O.R.T. method applied to detection and imaging in plates using Lamb waves," in *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation,* Ames, Iowa (USA), 2001, pp. 934-940.

[29] E. Kerbrat, D. Clorennec, C. Prada, D. Royer, D. Cassereau, and M. Fink, "Detection of cracks in a thin air-filled hollow cylinder by application of the DORT method to elastic components of the echo," *Ultrasonics,* vol. 40, pp. 715-720, 2002.

[30] M. R. Burcher, A. T. Fernandez, and C. Cohen-Bacrie, "A novel phase aberration measurement technique derived from the DORT method: comparison with correlation-based method on simulated and in-vivo data," *Ultrasonics Symposium, 2004 IEEE,* vol. 2, pp. 860 - 865

[31] J.-L. Robert, M. Burcher, C. Cohen-Bacrie, and M. Fink, "Time reversal operator decomposition with focused transmission and robustness to speckle noise: Application to microcalcification detection," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 119, pp. 3848-3859, 2006.

[32] H. Tortel, G. Micolau, and M. Saillard, "Decomposition of the Time Reversal Operator for Electromagnetic Scattering," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications,* vol. 13, pp. 687-719, 1999.

[33] G. Micolau and M. Saillard, "D.O.R.T. method as applied to electromagnetic subsurface sensing," *Radio Science,* vol. 38, 2003.

[34] A. Dubois, K. Belkebir, and M. Saillard, *Localization and characterization of two-dimensional targets buried in a cluttered environment : Electromagnetic characterization of buried obstacles* vol. 20. Bristol, ROYAUME-UNI: Institute of Physics, 2004.

[35] Y. Ziade, n. Roussel, M. Lesturgie, and W. Tabbara, *A Coherent Model of Forest Propagation : Application to Detection and Localization of Targets Using the DORT Method* vol. 56. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2008.

[36] M. E. Yavuz and F. L. Teixeira, *Full time-domain DORT for ultrawideband electromagnetic fields in dispersive, random inhomogeneous media* vol. 54. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2006.

[37] M. Yavuz, E. and F. Teixeira, L., *Space-Frequency Ultrawideband Time-Reversal Imaging* vol. 46. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2008.

[38] M. E. Yavuz and F. L. Teixeira, "A Numerical Study on the Sensitivity of Time-Reversal Imaging Methods Against Clutter, Noise and Model Perturbations," in *Ultra-Wideband Short-Pulse Electromagnetics 8*, 2007, pp. 219-226.

[39] S. Komilikis, C. Prada, and M. Fink, "Characterization of extended objects with the D.O.R.T. method," *IEEE Ultrasonics Symposium*, vol. 2, pp. 1401-1404, 1996.

[40] C. Prada and M. Fink, "Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariants of the time-reversal operator. Application to Lamb waves characterization," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, pp. 801-807, 1998.

[41] A. Aubry, J. de Rosny, J.-G. Minonzio, C. Prada, and M. Fink, "Gaussian beams and Legendre polynomials as invariants of the time reversal operator for a large rigid cylinder," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 120, pp. 2746-2754, 2006.

[42] D. Chambers and A. K. Gautesen, "Time reversal for a single spherical scatterer," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 109, pp. 2616-2624, 2001.

[43] J.-G. Minonzio, F. D. Philippe, C. Prada, and M. Fink, "Characterization of an elastic cylinder and an elastic sphere with the time-reversal operator: application to the sub-resolution limit," 2008, p. 025014.

[44] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Analysis of the time-reversal operator for a small spherical scatterer in an electromagnetic field," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 52, pp. 1729-1738, 2004.

[45] D. H. Chambers and J. G. Berryman, "Target characterization using decomposition of the time-reversal operator: electromagnetic scattering from small ellipsoids," *Inverse Problems*, vol. 22, pp. 2145-2163, 2006.

[46] J. G. Minonzio, M. Davy, J. De Rosny, C. Prada, and M. Fink, "Theory of the Time-Reversal Operator for a Dielectric Cylinder Using Separate Transmit and Receive Arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 57, pp. 2331-2340, 2009.

[47] J.-G. Minonzio, C. Prada, D. Chambers, D. Clorennec, and M. Fink, "Characterization of subwavelength elastic cylinders with the decomposition of the time-reversal operator: Theory and experiment," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 117, pp. 789-798, 2005.

[48] C. Prada and J.-L. Thomas, "Experimental subwavelength localization of scatterers by decomposition of the time reversal operator interpreted as a covariance matrix," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 114, pp. 235-243, 2003.

[49] A. Baussard and T. Boutin, "Time-reversal RAP-MUSIC imaging " *Waves in Random and Complex Media*, vol. 18, pp. 151-160, 2008.

[50] A. J. Devaney, "Super-resolution Processing of Multi-static Data Using Time Reversal and MUSIC," *http://www.ece.neu.edu/faculty/devaney/preprints/paper02n_00.pdf*.

[51] S. K. Lehman and A. J. Devaney, "Transmission mode time-reversal super-resolution imaging," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 113, pp. 2742-2753, 2003.

[52] T. Miwa and I. Arai, "Super-resolution imaging for point reflectors near transmitting and receiving array," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* vol. 52, pp. 220-229, 2004.

[53] F. Simonetti, "Multiple scattering: The key to unravel the subwavelength world from the far-field pattern of a scattered wave," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 73, pp. 036619-13, 2006.

[54] F. Simonetti, "Pushing the boundaries of ultrasound imaging to unravel the subwavelength world," *Proceedings of IEEE International Ultrasonics Symposium, Vancouver, Canada,* pp. 313-316, 2006.

[55] F. Simonetti, M. Fleming, and E. A. Marengo, "Illustration of the role of multiple scattering in subwavelength imaging from far-field measurements," *J. Opt. Soc. Am. A,* vol. 25, pp. 292-303, 2008.

[56] J. de Rosny and C. Prada, "Comment on ``Multiple scattering: The key to unravel the subwavelength world from the far-field pattern of a scattered wave"," *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics),* vol. 75, pp. 048601-2, 2007.

[57] X. Chen and Y. Zhong, "Influence of multiple scattering on subwavelength imaging: transverse electric case," *J. Opt. Soc. Am. A,* vol. 27, pp. 245-250.

[58] J.-G. Minonzio, C. Prada, A. Aubry, and M. Fink, "Multiple scattering between two elastic cylinders and invariants of the time-reversal operator: Theory and experiment," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 120, pp. 875-883, 2006.

[59] J.-G. Minonzio, M. Davy, J. De Rosny, C. Prada, and M. Fink, "Theory of the time-reversal operator for a dielectric cylinder using separate transmit and receive arrays," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation,* to be published in August 2009.

[60] G. W. Stewart, "Perturbation Theory for the Singular Value Decomposition," *SVD and Signal Processing, II: Algorithms, Analysis and Applications,* pp. 99-109, 1990.

[61] Z. Xu, " Perturbation analysis for subspace decomposition with applications in subspace-based algorithms," *IEEE Transactions on Signal Processing* vol. 50, pp. 2820 - 2830 2002.

[62] L. Zhenhua, "Direct perturbation method for reanalysis of matrix singular value decomposition," *Applied Mathematics and Mechanics,* vol. 18, pp. 471-477, 1997.

[63] J. Liu, X. Liu, and X. Ma, " First-Order Perturbation Analysis of Singular Vectors in Singular Value Decomposition," *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. 56, pp. 3044 - 3049 2008.

[64] B. De Moor, "The singular value decomposition and long and short spaces of noisy matrices," *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. 41, pp. 2826 - 2838, 1993.

[65] E. J. Baranoski, "Through-wall imaging: Historical perspective and future directions," *Journal of the Franklin Institute,* vol. 345, pp. 556-569, 2008.

[66] H. Griffiths and C. Baker, "Radar Imaging for Combatting Terrorism," in *Imaging for Detection and Identification,* 2007, pp. 29-48.

[67] N. Maaref, P. Millot, X. Ferrières, C. Pichot, and O. Picon, "Electromagnetic imaging method based on time reversal processing applied to through-the-wall target localization," *Progress In Electromagnetics Research M,* vol. 1, pp. 59-67, 2008.

[68] J. Sachs, M. Aftanas, S. Crabbe, M. Drutarovsky, R. Klukas, D. Kocur, T. T. Nguyen, P. Peyerl, J. Rovnakova, and E. Zaikov, "Detection and tracking of moving or trapped people hidden by obstacles using ultra-wideband pseudo-noise radar," in *Radar Conference, 2008. EuRAD 2008. European,* 2008, pp. 408-411.

[69] W. Zheng, Z. Zhao, and Z.-P. Nie, "Application of TRM in the UWB Through Wall Radar," *Progress In Electromagnetics Research,* vol. PIER 87, pp. 279-296, 2008.

[70] M. Aftanas, "Through-Wall Imaging With UWB Radar System," *Dissertation thesis, Department of Electronics and Multimedia Communications, Faculty of Electrical Engineering, Technical University of Kosice,* 2009.

[71] Y.-S. Yoon and M. G. Amin, "High-Resolution Through-the-Wall Radar Imaging Using Beamspace MUSIC," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on,* vol. 56, pp. 1763-1774, 2008.

[72] M. M. Nikolic, A. Nehorai, and A. R. Djordjevic, "Estimating distributed objects inside buildings by moving sensors," *The 23nd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics Society (ACES), Verona, Italy,* pp. 409-414, 2007.

[73] F. Ahmad, M. G. Amin, and S. A. Kassam, "Synthetic aperture beamformer for imaging through a dielectric wall," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on,* vol. 41, pp. 271-283, 2005.

[74] W. Genyuan and M. G. Amin, "Imaging Through Unknown Walls Using Different Standoff Distances," *Signal Processing, IEEE Transactions on,* vol. 54, pp. 4015-4025, 2006.

[75] A. H. Muqaibel and A. Safaai-Jazi, "A new formulation for characterization of materials based on measured insertion transfer function," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on,* vol. 51, pp. 1946-1951, 2003.

[76] N. T. Thanh, L. van Kempen, T. G. Savelyev, X. Zhuge, M. Aftanas, E. Zaikov, M. Drutarovsky, and H. Sahli, "Comparison of basic inversion techniques for through-wall imaging using UWB radar," in *Radar Conference, 2008. EuRAD 2008. European,* 2008, pp. 140-143.

[77] E. M. Johansson and J. E. Mast, "Three-dimensional ground-penetrating radar imaging using synthetic aperture time-domain focusing," in *Advanced Microwave and Millimeter-Wave Detectors,* San Diego, CA, USA, 1994, pp. 205-214.

[78] J.-L. Robert and M. Fink, "The prolate spheroidal wave functions as invariants of the time reversal operator for an extended scatterer in the Fraunhofer approximation," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 125, pp. 218-226, 2009.

[79] F.-D. Philippe, "Caractérisation et détection de cibles en guide d'onde non stationnaire par Décomposition de l'Opérateur de Retournement Temporel," *manuscrit de thèse,* 2008.

[80] P. Soo-Chang, "A New Discrete Fractional Fourier Transform Based on Constrained Eigendecomposition of DFT Matrix by Largrange Multiplier Method," 1997, pp. 3965-3965.

[81] Ç. Candan, M. A. Kutay, and H. M. Ozaktas, "The discrete fractional Fourier transform," *IEEE Transactions on Signal Processing,* vol. SP-48, pp. 1329-1337, 2000.

[82] Pei, C. S, Yeh, H. M, Tseng, and C. C, *Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections* vol. 47. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1999.

[83] W. H. Carter, "Spot size and divergence for Hermite Gaussian beams of any order," *Appl. Opt.,* vol. 19, pp. 1027-1029, 1980.

[84] R. L. Weaver, "Information from Seismic Noise," *Science,* vol. 307, pp. 1568-1569, March 11, 2005 2005.

[85] E. Larose, L. Margerin, A. Derode, B. van Tiggelen, M. Campillo, N. Shapiro, A. Paul, L. Stehly, and M. Tanter, "Correlation of random wavefields: An interdisciplinary review," *Geophysics,* vol. 71, pp. SI11-SI21, 2006.

[86] A. Curtis, P. Gerstoft, H. Sato, R. Snieder, and K. Wapenaar, "Seismic interferometry---turning noise into signal," *The Leading Edge,* vol. 25, pp. 1082-1092, 2006.

[87] R. Snieder, K. Wapenaar, and U. Wegler, "Unified Green's function retrieval by cross-correlation; connection with energy principles," *Physical Review E,* vol. 75, p. 036103, 2007.

[88] T. L. Duvall, S. M. Jeffferies, J. W. Harvey, and M. A. Pomerantz, "Time-distance helioseismology," *Nature,* vol. 362, pp. 430-432, 1993.

[89] R. L. Weaver and O. I. Lobkis, "Ultrasonics without a Source: Thermal Fluctuation Correlations at MHz Frequencies," *Physical Review Letters,* vol. 87, p. 134301, 2001.

[90] M. Campillo and A. Paul, "Long-Range Correlations in the Diffuse Seismic Coda," *Science,* vol. 299, pp. 547-549, 2003.

[91] Sabra, G. Karim, Gerstoft, Peter, Roux, Philippe, Kuperman, A. W, Fehler, and C. Michael, *Surface wave tomography from microseisms in Southern California* vol. 32. Washington, DC, ETATS-UNIS: American Geophysical Union, 2005.

[92] N. M. Shapiro, M. Campillo, L. Stehly, and M. H. Ritzwoller, "High-Resolution Surface-Wave Tomography from Ambient Seismic Noise," *Science,* vol. 307, pp. 1615-1618, 2005.

[93] K. G. Sabra, P. Roux, and W. A. Kuperman, "Arrival-time structure of the time-averaged ambient noise cross-correlation function in an oceanic waveguide," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 117, pp. 164-174, 2005.

[94] P. Roux and W. A. K. N. Group, "Extracting coherent wave fronts from acoustic ambient noise in the ocean," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 116, pp. 1995-2003, 2004.

[95] Snieder and Roel, *Extracting the Green's function from the correlation of coda waves: A derivation based on stationary phase* vol. 69. College Park, MD, ETATS-UNIS: American Physical Society, 2004.

[96] K. Wapenaar, "Retrieving the Elastodynamic Green's Function of an Arbitrary Inhomogeneous Medium by Cross Correlation," *Physical Review Letters,* vol. 93, p. 254301, 2004.

[97] P. Roux, K. G. Sabra, W. A. Kuperman, and A. Roux, "Ambient noise cross correlation in free space: Theoretical approach," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 117, pp. 79-84, 2005.

[98] E. Slob and K. Wapenaar, "Electromagnetic Green's functions retrieval by cross-correlation and cross-convolution in media with losses," *Geophys. Res. Lett.,* vol. 34, p. L05307, 2007.

[99] A. Derode, E. Larose, M. Campillo, and M. Fink, "How to estimate the Green's function of a heterogeneous medium between two passive sensors? Application to acoustic waves," *Applied Physics Letters,* vol. 83, pp. 3054-3056, 2003.

[100] A. Derode, E. Larose, M. Tanter, J. de Rosny, A. Tourin, M. Campillo, and M. Fink, "Recovering the Green's function from field-field correlations in an open scattering medium (L)," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 113, pp. 2973-2976, 2003.

[101] R. Snieder, K. van Wijk, M. Haney, and R. Calvert, "Cancellation of spurious arrivals in Green's function extraction and the generalized optical theorem," *Physical Review E,* vol. 78, p. 036606, 2008.

[102] R. Snieder, F. J. Sanchez-Sesma, and K. Wapenaar, "Field Fluctuations, Imaging with Backscattered Waves, a Generalized Energy Theorem, and the Optical Theorem," *SIAM Journal on Imaging Sciences,* vol. 2, pp. 763-776, 2009.

[103] K. G. Sabra, P. Roux, and W. A. Kuperman, "Emergence rate of the time-domain Green's function from the ambient noise cross-correlation function," *The Journal of the Acoustical Society of America,* vol. 118, pp. 3524-3531, 2005.

[104] E. Larose, A. Derode, M. Campillo, and M. Fink, "Imaging from one-bit correlations of wideband diffuse wave fields," *Journal of Applied Physics,* vol. 95, pp. 8393-8399, 2004.

[105] Bienvenu, G, Kopp, and L, *Optimality of high resolution array processing using the eigensystem approach* vol. 31. New York, NY, ETATS-UNIS: Institute of electrical and electronics engineers, 1983.

[106] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on,* vol. 34, pp. 276-280, 1986.

Résumé :

Les méthodes de retournement temporel (RT) en micro-ondes sont appliquées à l'amplification d'impulsions et à l'imagerie. Lors d'une première partie, une chambre réverbérante ouverte sur sa face avant permet d'engendrer un champ diffus tout en laissant s'échapper l'énergie afin de focaliser le champ par RT à l'extérieur. La compression spatio-temporelle après RT produit une impulsion de forte amplitude et confère au dispositif un caractère auto-adaptatif en position et en polarisation. La seconde partie traite expérimentalement et théoriquement de la méthode DORT (décomposition de l'opérateur de RT). Le cas d'un cylindre diélectrique est examiné dans le but de retrouver ses paramètres. L'imagerie de deux cibles séparées d'une distance sub-longueur d'onde est alors abordée. Un critère de résolution déterminant le niveau de bruit à partir duquel la résolution des cibles échoue est notamment extrait. La méthode est ensuite appliquée à la localisation de personnes mobiles derrière un mur. La possibilité de suivre un déplacement est illustrée en prenant en compte la propagation à l'intérieur du mur. L'influence du déplacement d'une cible ponctuelle pendant l'acquisition de la matrice de transfert sur les invariants de l'opérateur de RT est aussi examinée. Enfin, une technique d'imagerie passive fondée sur les corrélations du bruit ambiant est expérimentalement mise en évidence en micro-ondes. Suivant une analogie avec le RT, la corrélation de signaux de bruit large bande mène à la fonction de Green entre deux antennes et ainsi à la localisation de cibles. La localisation passive d'une personne est aussi abordée en « bande étroite » grâce à l'émission d'une borne WIFI.

Abstract:

Time Reversal (TR) methods are applied in microwaves to pulse amplification and imaging. First, we use a reverberation chamber with an aperture on the front face and we take advantage of the pulse compression property of time reversal. High amplitude peaks are generated outside the chamber thanks to the long spreading time of the signals inside. Our device is auto-adaptive in position and in polarization. The second part of the manuscript deals theoretically and experimentally with the DORT method (decomposition of the TR operator). The method is first applied to characterize a dielectric cylinder and work out its parameters. Imaging of two close scatterers separated by a subwavelength distance is then considered. A criterion is especially extracted to deduce the noise level above which the resolution fails. Furthermore, we use the DORT method to track experimentally people behind a wall. The wave propagation inside the wall is taken into account to localize a human being. This last part leads to the study of the invariants of the TR operator when a pointlike target is moving during the acquisition of the transfer matrix. Eventually, we introduce the first wideband ambient noise cross-correlation experiment in microwaves. The cross-correlation yields the Green's function between two antennas and allows the passive detection and localization of targets. The analogy with a TR process is developed. Passive people localization is also achieved with the narrow bandwidth signals emitted by a WIFI router.