



HAL
open science

Approche asymptotique pour l'étude mathématique et la simulation numérique de la propagation du son en présence d'un écoulement fortement cisailé

Lauris Joubert

► **To cite this version:**

Lauris Joubert. Approche asymptotique pour l'étude mathématique et la simulation numérique de la propagation du son en présence d'un écoulement fortement cisailé. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. NNT: . pastel-00553081

HAL Id: pastel-00553081

<https://pastel.hal.science/pastel-00553081>

Submitted on 6 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DOCTORALE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

présentée en vue de l'obtention du grade de
Docteur de l'École Polytechnique

« Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES »

par

Lauris Joubert

APPROCHE ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE ET LA SIMULATION NUMÉRIQUE DE LA PROPAGATION DU SON EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT FORTEMENT CISAILLÉ

Thèse soutenue le 26 novembre 2010 devant le jury composé de :

M.	PATRICK JOLY	Directeur de thèse
M ^{me} .	ANNE-SOPHIE BONNET-BEN DHIA	Co-directrice de thèse
M.	MARTIN COSTABEL	Rapporteur
M ^{me} .	AGNÈS MAUREL	Rapporteur
M.	EDWARD J. BRAMBLEY	Examineur
M.	OLIVIER LAFITTE	Examineur
M.	VINCENT PAGNEUX	Examineur
M.	PETER J. SCHMID	Examineur



REMERCIEMENTS

Au moment d'écrire ce qui sera sans doute la partie la plus lue de ce manuscrit, le doute m'assaille. Comment se plier à cet exercice maintes fois répété sans tomber dans la platitude ou l'énumération ? C'est alors que je suis tombé sur cette citation qui m'a rappelé la véritable fonction de ces quelques lignes : "Une âme délicate est gênée de savoir qu'on lui doit des remerciements, une âme grossière, de savoir qu'elle en doit." [Friedrich Nietzsche].

Je commence par te remercier toi, lecteur, qui retient ton souffle avant d'entamer la lecture complète de cet ouvrage.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Anne-Sophie Bonnet-BenDhia et Patrick Joly pour m'avoir proposé ce sujet de thèse. Il m'est impossible de ne pas saluer leur disponibilité et leur gentillesse. Leurs conseils furent toujours précieux, leurs remarques, pertinentes, de telle sorte que j'ai beaucoup appris à leur contact.

Je remercie chaleureusement Marc Duruflé et Ricardo Weder avec lesquels j'ai eu la chance de collaborer. Les connaissances en simulation numérique du premier et l'expérience en théorie spectrale du second participèrent grandement au développement de ces travaux.

Je remercie les deux rapporteurs de cette thèse, Martin Costabel et Agnès Maurel, pour leur relecture attentive de mon grimoire, la perspicacité de leur rapport, ainsi que l'intérêt porté à ces travaux. Je remercie également Edward Brambley, Olivier Lafitte, Vincent Pagneux et Peter Schmid de me faire l'honneur d'être membres de mon jury.

Il y a trois années de cela, je fus recueilli au sein du laboratoire POEMS. Dans ses deux repères, à l'ENSTA et à l'INRIA, je trouvai des conditions de travail excellentes, tant au niveau humain que scientifique. Je tiens à remercier l'ensemble des membres de cette équipe, ainsi que ceux de l'UMA, pour leur bonne humeur et la convivialité qu'ils ont su instaurer en ces lieux. En particulier, un grand merci à Jean-François Mercier et Christophe Hazard toujours disponibles pour répondre à mes questions, au grand Christophe Mathulik et à Maurice Diamantini pour leurs nombreux dépannages informatiques, à Annie Marchal et Nathalie Bonte pour leurs gais secours face aux formalités administratives. Je tiens également à remercier David Lefèvre, Frédéric Jean et Jean-François Delmas de m'avoir fait confiance pour dispenser les TDs dans leur cours respectif.

Je souhaite également remercier la ribambelle de thésards, post-doctorants et stagiaires du laboratoire que j'ai pu croiser et avec qui j'ai passé d'agréables moments, que ce soit au laboratoire,

au Dudu, à Carcans-Maubuisson ou ailleurs. Il serait vain de vouloir les citer tous mais ils se reconnaîtront à n'en pas douter. Une pensée particulière pour Benjamin et Jérémie avec qui j'ai commencé et achève cette épopée. Nous avons partagé un bureau dans lequel nous eûmes de nombreuses discussions aussi passionnantes qu'instructives. Ils furent de valeureux compagnons de route. Je profite de ce paragraphe pour remercier Colin pour sa franche camaraderie.

Je souhaite également remercier toutes les personnes qui m'ont entouré et soutenu toutes ces années. Je pense pêle-mêle aux "team" Budapest, Berlin, Ste Max, Bredannaz, La Valette, randos vélo, randos, ski, marathon, Champo, nugget(te), aux tacots, aux toulousains réunionnais, au Nantais toulousain, aux Wallisiens retrouvés...et j'en oublie pléthore. Une mention spéciale aux coloc qui se sont succédés à mes côtés, aussi bien à la Coloc qu'au Piso, et qui ont vécu au plus près cette aventure.

Voilà venu le moment de remercier la Famille. Le soutien de ses membres fut indéfectible malgré l'incompréhension et l'air dubitatif que j'ai pu lire sur leur visage qu'en je répondais à leur simple question : "Mais tu fais quoi exactement?". Je remercie ma mère et "mon vieux" qui, chacun de leur côté et à leur façon, ont toujours été présents à mes côtés malgré la distance qui nous sépare. J'embrasse ma grande soeur Cynthia qui, depuis la Berjalie lointaine, représente un autre pilier de mon existence. Nils, son fils, a éclairé nos vies ces derniers mois par sa vitalité.

Je termine en remerciant pudiquement ma petite bulle, Ségolène, pour l'ensemble de son oeuvre.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS	iii
INTRODUCTION	1
I PROPAGATION ACOUSTIQUE DANS UN TUYAU MINCE	9
1 DÉRIVATION DU MODÈLE	11
1.1 APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS DE GALBRUN	13
1.1.1 POSITION DU PROBLÈME / MISE EN ÉQUATIONS	13
1.1.2 DÉRIVATION DU MODÈLE LIMITE	14
1.2 APPROCHE EULÉRIENNE	16
1.3 ÉQUIVALENCE DES DEUX APPROCHES	19
1.4 CONCLUSION	23
2 ÉTUDE DE STABILITÉ MODALE	25
2.1 MOTIVATION ET PREMIÈRES REMARQUES	28
2.2 RÉDUCTION À UN PROBLÈME SPECTRAL	28
2.3 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU SPECTRE	32
2.3.1 REMARQUES PRÉLIMINAIRES	32
2.3.2 SPECTRE ESSENTIEL	35
2.3.3 VALEURS PROPRES DE A	39
2.3.4 QUELQUES CAS PARTICULIERS SIMPLES	42
2.4 CONDITIONS DE STABILITÉ POUR DES PROFILS CONTINUS	47
2.4.1 MÉTHODOLOGIE	47
2.4.2 LES PROFILS LINÉAIRES PAR MORCEAUX	48
2.4.3 LES RÉSULTATS	54
2.5 CONDITIONS D'INSTABILITÉ POUR DES PROFILS ANTISYMMÉTRIQUES	58
2.5.1 UNE PREMIÈRE CONDITION D'INSTABILITÉ	59
2.5.2 APPLICATION À DES PROFILS SINGULIERS	65
2.5.3 UNE TECHNIQUE DE PERTURBATION	67
2.5.4 APPLICATION À DES PROFILS RÉGULIERS	69
2.6 RÉSULTATS D'INSTABILITÉ HYDRODYNAMIQUE	72
2.6.1 L'APPROCHE MODALE	72
2.6.2 LA TECHNIQUE DE PERTURBATION	73
2.6.3 LES RÉSULTATS	77
3 ÉTUDE DU CARACTÈRE BIEN POSÉ	81
3.1 PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES OUTILS	83
3.2 LE THÉORÈME GÉNÉRAL	87

3.2.1	TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE : MÉTHODOLOGIE ET CALCUL	87
3.2.2	ESTIMATIONS A PRIORI ET CARACTÈRE BIEN POSÉ	92
3.2.3	EXPRESSION QUASI-EXPLICITE DE LA SOLUTION (CALCUL DE LA TRANSFORMATION INVERSE DE FOURIER INVERSE)	99
3.3	CAS PARTICULIERS	101
3.3.1	UNE CLASSE DE PROFILS MONOTONES	101
3.3.2	EXTENSION À DES PROFILS NON MONOTONES	107
3.3.3	COMMENT PROCÉDER DANS UN CAS GÉNÉRAL : EXEMPLE DU PROFIL $M(y) = 1 - y^2$	112
4	APPLICATION NUMÉRIQUE / VALIDATION DU MODÈLE	115
4.1	CALCUL NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION	117
4.1.1	LA MÉTHODE	118
4.1.2	RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR DES PROFILS MONOTONES RÉGULIERS	119
4.1.3	LE PROFIL QUADRATIQUE $M(y) = 1 - y^2$	122
4.1.4	DÉPENDANCE EN TEMPS DE LA NORME DE LA SOLUTION	123
4.2	VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE	124
4.2.1	COMPARAISON À UN CODE EULÉRIEN	125
4.2.2	COMPARAISON À UN CODE GALBRUN	126
 II CONDITIONS AUX LIMITES EFFECTIVES POUR LES COUCHES MINCES		133
5	CAS D'UNE PAROI RIGIDE	135
5.1	ILLUSTRATION DE L'INFLUENCE DE LA COUCHE LIMITE	138
5.2	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	139
5.2.1	POSITION DU PROBLÈME	139
5.2.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	140
5.2.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	140
5.2.4	LE PROBLÈME APPROCHÉ	144
5.3	APPROXIMATION LOCALE DE L'OPÉRATEUR \mathbf{T}_M	145
5.4	ANALYSE DU PROBLÈME LIMITE	148
5.4.1	ANALYSE DE STABILITÉ	148
5.4.2	ONDES DE SURFACE	154
5.4.3	RÉFLEXION	160
5.5	COMPLÉMENTS : APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS D'EULER LINÉARISÉES	162
5.5.1	POSITION DU PROBLÈME	162
5.5.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	164
5.5.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	165
5.5.4	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	168
5.5.5	ANALYSE DE STABILITÉ MODALE	169
6	CAS D'UNE PAROI ABSORBANTE	171
6.1	QU'EST CE QU'UNE PAROI IMPÉDANTE	173
6.1.1	PRÉSENTATION	173
6.1.2	ÉTUDE DU CARACTÈRE BIEN POSÉ SANS ÉCOULEMENT	174
6.2	CARACTÈRE MAL POSÉ DE LA CONDITION DE MYERS	176
6.3	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ : NOUVELLE CONDITION LIMITE	181
6.3.1	POSITION DU PROBLÈME	181
6.3.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	182
6.3.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	183

6.3.4	LE PROBLÈME APPROCHÉ	188
6.4	ANALYSE DE STABILITÉ	189
6.4.1	OBTENTION DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE	190
6.4.2	CONDITIONS POUR PROFILS CONTINUS ASSURANT LE CARACTÈRE BIEN POSÉ	191
6.4.3	IMPÉDANCE DÉPENDANT DE LA FRÉQUENCE	200
6.5	COMPLÉMENTS : APPROCHE EULÉRIENNE	200
6.5.1	POSITION DU PROBLÈME	201
6.5.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	203
6.5.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	204
6.5.4	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	208
6.5.5	ANALYSE DE STABILITÉ MODALE	209
 CONCLUSION		 211
A	ÉQUIVALENCE EULER/GALBRUN	215
A.1	LES ÉQUATIONS	215
A.2	CAS DU TUBE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT LAMINAIRE	216
A.3	CAS GÉNÉRAL	219
 BIBLIOGRAPHIE		 220

INTRODUCTION

Ce document présente les travaux de recherche effectués sous la direction d'Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia et de Patrick Joly dans le cadre de ma thèse réalisée au sein du laboratoire POEMS. Ces travaux traitent des problèmes de propagation acoustique en présence d'un écoulement fortement cisailé, en régime temporel, ainsi que de leur résolution numérique. Nous nous intéressons en particulier à la modélisation des parois, en présence de couches limites de l'écoulement moyen.

Le domaine d'étude de ces travaux est celui de l'aéroacoustique. Cette discipline se situe à l'interface entre la mécanique des fluides et l'acoustique, dont elle doit réaliser une difficile synthèse. Elle traite des problèmes sonores dans les écoulements, problèmes de génération du son par les écoulements turbulents ou par l'interaction d'écoulement avec des corps solides, et problèmes de propagation du son dans les écoulements stationnaires ou non. Elle couvre donc un ensemble de problèmes ouverts et complexes dont les applications sont nombreuses, principalement dans le domaine des transports. La production et la propagation du son dans les réacteurs (cf. figure 1) ou encore les pots d'échappement sont des préoccupations importantes pour les différents acteurs de l'industrie aéronautique, automobile et ferrovière, qui doivent faire face à des contraintes réglementaires de plus en plus sévères concernant la réduction du bruit. Ceci explique l'essor considérable de cette discipline ces dernières années, coïncidant de surcroît avec un développement très rapide des techniques de simulation numérique, qui permettent aujourd'hui une prise en compte des contraintes acoustiques dans une phase très amont des projets industriels. En particulier, l'optimisation des traitements acoustiques de parois, à des coûts économiquement raisonnables pour les constructeurs, ne peut aujourd'hui se passer des outils de modélisation et de simulation numérique.

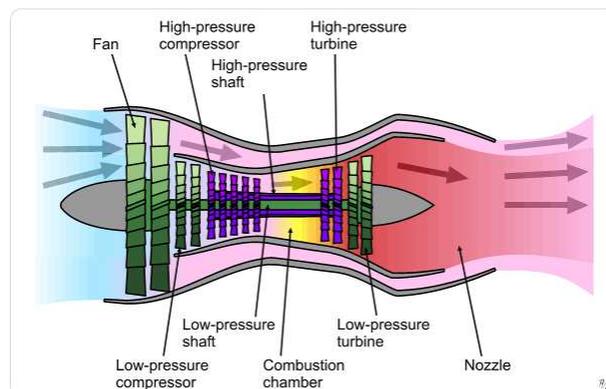


FIG. 1 – Schéma d'un turboréacteur

Nous nous intéressons dans cette thèse à la propagation du son dans un écoulement donné, ceci à des fins de simulation numérique. Les champs acoustiques étant de petites perturbations de l'écoulement, on obtient les modèles mathématiques de l'étude par linéarisation des équations de la mécanique des fluides autour de l'écoulement de référence. Ce processus permet une grande

simplification des modèles à étudier, les équations d'Euler linéarisées en constituant le plus célèbre produit. Si on suppose que le fluide est parfait et qu'on linéarise autour d'un état stationnaire¹ $(\rho_0, \mathbf{v}_0, c_0, p_0)$, avec ρ_0 la densité, c_0 la vitesse du son et p_0 la pression, et si l'on considère la vitesse eulérienne \mathbf{v}_0 parallèle, c'est à dire telle qu'il existe une direction privilégiée e_x telle que $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$, alors en ajoutant une hypothèse supplémentaire d'adiabaticité, les équations d'Euler linéarisées en milieu compressible s'écrivent une fois adimensionnées :

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ (\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Les inconnues \mathbf{u} et p sont respectivement la perturbation du champs de vitesse eulérien et la perturbation de pression et où $\mathbf{M} = \mathbf{v}_0/c_0$ est appelé le profil de Mach.

Une alternative aux équations d'Euler linéarisées est fournie par le modèle proposé en 1931 par Galbrun [Gal31]. Ce modèle, peu connu, est issu d'une linéarisation de type mixte des équations d'Euler : la perturbation de l'écoulement est décrite en variables lagrangiennes² alors que l'écoulement de référence est décrit en variables eulériennes³. Sous les mêmes hypothèses que précédemment ces équations s'écrivent :

$$(\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla)^2 \mathbf{U} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0. \quad (2)$$

Il s'agit d'une équation d'ordre 2 en temps et en espace dont l'inconnue \mathbf{U} est la perturbation du champ de déplacement lagrangien. L'utilisation de ces équations constitue une spécificité du laboratoire POEMS, qui œuvre patiemment à leur popularisation. Ce modèle possède l'avantage de ne pas faire intervenir de dérivée du profil de Mach. De plus, cette équation présente une forme similaire aux équations des ondes vectorielles utilisées en électromagnétisme et en élasticité, ce qui la dispose naturellement à une résolution par approches variationnelles telle que la méthode des éléments finis, comme en témoignent les travaux publiés à ce sujet [TGT03, PE01]. Enfin, l'utilisation du déplacement lagrangien s'avère particulièrement adapté pour le traitement de conditions aux limites dans les problèmes d'interaction fluide structure ou d'interface entre deux fluides [DH88, Sar08].

Malgré ses nombreux avantages, le modèle de Galbrun a été assez peu étudié dans la littérature. De plus, la plupart des travaux concernent son étude et sa résolution en régime harmonique [BDL05, BBDDL07, DLL01, Leg03, Duc07]. En régime temporel, parmi les rares travaux existants, on pourra citer la thèse très récente de Kamel Berriri [Ber06]. Le passage au régime temporel, par rapport au régime harmonique, soulève de nouvelles questions de stabilité qui seront au centre de notre étude.

Cette thèse aborde plus particulièrement le cas bidimensionnel, en présence d'un écoulement laminaire. Par conséquent, si (x, y) désigne un point de l'espace, l'écoulement de référence sera de la forme :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M(y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹Celui-ci est donc solution des équations d'Euler stationnaire.

²La description lagrangienne consiste à suivre dans le temps les particules le long de leurs trajectoires.

³La description eulérienne décrit les évolutions du champ des vitesses.

Nous nous intéressons ici au cas où la vitesse de l'écoulement varie rapidement dans une zone de faible épaisseur, c'est le cas en particulier des couches limites. Notre objectif est de mener une analyse asymptotique afin de remplacer la couche par une condition limite, l'épaisseur de la couche étant considérée petite devant une longueur d'onde caractéristique. La nouvelle condition limite apparaît comme une petite perturbation de la condition au bord et garde la mémoire de la couche limite dont elle représente une idéalisation. Ce genre de modèle est très utile pour la simulation numérique car il évite d'avoir recours à une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche limite. Ces problèmes approchés, pour être utilisables numériquement, devront être bien posés.

Lorsque l'épaisseur de la couche de cisaillement est petite devant la longueur d'onde caractéristique du phénomène, il peut sembler légitime de la négliger purement et simplement. Or il apparaît que le problème ainsi obtenu peut être fortement mal posé. Ainsi dans [Ber06], l'auteur s'intéresse au problème d'une couche de mélange entre deux fluides. Plus précisément, il considère un profil fortement cisailé comme présenté sur la figure 2. Grâce à une analyse asymptotique de type couche limite, il construit un problème de transmission pour l'écoulement discontinu (cf. figure 2), la condition de transmission approchant la couche limite à l'ordre 1 en ε , ε étant la largeur de la couche de mélange, considérée petite devant la longueur d'onde.

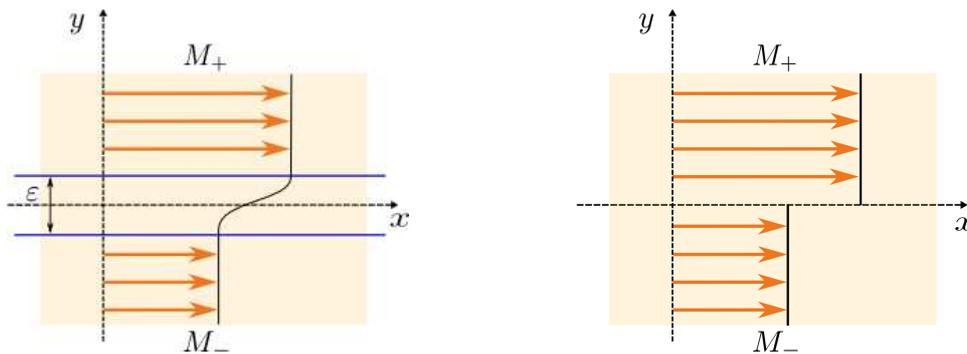


FIG. 2 – Profil fortement cisailé (à gauche), profil discontinu (à droite)

Malheureusement, ce problème approché est fortement mal posé au sens de Kreiss [Kre70], ce qui laisse en suspens l'obtention d'une condition de transmission adaptée et met en évidence les difficultés inhérentes à une telle approche. Celles-ci sont liées à l'existence d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Ces instabilités sont des ondes qui se développent à l'interface entre deux fluides cisailés et peuvent être à l'origine de spectacles que la nature nous invite parfois à contempler :



FIG. 3 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz observée dans la nature : nuages au coucher de soleil

Un phénomène similaire se produit si l'on néglige la couche limite au voisinage d'une paroi dont le traitement acoustique est représenté par une condition d'impédance.

Ces difficultés expliquent en partie pourquoi nous avons débuté ces recherches par l'étude du problème élémentaire du tube mince, avant de nous intéresser aux couches limites au voisinage d'une paroi rigide, puis absorbante. Nous précisons que cette thèse constitue un point de vue de mathématiciens sur le sujet. Nous avons par exemple choisi de ne pas prendre en compte la viscosité ce qui est discutable d'un point de vue physique, compte tenu du fait que nous nous intéressons à des zones de faible épaisseur dans lequel le profil varie brusquement. Toutefois, cette approche est cohérente en tant qu'approche basse fréquence, la taille de la couche de cisaillement étant considérée petite devant la longueur d'onde.

PLAN DE LA THÈSE

Cette thèse s'articule en deux parties, la deuxième reposant sur les résultats de la première.

PARTIE I : Propagation acoustique dans un tuyau mince

Le premier chapitre a pour but d'introduire le cadre de l'étude, ainsi que le modèle mathématique qui va être étudié dans toute la première partie. Nous nous intéressons à la propagation du son dans un tube mince 2D, avec parois rigides et en présence d'un écoulement. Comme présenté ci-dessus, la modélisation d'un tel problème est possible à partir soit des célèbres équations d'Euler linéarisées, soit des équations de Galbrun. Nous montrons dans l'annexe A que ces deux systèmes d'équations sont équivalents. Comme dans le reste de la thèse, nous présentons les deux approches, même si, in fine, on utilisera les modèles issus des équations de Galbrun, qui sont mieux adaptés. Nous considérons un écoulement de référence parallèle suivant l'axe du tube x , ne dépendant que de la variable transverse y .

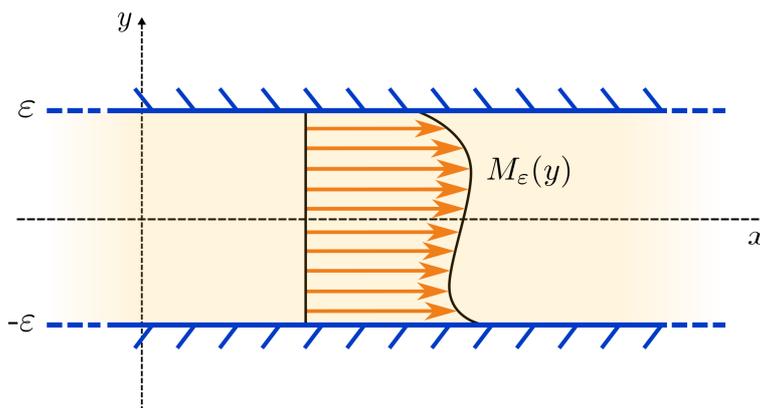


FIG. 4 – Tube en présence d'un écoulement : géométrie du problème.

Par une analyse asymptotique sur la largeur du tube, nous allons dériver à partir des équations de Galbrun (2) (resp. d'Euler linéarisées (1)) un problème mathématique limite (1.9) (resp. (1.18)). Par la suite, nous vérifions que l'analyse asymptotique a conservé l'équivalence entre les deux systèmes d'équations, en montrant l'équivalence entre les deux problèmes limites (1.9) et (1.18).

L'analyse asymptotique menée par rapport à la largeur du tube s'apparente à une approche basse fréquence. On considère que la longueur d'onde λ est grande devant ε . Compte tenu de la simplicité à la fois de l'analyse asymptotique et de l'écriture du problème limite qui en découle, nous retiendrons par la suite le problème limite (1.9) obtenu à partir des équations de Galbrun. Il s'agit d'un modèle mathématique original. En particulier l'équation est scalaire, et même si elle fait intervenir une moyenne sur y , elle ne contient pas de dérivée partielle en y . Nous dirons que le modèle obtenu est quasi-1D, local (différentiel) en x et non local en y . C'est à l'étude mathématique et numérique de ce problème que sera consacrée la totalité de la suite de cette partie.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de stabilité du problème limite (1.9) obtenu au premier chapitre. En raison de sa structure non standard, les résultats classiques, tels que ceux provenant de la théorie des semi-groupes, ne sont pas applicables ici. C'est pourquoi une analyse ad hoc est nécessaire. À l'aide de la transformation de Fourier dans la direction x , l'étude se ramène à la théorie spectrale d'un opérateur borné A . On est amené à introduire la notion de profil stable ou instable : on dira qu'un profil est stable (resp. instable) si le spectre de l'opérateur A qui lui est associé est inclus dans \mathbb{R} (resp. n'est pas inclus dans \mathbb{R}). L'équivalence entre cette notion de stabilité et le caractère bien posé du problème sera l'objet du chapitre suivant. Par la suite, nous montrons que les seuls éléments du spectre de A pouvant être non réels sont des valeurs propres, pour lesquelles nous obtenons une équation caractéristique. Par conséquent, l'étude de stabilité d'un profil se ramène à l'étude de l'existence de solutions non réelles de cette équation caractéristique. En utilisant un processus d'approximation approprié par des profils linéaires par morceaux, pour lesquels l'étude de l'équation caractéristique est simplifiée, on établit des conditions suffisantes de stabilité pour le profil $M(y)$. On exhibe ensuite des profils instables grâce à l'étude de cas particuliers que sont les profils antisymétriques. Finalement, cette étude nous amène à nous intéresser aux instabilités hydrodynamiques en écoulement laminaire. La méthode développée est originale et laisse le champ libre pour l'obtention de résultats inédits. Cette démarche, basse fréquence, est à distinguer de celle de Lafitte, haute fréquence, pour l'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor [CCLR01, HL03].

Le troisième chapitre, plus technique, montre que la stabilité d'un profil, notion définie au chapitre précédent, est bien équivalente au caractère bien posé. Cette démonstration s'appuie sur la résolution du problème (1.9) au moyen de la transformation de Fourier-Laplace. Le calcul de la transformation de Laplace inverse se fait au moyen de déformations de contour et de techniques d'intégration dans le plan complexe. Nous montrons ainsi des estimations a priori de la solution qui montrent le caractère bien posé du problème, et après transformation de Fourier inverse, nous obtenons une expression quasi-explicite de la solution. Pour rendre le calcul de la transformation inverse de Laplace plus accessible, nous aurons été amenés à introduire des hypothèses techniques, voire abstraites, sur le profil. À la fin du chapitre, on présente une classe de profils pour lesquels ces hypothèses sont satisfaites.

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution numérique du problème limite (1.9). La méthode numérique que nous allons développer est basée sur la représentation quasi-explicite de la solution obtenue au chapitre précédent. On débute par la description de la méthode numérique, qui se réduit au calcul numérique de l'expression quasi-explicite de la solution. Nous présentons ensuite les résultats obtenus pour différents profils, agrémentés de commentaires à découvrir. Dans un second temps, nous cherchons à valider numériquement notre modèle. L'idée est de comparer,

numériquement, la solution à celle d'un code 2D du problème de départ dans le tube de largeur 2ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, nous explorons deux approches :

1. Nous utilisons un code de résolution des équations d'Euler linéarisées en 2D, le code Montjoie⁴, développé par Marc Duruflé de l'université de Bordeaux I.
2. Nous dérivons un problème équivalent aux équations de Galbrun, dont la forme permet l'implémentation et la résolution au moyen du code Montjoie. Outre son intérêt local, cette nouvelle représentation peut constituer une bonne alternative pour la résolution des équations de Galbrun.

PARTIE II : Conditions aux limites effectives pour les couches minces

Dans le cinquième chapitre nous nous intéressons à la propagation du son au voisinage d'une paroi rigide, en présence d'une couche limite. Nous nous plaçons en dimension 2, $(x, y) \in \Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \varepsilon[$, et considérons un écoulement de référence laminaire, constant égal à M_∞ pour $y < 0$ et ne dépendant que de y :

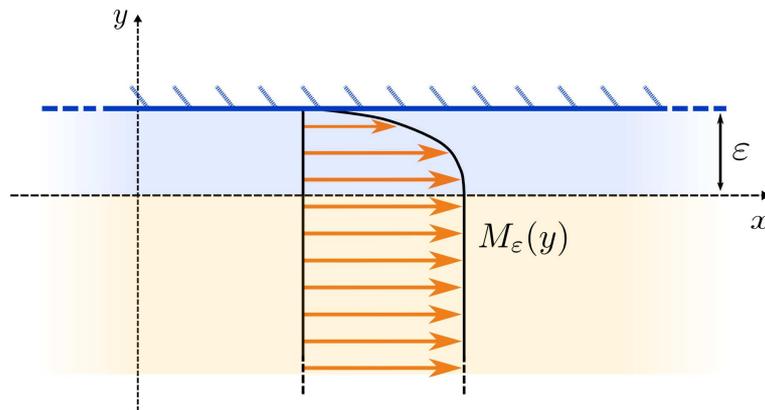


FIG. 5 – Géométrie et position du problème de départ

L'espace $0 < y < \varepsilon$, en bleu sur la figure, représente la couche limite. Nous considérons que l'épaisseur de la couche limite, c'est à dire ε , est petite, ce qui constitue de nouveau une approche basse fréquence. Notre objectif est de dériver un problème limite, quand ε tend vers 0, au moyen d'une analyse asymptotique. Le but est donc de trouver une condition approchée en $y = 0$. Nous commençons par dériver le problème approché en utilisant les équations de Galbrun, cela au moyen d'une analyse asymptotique sur le modèle de celle utilisée au premier chapitre. La condition d'impédance obtenue fait intervenir la résolution du problème limite du tube (1.9), étudié dans la première partie de cette thèse. Nous nous consacrons ensuite à l'étude de ce problème approché. À l'aide de l'analyse de Kreiss, que l'on détaille, on montre que le caractère bien posé du problème limite est "équivalent" à celui du problème (1.9), étudié dans la première partie de cette thèse. Nous complétons l'analyse de ce problème par la recherche d'ondes de surface et par l'étude de la réflexion d'une onde sur la nouvelle paroi impédante. Finalement, nous donnons l'approche eulérienne.

⁴<https://gforge.inria.fr/projects/montjoie>

Le sixième et dernier chapitre constitue une extension du cinquième chapitre au cas d'une paroi absorbante, aussi appelée impédante, du fait qu'elle est modélisée par une relation d'impédance. L'objectif est toujours d'obtenir une condition limite approchée en $y = 0$, qui soit utilisable numériquement. Néanmoins, ce travail revêt une autre importance. En effet, la condition limite, dite de Myers [Mye80], généralement utilisée pour modéliser une paroi impédante en présence d'un écoulement non nul, aboutit à des problèmes mal posés [Bra09], ce qui pose des problèmes quant à la pertinence de son utilisation, surtout numériquement. Signalons que nous avons appris récemment que Brambley et Rienstra menaient dans le même temps des recherches similaires, de manière indépendante. Nous avons d'ailleurs eu l'occasion de les inviter et de les rencontrer au cours d'un workshop, intitulé "Effective boundary conditions in aeroacoustics" et organisé par le laboratoire POEMS.

Dans ce chapitre, nous commençons par introduire les parois absorbantes et leur modélisation par une impédance Z . Nous nous intéressons ensuite au caractère bien posé de la condition de Myers avec écoulement uniforme constant égal à M_∞ . On montre que le problème est mal posé (resp. bien posé) pour M_∞ suffisamment petit (resp. grand). Nous dérivons ensuite le problème approché à partir des équations de Galbrun, au moyen d'une analyse asymptotique. La condition limite ainsi obtenue fait une nouvelle fois intervenir la résolution du problème limite du tube (1.9), étudié dans la première partie de cette thèse. Nous nous consacrons ensuite à l'étude du caractère bien posé de ce problème approché et de la nouvelle condition d'impédance. À l'aide d'une technique de perturbation similaire à celle présentée au chapitre 2 dans la section 2.4, nous parvenons à trouver des conditions sur le profil à l'intérieur de la couche limite qui assurent le caractère bien posé du problème pour Z suffisamment grand. Finalement, nous donnons l'approche eulérienne.

En annexe, nous redémontrons l'équivalence entre les équations d'Euler linéarisées et les équations de Galbrun, dans le cas d'un écoulement laminaire, et nous donnons la relation d'équivalence dans le cas général.

Le deuxième chapitre a fait l'objet d'une publication [BBDJJed], les troisième et quatrième chapitres également [JJed]. La plupart des illustrations numériques présentes dans ce document, hormis celles de la résolution du problème (1.9) mise en place au chapitre 4, nous ont été fournies par Marc Duruflé.

Première partie

**Propagation acoustique dans un tuyau
mince**

DÉRIVATION DU MODÈLE



SOMMAIRE

1.1	APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS DE GALBRUN	13
1.1.1	POSITION DU PROBLÈME / MISE EN ÉQUATIONS	13
1.1.2	DÉRIVATION DU MODÈLE LIMITE	14
1.2	APPROCHE EULÉRIENNE	16
1.3	ÉQUIVALENCE DES DEUX APPROCHES	19
1.4	CONCLUSION	23

Ce court chapitre a pour but d'introduire le cadre de l'étude, ainsi que le modèle mathématique qui va nous occuper tout au long de cette première partie. Nous nous intéressons à la propagation du son dans un tube mince 2D, avec parois rigides et en présence d'un écoulement. Les modèles mathématiques pour l'aéroacoustique (propagation du son en présence d'un écoulement) sont obtenus par linéarisation (les perturbations acoustiques sont petites) des équations de la mécanique des fluides autour d'un écoulement de référence. On obtient alors soit les célèbres équations d'Euler linéarisées soit les équations de Galbrun, qui sont moins connues. Comme nous le montrons dans l'annexe A ces deux systèmes d'équations sont équivalents. Nous avons donc le choix sur le modèle à utiliser. Nous présentons ici les deux approches. Nous considérons un écoulement de référence parallèle suivant l'axe du tube x , ne dépendant que de la variable transverse y . Par une analyse asymptotique sur la largeur du tube, nous allons dériver à partir des équations de Galbrun (2) (resp. d'Euler linéarisées (1)) un problème mathématique limite (1.9) (resp. (1.18)). Par la suite nous vérifions que l'analyse asymptotique a conservé l'équivalence entre les deux systèmes d'équations, en montrant l'équivalence entre les deux problèmes limites (1.9) et (1.18).

L'analyse asymptotique est menée par rapport à la largeur du tube. Afin de couper court à toute protestation naissante, il est important de préciser qu'en réalité, c'est le rapport entre la largeur du tube et la longueur d'onde qui sera considéré petit. En effet, on peut voir l'analyse asymptotique comme une analyse basse fréquence (grande longueur d'onde) plutôt que comme la limite quand la largeur du tube tend vers 0 (action qui ferait tendre le nombre de Reynolds vers 0 et rendrait prépondérante l'influence du terme de viscosité dans les équations). On en profite pour rappeler que la non prise en compte de la viscosité est un parti pris délibéré de notre part.

Compte tenu de la simplicité à la fois de l'analyse asymptotique ainsi que de l'écriture du problème

limite qui en découle, nous retiendrons par la suite le problème limite (1.9) obtenu à partir des équations de Galbrun. Il s'agit d'un modèle mathématique original, plus simple que les équations de départ. En particulier elle est scalaire, et même si elle fait intervenir une moyenne sur y , elle ne contient pas de dérivée partielle en y . Nous dirons que le modèle obtenu est quasi-1D, local (différentiel) en x et non local en y . C'est à l'étude mathématique et numérique de ce problème que sera consacrée la totalité de la suite de cette partie.

1.1 APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS DE GALBRUN

Nous dérivons ici le modèle mathématique que nous allons étudier tout au long de cette première partie.

1.1.1 Position du problème / Mise en équations

Nous considérons un tube 2D droit de hauteur $2\varepsilon > 0$. Le domaine d'intérêt est donc :

$$\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Nous supposons que ce tube est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Par conséquent, si (x, y) désigne un point de Ω_ε , l'écoulement est caractérisé par son profil de Mach (rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son) qui est donné par :

$$\forall \mathbf{y} \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad M_\varepsilon(\mathbf{y}) = M\left(\frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}\right)$$

où $M(y)$, $y \in]-1, 1[$ est un profil de référence vérifiant $M \in L^\infty(]-1, 1[)$. On fait donc le choix de nous restreindre à cette famille de problèmes. Cette hypothèse jouera un rôle fondamental dans l'analyse asymptotique et est un fondement de notre démarche. En effet, cela va nous permettre par un changement de variable de nous ramener au problème, posé dans la géométrie fixe, d'un tube de hauteur 2.

La figure suivante permet de visualiser plus clairement la géométrie du problème :

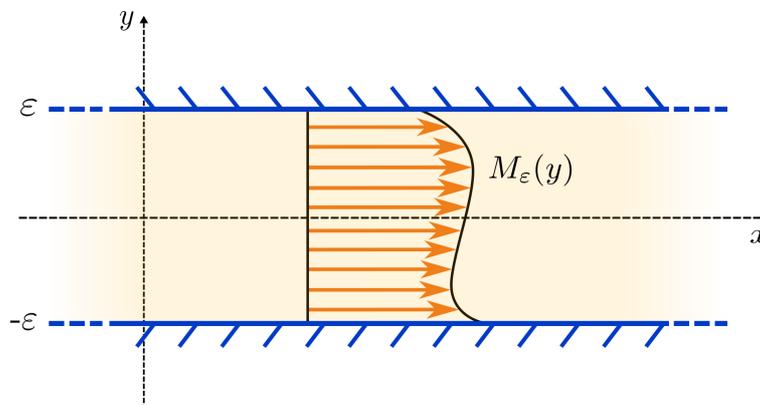


FIG. 1.1 – Tube en présence d'un écoulement : géométrie du problème.

Nous avons vu en introduction que la propagation du son pouvait être modélisée par deux systèmes d'équations équivalents : les équations de Galbrun (2) et les équations d'Euler linéarisées (1). Nous considérons ici les équations de Galbrun. Dans la situation présente,

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_\varepsilon(y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

(2) peut alors se réécrire comme suit :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, \end{cases} \quad (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{U}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t)$ et $\mathbf{V}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t)$ sont respectivement les composantes selon x et selon \mathbf{y} de la perturbation du déplacement Lagrangien.

Il faut compléter ces équations par une condition de glissement sur les parois $\mathbf{y} = \pm \varepsilon$:

$$\mathbf{V}_\varepsilon(x, \pm \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.2)$$

1.1.2 Dérivation du modèle limite

Nous commençons classiquement par effectuer le changement d'échelle $\mathbf{y} = \varepsilon \bar{\mathbf{y}}$ qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe $\Omega = \mathbb{R} \times]-1, 1[$. En posant le changement d'inconnues suivant :

$$\mathbf{U}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = U_\varepsilon\left(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = V_\varepsilon\left(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t\right),$$

les équations de Galbrun (1.1) se réécrivent :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \mathbf{y}} \right) = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

alors que la condition aux bords devient :

$$V_\varepsilon(x, \pm 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

Nous posons le développement asymptotique formel suivant :

$$\begin{cases} U_\varepsilon = U^0 + \varepsilon U^1 + \varepsilon^2 U^2 + \dots, \\ V_\varepsilon = V^0 + \varepsilon V^1 + \varepsilon^2 V^2 + \dots, \end{cases} \quad (1.5)$$

où les fonctions U^j et V^j sont indépendantes de ε . L'objectif est maintenant de trouver le problème satisfait par le couple (U^0, V^0) .

Nous procédons en trois étapes :

(i) Le terme en ε^{-2} de la seconde équation de (1.3) donne :

$$\frac{\partial^2 V^0}{\partial y^2} = 0.$$

En utilisant la condition aux bords qui donne à l'ordre 0 en ε :

$$V^0(x, \pm 1, t) = 0$$

on obtient :

$$V^0(x, y, t) = 0.$$

(ii) Le terme en ε^{-1} de la seconde équation de (1.3) donne :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0,$$

Par conséquent, il existe une fonction $c(x, t)$ indépendante de y telle que

$$\left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) (x, y, t) = c(x, t).$$

En intégrant cette égalité entre -1 et 1 par rapport à y et en utilisant la condition aux bords à l'ordre 1 en ε ($V^1(x, \pm 1, t) = 0$), on obtient l'expression de la fonction c :

$$c(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial U^0}{\partial x}(x, \xi, t) d\xi. \quad (1.6)$$

(iii) Le terme en ε^0 de la première équation de (1.3) donne :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0.$$

On reconnaît la définition de la fonction c , ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^0 - \frac{\partial c}{\partial x} = 0.$$

En utilisant l'expression (1.6) de c obtenue précédemment on aboutit à :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^0 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 U^0(x, \xi, t) d\xi = 0. \quad (1.7)$$

qui est l'équation recherchée, satisfaite par U^0 .

Nous avons donc montré que $V^0 = 0$ et trouvé l'équation (1.7) vérifiée par U^0 . C'est sur cette équation que nous allons nous concentrer. Dorénavant on oublie l'exposant 0 ; on s'intéresse donc au problème d'évolution suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U(x, y, t) : \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-1}^1 U(x, \xi, t) d\xi = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0, \\ U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \\ \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = U_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]. \end{array} \right.$$

où (U_0, U_1) sont les conditions initiales.

Cette équation est bien entendu plus simple que le système de départ (ce qui est la moindre des choses). En particulier elle est scalaire, et même si elle fait intervenir une moyenne sur y , elle ne contient pas de dérivée partielle en y . Nous dirons que le modèle obtenu est quasi-1D, local (différentiel) en x et non local en y .

Nous introduisons maintenant une notation que nous retrouverons tout au long de cette thèse. On note E l'opérateur de moyenne en y défini par :

$$\begin{aligned} L^2([-1, 1]) &\longmapsto L^2([-1, 1]) \\ E : U &\longmapsto EU = E[U] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U(y) dy \end{aligned} \quad (1.8)$$

Remarque 1.1 On utilisera en général la notation EU . Lorsqu'il y aura un quelconque risque de confusion nous utiliserons la notation $E[U]$.

Remarque 1.2 Afin de définir E comme un opérateur de $L^2([-1, 1])$, nous considérons EU , qui ne dépend a fortiori pas de y , malgré tout comme un élément de $L^2([-1, 1])$.

Alors le problème d'intérêt peut se réécrire :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } U(x, y, t) : \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \\ &\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U - \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0, \\ &U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \\ &\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = U_1(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.2 APPROCHE EULÉRIENNE

Dans la section précédente nous avons utilisé les équations de Galbrun pour modéliser le problème de départ. Nous avons le choix de considérer à leur place les équations d'Euler linéarisées. C'est ce que nous faisons ici. Nous allons, de la même manière que pour les équations de Galbrun, dériver un problème limite. Sous les hypothèses faites sur le profil dans la partie précédente, les équations d'Euler linéarisées (1) prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_\varepsilon}{\partial x} + M'_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{v}_\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_\varepsilon}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \mathbf{p}_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \frac{\partial \mathbf{p}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0, \quad (1.10)$$

complétées par les conditions de glissement :

$$\mathbf{v}_\varepsilon(x, \pm\varepsilon, t) = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Les inconnues $(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon)$ représentent la perturbation du champ de vitesse eulérien et \mathbf{p}_ε la perturbation de pression dans le fluide. Comme précédemment nous commençons par effectuer le changement d'échelle $\mathbf{y} = \varepsilon \mathbf{y}$ qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe $\Omega = \mathbb{R} \times]-1, 1[$. En posant le changement d'inconnues suivant :

$$\mathbf{u}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = u_\varepsilon\left(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t\right), \quad \mathbf{v}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = v_\varepsilon\left(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t\right), \quad \text{et } \mathbf{p}_\varepsilon(x, \mathbf{y}, t) = p_\varepsilon\left(x, \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon}, t\right),$$

les équations (1.10) se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} M'(y) v_\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

alors que la condition aux bords devient :

$$v_\varepsilon(x, \pm 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Nous posons le développement asymptotique formel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \dots, \\ v_\varepsilon = v^0 + \varepsilon v^1 + \varepsilon^2 v^2 + \dots, \\ p_\varepsilon = p^0 + \varepsilon p^1 + \varepsilon^2 p^2 + \dots, \end{array} \right. \quad (1.12)$$

où les fonctions u^j , v^j et p^j sont indépendantes de ε . L'objectif est maintenant de trouver le problème satisfait par le triplet (u^0, v^0, p^0) .

Nous procédons en deux étapes :

(i) À l'ordre -1 en ε (1.11) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} M'(y) v^0 = 0, \\ \frac{\partial p^0}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0.$$

On utilise les deux dernières équations. Ainsi p^0 est indépendant de y . De plus, on obtient $v^0 = 0$ puisque c'est une fonction indépendante de y , qui vaut 0 en $y = \pm 1$ (la condition aux bords à l'ordre 0 donne $v^0(x, \pm 1, t) = 0$). La première équation est alors automatiquement satisfaite.

(ii) À l'ordre suivant en ε (l'ordre 0) (1.11) donne :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) u^0 + \frac{\partial p^0}{\partial x} + M'(y) v^1 = 0, \\ \frac{\partial p^1}{\partial y} = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) p^0 + \frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^1}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.13)$$

où on a utilisé $v^0 = 0$ dans la deuxième équation. Notre but est d'éliminer v^1 des première et troisième équations.

Nous allons utiliser le fait que la condition aux bords à l'ordre 1 en ε s'écrit $v^1(x, \pm 1, t) = 0$. Ainsi, en appliquant l'opérateur E , défini par (1.8), à la troisième équation de (1.13), et en se rappelant que p^0 est indépendant de y on obtient l'équation suivante vérifiée par p^0 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + E[M] \frac{\partial}{\partial x} \right) p^0 + \frac{\partial}{\partial x} E u^0 = 0. \quad (1.14)$$

Nous allons maintenant éliminer v^1 dans la première équation de (1.13). Pour cela on va obtenir une expression de v^1 grâce à la troisième équation de (1.13), expression que nous allons injecter dans la première équation de (1.13). En intégrant cette troisième équation entre -1 et y (par abus de notation nous gardons le même y) par rapport à y , et en se rappelant que $v^1(x, -1, t) = 0$ et que p^0 est indépendant de y , on obtient :

$$v^1 = -(y+1) \frac{\partial p^0}{\partial t} - \left(\int_{-1}^y M(\xi) d\xi \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^y u^0(., \xi, .) d\xi,$$

qui se réécrit en utilisant l'équation (1.14) sur p^0 :

$$\begin{aligned} v^1 &= (y+1) \left[E[M] \frac{\partial p^0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} E u^0 \right] - \left(\int_{-1}^y M(\xi) d\xi \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^y u^0(., \xi, .) d\xi, \\ &= \left((y+1)E[M] - \int_{-1}^y M(\xi) d\xi \right) \frac{\partial p^0}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((y+1)E u^0 - \int_{-1}^y u^0(., \xi, .) d\xi \right), \end{aligned}$$

qui se réécrit comme suit :

$$v^1 = (HM) \frac{\partial p^0}{\partial x} + H \frac{\partial u^0}{\partial x}, \quad (1.15)$$

où l'on a introduit l'opérateur H de $L^2(]-1, 1[)$ défini par :

$$\begin{aligned} L^2(]-1, 1[) &\mapsto L^2(]-1, 1[) \\ H : U &\mapsto HU(y) = H[U](y) = (y+1)EU - \int_{-1}^y U(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (1.16)$$

Remarque 1.3 On utilisera en général la notation HU . Lorsqu'il y aura un quelconque risque de confusion nous utiliserons la notation $H[U]$.

Remarque 1.4 On peut réécrire $HU(y)$ sous une forme peut être plus parlante :

$$HU(y) = \int_{-1}^y [EU - U(\xi)] d\xi,$$

de telle sorte que HU est la primitive de $EU - U$ qui s'annule en -1 . $EU - U$ étant une fonction à moyenne nulle on a $HU(1) = 0$ pour tout $U \in L^2([-1, 1])$. Si U est une fonction constante alors $HU = 0$.

Si on injecte maintenant l'expression (1.15) de v^1 dans la première équation de (1.13) on obtient après avoir réordonné les termes :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (M(y) + M'(y)H) \frac{\partial}{\partial x} \right) u^0 + (1 + M'(y)H[M]) \frac{\partial p^0}{\partial x} = 0. \quad (1.17)$$

Remarque 1.5 L'obtention du problème limite s'est avérée ici sensiblement plus compliquée qu'avec les équations de Galbrun.

En résumé, on a montré que $v^0 = 0$. Le problème d'évolution de Cauchy limite vérifié par u^0 et p^0 , composé des équations (1.14) et (1.17), peut se réécrire en oubliant les exposants :

<p>Trouver $u(x, y, t) : \mathbb{R} \times [-1, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $p(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$</p> $\left(\frac{\partial}{\partial t} + (M(y) + M'(y)H) \frac{\partial}{\partial x} \right) u + (1 + M'(y)H[M]) \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t > 0,$ $\left(\frac{\partial}{\partial t} + E[M] \frac{\partial}{\partial x} \right) p + \frac{\partial}{\partial x} Eu = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$ $u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1],$ $p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$	(1.18)
---	--------

On voit en particulier que l'écriture du problème limite de type eulérien est moins compacte et plus compliquée que celle de type Galbrun (1.9). Ceci explique notre choix de nous consacrer par la suite au problème (1.9), obtenu à partir des équations de Galbrun dans la section précédente. On observe que la pression limite p ne dépend pas de y . De plus, p est convecté dans la direction horizontale x par la moyenne de M , EM .

1.3 ÉQUIVALENCE DES DEUX APPROCHES

Nous avons montré dans l'annexe A l'équivalence entre les équations de Galbrun et celles d'Euler linéarisées. Nous voulons vérifier que notre méthode asymptotique a conservé cette équivalence. En clair, nous voulons montrer l'équivalence entre les deux problèmes limites (1.9) et (1.18), ce qui n'est pas évident. Pour cela il nous faut obtenir une relation d'équivalence entre les inconnues des deux problèmes limites. Plutôt que de la sortir du chapeau, nous expliquons la démarche qui nous y a mené. Nous allons la déduire de la relation entre les variables d'Euler et de Galbrun (A.14) montrée dans l'annexe. Cette dernière se réécrit comme suit dans le cadre présent :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_\varepsilon = \partial_t \mathbf{U}_\varepsilon + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \partial_x \mathbf{U}_\varepsilon - M'_\varepsilon(\mathbf{y}) \mathbf{V}_\varepsilon, \\ \mathbf{v}_\varepsilon = \partial_t \mathbf{V}_\varepsilon + M_\varepsilon(\mathbf{y}) \partial_x \mathbf{V}_\varepsilon, \\ \mathbf{p}_\varepsilon = -(\partial_x \mathbf{U}_\varepsilon + \partial_y \mathbf{V}_\varepsilon), \end{cases} \quad (x, \mathbf{y}) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0.$$

Après le changement de variable $\mathbf{y} \rightarrow \varepsilon y$ et en utilisant les développements formels (1.5) et (1.12) on obtient :

- (i) à l'ordre -1 en ε : $V^0 = 0$.
- (ii) à l'ordre 0 en ε :

$$\begin{cases} u^0 = \partial_t U^0 + M(y)\partial_x U^0 - M'(y)V^1, \\ v^0 = \partial_t V^0 + M(y)\partial_x V^0, \\ p^0 = -(\partial_x U^0 + \partial_y V^1). \end{cases} \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0.$$

Puisque $V^0 = 0$, on obtient de la deuxième équation $v^0 = 0$, ce qui est en accord avec ce que nous avons montré dans la section 1.2. Il reste donc finalement :

$$\begin{cases} u^0 = \partial_t U^0 + M(y)\partial_x U^0 - M'(y)V^1, \\ p^0 = -(\partial_x U^0 + \partial_y V^1). \end{cases} \quad (1.19)$$

Il nous reste à éliminer V^1 . Si on se souvient de ce qui a été fait dans la section 1.1, on a la relation suivante tirée de (1.6) :

$$\partial_x U^0 + \partial_y V^1 = \partial_x E U^0. \quad (1.20)$$

Si on intègre cette relation par rapport à y entre -1 et y (on utilise encore y par abus de notation), on obtient, en se souvenant que $V^1(x, -1, t) = 0$, l'expression suivante de V^1 :

$$V^1 = (y + 1)\partial_x E U^0 - \int_{-1}^y \partial_x U^0(., \xi, .) d\xi,$$

qui s'exprime à l'aide de l'opérateur H défini par (1.16) :

$$V^1 = \partial_x H U^0.$$

Remarque 1.6 Cette expression ressemble à celle que nous avons obtenue dans les variables eulériennes, (1.15). Elle est plus simple et ne fait pas intervenir l'écoulement.

En utilisant cette expression mais aussi (1.20), (1.19) devient :

$$\boxed{\begin{cases} u = \partial_t U + M(y)\partial_x U - M'(y)\partial_x H U, \\ p = -\partial_x E U, \end{cases}} \quad (1.21)$$

où on a oublié les exposants des inconnues. C'est grâce à cette relation entre les variables limites de Galbrun et d'Euler, que nous allons montrer l'équivalence entre les deux problèmes limites (1.9) et (1.18). Avant cela, nous montrons deux résultats qui nous seront utiles dans les démonstrations :

1. Comme $HU(-1) = HU(1) = 0$ on a par intégration par parties :

$$E[M' H U] = -E[M(EU - U)] = E[MU] - E[M]E[U]. \quad (1.22)$$

2. Si u et p sont définis par (1.21) alors on a :

$$Hu + H[M]p = \partial_t H U + \partial_x H[MU] - \partial_x H[M' H U] - H[M]\partial_x E U. \quad (1.23)$$

On va maintenant intégrer par parties le terme $H[M' HU]$. On a par définition de l'opérateur H :

$$H[M' HU] = (1 + y)E[M' HU] - \int_{-1}^y M'(\xi) HU(\xi) d\xi.$$

On va intégrer par parties chacun des deux termes. En se souvenant que $\partial_y HU = EU - U$ et que $HU(1) = HU(-1) = 0$, on obtient par des calculs que l'on présente en omettant quelques détails que l'on laisse généreusement au lecteur :

$$\begin{aligned} & H[M' HU] \\ &= -(1 + y)E[M(EU - U)] + \int_{-1}^y M(\xi) (EU - U(\cdot, \xi, \cdot)) d\xi - MHU \\ &= -(1 + y)E[M]EU + (1 + y)E[MU] + EU \int_{-1}^y M(\xi) d\xi - \int_{-1}^y M(\xi) U(\cdot, \xi, \cdot) d\xi - MHU \\ &= -H[M]EU + H[MU] - MHU. \end{aligned}$$

En injectant cette expression dans (1.23) on obtient :

$$Hu + H[M]p = (\partial_t + M\partial_x)HU. \quad (1.24)$$

Ces deux résultats (1.22) et (1.24) vont nous servir pour montrer l'équivalence entre les deux problèmes limites. Dans un premier temps, nous montrons la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Soit U solution de (1.9) avec comme condition initiale :*

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, 0) = U_1(x, y),$$

alors (u, p) défini par (1.21) est solution de (1.18) avec comme condition initiale :

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = U_1 + M(y)\partial_x U_0 - M'(y)\partial_x HU_0, \\ p(x, 0) = -\partial_x EU_0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. • En appliquant l'opérateur E à la première équation de (1.21) on a :

$$Eu = \partial_t EU + E\partial_x [MU] - \partial_x E[M' HU],$$

où on a utilisé la commutativité des opérateurs ∂_x et E . Cette équation devient en utilisant (1.22) :

$$\begin{aligned} Eu &= \partial_t EU + \partial_x E[MU] + E[M]\partial_x EU - \partial_x E[MU], \\ &= \partial_t EU + E[M]\partial_x EU. \end{aligned}$$

On dérive alors cette expression par x ce qui donne :

$$\partial_x Eu = \partial_t \partial_x EU + E[M]\partial_x^2 EU.$$

En utilisant la définition (1.21) de p on obtient :

$$\partial_t p + E[M]\partial_x p + \partial_x Eu = 0,$$

qui est la deuxième équation de (1.18).

- Pour conclure la démonstration il nous reste à montrer que u vérifie la première équation de (1.18). Pour cela on applique l'opérateur $\partial_t + M\partial_x$ à la définition de u (la première équation de (1.21)) :

$$(\partial_t + M\partial_x)u = (\partial_t + M\partial_x)^2U - M'(\partial_t + M\partial_x)\partial_x HU.$$

En utilisant (1.9) cette équation devient :

$$(\partial_t + M\partial_x)u = \partial_x^2 EU - M'(\partial_t + M\partial_x)\partial_x HU,$$

ce qui donne en utilisant la définition de p :

$$(\partial_t + M\partial_x)u + \partial_x p = -M'\partial_x(\partial_t + M\partial_x)HU. \quad (1.25)$$

En utilisant (1.24) on obtient facilement la première équation de (1.18). Ceci conclut la démonstration de la proposition. □

On va maintenant donner une sorte de réciproque à cette proposition :

Proposition 1.2 *Soit (u, p) solution de (1.18) avec comme donnée initiale (u_0, p_0) . Si U est solution de l'équation suivante :*

$$\partial_t U + M(y)\partial_x U - M'(y)\partial_x HU = u, \quad (1.26)$$

associée à la donnée initiale :

$$U(x, y, 0) = U_0(x, y) := \phi_0,$$

où ϕ_0 est une des solutions du problème¹ :

$$-\partial_x E\phi_0 = p_0 \text{ dans } \mathbb{R} \times [-1, 1]. \quad (1.27)$$

Alors U est solution de (1.9) avec comme conditions initiales $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$, et $\partial_t U(x, y, 0) = U_1(x, y)$ où :

$$U_1 = u_0 - M\partial U_0 + M'\partial_x HU_0.$$

DÉMONSTRATION. • Nous commençons par montrer que $p = -\partial_x EU$. Pour cela on va montrer que $\psi := p + \partial_x EU$ est solution d'une équation de transport sans second membre et à condition initiale nulle, ce qui prouvera qu'elle est nulle. On a :

$$(\partial_t + E[M]\partial_x)\psi = (\partial_t + E[M]\partial_x)p + (\partial_t + E[M]\partial_x)\partial_x EU,$$

que l'on peut transformer comme suit à l'aide de (1.26) :

$$(\partial_t + E[M]\partial_x)\psi = (\partial_t + E[M]\partial_x)p + \partial_x E[u - M\partial_x U + M'\partial_x HU + E[M]\partial_x U].$$

En utilisant (1.22), la relation précédente devient :

$$(\partial_t + E[M]\partial_x)\psi = (\partial_t + E[M]\partial_x)p + \partial_x E[u] = 0,$$

en tenant compte de la deuxième équation de (1.18). On conclut que $\psi = 0$ en remarquant que :

$$\psi(x, 0) = p(x, 0) + \partial_x EU(x, 0) = p_0 + \partial_x EU_0 = 0,$$

compte tenu de (1.27).

¹Si on cherche ϕ_0 indépendant de y alors l'équation se réécrit $-\partial_x \phi_0 = p_0$ et ϕ_0 n'est autre qu'une primitive de $-p_0$ et est donc définie à une constante près.

- On va maintenant montrer que U est solution de (1.9). On commence par appliquer l'opérateur $\partial_t + M\partial_x$ à (1.26) ce qui donne :

$$(\partial_t + M\partial_x)^2 U - (\partial_t U + M\partial_x)M'\partial_x HU = (\partial_t + M\partial_x)u,$$

qui devient en utilisant la première équation de (1.18)

$$(\partial_t + M\partial_x)^2 U = (\partial_t + M\partial_x)M'\partial_x HU - M'H\partial_x u - (1 + M'H[M])\partial_x p. \quad (1.28)$$

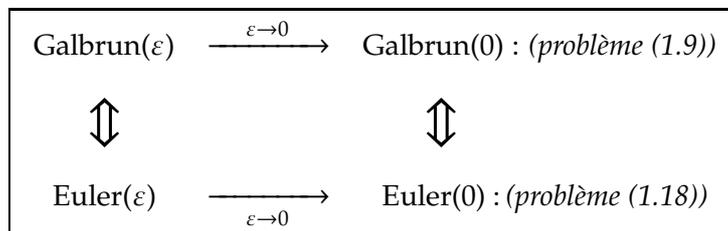
Puisque nous venons de montrer que $p = -\partial_x EU$, u et p vérifient bien (1.21) et la relation (1.24) est valable ici. Grâce à cette dernière (1.28) devient :

$$(\partial_t + M\partial_x)^2 U = -\partial_x p = \partial_x^2 EU,$$

ce qui conclut la démonstration. □

1.4 CONCLUSION

Nous avons donc dérivé deux problèmes limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$, un premier (1.9) issu des équations de Galbrun et un deuxième (1.18) issu des équations d'Euler linéarisées. Nous avons ensuite montré l'équivalence entre ces deux problèmes limites à l'aide de l'équivalence entre les deux systèmes de Galbrun et d'Euler linéarisé montrée dans l'annexe A. C'est ce que résume le schéma suivant :



Nous allons dans la suite étudier le problème (1.9), que nous avons retenu pour la simplicité de son obtention ainsi que de son écriture.

SOMMAIRE

2.1	MOTIVATION ET PREMIÈRES REMARQUES	28
2.2	RÉDUCTION À UN PROBLÈME SPECTRAL	28
2.3	PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU SPECTRE	32
2.3.1	REMARQUES PRÉLIMINAIRES	32
2.3.2	SPECTRE ESSENTIEL	35
2.3.3	VALEURS PROPRES DE A	39
2.3.4	QUELQUES CAS PARTICULIERS SIMPLES	42
2.4	CONDITIONS DE STABILITÉ POUR DES PROFILS CONTINUS	47
2.4.1	MÉTHODOLOGIE	47
2.4.2	LES PROFILS LINÉAIRES PAR MORCEAUX	48
2.4.3	LES RÉSULTATS	54
2.5	CONDITIONS D'INSTABILITÉ POUR DES PROFILS ANTISYMMÉTRIQUES	58
2.5.1	UNE PREMIÈRE CONDITION D'INSTABILITÉ	59
2.5.2	APPLICATION À DES PROFILS SINGULIERS	65
2.5.3	UNE TECHNIQUE DE PERTURBATION	67
2.5.4	APPLICATION À DES PROFILS RÉGULIERS	69
2.6	RÉSULTATS D'INSTABILITÉ HYDRODYNAMIQUE	72
2.6.1	L'APPROCHE MODALE	72
2.6.2	LA TECHNIQUE DE PERTURBATION	73
2.6.3	LES RÉSULTATS	77

Ce chapitre est consacré à l'étude de stabilité du problème limite (1.9) obtenu précédemment. En raison de sa structure non standard, les résultats classiques (ceux provenant de la théorie des semi-groupes par exemple¹) ne sont pas applicables ici pour des raisons que l'on détaillera plus tard. C'est pourquoi une analyse ad hoc semble nécessaire. À l'aide de la transformation de Fourier dans la direction x , l'étude se ramène à la théorie spectrale d'un opérateur borné A (voir section 2.2). En dépit d'une apparente simplicité, le problème a des propriétés surprenantes dues au fait que A n'est pas normal. Classiquement, si le spectre de A n'est pas inclus dans

¹Voir par exemple [Paz83].

\mathbb{R} , alors le problème est mal posé. Compte tenu de la non normalité de A , la réciproque n'est pas immédiate. Nous supposons dans ce chapitre qu'elle est vraie, sa démonstration est l'objet du chapitre suivant. Le spectre de A dépend fortement du profil $M(y)$, ce qui nous amènera à introduire la notion de profil stable et instable (voir définition 2.1) : on dira qu'un profil est stable (resp. instable) si le spectre de l'opérateur A qui lui est associé est inclus dans \mathbb{R} (resp. n'est pas inclus dans \mathbb{R}). Par la suite, dans la section 2.3 nous montrons que les seuls éléments du spectre de A pouvant être non réels sont des valeurs propres, pour lesquelles nous obtenons une équation caractéristique, (2.4). Par conséquent, l'étude de stabilité d'un profil se ramène à l'étude de l'existence de solutions non réelles de cette équation caractéristique. Cela est illustré à la fin de la section 2.3 par l'étude de trois cas élémentaires et au moyen d'une simulation numérique. Nous étudions les cas élémentaires d'écoulements de référence, uniforme, linéaire et enfin bi-couches. Dans la section 2.4 on établit des conditions suffisantes de stabilité pour le profil $M(y)$. Cela est fait en utilisant un processus d'approximation approprié par des profils linéaires par morceaux, pour lesquels l'étude de l'équation caractéristique (2.4) est simplifiée. Le principal résultat de cette section sera le théorème 2.3 dont les résultats seront comparés à ceux existant dans le cas incompressible. Dans la section 2.5, on exhibe des profils instables grâce à l'étude de cas particuliers que sont les profils antisymétriques. Bien que ces résultats aient leur intérêt propre, c'est la méthode qui doit attirer votre attention. Nous insistons sur son originalité, qui en plus de faire son charme, laisse le champ libre pour l'obtention de résultats inédits.

Finalement, le contenu de la section 2.6 est un produit dérivé de notre analyse : dans le cas de profils instables, on montre à l'aide d'une technique de perturbation, que le caractère mal posé du modèle limite (1.9) entraîne une instabilité du problème de départ (1.1). En effet, on montre qu'il y a alors croissance exponentielle en temps de la solution (cf. théorème 2.7). En ce sens, ce chapitre et plus précisément la section 2.6 fournit une contribution à l'analyse des instabilités hydrodynamiques en écoulement laminaire. Le domaine de la stabilité hydrodynamique a une très longue histoire et remonte au XIX^{ème} siècle avec Reynolds et Lord Rayleigh. Le célèbre critère de Rayleigh peut s'énoncer de la manière suivante : une condition nécessaire d'instabilité est l'existence d'un point d'inflexion pour l'écoulement de référence (noté ici $M(y)$). En raison de son rôle primordial dans de nombreuses recherches, il existe une très vaste littérature sur le sujet. Concernant les instabilités en présence d'un écoulement laminaire, on peut citer essentiellement Drazin & Reid [DR04], ainsi que plus récemment le livre de Schmid & Henningson [SH01] qui fournit un très bon résumé des principaux résultats. Parmi les études plus récentes, on peut citer Huerre qui s'intéresse notamment à la nature de ces instabilités (cf. [HM85]). Les résultats sont généralement établis sur les équations linéarisées, et bien que le domaine de validité de ces équations est vite atteint quand les instabilités grandissent (les petites perturbations ne l'étant plus, les effets non linéaires deviennent prédominants), ces résultats sont importants dans la détection des mécanismes d'instabilité et dans l'identification des types de perturbations dominantes. Parfois, il est même possible de déduire de ces instabilités des modèles linéarisés, des instabilités non-linéaires (cf. les travaux de Grenier par exemple [Gre00, Gre04]). À notre connaissance, la plupart des résultats sont obtenus dans le cas incompressible. On peut citer tout de même [FP69, JM72] pour des cas très particuliers en compressible ; on peut également citer [RV08] (cf. l'annexe) et [SH01] (cf. pages 241-242) dans lesquels les auteurs dérivent un critère de type Rayleigh pour les équations d'Euler linéarisées. En fait dans [SH01] les auteurs font référence à des travaux plus anciens comme ceux de Lin et Lees [LL46] pour des résultats similaires au critère de Rayleigh, dans le cas compressible. On peut également citer Mack pour une approche plus numérique [Mac84]. Malgré ces quelques résultats dans le cas compressible, la littérature sur le sujet reste assez pauvre. C'est pourquoi nous pensons que nos résultats sont nouveaux, bien

qu'il y ait des similarités avec le cas incompressible (cf. la discussion suivant le théorème 2.3). Techniquement, ce qui fait la simplicité de l'étude dans le cas incompressible, c'est l'existence d'un potentiel de vitesse qui mène à l'étude d'une simple équation différentielle scalaire, connue sous le nom d'équation de Rayleigh. Dans un certain sens, notre modèle basse fréquence nous fournit une telle équation. Nous avons utilisé une approche basse fréquence, au contraire de Lafitte (cf. [CCLR01, HL03]) qui utilise une approche haute fréquence pour l'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'un article, [BBDJJed].

2.1 MOTIVATION ET PREMIÈRES REMARQUES

Le présent chapitre ainsi que le suivant portent sur l'analyse de stabilité et du caractère bien posé de (1.9). Prouver la stabilité (dans un sens qui reste à définir) de (1.9), qui est fortement reliée au comportement du profil $M(y)$, a au moins deux sources de motivation :

1. Le caractère bien posé de (1.9) est nécessairement requis si (1.9) est utilisé comme une approximation du problème initial (1.3).
2. Des propriétés de stabilité de (1.3) (ou de manière équivalente de (1.1)) peuvent être déduites des propriétés de (1.9). En particulier, on a l'intuition que si (1.9) est instable alors (1.3) le sera aussi, au moins à basse fréquence.

Le problème limite (1.9) est-il bien posé ? Deux observations laissent espérer une fin heureuse :

1. On remarque que (1.9) est bien posé dans le cas d'un écoulement uniforme ($M(y) = M$). En effet, en appliquant dans ce cas l'opérateur de moyenne à l'équation, on montre que $\psi = EU$ est solution de l'équation des ondes convectées :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

dont on peut facilement montrer le caractère bien posé. On obtient alors pour chaque y la fonction $(x, t) \rightarrow U(x, y, t)$ en résolvant l'équation de transport au carré avec second membre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 U(\cdot, y, \cdot) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

2. En l'absence du terme de couplage

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EU,$$

le système apparaît comme une famille d'équations de transport au carré découplées, et qui sont bien posées.

En dépit de l'optimisme suscité par ces observations, nous allons montrer dans la suite que la stabilité fait défaut pour certains profils.

2.2 RÉDUCTION À UN PROBLÈME SPECTRAL

Une approche classique pour l'analyse de stabilité d'un problème physique qui est invariant par translation dans une coordonnée est la détermination des modes qui sont des solutions non triviales de la forme (où la fonction de y est abusivement notée U) :

$$U(x, y, t) = U(y) \exp i(\omega t - kx), \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Un mode est dit instable si $\Im \omega < 0$, il est alors exponentiellement croissant en temps². La justification d'une telle analyse repose sur la transformation de Fourier en x (voir la remarque 2.2 ou pour plus de précisions théoriques [DL88] par exemple). En injectant (2.1) dans (1.9) on obtient :

$$-(\omega - Mk)^2 U + k^2 EU = 0,$$

²Pour plus de précisions sur les différentes notions d'instabilités, voir [DR04]

où l'on rappelle que E est l'opérateur de moyenne en y défini par (1.8). L'équation précédente peut se réécrire comme un problème aux valeurs propres en posant tout d'abord $\omega = k\lambda$, ce qui mène à

$$-(\lambda - M)^2 U + EU = 0,$$

puis en introduisant $\dot{U} = (\lambda - M)U$ on peut réécrire l'équation sous la forme du système suivant :

$$\begin{cases} MU + \dot{U} = \lambda U, \\ EU + M\dot{U} = \lambda \dot{U}. \end{cases} \quad (2.2)$$

On est ainsi naturellement amené à introduire l'opérateur borné³ A de $L^2(]-1, 1[)^2$ défini par :

$$A \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & I \\ E & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

auquel cas (2.2) se réécrit

$$A \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1 *La notation matricielle de l'opérateur semble claire. Néanmoins nous précisons que la notation M est à comprendre comme l'opérateur de multiplication par M , I désigne bien entendu l'opérateur identité de $L^2(]-1, 1[)$.*

Cela nous amène tout naturellement à nous intéresser au spectre de A . En particulier les modes instables sont reliés au spectre non réel.

Remarque 2.2 *Une autre façon de voir le problème consiste à appliquer la transformation de Fourier en x , que l'on définit comme étant un opérateur unitaire agissant sur $L^2(\mathbb{R})$, défini pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ par*

$$(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Si l'on applique cet opérateur au problème d'évolution (1.9) alors pour chaque k , la fonction $\widehat{U} : (y, t) \rightarrow \widehat{U}(k, y, t)$ satisfait l'équation d'évolution :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik M(y) \right)^2 \widehat{U} - k^2 E \widehat{U} = 0,$$

que l'on peut transformer en un système du premier ordre en temps en introduisant :

$$\widehat{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} -ik \widehat{U} \\ \frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} + ik M(y) \widehat{U} \end{pmatrix},$$

auquel cas on vérifie aisément que, pour chaque k , la fonction $t \rightarrow \widehat{\mathbf{U}}(k, \cdot, t)$ est solution du problème d'évolution :

$$\frac{d\widehat{\mathbf{U}}}{dt} + ik A \widehat{\mathbf{U}} = 0.$$

³cf. lemme 2.1.

On est alors amené à introduire, A étant borné, le semi-groupe :

$$e^{-iktA}.$$

On relie donc, de manière classique, le caractère bien posé à l'absence de spectre non réel⁴. En fait, A n'étant pas normal⁵, l'équivalence entre le caractère bien posé de (1.9) et l'absence de spectre non réel de A n'est pas évidente, et il existe même des contre-exemples pour des opérateurs non normaux dans d'autres applications. En effet, il est clair que le problème est mal posé aussitôt qu'il existe des modes instables (un mode instable est une solution de la forme (2.1) avec $\lambda \notin \mathbb{R}$). C'est ce qu'exprime le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Si le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A n'est pas inclus dans \mathbb{R} , alors le problème d'évolution (1.9) est fortement mal posé dans L^2 .*

DÉMONSTRATION. Puisque $\sigma(A)$ n'est pas inclus dans \mathbb{R} et que le spectre est symétrique par rapport à l'axe réel, il existe $\lambda^* \in \sigma(A)$ tel que $\Im(\lambda^*) > 0$. Nous verrons plus tard qu'il s'agit nécessairement d'une valeur propre. On choisit les conditions initiales du problème d'évolution (1.9) de telle sorte que $\widehat{\mathbf{U}}_0$ soit un vecteur de A associé à la valeur propre λ^* . On a alors :

$$\widehat{\mathbf{U}} = e^{-iktA} \widehat{\mathbf{U}}_0 = e^{-ikt\lambda^*} \widehat{\mathbf{U}}_0.$$

En particulier :

$$|\widehat{\mathbf{U}}| = e^{kt\Im(\lambda^*)} |\widehat{\mathbf{U}}_0|,$$

et le problème est clairement fortement mal posé. □

En revanche la réciproque n'est pas immédiate. Au moyen d'une analyse de Fourier, le caractère bien posé de (1.9) peut être obtenu comme une conséquence d'une estimation uniforme du semi-groupe⁶ e^{-iktA} pour $k \in \mathbb{R}$, la difficulté étant d'obtenir cette borne uniforme. Pour bien fixer les idées, la réciproque pourrait s'énoncer de la manière suivante :

Si le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A est inclus dans \mathbb{R} , alors le problème d'évolution (1.9) est bien posé dans L^2 .

La démonstration de cette réciproque sera l'objet du chapitre 3, mais sera limitée à certains cas. Pour cela on utilisera une approche différente, reposant sur la transformation de Fourier-Laplace et des techniques d'intégration dans le plan complexe.

Comme le lecteur peut s'en douter et comme nous allons le voir dans la suite, la nature du spectre dépend fortement du profil $M(y)$, la discussion précédente nous amène à introduire la définition suivante :

Définition 2.1 *Un profil $M(y)$ est dit **stable** (resp. **instable**) si $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (resp. $\sigma(A) \not\subset \mathbb{R}$).*

Nous allons maintenant montrer le

Lemme 2.1 *L'opérateur A défini par (2.3) est borné et n'est pas normal.*

⁴Le lecteur avisé aura remarqué que M étant une fonction réelle, le spectre de A est symétrique par rapport à l'axe réel. C'est pour cela qu'on ne rentre pas dans des considérations faisant intervenir le signe de la partie imaginaire.

⁵cf. lemme 2.1.

⁶Pour plus d'informations et de résultats théoriques, le lecteur avide de savoir pourra dévorer [Paz83] qui est consacré à l'étude des semi-groupes, mais aussi [Kat95] et [DL88] qui sont plus exhaustifs sur les méthodes d'étude des problèmes d'évolution.

DÉMONSTRATION.

- **A est borné** : nous devons commencer par définir une norme sur $L^2(-1, 1)^2$. Pour tout $(U, \dot{U}) \in L^2(-1, 1)^2$ on note :

$$\|(U, \dot{U})\|_{L^2(-1, 1)^2} = \sqrt{\|U\|_{L^2(-1, 1)}^2 + \|\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)}^2}$$

On a alors en utilisant la définition de A :

$$\begin{aligned} \left\| A \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} \right\|_{L^2(-1, 1)^2} &= \sqrt{\|MU + \dot{U}\|_{L^2(-1, 1)}^2 + \|EU + M\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)}^2} \\ &\leq \|MU + \dot{U}\|_{L^2(-1, 1)} + \|EU + M\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)} \\ &\leq \|MU\|_{L^2(-1, 1)} + \|\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)} + \|EU\|_{L^2(-1, 1)} + \|M\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)} \\ &\leq (1 + \|M\|_{L^\infty(-1, 1)}) (\|U\|_{L^2(-1, 1)} + \|\dot{U}\|_{L^2(-1, 1)}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le résultat suivant, provenant du fait que E est l'opérateur de projection sur les constantes :

$$\|EU\|_{L^2(-1, 1)} \leq \|U\|_{L^2(-1, 1)}.$$

Finalement on obtient :

$$\left\| A \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} \right\|_{L^2(-1, 1)^2} \leq 2(1 + \|M\|_{L^\infty(-1, 1)}) \left\| \begin{pmatrix} U \\ \dot{U} \end{pmatrix} \right\|_{L^2(-1, 1)^2},$$

qui dit exactement que A est borné.

- **A n'est pas normal** : on rappelle que A est normal s'il commute avec son adjoint. On montre facilement, E étant auto-adjoint, que :

$$A^* = \begin{pmatrix} M & E \\ I & M \end{pmatrix},$$

et on conclut aisément en calculant :

$$A A^* = \begin{pmatrix} M^2 + I & ME + M \\ E + M^2 & E + M^2 \end{pmatrix},$$

qui est différent de :

$$A^* A = \begin{pmatrix} M^2 + E & M + E[M.] \\ M + ME & I + M^2 \end{pmatrix}.$$

□

Nous allons étudier l'opérateur A afin de lui soutirer des informations sur son spectre. Après cela, nous travaillerons à débusquer des classes de profils stables, dans un premier temps, instables dans un second.

2.3 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU SPECTRE

Nous utilisons dans cette section la partition classique du spectre en spectre ponctuel, continu et résiduel. Soit λ appartenant au spectre de A noté $\sigma(A)$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Nous avons alors l'alternative suivante :

- $A - \lambda I$ n'est pas injectif, on dit alors que λ appartient au spectre ponctuel (que l'on note $\sigma_p(A)$). On dit aussi que λ est une valeur propre.
- $A - \lambda I$ est injectif, non surjectif mais d'image dense. On dit alors que λ appartient au spectre continu (que l'on note $\sigma_c(A)$).
- $A - \lambda I$ est injectif, non surjectif et d'image non dense. On dit alors que λ appartient au spectre résiduel (que l'on note $\sigma_r(A)$).

Nous allons utiliser une autre partition classique du spectre en spectre discret et essentiel :

- Le spectre discret de A , noté $\sigma_{disc}(A)$ est l'ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie.
- Le spectre essentiel de A , noté $\sigma_{ess}(A)$ est le complémentaire du spectre discret dans le spectre : $\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_{disc}(A)$.

Nous allons dans la suite jongler avec ces deux partitions. Pour plus d'informations le lecteur pourra consulter les ouvrages de référence en théorie spectrale et analyse des opérateurs tels que [Kat95], [DSBB88], [EE87] ou encore [RS78]. Néanmoins la plupart des résultats utiles ici, sont présents dans des polycopiés de cours que j'ai suivis tels que [BBJ05] ou [Len06].

Outre une connaissance plus approfondie de A et de son spectre, le principal intérêt de cette section sera de montrer que les valeurs propres de A sont les seuls éléments de son spectre pouvant ne pas être réels, ce qui nous donnera, au travers du corollaire 2.2, une caractérisation simple de la stabilité au sens de la définition 2.1. Par ailleurs, nous caractérisons l'existence de ces valeurs propres comme étant les solutions de l'équation (2.4). Nous étudions ensuite le cas de trois profils élémentaires pour lesquels la résolution de cette équation se fait simplement. En plus de l'intérêt propre qu'ils représentent, ces cas particuliers sont un bon moyen, pour le lecteur, de se familiariser avec le problème et les objets de l'étude. Auparavant nous aurons montré les propriétés 2.1 et 2.2 qui constitueront des outils précieux d'extension des résultats de stabilité à une plus large classe de profils. Cette section se termine sur une mise en garde des dangers de l'approximation de notre problème, ceux ci étant illustrés par un exemple numérique.

2.3.1 Remarques préliminaires

Nous commençons par une série d'observations.

Puisque M est une fonction réelle, le spectre de A , $\sigma(A)$, est symétrique par rapport à l'axe réel :

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A).$$

Nous avons vu que A n'est pas normal ($AA^* \neq A^*A$). Néanmoins on peut montrer que A et A^* sont des opérateurs semblables :

$$A = SA^*S \quad \text{avec} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

S étant autoadjoint et unitaire ($S^2 = I$). Cette remarque permet de montrer le lemme suivant :

Lemme 2.2 *Le spectre résiduel de A , $\sigma_r(A)$, est vide.*

DÉMONSTRATION. On utilise la caractérisation suivante du spectre résiduel : $\lambda \in \sigma_r(A)$ si et seulement si $\lambda \notin \sigma_p(A)$ et $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$, où $\sigma_p(A)$ désigne le spectre ponctuel⁷. Puisque les opérateurs A et A^* sont semblables, ils ont en particulier les mêmes valeurs propres. La propriété de symétrie du spectre de A par rapport à l'axe réel est donc incompatible avec l'existence de spectre résiduel. \square

Par ailleurs, si comme on le verra, la structure du spectre de A dépend de certaines propriétés de $M(y)$, ce spectre est insensible à la façon dont sont "rangés" les $M(y)$. Exprimons cela de façon plus mathématique.

Soit g une bijection de $[-1, 1]$ dans lui-même qui préserve la mesure :

$$\begin{cases} g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], & \text{bijective} \\ \forall \Omega \subset [-1, 1] \text{ mesurable}, & \text{mes}(g^{-1}(\Omega)) = \text{mes}(\Omega) \end{cases}$$

Remarque 2.3 *Notons que les bijections préservant la mesure sont stables par composition des fonctions. On trouve bien entendu parmi elles les fonctions $g(x) = x$ où $g(x) = -x$ mais aussi des permutations discrètes comme celle-ci : soit $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ un maillage régulier de $[-1, 1]$ ($x_0 = -1, x_j = -1 + jh, h = 1/N$) et σ une permutation dans S_N , on obtient une bijection préservant la mesure avec*

$$g(x_j + ah) = g(x_{\sigma(j)} + ah), \quad \forall j = 1, \dots, N-1, \quad \forall a \in [0, 1].$$

On pose alors :

$$\begin{cases} S_g : L^p([-1, 1]) \longrightarrow L^p([-1, 1]), \\ u \longrightarrow S_g u = u \circ g. \end{cases}$$

Il est clair et bien connu que, pour tout $p \in [1, +\infty]$, S_g est un isomorphisme isométrique de $L^p([-1, 1])$ dans lui-même⁸. De plus, dans le cas $p = 2$, cet opérateur est autoadjoint unitaire. Nous laissons au lecteur la preuve élémentaire du résultat suivant :

Lemme 2.3 *Soient $M_g = S_g M$ et A_g l'opérateur associé au profil M_g , alors on a l'identité*

$$A_g = S_g^{-1} \circ A \circ S_g.$$

En particulier les opérateurs A et A_g ont même spectre.

⁷On peut trouver la démonstration, assez simple par ailleurs, dans [BBJ05] par exemple.

⁸Ce résultat est énoncé dans le Chapitre XI de [Ban78]. Banach n'en a pas publié la preuve, comme il l'annonçait dans ce livre. Ceci a été fait par J. Lamperti dans [Lam58]

Cela signifie que, par la suite, tout résultat énoncé pour un profil M s'étend à tout profil M_g pour toute bijection g préservant la mesure. En particulier, nous avons la propriété suivante :

Propriété 2.1 *Si M est un profil stable (resp. instable) au sens de la définition 2.1 alors M_g , pour toute bijection g préservant la mesure, est stable (resp. instable).*

Remarque 2.4 *Cette propriété implique en particulier que l'on peut, à partir d'un profil régulier stable (resp. instable), construire des profils non réguliers stables (resp. instables) également. Ainsi, les résultats de stabilité que nous allons montrer ne se limitent pas à des profils réguliers puisque l'on peut les étendre à des profils non réguliers au moyen de cette propriété.*

Nous illustrons cette propriété par les quatre profils de la figure 2.1. Ils sont "équivalents" au sens de la propriété 2.1, c'est-à-dire qu'ils peuvent tous être obtenus simplement, à partir de n'importe lequel d'entre eux, par composition avec une bijection préservant la mesure. Il suffit pour cela de "ranger" dans un autre ordre les intervalles $[-1, -1/2]$, $[-1/2, 0]$, $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Par exemple, on obtient le deuxième profil à partir du premier en échangeant les intervalles $[-1/2, 0]$ et $[0, 1/2]$, ce qui revient à utiliser l'une des bijections suivantes :

$$g_1(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\\ x + \frac{1}{2}, & \text{pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right[\\ x - \frac{1}{2}, & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ x, & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}, \quad \text{ou} \quad g_2(x) = \begin{cases} x, & \text{pour } x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right[\\ -x, & \text{pour } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ x, & \text{pour } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

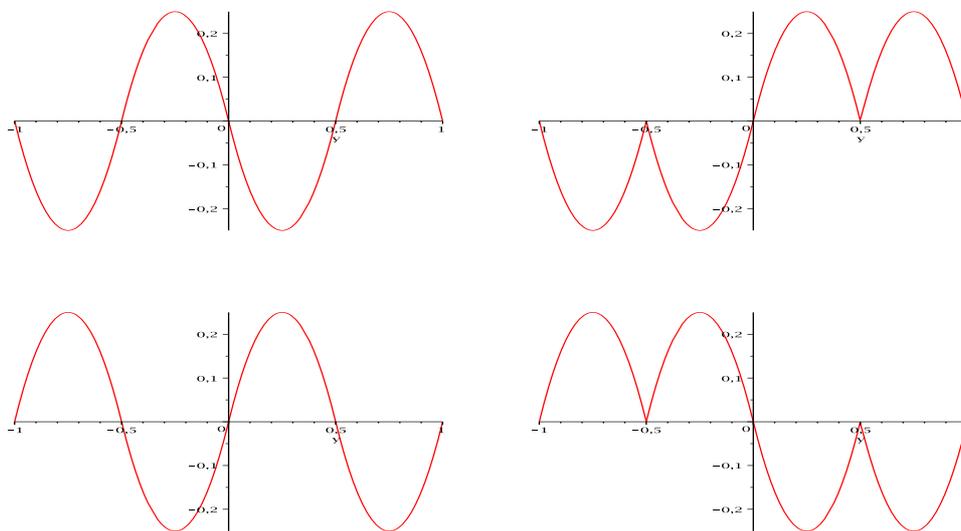


FIG. 2.1 – Illustration de la propriété 2.1.

Pour terminer, nous établissons un lien entre le spectre de l'opérateur A associé au profil M et celui de l'opérateur \tilde{A} associé au profil $-M$.

Nous introduisons la symétrie \mathcal{S} définie par :

$$\mathcal{S}(U, \dot{U}) = (U, -\dot{U}).$$

Il est facile de vérifier le

Lemme 2.4 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a la relation*

$$\widetilde{A} - \lambda = -\mathcal{S}(A + \lambda)\mathcal{S}.$$

En particulier

$$\lambda \in \sigma(\widetilde{A}) \iff -\lambda \in \sigma(A).$$

Nous avons donc la propriété suivante :

Propriété 2.2 *Si M est un profil stable (resp. instable) au sens de la définition 2.1 alors $-M$ est stable (resp. instable).*

Finalement nous énonçons la propriété suivante qui est évidente compte tenu de la forme de A :

Propriété 2.3 *Si M est un profil stable (resp. instable) au sens de la définition 2.1 alors le profil translaté d'une constante m , $M + m$ est stable (resp. instable).*

Les propriétés 2.1, 2.2 et 2.3 ont une grande importance puisqu'elles permettent d'étendre les résultats que nous allons montrer à une grande classe de profils. Nous allons nous intéresser dans un premier temps au spectre essentiel de A . En particulier, nous allons montrer qu'il est réel et que par conséquent il n'a pas d'impact sur la stabilité. Enfin nous traiterons le cas du spectre discret qui jouera un rôle essentiel dans la stabilité.

2.3.2 Spectre essentiel

Notons que nous pouvons réécrire :

$$A = A_0 + B,$$

où

$$A_0 = \begin{pmatrix} M & I \\ 0 & M \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur B est de rang 1, il est donc en particulier compact. L'opérateur A_0 , lui, n'est pas normal car on vérifie aisément par le calcul que

$$A_0 A_0^* = \begin{pmatrix} M^2 + I & M \\ M & M^2 \end{pmatrix}, \quad A_0^* A_0 = \begin{pmatrix} M^2 & M \\ M & M^2 + I \end{pmatrix}.$$

On obtient néanmoins facilement son spectre. En fait, on voit immédiatement qu'il coïncide avec l'image essentielle de M^9 :

$$\sigma(A_0) = \text{Im } M,$$

⁹voir par exemple les différentes notes au sujet de l'opérateur de multiplication dans le livre [Kat95]. Pour plus de précisions encore, le lecteur pourra étudier l'article [HW96].

où l'image essentielle est définie par :

$$\lambda \in \mathcal{I}m M \iff \forall \delta > 0, \text{ mes } \left\{ y \in]-1, 1[/ M(y) \in]\lambda - \delta, \lambda + \delta[\right\} > 0.$$

Par contre, la nature de ce spectre dépend fortement des propriétés de M , ainsi que le montrent les deux cas extrêmes suivants :

- Si $M \in C^0([-1, 1])$ est strictement monotone, le spectre de A_0 est purement continu :

$$\sigma(A_0) = [M_-, M_+], \quad M_- = \inf_{y \in [-1, 1]} M(y), \quad M_+ = \sup_{y \in [-1, 1]} M(y).$$

- Si M est constant par morceaux, le spectre de A_0 est purement ponctuel. Plus précisément, soient $\beta_0 = -1 < \beta_1 < \dots < \beta_N - 1 < \beta_N = 1$ tels que

$$y \in]\beta_{j-1}, \beta_j[\implies M(y) = M_j,$$

alors $\sigma(A_0) = \{M_1, \dots, M_N\}$, chaque valeur propre M_j étant de multiplicité infinie, le sous-espace propre associé \mathcal{E}_j (de dimension infinie) étant défini par :

$$\mathcal{E}_j = \{ (u, 0)^t, u \text{ à support dans }]\beta_{j-1}, \beta_j[\}.$$

On remarque que dans tous les cas, le spectre de A_0 est purement essentiel.

On a donc écrit A comme étant une perturbation compacte de A_0 dont on connaît le spectre. La perturbation compacte étant un sujet déjà bien exploré, on s'attend à ce que la perturbation B produise uniquement du spectre discret, ceci en dehors de l'image essentielle de M . Cela peut être déduit de résultats non triviaux de théorie spectrale des opérateurs non-autoadjoints en utilisant par exemple le lemme XIII.4.3 page 111 de [RS78] que l'on réécrit sous la forme du lemme suivant :

Lemme 2.5 Soit \mathcal{X} un espace de Banach. Soient $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ borné et $D : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ compact tels que :

(a) L'intérieur de $\sigma(C)$ en tant que sous ensemble de \mathbb{C} est vide.

(b) Chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \sigma(C)$ contient un point de l'ensemble résolvant¹⁰ de D noté $\rho(D)$.

Alors $\sigma_{\text{ess}}(C) = \sigma_{\text{ess}}(C + D)$.

À l'aide de ce lemme nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.2 L'image du profil $\mathcal{I}m M$ est incluse dans $\sigma(A)$ et son complémentaire dans $\sigma(A)$ est le spectre discret de A .

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $C := A_0$ et $D := B$. Clairement l'intérieur de $\sigma(A_0) = \mathcal{I}m M$ est vide. De plus $\mathbb{C} \setminus \sigma(A_0) = \mathbb{C} \setminus \mathcal{I}m M$ contient nécessairement un point de l'ensemble résolvant de B puisque B est borné. On obtient alors :

$$\sigma_{\text{ess}}(A_0) = \sigma_{\text{ess}}(A)$$

qui donne :

$$\sigma_{\text{ess}}(A) = \mathcal{I}m M.$$

□

¹⁰qui est par définition le complémentaire du spectre dans \mathbb{C} .

En particulier ce théorème nous dit qu'en dehors de l'image de M , qui est réelle, le spectre de A est réduit au spectre discret. Ainsi la notion de stabilité d'un profil, introduite par la définition 2.1, ne dépendra que de l'existence d'éléments du spectre discret (qui sont des valeurs propres) non réels. Pour démontrer ce théorème nous avons utilisé des résultats complexes de théorie spectrale, ce qui revient à utiliser un marteau pour écraser une mouche. Nous nous proposons d'étudier directement le spectre de A , ce qui nous permettra de mieux le connaître et constituera une démonstration ad hoc du théorème 2.2.

Proposition 2.1 *On a l'inclusion : $\sigma_c(A) \subset \mathcal{I}m M$.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si $\lambda \notin \mathcal{I}m M$ et n'est pas une valeur propre de A , alors $A - \lambda I$ est inversible. Puisque λ n'est pas une valeur propre $A - \lambda I$ est injectif. Pour montrer que $A - \lambda I$ est inversible il nous suffit donc de montrer qu'il est surjectif.

Soit $(f, g) \in L^2(]-1, 1[)^2$, on cherche $(U, \dot{U}) \in L^2(]-1, 1[)^2$ tel que

$$(A - \lambda I) (U, \dot{U})^t = (f, g)^t,$$

qui s'explique comme suit :

$$\begin{cases} (M - \lambda)U + \dot{U} = f, \\ EU + (M - \lambda)\dot{U} = g. \end{cases}$$

En injectant la première équation dans la deuxième on obtient l'équation suivante en U :

$$EU - (M - \lambda)^2 U = h,$$

où l'on a posé $h = g - (M - \lambda)f$. Comme $\lambda \notin \mathcal{I}m M$, on peut diviser par $(M - \lambda)^2$ pour obtenir :

$$\frac{EU}{(M - \lambda)^2} - U = \frac{h}{(M - \lambda)^2}.$$

On applique maintenant l'opérateur E à cette égalité, il vient :

$$EU (F(\lambda) - 1) = E \left[\frac{h}{(M - \lambda)^2} \right].$$

Or comme λ n'est pas une valeur propre de A on a $F(\lambda) \neq 1$ ¹¹. On en déduit que

$$EU = (F(\lambda) - 1)^{-1} E \left[\frac{h}{(M - \lambda)^2} \right],$$

puis que

$$U = \frac{h}{(M - \lambda)^2} - (F(\lambda) - 1)^{-1} E \left[\frac{h}{(M - \lambda)^2} \right] \frac{1}{(M - \lambda)^2}.$$

À partir de cette expression de U on obtient celle de \dot{U} , ce qui conclut la démonstration. \square

Nous avons montré que le spectre continu est contenu dans l'image essentielle de M . La proposition suivante constitue une sorte de réciproque. En effet, nous allons montrer que sous une condition de régularité C^1 , tout point de l'image de M est inclus dans le spectre.

Proposition 2.2 *Soit $y_\lambda \in]-1, 1 [$ tel que M soit de classe C^1 au voisinage de y_λ et tel que $M(y_\lambda) = \lambda$ alors*

$$\lambda \in \sigma(A).$$

¹¹cf. proposition 2.3

DÉMONSTRATION. On va utiliser une caractérisation par les suites de Weyl ou suites singulières du spectre essentiel¹².

Pour montrer que chaque λ est dans le spectre de A , l'idée est la suivante. Soit y_λ tel que $M(y_\lambda) = \lambda$ et δ_{y_λ} la distribution de Dirac au point y_λ , alors, au moins formellement,

$$\begin{cases} \delta'_{y_\lambda} \text{ est "à moyenne nulle",} \\ \delta'_{y_\lambda} (\lambda - M)^2 = 0, \\ \delta'_{y_\lambda} (\lambda - M) = M'(y_\lambda) \delta_{y_\lambda}. \end{cases}$$

C'est ce qui va nous guider pour construire une suite singulière $(U^\varepsilon, \dot{U}^\varepsilon)$ "convergeant" vers $(\delta'_{y_\lambda}, -M'(y_\lambda) \delta_{y_\lambda})$. Soit $\rho(y)$ une fonction régulière à support compact, paire et dont l'intégrale vaut 1. Posons

$$\rho_\lambda^\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{y - y_\lambda}{\varepsilon}\right), \quad U^\varepsilon(y) = \alpha_\varepsilon (\rho_\lambda^\varepsilon)'(y), \quad \dot{U}^\varepsilon(y) = -\alpha_\varepsilon (M(y) - \lambda) (\rho_\lambda^\varepsilon)'(y),$$

où α_ε est une constante de normalisation telle que :

$$\|(U^\varepsilon, \dot{U}^\varepsilon)^t\|_{L^2([-1,1])^2} = 1.$$

Notons que comme :

$$\int_{-1}^1 [1 + (M(y) - \lambda)^2] |(\rho_\lambda^\varepsilon)'(y)|^2 dy \sim \frac{1}{\varepsilon^3} \int_{-\infty}^{+\infty} |\rho'(z)|^2 dz, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

on voit que

$$\alpha_\varepsilon \sim \alpha \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{où } \alpha = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho'(z)|^2 dz \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous allons montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(A - \lambda)(U^\varepsilon, \dot{U}^\varepsilon)^t\| = 0,$$

ce qui démontrera que λ appartient au spectre de A . On calcule aisément que

$$(A - \lambda) [(U^\varepsilon, \dot{U}^\varepsilon)^t] = (0, \varphi^\varepsilon)^t,$$

où, comme ρ est à moyenne nulle,

$$\varphi^\varepsilon = \alpha_\varepsilon \left[(M - \lambda)^2 (\rho_\lambda^\varepsilon)' \right].$$

Nous avons

$$\|\varphi^\varepsilon\| = \alpha_\varepsilon \left[\int_{-1}^1 |(M - \lambda)|^2 |(\rho_\lambda^\varepsilon)'|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans ce qui suit, C désigne une constante positive dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. Comme M est dérivable au voisinage de y_λ , il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|y - y_\lambda| \leq \varepsilon \implies |(M(y) - \lambda)|^2 \leq C |y - y_\lambda|^2.$$

¹²Il existe plusieurs définitions du spectre essentiel dans la littérature qui sont équivalentes dans notre cas. En particulier, la définition du spectre essentiel par les suites de Weyl coïncide avec celle le définissant comme le complémentaire du spectre discret (ensemble des valeurs propres isolées de multiplicité finie). Pour plus d'information le lecteur pourra consulter [EE87] et [Kat95].

Par conséquent, nous avons :

$$\int_{-1}^1 |(M - \lambda)|^2 |(\rho_\lambda^\varepsilon)'|^2 dy \leq \frac{C}{\varepsilon^4} \int_{y_\lambda - \varepsilon}^{y_\lambda + \varepsilon} |y - y_\lambda|^2 \rho' \left(\frac{y - y_\lambda}{\varepsilon} \right)^2 dy = \frac{C}{\varepsilon} \int_{-1}^1 z^2 \rho'(z)^2 dz.$$

Finalement

$$\|\varphi^\varepsilon\| \leq C |\alpha_\varepsilon| \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \leq C \varepsilon.$$

□

2.3.3 Valeurs propres de A

La proposition suivante donne une caractérisation, essentielle pour la suite, du spectre discret :

Proposition 2.3 *Les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ qui n'appartiennent pas à $\text{Im } M$ sont exactement les racines de l'équation :*

$$F(\lambda) = 1, \quad (2.4)$$

où

$$F(\lambda) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus \text{Im } M. \quad (2.5)$$

De plus ces valeurs propres sont simples (au sens géométrique).

DÉMONSTRATION. Soit λ une valeur propre de A et $(U, \dot{U})^t$ le vecteur propre associé. Il est facile de calculer que :

$$\begin{cases} (\lambda - M)^2 U = EU, \\ \dot{U} = (\lambda - M) U. \end{cases}$$

La fonction U est donc nécessairement non nulle (car sinon \dot{U} le serait aussi). Si $\lambda \notin \text{Im } M$, la moyenne EU est également non nulle car $(\lambda - M)^2 U = 0$ entraîne $U = 0$. On a

$$U = \frac{EU}{(\lambda - M)^2},$$

qui donne après intégration entre -1 et 1

$$EU \left[2 - \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} \right] = 0,$$

dont on déduit que toute valeur propre de A est nécessairement solution de

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2} = 1.$$

De plus on voit que tout vecteur propre associé à une telle valeur propre est nécessairement proportionnel à

$$\left(\frac{1}{(\lambda - M)^2}, \frac{1}{(\lambda - M)} \right),$$

cette valeur propre est donc simple.

□

Cette proposition nous dit en particulier que toute valeur propre qui n'appartient pas à $\text{Im } M$ est de multiplicité finie. On peut aussi déduire de l'analyticité de F en λ le

Corollaire 2.1 *En dehors de $\text{Im } M$, le spectre ponctuel de A est constitué de valeurs propres simples isolées qui ne peuvent s'accumuler que sur $\text{Im } M$.*

DÉMONSTRATION. La fonction F définie par (2.5) est clairement analytique dans D . Les zéros de $F(\lambda) - 1$ sont donc nécessairement isolés. Par ailleurs il est clair que

$$|F(\lambda)| \sim \frac{1}{|\lambda|^2} \quad \text{quand } |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, l'équation $F(\lambda) = 1$ ne peut pas avoir de solution à l'extérieur d'un certain disque du plan complexe. □

Ainsi ces valeurs propres sont isolées et de multiplicité finie, elles appartiennent donc au spectre discret. Évidemment nous le savions déjà puisque nous avons montré qu'en dehors de l'image de M le spectre de A est réduit au spectre discret (cf. théorème 2.2).

La proposition 2.3 permet également d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 2.2 *Un profil $M(y)$ est stable (au sens de la définition 2.1) si et seulement si l'équation $F(\lambda) = 1$ (la définition de F étant donnée par (2.5)) n'a aucune solution λ telle que $\lambda \notin \mathbb{R}$. De manière équivalente, un profil $M(y)$ est instable (au sens de la définition 2.1) si et seulement si il existe $\lambda \notin \mathbb{R}$ tel que $F(\lambda) = 1$.*

On va maintenant déduire de la caractérisation (2.4) du spectre discret quelques résultats utiles.

Corollaire 2.3 *Le spectre discret de A , $\sigma_{disc}(A)$, est symétrique par rapport à l'axe réel :*

$$\lambda \in \sigma_{disc}(A) \implies \bar{\lambda} \in \sigma_{disc}(A).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma_{disc}(A)$, elle est solution de (2.4). En conjuguant cette égalité et en utilisant la définition (2.5) de F , on voit que, comme M est à valeurs réelles, $\bar{\lambda}$ est également solution de (2.4) et donc appartient à $\sigma_{disc}(A)$. □

Nous déduisons également de la proposition 2.3, l'existence d'au plus deux valeurs propres réelles en dehors de $\text{Im } M$, qui existent la plupart du temps (cf. remarque 2.5). Nous utilisons pour cela M_- et M_+ définis par :

$$M_- = \inf_{y \in [-1,1]} M(y), \quad M_+ = \sup_{y \in [-1,1]} M(y).$$

Proposition 2.4 *L'opérateur A a au plus une valeur propre λ_- dans l'intervalle $]-\infty, M_-[$ et au plus une valeur propre λ_+ dans l'intervalle $]M_+, +\infty[$. Plus précisément, la valeur propre λ_- existe si et seulement si :*

$$1 < \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_- - M(y))^2} \leq +\infty,$$

et elle est caractérisée par :

$$\lambda_- < M_- \quad \text{et} \quad F(\lambda_-) = 1.$$

De même, la valeur propre λ_+ existe si et seulement si :

$$1 < \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_+ - M(y))^2} \leq +\infty,$$

et elle est caractérisée par :

$$\lambda_+ > M_+ \quad \text{et} \quad F(\lambda_+) = 1.$$

DÉMONSTRATION. Étudions la fonction F sur l'intervalle réel $] -\infty, M_- [\cup] M_+, +\infty [$ où elle prend des valeurs réelles. Sa dérivée est donnée par

$$F'(\lambda) = - \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^3},$$

ce qui montre que F est strictement croissante sur $] -\infty, M_- [$ et strictement décroissante sur $] M_+, +\infty [$. Par ailleurs, on remarque, en utilisant le théorème de convergence monotone que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} F(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow M_{\pm}} F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_{\pm} - M(y))^2} \leq +\infty.$$

Il est facile de conclure à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. □

Remarque 2.5 Si $M(y)$ atteint la valeur M_{\pm} en un point y_{\pm} où elle est C^1 à droite ou à gauche, on vérifie aisément que

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_{\pm} - M(y))^2} = +\infty,$$

ce qui assure l'existence de λ_{\pm} .

On peut exhiber des profils pour lesquels il n'existe pas de telles valeurs propres λ_+ ou λ_- . On cherche par exemple des profils pour lesquels λ_- n'existe pas. Une condition nécessaire est que le profil ne soit dérivable, ni à droite ni à gauche, en M_- . On considère les profils :

$$M(y) = C(1 + y)^{\alpha}, \quad \text{avec } C > 0 \quad \text{et} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

vérifiant $M_- = 0$, et non dérivables en 0. On calcule simplement :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(M_- - M(y))^2} = \frac{1}{C^2(1 - 2\alpha)4^{\alpha}},$$

et une condition suffisante de non existence de λ_- est donc :

$$\frac{1}{C^2(1 - 2\alpha)4^{\alpha}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq C^2(1 - 2\alpha)4^{\alpha}.$$

Ainsi pour tout $C \geq C_{\alpha} = ((1 - 2\alpha)4^{\alpha})^{-1/2}$ il n'existe pas de valeurs propres λ_- . Le coefficient C doit être suffisamment grand pour qu'il n'existe pas de valeur propre λ_- , or on observe que augmenter C "empire" la dérivée en 0 du profil. On remarque finalement que C_{α} est une fonction croissante de α , qui tend vers $+\infty$ quand α tend vers $1/2$.

Pour être complet sur les valeurs propres, nous traitons le cas de valeurs propres dans $\mathcal{I}m M$.

Proposition 2.5 Soient $\lambda \in \mathcal{I}m M$ et $N_{\lambda} = \{y \in [-1, 1] / M(y) = \lambda\}$. Alors

$$mes(N_{\lambda}) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \sigma_p(A),$$

et de plus il s'agit d'une valeur propre de multiplicité infinie.

Si M est C^1 par morceaux, on a l'équivalence :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \text{Im } M \iff \text{mes}(N_\lambda) > 0.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \text{Im } M$. Supposons que $\text{mes}(N_\lambda) > 0$. Soit U non nulle, à support dans N_λ et à moyenne nulle, on vérifie aisément que :

$$A \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix},$$

ce qui prouve que λ est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé contient l'espace (de dimension infinie) des fonctions à moyenne nulle à support dans N_λ .

Réciproquement, pour $M \in C^1$ par morceaux, montrons que si $\text{mes}(N_\lambda) = 0$ alors $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Montrons plutôt la contraposée :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \cap \text{Im } M \implies \text{mes}(N_\lambda) > 0.$$

Soit $(U, \dot{U})^t$ un éventuel vecteur propre de A , on a toujours

$$\begin{cases} (\lambda - M)^2 U = EU, \\ \dot{U} = (\lambda - M)U. \end{cases}$$

On en déduit que pour $y \notin N_\lambda$,

$$U = \frac{EU}{(\lambda - M)^2}$$

Cela implique nécessairement que $EU = 0$ car sinon, M étant C^1 par morceaux, U ne pourrait pas être de carré intégrable. Par suite $EU = 0$ entraîne $(\lambda - M)^2 U = 0$ ce qui entraîne $U = 0$ puisque $\text{mes}(N_\lambda) = 0$. □

Remarque 2.6 La démonstration montre que lorsque M est C^1 par morceaux, toute fonction propre associée à une valeur propre dans $\text{Im } M$ est nécessairement à moyenne nulle.

Remarque 2.7 Cette proposition montre que lorsque M est C^1 par morceaux $\forall \lambda \in \text{Im } M$ nous avons l'alternative suivante :

- $\text{mes}(N_\lambda) > 0$ et λ est une valeur propre de multiplicité infinie.
- $\text{mes}(N_\lambda) = 0$ et $\lambda \in \sigma_c(A)$ puisque ce n'est pas une valeur propre et que nous avons montré que le spectre résiduel est vide.

Les pages qui vont suivre vont montrer qu'on peut établir une grande variété de résultats sur l'existence ou non de valeurs propres non réelles, en fonction des propriétés du profil $M(y)$. Il est pratiquement impossible d'être exhaustif.

2.3.4 Quelques cas particuliers simples

Nous allons étudier trois cas particuliers pour lesquels les calculs se mènent à la main de façon élémentaire et qui aboutissent à des conclusions pour le moins diverses. Cette partie a de surcroît pour objectif de familiariser le lecteur avec les objets mathématiques de l'étude ainsi qu'avec les résultats précédents sur le spectre de A .

Le profil uniforme Le cas le plus simple correspond à celui du profil uniforme :

Lemme 2.6 On suppose que $M(y) = M, \forall y \in]-1, 1[$. Alors

$$\sigma(A) = \{\lambda_-, M, \lambda_+\}$$

avec $\lambda_{\pm} = M \pm 1$, et $M(y)$ est stable (au sens de la définition 2.1).

DÉMONSTRATION. Ce lemme est une conséquence immédiate des résultats précédents. La proposition 2.5 nous dit que $M \in \sigma(A)$ (c'est une valeur propre de multiplicité infinie). Nous savons, en vertu du théorème 2.2, qu'en dehors de l'image de M il n'y a que des valeurs propres caractérisées par la proposition 2.3. On trouve λ_- et λ_+ (annoncées par la proposition 2.4) en résolvant l'équation $F(\lambda) = 1$. En effet, dans le cas du profil uniforme nous avons :

$$F(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - M)^2},$$

ce qui donne $\lambda_{\pm} = M \pm 1$. Puisque le spectre est réel, le profil uniforme est stable. □

Les valeurs propres λ_- et λ_+ sont associées aux modes classiques acoustiques convectés. En effet, si on se souvient de l'expression (2.1) des modes :

$$U(x, y, t) = U(y) \exp i(\omega t - kx), \quad k \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{C},$$

et de la définition $\lambda = \omega/k$, on obtient que la vitesse de phase des modes correspondant aux λ_{\pm} est égale à $M \pm 1$. On rappelle que la vitesse du son a été prise égale à 1. Dans le référentiel qui se déplace à la vitesse de l'écoulement, M , les modes associés à λ_{\pm} se propagent à la vitesse du son dans les directions opposées. Si l'écoulement est subsonique ($|M| < 1$), l'un¹³ se propage en remontant l'écoulement avec une vitesse de phase égale à $1 - |M|$, l'autre dans le sens de l'écoulement avec une vitesse $1 + |M|$. Si l'écoulement est supersonique les deux modes se propagent dans le sens de l'écoulement.

On présente ici en illustration l'allure de la fonction F , sur \mathbb{R} , pour un profil uniforme :

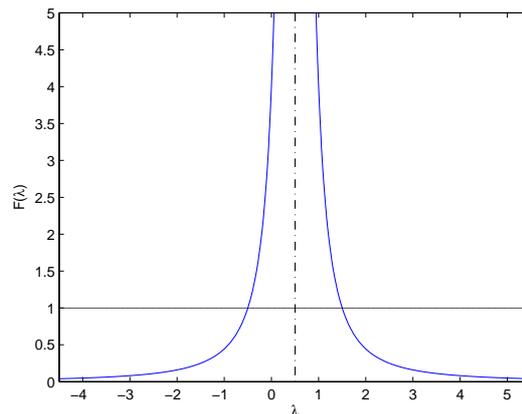


FIG. 2.2 – La fonction $F(\lambda)$ pour un profil uniforme.

Nous voyons bien sur cette figure les solutions λ_{\pm} de l'équation $F(\lambda) = 1$.

¹³Si $M > 0$ alors le mode qui descend (resp. qui remonte) l'écoulement correspond à λ_+ (resp. λ_-). Si $M < 0$ alors c'est le contraire.

Le profil linéaire Nous considérons maintenant le cas d'un profil linéaire :

Lemme 2.7 *Supposons que $M(y) = My + m, \forall y \in]-1, 1[$. Alors*

$$\sigma(A) = \{\lambda_-, \lambda_+\} \cup [-M + m, M + m]$$

avec $\lambda_{\pm} = m \pm \sqrt{1 + M^2}$, et $M(y)$ est stable (au sens de la définition 2.1).

DÉMONSTRATION. Nous savons à la lumière de l'étude précédemment menée (cf. théorème 2.2 en particulier) que $\text{Im } M = [-M + m, M + m] \subset \sigma(A)$. Nous savons qu'en dehors de l'image de M , il n'y a que des valeurs propres caractérisées par la proposition 2.3. On trouve λ_- et λ_+ (annoncées par la proposition 2.4) en résolvant l'équation $F(\lambda) = 1$. En effet, une simple intégration nous donne :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2M} \left(\frac{1}{\lambda - m - M} - \frac{1}{\lambda - m + M} \right) = \frac{1}{(\lambda - m)^2 - M^2},$$

et on obtient que λ_{\pm} sont les deux racines de l'équation $F(\lambda) = 1$. Puisque le spectre est réel, le profil linéaire est stable. □

On remarque la présence, dans ce cas, de deux modes propagatifs qui se propagent respectivement avec une vitesse de phase égale à λ_{\pm} . Nous remarquons de plus que ces deux modes se propagent dans des directions opposées si $|m| < \sqrt{1 + M^2}$, et dans le même sens (celui de l'écoulement) si $|m| \geq \sqrt{1 + M^2}$ (cette dernière condition n'impose pas à l'écoulement d'être partout supersonique).

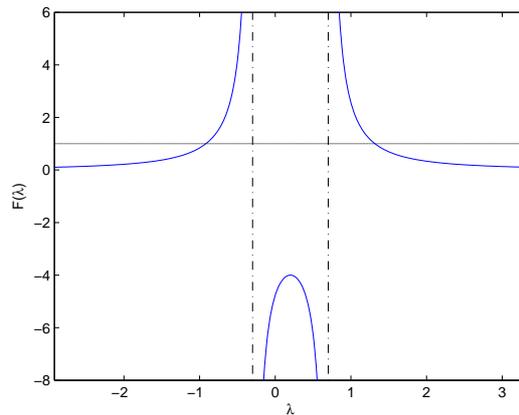


FIG. 2.3 – La fonction $F(\lambda)$ pour un profil linéaire.

Le profil bi-couches Nous considérons maintenant un profil bi-couches, c'est-à-dire un profil constant par morceaux ne prenant que deux valeurs différentes.

Lemme 2.8 *Supposons que*

$$M(y) = \begin{cases} M_1 & \text{si } -1 < y < a \\ M_2 & \text{si } a < y < 1 \end{cases}$$

avec $-1 < a < 1$ et $M_1 \neq M_2$, et on définit $\delta(a)$ par :

$$\delta(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left((1 - a)^{1/3} + (1 + a)^{1/3} \right)^{3/2}.$$

Si $|M_1 - M_2| \neq \delta(a)$, alors l'opérateur A a exactement quatre valeurs propres différentes de M_1 et M_2 et nous avons l'alternative suivante :

- si $|M_1 - M_2| > \delta(a)$, les quatre valeurs propres sont réelles,
- si $|M_1 - M_2| < \delta(a)$, deux valeurs propres sont réelles et deux autres ne le sont pas et sont conjuguées.

Si $|M_1 - M_2| = \delta(a)$, alors l'opérateur A a exactement trois valeurs propres réelles différentes de M_1 et M_2 . En conclusion, le profil $M(y)$ est stable (au sens de la définition 2.1) si et seulement si $|M_1 - M_2| \geq \delta(a)$.

DÉMONSTRATION. La proposition 2.5 nous dit que M_1 et M_2 sont des valeurs propres de A de multiplicité infinie. Nous savons, en vertu du théorème 2.2, qu'en dehors de l'image de M il n'y a que des valeurs propres caractérisées par la proposition 2.3. Pour le profil bi-couches, la fonction F qui a pour expression

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+a}{(\lambda - M_1)^2} + \frac{1-a}{(\lambda - M_2)^2} \right),$$

est partout positive. On vérifie facilement que l'équation $F(\lambda) = 1$, qui a quatre solutions complexes, a exactement une solution réelle $\lambda_- < M_- = \min(M_1, M_2)$ et une solution réelle $\lambda_+ > M_+ = \max(M_1, M_2)$. Dans l'intervalle $]M_-, M_+[$, F est strictement convexe et tend vers l'infini quand $\lambda \rightarrow M_{\pm}$. Son minimum dans cet intervalle est donné par :

$$F_{\min} = \frac{\left((1-a)^{1/3} + (1+a)^{1/3} \right)^3}{2(M_1 - M_2)^2}.$$

Ceci conclut la démonstration puisque :

$$F_{\min} < 1 \iff |M_1 - M_2| > \delta(a).$$

□

De manière surprenante, l'écoulement est plus stable si le saut est grand. C'est pourtant un résultat assez connu dans la littérature (voir par exemple le cas des équations d'Euler linéarisées en présence d'un écoulement discontinu bi-couches en domaine non borné traité pp75-77 de [Ber06]. On trouve d'autres exemples de tels profils dans [DR04]. On remarque également que $\delta(a)$ atteint son maximum quand le saut est localisé au milieu du tube ($a = 0$) : dans ce cas (qui est le plus instable) $\delta(0) = 2$ de telle sorte qu'un profil bi-couches subsonique est toujours instable. Quand a se déplace du milieu du tube jusqu'aux parois, $\delta(a)$ décroît et son minimum est $\delta(-1) = \delta(1) = 1$.

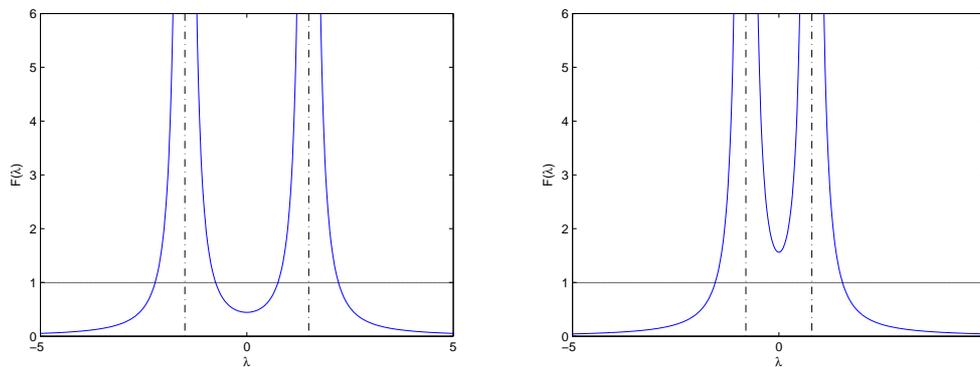


FIG. 2.4 – La fonction $F(\lambda)$ pour un profil bi-couches stable (à gauche) ou instable (à droite).

Le problème discrétisé Une manière de calculer le spectre pour un profil quelconque pourrait être de discrétiser le problème aux valeurs propres (2.2). Nous voulons maintenant illustrer le fait qu'un processus naturel de discrétisation peut produire des valeurs propres non réelles. Par conséquent, une discrétisation standard de (1.9) sera en général instable, même si le problème continu est stable.

Soit \mathbf{V}_h un sous-espace de dimension finie de $L^2([-1, 1])$, dont la dimension tend vers l'infini quand h tend vers 0. On peut, par exemple, prendre

$$\mathbf{V}_h = \text{span}[\psi_j, j = -N_h, \dots, N_h - 1] \text{ où } N_h = \frac{1}{h} \text{ et } \psi_j = \frac{1}{\sqrt{h}} \chi_{j+\frac{1}{2}},$$

$\chi_{j+\frac{1}{2}}$ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $[jh, (j+1)h]$. Les ψ_j forment une famille ortho-normale de $L^2([-1, 1])$ et la dimension de \mathbf{V}_h est $2N_h$. Une approche de type Galerkin amène à considérer le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_h, \dot{u}_h, \lambda) \in \mathbf{V}_h^2 \times \mathbb{C}, (u_h, \dot{u}_h) \neq (0, 0), \text{ tel que } \forall (\tilde{u}_h, \tilde{\dot{u}}_h) \in \mathbf{V}_h^2 \\ \int_{-1}^1 M(y) u_h(y) \tilde{u}_h(y) dy + \int_{-1}^1 \dot{u}_h(y) \tilde{\dot{u}}_h(y) dy = \lambda \int_{-1}^1 u_h(y) \tilde{u}_h(y) dy \\ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_h(x) \tilde{\dot{u}}_h(y) dx dy + \int_{-1}^1 M(y) \dot{u}_h(y) \tilde{\dot{u}}_h(y) dy = \lambda \int_{-1}^1 \dot{u}_h(y) \tilde{\dot{u}}_h(y) dy \end{array} \right.$$

Cela conduit à approcher le spectre de l'opérateur A (qui est composé d'une partie continue et d'une possible partie discrète) par les valeurs propres de la matrice $4N_h \times 4N_h$:

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_h & \mathbf{I} \\ \mathbf{E}_h & \mathbf{M}_h \end{pmatrix}$$

où les matrices \mathbf{M}_h et \mathbf{E}_h sont données par :

$$(\mathbf{M}_h)_{i,j} = \int_{-1}^1 M(y) \psi_i(y) \psi_j(y) dy \quad \text{et} \quad (\mathbf{E}_h)_{i,j} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi_i(x) \psi_j(y) dx dy.$$

Considérons par exemple le cas du profil linéaire $M(y) = y$: nous savons déjà que le spectre de A correspondant à un tel profil est donné par

$$\sigma(A) = [-1, 1] \cup \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}.$$

La Figure 2.5 représente le spectre de \mathbf{A}_h dans le plan complexe pour différentes valeurs de N_h . Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les échelles pour la partie réelle et imaginaire sont très différentes. On observe que le spectre de \mathbf{A}_h se compose de deux valeurs propres réelles et de $4N_h - 2$ valeurs propres non réelles. Les deux valeurs propres réelles sont de bonnes approximations des deux valeurs propres exactes $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. L'ensemble des $4N_h - 2$ valeurs propres non réelles est symétrique par rapport à l'axe réel et correspond à la discrétisation du spectre continu $[-1, 1]$. Leur partie imaginaire décroît quand N_h augmente.

Le même phénomène est observé avec une discrétisation spectrale (voir [BBDJ07]).

Ces résultats montrent qu'il peut être dangereux d'utiliser une approche discrète pour l'étude de la stabilité d'un profil donné. On propose à la place une approche rigoureuse qui sera l'objet des sections 2.4 et 2.5.

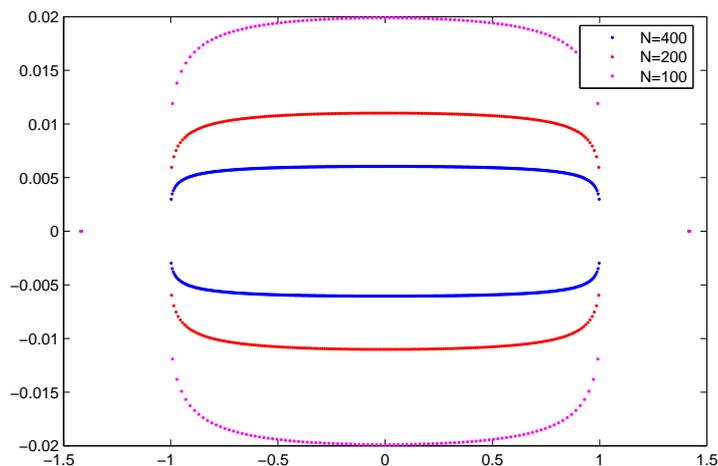


FIG. 2.5 – Valeurs propres du problème discrétisé pour un profil linéaire

2.4 CONDITIONS DE STABILITÉ POUR DES PROFILS CONTINUS

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la question de la stabilité du modèle asymptotique. Nous avons introduit, dans un premier temps, la notion de profil stable comme étant reliée à la non-existence de spectre non-réel de l'opérateur A (cf. définition 2.1). Grâce à l'étude spectrale de cet opérateur menée dans la partie précédente, nous sommes ramenés, pour étudier la stabilité d'un profil, à vérifier qu'il n'existe pas de solutions non réelles à l'équation caractéristique $F(\lambda) = 1$ (cf. corollaire 2.2).

La méthode d'obtention de résultats de stabilité repose sur une approximation du profil de Mach par un profil linéaire par morceaux, et l'application à ce profil linéaire par morceaux de ce critère de stabilité. Le principal résultat de cette section sera le théorème 2.3 dont les résultats seront comparés à ceux existants dans le cas incompressible.

2.4.1 Méthodologie

Nous considérons un profil général M . L'idée est d'approcher M par un profil M_h tel que $M_h \rightarrow M$ uniformément quand $h \rightarrow 0$, et tel que l'étude de l'équation $F_h(\lambda) = 1$ est plus simple que l'étude de l'équation $F(\lambda) = 1$ (où nous avons noté sans ambiguïté F_h la fonction définie par (2.5) où M est remplacé par M_h). Le résultat important, exprimé par le lemme suivant, provient de la théorie spectrale des perturbations et dit qu'un profil M est nécessairement stable si tous les profils M_h sont stables. Dans la suite, on note A_h l'opérateur défini par (2.3) où M est remplacé par M_h .

Lemme 2.9 Soit $M \in L^\infty(]-1, 1[)$ et soit $M_h \in L^\infty(]-1, 1[)$ une famille de profils (pour $0 < h < 1$) vérifiant :

$$\|M - M_h\|_{L^\infty(]-1, 1[)} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Si $\sigma(A_h) \subset \mathbb{R} \quad \forall h \in]0, 1[$, alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. On suppose par contradiction qu'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\lambda \notin \mathbb{R}$. Grâce au

théorème 2.2, on sait que λ appartient au spectre discret de A . Comme

$$A - A_h = \begin{pmatrix} M - M_h & 0 \\ 0 & M - M_h \end{pmatrix}$$

il est clair que :

$$\|A - A_h\| = \|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])}$$

et en conséquence de résultats classiques de la théorie spectrale des perturbations¹⁴, tout voisinage de λ devrait contenir, pour h suffisamment petit, une valeur propre de A_h . On obtient une contradiction avec l'hypothèse $\sigma(A_h) \subset \mathbb{R}$. □

Remarque 2.8 *Ce lemme montre que l'ensemble des profils stables (resp. instables), au sens de la définition 2.1, est fermé (resp. ouvert) dans $L^\infty([-1, 1])$.*

La question est maintenant de décider comment approcher M , c'est-à-dire comment choisir les M_h . A priori, la solution la plus simple consisterait à choisir un profil M_h constant par morceaux. Pour un tel profil, on peut simplement trouver une expression de la fonction F_h qui est alors une fonction rationnelle. Mais cette approche ne fonctionne pas. En effet, en procédant de la même manière que dans le lemme 2.8, on peut facilement montrer que pour h suffisamment petit le profil approché M_h est instable (cela est dû au fait que le saut entre deux valeurs successives devient trop petit).

Le choix naturel suivant est d'approcher M par un profil M_h continu linéaire par morceaux. Cette fois encore, la fonction F_h correspondante est une fraction rationnelle dont l'expression peut être facilement calculée. Par conséquent, le nombre N_r de solutions complexes de l'équation $F_h(\lambda) = 1$ est connu a priori. Pour prouver la stabilité d'un profil M_h , il suffit de montrer que l'équation $F_h(\lambda) = 1$ a (au moins) N_r solutions réelles (ainsi il ne peut y avoir de solutions non réelles). Sous des conditions géométriques spécifiques sur M_h , il est possible de montrer un tel résultat, à l'aide d'arguments très simples tels que le théorème des valeurs intermédiaires.

2.4.2 Les profils linéaires par morceaux

Comme annoncé plus tôt dans l'explication de notre stratégie pour l'obtention de résultats de stabilité, la première étape consiste à s'intéresser aux profils linéaires par morceaux. On commence par établir le lemme suivant qui donne une expression de la fonction F pour un profil linéaire par morceaux quelconque :

Lemme 2.10 *Soient $M \in C^0([-1, 1])$ et*

$$x_0 = -1 < x_1 < \dots < x_N = 1,$$

tel que M est linéaire sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i < N$:

$$\forall 0 \leq i \leq N - 1, \quad M(y) = \alpha_i y + \beta_i \text{ dans } [x_i, x_{i+1}]$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Alors la fonction $F(\lambda)$ est une fonction rationnelle qui a au plus $N + 1$ pôles. Plus précisément si

$$M_0 < M_1 < \dots < M_p$$

¹⁴cf. théorème 3.6 chapitre 4 §3.1 de [Kat95].

désigne les P valeurs $M(x_i)$ que l'on a ordonnées :

$$\{M_0, M_1, \dots, M_P\} = \{M(x_i); i = 0, \dots, N\},$$

alors la fonction rationnelle F peut s'écrire sous la forme de la décomposition suivante :

$$F(\lambda) = \sum_{j=0}^P \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j} + \sum_{j=0}^P \frac{\zeta_j}{(\lambda - M_j)^2} \quad (2.6)$$

avec des coefficients réels γ_j et ζ_j satisfaisant

$$\gamma_0 < 0, \gamma_P > 0 \text{ et } \zeta_j \geq 0, \quad \forall 0 \leq j \leq P.$$

DÉMONSTRATION. On suppose d'abord que $\alpha_i \neq 0 \forall i$. En se rappelant que

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus R(M)$$

une simple intégration donne :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\alpha_0} \frac{1}{\lambda - M(x_0)} + \sum_{i=1}^{N-1} \left[\frac{1}{\alpha_{i-1}} - \frac{1}{\alpha_i} \right] \frac{1}{\lambda - M(x_i)} + \frac{1}{\alpha_{N-1}} \frac{1}{\lambda - M(x_N)} \right), \quad (2.7)$$

que l'on peut réécrire sous la forme de l'expression (2.6) avec $\zeta_j = 0$ pour tout j et avec l'expression suivante de γ_j , où l'on a posé (pour simplifier les écritures) $\alpha_{-1} = \alpha_N = +\infty$:

$$\gamma_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq N \\ M(x_i) = M_j}} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\alpha_{i-1}} - \frac{1}{\alpha_i} \right]. \quad (2.8)$$

Pour montrer que $\gamma_0 < 0$, il faut remarquer que $M_0 = \inf M(y)$ et que :

1. Si $M_0 = M(x_0)$, la fonction M est nécessairement croissante sur $[x_0, x_1]$, de telle sorte que :

$$\frac{-1}{2\alpha_0} < 0.$$

2. Si $M_0 = M(x_N)$, la fonction M est nécessairement décroissante sur $[x_{N-1}, x_N]$, de telle sorte que :

$$\frac{1}{2\alpha_{N-1}} < 0.$$

3. Si $M_0 = M(x_i)$ pour un i , $0 < i < N$, la fonction M est décroissante sur $[x_{i-1}, x_i]$ et croissante sur $[x_i, x_{i+1}]$, de telle sorte que :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha_{i-1}} - \frac{1}{\alpha_i} \right) < 0.$$

Par conséquent, γ_0 est négatif puisqu'il est la somme de termes tous négatifs. On montre de la même manière que $\gamma_P > 0$, avec $M_P = \sup M(y)$.

Considérons le cas où des α_i sont nuls, les calculs peuvent être menés de la même manière

aboutissant à l'expression (2.6) avec cette fois des ζ_j non nuls et positifs. En effet, supposons par exemple que $\alpha_i = 0$: cela rajoute dans le calcul de F le terme suivant :

$$\frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{(\lambda - M(x_i))^2}.$$

Il existe $0 \leq j \leq P$ tel que $M(x_i) = M(x_{i+1}) = M_j$. Le terme précédent est alors égal à :

$$\frac{1}{2} \frac{x_{i+1} - x_i}{(\lambda - M_j)^2}.$$

De plus, $x_{i+1} - x_i > 0$, par conséquent, ζ_j étant la somme de tels termes sera également positif. \square

Nous allons maintenant utiliser l'expression (2.6) de F pour établir des conditions suffisantes sur le profil assurant que toutes les solutions de $F(\lambda) = 1$ sont réelles. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.11 *On se place sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 2.10 précédent. Alors, si $\zeta_j = 0$ pour tout j et si il existe deux entiers k' et k , vérifiant $0 \leq k' < P$ et $0 \leq k < P - k'$, tels que :*

$$\begin{cases} \gamma_j < 0 & \text{pour } 0 \leq j \leq k', \\ \gamma_j > 0 & \text{pour } k' + k + 1 \leq j \leq P, \\ \gamma_j = 0 & \text{pour } k' < j < k' + k + 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

alors toutes les solutions complexes λ de l'équation $F(\lambda) = 1$ sont réelles, et par conséquent M est stable (au sens de la définition 2.1). Ce résultat reste vrai s'il existe $k' \leq \ell \leq k' + k + 1$ et tel que $\zeta_\ell > 0$ et $\zeta_j = 0$ pour tout $j \neq \ell$.

DÉMONSTRATION. Dans un premier temps on suppose que tous les ζ_j sont nuls. Alors par (2.9) :

$$F(\lambda) = F^*(\lambda) := \sum_{j=0}^{k'} \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j} + \sum_{j=k'+k+1}^P \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j},$$

où tous les coefficients γ_j sont différents de 0. Par conséquent, on peut réécrire l'équation $F(\lambda) = 1$ comme une équation polynomiale de degré $P + 1 - k$. Pour démontrer l'énoncé de ce lemme nous allons montrer que l'équation $F(\lambda) = 1$ a exactement $P + 1 - k$ solutions réelles toutes distinctes.

En considérant la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ sur l'axe réel, on remarque que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0.$$

De plus pour $0 \leq j \leq k'$, $\gamma_j < 0$ entraîne

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\leftarrow} M_j} F(\lambda) = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \xrightarrow{\rightarrow} M_j} F(\lambda) = -\infty$$

et pour $k' + k + 1 \leq j \leq P$, $\gamma_j > 0$ entraîne

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\leftarrow} M_j} F(\lambda) = -\infty \text{ et } \lim_{\lambda \xrightarrow{\rightarrow} M_j} F(\lambda) = +\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que l'équation $F(\lambda) = 1$ a au moins une solution réelle dans chaque intervalle $] -\infty, M_0[$, $]M_0, M_1[$, ..., $]M_{k'-1}, M'_k[$ ainsi que dans chaque

intervalle $]M_{k'+k+1}, M_{k'+k+2}[, \dots,]M_{P-1}, M_P[,]M_P, +\infty[$. En résumé cela fait au moins $P+1-k$ solutions réelles distinctes ; ainsi nous les avons toutes.

Nous considérons maintenant le cas où il existe $k' \leq l \leq k' + k + 1$ et tel que $\zeta_\ell > 0$ et $\zeta_j = 0$ pour $j \neq \ell$. Dans ce cas

$$F(\lambda) = F^*(\lambda) + \frac{\zeta_\ell}{(\lambda - M_\ell)^2}.$$

Les arguments précédents sont toujours valables et on montre ainsi l'existence de $P+1-k$ racines réelles distinctes de $F(\lambda) = 1$ qui sont en dehors de l'intervalle $[M_{k'}, M_{k'+k+1}]$. Pour conclure nous distinguons trois cas :

- (i) Si $\ell = k'$, il est alors clair que $F(\lambda) = 1$ est une équation polynomiale de degré $P - k + 2$. Pour conclure, il suffit de montrer l'existence d'une solution réelle supplémentaire que l'on va trouver dans l'intervalle $]M_{k'}, M_{k'+k+1}[$ (où F est continue). Puisque $\zeta_{k'} > 0$, on a :

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_{k'}} F(\lambda) = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_{k'+k+1}} F(\lambda) = -\infty,$$

ce qui permet de conclure grâce aux théorèmes des valeurs intermédiaires.

- (ii) Si $\ell = k' + k + 1$, on procède exactement de la même manière que précédemment.

- (iii) Si $k'+1 \leq \ell \leq k'+k$, $F(\lambda) = 1$ est une équation polynomiale de degré $P+3-k$. Pour conclure, il suffit de montrer l'existence d'une solution dans chaque intervalle $]M_{k'}, M_\ell[$ et $]M_\ell, M_{k'+k+1}[$ ce que l'on fait à l'aide, une fois de plus, du théorème des valeurs intermédiaires. En effet, puisque $\zeta_\ell > 0$ on a :

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_\ell} F(\lambda) = \lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_\ell} F(\lambda) = +\infty,$$

et

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_{k'}} F(\lambda) = \lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_{k'+k+1}} F(\lambda) = -\infty.$$

□

Nous allons illustrer ces résultats au moyen de quelques dessins de fonctions F . Nous nous plaçons dans le cas $P = 5$ avec :

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5) = (-3, -2.2, -1, 0, 1.4, 3).$$

On suppose dans un premier temps que $\zeta_j = 0$ pour tout $0 \leq j \leq P$. On rappelle que nécessairement $\gamma_0 < 0$ et $\gamma_P > 0$. Le lemme précédent dit que s'il n'y a qu'un changement de signe parmi les γ_i (cf. (2.9)) alors le profil M est stable. C'est ce qu'illustre la figure 2.6 pour laquelle nous avons pris :

$$\gamma_j < 0 \text{ pour } 0 \leq j \leq 2, \quad \gamma_3 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_j > 0 \text{ pour } 4 \leq j \leq 5.$$

Dans ce cas, $k' = 2$ et $k = 1$ et on voit bien sur la figure les $P+1-k = 5$ racines de l'équation $F(\lambda) = 1$.

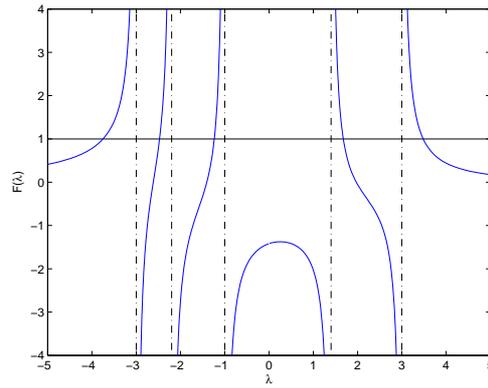


FIG. 2.6 – Fonction F : illustration d'un cas stable, ζ_j tous nuls.

Le lemme montre que s'il existe $2 \leq l \leq 4$ tel que $\zeta_l \neq 0$ alors le profil est toujours stable. La figure 2.7 illustre ceci lorsque $l = 2$ (figure de gauche) et $l = 4$ (figure de droite). Ces situations correspondent aux cas (i) et (ii) de la démonstration du lemme ; on observe l'apparition d'une solution supplémentaire dans l'intervalle sur lequel la fonction est dessinée en rouge. La figure 2.8 correspond à $l = 3$, qui correspond au cas (iii) de la démonstration du lemme ; on observe l'apparition de deux solutions supplémentaires dans les intervalles sur lesquels la fonction est dessinée en rouge.

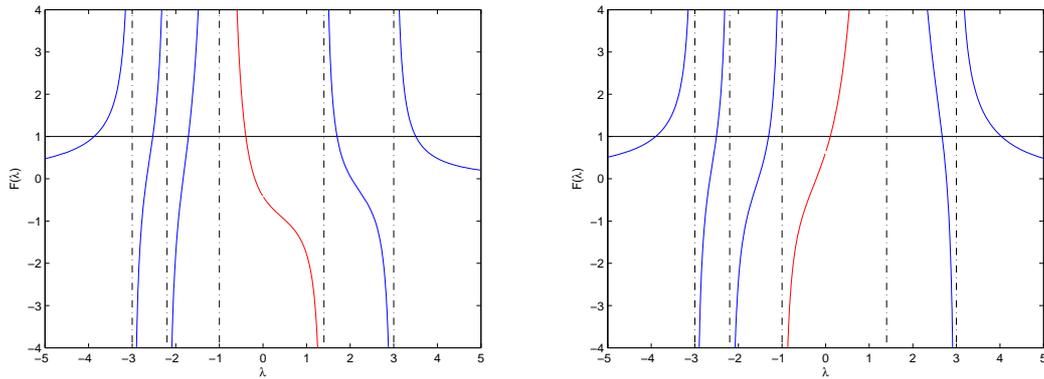


FIG. 2.7 – Fonction F : illustration d'un cas stable, $\zeta_2 \neq 0$ (à gauche), $\zeta_4 \neq 0$ (à droite).

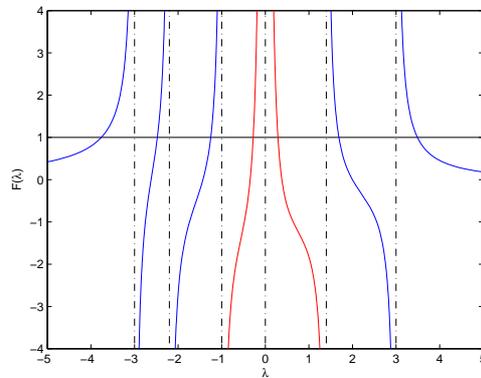


FIG. 2.8 – Fonction F : illustration d'un cas stable, $\zeta_3 \neq 0$.

Nous montrons maintenant deux exemples de cas non pris en compte par le lemme 2.11 :

- Nous commençons par illustrer le cas où la condition 2.9 n'est pas remplie. La suite des γ_j présente alors plusieurs changements de signe. Compte tenu du fait que $\gamma_0 < 0$ et $\gamma_P > 0$, nous remarquons qu'il y a nécessairement un nombre impair de changements de signe. La figure 2.9 illustre ceci dans le cas particulier précédemment utilisé, avec tous les ζ_j nuls et cette fois :

$$\gamma_j < 0 \text{ pour } 0 \leq j \leq 1, \quad \gamma_2 > 0, \quad \gamma_3 < 0 \quad \text{et} \quad \gamma_j > 0 \text{ pour } 4 \leq j \leq 5.$$

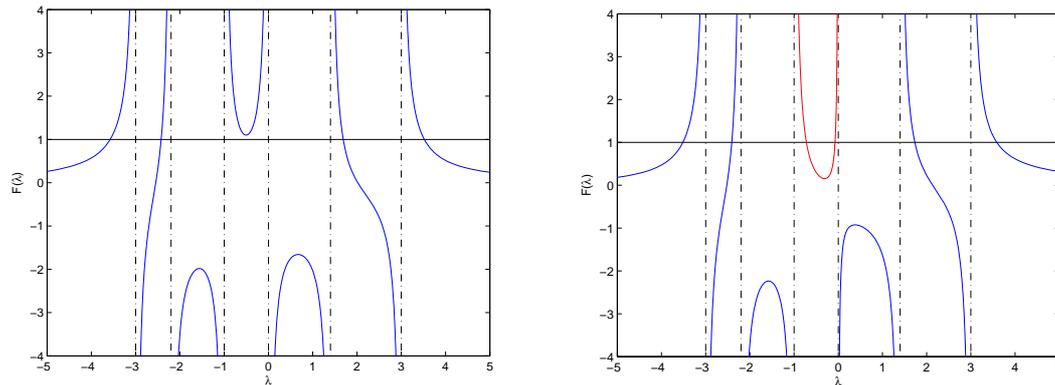


FIG. 2.9 – Fonction F : les γ_j changent trois fois de signe ; le lemme 2.11 ne permet pas de conclure.

On voit bien la conséquence de ces trois changements de signe avec cette fois trois intervalles dans lesquels la fonction F ne parcourt pas tout \mathbb{R} mais a la forme d'une parabole. Les conclusions sur la stabilité sont alors diverses comme nous allons le voir. Dans ce cas l'équation $F(\lambda) = 1$ est polynomiale de degré $P + 1 - k = 6$. On observe sur la figure de gauche quatre solutions réelles à l'équation, on ne peut donc conclure quant à la stabilité. En revanche, sur la figure de droite, on observe 6 solutions réelles, le profil est donc stable.

- Si on suppose que la condition (2.9) est vérifiée, un autre moyen de mettre en défaut les conditions du lemme 2.11 consiste à prendre $\zeta_j \neq 0$ pour $j < k'$ ou $j > k' + k + 1$. On illustre cela par la figure 2.10 qui est obtenue en prenant exactement les mêmes valeurs que pour la figure 2.6 mais avec cette fois $\zeta_1 \neq 0$:

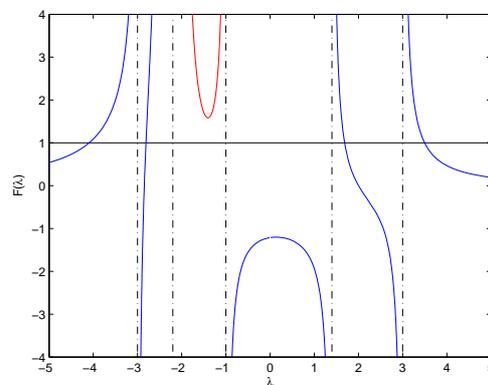


FIG. 2.10 – Fonction F : cas pour lequel le lemme 2.11 ne permet pas de conclure, $\zeta_1 \neq 0$.

En comparaison de la figure 2.10, on observe la perte d'une solution à l'équation $F(\lambda) = 1$ dans l'intervalle $[-2.2, -1]$, intervalle sur lequel la fonction a été tracée en rouge. Encore une fois si le minimum de F sur cet intervalle avait été strictement inférieur à 1 sur cet intervalle, alors on aurait pu conclure que le profil correspondant était stable.

Nous avons obtenu, au travers du lemme 2.11, une condition obscure pour la stabilité d'un profil linéaire par morceaux. Nous allons, dans la partie suivante, en déduire des conditions géométriques de stabilité pour un profil continu. En clair, il nous faut trouver des conditions sur un profil continu M pour que, lorsqu'on l'approche par des profils continus par morceaux M_h , ceux-ci vérifient les conditions du lemme 2.11. On pourra alors conclure sur la stabilité de M en utilisant le lemme 2.9.

2.4.3 Les résultats

En combinant les lemmes 2.9 et 2.11, nous allons établir des hypothèses géométriques sur le profil M assurant sa stabilité (toujours au sens de la définition 2.1). On utilise les mêmes notations que dans la partie précédente.

Théorème 2.3 Soit $M \in C^0(]-1, 1[)$. Alors M est stable dès que l'une de ces conditions est satisfaite :

1. M est strictement convexe (resp. concave).
2. M est strictement croissante (resp. décroissante) et il existe $y_S \in]-1, 1[$ tel que M est concave (resp. convexe) sur $]-1, y_S[$ et convexe (resp. concave) sur $]y_S, 1[$.

DÉMONSTRATION. Soit $h = 1/N$, on considère un maillage régulier de $[-1, 1]$ donné par les points

$$x_i = i h, \quad i = -N, \dots, N.$$

Soit $M_h(y)$ l'interpolation linéaire par morceaux de la fonction M sur ce maillage. Alors :

$$\|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])} \leq \omega(M, h),$$

où

$$\omega(M, h) = \sup_{|y_1 - y_2| < h} |M(y_1) - M(y_2)|.$$

En particulier,

$$\|M - M_h\|_{L^\infty([-1,1])} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad h \rightarrow 0.$$

Si l'on prouve que pour le profil M_h , les hypothèses du lemme 2.11 sont vérifiées, alors on conclut la démonstration de ce théorème à l'aide du lemme 2.9.

↔ Nous considérons tout d'abord un profil M strictement convexe. Clairement, M_h est aussi convexe et nous avons :

$$\alpha_i > \alpha_{i-1}, \quad 0 < i < N.$$

De surcroît, il est toujours possible de choisir le maillage¹⁵ pour s'assurer que :

$$\alpha_i \neq 0, \quad 0 \leq i < N,$$

¹⁵Le lecteur tatillon pourra se convaincre qu'il suffit par exemple de rajouter le point x_m tel que $M(x_m)$ soit le minimum de M dans le maillage.

ce qui entraîne en particulier que tous les ζ_j sont nuls (cf. démonstration du lemme 2.10).

Alors en se souvenant que $\gamma_P > 0$, en utilisant (2.8) et la convexité de M_h , on montre facilement que :

$$\gamma_j > 0, \quad \forall j > 0,$$

ce qui prouve que nous sommes bien dans le cadre du lemme 2.11 et achève la démonstration pour un profil strictement convexe.

Pour un profil M strictement concave, on peut montrer de la même manière, qu'il peut être approché par un profil continu linéaire par morceaux M_h , qui vérifiera cette fois :

$$\gamma_j < 0, \quad \forall j < P.$$

\Leftrightarrow Si M est strictement croissante et qu'il existe $y_S \in]-1, 1[$ tel que M est concave sur $] -1, y_S[$ et convexe sur $]y_S, 1[$, alors M_h est strictement croissante et on peut facilement voir qu'il existe $i_S \in]0, N[$ tel que M_h est concave sur $]x_0, x_{i_S}[$ et convexe sur $]x_{i_S}, x_N[$. Comme M_h est strictement croissante on a $\alpha_i \neq 0$ pour tout $0 \leq i < N$ ce qui entraîne :

$$\zeta_j = 0, \quad 0 \leq j \leq P.$$

La stricte croissance implique aussi $P = N$, $M(x_i) = M_i$ et on déduit de (2.8) que :

$$\gamma_j = \frac{1}{\alpha_{j-1}} - \frac{1}{\alpha_j}, \quad \forall 0 < j < P. \quad (2.10)$$

Puisque M_h est concave sur $]x_0, x_{i_S}[$ alors $\alpha_i > \alpha_{i+1}$ pour $i < i_S$. Par conséquent, en se souvenant que $\gamma_0 < 0$ on obtient de l'équation précédente que :

$$\gamma_j < 0, \quad 0 \leq j < i_S.$$

De manière similaire on a :

$$\gamma_j > 0, \quad i_S < j \leq P.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que quoi qu'il arrive à γ_{i_S} , (2.9) est satisfaite. Nous sommes donc bien dans le cadre du lemme 2.11, ce qui conclut la démonstration.

Si M est strictement décroissante et qu'il existe $y_S \in]-1, 1[$ tel que M est convexe sur $] -1, y_S[$ et concave sur $]y_S, 1[$ la démonstration est suffisamment similaire pour être omise.

□

Remarque 2.9 *La stabilité des profils concaves peut se déduire simplement de celle des profils convexes. En effet, il suffit de remarquer que si M est concave, alors $-M$ est convexe et on conclut en utilisant la propriété 2.2.*

De même la stabilité des profils décroissants, convexes puis concaves se déduit de la stabilité des profils croissants concaves puis convexes. En effet il suffit de remarquer que si M est décroissant, convexe puis concave, alors $-M$ est croissant concave puis convexe, et on conclut en utilisant la propriété 2.2. Dans ce cas on aurait aussi pu utiliser le fait que $M(-y)$ est croissant concave puis convexe, et on conclut en utilisant la propriété 2.1 avec $g(x) = -x$.

Cette remarque concerne un point de la démonstration, mais rappelle que les propriétés 2.2 et 2.1 permettent d'étendre les résultats de stabilité. Il existe un autre moyen d'étendre ces résultats :

Remarque 2.10 *Nous avons eu besoin dans ce théorème d'arguments de stricte monotonie ou de stricte convexité. En utilisant le fait que l'ensemble des profils stables est fermé (cf. remarque 2.8) nous pouvons étendre ces résultats et nous affranchir du caractère strict de ces hypothèses.*

Quelques commentaires sur ces résultats s'imposent. La première condition n'est pas surprenante si on se rappelle du fameux critère du point d'inflexion de Rayleigh [Ray79] pour les équations d'Euler linéarisées en incompressible : un profil instable possède nécessairement un point d'inflexion.

On remarque aussi que la seconde condition est équivalente au critère de Fjortoft [Fjo50] :

$$M''(y_S) = 0 \text{ et } M''(y)(M(y) - M(y_S)) \geq 0, \quad \forall y \neq y_S, \quad (2.11)$$

qui est une condition suffisante de stabilité, dans le cas incompressible encore une fois. Plus précisément, un profil qui vérifie la deuxième condition de notre théorème, s'il est $C^2(]-1, 1[)$ vérifie nécessairement la condition de Fjortoft. Nous allons maintenant montrer une sorte de réciproque :

On suppose que $M \in C^2(]-1, 1[)$ tel qu'il vérifie le critère de Fjortoft (2.11) : En intégrant cette dernière égalité entre y_S et $z \geq y_S$ on obtient après un simple calcul :

$$\forall z \geq y_S, \quad M'(z)(M(z) - M(y_S)) \geq \int_{y_S}^z M'(y)^2 dy \geq 0. \quad (2.12)$$

En intégrant entre $z \leq y_S$ et y_S on obtient de la même manière :

$$\forall z \leq y_S, \quad M'(z)(M(z) - M(y_S)) \leq 0. \quad (2.13)$$

En réunissant (2.11), (2.12) et (2.13) on montre :

$$\begin{cases} \forall z \geq y_S, & M'(z)M''(z) \geq 0, \\ \forall z \leq y_S, & M'(z)M''(z) \leq 0. \end{cases}$$

En intégrant la première inégalité entre z et z_+ avec $1 > z \geq z_+ \geq y_S$ on obtient :

$$M'(z)^2 \geq M'(z_+)^2, \quad (2.14)$$

ce qui montre que M' est de signe constant sur $]y_S, 1[$. En effet supposons par contradiction qu'il existe $y_S < a < b < 1$ tel que $M'(a)M'(b) < 0$. Puisque M' est continue cela signifie qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $M'(c) = 0$. On a alors par (2.14) :

$$M'(c)^2 \geq M'(a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad M'(a) = 0,$$

ce qui constitue une contradiction. On montre de manière similaire que M' est de signe constant sur $]-1, y_S[$.

En conclusion, pour tout $z \in]y_S, 1[$, puisque M' est de signe constant et que $M'(z)M''(z) \geq 0$, alors M'' aussi est de signe constant, et qui plus est de même signe que M' . Pour tout $z \in]-1, y_S[$, puisque M' est de signe constant et que $M'(z)M''(z) \leq 0$, alors M'' aussi est de signe constant, et qui plus est de signe opposé à celui de M' . Finalement, soit M est convexe (ou concave) sur $]-1, 1[$, soit elle vérifie les hypothèses de la deuxième condition de notre théorème.

Il existe dans la littérature peu de travaux et de résultats de ce type dans le cas compressible. On

peut citer [RV08] (cf. l'annexe) et [SH01] (cf. pages 241-242) dans lesquels les auteurs dérivent un critère de type Rayleigh pour les équations d'Euler linéarisées. Dans [SH01] les auteurs font référence à des travaux de Lees et Lin [LL46] dans lesquels les auteurs dérivent un critère de type Rayleigh. Ils procèdent comme l'a fait Tollmien dans le cas incompressible, en recherchant les modes neutres et en faisant un développement asymptotique autour de ceux-ci pour trouver une instabilité. On peut également citer [Mac84] pour des résultats plus numériques.

Typiquement, le théorème 2.3 prouve la stabilité de profils tels que ceux présentés par la figure 2.11. On peut se demander si ce théorème couvre tous les cas de profils pour lesquels, en les approchant par des profils linéaires par morceaux, ces derniers vérifient les hypothèses du lemme 2.11.

Pour un profil monotone, croissant par exemple, il est clair que pour que la condition (2.9) soit satisfaite, il faut au plus un changement de convexité. En effet (2.10) implique que $\gamma_j < 0$, $\forall 0 < j < P$ (resp. $\gamma_j > 0$, $\forall 0 < j < P$) si M_h concave (resp. convexe) sur $[M_{j-1}, M_{j+1}]$. Puisque $\gamma_0 < 0$ et $\gamma_P > 0$, pour vérifier (2.9), M_h donc M est nécessairement soit convexe ou concave, soit concave puis convexe.

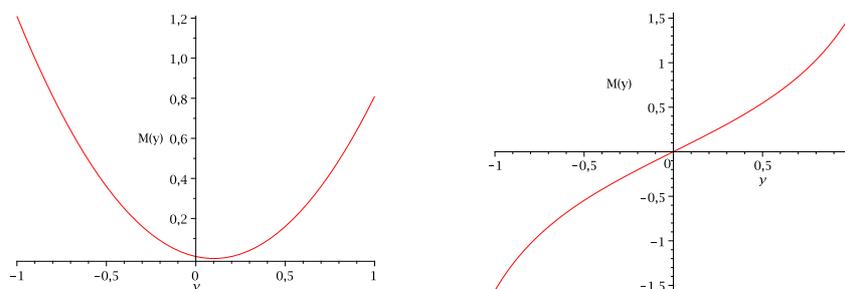


FIG. 2.11 – Exemples de profils stables, convexe (à gauche), croissant concave puis convexe (à droite).

En revanche, en ce qui concerne les profils non monotones, le théorème 2.3 n'est pas du tout exhaustif comme le montre la figure 2.12 qui donne l'exemple d'un profil stable qui n'entre pas dans les conditions du théorème 2.3 mais bien dans celles du lemme 2.11. En effet, dans ce cas $P = 1$,

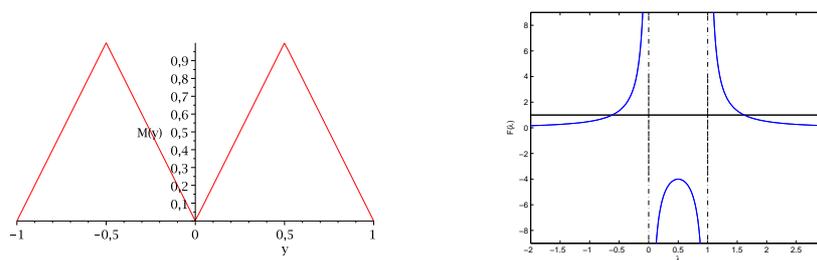


FIG. 2.12 – Exemple d'un profil périodique stable (à gauche) et la fonction F correspondante (à droite).

ce qui est une condition suffisante pour remplir les conditions du lemme 2.11. On a l'intuition que dès qu'un profil sera le périodisé d'un profil stable, alors il sera lui même stable. C'est ce que dit la proposition suivante qui permet elle aussi d'élargir la classe des profils stables :

Proposition 2.6 Soit $M \in L^\infty(-1, 1[)$. S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que M est périodique de période $2/n$,

c'est-à-dire :

$$M\left(y + i \frac{2}{n}\right) = M(y), \quad \forall 0 \leq i < n \text{ et } y \in \left[-1, -1 + \frac{2}{n}\right].$$

Si de plus le profil périodisé, défini pour $y \in]-1, 1[$ par

$$N(y) = M\left(\frac{y+1}{n} - 1\right),$$

est stable (resp. instable), alors M est stable (resp. instable) (au sens de la définition 2.1).

En particulier, si N vérifie les hypothèses du théorème 2.3 (s'il est par exemple continu et convexe ou concave) alors M est stable.

DÉMONSTRATION. Pour montrer cette proposition, compte tenu du corollaire (2.2), il suffit de montrer que :

$$F_M(\lambda) = F_N(\lambda),$$

où F_M (resp. F_N) est la fonction F définie par (2.5) associée à M (resp. N). Par définition nous avons :

$$F_M(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus \text{Im } M,$$

qui compte tenu de la périodicité de M vaut :

$$\frac{n}{2} \int_{-1}^{-1+\frac{2}{n}} \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2},$$

qui après le changement de variable $y = \frac{y'+1}{n} - 1$ devient :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy'}{(\lambda - N(y'))^2},$$

qui n'est autre que F_N . □

2.5 CONDITIONS D'INSTABILITÉ POUR DES PROFILS ANTISYMMÉTRIQUES

Nous allons dans cette partie, à l'image de la précédente, trouver des conditions générales sur le profil qui assurent son caractère instable au sens de la définition 2.1. Pour cela, il suffit d'assurer l'existence d'une solution non réelle à l'équation $F(\lambda) = 1$ (cf. corollaire 2.2). Malheureusement, l'analyse du cas général s'avère plus complexe. C'est pourquoi nous nous restreignons dans cette partie au cas particulier des profils antisymétriques (non nécessairement continus), i.e. un profil M tel que $M(-y) = -M(y)$ pour tout $y \in [-1, 1]$.

Nous allons prouver que dans ce cas la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ correspondante est réelle sur l'axe imaginaire. Par conséquent, nous pourrions appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $\nu \mapsto F(i\nu)$. Cela va nous permettre d'obtenir des conditions suffisantes sur le profil de Mach $M(y)$ entraînant l'existence d'une solution non réelle à l'équation $F(\lambda) = 1$, synonyme d'instabilité.

Remarque 2.11 – En remarquant qu'ajouter une constante m au profil $(M(y) \rightarrow M(y) + m)$ a pour conséquence une translation du spectre ($\lambda \rightarrow \lambda + m$), tous les résultats de cette section peuvent facilement être étendus aux profils qui sont antisymétriques à une constante près : $M(-y) + M(y) = 2m$ pour tout $y \in [-1, 1]$. Pourtant, il existe une différence de taille entre le cas $m = 0$ et $m \neq 0$: en effet, pour $m = 0$, les instabilités qui sont étudiées dans cette section sont "absolues" (comme défini dans [HM85]) alors qu'elles sont "convectives" si $m \neq 0$.

- Grâce à la remarque 2.8, qui dit que l'ensemble des profils instables est ouvert, si un profil antisymétrique $M(y)$ est instable, tous les profils suffisamment proche au sens de la norme $L^\infty([-1, 1])$ de $M(y)$ sont aussi instables.
- On rappelle également que grâce aux propriétés 2.1 et 2.2 on peut étendre ces résultats à une plus grande classe de profil. La proposition 2.6, que l'on vient de montrer, est elle aussi un outil pour l'extension des résultats.

2.5.1 Une première condition d'instabilité

Nous montrons tout d'abord :

Lemme 2.12 Si M est antisymétrique, alors :

1. $\forall \lambda \notin R(M), \quad F(\lambda) = F(-\lambda),$
2. $\forall v \in \mathbb{R}^*, \quad F(iv) \in \mathbb{R}.$

DÉMONSTRATION. En se rappelant que

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus \text{Im } M,$$

le changement de variable $y \rightarrow -y$ nous donne alors la première égalité. Alors en utilisant la relation triviale, $\overline{F(\lambda)} = F(\overline{\lambda})$, on obtient pour $v \in \mathbb{R}^*$:

$$F(iv) = F(-iv) = F(\overline{iv}) = \overline{F(iv)},$$

ce qui prouve que F prend des valeurs réelles sur l'axe imaginaire. □

Une conséquence de ce lemme est le corollaire suivant, qui sera le principal outil dans la suite de cette section.

Corollaire 2.4 Si M est antisymétrique et si

$$\limsup_{v \rightarrow 0} F(iv) > 1 \tag{2.15}$$

alors l'opérateur A a au moins deux valeurs propres iv et $-iv$ avec $v > 0$, et le profil M est instable (au sens de la définition 2.1).

DÉMONSTRATION. Un simple calcul nous donne :

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathbb{R}^* \quad F(iv) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{(iv - M(y))^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M(y)^2 - v^2}{(M(y)^2 + v^2)^2} dy + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2ivM(y)}{(M(y)^2 + v^2)^2} dy. \end{aligned}$$

En utilisant l'imparité de M on obtient l'expression suivante :

$$\forall v \in \mathbb{R}^* \quad F(iv) = \int_0^1 \frac{M(y)^2 - v^2}{(M(y)^2 + v^2)^2} dy. \quad (2.16)$$

La fonction $v \mapsto F(iv)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* et tend vers 0 quand v tend vers $+\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, si la condition (2.15) est satisfaite, il existe au moins une valeur de $v \neq 0$, telle que $F(iv) = F(-iv) = 1$. On conclut la démonstration en utilisant la caractérisation, maintenant bien connue, des valeurs propres de A de la proposition 2.3. \square

La condition (2.15) est une condition suffisante d'instabilité dans le cas d'un profil antisymétrique. Ce n'est clairement pas, en général, une condition nécessaire : en effet les valeurs propres non réelles de l'opérateur A ne sont pas nécessairement sur l'axe imaginaire et même si A a des valeurs propres non réelles sur l'axe imaginaire, la condition (2.15) ne sera pas pour autant automatiquement vraie. Malgré tout, nous pouvons établir une réciproque dans un cadre plus restreint. L'idée est de se restreindre à une classe de profils pour lesquels il existera au plus deux valeurs propres non réelles, qui compte tenu du lemme 2.12 seront nécessairement, si elles existent, imaginaires pures.

Proposition 2.7 *Si M est une fonction continue et antisymétrique sur $[-1, 1]$. Si de plus elle est strictement croissante et concave sur $[0, 1]$, alors M est instable si et seulement si*

$$\limsup_{v \rightarrow 0} F(iv) > 1.$$

DÉMONSTRATION. Un sens a déjà été montré au travers du corollaire précédent. On suppose donc que M est instable et on veut montrer que la condition (2.15) est vérifiée. Puisque M est instable, il existe par définition $\lambda_M \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $F(\lambda_M) = 1$. Compte tenu du caractère symétrique du spectre de A on peut supposer de plus que $\Im(\lambda_M) > 0$.

Pour montrer le résultat nous allons à nouveau utiliser l'approximation par des profils linéaires par morceaux. Soit $h = 1/N$, on considère le maillage régulier de l'intervalle $[-1, 1]$ donné par les points

$$x_i = ih, i = -N, \dots, 0, \dots, N.$$

Soit $M_h(y)$ l'interpolé linéaire par morceaux de M sur ce maillage, de telle sorte que $\|M - M_h\|_{L^\infty([-1, 1])}$ tend vers 0 avec h . Grâce au lemme 2.9, nous savons qu'il existe λ_h tel que $F_h(\lambda_h) = 1$ et $\lambda_h \rightarrow \lambda_M$ quand $h \rightarrow 0$.

Clairement $M_h(y)$ est une fonction antisymétrique¹⁶ et continue, elle est de plus concave et strictement croissante sur $[0, 1]$. En utilisant le caractère antisymétrique, et en notant $M(jh) = M_j$, on déduit de (2.7) l'expression suivante de F_h (qui est la fonction "F" définie par (2.5) associée au profil M_h) :

$$F_h(\lambda) = h \sum_{j=1}^N \gamma_j^h \left(\frac{1}{\lambda - M_j} - \frac{1}{\lambda + M_j} \right) \quad (2.17)$$

avec

$$\gamma_j^h = -2 \frac{M_{j+1} + M_{j-1} - 2M_j}{(M_j - M_{j-1})(M_{j+1} - M_j)} \text{ pour } j = 1, \dots, N-1,$$

¹⁶Le fait que le maillage soit régulier et qu'il contienne 0 joue un rôle essentiel ici.

et

$$\gamma_N^h = \frac{1}{M_N - M_{N-1}}.$$

On déduit de la concavité ainsi que de la stricte croissance de $M(y)$:

$$\begin{cases} \gamma_j^h < 0 \text{ pour } j = 0, \dots, N-1, \\ \gamma_N^h > 0. \end{cases}$$

Par la suite, en procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 2.11, on voit que l'équation $F_h(\lambda) = 1$, qui a au plus $2N$ racines complexes différentes, a au moins $2N - 2$ racines réelles différentes. En d'autres termes, l'équation $F_h(\lambda) = 1$ a au plus deux solutions non réelles. Par le lemme 2.12, cela prouve que $\lambda_h \in i\mathbb{R}$, autrement l'équation $F_h(\lambda) = 1$ aurait quatre différentes racines non réelles $\lambda_h, -\lambda_h, \overline{\lambda_h}$ et $-\overline{\lambda_h}$. Plus précisément, $\lambda_h = iv_h$ où v_h est l'unique solution de $F_h(iv) = 1$ pour $v > 0$. On remarque qu'a fortiori, $\lambda_M = iv_M$ où v_M est l'unique solution de $F(iv) = 1$ pour $v > 0$.

Pour aller plus loin, nous allons avoir besoin du résultat suivant démontré dans le lemme 2.13 :

$$\text{Si } \frac{d}{dv} F_h(iv) = 0 \text{ pour } v > 0, \text{ alors } F_h(iv) \leq 0. \quad (2.18)$$

Par conséquent, (en rappelant que $v \mapsto F_h(iv)$ tend vers 0 quand v tend vers $+\infty$), le comportement représenté sur la gauche de la figure 2.13 est à exclure pour F . En effet, cela impliquerait nécessairement que F_h a le même comportement ce qui n'est pas possible en vertu de 2.18. Nous avons donc en utilisant l'unicité de la solution de l'équation $F_h(iv) = 1$ pour $v > 0$:

$$F_h(iv) > 1 \text{ si } 0 < v < v_h \quad \text{et} \quad F_h(iv) < 1 \text{ si } v > v_h$$

et par la suite en utilisant l'unicité de la solution de l'équation $F(iv) = 1$ pour $v > 0$)

$$F(iv) > 1 \text{ si } 0 < v < v_M, \quad \text{et} \quad F(iv) < 1 \text{ si } v > v_M.$$

Cela montre que

$$\limsup_{v \rightarrow 0} F(iv) \geq 1.$$

Pour conclure, on remarque que si $\limsup_{v \rightarrow 0} F(iv) = 1$ (cf. figure 2.13 à droite), alors pour h

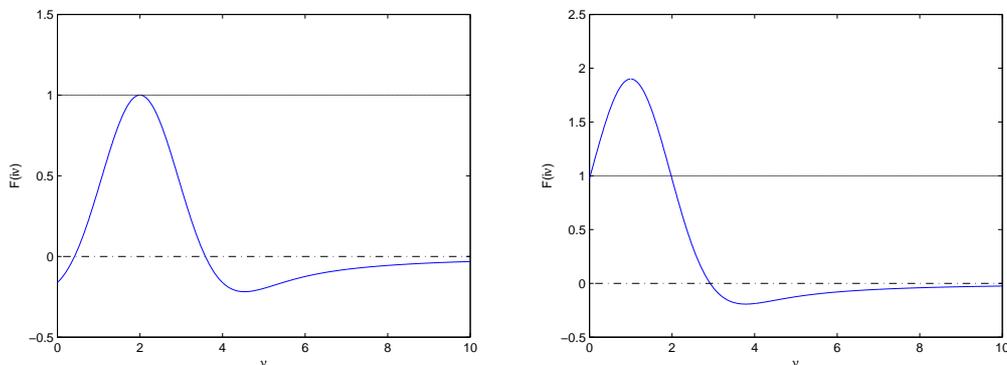


FIG. 2.13 – Illustration de la démonstration du lemme 2.7 : comportements impossibles de la fonction $F(iv)$.

suffisamment petit, il existe ν tel que $0 < \nu < \nu_h$ et

$$\frac{d}{d\nu} F_h(i\nu) = 0,$$

ce qui contredit (2.18). □

Remarque 2.12 *La proposition reste vraie si on remplace l'hypothèse de stricte croissance sur $[0, 1]$ par la double hypothèse :*

(i) M est **strictement** concave sur $[0, 1]$,

(ii) $M(y) > 0$ pour tout $y \in]0, 1[$.

La démonstration s'adapte alors assez simplement.

Nous démontrons maintenant le résultat annoncé dans la démonstration précédente :

Lemme 2.13 *Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que que dans le lemme 2.7 on a :*

$$\text{Si } \frac{d}{d\nu} F_h(i\nu) = 0 \text{ pour } \nu > 0, \text{ alors } F_h(i\nu) \leq 0.$$

DÉMONSTRATION. En prenant $\lambda = i\nu$ dans l'expression (2.17) de F_h on obtient :

$$F_h(i\nu) = -h \sum_{j=1}^N \gamma_j^h \frac{2M_j}{\nu^2 + M_j^2}$$

On suppose que $\frac{d}{d\nu} F_h(i\nu) = 0$ pour un $\nu > 0$; on a alors :

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j^h \frac{2M_j}{(\nu^2 + M_j^2)^2} = 0 \tag{2.19}$$

En utilisant cette équation on obtient l'expression suivante de F_h :

$$F_h(i\nu) = -h \sum_{j=1}^N \gamma_j^h \frac{2M_j(\nu^2 + M_j^2)}{(\nu^2 + M_j^2)^2} = -h \sum_{j=1}^N \gamma_j^h \frac{2M_j^3}{(\nu^2 + M_j^2)^2}$$

Puisque $\gamma_j^h < 0$ pour $j = 0, \dots, N-1$, $\gamma_N^h > 0$ et $0 < M_1 < \dots < M_N$, ces résultats étant des conséquences de la concavité et de la monotonie de $M(y)$ (cf. démonstration du lemme 2.7), on obtient facilement de (2.19) l'inégalité suivante :

$$\gamma_N^h \frac{2M_N^3}{(\nu^2 + M_N^2)^2} > - \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_j^h \frac{2M_j^3}{(\nu^2 + M_j^2)^2}$$

qui implique $F_h(i\nu) < 0$. □

Nous avons été amenés, dans cette étude de stabilité des profils antisymétriques, à regarder si $F(i\nu)$ pouvait s'annuler en même temps que sa dérivée. En fait, on peut montrer qu'un tel cas correspond à un "bloc de Jordan" de l'opérateur A .

Lemme 2.14 Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{Im } M$ alors λ est une valeur propre associée à un bloc de Jordan, c'est-à-dire qu'il existe \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2 dans $L^2([-1, 1])^2$ tels que :

$$\begin{cases} A\mathbf{U}_1 = \lambda\mathbf{U}_1, \\ A\mathbf{U}_2 = \lambda\mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_1, \end{cases} \quad (2.20)$$

si et seulement si $F(\lambda) = 1$ et $F'(\lambda) = 0$.

DÉMONSTRATION. • Nous commençons par le sens direct. Nécessairement λ est valeur propre associée au vecteur propre \mathbf{U}_1 donc nous déduisons de la proposition 2.3 que $F(\lambda) = 1$. De plus cette proposition nous dit que λ est une valeur propre simple et que

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda - M)^2} \\ \frac{1}{\lambda - M} \end{pmatrix}.$$

Si on note $\mathbf{U}_2 = (\mathbf{U}_2, \dot{\mathbf{U}}_2)$ alors la deuxième ligne de (2.20) devient en utilisant la définition (2.3) de A :

$$\begin{cases} M\mathbf{U}_2 + \dot{\mathbf{U}}_2 = \lambda\mathbf{U}_2 + \frac{1}{(\lambda - M)^2}, \\ E\mathbf{U}_2 + M\dot{\mathbf{U}}_2 = \lambda\dot{\mathbf{U}}_2 + \frac{1}{\lambda - M}. \end{cases}$$

La première ligne nous donne une expression de $\dot{\mathbf{U}}_2$ que l'on injecte dans la deuxième ligne pour obtenir :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_2 = (\lambda - M)\mathbf{U}_2 + \frac{1}{(\lambda - M)^2}, \\ E\mathbf{U}_2 = (\lambda - M)^2\mathbf{U}_2 + \frac{2}{\lambda - M}. \end{cases}$$

Si on applique maintenant l'opérateur de moyenne E à la deuxième équation après avoir divisé par $(\lambda - M)^2$ on obtient :

$$(1 - F(\lambda))E\mathbf{U}_2 = E \left[\frac{-2}{(\lambda - M)^3} \right].$$

Puisque $F(\lambda) = 1$ on obtient $E \left[\frac{-2}{(\lambda - M)^3} \right] = 0$ qui signifie exactement $F'(\lambda) = 0$.

• Réciproquement, on suppose que $F(\lambda) = 1$ et que $F'(\lambda) = 0$. On voit alors compte tenu du travail effectué précédemment que :

$$\mathbf{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda - M)^2} \\ \frac{1}{\lambda - M} \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{(\lambda - M)^2} - \frac{2}{(\lambda - M)^3} \\ \frac{1}{\lambda - M} - \frac{1}{(\lambda - M)^2} \end{pmatrix},$$

vérifient (2.20). □

Dans la suite nous allons exhiber diverses situations pour lesquelles on peut prouver l'existence et calculer la limite de la fonction $F(i\nu)$ quand $\nu \rightarrow 0$. Nous utiliserons alors la proposition 2.7 pour en déduire des résultats d'instabilité. Mais avant ça, nous allons montrer un résultat de type Howard (voir page 142 de [DR04]), qui donne une localisation des valeurs propres donc des instabilités.

Localisation des instabilités

Lemme 2.15 Soient $M \in C^0(]-1, 1[)$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{I}m M$ tel que $F(\lambda) = 1$. Si on écrit $\lambda = \lambda_R + i \lambda_I$ avec $(\lambda_R, \lambda_I) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ alors on a :

$$0 < \lambda_I^2 < \sup_y \frac{-\left(1 + 2(\lambda_R - M(y))^2\right) + \sqrt{1 + 8(\lambda_R - M(y))^2}}{2}. \quad (2.21)$$

DÉMONSTRATION. L'équation $F(\lambda) = 1$ peut se réécrire compte tenu de la définition (2.5) de F :

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{(\lambda_R - M(y))^2 - 2i \lambda_I (\lambda_R - M(y)) - \lambda_I^2}{\left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2} dy = 1,$$

qui devient en passant le 1 dans l'intégrale et en mettant au même dénominateur :

$$\int_{-1}^1 \frac{(\lambda_R - M(y))^2 - 2i \lambda_I (\lambda_R - M(y)) - \lambda_I^2 - \left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2}{\left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2} dy = 0. \quad (2.22)$$

• En prenant la partie imaginaire de cette équation (2.22) on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{-2 \lambda_I (\lambda_R - M(y))}{\left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2} dy = 0,$$

ce qui donne puisque $\lambda_I \neq 0$:

$$\int_{-1}^1 \frac{(\lambda_R - M(y))}{\left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2} dy = 0.$$

Nécessairement pour que cette intégrale puisse être nulle il faut que $\lambda_R \in \mathcal{I}m M$.

• En prenant cette fois la partie réelle de l'équation (2.22) on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(\lambda_I^2, y, \lambda_R)}{\left((\lambda_R - M(y))^2 + \lambda_I^2\right)^2} dy = 0, \quad (2.23)$$

où l'on a introduit le polynôme $X \mapsto P(X, y, \lambda_R) = \left((\lambda_R - M(y))^2 + X\right)^2 + X - (\lambda_R - M(y))^2$. On fixe y et λ_R et on cherche les racines de ce polynôme de degré 2. Il a pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta(y, \lambda_R) &= \left(1 + 2(\lambda_R - M(y))^2\right)^2 - 4\left((\lambda_R - M(y))^4 - (\lambda_R - M(y))^2\right) \\ &= 1 + 8(\lambda_R - M(y))^2, \end{aligned}$$

et donc pour racines

$$X_{\pm}(y, \lambda_R) = \frac{-\left(1 + 2(\lambda_R - M(y))^2\right) \pm \sqrt{\Delta(y)}}{2}.$$

Pour que (2.23) soit vérifiée il faut que $y \mapsto P(\lambda_I^2, y, \lambda_R)$ prenne des valeurs positives et négatives. Il faut donc nécessairement que :

$$\inf_y X_-(y, \lambda_R) < \lambda_I^2 < \sup_y X_+(y, \lambda_R),$$

qui devient puisque $\lambda_I^2 > 0$:

$$0 < \lambda_I^2 < \sup_y X_+(y, \lambda_R).$$

ce qui conclut la démonstration. □

La condition (2.21) nous donne une localisation des instabilités. En particulier elle nous fournit une majoration de la "vitesse" λ_I de ces instabilités en fonction du profil. Il est possible de dériver des majorations plus simples que (2.21), c'est l'objet de la remarque suivante.

Remarque 2.13 • Nous pouvons obtenir une majoration plus simple de λ_I^2 . En utilisant le fait que $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$ on obtient :

$$X_+(y, \lambda_R) \leq \frac{-\left(1 + 2(\lambda_R - M(y))^2\right) + 1 + \sqrt{8}|\lambda_R - M(y)|}{2},$$

et en se souvenant que l'on a montré que $\lambda_R \in \text{Im } M$ on peut écrire la majoration suivante qui ne dépend plus ni de y ni de λ_R :

$$\sup_y X_+(y, \lambda_R) \leq \sqrt{2}(M_+ - M_-),$$

et on aurait finalement :

$$0 < \lambda_I^2 < \sqrt{2}(M_+ - M_-).$$

• Dans le cas où $\lambda_R = 0$ qui est le cas qui nous intéresse dans cette section nous avons :

$$X_+(y, \lambda_R) = \frac{-1 - 2M(y)^2 + \sqrt{1 + 8M(y)^2}}{2}.$$

et la condition (2.21) devient :

$$0 < \lambda_I^2 < \sup_y \frac{-1 - 2M(y)^2 + \sqrt{1 + 8M(y)^2}}{2}.$$

2.5.2 Application à des profils singuliers

Nous voulons appliquer le corollaire 2.4 (resp. la proposition 2.7) pour trouver des conditions suffisantes (resp. suffisantes et nécessaires) de stabilité. Nous commençons par le cas, le plus simple, de profils pour lesquels la limite de $F(iv)$ quand $v \rightarrow 0$ est obtenue à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 2.4 Soit M un profil antisymétrique tel que

$$\int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2} < +\infty. \quad (2.24)$$

Alors le profil M est instable (au sens de la définition 2.1) si la condition suivante est vérifiée :

$$\int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2} > 1. \quad (2.25)$$

Si de plus M est une fonction continue de y sur $[-1, 1]$, concave strictement croissante sur $[0, 1]$, alors M est instable si et seulement si (2.25) est vérifiée.

DÉMONSTRATION. Pour $\nu > 0$, nous avons :

$$|F(i\nu)| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\nu^2 + M(y)^2} \leq \int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2}.$$

Nous pouvons par conséquent appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue, ce qui donne :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} F(i\nu) = \int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2}.$$

L'énoncé du théorème suit en utilisant le corollaire 2.4 et la proposition 2.7. □

On remarque que (2.25) montre que tout profil subsonique satisfaisant (2.24) est instable.

La condition (2.24) est clairement satisfaite pour un profil M qui ne s'annule pas : puisque M est antisymétrique, il doit être discontinu en $y = 0$. Par exemple, si M est un profil antisymétrique bi-couches, on retrouve une partie du lemme 2.8.

Nous considérons maintenant un profil continu. La condition (2.24) ne peut être vérifiée par un profil régulier M mais on peut l'utiliser par exemple si $M(y)$ a un comportement tel que

$$y^\alpha \text{ avec } 0 < \alpha < 1/2 \text{ pour } y \xrightarrow{>} 0 :$$

Lemme 2.16 *Le profil antisymétrique défini par $M(y) = M_+ y^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1/2$ est instable (au sens de la définition 2.1) si et seulement si*

$$(1 - 2\alpha)M_+^2 < 1$$

DÉMONSTRATION. Une simple intégration donne :

$$\int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2} = \frac{1}{M_+^2(1 - 2\alpha)},$$

et on conclut à l'aide de 2.25. □

En d'autres termes, il existe des modes instables si et seulement si $M_+ < M_\alpha$ avec $M_\alpha = 1/(1 - 2\alpha)$. On remarque que $M_\alpha \rightarrow 1$ par valeurs supérieures quand $\alpha \rightarrow 0$, ce qui est toujours en accord avec le cas du profil bi-couches.

Sachant que pour $\alpha \geq 1$ un tel profil sera toujours stable puisqu'il est croissant concave puis convexe¹⁷, on peut se demander ce qui se passe quand $1/2 < \alpha < 1$. Nous allons prouver qu'un tel profil est toujours instable :

¹⁷cf. théorème 2.3.

Lemme 2.17 *Le profil antisymétrique défini par $M(y) = ay^\alpha$ avec $a > 0$ et $1/2 < \alpha < 1$ est instable (au sens de la définition 2.1).*

DÉMONSTRATION. Pour un tel profil, la fonction $F(iv)$ a l'expression suivante :

$$F(iv) = \int_0^1 \frac{a^2 y^{2\alpha} - v^2}{(a^2 y^{2\alpha} + v^2)^2} dy.$$

Un simple changement de variable donne :

$$F(iv) = v^{1/\alpha-2} a^{-1/\alpha} \int_0^{(a/v)^{1/\alpha}} \frac{y^{2\alpha} - 1}{(y^{2\alpha} + 1)^2} dy,$$

de telle sorte que :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{F(iv)}{v^{2-1/\alpha}} = a^{-1/\alpha} S(\alpha) \text{ avec } S(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{2\alpha} - 1}{(y^{2\alpha} + 1)^2} dy.$$

On calcule facilement pour $\alpha > 1/2$:

$$S(\alpha) = \int_0^1 \frac{1 - y^{2\alpha}}{(y^{2\alpha} + 1)^2} \frac{1 - y^{2-2\alpha}}{y^{2-2\alpha}} dy$$

ce qui montre que $S(\alpha) > 0$ pour $1/2 < \alpha < 1$. Par conséquent $\lim_{v \rightarrow 0} F(iv) = +\infty$ et on conclut encore une fois à l'aide du corollaire 2.4. □

Tous les résultats de stabilité concernant les profils y^α sont résumés sur la figure 2.14.

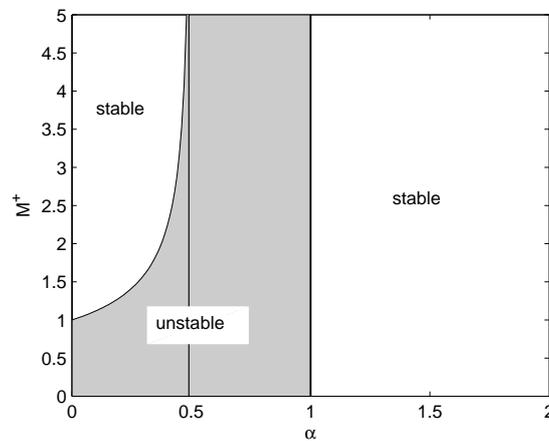


FIG. 2.14 – Zone de stabilité des profils $M^+ y^\alpha$ dans le plan (α, M^+) .

2.5.3 Une technique de perturbation

Si M est un profil antisymétrique régulier (par exemple C^1), les résultats de la section précédente ne s'appliquent pas. En effet, pour un tel profil nous avons nécessairement

$$\int_0^1 \frac{dy}{M(y)^2} = +\infty.$$

On va tout de même pouvoir déduire quelques résultats du lemme suivant :

Lemme 2.18 *On suppose que M et \tilde{M} sont tous les deux des profils antisymétriques tels que :*

$$\int_0^1 \left| \frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{M(y)^2 \tilde{M}(y)} \right| dy < +\infty \text{ et } \int_0^1 \left| \frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{M(y) \tilde{M}(y)^2} \right| dy < +\infty \quad (2.26)$$

alors (\tilde{F} étant la fonction "F" associée au profil \tilde{M}), $F(iv) - \tilde{F}(iv)$ a une limite finie quand v tend vers 0, cette limite étant donnée par :

$$\lim_{v \rightarrow 0} (F(iv) - \tilde{F}(iv)) = \int_0^1 \frac{\tilde{M}(y)^2 - M(y)^2}{M(y)^2 \tilde{M}(y)^2} dy \quad (2.27)$$

DÉMONSTRATION. Pour $\lambda \notin \mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned} F(\lambda) - \tilde{F}(\lambda) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(\lambda - M(y))^2} - \frac{1}{(\lambda - \tilde{M}(y))^2} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{[(\lambda - \tilde{M}(y)) + (\lambda - M(y))](M(y) - \tilde{M}(y))}{(\lambda - M(y))^2 (\lambda - \tilde{M}(y))^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{(\lambda - M(y))^2 (\lambda - \tilde{M}(y))} + \frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{(\lambda - M(y)) (\lambda - \tilde{M}(y))^2} \right) dy \end{aligned}$$

En prenant $\lambda = iv$, grâce à l'hypothèse (2.26), on peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour montrer que :

$$\lim_{v \rightarrow 0} (F(iv) - \tilde{F}(iv)) = \frac{-1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{M(y)^2 \tilde{M}(y)} + \frac{M(y) - \tilde{M}(y)}{M(y) \tilde{M}(y)^2} \right) dy$$

ce qui donne (2.27). □

Bien entendu ce résultat est utile quand \tilde{M} est choisi tel que $\lim_{v \rightarrow 0} \tilde{F}(iv)$ est connue. En particulier, si $\lim_{v \rightarrow 0} \tilde{F}(iv) = +\infty$, le lemme précédent prouve l'instabilité de tout M vérifiant (2.26). Un exemple d'application simple est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.19 *Soient $1/2 < \alpha < 1$ et $M(y)$ un profil antisymétrique. Si*

$$\int_0^1 \frac{|M(y) - ay^\alpha|}{y^{3\alpha}} dy < +\infty, \quad (2.28)$$

alors M est instable (au sens de la définition 2.1).

DÉMONSTRATION. On pose $\tilde{M}(y) = ay^\alpha$. Alors on sait par le lemme 2.17 que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \tilde{F}(iv) = +\infty.$$

Par ailleurs, (2.28) est équivalent à (2.26). Finalement, le lemme 2.18 prouve que $\lim_{v \rightarrow 0} F(iv) = +\infty$. □

2.5.4 Application à des profils réguliers

Nous allons maintenant montrer comment appliquer le lemme 2.18 à un profil régulier :

Théorème 2.5 Soit M un profil antisymétrique, C^1 dans un voisinage de 0, tel que :

1. $M(y) \neq 0$ pour $y \neq 0$,
2. $M'(0) \neq 0$,
3. $\int_0^1 \frac{|M(y) - M'(0)y|}{y^3} dy < +\infty$.

Alors M est instable (au sens de la définition 2.1) si la condition suivante est vérifiée :

$$1 + M'(0)^2 < \int_0^1 \frac{M'(0)^2 - (M(y)/y)^2}{M(y)^2} dy. \quad (2.29)$$

Si, de plus, M est une fonction continue de y sur $[-1, 1]$ et si elle est concave strictement croissante sur $[0, 1]$, alors M est instable si et seulement si (2.29) est vérifiée.

DÉMONSTRATION. On pose $\tilde{M}(y) = M'(0)y$. Alors, comme nous l'avons déjà remarqué, \tilde{F} a une expression simple :

$$\tilde{F}(iv) = \frac{-1}{v^2 + M'(0)^2},$$

qui donne directement $\lim_{v \rightarrow 0} \tilde{F}(iv) = -1/M'(0)^2$. D'un autre côté, la troisième hypothèse est dans ce cas équivalente à (2.26), de telle sorte qu'on peut appliquer le lemme 2.18 et (2.27) devient dans le cas présent :

$$\lim_{v \rightarrow 0} F(iv) + \frac{1}{M'(0)^2} = \int_0^1 \frac{M'(0)^2 y^2 - M(y)^2}{M(y)^2 M'(0)^2 y^2} dy$$

ce qui donne (2.29) comme condition d'instabilité compte tenu du corollaire 2.4. Une fois de plus la proposition 2.7 nous donne l'équivalence si M est une fonction continue de y sur $[-1, 1]$ et si elle est concave strictement croissante sur $[0, 1]$. □

Remarque 2.14 On remarque que l'hypothèse 3) du théorème 2.5 est automatiquement satisfaite si M est un profil C^2 antisymétrique puisqu'alors $M''(0) = 0$.

Le lecteur attentif aura remarqué que la condition (2.29) relie le comportement en 0 (terme de gauche) à une quantité globale (terme de droite). Cette condition étant assez difficile à interpréter, nous allons l'illustrer sur l'exemple d'une famille de profils :

Corollaire 2.5 Pour $a > 0$ et $\alpha > 0$, on définit le profil M comme suit :

$$M(y) = a \tanh(\alpha y).$$

Soit $\alpha^* > 0$ l'unique solution de l'équation $\alpha \tanh \alpha = 1$. Alors, le profil M est instable (au sens de la définition 2.1) si et seulement si

$$\alpha > \alpha^* \text{ et } a < \left(1 - \frac{1}{\alpha \tanh \alpha}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

DÉMONSTRATION. On montre facilement que M satisfait les hypothèses du théorème 2.5. Ce dernier nous dit alors que M est instable si et seulement si (2.29) est vérifiée. Or, dans le cas présent (2.29) se réécrit après calcul :

$$1 + a^2 \alpha^2 < \alpha^2 + 1 - \frac{\alpha}{\tanh \alpha},$$

qui donne :

$$a^2 < 1 - \frac{1}{\alpha \tanh \alpha},$$

qui permet de conclure facilement. □

Une fois de plus, on retrouve le résultat pour un profil bi-couches lorsque $\alpha \rightarrow +\infty$.

Le théorème 2.5 nous fournit un outil pour savoir si un profil régulier est instable. Il est parfaitement impossible d'être exhaustif. En exercice, le lecteur pourra montrer, par exemple, que le profil $M(y) = M_+ \sin \frac{\pi y}{2}$ est toujours stable.

Profils réguliers mais pas trop

Comme nous l'avons vu, la condition 3) du théorème 2.5 est automatiquement satisfaite si M est un profil C^2 antisymétrique (puisqu'alors $M''(0) = 0$). Cela fait naître en le lecteur une envie irrésistible d'approfondir le cas d'un profil antisymétrique C^1 mais non C^2 . C'est à ces justes attentes que nous allons en partie répondre par le lemme suivant :

Lemme 2.20 *Soit M un profil antisymétrique, C^1 sur $[-1, 1]$, $C^{2+\alpha}$ sur $[0, 1]$ (avec $\alpha > 0$) qui est de plus strictement croissant sur $[0, 1]$. Si $M''(0^+) = \lim_{y \rightarrow 0^+} M''(y) < 0$ alors M est instable (au sens de la définition 2.1).*

DÉMONSTRATION. Nous rappelons l'expression (2.16) de $F(iv)$ pour $v \in \mathbb{R}^*$:

$$F(iv) = \int_0^1 \frac{M(y)^2 - v^2}{(M(y)^2 + v^2)^2} dy.$$

Compte tenu des hypothèses faites sur le profil M , nous pouvons introduire μ la fonction inverse de M sur $[0, 1]$:

$$\mu(\lambda) = M^{-1}(\lambda), \quad \lambda \in [0, M_+].$$

Des propriétés de M nous déduisons que μ est dérivable, strictement croissante sur $[0, 1]$. De plus $\mu(0) = 0$. En utilisant le changement de variable $z = M(y)$ dans l'expression de $F(iv)$ nous obtenons :

$$F(iv) = \int_0^{M_+} \frac{z^2 - v^2}{(z^2 + v^2)^2} \mu'(z) dz. \quad (2.30)$$

M étant C^2 sur $[0, 1]$, il en est de même pour μ . On trouve facilement :

$$\mu'(0) = \frac{1}{M'(0)}, \quad \mu''(0^+) = -\frac{M''(0^+)}{M'(0)^2}.$$

Par conséquent, pour $z \geq 0$ nous pouvons écrire le développement limité suivant :

$$\mu'(z) = \frac{1}{M'(0)} - \frac{M''(0^+)}{M'(0)^2} z + r(z),$$

où la fonction $r(z)/z$ tend vers 0 quand z tend vers 0. En injectant ce développement dans (2.30) on obtient :

$$F(iv) = \frac{1}{M'(0)}\Phi_0(v) - \frac{M''(0^+)}{M'(0)^2}\Phi_1(v) + \Phi_r(v), \quad (2.31)$$

où nous avons posé :

$$\begin{cases} \Phi_0(v) = \int_0^{M_+} \frac{z^2 - v^2}{(z^2 + v^2)^2} dz, \\ \Phi_1(v) = \int_0^{M_+} \frac{z^2 - v^2}{(z^2 + v^2)^2} z dz, \\ \Phi_r(v) = \int_0^{M_+} \frac{z^2 - v^2}{(z^2 + v^2)^2} r(z) dz. \end{cases}$$

Pour montrer que M est instable nous voulons utiliser la caractérisation du corollaire 2.4. Pour cela, nous allons calculer la limite de $F(iv)$ quand v tend vers 0 :

(i) On a tout d'abord, par le théorème de Lebesgue :

$$\lim_{v \rightarrow 0} \Phi_r(v) = \int_0^{M_+} \frac{r(z)}{z^2} dz.$$

(ii) En remarquant que :

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{-z}{z^2 + v^2} \right) = \frac{z^2 - v^2}{(z^2 + v^2)^2},$$

on obtient facilement que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \Phi_0(v) = -\frac{1}{M_+}.$$

(iii) Par ailleurs,

$$\Phi_1(v) = - \int_0^{M_+} z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z^2 + v^2} \right) dz,$$

qui devient après intégration par parties :

$$\Phi_1(v) = \int_0^{M_+} \frac{z}{z^2 + v^2} dz - \left[\frac{z^2}{z^2 + v^2} \right]_0^{M_+},$$

et finalement

$$\Phi_1(v) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{M_+^2}{v^2} \right) - \frac{M_+^2}{M_+^2 + v^2} \Rightarrow \lim_{v \rightarrow 0} \Phi_1(v) = -\infty.$$

Puisque l'on a supposé que $M''(0^+) < 0$ on obtient en utilisant l'expression (2.31) :

$$\lim_{v \rightarrow 0} F(iv) = +\infty,$$

ce qui prouve, par l'intermédiaire du corollaire 2.4 que M est instable. □

Remarque 2.15 *Il est possible de remplacer, dans l'énoncé de ce lemme, l'hypothèse de stricte croissance par les deux conditions suivantes :*

1. $M(y) \neq 0$ pour $y \neq 0$,
2. $M'(0) \neq 0$.

On montre alors le résultat de la même manière, en se restreignant à un intervalle $[0, \eta]$ sur lequel M est strictement croissante.

2.6 RÉSULTATS D'INSTABILITÉ HYDRODYNAMIQUE

Nous allons montrer dans cette partie que les propriétés de stabilité du modèle asymptotique (1.9) peuvent être reliées aux propriétés de stabilité du problème de Cauchy dans le tube de hauteur $\varepsilon > 0$. Plus précisément, nous allons montrer que, si le profil de Mach $M(y)$ est instable (au sens de la définition 2.1), alors pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy associé aux équations de Galbrun (1.3,1.4) dans le tube est instable.

Grâce à l'équivalence entre les équations de Galbrun et les équations d'Euler linéarisées montrée dans l'annexe A, nous allons ensuite traduire ce résultat en terme de semi-groupe des équations d'Euler linéarisées. Plus précisément, on rappelle les équations d'Euler linéarisées dans le tube de hauteur ε :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + M'_\varepsilon(y)v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad t > 0, \quad (2.32)$$

complétées par les conditions de glissement :

$$v(x, \pm\varepsilon, t) = 0. \quad (2.33)$$

Si on introduit, classiquement, le semi-groupe de $L^2(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon])^3$:

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t)(u_0, v_0, p_0) = (u(t), v(t), p(t)) \quad (2.34)$$

où $(u(t), v(t), p(t))$ est l'unique solution de (2.32,2.33) associée à la condition initiale (u_0, v_0, p_0) , alors on va montrer, pour un profil instable, qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\|\mathcal{S}_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon])^3)} \geq e^{\alpha \frac{t}{\varepsilon}}.$$

2.6.1 L'approche modale

Une approche classique pour l'analyse de stabilité est la détermination des modes qui sont les solutions non triviales de (1.3) et (1.4) de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_\varepsilon(x, y, t) = U(y) e^{-i\omega t} e^{ikx}, \\ V_\varepsilon(x, y, t) = V(y) e^{-i\omega t} e^{ikx}, \end{array} \right. \quad (2.35)$$

avec $k \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{C}$. En injectant (2.35) dans (1.3) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k^2 - (\omega - kM(y))^2) U = \frac{ik}{\varepsilon} \frac{dV}{dy}, \\ (\omega - kM(y))^2 V + \frac{ik}{\varepsilon} \frac{dU}{dy} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2V}{dy^2} = 0, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

alors que la condition limite devient :

$$V(\pm 1) = 0. \quad (2.37)$$

L'analyse de stabilité va consister à chercher éventuelles valeurs de $\omega \in \mathbb{C}^+$ où

$$\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$$

pour lesquelles (2.36) admet des solutions non triviales dans $L^2(]-1, 1[)^2$. On remarque que si (U, V) est une solution de (2.36) associée à (ω, k) , alors $(U, -V)$ (resp. $(\bar{U}, -\bar{V})$) est une solution de (2.36) associée à $(-\omega, -k)$ (resp. $(\bar{\omega}, k)$). En résumé, on peut restreindre le cadre de l'étude aux solutions pour lesquelles $\Im(\omega) > 0$ et $k > 0$. Pour de telles valeurs de ω et k , la première équation de (2.36) devient :

$$U = \frac{ik}{\varepsilon} \frac{1}{k^2 - (\omega - kM(y))^2} \frac{dV}{dy}. \quad (2.38)$$

Alors, en posant

$$\lambda = \frac{\omega}{k}, \quad \eta = \varepsilon^2 k^2, \quad \gamma_\lambda(y) = M(y) - \lambda,$$

et en éliminant U dans la seconde équation de (2.36), on obtient :

$$\eta \gamma_\lambda^2(y) (1 - \gamma_\lambda^2(y)) V(y) - \frac{2 \gamma'_\lambda(y) \gamma_\lambda(y) dV(y)}{1 - \gamma_\lambda^2(y) dy} - \gamma_\lambda^2(y) \frac{d^2 V(y)}{dy^2} = 0, \quad (2.39)$$

que l'on peut réécrire :

$$\eta \gamma_\lambda^2(y) V(y) - \frac{d}{dy} \left(\frac{\gamma_\lambda^2(y)}{1 - \gamma_\lambda^2(y)} \frac{dV(y)}{dy} \right) = 0. \quad (2.40)$$

Remarque 2.16 *Il est important de voir que pour $\lambda \in \mathbb{C}^+$ où \mathbb{C}^+ représente les nombres complexes à partie imaginaire strictement positive, on a pour tout $y \in]-1, 1[$:*

$$\begin{cases} \gamma_\lambda^2(y) \neq 0, \\ 1 - \gamma_\lambda^2(y) \neq 0. \end{cases}$$

En particulier, les deux équations précédentes (2.39) et (2.40) sont équivalentes si on suppose $\lambda \in \mathbb{C}^+$.

Ici η peut être vu comme un paramètre. Nous dirons que le problème de Cauchy associé aux équations (1.3, 1.4) est instable si il existe $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que (2.39) (ou de manière équivalente (2.40)) a une solution non nulle. En effet, dans ce cas il existera un mode de la forme (2.35) solution de (1.3, 1.4) avec $\Im(\omega) > 0$ de telle sorte que sa norme sera exponentiellement croissante en temps.

2.6.2 La technique de perturbation

Le résultat limite

Nous allons tout d'abord regarder ce qu'il se passe lorsque $\eta \rightarrow 0$, ce qui fait le lien avec l'analyse de stabilité du modèle asymptotique (1.9).

Lemme 2.21 *Soient $\lambda \in \mathbb{C}^+$ et $\eta = 0$. Alors (2.39) a des solutions non triviales $V \in H_0^1(]-1, 1[)$ si et seulement si*

$$F(\lambda) = 1,$$

où la fonction F est définie par (2.5), ou, de manière équivalente, si et seulement si le profil $M(y)$ est instable (au sens de la définition 2.1).

DÉMONSTRATION. Pour $\eta = 0$, (2.39) devient :

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\gamma_\lambda^2(y)}{1 - \gamma_\lambda^2(y)} \frac{dV(y)}{dy} \right) = 0,$$

ce qui implique l'existence d'une constante $\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0$ telle que :

$$\frac{dV}{dy} = \beta \frac{1 - \gamma_\lambda^2}{\gamma_\lambda^2}.$$

En utilisant les conditions aux limites $V(\pm 1) = 0$, on obtient finalement :

$$\int_{-1}^1 \frac{1 - \gamma_\lambda^2(y)}{\gamma_\lambda^2(y)} dy = 0,$$

qui se réécrit $F(\lambda) = 1$ en utilisant la définition de γ_λ . □

L'idée est maintenant de montrer que si $M(y)$ est instable (au sens de la définition 2.1), alors il existe des modes instables non seulement pour $\eta = 0$, mais aussi pour n'importe quelles petites valeurs de η . Ce résultat que nous allons montrer sera une conséquence du théorème de Steinberg que nous rappelons dans le prochain paragraphe.

Le théorème de Steinberg

Nous allons donner l'énoncé formel du théorème de Steinberg [Ste68] ainsi qu'un corollaire bien plus adapté à notre étude. Mais avant cela nous allons définir ce qu'est une famille analytique d'opérateurs (cf. [Kat95] par exemple) :

Définition 2.2 Soit H un espace de Hilbert et $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs bornés sur H . Soit Ω un sous ensemble de \mathbb{C} qui est ouvert et connexe. On considère des fonctions $T : \begin{matrix} \Omega \rightarrow \mathcal{L}(H) \\ z \rightarrow T(z) \end{matrix}$. T est dite fortement analytique sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$ on a :

$$T(z) = \sum_0^\infty T_n(z - z_0)^n,$$

où $T_n \in \mathcal{L}(H)$ et où la série converge dans $\mathcal{L}(H)$ pour tout z dans un voisinage de z_0 .

T est dite méromorphe sur Ω si elle est définie et fortement analytique sur Ω sauf pour un nombre au plus dénombrable de points. Si z_0 est un de ces points alors

$$T(z) = \sum_{-N}^\infty T_n(z - z_0)^n,$$

où $T_n \in \mathcal{L}(H), N \geq 0$ et où la série converge dans $\mathcal{L}(H)$ pour tout z dans un voisinage de z_0 .

Remarque 2.17 On définit de même la réelle analyticité.

Pour les applications nous donnons un critère souvent pratique dont on peut encore une fois trouver la démonstration dans [Kat95] (chapitre 3 paragraphe 3.1). En utilisant les mêmes notations que dans la définition précédente nous avons la définition suivante :

T est faiblement analytique si et seulement si tout z possède un voisinage dans lequel $(T(z)u, v)$ est analytique pour tout u et v dans H .

Proposition 2.8 *L'analyticité forte est équivalente à l'analyticité faible.*

Nous pouvons maintenant donner le théorème de Steinberg :

Théorème 2.6 *On suppose que $T(\lambda, \eta)$ est une famille d'opérateurs compacts qui sont analytiques en λ à η fixe et réels analytiques en η à λ fixe, pour tout $(\lambda, \eta) \in D \times \mathbb{R}$ (D est un ouvert connexe de \mathbb{C}). Si de plus, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ il existe $\lambda \in D$ tel que $I - T(\lambda, \eta)$ est inversible, alors :*

- $\lambda \rightarrow I - T(\lambda, \eta)$ est inversible sauf pour des points isolés de D et la fonction $\lambda \rightarrow (I - T(\lambda, \eta))^{-1}$ est méromorphe.
- De plus si $\lambda_0 \in D$ est un pôle de $\lambda \rightarrow (I - T(\lambda, \eta_0))^{-1}$, alors il existe au moins une fonction $\lambda(\eta)$ définie sur un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ contenant η_0 , continue par rapport à η (et analytique par rapport à $\eta^{1/p}$ pour un certain entier p) telle que $\lambda(\eta_0) = \lambda_0$ et $\lambda(\eta)$ est un pôle de $\lambda \rightarrow (I - T(\lambda, \eta))^{-1}$.

En conséquence de la compacité de $T(\lambda, \eta)$ nous avons l'équivalence suivante :

$$\text{Ker}[I - T(\lambda_p, \eta)] \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda_p \text{ est un pôle de } \lambda \rightarrow (I - T(\lambda, \eta))^{-1}.$$

Cela nous permet de reformuler le théorème 2.6 comme suit :

Corollaire 2.6 *Sous les conditions du théorème précédent, on suppose qu'il existe $\lambda^* \in D$ tel que*

$$\text{Ker}[I - T(\lambda^*, 0)] \neq \{0\},$$

alors il existe $\eta^ \in \mathbb{R}^+$ et une fonction $\lambda^* :]-\eta^*, \eta^*[\rightarrow \Omega$ continue par rapport à η (et analytique par rapport à $\eta^{1/p}$ pour un certain entier p) satisfaisant $\lambda^*(0) = \lambda^*$ et*

$$\text{Ker}[I - T(\lambda^*(\eta), \eta)] \neq \{0\}, \quad \forall \eta \in]-\eta^*, \eta^*[.$$

Le résultat principal

En conséquence du corollaire 2.6, nous allons obtenir le théorème :

Théorème 2.7 *Soit $M(y)$ un profil instable (au sens de la définition 2.1). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, le problème de Cauchy associé aux équations (1.3, 1.4) est instable, au sens où, pour η suffisamment petit, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que (2.39) (ou de manière équivalente (2.40)) a une solution non triviale.*

DÉMONSTRATION. Nous considérons les opérateurs A et $K(\lambda, \eta)$ définis sur $H_0^1(]-1, 1])$ par :

$$(AV, U)_{H^1} = a(V, U), \quad (K(\lambda, \eta)V, U)_{H^1} = k(\lambda, \eta; V, U), \quad \forall (U, V) \in (H_0^1(]-1, 1])^2$$

où $a(\cdot, \cdot)$ et $k(\lambda, \eta; \cdot, \cdot)$ désignent les deux formes bilinéaires suivantes :

$$\begin{cases} a(V, U) = \int_{-1}^1 \frac{dV}{dy} \frac{dU}{dy} dy, \\ k(\lambda, \eta; V, U) = \int_{-1}^1 \left(\eta(1 - \gamma_\lambda^2) V U - \frac{2\gamma'_\lambda}{(1 - \gamma_\lambda^2)\gamma_\lambda} \frac{dV}{dy} U \right) dy. \end{cases}$$

On cherche $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que (2.39) (ou de manière équivalente (2.40)) a une solution non triviale. En utilisant une formulation variationnelle de (2.39, 2.37), on est amené à montrer l'existence de $\eta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tels que

$$\exists V \in \mathcal{H}_0^1(]-1, 1]), V \neq 0 \text{ tel que } AV + K(\lambda, \eta)V = 0$$

Puisque A est inversible¹⁸ et $K(\lambda, \eta)$ est compact (cf. lemme 2.22), on peut de manière équivalente montrer l'existence de $\eta > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tels que $I + A^{-1}K(\lambda, \eta)$ n'est pas inversible. Clairement $T(\lambda, \eta) = A^{-1}K(\lambda, \eta)$ est une famille d'opérateurs compacts¹⁹ qui sont analytiques en λ à η fixe et réels analytiques en η à λ fixe, pour tout $(\lambda, \eta) \in \mathbb{C}^+ \times \mathbb{R}$. Finalement, par le lemme 2.23, on sait que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que $I - T(\lambda, \eta)$ est inversible.

Le théorème est alors une conséquence directe du corollaire 2.6 : en effet, si $M(y)$ est instable (au sens de la définition 2.1), il existe alors $\lambda^* \in \mathbb{C}^+$ tel que $F(\lambda^*) = 1$ et grâce au lemme 2.21, cela signifie que $\text{Ker}[I - T(\lambda^*, 0)] \neq \{0\}$. □

Nous allons maintenant énoncer et démontrer les deux lemmes utilisés dans la démonstration précédente.

Lemme 2.22 *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\Im m(\lambda) > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$, $K(\lambda, \eta)$ est un opérateur compact.*

DÉMONSTRATION. On considère une suite bornée (U_n) dans $H_0^1(]-1, 1[)$. Notre but est de montrer qu'il existe une sous-suite notée (U_{n_k}) telle que $(K(\lambda, \eta)U_{n_k})$ converge dans $H_0^1(]-1, 1[)$. La suite $(K(\lambda, \eta)U_n)$ étant bornée dans $H_0^1(]-1, 1[)$, on peut en extraire une sous-suite $(K(\lambda, \eta)U_{n_k})$ qui converge dans $L^2(]-1, 1[)$ (théorème de Rellich). De plus, pour tout V dans $H_0^1(]-1, 1[)$ et par définition de $K(\lambda, \eta)$:

$$\|K(\lambda, \eta)V\|_{H^1}^2 = k(\lambda, \eta; V, K(\lambda, \eta)V) \leq C \|V\|_{H^1} \|K(\lambda, \eta)V\|_{L^2}. \quad (2.41)$$

En prenant $V = U_{n_k} - U_{n_\ell}$ dans (2.41), on obtient que $(K(\lambda, \eta)U_{n_k})$ est une suite de Cauchy dans $H_0^1(]-1, 1[)$ qui est complet. En particulier, elle converge et $K(\lambda, \eta)$ est compact. □

Lemme 2.23 *Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que $I + A^{-1}K(\lambda, \eta)$ est inversible.*

DÉMONSTRATION. Il est équivalent de montrer que pour tout $\eta \in \mathbb{R}$ il existe $\lambda \in \mathbb{C}^+$ tel que la seule solution de (2.40, 2.37) est nulle. Ce résultat est la conséquence de la coercivité, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^+$, de la forme bilinéaire suivante :

$$b(v, u) = \int_{-1}^1 \eta \gamma_\lambda^2 v u + \frac{\gamma_\lambda^2}{1 - \gamma_\lambda^2} \frac{dv}{dy} \frac{du}{dy} dy \quad \forall (u, v) \in (H_0^1(]-1, 1[))^2. \quad (2.42)$$

Tout d'abord, on remarque que $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} -\frac{\gamma_\lambda^2(y)}{1 - \gamma_\lambda^2(y)} = 1$ uniformément en y . Par conséquent :

$$\Re\left(-\frac{\gamma_\lambda^2(y)}{1 - \gamma_\lambda^2(y)}\right) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall y \in]-1, 1[$$

¹⁸L'inversibilité de A découle directement de la coercivité de la forme bilinéaire a , ce qui se montre simplement avec l'inégalité de Poincaré.

¹⁹Cela provient du fait que $K(\lambda, \eta)$ est compact et que l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal bilatère de l'ensemble des opérateurs bornés.

pour $|\lambda|$ suffisamment petit. La coercivité suit en choisissant λ tel que

$$\Re(-\eta \gamma_\lambda^2(y)) \geq 0, \quad \forall y \in]-1, 1[,$$

ce qui est toujours possible. □

2.6.3 Les résultats

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section qui contient les résultats d'instabilité hydrodynamique. Il ne s'agit en fait que d'une "traduction" du théorème 2.7 en terme eulérien. On rappelle que nous avons introduit dans l'introduction le semi-groupe $\mathcal{S}_\varepsilon(t)$ (cf. (2.34)) associé aux équations d'Euler linéarisées dans le tube de hauteur ε . Ces résultats prennent alors la forme du théorème suivant :

Théorème 2.8 *Soit un profil M instable (au sens de la définition 2.1), alors il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\|\mathcal{S}_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon])^3)} \geq e^{\alpha \frac{t}{\varepsilon}}. \quad (2.43)$$

DÉMONSTRATION. Le théorème 2.7 nous dit qu'il existe une fonction continue $\lambda(\eta) :]-\eta_0, \eta_0[\rightarrow \mathbb{C}^+$ telle que $\lambda(0) = \lambda^*$ et pour $\lambda = \lambda(\eta)$, (2.39) (ou de manière équivalente (2.40)) a une solution non triviale.

Nous allons maintenant construire à partir de ce mode instable des équations de Galbrun, une solution des équations d'Euler linéarisées qui nous donnera le résultat escompté (2.43). Pour cela nous allons utiliser le résultat d'équivalence montré en annexe A.

Soit $\hat{V}_\varepsilon(k, y) = V_{\text{ref}}(\lambda(\varepsilon^2 k^2), \varepsilon^2 k^2, \frac{y}{\varepsilon})$ où V_{ref} est une solution non nulle de (2.39) pour $\lambda = \lambda(\eta)$ telle que $\|V_{\text{ref}}\|_{\mathcal{H}_{1,y}^0(]-\varepsilon, \varepsilon])} = 1$. On récupère alors \hat{U}_ε grâce à (2.38). Par la suite on utilise l'équivalence (A.9) pour définir $(\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)(k, y)$:

$$\begin{cases} \hat{u}_\varepsilon = \partial_t \hat{U}_\varepsilon + ik M \hat{U}_\varepsilon - M' \hat{V}_\varepsilon, \\ \hat{v}_\varepsilon = \partial_t \hat{V}_\varepsilon + ik M \hat{V}_\varepsilon, \\ \hat{p}_\varepsilon = -(ik \hat{U}_\varepsilon + \partial_y \hat{V}_\varepsilon). \end{cases} \quad (2.44)$$

On pose maintenant : $(\tilde{u}_\varepsilon, \tilde{v}_\varepsilon, \tilde{p}_\varepsilon)(k, y) = C_\varepsilon(k) (\hat{u}_\varepsilon, \hat{v}_\varepsilon, \hat{p}_\varepsilon)(k, y)$ où $C_\varepsilon(k)$ est une constante de normalisation choisie pour que :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (|\tilde{u}_\varepsilon|^2 + |\tilde{v}_\varepsilon|^2 + |\tilde{p}_\varepsilon|^2) dy = 1.$$

Nous allons construire une solution adéquate à partir d'une condition initiale qui excite les modes instables. Nous introduisons $A_\varepsilon(k)$, une fonction de troncature. Par continuité de la fonction $\lambda(\cdot)$ il existe $0 < \eta^* \leq \eta_0$ tel que pour tout $0 \leq \eta \leq \eta^*$ nous avons :

$$\Im(\lambda(\eta)) \geq \frac{1}{2} \Im(\lambda(0)) = \frac{1}{2} \Im(\lambda^*). \quad (2.45)$$

On choisit alors $A_\varepsilon(k)$ tel que son support est inclus dans $\left[\frac{\sqrt{\eta^*}}{2\varepsilon}, \frac{\sqrt{\eta^*}}{\varepsilon} \right]$.

On introduit maintenant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u_0^\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{u}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk, \\ v_0^\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{v}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk, \\ p_0^\varepsilon(x, y) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{p}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} dk. \end{cases}$$

On remarque que, par Plancherel :

$$\|u_0^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|v_0^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \|p_0^\varepsilon\|_{L^2}^2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |A_\varepsilon(k)|^2 dk \quad (2.46)$$

La solution du problème de Cauchy (2.32,2.33) associée aux conditions initiales précédentes est par construction :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{u}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{-ik\lambda(\varepsilon^2 k^2)t} dk, \\ v^\varepsilon(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{v}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{-ik\lambda(\varepsilon^2 k^2)t} dk, \\ p^\varepsilon(x, y, t) = \int_{\mathbb{R}} A_\varepsilon(k) \tilde{p}_\varepsilon(k, y) e^{ikx} e^{-ik\lambda(\varepsilon^2 k^2)t} dk. \end{cases}$$

Le théorème de Plancherel nous donne alors :

$$\begin{aligned} & \|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \|p^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} \left[|A_\varepsilon(k)|^2 e^{2k \operatorname{Im}(\lambda(\varepsilon^2 k^2))t} \left(\int_{-1}^1 |\tilde{u}_\varepsilon(k, y)|^2 + |\tilde{v}_\varepsilon(k, y)|^2 + |\tilde{p}_\varepsilon(k, y)|^2 dy \right) \right] dk \\ &= 2\pi \int_{\mathbb{R}} |A_\varepsilon(k)|^2 e^{2k \operatorname{Im}(\lambda(\varepsilon^2 k^2))t} dk. \end{aligned}$$

En se rappelant que A_ε est une fonction de troncature et en utilisant l'inégalité (2.45) on montre :

$$\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \|p^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \geq 2\pi e^{\frac{\sqrt{\eta^*}}{2\varepsilon} \operatorname{Im}(\lambda^*)t} \int_{\mathbb{R}} |A_\varepsilon(k)|^2 dk.$$

En utilisant (2.46) on obtient :

$$\|\mathcal{S}_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R} \times]-\varepsilon, \varepsilon[)^3)} \geq e^{\alpha \frac{t}{\varepsilon}},$$

où $\alpha = \frac{\sqrt{\eta^*}}{4} \operatorname{Im}(\lambda^*)$.

□

Commentaires

Le résultat que nous venons d'établir, c'est-à-dire le théorème (2.8), est valable quel que soit $\varepsilon > 0$. En effet le petit paramètre est ici $\eta = \varepsilon^2 k^2$, et donc à ε fixe on obtient ces résultats par ce qui s'apparente à une analyse basse fréquence. Ces résultats sont un produit dérivé de notre étude du modèle limite (1.9). La démarche basse fréquence est par ailleurs assez originale. En

effet une démarche haute fréquence, comme elle est utilisée par Lafitte [CCLR01, HL03]) pour l'étude des instabilités de Rayleigh-Taylor, est bien plus naturelle car, au moins formellement, on se dit qu'une approche haute fréquence (petite longueur d'onde) "voit" plus les instabilités. Il est d'ailleurs amusant de remarquer que, dans la démonstration précédente, quand $\varepsilon \rightarrow 0$ l'instabilité s'obtient à haute fréquence. Nous avons en effet construit une condition initiale dont le support fréquentiel est inclus dans l'intervalle

$$\left[\frac{\sqrt{\eta^*}}{2\varepsilon}, \frac{\sqrt{\eta^*}}{\varepsilon} \right].$$

Le fait que ces résultats soient valables pour tout ε signifie qu'il n'est pas nécessaire que le profil M_ε soit raide pour générer une instabilité. Toutefois l'estimation obtenue montre que l'instabilité est d'autant plus forte que le profil est raide.

Bien entendu, le résultat ne montre pas que la croissance exponentielle a lieu pour toute donnée initiale (u_0, v_0, p_0) .

En conclusion, ce théorème permet d'étendre les résultats d'instabilité du problème limite (1.9) au problème du tube de hauteur ε . Combiné aux résultats d'instabilité du problème limite obtenus dans la partie 2.5, ce théorème fournit des résultats d'instabilité hydrodynamique dans le tube de hauteur ε , en écoulement compressible.

ÉTUDE DU CARACTÈRE BIEN POSÉ

3

SOMMAIRE

3.1	PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES OUTILS	83
3.2	LE THÉORÈME GÉNÉRAL	87
3.2.1	TRANSFORMATION DE LAPLACE INVERSE : MÉTHODOLOGIE ET CALCUL	87
3.2.2	ESTIMATIONS A PRIORI ET CARACTÈRE BIEN POSÉ	92
3.2.3	EXPRESSION QUASI-EXPLICITE DE LA SOLUTION (CALCUL DE LA TRANSFORMATION INVERSE DE FOURIER INVERSE)	99
3.3	CAS PARTICULIERS	101
3.3.1	UNE CLASSE DE PROFILS MONOTONES	101
3.3.2	EXTENSION À DES PROFILS NON MONOTONES	107
3.3.3	COMMENT PROCÉDER DANS UN CAS GÉNÉRAL : EXEMPLE DU PROFIL $M(y) = 1 - y^2$	112

Ce chapitre est consacré à l'étude du caractère bien posé du problème limite (1.9), obtenu dans le premier chapitre. L'analyse modale décrite dans le chapitre précédent nous a menés au problème :

$$\frac{d\widehat{\mathbf{U}}}{dt} + ik A\widehat{\mathbf{U}} = 0,$$

où l'opérateur de A est défini par (2.3). Nous avons ensuite été amenés à introduire la notion de stabilité d'un profil (cf. définition 2.1 page 30). On dit qu'un profil est stable (resp. instable) si le spectre de A est inclus (resp. n'est pas inclus) dans \mathbb{R} . Nous avons montré que si un profil est instable alors le problème limite (1.9) est mal posé (cf. théorème 2.1 page 30). Par la suite, nous avons étudié le spectre de l'opérateur A , qui est composé de valeurs propres et d'une partie continue (l'image essentielle du profil M). Nous avons montré que les valeurs propres sont les seuls éléments du spectre pouvant ne pas être réels. Nous avons ensuite montré des résultats d'existence et de non-existence de valeurs propres non réelles dans les sections 2.4 et 2.5. Le principal résultat de stabilité est le théorème 2.3 page 54. Malheureusement, il n'est pas clair que la stabilité entraîne le caractère bien posé. En effet, compte tenu du caractère non normal de l'opérateur A , il n'est pas possible d'utiliser les résultats standards de la théorie des semi-groupes. Nous renvoyons le lecteur à la discussion page 30 pour plus de détails.

C'est la raison pour laquelle nous allons utiliser dans ce chapitre une toute autre approche. Nous

allons directement résoudre le problème (1.9) en utilisant la transformation de Fourier-Laplace. Après transformation de Laplace inverse on obtient une expression de la forme pour la transformée de Fourier de la moyenne EU :

$$E\widehat{U}(k, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pm\mathbb{R}+i\lambda_I} N(\lambda) E[\widetilde{f}(k, y, \lambda)] e^{-ik\lambda t} d\lambda,$$

où l'on intègre sur $\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I > 0$ pour $k > 0$, sur $-\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I < 0$ pour $k < 0$, avec $|\lambda_I|$ suffisamment grand. f est une fonction des conditions initiales. Classiquement, pour montrer que la solution ne croît pas exponentiellement en temps, il est nécessaire de déformer le contour d'intégration de la transformation inverse de Laplace jusqu'à l'axe réel. Cette opération nécessite de contrôler le coefficient de normalisation, $N(\lambda)$. En particulier, celui-ci ne doit pas avoir de pôles complexes. Il se trouve que ces pôles correspondent aux valeurs propres de l'opérateur A . De même, N a une coupure qui correspond au spectre continu de A . Il nous faudra contrôler le comportement de N au voisinage de celle-ci. Il y a donc bien entendu un lien très fort entre les deux approches et leur vocabulaire correspondant ; on parlait de valeurs propres et de spectre continu, on parle désormais de pôles et de coupure. Dans la première section de ce chapitre, après avoir appliqué la transformation de Fourier-Laplace, nous donnons les hypothèses, notamment sur N , qui vont nous permettre de calculer la transformation inverse de Laplace et de montrer le caractère bien posé. C'est un choix de notre part d'introduire ces hypothèses a priori, pour simplifier la présentation. Dans la section 3.2 nous montrons, sous ces hypothèses générales, que le problème est bien posé en calculant la transformation inverse de Laplace. Cela est fait en utilisant des techniques d'intégration dans le plan complexe complexe ainsi que des déformations de contour. Cela est résumé dans le théorème général 3.1 page 99. Après cela, toujours dans cette section, nous calculons la transformation inverse de Fourier, pour obtenir une expression quasi-explicite de la solution. Celle-ci nous fournira une méthode numérique efficace qui sera développée dans le chapitre suivant. Les hypothèses générales introduites plus tôt (qui sont celles du théorème 3.1) étant très abstraites, nous cherchons ensuite à obtenir des conditions sur le profil pour que ce dernier les vérifie. Nous exhibons dans la section 3.3 une classe de profils réguliers et monotones, pour lesquels on peut montrer que les hypothèses sont vérifiées, et que, par conséquent, le problème est bien posé. Après avoir étendu ces résultats à des profils non monotones, nous présentons le cas du profil $M(y) = 1 - y^2$ dont la valeur d'exemple sera discutée. Pour ce profil, les calculs se font à la main et on montre que le problème est bien posé.

3.1 PRÉLIMINAIRES ET QUELQUES OUTILS

Dorénavant, nous supposons que $M \in C^0([-1, 1])$ et on note toujours :

$$M_+ := \sup_{y \in [-1, 1]} M(y), \quad M_- := \inf_{y \in [-1, 1]} M(y).$$

L'idée que nous allons suivre est la suivante : si on connaît EU , (1.9) est une simple équation de transport au carré en x , pour tout y fixé, où EU apparaît au second membre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U = \frac{\partial^2 EU}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

On résout cette équation explicitement :

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= U_0(x - M(y)t, y) + t \left[U_1(x - M(y)t, y) + M(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - M(y)t, y) \right] \\ &+ \int_0^t (t-s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU(x - M(y)(t-s), s) ds. \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'idée est maintenant de calculer EU au moyen de la transformation de Fourier en x et de la transformation de Laplace en t . On rappelle que l'on définit la transformation de Fourier comme un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$, défini pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ par :

$$(\mathcal{F}f)(k) = \hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

On note \tilde{U} la transformée de Laplace en temps de \hat{U} ,

$$\tilde{U}(k, y, \omega) := \int_0^{\infty} \hat{U}(k, y, t) e^{i\omega t} dt, \quad \Im(\omega) > 0,$$

auquel cas on a le chemin inverse

$$\left| \begin{aligned} \tilde{U}(k, y, \omega) &\longrightarrow \hat{U}(k, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \tilde{U}(k, y, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &\longrightarrow U(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} \tilde{U}(k, y, \omega) e^{i(kx-\omega t)} d\omega dk. \end{aligned} \right.$$

Après transformation de Fourier l'équation (1.9) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + ikM(y) \right)^2 \hat{U} = -k^2 E\hat{U}. \quad (3.3)$$

Nous voulons maintenant appliquer la transformation de Laplace à cette équation, pour cela il faut d'abord montrer qu'on en a le droit. En se remémorant la remarque 2.2 page 29, on se souvient que

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} -ik \hat{U} \\ \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + ikM(y) \hat{U} \end{pmatrix},$$

est solution du problème d'évolution :

$$\frac{d\widehat{\mathbf{U}}}{dt} + ik A \widehat{\mathbf{U}} = 0,$$

où A est l'opérateur borné défini par (2.3), longuement étudié dans le chapitre précédent. On déduit du caractère borné de A l'existence du semi groupe e^{-iktA} tel que la solution du problème précédent est unique et s'écrit, avec $\widehat{\mathbf{U}}_0$ comme condition initiale :

$$\widehat{\mathbf{U}} = e^{-iktA} \widehat{\mathbf{U}}_0.$$

Ainsi on a $\|\widehat{\mathbf{U}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C e^{\|A\|kt}$, ce qui implique que $\|\widehat{\mathbf{U}}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C' e^{\|A\|kt}$ pour tout $k \neq 0$. Par conséquent, pour tout $k \neq 0$ on peut prendre la transformation de Laplace en t de l'équation (3.3) ce qui donne :

$$-(\omega - kM(y))^2 \widetilde{U} + k^2 E \widetilde{U} = \widehat{U}_1 - i(\omega - 2kM(y)) \widehat{U}_0,$$

où \widehat{U}_0 et \widehat{U}_1 sont les transformées de Fourier de U_0 et U_1 . En se rappelant que $\omega \notin \mathbb{R}$ nous avons :

$$-\widetilde{U} + \frac{k^2 E \widetilde{U}}{(\omega - kM(y))^2} = \frac{\widehat{U}_1 - i(\omega - 2kM(y)) \widehat{U}_0}{(\omega - kM(y))^2},$$

et en appliquant E à cette équation on obtient :

$$E \widetilde{U} \left(1 - E \left[\frac{k^2}{(\omega - kM(y))^2} \right] \right) = -E \left[\frac{\widehat{U}_1 - i(\omega - 2kM(y)) \widehat{U}_0}{(\omega - kM(y))^2} \right].$$

En utilisant la définition (2.5) page 39 de F que l'on rappelle ici :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - M(y))^2} dy, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+],$$

cette équation se réécrit :

$$\left[1 - F\left(\frac{\omega}{k}\right) \right] E \widetilde{U} = -E \left[\frac{\widehat{U}_1 - i(\omega - 2kM(y)) \widehat{U}_0}{(\omega - kM(y))^2} \right].$$

On pose maintenant $\lambda = \frac{\omega}{k}$ et

$$N(\lambda) = (1 - F(\lambda))^{-1}. \quad (3.4)$$

En introduisant de plus :

$$\widetilde{f}(k, y, \lambda) = \frac{\widehat{U}_1}{k(\lambda - M(y))^2} - i \frac{(\lambda - 2M(y)) \widehat{U}_0}{(\lambda - M(y))^2}, \quad (3.5)$$

on a :

$$\boxed{E \widetilde{U} = -\frac{1}{k} N(\lambda) E \widetilde{f}.} \quad (3.6)$$

La prochaine étape, pour le calcul de EU , sera de calculer la transformation inverse de Laplace de l'expression (3.6) de $E\tilde{U}$. Cela sera fait dans la prochaine section, en utilisant des techniques d'intégration dans le plan complexe ainsi que des déformations de contour. Plus précisément, nous allons déformer le contour d'intégration jusqu'à l'axe réel. On voit déjà que les pôles de N vont jouer un rôle important dans ce processus. De plus, N a, en général, une coupure égale à $\mathcal{I}m M$. Nous sommes amenés à faire des hypothèses sur le profil pour rendre le calcul plus accessible :

Les pôles de N : Clairement F est analytique sur $\mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$, de telle sorte que N est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$. Nous introduisons maintenant l'hypothèse suivante :

(\mathcal{H}_S) La fonction $N(\lambda)$ n'a pas de pôles complexes (i.e. non réels).

Cette hypothèse est fondamentale si le lecteur se souvient des résultats du chapitre précédent. En effet, nous avons vu que si N a des pôles non réels alors M est instable au sens de la définition 2.1 (cf. corollaire 2.2 page 40) ce qui implique que (1.9) est mal posé (cf. théorème 2.1 page 30). De plus, nous avons vu que l'on pouvait trouver des conditions explicites sur le profil M qui assurent que (\mathcal{H}_S) est satisfaite ou non (voir chapitre précédent section 2.4 et 2.5). Nous introduisons aussi l'hypothèse suivante :

(\mathcal{H}_{GD}) $M(y)$ prend la valeur M_{\pm} à un point où elle admet une dérivée à droite ou à gauche.

En conséquence des résultats du chapitre précédent¹, nous savons que cette hypothèse implique que $N(\lambda)$ a exactement un pôle réel λ_- (resp. λ_+) sur $] -\infty, M_-[$ (resp. sur $]M_+, \infty[$). Cette hypothèse n'est pas indispensable mais elle permet de simplifier l'étude et les calculs. En effet, elle permet de fixer le nombre de pôles réels, au prix d'une hypothèse très faible sur le profil. Remarquons par ailleurs que les pôles de N en λ_{\pm} sont simples. En effet on a :

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = - \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - M(y))^3} dy$$

qui est strictement négative pour $\lambda > M_+$ et strictement positive pour $\lambda < M_-$. Par conséquent, le résidu de N en λ_{\pm} vaut :

$$\text{Res}(N, \lambda_{\pm}) = -\frac{1}{F'(\lambda_{\pm})},$$

ce dont nous nous servirons plus tard.

La coupure de N : N a, en général, une coupure égale à $\mathcal{I}m M$. Ainsi, N peut exploser lorsque l'on s'approche de la coupure par dessous comme par dessus. C'est ce que nous voulons éviter par l'introduction de deux nouvelles hypothèses un peu abstraites pour l'instant. Nous notons :

$$N_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} N(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases} \quad N'_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} \frac{dN}{d\lambda}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{dN}{d\lambda}(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases} \quad (3.7)$$

où $\mathbb{C}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} / \pm \mathcal{I}m z > 0\}$. Nous énonçons maintenant les deux hypothèses annoncées :

¹Le lecteur pourra se reporter notamment à la remarque 2.5 page 41 et à ce qui la précède.

- (\mathcal{H}_N) Il existe $\alpha > 0$ tel que la fonction N_{\pm} peut être étendue par continuité avec $N_{\pm}(M_{\pm}) = N_{\pm}(M_{\mp}) = 0$, comme une fonction Hölderienne d'ordre α sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup [M_{-}, M_{+}]$.

Puisque $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a $\overline{N(\lambda)} = N(\overline{\lambda})$, cela implique que $\forall \lambda \in [M_{-}, M_{+}]$ nous avons $N_{-}(\lambda) = \overline{N_{+}(\lambda)}$. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$N_{\pm}(\lambda) = \mathcal{R}N(\lambda) \pm i\mathcal{I}N(\lambda). \quad (3.8)$$

- $(\mathcal{H}_{N'})$ Il existe $\alpha' > 0$ tel que la fonction N'_{\pm} peut être étendue par continuité à $[M_{-}, M_{+}]$ et satisfait $N'_{+}(M_{\pm}) - N'_{-}(M_{\pm}) = 0$. Alors elle est Hölderienne d'ordre α' sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup [M_{-}, M_{+}]$.

Puisque $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ on a $\overline{N'(\lambda)} = N'(\overline{\lambda})$, cela implique que $\forall \lambda \in [M_{-}, M_{+}]$ nous avons $N'_{-}(\lambda) = \overline{N'_{+}(\lambda)}$. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$N'_{\pm}(\lambda) = \mathcal{R}N'(\lambda) \pm i\mathcal{I}N'(\lambda). \quad (3.9)$$

Fonction Hölderienne/ localement Hölderienne

Le but de ce paragraphe est de préciser ce que nous entendons par la notion de fonction Hölderienne. Le lecteur pourra trouver plus de renseignements dans [SZ91] par exemple. Nous nous restreignons ici au cas qui nous intéresse, celui des fonctions complexes.

Définition 3.1 Soit un ensemble $\Theta \subset \mathbb{C}$. On dit que $h : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$ est localement Hölderienne d'ordre α , $0 < \alpha \leq 1$ sur $\overline{\Theta}$ si :

$$\forall R > 0, \exists C_R > 0 / \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{B}_R, |h(\lambda_1) - h(\lambda_2)| \leq C_R |\lambda_1 - \lambda_2|^{\alpha}$$

où $\mathcal{B}_R = \{\lambda \in \Theta / |\lambda| \leq R\}$.

Si la constante C_R peut être choisie indépendante de R on dit alors que h est Hölderienne d'ordre α .

On donne maintenant une définition qui nous sera utile par la suite, dans laquelle la constante explose pour certains points dont on exclut le voisinage :

Définition 3.2 Soit un ensemble $\Theta \subset \mathbb{C}$ contenant N points $\{M_1, \dots, M_N\}$. On dit que $h : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$ est localement Hölderienne d'ordre α , $0 < \alpha \leq 1$ sur $\overline{\Theta} \setminus \{M_1, \dots, M_N\}$ si :

$$\forall R, \delta > 0, \exists C_{R,\delta} > 0 / \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathcal{B}_{R,\delta}, |h(\lambda_1) - h(\lambda_2)| \leq C_{R,\delta} |\lambda_1 - \lambda_2|^{\alpha}$$

où $\mathcal{B}_{R,\delta} = \{\lambda \in \mathcal{B}_R / |\lambda - M_i| \geq \delta, \forall i = 1, \dots, N\}$.

On énonce maintenant un résultat classique de l'intégration de Cauchy qui nous sera très utile par la suite, le théorème de Plemelj-Privalov (voir par exemple [SGS91] ou [Mus53]) :

Proposition 3.1 (Théorème de Plemelj-Privalov) Soit $g : [M_{-}, M_{+}] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Hölderienne d'ordre $\alpha \in]0, 1]$. On définit maintenant la fonction

$$S(\lambda) = \int_{M_{-}}^{M_{+}} \frac{g(z)}{z - \lambda} dz, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_{-}, M_{+}].$$

Alors, pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} S(\lambda \pm i\varepsilon) = S_{\pm}(\lambda) := v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{g(z)}{z - \lambda} dz \pm i\pi g(\lambda),$$

où *v.p.* désigne la valeur principale de Cauchy de l'intégrale. De plus, la fonction

$$S_{\pm}(\lambda) = \begin{cases} S(\lambda), & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ S_{\pm}(\lambda), & \text{si } \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases}$$

est analytique sur \mathbb{C}^{\pm} et localement Hölderienne d'ordre α sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}} \setminus \{M_-, M_+\}$. Si de plus $g(M_-) = g(M_+) = 0$, alors S_{\pm} peut être continûment étendue à $\overline{\mathbb{C}^{\pm}}$ en tant que fonction localement Hölderienne sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}}$. Réciproquement, si $g(M_{\pm}) \neq 0$, $S_{\pm}(\lambda)$ explose de manière logarithmique quand λ tend vers M_{\pm} .

3.2 LE THÉORÈME GÉNÉRAL

Nous supposons dans toute cette section que le profil $M \in C^0([-1, 1])$ est tel que $(\mathcal{H}_S), (\mathcal{H}_{GD}), (\mathcal{H}_N)$ et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Sous ces hypothèses nous montrons le caractère bien posé du problème d'intérêt (1.9). Pour cela nous allons dans un premier temps calculer la transformation inverse de Laplace de l'expression (3.6) de $E\tilde{U}$, ce qui sera fait grâce à des techniques d'intégration dans le plan complexe² ainsi que des déformations de contour. Nous obtiendrons ensuite le caractère bien posé de l'équation par des estimations dans l'espace de Fourier. Cela est résumé par le théorème 3.1. Finalement, après calcul de la transformation inverse de Fourier en espace, nous obtiendrons une expression quasi-explicite de la solution.

3.2.1 Transformation de Laplace inverse : Méthodologie et calcul

En prenant la transformation inverse de Laplace de (3.6) et en changeant la variable d'intégration ω en $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I := \frac{\omega}{k}$ on obtient la représentation suivante de $E\tilde{U}$:

$$E\widehat{U}(k, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\pm\mathbb{R} + i\lambda_I} N(\lambda) E[\widetilde{f}(k, y, \lambda)] e^{-ik\lambda t} d\lambda,$$

où l'on intègre sur $\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I > 0$ pour $k > 0$, sur $-\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I < 0$ pour $k < 0$, avec $|\lambda_I|$ suffisamment grand. En utilisant la définition (3.5) de \widetilde{f} , on décompose cette expression de la manière suivante :

$$E\widehat{U}(k, t) = \widehat{E}_0(k, t) + \widehat{E}_1(k, t), \quad (3.10)$$

où \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 représentent les contributions des données initiales U_0 et U_1 et sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \widehat{E}_0(k, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{\pm\mathbb{R} + i\lambda_I} N(\lambda) E \left[\frac{(\lambda - 2M(y))\widehat{U}_0}{(\lambda - M(y))^2} \right] e^{-ik\lambda t} d\lambda, \\ \bullet \widehat{E}_1(k, t) = -\frac{1}{2\pi k} \int_{\pm\mathbb{R} + i\lambda_I} N(\lambda) E \left[\frac{\widehat{U}_1}{(\lambda - M(y))^2} \right] e^{-ik\lambda t} d\lambda, \end{array} \right. \quad (3.11)$$

²Pour plus d'informations le lecteur pourra consulter [CON78] ou [Cha98].

où l'on intègre sur $\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I > 0$ pour $k > 0$ et sur $-\mathbb{R} + i\lambda_I$ avec $\lambda_I < 0$ pour $k < 0$ avec $|\lambda_I|$ suffisamment grand.

Pour prouver le caractère bien posé de (1.9), notre objectif est d'obtenir des estimations a priori sur \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 qui n'explosent pas exponentiellement en $e^{\alpha|k|t}$. On ne peut pas obtenir de telles estimations à partir de (3.11) puisque si λ n'est pas réel, $e^{-ik\lambda t}$ va exploser quand $k \rightarrow \pm\infty$ (à moins que les données initiales soient exponentiellement décroissantes quand $k \rightarrow \pm\infty$). L'idée que nous allons poursuivre est de déformer le contour jusqu'à une zone dans laquelle cela ne posera pas problème.

Déformation de contour On considère le cas $k > 0$. Pour $k < 0$ on obtient les résultats de la même manière avec des changements évidents.

Pour calculer \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 il est évident, compte tenu de leur expression (3.11), qu'il suffit de calculer les intégrales :

$$I_l(k, y, t) := \int_{\mathbb{R} + i\lambda_I} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \quad \lambda_I > 0, \quad l = 0, 1. \quad (3.12)$$

En effet, on a alors les expressions suivantes de \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 en fonction de I_0 et I_1 :

$$\begin{cases} \bullet \widehat{E}_0(k, t) = \frac{i}{2\pi} E\left[\left(I_0(k, \cdot, t) - M(\cdot)I_1(k, \cdot, t)\right) \widehat{U}_0(k, \cdot)\right], \\ \bullet \widehat{E}_1(k, t) = -\frac{1}{2\pi k} E\left[I_1(k, \cdot, t) \widehat{U}_1(k, \cdot)\right]. \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous allons calculer les intégrales I_l , définies par (3.12), en utilisant des techniques d'intégration dans le plan complexe. Sous les hypothèses (\mathcal{H}_S) et (\mathcal{H}_{GD}) on sait que N possède exactement deux pôles λ_{\pm} , qui sont réels. De plus, N a en général une coupure égale à $\mathcal{I}m M = [M_-, M_+]$. On renvoie le lecteur à la discussion page 85. Grâce à l'hypothèse (\mathcal{H}_S) , on peut déformer le contour d'intégration $\mathfrak{I}m \lambda = \lambda_I$ jusqu'au contour C_{δ}^+ qui coïncide avec l'axe réel en dehors d'un δ -voisinage des pôles et de la coupure $[M_-, M_+]$ (voir figure 3.1), et on a :

$$I_l(k, y, t) := \int_{C_{\delta}^+} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \quad l = 0, 1. \quad (3.14)$$

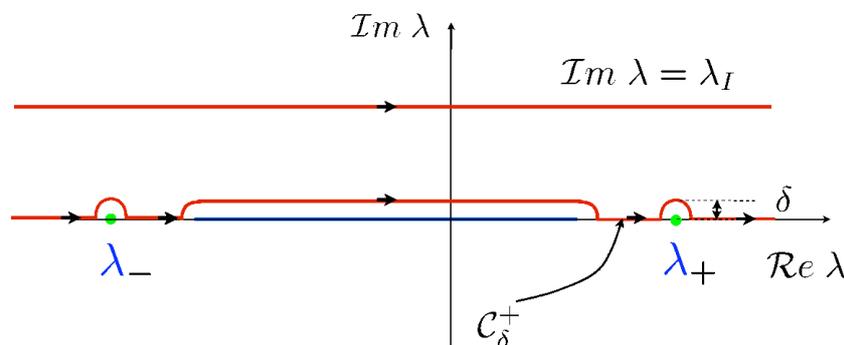


FIG. 3.1 – Le contour d'intégration C_{δ}^+ .

Cette transformation ne suffit pas. Nous voudrions passer le contour en dessous de l'axe réel, zone dans laquelle $e^{-ik\lambda t}$ est exponentiellement décroissant. Ce n'est pas possible à cause de la coupure.

En ajoutant l'intégrale sur le symétrique du contour C_δ^+ , dont on montre qu'elle est nulle, nous serons capable d'obtenir une estimation. Soit C_δ^- le contour obtenu par symétrie par rapport à l'axe réel (voir figure 3.2). On a :

$$\int_{C_\delta^-} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda = 0, \quad l = 0, 1, \tag{3.15}$$

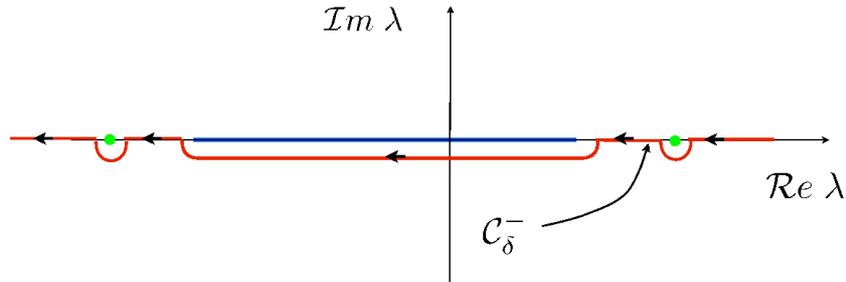


FIG. 3.2 – Le contour d'intégration C_δ^- .

qui s'obtient en considérant le contour fermé $C_{R,\delta}^-$ (voir figure 3.3). En effet, on a par le théorème de Cauchy :

$$\int_{C_{R,\delta}^-} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda = 0, \quad l = 0, 1, \tag{3.16}$$

puisque l'intégrand est analytique à l'intérieur de ce contour. On obtient maintenant (3.15) à partir de (3.16) en prenant la limite quand $R \rightarrow +\infty$: la contribution de l'intégrale sur le demi cercle de rayon R tend vers 0 étant donné que pour $k > 0$, nous sommes du côté où $e^{-ik\lambda t}$ est décroissant quand $|\lambda|$ grandit, et parce que la fonction $N(\lambda)/(\lambda - M(y))^{l+1}$ tend vers 0 à l'infini (il est facile de voir que $\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} N(\lambda) = 1$).

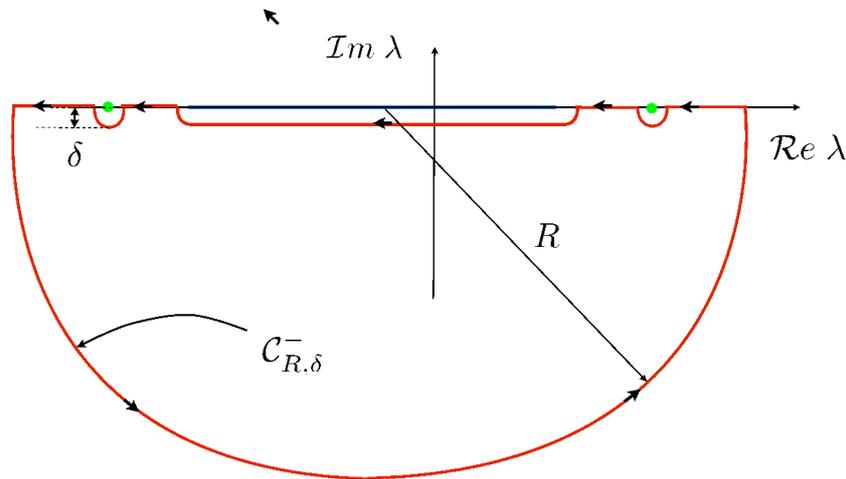


FIG. 3.3 – Le contour d'intégration $C_{R,\delta}^-$.

Finalement, en ajoutant les expressions (3.14) et (3.15) on obtient :

$$I_l(k, y, t) := \int_{C_\delta} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \quad l = 0, 1,$$

où C_δ est le contour de la figure 3.4 englobant à la fois les pôles et la coupure. En utilisant le théorème des résidus nous obtenons la décomposition suivante :

$$I_l(k, y, t) = I_{l,c}(k, y, t) + I_{l,p}(k, y, t),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad I_{l,p}(k, y, t) = -2i\pi \sum_{\pm} \frac{\text{Res}(N, \lambda_{\pm})}{(\lambda_{\pm} - M(y))^{l+1}}, \quad l = 0, 1, \\ \bullet \quad I_{l,c}(k, y, t) = \int_{S_\delta} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^{l+1}} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \quad l = 0, 1, \end{array} \right. \quad (3.17)$$

où S_δ est le contour fermé qui entoure le segment $[M_-, M_+]$, et qui dégénère en ce segment quand δ tend vers 0. Il est clair que $I_{l,p}$ représente la contribution des pôles et que $I_{l,c}$ celle de la coupure, comme leurs noms l'indiquent.

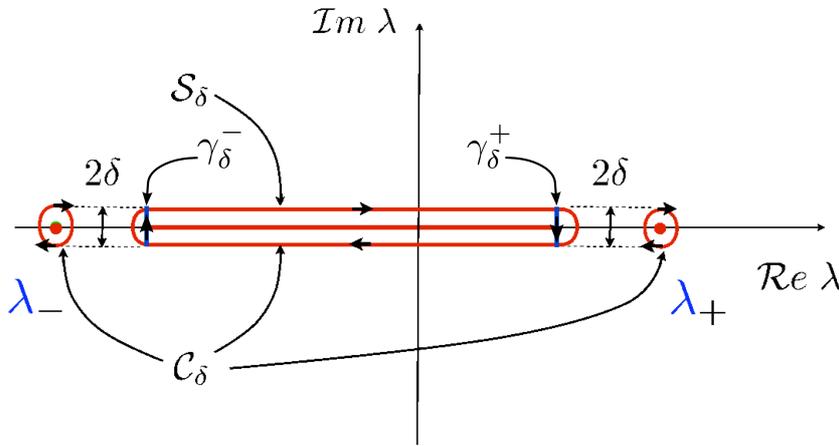


FIG. 3.4 – Les contours d'intégration C_δ et S_δ .

Calcul de $I_{l,c}$ Nous avons introduit page 85 deux hypothèses, (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$, qui contrôlent le comportement de la fonction N à l'approche de la coupure. Ces hypothèses ont été introduites pour pouvoir mener le calcul de $I_{l,c}$. Elles apparaissent naturellement dans les calculs et y trouvent leur origine. Nous commençons par le calcul de $I_{0,c}$:

Lemme 3.1 *On suppose que (\mathcal{H}_N) (définie page 86) est satisfaite, alors*

$$I_{0,c}(k, y, t) = v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{2i \mathcal{I}N(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda - 2i\pi \mathcal{R}N(M(y)) e^{-ikM(y)t}, \quad (3.18)$$

où $\mathcal{R}N$ et $\mathcal{I}N$ sont définis par (3.8).

DÉMONSTRATION. On utilise l'expression (3.17) de $I_{0,c}$:

$$I_{0,c}(k, y, t) = \int_{S_\delta} \frac{N(\lambda)}{\lambda - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda,$$

que l'on peut séparer en quatre parties comme suit :

$$I_{0,c}(k, y, t) = \sum_{\pm} \int_{\gamma_{\delta}^{\pm}} \frac{N(\lambda)}{\lambda - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda + \sum_{\pm} \pm 1 \int_{M_-}^{M_+} \frac{N(\lambda \pm i\delta)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda \pm i\delta)t} d\lambda,$$

où l'on a découpé le contour \mathcal{S}_δ en quatre morceaux, deux verticaux (γ_δ^\pm) et deux horizontaux. En particulier, les chemins γ_δ^\pm sont de longueur 2δ . Nous allons maintenant faire tendre δ vers 0. (\mathcal{H}_N) nous dit que N_\pm est Hölderienne sur γ_δ^\pm , ce qui implique qu'elle y est bornée et par conséquent :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\gamma_\delta^\pm} \frac{N(\lambda)}{\lambda - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda = 0,$$

de telle sorte que :

$$I_{0,c}(k, y, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N(\lambda + i\delta)}{\lambda + i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda+i\delta)t} d\lambda - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N(\lambda - i\delta)}{\lambda - i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda-i\delta)t} d\lambda.$$

En utilisant la notation (3.7), cette expression se réécrit :

$$I_{0,c}(k, y, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_+(\lambda + i\delta)}{\lambda + i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda+i\delta)t} d\lambda - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_-(\lambda - i\delta)}{\lambda - i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda-i\delta)t} d\lambda.$$

Pour calculer la limite quand $\delta \rightarrow 0$ on remet cette expression sous la forme suivante, dans le but non dissimulé d'utiliser le caractère Hölderien de N_\pm :

$$\begin{aligned} I_{0,c}(k, y, t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_+(\lambda + i\delta) e^{-ik(\lambda+i\delta)t} - N_+(\lambda) e^{-ik\lambda t}}{\lambda + i\delta - M(y)} d\lambda + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_+(\lambda)}{\lambda + i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda \\ &\quad - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_-(\lambda - i\delta) e^{-ik(\lambda-i\delta)t} - N_-(\lambda) e^{-ik\lambda t}}{\lambda - i\delta - M(y)} d\lambda - \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_-(\lambda)}{\lambda - i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda. \end{aligned} \quad (3.19)$$

L'hypothèse (\mathcal{H}_N), et plus précisément le caractère Hölderien de N_\pm , implique que les premier et troisième termes de cette expression sont nuls. Faisons la démonstration pour le premier terme par exemple. Le caractère Hölderien d'ordre α permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_+(\lambda + i\delta) e^{-ik(\lambda+i\delta)t} - N_+(\lambda) e^{-ik\lambda t}}{\lambda + i\delta - M(y)} d\lambda \right| &\leq \int_{M_-}^{M_+} \frac{C \delta^\alpha}{|\lambda + i\delta - M(y)|} d\lambda \\ &= C \delta^\alpha \int_{M_-}^{M_+} \frac{1}{\sqrt{(\lambda - M(y))^2 + \delta^2}} d\lambda \\ &= C \delta^\alpha \left[\log \left(\lambda - M(y) + \sqrt{(\lambda - M(y))^2 + \delta^2} \right) \right]_{M_-}^{M_+} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand δ tend vers 0. Par ailleurs, en appliquant la proposition 3.1 avec $g(\lambda) = N_\pm(\lambda) e^{-ik\lambda t}$ on obtient :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_\pm(\lambda)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda = v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_\pm(\lambda) e^{-ik\lambda t}}{\lambda - M(y)} d\lambda \mp i\pi N_\pm(M(y)) e^{-ikM(y)t},$$

et finalement (3.19) devient :

$$I_{0,c}(k, y, t) = v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{N_+(\lambda) - N_-(\lambda)}{\lambda - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda - i\pi [N_+(M(y)) + N_-(M(y))] e^{-ikM(y)t},$$

ce qui donne (3.18) en utilisant (3.8).

□

Nous allons montrer de la même manière le

Lemme 3.2 *On suppose que (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ (définies page 86) sont satisfaites, alors*

$$I_{1,c}(k, y, t) = -ikt I_{0,c}(k, y, t) + v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{2i \mathcal{I}N'(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda - 2i\pi \mathcal{R}N'(M(y)) e^{-ikM(y)t}, \quad (3.20)$$

où $\mathcal{R}N'$ et $\mathcal{I}N'$ sont définis par (3.8)

DÉMONSTRATION. On utilise l'expression (3.17) de $I_{1,c}$:

$$I_{1,c}(k, y, t) = \int_{S_\delta} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} e^{-ik\lambda t} d\lambda.$$

Une simple intégration par parties donne :

$$I_{1,c}(k, y, t) = \int_{S_\delta} \frac{N'(\lambda) - ikt N(\lambda)}{\lambda - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda.$$

Nous procédons maintenant comme dans la démonstration précédente. On sépare cette intégrale en quatre morceaux, ceux sur γ_δ^\pm sont nuls à la limite quand δ tend vers 0. Il reste donc :

$$I_{1,c}(k, y, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\pm} \pm 1 \int_{M_-}^{M_+} \frac{N'_\pm(\lambda \pm i\delta) - ikt N_\pm(\lambda \pm i\delta)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik(\lambda \pm i\delta)t} d\lambda.$$

Nous soustrayons et rajoutons à l'expression précédente le terme :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\pm} \pm 1 \int_{M_-}^{M_+} \frac{N'_\pm(\lambda) - ikt N_\pm(\lambda)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda,$$

ce qui donne compte tenu du caractère Hölderien de N_\pm et N'_\pm :

$$\begin{aligned} I_{1,c}(k, y, t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\pm} \pm 1 \int_{M_-}^{M_+} \frac{N'_\pm(\lambda) - ikt N_\pm(\lambda)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \\ &= -ikt I_{0,c}(k, y, t) + \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{\pm} \pm 1 \int_{M_-}^{M_+} \frac{N'_\pm(\lambda)}{\lambda \pm i\delta - M(y)} e^{-ik\lambda t} d\lambda. \end{aligned}$$

Finalement en utilisant la proposition 3.1 ainsi que (3.8) on obtient (3.20). □

En résumé, nous avons calculé, aux travers des deux lemmes précédents, les expressions de $I_{l,c}$. Cela nous fournit les expressions de I_l au moyen de (3.17). Ensuite nous obtenons les expressions de \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 (par le biais de (3.13)) et donc finalement de $E\widehat{U}$. Dans la section suivante nous allons montrer le caractère bien posé de (1.9), en calculant des estimations sur les I_l .

3.2.2 Estimations a priori et caractère bien posé

Nous commençons par obtenir des estimations sur les I_l . Nous en déduisons en particulier une estimation sur $\partial_x^2 E U$ puis sur U . Ces estimations impliquent alors clairement le caractère bien posé de (1.9).

Estimation sur I_l On commence par montrer le lemme suivant concernant I_0 :

Lemme 3.3 *On suppose que (\mathcal{H}_N) (définie page 86) est satisfaite. Alors il existe une constante $I_0^* > 0$ ne dépendant que du profil M , telle que nous avons l'estimation uniforme suivante :*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \|I_0(k, \cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{I}^{-1,1})} \leq I_0^*. \quad (3.21)$$

DÉMONSTRATION. On rappelle la décomposition suivante $I_0 = I_{0,p} + I_{0,c}$ donnée par (3.17). On va traiter chacun de ces termes séparément :

- On commence par la contribution des pôles. De (3.17) on tire :

$$I_{0,p}(k, y, t) = -2i\pi \sum_{\pm} \frac{\text{Res}(N, \lambda_{\pm})}{\lambda_{\pm} - M(y)},$$

à partir de quoi on obtient facilement :

$$\|I_{0,p}(k, \cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{I}^{-1,1})} \leq 2\pi \sum_{\pm} |\text{Res}(N, \lambda_{\pm})| \left\| \frac{1}{\lambda_{\pm} - M(\cdot)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{I}^{-1,1})}. \quad (3.22)$$

- On s'intéresse maintenant à la contribution de la coupure. Le lemme 3.1 nous fournit l'expression suivante :

$$I_{0,c}(k, y, t) = v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{2i \mathcal{I}N(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda - 2i\pi \mathcal{R}N(M(y)).$$

Nous allons traiter chacun des deux termes séparément :

- (i) Puisque (\mathcal{H}_N) est supposée satisfaite, nous savons que N_{\pm} est Hölderienne sur $[M_-, M_+]$. En particulier, elle est continue et donc elle appartient à $L^\infty(\mathbb{I}^{-1,1})$. Nous avons donc :

$$\left| 2i\pi \mathcal{R}N(M(y)) \right| \leq 2\pi \|\mathcal{R}N\|_{L^\infty(\mathbb{I}^{-1,1})}. \quad (3.23)$$

- (ii) Le terme valeur principale est plus compliqué à traiter. Puisque $2i \mathcal{I}N(\lambda) = N_+(\lambda) - N_-(\lambda)$ on a clairement $\mathcal{I}N(\lambda) = 0$, presque partout sur $\mathbb{R} \setminus [M_-, M_+]$ (sauf aux pôles). De plus, (\mathcal{H}_N) nous dit que $\mathcal{I}N(M_{\pm}) = 0$ ce qui implique que l'on peut étendre $\mathcal{I}N$ en une fonction Hölderienne sur \mathbb{R} qui vaut 0 à l'extérieur de $\mathbb{I}^{-1,1}$. Si on pose $L = M_+ - M_-$ (de telle sorte que $M(y) - L \leq M_-$ et $M(y) + L \geq M_+$) on a :

$$\begin{aligned} v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{2i \mathcal{I}N(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda &= v.p. \int_{M(y)-L}^{M(y)+L} \frac{2i \mathcal{I}N(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda \\ &= e^{-ikM(y)t} v.p. \int_{-L}^L \frac{2i \mathcal{I}N(v + M(y))}{v} e^{-ikvt} dv, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le changement de variable $v = \lambda - M(y)$ pour recentrer l'intervalle d'intégration. Une fois de plus nous voulons utiliser le caractère Hölderien de $\mathcal{I}N$ ce qui nous amène à écrire :

$$\begin{aligned} &v.p. \int_{-L}^L \frac{2i \mathcal{I}N(v + M(y))}{v} e^{-ikvt} dv \\ &= \int_{-L}^L 2i \frac{\mathcal{I}N(v + M(y)) - \mathcal{I}N(M(y))}{v} e^{-ikvt} dv + 2i \mathcal{I}N(M(y)) v.p. \int_{-L}^L \frac{e^{-ikvt}}{v} dv, \end{aligned}$$

où la valeur principale a disparu dans le premier terme puisque l'intégrale est bien définie, compte tenu du caractère Hölderien de $\mathcal{I}N$. Une fois de plus nous allons traiter ces deux termes séparément. Tout d'abord nous avons :

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-L}^L \frac{e^{-ikvt}}{v} dv &= \frac{1}{2} v.p. \int_{-L}^L \frac{e^{-ikvt}}{v} dv - \frac{1}{2} v.p. \int_{-L}^L \frac{e^{ikvt}}{v} dv \\ &= -i \int_{-L}^L \frac{\sin(kvt)}{v} dv \\ &= -i \int_{-Lkt}^{Lkt} \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left| v.p. \int_{-L}^L \frac{e^{-ikvt}}{v} dv \right| \leq K := \sup_{A>0} \left| \int_{-A}^A \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi \right|. \quad (3.24)$$

K est fini puisque³ $\lim_{A \rightarrow 0} \int_{-A}^A \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi = \pi$.

Par ailleurs

$$\left| \int_{-L}^L \frac{\mathcal{I}N(v + M(y)) - \mathcal{I}N(M(y))}{v} e^{-ikvt} dv \right| \leq |\mathcal{I}N|_\alpha \int_{-L}^L \frac{dv}{|v|^{1-\alpha}}, \quad (3.25)$$

où nous avons utilisé le caractère Hölderien d'ordre α de $\mathcal{I}N$ et où

$$|\mathcal{I}N|_\alpha := \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \frac{|\mathcal{I}N(x) - \mathcal{I}N(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Nous allons maintenant remonter tous ces calculs pour obtenir l'estimation attendue sur I_0 . En réunissant (3.23), (3.24) et (3.25) on obtient :

$$|I_{0,c}(k, y, t)| \leq I_{0,c}^* := 2 |\mathcal{I}N|_\alpha \int_{-L}^L \frac{dv}{|v|^{1-\alpha}} + 2K \|\mathcal{I}N\|_{L^\infty(|M_-|, M_+)} + 2\pi \|\mathcal{R}N\|_{L^\infty(|M_-|, M_+)}. \quad (3.26)$$

Finalement en utilisant (3.22) et (3.26) on obtient (3.21) avec

$$I_0^* = I_{0,c}^* + 2\pi \sum_{\pm} |\text{Res}(N, \lambda_{\pm})| \left\| \frac{1}{\lambda_{\pm} - M(\cdot)} \right\|_{L^\infty(|-1, 1|)}.$$

□

De manière similaire on obtient le

Lemme 3.4 *On suppose que (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ (définies page 86) sont satisfaites. Alors il existe une constante $I_1^* > 0$ ne dépendant que du profil M , telle que nous avons l'estimation uniforme suivante :*

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \|I_1(k, \cdot, t)\|_{L^\infty(|-1, 1|)} \leq I_1^* (1 + |kt|). \quad (3.27)$$

³C'est un résultat classique que l'on peut démontrer par exemple par des techniques d'intégration dans le plan complexe et grâce au théorème de Cauchy.

DÉMONSTRATION. On procède exactement de la même manière que dans la démonstration du précédent lemme. On rappelle la décomposition suivante $I_1 = I_{1,p} + I_{1,c}$. On va traiter chacun de ces termes séparément :

- On commence par la contribution des pôles. De (3.17) on tire :

$$I_{1,p}(k, y, t) = -2i\pi \sum_{\pm} \frac{\text{Res}(N, \lambda_{\pm})}{(\lambda_{\pm} - M(y))^2},$$

à partir de quoi on obtient facilement :

$$\|I_{1,p}(k, \cdot, t)\|_{L^\infty([-1,1])} \leq 2\pi \sum_{\pm} |\text{Res}(N, \lambda_{\pm})| \left\| \frac{1}{(\lambda_{\pm} - M(\cdot))^2} \right\|_{L^\infty([-1,1])}.$$

- On s'intéresse maintenant à la contribution de la coupure. Le lemme 3.2 nous fournit l'expression suivante :

$$I_{1,c}(k, y, t) = -ikt I_{0,c}(k, y, t) + v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{2i \mathcal{I}N'(\lambda)}{(\lambda - M(y))} e^{-ik\lambda t} d\lambda - 2i\pi \mathcal{R}N'(M(y)),$$

On obtient alors :

$$|I_{1,c}(k, y, t)| \leq |kt| I_{0,c}^* + I_{1,c}^*$$

où $I_{0,c}^*$ est défini par (3.26) et où $I_{1,c}^*$ est obtenu de la même manière qu'a été obtenu $I_{0,c}^*$ dans le lemme précédent. Cette fois au lieu de $\mathcal{I}N$ on travaille avec $\mathcal{I}N'$ qui satisfait $\mathcal{I}N'(\lambda) = 0$ presque partout sur $\mathbb{R} \setminus]M_-, M_+[$. On utilise aussi l'hypothèse $(\mathcal{H}_{N'})$ qui impose que $\mathcal{I}N'(M_{\pm}) = 0$. On obtient :

$$I_{1,c}^* := 2|\mathcal{I}N'|_{\alpha'} \int_{-L}^L \frac{dv}{|v|^{1-\alpha'}} + 2K\|\mathcal{I}N'\|_{L^\infty([M_-, M_+])} + 2\pi\|\mathcal{R}N'\|_{L^\infty([M_-, M_+])},$$

Finalement, on obtient (3.27) en posant :

$$I_1^* = \max \left(I_{0,c}^* \quad , \quad I_{1,c}^* + 2\pi \sum_{\pm} |\text{Res}(N, \lambda_{\pm})| \left\| \frac{1}{(\lambda_{\pm} - M(\cdot))^2} \right\|_{L^\infty([-1,1])} \right).$$

□

Remarque 3.1 Les hypothèses (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ ont bien entendu été introduites a priori pour rendre les calculs licites et ainsi démontrer les deux lemmes précédents.

À partir de ces estimations sur I_0 et I_1 , nous allons déduire des estimations sur la solution du problème (1.9), sa moyenne, ses dérivées...

Estimation sur $\partial_x^2 EU$ Pour montrer le caractère bien posé de (1.9) nous cherchons à obtenir une estimation sur la dérivée seconde de la moyenne. Nous déduisons alors de l'expression explicite (3.2) de U en fonction de $\partial_x^2 EU$, une estimation sur la solution qui nous donnera le caractère bien posé. Notre méthode consiste à travailler dans l'espace de Fourier avant d'utiliser le théorème de Plancherel pour revenir dans l'espace physique. On rappelle que :

$$E\widehat{U}(k, t) = \widehat{E}_0(k, t) + \widehat{E}_1(k, t),$$

où \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 sont donnés par (3.11). On cherche à estimer $k^2 E\widehat{U}(k, t)$:

(i) On commence par $k^2 \widehat{E}_0$. Nous avons en utilisant l'expression (3.13) de \widehat{E}_0 :

$$\left| k^2 \widehat{E}_0 \right| = \frac{1}{2\pi} \left| E \left[\left(I_0(k, \cdot, t) - M(\cdot) I_1(k, \cdot, t) \right) k^2 \widehat{U}_0(k, \cdot) \right] \right|,$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz $|E[UV]| \leq \|U\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})} \|V\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})}$ puis $\|U\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})} \leq \sqrt{2} \|U\|_{L^\infty(\mathbb{Q}^{-1,1D})}$ on obtient :

$$\left| k^2 \widehat{E}_0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|I_0(k, \cdot, t) - M(\cdot) I_1(k, \cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{Q}^{-1,1D})} k^2 \|\widehat{U}_0(k, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})},$$

et finalement en utilisant les lemmes 3.3 et 3.4 on obtient :

$$\left| k^2 \widehat{E}_0 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(I_0^* + \|M\|_{L^\infty} I_1^* (1 + |kt|) \right) k^2 \|\widehat{U}_0(k, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})}. \quad (3.28)$$

(ii) De la même manière que précédemment on obtient facilement :

$$\left| k^2 \widehat{E}_1 \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_1^* (1 + |kt|) |k| \|\widehat{U}_1(k, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{Q}^{-1,1D})}. \quad (3.29)$$

En utilisant le théorème de Plancherel, les deux estimations (3.28) et (3.29) donnent :

$$\left\| \partial_x^2 EU(\cdot, t) \right\|_{L_x^2} \leq C \left[\left\| \partial_x^2 U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + t \left(\left\| \partial_x^3 U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^2 U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} \right) \right], \quad (3.30)$$

où C est une constante dépendant de I_0^* , I_1^* et $\|M\|_{L^\infty}$. Par conséquent, elle dépend uniquement du profil M .

Remarque 3.2 De la même manière exactement nous pouvons montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \partial_x^{1+n} EU(\cdot, t) \right\|_{L_x^2} \leq C \left[\left\| \partial_x^{1+n} U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^n U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + t \left(\left\| \partial_x^{2+n} U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^{1+n} U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Cela est fait en estimant $k^{1+n} E\widehat{U}(k, t)$.

Estimation sur EU Nous cherchons maintenant à obtenir une estimation sur la moyenne EU . EU ayant une signification physique claire, l'intérêt d'une telle estimation est indiscutable. Dans l'estimation (3.30) de $\partial_x^2 EU$ (ainsi que dans les estimations (3.31)) nous n'avons pas été gêné par le facteur $1/k$ présent dans l'expression (3.13) de \widehat{E}_1 . En effet, nous avons multiplié cette expression par k^2 ce qui a occulté cette difficulté. Si l'on veut obtenir une estimation sur la moyenne EU , il nous faut résoudre ce problème. Pour ce faire nous définissons :

$$I(k, y, t) := \frac{I_1}{2\pi k}.$$

Par la suite l'expression (3.13) de \widehat{E}_1 est remplacée par :

$$\widehat{E}_1(k, t) = -E[I(k, \cdot, t) \widehat{U}_1(k, \cdot)]. \quad (3.32)$$

Nous allons calculer I comme nous l'avons fait pour I_0 et I_1 . Avant cela il nous faut éliminer la singularité en $k = 0$. Dans cette optique, nous montrons :

$$\int_{\mathbb{R}+i\lambda_I} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} d\lambda = \int_{\mathbb{R}+iR} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} d\lambda = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}+iR} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} d\lambda = 0,$$

où nous avons utilisé l'analyticité de l'intégrand pour déformer le contour, puis le théorème de convergence dominée pour montrer que la limite est nulle. Au moyen de ce subterfuge nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} I(k, y, t) &= \frac{1}{2\pi k} \int_{\mathbb{R}+i\lambda_I} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} e^{-ik\lambda t} d\lambda, \quad \lambda_I > 0, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+i\lambda_I} \frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} d\lambda, \quad \lambda_I > 0. \end{aligned}$$

L'utilité de cette réécriture provient du fait que $(e^{-ik\lambda t} - 1)/k$ n'a pas de singularité en $k = 0$. Pour calculer I nous procédons de la même manière que pour I_0 et I_1 . En déformant le contour nous avons :

$$I(k, y, t) = I_c(k, y, t) + I_p(k, y, t),$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \quad I_p(k, y, t) = -i \sum_{\pm} \frac{e^{-ik\lambda_{\pm} t} - 1}{k} \frac{\text{Res}(N, \lambda_{\pm})}{(\lambda_{\pm} - M(y))^2}, \\ \bullet \quad I_c(k, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\delta}} \frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} \frac{N(\lambda)}{(\lambda - M(y))^2} d\lambda. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

À l'image de ce qui a été fait dans le lemme 3.2 on calcule maintenant I_c : après intégration par parties on a :

$$I_c(k, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\delta}} -it e^{-ik\lambda t} \frac{N(\lambda)}{\lambda - M(y)} d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_{S_{\delta}} \frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} \frac{N'(\lambda)}{\lambda - M(y)} d\lambda.$$

On trouve après calcul :

$$I_c(k, y, t) = \frac{-it}{2\pi} I_0(k, y, t) + \frac{i}{\pi} \int_{M_-}^{M_+} \frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} \frac{\mathcal{I}N'(\lambda)}{\lambda - M(y)} d\lambda - i \frac{e^{-ikM(y)t} - 1}{k} \mathcal{R}N'(M(y)). \quad (3.34)$$

Enfin, en utilisant :

$$\left| \frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} \right| = \left| \int_0^{\lambda t} e^{-iks} ds \right| \leq |\lambda|t,$$

on montre, en prenant exemple sur les démonstrations des lemmes 3.3 et 3.4, qu'il existe $I^* > 0$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad \|I(k, \cdot, t)\|_{L^\infty([-1,1])} \leq I^*(1+t). \quad (3.35)$$

Nous pouvons maintenant chercher une estimation sur la moyenne EU . Nous procédons exactement de la même manière que dans le paragraphe précédent pour l'obtention d'une estimation sur $\partial_x^2 EU$. Nous utilisons toujours la décomposition (3.10), en tenant compte cette fois de l'expression (3.32) de \widehat{E}_1 . Alors, avec (3.3) et (3.35) on aboutit à :

$$\|EU(\cdot, t)\|_{L_x^2} \leq C \left[\|U_0\|_{L_y^2(L_x^2)} + t \|\partial_x U_0\|_{L_y^2(L_x^2)} + (1+t) \|U_1\|_{L_y^2(L_x^2)} \right], \quad (3.36)$$

où C est une constante dépendant de I_0^* , I^* et $\|M\|_{L^\infty}$, elle ne dépend par conséquent que du profil M .

Estimation sur U On va maintenant utiliser l'expression explicite (3.2) de U en fonction de $\partial_x^2 EU$ pour obtenir une estimation sur U . On rappelle que cette expression a été obtenue en supposant EU connu, et en résolvant l'équation de transport au carré (3.1) dans laquelle EU intervient comme un second membre. On obtient facilement grâce à l'estimation (3.31) sur $\partial_x^{1+n} EU$ l'estimation suivante sur $\partial_x^n U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\partial_x^n U\|_{L_y^2(L_x^2)} \leq \|\partial_x^n U_0\|_{L_y^2(L_x^2)} + C \sum_{k=1}^3 t^k \left(\|\partial_x^{n+k} U_0\|_{L_y^2(L_x^2)} + \|\partial_x^{n+k-1} U_1\|_{L_y^2(L_x^2)} \right), \quad (3.37)$$

où C est une nouvelle constante ne dépendant que de M . Cette estimation prédit une possible croissance polynomiale en temps, en t^3 plus précisément.

Remarque 3.3 *En fait, nous n'avons pas utilisé le fait que le second membre de l'équation de transport au carré dépend de EU et par conséquent de U . Nous avons donc laissé de l'information en route. En travaillant sur l'expression complète de U on peut peut être montrer une estimation plus fine. Toutes nos tentatives sont pour l'instant restées infructueuses.*

Dans l'étude des instabilités hydrodynamiques, il existe plusieurs travaux mettant en évidence une croissance polynomiale de la norme de la solution des équations d'Euler linéarisées. On peut citer Landahl [Lan06] et Ellingsen et Palm [EP75].

Estimation sur $\partial_t EU$ et $\partial_t U$ Pour compléter toutes ces estimations nous cherchons maintenant à obtenir des estimations sur les dérivées en temps de EU et U . En ce qui concerne $\partial_t EU$ on remarque que prendre la dérivée en temps revient à : multiplier par $-ik\lambda_\pm$ les expressions de $I_{l,p}$ données par (3.17), et multiplier par $-ik\lambda$ (resp. $-ikM(y)$) les termes "valeur principale" (resp. les autres) dans les expressions (3.18) et (3.20) de $I_{0,c}$ et $I_{1,c}$. Au final, nous obtenons par la même méthode des estimations pour \widehat{E}_0 et \widehat{E}_1 qui sont similaires à celle obtenues précédemment, avec un facteur k en plus. Par conséquent on obtient l'estimation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \partial_x^n \partial_t EU(\cdot, t) \right\|_{L_x^2} \leq C \left[\left\| \partial_x^{n+1} U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^n U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + t \left(\left\| \partial_x^{n+2} U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^{n+1} U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} \right) \right]. \quad (3.38)$$

En ce qui concerne $\partial_t U$, nous obtenons une estimation en dérivant l'expression (3.2) par rapport à t ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t) &= U_1(x - M(y)t, y) - M(y)t \left[\frac{\partial U_1}{\partial x}(x - M(y)t, y) + M(y) \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}(x - M(y)t, y) \right] \\ &+ \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU(x - M(y)(t-s), s) ds - M(y) \int_0^t (t-s) \frac{\partial^3}{\partial x^3} EU(x - M(y)(t-s), s) ds. \end{aligned}$$

À partir de cette expression et en utilisant l'estimation (3.31), on obtient facilement pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \partial_x^n \partial_t U \right\|_{L_y^2(L_x^2)} \leq \left\| \partial_x^n U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + C \sum_{k=1}^3 t^k \left(\left\| \partial_x^{n+k+1} U_0 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} + \left\| \partial_x^{n+k} U_1 \right\|_{L_y^2(L_x^2)} \right). \quad (3.39)$$

Ces estimations suffisent clairement à montrer le caractère bien posé de (1.9). En effet, l'existence est une conséquence du calcul et les estimations nous disent dans quel espace vit la solution. Avec des conditions initiales U_0 et U_1 nulles, (3.36) entraîne U nulle, ce qui nous donne l'unicité. Enfin ces estimations a priori sont autant de résultats de continuité par rapport aux données. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Supposons que $M \in C^0([-1, 1])$ tel que (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ soient satisfaites. Alors, le problème de Cauchy (1.9) est bien posé au sens où pour tout $(U_0, U_1) \in L_y^2(H_x^{3+n}) \times L_y^2(H_x^{2+n})$, $n \geq 0$, où $L_y^2(H_x^n) := L^2([-1, 1]; H^n(\mathbb{R}))$, il admet une unique solution*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^{n-1})),$$

et on a les estimations (3.31), (3.37), (3.36), (3.38) et (3.39).

Ce théorème est le fruit des estimations obtenues précédemment. Celles-ci l'ont été dans l'espace de Fourier ; nous allons, dans la section suivante, calculer la transformation inverse de Fourier ce qui nous fournira une expression quasi-explicite de la solution.

3.2.3 Expression quasi-explicite de la solution (Calcul de la transformation inverse de Fourier inverse)

Nous avons obtenu l'expression (3.2) de U en fonction de $\partial_x^2 EU$. Nous avons ensuite établi la décomposition entre les contributions des conditions initiales U_0 et U_1 :

$$E\widehat{U}(k, t) = \widehat{E}_0(k, t) + \widehat{E}_1(k, t),$$

où $\widehat{E}_0(k, t)$ et $\widehat{E}_1(k, t)$ sont donnés en fonction de I_l par (3.13). Dans cette partie nous allons utiliser l'expression (3.32) de $\widehat{E}_1(k, t)$ en fonction de I , qui a été introduite pour supprimer la singularité en $1/k$, ce qui nous sera utile pour calculer la transformation de Fourier inverse. On rappelle ces expressions :

$$\begin{cases} \bullet \widehat{E}_0(k, t) = \frac{i}{2\pi} E\left[\left(I_0(k, \cdot, t) - M(\cdot)I_1(k, \cdot, t)\right) \widehat{U}_0(k, \cdot)\right], \\ \bullet \widehat{E}_1(k, t) = -E\left[I(k, \cdot, t) \widehat{U}_1(k, \cdot)\right], \end{cases}$$

où on a décomposé les intégrales I_0 , I_1 et I en une contribution des pôles et une contribution de la coupure (cf. (3.17) et (3.33)). Les expressions des contributions de la coupure sont données par (3.18), (3.20) et (3.34). Pour calculer la transformation inverse de Fourier nous allons utiliser le fait que la multiplication par e^{-iks} dans l'espace de Fourier revient à une translation par $-s$ en x , l'espace physique. Nous utilisons de plus pour les termes contenus dans I :

$$\frac{e^{-ik\lambda t} - 1}{k} = \int_0^{\lambda t} e^{-iks} ds.$$

Après quelques simples calculs et regroupement de termes on obtient l'expression de Eu au moyen de la décomposition

$$EU(x, t) = -E[U_p(x, \cdot, t) + U_c(x, \cdot, t)],$$

où :

– la contribution des pôles est donnée par :

$$U_p(x, y, t) = \sum_{\pm} \frac{\int_0^{\lambda_{\pm} t} U_1(x-s, y) ds}{F'(\lambda_{\pm}) (\lambda_{\pm} - M(y))} + \sum_{\pm} \frac{\lambda_{\pm} - 2M(y)}{(\lambda_{\pm} - M(y))^2} \frac{U_0(x - \lambda_{\pm} t, y)}{F'(\lambda_{\pm})}, \quad (3.40)$$

où nous avons utilisé $\text{Res}(N, \lambda_{\pm}) = -1/F'(\lambda_{\pm})$,

– la contribution de la coupure :

$$\begin{aligned} U_c(x, y, t) &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{\mathcal{I}N(\lambda)}{\lambda - M(y)} \left[U_0(x - \lambda t, y) + tM(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - \lambda t, y) + tU_1(x - \lambda t, y) \right] d\lambda \\ &+ \frac{1}{\pi} v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{\mathcal{I}N'(\lambda)}{\lambda - M(y)} \left[\int_0^{\lambda t} U_1(x-s, y) ds - M(y)U_0(x - \lambda t, y) \right] d\lambda \\ &- \mathcal{R}N(M(y)) \left[U_0(x - M(y)t, y) + tM(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - M(y)t, y) + tU_1(x - M(y)t, y) \right] \\ &- \mathcal{R}N'(M(y)) \left[\int_0^{M(y)t} U_1(x-s, y) ds - M(y)U_0(x - M(y)t, y) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Finalement on obtient l'expression de U avec (3.2).

Interprétation physique : Cette expression quasi-explicite (au moyen d'intégrales) nous fournit une interprétation de la solution. En effet, dans le cas $U_1 = 0$, on peut facilement vérifier que EU_p est solution de l'équation des ondes généralisée

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_- \frac{\partial}{\partial x} \right) EU_p = 0.$$

L'apparition de ces vitesses λ_{\pm} dans le phénomène est assez surprenant. De plus, EU_c est une superposition continue en λ de solutions d'une équation de transport au carré :

$$EU_c = \int_{M_-}^{M_+} U_{c,\lambda} d\lambda, \quad \text{où} \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{c,\lambda} = 0.$$

Par ailleurs, cette expression quasi-explicite de la solution nous fournira une méthode efficace pour calculer numériquement la solution. C'est ce que nous verrons dans le chapitre 4. Auparavant, nous allons exhiber des profils pour lesquels les hypothèses abstraites (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont vérifiées. En particulier, cela nous fournira des expressions de $\mathcal{RN}, \mathcal{RN}', \mathcal{IN}$ et \mathcal{IN}' qui seront utilisables numériquement.

3.3 CAS PARTICULIERS

Nous avons montré dans la section précédente le caractère bien posé de (1.9) (voir le théorème 3.1). Cela a été fait en supposant que $M \in C^0([-1, 1])$ tel que $(\mathcal{H}_S), (\mathcal{H}_{GD}), (\mathcal{H}_N)$ et $(\mathcal{H}_{N'})$ soient satisfaites⁴. Rappelons l'origine de ces hypothèses :

- (i) L'hypothèse de stabilité (\mathcal{H}_S) est bien évidemment indispensable car nous savons que si elle n'est pas vérifiée alors le problème est mal posé⁵.
- (ii) L'hypothèse (\mathcal{H}_{GD}) a été introduite car elle permet de fixer l'existence et le nombre de pôles réels, cela au prix d'une condition assez faible sur le profil. On pourrait donc aisément s'affranchir de cette hypothèse.
- (iii) Les hypothèses (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ ont, quant à elles, été introduites pour rendre licites les calculs présentés dans la section précédente. Ainsi, la démarche que nous avons utilisée est totalement dépendantes de ces deux hypothèses. Elles sont donc indispensables.

Ces hypothèses sont très générales mais restent assez abstraites. L'objet de cette section est de faire le lien entre ces hypothèses, abstraites, et le profil, concret. Pour cela, nous présentons une large classe de profils monotones pour lesquels ces hypothèses sont vérifiées. Après avoir étendu ces résultats à des profils non monotones, nous nous consacrerons au cas du profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$.

3.3.1 Une classe de profils monotones

Nous introduisons une classe de profils monotones réguliers :

Définition 3.3 Nous dirons qu'un profil M appartient à la classe C_m^γ si :

1. M vérifie (\mathcal{H}_S) .
2. $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) - 1 \neq 0, \quad \forall \lambda \in]M_-, M_+[.$
3. $M \in C^{3,\gamma}([-1, 1])$ i.e. M est une fonction réelle, dérivable trois fois et sa dérivée d'ordre 3 est Hölderienne d'ordre γ .
4. $M'(y) \neq 0, \quad \forall y \in [-1, 1].$

Dans ce qui suit, nous supposons que $M \in C_m^\gamma$. En particulier, M est monotone et si M est croissant (resp. décroissant) alors $M(\pm 1) = M_{\pm}$ (resp. $M(\pm 1) = M_{\mp}$). Nous introduisons la fonction inverse μ de M . Pour montrer que l'hypothèse (\mathcal{H}_N) (resp. $(\mathcal{H}_{N'})$) est vérifiée nous devons contrôler le comportement de N (resp. N') donc de F (resp. F') aux abords de la coupure.

⁴cf. page 85 pour l'énoncé de ces hypothèses.

⁵cf. la discussion page 85 ou dans le chapitre précédent la discussion page 30 et plus précisément le théorème 2.1.

Montrons que (\mathcal{H}_N) est vérifiée : Le lemme suivant donne le comportement de F aux abords de la coupure :

Lemme 3.5 Soient $M \in C_m^\gamma$ et μ son inverse. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) := \mathcal{R}F(\lambda) \pm i\mathcal{I}F(\lambda)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}F(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\mu'(z)}{z-\lambda} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} \text{v.p.} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z)}{z-\lambda} dz, \\ \bullet \mathcal{I}F(\lambda) = \frac{\pi}{2} \mu''(\lambda). \end{array} \right. \quad (3.42)$$

De plus

$$F_{\pm}(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda), & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ F_{\pm}(\lambda), & \text{si } \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases}$$

est analytique sur \mathbb{C}^{\pm} et localement Hölderienne d'ordre 1 sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}} \setminus \{M_-, M_+\}$.

DÉMONSTRATION. Après le changement de variable $z = M(y)$ on obtient, en utilisant la définition (2.5) page 39 de F , pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$:

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu'(z)}{(z-\lambda)^2} dz,$$

qui devient après une intégration par parties :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{\mu'(z)}{z-\lambda} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z)}{z-\lambda} dz. \quad (3.43)$$

On conclut simplement en utilisant la proposition 3.1 et le fait que μ'' est dérivable donc localement Hölderienne d'ordre 1. \square

Nous pouvons maintenant montrer la proposition suivante qui prouve que pour $M \in C_m^\gamma$, (\mathcal{H}_N) est vérifiée :

Proposition 3.2 Soit $M \in C_m^\gamma$. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{1}{1 - F_{\pm}(\lambda)}.$$

De plus, (\mathcal{H}_N) est vérifiée, c'est-à-dire que la fonction

$$N_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} N(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases}$$

où $\mathbb{C}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} / \pm \text{Im} z > 0\}$ peut être étendue par continuité avec $N_{\pm}(M_+) = N_{\pm}(M_-) = 0$, comme une fonction localement Hölderienne sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup [M_-, M_+]$.

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions de la définition 3.3 assurent que $1 - F_{\pm}(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[$. On a alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{1}{1 - F_{\pm}(\lambda)}.$$

Le caractère localement Hölderien de N_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$ est une conséquence du lemme 3.5 : il se déduit facilement du caractère localement Hölderien de F_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$. Compte tenu de l'expression (3.43) de F , l'extension par continuité de N_{\pm} par $N_{\pm}(M_+) = N_{\pm}(M_-) = 0$ est licite. Pour conclure la démonstration de ce lemme, il nous reste à montrer le caractère Hölderien de N_{\pm} au voisinage de M_+ et M_- . Nous traitons le cas de $M(1)$ (celui de $M(-1)$ est traité de la même manière)⁶. Pour cela nous introduisons la fonction :

$$J(\lambda) = (M(1) - \lambda) \left(1 - F_{\pm}(\lambda) \right),$$

de telle sorte que

$$N_{\pm}(\lambda) = \frac{M(1) - \lambda}{J(\lambda)}.$$

Nous allons montrer que J est Hölderienne dans un voisinage de $M(1)$, et qu'elle ne s'annule pas en $M(1)$. Ceci conclura la démonstration. En utilisant (3.43) on écrit pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$:

$$J(\lambda) = \frac{1}{2} \mu'(M(1)) + (M(1) - \lambda) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu'(M(-1))}{M(-1) - \lambda} - \frac{1}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z)}{z - \lambda} dz \right],$$

que l'on transforme comme suit :

$$\begin{aligned} J(\lambda) = & \frac{1}{2} \mu'(M(1)) + (M(1) - \lambda) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\mu'(M(-1))}{M(-1) - \lambda} - \frac{\mu''(M(1))}{2} \log \left(\frac{M(1) - \lambda}{M(-1) - \lambda} \right) \right] \\ & - \frac{M(1) - \lambda}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z) - \mu''(M(1))}{z - \lambda} dz. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Puisque :

1. $x \rightarrow x \log(x)$ est Hölderienne de tout ordre dans $]0, 1[$,
2. en appliquant la proposition 3.1 avec $g(z) = \mu''(z) - \mu''(M(1))$, qui satisfait $g(M(1)) = 0$, on obtient :

$$\lambda \rightarrow \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z) - \mu''(M(1))}{z - \lambda} dz$$

est localement Hölderienne d'ordre 1 sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup [M_-, M_+] \setminus \{M(-1)\}$,

on déduit de (3.44) que J est Hölderienne pour tout ordre $\alpha \in]0, 1[$ dans un voisinage de $M(1)$. Finalement, $J(M(1)) = \frac{1}{2} \mu'(M(1)) \neq 0$, étant donné que $M \in C_m^{\gamma}$.

□

Montrons que $(\mathcal{H}_{N'})$ est vérifiée : Nous allons procéder de la même manière que précédemment en montrant l'équivalent du lemme 3.5 pour F' , puis l'équivalent de la proposition 3.2 pour N' . Le lemme suivant donne le comportement de F' aux abords de la coupure :

Lemme 3.6 Soient $M \in C_m^{\gamma}$ et μ son inverse. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F'(\lambda \pm i\varepsilon) := \mathcal{R}F'(\lambda) \pm i\mathcal{I}F'(\lambda)$ avec :

$$\left| \begin{aligned} \bullet \mathcal{R}F'(\lambda) &= \frac{1}{2} \left[\frac{-\mu'(z)}{(z - \lambda)^2} \right]_{M(-1)}^{M(1)} - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu''(z)}{z - \lambda} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} v.p. \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu'''(z)}{z - \lambda} dz, \\ \bullet \mathcal{I}F'(\lambda) &= \frac{\pi}{2} \mu'''(\lambda). \end{aligned} \right. \quad (3.45)$$

⁶On rappelle que $M(1) = M_+$ si M est croissant et $M(1) = M_-$ si M est décroissant.

De plus

$$F'_{\pm}(\lambda) = \begin{cases} F'(\lambda), & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ F'_{\pm}(\lambda), & \text{si } \lambda \in]M_{-}, M_{+}[, \end{cases}$$

est analytique sur \mathbb{C}^{\pm} et localement Hölderienne d'ordre γ sur $\overline{\mathbb{C}^{\pm}} \setminus \{M_{-}, M_{+}\}$.

DÉMONSTRATION. Après dérivation de l'expression (2.5) page 39 de F , on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_{-}, M_{+}]$:

$$F'(\lambda) = - \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - M(y))^3} dy,$$

Après le changement de variable $z = M(y)$ on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_{-}, M_{+}]$:

$$F'(\lambda) = \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu'(z)}{(z - \lambda)^3} dz,$$

qui devient après une intégration par parties :

$$F'(\lambda) = \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu'(z)}{(z - \lambda)^2} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu''(z)}{(z - \lambda)^2} dz,$$

qui devient après une nouvelle intégration par parties :

$$F'(\lambda) = \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu'(z)}{(z - \lambda)^2} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu''(z)}{z - \lambda} \right]_{M(-1)}^{M(1)} + \frac{1}{2} \int_{M(-1)}^{M(1)} \frac{\mu'''(z)}{z - \lambda} dz. \quad (3.46)$$

On conclut simplement en utilisant la proposition 3.1 avec $g(z) = \mu'''(z)$ qui est Hölderienne d'ordre γ . □

Nous pouvons maintenant montrer la proposition suivante qui prouve que pour $M \in C_m^{\gamma}$, $(\mathcal{H}_{N'})$ est vérifiée :

Proposition 3.3 Soit $M \in C_m^{\gamma}$. Alors pour tout $\lambda \in]M_{-}, M_{+}[$ on a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{F'_{\pm}(\lambda)}{(1 - F_{\pm}(\lambda))^2}.$$

De plus, la fonction

$$N'_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} N'(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_{-}, M_{+}[, \end{cases}$$

où $\mathbb{C}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} / \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ peut être étendue par continuité avec

$$N'_{\pm}(M(1)) = - \frac{2}{\mu'(M(1))} \quad \text{et} \quad N'_{\pm}(M(-1)) = \frac{2}{\mu'(M(-1))},$$

comme une fonction Hölderienne d'ordre γ sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup [M_{-}, M_{+}]$. Par conséquent, $(\mathcal{H}_{N'})$ est vérifiée.

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions de la définition 3.3 assurent que $1 - F_{\pm}(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[$. On a alors après dérivation de N , pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{F'_{\pm}(\lambda)}{(1 - F_{\pm}(\lambda))^2}.$$

Le caractère localement Hölderien d'ordre γ de N'_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$ est une conséquence des lemmes 3.5 et 3.6 : il se déduit facilement du caractère localement Hölderien de F_{\pm} et F'_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$. Il reste à montrer que l'extension par continuité de N'_{\pm} par :

$$N'_{\pm}(M(1)) = -\frac{2}{\mu'(M(1))} \text{ et } N'_{\pm}(M(-1)) = \frac{2}{\mu'(M(-1))}$$

est licite, et qu'alors N'_{\pm} est Hölderienne au voisinage de M_{\pm} . C'est ce que nous allons faire en $M(1)$, qui vaut M_+ (resp. M_-) si M est croissante (resp. décroissante). La démonstration est similaire pour $M(-1)$. On a :

$$N'_{\pm}(\lambda) = \frac{F'_{\pm}(\lambda)}{(1 - F_{\pm}(\lambda))^2} = \frac{(\lambda - M(1))^2 F'_{\pm}(\lambda)}{J(\lambda)^2}. \quad (3.47)$$

En utilisant (3.46) et en procédant de la même manière que pour J dans la démonstration de la proposition 3.2, on obtient facilement que :

$$\lambda \rightarrow (\lambda - M(1))^2 F'_{\pm}(\lambda)$$

est Hölderienne d'ordre γ au voisinage de $M(1)$ et vaut $-\frac{\mu'(M(1))}{2}$ en $M(1)$. On conclut aisément en utilisant l'expression (3.47) de N' , en se rappelant que J est Hölderienne au voisinage de $M(1)$ et que $J(M(1)) = \frac{\mu'(M(1))}{2}$. □

Remarque 3.4 *La définition 3.3 a permis de reporter les problèmes d'intégrabilité sur la dérivabilité du profil, en effectuant des intégrations par parties.*

En se rappelant de leurs définitions (3.8) et (3.9), on peut facilement calculer $\mathcal{R}N, \mathcal{R}N', \mathcal{I}N$ et $\mathcal{I}N'$ en fonction de $\mathcal{R}F, \mathcal{R}F', \mathcal{I}F$ et $\mathcal{I}F'$ donnés par (3.42) et (3.45) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}N(\lambda) = |N(\lambda)|^2 (2 - \mathcal{R}F(\lambda)), \\ \bullet \mathcal{I}N(\lambda) = |N(\lambda)|^2 \mathcal{I}F(\lambda), \\ \bullet \mathcal{R}N'(\lambda) = |N(\lambda)|^4 \left[((2 - \mathcal{R}F(\lambda))^2 - \mathcal{I}F(\lambda)^2) \mathcal{R}F'(\lambda) - 2\mathcal{I}F(\lambda) \mathcal{I}F'(\lambda) (2 - \mathcal{R}F(\lambda)) \right], \\ \bullet \mathcal{I}N'(\lambda) = |N(\lambda)|^4 \left[2\mathcal{I}F(\lambda) (2 - \mathcal{R}F(\lambda)) \mathcal{R}F'(\lambda) + \mathcal{I}F'(\lambda) ((2 - \mathcal{R}F(\lambda))^2 - \mathcal{I}F(\lambda)^2) \right], \end{array} \right. \quad (3.48)$$

où $|N(\lambda)| := \left| \lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) \right| = \left[(2 - \mathcal{R}F(\lambda))^2 + \mathcal{I}F(\lambda)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$.

Nous venons de montrer que pour $M \in C_m^{\gamma}$ les hypothèses (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Clairement, l'hypothèse (\mathcal{H}_{GD}) est, elle aussi, satisfaite. Nous obtenons donc le théorème suivant comme une conséquence directe du théorème 3.1 ainsi que de la section 3.2.3 :

Théorème 3.2 *Supposons que $M \in C_m^\gamma$. Alors, le problème de Cauchy (1.9) est bien posé au sens où pour tout $(U_0, U_1) \in L_y^2(H_x^{3+n}) \times L_y^2(H_x^{2+n})$, $n \geq 0$, où $L_y^2(H_x^n) := L^2([-1, 1]; H^n(\mathbb{R}))$, il admet une unique solution*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^{n-1})),$$

et on a les estimations (3.31), (3.37), (3.36), (3.38) et (3.39). De plus, nous avons $EU(x, t) = -E[U_p(x, \cdot, t) + U_c(x, \cdot, t)]$ où U_p est donné par (3.40) et U_c par (3.41), ces expressions étant elles mêmes données en fonction de (3.48).

Nous avons donc exhibé une classe assez large de profils pour lesquels le problème est bien posé. Notre but, qui était de rendre les conditions du théorème 3.1 plus concrète, est à moitié atteint. En effet, les deux premières conditions de la définition 3.3 gardent à certains égards un caractère abstrait. C'est malheureusement le prix à payer pour rester un minimum général. En particulier, (\mathcal{H}_S) doit être satisfaite. On peut s'affranchir de cette hypothèse en se restreignant aux profils vérifiant les conditions du théorème 2.3 page 54. On peut, par exemple, restreindre la classe des profils C_m^γ aux profils convexe ou concave, pour lesquels on a montré que (\mathcal{H}_S) est satisfaite.

Si de plus M était strictement convexe ou concave... Si par exemple on suppose que $M \in C_m^\gamma$ et que $M''(y) \neq 0$ pour tout $y \in [-1, 1]$, alors (3.42) nous donne $IF(\lambda) = \frac{\pi}{2} \mu''(\lambda) \neq 0$, ce qui implique que la deuxième condition de la définition 3.3 :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) - 1 \neq 0, \quad \forall \lambda \in]M_-, M_+[,$$

est automatiquement vérifiée. De plus M étant à convexité fixée, on sait grâce au théorème 2.3 que (\mathcal{H}_S) est satisfaite. On se propose ici de le montrer d'une autre façon, plus en adéquation avec l'approche de ce chapitre. On rappelle que pour que (\mathcal{H}_S) soit satisfaite il faut et il suffit de montrer que l'équation $F(\lambda) = 1$ n'a que des solutions réelles. Pour simplifier la démonstration, nous allons supposer sans perte de généralité que M est croissante (changer M en $-M$ ne fait que changer le signe des solutions) et que $M_- = M(-1) = 0$ (translater M d'une constante m ne fait que translater les solutions de m). Puisque $M'(y) \neq 0$ on peut écrire :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M'(y)}{(M(y) - \lambda)^2} \frac{dy}{M'(y)},$$

qui devient après intégration par parties :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(M(y) - \lambda)M'(y)} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{M(y) - \lambda} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy.$$

Soit pour $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ on obtient en prenant la partie réelle et imaginaire de l'équation précédente :

$$\begin{cases} \Re F(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{M(y) - \lambda_R}{|M(y) - \lambda|^2 M'(y)} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M(y) - \lambda_R}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy, \\ \Im F(\lambda) = \lambda_I \left(\frac{1}{2} \left[\frac{1}{|M(y) - \lambda|^2 M'(y)} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy \right). \end{cases}$$

En supposant $\lambda_I \neq 0$ la partie imaginaire de l'équation $F(\lambda) = 1$ donne :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{|M(y) - \lambda|^2 M'(y)} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy = 0. \quad (3.49)$$

En multipliant cette égalité par λ_R et en l'ajoutant à l'expression de $\Re F(\lambda)$ on obtient :

$$\Re F(\lambda) = \frac{1}{2} \left[-\frac{M(y)}{|M(y) - \lambda|^2 M'(y)} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M(y)}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy,$$

puis en utilisant le fait que $M(-1) = 0$ et $M(1) = M_+$ on a :

$$\Re F(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{M_+}{|M_+ - \lambda|^2 M'(1)} - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M(y)}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy.$$

À partir de cette expression nous allons montrer que $\Re F(\lambda) < 0$ ce qui prouvera en particulier que l'équation $F(\lambda) = 1$ n'a pas de solutions (on a supposé $\lambda_I \neq 0$). Pour montrer cela nous distinguons deux cas :

(i) Si $M''(y) > 0$ il est alors clair que $\Re F(\lambda) < 0$ puisque c'est la somme de deux termes négatifs.

(ii) Si $M''(y) < 0$ alors on a :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M(y)}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy &\leq -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{M_+}{|M(y) - \lambda|^2} \frac{M''(y)}{M'(y)^2} dy \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{M_+}{|M(y) - \lambda| M'(y)} \right]_{-1}^1, \end{aligned}$$

où la deuxième égalité a été obtenue grâce à (3.49). Ainsi

$$\Re F(\lambda) \leq -\frac{1}{2} \frac{M_+}{|M_+ - \lambda|^2 M'(1)} + \frac{1}{2} \left[\frac{M_+}{|M(y) - \lambda| M'(y)} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} \frac{M_+}{|\lambda|^2 M'(-1)}.$$

Ceci conclut la démonstration. Ainsi, si $M \in C_m^\gamma$ et si de plus $M''(y) \neq 0$ alors (\mathcal{H}_S) est satisfaite. On peut donc énoncer le théorème suivant qui est une conséquence directe du théorème 3.2 :

Théorème 3.3 Soit M tel que :

- $M \in C^{3,\gamma}([-1, 1])$ i.e. M est une fonction réelle, dérivable trois fois et sa dérivée d'ordre 3 est Hölderienne d'ordre γ .
- $M'(y) \neq 0, \quad \forall y \in [-1, 1].$
- $M''(y) \neq 0, \quad \forall y \in [-1, 1].$

Alors, le problème de Cauchy (1.9) est bien posé au sens où pour tout $(U_0, U_1) \in L_y^2(H_x^{3+n}) \times L_y^2(H_x^{2+n})$, $n \geq 0$, où $L_y^2(H_x^n) := L^2([-1, 1]; H^n(\mathbb{R}))$, il admet une unique solution

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^{n-1})),$$

et on a les estimations (3.31), (3.37), (3.36), (3.38) et (3.39). De plus, nous avons $EU(x, t) = -E[U_p(x, \cdot, t) + U_c(x, \cdot, t)]$ où U_p est donné par (3.40) et U_c par (3.41), ces expressions étant elles mêmes données en fonction de (3.48).

3.3.2 Extension à des profils non monotones

Nous allons dans cette partie étendre les résultats de la partie précédente à une classe de profils non monotones, qui seront, en gros, C_m^γ par morceaux. Nous introduisons la classe de profils suivante :

Définition 3.4 Nous dirons qu'un profil M appartient à la classe $C_m^{N,\gamma}$ si :

$$x_0 = -1 < x_1 < \dots < x_N = 1,$$

tel que :

1. M vérifie (\mathcal{H}_S) .
2. $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) - 1 \neq 0, \quad \forall \lambda \in]M_-, M_+[$.
3. $M \in C^{3,\gamma}([x_i, x_{i+1}])$ i.e. M est une fonction réelle, dérivable trois fois et sa dérivée d'ordre 3 est Hölderienne d'ordre γ sur $[x_i, x_{i+1}]$.
4. $\{M(x_i), M(x_{i+1})\} = \{M_-, M_+\}$.
5. $M'(y) \neq 0, \quad \forall y \in [x_i, x_{i+1}]$.

Remarque 3.5 Si $M \in C_m^{N,\gamma}$ alors M est monotone sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. La quatrième condition signifie que sur chaque intervalle le profil M atteint son minimum global M_- , ainsi que son maximum global M_+ . En particulier, si $M \in C^0([-1, 1])$, cela entraîne que M change de monotonie sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Nous allons montrer que pour $M \in C_m^{N,\gamma}$, (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Nous allons procéder exactement de la même manière que dans la section précédente. Nous montrons tout d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 3.7 Soit $M \in C_m^{N,\gamma}$. On note μ_i son inverse sur $[x_i, x_{i+1}]$. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) := \mathcal{R}F(\lambda) \pm i\mathcal{I}F(\lambda)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}F(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[-\frac{\mu'_i(z)}{z-\lambda} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} v.p. \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu''_i(z)}{z-\lambda} dz, \\ \bullet \mathcal{I}F(\lambda) = \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\pi}{2} \mu''_i(\lambda) - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\pi}{2} \mu''_i(\lambda) \end{array} \right.$$

De plus

$$F_{\pm}(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda), & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ F_{\pm}(\lambda), & \text{si } \lambda \in]M_-, M_+[\end{cases}$$

est analytique sur \mathbb{C}^{\pm} et localement Hölderienne d'ordre 1 sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$.

DÉMONSTRATION. En utilisant la définition (2.5) page 39 de F on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$:

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dy}{(\lambda - M(y))^2}.$$

Après le changement de variable $\mu_i(z) = y$ sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on obtient,

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu'_i(z)}{(z-\lambda)^2} dz,$$

qui devient après une intégration par parties :

$$F(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[-\frac{\mu'_i(z)}{z-\lambda} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu''_i(z)}{z-\lambda} dz.$$

On conclut simplement en utilisant la proposition 3.1 et le fait que μ_i'' est dérivable donc localement Hölderienne d'ordre 1.

□

Lemme 3.8 Soit $M \in C_m^{N,\gamma}$. On note μ_i son inverse sur $[x_i, x_{i+1}]$. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F'(\lambda \pm i\varepsilon) := \mathcal{R}F'(\lambda) \pm i\mathcal{I}F'(\lambda)$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}F'(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\frac{-\mu_i'(z)}{(z-\lambda)^2} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} - \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_i''(z)}{z-\lambda} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} \text{v.p.} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu_i'''(z)}{z-\lambda} dz, \\ \bullet \mathcal{I}F'(\lambda) = \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\pi}{2} \mu_i'''(\lambda) - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\pi}{2} \mu_i'''(\lambda). \end{array} \right.$$

De plus

$$F'_{\pm}(\lambda) = \begin{cases} F'(\lambda), & \text{si } \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ F'_{\pm}(\lambda), & \text{si } \lambda \in]M_-, M_+[. \end{cases}$$

est analytique sur \mathbb{C}^{\pm} et localement Hölderienne d'ordre γ sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$.

DÉMONSTRATION. Après dérivation de l'expression (2.5) page 39 de F on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$:

$$F'(\lambda) = - \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - M(y))^3} dy = - \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{(\lambda - M(y))^3} dy,$$

Après le changement de variable $\mu_i(z) = y$ on obtient pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+]$:

$$F'(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu_i'(z)}{(z-\lambda)^3} dz,$$

qui devient après une intégration par parties :

$$F'(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu_i'(z)}{(z-\lambda)^2} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu_i''(z)}{(z-\lambda)^2} dz,$$

qui devient après une nouvelle intégration par parties :

$$F'(\lambda) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu_i'(z)}{(z-\lambda)^2} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} \left[- \frac{\mu_i''(z)}{z-\lambda} \right]_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} + \frac{1}{2} \int_{M(x_i)}^{M(x_{i+1})} \frac{\mu_i'''(z)}{z-\lambda} dz.$$

On conclut simplement en utilisant la proposition 3.1 avec $g(z) = \mu_i'''(z)$ qui est Hölderienne d'ordre γ .

□

Comme dans la section précédente on déduit de ces deux lemmes que les hypothèses (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Plus précisément, on montre les deux propositions suivantes dont les démonstrations sont suffisamment similaires à celles des propositions 3.2 et 3.3 pour n'être que survolées.

Proposition 3.4 Soit $M \in C_m^{N,\gamma}$. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{1}{1 - F_{\pm}(\lambda)}.$$

De plus, (\mathcal{H}_N) est vérifiée, c'est-à-dire que la fonction

$$N_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} N(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases}$$

où $\mathbb{C}^{\pm} = \{z \in \mathbb{C} / \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ peut être étendue par continuité avec $N_{\pm}(M_+) = N_{\pm}(M_-) = 0$, comme une fonction localement Hölderienne sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[$.

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions de la définition 3.4 assurent que $1 - F_{\pm}(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[$. On a alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{1}{1 - F_{\pm}(\lambda)}.$$

Le caractère localement Hölderien de N_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$ est une conséquence directe du lemme 3.7 : il se déduit facilement du caractère localement Hölderien de F_{\pm} sur $\mathbb{C}^{\pm} \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$. Pour conclure la démonstration de ce lemme il nous reste à montrer le caractère Hölderien de N_{\pm} au voisinage de M_+ et M_- :

- On pose $J^+(\lambda) = (M_+ - \lambda)(1 - F_{\pm}(\lambda))$, on a alors

$$N_{\pm}(\lambda) = \frac{M_+ - \lambda}{J^+(\lambda)}.$$

On montre que $J^+(\lambda)$ est Hölderienne dans un voisinage de M_+ et que :

$$J^+(M_+) = \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\mu'_i(M_+)}{2} - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\mu'_i(M_+)}{2},$$

qui est clairement différent de 0 puisque :

1. Pour $i \in \{0, \dots, N-1\} / M' > 0$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a évidemment $\mu'_i(M_+) > 0$.
2. Pour $i \in \{0, \dots, N-1\} / M' < 0$ sur $[x_i, x_{i+1}]$, on a évidemment $\mu'_i(M_+) < 0$.

Ainsi $J^+(M_+)$ est une somme de termes tous positifs. L'extension par continuité de N_{\pm} par $N_{\pm}(M_+) = N_{\pm}(M_-) = 0$ est licite et N_{\pm} est Hölderienne au voisinage de M_+ .

- De même on montre que $J^-(\lambda) = (M_- - \lambda)(1 - F_{\pm}(\lambda))$, est Hölderienne dans un voisinage de M_- et que :

$$J^-(M_-) = - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\mu'_i(M_-)}{2} + \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\} / M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \frac{\mu'_i(M_-)}{2} > 0.$$

□

Proposition 3.5 Soit $M \in C_m^{\gamma}$. Alors pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$ on a

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{F'_{\pm}(\lambda)}{(1 - F_{\pm}(\lambda))^2}.$$

De plus, la fonction

$$N'_{\pm}(\lambda) := \begin{cases} N'(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C}^{\pm}, \\ \lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon), & \lambda \in]M_-, M_+[, \end{cases}$$

où $\mathbb{C}^\pm = \{z \in \mathbb{C} / \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ peut être étendue par continuité avec :

$$\begin{cases} N'_\pm(M_+) = -2 \left[\sum_{i \in \{0, \dots, N-1\}, M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \mu'_i(M_+) - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\}, M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \mu'_i(M_+) \right]^{-1} \\ N'_\pm(M_-) = 2 \left[\sum_{i \in \{0, \dots, N-1\}, M' > 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \mu'_i(M_-) - \sum_{i \in \{0, \dots, N-1\}, M' < 0 \text{ sur } [x_i, x_{i+1}]} \mu'_i(M_-) \right]^{-1} \end{cases} \quad (3.50)$$

comme une fonction Hölderienne d'ordre γ sur $\mathbb{C}^\pm \cup [M_-, M_+]$. Par conséquent $(\mathcal{H}_{N'})$ est vérifiée.

DÉMONSTRATION. Les deux premières conditions de la définition 3.4 assurent que $1 - F_\pm(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^\pm \cup]M_-, M_+[$. On a alors après dérivation de N , pour tout $\lambda \in]M_-, M_+[$:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon) = \frac{F'_\pm(\lambda)}{(1 - F_\pm(\lambda))^2}.$$

Le caractère localement Hölderien d'ordre γ de N'_\pm sur $\mathbb{C}^\pm \cup]M_-, M_+[\setminus \{M_-, M_+\}$ est une conséquence directe des lemmes 3.7 et 3.8. Il reste à montrer que l'extension par continuité de N'_\pm par (3.50) est licite et qu'alors N'_\pm est Hölderienne au voisinage de M_\pm . C'est ce que nous allons faire en M_+ , la démonstration étant similaire pour M_- . On a :

$$N'_\pm(\lambda) = \frac{F'_\pm(\lambda)}{(1 - F_\pm(\lambda))^2} = \frac{(\lambda - M_+)^2 F'_\pm(\lambda)}{J^+(\lambda)^2}.$$

On montre que

$$\lambda \rightarrow (\lambda - M_+)^2 F'_\pm(\lambda)$$

est Hölderienne d'ordre γ au voisinage de M_+ et vaut $-J^+(M_+)$ en M_+ . On conclut aisément en se rappelant que J^+ est Hölderienne au voisinage de M_+ . \square

On obtient le théorème suivant comme une conséquence (directe⁷ ?) du théorème 3.1 :

Théorème 3.4 *Supposons que $M \in C_m^{N, \gamma}$. Alors, le problème de Cauchy (1.9) est bien posé au sens où pour tout $(U_0, U_1) \in L_y^2(H_x^{3+n}) \times L_y^2(H_x^{2+n})$, $n \geq 0$, où $L_y^2(H_x^n) := L^2([-1, 1]; H^n(\mathbb{R}))$, il admet une unique solution*

$$U \in C^0(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^n)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L_y^2(H_x^{n-1})),$$

et on a les estimations (3.31), (3.37), (3.36), (3.38) et (3.39). De plus, nous avons $EU(x, t) = -E[U_p(x, \cdot, t) + U_c(x, \cdot, t)]$ où U_p est donné par (3.40) et U_c par (3.41), ces expressions étant elles mêmes données en fonction de (3.48).

Il est possible de construire des profils appartenant à la classe $C_m^{N, \gamma}$, pour lesquels (\mathcal{H}_S) est satisfaite. Pour ce faire, on peut par exemple utiliser la proposition 2.6 page 57 et périodiser un profil de la classe C_s^γ pour lequel (\mathcal{H}_S) est satisfaite. On peut aussi s'amuser à périodiser tout profil de la classe $C_m^{N, \gamma}$ qui vérifie déjà (\mathcal{H}_S) .

⁷Le lecteur averti aura remarqué qu'un profil appartenant à la classe $C_m^{N, \gamma}$ n'est pas nécessairement continu. Il s'agissait pourtant d'une des hypothèses du théorème 3.1. En fait, la section 3.2 en général, le théorème 3.1 en particulier, reste vrai si on remplace l'hypothèse de continuité du profil par l'hypothèse suivante :

$$\operatorname{Im} M = [M_-, M_+].$$

Remarque 3.6 On pourrait s'affranchir de la quatrième condition de la définition 3.4 en la remplaçant, par exemple, par la condition suivante :

$$M \in C^0([-1, 1]) \text{ et les } M(x_i) \text{ sont tous différents.}$$

On aura alors $J_i(M(x_i)) \neq 0$ où $J_i(\lambda) = (M(x_i) - \lambda)(1 - F_{\pm}(\lambda))$ ce qui permettra d'utiliser les mêmes idées que précédemment.

On a donc exhibé plusieurs classes de profils pour lesquels le théorème 3.1 s'applique. Il est possible de montrer une multitude de résultats et nous n'avons aucunement la volonté d'être exhaustifs. L'objectif annoncé du théorème 3.1 était de rester le plus général possible. Ainsi, dans le cas d'un profil quelconque digne d'intérêt, on conseille de commencer par regarder s'il appartient à une classe de profils précédemment exhiber, telle que C_m^γ ou $C_m^{N,\gamma}$. En cas de réponse négative, on peut vérifier à la main s'il entre dans le cadre du théorème. C'est ce que nous nous proposons de faire dans la partie suivante, en considérant l'exemple du profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$.

3.3.3 Comment procéder dans un cas général : exemple du profil $M(y) = 1 - y^2$

"Proposons-nous de grands exemples à imiter, plutôt que de vains systèmes à suivre."

Rousseau.

Nous allons donc dans cette partie traiter le cas du profil $M(y) = 1 - y^2$. Ce profil quadratique a été choisi car son comportement semble bien correspondre à la physique d'un écoulement de référence dans un tube. Nous allons montrer qu'il rentre dans le cadre d'application du théorème 3.1. Ce qui suit peut être vu comme une procédure à suivre dans un cas général. Dans l'optique d'appliquer le théorème 3.1 nous devons montrer que les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Au contraire d'un profil C_m^γ , il n'existe pas de méthode générale. Bien entendu, (\mathcal{H}_{GD}) est satisfaite. M étant concave, le théorème 2.3 page 54 nous dit que (\mathcal{H}_S) est satisfaite. Il nous reste donc à montrer que (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ le sont également.

Dans la suite nous prenons la coupure de la fonction racine carré et du logarithme complexe sur \mathbb{R}_- .

Calcul de $\mathcal{R}N$ et $\mathcal{I}N$: Nous commençons par le calcul de $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) := \mathcal{R}F(\lambda) \pm i\mathcal{I}F(\lambda)$, pour $\lambda \in]0, 1[$ (on remarque que $M_- = 0$ et $M_+ = 1$). À la poursuite de cet objectif nous allons calculer :

$$F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - 1 + y^2)^2} dy.$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}^\pm$. Nous utilisons la décomposition en élément simple suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\lambda - 1 + y^2)^2} &= \frac{1}{4(1 - \lambda)} \left[\frac{1}{(y - \sqrt{1 - \lambda})^2} + \frac{1}{(y + \sqrt{1 - \lambda})^2} \right] \\ &+ \frac{1}{4(1 - \lambda)\sqrt{1 - \lambda}} \left[\frac{1}{y + \sqrt{1 - \lambda}} - \frac{1}{y + \sqrt{1 + \lambda}} \right], \end{aligned}$$

pour obtenir après calculs :

$$F(\lambda) = \frac{-1}{2(1-\lambda)\lambda} + \frac{1}{8(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \left[\log(1 + \sqrt{1-\lambda}) - \log(1 - \sqrt{1-\lambda}) \right. \\ \left. + \log(-1 - \sqrt{1-\lambda}) - \log(-1 + \sqrt{1-\lambda}) \right].$$

On obtient alors facilement, pour tout $\lambda \in]0, 1[$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}F(\lambda) = \frac{-1}{2(1-\lambda)\lambda} + \frac{1}{4(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-\lambda}}{1 - \sqrt{1-\lambda}}\right), \\ \bullet \mathcal{I}F(\lambda) = \frac{\pi}{4(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda}}. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Puisque $\mathcal{I}F(\lambda) \neq 0$, on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) \neq 1$ et on obtient les expressions de $\mathcal{R}N$ et $\mathcal{I}N$ grâce à (3.48).

Calcul de $\mathcal{R}N'$ et $\mathcal{I}N'$: La méthode est la même. On commence par calculer $\lim_{\varepsilon \searrow 0} F'(\lambda \pm i\varepsilon) = \mathcal{R}F'(\lambda) + i\mathcal{I}F'(\lambda)$, pour $\lambda \in]0, 1[$. Pour ce faire nous allons calculer :

$$F'(\lambda) = \int_{-1}^1 \frac{-1}{(\lambda - 1 + y^2)^3} dy.$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}^\pm$. Nous utilisons la décomposition en élément simple suivante :

$$\frac{1}{(\lambda - 1 + y^2)^3} = \frac{-1}{8(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \left[\frac{1}{(\sqrt{1-\lambda} - y)^3} + \frac{1}{(\sqrt{1-\lambda} + y)^3} \right] - \frac{3}{4(1-\lambda)} \frac{1}{(\lambda - 1 + y^2)^2},$$

pour obtenir

$$F'(\lambda) = \frac{1}{16(1-\lambda)\sqrt{1-\lambda}} \left(\left[\frac{1}{(\sqrt{1-\lambda} - y)^2} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{-1}{(\sqrt{1-\lambda} + y)^2} \right]_{-1}^1 \right) + \frac{3}{2(1-\lambda)} F(\lambda) \\ = \frac{1}{2(1-\lambda)\lambda^2} + \frac{3}{2(1-\lambda)} F(\lambda).$$

Finalement, pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \mathcal{R}F'(\lambda) = \frac{2-5\lambda}{4(1-\lambda)^2\lambda^2} + \frac{3}{8(1-\lambda)^2\sqrt{1-\lambda}} \log\left(\frac{1 + \sqrt{1-\lambda}}{1 - \sqrt{1-\lambda}}\right), \\ \bullet \mathcal{I}F'(\lambda) = \frac{3\pi}{8(1-\lambda)^2\sqrt{1-\lambda}}. \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Cette fois encore on obtient les expressions de $\mathcal{R}N'$ et $\mathcal{I}N'$ grâce à (3.48).

À partir de ces résultats, nous pouvons montrer (en utilisant les mêmes idées que dans les deux sections précédentes) que (\mathcal{H}_N) et (\mathcal{H}'_N) sont satisfaites. Finalement, on peut appliquer le théorème 3.1 pour obtenir le caractère bien posé du problème (1.9).

Remarque 3.7 *Le lecteur attentif aura noté que $M(y) = 1 - y^2$ appartient à la classe de profils $C_m^{N,\gamma}$ pour $N = 2$. Nous aurions donc pu utiliser les résultats de la section précédente. Pour autant, le but de cette section était de montrer comment on peut se débrouiller au cas par cas pour des profils quelconques. En guise d'exercice le lecteur pourra retrouver les résultats de cette section en utilisant ceux de la précédente. On utilisera le fait que dans le cas présent :*

$$\mu_0(z) = -\sqrt{1-z} \quad \text{et} \quad \mu_1(z) = \sqrt{1-z}.$$

APPLICATION NUMÉRIQUE / VALIDATION DU MODÈLE

4

SOMMAIRE

4.1	CALCUL NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION	117
4.1.1	LA MÉTHODE	118
4.1.2	RÉSULTATS NUMÉRIQUES POUR DES PROFILS MONOTONES RÉGULIERS	119
4.1.3	LE PROFIL QUADRATIQUE $M(y) = 1 - y^2$	122
4.1.4	DÉPENDANCE EN TEMPS DE LA NORME DE LA SOLUTION	123
4.2	VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE	124
4.2.1	COMPARAISON À UN CODE EULÉRIEN	125
4.2.2	COMPARAISON À UN CODE GALBRUN	126

Ce chapitre est consacré à la résolution numérique du problème limite (1.9), obtenu au premier chapitre et dont l'étude est l'objet de toute la première partie de cette thèse. La méthode numérique que nous allons développer est basée sur la représentation quasi-explicite de la solution obtenue au chapitre précédent, dans la section 3.2.3 page 99. C'est la raison pour laquelle nous faisons ici un petit rappel de la méthode utilisée, ainsi que des principaux résultats que nous allons exploiter. L'idée de départ consistait à remarquer que si l'on connaît la moyenne EU , alors U , solution de (1.9), est solution d'une équation de transport au carré dans laquelle EU ne joue plus que le rôle de second membre :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 U = \frac{\partial^2 EU}{\partial x^2}.$$

Après résolution de cette équation on obtient l'expression suivante de U en fonction de EU et des conditions initiales (U_0, U_1) :

$$\begin{aligned} U(x, y, t) &= U_0(x - M(y)t, y) + t \left[U_1(x - M(y)t, y) + M(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - M(y)t, y) \right] \\ &+ \int_0^t (t-s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU(x - M(y)(t-s), s) ds. \end{aligned} \quad (4.1)$$

L'objectif du chapitre précédent fut donc de calculer EU , ce que nous fîmes en utilisant la transformation de Fourier-Laplace. Sous les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$, définies page 85, nous avons montré que le problème (1.9) était bien posé; c'est ce que résume le théorème 3.1 page 99. La démonstration de ce théorème repose sur l'obtention d'estimations a priori. Nous renvoyons le lecteur à la section 3.2.2 page 92 pour plus de précisions. De plus, cette étude nous a fourni une expression quasi-explicite de la solution. Cette expression est donnée en fonction de \mathcal{RN} , \mathcal{RN}' , \mathcal{IN} et \mathcal{IN}' , définies par (3.8) et (3.9) à la page 86. Par la suite, nous avons exhibé une classe de profils réguliers monotones, $C_{m'}^\gamma$ (cf. définition 3.3 page 101) pour lesquels le théorème 3.1 s'applique. On obtient dans ce cas une expression générale pour les fonctions \mathcal{RN} , \mathcal{RN}' , \mathcal{IN} et \mathcal{IN}' . Nous avons ensuite traité le cas d'un profil non monotone, $M(y) = 1 - y^2$.

Ce chapitre débute par la description de la méthode numérique, qui se réduit au calcul de la désormais fameuse expression quasi-explicite de la solution. Nous présentons dans la foulée les résultats obtenus pour les profils linéaire et tangente, qui appartiennent à la classe $C_{m'}^\gamma$, puis pour le profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$. Ces résultats seront bien entendu agrémentés de commentaires à découvrir. Nous discuterons en particulier de la distinction entre la contribution des pôles et celle de la coupure. Nous mettrons à l'épreuve l'estimation (3.37) page 98 qui prédit une croissance en t^3 sur la norme de la solution. Dans un second temps nous chercherons à valider numériquement notre modèle. L'idée est de comparer, numériquement, la solution de (1.9) à celle d'un code 2D du problème de départ dans le tube de largeur 2ε , (1.1), quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, nous explorons deux approches :

1. Nous commençons par utiliser un code de résolution des équations d'Euler linéarisées en 2D. Il s'agit du code Montjoie, développé par Marc Duruflé, et qui utilise une méthode de Galerkin discontinu (pour plus de précisions voir [CCD09]). Les difficultés de comparaison de la solution limite de (1.9) à celles des équations d'Euler linéarisées du tube 2D, liées à la différence de représentation (eulérienne ou lagrangienne) entre les deux modèles, sont présentées.
2. Nous dérivons un problème équivalent à (1.1), dont la forme permettra l'implémentation et la résolution au moyen du code Montjoie. Outre son intérêt local, cette nouvelle représentation peut constituer une bonne alternative pour la résolution des équations de Galbrun.

Quand ε tend vers 0, nous observons une convergence de la solution 2D vers celle du problème limite, ce qui valide notre modèle. On observe une vitesse de convergence de l'ordre de ε^2 .

4.1 CALCUL NUMÉRIQUE DE LA SOLUTION

Nous rappelons ici les résultats de la section 3.2.3 page 99. Sous les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ nous avons montré que le problème (1.9) est bien posé et nous avons la représentation suivante de la solution U : on décompose sa moyenne en y comme suit :

$$EU(x, t) = -E[U_p(x, \cdot, t) + U_c(x, \cdot, t)],$$

où :

– la contribution des pôles est donnée par :

$$U_p(x, y, t) = \sum_{\pm} \frac{\int_0^{\lambda_{\pm} t} U_1(x-s, y) ds}{F'(\lambda_{\pm}) (\lambda_{\pm} - M(y))} + \sum_{\pm} \frac{\lambda_{\pm} - 2M(y)}{(\lambda_{\pm} - M(y))^2} \frac{U_0(x - \lambda_{\pm} t, y)}{F'(\lambda_{\pm})}, \quad (4.2)$$

– la contribution de la coupure :

$$\begin{aligned} U_c(x, y, t) &= \frac{1}{\pi} v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{\mathcal{I}N(\lambda)}{\lambda - M(y)} \left[U_0(x - \lambda t, y) + tM(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - \lambda t, y) + tU_1(x - \lambda t, y) \right] d\lambda \\ &+ \frac{1}{\pi} v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{\mathcal{I}N'(\lambda)}{\lambda - M(y)} \left[\int_0^{\lambda t} U_1(x-s, y) ds - M(y)U_0(x - \lambda t, y) \right] d\lambda \\ &- \mathcal{R}N(M(y)) \left[U_0(x - M(y)t, y) + tM(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x - M(y)t, y) + tU_1(x - M(y)t, y) \right] \\ &- \mathcal{R}N'(M(y)) \left[\int_0^{M(y)t} U_1(x-s, y) ds - M(y)U_0(x - M(y)t, y) \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

On rappelle les définitions essentielles, a priori déjà complètement intégrées par le lecteur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bullet F(\lambda) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\lambda - M(y))^2} dy, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+], \\ \bullet N(\lambda) = (1 - F(\lambda))^{-1}, & \lambda \in \mathbb{C} \setminus [M_-, M_+], \\ \bullet \lim_{\varepsilon \searrow 0} N(\lambda \pm i\varepsilon) = \mathcal{R}N(\lambda) \pm i\mathcal{I}N(\lambda), & \lambda \in [M_-, M_+], \\ \bullet \lim_{\varepsilon \searrow 0} N'(\lambda \pm i\varepsilon) = \mathcal{R}N'(\lambda) \pm i\mathcal{I}N'(\lambda), & \lambda \in [M_-, M_+]. \end{array} \right.$$

On obtient finalement l'expression de U avec (4.1).

Dans un premier temps nous présentons la méthode numérique basée sur le calcul de cette expression explicite.

- On s'intéresse d'abord aux profils C_m^y pour lesquels nous avons montré, dans la section 3.3.1 page 101, que les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. Nous avons de plus obtenu une expression explicite pour les fonctions $\mathcal{R}N$, $\mathcal{R}N'$, $\mathcal{I}N$ et $\mathcal{I}N'$.
- On présente ensuite le cas du profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$, exemple de profil non monotone pour lequel nous avons aussi prouvé, dans la section 3.3.3 page 112, que les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$ sont satisfaites. L'étude nous a une fois de plus fourni les expressions des fonctions $\mathcal{R}N$, $\mathcal{R}N'$, $\mathcal{I}N$ et $\mathcal{I}N'$.

4.1.1 La méthode

On suppose que le profil M vérifie les hypothèses du théorème 3.1, c'est-à-dire qu'il vérifie les hypothèses (\mathcal{H}_S) , (\mathcal{H}_{GD}) , (\mathcal{H}_N) et $(\mathcal{H}_{N'})$. De plus, on suppose connues les expressions des fonctions \mathcal{RN} , \mathcal{IN} , \mathcal{RN}' , \mathcal{IN}' . Dans le cas d'un profil appartenant à la classe C_m^y , ces expressions sont données par (3.48) en fonction de (3.42) et (3.45). Dans le cas du profil $M(y) = 1 - y^2$ elles sont données par (3.48) également, en fonction cette fois-ci de (3.51) et (3.52).

Sous ces hypothèses, le théorème 3.1 s'applique et nous avons obtenu une expression quasi-explicite de la solution, rappelée précédemment. La nuance introduite par la juxtaposition de l'adverbe "quasi" à l'adjectif "explicite", s'explique par la présence de la valeur principale et d'intégrales dans cette expression. Nous allons maintenant expliquer comment nous procédons pour calculer numériquement la solution. Le principal outil sera la quadrature de Gauss-Legendre, pour calculer les intégrales. On utilise l'approximation suivante :

$$\int_{-1}^1 h(x) dx \simeq \sum_{i=1}^n w_i h(x_i),$$

où les w_i sont des poids et les x_i les points de quadrature. On rappelle que pour n points de quadrature la méthode est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n - 1$. Pour plus de détails, voir [SS66] ou [DR75].

Calcul de EU : En premier lieu, pour éviter le calcul de termes de la forme $\int_0^{\mu t} u_1(x - s, y) ds$ nous supposons que nous connaissons une primitive de U_1 . De plus, nous supposons connues les expressions analytiques des conditions initiales U_0 et U_1 , ainsi que du profil et de son inverse. Nous insistons sur le fait qu'il ne s'agit en aucun cas d'une limite de la méthode, mais bien d'une simple supposition technique simplificatrice. Ce cadre est amplement suffisant pour notre étude. Dans une optique plus appliquée, il faudrait s'affranchir de ces hypothèses ce qui ne présente aucune difficulté majeure. Pour le calcul de EU , nous procédons de la manière suivante :

1. Nous initialisons les fonctions, F , F' , \mathcal{RN} , \mathcal{RN}' , \mathcal{IN} et \mathcal{IN}' , en utilisant une quadrature gaussienne pour calculer les intégrales. Nous employons au plus 64 points de quadrature. Quand cela est nécessaire, nous utilisons l'expression suivante de la valeur principale de Cauchy¹ :

$$v.p. \int_{M_-}^{M_+} \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda - x} d\lambda = \int_{M_-}^{M_+} \frac{\varphi(\lambda) - \varphi(x)}{\lambda - x} d\lambda + \varphi(x) \log\left(\frac{M_+ - x}{x - M_-}\right). \quad (4.4)$$

2. On rappelle que le pôle de N , λ_+ (resp. λ_-) est l'unique solution de $F(\lambda) = 1$ sur $]M_+, \infty[$ (resp. $] - \infty, M_-[$). Puisque F est monotone sur $]M_+, \infty[$ (resp. $] - \infty, M_-[$), nous calculons λ_+ (resp. λ_-) par dichotomie. À partir de (4.2) on obtient U_p .
3. À partir de (4.3) on obtient U_c . On utilise pour cela la définition (4.4) de la valeur principale de Cauchy.
4. Finalement, on obtient $EU = E[U_p + U_c]$ en intégrant par rapport à y , en utilisant une fois de plus une quadrature gaussienne.

Calcul de U : Dériver deux fois par rapport à x l'expression de EU consiste simplement à dériver deux fois les conditions initiales. Nous obtenons ainsi une expression de $\partial^2 Eu / \partial x^2$ que nous calculons en utilisant le même processus que pour EU . Finalement nous obtenons U par (4.1).

¹voir par exemple [Sch50].

Remarque 4.1 Nous avons seulement besoin des valeurs des fonctions \mathcal{RN} , IN , \mathcal{RN}' , et IN' aux points de quadrature. Par conséquent, on les calcule une fois pour toute, au début de notre programme.

Remarque 4.2 La précision de ce calcul est, malheureusement, dépendante du temps t . En effet, la longueur de l'intervalle d'intégration grandit avec t dans l'expression (4.1) de U . De plus, les fonctions que nous intégrons, telles que $tu_1(x - \lambda t, y)$ dans (4.3), se détériorent (au sens où elles sont de plus en plus difficiles à approcher par des polynômes et donc plus difficiles à intégrer). Le remède consiste à augmenter le nombre de points de quadrature.

4.1.2 Résultats numériques pour des profils monotones réguliers

Nous nous consacrons dans cette section à des profils appartenant à la classe C_m^γ , introduite dans la section 3.3.1 page 101, pour lesquels on sait que le problème (1.9) est bien posé. On a dans ce cas les expressions des fonctions \mathcal{RN} , \mathcal{RN}' , IN et IN' qui sont données par (3.48) en fonction de (3.42) et (3.45). Plus précisément, nous étudions les cas des profils linéaire et tangente ; nous montrons pour chacun de ces deux profils qu'il appartient à la classe C_m^γ et nous présentons ensuite les résultats numériques obtenus.

Le profil linéaire

On considère le cas particulier d'un profil linéaire $M(y) = My$ où $M \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons montrer que ce profil appartient à la classe C_m^γ . Pour cela, seules les deux premières conditions de la définition 3.3 page 101 restent à montrer. Cet exemple a déjà été abordé au chapitre 2 à la page 44. Nous avons notamment montré le caractère stable, ce que nous allons refaire ici. Dans cet exemple, F peut être calculé explicitement. En effet, une simple intégration donne pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]$:

$$F(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2 - M^2}.$$

Par conséquent, les solutions de $F(\lambda) = 1$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [-M, M]$ sont $\lambda_\pm = \pm \sqrt{1 + M^2}$, de telle sorte que (\mathcal{H}_S) est satisfaite. Grâce à (3.42) et (3.45) (ou directement), on obtient facilement pour $\lambda \in]-M, M[$:

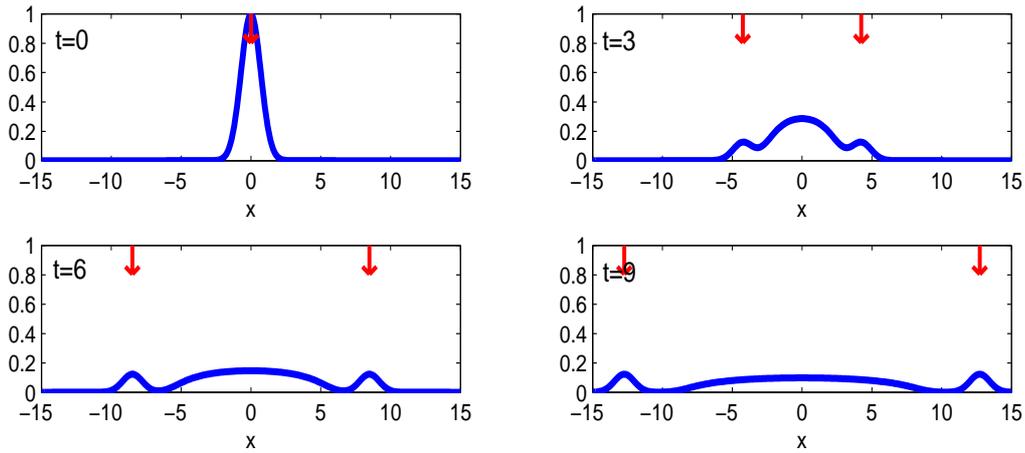
$$\left| \begin{array}{ll} \bullet \mathcal{RF}(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2 - M^2}, & \bullet IF(\lambda) = 0, \\ \bullet \mathcal{RF}'(\lambda) = \frac{-4\lambda}{(\lambda^2 - M^2)^2}, & \bullet IF'(\lambda) = 0. \end{array} \right.$$

En utilisant (3.48) on obtient alors :

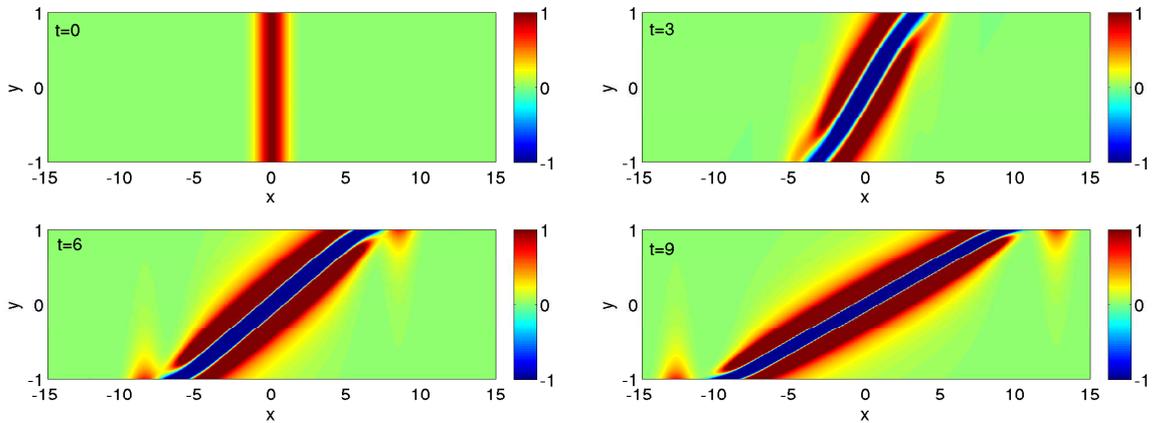
$$\left| \begin{array}{ll} \bullet \mathcal{RN}(\lambda) = \frac{1}{2 - \mathcal{RF}(\lambda)}, & \bullet IN(\lambda) = 0, \\ \bullet \mathcal{RN}'(\lambda) = \frac{\mathcal{RF}'(\lambda)}{(2 - \mathcal{RF}(\lambda))^2}, & \bullet IN'(\lambda) = 0. \end{array} \right.$$

En particulier, puisque $\mathcal{RF}(\lambda) \neq 1$, la deuxième condition de la définition 3.3 est vérifiée et $M \in C_m^\gamma$.

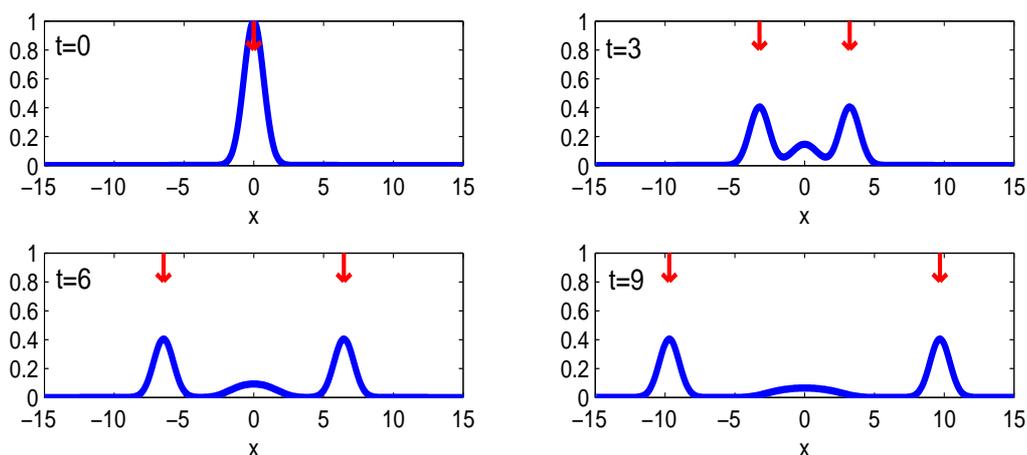
Résultats numériques : On présente ici la solution pour $M = 1$. Nous avons pris $U_0(x, y) = e^{-x^2}$, une fonction gaussienne par rapport à x , indépendante de y et $U_1(x, y) = 0$. On commence par l'évolution en temps de la moyenne EU , pour x allant de -15 à 15 en abscisse :

FIG. 4.1 – Évolution en temps de EU pour $M = 1$

Les flèches rouges se déplacent à la vitesse λ_{\pm} ; elles mettent en évidence la contribution des pôles. De cette manière, nous pouvons séparer les deux contributions, le reste représentant la contribution de la coupure. Comme les vitesses des pôles sont supérieures à celles de la coupure (égale à $[M_-, M_+]$, voir paragraphe 3.2.3 page 100), la distinction entre les deux contributions devient de plus en plus facile à faire avec le temps. On remarque que l'amplitude de la contribution des pôles décroît jusqu'à une certaine valeur tandis que celle de la coupure s'élargit et décroît indéfiniment. On présente maintenant l'évolution en temps de la solution U , où x est en abscisse et y en ordonnée :

FIG. 4.2 – Évolution en temps de u pour $M = 1$

On voit maintenant le phénomène pour chaque y ; au contraire de EU , U n'est plus symétrique par rapport à x . On distingue encore une fois les deux contributions. Celle de la coupure est la plus visible et représente la convection. En effet, cette contribution prend la forme du profil, ce qui sera toujours le cas dans les exemples présentés plus tard. La contribution des pôles est plus petite et localisée sur les parois $y = \pm 1$. Plus précisément, la contribution du pôle λ_+ (resp. λ_-) est localisée en $y = 1$ (resp. $y = -1$), où le profil atteint son maximum (resp. minimum). On présente maintenant l'évolution de la moyenne pour $M = 0.4$:

FIG. 4.3 – Évolution en temps de EU pour $M = 0.4$

On remarque que la contribution des pôles est alors plus importante que dans le cas précédent. Il est intéressant d'observer que quand M tend vers 0 cette contribution devient prédominante, et la moyenne EU tend vers la solution d'une équation des ondes. En effet, dans le cas simple d'un écoulement uniforme ($M(y) = M$), en prenant la moyenne de l'équation (1.9) on montre que $\psi = EU$ est solution de l'équation des ondes convectée :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0.$$

Le profil tangente

On considère maintenant un profil de tangente :

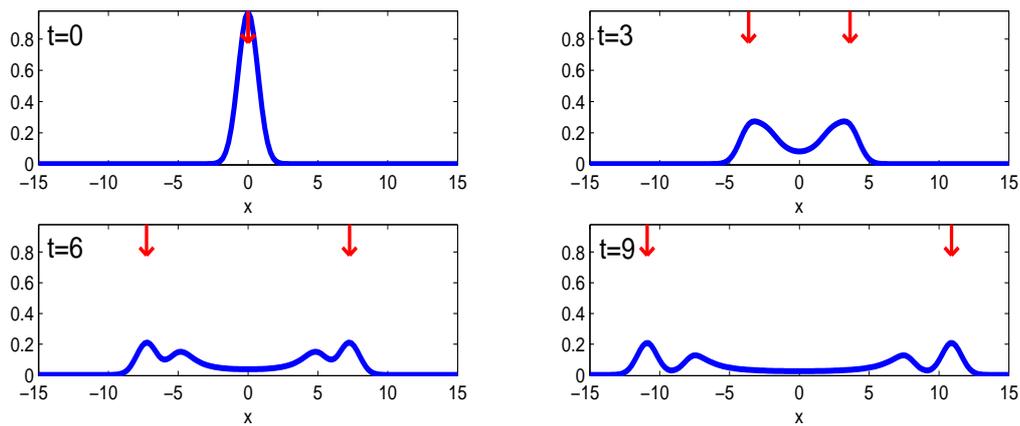
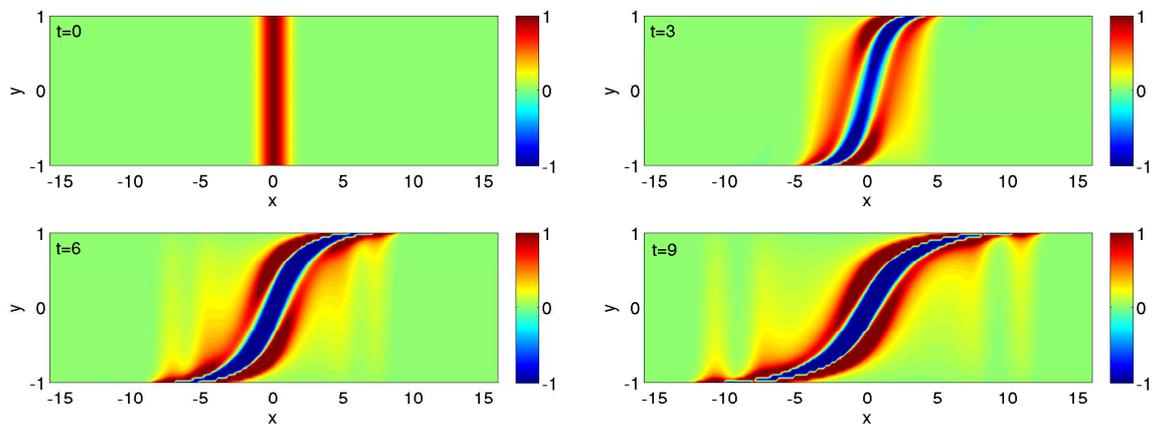
$$M(y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^{-1} \tan\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)y\right)$$

où $\alpha \in]0, \pi/2[$ et $\tan(\pi/2 - \alpha)^{-1}$ est un facteur de normalisation. En particulier, nous avons $M_- = -1$ et $M_+ = 1$. Ce profil est croissant, concave sur $] -1, 0[$ et convexe sur $]0, 1[$. On sait grâce au théorème 2.3 page 54, que (\mathcal{H}_5) est satisfaite. Pour montrer que $M \in C_m^\gamma$, la seule difficulté consiste à montrer que la deuxième condition de la définition 3.3, que l'on rappelle ci-après, est satisfaite :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} F(\lambda \pm i\varepsilon) - 1 \neq 0, \quad \forall \lambda \in]M_-, M_+].$$

En utilisant (3.42), on obtient que $\mathcal{I}F(\lambda)$ s'annule uniquement pour $\lambda = 0$. Ainsi, pour conclure nous devons seulement vérifier que $\mathcal{R}F(0) \neq 1$, ce qui est fait numériquement.

On présente maintenant les résultats obtenus pour $U_1(x, y) = 0$ et $U_0(x, y) = e^{-x^2}$. La figure 4.4 représente l'évolution de la moyenne pour $t = 0, 3, 6$ et 9. La figure 4.5 représente l'évolution en temps de la fonction U aux mêmes instants :

FIG. 4.4 – Évolution en temps de EU FIG. 4.5 – Évolution en temps de U

Les flèches rouges se déplacent à la vitesse $\lambda_- \approx -1.21096$ et $\lambda_+ \approx 1.21096$. Nous distinguons, ici encore, les deux contributions. Toutes les remarques faites dans le cas linéaire restent pertinentes ici. La contribution de la coupure prend la forme du profil ; les contributions des pôles sont localisées là où le profil atteint ses extrema...

4.1.3 Le profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$

On s'intéresse ici au cas du profil quadratique $M(y) = 1 - y^2$, exemple de profil non monotone pour lequel nous avons montré, dans la section 3.3.3 page 112, que le théorème 3.1 page 99 s'applique. Nous avons également calculé les fonctions $\mathcal{R}N$, $\mathcal{R}N'$, IN et IN' qui sont données par (3.48), en fonction de (3.51) et (3.52).

On obtient numériquement $\lambda_- \approx -0.4909$ et $\lambda_+ \approx 1.7683$. On prend une fois de plus $U_1(x, y) = 0$ and $U_0(x, y) = e^{-x^2}$. La figure 4.6 représente l'évolution de la moyenne et la figure 4.7 représente U aux mêmes instants, pour $x \in [-8, 24]$:

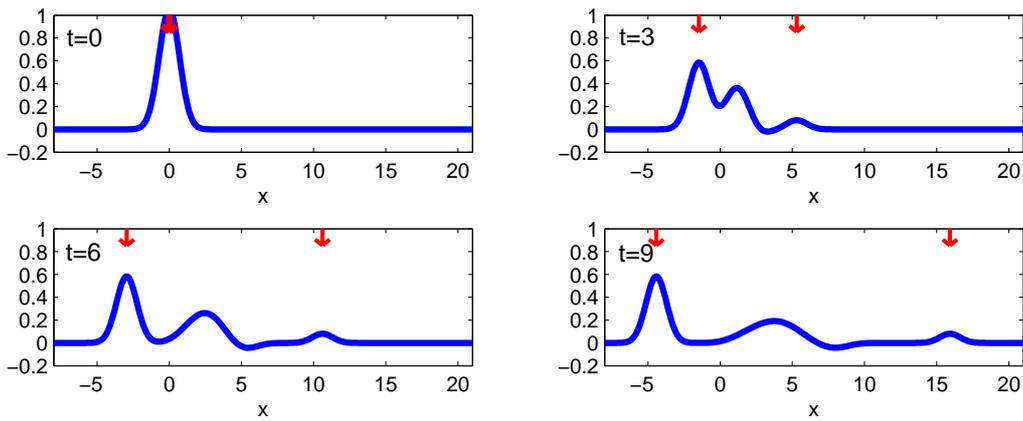


FIG. 4.6 – Évolution en temps de EU

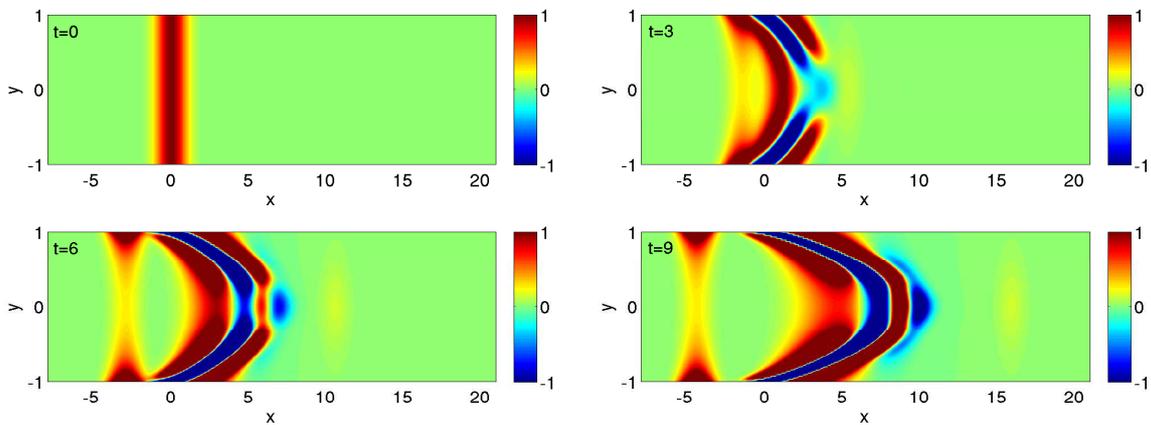


FIG. 4.7 – Évolution en temps de U

Les flèches rouges se déplacent toujours à la vitesse λ_{\pm} . On peut voir sur les deux figures 4.6 et 4.7 que l’amplitude de la contribution de λ_+ (qui se propage dans le sens de l’écoulement) est plus petite que celle de λ_- (qui se propage à contre courant). Une fois encore, la contribution de λ_+ est localisée là où M atteint son maximum (en $y = 0$), et la contribution de λ_- est localisée là où M atteint son minimum (en $y = \pm 1$). Par ailleurs, le fait que $|\lambda_+ - M_+| > |M_- - \lambda_-|$ coïncide avec le fait que la contribution de λ_+ est plus petite que celle de λ_- .

4.1.4 Dépendance en temps de la norme de la solution

L’estimation (3.36) page 98 sur la moyenne EU (resp. (3.37) sur U) prédit une croissance en temps au plus linéaire en temps (resp. en t^3). Or, nous n’avons remarqué aucune croissance en temps dans les exemples présentés précédemment. Pour observer une croissance en norme de ces deux quantités, les expressions (4.2) et (4.3) nous suggèrent de prendre par exemple U_1 (ou $\partial u_0 / \partial x$) dans $L_x^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $L_x^1(\mathbb{R})$. Nous construisons une telle fonction f :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 14x^4 + 28x^5 - 20x^6 + 5x^7, & |x| < 1, \\ \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

En particulier, $f \in C^4(\mathbb{R})$. En fait, f a été construite dans cette optique.

On présente maintenant l'évolution en norme L^2 de EU et U pour le profil tangente avec $\alpha = 0.2$. Les conditions initiales sont $U_0(x, y) = 0$ et $U_1(x, y) = f(x)$:

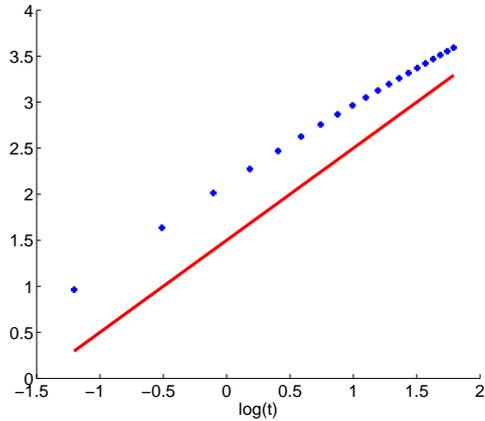


FIG. 4.8 – Évolution en temps de la norme de EU

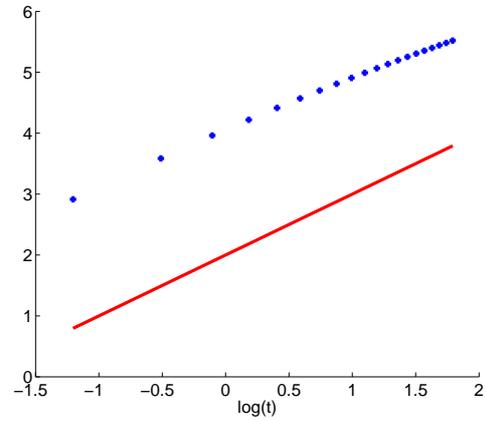


FIG. 4.9 – Évolution en temps de la norme de U

La figure 4.8 (resp. la figure 4.9) représente, avec les croix bleues, l'évolution de $\log(\|EU\|_{L^2_x})$ (resp. $\log(\|U\|_{L^2_x(L^2_y)})$) en fonction de $\log(t)$. Les droites rouges sont des droites de référence de pente égale à 1. En conclusion, on observe une croissance linéaire en temps aussi bien pour la moyenne que pour la solution. Nous n'avons jamais observé de croissance plus importante de la norme de la solution U lors de toutes nos simulations. Nous renvoyons le lecteur à la remarque (3.3) page 98 sur les limites de cette estimation.

4.2 VALIDATION NUMÉRIQUE DU MODÈLE

Grâce aux résultats numériques maintenant à notre disposition, nous voulons valider le modèle limite (1.9). Nous allons vérifier que la solution de (1.9) est bien la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution dans le tube de largeur 2ε . Nous allons donc comparer la solution numérique de (1.9) à celle d'un code 2D du problème de départ dans le tube de largeur 2ε , quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous rappelons que le problème de départ, dans le tube de largeur ε , peut s'écrire avec les équations de Galbrun (1.1), ou de manière équivalente avec les équations d'Euler linéarisées (1.10). C'est à partir des équations de Galbrun que nous avons obtenu le modèle limite (1.9). Nous proposons ici deux approches pour la validation du modèle suivant que l'on résout numériquement les équations d'Euler ou de Galbrun :

1. Nous disposons de deux codes de résolution des équations d'Euler linéarisées. Il s'agit du code Montjoie développé par Marc Duruflé, et qui utilise une méthode de Galerkin discontinu (pour plus de précisions voir [CCD09]). Pour valider le modèle limite, on résout numériquement ces équations dans le tube de largeur 2ε pour différentes valeurs de ε . Pour pouvoir comparer ces résultats avec ceux du problème limite, nous devons exprimer la solution du problème limite en variable d'Euler. Après avoir expliqué comment nous faisons cela, nous présentons les résultats d'une telle comparaison.
2. Nous cherchons ensuite à comparer la solution de (1.9) directement à celle obtenue avec un code Galbrun. Ne disposant pas d'un tel code, nous allons dériver un problème équivalent aux équations de Galbrun (1.1), qui sera du premier ordre en temps. Sa forme permettra

l'implémentation et la résolution au moyen du code Montjoie. Nous présentons ensuite les résultats de convergence obtenus quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

4.2.1 Comparaison à un code eulérien

Quel problème résoudre dans le tube ? Pour valider notre modèle asymptotique (1.9) nous allons comparer, numériquement, notre solution à celle des équations d'Euler linéarisées dans le tube : $(x, y) \in \mathbb{R} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. En se rappelant l'hypothèse suivante faite sur le profil :

$$\forall y \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad M_\varepsilon(y) = M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right),$$

et après le changement de variable $y \rightarrow \varepsilon y$ pour se ramener à un domaine fixe, les équations d'Euler linéarisées s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} M' \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) v_\varepsilon = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + M(y) \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times [-1, 1], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (4.5)$$

où $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse eulérienne, et p_ε représente la pression. Pour plus de précisions nous renvoyons le lecteur au premier chapitre.

Comment choisir les conditions initiales ? Si $(U_0, U_1)(x, y)$ sont les conditions initiales de l'équation limite (1.9), alors elles proviennent clairement des conditions initiales suivantes du problème de Galbrun dans le tube (1.3) :

$$(U_\varepsilon, \partial_t U_\varepsilon)(x, y, 0) = (U_0, U_1)(x, y) \quad \text{et} \quad (V_\varepsilon, \partial_t V_\varepsilon)(x, y, 0) = (0, 0).$$

La relation d'équivalence (A.9) page 217 entre les variables de Galbrun et celles des équations d'Euler linéarisées, devient après le changement de variable $y \rightarrow \varepsilon y$:

$$\begin{cases} u_\varepsilon = \partial_t U_\varepsilon + M \partial_x U_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} M' V_\varepsilon, \\ v_\varepsilon = \partial_t V_\varepsilon + M \partial_x V_\varepsilon, \\ p_\varepsilon = -(\partial_x U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_y V_\varepsilon). \end{cases} \quad (4.6)$$

Grâce à cette relation on obtient les conditions initiales suivantes pour (4.5) :

$$u_\varepsilon(x, y, 0) = U_1(x, y) + M(y) \frac{\partial U_0}{\partial x}(x, y), \quad v_\varepsilon(x, y, 0) = 0, \quad p_\varepsilon(x, y, 0) = -\frac{\partial U_0}{\partial x}(x, y).$$

Marc Duruflé et son code Montjoie, nous fournissent un moyen de résoudre numériquement (4.5). On récupère ainsi p_ε pour plusieurs ε tendant vers 0.

Comment comparer ? Nous voulons maintenant comparer les résultats obtenus dans le tube, donnés par p_ε , à la solution U du problème limite (1.9). Nous devons donc exprimer cette solution U en variable eulérienne. Nous utilisons la relation (1.21) page 20 qui relie U à la pression limite quand ε tend vers 0 :

$$p(x, y, t) = -\partial_x EU.$$

Ainsi p est la fonction pression obtenue à partir de la solution de (1.9). C'est à cette fonction que nous allons comparer les p_ε obtenus par la résolution du problème 2D (4.6). La validation consiste à vérifier que p est bien la limite de p_ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les résultats. On considère le cas linéaire $M(y) = y$ avec les conditions initiales suivantes : $U_0(x, y) = e^{-x^2}$ et $U_1(x, y) = 0$. On obtient la solution U de (1.9), puis p , en utilisant la méthode numérique présentée dans la première section de ce chapitre. La figure 4.10 représente, en échelle logarithmique, l'erreur relative :

$$\frac{\|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R} \times]-1,1])}}{\|p\|_{L^2(\mathbb{R} \times]-1,1])}},$$

par rapport à ε :

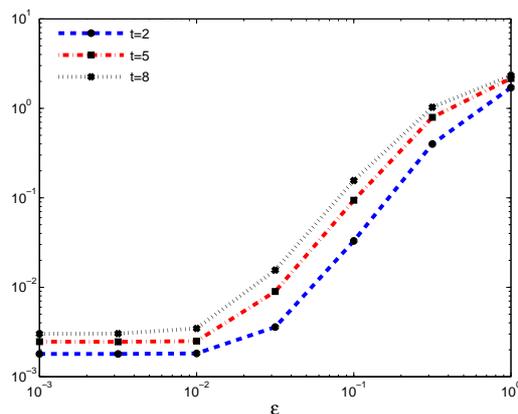


FIG. 4.10 – L'erreur relative pour $t = 2, 5$ et 8 en échelle logarithmique

On voit que l'erreur relative tend vers 0 quand ε tend vers 0 ce qui valide notre modèle asymptotique. En réalité, l'erreur ne tend pas vers 0 mais vers une petite valeur (qui est comprise entre 10^{-2} et 10^{-3} pour chaque t). C'est la conséquence des erreurs d'approximation des deux méthodes numériques, celle du problème limite (1.9) et celle de (4.6). Comme ces erreurs d'approximation augmentent avec le temps t , cela explique pourquoi l'erreur relative augmente avec t . Finalement, on remarque que l'erreur relative dépend quadratiquement de ε , c'est-à-dire qu'elle décroît comme ε^2 . Cela reste à montrer théoriquement.

4.2.2 Comparaison à un code Galbrun

Pour valider le problème limite, nous voulons comparer U_ε solution du problème (1.3) dans le tube à U solution du problème limite (1.9). N'ayant pas de code pour résoudre directement les équations de Galbrun et obtenir U_ε , nous avons, dans la section précédente, contourné le problème en utilisant un solveur des équations d'Euler linéarisées. Nous allons dans cette section proposer une méthode pour calculer directement U_ε avant de le comparer à U , quand ε tend vers 0. Nous ne développons pas ici à proprement parlé une méthode numérique pour les équations de Galbrun.

Nous mettons ces équations sous la forme d'un problème équivalent du premier ordre en temps, dont la résolution numérique sera facilement implémentée dans le code Montjoie.

Réécriture des équations de Galbrun sous une forme équivalente du premier ordre en temps.

Nous considérons les équations de Galbrun, dans un cadre un chouia plus général que (1.1). On se place dans le domaine Ω , ouvert de \mathbb{R}^2 . De plus, on suppose que l'écoulement de référence \mathbf{M} est un écoulement parallèle ne dépendant que de y : $\mathbf{M} = (M(y), 0)$. Les équations de Galbrun se réécrivent comme suit, où $\mathbf{U} = (U, V)$ représente le déplacement lagrangien :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, & (x, y) \in \Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Ces équations sont complétées par la condition de glissement à la paroi :

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.8)$$

ainsi que par les conditions initiales suivantes :

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y), \quad \partial_t \mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_1(x, y). \quad (4.9)$$

On cherche à mettre ce système sous la forme d'une équation du premier ordre de type :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{A}_3 \mathbf{V} = 0.$$

C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 4.1 *Soit $\mathbf{U} = (U, V)$ une solution du problème (4.7), (4.8) et (4.9) avec $\mathbf{U}_0(x, y) = (U_0, V_0)(x, y)$ et $\mathbf{U}_1(x, y) = (U_1, V_1)(x, y)$. On note p la solution de l'équation de transport :*

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)p = \partial_x U + \partial_y V, \quad (4.10)$$

avec comme condition initiale $p(x, y, 0) = p_0(x, y)$ où p_0 est défini à une constante près par :

$$\partial_x p_0 = M(y)\partial_x U_0 + U_1. \quad (4.11)$$

On note q la solution de l'équation de transport :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)q = M'(y)\partial_x p, \quad (4.12)$$

avec comme condition initiale $q(x, y, 0) = q_0(x, y)$ où q_0 est défini par :

$$q_0 = V_1 + M(y)\partial_x V_0 - \partial_y p_0. \quad (4.13)$$

Alors (U, V) est solution de :

$$\begin{cases} (\partial_t + M(y)\partial_x)U = \partial_x p, \\ (\partial_t + M(y)\partial_x)V = \partial_y p + q, \end{cases} \quad (4.14)$$

complétée par (4.8), avec comme condition initiale $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$ et $V(x, y, 0) = V_0(x, y)$.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer (4.14) :

- En premier lieu, nous allons montrer que

$$\Psi = (\partial_t + M(y)\partial_x)U - \partial_x p$$

est solution d'une équation de transport sans second membre avec condition initiale nulle, ce qui prouvera que $\Psi = 0$. Nous avons par définition de Ψ :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Psi = (\partial_t + M(y)\partial_x)^2 U - (\partial_t + M(y)\partial_x)\partial_x p.$$

Comme les opérateurs ∂_x et $\partial_t + M(y)\partial_x$ commutent, on obtient en utilisant (4.10) :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Psi = (\partial_t + M(y)\partial_x)^2 U - \partial_x(\partial_x U + \partial_y V).$$

Finalement, en se rappelant la première équation de (4.7) on a :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Psi = 0.$$

Ψ est donc solution d'une équation de transport sans second membre. Pour montrer que $\Psi = 0$ il suffit donc de voir que $\Psi(x, y, 0) = 0$. Or, par définition de Ψ nous avons :

$$\Psi(x, y, 0) = U_1 + M(y)\partial_x U_0 - \partial_x p_0$$

qui est nul d'après (4.11).

- Nous allons montrer de même que

$$\Phi = (\partial_t + M(y)\partial_x)V - \partial_y p - q$$

est solution d'une équation de transport sans second membre avec condition initiale nulle, ce qui prouvera que $\Phi = 0$. En effet, nous avons par définition de Φ :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Phi = (\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V - (\partial_t + M(y)\partial_x)\partial_y p - (\partial_t + M(y)\partial_x)q. \quad (4.15)$$

Cette fois, les opérateurs ∂_y et $\partial_t + M(y)\partial_x$ ne commutent pas mais nous avons :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\partial_y = \partial_y(\partial_t + M(y)\partial_x) - M'(y)\partial_x,$$

et (4.15) devient :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Phi = (\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V - \partial_y(\partial_t + M(y)\partial_x)p + M'(y)\partial_x p - (\partial_t + M(y)\partial_x)q.$$

On utilise maintenant (4.10) et (4.12) ce qui donne :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Phi = (\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V - \partial_y(\partial_x U + \partial_y V).$$

Enfin, grâce à la deuxième équation de (4.7) on obtient :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)\Phi = 0.$$

Φ est donc solution d'une équation de transport sans second membre. Pour montrer que $\Phi = 0$, il suffit donc de voir que $\Phi(x, y, 0) = 0$. Or par définition de Φ nous avons :

$$\Phi(x, y, 0) = V_1 + M(y)\partial_x V_0 - \partial_y p_0 - q_0$$

qui est nul compte tenu de (4.13).

□

La réciproque de cette proposition s'énonce de la façon suivante :

Proposition 4.2 Soit (U, V, p, q) solution de (4.14), (4.10), (4.12) et (4.8) avec comme condition initiale $(U, V, p, q)(x, y, 0) = (U_0, V_0, p_0, q_0)(x, y)$. Alors $\mathbf{U} = (U, V)$ est solution de (4.7), (4.8) avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = U_0(x, y), \\ V(x, y, 0) = V_0(x, y), \\ \partial_t U(x, y, 0) = \partial_x p_0 - M(y)\partial_x U_0, \\ \partial_t V(x, y, 0) = \partial_y p_0 + q_0 - M(y)\partial_x V_0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Montrons tout d'abord que \mathbf{U} vérifie (4.7) :

- Nous avons, compte tenu de la première équation de (4.14) :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 U = (\partial_t + M(y)\partial_x)\partial_x p.$$

En utilisant le fait que les opérateurs ∂_x et $\partial_t + M(y)\partial_x$ commutent, nous obtenons :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 U = \partial_x(\partial_t + M(y)\partial_x)p$$

qui devient grâce à (4.10) :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 U = \partial_x(\partial_x U + \partial_y V)$$

qui est la première équation de (4.7).

- Avec la deuxième équation de (4.14), on trouve :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V = (\partial_t + M(y)\partial_x)\partial_y p + (\partial_t + M(y)\partial_x)q.$$

que l'on peut réécrire comme suit, en faisant attention à la non commutativité de ∂_y et $\partial_t + M(y)\partial_x$:

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V = \partial_y(\partial_t + M(y)\partial_x)p - M'(y)\partial_x p + (\partial_t + M(y)\partial_x)q.$$

En utilisant les équations (4.10) et (4.12), nous obtenons finalement :

$$(\partial_t + M(y)\partial_x)^2 V = \partial_y(\partial_x U + \partial_y V),$$

qui est la deuxième équation de (4.7).

En ce qui concerne les conditions initiales, nous avons évidemment $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$ et $V(x, y, 0) = V_0(x, y)$. En prenant (4.14) en $t = 0$, nous trouvons d'une part :

$$\partial_t U(x, y, 0) = \partial_x p_0 - M(y)\partial_x U_0,$$

et d'autre part :

$$\partial_t V(x, y, 0) = \partial_y p_0 + q_0 - M(y)\partial_x V_0.$$

Pour conclure la démonstration, il nous reste à dire que (4.8) est vérifiée.

□

Remarque 4.3 De façon naturelle, pour obtenir un problème d'ordre 1, nous avons commencé par introduire l'inconnue p . L'inconnue q a été introduite plus tard pour compenser la non commutativité de ∂_y et $\partial_t + M(y)\partial_x$.

En résumé, au lieu de résoudre le problème (4.7), (4.8) et (4.9) on va résoudre :

$$\begin{cases} (\partial_t + M(y)\partial_x)U = \partial_x p, \\ (\partial_t + M(y)\partial_x)V = \partial_y p + q, \\ (\partial_t + M(y)\partial_x)p = \partial_x U + \partial_y V, \\ (\partial_t + M(y)\partial_x)q = M'(y)\partial_x p. \end{cases} \quad (4.16)$$

Ces équations sont complétées par la condition de glissement à la paroi :

$$\mathbf{U}.n = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

et munies des conditions initiales suivantes où l'on rappelle que $p(x, y, 0)$ est défini à une constante près :

$$\begin{cases} U(x, y, 0) = U_0(x, y), \\ V(x, y, 0) = V_0(x, y), \\ \partial_x p(x, y, 0) = M(y)\partial_x U_0 + U_1, \\ q(x, y, 0) = V_1 + M(y)\partial_x V_0 - \partial_y p_0. \end{cases}$$

Si l'on note $\mathbf{V} = (U, V, p, q)$, (4.16) peut se réécrire :

$$\partial_t \mathbf{V} + \mathbf{A}_1 \partial_x \mathbf{V} + \mathbf{A}_2 \partial_y \mathbf{V} + \mathbf{A}_3 \mathbf{V} = 0 \quad (4.17)$$

en posant :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} M(y) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & M(y) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & M(y) & 0 \\ 0 & 0 & -M'(y) & M(y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas général des équations de Galbrun ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et sans aucune hypothèse sur l'écoulement de référence), on peut trouver de manière similaire un problème équivalent du premier ordre. Nous le présentons ici, à toutes fins utiles. On rappelle les équations de Galbrun :

$$(\partial_t + \mathbf{M}.\nabla)^2 \mathbf{U} - \nabla(\nabla.\mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.18)$$

que l'on complète par la condition aux limites (n désignant le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$) :

$$\mathbf{U}.n = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (4.19)$$

On considère toujours p comme étant la solution de

$$(\partial_t + \mathbf{M}.\nabla)p = \nabla.\mathbf{U}. \quad (4.20)$$

Cette fois, compte tenu de la non commutativité des opérateurs $\mathbf{M}.\nabla$ et ∇ , et de l'identité suivante :

$$(\mathbf{M}.\nabla) \nabla p = \nabla(\mathbf{M}.\nabla p) - (\nabla\mathbf{M})^T \nabla p, \quad (4.21)$$

on est amené à poser \mathbf{Q} comme étant la solution de :

$$(\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{Q} = (\nabla \mathbf{M})^T \cdot \nabla p. \quad (4.22)$$

On énonce maintenant les propositions équivalentes aux propositions 4.1 et 4.2, dans le cas général. Nous ne donnons pas les démonstrations qui sont une simple généralisation des démonstrations précédemment détaillées, l'outil le plus important étant l'identité (4.21), qui se montre facilement.

Proposition 4.3 Soit \mathbf{U} une solution du problème (4.18), (4.19) et (4.9) avec comme condition initiale $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$, et $\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_1(\mathbf{x})$. Si on note p la solution de l'équation de transport (4.20) et \mathbf{Q} la solution de (4.22) avec comme condition initiale $p(\mathbf{x}, 0) = p_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x})$ où p_0 et \mathbf{Q}_0 vérifient :

$$\nabla p_0 + \mathbf{Q}_0 = \mathbf{U}_1 + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{U}_0. \quad (4.23)$$

Alors \mathbf{U} est solution de :

$$(\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{U} = \nabla p + \mathbf{Q}, \quad (4.24)$$

complétée par (4.19), avec comme condition initiale $\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x})$.

La réciproque de cette proposition s'énonce sous la forme de la proposition suivante :

Proposition 4.4 Soit $(\mathbf{U}, p, \mathbf{Q})$ solution de (4.24), (4.20), (4.22) et (4.19) avec comme conditions initiales $(\mathbf{U}, p, \mathbf{Q})(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{U}_0, p_0, \mathbf{Q}_0)(\mathbf{x})$. Alors \mathbf{U} est solution de (4.18), (4.19) avec comme conditions initiales :

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}), \\ \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = \nabla p_0 + \mathbf{Q}_0 - \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{U}_0. \end{cases}$$

Les résultats de validation On implémente la résolution du problème (4.17) dans le code Montjoie. On récupère ainsi les solutions U_ε de (1.3) dans le tube. On considère le cas linéaire $M(y) = y$ avec les conditions initiales suivantes : $U_0(x, y) = e^{-x^2}$ et $U_1(x, y) = 0$. On obtient la solution U de (1.9) en utilisant la méthode numérique présentée dans la première section de ce chapitre. La figure 4.11 représente, en échelle logarithmique, l'erreur relative :

$$\frac{\|U - U_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R} \times]-1, 1])}}{\|U\|_{L^2(\mathbb{R} \times]-1, 1])}},$$

par rapport à ε :

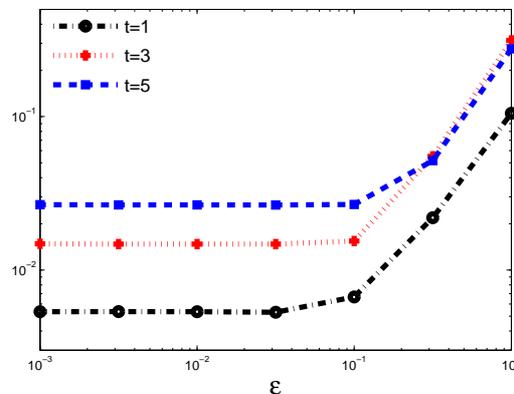


FIG. 4.11 – L'erreur relative pour $t = 1, 3$ et 5 en échelle logarithmique

On voit que l'erreur relative tend vers 0 quand ε tend vers 0, ceci valide notre modèle asymptotique. En réalité, l'erreur ne tend pas vers 0 mais vers une petite valeur. C'est la conséquence des erreurs d'approximation des deux méthodes numériques, celle du problème limite (1.9) et celle de (4.17). Comme ces erreurs d'approximation augmentent avec le temps t , cela explique pourquoi l'erreur relative augmente avec t . Ces erreurs sont plus importantes que sur la figure 4.10, ce à quoi nous voyons deux origines possibles :

1. La stabilité du schéma numérique utilisé pour résoudre (4.17) n'a pas été prouvée...
2. Contrairement au cas présent, dans la comparaison avec un code eulérien nous n'avions eu besoin que de la moyenne EU . En effet, le calcul de U , qui se fait à partir de sa moyenne EU , introduit de nouvelles erreurs d'approximation.

Deuxième partie

Conditions aux limites effectives pour les couches minces

CAS D'UNE PAROI RIGIDE

5

SOMMAIRE

5.1	ILLUSTRATION DE L'INFLUENCE DE LA COUCHE LIMITE	138
5.2	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	139
5.2.1	POSITION DU PROBLÈME	139
5.2.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	140
5.2.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	140
5.2.4	LE PROBLÈME APPROCHÉ	144
5.3	APPROXIMATION LOCALE DE L'OPÉRATEUR T_M	145
5.4	ANALYSE DU PROBLÈME LIMITE	148
5.4.1	ANALYSE DE STABILITÉ	148
5.4.2	ONDES DE SURFACE	154
5.4.3	RÉFLEXION	160
5.5	COMPLÉMENTS : APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS D'EULER LINÉARISÉES	162
5.5.1	POSITION DU PROBLÈME	162
5.5.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	164
5.5.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	165
5.5.4	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	168
5.5.5	ANALYSE DE STABILITÉ MODALE	169

QUEL modèle peut-on utiliser pour l'étude de la propagation du son au voisinage d'une paroi en présence d'un écoulement ? C'est en substance à cette question que nous allons répondre dans la suite. Nous nous plaçons en dimension 2, $(x, y) \in \Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \varepsilon[$, et considérons un écoulement de référence laminaire, nul à la paroi $y = \varepsilon$, constant égal à M_∞ pour $y < 0$ et ne dépendant que de y :

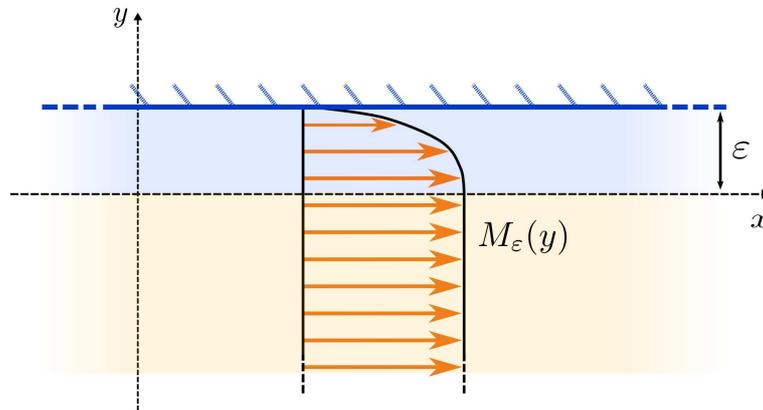


FIG. 5.1 – Géométrie et position du problème de départ

L'espace $0 < y < \varepsilon$, en bleu sur la figure, représente la couche limite. Nous considérons que l'épaisseur de la couche limite, c'est-à-dire ε , est petite. Il s'agit encore une fois d'une approche basse fréquence. Notre objectif est de dériver un problème limite, quand ε tend vers 0, au moyen d'une analyse asymptotique. Le but est donc de trouver une condition d'impédance généralisée en $y = 0$ comme l'illustre la figure suivante :

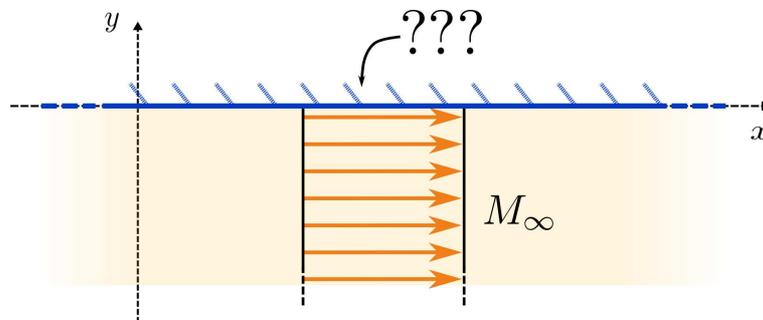


FIG. 5.2 – Objectif : condition approchée en $y = 0$

Ce genre de modèle approché est bien entendu très utile pour la simulation numérique : on évite d'avoir recours à une discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche limite, ce qui est très coûteux. La nouvelle condition au bord :

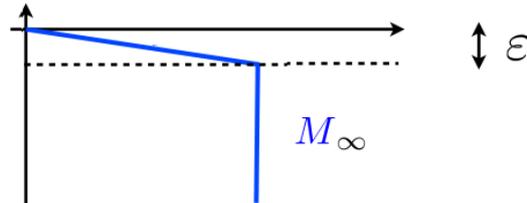
- apparaîtra comme une petite perturbation de la condition au bord limite,
- gardera la mémoire de la couche limite dont elle représente une idéalisation.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous commençons par dériver le problème approché en utilisant les équations de Galbrun, cela au moyen d'une analyse asymptotique. La condition d'impédance obtenue fait intervenir la résolution du problème limite du tube (1.9), étudié dans la première partie de cette thèse. Nous nous consacrons ensuite à l'étude de ce problème approché.

À l'aide de l'analyse de Kreiss, que l'on détaille, on montre que le caractère bien posé du problème limite est "équivalent" à celui du problème (1.9), étudié dans toute la première partie de cette thèse. Nous complétons l'analyse de ce problème par la recherche d'ondes de surface et par l'étude de la réflexion d'une onde sur la nouvelle paroi impédante. Finalement, nous donnons l'approche eulérienne. Au lieu d'utiliser les équations de Galbrun, nous considérons celles d'Euler linéarisées (qui sont équivalentes). À l'aide de la transformation de Fourier-Laplace nous obtenons une seule équation sur la pression. C'est sur cette équation que nous menons l'analyse asymptotique qui va nous donner un problème approché, dont l'analyse de stabilité est présentée et est équivalente à celle précédemment menée pour le problème approché issu des équations de Galbrun.

5.1 ILLUSTRATION DE L'INFLUENCE DE LA COUCHE LIMITE

Afin d'illustrer l'influence de la couche limite, et donc la nécessité de sa prise en compte, nous présentons ici quelques résultats numériques. Nous considérons les équations de Galbrun dans le demi plan $y < 0$ et introduisons une couche limite par l'intermédiaire d'un écoulement de référence de la forme :



Cet écoulement est nul à la paroi $y = 0$ et se raccorde à M_∞ de manière linéaire sur une couche de taille ε . La figure 5.3 présente, pour différentes valeurs de ε et pour $M_\infty = 0.5$, des instantanés du déplacement lagrangien horizontal, obtenus par la résolution des équations de Galbrun en présence d'une source. En ordonnée, y varie entre -5 et 0 . Sur le bord supérieur, nous avons mis une condition de paroi rigide et sur les autres bords des PMLs :

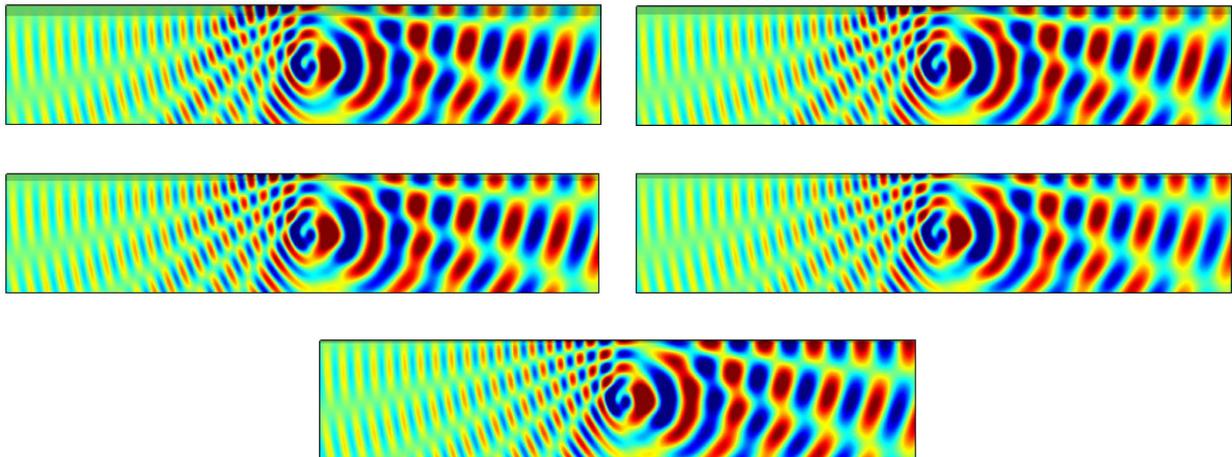


FIG. 5.3 – Instantanés du déplacement pour $M_\infty = 0.5$, et, dans l'ordre, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 0.4$, $\varepsilon = 0.3$, $\varepsilon = 0.2$ et $\varepsilon = 0.1$.

Cette figure permet de se rendre compte de l'influence de la couche limite même quand sa taille devient très petite (la zone de la couche limite est mise en évidence sur les figures par la présence d'un cadre plus foncé). Pour mieux s'en rendre compte la figure 5.4 permet de comparer le résultat avec et sans couche limite :

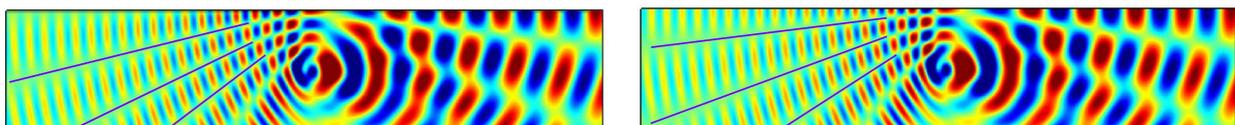


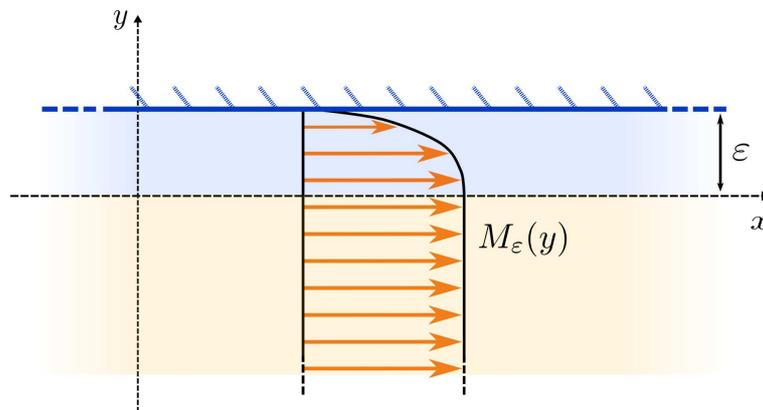
FIG. 5.4 – Instantanés du déplacement pour $M_\infty = 0.5$: à gauche avec couche limite ($\varepsilon = 0.1$), à droite sans.

Évidemment, les droites violettes ont été rajoutées par nos soins pour mettre en lumière la différence entre les deux figures. Cette différence est plus flagrante sur la partie gauche des figures puisque la fréquence de l'onde est plus élevée, ce qui est dû à l'effet Doppler. En effet, la longueur d'onde étant alors plus petite, on imagine que l'influence de la couche limite est plus ressentie. Nous voyons donc l'influence de la couche limite même quand sa taille diminue ; il est assez naturel de vouloir la remplacer par une condition à la limite.

5.2 CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ

5.2.1 Position du problème

Nous considérons le domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \varepsilon[$:



Nous supposons que ce domaine est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Par conséquent, l'écoulement est caractérisé par son profil de Mach (rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son), $M_\varepsilon(y)$. Les équations de Galbrun (2) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

où $\mathbf{U}_\varepsilon(x, y, t)$ et $\mathbf{V}_\varepsilon(x, y, t)$ sont respectivement les composantes selon x et selon y de la perturbation du déplacement Lagrangien.

On complète ces équations par une condition de paroi rigide en $y = \varepsilon$:

$$\mathbf{V}_\varepsilon(x, \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Comme nous l'avons fait dans la première partie de cette thèse, on se restreint à une classe particulière de profils :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), & 0 < y < \varepsilon, \\ M_\infty, & y < 0, \end{cases}$$

avec $M \in L^\infty(]0, 1[)$. Nous supposons donc que dans la couche limite $y \in [0, \varepsilon]$ le profil est obtenu par scaling d'une fonction M , comme nous l'avons fait dans le cas du tube. De plus, le profil est pris constant égal à M_∞ pour $y < 0$.

5.2.2 Réécriture comme un problème de transmission

On commence par écrire le problème (5.1) comme un problème de transmission entre :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\varepsilon &= \mathbf{U}_\varepsilon|_{y < 0}, & \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}} &= \mathbf{U}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}, \\ \mathbf{V}_\varepsilon &= \mathbf{V}_\varepsilon|_{y < 0}, & \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}} &= \mathbf{V}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}. \end{aligned}$$

Remarque 5.1 *Attention, nous gardons la même notation pour les inconnues dans le demi-plan $y < 0$.*

Nous avons maintenant le système d'équations suivant dans la couche limite :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \varepsilon[, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

et dans le demi-plan inférieur $y < 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, \quad t > 0. \quad (5.3)$$

Les deux systèmes ci-dessus sont complétés par les conditions de raccord en déplacement normal et en divergence à l'interface $y = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\varepsilon(x, 0, t) = \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, 0, t) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right)(x, 0, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

N'oublions pas la condition de paroi rigide :

$$\mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

5.2.3 Analyse asymptotique

On cherche une condition d'impédance en $y = 0$, qui soit une idéalisation de la couche limite, valable quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour l'obtenir, il nous faut éliminer les inconnues dans la couche limite. Nous commençons classiquement par effectuer le changement d'échelle

$$y \rightarrow Y = \frac{y}{\varepsilon},$$

dans la couche limite, qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe $\Omega = \mathbb{R} \times]0, 1[$. C'est exactement la même démarche que nous avons utilisée dans le cas du tube au premier chapitre. En posant le changement d'inconnues suivant :

$$\mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, y, t) = U_\varepsilon^{\text{CL}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, y, t) = V_\varepsilon^{\text{CL}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right),$$

les équations de Galbrun (5.2) dans la couche limite se réécrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right) = 0, \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right) = 0, \end{cases} \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0, \quad (5.4)$$

les conditions de raccord deviennent :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_\varepsilon(x, 0, t) = V_\varepsilon^{\text{CL}}(x, 0, t) \\ \varepsilon \left(\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

et la condition de paroi rigide s'écrit :

$$V_\varepsilon^{\text{CL}}(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.6)$$

On introduit maintenant les développements asymptotiques formels en ε de \mathbf{U}_ε , \mathbf{V}_ε , $U_\varepsilon^{\text{CL}}$ et $V_\varepsilon^{\text{CL}}$. Dans le demi-plan $y < 0$ on pose :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_\varepsilon(x, y, t) = U^0(x, y, t) + \varepsilon U^1(x, y, t) + \varepsilon^2 U^2(x, y, t) + \dots \\ \mathbf{V}_\varepsilon(x, y, t) = V^0(x, y, t) + \varepsilon V^1(x, y, t) + \varepsilon^2 V^2(x, y, t) + \dots \end{cases}$$

De la même manière dans la couche limite on écrit :

$$\begin{cases} U_\varepsilon^{\text{CL}}(x, Y, t) = U_{\text{CL}}^0(x, Y, t) + \varepsilon U_{\text{CL}}^1(x, Y, t) + \varepsilon^2 U_{\text{CL}}^2(x, Y, t) + \dots \\ V_\varepsilon^{\text{CL}}(x, Y, t) = V_{\text{CL}}^0(x, Y, t) + \varepsilon V_{\text{CL}}^1(x, Y, t) + \varepsilon^2 V_{\text{CL}}^2(x, Y, t) + \dots \end{cases}$$

Nous allons chercher à éliminer les inconnues U_{CL}^j et V_{CL}^j dans la couche limite, pour aboutir à un problème aux limites en U^j et V^j avec une condition d'impédance approchée en $y = 0$ (quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

Analyse des termes d'ordre 0 en ε des équations.

– Dans le demi-plan $y < 0$ les équations (5.3) donnent à l'ordre 0 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, \quad t > 0. \quad (5.7)$$

– Dans la couche limite $0 < Y < 1$ les équations (5.4) donnent à l'ordre 0 en ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x \partial Y} V_{\text{CL}}^0 = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} V_{\text{CL}}^0 = 0 \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (5.8)$$

– Les conditions de raccord (5.5) donnent :

$$\begin{cases} V^0(x, 0, t) = V_{\text{CL}}^0(x, 0, t), \\ \frac{\partial V_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(x, 0, t) = 0. \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.9)$$

– Enfin, la condition de paroi rigide (5.6) mène à :

$$V_{\text{CL}}^0(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.10)$$

De (5.8) on déduit que $\frac{\partial}{\partial Y} V_{\text{CL}}^0$ est égale à une constante indépendante de x et Y . Celle-ci est nulle compte tenu de la deuxième équation de (5.9). Par conséquent, V_{CL}^0 est une fonction indépendante de Y qui est nulle en $Y = 1$ (cf. la condition de paroi rigide (5.10)), elle est donc nulle. En conclusion,

$$V_{\text{CL}}^0(x, Y, t) = 0,$$

et la première équation de (5.9) donne :

$$V^0(x, 0, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.11)$$

Remarque 5.2 *Le fait que V_{CL}^0 soit nulle n'est pas réellement une surprise. En effet, compte tenu de la condition au bord $V_{\varepsilon}^{\text{CL}}(x, \varepsilon, t) = 0$, il est naturel de penser que lorsque ε tend vers 0, la limite de $V_{\varepsilon}^{\text{CL}}$ sera nulle. Cette observation avait d'ailleurs déjà été faite dans l'exemple du tube mince développé au premier chapitre. Ainsi, nous aurions pu, sans autre forme de procès, commencer le développement asymptotique de $V_{\varepsilon}^{\text{CL}}$ à l'ordre 1.*

Analyse des termes d'ordre 1 en ε des équations.

– Dans le demi-plan $y < 0$ les équations (5.3) donnent à l'ordre 1 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, \quad t > 0. \quad (5.12)$$

– Dans la couche limite $0 < Y < 1$ les équations (5.4) donnent à l'ordre 1 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (5.13)$$

– Les conditions de raccord (5.5) donnent :

$$\begin{cases} V^1(x, 0, t) = V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) \\ \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.14)$$

– Enfin la condition de paroi rigide (5.6) mène à :

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.15)$$

Pour éliminer U_{CL}^0 et V_{CL}^1 la procédure que l'on va utiliser n'est pas sans rappeler celle que nous avons suivie au premier chapitre. De (5.13) on déduit qu'il existe une fonction c indépendante de Y telle que :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) = 0 \\ \frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} = c(x, t) \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (5.16)$$

Pour calculer $c(x, t)$ on utilise le fait que $c(x, t) = E[c(x, t)]$ où E est l'opérateur de moyenne en Y défini par :

$$\begin{aligned} L^2(]0, 1]) &\mapsto L^2(]0, 1]) \\ E : U &\mapsto EU = E[U] = \int_0^1 U(Y) dY \end{aligned} \quad (5.17)$$

Remarque 5.3 Cet opérateur de moyenne ne diffère de l'opérateur de moyenne sur $[-1, 1]$, défini par (1.8) page 16, que par le changement de variable suivant : $Y \rightarrow 2Y - 1$.

En utilisant $c(x, t) = E[c(x, t)]$ on obtient :

$$c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} EU_{\text{CL}}^0(x, t) + V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V_{\text{CL}}^1(x, 0, t).$$

Compte tenu de la condition de paroi rigide (5.15) cela donne :

$$c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} EU_{\text{CL}}^0(x, t) - V_{\text{CL}}^1(x, 0, t).$$

Par la suite, (5.16) devient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU_{\text{CL}}^0(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) = 0 \\ c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} EU_{\text{CL}}^0(x, t) - V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (5.18)$$

Si l'on introduit l'opérateur :

$\mathbf{T}_M : \varphi(x, t) \rightarrow E[U(\varphi)](x, t)$ où $U(\varphi)$ est la solution de :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U(\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} EU(\varphi) = \varphi, & (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0, \\ U(\varphi)(x, Y, 0) = \partial_t U(\varphi)(x, Y, 0) = 0, \end{cases} \quad (5.19)$$

alors (5.18) se réécrit :

$$\begin{cases} EU_{\text{CL}}^0 = -\mathbf{T}_M [\partial_x V_{\text{CL}}^1(x, 0, t)] \\ c(x, t) = -\left(V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V_{\text{CL}}^1(x, 0, t)] \right) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.20)$$

Remarque 5.4 L'équation vérifiée par $U(\varphi)$ dans la définition de \mathbf{T}_M n'est autre que l'équation limite du tube (1.9), avec second membre, qui a été obtenue au premier chapitre et dont l'étude est l'objet de toute la première partie de cette thèse. L'opérateur est bien défini si cette équation est bien posée. Compte tenu du travail effectué dans la première partie une condition suffisante est que l'équation

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1$$

n'a que des solutions réelles, où

$$F^{\text{CL}}(\lambda) := \int_0^1 \frac{dY}{(\lambda - M(Y))^2}, \quad \lambda \in D = \mathbb{C} \setminus \text{Im } M. \quad (5.21)$$

La fonction F^{CL} introduite à l'instant est moralement la même que la fonction F introduite et étudiée dans la première partie de cette thèse (cf. définition (2.5) page 39). La seule différence est l'intervalle d'intégration. En faisant un simple changement de variable $Y \rightarrow y = 2Y - 1$ on remarque que :

$$F^{\text{CL}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dy}{\left(\lambda - M\left(\frac{y+1}{2}\right)\right)^2}.$$

En résumé la fonction F^{CL} associée au profil $Y \rightarrow M(Y)$ défini sur $[0, 1]$ n'est autre que la fonction F associée au profil $y \rightarrow M\left(\frac{y+1}{2}\right)$ défini sur $[-1, 1]$.

Propriété 5.1 Nous donnons ici deux propriétés évidentes de linéarité de cet opérateur :

$$\mathbf{T}_M[\partial_x \varphi(x, t)] = \partial_x \mathbf{T}_M[\varphi(x, t)], \quad \mathbf{T}_M[C \varphi(x, t)] = C \mathbf{T}_M[\varphi(x, t)].$$

Tout ce travail ayant été effectué, on élimine U_{CL}^0 et V_{CL}^1 de la manière suivante. On commence par écrire la condition de raccord en divergence à l'ordre 1, (5.14), qui se réécrit :

$$\left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y}\right)(x, 0, t) = c(x, t).$$

En utilisant l'expression (5.20) que nous venons d'obtenir pour c on a :

$$\left(\partial_x U^0 + \partial_y V^0\right)(x, 0, t) = -\left(V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M[V_{\text{CL}}^1(x, 0, t)]\right).$$

Au moyen de la première équation de (5.14) nous obtenons finalement :

$$\left(\partial_x U^0 + \partial_y V^0\right)(x, 0, t) = -\left(V^1(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M[V^1(x, 0, t)]\right). \quad (5.22)$$

5.2.4 Le problème approché

On cherche maintenant à déterminer le problème vérifié par : $\mathbf{U}^{\varepsilon,1} = (U^{\varepsilon,1}, V^{\varepsilon,1})$ où $U^{\varepsilon,1} = U^0 + \varepsilon U^1$ et $V^{\varepsilon,1} = V^0 + \varepsilon V^1$. En clair, on cherche un problème approché à l'ordre 1 en ε .

On commence par les équations dans l'espace : (5.7) + ε (5.12) donne :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 U^{\varepsilon,1} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^{\varepsilon,1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{\varepsilon,1}}{\partial y}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 V^{\varepsilon,1} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^{\varepsilon,1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{\varepsilon,1}}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0], \quad t > 0. \quad (5.23)$$

Condition limite approchée Il nous reste maintenant à trouver la condition à la limite en $y = 0$ qui soit une approximation au premier ordre de la couche limite. Si on multiplie (5.22) par ε on obtient :

$$\varepsilon (\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) = -(\varepsilon V^1(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [\varepsilon V^1(x, 0, t)]).$$

Compte tenu de (5.11) on a $V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = \varepsilon V^1(x, 0, t)$, ce qui donne dans l'expression précédente :

$$\varepsilon (\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) = -(V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)]),$$

qui donne :

$$\varepsilon (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) - \varepsilon^2 (\partial_x U^1 + \partial_y V^1)(x, 0, t) = -(V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)]),$$

et finalement en négligeant les termes d'ordre 2 en ε , on obtient la condition limite tant attendue :

$$\boxed{V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)] + \varepsilon (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) = 0.} \quad (5.24)$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0 on obtient :

$$V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)] = 0.$$

Sous réserve que l'opérateur $\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M$ soit inversible on retrouve bien la condition de paroi rigide originelle. Nous verrons plus loin que cet opérateur est effectivement inversible (cf. remarque 5.8 page 151).

Remarque 5.5 – Cette condition limite peut être vue comme un opérateur Dirichlet to Neumann, reliant la trace normale de la solution à sa divergence :

$$\operatorname{div}(\mathbf{U}^{\varepsilon,1})(x, 0, t) = -\frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \mathbf{U}^{\varepsilon,1} \cdot \mathbf{n}(x, 0, t),$$

où div est l'opérateur de divergence et \mathbf{n} est le vecteur normal sortant à la surface $y = 0$.

– Il est possible de trouver d'autres conditions limites, comme une condition de type Neumann to Dirichlet par exemple. L'avantage de celle que nous avons présentée ici est que l'on va pouvoir s'appuyer sur tout le travail fait dans la première partie de cette thèse, puisqu'elle fait intervenir l'équation limite du tube (1.9), au travers de l'opérateur \mathbf{T}_M .

La suite est consacrée à l'étude de ce problème approché.

5.3 APPROXIMATION LOCALE DE L'OPÉRATEUR \mathbf{T}_M

Nous allons, dans cette section, considérer des profils continus linéaires par morceaux pour lesquels nous allons pouvoir calculer l'opérateur \mathbf{T}_M . Ce travail a deux sources de motivation :

1. La première est la résolution numérique du problème approché. En effet, ce travail nous incite, pour obtenir une méthode numérique, à approcher les profils généraux par des profils continus linéaires par morceaux, pour lesquels on pourra résoudre numériquement le problème, compte tenu du travail effectué dans cette section. On pourrait aussi utiliser le travail développé dans le chapitre 3 et l'expression quasi-explicite de la solution obtenue, qui nous a fourni une méthode numérique efficace. Malheureusement, cette approche était relativement coûteuse et non locale en x , ce qui nous amène à notre deuxième source de motivation.

2. L'obtention d'une condition et d'une méthode numérique locale en x est un préalable à l'extension de la condition limite approchée à des bords courbes.

On reprend les notations de la définition de \mathbf{T}_M . Pour avoir $\mathbf{T}_M\varphi$ on a seulement besoin de la moyenne $E[U(\varphi)]$ et non de $U(\varphi)$. De plus, la condition limite ne fait intervenir que la dérivée seconde de la moyenne. La proposition suivante donne un moyen de calculer cette quantité dans le cas d'un profil continu, et linéaire par morceaux. On supposera de plus que le profil est monotone, ce qui simplifie grandement les choses.

Proposition 5.1 Soient $M \in C^0([0, 1])$ monotone et

$$Y_0 = 0 < Y_1 < \dots < Y_N = 1,$$

tel que M est linéaire sur $]Y_i, Y_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i < N$:

$$\forall 0 \leq i \leq N-1, \quad M(Y) = \alpha_i Y + \beta_i \text{ dans }]Y_i, Y_{i+1}[$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}, \beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Si on note $M_i = M(Y_i)$ on a :

$$\alpha_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{Y_{i+1} - Y_i}, \quad 0 \leq i \leq N-1,$$

et en posant $\alpha_{-1} = \alpha_N = +\infty$ on note :

$$\gamma_i = \frac{1}{\alpha_{i-1}} - \frac{1}{\alpha_i}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Alors on a l'expression suivante :

$$\partial_x^2 \mathbf{T}_M[\varphi](x, t) = \Psi(x, t) := \sum_{i=0}^N \gamma_i \Psi_i(x, t), \quad (5.25)$$

où Ψ_i est solution de :

$$(\partial_t + M_i \partial_x) \Psi_i + \partial_x \Psi = -\partial_x \varphi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.26)$$

avec condition initiale nulle.

DÉMONSTRATION. On cherche une expression de $\partial_x^2 \mathbf{T}_M[\varphi] = \partial_x^2 E[U(\varphi)]$. On rappelle que $U(\varphi)$ est solution de :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U(\varphi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} E U(\varphi) = \varphi, & (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0, \\ U(\varphi)(x, Y, 0) = \partial_t U(\varphi)(x, Y, 0) = 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

L'idée de départ est la même que celle développée au chapitre 3. Pour obtenir une équation sur la moyenne nous allons utiliser la transformation de Fourier-Laplace. On rappelle les notations, déjà utilisées dans le chapitre 3, de la transformée de Fourier en x d'une fonction $f(x, t)$:

$$\widehat{f}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx,$$

puis celle de Laplace en temps de $\widehat{f}(k, t)$,

$$\widetilde{f}(k, \omega) := \int_0^{\infty} \widehat{f}(k, t) e^{i\omega t} dt, \quad \Im(\omega) > 0.$$

En appliquant la transformation de Fourier-Laplace à (5.27) on obtient :

$$(-i\omega + ikM(Y))^2 \widetilde{U}(\varphi) + k^2 E \widetilde{U}(\varphi) = \widetilde{\varphi},$$

puis

$$(\omega - kM(Y))^2 \widetilde{U}(\varphi) = k^2 E \widetilde{U}(\varphi) - \widetilde{\varphi}.$$

En divisant par $(\omega - kM(Y))^2$ et en appliquant l'opérateur E on obtient :

$$E \widetilde{U}(\varphi) = - \int_0^1 \frac{dY}{(\omega - kM(Y))^2} (\widetilde{\varphi} - k^2 E \widetilde{U}(\varphi)). \quad (5.28)$$

En posant $\widetilde{\Psi} := -k^2 E \widetilde{U}(\varphi)$ (5.28) devient :

$$\widetilde{\Psi} = F^{\text{CL}} \left(\frac{\omega}{k} \right) (\widetilde{\Psi} + \widetilde{\varphi}), \quad (5.29)$$

où F^{CL} est définie par (5.21). Clairement $\widetilde{\Psi}$ est la transformée de Fourier-Laplace de $\partial_x^2 T_M \varphi$ qui est la quantité que nous cherchons à calculer. Dans le cas particulier d'un profil linéaire par morceaux on peut calculer la fonction F^{CL} (comme nous l'avions fait pour la fonction F dans le chapitre 2). On a :

$$\begin{aligned} F^{\text{CL}}(\lambda) &= \int_0^1 \frac{dY}{(\lambda - M(Y))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{Y_i}^{Y_{i+1}} \frac{dY}{(\lambda - \alpha_i Y - \beta_i)^2} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1/\alpha_i}{\lambda - M_{i+1}} - \frac{1/\alpha_i}{\lambda - M_i} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne en regroupant les termes et en utilisant la définition des γ_i :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = \sum_{i=0}^N \frac{\gamma_i}{\lambda - M_i}.$$

En utilisant cette expression de F^{CL} dans (5.29) cela donne :

$$\widetilde{\Psi} = \sum_{i=0}^N \frac{k\gamma_i}{\omega - kM_i} (\widetilde{\Psi} + \widetilde{\varphi}).$$

On pose alors

$$\widetilde{\Psi}_i = \frac{k}{\omega - kM_i} (\widetilde{\Psi} + \widetilde{\varphi}), \quad (5.30)$$

de telle sorte que :

$$\widetilde{\Psi} = \sum_{i=0}^N \gamma_i \widetilde{\Psi}_i. \quad (5.31)$$

En appliquant la transformation de Fourier-Laplace inverse à (5.31) on obtient (5.25). (5.30) peut se réécrire :

$$(-i\omega + ik M_i) \widetilde{\Psi}_i = -ik (\widetilde{\Psi} + \vec{\varphi})$$

qui donne (5.26) après transformation inverse de Fourier-Laplace. Ceci conclut la démonstration. \square

Remarque 5.6 Dans un souci de simplicité, nous nous sommes limités à des profils monotones, mais il est bien entendu possible de généraliser le résultat à des profils non monotones. En effet, cela complique simplement l'expression de la fonction F^{cl} comme nous avons pu le voir au chapitre 2 dans la section 2.4 (cf. lemme 2.10 page 48).

Le calcul de $\partial_x^2 \mathbf{T}_M$ se ramène donc, pour un profil continu linéaire par morceaux, à la résolution d'une famille d'équations de transport. La résolution numérique du problème approché (5.23)-(5.24) en sera donc simplifiée pour de tels profils. Dans le cas d'un profil continu quelconque, on aura envie de l'approcher par un profil continu linéaire par morceaux.

5.4 ANALYSE DU PROBLÈME LIMITE

Nous allons maintenant nous consacrer à l'étude du modèle approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24), obtenu précédemment. Dans un premier temps, nous menons une analyse de stabilité de type Kreiss. Nous nous intéressons ensuite aux caractéristiques physiques de la nouvelle paroi que nous avons créée. Existe-t-il des ondes de surface ? Comment se passe la réflexion d'une onde sur cette paroi ?

5.4.1 Analyse de stabilité

Nous commençons par l'incontournable analyse de stabilité. On cherche à savoir si le problème approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24), est bien posé. On rappelle que le caractère bien posé est indispensable si l'on veut résoudre numériquement le problème. Nous allons mener une analyse dite de Kreiss. Nous nous attacherons à expliquer le principe de cette analyse tout en l'appliquant à notre problème. Pour plus de renseignements le lecteur pourra consulter [Kre70].

Analyse de Kreiss On commence par poser :

$$\begin{cases} U^{\varepsilon,1}(x, y, t) = U_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \\ V^{\varepsilon,1}(x, y, t) = V_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \end{cases} \quad (5.32)$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et U_a et V_a sont deux constantes complexes non toutes deux nulles.

Remarque 5.7 L'analyse repose en fait sur la transformation de Fourier en x et Laplace en t . Il faut $\Re(\xi) \geq 0$ pour que la solution ne soit pas exponentiellement croissante en y . On cherche k , ξ et s tels qu'il existe des solutions non nulles de cette forme.

En injectant ces expressions dans les équations (5.23) cela donne :

$$\begin{cases} (s + ik M_\infty)^2 U_a - ik (ik U_a + \xi V_a) = 0, \\ (s + ik M_\infty)^2 V_a - \xi (ik U_a + \xi V_a) = 0, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} ((s + ik M_\infty)^2 + k^2) U_a = ik \xi V_a, \\ (s + ik M_\infty)^2 V_a - ik \xi U_a - \xi^2 V_a = 0. \end{cases}$$

Étant donné que $\Re(s) > 0$, on peut facilement montrer que $(s + ik M_\infty)^2 + k^2 \neq 0$. La division par ce terme est donc licite et on obtient :

$$\begin{cases} U_a = \frac{ik \xi}{(s + ik M_\infty)^2 + k^2} V_a, \\ (s + ik M_\infty)^2 V_a - ik \xi U_a - \xi^2 V_a = 0. \end{cases}$$

En injectant la première équation dans la deuxième on a :

$$\begin{cases} U_a = \frac{ik \xi}{(s + ik M_\infty)^2 + k^2} V_a, \\ (s + ik M_\infty)^2 V_a + \frac{k^2 \xi^2}{(s + ik M_\infty)^2 + k^2} V_a - \xi^2 V_a = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Nécessairement $V_a \neq 0$ car dans le cas contraire U_a serait elle aussi égale à 0. On peut donc diviser la deuxième équation par V_a :

$$(s + ik M_\infty)^2 + \frac{k^2 \xi^2}{(s + ik M_\infty)^2 + k^2} - \xi^2 = 0,$$

puis multiplier par $(s + ik M_\infty)^2 + k^2$:

$$(s + ik M_\infty)^2 ((s + ik M_\infty)^2 + k^2) - (s + ik M_\infty)^2 \xi^2 = 0,$$

d'où finalement :

$$\xi^2 = (s + ik M_\infty)^2 + k^2.$$

Nous appelons cette équation la relation de dispersion. Puisque $\Re(\xi) \geq 0$, en prenant la coupure de la racine sur \mathbb{R}_- on obtient :

$$\xi = \sqrt{(s + ik M_\infty)^2 + k^2}, \quad (5.34)$$

et puis à partir de (5.33) on obtient l'expression suivante de U_a :

$$U_a = \frac{ik}{\xi} V_a. \quad (5.35)$$

L'étape suivante de l'analyse de Kreiss consiste à prendre en compte la condition limite en injectant les expressions obtenues pour $U^{\varepsilon,1}$ et $V^{\varepsilon,1}$. Par ce biais, on va obtenir une équation caractéristique de la forme :

$$\Phi(s, k) = 0.$$

Désormais k joue le rôle d'un paramètre. L'analyse de Kreiss dit alors que les solutions de l'équation caractéristique $s(k)$ sont des fonctions continues de k . De plus nous avons les trois cas de figure suivants :

1. Si $\Re(s(k)) \leq C, \forall k \in \mathbb{R}$ alors le problème est bien posé.
2. Si $\Re(s(k)) \rightarrow +\infty$ quand $|k| \rightarrow +\infty$ alors le problème est mal posé.
3. Si $\Re(s(k)) \leq 0, \forall k \in \mathbb{R}$ alors le problème est stable.

C'est ce que résume la figure 5.5.

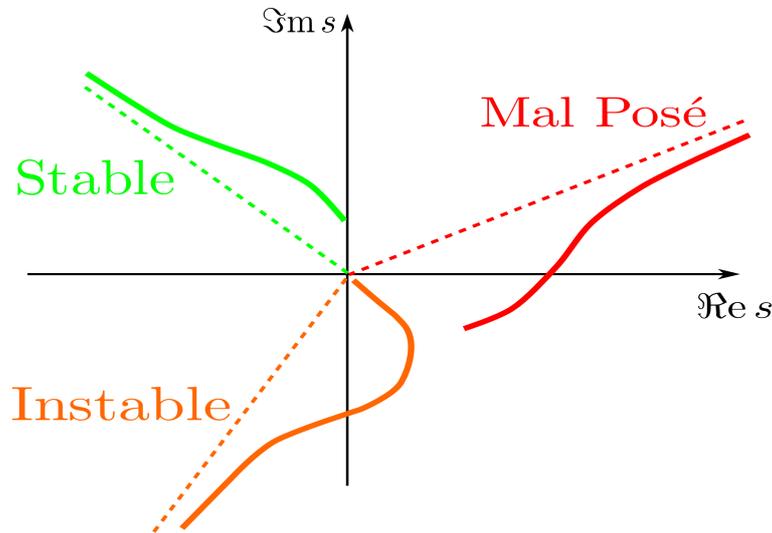


FIG. 5.5 – Illustration de l'analyse de Kreiss : 3 exemples type de comportement des branches de solution $s(k)$ de l'équation caractéristique, et le lien avec le caractère mal posé et la stabilité

Obtention de l'équation caractéristique Nous devons maintenant prendre en compte la condition limite (5.24) que l'on rappelle ici :

$$V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)] + \varepsilon (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) = 0,$$

En utilisant les expressions (5.32) on obtient¹ :

$$V_a - k^2 \widetilde{\mathbf{T}}_M V_a + \varepsilon (ik U_a + \xi V_a) = 0, \quad (5.36)$$

où $\widetilde{\mathbf{T}}_M = E[\widetilde{U}(1)]$. On obtient $E[\widetilde{U}(1)]$ grâce à la définition (5.19) de \mathbf{T}_M :

$$(s + ik M(Y))^2 \widetilde{U}(1) + k^2 E[\widetilde{U}(1)] = 1.$$

En divisant par $(s + ik M(Y))^2$ et en appliquant E on obtient :

$$E[\widetilde{U}(1)] \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ik M(Y))^2} dY \right) = \int_0^1 \frac{dY}{(s + ik M(Y))^2}. \quad (5.37)$$

En multipliant² (5.36) par

$$\left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ik M(Y))^2} dY \right)$$

¹Rigoureusement cela revient à appliquer la transformation de Fourier-Laplace.

²On suppose que ce terme est non nul. Dans le cas contraire l'opérateur \mathbf{T}_M est mal défini (cf. remarque 5.4) et le problème est mal posé.

et en utilisant l'égalité précédente (5.37) on obtient après simplification :

$$V_a + \varepsilon (ik U_a + \xi V_a) \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ik M(Y))^2} dY \right) = 0.$$

Remarque 5.8 Nous venons en particulier de montrer que l'opérateur $\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M$ est inversible. En effet, son équation caractéristique

$$1 - k^2 \widetilde{\mathbf{T}}_M = 0$$

se ramène à l'équation $1 = 0$ qui n'a pas de solutions, sous réserve que l'équation limite du tube soit bien posée. Cela prouve que le problème est bien posé et que l'opérateur sous-jacent est inversible.

En utilisant l'expression (5.35) de U_a en fonction de V_a et en divisant le tout par $V_a \neq 0$ on a :

$$1 + \varepsilon \left(\xi - \frac{k^2}{\xi} \right) \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ik M(Y))^2} dY \right) = 0,$$

que l'on simplifie comme suit :

$$1 + \varepsilon \frac{(s + ik M_\infty)^2}{\xi} \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ik M(Y))^2} dY \right) = 0.$$

En multipliant par ξ et en utilisant son expression (5.34) cette égalité devient :

$$\sqrt{k^2 + (s + ik M_\infty)^2} + \varepsilon (s + ik M_\infty)^2 (1 - k^2 F^{\text{CL}}(is)) = 0, \quad (5.38)$$

où la fonction F^{CL} , qui commence à être bien connue du lecteur, est définie par (5.21). En introduisant les deux paramètres sans dimension $\varepsilon|k|$ et $\sigma = s/k$ on obtient :

$$\boxed{\sqrt{1 + (\sigma + i M_\infty)^2} + \varepsilon|k| (\sigma + i M_\infty)^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)) = 0.} \quad (5.39)$$

Caractère bien posé Nous ne donnons ici que les grandes lignes du raisonnement. Comme nous l'avons précisé précédemment, lorsque l'on s'intéresse au caractère bien posé c'est le comportement lorsque $|k| \rightarrow +\infty$ qui est déterminant. Pour montrer que le problème est bien posé, il faut montrer que les branches de solutions $s(k)$ vérifient :

$$k \rightarrow \Re(s(k)) \text{ reste borné supérieurement quand } |k| \rightarrow +\infty.$$

Les fonctions $s(k)$ sont des fonctions continues de k . Ainsi, elles ne peuvent exploser que lorsque $|k|$ tend vers $+\infty$. C'est pourquoi c'est leur comportement quand $|k|$ tend vers $+\infty$ qui va nous intéresser. Nous avons posé $\sigma = s/k$, ce qui a donné l'équation caractéristique (5.39). σ représente une vitesse. L'autre paramètre important est $\varepsilon|k|$ qui est le rapport entre la largeur de la couche limite et la longueur d'onde. Nous montrons maintenant par l'absurde que $|\sigma(k)|$ ne peut tendre vers $+\infty$ lorsque $|k|$ tend vers $+\infty$. En effet, en divisant (5.39) par $(\sigma + i M_\infty)^2$ et en faisant tendre $|k|$ vers $+\infty$ on aurait :

$$\lim_{|k| \rightarrow +\infty} \varepsilon|k| (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma(k))) = 0,$$

ce qui est impossible puisque $\lim_{|\sigma| \rightarrow +\infty} F^{\text{CL}}(i\sigma) = 0$. Ainsi $k \rightarrow \sigma(k)$ est borné. On considère une sous-suite qui converge vers σ^* . En passant à la limite lorsque $|k|$ tend vers $+\infty$ dans (5.39) on obtient :

$$(\sigma^* + iM_\infty)^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma^*)) = 0.$$

Nous affirmons alors que le problème est bien posé si et seulement si cette équation n'a que des solutions imaginaires pures.

Remarque 5.9 *Puisque $(\sigma^* + iM_\infty)^2$ n'a pour racines que $-iM_\infty$ qui est imaginaire pur, on est ramené à s'intéresser à l'équation :*

$$F^{\text{CL}}(i\sigma^*) = 1.$$

La démonstration de l'affirmation précédente utilise le théorème des fonctions implicites sur la fonction :

$$G(\eta, \sigma) = \eta \sqrt{1 + (\sigma + iM_\infty)^2} + (\sigma + iM_\infty)^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)),$$

où l'on a posé $\eta = \frac{1}{\varepsilon|k|}$. On veut appliquer ce théorème en $(0, \sigma^*)$. Pour cela il faut que

$$\frac{\partial G}{\partial \sigma}(0, \sigma^*) \neq 0.$$

Pour que cette dérivée soit nulle il faudrait que $F^{\text{CL}'}(i\sigma^*) = 0$, sachant que $F^{\text{CL}}(i\sigma^*) = 1$. On **conjecture** que ce n'est jamais le cas. En appliquant le théorème des fonction implicites on obtient :

$$\sigma(k) = \sigma^* + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}(0, \sigma^*) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \sigma}(0, \sigma^*) \eta + O(\eta^2),$$

ce qui donne :

$$s(k) = \sigma^* k + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}(0, \sigma^*) \right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial \sigma}(0, \sigma^*) + O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Ainsi $k \rightarrow \Re(s(k))$ reste borné supérieurement quand $|k| \rightarrow +\infty$ si et seulement si σ^* est imaginaire pur. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.2 *Le problème approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24), est bien posé si et seulement si l'équation*

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1$$

n'a que des solutions réelles.

On retrouve la même équation caractéristique que dans le cas de l'équation limite du tube étudiée tout au long de la première partie de cette thèse (cf. par exemple le corollaire 2.2 page 40). La seule différence est celle existant entre les fonctions F et F^{CL} , déjà discutée dans la remarque 5.4. À la lumière de cette remarque on peut énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 5.1 *Soit un profil $y \rightarrow M(y)$, avec $y \in [-1, 1]$, stable (resp. instable) au sens de la définition 2.1 page 30. Alors le profil $Y \rightarrow M(2Y - 1)$, avec $Y \in [0, 1]$, est tel que le problème approché, (5.23)-(5.24), est bien posé (resp. mal posé).*

On peut donc se servir des résultats de stabilité et d'instabilité obtenus au chapitre 2 pour démontrer des résultats sur le caractère bien posé du problème d'intérêt. Par exemple, le théorème suivant est une simple conséquence du théorème 2.3 page 54.

Théorème 5.1 *Le problème approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24), est bien posé dès que l'une de ces conditions est satisfaite :*

1. M est strictement convexe (resp. concave).
2. M est strictement croissante (resp. décroissante) et il existe $y_S \in]0, 1[$ tel que M est concave (resp. convexe) sur $]0, y_S[$ et convexe (resp. concave) sur $]y_S, 1[$.

DÉMONSTRATION. On rappelle que la fonction F^{CL} associée au profil $Y \rightarrow M(Y)$ défini sur $[0, 1]$ n'est autre que la fonction F associée au profil $y \rightarrow M\left(\frac{y+1}{2}\right)$ défini sur $[-1, 1]$. Il suffit alors de voir que si $Y \rightarrow M(Y)$ vérifie les hypothèses du théorème alors $y \rightarrow M\left(\frac{y+1}{2}\right)$ vérifie celle du théorème 2.3 page 54. On conclut en utilisant le corollaire précédent. □

Approche numérique Nous avons vu que nous pouvons simplement déduire des résultats de stabilité de la première partie, des résultats sur le caractère bien posé du problème approché, (5.23)-(5.24). Nous pouvons aussi étudier numériquement l'équation caractéristique (5.38). Nous pouvons déjà montrer la propriété suivante :

Propriété 5.2 *Si (k, s) est solution de (5.38) alors $(-k, -s)$ et $(k, -\bar{s})$ sont également solutions.*

Cette propriété montre que les solutions $s(k)$ représentées dans le plan complexe présentent une symétrie par rapport à l'origine et une symétrie par rapport à l'axe imaginaire.

Nous présentons maintenant des résultats numériques de résolution de l'équation caractéristique (5.38) qui illustrent bien l'analyse de Kreiss :

- On commence par le cas d'un profil quadratique, $M(Y) = 1 - Y^2$, qui est convexe. Par conséquent, le problème approché est bien posé (cf. théorème 5.1). De plus, le profil global est convexe de telle sorte que l'on s'attend à ce que le problème soit stable. La figure suivante représente les deux branches de solutions $s(k)$ de l'équation (5.38) :

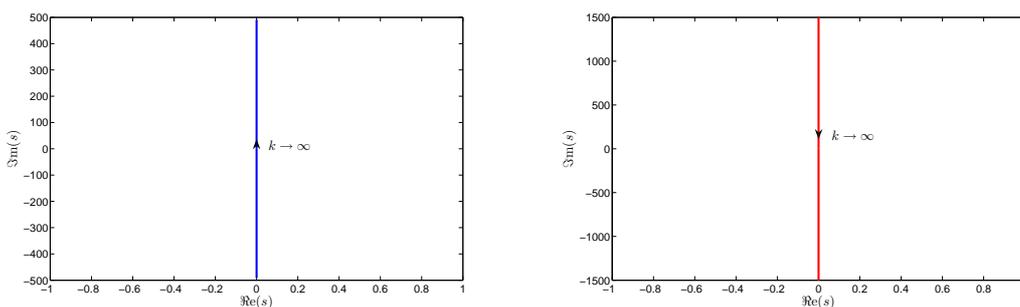


FIG. 5.6 – Résolution numérique de l'équation caractéristique (5.38) : cas bien posé et stable

On remarque que la partie réelle des solutions reste nulle : le problème est stable et bien posé.

- On considère maintenant le cas d'un profil quadratique, $M(Y) = (2Y - 1)^2$, qui est convexe. Par conséquent, le problème approché est bien posé (cf. théorème 5.1). La figure suivante représente les branches de solutions $s(k)$ de l'équation (5.38) :

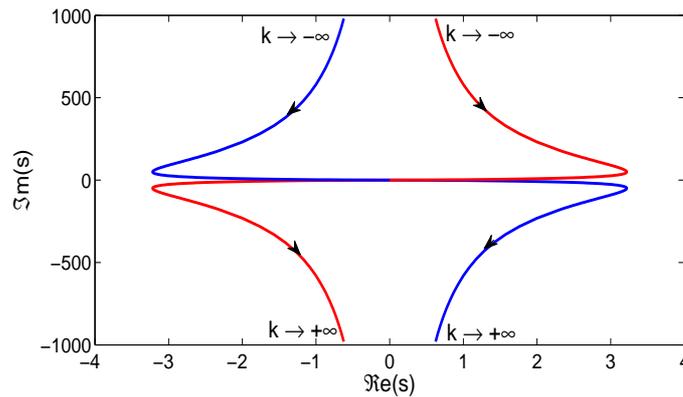


FIG. 5.7 – Résolution numérique de l'équation caractéristique (5.38) : cas bien posé mais instable

On remarque que la partie réelle des solutions reste bornée : le problème est bien posé. En revanche le problème est instable puisque la partie réelle des solutions peut être positive. Cela provient du fait que cette fois-ci le profil global n'est plus convexe.

- Pour construire un profil tel que le le problème approché soit mal posé, on se sert du travail effectué dans la première partie de cette thèse et plus précisément au chapitre 2 dans la section 2.5. Le corollaire 2.5 page 69 nous dit que le profil $y \rightarrow 0.5 \tanh(2y)$ est instable au sens de la définition 2.1 page 30. Le corollaire 5.1 dit alors que le profil $Y \rightarrow 0.5 \tanh(2(2Y-1))$ est tel que le problème approché (5.23)-(5.24) est mal posé. La figure suivante représente les branches de solutions $s(k)$ de l'équation (5.38) pour ce profil :

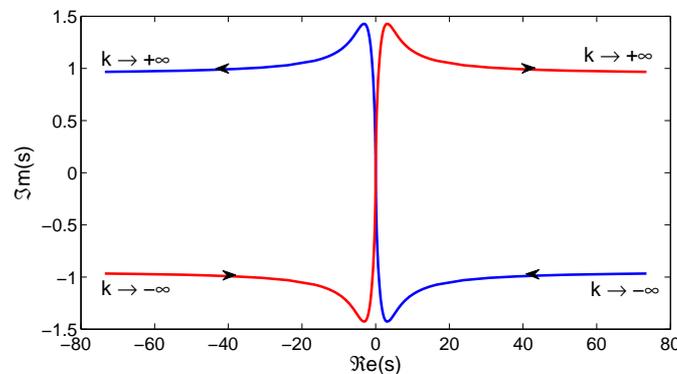


FIG. 5.8 – Résolution numérique de l'équation caractéristique (5.38) : cas mal posé

On remarque que la partie réelle des solutions tend vers l'infini quand $|k|$ tend vers $+\infty$: le problème est mal posé.

5.4.2 Ondes de surface

On cherche des solutions de type "ondes de surface" au problème approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24). On se demande si notre nouvelle condition de

paroi est susceptible de guider des ondes. On cherche donc des solutions de la forme :

$$\begin{cases} U^{\varepsilon,1}(x, y, t) = U(y) e^{ikx} e^{-i\omega t}, \\ V^{\varepsilon,1}(x, y, t) = V(y) e^{ikx} e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (5.40)$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ et $(U, V) \in L^2(]-\infty, 0])^2$ non tous deux nuls.

Les équations (5.23) dans le demi-espace $y < 0$ donnent :

$$\begin{cases} (-i\omega + ik M_\infty)^2 U - ik \left(ikU + \frac{dV}{dy} \right) = 0, \\ (-i\omega + ik M_\infty)^2 V - \frac{d}{dy} \left(ikU + \frac{dV}{dy} \right) = 0. \end{cases}$$

Après avoir posé $\lambda = \frac{\omega}{k}$ et $\gamma_\infty = \lambda - M_\infty$ on obtient :

$$\begin{cases} k^2(1 - \gamma_\infty^2)U = ik \frac{dV}{dy}, \\ k^2\gamma_\infty^2 V + ik \frac{dU}{dy} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0. \end{cases}$$

En supposant que $k^2(1 - \gamma_\infty^2) \neq 0$ on obtient :

$$\begin{cases} U = \frac{i}{k(1 - \gamma_\infty^2)} \frac{dV}{dy}, \\ \frac{d^2 V}{dy^2} = k^2(1 - \gamma_\infty^2)V, \end{cases} \quad (5.41)$$

où on a injecté la première équation dans la deuxième. Nous pouvons résoudre explicitement la deuxième équation. On note $\xi_\pm = \pm \sqrt{k^2(1 - \gamma_\infty^2)}$ (la coupure de la fonction racine étant prise sur \mathbb{R}_- et la racine est telle que $\Re(\sqrt{z}) > 0$). Puisque l'on cherche une solution $V \in L^2(]-\infty, 0])$, il est nécessaire d'avoir

$$(\mathcal{H}) \quad (\lambda - M_\infty)^2 < 1$$

afin que ξ_+ et ξ_- ne soient pas tous deux imaginaires purs. En résolvant l'équation on obtient l'expression suivante pour V :

$$V(y) = Ae^{\xi_+ y} + Be^{\xi_- y}.$$

Compte tenu du choix de la racine : $\Re(\xi_+) > 0$ et $\Re(\xi_-) < 0$. Pour que V soit dans $L^2(]-\infty, 0])$ il faut que $B = 0$ (afin de supprimer le terme exponentiellement croissant quand $y \rightarrow -\infty$). On a donc $V(y) = Ae^{\xi_+ y}$, ce qui grâce à la première équation de (5.41) nous donne U . En résumé :

$$\begin{cases} V(y) = Ae^{\xi_+ y} \\ U(y) = A \frac{ik}{\xi_+} e^{\xi_+ y} \end{cases} \quad (5.42)$$

Nous allons maintenant tenir compte de la condition limite (5.24) que l'on rappelle ici :

$$V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) + \partial_x^2 \mathbf{T}_M [V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)] + \varepsilon (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) = 0.$$

Compte tenu de (5.40) on obtient :

$$V(0) - k^2 \widetilde{\mathbf{T}}_M V(0) + \varepsilon (ik U(0) + \partial_y V(0)) = 0, \quad (5.43)$$

où $\widetilde{\mathbf{T}}_M = E[\widetilde{U}(1)]$ et $E[\widetilde{U}(1)]$ est donné par (5.37), expression dans laquelle s doit être remplacé par $-i\omega$ compte tenu des notations de cette partie. Attention cette expression n'est valable que si $\lambda \notin \text{Im } M$. Grâce à (5.37), (5.43) devient :

$$V(0) + \left(1 - \int_0^1 \frac{1}{(\lambda - M(Y))^2} dY \right)^{-1} \int_0^1 \frac{dY}{(\lambda - M(Y))^2} V(0) + \varepsilon (ik U(0) + \partial_y V(0)) = 0.$$

En multipliant par $\left(1 - \int_0^1 \frac{1}{(\lambda - M(Y))^2} dY \right)$ on obtient :

$$V(0) + \varepsilon \left(1 - \int_0^1 \frac{1}{(\lambda - M(Y))^2} dY \right) (ik U(0) + \partial_y V(0)) = 0,$$

qui se réécrit :

$$V(0) + \varepsilon (1 - F^{\text{CL}}(\lambda)) (ik U(0) + \partial_y V(0)) = 0. \quad (5.44)$$

En utilisant les expressions (5.42) de U et V cette équation donne :

$$A + \varepsilon (1 - F^{\text{CL}}(\lambda)) \left(-\frac{k^2}{\xi_+} + \xi_+ \right) A = 0.$$

Il faut $A \neq 0$ pour que U et V ne soient pas tous deux nuls. On divise donc par A pour obtenir :

$$1 + \varepsilon (1 - F^{\text{CL}}(\lambda)) \left(-\frac{k^2}{\xi_+} + \xi_+ \right) = 0,$$

qui se réécrit comme suit en utilisant la définition de ξ_+ :

$$\boxed{1 = \varepsilon \frac{|k|(\lambda - M_\infty)^2}{\sqrt{1 - (\lambda - M_\infty)^2}} (1 - F^{\text{CL}}(\lambda))}. \quad (5.45)$$

On va maintenant travailler sur cette équation de dispersion.

Résultats d'existence On peut facilement montrer le

Lemme 5.1 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant les trois conditions :

- (C1) $\lambda \notin \text{Im } M$,
- (C2) $(\lambda - M_\infty)^2 < 1$,
- (C3) $F^{\text{CL}}(\lambda) < 1$,

alors l'équation de dispersion (5.45) a exactement deux solutions réelles opposées :

$$k_\pm = \pm \frac{\sqrt{1 - (\lambda - M_\infty)^2}}{\varepsilon (\lambda - M_\infty)^2 (1 - F^{\text{CL}}(\lambda))}. \quad (5.46)$$

Remarque 5.10 Les deux premières conditions (C1) et (C2) ont été introduites pour obtenir l'équation de dispersion. La troisième condition assure la positivité de $|\kappa|$. Compte tenu de la complexité du problème nous n'avons pu l'exprimer comme un problème aux valeurs propres. Néanmoins on sent que la condition (C2) correspond au spectre continu dû au caractère non borné du domaine, et la condition (C1) correspond au spectre continu introduit par notre condition au bord approchée.

Remarque 5.11 On montre facilement que la condition (C2) est équivalente à :

$$M_\infty - 1 < \lambda < 1 + M_\infty.$$

Ainsi, λ est compris entre les deux vitesses acoustiques classiques dans un écoulement constant égal à M_∞ .

On obtient, comme une conséquence directe du travail que nous avons mené et du lemme précédent :

Proposition 5.3 Pour qu'il existe des ondes de surface il suffit que l'intervalle

$$I = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} / \lambda \notin \text{Im } M \quad \text{et} \quad (\lambda - M_\infty)^2 < 1 \right\}$$

soit non vide et qu'il existe $\lambda \in I$ tel que :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) < 1.$$

La question est maintenant de savoir quand cette condition n'est pas remplie. C'est le cas :

1. soit si $I = \emptyset$,
2. soit si $F^{\text{CL}}(\lambda) > 1$ pour tout $\lambda \in I$.

On montre simplement que la première condition $I = \emptyset$ est équivalente à :

$$]M_\infty - 1, M_\infty + 1[\subset \text{Im } M.$$

Ainsi pour un profil continu sur $] - \infty, 1[$, dès que M est monotone sur $[0, 1]$, on sait que I n'est pas vide. La deuxième condition est beaucoup plus difficile à étudier. Bien entendu, cela dépend du profil et il n'est pas évident de montrer un résultat dans le cas général. Néanmoins on peut donner une réponse pour une grande classe de profils :

Proposition 5.4 Soit un profil $M \in C^1(]0, 1[)$ non constant, qui atteint son minimum (resp. son maximum), M_∞ , en 0^3 . Alors il existe un unique $\lambda_- \in]M_\infty - 1, M_\infty[$ tel que $F^{\text{CL}}(\lambda_-) = 1$ (resp. il existe un unique $\lambda_+ \in]M_\infty, M_\infty + 1[$ tel que $F^{\text{CL}}(\lambda_+) = 1$). Alors $\forall \lambda \in]M_\infty - 1, \lambda_-[$ (resp. $\forall \lambda \in]\lambda_+, M_\infty + 1[$) il existe deux solutions (opposées) à l'équation de dispersion (5.45), données par (5.46). Il existe donc des ondes de surface.

DÉMONSTRATION. Nous allons faire la démonstration dans le cas où le profil atteint son minimum en 0. La preuve est similaire dans le cas où elle atteint son maximum en 0, et est donc laissée au lecteur. Puisque $M \in C^1(]0, 1[)$ on a⁴ :

$$\lim_{\lambda \nearrow M_\infty} F^{\text{CL}}(\lambda) = +\infty.$$

Par ailleurs⁵ $\forall \lambda \in] - \infty, M_\infty[$ on a :

$$\frac{d}{d\lambda} F^{\text{CL}}(\lambda) = -2 \int_0^1 \frac{1}{(\lambda - M(Y))^3} dy > 0,$$

³Cela signifie en particulier que le profil de Mach est continu sur $] - \infty, 1[$.

⁴cf. remarque 2.5 page 41

⁵Nous avons déjà montré ce résultat dans la proposition 2.4 page 40.

et donc F^{Cl} est strictement croissante sur cet intervalle. On montre de plus que

$$F^{\text{Cl}}(M_\infty - 1) = \int_0^1 \frac{1}{(M_\infty - 1 - M(Y))^2} dy < \int_0^1 \frac{1}{(M_\infty - 1 - M_\infty)^2} dy = 1.$$

Par conséquent, il existe un unique $\lambda_- \in]M_\infty - 1, M_\infty[$ tel que $F^{\text{Cl}}(\lambda_-) = 1$.

Pour conclure la démonstration il suffit d'appliquer le lemme 5.1. Pour cela, il faut vérifier que $\forall \lambda \in]M_\infty - 1, \lambda_-[$ les trois conditions (C1), (C2) et (C3) sont satisfaites :

1. (C1) est clairement satisfaite puisque λ_- est strictement inférieur à M_∞ qui est le minimum de $M(Y)$.
2. On montre que (C2) est satisfaite en utilisant le fait que $\lambda_- < M_\infty + 1$.
3. F^{Cl} est croissante sur $]M_\infty - 1, \lambda_-[$ et vaut 1 en λ_- , donc $\forall \lambda \in]M_\infty - 1, \lambda_-[$:

$$F^{\text{Cl}}(\lambda) < 1,$$

et la condition (C3) est satisfaite. Finalement, on conclut quant à l'existence d'ondes de surface en utilisant la proposition 5.3.

Remarque 5.12 *On voit que les vitesses λ sont comprises entre $M_\infty - 1$ et λ_- . De plus, compte tenu de l'expression (5.46), on observe que lorsque λ tend vers λ_- alors $|k|$ tend vers $+\infty$. Lorsque λ tend vers $M_\infty - 1$, k tend vers 0. Ainsi, à haute fréquence on "tend" vers le problème limite du tube, et à basse fréquence on "tend" vers le problème d'acoustique en écoulement constant égal à M_∞ . Cela s'explique par le fait qu'à haute fréquence, c'est-à-dire faible longueur d'onde, l'onde "voit" la couche limite.*

□

APPLICATION : nous présentons maintenant un exemple illustrant ce résultat, celui d'un profil linéaire $M(Y) = aY$ avec $a \neq 0$. On a alors :

$$F^{\text{Cl}}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda - a)},$$

et les solutions de l'équation $F^{\text{Cl}}(\lambda) = 1$ sont :

$$\lambda_{\pm} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}$$

On va distinguer les cas croissant et décroissant :

- On suppose $a > 0$, ce qui correspond à un profil croissant qui atteint son minimum en 0. La proposition précédente nous dit qu'il existe des ondes de surface avec des vitesses λ comprises dans l'intervalle :

$$]M_\infty - 1, \lambda_-[,$$

qui devient dans le cas présent :

$$\left] -1, \frac{a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} \right[.$$

- On suppose $a < 0$, ce qui correspond à un profil décroissant qui atteint son maximum en 0. Cette fois-ci, la proposition précédente nous dit qu'il existe des ondes de surface avec des vitesses λ comprises dans l'intervalle :

$$\left] \frac{a + \sqrt{a^2 + 4}}{2}, +1 \right[.$$

Remarque 5.13 Quand $a \rightarrow 0$ on voit que $\lambda_- \rightarrow -1$ et $\lambda_+ \rightarrow 1$. Par conséquent, l'intervalle des vitesses λ des ondes de surface se réduit jusqu'à devenir vide à la limite pour $a = 0$.

Cette remarque constitue une habile transition vers le cas d'un profil constant dans la couche limite, cas qui n'est pas pris en compte par la proposition 5.4. On considère donc un profil constant $M(Y) = M_{CL}$ dans la couche limite. On autorise cette constante à être différente de M_∞ . On cherche à savoir quand sont satisfaites les conditions (C1), (C2) et (C3) du lemme 5.1. Commençons par calculer $F^{CL}(\lambda)$:

$$F^{CL}(\lambda) := \int_0^1 \frac{dY}{(\lambda - M(Y))^2} = \frac{1}{(\lambda - M_{CL})^2}$$

Pour que la condition (C3) soit satisfaite il faut :

$$\frac{1}{(\lambda - M_{CL})^2} < 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda M_{CL} + M_{CL}^2 - 1 > 0$$

Il s'agit de l'étude du signe d'un polynôme de degré 2 en λ . Ses deux racines sont $M_{CL} + 1$ et $M_{CL} - 1$. Le polynôme est donc positif pour

$$\lambda \notin [M_{CL} - 1, M_{CL} + 1]. \quad (5.47)$$

Trois cas de figures se présentent :

1. Si $M_{CL} = M_\infty$ alors (5.47) est incompatible avec la condition (C2) et il n'existe pas d'ondes de surface, sauf peut-être telles que

$$\frac{\omega}{k} \in \text{Im } M.$$

2. Si $M_{CL} > M_\infty$ alors $\forall \lambda \in]M_\infty - 1, M_\infty + 1[\cap]-\infty, M_{CL} - 1[$, on montre que les trois conditions (C1), (C2) et (C3) sont satisfaites et il existe deux solutions (opposées) à l'équation de dispersion (5.45), celles-ci étant données par (5.46). Par conséquent, il existe des ondes de surface.
3. Si $M_{CL} < M_\infty$ alors $\forall \lambda \in]M_\infty - 1, M_\infty + 1[\cap]M_{CL} + 1, \infty[$, on montre que les trois conditions (C1), (C2) et (C3) sont satisfaites et il existe deux solutions (opposées) à l'équation de dispersion (5.45), celles-ci étant données par (5.46). Par conséquent, il existe des ondes de surface.

Approche numérique On peut aussi résoudre numériquement (5.45) et tracer la solution λ en fonction de k . La figure 5.9 représente λ en fonction de k pour le profil $M(Y) = Y$.

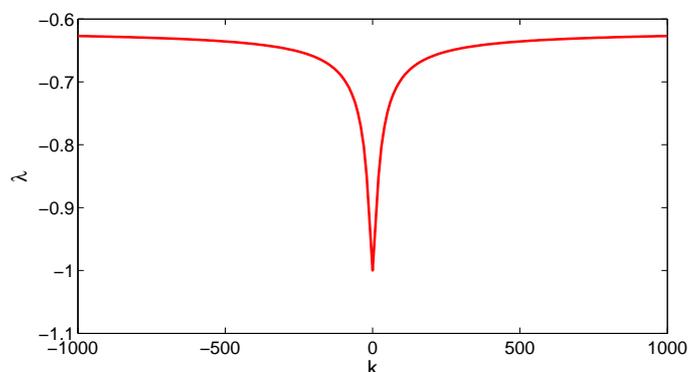


FIG. 5.9 – Résolution numérique de l'équation de dispersion (5.45) dans le plan (k, λ)

On voit que λ est compris entre $M_\infty - 1 = -1$ et $\lambda_- = (1 - \sqrt{5})/2$. De plus, on observe que lorsque $|k|$ tend vers $+\infty$, λ tend vers λ_- ; lorsque $|k|$ tend vers 0, λ tend vers $M_\infty - 1$. Si on représente $\omega = \lambda k$ en fonction de k on obtient la figure suivante :

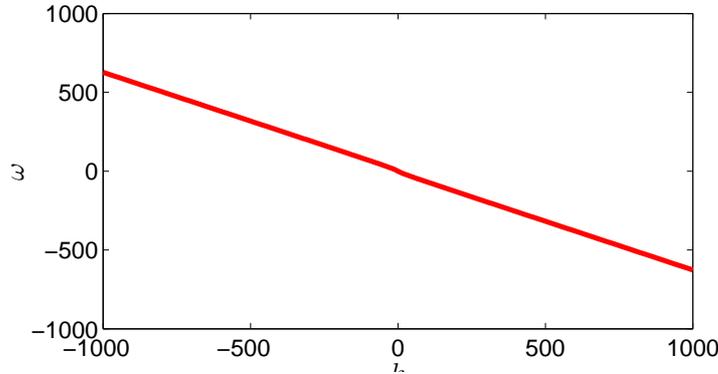


FIG. 5.10 – Résolution numérique de l'équation de dispersion (5.45) dans le plan (k, ω)

5.4.3 Réflexion

On cherche cette fois à observer la réflexion d'une onde plane sur la paroi approchée. Pour cela, nous cherchons, comme dans la section précédente, des solutions du problème approché (5.23)-(5.24), de la forme :

$$\begin{cases} U^{\varepsilon,1}(x, y, t) = U(y) e^{ikx} e^{-i\omega t}, \\ V^{\varepsilon,1}(x, y, t) = V(y) e^{ikx} e^{-i\omega t}, \end{cases}$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ et $(U, V) \in L^2(]-\infty, 0])^2$ non tous deux nuls. (U, V) représente l'onde totale que l'on cherchera à décomposer en la somme d'une onde incidente et d'une onde réfléchie. La démarche est similaire à celle de la partie précédente. Les équations (5.23) dans le demi-espace $y < 0$ donnent :

$$\begin{cases} U = \frac{i}{k(1 - \gamma_\infty^2)} \frac{dV}{dy}, \\ \frac{d^2 V}{dy^2} = k^2(1 - \gamma_\infty^2)V, \end{cases}$$

Nous pouvons résoudre explicitement la deuxième équation. Nous nous intéressons à la réflexion d'une onde plane sur la paroi, c'est pourquoi on considère les cas où $k^2(1 - \gamma_\infty^2)$ est négatif⁶. On a alors :

$$V(y) = Ae^{i\xi y} + Be^{-i\xi y},$$

où l'on a posé $\xi = \sqrt{-k^2(1 - \gamma_\infty^2)}$ (la coupure de la fonction racine étant prise sur \mathbb{R}_-). Clairement, $Ae^{i\xi y}$ représente l'onde incidente et $Be^{-i\xi y}$ l'onde réfléchie. En reportant l'expression obtenue pour V dans l'équation vérifiée par U , on a finalement les expressions suivantes :

$$\begin{cases} V(y) = Ae^{i\xi y} + Be^{-i\xi y}, \\ U(y) = \frac{k}{\xi}(Ae^{i\xi y} - Be^{-i\xi y}), \end{cases} \quad (5.48)$$

⁶C'est ici que la démarche se distingue de celle de la section précédente. On choisit $k^2(1 - \gamma_\infty^2) < 0$ de telle sorte que ξ_\pm sont tous deux imaginaires purs.

et donc :

$$\begin{pmatrix} U^{\varepsilon,1}(x, y, t) \\ V^{\varepsilon,1}(x, y, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} A e^{i(kx + \xi y - \omega t)} + \begin{pmatrix} -\frac{k}{\xi} \\ 1 \end{pmatrix} B e^{i(kx - \xi y - \omega t)} \quad (5.49)$$

où l'on a décomposé l'onde en une partie incidente et une partie réfléchie. On remarque que la loi de Descartes est vérifiée. Les variables $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) > 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$ sont reliées par la relation de dispersion :

$$\xi^2 = -k^2(1 - \gamma_\infty^2) \quad \Leftrightarrow \quad \xi^2 + k^2 = (\omega - kM_\infty)^2.$$

Nous voulons maintenant calculer le coefficient de réflexion. Pour cela, nous devons tenir compte de la condition limite (5.24). Plus précisément, nous allons utiliser l'expression (5.44) obtenue dans la section précédente. En utilisant les expressions (5.48) de U et V cette équation donne :

$$(A + B) + \varepsilon(A - B)(1 - F^{\text{CL}}(\lambda)) \left(\frac{ik^2}{\xi} + i\xi \right) = 0. \quad (5.50)$$

On va maintenant calculer le coefficient de réflexion⁷ $R(k, \omega)$, qui vaut, compte tenu de (5.49) :

$$R(k, \omega) = \frac{|B|}{|A|}$$

Grâce à (5.50) on obtient en divisant par A :

$$1 + \frac{B}{A} = \varepsilon G(k, \omega) \left(1 - \frac{B}{A} \right)$$

avec

$$G(k, \omega) = -(1 - F^{\text{CL}}(\lambda)) \left(\frac{ik^2}{\xi} + i\xi \right).$$

On a alors :

$$\frac{B}{A} = \frac{\varepsilon G(k, \omega) - 1}{1 + \varepsilon G(k, \omega)}$$

et compte tenu du fait que $G(k, \omega) \in i\mathbb{R}$ on a finalement :

$$R(k, \omega) = 1.$$

Pour $\varepsilon = 0$, cas d'une paroi rigide, on retrouve bien :

$$\frac{B}{A} = -1.$$

En incidence normale, c'est-à-dire pour $k = 0$ on obtient, après un court calcul :

$$G(0, \omega) = -i|\omega|,$$

ce qui donne :

$$\frac{B}{A} = \frac{1 + i|\omega| \varepsilon}{-1 + i|\omega| \varepsilon}.$$

L'incidence normale est importante car souvent utilisée pour des modèles approchés.

⁷On a exprimé R comme une fonction de k et ω . On aurait pu poser, de manière plus classique, $k = |k| \cos \theta$ et $\xi = |k| \sin \theta$ et exprimer R en fonction de θ et $|k|$. À la vue du résultat final, cela n'a pas d'importance.

5.5 COMPLÉMENTS : APPROCHE PAR LES ÉQUATIONS D'EULER LINÉARISÉES

Le modèle approché (5.23)-(5.24) a été obtenu en considérant les équations de Galbrun. Qu'aurait-on obtenu si nous avions plutôt utilisé les équations d'Euler linéarisées ? C'est à cette question et à bien d'autres encore que nous allons répondre dans cette section.

5.5.1 Position du problème

Nous considérons le domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \varepsilon[$ (cf. figure 5.11). Nous supposons que ce

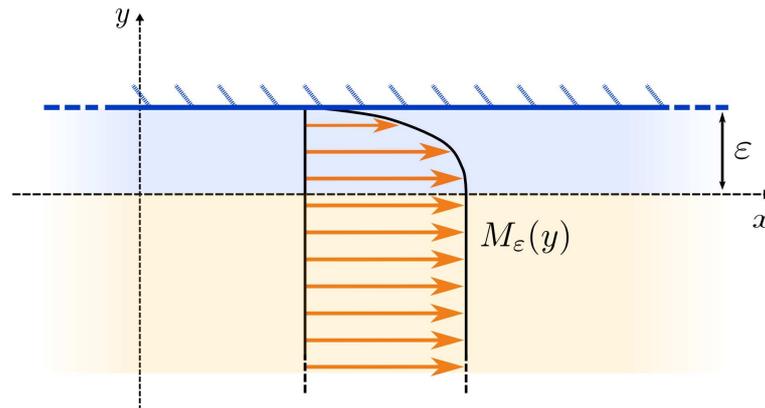


FIG. 5.11 – Géométrie du problème

domaine est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Les équations d'Euler linéarisées (1) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + (M_\varepsilon)'(y) v_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{array} \right. , \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (5.51)$$

où $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ représente la perturbation de la vitesse et p_ε la perturbation de pression. On associe à ces équations des données initiales à support dans le demi-espace $y < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon(x, y, 0) = u_0(x, y), \\ v_\varepsilon(x, y, 0) = v_0(x, y), \\ p_\varepsilon(x, y, 0) = p_0(x, y). \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons fait au début de ce chapitre, on se restreint à une classe particulière de profils :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), & 0 < y < \varepsilon \\ M_\infty, & y < 0 \end{cases} \quad \text{avec } M \in L^\infty(]0, 1[).$$

De plus, on suppose que $M_\varepsilon \in W^{1,\infty}([-\infty, 1])$. On complète ces équations par une condition de paroi rigide en $y = \varepsilon$:

$$v_\varepsilon(x, \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Nous commençons par appliquer la transformation de Fourier :

$$u(x, y, t) \longrightarrow \widehat{u}(k, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) e^{-ikx} dx$$

ce qui donne le système 1D (en espace) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{u}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{u}_\varepsilon + ik \widehat{p}_\varepsilon + (M_\varepsilon)'(y) \widehat{v}_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial \widehat{v}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{v}_\varepsilon + \frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{p}_\varepsilon + ik \widehat{u}_\varepsilon + \frac{\partial \widehat{v}_\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{array} \right. , \quad (k, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (5.52)$$

Lorsque k est fixé, ce problème d'évolution est bien posé dans $L^2([-\infty, \varepsilon])$ et nous avons une estimation a priori du type :

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} (|\widehat{p}_\varepsilon|^2 + |\widehat{u}_\varepsilon|^2 + |\widehat{v}_\varepsilon|^2) dy \leq \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon} (|\widehat{p}_0|^2 + |\widehat{u}_0|^2 + |\widehat{v}_0|^2) dy \right] \exp(C|k|t)$$

pour une certaine constante C . Par conséquent, pour $\Re(s)$ assez grand par rapport à k (mais indépendant de ε) on peut définir la transformation de Laplace en temps de $(\widehat{u}_\varepsilon, \widehat{v}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon)$. On rappelle la définition de la transformée de Laplace :

$$\widehat{u}(k, y, t) \longrightarrow \widetilde{u}(k, y, s) = \int_0^{+\infty} \widehat{u}(k, y, t) e^{-st} dt.$$

Après avoir appliqué cette transformation à (5.52) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon + M'_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + ik \widetilde{p}_\varepsilon = \widehat{u}_0, \\ \gamma_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} = \widehat{v}_0, \\ \gamma_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon + ik \widetilde{u}_\varepsilon + \frac{\partial \widetilde{v}_\varepsilon}{\partial y} = \widehat{p}_0, \end{array} \right. \quad (5.53)$$

où $(\widehat{u}_0, \widehat{v}_0, \widehat{p}_0)$ désigne la transformée de Fourier de la donnée initiale (u_0, v_0, p_0) et où nous avons posé $\gamma_\varepsilon(k, y, s) = s + ikM_\varepsilon(y)$ qui, notons le, est non nul. Nous pouvons maintenant éliminer $\widetilde{u}_\varepsilon$ et $\widetilde{v}_\varepsilon$. En effet, de la deuxième équation de (5.53) nous obtenons :

$$\widetilde{v}_\varepsilon = -\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{v}_\varepsilon}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \right).$$

On peut maintenant obtenir une expression de $\widetilde{u}_\varepsilon$ en fonction de $\widetilde{p}_\varepsilon$ en injectant cette égalité dans la première équation de (5.53) ce qui donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_\varepsilon &= -\gamma_\varepsilon^{-1} (M'_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + ik \widetilde{p}_\varepsilon) + \gamma_\varepsilon^{-1} \widehat{u}_0 \\ &= \gamma_\varepsilon^{-2} M'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) + \gamma_\varepsilon^{-1} (\widehat{u}_0 - ik \widetilde{p}_\varepsilon) \end{aligned}$$

En reportant les expressions obtenues pour $\widetilde{u}_\varepsilon$ et $\widetilde{v}_\varepsilon$ dans la troisième et dernière équation de (5.53), nous avons :

$$\gamma_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon + ik \gamma_\varepsilon^{-2} M'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) + ik \gamma_\varepsilon^{-1} (\widehat{u}_0 - ik \widetilde{p}_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right)) = \widehat{p}_0$$

ce qui après avoir multiplié par γ_ε peut se réécrire :

$$(\gamma_\varepsilon^2 + k^2) \widetilde{p}_\varepsilon + \gamma_\varepsilon^{-1} \gamma'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) - \gamma_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \right) = \gamma_\varepsilon \widehat{p}_0 - ik \widehat{u}_0$$

En se rappelant que les données initiales sont à support dans le demi-espace $y < 0$ on obtient :

$$\begin{cases} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \widetilde{p}_\varepsilon - \frac{\partial^2 \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y^2} = (s + ikM_\infty) \widehat{p}_0 - \left(\frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial y} + ik \widehat{u}_0 \right) & \text{pour } y < 0, \\ (\gamma_\varepsilon^2 + k^2) \widetilde{p}_\varepsilon - \gamma_\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 & \text{pour } 0 < y < \varepsilon. \end{cases}$$

La condition de paroi rigide est équivalente pour sa part à :

$$\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, \varepsilon, s) = 0.$$

C'est sur ce problème exprimé en Fourier-Laplace que nous allons mener l'analyse asymptotique. La transformation de Fourier-Laplace nous a permis de nous ramener à une seule équation sur la pression.

5.5.2 Réécriture comme un problème de transmission

Nous commençons par réécrire le problème comme un problème de transmission entre :

$$\widetilde{p}_\varepsilon = \widetilde{p}_\varepsilon|_{y < 0}; \quad \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}} = \widetilde{p}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}.$$

Nous avons maintenant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \widetilde{p}_\varepsilon - \frac{\partial^2 \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y^2} = \widehat{g}, & y < 0, \\ (\gamma_\varepsilon^2 + k^2) \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}} - \gamma_\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0, & 0 < y < \varepsilon, \end{cases} \quad (5.54)$$

avec

$$\widehat{g} = (s + ikM_\infty) \widehat{p}_0 - \left(\frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial y} + ik \widehat{u}_0 \right).$$

Le système ci-dessus est complété par les conditions de raccord :

$$\begin{cases} \widetilde{p}_\varepsilon(k, 0, s) = \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, 0, s), \\ \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y}(k, 0, s), \end{cases}$$

et la condition limite de rigidité de la paroi :

$$\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y}(k, \varepsilon, s) = 0.$$

5.5.3 Analyse asymptotique

On cherche une condition d'impédance en $y = 0$, qui soit valable quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, il nous faut éliminer les inconnues dans la couche limite. Nous commençons classiquement par effectuer le changement d'échelle dans la couche limite :

$$y \rightarrow Y = \frac{y}{\varepsilon},$$

qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe. En posant le changement d'inconnues suivant :

$$\tilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, y, s) = \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right),$$

l'équation (5.54) dans la couche limite, $0 < Y < 1$, se réécrit :

$$\varepsilon^2(k^2 + \gamma^2)\tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right) = 0, \quad (5.55)$$

où $\gamma(k, Y, s) = \gamma_\varepsilon(k, \varepsilon Y, s) = s + ikM(Y)$. Les conditions de raccord deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{p}_\varepsilon(k, 0, s) = \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, 0, s), \\ \varepsilon \frac{\partial \tilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y}(k, 0, s), \end{cases} \quad (5.56)$$

et la condition de paroi rigide s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (5.57)$$

On introduit maintenant les développements asymptotiques formels en ε de \tilde{p}_ε et $\tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}$. On pose :

$$\begin{cases} \tilde{p}_\varepsilon(k, y, s) = \tilde{p}^0(k, y, s) + \varepsilon \tilde{p}^1(k, y, s) + \varepsilon^2 \tilde{p}^2(k, y, s) + \dots \\ \tilde{P}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, Y, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, Y, s) + \varepsilon \tilde{P}_{\text{CL}}^1(k, Y, s) + \varepsilon^2 \tilde{P}_{\text{CL}}^2(k, Y, s) + \dots \end{cases}$$

Nous allons chercher à éliminer les inconnues \tilde{P}_{CL}^j dans la couche limite, pour aboutir à un problème aux limites en \tilde{p}^j avec une condition d'impédance approchée en $y = 0$ (quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

Analyse des termes d'ordre 0 en ε des équations.

– Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (5.54) donne à l'ordre 0 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2)\tilde{p}^0 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^0}{\partial y^2} = \widehat{g}, \quad y < 0. \quad (5.58)$$

– Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (5.55) donne à l'ordre 0 en ε :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (5.59)$$

– Les conditions de raccord (5.56) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^0(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, 0, s) = 0. \end{cases} \quad (5.60)$$

– Enfin la condition de paroi rigide (5.57) donne :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, 1, s) = 0.$$

De (5.59) on déduit que la fonction

$$Y \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}$$

est constante. La deuxième équation de (5.60) nous dit que cette constante est nulle et par conséquent :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, Y, s) = 0.$$

La fonction $Y \rightarrow \tilde{P}_{\text{CL}}^0$ est donc constante. En utilisant la première équation de (5.60) nous obtenons :

$$\tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, Y, s) = \tilde{p}^0(k, 0, s), \quad \forall 0 < Y < 1. \quad (5.61)$$

Analyse des termes d'ordre 1 en ε des équations.

– Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (5.54) donne à l'ordre 1 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \tilde{p}^1 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^1}{\partial y^2} = 0, \quad y < 0. \quad (5.62)$$

– Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (5.55) donne à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (5.63)$$

– Les conditions de raccord (5.56) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^1(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 0, s). \end{cases} \quad (5.64)$$

– Enfin la condition de paroi rigide (5.57) donne :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (5.65)$$

De (5.63) on déduit que la fonction

$$Y \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}$$

est constante. (5.65) nous dit que cette constante est nulle, par conséquent :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = 0.$$

La fonction $Y \rightarrow \tilde{P}_{\text{CL}}^1$ est donc constante. De (5.64) nous obtenons :

$$\tilde{P}_{\text{CL}}^1(k, Y, s) = \tilde{p}^1(k, 0, s), \quad \forall 0 < Y < 1,$$

et surtout

$$\frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial y}(k, 0, s) = 0. \quad (5.66)$$

Analyse des termes d'ordre 2 en ε des équations.

– Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (5.54) donne à l'ordre 2 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \tilde{p}^2 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^2}{\partial y^2} = 0, \quad y < 0.$$

– Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (5.55) donne à l'ordre 2 en ε :

$$(k^2 + \gamma^2) \tilde{P}_{\text{CL}}^0 - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (5.67)$$

– Les conditions de raccord (5.56) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^2(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^2(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 0, s). \end{cases} \quad (5.68)$$

– Enfin la condition de paroi rigide (5.57) donne :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (5.69)$$

On cherche maintenant une expression pour $\frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y}$ en 0 ne faisant intervenir que les inconnues \tilde{p}^j . (5.67) peut se réécrire :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \tilde{P}_{\text{CL}}^0.$$

En utilisant (5.61) on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \tilde{p}^0(k, 0, s).$$

On intègre ensuite par rapport à Y entre 0 et 1 ce qui donne :

$$\frac{1}{\gamma^2(k, 1, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 1, s) - \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 0, s) = \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} dY \tilde{p}^0(k, 0, s).$$

Compte tenu de (5.69), le premier terme du membre de gauche est nul et on a :

$$\frac{\partial \bar{P}_{cl}^2}{\partial Y}(k, 0, s) = -\gamma^2(k, 0, s) \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} dY \bar{p}^0(k, 0, s).$$

Grâce à la deuxième équation de (5.68) on obtient :

$$\frac{\partial \bar{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) = -(s + ikM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \bar{p}^0(k, 0, s). \quad (5.70)$$

Nous avons donc formellement défini (\bar{p}^0, \bar{p}^1) par les équations (5.58) et (5.62) et par les conditions (5.66) et (5.70). Nous pouvons donc construire le problème approché à l'ordre 1 en ε .

5.5.4 Construction du problème approché

Le problème approché dans les variables (k, y, s)

L'idée est qu'une bonne approximation (du premier ordre en ε) de la solution devrait être fournie par la fonction :

$$\bar{p}^{\varepsilon,1} = \bar{p}^0 + \varepsilon \bar{p}^1,$$

qui satisfait compte tenu de (5.58) et (5.62) :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \bar{p}^{\varepsilon,1} - \frac{\partial^2 \bar{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y^2} = \bar{g}, \quad y < 0.$$

Condition limite en $y = 0$. Nous avons :

$$\frac{\partial \bar{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \bar{p}^0}{\partial y}(k, 0, s) + \varepsilon \frac{\partial \bar{p}^1}{\partial y}(k, 0, s),$$

ce qui devient compte tenu de (5.66) et (5.70) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) &= -\varepsilon (s + ikM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \bar{p}^0(k, 0, s) \\ &= -\varepsilon (s + ikM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \bar{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

L'idée est de conserver une approximation de la même qualité (toujours du premier ordre) en supprimant les termes $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Autrement dit nous proposons le problème approché suivant :

$$\begin{cases} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \bar{p}^{\varepsilon,1} - \frac{\partial^2 \bar{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y^2} = \bar{g}, & y < 0, \\ \frac{\partial \bar{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) = \varepsilon \theta(k, s) \bar{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s), \end{cases} \quad (5.71)$$

où l'on a posé :

$$\theta(k, s) = -(s + ikM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY.$$

Remarque 5.14 Il est clair que la condition limite garde en mémoire la couche limite puisqu'elle fait intervenir le paramètre ε ainsi que le profil $M(Y)$ à travers $\gamma(k, Y, s)$.

Le problème approché dans les variables (x, y, t)

Ce qui précède nous amène à introduire un opérateur pseudo-différentiel "d'ordre -2", agissant sur les fonctions causales des variables (x, t) . Cet opérateur est défini par son symbole Fourier-Laplace qui est égal à $\int_0^1 1/\gamma^2 dY$. De façon précise, si $\varphi(x, t) \rightarrow \widetilde{\varphi}(k, s)$ désigne la transformation de Fourier-Laplace en (x, t) nous introduisons \mathcal{I}_M tel que :

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{I}_M \varphi}(k, s) = \widetilde{\mathcal{I}_M}(k, s) \widetilde{\varphi}(k, s), \\ \widetilde{\mathcal{I}_M}(k, s) = \int_0^1 \frac{1}{(s + ikM(Y))^2} dY. \end{cases}$$

On notera que le symbole $\widetilde{\mathcal{I}_M}$ est homogène de degré -2 en s et k . Cet opérateur est bien entendu non local en espace et en temps, mais on peut en faire une description à l'aide d'opérateurs locaux. Ainsi :

$$\mathcal{I}_M \varphi(x, t) = \int_0^1 \psi_M(x, Y, t) dY$$

où les fonctions $(x, t) \rightarrow \psi_M(x, Y, t)$, $Y \in [0, 1]$ sont solutions des problèmes d'évolution :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi_M = \varphi, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \psi_M(x, Y, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \leq 0, \\ \frac{\partial \psi_M}{\partial t}(x, Y, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une famille d'équations de transport 1D d'ordre 2 dans la direction x dans lesquelles la variable Y joue le rôle de paramètre. Après résolution explicite de ces équations on voit que \mathcal{I}_M est encore défini par :

$$\mathcal{I}_M \varphi(x, t) = \int_0^1 \int_0^t (t - t') \varphi(x - M(Y)t', t') dt' dY.$$

À partir de (5.71) le problème d'évolution que nous proposons de résoudre comme alternative, pour approcher (5.51), s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p^{\varepsilon,1} - \Delta p^{\varepsilon,1} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times] - \infty, 0[, t > 0, \\ \frac{\partial p^{\varepsilon,1}}{\partial y}(x, 0, t) = -\varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left[Id - \mathcal{I}_M \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p^{\varepsilon,1}(x, 0, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (5.72)$$

où Id est l'identité et \mathcal{I}_M est l'opérateur défini précédemment.

5.5.5 Analyse de stabilité modale

Nous allons étudier le caractère bien posé du problème approché (5.72). Pour cela nous allons une nouvelle fois utiliser la méthode de Kreiss, expliquée à la section 5.4.1 de ce chapitre. Nous cherchons une solution non triviale du problème, de la forme :

$$p^{\varepsilon,1}(x, y, t) = p_a e^{ikx} e^{\varepsilon y} e^{st},$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et $p_a \in \mathbb{C}$ non nul. Nous allons sauter la plupart des calculs compte tenu du fait que nous avons dérivé le problème limite dans l'espace de Fourier-Laplace. En injectant cette expression dans l'équation (5.72) on obtient :

$$\xi = \left((s + ikM_\infty)^2 + k^2 \right)^{1/2}.$$

La condition limite nous donne alors l'équation caractéristique suivante :

$$\xi p_a = \varepsilon \theta(k, s) p_a,$$

c'est-à-dire en utilisant la définition de θ et en divisant par p_a :

$$\xi = -\varepsilon \gamma^2(k, 0, s) \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY.$$

En posant $\sigma = s/k$ cette équation devient :

$$\left((\sigma + iM_\infty)^2 + 1 \right)^{1/2} = -\varepsilon |k| (\sigma + iM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{1 + (\sigma + iM(Y))^2}{(\sigma + iM(Y))^2} dY.$$

qui se réécrit en utilisant la définition (5.21) de F^{CL} :

$$\boxed{\sqrt{1 + (\sigma + iM_\infty)^2} + \varepsilon |k| (\sigma + iM_\infty)^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)) = 0.}$$

On retrouve la même équation caractéristique que pour le modèle approché obtenu en utilisant les équations de Galbrun (cf. (5.39)). Les résultats sur le caractère bien posé sont donc les mêmes et nous pouvons en particulier énoncer la proposition suivante qui se démontre comme la proposition 5.2 page 152.

Proposition 5.5 *Le problème approché, composé des équations (5.23) et de la condition limite (5.24), est bien posé si et seulement si l'équation*

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1$$

n'a que des solutions réelles.

CAS D'UNE PAROI ABSORBANTE

6

SOMMAIRE

6.1	QU'EST CE QU'UNE PAROI IMPÉDANTE	173
6.1.1	PRÉSENTATION	173
6.1.2	ÉTUDE DU CARACTÈRE BIEN POSÉ SANS ÉCOULEMENT	174
6.2	CARACTÈRE MAL POSÉ DE LA CONDITION DE MYERS	176
6.3	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ : NOUVELLE CONDITION LIMITE	181
6.3.1	POSITION DU PROBLÈME	181
6.3.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	182
6.3.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	183
6.3.4	LE PROBLÈME APPROCHÉ	188
6.4	ANALYSE DE STABILITÉ	189
6.4.1	OBTENTION DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE	190
6.4.2	CONDITIONS POUR PROFILS CONTINUS ASSURANT LE CARACTÈRE BIEN POSÉ	191
6.4.3	IMPÉDANCE DÉPENDANT DE LA FRÉQUENCE	200
6.5	COMPLÉMENTS : APPROCHE EULÉRIENNE	200
6.5.1	POSITION DU PROBLÈME	201
6.5.2	RÉÉCRITURE COMME UN PROBLÈME DE TRANSMISSION	203
6.5.3	ANALYSE ASYMPTOTIQUE	204
6.5.4	CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ	208
6.5.5	ANALYSE DE STABILITÉ MODALE	209

DANS le chapitre précédent, nous avons dérivé un problème approché basse fréquence pour la propagation du son en présence d'une paroi plane rigide, en tenant compte de la couche limite de l'écoulement. L'objectif du chapitre dont ces quelques lignes constituent l'introduction, est d'étendre l'étude du chapitre précédent à des parois absorbantes. En effet, de nombreux dispositifs sont utilisés par les industriels pour limiter le bruit. Ces parois sont généralement modélisées par une condition d'impédance reliant la pression à la vitesse normale. L'impédance, le rapport entre ces deux quantités, est notée Z . Elle peut être prise constante ou dépendante de la fréquence. Les modèles les plus usuels sont rappelés dans la première section. On s'intéressera essentiellement dans ce chapitre à des impédances constantes.

Ces conditions d'impédance sont valables quand l'écoulement est nul à la paroi. Lorsque l'écoulement est non nul on utilise généralement la célèbre condition de Myers [Mye80]. Il a été démontré que cette condition entraîne l'existence de modes instables [Eve91] de type Kelvin-Helmholtz [Tes73b]. Récemment, Brambley a montré pour plusieurs modèles d'impédance que cette condition aboutissait à un problème mal posé (cf. [Bra09]). On donne dans la deuxième section une preuve analytique simple, dans notre configuration et en présence d'un écoulement parallèle constant, du caractère mal posé de la condition de Myers, au moins pour des petites valeurs de la vitesse de l'écoulement. Ces observations remettent en cause la légitimité de l'utilisation de cette condition de Myers. C'est pourquoi ce chapitre revêt une importance supplémentaire par rapport au chapitre précédent. En effet, dans le cas d'une paroi rigide, la prise en compte de la couche limite améliore la précision. Ici, c'est crucial car si on la néglige, le problème est fortement mal posé.

On va supposer que la modélisation de la paroi absorbante est bonne et que c'est du côté du fluide que le bât blesse. L'idée que l'on va suivre est de prendre en compte la couche limite de l'écoulement, comme nous l'avions fait au chapitre précédent. Nous commençons par dériver le problème approché en utilisant les équations de Galbrun, cela au moyen d'une analyse asymptotique. La condition limite ainsi obtenue fait une nouvelle fois intervenir la résolution du problème limite du tube (1.9), étudié dans la première partie de cette thèse. Nous nous consacrons ensuite à l'étude du caractère bien posé de ce problème approché et de la nouvelle condition d'impédance. Pour Z constant, à l'aide d'une technique de perturbation similaire à celle présentée au chapitre 2 dans la section 2.4 nous parvenons à trouver des conditions sur le profil à l'intérieur de la couche limite qui assurent le caractère bien posé du problème, cela pour Z suffisamment grand (cf. théorème 6.2). Nous nous intéressons ensuite à des impédances dépendant de la fréquence. On montre que si l'impédance est équivalente à $C\omega^\mu$ à haute fréquence alors, pour $\mu > 0$ (resp. $\mu < 0$) le problème est bien posé si et seulement si le problème limite du tube (1.9) l'est (resp. mal posé). Finalement, nous donnons l'approche eulérienne. Au lieu d'utiliser les équations de Galbrun, nous considérons celles d'Euler linéarisées (qui sont équivalentes). À l'aide de la transformation de Fourier-Laplace nous obtenons une seule équation sur la pression. C'est sur cette équation que nous menons l'analyse asymptotique qui va nous donner un problème approché, dont l'analyse de stabilité est présentée et est équivalente à celle précédemment menée pour le problème approché issu des équations de Galbrun.

6.1 QU'EST CE QU'UNE PAROI IMPÉDANTE

6.1.1 Présentation

Ce que nous appelons une paroi impédante est aussi appelé une paroi absorbante. Il s'agit d'une paroi sur laquelle on a mis un traitement acoustique. En acoustique, il est courant de caractériser une telle paroi par une seule quantité Z , l'impédance. **Sans écoulement** la condition de paroi impédante s'écrit :

$$p = Z \partial_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n},$$

où p est la pression, \mathbf{U} est la perturbation du déplacement lagrangien. Compte tenu de la relation

$$p = -\text{div } \mathbf{U},$$

montrée dans l'annexe A, la condition de paroi impédante peut se réécrire :

$$\text{div } \mathbf{U} + Z \partial_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.1)$$

Remarque 6.1 Lorsque $Z \rightarrow +\infty$ on retrouve la condition de paroi rigide.

Le modèle le plus simple est celui d'une impédance Z constante, réelle positive. Plus généralement, on considère \tilde{Z} (la "transformée de Laplace" de Z) tel que :

$$\text{div } \tilde{\mathbf{U}} - i\omega \tilde{Z} \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

\tilde{Z} est pris complexe et dépendant de la fréquence :

$$\tilde{Z} = R + iX,$$

où R est la résistance et X la réactance. R est souvent pris indépendant de la fréquence au contraire de X . On trouve essentiellement dans la littérature les modèles suivants (avec une dépendance en $e^{i\omega t}$) :

- Le modèle à trois paramètres :

$$\tilde{Z}(\omega) = R + \frac{K}{i\omega} + i\omega C \quad \Leftrightarrow \quad Z(\partial_t) = R + K \partial_t^{-1} + C \partial_t,$$

où R , K et C sont trois constantes positives. Ces trois quantités sont généralement mesurées de manière empirique [TA96], mais peuvent provenir également d'un modèle physique théorique (cf. par exemple [Rie06]).

- L'impédance peut aussi être obtenue analytiquement. Par exemple, pour un résonateur d'Helmholtz, on trouve souvent l'expression :

$$\tilde{Z}(\omega) = R + i\omega C - i \cot(\omega L).$$

On en trouve une version augmentée dans [Rie06].

- On peut trouver d'autres modèles, semi-empiriques (comme un modèle à deux paramètres dans [LTA97]), ou théoriques (cf. le livre de Morse et Ingard [MI86]).

6.1.2 Étude du caractère bien posé sans écoulement

On considère le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$. On s'intéresse ici au caractère bien posé du problème sans écoulement muni de la condition d'impédance (6.1) en $y = 0$, avec une impédance constante positive ($Z > 0$). Dans la suite nous allons chercher à dériver une condition limite impédante en présence d'un écoulement à partir de cette condition (6.1). C'est pourquoi le caractère bien posé sans écoulement est une condition préalable nécessaire. En effet, nous ne pouvons espérer obtenir une condition limite avec écoulement qui aboutisse à un problème bien posé en partant d'une condition limite qui aboutit à un problème mal posé sans écoulement. Nous utilisons une fois de plus une analyse de Kreiss. Dans la situation présente, les équations de Galbrun (2) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0. \quad (6.2)$$

où $U(x, y, t)$ et $V(x, y, t)$ sont respectivement les composantes selon x et selon y de la perturbation du déplacement Lagrangien. On complète ces équations par une condition de paroi impédante :

$$(\partial_x U + \partial_y V)(x, 0, t) + Z \partial_t V(x, 0, t) = 0. \quad (6.3)$$

On pose :

$$\begin{cases} U(x, y, t) = U_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \\ V(x, y, t) = V_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et U_a et V_a sont deux constantes complexes non toutes deux nulles. En injectant ces expressions dans les équations (6.2) cela donne :

$$\begin{cases} s^2 U_a - ik(ikU_a + \xi V_a) = 0, \\ s^2 V_a - \xi(ikU_a + \xi V_a) = 0, \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} U_a = \frac{ik\xi}{s^2 + k^2} V_a, \\ s^2 V_a - ik\xi U_a - \xi^2 V_a = 0. \end{cases}$$

En injectant la première équation dans la deuxième on a :

$$\begin{cases} U_a = \frac{ik\xi}{s^2 + k^2} V_a, \\ s^2 V_a + \frac{k^2 \xi^2}{s^2 + k^2} V_a - \xi^2 V_a = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

Nécessairement $V_a \neq 0$ car dans le cas contraire U_a serait elle aussi égale à 0. On peut donc diviser la deuxième équation par V_a :

$$s^2 + \frac{k^2 \xi^2}{s^2 + k^2} - \xi^2 = 0,$$

puis en multipliant par $s^2 + k^2$:

$$s^2(s^2 + k^2) - s^2 \xi^2 = 0,$$

d'où finalement :

$$\xi^2 = s^2 + k^2.$$

Puisque $\Re(\xi) \geq 0$, en prenant la coupure de la racine sur \mathbb{R}_- et sa détermination à partie réelle positive, on obtient :

$$\xi = \sqrt{s^2 + k^2},$$

et puis à partir de (6.4) on obtient l'expression suivante de U_a :

$$U_a = \frac{ik}{\xi} V_a. \quad (6.5)$$

L'étape suivante de l'analyse de Kreiss consiste à prendre en compte la condition limite (6.3) en injectant les expressions obtenues pour U et V . Cela donne :

$$(ik U_a + \xi V_a) + Z s V_a = 0.$$

En utilisant l'expression (6.5) de U_a et en divisant par V_a on obtient :

$$\left(\frac{-k^2}{\xi} + \xi \right) + Z s = 0,$$

qui donne après simplification, en utilisant $\xi = \sqrt{s^2 + k^2}$:

$$s + Z \sqrt{s^2 + k^2} = 0.$$

Si on pose $\sigma = s/|k|$ cette équation devient :

$$\sigma + Z \sqrt{1 + \sigma^2} = 0. \quad (6.6)$$

On sait alors que le problème est mal posé si et seulement si il existe une solution σ_* , à partie réelle positive, de cette équation. Compte tenu du choix de la racine carré et du fait que $Z > 0$, σ_* est nécessairement à partie réelle négative. Le problème est donc bien posé.

Cas d'une impédance quelconque : On aurait obtenu la même équation caractéristique :

$$s + \tilde{Z}(s) \sqrt{s^2 + k^2} = 0.$$

On suppose $\tilde{Z}(s) \sim_{|s| \rightarrow +\infty} s^\mu$. On pose $\sigma = s/|k|$. Par une étude similaire à celle menée au paragraphe page 151, on montre que c'est le comportement quand $|k|$ tend vers $+\infty$ qui est important. Il faut donc étudier la partie de plus haut degré en k de l'équation caractéristique. Plus précisément on obtient :

- $\mu > 0$: Le problème est bien posé si et seulement si l'équation :

$$\sqrt{1 + \sigma^2} = 0,$$

n'a que des solutions à partie réelle négative ou nulle. Or les seules solutions de cette équation sont $\pm i$. Le problème est donc bien posé.

- $\mu < 0$: Le problème est bien posé si et seulement si l'équation :

$$\sigma = 0,$$

n'a que des solutions à partie réelle négative ou nulle. Le problème est donc bien posé.

6.2 CARACTÈRE MAL POSÉ DE LA CONDITION DE MYERS

Quand l'écoulement est non nul à la paroi on utilise généralement la célèbre condition de Myers [Mye80], rappelée ci-dessous (6.9). Récemment Brambley a montré, dans plusieurs situations, que cette condition aboutissait à un problème mal posé [Bra09]. Nous voulons confirmer ici ces observations. Nous nous intéressons au caractère bien posé de notre problème dans le demi plan négatif, en présence d'un écoulement parallèle constant, avec la condition de Myers à la paroi. Nous allons montrer, analytiquement, que le problème est mal posé, au moins pour des petites valeurs de la vitesse de l'écoulement. À l'inverse nous montrons que pour une vitesse d'écoulement suffisamment grande, le problème est bien posé. Il peut sembler paradoxal que le problème devienne bien posé pour des écoulements à grande vitesse, pourtant nous en avons déjà fait l'expérience lors de l'étude du profil discontinu bi-couches dans le chapitre 2.

Nous considérons le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$:

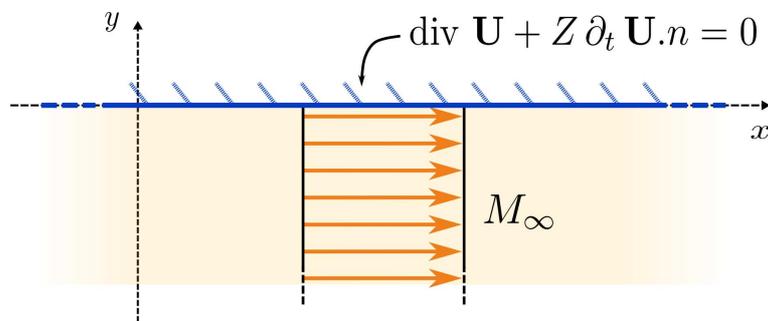


FIG. 6.1 – Configuration avec écoulement uniforme et condition de Myers à la paroi

Nous supposons que ce domaine est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire, laminaire et uniforme. Par conséquent, l'écoulement est caractérisé par son profil de Mach (rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son), M_∞ . Les équations de Galbrun (2) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0. \quad (6.7)$$

où $U(x, y, t)$ et $V(x, y, t)$ sont respectivement les composantes selon x et selon y de la perturbation du déplacement Lagrangien.

On complète ces équations par une condition de paroi impédante en $y = 0$. La condition de Myers s'écrit alors en variables eulériennes :

$$(\partial_t + M_\infty \partial_x) p(x, 0, t) = Z \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}(x, 0, t), \quad (6.8)$$

où p est la perturbation de pression, $\mathbf{u} = (u, v)$ est la perturbation de la vitesse eulérienne et $Z > 0$ est l'impédance. La relation de correspondance (A.14) page 219 entre les variables d'Euler et de Galbrun, montrée en annexe, donne dans le cas présent :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (\partial_t + M_\infty \partial_x) \mathbf{U}, \\ p = -\text{div } \mathbf{U}, \end{cases}$$

où $\mathbf{U} = (U, V)$ est la perturbation du déplacement lagrangien. La condition de Myers s'écrit alors en variable de Galbrun :

$$\operatorname{div} \mathbf{U} + Z \partial_t \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.9)$$

Remarque 6.2 *En variable de Galbrun, la condition de Myers est donc la même que la condition impédante avec écoulement nul à la paroi. Cela accrédite l'idée que la formulation de Galbrun est mieux adaptée aux problèmes de paroi.*

Analyse de stabilité de type Kreiss On pose :

$$\begin{cases} U(x, y, t) = U_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \\ V(x, y, t) = V_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et U_a et V_a sont deux constantes complexes non toutes deux nulles. En injectant ces expressions dans (6.7) on obtient (voir analyse de stabilité menée dans la section 5.4.1 page 148) :

$$\xi = \sqrt{(s + ik M_\infty)^2 + k^2}, \quad (6.10)$$

et

$$U_a = \frac{ik}{\xi} V_a. \quad (6.11)$$

Nous allons maintenant utiliser la condition limite de Myers (6.9) qui donne :

$$(ik U_a + \xi V_a) + Z s V_a = 0,$$

ce qui devient en utilisant l'expression (6.11) de U_a et en divisant par V_a :

$$-\frac{k^2}{\xi} + \xi + Z s = 0.$$

En multipliant par ξ et en utilisant (6.10) on a :

$$(s + ik M_\infty)^2 + Z s \sqrt{(s + ik M_\infty)^2 + k^2} = 0.$$

On pose $\sigma = s/k$:

$$(\sigma + i M_\infty)^2 + \operatorname{sign}(k) Z \sigma \sqrt{(\sigma + i M_\infty)^2 + 1} = 0, \quad (6.12)$$

où $\operatorname{sign}(k)$ désigne le signe de k . On sait que si cette équation admet une solution σ_* à partie réelle positive (resp. négative) pour k positif (resp. négatif) alors le problème est mal posé.

Démonstration du caractère mal posé pour M_∞ "petit". On pose $\sigma = M_\infty \tau$ ce qui donne :

$$M_\infty (\tau + i)^2 + \operatorname{sign}(k) Z \tau \sqrt{M_\infty^2 (\tau + i)^2 + 1} = 0.$$

Pour $M_\infty = 0$ on voit que $\tau = 0$ est solution. Il existe donc une branche de solution $\tau(M_\infty)$ telle que $\tau(0) = 0$. En faisant un développement au voisinage de 0, on obtient :

$$-M_\infty + \operatorname{sign}(k) Z \tau(M_\infty) + o(M_\infty) = 0,$$

ce qui donne : $\tau(M_\infty) = \text{sign}(k) \frac{M_\infty}{Z} + o(M_\infty)$, puis

$$\sigma(M_\infty) = \text{sign}(k) \frac{M_\infty^2}{Z} + o(M_\infty^2).$$

Finalement, on obtient :

$$s(M_\infty) = |k| \frac{M_\infty^2}{Z} + o(M_\infty^2)$$

Ainsi le problème est mal posé pour M_∞ petit.

En résolvant numériquement l'équation (6.12), on observe, à Z fixé, l'existence d'une valeur critique de M_∞ au-delà de laquelle toutes les solutions sont imaginaires et, par conséquent, le problème est bien posé. En deçà de cette valeur le problème est mal posé.

Démonstration du caractère bien posé pour M_∞ "grand". À la lumière de l'observation précédente on cherche à montrer que le problème est bien posé pour M_∞ suffisamment grand. Pour cela, il suffit de montrer que (6.12) n'a que des solutions imaginaires. On commence par élever (6.12) au carré pour obtenir :

$$(\sigma + iM_\infty)^4 = Z^2 \sigma^2 ((\sigma + iM_\infty)^2 + 1).$$

On pose $\sigma = iM_\infty \lambda$, on a :

$$M_\infty^4 (\lambda + 1)^4 = -Z^2 M_\infty^2 \lambda^2 (1 - M_\infty^2 (\lambda + 1)^2),$$

puis en posant $\mu = \lambda + 1$ on obtient :

$$\mu^4 + Z^2 (\mu - 1)^2 \left(\frac{1}{M_\infty^2} - \mu^2 \right) = 0.$$

On réécrit cette équation comme suit :

$$f(\mu) = -\frac{1}{M_\infty^2}. \quad (6.13)$$

où

$$f : \mu \rightarrow \frac{\mu^4}{(\mu - 1)^2 Z^2} - \mu^2.$$

Si cette équation n'a que des solutions réelles alors le problème est bien posé. Les solutions sont les racines d'un polynôme de degré 4 (dès que $Z^2 \neq 1$), elles sont donc au plus quatre. Ce polynôme étant à coefficients réels, si l'on trouve trois racines réelles alors elles le seront toutes. On commence par regarder ce qui se passe lorsque $|M_\infty| \rightarrow +\infty$. On cherche donc les zéros de f . Cela revient à chercher les racines du polynôme :

$$P(\mu) = \mu^2 (\mu^2 - Z^2 (\mu - 1)^2).$$

0 est racine double et les deux autres racines sont :

$$\mu_+ = \frac{Z}{Z-1} \quad \text{et} \quad \mu_- = \frac{Z}{1+Z}.$$

On a alors l'alternative suivante :

- Pour $Z > 1$, on a $0 < \mu_- < 1 < \mu_+$. P , donc f est de signe négatif à l'extérieur de ces racines.
- Pour $Z < 1$, on a $\mu_+ < 0 < \mu_- < 1$. P , donc f est de signe négatif à l'intérieur de ces racines.

Sur les figures suivantes on représente en bleu la fonction f et en rouge la droite $\mu = 0$, pour $Z = 2 > 1$ à gauche et $Z = 0.8 < 1$ à droite.

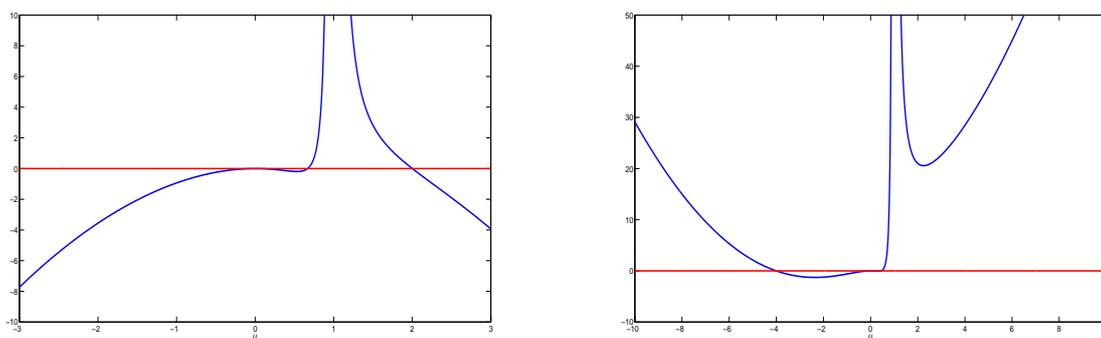


FIG. 6.2 – Graphe de la fonction f , pour $Z > 1$ à gauche et $Z < 1$ à droite.

La figure suivante présente un zoom de ces graphes sur la zone d'intérêt :

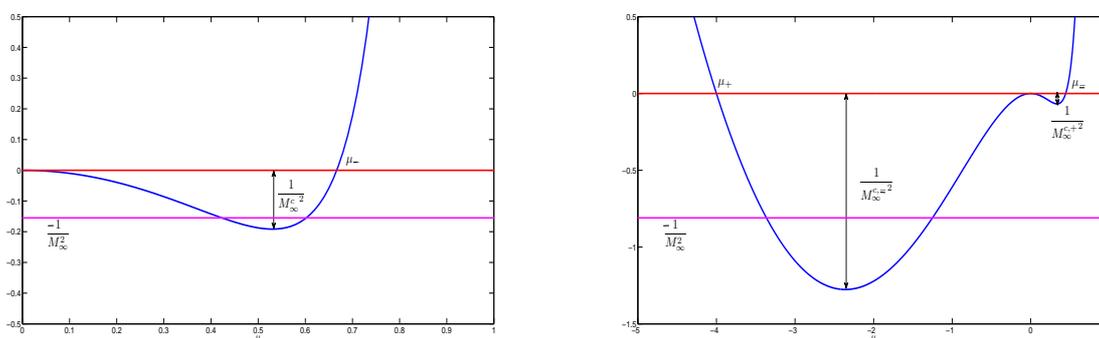


FIG. 6.3 – Zoom du graphe de la fonction f , pour $Z > 1$ à gauche et $Z < 1$ à droite.

On cherche maintenant à résoudre (6.13) que l'on rappelle ici :

$$f(\mu) = -\frac{1}{M_\infty^2}.$$

On a alors l'alternative suivante :

- $Z > 1$: puisque f est négative sur $[0, \mu_-]$, nulle en 0 et μ_- (cf figure 6.3, à gauche), alors pour M_∞ suffisamment grand nous aurons deux solutions dans cette intervalle. Compte tenu du comportement de f en $\pm\infty$ (cf figure 6.2, à gauche) nous aurons deux solutions supplémentaires dans les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]1, +\infty[$. Nous avons trouvé quatre solutions réelles, le problème est donc bien posé.

- $Z < 1$: puisque f est négative sur $[\mu_+, 0]$, nulle en 0 et μ_+ (cf figure 6.3, à droite), alors pour M_∞ suffisamment grand nous aurons deux solutions dans cette intervalle. De plus, f est négative sur $[0, \mu_-]$, nulle en 0 et μ_- (cf figure 6.3, à droite). Par conséquent, pour M_∞ suffisamment grand nous aurons deux solutions supplémentaires dans cette intervalle. Nous avons trouvé quatre solutions réelles, le problème est donc bien posé.

C'est ce que montrent les deux propositions suivantes.

Proposition 6.1 *Supposons $Z > 1$. Soit $M_\infty^c > 0$ défini par (cf figure 6.3) :*

$$\inf_{\mu \in]0, \mu_-[} \frac{\mu^4}{(\mu - 1)^2 Z^2} - \mu^2 = -\frac{1}{M_\infty^c{}^2}.$$

Alors, pour tout $|M_\infty| > M_\infty^c$ le problème est bien posé.

DÉMONSTRATION. Pour montrer que le problème est bien posé, il suffit de montrer que l'équation (6.13) a quatre solutions réelles.

- f est négative sur $[0, \mu_-]$, nulle en 0 et μ_- . On montre, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que pour $|M_\infty| > M_\infty^c$ l'équation (6.13) a au moins deux solutions dans cet intervalle.
- f est nulle en 0 et $\lim_{\mu \rightarrow -\infty} f(\mu) = -\infty$. Ainsi l'équation (6.13) a nécessairement une solution dans l'intervalle $] -\infty, 0[$.
- Puisque $\lim_{\mu \searrow 1} f(\mu) = +\infty$ et $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} f(\mu) = -\infty$, on montre l'existence d'au moins une solution dans l'intervalle $]1, +\infty[$.

On a trouvé quatre solutions réelles, le problème est donc bien posé. □

Proposition 6.2 *Supposons $Z < 1$. Soit $M_\infty^c > 0$ défini par $M_\infty^c = \max(M_\infty^{c,+}, M_\infty^{c,-})$ (cf figure 6.3) où :*

$$\inf_{\mu \in]0, \mu_-[} \frac{\mu^4}{(\mu - 1)^2 Z^2} - \mu^2 = -\frac{1}{M_\infty^{c,+2}} \quad \text{et} \quad \inf_{\mu \in]\mu_+, 0[} \frac{\mu^4}{(\mu - 1)^2 Z^2} - \mu^2 = -\frac{1}{M_\infty^{c,-2}}$$

Alors, pour tout $|M_\infty| > M_\infty^c$ le problème est bien posé.

DÉMONSTRATION. Pour montrer que le problème est bien posé, il suffit de montrer que l'équation (6.13) a quatre solutions réelles.

- f est négative sur $[0, \mu_-]$, nulle en 0 et μ_- . On montre, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que pour $|M_\infty| > M_\infty^{c,+}$ l'équation (6.13) a au moins deux solutions dans cet intervalle.
- f est négative sur $[\mu_+, 0]$, nulle en 0 et μ_+ . On montre, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que pour $|M_\infty| > M_\infty^{c,-}$ l'équation (6.13) a au moins deux solutions dans cet intervalle.

Ainsi, pour $|M_\infty| > M_\infty^c$, on aura quatre solutions réelles. Le problème est donc bien posé. □

On a montré que, pour tout $Z > 0$ différent de 1, il existe une valeur critique $M_\infty^c > 0$ telle que, pour tout $|M_\infty| > M_\infty^c$, le problème est bien posé. Il s'agit donc d'une condition suffisante, et on pense qu'elle est aussi nécessaire. La valeur de M_∞^c est donnée pour $Z > 1$ (resp. $Z < 1$) dans la proposition 6.1 (resp. la proposition 6.2). On peut la calculer numériquement ce qui donne la fonction suivante :

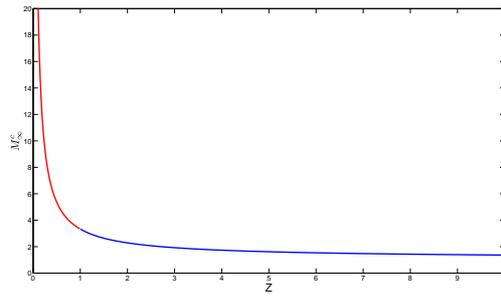


FIG. 6.4 – M_∞^ϵ en fonction de Z .

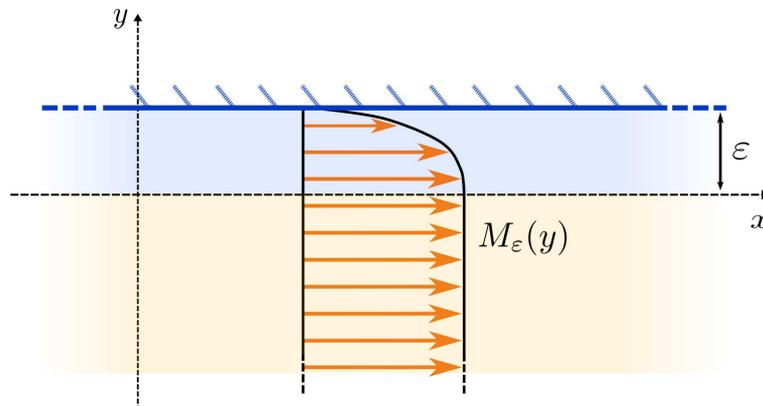
On observe que la fonction est continue en $Z = 1$. Cela s’explique par le fait que l’on a pour tout Z , $M_\infty^{c,+} > M_\infty^{c,-}$. On voit par ailleurs que lorsque $Z \rightarrow 0$, $M_\infty^c \rightarrow +\infty$: plus Z est petit plus il faut prendre M_∞ grand pour que le problème soit bien posé. Lorsque $Z \rightarrow +\infty$, $M_\infty^c \rightarrow 1$. En particulier, M_∞^c est toujours supérieur à 1, ce qui signifie que le caractère bien posé n’est assuré que pour des régimes supersoniques. Par ailleurs, ces valeurs de M_∞^c correspondent à celles observées en résolvant numériquement l’équation (6.12).

6.3 CONSTRUCTION DU PROBLÈME APPROCHÉ : NOUVELLE CONDITION LIMITE

Nous avons montré que la condition de Myers n’était pas satisfaisante. Afin de dériver une condition limite convenable, notre idée est de prendre en compte la couche limite de l’écoulement de référence. Nous considérons qu’un écoulement non nul à la paroi n’est que l’idéalisation d’un écoulement qui se raccorde à 0 sur la paroi sur une petite distance. À l’aide d’une analyse asymptotique identique à celle menée dans le chapitre précédent nous allons dériver une condition approchée à la paroi. La nouvelle condition approchée fera intervenir le problème limite du tube étudié dans la première partie de cette thèse, dont nous mettrons à profit les résultats. Ce qui suit est très proche de ce qui a été fait dans le chapitre précédent. Nous remplaçons simplement la condition de rigidité par une condition de paroi impédante. Le lecteur familier avec la démarche pourra donc, suivant sa volonté, aller directement aux résultats.

6.3.1 Position du problème

Nous considérons le domaine $\Omega_\epsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \epsilon[$:



Nous supposons que ce domaine est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Par conséquent, l'écoulement est caractérisé par son profil de Mach, $M_\varepsilon(y)$ (rapport entre la vitesse de l'écoulement et la vitesse du son). Les équations de Galbrun (2) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (6.14)$$

où $\mathbf{U}_\varepsilon(x, y, t)$ et $\mathbf{V}_\varepsilon(x, y, t)$ sont respectivement les composantes selon x et selon y de la perturbation du déplacement Lagrangien.

On complète ces équations par une condition de paroi impédante en $y = \varepsilon$:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right)(x, \varepsilon, t) + Z \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial t}(x, \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.15)$$

où l'impédance Z est prise constante et positive. On se restreint à une classe particulière de profils :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), & 0 < y < \varepsilon, \\ M_\infty, & y < 0, \end{cases}$$

avec $M \in W^{1,\infty}(]0, 1[)$ tel que $M(1) = 0$. Nous supposons donc que dans la couche limite $y \in [0, \varepsilon]$ le profil est obtenu par scaling d'une fonction M , comme dans le cas du tube. De plus, le profil se raccorde à une valeur constante M_∞ pour $y < 0$.

6.3.2 Réécriture comme un problème de transmission

On commence par écrire le problème (6.14) comme un problème de transmission entre :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\varepsilon &= \mathbf{U}_\varepsilon|_{y < 0}, & \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}} &= \mathbf{U}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}, \\ \mathbf{V}_\varepsilon &= \mathbf{V}_\varepsilon|_{y < 0}, & \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}} &= \mathbf{V}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}. \end{aligned}$$

Remarque 6.3 *Attention, nous gardons la même notation pour les inconnues dans le demi-plan $y < 0$.*

Nous avons maintenant le système d'équations suivant dans la couche limite :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, \varepsilon[, \quad t > 0, \quad (6.16)$$

et dans le demi-plan inférieur $y < 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{U}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \mathbf{V}_\varepsilon - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, \quad t > 0. \quad (6.17)$$

Les deux systèmes ci-dessus sont complétés par les conditions de raccord en déplacement normal et en divergence à l'interface $y = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_\varepsilon(x, 0, t) = \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, 0, t) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right)(x, 0, t) \end{array} \right. , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

La condition de paroi impédante se réécrit :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right)(x, \varepsilon, t) + Z \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial t}(x, \varepsilon, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

6.3.3 Analyse asymptotique

On cherche une condition d'impédance en $y = 0$, qui soit une idéalisation de la couche limite, valable quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour l'obtenir, il nous faut éliminer les inconnues dans la couche limite. Nous commençons classiquement par effectuer le changement d'échelle

$$y \rightarrow Y = \frac{y}{\varepsilon},$$

dans la couche limite, qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe $\Omega = \mathbb{R} \times]0, 1[$. En procédant au changement d'inconnues suivant :

$$\mathbf{U}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, y, t) = U_\varepsilon^{\text{CL}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right) \text{ et } \mathbf{V}_\varepsilon^{\text{CL}}(x, y, t) = V_\varepsilon^{\text{CL}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right),$$

les équations de Galbrun (6.16) dans la couche limite se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right) = 0, \\ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_\varepsilon^{\text{CL}} - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0, \quad (6.18)$$

les conditions de raccord deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_\varepsilon(x, 0, t) = V_\varepsilon^{\text{CL}}(x, 0, t) \\ \varepsilon \left(\frac{\partial \mathbf{U}_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{V}_\varepsilon}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \end{array} \right. , \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (6.19)$$

et la condition de paroi impédante s'écrit :

$$\left(\varepsilon \frac{\partial U_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial x} + \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial Y} \right)(x, 1, t) + \varepsilon Z \frac{\partial V_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial t}(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.20)$$

On introduit maintenant les développements asymptotiques formels en ε de \mathbf{U}_ε , \mathbf{V}_ε , $U_\varepsilon^{\text{CL}}$ et $V_\varepsilon^{\text{CL}}$. Dans le demi-plan $y < 0$ on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_\varepsilon(x, y, t) = U^0(x, y, t) + \varepsilon U^1(x, y, t) + \varepsilon^2 U^2(x, y, t) + \dots \\ \mathbf{V}_\varepsilon(x, y, t) = V^0(x, y, t) + \varepsilon V^1(x, y, t) + \varepsilon^2 V^2(x, y, t) + \dots \end{array} \right.$$

De la même manière, on écrit dans la couche limite :

$$\begin{cases} U_{\varepsilon}^{\text{cl}}(x, Y, t) = U_{\text{cl}}^0(x, Y, t) + \varepsilon U_{\text{cl}}^1(x, Y, t) + \varepsilon^2 U_{\text{cl}}^2(x, Y, t) + \dots \\ V_{\varepsilon}^{\text{cl}}(x, Y, t) = V_{\text{cl}}^0(x, Y, t) + \varepsilon V_{\text{cl}}^1(x, Y, t) + \varepsilon^2 V_{\text{cl}}^2(x, Y, t) + \dots \end{cases}$$

Nous allons chercher à éliminer les inconnues U_{cl}^j et V_{cl}^j dans la couche limite, pour aboutir à un problème aux limites en U^j et V^j avec une condition d'impédance approchée en $y = 0$ (quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

Analyse des termes d'ordre 0 en ε des équations.

– Dans le demi-plan $y < 0$ les équations (6.17) donnent à l'ordre 0 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^0 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, \quad t > 0. \quad (6.21)$$

– Dans la couche limite $0 < Y < 1$ les équations (6.18) donnent à l'ordre 0 en ε :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x \partial Y} V_{\text{cl}}^0 = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial Y^2} V_{\text{cl}}^0 = 0 \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (6.22)$$

– Les conditions de raccord (6.19) donnent :

$$\begin{cases} V^0(x, 0, t) = V_{\text{cl}}^0(x, 0, t), \\ \frac{\partial V_{\text{cl}}^0}{\partial Y}(x, 0, t) = 0. \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.23)$$

– Enfin, la condition de paroi impédante (6.20) mène à :

$$\frac{\partial V_{\text{cl}}^0}{\partial Y}(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.24)$$

De (6.22), on déduit que la fonction

$$(x, Y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial Y} V_{\text{cl}}^0$$

est constante. Celle-ci est nulle compte tenu de la deuxième équation de (6.23). Par conséquent, V_{cl}^0 est une fonction indépendante de Y . La première équation de (6.23) donne :

$$V_{\text{cl}}^0(x, Y, t) = V^0(x, 0, t), \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times [0, 1], \quad t > 0. \quad (6.25)$$

Remarque 6.4 *Le fait que $Y \rightarrow V_{\text{cl}}^0$ soit non nulle, constitue une réelle différence par rapport à l'étude menée au chapitre précédent en présence d'une paroi rigide.*

Analyse des termes d'ordre 1 en ε des équations.

– Dans le demi-plan $y < 0$ les équations (6.17) donnent à l'ordre 1 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0], \quad t > 0. \quad (6.26)$$

– Dans la couche limite $0 < Y < 1$ les équations (5.4) donnent à l'ordre 1 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (6.27)$$

– Les conditions de raccord (6.19) donnent :

$$\begin{cases} V^1(x, 0, t) = V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) \\ \left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.28)$$

– Enfin la condition de paroi impédante (6.20) mène à :

$$\left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right)(x, 1, t) + Z \frac{\partial V_{\text{CL}}^0}{\partial t}(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.29)$$

Nous cherchons à éliminer U_{CL}^0 et V_{CL}^1 . De (6.27) on déduit qu'il existe une fonction c indépendante de Y telle que :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0 \\ \frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} = c(x, t) \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0.$$

Si l'on injecte la deuxième équation dans la première on obtient :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) = 0 \\ \frac{\partial U_{\text{CL}}^0}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial Y} = c(x, t) \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (6.30)$$

Pour calculer $c(x, t)$, on utilise le fait que $c(x, t) = E[c(x, t)]$ où E est l'opérateur de moyenne en Y défini par (5.17). On obtient :

$$c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} E U_{\text{CL}}^0(x, t) + V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V_{\text{CL}}^1(x, 0, t).$$

Compte tenu de la première condition de raccord de (6.28), on a :

$$c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} EU_{\text{CL}}^0(x, t) + V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V^1(x, 0, t).$$

L'équation (6.30) devient alors :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial x} c(x, t) = 0 \\ c(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} EU_{\text{CL}}^0(x, t) + V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V^1(x, 0, t) \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0.$$

En utilisant la définition (5.19) page 143 de l'opérateur \mathbf{T}_M , on a :

$$\begin{cases} EU_{\text{CL}}^0 = \partial_x \mathbf{T}_M [V_{\text{CL}}^1(x, 0, t) - V^1(x, 0, t)] \\ c(x, t) = (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) [V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V^1(x, 0, t)] \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (6.31)$$

La condition de raccord en divergence à l'ordre 1 (6.28) donne :

$$\left(\frac{\partial U^0}{\partial x} + \frac{\partial V^0}{\partial y} \right)(x, 0, t) = c(x, t), \quad (6.32)$$

d'où, en utilisant (6.31), on obtient :

$$(\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) = (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) [V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) - V^1(x, 0, t)]. \quad (6.33)$$

La différence, par rapport au cas présenté dans le chapitre précédent, tient dans le fait que $V_{\text{CL}}^1(x, 1, t)$ n'est pas nul. Il nous faut donc réussir à obtenir son expression. Pour cela, nous avons besoin des termes d'ordre 2 en ε . Avant cela, remarquons que la condition de paroi impédante (6.29) donne :

$$c(x, t) + Z \partial_t V_{\text{CL}}^0(x, 1, t) = 0,$$

qui peut se réécrire compte tenu de (6.32) :

$$(\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) + Z \partial_t V_{\text{CL}}^0(x, 1, t) = 0,$$

puis en utilisant (6.25) :

$$(\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) + Z \partial_t V^0(x, 0, t) = 0, \quad (6.34)$$

Analyse des termes d'ordre 2 en ε des équations.

– Dans la couche limite $0 < Y < 1$ les équations (6.17) donnent à l'ordre 2 en ε :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U_{\text{CL}}^1 - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_{\text{CL}}^0 - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, Y) \in \mathbb{R} \times]0, 1[, \quad t > 0. \quad (6.35)$$

– Les conditions de raccord (6.19) donnent :

$$\begin{cases} V^2(x, 0, t) = V_{\text{CL}}^2(x, 0, t) \\ \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right)(x, 0, t) = \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.36)$$

– Enfin la condition de paroi impédante (6.20) mène à :

$$\left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right)(x, 1, t) + Z \frac{\partial V_{\text{CL}}^1}{\partial t}(x, 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (6.37)$$

On cherche donc à trouver une expression pour $V_{\text{CL}}^1(x, 1, t)$ en fonction des inconnues dans le demi-plan $y < 0$. À partir de (6.37) on obtient :

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = -\frac{\partial_t^{-1}}{Z} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right)(x, 1, t),$$

où ∂_t^{-1} est l'opérateur d'intégration en temps. On transforme alors cette expression comme suit :

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = -\frac{\partial_t^{-1}}{Z} \left(\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right)(x, Y, t) \right] dY + \left(\frac{\partial U_{\text{CL}}^1}{\partial x} + \frac{\partial V_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right)(x, 0, t) \right),$$

qui devient en utilisant la deuxième équation de (6.35) dans l'intégrale et la deuxième condition de raccord (6.36) pour le terme en $Y = 0$:

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = -\frac{\partial_t^{-1}}{Z} \left(\int_0^1 \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V_{\text{CL}}^0(x, Y, t) \right] dY + \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right)(x, 0, t) \right).$$

En utilisant (6.25) on obtient finalement :

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = -\frac{\partial_t^{-1}}{Z} \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^0(x, 0, t) dY + \left(\frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial V^1}{\partial y} \right)(x, 0, t) \right). \quad (6.38)$$

Si l'on introduit l'opérateur :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_M : \varphi(x, t) &\rightarrow \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(Y) \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 dY \right] \varphi(x, t) \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2 \left(\int_0^1 M(Y) dY \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \left(\int_0^1 M(Y)^2 dY \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi(x, t) \end{aligned} \quad (6.39)$$

alors l'expression (6.38) se réécrit :

$$V_{\text{CL}}^1(x, 1, t) = -\frac{\partial_t^{-1}}{Z} \left(\mathbf{D}_M[V^0(x, 0, t)] + (\partial_x U^1 + \partial_y V^1)(x, 0, t) \right). \quad (6.40)$$

Grâce à l'analyse asymptotique que nous venons de mener, nous allons pouvoir dériver un problème approché et surtout une nouvelle condition d'impédance en $y = 0$.

6.3.4 Le problème approché

On cherche maintenant à déterminer le problème vérifié par : $\mathbf{U}^{\varepsilon,1} = (U^{\varepsilon,1}, V^{\varepsilon,1})$ où $U^{\varepsilon,1} = U^0 + \varepsilon U^1$ et $V^{\varepsilon,1} = V^0 + \varepsilon V^1$. En clair, on cherche un problème approché à l'ordre 1 en ε .

On commence par les équations en espace. L'opération (6.21) + ε (6.26) donne :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U^{\varepsilon,1} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U^{\varepsilon,1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{\varepsilon,1}}{\partial y} \right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V^{\varepsilon,1} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U^{\varepsilon,1}}{\partial x} + \frac{\partial V^{\varepsilon,1}}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0], \quad t > 0. \quad (6.41)$$

Condition limite approchée Il nous reste maintenant à trouver la condition à la limite en $y = 0$ qui soit une approximation au premier ordre de la couche limite. Si on utilise l'expression (6.40) obtenue pour $V_{\text{CL}}^1(x, 1, t)$ alors (6.33) devient :

$$(\partial_x U^0 + \partial_y V^0)(x, 0, t) = -(\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \left[\frac{\partial^{-1}}{Z} (\mathbf{D}_M[V^0(x, 0, t)] + (\partial_x U^1 + \partial_y V^1)(x, 0, t)) + V^1(x, 0, t) \right].$$

En multipliant par ε et en négligeant les termes d'ordre 2 en ε on écrit pour $y = 0$:

$$\begin{aligned} \varepsilon (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) &= -\frac{\partial^{-1}}{Z} (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \left[\varepsilon \mathbf{D}_M[V^{\varepsilon,1}(x, 0, t)] + \varepsilon (\partial_x U^1 + \partial_y V^1)(x, 0, t) \right] \\ &\quad - (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \left[\varepsilon V^1(x, 0, t) \right]. \end{aligned}$$

Puis en utilisant $\varepsilon (\partial_x U^1 + \partial_y V^1) = (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1}) - (\partial_x U^0 + \partial_y V^0)$ et $\varepsilon V^1 = V^{\varepsilon,1} - V^0$ cette expression devient après réorganisation des termes (les termes d'ordre 0 disparaissent en utilisant (6.33)) :

$$\boxed{\left[\varepsilon \mathcal{I}d + \frac{\partial^{-1}}{Z} (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \right] (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) + \left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] \left[\mathcal{I}d + \varepsilon \frac{\partial^{-1}}{Z} \mathbf{D}_M \right] V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = 0.} \quad (6.42)$$

Commentaires :

- Lorsque l'on fait tendre ε vers 0 on obtient :

$$\left[\frac{\partial^{-1}}{Z} (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) \right] (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) + \left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = 0.$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M$ est inversible (cf. remarque 5.8 page 151) on retrouve bien la condition de paroi impédante originelle (6.15).

- Lorsque l'on fait tendre Z vers $+\infty$ nous avons vu que la condition de paroi impédante tend vers la condition de paroi rigide (cf. remarque 6.1 page 173). Par conséquent, lorsque l'on fait tendre Z vers $+\infty$ dans (6.42), on s'attend à retrouver la condition de paroi approchée (5.24) obtenue dans le chapitre précédent en considérant une paroi rigide. C'est effectivement le cas.

Autre condition limite : Il n'y a pas unicité de la condition limite approchée à l'ordre 1. Classiquement, en utilisant :

$$\begin{aligned} (\varepsilon \mathcal{I}d + \mathbf{A})^{-1} &= \mathbf{A}^{-1} (\mathcal{I}d + \varepsilon \mathbf{A}^{-1})^{-1} \\ &= \mathbf{A}^{-1} (\mathcal{I}d - \varepsilon \mathbf{A}^{-1}) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

on peut obtenir d'autres conditions limites approchées à partir de (6.42). Par exemple, avec $\mathbf{A} = \frac{\partial_t^{-1}}{Z} (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M)$ on obtient à partir de (6.42) en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 en ε :

$$\begin{aligned} &(\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) + \\ &Z \partial_t (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M)^{-1} \left[\mathcal{I}d - \varepsilon Z \partial_t (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M)^{-1} \right] \left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] \left[\mathcal{I}d + \varepsilon \frac{\partial_t^{-1}}{Z} \mathbf{D}_M \right] V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = 0, \end{aligned}$$

qui devient en multipliant par $(\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M)$:

$$\begin{aligned} &\left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) + \\ &Z \partial_t \left[\mathcal{I}d - \varepsilon Z \partial_t (\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M)^{-1} \right] \left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] \left[\mathcal{I}d + \varepsilon \frac{\partial_t^{-1}}{Z} \mathbf{D}_M \right] V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = 0. \end{aligned}$$

Après avoir développé le produit des trois termes et négligé le terme d'ordre 2 en ε , on obtient une nouvelle condition limite approchée :

$$\boxed{\left[\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M \right] (\partial_x U^{\varepsilon,1} + \partial_y V^{\varepsilon,1})(x, 0, t) + \left[(\mathcal{I}d + \partial_x^2 \mathbf{T}_M) (Z \partial_t + \varepsilon \mathbf{D}_M) - \varepsilon Z^2 \partial_t^2 \right] V^{\varepsilon,1}(x, 0, t) = 0.} \quad (6.43)$$

6.4 ANALYSE DE STABILITÉ

Nous allons maintenant étudier la stabilité et le caractère bien posé du problème approché que nous venons d'obtenir. Il se trouve que l'analyse de stabilité du problème avec la condition limite (6.42) est plus compliquée que celle avec (6.43), c'est pourquoi nous utiliserons cette dernière. On rappelle que la condition limite fait intervenir l'équation limite du tube étudiée dans la première partie de cette thèse. À l'aide d'une technique de perturbation similaire à celle présentée au chapitre 2 dans la section 2.4, nous parvenons à trouver des conditions sur le profil $M(Y)$ qui assurent le caractère bien posé du problème pour Z suffisamment grand. Avant de mener cette analyse une remarque s'impose :

Remarque 6.5 *Nous avons montré dans la section 6.2 que la condition de Myers aboutissait à un problème mal posé. Par conséquent, les conditions limites approchées (6.42) et (6.43), qui prennent en compte les effets de la couche limite et qui sont des perturbations de la condition de Myers à l'ordre 1 en ε , ne peuvent aboutir à des problèmes stables. Néanmoins, le problème peut devenir bien posé : ce sont les modes à basse fréquence qui seront instables et on rappelle que ce sont ceux à haute fréquence qui sont déterminants dans l'étude du caractère bien posé¹.*

¹cf. analyse de Kreiss expliquée dans la section 5.4.1 page 148

6.4.1 Obtention de l'équation caractéristique

La démarche est exactement la même que celle suivie au chapitre précédent dans la section 5.4.1. On commence par poser :

$$\begin{cases} U^{\varepsilon,1}(x, y, t) = U_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \\ V^{\varepsilon,1}(x, y, t) = V_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st}, \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et U_a et V_a deux constantes complexes non toutes deux nulles.

Les équations (6.41) dans le demi-espace $y < 0$ sont les mêmes qu'au chapitre précédent. On obtient donc de la même manière :

$$\xi = \sqrt{(s + ikM_\infty)^2 + k^2}, \quad (6.44)$$

et

$$U_a = \frac{ik}{\xi} V_a. \quad (6.45)$$

La différence par rapport au chapitre précédent vient de la condition limite. On suppose tout d'abord que l'équation limite du tube est bien posée ce qui implique que l'équation :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1,$$

où F^{CL} est défini par (5.21), n'a que des solutions réelles.

En Fourier-Laplace, et en utilisant les mêmes notations qu'au chapitre précédent, la condition limite (6.43) donne :

$$\left[1 - k^2 \widetilde{\mathbf{T}}_M\right] (ik U_a + \xi V_a) + \left[\left(1 - k^2 \widetilde{\mathbf{T}}_M\right) (Zs + \varepsilon \widetilde{\mathbf{D}}_M) - \varepsilon Z^2 s^2\right] V_a = 0, \quad (6.46)$$

où $\widetilde{\mathbf{T}}_M = E[\widetilde{U}(1)]$, $E[\widetilde{U}(1)]$ étant donné par (5.37), et $\widetilde{\mathbf{D}}_M = \int_0^1 (s + ikM(Y))^2 dY$. En multipliant² l'expression (6.46) par

$$1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ikM(Y))^2} dY$$

et en utilisant (5.37) on obtient après simplification :

$$(ik U_a + \xi V_a) + \left[\left(Zs + \varepsilon \int_0^1 (s + ikM(Y))^2 dY \right) - \varepsilon Z^2 s^2 \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ikM(Y))^2} dY \right) \right] V_a = 0.$$

En utilisant les expressions (6.44) et (6.45) de ξ et U_a , cette équation devient après calcul :

$$\frac{(s + ikM_\infty)^2}{\sqrt{(s + ikM_\infty)^2 + k^2}} + Zs + \varepsilon \int_0^1 (s + ikM(Y))^2 dY - \varepsilon Z^2 s^2 \left(1 + \int_0^1 \frac{k^2}{(s + ikM(Y))^2} dY \right) = 0.$$

On pose alors $\sigma = s/k$, ce qui donne :

$$\frac{(\sigma + iM_\infty)^2}{\sqrt{(\sigma + iM_\infty)^2 + 1}} + Z\sigma \frac{k}{|k|} + \varepsilon |k| \int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY - \varepsilon |k| Z^2 \sigma^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)) = 0. \quad (6.47)$$

²Ce terme est non nul puisque l'on a supposé que l'équation du tube était bien posée.

Finalement, (pour Z constant) on obtient³ quand $|k| \rightarrow +\infty$ l'équation caractéristique suivante :

$$\boxed{\int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY = Z^2 \sigma^2 (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)).} \quad (6.48)$$

On sait alors que le problème limite, composé des équations (6.41) et de la condition limite (6.43), est mal posé si et seulement si cette équation a des solutions à partie réelle non nulle. Le lecteur doit se souvenir que l'équation $F^{\text{CL}}(i\sigma) = 1$ correspond à l'équation caractéristique du problème limite du tube qui a été étudiée dans la première partie de cette thèse (cf. remarque 5.4 page 144 par exemple). On peut réécrire l'équation caractéristique (6.48) comme une perturbation, pour Z grand, de l'équation $F^{\text{CL}}(i\sigma) = 1$:

$$F^{\text{CL}}(i\sigma) = 1 - \frac{1}{Z^2 \sigma^2} \int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY.$$

Si on pose $\sigma = -i\lambda$ cette équation devient :

$$\boxed{F^{\text{CL}}(\lambda) = 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY.} \quad (6.49)$$

Le problème limite, composé des équations (6.41) et de la condition limite (6.43), est mal posé si et seulement si cette équation a des solutions non réelles. Nous allons obtenir, par une technique de perturbation, des résultats sur le caractère bien posé du problème approché, pour Z suffisamment grand.

6.4.2 Conditions pour profils continus assurant le caractère bien posé

La démarche est à peu de choses près la même que celle que nous avons utilisée au chapitre 2 dans la section 2.4. Plus précisément on va être capable d'utiliser la même démarche pour des Z suffisamment grands. Nous considérons un profil général M . L'idée est d'approcher M par un profil M_h linéaire par morceaux. L'étude de l'équation caractéristique (6.49) en sera simplifiée. Le résultat important est que si tous les M_h sont stables, au sens où l'équation (6.49) n'a que des solutions réelles, alors M est également stable. Ce résultat se montre en utilisant le théorème de Hurwitz, qui est un théorème sur la continuité des zéros d'une fonction [Cha98] :

Théorème 6.1 *Soit f_n une suite de fonctions holomorphes sur D et telle que $f_n(z) \neq 0$ pour tout z dans D . Si f_n converge uniformément localement dans D vers la fonction f , alors f est holomorphe sur D et vérifie : f est nulle sur D ou $f(z) \neq 0$ pour tout z dans D .*

On introduit :

$$\Phi_M(\zeta, \lambda) = F^{\text{CL}}(\lambda) - 1 + \frac{\zeta^2}{\lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY.$$

On rappelle qu'à Z fixé le problème limite (6.41)-(6.43) est bien posé si et seulement si la fonction

$$\lambda \rightarrow \Phi_M\left(\frac{1}{Z}, \lambda\right)$$

n'a pas de zéro ayant une partie réelle non nulle. Remarquons que :

$$\Phi_M(0, \lambda) = F^{\text{CL}}(\lambda) - 1,$$

fonction dont la recherche de zéros nous a occupé tout au long du chapitre 2. On commence par montrer le

³Pour plus de détails voir l'analyse de stabilité menée au chapitre précédent à la page 151

Lemme 6.1 Soient un profil $M \in C^0([0, 1])$ et M_h une famille de profils tels que :

$$\|M - M_h\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Alors si pour M_h le problème (6.41)-(6.43) est bien posé, il l'est aussi pour M .

DÉMONSTRATION. Clairement $\lambda \rightarrow \Phi_{M_h}(1/Z, \lambda)$ défini sur $D = \mathbb{C} \setminus \text{Im}(M)$ est holomorphe et converge uniformément localement vers Φ_M quand $h \rightarrow 0$. À l'aide du théorème de Hurwitz, on conclut aisément (par l'absurde). □

Les profils linéaires par morceaux Comme annoncé plus tôt dans l'explication de notre stratégie pour l'obtention de résultats sur le caractère bien posé du problème, la première étape consiste à s'intéresser aux profils linéaires par morceaux. Ce qui va suivre ne sera qu'une adaptation des deux lemmes 2.10 et 2.11 présents dans la section 2.4 du chapitre 2. Ce qui change ici :

- Le profil est ici défini sur $[0, 1]$ et non sur $[-1, 1]$.
- L'équation n'est plus

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1,$$

mais

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY.$$

L'idée est que pour Z grand, $1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ est "proche" de 1. On considère que le second membre est perturbé.

On commence par énoncer le lemme suivant qui se démontre exactement de la même manière que le lemme 2.10 page 48 et qui donne une expression de la fonction F^{CL} pour un profil linéaire par morceaux quelconque :

Lemme 6.2 Soit $M \in C^0([0, 1])$ et

$$x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1,$$

tel que M est linéaire sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $0 \leq i < N$:

$$\forall 0 \leq i \leq N - 1, \quad M(Y) = \alpha_i Y + \beta_i \text{ dans } [x_i, x_{i+1}]$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$ et $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$. Alors la fonction $F^{\text{CL}}(\lambda)$ est une fonction rationnelle qui a au plus $N + 1$ pôles. Plus précisément si

$$M_0 < M_1 < \dots < M_P$$

désigne les P valeurs $M(x_i)$ que l'on a ordonnées :

$$\{M_0, M_1, \dots, M_P\} = \{M(x_i); i = 0, \dots, N\},$$

alors la fonction rationnelle F^{CL} peut s'écrire sous la forme suivante :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = \sum_{j=0}^P \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j} + \sum_{j=0}^P \frac{\zeta_j}{(\lambda - M_j)^2} \tag{6.50}$$

avec des coefficients réels γ_j et ζ_j satisfaisant

$$\gamma_0 < 0, \gamma_P > 0 \text{ et } \zeta_j \geq 0, \quad \forall 0 \leq j \leq P.$$

Nous allons maintenant utiliser l'expression (6.50) de F^{CL} pour établir des conditions suffisantes sur le profil assurant que toutes les solutions de l'équation caractéristique (6.49) sont réelles, pour Z suffisamment grand. C'est l'objet du lemme suivant dont la démonstration est une adaptation de celle du lemme 2.11 page 50 :

Lemme 6.3 *On se place sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 6.2 précédent. On suppose de plus que $M(1) = 0$. Alors, il existe $Z_c \geq 1$ tel que pour tout $Z > Z_c$:
si $\zeta_j = 0$ pour tout j et s'il existe deux entiers k' et k , vérifiant $0 \leq k' < P$ et $0 \leq k < P - k'$, tels que :*

$$\begin{cases} \gamma_j < 0 & \text{pour } 0 \leq j \leq k', \\ \gamma_j > 0 & \text{pour } k' + k + 1 \leq j \leq P, \\ \gamma_j = 0 & \text{pour } k' < j < k' + k + 1, \end{cases} \quad (6.51)$$

alors toutes les solutions complexes λ de l'équation caractéristique (6.49) sont réelles, et par conséquent le problème (6.41)-(6.43) est bien posé.

Ce résultat reste vrai s'il existe $k' \leq \ell \leq k' + k + 1$ et tel que $\zeta_\ell > 0$ et $\zeta_j = 0$ pour tout $j \neq \ell$.

DÉMONSTRATION. Nous allons, plutôt que tout refaire, montrer ce qui change par rapport à la démonstration du lemme 2.11 page 50. Il est nécessaire d'avoir cette démonstration bien en tête avant d'aborder celle-ci. Dans un premier temps on suppose que tous les ζ_j sont nuls. Alors par (6.51) :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = F^*(\lambda) := \sum_{j=0}^{k'} \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j} + \sum_{j=k'+k+1}^P \frac{\gamma_j}{\lambda - M_j},$$

où tous les coefficients γ_j sont différents de 0. On montre de plus :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\lambda - M(Y))^2 dY \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\lambda - \alpha_i Y - \beta_i)^2 dY \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{-1}{3\alpha_i} (\lambda - \alpha_i Y - \beta_i)^3 \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{-1}{3\alpha_i} [(\lambda - M(x_{i+1}))^3 - (\lambda - M(x_i))^3], \end{aligned}$$

qui est un polynôme de degré 2 en λ . L'équation caractéristique (6.49) se ramène donc à la recherche des racines d'un polynôme de degré au plus $P + 3 - k$ (et non plus $P + 1 - k$) en λ . Si λ est solution, $\bar{\lambda}$ l'est aussi. Ainsi, si on trouve $P + 2 - k$ solutions réelles alors elles le seront toutes et le problème sera bien posé. Pour trouver ces $P + 2 - k$ racines réelles nous allons procéder de la même manière que lors de la démonstration du lemme 2.11 page 50. En considérant la fonction $\lambda \mapsto F^{\text{CL}}(\lambda)$ sur l'axe réel, on rappelle que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F^{\text{CL}}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F^{\text{CL}}(\lambda) = 0.$$

De plus pour $0 \leq j \leq k'$, $\gamma_j < 0$ entraîne

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_j} F^{\text{CL}}(\lambda) = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \xrightarrow{\sim} M_j} F^{\text{CL}}(\lambda) = -\infty$$

et pour $k' + k + 1 \leq j \leq P$, $\gamma_j > 0$ entraîne

$$\lim_{\lambda \xrightarrow{\leq} M_j} F^{\text{CL}}(\lambda) = -\infty \text{ et } \lim_{\lambda \xrightarrow{\geq} M_j} F^{\text{CL}}(\lambda) = +\infty.$$

On s'intéresse maintenant au second membre qui est une fonction continue sur \mathbb{R}^* . On montre simplement que :

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY = 1 - \frac{1}{Z^2}$$

et

$$1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY \sim_0 -\frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 M(Y)^2 dY. \quad (6.52)$$

La différence fondamentale par rapport à la démonstration du lemme 2.11 page 50 vient du fait que

$$\frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$$

explose lorsque λ tend vers 0. C'est pourquoi le nombre $0 \leq j^* \leq P$ tel que $M_{j^*} = 0$ joue un rôle important.

Remarque 6.6 On montre facilement que si $\gamma_{j^*} \neq 0$ alors 0 est solution de l'équation caractéristique (6.49).

Étudions les différents cas :

- $j^* = 0$ ou P :

Supposons par exemple que $j^* = 0$, le cas $j^* = P$ étant similaire. On doit alors distinguer deux cas :

1. Cas $\gamma_1 \geq 0$: en particulier, $k' = 0$. Dès que⁴ $Z > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que l'équation (6.49) a au moins une solution réelle dans l'intervalle $] -\infty, M_0[$, ainsi que dans chaque intervalle $]M_{k+1}, M_{k+2}[$, ..., $]M_{P-1}, M_P[$, $]M_P, +\infty[$. Cela fait au moins $P + 1 - k$ solutions réelles distinctes, et même $P + 2 - k$ compte tenu de la remarque 6.6. Ainsi, toutes les solutions sont réelles et le problème est bien posé.

Remarque 6.7 La $P + 3 - k$ ème solution réelle se trouve dans l'intervalle $]M_0, M_{k+1}[$. En effet, on a :

$$F^{\text{CL}}(\lambda) \sim_0 \frac{\gamma_0}{\lambda}.$$

Compte tenu de (6.52), on voit qu'au voisinage de 0, F^{CL} est au dessus de

$$1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY.$$

On montre ainsi l'existence d'une solution réelle dans l'intervalle $]M_0, M_{k+1}[$.

La figure suivante illustre le cas présent. On se place dans le cas $P = 4$ et on prend

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) = (0, 0.3, 0.7, 1.2, 2)$$

⁴On prend $Z > 1$ pour assurer que $1 - 1/Z^2 > 0$ et montrer ainsi l'existence d'une solution réelle dans chaque intervalle $] -\infty, M_0[$ et $]M_P, +\infty[$.

ainsi que $\gamma_0 < 0$ et $\gamma_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq 4$. On a, dans l'exemple considéré, $j^* = 0$ et $k = 0$. On représente la fonction F^{CL} en bleu et la fonction

$$\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$$

en rouge, pour $Z = 5$:

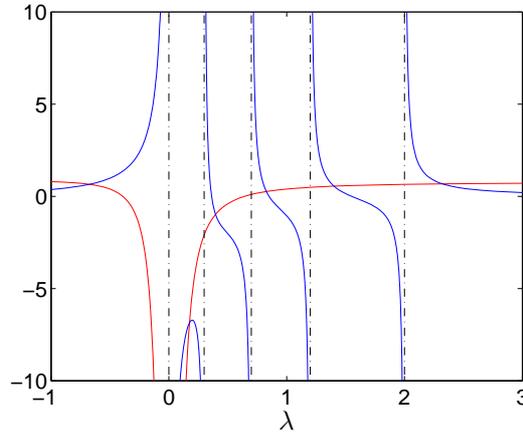


FIG. 6.5 – Graphe des fonctions F^{CL} (en bleu) et $\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ (en rouge).

Les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions sont des solutions réelles de l'équation caractéristique (6.49). On observe bien l'existence d'une solution dans chaque intervalle $]-\infty, M_0[$, $]M_1, M_2[$, $]M_2, M_3[$, $]M_3, M_4[$ et $]M_4, \infty[$. On retrouve de plus la solution annoncée dans la remarque précédente, dans l'intervalle $]M_0, M_1[$.

2. Cas $\gamma_1 < 0$: dès que $Z > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que l'équation (6.49) a au moins une solution réelle dans chaque intervalle $]-\infty, M_0[$, $]M_1, M_2[$, ..., $]M_{k'-1}, M'_k[$ ainsi que dans chaque intervalle $]M_{k'+k+1}, M_{k'+k+2}[$, ..., $]M_{P-1}, M_P[$, $]M_P, +\infty[$. Cela fait au moins $P - k$ solutions réelles distinctes. On n'est pas assuré de conserver une solution réelle dans l'intervalle $]M_0, M_1[$. Nous allons montrer que pour Z suffisamment grand, l'existence d'une telle solution est assurée. On note λ_* la solution de $F^{CL}(\lambda) = 1$ sur l'intervalle $]M_0, M_1[$. Une possibilité pour assurer l'existence d'une solution dans cet intervalle est de choisir Z tel que

$$1 - \frac{1}{(\lambda_*/2)^2 Z^2} \int_0^1 (\lambda_*/2 - M(Y))^2 dY > F^{CL}(\lambda_*/2)$$

ce qui est possible puisque $F(\lambda_*/2) < 1$. Ceci assure l'existence d'une solution dans l'intervalle $]\lambda_*/2, M_1[$. On a donc au moins $P + 1 - k$ solutions réelles distinctes, et même $P + 2 - k$ compte tenu de la remarque 6.6. Ainsi toutes les solutions sont réelles et le problème est bien posé.

Remarque 6.8 La $P + 3 - k$ ème solution réelle se trouve dans l'intervalle $]0, \lambda_*/2[$. En effet, on a :

$$F^{CL}(\lambda) \sim_0 \frac{\gamma_0}{\lambda}.$$

Compte tenu de (6.52), on voit qu'au voisinage de 0, F^{CL} est au dessus de

$$1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY.$$

On montre ainsi l'existence d'une solution réelle dans l'intervalle $]0, \lambda_*/2[$.

La figure suivante illustre le cas présent. On se place dans le cas $P = 4$ et on prend

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) = (0, 0.8, 1, 1.6, 2.4)$$

ainsi que $\gamma_0 < 0$, $\gamma_1 < 0$ et $\gamma_i > 0$ pour tout $2 \leq i \leq 4$. Cela correspond à $j^* = 1$, $k' = 1$ et $k = 0$. Sur la figure de droite, on observe, par rapport à la figure de gauche, l'apparition de deux solutions supplémentaires dans l'intervalle $]M_0, M_1[$. Le problème devient bien posé pour Z grand..

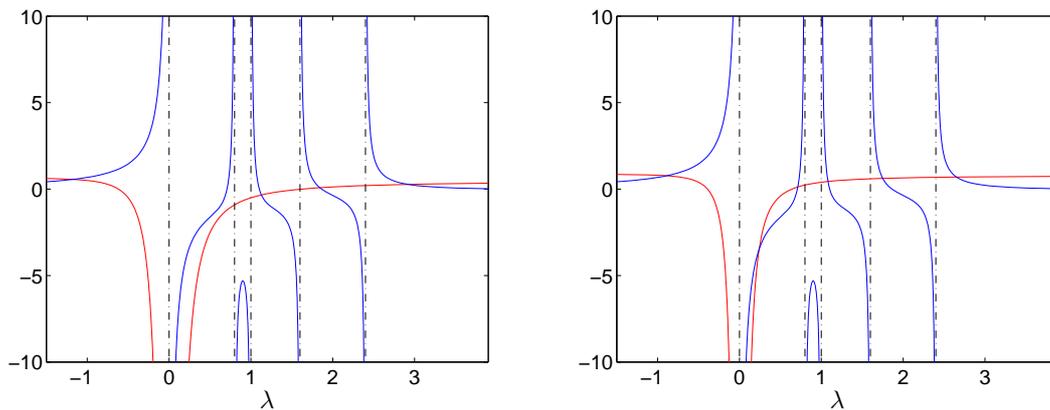


FIG. 6.6 – Graphe des fonctions F^{CL} (en bleu) et $\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ (en rouge), pour $Z = 2$ à gauche et $Z = 5$ à droite.

- $0 < j^* < k'$ ou $k' + k + 1 < j^* < P$:

Supposons par exemple que $0 < j^* < k'$. Dès que $Z > 1$, on obtient par le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation (6.49) a au moins une solution réelle dans chaque intervalle $] - \infty, M_0[$, $]M_0, M_1[$, ..., $]M_{j^*-1}, M_{j^*}[$, $]M_{j^*+1}, M_{j^*+2}[$, ..., $]M_{k'-1}, M_{k'}[$ ainsi que dans chaque intervalle $]M_{k'+k+1}, M_{k'+k+2}[$, ..., $]M_{P-1}, M_P[$, $]M_P, +\infty[$. Cela fait au moins $P - k$ solutions réelles distinctes. On n'est pas assuré de conserver une solution réelle dans l'intervalle $]M_{j^*}, M_{j^*+1}[$. Nous allons montrer que pour Z suffisamment grand, l'existence d'une telle solution est assurée. On note λ_* la solution de $F^{\text{CL}}(\lambda) = 1$ sur l'intervalle $]M_{j^*}, M_{j^*+1}[$. Une possibilité pour assurer l'existence d'une solution dans cet intervalle est de choisir Z tel que

$$1 - \frac{1}{(\lambda_*/2)^2 Z^2} \int_0^1 (\lambda_*/2 - M(Y))^2 dY > F^{\text{CL}}(\lambda_*/2)$$

ce qui est possible puisque $F(\lambda_*/2) < 1$. Ceci assure l'existence d'une solution dans l'intervalle $] \lambda_*/2, M_{j^*+1}[$. On a donc au moins $P + 1 - k$ solutions réelles distinctes, et même $P + 2 - k$ compte tenu de la remarque 6.6. Ainsi toutes les solutions sont réelles et le problème est bien posé.

Remarque 6.9 La condition assure aussi l'existence d'une solution dans l'intervalle $]0, \lambda_*/2[$.

Pour illustrer le cas présent, on considère le cas $P = 4$ et on prend

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) = (-0.5, 0, 0.8, 1, 1.6)$$

ainsi que $\gamma_i < 0$ pour tout $0 \leq i \leq 2$ et $\gamma_i > 0$ pour tout $3 \leq i \leq 4$. On a alors $j^* = 1, k' = 2$ et $k = 0$. Sur la figure de droite, on observe, par rapport à la figure de gauche, on observe l'apparition de deux solutions supplémentaires dans l'intervalle $]M_1, M_2[$. Le problème devient bien posé pour Z grand.

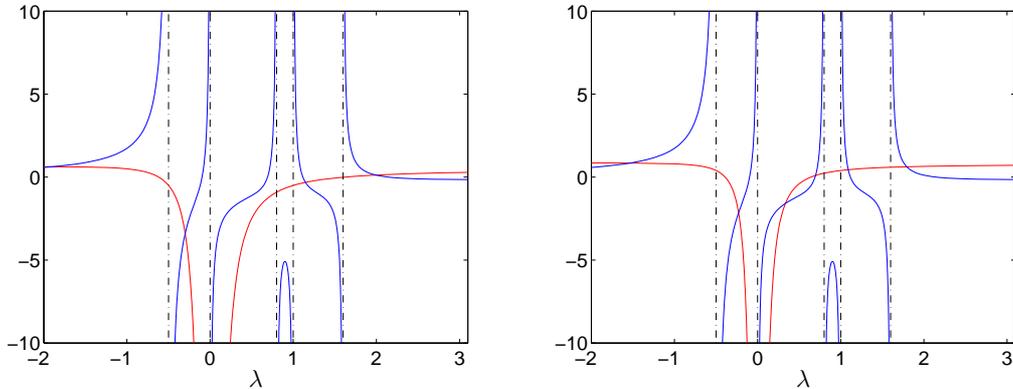


FIG. 6.7 – Graphe des fonctions F^{CL} (en bleu) et $\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ (en rouge), pour $Z = 2$ à gauche et $Z = 5$ à droite.

- $j^* = k'$ ou $j^* = k' + k + 1$:

Supposons par exemple que $j^* = k'$. Dès que $Z > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que l'équation (6.49) a au moins une solution réelle dans chaque intervalle $] - \infty, M_0[,]M_0, M_1[, \dots,]M_{k'-1}, M'_k[$ ainsi que dans chaque intervalle $]M_{k'+k+1}, M_{k'+k+2}[, \dots,]M_{P-1}, M_P[,]M_P, +\infty[$. Cela fait au moins $P+1-k$ solutions réelles distinctes, et même $P+2-k$ compte tenu de la remarque 6.6. Ainsi toutes les solutions sont réelles et le problème est bien posé.

Remarque 6.10 On montre facilement que la $P+3-k$ ème solution réelle se trouve dans l'intervalle $]M_{k'}, M_{k'+k+1}[$.

Pour illustrer ce résultat, on considère le cas $P = 4$ et on prend

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) = (-0.5, 0, 0.8, 1, 1.6)$$

ainsi que $\gamma_i < 0$ pour tout $0 \leq i \leq 1$ et $\gamma_i > 0$ pour tout $2 \leq i \leq 4$. On a, dans l'exemple considéré, $j^* = 1, k' = 1$ et $k = 0$.

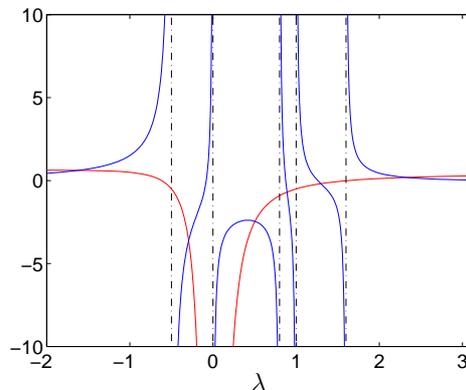


FIG. 6.8 – Graphe des fonctions F^{CL} (en bleu) et $\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ (en rouge), pour $Z = 2$.

Les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions sont des solutions réelles de l'équation caractéristique (6.49). On observe bien l'existence d'une solution dans chaque intervalle $]-\infty, M_0[$, $]M_0, M_1[$, $]M_2, M_3[$, $]M_3, M_4[$ et $]M_4, \infty[$. On retrouve de plus la solution annoncée dans la remarque précédente, dans l'intervalle $]M_1, M_2[$.

- $k' < j^* < k' + k + 1$:

Dès que $Z > 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires on obtient que l'équation (6.49) a au moins une solution réelle dans chaque intervalle $]-\infty, M_0[$, $]M_0, M_1[$, ..., $]M_{k'-1}, M'_k[$ ainsi que dans chaque intervalle $]M_{k'+k+1}, M_{k'+k+2}[$, ..., $]M_{P-1}, M_P[$, $]M_P, +\infty[$. Cela fait au moins $P + 1 - k$ solutions réelles distinctes. On montre facilement l'existence de deux solutions réelles supplémentaires dans les intervalles $]M'_{k'}, 0[$ et $]0, M_{k'+k+1}[$. Nous avons donc trouvé $P + 3 - k$ solutions réelles distinctes. Ainsi toutes les solutions sont réelles et le problème est bien posé.

Pour illustrer ce résultat, on considère le cas $P = 4$ et on prend

$$(M_0, M_1, M_2, M_3, M_4) = (-1, 0.5, 0, 0.8, 1)$$

ainsi que $\gamma_i < 0$ pour tout $0 \leq i \leq 1$, $\gamma_2 = 0$ et $\gamma_i > 0$ pour tout $2 \leq i \leq 4$. On a, dans l'exemple considéré, $j^* = 2$, $k' = 1$ et $k = 1$.

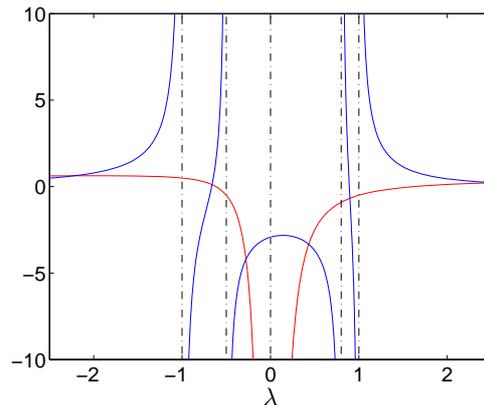


FIG. 6.9 – Graphe des fonctions F^{CL} (en bleu) et $\lambda \rightarrow 1 - \frac{1}{Z^2 \lambda^2} \int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY$ (en rouge), pour $Z = 2$.

Les points d'intersection des graphes de ces deux fonctions sont des solutions réelles de l'équation caractéristique (6.49). On observe bien l'existence d'une solution dans chaque intervalle $]-\infty, M_0[$, $]M_0, M_1[$, $]M_1, M_2[$, $]M_2, M_3[$, $]M_3, M_4[$ et $]M_4, \infty[$. Le problème est bien posé.

Finalement, s'il existe $k' \leq l \leq k' + k + 1$ et tel que $\zeta_l > 0$ et $\zeta_j = 0$ pour $j \neq l$. Dans ce cas

$$F^{\text{CL}}(\lambda) = F^*(\lambda) + \frac{\zeta_l}{(\lambda - M_l)^2}.$$

Les arguments utilisés dans la démonstration du lemme 2.11 page 50 sont toujours valable ici et le problème est bien posé. \square

Les résultats En combinant les lemmes 6.1 et 6.3, nous allons établir des hypothèses géométriques sur le profil M assurant le caractère bien posé du problème (6.41)-(6.43). Nous obtenons le théorème suivant comme nous avons obtenu le théorème 2.3 page 54. C'est pourquoi la démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 6.2 Soit $M \in C^0(]0, 1[)$. Alors il existe $Z_c \geq 1$ tel que pour tout $Z > Z_c$ le problème (6.41)-(6.43) est bien posé dès que l'une de ces conditions est satisfaite :

1. M est strictement convexe (resp. concave).
2. M est strictement croissante (resp. décroissante) et il existe $y_S \in]0, 1[$ tel que M est concave (resp. convexe) sur $]0, y_S[$ et convexe (resp. concave) sur $]y_S, 1[$.

Pour certains profils on est capable de préciser la valeur de Z_c . Dans le premier point de la démonstration du lemme 6.3, l'hypothèse $Z > 1$ nous a suffi à démontrer le caractère bien posé. On peut alors obtenir la

Proposition 6.3 Soit $M \in C^0(]0, 1[)$. Alors pour tout $Z > 1$ le problème (6.41)-(6.43) est bien posé dès que l'une de ces conditions est satisfaite :

1. M est strictement décroissante et convexe.
2. M est strictement croissante et concave.

En utilisant une technique de perturbation pour Z grand, nous avons réussi à montrer des résultats sur le caractère bien posé du problème approché (6.41)-(6.43). Comme le montre la remarque suivante, nous ne pouvons utiliser une technique similaire pour Z petit.

Remarque 6.11 L'équation caractéristique (6.49) devient pour $Z = 0$:

$$\int_0^1 (\lambda - M(Y))^2 dY = 0.$$

Or cette équation a toujours des solutions non réelles. En effet, si on pose $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ la partie imaginaire de l'équation donne :

$$\int_0^1 \lambda_I (\lambda_R - M(Y)) dY = 0.$$

Si on suppose $\lambda_I \neq 0$ alors on obtient :

$$\lambda_R = \int_0^1 M(Y) dY.$$

La partie réelle de l'équation devient alors :

$$\lambda_I^2 = \int_0^1 M(Y)^2 dY - \left(\int_0^1 M(Y) dY \right)^2$$

qui est positif compte tenu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Cela laisse penser que le problème approché (6.41)-(6.43) est mal posé pour Z suffisamment petit.

Rappelons que les résultats que nous avons énoncés précédemment ont été montrés en tenant compte de la condition limite approchée (6.43) et non de la condition (6.42) obtenue naturellement. Ce choix est dû au fait que l'étude en est simplifiée. Notre conjecture est que les résultats sur le caractère bien posé du problème approché sont les mêmes que l'on prenne l'une ou l'autre des deux conditions limites.

6.4.3 Impédance dépendant de la fréquence

Le fait de considérer une impédance dépendante du temps $Z(\partial_t)$, plutôt qu'une impédance constante, ne change rien à l'analyse asymptotique. Nous obtenons le même problème approché, les mêmes conditions limites (6.42) et (6.43). En revanche l'étude de stabilité est bouleversée. On montre :

Théorème 6.3 Si $|\tilde{Z}(\omega)| \sim_{|\omega| \rightarrow +\infty} C|\omega|^\mu$, on a :

– Si $\mu > 0$ le problème approché (6.41)-(6.43) est bien posé si et seulement si le problème limite du tube (1.9) l'est. En particulier si $M \in C^0(]0, 1[)$ le problème est bien posé dès que l'une de ces conditions est satisfaite :

1. M est strictement convexe (resp. concave).

2. M est strictement croissante (resp. décroissante) et il existe $y_S \in]0, 1[$ tel que M est concave (resp. convexe) sur $]0, y_S[$ et convexe (resp. concave) sur $]y_S, 1[$.

– Si $\mu < 0$ le problème approché est inconditionnellement mal posé.

DÉMONSTRATION. • Si $\mu > 0$ l'équation caractéristique (6.47) devient quand $|k|$ tend vers $+\infty$:

$$F^{\text{CL}}(i\sigma) = 1,$$

qui est l'équation caractéristique du problème limite du tube (1.9) étudié dans la première partie de cette thèse. Ainsi, le problème approché (6.41)-(6.43) sera bien posé si et seulement si (1.9) l'est.

• Si $\mu < 0$ l'équation caractéristique (6.47) devient quand $|k|$ tend vers $+\infty$:

$$\int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY = 0,$$

le problème approché est inconditionnellement mal posé (cf. remarque 6.11). □

Remarque 6.12 – Considérons le cas du modèle d'impédance à trois paramètres :

$$\tilde{Z}(\omega) = R + \frac{K}{i\omega} + i\omega C.$$

Le théorème précédent montre que le problème approché (6.41)-(6.43) est bien posé dès que $C \neq 0$. À l'inverse si C et R sont tous deux nuls il est mal posé.

– Considérons le cas du résonateur de Helmholtz :

$$\tilde{Z}(\omega) = R + i\omega C - i \cot(\omega L).$$

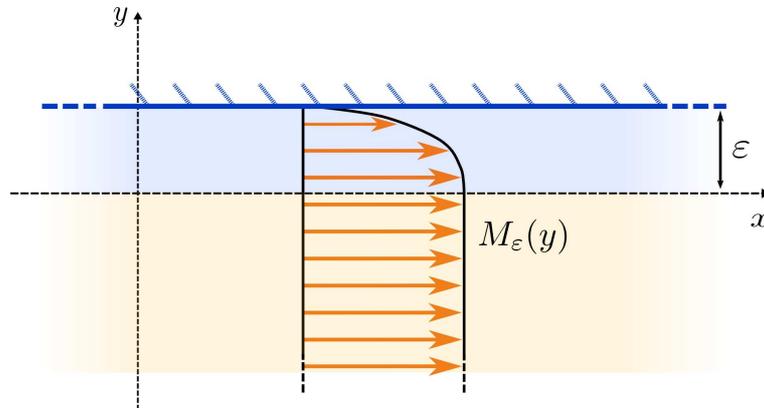
Le théorème précédent montre que le problème approché (6.41)-(6.43) est bien posé dès que $C \neq 0$.

6.5 COMPLÉMENTS : APPROCHE EULÉRIENNE

Le modèle approché (6.41)-(6.42) a été obtenu en considérant les équations de Galbrun. Qu'aurait-on obtenu si nous avions utilisé les équations d'Euler linéarisées? Cette section est une adaptation fidèle de la section 5.5 page 162.

6.5.1 Position du problème

Nous considérons le domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R} \times]-\infty, \varepsilon[$:



Nous supposons que ce domaine est rempli par un fluide parfait compressible qui est en mouvement. De plus, nous supposons que l'écoulement est stationnaire et laminaire. Les équations d'Euler linéarisées (1) s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + (M_\varepsilon)'(y) v_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial t} + M_\varepsilon(y) \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{array} \right. , \quad (x, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (6.53)$$

où $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ représente la perturbation de la vitesse et p_ε la perturbation de la pression. On associe à ces équations des données initiales à support dans le demi-espace $y < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\varepsilon(x, y, 0) = u_0(x, y), \\ v_\varepsilon(x, y, 0) = v_0(x, y), \\ p_\varepsilon(x, y, 0) = p_0(x, y). \end{array} \right.$$

Comme nous l'avons fait au début de ce chapitre, on se restreint à une classe particulière de profils de la forme :

$$M_\varepsilon(y) = \begin{cases} M\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), & 0 < y < \varepsilon \\ M_\infty, & y < 0 \end{cases} \quad \text{avec } M \in L^\infty(]0, 1[).$$

De plus, on suppose que $M_\varepsilon \in W^{1,\infty}(]-\infty, 1[)$ et vérifie $M(1) = 0$. On complète ces équations par une condition de paroi impédante en $y = \varepsilon$:

$$p_\varepsilon(x, \varepsilon, t) = Z v_\varepsilon(x, \varepsilon, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Nous commençons par appliquer la transformation de Fourier :

$$u(x, y, t) \longrightarrow \widehat{u}(k, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) e^{-ikx} dx$$

ce qui donne le système 1D (en espace) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \widehat{u}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{u}_\varepsilon + ik \widehat{p}_\varepsilon + (M_\varepsilon)'(y) \widehat{v}_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial \widehat{v}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{v}_\varepsilon + \frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \widehat{p}_\varepsilon}{\partial t} + ik M_\varepsilon(y) \widehat{p}_\varepsilon + ik \widehat{u}_\varepsilon + \frac{\partial \widehat{v}_\varepsilon}{\partial y} = 0 \end{array} \right. , \quad (k, y) \in \Omega_\varepsilon, \quad t > 0. \quad (6.54)$$

Lorsque k est fixé, ce problème d'évolution est bien posé dans $L^2(] - \infty, \varepsilon[)$ et nous avons une estimation a priori du type :

$$\int_{-\infty}^{\varepsilon} (|\widehat{p}_\varepsilon|^2 + |\widehat{u}_\varepsilon|^2 + |\widehat{v}_\varepsilon|^2) dy \leq \left[\int_{-\infty}^{\varepsilon} (|\widehat{p}_0|^2 + |\widehat{u}_0|^2 + |\widehat{v}_0|^2) dy \right] \exp(C |k| t)$$

pour une certaine constante C . Par conséquent, pour $\Re(s)$ assez grand par rapport à k (mais indépendant de ε), on peut définir la transformée de Laplace en temps de $(\widehat{u}_\varepsilon, \widehat{v}_\varepsilon, \widehat{p}_\varepsilon)$. On rappelle la définition de la transformée de Laplace :

$$\widehat{u}(k, y, t) \longrightarrow \widetilde{u}(k, y, s) = \int_0^{+\infty} \widehat{u}(k, y, t) e^{-st} dt.$$

Après avoir appliqué cette transformation à (6.54) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_\varepsilon \widetilde{u}_\varepsilon + M'_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + ik \widetilde{p}_\varepsilon = \widehat{u}_0, \\ \gamma_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} = \widehat{v}_0, \\ \gamma_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon + ik \widetilde{u}_\varepsilon + \frac{\partial \widetilde{v}_\varepsilon}{\partial y} = \widehat{p}_0, \end{array} \right. \quad (6.55)$$

où $(\widehat{u}_0, \widehat{v}_0, \widehat{p}_0)$ désigne la transformée de Fourier de la donnée initiale (u_0, v_0, p_0) et où nous avons posé $\gamma_\varepsilon(k, y, s) = s + ik M_\varepsilon(y)$ qui, notons le, est non nul. Nous pouvons maintenant éliminer $\widetilde{u}_\varepsilon$ et $\widetilde{v}_\varepsilon$. En effet, de la deuxième équation de (6.55) nous obtenons :

$$\widetilde{v}_\varepsilon = -\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \Rightarrow \frac{\partial \widetilde{v}_\varepsilon}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \right).$$

On peut maintenant obtenir une expression de $\widetilde{u}_\varepsilon$ en fonction de $\widetilde{p}_\varepsilon$ en injectant cette égalité dans la première équation de (6.55) ce qui donne :

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_\varepsilon &= -\gamma_\varepsilon^{-1} (M'_\varepsilon \widetilde{v}_\varepsilon + ik \widetilde{p}_\varepsilon) + \gamma_\varepsilon^{-1} \widehat{u}_0 \\ &= \gamma_\varepsilon^{-2} M'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) + \gamma_\varepsilon^{-1} (\widehat{u}_0 - ik \widetilde{p}_\varepsilon) \end{aligned}$$

En reportant les expressions obtenues pour $\widetilde{u}_\varepsilon$ et $\widetilde{v}_\varepsilon$ dans la troisième et dernière équation de (6.55), nous avons :

$$\gamma_\varepsilon \widetilde{p}_\varepsilon + ik \gamma_\varepsilon^{-2} M'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) + ik \gamma_\varepsilon^{-1} (\widehat{u}_0 - ik \widetilde{p}_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma_\varepsilon^{-1} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \right) = \widehat{p}_0$$

ce qui après avoir multiplié par γ_ε peut se réécrire :

$$(\gamma_\varepsilon^2 + k^2)\widetilde{p}_\varepsilon + \gamma_\varepsilon^{-1} \gamma'_\varepsilon \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) - \gamma_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon} \left(\frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} - \widehat{v}_0 \right) \right) = \gamma_\varepsilon \widehat{p}_0 - ik \widehat{u}_0$$

En se rappelant que les données initiales sont à support dans le demi-espace $y < 0$, on obtient :

$$\begin{cases} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2)\widetilde{p}_\varepsilon - \frac{\partial^2 \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y^2} = (s + ikM_\infty)\widehat{p}_0 - \left(\frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial y} + ik \widehat{u}_0 \right) & \text{pour } y < 0, \\ (\gamma_\varepsilon^2 + k^2)\widetilde{p}_\varepsilon - \gamma_\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y} \right) = 0 & \text{pour } 0 < y < \varepsilon. \end{cases}$$

La condition de paroi impédante est équivalente pour sa part à :

$$s \widetilde{p}_\varepsilon(k, \varepsilon, s) + Z \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, \varepsilon, s) = 0.$$

C'est sur ce problème exprimé en Fourier-Laplace que nous allons mener l'analyse asymptotique. La transformation de Fourier-Laplace nous a permis de nous ramener à une unique équation sur la pression.

6.5.2 Réécriture comme un problème de transmission

Nous commençons par réécrire le problème comme un problème de transmission entre :

$$\widetilde{p}_\varepsilon = \widetilde{p}_\varepsilon|_{y < 0}; \quad \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}} = \widetilde{p}_\varepsilon|_{0 < y < \varepsilon}.$$

Nous avons maintenant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2)\widetilde{p}_\varepsilon - \frac{\partial^2 \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y^2} = \widehat{g}, & y < 0, \\ (\gamma_\varepsilon^2 + k^2)\widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}} - \gamma_\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\gamma_\varepsilon^2} \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y} \right) = 0, & 0 < y < \varepsilon, \end{cases} \quad (6.56)$$

avec

$$\widehat{g} = (s + ikM_\infty)\widehat{p}_0 - \left(\frac{\partial \widehat{v}_0}{\partial y} + ik \widehat{u}_0 \right).$$

Le système ci-dessus est complété par les conditions de raccord :

$$\begin{cases} \widetilde{p}_\varepsilon(k, 0, s) = \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, 0, s), \\ \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y}(k, 0, s), \end{cases}$$

et la condition limite de paroi impédante :

$$s \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}(k, \varepsilon, s) + Z \frac{\partial \widetilde{p}_\varepsilon^{\text{CL}}}{\partial y}(k, \varepsilon, s) = 0.$$

6.5.3 Analyse asymptotique

On cherche une condition d'impédance en $y = 0$, qui soit valable quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour cela, il nous faut éliminer les inconnues dans la couche limite. Nous commençons classiquement par effectuer le changement d'échelle dans la couche limite :

$$y \rightarrow Y = \frac{y}{\varepsilon},$$

qui nous permettra de travailler sur un domaine géométrique fixe. En posant le changement d'inconnues suivant :

$$\tilde{p}_\varepsilon^{\text{cl}}(k, y, s) = \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}\left(x, \frac{y}{\varepsilon}, t\right),$$

l'équation (6.56) dans la couche limite, $0 < Y < 1$, se réécrit :

$$\varepsilon^2(k^2 + \gamma^2)\tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}} - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}}{\partial Y} \right) = 0, \quad (6.57)$$

où $\gamma(k, Y, s) = \gamma_\varepsilon(k, \varepsilon Y, s) = s + ikM(Y)$. Les conditions de raccord deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{p}_\varepsilon(k, 0, s) = \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}(k, 0, s), \\ \varepsilon \frac{\partial \tilde{p}_\varepsilon}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}}{\partial Y}(k, 0, s), \end{cases} \quad (6.58)$$

et la condition de paroi impédante s'écrit :

$$\varepsilon s \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}(k, 1, s) + Z \frac{\partial \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (6.59)$$

On introduit maintenant les développements asymptotiques formels en ε de \tilde{p}_ε et $\tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}$. On pose :

$$\begin{cases} \tilde{p}_\varepsilon(k, y, s) = \tilde{p}^0(k, y, s) + \varepsilon \tilde{p}^1(k, y, s) + \varepsilon^2 \tilde{p}^2(k, y, s) + \dots \\ \tilde{P}_\varepsilon^{\text{cl}}(k, Y, s) = \tilde{P}_{\text{cl}}^0(k, Y, s) + \varepsilon \tilde{P}_{\text{cl}}^1(k, Y, s) + \varepsilon^2 \tilde{P}_{\text{cl}}^2(k, Y, s) + \dots \end{cases}$$

Nous allons chercher à éliminer les inconnues \tilde{P}_{cl}^j dans la couche limite, pour aboutir à un problème aux limites en \tilde{p}^j avec une condition d'impédance approchée en $y = 0$ (quand $\varepsilon \rightarrow 0$).

Analyse des termes d'ordre 0 en ε des équations.

- Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (6.56) donne à l'ordre 0 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \tilde{p}^0 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^0}{\partial y^2} = \widehat{g}, \quad y < 0. \quad (6.60)$$

- Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (6.57) donne à l'ordre 0 en ε :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{cl}}^0}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (6.61)$$

– Les conditions de raccord (6.58) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^0(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, 0, s) = 0. \end{cases} \quad (6.62)$$

– Enfin la condition de paroi impédante (6.59) donne :

$$Z \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, 1, s) = 0.$$

De (6.61), on déduit que la fonction

$$Y \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}$$

est constante. La deuxième équation de (6.62) nous dit que cette constante est nulle et par conséquent :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^0}{\partial Y}(k, Y, s) = 0.$$

Ainsi, la fonction $Y \rightarrow \tilde{P}_{\text{CL}}^0$ est constante. En utilisant la première équation de (6.62) nous obtenons :

$$\tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, Y, s) = \tilde{p}^0(k, 0, s), \quad \forall 0 < Y < 1. \quad (6.63)$$

Analyse des termes d'ordre 1 en ε des équations.

– Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (6.56) donne à l'ordre 1 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \tilde{p}^1 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^1}{\partial y^2} = 0, \quad y < 0. \quad (6.64)$$

– Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (6.57) donne à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (6.65)$$

– Les conditions de raccord (6.58) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^1(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 0, s). \end{cases} \quad (6.66)$$

– Enfin la condition de paroi impédante (6.59) donne :

$$s \tilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) + Z \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (6.67)$$

De (6.65), on déduit que la fonction

$$Y \rightarrow \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}$$

est constante. En particulier, on a

$$\frac{1}{\gamma^2(k, Y, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 0, s),$$

ce qui donne, compte tenu de la deuxième équation de (6.66) :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = \frac{\gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial y}(k, 0, s). \quad (6.68)$$

On a aussi :

$$\frac{1}{\gamma^2(k, Y, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = \frac{1}{\gamma^2(k, 1, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, 1, s).$$

En remarquant que $\gamma(k, 1, s) = s$ et en utilisant (6.67), on obtient :

$$\frac{1}{\gamma^2(k, Y, s)} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = -\frac{1}{sZ} \tilde{P}_{\text{CL}}^0(k, 1, s),$$

qui devient, compte tenu de (6.63) :

$$\frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}(k, Y, s) = -\frac{\gamma^2(k, Y, s)}{sZ} \tilde{p}^0(k, 0, s). \quad (6.69)$$

En égalisant (6.68) et (6.69), on obtient :

$$\frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \tilde{p}^0}{\partial y}(k, 0, s) + \frac{1}{sZ} \tilde{p}^0(k, 0, s) = 0. \quad (6.70)$$

Analyse des termes d'ordre 2 en ε des équations.

– Dans le demi plan $y < 0$, la première équation de (6.56) donne à l'ordre 2 en ε :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \tilde{p}^2 - \frac{\partial^2 \tilde{p}^2}{\partial y^2} = 0, \quad y < 0.$$

– Dans la couche limite, $0 < Y < 1$, l'équation (6.57) donne à l'ordre 2 en ε :

$$(k^2 + \gamma^2) \tilde{P}_{\text{CL}}^0 - \gamma^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = 0, \quad 0 < Y < 1. \quad (6.71)$$

– Les conditions de raccord (6.58) donnent :

$$\begin{cases} \tilde{p}^2(k, 0, s) = \tilde{P}_{\text{CL}}^2(k, 0, s), \\ \frac{\partial \tilde{p}^2}{\partial y}(k, 0, s) = \frac{\partial \tilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 0, s). \end{cases} \quad (6.72)$$

– Enfin la condition de paroi impédante (6.59) donne :

$$s \widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) + Z \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 1, s) = 0. \quad (6.73)$$

On cherche maintenant à exprimer $\frac{\partial \widetilde{p}^1}{\partial y}$ en 0, uniquement en fonction de \widetilde{p}^j . Pour ce faire, on utilise (6.71) :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \widetilde{P}_{\text{CL}}^0.$$

Compte tenu de (6.63), on a :

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y} \right) = \frac{k^2 + \gamma^2}{\gamma^2} \widetilde{p}^0(k, 0, s).$$

En intégrant par rapport à Y entre 0 et 1, on obtient :

$$\frac{1}{\gamma^2(k, 1, s)} \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 1, s) - \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 0, s) = \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s).$$

En utilisant (6.73), et en se rappelant que $\gamma(k, 1, s) = s$, on obtient :

$$-\frac{1}{sZ} \widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) - \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^2}{\partial Y}(k, 0, s) = \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s).$$

On tient maintenant compte de la deuxième équation de (6.72) pour écrire :

$$-\frac{1}{sZ} \widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) - \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) = \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s). \quad (6.74)$$

Pour nous débarrasser définitivement de $\widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s)$, nous écrivons :

$$\widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) = \int_0^1 \frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y} dY + \widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 0, s).$$

Au moyen de l'expression (6.69) de $\frac{\partial \widetilde{P}_{\text{CL}}^1}{\partial Y}$, nous obtenons :

$$\widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) = -\frac{1}{sZ} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) + \widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 0, s).$$

Enfin, on utilise la première condition de raccord (6.66) pour obtenir :

$$\widetilde{P}_{\text{CL}}^1(k, 1, s) = -\frac{1}{sZ} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) + \widetilde{p}^1(k, 0, s).$$

En injectant cette expression dans (6.74) et après un petit peu de rangement, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) + \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{p}^1}{\partial y}(k, 0, s) + \frac{1}{sZ} \widetilde{p}^1(k, 0, s) \\ - \frac{1}{s^2 Z^2} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) = 0. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Nous avons donc formellement défini $(\widetilde{p}^0, \widetilde{p}^1)$ par les équations (6.60) et (6.64) et par les conditions (6.70) et (6.75). Nous pouvons donc construire le problème approché à l'ordre 1 en ε .

6.5.4 Construction du problème approché

Le problème approché dans les variables (k, y, s)

L'idée est qu'une bonne approximation (au premier ordre en ε) de la solution devrait être fournie par la fonction :

$$\widetilde{p}^{\varepsilon,1} = \widetilde{p}^0 + \varepsilon \widetilde{p}^1,$$

qui satisfait compte tenu de (6.60) et (6.64) :

$$(k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \widetilde{p}^{\varepsilon,1} - \frac{\partial^2 \widetilde{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y^2} = \widehat{g}, \quad y < 0.$$

Condition limite en $y = 0$. L'opération (6.70) + ε (6.75) donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) + \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) + \frac{1}{sZ} \widetilde{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s) \\ - \varepsilon \frac{1}{s^2 Z^2} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \widetilde{p}^0(k, 0, s) = 0, \end{aligned}$$

qui donne

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY \right] \widetilde{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s) + \frac{1}{\gamma^2(k, 0, s)} \frac{\partial \widetilde{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) + \frac{1}{sZ} \widetilde{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s) \\ - \varepsilon \frac{1}{s^2 Z^2} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \widetilde{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s) = \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

L'idée est de conserver une approximation de la même qualité (toujours du premier ordre) en supprimant les termes $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Autrement dit, nous proposons le problème approché suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k^2 + (s + ikM_\infty)^2) \widetilde{p}^{\varepsilon,1} - \frac{\partial^2 \widetilde{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y^2} = \widehat{g}, \quad y < 0, \\ \frac{\partial \widetilde{p}^{\varepsilon,1}}{\partial y}(k, 0, s) = \left(\varepsilon \theta(k, s) - \frac{(s + ikM_\infty)^2}{sZ} + \varepsilon \frac{(s + ikM_\infty)^2}{s^2 Z^2} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \right) \widetilde{p}^{\varepsilon,1}(k, 0, s), \end{array} \right. \quad (6.76)$$

où l'on rappelle pour le lecteur distrait que l'on avait posé au chapitre précédent :

$$\theta(k, s) = -(s + ikM_\infty)^2 \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY.$$

Remarque 6.13 Il est clair que la condition limite garde en mémoire la couche limite puisqu'elle fait intervenir le paramètre ε ainsi que le profil $M(Y)$ à travers $\gamma(k, Y, s)$.

Remarque 6.14 – Lorsque l'on fait tendre $|Z|$ vers $+\infty$, on retrouve bien évidemment le problème (6.76), obtenu au chapitre précédent en considérant une paroi rigide.

– À l'ordre 0 en ε , on retrouve la condition classique d'impédance en présence d'un écoulement non nul à la paroi, dite condition de Myers (cf. (6.8)).

Le problème approché dans les variables (x, y, t)

À partir de (6.76), le problème d'évolution que nous proposons de résoudre comme alternative, pour approcher (6.53), s'écrit :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p^{\varepsilon,1} - \Delta p^{\varepsilon,1} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[, t > 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial p^{\varepsilon,1}}{\partial y}(x, 0, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + M_\infty \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left\{ -\varepsilon \left[\mathcal{I}d - \mathcal{I}_M \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{Z^2} \mathbf{D}_M \right\} p^{\varepsilon,1}(x, 0, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (6.77)$$

où $\mathcal{I}d$ est l'identité et \mathcal{I}_M est l'opérateur défini dans le paragraphe 5.5.4 page 169 du chapitre précédent. De son côté, \mathbf{D}_M a été introduit plus récemment et est défini par (6.39).

6.5.5 Analyse de stabilité modale

Nous allons étudier le caractère bien posé du problème approché (6.77). Pour cela nous allons une nouvelle fois utiliser la méthode de Kreiss, expliquée à la section 5.4.1 du chapitre précédent. Nous cherchons une solution non triviale du problème de la forme :

$$p^{\varepsilon,1}(x, y, t) = p_a e^{ikx} e^{\xi y} e^{st},$$

avec $k \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) \geq 0$, $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 0$ et $p_a \in \mathbb{C}$ non nul. Nous allons omettre la plupart des calculs compte tenu du fait que nous avons dérivé le problème limite dans l'espace de Fourier-Laplace. En injectant cette expression dans l'équation (6.77), on obtient :

$$\xi = \left((s + ikM_\infty)^2 + k^2 \right)^{1/2}.$$

La condition limite nous donne alors l'équation caractéristique suivante :

$$\xi p_a = \left(\varepsilon \theta(k, s) - \frac{(s + ikM_\infty)^2}{sZ} + \varepsilon \frac{(s + ikM_\infty)^2}{s^2 Z^2} \left[\int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right] \right) p_a,$$

c'est-à-dire en utilisant la définition de θ et en divisant par p_a :

$$\xi = -(s + ikM_\infty)^2 \left(\varepsilon \int_0^1 \frac{k^2 + \gamma^2(k, Y, s)}{\gamma^2(k, Y, s)} dY + \frac{1}{sZ} - \varepsilon \frac{1}{s^2 Z^2} \int_0^1 \gamma^2(k, Y, s) dY \right).$$

En posant $\sigma = s/k$ et en utilisant la définition (5.21) de F^{CL} , cette équation se réécrit :

$$\sqrt{1 + (\sigma + iM_\infty)^2} = -(\sigma + iM_\infty)^2 \left(\varepsilon |k| (1 - F^{\text{CL}}(i\sigma)) + \frac{|k|}{k} \frac{1}{\sigma Z} - \varepsilon |k| \frac{1}{\sigma^2 Z^2} \int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY \right).$$

Ainsi en faisant tendre $|k|$ vers $+\infty$, on obtient :

$$\left(1 - F^{\text{CL}}(i\sigma) \right) - \frac{1}{\sigma^2 Z^2} \int_0^1 (\sigma + iM(Y))^2 dY = 0.$$

On retrouve la même équation caractéristique que pour le modèle approché obtenu en utilisant les équations de Galbrun (cf. (6.49)). Les résultats sur le caractère bien posé du problème sont donc les mêmes.

CONCLUSION

BILAN

Le présent paragraphe dresse un bilan succinct du travail réalisé et précise les points qui méritent un approfondissement. Dans la thèse développée ci-avant, nous nous sommes intéressés à la propagation du son en présence d'un écoulement fortement cisailé. Dans la première partie, nous avons dérivé à partir des équations de Galbrun, au moyen d'une analyse asymptotique, un problème approché. L'étude mathématique du caractère bien posé de ce problème original a été menée de façon très complète aux chapitres 2 et 3. Cette analyse nous a amené à nous intéresser aux instabilités hydrodynamiques et nous a permis de montrer des résultats, nouveaux à notre connaissance, dans le cadre compressible. De plus, nous avons obtenu une formule quasi-explicite de la solution. Celle-ci nous a fourni une méthode efficace de résolution numérique que nous avons validée par comparaison avec un code 2D. Par conséquent, l'étude du cas du tube mince nous paraît complète, et les objectifs remplis.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés aux couches limites au voisinage d'une paroi, d'abord rigide puis absorbante. Dans le cas de la paroi rigide, nous avons dérivé, au moyen d'une analyse asymptotique, un problème approché. La nouvelle condition limite fait intervenir la résolution de l'équation limite du tube étudiée dans la première partie. L'étude du caractère bien posé du problème se ramène à celle du problème limite du tube. En particulier, dès que le profil dans la couche limite est convexe (ou concave), croissant concave puis convexe (ou décroissant convexe puis concave) alors le problème est bien posé. Nous avons ensuite étudié les propriétés physiques de cette nouvelle condition limite : possible guidage d'ondes de surface et réflexion d'onde. En raison de sa nature non-locale notre modèle est difficilement utilisable numériquement. Néanmoins, en approchant le profil dans la couche limite par un profil linéaire par morceaux, nous aboutissons à un nouveau modèle, qui est local : il couple une équation aux dérivées partielles 1D avec des équations différentielles ordinaires en temps. L'implémentation de cette méthode est en cours d'investigation, grâce à Marc Duruflé. Dans le cas de la paroi absorbante, nous avons obtenu, par l'analyse asymptotique, une première condition limite approchée. À partir de celle-ci, nous avons pu en construire une deuxième au même ordre d'approximation. C'est en considérant cette dernière que nous avons mené l'analyse du caractère bien posé. Nous conjecturons que les résultats seraient les mêmes pour la première condition approchée, ce qui reste à montrer. Nous montrons que le problème approché est bien posé pour différents modèles de parois absorbantes.

Cette analyse met en lumière la difficulté à trouver des schémas numériques stables dans ce domaine d'étude.

PERSPECTIVES

Sans être exhaustif, nous donnons ici les perspectives de recherche que ce travail suggère :

- Le développement d'une méthode numérique pour le problème approché obtenu dans le cas d'une paroi absorbante est conditionné par la réussite de l'approche numérique évoquée plus haut dans le cas de la paroi rigide. Une fois cette dernière aboutie, nous pourrions envisager une implémentation pour des impédances réelles, grandes, comme perturbation du cas rigide.
- La condition approchée que nous obtenons dans le cas d'une paroi impédante n'est pas complètement satisfaisante. En effet, on a montré l'existence de modes instables à basse fréquence (cf remarque 6.5 page 189). Numériquement, on pense qu'il va falloir mailler à l'échelle de l'épaisseur de la couche limite en x , pour "dépasser" ces modes instables. Ainsi, nous aurions traité la coordonnée transverse, mais pas la coordonnée longitudinale. Une idée pour obtenir une condition qui aboutisse à un problème stable serai de revoir les conditions d'impédance de parois, qui sont des approximations en incidence normale et ne rendent donc pas suffisamment compte de la réalité.
- L'extension à des bords courbes est une des priorités si l'on veut s'approcher de la réalité. On peut envisager, par exemple, une approche asymptotique sur l'inverse du rayon de courbure. On devrait alors retrouver nos modèles à la limite quand le rayon de courbure tend vers l'infini. Cela nécessite de faire appel à la géométrie différentielle.
- Le cas d'un domaine 3D fin délimité par deux surfaces parallèles est de tout premier intérêt. Au moyen d'une analyse asymptotique similaire à celle utilisée pour le cas du tube mince, un modèle limite quasi 2D a déjà été obtenu dans le cas de surfaces planes, sous des hypothèses naturelles sur le profil de référence. Cette étude est à poursuivre.
- Le développement de modèles prenant en compte les effets de la viscosité est également à l'étude. Des recherches dans ce domaine sont d'ailleurs menées dans le laboratoire POEMS par Kersten Schmidt, post-doctorant, et ont été l'objet du stage de Jacques Barret.
- L'obtention d'une condition de transmission, approchant la couche de mélange entre deux fluides cisailés et aboutissant à un problème bien posé reste une question ouverte.

ÉQUIVALENCE EULER/GALBRUN

A

Nous allons montrer dans cette annexe l'équivalence entre les équations d'Euler linéarisées et les équations de Galbrun dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

A.1 LES ÉQUATIONS

Rappelons dans un premier temps les équations. Les équations d'Euler linéarisées en milieu compressible s'écrivent :

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{M} + \nabla p = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ (\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) p + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

que l'on complète par la condition aux limites de glissement (n désignant le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$) :

$$\mathbf{u} \cdot n = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{A.2})$$

Lorsque \mathbf{M} désigne un champ de vecteur dans \mathbb{R}^d , $\mathbf{M} \cdot \nabla$ est l'opérateur de dérivation selon \mathbf{M} défini par :

$$\forall \Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{M} \cdot \nabla \Phi = \sum_k M_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}.$$

Bien entendu, si \mathbf{U} est un champ de vecteur on définit l'action de $\mathbf{M} \cdot \nabla$ sur \mathbf{U} composante par composante.

Dans (A.1) les inconnues sont le champ de vitesse eulerien et la pression dans le fluide. Le champ de vecteur \mathbf{M} est une donnée du problème : il décrit l'écoulement de référence supposé stationnaire. C'est le vecteur de Mach de l'écoulement, qui n'est autre que la vitesse de l'écoulement divisée par la vitesse des ondes acoustiques dans le même fluide au repos. Ce champ est supposé satisfaire les équations d'Euler stationnaires :

$$(\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{M} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{M} = 0,$$

muni là aussi de la condition aux limites de glissement :

$$\mathbf{M}.n = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Nous allons montrer que les équations d'Euler linéarisées (A.1,A.2) sont équivalentes aux équations de Galbrun :

$$(\partial_t + \mathbf{M}.\nabla)^2 \mathbf{U} - \nabla(\nabla.\mathbf{U}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (\text{A.3})$$

que l'on complète par la condition aux limites (n désignant le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$) :

$$\mathbf{U}.n = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (\text{A.4})$$

A.2 CAS DU TUBE EN PRÉSENCE D'UN ÉCOULEMENT LAMINAIRE

Nous considérons tout d'abord le cas du tube 2D qui nous a intéressé dans la première partie de cette thèse. Nous avons donc $d = 2$ et $\Omega = \mathbb{R} \times]-1, 1[$; on note $\mathbf{x} = (x, y)$. On suppose de plus que l'écoulement est laminaire, $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = (M(y), 0)$ et on note $\mathbf{u} = (u, v)$. Les équations d'Euler linéarisées (A.1,A.2) se réécrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + M(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + M'(y)v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + M(y)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + M(y)\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (\text{A.5})$$

complétées par les conditions de glissement :

$$v(x, \pm 1, t) = 0 \quad (\text{A.6})$$

Par ailleurs les équations de Galbrun (A.3,A.4) se réécrivent en notant $\mathbf{U} = (U, V)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y)\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 U - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + M(y)\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 V - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \end{array} \right. \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (\text{A.7})$$

muni de la condition limite :

$$V(x, \pm 1, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (\text{A.8})$$

Nous allons montrer au travers des deux théorèmes suivant, l'équivalence entre ces deux systèmes d'équations.

Théorème A.1 Soit (U, V) une solution du problème (A.7, A.8) avec comme condition initiale $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$, $V(x, y, 0) = V_0(x, y)$, $\partial_t U(x, y, 0) = U_1(x, y)$ et $\partial_t V(x, y, 0) = V_1(x, y)$, alors le triplet (u, v, p) défini par :

$$\begin{cases} u = \partial_t U + M\partial_x U - M'V, \\ v = \partial_t V + M\partial_x V, \\ p = -(\partial_x U + \partial_y V), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

est solution de (A.5, A.6) avec comme condition initiale :

$$\begin{cases} u_0 = U_1 + M\partial_x U_0 - M'V_0, \\ v_0 = V_1 + M\partial_x V_0, \\ p_0 = -(\partial_x U_0 + \partial_y V_0). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que (u, v, p) , défini par (A.9), est solution de (A.5). Puisque M' et $\partial_t + M\partial_x$ commutent, on remarque :

$$(\partial_t + M\partial_x)^2 U = (\partial_t + M\partial_x)[u + M'V] = (\partial_t + M\partial_x)u + M'v,$$

de telle sorte que la première équation de (A.7) s'écrit :

$$(\partial_t + M\partial_x)u + M'v + \partial_x p = 0,$$

ce qui nous donne la première équation de (A.5). La deuxième équation de (A.7) donne directement la deuxième équation de (A.5) :

$$(\partial_t + M\partial_x)v + \partial_y p = 0.$$

Il nous reste donc à déterminer l'équation vérifiée par p . En utilisant la troisième équation de (A.9) on a :

$$(\partial_t + M\partial_x)p + (\partial_t + M\partial_x)(\partial_x U + \partial_y V) = 0. \quad (\text{A.10})$$

On remarque que :

$$(\partial_t + M\partial_x)(\partial_x U + \partial_y V) = \partial_x(\partial_t + M\partial_x)U + \partial_y\partial_t V + M\partial_{xy}V.$$

En remarquant que $M\partial_{xy}V = \partial_y(M\partial_x V) - M'\partial_x V$ et en utilisant la définition (A.9) de u et v on obtient :

$$(\partial_t + M\partial_x)(\partial_x U + \partial_y V) = \partial_x u + \partial_y v,$$

et finalement (A.10) devient :

$$(\partial_t + M\partial_x)p + \partial_x u + \partial_y v = 0.$$

Pour terminer la démonstration il suffit de remarquer que :

$$V(x, \pm 1, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x, \pm 1, t) = 0.$$

□

La réciproque prend la forme du théorème suivant :

Théorème A.2 Soit (u, v, p) solution de (A.5, A.6) pour des données initiales (u_0, v_0, p_0) . On définit (U, V) comme étant les solutions des équations de transport :

$$\begin{cases} \partial_t U + M\partial_x U - M'V = u, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \\ \partial_t V + M\partial_x V = v, & (x, y) \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

associées aux données initiales :

$$(U, V)(x, y, 0) = (U_0, V_0)(x, y) := (\partial_x \phi_0, \partial_y \phi_0)(x, y), \quad (\text{A.12})$$

où ϕ_0 est une des solutions (définies à une constante près) du problème de Laplace :

$$-\Delta \phi_0 = p_0 \text{ dans } \Omega, \quad \partial_y \phi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \quad (\text{A.13})$$

Alors (U, V) est solution de (A.7, A.8) avec comme condition initiale $U(x, y, 0) = U_0(x, y)$, $V(x, y, 0) = V_0(x, y)$, $\partial_t U(x, y, 0) = U_1(x, y)$ et $\partial_t V(x, y, 0) = V_1(x, y)$ où :

$$\begin{cases} U_1 = u_0 - M\partial_x U_0 + M'V_0, \\ V_1 = v_0 - M\partial_x V_0. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous commençons par appliquer l'opérateur $(\partial_t + M\partial_x)$ à (A.11) ce qui donne :

$$\begin{cases} (\partial_t + M\partial_x)^2 U - M'(\partial_t + M\partial_x)V = (\partial_t + M\partial_x)u, \\ (\partial_t + M\partial_x)^2 V = (\partial_t + M\partial_x)v, \end{cases}$$

ce qui donne en utilisant les équations d'Euler (A.5) :

$$\begin{cases} (\partial_t + M\partial_x)^2 U - M'(\partial_t + M\partial_x)V = -M'v - \partial_x p, \\ (\partial_t + M\partial_x)^2 V = -\partial_y p, \end{cases}$$

soit en utilisant la deuxième équation de (A.11) :

$$\begin{cases} (\partial_t + M\partial_x)^2 U = -\partial_x p, \\ (\partial_t + M\partial_x)^2 V = -\partial_y p. \end{cases}$$

Pour conclure la démonstration il suffit de montrer que $p = -\partial_x U - \partial_y V$. Pour cela nous allons montrer que la fonction

$$\psi := p + \partial_x U + \partial_y V,$$

est solution d'une équation de transport avec donnée initiale nulle ; ce qui prouvera qu'elle est nulle. Nous avons :

$$(\partial_t + M\partial_x)\psi = (\partial_t + M\partial_x)p + (\partial_t + M\partial_x)(\partial_x U + \partial_y V),$$

que l'on peut transformer comme suit :

$$(\partial_t + M\partial_x)\psi = (\partial_t + M\partial_x)p + \partial_x [(\partial_t + M\partial_x)U - M'V] + \partial_y [(\partial_t + M\partial_x)V],$$

qui devient en utilisant (A.11) :

$$(\partial_t + M\partial_x)\psi = (\partial_t + M\partial_x)p + \partial_x u + \partial_y v = 0,$$

compte tenu de la troisième équation de (A.5). On conclut en remarquant :

$$\psi(., 0) = p_0 + \partial_x U_0 + \partial_y V_0 = p_0 + \Delta\phi_0 = 0,$$

où on a utilisé successivement (A.12) et (A.13).

Finalement on remarque brièvement que :

$$v(x, \pm 1, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(x, \pm 1, t) = 0$$

puisque $V(., \pm 1, .)$ est alors solution d'une équation de transport (la deuxième équation de (A.11)) sans second membre, et avec condition initiale nulle. \square

A.3 CAS GÉNÉRAL

Nous nous contentons dans le cas général de donner les théorèmes de correspondance, entre les équations de Galbrun et celles d'Euler, sans leurs démonstrations. Ces dernières sont similaires à celle du cas laminaire, mais présentent des calculs plus compliqués. On peut trouver la démonstration dans le cas général dans la thèse de Guillaume Legendre [Leg03].

Théorème A.3 Soit \mathbf{U} une solution du problème (A.3,A.4) avec comme condition initiale $\mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y)$, et $\partial_t \mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_1(x, y)$, alors (\mathbf{u}, p) défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = (\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{M}, \\ p = -\nabla \cdot \mathbf{U}, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

est solution de (A.1, A.2) avec comme condition initiale :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 = \mathbf{U}_1 + (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{M}, \\ p_0 = -\nabla \cdot \mathbf{U}_0. \end{cases}$$

La réciproque prenant cette fois la forme du théorème suivant :

Théorème A.4 Soit (\mathbf{u}, p) solution de (A.1, A.2) pour des données initiales (\mathbf{u}_0, p_0) . On définit \mathbf{U} comme étant la solution de l'équations de transport :

$$(\partial_t + \mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{M} = \mathbf{u},$$

associée à la donnée initiale :

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y) := \nabla \phi_0(x, y),$$

où ϕ_0 est une des solutions (définies à une constante près) du problème de Laplace :

$$-\Delta \phi_0 = p_0 \text{ dans } \Omega, \quad \partial_n \phi_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors \mathbf{U} est solution de (A.3,A.4) avec comme condition initiale $\mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_0(x, y)$, et $\partial_t \mathbf{U}(x, y, 0) = \mathbf{U}_1(x, y)$ où :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{u}_0 - (\mathbf{M} \cdot \nabla) \mathbf{U}_0 - (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{M}.$$

Ce résultat d'équivalence entre les équations d'Euler et de Galbrun est un guide précieux pour dériver des estimations de type énergie sur le système de Galbrun, en utilisant celles bien connues du système d'Euler.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ban78] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*. Chelsea Pub Co, 1978.
- [BBDDL07] A.S. Bonnet-Ben Dhia, E.M. Duclairoir, G. Legendre, and J.F. Mercier. Time-harmonic acoustic propagation in the presence of a shear flow. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 204(2) :428–439, 2007.
- [BBDJ07] A.S. Bonnet-BenDhia, M. Duruflé, and P. Joly. Construction et analyse mathématique d’un modèle approché pour la propagation d’ondes acoustiques dans un tuyau mince parcouru par un fluide en écoulement. Technical report, INRIA Research Report, 2007.
- [BBDJed] A.S. Bonnet-BenDhia, M. Duruflé, P. Joly, and L. Joubert. Stability of acoustic propagation in a 2d flow duct : a low frequency approach. Accepted.
- [BBJ05] Anne-Sophie Bonnet-BenDhia and Patrick Joly. *Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints et application à l’étude des ondes guidées*. ENSTA, 2005.
- [BDL05] E. Bécache, A.S.B.B. Dhia, and G. Legendre. Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(1) :409–433, 2005.
- [Ber06] Kamel Berriri. *Approche analytique et numérique pour l’aéroacoustique en régime transitoire par le modèle de Galbrun*. PhD thesis, 2006.
- [Bra09] E. J. Brambley. Fundamental problems with the model of uniform flow over acoustic linings. *J. Sound and Vib.*, 322 :1026–1037, 2009.
- [CCD09] N. Castel, G. Cohen, and M. Duruflé. Application of Discontinuous Galerkin spectral method on hexahedral elements for aeroacoustic. *Journal of Computational Acoustics*, 17(2) :175–196, 2009.
- [CCLR01] C. Cherfils-Clerouin, O. Lafitte, and P.A. Raviart. Asymptotic results for the linear stage of the Rayleigh-Taylor instability. *Mathematical fluid mechanics : recent results and open questions*, pages 47–71, 2001.
- [Cha98] S.D. Chatterji. *Cours d’analyse*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
- [CON78] J.B. CONWAY. *Functions of one complex variable I (Graduate Texts in Mathematics, 11)*. Springer, New-York, 1978.
- [DH88] AT De Hoop. Acoustic radiation from impulsive sources in a layered fluid. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 6(4) :111–129, 1988.
- [Dia05] J. Diaz. Approches analytiques et numériques de problèmes de transmission en propagation d’ondes en régime transitoire. Application au couplage fluide-structure et aux méthodes de couches parfaitement adaptées. 2005.
- [DL88] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique, vol. 3*. Masson, 1988.

- [DLL01] A.S.B.B. Dhia, G. Legendre, and E. Lunéville. Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme. *Office national d'études et de recherches aérospatiales ONERA-Publications-TP*, 2001.
- [DR75] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of numerical integration*. Academic press New York, 1975.
- [DR04] PG Drazin and W.H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge Univ Pr, 2004.
- [DSBB88] N. Dunford, J.T. Schwartz, W.G. Bade, and R.G. Bartle. *Linear operators*. Wiley-Blackwell, 1988.
- [Duc07] E.M. Duclairoir. Rayonnement acoustique dans un écoulement cisaille : une méthode d'éléments finis pour la simulation du régime harmonique. 2007.
- [EE87] D.E. Edmunds and WD Evans. *Spectral theory and differential operators*. Oxford University Press, USA, 1987.
- [EP75] T. Ellingsen and E. Palm. Stability of linear flow. *Physics of Fluids*, 18 :487, 1975.
- [Eve91] W. Eversman. Theoretical models for duct acoustic propagation and radiation. In *In NASA. Langley Research Center, Aeroacoustics of Flight Vehicles : Theory and Practice. Volume 2 : Noise Control p 101-163 (SEE N92-14779 05-71)*, volume 2, pages 101–163, 1991.
- [Fjo50] R. Fjortoft. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. *Geofys. Publ*, 17(6) :1–52, 1950.
- [FP69] A. B. Friedland and A. D. Pierce. Reflexion of Acoustic Pulses from Stable and Unstable Interface between Moving Fluids. *The physics of fluids*, 12 :1148–1159, 1969.
- [Gal31] H. Galbrun. *Propagation d'une onde sonore dans l'atmosphère terrestre et théorie des zones de silence*. Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [Gre00] E. Grenier. On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 53(9) :1067–1091, 2000.
- [Gre04] E. Grenier. Boundary layers. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, pages 245–309, 2004.
- [HL03] B. Helffer and O. Lafitte. Asymptotic methods for the eigenvalues of the Rayleigh equation for the linearized Rayleigh-Taylor instability. *Asymptotic Analysis*, 33(3) :189–235, 2003.
- [HM85] P. Huerre and P. Monkewitz. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 159 :151–68, 1985.
- [HW96] V. Hardt and E. Wagenführer. Spectral properties of a multiplication operator. *Mathematische Nachrichten*, 178(1) :135–156, 1996.
- [JJed] P. Joly and L. Joubert. A low frequency model for acoustic propagation in a 2d flow duct : numerical computation. *CiCP*, accepted.
- [JM72] D. S. Jones and J. D. Morgan. The instability of a vortex sheet on a subsonic stream under acoustic radiation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 72 :465–488, 1972.
- [JW10] P. Joly and R. Weder. Analysis of Acoustic Wave Propagation in a Thin Moving Fluid. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 70 :2449, 2010.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer Verlag, 1995.
- [Kre70] H.O. Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 23(3) :277–298, 1970.

- [Lam58] J. Lamperti. On the isometries of certain function spaces. *Pacific J. Math*, 8(3) :459–466, 1958.
- [Lan06] MT Landahl. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 98(02) :243–251, 2006.
- [Leg03] G. Legendre. *Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l'équation de Galbrun*. PhD thesis, 2003.
- [Len06] Marc Lenoir. *Éléments de théorie spectrale*. ENSTA, 2006.
- [Lig52] MJ Lighthill. On sound generated aerodynamically. I. General theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 211(1107) :564–587, 1952.
- [LL46] L. Lees and C.C. Lin. Investigation of the stability of the laminar boundary layer in a compressible fluid. *National Advisory Committee for Aeronautics*, 1946.
- [LTA97] K.M. Li, S. Taherzadeh, and K. Attenborough. Sound propagation from a dipole source near an impedance plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 101 :3343, 1997.
- [Mac84] LM Mack. Boundary-layer linear stability theory. In *In AGARD Spec. Course on Stability and Transition of Laminar Flow 81 p (SEE N84-33757 23-34)*, 1984.
- [MI86] P.M.C. Morse and K.U. Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton Univ Pr, 1986.
- [Mus53] N.I. Muskhelishvili. *Singular integral equations*. P. Noordhoff Groningen, 1953.
- [Mye80] MK Myers. On the acoustic boundary condition in the presence of flow. *Journal of Sound and Vibration*, 71(3) :429–434, 1980.
- [Paz83] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer, 1983.
- [PE01] C. Peyret and G. Elias. Finite-element method to study harmonic aeroacoustics problems= Une méthode éléments finis basée sur le déplacement pour l'analyse de la propagation acoustique dans les conduits. *Tiré à part-Office national d'études et de recherches aérospatiales*, 2001.
- [Ray79] L. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1) :57–70, 1879.
- [Rie06] S.W. Rienstra. Impedance models in time domain, including the extended Helmholtz resonator model. *AIAA paper*, 2686 :2006, 2006.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Analysis of Operators, Vol. IV of Methods of Modern Mathematical Physics*. New York, Academic Press, 1978.
- [RV08] S.W. Rienstra and G.G. Vilenski. Spatial Instability of Boundary Layer Along Impedance Wall. In *14 th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference(29 th AIAA Aeroacoustics Conference)*, 2008.
- [Sar08] Sri Poernomo Sari. *Propagation acoustique dans des conduits à parois traitées en présence d'écoulement : modélisation par la méthode des éléments finis*. PhD thesis, 2008.
- [Sch50] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1950.
- [SGS91] VV Salaev, EG Gusejnov, and RK Seifullaev. The Plemelj-Privalov theorem. In *Sov. Math., Dokl.*, volume 42, pages 849–852, 1991.
- [SH01] P.J. Schmid and D.S. Henningson. *Stability and transition in shear flows*. Springer Verlag, 2001.

- [SS66] A.H. Stroud and D. Secrest. *Gaussian quadrature formulas*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [Ste68] S. Steinberg. Meromorphic families of compact operators. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 31(5) :372–379, 1968.
- [SZ91] L. Schwartz and K. Zizi. *Analyse. 1. Théorie des ensembles et topologie*. Hermann, 1991.
- [TA96] C.K.W. Tarn and L. Auriault. Time-domain impedance boundary conditions for computational aeroacoustics. *AIAA journal*, 34(5) :917–923, 1996.
- [Tes73a] BJ Tester. Some aspects of sound attenuation in lined ducts containing inviscid mean flows with boundary layers. *Journal of Sound and Vibration*, 28(2) :217–245, 1973.
- [Tes73b] BJ Tester. The propagation and attenuation of sound in lined ducts containing uniform or plug flow. *Journal of Sound and Vibration*, 28(2) :151–203, 1973.
- [TGT03] F. Treyssède, G. Gabard, and M.B. Tahar. A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian–Lagrangian description. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113 :705, 2003.

Titre Approche asymptotique pour l'étude mathématique et la simulation numérique de la propagation du son en présence d'un écoulement fortement cisailé

Résumé Cette thèse s'inscrit dans le cadre d'étude de la simulation de la propagation du son en écoulement. L'objectif de ces travaux est l'obtention de modèles approchés permettant une prise en compte aisée des zones de fortes variations de l'écoulement porteur (couche limite de paroi, couche de mélange...). Le modèle mathématique retenu pour l'étude est celui des équations de Galbrun.

La première partie est consacrée à la propagation acoustique dans un tuyau mince bidimensionnel. Une analyse asymptotique qui s'apparente à une analyse basse fréquence est menée pour obtenir un problème approché original, faisant intervenir un terme intégral non local vis à vis de la coordonnée transverse. Du fait de son originalité, l'analyse de stabilité est complexe et nécessite une étude ad hoc. Cette approche nouvelle permet de retrouver des résultats sur la stabilité des écoulements en incompressible, mais aussi d'en établir de nouveaux. Nous proposons ensuite une méthode de résolution numérique basée sur une expression quasi-explicite de la solution.

La question de la prise en compte des couches limites de paroi fait l'objet de la deuxième partie. Nous considérons toujours un problème bidimensionnel à paroi plane. Les cas d'une paroi parfaitement rigide et d'une paroi sur laquelle on impose une condition d'impédance sont traités. Dans les deux cas nous remplaçons la couche limite par une condition aux limites approchée, au moyen d'une analyse asymptotique. Ces conditions font intervenir la résolution du problème limite du tube et l'analyse de stabilité repose sur les résultats de la première partie. Nous explorons ensuite les propriétés physiques et mathématiques de ces problèmes approchés.

Mots-clés aéroacoustique, équation de Galbrun, régime transitoire, couche mince, méthode asymptotique, paroi impédante, théorie spectrale, transformation de Fourier-Laplace, analyse de Kreiss.

Title Asymptotic approach for the mathematical and numerical analysis of the acoustic propagation in a strong shear flow

Abstract This thesis deals with the modelling and the numerical simulation of acoustic propagation in a flow. The aim of this work is to derive approximate models that easily take into account thin shear layers of the reference flow (boundary layer, mixing shear layer...). The model retained for these studies is the Galbrun's equation.

The first part is devoted to the study of the acoustic propagation in a thin bidimensional duct. By an asymptotic analysis, which can be seen as a low frequency approach, we derive an approximate model. It has a non-local integral term in the transverse coordinate. Because of its non-standard structure, the stability analysis is difficult and an ad hoc analysis is needed. Using this original approach we find well-known results of hydrodynamic instabilities in laminar flows (in the incompressible case), but we also get some new results. We finally give a numerical method based on a quasi-explicit expression of the solution.

The second part focuses on the consideration of boundary layers. We consider a bidimensional problem with a flat wall. The cases of a rigid wall and of an impedant wall are investigated. In both cases, using an asymptotic analysis, we replace the boundary layer by an approximate limit condition. These two generalized impedance conditions involve the resolution of the limit equation of the thin duct, and their stability analysis relies on the results obtained in the first part. Then, we explore the physical and mathematical properties of these approximate problems.

Keywords aeroacoustic, Galbrun's equation, time dependence, boundary layer, asymptotic method, impedant wall, spectral theory, Fourier-Laplace transformation, Kreiss analysis.