



HAL
open science

Méthodes analytiques de caractérisation des structures cohérentes contribuant aux efforts aérodynamiques

Lionel Fiabane

► **To cite this version:**

Lionel Fiabane. Méthodes analytiques de caractérisation des structures cohérentes contribuant aux efforts aérodynamiques. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2010. Français. NNT: . pastel-00553103

HAL Id: pastel-00553103

<https://pastel.hal.science/pastel-00553103>

Submitted on 6 Jan 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 13 décembre 2010

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

LIONEL FIABANE

Méthodes analytiques de caractérisation de structures cohérentes contribuant aux efforts aérodynamiques

Composition du jury

M. Jacques Borée	Rapporteur
M. Olivier Cadot	Directeur de thèse
M. Marc Gohlke	Directeur de thèse
M. Laurent Jacquin	Examineur
M. Olivier Le Maître	Examineur
M. Maurice Rossi	Rapporteur

Remerciements

Remerciements (n) : *Passage obligé pour le tout jeune docteur dans lequel celui-ci exprime dans un élan de soulagement béat consécutif au point final de son mémoire sa gratitude universelle. Cet exercice souvent convenu et parfois un peu hypocrite est primordial car il génère la partie la plus compréhensible, parfois la seule un tant soit peu intéressante, et de toute façon la plus lue d'une thèse. Pour voir si son nom y est, pour voir quels compléments y ont été accolés.*

Ceci étant posé, je vais essayer d'éviter les deux écueils que sont la complaisance et le cynisme afin d'exprimer en quelques mots ma pas tout à fait universelle mais vraiment sincère reconnaissance.

Je veux d'abord revenir à la genèse de cette thèse, et à ce passionné toujours à fond, curieux de tout et à l'enthousiasme débordant et communicatif, Jean-François pour le nommer, qui n'a peut-être pas pris conscience qu'en l'espace de quelques heures d'un module expérimental il m'avait transmis quelque chose, comme un virus de la recherche. C'est lui qui a mis en place le sujet de ma thèse et qui a pensé à moi comme candidat alors que je passais du bon temps au sein de l'encore ANPE : qu'il en soit tout de même remercié.

Je pourrais ensuite réécrire mots pour mots les qualités de Jeff pour parler d'une autre personne qui est elle aussi à l'origine de ma décision d'entreprendre un doctorat et qui m'a accompagné tout au long de ces dernières années. Merci à Olivier, consécutivement prof, tuteur de stage et directeur de thèse ; tout n'a pas toujours été simple entre nous (une relation normale directeur/étudiant finalement), mais il a toujours conservé optimisme, conviction et (presque toujours) patience quand j'avais plutôt tendance à râler et pester contre (*raier la mention inutile*) FLUENT/Scilab/mon sujet de thèse/Marc.

Ich möchte jetzt Marc danken (und Ich möchte mich für mein "schlechtes Deutsch" entschuldigen, alles ist natürlich ohne Hilfe geschrieben worden). Noch einmal, es ist nicht immer leicht gewesen, und Marc musste meine Ablehnung jeglicher Autorität hinnehmen. Aber er war immer da, immer optimistisch, selbst wenn ich meine Zeit damit verbracht habe, gegen FLUENT/Scilab/meine Doktorarbeit/Olivier zu meckern (*nicht Zutreffendes bitte streichen*). So, vielen Dank ! Übrigens, Lübecker Marzipan schmeckt wirklich gut !

Merci enfin aux quatre membres de mon jury. À Maurice Rossi pour sa lecture attentive de mon mémoire, ses commentaires pertinents et précis, sa capacité à mettre le doigt sur l'équation qui fait mal, et enfin sa compagnie pince-sans-rire lors des repas de gala. À Jacques Borée pour sa lecture non moins attentive, ses commentaires tout aussi pertinents et précis, ses réflexions et mises en perspective qui me font encore un peu chauffer la cafetière. À Olivier Le Maître, qui m'a vraiment sorti d'une ornière à un moment où ma thèse semblait tomber à l'eau, et qui m'a consacré du temps pour m'expliquer et discuter. À Laurent Jacquin enfin, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et en a profité pour distiller quelques remarques et conseils qui n'ont pas fini de me faire réfléchir.

Restent maintenant tous les autres, ceux qui n'ont souvent pas pris une part directe à mon travail de thèse mais sans qui je n'aurais peut-être pas bien vécu ces trois dernières années.

J'ai partagé mon temps entre PSA et l' "ENSTA" : deux labos, deux possibilités d'échapper aux uns ou aux autres, deux fois plus de galères dans les transports en commun, (qui a dit deux fois plus de vacances ?), deux fois plus de risques d'oublier des gens lors des remerciements. Je me lance tout de même :

- à PSA, merci aux thésards de l'avant, du pendant et de l'après : Seb, Greg, Mathieu, Thomas, pour Chromatron, Phd comics, les chauffages qui n'arrivent pas, les déménagements dont personne ne veut, la cohabitation toujours facile de l'open space, les trajets en voiture ; merci aux autres membres de l'équipe, ceux qui permettent de dire du mal le midi ou qui égaient les pauses, qui fournissent Georges ou citent Desproges, de l'avant et du pendant ; et puis merci aux stagiaires qui ont mis une bonne ambiance et en particulier aux trois miens, qui n'ont pas tous mis une bonne ambiance mais qui m'ont certainement apporté beaucoup, parfois à leur corps défendant ;
- à l'ENSTA, merci aux thésards de l'avant, du pendant et de l'après : Cédric et sa musique kikoo lol, Virginie *qui y est presque*, courage !, Mélodie et ses casseroles, Mathieu qui a déjà piqué mon bureau ; merci aux accompagnateurs de pauses et de repas, ceux qui refont le monde autour d'une machine à café choisie avec grand soin, ceux qui squattent les bureaux comme ils squattent une salle de muscu, ceux qui postent des vidéos étranges sur fond de clarinette... ; merci enfin à Romain, voisin de bureau et bien plus, qui a dû supporter mes états d'âme, ma musique de pas toujours très bon goût, mon stress montant de la troisième année, mais qui me l'a bien rendu (pour la musique en tout cas) ; es la recta final mi amigo, y tú y yo tenemos el mismo problema (especialmente tú), así que si te puedo dar un consejo, ¡adelante ! Nunca se sabe, con un malentendido...

Merci enfin aux amis et à la famille (ma soeur surtout, qui m'a promis de m'étrangler si elle n'apparassait pas dans mes remerciements) qui rendent la vie meilleure et plus facile. Vous êtes trop nombreux pour être nommés mais j'espère de tout coeur que vous savez à quel point vous comptez pour moi.

Et bien sûr merci à toi Nadia (tu m'avais plutôt promis de m'étrangler si tu apparaissais ici mais je prends le risque) ; d'un point de vue pragmatique, merci pour avoir relu et corrigé un machin qui ne te parle pas. Et puis merci pour tout le reste aussi, pour les soirées entières à m'attendre, mon stress à gérer, merci pour m'avoir encouragé (et supporté parfois), bref merci pour tous ces petits et grands trucs que je ne saurais exprimer avec des mots...

Résumé

Le lien entre la force fluide s'appliquant sur un obstacle et les structures cohérentes est évident ; il n'existe pourtant pas de relation quantitative entre chaque structure de l'écoulement et la force qu'elle produit. Nous étudions cette problématique selon deux grands axes : d'abord la définition d'une densité volumique d'effort, puis une définition des structures cohérentes adaptée à cette densité de force. Nous montrons que pour caractériser les structures cohérentes dans un domaine englobant un obstacle, la formulation utilisée ne doit pas faire apparaître de terme de pression et ne doit pas comporter d'information sur les contours du domaine. Nous étudions plus précisément deux formulations de la force et montrons que seule la formulation diffusives faisant intervenir une impulsion du laplacien de vorticité est adapt e à un calcul volumique des efforts. En appliquant cette formulation à un écoulement 2D autour d'un cylindre dans le régime de von Kármán, nous pouvons ensuite étudier les contributions à la force de deux parties de l'écoulement définies à partir du laplacien de vorticité : les couches de vorticité et la zone de recirculation, dans un domaine restreint autour du cylindre. Les couches de vorticité captent ainsi les effets visqueux, tandis que la zone de recirculation capte les effets de l'enroulement des couches limites en tourbillons. Il est intéressant de noter que la zone de recirculation n'englobe pas les tourbillons développés du sillage, l'influence de ces tourbillons étant en fait capt e par la densité de force dans une petite zone en aval du cylindre. L'application 3D de la formulation diffusives nécessite une très bonne définition de la vorticité dans la zone proche paroi, et nous montrons que cette approche ne peut pas encore être facilement mise en oeuvre sur des géométries complexes avec les moyens numériques actuels.

Mots-clés : Formulation analytique, Dynamique de la vorticité, écoulements séparés, Réduction de traînée, Force fluide

Abstract

The link between the fluid force applied on a body and the coherent structures is obvious ; however there is no direct relationship between each structures and their contribution to the force. This issue is divided into two main parts : first the definition of a force density, and then a definition of coherent structures adapted to the force density definition. We show that the force formulation must not include any pressure term in order to characterize the coherent structures in a fluid domain ; moreover the contribution on the domain boundary must be negligible. We study two formulations of the force in details and show that the diffusive formulation, using an impulse of vorticity laplacian, is the only one able to give a real volume definition of the force. Using this formulation on a 2D flow around a cylinder in the von Kármán regime, we study the contributions to the force of two flow parts defined with the vorticity laplacian : the vortex layers and the back-flow region. The first are found to capture the viscous force, while the latter captures the interaction effects between the cylinder, the vortex layers and the roll-up. It is interesting to observe that the domain used to calculate the force does not include the wake ; the force density captures their influence through the induced vorticity near the base of the cylinder. The 3D application of the diffusive formulation needs a very accurate calculation of the vorticity laplacian, especially near the wall. We show that this method cannot be easily applied on complex flows with the current numerical solvers.

Key-words : Mathematical formula, Vortex dynamics, Separated flows, Drag reduction, Fluid force

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Table des matières	v
1 Introduction générale	1
2 Concepts de base	7
2.1 Notations	9
2.2 Formulations générales	10
2.2.1 Calcul pariétal de la force	10
2.2.2 Bilan de quantité de mouvement	11
2.3 Efforts et structures cohérentes	15
2.3.1 Problème des formules faisant intervenir la pression	15
2.3.2 Tentatives de formulation de la force <i>via</i> les structures cohérentes	17
2.3.3 Méthode de projection	20
2.3.4 Équation de l'impulsion hydrodynamique et « Derivative-Moment Transformations »	21
2.3.5 Questions ouvertes et discussion	24
2.4 Topologie des écoulements et structures cohérentes	25
2.4.1 Définitions des structures cohérentes	25
2.4.2 Critères de détection	26
2.4.3 Conclusion	33
3 Étude de la formulation advective en deux dimensions	35
3.1 Étude de la contribution des différents termes à la force	38
3.1.1 Simulation numérique	38
3.1.2 Schémas aux différences finies utilisés	41
3.1.3 Étude du sillage	42
3.1.4 Calcul des contributions des différents termes à la force	46
3.1.5 Conclusion	49
3.2 Application de la formulation advective à une expérience de contrôle passif	50
3.2.1 Expériences	50
3.2.2 Détermination de la traînée moyenne à partir de la formulation advective	53
3.2.3 Conclusion sur l'application expérimentale de la méthode	59
3.3 Conclusion sur la formulation advective	59
4 Étude de la formulation diffusive en deux dimensions	61

4.1	Simulation numérique	63
4.1.1	Présentation du code numérique utilisé	63
4.1.2	Résultats pour différents nombres de Reynolds	68
4.2	Étude de la contribution des termes de la formulation diffusive	69
4.2.1	Écriture bi-dimensionnelle	69
4.2.2	Intégrande IDV $-\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$	69
4.2.3	Intégrandes de contour	71
4.2.4	Analyse dynamique des contributions	72
4.2.5	Conclusion sur l'utilisation de la formulation diffusive	74
4.3	Contributions des différentes structures cohérentes	75
4.3.1	Séparation de structures	75
4.3.2	Analyse des contributions séparées	81
4.4	Validation de l'approche pour FLUENT	87
4.5	Conclusion	88
5	Tentatives de calcul de la densité de force pour une simulation RANS 3D	89
5.1	Le corps d'Ahmed	91
5.1.1	Géométrie du corps	91
5.1.2	Topologie de l'écoulement	91
5.2	Mise en oeuvre numérique	93
5.2.1	Modélisation de la turbulence	93
5.2.2	Fermeture utilisée et conditions aux limites	96
5.2.3	Maillage du corps d'Ahmed	96
5.2.4	Résultats numériques	97
5.3	Densités volumiques de force	98
5.4	Calcul de la force avec la formulation diffusive	99
5.5	Problème du calcul de la vorticité et de son laplacien avec FLUENT	102
5.6	Conclusion sur la mise en oeuvre industrielle	103
6	Conclusions et perspectives	105
	Annexes	109
A	établissement de la formulation advective	111
B	équivalence des formulations advectives et diffusive	115
C	Invariance selon l'origine du repère	119
D	Topologie du laplacien de vorticité pour des structures cohérentes de référence	123
	Références bibliographiques	127

Introduction générale

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé à l'occasion d'une collaboration entre l'Unité de Mécanique de l'École Nationale Supérieure de Techniques Avancées (U.M.E. ENSTA ParisTech) à Palaiseau et la Direction de la Recherche de de l'Ingénierie Avancée (D.R.I.A.) de PSA Peugeot Citroën à Vélizy Villacoublay dans le cadre d'une convention de thèse CIFRE.

L'industrie automobile est aujourd'hui confrontée à de fortes exigences dans les domaines de l'environnement et de la sécurité. De nombreux axes de développement existent pour rendre les véhicules moins gourmands en carburant et moins polluants, notamment l'étude de nouveaux moteurs (moteurs hybrides ou tout électriques) ou de moteurs plus efficaces permettant de moindres émissions de CO_2 responsable de l'effet de serre et de NO_x (oxydes d'azote) nocifs à la santé. Il existe également des études visant à réduire les pertes à l'avancement en diminuant les pertes énergétiques liées aux contacts pneus-route. Un autre axe d'étude pour arriver à ces fins consiste à minimiser les efforts appliqués par l'écoulement d'air sur le véhicule en mouvement : c'est le coeur de l'aérodynamique. On sait en effet que pour une vitesse dépassant les 90km/h , la traînée aérodynamique (*i.e.* la force de résistance à l'avancement créée par l'écoulement de l'air sur le véhicule) représente à elle seule 70% à 80% de la consommation en carburant (Hucho *et al.* [38]). En outre la réduction de la portance aérodynamique (*i.e.* la force perpendiculaire à la direction du mouvement et orientée vers le haut du véhicule) rejoint les préoccupations de sécurité des véhicules puisqu'elle permet à la fois d'accroître la stabilité des véhicules à haute vitesse et de réduire la distance de freinage ; on peut à ce titre évoquer les recherches dans le domaine de la Formule 1 visant à diminuer voire inverser la portance afin d'améliorer l'appui des voitures. Dans le cas de l'étude et du développement de véhicules de tourisme, il s'agit de trouver le meilleur compromis possible entre une traînée et une portance aérodynamiques faibles en privilégiant toujours la première.

Cette recherche des efforts engendrés par l'air autour d'un véhicule en mouvement fait écho à un sujet plus vaste : la détermination de la force fluide s'appliquant à un corps dans un écoulement. De la compréhension des mécanismes du vol (des avions comme des oiseaux) à la réduction de la consommation de carburant d'un véhicule en passant par l'étude de la propulsion des poissons, tout est donc centré autour de cette question : comment la force fluide est-elle créée et comment la déterminer ?

Si l'on revient au cas précis de l'industrie automobile, on se rend compte qu'une méthode supplante généralement les autres pour déterminer la force fluide s'exerçant sur un véhicule, et plus particulièrement ses composantes de traînée et de portance. Cette méthode consiste à intégrer directement les efforts de pression et de viscosité s'exerçant à la surface de l'obstacle :

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\mathcal{B}_{corps}} (-p\mathbf{I} + \underline{\underline{\tau}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (1.1)$$

où $\mathbf{F}(t)$ représente le vecteur force instantané, \mathcal{B}_{corps} la surface extérieure du corps étudié, p la pression, \mathbf{I} le tenseur unité (ou tenseur métrique) de l'espace, $\underline{\underline{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses et $\hat{\mathbf{n}}$ la normale sortante à la surface du corps. Il est possible d'analyser la répartition de ces deux contributions sur la surface du véhicule, soit intégrer les efforts de pression et de viscosité sur une partie seulement de la surface. On obtient par exemple les contributions de différentes zones d'un véhicule à la force de traînée (figure 1.1) en intégrant les projections sur la direction du mouvement de la pression et des forces visqueuses observées sur les différents organes.

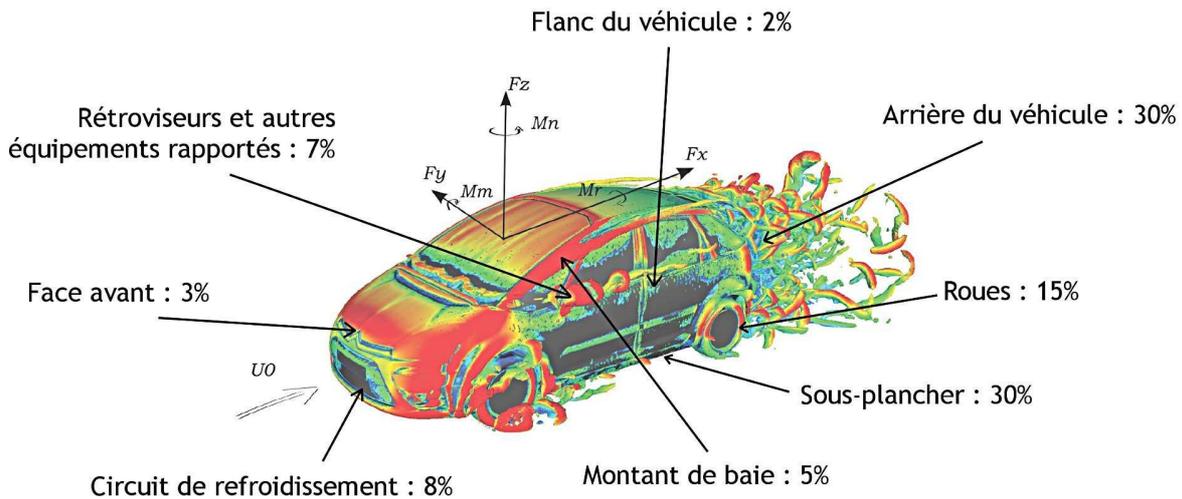


FIG. 1.1 – Répartition moyenne des contributions des différentes zones d'une voiture à la traînée à partir de l'intégration de la pression et des forces visqueuses à la paroi (source interne PSA). Les structures cohérentes sont détectées à l'aide du critère Q (voir partie 2.4.2) et colorées en module de vitesse.

La contribution due à la pression dans l'équation (1.1) prend en compte la répartition surfacique de la pression dynamique : une surpression en amont ou une dépression en aval du véhicule créent par exemple une force de traînée positive. La contribution des efforts visqueux est quant à elle due aux frottements de l'air sur la surface de l'obstacle ; un écoulement « collé » à l'obstacle va donc créer des frottements importants et des valeurs non négligeables de cette contribution.

À l'équation (1.1), résultant de l'intégration directe des efforts sur la surface, on peut donc associer des observations topologiques de l'écoulement :

- la zone amont proche du point d'arrêt induit de fortes contraintes de pression ainsi que des contraintes visqueuses, l'écoulement étant « collé » ; on constate néanmoins que la contribution de cette zone à la force de traînée est mineure ($\approx 3\%$), ce qui s'explique par la prise en compte séparée d'une grande partie de l'écoulement d'air amont passant dans le circuit de refroidissement ;
- les zones détachées de l'écoulement (bulle de recirculation et vortex contra-rotatifs à l'arrière, montants de baie et rétroviseurs, ...) induisent des dépressions et donc la création de contraintes de pression essentiellement (il n'y a que peu ou pas de frottements à la paroi du véhicule pour ces structures) ; ces types de structures contribuent à hauteur de $\approx 42\%$ de la traînée totale ;
- les écoulements attachés (couches limites sur les flancs du véhicule par exemple) induisent quant à eux la création de fortes contraintes visqueuses ; on constate que les contributions de ces zones sont comme pour la face avant minoritaires ($\approx 2\%$ en moyenne pour la contribution à la traînée des flancs du véhicule) ;
- il existe enfin des écoulements plus complexes à certains endroits du véhicule (sous-bassement, roues, circuit de refroidissement) dans lesquels se développent tantôt des couches limites turbulentes, tantôt des décollements ou des zones de recirculation et pour lesquels on peut observer à la fois des contraintes de pression et des contraintes visqueuses ; les contributions à la traînée de ces zones d'écoulement complexe sont assez élevées ($\approx 53\%$ en moyenne).

Ces observations topologiques permettent d'identifier un certain nombre de zones dans l'écoulement ayant des dynamiques globales communes, appelées *structures cohérentes*.

On observe par exemple dans la figure 1.1 des tourbillons au niveau des rétroviseurs et des montants de baie ainsi que des zones de recirculation au niveau de l'arrière, du sous-bassement et des roues, qui constituent autant de structures cohérentes.

Le lien entre la topologie de l'écoulement et la force fluide s'exerçant sur l'obstacle est évident. On peut, à l'aide d'équations de bilan, déterminer la force fluide, mais dans ce cas on n'a pas de lien clair et définitif entre chaque structure cohérente et la force qu'elle engendre (Roshko [78]). En outre, l'utilisation de l'équation (1.1) pour calculer l'empreinte pariétale (*i.e.* à la paroi) des structures, c'est-à-dire les contributions de pression et de viscosité à l'endroit où les structures cohérentes touchent la surface de l'obstacle, pose un problème de taille. En effet, la pression est une grandeur globale de l'écoulement puisqu'elle est solution d'une équation de Poisson (obtenue en prenant la divergence de l'équation de Navier Stokes) :

$$\Delta p = -\frac{\rho}{2}(\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}^T), \quad (1.2)$$

avec Δ l'opérateur laplacien, ∇ l'opérateur gradient, \mathbf{u} la vitesse de l'écoulement et ρ la densité volumique du fluide. L'équation (1.2) montre que l'effet local se retrouve sur la dérivée spatiale seconde, et non sur la pression elle-même ; une modification locale se répercute dans tout l'écoulement. On ne peut donc pas relier simplement les structures cohérentes et la distribution

de pression à la surface au niveau des empreintes. Au contraire l'étude de la friction, phénomène local (le frottement d'une structure cohérente à la surface de l'obstacle), donne directement une information sur la contribution d'une structure à la force visqueuse en intégrant le tenseur de viscosité au niveau de l'empreinte de cette structure. Or les écoulements autour de véhicules automobiles sont très turbulents avec des nombres de Reynolds très élevés ($Re = O(10^6)$), impliquant des contributions visqueuses petites devant les contributions de pression. Les contributions de pression peuvent ainsi atteindre 80% à 95% de la traînée totale. L'étude des contributions à la force des structures cohérentes dans le cas de véhicules automobiles n'est par conséquent pas possible en utilisant uniquement l'équation (1.1), ou tout autre formulation faisant intervenir la pression.

Dans ce travail de thèse nous nous posons donc la question de savoir s'il est possible d'écrire la force fluide comme une intégration volumique ne faisant intervenir que des grandeurs locales (*i.e.* sans terme de pression) :

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t) dV, \quad (1.3)$$

où \mathcal{F} est le volume d'étude englobant l'obstacle et $\mathbf{f}_v(\mathbf{x}, t)$ une fonction de l'espace et du temps à définir formellement et physiquement. Le grand intérêt d'une telle formulation serait d'obtenir la contribution instantanée de chaque structure à la force. Outre la recherche de cette formulation volumique, on comprend que la définition des structures cohérentes va également être au coeur de ce travail de thèse.

En plus de l'intérêt fondamental de ce travail, l'application industrielle forte serait de mieux exploiter les données résultant des calculs numériques effectués pour déterminer les coefficients de force des véhicules (coefficient de traînée C_D et coefficient de portance C_L principalement). On pourrait post-traiter ces calculs dans une optique de hiérarchisation des structures cohérentes selon leur contribution à la force, et ainsi détecter les endroits du véhicule générant les structures les plus pénalisantes. Cette approche permettrait alors d'optimiser la conception des véhicules.

Dans une première partie nous allons poser les concepts de base de notre étude : nous définirons les notations et conventions utilisées tout au long de ce manuscrit ; nous présenterons les deux formulations de base (pariétale et volumique) de la force aérodynamique ; nous présenterons ensuite quelques tentatives d'estimation de la force fluide à partir de l'écoulement basées sur des équations de bilan ; enfin nous présenterons différentes techniques de détection des structures cohérentes.

Dans une deuxième partie nous nous intéresserons à une formulation de la force ne faisant pas intervenir la pression, la formulation advective ; deux études bi-dimensionnelles différentes sont menées : une étude instationnaire à partir d'une simulation numérique autour d'un cylindre à section carrée, et une étude expérimentale de contrôle passif d'écoulement autour d'un corps en D. Nous montrerons que cette formulation s'avère inutilisable pour une description purement volumique de densité de force.

Dans une troisième partie nous nous intéresserons à une formulation alternative de la force, la formulation diffusive. Nous étudierons les avantages procurés par cette formulation et le nouvel éclairage possible qu'elle permet en terme de densité de force. En l'appliquant pour un corps

2D dans le régime du sillage de von Kármán, nous proposerons une nouvelle interprétation de l'origine des efforts.

Dans une quatrième partie nous présenterons quelques résultats obtenus avec la formulation diffusive sur un modèle de véhicule simplifié en trois dimensions : le corps d'Ahmed, ainsi que les limites rencontrées lors de la mise en oeuvre numérique de ce cas.

Enfin nous présenterons les conclusions de cette étude et évoquerons quelques perspectives à plus ou moins long terme.

Concepts de base

Sommaire

2.1	Notations	9
2.2	Formulations générales	10
2.2.1	Calcul pariétal de la force	10
2.2.2	Bilan de quantité de mouvement	11
2.3	Efforts et structures cohérentes	15
2.3.1	Problème des formules faisant intervenir la pression	15
2.3.2	Tentatives de formulation de la force <i>via</i> les structures cohérentes	17
2.3.3	Méthode de projection	20
2.3.4	Équation de l'impulsion hydrodynamique et « Derivative-Moment Transformations »	21
2.3.5	Questions ouvertes et discussion	24
2.4	Topologie des écoulements et structures cohérentes	25
2.4.1	Définitions des structures cohérentes	25
2.4.2	Critères de détection	26
2.4.3	Conclusion	33

Les différentes définitions et notions utilisées dans la suite du manuscrit sont mises en place dans ce chapitre. En particulier les différentes façons d'exprimer la force aérodynamique appliquée à un obstacle plongé dans un fluide en mouvement sont présentées, que ce soit de manière pariétale en intégrant le tenseur des contraintes à la surface de l'obstacle, ou en donnant une expression volumique de la force *via* des grandeurs exprimées dans le fluide qui entoure l'obstacle. Une présentation des différents critères permettant de caractériser une structure cohérente est ensuite effectuée avec une brève discussion quant aux méthodes de détection utilisables pour notre étude.

2.1 Notations

D'une manière générale et dans le reste du manuscrit, on gardera le système de notation suivant : les vecteurs seront notés en gras, les tenseurs en gras et soulignés, et les scalaires en graissage normal. Les produits scalaires ou contractants seront notés " \cdot ", les produits vectoriels " \wedge "; les produits entre scalaires, entre scalaires et vecteurs ou tenseurs, et les produits tensoriels (deux vecteurs créant un tenseur) seront implicites. Dans les cas sujets à caution, le type de produit utilisé sera précisé. L'opérateur gradient sera noté ∇ et l'opérateur laplacien $\Delta = \nabla^2$.

Les notations indicielles respecteront la convention de sommation d'Einstein : un indice de variable répété dans un terme sous-entend la sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice (indice *muet*). Un indice non muet (ou *réel*) n'apparaît donc qu'une fois dans un terme.

En outre lors des bilans, on notera le domaine dans lequel on se situe par la lettre \mathcal{F} (pour *Field*) et la frontière de ce domaine par la lettre \mathcal{B} (pour *Boundary*). Notant \mathcal{N} la dimension de l'espace, cela permettra de traiter aussi bien des cas bi-dimensionnels ($\mathcal{N} = 2$) que tri-dimensionnels ($\mathcal{N} = 3$) sans changer de notations, la variable d'intégration permettant de savoir dans quelle dimension l'on travaille (" dV " pour un volume, " dS " pour une surface et " dl " pour une variable linéique). Les normales à la frontière sortant du domaine seront notées $\hat{\mathbf{n}}$.

Le vecteur position sera noté \mathbf{x} , avec pour coordonnées cartésiennes x, y (et éventuellement z en trois dimensions), et pour coordonnées polaires r et θ . Le vecteur \mathbf{u} représentera le vecteur vitesse, décomposé en coordonnées cartésienne en u_x, u_y (et éventuellement u_z en trois dimensions), et en coordonnées polaires u_r et u_θ . Le vecteur vorticité sera noté $\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u}$.

Les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}, -p\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ (avec $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ le tenseur métrique ou tenseur unité) et $\underline{\underline{\tau}}$ représenteront les tenseurs des contraintes totales, de pression et de viscosité respectivement.

Enfin la viscosité dynamique sera notée μ , la densité volumique du fluide ρ et la viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho$. Le nombre de Reynolds Re associé à cette viscosité cinématique sera défini pour une longueur caractéristique L et une vitesse caractéristique U ainsi : $Re = \frac{UL}{\nu}$.

2.2 Formulations générales

2.2.1 Calcul pariétal de la force

Dans le cas d'un véhicule terrestre évoluant dans l'air à une vitesse usuelle, on considère que l'on est en présence d'un écoulement incompressible de fluide newtonien. Ainsi la masse volumique ρ de l'air est constante et on a la relation pour le tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}(\mathbf{x}, t) . \quad (2.1)$$

Il existe plusieurs façons d'écrire le tenseur des contraintes visqueuses de l'équation (2.1) à partir du champ de vitesse (voir annexe B) ; on a par exemple :

$$\underline{\underline{\tau}} = \mu[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T] . \quad (2.2)$$

L'estimation directe de la force résultant des actions de contact du fluide à la surface du véhicule \mathcal{B}_{corps} s'effectue en intégrant le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ sur \mathcal{B}_{corps} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) &= \int_{\mathcal{B}_{corps}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dS \\ &= \int_{\mathcal{B}_{corps}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}) dS \\ &= \int_{\mathcal{B}_{corps}} d\mathbf{F}_p + d\mathbf{F}_\tau , \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec $\hat{\mathbf{n}}$ la normale sortante à la surface. Cette méthode d'estimation des forces est alors dite **pariétale** car toutes les grandeurs utilisées pour déterminer les efforts sont des grandeurs définies à la paroi du solide (figure 2.1).

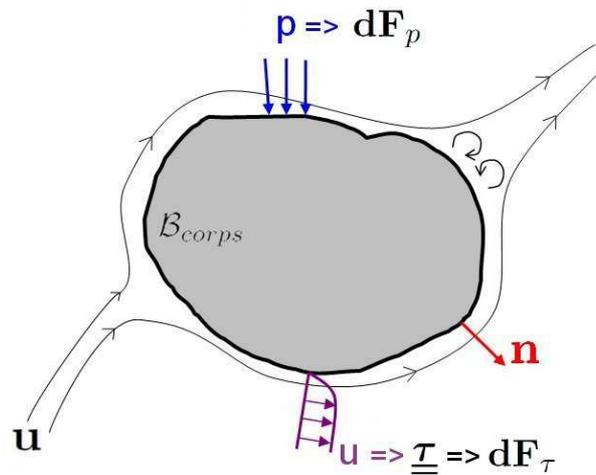


FIG. 2.1 – Estimation pariétale des efforts.

La force fluide $\mathbf{F}(t)$ est donc la résultante de deux types d'actions élémentaires à la surface du corps : des contraintes isotropes de pression $d\mathbf{F}_p = -p\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ et des contraintes anisotropes de viscosité $d\mathbf{F}_\tau = \underline{\underline{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. Comme pour toute action de contact appliquée à un solide indéformable, on peut décomposer cette force en trois composantes, projections sur les trois axes de l'espace. Comme évoqué en introduction, les études aérodynamiques automobiles s'attachent essentiellement à la détermination des composantes de traînée et de portance, que ce soit de manière numérique ou expérimentale. En posant \mathbf{e}_x l'axe de la direction du mouvement, F_x correspond donc à la traînée. La portance sera représentée par la composante F_y en deux dimensions, et par la composante F_z en trois dimensions, ce afin de conserver les notations en vigueur au sein de PSA Peugeot Citroën.

La force peut également s'écrire :

$$F_{(\cdot)} = \frac{1}{2} \rho U_0^2 S C_{(\cdot)}, \quad (2.4)$$

avec U_0 est la vitesse infinie amont (parfois notée U_∞ dans le reste du manuscrit), S la surface apparente¹ et $C_{(\cdot)}$ le coefficient sans dimension associé à la composante $F_{(\cdot)}$ considérée.

2.2.2 Bilan de quantité de mouvement

Pour tenter d'établir une **formulation volumique** des efforts s'appliquant à un obstacle dans un écoulement, il convient de réaliser un bilan de quantité de mouvement. En l'absence de force de volume (du type des forces de gravité ou d'inertie) la dynamique des fluides newtoniens incompressibles est régie par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes) :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On établit tout d'abord l'équation de bilan de quantité de mouvement sur un volume matériel, ce qui permet d'appliquer ces lois de conservation. Un volume matériel est un volume arbitrairement choisi de fluide toujours constitué des mêmes particules fluides dans le temps. Ce volume et la surface qui le délimite sont déformables et en mouvement ; la masse contenue à l'intérieur de la surface est constante ; enfin les particules fluides constituant la surface matérielle restent les mêmes à tout instant. On considère donc dans un premier temps le volume matériel $\mathcal{F}_m(t)$ de fluide délimité par la surface fermée $\mathcal{B}_m^*(t)$ (représentée par le contour pointillé dans la figure 2.2).

En posant $\hat{\mathbf{n}}$ la normale sortante à la surface $\mathcal{B}_m^*(t)$, l'équation de conservation de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \oint_{\mathcal{B}_m^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dS. \quad (2.6)$$

¹La surface apparente ou surface frontale est la surface projetée suivant la trajectoire du fluide sur un plan perpendiculaire à cette trajectoire ; en aérodynamique automobile la surface apparente est la surface caractéristique utilisée pour définir les coefficients de force dans toutes les directions.

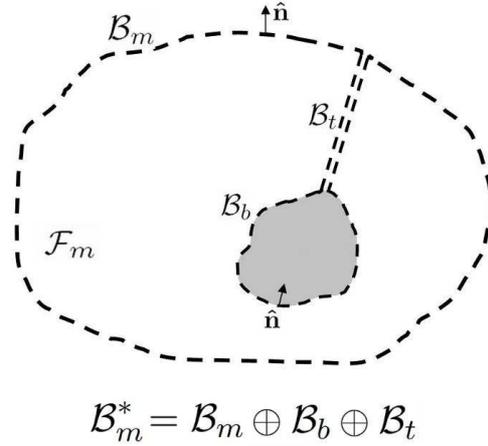


FIG. 2.2 – Volume matériel doublement connecté.

Afin de prendre en compte la présence d'un obstacle par la suite, on utilise un volume matériel doublement connecté, c'est à dire que la surface $\mathcal{B}_m^*(t)$ est constituée d'une enveloppe externe $\mathcal{B}_m(t)$ (pour *material*) et d'une enveloppe interne $\mathcal{B}_b(t)$ (pour *body*, la surface de l'obstacle) reliées par un tube mince $\mathcal{B}_t(t)$ (figure 2.2). Formellement on a :

$$\mathcal{B}_m^*(t) = \mathcal{B}_m(t) \oplus \mathcal{B}_b(t) \oplus \mathcal{B}_t(t). \quad (2.7)$$

On peut alors décomposer le membre de droite de l'équation (2.6) sur les différents contours :

$$\oint_{\mathcal{B}_m^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS = \oint_{\mathcal{B}_m(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS + \oint_{\mathcal{B}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS + \oint_{\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS. \quad (2.8)$$

Une rapide analyse du dernier terme de l'équation (2.8) permet de constater que celui-ci est négligeable. En effet, si le tube est choisi tel que sa section est infinitésimale, on peut considérer que l'intégrande ne dépend que de son abscisse curviligne ; autrement dit, à abscisse curviligne donnée, l'intégrande peut être considéré comme constant sur tout le périmètre du tube. Ainsi en décomposant le tube en anneaux de surfaces $\delta\mathcal{B}_t(t)$ infiniment petites et en notant $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}|_{\delta\mathcal{B}_t(t)}^T$ la valeur de $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^T$ à la position de l'anneau $\delta\mathcal{B}_t(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS &= \sum_{\delta\mathcal{B}_t(t)} \left(\oint_{\delta\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS \right) \\ &\approx \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}|_{\delta\mathcal{B}_t(t)}^T \cdot \oint_{\delta\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} dS. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Or on a l'égalité pour chaque anneau $\delta\mathcal{B}_t(t)$ le long du tube :

$$\oint_{\delta\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (2.10)$$

qui donne donc la simplification de l'intégrale sur le tube entier :

$$\oint_{\mathcal{B}_t(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dS = 0. \quad (2.11)$$

On en déduit alors l'équation de bilan simplifiée :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}_m(t)} \rho \mathbf{u} dV = \oint_{\mathcal{B}_m(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dS + \oint_{\mathcal{B}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} dS. \quad (2.12)$$

Une fois la relation (2.12) établie pour un volume matériel, il s'agit de la transformer afin de pouvoir l'appliquer au cas d'un volume géométrique \mathcal{F} délimité par une surface \mathcal{B} (figure 2.3). Un volume géométrique (ou volume de contrôle) est un volume fixe ou mobile dans l'écoulement défini par une surface extérieure perméable aux particules fluides ; c'est ce type de volume de contrôle qu'on utilise lors d'expérimentations ou pour les calculs numériques. À la différence

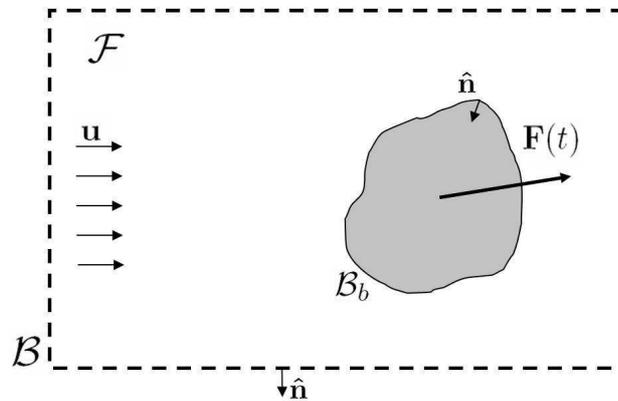


FIG. 2.3 – Bilan sur un volume géométrique.

d'un volume matériel, un volume géométrique est un système non fermé et les relations de conservations ne sont alors pas applicables directement ; il est en revanche possible de les établir *via* le théorème de Reynolds (équation (2.13)) qui fait apparaître en plus des intégrales dans le volume géométrique des intégrales de flux aux frontières du domaine (Aris [5]) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}_m(t)} \Phi dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}(t)} \Phi dV + \oint_{\mathcal{B}^*(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_S) \Phi dS, \quad (2.13)$$

où \mathbf{u}_S est la vitesse de la surface $\mathcal{B}^*(t)$ constituée du contour $\mathcal{B}(t)$ du volume géométrique et de la surface $\mathcal{B}_b(t)$ de l'obstacle.

On obtient ainsi le bilan de quantité de mouvement sur un volume géométrique après séparation de $\mathcal{B}^*(t)$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}(t)} \rho \mathbf{u} dV = \oint_{\mathcal{B}(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{S|\mathcal{B}(t)}) \rho \mathbf{u} + \underline{\underline{\sigma}}] dS + \oint_{\mathcal{B}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{S|\mathcal{B}_b(t)}) \rho \mathbf{u} + \underline{\underline{\sigma}}] dS. \quad (2.14)$$

La force aérodynamique étant la somme des efforts à la paroi de l'obstacle définie par l'équation (2.3), on pose en utilisant les conventions précédentes et afin de conserver la cohérence des notations :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= \oint_{\mathcal{B}_{corps}} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS \\ &= - \oint_{\mathcal{B}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} dS.\end{aligned}\quad (2.15)$$

En effet dans l'équation (2.3) on intègre les contraintes sur l'obstacle et la normale pointe naturellement vers l'extérieur du corps, tandis que dans l'équation (2.14) le volume sur lequel on effectue le bilan est constitué par le fluide, l'obstacle formant alors une des frontières de ce volume et la normale sortante du volume rentrant dans le corps. L'expression de la force aérodynamique dans le cas d'un volume géométrique donne donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}(t)} \rho \mathbf{u} dV + \oint_{\mathcal{B}(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{S}|_{\mathcal{B}(t)}}) \rho \mathbf{u} + \underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}] dS \\ &\quad + \oint_{\mathcal{B}_b(t)} \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{S}|_{\mathcal{B}_b(t)}}) \rho \mathbf{u}] dS.\end{aligned}\quad (2.16)$$

Cette équation peut encore être simplifiée si le volume et les surfaces considérés sont pris indéformables (*i.e.* ne dépendant pas du temps) et immobiles, ce qui est le cas d'une étude aérodynamique automobile, et que le corps étudié est rigide non poreux (cas d'un véhicule simplifié). On a donc les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\mathcal{S}|_{\mathcal{B}(t)}} = 0 \\ \mathbf{u}_{\mathcal{S}|_{\mathcal{B}_b(t)}} = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{|\mathcal{B}_b(t)} = 0 . \quad (2.17)$$

On en déduit la forme de l'expression volumique des forces aérodynamiques dans le cas d'un fluide incompressible constituant la base de notre analyse volumique avec $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$:

$$\boxed{\mathbf{F}(t) = - \int_{\mathcal{F}} \rho \partial_t \mathbf{u} dV + \oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}) dS.} \quad (2.18)$$

Le premier terme du membre de droite décrit l'évolution temporelle de la force due à l'accélération (ce terme est nul en cas d'écoulement stationnaire); le deuxième terme représente l'équilibre des flux de quantité de mouvement entrant et sortant du domaine d'intégration; enfin le troisième terme représente les contraintes de pression et de viscosité sur le contour extérieur du domaine d'intégration.

On peut citer à titre d'exemple d'application de cette équation de bilan certaines études aérodynamiques automobiles (Hackett & Sugavanam [34], Onorato *et al.* [68]) utilisant l'expression volumique (2.18) dans le cas d'un écoulement stationnaire ($\partial_t \mathbf{u} = 0$) afin d'effectuer des analyses de sillage :

$$\mathbf{F}(t) = \oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}) dS. \quad (2.19)$$

On peut décomposer dans l'équation (2.19) la surface extérieure \mathcal{B} du volume géométrique en surfaces amont \mathcal{B}_u , aval \mathcal{B}_d et latérale \mathcal{B}_l (figure 2.4).

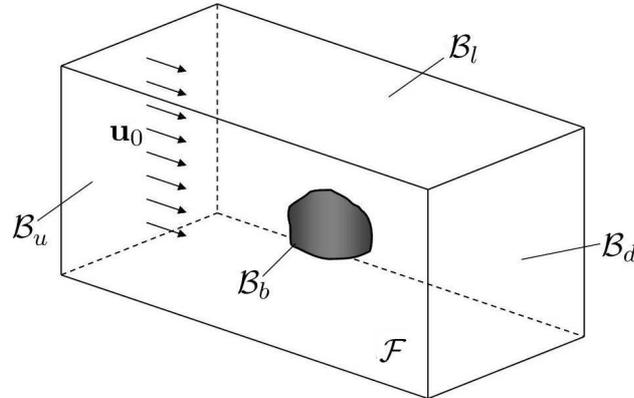


FIG. 2.4 – Solide de frontière \mathcal{B}_b plongé dans un écoulement ouvert uniforme ; le volume de contrôle \mathcal{F} est un volume géométrique de surface \mathcal{B} décomposée en surfaces amont \mathcal{B}_u , aval \mathcal{B}_d et latérale \mathcal{B}_l .

Après simplifications et en prenant les surfaces \mathcal{B}_u et \mathcal{B}_d similaires en forme, la projection sur l'axe \mathbf{e}_x de l'équation (2.19) donne la traînée T :

$$T = -\frac{\rho U_0^2}{2} \int_{\mathcal{B}_d} \left[1 - \frac{u}{U_0} \right]^2 dS + \frac{\rho U_0^2}{2} \int_{\mathcal{B}_d} \left[\frac{v^2}{U_0^2} + \frac{w^2}{U_0^2} \right] dS + \int_{\mathcal{B}_d} (p_{t0} - p_t) dS, \quad (2.20)$$

où $\mathbf{u}_0 = [U_0, 0, 0]$ est la vitesse amont et p_{t0} et p_t sont les pressions totales en amont et en aval. Ardonceau & Amani [4] montrent dans leur travaux l'efficacité de l'équation pour évaluer la contribution à la traînée des vortex longitudinaux (appelée *vortex drag* par Onorato *et al.* [68]) et rapprochent cette notion de celle de traînée induite développée par Prandtl [73]^{II}. Néanmoins il s'agit toujours d'une équation de bilan pour laquelle il n'est pas possible d'estimer séparément les contributions de chaque structure cohérente à la force.

2.3 Efforts et structures cohérentes

2.3.1 Problème des formules faisant intervenir la pression

Le principal problème des formulations de la force faisant intervenir la pression (au premier rang desquelles on trouve bien entendu l'estimation pariétale de la force, équation (2.3)) est le caractère global de celle-ci, *i.e.* la non-localité de cette grandeur. On a déjà évoqué les effets de frictions décrits par le tenseur des contraintes visqueuses, qui permettent de relier relativement facilement les structures touchant l'obstacle et les forces visqueuses intégrées sur la surface à l'endroit du contact. Au contraire, la pression est quant à elle influencée par tout l'écoulement et

^{II}La traînée induite est une traînée créée dans le cas d'une aile d'envergure infinie par l'écoulement dirigée vers le bas généré par les tourbillons longitudinaux des bords de l'aile.

toutes les structures présentes dans celui-ci. Il peut alors être difficile de dissocier les effets sur la pression dus à chaque structure cohérente, comme illustré par les figures 2.5 et 2.6.

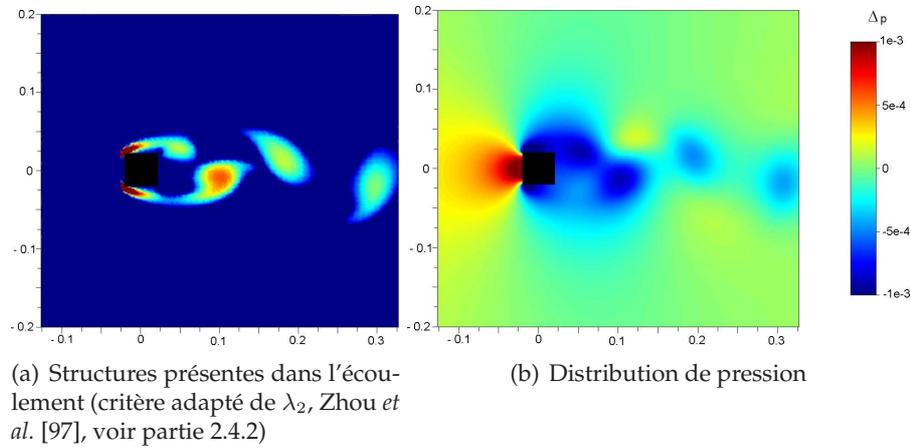


FIG. 2.5 – Structures et champ de pression autour d'un cylindre à section carré ($Re = 100$).

La figure 2.5 montre la distribution de pression relative autour d'un cylindre à section carrée à nombre de Reynolds modéré : on observe dans l'écoulement pour ce nombre de Reynolds la création de deux couches limites qui se déstabilisent en aval pour produire un lâcher tourbillonnaire périodique^{III}. On peut distinguer trois structures principales dans l'environnement proche du cylindre : deux couches limites et un tourbillon. Pourtant la distribution de pression ne permet pas de dissocier clairement ces trois structures : la zone de dépression est complètement reliée autour du cylindre, et on ne peut savoir avec certitude si la dépression à un endroit du cylindre est due à un décollement ou à un tourbillon. On ne peut donc pas intégrer la contribution en pression de chaque structure.

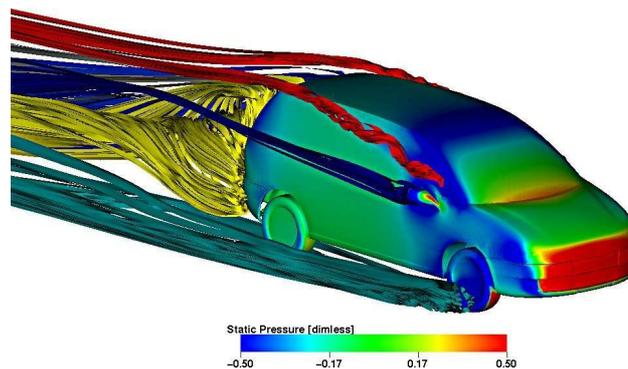


FIG. 2.6 – Distribution de pression relative sur une voiture ; les lignes de courant permettent de visualiser quelques structures cohérentes (source interne PSA Peugeot Citroën).

La figure 2.6 est encore plus représentative des difficultés que l'on peut rencontrer lorsque l'on souhaite déterminer les contributions de pression des structures cohérentes autour d'un véhicule.

^{III}On reviendra sur la description de l'écoulement autour d'un cylindre à section carrée dans le chapitre 3.

Ces structures cohérentes sont en partie représentées par les lignes de courant^{IV} tracées autour du corps; on observe des tourbillons au niveau des montants de baie, des rétroviseurs et des roues ainsi qu'une grande zone de recirculation à l'arrière de la voiture, auxquels il faut ajouter les couches limites qui se développent à la surface. Là encore si on essaie de mettre en lien les structures cohérentes et la distribution de pression à la paroi, on se retrouve face à la difficulté de dissocier les effets de pression, particulièrement au niveau de la portière avant où les dépressions dues aux tourbillons de montants de baie et à ceux des rétroviseurs sont confondues.

Il faut donc trouver un moyen d'exprimer la force sans faire apparaître la pression dans la formulation des efforts. On ne peut se satisfaire ni de l'estimation pariétale, ni de la formulation volumique (2.18) puisqu'en plus d'exprimer la force en fonction de la pression, on a vu qu'elle donne un poids considérable aux termes calculés sur le contour du domaine (notamment pour les écoulements stationnaires), ce qui empêche d'effectuer une estimation purement volumique des efforts.

2.3.2 Tentatives de formulation de la force *via* les structures cohérentes

Le terme « structure cohérente », défini plus précisément dans la partie 2.4, désigne une zone de l'écoulement dont les particules fluides ont une dynamique de vorticité similaire (ou cohérente).

Une des premières tentatives pour exprimer la force en fonction des structures cohérentes présentes dans l'écoulement est celle de Kirchhoff [46] qui propose un modèle repris par Rayleigh [77] quelques années plus tard et utilisant la théorie de Helmholtz [36] sur la « ligne de courant libre ». Ce modèle consiste à séparer le fluide autour d'un corps en deux parties : l'écoulement externe et le sillage, au moyen de deux lignes de courant. Cette interface présente des discontinuités (sauts) de vitesse tangentielle donnant naissance à deux nappes de vorticité (les *structures cohérentes* mod lis es du problème). Le sillage derrière le corps (*zone morte*) est considéré stationnaire et s'étend à l'infini ; la pression y est constante et vaut p_∞ . L'écoulement externe est potentiel. On peut illus-

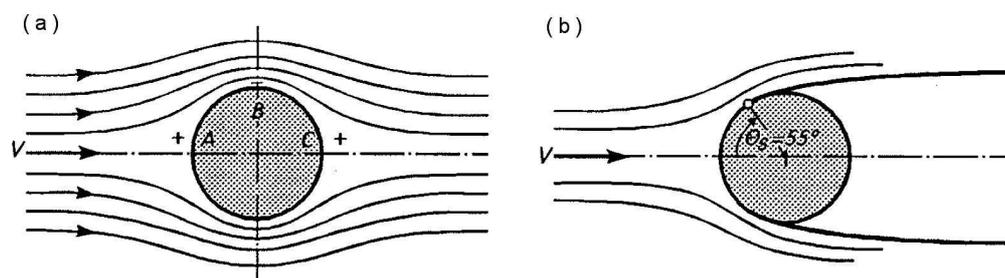


FIG. 2.7 – (a) Cylindre dans un écoulement symétrique ; (b) Solution de Kirchhoff-Helmholtz pour un écoulement sous-critique (d'après Schlichting *et al.* [83]).

trer cette théorie dans les cas d'un cylindre à section circulaire (figure 2.7) ou d'une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement (figure 2.8). Sans structure, l'écoulement autour d'un cylindre à

^{IV}On rappelle que les lignes de courant sont les lignes du champ de vitesse définies comme les tangentes en chaque point au vecteur vitesse $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$   un instant donné; mathématiquement on écrit pour un petit déplacement $d\mathbf{M}(dx, dy, dz)$ le long d'une ligne de courant : $d\mathbf{M} \wedge \mathbf{u} = 0$, i.e. $dx/u_x = dy/u_y = dz/u_z$.

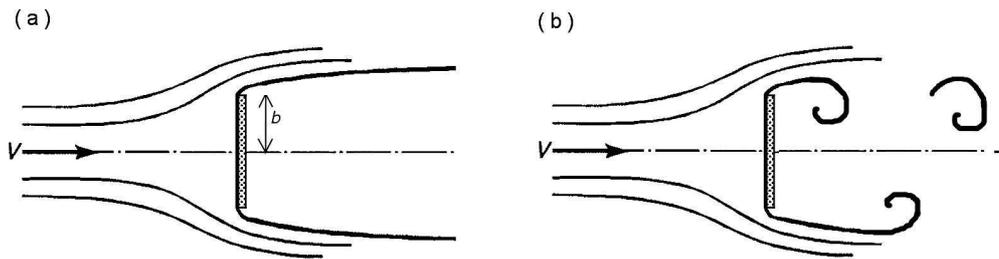


FIG. 2.8 – (a) Solution de Kirchhoff-Helmholtz pour une plaque plane perpendiculaire à l'écoulement ; (b) Écoulement réellement observé.

section circulaire est parfaitement symétrique et la force fluide est nulle (figure 2.7(a)). En revanche si l'on considère une séparation de l'écoulement à l'arrière du cylindre avec la génération de deux nappes de vorticité représentant les structures cohérentes, on peut calculer la traînée à l'aide de la théorie de la ligne de courant libre (figure 2.7(b)). La solution de Kirchhoff-Helmholtz donne un coefficient de traînée $C_D = 0.5$; pourtant le coefficient de traînée mesur e expérimentalement s'approche plutôt de $C_D \approx 1.2$. Ce problème est très général, dans le cas de la plaque plane perpendiculaire à l'écoulement (figure 2.8(a)) la solution de Kirchhoff-Helmholtz donne un coefficient de traînée $C_D = 0.88$ (solution présentée en détails par Batchelor [7]) tandis que le coefficient de traînée mesur e expérimentalement est plutôt de l'ordre de $C_D = 2$.

La raison de ces différences réside dans la modélisation proposée par la théorie de la ligne de courant libre. Le choix de la pression p_∞ dans la zone morte implique que la séparation s'étende à l'infini ; hors dans la réalité cette zone se referme (on appelle alors la zone morte : *zone de recirculation*) et la pression du sillage dépendant de la taille de la zone de recirculation n'est plus égale à p_∞ . Les structures cohérentes seules ne suffisent pas à déterminer la force, il faut également faire intervenir dans le problème une modélisation de la pression en aval. De plus la séparation n'est pas le seul ph en om ene à intervenir tant dans le cas du cylindre circulaire que dans celui de la plaque plane ; on peut en effet observer la déstabilisation des nappes de vorticité et la formation de tourbillons à l'arrière de l'obstacle (figure 2.8(b) et figure 2.5(a) dans le cas visqueux). Ces tourbillons engendrent eux aussi des dépressions à l'arrière et il est difficile de dissocier les dépressions dues aux tourbillons de celle due à la seule séparation. Enfin ces tourbillons peuvent être responsables d'une fermeture anticipée de la zone de recirculation, modifiant alors la dépression crée par la séparation.

On voit donc bien que cette modélisation ne permet pas d'établir un lien quantitatif entre les structures cohérentes et la force fluide.

Prenant en compte la présence dans le sillage des structures tourbillonnaires que l'on vient d'évoquer, la théorie des sillages a ensuite été développée. Elle substitue aux solutions continues simples de l'hydrodynamique des solutions de surfaces de discontinuités et de mouvements tourbillonnaires. En 1911, von K arm an [44] étudie ainsi le sillage d'un cylindre à section circulaire et propose d'évaluer la traînée produite à partir de caractéristiques de son émission tourbillonnaire. Dans le cas du cylindre circulaire en deux dimensions, cette théorie consiste à voir le sillage derrière le cylindre comme la superposition d'un écoulement potentiel uniforme et de deux nappes de vorticité modélisées par des points singuliers aux circulations opposées $\pm\Gamma$: les tourbillons

(figure 2.9). En travaillant dans le plan complexe on peut ensuite déterminer le potentiel associé à

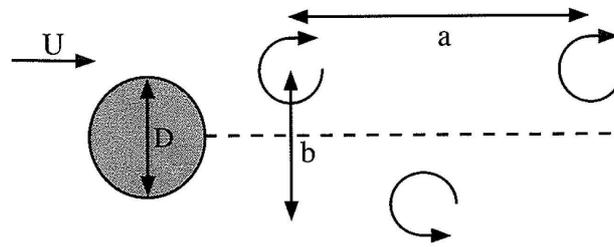


FIG. 2.9 – Allée de von Kármán (d’après Guyon *et al.* [33]).

chaque vortex, la vitesse complexe induite et enfin la force complexe (Sarpkaya *et al.* [81], Milne-Thomson [62]). En utilisant les paramètres décrits figure 2.9 et avec U_∞ la vitesse amont du fluide et V_{street} la vitesse de translation de l’allée tourbillonnaire, la traînée du cylindre s’exprime ainsi :

$$T = \frac{2\pi\Gamma\rho b}{a} (U_\infty - 2V_{street}) + \frac{2\pi\Gamma^2\rho}{a}. \quad (2.21)$$

Là encore on se trouve face à un problème pour établir le poids des structures cohérentes sur la force fluide. Cette méthode nécessite une estimation de la circulation Γ des tourbillons présents dans le sillage, qui ne peut être effectuée qu’à l’aide d’un bilan. On ne met donc pas en lien une structure cohérente et la force fluide qu’elle génère, mais bien un écoulement dans son ensemble et la force fluide appliquée à un obstacle dans l’écoulement.

On peut enfin citer les études de Kutta [50] et Joukowski [43], quelques années avant von Kármán, qui démontrent de manière quasi-simultanée et indépendamment une première relation donnant la force s’exerçant sur un profil d’aile plongé dans un écoulement incompressible, stationnaire et non-visqueux constitué de la superposition d’un écoulement potentiel et d’une circulation à la surface de l’aile (figure 2.10). Dans les cas où la surface de contrôle est loin des effets rotation-

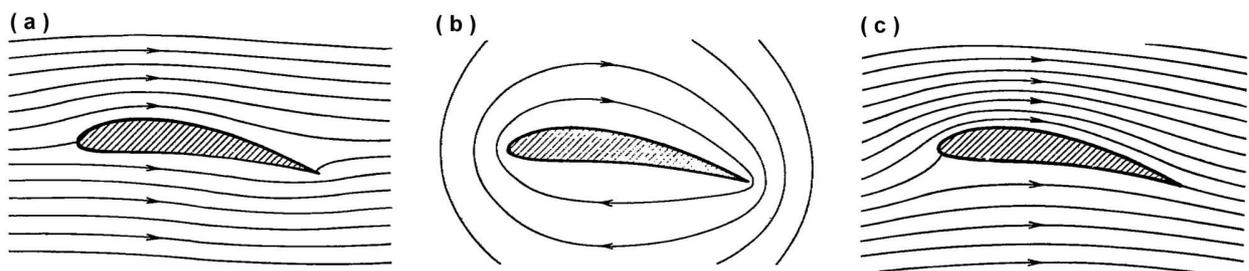


FIG. 2.10 – (a) : Écoulement potentiel simple (b) : Circulation autour de l’aile (c) : Superposition des deux champs (d’après Prandtl [73]).

nels et où la pression dynamique peut être vue constante (théorème de Bernouilli, valable dans tout l’espace puisque l’écoulement est potentiel) :

$$p_{T|_S} = p + \frac{1}{2}\rho u^2|_S = cte, \quad (2.22)$$

on peut appliquer la relation d'Euler pour les fluides parfaits :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \right) + \nabla p = 0, \quad (2.23)$$

et ainsi obtenir l'équation (2.24) pour la force en deux dimensions. Cette équation est redémontrée par Saffman [79] et alors nommée « force de tourbillon » :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \oint_{\mathcal{B}} p_T \hat{\mathbf{n}} \, dl + \rho \int_{\mathcal{F}} \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} \, dS \\ &= \rho \int_{\mathcal{F}} \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} \, dS. \end{aligned} \quad (2.24)$$

On peut noter dans cette dernière équation que la pression dynamique p_T est constante sur le contour du domaine et que la première intégrale est donc nulle, et que la seconde intégrale fait intervenir le concept de « vorticité imaginare » (*phantom vorticity*, Saffman [79]), *i.e.* de vorticité présente dans l'obstacle, sans quoi la force devient nulle pour un écoulement potentiel. En reprenant un formalisme similaire à celui de l'étude en points-vortex (circulation non nulle Γ au niveau de l'obstacle et vitesse à l'infini $U_0 \mathbf{e}_x$), on retrouve alors le théorème de Kutta-Joukowski pour la portance, ou théorème de la circulation^V :

$$\mathbf{F} = -\rho U_0 \Gamma \mathbf{e}_y. \quad (2.25)$$

Cette modélisation est à notre connaissance la seule qui fasse clairement le lien entre une structure et la force fluide. Nous allons maintenant essayer de trouver une méthode générale d'estimation de la force fluide à partir des structures cohérentes. Il faut pour cela repartir de l'équation de bilan (2.18) et transformer cette équation afin de tenir compte de chaque structure cohérente et de lui donner ainsi une « signification spatiale ». Il faut pour cela régler le problème des termes contenant la pression.

2.3.3 Méthode de projection

Il existe une méthode, appel e *méthode de projection*, qui transforme l'équation (2.18) afin de faire disparaître le terme de pression. La méthode consiste à projeter chaque terme de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes sur une famille de vecteurs harmoniques repr senteant une composante de l'espace. Cette projection a été propos e pour la première fois par Quartapelle & Napolitano [76] puis reformul e par d'autres équipes (Chang & Lei [16], Protas *et al.* [74, 75] ou Wu *et al.* [96] notamment).

Il s'agit tout d'abord de repartir de l'équation de conservation de quantité de mouvement locale ( quation (2.5)), puis de la multiplier par le gradient $\nabla \eta_a$ d'une fonction harmonique η_a satisfaisant la condition de Neumann : $\mathbf{n} \cdot \nabla \eta_a = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ sur le contour \mathcal{B}_b de l'obstacle et dont le gradient tend vers zéro sur le contour extérieur : $\lim_{\infty} \nabla \eta_a = 0$. Chang & Lei [16] affinent cette condition et montrent que les écoulements généralement étudiés satisfont à cette restriction. En considérant un écoulement stationnaire, il est alors possible d'exprimer la force aérodynamique

^VC'est également cette relation qui est au cœur de l'effet Magnus.

projetée dans la direction \mathbf{a} de l'espace :

$$F_a = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} = -\rho \int_{\mathcal{F}_\infty} \nabla \eta_a \cdot (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) dV + \mu \oint_{\mathcal{B}_b} (\nabla \eta_a + \mathbf{a}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \wedge \boldsymbol{\omega}) dS. \quad (2.26)$$

Les termes de pression sont alors portés par les termes comportant la fonction harmonique η_a . De plus, le terme de volume étant multiplié par $\nabla \eta_a$ qui décroît rapidement dans l'espace, l'étude d'un volume confiné n'est *a priori* pas problématique.

Le problème de cette méthode est l'absence de relation simple entre les structures et les forces puisqu'une grande partie de l'information est encore contenue sur la frontière du domaine, c'est pourquoi nous n'utilisons pas cette méthode dans la suite de ce manuscrit.

2.3.4 Équation de l'impulsion hydrodynamique et « Derivative-Moment Transformations »

L'équation de l'impulsion hydrodynamique est née de la transformation de l'équation (2.18) afin d'y faire apparaître la vorticité. On a déjà évoqué le fait que les efforts sont influencés voire crées par les structures cohérentes présentes au voisinage de l'obstacle considéré (Roshko [78]) ; il semble donc légitime d'essayer d'injecter la principale signature des structures cohérentes, la vorticité, dans les équations de la force.

En 1956, Moreau [63] s'intéresse aux conditions de convergence des intégrales de bilan. Il se place dans le cas d'un écoulement réel et incompressible dans un domaine infini à deux dimensions et dresse des bilans en négligeant les forces dérivant d'un potentiel (de type pesanteur) et la pression, vue mathématiquement comme un simple multiplicateur corrélatif dans le cas incompressible. Il en déduit l'équation (2.27) dite *formule de l'impulsion hydrodynamique*^{VI} en deux dimensions pour un domaine de validité très restrictif, à savoir que les contraintes aux limites doivent être nulles et la vorticité décroître exponentiellement à l'infini (cas d'une structure de vorticité très localis e) :

$$\mathbf{F}(t) = -\rho \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}_\infty} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}(t) dV. \quad (2.27)$$

Biesheuvel & Hagmeijer [9] indiquent que ces réflexions men es par Moreau ont certainement été influenc es par un article assez similaire de Burgers [13]. Quel que soit le père de cette équation, il subsiste un problème. En effet, comme le remarque Wu [94] dans l'introduction de son article, cette équation présente des restrictions fortes dans son domaine d'application, puisque la vorticité doit se diffuser très rapidement. Il n'est donc par exemple pas possible d'appliquer cette formulation aux sillages pour lesquels la vorticité est advect e à l'infini.

Plus tard, Lighthill [55] développe lui aussi l'idée que l'équation de l'impulsion hydrodynamique peut permettre d'exprimer la force s'appliquant sur un obstacle, cette fois dans le cadre des efforts crées par l'eau sur les plate-formes offshore. Son étude se place dans un volume fini

^{VI}On rappelle à cette occasion qu'est appel e * quation de l'impulsion* toute relation mettant en jeu une force dynamique d'une part, et la d riv e temporelle de l'impulsion d'une autre grandeur dynamique d'autre part. Dans le cas de l'impulsion hydrodynamique, il s'agit de mettre en relation directe la force qui s'applique à un obstacle dans un fluide aux tourbillons présents dans le sillage de cet obstacle.

où le fluide est au repos et où c'est le cylindre qui vibre. Il exprime ainsi la relation dans un cas tri-dimensionnel (d'où le facteur $\frac{1}{2}$) :

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{1}{2}\rho \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}(t) dV, \quad (2.28)$$

où $\boldsymbol{\omega}(t)$ représente en fait la vorticité « ajout  e » au système, *i.e.* la vorticité   mise par l'obstacle. Dans le cas d'un sillage, on peut envisager d'estimer correctement la force avec l'équation (2.28) tant que la vorticité ne « sort » pas du domaine, par exemple en tirant un cylindre dans un grand volume de fluide initialement au repos. La force à un instant donn  e est d  termin  e à partir de tout l'historique de l'énergie inject  e dans le système depuis le début de l'expérience. Il n'est donc pas envisageable d'utiliser cette formulation dans un cas concret puisqu'il est impossible d'effectuer une simulation numérique dans un volume aussi grand.

Par simple curiosité on peut représenter spatialement l'intégrande de la formulation de l'impulsion hydrodynamique dans le cas du sillage d'un cylindre à section carr  e (figure 2.11). On observe des fluctuations de tourbillons dues à l'advection dans le sillage de l'obstacle (l'impulsion), générant d'intenses contributions positives ou négatives selon que l'on se place en amont ou en aval des tourbillons ; c'est la différence de ces deux contributions de signe opposé qui donne la contribution nette à la force (voir Wu *et al.* [95]), et il est difficile de tirer une information quantitative de la force nette cr  e par chaque tourbillon comme nous le verrons dans le chapitre 3.

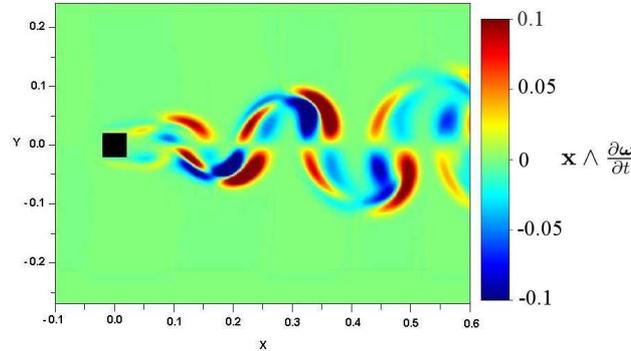


FIG. 2.11 – Intégrande du terme d'impulsion hydrodynamique ($\mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}$) projet   sur l'axe horizontal

Nous n'avons donc pas retenu cette formulation, et avons préféré repartir de l'équation de bilan de quantité de mouvement (  quation (2.18)), et combiner certaines transformations mathématiques (transformations de Green, d'Ostrogradski, ...) ou physiques (  quations de Navier-Stokes, de la vorticité, ...) selon les termes que l'on souhaite faire apparaître ou disparaître. Wu *et al.* [96] qualifient ces transformations de *Derivative-Moment Transformations*, ou DMT, puisqu'elles transforment essentiellement les termes de dérivées et de moments de l'équation (2.18). Des travaux récents ont été menés dans cette direction pour différentes raisons : soit pour avoir une estimation des forces uniquement à partir de champs de vitesse résultant de PIV (Noca *et al.* [66, 67], Lin & Rockwell [56]), soit pour comprendre les mécanismes de formation et d'évolution des structures ou des sillages en général (Graziani & Bassanini [32], Wu *et al.* [96, 95]). Deux formulations ont retenu notre attention du fait de la présence de la vorticité

dans les expressions : celle donnée par Noca [65] dans sa thèse, que nous appellerons **formulation advective** et qui fait apparaître l'impulsion hydrodynamique, et celle de Wu *et al.* [95] que nous appellerons **formulation diffusive**. Ces dénominations reprennent les propres notations de Wu *et al.* [95]. La formulation advective a fait l'objet de plusieurs études comparatives (Dabiri [22], Fujisawa *et al.* [29], van Oudheusden *et al.* [69], van Oudheusden *et al.* [70], Tan *et al.* [85], Kurtulus *et al.* [49], Buresti [12]) et est à notre connaissance la plus utilisée des formulations DMT. La formulation diffusive, plus récente, ne fait pas l'objet de la même littérature. On peut citer Marongiu & Tognaccini [58], Ueno *et al.* [88] et Fiabane *et al.* [25, 26].

Formulation advective

Noca [65] présente dans sa thèse des expressions générales de la force aérodynamique issues de l'équation (2.18) et valides quels que soient les volumes et écoulements visqueux considérés (volumes mobiles, finis, déformables ou non ; écoulements sans condition sur leur caractère rotationnel ou potentiel). Sa motivation de base est de trouver une ou plusieurs formules permettant d'évaluer les forces aérodynamiques sur un corps au moyen d'une étude DPIV (pour *Digital Particle Image Velocimetry*, *Vélocimétrie par Images de Particules*^{VII}) en utilisant uniquement des champs de vitesse et ses dérivées. Il n'est en effet pas possible d'avoir accès à tous les paramètres d'un écoulement avec la DPIV, en particulier la pression, ce qui justifie la mise en place d'une formulation alternative à l'intégration des forces de pression et de viscosité^{VIII}. Le cadre théorique de son étude est en revanche extrêmement large, ne faisant intervenir qu'un minimum de simplifications (comme l'incompressibilité) ce qui la rend valable pour tout type d'application expérimentale (DPIV) ou numérique.

Après manipulations vectorielles et intégrales faisant notamment intervenir les équations de Navier Stokes (voir annexe A), Noca [65] obtient l'expression de la force aérodynamique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dV \\ & + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \mathbf{u} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\mathcal{N}-1} \left(\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) \right) dS. \end{aligned} \quad (2.29)$$

On retrouve les termes d'impulsion hydrodynamique et de force de tourbillon ainsi qu'un terme assez complexe sur le contour.

^{VII}La PIV est une technique non-intrusive de visualisation et d'analyse d'écoulement permettant l'obtention de champs instantanés de vitesse au moyen d'une caméra rapide et d'un laser éclairant à très court intervalle une fine couche de fluide contenant des particules. Connaissant la fréquence d'utilisation du laser, il est alors possible de corréler deux images consécutives et de déterminer le déplacement des particules situées dans la zone d'étude, puis d'en déduire le champ de vitesse instantané.

^{VIII}Il est souvent difficile d'avoir accès à la pression à la surface d'un obstacle, ce même sans faire de PIV, ce qui explique en partie le succès de l'étude de Noca.

Cette formulation et les contributions des différents termes à la force sont étudiées dans le chapitre 3.

Formulation diffusive

Dans un article de 2007, Wu *et al.* [95] tentent d'étudier de façon plus systématique les différentes équations obtenues par DMT afin de mettre en relation directe les structures et les forces aérodynamiques. Ils se basent sur des travaux antérieurs de Wu [94] et présentent ainsi une équation rigoureusement identique à celle de Noca (équation (2.29)) mais présentée sous une forme très légèrement différente :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\rho \int_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{l} \right) dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS \\ & - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où $\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ est le vecteur de Lamb [51]. L'équivalence des deux formulations est montrée dans l'annexe B. Ensuite, en utilisant l'équation de la vorticité obtenue en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes (  quation (2.5)) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (2.31)$$

et en manipulant les différentes intégrales (voir annexe B), on obtient la formule de diffusion de vorticité (ou formulation diffusive) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \\ & - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Cette formule ne fait pas apparaître de terme de d  riv  e temporelle, ce qui rend l'analyse des forces plus ais  e (besoin d'instantanés uniquement au lieu de séries de champs). En revanche la présence de dérivées troisièmes en espace de la vitesse nécessite un soin particulier lors de la résolution numérique de l'équation (voir chapitre 4).

2.3.5 Questions ouvertes et discussion

Le sujet de l'estimation des forces est assez vaste et a occupé de nombreux scientifiques durant plus d'un siècle. Il est possible d'effectuer un bilan (  quation (2.18)) puis de manipuler cette équation de différentes façons en utilisant la technique des DMT ; aussi le nombre de formes que peut prendre cette équation est assez conséquent. Reste en revanche une question essentielle que nous nous proposons d'étudier dans les deux chapitres suivants : peut-on faire « parler » une équation de bilan dans l'espace ?

Wu *et al.* [95] essaient ainsi d'avoir un maximum d'informations dans le volume afin d'étudier les structures tourbillonnaires générant les forces et de comprendre les mécanismes de formation des sillages. Mais leur étude ne met pas en évidence les contributions de chaque structure à la

force. Quant à Noca [65], son intérêt n'est pas de décomposer la formulation en contributions de chaque structure, mais uniquement d'avoir une estimation juste de la force à partir des champs de vitesses et de leurs dérivées seulement afin de pouvoir exploiter de manière simple des résultats de PIV. Les études suivantes (Noca *et al.* [66, 67]) montrent d'ailleurs qu'à partir de données expérimentales, une formulation basée sur des intégrales de contour uniquement est plus efficace qu'une estimation dans le volume, ce qui s'éloigne de notre problématique puisque l'on cherche à obtenir des densités de force.

Il existe enfin d'autres approches combinant les méthodes présentées ici : Unal *et al.* [89] opèrent par exemple des séparations entre champs moyens et fluctuants ; Chang *et al.* [17] donnent quant à eux une expression des forces pour plusieurs obstacles à mi-chemin entre la formulation advective de Noca et l'estimation de la force comme somme des contributions des vortex de la théorie des points-vortex. Le sujet est vaste et beaucoup de parties restent inexplorées ; notre travail s'inscrit dans une volonté de la communauté scientifique de trouver le lien quantitatif entre les structures présentes dans les écoulements au voisinage d'obstacles et les forces subies par ces obstacles.

2.4 Topologie des écoulements et structures cohérentes

2.4.1 Définitions des structures cohérentes

Afin d'étudier un écoulement et les structures qui le composent, il faut donner une définition à la fois générique et mathématique d'une structure cohérente. Il existe de nombreuses définitions des structures cohérentes et des tourbillons en particulier, aucune n'arrivant à prendre le pas sur les autres (Lugt [57], Volmers *et al.* [91], Jeong & Hussain [41], Cucitore *et al.* [21], Adrian *et al.* [1], Haller [35]). Cela tient en partie au fait que les grandeurs intensives^{IX} du fluide (pression, vitesse et ses dérivées spatiales) ne permettent pas aisément la séparation des structures qui le composent. Si l'on s'en tient à l'exemple de la pression, on a affaire à une grandeur globale ; ainsi la modification d'une partie de l'écoulement (apparition d'un décollement par exemple) va non seulement influencer la pression à l'endroit de la modification, mais également dans le reste de l'écoulement (Kida & Miura [45]).

On s'en tiendra donc dans tout le manuscrit à cette définition des structures cohérentes, assez large mais objective, donnée par Hussain [40] :

« A coherent structure is a connected turbulent fluid mass with instantaneously phase-correlated vorticity over its spatial extent. »

Il donne en outre cette précision un peu plus loin :

« We choose to designate the instantaneously space- and phase-correlated vorticity as coherent vorticity. Thus coherent vorticity is the primary identifier of coherent structures. »

^{IX}On appelle variable intensive toute grandeur qui ne dépend pas de la quantité de matière, au contraire des variables extensives.

Les cas traités dans ce manuscrit ne relèvent pas de la turbulence pleinement développée ; il s'agit plutôt d'écoulements dans lesquels la dynamique de la vorticité tient lieu de moteur des phénomènes (par exemple le sillage de von Kármán, figure 2.12), avec de plus des résultats pour la plupart numériques. En ce sens il n'est souvent pas nécessaire de faire des moyennes de phase. En revanche le marqueur principal des structures reste bien la vorticité, et c'est le premier critère qui nous permettra d'observer voire de détecter systématiquement des structures cohérentes.

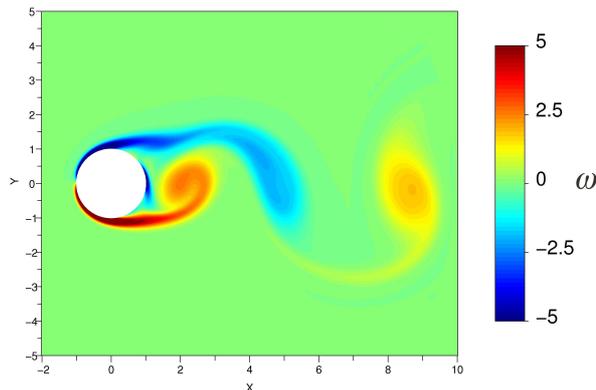


FIG. 2.12 – Sillage d'un cylindre cylindrique présentant une allée de von Kármán ($Re = 300$).

Corollaire de cette recherche d'une définition universelle des structures cohérentes et afin de palier aux limites de la vorticité expos  es dans le paragraphe 2.4.2, un grand nombre de critères de détection de structures ont été élaborés. En utilisant les propriétés physiques (pression, instabilité, rapport local entre enroulement et dissipation, ...) ou géométriques (enroulement des vecteurs vitesse) de l'écoulement on peut faire apparaître des grandeurs qui selon leur valeur pourront être les indicateurs de tourbillons, couches limites, etc. Il est à noter en outre que tous les critères évoqués et définis en détail dans les paragraphes suivants peuvent être utilisés indépendamment du caractère stationnaire ou non de l'écoulement.

De nombreuses études récentes se focalisent également sur la définition de points singuliers (Dallmann [23], Perry & Chong [72]) et sur le suivi dans le temps de ces points singuliers (Tricoche *et al.* [87], Theisel *et al.* [86], Depardon *et al.* [24], Weinkauf *et al.* [92]), ce qui s'éloigne de notre étude traitant de détection de structures dans leur globalité et sur des instantanés (de champs moyens, moyennés ou instationnaires).

2.4.2 Critères de détection

Module de vorticité

La vorticité, définie mathématiquement comme le rotationnel de la vitesse $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u}$, est une mesure locale du taux de rotation. Dans le sillage, on observe des modules de vorticité élevés au coeur des structures tourbillonnaires et nuls entre les tourbillons ou dans les zones laminaires à l'extérieur du sillage. Le module de vorticité est donc un bon marqueur de structures cohérentes dans le sillage : la vorticité étant continue dans tout le domaine, il suffit de définir une valeur

seuil du module de vorticité au dessus de laquelle on est en présence d'une structure cohérente.

Le problème se pose en revanche lorsqu'on observe la vorticité proche de la paroi d'un obstacle. Cette zone de l'écoulement est en fait la zone de production de vorticité due au frottement visqueux à la paroi : on y trouve donc des modules de vorticité très élevés (plus élevés que dans le sillage) dus au cisaillement, associés à de la dissipation visqueuse se traduisant par une déformation des structures de l'écoulement et formant les couches limites. Il est alors très difficile de définir un seuil pour tout à la fois observer et séparer les structures de l'écoulement, un seuil trop faible ne permettant pas la distinction et un seuil trop élevé filtrant trop de structures moins énergétiques ou moins enroulées. Il faut donc trouver une méthode alternative permettant de détecter les structures cohérentes de l'écoulement tout en gardant à l'esprit que la vorticité est un ingrédient essentiel de ces structures.

Critère Δ

Il est possible de définir les vortex à partir du tenseur gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$. Chong *et al.* [19] montrent que pour des écoulements présentant des lignes de courant circulaires ou en forme de spirale, les valeurs propres de $\nabla \mathbf{u}$ sont complexes. Ainsi on a l'équation caractéristique pour ce tenseur :

$$\sigma^3 - P\sigma^2 + Q\sigma - R = 0, \quad (2.33)$$

où P , Q et R sont les trois invariants de $\nabla \mathbf{u}$ définis par :

$$P = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad Q = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad R = \det \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.34)$$

Les valeurs propres de $\nabla \mathbf{u}$ complexes traduisent une tendance à la rotation locale et un rapprochement des lignes de courant, *i.e.* la présence d'un tourbillon. Ces valeurs complexes correspondent à un discriminant Δ de l'équation (2.33) strictement positif. Dans le cas d'un écoulement incompressible on a la divergence de la vitesse nulle soit $P = 0$, et le critère Δ s'exprime ainsi :

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}Q \right)^3 + \left(\frac{1}{2}R \right)^2. \quad (2.35)$$

Les valeurs strictement positives ($\Delta > 0$) indiquent donc la présence d'un tourbillon.

Critère Q

Hunt *et al.* [39] identifient quant à eux les structures cohérentes en utilisant le deuxième invariant du gradient de vitesse $\nabla \mathbf{u}$ uniquement ; les zones de l'écoulement pour lesquelles cet invariant Q est positif constituent par exemple des tourbillons.

On peut retrouver cet invariant en utilisant l'équation (2.33), ou en redéfinissant Q à partir des tenseurs des taux de déformations et de rotations, soit les parties symétrique et antisymétrique du

tenseur gradient de vitesse. Le tenseur des taux de déformations s'écrit :

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.36)$$

et le tenseur des taux de rotations^X :

$$\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.37)$$

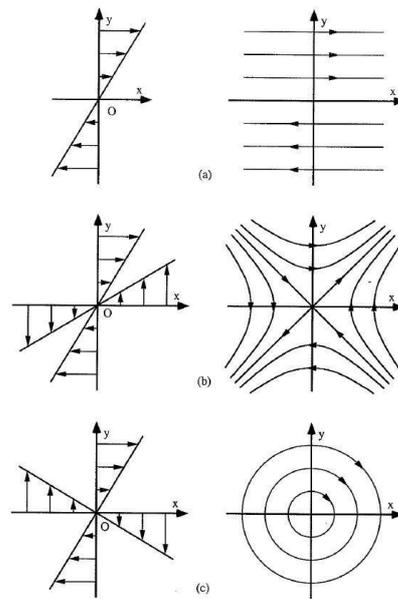


FIG. 2.13 – Différents types d'écoulement avec les champs de vitesse (gauche) et les lignes de courant (droite) correspondant à (a) : un cisaillement simple, (b) : une déformation pure (dissipation d'énergie) et (c) : une rotation solide (d'après Guyon *et al.* [33]).

On définit ensuite des normes associées à ces deux tenseurs^{XI}. La dissipation S^2 est définie par :

$$S^2 = 2\underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{e}}, \quad (2.38)$$

et le module de vortacité ou enstrophie Ω^2 par :

$$\Omega^2 = 2\underline{\underline{\omega}} \cdot \underline{\underline{\omega}}. \quad (2.39)$$

On peut alors écrire le critère Q comme la différence des deux normes (au facteur $\frac{1}{2}$ près) :

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega^2 - S^2), \quad (2.40)$$

expression équivalente à celle de l'équation (2.34). Le critère Q mesure donc un équilibre local entre deux types d'écoulements (figure 2.13) : une rotation solide et une déformation pure.

^XAvec la relation entre la vortacité ω_k et le tenseur ω_{ij} des taux de rotations : $\omega_{ij} = -1/2 \varepsilon_{ijk} \omega_k$, où ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita.

^{XI}On rappelle que le produit scalaire (ou contractant) entre deux tenseurs de même ordre est un scalaire.

Les tourbillons dans lesquels l'enroulement (rotation) prend le pas sur la dissipation d'énergie (déformation pure) seront associés à un critère Q positif. Les zones purement dissipatives seront associées à un critère Q négatif. Enfin les zones de cisaillement (couches limites par exemple) seront associées à un critère Q de faible valeur absolue. Dans le cas de visualisations de structures tourbillonnaires autour d'un véhicule où les valeurs de vorticité et les nombres de Reynolds sont importants ($\omega_{max} \sim 10^5-10^6 s^{-2}$ et $Re \sim 10^6-10^8$), on cherche typiquement des valeurs de Q de l'ordre de 10^4 afin de ne visualiser que les structures bien enroulées.



FIG. 2.14 – Visualisation d'iso-surfaces $Q = 13000$ sur corps d'Ahmed (angle de lunette $\phi = 26^\circ$). $U_0 = 20 m.s^{-1}$.

On peut également mettre en relation le critère Q avec la pression. En prenant la divergence de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes (équation (2.5)), on trouve l'équation de la pression et on fait alors apparaître le critère Q :

$$\frac{1}{\rho} \Delta p = \frac{1}{2} (\Omega^2 - S^2) = Q. \quad (2.41)$$

Ainsi si on a localement une zone de critère Q fortement négatif (dissipation plus forte que l'enroulement), on a une courbure négative pour la pression avec présence d'un maximum local de pression. Inversement si on a une zone de critère Q fortement positif (présence d'un tourbillon), on a une courbure positive pour la pression avec présence d'un minimum local de pression : on peut alors définir un critère de pression pour la détection de tourbillons.

Minimum de pression

En faisant l'hypothèse d'un minimum local de pression au centre des enroulements tourbillonnaires, on peut chercher à visualiser les structures en utilisant le phénomène de cavitation^{XII}. Ainsi Beaudoin *et al.* [8] ont-ils mis en évidence les vortex contra-rotatifs très énergétiques derrière un corps d'Ahmed dans une veine hydrodynamique (figure 2.15).

^{XII}Phénomène décrivant la naissance de bulles de gaz dans un liquide soumis à une dépression : si la dépression est suffisamment élevée, la pression peut localement devenir inférieure à la pression de vapeur saturante et une bulle de vapeur est susceptible de naître.

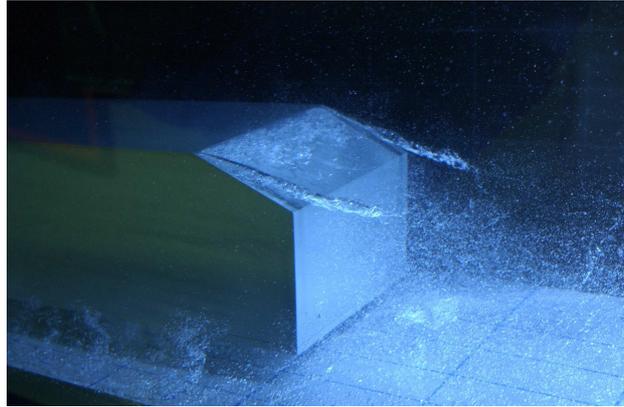


FIG. 2.15 – Visualisation des vortex contra-rotatifs derrière un corps d’Ahmed (angle de lunette $\phi = 25^\circ$) par cavitation dans une veine hydrodynamique avec $P_0 = 14000 \text{ Pa}$ et $U_0 = 3.54 \text{ m.s}^{-1}$ (d’après Beaudoin *et al.* [8]).

Le problème de l’utilisation de la pression en tant que critère de détection de structures est double (voir par exemple la discussion de Kida & Miura [45]) : tout d’abord une basse pression n’est pas forcément une condition nécessaire et suffisante à la présence d’un tourbillon (Jeong *et al.* [41]). Un minimum de pression peut être créé par une instabilité instationnaire en l’absence de tourbillon ; au sein d’une structure tourbillonnaire il peut également être masqué par la viscosité dans les zones proches paroi. On peut également illustrer le problème du critère de pression par le cas des décollements associés à des basses pressions, sans pour autant être la signature d’un tourbillon (cas typique d’une bulle de recirculation derrière un cylindre). D’un autre côté une couche cisailée peut être vue comme une structure cohérente mais ne présente pourtant pas forcément de minimum de pression.

Le deuxième problème est le caractère global de la pression que l’on a déjà évoqué dans la partie 2.3.1. Ce caractère permet de voir les structures cohérentes les plus intenses (on voit par exemple très bien les structures contra-rotatives à l’arrière du corps d’Ahmed figure 2.15) mais masque les autres structures, la dépression associée à la structure dominante influençant toute la zone alentour de l’écoulement et rendant les autres structures cohérentes plus difficiles à distinguer de la structure dominante. Si de plus on a affaire à plusieurs structures cohérentes proches les unes des autres, les modifications de pression associées à chaque structure vont interagir entre elles et rendre l’analyse très complexe voire impossible en pratique.

Critère λ_2

Ayant remarqué la possible ambiguïté d’un simple critère de minimum local de pression pour détecter un tourbillon, Jeong & Hussain [41] montrent qu’il est possible de lier les minima de pression aux structures tourbillonnaires de manière systématique. Ils repartent pour ce faire de la dynamique de l’écoulement et étudient le gradient de l’équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes (équation (2.5)) qu’ils décomposent en parties symétrique et antisymétrique. La

partie symétrique s'écrit alors :

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} + \nu \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_k^2} + \omega_{ik}\omega_{kj} + e_{ik}e_{kj} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.42)$$

La matrice hessienne de la pression $\partial^2 p / \partial x_i \partial x_j$ qui apparaît contient les informations sur les extrema de pression. En effet, une étude de ses valeurs propres permet de savoir si on a localement affaire à un maximum, un minimum ou à un point col pour la pression ; dans le cas de la recherche d'un minimum de pression il faut que deux des valeurs propres soient positives.

Dans l'équation (2.42), le premier terme de gauche représente l'étiement (irrotationnel) instationnaire ; le deuxième terme représente les effets visqueux. Ainsi si l'on veut quantifier les effets de l'enroulement uniquement on peut s'en tenir à une étude de la somme des tenseurs $\omega_{ik}\omega_{kj}$ et $e_{ik}e_{kj}$ parfois notée $\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{S}}^2$. Ce tenseur est symétrique et n'a donc que des valeurs propres réelles. Si on ordonne ces valeurs propres de $\underline{\underline{\Omega}}^2 + \underline{\underline{S}}^2$:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3, \quad (2.43)$$

on en déduit le critère sur λ_2 (figure 2.16) pour avoir un minimum local de pression dû à l'enroulement :

$$\lambda_2 < 0. \quad (2.44)$$

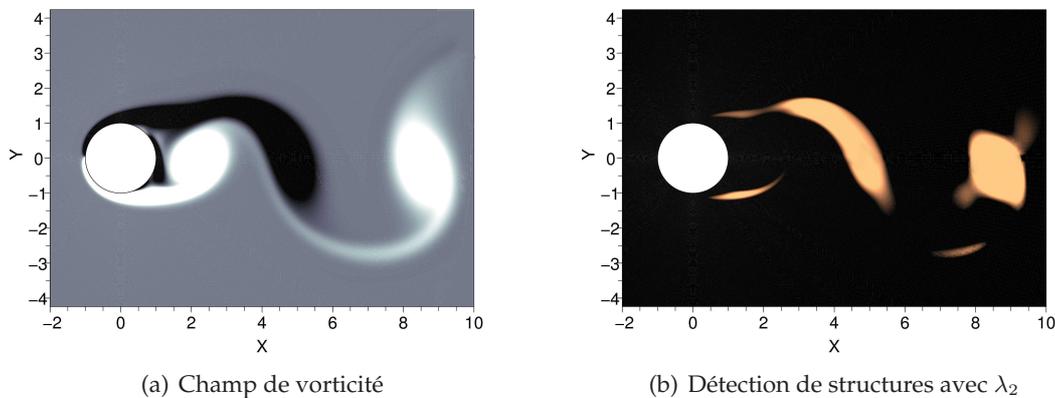


FIG. 2.16 – Critère de détection λ_2 pour un cylindre à section circulaire dans un écoulement à $Re = 300$.

Ce critère peut néanmoins être adapté à certaines situations, notamment en compressible (Kolar  [47]) ou en proche-paroi (Jeong *et al.* [42]), en prenant un seuil diff rent de 0 pour λ_2 . Ainsi, comme pour le critère Q, le choix du seuil peut se révéler déterminant lors de l'étude des structures cohérentes de l'écoulement. L'analogie avec le critère Q va même plus loin puisqu'en deux dimensions les deux critères sont analytiquement équivalents.

Critères Γ_2 et Γ_3

Ces critères ont été développés par Graftieaux *et al.* [31] et Michard & Favelier [60, 61]. L'idée de ces critères est d'étudier la topologie du champ de vitesse à un instant donné en deux dimensions pour Γ_2 ou en trois dimensions pour Γ_3 , et d'établir un critère d'enroulement des vecteurs vitesse caractérisant les tourbillons basé sur un moment cinétique normalisé pour le mouvement relatif autour d'une particule fluide considérée^{XIII}. On doit donc définir une « fenêtre de calcul » pour laquelle on calcule une valeur de vitesse moyenne ; on retranche cette vitesse moyenne au champ de vitesse et on peut alors mesurer l'enroulement réel dans la fenêtre sans convection locale (figure 2.17).

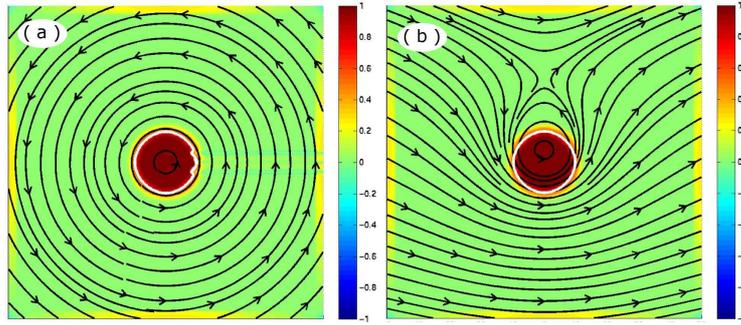


FIG. 2.17 – Représentation des lignes de courant et du tourbillon détecté par le critère Γ_2 dans les cas d'un tourbillon de Rankine (a) et d'un tourbillon de Rankine convecté (b) de rayon $R = 10$.

En tout point P de l'espace à étudier on définit donc une fenêtre de calcul \mathcal{F}_{calcul} centrée sur P et contenant N points de mesure, et on calcule pour chaque point M de la fenêtre le sinus de l'angle formé par le vecteur \overrightarrow{PM} et le vecteur vitesse en M sans convection locale. Une valeur proche de ± 1 indique un angle proche de $\pm\pi/2$, et donc que le fluide en M « tourne » autour du point P . La moyenne du critère Γ_2 ou Γ_3 sur la fenêtre \mathcal{F}_{calcul} donne donc une mesure de l'enroulement des vecteurs vitesse autour du point P : une valeur proche de ± 1 indique le centre d'un tourbillon. On obtient par exemple en deux dimensions au point P :

$$\Gamma_2(\mathbf{x}_P) = \frac{1}{N} \int_{M \in \mathcal{F}_{calcul}} \frac{((\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P) \wedge (\mathbf{u}_M - \bar{\mathbf{u}}_P)) \cdot \mathbf{e}_z}{\|\mathbf{x}_M - \mathbf{x}_P\| \|\mathbf{u}_M - \bar{\mathbf{u}}_P\|} dS, \quad (2.45)$$

où $\bar{\mathbf{u}}_P$ est la vitesse moyenne de convection de la fenêtre de calcul.

Le problème de ces critères est qu'ils sont basés sur une lecture uniquement géométrique de l'écoulement. Ainsi on peut détecter des structures géométriquement bien enroulées mais très peu énergétiques. Il faut alors combiner ce critère avec un critère énergétique afin de donner du sens à la détection de structures.

^{XIII}Il existe également une forme locale de ce critère (Graftieaux *et al.* [31]) mais la forme présentée ici suffit pour des champs discrets comme ceux obtenus par PIV ou par simulations numériques.

2.4.3 Conclusion

Comme on a pu le constater, il existe de nombreuses études menées depuis une trentaine d'années afin de définir de manière universelle les structures cohérentes. La majorité de ces études se concentrent sur la définition des tourbillons, pourtant aucune n'arrive à en donner une définition objectivement supérieure aux autres. Il convient donc dans la majorité des cas d'effectuer des études comparatives et d'utiliser le critère qui semble le plus en adéquation avec les observations des champs de vorticité. Cette méthode empirique n'est pas parfaite, mais elle suffit la plupart du temps à répondre aux questions simples que l'on peut se poser en présence d'un écoulement instationnaire, à savoir s'il y a ou non un vortex dans l'écoulement. On peut tout de même noter la prééminence du critère Q dans les études aérodynamiques automobiles, due notamment à sa signification physique assez intuitive.

Les cas plus complexes du genre des structures présentes dans les écoulements proches paroi sont à analyser soigneusement. On verra dans la partie 4 la nécessité d'élaborer un nouveau critère de détection afin d'étudier les composantes de la formulation diffusive de la force.

Chapitre 3

Étude de la formulation advective en deux dimensions

Sommaire

3.1	Étude de la contribution des différents termes à la force	38
3.1.1	Simulation numérique	38
3.1.2	Schémas aux différences finies utilisés	41
3.1.3	Étude du sillage	42
3.1.4	Calcul des contributions des différents termes à la force	46
3.1.5	Conclusion	49
3.2	Application de la formulation advective à une expérience de contrôle passif . . .	50
3.2.1	Expériences	50
3.2.2	Détermination de la traînée moyenne à partir de la formulation advective	53
3.2.3	Conclusion sur l'application expérimentale de la méthode	59
3.3	Conclusion sur la formulation advective	59

La première formulation étudiée afin de déterminer les efforts volumiques des structures au voisinage d'un obstacle dans un écoulement est la formulation advective (équation (2.29)) reprenant le terme d'impulsion hydrodynamique donnée par Noca [65]. Deux raisons ont motivé le choix de cette équation pour point de départ de l'étude volumique. Tout d'abord il s'agit d'une équation comportant des termes ayant beaucoup intéressé la communauté de la dynamique des fluides depuis le début du vingtième siècle. On voit apparaître la vorticité dans la quasi-totalité des termes, source des structures tourbillonnaires autour des obstacles et donc *a priori* des efforts. De plus, cette équation (ou des variantes proches) est bien document e et souvent utilis e par les expérimentateurs pour déterminer la force aérodynamique (Noca *et al.* [66, 67] ou van Oudheusden *et al.* [70] par exemple utilisent cette méthode non-intrusive pour déterminer la force à partir de champs PIV en deux dimensions sans avoir besoin des valeurs de pression dans l'écoulement) ou pour comparer différentes formulations entre elles (Tan *et al.* [85]).

L'étude autour de cette formulation est men e en deux dimensions.

 criture bi-dimensionnelle

En deux dimensions ($\mathcal{N} = 2$), il est possible de simplifier certains termes de l'équation (2.29). Le domaine est une surface et le contour une ligne, les variables d'intégrations sont donc respectivement dS et dl . La vorticité est perpendiculaire au plan d'étude ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) et on a :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (3.1)$$

De plus il est possible de permuter les opérateurs de d riv e temporelle et d'intégration spatiale dans le premier terme du membre de droite. En effet le domaine \mathcal{F} qui intervient dans ce terme est un volume géométrique (voir chapitre 2 page 13) fixe au cours du temps¹ et on peut donc rentrer la d riv e temporelle dans l'intégrale, la d riv e droite devenant une d riv e partielle (Aris [5]) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV = \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dV \quad (3.2)$$

Il existe enfin différentes écritures possibles pour le terme de viscosité dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement de Navier-Stokes (2.5) (voir annexe B) :

$$\begin{aligned} \nu \Delta \mathbf{u} &= \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \\ &= -\nu \nabla \wedge \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

En combinant les relations (3.1)   (3.3) avec l'équation (2.29), on obtient l'écriture simplifi e :

$$\mathbf{F}(t) = \int_{\mathcal{F}} -\rho \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dS + \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dS + \oint_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\gamma}_{\mathcal{B}} dl, \quad (3.4)$$

¹On parle généralement de vision eulérienne dans les cas comme ici où l'on s'intéresse à une portion fixe de l'écoulement au cours du temps, à la différence de la vision lagrangienne (ou particulaire) qui s'intéresse à une particule de fluide et la « suit » au cours du temps.

où l'intégrande γ_B s'écrit :

$$\gamma_B = \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\rho \mathbf{u}(\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) - \mu \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) + \mu \mathbf{x}(\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right). \quad (3.5)$$

On reconnaît dans les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (3.4) les termes d'impulsion hydrodynamique et de force de tourbillon décrits dans la partie 2.3.4. Dans la suite on parlera d'intégrande d'impulsion hydrodynamique $-\rho \mathbf{x} \wedge \partial_t \boldsymbol{\omega}$, d'intégrande de force de tourbillon $\rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$ et d'intégrande de contour γ_B .

Le développement de l'équation (3.4) projetée sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} F_x(t) &= \int_{\mathcal{F}} -\rho y \partial_t \omega \, dS + \int_{\mathcal{F}} \rho u_y \omega \, dS \\ &\quad - \oint_B \rho (n_x u_x + n_y u_y) y \omega \, dl + \oint_B \mu (n_x x + n_y y) \partial_y \omega \, dl \\ &\quad + \oint_B \left(\mu (y \partial_x \omega - x \partial_y \omega) + (2 \partial_x u_x + \partial_y u_x + \partial_x u_y) \right) n_x \, dl, \\ F_y(t) &= \int_{\mathcal{F}} \rho x \partial_t \omega \, dS - \int_{\mathcal{F}} \rho u_x \omega \, dS \\ &\quad + \oint_B \rho (n_x u_x + n_y u_y) x \omega \, dl - \oint_B \mu (n_x x + n_y y) \partial_x \omega \, dl \\ &\quad + \oint_B \left(\mu (y \partial_x \omega - x \partial_y \omega) + (2 \partial_y u_y + \partial_x u_y + \partial_y u_x) \right) n_y \, dl. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

C'est sous cette forme que les équations ont été implémentées pour obtenir les estimations instantanées de la traînée et de la portance.

3.1 Étude de la contribution des différents termes à la force

3.1.1 Simulation numérique

Afin d'étudier l'équation (3.4), une simulation autour d'un cylindre à section carré en deux dimensions a été effectuée à l'aide du logiciel FLUENT. Cette simulation résout les équations de Navier-Stokes sans utiliser de modèle de turbulence, ce qui la rapproche d'une DNS (Direct Numerical Simulation).

FLUENT est un logiciel commercial basé sur la méthode des volumes finis. Cette méthode utilise des approximations d'intégrales^{II} pour résoudre les équations aux dérivées partielles – dans notre cas les équations de conservation de Navier-Stokes (équation (2.5)). Chaque point du maillage est entouré par un volume de contrôle, le volume fini ; il constitue une cellule du maillage dans laquelle on opère un bilan local des flux à ses parois ou faces. Les intégrales de

^{II}contrairement à la méthode des différences finies par exemple, qui utilise des approximations de dérivées.

volume des termes de divergence contenus dans les équations aux dérivées partielles sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence ; les termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. Le flux entrant dans un volume donné devant être égal au flux sortant du volume adjacent, cette méthode est conservative. De plus cette méthode est particulièrement adaptée aux maillages non structurés puisque la formulation des volumes finis ne tient pas compte de la complexité du maillage pour la discrétisation des lois de conservation.

Afin de résoudre directement les équations de Navier-Stokes et de se rapprocher au mieux d'une DNS, aucun modèle de turbulence n'a été sélectionné dans le solveur (FLUENT Theory Guide [28]). La résolution des équations est implicite en temps avec un pas de 10^{-2} s.

L'algorithme de couplage vitesse-pression est un algorithme SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) permettant de manière itérative d'assurer la conservation de la masse et d'obtenir le champ de pression à un instant donné à partir du champ de vitesse à cet instant et du champ de pression à l'instant précédent (voir Vandoormaal *et al.* [90] pour plus de détails). Le schéma de résolution pour l'équation de quantité de mouvement est un schéma aux différences finies décalé en amont du second ordre QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*, voir Leonard *et al.* [53] pour plus de détails). Les dérivées spatiales sont estimées en utilisant la formulation discrète du théorème de flux-divergence donnant le gradient d'un scalaire ϕ au centre d'une cellule c_0 à partir des valeurs ϕ_f de ϕ sur les faces :

$$(\nabla\phi)_{c_0} = \frac{1}{V} \sum_{\text{faces}} \phi_f \mathbf{n}_f. \quad (3.7)$$

Le cylindre étudié est un carré de longueur $D = 40\text{mm}$ inclus dans un domaine de simulation assez grand afin d'éviter au maximum les effets de bord et de résoudre les équations correctement. On prend ainsi un domaine de $4D$ en amont, $15D$ en aval et $5D$ en haut et en bas du cylindre (figure 3.1). Le maillage a été choisi cartésien dans tout le domaine. Ceci permet une plus grande

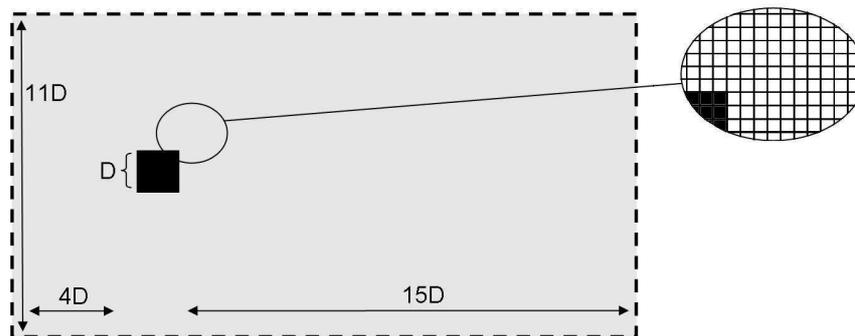


FIG. 3.1 – Description de la simulation bi-dimensionnelle du cylindre à section carré ($D = 40\text{mm}$, maillage cartésien de maille $d = 5\text{mm}$).

précision du schéma QUICK, sensible à la régularité du maillage, ainsi qu'une bonne définition de la vorticité dans tout le sillage. Ce maillage conduit en revanche à une couche limite   la paroi du cylindre assez mal définie, et FLUENT ajoute alors une loi de paroi sur la première couche de

maille afin de pallier au problème. Les termes de la formulation advective étant assez faibles dans la zone proche de l'obstacle, cette mauvaise résolution n'a pas d'influence sur notre étude (des simulations réalisées avec une maille de taille cinq fois inférieure donnent les mêmes résultats). En revanche on ne peut donc pas parler de simulation DNS.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- *wall* (adhérence) aux parois du cylindre,
- *velocity inlet* en amont, où l'on fixe la vitesse du fluide en entrée parallèle à l'axe horizontal,
- *symmetry* (glissement) aux limites haute et basse du domaine,
- et enfin *pressure outlet* en aval.

On définit le nombre de Reynolds à partir du diamètre du cylindre $D = 40 \text{ mm}$, de la vitesse en entrée U_0 et de la viscosité cinématique de l'air $\nu = 15.6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Les simulations sont effectuées à un nombre de Reynolds $Re = 100$ afin de rester dans une plage de vitesse telle que les effets puissent être considérés bi-dimensionnels (Franke *et al.* [27]) et de pouvoir comparer les résultats obtenus avec des résultats expérimentaux. Cela correspond dans notre cas à une vitesse d'écoulement en entrée $U_0 \simeq 0.039 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Les coefficients de pression $C_p = \frac{p(t) - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_0^2}$ sont établis à partir de cette vitesse en entrée et de la pression à l'infini (équivalente à la pression en entrée). On obtient ainsi les champs de vitesse et les pressions instantanés (figure 3.2).

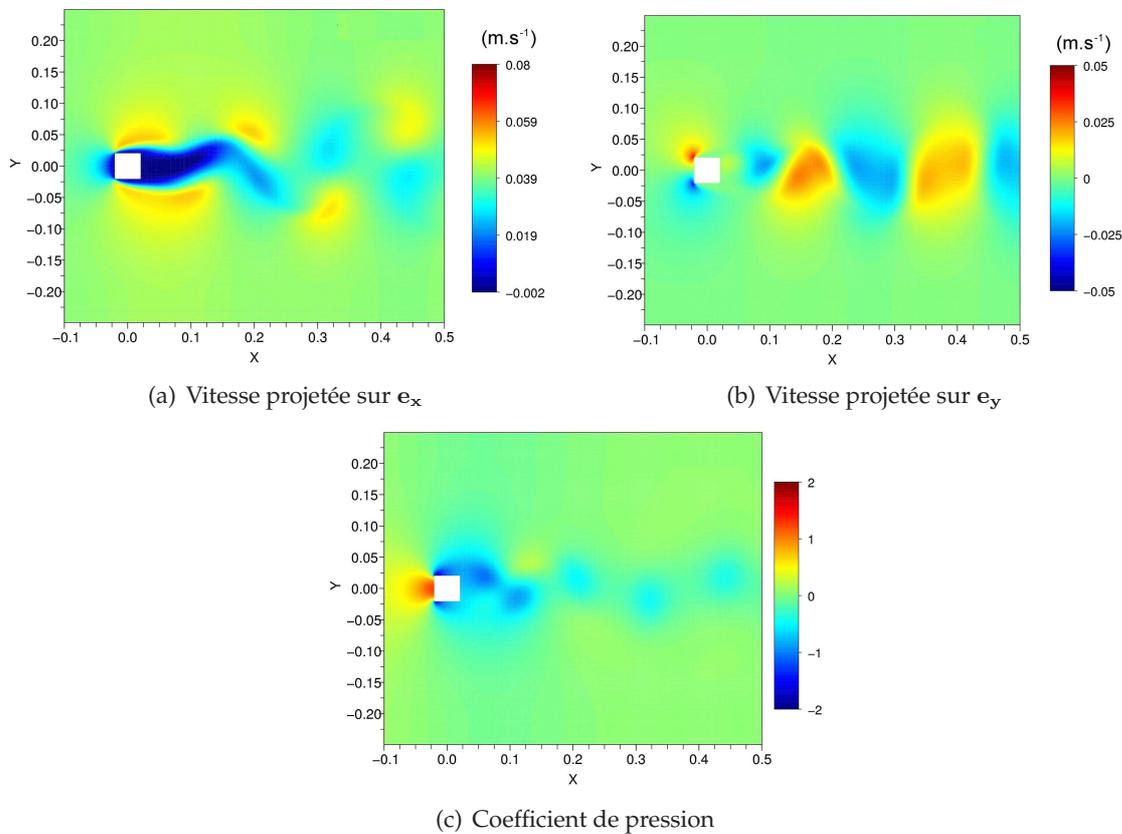


FIG. 3.2 – Champs de vitesse et de pression instantanés sur un cylindre à section carré ($Re = 100$).

Les résultats de la simulation numérique sont comparés à l'étude de Franke *et al.* [27] pour un nombre de Reynolds équivalent (tableau 3.1), montrant une bonne concordance pour les valeurs de traînée et de portance. Le coefficient de pression maximum est en revanche plus élevé dans

	FLUENT	Franke <i>et al.</i> [27]
Coef. de traînée moyen	1.70	1.61
Coef. de portance max.	0.31	0.27
Coef. de pression max.	1.31	1.18

TAB. 3.1 – Comparaison des principaux paramètres adimensionnés d'un écoulement autour d'un cylindre carré à $Re = 100$.

notre cas que dans l'étude de Franke *et al.* [27], ce qui peut s'expliquer par un maillage trop peu raffiné notamment au niveau des coins en amont du cylindre.

3.1.2 Schémas aux différences finies utilisés

Une fois les champs de vitesse obtenus pour chaque instant on peut, au moyen des différences finies, calculer les dérivées spatiales et temporelles de la vitesse ainsi que les différents termes de l'équation (3.4). On étudie ensuite séparément les intégrales de domaine d'une part et les intégrales de contour d'autre part afin de déterminer leurs contributions respectives à la force.

Les dérivées permettant de calculer les intégrandes de toutes ces intégrales sont calculées de manière discrète (figure 3.3) en utilisant des schémas aux différences finies^{III} obtenus à partir des développements de Taylor (Bilbao [10]). On pose $d = x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j$ le pas spatial du maillage

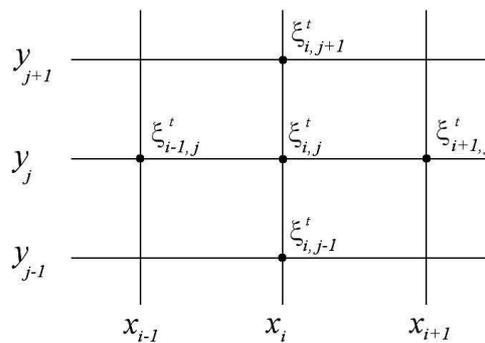


FIG. 3.3 – Diagramme de discrétisation spatiale pour un maillage cartésien.

dans les deux directions (maillage régulier) et δt le pas de temps entre deux champs successifs. Pour estimer les dérivées d'un scalaire ξ à l'intérieur du domaine on utilise des schémas centrés

^{III}Dans cette partie, les notations indicielles ne reprennent pas la convention d'Einstein. On utilise ici une notation indicielle de type matriciel et les dérivées premières selon x et y sont notées ∂_i et ∂_j respectivement.

d'ordre 2 ; les schémas des dérivées premières sont les suivants :

$$\partial_i \xi_{i,j}^t = \frac{\xi_{i+1,j}^t - \xi_{i-1,j}^t}{2d} + o(d^2) \quad \text{et} \quad \partial_j \xi_{i,j}^t = \frac{\xi_{i,j+1}^t - \xi_{i,j-1}^t}{2d} + o(d^2). \quad (3.8)$$

Pour les points du contour, on utilise des schémas décalés à droite ou à gauche d'ordre 1. On a par exemple le schéma de la dérivée selon x à droite :

$$\partial_{i+} \xi_{i,j}^t = \frac{\xi_{i+1,j}^t - \xi_{i,j}^t}{d} + o(d). \quad (3.9)$$

Enfin les dérivées temporelles sont approchées grâce à un schéma retardé d'ordre 1 :

$$\partial_{t-} \xi_{i,j}^t = \frac{\xi_{i,j}^t - \xi_{i,j}^{t-1}}{\delta t} + o(\delta t). \quad (3.10)$$

3.1.3 Étude du sillage

Champs de vorticité

On a vu dans le chapitre 2 que la grandeur primordiale à étudier pour l'analyse de structures est la vorticité. On calcule donc le rotationnel de la vitesse simul e par FLUENT. On retrouve ainsi l'allée de von Kármán classique avec alternance de lâchers tourbillonnaires de circulations oppos es (figure 3.4). Le nombre de Strouhal mesure le rapport entre le temps d'advection et

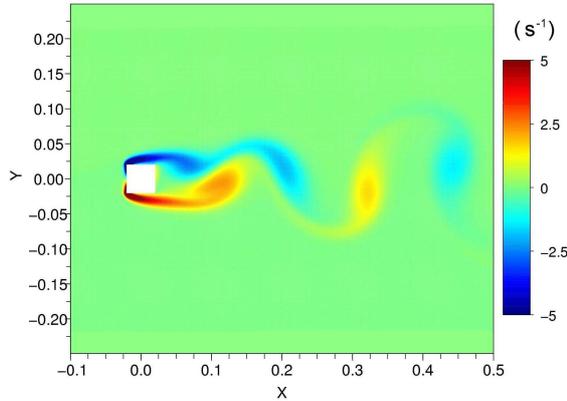


FIG. 3.4 – Vorticité instantan e sur un cylindre à section carré ($Re = 100$).

le temps caractéristique de l'instationnarité ; on le définit dans le cas du sillage d'un cylindre à section carr e par $St = \frac{fD}{U_0}$ où U_0 est la vitesse en amont, D est le diamètre du cylindre et $f = 1/T$ est la fréquence d'émission des tourbillons (*i.e.* l'instationnarité). Pour notre simulation on a une période de $T = 6.5s$ soit un nombre de Strouhal de $St = 0.158$, ce qui est conforme à la littérature ($St = 0.154$ pour Franke *et al.* [27]).

Une fois les champs de vitesse et de vorticité obtenus, il suffit de les combiner entre eux et avec leurs dérivées spatiales ou temporelles pour obtenir les intégrandes des différents termes de l'équation (3.4). Les intégrandes d'impulsion hydrodynamique IH, de force de tourbillon FT et de

contour sont ainsi projetés sur l'axe \mathbf{e}_x (figure 3.5) et sur l'axe \mathbf{e}_y (figure 3.6). Le domaine d'intégration est symbolisé sur ces figures par des tirets ; les intégrandes de domaine sont donc sommés à l'intérieur des tirets et l'intégrande de domaine sur les tirets. Les liens entre les intégrandes et les structures cohérentes sont étudiés séparément (les structures sont identifiées sur les figures 3.5 et 3.6 par l'iso-contour de vorticité $|\omega| = 1^{\text{IV}}$).

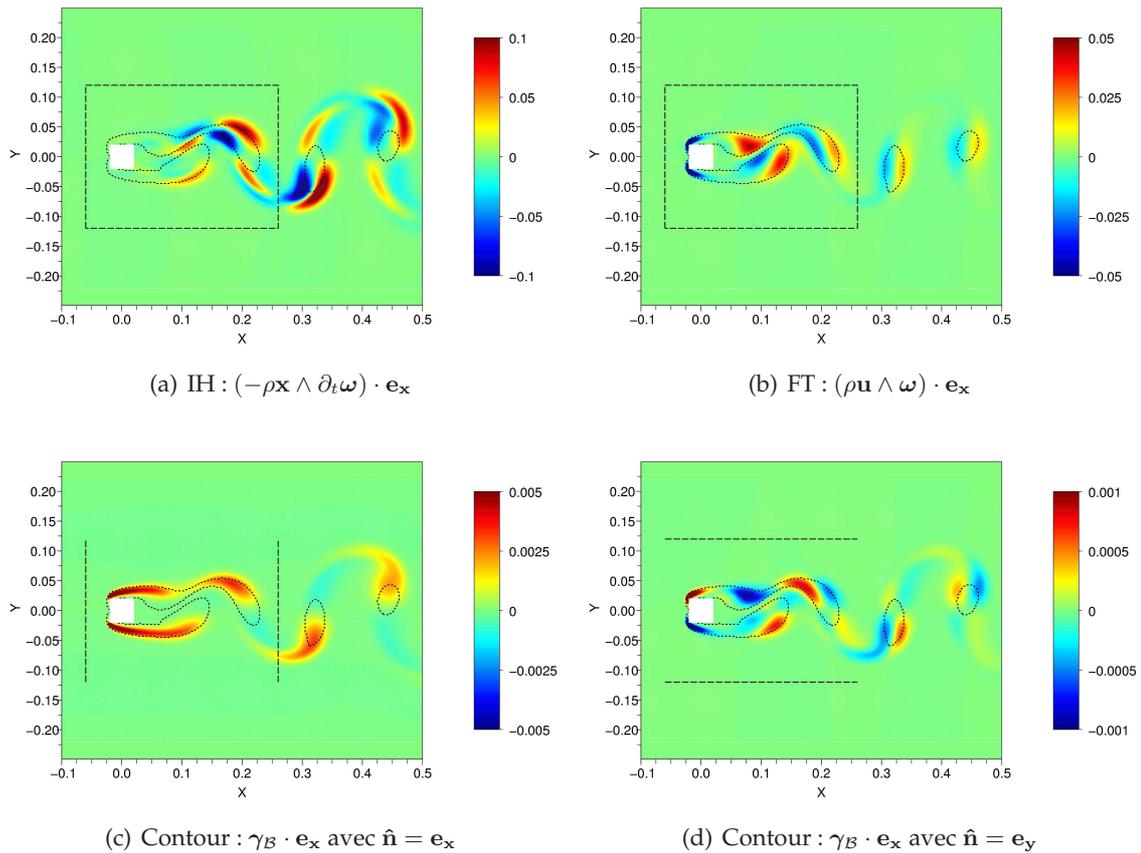


FIG. 3.5 – Intégrandes des termes de l'équation de la force aérodynamique (3.4) : $\left(\mathbf{F}(t) = \int_{\mathcal{F}} \left(-\rho \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} \right) dS + \oint_B \gamma_B dl \right)$ projetés sur l'axe \mathbf{e}_x . L'iso-contour de vorticité $|\omega| = 1$ est tracé en pointillés, le domaine d'intégration avec des tirets.

Intégrande d'impulsion hydrodynamique $-\rho \mathbf{x} \wedge \partial_t \boldsymbol{\omega}$

Les structures tourbillonnaires présentes dans le sillage sont convectées de l'amont vers l'aval au fil du temps. L'intégrande IH dépend essentiellement de l'évolution temporelle de la vorticité $\partial_t \boldsymbol{\omega}$, celle-ci étant pondérée par le vecteur position ; on observe donc des valeurs de cet intégrande intenses et de signes opposés en amont et en aval des structures tourbillonnaires (figures 3.5(a) et

^{IV}L'utilisation du critère $|\omega| = 1$ afin de détecter les structures cohérentes est totalement arbitraire ; il n'existe effectivement aucun critère objectif supérieur aux autres et il nous a semblé plus judicieux de ne représenter dans ces conditions que des contours de vorticité. Il va de soi que ce critère doit être traité avec précautions puisque selon le niveau du module affiché on observera des structures plus ou moins différentes.

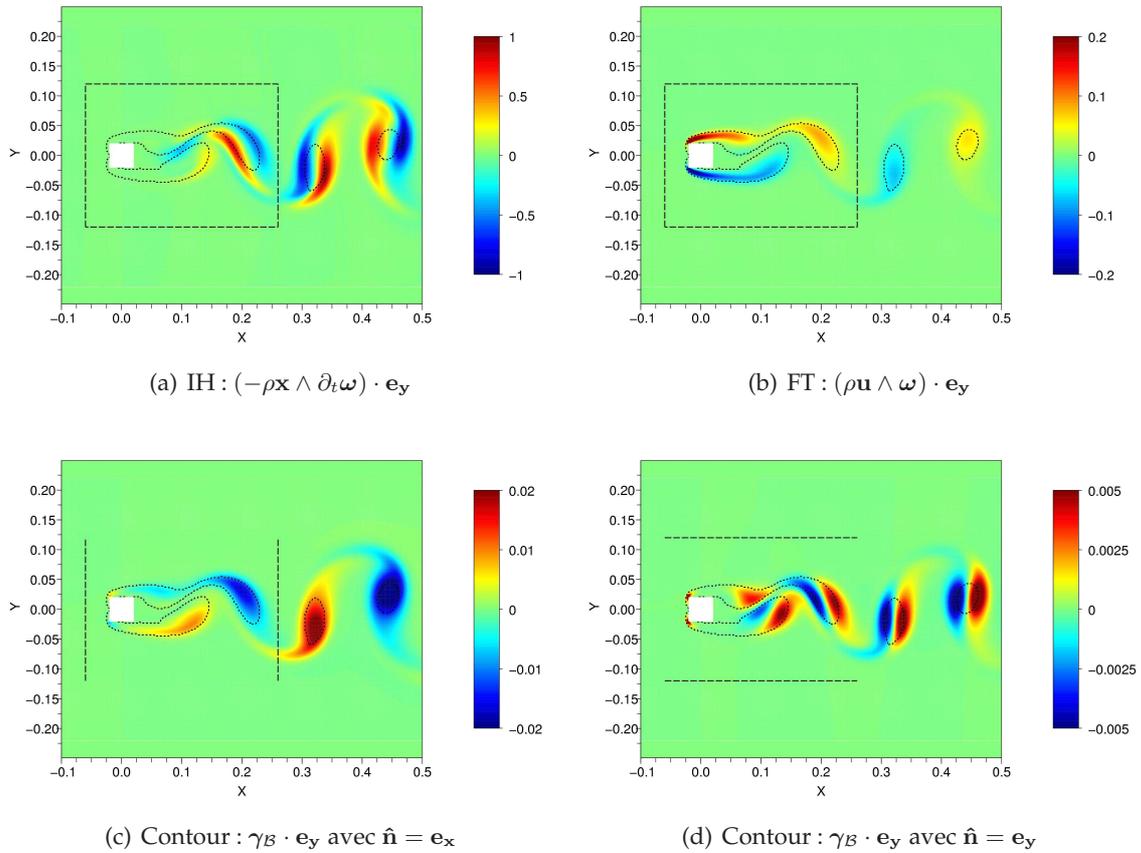


FIG. 3.6 – Intégrandes des termes de l'équation de la force aérodynamique (3.4) : $\left(\mathbf{F}(t) = \int_{\mathcal{F}} \left(-\rho \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} \right) dS + \oint_B \gamma_B dl \right)$ projetés sur l'axe \mathbf{e}_y . L'iso-contour de vorticité $|\boldsymbol{\omega}| = 1$ est tracé en pointillés, le domaine d'intégration avec des tirets.

3.6(a)) selon que le module de vorticité décroît (en amont, là où la structure disparaît) ou que le module de vorticité croît (en aval, là où la structure apparaît).

L'intégrande IH projet   sur l'axe e_x dépend également de la composante y du vecteur position ; avec un référentiel centré sur le cylindre, on a donc un changement de signe de y sur l'axe de symétrie horizontal du cylindre et une structure scind  e en deux (figure 3.5(a)). Le changement de signe de x ayant lieu en amont du sillage on n'observe pas ce phénomène pour la projection sur e_y et les zones d'intégrande IH intense sont parfaitement centr  es sur les structures tourbillonnaires (figure 3.6(a)).

On remarque également que les valeurs de l'intégrande IH sont très faibles dans la zone proche de la paroi du cylindre. Cette zone correspondant au développement de la couche cisailée avant l'enroulement en tourbillons est en effet quasi-stationnaire (l'enroulement est l'instationnarité du système) et l'évolution temporelle de la vorticité est dans cette zone faible par rapport à l'évolution de la vorticité dans le sillage.

On observe enfin une zone plus complexe à l'endroit de l'enroulement tourbillonnaire (*i.e.* là où les couches limites se déstabilisent jusqu'à former des tourbillons), entre $x = 0.05m$ et $x = 0.15m$. L'évolution temporelle de la vorticité dans cette zone se fait plutôt de haut en bas que de l'amont vers l'aval, traduisant les oscillations des couches limites ainsi que l'enroulement des structures.

Intégrande de force de tourbillon $\rho u \wedge \omega$

L'intégrande FT dépend également de la vorticité et il existe donc une corélation forte entre les valeurs intenses d'intégrande FT et la présence de structure cohérente.

La projection de l'intégrande FT sur l'axe e_x (figure 3.5(b)) fait apparaître dans le sillage des paires de zones positive et négative centr  es sur les tourbillons. Ces paires correspondent à la vorticité ω de chaque tourbillon multipli  e par la vitesse latérale u_y de même signe que ω en aval et de signe opposé en amont. Pour un tourbillon ayant une vorticité positive par exemple (*i.e.* appartenant à la nappe du bas dans l'allée de von Kármán), la vitesse latérale est positive en aval et négative en amont et on obtient une zone d'intégrandes positifs en aval (rouge) et une zone d'intégrandes négatifs en amont (bleu). Pour un tourbillon ayant une vorticité négative c'est l'inverse : la vitesse latérale est cette fois négative en aval et positive en amont ; on obtient donc à nouveau une zone d'intégrandes positifs en aval (rouge) et une zone d'intégrandes négatifs en amont (bleu). La zone proche paroi en amont présente deux contributions négatives (zones bleues à l'amont) correspondant à la production de vorticité dans les couches limites pond  r  e par la vitesse longitudinale de signe oppos  e.

La projection de l'intégrande FT sur l'axe e_y (figure 3.6(b)) fait quant à elle apparaître une corélation presque parfaite avec la vorticité. En effet cet intégrande projet   est égal à la vorticité ω multipli  e par la vitesse longitudinale u_x . Or on peut voir que cette vitesse est positive et proche de la valeur de vitesse en amont U_0 dans presque tout le sillage ; seule la zone de recirculation à l'arrière du cylindre présente des vitesses longitudinales faibles ou négatives (figure 3.2(a)) ; on obtient donc un champ sensiblement équivalent à la vorticité.

Intégrande de contour γ_B

L'intégrande de contour γ_B dépend de la normale \hat{n} à ce contour ; en prenant un domaine rectangulaire on obtient deux bords dont la normale vaut $\hat{n} = e_x$ et deux bords dont la normale vaut $\hat{n} = e_y$. Les intégrandes γ_B sont donc calculés selon que la normale vaut e_x ou e_y et projetés sur les axes e_x et e_y pour obtenir les contributions de traînée et de portance des intégrales de contour (figure 3.5(c) et figure 3.6(c) pour $\hat{n} = e_x$, et figure 3.5(d) et figure 3.6(d) pour $\hat{n} = e_y$). Dans ces figures, l'intégrande de contour est présenté sous forme matricielle, c'est-à-dire que l'intégrande est calculé pour tous les noeuds du maillage ; il faut ensuite sommer uniquement les valeurs le long du contour pointillé. Pour l'intégrande de contour calculé avec une normale horizontale $\hat{n} = e_x$ on somme les valeurs sur les bords verticaux ; pour l'intégrande de contour calculé avec une normale verticale $\hat{n} = e_y$ on somme les valeurs sur les bords horizontaux.

Comme pour les intégrales de domaine, on observe que les intégrandes sont liés aux structures de vorticités avec des alternances de zones positives et négatives. Si le domaine d'intégration est assez grand de part et d'autre du sillage, la vorticités sur les bords de normale $\hat{n} = e_y$ devient négligeable : les contributions de ces termes (figures 3.5(d) et 3.6(d)) sont donc nulles.

3.1.4 Calcul des contributions des différents termes à la force

On s'intéresse maintenant au calcul des intégrales de l'équation (3.4). On procède à une analyse temporelle de celles-ci en comparant les résultats pour plusieurs domaines d'intégration différents avec les valeurs de force données par FLUENT *via* l'intégration des contraintes de pression et de viscosité à la paroi de l'obstacle. Trois domaines différents A, B et C sont étudiés (figure 3.7). Le domaine A est un carré de diamètre $3D$ centré sur le cylindre, le domaine B est un rectangle $3D \times 5D$ dont le bord en amont se situe à $1.5D$ du centre du cylindre et le domaine C est un rectangle $5D \times 7D$ dont le bord en amont se situe à $2.5D$ du centre du cylindre. Les tailles de ces domaines sont assez restreintes afin de minimiser le bruit des noeuds en aval que nous allons expliquer par la suite.

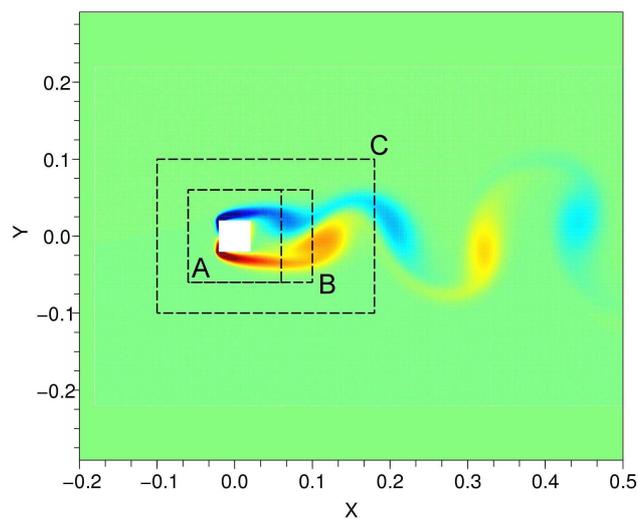


FIG. 3.7 – Domaines d'intégration : domaine A carré de diamètre $3D$, domaine B rectangulaire $3D \times 5D$, domaine C rectangulaire $5D \times 7D$.

Les contributions aux efforts des termes de l'équation (3.4) pour ces trois domaines sont présentés figure 3.8 pour la traînée et figure 3.9 pour la portance. Les courbes rouges représentent les efforts de référence calculés par le logiciel FLUENT tandis que les courbes noires représentent les résultats des intégrales IH, FT et celle de contour, calculées pour les différents domaines : pointillés pour le domaine A (le plus petit), traits continus pour le domaine B et alternance de tirets longs et courts pour le domaine C (le plus grand).

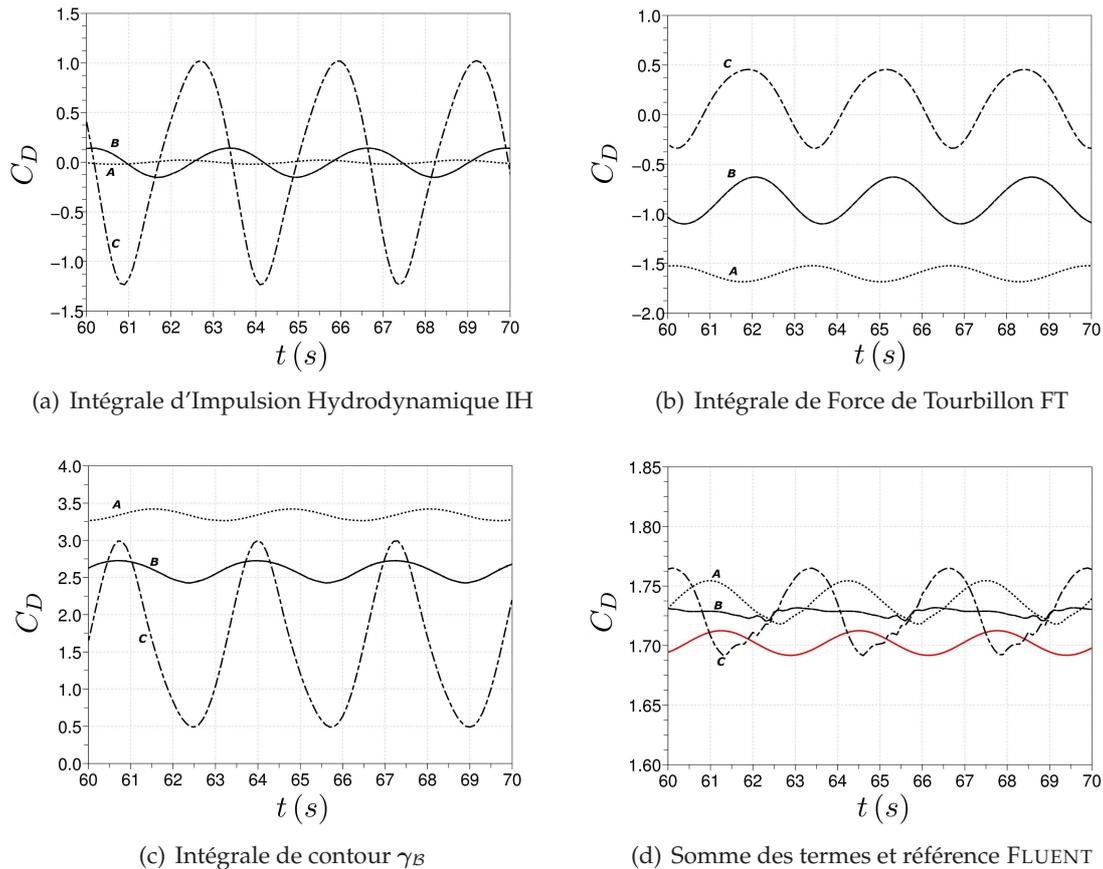
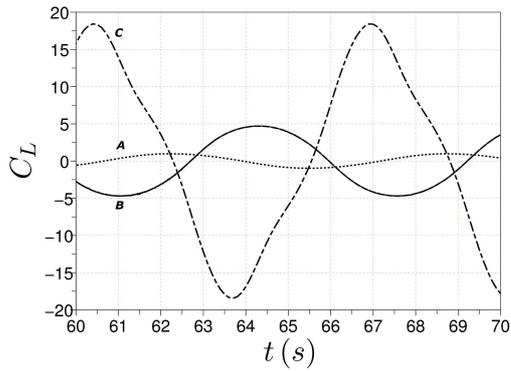
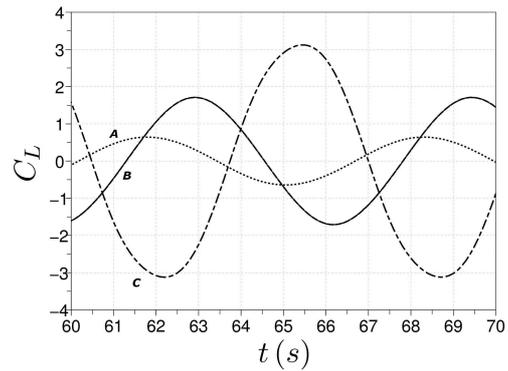


FIG. 3.8 – Contributions à la traînée des intégrales de l'équation (3.4) calculées sur le domaine A (pointillés), le domaine B (traits continus) et le domaine C (tirets alternés longs et courts); la référence FLUENT est tracé en trait continu rouge.

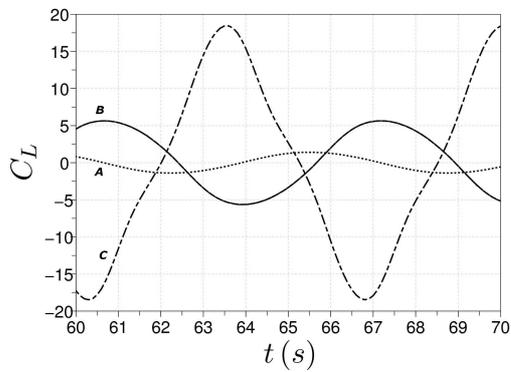
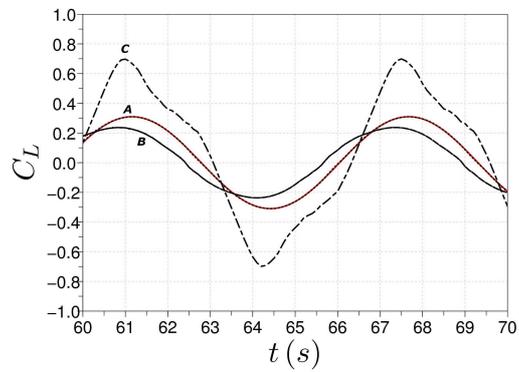
Les intégrales de domaine IH (figure 3.8(a) et figure 3.9(a)) et FT (figure 3.8(b) et figure 3.9(b)) sont calculées en deux dimensions sur une surface d'intégration; on obtient les contributions IH et FT en sommant tous les points de cette surface d'intégration discrétisée pondérés par la variable d'intégration $dS = d^2$. Pour calculer l'intégrale de contour (figure 3.8(c) et figure 3.9(c)), il faut cette fois sommer les valeurs sur un contour linéique (tirets délimitant la surface d'intégration) pondérées par la variable d'intégration $dl = d$. Tous les termes de la formulation advective sont des signaux périodiques de même fréquence (f dans le cas de la portance et $2f$ dans le cas de la traînée); la somme des termes est donc également un signal de même période.



(a) Intégrale d'Impulsion Hydrodynamique IH



(b) Intégrale de Force de Tourbillon FT

(c) Intégrale de contour γ_B 

(d) Somme des termes et référence FLUENT

FIG. 3.9 – Contributions à la portance des intégrales de l'équation (3.4) calculées sur le domaine A (pointillés), le domaine B (traits continus) et le domaine C (tirets alternés longs et courts); la référence FLUENT est tracé en trait continu rouge.

On observe que pour les trois termes constituant la force, plus le domaine est grand et plus la contribution est importante en valeur absolue ; les fluctuations sont plus importantes, et le signal de moins en moins sinusoïdal. Si l'on étudie la somme de ces termes on se rend compte que lorsque le domaine est petit, la formulation advective correspond relativement bien à la référence FLUENT pour la traînée (figure 3.8(d)) comme pour la portance (figure 3.9(d)), beaucoup moins lorsque le domaine est grand. Cette erreur résulte d'un mauvais équilibre entre les différents termes de la formulation advective lorsque le domaine est grand ; comme en outre les valeurs absolues des termes sont bien supérieures à celle de la somme (on peut par exemple comparer le niveau du C_L de l'impulsion hydrodynamique figure 3.9(a) à celui du C_L total figure 3.9(d)) on comprend qu'une petite erreur dans l'estimation d'un des termes va donner une estimation fautive de la force totale.

On a vu dans la partie précédente que les intégrandes étaient pour la plupart constitués de zones positives et négatives intenses centrées sur les structures tourbillonnaires dans le sillage ainsi que d'une zone plus « stable » au niveau de la couche limite proche paroi. La force nette créée par une structure de type tourbillon est donc obtenue par la somme de deux contributions de signes différents et d'amplitudes très supérieures à celle de la force nette ; la moindre erreur dans l'estimation d'une des contributions peut donc donner un résultat fortement erroné pour la force nette due à la structure. Plus le domaine est grand, plus le nombre de structures tourbillonnaires seront incluses dans celui-ci et plus le risque d'avoir une estimation imprécise de chaque intégrale est grand.

Pour le domaine A par exemple (pointillés sur les figures 3.8 et 3.9) les sinusoïdes sont presque parfaites et les amplitudes des instabilités assez faibles ; une erreur sur un des termes n'est donc que faiblement répercutée sur la somme. En revanche pour les domaines plus grands (domaine C en tirets alternés longs et courts), les signaux sont assez fortement déformés, avec de plus des amplitudes beaucoup plus grandes ce qui donne un poids plus fort à chaque erreur et peut déformer le signal total.

Une autre partie de l'erreur sur le bilan de force résulte d'un mauvais équilibre entre l'intégrale de domaine et celle de contour lorsqu'une structure sort du domaine d'intégration. Si l'intégrande est constitué autour d'une structure tourbillonnaire par une zone positive et une zone négative et que la structure est en train de sortir du domaine d'intégration, une des contributions va se trouver comptée sur l'intégrale de contour tandis que l'autre contribution va se trouver comptée sur l'intégrale de domaine. Là encore, la moindre erreur d'amplitude ou un léger déphasage entre l'intégrale de domaine et celle de contour va donner une force mal estimée par rapport à la référence FLUENT. Le manque de raffinement du maillage, et donc le « bruit » (c'est à dire les erreurs dues à la diffusion numérique ou à la mauvaise estimation des dérivées spatiales) peuvent être une cause de ce problème, d'autant que certains termes dépendent du vecteur position ce qui augmente le poids de l'erreur des points du sillage.

3.1.5 Conclusion

Il est possible d'estimer la force sur un obstacle en utilisant la formulation advective pour peu que l'on prenne suffisamment de précautions au niveau du domaine d'intégration et du maillage. Le rapprochement entre les structures et les intégrandes de domaine est assez direct puisque tous

les termes font apparaître la vorticité, signature d'une structure cohérente (voir chapitre 2 p.25). En revanche il est difficile de déterminer clairement la contribution de chaque structure à la force : l'intégrale de contour a un poids tel (et ce quel que soit le domaine d'intégration) qu'il n'est pas possible de négliger la perte d'information sur le contour pour s'intéresser uniquement aux intégrales de domaine (une part trop importante des constituants de la force se trouve non pas dans le domaine mais sur le contour). Il faut donc chercher une formulation alternative permettant une véritable décomposition volumique des efforts.

3.2 Application de la formulation advective à une expérience de contrôle passif

Nous utilisons dans cette partie la formulation advective afin de déterminer la traînée d'un corps en D (figure 3.10) dont le sillage turbulent peut être contrôlé par un petit cylindre circulaire placé en aval (Strykowski [84], Sakamoto *et al.* [80], Parezanovi  *et al.* [71]).

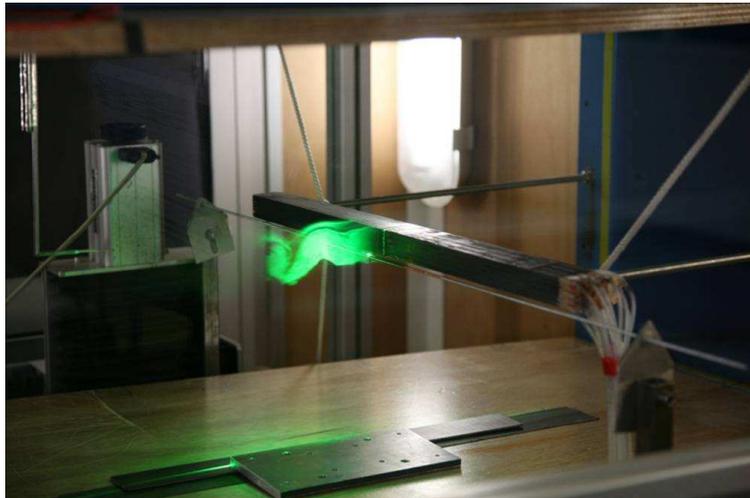


FIG. 3.10 – Photographie du montage expérimental du corps en D (source : Parezanovi ).

3.2.1 Expériences

Les expériences ont été men es par Vladimir Parezanovi  dans une soufflerie à veine ouverte de type Eiffel à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA ParisTech. Le corps en D a une hauteur d'un diamètre $D = 25\text{mm}$ et une longueur de deux diamètres (figure 3.11). Le corps est plus large que la veine de telle manière que pour une assez large portion au centre du corps tout se passe comme pour un cylindre infini (pas d'effet de bord). L'avant est constitué d'un demi-cylindre circulaire et l'arrière d'un cylindre carré ; le corps en D présente donc un culot droit à l'arrière où a lieu le décollement forcé pour des nombres de Reynolds suffisamment grands. De petits décollements sur les faces supérieure et inférieure du corps avec recollement avant le culot ont également été observés pour les grands nombres de Reynolds. Le centre du cylindre est placé au centre de la veine d'essai, ce qui correspond à une localisation à 200mm en aval de l'entrée de la veine.

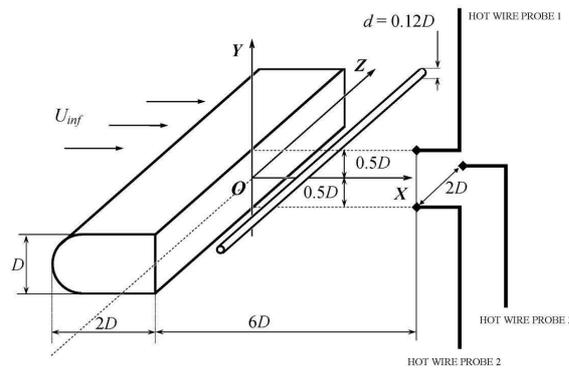


FIG. 3.11 – Schéma descriptif du montage expérimental du corps en D (source : Parezanović).

Le corps est monté sur une balance aérodynamique donnant accès aux valeurs de traînée et de portance. Un système de PIV LAVISION est mis en place afin d’obtenir les champs instantanés de vitesse dans le plan central du corps. La nappe laser est générée par deux lasers $Nd:Yag$ de $50mJ$ par impulsion et les particules utilisées pour les visualisations sont des gouttes d’huile d’olive vaporisées en entrée de la soufflerie. Neuf prises de pression sont usinées sur la ligne verticale centrale du culot du corps et connectées à un manomètre différentiel.

Il est possible de placer un cylindre en aval du corps afin de contrôler son sillage de manière passive. Ce cylindre de contrôle est choisi petit par rapport au diamètre du corps. On a $d = 3mm$ et $d/D = 0.12$. Il a été montré que la présence d’un tel cylindre dans le sillage a un effet sur la traînée du corps en D et que l’effet le plus bénéfique est obtenu pour une position du cylindre de contrôle dans la couche cisailée (Parezanović & Cadot [71]). Deux expériences sont donc menées, une première en régime naturel (*i.e.* sans contrôle) et une deuxième avec le cylindre de contrôle dans la couche cisailée. On étudie les contributions des champs moyens et fluctuants à la force de traînée. Pour ces expériences, le nombre de Reynolds défini à partir de la vitesse en entrée de veine $U_\infty \approx 7.57 m.s^{-1}$ et du diamètre du corps $D = 25 mm$ est égal à $Re = U_\infty D/\nu = 13000$. Le moyennage temporel est effectué sur 1500 champs consécutifs séparés de $5 ms$.

Champs de vitesse et de vorticité

Les champs de vitesse et de vorticité moyennés dans le temps sont présentés pour le cas naturel (figure 3.12) et pour le cas contrôlé (figure 3.13). Afin de limiter au maximum les ombres du corps et du cylindre on effectue pour le cas contrôlé deux expériences, une avec le cylindre dans la couche cisailée supérieure et une autre avec le cylindre dans la couche cisailée inférieure. Les résultats des deux expériences sont ensuite moyennés et recombinaés.

On observe les champs moyens typiques d’un sillage avec lâchers tourbillonnaires alternés pour le corps sans contrôle : la vitesse longitudinale montre une bulle de recirculation (en rouge dans la figure 3.13(a)); la vorticité se concentre dans la zone proche paroi et à l’arrière du culot là où les tourbillons s’enroulent, puis décroît rapidement dans le sillage (figure 3.13(c)). Lorsque

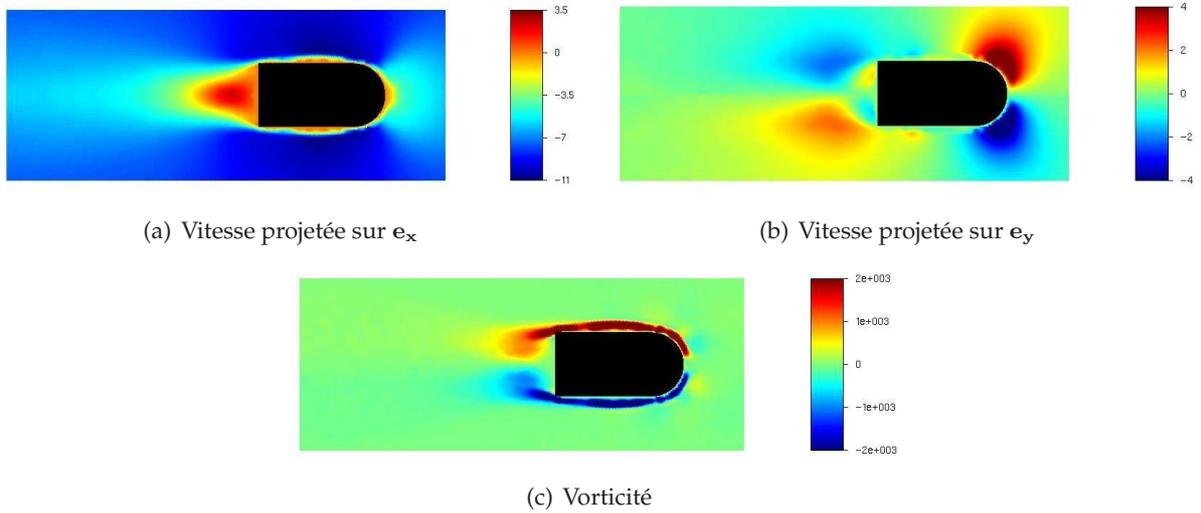


FIG. 3.12 – Champs moyens de vitesse et de vorticité pour le corps à l'état naturel ($Re = 13000$).

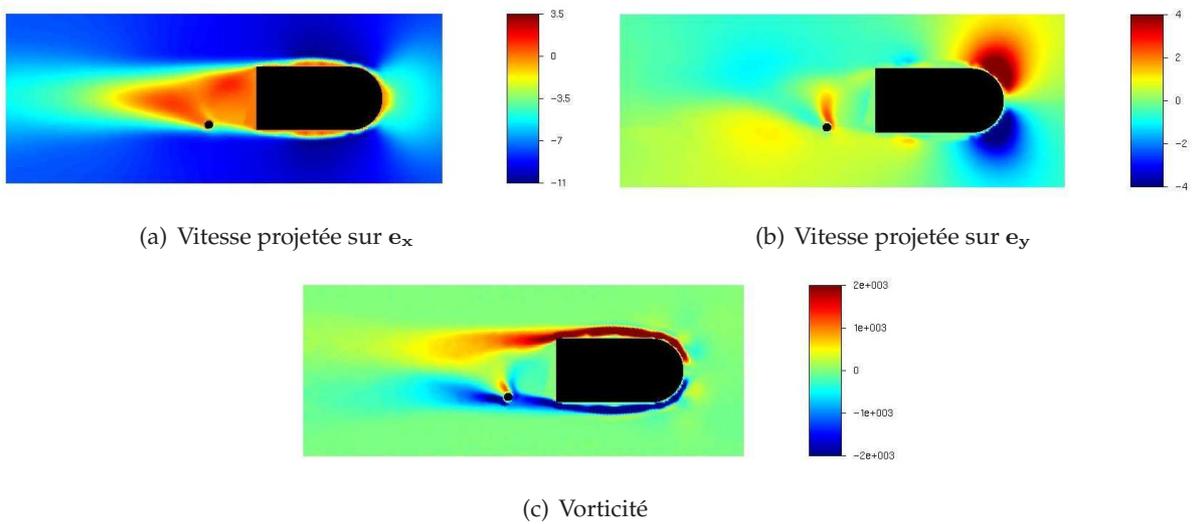


FIG. 3.13 – Champs moyens de vitesse et de vorticité pour le corps avec cylindre de contrôle ($Re = 13000$).

l'on ajoute le cylindre de contrôle dans le sillage, les phénomènes sont globalement les mêmes mais l'enroulement s'effectue plus loin en aval. On remarque un allongement de la bulle de recirculation à l'arrière du corps (figure 3.13(a)) dû à l'augmentation de quantité de mouvement dans la couche cisailée retardant l'enroulement ; d'autre part on peut observer un effet de « jet » vers l'intérieur de la bulle de recirculation (figure 3.13(b)) ; enfin les nappes de vorticité moyenne sont moins intenses et plus allong es que dans le cas naturel (figure 3.13(c)).

On observe également dans les deux cas les décollements au niveau des plats supérieur et inférieur du corps  voqu es en introduction (figures 3.12(a) et 3.13(a)).

Effet du contrôle passif

Les valeurs de coefficient de pression de base (pression au culot du corps) et de traînée sont indiqu es dans le tableau 3.2. L'allongement de la bulle de recirculation provoqué par le cylindre de contrôle (figures 3.12(a) et 3.13(a)) est lié à une augmentation du coefficient de pression de base et à une diminution du coefficient de traînée (Parezanovi  *et al.* [71]).

	�tat naturel	Avec contrôle passif
Coefficient de pression de base	-0.53	-0.26
Coefficient de traînée moyen (mesure exp�.)	0.75	0.48
Coefficient de traînée moyen (form. advective)	0.65	0.35

TAB. 3.2 – Coefficients de pression de base et de traînée pour le corps en D avec et sans contrôle.

3.2.2 Détermination de la traînée moyenne à partir de la formulation advective

Décomposition de Reynolds de la formulation advective

Afin d'étudier les efforts dus aux champs moyens et fluctuants on effectue une décomposition de Reynolds (voir Guyon *et al.* [33] par exemple) qui consiste à voir une grandeur instantan e comme la somme d'une grandeur moyenn e dans le temps, not e $(\bar{\cdot})$, et d'une grandeur fluctuante, not e (\cdot') :

$$\phi(t) = \Phi + \phi'(t) \quad \text{où} \quad \overline{\phi(t)} = \Phi \quad \text{et} \quad \overline{\phi'(t)} = 0. \quad (3.11)$$

La formulation advective moyenn e dans le temps peut donc s'écrire en deux dimensions :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{F}(t)} &= \int_{\mathcal{F}} \overline{\rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}} dS + \oint_{\mathcal{B}} \overline{\gamma_{\mathcal{B}}} dl \\ &= \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{U} \wedge \boldsymbol{\Omega} dS + \int_{\mathcal{F}} \overline{\rho \mathbf{u}' \wedge \boldsymbol{\omega}'} dS + \oint_{\mathcal{B}} \overline{\gamma_{\mathcal{B}}} dl, \end{aligned} \quad (3.12)$$

où l'intégrande $\overline{\gamma_B}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{\gamma_B} &= \overline{\Gamma_B} + \overline{\gamma'_B} \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\rho \mathbf{U} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \mu \mathbf{x} \cdot (\nabla \wedge \boldsymbol{\Omega}) - \mu \mathbf{x} (\nabla \wedge \boldsymbol{\Omega}) + \underline{\underline{\tau}} \right) + \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(-\overline{\rho \mathbf{u}' (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}')} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Intégrandes de domaine

Le calcul de la force de traînée s'effectue, comme pour le calcul sur le cylindre à section carré (voir partie 3.1), par le calcul d'intégrales de domaine (ici uniquement l'intégrale FT puisque les dérivées temporelles et donc l'intégrale IH sont nulles) et d'intégrales de contour. On présente les intégrandes de domaine dus aux champs moyens $\rho(\mathbf{U} \wedge \boldsymbol{\Omega})$ et aux champs fluctuants $\rho(\overline{\mathbf{u}' \wedge \boldsymbol{\omega}'})$ projetés sur l'axe \mathbf{e}_x pour les cas sans (figure 3.14) et avec cylindre de contrôle (figure 3.15).

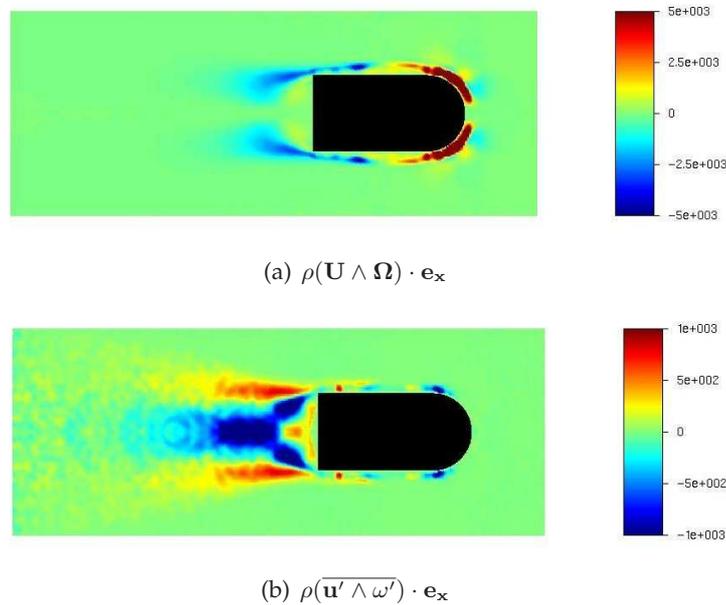


FIG. 3.14 – Intégrandes FT moyen et fluctuant projetés sur \mathbf{e}_x pour le cas naturel.

On observe des occupations spatiales différentes pour les intégrandes dus aux champs moyens et ceux dus aux champs fluctuants : les premiers sont concentrés près de la paroi et dans les couches cisailées (sillage proche), là où l'écoulement est quasi-stationnaire, tandis que les derniers sont essentiellement présents dans le sillage à l'intérieur de la bulle de recirculation et après la bulle (soit juste après le corps dans le cas naturel et après le cylindre de contrôle dans le cas contrôlé). Les intégrandes du corps contrôlé sont plus faibles que ceux du cas naturel, traduisant la diminution de la vorticité lors de l'ajout du cylindre de contrôle.

Les intégrandes de contour (figures 3.16 et 3.17) sont assez similaires à ceux trouvés pour le cylindre à section carré ; les contributions sur les bords haut et bas (projections avec $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_y$) sont négligeables par rapport aux bords verticaux si le domaine d'intégration est pris assez grand de part et d'autre du corps.

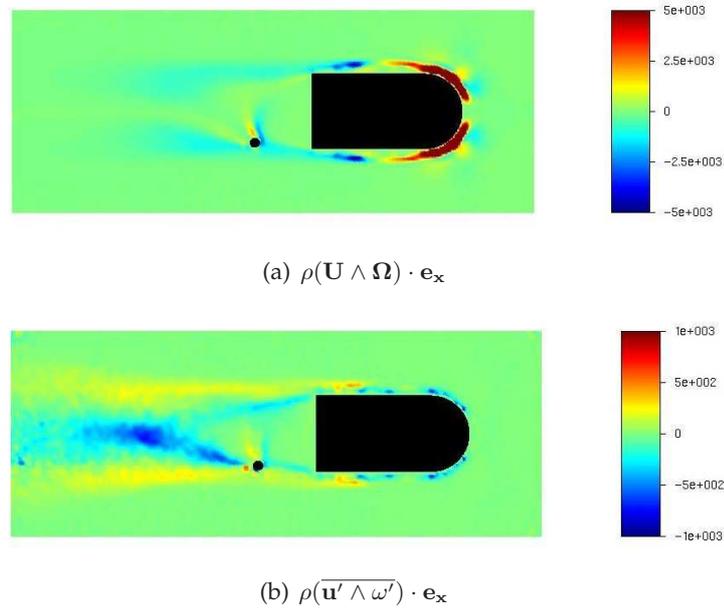


FIG. 3.15 – Intégrandes FT moyen et fluctuant projetés sur \mathbf{e}_x pour le cas avec cylindre de contrôle.

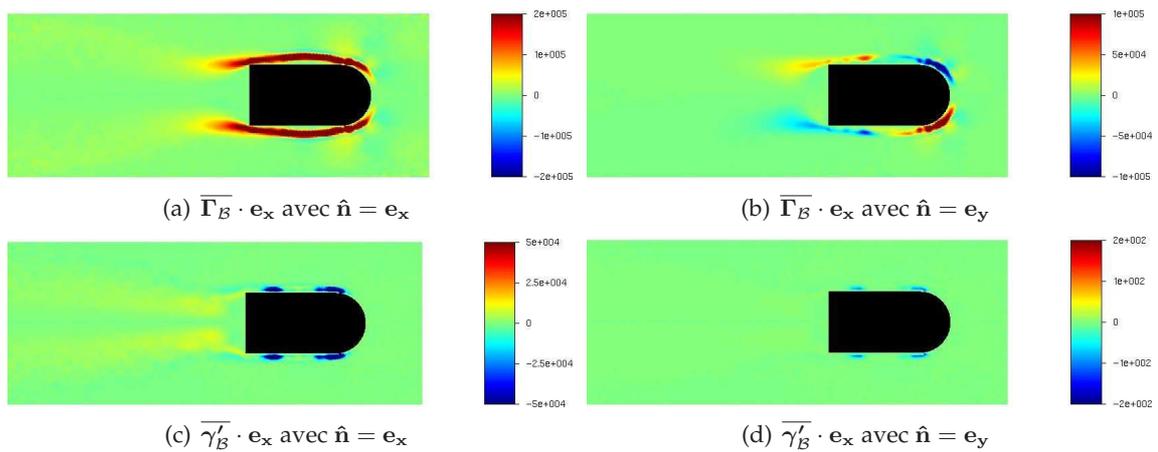


FIG. 3.16 – Intégrandes de contour $\overline{\gamma_B}$ projetés sur \mathbf{e}_x pour le cas naturel.

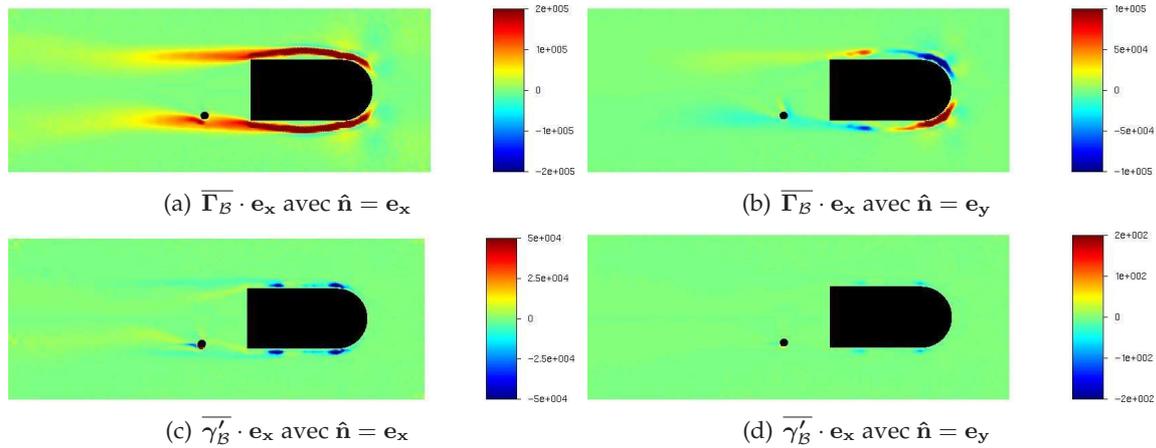


FIG. 3.17 – Intégrandes de contour $\overline{\gamma}_B$ projetés sur e_x pour le cas avec cylindre de contrôle.

Évolution des termes en fonctions de la taille du domaine d'intégration

On analyse les contributions des différents termes pour différentes tailles de domaine d'intégration. Pour ce faire on définit la longueur λ du domaine que l'on fait varier, les limites du domaine restant fixes en amont, en haut et en bas (figure 3.18). On calcule les différents termes

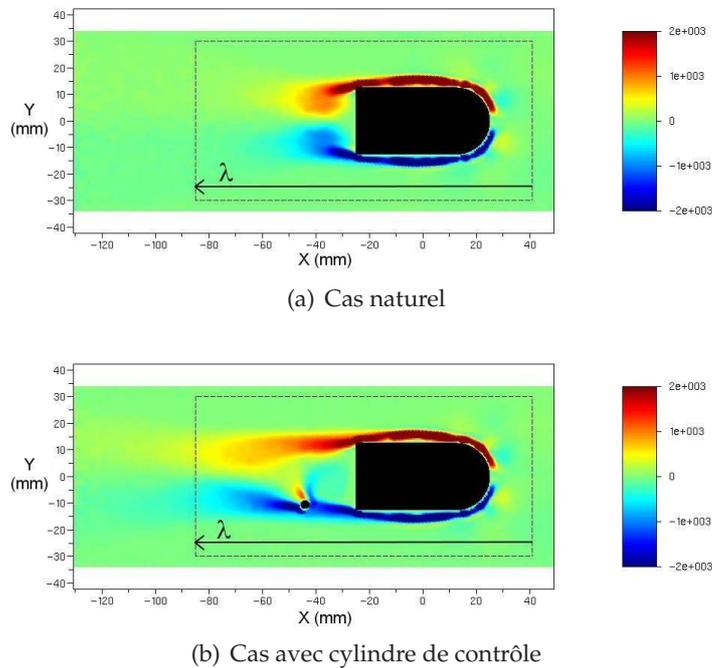


FIG. 3.18 – Domaines d'intégration (tirets) de longueur λ .

de la formulation advective en fonction de la longueur λ . Les domaines d'intégration ainsi considérés ne prennent pas tous en compte le corps en D dans son entier, ni le cylindre de contrôle le cas échéant (voir les inserts de la figure 3.19). Il convient donc de n'étudier que les valeurs de

lambda $\lambda \gtrsim 60 \text{ mm}$ pour lesquels le corps en D est englobé dans son intégralité.

Une étude des intégrandes de domaine et de contour (figure 3.19) permet de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus pour le cylindre à section carré : dans le cas naturel comme dans le cas contrôlé, les termes de contour jouent un rôle prépondérant dans le calcul de la force, et on ne peut donc pas les négliger afin d'effectuer une intégration spatiale. Les valeurs de traînée totale obtenues dans les deux cas (courbes noires) convergent très vite dès que le corps est inclus complètement dans le domaine d'intégration. On observe en revanche des comportements assez différents pour les intégrales de domaine et de contour dans le sillage selon que celui-ci est contrôlé ou non. On voit apparaître un plateau pour les deux signaux dans le cas naturel (figure 3.19(a)), signe que les courbes ont convergé. Les courbes ne devraient donc pas changer en considérant un domaine d'intégration plus grand. Pour le cas contrôlé (figure 3.19(b)), les courbes des contributions de domaine et de contour n'ont pas encore bien convergé. Cette observation est cohérente avec l'allongement de la bulle de recirculation obtenu lorsque l'on ajoute un cylindre de contrôle, induisant des valeurs de vorticité et de vitesse plus loin en aval que pour le cas naturel.

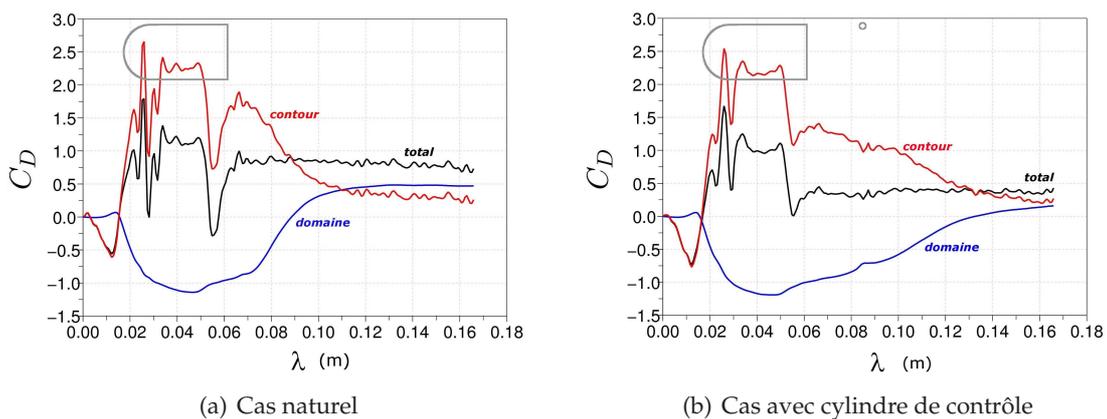


FIG. 3.19 –  volution des valeurs des intégrales FT (en bleu) et de contour (en rouge), ainsi que celle de la force totale (en noir) en fonction de la taille du domaine d'intégration (λ).

Les valeurs de traînée totale sont proches des valeurs mesur es à partir de la pression (tableau 3.2) et l'effet de réduction de traînée est plutôt bien capté : les mesures de pression donnent une réduction de 36% alors que la formulation advective à partir de la mesure PIV donne une réduction de 46%.   partir de la figure 3.20, on observe que pour la plus grande taille de domaine ($\lambda = 0.16 \text{ m}$), la réduction est essentiellement due à une plus faible contribution de domaine dans le cas contrôlé.

On présente dans la figure figure 3.20 les contributions sur les intégrales de domaine et de contour des champs moyens d'une part (figures 3.14(a), 3.16(a) et 3.16(b) pour le cas naturel, figures 3.15(a), 3.17(a) et 3.17(b) pour le cas contrôlé) et celles des champs fluctuants d'autre part (figures 3.14(b), 3.16(c) et 3.16(d) pour le cas naturel, figures 3.15(b), 3.17(c) et 3.17(d) pour le cas contrôlé). On observe alors que les contributions évoluent énormément avec λ mais que les contributions dues aux champs fluctuants s'annulent pour des valeurs de λ comprises entre 0.62 mm et 0.72 mm (figure 3.20(b)). Ces valeurs de λ correspondent à un domaine d'intégration s'étendant

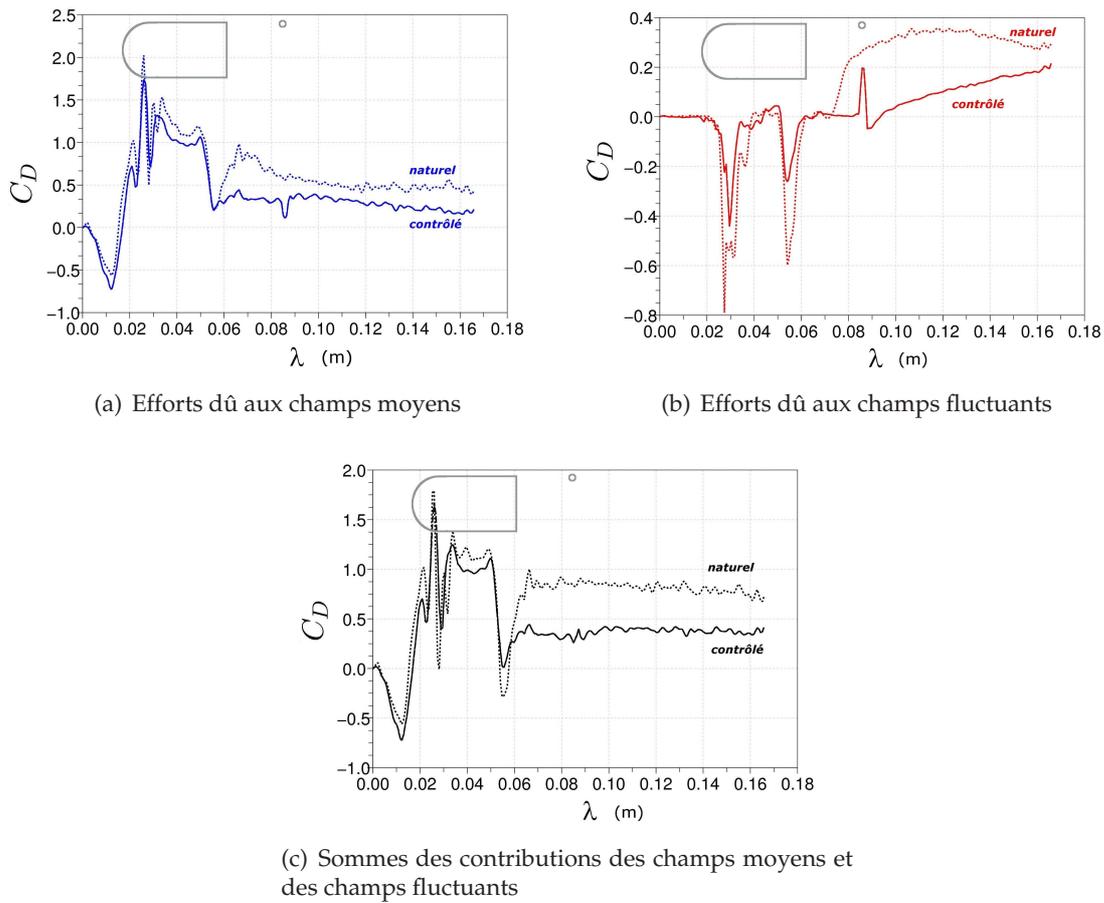


FIG. 3.20 – Évolution des forces dues aux champs moyens et aux champs fluctuants en fonction de la taille du domaine d'intégration (λ) pour le cas naturel (pointillés) et le cas avec cylindre de contrôle (tirets).

peu en aval du corps, là où il n'y a presque pas de fluctuations. Pourtant les valeurs de force sont déjà précises. En se bornant à une simple étude des champs moyens Ω et \mathbf{U} dans un domaine d'intégration proche du corps, il est donc possible de déterminer la traînée moyenne.

3.2.3 Conclusion sur l'application expérimentale de la méthode

Nous avons eu dans cette partie la confirmation expérimentale qu'il est possible d'utiliser la formulation advective afin de quantifier les efforts moyens sur un corps. Nous avons testé un cas d'écoulement avec contrôle passif pour lequel nous trouvons une bonne approximation de l'effet de réduction de traînée. D'un point de vue pratique nous montrons que seule la mesure du champ de vitesse moyen peut suffire pour l'estimation de la traînée moyenne.

Cependant cette formulation ne nous a pas permis d'apporter d'interprétation physique à la réduction de traînée dans ce cas de contrôle d'écoulement.

3.3 Conclusion sur la formulation advective

La formulation advective est un premier pas dans l'utilisation des DMT pour l'estimation de la force. Si elle ne permet pas une formulation volumique « pure », *i.e.* sans intégrale de contour, il est tout de même intéressant d'avoir accès à une méthode alternative d'estimation de la force. Cette méthode a un intérêt tout particulier dans le domaine expérimental puisqu'elle semble permettre le calcul de la force moyenne à partir des champs moyens uniquement.

Dans le cadre de notre étude en revanche cette formulation n'est pas satisfaisante. La contribution de l'intégrale de contour est trop importante, et ce quelque soit la taille du domaine d'intégration. La quantification des efforts générés par chaque structure cohérente ayant comme pré-requis une information totalement comprise dans l'intégrale de domaine, il nous faut donc chercher une autre formulation de la force.

Étude de la formulation diffusive en deux dimensions

Sommaire

4.1	Simulation numérique	63
4.1.1	Présentation du code numérique utilisé	63
4.1.2	Résultats pour différents nombres de Reynolds	68
4.2	Étude de la contribution des termes de la formulation diffusive	69
4.2.1	Écriture bi-dimensionnelle	69
4.2.2	Intégrande IDV $-\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$	69
4.2.3	Intégrandes de contour	71
4.2.4	Analyse dynamique des contributions	72
4.2.5	Conclusion sur l'utilisation de la formulation diffusive	74
4.3	Contributions des différentes structures cohérentes	75
4.3.1	Séparation de structures	75
4.3.2	Analyse des contributions séparées	81
4.4	Validation de l'approche pour FLUENT	87
4.5	Conclusion	88

Afin de palier les problèmes rencontrés avec la formulation advective dans le chapitre 3, notamment le poids trop important des intégrales de contour, nous avons cherché une formulation alternative de la force. La formulation diffusive permet d'inclure une partie des termes de la formulation advective calculés sur le contour dans l'intégrale de domaine (voir annexe B). Nous étudions dans ce chapitre cette formulation diffusive ainsi que le nouvel éclairage qu'elle peut donner sur l'analyse de sillage en deux dimensions.

4.1 Simulation numérique

L'équation (2.32) fait apparaître des dérivées spatiales troisièmes du champ de vitesse, ce qui pose des problèmes numériques. En effet une dérivation ajoute du bruit numérique à haute fréquence qui peut rendre inutilisable le résultat d'une dérivation troisième. Pour palier à ce problème nous avons donc dans un premier temps utilisé un code académique développé par Olivier Le Maître (Le Maître *et al.* [52]) calculant en chaque point la vorticité. Le laplacien de vorticité ne nécessite alors plus qu'une d riv e seconde. De plus ce code a déjà été validé pour le calcul des forces sur un cylindre à section circulaire.

Nous avons constitué une base de données dans le cas d'un cylindre à section circulaire pour des nombres de Reynolds allant de 50 à 400 afin d'étudier les différentes topologies d'écoulement pour cette gamme de nombres de Reynolds au travers des solutions 2D des équations de Navier-Stokes.

4.1.1 Présentation du code numérique utilisé

Le code académique utilisé pour nos simulations est basé sur une résolution adimensionn e de la vorticité ω et de la fonction de courant ψ (une présentation de ce code et de résultats que l'on peut obtenir grâce à lui a été publi e par Le Maître *et al.* [52]). L'adimensionnement est réalisé à partir du diamètre du cylindre D pour les longueurs caractéristiques et de la vitesse amont U_∞ pour les vitesses caractéristiques ; il en résulte une échelle de temps caractéristique $t^* = \frac{D}{U_\infty}$. Les simulations ont toutes été effectu es avec un pas de temps normalisé $\delta t = 0.005$. Afin d'obtenir plus rapidement l'instabilité provoquant l'allée de von Kármán, un champ de vitesse amont asymétrique $\mathbf{u}_\infty(U_\infty \cos(\alpha), U_\infty \sin(\alpha))$ avec $\alpha = 20^\circ$ est imposé pendant les deux premières unités de temps adimensionné ; la vitesse amont est ensuite purement longitudinale $\mathbf{u}_\infty(U_\infty, 0)$ et après une période transitoire on observe un lâcher périodique de tourbillons réguliers.

Résolution psi-omega

La fonction de courant permet pour les écoulements incompressibles en deux dimensions d'exprimer le champ de vitesse à partir d'une seule composante. En considérant le champ de vitesse « 2D » $\mathbf{u}(u_x, u_y, 0)$, il est en effet possible de trouver la fonction ψ telle que :

$$\mathbf{u} = \nabla \wedge (\psi \mathbf{e}_z), \quad (4.1)$$

et on a donc les relations pour les composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} u_x = \partial_y \psi \\ u_y = -\partial_x \psi. \end{cases} \quad (4.2)$$

On remarque qu'il est possible de relier la vorticité à la fonction de courant au moyen d'une équation de Poisson :

$$\omega = \partial_x u_y - \partial_y u_x = -\partial_{xx} \psi - \partial_{yy} \psi = -\Delta \psi. \quad (4.3)$$

Le code numérique utilisé résout donc en tout point du maillage l'équation de la vorticité et calcule la fonction courant à partir de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad (4.4)$$

$$\Delta \psi = -\omega. \quad (4.5)$$

Le nombre de Reynolds $Re = U_\infty D / \nu$ dans l'équation de la vorticité (4.4) est défini à partir de la vitesse amont $U_\infty = 1$, du diamètre du cylindre $D = 2$ et de la viscosité cinématique ν . En pratique on ne fait varier que le nombre de Reynolds dans les simulations, soit en fait la viscosité cinématique ν .

Sur la frontière externe \mathcal{B} , on considère que la vorticité a totalement diffusé et qu'elle est négligeable (condition de Dirichlet homogène) ; la fonction de courant dépend de la vitesse amont (*i.e.* sans la perturbation du sillage) $\mathbf{U}_\infty(U_\infty, 0)$:

$$\omega|_{\mathcal{B}} = 0, \quad (4.6)$$

$$\psi|_{\mathcal{B}} = \psi(x|_{\mathcal{B}}, y|_{\mathcal{B}}) = U_\infty y|_{\mathcal{B}}. \quad (4.7)$$

   la surface du corps, on impose la contrainte suivante sur ω :

$$\oint_{\mathcal{B}_b} \frac{\partial \omega}{\partial n} dl = 0, \quad (4.8)$$

où $\partial/\partial n$ représente la d  riv  e selon la normale. Cette contrainte équivaut à forcer la continuité de la pression tout autour de l'obstacle.

On applique également une condition de non-glissement $\mathbf{u}|_{\mathcal{B}_b} = 0$, soit :

$$\psi|_{\mathcal{B}_b} = cte. \quad (4.9)$$

Transformation conforme

Afin d'obtenir une bonne estimation des dérivées spatiales, une transformation conforme¹ est effectu  e entre le domaine physique et le domaine de calcul (figure 4.1). Cela permet de toujours

¹Une transformation conforme est une transformation ponctuelle bijective qui conserve les angles ; les valeurs de vorticité et de fonction de courant en deux points homologues sont égales. La transformation conforme permet donc d'effectuer des calculs dans un domaine plus adapté.

effectuer les calculs de dérivées sur un maillage cartésien régulier et d'utiliser des schémas aux différences finies simples et performants.

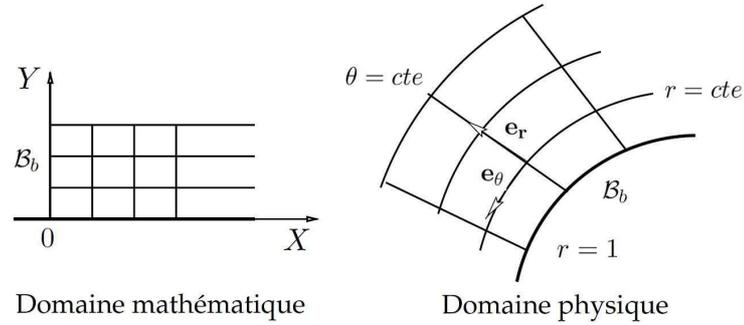


FIG. 4.1 – Représentation des domaines mathématique et physique de la transformation conforme.

L'étude est effectuée pour un cylindre à section circulaire. On utilise donc une transformation conforme qui fait correspondre au domaine cartésien régulier (X, Y) le domaine physique (x, y) selon la relation :

$$(X, Y) \in \left[0, \frac{\log R_\infty}{\pi}\right] \times [0, 2] \longrightarrow x + iy = \exp(\pi(X + iY)). \quad (4.10)$$

On peut également exprimer les coordonnées du domaine physique en polaire (figure 4.1) :

$$x + iy = r \exp(i\theta), \quad (4.11)$$

et

$$(X, Y) \in \left[0, \frac{\log R_\infty}{\pi}\right] \times [0, 2] \longrightarrow \begin{cases} r = \exp(\pi X) \\ \theta = \pi Y \end{cases}. \quad (4.12)$$

Les équations à résoudre dans le domaine mathématique (X, Y) deviennent alors :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{M} \tilde{\nabla} \cdot (\omega \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{M Re} \tilde{\Delta} \omega \quad (4.13)$$

$$\tilde{\Delta} \psi = -M \omega, \quad (4.14)$$

où M est le module de la transformation :

$$M = \left| \frac{d(x + iy)}{d(X + iY)} \right|, \quad (4.15)$$

et les tildes représentent des dérivées spatiales dans le domaine mathématique :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y}, -\frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \quad \text{et} \quad \tilde{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y} \right). \quad (4.16)$$

Schémas aux différences finies

Les schémas aux différences finies^{II} utilisés pour le calcul de la fonction courant et du laplacien de vorticité sont des schémas d'ordre 2 obtenus à partir des développements de Taylor (Bilbao [10]). On pose h le pas spatial du maillage du domaine de calcul dans les deux directions (maillage cartésien régulier). Pour estimer les dérivées d'un scalaire ξ à l'intérieur du domaine on utilise donc des schémas centrés d'ordre 2 :

$$\Delta\xi_{i,j} = \partial_{ii}\xi_{i,j} + \partial_{jj}\xi_{i,j} = \frac{\xi_{i+1,j} + \xi_{i,j+1} - 4\xi_{i,j} + \xi_{i-1,j} + \xi_{i,j-1}}{h^2} + O(h^2). \quad (4.17)$$

Pour les points du contour, on utilise des schémas à trois points décentrés ; le schéma à droite sur i s'écrit par exemple :

$$\partial_{ii^+}\xi_{i,j} = \frac{2\xi_{i,j} - 5\xi_{i+1,j} + 4\xi_{i+2,j} - \xi_{i+3,j}}{h^2} + O(h^2). \quad (4.18)$$

Calcul classique de la force

Le code numérique permet un calcul de la force en utilisant l'intégration classique des forces de pression et de viscosité à la surface du corps. Il faut pour cela avoir une estimation de la pression et du tenseur de viscosité autour du cylindre à section circulaire. On utilise dans cette partie un repère polaire ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$) (voir figure 4.1).

L'équation de quantité de mouvement de Navier-Stokes adimensionn  e s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma} + \nabla p = \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad (4.19)$$

où $\mathbf{\Gamma} = \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ est l'accélération matérielle. On projette cette équation (4.19) sur l'axe tangent \mathbf{e}_θ et on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial r}. \quad (4.20)$$

La pression à la surface du corps est ensuite obtenue en intégrant l'équation (4.20). La pression s'écrit en θ :

$$p(\theta) = p(0) + \int_0^\theta \left[-\mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] d\vartheta, \quad (4.21)$$

où $p(0)$ est une constante arbitraire^{III}.

^{II}Les notations indicielles i et j utilis  es dans cette partie sont de type matriciel ; les dérivées secondes sont not  es ∂_{ii} et ∂_{jj} respectivement.

^{III}Cette estimation de la pression à une constante près ne permet pas de connaître la pression exacte ; il faut pour déterminer $p(0)$ imposer une condition de Neumann aux limites, ce qui rend l'implémentation du code ardue. Comme on ne se sert d'autre part de la pression que pour déterminer la force en intégrant la pression sur un contour, la constante disparaît d'elle-même.

À la paroi ($r = 1$), les composantes de la vitesse et leur dérivée par rapport à θ sont nulles :

$$u_r|_{\mathcal{B}_b} = 0 \quad \text{et} \quad u_\theta|_{\mathcal{B}_b} = 0, \quad (4.22)$$

$$\partial_\theta u_r|_{\mathcal{B}_b} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_\theta u_\theta|_{\mathcal{B}_b} = 0. \quad (4.23)$$

L'équation de la continuité s'écrit en outre :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \partial_r u_r + \frac{1}{r} \partial_\theta u_\theta = 0, \quad \text{d'où} \quad \partial_r u_r|_{\mathcal{B}_b} = 0. \quad (4.24)$$

Le tenseur de viscosité à la paroi s'exprime donc ainsi :

$$\underline{\underline{\tau}}|_{\mathcal{B}_b} = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 & \partial_r u_\theta|_{\mathcal{B}_b} \\ \partial_r u_\theta|_{\mathcal{B}_b} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

On peut remarquer que ce tenseur s'écrit également en fonction de la vorticité à la paroi :

$$\underline{\underline{\tau}}|_{\mathcal{B}_b} = \frac{1}{Re} \begin{pmatrix} 0 & \omega|_{\mathcal{B}_b} \\ \omega|_{\mathcal{B}_b} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Maillage

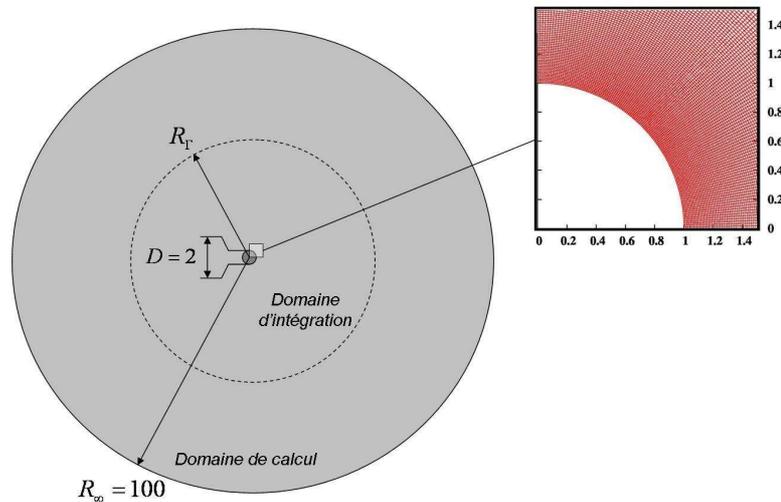


FIG. 4.2 – Maillage utilisé pour la simulation psi-omega.

On utilise pour nos simulations un maillage (X, Y) dans le domaine mathématique avec 500 mailles selon X et 500 mailles selon Y . Le maillage physique – *i.e.* le maillage homologue du maillage cartésien transformé par l'équation (4.10) – est un maillage circulaire $(r, \theta) \in [1, 50] \times [0, 2\pi]$ (figure 4.2).

Les mailles sont de plus en plus grandes selon une loi exponentielle (voir la définition du module M de la transformation conforme) et permettent de conserver une très bonne définition

proche de la paroi du corps sans utiliser un nombre excessif de mailles en amont et dans le sillage. Ce dernier est donc moins bien défini loin du corps mais cela ne pose pas de problème pour les domaines d'intégration considérés par la suite.

On conserve ce maillage pour tous les nombres de Reynolds simulés.

4.1.2 Résultats pour différents nombres de Reynolds

Les nombres de Reynolds étudiés sont modérés et s'étendent de $Re = 50$ à $Re = 400$. Pour cette plage de nombre de Reynolds, le régime d'un cylindre circulaire en deux dimensions est un régime de von Kármán avec une instabilité en aval provoquant la formation de tourbillons lâchés périodiquement en haut et en bas du cylindre (Williamson [93]). Ces tourbillons sont le résultat de l'enroulement des couches limites nées à la surface du cylindre (figure 4.3). On a donc

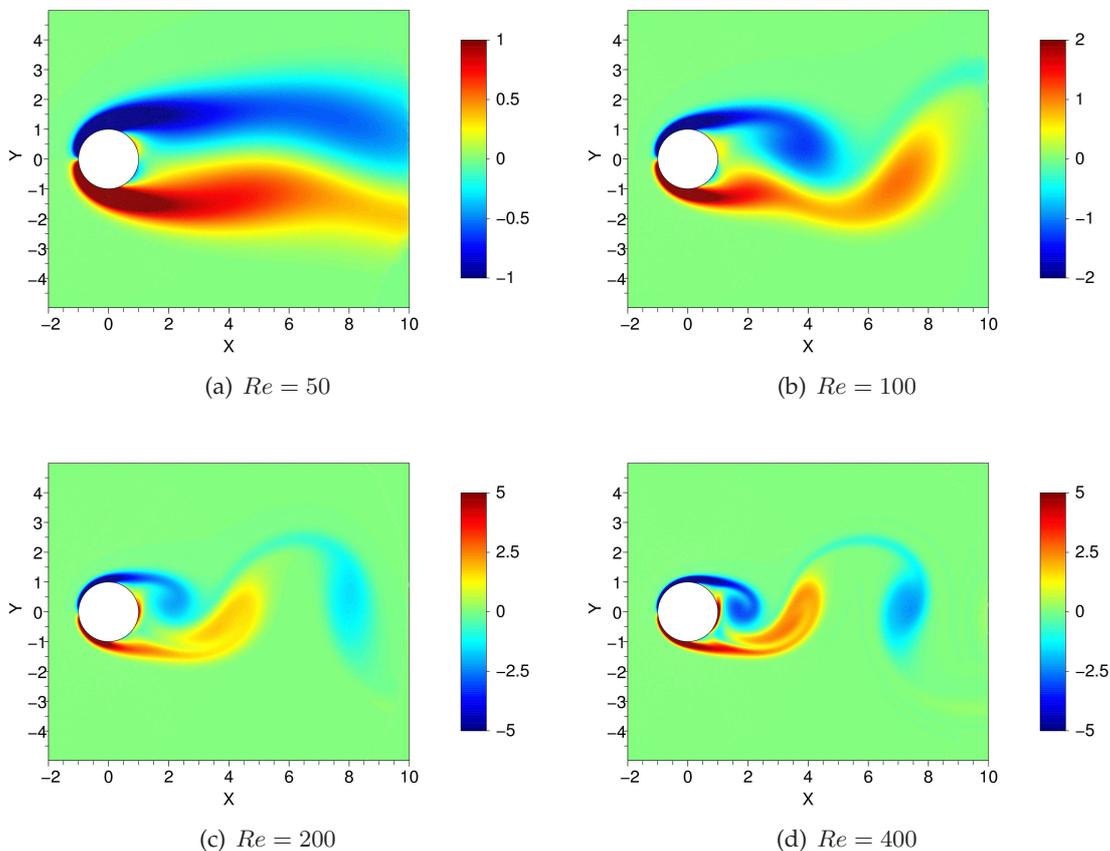


FIG. 4.3 – Vorticité instantanée pour différents nombres de Reynolds.

un cas d'étude similaire à celui du cylindre à section carré étudié dans le chapitre 3. Le nombre de Reynolds $Re = 50$ est un nombre de Reynolds critique à partir duquel l'instabilité apparaît. L'allée de von Kármán est donc plus évidente pour des nombre de Reynolds plus grands mais on peut déjà observer une déstabilisation des couches limites à $Re = 50$.

4.2 Étude de la contribution des termes de la formulation diffusive

4.2.1 Écriture bi-dimensionnelle

Comme pour l'étude de la formulation advective, on se place en deux dimensions ($\mathcal{N} = 2$) et il est alors possible de simplifier certains termes de l'équation (2.32). Le domaine est une surface et le contour une ligne, on note les variables d'intégrations dS et dl respectivement. La vorticité est perpendiculaire au plan d'étude ($\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$) et on a :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}. \quad (4.27)$$

En posant $\mathbf{x}^\perp = (-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y)$ et $\hat{\mathbf{n}}^\perp = (-\hat{n}_y\mathbf{e}_x + \hat{n}_x\mathbf{e}_y)$, la formulation diffusive s'écrit alors^{IV} :

$$\mathbf{F}(t) = \mu \int_{\mathcal{F}} \Delta\omega \mathbf{x}^\perp dS + \mu \oint_{\mathcal{B}} \left([(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\omega] \mathbf{x}^\perp - \omega \hat{\mathbf{n}}^\perp \right) dl. \quad (4.28)$$

On reconnaît comme pour l'équation advective une impulsion dans le premier terme du membre de droite. Nous appellerons donc l'intégrande ($\mu \Delta\omega \mathbf{x}^\perp$) « intégrande IDV » dans la suite du chapitre, pour *Impulsion de la Diffusion de Vorticité*. L'intégrande ($\mu ([(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\omega] \mathbf{x}^\perp + \omega \hat{\mathbf{n}}^\perp)$) sera appel e intégrande de contour.

4.2.2 Intégrande IDV $-\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$

L'intégrande IDV projet  sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y (figure 4.4 page suivante) suit parfaitement l'évolution de la vorticité, avec alternance de zones de valeurs intenses et de signes différents. On retrouve donc *a priori* le même genre de phénomènes que pour les intégrandes de domaine de la formulation advective (voir paragraphe 3.1.3). La situation est pourtant très différente dans la mesure où l'évolution observ e ici est une évolution spatiale et non temporelle : on mesure le laplacien de vorticité pondéré par le vecteur position. Cette pondération modifie préférentiellement le laplacien de vorticité dans certaines zones de l'écoulement. Si l'on s'intéresse par exemple à la projection de l'intégrande IDV sur \mathbf{e}_x (contribution à la traînée) : $-\mu\Delta\omega y$, figure 4.4(a), on s'aperçoit que les valeurs deviennent nulles autour de l'axe $y = 0$. En revanche si l'on s'intéresse à la projection de l'intégrande IDV sur \mathbf{e}_y (contribution à la portance) : $\mu\Delta\omega x$, figure 4.4(b), on observe des valeurs nulles autour de l'axe $x = 0$ et assez  lev es même loin du cylindre. Cette pondération mise à part, le laplacien de vorticité reste l'ingrédient essentiel de l'intégrande IDV.

On commence donc par étudier le laplacien de la vorticité (figure 4.5). Les profils tracés dans le sillage (figure 4.5(a)) pour la vorticité et son laplacien sont présentés dans la figure 4.5(b). On voit nettement les alternances de courbure de la vorticité et les changements de signe du laplacien correspondants. Le laplacien mesure en effet les variations spatiales de la vorticité ; on a donc des valeurs de laplacien importantes au niveau des changements de courbure de la vorticité. Les nappes de vorticité donnent alors lieu à des juxtapositions de trois « couches » de laplacien aux signes alternés (figure 4.5(c)). Les tourbillons forment eux un « noyau » entouré d'une bague de

^{IV}En supposant que le domaine d'intégration est circulaire, on peut écrire l'équation (4.28) adimensionn e dans le domaine mathématique des transformations conformes : $\mathbf{F}(t) = \frac{1}{Re} \int_{\mathcal{F}} \frac{1}{M} \tilde{\Delta}\omega \mathbf{x}^\perp M dXdY + \frac{1}{Re} \oint_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{\sqrt{M}} \frac{\partial\omega}{\partial X} \mathbf{x}^\perp - \omega \mathbf{e}_x \right) \sqrt{M} dY$, où $\mathbf{x}^\perp = (-MX \sin(Y), MX \cos(Y))$. C'est sous cette forme que la formulation diffusive est impl ment e dans le code psi-omega.

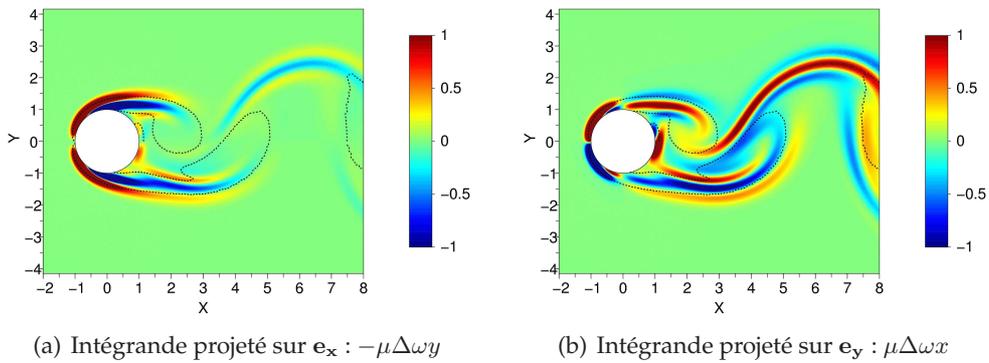


FIG. 4.4 – Intégrandes IDV $-\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$ à $Re = 200$ (pointillés : iso-contour de vorticité $|\omega| = 1$).

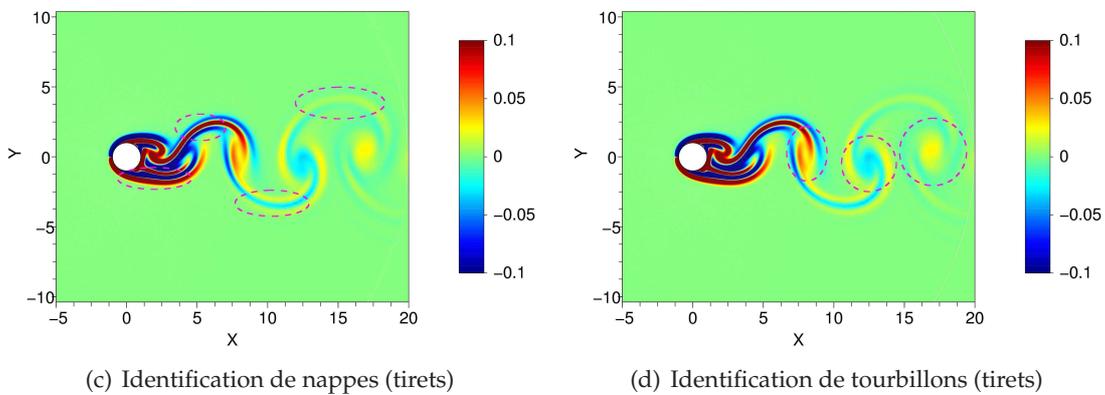
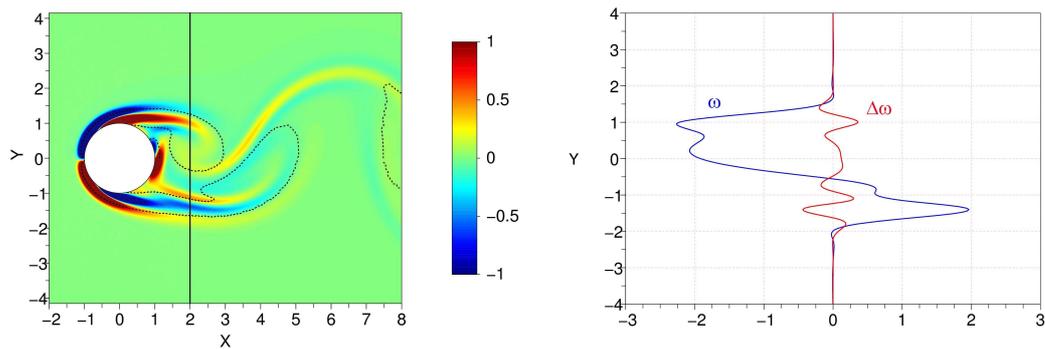


FIG. 4.5 – Champ de laplacien de vorticité, profils dans le sillage et identification de nappes de vorticité et de tourbillons dans l'écoulement ($Re = 200$).

signe opposé (figure 4.5(d)). Les différents motifs pour des structures idéales sont plus amplement détaillés dans l'annexe D.

Le laplacien fait apparaître de fortes valeurs proches de la paroi qui diminuent très vite dans le sillage (figure 4.5(a)). On peut donc penser que les fortes valeurs absolues de l'intégrande IDV observées dans le sillage (figure 4.4) peuvent être dues à des erreurs dans le calcul de la vorticité et de son laplacien amplifi es par le vecteur position. C'est particulièrement le cas pour la projection sur \mathbf{e}_y , qui s'écrit : $\mu x \Delta\omega$. Le centre du cylindre correspondant au centre du repère, les points du sillage vont avoir des valeurs  lev es de la composante x du vecteur position qui vont amplifier les erreurs numériques.

4.2.3 Intégrandes de contour

L'intégrande de contour ($\mu ([(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\omega] \mathbf{x}^\perp - \omega \hat{\mathbf{n}}^\perp)$) est lui aussi parfaitement corrélé avec la vorticité et donc les structures cohérentes (figure 4.6). Les représentations de cet intégrande projet  sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y sont faites dans le cas d'un domaine d'intégration circulaire (représenté par une ligne pointill e) avec une normale port e sur l'axe \mathbf{e}_r . L'intégrande peut s'écrire dans ce cas :

$$[\mu (r\partial_r\omega - \omega)] \begin{pmatrix} -\sin\theta \mathbf{e}_x \\ \cos\theta \mathbf{e}_y \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

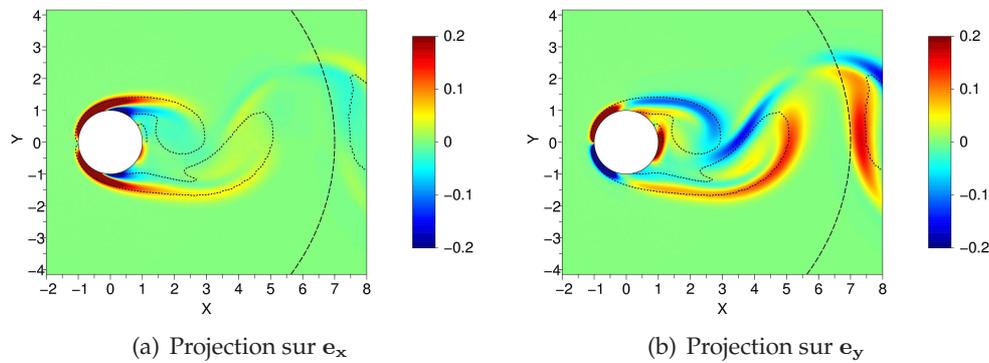


FIG. 4.6 – Intégrandes de contour ($\mu ([(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\omega] \mathbf{x}^\perp - \omega \hat{\mathbf{n}}^\perp)$)   $Re = 200$ (pointillés : iso-contour de vorticité $|\omega| = 1$; tirets : contour du domaine d'intégration).

On remarque que comme pour l'intégrande IDV, l'intégrande de contour devient négligeable rapidement pour la projection sur \mathbf{e}_x (figure 4.6(a)), tandis que la projection sur \mathbf{e}_y montre des valeurs encore très importantes dans le sillage (figure 4.6(b)). Ceci est dû, là encore, à la présence aux valeurs importantes dans le sillage de la composante x du vecteur position dans la projection sur \mathbf{e}_y , sous la forme polaire $r \cos\theta$ dans l'équation (4.29).

4.2.4 Analyse dynamique des contributions

On effectue une analyse dans le temps des intégrales IDV et de contour afin de déterminer leurs rôles respectifs dans la dynamique de la force, ainsi que l'influence de la taille du domaine d'intégration. On étudie pour ce faire trois domaines d'intégration de tailles différentes ; ces domaines sont choisis circulaires afin de simplifier l'expression de l'intégrande de contour – équation (4.29), de rayon $R_\Gamma = 10$ pour le domaine 'A', $R_\Gamma = 5$ pour le domaine 'B' et $R_\Gamma = 1.5$ pour le domaine 'C' (figure 4.7). On calcule donc les séries temporelles des contributions de domaine et de

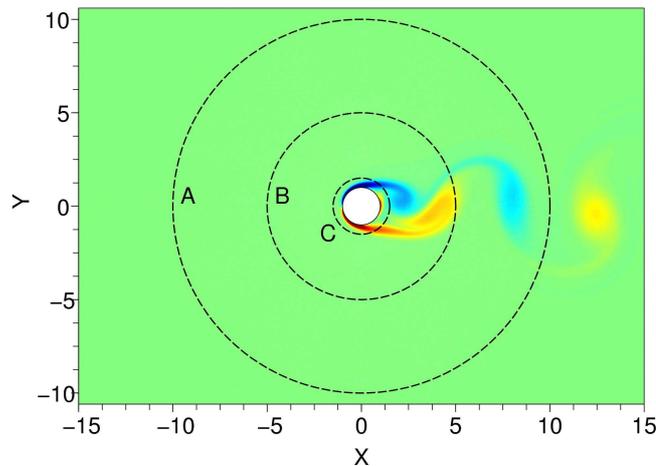


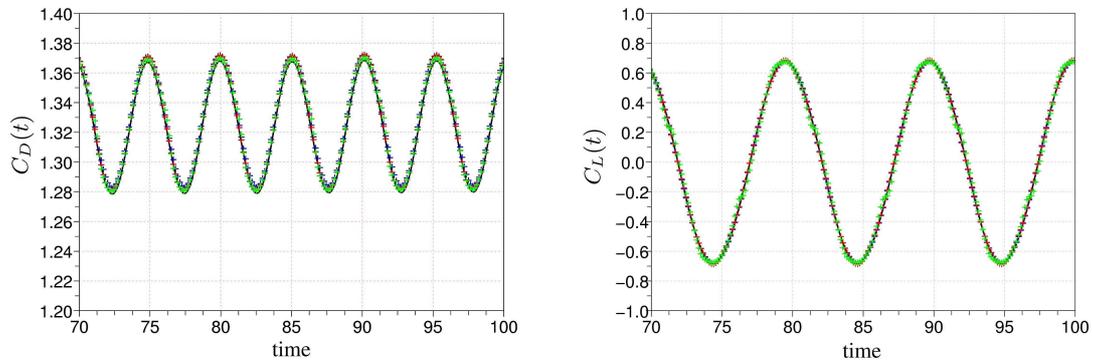
FIG. 4.7 – Domaines d'intégration circulaires utilisés pour la formulation diffusive (pointillés) : $R_\Gamma = 10$ pour le domaine 'A', $R_\Gamma = 5$ pour le domaine 'B' et $R_\Gamma = 1.5$ pour le domaine 'C'.

contour ainsi que celles de la somme de ces contributions (figure 4.8 page ci-contre). On rappelle que pour un domaine d'intégration donné délimité par un contour circulaire, les intégrales de domaine sont calculées en sommant les intégrandes IDV à l'intérieur du domaine considéré pondérés par la variable d'intégration $dS = dx dy = r dr d\theta = M dX dY$; les intégrandes de contour sont sommés le long du contour et pondérés par la variable d'intégration $dl = r d\theta = \sqrt{M} dY$.

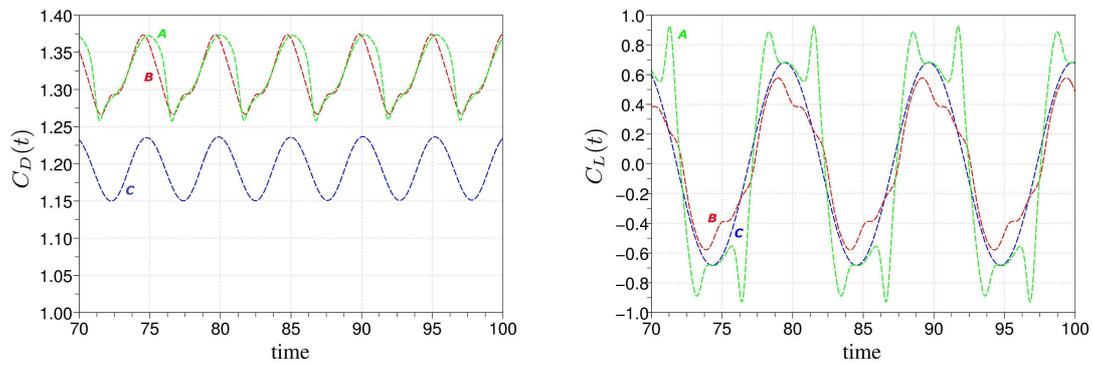
La figure 4.8(a) représente la force totale estimée par la formulation « classique » d'intégration des efforts de pression et de viscosité à la paroi (en noir), ainsi que la force estimée par la formulation diffusive pour les différents domaines d'intégration. On constate que pour tous les domaines considérés la force est parfaitement estimée, tant pour la composante de traînée que pour celle de portance, ce qui valide l'approche consistant à estimer la force à partir de la formulation diffusive.

Des différences apparaissent en revanche lorsque l'on décompose la formulation en contributions de domaine (intégrale IDV) et de contour.

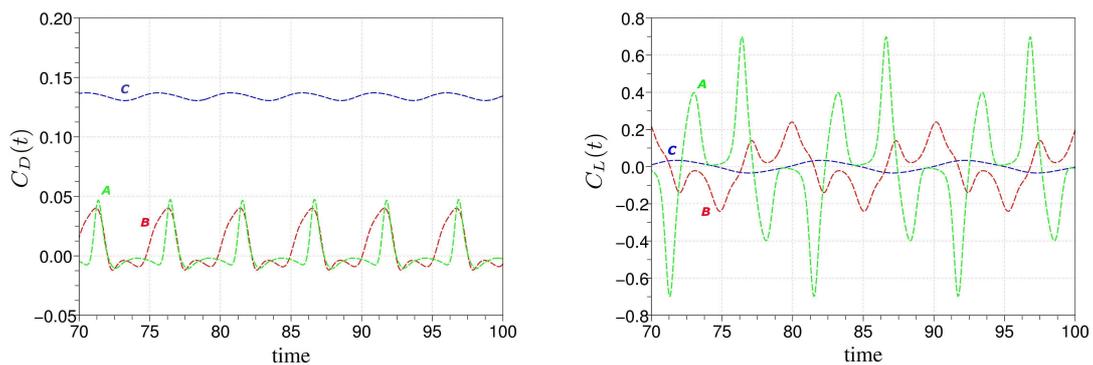
La contribution de domaine à la force de traînée (figure 4.8(b) à gauche) est sous-estimée mais parfaitement sinusoïdale pour le petit domaine ('C'). Puis lorsque l'on considère des domaines d'intégration plus grands ('B' puis 'A'), le niveau moyen de la contribution de domaine semble converger. Les séries temporelles ne sont en revanche plus parfaitement sinusoïdales.



(a) Somme des contributions (intégration pression-viscosité en noir)



(b) Intégrale de domaine IDV



(c) Intégrale de contour

FIG. 4.8 – Contributions à la force pour différents domaines d'intégration à $Re = 200$; en vert le domaine 'A' ($R_\Gamma = 10$), en rouge le domaine 'B' ($R_\Gamma = 5$) et en bleu le domaine 'C' ($R_\Gamma = 1.5$). La traînée (C_D , projection de la force sur e_x) et ses contributions sont à gauche, la portance (C_L , projection de la force sur e_y) et ses contributions sont à droite.

On observe des comportements similaires pour la *contribution de contour* (figure 4.8(c) à gauche) : pour le domaine 'C', le signal est sinusoïdal mais de niveau moyen non négligeable ($\approx 10\%$ de la force totale). Pour les domaines d'intégration plus grands, ce niveau diminue et le terme de contour peut être négligé. On aura donc tendance à privilégier les domaines d'intégration grands dans le cadre de notre étude afin de déterminer au mieux la force de traînée à partir de l'intégrale de domaine uniquement. L'erreur en « norme 2 »^V entre la contribution de domaine et la traînée totale vaut par exemple 1.4% pour le domaine 'B'.

La *contribution de domaine* à la force de portance (figure 4.8(b) à droite) fait apparaître une amplification du « bruit » déjà observé pour la traînée, à savoir que plus le domaine d'intégration est grand et moins le signal est sinusoïdal et proche de la force totale. Ainsi l'erreur en norme 2 de la contribution de domaine par rapport à la portance totale représente entre 2,3% et 28% selon que l'on considère un domaine petit 'C' ou grand 'A'. Ce phénomène est également visible pour la *contribution de contour* (figure 4.8(c) à droite) avec un signal de plus en plus fort à mesure que l'on augmente la taille du volume d'intégration. Comme on l'a déjà évoqué page 71, ce bruit est dû à la présence combinée du maillage moins raffiné en aval et du vecteur position de plus en plus grand ; ainsi la projection sur e_y donnant la portance dépend de x et amplifie les erreurs de calcul de la vorticité et de ses dérivées spatiales sur les mailles plus grandes en aval. Ces erreurs se compensent entre les termes de domaine et de contour (ce qui fait penser que l'erreur provient plus du calcul de la vorticité elle-même que d'une erreur sur les dérivées spatiales), et on estime convenablement la force totale même pour les grands domaines d'intégration ; en revanche lorsque l'on ne considère qu'un des termes (dans notre cas le terme de domaine), les erreurs ne sont plus compens es et deviennent problématiques.

Il s'agit donc pour notre étude de considérer le meilleur domaine d'intégration, soit celui qui permet à la fois une bonne estimation de la traînée et une bonne estimation de la portance à partir du terme de domaine uniquement. Il faut que ce domaine soit ni trop petit afin de prendre en compte toute la force de traînée, ni trop grand afin de ne pas trop dégrader le calcul de la vorticité et de ses dérivées spatiales, spécialement pour le calcul de la portance où l'erreur est amplifi e par le vecteur position.

4.2.5 Conclusion sur l'utilisation de la formulation diffusive

La formulation diffusive permet d'estimer précisément la force aérodynamique grâce à deux contributions : une intégrale calcul e sur le domaine et une intégrale calcul e sur le contour. Contrairement à la formulation advective, l'intégrale de contour de la formulation diffusive peut être n glig e pour des domaines d'intégration bien choisis compte tenu du maillage utilisé. Plus clairement dans notre cas, nous utilisons un maillage relâché loin du cylindre circulaire, il ne faut donc pas prendre en compte les noeuds trop éloignés du cylindre sous peine de faire intervenir des laplaciens de vorticité moins bien calculés avec les schémas aux différences finies ; ce phénomène est de plus amplifié par la pondération du laplacien par le vecteur position. Il ne faut pas non plus considérer un domaine d'intégration trop petit rejetant trop d'information sur le contour. Dans les autres cas, soit pour notre étude en considérant des domaines de d'intégration

^VLa norme 2 ou valeur RMS (Root Mean Square) est définie pour une série temporelle $\Phi(t)$ comme $\sqrt{\langle \Phi(t)^2 \rangle_t}$.

circulaires de rayon R_Γ compris entre 3 et 7^{VI} , l'intégrale de contour peut être négligée. Cette observation rejoint l'étude de Wu *et al.* [95], dans laquelle il était montré que les termes de bords ne représentaient jamais plus de 10% de la force dans le cas d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire pour un nombre de Reynolds assez élevé ($Re = 9500$).

On fixe donc un domaine d'intégration de référence (le domaine '**B**' de rayon $R_\Gamma = 5$) pour la suite de l'étude, dans lequel la force calculée avec l'intégrale de domaine uniquement peut être considérée équivalente à une estimation classique de la force *via* une intégration de la pression et des efforts visqueux (les erreurs en norme 2 entre l'intégrale de domaine et la force calculée de façon classique sont de 1.4% pour la traînée et 8.3% pour la portance). On peut écrire pour ce domaine :

$$\mathbf{F}(t) \approx -\mu \int_{\mathcal{F}} \Delta\omega \mathbf{x}^\perp dV. \quad (4.30)$$

Ce résultat répond à une des questions majeures soulevées dans cette thèse : pour un volume d'intégration bien choisi on dispose d'une densité volumique de force $\mathbf{f}_v = -\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$. Cette densité de force constitue la base de la caractérisation des contributions des structures cohérentes. Nous allons maintenant passer à l'analyse volumique de la force.

4.3 Contributions des différentes structures cohérentes

4.3.1 Séparation de structures

Minimisation du domaine d'intégration

On cherche tout d'abord à voir s'il est possible de minimiser le domaine d'étude à l'intérieur du domaine d'intégration '**B**' sans perdre d'information sur la force. On calcule la force pour un domaine rectangulaire aux contours fixes en aval, en haut et en bas du cylindre et variable en aval. Le nouveau domaine d'intégration ne dépend donc que de la taille longitudinale λ du domaine (figure 4.9). La forme rectangulaire du nouveau domaine est en outre plus en adéquation avec la forme du sillage derrière le cylindre qu'un domaine d'intégration circulaire.

Les contours fixes en amont et de part et d'autre du cylindre sont pris de telle sorte que les valeurs de vorticité, de laplacien de vorticité et donc des intégrandes de contour sont nuls. On fixe ainsi pour tous les nombres de Reynolds l'abscisse amont $X_{min} = -1.5$, l'ordonn e inférieure $Y_{min} = -2$ et l'ordonn e supérieure $Y_{max} = 2$. On fait varier la taille du domaine $-1.5 \leq \lambda \leq 4.3$; la valeur maximale $\lambda_{max} = 4.3$ permet de conserver le domaine rectangulaire à l'intérieur du domaine circulaire '**B**'. Le cylindre est totalement inclus dans le domaine d'intégration à partir de $\lambda = 2.5$, les valeurs supérieures permettant de prendre en compte une partie plus ou moins importante du sillage à l'arrière.

L'intégration de la densité de force calcul e dans le domaine de longueur λ (figure 4.10) fait apparaître un plateau à partir d'une certaine longueur de domaine. Cela veut dire qu'au-delà

^{VI}On peut remarquer qu'en utilisant un maillage plus raffini dans le sillage permettant un calcul plus précis du laplacien de vorticité, la taille maximale du domaine d'intégration permettant de négliger le terme de bord devrait être (virtuellement) infinie.

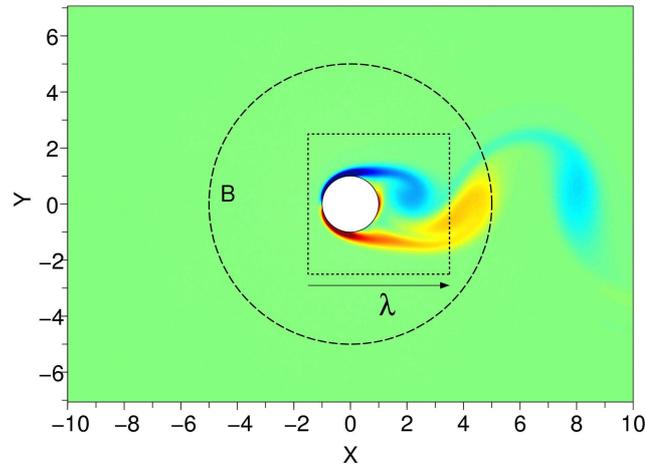


FIG. 4.9 – Différents domaines d'intégration rectangulaires fonctions de la longueur λ à l'intérieur du domaine B ($R_\Gamma = 5$) pour lequel l'intégrale de contour est négligeable.

d'une certaine taille λ , toute l'information sur la force est contenue dans le domaine d'intégration. On procède au même type d'étude pour plusieurs nombres de Reynolds afin de déterminer les

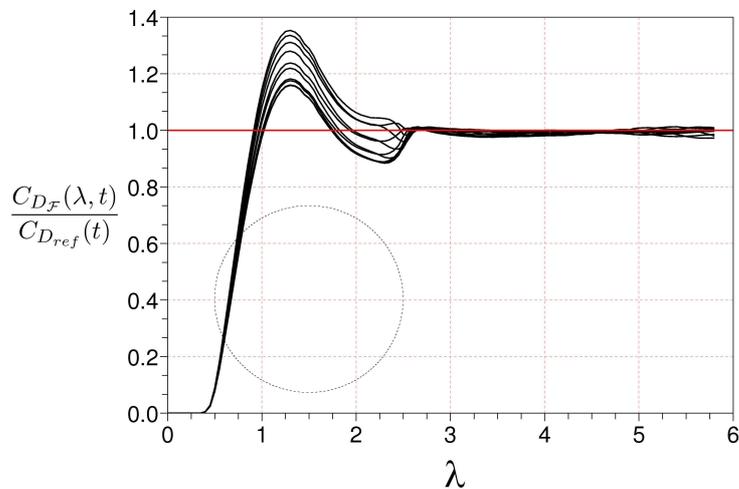


FIG. 4.10 – Rapport entre la force de traînée $C_{D_{\mathcal{F}}}(\lambda, t)$ calculée à chaque pas de temps dans un domaine d'intégration rectangulaire de longueur λ et la force de traînée $C_{D_{ref}}(t)$ calculée instantanément avec la formulation pression/viscosité ($Re = 400$).

valeurs de λ , valeurs reportées dans le tableau 4.1 ainsi que les valeurs de traînée moyenne correspondantes pour le calcul dans le domaine rectangulaire $C_{D_{\mathcal{F}}}$ et pour l'intégration de la pression et de la viscosité à la paroi $C_{D_{ref}}$. On se rend compte que pour tous les nombres de Reynolds considérés, il suffit d'intégrer la densité de force dans des domaines petits pour retrouver les valeurs de force correspondant aux valeurs de référence. Le sillage inclus dans le domaine d'intégration ne comporte alors ni les tourbillons du sillage, ni le premier enroulement.

Re	Y_{min}	Y_{max}	X_{min}	X_{max}	λ	$C_{D_{ref}}$	$C_{D_{\mathcal{F}}}$
50	-2.0	2.0	-1.5	2.0	3.5	1.437	1.430
100	-2.0	2.0	-1.5	1.8	3.2	1.327	1.332
200	-2.0	2.0	-1.5	1.6	3.1	1.323	1.326
300	-2.0	2.0	-1.5	1.5	3.0	1.360	1.356
400	-2.0	2.0	-1.5	1.5	3.0	1.387	1.379

TAB. 4.1 – Tableau récapitulatif des dimensions des domaines d’intégration rectangulaires utilisés pour différents nombres de Reynolds ainsi que des valeurs de traînée moyenne obtenues pour ces domaines d’intégration.

Cette observation est en outre cohérente avec la contribution négligeable du terme de contour pour ce domaine d’intégration : le contour étant au niveau du sillage développé, la somme des densités de force proches du contour est négligeable et l’intégrale de contour censée « équilibrer » la formulation diffusives est elle aussi négligeable. Toute l’information est bien incluse dans une zone proche de la paroi et les intégrandes deviennent négligeables lorsque l’on s’éloigne de l’obstacle.

Contribution des structures du sillage

On a vu qu’un petit domaine d’intégration n’incluant que très peu de sillage est suffisant pour estimer la force. On peut également s’en convaincre en calculant la contribution à la force des structures tourbillonnaires du sillage. On effectue pour cela une détection de structure à l’aide du critère Q avec un seuil assez faible pour capter les structures tourbillonnaires dans leur ensemble (figure 4.11). On calcule ensuite la contribution à la force estimée par la formulation diffusives pour les structures tourbillonnaires dans le sillage (*i.e.* en aval du domaine rectangulaire dépendant de λ). On obtient par exemple pour un instantané à $Re = 400$ une contribution de -0.003 à la force de traînée, à mettre en rapport à la valeur 1.51 calculée dans le domaine d’intégration rectangulaire \mathcal{F} avec $\lambda = 3.0$. Les intégrandes présents en aval se compensent entre eux et leur intégration donne une valeur négligeable : le sillage ne contribue donc pas à la force.

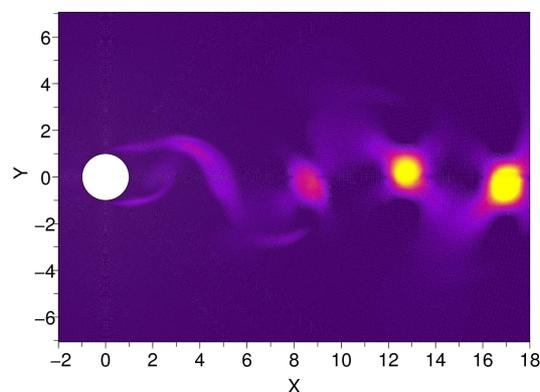


FIG. 4.11 – Critère Q pour un écoulement à $Re = 300$ autour d’un cylindre circulaire (seuil : $Q > 40$).

Détection de structures proche paroi

On a évoqué dans la partie 2.4 la difficile détection des structures en proche paroi. La représentation du critère Q (figure 4.11) en donne une illustration, puisque le seuil utilisé pour visualiser les tourbillons ne permet pas de visualiser en même temps les couches limites, et donc toutes les structures cohérentes présentes près du cylindre. Les autres critères de détection présentés dans la partie 2.4.2 souffrent tous du même problème de définition au niveau de la proche paroi et la détection simultanée des structures tourbillonnaires et des structures de type couches cisillées est impossible.

L'intégration de la densité de force autour des structures définies à l'aide de critères habituels n'est donc pas cohérente dans le domaine d'intégration que nous avons défini. Afin de distinguer et séparer les différentes structures de l'écoulement au voisinage du cylindre, il est donc nécessaire de déterminer une autre méthode de détection. On utilise pour ce faire le laplacien de vorticité et plus particulièrement le signe du laplacien de vorticité (figure 4.12). Ce nouveau « critère de détection » est pertinent physiquement puisqu'il est directement lié à la vorticité et à son évolution tant spatiale que temporelle (voir la partie 4.2.2 page 70) ; c'est de plus le terme essentiel dans la formulation diffusive.

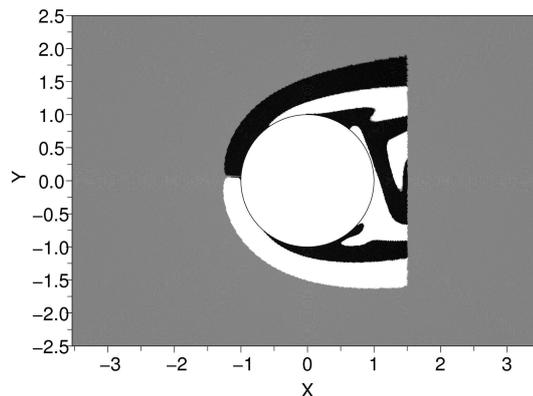
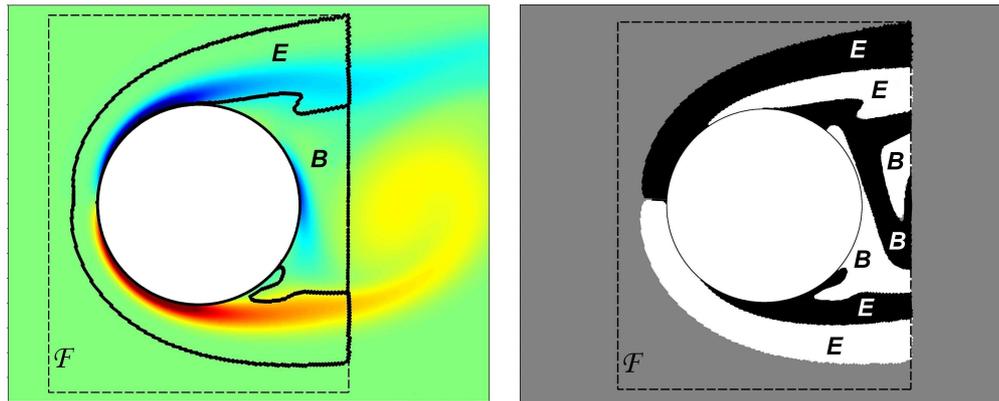


FIG. 4.12 – Signe du laplacien de vorticité à $Re = 300$ (-1 en noir et $+1$ en blanc).

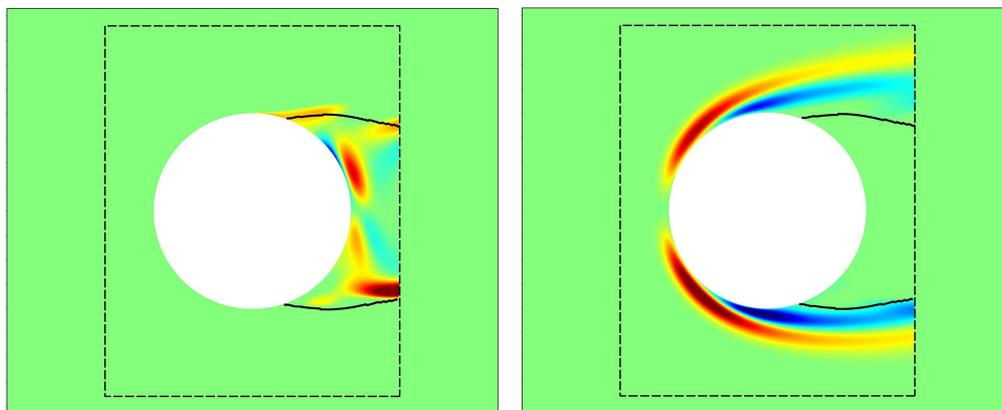
La première étape de détection de structure consiste donc à séparer les zones de laplacien de vorticité de signes distincts. Pour ce faire, on utilise un seuil égal à un millième de la valeur absolue du maximum de laplacien de vorticité à chaque instant ; seules les valeurs absolues supérieures à ce seuil sont conserv es. On assigne ensuite la valeur $+1$ aux laplaciens de vorticité positifs et la valeur -1 aux laplaciens de vorticité négatifs et on détecte les contours de chaque zone. On affecte enfin les noeuds du domaine à chaque zone ainsi d tect e à l'aide d'un algorithme d'appartenance en deux dimensions codé en langage C. On obtient alors les zones blanches et noires de la figure 4.12.

Recombinaison du laplacien de vorticité

Une fois les différentes zones de l'écoulement s par es selon le signe du laplacien de vorticité, le problème consiste à les recombinaison afin de constituer les structures cohérentes. On va donc revenir aux différentes sources de vorticité dans le domaine afin de déterminer les structures au voisinage du cylindre puis d'associer à ces sources une combinaison de zones aux signes de laplacien de vorticité alternés.



(a) Zones de recirculation 'B' et externe 'E' identifi es sur un champ de vorticité
 (b) Association des zones de signes de laplacien de vorticité différents correspondant aux régions 'E' et 'B'



(c) Intégrande IDV dans la région de recirculation 'B' (en noir la ligne $\psi = 0$)
 (d) Intégrande IDV dans la région externe 'E' (en noir la ligne $\psi = 0$)

FIG. 4.13 – Recombinaison des régions de l'écoulement à partir du laplacien de vorticité ($Re = 300$).

On peut distinguer trois sources de vorticité à la surface du cylindre (figure 4.13(a)). Deux sources sont li es à l'accélération du fluide en amont du cylindre créant deux couches limites dans lesquelles la vorticité se diffuse. Ces deux couches limites se séparent ensuite du cylindre pour créer des couches cisillées de signes de vorticité opposés. Ces deux sources de vorticité sont consid r es ensemble dans la suite de l'étude et appel es *couches de vorticité*. Une troisième source

de vorticité est li e à l'interaction entre le cylindre, les couches cisillées et le premier enroulement en aval^{VII}. Cette source est appel e *région de recirculation arrière* par la suite.

Une fois ces sources identifi es, il s'agit maintenant d'associer à chacune d'entre elles les zones d tect es à partir du signe de laplacien de vorticité. On identifie deux parties dans l'écoulement correspondant à l'écoulement arrière englobant la zone de recirculation, et l'écoulement externe englobant les couches de vorticité (figure 4.13(b)). La région arrière est constitu e des zones not es 'B' (pour *back-flow*); la deuxième région est constitu e des zones not es 'E' (pour *external flow*). Les deux régions sont identifi es sur un champ de vorticité (figure 4.13(a)).

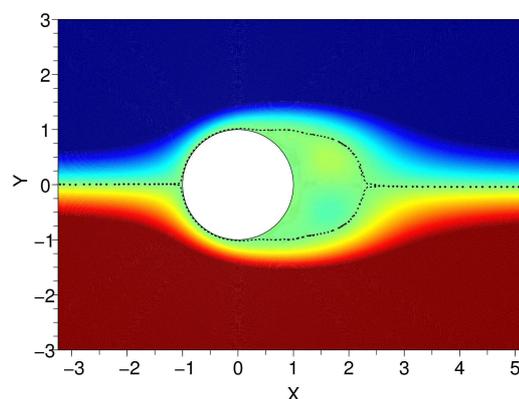


FIG. 4.14 – Fonction de courant ψ pour un écoulement moyen   $Re = 300$; la ligne pointill e représente les valeurs $\psi = 0$.

Il est possible de faire un parallèle entre notre décomposition instantan e et une séparation plus classique faisant intervenir la bulle de recirculation. Celle-ci est définie pour un écoulement moyen à partir de la ligne de courant $\psi = 0$ constituant son enveloppe (figure 4.14). Si l'on compare la bulle de recirculation ainsi définie avec notre critère de détection, figure 4.13(b), on se rend compte que la séparation entre écoulement externe et écoulement arrière correspond approximativement à l'enveloppe de la bulle de recirculation. Cette correspondance apparaît également lorsque l'on s'intéresse à la densité de force de traînée par exemple, avec des différences minimales pour la définition de la traînée due à la zone arrière (figure 4.13(c)), et pas de différence pour l'écoulement externe (figure 4.13(d)). Les structures obtenues avec notre méthode de séparation instantan e ressemblent donc aux structures obtenues classiquement avec la séparatrice du champ moyen de la fonction de courant, mais permettent une étude instationnaire de ces structures contrairement à la méthode classique.

Il est théoriquement possible de mener ce type d'étude pour des nombres de Reynolds plus grands. Le problème que nous avons rencontré à partir de $Re = 500$ ne provient ni du code numérique, ni du domaine d'intégration utilisé, mais de la recombinaison du laplacien de vorticité. Il a été montré que plus le nombre de Reynolds est important, plus l'enroulement des tourbillons

^{VII}Bien que non inclus dans le domaine d'intégration, le premier enroulement a une forte influence sur l'écoulement en aval immédiat du cylindre.

s'effectue près de l'arrière du cylindre (Nishioka [64]). Les interactions entre les couches de vorticité et le premier enroulement sont alors de plus en plus importantes et situ es de plus en plus près du culot. La séparation des structures en utilisant le laplacien de vorticité devient alors difficile car une des zones appartenant aux couches de vorticité est reli e à la zone de recirculation (figure 4.15). Le domaine d'intégration utilisé devrait donc ˆtre pris de plus en plus petit jusqu'à

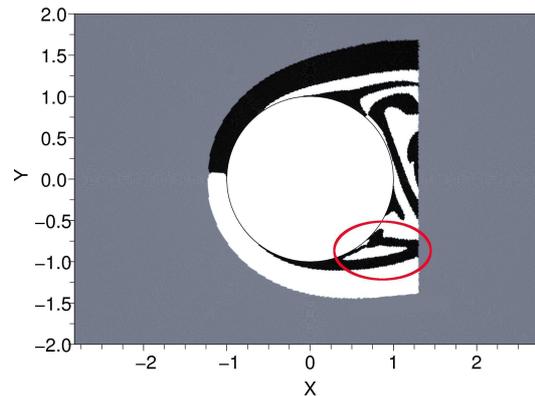


FIG. 4.15 – Signe du laplacien de vorticité à $Re = 1000$ (-1 en noir et +1 en blanc) ; la zone problématique est indiqu e en rouge.

toucher quasiment le culot du cylindre afin de bien séparer les couches de vorticité et la région de recirculation. Les pertes d'information dans le volume sont alors très importantes, notamment sur la force de traînée. Nous nous sommes donc restraints à des nombres de Reynolds $Re < 500$.

4.3.2 Analyse des contributions s epar es

Décomposition des efforts moyennés et fluctuants

Les séries temporelles de traînée et portance des deux contributions (figure 4.16) sont obtenues en intégrant la densité de force dans les régions correspondantes. On observe que la plus grande partie de la traînée est due à la contribution des couches de vorticité, ce quelque soit le nombre de Reynolds. Les fluctuations sont quant à elles perçues quasiment en totalité par la région de recirculation (les séries temporelles de la traînée de l'écoulement externe sont presque constantes) et augmentent avec le nombre de Reynolds.

Pour la portance en revanche on observe des contributions de mˆme ordre de la part de l'écoulement externe et de la région de recirculation. Là encore l'amplitude des oscillations augmente avec le nombre de Reynolds.

Afin d'observer plus précisément les rˆles des structures sur la force, on effectue une décomposition en efforts moyennés dans le temps et efforts fluctuants. De part la symétrie du cylindre étudié, la portance moyenne est nulle. On observe tout d'abord sur la figure 4.17 que la traînée moyenne calcul e avec la formulation diffusive totale (*i.e.* avec intégrales de domaine IDV et de

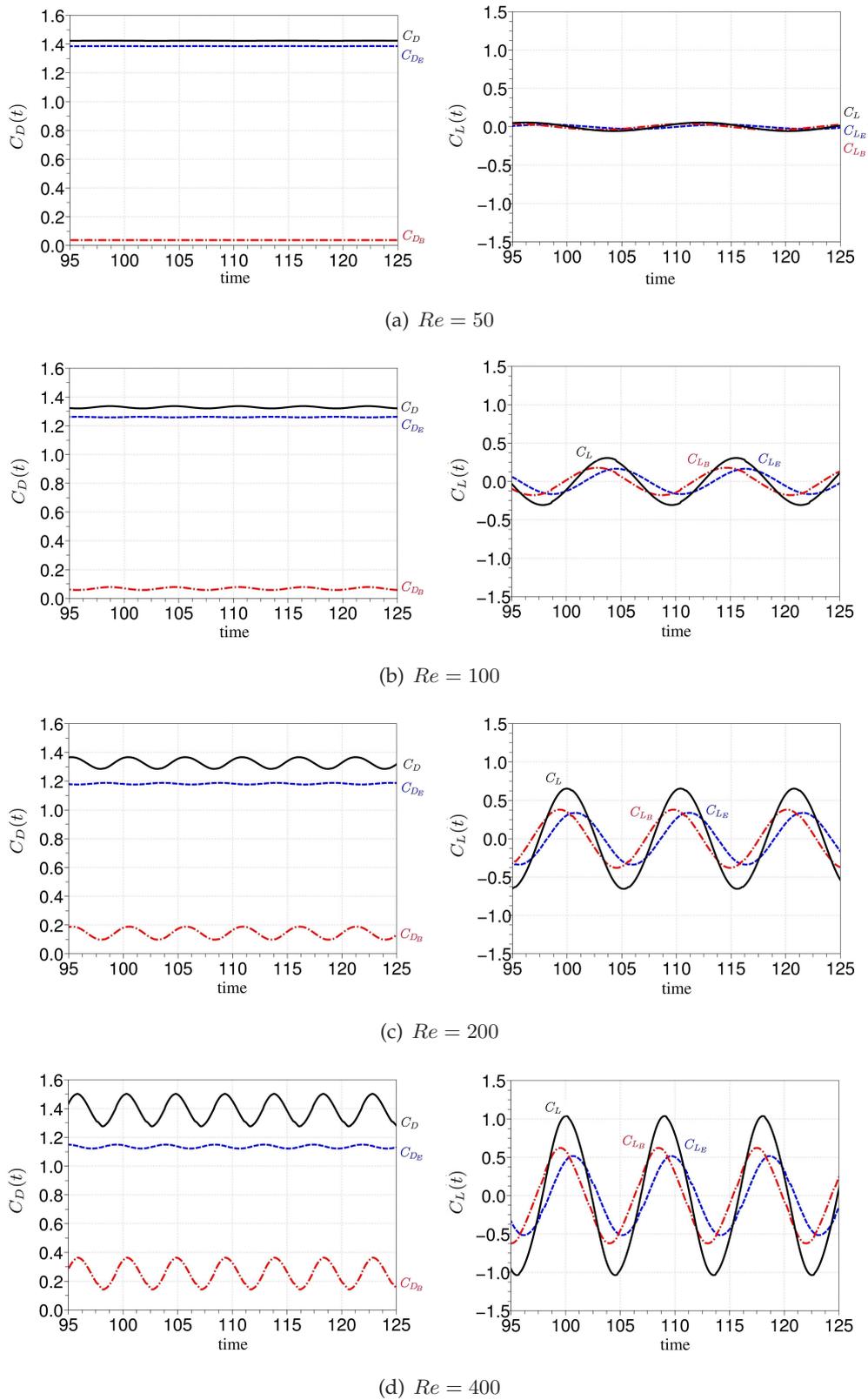


FIG. 4.16 – Contributions des zones de l'écoulement à la force projetées sur e_x (gauche) et e_y (droite) pour différents nombres de Reynolds ; en bleu l'écoulement externe (région 'E'), en rouge l'écoulement arrière (région 'B') et en noir la force totale.

contour) comme la traînée calculée à partir de l'intégrale IDV uniquement dans le domaine d'intégration rectangulaire correspondent bien à la littérature (Henderson [37])^{VIII}.

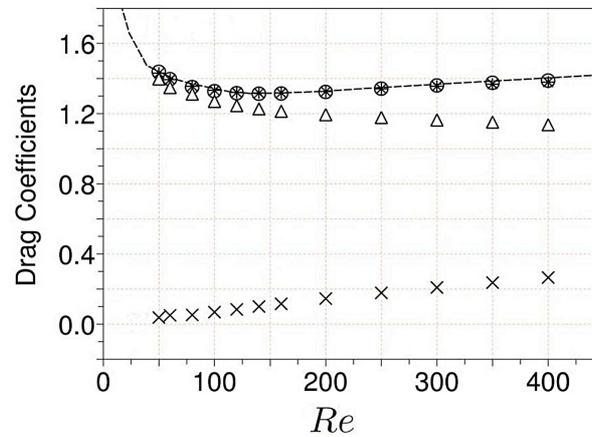


FIG. 4.17 – Coefficients de traînée moyens en fonction du nombre de Reynolds avec les résultats de Henderson *et al.* [37] en pointillés, Δ la contribution de l'écoulement externe, \times celle de l'écoulement de recirculation, $*$ la somme des contributions et \circ la force diffusive totale.

L'étude des contributions fait apparaître que la principale contribution à la traînée moyenne est celle des couches de vortex. Celle-ci constitue ainsi 97% de la traînée moyenne totale à $Re = 50$ et diminue ensuite continuellement pour représenter 82% de la traînée moyenne totale à $Re = 400$. Dans le même temps la contribution de la région de recirculation augmente avec le nombre de Reynolds.

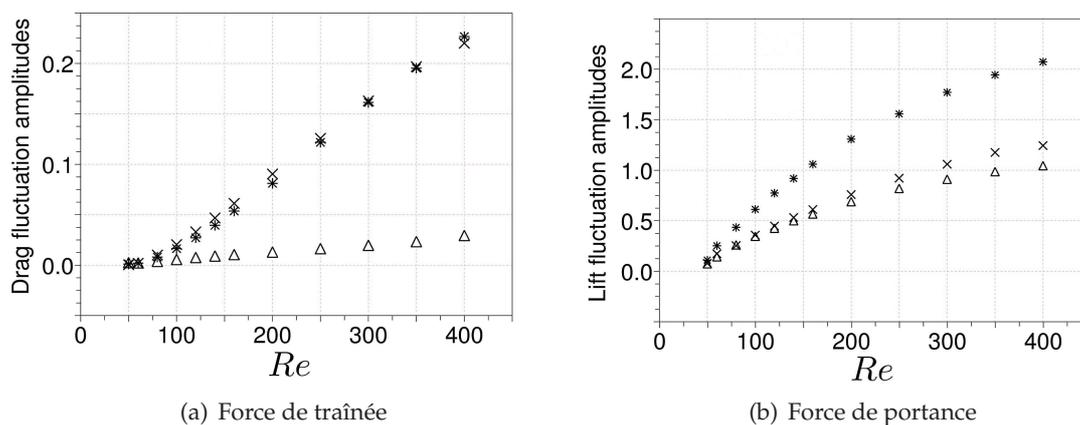


FIG. 4.18 – Amplitude des fluctuations des coefficients de force en fonction du nombre de Reynolds avec Δ la contribution de l'écoulement externe, \times celle de l'écoulement de recirculation et $*$ la somme des contributions.

^{VIII}La traînée moyenne diminue jusqu'à $Re = 140$ puis augmente à nouveau avec le nombre de Reynolds. Ce comportement ne peut être observé expérimentalement, Williamson [93] ayant montré que les effets 3D apparaissent à partir de $Re \approx 180$ pour un cylindre à section circulaire; il faut en effet conserver à l'esprit que ce sont les solutions 2D de l'équation de Navier-Stokes qui sont étudiées ici et non une représentation physique d'un sillage de cylindre à différents nombres de Reynolds.

L'étude de l'amplitude des oscillations de la traînée en fonction du nombre de Reynolds (figure 4.18(a)) confirme que celles-ci sont uniquement dues à la région de recirculation, tandis que les oscillations de la portance (figure 4.18(b)) résultent des deux structures à parts égales. On peut en outre observer un déphasage entre la portance due à la région de recirculation et l'écoulement externe. Ce déphasage est calculé pour les différents nombres de Reynolds (figure 4.19) et présente une valeur constante ($\approx \frac{\pi}{4}$) à partir de $Re \geq 100$.

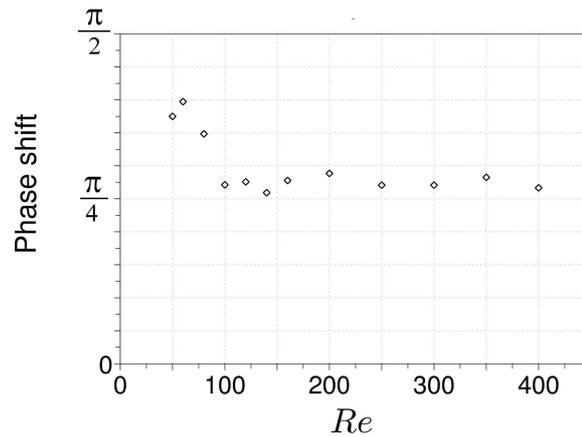


FIG. 4.19 – Valeur du déphasage entre la force de portance de l'écoulement externe et celle de l'écoulement arrière pour différents nombres de Reynolds.

Il n'est pas étonnant de trouver une avance de phase entre la portance de la zone de recirculation arrière et la portance des couches de vortex. En effet les instabilités globales dans un écoulement conditionnent toute la dynamique de l'écoulement (Chomaz [18]) ; dans notre cas l'instabilité est créée par l'enroulement des couches de vorticité en tourbillons lâchés périodiquement dans le sillage. Cette instabilité se trouvant dans la zone de recirculation arrière, le signal de portance calculé dans cette zone va donc être en avance par rapport à celui calculé dans l'écoulement externe. Nous n'avons en revanche pas d'explication à la valeur constante observ e pour le déphasage pour les nombres de Reynolds $Re \geq 100$.

Analyse de la décomposition

Deux régions de l'écoulement ont été s par es : l'écoulement externe contenant les couches de vorticité et la région de recirculation arrière contenant la vorticité produite par l'intéraction entre le premier enroulement à l'arrière du cylindre et les couches limites s par es. Nous allons maintenant analyser les évolutions des contributions de ces deux régions à la force en fonction du nombre de Reynolds.

La contribution des couches de vorticité peut être approxim e par une fonction en puissance du nombre de Reynolds (figure 4.20) :

$$C_{DE} = C_0 + 2.75Re^{-1/2}. \quad (4.31)$$

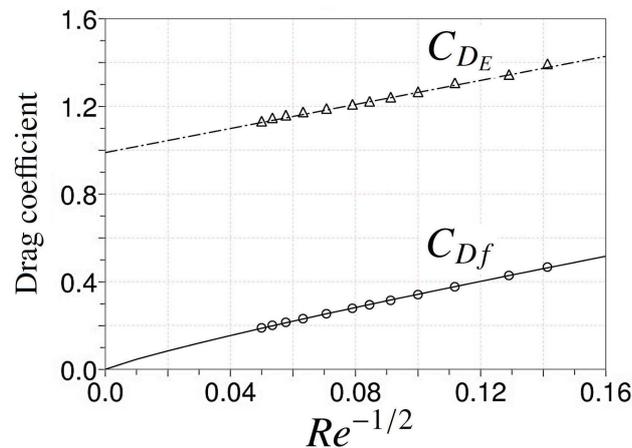


FIG. 4.20 – Coefficient de traînée moyen de l'écoulement externe C_{DE} et du coefficient de traînée visqueuse C_{Df} en fonction de $Re^{-1/2}$.

Les couches de vorticité creent localement un frottement à l'endroit où les couches limites sont attach es au cylindre (*i.e.* avant la séparation), et l'évolution du coefficient de traînée des couches de vorticité C_{DE} est en accord avec l'évolution d'un coefficient de traînée visqueuse de couche limite en fonction du nombre de Reynolds (Batchelor [7]). Si l'on s'intéresse en outre à la traînée visqueuse calcul e à partir du tenseur de viscosité à la surface du cylindre ( quation (4.26)), on obtient une  volution^{IX} très proche de celle de C_{DE} :

$$C_{Df} = 2.54Re^{-0.44}. \quad (4.32)$$

On en déduit que les couches de vorticité contiennent les effets de viscosité. On associe alors l'évolution en nombre de Reynolds de la traînée des couches de vorticité à ces effets de viscosité, et l'importante contribution constante par rapport au nombre de Reynolds comme un effet propre à la géométrie de l'obstacle.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de la traînée de la zone de recirculation arrière C_{DB} . Cette contribution s'intensifie lorsque le nombre de Reynolds augmente (figure 4.21) contribuant de 3% de la traînée totale à $Re = 50$ jusqu'à atteindre 20% de la traînée totale à $Re = 400$. On a vu que cette intensification de la contribution de la zone de recirculation est li e à une intensification de la densité de force à l'arrière du cylindre crée par les interactions entre les couches limites d tach es et le premier enroulement tourbillonnaire.

On observe également un accroissement des fluctuations de traînée à l'arrière du cylindre. Ce phénomène, on l'a déjà évoqué, est connu pour être li e à la dynamique de l'enroulement tourbillonnaire : plus le nombre de Reynolds augmente, plus l'enroulement s'effectue près du culot et plus les fluctuations sont fortes (Nishioka [64]). Il est possible d'estimer la distance entre le culot du cylindre et l'endroit du premier enroulement *via* la longueur de la bulle de recirculation L (Gerrard [30]). Cette longueur est définie comme le point de jonction aval de l'enveloppe de la bulle de recirculation (voir figure 4.14 et insert dans la figure 4.21). On trouve alors une relation linéaire entre la traînée de la zone de recirculation C_{DB} et l'inverse de la longueur de la bulle L

^{IX}Cette évolution est également en accord avec celle trouv e par Henderson [37].

adimensionnée par le diamètre du cylindre d (figure 4.21) :

$$C_{D_B} = 0.11 \left(\frac{L}{d} \right)^{-1}. \quad (4.33)$$

On voit donc que lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'enroulement a lieu de plus en plus près du cylindre ; les interactions entre le cylindre, le premier enroulement et les couches cisailées sont de plus en plus fortes ; et la traînée de la zone de recirculation augmente.

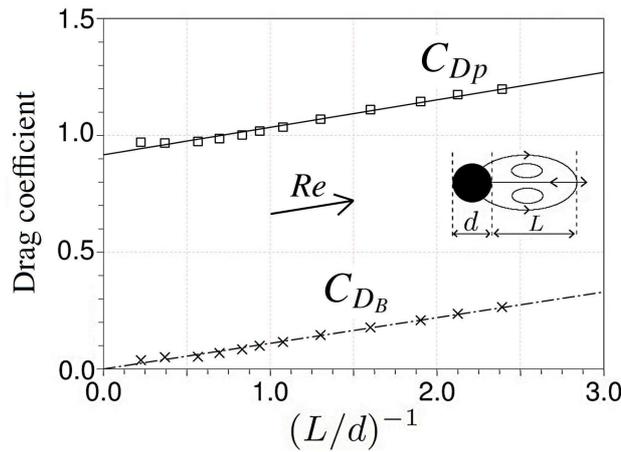


FIG. 4.21 – Coefficient de traînée moyen de l'écoulement de recirculation C_{D_B} et coefficient de traînée de forme C_{D_p} en fonction de la longueur de la bulle de recirculation adimensionnée par le diamètre du cylindre $\frac{L}{d}$.

On a également représenté la traînée de forme (ou traînée de pression) C_{D_p} calculée à partir de l'équation (4.21) en fonction de la longueur de recirculation adimensionnée $\frac{L}{d}$ sur la figure 4.21. L'évolution de cette traînée de pression est très semblable à l'évolution de la traînée de la zone de recirculation :

$$C_{D_p} = C_0' + 0.12 \left(\frac{L}{d} \right)^{-1}. \quad (4.34)$$

On en déduit donc que la traînée de forme peut être décomposée en deux parties : une partie constante captée par les couches de vorticités et qu'on a vu liée à la géométrie de l'obstacle, et une partie liée à l'enroulement tourbillonnaire captée par la zone de recirculation.

Liens avec le contrôle d'écoulement

On peut relier les observations de l'évolution de la traînée de la zone de recirculation au contrôle de sillage présenté dans le chapitre 3. On a vu que la présence d'un petit cylindre de contrôle dans le sillage permet de réduire la traînée du cylindre principal à hauteur de 36%. Cadot *et al.* [14] ont de plus montré que cette technique de contrôle permet de repousser l'enroulement en aval et d'augmenter la taille de la bulle de recirculation.

L'application de la formulation diffusive tend à montrer que ces techniques de contrôle ont en fait pour effet majeur de supprimer la traînée de la zone de recirculation C_{D_B} et d'atténuer fortement les fluctuations à l'arrière du cylindre en repoussant plus loin en aval le premier enrou-

lement, qui devient alors trop éloigné de l'obstacle pour induire une vorticité arrière. On ne peut malheureusement pas directement appliquer la formulation diffusive à nos champs expérimentaux, la résolution n'étant pas assez bonne pour calculer le laplacien de vorticité.

4.4 Validation de l'approche pour FLUENT

Afin de vérifier que cette méthode peut être mise en oeuvre dans un contexte industriel, nous avons effectué les mêmes simulations de l'écoulement autour d'un cylindre à section circulaire à l'aide du logiciel FLUENT    $Re = 400$. L'algorithme de couplage vitesse-pression est un algorithme SIMPLE et le schéma de résolution pour l'équation de quantité de mouvement est un schéma du second ordre QUICK. Le maillage est très semblable à celui utilisé par le code académique psi-omega (figure 4.22), avec une petite différence à la paroi : la première maille est plus raffin  e afin de limiter les erreurs lors du calcul du laplacien de vorticité.

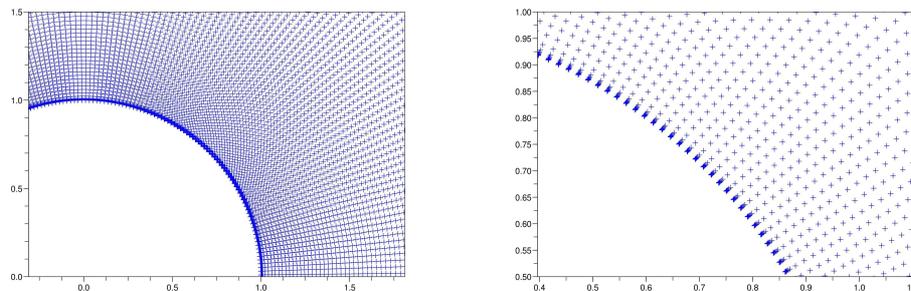


FIG. 4.22 – Maillage utilisé avec FLUENT.

Les résultats obtenus pour la force sont assez satisfaisants (figure 4.23). Comme pour le code

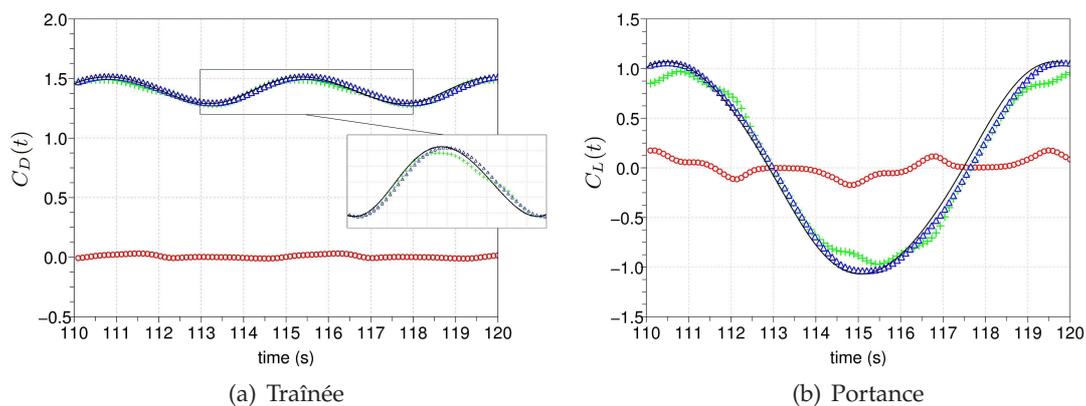


FIG. 4.23 – Force obtenue avec FLUENT ; en noir la référence obtenue par intégration des forces de pression et de viscosité à la paroi du cylindre, en bleu la formulation diffusive, en vert l'intégrale de domaine et en rouge l'intégrale de contour.

académique, on note quelques différences entre la référence donn  e par l'intégration des forces de

pression et de viscosité à la paroi du cylindre et l'intégrale de domaine de la formulation diffusive. Ces erreurs sont là encore à mettre sur le compte du calcul du laplacien de vorticité, soit des dérivées spatiales troisièmes du champ de vitesse. Les gradients élevés sont en effet connus pour être difficilement calculés par les codes basés sur les volumes finis et il faut prendre encore plus de précaution quant au domaine d'intégration utilisé.

4.5 Conclusion

La formulation diffusive semble parfaitement remplir les conditions imposées par notre étude : l'intégrale de contour devient très rapidement négligeable devant l'intégrale de domaine, ce qui permet d'effectuer des intégrations volumiques partielles autour de structures cohérentes préalablement déterminées. Cette méthode a été appliquée avec succès dans le cas d'un cylindre circulaire en deux dimensions, pour lequel on a réussi à analyser deux contributions : la contribution des couches de vorticité (les couches limites transformées après séparation du cylindre en couches cisailées) et la zone de recirculation arrière. On a ainsi pu voir que tous les effets de viscosité sont dus à la structure des couches cisailées. Les effets de pression sont quant à eux dus pour partie aux couches de vorticité *via* une constante définie par la séparation de l'écoulement autour de l'obstacle (et donc à la géométrie de celui-ci), et pour partie à la zone de recirculation arrière captant les fluctuations et dont le poids grandit lorsque le nombre de Reynolds augmente et que les interactions entre l'enroulement tourbillonnaire et les couches cisailées se rapprochent du culot. Il n'aurait notamment pas été possible de quantifier les effets de pression de chaque structure sans cette formulation.

Il s'agit maintenant d'appliquer cette formulation à des écoulements plus complexes, par exemple en trois dimensions. Deux difficultés vont apparaître. Une première difficulté, d'ordre fondamentale, consiste à identifier les structures cohérentes. On a utilisé le laplacien de vorticité dans l'étude 2D mais il n'est pas certain que cela soit encore possible en 3D (on a par exemple vu que même en 2D, ce critère de détection n'est pas adapté pour des nombres de Reynolds élevés). La deuxième difficulté est d'ordre numérique et consiste à être certain de bien estimer le laplacien de vorticité. On a vu dans cette partie que même pour des codes numériques bien adaptés à notre problématique, le risque d'erreur numérique est assez élevé : on s'intéresse aux dérivées spatiales troisièmes de la vitesse, or les effets du maillage deviennent très importants pour les calculs de dérivées d'ordre supérieur. De plus la majorité des phénomènes se passe au voisinage de la paroi de l'obstacle ; il faut donc veiller à ce que la couche limite soit parfaitement bien simulée. La méthode a néanmoins été transposée avec des résultats concluants dans le code commercial FLUENT, ce qui permet d'envisager une utilisation des moyens numériques de PSA Peugeot Citroën pour continuer notre étude.

Tentatives de calcul de la densité de force pour une simulation RANS 3D

Sommaire

5.1	Le corps d’Ahmed	91
5.1.1	Géométrie du corps	91
5.1.2	Topologie de l’écoulement	91
5.2	Mise en oeuvre numérique	93
5.2.1	Modélisation de la turbulence	93
5.2.2	Fermeture utilisée et conditions aux limites	96
5.2.3	Maillage du corps d’Ahmed	96
5.2.4	Résultats numériques	97
5.3	Densités volumiques de force	98
5.4	Calcul de la force avec la formulation diffusivité	99
5.5	Problème du calcul de la vorticité et de son laplacien avec FLUENT	102
5.6	Conclusion sur la mise en oeuvre industrielle	103

Nous avons vu que la formulation diffusive permet de décomposer la force aérodynamique en plusieurs contributions liées aux structures de l'écoulement pour des cas bi-dimensionnels simples. Nous allons maintenant appliquer cette formulation à un cas d'écoulement plus complexe autour du corps d'Ahmed faisant apparaître des structures cohérentes 3D. La formulation diffusive s'écrit en trois dimensions :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\mu}{2} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \Delta \boldsymbol{\omega} dV \\ & -\frac{\mu}{2} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS, \end{aligned} \quad (5.1)$$

avec plus particulièrement les densités de traînée et de portance (projection de l'intégrande IDV sur les axes \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_z respectivement) :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{e}_x &= -\frac{\mu}{2} (y \Delta \omega_z - z \Delta \omega_y) \\ \mathbf{f}_v \cdot \mathbf{e}_z &= -\frac{\mu}{2} (x \Delta \omega_y - y \Delta \omega_x). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cette application sur un corps proche de ceux rencontrés dans l'industrie automobile permet d'étudier la possibilité d'utilisation de la formulation diffusive afin de quantifier les efforts des structures cohérentes en utilisant les méthodes de simulation en vigueur au sein de PSA Peugeot Citroën. Elle a fait l'objet d'un stage ingénieur au sein de la D.R.I.A., et les résultats ont été obtenus en collaboration avec Grégoire Pont.

5.1 Le corps d'Ahmed

5.1.1 Géométrie du corps

Le corps d'Ahmed, introduit par Ahmed [2], est un modèle simplifié de véhicule (figure 5.1). L'avant du corps est constitué d'un nez aux bords arrondis, évitant ainsi la formation de structures tourbillonnaires ; le centre est constitué d'un parallélépipède rectangle ; enfin le culot du corps d'Ahmed est constitué d'une lunette de longueur fixe dont l'angle ϕ peut être modifié¹, créant des structures tourbillonnaires en aval.

Ces structures tourbillonnaires sont également présentes dans les sillages de véhicules. Ce corps simplifié est donc très utile pour étudier les structures créées à l'arrière d'un obstacle 3D non profilé et plus spécifiquement l'impact de l'angle de la lunette ϕ sur ces structures.

5.1.2 Topologie de l'écoulement

Les principaux résultats de l'étude de la topologie du corps d'Ahmed en champs moyennés dans le temps (Ahmed *et al.* [3], Lienhart *et al.* [54]) font apparaître des structures claires autour de l'obstacle (figure 5.2) et permettent de distinguer trois topologies d'écoulement bien distinctes selon l'angle de lunette ϕ :

¹On obtient ainsi un corps d'Ahmed de longueur variable, dépendant de l'angle de la lunette.

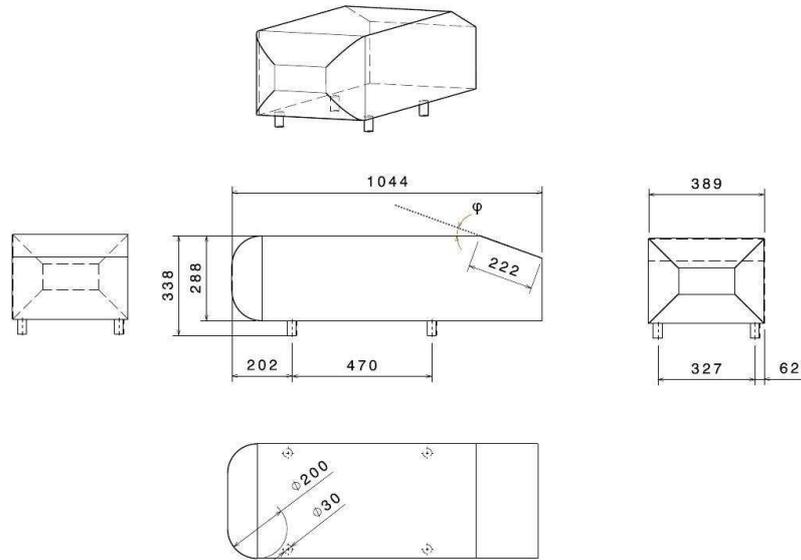


FIG. 5.1 – Dimensions du corps d’Ahmed.

- $\phi = 0^\circ$: l’écoulement est entièrement décollé à l’arrière du corps, créant les structures ‘A’ et ‘B’; les tourbillons longitudinaux ‘C’ sont absents;
- $\phi \leq 30^\circ$: les bulles de recirculation ‘A’ et ‘B’ sont toujours présentes au culot du corps d’Ahmed; en outre l’écoulement est décollé sur le haut de la lunette, créant la bulle de recirculation ‘E’, puis se recolle un peu plus en aval toujours sur la lunette; deux tourbillons longitudinaux contra-rotatifs ‘C’ se forment à partir de l’interaction de l’écoulement supérieur et des écoulements latéraux;
- $\phi > 30^\circ$: enfin lorsque l’angle de la lunette devient trop important, la bulle de recirculation ‘E’ de la lunette rejoint la bulle de recirculation au culot (structures ‘A’ et ‘B’), empêchant l’alimentation des tourbillons longitudinaux ‘C’ qui disparaissent.

En plus de ces considérations topologiques on peut observer l’évolution de la traînée moyenne en fonction de l’angle ϕ de la lunette (figure 5.3). Les études montrent ainsi que la traînée décroît pour des angles ϕ allant de 0° à 10° ; elle augmente ensuite fortement pour $10^\circ \leq \phi \leq 30^\circ$ et atteint un maximum à $\phi = 30^\circ$; au-delà de cet angle la traînée moyenne chute^{II} et retrouve des valeurs proches de celles observées pour les petits angles de lunette. Les études expérimentales et numériques (Ahmed *et al.* [3], Lienhart *et al.* [54], Krajnovic & Davidson [48]) mettent en évidence un lien direct entre la disparition des tourbillons longitudinaux ‘C’ et la chute brutale de la traînée moyenne.

Dans le cadre de notre étude sur les liens entre les structures cohérentes et la force aérodynamique, le cas du corps d’Ahmed constitue donc un candidat idéal : il est possible d’étudier deux configurations de part et d’autre de la crise de traînée ($\phi \approx 25^\circ$ et $\phi \approx 35^\circ$ par exemple) présentant

^{II}On appelle parfois ce changement discontinu « crise de traînée ».

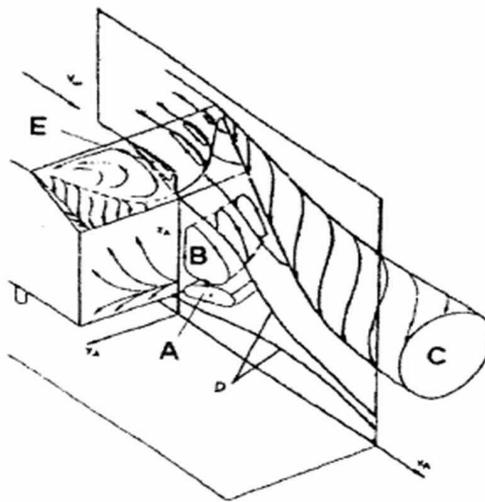


FIG. 5.2 – Structures cohérentes observables dans un écoulement moyen autour du corps d’Ahmed (d’après Ahmed *et al.* [3]). Les structures ‘A’ et ‘B’ sont deux écoulements de recirculation au niveau du culot générés par l’écoulement de sous-bassement et l’écoulement supérieur respectivement (la lettre ‘D’ marque l’enveloppe de la bulle de recirculation créée par ces deux structures); les structures ‘C’ sont des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs issus des arêtes latérales; la structure ‘E’ est une bulle de recirculation au niveau de la lunette générée par l’écoulement supérieur.

des topologies d’écoulement et des valeurs de traînée moyenne très différentes, puis de quantifier les efforts liés aux structures de l’écoulement pour conclure sur les origines et contributions de la force dans les deux configurations. Cette application permet également de conclure quant à la mise en oeuvre de cette méthode sur des cas proches de ceux rencontrés dans les études aérodynamiques automobiles.

5.2 Mise en oeuvre numérique

Afin de mener une étude cohérente sur la contribution des différentes structures observables autour du corps d’Ahmed, il convient d’effectuer des simulations les plus précises possibles avec les moyens numériques à disposition à PSA Peugeot Citroën. Les simulations ont donc toutes été effectuées avec le logiciel commercial FLUENT.

5.2.1 Modélisation de la turbulence

La résolution directe des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent en trois dimensions requiert des capacités numériques gigantesques, tant du point de vue du nombre de mailles, afin de résoudre toutes les échelles de la turbulence, que du point de vue du temps de calcul. La complexité du problème étant en $O(Re)$ (où le nombre de Reynolds est basé sur la longueur caractéristique du problème), on ne peut à l’heure actuelle résoudre les problèmes

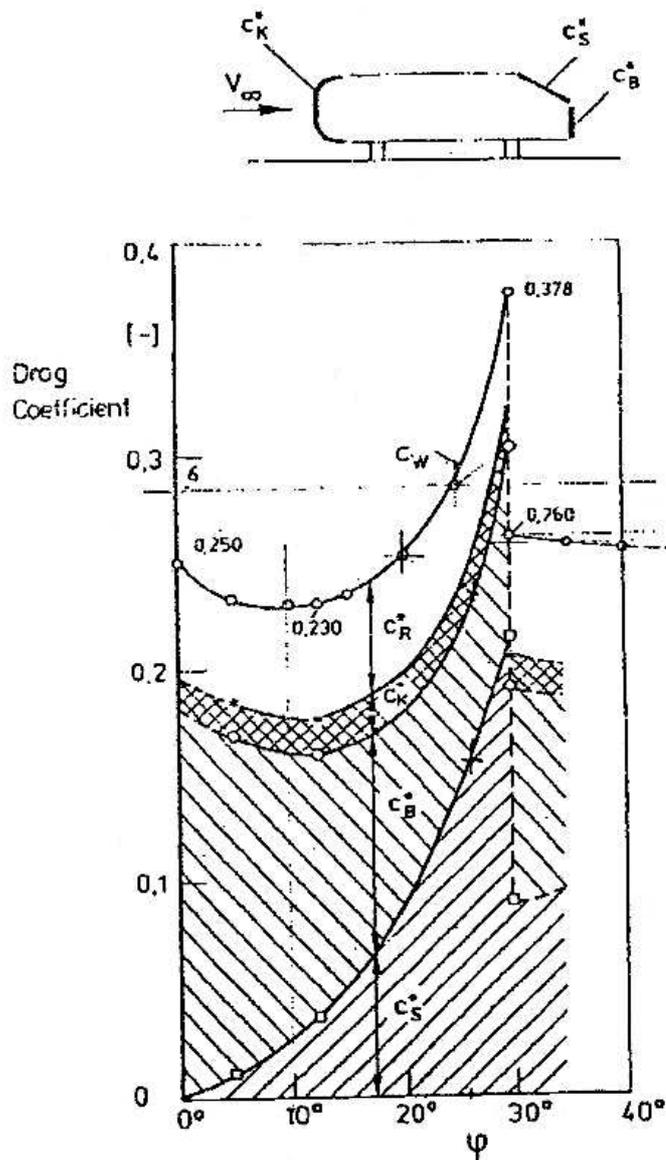


FIG. 5.3 – Coefficient de traînée moyen obtenu pour un corps d’Ahmed en fonction de l’angle ϕ de la lunette arrière (d’après Ahmed *et al.* [3]). La traînée moyenne est décomposée en contribution visqueuse : C_R^* et contributions de pression intégrées sur la face avant : C_K^* , sur la lunette : C_S^* et sur le culot : C_B^* .

d'écoulements turbulents 3D pour des nombres de Reynolds supérieurs à $10^3 - 10^4$. Il faut donc essayer de réduire le problème.

On peut pour cela utiliser le principe des séparations d'échelles. Cela revient à décomposer les grandeurs de l'écoulement (vitesse, pression, ...) en deux parties selon une échelle : une partie résolue et une partie modélisée ; il ne reste ensuite qu'à résoudre les équations de Navier-Stokes pour les échelles résolues uniquement. Le caractère non-linéaire des équations de Navier-Stokes conduit cependant les échelles non résolues à avoir une influence sur les échelles résolues ; il faut donc inclure un terme prenant en compte cette influence.

Nous souhaitons ici étudier la force moyenne de l'écoulement sur le corps d'Ahmed. On utilise donc une séparation d'échelle par moyenne temporelle (méthode RANS, pour *Reynolds Average Navier-Stokes*, décrite par Chassaing [15] par exemple) avec une décomposition de Reynolds de la vitesse en champ moyen \mathbf{U} et champ fluctuant \mathbf{u}' (voir partie 3.2.2). Les équations de Navier-Stokes pour le champ de vitesse moyen s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} &= -\frac{1}{\rho}\nabla P + \nu\Delta\mathbf{U} - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

On peut écrire le dernier terme de l'équation (5.3) sous la forme d'un tenseur :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^t}} = \langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle, \quad (5.4)$$

appelé tenseur de Reynolds et représentant l'interaction entre le champ moyen et le champ fluctuant. On peut en fait voir les corrélations du champ fluctuant $\langle \mathbf{u}'\mathbf{u}' \rangle$ comme une force du point de vue de l'écoulement moyen.

Il s'agit ensuite de trouver une bonne modélisation du tenseur de Reynolds : c'est le problème de fermeture. En effet, on introduit dans l'équation (5.3) six nouvelles inconnues^{III} qu'il s'agit de définir afin de « fermer » le système d'équations. Une première étape pour réduire le nombre d'inconnues consiste à appliquer la théorie de Boussinesq, qui suppose que le mécanisme de transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles non-résolues est analogue aux mécanismes moléculaires créant la viscosité ν et représentés dans le terme de diffusion. La partie déviatorique du tenseur de Reynolds est alors proportionnelle au gradient de vitesse moyenne et on peut écrire :

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}^t}} = \rho\nu_t(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T) + \frac{2}{3}\rho\kappa\underline{\underline{\mathbf{I}}}, \quad (5.5)$$

où ν_t est un scalaire appelé viscosité turbulente et $\kappa = \frac{\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}' \rangle}{2}$ est l'énergie cinétique turbulente. Grâce à l'hypothèse de Boussinesq, on a donc réduit le nombre d'inconnues à deux : ν_t et κ . Il existe un certain nombre de variantes pour cette fermeture, les plus courantes étant la fermeture k-epsilon où l'on pose :

$$\nu_t = C_\nu \frac{\kappa^2}{\varepsilon}, \quad (5.6)$$

^{III}En effet, de part la symétrie du tenseur de Reynolds, on introduit six et non pas neuf inconnues.

où ε est le taux de dissipation auquel l'énergie cinétique turbulente est convertie en énergie thermique interne, et C_ν est une constante ajustable, et la fermeture k-omega où ω représente la diffusion spécifique^{IV} avec la relation :

$$\nu_t = \frac{\kappa}{\omega}. \quad (5.7)$$

Pour résoudre les équations de Navier-Stokes il faut donc résoudre l'équation (5.3) en même temps que deux nouvelles équations de transport, l'une de l'énergie cinétique turbulente κ et l'autre de l'échelle de la turbulence (soit le taux de dissipation ε , soit la diffusion spécifique ω).

5.2.2 Fermeture utilisée et conditions aux limites

Afin de bien définir la topologie de l'écoulement, il faut choisir soigneusement la fermeture utilisée pour le tenseur de Reynolds. Il a été montré (Bardina *et al.* [6]) que le modèle k-omega est plus adapté à la région proche paroi que le modèle k-epsilon ; en particulier le premier modèle permet de faire apparaître des décollements à la paroi, ce qui n'est pas possible avec le second. En revanche le modèle k-epsilon donne de meilleurs résultats en ce qui concerne la transition entre la couche limite et l'écoulement extérieur.

Nous avons donc opté pour une modélisation « k-omega SST » permettant de combiner les deux modèles k-omega à la paroi puis k-epsilon lorsque l'on s'éloigne de la paroi. Cette modélisation est décrite de manière détaillée par Menter [59].

Les conditions aux limites utilisées ont été choisies à partir des méthodologies utilisées à PSA Peugeot Citroën. La face amont est une entrée de vitesse (*Velocity inlet*), la face aval une sortie de pression (*Pressure outlet*) et les faces latérales des murs (*Wall*) avec une condition de glissement, plus stable qu'une condition de symétrie pour représenter les parois d'une soufflerie. La limite inférieure de la veine a été modélisée par un « mur sans frottement » afin d'éviter la production d'une couche limite et de vorticités au sol, préjudiciable pour une bonne analyse de la force à partir de la formulation diffusive^V. La condition sur le corps est également une condition de type non-glissement (*Wall*).

5.2.3 Maillage du corps d'Ahmed

Le maillage utilisé pour la simulation RANS a également suivi les préconisations « avancée » en vigueur au sein de PSA Peugeot Citroën. Ainsi le taux de blocage de la soufflerie numérique^{VI} est de l'ordre de 1%. Un espace de cinq longueurs de corps en amont et dix longueurs de corps en aval a également été respecté afin de ne pas avoir de problème d'erreur numérique lors de la simulation de l'écoulement.

La procédure de maillage adoptée est la suivante : on maille d'abord le corps d'Ahmed et la soufflerie, on effectue ensuite une extrusion prismatique au niveau du corps (*i.e.* on construit les

^{IV} Il ne faut pas confondre la diffusion spécifique ω et la vorticités ; on peut également remarquer que $\omega \propto \frac{\varepsilon}{\kappa}$.

^V En effet la production de vorticités au sol est un effet du fluide sur le sol et non sur l'obstacle ; puisqu'on cherche à déterminer la force sur le corps d'Ahmed on ne doit pas tenir compte de cette vorticités. Il est donc plus facile dans un premier temps de prévenir la production de celle-ci plutôt que de dissocier la vorticités créée au sol ou à la paroi du corps d'Ahmed *a posteriori*.

^{VI} Le taux de blocage de la soufflerie numérique est le rapport entre la surface frontale de l'obstacle et la section de la veine.

premières mailles volumiques autour du corps avec des hexaèdres dont les faces supérieure et inférieure sont parallèles et identiques), puis on complète le maillage volumique en utilisant des tétraèdres dans des boîtes plus ou moins bien raffinées (figure 5.4).

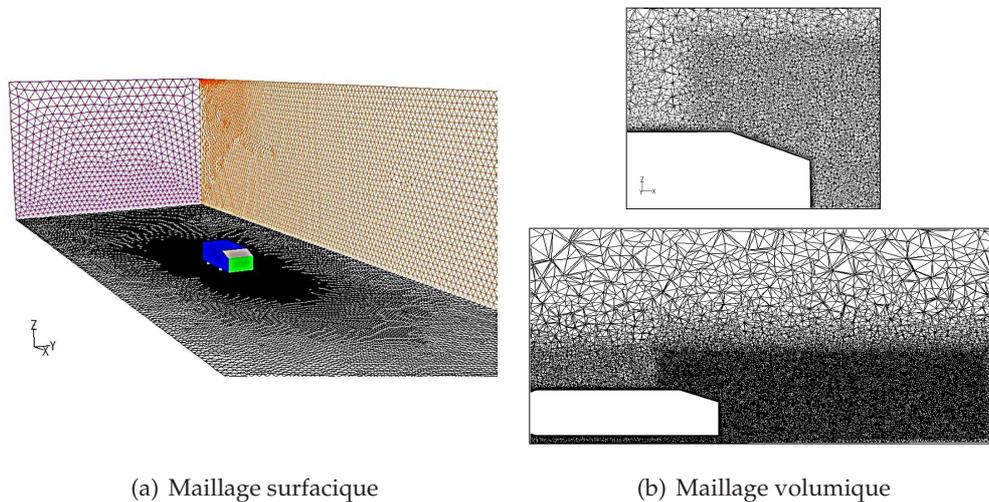


FIG. 5.4 – Maillage du corps d'Ahmed et de la veine d'essai.

La maille surfacique la plus petite se trouve sur le corps et vaut $5mm$, et la plus grande, sur la veine numérique, vaut $200mm$.

On peut définir à ce stade la distance à la paroi adimensionnée y^+ (Cousteix [20]) :

$$y^+ = \frac{yU_\tau}{\nu} \quad \text{et} \quad U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}}, \quad (5.8)$$

où y est la distance à la paroi de la première maille, U_τ la vitesse de frottement et $\tau_p \approx \partial_y u_x$ le frottement à la paroi. Idéalement, y^+ devrait être proche de l'unité afin de bien simuler l'échelle de dissipation dans la couche limite (Schiestel [82]). La première hauteur de maille est prise égale à $10\mu m$ ce qui assure alors un y^+ proche de l'unité pour les vitesses de fluide que l'on souhaite étudier ($y^+ \approx 1.24$ pour une vitesse amont de $40m.s^{-1}$ et $y^+ \approx 0.7$ pour $20m.s^{-1}$), soit une couche limite bien résolue sans avoir besoin de recourir à une loi de paroi pour la modéliser.

On obtient alors un maillage relativement conséquent de 26 millions de mailles, ce qui représente un temps de calcul d'environ douze heures sur un serveur de 86 processeurs (soit 12000 itérations) pour obtenir des résidus négligeables (de l'ordre de 10^{-7} sur la continuité, 10^{-6} pour les différentes composantes de vitesse, 10^{-5} pour ω et 10^{-4} pour κ) et ainsi une bonne convergence de la simulation.

5.2.4 Résultats numériques

Les simulations effectuées pour les deux angles de lunettes donnent de bon résultats au niveau de la topologie, les tourbillons longitudinaux disparaissant pour l'angle $\phi = 35^\circ$ (figure 5.5).

Les valeurs de traînée calculées à partir de l'intégration des forces de pression et de viscosité à la paroi du corps d'Ahmed sont données dans le tableau 5.1. On observe une bonne concordance

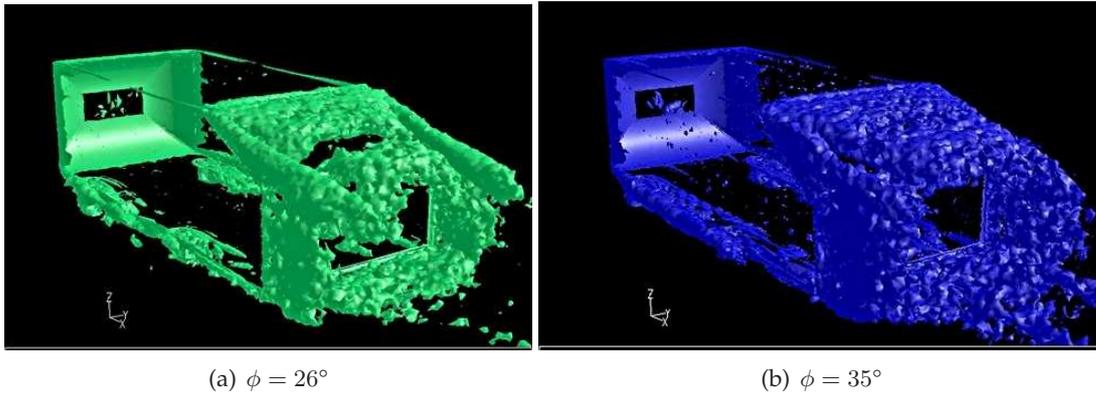


FIG. 5.5 – Topologie de l'écoulement autour du corps d'Ahmed avec deux angles de lunette différents (critère $Q = 13000$, $U_0 = 20m.s^{-1}$). On remarque la disparition des vortex longitudinaux pour l'angle de lunette supérieur à 30° .

avec les mesures effectuées par Ahmed *et al.* [3] à $40m.s^{-1}$ pour l'angle de lunette $\phi = 26^\circ$, ainsi qu'une légère surestimation de la traînée pour $\phi = 35^\circ$ (voir figure 5.3). Les valeurs de traînée moyenne à $20m.s^{-1}$ et $40m.s^{-1}$ sont cohérentes avec une dépendance de la force en U_0^2 .

ϕ	$U_0 = 20m.s^{-1}$	$U_0 = 40m.s^{-1}$
26°	0.337	0.326
35°	0.324	0.320

TAB. 5.1 – Coefficient de traînée moyen calculé par FLUENT pour deux angles de lunettes ϕ et deux vitesses amont U_0 différents.

5.3 Densités volumiques de force

Afin d'analyser les résultats obtenus nous nous sommes concentrés sur le cas du corps d'Ahmed avec un angle de lunette $\phi = 26^\circ$ dans un écoulement à $20m.s^{-1}$. Nous présentons les résultats sous la forme de plans d'études (figure 5.6) : trois plans verticaux perpendiculaires à l'écoulement en $x = 0$ (au centre du corps), $x = 0.4$ (au milieu de la lunette) et $x = 0.8$ (sillage proche) ; et un plan vertical dans le sens de l'écoulement en $y = 0$ (centré par rapport au corps d'Ahmed).

On présente les composantes de la vorticité pour les plans $x = cte$ dans la figure 5.7 et pour le plan $y = 0$ dans la figure 5.8. La vorticité semble bien estimée autour du corps d'Ahmed et dans le sillage. On retrouve notamment les vortex longitudinaux (figure 5.7(a)) et les bulles de recirculation à l'arrière du corps (figures 5.7(b) et 5.8(b)) dans le sillage. Sur le corps, la création de vorticité est localis e au niveau des fines couches limites (ω_y sur le toit et particulièrement au niveau de la lunette, ω_z sur les flancs) et à la naissance des deux tourbillons longitudinaux. On devrait donc avoir des densités de force importantes à ces endroits de l'écoulement.

Les densités de force de traînée et de portance sont pr sent es dans les figures 5.9 et 5.10.

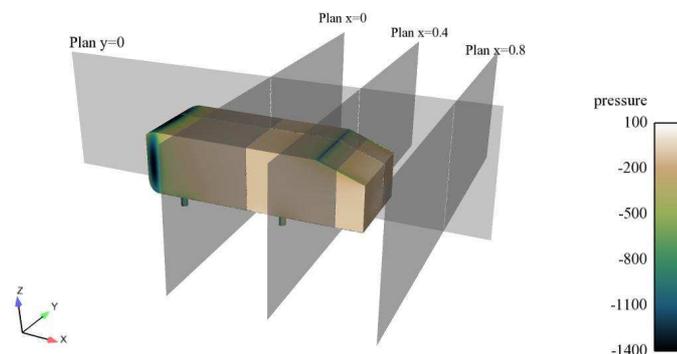


FIG. 5.6 – Plans d'étude sur le corps d'A Ahmed.

Les valeurs notables sont effectivement localisées autour des structures cohérentes. Par exemple dans le cas de la traînée (figures 5.9(a) et 5.10(a)) on constate que les couches limites ont une forte contribution sur le corps ; dans le sillage la zone de recirculation arrière due au sous-bassement et les tourbillons longitudinaux semblent être les structures prépondérantes. La portance (figures 5.9(b) et 5.10(b)) semble également influencée par les couches limites au niveau du corps, et par les tourbillons longitudinaux et la zone de recirculation arrière dans son ensemble dans le sillage.

L'observation des figures 5.9 et 5.10 fait apparaître un fort bruit dans le calcul du laplacien de vorticité et par voie de conséquences dans le calcul de la densité volumique de force. Nous parlerons de ce problème plus loin.

5.4 Calcul de la force avec la formulation diffusive

Malgré la mauvaise résolution des composantes du laplacien de vorticité, nous avons effectué une intégration de la densité volumique de force de la formulation diffusive (5.1). Les résultats pour les deux angles de lunettes et les deux vitesses d'écoulement sont donnés dans le tableau 5.2.

ϕ	$U_0 = 20m.s^{-1}$	$U_0 = 40m.s^{-1}$
26°	0.0255	0.0228
35°	0.0262	0.0230

TAB. 5.2 – Coefficient de traînée moyen calculé avec la formulation diffusive pour deux angles de lunettes ϕ et deux vitesses amont U_0 différents.

On observe une très forte sous-estimation des différentes forces de traînée par rapport aux résultats obtenus par la formulation pression-viscosité, d'un facteur 15 environ. En outre, si la dépendance en vitesse semble respect e, l'influence de l'angle de lunette n'est pas bien reproduit.

Ces résultats ne font que confirmer la mauvaise estimation du laplacien de vorticité.

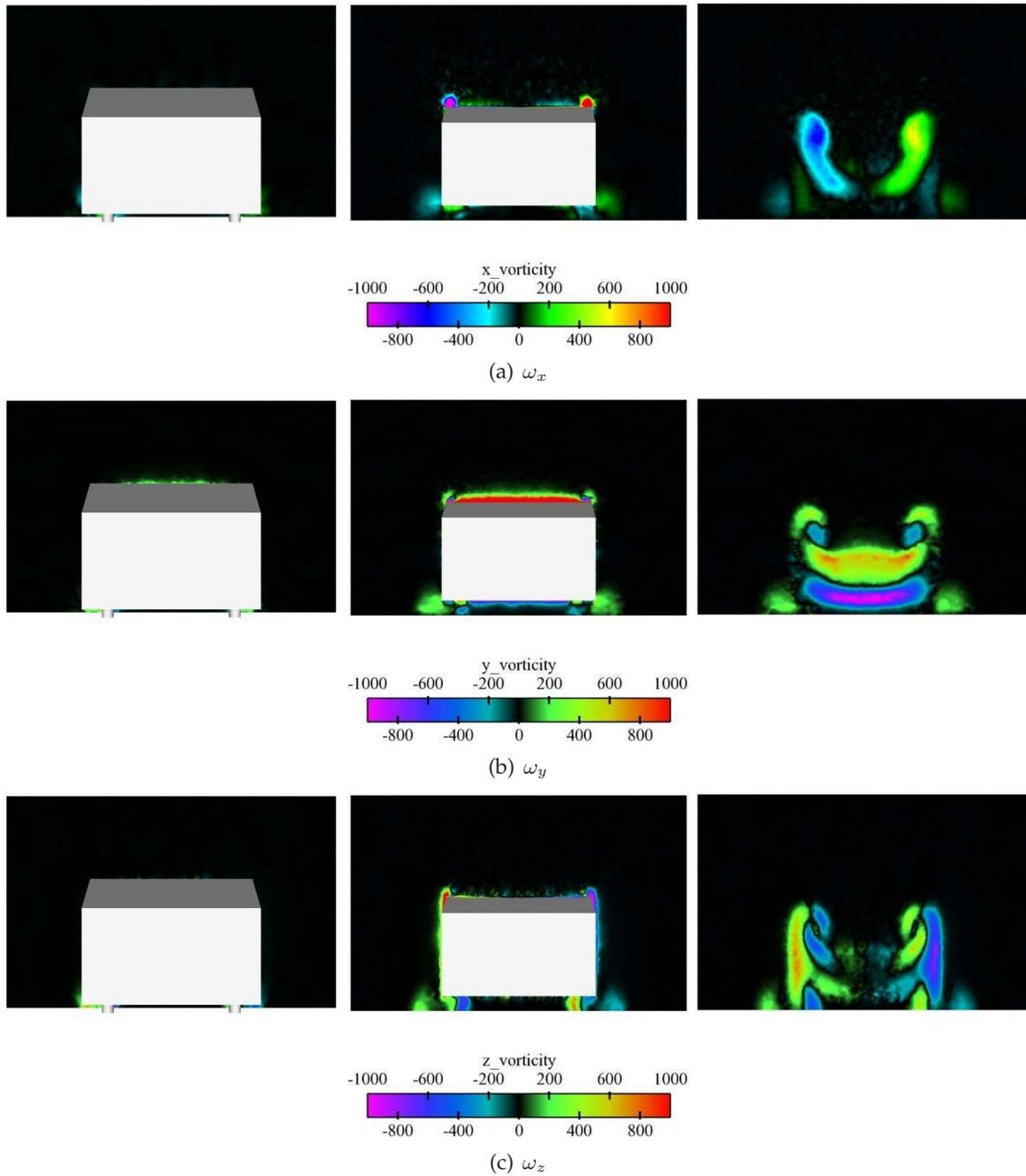


FIG. 5.7 – Plans $x = 0$ (gauche), $x = 0.4$ (milieu) et $x = 0.8$ (droite) des composantes de vorticité.

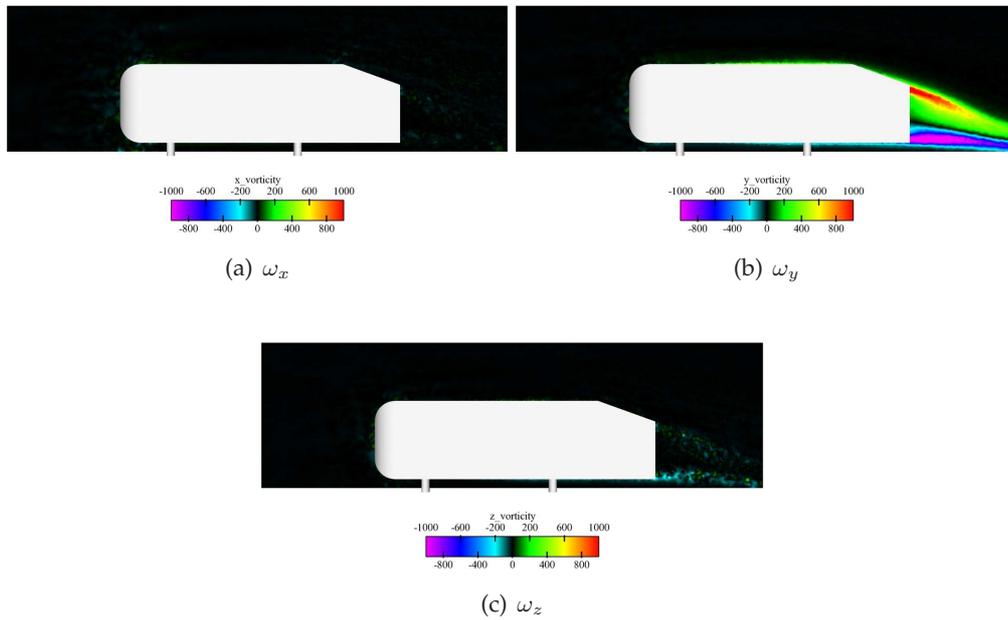


FIG. 5.8 – Plan $y = 0$ des composantes de vorticité.

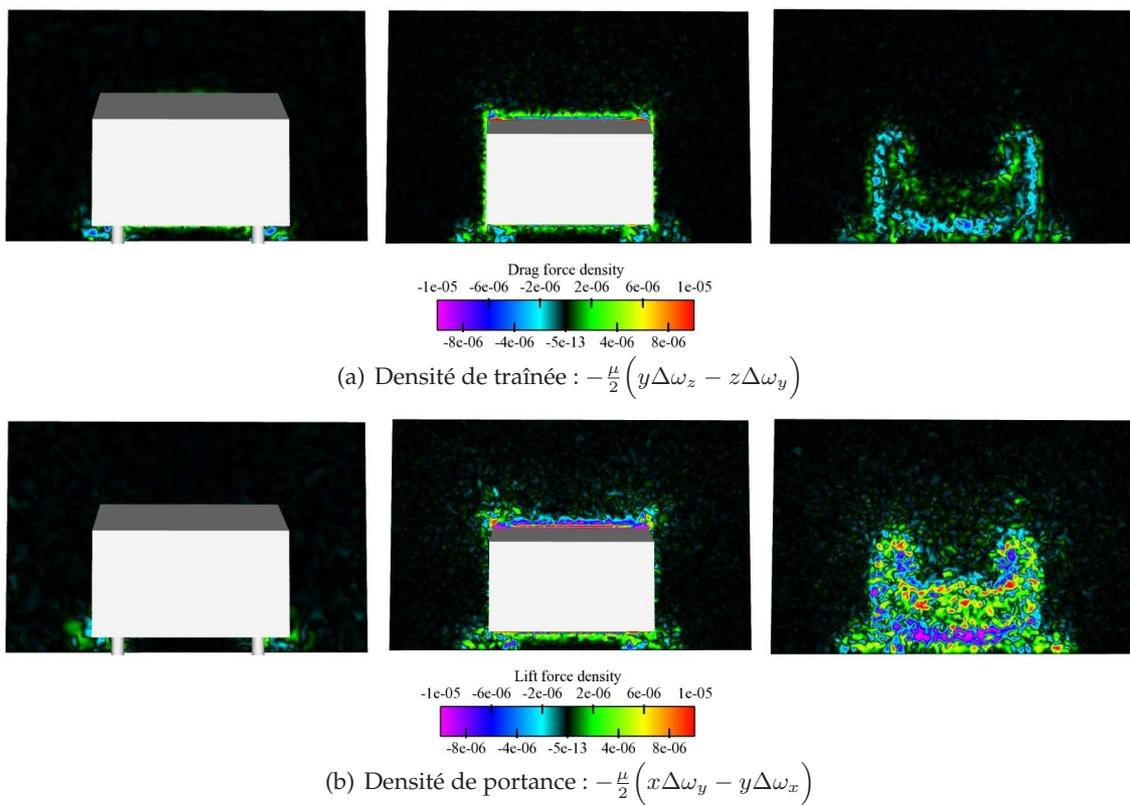


FIG. 5.9 – Plans $x = 0$ (gauche), $x = 0.4$ (milieu) et $x = 0.8$ (droite) des densité de force de traînée et de portance.

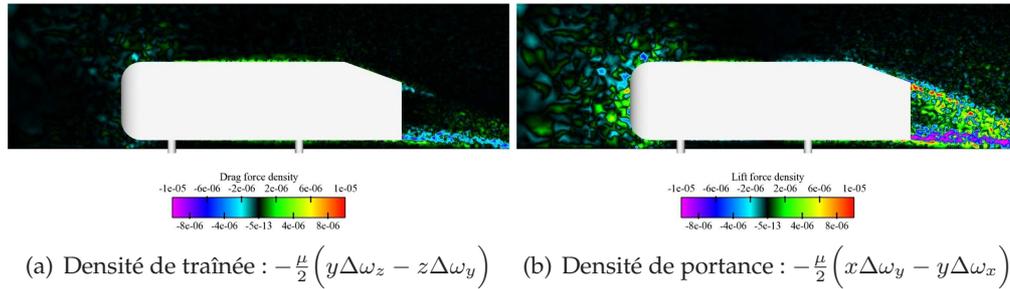


FIG. 5.10 – Plan $y = 0$ des composantes de vorticité.

5.5 Problème du calcul de la vorticité et de son laplacien avec FLUENT

Le calcul du laplacien de vorticité et de la densité volumique de force est problématique. On voit nettement l'influence du maillage, tant au niveau des forts laplaciens (*i.e.* au niveau des structures cohérentes) que dans des zones de l'écoulement où la vorticité est *a priori* négligeable (figure 5.10 en amont du corps d'Ahmed). Plus les dérivées à calculer sont d'ordre grand, et plus les méthodes numériques sont dépendantes du maillage. Or on rappelle que dans notre cas il s'agit d'estimer le laplacien de vorticité, ce qui implique des dérivées troisièmes du champ de vitesse. Il faut donc autant que possible créer des mailles régulières, idéalement des cubes. Le coût associé à l'utilisation de ce type de mailles en taille de maillage et en temps de calcul est exorbitant en trois dimensions, ce qui conduit à utiliser des maillages tétraédriques. Malgré le soin porté au maillage de l'écoulement, et notamment au maillage du sillage (figure 5.4), les résultats ne sont pas acceptables.

Les techniques de maillage généralement utilisées à PSA Peugeot Citroën ne semblent donc à première vue pas bien adaptées aux calculs de dérivées d'ordre supérieur du champ de vitesse dans le logiciel FLUENT. Nous sommes actuellement en contact avec ANSYS, l'entreprise propriétaire de FLUENT, afin d'essayer de remédier à ce problème en utilisant par exemple d'autres méthodes de reconstruction des gradients pour obtenir de meilleures valeurs du laplacien de vorticité.

En plus de ce problème de maillage dans l'écoulement nous avons identifié une autre erreur numérique en proche paroi. Dans cette zone, le maillage est régulier (extrusion prismatique), ce qui devrait aider au calcul des dérivées de la vorticité. Ce ne sont pourtant pas les dérivées qui sont problématiques, mais la vorticité elle-même. On voit par exemple sur la figure 5.11 un profil de vitesse longitudinale u_x et de composante de vorticité ω_y en fonction de z .

Sur cette partie du corps d'Ahmed ce sont en effet ces deux grandeurs qui sont prépondérantes (le toit du corps d'Ahmed peut être vu comme une plaque plane, et les effets de bord sont négligeables au centre). On voit nettement que le profil de vorticité n'est pas bon sur les premières mailles et comporte du bruit numérique (figure 5.11(a), à comparer avec la figure D.5 de l'annexe D). Cette erreur est accentuée par le passage au laplacien (figure 5.11(b)), et le profil de laplacien de vorticité fait alors apparaître de très grandes valeurs de signes opposés sur les premières mailles qui introduisent par voie de conséquence une très forte erreur sur l'estimation

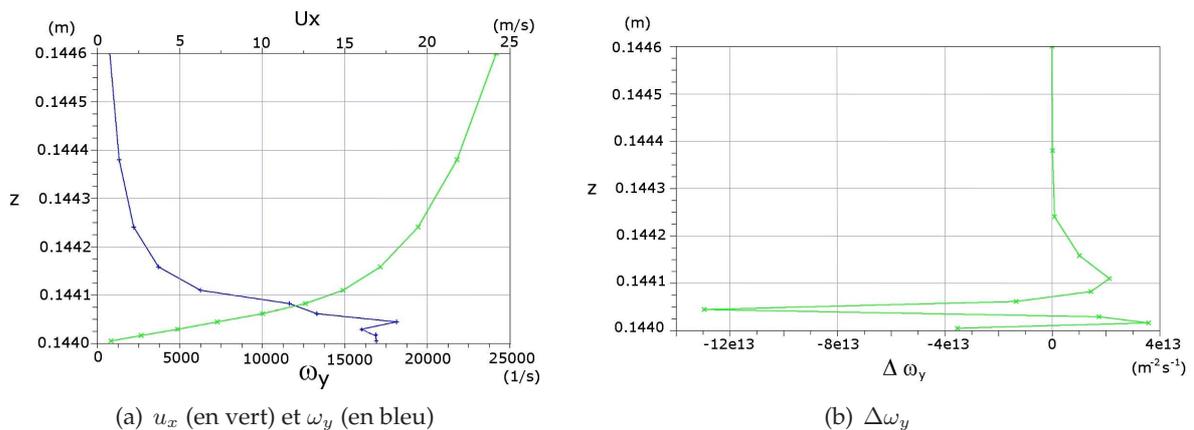


FIG. 5.11 – Profils verticaux de vitesse longitudinale u_x , de vorticité ω_y et le laplacien de vorticité $\Delta \omega_y$ au centre du corps d’Ahmed.

de la force fluide en utilisant la formulation diffusive.

Cette erreur provient de la forme étirée des mailles sur le corps d’Ahmed. Le facteur de forme maximal sur les premières mailles est en effet de $\frac{5 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} = 500$, à comparer aux préconisations internes en vigueur à PSA Peugeot Citroën qui conseillent un facteur de forme maximal de 150 environ. Le problème rencontré dans notre cas vient de la nécessité de modéliser entièrement et précisément la couche limite, puisque l’on a vu dans le chapitre précédent que la densité de force se trouve être la plus importante dans la zone proche paroi. En cherchant à obtenir un y^+ proche de l’unité, nous avons donc forcé les premières mailles de l’extrusion prismatique à être très étirées et nous avons créé un « bruit » dès le calcul de la vorticité, bruit amplifié par le calcul du laplacien de vorticité.

5.6 Conclusion sur la mise en oeuvre industrielle

La formulation diffusive est facilement implémentable en trois dimensions, et doit permettre à partir d’une définition des structures présentes dans un écoulement de quantifier leur poids sur la force fluide. La présence du laplacien de vorticité dans cette formulation nécessite une très bonne définition spatiale de l’écoulement qui s’approche (et dépasse pour les cas plus compliqués) les limites numériques actuelles. Le cas d’un écoulement autour d’un véhicule, réel ou simplifié, entre la catégorie des écoulements trop complexes pour la quantification de la force fluide à partir de la formulation diffusive. Les préconisations en matière de maillage et de simulation au sein du groupe PSA Peugeot Citroën ne permettent pas d’obtenir à la fois un écoulement fidèle à la réalité et une bonne définition de la densité de force. De même la résolution complète de la couche limite implique soit des maillages trop lourds, soit des problèmes de bruit numérique au niveau de la vorticité proche paroi, bruit amplifié par le calcul des dérivées secondes de la vorticité.

On peut pourtant constater en dépit de ces problèmes numériques que la formulation met bien en relation les sources de vorticité et la densité de force. Nous avons donc démarré une étude avec une équipe de développeurs de FLUENT afin de tenter de remédier aux problèmes

numériques rencontrés. Une étude sur un maillage cartésien régulier est en cours, de même qu'une réflexion sur le filtrage des champs de vorticité proche paroi pour atténuer le bruit. Des pistes d'amélioration sur le calcul des gradients par FLUENT sont également à l'étude.

Enfin nous cherchons à appliquer cette formulation sur des résultats académiques autour de corps plus simples (cube posé sur une surface plane) mais avec une meilleure définition de la vorticité dans l'écoulement (résolution v - ω , proche de la résolution ψ - ω utilisée dans le chapitre 4).

Conclusions et perspectives

Nous nous sommes intéressés dans ce travail de thèse à la possibilité d'exprimer la force fluide comme l'intégration d'une densité volumique d'efforts afin de quantifier les effets des structures cohérentes sur le torseur aérodynamique.

Dans le chapitre 2 nous avons posé les concepts de base de notre étude. Nous avons présenté les deux formulations de base (pariétale et volumique) de la force aérodynamique ainsi que des tentatives d'estimation de la force fluide à partir de l'écoulement basées sur des équations de bilan. Le problème de la pression en tant que grandeur globale a été soulevé, et nous avons conclu que la seule possibilité pour associer la force aux structures cohérentes de manière quantitative est de ne pas faire apparaître la pression dans la formulation des efforts. Enfin nous avons dressé un état de l'art en matière de définition des structures cohérentes présentes dans un écoulement.

Deux formulations sont ressorties de ces tentatives, que nous avons nommées formulation advective et formulation diffusive. Ces formulations ont pour ingrédient de base la vorticité (vorticité également au coeur de la définition des structures cohérentes) et ne font pas apparaître de terme de pression.

Nous nous sommes intéressés dans le chapitre 3 à la formulation advective de la force en deux dimensions sur une simulation numérique d'écoulement autour d'un cylindre à section carr e ainsi qu'à une application expérimentale sur un sillage contrôlé. Cette formulation, très utilis e lors d'études expérimentales car non-intrusive et ne faisant pas intervenir la pression, n'a pas donné de bons résultats en terme de quantification de la force des structures cohérentes, les termes de contour ayant un poids trop important rendant la seule intégration d'une densité volumique de force impossible. En revanche nous avons montré une propriété intéressante de cette formulation dans le cadre de l'étude expérimentale d'un sillage contrôlé : il est possible d'estimer la traînée moyenne à partir des champs moyens uniquement (vitesse et vorticité moyennes).

Le chapitre 4 traite de l'étude en deux dimensions de la formulation diffusive ; nous avons étudié pour ce faire un sillage de cylindre à section circulaire à différents nombres de Reynolds. Nous avons réussi à montrer dans cette partie qu'il est possible d'avoir une bonne approximation de la force fluide à partir de l'intégration d'une densité de force dans un volume bien choisi, c'est-

à-dire suffisamment grand pour contenir toute l'information sur la force. Cette densité de force $f_v = -\mu\Delta\omega \mathbf{x}^\perp$ ne fait apparaître que des grandeurs locales et permet d'effectuer une analyse quantitative de la force des structures cohérentes présentes dans l'écoulement.

Nous avons ensuite effectué une séparation des structures cohérentes dans le cas du cylindre à section circulaire. Les critères présentés dans le chapitre 2 se sont avérés inadaptés car ne permettant pas de faire apparaître à la fois des tourbillons et des structures étirées comme les couches limites. Nous avons donc utilisé le laplacien de vorticité afin de détecter les sources de vorticité de l'écoulement, et par voie de conséquences les structures cohérentes : dans le cas étudié nous avons distingué la zone de recirculation à l'arrière du cylindre des deux couches de vorticité créées par les couches limites séparées. Nous avons ensuite étudié les contributions de ces deux structures en fonction du nombre de Reynolds. Nous avons ainsi pu montrer que la force peut être calculée dans un domaine assez restreint, les tourbillons présents dans le sillage de von Kármán ne contribuant pas à la force. Nous avons ainsi mis en évidence que les couches de vorticité captent les phénomènes de viscosité tandis que la traînée de la zone de recirculation arrière dépend de l'enroulement tourbillonnaire en aval : c'est en fait par l'intermédiaire de la densité de force à l'arrière du cylindre que les tourbillons du sillage (et principalement le premier tourbillon enroulé en aval) induisent la force.

Nous avons ensuite tenté dans le chapitre 5 d'appliquer la formulation diffusive de la force sur un corps automobile simplifié en trois dimensions, le corps d'Ahmed, en utilisant les moyens numériques à disposition au sein de PSA Peugeot Citroën. La formulation diffusive peut être mise en oeuvre dans les cas tridimensionnels, mais nous avons été confrontés à des limites propres au logiciel de simulation numérique FLUENT. Le maillage intervient très fortement dans le calcul des dérivées spatiales troisièmes du champ de vitesse nécessaires au calcul de la densité de force de la formulation diffusive. De plus le maillage autour du corps d'Ahmed ne peut pas à la fois être cartésien régulier et résoudre entièrement la couche limite ; il faut donc utiliser un maillage non-structuré qui introduit un important bruit numérique dans le calcul du laplacien de vorticité et rend inutilisable la formulation diffusive en l'état. Enfin une mauvaise définition de la vorticité proche paroi a été détectée lorsque les mailles sont trop allongées, qui amplifie l'erreur lors du calcul de la force par la formulation diffusive.

Nous sommes actuellement en contact avec les développeurs de FLUENT afin de trouver des solutions alternatives permettant d'appliquer la formulation diffusive en trois dimensions sans pour autant utiliser des maillages trop volumineux, notamment des techniques de filtrage du bruit sur la vorticité en proche paroi. Nous pensons également qu'appliquer la formulation sur un code académique v-omega, reprenant l'approche du chapitre 4 consistant à s'assurer de la bonne définition de la vorticité avant de chercher à la dériver, donnerait de bons résultats. Cette application permettrait de contourner les problèmes rencontrés avec FLUENT, mais sur des géométries plus simples que celles rencontrées dans l'industrie automobile.

Enfin, d'un point de vue plus fondamental la formulation diffusive fait intervenir la viscosité, et qu'à ce titre le domaine d'intégration utilisé est toujours restreint dans un petit volume autour de l'obstacle. Si l'on s'intéresse aux grands nombres de Reynolds on devrait pouvoir arriver à déterminer la force fluide à partir d'une ou deux mailles d'extrusion prismatique, assimilant cette approche à une intégration des efforts sur des empreintes à la manière du calcul actuel par

la formulation en pression - contraintes visqueuses à la paroi. Cette technique permettrait en revanche d'avoir une information beaucoup plus juste que celle obtenue à partir de l'intégration des contraintes de pression, n'ayant plus à faire qu'à des grandeurs locales.

Annexes

Établissement de la formulation advective

Nous nous proposons dans cette annexe d'établir la formulation advective proposée par Noca *et al.* [65] à partir de l'équation de bilan de quantité de mouvement.

Préambule

Le théorème de Gauss appliqué à un vecteur \mathbf{f} s'écrit (Aris [5]) :

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{f} dV = \frac{1}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{f}) dV - \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{f}) dS, \quad (\text{A.1})$$

Le théorème de flux-divergence (Aris [5]) appliqué à un vecteur \mathbf{f} s'écrit quant à lui :

$$\int_{\mathcal{F}} \nabla \cdot \mathbf{f} dV = \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{f} dS, \quad (\text{A.2})$$

avec pour conséquence la relation :

$$\int_{\mathcal{F}} \nabla \wedge \mathbf{f} dV = \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{f} dS. \quad (\text{A.3})$$

L'identité de la pression (Saffman [79]) s'écrit pour un scalaire ϕ :

$$(\mathcal{N}-1) \oint_{\mathcal{B}} \phi \hat{\mathbf{n}} dS = - \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \nabla(\phi) dS. \quad (\text{A.4})$$

On rappelle également l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla(p) + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}, \quad (\text{A.5})$$

où $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ peut également s'écrire $\nabla(\frac{1}{2}u^2) + \mathbf{u} \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}$.

On indique enfin les relations vectorielles et tensorielles qui seront utilisées dans cette annexe :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{bc}) \equiv a_i(b_i c_j) = (a_i b_i) c_j \equiv (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (\text{A.7})$$

Obtention de la formulation advective

L'équation de bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} dV + \oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{uu}) dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p\mathbf{I} + \underline{\underline{\tau}}) dS. \quad (\text{A.8})$$

Afin de simplifier la manipulation des différents termes on écrit :

$$I_1 = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} dV, \quad (\text{A.9})$$

$$I_2 = \oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{uu}) dS, \quad (\text{A.10})$$

$$I_3 = \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot (-p\mathbf{I} + \underline{\underline{\tau}}) dS. \quad (\text{A.11})$$

En utilisant l'équation (A.1) avec $\mathbf{f} = \mathbf{u}$, puis l'équation (A.5) pour transformer $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, on obtient pour la première intégrale :

$$I_1 = \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \left(-\int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla \wedge \mathbf{u} dV + \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{u} dS \right) \quad (\text{A.12})$$

$$= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dS \quad (\text{A.13})$$

$$= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \left(-\nabla(p + \frac{1}{2}\rho u^2) + \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right) dS. \quad (\text{A.14})$$

On applique ensuite l'identité de la pression (équation (A.4)) à $(p + \frac{1}{2}\rho u^2)$ et la relation (A.6) à $\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})$ et $\mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})$:

$$\begin{aligned} I_1 = & -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \left(p + \frac{1}{2}\rho u^2 \right) dS \\ & + \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \left[(\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega})) \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right] dS \\ & + \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \left[(\mathbf{x} \cdot \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}) \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right] dS. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

On applique enfin la relation (A.7) et on combine I_1 avec I_2 et I_3 ce qui fait disparaître le terme de pression :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \underline{\mathbf{I}} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS \\ & + \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \mathbf{u} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right] dS \\ & + \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) \right] dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dS. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

On peut également remarquer l'égalité (Saffman [79]) :

$$\oint_{\mathcal{B}} \rho \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{2} u^2 \underline{\mathbf{I}} - \mathbf{u}\mathbf{u} \right) dS = \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dV. \quad (\text{A.17})$$

On obtient finalement après simplification la formulation advective :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dV \\ & + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \mathbf{u} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right] dS \\ & + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left[\frac{1}{\mathcal{N}-1} \left(\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) \right) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right] dS. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Équivalence des formulations advectives et diffusive

Nous nous proposons dans cette annexe d'établir l'équivalence entre les deux versions de la formulation advective proposées par Noca *et al.* [65] et Wu *et al.* [95] respectivement, et la formulation diffusive de Wu *et al.* [95].

Préambule

On rappelle l'équation de la vorticité locale :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (\text{B.1})$$

Afin d'établir les équivalences entre les formules, il est en outre intéressant d'observer que le laplacien de la vitesse peut s'écrire de plusieurs façons pour les écoulements incompressibles :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \mu^{-1} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} \\ &= \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \\ &= -\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}) \\ &= -\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

De plus, en utilisant le théorème de flux-divergence (équations (A.2) et (A.3)) ainsi que la relation (B.2), on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dS &= \int_{\mathcal{F}} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dV \\ &= -\mu \int_{\mathcal{F}} \nabla \wedge \boldsymbol{\omega} dV \\ &= \mu \oint_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Différentes formes de la formulation advective

Nous allons d'abord montrer l'équivalence des formulations advectives publiées par Noca *et al.* [66] et Wu *et al.* [95]. On rappelle que la formulation de Noca *et al.* [66] s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV + \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dV \\ & + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \mathbf{u} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right) dS \\ & + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} (\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) dS. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Afin de simplifier la manipulation des différents termes on écrit :

$$N_{D1} = -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} dV, \quad (\text{B.5})$$

$$N_{D2} = \int_{\mathcal{F}} \rho \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} dV, \quad (\text{B.6})$$

$$N_{C1} = \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \mathbf{u} (\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right) dS, \quad (\text{B.7})$$

$$N_{C2} = \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} (\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x} (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) dS. \quad (\text{B.8})$$

On rappelle également la formulation de Wu *et al.* [95] :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\rho \int_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{l} \right) dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS \\ & - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où $\mathbf{l} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}$ est le vecteur de Lamb [51]. De la même façon que pour la formulation de Noca *et al.*, on nomme les différents termes de la formulation de Wu *et al.* :

$$W_{D1} = -\rho \int_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{l} \right) dV, \quad (\text{B.10})$$

$$W_{C1} = -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS, \quad (\text{B.11})$$

$$W_{C2} = -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS, \quad (\text{B.12})$$

$$W_{C3} = \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (\text{B.13})$$

L'équivalence entre les intégrales volumiques des deux formes est directe :

$$N_{D1} + N_{D2} = W_{D1}. \quad (\text{B.14})$$

De même il est aisé de montrer, en utilisant les relations (A.6) et (A.7), l'équivalence :

$$\begin{aligned}
W_{C1} &= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l}) dS \\
&= \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge (\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) dS \\
&= \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge ((\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{u} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u})\boldsymbol{\omega}) dS \\
&= \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right) dS \\
&= N_{C1}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Enfin on montre en utilisant les relations (A.7), (B.2) et (B.3) :

$$\begin{aligned}
W_{C2} + W_{C3} &= -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dS \\
&= \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \left([\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})] \hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{n}})(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) \right) dS + \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}} dS \\
&= \oint_{\mathcal{B}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} (\mathbf{x} \cdot (\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}) - \mathbf{x}(\nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}})) + \underline{\boldsymbol{\tau}} \right) dS \\
&= N_{C2}.
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Les deux formes de la formulation advective sont bien équivalentes.

Équivalence des formulations advective et diffusive

L'équivalence entre les différentes formes de la formulation advective étant établie, on montre l'équivalence entre les formulations advective et diffusive en utilisant les deux formes proposées par Wu *et al.* [95]. On repart de l'équation advective :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(t) &= -\rho \int_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{l} \right) dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS \\
&\quad - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

et on cherche à retrouver la formulation diffusive :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(t) &= -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \\
&\quad - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_{\mathcal{B}} \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS.
\end{aligned} \tag{B.18}$$

On peut observer que les deux derniers termes du membre de droite des deux formulations sont identiques. Il suffit donc de montrer l'équivalence entre les intégrales de la formulation ad-

vective W_{D1} (équation (B.10)) et W_{C1} (équation (B.11)) et l'intégrale de la formulation diffusive :

$$I_D = -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV. \quad (\text{B.19})$$

En appliquant le théorème de Gauss au vecteur de Lamb (équation (A.1) avec $\mathbf{f} = \mathbf{l}$), on a :

$$\int_{\mathcal{F}} \mathbf{l} dV = \frac{1}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{l}) dV - \frac{1}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS. \quad (\text{B.20})$$

On peut alors écrire en utilisant les relations (B.1) et (B.20) :

$$\begin{aligned} W_{D1} + W_{C1} &= -\rho \int_{\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mathcal{N}-1} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{l} \right) dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS \\ &= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \oint_{\mathcal{B}} \mathbf{x} \wedge \hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{l} dS - \rho \int_{\mathcal{F}} \mathbf{l} dV \\ &= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dV - \frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla \wedge \mathbf{l} dV \\ &= -\frac{\rho}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \wedge \mathbf{l} \right) dV \\ &= -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \\ &= I_D. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

L'équivalence des formulations advective et diffusive est démontrée.

Invariance selon l'origine du repère

Nous discutons dans cette annexe du choix de l'origine du repère. En effet les formulations utilisées (la formulation advective comme la formulation diffusive) dépendent du vecteur \mathbf{x} , et on peut se demander si le choix de l'origine a une influence ou non sur l'estimation de la force. Nous avons vu dans l'annexe B que les formulations advective et diffusive sont équivalentes ; la démonstration ne sera donc faite que dans le cas de la formulation diffusive mais les résultats sont valides pour les deux formulations.

Rappel de la formulation diffusive

On travaille avec la formulation diffusive établie par Wu *et al.* [95]. On a :

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \omega \, dV - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \omega)] \, dS + \oint_B \mu \omega \wedge \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{F}(t) = I_A + I_B + I_C. \quad (\text{C.2})$$

On constate que seuls les deux premiers termes I_A et I_B dépendent du vecteur position \mathbf{x} .

Changement de repère

Soit O l'origine du repère et M un point appartenant au domaine d'intégration (ou à son contour) ; on pose $\mathbf{x} = O\vec{M}$.

On choisit une nouvelle origine O' du repère. On pose $\mathbf{x}_o = O\vec{O}'$ et $\mathbf{x}' = O'\vec{M}$. On a donc la relation :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o. \quad (\text{C.3})$$

La formulation diffusive s'exprime dans le nouveau repère :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(t) = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x}' \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \\ & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x}' \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS + \oint_B \mu \boldsymbol{\omega} \wedge \hat{\mathbf{n}} dS \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbf{F}(t) = I'_A + I'_B + I'_C. \quad (\text{C.5})$$

L'intégrale de domaine I'_A peut s'écrire :

$$\begin{aligned} I'_A = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \\ = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x} \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV + \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x}_o \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$I'_A = I_A + \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x}_o \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV. \quad (\text{C.7})$$

En utilisant la forme du théorème de la divergence suivante (Aris [5]) :

$$\int_{\mathcal{F}} \nabla \wedge \Phi dV = \oint_B \hat{\mathbf{n}} \wedge \Phi dS, \quad (\text{C.8})$$

avec $\Phi = \nabla \wedge \boldsymbol{\omega}$, on peut transformer le deuxième terme du membre de droite de l'équation (C.7) :

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \mathbf{x}_o \wedge \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV &= \mathbf{x}_o \wedge \left(\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} dV \right) \\ &= -\mathbf{x}_o \wedge \left(\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \int_{\mathcal{F}} \nabla \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) dV \right) \\ &= -\mathbf{x}_o \wedge \left(\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega}) dS \right) \\ &= -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x}_o \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

On a donc :

$$I'_A = I_A - \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x}_o \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS. \quad (\text{C.10})$$

Par ailleurs l'intégrale de contour I'_B s'écrit :

$$\begin{aligned} I'_B = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS \\ = & -\frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x} \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS \\ & + \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x}_o \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS \\ I'_B = & I_B + \frac{\mu}{\mathcal{N}-1} \oint_B \mathbf{x}_o \wedge [\hat{\mathbf{n}} \wedge (\nabla \wedge \boldsymbol{\omega})] dS. \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

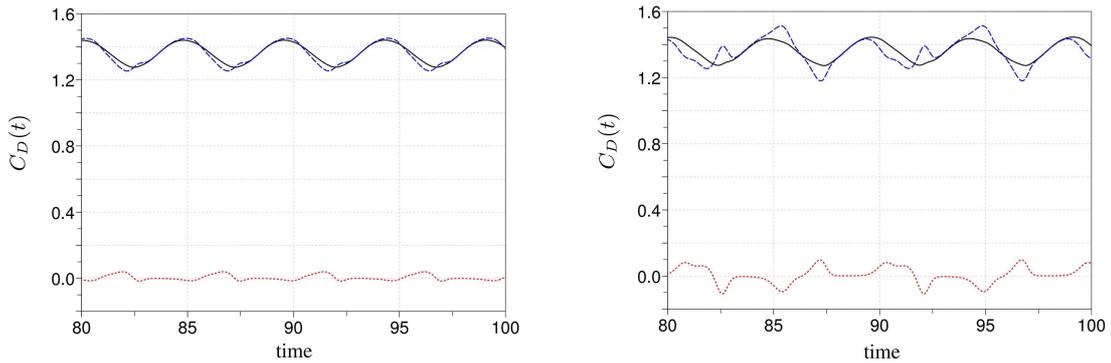
En combinant l'équation (C.10) et l'équation (C.11) on a donc bien :

$$I_A + I_B = I'_A + I'_B, \quad (\text{C.12})$$

la formulation ne dépend pas de l'origine du repère.

Choix du repère

Si l'origine du repère n'a pas d'influence sur la formulation générale, elle en a en revanche sur chaque terme fonction du vecteur position. Si l'on souhaite effectuer des intégrations volumiques autour des structures cohérentes, on a vu qu'il faut minimiser l'information contenue sur l'intégrale de contour. Ainsi il faut s'assurer que l'origine du repère est bien choisie, *i.e.* que l'intégrale de contour est négligeable (figure C.1). On voit que pour une origine bien choisie (figure C.1(a)) l'intégrale de contour est bien négligeable alors que pour une origine décentrée en y (figure C.1(b)) l'intégrale de contour contient une partie de la force et l'intégrale de domaine ne correspond plus bien à la force totale.



(a) Origine du repère et centre du cylindre confondus (b) Centre du cylindre décalé en y par rapport à l'origine du repère

FIG. C.1 – Force de traînée obtenue avec la formulation diffusive pour une origine du repère confondue ou non avec le centre du cylindre en fonction du temps ; en noir la force totale, en bleu l'intégrale de domaine et en rouge l'intégrale de bord.

Le choix de l'origine pour un cylindre circulaire en deux dimensions semble assez direct et conditionnée par les symétries. Le problème se pose en revanche pour des corps plus complexes, notamment en trois dimensions. Il faut alors utiliser autant que possible les symétries éventuelles du corps et vérifier *a posteriori* que l'intégrale de bord est bien négligeable par rapport à la force totale.

Topologie du laplacien de vorticité pour des structures cohérentes de référence

Nous étudions dans cette annexe les motifs que l'on peut observer pour le laplacien de vorticité dans le cas de différentes structures idéales. L'étude de ces différents motifs permet d'identifier les structures présentes dans un écoulement à partir du laplacien de vorticité et de séparer ces structures en vue d'étudier leurs contributions respectives à la force en utilisant la formulation diffusive.

Tourbillon de Lamb-Oseen

La première structure  tudi e est un tourbillon. On utilise pour ce faire le tourbillon de Lamb-Oseen qui est un modèle de tourbillon dont la vorticité décroît à cause de la vorticité (Saffman [79]). La distribution de vitesse pour ce tourbillon est définie en coordonnées polaires par :

$$\begin{cases} u_r = 0 \\ u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - \exp\left(\frac{-r^2}{r_c^2(t)}\right) \right), \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où Γ est la circulation du vortex et $r_c = \sqrt{4\nu t}$ est le coeur du tourbillon qui diffuse dans le temps.

On se place à un instant donné avec $\Gamma = 2$ et $r_c = 1$. On obtient alors les profils en $x = 0$ pour la vitesse u_x , la vorticité et son laplacien présentés figure D.1. La représentation surfacique de la vorticité et de son laplacien est donn e figure D.2. On voit nettement le motif du laplacien de vorticité avec un coeur négatif entouré d'un anneau positif. Si la circulation était oppos e on obtiendrait un coeur positif et un anneau négatif.

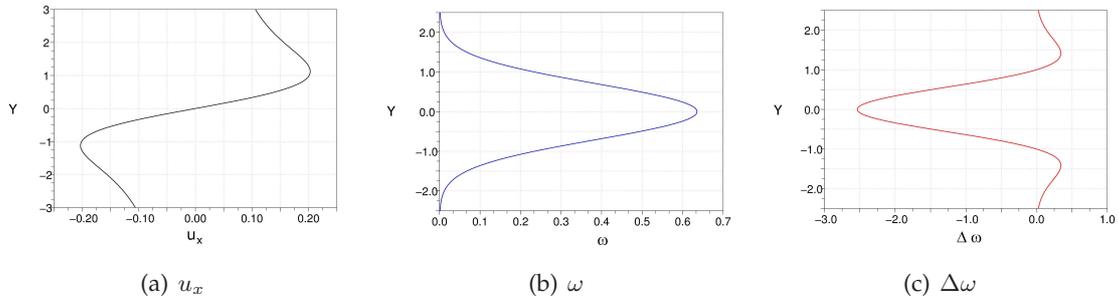


FIG. D.1 – Profils de vitesse longitudinale, de vorticité et de laplacien de vorticité en $x = 0$ pour un tourbillon de Lamb-Oseen.

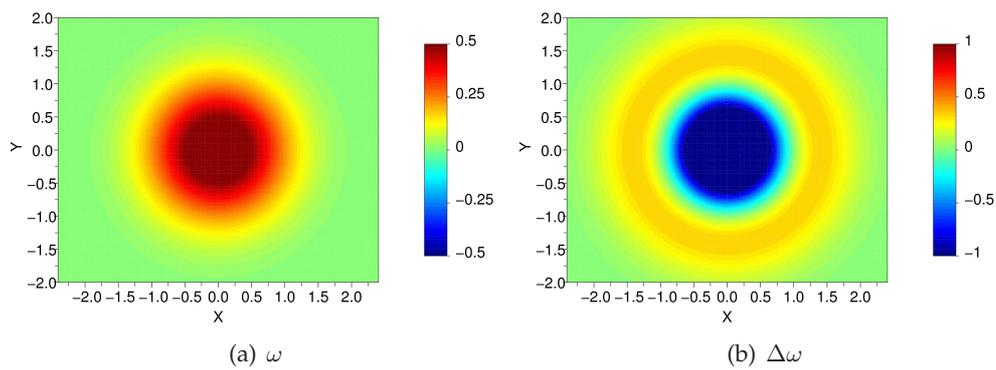


FIG. D.2 – Vorticité et laplacien de vorticité pour un tourbillon de Lamb-Oseen.

Couche cisailée

On considère maintenant une couche cisailée centrée sur l'axe horizontal. Le profil de vitesse dans cette couche cisailée est en tangente hyperbolique :

$$\begin{cases} u_x = U_\infty \tanh y \\ u_y = 0, \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

où U_∞ est la vitesse de l'écoulement quand $y \rightarrow \infty$ et $-U_\infty$ la vitesse quand $y \rightarrow -\infty$. On fixe $U_\infty = 5$ et on obtient les profils de vitesse, de vorticité et de laplacien de vorticité de la figure D.3.

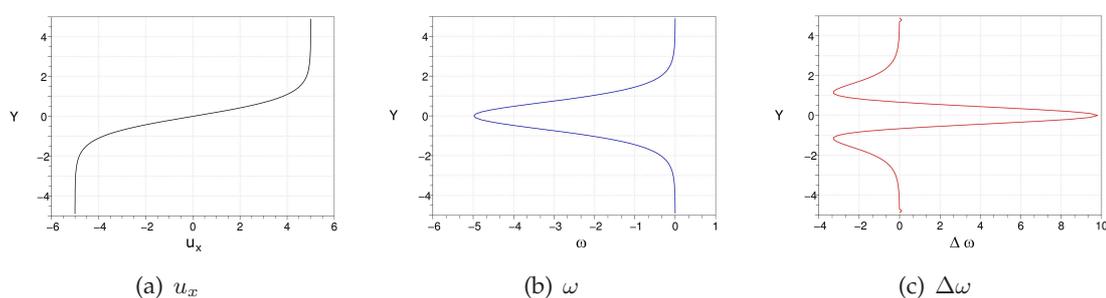


FIG. D.3 – Profils de vitesse longitudinale, de vorticité et de laplacien de vorticité en $x = 0$ pour une couche cisailée.

La représentation surfacique de la vorticité et de son laplacien (figure D.4) fait apparaître une association entre une couche cisailée de vorticité négative et une alternance de couches de laplacien de vorticité (structure en « sandwich ») de signe positif au centre et négatif sur les bords. Comme pour le tourbillon de Lamb-Oseen, un changement de signe de vorticité donne une alternance opposée de signe de laplacien de vorticité.

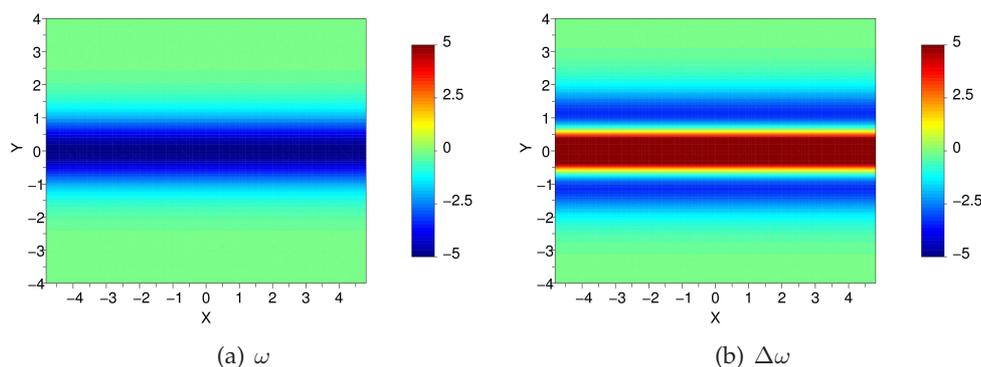


FIG. D.4 – Vorticité et laplacien de vorticité pour une couche cisailée.

Couche limite

On considère enfin une couche limite se développant sur une plaque plane de longueur infinie (couche limite de Blasius [11], avec profils de vitesse auto-similaires). Une plaque plane alignée avec un écoulement parallèle et homogène ne perturbe pas ce même écoulement ; on a donc la vitesse de l'écoulement $U_\infty = \text{cte}$ et le gradient de pression vaut $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. La vitesse à la paroi est nulle (condition de non-glissement), et une couche limite se développe donc entre la plaque et l'écoulement infini. L'épaisseur de la couche limite à l'abscisse x s'écrit :

$$\delta(x) = \left(\frac{\nu x}{U_\infty} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{D.3})$$

et les profils de vitesse se calculent en résolvant l'équation différentielle de Blasius sur $f(s)$:

$$f f'' + 2f''' = 0, \quad (\text{D.4})$$

où $s = \frac{y}{\delta(x)}$ et $f'(s) = \frac{u}{U_\infty}$. En prenant une vitesse d'écoulement $U_\infty = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ et une viscosité cinématique $\nu = 1.57 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (air), on obtient les profils (figure D.5) de la vitesse longitudinale, de la vorticité et du laplacien de vorticité pris à $x = 0.2 \text{ m}$ (traits continus sur la figure D.6). Les représentations surfaciques de ces grandeurs sont données dans la figure D.6. On observe que dans le cas d'une couche limite, seulement deux couches de signes opposés apparaissent sur le laplacien de vorticité.

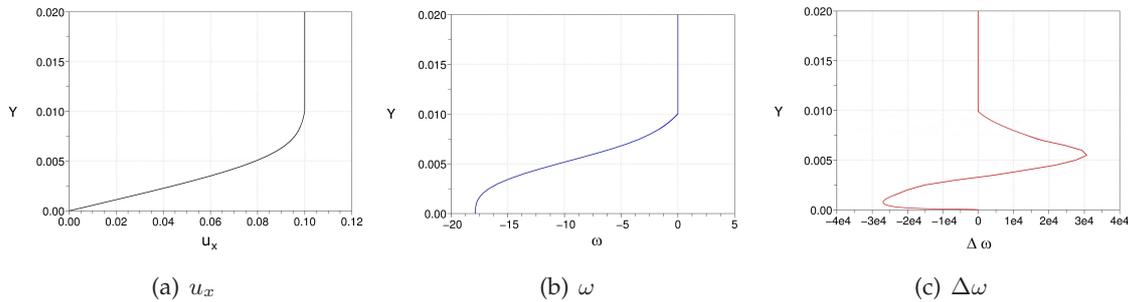


FIG. D.5 – Profils de vitesse longitudinale, de vorticité et de laplacien de vorticité en $x =$ pour une couche limite laminaire.

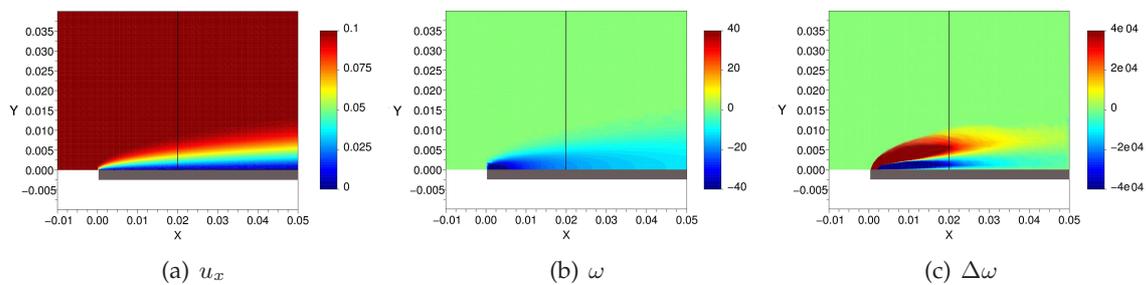


FIG. D.6 – Vitesse longitudinale, vorticité et laplacien de vorticité pour une couche limite laminaire.

Bibliographie

- [1] R.J. Adrian, K. T. Christensen, and Z.-C. Liu. Analysis and interpretation of instantaneous turbulent velocity fields. *Experiments in Fluids*, 62 :275–290, 2000.
- [2] S.R. Ahmed. Influence of base slant on the wake structure and drag of road vehicles. *Journal of fluids engineering*, 105 :429–434, 1983.
- [3] S.R. Ahmed, G. Ramm, and G. Faitin. *Some salient features of the time - averaged ground vehicle wake*. SAE, 1984.
- [4] P. Ardonneau and G. Amani. Remarks on the relation between lift induced drag and vortex drag. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 11 (4) :455–460, 1992.
- [5] R. Aris. *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*. Dover Publications, 1962.
- [6] J.E. Bardina, P.G. Huang, and T.J. Coakley. Turbulence modeling validation, testing, and development. Technical report, NASA Technical Memorandum 110446, 1997.
- [7] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [8] J.-F. Beaudoin, O. Cadot, J.L. Aider, K. Gosse, P. Paranthoën, B. Hamelin, M. Tissier, D. Allano, I. Mutabazi, M. Gonzales, and J.E. Wesfreid. Cavitation as a complementary tool for automotive aerodynamics. *Experiments in Fluids*, 37 :763–768, 2004.
- [9] A. Biesheuvel and R. Hagmeijer. On the force on a body moving in a fluid. *Fluid Dynamics Research*, 38 :716–742, 2006.
- [10] S. Bilbao. *Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. John Wiley and Sons, Chichester, UK, 2009.
- [11] H. Blasius. Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung. *Z. Math u. Phys.*, 56 :1, 1908.
- [12] G. Buresti. Notes on the role of viscosity, vorticity and dissipation in incompressible flows. *Meccanica*, 44 :469–487, 2009. starting vortex on an airfoil.
- [13] J.M. Burgers. On the resistance of fluid and vortex motion. *Proc. K. Akad. Wet.*, 23 :774–782, 1920.
- [14] O. Cadot, B. Thiria, and J.-F. Beaudoin. Passive drag control of a turbulent wake by local disturbances. *IUTAM Bookseries : 2007 Symposium on Unsteady Separated Flows and their Control*, 14 :529–537, 2009.
- [15] C.-C. Chang, Y.-C. Hsiau, and C.-C. Chu. Starting vortex and lift on an airfoil. *Physics of Fluids A*, 5 (11) :2826–2831, 1993.
- [16] C.-C. Chang and S.-Y. Lei. On the sources of aerodynamic forces : steady flow around a cylinder or a sphere. *Proceedings of the Royal Society A*, 452 :2369–2395, 1996.

- [17] C.-C. Chang, S.-H. Yang, and C.-C. Chu. A many-body force decomposition with applications to flow about bluff bodies. *J. Fluid Mech.*, 600 :95–104, 2008.
- [18] J.-M. Chomaz. Global instabilities in spatially developing flows : non-normality and nonlinearity. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37 :357–392, 2005.
- [19] M.S. Chong, A.E. Perry, and B.J. Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. *Physics of Fluids A*, 2 :765–777, 1990.
- [20] J. Cousteix. *Turbulence et couche limite*. Cepadues Editions, 1989.
- [21] R. Cucitore, M. Quadrio, and A. Baron. On the effectiveness and limitations of local criteria for the identification of a vortex. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 18 (2) :261–282, 1999.
- [22] J. O. Dabiri. On the estimation of swimming and flying forces from wake measurements. *The journal of Experiments Biology*, 208 :3519–3532, 2005.
- [23] U. Dallmann. Topological structures of three-dimensional flow separation. Technical report, Tech. Report DFVLR-IB No.221-82 A07, 1983.
- [24] S. Depardon, J.-J. Lasserre, L. Brizzi, and J. Borée. Automated topology classification method for instantaneous velocity fields. *Experiments in Fluids*, 42 (5) :697–710, 2007.
- [25] L. Fiabane, M. Gohlke, and O. Cadot. Characterization of flow contributions to drag and lift of a circular cylinder using a volume expression of the fluid force. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, In Press :Accepted manuscript available online 16/12/2010, 2010.
- [26] L. Fiabane, M. Gohlke, O. Le Maître, and O. Cadot. Flow structures and force creation over a circular cylinder. In *Proceedings of the 6th IUTAM Symposium on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations*, June 2010.
- [27] R. Franke, W. Rodi, and B. Schönung. Numerical calculation of laminar vortex-shedding flow past cylinders. *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 35 :237–257, 1990.
- [28] FLUENT. FLUENT theory guide. Technical report, ANSYS, Inc., 2008.
- [29] N. Fujisawa, S. Tanahashi, and K. Srinivas. Evaluation of pressure field and fluid forces on a circular cylinder with and without rotational oscillation using velocity data from piv measurement. *Measurement Science and Technology*, 16 :989–996, 2005.
- [30] J.H. Gerrard. The mechanics of the formation region of vortices behind bluff bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 25 :401–413, 1966.
- [31] L. Graftieaux, M. Michard, and N. Grosjean. Combining piv, pod and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. *Measurement Science and Technology*, 12 :1422–1429, 2001.
- [32] G. Graziani and P. Bassanini. Unsteady viscous flows about bodies : Vorticity release and forces. *Meccanica*, 37 :283–303, 2002.
- [33] E. Guyon, J.P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences et CNRS Editions, 2001.
- [34] J. E. Hackett and A. Sugavanam. Evaluation of a complete wake integral for the drag of a car-like shape. Technical report, SAE Paper 840577 pp.45-67, 1984.
- [35] G. Haller and G. Yuan. Lagrangian coherent structures and mixing in two-dimensional turbulence. *Physica D*, 147 :352–370, 2000.
- [36] H. L. F. von Helmholtz. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. *Monatsberichte der Königlich Akademien der Wissenschaften zu Berlin*, 23 :215–228, 1868.

- [37] R.D. Henderson. Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. *Physics of Fluids*, 7 :9, 1995.
- [38] W.-H. Hucho and G. Sovran. Aerodynamics of road vehicles. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25 :485–537, 1993.
- [39] J.C.R. Hunt, A.A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. *Center for Turbulence Research Report, CTR-S88* :193–208, 1988.
- [40] F. Hussain. Coherent structures and turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 173 :303–356, 1986.
- [41] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *Journal of Fluid Mechanics*, 285 :69–94, 1995.
- [42] J. Jeong, F. Hussain, W. Schoppa, and J. Kim. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 332 :185–214, 1997.
- [43] N.E. Joukowski. Sur les tourbillons adjoints. In *Transcript of the Physical Section, Imperial Society of Friends of Natural Sciences, Moscow, vol. 23*, 1906.
- [44] T. von Kármán. Über den Mechanismus des Widerstands, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. *Göttinger Nachrichten, Math. Phys. Kl.*, pages 509–517, 1911.
- [45] S. Kida and H. Miura. Identification and analysis of vortical structures. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 17 (4) :471–488, 1998.
- [46] G. Kirchhoff. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 70 :289–298, 1869.
- [47] V. Kolář. Vortex identification : New requirements and limitations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28 :638–652, 2007.
- [48] S. Krajnovic and L. Davidson. Large-eddy simulation of the flow around a simplified car model. Technical report, SAE 2004-01-0227, 2004.
- [49] D. F. Kurtulus, F. Scarano, and L. David. Unsteady aerodynamic forces estimation on a square cylinder by tr-piv. *Experiments in Fluids*, 42 :185–196, 2007.
- [50] W. Kutta. *Auftriebskräfte in stromenden Flüssigkeiten*. Illustrierte Aeronautische Mitteilungen, 1902.
- [51] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Dover, 1945.
- [52] O.P. Le Maître, R.H. Scanlan, and O.M. Knio. Estimation of the flutter derivatives of an NACA airfoil by means of Navier-Stokes simulation. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :1–28, 2003.
- [53] B. P. Leonard and S. Mokhtari. Ultra-sharp non-oscillatory convection schemes for high-speed steady multidimensional flow. *NASA TM, NASA Lewis Research Center, (ICOMP-90-12)* :1–2568, 1990.
- [54] H. Lienhart and S. Becker. Flow and turbulence structures in the wake of a simplified car model. Technical report, SAE paper 2003-01-0656, 2003.
- [55] J. Lighthill. Fundamentals concerning wave loading on offshore structures. *J. Fluid Mech.*, 173 :667–681, 1986.
- [56] J.-C. Lin and D. Rockwell. Force identification by vorticity fields : Techniques based on flow imaging. *Journal of Fluids and Structures*, 10 :663–668, 1996.
- [57] H.J. Lugt. *Vortex Flow in Nature and Technology*. Wiley, 1983.
- [58] C. Marongiu and R. Tognaccini. Far-field analysis of aerodynamic force by lamb vector integrals. *AIAA Journal*, accepted, 2010.

- [59] F.R. Menter. Two equations eddy viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32, 8 :1598–1605, 1994.
- [60] M. Michard and T. Favelier. Développement d'un critère d'identification de structures tourbillonnaires adapté aux mesures de vitesse par piv. In *Actes du 9ème Congrès de Vélocimétrie Laser*, 2004.
- [61] M. Michard and T. Favelier. Étude d'un critère d'identification de structures tourbillonnaires. Technical report, Contrat CNRT/2004/05, 2005.
- [62] L.M. Milne-Thomson. *Theoretical hydrodynamics*. Dover Publications, 1968.
- [63] J.-J. Moreau. Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées*, 32 :1–78, 1956.
- [64] M. Nishioka and H. Sato. Mechanism of determination of the shedding frequency of vortices behind a cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 89 :49–60, 1978.
- [65] F. Noca. *On the evaluation of time-dependent fluid-dynamic forces on bluff bodies*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1997.
- [66] F. Noca, D. Shiels, and D. Jeon. Measuring instantaneous fluid dynamic forces on bodies, using only velocity fields and their derivatives. *Journal of Fluids and Structures*, 11 :345–350, 1997.
- [67] F. Noca, D. Shiels, and D. Jeon. A comparison of methods for evaluating time-dependent fluid dynamic forces on bodies, using only velocity fields and their derivatives. *Journal of Fluids and Structures*, 13 :551–578, 1999.
- [68] M. Onorato, A. F. Costelli, and A. Garrone. Drag measurement through wake analysis. Technical report, SAE technical paper series 840302 :85-93, 1984.
- [69] B. W. van Oudheusden, F. Scarano, N. P. van Hinsberg, and D. W. Watt. Phase-resolved characterization of vortex shedding in the near wake of a square-section cylinder at incidence. *Experiments in Fluids*, 39 :86–98, 2005.
- [70] B.W. van Oudheusden, F. Scarano, and E.W.F. Casimiri. Non-intrusive load characterization of an airfoil using piv. *Experiments in Fluids*, 40 :988–992, 2006.
- [71] V. Parezanović and O. Cadot. The impact of a local perturbation on global preproperties of a turbulent wake. *Physics of Fluids*, 21 :(7), 2009.
- [72] A.E. Perry and M.S. Chong. A description of eddying motions and flow patterns using critical point concepts. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19 :125–155, 1987.
- [73] L. Prandtl. Applications of modern hydrodynamics to aeronautics. Technical report, NACA-TR-116, 1923.
- [74] B. Protas. On an attempt to simplify the quartapelle-napolitano approach to computation of hydrodynamic forces in open flows. *Journal of Fluids and Structures*, 23 :1207–1214, 2007.
- [75] B. Protas, A. Styczek, and A. Nowakowski. An effective approach to computation of forces in viscous incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 159 :231–245, 2000.
- [76] L. Quartapelle and M. Napolitano. Force and moment in incompressible flows. *AIAA*, 21 :911–913, 1983.
- [77] Lord Rayleigh. On the resistance of fluids. *Philosophical Magazine*, 5 (2) :430–441, 1876.
- [78] A. Roshko. Perspectives on bluff body aerodynamics. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 49 :79–100, 1993.
- [79] P.E. Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, 1993.

- [80] H. Sakamoto and H. Haniu. Optimum suppression of fluid forces acting on circular cylinder. *Journal of Fluid Engineering*, 113 :183–189, 1994.
- [81] T. Sarpkaya. Lift, drag and added-mass coefficients for a circular cylinder immersed in a time-dependent flow. *Journal of Applied Mechanics*, 30 :13–15, 1963.
- [82] R. Schiestel. *Méthodes de modélisation et de simulation des écoulements turbulents*. Lavoisier, 2006.
- [83] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary layer theory*. Springer, 1955.
- [84] P.J. Strykowski and K.R. Sreenivasan. The control of transittional flows. In *AIAA Shear Flow Control Conference, Paper 85-0559*, 1994.
- [85] B.T. Tan, M.C. Thompson, and K. Hourigan. Evaluating fluid forces on bluff bodies using partial velocity data. *Journal of Fluids and Structures*, 20 :5–24, 2005.
- [86] H. Theisel and H.-P. Seidel. Feature flow fields. in data visualization. In *Proceedings of VisSym*, 2003.
- [87] X. Tricoche, T. Wischgoll, G. Scheuermann, and H. Hagen. Topology tracking for the visualization of time-dependent two-dimensional flows. *Computers and Graphics*, 26 :249–257, 2002.
- [88] M. Ueno, R. Tognaccini, and C. Marongiu. Lift induced drag computation by lamb vector integration. In *Proceedings of the 40th AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit*, 2010.
- [89] M. F. Unal, J.-C. Lin, and D. Rockwell. Force prediction by piv imaging : a momentum-based approach. *Journal of Fluids and Structures*, 11 :965–971, 1997.
- [90] J. P. Vandoormaal and G. D. Raithby. Enhancements of the simple method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, 7 :147–163, 1984.
- [91] H. Vollmers, H.-P. Kreplin, and H.U. Meier. Separation and vortical-type flow around a prolate spheroid - evaluation of relevant parameters. In *Proceedings of the AGARD Symposium on Aerodynamics of Vortical Type Flows in Three Dimensions, Rotterdam, AGARD-CP-342, pp. 14.1-14.14*, 1983.
- [92] T. Weinkauff, H. Theisel, A. Van Gelder, and A. Pang. Stable feature flow fields. *IEEE Transactions on Vizualization and Computer Graphics*, accepted, 2010.
- [93] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28 :477–539, 1996.
- [94] J.-C. Wu. Theory for aerodynamic force and moment in viscous flows. *AIAA*, 19 :432–441, 1983.
- [95] J.-Z. Wu, X.-Y. Lu, and L.-X. Zhuang. Integral force acting on a body due to local flow structures. *J. Fluid Mech.*, 576 :265–286, 2007.
- [96] J.-Z. Wu, H.-Y. Ma, and M.-D. Zhou. *Vorticity and Vortex Dynamics*. Springer, 2006.
- [97] J. Zhou, R.J. Adrian, and S. Balachandar. Autogeneration of near-wall vortical structures in channel flow. *Physics of Fluids*, 8 :288–290, 1996.

