



**HAL**  
open science

# Propagation d'ondes acoustiques guidées dans les milieux granulaires

Lenaïc Bonneau

► **To cite this version:**

Lenaïc Bonneau. Propagation d'ondes acoustiques guidées dans les milieux granulaires. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2009. Français. NNT : . pastel-00559001

**HAL Id: pastel-00559001**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00559001>**

Submitted on 24 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

# THÈSE

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR de l'Université Paris Diderot (Paris VII)**

Spécialité : **Acoustique physique**

préparée au laboratoire **Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes,**  
**École Supérieure de Physique et Chimie Industrielle de Paris**

dans le cadre de l'École Doctorale **École Doctorale de Physique**  
**Macroscopique ED404**

présentée et soutenue publiquement  
par

**Lénaïc Bonneau**

le 2 mars 2009

Titre:

**Propagation d'ondes acoustiques guidées dans les milieux  
granulaires**

Directeur de thèse: **Éric Clément**

Co-directeur de thèse: **Bruno Andreotti**

Jury

M. Tristan Baumberger,	Examineur
M. Jean-Christophe Géminard,	Rapporteur
M. Xiaoping Jia,	Rapporteur
M. Stéphane Job,	Examineur
Mme. Anne Tanguy,	Examineur

---

# Table des matières

Table des matières . . . . .	iii
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Élasticité non-linéaire des matériaux granulaires</b>	<b>11</b>
1 Origine microscopique : le contact de Hertz . . . . .	11
1.1 Interaction de contact de Hertz . . . . .	11
1.2 Rappel élastique tangentiel . . . . .	12
2 De l'échelle microscopique au milieu continu . . . . .	13
2.1 Modèles de champ moyen . . . . .	13
2.2 Les limites du modèle de champ moyen . . . . .	16
3 Modèle de Jiang et Liu . . . . .	18
3.1 Conventions d'écritures . . . . .	18
3.2 Exposition du modèle . . . . .	18
3.3 Détermination des coefficients de compression et de cisaillement par le calcul de champ moyen . . . . .	20
4 Propagation d'ondes sous compression isotrope . . . . .	22
4.1 Vitesse de propagation des ondes longitudinales sous compression isotrope . . . . .	22
4.2 Vitesse de propagation des ondes transverses sous compression isotrope . . . . .	22
5 Théorie de la rigidité, transition de blocage . . . . .	23
5.1 Transition de blocage et limite de rigidité . . . . .	23
5.2 Propriétés des modules d'élasticité au voisinage de la transition de blocage . . . . .	24
5.3 Théorie des modes mous . . . . .	25
5.4 Assemblage de grains frottants . . . . .	26
<b>2 Ondes de surface dans un milieu granulaire</b>	<b>29</b>
1 Equilibre du système sous gravité . . . . .	29
2 Ondes sagittales . . . . .	30
2.1 Influence d'une perturbation du champ de déplacement . . . . .	30
2.2 Forme des modes et relation de dispersion des ondes sagittales . . . . .	32
2.3 Résultats . . . . .	34
3 Ondes transverses . . . . .	34
3.1 Influence d'une perturbation transverse du champ de déplacement . . . . .	34
3.2 Forme des modes . . . . .	35
3.3 Résolution . . . . .	35

4	Effets de taille finie . . . . .	35
4.1	Effet de la profondeur finie sur la relation de dispersion : fréquences de coupure du guide d'onde . . . . .	36
4.2	Fréquences de résonances d'une couche de matériau granulaire d'épaisseur $H$ . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Caractérisation expérimentale des ondes de surface</b>	<b>41</b>
1	Introduction . . . . .	41
1.1	Un bref regard sur les expériences précédentes . . . . .	41
1.2	Cahier des charges de l'expérience : . . . . .	42
2	Dispositif expérimental . . . . .	43
2.1	Vue générale de l'expérience : . . . . .	43
2.2	Canal de mesure des ondes de surfaces . . . . .	43
2.3	Conception des émetteurs d'ondes de surface . . . . .	45
2.4	Choix des capteurs . . . . .	47
2.5	Système d'acquisition de données . . . . .	47
3	Méthode d'analyse du signal . . . . .	48
3.1	Choix du signal émis . . . . .	49
3.2	La transformée de Tabor . . . . .	49
3.3	Détermination de la relation de dispersion . . . . .	50
3.4	Programme d'analyse du signal : . . . . .	51
4	Expériences et résultats . . . . .	52
4.1	Préparation de l'empilement granulaire . . . . .	52
4.2	Des ondes localisées en surface . . . . .	52
4.3	Des ondes qui se propagent . . . . .	56
4.4	Mesure des relations de dispersion . . . . .	56
4.5	Est-ce que la vitesse suit la loi d'échelle correspondant à la loi de Hertz ? . . . . .	58
4.6	Mesure des modules d'élasticité . . . . .	59
4.7	Conséquences . . . . .	60
	<b>Conclusion sur les ondes de surface</b>	<b>63</b>
<b>4</b>	<b>Amplification par la friction d'ondes guidées .</b>	<b>65</b>
1	Introduction . . . . .	65
2	Principe de l'expérience . . . . .	67
3	Dispositif expérimental . . . . .	69
3.1	Montage expérimental . . . . .	69
3.2	Méthodes de mesures . . . . .	72
3.3	Construction des tubes munis de capteurs pariétaux . . . . .	73
4	Résultats . . . . .	74
4.1	Des ondes qui se propagent . . . . .	74
4.2	Mise en évidence d'une amplification des ondes : . . . . .	75
4.3	Formation d'ondes de choc : . . . . .	76
4.4	Lois d'échelle expérimentales . . . . .	77

---

<b>5</b>	<b>Amplification par frottement d'une onde guidée : modélisation</b>	<b>81</b>
1	Modèle uni-dimensionnel d'écoulement granulaire en conduite . . . .	81
1.1	Géométrie et loi de comportement . . . . .	81
1.2	État de base . . . . .	82
2	Analyse de stabilité linéaire . . . . .	84
2.1	Influence de la dissipation . . . . .	85
3	Analyse non-linéaire . . . . .	87
3.1	Intégration numérique des équations . . . . .	87
3.2	Ondes solitaires . . . . .	87
	<b>Conclusion : amplification par friction d'une onde guidée dans un écoulement granulaire</b>	<b>91</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>
	<b>Annexe. Des airs de désert, le chant des dunes revisité</b>	<b>101</b>
3.3	Dispositif de mesure sur le terrain . . . . .	110
3.4	Résonance vs condition de réflexion totale . . . . .	113
	<b>Bibliographie</b>	<b>119</b>



# Introduction

Dans le monde industriel [1] et en géophysique [2], il existe de nombreux systèmes impliquant des écoulements mixtes de fluide et de grains dont la rhéologie est souvent complexe et mal comprise. Néanmoins, tous ces écoulements présentent une même caractéristique essentielle, celle de présenter une transition plus ou moins bien définie entre des états bloqués et des états fluides.

Des exemples bien connus sont les phénomènes d'avalanches de neige, d'éboulements et de glissements de terrain dont la dangerosité est liée au caractère métastable et imprédictible des équilibres. Une faible perturbation localisée d'amplitude finie peut déclencher un écoulement à grande échelle aux conséquences désastreuses. Ce comportement ambigu entre solide et liquide n'est pas sans poser de nombreux problèmes quant à la qualité et la performance des processus industriels et aussi quant à la fiabilité des prédictions concernant les risques naturels.

Au delà de ces considérations pratiques. La possibilité pour les phases denses en grains de se bloquer pose des questions fondamentales quant à la nature des seuils de blocage et de mise en mouvement. Pour les systèmes les plus simples, c'est à dire les empilements de grains secs sans force cohésive, le caractère solide est dû à la pression de confinement qui est soit de nature gravitaire, soit dû à l'application de contraintes externes. Dans ce cas, la mise en mouvement par cisaillement se fait lorsque la contrainte dépasse un seuil proportionnel à la pression de confinement, appelé « seuil de Coulomb » [3]. Ces milieux relativement simples ont été beaucoup étudiés dans le contexte de la mécanique des sols et plus récemment de la physique [4], car hormis leur intérêt pratique, ils sont suffisamment riches pour servir de modèle aux problématiques liées à la transition d'encombrement (appelée souvent "transition de jamming" en français correct). Il est à noter qu'ils interviennent aussi énormément dans les procédés industriels – stockage, écoulement, mélange et transformation – tant dans le domaine agro-alimentaire, pharmaceutique et la construction. Tout ces matériaux sont composés d'un grand nombre de grains solides, suffisamment massifs pour ne pas subir l'incessant mouvement brownien et pour n'interagir que par contacts frottants. La comparaison entre l'énergie potentielle de gravité et l'énergie thermique donne une échelle de taille de grain de typiquement  $1 \mu\text{m}$  au delà laquelle le mouvement brownien lié à l'agitation thermique devient négligeable. En pratique les forces adhésives de Van-der-Waals deviennent elles aussi négligeables au delà d'une centaine de micron pour les matériaux comme les grains de silice. C'est typiquement la situation qui sera au centre de cette thèse. De nombreuses études ont été faites pour mieux comprendre le comportement mécanique des empilements de grains sous confinement isotrope ou anisotrope. Elles ont montré que les réponses purement élastiques étaient confinées à un très faible domaine de déformation, typiquement  $\epsilon \sim 10^{-4}..10^{-5}$ ; au delà on observe des réor-

ganisations irréversibles et des modifications de textures microscopiques marquées par une évolution des distributions de contacts intergranulaires (voir discussion et références dans [5,6]). Les études micromécaniques fines menées sur des simulations numériques d'empilement par Radjai *et al* [7] montrent des évolutions subtiles des réseaux de forces de contact en réponse à diverses sollicitations. Ainsi, on a observé numériquement et expérimentalement une dépendance de l'histoire de la préparation ainsi que des évolutions anisotropes des propriétés constitutives en réponse à une déformation et/ou à une contrainte [8], [9], [10].

Sous l'effet d'un cisaillement, comme par exemple l'inclinaison d'un empilement granulaire confiné sous gravité [11,12], on observe de nombreuses réorganisations en prélude à la mise en mouvement collective de l'ensemble du matériau. Au delà du seuil d'avalanche, ou sous contrainte cisailante suffisamment forte, un assemblage granulaire peut s'écouler globalement comme un liquide. Des études récentes sur la rhéologie de systèmes simples comme les assemblages de billes monodisperses ou faiblement polydisperses ont montré qu'elle peut-être décrite par un coefficient de friction effectif qui ne dépend que d'un nombre sans dimension appelé nombre d'inertie [13]. Ce nombre peut-être compris simplement comme le rapport entre un temps de réorganisation microscopique dû à la pression de confinement et un temps macroscopique lié au cisaillement. Le coefficient de friction effectif, défini comme le rapport entre contrainte de cisaillement et contrainte normale, augmente avec le taux de cisaillement. La viscosité effective étant le rapport entre la contrainte de cisaillement et le taux de cisaillement, celle-ci diverge à faible taux de cisaillement. En conséquence, le système se bloque, avec un coefficient de friction inférieur à la valeur de mise en mouvement. Le comportement rhéologique proche du seuil de blocage est encore mal compris. Expérimentalement, on observe la localisation des déformations sur des échelles de quelques tailles de grains, ce qu'on appelle des *bandes de cisaillement*. Dans ce domaine, le coefficient de friction effectif est essentiellement constant et on ignore actuellement, l'influence réelle des processus internes de transport de la quantité de mouvement, comme les ondes élastiques, sur la stabilité des réseaux de contact granulaires. En revanche, on sait empiriquement que l'injection de vibrations ou d'ondes sonores d'amplitude suffisamment importante peut changer fortement la valeur des seuils d'écoulements [14,15].

Il est intéressant de voir que ce système d'assemblage granulaire s'apparente phénoménologiquement au comportement d'autres systèmes physiques très différents du point de vue des interactions microscopiques comme les gels, les pâtes, les mousses ou bien les verres colloïdaux [19], [20], [21], [22]. Pour les comprendre, Liu et Nagel [16] ont proposé un cadre de description général, celui de la transition d'encombrement. Une représentation simple de ce concept est donnée traditionnellement par un diagramme à trois axes (fig.1), la température, le volume libre par particule et une échelle de contrainte. Les phases bloquées se manifestent pour les valeurs faibles de ces grandeurs. *A priori* les systèmes granulaires correspondent à la limite des températures nulles du diagramme. En suivant l'idée originale de Liu et Nagel, on peut adapter le diagramme de jamming à la situation d'un empilement granulaire en associant l'axe des températures à une variable d'agitation. En revanche, il n'est pas clairement établi que la présence de vibrations soit tout à fait équivalente à une température au sens de la thermodynamique. Enfin, l'axe des contraintes, dans le cas d'un milieu granulaire non-cohésif, doit être remplacé par le rapport entre

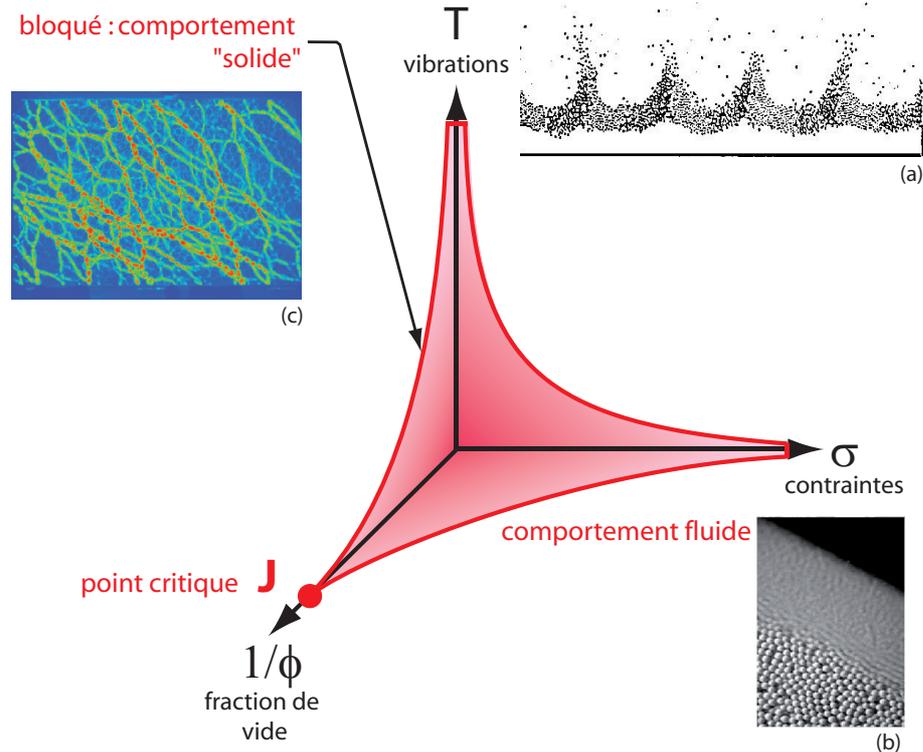


FIGURE 1 – Diagramme qualitatif des états bloqués d’un matériau granulaire, adapté du diagramme de jamming de Liu et Nagel [16]. Dans la phase fluide sous vibration : (a) instabilité de Faraday pour une couche fluide de grains vibrés [17]; (b) avalanche granulaire [18]. Phase bloquée : (c) milieu granulaire modèle composé de cylindres en polymère photo-élastique. Les différentes couleurs permettent de quantifier l’amplitude des contraintes et de visualiser les chaînes de forces qui confèrent au matériau granulaire la propriété d’être un milieu élastique hétérogène [9].

contrainte de cisaillement et contrainte normale. En effet, dans ce cas, c’est uniquement la pression de confinement qui fixe l’échelle de la contrainte seuil.

L’étude de la propagation des ondes acoustiques est une méthode de choix pour étudier les propriétés élastiques d’un matériau solide. De manière générale, la vitesse des ondes acoustiques  $c$  dépend des modules élastiques des matériaux  $E$  et de la densité  $\rho$  selon la loi d’échelle  $c \propto \sqrt{E/\rho}$ . Dans les solides homogènes, deux sortes d’ondes peuvent-être mises en évidence : les ondes de compression (les plus rapides) et les ondes de cisaillement (plus lentes) [23]. Pour un matériau solide massif comme le quartz, les ondes se propagent typiquement à des vitesses de l’ordre de 5000 à 6000 m/s. Alors que dans un cristal, le rappel élastique s’explique par la forme concave de l’énergie potentielle d’interaction entre atomes, qui est la somme du potentiel électrostatique de Van der Waals (attractif) et d’un potentiel répulsif à courte portée (d’origine quantique), lié à l’impossibilité de superposer les nuages électroniques des atomes. La forme de ce potentiel a pour effet de stabiliser les atomes à une certaine distance d’équilibre autour de laquelle ils oscillent sous l’effet de l’agitation thermique. Or, pour un matériau granulaire non cohésif, la force s’exerçant au point de contact est uniquement répulsive. Par conséquent, il n’existe pas dans de

mécanisme intrinsèque assurant la cohésion du matériau granulaire. Du fait de la géométrie des grains, la force de contact entre ceux-ci est non-linéaire [24]. Des travaux théoriques ont proposé différentes descriptions élastiques macroscopiques [25], [26] découlant des caractéristiques mécaniques du contact, [27], [28], [29], [30]. Naturellement, l'élasticité des empilements granulaires a été testée expérimentalement par des mesures acoustiques dans des échantillons de matériaux granulaires sous forte pression de confinement [31] [32], [33], [34], [35]. Du fait de la nature des interactions de contact, les valeurs de vitesse sont bien inférieures à celles du matériau massif (typiquement 300 m/s pour des billes de verre soumises à une pression de 1 MPa). Pour pouvoir mesurer autre chose qu'un bruit (dit de « *speckle* ») dû à la distribution hétérogène des forces au sein de l'édifice granulaire, il convient d'exciter le milieu par des longueurs d'ondes largement supérieures à la taille typique des grains. Néanmoins, même dans un cadre d'élasticité effective et, comme nous le décrirons plus précisément dans le prochain chapitre, la comparaison entre mesures acoustiques et les théories issues de l'homogénéisation des interactions microscopiques n'est pas satisfaisante. Essentiellement, l'échec provient de la difficulté à prendre en compte, dans une description élastique simple, des réarrangements de la texture granulaire ainsi que des corrélations du mouvements des grains en réponse à une perturbation acoustique. Ces mouvements affectent la rigidité de l'assemblage granulaire et comme nous le verrons par la suite, ils peuvent probablement être compris dans le cadre théorique général de la transition d'encombrement. Ces effets "anormaux" devraient être particulièrement exacerbés sous faible pression ou au voisinage des seuils d'instabilité de l'empilement granulaire. De plus, comme l'élasticité effective du matériau dépend de la pression, les ondes de compression sont naturellement très sensibles aux effets non-linéaires. Ainsi, la propagation d'ondes solitaires a été mise en évidence par Job *et al.* [36] et Melo *et al.* [37]. Enfin, lorsque l'amplitude d'excitation acoustique est suffisamment grande, on observe différentes signatures des effets non-linéaires : distorsion du signal, variation de la vitesse du son, *etc.*

Dans la première partie de ce travail, nous nous proposons d'étudier les propriétés élastiques d'un matériau granulaire dans la limite des faibles pressions de confinement tant théoriquement qu'expérimentalement. Pour ce faire, nous avons mis en oeuvre des mesures de propagation d'ondes dans un empilement présentant une surface libre. L'idée est de parvenir à créer des ondes localisées en surface sur une profondeur typique d'une longueur d'onde  $\lambda$ , la pression caractéristique étant alors  $P \propto \rho g \lambda$ . Ainsi, en utilisant des longueurs d'ondes faibles sans toutefois approcher la taille du grain, on peut explorer le comportement élastique du matériau sous de faibles pressions de confinement  $P$ . D'un point de vue classique, pour des matériaux élastiques homogènes, l'étude des ondes acoustiques montre qu'il existe des modes de surface de nature différentes des modes en volume, se propageant plus lentement que les ondes de compression et les ondes de cisaillement. Pour un milieu semi-infini à surface libre, ce sont les ondes de Rayleigh [38] qui s'atténuent exponentiellement avec la profondeur et sont caractérisées par la mise en mouvement du matériau selon une trajectoire elliptique dans le plan généré par la verticale et la direction de propagation. Cette polarisation est liée à la nécessité de satisfaire les conditions aux limites de contrainte nulle à la surface. Il n'existe pas d'ondes de Rayleigh transverses à la direction de propagation. Toutefois dans le cas d'un guide d'onde constitué de deux couches de matériaux élastiques homogènes, il existe des

modes guidés le long de la surface, de polarisation transverse, appelés "ondes de Love [39]".

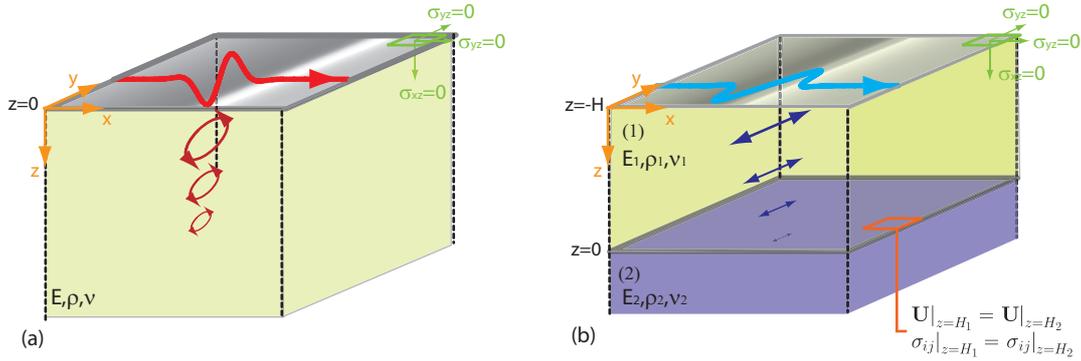
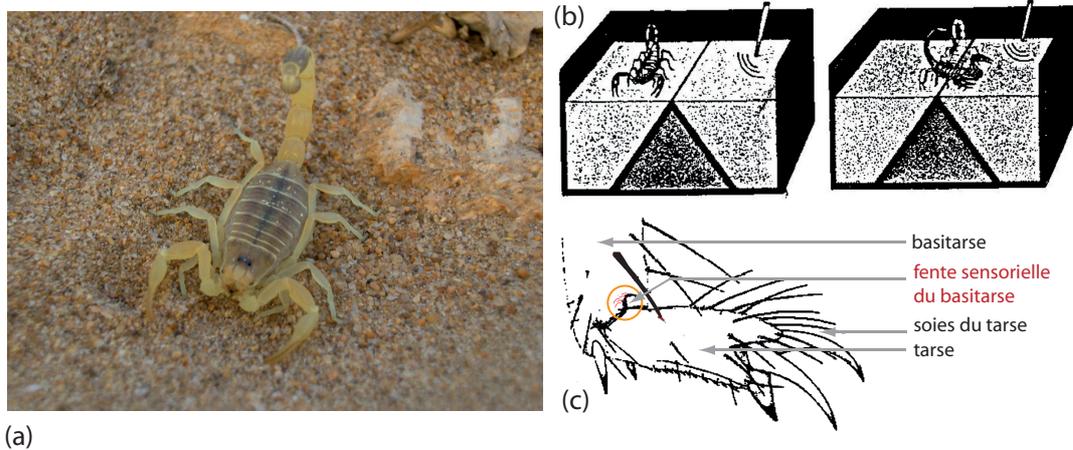


FIGURE 2 – (a) Onde de Rayleigh. (b) Onde de Love.

Bien sûr, pour un matériau granulaire présentant une surface libre et soumis à la gravité, une stratification apparaît du fait que la pression de confinement augmente avec la profondeur. Qualitativement la vitesse augmente avec la pression. Ainsi, une onde générée dans la direction horizontale subit une réfraction et est déviée vers la surface. C'est ce que l'on peut décrire comme "un mirage acoustique", et comme l'ont souligné récemment Gusev et al. [40] cela a pour conséquence que dans un tel système, aucune onde, longitudinale ou transverse, ne peut-être transmise en volume. D'un point de vue expérimental l'un des travaux pionniers sur ces systèmes est celui de Liu et al. [41] qui a réalisé des expériences de propagation d'ondes acoustiques sous gravité. Il a observé que la réponse d'un matériau granulaire à des oscillations est d'une nature très différente de celle de liquides ou de solides. Le signal est extrêmement bruité sur plus de 5 décades de fréquences (0.5 à 25 kHz). Cette réponse dépend de l'empilement granulaire, qui selon Liu est dans un état métastable et est donc sujet à des réarrangements incessants. Compte-tenu du fait qu'à la surface, la pression de confinement est nulle, la vitesse des ondes s'annule et la trajectoire des « rayons » acoustiques devient singulière. Liu & Nagel s'interrogent sur le rôle de la surface en temps que singularité. Est-ce que l'onde « s'échappe » de la surface libre? Dans la poursuite de leurs travaux, Liu & Nagel ont effectué des mesures de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe de ces ondes [42]. Ces expériences sont délicates à interpréter et les valeurs obtenues varient sur près d'une décade selon la méthode de mesure ( $50 \lesssim c \lesssim 280 \text{ m.s}^{-1}$ ). L'effet de l'amplitude est important et un régime non linéaire est observé, interprété par les auteurs comme l'altération du réseau de contacts et des chaînes de forces au passage de l'onde. De plus, des effets particuliers apparaissent comme des petits décalages de fréquence par rapport à la fréquence d'excitation, qui selon Liu pourraient être interprétés comme la signature de modes localisés. Par la suite, un travail identique a été repris par Hostler & Brennen [43] qui révèlent au moyen de simulations et d'expériences la complexité des questions associées à la propagation d'ondes dans un lit granulaire sous gravité. Les observations de Liu & Nagel [41] sont confirmées et soulignent l'importance du caractère non-linéaire et hétérogène du matériau granulaire sur la propagation des ondes acoustiques. La conclusion de ces travaux jette un doute sur la possibilité même de propager sur de grandes échelles des ondes acoustiques en surface des empilements granulaires.



(a)

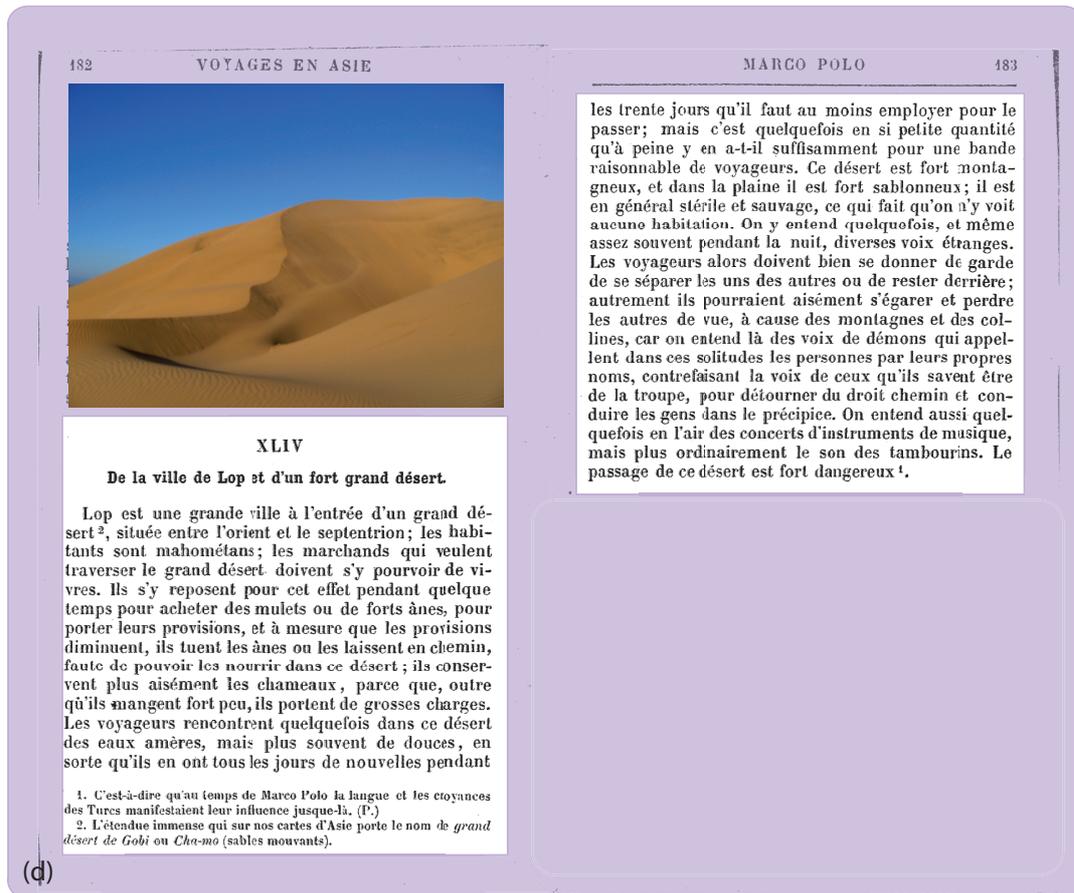


FIGURE 3 – (a) Le scorpion est sensible aux ondes sismiques se propageant dans le sable. (b) Brownell [44] : les organes sensitifs sont situés dans les pattes de l’animal. (c) La fente sensorielle du basitarse : un capteur capable de détecter des déplacements inférieurs à  $10^{-10}$  m ! (d) Extrait des « *Voyages de Marco Polo* » [45].

Cependant, en inspectant la littérature, on remarque à travers un certain nombre d'études d'éthologie animale que différentes espèces qui vivent en biotope sableux, invertébrés [46, 47], reptiles [48], mais aussi mammifères [49–52], sont capables de percevoir les vibrations transmises par le sable sur de grandes distances et de les mettre à profit pour les identifier et réagir à leur environnement. Les performances de leurs organes sensitifs leur permettent de localiser et d'attaquer des proies avec une grande précision. C'est le cas du scorpion du désert Mojave étudié par Brownell, fig.3(a). Cet animal ne dispose pas de récepteur auditif et olfactif suffisamment évolué pour lui permettre de se guider vers ses proies. De plus son acuité visuelle est trop mauvaise pour pouvoir chasser de nuit. Pourtant, le scorpion s'oriente dans la direction d'une proie située dans son voisinage, à chaque mouvement de celle-ci. Une séquence de chasse se décompose en quelques phases de poursuites entrecoupées de pauses, la poursuite recommençant dès que la proie remue le sable. Le scorpion est capable de détecter des proies éloignées jusqu'à 50 cm. En isolant sélectivement les membres du scorpion de la source des vibrations, en effectuant une tranchée entre deux bacs à sable, figure 3(b), Brownell a mis en évidence que les organes sensoriels sont situés aux extrémités des pattes de l'animal et qu'ils sont sensibles aux vibrations du sol. Il s'agit de la fente sensorielle du basitarse [53], figure 3(c). Leur sensibilité est extrême, permettant de détecter des déplacements inférieurs à  $10^{-10}$  m [44]. Brownell [47], par un schéma d'interprétation classique issu de la géophysique, interprète ses mesures de propagation comme un mélange d'ondes en volume réfléchies par les parois et d'ondes de surface. Il propose que ce sont les ondes de Rayleigh que le scorpion capte avec le plus d'acuité. Il est le premier, à notre connaissance, à avoir mesuré leur vitesse de propagation extrêmement faible relativement aux ondes solides classiques  $\simeq 50m/s$ . Cette vitesse de propagation est compatible avec les capacités de traitement de l'information du scorpion. C'est grâce au temps d'arrivée de ces ondes sur chacune de ses pattes qu'il est capable de connaître l'orientation et la distance de sa proie [54]. Ces observations nous indiquent que des ondes peuvent bien se propager sous gravité, à la surface d'un milieu granulaire. De plus, la sensibilité et la précision de la détection chez ces êtres vivants montrent qu'il est certainement possible, sous cette condition, d'extraire un signal cohérent. C'est celui-ci que nous cherchons à caractériser.

La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude des ondes sonores émises dans les écoulements granulaires. L'un des exemples les plus connus est le chant des dunes qui depuis des siècles fascine les voyageurs qui ont traversé les déserts du monde entier et excite la curiosité des scientifiques qui n'ont pas encore réussi à l'expliquer de manière satisfaisante. En Europe, ce phénomène a été évoqué pour la première fois par Marco Polo [45] lors de son arrêt dans la ville de Lop, située en Chine à l'entrée du désert de Gobi (fig.3(d)). « On y [*le désert*] entend quelquefois, et même assez souvent pendant la nuit, diverses voix étranges ». Il s'agit du chant des dunes, l'émission spontanée d'un grondement sourd, qui apparaît lorsqu'une avalanche s'écoule sur la face le sous vent de la dune. Bien sûr de nombreuses croyances ont attribué une origine fantastique à ce phénomène.

L'une des premières références scientifiques modernes qui établit une revue sur les origines de ce phénomène est le dernier chapitre, intitulé « *Singing sand* » de l'ouvrage de Bagnold, *The physics of blown sand and desert dunes* [55]. Bagnold fait la distinction entre deux types de sables chantants, ceux constituant certaines

plages, qui émettent des crissements ou des sifflements aigus, et ceux des dunes dont l'émission est beaucoup plus grave. Pour les premiers, Bagnold a effectué des expérimentations en laboratoire et montré que c'est l'ensemble des grains qui se met à vibrer à une fréquence parfaitement déterminée, comprise entre 800 et 1200 Hz suivant la vitesse de la stimulation. Il pense que ce phénomène vient d'une sorte d'oscillation de la pression répartie sur tout le volume du sable. Pour les seconds, les fréquences mesurées sont plus basses, approximativement<sup>1</sup> 130 Hz. La fréquence du phénomène varie légèrement suivant la vitesse de l'écoulement, se transformant en une sorte de sifflement lorsqu'on force l'écoulement à une vitesse beaucoup plus rapide. Le diamètre des grains de ces sables chantants est compris entre 0,2 et 0,3 mm, leur forme semble assez lisse, sans que leur géométrie soit parfaitement définissable. L'état de surface de ceux-ci ainsi que l'humidité ambiante sont certainement des paramètres importants pour l'émission spontanée, bien que les observations à ce sujet soient contradictoires. Bagnold propose quelques paramètres pour étudier ces phénomènes, par exemple de prendre en compte le taux de cisaillement et de comparer le produit de la fréquence par la taille des grains avec la vitesse de l'écoulement en surface. Le chapitre s'achève sur la proposition d'axes pour l'analyse de ce phénomène : conversion de l'énergie cinétique en contrainte élastique, citation du mécanisme d'ondes de compaction proposé par Poynting et Thomson [56], cisaillement des différentes couches de sable les unes par rapport aux autres, implication de la piézo-électricité compte-tenu du fait que ces grains sont composés de quartz. Cependant, aucune de ces théories ne semble totalement convaincante aux yeux de Bagnold qui conclut son ouvrage par « Beaucoup de travail supplémentaire devra être fait avant de comprendre le chant des sables ».

Divers mécanismes d'émission ont été proposés, par exemple la mise en jeu d'un mécanisme de résonance à l'échelle de la dune [57]. Il est certain qu'il ne s'agit pas d'un tel mécanisme, des expériences faites en laboratoire ayant permis d'obtenir une émission spontanée de l'écoulement de grains à petite échelle. Haff [58] s'interroge sur la nature de l'état de surface des grains et de leur caractéristiques frictionnelles. Andreotti [59] a montré par des mesures expérimentales réalisées sur les dunes chantantes, que l'émission acoustique spontanée est accompagnée par la présence d'ondes dont l'amplitude diminue fortement sur une profondeur de 10 cm. Leur polarisation est elliptique, tout comme celle des ondes de Rayleigh. La source se situe dans l'avalanche : la phase du signal s'inverse lors du passage du front de l'avalanche. La relation de dispersion de ces ondes a été mesurée (fig.3(d)), elle révèle que leur vitesse de propagation est extrêmement lente, de l'ordre de  $40 \text{ m.s}^{-1}$ . Il faut noter que ces mesures de la relation de dispersion sont comparées à des mesures de vitesse des ondes de surface émises spontanément et enregistrées sur la couche en écoulement. Cependant, fait intrigant, l'erreur sur les mesures semble être particulièrement importante ; est-ce vraiment une erreur de mesure ou le signe d'une caractéristique physique de la propagation d'onde dans les matériaux granulaire encore mal comprise ? Ce travail de terrain est complété par des mesures de laboratoire, où le profil de vitesse d'avalanches de débit contrôlé, est filmé au moyen d'une caméra rapide. Ce profil de vitesse montre une couche pour laquelle le cisaillement est très fort à proximité de la surface libre. Dans cette couche, le gradient de vitesse induit des collisions entre grains à la fréquence de  $100 \pm 5$  collisions par seconde. Cette valeur est

---

1. il s'agit de mesures de terrain réalisées dans les années 1900-1930

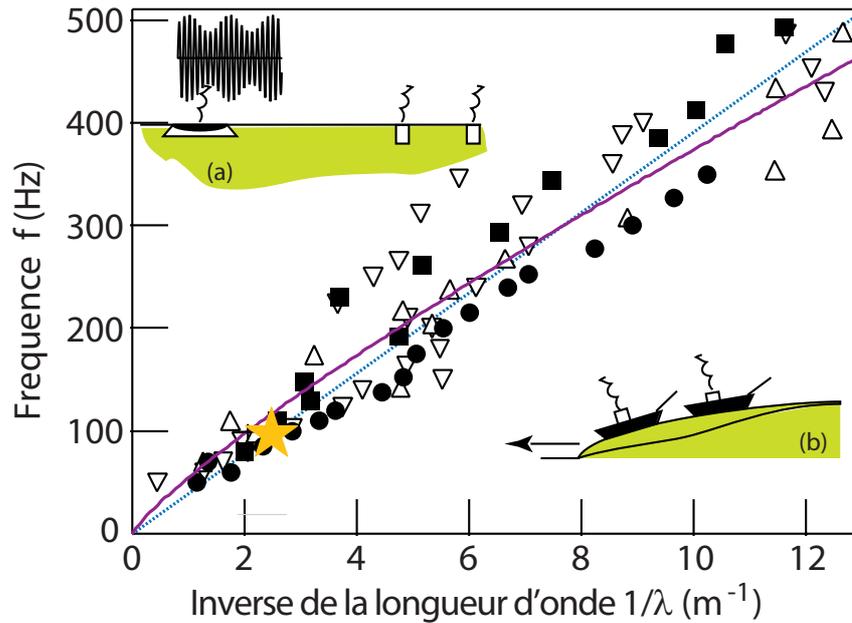


FIGURE 4 – Relation de dispersion, Andreotti [59]. Mesures de propagation d’ondes effectuées entre deux capteurs distants de 5 cm ( $\nabla$ ), 15 cm  $\Delta$ , 25 cm  $\bullet$  et 42 cm  $\blacksquare$ , en émettant un signal harmonique modulé au moyen d’un transducteur (a). La relation de dispersion obtenue est comparée aux ondes émises spontanément par une avalanche ( $\star$ ), mesurée au moyen d’accéléromètres placés sur des flotteurs et permettant de mesurer la différence de phase entre ces deux points en surface de l’avalanche. Relations de dispersion théoriques : non-dispersive  $f = c/\lambda$ ,  $c = 40\text{m/s}$  (- -), ondes de Rayleigh-Hertz  $f \propto \lambda^{-5/6}$  (—)

indépendante de l’épaisseur de la couche fluide et c’est aussi précisément la fréquence d’émission spontanée. On sait depuis que ce type d’expérience en canal vitré est extrêmement sensible à la friction pariétale, qui en affecte le résultat ; dès lors quel est le profil de vitesse dans une avalanche réelle ? Andreotti [59] a proposé un mécanisme permettant d’expliquer le chant des dunes. Il pense que les ondes acoustiques émises dans l’air par les avalanches chantantes sont induites par ces ondes élastiques localisées en surface. Selon lui, ces ondes sont excitées par les collisions entre grains à l’intérieur de l’avalanche. La production d’un son harmonique s’expliquerait par la synchronisation des collisions des grains à l’intérieur de l’avalanche par les ondes de surface. Il existe une interprétation alternative du chant des dunes. Douady *et al.* [60], compte-tenu du fait que les grains chantent spontanément en laboratoire lorsqu’ils coulent, pense qu’il n’y a pas besoin d’une onde de surface parcourant la dune pour les synchroniser. Pour cette raison, il invoque la présence d’une « onde de couplage » qui serait résonante sur l’épaisseur de la couche en écoulement. Le chant de dunes est purement anecdotique du point de vue scientifique. Cependant il fait interagir deux modes de déformations du matériau granulaire : les ondes de surface et les bandes de cisaillement. La compréhension de ce couplage reste à établir dans le cadre de la mécanique des matériaux granulaires.

Cette thèse s’articule en deux grandes parties : la propagation des ondes de

surface dans un matériau granulaire sous gravité et l'interaction onde-bande de cisaillement dans un matériau granulaire en écoulement.

Dans le premier chapitre, nous présenterons un modèle micromécanique classique permettant de déterminer les caractéristiques élastiques du contact entre deux grains. Nous verrons ensuite les modèles d'élasticité effective permettant de déduire les caractéristiques mécaniques d'un matériau granulaire dans une description de type milieu continu, ainsi que leurs limites. Nous évoquerons ensuite le modèle phénoménologique d'élasticité adaptée au milieux granulaires proposé par Jiang et Liu [61–63]. Pour clore ce chapitre, nous proposerons une ouverture sur les principaux traits de la théorie de la transition d'encombrement.

Dans le second chapitre, nous nous intéressons théoriquement à des ondes se propageant en surface d'un matériau granulaire. Nous mettons en évidence, en utilisant le modèle de Jiang et Liu, l'existence de deux types d'ondes qui se différencient par leur polarisation : les modes sagittaux – que nous avons baptisées ondes de Rayleigh-Hertz – et les ondes transverses. Cette étude est faite dans deux situations : celle d'un milieu semi-infini et celle d'une couche de grains d'épaisseur fixée.

Le troisième chapitre concerne la construction du dispositif expérimental permettant de générer de manière contrôlée les ondes de surface, les protocoles d'expérience et d'analyse, ainsi que les résultats expérimentaux obtenus. Ils nous permettent d'apprécier de manière quantitative les qualités et les limites des modèles présentés auparavant.

Le quatrième chapitre décrit une expérience originale, où l'écoulement d'un matériau granulaire dans un tube rigide, conduit spontanément à la formation d'ondes cohérentes dans l'écoulement.

Le cinquième chapitre propose un modèle unidimensionnel permettant de donner une interprétation théorique du mécanisme de sélection et de croissance de ces ondes et de le confronter aux expériences.

Nous restreindrons notre propos à ces cinq chapitres. Cependant, comme nous sommes convaincus que ce mécanisme de croissance est un bon candidat comme explication du chant des dunes, nous proposerons en annexe une discussion sur ce sujet, complétée par les résultats d'expériences réalisées sur le terrain lors d'une mission au Sahara Atlantique en 2007.

# Chapitre 1

## Élasticité non-linéaire des matériaux granulaires

### 1 Origine microscopique : le contact de Hertz

Nous pouvons définir un milieu granulaire comme un assemblage mécanique athermique, composé de grains en contact les uns avec les autres. Nous présentons dans le premier paragraphe de cette section l'expression de la force qu'il faut appliquer pour déformer deux sphères élastiques en contact. Ce problème a été résolu par Hertz (1882) [24]. Dans le second paragraphe, nous présenterons le modèle de Hertz-Mindlin, dans lequel la loi de contact prend en compte la friction entre les grains.

#### 1.1 Interaction de contact de Hertz

On considère deux grains sphériques de rayon  $R$  et maintenus en contact (cf. figure 1.1(a,b)), constitués d'un matériau dont l'élasticité est linéaire. Le module d'élasticité du matériau composant ces deux grains est noté  $E_g$ . Lorsqu'on les comprime l'un contre l'autre en exerçant une force  $F$ , les grains s'aplatissent dans le voisinage de la zone de contact qui prend la forme d'un disque de rayon  $a$  quand la distance entre leurs centres diminue de  $\xi$ . La déformation est le déplacement rapporté à la taille caractéristique de la zone déformée  $\xi/a$ . Ces notations sont introduites sur la figure 1.1(2), où la dimension de la zone de contact a été très largement exagérée par rapport à celle du grain. On se place dans la limite des faibles déformations pour laquelle  $\xi \ll a \ll R$ .

En appliquant simplement le théorème de Pythagore,  $R^2 = (R - \xi)^2 + a^2$  et en négligeant les termes d'ordre supérieur en  $\xi^2$ , nous obtenons la relation entre le rayon de la zone de contact et le déplacement imposé :  $a^2 \sim R\xi$ , donc la déformation est proportionnelle à  $\sqrt{\frac{\xi}{R}}$ .

En écrivant la relation d'échelle entre la contrainte moyenne  $\sigma$  et la déformation, on a :

$$\sigma = \frac{F_N}{a^2} \propto E_g \sqrt{\frac{\xi}{R}} \quad (1.1)$$

Nous en déduisons l'expression suivante de la relation d'échelle entre la force de contact et le déplacement :  $F_N \propto R^2 E_g \left(\frac{\xi}{R}\right)^{3/2}$ . Par la suite nous utiliserons le

résultat exact établi par Hertz [23, 24] :

$$F_N = \frac{8\mu_g}{3(1-\nu_g)} R^2 \left( \frac{\xi}{R} \right)^{3/2} \quad (1.2)$$

où  $\mu_g$  est le coefficient de Lamé du matériau dont sont constitués les grains, nommé module de cisaillement, et  $\nu_g$  le rapport de Poisson. Ainsi, d'un point de vue mécanique, on peut représenter deux grains en contact par deux masses reliées par un ressort dont la constante de raideur varie comme la racine de l'interpénétration, *i.e.* comme  $\sqrt{\xi/R}$ . Il existe une variante de ce calcul pour lequel les grains ont des rayons de courbures différents au point de contact,  $R_1$  et  $R_2$ , dans ce cas on peut montrer que  $R = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2}$ .

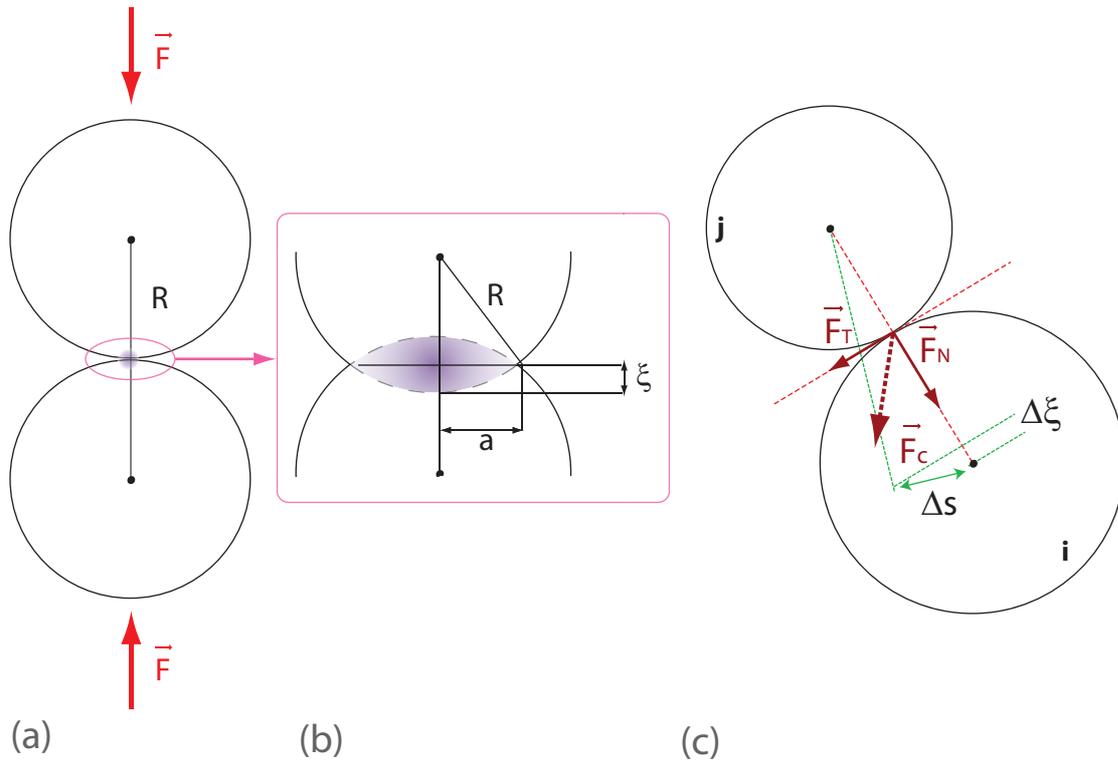


FIGURE 1.1 – (a) et (b) Contact de Hertz : la géométrie des grains confère au matériau granulaire une élasticité non-linéaire. (c) Modèle de contact prenant en compte les forces tangentielles

## 1.2 Rappel élastique tangentiel

Mindlin [27] a étudié la relation entre force et déplacement tangentiels, pour deux grains soumis à une force oblique de confinement. Il a introduit dans son modèle le glissement associé à la force de frottement de Coulomb. Il s'avère que dans ce cas, du fait de la divergence possible de la contrainte tangentielle à proximité des bords du contact, on obtient inévitablement un glissement et une relaxation de la contrainte dans une région périphérique annulaire. Ceci rend la force de cisaillement intrinsèquement dissipative et dépendante de l'histoire du chargement. Dans les

simulations numériques, il est souvent fait usage d'une relation plus simple pour laquelle le contact est considéré comme élastique et résiste sans glisser jusqu'au seuil de Coulomb. L'expression de la force normale reste celle de l'équation 1.2. Nous appelons la composante tangentielle de la force de rappel élastique  $F_T$ . Tant que la condition de non glissement  $|F_T| < \mu_s F_N$ , où  $\mu_s$  est le coefficient de friction statique, est vérifiée, les deux grains subissent un petit déplacement tangentiel  $\Delta s$  (figure 1.1(3)). L'échelle de la déformation est donc  $\Delta s/a$ . La relation entre la contrainte moyenne de cisaillement et la déformation s'exprime comme :

$$\frac{F_T}{a^2} \propto G_g \left( \frac{\Delta s}{a} \right) \quad (1.3)$$

$G_g$  est le module de cisaillement du matériau composant ces deux grains. Ce qui donne une force tangentielle qui suit la loi d'échelle  $F_T \propto G_g a \Delta s$  dont l'expression exacte est en fonction des constantes du matériau :

$$F_T = \frac{8\mu_g}{2 - \nu_g} R \sqrt{\frac{\xi}{R}} \Delta s \quad (1.4)$$

Quand la limite de Coulomb est atteinte, le contact glisse dans son ensemble et la force de friction vaut  $F_T = \mu_d F_N$ , où  $\mu_d$  est le coefficient de friction dynamique.

## 2 De l'échelle microscopique au milieu continu

### 2.1 Modèles de champ moyen

Pour déduire les relations constitutives macroscopiques des matériaux granulaires, plusieurs travaux théoriques ont été proposés. Duffy et Mindlin [26] ont calculé la relation contrainte-déformation pour un empilement ordonné cubique faces centrées de billes. Ces résultats théoriques sont comparés à des résultats expérimentaux de propagation d'onde dans une barre constituée de billes d'acier. Digby [64] a calculé l'élasticité effective d'un matériau poreux constitué de sphères cohésives dont l'empilement est aléatoire et en a déduit la vitesse de propagation des ondes élastiques en fonction de la pression de confinement et du rayon d'adhésion des particules. Walton [29] est le premier à avoir déterminé les modules d'élasticité effectifs (dans cette publication, il s'agit des coefficients de Lamé) d'un empilement aléatoire de sphères identiques non-cohésives caractérisé par une fraction d'empilement  $\Phi$  et une coordinence  $Z$ . La compacité  $\Phi$  correspond au rapport du volume occupé par les grains sur le volume total. La coordinence  $Z$  est définie comme le nombre moyen de contacts par grain. Il considère deux cas limites : grains parfaitement lisses (contact non-frottant) et grains infiniment rugueux (pas de glissement). Pour les deux cas, les coefficients de Lamé effectifs obtenus suivent une loi d'échelle qui varie comme :  $\lambda_{\text{eff}}, \mu_{\text{eff}} \propto \Phi^{2/3} Z^{2/3} P^{1/3}$ , où  $P$  est la pression de confinement. A noter que dans cet article, seule la force normale du modèle de Hertz est prise en compte. Norris [30] a dérivé les formules de l'élasticité pour un empilement aléatoire de sphères identiques à partir des travaux des forces de contact. Il a examiné deux possibilités : dans le premier cas l'énergie est indépendante du chemin de chargement et dans l'autre elle en dépend. Différents modèles microscopiques de forces ont été considérés. Notons que l'énergie est bien définie pour toute valeur de la contrainte macroscopique

lorsque le rappel tangentiel est indépendant de la force normale. Mais, dans le cas général avec glissement, elle dépend du chemin de chargement.

Le point commun à ces différents modèles est que les déformations macroscopiques de l'ensemble de l'empilement sont identifiées aux déformations microscopiques s'appliquant sur chacun des grains. Le passage de l'échelle microscopique à macroscopique est effectué en considérant les grains comme identiques d'un point de vue statistique. Ce type d'approche néglige les fluctuations des forces, de la fraction volumique et du nombre de contacts. Plus récemment, Velický et Caroli [25] ont étudié le cas d'un réseau hexagonal de grains frottants de diamètre légèrement polydisperse. Le calcul auto-consistant de milieu effectif fait apparaître un écart à la loi de Hertz en  $P^{1/3}$  dû aux hétérogénéités du champ de contraintes.

### Valeurs des modules élastiques :

Dans la suite de notre travail, nous utiliserons les expressions des modules élastiques obtenues par Walton [29] et Norris [30] (pour une revue, on pourra se reporter à Makse *et al.* [65]).

MODULE DE COMPRESSION :

$$K_{mf} = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_g}{1 - \nu_g} (\Phi Z)^{2/3} \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\mu_g} P \right)^{1/3} \quad (1.5)$$

MODULE DE CISAILLEMENT :

$$\mu_{mf} = \left( \frac{1}{1 - \nu_g} + \alpha \frac{3}{2 - \nu_g} \right) \frac{\mu_g}{5\pi} (\Phi Z)^{2/3} \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\mu_g} P \right)^{1/3} \quad (1.6)$$

Dans cette formulation le paramètre  $\alpha$  permet de distinguer deux cas :

- La friction est nulle entre les grains pour cela, il suffit de prendre  $\alpha = 0$ .
- La friction est infinie, dans ce cas  $\alpha = 1$ .

Notons que dans cette expression, une variation continue de  $0 \leq \alpha \leq 1$  correspond à un modèle de couplage tangentiel proposé par Makse *et al.* [66] pour lequel le module de cisaillement entre deux grains est :  $\alpha\mu_{mf}$  (se reporter à la figure 1.2).

### Exemple de calcul de champ moyen :

Pour illustrer les hypothèses de champ moyen et montrer les limites associées à cette modélisation, nous proposons un calcul simple pour  $N$  sphères identiques de rayon  $R$  non-frottantes, basé sur la formulation de Cauchy qui donne en tout point d'une surface délimitant un volume  $V$  de l'empilement, dans lequel les sphères interagissent par  $N_c$  contacts. Les contacts sont caractérisés par un vecteur intercentre  $\vec{l}_j = 2R\vec{n}_j$  et une force de contact  $\vec{F}_j$ . Pour tout contact  $j$  correspondant à 2 grains  $\alpha$  et  $\beta$ , la direction de la force de contact est prise de  $\beta$  vers  $\alpha$ . Si le vecteur intercentre est  $\vec{l}_j = \vec{r}_\beta - \vec{r}_\alpha$ . On a alors :

$$\bar{\sigma} = -\frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_c} \vec{l}_j \otimes \vec{F}_j \quad (1.7)$$

Dans le cas de sphères identiques nous obtenons l'expression :

$$\bar{\sigma} = -\frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N_c} 2RF_j \vec{n}_j \otimes \vec{n}_j \quad (1.8)$$

avec  $\vec{n}_j = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \theta \\ \cos \beta \sin \theta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ .

On peut remplacer la somme sur tous les contacts par une intégrale pondérée par une probabilité continue faisant intervenir  $\mathcal{P}(\theta, \beta)$  la densité de probabilité de trouver un contact dans l'angle solide  $d\Omega = \cos \phi d\phi d\theta$ . Dans les modélisations de champ moyen les plus simples, on néglige toute corrélation en considérant une distribution homogène de forces de contact. Chacune étant égale à la valeur  $f_N(\xi)$  donnée par la loi de Hertz 1.2. Dans ce cas on peut écrire :

$$\bar{\sigma} = \frac{N_c}{V} 2RF_N(\xi) \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \cos \beta \mathcal{P}(\theta, \phi) \vec{n}_j \otimes \vec{n}_j \quad (1.9)$$

Pour une distribution des contacts isotrope ( $\mathcal{P}(\theta, \phi) = 1/4\pi$ ), en prenant  $N_c = NZ/2$ , où  $Z$  est le nombre de contacts moyen par grain et en considérant la compacité  $\Phi = \frac{4N\pi R^3}{3V}$ , on obtient la formulation

$$\bar{\sigma} = \frac{\Phi Z}{4\pi} \frac{F_N(\xi)}{R^2} \bar{\mathbb{I}} \quad (1.10)$$

Considérons maintenant que dans l'état de référence, cet ensemble de sphères est soumis à compression isotrope correspondant à une pression de confinement  $P_0$ . Il en résulte l'expression de suivante de la pression :

$$P_0 = \frac{2\Phi Z}{3\pi} \frac{\mu_g}{1 - \nu_g} \left( \frac{\xi_0}{R} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.11)$$

ce qui implique que l'interpénétration moyenne des contacts est :

$$\xi_0 = R \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\Phi Z \mu_g} P_0 \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (1.12)$$

Pour obtenir la réponse élastique à de petits déplacements  $\xi = \xi_0 + \xi'$  (avec  $\xi' \ll \xi_0$ ) correspondant à une contrainte  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}'$ , on effectue un développement au premier ordre de la relation 1.26 et il suit :

$$\bar{\sigma}' = \frac{2\Phi Z}{3\pi} \frac{\mu_g}{1 - \nu_g} \cdot \frac{3}{2} \left( \frac{\xi_0}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\epsilon_v}{3} \bar{\mathbb{I}} \quad (1.13)$$

où  $\epsilon_v = 3\epsilon'/R$  est la déformation volumique.

De cette manière, nous avons identifié la déformation macroscopique dans un direction donnée  $\epsilon_v/3$  avec la déformation microscopique du contact entre grains  $\xi'/R$ . C'est une hypothèse centrale du champ moyen.

En utilisant la relation précédente et en remplaçant par la relation 1.12, on obtient le module élastique effectif de compression calculé par Walton [29] :

$$E_{eff} = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_g}{1 - \nu_g} (\Phi Z)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\mu_g} P_0 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1.14)$$

Dans le cas d'un cisaillement simple autour d'une compression isotrope, le tenseur des déformations s'écrit :

$$\bar{\epsilon}_M = \frac{\epsilon}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si on utilise cette déformation pour calculer un déplacement microscopique, on voit qu'il existe une projection des déplacements résultants entre les grains sur une direction perpendiculaire à la direction de contact. En l'absence de force de friction ces déplacements ne sont retenus par aucune force de rappel.

C'est en essence la raison pour laquelle l'hypothèse de champ moyen de déformation (aussi appelée hypothèse affine) est bien moins valable pour le module de cisaillement que pour le module de compression.

## 2.2 Les limites du modèle de champ moyen

Pour tester la validité du modèle de champ moyen, Makse *et al.* [66] ont réalisé des simulations de dynamique granulaire. À partir des celles-ci, ils ont mesuré les modules élastiques de sphères interagissant par contact de Hertz en prenant en compte la composante tangentielle. Cette dernière est ajustée de manière continue au moyen du coefficient  $\alpha$  qui définit le couplage entre forces normale et tangentielle. Dans ces simulations, le module de cisaillement  $G_s$  (voir eq.1.4) entre 2 grains est multiplié par le coefficient de couplage  $\alpha$ . Les valeurs de ce paramètre sont comprises entre 0 et 1, la situation où  $\alpha = 0$  correspond au cas de grain parfaitement lisses et  $\alpha = 1$  à des grains infiniment rugueux. Leurs résultats sont représentés sur la figure (1.2). Les symboles (■,●) correspondent aux valeurs prédites respectivement pour le module de compression et le module de cisaillement pour la simulation de dynamique granulaire. Les droites en pointillés notées « K EMT » et «  $\mu$  EMT » sur la figure 1.2 sont les prédictions du modèle de champ moyen pour le module de compression et le module de cisaillement. Nous observons que pour le module de compression la valeur du champ moyen approche celle de la simulation avec une erreur d'environ 10%. Par contre pour le module de cisaillement, le modèle de champ moyen donne une valeur surestimée de plus de 30% qui ne reproduit pas le comportement observé pour la dynamique moléculaire. Effectivement, la simulation numérique montre un module de cisaillement qui s'annule dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$ , alors que le modèle de champ moyen prédit une valeur finie. Pour mieux comprendre cette différence, Makse *et al.* ont réalisé une seconde série de simulations de dynamique granulaire, mais en bloquant les réarrangements entre grains de telle sorte que les déformations microscopiques soient proportionnelles à celles imposées à l'échelle macroscopiques (mouvements affines), symboles (□,○). Le module de compression obtenu de cette manière est identique à celui obtenu par la première méthode. Cependant, pour le module de cisaillement, les résultats de la dernière méthode sont très proches de

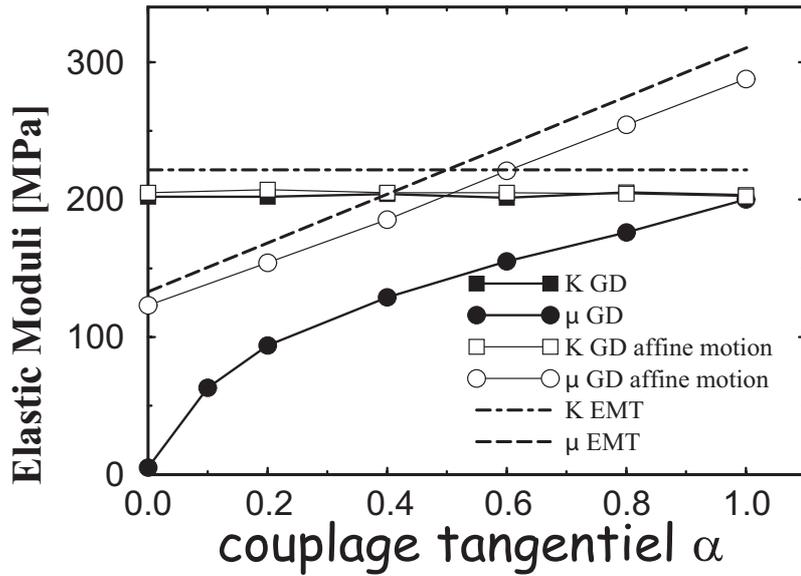


FIGURE 1.2 – Modules élastiques en fonction du coefficient de couplage tangentiel  $\alpha$ , extrait de Makse *et al.* [66]. Modules de compression  $K(\alpha)$  et de cisaillement  $\mu(\alpha)$ . Résultats de dynamique granulaire (■,●), dynamique granulaire avec relaxation bloquée (□,○), prédictions du modèle de champ moyen (K EMT,  $\mu$  EMT). Ces calculs ont été réalisés en imposant une pression constante de 100 kPa.

ceux du modèle de champ moyen. Ainsi, Makse *et al.* ont bien mis en évidence le point faible du modèle de champ moyen.

D'un point de vue expérimental, la dépendance des modules élastiques vis-à-vis de la pression de confinement a été testée par des méthodes acoustiques. Il est à noter que ces mesures de propagation d'ondes ont été réalisées sous forte pression de confinement [26, 31, 32, 34]. Elles montrent que la loi d'échelle prédite au moyen de la loi de contact de Hertz,  $c \sim (\Phi Z)^{1/3} (P/\rho_g)^{1/6}$ , n'est pas vérifiée de manière satisfaisante. Notamment, on observe que la vitesse augmente plus fortement que prévu. Ce régime pouvant être ajusté avec une loi d'échelle effective variant comme  $c \sim P^{1/4}$  [32, 34].

Pour expliquer ces différences des modèles micromécaniques ont été développés. Pour De Gennes [67], le fait qu'une couche molle d'oxyde de silice recouvre les grains pourrait expliquer que le module de cisaillement dépend de la pression de confinement comme  $\mu_{\text{eff}} \sim P^{1/2}$ . Goddard [28] propose deux alternatives pour améliorer les théories de champ moyen. La première est d'utiliser une description micro-mécanique différente, en considérant des contacts de forme conique. La seconde est l'hypothèse que sous forte contrainte, il y a flambage de chaînes de forces, qui se traduit une variation de la densité de contacts. Ces deux propositions donnent des modules d'élasticité qui dépendent de la pression de confinement comme  $P^{1/2}$ .

Makse *et al.* développent l'argumentation vue précédemment dans [65]. Ils proposent d'améliorer la théorie de champ moyen en incluant une dépendance du nombre de contact en fonction de la pression. Cependant, ils constatent que la prédiction sur le module de cisaillement est encore surestimée, en particulier dans les

limites où la friction est faible et la pression de confinement s'annule. L'hypothèse que les contraintes microscopiques sont uniformes et proportionnelles à celles imposées à l'échelle macroscopique s'effondre. Ils suggèrent de développer de nouvelles théories permettant de prendre en compte les phénomènes collectifs entre grains – les réarrangements, donc les fluctuations du nombre de contact et de la fraction solide. Ces auteurs voient comme une ouverture prometteuse les travaux récents sur la transmission de contraintes dans un réseau faiblement connecté, issus de la théorie de la rigidité de Maxwell.

### 3 Le matériau granulaire comme un milieu continu élastique : modèle de Jiang et Liu

Plusieurs modélisations permettant de rendre compte du comportement élastique macroscopique d'un matériau granulaire comme un milieu continu ont été développées. L'un des tout premiers modèles étant celui de Boussinesq [68]. Dans cette partie nous présentons le modèle phénoménologique d'élasticité granulaire proposé par le groupe de Mario Liu [63], [61], [69], [70] que nous utiliserons dans les chapitres suivants pour déterminer les propriétés des ondes qui se propagent à la surface libre d'un matériau granulaire. Effectivement, dans le cas où la longueur d'onde est grande devant la taille caractéristique des grains, le milieu peut-être considéré comme continu.

#### 3.1 Conventions d'écritures

Dans ce paragraphe, nous présentons les conventions de notation introduites par Liu *et al.*. Nous les utiliserons ultérieurement. Notons  $\mathbf{U}$  le champ de déplacements dans le matériau granulaire. Rappelons dans la théorie de l'élasticité des milieux continus, tant que les déplacements sont suffisamment petits, le tenseur des déformations se définit comme :

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.15)$$

Pour décrire les déformations en compression, on définit  $\delta$  la compression volumique isotrope. Il s'agit de l'opposé de la trace du tenseur des déformations :

$$\delta = -Tr(u_{ij}). \quad (1.16)$$

Pour caractériser les déformations par cisaillement, on utilise une expression du tenseur des déformations dont la trace a été soustraite :  $u_{ij}^0$ . On appelle  $u_s^2$  le carré de son module. Leurs expressions respectives s'écrivent :

$$u_{ij}^0 = u_{ij} + (\delta/3)\delta_{ij} \quad (1.17)$$

$$u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0 \quad (1.18)$$

#### 3.2 Exposition du modèle

En mécanique des milieux continus, le champ des contraintes internes d'un matériau est la dérivée de l'énergie libre par rapport au champ des déformations,

$\sigma_{ij} = \partial\mathcal{F}/\partial u_{ik}|_{T=cst}$ . Il existe un domaine de déformations de petites amplitudes pour lequel un matériau granulaire a un comportement élastique. Liu *et al.* ont modélisé une loi de comportement en définissant un potentiel d'interaction adapté qui permet prendre en compte certaines spécificités propres à la mécanique des matériaux granulaires. Ils proposent dans [62], [61], l'expression suivante de l'énergie libre élastique du matériau granulaire :

$$\mathcal{F}_{el.granu} = \underbrace{\frac{2}{5}E\mathcal{B}\delta^{5/2}}_{(1)} + \underbrace{EAu_s^2\delta^{1/2}}_{(2)} \quad (1.19)$$

où  $E = \frac{2\mu_g}{1+\nu_g}$  représente le module d'Young du matériau,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des coefficients sans dimension. Dans cette expression, le terme (1) représente l'énergie élastique en compression, l'exposant 5/2 associé à la compression volumique isotrope  $\delta$  est directement une conséquence de l'interaction de contact de Hertz. La spécificité du modèle de Liu et Jiang se trouve dans le terme (2), dépendant du module de déformation en cisaillement  $u_s$ . Liu *et al.* ont testé cette théorie dans des travaux numériques sur la statique des tas de sable [70] et des silos [69] et dans le cas de la détermination des contraintes créés par l'application d'une charge ponctuelle sur la surface libre d'un milieu granulaire.

L'expression générale du tenseur des contraintes s'obtient en dérivant l'énergie libre 1.19 :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial\mathcal{F}_{el.granu}}{\partial u_{ij}} = E\sqrt{\delta} \left( \mathcal{B}\delta\delta_{ij} - 2Au_{ij}^0 + \frac{Au_s^2\delta_{ij}}{2\delta} \right) \quad (1.20)$$

Il convient de remarquer que le dernier terme de cette équation,  $Au_s^2\delta_{ij}/2\delta$ , n'existe pas dans l'équation d'élasticité non-linéaire de Boussinesq. Cette différence provient du fait que cette dernière théorie n'est pas dérivée d'une énergie libre élastique, contrairement au modèle de Liu et Jiang. Cette formulation prédit l'existence d'un seuil d'instabilité lorsqu'on soumet un milieu granulaire à un cisaillement, seuil que les auteurs ont assimilé à la rupture de Coulomb. La possibilité de suivre le comportement élastique près de la limite de rupture est aussi une perspective prometteuse du modèle. Cette caractéristique est particulièrement originale si elle est comparée au cadre standard de l'élasticité non-linéaire de Boussinesq qui elle ne contient pas de seuil. Il est important de noter que cette formulation compacte et élégante est capable de reproduire de nombreuses propriétés observées expérimentalement, comme par exemple l'anisotropie induite par cisaillement. Les auteurs ont vérifié leur modèle de manière qualitative [70] et quantitative avec les données de mesures expérimentales provenant de test triaxiaux de la réponse à un chargement local et de l'équilibre statique dans un silo [69]. L'accord est remarquable, compte-tenu du nombre minimal de paramètres libres dans le modèle. Bien sûr, traiter dans ce cadre des questions comme l'évolution irréversible du champ de déformation (plasticité) sont discutables dans le cadre d'un modèle élastique ; néanmoins il nous donne un point de départ bien défini pour une analyse théorique complète des excitations acoustiques. En outre, cette approche peut-être généralisée facilement à des interactions dont la loi de puissance n'est pas nécessairement celle du contact de Hertz. Cela permettrait, en principe, de rendre compte de l'existence d'autre type de forces de contact non-linéaires. Cependant, nous limiterons notre analyse aux interactions Hertiennes.

À titre d'exemple, nous pouvons examiner deux cas particuliers. Pour obtenir la pression et la contrainte de cisaillement, il suffit de dériver l'expression de l'énergie libre par rapport à  $\delta$  et  $u_s$ , respectivement :

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial \mathcal{F}_{granu}}{\partial \delta} = E \left( \delta^{3/2} \mathcal{B} + \frac{1}{2} \mathcal{A} u_s^2 \delta^{1/2} \right) \\ \sigma_s &= \frac{\partial \mathcal{F}_{granu}}{\partial u_s} = 2E \mathcal{A} \delta^{1/2} u_s \end{aligned} \quad (1.21)$$

Grâce au terme (2) de l'expression de l'énergie libre 1.19, l'équation de la pression a la propriété, selon les auteurs, de rendre compte de l'effet de dilatance et du seuil de rupture de Coulomb. En gardant la pression  $P$  constante, la compression isotrope  $\delta$  diminue (alors que le volume augmente) lorsque la déformation en cisaillement  $u_s$  croît.

Un système admet une solution d'équilibre stable lorsque son énergie potentielle présente un minimum, c'est à dire lorsque la forme de ce potentiel est convexe. Or, Il se trouve que la forme du potentiel énergétique du modèle de Jiang et Liu peut devenir concave, si

$$\left( \partial^2 \mathcal{F}_{el.granu} / \partial \delta^2 \right) \left( \partial^2 \mathcal{F}_{el.granu} / \partial u_s^2 \right) \geq \left( \partial^2 \mathcal{F}_{el.granu} / \partial \delta \partial u_s \right)^2$$

. C'est une condition d'instabilité qui marque les limites du domaine élastique. Liu et Jiang pensent que cette caractéristique permet de modéliser le seuil de rupture de Coulomb. Il est alors tentant d'identifier ce critère d'instabilité à l'angle de pente d'un tas pour déterminer les paramètres du modèle, ce que nous ferons à la fin de la partie suivante. En fait, dans la réalité, le matériau granulaire présente des micro-réorganisations plastiques bien avant cette limite. L'idée de décrire l'ensemble de la phase de chargement d'un matériau par une même énergie libre élastique est donc très probablement vouée à l'échec, sauf à traduire les réarrangements par une variation des paramètres  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

### 3.3 Détermination des coefficients de compression et de cisaillement par le calcul de champ moyen

Dans cette section, le but est de relier les coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  du modèle d'élasticité de Liu et Jiang, aux propriétés microscopiques de l'empilement en utilisant les résultats des calculs de champ moyen présentés précédemment.

#### Coefficient de compression $\mathcal{B}$

Pour le modèle macroscopique de Jiang et Liu, dans le cas isotrope, le tenseur des déformations et celui des contraintes s'écrivent :

$$u_{ij} = -\frac{\delta_0}{3} \delta_{ij} \quad \sigma_{ij} = P \delta_{ij} \quad P = E \mathcal{B} \delta_0^{3/2} \quad (1.22)$$

Dans le cas d'une compression isotrope, nous obtenons  $P = \mathcal{E} \mathcal{B} \delta_0^{3/2}$  et donc le module de compression s'écrit :

$$K_{mf} = \frac{2}{3} E \mathcal{B} \left( \frac{P}{E \mathcal{B}} \right)^{1/3}. \quad (1.23)$$

Par conséquent,

$$\mathcal{B} = \frac{\Phi Z}{3^{\frac{3}{2}} 3\pi (1 - \nu_g^2)} \quad (1.24)$$

### Coefficient de cisaillement $\mathcal{A}$

Considérons maintenant un cisaillement pur selon  $x$  et  $z$  tout en conservant une compression isotrope  $P$  :

$$\sigma_{xz} = -2\mathcal{A}E\delta_0^{1/2} = -2\mu_{MF}u_{xz}$$

et  $P = \mathcal{E}\mathcal{B}\delta_0^{3/2}$ , ce qui implique que  $\mu_{mf} = E\mathcal{A}(P/E\mathcal{B})^{1/3}$ . pour les deux modèles, sans frottement ( $\alpha = 0$ ) et avec frottement infini ( $\alpha = 1$ ), nous obtenons l'expression du coefficient de cisaillement  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{A} = \frac{\Phi Z}{2^{\frac{3}{2}} 5\pi(1 + \nu_g)} \left( \frac{1}{1 - \nu_g} + \frac{3\alpha}{2 - \nu_g} \right) \quad (1.25)$$

### Valeurs de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$

Nous pouvons maintenant évaluer l'ordre de grandeur de ces coefficients. Pour un tas de sable réel la fraction d'empilement vaut à peu près  $\Phi \simeq 0,6$  et que le nombre de coordinence vaut  $Z \simeq 6$ . Le module de cisaillement volumique de la silice est approximativement  $\mu_g \simeq 30$  GPa et son coefficient de Poisson est  $\nu_g \simeq 0,2$ . On obtient  $E\mathcal{B} \simeq 3.8$  GPa et  $E\mathcal{A} \simeq 4.2$  GPa dans le cas sans friction, si  $\alpha = 0$ , et  $E\mathcal{A} \simeq 8$  GPa si la friction est infinie, lorsque  $\alpha = 1$ . Ces valeurs sont d'une grande importance et nous les discuterons à la lumière de celles obtenues expérimentalement.

Des expressions précédentes, on obtient finalement :

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{5}{3 \left( 1 + \frac{3\alpha(1-\nu_g)}{2-\nu_g} \right)} \quad (1.26)$$

Pour le paramètre de couplage tangentiel  $\alpha = 0$ , on obtient  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{5}{3}$  et pour  $\alpha = 1$  avec  $\nu_g = 0,2$ , on obtient  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{5}{7}$ .

Selon Liu *et al.*, l'angle critique de stabilité élastique discuté ci-dessus vaut :

$$\tan \theta_c = \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}} \quad (1.27)$$

ce qui donne  $\theta_c \sim 56^\circ$  pour le cas non frottant et  $\theta_c \sim 66^\circ$  si la friction est infinie. Nous pouvons remarquer d'emblée une grande différence entre le résultat du calcul de champ moyen et la mesure empirique de la pente d'un tas de sable qui est approximativement de  $30^\circ$ .

Nous pensons que ce modèle est bien adapté à l'étude de la propagation d'ondes dans le cadre de l'acoustique linéaire. Effectivement, dans ce cadre, il s'agit de déformations de très faible amplitude qui sont considérées, qui ne modifient pas l'arrangement des grains du matériau granulaire. Mais ici encore, les réorganisations semblent

être un paramètre limitant du modèle si l'amplitude des sollicitations mécaniques est trop grande. Dans un article récent, Jiang et Liu proposent une amélioration de cette théorie prenant en compte les réorganisations induites par un cisaillement lent [71]. Nous considérons ici que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des paramètres qui caractérisent un empilement et qui évoluent à chaque réarrangement plastique.

## 4 Propagation d'ondes sous compression isotrope

### 4.1 Vitesse de propagation des ondes longitudinales sous compression isotrope

Nous calculons ici les expressions de la vitesse de propagation sous compression isotrope. Nous considérons tout d'abord des ondes qui se propagent le long de l'axe  $x$ . Comme le système est homogène, les modes sont de simple modes de Fourier de la forme  $U = \zeta_{\parallel} e^{i(kx - \omega t)}$ . La perturbation du champ de déformation  $\widetilde{u}_{ij}$  et  $\widetilde{u}_{ij}^0$ , son équivalent dont on a soustrait la trace, s'écrivent :

$$\widetilde{u}_{ij} = ikU \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \widetilde{u}_{ij}^0 = ikU \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Cela implique que la perturbation de la compression volumique est égale à  $\widetilde{\delta} = -ikU$  et que le cisaillement  $u_s^2$  est nul. La contrainte associée aux ondes acoustiques s'écrit :

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = E\sqrt{\delta_0} \left[ \frac{3}{2}\mathcal{B}\widetilde{\delta}\delta_{ij} - 2\mathcal{A}\widetilde{u}_{ij}^0 \right] \quad (1.29)$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\rho\ddot{\mathbf{U}} = -\nabla\widetilde{\sigma} \quad (1.30)$$

ce qui donne :

$$-\rho\omega^2 U = -k^2 E\sqrt{\delta_0} \left[ \frac{3}{2}\mathcal{B} + \frac{4}{3}\mathcal{A} \right] U. \quad (1.31)$$

Nous obtenons l'expression suivante pour la vitesse de propagation des ondes longitudinales :

$$c = \gamma_{\parallel} \left( \frac{P}{E} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.32)$$

avec  $\gamma_{\parallel} = \sqrt{3\mathcal{B}/2 + 4\mathcal{A}/3\mathcal{B}^{-1/6}}$ . Nous retrouvons la loi d'échelle de la vitesse du son  $c \propto P^{1/6}$ , mais avec une dépendance vis-à-vis des coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  qui dépendent eux-mêmes du nombre de contacts et donc de la pression.

### 4.2 Vitesse de propagation des ondes transverses sous compression isotrope

On considère maintenant la propagation selon de l'axe  $x$  d'ondes transverses dont la polarisation est rectiligne suivant  $y$ . Il s'agit encore de modes de Fourier

de la forme  $V = \zeta_{\perp} e^{i(kx - \omega t)}$ . La perturbation du champ de déformation s'écrit de la manière suivante :

$$\widetilde{u}_{ij} = ikU \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

La perturbation de la compression volumique  $\widetilde{\delta}$  et le cisaillement  $u_s^2$  sont tous les deux nuls. La perturbation du champ de contraintes se réduit à

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = 2E \sqrt{\delta_0} \mathcal{A} \widetilde{u}_{ij}^0 \quad (1.34)$$

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\rho \omega^2 V = k^2 E \sqrt{\delta_0} \mathcal{A} V \quad (1.35)$$

Finalement la vitesse des ondes acoustiques transverses se met sous la forme :

$$c = \gamma_{\perp} \left( \frac{P}{E} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (1.36)$$

avec  $\gamma_{\perp} = \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{1/6}$ . Ainsi, nous obtenons une prédiction pour la relation de dispersion entre les vitesses de propagations des ondes longitudinales et transverses :

$$\frac{\gamma_{\parallel}}{\gamma_{\perp}} = \sqrt{\frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} + \frac{4}{3}} \quad (1.37)$$

## 5 Théorie de la rigidité, transition de blocage

### 5.1 Transition de blocage et limite de rigidité

Les échecs des théories de champ moyen pour décrire l'élasticité des assemblages de grains, en particulier le module de cisaillement, dans la limite où la pression entre grains tend vers zero, mettent l'accent sur le caractère ambigu du statut mécanique des empilements granulaires. En effet, même sous faible sollicitation, ceux-ci montrent des réorganisations notables qui leur confèrent, au moins transitoirement, un caractère plutôt « liquide » que « solide ». Néanmoins, pour des assemblages de particules indéformables et non-frottantes, la question de la rigidité, c'est à dire de la possibilité pour un empilement d'être en équilibre mécanique, s'exprime de manière rigoureuse dans le cadre de la théorie de la rigidité de Maxwell [72]. La fin du XIX<sup>e</sup> siècle est la période où l'on développe la construction d'édifices constitués d'assemblages de poutrelles métalliques. Un problème d'ingénierie est d'effectuer une construction la plus rigide et la plus légère possible. Partant de ce problème, Maxwell [72], a bâti une théorie de la rigidité basée sur un simple décompte des degrés de libertés de l'assemblage et du nombre de forces s'appliquant aux points de jonction entre chaque poutrelle. Cette théorie a été réactualisée dans le cadre d'étude des matériaux granulaires par le groupe de Chicago [16, 22, 73, 74] en partant de l'idée que la limite de rigidité des assemblages s'identifie avec le point de Jamming (le point J) obtenue dans la limite de pression de confinement nulle. On peut exprimer de manière générale, pour un système de  $N$  particules indéformables disposées dans

un espace de dimension  $d$ , la limite dite d'isostaticité pour laquelle le nombre d'équations d'équilibre est strictement égal au nombre de variables définissant les forces de contact intergranulaires. En effet, on a  $dN$  équations d'équilibre et  $ZN/2$  forces de contact. Cette condition est remplie pour le nombre de contact moyen par particule  $Z_{iso}^0 = 2d$ . Retirer un contact correspond à enlever une des relations entre variables. Le système est dit hypostatique : il est indéterminé et aucune solution d'équilibre n'est possible. En rajoutant un contact, ce système devient surdéterminé (hyperstatique) : il admet une infinité de solutions d'équilibre possibles. Ainsi, Maxwell a défini le critère de rigidité :

$$Z \geq Z_{iso}. \quad (1.38)$$

Notons que ce critère ne donne aucune information sur la nature stable ou instable de l'équilibre de l'ensemble mécanique. La situation isostatique est un état où l'empilement peut être encore considéré comme marginalement rigide.

## 5.2 Propriétés des modules d'élasticité au voisinage de la transition de blocage

O'Hern *et al* [22] ont fait remarquer que dans la limite isostatique, la condition d'indéformabilité des particules équivalait à une pression de confinement évanescence. Ils sont partis de ce point pour étudier de manière systématique, les propriétés élastiques des assemblages lorsque la pression de confinement croît à partir de 0. Ils montrent que dans la limite isostatique, pour un système tridimensionnel, le nombre de contact est bien  $Z_c = 6$  et que la compacité correspondante est de  $\Phi_c = 0.639 \pm 0.001$  pour un empilement de taille infinie. Il montrent aussi que le nombre de contacts est une fonction univoque de la compacité :

$$Z - Z_c \sim (\phi - \phi_c)^\zeta \quad \text{avec } \zeta = 1/2$$

Il faut remarquer que cet exposant  $\zeta$  ne dépend pas du type d'interaction.

O'Hern *et al.* [22] ont aussi calculé numériquement la valeurs des modules élastiques pour des sphères interagissant par différents potentiels répulsifs. En particulier dans le cas de l'interaction de contact de Hertz ils trouvent :

$$\begin{aligned} Z - Z_c &\sim (\phi - \phi_c)^{1/2} \\ P &\sim (\phi - \phi_c)^{3/2} \\ B &\sim (\phi - \phi_c)^{1/2} \\ G &\sim (\phi - \phi_c) \end{aligned}$$

où  $p$  est la pression de confinement,  $B$  et  $G$  sont les modules de compression et de cisaillement. Selon cette théorie, le module de cisaillement varie avec la pression selon la relation :

$$G \sim P^{2/3} \quad (1.39)$$

Ainsi, à l'approche de de la transition de blocage, le rapport des modules élastiques  $G/B \sim P^{1/3}$  s'annule selon la loi d'échelle :

$$\frac{G}{B} \sim (\phi - \phi_c)^{1/2} \quad (1.40)$$

, Cette anomalie de comportement élastique est une prédiction forte de cette étude numérique et peut se comprendre dans le contexte de la théorie des modes mous développée dans le contexte des milieux granulaires par Wyart *et al* [73, 75].

### 5.3 Théorie des modes mous

Wyart *et al* ont considéré le travail  $\delta W$  nécessaire pour déformer un assemblage mécanique composé de  $N$  particules reliées par  $N_c$  ressorts de raideur unité dans un espace de dimension  $d$ . Celui-ci peut s'écrire :

$$\delta W = \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \left[ \left( \delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i \right) \bullet \vec{n}_{ij} \right]^2 \quad (1.41)$$

où la somme est faite sur tous les couples de particules  $\langle ij \rangle$  en contact.  $\delta \vec{R}_i$  représente le vecteur déplacement de la particule  $i$ . L'espace vectoriel des déplacements défini par la relation :

$$\left( \delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i \right) \bullet \vec{n}_{ij} = 0 \quad (1.42)$$

représente un champ de déplacements conservant les distances entre les particules. Les vecteurs déplacement appartenant à cet espace correspondent à des mouvements de particules se faisant à coût énergétique nul. Ces champs de déplacement sont appelés *modes mous* [75]. Parmi les exemples simples de mode mou, les translations et rotations de l'ensemble du système. Pour un ensemble de particules qui ne sont pas connectées, on dénombre  $Nd - d(d+1)/2$  degrés de liberté qui sont autant de modes mous, en ne tenant pas compte des rotations et translations. Si l'on connecte les particules entre elles par  $N_c$  contacts, le nombre de degrés de liberté diminue et on décompte  $Nd - d(d+1)/2 - N_c$  modes mous. Ces modes sont hétérogènes et étendus spatialement. Sur la figure 1.3 nous représentons un exemple calculé par Wyart en 2D pour un empilement de disques.

Il est important de souligner que cette propriété est essentiellement géométrique et ne dépend aucunement du potentiel d'interaction entre particules. Lorsqu'un système de particules est soumis à une force externe, il demeure rigide tant que la force externe est orthogonale à chacun des modes mous  $\beta$ ,

$$\langle \mathbf{F} | \delta \mathbf{R}^\beta \rangle = \sum_i \vec{F}_i \bullet \delta \vec{R}_i^\beta = 0. \quad (1.43)$$

Si la condition 1.43 n'est pas satisfaite, le système s'effondre selon la direction du champ de déplacement des modes mous. Les simulations numériques [22, 73, 74] ont permis d'observer qu'il existe une multitude de modes de déformation de basse fréquence, au voisinage du point  $J$ , dont les caractéristiques (extension spatiale, densité) dépendent de manière simple de l'écart à l'isostaticité :  $\delta Z = Z - Z_c$ . La densité de modes forme un plateau à basse fréquence au delà d'une fréquence de coupure  $\omega^* \propto \delta Z$ . En deçà de cette fréquence, on peut propager des modes acoustiques sans être affecté par leur présence. Alternativement la taille minimale au delà de laquelle la présence de ces modes ne perturbe pas l'élasticité, diverge quand on se rapproche du point isostatique selon  $l^* \propto \delta Z^{-1}$ . Ainsi le voisinage du

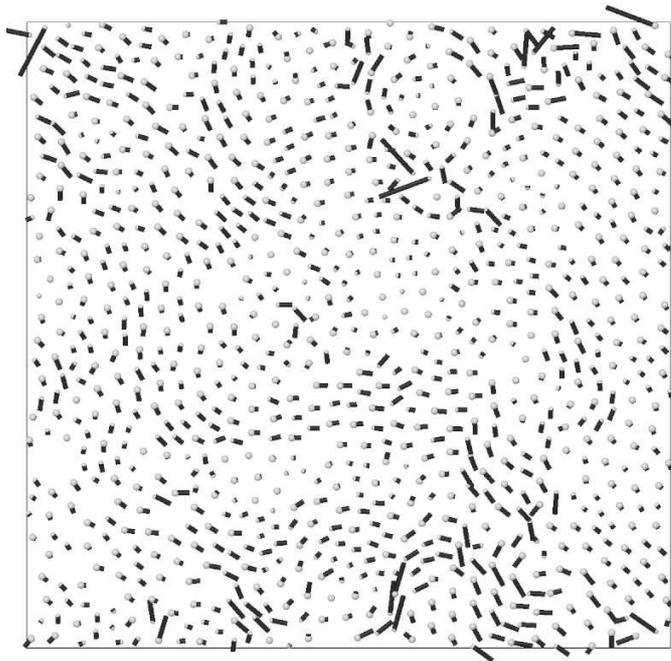


FIGURE 1.3 – Représentation du champ de déplacements d’un mode mou [75]

point J se comporte comme un point critique avec des exposants anormaux et une divergence de la longueur de corrélation.

Ces anomalies se retrouvent de manière générique dans d’autres systèmes vitreux comme les solides amorphes [76] et elles ont sûrement une importance capitale pour comprendre les modes de transport dans les matériaux vitreux. En revanche, peu de choses sont connues sur les interactions avec les modes de propagation acoustique dans le cas où les longueurs d’onde deviennent comparables à la taille des modes anormaux (propagation et dissipation). Qui plus est, les relations d’échelles précédentes ont été obtenues dans un modèle extrêmement simplifié qui est celui des empilement de sphères non frottantes. Il apparaît nécessaire de s’interroger sur la validité et la robustesse des concepts précédents pour des empilements réels, c’est à dire frottants.

## 5.4 Assemblage de grains frottants

Le concept d’isostaticité vu dans les paragraphes précédents peut être généralisé à un système de grains interagissant par des contacts mettant en jeu des forces tangentielles de frottement. Dans ce cas, l’analyse statique doit être complétée par la prise en compte des degrés de liberté supplémentaires liés aux rotations des grains, *i.e.* les  $d(d-1)N/2$  équations des moments, qui s’ajoutent aux  $dN$  équations d’équilibre des forces. Comme ces particules sont liées par  $dZN/2$  forces, le système est isostatique si  $dZN/2 = dN + Nd(d-1)/2$ , soit  $Z_c = d + 1$  contacts par particule. Actuellement, il n’existe pas de vision tout à fait claire de l’approche du point isostatique pour un empilement de grains déformables en présence de frottement. Les simulations numériques pour des coefficients de frictions tendant vers 0 semblent montrer que l’on retrouve des comportements d’échelle au voisinage d’un seuil  $Z_c$  déterminé empiriquement entre les deux limites  $(d-1) < Z_c < 2d$ . En revanche

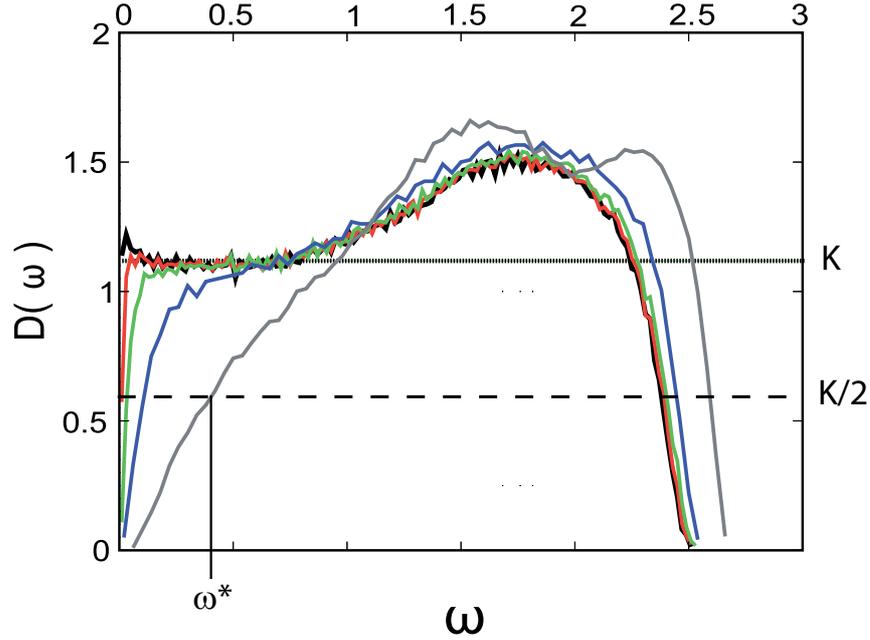


FIGURE 1.4 – Densité de modes  $D(\omega)$  en fonction de la pulsation [22] pour des sphères interagissant par un potentiel harmonique répulsif dans une boîte de simulation cubique périodique. Les différentes courbes sont obtenues pour différents écarts à la fraction d'empilement critique  $(\Phi - \Phi_c) = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-8}$ , respectivement courbes grise, bleue, verte, rouge, noire. Dans la limite où  $(\Phi - \Phi_c)$  s'annule, la densité de modes tend vers une constante  $K$ . C'est la signature de la présence des modes mous à basse fréquence au voisinage du point isostatique. On peut définir la fréquence de coupure  $\omega^*$  pour  $D(\omega) = K/2$ . Dans le domaine  $\omega < \omega^*$  la propagation des modes acoustiques n'est pas affectée par les modes mous, alors qu'au delà elle l'est.

Agnolin et Roux ([5]fig.8) montrent très clairement que pour des empilements avec des interactions frottantes, on peut varier indépendamment le nombre de contacts et la compacité. Par conséquent, on peut atteindre des états à pression de confinement évanescence pour un nombre de contacts par particule différent du nombre de contacts isostatique. Les simulations numériques effectuées par Magnanimo [77], Agnolin [6] et Shundyak [78] semblent montrer une décroissance anormale du rapport  $G/B$  entre le module de cisaillement et le module de compression quand on se rapproche des conditions d'isostaticité. Mais en revanche, personne n'a réussi à approcher asymptotiquement cette limite, compte tenu des difficultés à réaliser en pratique de tels empilements.



# Chapitre 2

## Propagation d'ondes à la surface d'un milieu granulaire

### 1 Equilibre du système sous gravité

Dans la suite, nous utiliserons les conventions de repérage spatial suivantes : la direction longitudinale  $x$  est dans le plan de la feuille et dirigée vers la droite, la direction transverse  $y$  est perpendiculaire à la feuille et dirigée vers le lecteur et la direction verticale  $z$  est orientée vers le bas, dans le sens de la gravité. Nous nous proposons d'étudier un milieu granulaire d'extension semi-infinie, dont la limite supérieure est le plan  $z = 0$ . La relation fondamentale de la dynamique pour ce système s'écrit :

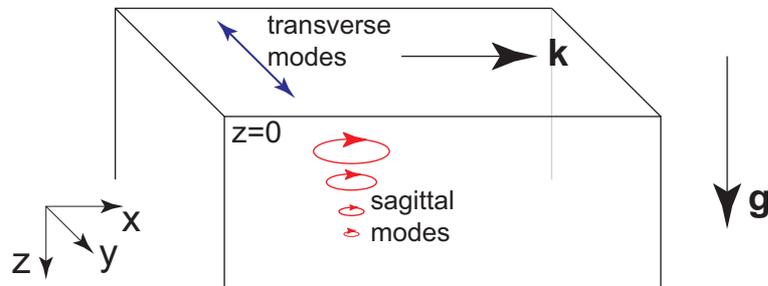


FIGURE 2.1 – Système étudié : des ondes élastiques se propagent dans la direction  $x$  d'une cellule remplie de milieu granulaire. La gravité est orientée selon l'axe  $z$ . La direction transverse est orientée selon l'axe  $y$ .

$$\rho \ddot{\mathbf{U}} = -\nabla \bar{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{U}$  est le champ de déplacement. Dans le cas du système à l'équilibre  $\ddot{\mathbf{U}} = 0$ . Nous utilisons le modèle d'élasticité granulaire de Jiang et Liu dont la loi de comportement est l'équation (1.19) et les conventions de notation ont été présentées dans le chapitre 1.3.1. Dans l'état d'équilibre, le champ de déformation s'écrit :

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_0 \end{pmatrix} \quad u_{ij}^0 = \delta_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Le carré des déformations en cisaillement vaut  $u_s^2 = (2/3)\delta_0^2$ . En utilisant la relation constitutive, on obtient le tenseur de contraintes :

$$\sigma_{ij} = E\delta_0^{3/2} \begin{pmatrix} (\mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}}{3}) & 0 & 0 \\ 0 & (\mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & (\mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3}) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

La pression se définit comme la trace de ce tenseur des contraintes :  $P = E\delta_0^{3/2}(\mathcal{B} + \mathcal{A})$ . On peut alors exprimer la contrainte verticale comme,

$$\sigma_{zz} = E \left( \mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3} \right) \delta_0^{3/2} = \rho g z \quad (2.4)$$

de cette manière, la compression volumique s'écrit :

$$\delta_0 = -\frac{dW_0}{dz} = \left( \frac{\rho g z}{E \left( \mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3} \right)} \right)^{2/3} \quad (2.5)$$

où  $W_0$  est le champ de déplacement vertical. Ainsi, nous obtenons une expression de l'interpénétration  $\delta_0$  dans l'état de référence. À la surface libre, en  $z = 0$ , la condition aux limites est l'annulation des contraintes appliquées à l'interface. La seconde condition aux limites est donnée par un déplacement qui tend vers 0 quand  $z \rightarrow \infty$ . Cependant, en pratique, on impose un déplacement nul  $W_0(H) = 0$  sur le fond rigide d'une boîte, en  $z = H$ . On prend ensuite la limite  $H \rightarrow \infty$ .

## 2 Ondes sagittales

### 2.1 Influence d'une perturbation du champ de déplacement

Maintenant nous pouvons rechercher l'existence de modes de vibrations semblables aux ondes de Rayleigh, pour lesquelles les déplacements ont une polarisation elliptique dans le plan sagittal  $(x, z)$  (figure 2.1). Considérons qu'une onde plane de la forme  $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$  perturbe la surface libre. Nous pouvons définir le champ de déplacement par deux fonctions sans dimension  $U$  et  $W$  de la variable  $\eta = kz$  :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} iU(\eta) \\ 0 \\ W(\eta) \end{pmatrix} \zeta \quad (2.6)$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$\tilde{u}_{ij} = k\zeta \begin{pmatrix} -U & 0 & \frac{i(U'+W)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{i(U'+W)}{2} & 0 & W' \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

et son homologue sans la trace :

$$\tilde{u}_{ij}^0 = k\zeta \begin{pmatrix} -\frac{2U}{3} - \frac{W'}{3} & 0 & \frac{i(U'+W)}{2} \\ 0 & \frac{U}{3} - \frac{W'}{3} & 0 \\ \frac{i(U'+W)}{2} & 0 & \frac{2W'}{3} + \frac{U}{3} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

La perturbation de la compression volumique s'écrit  $\tilde{\delta} = k\zeta(U - W')$ , et celle de  $u_s^2$  :

$$\tilde{u}_s^2 = 2u_{ij}^0 \tilde{u}_{ij}^0 = -\frac{2\delta_0}{3}(U + 2W')k\zeta \quad (2.9)$$

À partir de ces expressions, nous pouvons écrire celle du tenseur des contraintes

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sqrt{\delta_0}E \left[ \frac{3}{2}\mathcal{B}\tilde{\delta}\delta_{ij} - \mathcal{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tilde{\delta} - 2\mathcal{A}\tilde{u}_{ij}^0 - \frac{\mathcal{A}}{6}\tilde{\delta}\delta_{ij} + \frac{\mathcal{A}}{2\delta_0}\tilde{u}_s^2\delta_{ij} \right] \quad (2.10)$$

Après simplification, nous obtenons les composantes du tenseur des contraintes à l'ordre de la perturbation :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xx} &= E\sqrt{\delta_0} \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2} \right) U + \left( \frac{\mathcal{A}}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2} \right) W' \right] k\zeta \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= -E\sqrt{\delta_0} \left[ \left( \frac{\mathcal{A}}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2} \right) U + \left( \frac{5\mathcal{A}}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2} \right) W' \right] k\zeta . \\ \tilde{\sigma}_{xz} &= \tilde{\sigma}_{zx} = -i\mathcal{A}E\sqrt{\delta_0} (U' + W) k\zeta \end{aligned} \quad (2.11)$$

Elles peuvent être écrites sous une forme simplifiée en introduisant des fonctions  $S_{xx}(\eta)$ ,  $S_{zz}(\eta)$  et  $S_{xz}(\eta)$  telles que :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{xz} &= i\rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{xz}(kz) \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= \rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{zz}(kz) \\ \tilde{\sigma}_{xx} &= \rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{xx}(kz) \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\Gamma$  est un paramètre qui représente les propriétés élastiques d'un empilement granulaire et dont la dimension est  $[T^{-1}L^{5/6}]$ , et que nous définissons de la manière suivante.

$$\Gamma = \mathcal{A}^{1/2}(\mathcal{B} + 5\mathcal{A}/3)^{-1/6} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/3} g^{1/6} \quad (2.13)$$

Les fonctions  $S_{xx}(\eta)$ ,  $S_{zz}(\eta)$ ,  $S_{xz}(\eta)$  sont alors :

$$\begin{aligned} S_{xx}(\eta) &= \eta^{1/3} \left[ \left( \frac{1}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right) U(\eta) + \left( \frac{1}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right) W'(\eta) \right] \\ S_{zz}(\eta) &= -\eta^{1/3} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right) U(\eta) + \left( \frac{5}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right) W'(\eta) \right] \\ S_{xz}(\eta) &= -\eta^{1/3} [U'(\eta) + W(\eta)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

En utilisant l'équation du mouvement, nous obtenons la relation de dispersion :

$$\boxed{\omega = \alpha\Gamma k^{5/6}} \quad (2.15)$$

et le système d'équations sans dimension

$$\begin{aligned} \alpha^2 U &= S_{xx} + S'_{xz} \\ \alpha^2 W &= -S_{xz} + S'_{zz} \end{aligned} \quad (2.16)$$

qui détermine la forme des modes et fixe la fréquence sans dimension  $\alpha$ . Nous pouvons déjà conclure que ces modes de surface existent et qu'ils sont faiblement dispersifs. Bien sûr, la vitesse de groupe augmente comme  $k^{1/6}$  ou de manière équivalente comme  $\omega^{1/5}$ .

## 2.2 Forme des modes et relation de dispersion des ondes sagittales

### Équations à résoudre

Nous voulons maintenant déterminer le préfacteur  $\alpha$  numériquement ainsi que la forme des modes. Pour cela il faut réécrire le système précédent sous la forme d'un système de quatre équations différentielles linéaires.

$$\begin{aligned}
 U' &= -W - \eta^{-1/3} S_{xz} \\
 W' &= -\frac{1}{5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}} [(\mathcal{A} - 3\mathcal{B})U + 2\mathcal{A}\eta^{-1/3} S_{zz}] \\
 S'_{xz} &= \alpha^2 U - S_{xx} \\
 S'_{zz} &= \alpha^2 W + S_{xz} \\
 S_{xx} &= \frac{1}{5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}} [(3\mathcal{B} - \mathcal{A})S_{zz} + 2(\mathcal{A} + 6\mathcal{B})\eta^{1/3} U]
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pour résoudre ce système, on fixe les limites suivantes :

- à la surface libre : annulation des contraintes  $S_{xz}(0) = 0$  et  $S_{zz}(0) = 0$ ,
- lorsque la profondeur  $\eta \rightarrow \infty$  la déformation tend à s'annuler :  $U(\eta \rightarrow \infty) = 0$  et  $W(\eta \rightarrow \infty) = 0$ . Ce qui sélectionne un comportement asymptotique unique.

Il faut noter en particulier que  $S_{xz}$  et  $S_{zz}$  s'annulent linéairement avec  $\eta$  de sorte que  $\eta^{-1/3} S_{xz}$  et  $\eta^{-1/3} S_{zz}$  sont des termes qui s'annulent eux aussi à la surface libre. La même condition s'obtient si l'on impose une charge à la surface, telle que les modules élastiques ne s'annulent plus, et que l'on fait tendre cette charge vers zéro.

### Méthode de résolution

Nous décrivons maintenant la méthode de résolution de ce système et comment les données sont traitées pour obtenir la relation de dispersion pour le milieu granulaire d'extension semi-infinie. Les différentes étapes sont reportées sur le schéma 2.2. Le système 2.16,  $[U, W, S_{xz}, S_{zz}](\eta)$ , est résolu numériquement en utilisant l'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4. La méthode consiste à calculer la forme d'un mode de propagation à partir des conditions initiales  $[0, 1, 0, 0]$  et  $[1, 0, 0, 0]$ . Ces deux solutions vérifient les conditions aux limites en surface et sont indépendantes. A priori, on souhaite trouver la valeur de  $\alpha$  qui permette d'obtenir la condition de déplacement nul pour une certaine profondeur  $\eta_H = kH$ . En pratique, on impose une valeur de  $\alpha$  et l'on cherche les profondeurs  $\eta_H = kH$  auxquelles, par superposition des deux solutions, les deux conditions  $U(\eta_H) = W(\eta_H) = 0$  sont vérifiées simultanément.

La résolution numérique montre que l'on a plusieurs solutions, que l'on travaille à vitesse  $\alpha$  imposée et profondeur  $\eta_H$  variable ou à  $\alpha$  variable et  $\eta_H$  imposé. La relation de dispersion présente donc un nombre discret de branches indexées par  $n = [0, 1, \dots]$  qui correspondent chacune à un mode guidé. Au cours du calcul de la forme des modes (figure 2.2(b)), nous relevons les profondeurs successives  $\eta = H_n$  où  $n$  correspond au nombre d'annulations de  $U$  et  $W$  trouvées.

La relation de dispersion du mode  $n$  en profondeur finie se déduit immédiatement en calculant  $\omega = \alpha_n \eta^{5/6}$ . En traçant  $\alpha_n$  en fonction de la profondeur  $\eta_H$ , on

paramètre  
entré :  
fréquence sans-  
dimension  
 **$\alpha$**

Programme : résolution par l'algorithme Runge-Kutta 4

$$U' = -W - \eta^{-1/3} S_{xz}$$

$$W' = -\frac{1}{5A + 3B} [(A - 3B)U + 2A\eta^{1/3}S_{zz}]$$

$$S'_{xz} = \alpha^2 U - S_{xx}$$

$$S'_{zz} = \alpha^2 W + S_{xz}$$

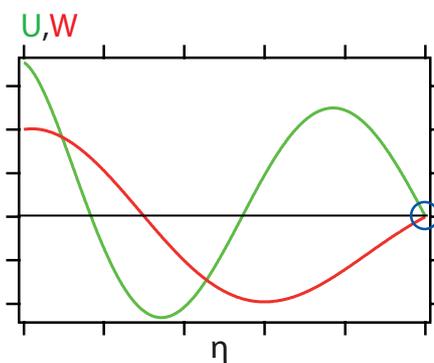
$$S'_{xx} = \frac{1}{5A + 3B} [(3B - A)S_{zz} + 2(A + 6B)\eta^{1/3}U]$$

Variable :  $\eta=0 \dots H$

Conditions initiales :  $S_{xz}(0) = 0$  et  $S_{zz}(0) = 0$   
 Conditions d'arrêt :  $U(H) = 0$  et  $W(H) = 0$

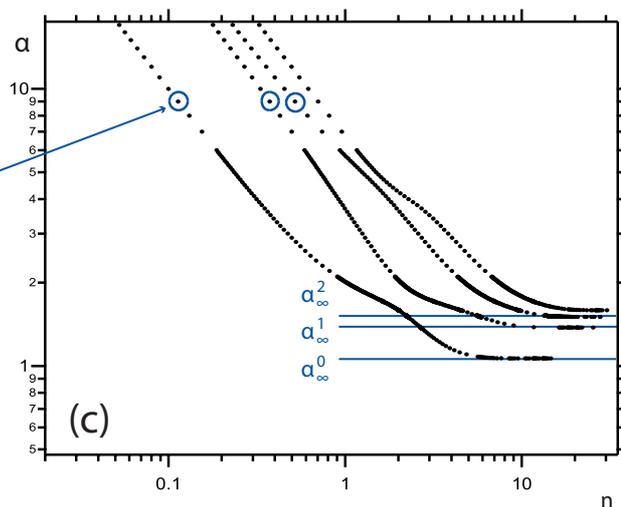
(a)  $\alpha=0,001 \dots 100$

forme des modes



(b)

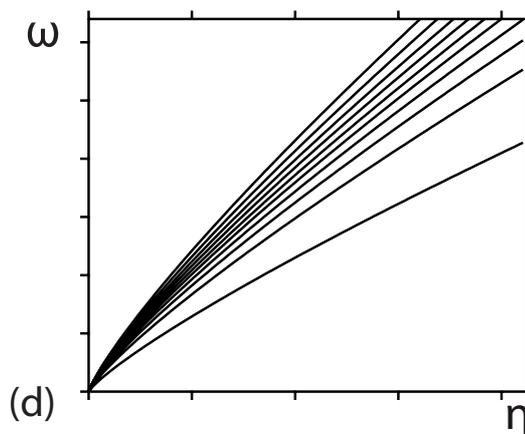
Relation de dispersion  $\eta < H$



(c)

Relation de dispersion en profondeur infinie

$$\omega = \alpha_{\infty}^n \eta^{5/6}$$



(d)

FIGURE 2.2 – Les différentes étapes permettant de déterminer numériquement la relation de dispersion

observe que  $\alpha_n$  tend vers une constante  $\alpha_\infty^n$  quand  $\eta_H = kH \rightarrow \infty$ . Cela signifie que la relation de dispersion ne dépend plus de la profondeur quand celle-ci devient suffisamment grande devant la longueur d'onde. Les valeurs  $\alpha_\infty^n$  nous donnent la relation de dispersion en profondeur infinie (eq. 2.15).

## 2.3 Résultats

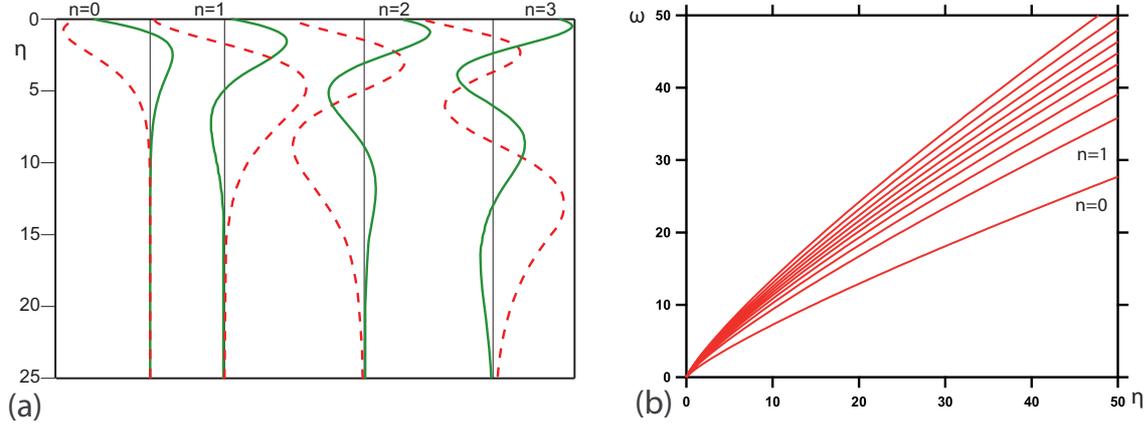


FIGURE 2.3 – (a) Forme des modes sagittaux : profil du déplacement horizontal  $U(\eta)$  (—) et du déplacement vertical  $W(\eta)$  (- -) en fonction de la profondeur réduite. (b) Relation de dispersion en profondeur infinie pour les modes sagittaux

La caractéristique la plus surprenante des ondes sagittales est qu'elles présentent un nombre discret de modes guidés par le gradient d'indice de réfraction induit par la gravité. La forme de ces modes est illustrée sur la figure 2.3. Ces modes sont polarisés elliptiquement, leurs axes principaux étant selon  $x$  et  $z$ . Ces modes sont essentiellement localisés en surface à une profondeur de l'ordre de  $n + 1$  fois la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ .

La relation de dispersion pour un système de profondeur infinie est représentée sur la figure 2.3 pour une valeur typique,  $\Gamma = 50s^{-1}m^{5/6}$ . On observe que les différentes branches de la relation de dispersion sont remarquablement proches les unes des autres, ce qui est dû à la très faible croissance de la fréquence sans-dimension  $\alpha_n$  vis-à-vis du numéro du mode  $n$  : bien que ces valeurs ne soient pas régulièrement espacées, elles suivent la tendance générale  $\alpha_n \sim n^{1/6}$

## 3 Ondes transverses

Examinons maintenant la propagation des modes transverses localisés en surface.

### 3.1 Influence d'une perturbation transverse du champ de déplacement

Considérons une perturbation transverse de la surface  $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$  se propageant à la surface libre du milieu granulaire. On définit la fonction sans dimension

$V(\eta)$ , fonction de  $\eta = kz$  :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ V(\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \zeta \quad (2.18)$$

On linéarise à nouveau le tenseur des déformations :

$$\widetilde{u}_{ij} = k\zeta \begin{pmatrix} 0 & \frac{iV}{2} & 0 \\ \frac{iV}{2} & 0 & \frac{iV'}{2} \\ 0 & \frac{iV'}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

### 3.2 Forme des modes

Pour ce type de perturbation, il n'y a pas de variation de la compression volumique :  $\tilde{\delta}_0 = 0$ . Comme la trace de  $\widetilde{u}_{ij}$  est nulle,  $\widetilde{u}_{ij}^0 = \widetilde{u}_{ij}$  et  $\widetilde{u}_s^2 = 2u_{ij}\widetilde{u}_{ij}$  s'annulent. Finalement, on obtient l'expression du tenseur des contraintes :

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = -2AE\sqrt{\delta_0}\widetilde{u}_{ij} = -AE\sqrt{\delta_0} \begin{pmatrix} 0 & iV & 0 \\ iV & 0 & iV' \\ 0 & iV' & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

En dérivant l'équation du mouvement selon  $y$ , on obtient une relation similaire à celle des modes sagittaux.

$$\omega = \alpha\Gamma k^{5/6} \quad (2.21)$$

La forme des modes et les valeurs de la fréquence adimensionnée sont données par l'équation

$$\alpha^2 V = \eta^{1/3} V - (\eta^{1/3} V') \quad (2.22)$$

### 3.3 Résolution

Pour résoudre cette dernière équation, on décompose le problème en deux équations :

$$\begin{aligned} V' &= \eta^{-1/3} S \\ S' &= (\eta^{1/3} - \alpha^2) V \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ce système est résolu avec les conditions de contrainte nulle à la surface libre  $S(0) = 0$ . De par la définition de  $\zeta$ , on a aussi :  $V(0) = 1$ . On impose que le déplacement s'annule pour  $V(\rightarrow \infty) = 0$ . Les résultats de la forme des modes transverses sont représentés sur la figure 2.4(a). Ils présentent des caractéristiques similaires à ceux des modes sagittaux : localisation en surface d'une série discrète de modes. La relation de dispersion en milieu infini est tracée sur le graphe 2.4(b).

## 4 Effets de taille finie : fréquences de coupure et fréquences de résonances

Dans cette section, nous nous intéressons aux effets de taille finie. Nous étudions comment ils modifient la relation de dispersion des ondes de surface

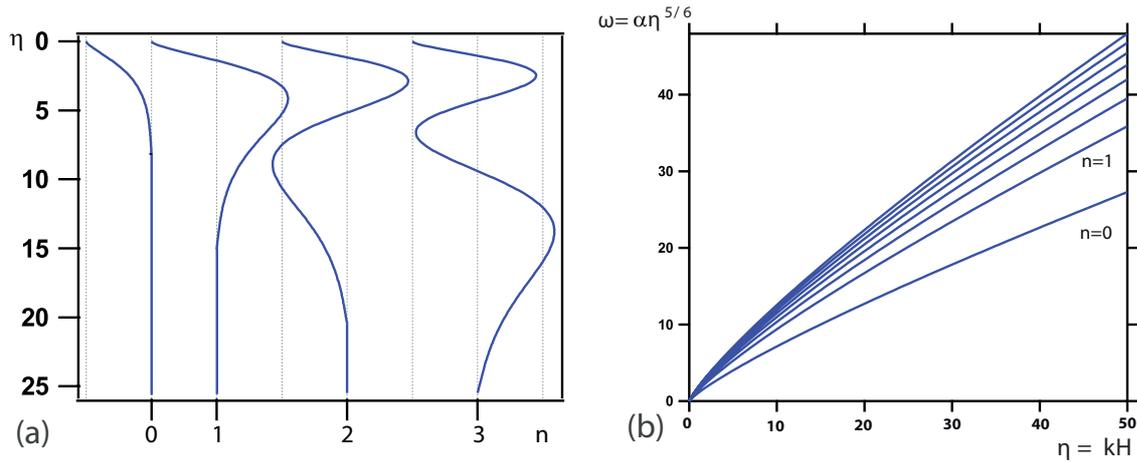


FIGURE 2.4 – (a) Forme des modes transverse : profil du déplacement transverse  $V(\eta)$  (—) en fonction de la profondeur réduite. (b) Relation de dispersion pour les modes transverses.

#### 4.1 Effet de la profondeur finie sur la relation de dispersion : fréquences de coupure du guide d'onde

Nous avons vu que les ondes élastiques de surface existent dans un milieu semi-infini. Si maintenant nous considérons que le déplacement s'annule à une profondeur  $H$ , nous voyons apparaître une fréquence de coupure en dessous de laquelle les ondes ne peuvent plus se propager. Cela correspond à la limite  $kH \rightarrow 0$  et donc à des modes homogènes non-propagatifs.

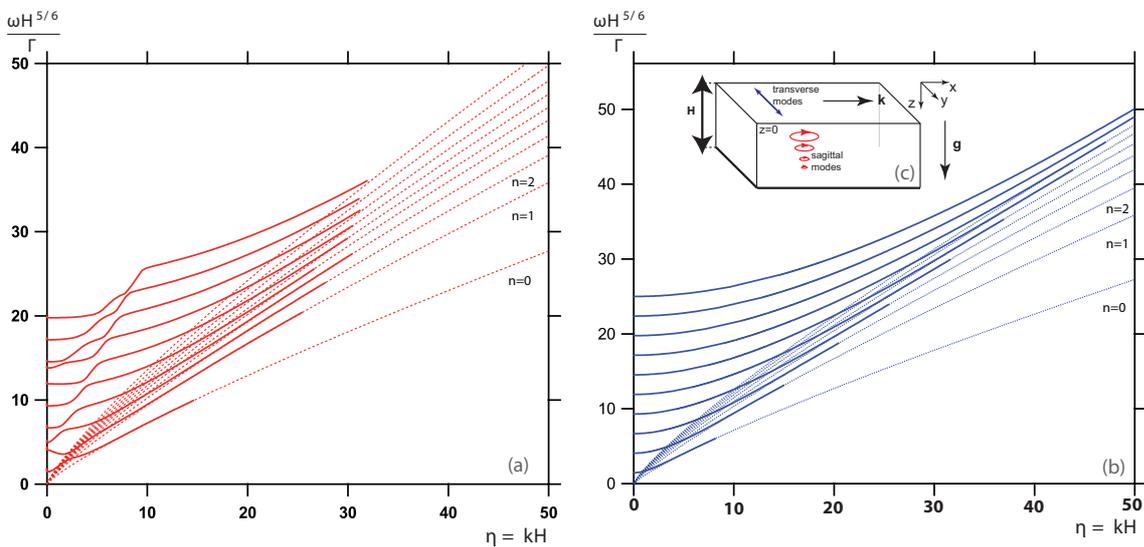


FIGURE 2.5 – Relations de dispersion représentées par la pulsation adimensionnée par  $1/H$  et  $\Gamma$  en fonction du vecteur d'onde adimensionné par  $H$ , (a) pour les modes sagittaux (—) et (b) les modes transverses (—) pour une couche de grains d'épaisseur  $H$ . Pour  $\eta_H = kH \rightarrow \infty$  la relation de dispersion en profondeur finie tend asymptotiquement vers celle en profondeur infinie (courbes pointillés). (c) Schéma du système étudié.

## 4.2 Fréquences de résonances d'une couche de matériau granulaire d'épaisseur $H$

Considérons une préparation granulaire qui a la forme d'une couche d'épaisseur  $H$  au dessous de laquelle le déplacement s'annule. Il y a deux limites intéressantes pour la relation de dispersion des ondes de surface :

- **La limite où  $kH$  est grand** : dans ce cas la profondeur de pénétration des modes de surface est petite devant l'épaisseur de la couche. Leur propagation n'est pas affectée par les effets de taille finie et leur relation de dispersion s'écrit  $\omega = \alpha \Gamma k^{-5/6}$ .
- **La limite où  $kH$  est petit** :  $kH \rightarrow 0$  est le domaine de la coupure du guide d'onde géométrique.  $v_\phi = \omega_{\text{coupure}}/k \rightarrow +\infty$ , la vitesse de phase. D'autre part on a  $v_g = d\omega_{\text{coupure}}/dk \rightarrow +\infty$ , nous observons qu'à proximité de la coupure la tangente de la relation de dispersion est horizontale. À vitesse de groupe nulle, l'énergie du signal excitateur ne peut pas se propager. Par conséquent, elle s'accumule et provoque une résonance.

Dans ce dernier cas,  $H$  est la seule échelle de longueur significative du problème, ce qui nous permet d'utiliser la variable sans dimension  $\eta = z/H$ .

### Modes résonnants polarisés horizontalement

Considérons des modes de vibration non-propagatifs pour lesquels le champ de déplacement subit une perturbation horizontale de la forme  $U(\eta)e^{j\omega t}$ . La perturbation du champ de déformation s'écrit de la manière suivante :

$$\tilde{u}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{U'(\eta)}{2H} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{U'(\eta)}{2H} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

La trace de  $\tilde{u}_{ij}$  est nulle et, de ce fait, la perturbation de la compression isotrope aussi. Il s'ensuit que  $\tilde{\delta} = 0$ ,  $\tilde{u}_{ij}^0 = \tilde{u}_{ij}$  et  $\tilde{u}_s^2 = 2u_{ij}\tilde{u}_{ij}$ . On en déduit la contrainte verticale :

$$\tilde{\sigma}_{zx} = -\mathcal{A}E\sqrt{\delta_0}\frac{U'}{H} \quad (2.25)$$

ce qui donne l'équation du mouvement :

$$[\eta^{1/3}U'(\eta)]' + \beta^2U(\eta) = 0 \quad (2.26)$$

où  $\beta$  est la pulsation sans dimension définie comme

$$\omega = \beta\Gamma H^{-5/6} \quad (2.27)$$

On remarque que les fréquences de résonances ont pour loi d'échelle  $H^{-5/6}$  et non  $H^{-1}$  comme pour les milieux non-dispersifs. Nous choisissons  $U(0) = 1$  comme condition de normalisation.

La solution de l'équation 2.26 implique la fonction de Bessel de première espèce  $J_{-2/5}$  et s'écrit :

$$U(\eta) = \left(\frac{3}{5}\right)^{(2/5)} \Gamma(3/5)\eta^{1/3} J_{-2/5}\left(\frac{6\beta}{5}\eta^{5/6}\right) \quad (2.28)$$

Lorsque  $\eta$  est grand,  $U$  se comporte comme  $\eta^{-5/12} \cos((6\beta/5)\eta^{5/6} - \pi/20)$ . La valeur de  $\beta$  est sélectionnée par la condition de déplacement nul à la limite inférieure de la couche,  $U(1) = 0$ , ce qui se simplifie par  $J_{-2/5}(6\beta/5) = 0$ . Par conséquent, on trouve un nombre discret de modes indexés par  $n$ , pour lesquels les fréquences sans dimension peuvent être approximées par :

$$\beta \simeq \frac{5\pi}{6} \left( n + \frac{11}{20} \right) \quad (2.29)$$

L'évaluation numérique des fréquences de résonance sans dimension est tracée sur la figure 2.6 ainsi que l'approximation 2.29. Leur accord est presque parfait.

### Modes résonnants polarisés verticalement

Intéressons nous maintenant à des modes de vibrations pour lesquels le champ de déplacement subit une perturbation verticale de la forme  $W(\eta)e^{j\omega t}$ . Ainsi, la perturbation du champ de déformation s'écrit :

$$\widetilde{u}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{W'(\eta)}{H} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u}_{ij}^0 = \begin{pmatrix} -\frac{W'(\eta)}{3H} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{W'(\eta)}{3H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2W'(\eta)}{3H} \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

De cela, nous pouvons déduire l'expression de la compression volumique à l'échelle de la perturbation  $\tilde{\delta} = -W'/H$  et la perturbation du module :

$$\tilde{u}_s^2 = 2u_{ij}^0 u_{ij}^0 = -\frac{4\delta_0 W'}{3H} \quad (2.31)$$

Ce qui nous permet d'écrire la contrainte verticale comme :

$$\sigma_{zz} = -\frac{E\sqrt{\delta_0}}{2H} (5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}) W' \quad (2.32)$$

Cela nous mène à une équation du mouvement similaire à la précédente :

$$(5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}) [\eta^{1/3} W'(\eta)]' + \beta^2 W(\eta) = 0 \quad (2.33)$$

qui a par conséquent le même type de solution. La fréquence sans dimension  $\beta$  s'exprime :

$$\beta \simeq \frac{5\pi}{6} \left( \frac{5}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right)^2 \left( n + \frac{11}{20} \right) \quad (2.34)$$

L'évaluation numérique de la fréquence de résonance sans dimension  $\beta$  est présentée sur la figure 2.6 pour  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 6$  avec les valeurs données par l'expression analytique. Ces deux valeurs s'accordent très bien. Nous retrouvons que les fréquences de résonance des modes polarisés verticalement sont significativement plus grandes que celles des modes polarisés horizontalement. Cela est dû à la grande différence de rigidité, qui est beaucoup plus grande en compression qu'en cisaillement.

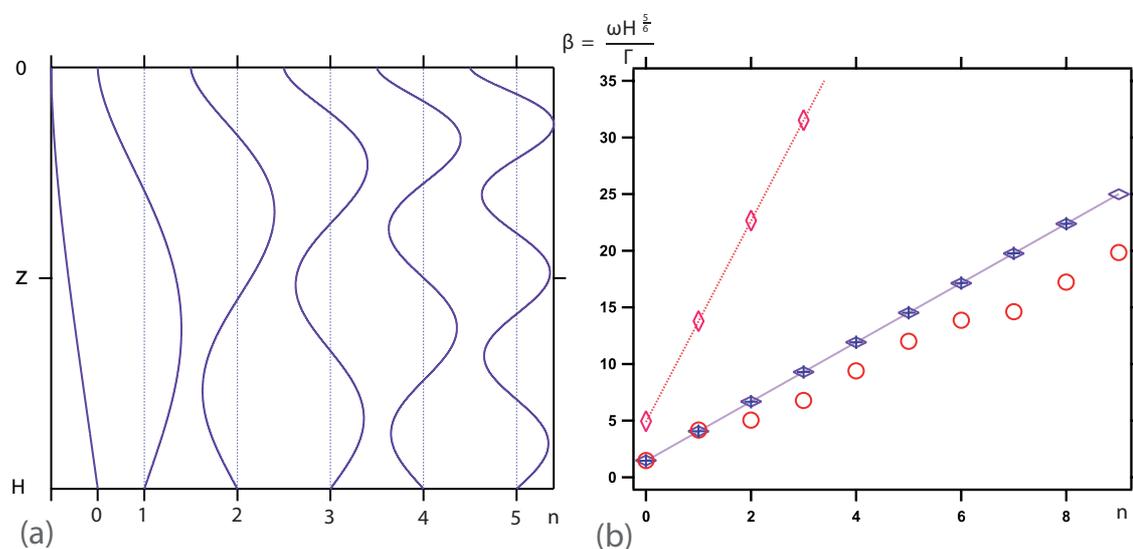


FIGURE 2.6 – (a) Amplitude des modes résonnants en fonction de la profondeur. (b) Fréquence sans dimension  $\beta$  (dans la limite  $kH$  faible) en fonction de l'indice des mode sagittal ( $\circ$ ) et transverse ( $+$ ). Fréquence de résonance pour les mode polarisés verticalement ( $\diamond$ ) et horizontalement



# Chapitre 3

## Caractérisation expérimentale des ondes de surface

### 1 Introduction

#### 1.1 Un bref regard sur les expériences précédentes

La littérature rapporte plusieurs exemples d'expériences sur la propagation d'ondes dans un milieu granulaire sous gravité. Dans cette introduction, nous allons décrire succinctement les caractéristiques des montages expérimentaux utilisés par Liu&Nagel [41, 42] et Hostler& Brenner [43]. Ces deux montages, de conception très proche, sont constitués d'une cuve de matière plastique de 25 cm de large. Les longueurs de ces cuves sont respectivement de 25 et 85 cm. L'excitation est réalisée sous la surface du milieu granulaire au moyen d'un piston composé d'un disque fin de métal d'une dizaine de centimètres de diamètre qui est relié à un haut-parleur (Nagel) ou à un pot-vibrant (Hostler& Brenner) par l'intermédiaire d'une tige traversant la paroi de la cuve. Le signal est reçu soit par des accéléromètres (Liu&Nagel) soit par des jauges de contrainte (Hostler& Brenner). Le milieu granulaire utilisé est constitué de billes de verre dont le diamètre est de l'ordre de 5 mm. Hostler& Brenner ont testé des billes de diamètre et de matière différents. Dans les deux cas, les expériences ont été réalisées en émettant des impulsions. Hostler& Brenner ont également réalisé des mesures de propagation d'un signal sinusoïdal pour différentes fréquences.

Dans les deux cas, les auteurs rapportent que leurs résultats sont difficiles à interpréter. L'une des difficultés à surmonter provient de la sensibilité des mesures à la préparation de l'empilement des grains. Liu&Nagel ont mesuré le spectre de puissance des vibrations d'une particule. Ils ont attribué le bruit à des réarrangements qui auraient lieu lorsque l'onde acoustique traverse le milieu. Ils ont mesuré la vitesse de propagation de l'onde par deux méthodes différentes : (i) par la mesure du temps de vol de l'impulsion et (ii) par la mesure de la phase en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus sont pour le moins surprenants. Selon le type de mesure, il trouve des vitesses du son qui varient d'un facteur 5. La vitesse de phase ainsi déterminée fluctue entre 50 et 90 m.s<sup>-1</sup>, alors que la mesure par temps de vol atteint 280 m.s<sup>-1</sup>. Tant Liu&Nagel que Hostler& Brenner interprètent ces résultats expérimentaux par le fait que les ondes acoustiques se propagent dans un milieu

granulaire par l'intermédiaire de chaînes de forces hétérogènes.

En mesurant la propagation d'ultrasons dans un milieu granulaire sous forte contrainte externe, Jia [32] a observé que le rapport entre la taille du capteur et celle des grains influence le résultat de la mesure de manière considérable. Ce rapport permet de contrôler l'amplitude respective du signal effectif et de la coda de signal de diffusion multiple. Si on effectue une mesure avec des capteurs dont la taille est proche de celles de grains, on enregistre essentiellement le speckle, qui correspond aux ondes se propageant au travers de chemins qui suivent le réseau hétérogène de contacts entre grains. Si on effectue les mesures au moyen de capteurs dont la taille est très grande devant celle des grains, l'amplitude de ce signal, qui dépend du détails de l'arrangement entre grains, diminue fortement et l'on enregistre un signal effectif qui est assez semblable à l'émission. Celui-ci correspond à la propagation d'un signal moyen, qui est indépendant de la préparation. Cependant, l'analyse du speckle permet d'obtenir des informations sur la nature de la texture granulaire. [33]. Pour des raisons évidentes, la mesure de la vitesse de propagation d'une onde dans un milieu granulaire n'a de sens que pour le signal effectif.

## 1.2 Cahier des charges de l'expérience :

Nous avons montré théoriquement que les modes qui se propagent dans un milieu granulaire sous gravité sont exclusivement des ondes de surface. Il s'agit d'une propagation qui est doublement guidée : le système physique se conçoit comme une superposition d'un guide d'onde à gradient d'indice qui localise en surface une série infinie (mais discrète) de modes de propagation, et d'un guide d'onde géométrique caractérisé par ses fréquences de coupure.

Cette caractéristique de propagation multi-modes est une difficulté expérimentale prévisible. La différence de vitesse entre deux modes est très faible et varie comme  $c \propto n^{1/6}$ . Séparer deux modes consécutifs est extrêmement difficile, puisque cela nécessite de disposer de grandes cellules expérimentales. Sur des distances relativement courtes, les paquets d'onde associés aux différents modes restent superposés de sorte que le signal enregistré par un capteur en un point résulte de l'interférence de l'ensemble des modes.

Les problèmes expérimentaux rencontrés par [41, 42] et Hostler & Brenner [43] pour étudier la propagation d'ondes dans un milieu granulaire proviennent en partie du fait qu'ils ont utilisé des capteurs de dimension trop proche de la taille des grains. Les mesures qu'ils ont réalisées ont été faites à partir du signal diffusé et non du signal effectif, ce qui rend impossible la détermination de la relation de dispersion.

Si nous voulons mesurer des vitesses de propagation, il faut concevoir notre expérience en diminuant autant que possible la l'amplitude du signal multi-diffusé. Pour ce faire nous devons donc séparer les échelles autant que possible. La taille des grains doit être très petite devant celle des capteurs. Les capteurs doivent être plus petits que la longueur d'onde. La distance de mesure doit-être la plus grande possible devant la longueur d'onde. On perçoit que cette hiérarchie d'échelles spatiales contraint fortement l'expérience.

Utiliser les propriétés du guide d'onde géométrique combinées à une source spécialement conçue, doit permettre de ne générer que le premier mode de surface et en étudier isolément les propriétés. De plus, comme la relation de dispersion est multi-

modale, le type de signal à émettre et la méthode employée pour l'analyser doivent permettre de séparer ou de distinguer les modes se propageant. Pour ce faire, nous avons évité d'employer des signaux trop longs inséparables spatialement et temporellement. Dans ce dernier cas, la phase mesurée résulte de la superposition de tous les modes excités. D'autre part, il est peu judicieux d'employer une excitation par impulsion. Le spectre a une large bande et l'on ne peut contrôler la forme de la source pour toutes les composantes fréquentielles de manière à contrôler les modes émis.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons l'expérience construite pour mettre en évidence les propriétés des ondes de surface dans un milieu granulaire. Nous exposerons les protocoles d'expériences et d'analyses, ainsi que les résultats obtenus.

## 2 Dispositif expérimental

### 2.1 Vue générale de l'expérience :

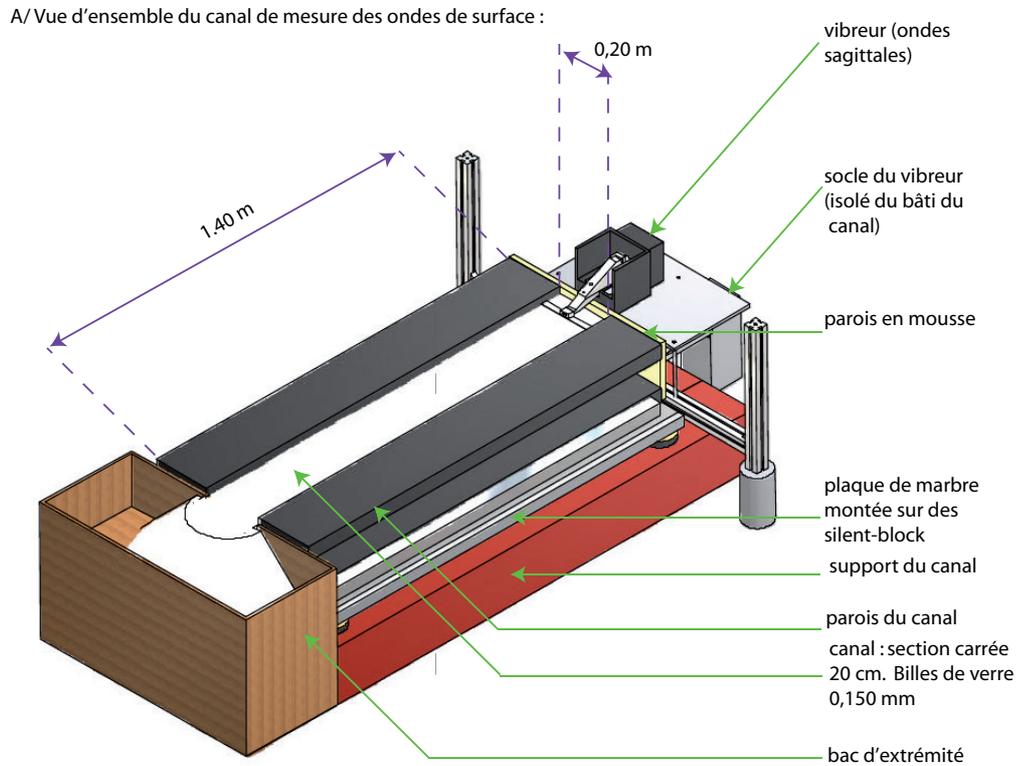
L'expérience, dont le montage est présenté sur la figure 3.1(A), est destinée à mettre en évidence les caractéristiques des ondes de surface dans un milieu granulaire. Sa conception en canal est donc tout naturellement inspirée d'expériences comme les cuves à vagues qui permettent de mesurer les relations de dispersions des ondes de surface. Le montage peut être décomposé en deux ensembles : le canal dans lequel les mesures sont effectuées et la source d'excitation. Nous avons découplé ces deux entités du point de vue mécanique. De plus, nous avons pris grand soin d'isoler, autant que faire se peut, le canal de mesure du sol et plus généralement, de toute source de vibration.

### 2.2 Canal de mesure des ondes de surfaces

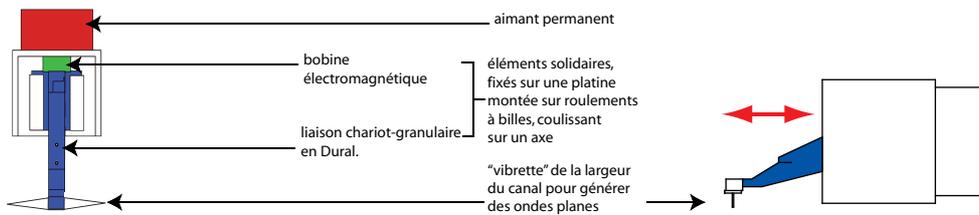
**Bâti de l'expérience :** le canal est posé sur un support en profilé de brique en U de 2 m de long, celui-ci n'est pas en contact direct avec le sol, mais appuyé sur des coussins de polymère pour limiter la transmission des vibrations du sol vers le dispositif expérimental. Les U de brique ont été remplis de plâtre, pour les mêmes raisons.

**Canal :** le canal est constitué d'une plaque de marbre, montée sur des silent-blocks, sur laquelle sont disposés deux profilés en U en brique remplie, longs de 1,40 m, qui en constituent les bords. Nous avons privilégié l'utilisation de matériaux rigides et pleins pour que l'essentiel de l'énergie des ondes élastiques reste dans le milieu granulaire. On peut déterminer l'impédance acoustique,  $Z = \rho c$ , des parois du canal en considérant que l'ordre de grandeur typique de la vitesse des ondes de surface est de 80 m/s pour des billes de verre (ordre de grandeur attendu pour du sable [47], [59] et que nous avons mesuré à posteriori). Leur densité est approximativement de  $Z_{billes} \simeq 8 \cdot 10^4 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Celle de la brique est de l'ordre de  $Z_{brique} \simeq 7 \cdot 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Le coefficient de réflexion en amplitude à l'interface billes/brique vaut alors

$$\frac{Z_{brique} - Z_{billes}}{Z_{brique} + Z_{billes}} \approx 98\%$$



B/ Détail du vibreur pour les ondes sagittales :



C/ Détail du vibreur pour les ondes transverses :

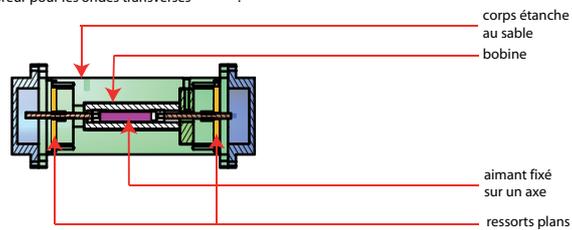


FIGURE 3.1 – Dispositif expérimental

Notons que l'impédance de l'air intersticiel est de l'ordre de  $Z_{air} \simeq 200 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , ce qui explique pourquoi nous pouvons sereinement l'ignorer. Par ailleurs, pour ne pas être perturbé par le couplage avec les modes propres de vibration des éléments du canal, l'entrefer du U a été bouché avec de la mousse pour éviter de laisser des cavités.

La section du canal est de forme carrée de 20 cm de côté. Pour les expériences réalisées, la surface du matériau granulaire affleure la face supérieure du profilé en U. Pour faire varier l'épaisseur de la préparation granulaire, on peut ajouter des plaques de médium (bois reconstitué) sur le fond du canal, pour ne pas avoir à modifier les réglages du vibreur. Ce canal se comporte comme un guide d'onde géométrique. Dans la partie théorique, j'avais étudié la relation de dispersion pour une nappe de milieu granulaire d'épaisseur  $H$ . Dans le cas du canal, il faut tenir compte des conditions aux limites latérales qui modifient la relation de dispersion. Une onde de nombre d'onde  $k$  guidée par le canal peut s'interpréter comme la superposition de deux ondes planes de nombre d'onde  $k_\infty$  dans un milieu non confiné. De manière à satisfaire les conditions de non glissement sur les parois du canal,  $k_\infty$  et  $k$  doivent être reliés par :

$$k_\infty^2 = k^2 + \left(\frac{\pi m}{W}\right)^2 \quad (3.1)$$

où  $m$  est le numéro du mode transverse et  $W$  la largeur du canal. Dès lors, à partir de la relation de dispersion en géométrie confinée mesurée pour  $m = 1$ , on peut reconstruire la relation de dispersion non confinée.

**Paroi en mousse :** pour contenir le milieu granulaire à l'extrémité où est placé le vibreur, la paroi est faite de mousse absorbante, molle et légère, afin d'éviter qu'un signal issu d'une réflexion ne se superpose au signal à mesurer.

**Bac d'extrémité :** à l'autre extrémité, le canal est connecté à un bac. On s'arrange pour que le milieu granulaire y adopte une forme de demi-cône à l'angle d'avalanche. Cette diminution progressive de l'épaisseur permet d'atténuer l'onde tout en empêchant les réflexions, sur le principe des dièdres constituant les murs des chambres anéchoïques acoustiques.

Le matériau granulaire utilisé pour ces expériences est constitué de billes de verre de 0,15 mm de diamètre (marque SiliBeads). Les billes sont nettoyées et re-tamisées avant utilisation. Leur sphéricité permet de se rapprocher du milieu modèle idéal.

## 2.3 Conception des émetteurs d'ondes de surface

La maîtrise de la source des ondes est un point crucial et extrêmement délicat : les mesures réalisées avant cette thèse rapportaient des vitesses de propagation allant de 40 à quelques centaines de m/s, ce qui est très lent comparé à la vitesse dans un bloc de quartz (5500 m/s). Cela implique que le module d'élasticité du matériau granulaire est très faible par rapport à celui de la plupart des matériaux. Les quelques matériaux moins raides que les grains (gels et élastomères) sont fragiles. Par conséquent, il est très difficile d'imposer un couplage faible entre la source et le milieu à exciter, ce s'est avéré être très problématique. En effet, si la raideur de l'excitateur est grande devant celle du matériau, il est très difficile de le placer dans la cellule expérimentale sans qu'apparaisse une contrainte forte sur l'une

des deux faces, qui réarrange progressivement le milieu granulaire. En conséquence, les résultats ont été non-stationnaires et non-reproductibles pendant de longs mois d'essai. Nous présentons ici deux dispositifs qui ont donné des résultats convaincants.

**Émetteur pour les ondes sagittales** L'émetteur pour les ondes sagittales 3.1(B) est un transducteur électromagnétique que nous avons construit à partir du mécanisme d'un graveur de disques durs des années 1980. Il est constitué d'une platine qui coulisse sur un axe grâce à des trains à billes, ce qui assure un guidage axial très précis et limite les mouvements qui excitent les ondes transverses. Une bobine, fixée sur la platine, est placée dans le champ magnétique d'un aimant permanent situé au dos du carter. Les pièces de Dural qui permettent de transmettre le mouvement au milieu granulaire ont été fixées sur la platine. Ces pièces sont épaisses, pour limiter l'influence de leurs modes propres de torsion et de flexion aux fréquences de travail. Elles sont dissymétriques, pour diminuer l'acuité des résonances.

À l'extrémité opposée à la bobine, nous avons fixé une cornière en T qui est en contact avec le milieu granulaire. La cornière a été usinée de telle sorte que la largeur de la barre supérieure du "T" soit nulle aux extrémités. On évite ainsi les modes parasites de flexion. De plus pour limiter l'amplitude des modes propres de résonance, nous avons collé des bandes de polymère anti-vibration sur la face du T qui est en regard avec la paroi en mousse du canal. La cornière est quasiment de la largeur du canal pour être dans les conditions de génération d'ondes planes.

En fonctionnement, le coulisement du charriot sur les roulements à billes permet d'éviter au maximum l'existence de forces axiales. En particulier, le montage ne fait pas intervenir de ressort : le rappel élastique est assuré par le milieu granulaire lui-même. Ainsi, on garantit le fait qu'il n'y a de surpression ni d'un côté de la cornière, ni de l'autre.

Pour augmenter la qualité de restitution du signal et l'étendue du domaine de fréquence utilisable pour les mesures, nous avons introduit de la mousse dans le carter du vibreur pour réduire l'amplitude de ses résonances. Les tests effectués montrent que ce vibreur répond linéairement entre 30 et 5000 Hz.

**Émetteur pour les ondes transverses** L'émetteur pour les ondes transverses 3.1(C), est aussi un vibreur électromagnétique. Je l'ai conçu à l'origine pour générer des ondes transverses dans le contexte d'expériences de terrain. Une de ses particularités est que son corps, étanche au sable, est fabriqué en Teflon (densité 2,2), un matériau qui a une densité proche de celle d'un milieu granulaire. À l'intérieur, un électro-aimant est solidaire du corps du vibreur. La conversion électromécanique est assurée par un axe aimanté qui communique son mouvement au corps du vibreur par l'intermédiaire de ressorts plans. Ainsi, le couplage mécanique entre le vibreur et le matériau granulaire est dans ce cas transmis par le frottement du corps sur le milieu.

L'inconvénient de cet excitateur est l'utilisation de ressorts qui ne permettent l'utilisation que dans le domaine de fréquence compris entre 230 Hz et 1 kHz environ. De fait, la fréquence de résonance du vibreur avec les ressorts que nous avons fabriqués est autour de 213 Hz. À fréquence plus haute que le kilohertz, le mouvement est trop amorti pour être utilisable. De plus, il est préférable de n'utiliser ce vibreur que pour générer des trains d'ondes. L'émission de sinusoïdes continues

contribue à faire chauffer la bobine et conduit à la détérioration de l'électro-aimant.

**Amplitude de vibration en fonctionnement** L'amplitude de vibration transmise au milieu granulaire est comprise entre  $\approx 10$  et  $100$  nm, domaine où les propriétés de la propagation demeurent identiques. En deçà, il est difficile d'obtenir une excitation sinusoïdale contrôlée. De plus l'amplitude du signal reçu devenant très faible, l'extraction du signal des accéléromètres nécessite une détection synchrone avec un long temps de moyennage. Pour des amplitudes plus importantes la forme du signal reçu change. On observe d'abord des distorsions, puis l'apparition de pics supplémentaires dans le signal : le système répond à une fréquence différente de celle de l'injection. Nous avons également observé du doublement de période, qui est un signe symptomatique de la présence de non-linéarités. Ces phénomènes parasites dépendent de la fréquence d'excitation.

## 2.4 Choix des capteurs

Les capteurs utilisés sont des accéléromètres piézo-électriques très sensibles ( $500$  mV/g ou  $1000$  mV/g) de la marque Brüel & Kjær. Nous disposons de quatre capteurs mono-axe,  $C_0, C_1, C_2, C_3$  et d'un capteur tri-axes  $C_{xyz}$ . Le capteur  $C_0$  est utilisé comme référence et pour contrôler le signal au niveau du transducteur. Selon le modèle, la taille de ces capteurs est de  $1$  à  $2$  cm. Considérons des grains de  $0,15$  mm de diamètre et un capteur cylindrique de  $1$  cm de diamètre sur  $1,7$  cm de hauteur, le nombre de grains en contact avec le capteur est d'environ  $3,5 \times 10^4$ , ce qui permet une moyenne du signal très efficace. On s'attend en effet à ce que le rapport de l'amplitude de la coda sur celle du signal de milieu effectif varie comme la racine de la surface de contact. Il est autour de  $5\%$  dans notre cas. Par comparaison, avec le spot laser d'un vibromètre, la moyenne ne se fait que sur  $400$  grains environ, ce qui signifie que le signal effectif et le speckle sont de même amplitude.

Un autre avantage de ces capteurs est de permettre de faire des mesures à différentes profondeurs. De plus, ils permettent la mesure de la polarisation des ondes alors qu'un vibromètre, par exemple, n'est sensible qu'à la composante normale du déplacement de la surface. Par comparaison, l'utilisation d'un accéléromètre tri-axes autorise la mesure simultanée de toutes les composantes de l'onde en un point donné du canal.

Il y a bien sûr quelques inconvénients à ce type de capteurs. D'une part, ils sont fortement intrusifs. D'autre part, il faut prendre un soin extrême lors de leur implantation dans le milieu granulaire, pour ne pas perturber la préparation en y créant des hétérogénéités. Il s'agit essentiellement d'un tour de main à prendre, la marque du succès étant la qualité de reproductibilité des expériences. Cette phase de balbutiements expérimentaux a pris une part très importante du temps consacré à cette thèse.

## 2.5 Système d'acquisition de données

Nous avons développé un système de génération et d'acquisition de signal fonctionnant sur un ordinateur PC et programmé par le logiciel Labview. Le système (figure 3.2) est composé d'une branche de génération du signal (bleu) qui com-

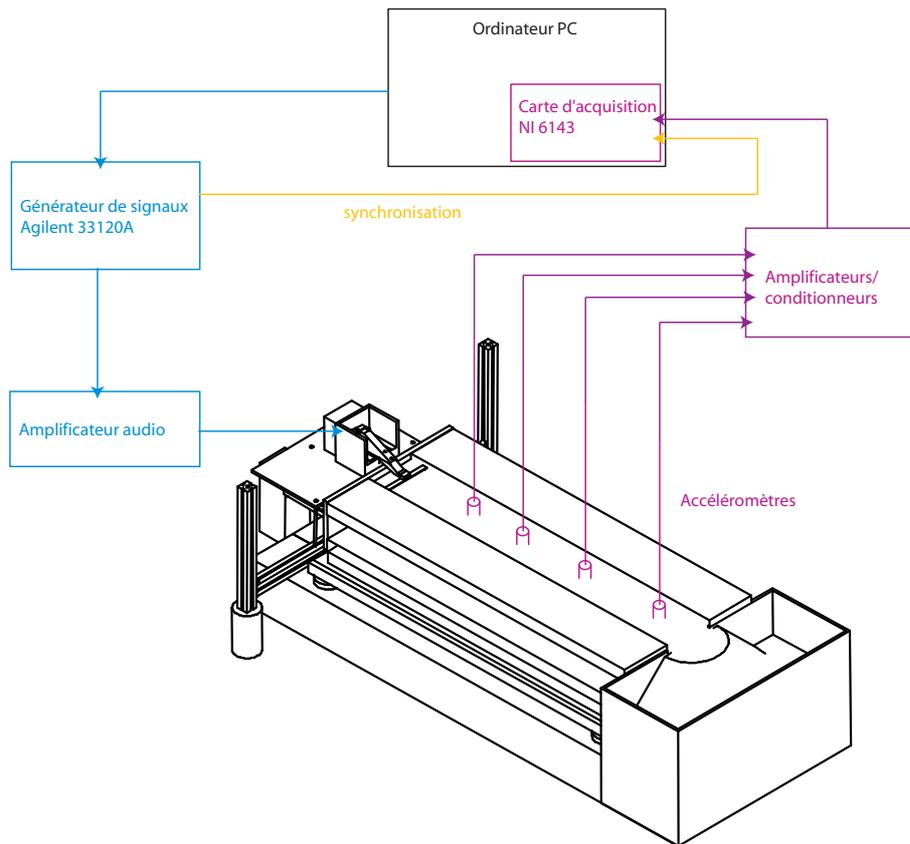


FIGURE 3.2 – Système de génération et d’acquisition du signal

mande la branche d’acquisition. Émission et acquisition entrent en action quasi-simultanément.

*Première étape :* le programme envoie au générateur de signaux (GBF Agilent) les paramètres du signal à émettre (forme, fréquence, amplitude...). Une fois paramétré, celui-ci génère simultanément le signal de mesure et une impulsion de synchronisation. Le signal est amplifié en puissance par un amplificateur audio grand public (élément de chaîne haute fidélité) puis émis par le vibreur dans le canal de mesure.

*Seconde étape :* le signal de synchronisation déclenche l’enregistrement par la carte d’acquisition. Cette carte, de marque National Instrument 6143, qui permet l’acquisition simultanée sur 8 voies indépendantes jusqu’à des fréquences d’échantillonnage de 250 kHz. Pour avoir une résolution suffisante de la phase et tout en conservant un temps de calcul raisonnable, nous avons utilisé des fréquences d’échantillonnage comprises entre 90 et 120 kHz. Le signal qu’elle reçoit des accéléromètres est préalablement conditionné et amplifié par un amplificateur de charge. Le programme effectue ensuite un traitement du signal adapté à l’expérience : moyenne puis détermination de la phase et de l’amplitude.

### 3 Méthode d’analyse du signal

Comme nous l’avons déjà signalé dans la partie introductive de ce chapitre, le type de signal et la méthode d’analyse sont capitaux pour obtenir une mesure qui a un sens physique. Dans les précédentes expériences d’acoustique dans un milieu

granulaire sous gravité, la comparaison des résultats entre les mesures de la vitesse de phase, réalisées au moyen de sinusoides continues, et de la vitesse de groupe, le plus souvent mesurée par le temps de vol d'une impulsion, montraient des résultats aberrants : dans le premier cas, on ne peut pas distinguer quels modes sont excités ; dans le second, la mesure est encore plus difficile à interpréter car le spectre d'émission est large bande et multi-mode, ce qui ne permet pas de retrouver la signature de la propagation d'un signal d'une fréquence précise.

Dans la partie précédente, nous avons vu comment le dispositif expérimental a été conçu pour détecter le signal de milieu effectif et pour sélectionner le mode de propagation le plus bas, en utilisant un guide d'onde géométrique. Nous discutons maintenant le type de signal utilisé. Il doit permettre de déterminer la vitesse de groupe et la vitesse de phase simultanément, pour assurer la cohérence des résultats, et de vérifier quel est le mode excité. Nous présenterons ensuite la méthode d'analyse utilisée pour extraire l'information.

### 3.1 Choix du signal émis

La propagation d'ondes de surface dans un milieu granulaire est multi-mode. Ces modes se propagent à des vitesses légèrement différentes de sorte que l'on peut *a priori* les séparer dans le domaine espace-temps. Nous nous sommes limités à l'étude de signaux correspondant à la branche du mode fondamental de la relation de dispersion. Pour cela, il faut émettre des signaux brefs afin de discriminer le signal du mode fondamental de ceux des modes d'ordre plus élevé. Cependant, il faut aussi que la fréquence du signal soit bien définie. Elle doit être un paramètre maîtrisé par l'expérimentateur pour, *in fine*, mesurer la relation de dispersion de manière précise. Pour cette raison nous avons utilisé des paquets d'onde gaussiens de la forme :

$$s_{\text{émis}}(t) = A \cos(2\pi ft) \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2\right) \quad (3.2)$$

avec, dans les expériences réalisées, une largeur de paquet d'onde  $\sigma$  de l'ordre de 5 fois la période du cosinus.

### 3.2 La transformée de Tabor

La transformée de Tabor permet d'extraire le retard et l'amplitude des signaux reçus. Elle se définit de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_{\text{reçu}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{\text{reçu}}(t) \exp(j2\pi ft) \exp\left(-\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right)^2\right) dt \quad (3.3)$$

$\mathcal{S}_{\text{reçu}}$  est l'amplitude complexe à la fréquence  $f$  dans le signal analysé  $s_{\text{reçu}}(t)$ , moyenné sur un intervalle temporel de largeur  $\sigma$ . Pour obtenir l'enveloppe du signal de fréquence  $f$ , il suffit de prendre la norme de la transformée,  $|\mathcal{S}_{\text{reçu}}|$ . Pour les expériences de propagation d'ondes de surface effectuées en laboratoire, le signal  $s_{\text{reçu}}$  est enregistré et moyenné entre 128 et 256 fois avant de faire l'objet du traitement par la transformée de Tabor. Toutes ces opérations sont effectuées par le programme d'acquisition ce qui permet de vérifier la qualité des mesures au fil des expériences.

En pratique, on ne calcule la transformée que pour la fréquence  $f$  émise. Sur la figure 3.3, nous avons représenté les signaux expérimentaux d'un paquet d'onde gaussien au cours de sa propagation (a). Le module de leurs transformées de Tabor est tracé sur le graphe (b).

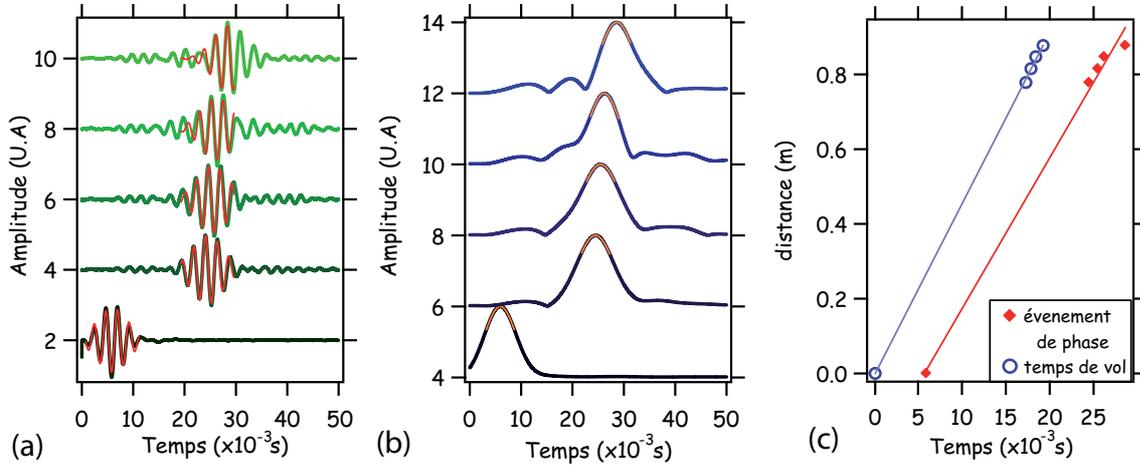


FIGURE 3.3 – (a) Signaux expérimentaux d'un paquet d'onde gaussien (*vert*) au cours de sa propagation dans le canal. (b) Module de la transformée de Tabor de ces signaux (*bleu*). Les temps de vol sont déterminés par l'ajustement d'une gaussienne sur l'enveloppe du signal (*—, fig. (b)*). La phase du paquet d'onde est déterminée par un ajustement d'un paquet d'onde gaussien sur le signal expérimental (*—, fig. (a)*). (c) Les temps de vols et les événements iso-phases sont reportés dans un diagramme spatio-temporel. La vitesse de groupe est déterminée par un ajustement linéaire des temps de vol. La vitesse de phase est déterminée par un ajustement linéaire des temps d'arrivée des événements iso-phases.

### 3.3 Détermination de la relation de dispersion

La vitesse de phase est la vitesse de propagation d'un événement de phase, par exemple un nœud du signal sinusoïdal. Elle se déduit de la relation de dispersion par :  $v_\phi = \omega/k$ . Nous déterminons la phase du signal par l'ajustement du signal moyenné par d'un paquet d'onde gaussien. On peut également utiliser la phase tirée de la transformée de Tabor et en faire un ajustement linéaire. Cependant cette dernière méthode s'est avérée moins précise que l'ajustement direct. La phase étant définie à  $2n\pi$  près, il faut faire très attention à se trouver dans la bonne période, tant dans le domaine spatial que temporel. L'ajustement de la phase est susceptible d'être affecté par une erreur de repliement, c'est à dire que la valeur obtenue se trouve dans un intervalle différent de celui de la période réelle du signal.

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie acoustique. Elle se déduit de la relation de dispersion par :  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ . La vitesse de groupe est aussi la vitesse de propagation du paquet d'onde gaussien, dans la limite où celui-ci est très étendu temporellement. Le contenu fréquentiel du paquet d'onde est alors dans un voisinage étroit de la fréquence centrale. En pratique, nous déduisons la vitesse de groupe de la propagation du centre de l'enveloppe du signal calculé au moyen de la transformation de Tabor. Lorsque le signal est mono-mode, l'enveloppe montre un

unique maximum qui permet de calculer le temps de vol entre la source et le point de mesure. Cependant près de la fréquence de coupure du guide d'onde, la vitesse de groupe tend vers 0 de sorte que les effets de dispersion associés à la courbure de la relation de dispersion deviennent prédominants. Nous n'avons mesuré la vitesse de groupe que lorsque le paquet gaussien persistait au cours de la propagation de manière convaincante. Nous avons essentiellement retenu deux critères, outre la forme qualitative du signal : l'élargissement du paquet d'onde par moins d'un facteur 2 sur l'étendue du canal et l'ajustement de la position du paquet d'onde en fonction du temps, dans les barres d'erreur statistiques.

Pour déterminer la relation de dispersion, nous utilisons simultanément les mesures de vitesse de phase et de vitesse de groupe. Nous cherchons la courbe discrétisée  $\omega(k)$  qui donne, au sens des moindres carrés, la meilleure approximation possible des mesures de  $v_\phi$  et  $v_g$ , *simultanément*. On obtient alors une excellente précision sur la courbe et sur sa dérivée, issue d'un compromis dans l'ajustement des deux jeux de données. C'est à ce prix que l'on a réussi à sortir des barres d'erreurs les exposants que nous discuterons en fin de chapitre.

### 3.4 Programme d'analyse du signal :

Un programme en langage Labview permet d'automatiser l'acquisition et d'effectuer un pré-traitement du signal. Pour chaque voie d'enregistrement, on effectue une moyenne qui est enregistrée dans un premier fichier. On effectue ensuite la démodulation de l'amplitude à la fréquence d'émission, en utilisant la transformation de Tabor et celle-ci est stockée dans un second fichier.

Nous avons écrit un ensemble de macros pour le logiciel Igor afin d'extraire du signal moyen et du signal démodulé les paramètres importants : amplitude, phase, temps de vol. Elles permettent de déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe pour un nombre de mesures important. Il vise à déterminer la phase dépliée en déduisant les mesures les unes des autres par continuité. Pour ce faire, nous avons effectué des mesures bien résolues en espace pour une première fréquence. On obtient alors sans ambiguïté et avec une excellente précision, la vitesse de phase et la vitesse de groupe à cette fréquence. Puis, on balaye les fréquences avec un pas en fréquence très faible mais un pas spatial dégradé (la source plus 4 points de mesure répartis le long du canal). Ainsi, la variation de vitesse entre les mesures successives est suffisamment faible pour pouvoir déplier la phase correctement.

Les grandes lignes des macros sont présentées sur la figure 3.4. Les ellipses représentent les données, les losanges les opérations et les rectangles les structures telles que des boucles.

La partie 1/ permet de déterminer les temps de vol à partir d'un ajustement gaussien effectué au voisinage du maximum de l'amplitude du signal reçu sur chaque capteur. La vitesse de groupe est déterminée en 4/ par un ajustement linéaire du temps de vol en fonction de la position des capteurs – la pente est l'inverse de  $v_g$ . La détermination des phases se fait dans les parties 2/ et 3/.

La partie 2/ sert à déterminer la référence de phase en utilisant le capteur placé sur la source et en ajustant sur son signal un paquet d'onde gaussien. Les paramètres libres pour l'ajustement sont l'amplitude et la phase. Les paramètres fixés sont la fréquence et le décalage temporel du centre du paquet d'onde qui est déterminé

par le temps de vol. Lorsque l'amplitude ainsi déterminée est négative, on en prend l'opposé et on décale la phase de  $\pi$ .

La partie 3/ est sensiblement identique à la partie 2/. La différence tient dans l'initialisation de l'ajustement. Pour cela, on commence par prédire le déphasage sur le capteur auquel on s'intéresse en prenant en compte la vitesse de phase déterminée lors de la mesure précédente, le déphasage mesuré sur le capteur précédent ainsi que la distance à celui-ci. La validité de la phase ainsi déterminée est testée de la même manière que dans 2/. Cette partie du programme est répétée jusqu'au dernier capteur. La vitesse de phase est déterminée au moyen d'un ajustement linéaire de la position des capteurs en fonction de l'instant auquel arrive un évènement iso-phase.

Cette méthode de mesure permet de déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de manière cohérente. La précision sur la vitesse de phase est de l'ordre de 1%. La précision sur la vitesse de groupe est inférieure à 4%.

## 4 Expériences et résultats

### 4.1 Préparation de l'empilement granulaire

La préparation de l'empilement est contrôlée essentiellement par la manière de remplir le canal avec les billes de verre. C'est l'une des parties les plus délicates de l'expérience. Le protocole est le suivant :

- vider entièrement le canal.
- remplir le canal par pluviation, en prenant garde à ne pas créer d'avalanche.
- aplanir la surface en raclant avec un réglet à 45° orienté vers l'arrière du mouvement, sans appuyer afin de ne pas compacter le milieu granulaire.
- enterrer les accéléromètres sous la surface, en exerçant une légère pression associée à des mouvements oscillants de faible amplitude afin de ne modifier la préparation granulaire que dans le voisinage du capteur. Pour les mesures de profils verticaux d'amplitude, le remplissage est effectué après que le capteur ait été disposé sur le fond du canal.
- égaliser la surface au voisinage des accéléromètres à l'aide du réglet ou d'un pinceau.
- contrôle de la qualité du signal.

Celle-ci est contrôlée de la manière suivante, si la forme du paquet d'onde reçu est très distordue par rapport à celle du paquet gaussien émis, on essaye successivement :

- de balayer transversalement et longitudinalement le canal sur toute sa profondeur avec un réglet de manière à supprimer la structuration du tas
- de reprendre entièrement la préparation du canal.

C'est à ce prix que nous avons obtenus des résultats expérimentaux reproductibles 3.5.

### 4.2 Des ondes localisées en surface

L'objectif de cette série de mesure est de mettre en évidence la localisation en surface des ondes acoustiques. Pour cela, nous avons mesuré l'amplitude en fonction de la profondeur. Nous avons effectué ces mesures en générant des ondes sagittales.

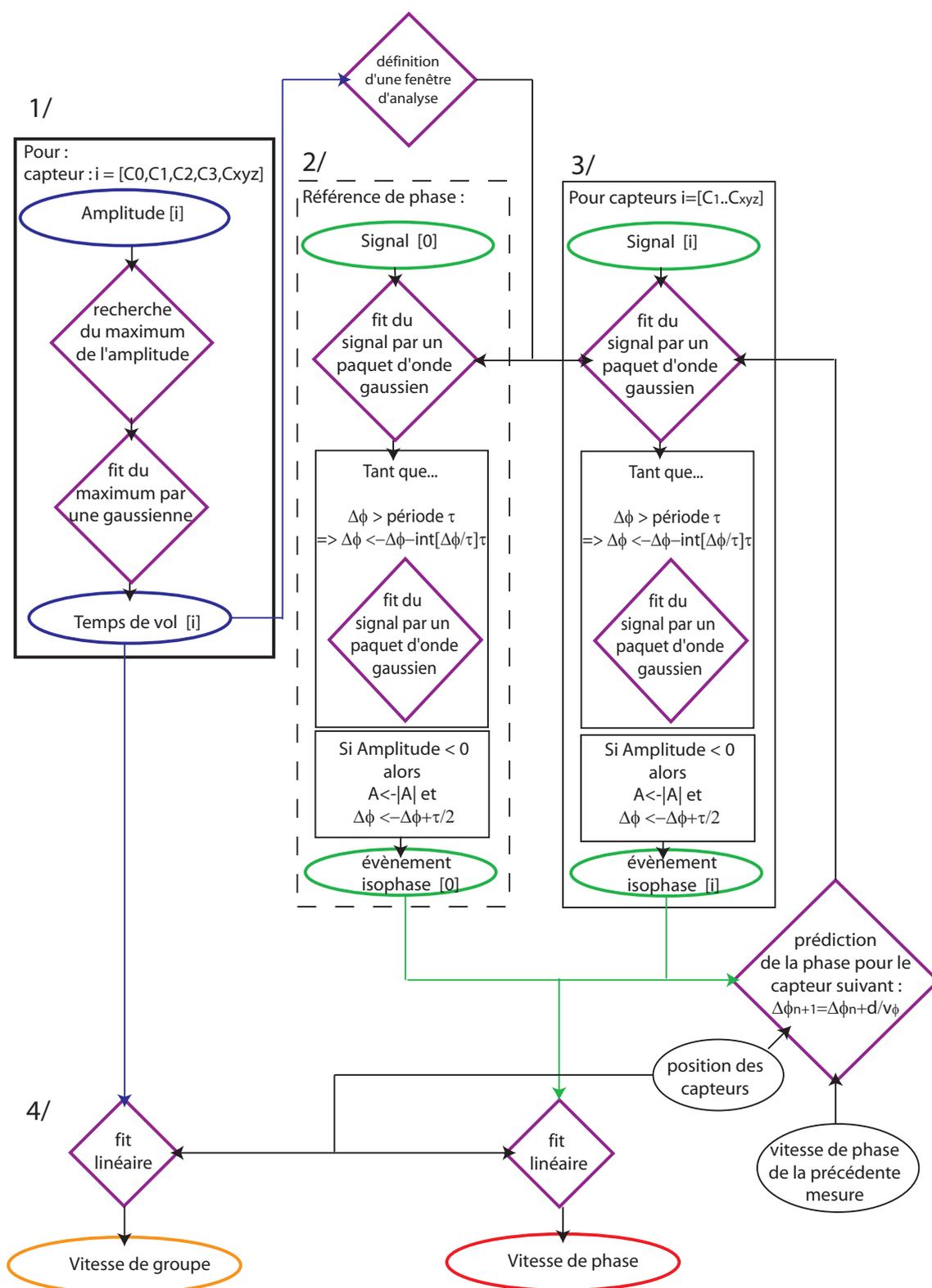


FIGURE 3.4 – Organigramme représentant le fonctionnement du programme en langage IGOR de dépouillement de données.

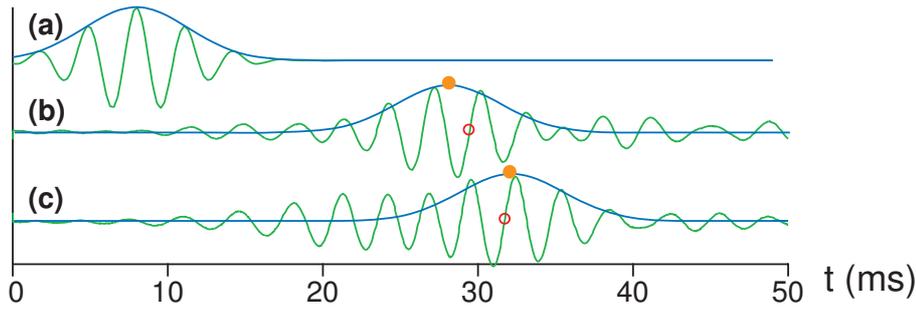


FIGURE 3.5 – Graphique représentant les signaux d’ondes transverses, en émission (a) et en réception (b) et (c). En bleu : l’enveloppe de l’amplitude obtenue par transformation de Tabor, en vert le signal enregistré et moyenné ( $256\times$ ), cercle rouge : évènement iso-phase; point jaune : temps de vol. Le signal représenté en (b) a été obtenu par le protocole de préparation présenté, pour (c) la surface a été ensuite compactée en frappant au moyen d’un marteau sur une taloche.

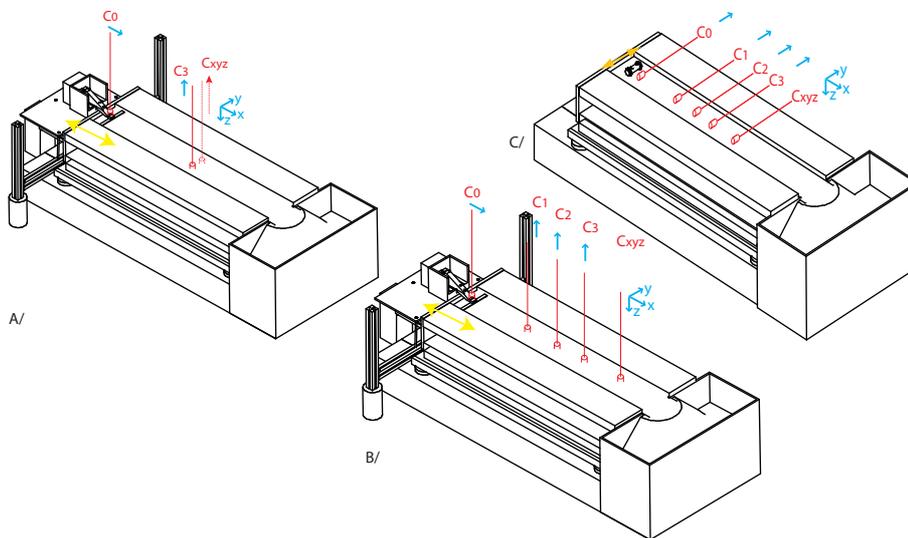


FIGURE 3.6 – Implantation des capteurs dans le canal. Les flèches jaunes indiquent le type d’émission, les flèches bleues indiquent la direction positive de l’accélération suivant l’orientation de chaque capteur. A/ Expérience de mesure du profil d’amplitude par rapport à la profondeur. B/ Mesure de propagation pour les ondes sagittales. C/ Mesure de propagation pour les ondes transverses.

Le schéma explicatif de cette expérience se trouve sur la figure 3.6(A/). Le capteur  $C_0$  est utilisé comme référence de phase pour l’analyse du signal. Les capteurs  $C_1$  et  $C_{xyz}$  sont placés à la même distance par rapport à la source, à peu près à mi-canal.  $C_1$  sert de référence en surface pour mesurer la phase et l’amplitude. L’accéléromètre à trois axes  $C_{xyz}$  est initialement posé sur le fond du canal, préalablement vidé. La préparation est ensuite faite selon le protocole expliqué précédemment.

Au cours de la série de mesures, la fréquence est fixée à 315 Hz. On remonte le capteur  $C_{xyz}$  jusqu’en surface par intervalle de 0,5 cm et on mesure l’amplitude et la phase de chaque signal en fonction de la profondeur pour les deux composantes verticale et longitudinale des ondes sagittales.

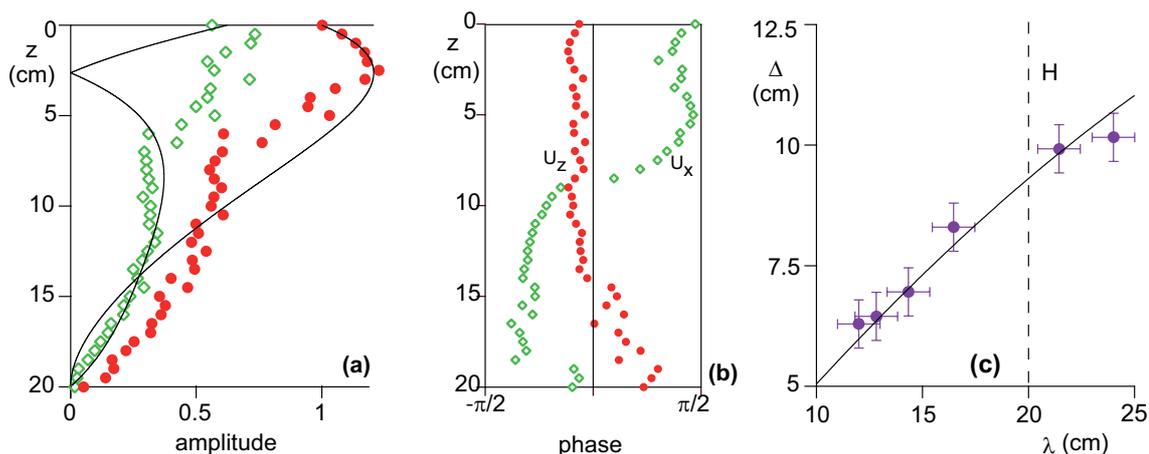


FIGURE 3.7 – Mode sagittal fondamental pour une fréquence de 315 Hz : profil de l’amplitude (a) et de la phase (b) en fonction de la profondeur pour les composantes verticale (●) et horizontale (◇) de l’accélération. (c) Profondeur caractéristique de pénétration  $\Delta$  (●) de l’onde en fonction de sa longueur d’onde. La ligne noire montre la prédiction théorique. L’infléchissement montre l’effet de la profondeur finie  $H$  à grande longueur d’onde.

La figure 3.7(a) représente les mesures d’amplitude en fonction de la profondeur pour les composantes de vibration verticale (●) et horizontale (◇) des ondes sagittales. On observe que ces modes sont polarisés elliptiquement 4.2. Les courbes noires représentent la prédiction de cette mesure par le modèle exposé dans le chapitre précédent. Le profil mesuré s’accorde raisonnablement bien avec la prédiction théorique pour le mode le plus bas. Cependant, tandis que la prédiction montre un zéro de la composante horizontale à quelques centimètres sous la surface, les mesures n’en présentent pas. Il convient de remarquer que la détection d’une annulation de l’amplitude est très difficile expérimentalement dans la mesure où d’autres signaux à la fréquence  $f$  sont systématiquement en plus du paquet gaussien. Nous pouvons observer que l’amplitude du mode diminue sur la profondeur de pénétration  $\Delta$ , de l’ordre d’une demi-longueur d’onde. Celle-ci est mesurée par l’ajustement de l’amplitude en fonction de la profondeur par une décroissance exponentielle. La figure 3.7(c) montre des mesures de la profondeur de pénétration  $\Delta$  pour différentes fréquences d’émission et sa comparaison avec la prédiction théorique. A noter l’infléchissement de la courbe lorsque la longueur d’onde atteint la hauteur de sable dans le canal au voisinage de la coupure.

La phase est représentée en fonction de la profondeur 3.7(b). Nous pouvons voir que la phase de la composante verticale est constante, du moins tant qu’elle est mesurable avec précision. Cela confirme que c’est le mode fondamental qui est émis. La composante longitudinale montre un saut de phase de  $\pi$ , ce qui est prévu du point de vue théorique, bien qu’expérimentalement, le saut de phase soit situé un peu en dessous de la profondeur prédite.

En conclusion, ces mesures démontrent l’existence des ondes de surface. Elles montrent également que la conception de l’expérience permet d’isoler l’émission du mode fondamental.

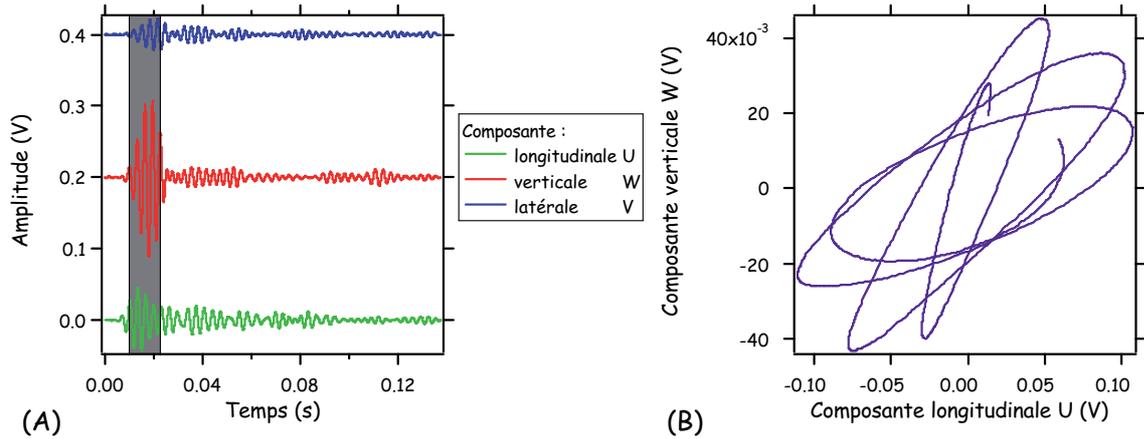


FIGURE 3.8 – (A) Signaux mesurés au moyen d'un accéléromètre tri-axes à une distance de 37 cm de la source et à 7 cm de profondeur. Le signal émis est un paquet d'onde gaussien de fréquence 315 Hz excité longitudinalement. La profondeur du canal est de 20 cm. La partie coloré en gris correspond au mode analysé. (B) La représentation paramétrique de la composante verticale en fonction de la composante horizontale de ce mode sagittal montre clairement une polarisation elliptique.

### 4.3 Des ondes qui se propagent

Afin de déterminer si les ondes de surface se propagent de manière cohérente et à vitesse constante, il faut déterminer le retard de phase de l'onde en fonction de l'espace. Nous avons effectué ces mesures en disposant les capteurs comme présentés sur la 3.6(B) pour les ondes sagittales et comme sur la figure 3.6(C) pour les ondes transverses. Les accéléromètres ont été placés juste sous la surface du milieu granulaire. Pour explorer spatialement le canal, j'ai déplacé les accéléromètres  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_{xyz}$ , de l'embouchure du canal vers la source. En effet, il est préférable de ne pas altérer la préparation en amont de la mesure. Lors de l'analyse des mesure j'ai reporté le décalage temporel du maximum du paquet d'onde et d'un évènement de phase en fonction l'espace.

La figure 3.9 montre la propagation d'un paquet d'onde gaussien sagittal de fréquence 315 Hz sur un distance de 1, 10 m. On peut observer que le paquet d'onde reste raisonnablement cohérent. Les positions spatio-temporelles du centre du paquet d'onde et d'un évènement de phase suivent une trajectoire linéaire presque parfaite. Les pentes donnent la vitesse de groupe ( $v_g = 31.2 \pm 0.3 m.s^{-1}$ ) et la vitesse de phase ( $v_\phi = 72.9 \pm 0.3 m.s^{-1}$ ). Cette mesure de très grande précision a permis d'établir un diagramme spatio-temporel complet à la fréquence de 315 Hz qui a servi de référence pour le dépliement de phase dans toutes les mesures de propagation nécessaires à la détermination de la relation de dispersion. Une mesure identique a été effectuée pour les ondes transverses et donne un résultat analogue.

### 4.4 Mesure des relations de dispersion

Comme nous l'avons détaillé plus haut, pour pouvoir déterminer la relation de dispersion des ondes de surface, il faut déterminer leurs deux vitesses de propagation

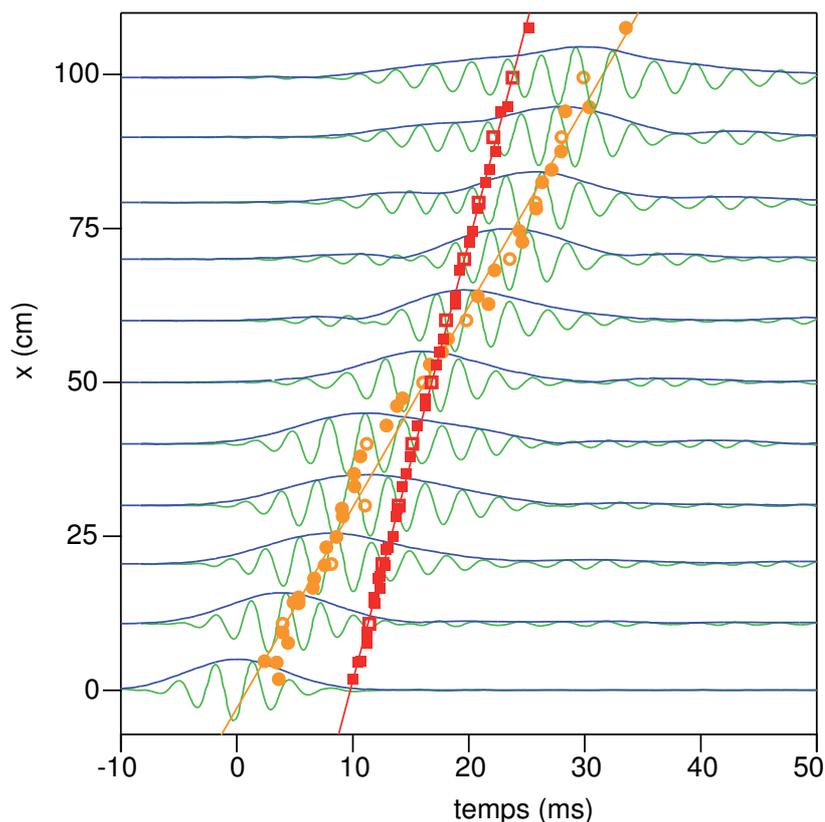


FIGURE 3.9 – Propagation d’un paquet d’onde gaussien sagittal de fréquence 315 Hz. (●) temps de vol, (■) évènement de phase (passage descendant par zero). Les signaux sont représentés avec une même échelle d’amplitude.

en fonction de la fréquence. Ces mesures ont été menées pour les ondes sagittales et pour les ondes transverses. Les capteurs sont disposés respectivement comme indiqués sur les figures 3.6B/ et 3.6C/.

Le dépliement de phase a été effectué de proche en proche, pour chaque fréquence à partir du diagramme spatio-temporel présenté dans le paragraphe précédent. Pour ce faire, les mesures ont été faites par intervalle de 2 Hz, de 300 à 750 Hz pour les ondes sagittales et par intervalle de 3 Hz, de 300 à 550 Hz pour les ondes transverses. Les relations de dispersions peuvent être tirées de deux mesures indépendantes : par la mesure de la vitesse de phase ( $v_\phi$ ) en traçant  $\omega$  en fonction de  $k = \frac{\omega}{v_\phi}$  et par intégration de la mesure de l’inverse de la vitesse de groupe ( $v_g$ ) en traçant  $\omega$  fonction de  $k = \int \frac{d\omega}{v_g}$ . Ces deux mesures donnent des résultats cohérents de sorte que nous les avons combinés pour tirer une unique relation de dispersion qui redonne, au sens des moindres carrés, les valeurs les plus proches possibles des mesures de  $v_\phi$  et  $v_g$ .

Le graphique 3.10(a), représente la vitesse de groupe et la vitesse de phase en fonction de la fréquence pour les ondes sagittale et transverse. Du fait que  $v_\phi$  et  $v_g$  ont des valeurs différentes, on peut conclure que le milieu est dispersif. La relation de dispersion déterminée à partir de ces mesures est présentée sur la figure 3.10(b). Ici la fréquence est représentée en fonction de l’inverse de la longueur d’onde adimensionnée par la profondeur du guide d’onde.

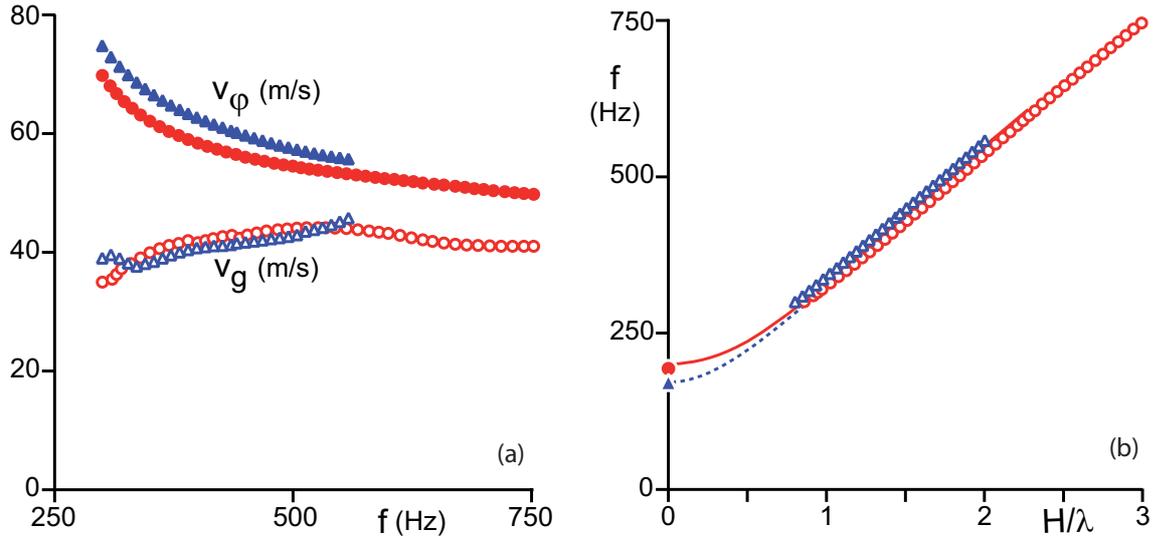


FIGURE 3.10 – (a) Vitesse de groupe et vitesse de phase en fonction de la fréquence. (b) Relation de dispersion. Onde sagittale : mesure ( $\bullet$ ), prédiction théorique ( $—$ ). Onde transverse : mesure ( $\triangle$ ), prédiction théorique ( $- -$ ). Pour rappel, le canal a une section carrée de 20 cm de côté.

Le domaine de mesure est limité par la qualité du signal observé : nous nous sommes limité à la plage de fréquences pour laquelle le signal est mono-mode sans ambiguïté. Au delà de 750 Hz pour les ondes sagittales et de 550 Hz pour les ondes transverses, cette condition n'est plus remplie. En dessous de 300 Hz, une forte distorsion due à la dispersion du milieu affecte le signal en réception. Il n'y a plus propagation d'onde en-dessous de  $180 \pm 20$  Hz. En émettant des ondes sagittales à 192 Hz, on observe en tout point du canal un pic de résonance aigu, de facteur de qualité 70. Nous avons vérifié que cela ne correspond pas à une résonance mécanique du bâti. Nous l'avons donc associée à la fréquence de coupure du guide d'onde.

Nous pouvons constater que les prédictions théoriques et les mesures s'accordent avec une très bonne précision, environ 5% sur la relation de dispersion. Fait remarquable, la relation de dispersion pour le mode sagittal et celle pour le mode transverse sont quasiment confondues. Nous reviendrons sur cette observation en conclusion.

#### 4.5 Est-ce que la vitesse suit la loi d'échelle correspondant à la loi de Hertz ?

D'un point de vue mathématique, si une relation de dispersion s'écrit comme  $\omega = k^\alpha$ , l'exposant  $\alpha$  est directement donné par le rapport  $\frac{v_g}{v_\phi} = \alpha$ . Cette propriété fondamentale se révèle très pratique pour déterminer expérimentalement la loi d'échelle suivie par la vitesse. Rappelons que le modèle d'élasticité basé sur le contact de Hertz donne un exposant et donc un rapport de vitesses égal à  $\frac{5}{6} \approx 0,83$ .

La figure 3.11 représente  $v_g/v_\phi$  en fonction du vecteur d'onde adimensionné  $H/\lambda$ . Commentons tout d'abord les courbes prédites par la théorie ( $—$ ) et ( $- -$ ). Le canal joue le rôle d'un guide d'onde. Une onde ne peut se propager que si sa fréquence est

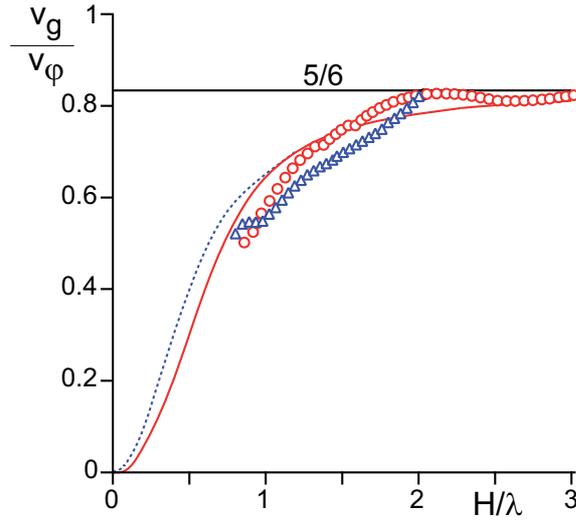


FIGURE 3.11 –  $\alpha = v_g/v_\phi$  en fonction du vecteur d’onde adimensionné. Onde sagittale : mesure ( $\bullet$ ), prédiction théorique (—). Onde transverse : mesure ( $\triangle$ ), prédiction théorique (—).

supérieure à la fréquence de coupure, qui est la première résonance du système. À cette fréquence  $v_g = 0$  et  $v_\phi \rightarrow \infty$  de sorte que le rapport  $\frac{v_g}{v_\phi} \rightarrow 0$ . Lorsque le nombre d’onde  $k$  – ou mieux, sa version adimensionnée  $H/\lambda$  – augmente, on se rapproche de la valeur asymptotique  $\alpha = 5/6$  prédite à partir de la relation de dispersion en profondeur infinie, c’est à dire quand la longueur d’onde  $\lambda$  devient suffisamment petite vis à vis de la taille du guide d’onde.

Nous avons vu dans le premier chapitre, que la théorie de Jamming prédit que l’exposant de la relation de dispersion est anormal ( $2/3$ ) quand la pression de confinement tend vers zéro. La valeur que nous avons mesurée est  $\frac{v_g}{v_\phi} = 0,82 \pm 0.04$ . Elle est très proche de la valeur théorique attendue  $0,83$ , dans le cas où le module de cisaillement adimensionné  $\mathcal{A}$  ne présente pas de comportement singulier sous pression évanescence. Cette observation est conforme avec le modèle d’élasticité macroscopique qui prend en compte la force de contact de Hertz. On n’observe donc pas dans cette expérience le comportement critique prédit par la théorie de Jamming du moins, dans le domaine de fréquence étudié, pour lequel la longueur d’onde est supérieure à 250 tailles de grains.

## 4.6 Mesure des modules d’élasticité

Nous avons mesuré deux relations de dispersion indépendantes, l’une pour le mode transverse fondamental et la seconde pour le mode sagittal. Dans le cadre théorique que nous avons choisi, chacune de ces deux relations est une fonction des deux coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  qui décrivent respectivement la réponse sous cisaillement et sous compression du milieu granulaire. Nous avons vu dans le chapitre précédent que lorsque  $\mathcal{A} < \mathcal{B}/5$ , la relation de dispersion transverse et la relation de dispersion sagittale sont presque égales. Par conséquent, nous nous trouvons dans le cas d’une dégénérescence et il n’est pas possible de déterminer  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de manière indépendante. D’un point de vue physique, cela signifie que le rappel élastique s’opposant à

la perturbation acoustique s'effectue par le cisaillement. C'est ce que nous observons expérimentalement. Dans la limite où  $\lambda \ll H$ , nous avons montré que la relation de dispersion prend la forme :

$$f = \Gamma \lambda_{\infty}^{-5/6} \quad \text{avec} \quad \Gamma = 0,77 \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6} \left( \frac{E}{\rho} \right)^{1/3} g^{1/6}. \quad (3.4)$$

Pour cette préparation de billes de verre, dont le coefficient de Lamé est  $\mu_g = 70$  GPa et le rapport de Poisson est  $\nu_g = 0,2$ , nous avons déterminé par un ajustement de la relation de dispersion que la constante élastique de l'empilement granulaire est  $\Gamma = 77 \pm 1 \text{ m}^{5/6} \cdot \text{s}^{-1}$ . Nous en déduisons une relation expérimentale entre les coefficients  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  :  $\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6} \sim 0,23$ . Nous pouvons la comparer aux valeurs prédites par le modèle de champ moyen [79]. Ces valeurs sont  $\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6} \simeq 0,44$  pour un empilement de grains sans friction et  $\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6} \simeq 0,61$  dans le cas où la friction est infinie. En considérant que cette anomalie provient du fait que le module de cisaillement est surestimé par les modèles de champ moyen, comme l'indiquent les simulations numériques de Makse [66], il est logique de considérer que le coefficient décrivant la rigidité en cisaillement de la préparation granulaire  $\mathcal{A}$  est anormal. Cela signifierait alors que la valeur expérimentale de ce coefficient est 3,7 à 7,1 fois plus faible que celle prédite par le modèle de champ moyen.

## 4.7 Conséquences

Nous avons montré théoriquement qu'un matériau granulaire soumis à la gravité se comporte comme un guide d'onde à gradient d'indice qui localise les ondes en surface. Il existe deux types d'ondes, sagittales et transverses, qui se décomposent sur une série discrète de modes de propagation. C'est la source d'une difficulté expérimentale car il est difficile d'interpréter un signal multi-modes. Nous avons utilisé les propriétés d'un guide d'onde géométrique en construisant un canal granulaire pour sélectionner le mode de propagation fondamental. Ce dispositif expérimental nous a permis de vérifier – tant en émettant des ondes sagittales que transverse – que ces modes sont localisés en surface. Nous avons tracé leurs relations de dispersion, qui nous ont permis de déterminer le module élastique du matériau sous cisaillement. Cette expérience valide donc la possibilité de déterminer les propriétés élastiques d'un matériau granulaire sous faible pression en utilisant des ondes de surface.

L'enjeu de cette expérience est double : elle permet d'évaluer quantitativement l'écart des modules élastiques prédits par la théorie de champ moyen à leurs valeurs réelles et de conclure sur l'existence d'une situation isostatique dans la limite des faibles pressions de confinement. Le rapport de la vitesse de groupe sur la vitesse de phase permet d'identifier l'exposant de la loi d'échelle entre les coefficients d'élasticité et la pression de confinement. Nous avons obtenu expérimentalement un rapport  $v_g/v_\phi \sim 5/6$ , ce qui est compatible avec la loi d'échelle de la relation de dispersion prédite par le modèle de champ moyen. Pour les plus faibles longueurs d'ondes que nous avons utilisées ( $\lambda \sim 250$  tailles de grains), ceci contredit l'hypothèse d'une situation isostatique au voisinage de la surface libre pour laquelle on attendrait que ce rapport soit égal à  $v_g/v_\phi \sim 2/3$ . Ceci peut s'expliquer par le fait que les grains de l'empilement réel sont frottants alors que la plupart des simulations traitant de la transition d'encombrement ont été réalisées pour des grains sphériques sans frottement. Cependant, nous observons que le module de cisaillement adimensionné  $\mathcal{A}$ ,

déterminé à partir du modèle de champ moyen, est anormalement élevée, entre 3 et 7 fois la valeur déduite de l'expérience.

Il faut toutefois signaler que nos résultats sont en contradiction avec des travaux contemporains indépendants des nôtres, effectués par Jacob *et al.* [80]. Leur protocole expérimental est légèrement différent du nôtre, en particulier les mesures sont effectuées en surface au moyen d'un vibromètre laser. Jacob *et al.* déduisent de leurs mesures que la dépendance en pression  $P$  du module de cisaillement est  $\mu \propto P^{2/3}$  et que celle du module de compression est  $K \propto P^{0,61}$ . Si le comportement du module de cisaillement semble compatible avec la prédiction de la théorie de Jamming, il n'en est rien pour le module de compression dont la loi d'échelle théorique est  $K \propto P^{1/3}$ .



# Conclusion sur les ondes de surface

En conclusion, nous avons étudié théoriquement et expérimentalement les caractéristiques des ondes se propageant au voisinage de la surface libre d'un matériau granulaire soumis à la gravité.

Par un calcul de type milieu continu basé sur un modèle élastique prenant en compte de la nature non-linéaire du contact de Hertz, nous avons montré l'existence d'ondes de surface correspondant à deux familles propagatives, de type sagittal et transverse. Une propriété remarquable est que ces ondes transverses et sagittales, peuvent apparaître sous la forme d'une série infinie mais discrète de modes de propagation. Nous avons calculé la forme de chacun de ces modes et nous montrons qu'ils sont localisés en surface et ne pénètrent que sur un nombre entier de longueur d'ondes. Nous interprétons ce système comme un guide d'onde à gradient d'indice.

De plus, nous avons déterminé la relation de dispersion pour chaque mode de propagation. Les modes successifs se propagent à des vitesses peu différentes, ce qui du point de vue expérimental rend leur séparation difficile. En pratique, une excitation à large bande (par exemple, un impact bref), peut exciter simultanément un très grand nombre de modes. C'est ce qui rendait difficile l'interprétation des expériences de Hostler *et al.* [43] et Vriend *et al.* [81] qui de notre point de vue ont analysé des propagations fortement multimodales et n'ont pu déterminer qu'une vitesse de groupe effective, en la confondant avec une vitesse intrinsèque de propagation des ondes de surface. Cette émission multimode pouvant aussi expliquer la large répartition des points de la relation de dispersion obtenu par mesures acoustiques sur une dune par Andreotti [59]; bien que dans ce cas, l'excitation était sinusoïdale et de relativement longue durée. Nous verrons dans l'annexe comment ces données expérimentales peuvent être réinterprétées dans le cadre d'une propagation multimodale.

En parallèle à nos travaux, nous avons eu connaissance d'un travail très similaire par le groupe de l'université du Maine. Dans une contribution théorique proposée quasi simultanément à la notre [40], ce groupe développe une approche des ondes de surface, basée sur des comportements d'échelle effectifs des coefficients constitutifs avec la profondeur et un couplage de modes qui produit des solutions qualitativement cohérentes avec les nôtres : ils prédisent des familles de modes sagittaux et transverses localisés en surface. De manière complémentaire, ils donnent un argument d'acoustique géométrique pour expliquer la localisation : compte tenu de la valeur de l'exposant de la vitesse avec la profondeur, un rayon acoustique est réfracté ou non par le gradient d'indice sur une distance finie. En revanche, notre approche fondée sur un potentiel élastique clairement défini, est telle que les coefficients phénoménologiques peuvent-être directement identifiés aux propriétés élastiques effectives du matériau.

Nous avons étendu notre calcul au cas où il s'agit de la propagation d'ondes dans

une nappe de profondeur finie. Nous avons montré qu'au guide d'onde à gradient d'indice se superpose un guide d'onde géométrique qui est caractérisé par une série de fréquences de coupures pour chacun des modes. Ce résultat théorique nous a conduit à choisir une situation expérimentale précise permettant d'isoler sans ambiguïté un mode de propagation unique.

Ainsi, nous avons propagé à la plus basse fréquence possible, un paquet d'onde gaussien dans un canal de section carrée. Nous avons identifié la présence des modes fondamentaux correspondant aux deux familles sagittales et transverses localisés en surface. En augmentant la fréquence et par continuité, nous sommes parvenus à déterminer pour ces deux modes la relation de dispersion par une mesure directe des vitesses de groupe et de phase. La détermination du rapport entre ces deux vitesses nous a permis d'accéder directement à l'exposant de la non-linéarité des modules élastiques qui est compatible avec l'exposant issu de la loi de Hertz ( $\omega \propto k^{5/6}$ ). Ce résultat est valide jusqu'à une pression de confinement correspondant à un poids de 250 tailles de grains ( $P \simeq 500$  Pa). Les relations de dispersions pour les modes sagittaux et transverses sont quasiment les mêmes. Dans le cadre du modèle élastique que nous avons traité, cela implique que le module de cisaillement est beaucoup plus faible que le module de compression. La comparaison avec les calculs de champ moyen faits dans les deux cas extrêmes de contact sans frottement et de contact avec frottement infini, indique que le module de cisaillement effectif est de 3 à 5 fois plus faible que celui prédit par ces théories. C'est un résultat en accord qualitatif avec les simulations numériques d'empilement de sphères frottantes [5], [6], [77]. Nos résultats contredisent l'existence supposée d'une situation isostatique au voisinage de la surface libre.

Par contre, nos résultats semblent être en contradiction avec des expériences faites par le groupe de l'université du Maine [80], qui en se basant sur l'approche théorique précédemment décrite, interprètent leurs résultats expérimentaux par des comportements en loi d'échelle des modules élastiques différents du comportement de Hertz. Le comportement du module de cisaillement proche de  $G \propto P^{2/3}$  semble être en accord avec la prédiction de la théorie de Jamming pour des sphères non-frottantes [66], [65], en revanche, le comportement du module de compression  $B \propto P^{0.61}$  est un résultat pour le moins intrigant qui reste pour l'instant sans substance théorique.

Notons pour finir que la conclusion de Liu *et al.* [42] [41] sur l'impossibilité de propager des ondes au voisinage de la surface libre d'un matériau granulaire sous gravité provient surtout dans leur cas, de l'utilisation de capteurs de taille sensiblement égale à la celle des grains. Ce choix ne permet pas de distinguer le signal cohérent du bruit (speckle) intrinsèque à la nature désordonnée du squelette élastique à petite échelle. Cela signifie aussi qu'il sera extrêmement difficile de réaliser des mesures dans la limite des faibles longueur d'ondes, où le bruit provenant des hétérogénéités d'empilement commence à perturber la propagation acoustique effective. Notons que le groupe du Mans travaille à des longueurs d'onde sensiblement plus faibles, il est possible que leur résultats soient sensibles à ce type d'hétérogénéités.

# Chapitre 4

## Amplification par la friction d'ondes guidées .

### 1 Introduction

Nous avons vu dans les chapitres précédents que, du fait de la géométrie du contact entre particules [24], une assemblée granulaire est bien plus compressible que le matériau dont sont faits les grains. De plus, la rigidité des contacts et donc de la vitesse du son  $c$  augmentent avec la pression appliquée  $P$  [32, 34, 82]. Par ailleurs, en appliquant une force extérieure suffisante à ce matériau, on peut le mettre en écoulement.

Loin au dessus de la transition de blocage, la rhéologie des écoulements granulaires denses est bien décrite par une relation locale entre contraintes et déformations [13, 83]. Cette loi de comportement ressemble à celle d'un fluide visqueux dans la mesure où la contrainte dépend du taux de déformation  $\dot{\gamma}$ . Cependant, la viscosité augmente fortement avec la pression  $P$  et diverge à contrainte de cisaillement nulle, deux propriétés qui rappellent la friction solide. La friction effective, définie comme le rapport entre contrainte de cisaillement  $\sigma_{xz}$  et pression  $P$  se met sous la forme :

$$\frac{\sigma_{xz}}{P} = \mu \left( \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P/\rho}} \right) \quad (4.1)$$

où  $\dot{\gamma}$  est le gradient de vitesse dans l'écoulement cisailé et  $d$  le diamètre des grains.

En régime quasi-statique, les systèmes granulaires tendent à former des bandes de cisaillement dont la largeur est gouvernée par la taille des grains [13] et à l'intérieur desquelles la rhéologie devient fortement non-locale. Autrement dit, les transferts de quantité de mouvement se font au travers du squelette granulaire sur des distances plus grandes que la taille du grain. Les expériences sous vibration [84] montrent que le coefficient de friction effectif dans une bande de cisaillement au voisinage d'une paroi est une fonction de la différence de vitesse  $U$  de part et d'autre de celle-ci mais ne dépend pas de la pression appliquée :

$$\frac{\sigma_{xz}}{P} = \mu \left( \frac{U}{\sqrt{gd}} \right) \quad (4.2)$$

Dans un écoulement de ce type, il peut y avoir coexistence entre déformations plastiques en cisaillement et déformations du squelette élastique. Rien n'interdit par

exemple la propagation d'ondes de pression au travers d'un écoulement. Dans la mesure où les lois de comportement de ces deux modes de déformation (élastique et plastique) dépendent de la pression, on peut se demander dans quelles mesures ils peuvent interagir.

L'idée de l'expérience que nous allons décrire est fondée sur les travaux présentés dans trois articles théoriques récents. Furukawa et Tanaka [85] ont montré que le couplage *via* la viscosité, entre écoulement et fluctuations de densité, dans un liquide simple, conduit à une instabilité mécanique au dessus d'un seuil en taux de déformation. Cette instabilité n'a encore pas été mise en évidence expérimentalement. On peut se demander si, dans un milieu granulaire qui exacerbe la dépendance en pression de la viscosité, cette instabilité est plus facile à observer. Une seconde source d'inspiration vient des articles de Nosonovsky et Adams [86], [87] et de Caroli et Velicky [88] sur les conditions de réflexion et de transmission d'une onde élastique à l'interface entre deux solides glissant l'un contre l'autre avec un frottement coulombien. Le système étant ouvert, l'énergie de l'onde élastique n'est pas conservée. Le travail des forces qui maintiennent le mouvement relatif des deux solides est répartie entre dissipation par frottement et énergie acoustique cohérente. En d'autres termes, une interface frottante peut amplifier une telle onde, du fait la dépendance en pression de sa loi de comportement. À nouveau, cet effet n'a encore jamais été mis en évidence expérimentalement.

L'expérience que nous avons conçue consiste à créer un résonateur dont les réflecteurs soient constituées de bandes de cisaillement susceptibles d'amplifier les ondes acoustiques. Ainsi nous nous attendons à ce que, du fait des réflexions multiples, ce système conduise à une émission d'onde spontanée analogue à celle d'un laser. La géométrie choisie est celle d'un écoulement granulaire dans un tube lisse sous l'effet de la gravité. En effet dans cette géométrie confinée, le cœur de l'écoulement présente un profil de vitesse bouchon séparé des parois par des bandes de cisaillement. Dans la géométrie considérée, la bande de cisaillement est un cylindre correspondant à l'interface séparant le milieu granulaire et la paroi du tube. Conceptuellement, nous disposons d'un guide d'onde dont les parois sont susceptibles d'amplifier les ondes de pression.

L'émission spontanée d'un son grave au cours de la décharge d'un silo, dont les parois sont lisses, rempli de sable a été rapportée à plusieurs reprises [89–91], mais ce phénomène demeure inexpliqué. Comme la fréquence de vibration  $f$  ne dépend ni du diamètre ni de la longueur du silo, cela exclut l'hypothèse de modes résonants qui seraient excités par l'écoulement à l'intérieur de la colonne de matériau granulaire, dans l'air au dessus [89], ou dans les parois du silo [91]. De même, comme  $f$  n'est pas proportionnelle à la vitesse des grains, la vibration n'est pas due à un phénomène de collé-glissé (*stick-slip*) associé à l'hystérésis de la friction entre les grains et le silo [89,90]. Ce phénomène n'est pas non plus lié à la formation d'arches dynamiques autour de l'orifice de vidange, qui serait caractérisée par un spectre large bande [92]. On peut également exclure l'interaction entre l'air et les grains [93] importante seulement pour les poudres dans des tubes étroits et dont l'écoulement présente des oscillations de fréquence beaucoup plus basses, typiquement de fréquence inférieure à 1 Hz.

Dans ce chapitre et le suivant, nous jettons un nouveau regard expérimental et théorique sur l'émission spontanée lors de la vidange d'un silo. Nous montrerons

comment les deux modes de déformation évoqués ci-dessus, interagissent par l'intermédiaire de la pression, même à bas nombre de Mach, et comment l'énergie est pompée de l'écoulement moyen vers les vibrations acoustiques cohérentes, par la friction.

## 2 Principe de l'expérience

Le principe de l'expérience de l'orgue à sable est extrêmement simple. Un tube est placé verticalement et rempli de sable. Lorsqu'on débouche l'orifice à l'extrémité inférieure du tube, le sable s'écoule sous l'effet de la gravité. Il résulte de cet écoulement la production spontanée d'un son puissant. À première écoute, ce son devient de plus en plus grave au fur et à mesure que le tuyau se vide. C'est ce que montre le sonogramme présenté sur la figure 4.1(A-1), a été réalisé à partir de l'enregistrement d'un microphone installé à l'extrémité supérieure du tube. On observe la présence d'une fréquence fondamentale qui décroît rapidement avec le temps, ainsi que ses premières harmoniques impaires. Ce sonogramme montre aussi la présence d'un signal dont la fréquence ( $\approx 70$  Hz) reste constante tout au long de la vidange du tube. De plus, on observe qu'en dessous d'une certaine hauteur de sable restant dans le tube l'émission sonore devient inaudible.

En enregistrant le signal d'un accéléromètre placé au sein de la colonne de sable, au voisinage de la surface, on observe que seul subsiste un signal de fréquence 70 Hz et ses premières harmoniques (figure 4.1(A-2)). Cela nous montre que le son entendu par l'expérimentateur, qui est aussi celui enregistré par le microphone (et dont la fréquence varie comme l'inverse de la hauteur de la colonne de sable), provient de la résonance de l'air contenu dans le tuyau, au dessus du sable, excitée par le mouvement de celui-ci. La première harmonique de la fréquence de résonance correspond à une hauteur de tube vide égale à un quart de longueur d'onde, la seconde à trois quarts de longueur d'onde, *etc.* Comme la surface du sable descend à vitesse constante, la fréquence diminue au fur et à mesure de la vidange du tube comme  $1/t$ . Cependant, la source de cette vibration se trouve être la surface du sable en mouvement. C'est lui qui la transmet à l'air comme le ferait la membrane d'un haut-parleur. La fréquence de ces vibrations  $f \sim 75$  Hz, situées à l'intérieur de l'écoulement granulaire, semble ne pas dépendre de la quantité de sable dans le tube. De cette observation, nous déduisons que l'origine des vibrations ne provient pas d'une résonance de la colonne granulaire en écoulement. La vibration de la surface libre présente toute une série d'harmoniques. Dans l'air, elles sont filtrées par le résonateur constitué par la partie du tube vide de sable.

Nous pouvons refaire la même expérience, mais cette fois-ci, l'expérimentateur, installé en équilibre sur un escabeau, déroule le câble de l'accéléromètre d'une main et de l'autre, verse le plus régulièrement possible le sable nécessaire à maintenir le tube rempli. Au cours du temps, le capteur parcourt avec le sable toute la hauteur du tube jusqu'à l'orifice de vidange. Cette fois, l'étude du sonogramme (figure 4.1(B)) nous révèle que la fréquence du son est bien constante quelle que soit la position du capteur dans le tube. La légère variation de fréquence observée sur la figure 4.1(A-1) est donc due à un couplage avec les résonances de la colonne d'air. Dans le sable, une unique fréquence est générée.

Le diagramme spatio-temporel présenté sur la figure 4.2(b) montre le déplace-

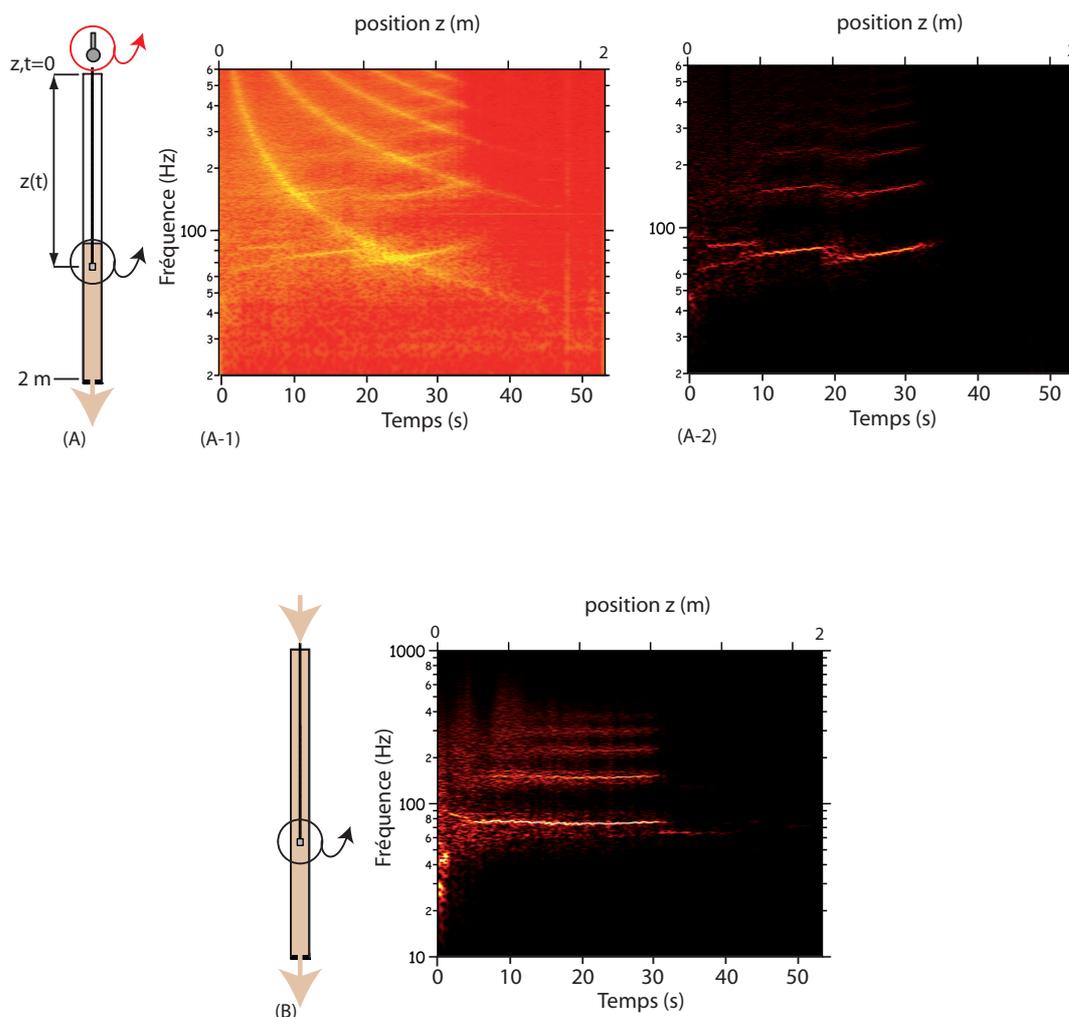


FIGURE 4.1 – Expériences réalisées en utilisant un tube de 54 mm de diamètre avec une constriction de 19.75 mm. (A-1) Sonogramme du signal enregistré par un microphone. (A-2) Sonogramme du signal enregistré par un accéléromètre au cours de la vidange. Les deux signaux sont enregistrés simultanément. À l’instant initial, l’accéléromètre est situé à l’extrémité supérieure du tube. Il est entraîné par l’écoulement et atteint l’orifice de sortie à  $t \sim 55$  s. (B) Sonogramme du signal enregistré par un accéléromètre en maintenant le tube rempli. La longueur du tube est de 2 m.

ment des grains au voisinage de la paroi. Il a été obtenu en enregistrant un film en utilisant une camera rapide "Phantom v9", la mise au point étant faite sur les grains immédiatement au contact du tube. Pour améliorer la qualité de l’image nous avons utilisé un tube de verre. La cadence d’enregistrement de la caméra rapide "Phantom v9" donne la base de temps,  $5 \cdot 10^{-4}$  s entre chaque ligne en ordonnée. L’échelle de distance est réalisée en plaçant un régle dans le champ de la caméra. Chaque strie du diagramme spatio-temporel correspond à la trajectoire d’un grain. La pente d’une strie détermine la vitesse instantanée d’un grain. Pour la vitesse moyenne des grains en paroi, nous mesurons 11 mm/s qui correspond exactement à ce que l’on mesure indépendamment au cœur à partir de la mesure du débit de l’écoulement (figure 4.2(a)). Cela montre que le gradient de vitesse radial est très

faible. C'est la preuve qu'il existe une bande de cisaillement au voisinage de la paroi du tube de quelques tailles de grains au maximum. Le diagramme spatio-temporel semble même indiquer un écoulement bouchon parfait avec un glissement en paroi avec frottement. On note que la vitesse des grains est modulée par le phénomène oscillatoire que nous voulons caractériser.

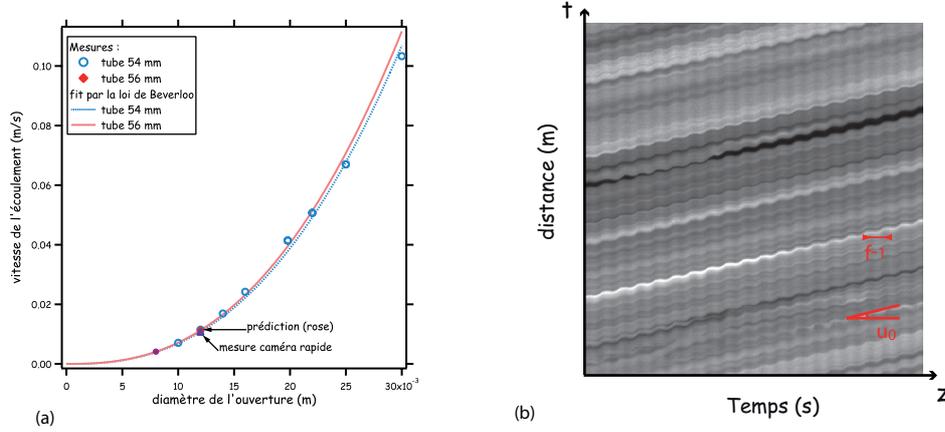


FIGURE 4.2 – (a) L'écoulement en parois et l'écoulement en volume ont sensiblement la même vitesse ce qui implique que la bande de cisaillement est localisée sur un très faible nombre de grains proches de la parois. (b) Diagramme spatio-temporel réalisé dans un tube de rayon  $R = 27$  mm en analysant les images d'un film enregistré par la caméra rapide pour mesurer la vitesse de l'écoulement en parois. La vitesse moyenne des grains est égale à la vitesse moyenne de l'écoulement  $u_0$  à 20% près.

## 3 Dispositif expérimental

### 3.1 Montage expérimental

Nous avons utilisé un ensemble de tubes de PMMA (Altuglas) de 2 m de long et dont les diamètres intérieurs  $2R$  sont de 16, 24, 32, 44, 54, 64, 82 et 91 mm. Le sable contenu dans le tube est soumis à la gravité et à la force de frottement contre la paroi. Le rayon permet donc, par effet Janssen, de contrôler la pression de confinement du matériau granulaire :

$$P = \frac{\rho g R}{2\mu} \quad (4.3)$$

où  $\mu$  est le coefficient de friction effectif entre le milieu granulaire et le PMMA et  $g$  l'accélération de la gravité. Le tube est arrimé verticalement par de nombreux points d'attache le long d'une barre de profilé de Duralumin solidaire d'un mur. Cette précaution est destinée à limiter le couplage avec de possibles modes de résonances des différents éléments du dispositif expérimental.

La vitesse de l'écoulement est contrôlée par des couronnes placées à l'extrémité inférieure du tube, dont l'ouverture de sortie est calibrée. L'écoulement se déverse dans un bac situé sous l'ensemble. La sortie du tube est composée de deux pièces,

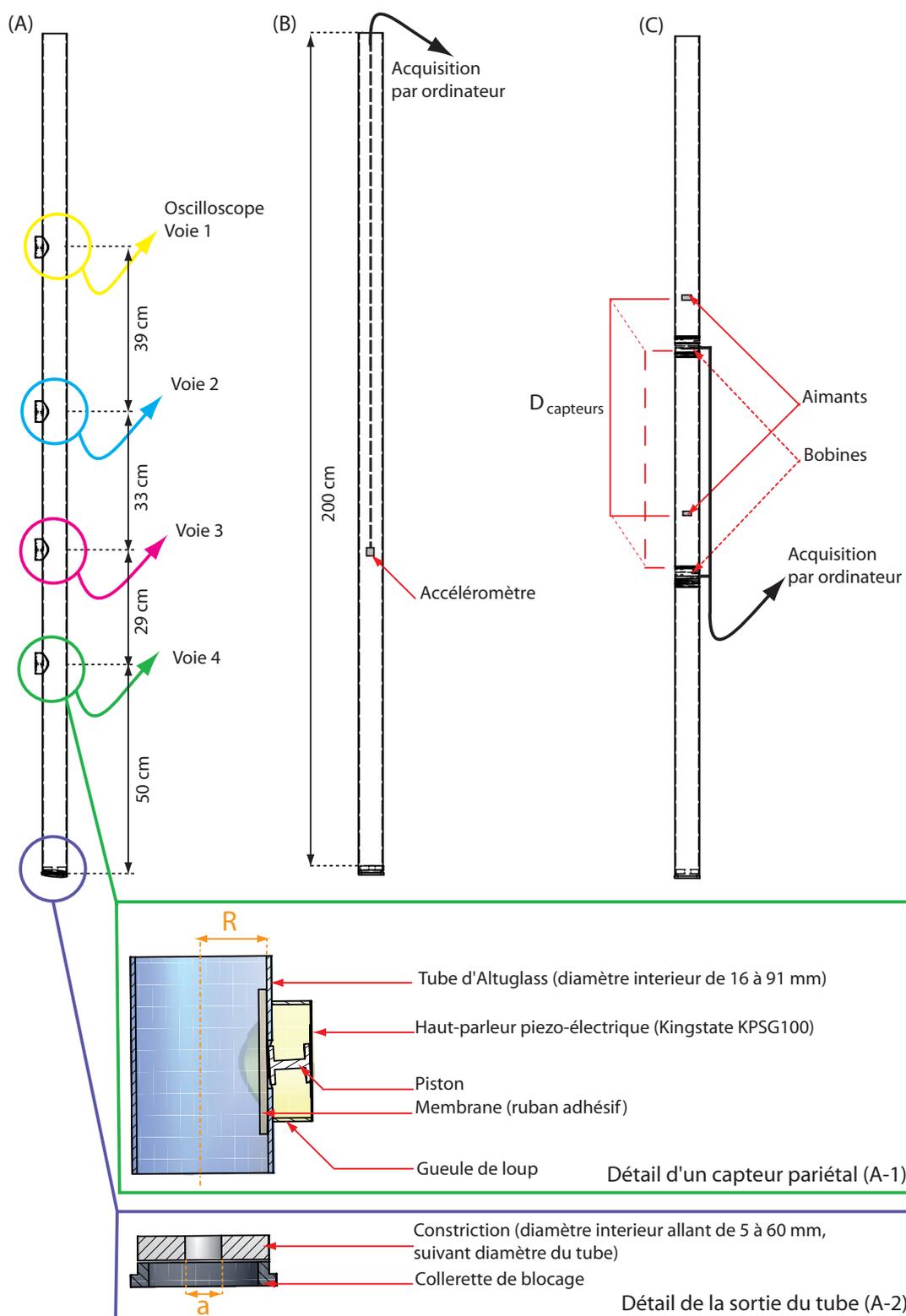


FIGURE 4.3 – Dispositif expérimental de l’orgue à sable. (a) Tube équipé de capteurs pariétaux,(a-1) et (a-2) détails du montage. (b)Mesures au moyen d’un accéléromètre, (c) mesures aux moyen d’aimants.

un disque du diamètre interne du tube, percé au centre<sup>1</sup>, qui repose sur une colle-rette de blocage (voir figure 4.3(A-2)). Une série de constriction, dont le diamètre d'ouverture  $a$  varie de 5 à 45 mm permettent de contrôler la vitesse de l'écoulement en sortie. Nous mesurons la vitesse moyenne en chronométrant le temps de vidange complète du tube. Pour les expériences réalisées en alimentant le tube de manière continue, une méthode alternative a été utilisée, en chronométrant le parcours d'une bille de plastique colorée entre le sommet du tube et sa chute dans le bac de sortie. La vitesse suit la loi de Beverloo [94]  $v_{constriction} \sim \alpha\sqrt{ga}$ , où  $\alpha$  un paramètre phénoménologique sans dimension qui dépend de la friction entre grains. On en déduit le débit de l'écoulement granulaire moyen à l'intérieur du tube :  $q_{tube} = \pi\alpha g^{1/2}a^{5/2}$  (on obtient  $\alpha \simeq 0.57$  par ajustement d'une loi de puissance). La figure 3.1 montre que cette loi d'échelle est vérifiée expérimentalement presque parfaitement.

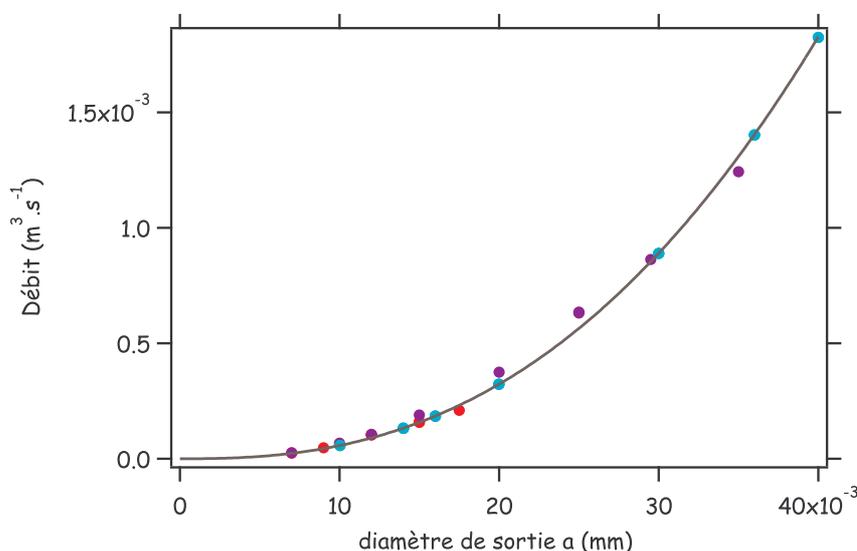


FIGURE 4.4 – Débit de sortie en fonction du diamètre de sortie. Les points représentent les mesures effectuées pour différents tubes de diamètre 32,39,52,54 mm. La courbe grise est la prédiction de la loi de Beverloo  $q_{tube} = \pi\alpha g^{1/2}a^{5/2}$ . La valeur expérimentale de la constante est  $\alpha \simeq 0.57$

Nous avons réalisé des expériences en utilisant différents matériaux granulaires : des billes de verre de 0,150 mm, 0,250 mm et 0,500 mm de diamètre (marque SiLi beads ), du sable chantant de la dune de Sidi Akhfenir (Maroc) et du sable de la dune du Pyla. La distribution de taille des grains de ces deux sables éoliens est représentée sur la figure 3.1. Plus exactement, c'est la densité de probabilité du log du diamètre  $d$ , pondérée en masse, qui est représentée. Les ajustements paraboliques correspondent à une loi log-normale. La taille caractéristique des grains de sable de la dune du Pyla est de 327  $\mu m$  et celle du sable chantant est de 165  $\mu m$ . La plupart des expériences décrites ci-dessous ont été réalisées en utilisant du sable de la dune du Pyla.

1. Je désigne cette pièce par le nom constriction

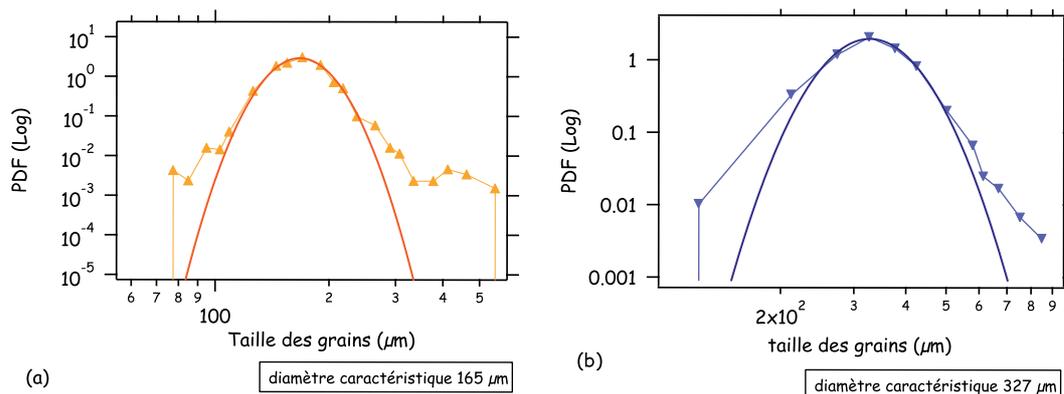


FIGURE 4.5 – Granulométrie : densité de probabilité du log du diamètre des grains, pondéré en masse. (a) Sable chantant de la dune de Sidi Akhnir (Maroc). (b) Sable de la dune du Pyla (Landes)

### 3.2 Méthodes de mesures

Au cours de nombreuses séries d'expériences, nous avons utilisé différentes méthodes de mesures faisant appel à plusieurs types de capteurs (cf figure 4.3).

**Accéléromètre :** Ce dispositif expérimental est représenté sur la figure 4.3(B). Nous avons utilisé des accéléromètres piézo-électriques de marque Brüel&Kjaer de grande sensibilité (500 ou 1000 mV/g). Cette technique permet de mesurer l'amplitude de vibration et la fréquence en fonction de la position du capteur dans le tube. La résolution atteint typiquement le nanomètre à 100 Hz. Comme précédemment, le capteur, de diamètre 11 mm et de hauteur 15 mm, est choisi grand devant la taille des grains  $d$  et petit devant la longueur d'onde établie à partir d'expériences préliminaires :  $\lambda \sim 60$  cm. En début de vidange, l'accéléromètre est enterré juste sous la surface du sable, à l'extrémité supérieure du tube. Le câble du capteur est ensuite déroulé à la vitesse de l'écoulement. Simultanément, il faut veiller à garder le tube plein afin de ne pas perturber l'expérience par le couplage avec la partie vide du tube. Cette technique s'est avérée peu adaptée à la mesure de la vitesse des ondes car il est difficile de bien maîtriser l'écart entre deux de ces capteurs. La mesure accélérométrique a l'inconvénient d'être intrusive. Cependant, elle a l'avantage de permettre des mesures continues en fonction de la position.

**Induction électromagnétique :** Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 4.3(C). On enregistre le courant induit par des aimants lorsqu'ils traversent des bobines. Celles-ci sont construites à même le tube à l'aide de fils de cuivres vernis et distantes de  $D_{\text{capteurs}}$ . La distance de la bobine du dessus à l'extrémité supérieure est choisie au moins égale à  $D_{\text{capteurs}}$ . De plus la bobine inférieure doit être placée suffisamment haut pour que l'amplitude du signal soit mesurable.

Le protocole de mise en place des aimants est le suivant : Les aimants sont préalablement espacés de  $D_{\text{capteurs}}$  en les fixant sur une tige fine au moyen de ruban adhésif. Nous remplissons le tube de sable un peu au-dessus de la bobine supérieure. Nous plaçons l'aimant inférieur. La tige supportant les aimants est disposée dans le tube puis on complète le remplissage du tube. Les aimants sont retenus par le sable, ce qui permet de retirer la tige en la faisant coulisser doucement. La distance est ensuite mesurée indépendamment grâce aux temps de passage des aimants dans la bobine inférieure.

Dans les conditions de l'expérience nous avons pris  $D_{\text{capteurs}} \geq 20$  cm, distance suffisante pour que le signal induit par les deux aimants soit analysable. Nous analysons le signal induit dans chaque bobine par les aimants entraînés par l'écoulement. La vitesse de propagation des ondes est déterminée par le rapport entre la distance entre aimants et le retard temporel entre les signaux.

Le point faible de cette méthode est la complexité de l'étalonnage et de la méthode de traitement. L'intérêt par rapport à l'accéléromètre est de ne pas avoir de fil perturbant l'écoulement et la mesure.

**Mesure de la pression dynamique en paroi 4.3(A) :** Pour déterminer avec précision la vitesse des ondes, un ensemble de tubes équipés de quatre capteurs piézoélectriques de paroi sensibles à la pression ont été construits. Ces capteurs sont disposés de sorte qu'ils permettent de suivre la propagation de l'onde sur une distance de 1m par l'analyse des signaux enregistrés simultanément. Ils sont placés à des distances de 50, 79, 112 et 151 cm de l'extrémité inférieure. Leur espacement est choisi inférieur à la longueur d'onde – nous verrons ci-dessous que  $\lambda$  varie entre 40 et 80 cm – du phénomène pour éviter d'éventuels problèmes de repliement du signal. Il convient de noter que c'est la partie fluctuante de la contrainte radiale que nous mesurons, et non la pression. Cependant, les expériences effectuées par Ovarlez *et al.* [95] montrent que les contraintes normales sont isotropes à 10% près. L'unique inconvénient de ces capteurs sont leur réponse spectrale peu plate ainsi que la fragilité et la délicatesse du montage.

### 3.3 Construction des tubes munis de capteurs pariétaux

Nous présentons ici quelques indications sur la conception des capteurs de pression (pour un schéma détaillé, on peut se référer à la figure 4.3(a-1)).

**Perçage des trous en paroi :** Les tubes de PMMA sont fragiles. Pour ne pas les casser lors du perçage, il faut effectuer ce travail à la fraiseuse en insérant dans le tube un cylindre de matière à proximité du point de perçage.

**Support du capteur<sup>2</sup> :** Il s'agit d'une pièce cylindrique réalisée à partir d'un tube de plastique. L'une des extrémités est usinée sur une fraiseuse à la tête à aléser au rayon extérieur du tube. Nous appliquons ensuite l'extrémité alésée de la gueule de loup, préalablement encollée à la colle cyano-acrylate, sur le tube en la guidant à l'aide d'un centreur (pièce s'emboîtant dans le trou effectué sur le tube et qu'on retire une fois l'assemblage solidarisé). Pour les tubes fins, le tube est découpé en

---

2. Nommé "gueule de loup" sur le schéma

plusieurs morceaux, suivant les cotations données ci-dessus. Ils s'emboîtent dans une pièce monobloc qui joue le rôle de support pour les capteurs.

**Technique de pose de la membrane à l'intérieur du tube :** Le trou est obturé de l'intérieur par une membrane élastique adhésive. Pour placer cette membrane, il faut enduire de savon la face extérieure d'un autre tube, que l'on peut glisser dans celui que nous sommes en train d'équiper, et y plaquer la membrane sur sa face non-collante. On glisse enfin le tube jusqu'au trou à obturer et on le colle en effectuant une habile rotation des deux tubes l'un contre l'autre.

**Assemblage des capteurs :** La membrane communique les vibrations du sable à un transducteur piézo-électrique *via* un piston de PVC. L'ensemble est collé par du ruban adhésif double-face.

## 4 Résultats

### 4.1 Des ondes qui se propagent

Dans des travaux antérieurs, Kesava Rao *et al* [89], [90] supposent que l'origine de l'émission de son par la vidange d'un silo provient du phénomène de "stick-slip". Pour cette raison, leurs recherches ont porté préférentiellement sur la caractérisation des fréquences en fonction des états de surface, en utilisant des tubes de matières différentes et des matériaux granulaires plus ou moins rugueux (billes de verre, sable, verre pilé). Cependant, bien qu'ils aient vérifié que le phénomène ne provient pas d'une résonance du montage expérimental, ils n'en ont pas identifié la nature réelle. Nous avons réalisé une première série d'expériences par la méthode d'induction électromagnétique en utilisant un tube de Plexiglass de 32 mm de diamètre intérieur dont le diamètre de la constriction est de 8 mm. Pour prouver la nature ondulatoire des vibrations émises dans le sable, nous avons fait des mesures pour différentes distances  $D_{\text{capteurs}}$ . Les mesures de phase et de fréquence sont effectuées par analyse des fonctions de corrélation entre signaux.

$$(s_1 \star s_2) = \int d\tau s_1(\tau) s_2(t + \tau) \quad (4.4)$$

Le maximum de la fonction de corrélation donne le décalage temporel pour lequel les signaux  $s_1$  et  $s_2$  sont le plus semblables. La période d'un signal est mesurée en analysant la fonction d'auto-corrélation  $(s_1 \star s_1)$ . Elle est donnée par la position temporelle du premier pic de  $(s_1 \star s_1)$ .

Le temps de propagation de l'onde entre les deux aimants (ceux-ci sont immobiles par rapport à l'écoulement) a été déterminé en effectuant la corrélation croisée des signaux des deux bobines. Les résultats de ces expériences sont présentés sur la figure 4.6. On observe que le mouvement du sable est périodique et se propage vers le haut du tube. La linéarité de la relation entre position spatiale et retard temporel donne la vitesse de propagation de l'onde. Pour cette expérience particulière, on obtient une vitesse de 39 m/s, dont l'ordre de grandeur est compatible avec celles mesurées dans l'expérience précédente. Si ces expériences préliminaires ont permis de mettre en évidence la présence d'ondes se propageant de la constriction vers le sommet

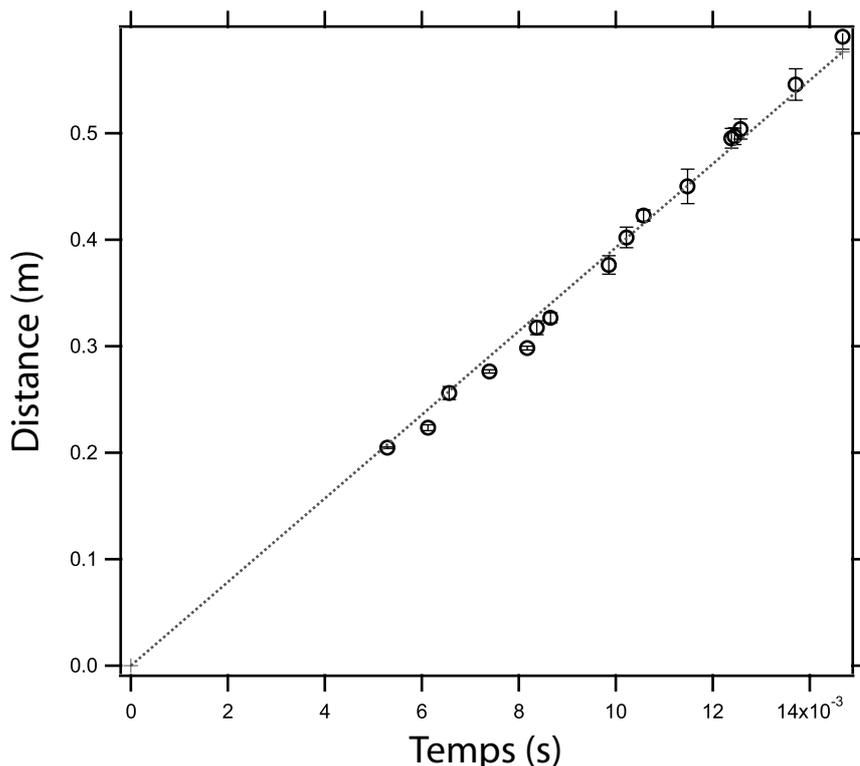


FIGURE 4.6 – Ce diagramme est réalisé en utilisant la méthode d’induction de bobines au moyen d’aimants placés dans l’écoulement, la vitesse de propagation des ondes est de  $39m.s^{-1}$  pour un tube de  $32mm$  de diamètre équipé d’un orifice de sortie de  $8\text{ mm}$ .

du tube, elles soulèvent un certain nombre de questions. Quels sont les mécanismes dynamiques qui contrôlent l’instabilité? Comment la fréquence et la vitesse des ondes se propageant dans le sable varient-elles avec la vitesse de l’écoulement et le diamètre du tube?

## 4.2 Mise en évidence d’une amplification des ondes :

Pour caractériser l’amplitude du signal en fonction de la position, nous avons effectué des mesures lagrangiennes d’accélération. Comme nous l’avons remarqué sur le sonogramme de la figure 4.1, la fréquence de l’onde émise au sein du tube est constante. Nous avons calculé la fonction d’autocorrélation du signal pour en déterminer avec précision la fréquence moyenne. Pour analyser l’évolution de l’amplitude à cette fréquence, nous avons calculé la corrélation du signal avec un paquet d’onde gaussien. L’amplitude est ainsi moyenné sur 40 périodes du signal expérimental.

La figure 4.7 montre cette amplitude en fonction de la position pour un enregistrement typique effectué dans un tube de  $64\text{ mm}$  de diamètre intérieur et de diamètre de constriction de  $20\text{ mm}$ . L’amplitude est représentée en échelle logarithmique. Nous pouvons constater donc que l’amplitude croît de manière exponentielle depuis la sortie, sur un mètre environ puis sature. Cette amplification exponentielle est la signature d’une instabilité convective. La zone près de l’orifice de sortie sert de source de bruit. Une fréquence est progressivement sélectionnée par amplification sélective au fil de la propagation.

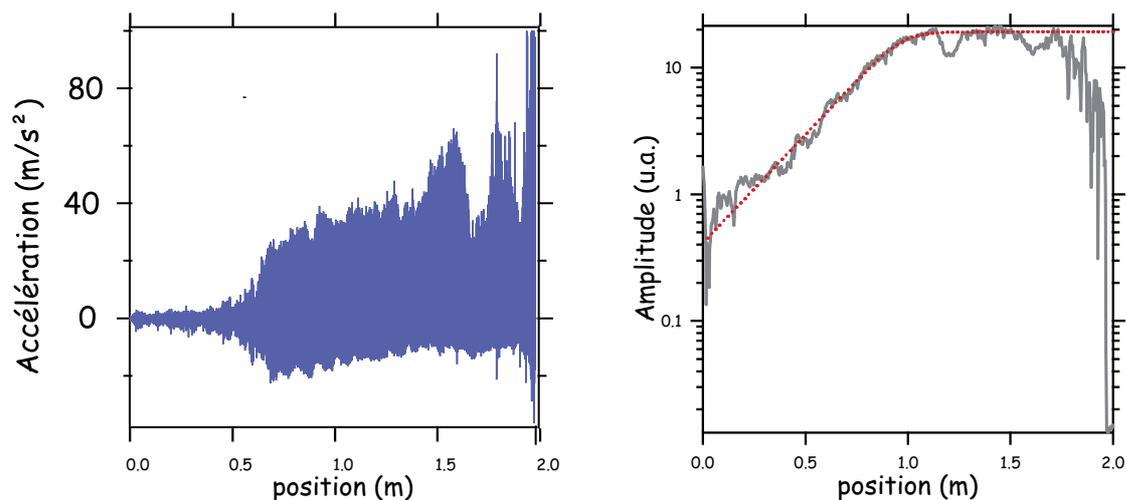


FIGURE 4.7 – Mise en évidence de l’amplification des ondes. Les expériences ont été réalisées en maintenant le tube plein. Figure de gauche : signal enregistré au moyen d’un accéléromètre, l’amplitude est représentée en fonction de la position du capteur au cours de la vidange. Figure de droite : amplitude du signal à la fréquence moyenne, la représentation semi-logarithmique montre la croissance exponentielle de l’accélération de ces ondes avec la position par rapport au trou de vidange du tube. La distance de croissance vaut 25 cm dans ce cas.

Nous avons réalisé des expériences qualitatives pour sonder l’influence de la dissipation sur la croissance de l’amplitude. Nous avons examiné l’effet de l’humidité sur le développement de l’instabilité. Pour cela nous avons humecté le sable, dans ce cas le sable de la dune du Pyla, en vaporisant de l’eau tout en homogénéisant l’échantillon. Nous avons constaté que la distance de développement de l’instabilité est plus grande d’un facteur 2 qu’avec le sable sec dans les mêmes conditions. Or l’effet principal de l’humidité est de créer des ponts capillaires entre les grains, ce qui augmente significativement la dissipation acoustique du système [96]. L’atténuation des ondes tend donc à faire diminuer le taux de croissance spatial de l’instabilité.

### 4.3 Formation d’ondes de choc :

Nous nous intéressons maintenant à la forme des ondes émises spontanément en fonction de la hauteur. Pour ce faire, nous avons opté pour le dispositif expérimental du tube équipé de capteurs de pression pariétaux. L’originalité de ce montage est qu’il permet de mesurer simultanément la pression des ondes en paroi sur quatre capteurs répartis sur une distance de plus d’un mètre.

Nous avons reproduit sur la figure 4.8(a) des signaux acquis à l’oscilloscope numérique lors de la vidange d’un tube de 64 mm de diamètre intérieur équipé d’une constriction de 15 mm. À la droite de ce graphique, nous avons représenté le tube afin de visualiser la position des capteurs. Nous pouvons voir que sur le premier capteur en commençant par le bas, le signal ressemble à un bruit large bande auquel est superposé un signal cohérent de faible amplitude. Sur le capteur immédiatement au dessus, nous pouvons voir que le signal a la forme d’une sinusoïde de fréquence bien définie. Sur les deux capteurs suivants le signal est fortement distordu et le front de l’onde semble présenter une quasi-discontinuité. Pour mieux comprendre

ceci, comparons ces signaux avec un signal enregistré avec un accéléromètre suivant le protocole présenté en introduction. La figure 4.8(b) montre des signaux d'accélération typiques. Au fur et à mesure de la montée dans le tube on voit se développer un pic d'accélération vers le haut tandis que l'accélération minimale sature à une valeur approximativement égale à  $-g$ . La forme triangulaire observée sur le signal de pression, s'explique simplement par le fait que la vitesse des ondes croît avec la pression. En conséquence les maxima de pression se propagent plus vite que les minima et tendent donc à les rattraper. Ce mécanisme conduit à la formation d'ondes de choc. La zone de fort gradient de pression est naturellement associée à un pic d'accélération. En conclusion, ces observations montrent que l'on a affaire à des ondes de compression guidées par le tube. En résumé, d'un bruit émerge une

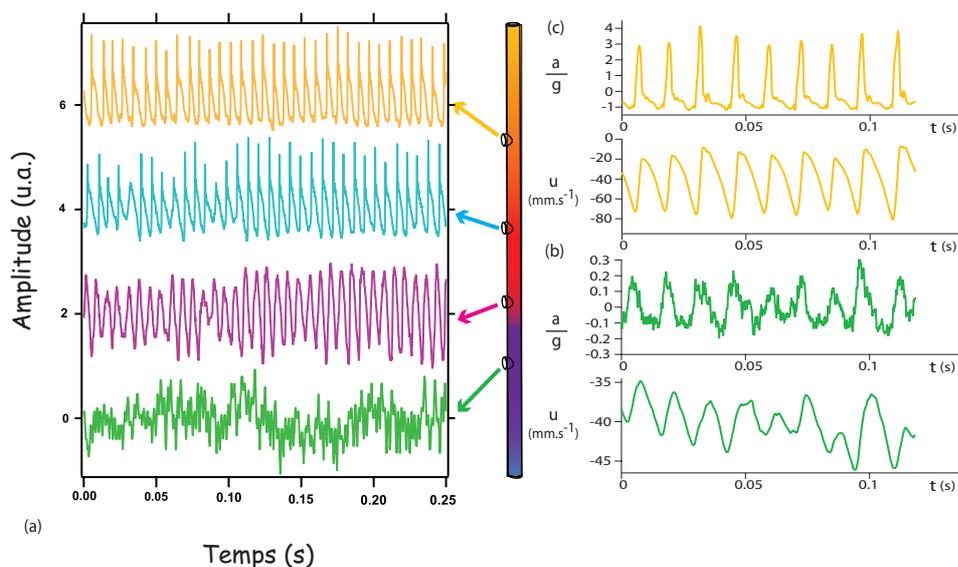


FIGURE 4.8 – Signaux expérimentaux : (a) à gauche signal mesuré sur les capteurs de pression. Signaux d'accélération et de vitesse mesurés dans la partie inférieure (b) et supérieure (c) du tube.

onde sinusoïdale, dont l'amplitude augmente au cours de la propagation. Les non-linéarités conduisent alors à une distorsion des ondes, qui prennent une forme en "N" caractéristique d'ondes de choc.

#### 4.4 Lois d'échelle expérimentales

Nous avons étudié de manière systématique la fréquence et la vitesse de propagation des ondes, en fonction de la vitesse de l'écoulement et de la pression de confinement. Ces expériences ont été faites en utilisant la série de tubes équipés de capteurs pariétaux. Les maxima des produits de corrélation entre capteurs donnent directement les décalages temporels de l'onde entre ceux-ci. En traçant la position des capteurs en fonction du décalage temporel puis en effectuant un ajustement linéaire, nous obtenons la vitesse de propagation des ondes. Il arrive que la forme du signal subisse une distorsion importante dans la partie supérieure du tube. On utilise alors les retards entre capteurs successifs plutôt que le retard cumulé depuis le premier capteur.

## Nombre d'onde

Le graphique 4.9(a) représente les mesures du nombre d'onde obtenu en calculant  $k = \omega/c$  et représenté en fonction de la vitesse de l'écoulement. Nous pouvons voir que le nombre d'onde dépend significativement du rayon du tube : plus le tube est grand plus le nombre d'onde est petit. Le graphique 4.9(b) représente les mêmes

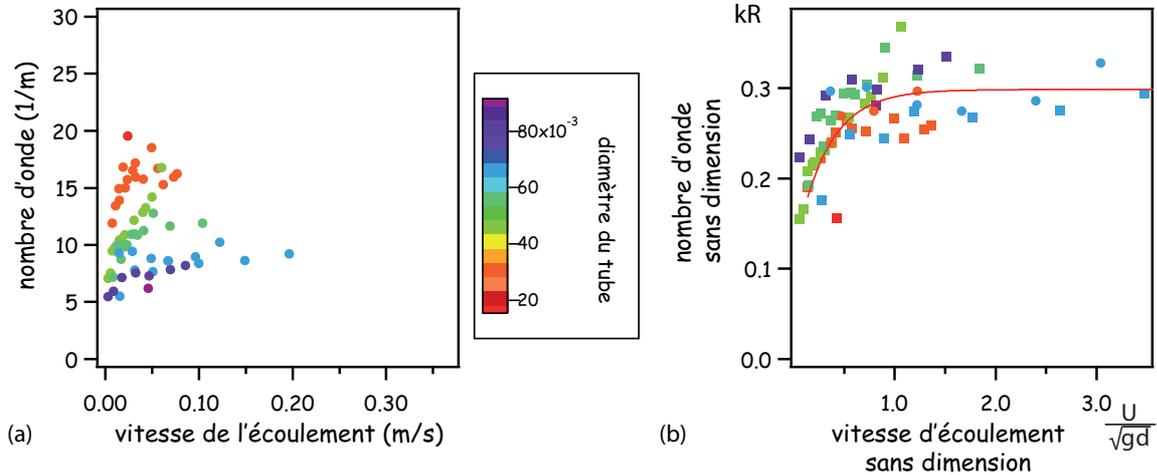


FIGURE 4.9 – (a) Mesures du nombre d'onde en fonction de la vitesse d'écoulement. (b) Graphe présentant le nombre d'onde sans dimension en fonction de la vitesse d'écoulement. Le nombre d'onde varie comme  $1/R$ .

mesures mais adimensionnées par le rayon. La vitesse d'écoulement  $u$ , elle, été adimensionnée par  $\sqrt{gd}$ . En effet, cet écoulement est entraîné par la gravité  $g$  et la bande de cisaillement a pour taille typique celle d'un grain. Nous constatons expérimentalement que les données se regroupent sur une courbe maîtresse  $kR(U/\sqrt{gd})$ . À vitesse d'écoulement donnée, la longueur d'onde est donc proportionnelle au rayon du tube ( $k \propto 1/R$ ). De plus le produit  $kR$  est d'ordre 1, ce qui conforte l'identification de la loi d'échelle.

## Vitesse de propagation des ondes

Nous avons mesuré la vitesse de phase  $c$  des ces ondes, les points expérimentaux sont représentés sur le graphique 4.10 en fonction de la vitesse de l'écoulement. Sans surprise,  $c$  dépend significativement du rayon du tube, c'est à dire de la pression de confinement [95] : elle varie typiquement de 30 m/s à 60 m/s lorsque le rayon passe 8 à 41 mm. Cependant, ces ordres de grandeur montrent que la vitesse de propagation varie beaucoup plus vite que la prédiction de champ moyen  $c \propto R^{1/6}$ . De plus, cette vitesse dépend de manière importante de la taille des grains. La meilleure superposition des données est obtenue pour

$$c \sim (E_g/\rho)^{1/6} (gR)^{1/3} (R/d)^{1/3}.$$

Cette loi d'échelle est purement phénoménologique, et nous n'avons pas réussi à trouver d'explication convaincante pour la différence d'exposants ( $R^{2/3}$  au lieu de  $R^{1/6}$ ). Bien sûr, dans la mesure où le rayon du tube a été varié sur moins d'une décade, les exposants phénoménologiques sont à prendre avec précaution. Toutefois,

on peut remarquer la qualité du regroupement des points ainsi que le fait que la vitesse de propagation adimensionnée soit d'ordre 1.

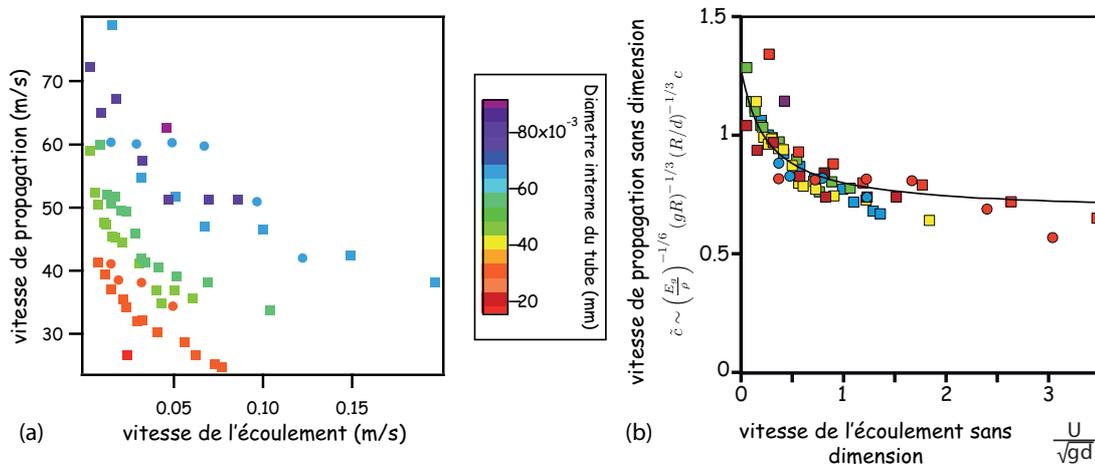


FIGURE 4.10 – (a) Mesures de la vitesse de propagation des ondes en fonction de la vitesse d'écoulement. (b) Graphe présentant la vitesse du son sans dimension en fonction de la vitesse d'écoulement. La vitesse de propagation des ondes varie comme  $R^{3/2}d^{-1/3}$ , loi d'échelle inattendue.

## Fréquence

Le graphique 4.11 montre les mesures de fréquence en fonction de la vitesse de l'écoulement. La fréquence varie très peu, d'un tube à l'autre : elle décroît typiquement de 85 à 70 Hz du plus petit au plus gros de nos tubes. Ceci s'explique par la compensation entre le nombre d'onde  $k$ , qui croît fortement avec le rayon et la vitesse des ondes  $c$  qui décroît fortement avec celui-ci. Compte-tenu de la relation  $\omega = ck$  et des lois d'échelles respectives de  $k$  et  $c$ , la fréquence devrait suivre une loi d'échelle en

$$f \sim (E_g/\rho)^{1/6}(g/d)^{1/3}(R)^{-1/3}$$

. En réalité, la fréquence varie moins avec le rayon que cette prédiction (de 20% seulement entre le diamètre le plus petit et le plus grand).

Dans le chapitre suivant nous proposons un modèle hydrodynamique unidimensionnel permettant de rendre compte d'une large partie de ces observations.

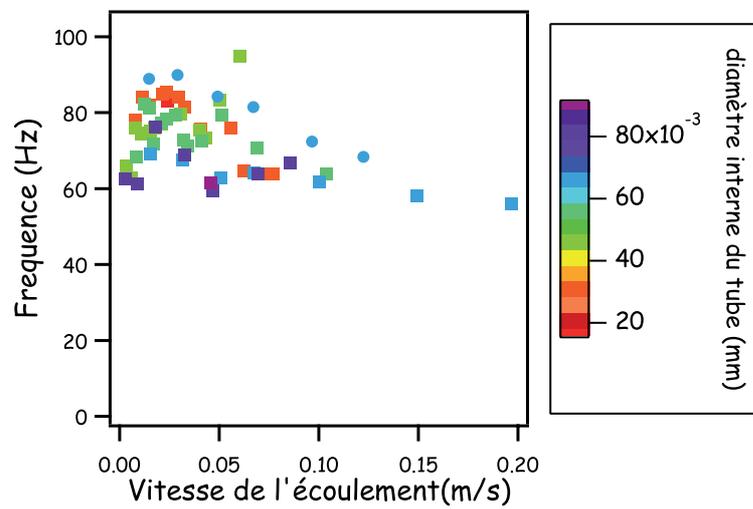


FIGURE 4.11 – Mesure de la fréquence en fonction de la vitesse d'écoulement. Elle est quasiment indépendante du diamètre du tube et ne dépend que faiblement de la vitesse de l'écoulement.

# Chapitre 5

## Amplification par frottement d'une onde guidée : modélisation

### 1 Modèle uni-dimensionnel d'écoulement granulaire en conduite

#### 1.1 Géométrie et loi de comportement

La géométrie considérée est représentée schématiquement sur la figure (5.1). Nous considérons un matériau granulaire compressible glissant à vitesse constante sous l'effet de la gravité au sein d'une colonne cylindrique de rayon  $R$  et d'extension infinie. Le matériau est soumis à une force de frottement exercée par les parois du tube, que nous considérons infiniment rigides.

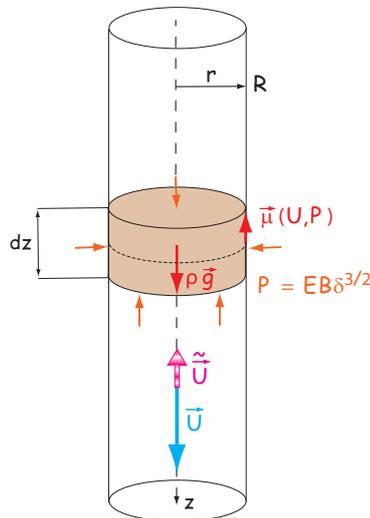


FIGURE 5.1 – L'orgue à sable : système étudié théoriquement.

La description tridimensionnelle par un modèle élasto-plastique adapté aux matériaux granulaires se situe au delà de la portée de cette thèse. Elle nécessiterait une résolution numérique difficile et peu propice à la compréhension des phénomènes en terme de mécanismes dynamiques. Nous avons donc développé un modèle simplifié qui permet malgré tout de comprendre l'essentiel du phénomène de gé-

nération et d'amplification des ondes lors de la vidange d'un tube. Ce modèle est uni-dimensionnel, ce qui se justifie par le fait que la longueur d'onde expérimentale est de l'ordre de 20 fois le rayon du tube. La friction localisée à la paroi du tube est prise en compte comme une friction effective décrite par le coefficient de frottement  $\mu$ .

Nous notons  $W$  le champ de déplacement vertical des grains par rapport à un état de référence dans lequel il n'y a pas de déformation. En supposant que la compression est uni-axiale, le coefficient de compression volumique se met sous la forme  $\delta = -\partial_z W$ . Toutefois si  $\partial_z W$  est positif les grains ne sont plus en contact de sorte que  $\delta = 0$ . Nous considérons une loi de comportement visco-élastique qui rend compte de la loi de contact de Hertz pour la compressibilité et d'une dissipation effective qui prend la forme d'une seconde viscosité. Les contraintes normales sont supposées isotropes. Cependant, moyennant une redéfinition de  $\mu$ , le même modèle s'applique au cas d'un rapport de contraintes normales constant. La loi de comportement relie la pression  $P$  à la compression  $\delta$  :

$$P = \chi^3 E \delta^{1/2} (\delta + \tau \dot{\delta}) \quad (5.1)$$

La première partie de cette équation traduit le fait que la pression est proportionnelle au module d'élasticité  $E$  du matériau constituant les grains et à l'interpénétration des grains à la puissance 3/2. Le coefficient sans dimension  $\chi$  traduit les effets liés à l'empilement aléatoire des grains. Il contient en particulier les dépendances vis à vis du nombre de contact moyen par grain.

L'origine réelle de la dissipation à l'intérieur du matériau granulaire est un problème ouvert. Les mécanismes mis en jeu peuvent être divers [96] : fluage visco-élastique des micro-contacts, friction solide entre les grains, présence de ponts capillaires, *etc.* dans l'expression (5.1) ci-dessus, la dissipation en compression est traduite par le terme  $\tau \dot{\delta}$  où  $\tau$  représente un temps caractéristique de ces processus dissipatifs. Ce terme est proportionnel à la dérivée temporelle de la partie élastique. Le préfacteur phénoménologique en  $\delta^{1/2}$  traduit le fait que la dissipation s'annule lorsque les particules perdent le contact *i.e.* pour  $\delta = 0$ .

## 1.2 État de base

On applique le principe fondamental de la dynamique à une tranche de matériau d'épaisseur infinitésimale  $dz$  soumise à la gravité, aux forces de pression s'exerçant de part et d'autre de la tranche, et à la friction pariétale. L'équation du mouvement projetée selon la direction verticale se met sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d^2 W}{dt^2} = g - \partial_z P - \frac{2\mu}{R} P \quad (5.2)$$

Où  $U$  est la vitesse particulière. Dans cette équation apparaît la longueur caractéristique  $R/2\mu$ . Notons que le terme en  $2/R$  correspond au rapport entre le périmètre  $2\pi R$  et la section  $\pi R^2$ .

Comme de coutume dans une description continue, la dérivée lagrangienne peut-être exprimée en coordonnées eulériennes

$$\frac{dU}{dt} = \partial_t U + U \partial_z U. \quad (5.3)$$

l'équation de conservation de la matière s'écrit

$$\frac{d\delta}{dt} = -\partial_t \partial_z W - U \partial_{zz} W = -(1 + \delta) \partial_z U. \quad (5.4)$$

L'état de référence est un écoulement homogène stationnaire, à la vitesse  $U_0$ . L'équation de mouvement permet d'exprimer la pression d'équilibre :

$$P_0 = \frac{gR}{2\mu}$$

La pression est homogène, proportionnelle au rayon du tube et inversement proportionnelle au coefficient de friction. Cette régulation de la pression est connue sous le nom d'effet Janssen [97]. En ré-exprimant cette pression à l'aide de la loi de comportement, on détermine la compression volumique à l'équilibre  $\delta_0$  :

$$P_0 = \chi^3 E \delta_0^{3/2}$$

On introduit la vitesse caractéristique  $\mathcal{C}$ , définie par :

$$\mathcal{C} = \chi \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left( \frac{P_0}{E} \right)^{1/6} \quad (5.5)$$

Plus précisément, le module de compressibilité s'écrit :

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{3}{2} \chi^3 E \delta_0^{1/2} = \frac{3}{2} \chi^2 E^{2/3} P_0^{1/3}$$

de sorte que la vitesse des ondes de compression vaut en réalité  $\sqrt{3/2} \mathcal{C}$ .

Dans la limite où la vitesse des grains  $U$  est petite devant la vitesse du son  $\mathcal{C}$ , les termes de convection peuvent être négligés devant les termes de dérivée temporelle :

$$\partial_t U = g - \partial_z P - \frac{2\mu}{R} P \quad \text{and} \quad \partial_t \delta = -\partial_z U \quad (5.6)$$

La seule non-linéarité reste alors celle de l'équation constitutive, liée au contact de Hertz.

Sous cette hypothèse de faible nombre de Mach, le système ne présente qu'un seul nombre sans dimension. Nous choisissons d'adimensionner les variables du problème de la manière suivante :

$$P = \frac{gR}{2\mu} \tilde{P} \quad (5.7)$$

$$z = \frac{R}{2\mu} \tilde{z} \quad (5.8)$$

$$t = \frac{R}{2\mathcal{C}\mu} \tilde{t} \quad (5.9)$$

$$U = \frac{gR}{2\mu\mathcal{C}} \tilde{U} \quad (5.10)$$

$$\delta = \frac{gR}{2\mu\mathcal{C}^2} \tilde{\delta} \quad (5.11)$$

L'échelle de longueur est donnée par  $R/2\mu$ . Il ne reste alors qu'un nombre sans dimension  $\mathcal{N}$  qui compare le temps caractéristique de dissipation au temps mis par une onde pour parcourir  $R/2\mu$ .

$$\mathcal{N} = \frac{2\mu\mathcal{C}\tau}{R} \quad (5.12)$$

Ce nombre s'interprète donc comme l'inverse du facteur de qualité du résonateur. Les équations adimensionnées s'écrivent finalement :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} = 1 - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{z}} - \tilde{P} \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{z}} \quad (5.14)$$

$$\tilde{P} = \tilde{\delta}^{3/2} + \mathcal{N}\tilde{\delta}^{1/2}\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \tilde{t}} \quad (5.15)$$

## 2 Analyse de stabilité linéaire

L'état de base étant homogène en espace et en temps, les solutions des équations perturbées au premier ordre peuvent se décomposer sur une base de Fourier. On considère donc un seul mode de la forme :  $\exp(j(\omega\tilde{t} + \kappa\tilde{z}))$  où  $\omega$  et  $\kappa$  sont à priori complexes. La relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{\frac{3}{2} + j\mathcal{N}\omega} = \kappa^2 - j\kappa \quad (5.16)$$

Le terme en  $\kappa^2$  provient de la pression et celui en  $-j\kappa$  provient de la friction sur le tube. En l'absence de dissipation ( $\mathcal{N} = 0$ ), et du terme de friction, on retrouve la relation de dispersion pour des ondes de compression simple  $\omega = \sqrt{3/2}\kappa$ , ce qui correspond à une vitesse de propagation  $\sqrt{3/2}\mathcal{C}$ .

Pour étudier l'effet de la friction en paroi, on peut calculer le taux de croissance temporel de chaque mode. Il apparaît que tous les modes instables se propagent vers le haut du tube, de sorte que l'on a affaire à une instabilité convective. Dès lors, considérons une pulsation  $\omega$  réelle et séparons le nombre d'onde complexe  $\kappa$  en sa partie réelle  $k$  et sa partie imaginaire  $q$ . On obtient les équations suivantes :

$$k^2 = q^2 - q + \frac{\frac{3}{2}\omega^2}{\frac{9}{4} + \mathcal{N}^2\omega^2} \quad (5.17)$$

et

$$2q = 1 - \frac{\mathcal{N}\omega^3}{k\left(\frac{9}{4} + \mathcal{N}^2\omega^2\right)} \quad (5.18)$$

$k$  est le nombre d'onde du mode ( $\omega/k$  est la vitesse de phase), et  $q$  en est le taux de croissance spatial.

La résolution de ces équations s'effectue numériquement par la méthode de la dichotomie : pour chaque vecteur d'onde, on détermine le taux de croissance et la pulsation des ondes. La figure 5.3(a,b) montre la relation de dispersion pour différentes valeurs de la dissipation ( $\mathcal{N} = 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^0$ ). De prime abord, nous pouvons remarquer que le taux de croissance spatial est positif à petit nombre

d'onde. Cela signifie qu'une onde de pression émise dans le sens opposé à la gravité est amplifiée au cours de sa propagation. L'écoulement homogène stationnaire est donc inconditionnellement instable vis à vis de l'émission d'ondes de pression. Nous remarquons ensuite que le taux de croissance présente un maximum pour  $k_{max} \simeq 0.3$  et  $\omega_{max} \simeq 0.5$ , indépendamment de la valeur de  $\mathcal{N}$  (figure 5.3(b)). Ce maximum correspond au mode qui croît le plus vite, et donc à celui que l'on devrait observer expérimentalement si les perturbations à l'extrémité inférieure du tube présentent une distribution spectrale à large bande.

L'existence d'une instabilité linéaire convective est directement reliée à la friction en paroi. En effet celle-ci subsiste même si la seconde viscosité est nulle ( $\mathcal{N} = 0$ ). Par contre, l'instabilité disparaît si  $\mu$  est nul. Le mécanisme déstabilisant peut se comprendre aisément. Au cours de la propagation d'une onde de pression, les maxima de pression sont soumis à une forte force de frottement en paroi. *A contrario*, les minima de pression sont soumis à une force de frottement plus petite que la moyenne. Or la force frottement reste orientée vers le haut tant que la vitesse locale de l'écoulement est orientée vers le bas. Du fait de l'écoulement moyen, la force de friction s'oppose partout à la gravité. Les maxima de pression sont donc accélérés vers le haut, et les minima vers le bas. Entre les deux il va donc se produire une densification du milieu juste au dessus d'un maximum de pression et une décompaction juste en dessous. Le temps que cette compaction-décompaction ait lieu (il y a de l'inertie), l'onde s'est propagée. Dans le cas où la propagation a lieu vers le haut, le maximum de pression entre dans la zone en train de se densifier de sorte que la pression augmente. Il y a donc croissance de la perturbation. Dans le contraire, si l'onde se propage vers le bas, le maximum de pression rencontre une zone en cours de décompaction de sorte qu'il s'atténue. En conclusion, la friction solide amplifie sélectivement les ondes se propageant dans la direction opposée à l'écoulement.

Ce mécanisme est extrêmement général puisqu'il repose sur (i) la dépendance de la contrainte tangentielle vis à vis de la pression et (ii) sur la propagation d'ondes guidées parallèlement aux parois amplificatrices. Le mécanisme d'instabilité peut être reformulé à partir des travaux de Caroli et Velicky [88]. Le tube se comporte comme un guide d'onde. En terme d'acoustique géométrique, un mode guidé s'interprète comme une interférence constructive des rayons réfléchis successivement par les parois. La structure des modes guidés dans le plan transverse à l'axe du tube coïncide avec celle des modes résonnants. Si le sable est immobile, nous nous attendons à une coupure en dessous de la fréquence de résonnance la plus basse. Lorsque le sable s'écoule, les bandes de cisaillement présentes le long des parois amplifient les rayons acoustiques à chaque réflexion. Il y a donc un gain d'énergie acoustique cohérente au cours de la propagation des modes guidés. Cette énergie est pompée par la friction à partir de l'énergie potentielle de gravité.

## 2.1 Influence de la dissipation

On peut voir sur la relation de dispersion présentée sur la figure 5.3(c), que les hautes fréquences (et donc les grands nombres d'onde) sont restabilisées par la seconde viscosité. En effet, ce mécanisme dissipatif est d'autant plus efficace que la longueur d'onde est petite. On peut calculer le nombre d'onde de coupure  $k_c$  et la

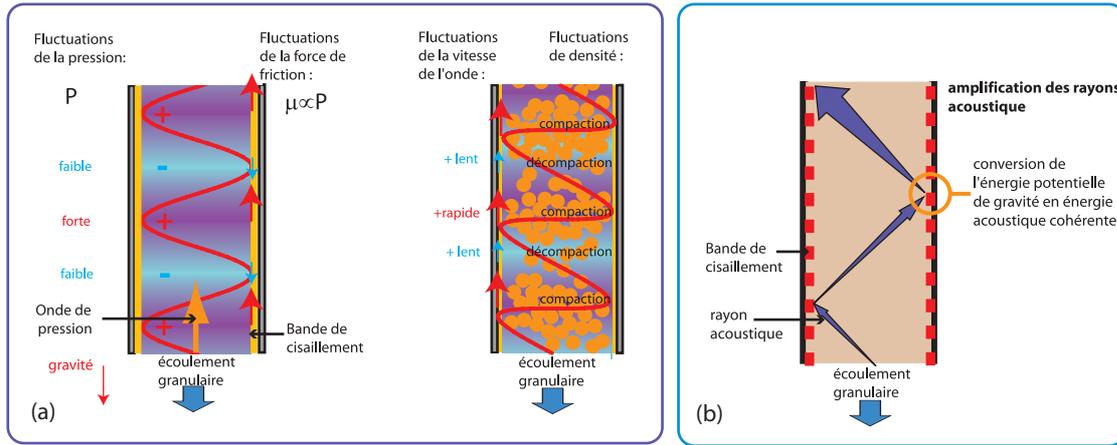


FIGURE 5.2 – (a) Le mécanisme d'instabilité conduisant à l'amplification d'ondes dans un matériau granulaire en écoulement. (b) Interprétation d'acoustique géométrique : amplification d'une onde par une bande de cisaillement [88]

pulsation de coupure  $\omega_c$  de l'instabilité :

$$k_c^2 = \frac{\frac{3}{2} \omega_c^2}{\frac{9}{4} + \mathcal{N}^2 \omega_c^2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{N} \omega_c^3}{k_c \left( \frac{9}{4} + \mathcal{N}^2 \omega_c^2 \right)} = 1 \quad (5.19)$$

Ce système se résout en :

$$\omega_c^2 = \frac{3}{4} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{6}{\mathcal{N}^2}} \right) \quad \text{et} \quad k_c = \frac{3}{2\mathcal{N}\omega_c} \quad (5.20)$$

À faible dissipation, pour  $\mathcal{N} \ll 1$ ,  $k_c$  et  $\omega_c$  suivent tous deux une loi d'échelle en  $\mathcal{N}^{-1/2}$ . Dans la limite des fortes dissipations, pour  $\mathcal{N} \gg 1$ , on obtient  $k_c \propto \mathcal{N}^{-1}$  et  $\omega_c$  tend vers une constante  $\omega_c \propto \mathcal{N}^0$ . Cela confirme donc que la dissipation, est responsable de l'existence d'un maximum du taux de croissance, d'autre part on observe l'existence de deux régimes asymptotiques selon que la dissipation est petite ou grande devant les effets propagatifs.

Le maximum du taux de croissance est représenté en fonction de l'inverse du facteur de qualité  $\mathcal{N}$  sur la figure 5.3(b). Nous retrouvons les deux régimes évoqués ci-dessus. Pour  $\mathcal{N} < 1$ , le taux de croissance  $q_m$ , la pulsation  $\omega_m$  et le vecteur d'onde  $k_m$  du mode le plus amplifié sont indépendants du temps de dissipation. Cela signifie que, bien que la dissipation est nécessaire pour qu'un mode soit sélectionné, les caractéristiques de ce mode sont indépendantes de la valeur du temps de dissipation. On peut montrer de la même manière que le détail de la forme choisie pour la partie visqueuse de la loi de comportement, n'a que peu d'influence sur la sélection de fréquence et de longueur d'onde. Cette loi d'échelle signifie que la longueur d'onde est proportionnelle au rayon du tube et inversement proportionnelle au coefficient de friction entre le matériau granulaire et le tube.

$$\lambda_m = 8.9 \frac{R}{\mu} \quad (5.21)$$

Cette équation constitue la prédiction centrale du modèle et nous avons vu au cours du chapitre précédent que cette loi d'échelle vis à vis du rayon est vérifiée.

Dans le domaine dominé par la dissipation ( $\mathcal{N} < 1$ ), on obtient  $k_m \propto \mathcal{N}^{-4/3}$  et  $\omega_m \propto \mathcal{N}^{-1/2}$ , ce qui correspond à une longueur d'onde sélectionnée d'autant plus grande que la dissipation est forte. Bien entendu ces lois d'échelles sont fortement dépendantes de la nature des mécanismes dissipatifs.

Les expériences de résonance exposées en annexe montrent que pour tous les matériaux granulaires que nous avons caractérisés, le facteur de qualité à la première fréquence de résonance est de l'ordre de  $Q \sim 30$ . Cela implique que les expériences effectuées se situent dans le domaine de faible dissipation. Nous attendons donc des résultats indépendants de celle-ci.

## 3 Analyse non-linéaire

### 3.1 Intégration numérique des équations

Dans la mesure où la vitesse des ondes est une fonction croissante de la pression, nous nous attendons à ce que le système présente des effets non-linéaires et en particulier tende à former des ondes de choc. Effectivement les maxima de pression se propagent plus vite que les minima de pression de l'onde. Chaque maximum de pression tend à rattraper le minimum de pression devant lui, le déferlement étant évité par les effets diffusifs (seconde viscosité). Pour aller au delà de ce constat nous avons intégré numériquement le modèle présenté ci-dessus.

On simule une colonne de grain dont la vitesse de chute est contrôlée par un piston. La vitesse de descente du piston est une constante à laquelle est ajouté un bruit blanc gaussien d'amplitude très faible (typiquement 5 ordres de grandeur plus petit que la moyenne). Le schéma de discrétisation spatiale est une simple différence finie avec un pas de  $\delta z = 4.10^{-3}$  unités adimensionnées. Les équations sont formulées en coordonnées lagrangiennes, le schéma temporel suit un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de temps  $\delta t = 2,5.10^{-5}$ . Bien évidemment, on retrouve numériquement les prédictions de l'instabilité linéaire, à savoir, la croissance exponentielle du mode le plus instable avec la hauteur. La figure 5.4(a) montre un signal typique de vitesse et de pression dans cette phase linéaire. Les signaux se déforment progressivement pour former des ondes de choc solitaires séparées par des zones de grains en chute libre sans contact ( $P = 0$ ) 5.4(b). Les signaux de vitesse présentent alors une forme triangulaire caractéristique dont la rupture de pente se situe à la position où les grains s'arrêtent après être tombés en chute libre.

### 3.2 Ondes solitaires

Pour tenter de déterminer plus directement la nature de ces ondes solitaires, nous cherchons des solutions périodiques se propageant sans se déformer. En notant  $\tilde{c}$  la vitesse adimensionnée  $\mathcal{C}$ . On cherche des solutions de la forme  $f(\tilde{z} + \tilde{c}\tilde{t})$ .

$$\tilde{P}' - \tilde{c}^2 \tilde{\delta}' = 1 - \tilde{P} \quad (5.22)$$

$$\tilde{c}\mathcal{N}\tilde{\delta}' = \tilde{P}\tilde{\delta}^{-1/2} - \tilde{\delta} \quad (5.23)$$

où la notation « ' » correspond à la dérivée vis à vis de  $\tilde{z} + \tilde{c}\tilde{t}$ . Ces équations peuvent être résolues numériquement. Dans une certaine gamme d'amplitude, il existe une valeur de  $\tilde{c}$  pour laquelle la solution de ces équations est périodique.

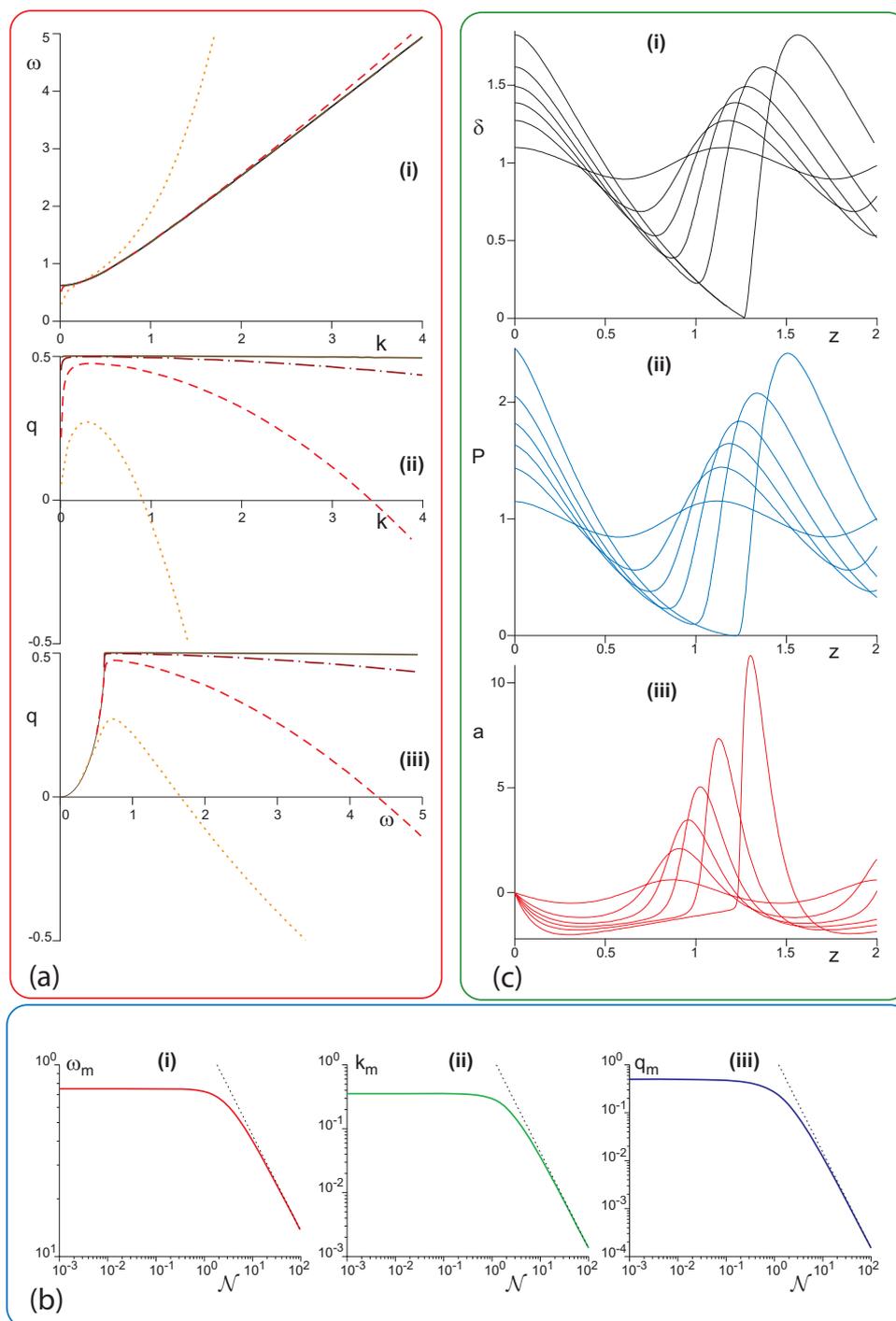


FIGURE 5.3 – Résultats des calculs numériques. (a) [i] relation de dispersion, [ii] taux de croissance en fonction du nombre d'onde, [iii] taux de croissance en fonction de la pulsation pour les valeurs de  $\mathcal{N} = 10^{-3}$  (brun),  $10^{-2}$  (brique),  $10^{-1}$  (rouge), 1 (orange). (b) [i] Fréquence, [ii] vecteur d'onde et [iii] et maximum du taux de croissance en fonction de la dissipation. (c) Forme des ondes solitaires pour  $\mathcal{N} = 0.04$  : la solution sinusoïdale correspond à celle d'une amplitude quasi-nulle et correspond à la solution linéaire de coupure ( $q = 0$ ). La solution d'amplitude maximale est montrée pour lequel les grains perdent contact :  $\delta = 0, P = 0$ . [i] compression volumique  $\delta$ , [ii] pression  $P$ , [iii] accélération  $a$ .

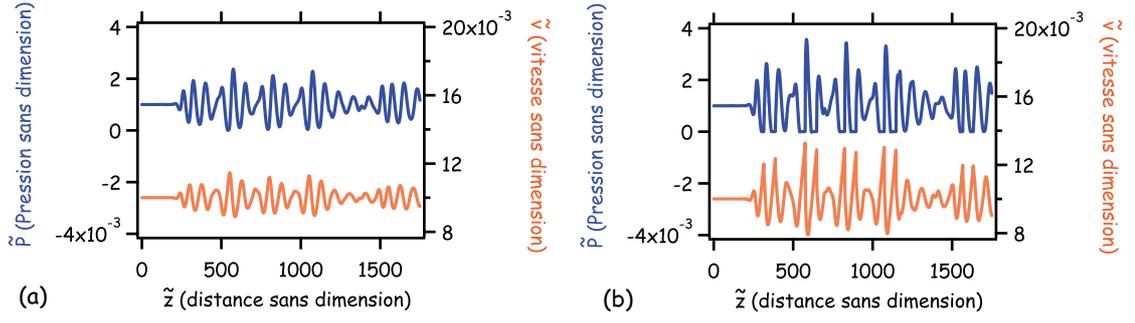


FIGURE 5.4 – Résultats de simulation : (a) signaux dans la phase linéaire (b) signaux distordus, formation d'ondes de choc.

Le mode de l'instabilité linéaire au nombre d'onde de coupure  $k_c$  est une solution exacte des équations non linéaires d'amplitude nulle. En effet, par définition, son taux de croissance  $q = 0$ . La forme de ce mode est évidemment sinusoïdale. Il n'existe pas de solution non-linéaire de nombre d'onde plus grand que  $k_c$ . En reprenant les équations définissant  $k_c$  et  $\omega_c$ , on obtient la double condition suivante pour le mode de coupure :

$$c^2 - \mathcal{N}c - \frac{3}{2} = 0 \quad (5.24)$$

$$2k_c^2 c \mathcal{N} = 3 \quad (5.25)$$

Ces équations se résolvent sans difficulté, si besoin est.

La solution non-linéaire de plus grande amplitude est obtenue lorsque la compression volumique  $\tilde{\delta}$  et la pression  $\tilde{P}$ , s'annulent en un même point. Au voisinage de ce point, la solution se comporte comme :

$$\tilde{P} \sim \tilde{z} \quad (5.26)$$

$$\tilde{\delta} \sim \left( \frac{3\tilde{z}^2}{4\tilde{c}\mathcal{N}} \right)^{2/3} \quad (5.27)$$

Les équations sont intégrées numériquement à partir de cette condition initiale. La valeur de  $\tilde{c}$  est ajustée par dichotomie jusqu'à trouver la solution périodique. Sur le graphique 5.3(d), j'ai reporté le signal de pression et le signal d'accélération correspondant à cette solution. Le signal de pression, périodique, est distordu et présente une forme triangulaire caractéristique. Le signal d'accélération comporte des pics d'accélération vers le haut séparés par des plateaux d'accélération négative. L'accélération vers le bas est limitée à quelques  $g$  alors que vers le haut l'accélération du pic est d'autant plus grande que le temps de dissipation  $\tau$  est faible ( $\mathcal{N} = 4.10^{-3}$  sur la figure). Le fait que l'accélération vers le bas puisse être légèrement plus grande que  $g$  provient des effets de pression.



# Conclusion : amplification par friction d'une onde guidée dans un écoulement granulaire

La vidange d'un matériau granulaire, contenu dans un tube, soumis à la gravité, s'accompagne sous certaines conditions de l'émission d'un son dont la fréquence fondamentale est parfaitement identifiable. Nous avons montré que, dans ce phénomène, les vibrations prennent naissance dans le sable en mouvement. Effectivement, des ondes se propagent à l'intérieur de la colonne de sable dans le sens opposé à la gravité. Nous avons constaté que leur amplitude croît de manière spectaculaire au cours de leur propagation. À partir de l'orifice de vidange, cette croissance est exponentielle, tant que les grains restent en contact, sinon l'amplitude sature. En étudiant la forme des signaux, nous avons constaté, que dans le bas du silo, le signal est de forme sinusoïdale. Au fur et à mesure de sa propagation, il subit une distorsion conduisant à la formation d'ondes de choc.

Nous avons interprété ces observations comme la croissance d'une perturbation liée à un mécanisme d'instabilité, conduisant à la sélection et à l'amplification d'un signal de fréquence déterminée. Pour cette raison, nous avons décidé d'étudier ce système de manière systématique en faisant varier les paramètres contrôlant l'écoulement. Nous avons mesuré le nombre d'onde, la vitesse de propagation et la fréquence en fonction du débit, contrôlé par le diamètre de l'orifice de sortie, et pour différentes pressions de confinement, imposées par le rayon du tube ( $P \propto R/2\mu$ ). Ces mesures nous ont permis de déterminer des lois d'échelles empiriques. Nous observons que le nombre d'onde  $k$  est proportionnel à l'inverse du rayon  $R$ . La vitesse des ondes suit une loi d'échelle en  $R^{3/2}d^{-1/3}$ . Si celle-ci dépendait simplement de la pression de confinement, elle serait proportionnelle à  $R^{1/6}$ . Nous ne disposons pas d'explication convaincante à ce sujet actuellement. Nous observons que la fréquence est quasiment indépendante de la vitesse de l'écoulement.

Parallèlement, pour comprendre les mécanismes conduisant à la formation de ces ondes, nous avons développé un modèle théorique unidimensionnel pour lequel un élément du matériau granulaire est soumis à la gravité  $g$ , à la pression de confinement  $P$  et à une force de frottement effective dépendant de la pression. Le matériau granulaire est décrit par une loi de comportement visco-élastique  $P = \xi^3 E_g \delta^{1/2} (\delta + \tau \dot{\delta})$  qui permet de tenir compte de l'élasticité non-linéaire du contact de Hertz (loi de puissance de l'interpénétration des grains  $\delta^{3/2}$ ) ainsi que d'une dissipation intrinsèque (terme en  $\tau \dot{\delta}$ ). L'analyse de stabilité linéaire révèle qu'effectivement, un tel système admet des solutions harmoniques. Nous avons déterminé la relation de dispersion de ces modes. De plus, l'effet de la friction en paroi joue un rôle désta-

bilisant pour des ondes se propageant verticalement, il s'agit donc d'une instabilité convective. Sur la figure 5.5(i), nous avons représenté la croissance exponentielle de l'amplitude  $\mathcal{A}$  en fonction de la hauteur  $z$ , pour les données expérimentales (—) et pour la résolution numérique (—). Ces données se superposent de manière satisfaisante. La figure (ii) représente le taux de croissance  $q$  en fonction de la fréquence, les mesures ( $\bullet$ ) sont comparées à la prédiction (—) obtenue à partir de la résolution du modèle. La sélection de la fréquence s'explique par l'amplification de la composante spectrale correspondant au maximum de cette courbe. Ici encore, nous constatons l'accord entre les expériences et le modèle, dont seul un paramètre est ajustable, la vitesse  $c$ , alors que le nombre d'onde  $k$  et la pulsation  $\omega$  sont fixés à la valeur expérimentale. Nous notons cependant que les données expérimentales montrent quelques maxima locaux correspondant à une croissance non-linéaire des harmoniques, il est possible que cela provienne d'un couplage élastique entre le tube et le matériau granulaire.

Nous avons étudié l'influence de la dissipation. Il est important de remarquer que celle-ci est indispensable pour la sélection d'un mode. Il existe deux régimes. À faible dissipation  $\mathcal{N} < 1$ , où  $\mathcal{N}$  est l'inverse du facteur de qualité, le nombre d'onde et la fréquence sélectionnés, ainsi que le taux de croissance, sont constants. Dans ce domaine, le nombre d'onde sans dimension est proportionnel à la friction

$$kR \propto \mu.$$

Il s'agit du résultat central de ce travail. Nous avons déterminé de manière indépendante, par résonance, le facteur de qualité des différents matériaux granulaires que nous avons utilisés. Nous trouvons  $1/\mathcal{N} \sim 25$ . Par conséquent, nos mesures ont donc été effectuées dans le domaine de faible dissipation. Ces résultats sont reportés dans sur la figure 5.5. Le régime  $\mathcal{N} > 1$  est dominé par la dissipation, nous ne l'avons pas étudié expérimentalement.

Nous avons résolu numériquement le système non-linéaire en coordonnées lagrangiennes. Ce modèle permet de prédire la formation d'ondes de choc conformément aux observations. La figure 5.5 représente les signaux d'accélération et de vitesse mesurés dans le domaine linéaire (i) expérimentalement et issus de la résolution non-linéaire (ii).

Les travaux antérieurs de Kesava Rao [89] et de Tejchman [91] considèrent que l'émission spontanée d'un signal harmonique est généré par un phénomène de colléglissé. Nous n'observons pas la dépendance attendue de la fréquence en fonction de la vitesse. Nous proposons donc une interprétation nouvelle basée sur le mécanisme de croissance d'une instabilité convective. Le frottement à la paroi, en transférant l'énergie potentielle de gravité en énergie acoustique cohérente, joue un rôle déstabilisant et contribue à l'amplification et à la sélection de la fréquence d'ondes se propageant dans le sens opposé à la gravité. Nous avons développé un modèle qui nous permet d'interpréter et de reproduire tous les faits expérimentaux que nous avons observés : sélection d'une fréquence, amplification, formation d'ondes de choc. Cependant, ce modèle demeure phénoménologique, les mécanismes dissipatifs à l'œuvre dans un matériau granulaire en écoulement sont encore mal compris. Nous pensons que nos travaux constituent si ce n'est la première mise en évidence, du moins une perspective très prometteuse pour l'étude des mécanismes tels que le couplage entre écoulement et fluctuations de densité *via* la viscosité [85], ou l'amplification d'une onde par une interface frictionnelle [88], [86], [87].

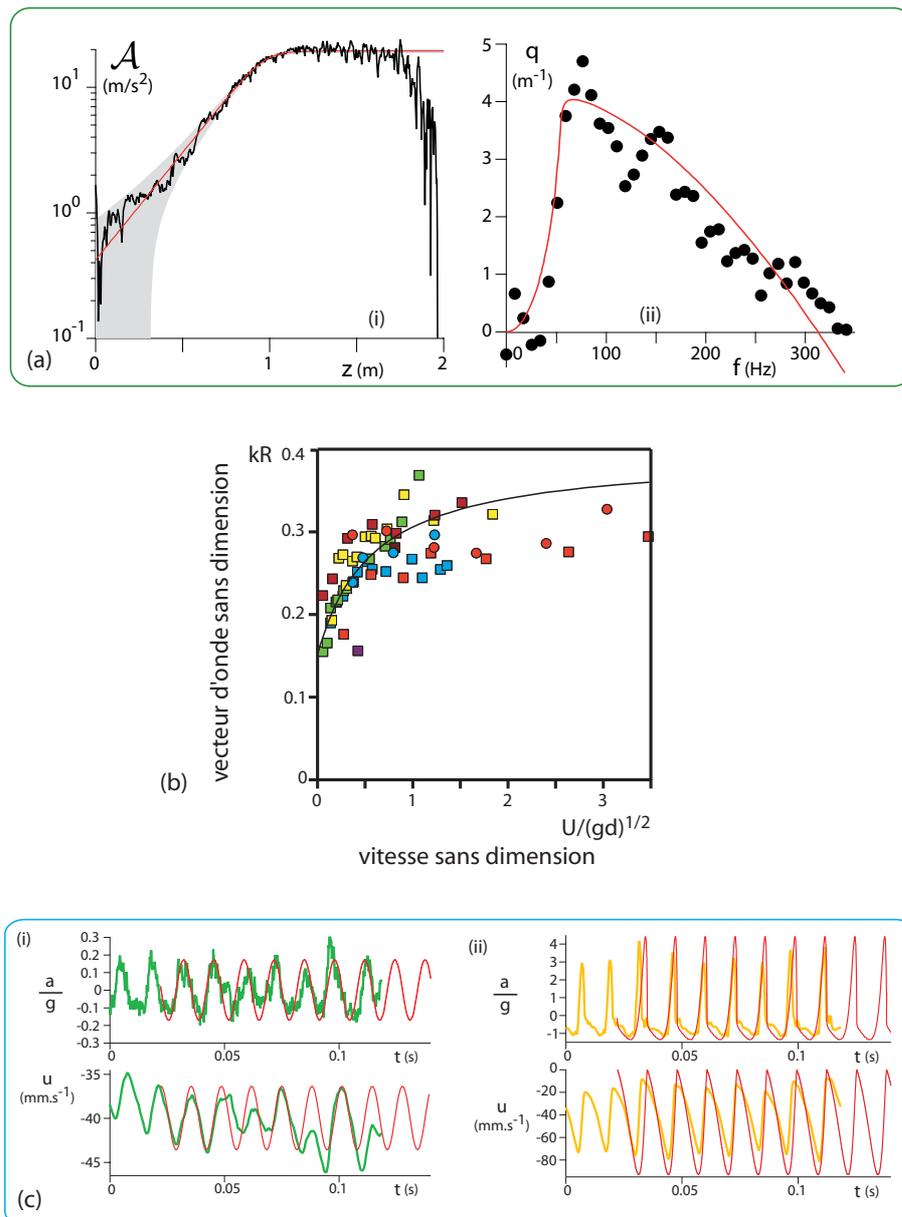


FIGURE 5.5 – (A) Évidence expérimentale de l’amplification exponentielle. (i) Croissance exponentielle de l’accélération  $\mathcal{A}$  à la fréquence moyenne  $f_m$ , en fonction de la position verticale  $z$  la ligne rouge montre la meilleure valeur de l’ajustement pour l’équation d’amplitude  $\partial_z \mathcal{A} = q_m \mathcal{A} \left(1 - \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}_\infty^2}\right)$ . (ii) Taux de croissance spatial  $q$  en fonction de la fréquence  $f$  dans la partie inférieure du tube, la fréquence  $f_m = 75$  est la plus amplifiée. La courbe rouge est le meilleur ajustement de l’analyse de stabilité et donne le facteur de qualité  $(f_m \tau)^{-1} \simeq 13$ . (b) Loi d’échelle expérimentale du nombre d’onde : vecteur d’onde sans dimension  $k_m R$  en fonction de la vitesse adimensionnée de l’écoulement  $u_0 / \sqrt{gd}$ . En utilisant une valeur indépendante de du coefficient de friction ( $\mu \simeq \tan 20^\circ$ ), la prédiction est  $k_m R = 0.25$ . (c-i) Accélération typique  $a$  et vitesse  $u$  du signal mesuré dans la partie basse d’un tube de rayon  $R = 32$  mm pour un écoulement moyen  $u_0 = 25$  mm/s, comme attendu pour une instabilité convective linéaire, le signal montre une fréquence bien définie et à peu près sinusoïdale (courbe rouge). (C-ii) Echantillons de signaux mesurés dans la partie haute du tube en régime non linéaire développé. Comme le prédit le modèle (courbe rouge) les ondes de pression forment un choc, dû à la dépendance en pression de la vitesse de propagation, l’amplitude de l’onde sature lorsque l’accélération de pic atteint  $g$ .

Certaines caractéristiques de ce phénomène attirent notre attention : la fréquence est quasiment indépendante de la vitesse de l'écoulement, la loi d'échelle est une fonction du diamètre des grains et nous observons la présence d'une bande de cisaillement, par comparaison de la mesure de la vitesse de l'écoulement moyen et de celle des grains en paroi. Il s'agit d'autant d'indices qui nous font penser que ce mécanisme est probablement celui qui permettrait d'expliquer le chant des dunes, thématique que nous développerons en annexe.

# Conclusion

La propagation d'ondes dans un matériau granulaire présente une caractéristique non-linéaire essentielle : la vitesse du son augmente avec la pression de confinement. D'un point de vue acoustique, les gradients de pression induisent des gradients de vitesses de propagation et entraînent l'apparition de modes guidés. Nous avons étudiés deux situations. La première consiste à étudier la propagation d'ondes dans un lit granulaire soumis à la gravité. La seconde est l'émission spontanée d'ondes au sein d'un écoulement gravitaire dans un silo rigide.

## Propagation d'ondes de surface

Nous avons consacré la première partie de cette thèse à l'étude des propriétés mécaniques d'un empilement granulaire lorsque la pression de confinement  $P$  tend vers zéro (*i.e.* à la surface). Le modèle de champ moyen suppose que les déformations microscopiques et macroscopiques peuvent s'identifier. Il prédit que le module de compression et le module de cisaillement suivent une loi d'échelle en  $Z^{2/3}P^{1/3}$ . Par conséquent, la vitesse de propagation des ondes acoustiques varie comme  $c \propto Z^{1/3}P^{1/6}$ . Cependant, des travaux numériques suggèrent que cette prédiction surestime le module de cisaillement. La prise en compte plus fine du nombre de contacts par grain  $Z$  ou bien des fluctuations du nombre de contacts avec la pression, améliorent un peu la qualité des prédictions mais ne change pas sur le fond l'écart entre modules mesurés et modules prédits. Un autre point de vue a émergé récemment, issue de la théorie de la rigidité de Maxwell, qui voit la dépendance en pression au voisinage de la transition d'encombrement comme un point critique caractérisé par des modes de déplacement anormaux à énergie quasi-nulle, appelés « modes-mous ». Cette approche théorique prédit que le rapport entre le module de cisaillement et le module de compression s'annule au voisinage de la transition de blocage et aussi, que les dépendances en pression des modules sont différentes de celles prédites par les théories de champs moyen. Cette transition correspond à la situation marginale où l'empilement granulaire est isostatique (point  $J$ ). Une des question ouverte à l'orée de cette thèse a été d'étudier et d'utiliser les modes de propagation du son guidé en surface afin d'accéder au comportement des modules élastiques dans la limite des faibles pressions de confinement. En effet dans la totalité des travaux précédents, effectués dans le cadre de tests triaxiaux standards, la limite des faibles pressions n'était pas accessible en pratique. Nous avons montré théoriquement et expérimentalement que le gradient de pression induit par la gravité peut-être utilisé pour guider des ondes acoustiques à la surface de l'échantillon, ce qui permet de mesurer les modules élastiques sous faible pression de confinement. Comme la vitesse de propagation augmente avec la profondeur, il avait été suggéré

qu'aucune propagation n'est pas possible sous gravité, à cause de la réfraction des plans d'onde en direction de la surface. Cet effet est l'analogie acoustique du mirage. Nous avons montré théoriquement et expérimentalement que la propagation est en réalité possible. Pour la partie théorique nous avons choisi d'utiliser un modèle d'élasticité continu adapté aux matériaux granulaires car il est basé sur une expression de l'énergie élastique cohérente avec la loi de contact de Hertz. Nous avons montré qu'un milieu granulaire semi-infini soumis à la gravité et présentant une surface libre constitue un guide d'onde à gradient d'indice à la surface duquel se propagent une série discrète de modes sagittaux et transverses. De plus, si nous considérons une nappe d'épaisseur finie, la condition aux limites en profondeur implique l'existence d'un second guide d'onde, géométrique, qui se superpose au précédent. En conséquence, la relation de dispersion de chaque mode est affectée par une fréquence de coupure. Ce travail théorique a fait l'objet d'une publication [79]. Pour nous assurer de la validité de notre modèle, nous avons décidé de le tester expérimentalement.

Pour cela, nous avons construit un canal de section carrée, qui, combiné à des sources spécialement conçues, permet de sélectionner un seul mode de surface – le mode fondamental. La forme des modes a été déterminée au moyen d'accéléromètres. Nous avons mesuré le profil de l'amplitude en fonction de la profondeur. Il montre que les ondes pénètrent sur une demi longueur d'onde, ce qui permet d'affirmer qu'il s'agit bien d'un mode guidé en surface. Nous avons déterminé la relation de dispersion pour les ondes transverses et sagittales en analysant la propagation de paquets d'onde gaussiens. Ces relations de dispersion permettent de vérifier que les exposants de la loi d'échelle entre le nombre d'onde et la pulsation sont compatibles avec ceux déterminés à partir de la loi de contact de Hertz dans le cadre d'un modèle d'élasticité effective, pour lequel les modules élastiques sont déterminés à partir d'un calcul de champ moyen. Dans cette expérience, nous n'observons pas le comportement critique que prédit la théorie de la rigidité au voisinage de la transition de blocage. Ceci peut s'expliquer par le fait que cet empilement de grains frottants est loin de la limite isostatique, bien que la pression de confinement tende vers zéro. Cependant, nous observons que le module de cisaillement est beaucoup plus faible que celui prédit par la théorie de champ moyen. Ces résultats ont été publiés dans [82].

Ces expériences ont validé la possibilité d'utiliser les ondes de surface pour sonder les propriétés élastiques d'un matériau granulaire sous faible pression de confinement. Nous pouvons désormais envisager d'utiliser ces avancées théoriques et expérimentales pour étudier la réponse mécanique d'un matériau granulaire au voisinage de l'angle d'avalanche. Nous avons déjà effectué une expérience préliminaire (figure 5.6(a)) qui permet d'incliner la surface libre jusqu'à l'angle d'avalanche. Il s'agit d'un résonateur parallélépipédique dont la surface supérieure est libre, et dans lequel les vibrations sont injectées au moyen d'un hydrophone par une arête qui est un nœud de vibration. En émettant un signal dont la fréquence augmente linéairement avec le temps et en mesurant l'amplitude à la fréquence émise à chaque instant, nous pouvons déterminer la première fréquence de résonance (—) associée au nombre d'onde sélectionné par la géométrie (figure 5.6(b)), c'est à dire un point de la relation de dispersion. En inclinant progressivement la cellule, le pic de résonance se sépare en deux modes non-dégénérés, l'un polarisé le long de la pente et l'autre dans la direction transverse. Lorsqu'on augmente l'inclinaison et qu'on approche l'angle

d'avalanche, le pic correspondant au mode polarisé le long de la pente (—) s'élargit et se décale vers des fréquences plus graves, indiquant un affaiblissement du module élastique dans cette direction. C'est déjà une preuve directe du comportement anormal de l'élasticité en cisaillement à l'approche de la transition solide-liquide. Il s'agit maintenant d'effectuer des mesures systématiques.

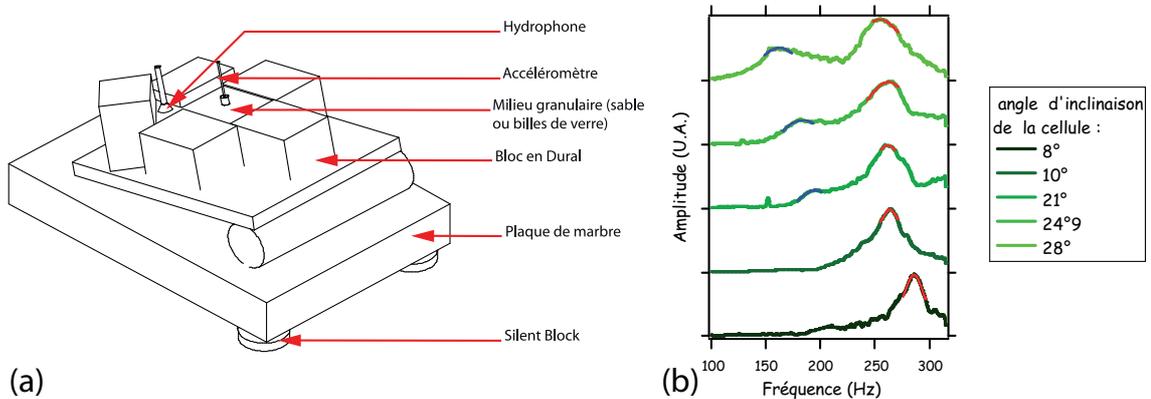


FIGURE 5.6 – (a) Schéma de l'expérience préliminaire du résonateur granulaire.(b) Démodulation de l'amplitude (vert) d'une rampe de fréquence. Lorsque l'inclinaison du bâti augmente, le premier pic de résonance (en rouge), se scinde en deux. Nous attribuons le second pic (bleu) à la modification des modules élastiques dans la direction longitudinale. Nous pensons que son décalage vers des fréquences plus basses traduit l'effet d'une perte de rigidité à l'approche de l'angle d'avalanche.

Un débouché pour ces recherches est la compréhension des phénomènes mécaniques aboutissant au déclenchement d'écoulements géophysiques. À terme, elles pourraient trouver des applications dans la mise au point de techniques d'observation dans le cadre de la prévision des risques naturels associés aux avalanches ou aux glissements de terrain.

## Amplification d'ondes guidées sur un interface frottante.

La seconde partie de ma thèse est dédiée à l'amplification d'ondes élastiques par une interface frottante. La vidange d'un silo lisse rempli de sable émet spontanément un son grave. Nous avons montré que cette émission est liée à la présence d'ondes acoustiques au sein de l'écoulement granulaire. Nous observons que ces ondes se propagent vers le haut du tube et que leur amplitude croît jusqu'à la formation d'ondes de choc. Il y a saturation lorsque la perturbation de la vitesse associée aux ondes compense celle de l'écoulement moyen. C'est la première confirmation expérimentale que des ondes élastiques peuvent être amplifiées par l'intermédiaire de la friction lorsqu'elles sont réfléchies sur une interface frottante.

En changeant systématiquement le diamètre du tube et celui de sortie, qui contrôlent respectivement la pression et le débit, nous avons identifié expérimentalement les lois d'échelles permettant de caractériser ces ondes en fonction des paramètres d'écoulement. Il est intéressant de remarquer que le nombre d'onde  $k$  adimensionné par le rayon du tube  $R$  est proportionnel au coefficient de friction effective  $kR \propto \mu$ . De plus, nous observons que la vitesse de phase suit une loi d'échelle

anormale  $c \propto R^{3/2}d^{-1/3}$ , dépendant du diamètre des grains  $d$ , et qui pour le moment n'a pas d'explication théorique.

Nous interprétons cette expérience dans le cadre d'un modèle continu unidimensionnel. Ce système présente une instabilité linéaire convective. Le taux de croissance de l'instabilité présente un maximum en fonction de la fréquence. La sortie du tube se comportant comme une source de bruit, la fréquence émise est sélectionnée par le maximum du taux de croissance. Il en résulte une croissance exponentielle de l'amplitude au cours de la propagation verticale. Nous avons appliqué à ce modèle une analyse non-linéaire qui nous permet de reproduire la distorsion et la formation d'ondes de choc dans la partie supérieure du tube. Ce modèle est en bon accord avec les mesures réalisées.

Le mécanisme physique conduisant à l'émission spontanée peut se résumer de la manière suivante : la friction est orientée dans le sens opposé à l'écoulement. Comme la friction dépend de la pression, le maximum d'une onde de pression est soumis à une force de frottement supérieure à la moyenne. De ce fait le maximum de l'onde subit une accélération vers le haut (dans le référentiel de l'écoulement). Et réciproquement un minimum de pression est accéléré vers le bas. Ce qui implique une compaction du matériau granulaire au dessus d'un maximum de pression suivi d'une décompaction en dessous. Du fait de l'inertie, le temps que cette compaction-décompaction se fasse, l'onde s'est propagée. Il en résulte une amplification de la perturbation pour les ondes qui se propagent vers le haut. Une interprétation alternative peut être donnée dans le cadre de l'acoustique géométrique. Il a été montré qu'une onde se réfléchissant sur une interface glissant avec frottement peut se réfléchir avec un gain d'énergie. Dans la situation que nous avons étudiée, nous sommes en présence de modes guidés. En terme d'acoustique géométrique, ces modes correspondent à des rayons subissant des réflexions multiples au cours de leur propagation. Ainsi, le frottement pariétal permet l'amplification de ces modes par pompage de l'énergie cinétique de translation vers l'énergie acoustique cohérente.

Il est fort possible qu'un tel mécanisme soit impliqué dans les tremblements de terre. Effectivement, dans les zones de subduction, les plaques continentales et océaniques sont séparées par des roches concassées qui se comportent comme un milieu effectif plus beaucoup plus mou. Ce système géophysique est en essence analogue à notre modèle de laboratoire. Par conséquent il ne serait pas étonnant que cette instabilité puisse jouer un rôle initiateur dans le déclenchement dynamique des séismes.

Pour terminer, revenons au « chant des dunes ». Dans de nombreux déserts, on peut entendre un son sourd lorsqu'une avalanche dévale la face sous-le-vent des dunes. Diverses hypothèses concernant son origine ont été émises : résonance de la couche sèche en surface de la dune, synchronisation des grains de l'avalanche par une onde de surface, auto-synchronisation des grains dans la couche en écoulement. Nous pensons, à la lumière des travaux expérimentaux et théoriques effectués dans la seconde partie de cette thèse, que cette instabilité est le mécanisme-clé manquant pour expliquer le « chant des dunes ». Effectivement, nous avons observé lors de mesures effectuées sur des dunes du Sahara Occidental (Maroc) que la structure verticale d'une avalanche est un écoulement bouchon séparé de la partie statique de la dune par une bande de cisaillement. Ce système est analogue au tube, à la différence que les ondes subissent alternativement des réflexions sur la bande de

cisaillement, où elles sont amplifiées par le frottement, et à la surface libre. Nous invitons le lecteur à se reporter à l'annexe qui suit pour un état de l'art sur ce thème débattu. Nous y développons une analyse critique basée sur les connaissances que nous avons acquises au cours de cette thèse ainsi que sur des mesures de terrain originales.



# Annexe. Des airs de désert, le chant des dunes revisité

## Revue des théories existantes

De nombreuses dunes de sable émettent un son grave et puissant lorsqu'une avalanche se propage le long de leur face sous le vent. Ce son a été rapporté depuis des siècles, mais le phénomène qui en est la cause est resté un mystère jusqu'à récemment. L'implication des ondes élastiques dans le phénomène et leur possible localisation à la surface de la dune a été invoquée dans plusieurs articles récents. Andreotti [59] a effectué une caractérisation de ce phénomène sur le terrain et montré que le son émis dans l'air est dû à une vibration cohérente de la surface de la dune au niveau de l'avalanche et autour de celle-ci. Dans ce chapitre, nous passons en revue les trois idées existantes dans la littérature pour la sélection de la fréquence du phénomène :

- Selon Andreotti [59], pour une même taille de grain  $d$ , la fréquence d'émission  $f$  est indépendante de la taille de la dune et de la position de l'avalanche sur celle-ci. Cette fréquence est déterminée par le gradient de vitesse dans la couche de cisaillement qui sépare l'avalanche de la partie statique de la dune. Elle correspond au taux de collision des grains. Il n'est pas de question de résonance : pour un écoulement induit par la gravité, la fréquence est grossièrement égale  $\simeq 0.4\sqrt{g/d}$  où  $g$  est la gravité et  $d$  la taille des grains.
- Selon Douady *et al.* [60], une résonance sur l'épaisseur de l'avalanche est nécessaire pour expliquer le phénomène et en particulier l'existence d'un seuil d'instabilité.
- Selon Vriend *et al.* [81], la fréquence n'est pas du tout sélectionnée par les caractéristiques de l'avalanche mais par les résonances acoustiques induites par la stratification de la dune. La fréquence  $f$  est variable dans le temps sur un même site et coïncide avec la première fréquence de résonance basée sur la couche sèche de surface.

Dans la suite de cette annexe, nous ferons une analyse critique de ces idées à la lumière des résultats obtenus pendant cette thèse.

## Premier mécanisme : synchronisation onde acoustique-grains

Selon Andreotti [59], les ondes dans le sable à l'origine de l'émission sonore sont localisées sur les premiers centimètres au dessous de la surface. Leur fréquence est, nous l'avons dit, sélectionnée par la taille des grains, du moins pour des avalanches induites par la gravité. De plus, la limite supérieure du niveau sonore ( $\simeq 105dB$ )

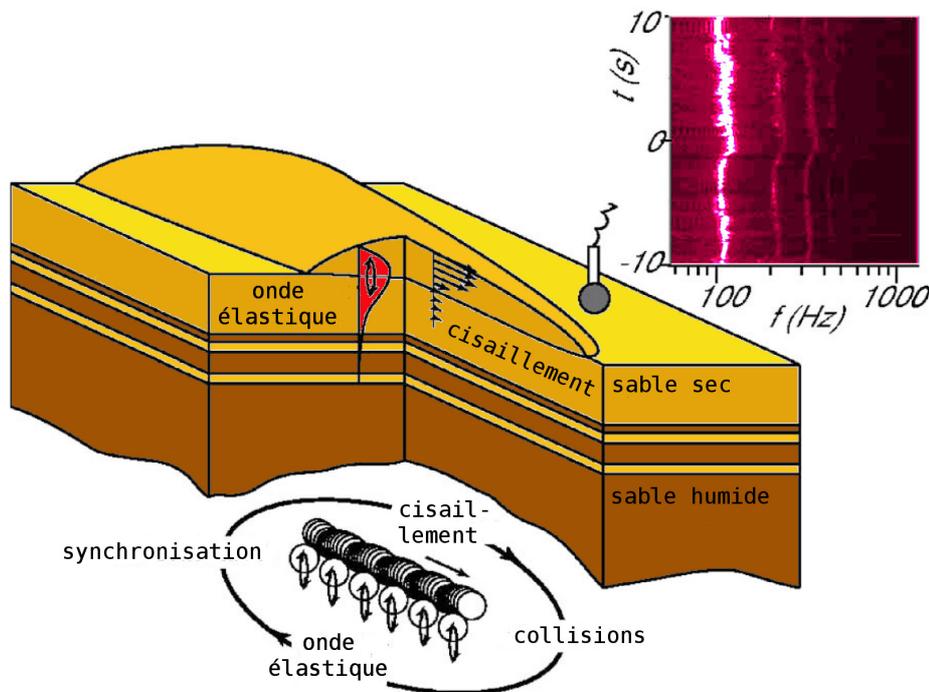


FIGURE 5.7 – Illustration schématique du mécanisme synchronisation onde acoustique-grains. Lors de l’écoulement d’une avalanche chantante le long de la face d’avalanche d’une dune, les grains sont soumis à la fois à des ondes de pression élastiques et à un cisaillement localisé à l’interface entre la couche en écoulement et celle qui reste statique. L’émission dans l’air est due à la vibration de la surface libre qui se comporte comme un haut-parleur. En encart, le sonogramme d’un enregistrement pris en aval de la position de déclenchement de l’avalanche. La fréquence est bien définie lorsque l’avalanche est homogène. La surface vibre tant dans l’avalanche ( $t > 0$ ) qu’en dehors ( $t < 0$ ). On n’observe pas de discontinuité à  $t = 0$ , lorsque le front d’avalanche atteint la position où est installé le microphone. Celui-ci est placé très proche du sol. Le mécanisme d’instabilité proposé par [59] résulte de l’interaction entre déformations plastiques en cisaillement et ondes élastiques : les collisions entre grains excitent des ondes élastiques qui en retour tendent à synchroniser ces collisions. Un mode d’instabilité consiste en (i) une onde acoustique guidée en surface et (ii) une probabilité pour que les collisions entre grains soient en phase avec l’onde acoustique.

correspond à l'amplitude de vibration pour laquelle l'accélération normale de la surface libre s'équilibre avec la gravité, c'est à dire lorsque les grains commencent à décoller de la surface. Selon [59], ces observations et ces mesures plaident en faveur d'un mécanisme qui implique les interactions entre les collisions à l'intérieur de la bande de cisaillement sous l'avalanche et les modes de déformation élastiques. Comme nous l'avons vu, les grains peuvent être soumis à deux modes de déformation distincts : le milieu granulaire peut simultanément subir des déformations plastiques irréversibles et des déformations élastiques des grains.

Au cours des collisions entre grains, une partie de l'énergie cinétique de translation est transférée en déformation des grains. Chaque collision excite non seulement des modes localisés, mais aussi des modes ressemblant aux modes de Fourier. Il faudrait, pour trouver la manière dont se distribue l'énergie entre les modes, projeter la forme de la source que constitue un grain faisant une collision sur la forme des modes propres de l'assemblée granulaire. Dans une avalanche silencieuse, le mouvement des grains n'est pas corrélé sur de longues distances : les contributions des collisions aux modes cohérents interfèrent destructivement. Le point clé du mécanisme proposé par [59] est qu'une onde élastique cohérente a tendance à synchroniser les collisions entre grains. Les collisions tendent alors statistiquement à renforcer l'onde constructivement. Cela suggère que le chant des dunes trouve son origine dans un mode d'interaction entre ondes et particules. Dans l'état de référence les collisions sont distribuées aléatoirement. Il est instable vis-à-vis de l'amplification d'un mode de déformation élastique cohérent et, simultanément, de la synchronisation des collisions d'une fraction des grains. Plus exactement, la probabilité d'observer une collision avec une certaine phase par rapport à l'onde devient de plus en plus biaisée vers une phase nulle, au fur et à mesure que le mode instable augmente d'amplitude. Pour que cette instabilité se développe, il est nécessaire que plus d'énergie soit transférée de la translation aux vibrations qu'il n'en sort par les bords de l'avalanche. Par ailleurs, il faut bien sûr que des ondes puissent se propager.

## Deuxième mécanisme : résonance à l'échelle de la couche de sable qui coule

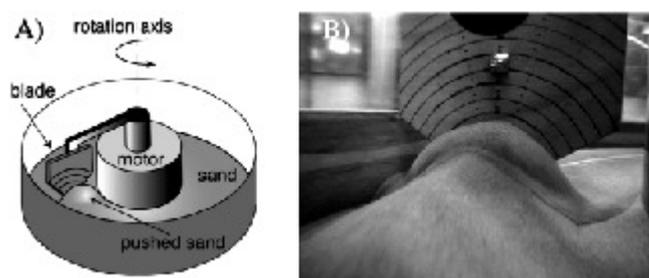


FIGURE 5.8 – Le montage expérimental de Douady *et al.* [60]. Un écoulement continu est créé en poussant une pale dans un canal annulaire. La hauteur de l'écoulement est mesurée directement par une caméra tournant dans le référentiel de la pale. Cette expérience permet de contrôler indépendamment la vitesse de la pale et la hauteur de l'écoulement.

par Douady *et al.* [60] qui ont induit un écoulement de petite taille  $H$  à l'aide d'une pale se déplaçant à vitesse contrôlée  $V$  (fig.5.8). Il n'est donc pas besoin d'avoir une dune de taille imposante ou une cavité résonante sous l'avalanche pour que le phénomène existe. La fréquence d'émission  $f$  augmente linéairement avec  $V/H$  ce qui montre que  $f$  n'est proportionnelle à  $\sqrt{g/d}$  que si l'avalanche est mue par la gravité. Le second point original de cet article est la preuve de l'existence d'un seuil pour l'instabilité du chant des dunes, qui dépend d'une manière complexe de  $V$  et de  $H$ . Sur cette base, Douady *et al.* [60] propose un mécanisme basé sur une résonance à l'échelle de l'avalanche. Etant donné l'ordre de grandeur de l'épaisseur en écoulement, il s'agirait d'une résonance d'ondes "de couplage" qui devraient se propager à  $c \simeq 0.94$  m/s au travers de l'avalanche. Cette vitesse étant beaucoup plus basse que celle mesurée pour les ondes élastiques de surface, il ne peut s'agir de celles-ci. Du reste, la nature exacte des ondes reste floue dans l'article. Dans la version de [60] publiée sur l'arxiv, on trouve l'idée que ces ondes naissent d'un couplage entre les grains et l'air interstitiel : les grains déterminent l'inertie et l'air la compressibilité.

### Troisième mécanisme : résonance de la couche de surface de la dune

Les mesures présentées par [59] montrent une localisation des ondes élastiques en surface et une vitesse du son à 100 Hz de l'ordre de 40 m/s. Des mesures indépendantes de "la" vitesse de propagation du son à la surface des dunes chantantes de Californie ont été réalisées par Vriend *et al.* [81] en utilisant une méthode de réfraction sismique couramment utilisée en géophysique : le signal est émis en frappant une plaque métallique avec une masse, il est ensuite enregistré sur une série de géophones. Son analyse permet *a posteriori* de déterminer la constitution d'un sol par l'étude des temps d'arrivée des paquets d'onde. La structure en couche des vitesses des ondes a ainsi été déterminée sur la grosse dune de Dumont, par conjonction avec de l'imagerie radar. Le profil obtenu peut se résumer ainsi : les ondes se propagent à une vitesse  $c \simeq 210$  m/s en surface,  $c \sim 350$  m/s entre 1 et 3 m de profondeur,  $c \sim 500$  m/s entre 3 et 7 m de profondeur. Selon Vriend *et al.* [81], ce fait expérimental contredit la théorie d'Andreotti [59]. L'article suggère que le chant des dunes, et en particulier la sélection de fréquence, provient en réalité d'une résonance sur l'épaisseur de la couche superficielle de la dune. En réalité, le calcul proposé *ne correspond pas à une résonance* mais est basé sur la condition d'accord du guide d'onde induit par la couche de sable humide. La dune est modélisée par deux couches superposées (fig.5.9). La couche supérieure représente la couche de surface de sable sec, d'épaisseur  $H$ , dans laquelle les ondes se propagent à la vitesse  $c_1$ . Elle recouvre une couche humide dans laquelle les ondes se propagent à la vitesse  $c_2$ . D'après [81], il ne peut y avoir émission de son que si toute l'énergie de l'onde reste localisée dans la couche de surface. Pour cette raison, il faut qu'il y ait réflexion totale de l'onde à l'interface séparant la couche humide et la couche sèche. De plus, il faut que l'onde revienne en phase à la surface pour y interférer de manière constructive. La condition de guide d'onde adéquate s'écrit  $\frac{2kH}{c_1 \cos \theta_1} = \frac{2\omega H}{c_1 \cos \theta_1} = 2n\pi$  et pour que l'onde soit réfléchié totalement à la surface, il suffit d'ajouter la condition  $\theta = \pi/2$  sur la relation de Snell-Descartes  $\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$ . Ce qui implique qu'à l'angle critique

la fréquence est égale à

$$f_R = \frac{c_1}{2H\sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{1/2}}} \quad (5.28)$$

On comprend qu'en dessous de cette fréquence de réflexion totale, l'énergie est perdue à chaque réflexion sur la couche humide. Vriend *et al.* [81] concluent que la fréquence de coupure doit donc être sélectionnée puisqu'elle correspond à "une condition de résonance" dans la direction transverse à la propagation.

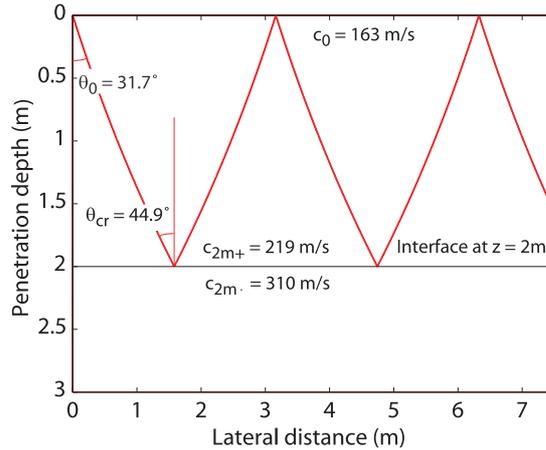


FIGURE 5.9 – Le système considéré par Vriend *et al.* ([81], [98]). Il s'agit d'un guide d'onde de sable sec dans lequel des rayons se réfléchissent par réflexion totale sur la surface de la couche de sable humide, de telle sorte que l'onde n'est pas dissipée. Ce qui, selon Vriend, permet d'expliquer le chant des dunes.

A l'appui de la théorie de la résonance, Vriend *et al.* [81] rapporte l'observation selon laquelle la dune continue à résonner et à émettre du son pendant plus d'une minute après que l'avalanche déclenchée ait cessé de couler. Il réfute l'idée selon laquelle la fréquence  $f$  d'émission est la conséquence du cisaillement dans l'avalanche. La contradiction porte sur des séries de mesures indépendantes ne vérifiant pas la loi d'échelle  $f \propto \sqrt{g/d}$  proposée précédemment. Par ailleurs, ce même article présente, sous forme d'un tableau, la comparaison entre la fréquence d'émission des avalanches et la fréquence de coupure du guide d'onde (que Vriend a calculé au moyen de l'équation 5.28) et conclut à leur similitude.

## Analyse des données de terrain sur la fréquence d'émission spontanée

Dans les articles d'Andreotti [59] et Douady *et al.* [60], la fréquence d'émission  $f$  est contrôlée par le taux de collision  $\dot{\gamma}$ , c'est à dire le rythme auquel les grains entrent en collision dans la zone de cisaillement. Bien sûr,  $\dot{\gamma}$  dépend de la manière dont l'avalanche est forcée. Si l'écoulement granulaire est induit par un gradient de pression, par exemple en poussant avec la main, le fessier ou une pale à vitesse constante,  $\dot{\gamma}$  peut varier, ainsi que la fréquence d'émission  $f$ . La reproduction du phénomène dans des expériences de laboratoire [60] a permis de produire un son

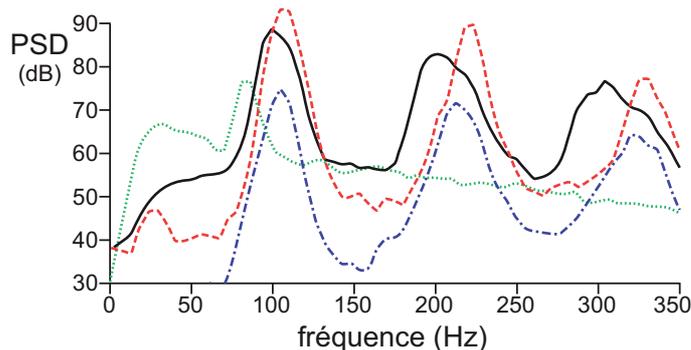


FIGURE 5.10 – La densité spectrale de puissance (PSD) émise par des avalanches homogènes et régulières est similaire à celle des avalanches spontanées. La puissance d’émission est l’intégrale de la PSD. Courbe verte : avalanche enregistré sur une dune de 4 m de hauteur à Tarfaya ( $d \simeq 183\mu\text{m}$ ). Courbe rouge : avalanche d’épaisseur  $H = 65$  mm sur une dune de 42 m de haut à Sidi-Akhfenir ( $d \simeq 163\mu\text{m}$ ). Courbe noire : avalanche d’épaisseur  $H = 15$  mm enregistrée sur la même dune. Courbe bleue : même avalanche ( $H = 15$  mm), mais le signal est mesuré au moyen d’un accéléromètre situé 60 mm sous la surface.

soutenu (et non des crissemets courts), en faisant varier de manière continue le rapport entre gravité et gradient de vitesse dans la couche cisillée.

Les avalanches spontanées sur la face d’avalanche de la dune sont contrôlées par la gravité d’une manière homogène et régulière. C’est uniquement dans ce cas, qu’il faut s’attendre à ce que  $\dot{\gamma}$  et donc  $f$  varient comme  $\sqrt{g/d}$ . On ne peut exclure une dépendance secondaire par rapport à la nature des grains et la présence de ponts capillaires. Ces conditions peuvent être reproduites lors de la glissade d’un expérimentateur poussant une avalanche, mais seulement si celui-ci prend garde à pousser avec son corps en adoptant une vitesse constante. Cela n’est jamais le cas dans les vidéos fournies par Vriend *et al.* pour illustrer leurs mesures. Dans ces animations le régime de poussée est saccadé. Lorsque le corps sert de pale pour induire l’écoulement, il en résulte un son de courte durée émis à basse fréquence comme celui présenté sur la figure 3 de Vriend *et al.* (point à 70 Hz). Il est assez clair qu’une telle avalanche inhomogène, ne ressemble pas au processus d’avalanche spontanée. Par conséquent, l’avalanche n’a pas de raison d’émettre un son soutenu à la fréquence  $f$ . *A contrario*, au cours des 13 campagnes de mesures au Maroc entre 2002 et 2008, près de 20 avalanches spontanées et 100 avalanches poussées par des expérimentateurs ont été enregistrées, sur des dunes allant de 4 à 42 m de haut. Ces mesures ont été menées à différents endroits et par des conditions météorologiques variées et ont toujours donné la même note à un ton près (*fig.5.10*). Bien sûr, des écoulements différents à la surface de la même dune produisent des émissions de fréquence différente. La controverse à ce sujet repose principalement sur la manière dont les avalanches sont produites sur la face d’avalanche des dunes. La plupart des gens génèrent spontanément des avalanches inhomogènes et intermittentes en faisant des mouvements de ciseaux avec les jambes, ce qui conduit à des variations de fréquence significatives. Il est nécessaire de pousser l’avalanche de manière uniforme pour obtenir des avalanches homogènes contrôlées par la gravité.

Au cours de la campagne d’Avril 2007, nous avons réalisé une série d’expériences

pour différentes épaisseurs de d'avalanche  $H$ . Nous avons mesuré par deux méthodes indépendantes l'épaisseur de coulée des avalanches.

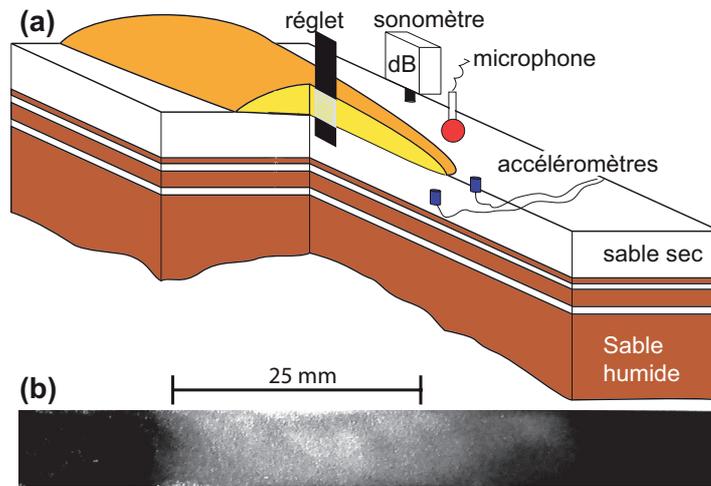
- **Méthode de la cordelette :** Il s'agit d'une méthode particulièrement rustique, fig.5.11(2-d). Elle est adaptée à la mesure non seulement de l'épaisseur déposée par l'avalanche, mais aussi de l'épaisseur érodée. Pour cela, une cordelette est attachée à une pierre. La pierre est enfoncée à 10 cm sous la surface et la cordelette est tendue perpendiculairement à la surface de la face d'avalanche. Celle-ci est repérée par un nœud sur la cordelette et sert de référence pour mesurer l'épaisseur. La mesure est effectuée une fois que l'avalanche s'est écoulée. Au cours de l'avalanche le nœud s'est décalé approximativement de  $\Delta$  le long de la pente. Ce décalage est approximativement égal à l'épaisseur érodée. La mesure de la profondeur à laquelle se trouve la corde permet de déterminer l'épaisseur de sable déposée par l'avalanche.
- **Méthode de la lame enduite de suie :** Pour étudier de manière qualitative le profil de vitesse des grains selon la profondeur d'une avalanche, il existe une méthode très simple, qui a été utilisée par Malloggi [99]. Elle nécessite l'utilisation d'un réglet fin mais rigide sur lequel on dépose une couche de suie en le passant au dessus de la flamme d'une bougie. Compte-tenu des conditions d'expérience, cette étape est réalisée préalablement, à l'abri. Sur le terrain, un expérimentateur se place à mi-pente de la dune et maintient le réglet en position, alors que le second, placé au sommet de la face d'avalanche, déclenche et pousse une avalanche homogène et régulière. Lorsque l'avalanche s'écoule autour du réglet, la suie est érodée progressivement par les grains. Le profil peut-être analysé plus finement en étudiant le profil des niveaux de gris, c'est ce qui a été fait pour déterminer la valeur de 25mm, fig.5.11(1-b).

Par ailleurs, la position de la surface libre et la vitesse des grains en surface ont été déterminées grâce au montage présenté sur la figure 5.11(2-a). Le principe est de filmer l'avalanche en un point situé à mi-pente de la face d'avalanche. Un piquet dont on connaît les dimensions est placé dans le champ de la caméra. Il est incliné d'un angle  $\theta \sim 45^\circ$  perpendiculairement à la direction de la pente.

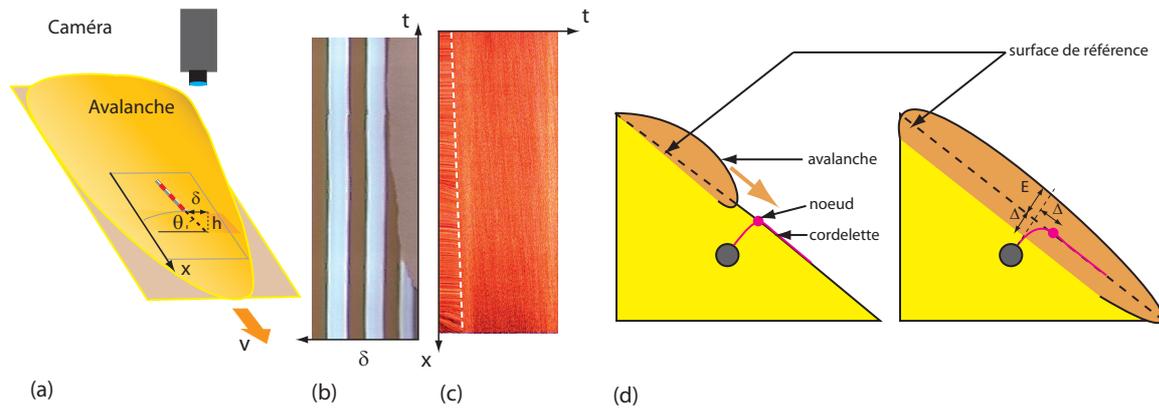
Nous avons mesuré la hauteur en fonction du temps et la vitesse des avalanches en réalisant des diagrammes spatio-temporels à partir des films de l'écoulement (fig.5.11(2-a)). La figure 5.11(2-b) montre l'une de ces mesures, les marques blanches du piquet servant d'échelle (18 mm). La base de temps est celle caméra (25 image/s). Comme le son est enregistré simultanément par le microphone de la caméra, la fréquence peut-être déterminée de manière synchrone.

J'ai mesuré l'émission spontanée du chant des dunes en utilisant deux types de capteurs, des microphones (embarqués ou non sur la caméra) et des accéléromètres. Les mesures effectuées sont de deux types : mesure de la fréquence par auto-corrélation du signal, ou celle de la densité spectrale d'énergie lorsqu'il s'agit d'obtenir l'amplitude des diverses composantes de Fourier du signal. Selon notre protocole, les avalanches étaient homogènes et régulières et la fréquence  $f$  produite indépendante de  $H$ . Cela démontre que la fréquence n'est en aucun cas sélectionnée par une résonance induite par la structure stratifiée de la dune. La reproduction du phénomène à petite échelle ([60]) en est une seconde preuve directe.

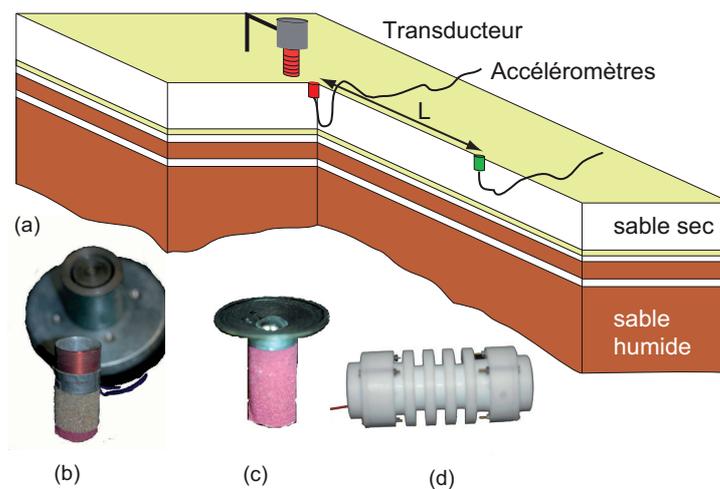
La figure 5.12 compare les prédictions de la fréquence d'émission pour des avalanches homogènes, proposées par Vriend *et al.* [81] – Fréquence  $f$  en fonction  $f_R$ ,



1- Schéma expériences de mesures de fréquence et de mise en évidence des bande de cisaillement sur une dune chantante



2- Expériences de mesures de fréquence et de vitesse et d'épaisseur d'avalanches



3- Expériences de mesures résonance et de mesure de propagation d'ondes de surface

FIGURE 5.11 – Les montages expérimentaux utilisés lors des campagnes de mesures sur le terrain.

cette dernière provient de la relation 5.28 (figure 5.12(a) - et par Andreotti [59] et Douady *et al.* [60] -  $f \sim 0.4\sqrt{g/d}$  (figure 5.12(b)) -. Nous avons tracé les résultats obtenus par Vriend *et al.* à Dumont [81] - et rien de plus que les résultats présentés dans le tableau ([81], *table 1*). Nous n'observons aucune corrélation entre la fréquence  $f$  et ce qui est indiqué comme être la fréquence de résonance  $f_R$  et qui est en réalité la fréquence de coupure du guide d'onde constitué par la couche sèche de surface. *A contrario*, en utilisant un choix de représentation différent de celui de Vriend, la relation entre  $f$  et  $\sqrt{g/d}$  apparaît très nettement. Cette accumulation de preuves montre que la fréquence de l'émission n'est pas contrôlée par la taille de la couche superficielle de la dune, comme le prétendent Vriend *et al.* ([81], [98]).

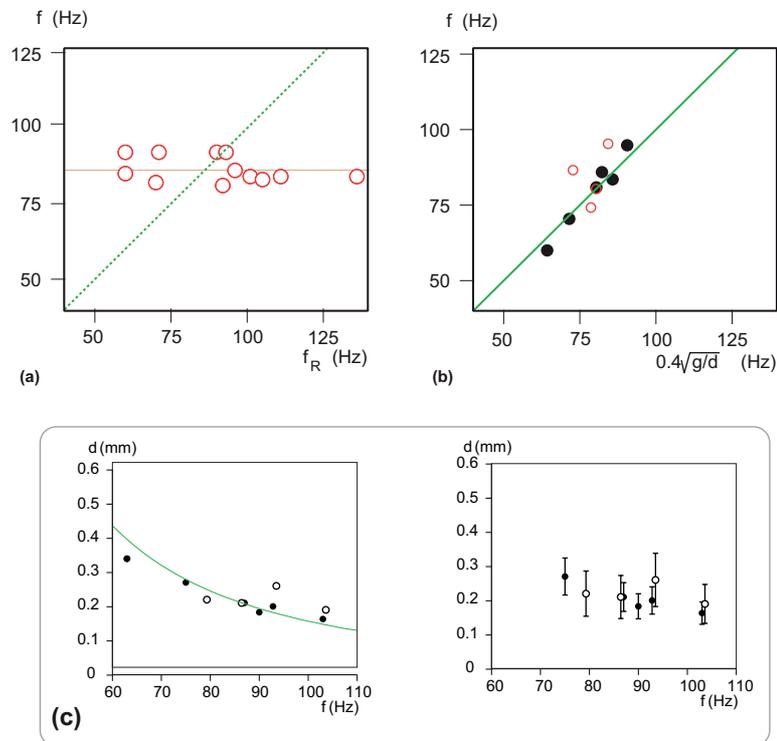


FIGURE 5.12 – Différentes représentations des mesures de Vriend *et al.* [81]. Sur tous les graphes, La ligne verte représente notre prédiction de la fréquence. (a) Fréquence d'émission  $f$  en fonction de la fréquence  $f_R$  au dessus de laquelle la réflexion sur la couche humide est totale. Dans l'article  $f_R$  est interprété à tort comme une fréquence de résonance. (b) Fréquence d'émission en fonction de la fréquence  $f = 0,4\sqrt{g/d}$  de notre modèle. Les symboles ( $\bullet$ ) correspondent aux avalanches homogènes et ( $\circ$ ) aux données de [81]. (c) Analyse critique de la représentation graphique utilisée par Vriend *et al.* [81]. Graphique du haut, même ensemble de données que (b) mais le diamètre moyen des grains du sable est représenté en fonction de la fréquence. Graphique du bas, même ensemble de données que (b) en retirant la prédiction et en ajoutant l'erreur sur la distribution du diamètre des grains, il s'agit de [81] fig.3 qui ne montre pas de corrélation apparente entre fréquence et diamètre des grains.

## Propagation d'ondes acoustiques

### 3.3 Dispositif de mesure sur le terrain

Nous présentons ici une série de mesures que nous avons effectuées sur le terrain, au Sahara Atlantique. Chronologiquement, ces expériences sont antérieures aux expériences de laboratoire présentées au chapitre 3. Elles ont permis d'affiner le développement des méthodes expérimentales.

Les expériences de propagation d'ondes et de résonance effectuées sur le terrain sont basées sur l'utilisation du même matériel, mais les modes opératoires diffèrent légèrement. Le montage expérimental utilisé sur le terrain (figure 5.11.3-a) est constitué de deux ensembles indépendants, le premier servant à la génération et l'émission des signaux et le second à la réception et à l'acquisition.

*Le dispositif de génération* est composé d'un baladeur numérique sur lequel les signaux d'excitation sont pré-enregistrés. Le signal de sortie passe ensuite dans un amplificateur aux bornes duquel est branché un transducteur électromagnétique. J'ai utilisé différents vibreurs en fonctions des expériences à réaliser, fig.5.11(3-b..d). Pour les expériences de propagation d'ondes sagittales, j'ai utilisé le vibreur (3-c), fabriqué à partir d'un haut-parleur monté sur un cylindre de papier de verre grossier. Pour les expériences de propagation d'onde transverses, j'ai utilisé le vibreur (3-d) déjà décrit dans le chapitre 3. Pour les expériences de résonance, j'ai utilisé le dispositif (3-b). Il est conçu à partir d'un haut-parleur dont on a supprimé la membrane. L'aimant est placé sur un support comme représenté sur la figure (3-a). La bobine, placée dans l'entrefer de l'aimant, est solidaire d'un cylindre de papier de verre qui, enterré sur une partie de sa hauteur, assure la liaison mécanique avec le sable. La caractéristique essentielle de ce montage est que le rappel élastique est assuré uniquement par le matériau granulaire. Ce montage, bien que rudimentaire, permet d'éviter les effets de filtrage mécanique d'un haut-parleur classique qui peuvent masquer les résonance réellement liées aux caractéristiques mécaniques du matériau granulaire.

*Le dispositif de réception* comprend les capteurs, les conditionneurs et le matériel d'enregistrement. Les capteurs sont des accéléromètres uni-axe. Lors des expériences de terrain, ils sont disposés de telle sorte que leur câble est enterré pour éviter les perturbations liées au vent et au transport de sable juste au dessus de la surface des dunes. Ces accéléromètres sont connectés à des conditionneurs dont la sortie est branchée sur un enregistreur. Deux types d'enregistreurs ont été utilisés, un enregistreur DAT (Digital Audio Tape, trop sensible au sable) qui a été remplacé par un ordinateur portable. L'ensemble du dispositif d'émission et de réception du signal est transportable et confiné dans une boîte étanche au sable.

Sur le baladeur numérique, les signaux pré-enregistrés sont de différents types :

- *Paquets d'onde gaussiens* : ils sont générés par série de dix, à même fréquence, ce qui permet d'effectuer une moyenne sur les signaux reçus. L'intervalle de fréquence étudié est de 50 à 1000 Hz par pas de 50 Hz. Après moyenne, les signaux enregistrés sur les capteurs sont démodulés par convolution avec un paquet d'onde gaussien (transformée de Tabor). En déterminant les maxima de la transformée, on détermine la vitesse de propagation par analyse du temps de vol.
- *Rampes de fréquence* : il s'agit de signaux de forme sinusoïdale dont la phase

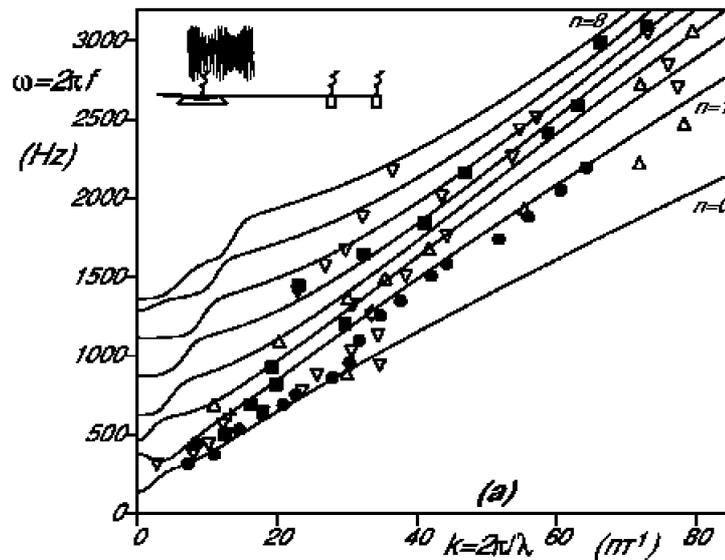


FIGURE 5.13 – (a) Relation de dispersion des ondes de surfaces élastiques sur la face d’avalanche d’une dune chantante. Un signal sinusoïdal est émis par un haut parleur, aligné avec des transducteurs distants de 5 cm ( $\nabla$ ), 15 cm ( $\triangle$ ), 25 cm ( $\blacksquare$ ) and 42 cm ( $\bullet$ ). Les lignes continues représentent la relation de dispersion pour les modes sagittaux des ondes de Rayleigh-Hertz en prenant comme constante de rigidité  $\Gamma \simeq 50 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{5/6}$  de sorte que le mode fondamental s’ajuste sur les données expérimentales à basse fréquence. La fréquence de coupure est déterminée indépendamment fig.5.15.

croît linéairement avec le temps. la fréquence initiale est 50 Hz et la fréquence finale est 1000 Hz. La durée de balayage est de 30 s. Le signal enregistré est traité *a posteriori*, on effectue une démodulation pour déterminer l’amplitude du signal et déterminer les fréquences de résonance.

## Mesures de terrain

Des mesures de propagation ont été réalisées sur le terrain dans différentes situations : sur la face au vent de dunes, sur la face d’avalanche et sur des proto-dunes. Selon les conditions, le sable pouvait émettre spontanément du son, ou non. Les mesures présentées sur la figure 5.14 ont été réalisées sur la face d’avalanche de la barkhane (dune en forme de croissant) de 42 m à Sidi Akhfenir (Maroc) où le sable est chantant – mais les résultats que nous présentons à la fin de ce chapitre montrent qu’il n’y a pas de différences d’un point de vue mécanique entre sable chantant et sable normal. La mesure de l’épaisseur de sable sec se fait directement et vaut, dans le cas présenté ici approximativement 50 cm.

On excite des ondes sagittales au moyen du vibreur représenté sur la figure 5.11.3-c. Le signal émis étant un paquet d’onde gaussien de fréquence  $f = 450$  Hz. En réception, les accéléromètres sont disposés verticalement. Le capteur dont le signal est tracé en rouge sert de référence, il est placé à 10 cm du vibreur. Le second capteur permet d’étudier le signal (en vert), lors de sa propagation, pour les positions successives  $L$  comprises entre 1.5 et 8 m. L’amplitude est fortement

atténuée entre 1.5 et 4 m. Seuls les résultats pour des distances inférieures à 4 m sont présentés, au delà, le signal n'est pas distinguable du bruit. Sur la figure 5.14, les amplitudes ont été renormalisées indépendamment pour montrer la forme du signal d'un point de vue qualitatif. Les courbes épaisses continues représentent le résultat de la démodulation et les courbes fines le signal moyenné.

Le résultat important de ces mesures est que le paquet d'onde reçu à distance montre plusieurs lobes. Nous l'interprétons comme la figure d'interférence temporelle des différents modes de même fréquence et dont la différence de vitesse est trop faible pour pouvoir les séparer dans les conditions d'expérimentation. Les limites à l'exploitation de l'expérience sont importantes : contrairement aux études ultérieures en laboratoire, la forme de la source n'est pas suffisamment maîtrisée pour pouvoir sélectionner les modes émis ; les mesures sont trop espacées pour pouvoir sereinement reconstruire vitesse de phase et vitesse de groupe des premiers modes. Les vitesses mesurées sont beaucoup plus élevées (autour de 40 m/s pour le mode le plus bas) que la valeur  $\mathcal{O}(1)$  m/s nécessaire pour expliquer le seuil d'émission, dans l'explication proposée par Douady *et al.* [60]. Nous n'avons pas réussi à effectuer des mesures de vitesse du son contrôlées lorsqu'une avalanche se produit. On pourrait alors imaginer que la vitesse du son chute significativement dans l'écoulement.

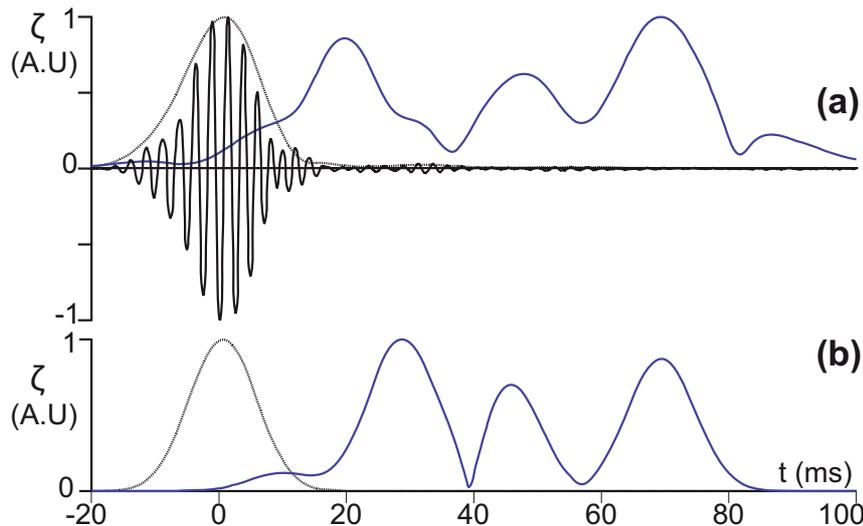


FIGURE 5.14 – (a) Mesures qualitatives de propagation d'un paquet d'onde gaussien monochromatique sagittal de fréquence 400 Hz sur la face d'avalanche de la barkhane de 42 m à Sidi Akhfenir (Maroc). L'enveloppe du signal est obtenue en effectuant la transformée de Tabor. La courbe noire représente le signal à 10 cm de la source, la courbe noire pointillé l'enveloppe de son amplitude à la fréquence émise. La courbe bleue représente l'enveloppe de l'amplitude du signal à la fréquence émis sur un capteur placé à 2.20 m de la source. Ces deux signaux peuvent être comparés à des signaux synthétiques (b), calculés pour les mêmes paramètres à partir du modèle que nous avons présenté dans le chapitre 2. Nous associons les nombreux lobes apparaissant sur le signal mesuré à distance comme la preuve de l'existence de nombreux modes de surface.

En conclusion de ce paragraphe, cette expérience nous permet de mettre en évidence qualitativement la propriété de propagation multi-modes d'un matériau granulaire, conséquence du gradient d'indice induit par la gravité.

## Comparaison avec les mesures de Vriend *et al.*

Il est facile de réaliser que si l'on excite à coup de masse un milieu à gradient d'indice, le signal émis est large bande et la distribution d'énergie sur les différents modes n'est pas contrôlée. Il en résulte la propagation de nombreux paquets d'onde correspondant aux différents modes de surface. De plus cette méthode ne donne accès qu'à la vitesse de groupe pour une fréquence d'excitation moyenne, que Vriend *et al.* ne contrôlent ou ne spécifient pas. Par conséquent, en utilisant une telle méthode, et en ne lisant que la composante multi-modale du sismographe obtenu par des capteurs placés en surface, nul ne peut conclure à l'existence de couches multiples et encore moins en déterminer les fréquences de résonance. Pour faire la preuve de l'excitation d'ondes profondes, il faut donc impérativement réaliser des mesures avec des transducteurs enfouis dans le volume de la dune. Nous avons fait ce type de mesure et conclu que, pendant l'avalanche, les vibrations dans le sol sont fortement atténuées dès 60 mm en dessous de la surface. Cela montre à nouveau que le chant des dunes n'est pas lié à un mode résonant sur l'épaisseur de la couche sèche.

En conclusion, la fréquence déterminée par Vriend *et al.* [81] n'a rien à voir avec une fréquence de résonance, car les mesures présentées montrent une propagation et non une vitesse de groupe nulle. Mais elle n'a probablement rien à voir non plus avec la fréquence au dessus de laquelle les ondes sont guidées sans perte dans la couche de surface.

## Guide d'onde et seuil d'instabilité

### 3.4 Résonance vs condition de réflexion totale

Nous avons montré dans le chapitre 2, que du point de vue acoustique, un milieu granulaire d'épaisseur  $H$ , sous gravité, se comporte comme la superposition d'un guide d'onde à gradient d'indice et d'un guide d'onde géométrique caractérisé par des fréquences de coupures. Ces fréquences correspondent à des modes résonants. Comme le système n'est pas homogène verticalement, les modes résonnants ne sont pas des modes de Fourier. Ils ne se propagent pas car leur vitesse de groupe est nulle. Aucune onde de fréquence inférieure à la fréquence de coupure associée au mode fondamental ne peut se propager sans atténuation. L'influence de l'épaisseur  $H$  de la couche sèche est en fait limitée à un intervalle de fréquence très étroit. À partir du moment où la profondeur  $H$  est plus grande que la longueur d'onde, en pratique pour des fréquences  $f$  supérieures de 25% à  $f_R$ , le milieu peut être considéré comme infini et les effets de la gravité l'emportent [79].

Par définition, une résonance est un maximum d'amplitude lorsqu'un paramètre de contrôle varie. Ici, la résonance vient du fait que l'énergie injectée par la source s'accumule, si l'onde acoustique ne se propage pas. La condition de réflexion totale utilisée par Vriend *et al.* ([81], [98]) n'est pas une résonance car il n'y a pas de maximum d'amplitude associé. En dessous de cette condition, l'onde s'atténue spatialement par radiation vers le bas. Au dessus, l'énergie de l'onde se conserve de sorte que l'amplitude de l'onde est partout égale. Au point critique, il n'y a rien de particulier pour l'amplitude de l'onde : comme elle se propage, l'énergie ne s'accumule pas.

## Mesures de résonance sur le terrain

Les dunes des déserts contiennent de grandes quantités d'eau piégées entre les grains par capillarité. De plus les avalanches successives créent une stratification où alternent successivement des couches humides et sèche et qui se termine par une couche sèche à proximité de la surface. Nous avons mesuré directement la fréquence de résonance  $f_R$  qui en résulte pour comparaison avec la fréquence émise spontanément par le chant des dunes. Des mesures de résonance ont été effectuées sur une dune de 4 m de haut ( $N27^\circ90 E12^\circ39$ ) et, plus précisément, sur une corne de cette dune dont la déclivité plus lente permet d'effectuer des mesures pour une épaisseur contrôlée. Dans les conditions de cette expérience, le sable est sec et la condition aux limites rigide est assurée par le sol, dont la nature est un plateau calcaire quasi nu.

Sur la mesure présentée la figure 5.15(a), l'épaisseur de sable est d'approximativement 50 cm, ce qui est comparable à l'épaisseur de la couche sèche sur les méga-barkhanes chantantes. L'expérience a été réalisé en émettant une rampe de fréquence au moyen du vibreur 5.11(3-c). Le capteur utilisé est un accéléromètre placé à environ 10 cm de la source. La figure 5.15(a) représente la démodulation de l'amplitude en fonction de la fréquence, elle montre un pic à la fréquence  $f_R = 64$  Hz, que nous interprétons comme la première fréquence de résonance du système. Pour une épaisseur de 1 m la résonance devient difficilement visible et se trouve en dessous de 50 Hz.

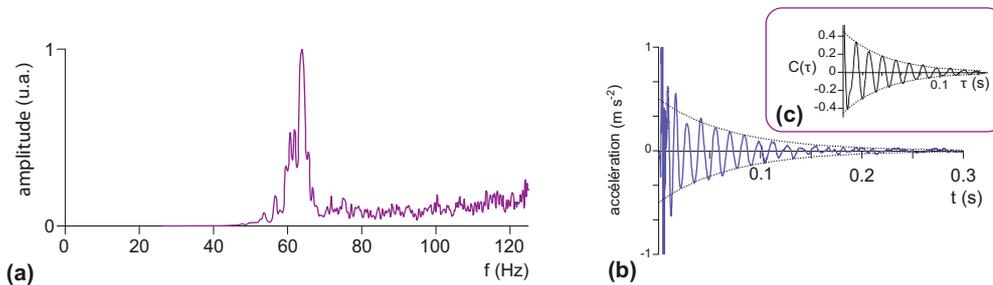


FIGURE 5.15 – (a) Démodulation de l'amplitude d'une rampe de fréquence obtenu sur la corne d'une dune barkhane de 4 m hauteur. La condition aux limites inférieure est le sol et l'épaisseur de sable à la position de la mesure est de  $\simeq 50$  cm. Le capteur est placé à  $\sim 10$  cm de la source. (b) L'expérience du tambour : réponse impulsionnelle d'une dune à une tape normale, *extrait de* [79]. Après que les modes de propagation excités ont disparu, les modes résonnants, qui ne se propagent pas, restent. La queue qui suit l'impulsion montre une fréquence bien définie, dont la fréquence est donnée par le premier maximum de la fonction d'auto-corrélation (c). Dans les conditions de cette expérience, la fréquence mesurée est de 73 Hz pour épaisseur de sable sec  $H \simeq 50$  cm.

Nous pouvons comparer la fréquence de résonance ainsi obtenue avec celle en réponse à une impulsion, réalisée sur la méga-barkhane de Sidi-Akhfenir [79]. Il s'agit du signal enregistré au moyen d'un accéléromètre placé en surface. Le signal émis correspond à une "tape" de l'expérimentateur effectuée du plat de la main (rappelant la manière de battre un tambour) dans le voisinage du capteur. Le signal enregistré est présenté sur la figure 5.15(b), on observe à la suite du choc que le signal

s'amortit sur un laps de temps d'environ 20 ms en présentant des oscillations dont la période est bien définie. Nous mesurons celle-ci en effectuant l'auto-corrélation du signal, le premier maximum à droite de l'origine nous donne la pseudo-période du signal :  $f_R = 73$  Hz. Cette fréquence de résonance correspond dans notre théorie à  $H = 47$  cm, ce qui est la hauteur typique à laquelle la première couche humide se trouve. Le facteur de qualité, défini comme le produit de la pulsation et du temps de relaxation est à peu près 33.

Dans les deux cas, la fréquence fondamentale typique du chant des dunes est d'environ 100 Hz. Par conséquent, compte-tenu de l'écart important entre la mesure de résonance et la fréquence d'émission du chant des dunes, nous affirmons qu'un phénomène de résonance de la couche de sable sec située entre la surface libre et la couche humide sous-jacente n'est pas à l'origine du phénomène expliquant le chant des dunes.

Il n'est pas encore totalement clair que la zone humide à l'intérieur de la dune joue le rôle d'une condition aux limites rigide. Bien sûr, le matériau poreux que constituent les grains n'est pas saturé en eau (ce qui créerait une forte discontinuité de l'impédance) : le sable devient cohésif à cause de la formation de ponts capillaires entre grains. Par conséquent la force normale exercée par les grains, et donc la vitesse du son augmente. Comme la pression capillaire est proportionnelle à la tension de surface  $\gamma$  divisée par le diamètre des grains  $d$ , elle vaut quelques fois la pression induite par la gravité à 10 cm en dessous de la surface. Du fait du faible exposant de la relation vitesse du son-pression, la vitesse du son ne devrait pas varier beaucoup à l'interface entre sable sec et sable humide (variation typique :  $\sim 10\%$  à 50 cm en dessous de la surface). Cependant, le second effet des ponts capillaires est d'acroître la dissipation d'énergie dans l'eau par amortissement visqueux. La zone la plus dissipative est probablement entre les grains, à l'intérieur de l'aire de contact. En utilisant les estimations usuelle de la géométrie des contacts microscopiques, nous trouvons que le temps de relaxation en présence d'eau est  $\simeq 1$  ms, ce qui est cohérent avec les mesures effectuées à haute fréquence par [100]. Cette valeur est deux ordres de grandeur plus petite que pour le sable sec. En conclusion, la couche humide agit probablement comme un milieu dissipatif très efficace pour atténuer les ondes acoustiques.

## Seuil du phénomène

Le paragraphe précédent suggère une explication alternative pour le seuil d'instabilité mesuré systématiquement par [60] : les dunes ne peuvent pas chanter si la couche supérieure de sable sec est trop mince, ce qui empêche la propagation des ondes élastiques de surface. Pour une émission de  $f = 100$  Hz, la prédiction minimum pour la profondeur  $H$  est approximativement 7,5 cm de profondeur - par comparaison, les avalanches typiques sont épaisses de 2 cm à 5 cm. Comme le mentionne [60], des écoulements d'épaisseur trop faible n'émettent pas de son audible. Le seuil de l'instabilité a été mesuré par [60] dans une expérience où la hauteur de  $H$  et la vitesse  $V$  de l'avalanche sont contrôlées. Il faut remarquer que bien que  $H$  corresponde à l'échelle typique de hauteur, la géométrie de l'écoulement est relativement compliquée. Il n'est donc pas question ici de calculer la première fréquence de résonance mais de l'estimer grossièrement. Les expériences montrent

	$f_0$ (Hz)	$\Delta F$ (Hz)	$Q = \Delta F/f_0$
Pyla	282	14	20
Chantant	290	10	29
Sili 150 $\mu$ m	397	22	19

TABLE 5.1 – Facteur de qualité pour 3 matériaux granulaires différents.

que la fréquence d'émission  $f$  et que le seuil d'émission dépendent de la vitesse  $V$  et de la hauteur  $H$  d'une manière complexe (figure 5.16). Nous avons tracé sur ce même graphe la courbe à gauche de laquelle les ondes ne peuvent plus se propager à cause de la coupure du guide d'onde. Les paramètres de la relation de dispersion des ondes élastiques ont été calés par rapport aux mesures faites in-situ sur les dunes chantantes naturelles (même sable). La fréquence d'émission  $f$  à proximité du seuil s'ajuste par une relation linéaire de  $V/H$  [fig.5.16]. Il faut remarquer que  $f$  tend vers la valeur mesurée pour les avalanches gravitaires homogènes (100 Hz) dans la limite des faibles vitesses ou des fortes hauteurs. Ce n'est donc pas une loi de proportionnalité qui est obtenue. La profondeur effective du guide d'onde a été prise égale à la hauteur de l'avalanche  $H$ . Nous voyons que le seuil prédit se rapproche suffisamment des points expérimentaux, sans paramètre ajustable. Cela suggère que l'on peut entendre le chant des dunes lorsque les ondes élastiques sont capables de se propager étant donnée la hauteur de sable. Dans ce cas, le sable humide a un comportement effectif soit proche de celui d'une limite rigide en coupant les modes de basse fréquence qui sinon pourraient se propager dans du sable sec.

## Spécificité des grains chantants

### Vitesse du son et atténuation

Il a été montré que les grains chantants sont couverts d'une couche spécifique de gel de silice [101]. Plus exactement, l'article présente des mesures par spectroscopie infra-rouge montrant l'existence de liaisons O-H en surface des grains, interprétées comme étant la signature d'une présence d'eau piégée. De là, les auteurs concluent hâtivement à la présence de gel de silice, qui est un dessiccateur puissant. Cette couche de gel pourrait assécher le contact entre les grains et par conséquent diminuer l'amortissement des ondes. Elle pourrait aussi affecter les vitesses de propagation, le gel étant plus mou que le quartz en bloc. Cela expliquerait alors pourquoi tous les grains ne chantent pas.

Nous avons effectué des mesures de résonance dans un résonateur carré, sous gravité. Nous avons comparé la position et la largeur du premier pic de résonance pour des grains non-chantant (dune du Pyla) et pour des grains chantants (megabarkhane de Sidi-Aghfinir). Nous avons fait les mesures soit sur des grains sortis de l'étuve réglée sur 70° C, soit sur des grains ayant séjourné dans la pièce d'expériences pendant plusieurs jours. Les résultats sont très clairs : il n'y a aucune spécificité acoustique dans les grains chantant. Les modules élastiques apparents ne diffèrent que de quelques pour-cents. Le facteur de qualité mesuré varie entre 20 et 30 pour les deux types de sables, quand ils sont secs. Ce facteur de qualité diminue fortement, sans changement notable de vitesse du son, pour du sable humide.

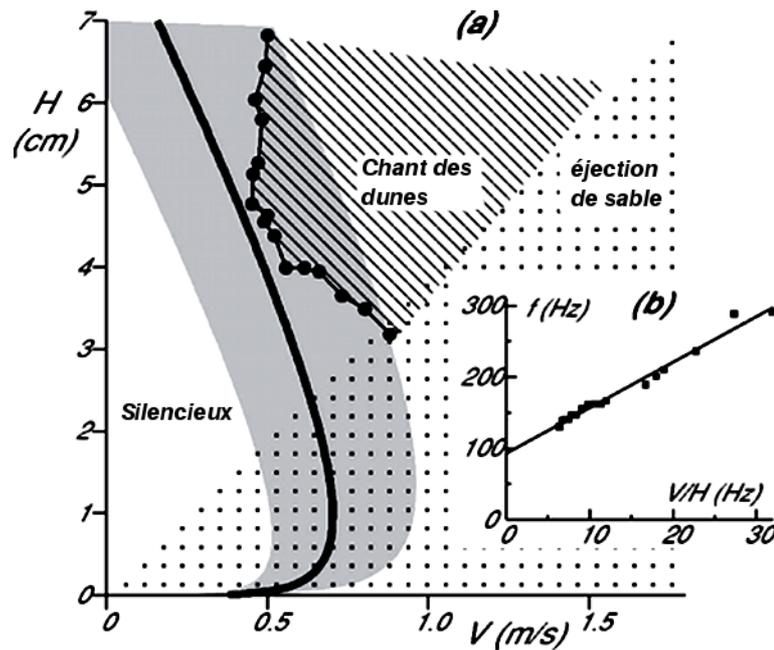


FIGURE 5.16 – Espace des paramètres pour l’émission de son de l’expérience de laboratoire de Douady *et al.* ([60]-fig.3) pour des vitesses  $V$  et des hauteurs  $H$  du tas de re-circulation poussé par la pale. Les symboles  $(-\bullet-)$  représentent les données expérimentales. La zone hachurée est la région des paramètres pour laquelle, l’émission sonore est spontanée. La région pavée de petits points est celle pour laquelle le sable est éjecté. La ligne  $(-)$  montre la limite prédite à gauche de laquelle les ondes de surface ne peuvent pas se propager à cause de la fréquence de coupure du guide d’onde. Comme les sources d’erreur sont importantes (en particulier sur  $\Gamma$ ), nous avons représenté les barres d’erreur par la zone grise. Cependant, la ligne continue a été obtenue sans aucun paramètre ajustable.  $\Gamma$  est déterminé à partir du même sable provenant du Sahara Atlantique que pour (fig.5.13). (b) La fréquence d’émission a été prise du sous-ensemble des données de Douady *et al.* [60] mesurées au voisinage du seuil d’instabilité et tracé en fonction de  $V/H$ . La relation s’ajuste bien avec  $f = 0.38\sqrt{g/d} + 6.4V/H$ .

## Formation de bandes de cisaillement

La manière de couler constitue l’une des propriétés les plus flagrantes des avalanches chantantes : vu du dessus, le sable coule en blocs cohérents d’une vingtaine de centimètres d’échelle caractéristique. A l’intérieur de ces blocs, la vitesse de surface est homogène. Entre les blocs, on observe des zones de variation rapide de la vitesse des grains. Cela suggère donc que, contrairement aux écoulements de billes de verre étudiés au laboratoire, le cisaillement est localisé entre l’avalanche et la partie statique de la dune.

Nous avons déjà décrit la mesure basée sur l’érosion d’une lame mince recouverte de suie. On peut observer sur l’image de la lame faite en observant la source lumineuse en réflexion sur le réglet, que sur l’épaisseur de l’avalanche, l’érosion de la suie est homogène. Si l’on fait l’expérience équivalente au laboratoire, avec des billes de verre dans un canal vitré, on observe une variation continue de l’érosion (i.e. des niveaux de gris) qui donne une mesure semi-quantitative du profil de vitesse.

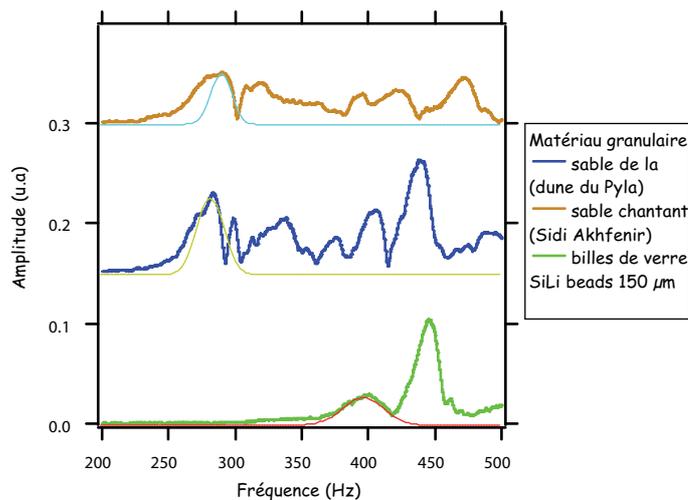


FIGURE 6.13 – Mesure du premier pic de résonance pour trois milieux granulaires différents.

Cela amène à penser que dans l’avalanche l’écoulement est essentiellement solide, les mouvements des grains étant corrélés à longue distance. Dès lors, les grains de l’avalanche restent en contact les uns avec les autres sur l’épaisseur de celle-ci. La transition entre la partie où la suie est conservée et celle érodée se fait sur une épaisseur de quelque millimètres, ce qui donne une borne supérieure pour l’épaisseur de la bande de cisaillement.

La transition entre écoulement granulaire inertiel et écoulement quasi-statique est l’un des problèmes ouverts majeurs de la physique des milieux granulaires. Par conséquent, nul ne sait dans quelles conditions un écoulement sur plan incliné forme une bande de cisaillement et dans quelles conditions le gradient est réparti sur toute l’épaisseur de la coulée. On peut supposer que cela constitue une condition nécessaire à l’obtention d’une émission sonore spontanée.

## Conclusion : un mécanisme alternatif d’amplification

L’expérience de l’instabilité lors de la vidange d’un tube suggère un mécanisme d’amplification alternatif pour le chant des dunes. Si l’on va à l’épure, le principe de cette instabilité repose sur deux ingrédients. Il faut d’une part qu’un écoulement soit bordé d’une bande de cisaillement qui amplifie les ondes de pression. Il faut d’autre part qu’il y ait une structure de guide d’ondes qui renvoie les rayons acoustiques sur l’interface amplificatrice. C’est précisément le cas pour le chant des dunes tant dans la version naturelle [59] que dans la version de laboratoire [60]. Les géométries diffèrent par deux aspects : (i) la présence de la surface libre plutôt qu’une seconde bande de cisaillement et (ii) l’inclinaison sur l’horizontale. Dans la mesure où la surface libre réfléchit les ondes acoustiques, cela ne constitue pas un problème. D’autre part, l’inclinaison et la surface libre modifient la structure de l’état de base qui est perturbé et donc les modes qui en résultent. Nous avons effectué quelques expériences préliminaires avec un tube incliné. Le phénomène résiste à une inclinaison de la cellule mais le taux de croissance de l’instabilité chute fortement au point de le rendre inaudible lorsque l’on arrive à des angles de 30 degrés sur l’horizontale.

Cela signifie donc que le phénomène du chant des dunes présente des similitudes flagrantes avec l'expérience de la vidange du tube, mais que l'intensité résultante peut dépendre de manière critique de la nature des grains.

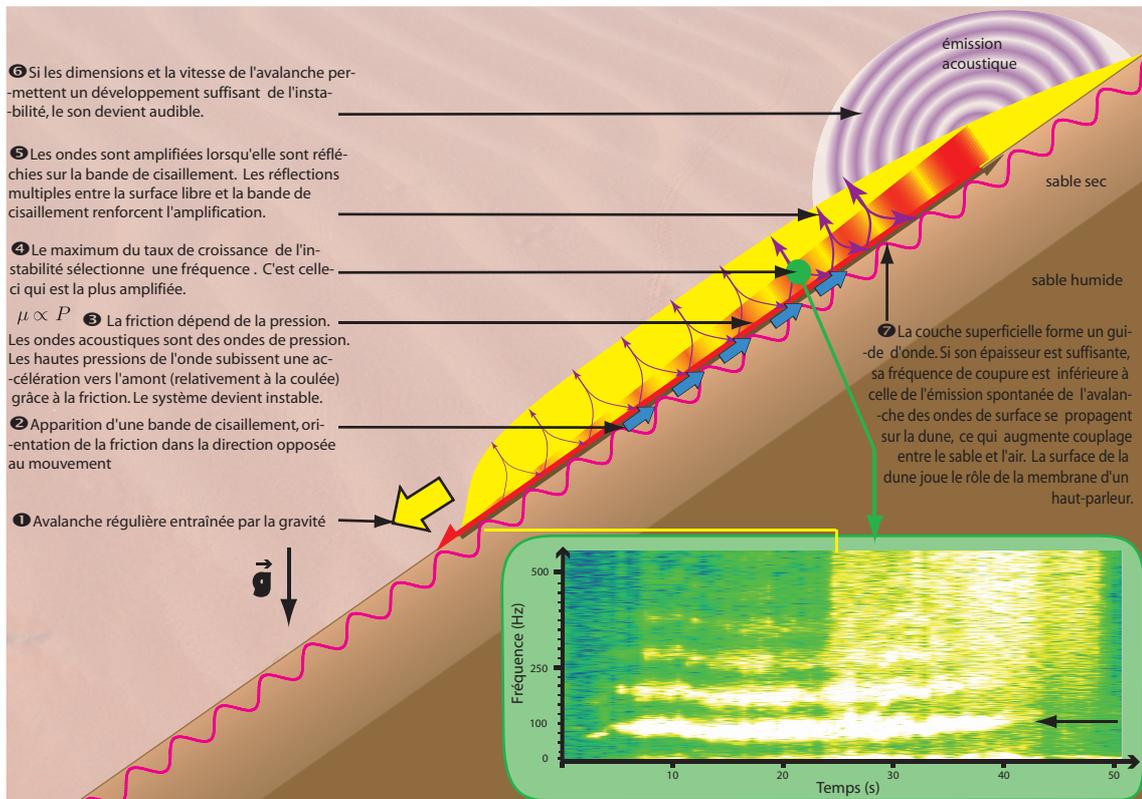


FIGURE 6.14 – Un mécanisme alternatif d'amplification pour le chant des dunes.

Dans cette hypothèse, résumée sur la figure 6.14, la fréquence  $f$  ne résulterait ni d'une résonance sur l'épaisseur de la couche sèche, ni d'une résonance sur l'épaisseur de l'avalanche, ni même sur la fréquence de collision des grains, mais du maximum de taux de croissance de l'instabilité. Dans le cas du tube, on peut observer que la fréquence est de l'ordre de la centaine de Hertz, décroît avec la taille des grains et dépend relativement peu de la taille du tube. Si l'on remplace la taille du tube par celle de l'avalanche, c'est très exactement ce qui est observé dans le cas du chant des dunes. Enfin, la saturation de l'amplitude dans le cas du tube se produit lorsque l'accélération est de l'ordre de  $g$ . C'est à nouveau exactement ce qui se produit pour le chant des dunes. Cette thèse m'amène donc à amplifier la controverse en proposant un quatrième mécanisme sur la base de l'analogie avec l'expérience du tube chantant, totalement indépendant des trois premiers mécanismes proposés.



# Bibliographie

- [1] R.L. Brown and J.C. Richards. *Principles of powder mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1970.
- [2] Coussot P. and Ancey C. *Rheophysics of Slurries and Suspensions*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [3] Charles Augustin de (1736-1806) Coulomb. *Théorie des machines simples; Nouv. éd. / , en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages*. 1821.
- [4] J. Duran. *Sands, Powders, and Grains : An Introduction to the Physics of Granular Materials*. Springer, New York, 1999.
- [5] Ivana Agnolin and Jean-Noël Roux. Internal states of model isotropic granular packings. iii. elastic properties. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 76(6) :061304, 2007.
- [6] I. Agnolin and J.-N. Roux. On the elastic moduli of three-dimensional assemblies of spheres : Characterization and modeling of fluctuations in the particle displacement and rotation. *International Journal of Solids and Structures*, 45(3-4) :1101 – 1123, 2008.
- [7] Michel Jean Farhang Radjai, Dietrich E. Wolf and Jean-Jacques Moreau. Bi-modal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 80(1) :61–64, Jan 1998.
- [8] J.-P. Bouchaud M. E. Cates E. Clément L. Vanel, P. Claudin and J. P. Wittmer. Stresses in silos : Comparison between theoretical models and new experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 84(7) :1439–1442, Feb 2000.
- [9] Junfei Geng, G. Reydellet, E. Clément, and R. P. Behringer. Green’s function measurements of force transmission in 2d granular materials. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 182(3-4) :274 – 303, 2003.
- [10] J. Geng G. Reydellet G. Combe P. Claudin R.P. Behringer E. Clément A.P.F. Atman, P. Brunet. Sensitivity of the stress response function to packing preparation. *Journal of Physics Condensed Matter*, 17 :S2391, 2005.
- [11] W. Losert, J.-C. Géminard, S. Nasuno, and J. P. Gollub. Mechanisms for slow strengthening in granular materials. *Phys. Rev. E*, 61(4) :4060–4068, Apr 2000.
- [12] S. Deboeuf, O. Dauchot, L. Staron, A. Mangeney, and J.-P. Vilotte. Memory of the unjamming transition during cyclic tiltings of a granular pile. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 72(5) :051305, 2005.

- [13] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 14(4) :341–365, aug 2004.
- [14] J. Lanuza et E. Clément G. Caballero. Compaction and mobility in randomly agitated granular assemblies. In H.Herrmann S.Luding, editor, *Powders & Grains 2005*, page 339. Balkema, 2005.
- [15] X. Jia Brunet, T. and P. A. Johnson. Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media. *Geophys. Res. Lett.*, 35 :L19308, 2008.
- [16] A.J. Liu and S.R. Nagel. Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396 :21, 1998.
- [17] E. Clément and L. Labous. Pattern formation in a vibrated granular layer : The pattern selection issue. *Phys. Rev. E*, 62(6) :8314–8323, Dec 2000.
- [18] Teruhisa S. Komatsu, Shio Inagaki, Naoko Nakagawa, and Satoru Nasuno. Creep motion in a granular pile exhibiting steady surface flow. *Phys. Rev. Lett.*, 86(9) :1757–1760, Feb 2001.
- [19] F. Leonforte A. Tanguy and J. L. Barrat. Plastic response of a 2d lennard-jones amorphous solid : Detailed analysis of the local rearrangements at very slow strain rate. *The European Physical Journal E : Soft Matter and Biological Physics*, 20, 2006.
- [20] A. Tanguy, F. Leonforte, J. P. Wittmer, and J. L. Barrat. Vibrations of amorphous nanometric structures : when does the classical continuum theory apply? *Applied Surface Science*, 226(1-3) :282 – 288, 2004. EMRS 2003 Symposium F, Nanostructures from Clusters.
- [21] F. Leonforte, R. Boissière, A. Tanguy, J. P. Wittmer, and J.-L. Barrat. Continuum limit of amorphous elastic bodies. iii. three-dimensional systems. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 72(22) :224206, 2005.
- [22] Andrea J. Liu Corey S. O’Hern, Leonardo E. Silbert and Sidney R.Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Phys. Rev. E*, 68(1) :011306, Jul 2003.
- [23] E.M.Lifshitz L.D.Landau. *Course of theoretical physics, Theory of elasticity*, volume 7. Butterworth-Heinemann, 3rd edition, 1986. ISBN : 0-7506-2633-X.
- [24] Heinrich Hertz. über die berührung fester elastischer körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 :156–171, 1882.
- [25] B. Velický and C. Caroli. Pressure dependence of the sound velocity in a two-dimensional lattice of hertz-mindlin balls : Mean-field description. *Phys. Rev. E*, 65(2) :021307, Jan 2002.
- [26] J.Duffy and R.D.Mindlin. Stress-strain relations and vibrations of a granular medium. *Journal of applied mechanics*, 24(4) :585–593, 1957.
- [27] R.D.Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J.app.Mech.*, 71 :259, 1949.
- [28] J. D. Goddard. Nonlinear elasticity and pressure-dependent wave speeds in granular media. *Proceedings of the Royal Society : Mathematical and Physical Sciences*, 430(1878) :105–131, 1990.

- [29] K. Walton. The effective elastic moduli of a random packing of spheres. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 35(2) :213 – 226, 1987.
- [30] D. L. Johnson A. N. Norris. Nonlinear elasticity of granular media. *Journal of applied mechanics*, 64(1) :39–49, 1997.
- [31] S. N. Domenico. Elastic properties of unconsolidated porous sand reservoirs. *Geophysics*, 42(7) :1339–1368, 1977.
- [32] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky. Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 82(9) :1863–1866, Mar 1999.
- [33] X. Jia. Codalike multiple scattering of elastic waves in dense granular media. *Physical Review Letters*, 93(15) :154303, 2004.
- [34] Bruno Gilles and Christophe Coste. Low-frequency behavior of beads constrained on a lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 90(17) :174302, May 2003.
- [35] J. Anfosso and V. Gibiat. Elastic wave propagation in a three-dimensional periodic granular medium. *EPL (Europhysics Letters)*, 67(3) :376–382, 2004.
- [36] Stéphane Job, Francisco Melo, Adam Sokolow, and Surajit Sen. How hertzian solitary waves interact with boundaries in a 1d granular medium. *Physical Review Letters*, 94(17) :178002, 2005.
- [37] Francisco Melo, Stéphane Job, Francisco Santibanez, and Franco Tapia. Experimental evidence of shock mitigation in a hertzian tapered chain. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 73(4) :041305, 2006.
- [38] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound*, volume 1&2. Dover. ISBN : (vol1) 0486602923 , (vol2) 0486602931.
- [39] A. E. H. Love. *Some Problems of Geodynamics*. Cambridge University Press, 1911.
- [40] V. E. Gusev, V. Aleshin, and V. Tournat. Acoustic waves in an elastic channel near the free surface of granular media. *Physical Review Letters*, 96(21) :214301, 2006.
- [41] Chu-heng Liu and Sidney R. Nagel. Sound in sand. *Phys. Rev. Lett.*, 68(15) :2301–2304, Apr 1992.
- [42] Chu-heng Liu and Sidney R. Nagel. Sound in a granular material : Disorder and nonlinearity. *Phys. Rev. B*, 48(21) :15646–15650, Dec 1993.
- [43] Stephen R. Hostler and Christopher E. Brennen. Pressure wave propagation in a granular bed. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 72(3) :031303, 2005.
- [44] Philip Brownell. Le scorpion détecte ses proies par les vibrations du sable. *Dossier Pour la Science*, 34, janvier 2002. La communication animale.
- [45] Marco Polo(1254-1324) Guillaume de Rubrouck (122?-129?). *Deux voyages en Asie au XIIIe siècle, par Guillaume de Rubruquis envoyé de Saint-Louis et Marco Polo marchand vénitien*, chapter XLIV, pages 182–183. C. Delagrave (Paris), 1888.
- [46] Arnold Fertin and Jerome Casas. Orientation towards prey in antlions : efficient use of wave propagation in sand. *J Exp Biol*, 210(19) :3337–3343, 2007.

- [47] P.H. Brownell. Compressional and surface waves in sand : Used by desert scorpions to locate prey. *Science*, 197(4302) :479–482, 1977.
- [48] Bruce A. Young and Malinda Morain. The use of ground-borne vibrations for prey localization in the saharan sand vipers (*Cerastes*). *J Exp Biol*, 205(5) :661–665, 2002.
- [49] Peter M. Narins, Edwin R. Lewis, Jennifer J. U. M. Jarvis, and Justin O’Riain. The use of seismic signals by fossorial southern african mammals : A neuroethological gold mine. *Brain Research Bulletin*, 44(5) :641 – 646, 1997.
- [50] Matthew J. Mason and Peter M. Narins. Seismic signal use by fossorial mammals. *Amer. Zool.*, 41(5) :1171–1184, 2001.
- [51] U. B. Willi, G. N. Bronner, and P. M. Narins. Middle ear dynamics in response to seismic stimuli in the cape golden mole (*Chrysochloris asiatica*). *J Exp Biol*, 209(2) :302–313, 2006.
- [52] Erica R. Wise Robin S. Stein Matthew J. Mason, Sarah J. Lucas and Melinda J. Duer. Ossicular density in golden moles (*Chrysochloridae*). *Journal of Comparative Physiology A : Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 192(12) :1349–1357, December 2006.
- [53] Philip Brownell and Roger D. Farley. Detection of vibrations in sand by tarsal sense organs of the nocturnal scorpion, *Paruroctonus mesaensis*. *Journal of Comparative Physiology A : Neuroethology, Sensory, Neural, and Behavioral Physiology*, 131 :23–30, 1978.
- [54] Philip H. Brownell and J. Leo van Hemmen. Vibration sensitivity and a computational theory for prey-localizing behavior in sand scorpions. *Amer. Zool.*, 41(5) :1229–1240, 2001.
- [55] Ralph A. Bagnold. *The physics of blown sand and desert dunes*. New York : William Morrow & Co., 1942.
- [56] J.H. Poynting and J.J.Thomson. *Textbook of Physics : Sound*. Charles Griffin, 1922.
- [57] M.Hunt and M. Hunt et al. Private communication ; roaming sand dunes, minisymposium : Geophysical fluid dynamics, aps-dfd, tampa,, 2006.
- [58] P.K. Haff. Booming dunes. *American Scientist*, 74 :376–381, 1986.
- [59] B. Andreotti. The song of dunes as a wave-particle mode locking. *Physical Review Letters*, 93(23) :238001, 2004.
- [60] S. Douady, A. Manning, P. Hersen, H. Elbelrhiti, S. Protière, A. Daerr, and B. Kabbachi. Song of the dunes as a self-synchronized instrument. *Physical Review Letters*, 97(1) :018002, 2006.
- [61] M. Liu Y. Jiang. *Powders & Grains*, page p. 433. Balkema, Rotterdam, 2005.
- [62] Yimin Jiang and Mario Liu. Granular elasticity without the coulomb condition. *Phys. Rev. Lett.*, 91(14) :144301, Sep 2003.
- [63] Yimin Jiang and Mario Liu. Energetic instability unjams sand and suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 93(14) :148001, Sep 2004.
- [64] P.J. Digby. The effective elastic moduli of porous granular rocks. *J. Appl. Mech.*, 48 :803–808, 1981.

- [65] David L. Johnson Hernán A. Makse, Nicolas Gland and Lawrence Schwartz. Granular packings : Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. *Phys. Rev. E*, 70(6) :061302, Dec 2004.
- [66] David L. Johnson Hernán A. Makse, Nicolas Gland and Lawrence Schwartz. Why effective medium theory fails in granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 83(24) :5070–5073, Dec 1999.
- [67] P.-G. de Gennes. Static compression of a granular medium : the « soft shell » model. *EPL (Europhysics Letters)*, 35(2) :145–150, 1996.
- [68] M.J. Boussinesq. Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la poussée des terres sans cohésion. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, LXXVII. :1521–1525, JUILLET - DÉCEMBRE 1873.
- [69] Kurt Bräuer, Michael Pfitzner, Dmitry O. Krimer, Michael Mayer, Yimin Jiang, and Mario Liu. Granular elasticity : Stress distributions in silos and under point loads. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 74(6) :061311, 2006.
- [70] Dmitry O. Krimer, Michael Pfitzner, Kurt Bräuer, Yimin Jiang, and Mario Liu. Granular elasticity : General considerations and the stress dip in sand piles. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 74(6) :061310, 2006.
- [71] Yimin Jiang and Mario Liu. From elasticity to hypoplasticity : Dynamics of granular solids. *Physical Review Letters*, 99(10) :105501, 2007.
- [72] J.C.Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *Philos. Mag.*, 27 :294–299, 1864.
- [73] Matthieu Wyart, Leonardo E. Silbert, Sidney R. Nagel, and Thomas A. Witten. Effects of compression on the vibrational modes of marginally jammed solids. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 72(5) :051306, 2005.
- [74] Ning Xu, Matthieu Wyart, Andrea J. Liu, and Sidney R. Nagel. Excess vibrational modes and the boson peak in model glasses. *Physical Review Letters*, 98(17) :175502, 2007.
- [75] Matthieu WYART. *Sur la rigidité des solides amorphes. Fluctuation des prix, conventions et microstructure des marchés financiers*. PhD thesis, École Polytechnique, 2005.
- [76] J. P. Wittmer, A. Tanguy, J.-L. Barrat, and L. Lewis. Vibrations of amorphous, nanometric structures : When does continuum theory apply? *EPL (Europhysics Letters)*, 57(3) :423–429, 2002.
- [77] V. Magnanimo, L. La Ragione, J. T. Jenkins, P. Wang, and H. A. Makse. Characterizing the shear and bulk moduli of an idealized granular material. *EPL (Europhysics Letters)*, 81(3) :34006 (6pp), 2008.
- [78] Kostya Shundyak, Martin van Hecke, and Wim van Saarloos. Force mobilization and generalized isostaticity in jammed packings of frictional grains. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 75(1) :010301, 2007.

- [79] L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clément. Surface elastic waves in granular media under gravity and their relation to booming avalanches. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 75(1) :016602, 2007.
- [80] X. Jacob, V. Aleshin, V. Tournat, P. Leclaire, W. Lauriks, and V. E. Gusev. Acoustic probing of the jamming transition in an unconsolidated granular medium. *Physical Review Letters*, 100(15) :158003, 2008.
- [81] R. W. Clayton C. E. Brennen K. S. Brantley N. M. Vriend, M. L. Hunt and A. Ruiz-Angulo. Solving the mystery of booming sand dunes. *Geophys. Res. Lett.*, 34 :L16306, 2007.
- [82] L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clément. Evidence of rayleigh-hertz surface waves and shear stiffness anomaly in granular media. *Physical Review Letters*, 101(11) :118001, 2008.
- [83] B. Andreotti. A mean-field model for the rheology and the dynamical phase transitions in the flow of granular matter. *Europhysics Letters*, 79(3) :34001, aug 2007.
- [84] Iván Sánchez, Franck Raynaud, José Lanuza, Bruno Andreotti, Eric Clément, and Igor S. Aranson. Spreading of a granular droplet. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 76(6) :060301, 2007.
- [85] Akira Furukawa et Hajime Tanaka. Violation of the incompressibility of liquid by simple shear flow. *Nature*, 443 :434–438, September 2006.
- [86] Mikhail Nosonovsky and George G. Adams. Interaction of elastic dilatational and shear waves with a frictional sliding interface. *Journal of Vibration and Acoustics*, 124(1) :33–39, 2002.
- [87] M. Nosonovsky G.G. Adams. Elastic waves induced by the frictional sliding of two elastic half-spaces. In D. Dowson G. Dalmaz, A.A. Lubrecht and M. Priest, editors, *From Model Experiment to Industrial Problem - A Century of Efforts in Mechanics, Materials Science and Physico-Chemistry*, volume 39 of *Tribology and Interface Engineering*, pages 47–54. Proceedings of the 27th Leeds-Lyon Symposium on Tribology, Elsevier, 2001.
- [88] C. Caroli and B. Velický. Anomalous acoustic reflection on a sliding interface or a shear band. *Phys. Rev. E*, 67(6) :061301, Jun 2003.
- [89] Sankaran Sundaresan K. Kesava Rao Benson K. Muite, Shandon F. Quinn. Silo music and silo quake : granular flow-induced vibration. *Powder Technology*, 145(2) :190–202, 2004.
- [90] R.K. Kandikatla K. Kesava Rao Mukesh L. Dhoriyani, Kranthi Kumar Jonnalagadda. Silo music : Sound emission during the flow of granular materials through tubes. *Powder Technology*, 2 :55–71, 2006.
- [91] J. Tejchman K. Wilde, M. Rucka. Silo music – mechanism of dynamic flow and structure interaction. *Powder Technology*, 186(2) :113–129, August 2008.
- [92] G. William Baxter, R. P. Behringer, Timothy Fagert, and G. Allan Johnson. Pattern formation in flowing sand. *Phys. Rev. Lett.*, 62(24) :2825–2828, Jun 1989.
- [93] Yann Bertho, Frédérique Giorgiutti-Dauphiné, and Jean-Pierre Hulin. Intermittent dry granular flow in a vertical pipe. *Physics of Fluids*, 15(11) :3358–3369, 2003.

- 
- [94] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. van de Velde. The flow of granular solids through orifices. *Chemical Engineering Science*, 15(3-4) :260 – 269, 1961.
- [95] C. Fond G. Ovarlez and E. Clément. Overshoot effect in the janssen granular column : A crucial test for granular mechanics. *Phys. Rev. E*, 67(6) :060302, Jun 2003.
- [96] Th. Brunet, X. Jia, and P. Mills. Mechanisms for acoustic absorption in dry and weakly wet granular media. *Physical Review Letters*, 101(13) :138001, 2008.
- [97] Janssen. Versuche über getreidedruck in silozellen. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, XXXIX n<sup>o</sup> 35 :1045–1049, 1895.
- [98] R. W. Clayton C. E. Brennen K. S. Brantley N. M. Vriend, M. L. Hunt and A. Ruiz-Angulo. Reply to comment by b. andreotti et al. on solving the mystery of booming sand dunes. *Geophys. Res. Lett.*, 35 :L08307, 2008.
- [99] Florent Malloggi. *Etudes expérimentales d'avalanches granulaires*. PhD thesis, ESPCI, 2006.
- [100] I. Agnoli et al. *Powders & Grains*, page p. 313. Balkema, Rotterdam, 2005.
- [101] Kilkenny Goldsack, Leach. *Nature*, 386 :29, 1997.

## Evidence of Rayleigh-Hertz Surface Waves and Shear Stiffness Anomaly in Granular Media

L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clément

*PMMH, ESPCI, CNRS (UMR 7636) and Universités Paris 6 & Paris 7, 10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France*

(Received 11 March 2008; published 9 September 2008)

Using the nonlinear dependence of sound propagation speed with pressure, we evidence the anomalous elastic softness of a granular packing in the vicinity of the jamming transition. Under gravity and close to a free surface, the acoustic propagation is only possible through surface modes guided by the stiffness gradient. These Rayleigh-Hertz modes are evidenced in a controlled laboratory experiment. The shape and the dispersion relation of both transverse and sagittal modes are compared to the prediction of nonlinear elasticity including finite size effects. These results allow one to access the elastic properties of the packing under vanishing confining pressure.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.118001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.118001)

PACS numbers: 45.70.Ht, 05.45.Xt, 43.75.+a, 91.60.Lj

The evidence of anomalous mechanical properties in static, disordered granular assemblies of frictionless spheres has brought a new perspective on glassy systems [1]. In such a noncohesive material, the external pressure is the only source of confinement that may jam the packing in the rigid phase. Thus, at zero thermal agitation, a solid-fluid transition would be reached under a vanishing confining pressure, i.e., when the packing becomes a marginal solid with just the minimal amount of contacts per grain  $Z$  suited to sustain a large scale elastic network, i.e., at isostaticity ( $Z = Z_{\text{iso}}$ ). Near jamming, this model system presents excess low frequency modes, called “soft modes,” whose spatial extension diverges at the critical point [2] and which cause a nonaffine linear response. It has been shown numerically and theoretically that these weak floppy modes make the ratio  $G/K$  of shear modulus to bulk modulus vanish at the jamming transition [2]. This is similar to the behavior of many other disordered condensed systems—mostly multistable systems such as regular fluids trapped in a glassy phase [3]—that also lose their shear rigidity (characteristic of ordinary solids) when they are on the verge of yielding. Can this anomalous linear response be evidenced experimentally? Is this simplified jamming scenario robust enough to describe real granular matter that includes frictional contacts [4,5], gravity loading, or nonspherical particles? These are fundamental questions when one seeks to establish a generic picture for the glassy transition of weak solids viewed from the jammed phase.

In this Letter, we show that the propagation of surface sound waves provides insights into the structure of the elastic networks in the vicinity of jamming. This experimental technique allows one to measure the elastic properties of a granular packing under vanishing pressure, i.e., close to a free surface and under gravity loading. In ordinary elastic solids, surface waves (called Rayleigh waves) are a combination of compression and shear waves, and they travel at a speed slightly smaller than bulk shear

waves ( $\sim 5000$  m/s for glass). Acoustic measurements in granular matter with a free surface have been performed in the context of ethology [6]—numerous species living at the desert surface use sound waves to probe their environment—and seismic geology [7,8]. In both cases, a surprisingly low speed of sound ( $\sim 50$  m/s) was observed. However, it is only recently that two independent theoretical calculations based on slightly different models of nonlinear elasticity [9,10] have shown that these surface waves should be ascribed to a gravity induced index gradient, which plays the role of a waveguide and allows for the propagation of an infinite collection of surface modes.

To clarify the theoretical issues addressed here, let us rephrase in the framework of nonlinear elasticity the predictions of Wyart *et al.* [2] on the elastic anomaly induced by soft modes. For geometrical reasons, the Hertz contact force between two grains depends nonlinearly on their relative interpenetration. On this basis, the macroscopic elastic free energy of an isotropic granular packing can be written in a general form [11]:

$$\mathcal{F} = E(\frac{2}{5}\mathcal{B}\delta^{5/2} + \mathcal{A}\delta^{1/2}u_{ij}^0u_{ij}^0), \quad (1)$$

where  $u_{ij}$  is the coarse-grained strain tensor,  $\delta = -\text{Tr}(u_{ij})$  is the volumic compression, and  $u_{ij}^0 = u_{ij} + \frac{\delta}{3}\delta_{ij}$  is the traceless strain tensor.  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are two dimensionless elastic coefficients that characterize the material stiffness under shear and compression, respectively. We assume that the average number of contacts per grain  $Z$  is sufficient to characterize the microscopic packing geometry and thus that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are functions of  $Z$ . Indeed, in a frictional packing, different values of  $Z$  can be obtained under the same pressure  $p$ ;  $Z$  and  $p$  are thus independent state variables [5]. It should be emphasized that  $\mathcal{F}$  is not supposed to describe the stress-strain curve obtained from a loading test, which is composed by a series of elastic loadings at fixed  $Z$  and of plastic events during which  $Z$  changes.

Assuming homogeneity and identifying macroscopic and microscopic strains, mean-field theory (see [12] and references therein) predicts that  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  vary linearly in  $Z$  and thus remain finite when  $p \rightarrow 0$  [10]. However, jamming theory [2] predicts that upon approaching isostaticity, the shear modulus  $G$  presents a critical behavior,  $G = \mathcal{A}E^{2/3}(P/\mathcal{B})^{1/3} \sim (Z - Z_{\text{iso}})P^{1/3}$ , coming through its coupling with the excess of contacts above the isostatic value, which itself scales as  $Z - Z_{\text{iso}} \sim P^{1/3}$ . Then, the ratio of shear to bulk modulus  $K = (\mathcal{B}E)^{2/3}P^{1/3}$  should vanish with pressure as  $G/K = \mathcal{A}/\mathcal{B} \sim P^{1/3}$ . In Ref. [10], the surface elastic modes were derived for the free energy (1). The guided waves propagate through an infinite though discrete collection of modes polarized sagittally (i.e., a compound of vertical and longitudinal displacements vibrating in quadrature) or transversely. The mode labeled  $n$  of wavelength  $\lambda$  penetrates the sample over a typical depth  $n\lambda$  and thus feels a typical pressure  $p = \rho g n \lambda$ . Consequently, the mean-field theory predicts a velocity dependence of the form  $v \sim (n\lambda)^{1/6}$ . Alternatively, for low frequency modes where elastic coupling with shear stiffness is dominant, the soft-modes theory would predict  $v \sim (n\lambda)^{1/3}$ . Consequently, the dispersion relation of surface waves constitutes a direct experimental test for the existence of a shear stiffness anomalous scaling. Let us emphasize again that the reality of the jamming point as a critical point was assessed for frictionless soft spheres, but there are several indications that this line of ideas could be generalized to frictional packing [4,13] and even to glasses [14].

As confirmed by preliminary experiments [15], the weak dependence of the speed of sound on  $n$  makes the experiment very difficult to control and almost impossible to analyze. Indeed, using any standard source, a huge number of propagating modes are excited that remain superimposed over large distances. To bypass this problem, we have successfully designed an experiment that isolates the first sagittal and transverse modes. For this, measurements are performed in a rectangular channel of width  $W = 20$  cm and length 180 cm, which serves as a second waveguide [Fig. 1(a)]: the lateral boundary conditions impose a relation between the measured wavelength  $\lambda$  and the wavelength  $\lambda_\infty$  that would be selected in an infinitely large channel, at the same frequency:

$$\lambda_\infty = \left[ \frac{1}{\lambda^2} + \left( \frac{m}{2W} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (2)$$

where  $m$  is the transverse mode number ( $m = 1$  here). Moreover, the sources are conceived and tuned to excite essentially the modes  $n = 1$ : sagittal waves are produced by an electromagnetic shaker (without any spring) whose axis is finely guided by a ball bearing slider coupled to a very rigid transverse metallic blade; transverse waves are produced by a rough cylinder inside which a permanent magnet vibrates under the action of a magnetic field

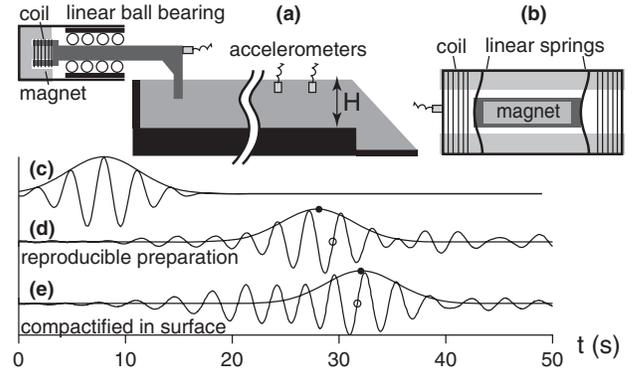


FIG. 1. (a) Experimental setup. Acoustic source of sagittal waves. (b) Acoustic source of transverse waves. (c) Signal of the accelerometer mounted on the source. (d),(e) Transverse wave packets received at  $x = 60$  cm from the source, for two preparations of the granular packing (see text). Note the shift of the wave-packet center (●) and of the phase (○).

[Fig. 1(b)]. The channel is filled of glass beads ( $E = 70$  GPa,  $d = 150 \pm 25 \mu\text{m}$ ) over the height  $H = 20$  cm. For such an aspect ratio, with smooth boundaries, the Janssen effect is negligible [16] so that the pressure is expected to vary linearly in depth. The acoustic isolation is insured by 20-cm-thick boundaries. The experiment is also designed to prevent another problem. As the sample presents random heterogeneities, the acoustic signal is composed by an effective medium response and a coda related to speckle effect [17]. Their relative amplitude is controlled by the number of grains in contact with the transducer. We have chosen to work with accelerometers of diameter  $D = 13$  mm, which allow one to measure the three components of the acceleration in the bulk of the sample. Around  $3 \times 10^4$  grains are in contact with the transducer and the measured amplitude of the coda tail is around 5% of the coherent signal. By comparison, other techniques like a laser vibrometer would only probe the rough surface of the packing and, due to the small size of the spot (5 mm), would only average over  $\sim 400$  grains, yielding a coda and a coherent signal of the same order of magnitude. We have also checked that the propagation is not affected by the presence of other accelerometers between the source and the receiver. Besides, the transducer size  $D$  should be at least a fraction of the wavelength  $\lambda$ , which imposes to work at rather low frequencies  $f < 1$  kHz. In summary, the experiment has to be analyzed keeping in mind the hierarchy of length scales:  $d \ll D < \lambda < H$ .

The typical vibration amplitude we use is  $\sim 10$  nm, although the propagation properties remain the same up to  $\sim 100$  nm, i.e., a strain of  $10^{-6}$ . Above, new peaks appear in the signal and period doubling is observed in the coda, and nonlinear coupling between modes may then happen. Therefore, here we dwell far from the nonlinear propagation conditions (soliton waves) as evidenced ear-

lier in nonlinear Hertz chains [18]. The preparation of the sample is amongst the most difficult parts of the experiment. Prior to each measurement, we systematically sweep a thin blade longitudinally and transversely through the packing in order to remove any memory effect due to the granular initial filling or the subsequent accelerometers manipulation. The extra sand above the level of the channel is then gently removed, leaving a flat surface. Figure 1 compares a typical signal obtained with this procedure [panel (d)] to that obtained when pouring the grains and flattening the surface by tapping with a hammer on a plaster float [panel (e)]. In the first case, the phase and the travel time of the wave packet is reproducible. By contrast, the apparent phase velocity and group velocity can vary up to 25% from one sample to the other, although they are macroscopically identical. This nonuniversality is the first important conclusion of this Letter: the packing elastic properties depend on the preparation protocol. Figure 2 shows the positions of the center of the wave packet and of an isophase event as a function of time. For this, we prepared  $\sim 20$  realizations of the packing. For each, the signals of four accelerometers placed at different positions are acquired and fitted by a Gaussian wave packet. The propagation of a coherent mode—and not speckle—is clearly evidenced by the linear relationship between space and time and by the reproducibility over independent microscopic realizations. The slopes of the relations give the group and the phase velocities  $v_g$  and  $v_\phi$ ,

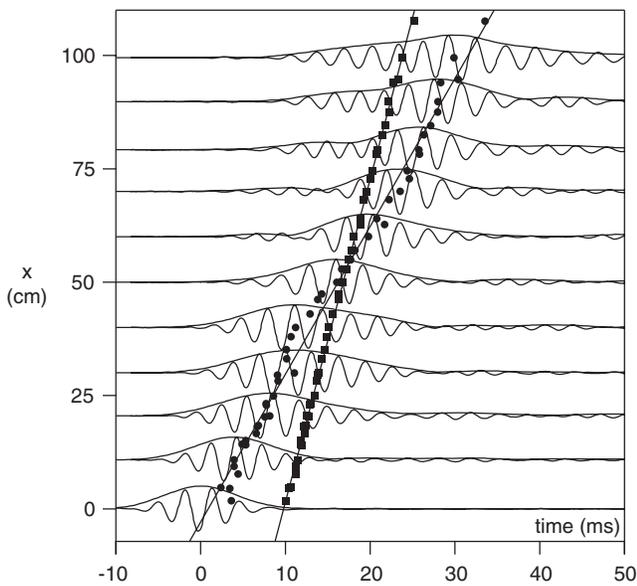


FIG. 2. Space-time diagram showing the wave-packet propagation. Starting from the raw signals received at different positions, the wave packet is roughly localized by computing the signal envelope. Then, a local fit by a Gaussian wave packet allows one to determine the center of the wave packet (●) and its phase with respect to the source (the symbols ■ show the space-time coordinates of an isophase event). The best fit (thin lines) allows one to extract the group and phase velocities.

respectively. Looking now in depth, the vibration amplitude is observed to decrease over a distance  $\Delta$  of the order of a half wavelength [Fig. 3(b)]. The sagittal waves are elliptically polarized, with their principal axis in the vertical direction and along the direction of propagation. Figure 3 shows that the shape of the first mode is in fair agreement with the prediction of our model [10], which confirms that the first mode has been successfully isolated, as desired.

We have measured  $v_g$  and  $v_\phi$ , as well as their statistical uncertainty, every 3 Hz, up to 750 Hz for sagittal waves and up to 550 Hz for transverse waves. These values are used to reconstruct accurately a single dispersion relation  $f(\lambda^{-1})$  (Fig. 4) that simultaneously fits the group and phase velocities in the least square sense. As expected, the propagation is dispersive since  $v_g$  and  $v_\phi$  are different. This can be related to the two wave-guide effects previously mentioned. The propagation suddenly stops below  $180 \pm 20$  Hz, an effect due to the finite depth and width. For sagittal waves, we observed that this cutoff frequency is associated to a sharp resonance at 192 Hz, with a  $Q$  factor of 70. The group velocity is expected to vanish at this frequency and the phase velocity to diverge, which explains the increase of the ratio  $v_g/v_\phi$  with  $f$ . Below 300 Hz, we have observed that the wave packets were very distorted and it was not possible to determine  $v_g$  and  $v_\phi$ . At high frequency, an asymptotic behavior controlled by the pressure induced wave guide is reached in the limit of wavelengths  $\lambda$  small in front of the channel transverse dimensions ( $H$  and  $W$ ). The ratio  $v_g/v_\phi$  tends to a constant equal to  $0.82 \pm 0.04$  for the preparation described above. As  $v_g$  is the slope of the dispersion relation,  $v_g/v_\phi$  is the scaling exponent between  $f$  and  $\lambda^{-1}$ . The measured value is very close to that expected if  $\mathcal{A}$  does not vanish at the surface (5/6). Thus, our experimental results fully confirm the Hertzian picture down to  $\lambda \sim 250d$  and does not show any evidence of anomalous exponent (2/3) when  $p \rightarrow 0$ , which would be associated to a critical behavior at the jamming point [2, 13]. It would be interesting to pursue

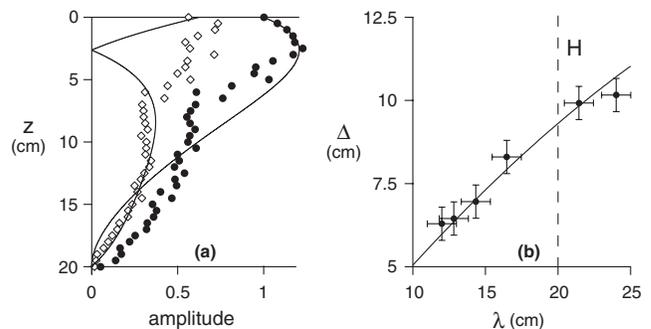


FIG. 3. First sagittal mode. (a) Amplitude of the vertical (●) and horizontal (○) displacement as a function of depth, for  $f = 315$  Hz ( $\lambda \approx 21.5$  cm). (b) Length  $\Delta$  over which the vibration decays as a function of the wavelength  $\lambda$ .

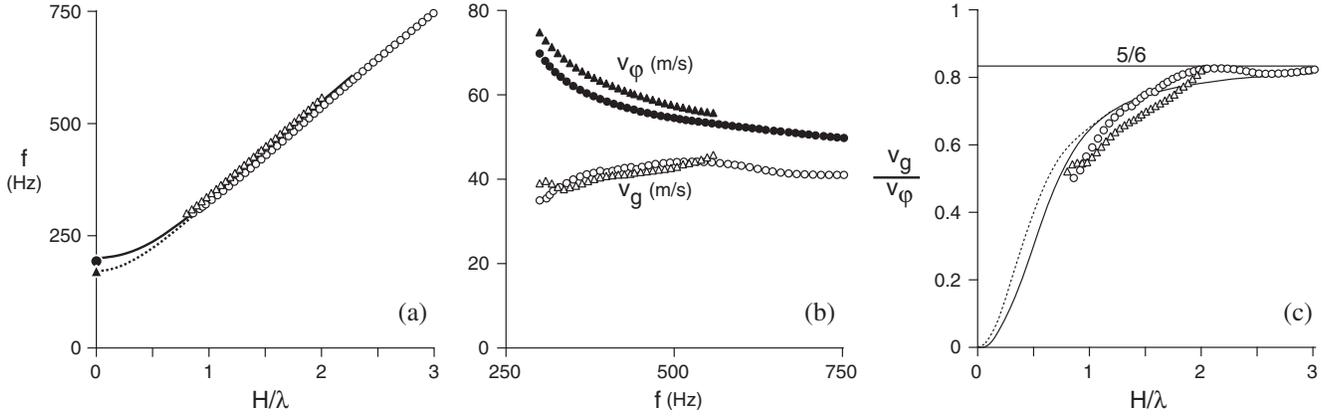


FIG. 4. (a) Dispersion relation of sagittal ( $\circ$ ) and longitudinal waves ( $\triangle$ ): frequency  $f$  as a function of the rescaled wave number  $H/\lambda$ . The cutoff frequencies ( $\bullet$  and  $\blacktriangle$ ) below which no propagation is observed are measured independently. (b) Corresponding group  $v_g$  (open symbols) and phase  $v_\phi$  (solid symbols) velocities. (c) Ratio of the group and phase velocities  $v_g/v_\phi$  as a function of  $H/\lambda$ . In the three graphs, only one-fifth of the measured points are shown. The predictions of the model, including the finite width and depth, are shown as solid (sagittal) and dotted (transverse) lines.

this technique to lower the probing wavelengths in order to push the limits to weaker confining pressures. But to this purpose, the limitations due to finite probe size, preparation sensitivity, and speckle noise have to be overcome.

Globally, one can compare the experimental data to the prediction of the model, assuming that  $\mathcal{A}$  does not vanish at the surface and remains nearly constant at the scale  $\lambda$  and taking into account the finite width and depth (lines in Fig. 4). The agreement is excellent (within 5%). The dispersion relations of transverse and sagittal modes turn out to be nearly equal (Fig. 4). This striking behavior is one of the robust outputs of our model [10]. For ratios  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = O(1)$ , the difference would only be of 10% and would be almost indistinguishable when, say,  $\mathcal{A} < 0.2\mathcal{B}$ . The physical reason is that the restoring force for both modes is the shear elasticity (parameter  $\mathcal{A}$ ). In the limit  $\lambda \ll H$ , the dispersion relation of the first modes takes the following form:

$$f = \alpha(E/\rho)^{1/3} g^{1/6} \lambda_\infty^{-5/6}, \quad \text{with} \quad \alpha \simeq 0.77 \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6}. \quad (3)$$

The best fit gives  $f \lambda_\infty^{5/6} \simeq 77 \pm 1 \text{ m}^{5/6} \text{ s}^{-1}$ , which corresponds to a value of  $\mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6} \sim 0.23$ . By contrast, the mean-field expectation is 0.40 for frictionless grains and 0.61 for infinite friction. Thus, the measured shear stiffness is 3 to 5 times smaller than predicted by the mean-field theory, as observed in numerical simulations [12]. The soft-mode theory is the only one explaining this mean-field failure. Still, to be consistent with our results, one has to conclude that the packing does not tend to isostaticity at the surface: for frictional packings prepared in a simple way,  $Z$  remains significantly larger than  $Z_{\text{iso}}$  under vanishing pressure.

We thank D. Pradal, D. Renard, T. Darnige, and J. Lanuza for their technical assistance and P. Claudin for his critical reading of the manuscript.

- [1] C.S. O'Hern, L.E. Silbert, A.J. Liu, and S.R. Nagel, Phys. Rev. E **68**, 011306 (2003).
- [2] M. Wyart, L.E. Silbert, S.R. Nagel, and T.A. Witten, Phys. Rev. E **72**, 051306 (2005).
- [3] A. Tanguy, J.P. Wittmer, F. Leonforte, and J.-L. Barrat, Phys. Rev. B **66**, 174205 (2002).
- [4] E. Somfai *et al.*, Phys. Rev. E **75**, 020301(R) (2007).
- [5] V. Magnanimo *et al.*, Europhys. Lett. **81**, 34006 (2008).
- [6] P.H. Brownell, Science **197**, 479 (1977); Sci. Am. **251**, 94 (1984); P.H. Brownell and R.D. Farley, J. Comp. Physiol. **131**, 23 (1979); **131**, 31 (1979).
- [7] G.S. Baker, C. Schmeissner, D.W. Steeple, and R.G. Plum, Geophys. Res. Lett. **26**, 279 (1999).
- [8] B. Andreotti, Phys. Rev. Lett. **93**, 238001 (2004).
- [9] V.E. Gusev, V. Aleshin, and V. Tournat, Phys. Rev. Lett. **96**, 214301 (2006); X. Jacob *et al.*, Phys. Rev. Lett. **100**, 158003 (2008).
- [10] L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clément, Phys. Rev. E **75**, 016602 (2007).
- [11] Y. Jiang and M. Liu, Phys. Rev. Lett. **91**, 144301 (2003); **93**, 148001 (2004).
- [12] H.A. Makse, N. Gland, D.L. Johnson, and L.M. Schwartz, Phys. Rev. Lett. **83**, 5070 (1999); Phys. Rev. E **70**, 061302 (2004).
- [13] K. Shundyak, M. van Hecke, and W. van Saarloos, Phys. Rev. E **75**, 010301(R) (2007).
- [14] N. Xu, M. Wyart, A.J. Liu, and S.R. Nagel, Phys. Rev. Lett. **98**, 175502 (2007).
- [15] B. Andreotti, L. Bonneau, and E. Clément, Geophys. Res. Lett. **35**, L08306 (2008).
- [16] G. Ovarlez, C. Fond, and E. Clément, Phys. Rev. E **67**, 060302(R) (2003).
- [17] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky, Phys. Rev. Lett. **82**, 1863 (1999).
- [18] S. Job, F. Melo, A. Sokolow, and S. Sen, Phys. Rev. Lett. **94**, 178002 (2005).

# Surface elastic waves in granular media under gravity and their relation to booming avalanches

L. Bonneau, B. Andreotti, and E. Clément

*Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes associé au CNRS (UMR 7636) et aux Universités Paris 6 et Paris 7,  
10 rue Vauquelin, 75005 Paris, France*

(Received 25 January 2006; revised manuscript received 26 September 2006; published 8 January 2007)

Due to the nonlinearity of Hertzian contacts, the speed of sound  $c$  in granular matter is expected to increase with pressure as  $P^{1/6}$ . A static layer of grains under gravity is thus stratified so that the bulk waves are refracted toward the surface. The reflection at the surface being total, there is a discrete number of modes (both in the sagittal plane and transverse to it) localized close to the free surface. The shape of these modes and the corresponding dispersion relation are investigated in the framework of an elastic description taking into account the main features of granular matter: Nonlinearity between stress and strain and the existence of a yield transition. We show in this context that the surface modes localized at the free surface exhibit a waveguide effect related to the nonlinear Hertz contact. Recent results about the song of dunes are reinterpreted in light of the theoretical results. The predicted propagation speed is compared with measurements performed in the field. Taking into account the finite depth effects, we show that the booming instability threshold can be explained quantitatively by a waveguide cutoff frequency below which no sound can propagate. Therefore, we propose another look at a recent controversy, confirming that the song of dunes can well originate from a coupling between avalanching grains and surface elastic waves once the specificity of surface waves (we baptized Rayleigh-Hertz) is correctly taken into account.

DOI: [10.1103/PhysRevE.75.016602](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.75.016602)

PACS number(s): 46.40.-f, 81.05.Rm

## I. INTRODUCTION

From the physical point of view, surface waves in an elastic material (called Rayleigh waves) are a combination of compression and shear waves that are traveling at speeds slightly smaller than bulk shear waves [1]. Nevertheless, in the context of granular matter, the propagation of waves close to the surface of a sand bed has risen the most contradictory claims. If we exclude the recent suggestion [2] of a compressibility originating from an interstitial fluid, it is well accepted that sound in sand propagates through the grains contact—the so-called elastic skeleton. A simple (mean-field) argument shows that, under these conditions, bulk waves cannot propagate parallel to the surface. This is due to the increase of material stiffness [3] with depth which should redirect the wave front toward the free surface (mirage effect). Arguing that the free surface absorbs the wave (we will see that this is actually not the case), Liu and Nagel [4] concluded that elasticlike modes cannot exist at all in granular media under gravity. Their experiments have shown a nonharmonic response of the system, related to an extreme sensitivity of the acoustic signal to minute local reorganizations. This was ascribed later to the speckle effect [5], a dominant feature for probe sizes on the order of one grain. In the context of physics, the very existence of such waves and their ability to propagate over large distances has remained problematic. However, the propagation of sound at the surface of sand was evidenced and characterized in two other contexts: the localization of preys by scorpions and the spontaneous emission of sound by sand avalanches (the so-called song of dunes). As it is an important justification for the present work, we would like to recall the state of the art and the open questions about these two issues.

*Prey detection of scorpions.* To our knowledge, the first experiments on wave propagations over sandy free surfaces were conducted in a biological context. Some desert animals

like scorpions are blind—they mostly live at night—and use sand-born surface sound waves up to a distance of half a meter in order to localize their prey [6]. On each of their legs they possess slit sensilla receptors and associated neural connections, such as to detect small phase lags and orient their killing jump very efficiently. Biologists like Ph. Brownell and his collaborators [6] have identified surface propagation of sound and measured a rather low speed ( $c \approx 50$  m/s in the 100–500 Hz range) compatible with the animal biological capacities for signal processing [7]. From the physical point of view, puzzling questions remain to understand the true nature of these waves and it is the aim of the article to help clarify the issue. Nevertheless, an intriguing question remains. It has been shown recently, in model systems, that localized modes of vibration with a complex spatial structure do exist as a signature of the disordered nature of the material [8,9]. In the limit of vanishing confining pressure (at a surface, for example), their spatial extension could in principle be very large. From a biological point of view, knowing that the scorpion legs are only a few grains in size, it would be crucial to understand to what extent the ability to detect precisely the location of a sound emission locus (a long wavelength traveling wave) could be influenced by other complex spatial modes. This precise issue is out of the scope of the present article but remains in our mind a vivid background problem.

*The song of dunes.* Many sand dunes spontaneously make loud booming noises when they avalanche [10]. Records of the sound are centuries old [11–15], but the cause has remained a mystery until recently [16–18]. Surface elastic waves were recently found to be fundamental in the song of dunes phenomenon [19]. By an extensive characterization of the phenomenon in the field, one of us [19] has shown that (i) the sound emitted in the air is not due directly to the avalanche but to the coherent vibration of the free surface (surface elastic modes); (ii) these surface waves exist both

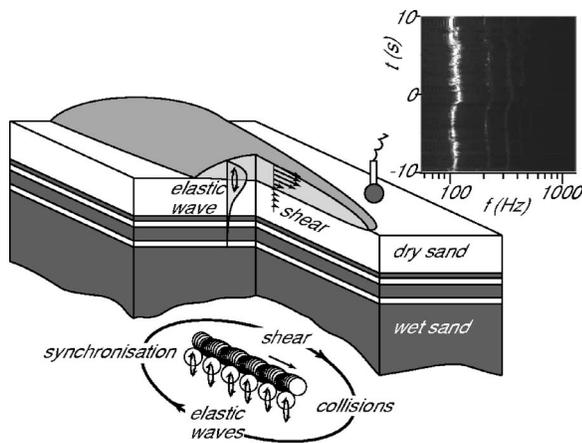


FIG. 1. Schematic of a booming avalanche flowing along the slip face of a dune. The grains are submitted to both pressurelike elastic waves and to shear localized at the interface between the flowing layer and the static sand bed. The emission in the air is due to the vibration of the free surface, which acts as a loudspeaker. In the inset, we display a sonogram from a probe downhill the avalanche triggering place. This demonstrates that the emission frequency is well defined when the avalanche is homogeneous. It also shows that the free surface vibrates both in the avalanche ( $t > 0$ ) and outside, in the static zone ( $t < 0$ ). No discontinuity (in frequency and amplitude) is observed at  $t = 0$ , when the avalanche front reaches the position at which the sound is recorded (very close to the soil). The instability results from an interaction between the shear deformations and the elastic waves: The collisions excite the elastic waves that in turn tend to synchronize them. The stability or instability of this locking mechanism is a matter of probability for the granular collisions to act in phase with the acoustic wave.

inside and outside the avalanche and are indeed localized at few centimeters below the surface; (iii) the emission frequency  $f$  is controlled by the velocity gradient inside the avalanche shear layer, which is also the collision rate of the rolling grains, and not by any resonant condition; (iv) for a gravity induced flow,  $f$  is roughly equal to  $\approx 0.4\sqrt{g/d}$ , where  $g$  is the gravity and  $d$  the grain size; (v) the upper bound of the sound level ( $\approx 105$  dB) corresponds to the amplitude of vibration for which the normal acceleration of the free surface just balances gravity, i.e., whenever the grains start taking off the surface; (vi) the elastic surface waves tend to synchronize the grains collisions; (vii) the elastic surface waves propagate at a speed of the same order of magnitude ( $\approx 40$  m/s at 100 Hz) at the surface of a static sand bed and of a flowing layer. (See Fig. 1.)

This series of facts point toward a precise mechanism involving the interaction between the collisions inside the avalanche and the elastic modes [19]. During an avalanche, there are two distinct modes of deformation. On one hand, the grains move one with respect to the others (shearing); on the other hand, they remain in contact with their neighbors so that pressure waves can propagate through the (sheared) elastic skeleton. During a collision between two grains, part of the kinetic energy is dissipated but part is transferred through the grains deformation into elastic waves—both surface waves and localized modes. Of course, in a silent avalanche, the grain motion is not correlated at long distance so that the

contributions of different collisions to the coherent modes interfere destructively. The key point of the mechanism proposed in [19] is the demonstration on a simple model that coherent elastic waves tend to synchronize the collisions of the grains. This suggests that the song of dunes originates from a wave particle mode locking. The reference state in which the collisions are randomly distributed becomes unstable toward a mode in which a propagative coherent elastic mode is excited and, simultaneously, a fraction of the moving grains gets synchronized. This mode increases in amplitude since the wave synchronizes the collisions which in turn excite the wave constructively. The only condition of instability is that sufficient energy may be transferred from translation to vibration, and of course that elastic surface waves can propagate. We shall return later on to this last condition.

Independent measurements of “the” sound propagation speed at the surface of Californian booming dunes were performed by Hunt *et al.* [20] with a hammer hitting a metallic plate, giving  $c \approx 210$  m/s. On this basis, they supported the (old) idea according to which booming avalanches simply come from a resonance inside the dune. Recently, booming sand flows were reproduced in the lab by Douady *et al.* [21] by inducing a small scale avalanche of size  $H$  with a blade moving at a controlled velocity  $V$ . The emission frequency  $f$  increases with  $V/H$  and gives back the value measured in the field for asymptotically small velocities or large avalanches [see Fig. 9(b) of the present paper reproducing experimental data]. This shows that there is no need to have a large dune (a large resonant cavity) below the avalanche for the phenomenon to exist. The second original point of the paper is the evidence of a threshold for the booming instability, which depends in a complex manner on  $V$  and on  $H$  [see Fig. 9(a)]. On this basis, Douady *et al.* challenged the existence and the role of surface elastic modes [19] and gave a (slightly) different explanation: “Coupling (shear?) waves” would propagate at  $c \approx 0.94$  m/s across the avalanche and synchronize the flow. Note that is indeed very low sound speed, which has never been observed directly in the context of granular matter. In particular, depending on different authors, the propagation speed would be between 1 m/s (estimated from an instability threshold [21]) and 210 m/s (directly measured by impact [20]), with an intermediate value  $\approx 40$  m/s (directly measured at 100 Hz with a sinusoidal source [19]). In summary, if it is now clear that acoustic waves are involved in the song of dunes, their exact nature is still controversial.

Importantly, it is now beyond any doubt that no resonance at the scale of a dune is necessary for the phenomenon to occur: The same flow on different resonant cavities (e.g., different dune sizes) produce the same frequency and different flows on the same resonant cavity (e.g., the surface of the same dune) produce different frequencies. The controversy on this subject mainly results from the way avalanches were produced on the dune slip faces. Most people spontaneously generate inhomogeneous intermittent avalanches by beating the legs like scissors [20], which results in important variations in emission frequency. However, a uniform pushing is needed to obtain homogeneous avalanches, controlled by gravity [19,21].

A direct motivation of the present paper is to provide a theoretical framework for wave propagation at the surface of

a sand bed under gravity. Do the surface modes exist? What is their dispersion relation? What is the expected propagation speed? Can the booming instability threshold [21] be conciliated with the directly observed surface elastic waves [19]? What is the role, if any, of the resonant cavity below the avalanche?

*Sound in sand under strong compression.* Granular matter, as a collection of stiff grains under moderate confining pressure, bears intergranular contact surfaces of a scale much smaller than a typical grain size. In fact, the surfaces and the orientations of contacts are likely to be modified either reversibly or irreversibly under the variation of intergranular forces. This feature is at the origin of many inherent difficulties when one wishes to determine the macroscopic constitutive properties. Moreover, the packing topology which determines the contact geometry is usually of a strongly disordered nature [22] and average quantities like deformation fields are quite subtle to define [23]. Thus, already at the most simple level of description, involving local nonlinear elastic relations (the classical Hertz force problem [3]), a mean-field approach which identifies the local granular displacements with macroscopic deformations, is failing quantitatively [24–29]. In the context of physics, tests were mostly made using sound wave bulk propagation [5,24,28,29] under rather large confining pressures  $P$  and results show a propagation velocity  $c \propto P^{1/4}$  instead of the standard mean-field prediction  $c \propto P^{1/6}$ . Actually, Makse *et al.* [29] have shown clearly using numerical simulations that if one takes into account the effective increase of the number of contacts with pressure, the agreement is bettered (especially for compression waves). Nevertheless, an essential discrepancy still lies in the assessment of the shearing stiffness merging from local tangential contact forces [29]. Note also that, from an experimental point of view, the exact origin of the discrepancy is not totally clear [30]. Other features such as angular shape contacts [31] or the existence of a soft layer surrounding the grains [32] can modify the propagation velocities in directions observed experimentally.

In the limit of vanishing confining pressure very few results on sound wave propagation exist either experimentally [4,6,19] or theoretically [33]. In this paper, we address the issue of surface wave propagation in the theoretical framework of continuous nonlinear elasticity. The model we use was recently introduced by Jiang and Liu [34] to describe granular constitutive properties. In the first part of this paper, we give a short state of the art concerning the elastic description of granular media in the static phase and present the phenomenology introduced by Jiang and Liu. In the second part, we show the existence of surface waves in a semi-infinite slab of grains under gravity. We derive the shape of the modes and their dispersion relation. In the third part, we turn to the song of dunes problem and compare the theoretical dispersion relation to experimental measurements made in the field. We also show that the booming instability threshold can be reproduced quantitatively if finite depth effects (Appendices B and C) are taken into account and simply comes from a waveguide cutoff.

## II. THE JIANG-LIU MODEL

### A. Strain-stress relation

We introduce the displacement field  $\rho\mathbf{U}$  and the stress tensor  $\sigma_{ij}$ . With our conventions, the dynamical equation reads

$$\rho\ddot{\mathbf{U}} = -\nabla\bar{\sigma} + \rho\mathbf{g}. \quad (1)$$

To relate the stress tensor  $\sigma_{ij}$  to the strain tensor  $u_{ij} = (1/2) \times (\partial U_i / \partial x_j + \partial U_j / \partial x_i)$ , Jiang and Liu have recently proposed a phenomenological formulation based on a simple energetic formulation:

$$F_{el} = E\delta^{1/2} \left( \frac{2}{5} \mathcal{B} u_{ij} \delta^2 + \mathcal{A} u_s^2 \right), \quad (2)$$

where  $E$  is the material Young's modulus and  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  are two dimensionless numbers. The volumic compression is

$$\delta = -\text{Tr}(u_{ij}), \quad (3)$$

$u_{ij}^0 = u_{ij} + (\delta/3)\delta_{ij}$  is the traceless strain tensor, and

$$u_s^2 = u_{ij}^0 u_{ij}^0$$

is its modulus squared. The derivation of the stress tensor yields

$$\sigma_{ij} = E\sqrt{\delta} \left( \mathcal{B}\delta\delta_{ij} - 2\mathcal{A}u_{ij}^0 + \frac{\mathcal{A}u_s^2\delta_{ij}}{2\delta} \right). \quad (4)$$

Interestingly, the last term of this equation,  $\mathcal{A}u_s^2\delta_{ij}/2\delta$ , does not exist in standard Boussinesq nonlinear elasticity [35]. This discrepancy comes from the fact that this last theory is not derived from an elastic potential, contrary to the Jiang-Liu model. This fundamental question is also a strong motivation to put under clear experimental test the propagation of elastic waves in granular assemblies. It is important to note that this elegant and compact formulation of elastic energy is able to reproduce many qualitative features observed experimentally, such as the existence of a Coulomb-like failure or stress-induced anisotropy. Efforts have been made by the authors to compare quantitatively their model to the output of several experimental measurements, such as systematic triaxial tests, the response to a local load, and static equilibrium in a column. The agreement was noticeable, especially in view of the minimal amount of free parameters in the model. The possibility to follow the elastic behavior up to the limit of failure is also a promising feature of the model in the context of slope stability monitored by sound waves. This feature is quite original if one compares to the standard Boussinesq nonlinear elasticity framework [35]. Of course, issues like irreversible deformation fields (plasticity) are still questionable in the framework of this model; nevertheless, it provides a well defined starting point for a complete analysis and modeling of elastic vibrations. Furthermore, this approach can be generalized easily with a power law not representing necessarily the Hertzian interaction. Thus one could, in principle, take into account the existence of other types of nonlinear contact force laws [31,32]. In the present paper, we will limit ourselves to Hertzian interactions and we

will derive sound propagation around the simplest possible reference state.

### B. Mean field determination of the compression modulus

Since Mindlin in the 1950s, several works, focusing on sound wave bulk propagation in granular materials, have derived from local Hertzian interactions, the effective elastic moduli [24–27]; for a recent and clear review, see Makse *et al.* [29] and references therein. We just recall here the mean-field results for a packing of spheres of compacity  $\Phi$  and an average coordination number  $Z$ . First let us write the inter-particle forces between two spheres of radii  $R_1$  and  $R_2$  and half overlap  $\xi = 1/2(R_1 + R_2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ ,  $R = 2R_1R_2/(R_1 + R_2)$  (if  $R_1 = R_2$ ,  $R$  is the sphere radius). The normal force is

$$F_n = \frac{8}{3} \frac{\mu_g}{1 - \nu_g} R \left( \frac{\xi}{R} \right)^{3/2},$$

where  $\mu_g$  is the shear modulus and  $\nu_g$  the Poisson ratio. If half the tangential separation between the sphere center is  $\Delta s$ , the tangential force is then

$$\Delta F_t = \frac{8\mu_g}{2 - \nu_g} R \left( \frac{\xi}{R} \right)^{1/2} \Delta s.$$

Finally, one may obtain, from mean-field granular displacement, the elastic constant values, i.e., the bulk modulus

$$K_{\text{MF}} = \frac{1}{3\pi} \frac{\mu_g}{(1 - \nu_g)} (\Phi Z)^{2/3} \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\mu_g} P \right)^{1/3}$$

and the shear modulus

$$\mu_{\text{MF}} = \left( \frac{1}{1 - \nu_g} + \varepsilon \frac{3}{2 - \nu_g} \right) \frac{\mu_g (\Phi Z)^{2/3}}{5\pi} \left( \frac{3\pi(1 - \nu_g)}{2\mu_g} P \right)^{1/3}$$

with two limits: (i) No sliding friction between the grains (take  $\varepsilon=0$ ) or (ii) infinite friction between the grains (take  $\varepsilon=1$ ). For the macroscopic Jiang-Liu model in the isotropic case, the strain and stress tensors read

$$u_{ij} = -\frac{\delta_0}{3} \delta_{ij}, \quad \sigma_{ij} = P \delta_{ij}, \quad P = EB \delta_0^{3/2}. \quad (5)$$

For an isotropic compression, we have  $P = EB \delta_0^{3/2} = K_{\text{MF}} \delta_0$ ; therefore

$$K_{\text{MF}} \equiv EB \left( \frac{P}{EB} \right)^{1/3}.$$

Consequently,

$$\mathcal{B} = \frac{\Phi Z}{2^{3/2} 3\pi(1 - \nu_g^2)}. \quad (6)$$

### C. Determination of the ratio $\mathcal{B}/\mathcal{A}$

#### 1. Mean field

Now we consider the Jiang-Liu model with  $x$ - $z$  shear under isotropic compression  $P$ :

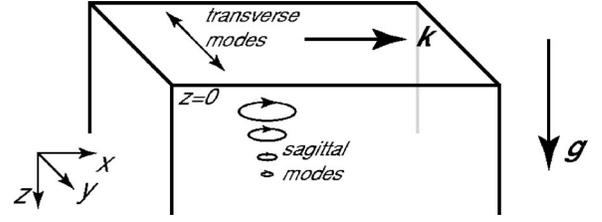


FIG. 2. Theoretical setup. We consider elastic waves propagating along the  $x$  direction in a cell filled with granular matter. Gravity is along the  $z$  axis. The  $y$  axis is the direction transverse to propagation.

$$\sigma_{xz} = -2AE\delta_0^{1/2} = -2\mu_{\text{MF}}u_{xz}$$

and  $P = EB\delta_0^{3/2}$ , thus  $\mu_{\text{MF}} \equiv EA(P/EB)^{1/3}$ . Therefore,

$$\mathcal{A} = \frac{\Phi Z}{2^{3/2} 5\pi(1 + \nu_g)} \left( \frac{1}{1 - \nu_g} + \frac{3\varepsilon}{2 - \nu_g} \right). \quad (7)$$

If one takes  $\Phi \approx 0.6$  and  $Z \approx 6$ . The bulk shear modulus for silica oxide is  $\mu_g \approx 30$  GPa and the Poisson ratio is  $\nu_g \approx 0.2$ . This gives  $EB \approx 10$  GPa and  $EA \approx 6.5$  GPa for  $\varepsilon=0$  and  $EA \approx 9$  GPa for  $\varepsilon=1$ . These values will be of importance when the surface sound wave velocities, found experimentally for sand, will be discussed at the end of the paper. From the above expressions, we get

$$\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} = \frac{5}{3 \left( 1 + \frac{3\varepsilon(1 - \nu_g)}{2 - \nu_g} \right)}. \quad (8)$$

For  $\varepsilon=0$ , we get  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 5/3$ . For  $\varepsilon=1$  and  $\nu_g=0.2$ , we get  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 5/7$ .

#### 2. Energetic argument

According to Jiang and Liu, we have a material instability corresponding to a Coulomb yield, for a criterion based on the free energy landscape convexity (a thermodynamic stability criterion) [34]:

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{2\mathcal{A}}{\mathcal{B}}}. \quad (9)$$

Thus  $\mathcal{B}/\mathcal{A} = 2/\tan^2 \theta_c \approx 6$ . We then notice a large discrepancy for the  $\mathcal{B}/\mathcal{A}$  ratio between the mean-field solution and the empirical result obtained from direct measurement of the sand-pile slope.

## III. SAGITTAL WAVES UNDER GRAVITY

### A. Equilibrium of the system

Now we examine the case of a semi-infinite volume filled with granular matter and submitted to a vertical gravity field (Fig. 2). As mentioned in the Introduction, due to the inhomogeneous pressure field  $P \propto \rho g z$ , the system presents a stratification in the propagation speed  $c \propto z^{1/6}$  which should also lead to a refraction toward the free surface. A simple qualitative picture, recently proposed by Gussev [33], establishes a relation between the wave propagation confined

within an effective waveguide and vertical resonances due to multiple reflections of the curved propagation rays at the upper free surface. This vision is somehow opposed to the early claim of Liu and Nagel [4] that the free surface would absorb the wave: The reflection is actually total.

The first step is to compute the reference state of the system. We first solve the equilibrium problem, starting from a strain tensor of the form

$$u_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_0 \end{pmatrix}, \quad u_{ij}^0 = \delta_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

The modulus follows as  $u_s^2 = (2/3)\delta_0^2$ . Using the constitutive relation, we obtain the stress tensor

$$\sigma_{ij} = E\delta_0^{3/2} \begin{pmatrix} \left(\mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\mathcal{B} - \frac{\mathcal{A}}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3}\right) \end{pmatrix}.$$

The pressure is defined from the trace of this stress tensor:  $P = E\delta_0^{3/2}(\mathcal{B} + \mathcal{A}/3)$ . The expression for the vertical stress is replaced by

$$\sigma_{zz} = \left(\mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3}\right)E\delta_0^{3/2} = \rho g z$$

so that the volumic compression reads

$$\delta_0 = -\frac{dW_0}{dz} = \left(\frac{\rho g z}{E\left(\mathcal{B} + \frac{5\mathcal{A}}{3}\right)}\right)^{2/3}, \quad (10)$$

where  $W_0$  is the vertical displacement field. The second boundary condition is taken at  $z \rightarrow \infty$ . In practice, we impose a null displacement  $W_0(H) = 0$  at the lower edge of a box  $z = H$  and at the end let  $H$  tend to infinity (see Appendixes B and C for details about finite depth effects).

### B. Linearized equations

Now we investigate the existence of propagative modes polarized in the sagittal plane  $(x, z)$ . We consider the deformation of the free surface to be of the form  $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$ . The displacement field is defined through two dimensionless functions  $U$  and  $W$  of the dimensionless variable  $\eta = kz$ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} iU(\eta) \\ 0 \\ W(\eta) \end{pmatrix} \zeta.$$

The disturbance to the strain tensor reads

$$\tilde{u}_{ij} = k\zeta \begin{pmatrix} -U & 0 & \frac{i(U' + W)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{i(U' + W)}{2} & 0 & W' \end{pmatrix}$$

and its traceless counterpart is

$$\tilde{u}_{ij}^0 = k\zeta \begin{pmatrix} -\frac{2U}{3} - \frac{W'}{3} & 0 & \frac{i(U' + W)}{2} \\ 0 & \frac{U}{3} - \frac{W'}{3} & 0 \\ \frac{i(U' + W)}{2} & 0 & \frac{2W'}{3} + \frac{U}{3} \end{pmatrix}.$$

The disturbance to the volumic compression is  $\tilde{\delta} = k\zeta(U - W')$ . That of the modulus  $u_s^2$  reads

$$\tilde{u}_s^2 = 2u_{ij}^0 \tilde{u}_{ij}^0 = -\frac{2\delta_0}{3}(U + 2W')k\zeta.$$

The disturbance to the stress tensor may be formally expressed as

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sqrt{\delta_0}E \left[ \frac{3}{2}\mathcal{B}\tilde{\delta}\delta_{ij} - \mathcal{A} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tilde{\delta} - 2\mathcal{A}u_{ij}^0 \right. \\ \left. - \frac{\mathcal{A}}{6}\tilde{\delta}\delta_{ij} + \frac{\mathcal{A}}{2\delta_0}\tilde{u}_s^2\delta_{ij} \right]$$

which gives, after simplification, the following expressions for its components:

$$\tilde{\sigma}_{xx} = E\sqrt{\delta_0} \left[ \left(\frac{\mathcal{A}}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2}\right)U + \left(\frac{\mathcal{A}}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2}\right)W' \right] k\zeta,$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = -E\sqrt{\delta_0} \left[ \left(\frac{\mathcal{A}}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2}\right)U + \left(\frac{5\mathcal{A}}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2}\right)W' \right] k\zeta,$$

$$\tilde{\sigma}_{xz} = \tilde{\sigma}_{zx} = -i\mathcal{A}E\sqrt{\delta_0}(U' + W)k\zeta.$$

For the sake of simplicity, we rescale the stress tensor, introducing the functions  $S_{xz}(kz)$ ,  $S_{zz}(kz)$ , and  $S_{xx}(kz)$ :

$$\begin{aligned}\widetilde{\sigma}_{xz} &= i\rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{xz}(kz), \\ \widetilde{\sigma}_{zz} &= \rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{zz}(kz), \\ \widetilde{\sigma}_{xx} &= \rho\Gamma^2 k^{2/3} \zeta S_{xx}(kz),\end{aligned}\quad (11)$$

where  $\Gamma$  is a material parameter of dimension  $[T^{-1}L^{5/6}]$  defined by

$$\Gamma = \mathcal{A}^{1/2}(\mathcal{B} + 5\mathcal{A}/3)^{-1/6} \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/3} g^{1/6}. \quad (12)$$

The previous expressions then simplify into

$$\begin{aligned}S_{xx}(\eta) &= \eta^{1/3} \left[ \left(\frac{1}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right) U(\eta) + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right) W'(\eta) \right], \\ S_{zz}(\eta) &= -\eta^{1/3} \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right) U(\eta) + \left(\frac{5}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}}\right) W'(\eta) \right], \\ S_{xz}(\eta) &= -\eta^{1/3} [U'(\eta) + W(\eta)].\end{aligned}\quad (13)$$

From the equations of motion, we get the dispersion relationship

$$\omega = \alpha\Gamma k^{5/6}. \quad (14)$$

The dimensionless set of equations

$$\alpha^2 U = S_{xx} + S'_{xz}, \quad (15)$$

$$\alpha^2 W = -S_{xz} + S'_{zz} \quad (16)$$

determines the shape of the modes and, through the boundary conditions, fixes the dimensionless frequency  $\alpha$ . We can already conclude that surface modes do exist and are (weakly) dispersive. Indeed, the group velocity increases as  $k^{1/6}$  or equivalently as  $\omega^{1/5}$ .

### C. Resolution

Now, in order to obtain the prefactor  $\alpha$  of the dispersion relation (14) as well as the shape of the modes, we solve the boundary condition problem, rewriting the above equations as a set of 4—linear—ordinary differential equations:

$$\begin{aligned}U' &= -W - \eta^{-1/3} S_{xz}, \\ W' &= -\frac{1}{5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}} [(A - 3\mathcal{B})U + 2\mathcal{A}\eta^{-1/3} S_{zz}], \\ S'_{xz} &= \alpha^2 U - S_{xx}, \\ S'_{zz} &= \alpha^2 W + S_{xz}, \\ S_{xx} &= \frac{1}{5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}} [(3\mathcal{B} - \mathcal{A})S_{zz} + 2(\mathcal{A} + 6\mathcal{B})\eta^{1/3} U].\end{aligned}$$

The boundary conditions are vanishing stresses  $S_{xz}(0)=0$  and  $S_{zz}(0)=0$  at the surface and a vanishing strain at infinity:

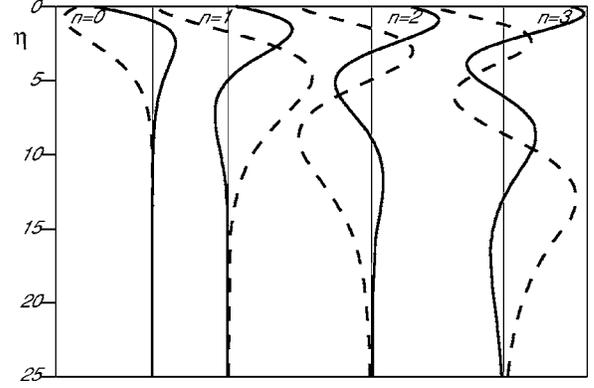


FIG. 3. Shape of the sagittal modes: Profiles of the horizontal displacement  $U(\eta)$  (solid line) and vertical displacement  $W(\eta)$  (dashed line).  $\eta=kz$  is the reduced depth.

$U(\eta \rightarrow \infty) = 0$  and  $W(\eta \rightarrow \infty) = 0$ . This selects unique asymptotic behaviors. Note in particular that  $S_{xz}$  and  $S_{zz}$  vanish linearly with  $\eta$  so that  $\eta^{-1/3} S_{xz}$  and  $\eta^{-1/3} S_{zz}$  are well-behaved terms. The same condition is obtained if one starts with a finite load at the surface (so that the elastic moduli do not vanish anymore) and lets this extra load tend to zero.

The amplitude is normalized using  $W(0)=1$ . The solution  $[U, W, S_{xz}, S_{zz}](\eta)$  is obtained by superposition of the solutions obtained, starting from the initial conditions  $[0, 1, 0, 0]$  and  $[1, 0, 0, 0]$ . In practice, we tune the value of  $\alpha$  to get the cancellation of both  $U$  and  $W$  at a finite depth  $H$ , and then take the limit  $H \rightarrow \infty$  (see Appendix C for the discussion of finite depth  $H$  effects).

Hence the sagittal surface waves present a discrete number of modes guided by the refractive index grading induced by gravity. The shape of the modes excited at a given pulsation  $\omega$  is displayed on Fig. 3. They are elliptically polarized, the principal axis being along  $x$  and  $z$ . The modes are essentially localized in surface, on a depth of order  $(n+1)$  times the wavelength  $\lambda = 2\pi/k$ . The dispersion relationship is displayed on Fig. 4 for a particular value of  $\Gamma$ . One observes that the different branches are pretty close to each other. This

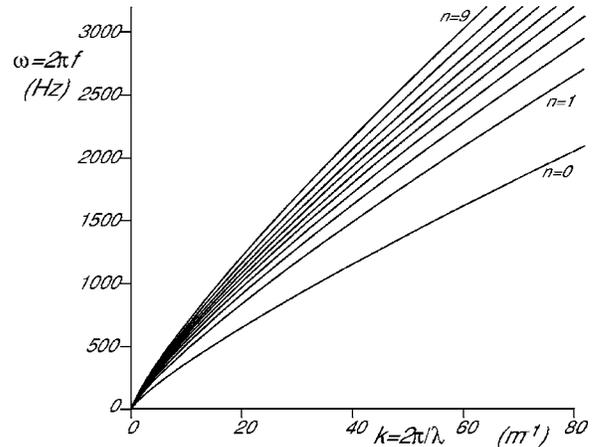


FIG. 4. Dispersion relation of sagittal waves for  $\Gamma = 50 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{5/6}$ . Note that the dispersion relation of transverse waves (not shown) almost collapses on the same curves.

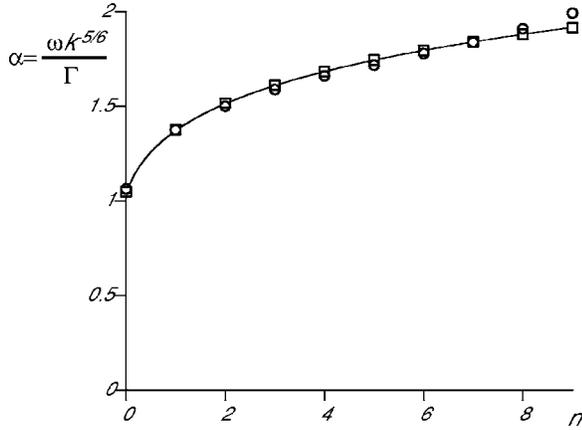


FIG. 5. Dimensionless frequency  $\alpha = \omega k^{-5/6}/\Gamma$  as a function of the mode number  $n$  for the longitudinal (○) and the transverse (□) modes. The best fit (solid line) of transverse modes data by  $\alpha = (\alpha_0 + \delta_\alpha n)^{1/6}$  gives  $\alpha_0 \approx 1.3906$  and  $\delta_\alpha \approx 5.4145$ .

is due to the very slow increase of the dimensionless frequency  $\alpha$  with the mode number  $n$  (Fig. 5). Although the values of  $\alpha$  are not regularly spaced, they follow a general trend:  $\alpha \sim n^{1/6}$ .

#### IV. TRANSVERSE SURFACE WAVES UNDER GRAVITY

##### A. Linearized equations

Now we investigate the existence of propagative transverse modes localized close to the surface [36]. We consider a transverse displacement  $\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)}$  at the surface of the granular bed. We define the dimensionless function  $V$  of the dimensionless variable  $\eta = kz$ :

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 \\ V(\eta) \\ 0 \end{pmatrix} \zeta. \quad (17)$$

Again, we linearize the strain tensor

$$\tilde{u}_{ij} = k\zeta \begin{pmatrix} 0 & \frac{iV}{2} & 0 \\ \frac{iV}{2} & 0 & \frac{V'}{2} \\ 0 & \frac{V'}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

and find no variation of the volumic compression  $\tilde{\delta} = 0$ . The trace of  $\tilde{u}_{ij}$  is null so that  $\tilde{u}_{ij}^0 = \tilde{u}_{ij}$ , and then  $u_s^2 = 2u_{ij}u_{ij}$  vanishes. Finally, we obtain

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -2AE\sqrt{\delta_0}\tilde{u}_{ij} = -AE\sqrt{\delta_0}k\zeta \begin{pmatrix} 0 & iV & 0 \\ iV & 0 & V' \\ 0 & V' & 0 \end{pmatrix}.$$

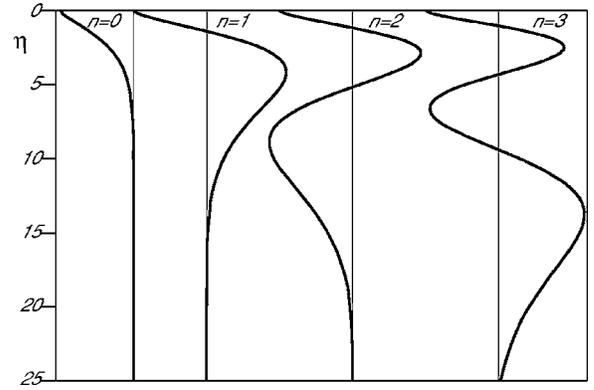


FIG. 6. Shape of the transverse modes  $V(\eta)$  for the same frequency.

From the equation of motion along  $y$ , we get a similar dispersion relation as for sagittal modes:

$$\omega = \alpha\Gamma k^{5/6}. \quad (18)$$

The shape of the mode—and the  $\alpha$  values—are now given by the equation

$$\alpha^2 V = \eta^{1/3} V - (\eta^{1/3} V'). \quad (19)$$

##### B. Resolution

To solve Eq. (19), we decompose the problem in two equations:

$$V' = \eta^{-1/3} S,$$

$$S' = (\eta^{1/3} - \alpha^2) V,$$

with boundary conditions coming from the zero stress condition at the free surface [ $S(0) = 0$ ] and the definition of  $\zeta$  [ $V(0) = 1$ ]. At infinity, we impose a vanishing displacement:  $V(\eta \rightarrow \infty) = 0$ . As for sagittal waves, the system presents a discrete number of modes that may be associated with the gravity induced stratification. The shape of the modes is displayed on Fig. 6. The motion is pure shear and the modes are linearly polarized in the direction transverse to the sagittal plane. The amplitude of the mode  $n$  decays exponentially after typically  $n$  oscillations. Figure 5 shows the variation of the dimensionless frequency  $\alpha$  with  $n$ . Numerically obtained data are well fitted by  $\alpha = (\alpha_0^6 + \delta_\alpha n)^{1/6}$ , with  $\alpha_0 \approx 1.07$  and  $\delta_\alpha \approx 5.35$ .

#### V. THE SONG OF DUNES: SURFACE WAVES INDUCED BY AN AVALANCHE

##### A. Dispersion relation in a booming sand

In the Introduction, we summarized the state of the art concerning the song of dunes. Now that we have clarified theoretically the nature of surface elastic waves, it is interesting to investigate whether or not field (and other) measurements can be matched using this concept. In a previous article, Andreotti [19] has measured the dispersion relation at

the surface of the avalanche slip face of a singing dune (top schematic of Fig. 7). Now we briefly recall the measurement methodology but extensive details can be found in this last reference. Sinusoidal signals, recorded on a tape, were played through an amplified loudspeaker that was kept fixed. As the mechanical transmission of the sound generator with the sand bed is nonlinear, the signal is distorted and presents harmonics. This imperfection was used to derive several points of the dispersion relation from each recording. From the phase between the Fourier components of the signals of two accelerometers aligned with the loudspeaker, the wavelengths  $\lambda$  associated with each frequency  $f$  were obtained. In order to unwrap the phase, the amplitude of the signals was slightly modulated at low frequency. The collection of all measurements that establishes the dispersion relation is presented in Fig. 7.

Once replaced in the context of surface elastic waves, the wide scatter of experimental data points is not completely surprising. Indeed, a localized excitation at the surface, such as the one used for these measurements, cannot select a single mode. It is even probable that the decomposition of the source into sagittal and transverse modes may vary from one realization to the other. Thus the measured phase just gives an effective wavelength. To reanalyze the data, we considered that the lower frequency for a given wavelength was a pure mode  $n=0$ . The best fit of this lower bound by the relation  $\omega = \alpha_0 \Gamma k^{5/6}$  yields a value  $\Gamma \approx 50 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{5/6}$ . It would correspond at the booming emission frequency  $f=100 \text{ Hz}$  to a phase velocity of  $32 \text{ m/s}$  and to a group velocity of  $27 \text{ m/s}$  for the mode  $n=0$ . But, of course, higher order modes can propagate much faster than this lower bound.

Clearly, Fig. 7 does not constitute a proof that the propagation of surface waves is well captured by the model and more controlled experiments are needed to confirm our analysis. Nevertheless, as can be evidenced on the figure, the agreement for the first three modes is not bad and it is interesting now to compare the value found for  $\Gamma$  to the one predicted by a mean-field estimate. For  $EB=10 \text{ GPa}$  and the ratio  $B/A=6$  derived from the sand-pile slope, we obtain  $\Gamma \approx 106 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{5/6}$ . It means that the actual surface wave speeds measured in these conditions are still slow by a factor of 2 when evaluated from the simple arguments presented above. While the mean-field evaluation of the compression modulus  $EB$  is in general good, it usually overestimates the shear modulus [29]. Here, it suggests that the ratio  $B/A$  is in fact around 29 instead of 6 as argued by Liu *et al.* [34] from a Coulomb yield argument based on a sand pile slope.

### B. Finite size effect

In a semi-infinite medium, we have seen that the surface elastic waves always exist. If we now consider that the displacement should vanish at a finite depth  $H$ , a waveguide cutoff frequency appears, below which no sound can propagate (see the Appendixes). It corresponds to the limit of vanishing  $kH$  and thus to a nonpropagative mode. In Appendixes B and C, the shape of these resonant modes has been derived analytically as well as a good approximation for the reso-

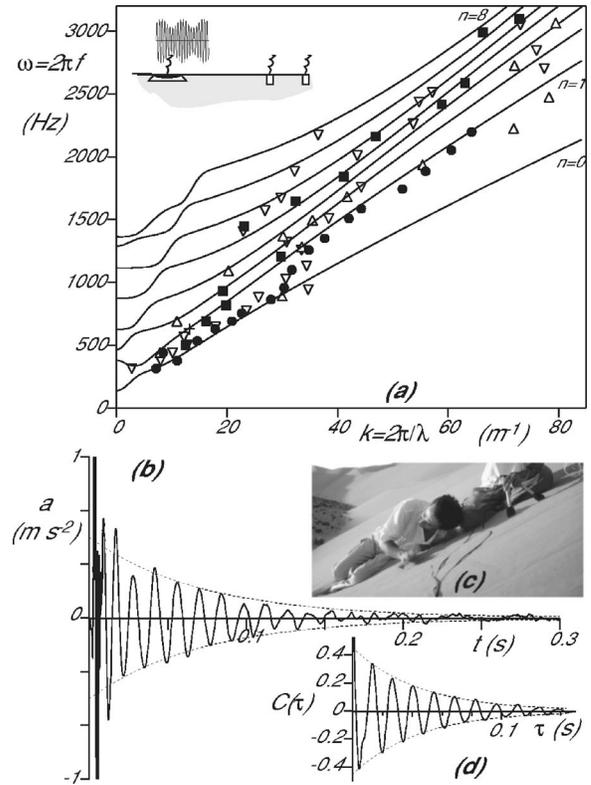


FIG. 7. (a) Dispersion relation of surface elastic waves on the slip face of a booming dune. A sinusoidal signal is emitted by a loudspeaker, aligned with transducers distant by 5 cm ( $\nabla$ ), 15 cm ( $\triangle$ ), 25 cm ( $\blacksquare$ ), and 42 cm ( $\bullet$ ). The solid lines correspond to the sagittal Rayleigh-Hertz modes [see Eq. (14) and the Appendix C] with a material stiffness  $\Gamma \approx 50 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{5/6}$  adjusted to match the lowest  $n=0$  propagating mode. The cutoff frequency is determined independently [(b)–(d)]. (b) Response of the booming dune to a normal tap, at the same place as (a). The signal is similar when recorded in the sand bed with an accelerometer or in the air with a microphone. The tail following the tap contains a well defined frequency, interpreted here as the first compression resonant mode due to the presence of wet sand at a depth around 50 cm below the surface. (c) Photograph showing the Makhnovist drum experiment. (d) Autocorrelation function of the signal shown in (b). The resonant frequency is around 73 Hz for the conditions of the experiment.

nance frequencies. We will limit ourselves to discussion of the results, presented in Fig. 8, in the context of booming avalanches, where they turn out to be useful.

Also they apparently resemble sinusoidal modes, there is a strong difference with usual modes in a nondispersive homogeneous medium: The resonant frequency  $f$  is proportional to  $\Gamma H^{-5/6}$ . Thus the nondispersive relation invoked in [20,21] does not apply since there is not a single sound velocity but a discrete number of dispersive modes.

Also, surprisingly, it is a well known fact that the desert dunes are filled with this water trapped by capillarity. Moreover, due to the successive avalanches, there is a layering of wet and dry zones close to the surface finishing at the surface with a dry layer (see schematic on Fig. 1). In the singing megabarhan located close to Sidi-Aghfinir (Morocco), we

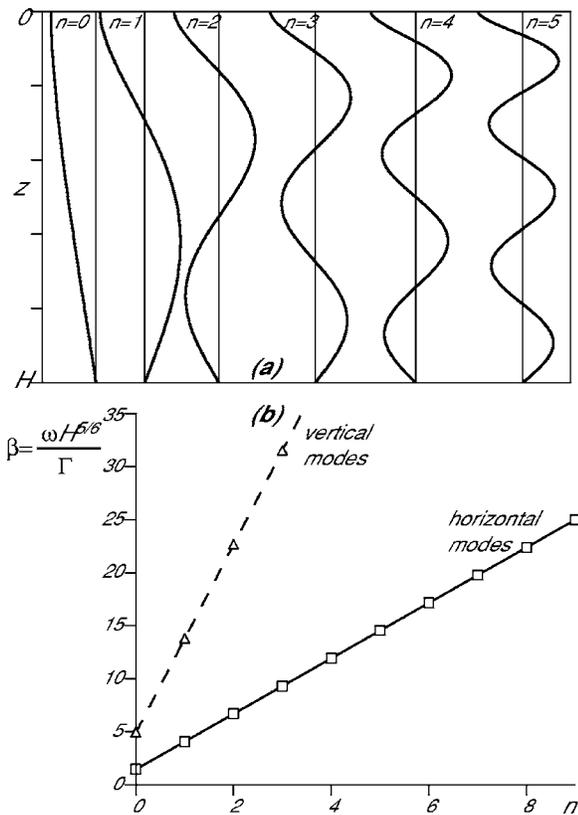


FIG. 8. (a) Shape of the resonant—not propagative—modes. (b) Rescaled resonant frequencies  $\beta$  of vertical ( $\Delta$ ) and horizontal ( $\square$ ) modes, together with the analytical approximation given in Appendix B.

have observed that the first dry layer is at a depth  $H$  ranging from a few centimeters to one meter. Figure 7(b) shows the response to a tap given with the hand on the surface of the dune [the so-called Makhnovist drum experiment shown on Fig. 7(c)]. As for the song of dunes itself, measurements of the pressure signal in the air and of the surface acceleration signal are very similar. While the impact is very short, the response is quite long, with well defined oscillations that decrease exponentially. The systematic study of this resonance remains to be done in a systematic way. Still, after preliminary studies in the lab, we think that it is related to a finite depth effect. The resonant frequency was derived from the first maximum of the signal autocorrelation function [Fig. 7(d)]. It gives  $f=73$  Hz which is well below the spontaneous frequency of emission ( $\approx 100$  Hz). This resonant frequency corresponds in our theory to  $H=47$  cm, which is indeed the typical depth at which the first wet layer may be found on dry days. The  $Q$  factor of the resonator, defined as the angular frequency times the relaxation time, is around 33. The solid lines in Fig. 7(a) actually correspond to the dispersion relation, computed with a null displacement imposed at a depth  $H$  (see Appendix C).

It is not completely obvious that the wet zone inside the dune plays the role of a rigid boundary. Indeed, the porous medium constituted by the grains is not saturated in water (which would create a strong impedance mismatch): The

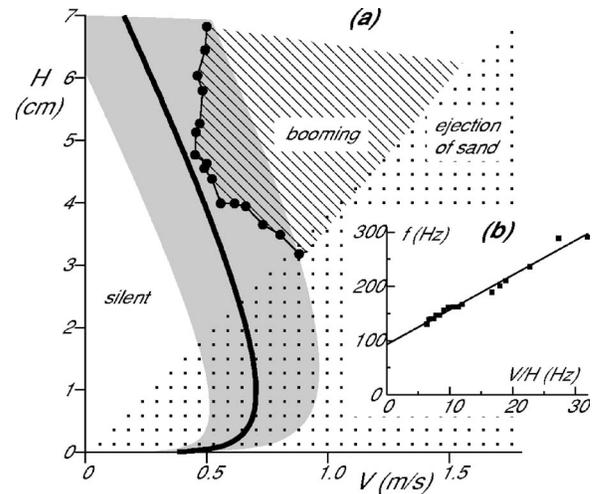


FIG. 9. Parameter range for sound emission in the Douady *et al.* laboratory experiment (Fig. 3 of [21]), depending on the pushing velocity  $V$  and the height of pushed sand  $H$ . The symbols ( $\circ$ ) are the experimental data. The dashed zone is the region of parameters for which there is spontaneous emission of sound and the dotted zone is that for which sand is ejected. The line shows the predicted limit on the left of which surface waves cannot propagate due to waveguide cutoff (see text for details). As there are important sources of error (for instance on  $\Gamma$ ), we have represented the error bars by a gray zone. However, the solid line prediction was obtained without any adjustable parameter.  $\Gamma$  is determined on the same sand coming from the Atlantic Sahara (Fig. 7). (b) The emission frequency  $f$  is taken from a subset of data in Douady *et al.* close to the instability threshold and plotted as a function of  $V/H$ . The relation is well fitted by  $f=0.38\sqrt{g/d}+6.4V/H$ .

sand becomes cohesive due to the formation of capillary bridges between the grains. As a consequence, the normal force exerted on grains and thus the sound velocity increases. Since the capillary pressure is proportional to the surface tension  $\gamma$  divided by the grain diameter  $d$ , it is only a few times the pressure induced by gravity at 10 cm below the surface. Due to the small exponent of the sound speed–pressure relation, the sound velocity should not vary much at the interface between dry and wet sand (typically 10% at 50 cm below the surface). However, the second effect of capillary bridges is to increase the dissipation of energy by viscous damping inside water. The most dissipative zone is probably inside the grains contact area. Using common estimates of the microcontacts geometry, we find a relaxation time in the presence of water of the order of  $\approx 1$  ms, which is consistent with the measurements performed at high frequency by [37]. This is two orders of magnitude smaller than the relaxation time measured for a dry sand layer (Fig. 9). As a conclusion, the wet layer probably acts as an efficient acoustic absorber. Although not completely equivalent, it should act as a rigid boundary, cutting the low frequency modes that would otherwise be propagating in a dry sand.

### C. The booming instability threshold

The previous study suggests an alternative explanation for the booming instability threshold reported in [21], i.e., dunes

cannot boom if the first dry layer is too close to the surface, as surface elastic waves cannot propagate. For an emission at  $f=100$  Hz, the predicted minimum depth  $H$  is around 7.5 cm—by comparison, typical booming avalanches are 2 cm to 5 cm thick (Fig. 1). Even under some circumstances, we have observed that too thin flowing layers do not boom, as reported in [21]. The booming instability threshold was measured by [21] in a controlled experiment (see Introduction), where the height  $H$  and the velocity  $V$  of a small scale avalanche were controlled. Note, however, that  $H$  corresponds to a typical vertical scale but the geometry of the whole avalanching apparatus is more complicated. The experiment shows that the emission frequency  $f$  and the threshold depend on  $V$  and  $H$  in a complex manner (Fig. 9). We have plotted on the same graph the curve on the left of which surface elastic waves cannot propagate due to the finite depth cutoff. The elastic wave parameters were taken from the previously discussed measurement on naturally booming dunes (with the same sand). The emission frequency  $f$  close to the threshold is fitted from the experimental points of Douady *et al.* [21] by a linear relation on  $V/H$  [Fig. 9(b)]. The effective depth of the resonator was taken equal to the avalanche height  $H$ . We see that the predicted threshold goes close enough to the experimental points, without any adjustable parameter. Of course, it would be nice to refine the calculation, taking into account the complexity of the experimental setup geometry, but this is out of the scope of the present paper. We clearly see here that booming is heard whenever surface elastic waves are able to propagate, given the overall sand depth. As a conclusion, the correct assessment of surface waves dispersion shows that there is no need to introduce “coupling (shear?) waves” propagating at the very small velocity of 1 m/s in order to explain the booming threshold. This is in agreement with what was previously reported in this context by [19].

#### D. The song of dunes as a coupling between avalanching grains and surface elastic waves

To conclude this section, the theoretical investigation of elastic waves at the surface of a granular bed sheds light on the mechanisms at work in the song of dunes. These waves have been evidenced in the field [19] and their existence is now proven in the context of nonlinear elasticity. The comparison of the theory with the measured dispersion relation has allowed us to deduce the material parameter  $\Gamma$ , which is (only) a factor of 2 below the mean field prediction. Using this value, the threshold above which surface waves at the emission frequency (governed by the shear rate) can propagate is determined and matches quantitatively the threshold measured by [21].

These results allow us to clarify the role of resonance for the booming dune instability. For a given resonator height, the experiment allows us to increase the collision frequency in the shear zone (by increasing the velocity) up to the cutoff frequency (resonance condition). But the instability is still present for a collision rate (i.e., an emission frequency) larger than the cutoff frequency. In this case, the excited elastic modes are propagative and the sand booming fre-

quency, selected by the shear rate, is no longer a resonant condition.

Still, several problems raised by the song of dunes remain open. (i) The exact location in avalanches of the shear band exciting waves is still unclear. Can one produce a controlled sounding avalanche in which the velocity profile and the emission frequency can be simultaneously measured? (ii) Can one prove the direct relation between the resonant frequency (obtained for instance by tapping) and the emission threshold? (iii) It has been shown that singing grains are covered by a specific silica-gel layer [18], which may dry the contact between grains and thus decrease the wave damping. We have shown here that the  $Q$  factor of a resonator constituted by sounding grains can be of the order of 33, which is impressively high. Can one prove, by studying the propagation of surface waves in the lab, that there is a difference (propagation speed or attenuation rate) between silent and sounding grains?

## VI. CONCLUSION

In conclusion, we have performed a derivation of sound-wave propagation modes in the context of the Jiang-Liu model of granular nonlinear elasticity. Under gravity, we prove the existence of a discrete number of modes localized in the vicinity of the free surface. They are due to a stratification of the material stiffness, responsible for a channeling effect of the acoustic waves. The waves can be either elliptically polarized in the sagittal plane or linearly polarized in the transverse direction. It is interesting to note that the polarization becomes linear if the shear modulus vanishes ( $A=0$ ) [33]. The identified modes are dispersive, which means that there is not one single propagation speed  $c$  characteristic of the material: There is a multiplicity of modes very close to each other; each mode follows a dispersion relation of the type  $\omega \propto \Gamma k^{5/6}$ .

Note additionally that all the results presented here are very robust to slight changes in the model. For instance, we have shown that imposing the boundary condition at finite depth only leads to a waveguide effect, with a cutoff frequency given by the resonant modes (see the Appendixes). We have also checked explicitly that a load at the free surface (a nonvanishing pressure) does not change the number nor the nature of the modes. In particular, no supplementary mode corresponding to the usual Rayleigh wave appears: The sagittal modes replace Rayleigh ones. For this reason, we propose to call “Rayleigh-Hertz modes” the modes identified in this paper. We also checked that the same modes are also present in the Boussinesq approximation [35].

We have mostly discussed the theoretical findings in the context of booming avalanches, which initially motivated the present work. The semiquantitative agreement about the dispersion relation and the instability threshold are encouraging, and confirms the mechanism of interaction between surface waves and avalanching grains proposed a few years ago [19]. The next step is to prove experimentally the existence of surface waves and resonant modes and to investigate where they can be described by nonlinear elasticity. This is an ongoing work in our laboratory and we leave these questions for a future paper.

## ACKNOWLEDGMENTS

We wish to thank P. Claudin for fruitful discussion on the effective strain-stress relation in granular matter and V. Goussev, who worked independently on the same subject, for long and pleasant discussions on the nature of these waves (guided vs Rayleigh). B.A. thanks H. Elbelrhiti and H. Bellot for assistance during the first field measurements. This study was supported by an ‘‘ACI Jeunes Chercheurs’’ of the French ministry of research.

## APPENDIX A: SOUND PROPAGATION UNDER ISOTROPIC COMPRESSION

## 1. Propagation speed of longitudinal waves under isotropic compression

For the sake of completeness, we derive here the expressions of the propagation speed under isotropic compression. This can be useful to determine the parameters of the model from preliminary experiments under load. We consider first the propagation of longitudinal waves along the  $x$  axis. As the system is homogeneous, the modes are simply Fourier modes of the form  $Ue^{i(kx-\omega t)}$ . We denote by  $\widetilde{u}_{ij}$  the disturbance to the strain field and  $\widetilde{u}_{ij}^0$  its traceless counterpart:

$$\widetilde{u}_{ij} = ikU \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{u}_{ij}^0 = ikU \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

The disturbance of the volumic compression is then  $\widetilde{\delta} = -ikU$  and that of the modulus  $u_s^2$  is null. The stress associated with the sound wave is

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = E\sqrt{\delta_0} \left[ \frac{3}{2} \mathcal{B} \widetilde{\delta} \delta_{ij} - 2\mathcal{A} \widetilde{u}_{ij}^0 \right],$$

so that the equation of motion finally reads

$$-\rho\omega^2 U = -k^2 E \sqrt{\delta_0} \left[ \frac{3}{2} \mathcal{B} + \frac{4}{3} \mathcal{A} \right] U. \quad (\text{A1})$$

The speed of longitudinal acoustic waves is finally

$$c = \gamma_{\parallel} \left( \frac{P}{E} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{A2})$$

with  $\gamma_{\parallel} = [(3/2)\mathcal{B} + (4/3)\mathcal{A}]^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6}$ . We thus recover the scaling of the speed of sound  $c$  as  $P^{1/6}$ , but with an extra dependence on the coefficients  $\mathcal{A}$  and  $\mathcal{B}$  which themselves depend on the mean number of contacts and thus on pressure.

## 2. Propagation speed of transverse waves under isotropic compression

Similarly, we consider the propagation of transverse waves along the  $x$  axis. The modes are still Fourier modes of the form  $Ve^{i(kx-\omega t)}$ ,

$$\widetilde{u}_{ij} = ikV \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The disturbance of the volumic compression  $\widetilde{\delta}$  and of the modulus  $u_s^2$  are both null. The disturbance to the stress reduces to

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = -2E\sqrt{\delta_0} \mathcal{A} \widetilde{u}_{ij}^0$$

and the equation of motion finally reads

$$-\rho\omega^2 V = -k^2 E \sqrt{\delta_0} \mathcal{A} V. \quad (\text{A3})$$

The speed of longitudinal acoustic waves is finally

$$c = \gamma_{\perp} \left( \frac{P}{E} \right)^{1/6} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{A4})$$

with  $\gamma_{\perp} = \mathcal{A}^{1/2} \mathcal{B}^{-1/6}$ .

We thus get a prediction for the relation between the propagation speeds of longitudinal and transverse waves:  $\gamma_{\parallel} / \gamma_{\perp} = (3\mathcal{B}/2\mathcal{A} + 4/3)^{1/2} = (3/2\mu^2 - 7/6)^{1/2}$ .

## APPENDIX B: RESONANCES IN A FINITE DEPTH BOX

## 1. Horizontally polarized resonant modes

We consider the case of a granular packing bounded at  $z=H$  by a rough bottom wall where the displacement vanishes. The semi-infinite case discussed at length in the body of the article corresponds to the limit where  $H$  tends to infinity. As  $H$  is the only relevant length scale of the problem, we now use the rescaled coordinate  $\eta = z/H$ . We consider nonpropagative modes of vibration whose disturbed displacement field is horizontal and of the form  $U(\eta)e^{i\omega t}$ . The disturbed strain field reads

$$\widetilde{u}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & U'(\eta)/2H \\ 0 & 0 & 0 \\ U'(\eta)/2H & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The trace of  $\widetilde{u}_{ij}$  is null so that  $\widetilde{\delta} = 0$ ,  $\widetilde{u}_{ij}^0 = \widetilde{u}_{ij}$ , and  $\widetilde{u}_s^2 = 2u_{ij}u_{ij}$  vanishes. We end with  $\widetilde{\sigma}_{ij} = -2\mathcal{A}E\sqrt{\delta_0}u_{ij}$ . The disturbed vertical stress deduces as

$$\widetilde{\sigma}_{zx} = -\mathcal{A}E\sqrt{\delta_0}U'/H$$

and leads to the equation of motion

$$[\eta^{1/3}U'(\eta)]' + \beta^2 U(\eta) = 0, \quad (\text{B1})$$

where  $\beta$  is the rescaled pulsation defined by

$$\omega = \beta \Gamma H^{-5/6}. \quad (\text{B2})$$

Remarkably, the resonant frequencies are found to scale as  $H^{-5/6}$  and not  $H^{-1}$  as for a nondispersive medium. A normalization condition can be added, for instance  $U(0) = 1$ .

The solution of the ordinary equation (B1) involves the Bessel function of the first kind  $J_{-2/5}$  and is of the form

$$U(\eta) = (3/5)^{2/5} \Gamma(3/5) \eta^{1/3} J_{-2/5} \left( \frac{6\beta}{5} \eta^{5/6} \right). \quad (\text{B3})$$

For large  $\eta$ ,  $U$  goes like  $\eta^{-5/12} \cos((6\beta/5)\eta^{5/6} - \pi/20)$ . The value of  $\beta$  is selected by the zero displacement condition at the bottom edge of the box,  $U(1)=0$ , which simplifies into  $J_{-2/5}(6\beta/5)=0$ . There is thus a discrete number of modes, labeled by  $n$ , whose rescaled frequency can be approximated by

$$\beta \approx \frac{5\pi}{6} \left( n + \frac{11}{20} \right). \quad (\text{B4})$$

The numerical evaluation of the rescaled resonant frequency  $\beta$  is plotted on Fig. 11 together with the analytical approximation. The agreement is almost perfect.

## 2. Vertically polarized resonant modes

We now consider modes of vibration whose disturbed displacement field is vertical and of the form  $W(\eta)e^{i\omega t}$ . Then the disturbed strain field reads

$$\tilde{u}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W'(\eta)/H \end{pmatrix}, \quad \tilde{u}_{ij}^0 = \begin{pmatrix} -\frac{W'}{3H} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{W'}{3H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2W'}{3H} \end{pmatrix}$$

from which we deduce the disturbed volumic compression  $\tilde{\delta} = -W'/H$  and the disturbed modulus

$$\tilde{u}_s^2 = 2u_{ij}^0 \tilde{u}_{ij} = -\frac{4\delta_0 W'}{3H}.$$

Then the disturbed vertical stress is deduced as

$$\tilde{\sigma}_{zz} = -\frac{E\sqrt{\delta_0}}{2H} (5\mathcal{A} + 3\mathcal{B}) W'.$$

It leads to an equation of motion similar to the previous one,

$$\left( \frac{5}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right) [\eta^{1/3} W'(\eta)]' + \beta^2 W(\eta) = 0, \quad (\text{B5})$$

and thus with the same type of solution. The rescaled resonant frequency  $\beta$  can now be approximated by

$$\beta = \frac{5\pi}{6} \left( \frac{5}{2} + \frac{3\mathcal{B}}{2\mathcal{A}} \right)^{1/2} \left( n + \frac{11}{20} \right). \quad (\text{B6})$$

The numerical evaluation of the rescaled resonant frequency  $\beta$  is plotted on Fig. 11 for  $\mathcal{B}/\mathcal{A}=6$  together with the analyti-

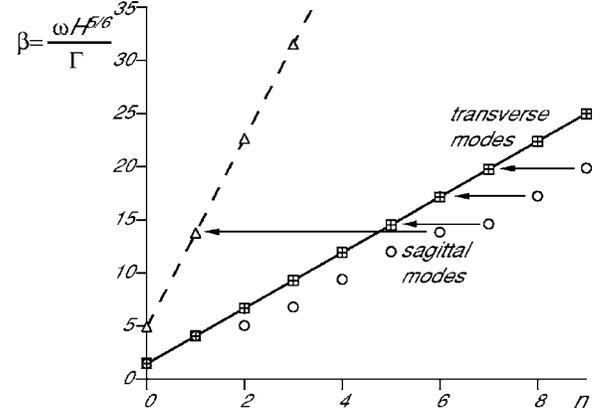


FIG. 11. Rescaled cutoff frequency  $\beta$  (i.e., rescaled frequency in the limit of small  $kH$ ) as a function of the mode number for sagittal ( $\circ$ ) and transverse ( $+$ ) modes. The resonant frequencies of vertical ( $\triangle$ ) and horizontal ( $\square$ ) modes are also shown.

cal approximation. Again, the agreement is very good.

We find that the frequency of vertically polarized resonant modes is significantly larger than horizontally polarized ones. This is due to a larger stiffness in compression than in shear.

## APPENDIX C: FINITE DEPTH EFFECT ON THE DISPERSION RELATION

We consider here the dispersion relation of surface waves for a finite depth sample. As in the previous section, we assume that the displacement vanishes at  $z=H$ . There are two interesting limits. In the limit of large  $kH$ , we should recover the semi-infinite case ( $\omega = \alpha\Gamma k^{-5/6}$ ) discussed in the body of the article. In the small  $kH$  limit, there is a waveguide cutoff. Importantly, here, the effect is not the gravity induced waveguide but a second one, due to the bottom boundary condition. We recall that the modes at vanishing  $k$  are nothing but the resonant modes derived previously. Thus, in the limit  $kH \rightarrow 0$ , the dispersion relation tends to  $\omega = \alpha\Gamma H^{-5/6}$ .

The full dispersion relations of transverse and sagittal modes are plotted on Fig. 10. They exhibit as expected a  $(kH)^{5/6}$  asymptote and a cutoff frequency at  $kH=0$ . In the case of transverse waves, the cutoff resonant modes are polarized transversally (horizontal resonant modes). The cutoff frequencies are thus given by Eq. (B4). This in contrast with the sagittal modes, which present a wiggling dispersion relation at the approach of the cutoff frequency. As shown on Fig. 11, where the cutoff frequency is plotted as a function of the mode number, this is due to an irregular alternation of vertically polarized and horizontally polarized resonant modes. This is a strong feature of the present model.

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 3rd ed. (Pergamon, New York, 1986).
- [2] S. Douady, A. Manning, P. Hersen, H. Elbelrhiti, S. Protière, A. Daerr, and B. Kabbachi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 018002 (2006).
- [3] H. Hertz, *J. Reine Angew. Math.* **92**, 156 (1882); see in [1].
- [4] C. H. Liu and S. R. Nagel, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2301 (1992).
- [5] X. Jia, C. Caroli, and B. Velicky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1863 (1999).
- [6] P. H. Brownell, *Science* **197**, 479 (1977); *Sci. Am.* **251**(6), 94 (1984); P. H. Brownell and R. D. Farley, *J. Comp. Physiol.* **131**, 23 (1979); **131**, 31 (1979).
- [7] W. Sturzl, R. Kempter, and J. L. van Hemmen, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5668 (2000).
- [8] A. Tanguy, J. P. Wittmer, F. Leonforte, and J. L. Barrat, *Phys. Rev. B* **66**, 174205 (2002).
- [9] M. Wyart, L. E. Silbert, S. R. Nagel, and T. A. Witten, *Phys. Rev. E* **72**, 051306 (2005).
- [10] Records of the song of dunes may be heard at <http://www.pmmh.espci.fr/~andreotti/SongOfdunes.html>
- [11] M. Polo, in *The Description of the World*, edited by A. C. Mouleand Paul Pelliot (Routledge, London, 1938). Available online; see Ref. [10].
- [12] C. Carus-Wilson, *Nature (London)* **44**, 322 (1891).
- [13] F. J. Goldsmid, *Geophys. J.* **9**, 454 (1897).
- [14] J. H. Poynting, *Nature (London)* **77**, 248 (1908).
- [15] C. Carus-Wilson, *Nature (London)* **77**, 222 (1908).
- [16] R. A. Bagnold, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **295**, 219 (1966).
- [17] F. Nori, P. Sholtz, and M. Bretz, *Sci. Am.* **277**, 84 (1997).
- [18] D. Goldsack, M. Leach, and C. Kilkenny, *Nature (London)* **386**, 29 (1997).
- [19] B. Andreotti, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 238001 (2004).
- [20] M. Hunt (private communication); M. Hunt *et al.*, *Roaming Sand Dunes*, Minisymposium: Geophysical Fluid Dynamics, APS-DFD, Tampa, Nov. 2006.
- [21] S. Douady, A. Manning, P. Hersen, H. Elbelrhiti, S. Protière, A. Daerr, and B. Kabbachi, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 018002 (2006).
- [22] B. Velicky and C. Caroli, *Phys. Rev. E* **65**, 021307 (2002).
- [23] I. Goldhirsch and C. Goldenberg, *Eur. Phys. J. E* **9**, 245 (2002).
- [24] J. Duffy and R. D. Mindlin, *J. Appl. Mech.* **24**, 585 (1957).
- [25] P. J. Digby, *J. Appl. Mech.* **48**, 803 (1981).
- [26] K. Walton, *J. Mech. Phys. Solids* **35**, 213 (1987).
- [27] A. N. Norris and D. L. Johnson, *J. Appl. Mech.* **64**, 39 (1997).
- [28] S. N. Domenico, *Geophysics* **42**, 1339 (1977).
- [29] H. A. Makse, N. Gland, D. L. Johnson, and L. M. Schwartz, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5070 (1999); *Phys. Rev. E* **70**, 061302 (2004).
- [30] Except maybe in the model case of 2D ordered packing of steel beads with a controlled weak polydispersity; see B. Gilles and C. Coste, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 174302 (2003).
- [31] D. Goddard, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **430**, 105 (1990).
- [32] P.-G. Gennes, *Europhys. Lett.* **35**, 145 (1996).
- [33] In writing this article, we became aware of a similar problem treated by another group in the special case  $\mathcal{A}=0$  nonlinear elasticity; see V. E. Gusev, V. Aleshin, and V. Tournat, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214301 (2006).
- [34] Y. Jiang and M. Liu, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 144301 (2003); **93**, 148001 (2004); "A unified theory of granular statics," report (unpublished).
- [35] J. Boussinesq, *C. R. Hebd. Seances Acad. Sci.* **77**, 1521 (1873).
- [36] We thank V. Gusev for pointing out the existence of these transverse modes.
- [37] I. Agnoli *et al.*, in *Powders & Grains*, edited by R. Garcia-Rojo, H. J. Herrmann, and S. McNamaca (Balkema, Rotterdam, 2005), p. 313.

# Comment on “Solving the mystery of booming sand dunes”

Bruno Andreotti,<sup>1</sup> Lenaic Bonneau,<sup>1</sup> and Eric Clément<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*PMMH, UMR7636 (CNRS), ESPCI Univ. P6-P7, 10 Rue Vauquelin, 75005 Paris, France.*

(Dated: October 30, 2007)

We show here that the standard physical model used by *Vriend et al.* to analyse seismograph data, namely a non-dispersive bulk propagation, does not apply to the surface layer of sand dunes. According to several experimental, theoretical and field results, the only possible propagation of sound waves in a dry sand bed under gravity is through an infinite, yet discrete, number of dispersive surface modes. Besides, we present a series of evidences, most of which have already been published in the literature, that the frequency of booming avalanches is not controlled by any resonance as argued in this article. In particular, plotting the data provided by *Vriend et al.* as a table, it turns out that they do not present any correlation between the booming frequency and their estimate of the resonant frequency.

PACS numbers:

## ACOUSTICS IN SAND DUNES

It is a well-known fact that sand dunes present a layered structure due to successive avalanches and capillary water retention. We focus here on the acoustic propagation within the metre scale surface layer composed of dry sand. According to *Vriend et al.* [2007], in [*Andreotti 2004; Bonneau et al. 2007*], we “only consider low-speed surface waves of around 50 m/s” while “booming results from the propagation of body waves, not surface waves”. This statement reflects a misunderstanding of acoustic waves in granular media. In fact, we have shown that, contrarily to ordinary elastic solids, bulk modes (the ‘body waves’) do not exist at all [*Bonneau et al. 2007*]. Instead, there is an infinite yet discrete number of surface modes (not a single one) with a dispersive propagation (i.e. not a single wave speed independent of vibration frequencies). This has been directly evidenced in the field and in a lab experiment (Figure 1), and reproduced by an independent team [*Jacob et al. 2007*].

The explanation is simple. Sand is a divided medium that presents non-linearities of geometrical origin. As the grains do not have plane/plane contact, they behave like a spring whose stiffness depends on the normal force applied to put them into contact. As a consequence, the speed of sound  $c$  depends on confining pressure  $P$  – roughly as  $c \propto Z^{1/3} P^{1/6}$ , where  $Z$  is the effective number of contacts per grain. A striking consequence is that the order of magnitude of the propagation speed  $c$  under a pressure of  $\sim 1$  m of sand is lower than the sound velocity in air (although density is  $10^3$  times larger). Therefore the effective compressibility is extraordinarily small! This property cannot be explained without involving geometrical effects at the scale of a grain. This dependence on pressure has been proven several times experimentally and numerically for moderately large  $P$  ( $\sim 10 - 100$  m of sand in *Jia et al.*). Due to gravity-induced pressure ( $P \propto \rho g z$ ), the surface layer of a dune does not constitute a homogeneous system as  $c$  increases with depth. Thus,

no plane wave Fourier mode can exist in such a medium; only an infinite number of surface modes guided by the sound speed gradient may propagate. Consequently, a mode labelled  $n$  is localized within a depth  $n \lambda$  below the surface ( $\lambda$  is the wavelength) i.e. in a zone where the typical pressure is  $P \sim \rho g n \lambda$ . Thus, the surface propagation velocity increases with the mode number  $n$  in a similar way as  $c(P)$  (between  $n^{1/4}$  and  $n^{1/3}$  typically). So, even in the limit of an infinite depth (no finite-depth layering), gravity produces a wave-guide effect, but no resonance.

Considering now a layer of sand of finite depth  $H$ , a second wave-guide effect get superimposed to the first one and resonant modes may appear. As the system is still not homogeneous due to gravity, these resonant modes are not Fourier modes. By definition, they do not propagate – i.e. they have a vanishing group velocity – so that they correspond to cut-off frequencies of the system: no wave can propagate at a velocity smaller than the first resonant frequency  $f_R$ . The influence of the finite depth  $H$  is in fact limited to a very narrow range of frequencies. As soon as the depth  $H$  is larger than the wavelength (in practice, for a frequency  $f$  25% above  $f_R$ ), it can be considered as infinite and the gravity effect prevails [*Bonneau et al. 2007*].

Then, it is easy to realize that if one strikes such a gradient-index medium with a sledge hammer (basically, the procedure used by *Vriend et al.*), a series of wave packets corresponding to the different surface modes will be propagated that are related to the gravity induced index gradient and not to the effect of the finite depth  $H$ . Moreover, this procedure only gives access to the group velocity at the mean frequency of excitation – yet not controlled nor specified by *Vriend et al.* – and not at all at the frequency  $f$  of spontaneous booming. Consequently, from such a procedure, just by reading the multi-modal structure of a seismograph obtained using *only surface* transducers, one cannot conclude to the existence of multiple layers nor determine the resonant frequencies. Actually, if *Vriend et al.* were right, they could

easily provide a crucial test by performing measurements with transducers buried in the bulk, as those reported in *Andreotti* [2004] (see Auxiliary figures). The vibration in the soil during booming avalanches is already strongly reduced at 60 mm below the surface (Auxiliary Figure), which evidences directly that the song of dunes is not related to a resonant mode at the meter scale but to surface propagation.

As a conclusion, the quantity determined by *Vriend et al.* has probably nothing to do with the resonant frequency  $f_R$ . Besides, one may wonder why they did not measure directly the resonant frequencies  $f_R$  for the sake of comparison with the booming frequency  $f$ . Using two different methods, we have ourselves performed such measurements using two different methods (Auxiliary Material). For a depth  $H$  of dry sand of the order of 50 cm, we find typically 70 Hz; for 1 m, the resonance becomes hardly visible and is below 50 Hz. This is much smaller than the values found by *Vriend et al.* and than the booming frequency  $f$  (100 Hz in Morocco). So, as already evidenced in our previous papers, the phenomenon is not driven by a resonance effect. As shown in *Bonneau et al.* [2007], the resonant frequency plays another role. As the surface waves do not propagate below  $f_R$ , the later controls the threshold for the booming phenomenon. A large enough layer of dry sand is required for the surface waves to propagate and thus for booming to occur. The best situation is thus an infinite layer of dry sand and not a layered one.

#### FIELD EVIDENCES AGAINST THE SELECTION OF THE FREQUENCY BY A RESONANCE

*Vriend et al.* have missed another very important step of the argument presented in *Andreotti* [2004]. The booming frequency  $f$  is controlled by the shear rate  $\dot{\gamma}$  (i.e. by the rate at which the grains collide with each other) in the shear zone separating the avalanche from the static part of the dune. Of course,  $\dot{\gamma}$  depends on the way the avalanche is forced. When a granular flow is driven by a pressure gradient, e.g. by pushing with the hand or the bottom,  $\dot{\gamma}$  can be varied and so does the emission frequency  $f$ . Besides, the reproduction of the phenomenon at small scale [*Haff* 1986; *Douady et al.* 2006; *Bonneau et al.* 2007] is a direct proof that the acoustic emission is not related to the dune itself. Note in particular that controlled lab experiments have allowed to produce sustained booming (not short squeaks), varying continuously from gravity to pressure gradient driving.

Spontaneous avalanches on the slip face of dunes are driven by gravity in an homogeneous and steady way. In that case, *only*,  $\dot{\gamma}$  and thus  $f$  are expected to scale as  $\sqrt{g/d}$ , with subdominant dependencies on the nature of the grains and the presence of cohesion. These conditions can be reproduced by a man-made slide only if

the velocity of the body is constant. This is never the case in the movies provided by *Vriend et al.* to illustrate their measurements. In the auxiliary animation, we show that a pulsed driving leads to a low frequency squeak similar to that measured by *Vriend et al.* (e.g. point at 70 Hz in their figure 3). It is pretty clear that such an inhomogeneous and unsteady driving do not resemble the spontaneous avalanching process and thus, the avalanche has no reason to yield a constant booming frequency  $f$ . By contrast, during our 13 field trips in Morocco from 2002 up to now, we have recorded around 20 spontaneous avalanches and 100 man-triggered slides, on barkhan dunes ranging from 4 to 42 m in height. This was done in different places and by different weather conditions. We always measured the same frequency  $f$  within a tone. In particular, during our field trip of April 2007, we have performed a series of experiments for different flow thicknesses  $H$ , measured coherently by two independent techniques (see Auxiliary figures). Again, provided that avalanches were homogeneous and steady, the frequency  $f$  turned out to be constant. This demonstrates that the frequency is not either selected by a resonance effect over the depth of the avalanching flow.

Figure 2 compares our predictions for the frequency  $f$  of homogeneous booming avalanches ( $f \sim 0.4\sqrt{g/d}$ ) and that proposed by the Caltech team ( $f = f_R$ ). Once the data obtained by *Vriend et al.* in Dumont are plotted (fig. 2b) – and not anymore presented in a Table – no correlation can be observed between  $f$  and what they claim to be the resonant frequency  $f_R$  (see above). By contrast, with a choice of representation different from *Vriend et al.* (see tables and fig. 4 in Auxiliary Material), the relation between  $f$  and  $\sqrt{g/d}$  appears beyond any doubt (fig. 2a and solid line in fig. 2b). This accumulation of evidences shows that the emission frequency  $f$  is neither controlled by a resonance effect at the scale the avalanche as suggested by *Douady et al.* [2006] nor at the scale of a superficial layer as suggested by *Vriend et al.* [2007].

The instability mechanism proposed in *Andreotti* [2004] is based on the interaction between the plastic deformations (shear band) and the elastic compression (acoustics) of the granular material. The collisions between grains induce a transfer of momentum from translation to vibration modes. In turn, the surface waves tend to synchronise the collisions. Importantly, this phase synchronisation linear instability do not depend on the fact that the vibrations modes are propagating or resonant. Although some ‘mysteries’ about singing dunes still remain to be solved, our explanation remains the single one consistent with all the existing observations.

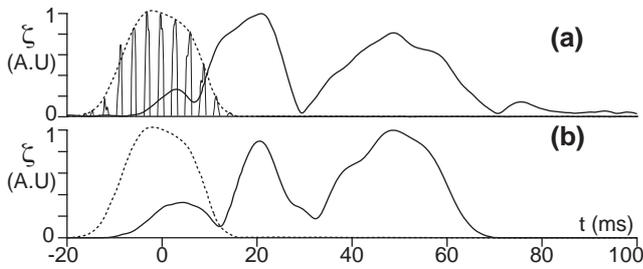


FIG. 1: Field experiment: propagation of a synthetic gaussian wave-packet at  $350\text{ Hz}$  at the surface of a  $50\text{ cm}$  deep flat booming sand bed (proto-dune on a limestone plateau) i.e. without any layering effect. (a) Signal envelope  $\zeta(t)$  measured by correlation with the emitted signal at  $5\text{ cm}$  (dotted line),  $150\text{ cm}$  (solid line) from the source. (b) Comparison with the model proposed *Bonneau et al. 2007*. The three wave-packets received are direct evidences of the existence of multiple propagative surface modes.

### AUXILIARY MATERIAL

Auxiliary material for this comment gives the details necessary to understand our arguments and reproduce our measurements. There are three points of disagreement with *Vriend et al.* First, we show with a movie (Animation S1) that a man-made slide produces a booming similar to spontaneous avalanches only if the body is kept rigid and the sliding velocity as constant as possible. This movie is to be compared to those provided by *Vriend et al.* as Auxiliary Material, where the avalanches are systematically pulsed and inhomogeneous. Second, we show that the representation used by *Vriend et al.* to compare the frequency and the grain diameter (Fig. 4) does not allow to see the obvious correlation of Fig. 2a. We provide the table of the frequencies used in the figures of the comment (Fig. 2a, 2b and 4). A movie (Animation S1), a schematic of the measurement set-up (Fig. 5), granulometric measurements (Fig. 3) and different frequency spectra (Fig. 6) are provided to document the data points obtained in the Atlantic Sahara. It may serve as a reference to start a data-base of steady homogeneous booming avalanches. Third, we show that the method used by *Vriend et al.* to measure the first resonant frequency is not correct. We provide the measurement set-up for our controlled acoustic field experiments (Fig. 7a), including two methods to determine directly the resonant frequency (Fig. 8). Using these methods, we obtain a resonant frequency lower and not equal to the booming frequency.

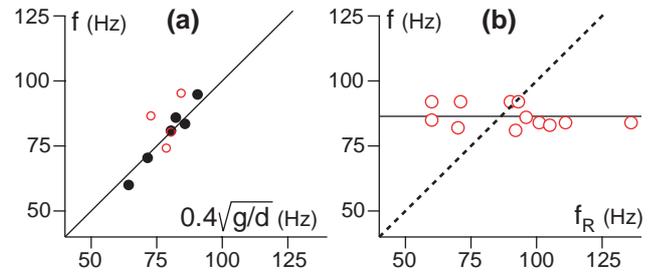


FIG. 2: (a) Booming frequency  $f$  as a function of grain size  $d$ . The plain symbols ( $\bullet$ ) corresponds to homogeneous and steady avalanches (spontaneous or not) and the open ones ( $\circ$ ) to the data of *Vriend et al.* (see details in the Auxiliary Tables). (b) Plot of the data-set presented by *Vriend et al.* as a Table (Large Dumont dune). Frequency  $f$  of man-induced avalanches as a function of the (biased) resonant frequency  $f_R$  (see text). On both plots a) and b), the solid line corresponds to our prediction. The dotted line is the prediction of *Vriend et al.* [2007]

Place	f (Hz)	d ( $\mu\text{ m}$ )
Kelso	92.8	200
Sidi-Aghfenir	103	163
Copiapo	87	210
El Cerro Bramador	75	270
Sand moutain	63	340
Tarfaya	90	183

TABLE I: Data points for which we do know that (i) avalanches where spontaneous or at least homogeneous and steady (ii) the grain diameter was determined from samples taken in the middle of the slip face, at the place where the avalanche was recorded. When possible, the frequency was averaged over several realisations.

Place	f (Hz)
Big dune	93.5
Eureka	79.3
Kelso	103.6
Dumont	86.4

TABLE II: Average frequency  $f$  of the data points measured from *Vriend et al.* No description of the conditions of experiment has been provided by these authors. The six movies they provided show the same technique to create avalanches, which are pulsed and inhomogeneous. No description of the place where the grains were sampled has been provided by these authors. The data obtained in Dumont on December 2005 have not been taken into account for several reasons: no recording is provided, no movie is provided, the width of the frequency peak is extremely large (40% of the central frequency) which is the signature of a small squeak induced by an unsteady avalanche (see our Auxiliary movie). So it cannot be used in a plot aiming to show data obtained in homogeneous and steady conditions.

[1] Andreotti, B. (2004), The song of dunes as a wave-particle mode locking, *Phys. Rev. Lett.*, *93*, 238001.

[2] Bonneau, L., B. Andreotti, and E. Clément (2007), Sur-

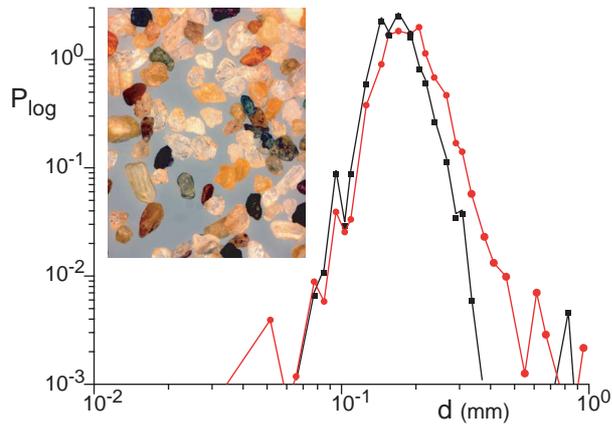


FIG. 3: Probability density function (PDF), weighted in mass, of the logarithm of the grain size  $d$ . Red dots: 4 m high barchan dune in Tarfaya that booms at the frequency  $f = 90$  Hz (see Auxiliary film). Black squares: 42m high mega-barkhan in Sidi Aghfinir that boomed at a mean frequency  $f = 103$  Hz over 5 years (see Auxiliary film). The best fit by a log-normal distribution (a parabola in that representation) gives the centre of the distribution:  $d = 183 \pm 2 \mu\text{m}$  and  $d = 163 \pm 2 \mu\text{m}$  respectively. Inset: Photograph of few grains from the small barchan dune in Tarfaya.

face elastic waves in granular media under gravity and their relation to booming avalanches, *Phys. Rev. E*, *75*, 016602.

- [3] Deboeuf, S., E. Lajeunesse, O. Dauchot and B. Andreotti (2006) Flow rule, self-channelization and levees in unconfined granular flows, *Phys. Rev. Lett.*, *97*, 158303.
- [4] Douady, S. et al. (2006), The song of the dunes as a self-synchronized instrument, *Phys. Rev. Lett.*, *97*, 018002.
- [5] Jop, P., Y. Forterre and O. Pouliquen (2005) Crucial role of side walls for granular surface flows, *J. Fluid. Mech.*, *541*, 167.
- [6] Jacob, X. et al., cond-mat/0710.2321.
- [7] Haff, P.K. (1986), Booming dunes, *Am. Sci.*, *74*, 376381.
- [8] Jia, X., C. Caroli, and B. Velicky (1999) Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media, *Phys. Rev. Lett.*, *82*, 1863-1866.
- [9] Malloggi, F., J. Lanuza, B. Andreotti and E. Clement (2006) Erosion waves: transverse instabilities and fingering, *Europhys. Lett.*, *75*, 825.
- [10] Vriend, N.M. et al. (2007), Solving the mystery of booming sand dunes, *Geophys. Res. Lett.*, *34*, L16306, doi:10.1029/2007GL030276.

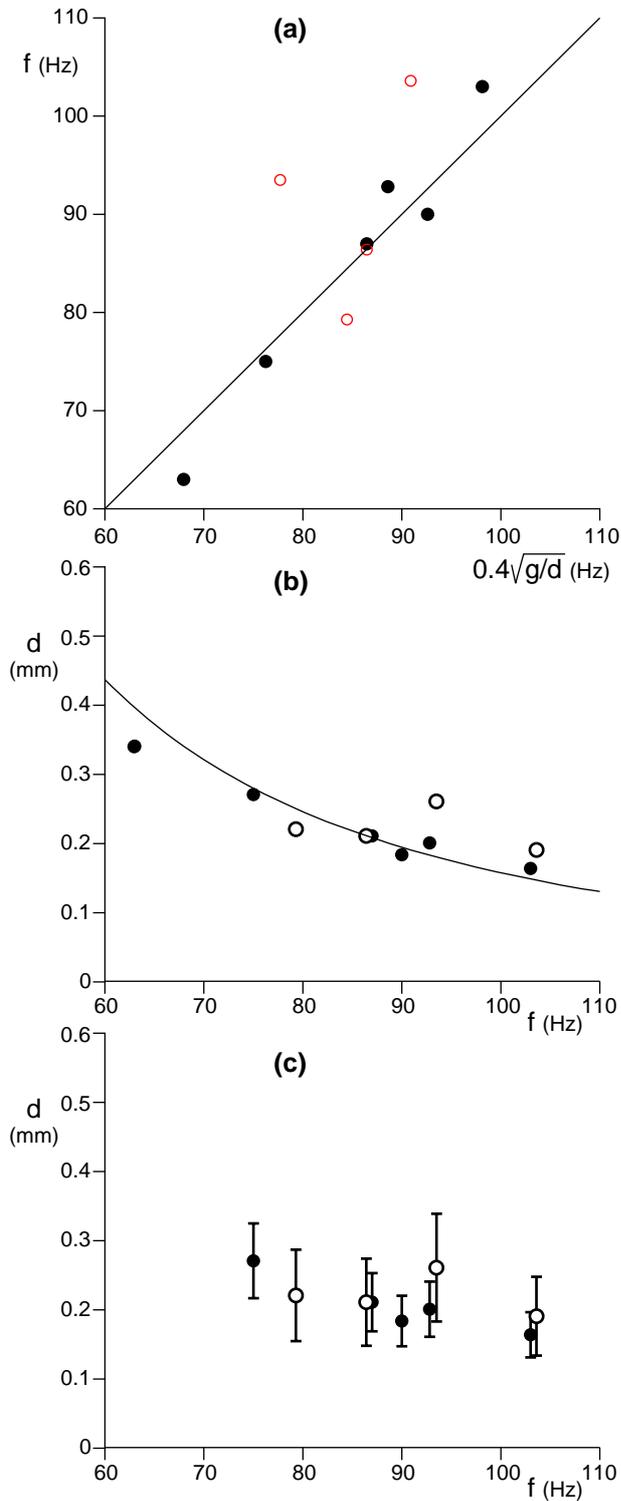


FIG. 4: How can the same data show a clear scaling of the booming frequency  $f$  with  $\sqrt{g/d}$  and, as stated by Vriend et al, no correlation? (a) Replot of figure 2a. The prediction corresponds to a straight line at  $45^\circ$  in the graph (equal range of axis). The symbols show the conditions of booming: homogeneous and steady with a grain diameter  $d$  determined in the middle of the avalanche slip face ( $\bullet$ ) or pulsed and an unknown position at which sand was sampled ( $\circ$ ). (b) Same but plotting  $d$  as a function of  $f$ . A large axis range is chosen for  $d$  (0 to 600  $\mu\text{m}$  while the dune grain size ranges from 150  $\mu\text{m}$  to 350  $\mu\text{m}$ ), but the same narrow axis range for  $f$ . The solid line shows the prediction. (c) Same but adding error bars to indicate the width of the grain size distribution but letting no error bars on  $f$ , removing the last point on the left (Sand mountain), which significantly contributes to extend the dynamics, and removing the prediction. One obtains the plot presented by Vriend et al., which indeed shows no apparent correlation between  $d$  and  $f$ .

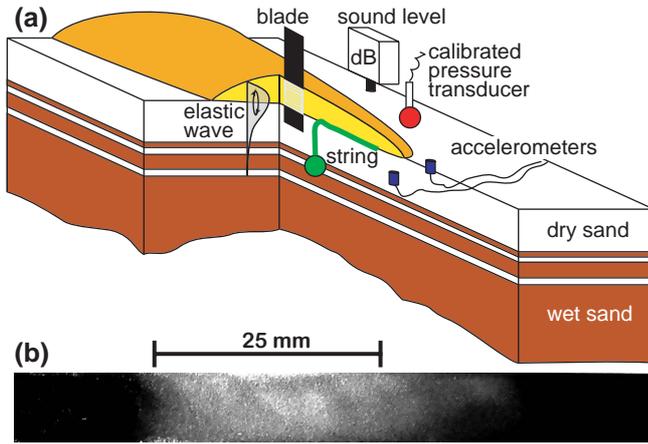


FIG. 5: (a) Schematic of the measurement set-up used to characterise booming avalanches. The pressure in the air is measured using a calibrated pressure transducer at 10 cm above the soil. A sound level apparatus using another microphone is filmed by the CCD camera (see Animation S1). The vibration of the grains is measured with piezo-electric accelerometers that can be put at different depth. The three measurements of the booming amplitude are checked to be consistent with the loud-speaker model (Andreotti 2004). The flowing depth is measured with two independent techniques. First, we bury a piece of string (green on the schematic) of diameter 4 mm that can be curved with a very small force, attached at one hand to a large heavy object. The avalanching grains entrain the string and align it along the steepest slope, at the surface of the static part of the dune. Second, we prepare in advance a large number of metallic blades (10 mm by 150 mm by 0.1 mm) covered with black soot. The blade is then eroded during a fraction of the avalanche time (typically 1 minute). Taking a photograph of the image of an homogeneous light, reflected by the light, the erosion intensity can be determined. As shown in controlled lab experiments, the grayscale is a function of the relative velocity between the flow and the blade. (b) Picture of the blade after a  $H = 45$  mm thick avalanche. The left limit between black and white zones correspond to that determined by the string method. The grayscale profile is consistent with a plug flow separated from the static part of the dune by a shear band.

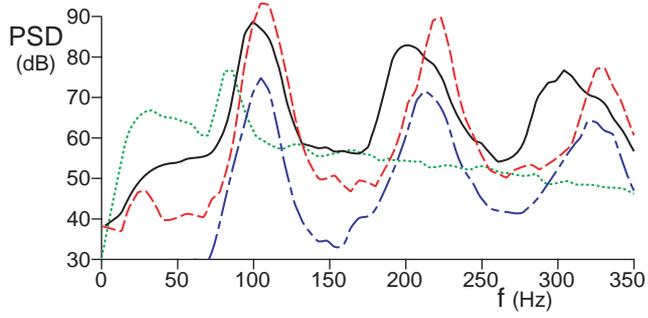


FIG. 6: Power spectrum density (PSD) measured during homogeneous steady avalanches similar to spontaneous ones. The power radiated is the integral of the PSD. Dotted line: avalanche on a 4 m high dune in Tarfaya ( $d \simeq 183 \mu\text{m}$ ). Dashed line:  $H = 65 \text{ mm}$  thick avalanche on a 42 m high dune in Sidi-Aghfinir ( $d \simeq 163 \mu\text{m}$ ). Solid line:  $H = 15 \text{ mm}$  avalanche on the same 42 m high dune. Dotted-dashed line: same avalanche ( $H = 15 \text{ mm}$ ), the signal coming from an accelerometer at 60 mm below the surface.

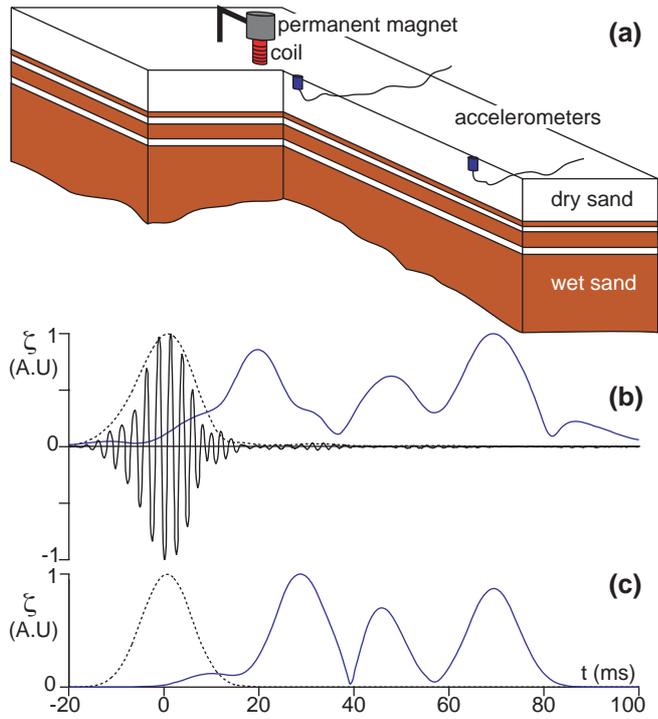


FIG. 7: (a) Schematic of the measurement set-up used to characterise surface wave dispersion relation and in particular, the cut-off frequency (first resonant mode). The emitter is excited with an amplified sinusoidal source. It is composed of a coil glued around a sand-paper cylinder buried in the sand and submitted to the action of a fixed permanent loud-speaker magnet. This way, the force acting on the sand paper is imposed and, as inertia is small, transmitted to the grains. The transducers are piezoelectric accelerometers of diameter 10 mm. This size is chosen to have a hierarchy of well-separated length scale: the wavelength (typically 40 cm) is much larger than the transducer size, which is much larger than the grain size  $d$ . (b-c) Same as fig. 1 of this comment, but on the slip face of a booming dune. Field experiment: propagation of a gaussian wave-packet at 400 Hz along the slip face of a 42 m high mega-barchan. (b) Signal envelope  $\zeta(t)$  measured by correlation with the emitted signal at 10 cm (dotted line), 220 cm (solid line) from the source. (c) Comparison with the model proposed Bonneau et al. 2007. The multiple wave-packets received are direct evidences of the existence of multiple surface modes guided by the gravity induced index gradient.

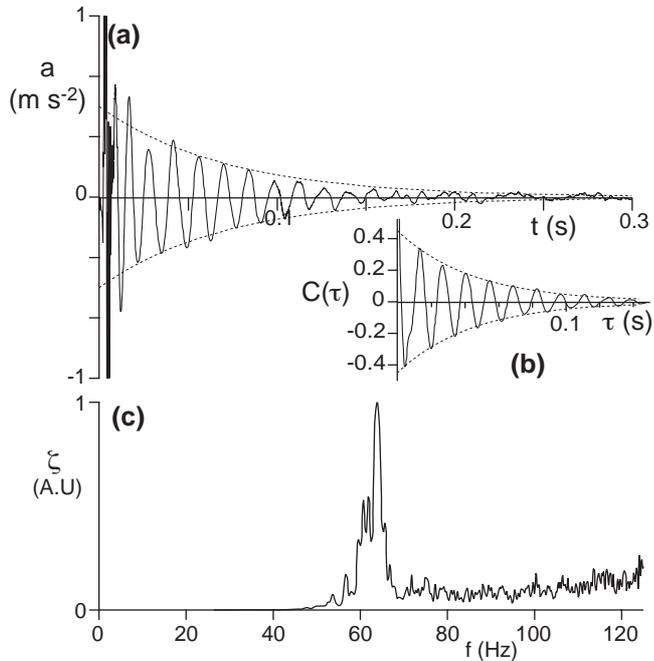


FIG. 8: (a) The Makhnovist drum experiment: response of the booming dune to a normal tap containing constituting a broadband excitation. After the propagative modes excited have left, the resonant mode i.e. which does not propagate stays. The tail following the tap contains a well defined frequency that can be interpreted as the first compression resonant mode. (b) Auto-correlation function of the signal shown in (a). The resonant frequency is around 73 Hz for these particular conditions of field measurements. The wet sand layer is at a depth around  $H = 50$  cm below the surface. [after Bonneau et al. 2006] (c) Amplitude  $\zeta$  of vibration at 5 m from the source as a function of the frequency  $f$ , for permanent sinusoidal signals emitted at the surface of a 4m high booming dune. The wet sand layer is at a depth  $H = 50$  cm below the surface.

FIG. 9: <http://www.pmmh.espci.fr/fr/morphodynamique/Booming.mov>  
Movie of homogeneous and inhomogeneous booming avalanches in the Atlantic Sahara. From 0" to 38": homogeneous steady avalanche on a 42 m high barchan ( $d=163$  microns). The sound level in dB can be read directly. The graduated stick gives the height of the free surface. From 38" to 56": homogeneous steady avalanche on a 4 m high barchan ( $d=183$  microns). From 56" to 70": homogeneous steady avalanche on the 42 m high barchan, recorded by the slider. The frequency is that of spontaneous events as the avalanche is driven by gravity. From 70" to 88": inhomogeneous unsteady avalanche produced by a pulsed slide. The frequency of the squeaks is not that of spontaneous events as the avalanche is driven by the pressure exerted by the bottom of the slider. This movie is to be compared to that provided by the Caltech team (<http://www.its.caltech.edu/nmvriend/research/multimedia.html>) that never show a sliding technique able to induce an homogeneous steady avalanche. Contrarily to their statements, they do not show either that booming sustains after the avalanche stops (one sees the sliders, not the avalanche). From 88" to 105": comparison of the sliding techniques. [Citation of Auxiliary Material (Animations S1, S2, S3 and S4) provided as scientific complements to their article by Vriend et al.]

# Friction induced amplification of guided elastic waves

Lénaïc Bonneau<sup>1</sup>, Tristan Catelin-Jullien<sup>2</sup>, Bruno Andreotti<sup>\*,1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes  
(UMR 7636 CNRS-ESPCI-P6-P7), 10 rue Vauquelin, 75005 Paris France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure  
UMR 8549 CNRS-ENS-UPMC, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris cedex 05, France

\*To whom correspondence should be addressed; E-mail: andreotti@pmmh.espci.fr.

**Different open geological problems such as dynamic earthquake triggering in fault gouges or booming avalanches involve the interaction between seismic waves and shearing motion. Here we show experimentally that guided waves are amplified when they propagate along shear bands. We investigate the spontaneous emission of elastic waves during the discharge of granular matter through a vertical tube and directly evidence their exponential amplification in the direction opposite to the flow. Performing the linear stability analysis, we relate the observed instability to the friction of grains on the boundary, which pumps energy from the mean flow to coherent elastic waves. We predict that the most amplified wavelength is proportional to the ratio of the tube radius to the friction coefficient, in good agreement with experimental measurements.**

Granular assemblies consist of large numbers of randomly arranged, macroscopic grains that are insensitive to thermal agitation (1). Due to the geometry of the interparticle contact (2),

they are much more compressible than the grain bulk material. Furthermore, the contact stiffness and thus the speed of sound  $c$  increase with the applied pressure  $P$  (3–5), a property that allows the propagation of guided acoustic modes at the surface of a sand bed (5–8). Besides, granular matter can be driven into flow by external forces. Far above the jamming transition, the measured rheology is well described by a local relation between stress and strain (9, 10), as for a Newtonian fluid, except that the viscosity strongly increases with pressure and diverges at zero strain (11), two properties that are reminiscent of solid friction. In the quasi-static regime, granular systems tend to form shear bands whose width is limited by the grain size (9) and inside which the rheology becomes highly non-local (12, 13). In this letter, we show experimentally that the elastic and plastic modes of deformations interact through pressure, even at low Mach numbers, and in particular that energy can be pumped from the mean flow into coherent acoustic vibrations. We show that this unusual shear-induced amplification of pressure disturbances belongs to a wider class of instabilities including those investigated theoretically by (14–16).

The spontaneous emission of a loud sound during the discharge of a smooth silo filled up with sand has been reported several times (17–19) but has remained unexplained. As the frequency  $f$  of vibration does not depend on the length of the silo, the hypothesis of resonant modes that would be excited by the flow inside the granular column, in the air above it (17) or in the surrounding silo (19) can be rejected. Similarly, as  $f$  is not proportional to the grain velocity, the vibration is not due to a stick slip motion associated to the hysteresis of the friction between the grains and the silo (17, 18). The phenomenon is not either due to dynamical arching at the outlet, characterised by a broadband spectrum (20), nor to the air grain interaction (21), important only for powders in fine tubes and characterised by a low frequency  $f = \mathcal{O}(1 \text{ Hz})$ .

We have performed systematic experiments using 2 m long Altuglas tubes of radius  $R$  ranging from 10 mm to 100 mm (Fig. 1A). Although similar measurements have been performed with spherical glass beads, the results presented here were obtained with rounded aeolian quartz

sand grains of diameter  $d = 165 \pm 20 \mu\text{m}$  (from the mega-barchans of Sidi-Aghfinir, Atlantic Sahara) and  $d = 325 \pm 45 \mu\text{m}$  (from the Pyla dune, Landes). By changing the silo material (stainless steel, brass and glass) and its thickness, we checked that the instability does not depend on the tube elasticity but only on its internal roughness. The tube was rigidly settled to the lab wall to avoid spurious resonances. It was filled continuously with granular material by a loading hopper during the whole experiment. The bottom end was fitted by a PVC plug in which a cylindrical outlet is reamed. The mean flow velocity  $u_0$ , controlled by the hole diameter, has been varied from  $1.5 \text{ mm s}^{-1}$  to  $150 \text{ mm s}^{-1}$ . Dynamic wall pressure was measured with four piezo-electric sensors placed along the wall. The grains in contact with the tube were imaged with a fast video camera (1000 Hz), providing the means to measure the velocity in the Eulerian reference frame by PIV (particle image velocimetry). In the bulk, we used piezo-electric accelerometers to perform Lagrangian measurements (Fig. 2). The size of these sensors ( $\sim 1 \text{ cm}$ ) is chosen much larger than the grain diameter  $d$ , to average over heterogeneities, and much smaller than the acoustic wavelength  $\lambda$  (5). Thanks to the wall friction, the pressure field is homogeneous, except in the vicinity of the outlet and the free surface (22). The system does not either present any mean gradient of density.

Just above the outlet, the signals measured are essentially low amplitude noises. Slightly higher in the tube, one observes the emergence of elastic waves at a well defined frequency  $f$  (Fig. 2). The phase between the signals received by the four pressure transducers shows that they propagate upward, in the direction opposite to the flow. The wave amplitude  $\mathcal{A}$  is defined using the auto-correlation function of the acceleration signal:  $\mathcal{A} = \sqrt{\langle 2 a(t) a(t + 1/f) \rangle}$ . Figure 3A shows that  $\mathcal{A}$  increases exponentially with height and saturates at a value on the order of the gravity acceleration  $g$ . This exponential amplification is the signature of a convective linear instability. The growth rate  $q(f)$  of each mode is determined by analysing the acceleration fluctuation spectrum at different heights. Figure 3B shows that the spontaneous emission

frequency corresponds to the most amplified mode. Lastly, figure 2B shows that the acoustic waves tend to form sharp shocks in the upper part of the tube. This non-linear effect is due to the pressure-dependence of the speed of sound: high pressure zones propagate faster than low pressure ones. This shows that the emitted waves are primarily compression modes.

As the emitted wavelength is much larger than the tube radius, the system can be modelled as a 1D compressible system. It is characterised by the density  $\rho$ , the velocity  $u$  and the pressure  $p$ , averaged over the section of the tube. The continuity equation reads  $\dot{\rho} + \rho \partial_z u = 0$  and the momentum equation can be written under the form:

$$\rho a = \rho \dot{u} = \rho g - \partial_z p - \frac{2\mu}{R} p \quad (1)$$

where  $\mu$  is the friction coefficient between the grains and the tube (22). At equilibrium, in a long tube, the pressure is a constant controlled by the tube radius:  $p_0 = \rho g R / (2\mu)$ . Due to the mean flow  $u_0$ , the local velocity is always downward so that the wall friction force is oriented upward. The granular matter behaviour is modelled by a visco-elastic constitutive relation, consistent with the Hertz contact law between grains:  $p \propto (\rho - \rho_c)^{1/2} [(\rho - \rho_c) + \frac{3}{2} \tau \dot{\rho}]$ . By construction, the pressure vanishes at the critical density  $\rho_c$ , which corresponds to the jamming transition at which particles loose contact. The bulk viscosity is characterised by the dissipation time  $\tau$ .

Considering disturbances of the form  $\exp(j(\omega t + \kappa z))$  the dispersion relation reads:

$$\frac{\omega^2}{1 + j \omega \tau} = c_0^2 \left( \kappa^2 - j \frac{2\mu}{R} \kappa \right) \quad (2)$$

where  $c_0$  is the wave propagation speed under the pressure  $p_0$ , in the absence of dissipation ( $\tau = 0$  and  $\mu = 0$ ). Consistently with experimental data, the predicted space growth rate  $q = \mathcal{I}(\kappa)$  is positive at low frequency (Fig. 3B). As depicted in figure 1B, the instability results from friction and is limited, at high frequency, by viscous damping. For a large enough Q-factor,

we predict that the most amplified wavenumber  $k_m$  does not depend on  $\tau$  and scales as:

$$k_m = \frac{\mu}{R\sqrt{2}} \quad (3)$$

Plotting the wavenumber rescaled by the tube radius  $k_m R$  against the flow velocity (Fig. 4A), the experimental data points fall on a master curve consistent with a friction coefficient gently increasing with  $u_0/\sqrt{gd}$  (12).

The model nonetheless predicts the existence of the linear convective instability (Fig. 3) and the scaling law followed experimentally by the most amplified mode (Fig. 4A) but also the observed saturation of the instability by non-linear effects (Fig. 3B). When the upward velocity disturbance associated to the wave balances the downward mean flow velocity, the friction force changes direction and jamming occurs. Far above the outlet, one predicts the appearance of traveling stop-and-go waves that do not grow anymore (Fig. 2B). They are characterized by a large upward acceleration  $a$  when the grains almost in free fall ( $a \sim g$ ) come to rest after colliding the jammed phase. This quantitative agreement in the fully non-linear regime completes the experimental validation of the model. The wave speed, which is an input of the model, turns out to be much lower (30 to 60 m/s) than that observed in a block of quartz (5600 m/s). While the simplest mean field calculation (23) leads to  $c = \omega/k \propto R^{1/6}$ , our measurements show an anomalous exponent  $c \propto R^{2/3}$  for these guided waves close to the jamming transition (Fig. 4B).

The instability can alternatively be interpreted in terms of geometrical acoustics (Fig. 1C). As shown theoretically by (14, 15), an acoustic wave can be amplified coherently when reflected on a sliding frictional interface, if the interfacial shear stress increases with the normal stress. In our set-up, the cylindrical shear band creates a cavity resonator which amplifies repeatedly the waves, as in a LASER. As they propagate, elastic waves are bounced back and forth, each time with an acoustic gain at reflection. As a result, the wave amplitude increases exponentially

in space (Fig. 3A). An analogous instability must occur in all situations in which elastic waves are guided along a shear band. For instance, a fault gouge is a layer of crushed rock separating the two sides of a fault zone (24). As this granular material is softer than the surrounding rock, seismic waves can be guided along the fault; as it is ruled by a standard solid friction law (24), these waves can be amplified when the fault sides move along each other. As a result, there must be a spontaneous emission of large amplitude seismic waves guided in the gouge, which may constitute a key mechanism in dynamic earthquake triggering (25, 26).

Our experiment can be thought of as a surrogate of booming avalanche (6, 28–30). In both cases, an homogeneous steady sand flow driven by gravity and edged by a shear band (8, 30) spontaneously emits a loud sound; the selected frequency  $f$  weakly depends on the flow thickness and ranges from 70 Hz for  $d = 325 \mu\text{m}$  to 100 Hz for  $d = 165 \mu\text{m}$  (see Fig. 4C and (30)); the sound amplitude saturates when the wave peak acceleration balances gravity. The major difference lies in the waveguide geometry. During the silo discharge, the granular flow is surrounded by the cylindrical shear band which acts as an amplifying acoustic mirror. By contrast, a booming avalanche is separated from the static part of the dune by a planar shear band whereas the free surface acts as a simple reflector. Former opposing theories of booming dunes are respectively based on the stimulated emission of elastic waves by grain collisions (6, 27), on a resonance over the avalanche flow thickness (29) and on a resonance over the dry surface layer of the dune (30). Our results suggest a fourth, yet different, explanation based on the amplification of guided elastic modes by friction on the shear band. This differs fundamentally from a passive resonator (29, 30), which accumulates energy because resonant modes are not propagative ( $c = 0$ ). On the contrary, the dynamical mechanism evidenced here is a true amplification of guided propagative modes, the energy being pumped from gravity, which drives the flow, to coherent acoustic energy.

## References and Notes

1. *Disorder and Granular Media*, edited by D. Bideau and A. Hansen (Elsevier, Amsterdam, 1993).
2. H. Hertz, *J. Reine Angew. Mathematik* **92**, 156 (1882).
3. X. Jia, C. Caroli, B. Velicky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1863 (1999).
4. B. Gilles, C. Coste, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 174302 (2003)
5. L. Bonneau, B. Andreotti, E. Clément, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 118001 (2008).
6. B. Andreotti, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 238001 (2004).
7. V.E. Gusev, V. Aleshin, V. Tournat., *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214301 (2006).
8. L. Bonneau, B. Andreotti, E. Clément, *Phys. Rev. E* **75**, 016602 (2007).
9. G.D.R. Midi, *Eur. Phys. Jour. E* **14**, 341 (2004).
10. B. Andreotti, *Eur. Phys. Lett.* **79**, 34001 (2007).
11. P. Jop, Y. Forterre, O. Pouliquen, *Nature* **441**, 727 (2006).
12. I. Sanchez *et al.*, *Phys. Rev. E* **76**, 060301 (2007).
13. J. Goyon, A. Colin, G. Ovarlez, A. Ajdari, L. Bocquet, *Nature* **454**, 84 (2008).
14. M. Nosonovsky, G.G. Adams, *Int. J. Ing. Sci.*, **39**, 1257 (2001).
15. C. Caroli, B. Velický, *Phys. Rev. E* **67**, 061301 (2003).
16. A. Furukawa , H. Tanaka, *Nature* **443**, 434-438 (2006).

17. B.K. Muite, S.F. Quinn, S. Sundaresan, K.K. Rao, *Powder Technol.* **145**, 190202 (2004).
18. M.L. Dhoriyani, K.K. Jonnalagadda, R.K. Kandikatla, K.K. Rao, *Powder Technol.* **167**, 55-71 (2006).
19. K. Wildea, M. Ruckaa, J. Tejchman, *Powder Technol.* **186**, 113-129 (2008).
20. G.W. Baxter, R.P. Behringer, T. Fagert, G.A. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2825-2828 (1989).
21. Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné, J.-P. Hulin, *Phys. Fluids* **15**, 3358-3369 (2003).
22. G. Ovarlez, C. Fond, E. Clément, *Phys. Rev. E* **67**, 060302(R) (2003).
23. K. Walton, *J. Mech. Phys. Solids* **35**, 213 (1987).
24. C. Marone, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* **26**, 643696 (1998).
25. P.A. Johnson, X. Jia, *Nature* **437**, 871-874 (2005).
26. P.A. Johnson *et al.*, *Nature* **451**, 57-60 (2008).
27. A.J. Patitsas, *Scientific Journals International* **2**, 1 (2008).
28. P.K. Haff, *Am. Sci.* **74**, 376381 (1986).
29. S. Douady *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 018002 (2006).
30. B. Andreotti, L. Bonneau, E. Clément *Geophys. Res. Lett.* **35**, L08306, doi:10.1029/2007GL032509 (2008), comment on Vriend *et al. Geophys. Res. Lett.* **34**, L16306 (2008).

## **Supporting Online Material**

Materials and Methods

Figs. S1 to S8

Appendices S1 and S2

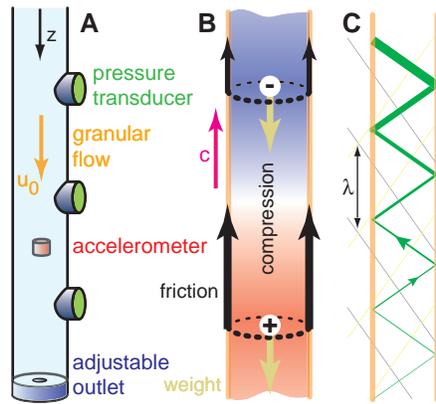


Figure 1: **A** Experimental set-up used to generate a homogeneous granular pipe flow. **B** Schematic of the seismic amplification mechanism in terms of guided modes. On the average, the grain weight (beige arrows) is balanced by friction (black arrows). Considering an elastic wave – only half a wavelength is represented –, a high pressure (red) exhibits a friction larger than average so that it is accelerated upward. Conversely, the low pressure (blue) immediately above it is accelerated downward so that the region in between gets compressed. Due to inertia, there is a time delay between the application of the friction and the resulting compression, during which the wave propagates. Considering a pressure wave propagating upward the tube (pink arrow), the compression reinforces the high pressure, which results into an acoustic amplification. **C** Bouncing plane wave interpretation of the amplification of guided modes: the green line is an acoustic ray and the thin lines, the associated wavefronts. The frictional interface leads to an anomalous reflection with a positive energy gain (14, 15).

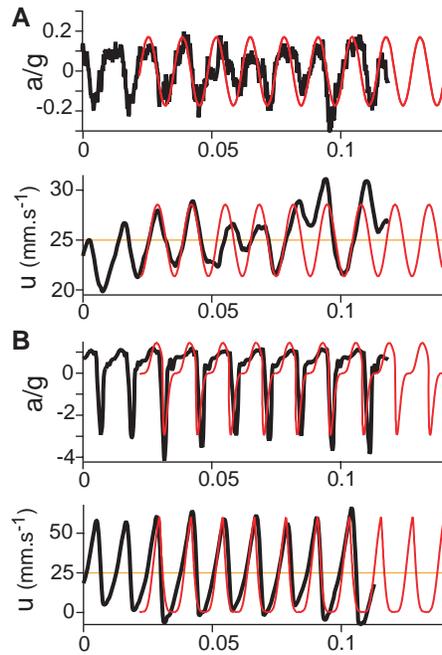


Figure 2: Linear and non-linear waves. **A** Typical acceleration  $a$  and velocity  $u$  signals (black lines) measured in the bottom part of a tube of radius  $R = 32$  mm, for a mean flow velocity  $u_0 = 25$  mm/s (orange line). As expected for a convective linear instability, the signals present a well defined frequency and are roughly sinusoidal (red lines). **B** Sample of the signals measured in the upper part of the tube, in the fully developed non-linear regime. As predicted by the model (red lines), the pressure waves tend form shocks, due to a pressure dependent propagation speed, and the wave amplitude saturates when the peak acceleration reaches  $g$ .

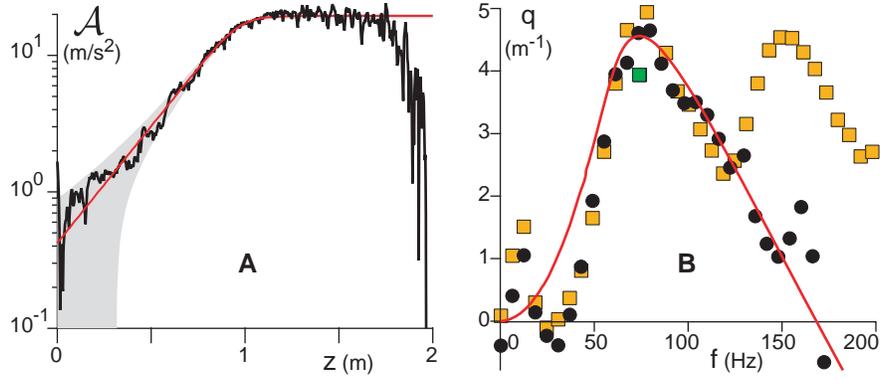


Figure 3: Experimental evidence of the exponential amplification. **A** Amplitude  $\mathcal{A}$  of the acceleration signal at the emission frequency  $f_m$ , as a function of the vertical co-ordinate  $z$ . The red line shows the best fit by an amplitude equation of the form  $\partial_z \mathcal{A} = q_m \mathcal{A} \left(1 - \frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{A}_\infty^2}\right)$ . **B** Spatial growth rate  $q$  as a function of frequency  $f$  over the first 15 cm (black circles) and the first 60 cm (orange squares) above the outlet. The green square shows the value of  $q_m$  determined from panel A. The emission frequency  $f_m \simeq 75$  Hz coincides with the most amplified mode. The red curve is the best fit by the linear stability analysis (Eq. 2), which gives a quality factor  $(f_m \tau)^{-1} \simeq 13$ . The growth of a strong second harmonic is associated to the progressive shock formation with distance. Same conditions as in figure 2.

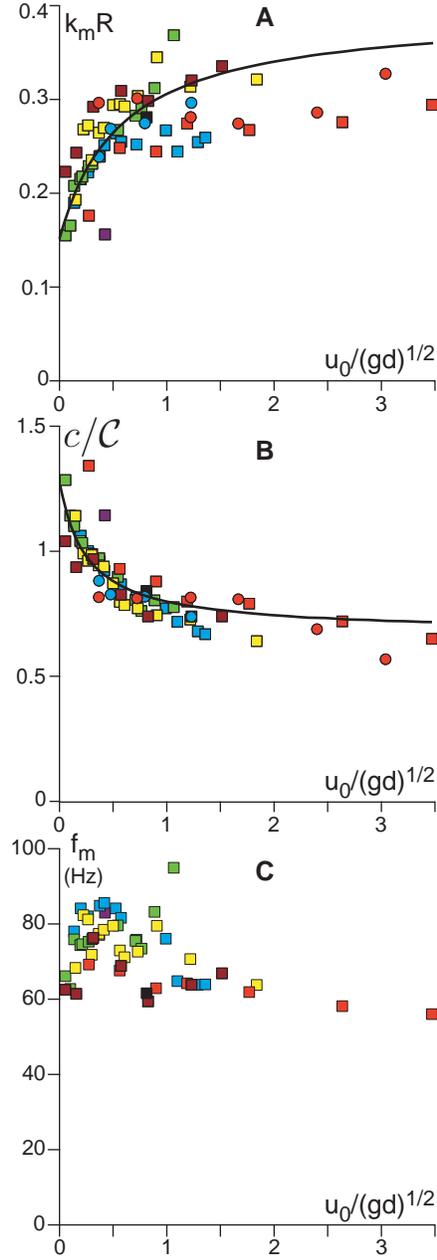


Figure 4: Experimental scaling laws followed by the wave characteristics. **A** Emitted wavenumber  $k_m$  rescaled by the tube radius  $R$ , as a function of the rescaled grain velocity  $u_0/\sqrt{gd}$ . Using the value of the static grain-tube friction coefficient measured independently ( $\mu \simeq \tan 20^\circ$ ), the prediction leads to  $k_m R \simeq 0.25$ . **B** Non-dimensional wave speed  $c/C$ , with  $C = (E/\rho)^{1/6}(gR^2/d)^{1/3}$  as a function of the grain velocity.  $E$  is the bulk Young modulus of the grain. **C** Emitted frequency  $f_m$  as a function of the grain velocity. Circles:  $d = 165 \mu\text{m}$ . Squares:  $d = 325 \mu\text{m}$ . Violet:  $R = 8 \text{ mm}$ . Blue:  $R = 16 \text{ mm}$ . Green:  $R = 22 \text{ mm}$ . Yellow:  $R = 27 \text{ mm}$ . Red:  $R = 32 \text{ mm}$ . Brown:  $R = 41 \text{ mm}$ . Black:  $R = 46 \text{ mm}$ .

# Friction induced amplification of guided elastic waves

## Supplementary online material

Lénaïc Bonneau, Tristan Catelin-Jullien, Bruno Andreotti

### A Experiment

Four supplementary figures are displayed below, which provide experimental details concerning the grain size distribution, the control of the mean velocity, the existence of shear bands and the propagation of waves.

#### A.1 Grain size distribution

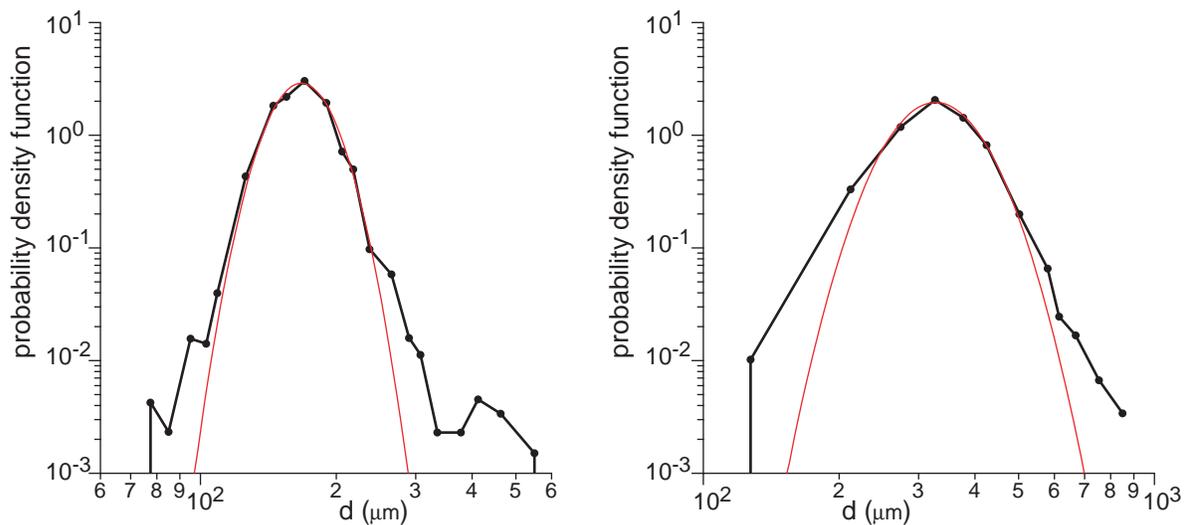


Figure 1: Probability density function, weighted in mass, of the logarithm of the grain size  $d$ . Left: sand grains coming from a 42 m high mega-barkhan in Sidi Aghfinir (Atlantic Sahara), which booms at a mean frequency  $f = 103$  Hz. Right: sand grains coming from the Pyla dune, a 110 m high non-booming dune from the Landes region. The red parabola is the best fit by a log-normal distribution, which gives the mean grain size:  $d = 165 \mu\text{m}$  and  $d = 325 \mu\text{m}$  respectively, with a  $5 \mu\text{m}$  uncertainty. In both cases, the sand is of aeolian origin and has been "sieved" by the wind. The size distribution is sufficiently narrow to avoid segregation in the experiment. The grains are rounded, due to the numerous collisions occurring during the transport in saltation.

## A.2 Flow rate control

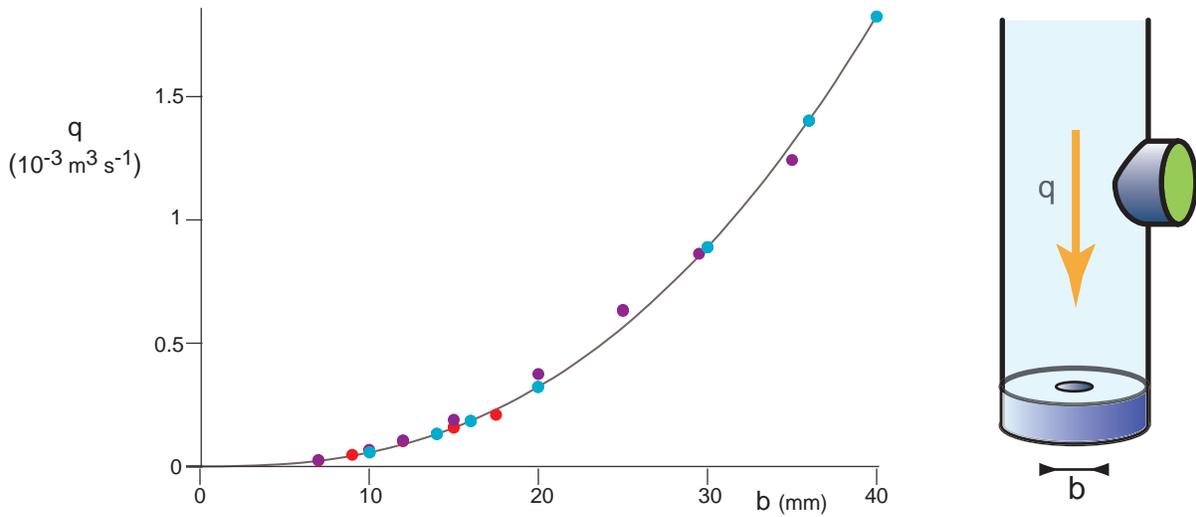


Figure 2: Relation between the output flow-rate  $q = \pi R^2 u_0$  and the outlet diameter  $b$ , measured for different tube radius:  $R = 16$  mm,  $R = 20$  mm,  $R = 26$  mm and  $R = 27$  mm. The solid line is the best fit by the Beverloo law, which takes the form:  $q = \pi R^2 u_0 \propto g^{1/2} a^{5/2}$ . We checked that the output flow rate is not pulsed, consistently with the observation that the signals just above the outlet are broadband noises.

## A.3 Evidence for upward wave propagation

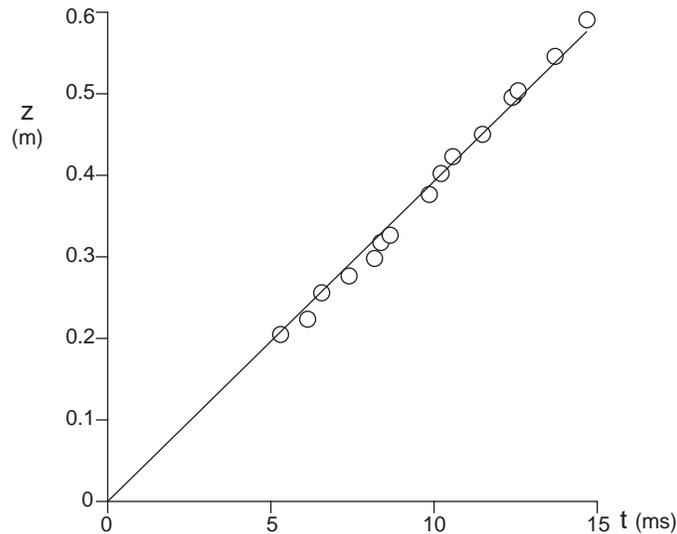


Figure 3: Relation between space  $z$  and time  $t$  for a phase event followed on the velocity signal. Two centimetre-scale alnico magnets distant by  $\delta z$  are embedded in the grains. The electromotive force induced in two coils wire-wound around the tube gives access to the magnet velocities. The time lag  $\delta t$  is measured by cross-correlation of the two velocity signals.

## A.4 Evidence for shear localisation

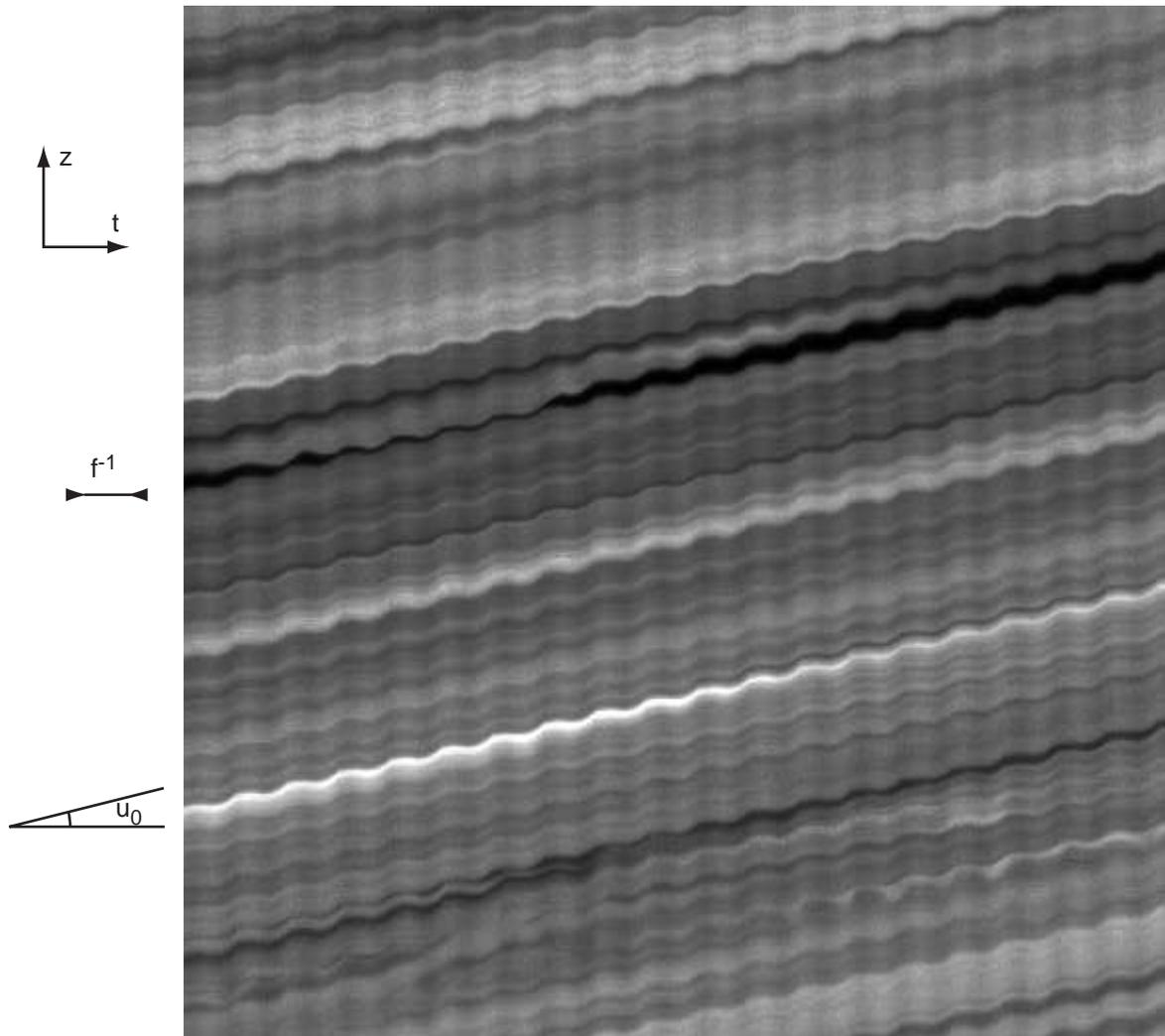


Figure 4: Space-time diagram showing the positions of the grains as a function of time. The grains in contact with the silo – a glass cylinder of radius  $R = 27$  mm – are imaged with a fast video camera. One vertical line of the movie is plotted as a function of time. The mean velocity of these grains is equal, within 20 percent, to the bulk velocity  $u_0$ . This proves that the shear is localized at the boundary. This has been confirmed by performing flow visualizations from the top of the silo. No radial grain motion was observed, which means that the velocity field is homogeneous (plug flow). Here, shear banding simply originates from the fact that the inter-particle effective friction is larger than that between the grains and the boundary. Note that this particular space-time diagram shows non linear stop-and-go waves, characterized by a phase during which the grains are static.

## B Theory

We derive here the full model describing the experiment, including the variation of the friction coefficient  $\mu$  with the velocity  $u$ . The model presented in the manuscript is recovered in the limit where  $\mu$  is constant.

### B.1 Governing equations

We consider that the flow is unidirectional and uniform over a section of the tube. It is described by two fields: the density  $\rho(z, t)$  and the velocity  $u(z, t)$ . The continuity equation reads:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\partial_z u = 0 \quad (1)$$

We furthermore assume the isotropy of the normal stress  $p$ , consistently with experiments. Then, the equation of motion of an infinitesimal slice of granular matter reads:

$$\pi R^2 \rho \frac{du}{dt} = \pi R^2 \rho g - \partial_z (\pi R^2 p) - 2\pi R \mu p \quad (2)$$

where  $\mu$  is an odd function of the rescaled velocity  $u/\sqrt{gd}$ . In the simplest situation (that investigated in the article)  $\mu$  is constant and changes sign at  $u = 0$ . It is worth noting that the same equation remains valid, if the ratio of the radial to the vertical stress is constant, provided that this factor is included into  $\mu$ . Dividing the above equation by  $\pi R^2$  and introducing the acceleration  $a$ , we get:

$$\rho a = \rho \frac{du}{dt} = \rho g - \partial_z p - \frac{2\mu}{R} p \quad (3)$$

Going from the Lagrangian to the Eulerian frames of reference, we have the relations:

$$\frac{du}{dt} = \partial_t u + u\partial_z u \quad \text{and} \quad \frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + u\partial_z \rho \quad (4)$$

We assume that the jamming point, which corresponds by definition to the situation in which the particles loose contact and are thus submitted to a vanishing pressure, occurs at a well defined density  $\rho_J$ . The compression  $\delta$  is related to the density by:

$$\delta = \frac{\rho - \rho_J}{\rho_J} \quad \text{if} \quad \rho > \rho_J \quad \text{and} \quad \delta = 0 \quad \text{if} \quad \rho < \rho_J \quad (5)$$

In the jammed regime ( $\rho > \rho_J$ ), the continuity equation can be rewritten as:

$$\frac{d\delta}{dt} + (1 + \delta) \partial_z u = 0 \quad (6)$$

We consider a Hertz viscoelastic contact law, which leads to a normal stress of the form:

$$p = \chi^3 E \delta^{1/2} \left( \delta + \frac{3}{2} \tau \frac{d\delta}{dt} \right) \quad (7)$$

where  $\chi$  is a non-dimensional parameter that may depend on the grain configuration and  $\tau$  a dissipation time. This expression takes into account the fact that the viscous component of the stress should vanish at the jamming point (for  $\delta = 0$  or equivalently  $\rho = \rho_J$ ). It is important to note as from now that the most unstable mode is weakly sensitive to the particular expression of this dissipative term introduced. For a homogeneous steady flow, the solution reads:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \\ \mu &= \mu_0 = \mu \left( u_0 / \sqrt{gd} \right) \\ p_0 &= \chi^3 E \delta_0^{3/2} = \frac{\rho g R}{2\mu_0} \end{aligned} \quad (8)$$

## B.2 Low Mach number limit

Sand grains are sufficiently hard to prevent significant interpenetration. We thus consider the limit:

$$\delta \ll 1 \quad (9)$$

for which the equations simplify into:

$$\frac{d\delta}{dt} + \partial_z u = 0 \quad \text{and} \quad \rho_J \frac{du}{dt} = \rho_J g - \partial_z p - \frac{2\mu}{R} p \quad (10)$$

We also consider that the grain velocity  $u$ , typically on the order of 10 cm/s in the experiment, is much lower than the speed of sound  $c_0$  under the pressure  $p_0$ , typically on the order of 50 cm/s in the experiment. This gives a condition on the Mach number  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M} = \frac{u_0}{c_0} \ll 1 \quad (11)$$

where

$$c_0 = \chi \left( \frac{3E}{2\rho_J} \right)^{1/2} \left( \frac{p_0}{E} \right)^{1/6} \quad (12)$$

Even in this limit, the compressibility should not be neglected. The equations can be simplified further:

$$\partial_t \delta + \partial_z u = 0 \quad \text{and} \quad \rho_J \partial_t u = \rho_J g - \partial_z p - \frac{2\mu}{R} p \quad (13)$$

### B.3 Linear stability analysis

As the reference state is homogeneous in space and time, the solutions of the linearized equations are superpositions of Fourier modes of the form  $\exp(j(\omega t + \kappa z))$ . Both  $\omega$  and  $\kappa$  can *a priori* be complex. Denoting by  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\delta}$  and  $\tilde{u}$  the respective disturbances of pressure, compression and velocity, we get:

$$\omega \tilde{\delta} = -\kappa \tilde{u} \quad (14)$$

$$j\omega \rho_J \tilde{u} = -\left(\frac{2\mu_0}{R} + j\kappa\right) \tilde{p} - \rho_J \sigma \tilde{u} \quad (15)$$

$$\tilde{p} = \rho_J c_0^2 (1 + j\omega\tau) \tilde{\delta} \quad (16)$$

where the  $\sigma$  is defined from the derivative of the friction coefficient with respect to  $u/\sqrt{gd}$ :

$$\sigma = \frac{2p_0}{\rho_J R \sqrt{gd}} \mu' \left( \frac{u_0}{\sqrt{gd}} \right) \quad (17)$$

Solving the linear system, one obtains the dispersion relation:

$$\frac{\omega^2 - j\sigma\omega}{1 + j\omega\tau} = c_0^2 \left( \kappa^2 - j \frac{2\mu_0}{R} \kappa \right) \quad (18)$$

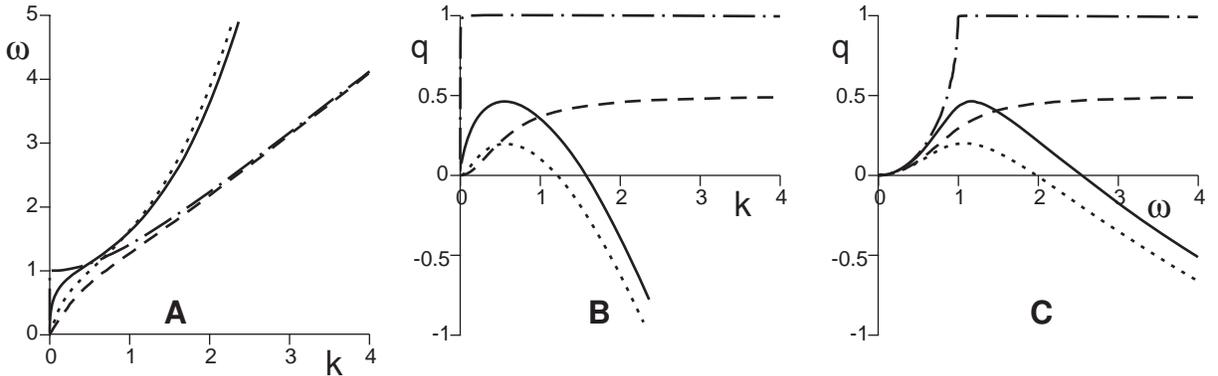


Figure 5: Dispersion relation for  $\mu_0 c_0 \tau / R = 0.5$  and  $\sigma = 0$  (solid line), for  $\mu_0 c_0 \tau / R = 10^{-3}$  and  $\sigma = 0$  (dotted dashed line),  $R\sigma / (\mu c_0) = 1$  and  $\omega = 0$  (dashed line) and  $\mu_0 c_0 \tau / R = 0.5$  and  $R\sigma / (\mu c_0) = 0.5$  (dotted line). **A** Angular frequency  $\omega$  as a function of  $k$ . **B** Space growth rate  $q$  as a function of the wavenumber  $k$ . **C** Space growth rate  $q$  as a function of the angular frequency  $\omega$ .

As all the unstable modes are propagating upward in the tube, the instability is convective. We thus consider a real angular frequency  $\omega$  and we separate  $\kappa$  into its real  $k$  and imaginary  $q$  parts:

$$c_0^2 \left( k^2 - q^2 + \frac{2\mu_0}{R} q \right) = \frac{(1 - \sigma\tau) \omega^2}{1 + (\omega\tau)^2} \quad (19)$$

and

$$q = \frac{\mu_0}{R} - \frac{\sigma\omega + \tau\omega^3}{2c_0^2 k (1 + (\omega\tau)^2)} \quad (20)$$

The system has two sources of dissipation. The first is localized in the bulk – it corresponds to a second viscosity – and characterized by the time-scale  $\tau$ . The second is localized on the boundary and comes from the friction velocity dependence. It is characterized by the decay rate  $\sigma$ . The dispersion relation is shown in figure 5 for different values of  $\sigma$  and  $\tau$ . It can be observed that the space growth rate  $q$  does not present any maximum if the second viscosity is null:  $\tau = 0$ . For  $\sigma = 0$ , when  $\tau$  tends to 0, the maximum growth rate is reached for:

$$q_m = \frac{\mu_0}{R}, \quad k_m = \frac{\mu_0}{\sqrt{2}R} \quad \text{and} \quad \omega_m = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mu_0 c_0}{R} \quad (21)$$

Although a non-zero value of  $\tau$  is necessary to get a maximum growth rate, the position of this maximum does not depend on  $\tau$  if the later is sufficiently small. Still keeping  $\sigma = 0$ , for

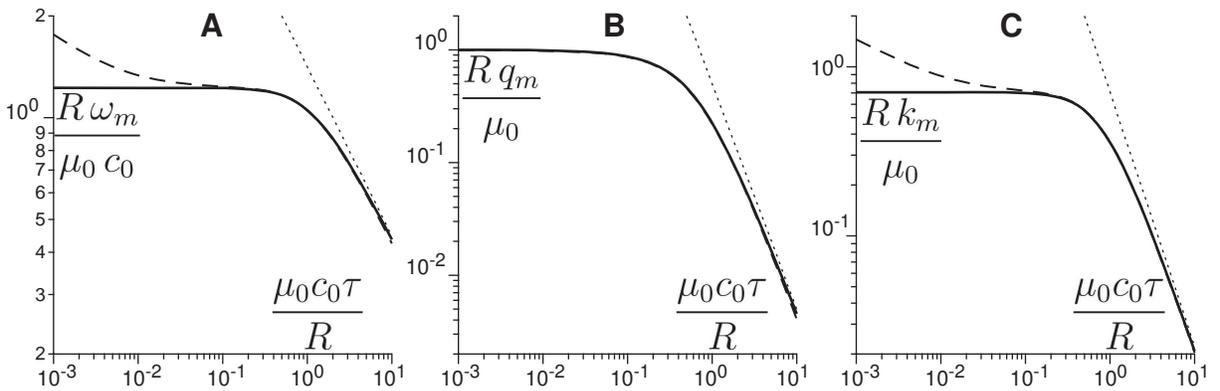


Figure 6: Characteristics of the most amplified mode as a function of the rescaled dissipative time  $\mu_0 c_0 \tau / R$ . **A** Angular frequency  $\omega_m$ , for  $\sigma = 0$  (black solid line) and for  $R\sigma/(\mu_0 c_0) = 10^{-2}$  (green solid line). The dotted line shows the asymptotic expression obtained analytically. **B** Spatial growth rate  $q_m$ . **C** Wavenumber  $k_m$ .

asymptotically large  $\tau$  the maximum growth rate is reached for:

$$q_m = \frac{R}{2\mu_0 (c_0\tau)^2}, \quad k_m = \sqrt{\frac{R}{2\mu_0 (c_0\tau)^3}} \quad \text{and} \quad \omega_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 c_0}{R\tau}} \quad (22)$$

Figure 6 shows the crossover between these two asymptotic regimes.

#### B.4 Non-linear traveling waves

We now seek for waves propagating with a constant shape, whose characteristics only depend on the variable:

$$Z = \frac{2\mu_0}{R} \left( z + \sqrt{\frac{2}{3}} C c_0 t \right) \quad (23)$$

where  $C$  is the wave speed rescaled by  $c_0$ . We write the velocity, the pressure and the compression fields under the form:

$$u = \frac{3gR}{4\mu_0 c_0} U(Z) \quad (24)$$

$$p = \frac{\rho_J g R}{2\mu_0} P(Z) \quad (25)$$

$$\delta = \frac{3gR}{4\mu_0 c_0^2} \Delta(Z) \quad (26)$$

where  $P$  and  $\Delta$  are dimensionless functions. We first assume that  $\delta$  remains non-null so that the velocity and the compression are related by:

$$U = V - C \Delta \quad (27)$$

$V$  is a constant that can be related to  $u_0$  by averaging over one wave period. The equations of motion simplify into:

$$P' - C^2 \Delta' = 1 - \frac{\mu}{\mu_0} P \quad (28)$$

$$C\mathcal{N}\Delta' = P\Delta^{-1/2} - \Delta \quad (29)$$

where the non-dimensional number  $\mathcal{N}$  characterizes the dissipation:

$$\mathcal{N} = \sqrt{6} \frac{\mu_0 c_0 \tau}{R} \quad (30)$$

This equation set can be solved numerically and presents a continuous series of periodic solutions. The non-linear solution of vanishing amplitude is also a linear solution of the problem. It

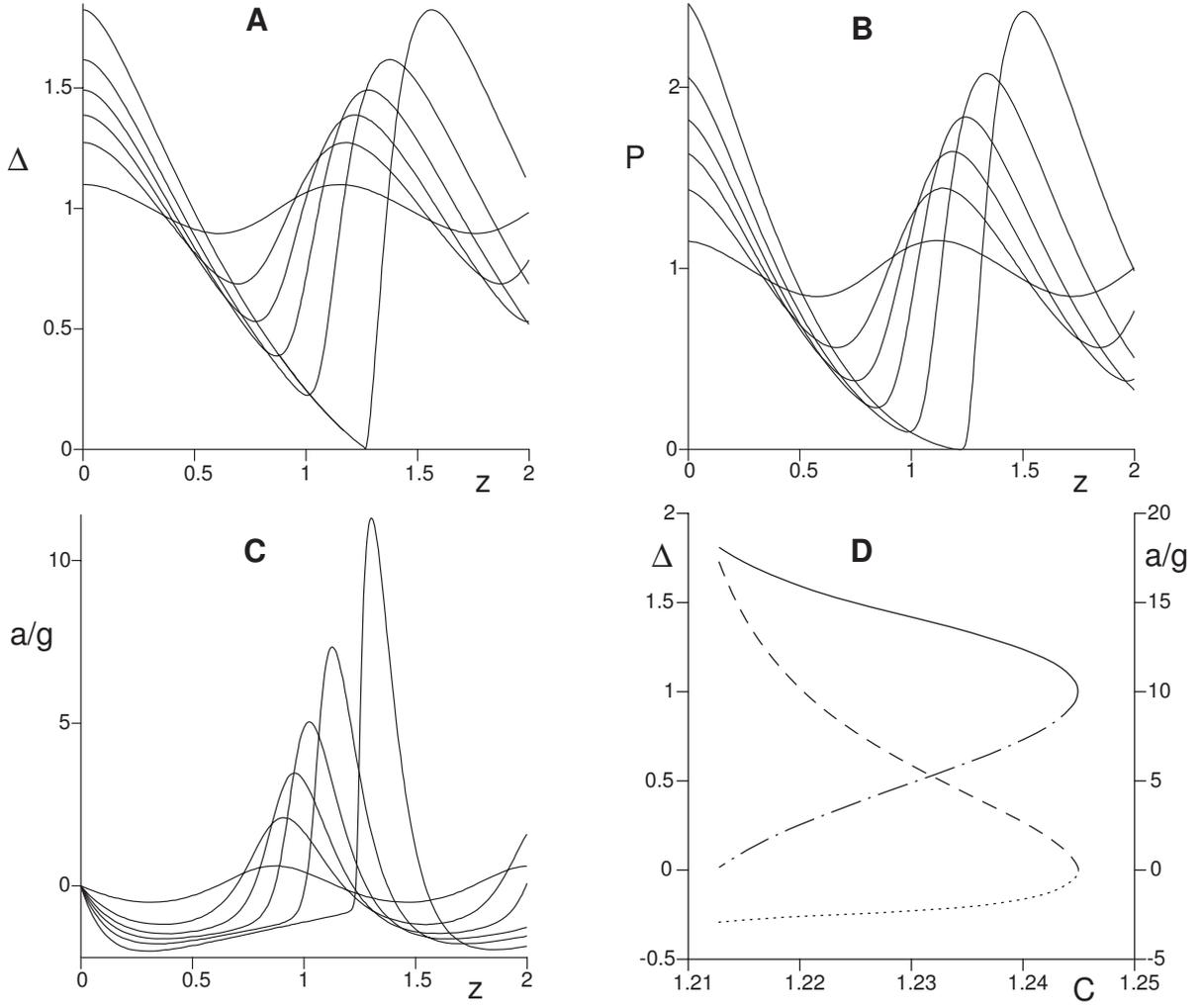


Figure 7: Shape of the non-linear traveling waves for  $\mathcal{N} = 0.04$  and a constant friction coefficient  $\mu = \mu_0$ . The solution of vanishing amplitude is sinusoidal and corresponds to the cut-off linear solution ( $q = 0$ ). The solution of maximal amplitude presents a point at which the grains loose contact i.e. where  $\delta = 0$  and  $p = 0$ . **A** Profiles of the rescaled volumic compression  $\Delta$ . **B** Profiles of the rescaled pressure  $P$ . **C** Profiles of the rescaled Lagrangian acceleration  $a/g$ . **D** Extremum values of  $\Delta$  (min: dotted-dashed line; max: solid line) and  $a/g$  (min: dotted line; max: dashed line) as a function of the rescaled velocity  $C$ .

is thus the sinusoidal solution corresponding to the cut-off wave-number of the linear instability, for  $q = 0$ . The velocity of this solution is:

$$C = \frac{1}{2} (\mathcal{N} + \sqrt{6 + \mathcal{N}^2}) \quad (31)$$

The solution of higher amplitude is the one for which  $\delta$  and  $p$  vanish as:

$$P \sim Z \quad \text{and} \quad \Delta \sim \left( \frac{3Z^2}{4CN} \right)^{2/3} \quad (32)$$

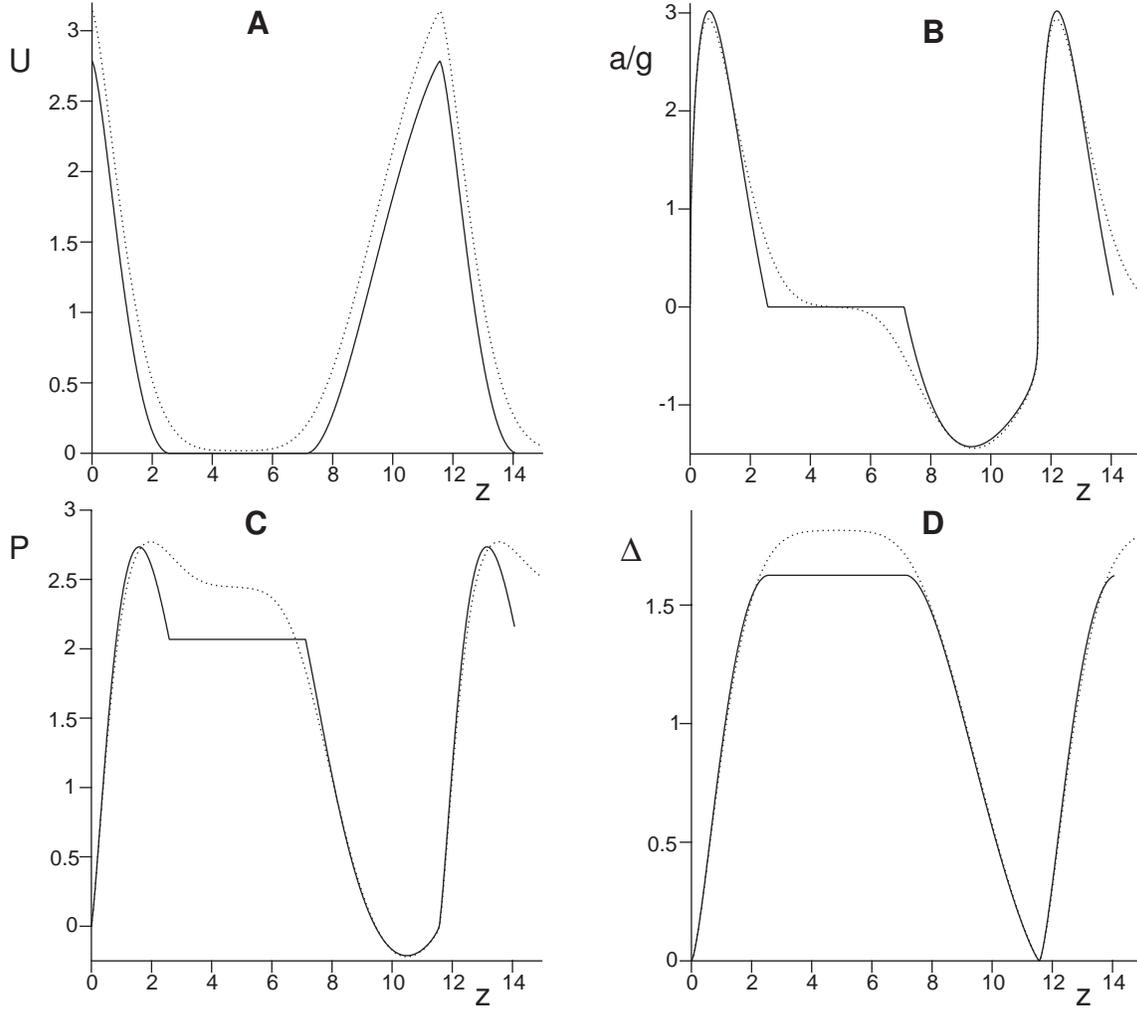


Figure 8: Shape of a typical stop-and-go wave computed with a friction coefficient either constant ( $\mu = \mu_0 \text{sign}(u)$ , solid line) or varying continuously with the velocity (dotted line). Both waves are computed for  $\mathcal{N} = 1$ . **A** Profiles of the rescaled pressure  $U$ . **B** Profiles of the rescaled pressure  $P$ . **C** Profiles of the rescaled Lagrangian acceleration  $a/g$ . **D** Profiles of the rescaled volumic compression  $\Delta$ .

Figure 7 shows a family of non-linear traveling waves obtained by varying the amplitude, in the case where the friction coefficient is constant ( $\mu = \mu_0$ ). For each curve, the value of  $V$  can be arbitrary fixed, provided that  $U$  remains positive so that the friction is oriented upward.

For each of these solutions, another family of stop-and-go waves can be constructed, which contain a phase during which the velocity vanishes (Fig. 8). This time,  $V$  is fixed such that the minimum of  $U$  is null (Fig. 8A) but the length of the stopped zone can be arbitrarily large. This type of solution exists when  $\mu$  presents a discontinuity across  $u = 0$ . If  $\mu$  is an odd regular function of  $u$  (with thus  $\mu(0) = 0$ ), the solutions are parametrized by  $V$  and  $C$ . The analogous

of the stop-and-go waves present long zones of small but not vanishing velocity (dashed line in Fig. 8).

---

# Ultrasonics

Published by Elsevier Science, BV

---

Prof. Wolfgang Sachse, *Editor-in-Chief*  
Editorial Office  
T&AM/212 Kimball Hall  
Cornell University  
Ithaca, NY - 14853-1503 USA

+1/607/255-5065  
FAX: 607/255-9179  
Department Secretary: 607/255-5062  
<http://www.ccmr.cornell.edu/~ultras/>  
E-mail: [ultras@cornell.edu](mailto:ultras@cornell.edu)

January 16, 2009

Dear *Lenaic Bonneau* -

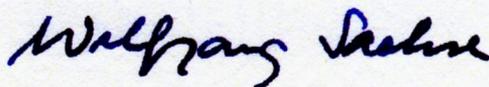
CONGRATULATIONS on being selected as one of the *R. W. B. Stephens Prize Winners* at the *International Congress on Ultrasonics* in Santiago de Chile, January 11-16, 2009.

This prize is given in recognition of your outstanding work in ultrasonics and your excellent presentation of your results. This prize is sponsored by Elsevier and the journal *Ultrasonics* in remembrance of Professor R. W. B. Stephens who was a pioneer in the field of ultrasonics, a great teacher and equally importantly, a wonderful human being.

Your prize includes a certificate which permits you to select a book from the Elsevier on-line catalog with a value of up to €200. Please contact Ysabel Ermers, <[Y.Ermers@elsevier.com](mailto:Y.Ermers@elsevier.com)> the Publishing Editor of the journal *Ultrasonics* for the procedure you should follow to claim your prize.

Congratulations again. We wish you much success in your future career in the field of ultrasonics.

Sincerely,



Wolfgang Sachse



# Résumé : Propagation d'ondes acoustiques guidées dans les milieux granulaires

Dans un milieu granulaire, la géométrie du contact entre grains induit une dépendance en pression non-linéaire des modules élastiques. Dans un milieu granulaire sous gravité avec une surface libre, la pression augmente avec profondeur. Il en résulte que seules des ondes de surface peuvent se propager. Nous montrons théoriquement que ce système est un guide d'onde à gradient d'indice dans lequel se propagent des ondes transverses et sagittales. Elles se décomposent selon une série discrète mais infinie de modes dont nous avons calculé la relation de dispersion. Leur vitesse augmente faiblement avec leur indice comme  $n^{1/6}$  et rend difficile l'interprétation des mesures. En profondeur finie, un guide d'onde géométrique se superpose au précédent. Les modes modifiés présentent une fréquence de coupure.

Expérimentalement, l'émission de paquets d'ondes gaussiens dans un canal (guide d'onde géométrique) a permis d'isoler le mode de surface fondamental et de tracer sa relation dispersion. L'exposant de sa loi d'échelle valide le point de vue de la théorie de champ moyen et contredit l'hypothèse d'une situation isostatique au voisinage de la surface libre. Cependant, le module de cisaillement est anormalement faible.

Un écoulement granulaire gravitaire entraîné dans un silo lisse génère une émission sonore spontanée. Nous montrons expérimentalement et théoriquement qu'elle résulte d'une instabilité convective pour laquelle la friction amplifie et sélectionne la fréquence. Son développement aboutit à la formation d'ondes de choc. Nous pensons que cette instabilité pourrait expliquer le chant des dunes ou le déclenchement dynamique des séismes.

## Abstract : Guided acoustic waves propagation in granular materials

In granular media, owing to the inter-grain contact geometry, the elastic moduli show a non-linear pressure dependence. In a granular medium under gravity with a free surface, the pressure increases with the depth. As a result, only surface waves can propagate. We show theoretically that this system is an index gradient waveguide, in which sagittal and transverse waves propagate. They split in discrete and infinite series of modes for which we have calculated the dispersion relations. Their celerity increases weakly with their index as  $n^{1/6}$ , making difficult the interpretation of measurements. For finite depth, a geometrical waveguide is superimposed to the last. The altered modes show a cut-off frequency.

Experimentally, emitting gaussian wavepackets in a channel (geometrical waveguide) allowed to isolate the fundamental surface mode and to plot its dispersion relation. The exponent of its scaling law validates the meanfield standpoint and refutes the hypothesis of an isostatic situation in the vicinity of the free surface. However, the shear modulus is abnormally weak.

A gravity driven granular flow in smooth silo generates a spontaneous sound emission. We show experimentally and theoretically that it results from a convective instability for which the friction leads to amplification and frequency selection. Its growth leads to shock-waves. We think that this instability could explain dunes' booming or dynamic earthquake triggering.