



# Méthodes d'ondelettes pour l'analyse d'opérateurs

Abdelhak Ezzine

## ► To cite this version:

Abdelhak Ezzine. Méthodes d'ondelettes pour l'analyse d'opérateurs. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997. Français. NNT : . pastel-00569070

**HAL Id: pastel-00569070**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00569070>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes d'ondelettes pour l'analyse d'opérateurs.

**Ezzine Abdelhak**

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique

[ezzine@cermics.enpc.fr](mailto:ezzine@cermics.enpc.fr)

<http://cermics.enpc.fr/ezzine>

23 Mai 1997



MERCI

Mon père  
Ma mère  
Ma femme  
Mon Rayan  
Mes soeurs  
Mes frères



## Avant-propos

Je dois dire que les remerciements ce n'est pas mon truc, mais je vais essayer de faire comme tout le monde.

Je tiens tout d'abord à remercier Yves Meyer qui m'a mise en contact avec le monde des ondelettes et m'a reçu dans son bureau chaque fois que j'en avais besoin (parfois sans R.V) tout le long de la préparation de ce travail.

A Stéphane Jaffard, je voudrais faire part de ma reconnaissance pour m'avoir ouvert, en m'accueillant au CERMA, des horizons de recherche dans le monde des ondelettes. Il a dirigé ce travail avec patience et conseils judicieux, je tiens à lui exprimer ma gratitude et à le remercier très vivement.

Une partie de ce travail a vu le jour grâce aux conseils de Albert Cohen. Sa grande disponibilité, ses remarques constructives et sa patience font que c'est un privilège de collaborer avec lui. Je suis enchanté qu'il ai accepté d'être rapporteur et je le remercie chaleureusement.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Aline Bonami car non seulement elle m'a accueilli dans le laboratoire de mathématiques de l'université d'Orleans mais en plus elle a l'art d'écouter et l'oreille attentive, je lui dois de nombreuses discussions passionnantes et constructives. Je suis donc très heureux et reconnaissant qu'elle ait bien voulu accepter la tâche ingrate de juger ce travail. Je l'en remercie vivement.

Mustapha Bennouna s'est déplacé du Maroc spécialement pour ma soutenance malgré son temps précieux en tant que Doyen de la faculté des sciences et techniques de Tanger. Il me l'honneur de présider ce jury. Qu'il trouve dans ces mots ma reconnaissance. Sa sympathie et sa gentillesse font que pour moi c'est un privilège de collaborer avec lui dans l'avenir.

Avec respect, j'évoque B. Lapeyre et A. De La Bourdonnaye qui ont accepté d'examiner cette thèse. Je les remercie chaleureusement pour l'honneur qui m'ont ainsi fait.

Ma femme m'a beaucoup apporté pour bien finir cette thèse. Qu'elle sache que je l'aime bezzaf.

Je ne peux oublier les membres du CERMICS (CERMA) pour l'accueil qu'ils m'ont fait et je remercie tout particulièrement Bernard Larrouturou pour ses encouragements, Jacques qui va être soulagé (mes calculs de 4 ou 5 jours ne vont plus perturber les machines). Véronique été et restera la personne la plus gentille du monde même si elle a refusé d'acheter un réfrigérateur. Sylvain (le grand ami) je n'ai pas de mot pour le remercier pour tout ..... Henri (Oppenheim le compagnon de la route) par ses bêtises, ses blagues et surtout ses critiques mérite un grand Merci. Je remercie Mohamed pour son aide et sa présence dans des moments durs. Imane, Marie Christine ont supportée mon humour tout le long de cette période, qu'elles sachent que je ne les oublierai jamais.

J'adresse enfin ma sympathie à Mourad, Mounia, Serge, Bernard, Xiao-Lan, Kuang-Rong, Jean-Patrick, Ali, Régis, Alain, J. François, Éric, Claude, Frédéric, J. Frédéric, Maureen, Alban, Bruno, Yi-Jun, Benjamin, Alexandre, Thierry, Renaud, René et Gilbert.

Je remercie les compagnons du lutèce ( Jamal, Mohamed (PL), Jaafar, Sanaa, Latifa, Mohamed(S), Asmaa, Samira et Naser), la chère Hajiba, Mohammed ainsi que Sara, Asma-Anne et Yassine.

Je demande pardon aux autres.



# Table des matières

|                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Introduction                                                                      | 9         |
| <b>Partie A Rappels : Théorie des ondelettes</b>                                  | <b>17</b> |
| <b>I Ondelettes et Analyse Multirésolution</b>                                    | <b>19</b> |
| I.1 Analyse multirésolution et fonction d'échelle . . . . .                       | 19        |
| I.2 Dérivées d'une fonction d'échelle à support compact . . . . .                 | 24        |
| I.3 Transformée en ondelettes rapide . . . . .                                    | 25        |
| I.3.1 Décomposition d'une fonction . . . . .                                      | 25        |
| I.3.2 Décomposition d'un opérateur . . . . .                                      | 27        |
| I.3.3 Remarque fondamentale . . . . .                                             | 28        |
| I.4 Moments de la fonction d'échelle. . . . .                                     | 29        |
| <b>Partie B Bases d'ondelettes et algèbres d'opérateurs</b>                       | <b>33</b> |
| <b>I Les algèbres d'opérateurs <math>\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}</math></b>      | <b>37</b> |
| I.1 Préliminaire . . . . .                                                        | 37        |
| I.2 Nouvelle algèbre . . . . .                                                    | 40        |
| I.3 La nécessité de la Condition $\gamma' < 2\gamma$ . . . . .                    | 47        |
| <b>II Caractérisations des algèbres <math>\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}</math></b> | <b>51</b> |
| II.1 Algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ et bases d'ondelettes . . . . .       | 51        |
| II.2 Caractérisation des noyaux de $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ . . . . .       | 54        |
| II.2.1 Théorème de caractérisation . . . . .                                      | 55        |
| <b>Partie C Méthodes de quadrature et Fonction d'échelle</b>                      | <b>63</b> |
| <b>I Quadratures régulières</b>                                                   | <b>69</b> |
| I.1 Moment tronqué . . . . .                                                      | 69        |

|                 |                                                                        |            |
|-----------------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| I.2             | Méthode de quadrature . . . . .                                        | 72         |
| I.2.1           | Fonctions d'échelles particulières . . . . .                           | 72         |
| I.2.2           | Cas général de fonctions d'échelles . . . . .                          | 74         |
| I.2.3           | Analyse de l'erreur de la quadrature . . . . .                         | 76         |
| I.3             | Quadrature pour un opérateur intégral . . . . .                        | 78         |
| <b>II</b>       | <b>Quadratures singulières et fonctions d'échelle</b>                  | <b>81</b>  |
| II.0.1          | Algorithme de calcul . . . . .                                         | 81         |
| II.1            | Singularités homogènes . . . . .                                       | 83         |
| II.1.1          | Subdivision non uniforme . . . . .                                     | 84         |
| II.1.2          | Algorithme de calcul de $a_{j,k}$ . . . . .                            | 86         |
| II.1.3          | Propriétés de la subdivision non-uniforme . . . . .                    | 90         |
| II.2            | Analyse de l'erreur de la quadrature . . . . .                         | 93         |
| II.3            | Méthode de quadrature pour les singularités d'ordre élevé . . . . .    | 106        |
| II.4            | Cas d'un opérateur . . . . .                                           | 106        |
| II.4.1          | Quadrature Singulière . . . . .                                        | 107        |
| <b>III</b>      | <b>Quadrature corrigée</b>                                             | <b>113</b> |
| III.1           | Algorithme de quadrature corrigée . . . . .                            | 114        |
| III.1.1         | Méthode de quadrature: . . . . .                                       | 114        |
| III.1.2         | Remarques Importantes . . . . .                                        | 115        |
| III.2           | Analyse de l'erreur de la quadrature . . . . .                         | 116        |
| III.2.1         | Estimation de l'erreur . . . . .                                       | 116        |
| <b>Partie D</b> | <b>Quelques applications des formules de quadrature</b>                | <b>123</b> |
| <b>I</b>        | <b>Utilisation pour le calcul des coefficients d'ondelettes</b>        | <b>125</b> |
| I.1             | Utilisation de la formule de quadrature à l'échelle fine . . . . .     | 125        |
| I.2             | Vers des méthodes d'ondelettes pour les équations intégrales . . . . . | 128        |
| I.2.1           | Représentation de Galerkin . . . . .                                   | 128        |
| I.2.2           | Problème de Dirichlet . . . . .                                        | 129        |
| I.3             | Opérateurs et compression . . . . .                                    | 131        |
| I.3.1           | Erreur de compression . . . . .                                        | 132        |
| <b>Annexes</b>  |                                                                        | <b>137</b> |
| <b>Annexe</b>   |                                                                        | <b>137</b> |
| I.4             | Forme non standard . . . . .                                           | 137        |
| I.4.1           | Forme Standard . . . . .                                               | 140        |

|               |     |
|---------------|-----|
| Annexe        | 142 |
| Annexe        | 147 |
| Bibliographie | 147 |



# Notations

Nous utiliserons les notations usuelles  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  pour désigner respectivement les ensembles des entiers naturels, relatifs, les nombres réels et les complexes. Le symbole  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'un espace métrique. Un espace normé est dit espace de Banach s'il est complet. Quand sa norme est issue d'un produit scalaire, on l'appelle espace de Hilbert. L'exemple classique d'un espace de Hilbert est l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Le produit scalaire associé est  $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\bar{g}(t)dt$ . Dans le cas où  $\langle f, g \rangle = 0$  on dira que  $f$  et  $g$  sont orthogonales.

On note aussi  $l^2(\mathbb{Z})$  ou tout simplement  $l^2$  l'espace de Hilbert des suites  $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifiant  $\sum_k |u_k|^2 < \infty$ .

Une suite de fonctions  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est dite une base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$  si tout élément  $f \in L^2(\mathbb{R})$  s'écrit de façon unique  $f(\cdot) = \sum_k c_k e_k(\cdot)$  et s'il existe un couple de constantes  $A, B$  telles que :

$$A\|f\|^2 \leq \sum_k |c_k|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Si les éléments de la suite  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonaux deux à deux on dit que  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthogonale, et on a  $\|f\| \leq (\sum_k |c_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ . Si de plus  $\|e_k\| = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  alors  $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est dite base orthonormée.

Étant donnée une fonction  $f$  dans un espace de Hilbert ( $L^2(\mathbb{R})$  par exemple), il sera question tout au long de ce travail de la notion de régularité de  $f$ . L'espace  $C^k, k \in \mathbb{Z}$  est celui des fonctions  $k$  fois dérivables et de dérivée d'ordre  $k$  continue.

L'espace de Sobolev  $H^{k,p}(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions de  $L^p(\mathbb{R})$  dont la dérivée d'ordre  $k$  est dans  $L^p$ ,

$$H^{k,p}(\mathbb{R}) = \{f \in L^p(\mathbb{R}) / D^k f \in L^p(\mathbb{R})\}$$

Dans le cas où  $p = 2$  on note  $H^k = \{f \in L^2 / D^k f \in L^2\} = H^{k,2}$ .

On note aussi  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. On appelle support de  $f$  l'ensemble  $\text{supp} f = \overline{\{x / f(x) \neq 0\}}$ .

Soit  $T$  un opérateur d'un espace de Hilbert  $H$  dans lui même, on note  $\|T\| =$

$\sup_{\|f\|_H=1} \|Tf\|_H$  la norme de  $T$ . L'opérateur adjoint de  $T$  est noté  $T^*$ . Par définition

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle, \quad \forall f, g \in H.$$

Si  $T = T^*$  l'opérateur  $T$  est dit auto-adjoint. L'opérateur  $T$  est inversible s'il existe  $R$  tel que  $TR = RT = 1$ , et si  $Tf = 0$  implique  $f = 0$ . Si de plus  $R = T^*$  l'opérateur  $T$  est dit unitaire.

# Introduction

L'idée d'utiliser des bases d'ondelettes dans l'analyse numérique (résolution des équations elliptiques, aux dérivées partielles, intégrales) s'est imposée depuis que ces bases ont fait la preuve de leur efficacité dans le traitement du signal [18]. Après la découverte par Y. Meyer de la première base orthonormale d'ondelettes dans la classe de Schwartz [19], I. Daubechies [8] a construit une famille de bases orthonormales d'ondelettes à support compact et grâce à la notion d'analyse multirésolution introduite par S. Mallat [18] et Y. Meyer, des algorithmes rapides d'analyse [18, 8, 12] dans ces bases ont été mis en oeuvre. En outre, comme elles forment des bases inconditionnelles pour les espaces de Sobolev, elles peuvent fournir des espaces d'approximations pour la résolution de certains problèmes physiques. Or, nombreux sont les problèmes qui se traduisent par une équation du type

$$Tu = f \quad (.0.1)$$

où  $T$  est un opérateur linéaire dans un espace topologique  $V$ . L'opérateur  $T$  peut être un opérateur intégral dans un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  avec des conditions limites au bord  $\Gamma$  de  $\Omega$ , ou un opérateur différentiel. C'est le cas des opérateurs intégraux qui nous intéresse le plus dans ce travail. Beaucoup de problèmes physiques exprimés initialement par un opérateur différentiel ( il s'agit des équations aux dérivées partielles ) se ramènent à la résolution d'une équation intégrale. Par exemple la recherche de la solution du problème de Dirichlet ou de Neumann pour le Laplacien, dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , sous forme de potentiel de simple couche ou de double couche, conduit à des équations intégrales sur le bord  $\Gamma = \partial\Omega$ .

Soient  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  et  $T$  un opérateur intégral linéaire continu de  $\mathcal{D}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F})$ . Un célèbre théorème de Schwartz affirme qu'il existe un unique noyau distribution  $K(x, y)$  tel que

$$Tu(x) = \int_{\mathcal{F}} K(x, y)u(y)dy \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{F}). \quad (.0.2)$$

Dans ce cas l'équation (.0.1) s'écrit symboliquement

$$\int_{\mathcal{F}} K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad (.0.3)$$

Quand le problème admet une solution unique

$$u = Gf$$

on écrit symboliquement

$$u(x) = \int_{\mathcal{F}} G(x, y) f(y) dy, \quad (.0.4)$$

$G(x, y)$  est appelé le noyau de Green du problème. Les questions de l'existence et l'unicité de la solution sont traitées dans la littérature abondante sur les équations intégrales. Toutefois, deux problèmes se posent quant au calcul de la solution dans une base d'ondelettes :

- Problème 1 : l'étude de la structure de la matrice associée à un noyau  $K$  d'un opérateur intégral  $T$  dans une base d'ondelettes,
- Problème 2 : l'adaptation des techniques de discrétisation de Galerkin aux bases d'ondelettes.

Les travaux de Y. Meyer [20] concernant les noyaux de Calderón-Zygmund dans une base d'ondelettes, constituent une référence de base pour le traitement du premier problème. En s'appuyant sur ces résultats, nous allons dans cette thèse contribuer à cette étude par l'introduction d'une nouvelle classe d'opérateurs définis par leur matrice représentative dans une base d'ondelettes et caractérisés par les dérivées fractionnaires de leur noyaux.

La notion d'analyse multirésolution est le point de départ pour répondre au second problème. Étant donnée une analyse multirésolution sur  $L^2(\mathcal{F})$  formée par la suite emboîtée des sous espaces  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , où  $V_j$  est engendré par la famille de fonctions  $(\phi_{j,k}(\cdot) = 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ , la fonction  $\phi$  est solution d'une équation d'échelle. On considère  $V_q$ ,  $q \in \mathbb{N}$ , comme espace d'approximation et on note  $T_q = P_q T P_q$ ,  $f_q = P_q f$  et  $u_q = P_q u$ , où  $P_q$  est la projection sur  $V_q$ . On a alors

$$u(x) \simeq u_q(x) = \sum_k \langle u, \phi_{q,k} \rangle \phi_{q,k}(x),$$

et une nouvelle écriture de l'équation (.0.1)

$$\sum_k T_q \phi_{q,k}(x) \langle u_q, \phi_{q,k} \rangle = f_q(x).$$

Si on note  $K_{k,l}^q = \int \int K(x, y) \phi_{q,l}(x) \phi_{q,k}(y) dx dy$ , on a alors

$$\sum_k K_{k,l}^q \langle u_q, \phi_{q,k} \rangle = \langle f_q, \phi_{q,l} \rangle.$$

Dans le cas où le noyau de Green  $G(x, y)$  du problème est connu, on utilise l'équation (.0.4) et on obtient

$$\langle u_q, \phi_{q,l} \rangle = \sum_k G_{k,l}^q \langle f_q, \phi_{q,k} \rangle,$$

où  $G_{k,l}^q = \int \int G_q(x, y) \phi_{q,l}(x) \phi_{q,k}(y) dx dy$ . Grâce aux algorithmes d'analyse-synthèse issus de la théorie des ondelettes, on reconstruit la solution  $u_q$  du problème sur l'espace d'approximation  $V_q$ , à partir des paramètres  $u_k^q$ . Or le calcul de ces paramètres est obtenu par simple produit matrice-vecteur et nécessite l'estimation des coefficients

$$(\star\star) \quad \begin{cases} f_k^q = \int f(x) \phi_{q,k}(x) dx \\ K_{k,l}^q = \int K(x, y) \phi_{q,k}(y) \phi_{q,l}(x) dx dy \\ \text{ou} \\ G_{k,l}^q = \int G(x, y) \phi_{q,k}(y) \phi_{q,l}(x) dx dy. \end{cases}$$

Le calcul des coefficients  $(\star\star)$  pourrait être facile si  $f$ ,  $\phi$  et  $K$  ou  $G$  étaient toutes aussi régulières qu'on le souhaite: il s'agirait tout simplement d'intégrales de fonctions suffisamment régulières et les méthodes classiques d'estimation d'intégrales permettraient de conclure. Or la présence de diverses quantités physiques (température, pression, vitesse, déplacement, temps, etc ...), entraîne une diversité de la nature de la régularité de  $f$  et  $K$  ou  $G$  (en pratique elles ont souvent des singularités). De plus  $\phi$  n'est connue qu'implicitement en tant que solution d'une équation d'échelle et sa régularité est fortement limitée par la taille de son support. Tout ceci constitue une difficulté majeure pour l'estimation de  $(\star\star)$  par les méthodes classiques de calculs d'intégrales, et nous avons été amenés à chercher des méthodes de quadrature adaptées aux bases d'ondelettes et aux divers types de singularités.

Pour avoir une idée de cette difficulté, on considère les problèmes aux limites de Dirichlet relatifs à l'opérateur  $\Delta$  dans l'ouvert borné régulier  $\Omega$  et l'ouvert  $\Omega' = \mathbb{R}^n / \bar{\Omega}$  respectivement. On parle de "problème de Dirichlet intérieur" quand on a

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases} \quad (.0.5)$$

et de "problème de Dirichlet extérieur" si

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega' \\ u = u_0, & \text{sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases} \quad (.0.6)$$

Les problèmes (.0.5) et (.0.6) ont une solution unique respectivement dans  $H^1(\Omega)$  et  $W^1(\Omega')$  si  $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$ . La solution  $u$  est donnée par (la représentation de simple couche) :

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) q(y) d\gamma(y); \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (.0.7)$$

où  $q$  est solution de l'équation intégrale

$$\int_{\Gamma} G(x, y) q(y) d\gamma(y) = u_0(x), \quad x \in \Gamma, \quad (.0.8)$$

où

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} & \text{si } n = 3 \\ -\frac{1}{2\pi} \log |x-y| & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Dans les deux équations intégrales (.0.7) et (.0.8), le noyau  $G(x, y)$  admet une singularité sur la diagonale. De plus  $u_0$  (étant arbitraire) peut-être singulière. Ceci rejoint le problème soulevé ci dessus.

Cette thèse est consacrée au développement de réponses pour les deux problèmes posés ci dessus. Elle comporte quatre parties.

Dans la partie (A) réduite à un chapitre, nous donnons un rappel de ce qui sera utile de la théorie des bases d'ondelettes. Après la notion d'analyse multirésolution et sa relation avec les fonctions d'échelles, on donnera une des propriétés remarquables d'une fonction d'échelle à support compact décrite par P. G. Lemarié. Il s'agit du fait que les dérivées d'une fonction d'échelle à support compact peuvent s'écrire comme une combinaison des translatées d'une autre fonction d'échelle. Ce résultat est important car il nous permettra de traiter, dans la partie (C), les singularités d'ordre élevé. On donnera aussi l'algorithme de calcul des moments  $\mathcal{M}_i = \int x^i \phi(x) dx$ , de  $\phi$ , qui jouent un grand rôle dans la suite des travaux. Enfin on rappellera les algorithmes d'analyse-synthèse pour une fonction  $f$  et pour un opérateur  $T$  donné par son noyau  $K(x, y)$ .

Dans la partie (B), partant du fait que beaucoup de noyaux  $K(x, y)$  présents dans les équations intégrales issues de problèmes physiques sont de type convolution ou plus généralement des noyaux de Calderón-Zygmund, il est nécessaire de voir de plus près le comportement de leur décomposition dans une base d'ondelettes  $(\psi_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  où  $\Lambda$  est la réunion disjointe des  $\Lambda_j = 2^{-j-1}\mathbb{Z}^n / 2^{-j}\mathbb{Z}^n$ . Notons que tout  $\lambda \in \Lambda$  s'écrit de manière unique  $\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon$  où  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_i = 0$  ou 1, la suite  $(0, 0, \dots, 0)$  étant exclue. Dans le cas unidimensionnel  $n = 1$  on a une seule ondelette et on note la base d'ondelettes  $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$ .

Le but de tous les chercheurs qui se sont penchés sur ce problème était d'obtenir une décomposition de  $T$  sur  $\psi_{j,k}$  que l'on puisse rapidement évaluer en représentant  $T$  par une matrice creuse. Alors que G. Beylkin, R. Coifman et V. Rokhlin [12] ont eu le souci numérique en développant des algorithmes rapides pour l'analyse

d'une large classe d'opérateurs dans une base d'ondelettes à support compact (on détaillera ces algorithmes dans la partie **D**), d'autres chercheurs ont privilégié une étude théorique des espaces vectoriels formés par ces opérateurs et la question de la continuité sur  $L^2$  était le problème fondamental qu'ils se sont posés. La réponse à cette question coïncide avec le théorème  $T(1)$  de David et Journé [13, 20] qui offre une condition nécessaire et suffisante pour la continuité sur  $L^2$  des opérateurs de Calderón-Zygmund. Dans ce théorème, l'espace formé par ces opérateurs peut s'écrire

$$CZO = \mathcal{A} \oplus BMO \oplus BMO, \quad (.0.9)$$

ici  $BMO$  désigne par abus l'opérateur de paraproduit avec une fonction de  $BMO$  et  $\mathcal{A}$  est la collection de tout les opérateurs de Calderón-Zygmund  $T$  vérifiant  $T(1) = {}^tT(1) = 0$ .

Dans le but d'établir une seconde démonstration du théorème de David et Journé, Y. Meyer [20] a caractérisé les éléments de l'espace  $\mathcal{A}$  par leur matrice  $\langle T\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle$  dans une base d'ondelettes  $\psi_\lambda$ . Il a démontré que  $\mathcal{A}$  est la réunion croissante d'une famille d'algèbres de Banach  $Op(\mathcal{M}_\gamma)$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ . Cette famille d'algèbres, nommées algèbres de Lemarié, est isomorphe à une famille d'algèbres de matrices, notées  $\mathcal{M}_\gamma$ , telle que :

$\mathcal{M}_\gamma$  est formé de matrices  $(A_{\lambda,\lambda'})_{(\lambda,\lambda') \in \Lambda^2}$  agissant sur  $l^2(\Lambda)$  et vérifiant

$$A_{\lambda,\lambda'} \leq C \frac{2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)}}{(1+(j+j')^2)} \left( \frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{1+|k2^{-j} - k'2^{-j'}|} \right)^{n+\gamma}. \quad (.0.10)$$

En agissant sur le comportement à l'infini des éléments de  $\mathcal{M}_\gamma$  nous définissons une nouvelle classe d'opérateurs  $T$  dont la matrice  $A_{\lambda,\lambda'} = \langle T\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle$  vérifie l'estimation ( qui diffère de (.0.10) par la présence d'un nouveau paramètre  $\gamma'$ )

$$A_{\lambda,\lambda'} \leq C \frac{2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)}}{(1+(j+j')^2)} \left( \frac{2^{-j} + 2^{-j'}}{1+|k2^{-j} - k'2^{-j'}|} \right)^{n+\gamma'}. \quad (.0.11)$$

Pour chaque couple  $(\gamma, \gamma') \in \mathbb{R}^2$  on notera  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  l'ensemble des matrices vérifiant l'inégalité (.0.11). Nous montrons que  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  est une algèbre si et seulement si  $0 < \gamma' < 2\gamma$ . On retrouve les algèbres de Lemarié quand  $\gamma = \gamma'$ . Si on note  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$  l'espace d'opérateurs dont la matrice sur la base d'ondelettes est dans  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ , nous montrerons que l'espace  $\mathcal{A}$  de (.0.9) est aussi la réunion de la famille  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$ . Comme pour les algèbres de Lemarié, ces nouvelles algèbres ont la propriété d'indépendance par rapport à la base d'ondelettes choisie. Ceci nous permet de chercher une estimation sur noyaux  $K(x, y)$  de ces opérateurs.

En introduisant les  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  nous avons donc modifié le comportement à l'infini des éléments de  $\mathcal{M}_\gamma$ , et avec S. Jaffard nous avons obtenu une caractérisation des noyaux associés aux éléments de  $(\mathcal{M}'_{\gamma,\gamma'}, 0 < \gamma < 1, 0 < \gamma' < 2\gamma)$  grâce à une

estimation de leur dérivée fractionnaire  $\partial^s \partial^{s'} K(x, y)$  où les réels  $(s, s')$  sont liés à  $(\gamma, \gamma')$ . L'introduction de ce second paramètre permet de décorréler les propriétés de régularité et de localisation en espace des opérateurs de Calderón-Zygmund.

La partie (C) est consacrée aux méthodes de quadratures pour l'estimation de  $(\star\star)$ . Elle se compose de quatre chapitres.

- Dans le premier chapitre, on développe une méthode de quadrature pour le calcul de  $(\star\star)$  dans le cas où  $g$  et  $K$  sont suffisamment régulières. On commencera par des fonctions  $g$  particulières, comme la fonction  $g(x) = x^i 1_{[0,c]}$  ou  $g(x) = x^i 1_{[c,N]}$  avec  $c \in \text{supp} \phi = [0, N]$ . L'intérêt de cet exemple particulier est le calcul des coefficients en ondelettes des splines. Ensuite, on donnera des formules de quadratures pour des fonctions d'échelles particulières en jouant sur leurs moments, comme les Coifflets qui offrent des fonctions d'échelles ayant un certain nombre des moments nuls, ce qui donne une formule de quadrature par simple développement de Taylor.

Enfin on établira une formule de quadrature pour une fonction  $g$  ou un noyau  $K$  de classe  $C^l$  sur le support de la fonction  $\phi$  solution d'une équation d'échelle de type

$$\phi(t) = \sum_m c_m \phi(2t - m), \quad (.0.12)$$

où les réels  $(c_m)_{m \in \mathbb{N}}$  sont connus explicitement. Leur nombre est fini quand le support de  $\phi$  est compact. Grâce à la subdivision uniforme, obtenue en réécrivant récursivement l'équation d'échelle

$$\phi(t) = \sum_m s_{j,m} \phi(2^j t - m), \quad (.0.13)$$

(les  $s_{j,m}$  s'obtiennent à partir des  $c_m$ ), on donnera une quadrature dont l'erreur est de l'ordre de  $\varepsilon$ , précision de calcul souhaitée et fixée d'avance.

Une formule de quadrature similaire est faite indépendamment par Sweldens [27] dans le cas où la fonction  $g$  est connue seulement par ses valeurs sur un nombre fini de points  $(a_i)_{i=1,\dots,r}$ .

- Le second chapitre de la partie C est consacré au développement de méthodes de quadratures dans le cas où  $g$  et  $K$  présentent une ou plusieurs singularités. Les exemples d'équation intégrale ci-dessus montrent l'intérêt de ce cas dans les problèmes réels. Tout au long de ce chapitre, les calculs seront détaillés quand on parle de la fonction  $g$  et s'en déduisent quand on parle des noyaux  $K$ . Dans un premier temps, on s'intéressera aux fonctions  $g(x) = |x|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma < 1$ . Notons que ce type de singularités est souvent présent dans les problèmes physiques. On note

$$I_0 = \langle |x|^\gamma, \phi(\cdot) \rangle$$

avec  $-1 < \gamma < 1$ .  $I_0$  s'obtient en tant que premier terme de la suite  $I_m = \langle |t|^\gamma, \phi(t-m) \rangle$ , et grâce à (0.12) on donnera une méthode qui calcule simultanément les  $I_m^0$ ,  $m = 0, \dots, 2M-1$ , en tant que solution d'un système linéaire  $(2M, 2M)$ . Dans le cas où  $\gamma = 1$  ceci diffère de la notion de moment par la présence des valeurs absolues. Ce cas est intéressant car il mène directement au noyau de Hilbert et on donnera pour ce type de singularités (et les singularités d'ordre élevé en général) une méthode de quadrature en fin de chapitre.

De cet exemple, l'idée de profiter de l'équation d'échelle vérifiée par  $\phi$  s'impose, et nous développerons une méthode de quadrature pour les fonctions singulières  $g \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $C^\infty$  partout sauf en un point  $p$  où elle présente une singularité homogène du type  $|x-p|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma < 1$  (on a donc  $g \in L_{loc}^1$ ). On suppose ainsi que l'on a

$$\begin{cases} |g(x)| \leq C|x-p|^\gamma \\ |\partial^m g(x)| \leq Cm!|x-p|^{\gamma-m}, \forall m = 1, \dots, l. \end{cases}$$

La formule de subdivision uniforme (C.2.29) devient inadaptée car l'erreur de la quadrature est fortement liée à la distance au point singulier. Pour remédier à cela nous introduisons une nouvelle subdivision non uniforme de type

$$\phi(t) = \sum_j \sum_{m \in K^j} a_{j,m} \phi(2^j t - m),$$

où  $J$  est un entier que l'on déterminera (on l'appellera échelle d'arrêt),  $a_{j,m}$  est calculé en fonction des  $c_m$  de (A.1.9),  $K^j$  est l'ensemble des entiers  $m$  tel que la distance du support de  $\phi_{j,m}$  au point singulier est plus grande que  $d_j$ , distance critique autour du point singulier à l'échelle  $j$ . Les  $a_{j,m}$  ne sont pas forcément identiques aux  $s_{j,m}$  de (C.2.29). Grâce à cette nouvelle subdivision – adaptée à la singularité – on construit une méthode de quadrature dont l'erreur est majorée par  $\varepsilon$ , précision souhaitée du calcul.

Deux théorèmes donnant le coût de la quadrature seront énoncés. Dans le premier le nombre de points nécessaire pour la quadrature vaut

$$l \sum_{j=1}^J \text{card} K_j,$$

et dans le second il est de l'ordre de  $O((\log_2 \varepsilon)^2)$ . Le second théorème étant le résultat d'une collaboration avec A. Cohen, il a fait l'objet de la publication d'une note aux CRAS [3] et un article est en cours de rédaction. On développera, pour chaque théorème, l'algorithme de calcul correspondant et on dressera des résultats d'approximation ainsi que des courbes comparatives du temps CPU de chacun des deux théorèmes.

- Dans le troisième chapitre de cette partie, on s'intéressera aux fonctions singulières, produits d'une singularité par une fonction suffisamment régulière :

$$f(x) = g(x) \sigma(x) + h(x)$$

où  $\sigma$  est singulière et  $g, h$  sont au moins de classe  $C^l$  sur le support de  $\phi$ . On retrouve ce type de fonctions singulières dans de nombreux problèmes réels. Par exemple, l'équation intégrale associée au problème de Helmholtz [16, 14] possède un noyau  $G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ .

Pour ce type de fonctions, on propose une méthode de quadrature pour l'estimation de  $I \langle f, \phi \rangle$  en introduisant la notion de correction locale qui consiste à corriger certains poids de la quadrature régulière explicitée dans le premier chapitre. Cette correction s'effectue en rendant nuls les poids de la quadrature régulière associés aux points  $x_i$  proches du point singulier. On lui rajoute ensuite une quantité de telle façon que la quadrature soit exacte pour l'estimation de  $\langle P_\alpha(x), \phi \rangle$ , où  $P_\alpha(x)$  est une famille de polynômes de degré  $|\alpha| \leq l - 1$  convenablement choisie.

Cette idée est présente aussi dans les travaux de V. Rokhlin [22], B. Alpert [5] et J. Strain [24] pour les calculs d'intégrale d'une fonction singulière sur un intervalle contenant le point singulier.

La partie (D) comporte quelques applications numériques des formules de quadrature développées dans la partie précédente. Dans le premier chapitre, on commence par l'utilisation de ces formules pour le calcul des coefficients à l'échelle la plus fine dans l'algorithme d'analyse-synthèse pour une fonction. Ensuite pour le calcul des matrices issues des deux formes de représentation (standard et non standard), d'un opérateur  $T$  dans une base d'ondelettes, proposées par Beylkin, Coifman et Rocklin [12]. Dans le second chapitre nous appliquons ces formules de quadratures pour la représentation de la matrice de Galerkin de l'équation intégrale issue des problèmes de Dirichlet intérieur et extérieur par rapport à un disque  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$ . On termine par une étude du comportement des coefficients de la compression de ces matrices en fonction de l'erreur  $\varepsilon$  imposée aux quadratures.

Les algorithmes de la partie C ainsi que les algorithmes (en cascade, d'analyse-synthèse, d'évaluation des moments, calcul des formes standard et non standard) connus dans la théorie des ondelettes forment un code qui est en cours d'élaboration. Les premiers résultats numériques de son exécution sont présentés tout au long de la thèse.

## Partie A

### Rappels : Théorie des ondelettes



# Chapitre I

## Ondelettes et Analyse Multirésolution

**Introduction** Beaucoup de travaux ont été réalisés au sujet des ondelettes, parmi lesquels on peut citer [19], [7], [6], etc ... . Dans ce chapitre nous nous contentons d'un bref rappel de ce qui est nécessaire à connaître pour la suite. On commence par la notion d'analyse multirésolution, dans laquelle la fonction d'échelle nous intéresse particulièrement. On donne quelques exemples d'une fonction d'échelle à support compact, on étudie ses dérivées et on termine par un algorithme de calcul de ses moments. Ensuite on rappelle les algorithmes d'analyse-synthèse pour une fonction  $f$  et un opérateur  $T$  donné par son noyau  $K(x, y)$ .

### I.1 Analyse multirésolution et fonction d'échelle

**Définition 1** Une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ , qu'on note AMR, est la donnée d'une suite de sous-espaces fermés emboîtés  $V_j \in L^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$  vérifiant :

- (i)  $V_j \subset V_{j+1}$
- (ii)  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1},$
- (iii)  $f(x) \in V_0 \iff f(x+k) \in V_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- (iv)  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  et  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ ,
- (v)  $\exists \phi \in V_0$  telle que  $\int \phi(t)dt \neq 0$  et la famille des fonctions  $\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}$  forme une base de Riesz de  $V_0$ .

Puisque la fonction  $\phi \in V_0$  et  $V_0 \subset V_1$ , il existe une suite  $(h_n)_n$  telle que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n), \quad (\text{A.1.1})$$

on suppose que la suite  $(h_n)_n$  vérifie

$$\sum_n h_n = \sqrt{2}. \quad (\text{A.1.2})$$

De (A.1.2) et (A.1.1) on déduit que la fonction  $\phi$  vérifie

$$\int \phi(t) dt = 1.$$

On appellera tout le long de ce travail *équation d'échelle* l'équation (A.1.1) (d'autres dénominations existent dans la littérature : équation de dilatation, équation de raffinement etc ...). La fonction  $\phi$  quant à elle s'appelle *fonction d'échelle*.

La fonction d'échelle et ses translatées forment une partition de l'unité

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(x - m) = 1. \quad (\text{A.1.3})$$

Par passage aux transformées de Fourier, (A.1.3) devient

$$\hat{\phi}(m2\pi) = \delta_m \quad m \in \mathbb{Z}$$

et par (A.1.1) on obtient

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2) \quad (\text{A.1.4})$$

où  $m_0$  est la fonction  $2\pi$ -périodique définie par

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m h_m e^{-im\xi}. \quad (\text{A.1.5})$$

La fonction  $m_0$  s'appelle *filtre passe-bas*.

Pour construire  $\phi$ , on se donne une suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifiant (A.1.2) et par l'algorithme en cascade basé essentiellement sur l'équation (A.1.1) on calcule les valeurs de  $\phi$  aux points dyadique [7, 1, 9, 25, 4]. Mais d'une manière générale et surtout dans toute les applications qui suivent, la connaissance de la forme analytique de la fonction  $\phi$  n'est nullement obligatoire. La donnée de (A.1.1) et (A.1.2) est suffisante.

On appelle *ondelette* la fonction  $\psi$  définie par :

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_k (-1)^{-k} h_{-k+1} \phi(2x - k). \quad (\text{A.1.6})$$

La famille  $(\psi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz de  $W_0$ , le sous-espace complémentaire de  $V_0$  dans  $V_1$ . Et, par définition de l'analyse multirésolution, la famille  $(\psi_{j,k})_k$  où  $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)$  forme une base de Riesz de  $W_j$ , le complémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . Enfin avec le point (iv) de la définition ci-dessus on déduit que la collection des fonctions  $(\psi_{j,k})_{j,k}$  est une base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$ .

### Exemples

1. **Haar** : Soit  $\phi$  la fonction égale à 1 sur l'intervalle  $[0, 1[$  et 0 ailleurs. Elle vérifie l'équation d'échelle suivante :

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x) - \frac{1}{2}\phi(2x - 1),$$

La fonction  $\psi$  est la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2}[$ ,  $-1$  sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1[$  et 0 ailleurs.

2. **B-Splines** : Soit  $S_1 = \chi_{[0,1]}$  la fonction indicatrice de l'intervalle  $[0, 1]$ . On définit la fonction B-spline d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$ , notée  $S_m$ , récursivement par la convolution  $S_m = S_{m-1} * S_1$ . On a l'équation suivante

$$S_m(x) = 2^{m-1} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} S_m(2x - k). \quad (\text{A.1.7})$$

3. **Daubechies** : La fonction d'échelle  $\phi_M$ ,  $M \in \mathbb{N}^*$  est telle que la famille  $(\phi_M(\cdot - k))_k$  forme une base orthogonale de  $V_0$ . On a donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 = 1. \quad (\text{A.1.8})$$

De plus la suite  $(h_k)_k$  ne comporte qu'un nombre fini d'éléments non nuls, par conséquent  $\phi$  a un support compact. Si  $N \in \mathbb{N}^*$  est le nombre de  $h_k$  non nuls, on a  $N = 2M$  et l'équation d'échelle s'écrit alors

$$\phi_M(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi_M(2x - k). \quad (\text{A.1.9})$$

L'entier  $M$  est le nombre de moments nuls de l'ondelette  $\psi$  et on a  $\text{supp}(\phi_M) \subset [0, 2M - 1]$ . Dans ce cas la fonction  $2\pi$ -périodique  $m_0$ ,

$$m_0(\xi) = \sum_m h_m e^{-im\xi},$$

devient un polynôme trigonométrique [7] et se factorise de la manière suivante

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{ix}}{2} \right)^M p(x),$$

où  $p(x)$  est aussi un polynôme trigonométrique.

Dans l'annexe 2 on donnera un tableau contenant quelques exemples de suites  $h_k$  correspondant aux Daubechies, et par l'algorithme en cascade on représente ci-après les fonctions  $(\phi_M)_{M=2,3,4,10}$ .

**Remarque :** Par ces deux propriétés, l'orthogonalité et le support compact, les bases d'ondelettes de Daubechies s'adaptent très bien à l'analyse numérique. Elles seront notre base de travail dans la partie C de cette thèse.

4. **Coiflets :** Beylkin, Coifman et Rokhlin dans [12] et I. Daubechies dans [8] ont construit des bases d'ondelettes similaires à celles de Daubechies et telles que la fonction d'échelle  $\varphi_M$  vérifie la propriété :

pour un entier  $\tau_M$

$$\int x^i \varphi_M(x + \tau_M) dx = 0, \quad i = 1, \dots, M-1. \quad (\text{A.1.10})$$

Le nombre  $N$  de  $h_k$  non nuls vaut dans ce cas  $3M$  et on a  $\text{supp}(\varphi_M) \subset [0, 3M-1]$ .

On représente ci-dessous quelques exemples de fonctions d'échelle  $\varphi_M$  associées aux Coiflets (elles correspondent aux filtres  $(h_i)_{i=0,\dots,3M-1}$  vérifiant  $\sum_{i=0}^{3M-1} h_i = \sqrt{2}$  donnés dans l'annexe 2).

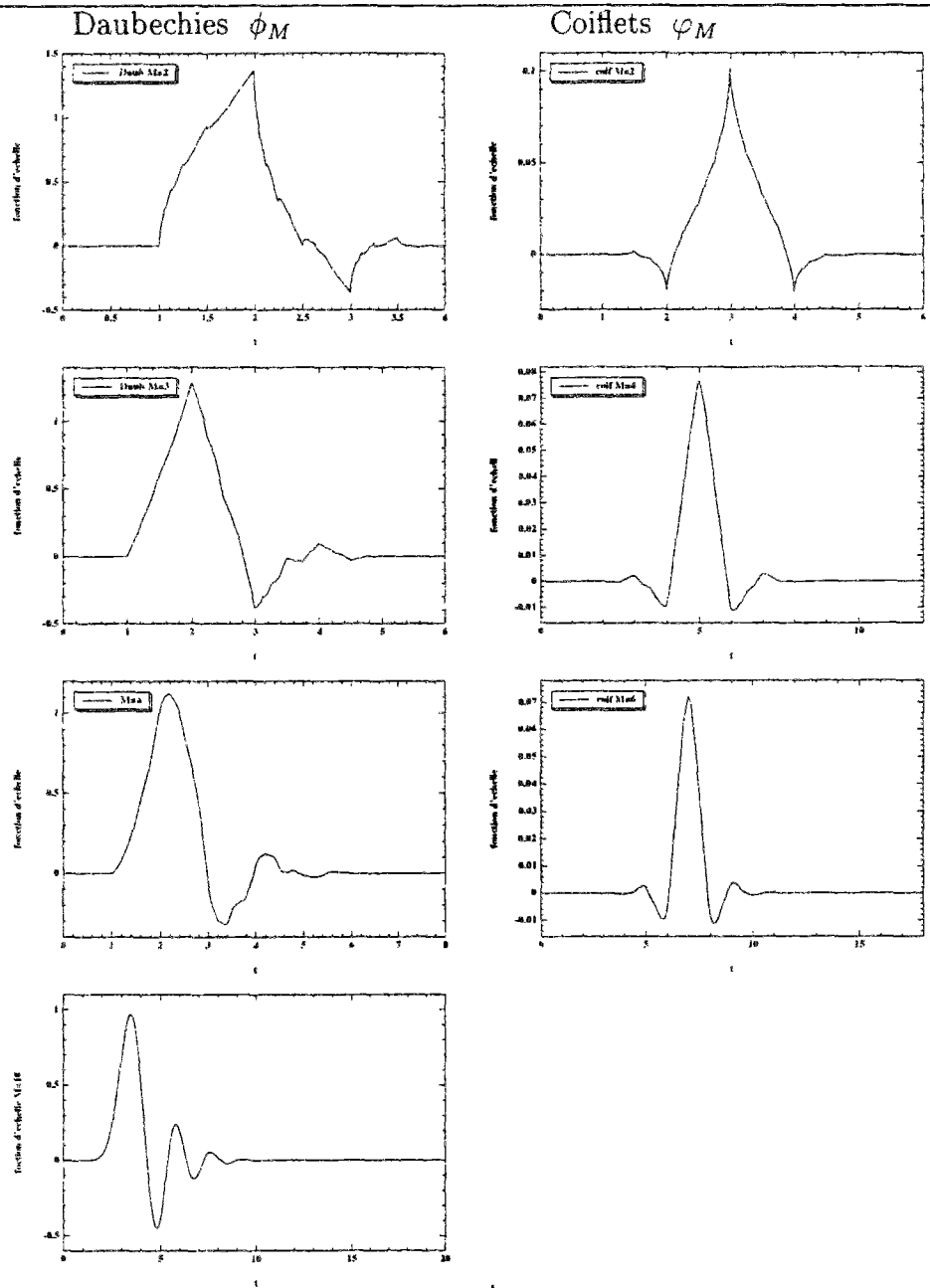


FIG. I.1 – Quelques exemples de fonctions d'échelle correspondant aux Coiflets (colonne de droite), aux ondelettes d'I. Daubechies (colonne de gauche). On remarque bien la différence des supports pour la même nombre de moments nuls  $M$

## I.2 Dérivées d'une fonction d'échelle à support compact

On considère  $\phi$  une fonction d'échelle à support compact. Elle est donc solution d'une équation d'échelle de type (A.1.9) et vérifie

$$\hat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi),$$

où la fonction  $m_0$  peut s'écrire

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^N p(\xi).$$

Puisque  $\phi$  est à support compact, on a  $\hat{\phi}'(\xi) = i\xi \hat{\phi}(\xi)$  et on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'(2\xi) &= i2\xi \hat{\phi}(2\xi) \\ &= i2\xi m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi) \\ &= i2\xi \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^N p(\xi)\hat{\phi}(\xi) \\ &= \frac{\hat{\phi}'(\xi)}{1 - e^{-i\xi}} \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^{N-1} (1 - e^{-i2\xi}) p(\xi). \end{aligned}$$

Si on pose

$$s_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{i\xi}}{2} \right)^{N-1} p(\xi)$$

il vient  $s_0(\xi) = \frac{2}{1+e^{i\xi}} \sum_m h_m e^{-im\xi}$ . Par suite

$$\hat{\phi}'(2\xi) = s_0(\xi) \frac{\hat{\phi}'(\xi)}{1 - e^{-i\xi}} (1 - e^{-i2\xi}).$$

Soit  $\hat{\varphi}$  la fonction telle que

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\hat{\phi}'(\xi)}{1 - e^{-i\xi}}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(2\xi) &= \frac{\hat{\phi}'(2\xi)}{1 - e^{-i2\xi}} \\ &= s_0(\xi) \frac{\hat{\phi}'(\xi)}{1 - e^{-i\xi}} \frac{(1 - e^{-i2\xi})}{1 - e^{-i2\xi}} \\ &= s_0(\xi) \hat{\varphi}(\xi). \end{aligned}$$

On conclut donc que la fonction  $\varphi$  est une fonction d'échelle avec  $s_0(\xi)$  comme filtre passe-bas. De plus, comme  $\phi'(\xi) = (1 - e^{-i\xi})\phi(\xi)$ , alors

$$\phi'(x) = \varphi(x) - \varphi(x-1). \quad (\text{A.1.11})$$

De la même manière, et comme il est décrit dans [17], pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $m < N$  on a l'identité

$$\phi^{(m)} = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \varphi(\cdot - k) \quad (\text{A.1.12})$$

où  $\varphi$  est une fonction d'échelle continue à support compact, vérifiant

$$\varphi = 2 \sum_{k=0}^{N-m} g_k \varphi(2 \cdot - k)$$

où les coefficients du filtre  $(g_k)_{k=0, N-m}$  vérifient

$$[(1 + e^{i\xi})/2]^m \sum g_k e^{ik\xi} = \sum h_k e^{ik\xi}.$$

Ce résultat est le point clé de l'étude des singularités d'ordre élevé effectuée dans la partie C.

### I.3 Transformée en ondelettes rapide

On considère une analyse multirésolution  $(V_j)_{j=0, \dots, n}$ . Pour des raisons pratiques  $j = 0$  désignera l'échelle la plus "fine,"  $j = n$  l'échelle "grossière" et  $V_j$  est l'espace engendré par la famille  $(\phi_{j,k})_{k=0, \dots, 2^{n-j}-1}$ , avec  $\phi_{j,k}(x) = \phi(2^{n-j}x - k)$ . On a donc

$$V_n \subset V_{n-1} \subset V_{n-2} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0. \quad (\text{A.1.13})$$

Avec ce choix

$$V_0 = V_n \bigoplus_{j=1}^n W_j. \quad (\text{A.1.14})$$

Pour tout  $j = 0, \dots, n$ , l'espace  $W_j$  est engendré par la famille de fonctions  $(\psi_{j,k})_{k=0, \dots, 2^{n-j}-1}$ , avec  $\psi_{j,k}(x) = \psi(2^{n-j}x - k)$ .

#### I.3.1 Décomposition d'une fonction

**Algorithme d'analyse** Soit  $f$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$ . La détermination de la transformée en ondelettes de  $f$  est donnée par le calcul des coefficients  $s_k^j$  et  $d_k^j$  définis par :

$$s_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \quad (\text{A.1.15})$$

$$d_k^j = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad (\text{A.1.16})$$

pour  $j = 0, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$ .

Étant donnée la suite  $(s_k^0)_{k=0, \dots, 2^n-1}$ , les coefficients  $s_k^j$  et  $d_k^j$  avec  $j = 1, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$  sont donnés grâce à l'équation d'échelle (A.1.9) par les formules récurrentes suivantes :

$$s_k^j = \sum_{m=0}^{2M-1} h_m s_{m+2k}^{j-1}, \quad (\text{A.1.17})$$

$$d_k^j = \sum_{m=0}^{2M-1} g_m s_{m+2k}^{j-1}. \quad (\text{A.1.18})$$

### Remarque 1

1. Les termes  $d_k^j$  représentent les coefficients d'ondelettes correspondants à la décomposition de  $f$  sur les  $\psi_{j,k}$  et les termes  $s_k^j$  peuvent s'interpréter comme des approximations aux différentes échelles.
2. Pour décomposer une fonction  $f$  sur une base d'ondelettes, on n'a pas besoin de connaître les fonctions  $\phi$  et  $\psi$ , la connaissance de la suite filtre  $(h_m)$  est suffisante.

**Algorithme de synthèse** La reconstruction de la suite  $(s_k^0)_{k=0, \dots, 2^n-1}$  approximant la fonction  $f$ , à partir des suites  $(d_k^j)_{j=1, \dots, n, k=0, \dots, 2^{n-j}-1}$  et de  $s_0^n$ .

Dans [8], il est démontré que les formules (A.1.17) et (A.1.18) définissent un opérateur orthogonal  $\mathcal{O}_j : \mathbb{R}^{2^{n-(j-1)}} \rightarrow \mathbb{R}^{2^{n-(j-1)}}$  qui à partir des coefficients  $s_m^{j-1}$  avec  $m = 0, \dots, 2^{n-(j-1)} - 1$  nous donne les coefficients  $s_k^j$ ,  $d_k^j$  pour  $k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$ , et dont l'inverse est donné par

$$\begin{aligned} s_{2m}^{j-1} &= \sum_{k=1}^M h_{2k} s_{m-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k} d_{m-k+1}^j, \\ s_{2m-1}^{j-1} &= \sum_{k=1}^M h_{2k-1} s_{m-k+1}^j + \sum_{k=1}^M g_{2k-1} d_{m-k+1}^j \end{aligned} \quad (\text{A.1.19})$$

**Conclusion** On résume l'algorithme d'analyse-synthèse comme suit

1. Ayant une fonction  $f$ , on calcule les coefficients  $(s_k^0)_{k=0, \dots, N=2^n-1}$  par une méthode de quadrature (partie C de la thèse).
2. Par (A.1.17) et (A.1.18) on calcule les coefficients  $(d_k^j, s_k^j)$  pour  $j = 1, \dots, n$  et  $k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$ .

3. Pour la reconstruction, partant de  $s_1^n$ , et de la suite des détails  $(d_k^j)$  où  $j = 1, \dots, n$  et  $k = 1, \dots, 2^{n-j}$ , on construit  $s_k^0$  pour tout  $k = 0, \dots, N = 2^n - 1$  par (A.1.19).

### I.3.2 Décomposition d'un opérateur

On considère un opérateur donné par sa forme intégrale

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy, \quad (\text{A.1.20})$$

où  $K(x, y)$  est son noyau.

Il existe deux procédés différents pour la représentation de  $T$  au moyen de la base d'ondelettes  $(\psi_{j,k})_{j,k}$ , associée à une analyse multirésolution vérifiant (A.1.13). Ceci nous donne deux matrices représentatives de formes différentes. Comme elle a été nommée dans [12], la première forme dite standard est issue de la décomposition du noyau  $K(x, y)$  sur les produits tensoriels d'ondelettes monodimensionnelles, c'est à dire les  $\psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y)$  qui forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^2)$ . Les éléments de cette matrice sont les

$$\Gamma_{k,k'}^{j,j'} = \langle T\psi_{j,k} | \psi_{j',k'} \rangle = \int \int K(x, y) \psi_{j,k}(x) \psi_{j',k'}(y) dx dy$$

avec  $j, j' = 1, \dots, n$ ,  $k = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$  et  $k' = 0, \dots, 2^{n-j'} - 1$ .

La difficulté de l'utilisation de cette forme est essentiellement la manipulation de deux échelles différentes  $j, j'$ .

La seconde représentation, appelée non-standard, est issue directement de la décomposition du noyau  $K(x, y)$  sur les ondelettes bidimensionnelles

$$\{ (\psi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y), \psi_{j,k}(x)\phi_{j,k'}(y), \phi_{j,k}(x)\psi_{j,k'}(y))_{j=1,\dots,n-1, k=0,\dots,2^{n-j}-1}, \phi_{n,0}(x)\phi_{n,0}(y) \}. \quad (\text{A.1.21})$$

La matrice est formée par blocs où chacun est formé par les matrices

$$\alpha_{k,k'}^j = \int \int K(x, y) \psi_{j,k}(x) \psi_{j,k'}(y) dx dy, \quad (\text{A.1.22})$$

$$\beta_{k,k'}^j = \int \int K(x, y) \psi_{j,k}(x) \phi_{j,k'}(y) dx dy, \quad (\text{A.1.23})$$

$$\gamma_{k,k'}^j = \int \int K(x, y) \phi_{j,k}(x) \psi_{j,k'}(y) dx dy, \quad (\text{A.1.24})$$

avec  $j = 1, \dots, n$  et  $k, k' = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$ .

Contrairement à la première forme, la forme non standard ne fait pas intervenir l'interaction de deux échelles différentes. Par contre les coefficients de la matrice ne représentent pas l'opérateur dans une base orthonormée.

Le calcul des coefficients  $\Gamma_{k,k'}^{j,j'}$  dans le cas standard, ou  $\alpha_{k,k'}^j$ ,  $\beta_{k,k'}^j$  et  $\gamma_{k,k'}^j$  dans le cas non standard, est basé sur des algorithmes récurrents. En effet, grâce à (A.1.9), les équations (A.1.22), (A.1.23) et (A.1.24) donnent

$$\Gamma_{k,k'}^{j,j'} = \sum_{l,l'=0}^{2M-1} g_l g_{l'} s_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1, j'-1}, \quad (\text{A.1.25})$$

$$\alpha_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{2M-1} g_l g_{l'} s_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad (\text{A.1.26})$$

$$\beta_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{2M-1} g_l h_{l'} s_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad (\text{A.1.27})$$

$$\gamma_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{2M-1} h_l g_{l'} s_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}, \quad (\text{A.1.28})$$

où  $s_{k,k'}^j$  est définie par

$$s_{k,k'}^j = \int \int K(x, y) \phi_{j,k}(x) \phi_{j,k'}(y) dx dy. \quad (\text{A.1.29})$$

et vérifie l'équation

$$s_{k,k'}^j = \sum_{l,l'=0}^{2M-1} h_l h_{l'} s_{2k+l, 2k'+l'}^{j-1}. \quad (\text{A.1.30})$$

Pour de nombreux opérateurs les blocs de la matrice non standard sont presque diagonaux. Parmi cette classe d'opérateurs on trouve les opérateurs de Calderón-Zygmund auxquels nous allons consacrer la seconde partie (une analyse de la matrice standard de ces opérateurs sera faite dans la prochaine partie).

Bien que la forme non standard soit avantageuse car on a souvent affaire à des matrices presque diagonales, son inconvénient se résume dans le fait que ce n'est pas une écriture matricielle de l'opérateur  $T$ .

### I.3.3 Remarque fondamentale

Dans les deux paragraphes précédents I.3.1 et I.3.2 on a remarqué que, étant donné la fonction  $f(x)$  (respectivement le noyau  $K(x, y)$ ), la suite  $(s_k^0)_{k=0, \dots, 2^n-1}$  (respectivement  $(s_{k,l}^0)_{k,l=0, \dots, 2^n-1}$ ) constitue la donnée initiale des algorithmes de décomposition dans une base d'ondelettes. Il est donc nécessaire de se poser la question de l'estimation de ces quantités. C'est dans ce but que Beylkin, Coifman et Rocklin ont été amenés à introduire dans [12] les coiffets : par un développement de Taylor de  $f$  (supposée

suffisamment régulière) et sachant que les moments (C.2.41) de la fonction d'échelle des coiflets sont nuls on obtient

$$|s_k^0 - 2^{-\frac{n}{2}} f(2^{-n}(k + \tau_m))| = O(2^{-n(M+\frac{1}{2})}),$$

et de la même manière quand le noyau  $K(x, y)$  est suffisamment régulier on a

$$|s_{k,l}^0 - 2^{-n} K(2^{-n}(k + \tau_m), 2^{-n}(l + \tau_m))| = O(2^{-n(M+1)}).$$

On ne peut se contenter de ce résultat car la propriété (C.2.41) vérifiée par les coiflets n'est pas satisfaite par les bases d'ondelettes à support compact en général. Ensuite il s'avère que le support des coiflets est 50% plus grand que celui des Daubechies par exemple, et l'utilisation des coiflets pour effectuer des calculs numériques nécessitera 50% d'opérations de plus que l'utilisation des Daubechies. Enfin comme on fait un développement de Taylor la présence d'une singularité dans  $f$  ou dans  $K$  pourra induire une erreur de calcul difficile à contrôler.

Dans notre cas et afin de répondre à cette question d'une manière plus large, on propose dans la partie C de cette thèse des formules de quadrature, pour l'estimation des  $s_k^0$  et  $s_{k,l}^0$ , basée sur la propriété multiéchelle de  $\phi$  et valable pour une large classe de fonctions  $f$  (respectivement noyaux  $K$ ). L'élaboration de ces méthodes de calcul nécessitera la connaissance des moments  $\mathcal{M}_i$  de la fonction  $\phi$  et on explicite dans la section qui suit un algorithme de calcul de ces quantités.

## I.4 Moments de la fonction d'échelle.

**Définition 2** Si  $k \in \mathbb{N}$ , on appelle moment d'ordre  $k$  de la fonction  $\phi$  la quantité

$$\mathcal{M}_k = \int x^k \phi(x) dx$$

L'équation d'échelle (A.1.9) donne accès aux valeurs de  $\mathcal{M}_k$  par un calcul récursif très simple ( $\phi$  est normalisée au sens où  $\mathcal{M}_0 = 1$ ). On trouvera dans [11, 15] une généralisation de ce résultat au calcul d'intégrales de produits de fonctions d'échelle quelconques et on rappelle ici les grandes lignes de la méthode.

En injectant l'équation d'échelle (A.1.9) dans la formule du moment  $\mathcal{M}_p$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_p &= \sqrt{2} \int x^p \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \phi(2x - k) dx \\
&= 2^{-p}/\sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \int (x + k)^p \phi(x) dx \\
&= 2^{-p}/\sqrt{2} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k \int \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} k^i x^{p-i} \phi(x) dx \\
&= 2^{-p}/\sqrt{2} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k k^i \int x^{p-i} \phi(x) dx \\
&= 2^{-p} \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} m_i \mathcal{M}_{p-i},
\end{aligned}$$

où

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{2M-1} h_k k^i. \quad (\text{A.1.31})$$

On déduit donc la formule de récurrence suivante :

$$\mathcal{M}_p = \frac{1}{2^p - 1} \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} m_i \mathcal{M}_{p-i}. \quad (\text{A.1.32})$$

Après implémentation de cet algorithme, voici quelques exemples des moments de fonctions d'échelles de Daubechies.

| $k$ | 2                     | 3                    | 4                    | 10                   |
|-----|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0   | 1.00000000000e + 00   | 1.00000000000e + 00  | 1.00000000000e + 00  | 1.00000000000e + 00  |
| 1   | 6.33974589933e - 01   | 8.17401167810e - 01  | 1.00539321345e + 00  | 2.13096815090e + 00  |
| 2   | 4.01923777054e - 01   | 6.68144669138e - 01  | 1.01081551366e + 00  | 4.54102506925e + 00  |
| 3   | 1.31091538279e - 01   | 4.45460044913e - 01  | 9.07360367246e - 01  | 9.48102536203e + 00  |
| 4   | -3.021933565909e - 01 | 1.17226347006e - 01  | 5.83771813559e - 01  | 1.89523308966e + 01  |
| 5   | -1.06587285311e + 00  | -4.66510905905e - 02 | 6.30775241167e - 02  | 3.51965767186e + 01  |
| 6   | -2.41783035039e + 00  | 1.47354534090e + 00  | -2.37749435288e - 01 | 5.79706852707e + 01  |
| 7   | -4.72791240031e + 00  | 1.06728808683e + 01  | -8.17841787095e - 01 | 7.73198936849e + 01  |
| 8   | -8.40765539856e + 00  | 4.83009119195e + 01  | -1.93803883128e + 01 | 6.27949381259e + 01  |
| 9   | -1.35142662601e + 01  | 1.81428345214e + 02  | -2.00465275763e + 02 | -3.19994591376e + 01 |
| 10  | -1.83643342457e + 01  | 6.18393596591e + 02  | -1.41963579680e + 03 | -1.74246743690e + 02 |
| 11  | -1.53776342745e + 01  | 1.99271425928e + 03  | -8.2882077421e + 03  | 2.40126302022e + 02  |
| 12  | 2.04356970442e + 01   | 6.22212460107e + 03  | -4.31895504389e + 04 | 5.64479845086e + 03  |
| 13  | 1.61829096057e + 02   | 1.91965612611e + 04  | -2.09155395696e + 05 | 5.63022897337e + 04  |
| 14  | 6.06578724845e + 02   | 5.96783414894e + 04  | -9.63160743437e + 05 | 5.83083824579e + 05  |
| 15  | 1.86869717660e + 03   | 1.90992051157e + 05  | -4.27642693954e + 06 | 6.29455519619e + 06  |
| 16  | 5.24015829499e + 03   | 6.42498534549e + 05  | -1.84588983269e + 07 | 6.74617660910e + 07  |
| 17  | 1.38794605619e + 04   | 2.30398604919e + 06  | -7.77703878158e + 07 | 7.18420399087e + 08  |
| 18  | 3.53132056092e + 04   | 8.81860374050e + 06  | -3.19712788478e + 08 | 7.73770563290e + 09  |

Tableau 2: Les moments  $\mathcal{M}_k, k = 0, \dots, 18$  pour les fonctions d'échelles associées aux ondelettes de Daubechies dont le nombre de moments nuls est  $M = 2, 3, 4$  et 10.



## Partie B

### Bases d'ondelettes et algèbres d'opérateurs



# Introduction

R. Coifman et Y. Meyer ont défini les opérateurs de Calderón-Zygmund comme étant les opérateurs linéaires  $T$  de  $L^2$  dans  $L^2$  dont le noyau de distribution  $K(x, y)$  est une fonction définie si  $x \neq y$  et vérifie

- $|K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n}$  et
- $|\partial_x K(x, y)| + |\partial_y K(x, y)| \leq C|x - y|^{-n-1}$

Leur souci principal était de trouver une condition nécessaire et suffisante entraînant la continuité de  $T$  sur les espaces  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , en particulier quand  $p = 2$ . L'un des outils pour l'étude de la continuité est le lemme de Cotlar et Stein : Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $T_j : H \rightarrow H$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , des opérateurs continus dont les adjoints sont notés  $T_j^*$ . S'il existe une suite  $w(j) \geq 0$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , telle que  $\sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{w(j)} < \infty$  et  $\|T_j T_k^*\| \leq w(j - k)$  et  $\|T_j^* T_k\| \leq w(j - k)$  pour tout  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ , alors pour tout  $x \in H$  la série  $\sum_{-\infty}^{+\infty} T_j$  converge et, si on pose  $T = \sum_{-\infty}^{+\infty} T_j$ , on a  $\|T\| \leq \sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{w(j)}$ .

La réponse à ce problème est arrivée avec le théorème  $T(1)$  de G. David et J.L. Journé [13], et la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur  $T$  dont le noyau vérifiant les inégalités ci-dessus soit continu sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est que l'opérateur  $T$  soit faiblement continu sur  $L^2$  et que  $T(1)$  et  $T^*(1)$  soient dans l'espace BMO. On rappelle que  $T(1) \in BMO$  est équivalent à dire qu'il existe  $\beta \in BMO$  telle que  $\langle 1, T^*(\psi) \rangle = \langle \beta, \psi \rangle_{BMO, H^1}$  pour tout  $\psi \in H^1$ .

Dans la démonstration du théorème  $T(1)$ , qui repose essentiellement sur le lemme de Cotlar et Stein, G. David et J.L. Journé décomposent l'opérateur  $T$  de la manière suivante

$$T = T_0 + L_\beta + L_\gamma$$

où  $T_0$  est un opérateur de Calderón-Zygmund vérifiant  $T(1) = T^*(1) = 0$ ,  $L_\beta$  et  $L_\gamma$  sont deux paraproducts liés respectivement à  $\beta = T(1)$  et  $\gamma = T^*(1)$  éléments de BMO. En désignant par  $\mathcal{A}$  la collection de tous les opérateurs de Calderón-Zygmund vérifiant  $T(1) = T^*(1) = 0$  la démonstration de  $T(1)$  fournit l'isomorphisme

$$CZO = \mathcal{A} \oplus BMO \oplus BMO. \quad (B.0.33)$$

L'étude de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est donc centrale dans celle des opérateurs de Calderón-Zygmund.

Avec la découverte des bases d'ondelettes, Y. Meyer a établi une nouvelle démonstration du théorème  $T(1)$  en caractérisant les éléments de  $\mathcal{A}$  par leur matrice  $(\langle T\psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle)_{j,j',k,k'}$  dans une base d'ondelettes  $(\psi_{j,k})_{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n}$ . La continuité  $L^2$  d'un élément de  $\mathcal{A}$  se déduit de la continuité de sa matrice sur l'espace des suites de carré sommable qui s'obtient par le lemme de Schur [20]. Et pour résoudre le problème du calcul symbolique sur  $\mathcal{A}$ , Y. Meyer a démontré [20] que l'espace  $\mathcal{A}$  est la réunion croissante d'une famille d'algèbres de Banach  $\mathcal{OM}_\gamma$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ , telles que tout opérateur  $T$  élément de  $\mathcal{OM}_\gamma$  est caractérisé par une estimation, dépendant de  $\gamma$ , des coefficients de sa matrice dans la base d'ondelettes  $(\psi_{j,k})_{j,k}$ .

Dans cette partie nous introduisons une nouvelle classe d'opérateurs comparables à  $\mathcal{OM}_\gamma$ , et définie par une estimation des coefficients de la matrice dans  $(\psi_{j,k})_{j,k}$ , dépendant non seulement de  $\gamma$  mais aussi d'un nouveau paramètre  $\gamma'$ . On notera  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$  cette nouvelle classe et on montrera que c'est une algèbre d'opérateurs si et seulement si les paramètres  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont strictement positifs et vérifient  $\gamma' < 2\gamma$ . Et on terminera par une caractérisation des noyaux  $K(x, y)$ , associés aux éléments de  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$ , grâce aux notions des dérivées fractionnaires.

# Chapitre I

## Les algèbres d'opérateurs $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$

### I.1 Préliminaire

Voici les définitions et rappels dont nous aurons besoin tout au long de cette partie. Soit  $V$  un espace vectoriel tel que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset V \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  ( les deux injections ci dessus sont continues et d'image dense). On note  $V'$  l'espace dual de  $V$  et  $\Omega$  l'ouvert de  $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  défini par  $x \neq y$ .

**Définition 3** *Un opérateur linéaire continu  $T : V \longrightarrow V'$  est associé à une intégrale singulière s'il existe un exposant  $\gamma \in ]0, 1[$ , deux constantes  $C_0$  et  $C_1$  et une fonction  $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$|K(x, y)| \leq C_0 |x - y|^{-n} \quad (\text{B.1.1})$$

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x' - y)| &\leq C_1 |x - x'|^\gamma |x - y|^{-n-\gamma} \\ \text{si } |x - x'| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned} \quad (\text{B.1.2})$$

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x - y')| &\leq C_1 |y - y'|^\gamma |x - y|^{-n-\gamma} \\ \text{si } |y - y'| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned} \quad (\text{B.1.3})$$

et  $Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy$  pour toute fonction  $f \in V$  et tout  $x$  n'appartenant pas au support de  $f$ . On note **SIO** l'ensemble de ces opérateurs.

**Définition 4** Soit  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  un opérateur linéaire continu. On dit que  $T$  est un opérateur de Calderón-Zygmund si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le noyau  $K(x, y)$  est une fonction localement intégrable sur  $\Omega$  et  $\exists C_0$  telle que  $|K(x, y)| \leq C_0 |x - y|^{-n}$
2. Il existe  $\gamma \in ]0, 1]$  et une constante  $C_1$  tels que pour tout  $(x, y) \in \Omega$  on ait,

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(x' - y)| &\leq C_1 |x - x'|^\gamma |x - y|^{-n-\gamma} \\ &\quad \forall x' \text{ tel que } |x - x'| \leq \frac{1}{2} |x - y| \\ |K(x, y) - K(x - y')| &\leq C_1 |y - y'|^\gamma |x - y|^{-n-\gamma} \\ &\quad \forall y' \text{ tel que } |y - y'| \leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned} \tag{B.1.4}$$

3.  $T$  se prolonge en un opérateur continu sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

On note **CZO** l'ensemble de ces opérateurs.

**Remarque 2** Si  $\gamma > 1$ , on écrit  $\gamma = m + r$ , où  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $0 < r \leq 1$  et les deux conditions (B.1.4) sont remplacées par

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha K(x, y)| &\leq C |x - y|^{-n-|\alpha|} \text{ pour } |\alpha| < n \\ |\partial^\alpha K(x, y) - \partial^\alpha K(x', y)| &\leq C |x - x'|^r |x - y|^{-n-\gamma} \text{ si } |\alpha| = m \text{ et } |x - x'| < |x - y|/2. \end{aligned}$$

et de même en remplaçant  $K(x, y)$  par  $K(y, x)$ .

La dernière condition de la définition 4, qui traduit la continuité de l'opérateur  $T$  sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , s'est avérée difficile à mettre en œuvre dès lors qu'on sort du cadre classique des opérateurs de convolution. Le théorème  $T(1)$  de David-Journé [20] énoncé ci dessous, a effacé cette difficulté en donnant une condition nécessaire et suffisante pour la continuité sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  des opérateurs (CZO).

**Théorème 1 (David et Journé)** Si  $T$  est donné par la définition (3). Alors  $T$  se prolonge en un opérateur continu sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

1.  $T(1) \in \mathbf{BMO}(\mathbb{R}^n)$
2.  ${}^tT(1) \in \mathbf{BMO}(\mathbb{R}^n)$

3.  $T$  est faiblement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$

◇

**Remarque 3** – L'espace  $\text{BMO}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace dual de l'espace de Hardy  $H^1$ , nous renvoyons le lecteur à [19] pour tout ce qui concerne cet espace.

– La continuité faible sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est définie de la manière suivante :  $R_b, b \in \mathbb{R}^n$  désigne l'opérateur de translation par  $b$  et  $D_a, a > 0$ , l'opérateur unitaire de dilatation par  $a$ . On dit que l'opérateur  $T$  est faiblement continu si et seulement si l'ensemble  $\{R_b D_a T D_{a^{-1}} R_{b^{-1}}; a > 0, b \in \mathbb{R}^n\}$  est un ensemble borné d'opérateurs linéaires continus de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de cette partie, deux démonstrations sont données pour le théorème  $T(1)$  dans [20]. La première repose essentiellement sur le lemme de Cotlar et Stein et nous offre la décomposition (B.0.33) qu'on réécrit

$$CZO = \mathcal{A} \oplus \text{BMO} \oplus \text{BMO}.$$

La seconde démonstration utilise le fait que la continuité  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de l'opérateur  $T \in CZO$  se déduit de celle de sa matrice dans une base d'ondelettes sur l'espace des suites de carré sommable, qui s'établit à l'aide du lemme de Schur. Au cours de cette démonstration Y. Meyer, a montré que  $\mathcal{A}$  de (B.0.33) est une réunion infinie d'algèbres d'opérateurs. Ces algèbres sont isomorphes à une famille d'algèbres de matrices défini par :

**Définition 5** 1. Soit  $\gamma$  un réel strictement positif. Une matrice "infinie"  $A$ , indexée par l'ensemble des cubes dyadiques  $\Lambda \times \Lambda$ , appartient à l'ensemble  $\mathcal{M}_\gamma$  si et seulement si il existe une constante positive  $C$  telle que :

$$|A_{\lambda_0, \lambda_1}| \leq C W_\gamma(\lambda_0, \lambda_1). \quad (\text{B.1.5})$$

avec

$$W_\gamma(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{2^{-(\frac{n}{2} + \gamma) |j_0 - j_1|}}{1 + (j_0 - j_1)^2} \cdot \frac{1}{(1 + 2^{\inf(j_0, j_1)} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{n + \gamma}} \quad (\text{B.1.6})$$

2. On note  $\mathcal{OM}_\gamma$  la classe d'opérateurs  $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  telle que la matrice  $T_{\lambda_0, \lambda_1} = \langle T\psi_{\lambda_0}, \psi_{\lambda_1} \rangle \in \mathcal{M}_\gamma$ .

On a le résultat suivant :

**Théorème 2 ([20])** L'ensemble  $\mathcal{M}_\gamma$  est une algèbre. On appelle  $\mathcal{M}_\gamma$  algèbre de Lemarié.

◇

**Remarque 4** L'estimation (B.1.5) est en défaut si  $\gamma$  est un entier. F. Trigui dans sa thèse [?] a donné une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour que (B.1.5) soit vérifié quand  $\gamma$  est entier.

## I.2 Nouvelle algèbre

**Définition 6** Soit  $\gamma, \gamma'$  deux réels strictement positifs, une matrice "infinie"  $A$  indexée par l'ensemble des cubes dyadiques  $\Lambda \times \Lambda$ , appartient à l'ensemble  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  si et seulement si il existe une constante positive  $C$  telle que :

$$|A_{\lambda_0, \lambda_1}| \leq C W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1). \quad (\text{B.1.7})$$

avec

$$W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{2^{-(\frac{n}{2} + \gamma) |j_0 - j_1|}}{1 + (j_0 - j_1)^2} \cdot \frac{1}{(1 + 2^{\inf(j_0, j_1)} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{n + \gamma'}} \quad (\text{B.1.8})$$

**Remarque 5** Si  $\gamma = \gamma'$  alors  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'} = \mathcal{M}_\gamma$ .

**Corollaire 1** Avec les mêmes notations que la définition (6) on a :

1.  $\mathcal{M}_\gamma \subseteq \mathcal{M}_{\gamma, \gamma'} \subseteq \mathcal{M}_{\gamma'}$  si  $0 < \gamma' \leq \gamma$
2.  $\mathcal{M}_{\gamma'} \subseteq \mathcal{M}_{\gamma, \gamma'} \subseteq \mathcal{M}_\gamma$  si  $0 < \gamma \leq \gamma'$ .

En effet, supposons que  $0 < \gamma' \leq \gamma$  et considérons  $A \in \mathcal{M}_\gamma$ , on a  $A_{\lambda_0, \lambda_1} \leq C W_{\gamma, \gamma}(\lambda_0, \lambda_1)$ . D'une part on a

$$\left( \frac{1}{1 + 2^{\inf(j_0, j_1)} |\lambda_0 - \lambda_1|} \right)^{n + \gamma} \leq \left( \frac{1}{1 + 2^{\inf(j_0, j_1)} |\lambda_0 - \lambda_1|} \right)^{n + \gamma'}$$

par conséquent  $|A_{\lambda_0, \lambda_1}| \leq C W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)$ , donc  $A \in \mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$ .

D'autre part, on a

$$2^{-|j - j'| (n/2 + \gamma)} \leq 2^{-|j - j'| (n/2 + \gamma')}$$

ce qui implique que  $|A_{\lambda_0, \lambda_1}| \leq C W_{\gamma', \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)$  et  $A \in \mathcal{M}_{\gamma'}$ , ce qui démontre le premier point. La démonstration de second s'effectue de la même manière.

Pour toute la suite, on note  $\beta = n + \gamma'$  et

$$\overline{W}_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{1}{(1 + 2^{\inf(j_0, j_1)} |\lambda_0 - \lambda_1|)^\beta}.$$

Comme pour les ensembles de matrices  $\mathcal{M}_\gamma$ , nous allons regarder si l'ensemble de matrices  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  est une algèbre. Pour cela il suffit de trouver pour quel couple  $(\gamma, \gamma')$ ,  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  est stable par la multiplication matricielle.

Soient  $A, B$  deux éléments de  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  et  $G$  la matrice produit  $AB$ . Pour tout  $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$  on a

$$|G_{\lambda_0, \lambda_1}| \leq C_0 \sum_{\lambda \in \Lambda} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda) W_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1).$$

On note  $I = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda) W_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1)$ , il suffit de montrer qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$I \leq C_1 W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) \quad (\text{B.1.9})$$

pour conclure.

En effet, on a

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j,k} \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)} (|j_0-j|+|j-j_1|)}{(1+|j_0-j|^2)(1+|j-j_1|^2)} \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda) \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1). \\ &= \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)} (|j_0-j|+|j-j_1|)}{(1+|j_0-j|^2)(1+|j-j_1|^2)} I^j. \end{aligned}$$

avec  $I^j = \sum_k \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda) \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1)$ .

Pour montrer (B.1.9) on commence par l'estimation de la somme en  $k$ , donc par  $I^j$  et on passera à la somme en  $j$  pour conclure. Rappelons que

$$\begin{aligned} I^j &= \sum_k \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda) \overline{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1) \\ &= \sum_k (1 + 2^{\inf(j_0, j)} |\lambda_0 - \lambda|)^{-\beta} (1 + 2^{\inf(j, j_1)} |\lambda - \lambda_1|)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.10})$$

Le rôle symétrique de  $(\lambda_0, \lambda_1)$  nous permet de supposer que  $j_0 \geq j_1$  (quitte à remplacer les opérateurs étudiés par leur transposée). On distingue trois cas pour la position de  $j$  par rapport à  $j_0$  et  $j_1$ , à savoir,  $j \geq j_0 \geq j_1$ ,  $j_0 \geq j \geq j_1$  et  $j_0 \geq j_1 \geq j$ .

Avant de passer à l'estimation dans chacune de ces cas, quelques résultats nous paraissent indispensables.

**Lemme 1 (Somme de Riemann)** *Pour  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$  on a*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} \leq \begin{cases} C & \text{si } \epsilon \geq 1 \\ C\epsilon^{-n} & \text{si } \epsilon \leq 1. \end{cases} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \beta > n,$$

■

**Lemme 2** Soient  $(\epsilon, \eta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$

Si  $0 < \eta \leq \epsilon \leq 1$  alors  $\exists C = C(\beta) > 0$  tel que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} (1 + |y - k\eta|)^{-\beta} \leq C \epsilon^{-n} (1 + |y - x \eta \epsilon^{-1}|)^{-\beta} \quad (\text{B.1.11})$$

■

**Démonstrations:**

On note  $\theta = \eta \epsilon^{-1}$   $0 < \theta \leq 1$ , deux positions de  $x$  par rapport à  $y$  sont à distinguer.

Soit  $C$  une constante strictement supérieure à 1. D'une part, si  $|y - \theta x| \leq C$  en confondant  $x$  et  $y$  on se ramène à une somme de Riemann avec  $\epsilon < 1$ . D'autre part, si  $|y - \theta x| \geq C$ , on distingue la région  $R_1$  où le triplet  $(x, y, k)$  vérifie

$$|x - \epsilon k| \leq \frac{1}{2\theta} |y - \theta x|,$$

de la région  $R_2$  où

$$|x - \epsilon k| \geq \frac{1}{2\theta} |y - \theta x|.$$

On note  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  les quantités suivantes:

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{k \in R_1} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} (1 + |y - k\eta|)^{-\beta}$$

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{k \in R_2} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} (1 + |y - k\eta|)^{-\beta}$$

Pour tout  $k \in R_1$  on a:

$$\begin{aligned} |y - \eta k| &= \theta \left| \frac{y}{\theta} - \epsilon k \right| \\ &\geq \theta \left| \left| \frac{y}{\theta} - x \right| - |x - \epsilon k| \right| \\ &\geq \frac{1}{2} |y - \theta x| \end{aligned}$$

Or  $\epsilon < 1$  alors par l'inégalité de Riemann on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} \leq C_0 \epsilon^{-n}$$

Alors  $\mathcal{S}_1$  vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &\leq 2^\beta (1 + |y - x\theta|)^{-\beta} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x - k\epsilon|)^{-\beta} \\ &\leq 2^\beta C_0 \epsilon^{-n} (1 + |y - x\theta|)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.12})$$

Pour tout  $k \in R_2$  on a

$$|x - \theta y| \leq 2\theta |x - \epsilon k|,$$

alors  $\mathcal{S}_2$  vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &\leq (1 + \frac{1}{2\theta} |y - \theta x|)^{-\beta} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |y - k\eta|)^{-\beta} \\ &\leq 2^\beta \theta^\beta \eta^{-n} C(\beta) (2\theta + |y - \theta x|)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Or,  $|y - x\theta| \geq C$  et  $\theta < 1$ , alors :  $(2\theta + |y - \theta x|)^{-\beta} \simeq (1 + |y - x\theta|)^{-\beta}$ ,  
comme  $\eta < \epsilon$ ,  $\mathcal{S}_\epsilon$  vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 &\leq C_1(\beta) \epsilon^{-n} \left(\frac{\eta}{\epsilon}\right)^{\beta-n} (1 + |y - \theta x|)^{-\beta} \\ &\leq C_1(\beta) \epsilon^{-n} (1 + |y - \theta x|)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.13})$$

la somme de (B.1.12) et (B.1.13) donne (B.1.11), d'où le lemme 2.

### Corollaire 2

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x - k|)^{-\beta} (1 + |y - k|)^{-\beta} \leq C. (1 + |y - x|)^{-\beta} \quad (\text{B.1.14})$$

Il suffit de prendre  $\eta = \epsilon = 1$ , et l'équation (B.1.11) permet de conclure.

### Corollaire 3

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |u\mu - k|)^{-\beta} (1 + |v\nu - k|)^{-\beta} \leq C \nu^{-\beta} (1 + |v - u\frac{\mu}{\nu}|)^{-\beta} \forall (u, v).$$

Puisque l'inégalité (B.1.14) étant vraie pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Si on suppose  $x = u\mu$  et  $y = v\nu$  avec  $0 < \mu \leq \nu \leq 1$  on obtient le résultat de ce corollaire.

Revenons maintenant à l'estimation de  $I^j$  donné par B.1.10, et distinguons trois cas de la position de  $j$  par rapport à  $j_0$  et  $j_1$  :

**Premier cas :**  $j \geq j_0 \geq j_1 \quad (\implies \inf(j, j_0) = j_0, \inf(j, j_1) = j_1).$

On note

$$I_1^j = \sum_k (1 + 2^{j_0} |\lambda_0 - \lambda|)^{-\beta} (1 + 2^{j_1} |\lambda - \lambda_1|)^{-\beta}$$

qu'on peut aussi écrire sous la forme

$$I_1^j = \sum_k (1 + |2^{j_0} \lambda_0 - k 2^{j_0-j} - r 2^{j_0-j-1}|)^{-\beta} (1 + |k 2^{j_1-j} - r 2^{j_1-j-1} - \lambda_1 2^{j_1}|)^{-\beta}.$$

Avec les notations suivantes:

$$\begin{aligned} x_j &= 2^{j_0} \lambda_0 - r 2^{j_0-j-1}, \quad \epsilon = 2^{j_0-j} \\ y_j &= 2^{j_1} \lambda_1 - r 2^{j_1-j-1}, \quad \eta = 2^{j_1-j}. \end{aligned}$$

on obtient :

$$0 < \eta \leq \epsilon \leq 1$$

et

$$\eta \epsilon^{-1} = 2^{j_1-j_0},$$

donc

$$I_1^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x_j - k \epsilon|)^{-\beta} (1 + |y_j - k \eta|)^{-\beta}.$$

Par le lemme 2 on assure l'existence d'une constante  $C_1 = C_1(\beta) > 0$  telle que ,

$$\begin{aligned} I_1^j &\leq C_1(\beta) \epsilon^{-n} (1 + |y_j - x_j \eta \epsilon^{-1}|)^{-\beta} \\ &\leq C_1(\beta) \epsilon^{-n} (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta}. \end{aligned} \quad (\text{B.1.15})$$

En passant à la somme en  $j$  et grâce à l'estimation (B.1.15) on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(2j-j_0-j_1)}}{(1 + |j_0 - j|^2)(1 + |j - j_1|^2)} I_1^j \\ &\leq C_1(\beta) (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(2j-j_0-j_1)}}{(1 + |j_0 - j|^2)(1 + |j - j_1|^2)} \epsilon^{-n} \\ &\leq C_1(\beta) (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \frac{1}{(1 + |j_0 - j_1|^2)} \sum_j 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(2j-j_0-j_1)-n(j_0-j)} \\ &\leq C_1(\beta) (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)}}{(1 + |j_0 - j_1|^2)} \sum_j 2^{-2\gamma(j-j_0)}. \end{aligned}$$

La somme ci dessus est convergente parce que  $j \geq j_0$  et  $\gamma > 0$  , d'où la première conclusion :

$$\text{Si } j \geq j_0 \geq j_1 \exists C_1 = C_1(\beta) \text{ tel que } I_1 \leq C_1(\beta) W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1). \quad (\text{B.1.16})$$

$$\boxed{\text{Second cas : } j_0 \geq j \geq j_1 \quad (\implies \inf(j, j_0) = j, \inf(j, j_1) = j_1).}$$

On note

$$I_2^j = \sum_k (1 + 2^j |\lambda_0 - \lambda|)^{-\beta} (1 + 2^{j_1} |\lambda - \lambda_1|)^{-\beta}$$

qu'on réécrit aussi comme

$$I_2^j = \sum_k \left(1 + \left|2^j \lambda_0 - k - \frac{r}{2}\right|\right)^{-\beta} \left(1 + |2^{j_1} \lambda_1 - k 2^{j_1-j} - r 2^{j_1-j-1}|\right)^{-\beta}.$$

Avec les notations suivantes

$$\begin{aligned} x_j &= 2^j \lambda_0 - \frac{r}{2}, \quad \epsilon = 1 \\ y_j &= 2^{j_1} \lambda_1 - r 2^{j_1-j-1}, \quad \eta = 2^{j_1-j}. \end{aligned}$$

le lemme 2 est vérifiée avec  $\epsilon = 1$ , on déduit donc l'existence d'une constante  $C_2 = C_2(\beta) > 0$  tq :

$$I_2^j \leq C_2(\beta) (1 + |x_j \eta - y_j|)^{-\beta}. \quad (\text{B.1.17})$$

Au passage à la somme en  $j$  on obtient:

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)}}{(1 + |j_0 - j|^2)(1 + |j - j_1|^2)} I_2^j \\ &\leq C_2(\beta) 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)} (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \sum_j (1 + |j_0 - j|^2)^{-1} (1 + |j - j_1|^2)^{-1} \\ &\leq C_2(\beta) (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)}}{(1 + |j_0 - j_1|^2)} \\ &\leq C_2(\beta) W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1). \end{aligned} \quad (\text{B.1.18})$$

$$\boxed{\text{Troisième cas : } j_0 \geq j_1 \geq j \quad (\implies \inf(j, j_0) = j, \inf(j, j_1) = j).}$$

On a

$$\begin{aligned} I_3^j &= \sum_k (1 + 2^j |\lambda_0 - \lambda|)^{-\beta} (1 + 2^j |\lambda - \lambda_1|)^{-\beta} \\ &= \sum_k (1 + 2^{j-j_0} |\lambda_0 2^{j_0} - k 2^{j_0-j} - r 2^{j_0-j-1}|)^{-\beta} (1 + 2^{j-j_1} |\lambda_1 2^{j_1} - k 2^{j_1-j} - r 2^{j_1-j-1}|)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Notation;

$$\begin{aligned} x_j &= 2^{j_0} \lambda_0 - r 2^{j_0-j-1} \quad , \quad \epsilon = 2^{j-j_0} \\ y_j &= 2^{j_1} \lambda_1 - r 2^{j_1-j-1} \quad , \quad \eta = 2^{j-j_1}. \end{aligned}$$

On a  $0 < \epsilon \leq \eta \leq 1$  et

$$I_3^j = \sum_k (1 + |x\epsilon - k|)^{-\beta} (1 + |y\eta - k|)^{-\beta}.$$

D'après le corollaire 3, on déduit l'existence d'une constante  $C = C(\beta) > 0$  tq :

$$I_3^j \leq C(\beta) \eta^{-\beta} (1 + |x_j \epsilon \eta^{-1} - y_j|)^{-\beta}. \quad (\text{B.1.19})$$

on termine en passant à la somme en  $j$  :

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0+j_1-2j)}}{(1 + |j_0 - j|^2)(1 + |j - j_1|^2)} I_3^j \\ &\leq C(\beta) (1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0+j_1-2j)} 2^{(j_1-j)\beta}}{(1 + |j_0 - j|^2)(1 + |j - j_1|^2)} \\ &\leq C(\beta) \frac{(1 + 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta}}{(1 + |j_0 - j_1|^2)} 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)} \sum_j 2^{-2(\frac{n}{2}+\gamma)j_1} 2^{2(\frac{n}{2}+\gamma)j} 2^{(j_1-j)\beta} \\ &\leq C(\beta) W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) \sum_j 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j_1)} \end{aligned}$$

Comme  $j_1 \geq j$ , la somme ci dessus n'est convergente que si  $\gamma' < 2\gamma$ , on déduit donc que si  $\gamma' < 2\gamma$  alors il existe une constante  $C = C(\beta)$  telle que:

$$I_3 \leq C(\beta) W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1), \quad (\text{B.1.20})$$

### Conclusion

D'après les équations (B.1.16), (B.1.18) et (B.1.20), on conclut que pour  $(\gamma, \gamma') \in \mathbb{R}_+^2$  vérifiant  $\gamma' < 2\gamma$ , il existe une constante  $C = C(n, \gamma, \gamma')$  telle que

$$|G(\lambda_0, \lambda_1)| \leq C W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) \quad (\text{B.1.21})$$

et par conséquent la matrice  $G = A.B$  appartient à  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$ . On a le théorème suivant

**Théorème 3** Si  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux réels strictement positifs tels que  $\gamma' \leq 2\gamma$ , alors l'ensemble  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  est une algèbre.

◇

### I.3 La nécessité de la Condition $\gamma' < 2\gamma$

Nous venons de démontrer que pour tout couple réel  $(\gamma, \gamma')$  vérifiant  $0 < \gamma, \gamma'$  et  $\gamma' < 2\gamma$  l'ensemble  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  définie par (B.1.7) est une algèbre. Le théorème suivant nous confirme la réciproque.

**Théorème 4** Soient  $\gamma, \gamma'$  deux réels vérifiant  $\gamma, \gamma' > 0$ . Si l'ensemble  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  définie par (6) est une algèbre alors le couple  $(\gamma, \gamma')$  vérifie la relation  $\gamma' < 2\gamma$ .

◊

**Démonstration;** On va faire un raisonnement par l'absurde. Soient  $\gamma, \gamma'$  deux réels vérifiant  $\gamma' \geq 2\gamma$  et  $W$  la matrice donnée par

$$W_{\lambda_0, \lambda_1} = W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) \quad \forall (\lambda_0, \lambda_1) \in \Lambda^2.$$

La matrice  $W$  est un élément de  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$ . Soit  $G$  la matrice produit  $W.W$ , pour tout couple  $(\lambda_0, \lambda_1) \in \Lambda^2$  on a

$$G_{\lambda_0, \lambda_1} = \sum_{\lambda \in \Lambda} W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda) W_{\gamma, \gamma'}(\lambda, \lambda_1).$$

**Lemme 3** Soit  $\gamma, \gamma'$  deux réels tels que  $\gamma' \geq 2\gamma$ . Si pour tout couple  $(\lambda_0, \lambda_1) \in \Lambda^2$  on note  $\Sigma(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{G_{\lambda_0, \lambda_1}}{W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)}$ , alors il existe  $(\nu, \mu) \in \Lambda^2$  tel que pour toute constante positive  $C$  on ait

$$\Sigma(\nu, \mu) > C.$$

■

Une fois ce lemme démontré on pourra conclure qu'il existe un couple  $(\nu, \mu) \in \Lambda^2$  tel que pour toute constante positive  $C$  la matrice  $G$  vérifie

$$G_{\nu, \mu} > C W_{\gamma, \gamma'}(\nu, \mu),$$

donc la matrice  $G$  ne vérifie pas la définition 6 ce qui implique que  $G \notin \mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  et par conséquent l'ensemble  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  n'est pas une algèbre si  $\gamma' \leq 2\gamma$ . Ce qui achève la démonstration du théorème.

Il nous reste maintenant à démontrer le lemme ci dessus. Les éléments de la matrice  $G$  peuvent aussi s'écrire sous la forme

$$G_{\lambda_0, \lambda_1} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} A^j I^j \quad \forall (\lambda_0, \lambda_1) \in \Lambda^2$$

où  $I^j$  et  $A^j$  sont donnés par

$$I^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + 2^{\inf(j, j_0)} |\lambda_0 - \lambda|)^{-\beta} (1 + 2^{\inf(j, j_1)} |\lambda - \lambda_1|)^{-\beta}$$

$$A^j = \frac{2^{-(\frac{n}{2} + \gamma)(|j - j_0| + |j - j_1|)}}{(1 + (j - j_0)^2)(1 + (j - j_1)^2)}.$$

On considère  $J_0 = \{j / j \leq j_1 \leq j_0\}$ , comme  $I^j$  et  $A^j$  sont positifs on a alors

$$G_{\lambda_0, \lambda_1} \geq \sum_{j \in J_0} A^j I^j.$$

Ensuite si on note  $x = k_0 + \frac{r_0}{2} - r2^{j_0-j-1}$ ,  $y = k_1 + \frac{r_1}{2} - r2^{j_1-j-1}$ ,  $\epsilon = 2^{j-j_0}$  et  $\eta = 2^{j-j_1}$ , on écrit alors

$$I^j = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |x\epsilon - k|)^{-\beta} (1 + |y\eta - k|)^{-\beta}$$

comme il s'agit d'une somme de termes positifs, on peut donc minorer  $I^j$  par  $(1 + |x\epsilon - k_0|)^{-\beta} (1 + |y\eta - k_0|)^{-\beta}$  avec  $k_0 = [x\epsilon]$ . Et on a alors

$$I^j \geq 2^{-\beta(j-j_1)} (\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^{-\beta}.$$

Ce qui implique que

$$|G_{\lambda_0, \lambda_1}| \geq \sum_{j \in J_0} A^j 2^{-\beta(j-j_1)} (\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^{-\beta},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda_0, \lambda_1) &\geq \frac{\sum_{j \in J_0} A^j 2^{-(j-j_1)\beta} (\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^{-\beta}}{2^{-(\frac{n}{2} + \gamma)(|j_0 - j_1|)} (1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^{-\beta}} \\ &\geq \sum_{j \in J_0} 2^{(2\gamma - \gamma')(j-j_1)} \left( \frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta. \end{aligned} \quad (\text{B.1.22})$$

On note  $J_1 = \{j \in J_0 / \eta^{-1} < |y - x\epsilon\eta^{-1}|\}$ . D'une part, l'ensemble  $J_1$  est minoré par l'entier  $j^* = 1 - [\log_2 |\lambda_0 - \lambda_1|]$ , car

$$\begin{aligned} \eta^{-1} < |y - x\epsilon\eta^{-1}| &\Rightarrow 2^{j_1-j} < 2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1| \\ &\Rightarrow 2^{-j} < |\lambda_0 - \lambda_1| \text{ o encore } 2^j |\lambda_0 - \lambda_1| > 1 \\ &\Rightarrow j > -\frac{\log |\lambda_0 - \lambda_1|}{\log 2}. \end{aligned}$$

Si on note  $j^* = -[\log_2 |\lambda_0 - \lambda_1|] + 1$  alors  $j \geq j^*$  pour tout  $j \in J_1$ , et on minore  $\Sigma$  de la manière suivante

$$\Sigma(\lambda_0, \lambda_1) = \sum_{j_1 \geq j \geq j^*} 2^{(2\gamma - \gamma')(j - j_1)} \left( \frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta. \quad (\text{B.1.23})$$

D'autre part, puisque  $\beta > 1$ , l'inégalité  $\eta^{-1} < |y - x\epsilon\eta^{-1}|$  implique

$$\frac{1}{(\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^\beta} > \left( \frac{1}{2|y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta = \left( \frac{1}{2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|} \right)^\beta.$$

Ensuite on a l'égalité  $1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}| = 1 + 2^{-j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|$  et comme  $2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1| > 1$  alors

$$(1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|)^\beta > 2^\beta.$$

On déduit donc que

$$\left( \frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta > \frac{1}{(2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^\beta},$$

et de (B.1.23) on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda_0, \lambda_1) &> \sum_{j=j^*}^{j_1} 2^{(2\gamma - \gamma')(j - j_1)} (2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \\ &> (2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \sum_{m=0}^{m^*} b^m \end{aligned} \quad (\text{B.1.24})$$

où  $b = 2^{\gamma' - 2\gamma}$  et  $m^* = j_1 - j^*$ .

Puisque le couple  $(\gamma, \gamma')$  vérifie l'hypothèse  $\gamma' \geq 2\gamma$ , on distingue deux cas :

1. Si  $\gamma' = 2\gamma$ , donc  $b = 1$  et

$$\Sigma(\lambda_0, \lambda_1) > (m^* + 1) (2^{j_1} |\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta},$$

et si on fait tendre  $j_1$  vers l'infini alors pour tout  $\lambda_0$  la quantité  $\Sigma(\lambda_0, \lambda_1)$  tend vers l'infini. On conclut donc, de (B.1.22), que pour tout couple  $(\lambda_0, \lambda_1)$  où  $j_1 \rightarrow \infty$  on a  $G_{\lambda_0, \lambda_1} > C W_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)$  pour toute constante  $C$  strictement positive.

2. Si  $\gamma' > 2\gamma$ , alors  $b > 1$  et on a

$$\begin{aligned} \Sigma(\lambda_0, \lambda_1) &> 2^{j_1} (|\lambda_0 - \lambda_1|)^{-\beta} \frac{1 - b^{1+m^*}}{1 - b} \\ &> X^{-\beta} \frac{e^{(m^*+1) \log_2 b} - 1}{b - 1}, \end{aligned} \quad (\text{B.1.25})$$

avec  $X = 2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1| \rightarrow +\infty$ .

Si on note  $(\nu, \mu)$  le couple  $(\lambda_0, \lambda_1)$  tel que  $X \rightarrow +\infty$  alors  $m^* \rightarrow +\infty$  et de (B.1.25) on déduit que  $\Sigma(\lambda_0, \lambda_1)$  tend vers l'infini. On conclut donc de (B.1.22) que si  $\gamma' > 2\gamma$  alors il existe un couple  $(\lambda_0, \lambda_1)$  tel que pour toute constante  $C$  strictement positive on a  $|G_{\lambda_0, \lambda_1}| > CW_{\gamma, \gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)$ .

Ce qui termine la démonstration du lemme 3 et par conséquent le théorème 4. Et on conclut donc que  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  est une algèbre si et seulement si  $0 < \gamma, \gamma' < 2\gamma$ .

**Remarque 6** *Pour toute la suite de cette partie on suppose que la condition  $0 < \gamma, \gamma' < 2\gamma$  est vérifiée( donc  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  est une algèbre).*

## Chapitre II

# Caractérisations des algèbres $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$

### II.1 Algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ et bases d'ondelettes

**Définition 7** Soit  $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une base d'ondelettes provenant d'une analyse multi-résolution de régularité  $r$  ( $r$  est aussi grande qu'on le veut). Pour tout couple de réels  $(\gamma, \gamma')$  tel que  $0 < \gamma, \gamma' < 2\gamma$ , on définit  $Op(\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'})$  la classe d'opérateurs  $T : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  dont la matrice représentative dans la base orthonormée  $(\psi_\lambda \otimes \psi'_{\lambda'})_{(\lambda,\lambda') \in \Lambda^2}$  appartient à l'algèbre  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ .

Il est très important de faire remarquer que cette définition ne dépend pas du choix de la base d'ondelettes (ce qui explique le choix arbitraire de  $r$ ), comme le montre le lemme ci après.

**Lemme 4** Soient  $(\psi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  et  $(\bar{\psi}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  deux bases orthonormées d'ondelettes de régularité  $r$ . Si on note  $P$  la matrice de passage d'une base à l'autre,

$$P_{\lambda,\lambda'} = \int \psi_\lambda(x) \bar{\psi}_{\lambda'}(x) dx.$$

Alors  $P \in \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'} \quad \forall 0 < \gamma < r, \forall 0 < \gamma' < 2\gamma$ .

■

**Remarque 7** A partir de ce lemme peut dire que les algèbres naturelles auxquelles appartiennent les matrices de changement de base d'ondelettes sont les algèbres  $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$  et non  $\mathcal{M}_\gamma$ . Les opérateurs associés à ces matrices constituent les premiers exemples des éléments de  $Op(\mathcal{M})_{\gamma,\gamma'}$ .

Avant de donner la démonstration de ce lemme, nous allons rappeler les expressions des propriétés de la régularité, la localisation et le caractère oscillant d'une

ondelette données par le théorème fondamental d'existence des bases d'ondelettes à support compact d'I. Daubechies. On note  $E$  l'ensemble des suites  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_i = 0$  ou  $1$ , la suite  $(0, 0, 0, \dots, 0)$ , étant exclue. Pour tout  $r \in \mathbb{R}^+$ , il existe  $2^n - 1$  ondelettes mères  $\psi_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in E$  de classe  $C^r$  à support compact telles que

1. Si  $r = 0$ ,  $\psi_\varepsilon(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et si  $r \geq 1$ ,  $\psi_\varepsilon(x)$  ainsi que toutes ses dérivées, jusqu'à l'ordre  $r$ , appartient à  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

2.

$$|\partial^\alpha \psi_\varepsilon(x)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ tel; que } |\alpha| \leq r, \forall N \geq 1, \forall \varepsilon \in E. \quad (\text{B.2.1})$$

3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \psi(x) dx = 0, \forall |\alpha| \leq r. \quad (\text{B.2.2})$$

4. Avec  $\lambda = 2^{-j}k + 2^{-j-1}\varepsilon$ , la collection des fonctions  $\psi_\lambda(x) = 2^{\frac{nj}{2}} \psi_\varepsilon(2^j x - k)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  forme une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Le second point ci dessus s'écrit pour  $\psi_\lambda$

$$|\partial^\alpha \psi_\lambda(x)| \leq C_N 2^{nj(\alpha + \frac{1}{2})} (1 + 2^j |x - \lambda|)^{-N}, \quad (\text{B.2.3})$$

$$\forall N \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| \leq r.$$

Les deux premiers points caractérisent la régularité et la localisation de  $\psi$ , le troisième point donne le caractère oscillant de  $\psi$  et il est connu aussi sous le nom de propriété de cancellation.

**Définition 8** Des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $f_{j,k}(x)$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$ , sont dites Vaguelettes s'il existe deux exposants  $\alpha > \beta > 0$  et une constante  $C > 0$  tels que

$$\begin{aligned} |f_{j,k}(x)| &\leq C 2^{nj/2} (1 + |2^j x - k|)^{-n-\alpha} \\ \int f_{j,k}(t) dt &= 0 \\ |f_{j,k}(x) - f_{j,k}(y)| &\leq C 2^{(n/2+\beta)j} |x - y|^\beta \end{aligned} \quad (\text{B.2.4})$$

Retournons maintenant à la démonstration du lemme (4) ci dessus. D'une part nous avons

$$\begin{aligned}
P_{\lambda, \lambda'} &= \langle \psi_{\lambda}, \overline{\psi}_{\lambda'}' \rangle = \int \psi_{\lambda}(x) \overline{\psi}_{\lambda'}(x) dx \\
&= 2^{\frac{n(j+j')}{2}} \int \psi(2^j x - k) \overline{\psi}(2^{j'} x - k'),
\end{aligned}$$

Par la localisation des ondelettes  $\psi$  et  $\overline{\psi}$ , pour  $N$  un entier positif, nous avons

$$\begin{aligned}
|P_{\lambda, \lambda'}| &\leq 2^{\frac{n}{2}(j+j')} \int (1 + |2^j x - k|)^{-N} (1 + |2^{j'} x - k'|)^{-N} dx, \\
&\leq 2^{\frac{n}{2}(j+j')} \int (1 + |2^j x - k|)^{-N} (1 + 2^{j'} |x - k' 2^{-j'}|)^{-N} dx, \quad (\text{B.2.5})
\end{aligned}$$

Par symétrie on peut toujours se ramener au cas où  $j' \geq j$ . D'après [19], il existe une constante  $C_N > 0$  telle que

$$\int (1 + |2^j x - k|)^{-N} (1 + |2^{j'} x - k'|)^{-N} dx \leq C_N 2^{-nj'} (1 + 2^j |k' 2^{-j'} - k 2^{-j}|)^{-N},$$

On en déduit alors que (B.2.5) se majore de la manière suivante

$$|P_{\lambda, \lambda'}| \leq C_N 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)} (1 + 2^j |k' 2^{-j'} - k 2^{-j}|)^{-N}.$$

Si on choisit  $N \geq n + \gamma'$  alors

$$|P_{\lambda, \lambda'}| \leq C_N 2^{-\frac{n}{2}|j'-j|} (1 + 2^{\inf(j, j')} |\lambda - \lambda'|)^{-n-\gamma'}. \quad (\text{B.2.6})$$

D'autre part, en utilisant le caractère oscillant de  $\psi$  (B.2.2) et sa régularité qui se traduit par

$$\left| \psi_{jk}(x) - \psi_{jk}(k' 2^{-j'}) \right| \leq 2^{j(\frac{n}{2} + r)} \left| x - k' 2^{-j'} \right|^r$$

nous déduisons que la quantité  $|P_{\lambda, \lambda'}|$  se majore par

$$\begin{aligned}
|P_{\lambda, \lambda'}| &\leq \int \left| \psi_{\lambda}(x) - \psi_{\lambda}(k' 2^{-j'}) \right| \left| \overline{\psi}_{\lambda'}(x) \right| dx \\
&\leq 2^{j(\frac{n}{2} + r)} \int \left| x - k' 2^{-j'} \right|^r \left| \overline{\psi}_{\lambda'}(x) \right| dx \\
&\leq C 2^{-(\frac{n}{2} + r)|j-j'|}
\end{aligned} \quad (\text{B.2.7})$$

Si  $\gamma < r$  alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|P_{\lambda, \lambda'}| \leq C 2^{-(\frac{n}{2} + \gamma)|j-j'|} \quad (\text{B.2.8})$$

A l'aide des deux majorations (B.2.6) et (B.2.8) ci dessus de  $|P_{\lambda, \lambda'}|$ , notées  $M_1$  et  $M_2$ , on en obtient une troisième majoration  $M_3 = M_1^\tau M_2^{(1-\tau)}$  où  $0 < \tau < 1$ . En choisissant  $\tau$  suffisamment petit, on obtient

$$|P_{\lambda, \lambda'}| \leq C 2^{-(\frac{n}{2} + \gamma)|j-j'|} (1 + 2^{\inf(j, j')} |\lambda - \lambda'|)^{-n-\gamma'} \quad (\text{B.2.9})$$

On conclut donc que la matrice  $P$  appartient à  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$ ,  $\forall \gamma' > 0$ . On choisit  $\gamma' \leq 2\gamma$  car c'est la région où  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  est une algèbre.

**Remarque 8** *D'après le lemme ci dessus l'utilisation d'une ondelette à support compact pour l'étude des algèbres  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  est suffisante.*

## II.2 Caractérisation des noyaux de $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$

Dans cette section, les réels  $(\gamma, \gamma')$  vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 0 < \gamma, \gamma' < 1 \\ \gamma' < 2\gamma. \end{aligned} \quad (\text{B.2.10})$$

On rappelle les notations suivantes, pour  $\lambda = 2^{-j}(k + \frac{\epsilon}{2})$  avec  $\epsilon \in \{0, 1\}^n$  et  $\epsilon \neq (0, \dots, 0)$ . On désigne par  $Q_\lambda$  le cube dyadique défini par  $Q_\lambda = \{x / 2^j x - k \in [0, 1]^n\}$  et  $m$  l'entier tel que le support de  $\psi_\lambda(x) = 2^{\frac{nj}{2}} \psi(2^j x - k)$  soit inclus dans  $mQ_\lambda$  avec

$$mQ_\lambda = \{x / 2^j x - k \in [-(m+1)/2, m+2 + 1/2]^n\}. \quad (\text{B.2.11})$$

La question principale qu'il faut se poser maintenant est l'estimation des noyaux  $K(x, y)$  des opérateurs  $T$  éléments de l'algèbre  $\mathcal{OM}_{\gamma, \gamma'}$  quand le couple  $(\gamma, \gamma')$  vérifie (B.2.10). Comme cette algèbre est indépendante du choix de la base d'ondelettes alors une telle estimation doit l'être aussi. Le corollaire 1 nous offre une première estimation issue de celle donnée par Y. Meyer dans [20], pour les noyaux  $K(x, y)$  associé à un opérateur  $T \in \mathcal{OM}_\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ . On en rappellera ci-dessous l'essentiel :

Soit  $\mathcal{A}_\gamma$  la classe des opérateurs linéaires continus vérifiant les conditions (B.1.1) et (B.1.2) de la définition (3) et tels que  $T(1) = {}^tT(1) = 0$ . On a le théorème suivant [Meyer] [20] ( dont la démonstration est donnée en détail dans [20])

**Théorème 5 ([20])** *Si  $0 < \gamma < 1$  et si  $T \in \mathcal{OM}_\gamma$  alors  $T \in \mathcal{A}_\gamma$ . Réciproquement si  $T \in \mathcal{A}_\gamma$  et si  $0 < \bar{\gamma} < \gamma$ , on a  $T \in \mathcal{OM}_{\bar{\gamma}}$ .*

◇

Avec ce théorème et la double inclusion du corollaire 1 de (I-2), si on note  $\gamma^- = \inf(\gamma, \gamma')$  on déduit qu'un opérateur  $T \in \mathcal{OM}_{\gamma, \gamma'}$  vérifie les conditions :

$$|K(x, y)| \leq C_0 |x - y|^{-n} \quad (\text{B.2.12})$$

$$\begin{aligned}
|K(x, y) - K(x' - y)| &\leq C_1 |x - x'|^{\gamma^-} |x - y|^{-n-\gamma^-} \\
&\quad \forall x' \text{ tel que } |x - x'| \leq \frac{1}{2} |x - y|
\end{aligned}
\tag{B.2.13}$$

$$\begin{aligned}
|K(x, y) - K(x - y')| &\leq C_1 |y - y'|^{\gamma^-} |x - y|^{-n-\gamma^-} \\
&\quad \forall y' \text{ tel que } |y - y'| \leq \frac{1}{2} |x - y|
\end{aligned}
\tag{B.2.14}$$

$$T(1) = {}^tT(1) = 0 \tag{B.2.15}$$

Une première remarque à faire est l'optimalité de (B.2.12) et (B.2.15). En effet, l'opérateur de convolution avec la distribution  $p.f. |x|^{-n}$  est dans  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$  car son noyau  $K(x, y) = |x - y|^{-n}$  vérifie les conditions (B.2.12) et (B.2.13) et on a  $T(1) = {}^tT(1) = 0$  parce que  $T$  est un opérateur de convolution. Alors toute amélioration de (B.2.12) exclurait cet opérateur de  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$ . En ce qui concerne l'optimalité de  $T(1) = {}^tT(1) = 0$ , on l'a car  $0 < \gamma < 1$ .

Donc toute caractérisation des noyaux  $K(x, y)$  de  $\mathcal{OM}_{\gamma,\gamma'}$  doit être du type (B.2.12),  $T(1) = {}^tT(1) = 0$  et une amélioration des conditions de Lipchitz (B.2.13).

### II.2.1 Théorème de caractérisation

[A. Ezzine, S. Jaffard] Soit  $T$  un opérateur continu  $L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ . Les opérateurs de dérivation fractionnaire que l'on notera  $\partial^s$  (de symbole  $|\xi|^s$ ) sont continus  $H^s \longrightarrow L^2$  et  $L^2 \longrightarrow H^{-s}$ . L'opérateur  $\partial^s T \partial^{s'}$  est donc continu  $H^{s'} \longrightarrow H^{-s}$ . Si l'on note  $K(x, y)$  le noyau-distribution de  $T$ , le noyau  $L(x, y)$  de  $\partial^s T \partial^{s'}$  est

$$\partial_x^s \partial_y^{s'} K(x, y).$$

Cette remarque fournit une méthode (parmi d'autres) pour définir la distribution  $L(x, y) = \partial_x^s \partial_y^{s'} K(x, y)$ .

**Définition 9** Soient  $\gamma, \gamma'$  deux réels positifs non nuls, on note  $\mathcal{A}_{\gamma,\gamma'}$  l'ensemble des opérateurs  $T$  tels que :

$$1. \quad |K(x, y)| \leq |x - y|^{-n}$$

2. Pour tout  $s, s' \in \mathbb{R}$  vérifiant  $s < \gamma, s' < \gamma$  et  $s + s' < \gamma'$ ,  $\partial_x^s \partial_y^{s'} K(x, y)$  est une fonction définie en dehors de la diagonale et vérifie

$$\left| \partial_x^s \partial_y^{s'} K(x, y) \right| \leq \frac{c}{|x - y|^{n+s+s'}}, \quad (\text{B.2.16})$$

et tel que  $T(1) = T^*(1) = 0$ .

**Théorème 1** Supposons  $0 < \gamma, \gamma' < 1$  et  $\gamma' < 2\gamma$ . Si la matrice  $A_{\gamma, \gamma'}$  de  $K$ , noyau-distribution de l'opérateur  $T$ , dans une base d'ondelettes est dans  $\mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$  alors  $T \in \mathcal{A}_{\gamma, \gamma'}$ .

Réciproquement, si  $T$  est un opérateur continu sur  $L^2$  appartenant à  $\mathcal{A}_{\gamma, \gamma'}$ , alors  $\forall \tilde{\gamma} < \gamma, \tilde{\gamma}' < \gamma'$ , la matrice de  $T$  dans une base d'ondelettes est dans l'algèbre  $\mathcal{M}_{\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'}$ .

◇

**Démonstration :** On démontre d'abord la partie directe. Supposons que la matrice  $(A_{\lambda, \lambda'})_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2} \in \mathcal{M}_{\gamma, \gamma'}$ , c'est à dire que

$$|A_{\lambda, \lambda'}| \leq C 2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)} \frac{1}{(1 + |j - j'|^2) (1 + 2^{\inf(j, j')} |\lambda - \lambda'|)^{n+\gamma'}}. \quad (\text{B.2.17})$$

D'une part, si on considère  $\gamma'' < \inf(\gamma, \gamma')$ , on a  $(A_{\lambda, \lambda'}) \in \mathcal{M}_{\gamma''}$  donc et d'après le théorème 5  $|K(x, y)| \leq \frac{c}{|x-y|^n}$ , et  $T(1) = T^*(1) = 0$ . D'autre part, le noyau  $K(x, y)$  s'écrit

$$K(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2} A_{\lambda, \lambda'} \psi_\lambda(x) \psi_{\lambda'}(y),$$

donc le noyau de  $\partial^s T \partial^{s'}$  peut s'écrire sous la forme

$$L(x, y) = \sum_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2} B_{\lambda, \lambda'} w_\lambda(x) \theta_{\lambda'}(y), \quad (\text{B.2.18})$$

où  $w_\lambda$  et  $\theta_{\lambda'}$  sont des vaguelettes vérifiant les inégalités

$$|w_\lambda(x)| \leq C_N 2^{\frac{nj}{2}} (1 + 2^j |x - \lambda|)^{-N},$$

$$|\theta_{\lambda'}(y)| \leq C_N 2^{\frac{nj'}{2}} (1 + 2^{j'} |y - \lambda'|)^{-N}$$

pour tout  $N \geq 1$ , et la matrice  $(B_{\lambda, \lambda'})$  vérifie

$$|B_{\lambda, \lambda'}| \leq C 2^{-|j-j'|(\frac{n}{2}+\gamma)} 2^{sj} 2^{s'j'} \frac{2^{\frac{n}{2}(j+j')}(1 + 2^j |x - \lambda|)^{-N} (1 + 2^{j'} |y - \lambda'|)^{-N}}{(1 + |j - j'|^2) (1 + 2^{\inf(j, j')} |\lambda - \lambda'|)^{n+\gamma'}}. \quad (\text{B.2.19})$$

Les hypothèses et les estimations cherchées étant invariantes par le choix de  $s$  par rapport à  $s'$  et le choix de  $j$  par rapport à  $j'$  ( $s$  et  $s'$  respectivement  $j$  et  $j'$  jouent des rôles symétriques). On peut donc se restreindre à estimer dans (B.2.18) la somme  $j < j'$ .

On a alors avec l'estimation (B.2.3)

$$|L(x, y)| \leq C \sum_{(\lambda, \lambda') \in \Lambda^2 / j < j'} \frac{2^{(j-j')(\frac{n}{2}+\gamma)} 2^{sj} 2^{s'j'} 2^{\frac{n}{2}(j+j')} (1+2^j|x-\lambda|)^{-N} (1+2^{j'}|y-\lambda'|)^{-N}}{(1+|j-j'|^2) (1+2^j|\lambda-\lambda'|)^{n+\gamma'}}$$

pour  $N$  que l'on peut choisir arbitrairement grand. En choisissant  $N \geq 2n + \gamma' + 1$  on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{k, k'} \frac{1}{(1+2^j|\lambda-\lambda'|)^{n+\gamma'} (1+2^j|x-\lambda|)^N (1+2^{j'}|y-\lambda'|)^N} \\ & \leq \sum_{k, k'} \frac{((1+2^j|x-\lambda|)(1+2^{j'}|y-\lambda'|))^{-n-1}}{[(1+2^j|\lambda-\lambda'|)(1+2^j|x-\lambda|)(1+2^{j'}|y-\lambda'|)]^{n+\gamma'}} \\ & \leq \sum_{k, k'} \frac{((1+2^j|x-\lambda|)(1+2^{j'}|y-\lambda'|))^{-n-1}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}} \\ & \leq \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}}. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne

$$|L(x, y)| \leq C \sum_{j, j' / j < j'} \frac{2^{(n+\gamma+s)j} 2^{-(\gamma-s')j'}}{(1+|j-j'|^2) (1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}}$$

et puisque  $s' \leq \gamma$ , on obtient

$$|L(x, y)| \leq C \sum_j \frac{2^{(n+s'+s)j}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}}.$$

Soit  $j_0$  l'entier vérifiant  $2^{-j_0} \leq |x-y| \leq 2.2^{-j_0}$ , alors on a

$$\sum_{j \leq j_0} \frac{2^{(n+s'+s)j}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}} \leq C 2^{(n+s+s')j_0} \leq \frac{c}{|x-y|^{n+s+s'}},$$

et

$$\sum_{j \geq j_0} \frac{2^{(n+s'+s)j}}{(1+2^j|x-y|)^{n+\gamma'}} \leq C \sum_{j \geq j_0} \frac{2^{(s+s'-\gamma')j}}{|x-y|^{n+\gamma'}},$$

et comme  $s + s' < \gamma'$  alors

$$\sum_{j \geq j_0} \frac{2^{(n+s'+s)j}}{(1 + 2^j |x - y|)^{n+\gamma'}} \leq C \frac{C}{|x - y|^{n+s+s'}},$$

ce qui démontre la partie directe du théorème.

Nous démontrons maintenant la réciproque. On considère

$$A_{\lambda, \lambda'} = \langle T\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle,$$

ici encore, on peut se restreindre à l'étude du cas  $j \leq j'$  et on distingue deux cas pour l'estimation de  $A_{\lambda, \lambda'}$ .

**Premier cas :**  $|\lambda - \lambda'| \geq C2^{-j}$  (la constante  $C$  vaut  $3 \times$  diamètre de  $\psi$ )

Les supports des ondelettes sont alors disjoints, on peut utiliser donc l'estimation (B.2.16) vérifiée par le noyau hors de la diagonale et on écrit  $A_{\lambda, \lambda'}$  sous la forme

$$A_{\lambda, \lambda'} = \int \partial^s \partial^{s'} K(x, y) (\partial^{-s} \psi_\lambda)(y) (\partial^{-s'} \psi_{\lambda'})(x) dx dy.$$

Soient  $\theta$  et  $w$  les deux fonctions telles que leur transformées de Fourier coïncident respectivement avec  $|\xi|^{-s} \hat{\psi}(\xi)$  et  $|\xi|^{-s'} \hat{\psi}(\xi)$ ,  $\theta(x)$  et  $w(x)$  sont des vaguelettes. On écrit alors

$$A_{\lambda, \lambda'} = \int \partial^s \partial^{s'} K(x, y) 2^{-sj} w_\lambda(y) 2^{-s'j'} \theta_{\lambda'}(x) dx dy.$$

Nous n'allons pas estimer directement ces intégrales, mais plutôt celles obtenues en remplaçant  $w_\lambda(y)$  par  $\psi_\lambda(y)$  et  $\theta_{\lambda'}(x)$  par  $\psi_{\lambda'}(x)$  et on notera

$$C_{\lambda, \lambda'} = \int \partial^s \partial^{s'} K(x, y) 2^{-sj} \psi_\lambda(y) 2^{-s'j'} \psi_{\lambda'}(x) dx dy.$$

En effet, si (B.2.17) est démontrée pour les  $(C_{\lambda, \lambda'})$ , on effectue deux changements de bases, en passant des ondelettes orthogonales aux ondelettes biorthogonales (La matrice de passage de ces changements de base est dans  $\mathcal{M}_r$  pour  $r$  arbitrairement grand) et le fait que la matrice  $(A_{\lambda, \lambda'})$  vérifie (B.2.17) sera donc conséquence du fait que les  $\mathcal{M}'_{\gamma, \gamma'}$  sont des algèbres pour  $0 < \gamma, \gamma' < 1$  et  $\gamma' < 2\gamma$ .

L'intérêt de ce changement est que l'on peut supposer  $\psi_\lambda$  et  $\psi_{\lambda'}$  à support compact.

En utilisant l'estimation (B.2.16) on a :

$$|C_{\lambda, \lambda'}| \leq C \int \frac{1}{|x - y|^{n+s+s'}} 2^{-sj} 2^{-s'j'} |\psi_\lambda(y)| |\psi_{\lambda'}(x)| dx dy,$$

Or  $|x - y| \geq \frac{1}{3}|\lambda - \lambda'|$ , donc

$$\begin{aligned} |C_{\lambda,\lambda'}| &\leq \frac{C2^{-sj}2^{-s'j'}2^{-(\frac{n}{2}(j+j'))}}{|\lambda - \lambda'|^{n+s+s'}} \\ &\leq \frac{C2^{-sj}2^{-s'j'}2^{-(\frac{n}{2}(j+j'))}2^{sj}2^{nj}2^{s'j}}{(2^j|\lambda - \lambda'|)^{n+s+s'}} \\ &\leq \frac{C2^{-s'(j'-j)}2^{-(\frac{n}{2}(j'-j))}}{(2^j|\lambda - \lambda'|)^{n+s+s'}}. \end{aligned}$$

Comme  $2^j|\lambda - \lambda'| > C$  et la constante  $C$  est choisie plus grande que 1 on déduit alors que

$$|C_{\lambda,\lambda'}| \leq \frac{C2^{-s'(j'-j)}2^{-(\frac{n}{2}(j'-j))}}{(1 + 2^j|\lambda - \lambda'|)^{n+s+s'}},$$

en prenant  $\tilde{\gamma} = s' \leq \gamma$  et  $\tilde{\gamma}' = s + s' < \gamma'$  on obtient enfin

$$|C_{\lambda,\lambda'}| \leq \frac{C2^{-(\frac{n}{2}+\tilde{\gamma})j'}2^{(\frac{n}{2}+\tilde{\gamma}'-\tilde{\gamma})}}{(1 + 2^j|\lambda - \lambda'|)^{n+\tilde{\gamma}'}}.$$

On conclut donc que l'estimation (B.2.17) est vérifiée pour  $C_{\lambda,\lambda'}$  lorsque  $|\lambda - \lambda'| > C2^{-j}$ .

**Second cas :**  $|\lambda - \lambda'| \leq C2^{-j}$

Dans ce cas les cubes  $Q_\lambda$  et  $Q_{\lambda'}$  sont très proches et on se trouve autour de la diagonale, la région où le noyau  $K(x, y)$  n'est pas une fonction. Notons que dans ce cas le terme  $(1 + 2^j|\lambda - \lambda'|)^{-n-\tilde{\gamma}'}$  ne joue aucun rôle dans l'estimation (B.2.17) souhaitée pour  $A_{\lambda,\lambda'}$ . Il suffit de majorer  $|A_{\lambda,\lambda'}|$  par

$$|A_{\lambda,\lambda'}| \leq C2^{-(\frac{n}{2}+\tilde{\gamma})|j-j'|} \quad (\text{B.2.20})$$

pour pouvoir conclure.

Pour démontrer cette majoration nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 5 (Y. Meyer [20])** Soit  $f(x)$  une fonction de classe  $C^m$ ,  $m \geq 1$  dont le support est inclus dans la boule unité de  $\mathbb{R}^n$  et dont les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , vérifient  $\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_\infty \leq 1$ . Soit  $0 < s < 1$  un exposant et  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  une fonction vérifiant  $|g(x)| \leq (1 + |x|)^{-n-s}$  et  $\int g(x)dx = 0$ . Alors pour une constante  $c = c(n, s)$ , tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et tout  $R \geq 1$  on a :

$$\left| \int g(x) f\left(\frac{x - x_0}{R}\right) dx \right| \leq cR^{-s} \text{ si } |x_0| \leq R. \quad (\text{B.2.21})$$

Au lieu de chercher à démontrer (B.2.20) pour  $A_{\lambda, \lambda'}$ , nous allons (par un changement de base) le démontrer pour

$$B_{\lambda, \lambda'} = \int K(x, y) \psi_{\lambda}(y) \bar{\psi}_{\lambda'}(x) dx dy,$$

où  $\bar{\psi}$  est l'intégrale fractionnaire d'ordre  $s$  de  $\psi$ .

Remarquons que l'inégalité (B.2.16) est isométriquement invariante lorsque  $K(x, y)$  est remplacé par  $a^n K(ax+b, ay+b)$  où  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ . En particulier si on note  $K_{j', k'}(x, y) = 2^{-nj'} K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k'))$ , la propriété (B.2.16) est conservée par  $K_{j, k}(x, y)$ .

Grâce à un double changement de variable on écrit  $B_{\lambda, \lambda'}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_{\lambda, \lambda'} &= \int_x \int_y K(x, y) \psi_{\lambda}(y) \bar{\psi}_{\lambda'}(x) dx dy \\ &= 2^{-nj'/2} \int_x \int_y K(2^{-j'}(x+k'), y) \bar{\psi}(x) \psi_{\lambda}(y) dx dy \\ &= 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)} \int \int 2^{-nj'} K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k')) \bar{\psi}(x) \psi\left(\frac{y+k'-k2^{j'-j}}{2^{j'-j}}\right) dx dy \\ &= 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)} \int \int 2^{-j'(n+s)} \partial^s K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k')) \partial^{-s} \bar{\psi}(x) \psi\left(\frac{y+k'-k2^{j'-j}}{2^{j'-j}}\right) dx dy. \end{aligned}$$

Puisque la transformée de Fourier de  $\psi$  coïncide avec la quantité  $|\xi|^{-s} \widehat{\bar{\psi}}(\xi)$  on a alors  $\bar{\psi}(\cdot) = \partial^{-s} \widehat{\bar{\psi}}(\cdot)$  et

$$\begin{aligned} B_{\lambda, \lambda'} &= 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)} \int \int 2^{-j'(n+s)} \partial^s K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k')) \psi(x) \psi\left(\frac{y+k'-k2^{j'-j}}{2^{j'-j}}\right) dx dy \\ &= 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)} \int g(y) \tilde{\psi}\left(\frac{y+y_0}{R}\right) dy, \end{aligned} \tag{B.2.22}$$

où  $y_0 = k2^{j'-j} - k$ ,  $R = 2^{j'-j}$  et  $g(y) = 2^{-j'(n+s)} \int \partial^s K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k')) \psi(x) dx$ .

**Lemme 6** Si le noyau  $K(x, y)$  est associé à un opérateur  $T \in \mathcal{A}_{\gamma, \gamma'}$  alors la fonction  $g(y)$  définie ci dessus vérifie

$$|g(y)| = C(1 + |y|)^{-n-\tilde{\gamma}}$$

pour tout  $\tilde{\gamma} < \gamma$ .

En effet, supposons que  $\psi$  a son support dans la boule de centre zéro et de rayon  $c_0$ . Alors

$$g(y) = 2^{-(n+s)j'} \int_{|x| < c_0} \partial^s K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k')) \psi(x) dx. \quad (\text{B.2.23})$$

On distingue deux cas pour estimer  $|g(y)|$  selon la position de  $y$  par rapport au support de  $\psi$ .

1. Si  $|y| > c_0$ , en utilisant l'estimation (B.2.16) avec  $s' = 0$  et  $s < \gamma$  on obtient

$$|\partial^s K(2^{-j'}(x+k'), 2^{-j'}(y+k'))| \leq 2^{j'(n+s)} |x-y|^{-n-s},$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |g(y)| &\leq 2^{-(n+s)j'} \int_{|x| < c_0} 2^{j'(n+s)} |x-y|^{-n-s} \psi(x) dx, \\ &\leq \int_{|x| < c_0} |x-y|^{-n-s} \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Puisque la fonction  $\psi$  est supposée continue donc bornée et on déduit alors que

$$|g(y)| \leq C |y|^{-n-s}.$$

Si on note  $\tilde{\gamma} = s < \gamma'$ , on conclut alors que pour tout  $|y| > c_0$  on a

$$|g(y)| \leq C(1+|y|)^{-n-\tilde{\gamma}}, \quad \forall \tilde{\gamma} < \gamma.$$

2. Si  $|y| \leq c_0$  l'estimation  $|g(y)| \leq C(1+|y|)^{-n-\tilde{\gamma}}$  provient de la continuité faible sur les espaces de Hölder des opérateurs  $T \in \mathcal{A}_{\gamma,\gamma'}$ , dont voici l'énoncé:

**Lemme 7** Soit  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  un opérateur linéaire continu vérifiant les hypothèses de la définition (9). Alors si  $\psi$  est une fonction de l'espace  $\dot{C}^s$ ,  $0 < s < 1$ , portée par la boule de centre 0 et de rayon  $c_0 > 0$ , on a  $\|T\psi\|_\infty \leq c \|\psi\|_{\dot{C}^s}$ .

En effet, on a

$$T\psi(x) = \int_{|y| < c_0} K(x,y) \psi(y) dy,$$

On considère  $\theta$  la fonction test qui vaut 1 sur le support de  $\psi$  et nulle en dehors de la boule de centre 0 et de rayon  $c_0 + 1$ , on écrit alors

$$T\psi(x) = \int_{|y| < c_0} K(x, y)(\psi(y) - \theta(y)\psi(x))dy + \psi(x) \int_{|y| < c_0} K(x, y)\theta(y)dy.$$

Puisque  $T(1) = 0$ , alors par définition de  $T(1)$  on a  $\int_{|y| < c_0} K(x, y)\theta(y)dy = 0$  et on obtient

$$|T\psi(x)| \leq \int_{|y| < c_0} |K(x, y)| |\psi(y) - \theta(y)\psi(x)| dy.$$

D'une part le noyau  $K$  vérifie  $|K(x, y)| \leq c_1 |x - y|^{-n}$ . D'autre part pour tout  $|y| < c_0$  on a  $|\psi(y) - \theta(y)\psi(x)| = |\psi(y) - \psi(x)|$ , et puisque  $\psi \in \dot{C}^s$ ,  $0 < s < 1$ , alors  $|\psi(y) - \psi(x)| \leq \|\psi\|_{\dot{C}^s} |x - y|^s$ . Tout cela nous permet d'avoir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |T\psi(x)| &\leq \|\psi\|_{\dot{C}^s} \int_{|y| < c_0} \frac{|y - x|^s}{|x - y|^n} dy \\ &\leq c \|\psi\|_{\dot{C}^s}, \end{aligned}$$

d'où le lemme 7. Et par ceci on termine la démonstration du lemme 6.

Revenons maintenant à (B.2.22) et rappelons qu'on a

$$B_{\lambda, \lambda'} = 2^{-\frac{n}{2}(j' - j)} \int g(y) \psi\left(\frac{y + y_0}{R}\right) dy,$$

où  $y_0 = -k' + k2^{j' - j}$ ,  $R = 2^{j' - j} > 1$ .

D'une part, remarquons qu'on a  $|y_0| < R$  car le cas que nous traitons donne :

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda'| \leq C2^{-j} &\implies 2^{-j'} |k2^{j' - j} - k'| \leq C2^{-j} \\ &\implies |k2^{j' - j} - k'| \leq C2^{j' - j} \\ &\implies |y_0| < R. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\psi$  est supposée de classe  $C^m$ ,  $m \geq 2$  et est plus de support compact, elle vérifie alors les hypothèses portant sur la fonction  $f$  du lemme 5. De plus,  $g(y) \leq C(1 + |y|)^{-n - \tilde{\gamma}}$  pour tout  $\tilde{\gamma} < \gamma$  et on a  $\int g(y) dy = 0$  car  $T(1) = {}^t T(1) = 0$ .

Alors du lemme 5 on déduit que pour tout  $c = c(n, \gamma)$

$$\left| \int g(y) \psi\left(\frac{y + y_0}{R}\right) dy \right| \leq cR^{-\tilde{\gamma}} = c2^{-(j' - j)(\tilde{\gamma})},$$

et de (B.2.22) on a

$$|A_{\lambda, \lambda'}| \leq c2^{-(j' - j)(\frac{n}{2} + \tilde{\gamma})}$$

ce qui démontre (B.2.20). On conclut donc que la matrice  $A_{\lambda, \lambda'} \in \mathcal{M}_{\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}'}$ , avec  $\tilde{\gamma} < \gamma$  et  $\tilde{\gamma}' < \gamma'$  ce qui fournit exactement l'estimation cherchée.

## Partie C

# Méthodes de quadrature et Fonction d'échelle



# Introduction

Comme on l'a constaté dans la première partie (voir remarque fondamentale I.3.3), la décomposition discrète dans une base d'ondelettes d'une fonction  $f$  ou d'un opérateur  $T$  se traduit par les coefficients  $s_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$  et  $T_{k,l}^j = \langle K(x, y), \phi_{j,k}(x) \phi_{j,l}(y) \rangle$  où pour tout  $m = 0, \dots, 2^{n-j} - 1$ ,  $\phi_{j,k} = 2^{\frac{n-j}{2}} \phi(2^{n-j}x - k)$ . La fonction  $\phi$  est la fonction d'échelle solution de l'équation (A.1.9).

Le calcul des coefficients  $(s_k^j)_{j,k}$  et  $(T_{k,l}^j)_{j,k,l}$ , formulés respectivement par les équations (A.1.17) et (A.1.18), repose essentiellement sur la donnée des coefficients à l'échelle fine  $(s_k^0)_k$  et  $(T_{k,l}^0)_{k,l}$ . Ils sont respectivement définis par les produits scalaires  $\langle f, 2^{\frac{n}{2}} \phi(2^n x - k) \rangle$  et  $\langle K(x, y), 2^n \phi(2^n x - k) \phi(2^n y - l) \rangle$ , l'entier  $n$  désigne l'échelle la plus fine de l'analyse multirésolution.

L'estimation de ces coefficients nécessite un calcul d'intégrale. Les méthodes classiques pour un tel calcul sont les méthodes de quadratures basées essentiellement sur l'approximation par des polynômes des fonctions produits  $g(x) = f(x) \phi(2^n x - k)$  et  $G(x, y) = K(x, y) \phi(2^n x - k) \phi(2^n y - l)$ . L'utilisation de telles quadratures s'avère très insuffisante puisque leur mise au point d'une manière précise se heurte à trois difficultés issues des fonctions  $f, K$  et  $\phi$  : la régularité de la fonction  $\phi$  est limitée par son support  $[8, 2]$ , la fonction  $\phi$  n'est connue que implicitement en tant que solution de l'équation d'échelle (A.1.9) et les fonctions  $f$  et  $K$  peuvent présenter des singularités.

Les fonctions produits, à intégrer,  $f(x) \phi(2^n x - k)$  et  $K(x, y) \phi(2^n x - k) \phi(2^n y - l)$  héritent fortement de toutes ces difficultés. Leur régularité peut donc être faible et l'implémentation des méthodes classiques de quadratures d'intégrale est sans intérêt dans ce cas.

Profitant de la nature de la fonction  $\phi$  et essentiellement de son caractère multi-échelle issu de l'équation (A.1.9), nous présentons dans cette partie une méthode de quadrature de faible coût calculatoire pour l'estimation de ces termes. Aussi bien le cas où  $f, K$  sont suffisamment réguliers que le cas où ils présentent des singularités vont être traités. L'erreur de cette quadrature est contrôlée par une précision  $\varepsilon$  fixée d'avance. Sans perte de généralité, et par un simple changement de variable, on se ramène au problème du calcul des intégrales  $I = \int f(x) \phi(x) dx$  et  $R = \int \int K(x, y) \phi(x) \phi(y) dx dy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^d$  où  $d \in \mathbb{N}^*$ .

Dans le premier chapitre nous présentons la méthode de quadrature dans le cas où la fonction  $f$ , le noyau  $K$  sont supposée au moins de classe  $C^l$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$ , respectivement sur le support de  $\phi(x)$  et le support de  $\phi(x)\phi(y)$ . On appellera quadrature régulière cette méthode. Grâce au caractère multiéchelle de  $\phi$  on améliorera l'erreur de cette quadrature en montrant qu'il existe une échelle  $J$  telle que cet erreur est majoré par  $\varepsilon$ , la précision  $\varepsilon > 0$  souhaitée du calcul et fixée d'avance.

Dans le second chapitre, en se basant sur la méthode de quadrature régulière introduit dans le premier chapitre, nous expliciterons une méthode de quadrature dans le cas où  $f, K$  admettent des singularités homogènes. La démarche de la construction ainsi que tout les calculs nécessaires seront développés surtout pour  $f$ , le cas du noyau  $K$  se traite d'une manière similaire.

On commencera par un cas particulier, il s'agit des fonctions  $f$  singulières en 0 telle que  $f(x/2) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1$ . L'exemple type est  $f(x) = |x|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma \leq 1$ . Ce type de singularités est présent dans beaucoup de problèmes physiques. Le coefficient  $\mathcal{M}_0^\gamma = \int |x|^\gamma \phi(x) dx$ , qu'on appellera moment fractionnaire d'ordre  $\Gamma$

de  $\phi$ , s'obtient en tant que premier terme de la suite  $\mathcal{M}_m^\gamma = \int |x|^\gamma \phi(x - m) dx$  où  $m \in \mathbb{N}$ . Le calcul des  $\mathcal{M}_m^\gamma$  s'effectue en distinguant les entiers  $m$  tel que  $0 \notin \text{supp } \phi(\cdot - m)$  des  $m$  tel que  $0 \in \text{supp } \phi(\cdot - m)$ . Alors que les premiers se calculent par la quadrature régulière, les seconds seront obtenus en tant que solution d'un système linéaire  $(2M, 2M)$ . Cette méthode est insuffisante car non seulement elle n'est valable que pour les fonctions vérifiant  $f(x/2) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1$ , mais la complexité du système linéaire exclue les grandes valeurs de  $M$ , donc limite le choix des bases d'ondelettes.

La méthode de quadrature, qu'on présentera dans la seconde section de ce chapitre comblera cette faiblesse, car elle est valable pour toute les valeurs de  $M$ . Il s'agit de méthode de quadrature conçue pour le cas des fonctions  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $C^\infty$  partout sauf en un point  $p$  où elle présente une singularité homogène du type  $|x - p|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma < 1$  (on a donc  $f \in L^1_{loc}$ ). On suppose ainsi que l'on a

$$|f(x)| \leq C|x - p|^\gamma$$

$$|\partial^l f(x)| \leq Cl!|x - p|^{\gamma-l}, \quad l \geq 0.$$

Grâce à une nouvelle subdivision – adaptée à la singularité – on va construire une méthode de quadrature rapide, dont l'erreur est de l'ordre de  $\varepsilon$ , précision du calcul souhaitée. En plus de la méthode de construction, deux théorèmes principaux sont obtenus dans ce chapitre. Le premier concerne le comportement de l'erreur de la quadrature en fonction de la distance par rapport au point singulier. Alors que le second met en évidence le contrôle de cet erreur par le nombre de points nécessaires à la quadrature. Enfin on dressera des résultats numériques d'approximation ainsi que le temps CPU.

Dans le troisième chapitre de cette partie, on va s'intéresser aux fonctions singulières produits d'une singularité par une fonction suffisamment régulière, donc de la forme

$$f(x) = g(x) \sigma(x) + h(x)$$

où  $\sigma$  est singulière et  $g, h$  sont au moins de classe  $C^l$  sur le support de  $\phi$ . On propose une méthode de quadrature, pour l'estimation de  $I \langle f, \phi \rangle$ , en introduisant la notion de correction locale qui consiste à corriger certains poids, de la quadrature régulière explicitée dans le premier chapitre.

**Remarque :**

De toute la théorie des ondelettes, pour construire cette quadrature nous n'avons besoin que de la manière dont est définie la fonction d'échelle  $\phi$ . Nous n'utiliserons la fonction  $\phi$  qu'à travers l'équation d'échelle (A.1.9). Nous pouvons donc sortir du cadre des ondelettes et nous posons le problème de la manière suivante :

Soit  $n$  un entier, construire une quadrature pour les produits scalaires

$$\begin{aligned} & \langle f, \phi(2^n x - k) \rangle \\ & \langle K(x, y), \phi(2^n x - k) \phi(2^n y - l) \rangle, \end{aligned}$$

avec  $\phi$  la fonction vérifiant, pour  $N = 2M$ ,  $M \in \mathbb{N}^*$ , l'équation suivante :

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \phi(2x - k). \quad (\text{C.0.24})$$

La suite  $c_k$  est telle que

$$H = \sum_{k=0}^{N-1} c_k = 2.$$

Par cette remarque, l'application de notre méthode s'élargit donc à tout les espaces d'approximation  $V_0$  engendré par les translatées d'une fonction  $\phi$  issue d'une équation d'échelle de type (C.0.24). Ainsi cette extension permet d'englober les B-splines et certains éléments finis.



# Chapitre I

## Quadratures régulières

De l'algorithme, introduit dans la première partie pour le calcul des moments  $\mathcal{M}_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , de la fonction d'échelle  $\phi$ , on remarque que l'équation d'échelle (C.0.24) vérifiée par  $\phi$  est à l'origine de la rapidité et la précision de cet algorithme. D'ailleurs le moment  $\mathcal{M}_i$  peut être interprété aussi comme produit scalaire de  $\phi$  avec  $x^i$ , fonction régulière sur le support de  $\phi$ . A partir de cette remarque, l'utilisation de la propriété multiéchelle de  $\phi$  s'impose. On construit une méthode de quadrature pour estimer  $\langle f, \phi \rangle$ ,  $f$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^l$  sur  $\text{supp}\phi$ , en approximant la fonction  $f$  par sa série de Taylor et en utilisant les résultats sur les moments  $\mathcal{M}_i$ . L'erreur de la quadrature, grâce à l'équation d'échelle, est fortement contrôlée par la précision  $\varepsilon$  qu'on impose aux calculs.

### I.1 Moment tronqué

Le premier exemple de fonctions suffisamment régulière qu'on peut considérer est  $\Delta_I^i(x) = x^i 1_I(x)$  où  $i \in \mathbb{N}$ ,  $I$  est un intervalle inclus dans le support de  $\phi$  et  $1_I(x)$  est la fonction indicatrice de  $I$ . Ceci servira à calculer les coefficients d'ondelettes des splines par exemple.

**Définition 10** Soit  $c \in \text{supp}\phi$ , nous appellerons moment tronqué à gauche et moment tronqué à droite de la fonction d'échelle  $\phi$  respectivement les quantités

$$\mathcal{G}_i = \int_0^c t^i \phi(t) dt, \quad (\text{C.1.1})$$

$$\mathcal{D}_i = \int_c^{2M-1} t^i \phi(t) dt. \quad (\text{C.1.2})$$

En utilisant l'équation d'échelle (C.0.24) nous allons donner une méthode pour calculer simultanément  $\mathcal{G}_i$  et  $\mathcal{D}_i$ . En effet

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{m=0}^{2M-1} h_m \phi(2t-m) \\ &= \sqrt{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \in K_1^+}} h_m \phi(2t-m) + \sqrt{2} \sum_{m \in K_1^-} h_m \phi(2t-m) \\ &+ \sqrt{2} \sum_{m \in K_1^c} h_m \phi(2t-m),\end{aligned}$$

où

$$K_1^+ = \{m = 0, \dots, 2M-1 \mid \text{supp}(\phi(2t-m)) \subset [c, 2M-1]\},$$

$$K_1^- = \{m = 0, \dots, 2M-1 \mid \text{supp}(\phi(2t-m)) \subset [0, c]\}$$

$$\text{et } K_1^c = \{m = 0, \dots, 2M-1 \mid c \in \text{supp}(\phi(2t-m))\}.$$

En répétant la procédure pour tout  $m \in K_1^c$  jusqu'à l'échelle  $J$  nous montrons qu'il existe des suites réelles  $(a_{j,m})_{j=0,\dots,J, m \in \mathbb{Z}}$  telles que

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j^+} a_{j,m} \phi(2^j t - m) + \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j^-} a_{j,m} \phi(2^j t - m) \\ &+ \sum_{m \in R_J} a_{J,m} \phi(2^J t - m).\end{aligned}\tag{C.1.3}$$

En injectant (C.1.3) dans (C.1.1) et (C.1.2) nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^-} a_{j,m} \int_0^c t^i \phi(2^j t - m) dt + E_J^- \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^-} a_{j,m} 2^{-j(1+i)} M_{i,m} + E_J^-, \end{aligned}\tag{C.1.4}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_1^+} a_{j,m} \int_c^{2M-1} t^i \phi(2^j t - m) dt + E_J^+ \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_1^+} a_{j,m} 2^{-j(1+i)} M_{i,m} + E_J^+.\end{aligned}\tag{C.1.5}$$

où  $M_{i,m} = \int (t-m)^i \phi(t) dt$ , moment *shifté* de  $\phi$  et

$$E_J^- = \sum_{m \in R_J} a_{J,m} \int_0^c t^i \phi(2^J t - m) dt,$$

$$E_J^+ = \sum_{m \in R_J} a_{J,m} \int_c^{2^{M-1}} t^i \phi(2^J t - m) dt,$$

Étant donnée  $\varepsilon$  la précision de calcul, l'échelle d'arrêt  $J$  est telle que  $|E_J| = |E_J^- + E_J^+| \leq \varepsilon$ . Voici quelques exemples de calcul de ce type de moments. Les deux dernières colonnes du tableau font une comparaison entre le moment  $\mathcal{M}_i$  et la somme des moments tronqués.

| Daubechies, $M = 4$ $c = 4.5e + 00$ $\varepsilon = 3.90625e - 03$  |                      |                      |                                 |                      |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| $i$                                                                | $\mathcal{D}_i$      | $\mathcal{G}_i$      | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | $\mathcal{M}_i$      |
| 0                                                                  | 2.131315598037e - 03 | 9.978597040851e - 01 | 9.999910196831e - 01            | 1.000000000000e + 00 |
| 1                                                                  | 9.785585253102e - 03 | 9.955671143100e - 01 | 1.005352699563e + 00            | 1.005393213457e + 00 |
| 2                                                                  | 4.487546232415e - 02 | 9.657572802786e - 01 | 1.010632742602e + 00            | 1.010815513666e + 00 |
| 3                                                                  | 2.055201340664e - 01 | 7.010157110371e - 01 | 9.065358451035e - 01            | 9.073603672468e - 01 |
| Daubechies, $M = 4$ $c = 4.5e + 00$ $\varepsilon = 9.765625e - 04$ |                      |                      |                                 |                      |
| $i$                                                                | $\mathcal{D}_i$      | $\mathcal{G}_i$      | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | $\mathcal{M}_i$      |
| 0                                                                  | 2.135108647771e - 03 | 9.978583115872e - 01 | 9.999934202349e - 01            | 1.000000000000e + 00 |
| 1                                                                  | 9.802657292934e - 03 | 9.955609568280e - 01 | 1.005363614121e + 00            | 1.005393213457e + 00 |
| 2                                                                  | 4.495230141984e - 02 | 9.657300585366e - 01 | 1.010682359956e + 00            | 1.010815513666e + 00 |
| 3                                                                  | 2.058659770954e - 01 | 7.008953932274e - 01 | 9.067613703228e - 01            | 9.073603672468e - 01 |
| Daubechies, $M = 3$ $c = 5e - 01$ $\varepsilon = 2.470355e - 04$   |                      |                      |                                 |                      |
| $i$                                                                | $\mathcal{D}_i$      | $\mathcal{G}_i$      | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | $\mathcal{M}_i$      |
| 0                                                                  | 8.588096648135e - 01 | 1.411903351865e - 01 | 9.999999999999e - 01            | 1.000000000000e + 00 |
| 1                                                                  | 7.696369014765e - 01 | 4.776426633438e - 02 | 8.174011678108e - 01            | 8.174011678108e - 01 |
| 2                                                                  | 6.500886531007e - 01 | 1.805601603783e - 02 | 6.681446691386e - 01            | 6.681446691385e - 01 |
| 3                                                                  | 4.381991035131e - 01 | 7.260941400228e - 03 | 4.454600449133e - 01            | 4.454600449133e - 01 |
| Daubechies, $M = 3$ $c = 5e - 01$ $\varepsilon = 39.0625e - 04$    |                      |                      |                                 |                      |
| $i$                                                                | $\mathcal{D}_i$      | $\mathcal{G}_i$      | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | $\mathcal{M}_i$      |
| 0                                                                  | 8.576864875697e - 01 | 1.359319583386e - 01 | 9.936184459082e - 01            | 1.000000000000e + 00 |
| 1                                                                  | 7.690752849842e - 01 | 4.517142808365e - 02 | 8.142467130678e - 01            | 8.174011678108e - 01 |
| 2                                                                  | 6.498078330514e - 01 | 1.677739125576e - 02 | 6.665852243071e - 01            | 6.681446691386e - 01 |
| 3                                                                  | 4.380586886599e - 01 | 6.630340325513e - 03 | 4.446890289855e - 01            | 4.454600449134e - 01 |

## I.2 Méthode de quadrature

Soient  $l \in \mathbb{N}^*$ ,  $f$  une fonction de  $C^l(\mathbb{R})$  et  $\varepsilon$  la précision souhaitée. Nous nous posons donc la question suivante :

Trouver un ensemble fini d'indice  $\mathcal{I}$  et une suite  $(w_i)_{i \in \mathcal{I}}$  tel que

$$\left| \int f(t)\phi(t)dt - \sum_{i \in \mathcal{I}} w_i f(x_i) \right| \leq \varepsilon$$

avec  $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$  une suite de points du support de  $\phi(x)$ . La suite  $w_i$  est appelée suite de poids. La quadrature  $Q(f) = \sum_{i \in \mathcal{I}} w_i f(x_i)$  est dite de *degré*  $p$  si pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$  de degré inférieur ou égale à  $p$  on a :

$$Q(P) = \int P(x)\phi(x)dx.$$

Avant de regarder le cas général des fonctions d'échelle, quelques cas particuliers vont éclairer la suite.

### I.2.1 Fonctions d'échelles particulières

On rappelle que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$  on a noté  $\mathcal{M}_i = \int t^i \phi(t)dt$ , le moment d'ordre  $i$  de  $\phi$ . La fonction  $\phi$  vérifie  $\mathcal{M}_0 = 1$ . La fonction  $f \in C^l(\mathbb{R})$ ,  $l > 0$ , on fait un développement de Taylor d'ordre 1 au point  $x_0 = \mathcal{M}_1$ , la quantité  $I = \int f(t)\phi(t)dt$  vérifie

$$\begin{aligned} I &\simeq f(x_0) + \langle (x - x_0)f'(x_0), \phi \rangle \\ &\simeq f(x_0) + \left( \int x\phi(x)dx - x_0 \right) f'(x_0), \\ &\simeq f(x_0). \end{aligned}$$

Ce qui constitue une quadrature de degré 1 pour  $I$ .

**Théorème 2** [26] *Si  $\phi$  est une fonction d'échelle orthogonale avec  $M > 1$  alors*

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_1^2. \tag{C.1.6}$$

Par ce résultat W. Sweldens a montré que le degré de l'approximation ci dessus vaut au moins 2. En effet, avec un développement de Taylor de  $f$  à l'ordre 3 en un point  $\alpha \in \mathbb{R}$ , il existe  $t_0 \in \text{supp}\phi$  tel que :

$$I \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)\mathcal{M}_{1,\alpha} + f''(\alpha)\mathcal{M}_{2,\alpha}/2 \quad (\text{C.1.7})$$

où  $\mathcal{M}_{1,\alpha} = \int (x - \alpha)\phi(x)dx$  et  $\mathcal{M}_{2,\alpha} = \int (x - \alpha)^2\phi(x)dx$ .

En choisissant  $\alpha = \mathcal{M}_1$ , on a  $\mathcal{M}_{1,\alpha} = 0$  et par le théorème 2 on déduit que  $\mathcal{M}_{2,\alpha} = 0$ . On a donc obtenu une quadrature de degré le degré 2.

Par sa simplicité cette quadrature est très séduisante, malheureusement elle reste peu efficace car son degré reste malgré tout très limité. Afin d'améliorer la valeur de ce degré, on va augmenter le nombre de moments nuls de la fonction d'échelle. Voici un exemple de telles fonctions.

Soit  $\phi$  la fonction d'échelle correspondante à une base de *Coiflets* [8], elle a la propriété suivante

$$\mathcal{M}_{i,\tau_M} = \int (x - \tau_M)^i \phi(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, M - 1 \quad (\text{C.1.8})$$

$\tau_M \in \mathbb{R}$  ne dépendant que de  $M$  nombre de moments nuls de l'ondelette  $\psi$ .

En faisant un développement de Taylor d'ordre  $M$  au point  $\tau_M$ , on a

$$\begin{aligned} I &= f(\tau) + f'(\tau)\mathcal{M}_{1,\tau} + f''(\tau)\mathcal{M}_{2,\tau}/2 + \dots + \frac{1}{M!} \int (x - \tau)^M \phi(x) f^{(M)}(t_x) dx \\ &= f(\tau) + f'(\tau)\mathcal{M}_{1,\tau} + f''(\tau)\mathcal{M}_{2,\tau}/2 + \dots + \frac{1}{(M-1)!} \mathcal{M}_{M-1,\tau} f^{(M-1)}(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{M!} \int (x - \tau)^M \phi(x) f^{(M)}(t_x) dx. \end{aligned}$$

Avec (C.1.8) on obtient

$$I = f(\tau) + \frac{1}{M!} \int (x - \tau)^M \phi(x) f^{(M)}(t_x) dx,$$

et on déduit donc qu'il s'agit d'une quadrature de degré  $M - 1$ .

Deux raisons nous empêchent de nous contenter de ce résultat. La première c'est que la propriété (C.1.8) n'est pas toujours vérifiée pour une fonction d'échelle. La seconde, l'erreur commise n'est intéressante que pour les grandes valeurs de  $M$  et comme  $M$  est proportionnel au support de  $\phi$  [8] alors une grande valeur de  $M$  entraînerait plus d'opérations. La taille du support de  $\phi$  dans le cas des *Coiflets* est égale à  $3M - 1$  alors qu'elle ne vaut que  $2M - 1$  dans la cas des fonctions d'échelles orthogonales de Daubechies, et tout calcul utilisant les *Coiflets* nécessitera 50% d'opérations de plus que dans les ondelettes de Daubechies.

### I.2.2 Cas général de fonctions d'échelles

On rappelle que l'objet à estimer est

$$I = \int f(x) \phi(x) dx, \quad (\text{C.1.9})$$

la fonction  $\phi$  n'est connue qu'implicitement en tant que solution de l'équation (C.0.24) avec  $\int \phi(t) dt = 1$ .

On note  $h = \frac{N-1}{l}$  et on considère la suite  $x_i = (i+1)h$ ,  $i = 0, \dots, l-1$ , il s'agit d'une suite de points du support de  $\phi$ . La fonction  $f$  étant de classe  $\mathcal{C}^l$ , il existe un polynôme  $P_l$  de degré  $\leq l$  et un seul (interpolant de Lagrange par exemple) tel que

$$P_l(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, l-1,$$

ce polynôme s'écrit

$$P_l(X) = \sum_i f(x_i) L_i(X)$$

où  $L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{l-1} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ . Et on a l'égalité suivante

$$f(x) = \sum_{i=0}^{l-1} L_i(x) f(x_i) + R_l(x) \quad (\text{C.1.10})$$

où  $R_l(x)$ , le reste de l'interpolation, vérifie

$$|R_l(x)| \leq \frac{N^l}{l!} \sup_{0 \leq t \leq N-1} |f^{(l)}(t)|. \quad (\text{C.1.11})$$

En injectant (C.1.10) dans  $I$  (C.1.9) on obtient :

$$I = \sum_{i=0}^{l-1} f(x_i) \mathcal{L}_i + E_l^1 \quad (\text{C.1.12})$$

où  $E_l^1$  est l'erreur de la quadrature et  $\mathcal{L}_i$  est donné par

$$\mathcal{L}_i = \int_0^{N-1} L_i(x) \phi(x) dx. \quad (\text{C.1.13})$$

Par ceci, nous obtenons la quadrature suivante :

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i^l f\left((i+1) \frac{N-1}{l}\right), \quad (\text{C.1.14})$$

où le poids  $\alpha_i^l = \mathcal{L}_i$  pour  $i = 0, \dots, l-1$ .

Les  $\mathcal{L}_m$ ,  $m = 0, \dots, l-1$  se calculent en fonction des moments  $\mathcal{M}_i$ ,  $i = 0, \dots, l$ . En effet, si on note  $l_i = \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$  et  $P(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j)$ , on écrit alors

$$L_i(x) = l_i P(x) = l_i \sum_{j=0}^{l-1} p_j x^j \text{ où } p_j \in \mathbb{R}. \text{ On a donc}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(x) &= \int L_i(x) \phi(x) dx \\ &= l_i \sum_{j=0}^{l-1} p_j \int x^j \phi(x) dx \\ &= l_i \sum_{j=0}^{l-1} p_j \mathcal{M}_j. \end{aligned}$$

Les coefficients  $p_j$ ,  $j = 0, \dots, l-1$  du polynôme  $P(x)$  se calculent selon l'algorithme suivant :

Pour chaque entier  $m = 1, \dots, l-1$ , on note  $P^m(x)$  le polynôme  $\sum_{j=0}^m p_j^m x^j$ . On a alors

$$P^m(x) = (x - x_m) P^{m-1}(x),$$

Les coefficients  $p_j$  qu'on cherche correspondent aux coefficients  $p_j^{l-1}$ .

Voici l'organigramme de l'algorithme (à part  $p_0^0$  tous les coefficients  $p_j^m$  sont initialisés à la valeur nulle) :

```

    p00 = 1
    for m := 1 to l-1 do
        for j := 0 to m do
            pjm := pj-1m-1 - xm pjm-1
        end-for-j
    end-for-m

```

Ceci nous servira pour le calcul des  $\alpha_m^l$ . Nous donnons, dans l'annexe (??), les valeurs de  $\alpha_m^l$ ,  $m = 0, \dots, l-1$  pour les fonctions d'échelle de Daubechies avec  $M = 2, 3, 4, 10$  et où  $l = 4, \dots, 15$ .

### I.2.3 Analyse de l'erreur de la quadrature

**Estimation :** De (C.1.11) on déduit que l'erreur  $E_1 = |Q(x) - I|$  de la quadrature ci dessus vérifie

$$|E_1| \leq B. \sup_{x \in \text{supp} \phi} |f^{(l)}(x)| \quad (\text{C.1.15})$$

où la constante  $B$  vaut

$$B = \frac{N^l}{l!}. \quad (\text{C.1.16})$$

**Amélioration :** Soit  $\varepsilon$  la précision souhaitée du calcul, si  $|E_1| > \varepsilon$  alors la quadrature n'est pas satisfaisante et on l'améliore par la méthode de subdivision uniforme suivante :

par itération de l'équation d'échelle (C.0.24), nous obtenons

$$\phi(x) = \sum_k s_{j,k} 2^j \phi(2^j x - k), \quad (\text{C.1.17})$$

Les coefficients  $s_{j,k}$  sont calculés par un algorithme de subdivision

$$s_{j,k} = \sum_n c_{k-2n} s_{j-1,n}, \quad (\text{C.1.18})$$

(on trouvera dans [10] une étude générale de ces algorithmes). Ils sont uniquement déterminés par le produit scalaire

$$s_{j,k} = \langle \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) \rangle, \quad (\text{C.1.19})$$

où  $\tilde{\phi}$  est une fonction duale (que l'on peut choisir égale à  $\phi$  dans le cas d'une fonction d'échelle orthogonale).

En injectant (C.1.17) dans  $I$ , on obtient

$$\begin{aligned} I &= \sum_k s_{j,k} 2^j \langle f, \phi(2^j x - k) \rangle \\ &= \sum_k s_{j,k} I_{j,k}, \end{aligned}$$

où  $I_{j,k} = \langle f_{j,k}(x), \phi \rangle$  avec  $f_{j,k}(x) = f(2^{-j}(x+k))$ .

En appliquant la méthode de quadrature explicitée ci dessus pour chaque  $k$ , on obtient la quadrature  $Q_j(f)$  donnée par

$$\begin{aligned} Q_j(f) &= \sum_k s_{j,k} Q(f_{j,k}) \\ &= \sum_k s_{j,k} \sum_{i=0, \dots, l-1} \alpha_i^l f(x_i^{j,k}) \end{aligned} \quad (\text{C.1.20})$$

avec  $x_i^{j,k} = 2^{-j}(k + ih) \in \text{supp}(\phi_{j,k})$ ,  $i = 0, \dots, l-1$ .

L'erreur de la quadrature est estimé par

$$|E_j| \leq \sum_k |s_{j,k}| |E_{j,k}|,$$

où  $|E_{j,k}| = |I_{j,k} - Q(f_{j,k})|$ . De (C.1.15) on estime  $|E_{j,k}|$  par

$$\begin{aligned} |E_{j,k}| &\leq B \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |(f(2^{-j}(t+k)))^{(l)}| \\ &\leq B 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi_{j,k})} |f^{(l)}(t)|. \end{aligned} \quad (\text{C.1.21})$$

Comme  $s_{j,k}$  est défini par  $s_{j,k} = \langle \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) \rangle$ , on déduit alors l'estimation suivante

$$|s_{j,k}| \leq D 2^{-j} \quad D = \|\phi\|_\infty \|\tilde{\phi}\|_1,$$

et la somme dans (C.1.17) comporte au plus  $N 2^{j+1}$  termes non nuls, on a alors

$$\sum_k |s_{j,k}| \leq 2 D N$$

et l'estimation suivante

$$|E_j| \leq 2 D N B 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |f^{(l)}(t)|. \quad (\text{C.1.22})$$

Il est ainsi possible de rendre l'erreur  $|E_j|$  arbitrairement petite en augmentant la valeur de  $j$ .

**Remarque** Une formule de quadrature de  $\langle f, \phi \rangle$  est donnée indépendamment par Sweldens dans [27] dans le cas où la fonction  $f$  est connue seulement par ses valeurs en un nombre fini de points  $(a_i)_{i=0, \dots, s}$ . Les poids  $w_i$  de cette quadrature sont obtenus en tant que solution du système linéaire donné par

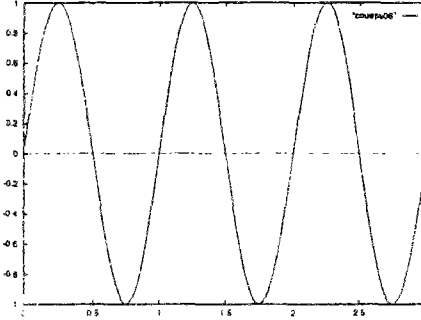
$$\sum_{m=0}^s w_m (a_m - \tau)^i = \int x^i \phi(x) dx = \mathcal{M}_i \quad i = 0, \dots, s.$$

Le réel  $\tau$  est choisi de tel façon que tout les points  $x_i = a_i - \tau$  soient dans le support de  $\phi$ . Dans le cas où le système ci dessus est mal conditionné, Sweldens a développé une version modifiée de cette méthode en cherchant les poids  $w_i$  en tant que solution d'un système similaire en considérant les polynômes de Tchebychev au lieu des monômes  $x^i$ .

**Exemple** Pour  $f(x) = \sin x$ ,  $\phi$  la fonction d'échelle de Daubechies avec  $M = 3$ , on a

$$\int_0^5 \sin x \phi(x) dx \simeq 0.7411044216.$$

On représente ci dessous les coefficients  $\int \sin(2\pi x) \phi(2^8 x - k) dx$  en fonction de  $x_{8,k} = k2^{-8}$



### I.3 Quadrature pour un opérateur intégral

Soit  $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , une fonction de classe au moins  $C^l(\mathbb{R}^2)$ ,  $l > 0$ . Soit  $\Phi$  la fonction donnée par le produit tensoriel d'ordre 2 de la fonction  $\phi$ , solution de l'équation d'échelle (C.0.24). Pour  $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\Phi(x) = \phi(x)\phi(y).$$

On note le cube  $S_{0,0}^2 = [0, 2M - 1]^2$  support de la fonction  $\Phi$  et  $S_{j,k}^2$  le support de  $\Phi(2^j x - k) = \phi(2^j x - k_1)\phi(2^j y - k_2)$  pour  $(j, k) \in \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}^2$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\phi(t) = \sum_{m=0}^{N-1} c_m \phi(2t - m)$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$

$$\Phi(x) = \sum_{|k|=0}^{2(N-1)} \bar{c}_k \Phi(2x - k), \quad (\text{C.1.23})$$

avec  $|k| = k_1 + k_2$  et  $\bar{c}_k = c_{k_1} c_{k_2}$ . La fonction  $\Phi$  vérifie donc une équation d'échelle de type (C.0.24).

A l'instar de (C.1.20), nous donnons une méthode de quadrature pour l'estimation du produit scalaire

$$R = \langle K, \Phi \rangle = \int K(x) \Phi(x) dx.$$

En effet, la quantité  $R$  s'écrit comme pour le calcul des termes

$$R = \int_x \phi(x) \left( \int_y K(x, y) \phi(y) dy \right) dx. \quad (\text{C.1.24})$$

Par applications successives de (C.1.14) à chacune des intégrales ci dessus nous obtenons

$$R = \sum_{i_1, i_2=0}^{l-1} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} K(x_{i_1}, y_{i_2}) + E^0. \quad (\text{C.1.25})$$

Les suites  $(\alpha_i)_{i=1, \dots, l-1}$  sont données dans l'annexe 1. L'erreur  $E^0$  vérifie

$$|E^0| \leq B\Omega \sup_{(x,y) \in S_{0,0}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_y^l K|). \quad (\text{C.1.26})$$

avec  $\Omega = \sup(\sum_m |\alpha_m|, 1)$  et la constante  $B$  est donnée par (C.1.16).

Comme dans le cas d'une fonction, pour une précision  $\varepsilon$  donnée si  $|E^0| > \varepsilon$  nous pouvons améliorer sa valeur en utilisant la subdivision uniforme. Pour  $j > 0$  on a l'équation suivante

$$\Phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \bar{s}_{j,k} 2^{2j} \Phi(2^j x - k), \quad (\text{C.1.27})$$

où

$$\bar{s}_{j,k} = s_{j,k_1} s_{j,k_2}, \quad (\text{C.1.28})$$

où  $s_{j,i}$  est la suite donnée par (C.1.18) et (C.1.19).

En remplaçant dans (C.1.24)  $\Phi$  par la quantité (C.1.27) on obtient pour  $j \in \mathbb{N}^*$

$$R = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \bar{s}_{j,k} \sum_{|i|=0}^{2(l-1)} \bar{\alpha}_i K(x_{i_1}^{j,k}, y_{i_2}^{j,k}) + E^j. \quad (\text{C.1.29})$$

où  $\bar{\alpha}_i = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2}$ . Les points  $(x_{i_1}^{j,k}, y_{i_1}^{j,k}) = (2^{-j}(x_{i_1} + k_1), 2^{-j}(y_{i_2} + k_2))$  sont dans le cube  $S_{j,k}^2 = S_{j,k_1} \times S_{j,k_2}$ . On rappelle que  $S_{j,m}$  est le support de  $\phi(2^j \cdot -m)$ .

L'erreur  $E^j$  est estimée suivant :

$$|E^j| \leq \sum_k |\bar{s}_{j,k}| |E_{j,k}|,$$

où

$$|E_{j,k}| \leq B \Omega 2^{-jl} \sup_{(x,y) \in S_{j,k}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_y^l K|). \quad (\text{C.1.30})$$

On a alors

$$\begin{aligned} |E^j| &\leq B \Omega 2^{-jl} \sum_k |\bar{s}_{j,k}| \sup_{(x,y) \in S_{j,k}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_x^l K|) \\ &\leq B \Omega 2^{-jl} \sup_{(x,y) \in S_{0,0}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_x^l K|) \sum_k |\bar{s}_{j,k}|. \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |s_{j,m}| \leq 2DN$ , avec  $D = \|\phi\|_\infty \|\tilde{\phi}\|_1$  alors de (C.1.28) on obtient

$$\sum_k |\bar{s}_{j,k}| \leq (2DN)^2.$$

On a donc l'estimation

$$|E^j| \leq B \Omega 2^{-jl} (2DN)^2 \sup_{(x,y) \in S_{0,0}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_x^l K|) \quad (\text{C.1.31})$$

$$\leq C_l 2^{-jl} \sup_{(x,y) \in S_{0,0}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_x^l K|). \quad (\text{C.1.32})$$

avec  $C_l = 4BD^2N^2\Omega$ .

Étant donnée  $\varepsilon$  la précision souhaitée pour effectuer les calculs, on choisit l'échelle  $j$  telle que  $|E^j| \leq \varepsilon$ .

**Remarque 9** – *Des résultats numériques issus de l'implémentation de cet algorithme seront dressés dans la dernière partie de la thèse.*

- *C'est de manière naturelle qu'on peut généraliser cette méthode aux dimensions  $d > 2$ . Pour cela on considère pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , la fonction  $\Phi(x) = \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_d)$ , où  $\phi$  est la fonction d'échelle solution de (C.0.24).*

## Chapitre II

# Quadratures singulières et fonctions d'échelle

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction de classe  $C^\infty$  partout sauf en un nombre fini de points où elle est singulière. Pour calculer  $I = \langle f, \phi \rangle$  la formule de subdivision uniforme (C.1.17), mise en oeuvre dans le chapitre précédent, devient inadaptée car l'erreur locale  $E_{j,k}$  estimée par (C.1.21) dépend fortement de la position du support de  $\phi_{j,k}$  par rapport aux points singuliers et du choix de la valeur de  $l$ . Pour simplifier les calculs nous supposons que la fonction  $f$  admet un seul point singulier  $p$ .

Nous commençons par un exemple introductif. Il s'agit d'une fonction  $f$  singulière en 0 de classe  $C^\infty$  en dehors de 0, vérifiant  $f(x/2) = \lambda_0 f(x) + \lambda_1$  avec  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f(x) = |x|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma < 1$  est l'exemple le plus simple avec  $\lambda_0 = 2^{-\gamma}$  et  $\lambda_1 = 0$ . Cet exemple est très intéressant car on le retrouve souvent dans les EDP, exprimant des quantités physiques.

### Exemple Introductif: Moment fractionnaire de $\phi$

**Définition 11** Soient  $\phi$  la fonction d'échelle associé à une AMR de Daubechies,  $\alpha$  un réel tel que  $0 < |\alpha| \leq 1$ , nous appelons moment fractionnaire de type  $\alpha$  de  $\phi$  la quantité

$$\mathcal{M}_\alpha = \int |x|^\alpha \phi(x) dx. \quad (\text{C.2.1})$$

### II.0.1 Algorithme de calcul

La méthode numérique de calcul de  $\mathcal{M}_\alpha$ , consiste à calculer d'abord les éléments de la suite  $\mathcal{M}_{\alpha,p} = \int |x|^\alpha \phi(x-p) dx$ . Le terme  $\mathcal{M}_{\alpha,0}$  correspond à ce qu'on cherche. La procédure consiste à calculer tous les éléments  $\mathcal{M}_{\alpha,p}$  en même temps.

En effet, la fonction d'échelle  $\phi$  a son support compact dans l'intervalle  $I = [0, 2M-1]$ , et celui de la fonction translatée  $\phi(\cdot - p)$  est dans  $I_p = [p, 2M-1+p]$ .

On note  $I_M = [-(2M - 1), 0]$ .

Deux cas sont à envisager pour la position de  $p$  par rapport à  $I_M$  :

1. Si  $p \notin I_M$ , la fonction  $h(x) = |x|^\alpha$  est  $C^\infty$  sur le support de  $\phi(\cdot - p)$  et l'intégrale  $\int |x|^\alpha \phi(x - p) dx$  peut être approchée la méthode de quadrature régulière.
2. Si  $p \in I_M$  c'est à dire que  $p \leq 0$  et  $|p| \leq 2M - 1$ , par l'équation d'échelle (A.1.9) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha,p} &= \sqrt{2} \sum_m h_m \int |x|^\alpha \phi(2x - 2p - m) dx \\ &= 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{m=0}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m} \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

et nous déduisons l'égalité suivante :

$$2^{(\alpha+\frac{1}{2})} \mathcal{M}_{\alpha,p} - \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \in I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m} = \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \notin I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m}. \quad (\text{C.2.3})$$

Comme cela est vrai pour tous les entiers  $p = -(2M - 1), \dots, 0$ , nous avons défini un système linéaire  $(2M, 2M)$  dont les inconnues sont  $\mathcal{M}_{\alpha,i}, i = -(2M - 1), \dots, 0$ .

Finalement la valeur de  $\mathcal{M}_{\alpha,0}$  obtenue en résolvant ce système est la quantité  $\mathcal{M}_\alpha$  recherchée.

Pour  $\gamma = 1/2$ ,  $L = 12$  et la fonction d'échelle de Daubechies avec  $M = 2$ , on a  $I^* = [-3, 0]$ . Et

$$\mathcal{M}_{\alpha,0} = \frac{c_1 \mathcal{M}_{\alpha,1} + c_2 \mathcal{M}_{\alpha,2} + c_3 \mathcal{M}_{\alpha,3}}{2^{\alpha+1/2} - c_0}.$$

On a

| $p$ | $\mathcal{M}_{0.5,p}$  | $\mathcal{M}_{-0.5,p}$ |
|-----|------------------------|------------------------|
| 0   | 7.81088558692139e - 01 | 1.40904896653535e + 00 |
| 1   | 1.27666004573212e + 00 | 7.86759531571634e - 01 |
| 2   | 1.62241067745042e + 00 | 6.17109963744578e - 01 |
| 3   | 1.90604234696382e + 00 | 5.24907393011114e - 01 |

Avec la même méthode, si on note

$$\mathcal{L}_p = \int \log |t| \phi(t - p) dt \quad p \in \mathbb{Z}$$

on obtient dans les mêmes conditions que ci dessus,

| $p$ | $\mathcal{L}_p$           |
|-----|---------------------------|
| 0   | $-5.63796418943492e - 01$ |
| 1   | $4.84645786592568e - 01$  |
| 2   | $9.66785586339195e - 01$  |
| 3   | $1.28963304637814e + 00$  |

## II.1 Singularités homogènes

Nous supposons au cours de cette section que la fonction  $f$  admet au point  $p$  une singularité de type  $|x - p|^\gamma$ ,  $|\gamma| < 1$ , on a donc  $f \in L^1_{loc}$ . On suppose ainsi que l'on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq C |x - p|^\gamma \quad \text{et} \\ |\partial^l f(x)| &\leq C_l |x - p|^{\gamma-l}; \quad l \geq 0. \end{aligned} \tag{C.2.4}$$

**Remarque 10** *La singularité ci dessus, qui paraît simple par sa forme, est très importante. Son étude nous ramène directement aux opérateurs associés à une équation intégrale singulière. En particulier les opérateurs de Caldéron Zygmund et la classe des  $OM_{\gamma,\gamma'}$  introduite dans la seconde partie.*

**Notation:** Pour  $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ , nous notons  $S_k^j = [k2^{-j}, (2M - 1 + k)2^{-j}]$  le support de  $\phi(2^j \cdot -k)$  et  $d_{j,k} = \inf_{t \in S_k^j} |t - p|$  la distance de  $S_k^j$  au point  $p$ .

Si  $j, k$  sont tel que  $p \notin S_k^j$ , alors l'erreur  $E_{j,k}$  issue de l'utilisation de l'équation de la subdivision uniforme (C.1.17) pour le calcul de  $\langle f, \phi(2^j \cdot -k) \rangle$  vérifie

$$|E_{j,k}| \leq C \frac{K^l}{l!} 2^{-jl} \sup_{t \in S_k^j} |f^{(l)}(t)|.$$

Cette inégalité, avec l'hypothèse (C.2.4), devient pour  $l \geq 1$

$$|E_{j,k}| \leq CK^l 2^{-jl} d_{j,k}^{\gamma-l}. \tag{C.2.5}$$

Nous remarquons que cette erreur est fortement contrôlée par la distance  $d_{j,k}$ , donc par la position de  $S_k^j$  par rapport au point singulier  $p$ . D'où la faiblesse de la subdivision (C.1.17). On va chercher une nouvelle subdivision tenant compte de la distance  $d_{j,k}$  et la nature de la singularité.

### II.1.1 Subdivision non uniforme

Le point singulier  $p$  est supposé dans  $S_0^0$ , dans le cas contraire le calcul de  $\langle f, \phi \rangle$  s'effectue par la méthode de quadrature régulière puisque  $f$  devient au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ .

En remplaçant  $\phi$ , dans  $I = \langle f, \phi \rangle$ , par son expression issue de l'équation d'échelle (A.1.9) nous nous ramenons au calcul de  $I_{1,k} = \langle f, \phi(2 \cdot -k) \rangle$ .

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \langle f, \phi(2 \cdot -k) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k I_{1,k}. \end{aligned}$$

Comme  $S_k^1$ , le support de  $\phi(2 \cdot -k)$ , est deux fois plus petit que celui de  $\phi(\cdot)$ , le calcul de  $I_{1,k}$  s'effectue selon  $d_{1,k}$ , la distance séparant  $S_k^1$  du point singulier  $p$ .

Par la méthode de quadrature régulière nous calculons les  $I_{1,k}$  pour les entiers  $k$  tels que  $d_{1,k} > d_1$ . Chose que nous ne pouvons faire pour  $I_{1,k}$ , tels que  $d_{1,k} \leq d_1$ , car nous ne contrôlons plus la régularité de  $f$  dans cette zone. Nous procédons alors par l'injection de l'équation d'échelle (A.1.9) dans l'expression de  $I_{2,k}$ , nous nous ramenons donc

En itérant ce processus de décomposition jusqu'à une échelle  $J > 0$ , nous définissons, pour une suite de réels  $d_j > 0$ , deux familles d'ensembles d'entiers  $R_j$  et  $K_j$  avec

$$R_0 = \{0\}, \quad R_j = \{k \in \mathbb{Z}; d_{j,k} \leq d_j\} \cap S_j$$

$$\text{et} \quad K_j = (\mathbb{Z} - R_j) \cap S_j,$$

où

$$k \in S_j \iff \exists m \in R_{j-1}, \text{ tel que } \text{supp}(\phi_{j,k}) \subset \text{supp}(\phi_{j-1,m}) \quad (\text{C.2.6})$$

Nous obtenons la décomposition suivante, nous l'appellerons équation de *Subdivision Non Uniforme*:

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} a_{jk} 2^j \phi(2^j t - k) + \sum_{k \in R_J} a_{Jk} 2^J \phi(2^J t - k) \quad (\text{C.2.7})$$

où les  $a_{jk}$  sont calculés par un algorithme de subdivision qui se concentre autour du point  $p$  et dont nous donnerons les détails dans le prochain paragraphe. L'échelle  $J$  que nous nommerons *échelle d'arrêt* sera déterminée en fonction de la précision  $\varepsilon$  exigée pour l'évaluation de  $I$ .

Voici une figure explicative du déroulement des premiers niveaux de l'algorithme de la subdivision non uniforme. Nous considérons la fonction d'échelle de Daubechies avec  $M = 3$ . Supposons que le point singulier est  $p = 2$  et choisissons  $d_j \simeq 2^{-j}$ . Nous représentons les fonctions  $\phi_{j,k}$ ,  $k \in R_j$  pour  $j = 0, \dots, 3$ ,

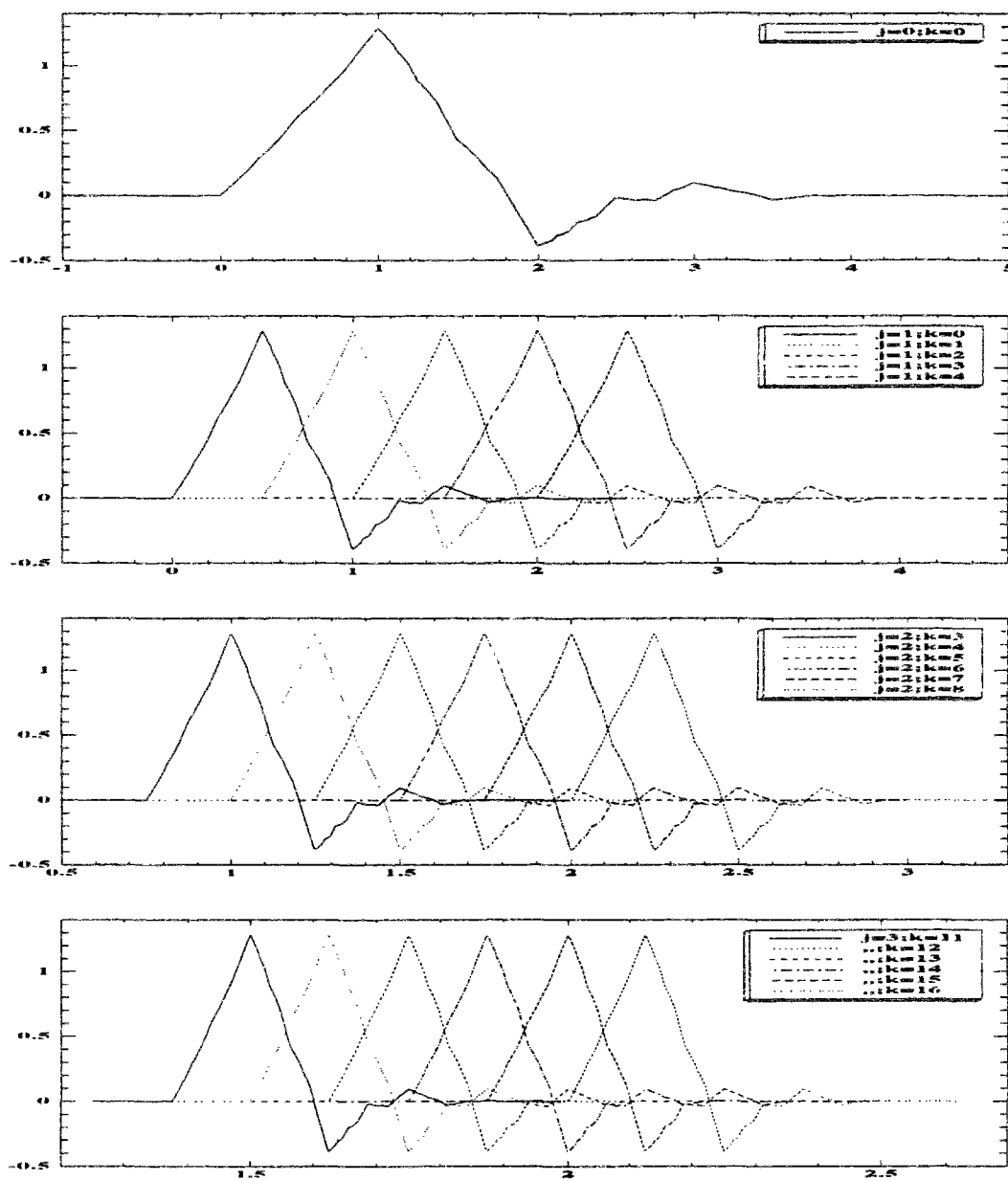


FIG. II.1 – Étapes  $j = 0, 1, 2, 3$  de la subdivision non uniforme pour  $\phi_3$  avec  $d_j \simeq 2^{-j}$  et  $p = 2$ .

### II.1.2 Algorithme de calcul de $a_{j,k}$

Revenons à la définition de  $S_j$  (C.2.6) et notons  $Z_k^j$  l'ensemble des entiers  $m$  vérifiant (C.2.6). On a alors, pour tout  $k \in S_j$

$$s_{j,k} = \sum_{m \in Z_k^j} c_m s_{j-1,m}. \quad (\text{C.2.8})$$

Le cardinal de  $Z_k^j$  vaut au plus  $\frac{N}{2}$ .

Soit  $k \in R_j \cap K_j$ , notons  $\tilde{Z}_k^j$  l'ensemble des entiers  $m \in R_{j-1}$  tels que  $\text{supp} \phi_{j,k} \subset \text{supp} \phi_{j-1,m}$ . Vu le caractère non uniforme de la subdivision, l'égalité de  $Z_k^j$  et  $\tilde{Z}_k^j$  n'est pas assurée pour tout couple  $(j,k)$ , par conséquent  $a_{j,k}$  et  $s_{j,k}$  ne sont pas forcément égaux. Avec un choix judicieux de la suite  $d_j$  nous montrons ci dessous qu'on a l'égalité pour certains  $k$ .

**Théorème 3** *Si la suite  $d_j$  est décroissante alors  $\forall k \in R_j$  on a  $a_{j,k} = s_{j,k}$ .*

En effet, supposons qu'il existe un entier  $k \in R_j$  tel que  $a_{j,k} \neq s_{j,k}$ . Comme  $k \in R_j$  alors par définition de  $R_j$  on a

$$d_{j,k} \leq d_j. \quad (\text{C.2.9})$$

En plus,  $a_{j,k} \neq s_{j,k}$  est équivalent à dire que  $\phi_{j,k}$  est partiellement déterminée par la subdivision, c'est à dire qu'il existe un entier  $\bar{k} \in K_{j-1}$  tel que

$$\text{supp}(\phi_{j,k}) \subset \text{supp}(\phi_{j-1,\bar{k}}).$$

Cela implique

$$d_{j-1,\bar{k}} \leq d_{j,k}. \quad (\text{C.2.10})$$

Or  $k \in K_{j-1}$  est équivalent à  $d_{j-1,\bar{k}} > d_{j-1}$ . Avec (C.2.10) on a

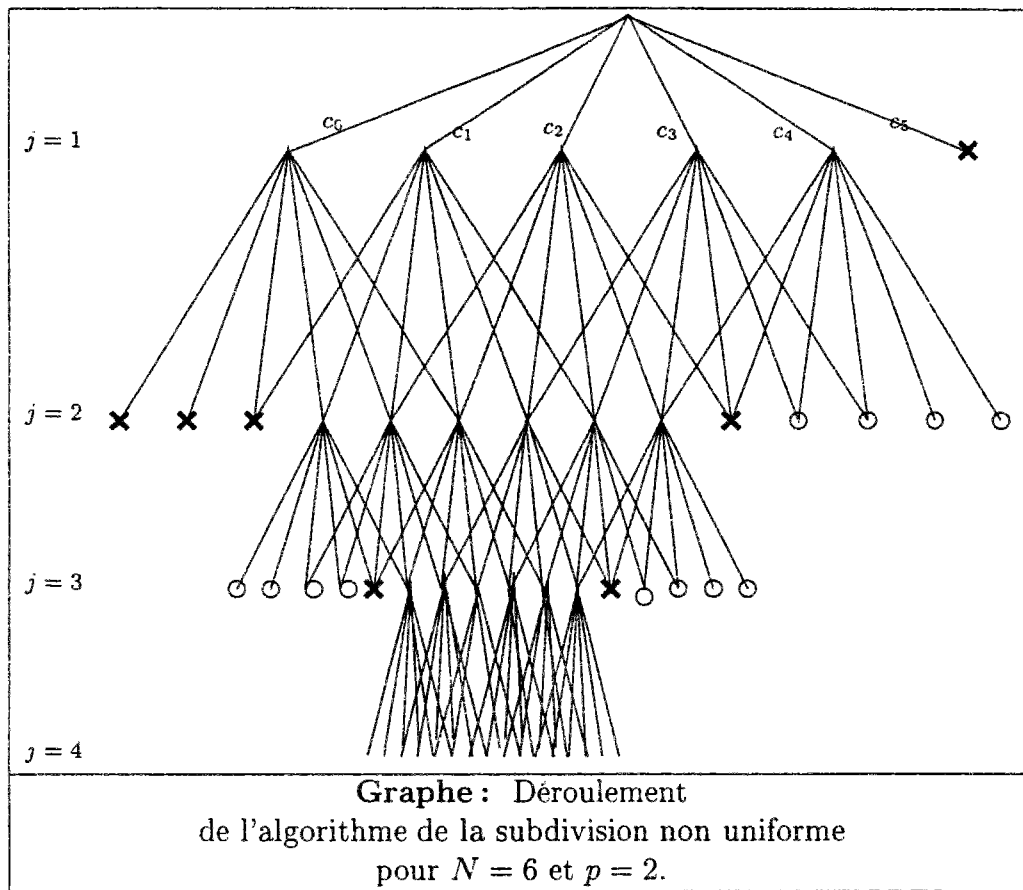
$$d_{j-1} < d_{j-1,\bar{k}} \leq d_{j,k}.$$

Ceci associé avec (C.2.9) nous donne

$$d_{j-1} < d_{j-1,\bar{k}} \leq d_{j,k} \leq d_j,$$

ce qui implique que  $d_{j-1} < d_j$ . On a donc une contradiction avec le fait que la suite  $d_j$  est supposée décroissante. On en déduit le théorème.

La figure, ci dessous, représente les premières étapes du déroulement de l'algorithme de la subdivision non uniforme. Elle est donnée sous forme d'un graphe dont les sommets sont les  $a_{j,k}$  et les fils de chaque sommet sont les coefficients du filtre  $(c_i)_{i=0,\dots,N-1}$ .



L'algorithme de calcul des coefficients  $a_{j,k}$  se présente donc comme suit :

- A l'échelle du départ  $j = 0$ , nous avons seulement un seul sommet  $a_{0,0}$  supposé égal à 1.
- Pour tout  $0 \leq j < J$  et  $k \in R_j$ . Une fois le coefficient  $a_{j,k}$ , qui représente le  $k^{\text{ième}}$  sommet du niveau  $j$ , calculé. Il est stocké et constituera l'outil de base pour le calcul des  $a_{j+1,m}$ ,  $m \in R_{j+1} \cap K_{j+1}$ .
- Au niveau  $j$ , notons  $N_j^s$  le nombre de sommet, le nombre de fils qui est  $N_j^a$  vaut donc  $NN_j^s$ . Dans l'ordre le fils d'indice  $f$  est  $c_{f_N}$ ,  $f_N = f \bmod N$ .
- Nous calculons les  $a_{j,k}$ ,  $k, k = 0, \dots, N_j^s = 2N_{j-1}^s + N - 2$ , simultanément au fur et à mesure que nous parcourons les fils des sommets de l'échelle  $j - 1$  :

*Le fils d'indice  $f$ ,  $f = 0, \dots, N_{j-1}^a$ , qui est  $c_{f_N}$  où  $f_N = f \bmod N$ , est issu du sommet père  $a_{j-1,p}$  avec  $p = f \text{ div } N$ . La quantité produit  $\tilde{a}_{j,k} = c_{f_N} a_{j-1,p}$  une fois calculée est rajoutée à  $a_{j,k}$ ,  $k = 2p + f_N$ . Le calcul des  $a_{j,k}$  est terminé*

*quand tout les fils du niveau  $j - 1$  seront parcourus. De la même manière on calcule  $a_{j+1,k}$  et ainsi de suite jusqu'à l'échelle  $J$ .*

Voici les résultats de l'implémentation de cet algorithme,  $\phi$  est la fonction d'échelle de Daubechies avec  $N = 6$ , le point singulier  $p = 2$  et pour la distance critique celle qui est choisit dans le théorème 6.

$$j = 1, Na_0 = 6, Ns_1 = 6$$

| $i_f$ | $i_p$ | $i_N$ | $k$ | $h_{i_N}$ | $a_{0,i_p}$ | $\bar{a}_{1,k}$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------------|-----------------|
| 0     | 0     | 0     | 0*  | 3.3e-01   | 1.0e+00     | 3.3e-01*        |
| 1     | 0     | 1     | 1*  | 8.1e-01   | 1.0e+00     | 8.1e-01*        |
| 2     | 0     | 2     | 2*  | 4.6e-01   | 1.0e+00     | 4.6e-01*        |
| 3     | 0     | 3     | 3*  | -1.4e-01  | 1.0e+00     | -1.4e-01*       |
| 4     | 0     | 4     | 4*  | -8.5e-02  | 1.0e+00     | -8.5e-02*       |
| 5     | 0     | 5     | 5*  | 3.5e-02   | 1.0e+00     | 3.5e-02*        |

$$j = 2, Na_1 = 30, Ns_2 = 14$$

| $i_f$ | $i_p$ | $i_N$ | $k$ | $h_{i_N}$ | $a_{1,i_p}$ | $\bar{a}_{2,k}$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------------|-----------------|
| 0     | 0     | 0     | 0*  | 3.3e-01   | 3.3e-01     | 1.1e-01*        |
| 1     | 0     | 1     | 1*  | 8.1e-01   | 3.3e-01     | 2.7e-01*        |
| 2     | 0     | 2     | 2   | 4.6e-01   | 3.3e-01     | 1.5e-01         |
| 3     | 0     | 3     | 3   | -1.4e-01  | 3.3e-01     | -4.5e-02        |
| 4     | 0     | 4     | 4   | -8.5e-02  | 3.3e-01     | -2.8e-02        |
| 5     | 0     | 5     | 5   | 3.5e-02   | 3.3e-01     | 1.2e-02         |
| 6     | 1     | 0     | 2*  | 3.3e-01   | 8.1e-01     | 4.2e-01*        |
| 7     | 1     | 1     | 3*  | 8.1e-01   | 8.1e-01     | 6.1e-01*        |
| 8     | 1     | 2     | 4   | 4.6e-01   | 8.1e-01     | 3.4e-01         |
| 9     | 1     | 3     | 5   | -1.4e-01  | 8.1e-01     | -9.7e-02        |
| 10    | 1     | 4     | 6   | -8.5e-02  | 8.1e-01     | -6.9e-02        |
| 11    | 1     | 5     | 7   | 3.5e-02   | 8.1e-01     | 2.8e-02         |
| 12    | 2     | 0     | 4*  | 3.3e-01   | 4.6e-01     | 5.0e-01*        |
| 13    | 2     | 1     | 5*  | 8.1e-01   | 4.6e-01     | 2.7e-01*        |
| 14    | 2     | 2     | 6   | 4.6e-01   | 4.6e-01     | 1.4e-01         |
| 15    | 2     | 3     | 7   | -1.4e-01  | 4.6e-01     | -3.4e-02        |
| 16    | 2     | 4     | 8   | -8.5e-02  | 4.6e-01     | -3.9e-02        |
| 17    | 2     | 5     | 9   | 3.5e-02   | 4.6e-01     | 1.6e-02         |
| 18    | 3     | 0     | 6*  | 3.3e-01   | -1.4e-01    | 9.5e-02*        |
| 19    | 3     | 1     | 7*  | 8.1e-01   | -1.4e-01    | -1.4e-01*       |
| 20    | 3     | 2     | 8   | 4.6e-01   | -1.4e-01    | -1.0e-01        |
| 21    | 3     | 3     | 9   | -1.4e-01  | -1.4e-01    | 3.4e-02         |
| 22    | 3     | 4     | 10  | -8.5e-02  | -1.4e-01    | 1.2e-02         |
| 23    | 3     | 5     | 11  | 3.5e-02   | -1.4e-01    | -4.8e-03        |
| 24    | 4     | 0     | 8*  | 3.3e-01   | -8.5e-02    | -1.3e-01*       |
| 25    | 4     | 1     | 9*  | 8.1e-01   | -8.5e-02    | -3.5e-02*       |
| 26    | 4     | 2     | 10* | 4.6e-01   | -8.5e-02    | -2.8e-02*       |
| 27    | 4     | 3     | 11* | -1.4e-01  | -8.5e-02    | 6.8e-03*        |
| 28    | 4     | 4     | 12* | -8.5e-02  | -8.5e-02    | 7.3e-03*        |
| 29    | 4     | 5     | 13* | 3.5e-02   | -8.5e-02    | -3.0e-03*       |

$$j = 3, Na_2 = 36, Ns_3 = 16$$

| $i_f$ | $i_p$ | $i_N$ | $k$ | $h_{i_N}$ | $a_{2,i_p}$ | $\bar{a}_{3,k}$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------------|-----------------|
| 0     | 0     | 0     | 0*  | 3.3e-01   | 1.1e-01     | 3.7e-02*        |
| 1     | 0     | 1     | 1*  | 8.1e-01   | 1.1e-01     | 8.9e-02*        |
| 2     | 0     | 2     | 2   | 4.6e-01   | 1.1e-01     | 5.1e-02         |
| 3     | 0     | 3     | 3   | -1.4e-01  | 1.1e-01     | -1.5e-02        |
| 4     | 0     | 4     | 4   | -8.5e-02  | 1.1e-01     | -9.5e-03        |
| 5     | 0     | 5     | 5   | 3.5e-02   | 1.1e-01     | 3.9e-03         |
| 6     | 1     | 0     | 2*  | 3.3e-01   | 2.7e-01     | 1.4e-01*        |
| 7     | 1     | 1     | 3*  | 8.1e-01   | 2.7e-01     | 2.0e-01*        |
| 8     | 1     | 2     | 4   | 4.6e-01   | 2.7e-01     | 1.1e-01         |
| 9     | 1     | 3     | 5   | -1.4e-01  | 2.7e-01     | -3.2e-02        |
| 10    | 1     | 4     | 6   | -8.5e-02  | 2.7e-01     | -2.3e-02        |
| 11    | 1     | 5     | 7   | 3.5e-02   | 2.7e-01     | 9.5e-03         |
| 12    | 2     | 0     | 4*  | 3.3e-01   | 4.2e-01     | 2.5e-01*        |
| 13    | 2     | 1     | 5*  | 8.1e-01   | 4.2e-01     | 3.1e-01*        |
| 14    | 2     | 2     | 6   | 4.6e-01   | 4.2e-01     | 1.7e-01         |
| 15    | 2     | 3     | 7   | -1.4e-01  | 4.2e-01     | -4.7e-02        |
| 16    | 2     | 4     | 8   | -8.5e-02  | 4.2e-01     | -3.6e-02        |
| 17    | 2     | 5     | 9   | 3.5e-02   | 4.2e-01     | 1.5e-02         |
| 18    | 3     | 0     | 6*  | 3.3e-01   | 6.1e-01     | 3.7e-01*        |
| 19    | 3     | 1     | 7*  | 8.1e-01   | 6.1e-01     | 4.4e-01*        |
| 20    | 3     | 2     | 8   | 4.6e-01   | 6.1e-01     | 2.4e-01         |
| 21    | 3     | 3     | 9   | -1.4e-01  | 6.1e-01     | -6.7e-02        |
| 22    | 3     | 4     | 10  | -8.5e-02  | 6.1e-01     | -5.2e-02        |
| 23    | 3     | 5     | 11  | 3.5e-02   | 6.1e-01     | 2.1e-02         |
| 24    | 4     | 0     | 8*  | 3.3e-01   | 5.0e-01     | 4.1e-01*        |
| 25    | 4     | 1     | 9*  | 8.1e-01   | 5.0e-01     | 3.3e-01*        |
| 26    | 4     | 2     | 10  | 4.6e-01   | 5.0e-01     | 1.8e-01         |
| 27    | 4     | 3     | 11  | -1.4e-01  | 5.0e-01     | -4.6e-02        |
| 28    | 4     | 4     | 12  | -8.5e-02  | 5.0e-01     | -4.2e-02        |
| 29    | 4     | 5     | 13  | 3.5e-02   | 5.0e-01     | 1.7e-02         |
| 30    | 5     | 0     | 10* | 3.3e-01   | 2.7e-01     | 2.7e-01*        |
| 31    | 5     | 1     | 11* | 8.1e-01   | 2.7e-01     | 1.8e-01*        |
| 32    | 5     | 2     | 12* | 4.6e-01   | 2.7e-01     | 8.4e-02*        |
| 33    | 5     | 3     | 13* | -1.4e-01  | 2.7e-01     | -2.0e-02*       |
| 34    | 5     | 4     | 14* | -8.5e-02  | 2.7e-01     | -2.3e-02*       |
| 35    | 5     | 5     | 15* | 3.5e-02   | 2.7e-01     | 9.6e-03*        |

$$j = 4, Na_3 = 36, Ns_4 = 16$$

| $i_f$ | $i_p$ | $i_N$ | $k$ | $h_{i_N}$ | $a_{3,i_p}$ | $\bar{a}_{4,k}$ |
|-------|-------|-------|-----|-----------|-------------|-----------------|
| 0     | 0     | 0     | 0*  | 3.3e-01   | 3.7e-02     | 1.2e-02*        |
| 1     | 0     | 1     | 1*  | 8.1e-01   | 3.7e-02     | 3.0e-02*        |
| 2     | 0     | 2     | 2   | 4.6e-01   | 3.7e-02     | 1.7e-02         |
| 3     | 0     | 3     | 3   | -1.4e-01  | 3.7e-02     | -5.0e-03        |
| 4     | 0     | 4     | 4   | -8.5e-02  | 3.7e-02     | -3.1e-03        |
| 5     | 0     | 5     | 5   | 3.5e-02   | 3.7e-02     | 1.3e-03         |
| 6     | 1     | 0     | 2*  | 3.3e-01   | 8.9e-02     | 4.7e-02*        |
| 7     | 1     | 1     | 3*  | 8.1e-01   | 8.9e-02     | 6.7e-02*        |
| 8     | 1     | 2     | 4   | 4.6e-01   | 8.9e-02     | 3.8e-02         |
| 9     | 1     | 3     | 5   | -1.4e-01  | 8.9e-02     | -1.1e-02        |
| 10    | 1     | 4     | 6   | -8.5e-02  | 8.9e-02     | -7.6e-03        |
| 11    | 1     | 5     | 7   | 3.5e-02   | 8.9e-02     | 3.1e-03         |
| 12    | 2     | 0     | 4*  | 3.3e-01   | 1.4e-01     | 8.5e-02*        |
| 13    | 2     | 1     | 5*  | 8.1e-01   | 1.4e-01     | 1.0e-01*        |
| 14    | 2     | 2     | 6   | 4.6e-01   | 1.4e-01     | 5.7e-02         |
| 15    | 2     | 3     | 7   | -1.4e-01  | 1.4e-01     | -1.6e-02        |
| 16    | 2     | 4     | 8   | -8.5e-02  | 1.4e-01     | -1.2e-02        |
| 17    | 2     | 5     | 9   | 3.5e-02   | 1.4e-01     | 4.9e-03         |
| 18    | 3     | 0     | 6*  | 3.3e-01   | 2.0e-01     | 1.2e-01*        |
| 19    | 3     | 1     | 7*  | 8.1e-01   | 2.0e-01     | 1.5e-01*        |
| 20    | 3     | 2     | 8   | 4.6e-01   | 2.0e-01     | 8.1e-02         |
| 21    | 3     | 3     | 9   | -1.4e-01  | 2.0e-01     | -2.2e-02        |
| 22    | 3     | 4     | 10  | -8.5e-02  | 2.0e-01     | -1.7e-02        |
| 23    | 3     | 5     | 11  | 3.5e-02   | 2.0e-01     | 7.1e-03         |
| 24    | 4     | 0     | 8*  | 3.3e-01   | 2.5e-01     | 1.7e-01*        |
| 25    | 4     | 1     | 9*  | 8.1e-01   | 2.5e-01     | 1.8e-01*        |
| 26    | 4     | 2     | 10  | 4.6e-01   | 2.5e-01     | 1.0e-01         |
| 27    | 4     | 3     | 11  | -1.4e-01  | 2.5e-01     | -2.7e-02        |
| 28    | 4     | 4     | 12  | -8.5e-02  | 2.5e-01     | -2.2e-02        |
| 29    | 4     | 5     | 13  | 3.5e-02   | 2.5e-01     | 9.0e-03         |
| 30    | 5     | 0     | 10* | 3.3e-01   | 3.1e-01     | 2.0e-01*        |
| 31    | 5     | 1     | 11* | 8.1e-01   | 3.1e-01     | 2.2e-01*        |
| 32    | 5     | 2     | 12* | 4.6e-01   | 3.1e-01     | 1.2e-01*        |
| 33    | 5     | 3     | 13* | -1.4e-01  | 3.1e-01     | -3.3e-02*       |
| 34    | 5     | 4     | 14* | -8.5e-02  | 3.1e-01     | -2.6e-02*       |
| 35    | 5     | 5     | 15* | 3.5e-02   | 3.1e-01     | 1.1e-02*        |

Les lignes où les valeurs de  $k$  et  $\bar{a}_{j,k}$  sont  
suivies d'une étoile correspondent à la valeur finale de  $a_{j,k}$ .

### II.1.3 Propriétés de la subdivision non-uniforme

Par construction, le résultat du théorème 3 n'est pas vrai pour  $K_j$ . Nous notons  $C_j$  le sous ensemble de  $K_j$  constitué des entiers  $k$  pour lesquels on a l'égalité suivante :

$$a_{j,k} = s_{j,k}. \quad (\text{C.2.11})$$

et  $P_j = K_j/C_j$  le complémentaire de  $C_j$  dans  $K_j$ .

L'interprétation graphique nous confirme que  $C_j$  est constitué des entiers  $k$  tels que  $\phi_{j,k}$  est complètement déterminée par la subdivision; c'est à dire que l'ensemble  $\tilde{Z}_{j,k}$  associé, contient tout les entiers  $m$  vérifiant  $\text{supp}\phi_{j,k} \subset \text{supp}\phi_{j-1,m}$  donc  $\tilde{Z}_{j,k} = Z_{j,k}$ . Alors que l'ensemble  $P_j$ , quand à lui, est constitué des entiers  $k$  tels que la fonction  $\phi_{j,k}$  correspondante est partiellement déterminée, il s'agit des entiers  $k \in K_j$  pour lesquels, il existe un entier  $m \in K_{j-1}$  vérifiant  $\text{supp}\phi_{j-1,m} \subset \text{supp}\phi_{j,k}$  et  $m \notin \tilde{Z}_{j,k}$ .

Dans le graphe précédent, les éléments de  $P_j$  sont signalés par un cercle et ceux de  $C_j$  par une croix.

On note  $\text{card}(A)$  le cardinal d'une partie  $A$  finie de  $\mathbb{N}$ , on énonce les résultats suivants :

**Lemme 8**  $\forall j = 1, \dots, J \quad \text{card}(P_j) \leq 2(N - 2).$

En effet, les éventuelles décompositions de  $\phi_{j-1,k^+}$  et  $\phi_{j-1,k^-}$  où  $k^+ = (\max R_{j-1}) + 1$  et  $k^- = (\min R_{j-1}) - 1$  n'affectent au plus que  $N - 2$  éléments de  $S_j$  chacune. Nous déduisons donc que le nombre maximal de fonctions associées à  $R_j$  partiellement déterminées est au plus  $2(N - 2)$ .

**Lemme 9** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\sum_{j=1}^J (2^{-j} \text{card}(C_j) + 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j)) \leq C. \quad (\text{C.2.12})$$

En effet, pour chaque échelle  $j = 1, \dots, J$  nous avons l'égalité suivante

$$\text{card}(C_j) + \text{card}(P_j) + \text{card}(R_j) = 2\text{card}(R_{j-1}) + N - 2.$$

Alors

$$\text{card}(C_j) = 2\text{card}(R_{j-1}) - \text{card}(R_j) + (N - 2 - \text{card}(P_j)),$$

en multipliant par  $2^{-j}$  de part et d'autre cette égalité, nous obtenons pour  $j = 1, \dots, J$

$$2^{-j} \text{card}(C_j) = 2^{-(j-1)} \text{card}(R_{j-1}) - 2^{-j} \text{card}(R_j) + 2^{-j} (N - 2 - \text{card}(P_j)).$$

En faisant la somme des  $J$  égalités ci dessus on obtient

$$\sum_{j=1}^J 2^{-j} \text{card}(C_j) = 1 - \text{card}(R_J) 2^{-J} + \sum_{j=1}^J 2^{-j} (N - 2 - \text{card}(P_j))$$

on ajoute la quantité

$$\sum_{j=1}^J 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j)$$

à chacun des termes de l'égalité ci dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J (2^{-j} \text{card}(C_j) + 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j)) \\ = 1 - 2^{-J} \text{card}(R_J) + \sum_{j=1}^J 2^{-j} (N - 2 + \text{card}(P_j)) \end{aligned}$$

or d'après le lemme 8 on a  $\text{card}(P_j) \leq 2(N - 2)$ , alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J (2^{-j} \text{card}(C_j) + 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j)) \\ \leq 1 - 2^{-J} \text{card}(R_J) + 3(N - 2) \sum_{j=1}^J 2^{-j} \\ \leq 1 - 2^{-J} \text{card}(R_J) + 6(N - 2)(1 - 2^{-J}) \end{aligned}$$

Or

$$\text{card}(R_J) \leq \frac{d_J + 22^{-J}N}{2^{-J}N}$$

ce qui implique que  $2^{-J} \text{card}(R_J) \leq \frac{d_J + 22^{-J}N}{N}$ . Puisque la suite  $d_j$  est borné car elle est décroissante minorée par 0 donc convergente, alors  $2^{-J} \text{card}(R_J)$  est fini. Enfin la suite positive  $C_J = 1 - 2^{-J} \text{card}(R_J) + 4(N - 2)(1 - 2^{-J})$  est convergente. Il existe donc  $C > 0$  telle que

$$\sum_{j=1}^J (2^{-j} \text{card}(C_j) + 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j)) \leq C.$$

ce qui termine la preuve du lemme.

**Théorème 4** *Il existe une constante  $D > 0$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, J$  on a :*

$$|a_{j,k}| \leq \begin{cases} HD2^{-(j-1)} & \text{quand } k \in P_j \\ D2^{-j} & \text{quand } k \in C_j \end{cases}$$

**Démonstration :**

D'une part, les fonctions  $\phi_{j,k}$  associées à  $C_j$  sont par définition complètement déterminées. Nous avons :

$$a_{jm} = s_{jm} = \langle 2^{\frac{n}{2}} \phi(x), \tilde{\phi}(2^j x - m) \rangle \quad \forall m \in C_j$$

donc

$$\begin{aligned} |a_{jm}| &\leq \int |\phi(x)| \left| \tilde{\phi}(2^j x - m) \right| dx \\ &\leq 2^{-j} \int |\phi(x)| \left| \tilde{\phi}(x) \right| dx \\ &\leq D 2^{-j} \end{aligned} \tag{C.2.13}$$

où  $D = \|\phi\|_{\infty} \|\tilde{\phi}\|_1$ .

D'autre part, pour  $k \in P_j$  nous avons :

$$a_{j,k} = \sum_{m \in \tilde{Z}_{j-1,k}} c_m a_{j-1,m}.$$

Alors on a

$$|a_{j,k}| \leq \sum_{m \in \tilde{Z}_{j-1,k}} |c_m| |a_{j-1,m}|. \tag{C.2.14}$$

Or pour tout  $m \in \tilde{Z}_{j-1,k}$  nous avons l'égalité  $a_{j-1,m} = s_{j-1,m}$  et de la même manière que (C.2.13) nous montrons que

$$|a_{j-1,m}| \leq D 2^{-(j-1)}$$

On déduit alors de (C.2.14) que

$$|a_{j,k}| \leq H D 2^{-(j-1)} \quad \forall k \in P_j$$

où  $H = \sum_{m=1}^N |c_m|$ .

**Théorème 5** *Il existe une constante  $A > 0$  indépendante de  $J$  telle que*

$$A_J = \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} |a_{jm}| \leq A.$$

En effet, nous avons

$$K_j = C_j \cup P_j.$$

Alors on a

$$\sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} |a_{jm}| \leq \sum_{j=1}^J \mathcal{C}_j + \mathcal{P}_j \quad (\text{C.2.15})$$

où

$$\mathcal{C}_j = \sum_{m \in C_j} |a_{jm}|, \quad \mathcal{P}_j = \sum_{m \in P_j} |a_{jm}|.$$

Du théorème 4 ci dessus nous déduisons que, d'une part :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_j &\leq D \sum_{m \in C_j} 2^{-j} \\ &\leq D 2^{-j} \text{card}(C_j). \end{aligned} \quad (\text{C.2.16})$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j &\leq HD \sum_{m \in P_j} 2^{-(j-1)} \\ &\leq HD 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j). \end{aligned} \quad (\text{C.2.17})$$

De (C.2.15), (C.2.16) et (C.2.17) nous déduisons enfin l' inégalité suivante :

$$|a_{jm}| \leq \bar{D} \sum_{j=1}^J (2^{-j} \text{card}(C_j) + 2^{-(j-1)} \text{card}(P_j))$$

où  $\bar{D} = \sup(D, HD)$ .

Et on conclut avec le lemme 9 que

$$A_J \leq A$$

avec  $A = \bar{D}C$ .

## II.2 Analyse de l'erreur de la quadrature

La méthode de quadrature que nous proposons consiste à injecter (C.2.7) dans  $I$ , ce qui revient à approximer  $I$  de la manière suivante

$$I = \sum_{j=1, \dots, J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} \sum_{i=0, \dots, l-1} \alpha_i^l f(x_i^{j,k}) + E_J, \quad (\text{C.2.18})$$

où le degré  $l = l(j)$ ,  $x_i^{j,k} = (i+1)\frac{N-1}{l}$  et les poids  $\alpha_i^l$  sont donnés dans l'annexe 1.

L'erreur globale  $E_J$  est la somme de l'erreur principale  $E_J^1$  et l'erreur d'arrêt  $E_J^2$  données respectivement par :

$$E_J^1 = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} a_{j,k} E_{j,k}. \quad (\text{C.2.19})$$

$$E_J^2 = \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J < f, \phi(2^J \cdot -k) >, \quad (\text{C.2.20})$$

où  $E_{j,k}$  est l'erreur locale à l'échelle  $j$  vérifiant (C.2.5).

**Échelle d'arrêt :** Pour déterminer l'échelle d'arrêt  $J$ , on estime l'erreur d'arrêt  $E_J^2$  par :

$$\begin{aligned} |E_J^2| &= \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J < f, \phi(2^J \cdot -k) > \\ &\leq DH 2^{-J} \sum_{k \in R_J} 2^J | < f, \phi(2^J \cdot -k) > | \\ &\leq DH \left( \sup \left( \sum_{k \in R_J} |\phi(\cdot - k)| \right) \right) \int_{|t-p| < d_J + N 2^{-J}} |f(t)| dt \\ &\leq CR 2^{-(\gamma+1)J}, \end{aligned}$$

où la constante  $R$  ne dépend que de la fonction  $\phi$ . Puisque  $\gamma > -1$ , si on choisit

$$J > -\frac{\ln_2(\varepsilon/2R)}{\gamma+1} \quad (\text{C.2.21})$$

alors :

$$\begin{aligned} |E_J^2| &\leq R 2^{-(\gamma+1)J} \\ &\leq R 2^{(\gamma+1)\frac{\ln_2(\varepsilon/2R)}{\gamma+1}} \\ &\leq \varepsilon/2. \end{aligned} \quad (\text{C.2.22})$$

**Erreur et choix de  $d_j$  :** Puisque  $\gamma < l(j)$  alors on déduit de (C.2.5) et de la définition de  $K_j$  que

$$|E_{j,k}| \leq CK^{l(j)} d_j^{\gamma-l(j)} 2^{-jl(j)}, \quad (\text{C.2.23})$$

pour tout  $k \in K_j$ .

De cette écriture, on remarque qu'un choix judicieux de la distance critique  $d_j$  et du nombre de points  $l(j)$  pour  $j = 1, \dots, J$  s'impose pour  $|E_J|$ . Dans un premier temps nous fixons  $l(j) = l$  pour  $j = 1, \dots, J$ , en imposant des conditions sur  $d_j$  on a

**Théorème 6** Soient  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon$  la précision souhaitée. Si la suite  $(d_j)_{j=1, \dots, J}$  vérifie

$$d_j \leq d_{j-1} \quad (\text{C.2.24})$$

$$d_j \geq (2^j \varepsilon^{1/l})^{\frac{l}{l-1}} \quad (\text{C.2.25})$$

alors  $|E_J| \leq \varepsilon$ .

**Démonstration :** En utilisant (C.2.19) et (C.2.23) on a

$$|E_J^1| \leq CK^l \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} |a_{jm}| d_j^{\gamma-l} 2^{-jl}.$$

Comme  $d_j$  vérifie (C.2.25) on a alors

$$\begin{aligned} |E_J^1| &\leq C \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} |a_{jm}| 2^{-jl} (2^j \varepsilon^{1/l})^l \\ &\leq C \varepsilon A_J. \end{aligned}$$

Le lemme (5) nous confirme qu'il existe une constante  $A$  telle que

$$A_J \leq A$$

alors,

$$|E_J^1| = O(\varepsilon) \quad (\text{C.2.26})$$

de (C.2.22), (C.2.26), on déduit

$$|E_J| \leq |E_J^1| + |E_J^2| \leq \varepsilon,$$

d'où le résultat du théorème.

**Résultats numériques :** Nous avons implémenté cette méthode sous les hypothèses du théorème ci dessus pour les fonctions  $f(x) = \sqrt{|x-2|}$  et  $g(x) = \log(x)$  et  $\phi$  la fonction d'échelle associée à l'ondelette de Daubechies à  $M$  moments nuls où  $M = 2, 3, 4$  (par souci de clarté on notera  $\phi_M$  au lieu de  $\phi$ ). La valeur de  $l$  est fixée à 8 et  $\varepsilon$  vaut  $10^{-i}$  où  $i = 2, \dots, 12$ .

On donnera pour chacune des fonctions  $f$  et  $g$  trois classes de courbes. La première est la représentation des coefficients d'approximation ( $f_k^{10} = \sqrt{2^{10}} \langle f, \phi_M(2^{10} \cdot -k) \rangle$ ,  $g_k^{10} = \sqrt{2^{10}} \langle g, \phi_M(2^{10} \cdot -k) \rangle$ ) calculés par la quadrature ci dessus, les abscisses sont les  $x_k = k 2^{-10}$ ,  $k = 0, \dots, 42^{10}$ . La seconde classe représente l'erreur du calcul et la troisième donne le temps CPU en 1/60sec nécessaire pour calculer ( $\langle f, \phi_M \rangle$  et  $\langle g, \phi_M \rangle$ ) en fonction de  $\varepsilon$ . L'implémentation du programme est faite en langage C, il est exécuté sur SUN SPARC 20.

Pour  $\varepsilon = 10^{-8}$  on a obtenu les résultats suivants pour les trois fonctions d'échelle  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$ .

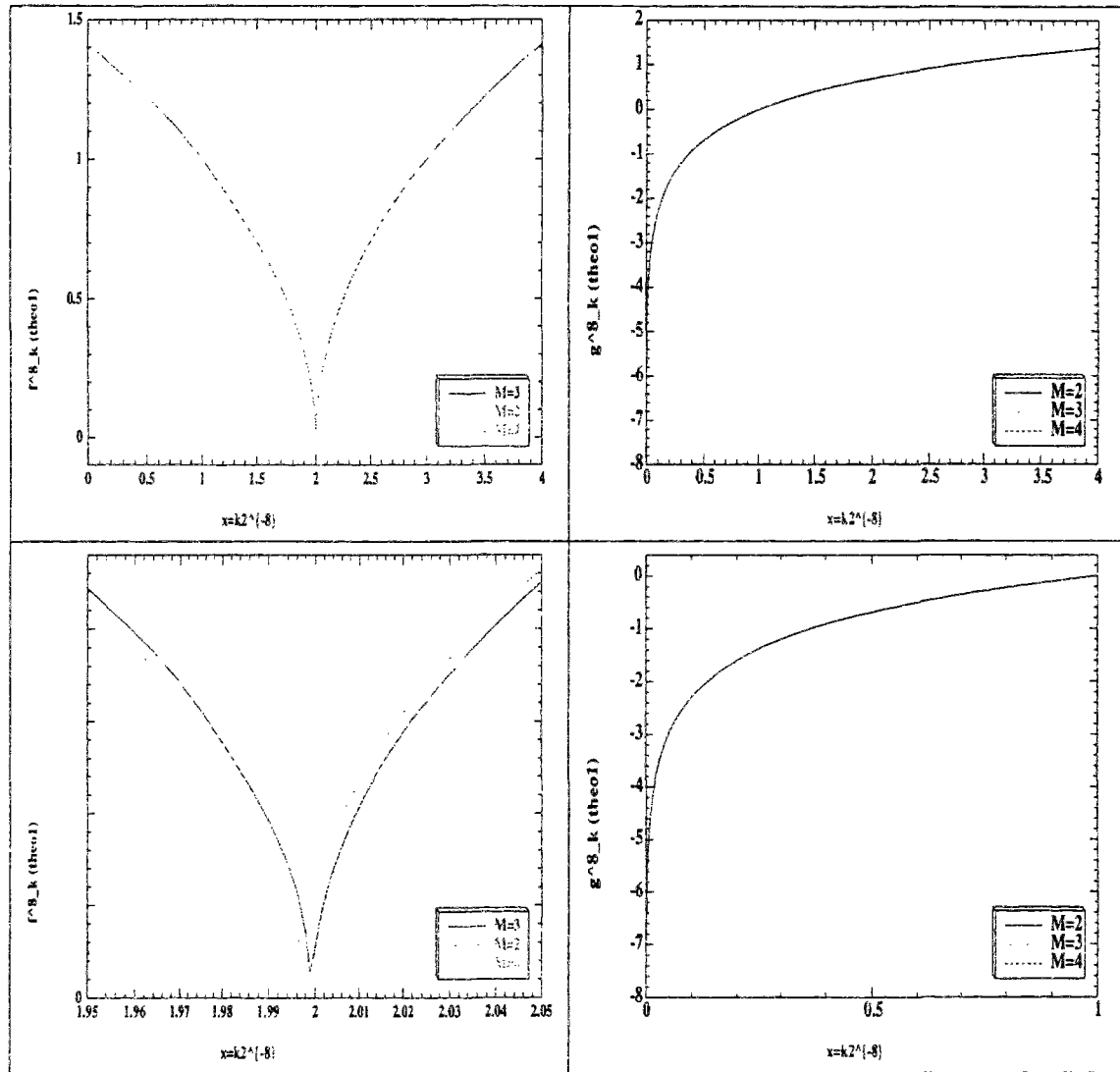


FIG. II.2 -  $f_k^8 = 2^4 \langle f, \phi_M(2^8 \cdot -k) \rangle$  et  $g_k^8 = 2^4 \langle g, \phi_M(2^8 \cdot -k) \rangle$  pour  $M = 2, 3, 4$  et  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

Étant donnée une fonction  $h$ , on note  $E^n(h) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |2^n \langle h, \phi_M(2^n \cdot -k) \rangle - h k 2^{-n}|$ .

Pour  $M = 3$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$  voici  $E^n(f)$  et  $E^n(g)$  (calculés en double précision) en fonction de  $n = 4, \dots, 8$ .

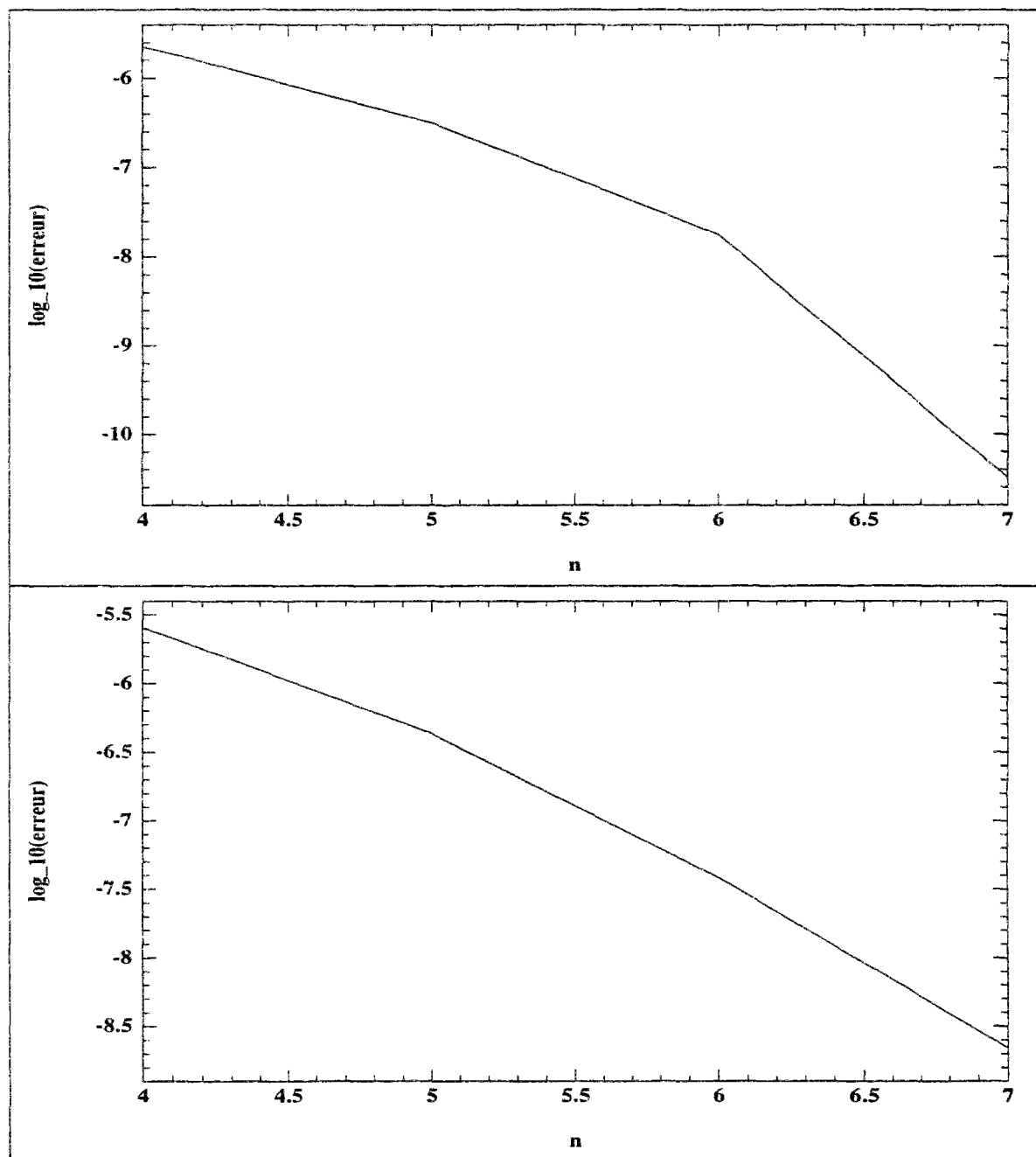


FIG. II.3 -  $\log_{10}(E^n(f))$  et  $\log_{10}(E^n(g))$  où  $n = 4, \dots, 8$ ,  $M = 3$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Maintenant nous allons faire varier  $\varepsilon$ , on représente  $f_k^6$  en fonction de  $x_k$  pour  $M = 3$ .

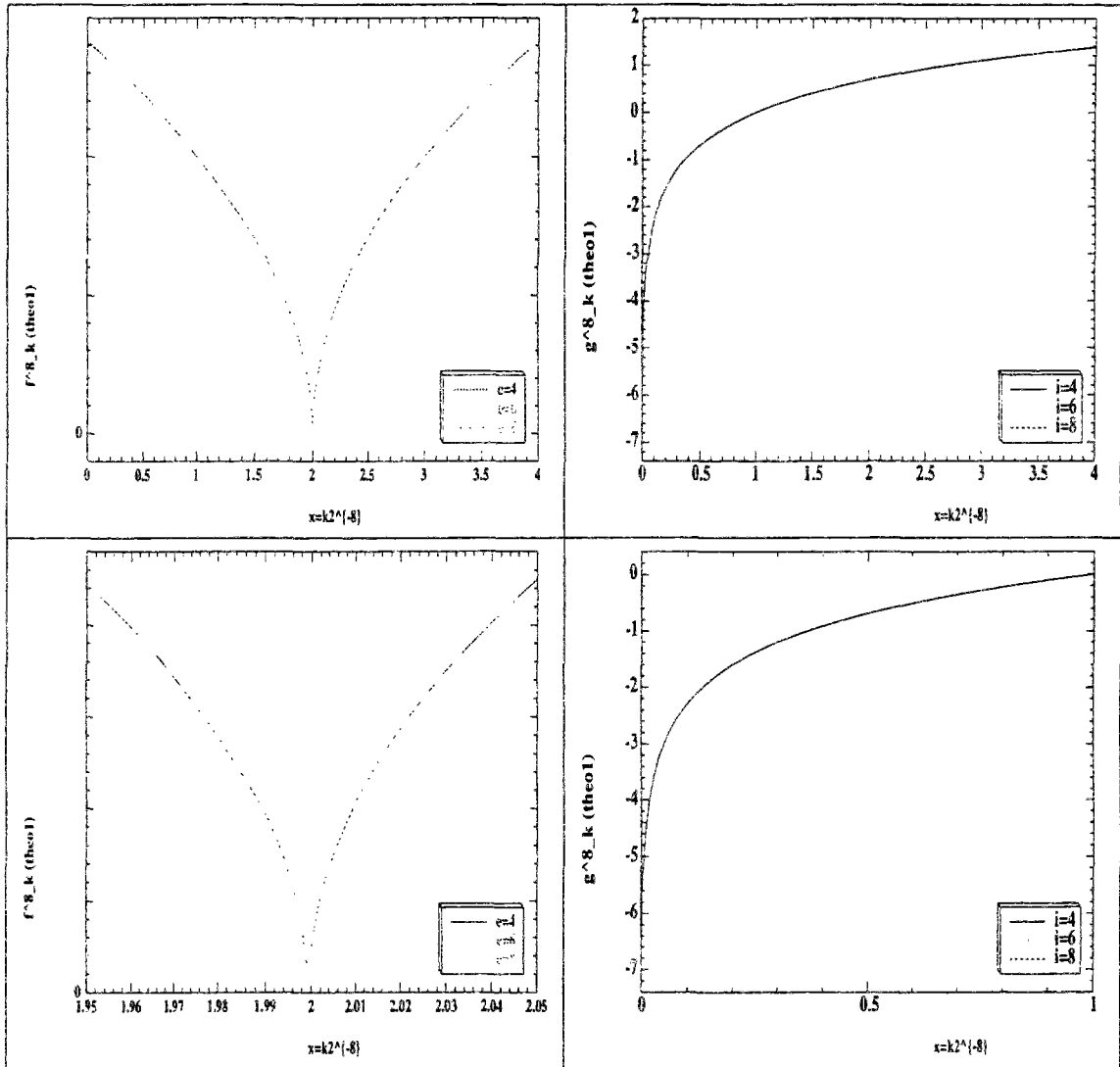


FIG. II.4 -  $f_k^6 = 2^3 \langle f, \phi_4(2^6 \cdot k) \rangle$  et  $g_k^6 = 2^3 \langle g, \phi_4(2^6 \cdot k) \rangle$  pour  $\varepsilon = 10^{-i}, i = 2, \dots, 12$ .

Nous donnons enfin la courbe représentant le temps CPU en fonction de  $\varepsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 2, \dots, 12$ , pour les trois fonctions d'échelles  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$ .

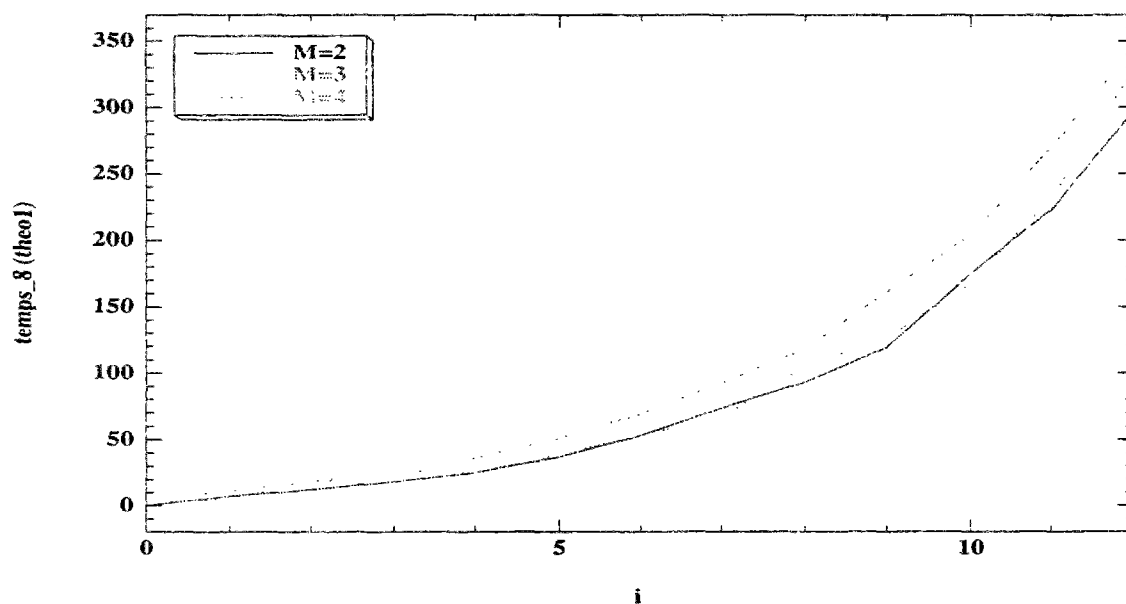


FIG. II.5 – Temps CPU pour le calcul par le théorème 6 de  $\langle f, \phi_M \rangle$   $M = 2, 3, 4$  en fonction de  $\varepsilon = 10^{-i}$ .

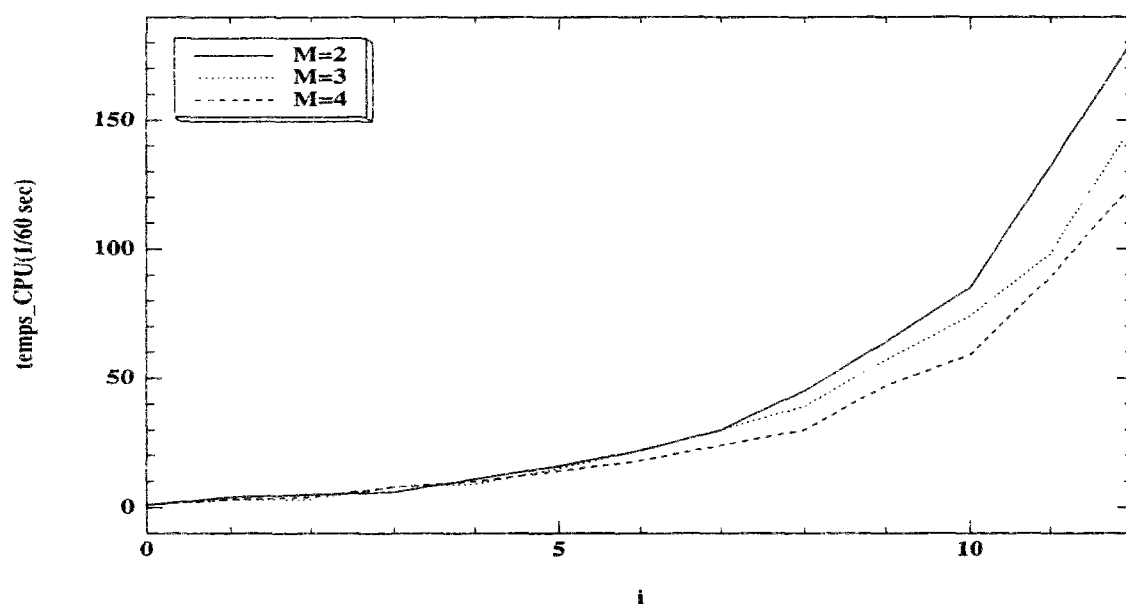


FIG. II.6 – Temps CPU pour le calcul par le théorème 6 de  $\langle g, \phi_M \rangle$ ,  $M = 2, 3, 4$  en fonction de  $\varepsilon = 10^{-i}$ .

**Erreur et choix de  $l = l(j)$  :** Maintenant et contrairement au théorème précédent, pour chaque échelle  $j < J$  nous allons contrôler le nombre de points  $l(j)$  en fixant la valeur de  $d_j$ .

**Théorème 7** *Si  $d_j = K2^{-j}/2$  et  $l(j)$  est la plus petite valeur telle que  $|E_{j,k}| \leq \varepsilon/(2A_j)$  pour tout  $k \in K_j$  et tout niveau  $j = 1, \dots, J$ , alors  $E_J \leq \varepsilon$ .*

**Démonstration :** Quand on pose  $d_j = \frac{K2^{-j}}{2}$  pour  $j = 1, \dots, J$ , de (C.2.23) on a

$$|E_{j,k}| \leq C2^{-\gamma j}2^{-l(j)} \quad \forall k \in K_j.$$

De plus l'hypothèse du lemme 5 est bien vérifiée. On déduit alors qu'il existe une constante  $A$  indépendante de l'échelle d'arrêt  $J$  telle que  $A_j \leq A$ . L'erreur  $E_J^1$  vérifie donc

$$|E_J^1| \leq \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |a_{j,k}| |E_{j,k}|.$$

En utilisant l'hypothèse sur  $l(j)$  on obtient

$$\begin{aligned} |E_J^1| &\leq \frac{\varepsilon}{2A_J} \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |a_{j,k}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{C.2.27}$$

On obtient ainsi grâce à (C.2.27) et (C.2.22) l'estimation de l'erreur globale :

$$|E_J| \leq |E_J^1| + |E_J^2| \leq \varepsilon.$$

On majore  $N(\varepsilon)$  le nombre de points de quadratures

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= \sum_{j=0}^J \text{card}(K_j) l(j) \\ &\leq C_a \sum_{j=0}^J 2^j (d_j - d_{j-1}) (\log_2(\varepsilon) + |\gamma|J) \\ &\leq C_b J (-\log_2(\varepsilon) + |\gamma|J) \\ &\leq C_c (1/(\gamma+1) + |\gamma|/(\gamma+1)^2) [\log_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned} \tag{C.2.28}$$

où les constantes  $C_a$ ,  $C_b$  et  $C_c$  ne dépendent que de la fonction  $\phi$ .

**Résultats numériques:** Comme pour le théorème 6 nous avons implémentés la méthode de quadrature sous les hypothèses du théorème 7 ci dessus pour les mêmes fonctions  $f, g, \phi_M$ . La valeur de  $d_j$  est fixée à  $2^j$ ,  $M = 2, 3, 4$  et  $\varepsilon = 10^i$  où  $i = 2, \dots, 12$ . Nous avons obtenus les résultats ci après.

Pour  $\varepsilon = 10^{-6}$  nous représentons ci dessous  $f_k^8, g_k^8$  en fonction de  $x_k$  pour les trois fonctions d'échelle  $\phi_2, \phi_3$  et  $\phi_4$ .

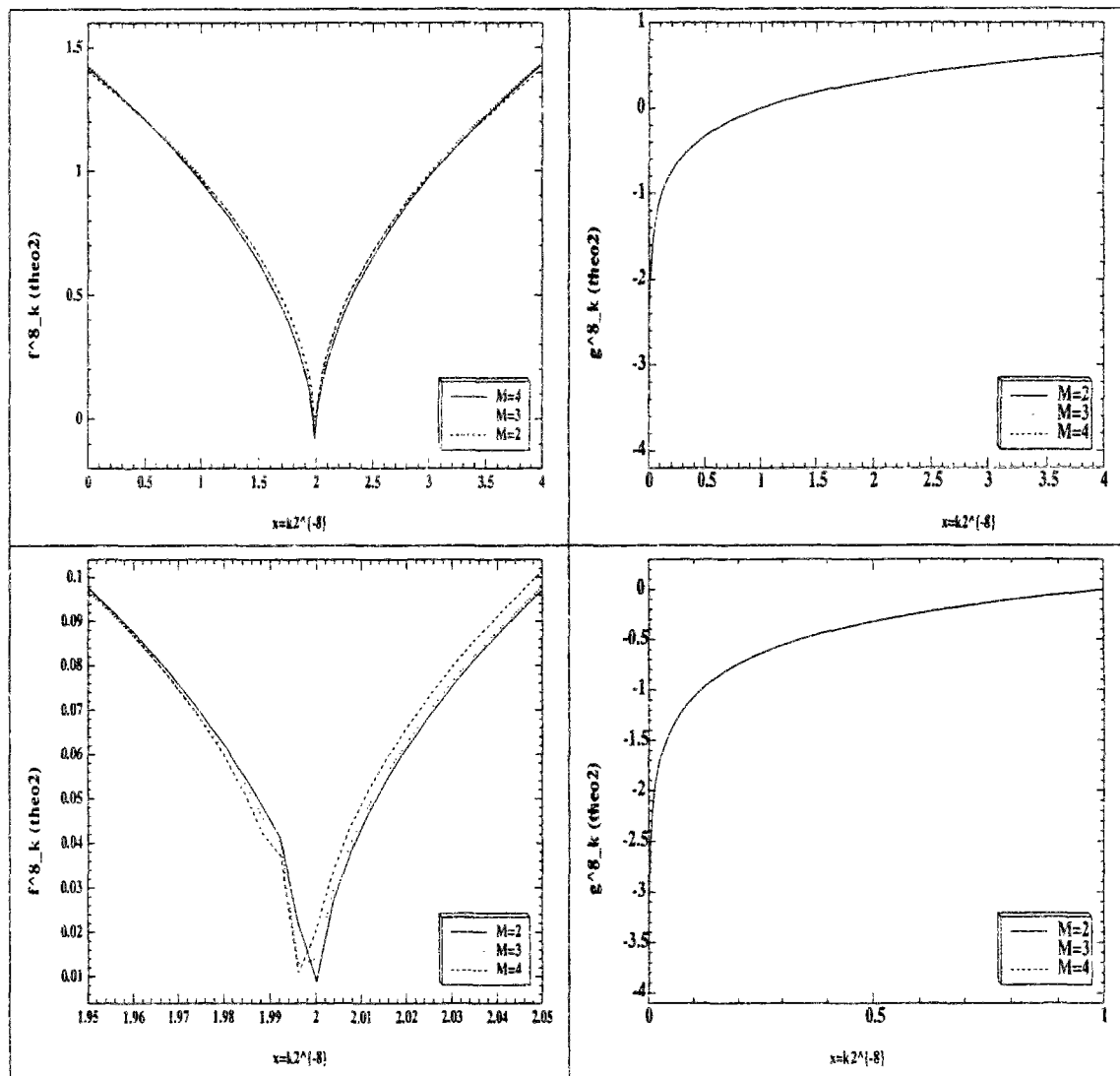


FIG. II.7 – Les courbes du dessus représentent  $f_k^8 = 2^4 \langle f, \phi_M(2^8 \cdot -k) \rangle$  (à droite) et  $g_k^8 = 2^4 \langle g, \phi_M(2^8 \cdot -k) \rangle$  (à gauche) pour  $M = 2, 3, 4$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Celles de dessous est un zoom autour de la singularité.

En faisant varier  $\varepsilon$ , voici  $f_k^8$  en fonction de  $x_k$  pour  $M = 3$ .

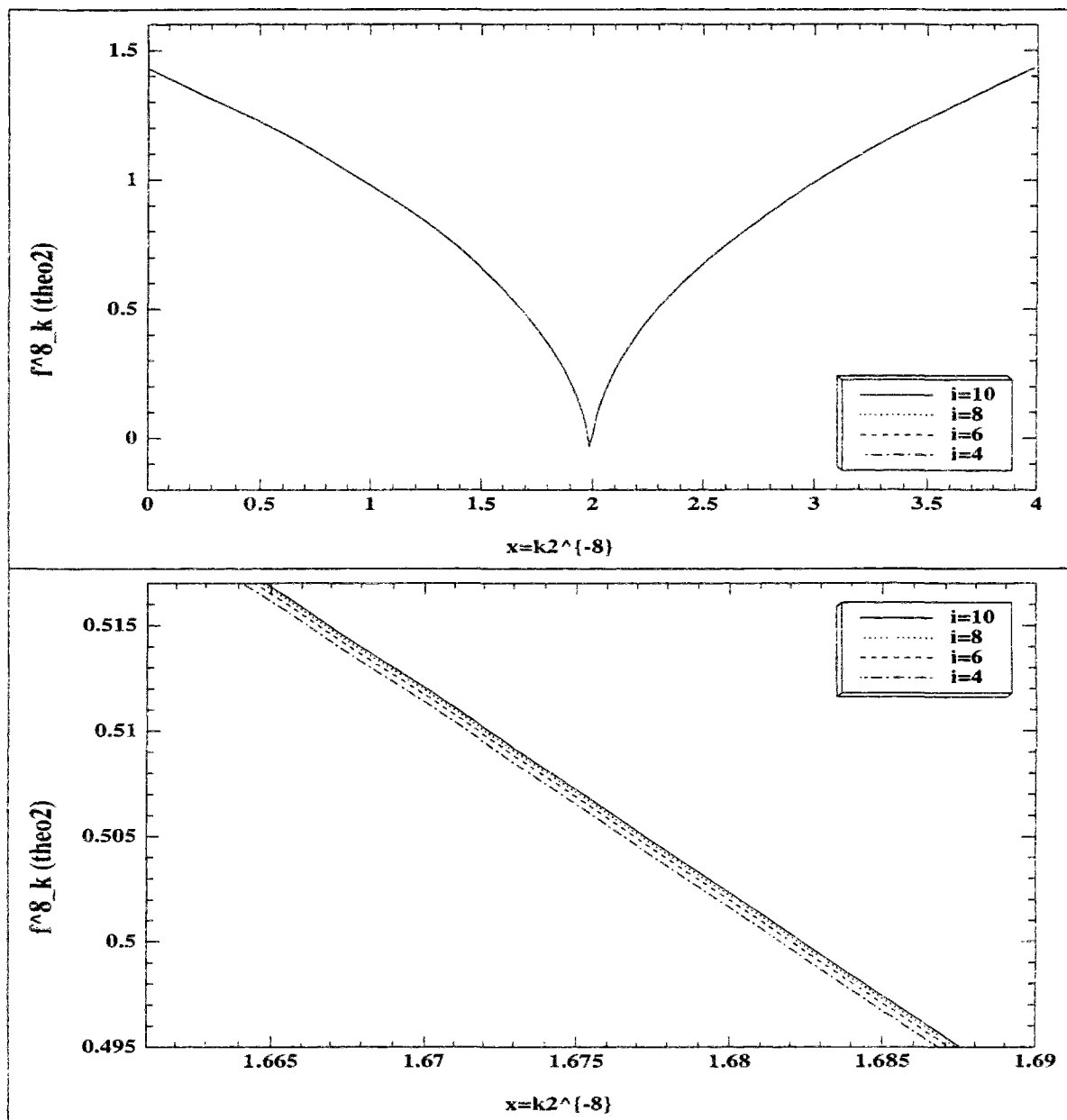


FIG. II.8 -  $f_k^8 = 2^4 \langle f, \phi_4(2^4 \cdot k) \rangle$  pour  $\varepsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 2, \dots, 12$ .

La figure ci dessous donne  $\log_{10}(E^n(f))$  en fonction de  $n = 4, \dots, 8$ .

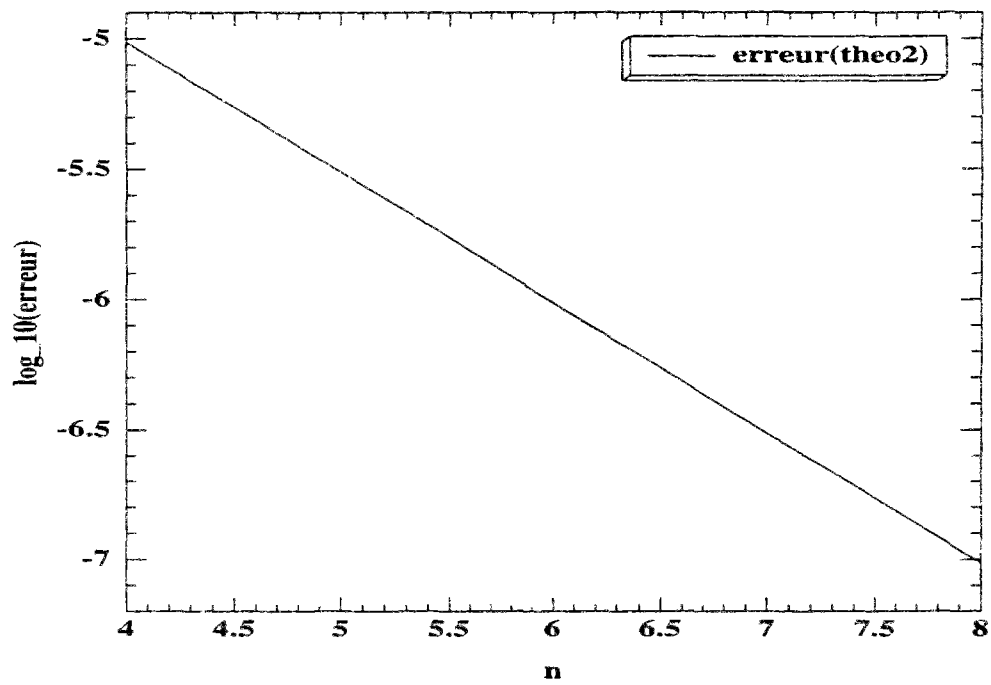


FIG. II.9 -  $\log_{10}(E^n(f))$  où  $n = 4, \dots, 8$ ,  $M = 3$  et  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

Voici le temps CPU (en 1/60 sec) calculé en fonction de la précision  $\varepsilon = 10^{-i}$  pour les trois fonctions d'échelles  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  et  $\phi_4$ .

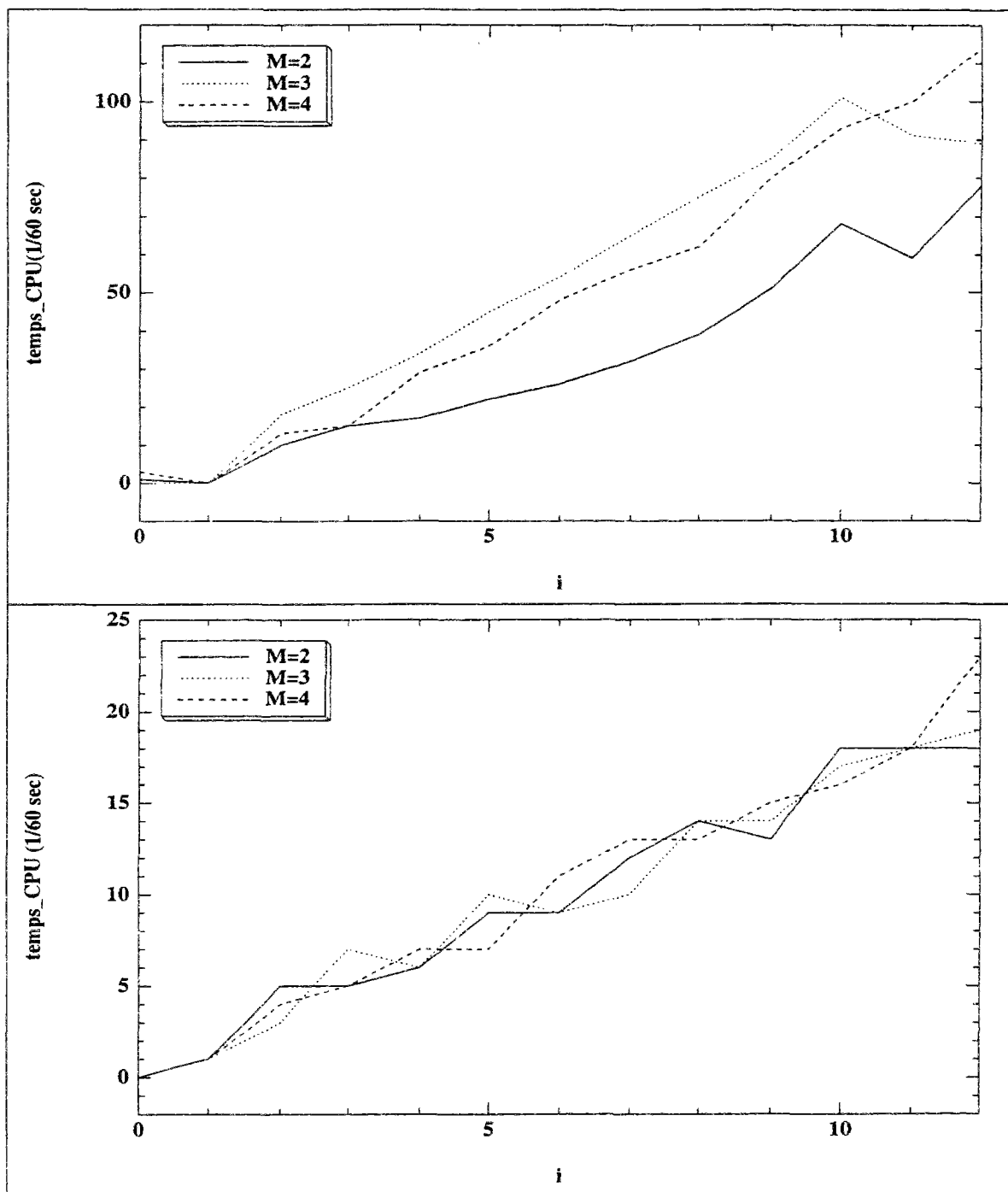


FIG. II.10 - Temps CPU (en 1/60sec) pour le calcul par le théorème 7 de  $\langle f, \phi_M \rangle$  (en haut) et  $\langle g, \phi_M \rangle$ ,  $M = 2, 3, 4$  (en bas) en fonction de  $\varepsilon = 10^{-i}$ .

**Comparaison et analyse des résultats numériques** Le nombre de points nécessaire pour la quadrature est bien contrôlée dans le second théorème 7, alors qu'il est fixe dans le premier théorème 6. Il est normal que l'algorithme associé au théorème 7 soit plus rapide celui associé au théorème 6. Ceci est confirmé par les résultats ci-dessous.

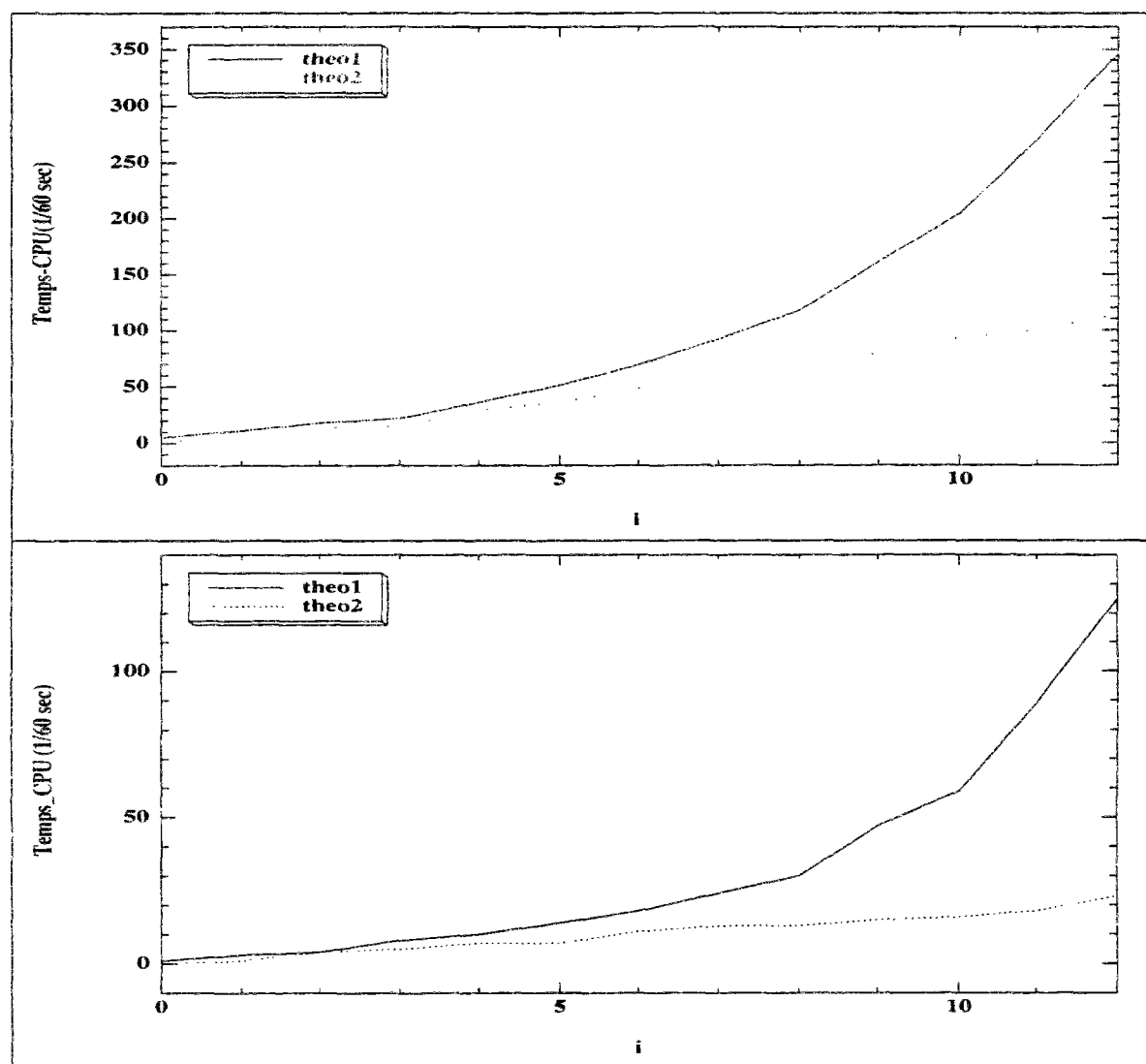


FIG. II.11 – Comparaison des temps CPU (en 1/60sec) pour le calcul de  $\langle f, \phi_M \rangle$  (courbe en haut) et  $\langle g, \phi_M \rangle$  (courbe en bas), respectivement donnés par les théorèmes 6 et 7,  $M = 2, 3, 4$  et  $\varepsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 0, \dots, 12$ .

## II.3 Méthode de quadrature pour les singularités d'ordre élevé

Considérons à présent le cas où la singularité de  $f$  en  $p$  est d'ordre  $r > 0$ . Lorsque  $p \in \text{supp}(\phi)$ , la fonction  $\phi$  doit être au moins de classe  $C^r$  afin de permettre l'existence de  $I$ . D'autre part, l'estimation de l'échelle d'arrêt (C.2.21) par la méthode précédente diverge en général.

On utilise alors une technique de régularisation introduite par J.C.Nedelec [21] pour le calcul d'intégrales singulières dans le cadre des éléments finis : La distribution  $f$  vérifie en effet  $f = g^{[r]}$  où  $g$  est une distribution d'ordre 0. On se ramène donc au calcul de  $I = (-1)^r \langle g, \phi^{([r])} \rangle$  avec  $[r]$  la partie entière de  $r$ .

Ce dernier calcul s'effectue par la méthode décrite dans la section précédente grâce à une propriété remarquable des fonctions d'échelles à support compact, décrite dans [17]: On a l'identité

$$\phi^{([r])} = \sum_{k=0}^r (-1)^k \binom{r}{k} \varphi(\cdot - k)$$

où  $\varphi$  est une fonction d'échelle continue à support compact, vérifiant

$$\varphi = 2 \sum_{n=0}^{N-r} g_n \varphi(2 \cdot -n)$$

avec

$$\sum h_n e^{in\omega} = [(1 + e^{i\omega})/2]^r \sum g_n e^{in\omega}$$

Par exemple, dans le cas où  $f = vp(\frac{1}{x})$ , on obtient  $I = \langle \ln|x|, \varphi(\cdot - 1) \rangle - \langle \ln|x|, \varphi \rangle$ , que l'on calcule par la méthode de la section précédente. Remarquons que cette technique s'applique immédiatement au calcul des éléments de la matrice de Galerkin pour la transformée de Hilbert.

## II.4 Cas d'un opérateur

Soit  $K$  le noyau d'un opérateur  $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ , défini par

$$Tf(x) = \int K(x, y) f(y) dy \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}).$$

On suppose que  $K$  est de classe  $C^\infty$  sauf sur un domaine  $\mathcal{P}$ . Soit  $\Phi$  la fonction donnée par le produit tensoriel d'ordre 2 de  $\phi$ , solution de l'équation d'échelle (A.1.9). Pour  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  on a

$$\Phi(x) = \phi(x_1)\phi(x_2).$$

De ceci et de (A.1.9) s'avère que la fonction  $\Phi$  est aussi solution d'une équation d'échelle de type (A.1.9). En effet, pour  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\phi(t) = \sum_{i=0}^{N-1} c_m \phi(2t - m)$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$  on a

$$\Phi(x) = \sum_{|k|=0}^{2(N-1)} \bar{c}_k \Phi(2x - k), \quad (\text{C.2.29})$$

avec  $|k| = k_1 + k_2$  et  $\bar{c}_k = c_{k_1} c_{k_2}$ . On note le cube  $S_{0,0}^2 = [0, 2M - 1]^2$  support de la fonction  $\Phi$  et pour tout  $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^2$ ,  $S_{j,k}^2$  est le support de  $\Phi(2^j x - k) = \phi(2^j x_1 - k_1)\phi(2^j x_2 - k_2)$ .

Comme dans les sections précédentes nous allons donner une quadrature de

$$R = \langle K, \Phi \rangle = \int K(x) \Phi(x) dx.$$

dans le cas où le cube  $S_{0,0}^2$ , support de  $\Phi$ , rencontre le domaine de singularité  $\mathcal{P}$ . Beaucoup de calculs ne seront pas détaillés puisqu'ils sont similaires aux calculs effectués dans les sections précédentes.

La subdivision uniforme introduite dans la section I.3 ne peut être utilisée. Parce que l'erreur  $E_{j,k}$  donnée par (C.1.30) est fortement liée à la position de  $S_{j,k}^d$  par rapport à  $\mathcal{P}$ , donc à la distance qui les séparent. Comme dans la section II.1 et pour remédier à cet handicap, on propose une méthode de quadrature basée sur une subdivision non uniforme similaire à (C.2.7).

### II.4.1 Quadrature Singulière

On se limite aux classes d'opérateurs souvent présent dans les problèmes physiques. En particulier, les opérateurs  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , continus sur  $L^2(\mathbb{R})$  dont le noyau est de classe  $C^l$  partout sauf aux points  $(x, y)$  tels que  $x = y$ . Dans ce cas le domaine singulier  $\mathcal{P}$  est la droite diagonale  $y = x$ .

On suppose que  $K$  satisfait, pour  $x \neq y$ , les inégalités suivantes :

$$|K(x, y)| \leq C_0 |x - y|^\gamma \quad (\text{C.2.30})$$

$$|\partial_x^l K(x, y)| + |\partial_y^l K(x, y)| \leq C_1 |x - y|^{\gamma-l}, \quad (\text{C.2.31})$$

où le réel  $l > \gamma > -1$ .

Le raisonnement et les calculs sont similaires à la section II.1 dans laquelle nous avons décrit d'une manière plus détaillée la quadrature unidimensionnelle.

On considère  $B_j$  la bande de rayon  $d_j$  autour de  $\mathcal{P}$ ,  $d_j$  est un réel strictement positif. On note  $d_k^j = \inf_{x \in B_j, y \in S_k^j} |x - y|$ , la distance séparant la bande  $B_j$  du  $S_k^j$ , support de  $\Phi(2^j \cdot -k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^2$ . On construit une suite d'ensemble

$$R_j = \{k \in \mathbb{Z}^2 / d_k^j \leq d_j\} \quad \text{avec} \quad R_0 = (0, 0)$$

et

$$K_j = (\mathbb{Z}^2 - R_j) \cap S_j$$

où  $k \in S_j$  si et seulement si il existe  $m \in R_{j-1}$  tel que  $\text{supp}(\Phi_{j,k}) \subset \text{supp}(\Phi_{j-1,m})$ . On obtient l'équation de subdivision non uniforme suivante :

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} \bar{a}_{j,k} 2^{2j} \Phi_{j,k}(x) + \sum_{k \in R_J} \bar{a}_{J,k} 2^{2J} \Phi_{J,k}(x) \quad (\text{C.2.32})$$

où

$$\begin{aligned} \bar{a}_{j,k} &= \langle \Phi, \widetilde{\Phi_{j,k}} \rangle \\ &= \langle \Phi, \widetilde{\phi_{j,k_1} \phi_{j,k_2}} \rangle \\ &= \langle \phi, \widetilde{\phi_{j,k_1}} \rangle \langle \phi, \widetilde{\phi_{j,k_2}} \rangle \\ &= a_{j,k_1} a_{j,k_2} \end{aligned}$$

où la suite  $(a_{j,m})_{m \in \mathbb{Z}}$  est donnée par (C.2.7). Du lemme 5 on déduit facilement que si la suite  $(d_j)_{j=1, \dots, J}$  est décroissante alors il existe une constante  $A$  indépendante de  $J$  telle que

$$\bar{A}_J = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}| \leq A. \quad (\text{C.2.33})$$

La quadrature de  $R$  est donnée donc par :

$$R = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} \bar{a}_{j,k} \sum_{|i|=0}^{l-1} \bar{\alpha}_i K(x_i^{j,k}, y_i^{j,k}) + E_J. \quad (\text{C.2.34})$$

avec  $\bar{\alpha}_i = \alpha_{i_1} \alpha_{i_2}$ . L'erreur  $E_J$  est la somme de l'erreur globale  $E_{J,g}$  et de l'erreur d'arrêt  $E_{J,a}$  définis par

$$E_{J,a} = \sum_{k \in R_J} \bar{a}_{J,k} 2^{2J} \langle f, \phi_{J,k} \rangle, \quad (\text{C.2.35})$$

$$E_{J,g} = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} \bar{a}_{j,k} E_{j,k}, \quad (\text{C.2.36})$$

où  $E_{j,k}$  est l'erreur locale à l'échelle  $j$ . Rappelons que l'erreur locale  $E_{j,k}$  vérifie l'inégalité (C.1.30) qu'on réécrit,

$$|E_{j,k}| \leq B \Omega 2^{-jl} \sup_{(x,y) \in S_{j,k}^2} (|\partial_x^l K| + |\partial_x^l K|), \quad (\text{C.2.37})$$

où  $\Omega = \sup(\sum_m |\alpha_m|, 1)$  et la constante  $B = \frac{N^{l+1}}{(l+1)!} \|\phi\|_\infty$  donnée par (C.1.16).

D'après l'hypothèse (C.2.31) vérifiée par le noyau  $K(x, y)$ , on obtient

$$|E_{j,k}| \leq B \Omega 2^{-jl} \sup_{S_{j,k}} |x - y|^{\gamma-l},$$

Or, par construction de  $K_j$  on a  $|x - y| > \sqrt{2}d_j$ , alors

$$|E_{j,k}| \leq B \Omega 2^{-jl} (\sqrt{2}d_j)^{\gamma-l}. \quad (\text{C.2.38})$$

pour  $j = 1, \dots, J$  et  $k \in K_j$ .

En revenant à l'erreur globale on obtient

$$|E_{J,g}| \leq B \Omega \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}| 2^{-jl} (\sqrt{2}d_j)^{\gamma-l}. \quad (\text{C.2.39})$$

Comme pour le cas unidimensionnel on distingue deux voies :

- Dans un premier temps on suppose que le nombre de points nécessaire à chaque quadrature intermédiaire est indépendant de  $j$  et vaut  $l$ . On énonce donc le théorèmes suivant :

**Théorème 8** *Soit  $K$  le noyau, de classe  $C^l, l \in \mathbb{N}^*$  partout sauf pour  $x = y$ , vérifiant les inégalités (C.2.30) et (C.2.31). Si  $d_j$  est telle que  $d_j \leq d_{j-1}$  et si elle vérifie*

$$d_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon 2^{jl})^{\frac{1}{l-\gamma}}$$

alors  $|E_j^l| = O(\varepsilon)$

En effet, grâce à (C.2.39) et à l'hypothèse sur  $d_j$  et  $\gamma - l < 0$  on obtient

$$|E_{J,g}| \leq B \Omega \varepsilon \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}|.$$

De plus la suite  $d_j$  est décroissante, grâce à (C.2.33) il existe une constante

$A$  indépendante de l'échelle d'arrêt  $J$  telle que  $\bar{A}_J = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}| \leq A$ . On

dédit donc que

$$|E_{J,g}| = O(\varepsilon). \quad (\text{C.2.40})$$

Enfin si l'échelle  $J$  est choisit telle que  $E_{J,a} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , on a

$$|E_J^l| = |E_{J,g}| + |E_{J,a}| = O(\varepsilon).$$

On a donc démontré le théorème.

- Si on suppose maintenant que  $l = l(j)$ , c'est à dire que le nombre de points nécessaires pour la quadrature à l'échelle  $j$  dépend de  $j$ . On énonce le résultat suivant :

**Théorème 9** *Si à chaque niveau  $j = 1, \dots, J$  on a  $d_j = N2^{-j}/2$  et  $l(j)$  est la plus petite valeur telle que l'erreur  $E_{j,k}$  donnée par (C.2.38) vérifie :*

$$|E_{j,k}| \leq \varepsilon/(2\bar{A}_J)$$

pour tout  $k \in K_j$ . Alors  $E_J^l \leq \varepsilon$ .

**Démonstration :** Revenons à (C.2.39), et remplaçons la constante  $B$  par sa valeur donnée par (C.1.16), on obtient  $B =$

$$\begin{aligned} |E_{j,k}| &\leq N\Omega\|\phi\|_\infty N^l 2^{-jl} (\sqrt{2}d_j)^{\gamma-l} \\ &\leq N\Omega\|\phi\|_\infty d_j^\gamma \left(\frac{2^j\sqrt{2}d_j}{N}\right)^{-l} \end{aligned}$$

Puisque  $d_j = \frac{N2^{-j}}{2}$ , il existe alors une constante  $D$  dépendant de  $\gamma$  et  $N$  telle que  $|E_{j,k}|$  donné par (C.2.38) vérifie

$$|E_{j,k}| \leq D \Omega\|\phi\|_\infty 2^{-j\gamma} 2^{l(j)} \quad \forall k \in K_j,$$

L'erreur globale  $E_{J,g}$  vérifie donc

$$\begin{aligned} |E_{J,g}| &\leq D \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}| |E_{j,k}| \\ &\leq \sup_{\substack{j=0, \dots, J \\ k \in K_j}} |E_{j,k}| \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |\bar{a}_{j,k}|. \end{aligned}$$

De plus la suite  $d_j$  est décroissante, il existe alors une constante  $A$  indépendante de l'échelle d'arrêt  $J$  telle que  $\bar{A}_J \leq A$ . Ainsi si à chaque niveau  $j$  on choisit  $l(j)$  tel que  $|E_{j,k}| \leq \frac{\varepsilon}{2\bar{A}_J}$ , pour tout  $k \in K_j$ , alors

$$\begin{aligned} |E_{J,g}| &\leq \frac{\varepsilon}{2\bar{A}_J} \bar{A}_J \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{C.2.41}$$

Enfin l'échelle d'arrêt est choisit telle que  $E_{J,a} \leq \frac{\varepsilon}{2}$  on conclut alors que :

$$|E_J^t| \leq |E_{J,g}| + |E_{J,a}| \leq \varepsilon.$$

et par cela on termine la preuve du théorème.



## Chapitre III

### Quadrature corrigée

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux fonctions singulières de la forme :

$$f(x) = g(x) \sigma(x) + h(x). \quad (\text{C.3.1})$$

où les fonctions  $g$ ,  $h$  sont au moins de classe  $C^l(\mathbb{R})$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma$  est une fonction intégrable, mais singulière. La fonction  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^l$  sauf en un nombre fini de points.

Nous construisons une méthode de quadrature pour l'intégration numérique de  $I = \langle f, \phi \rangle$  où  $\phi$  est la fonction d'échelle donnée par (A.1.9) ayant son support dans  $S_{0,0} = [0, N-1]$ . Nous utiliserons les mêmes notations que dans les chapitres I et II. Pour faciliter les calculs nous supposons que  $\sigma$  n'a qu'un seul point singulier  $p$ .

Dans le cas où  $p \notin \text{supp}(\phi)$  la fonction  $f$  est au moins  $C^l$  sur  $S_{0,0}$ , support de  $\phi$ . Par la méthode de quadrature régulière, explicitée dans le chapitre précédent, nous obtenons

$$I = Q(f) + E_J, \quad (\text{C.3.2})$$

avec

$$Q(f) = \sum_{k=0}^{N_J-1} s_{J,k} \left[ \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f(x_i^{J,k}) \right], \quad (\text{C.3.3})$$

où  $N_J = 2^{J+1}(N-1) - (N-2)$ ,  $x_i^{J,k} = 2^{-J} \left( k + \frac{N-1}{l} \right)$ . L'erreur  $E_J$  est majorée :

$$|E_J| \leq \frac{K^l}{l!} D 2^{-Jl} \sup_{t \in S_{0,0}^0} |f^{(l)}(t)|,$$

où les constantes  $D$  et  $K$  ne dépendent que de  $\phi$ . L'échelle d'arrêt  $J$ , est tel que :

$$|E_J| \leq \varepsilon,$$

où  $\varepsilon$  est la précision souhaitée du calcul, fixée d'avance.

Nous réordonnons les points  $x_i^{J,k}$  par la transformation  $(i, k) \longrightarrow m = lk + i$  pour  $i = 0, \dots, l-1$  et  $k = 0, \dots, N_J$ . En notant, pour  $m = lk + i$ ,  $w_m^J = \alpha_i s_{J,k}$  et  $x_m^J = x_i^{J,k}$ , la quadrature (C.3.3) s'écrit

$$Q(f) = \sum_{m=0}^{lN_J} w_m^J f(x_m^J). \quad (\text{C.3.4})$$

### III.1 Algorithme de quadrature corrigée

Nous supposons, pour toute la suite, que le point singulier est dans le support de  $\phi$ . Nous allons construire une quadrature pour l'estimation de  $I$  en introduisant la notion de correction locale qui consiste à corriger certains poids  $w_m^J$ . Notons  $Z_J$  l'ensemble des indices  $m$  de ces poids. Si nous notons  $W_m^J$  les poids de cette nouvelle quadrature, nous avons

$$w_m^J = W_m^J \quad \forall m \notin Z_J.$$

La méthode de quadrature que nous proposons consiste à éliminer de (C.3.4) les termes associés à  $m \in Z_J$  et lui rajouter un terme de correction.

L'idée de la correction des poids est présente dans les travaux de V. Rocklin [22], B. Alpert [5] et J. Strain [24] pour les calculs d'intégrale d'une fonction singulière sur un intervalle contenant le point singulier.

Cette méthode nécessitera la connaissance des termes  $\int P_\alpha(x) \sigma(x) \phi(x) dx$ . Leur calcul s'effectue par la méthode de quadrature du chapitre II.

#### III.1.1 Méthode de quadrature :

Il est toujours possible de se ramener au cas  $h = 0$ . En effet, nous avons  $I = \langle f, \phi \rangle = \langle g\sigma, \phi \rangle + \langle h, \phi \rangle$ . Comme  $h \in \mathcal{C}^l(S_{0,0})$ , le produit scalaire  $\langle h, \phi \rangle$  s'estime par la méthode de quadrature quadrature régulière.

Soient  $\mathcal{O}_\delta$  une boule de centre  $p$  et de rayon  $\delta$ .  $Z_J$  est l'ensemble des entiers  $k = 0, \dots, N_J$ , tels que l'intersection entre le support de  $\phi_{J,k}$  et la boule  $\mathcal{O}_\delta$  est non vide. Si on note  $S^J = \cup_{k \in Z} S_{J,k}$  alors les poids  $w_m^J$  à corriger sont ceux associés aux points  $x_m^J \in S^J$ . Notons

$$Q_\delta(f) = \sum_{\substack{m=0 \\ x_m^J \notin S^J}}^{lN_J} w_m^J f(x_m^J). \quad (\text{C.3.5})$$

Pour chaque  $k \in Z$ , étant donnée une suite finie  $(t_{i,k}^J)_{i=0,\dots,q-1}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  de points de  $S_{J,k}$ . On construit  $(\beta_{i,k}^{J,l})_{i=0,\dots,q}$  tel que la quantité

$$SQ_\delta(f) = Q_\delta(f) + \sum_m W_m^{J,l} f(t_m^J), \quad (\text{C.3.6})$$

où  $W_m^{J,l} = s_{J,k} \beta_{i,k}^{J,l}$  et  $t_m^J = t_{i,k}^J$  pour  $m = lk + i$ , vérifie

$$|SQ_\delta(f) - I| \leq \varepsilon$$

pour une famille de fonctions  $\sigma$ .

La suite  $(\beta_{k,i}^{J,l})_{i \in \mathbb{N}}$ , est calculée en tant que poids de la quadrature exacte pour  $\langle P_\alpha, \phi_{J,k} \rangle$ . Dans cette écriture  $\phi_{J,k} = 2^J \phi(2^J \cdot -k)$  et  $P_\alpha$  est une famille de polynômes de degré  $\alpha < l - 1$ . Pour  $k \in Z$  la suite  $(\beta_{k,i}^{J,l})_{i=0,\dots,q}$  est solution du système linéaire non dégénéré issu des  $l$  équations :

$$\int_{S_{J,k}} P_\alpha(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt = \sum_{i=0}^q \beta_{k,i}^{J,l} P_\alpha(t_i^{J,k}) \sigma(t_i^{J,k}) \quad \alpha \leq l - 1. \quad (\text{C.3.7})$$

### III.1.2 Remarques Importantes

1. Le choix de la famille des polynômes dépendra essentiellement du conditionnement du système linéaire ci dessus. La meilleure famille serait celle qui nous donne une matrice bien conditionnée. Dans les travaux de Strain [24], ce sont les polynômes de Legendre unidimensionnel qui ont été choisis.
2. En regardant les équations du système ci dessus, nous retrouvons l'idée (évoquée dans l'introduction de ce chapitre) de la nécessité du calcul des termes

$$F_{\alpha,k} = \int_{S_{J,k}} P_\alpha(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt. \quad (\text{C.3.8})$$

On les calcule par la méthode de quadrature singulière explicitée dans le chapitre II.

3. On ne peut se contenter de corriger les poids  $w_{i,k}^J$  associés aux points  $x_{i,k}^J$  appartenant aux  $S_{J,k}$  contenant le point singulier. En effet il est possible que le point singulier se trouve au voisinage du bord de l'un des  $S_{J,k}$  (sans être sur le bord), soit par exemple  $S_{J,k_0}$ . Si les points très proche de  $p$  mais n'appartiennent pas à  $S_{J,k_0}$  ne sont pas pris en compte dans la correction alors ils risquent d'induire une grande erreur.

## III.2 Analyse de l'erreur de la quadrature

Nous allons montrer que pour une classe de fonctions  $\sigma$  et un réel  $\delta$  soigneusement choisi on a :

$$E_J = |SQ_\delta(f) - I| \leq \varepsilon$$

L'erreur  $E_J$  est majorée par

$$E_J \leq E_J^c + E_J^r \quad (\text{C.3.9})$$

où  $E_J^c$  est l'erreur de correction donnée par

$$E_J^c = \left| \int_{S^J} f(t) \phi(t) - \sum W_m^{J,l} f(t_m^J) \right| \quad (\text{C.3.10})$$

et  $E_J^r$  l'erreur issue de la partie régulière de la quadrature et donnée par :

$$E_J^r = \left| \int_{S^J} f(t) \phi(t) - Q_\delta(f) \right|.$$

L'estimation de  $E_J^r$  s'obtient facilement par la quadrature régulière car  $f = g\sigma \in \mathcal{C}^l(S_{0,0} / S^J)$ , et en remplaçant  $g$  par son approximation polynomiale, on obtient grâce à (C.3.7) une estimation de  $E_J^c$ .

### III.2.1 Estimation de l'erreur

Nous choisissons  $P_\alpha(x) = x^\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq l-1$ . Les équations (C.3.7) s'écrivent :

$$\int_{S_{J,k}} x^\alpha \sigma(x) \phi_{J,k}(x) dt = \sum_{i=0}^q \beta_{k,i}^{J,l} (t_i^{J,k})^\alpha \sigma(t_i^{J,k}). \quad (\text{C.3.11})$$

Revenant à l'estimation de  $E_J$ , avec la notation du paragraphe III.1.1, nous avons

$$E_J^c \leq \sum_{k \in Z} |s_{J,k}| E_{J,k}^c, \quad (\text{C.3.12})$$

et

$$E_J^r \leq \sum_{k \notin Z} |s_{J,k}| E_{J,k}^r, \quad (\text{C.3.13})$$

avec

$$\begin{aligned} E_{J,k}^c &= \left| \int_{S_{J,k}} g(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} g(t_i^{J,k}) \sigma(t_i^{J,k}) \right| \\ E_{J,k}^r &= \left| \int_{S_{J,k}} g(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i g(x_i^{J,k}) \sigma(x_i^{J,k}) \right|. \end{aligned}$$

Commençons par l'estimation de  $E_{J,k}^c$ . Soit  $G$  la meilleure approximation de  $g$  par les polynômes de degré inférieur à  $l-1$  sur  $S_{J,k}$ . Notons  $R = g - G$  le reste de cette approximation. Nous pouvons écrire

$$|E_{J,k}^c| \leq \left| \int_{S_{J,k}} G(t) \sigma(t) \phi(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} G(t_i^{J,k}) \sigma(t_i^{J,k}) \right| + \left| \int_{S_{J,k}} R(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} R(t_i^{J,k}) \sigma(t_i^{J,k}) \right|,$$

Ensuite  $G$  est un polynôme de degré  $l-1$  nous déduisons alors de (C.3.11) que

$$\left| \int_{S_{J,k}} G(t) \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} G(t_i^{J,k}) \sigma(t_i^{J,k}) \right| = 0.$$

Puisque  $R$  est le reste de la meilleure approximation polynomiale, nous pouvons le majorer par le reste du développement de Taylor sur  $S_{J,k}$ . Nous avons alors

$$\|R\|_{C^0(S_{J,k})} \leq \frac{\bar{N}^l}{l!} 2^{-Jl} \|\partial^l g\|_{C^0(S_{J,k})}.$$

où  $\bar{N} = \frac{N-1}{2}$  et  $\|v\|_{C^0(S_{J,k})} = \sup_{x \in S^J} |v(x)|$  pour toute fonction réelle  $v$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} E_{J,k}^c &\leq \left| \int_{S_{J,k}} \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} \sigma(t_i^{J,k}) \right| \|R\|_{C^0(S_{J,k})} \\ &\leq \frac{\bar{N}^l}{l!} 2^{-Jl} \left| \int_{S_{J,k}} \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} \sigma(t_i^{J,k}) \right| \|\partial^l g\|_{C^0(S_{J,k})}. \end{aligned}$$

Grâce à (C.3.12) nous concluons que  $E_J^c$  vérifie

$$E_J^c \leq \frac{\bar{N}^l}{l!} 2^{-Jl} \sum_{k \in Z} |S_{J,k}| \left| \int_{S_{J,k}} \sigma(t) \phi_{J,k}(t) dt - \sum_i \beta_{k,i}^{J,l} \sigma(t_i^{J,k}) \right| \|\partial^l g\|_{C^0(S_{J,k})}. \quad (\text{C.3.14})$$

Estimons maintenant  $E_{J,k}^r$ . La fonction  $f = g\sigma$  est au moins de classe  $C^l$  sur  $S_{J,k}$ ,  $\forall k \notin Z$ . Nous déduisons alors de la méthode de la quadrature régulière qu'il existe une constante  $K$  ne dépendant que de  $\phi$  telle que

$$E_{J,k}^r \leq K^l \frac{2^{-Jl}}{l!} \|\partial^l f\|_{C^0(S_{J,k})}.$$

Grâce à (C.3.13), on a la majoration suivante pour l'erreur  $E_J^r$

$$E_J^r \leq \frac{K^l}{l!} 2^{-Jl} \sum_{k \notin Z} (|s_{J,k}| \|\partial^l f\|_{C^0(S_{0,0} / S_{J,k})}). \quad (\text{C.3.15})$$

**Notation :** Pour un entier  $m$  et un intervalle  $B$ , on a pour une fonction  $v$

$$\|v\|_{C^m(B)} = \|v\|_{C^0(B)} + \|\partial^l v\|_{C^0(B)}.$$

Comme  $k \notin Z$ , alors  $f$  est au moins  $C^l$  sur  $S_{J,k}$ . Grâce aux inégalités standard pour les normes sur les espaces de Hölder [24] il vient pour tout  $k \notin Z$  :

$$\|f\|_{C^l(S_{J,k})} \leq \|\sigma\|_{C^l(S_{J,k})} \|g\|_{C^0(S_{J,k})} + \|\sigma\|_{C^0(S_{J,k})} \|g\|_{C^l(S_{J,k})}$$

En remplaçant  $\|\partial^l f\|_{S_{J,k}}$ , dans (C.3.15), par  $\|f\|_{C^m(S_{J,k})} - \|f\|_{C^0(S_{J,k})}$  et en utilisant l'inégalité ci dessus nous obtenons

$$\begin{aligned} E_J^r &\leq \frac{K^l}{l!} 2^{-Jl} \sum_{k \notin Z} |s_{J,k}| \left| \|f\|_{C^m(S_{J,k})} - \|f\|_{C^0(S_{J,k})} \right| \\ &\leq \frac{K^l}{l!} 2^{-Jl} \sum_{k \notin Z} |s_{J,k}| \left( \|\sigma\|_{C^0(S_{J,k})} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} + \|g\|_{C^0(S_{J,k})} (\|\sigma\|_{C^l(S_{J,k})} - \|\sigma\|_{C^0(S_{J,k})}) \right) \\ &\leq \frac{K^l}{l!} 2^{-Jl} \sum_{k \notin Z} |s_{J,k}| \left( \|\sigma\|_{C^0(S_{J,k})} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} + \|g\|_{C^0(S_{J,k})} \|\partial^l \sigma\|_{C^0(S_{J,k})} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3.16})$$

**Hypothèse  $H_1$  :** La fonction  $\sigma$  est supposée au moins de classe  $C^l$  en dehors de  $p$ . Nous supposons en plus que, en dehors de  $\mathcal{O}_\delta$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$|\partial^\alpha \sigma(x)| \leq C \alpha! |x - p|^{-1-\alpha} \quad (\text{C.3.17})$$

pour  $\alpha = 0, \alpha = l$ .

L'inégalité (C.3.17) à elle seule n'assure en aucun cas que  $\sigma \in L^1(S_{0,0})$ .

Avec l'hypothèse  $H_1$  et le fait que nous travaillons en dehors de  $\mathcal{O}_\delta$ , l'inégalité (C.3.16) s'écrit

$$E_J^r \leq CK^l \sum_{k \notin Z} |x - y|^{-1} |s_{J,k}| (2^{-Jl} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} + |x - y|^{-l} 2^{-Jl} \|g\|_{C^0(S_{J,k})})$$

Or nous avons montré que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  nous avons  $|s_{J,k}| \leq D 2^{-J}$  où  $D = \|\phi\|_\infty \|\tilde{\phi}\|_1$ . Comme le cube  $S_{J,k}$  est de taille  $2^{-J}(N-1)$  nous pouvons écrire

$$E_J^r \leq C \frac{DK^l}{N-1} \sum_{k \notin Z} |x - y|^{-1} |s_{J,k}| (2^{-Jl} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} + 2^{-Jl} |x - y|^{-l} \|g\|_{C^0(S_{J,k})}). \quad (\text{C.3.18})$$

Considérons  $V_b, b \in \mathbb{N}$ , l'ensemble des  $S_{J,k}, k \notin Z$  dont la distance au point  $p$  est comprise dans l'intervalle  $[b\delta, (b+1)\delta]$ . Soit  $B_v$  le nombre de  $V_b$  possibles. L'erreur (C.3.16) s'écrit

$$\begin{aligned} E_J^r &\leq C \frac{DK^l}{N-1} \sum_{b=1}^B \sum_{\substack{k \notin Z \\ S_{J,k} \in V_b}} (b\delta)^{-1} |S_{J,k}| \left( 2^{-Jl} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} + b^{-l} \left( \frac{2^{-J}}{\delta} \right)^l \|g\|_{C^0(S_{J,k})} \right) \\ &\leq C \frac{DK^l}{N-1} [\mathcal{A} + \mathcal{B}] \end{aligned} \quad (\text{C.3.19})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{b=1}^B b^{-1} \sum_{\substack{k \notin Z \\ S_{J,k} \in V_b}} \delta^{-1} |S_{J,k}| 2^{-Jl} \|g\|_{C^l(S_{J,k})} \\ \mathcal{B} &= \sum_{b=1}^B b^{-l-1} \sum_{\substack{k \notin Z \\ S_{J,k} \in V_b}} \delta^{-1} |S_{J,k}| \left( \frac{2^{-J}}{\delta} \right)^l \|g\|_{C^0(S_{J,k})}. \end{aligned}$$

**Hypothèse  $H_2$  :** Soit  $\varepsilon$  la précision souhaitée, nous supposons que le réel  $\delta$  est choisi tel que

$$\left( \frac{2^{-J}}{\delta} \right) \leq \varepsilon$$

et

$$B_v = O(1/\delta) = O(2^J).$$

La taille de  $V_b$  vérifie :

$$|V_b| \leq 2\delta + 2^{-J+1}(2M-1).$$

Du fait que  $O(2^{-J}) = O(\delta)$  il existe une constante  $G$  ne dépendant que de  $\phi$  tel que les ensembles  $S_{J,k}$  vérifient

$$\sum_{\substack{k \notin Z \\ S_{J,k} \in V_b}} |S_{J,k}| \leq G\delta.$$

En revenant à l'erreur  $E_J^r$ , les deux sommes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de (C.3.19) se majorent respectivement de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq G 2^{-Jl} \|g\|_{C^l(S_{0,0})} \sum_{b=1}^B b^{-1} \\ &\leq G 2^{-Jl} |\log(B)| \|g\|_{C^l(S_{0,0})}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &\leq G \varepsilon \|g\|_{C^0(S_{0,0})} \sum_{b=1}^B b^{-l-1} \\ &\leq G \varepsilon \|g\|_{C^0(S_{0,0})} \sum_{b=1}^{\infty} b^{-l-1}. \end{aligned}$$

Comme  $l > 0$  la somme  $\sum_{b=1}^{\infty} b^{-l-1}$  est fini, et  $B_v$  est de l'ordre de  $O(2^J)$  alors l'erreur  $E_J^r$  vérifie :

$$E_J^r \leq \Omega \left[ 2^{-Jl} |\log(2^{-J})| \|g\|_{C^l(S_{0,0})} + \varepsilon \|g\|_{C^0(S_{0,0})} \right]. \quad (\text{C.3.20})$$

où  $\Omega = CG \frac{DK^l}{N-1}$  une constante ne dépendant que du choix de  $\phi$ .

Revenons maintenant à l'estimation de  $E_J^c$  (C.3.14) en supposant que les hypothèses  $H_1$  et  $H_2$  sont satisfaites. Nous avons toujours l'estimation  $|s_{J,k}| \leq D 2^{-J}$ , et par suite

$$E_J^c \leq \frac{\bar{N}^l}{l!} 2^{-Jl} \left( D \|\phi\|_0 \int |\sigma(t)| dt + \sum_{m \in Z_J} |W_m^{J,l}| |\sigma(t_i^{J,k})| \right) \|\partial^l g\|_{C^0(S_{0,0})}.$$

**Hypothèse  $H_3$  :** Nous supposons que  $\Sigma = \int_{\mathcal{O}_\delta} |\sigma(t)| dt < +\infty$ .

Alors nous avons

$$E_J^c \leq \Omega_\sigma 2^{-Jl} \|\partial^l g\|_{C^0(S_{0,0})}, \quad (\text{C.3.21})$$

avec

$$\Omega_\sigma = \frac{\bar{N}^l}{l!} \Sigma \left( D \|\phi\|_0 + \sum_{m \in Z_J} |W_m^{J,l}| |\sigma(t_i^{J,k})| \right).$$

**Conclusion :** Avec (C.3.9), (C.3.20) et (C.3.21) nous concluons qu'il existe une constante  $R$  telle que

$$E \leq R(\Omega + \Omega_\sigma) \left[ 2^{-Jl} |\log(2^{-J})| \|g\|_{C^l(S_{0,0})} + \varepsilon \|g\|_{C^0(S_{0,0})} \right]. \quad (\text{C.3.22})$$

Nous énonçons le théorème suivant :

**Théorème 10** Soient  $\varepsilon$  la précision souhaitée,  $f(x) = g(x)\sigma(x) + h(x)$  où les fonctions  $g, h$  sont des fonctions au moins  $C^l$  sur le support de  $\phi$  et  $\sigma$  une fonction singulière satisfaisant les hypothèses  $H_1, H_2$  et  $H_3$  ci dessus. On a alors

$$|SQ_\delta(f) - \langle f, \phi \rangle| = O(\varepsilon),$$

où la quadrature  $SQ_\delta(f)$  est donnée par (C.3.6).

En effet, de (C.3.10) et (C.3.22) nous déduisons que

$$|SQ_\delta(f) - I| = E_J = R (\Omega + \Omega_\sigma) [2^{-Jl} |\log(2^{-J})| \|g\|_{C^l(S_{0,0})} + \varepsilon \|g\|_{C^0(S_{0,0})}].$$

Comme l'échelle d'arrêt  $J$  est tel que  $O(2^{-Jl}) = O(\varepsilon)$ , on conclut alors que

$$|SQ_\delta(f) - I| = O(\varepsilon).$$

**Remarque 11** La notion de quadrature corrigée s'étend de manière similaire au cas de noyaux de la forme suivante:

$$K(x, y) = G(x, y) \Sigma(x, y) + H(x, y), \quad (C.3.23)$$

où  $G, H \in C^l(\mathbb{R}^2)$  et  $\Sigma$  est singulière.



## Partie D

### Quelques applications des formules de quadrature



# Chapitre I

## Utilisation pour le calcul des coefficients d'ondelettes

Étant donnée une analyse multirésolution  $(V_j)_{j=0,\dots,n}$  où  $V_j$  est l'espace engendré par la famille  $(\phi_{j,k}(x) = 2^{(n-j)/2} \phi(2^{n-j} \cdot -k))_{k=0,\dots,2^{n-j}-1}$ , les coefficients  $S_k^0 = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$  (respectivement  $S_{k,l}^0 = \langle K, \phi_{0,k} \otimes \phi_{0,l} \rangle$ ) constituent la donnée de départ, comme le montre les sections I.3.1 et I.3.2 de la première partie, pour les algorithmes de l'analyse par ondelettes. L'estimation de ces coefficients s'effectue par une application des formules de quadratures explicitées dans la partie précédente.

### I.1 Utilisation de la formule de quadrature à l'échelle fine

Soit  $f$  une fonction donnée par sa forme analytique. La projection de  $f$  sur l'espace d'approximation  $V_0$  est donnée par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} S_k^0 \phi_{0,k}(x).$$

Les  $2^n$  coefficients  $S_k^0 = \langle f, \phi_{0,k} \rangle$  sont à calculer par les formules de quadratures.

**Cas régulier :** Si la fonction  $f$  est au moins de classe  $C^l$  sur le support de  $\phi$ , alors grâce à la formule de subdivision uniforme (C.1.17)

$$\phi(2^n x - k) = 2^{-n} \sum_{m \in S_J} s_{J,m} 2^{J+n} \phi(2^{J+n} x - (2^J k + m)), \quad J > 0,$$

on obtient

$$|S_k^0 - Q_J(f)| = O(2^{-(n+J)l}). \quad (\text{D.1.1})$$

où

$$Q_J(f) = 2^{-n/2} \left( \sum_{m \in S_J} s_{J,m} \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_r^l f(2^{-(J+n)} (\frac{r(N-1)}{l-1} + 2^J k + m)) \right).$$

L'entier  $J$  est tel que l'erreur soit inférieure à  $\varepsilon$ , la précision souhaitée du calcul. On déduit donc que  $J$  doit vérifier  $-(\frac{\ln(\varepsilon)}{l \ln(2)} + n) < J$ . Pour tout  $k$  le calcul de  $S_k^0$  comporte  $l.c_J$  additions et  $l.c_J$  multiplications où  $c_J = 2^{J-1}N + (2^{J-1} - 1)(N - 2)$  et représente le cardinal de  $S_J$ . On remarque qu'une grande valeur de  $J$  entraîne un grand nombre d'opérations, mais en pratique on se contentera de petites valeurs de  $J$  car l'erreur obtenue avec ces valeurs est suffisante, comme le montre la figure ci dessous.

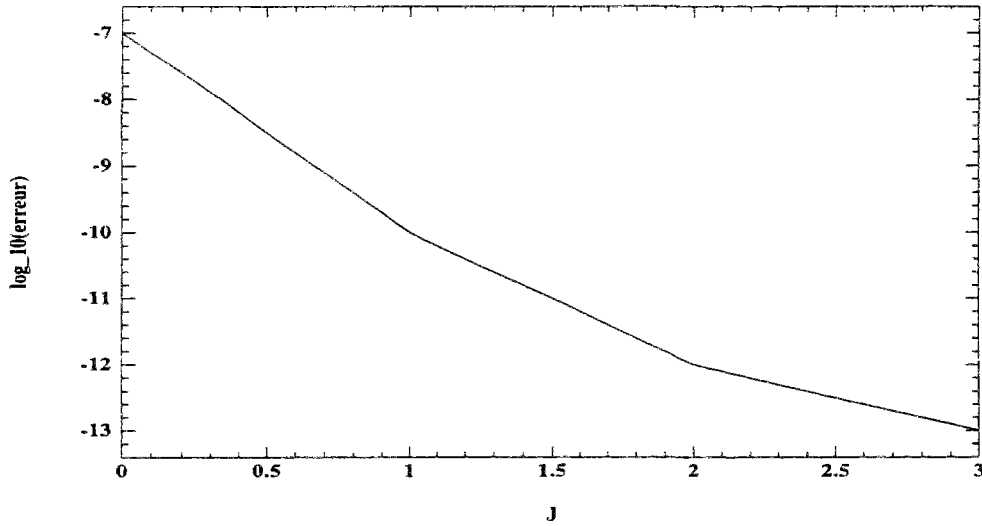


FIG. I.1 -  $\log_{10}(\frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |2^{n/2} Q_J(f) - f(k2^{-n})|)$ ,  $f(x) = \sin(x)$  et  $\phi$  est de Daubechies avec  $M = 4$  et  $J = 0, \dots, 4$ .

Pour  $n = 4, 6, 8$  (échelle d'approximation)  $l = 8$  (degré de régularité) et  $M = 4$  (nombre de moments nuls de l'ondelette de Daubechies), on a calculé l'erreur de la quadrature pour  $f(x) = \sin(x)$ . Le tableau ci dessous donne une comparaison de cette erreur ( $erreur_z$ ) avec celles obtenues par la méthode de Sweldens ( $erreur_s$ ), la méthode classique de trapèze ( $erreur_t$ ) et la méthode des Coiflets ( $erreur_c$ ):

| $n$ | $error_z$      | $error_s$  | $error_t$  | $error_c$  |
|-----|----------------|------------|------------|------------|
| 4   | $1.855999e-07$ | $5.03e-09$ | $1.53e-05$ | $2.7e-06$  |
| 5   | $5.750474e-10$ | $1.61e-10$ | $1.98e-06$ | $3.43e-07$ |
| 6   | $1.053096e-12$ | $5.10e-12$ | $2.50e-07$ | $4.28e-08$ |
| 7   | $9.530773e-14$ | $1.60e-13$ | $3.15e-08$ | $5.35e-09$ |
| 8   | $4.946449e-14$ | $4.66e-15$ | $3.96e-09$ | $6.69e-10$ |

**Cas singulier :** Dans le cas où la fonction  $f$  est singulière, on considère alors l'équation de subdivision non uniforme (C.2.7)

$$\begin{aligned} \phi(2^n x - k) = & 2^{-n} \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} a_{j,m} 2^{j+n} \phi(2^{j+n} x - (2^j k + m)) + \\ & 2^{-n} \sum_{m \in R_J} a_{J,m} 2^{n+J} \phi(2^{J+n} x - (2^J k + m)), \end{aligned}$$

et sous les hypothèses de l'un des deux théorèmes 6 et 7 on obtient

$$|S_k^0 - QS_J(f)| \leq \varepsilon. \quad (\text{D.1.2})$$

où

$$QS_J(f) = 2^{-n/2} \left( \sum_{j=1}^J \sum_{m \in K_j} a_{j,m} \sum_{r=1}^{l-1} \alpha_r^l f(2^{-(j+n)} (\frac{r(N-1)}{l-1} + 2^j k + m)) \right).$$

L'échelle d'arrêt  $J$  est tel que  $J > -(\frac{\log_2(\varepsilon/2R)}{\gamma+1} + n)$ , où  $\gamma$  est l'ordre de la singularité et  $R$  est une constante ne dépendant que la fonction d'échelle. Comme pour le cas régulier quand la valeur de  $J$  est grande le nombre d'opérations nécessaire pour la quadrature est très grand. Mais en pratique, et puisque une précision de calcul vérifiant  $10^{-8} \leq \varepsilon \leq 10^{-4}$  est suffisante, la valeur de  $J$  reste petite. Par exemple si l'échelle fine  $n$  vaut 8 et  $\gamma = 0.5$  alors  $J = 2$  est suffisant pour une précision  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

**Remarque 12** On pourrait être tenté par l'utilisation de ces formules de quadratures pour l'évaluation des coefficients de l'analyse multirésolution  $S_k^1, S_k^2, S_k^3, \dots, S_k^{n-1}, S_0^n$ . Ceci n'a pas d'intérêt, généralement, car d'une part ces coefficients peuvent se calculer récursivement par l'algorithme d'analyse une fois nous avons les  $S_k^0$  et d'autre part, l'utilisation des formules de quadratures pour les calculer risque d'être inefficace car la valeur de  $J$  devient trop importante (comme le montre le tableau ci dessous) ce qui fait croître le nombre d'opérations.

| $\varepsilon  n$ | 4  | 5 | 6 | 7 | 8 |
|------------------|----|---|---|---|---|
| $10^{-3}$        | 0  | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $10^{-4}$        | 2  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $10^{-5}$        | 4  | 3 | 2 | 1 | 1 |
| $10^{-6}$        | 5  | 4 | 3 | 2 | 2 |
| $10^{-7}$        | 7  | 6 | 5 | 4 | 3 |
| $10^{-8}$        | 9  | 8 | 7 | 6 | 5 |
| $10^{-9}$        | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

## I.2 Vers des méthodes d'ondelettes pour les équations intégrales

Dans cette section, nous utilisons les méthodes de quadratures de la partie B pour calculer la matrice de Galerkin dans une base d'ondelettes d'une équation intégrale. Puisque une équation intégrale est représentée, d'une manière générale, par un opérateur linéaire  $T$  de noyau  $K(x, y)$  explicitement donné, le calcul des coefficients de la matrice de Galerkin se ramène donc à une application directe des formules de quadratures à l'opérateur  $T$ . Cette section, qui constitue un début pour les travaux qu'on a en perspective, sera surtout consacrée à l'explication de la méthode de Galerkin dans une base d'ondelettes et aux méthodes de compression. On présentera une simple application consacrée au calcul de cette matrice pour le problème de Dirichlet.

### I.2.1 Représentation de Galerkin

On considère l'équation intégrale linéaire suivante :

$$\int K(x, y)f(y)dy = g(x) \quad (\text{D.1.3})$$

où  $K(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  et  $f, g$  sont dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On note  $T$  l'opérateur  $Tf(x) = \int K(x, y)f(y)dy$ , l'équation (D.1.3) devient

$$Tf(x) = g(x).$$

La méthode de Galerkin, qui consiste à résoudre le problème dans un espace d'approximation  $V$ , mène au problème suivant

$$\text{Trouver } f_v \in V \text{ telle que } \langle Tf_v, v \rangle = \langle g, v \rangle, \forall v \in V.$$

Étant donnée une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  tel que  $V_j$  est engendré par la famille  $2^{j/2}\phi(2^j x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$  où  $\phi$  est à support compact. On considère comme espace d'approximation  $V$  l'un des  $V_j$ , soit  $V = V_0$ . Alors le problème s'écrit

Trouver  $f_0 \in V_0$  telle que  $\langle T f_0, v_0 \rangle = \langle g, v_0 \rangle, \forall v_0 \in V_0$ .

Dans  $V_0$  on a :

$$f_0(x) = \sum_k \langle f_0, \phi_{0,k} \rangle \phi_{0,k}(x).$$

où  $k = (k_1, k_2, \dots, k_d)$  et pour tout  $1 \leq i \leq d$ ,  $k_i = 0, \dots, 2^n - 1$ .

L'application de l'opérateur  $T$  à la fonction  $f_0$  s'écrit :

$$T f_0(x) = \sum_k \langle f_0, \phi_{0,k} \rangle T \phi_{0,k}(x).$$

et le problème se ramène donc au problème produit matrice vecteur suivant :

$$\sum_k \langle T \phi_{0,k}, \phi_{0,l} \rangle \langle f_0, \phi_{0,k} \rangle = \langle g_0, \phi_{0,l} \rangle \quad l \in \mathbb{Z}^d \quad (\text{D.1.4})$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$A_0 F^0 = G^0 \quad (\text{D.1.5})$$

avec  $A_0$  la matrice  $\langle T \phi_{0,k}, \phi_{0,l} \rangle$ ,  $F^0$  le vecteur  $(\langle f_0, \phi_{0,k} \rangle)_k$  et  $G^0$  le vecteur  $(\langle g_0, \phi_{0,l} \rangle)_l$ . On appelle matrice de Galerkin la matrice  $A_0$ .

**Remarque 13** La matrice de Galerkin représente la donnée initiale pour les algorithmes de l'analyse par ondelettes. On donnera dans l'annexe 0 un rappel de ces algorithmes et surtout la construction des matrices standard et non standard (comme elle est donnée dans [12] par Beylkin et ses collaborateurs) d'un opérateur  $T$ .

## I.2.2 Problème de Dirichlet

Soit  $\Omega$  le disque de centre 0 et de rayon  $R$ . On note  $\Omega' = \mathbb{R}^2/\Omega$  et  $\Gamma = \partial\Omega$ . On appelle problème de Dirichlet sur  $\Omega$  le problème

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \text{ sur } \Omega \cap \Omega' \\ u &= u_0 \text{ sur } \Gamma \end{aligned} \quad (\text{D.1.6})$$

lorsque  $L = -\Delta$ . Les restrictions de ce problème à  $\Omega$  et  $\Omega'$  admettent une solution unique respectivement dans  $H^1(\Omega)$  et  $W^1(\Omega')$ . La solution élémentaire de (D.1.6) vaut

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} \log |x|.$$

Par la définition de la solution élémentaire et la représentation du potentiel de simple couche, la fonction

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)q(y)d\gamma(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{D.1.7})$$

est une solution du problème, avec  $q$  définie sur  $\Gamma$  et solution de l'équation intégrale

$$u_0(x) = \int_{\Gamma} G(x-y)q(y)d\gamma(y), \quad \forall x \in \Gamma. \quad (\text{D.1.8})$$

En effectuant un changement polaire, (D.1.8) s'écrit

$$u_p(\theta_1) = \int_0^{2\pi} G_p(\theta_1, \theta_2)q_p(\theta_2)d\theta_2, \quad \forall \theta_1 \in [0, 2\pi], \quad (\text{D.1.9})$$

où  $u_p(\theta_1) = u_0(x)$ ,  $G_p(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{R^2}G(x-y)$ , et  $q_p(\theta_2) = q(y)$ .

L'intérêt de ce changement de repère est de se ramener à un problème unidimensionnel, ce qui facilite les calculs puisque nous allons utiliser une base d'ondelettes unidimensionnelle.

Si on considère une base d'ondelettes sur de Daubechies de support  $[0, 2M-1]$ , on obtient une base d'ondelettes sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  par le procédé de la périodisation qui consiste à considérer comme espace d'approximation l'espace  $\tilde{V}_0$  engendré par la famille des fonctions

$$\tilde{\phi}_{n,k}(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi_{n,k}(x + 2\pi m). \quad (\text{D.1.10})$$

La discrétisation de (D.1.9) sur l'espace  $\tilde{V}_0$  nécessite le calcul des coefficients relatifs à  $f$

$$\tilde{S}_k^0(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} S_{k,m}^n, \quad (\text{D.1.11})$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{k,m}^0 &= 2^{n/2} \int f(t) \phi(2^n(t + m2\pi) - k) dt \\ &= 2^{n/2} \int f(t - m2\pi) \phi(2^n t - k) dt. \end{aligned} \quad (\text{D.1.12})$$

Et des coefficients

$$\tilde{K}_{k,l}^0(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} K_{k,l,m}^n, \quad (\text{D.1.13})$$

où

$$K_{k,l,m}^0 = 2^n \int_0^{2M-1} \int_0^{2M-1} K(t_1 - m2\pi, t_2 - m2\pi) \phi(2^n t_1 - k) \phi(2^n t_2 - l) dt_1 dt_2. \quad (\text{D.1.14})$$

**Remarque 14** – *Puisque la fonction  $\phi$  est à support compact, la somme figurant dans (D.1.10) est finie et par conséquent celles de (D.1.11) et (D.1.13) le sont aussi.*

– *Le calcul des projections sur l'espace périodisé  $\tilde{V}_0$  se déduit du calcul de l'approximation sur  $V_0$ .*

Les premiers coefficients (D.1.12) se calculent par, selon la régularité de  $f$ , (D.1.1) ou (D.1.2) de la section I.1 ci-dessus. Le calcul des coefficients (D.1.14) sera donné dans la section qui suit, dans laquelle nous expliquons l'application des formules de quadratures de la partie B, pour l'estimation de la matrice de Galerkin.

### I.3 Opérateurs et compression

Soit  $T$  un opérateur linéaire donné par son noyau  $K(x, y)$ . Par les formules de quadratures on calcule les éléments de la matrice de Galerkin qui coïncident avec les coefficients  $S_{k,l}^0 = \langle K, \phi_{0,k} \otimes \phi_{0,l} \rangle$ . Dans le cas où le noyau est au moins de classe  $C^l$  en  $x$  et en  $y$ , par (C.1.29) on obtient

$$|S_{k,k'}^0 - Q_{2,J}(K, n, k, k')| = O(2^{-(n+J)l}),$$

où

$$Q_{2,J}(K, n, k, k') = 2^{-n} \left( \sum_{(m,m') \in S_J} s_{J,m} s_{J,m'} \sum_{r,r'=1}^{l-1} \alpha_r^l \alpha_{r'}^l K(2^{-(J+n)} x_{r,m}^{J,k}, 2^{-(J+n)} y_{r',m'}^{J,k'}) \right)$$

avec  $x_{r,m}^{J,k} = \frac{r(N-1)}{l-1} + 2^J k + m$  et  $y_{r',m'}^{J,k'} = \frac{r'(N-1)}{l-1} + 2^J k' + m'$ .

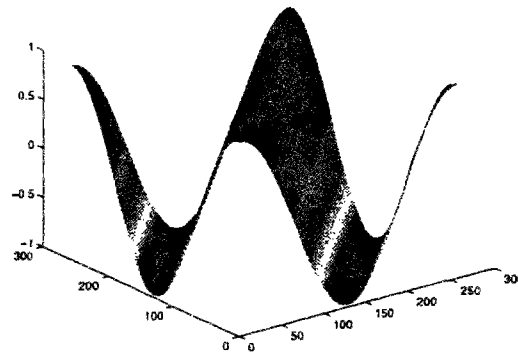


FIG. I.2 –  $(2^n Q_{2,J}(K, n, k, k'))_{k,k'=0,\dots,2^n-1}$ ,  $K(x, y) = \sin(2\pi(x - y))$  et  $\phi$  est de Daubechies avec  $M = 4$  et  $n = 8$ .

Dans le cas où le noyau  $K(x, y)$  a une singularité tout au long de la diagonale, la formule de quadrature singulière (C.2.34) nous donne

$$|S_{k,k'}^0 - QS_{2,J}(K, n, k, k')| \leq \varepsilon. \quad (\text{D.1.15})$$

où

$$QS_{2,J}(K, n, k, k') = 2^{-n} \left( \sum_{j=1}^J \sum_{m, m' \in K_j} a_{j,m} a_{j,m'} \sum_{r, r'=1}^{l-1} \alpha_r^l \alpha_{r'}^l K(2^{-(j+n)} x_{r,m}^{j,k}, 2^{-(j+n)} y_{r',m'}^{j,k'}) \right)$$

avec  $x_{r,m}^{j,k} = \frac{r(N-1)}{l-1} + 2^j k + m$  et  $y_{r',m'}^{j,k'} = \frac{r'(N-1)}{l-1} + 2^j k' + m'$ . La valeur de l'échelle d'arrêt  $J$  est liée à  $\varepsilon$ , la précision souhaitée du calcul.

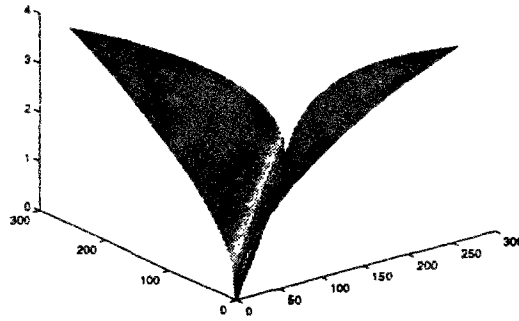


FIG. I.3 -  $(2^n QS_{2,J}(K, n, k, k'))_{k,k'=0,\dots,2^n-1}$ ,  $K(x, y) = \sqrt{|x-y|}$  et  $\phi$  est de Daubechies avec  $M = 4$  et  $n = 8$ .

### I.3.1 Erreur de compression

On note  $M_0$  la matrice formée par les coefficients  $S_{k,k'}^0$ . Soit  $c$  un réel positif, on note  $M_c$  la matrice obtenue à partir de  $M_0$ , en réduisant à zéro les  $S_{k,k'}^0$  dont la valeur absolue est inférieure à  $c$ .  $M_c$  s'appelle matrice compressée. On dit que c'est la meilleure compression quand d'une part la matrice  $M_c$  n'a qu'un petit nombre d'éléments non nuls et d'autre part la quantité  $\|M_0 - M_c\|$  est aussi petite qu'on le souhaite. On note  $\varepsilon_c$  la valeur de  $c$  telle que  $M_{\varepsilon_c}$  est la meilleure compression. Nous allons donner comment varie la valeur de  $\varepsilon_c$  en fonction de  $J$ , donc en fonction de  $\varepsilon$ . Voici les résultats obtenus pour  $K(x, y) = \sqrt{|x-y|}$  et la fonction d'échelle  $\phi$  de Daubechies avec  $M = 4$ . On note  $M_0$  la matrice de coefficients  $S_{k,l}^0 = 2^n \int \int \sqrt{|x-y|} \phi(2^n x - k) \phi(2^n y - l) dx dy$ ,  $k, l = 0, \dots, 2^n - 1$  et  $M_{\varepsilon_c}$  la matrice obtenue à partir de  $M_0$  en éliminant tout les éléments de  $M_0$  de module plus petit

que  $\varepsilon_c$ . On note  $erreur = \|M_0 - M_{\varepsilon_c}\|$  et  $nb$  est le pourcentage d'éléments éliminés. On prend  $n = 8$  et  $\varepsilon = 10^{-6}, 10^{-5}$  on obtient

| $\varepsilon = 10^{-6}$ | $\varepsilon_c$ | $erreur$        | $nb$   |
|-------------------------|-----------------|-----------------|--------|
|                         | $10^{-3}$       | $7.53884E - 05$ | 12.471 |
|                         | $10^{-4}$       | $1.16824E - 06$ | 2.716  |
|                         | $10^{-5}$       | $5.59366E - 08$ | 1.168  |
| $\varepsilon = 10^{-5}$ | $\varepsilon_c$ | $erreur$        | $nb$   |
|                         | $10^{-3}$       | $6.34255E - 05$ | 10.217 |
|                         | $10^{-4}$       | $9.63452E - 06$ | 3.010  |
|                         | $10^{-5}$       | $1.34827E - 07$ | 1.134  |

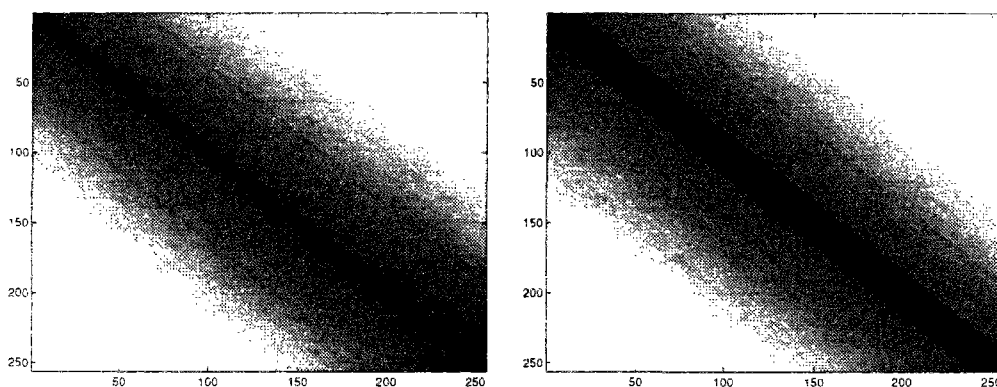


FIG. I.2 – Cette figure représente la matrice de Galerkin  $M_0$  (à gauche) de  $K(x, y) = \sqrt{|x - y|}$  avec  $n = 8$ ,  $M = 4$ , la matrice compressée  $M_c$  (à droite) obtenu après réduction à zéro tout les éléments de  $M_0$  dont le module est plus petit que  $\varepsilon_c = 10^{-4}$ .



## Annexes



## Annexe 0

Étant donnée une analyse multirésolution finie  $(V_j)_{j=0,\dots,n}$  de  $L^2(\mathbb{R})$  tel que  $V_j$  est engendré par la famille  $2^{n-j/2}\phi(2^{n-j}x - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^n$  où  $\phi$  est à support compact. Soit  $T$  un opérateur linéaire donné par son noyau  $K(x, y)$ .

### I.4 Forme non standard

Soit  $P_j$  la projection orthogonale par rapport à  $V_j$  et  $Q_j$  la projection orthogonale par rapport à  $W_j$ , rappelons que  $W_j$  est le supplémentaire de  $V_j$  dans  $V_{j-1}$  et est engendré par la famille  $(\psi_{j,k}(\cdot) = 2^{(n-j)/2}\psi(2^{n-j} \cdot - k))_{k=0,\dots,2^{n-j}-1}$ . On a  $P_j + Q_j = P_{j-1}$  car  $V_j \oplus W_j = V_{j-1}$ . On définit la forme "télescopique" de  $T$  par:

$$T \simeq P_0 T P_0 = \sum_{j=1}^n Q_j T Q_j + Q_j T P_j + P_j T Q_j + P_n T P_n \quad (\text{D.1.16})$$

qu'on peut réécrire encore comme

$$T_0 = P_0 T P_0 = \sum_{j=1}^n (A_j + B_j + C_j) + P_n T P_n. \quad (\text{D.1.17})$$

Les opérateurs  $A_j$ ,  $B_j$  et  $C_j$  sont respectivement représentés par les matrices

$$\begin{aligned} \alpha_{k,k'}^j &= \langle T \psi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle \\ \beta_{k,k'}^j &= \langle T \psi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle \\ \gamma_{k,k'}^j &= \langle T \phi_{j,k}, \psi_{j,k'} \rangle. \end{aligned}$$

On appelle forme non-standard la matrice  $\mathcal{A}_N$   $(2N, 2N)$ ,  $N = 2^n$  formée par les blocs  $((\alpha_{k,k'}^j)_{k,k'}, (\beta_{k,k'}^j)_{k,k'}, (\gamma_{k,k'}^j)_{k,k'})_{j=1,\dots,n; T_n}$ .

#### Compression d'opérateurs [Beylkin et al]

Par les propriétés d'oscillation, de régularité et de localisation des bases d'on-  
delettes mises en oeuvre, on peut estimer l'amplitude des  $\alpha_{k,k'}^j$ ,  $\beta_{k,k'}^j$  et  $\gamma_{k,k'}^j$ . En

effet, on note  $I = I_k^j$  et  $I' = I_{k'}^j$  les supports de  $\phi_{jk}$  et  $\phi_{jk'}$ . Si  $K(x, y)$  est régulier sur  $I \times I'$  sauf pour  $x = y$  alors par un développement de Taylor en  $x$  et en  $y$  et grâce à la nullité des  $M$  premiers moments de  $\psi$  et le fait que  $\phi$  et  $\psi$  ont le même support donnent l'estimation suivante

$$|\alpha_{k,k'}^j| + |\beta_{k,k'}^j| + |\gamma_{k,k'}^j| \leq C|I|^{M+1} \sup_{(x,y) \in I \times I'} (|\partial_x^M K(x, y)| + |\partial_y^M K(x, y)|). \quad (\text{D.1.18})$$

Le second membre de l'équation ci dessus est négligeable dans le cas où  $|I|$  ou les dérivées partielles de  $K$  le sont.

Si le noyau  $K(x, y)$  vérifie les conditions

$$\begin{aligned} |K(x, y)| &\leq \frac{1}{|x - y|}, \\ |\partial_x^M K(x, y)| + |\partial_y^M K(x, y)| &\leq \frac{C}{|x - y|^{1+M}}, \\ \left| \int_{I \times I} K(x, y) dx dy \right| &\leq C|I|. \end{aligned} \quad (\text{D.1.19})$$

Alors des deux premières inégalités de (D.1.19) on déduit que

$$|\alpha_{k,k'}^j| + |\beta_{k,k'}^j| + |\gamma_{k,k'}^j| \leq \frac{C(M)}{1 + |k - k'|^{M+1}}, \quad \forall |k - k'| \geq 2M. \quad (\text{D.1.20})$$

Les modules des coefficients  $\alpha_{k,k'}^j, \beta_{k,k'}^j$  et  $\gamma_{k,k'}^j$  sont inversement proportionnels à la distance entre  $I_k^j$  et  $I_{k'}^j$ . Ainsi, on peut mettre en évidence une méthode de compression en mettant à zéro les coefficients des matrices  $A_j, B_j, C_j$  se trouvant à l'extérieur de la bande de rayon  $B$ . On note  $T_0^B$  l'opérateur obtenu après cette compression et on obtient [12]

$$\|T_0^B - T_0\| \leq \frac{C}{B^M} \log_2(2^n), \quad (\text{D.1.21})$$

où  $C$  est une constante qui dépend du noyau. La valeur de  $B$  est un paramètre de l'algorithme et choisi de telle façon qu'on ait

$$\frac{C.n}{B^M} \leq \epsilon_c,$$

et on déduit que  $B$  doit vérifier

$$B \geq \left( \frac{C.n}{\epsilon_c} \right)^{\frac{1}{M}}. \quad (\text{D.1.22})$$

Voici un exemple de la matrice non standard associé au noyau  $K(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ . La matrice de Galerkin calculée et représentée ci-dessus constitue la donnée initiale, on considère  $M = 4$ ,  $n = 8$ .

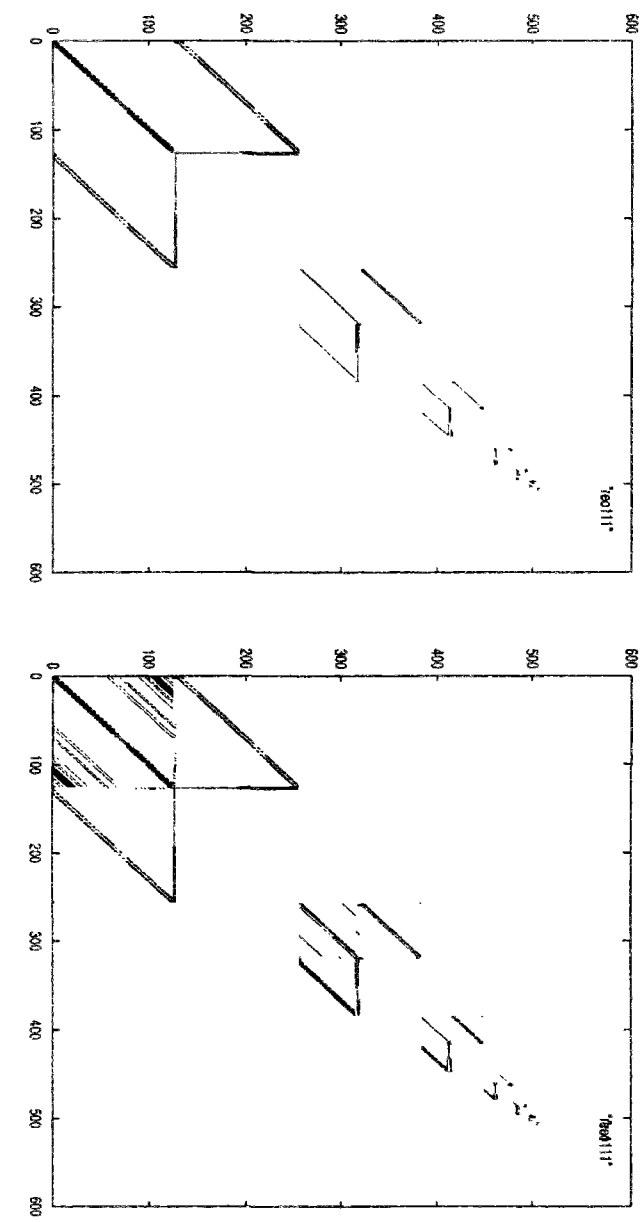


FIG. I.5 - Deux matrices non standard de  $K(x,y) = \sqrt{|x-y|}$  avec  $M = 4$  et  $n = 8$ . Le coefficient de compression  $\epsilon_c$  vaut  $10^{-5}$  pour la première et  $10^{-6}$  pour la seconde.

### I.4.1 Forme Standard

Soit L'AMR  $V_j$   $j \in \mathbb{Z}$  tel que  $j = n$  est l'échelle la plus grossière. Pour l'échelle  $j = 0, \dots, n$ , l'espace  $V_j$  est engendré par la famille  $(\phi_{j,k}(x))_{k=0, \dots, 2^{n-j}-1}$  où  $\phi_{j,k}(x) = (2^{(n-j)/2} \phi(2^{n-j}x - k))$  et on a

$$V_j = V_n \bigoplus_{i=j+1}^n W_i.$$

On considère, les matrices  $\{A^i, B^{j,i}, C^{j,i}\}_{i=j+1, \dots, n}$  données respectivement par :

$$\begin{aligned} A_{k,l}^i &= (\Gamma_{k,l}^{i,i}) & k, l = 0, \dots, 2^i \\ B_{k,l}^{j,i} &= (\Gamma_{k,l}^{i,j}) & k = 0, \dots, 2^i, \quad l = 0, \dots, 2^j \\ C_{k,l}^{j,i} &= (\Gamma_{k,l}^{j,i}) & k = 0, \dots, 2^j, \quad l = 0, \dots, 2^i \end{aligned}$$

où les  $\Gamma_{k,l}^{i,j}$  sont donnés par (??).

Remarquons que les matrices  $\{A^i, B^{j,i}, C^{j,i}\}_{i=j+1, \dots, n}$  sont associées respectivement aux opérateurs :

$$\begin{aligned} A_j &: W_j \rightarrow W_j \\ B_{i,j} &: W_i \rightarrow W_j \\ C_{i,j} &: W_j \rightarrow W_i \end{aligned}$$

pour tout  $i > j$ . On note  $\bar{B}_j^n$  et  $\bar{C}_j^n$  les opérateurs :

$$\begin{aligned} \bar{B}_j^n &= \langle T\phi_{0,k}, \psi_{j,l} \rangle \\ \bar{C}_j^n &= \langle T\psi_{j,k}, \phi_{0,l} \rangle \end{aligned}$$

On appelle *forme standard* la représentation matricielle suivante :

$$\mathcal{G}_0 = \{A_j, B_{j,i=j+1, \dots, n}^i, C_{j,i=j+1, \dots, n}^i, \bar{B}_j^n, \bar{C}_j^n, T_n\}_{j=1, \dots, n}, \quad (\text{D.1.23})$$

où  $T_n = \langle T\phi_{0,k}, \phi_{0,l} \rangle$ .

La forme standard, contrairement à la forme non standard, est une véritable écriture matricielle de l'opérateur  $T$ . De ce fait, le produit de deux formes standard est la forme standard du produit et l'inverse de la forme standard est la forme standard de l'inverse.

---

# Annexe 1

| Poids de quadrature $\alpha_k$ , $k = 0, \dots, l-1$ avec $l = 4, \dots, 15$ pour $M = 2$ |                       |                       |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $k$                                                                                       | 4                     | 5                     | 6                     |
| 0                                                                                         | 1.35704319172753e+00  | 1.07165596187844e+00  | 8.63139739244735e-01  |
| 1                                                                                         | -6.72412081935245e-01 | -4.31755332979465e-01 | -4.00497731817379e-01 |
| 2                                                                                         | 4.28395135443180e-01  | 6.68748271295818e-01  | 1.17700270263699e+00  |
| 3                                                                                         | -1.13026245235463e-01 | -3.85478707724087e-01 | -9.29292044609661e-01 |
| 4                                                                                         |                       | 7.68298075289925e-02  | 3.45919032490714e-01  |
| 5                                                                                         |                       |                       | -5.62716979439232e-02 |
| $k$                                                                                       | 7                     | 8                     | 9                     |
| 0                                                                                         | 7.19700887019569e-01  | 6.17641813336434e-01  | 5.42031941417677e-01  |
| 1                                                                                         | -4.92828594333121e-01 | -6.14721064441636e-01 | -7.31616620377347e-01 |
| 2                                                                                         | 1.76550237253673e+00  | 2.30285923007713e+00  | 2.79227581037998e+00  |
| 3                                                                                         | -1.62093137540283e+00 | -2.44025272955066e+00 | -3.48578045996486e+00 |
| 4                                                                                         | 8.81397085893726e-01  | 1.86059194635921e+00  | 3.49928428165289e+00  |
| 5                                                                                         | -2.95345929358774e-01 | -9.68943356116998e-01 | -2.39728502754664e+00 |
| 6                                                                                         | 4.25055536450949e-02  | 2.77060427887456e-01  | 9.99176458281624e-01  |
| 7                                                                                         |                       | -3.42362675163271e-02 | -2.45250481573507e-01 |
| 8                                                                                         |                       |                       | 2.71640977113077e-02  |
| $k$                                                                                       | 10                    | 11                    | 12                    |
| 0                                                                                         | 4.82966789208228e-01  | 4.35443796455222e-01  | 3.96490196699754e-01  |
| 1                                                                                         | -8.25811928252524e-01 | -9.00713144199717e-01 | -9.62882373395345e-01 |
| 2                                                                                         | 3.22636923282853e+00  | 3.63885544414305e+00  | 4.05917739409547e+00  |
| 3                                                                                         | -4.73342384178937e+00 | -6.22889346688828e+00 | -8.01626186100043e+00 |
| 4                                                                                         | 5.81570481406990e+00  | 8.97670944258158e+00  | 1.31849397674140e+01  |
| 5                                                                                         | -4.83873444890955e+00 | -8.84870164889469e+00 | -1.51119952910118e+01 |
| 6                                                                                         | 2.67232131929435e+00  | 6.20860724627181e+00  | 1.28557936434047e+01  |
| 7                                                                                         | -1.00102423073864e+00 | -3.13967731806741e+00 | -8.07616643514564e+00 |
| 8                                                                                         | 2.24002340179545e-01  | 1.04707529215965e+00  | 3.55029008037070e+00  |
| 9                                                                                         | -2.23700456897347e-02 | -2.07478470439426e-01 | -1.05536294153433e+00 |
| 10                                                                                        |                       | 1.87728272649670e-02  | 1.91978061357741e-01  |
| 11                                                                                        |                       |                       | -1.60002458724136e-02 |
| $k$                                                                                       | 13                    | 14                    | 15                    |
| 0                                                                                         | 3.64036580416858e-01  | 3.36609551221247e-01  | 3.13117798527365e-01  |
| 1                                                                                         | -1.01621315795335e+00 | -1.06296558434821e+00 | -1.10425202985971e+00 |
| 2                                                                                         | 4.49641353829642e+00  | 4.95068655166131e+00  | 5.41777751259269e+00  |
| 3                                                                                         | -1.00936942064064e+01 | -1.24475303376989e+01 | -1.50609700478217e+01 |
| 4                                                                                         | 1.85729751823191e+01  | 2.52704215916438e+01  | 3.34086009969833e+01  |
| 5                                                                                         | -2.42994759226247e+01 | -3.71940832886394e+01 | -5.46816607335059e+01 |
| 6                                                                                         | 2.41793347878095e+01  | 4.23153328688932e+01  | 6.99874268491694e+01  |
| 7                                                                                         | -1.80946359127188e+01 | -3.68432340383442e+01 | -6.95969888018735e+01 |
| 8                                                                                         | 9.94494603464989e+00  | 2.43985583543545e+01  | 5.38844180805172e+01  |
| 9                                                                                         | -3.97387506335787e+00 | -1.22106988148062e+01 | -3.22986543060251e+01 |
| 10                                                                                        | 1.08699674460814e+00  | 4.43084335563981e+00  | 1.46137821692319e+01  |
| 11                                                                                        | -1.80655865265148e-01 | -1.10083591423995e+00 | -4.85449611088552e+00 |
| 12                                                                                        | 1.38473557697203e-02  | 1.68962143598662e-01  | 1.12139089782931e+00  |
| 13                                                                                        |                       | -1.20658632712765e-02 | -1.60150885404050e-01 |
| 14                                                                                        |                       |                       | 1.06542473907112e-02  |

| Poids de quadrature $\alpha_k$ , $k = 0, \dots, l-1$ avec $l = 4, \dots, 15$ pour $M = 3$ |                       |                       |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $k$                                                                                       | 4                     | 5                     | 6                     |
| 0                                                                                         | 1.76974891012941e+00  | 1.47663655767425e+00  | 1.16383266755211e+00  |
| 1                                                                                         | -1.38416370613428e+00 | -1.04747604775770e+00 | -5.93358231502831e-01 |
| 2                                                                                         | 8.05159747631688e-01  | 9.38375876646952e-01  | 9.14597282855388e-01  |
| 3                                                                                         | -1.90744951626819e-01 | -4.58271008529538e-01 | -7.35752680839330e-01 |
| 4                                                                                         |                       | 9.07346219657933e-02  | 3.01101699992408e-01  |
| 5                                                                                         |                       |                       | -5.04207380568349e-02 |
| $k$                                                                                       | 7                     | 8                     | 9                     |
| 0                                                                                         | 9.06383190045193e-01  | 7.16408322562191e-01  | 5.79541376897546e-01  |
| 1                                                                                         | -2.78293552371204e-01 | -1.51964678431614e-01 | -1.46836060747762e-01 |
| 2                                                                                         | 1.04021813514377e+00  | 1.38906689690394e+00  | 1.82283453958093e+00  |
| 3                                                                                         | -1.18841638012042e+00 | -1.88631607989759e+00 | -2.68946010681263e+00 |
| 4                                                                                         | 7.27559151209107e-01  | 1.47792100754713e+00  | 2.54346740533080e+00  |
| 5                                                                                         | -2.41934715980320e-01 | -7.25228946843015e-01 | -1.66193349254738e+00 |
| 6                                                                                         | 3.44841720751082e-02  | 2.05712650300253e-01  | 7.09634238766581e-01  |
| 7                                                                                         |                       | -2.55991721307075e-02 | -1.76845016803525e-01 |
| 8                                                                                         |                       |                       | 1.95971163068756e-02  |
| $k$                                                                                       | 10                    | 11                    | 12                    |
| 0                                                                                         | 4.79568873332371e-01  | 4.04802996135835e-01  | 3.47409914850108e-01  |
| 1                                                                                         | -1.94197667892999e-01 | -2.56142145524738e-01 | -3.15104674560502e-01 |
| 2                                                                                         | 2.22011953273272e+00  | 2.54523463558577e+00  | 2.80156758305713e+00  |
| 3                                                                                         | -3.49457642523552e+00 | -4.31843125918479e+00 | -5.19557543943505e+00 |
| 4                                                                                         | 3.94928348386092e+00  | 5.80945566746425e+00  | 8.19074260413976e+00  |
| 5                                                                                         | -3.27300177598108e+00 | -5.85009930208487e+00 | -9.63197660701860e+00 |
| 6                                                                                         | 1.87343094814446e+00  | 4.17510016609673e+00  | 8.18932639933291e+00  |
| 7                                                                                         | -7.00258424735143e-01 | -2.07284261580159e+00 | -5.07050842521815e+00 |
| 8                                                                                         | 1.55094659612173e-01  | 6.87497047549748e-01  | 2.24357741724874e+00  |
| 9                                                                                         | -1.54632038178819e-02 | -1.36995895470084e-01 | -6.71062502889427e-01 |
| 10                                                                                        |                       | 1.24207055764394e-02  | 1.21726020468817e-01  |
| 11                                                                                        |                       |                       | -1.01222896182543e-02 |
| $k$                                                                                       | 13                    | 14                    | 15                    |
| 0                                                                                         | 3.02248666432617e-01  | 2.65940949079372e-01  | 2.36216394369131e-01  |
| 1                                                                                         | -3.64548092213962e-01 | -4.03405017741715e-01 | -4.32777286357684e-01 |
| 2                                                                                         | 3.00390201888081e+00  | 3.16861598453121e+00  | 3.30905973017354e+00  |
| 3                                                                                         | -6.14352468735069e+00 | -7.16961088206779e+00 | -8.27416390004691e+00 |
| 4                                                                                         | 1.11061675326794e+01  | 1.45643104596963e+01  | 1.85798598912424e+01  |
| 5                                                                                         | -1.48364503483452e+01 | -2.17337609295028e+01 | -3.06371887066662e+01 |
| 6                                                                                         | 1.46490561307373e+01  | 2.45126551113417e+01  | 3.89346750477125e+01  |
| 7                                                                                         | -1.09031065003376e+01 | -2.13419790264074e+01 | -3.87915542831634e+01 |
| 8                                                                                         | 6.04145112739263e+00  | 1.41929666527262e+01  | 3.00639751004601e+01  |
| 9                                                                                         | -2.41016653873015e+00 | -7.07060138584234e+00 | -1.79611435353499e+01 |
| 10                                                                                        | 6.55604177116089e-01  | 2.56278251890672e+00  | 8.13987287908913e+00  |
| 11                                                                                        | -1.09001415802613e-01 | -6.39038851706601e-01 | -2.70754428028158e+00 |
| 12                                                                                        | 8.36792373587003e-03  | 9.81213355270789e-02  | 6.23757203406626e-01  |
| 13                                                                                        |                       | -6.99696375501491e-03 | -8.89667754404826e-02 |
| 14                                                                                        |                       |                       | 5.92287701115390e-03  |

| Poids de quadrature $\alpha_k$ , $k = 0, \dots, l-1$ avec $l = 4, \dots, 15$ pour $M = 4$ |                       |                       |                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $k$                                                                                       | 4                     | 5                     | 6                     |
| 0                                                                                         | 1.97733098080313e+00  | 1.73106640600407e+00  | 1.40628310566098e+00  |
| 1                                                                                         | -1.77774826505209e+00 | -1.57334741224251e+00 | -1.04473879473630e+00 |
| 2                                                                                         | 1.04899318000491e+00  | 1.35988385787139e+00  | 1.24904834505533e+00  |
| 3                                                                                         | -2.48575895755950e-01 | -6.42129112644699e-01 | -9.09934202185525e-01 |
| 4                                                                                         |                       | 1.24526261011539e-01  | 3.58497408312247e-01  |
| 5                                                                                         |                       |                       | -5.91558621059545e-02 |
| $k$                                                                                       | 7                     | 8                     | 9                     |
| 0                                                                                         | 1.09364235425479e+00  | 8.36659981737809e-01  | 6.42763883775344e-01  |
| 1                                                                                         | -4.69493737734144e-01 | -3.99550301260830e-02 | 1.91866853233258e-01  |
| 2                                                                                         | 9.47706312120310e-01  | 7.70432353643287e-01  | 8.50453176733086e-01  |
| 3                                                                                         | -1.01702744976971e+00 | -1.18980852884013e+00 | -1.60287131473642e+00 |
| 4                                                                                         | 6.25498409468411e-01  | 1.00653837646935e+00  | 1.65858328837834e+00  |
| 5                                                                                         | -2.10518368421210e-01 | -5.13153355650562e-01 | -1.11176103202899e+00 |
| 6                                                                                         | 3.01924800829724e-02  | 1.47853422272494e-01  | 4.77064616600788e-01  |
| 7                                                                                         |                       | -1.85672194971748e-02 | -1.19369237604887e-01 |
| 8                                                                                         |                       |                       | 1.32697656277892e-02  |
| $k$                                                                                       | 10                    | 11                    | 12                    |
| 0                                                                                         | 5.01583127485986e-01  | 3.99053910657338e-01  | 3.23584573277380e-01  |
| 1                                                                                         | 2.68674202270828e-01  | 2.56604681471254e-01  | 2.05485959690551e-01  |
| 2                                                                                         | 1.11519207759647e+00  | 1.42730807607949e+00  | 1.69642553065213e+00  |
| 3                                                                                         | -2.19660736057378e+00 | -2.80542224795442e+00 | -3.33685283785221e+00 |
| 4                                                                                         | 2.59590946126272e+00  | 3.71956536232404e+00  | 4.99284906415005e+00  |
| 5                                                                                         | -2.13450674111259e+00 | -3.64919432958524e+00 | -5.76337540311537e+00 |
| 6                                                                                         | 1.21292473462539e+00  | 2.59402153697674e+00  | 4.93828962748049e+00  |
| 7                                                                                         | -4.53799624443425e-01 | -1.29440297102795e+00 | -3.08188573417739e+00 |
| 8                                                                                         | 1.00686538801211e-01  | 4.30648824502686e-01  | 1.36651233299123e+00  |
| 9                                                                                         | -1.00564158844127e-02 | -8.59891422701115e-02 | -4.09106659972957e-01 |
| 10                                                                                        |                       | 7.80629905262255e-03  | 7.42518889540584e-02  |
| 11                                                                                        |                       |                       | -6.17834242483359e-03 |
| $k$                                                                                       | 13                    | 14                    | 15                    |
| 0                                                                                         | 2.66978457615477e-01  | 2.23667975921842e-01  | 1.89886459086455e-01  |
| 1                                                                                         | 1.43348992644686e-01  | 8.35965754933565e-02  | 3.16130621011705e-02  |
| 2                                                                                         | 1.89370805658786e+00  | 2.02332767393958e+00  | 2.10004452780110e+00  |
| 3                                                                                         | -3.79564408441003e+00 | -4.22012960731274e+00 | -4.64146336147988e+00 |
| 4                                                                                         | 6.46780212474609e+00  | 8.19508997716076e+00  | 1.01831155634172e+01  |
| 5                                                                                         | -8.63903727547097e+00 | -1.24016390289574e+01 | -1.71190440214300e+01 |
| 6                                                                                         | 8.64800721646168e+00  | 1.41436709655955e+01  | 2.18629639112628e+01  |
| 7                                                                                         | -6.46530130915194e+00 | -1.23044125551853e+01 | -2.17107456771030e+01 |
| 8                                                                                         | 3.57902746594606e+00  | 8.16764794185633e+00  | 1.68192317160672e+01  |
| 9                                                                                         | -1.42775806882032e+00 | -4.07215374976656e+00 | -1.00646434956029e+01 |
| 10                                                                                        | 3.88544964312215e-01  | 1.47739701139776e+00  | 4.56418262359540e+00  |
| 11                                                                                        | -6.46414535782960e-02 | -3.68647787479258e-01 | -1.51835409708926e+00 |
| 12                                                                                        | 4.96491229067497e-03  | 5.66235005815887e-02  | 3.49785480931033e-01  |
| 13                                                                                        |                       | -4.03889033228039e-03 | -4.98947013171147e-02 |
| 14                                                                                        |                       |                       | 3.32199522068388e-03  |

| Poids de quadrature $\alpha_k$ , $k = 0, \dots, l-1$ avec $l = 4, \dots, 15$ pour $M = 10$ |                       |                       |                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $k$                                                                                        | 4                     | 5                     | 6                     |
| 0                                                                                          | 2.34311101493448e+00  | 2.23497406756661e+00  | 1.97903091076021e+00  |
| 1                                                                                          | -2.49888796886876e+00 | -2.73252805230011e+00 | -2.45523219321372e+00 |
| 2                                                                                          | 1.51981801905865e+00  | 2.42146254610483e+00  | 2.81340910570155e+00  |
| 3                                                                                          | -3.64041065124364e-01 | -1.14601829792070e+00 | -1.97387617227331e+00 |
| 4                                                                                          |                       | 2.22109736549214e-01  | 7.60361935683759e-01  |
| 5                                                                                          |                       |                       | -1.23693586657907e-01 |
| $k$                                                                                        | 7                     | 8                     | 9                     |
| 0                                                                                          | 1.65350145027767e+00  | 1.31737182459227e+00  | 1.00865723464252e+00  |
| 1                                                                                          | -1.80084006973262e+00 | -9.62301038606916e-01 | -1.22550845243884e-01 |
| 2                                                                                          | 2.50832064295618e+00  | 1.60381234496377e+00  | 3.86156181415274e-01  |
| 3                                                                                          | -2.32565007780933e+00 | -1.86772995146596e+00 | -6.31234970145450e-01 |
| 4                                                                                          | 1.33798329042476e+00  | 1.43747169083945e+00  | 6.52754146300299e-01  |
| 5                                                                                          | -4.34200801527069e-01 | -7.01296120821919e-01 | -4.42417645485817e-01 |
| 6                                                                                          | 6.08855654119863e-02  | 1.96988961932724e-01  | 1.91399686866194e-01  |
| 7                                                                                          |                       | -2.43177114265452e-02 | -4.81331869689905e-02 |
| 8                                                                                          |                       |                       | 5.36939860678779e-03  |
| $k$                                                                                        | 10                    | 11                    | 12                    |
| 0                                                                                          | 7.47060641130913e-01  | 5.38574311294779e-01  | 3.80363627817669e-01  |
| 1                                                                                          | 5.85767161262809e-01  | 1.09327606824477e+00  | 1.38716664910171e+00  |
| 2                                                                                          | -8.08779873984866e-01 | -1.71256124824536e+00 | -2.18627988573842e+00 |
| 3                                                                                          | 1.02822534373994e+00  | 2.61565829862702e+00  | 3.70796312442965e+00  |
| 4                                                                                          | -1.02479856008236e+00 | -3.17095940221948e+00 | -5.13686702004365e+00 |
| 5                                                                                          | 7.56292654130590e-01  | 2.89957702653247e+00  | 5.49102908351256e+00  |
| 6                                                                                          | -3.96614264470775e-01 | -1.94848060096127e+00 | -4.43738674349273e+00 |
| 7                                                                                          | 1.39516157208251e-01  | 9.31992588330916e-01  | 2.65819471547915e+00  |
| 8                                                                                          | -2.95055265391578e-02 | -3.00377890129464e-01 | -1.14418455024265e+00 |
| 9                                                                                          | 2.83626762207290e-03  | 5.85074659528028e-02  | 3.34764683221085e-01  |
| 10                                                                                         |                       | -5.20661728997101e-03 | -5.96532645442736e-02 |
| 11                                                                                         |                       |                       | 4.88958028532354e-03  |
| $k$                                                                                        | 13                    | 14                    | 15                    |
| 0                                                                                          | 2.64963876241144e-01  | 1.83367597441052e-01  | 1.26962856866298e-01  |
| 1                                                                                          | 1.49413859257682e+00  | 1.46106463282127e+00  | 1.33878515334720e+00  |
| 2                                                                                          | -2.22502651107972e+00 | -1.92186754601064e+00 | -1.41558104146407e+00 |
| 3                                                                                          | 4.09444545476296e+00  | 3.80653337594591e+00  | 3.05335010215573e+00  |
| 4                                                                                          | -6.35416310186212e+00 | -6.56513120150811e+00 | -5.87855225667566e+00 |
| 5                                                                                          | 7.75730038387435e+00  | 9.03418182219572e+00  | 9.07164799539387e+00  |
| 6                                                                                          | -7.31473625790852e+00 | -9.75193888456111e+00 | -1.10794001820038e+01 |
| 7                                                                                          | 5.26011906217553e+00  | 8.19203483905851e+00  | 1.06768204568221e+01  |
| 8                                                                                          | -2.83128599675207e+00 | -5.29652806853555e+00 | -8.07485518130284e+00 |
| 9                                                                                          | 1.10490598457081e+00  | 2.58571878822969e+00  | 4.73971082646784e+00  |
| 10                                                                                         | -2.95430315475898e-01 | -9.22405172658574e-01 | -2.11665874105293e+00 |
| 11                                                                                         | 4.84451710778988e-02  | 2.27002823559789e-01  | 6.95363227300692e-01  |
| 12                                                                                         | -3.67634270649469e-03 | -3.44677104124809e-02 | -1.58525566763640e-01 |
| 13                                                                                         |                       | 2.43470552016961e-03  | 2.24133258918063e-02  |
| 14                                                                                         |                       |                       | -1.48097725659054e-03 |



## Annexe 2

|    | $i$ | $h_i$               | $M$ | $i$ | $h_i$            |
|----|-----|---------------------|-----|-----|------------------|
| 2  | 0   | 0.4829629131445341  | 2   | -2  | -0.051429728471  |
|    | 1   | 0.8365163037378077  |     | -1  | 0.238929728471   |
|    | 2   | 0.2241438680420134  |     | 0   | 0.602859456942   |
|    | 3   | -0.129409525512603  |     | 1   | 0.272140543058   |
| 3  | 0   | 0.3326705529500825  | 2   | 2   | -0.051429972847  |
|    | 1   | 0.8068915093110924  |     | 3   | -0.011070271529  |
|    | 2   | 0.4598775021184914  | 4   | -4  | 0.011587596739   |
|    | 3   | -0.1350110200102546 |     | -3  | -0.029320137980  |
|    | 4   | -0.0854412738820267 |     | -2  | -0.047639590310  |
|    | 5   | 0.0352262918857095  |     | -1  | 0.273021046535   |
| 4  | 0   | 0.2303778133088964  |     | 0   | 0.574682393857   |
|    | 1   | 0.7148465705529154  |     | 1   | 0.294867193696   |
|    | 2   | 0.6308807679398587  |     | 2   | -0.054085607092  |
|    | 3   | -0.0279837694168599 |     | 3   | -0.042026480461  |
|    | 4   | -0.1870348117190931 |     | 4   | 0.016744410163   |
|    | 5   | 0.0308413818355607  |     | 5   | 0.003967883613   |
|    | 6   | 0.0328830116668852  |     | 6   | -0.001289203356  |
| 10 | 7   | -0.0105974017850690 |     | 7   | -0.000509505399  |
|    | 0   | 0.02667006          | 6   | -6  | -0.002682418671  |
|    | 1   | 0.18817680          |     | -5  | 0.005503126709   |
|    | 2   | 0.52720119          |     | -4  | 0.016583560479   |
|    | 3   | 0.68845904          |     | -3  | -0.046507764479  |
|    | 4   | 0.28117234          |     | -2  | -0.043220763560  |
|    | 5   | -0.24984642         |     | -1  | 0.286503335274   |
|    | 6   | -0.19594627         |     | 0   | 0.56128525687    |
|    | 7   | 0.12736934          |     | 1   | 0.302983571773   |
|    | 8   | 0.09305736          |     | 2   | -0.050770140755  |
|    | 9   | -0.07139415         |     | 3   | -0.058196250762  |
|    | 10  | -0.02945754         |     | 4   | 0.024434094321   |
|    | 11  | 0.03321267          |     | 5   | 0.011229240962   |
|    | 12  | 0.00360655          |     | 6   | -0.0063696601011 |
|    | 13  | -0.01073318         |     | 7   | -0.001820458916  |
|    | 14  | 0.00139535          |     | 8   | 0.000790205101   |
|    | 15  | 0.00199241          |     | 9   | 0.000329665174   |
|    | 16  | -0.00068586         |     | 10  | -0.000050192775  |
|    | 17  | -0.00011647         |     | 11  | -0.000024465734  |
|    | 18  | 0.00009359          |     |     |                  |
|    | 19  | -0.00001326         |     |     |                  |

Le tableau de gauche donne les filtres de longueur  $L = 2M$  associés aux fonctions d'échelle de Daubechies pour  $M = 2, 3, 4, 10$  représentées dans la figure (FIG 1.1).  
Celui de droite donne les filtres de longueur  $L = 3M$  associés aux Coiflets pour  $M = 2, 4, 6$  représentées dans la figure (FIG 1.2) .



# Bibliographie

- [1] Cohen. A. *Ondelettes, analyses de multirésolutions et traitements numériques de signal*. PhD thesis, Université de Paris-9, 1989.
- [2] P.Vial A. Cohen, I. Daubechies. Wavelets on the interval and fast wavelets transforms. *cahiers du ceremade*, (9307), 1993.
- [3] A. Cohen A. Ezzine. Quadratures singulières et fonctions d'échelles. *CRAS*, 1996.
- [4] C. A. Michelli. A. S. Cavaretta, W. Dahmen. Stationnary subdivision. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 93(453), 1991.
- [5] B. Alpert. Rapidely-convergent quadratures for integral operators with singular kernels. preprint Yale university, 1993.
- [6] A. Cohen. *Ondelettes, Analyses de multirésolutions et traitements numériques de signal*. Rech. en Math. Appl. Masson, 1992.
- [7] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure, Applied Math*, XL1(41):909–996, 1988.
- [8] I. Daubechies. *Ten lectures in Wavelets*, volume 61. CBMS-NFS Regional conference series in applied mathematics 61, 1992.
- [9] S. Durand. *Etude de la vitesse de convergence del'algorithme en cascade...* PhD thesis, Université de Paris-dauphine, 1993.
- [10] N. Dyn. Subdivision schemes in computer-aided geometric design. In W.A. Light, editor. *Advances in Numerical Analysis II, Wavelets, Subdivision algorithms, and Radial Basis Functions*, pages 36–104. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [11] W. Dahmen et C.A. Michelli. Using the refinement equation for evaluating integrals of wavwlwts. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(2):507–537, April 1993.

- [12] R. Coifman G. Beylkin and V. Rocklin. Wavelet transform and numerical algorithms I. *Comm. Pure, Applied Math*, XLIV, 1991.
- [13] J.L. Journé G. David. A boundedness criterion for generalized calderon-zygmund operators. *Ann. of Math*, (120):371–397, 1984.
- [14] M. Hamdi. Une formulation variationnelle par équations pour la résolution de l'équation de helmoltz avec des conditions aux limites. *CRAS*, II(292):17–20, 1981.
- [15] A. Kunoth. Computing refinable integrals - documentation of the program - version 1.1. Technical report, Texas A& M University, 1995.
- [16] A. De la Bourdonnaye. A preconditioner for integral equations modeling helmoltz equation. Cermics(ENPC-INRIA).
- [17] P. G. Lemarié. Fonctions a support compact dans les analyses multirésolution. *Rev. Iberoamericana*, (7):157–182, 1991.
- [18] S. G. Mallat. Multifrequency channel decomposition: The wavelet models. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, 12(37):2091–2110, 1989.
- [19] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs 1*. Hermann, 1990.
- [20] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs 2*. Actualités mathématiques. Hermann, 1990.
- [21] J. C. Nedelec. Integral equations with non integrable kernel. *Integral equations and Operator Theory*, 1982.
- [22] V. Rokhlin. End point corrected trapezoidal quadrature rules for singular functions. *Computers Math applic*, 20(7), 1990.
- [23] I. Stein. *Harmonic Analysis*. 1994.
- [24] J. Strain. Quadrature rules for singular functions. *SIAM J.Sci Comput.*, 16(4), 1995.
- [25] G. Strang. Wavelets and dilatation equation: A brief introduction. *SIAM Rev*, 28(2):288–305, 1989.
- [26] W. Sweldens. *The construction and application of wavelets in numerical analysis*. PhD thesis, Univ. north scarolina, May 1995.

- 
- [27] W. Sweldens and R. Piessens. Quadrature for wavelet decomposition. In Tom H. KOORNWINDER, editor, *Wavelets: an elementary Treatement of theory and Applications*, Series in Approximation and decompositions. World Scientific, 1993.



## Quadratures singulières et fonctions d'échelle

Albert COHEN et Abdelhak EZZINE

A. C. : Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie,  
4, place Jussieu, 75005 Paris, France ;

A. E. : Cermics, École Nationale des Ponts et Chaussées,  
Central 2, La Courtine, 93167 Noisy-le-Grand, France.

---

**Résumé.** Nous présentons une méthode de quadrature, pour le calcul du produit scalaire  $I = \int f(t)\phi(t)dt$ , lorsque  $f(t)$  présente une singularité de type homogène, la fonction  $\phi(t)$  étant définie par une équation d'échelle.

### *Singular quadratures and scaling functions*

**Abstract.** A quadrature method is presented for the computation of the inner product,  $I = \int f(t)\phi(t)dt$ , where  $f(t)$  has a singularity of homogeneous type, and  $\phi$  is implicitly determined by a refinement equation.

---

### *Abridged English Version*

Wavelet bases have proved to be a powerful tool for the discretization of singular integral equations, since they usually lead to sparse matrices. However, one needs to compute quantities of the type  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  and  $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle$ , where  $f$  is a function,  $T$  is an operator with kernel  $K(x, y)$  and  $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot - k)$  is the generator of the underlying multiresolution approximation  $V_j$ .

The difficulties in computing these quantities arise from the fact the  $f$  and  $K$  might be singular and  $\phi$  is only known implicitly as a solution of a refinement equation  $\phi(x) = 2 \sum_{k=0}^N h_k \phi(2x - k)$ . As a prototype example, we consider the computation of  $I = \int f(t)\phi(t)dt$ .

In the case where the function  $f$  is  $C^l$ , quadrature rules have been introduced in [1], [9] using the fact that the moments  $M_k = \int x^k \phi(x)dx$  can easily be computed from the refinement equation.

A first approximation of  $I$  is then obtained by replacing  $f$  by a polynomial interpolation of degree  $l - 1$  on the support of  $\phi$ . In order to improve the precision, one can use a subdivision method: iterating the refinement equation, one obtains  $\phi(x) = \sum_k s_{j,k} 2^j \phi(2^j x - k)$ , and the initial quadrature rule can be replaced by a combination of similar rules at scale  $2^{-j}$ .

An analysis of the coefficients  $s_{j,k}$  and of the local error, shows that the numerical precision is of order  $2^{-jl}$ .

---

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

In the case where  $f$  has a singularity of homogeneous type, i.e.  $|f(x)| \leq C|x-p|^\gamma$  and  $|\partial^l f(x)| \leq Cl!|x-p|^{\gamma-l}$ ,  $l \geq 0$ ,  $-1 < \gamma < 1$ , it is then natural to subdivide the function  $\phi$  in a non-uniform way, i.e. to introduce higher scales near the singularity, and use

$$\phi(x) = \sum_{j=1, \dots, J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} 2^j \phi(2^j x - k) + \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J \phi(2^J x - k),$$

where  $k \in K_j$  for  $2^{-j}k$  of order  $2^{-j}$ .

A new quadrature is derived approximating  $\phi$  by the first part of this decomposition. For a preassigned precision  $\varepsilon$ , we use in each layer  $K_j$  a different degree  $l(j)$  of polynomial interpolation and compute the local error accordingly. Since there is no regularity at  $p$ , a crude error estimate is used to determine  $J$ .

Optimizing the choice of  $l(j)$ , we find that the precision  $\varepsilon$  can be attained by using an order of  $(1/(\gamma+1) + |\gamma|/(\gamma+1)^2) [\log_2(\varepsilon)]^2$  quadrature points.

In the case of a higher order singularity, our method can still be applied, integrating  $I$  by parts to reduce the order of the singularity and using the fact that the derivatives of a scaling function are linear combinations of other scaling functions [7].

## 1. Introduction

La motivation principale de ce travail provient de la discrétisation sur des bases d'ondelettes d'équations intégrales singulières. La mise en œuvre d'une méthode de Galerkin nécessite en effet le calcul de produits scalaires du type  $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$  et  $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle$ , où  $f$  est une fonction,  $T$  un opérateur intégral de noyau  $K(x, y)$  et  $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k)$  est la base de l'espace d'approximation  $V_j$  engendré par la fonction d'échelle  $\phi$ , que l'on décompose par la suite dans une base d'ondelettes [3].

La mise au point de quadratures précises pour le calcul de ces quantités se heurte à trois difficultés : les fonctions  $f$  et  $K$  peuvent présenter des singularités, la régularité de la fonction  $\phi$  est limitée par la taille de son support [3] et  $\phi$  n'est connue qu'implicitement comme solution d'une équation d'échelle

$$(1) \quad \phi(x) = 2 \sum_{k=0}^N h_k \phi(2x - k),$$

où  $N \in \mathbb{N}^*$  et les réels  $h_k$ ,  $k = 0, \dots, N$ , sont connus explicitement. On rappelle que l'on a  $\text{supp}(\phi) = [0, N]$ .

Nous allons montrer que cette équation permet néanmoins d'obtenir une méthode de quadrature de faible coût calculatoire, pour une précision  $\varepsilon$  fixée. Par changement d'échelle on se ramène au calcul de  $S_k = \int f(t) \phi(t-k) dt$  et  $T_{k,l} = \int K(x, y) \phi(x-k) \phi(y-l) dx dy$ .

Nous traitons ici uniquement le calcul de  $S_k$ , dans le cas où  $f$  présente une singularité de type homogène en un point. Cependant, la méthode s'étend de façon naturelle au calcul de  $T_{k,l}$  pour des noyaux de type Calderon-Zygmund, en remarquant que la fonction  $\Phi(x, y) = \phi(x) \phi(y)$  vérifie une équation d'échelle induite par (1). Cette étude, ainsi qu'une implémentation de l'algorithme correspondant, fera prochainement l'objet d'une publication. Notons finalement que les fonctions  $B$ -splines satisfont des équations du type (1) et que notre méthode peut ainsi s'appliquer dans le cadre des éléments finis.

Sans perte de généralité, on se ramène au problème du calcul de  $I = \int f(t) \phi(t) dt$ .

Dans un premier temps nous allons rappeler la méthode développée dans [1], [9], lorsque la fonction  $f$  est de classe  $C^l(\mathbb{R})$ ,  $l \in \mathbb{N}^*$ . Ensuite nous expliciterons la méthode de quadrature pour

une singularité de type homogène  $|x|^\gamma$ ,  $|\gamma| < 1$ . Enfin nous évoquerons le traitement des singularités d'ordre plus élevé.

## 2. Quadrature pour une fonction régulière

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^l$ . La méthode de quadrature de [1], [9] utilise la donnée des moments  $M_k = \int x^k \phi(x) dx$ . En effet, l'équation (1) donne accès aux valeurs de  $M_k$  par un calcul réccursif très simple ( $\phi$  est normalisée au sens où  $M_0 = 1$ ). On trouvera dans [2], [6] une généralisation de ce résultat au calcul d'intégrales de produits de fonctions d'échelle quelconques.

En remplaçant alors  $f$  par son interpolation par un polynôme  $P_l$  de degré  $l - 1$ , aux points  $x_i = iN/(l - 1)$ ,  $i = 0, \dots, l - 1$ , on obtient une suite de poids  $(w_i^l)_{i=0, \dots, l-1}$  dépendant linéairement des moments  $M_k$ ,  $k = 0, \dots, l - 1$ , et une première approximation

$$(2) \quad I = \langle P_l, \phi \rangle + E = \sum_{i=0, \dots, l-1} w_i^l f(x_i) + E,$$

où  $|E| \leq B \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |f^l(t)|$  représente l'erreur de la quadrature de  $I$ .

Si  $|E| > \varepsilon$ , on améliore la précision par la méthode de subdivision suivante : par itération de (1), nous obtenons

$$(3) \quad \phi(x) = \sum_k s_{j,k} 2^j \phi(2^j x - k).$$

Les coefficients  $s_{j,k}$  sont calculés par un algorithme de subdivision  $s_{j,k} = \sum_n h_{k-2n} s_{j-1,n}$  (on trouvera dans [4] une étude générale de ces algorithmes), et sont uniquement déterminés par le produit scalaire  $s_{j,k} = \langle \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot - k) \rangle$  où  $\tilde{\phi}$  est une fonction duale (que l'on peut choisir égale à  $\phi$  dans le cas d'une fonction d'échelle orthonormale).

En injectant (3) dans  $I$ , et en utilisant la même méthode pour le calcul de  $\langle f, 2^j \phi(2^j \cdot - k) \rangle$ , on obtient des points  $x_i^{j,k} = 2^{-j}(k + x_i) \in \text{supp}(\phi_{j,k})$ ,  $i = 0, \dots, l - 1$  et une approximation

$$(4) \quad I = \sum_k s_{j,k} \sum_{i=0, \dots, l-1} w_i^l f(x_i^{j,k}) + E_j$$

où  $|E_j| \leq \sum_k |s_{j,k} E_{j,k}|$ . L'erreur de quadrature  $E_{j,k} = \langle f, 2^j \phi(2^j \cdot - k) \rangle - \sum_{i=0, \dots, l-1} w_i^l f(x_i^{j,k})$  est estimée par

$$|E_{j,k}| \leq C_l 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi_{j,k})} |f^l(t)|.$$

De plus, en utilisant la majoration  $|M_l| \leq (N \sup|\phi|)^l$ , on a l'estimation  $C_l \leq K^l/l!$  où  $K$  ne dépend que du choix de la fonction  $\phi$ .

On déduit de  $s_{j,k} = \langle \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot - k) \rangle$  l'estimation  $|s_{j,k}| \leq D 2^{-j}$ ,  $D = \|\phi\|_\infty \|\tilde{\phi}\|_1$ , et on remarque que la somme dans (3) comporte au plus  $N 2^{j+1}$  termes non nuls. On a donc  $\sum_k |s_{j,k}| \leq 2DN$ , et l'estimation

$$(5) \quad |E_j| \leq D_l 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |f^l(t)|.$$

Il est ainsi possible de rendre l'erreur  $|E_j|$  arbitrairement petite en augmentant la valeur de  $j$ .

### 3. Méthode de quadrature pour les singularités homogènes

Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction  $C^\infty$  partout sauf en un point  $p$  où elle présente une singularité du type  $|x - p|^\gamma$ ,  $-1 < \gamma < 1$  (on a donc  $f \in L^1_{loc}$ ). On suppose ainsi que l'on a  $|f(x)| \leq C|x - p|^\gamma$  et  $|\partial^l f(x)| \leq Cl!|x - p|^{\gamma-l}$ ,  $l \geq 0$ .

La formule (3) devient alors inadaptée, car l'erreur de quadrature locale  $E_{j,k}$  dépend fortement de la distance du support de  $\phi_{j,k}$  au point  $p$  ainsi que du choix de  $l$ . Il est donc naturel d'effectuer une *subdivision non-uniforme* consistant à itérer la décomposition (3) sur les fonctions  $\phi(2^j \cdot - k)$  dont le support est proche de  $p$ .

Soit  $\varepsilon$  l'erreur de précision exigée pour le calcul de  $I$ .

On note  $d_{j,k}$  la distance de  $\text{supp}(\phi_{j,k})$  au point  $p$ . On a alors l'estimation

$$(6) \quad |E_{j,k}| \leq CK^l 2^{-jl} d_{j,k}^\gamma = C d_{j,k}^\gamma [K 2^{-j} d_{j,k}^{-1}]^l.$$

On pose alors  $d_j = (K 2^{-j})/2$  et pour  $0 < j \leq J$ , on définit par récurrence une suite d'ensemble  $R_j$ , en prenant  $R_0 = \{0\}$ ,  $R_j = \{k \in \mathbb{Z}; d_{j,k} \leq d_j\} \cap S_j$  et  $K_j = (\mathbb{Z} - R_j) \cap S_j$  où  $k \in S_j$  si et seulement si il existe  $l \in R_{j-1}$  satisfaisant  $\text{supp}(\phi_{j,k}) \subset \text{supp}(\phi_{j-1,l})$ . En itérant l'équation d'échelle sur les fonctions  $\phi(2^j \cdot - k)$ ,  $k \in R_j$ , on obtient une décomposition du type

$$(7) \quad \phi(x) = \sum_{j=1, \dots, J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} 2^j \phi(2^j x - k) + \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J \phi(2^J x - k),$$

où les  $a_{j,k}$  sont calculés par un algorithme de subdivision qui se concentre sur la singularité. L'échelle d'arrêt  $J$  sera déterminée en fonction de la précision  $\varepsilon$  exigée dans l'évaluation de  $I$ .

La méthode de quadrature que nous proposons consiste alors à approximer  $I$  suivant

$$(8) \quad I = \sum_{j=1, \dots, J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} \sum_{i=0, \dots, l(j)-1} w_i^{l(j)} f(x_i^{j,k}) + E_J,$$

où le degré  $l(j)$  varie en fonction de  $j$ . L'erreur  $E_J$  est la somme des erreurs

$$E_J^1 = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} a_{j,k} E_{j,k}$$

et

$$E_J^2 = \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J \langle f, \phi(2^J \cdot - k) \rangle.$$

Grâce au choix de  $d_j$ , on a pour  $k \in K_j$ ,  $|E_{j,k}| \leq C 2^{-\gamma j} 2^{-l(j)}$ . À chaque niveau  $j$ , on prend pour  $l(j)$  la plus petite valeur telle que  $|E_{j,k}| \leq \varepsilon/(2A_J)$ , pour tout  $k \in K_j$ , avec  $A_J = \sum_{j=1}^J \sum_{k \in K_j} |a_{j,k}|$ , ce qui assure ainsi  $|E_J^1| \leq \varepsilon/2$ .

Comme dans le cas de la subdivision uniforme, il est possible d'obtenir une estimation  $A_J \leq A$ , indépendante de l'échelle d'arrêt  $J$ . Une difficulté nouvelle provient de ce que les coefficients  $a_{j,k}$  ne sont pas tous égaux aux  $s_{j,k}$  de la section précédente, et ne peuvent donc pas tous être identifiés aux produits scalaires  $\langle \phi, \phi(2^j \cdot - k) \rangle$ . L'estimation  $|a_{j,k}| \leq D 2^{-j}$  n'est donc plus triviale, mais elle est assurée dans deux cas particuliers :

– Lorsque les coefficients  $h_n$  sont positifs (par exemple dans le cas des  $B$ -splines). L'estimation  $|a_{j,k}| \leq 2^{-j}$  est alors une conséquence de  $\sum h_{2n} = \sum h_{2n+1} = 1/2$ . De plus, on a directement l'estimation  $A_J \leq 1$ .

– Sous une hypothèse technique portant sur la suite  $d_j$  qui assure que  $a_{j,k} = s_{j,k}$  lorsque  $k \in R_j$ ,  $j = 1, \dots, J-1$ . Les majorations  $|a_{j,k}| \leq HD2^{-j}$ ,  $k \in K_j$  et  $|a_{J,k}| \leq HD2^{-J}$ ,  $k \in R_J$ , en découlent, avec  $H = \sum_n |h_n|$ , puisque ces coefficients sont respectivement calculés à partir des coefficients  $s_{j-1,k}$ ,  $k \in R_{j-1}$  et  $s_{J-1,k}$ ,  $k \in R_{J-1}$ , par des combinaisons linéaires finies faisant intervenir les coefficients  $h_n$ . On montre dans [5] que cette hypothèse est toujours satisfaite par le choix  $d_j = (\alpha K 2^{-j})/2$ , pour un facteur  $1 < \alpha < 2$  bien choisi, ce qui ne modifie pas les estimations de  $E_{j,k}$ .

Dans le deuxième cas, il est alors facile d'obtenir  $A_J \leq DH \sum_{j=1}^J 2^{-j} \text{Card}(K_j) \leq A$ , où  $A$  est indépendante de  $J$ .

Pour déterminer l'échelle d'arrêt  $J$ , on estime  $E_J^2$  par

$$\begin{aligned} |E_J^2| &\leq DH 2^{-J} \sum_{k \in R_J} 2^J |\langle f, \phi(2^J \cdot - k) \rangle| \\ &\leq DH (\sup_k |\phi(\cdot - k)|) \int_{|t-p| < d_J + N 2^{-J}} |f(t)| dt \\ &\leq CR 2^{-(\gamma+1)J}, \end{aligned}$$

où la constante  $R$  ne dépend que de la fonction  $\phi$ . Puisque  $\gamma > -1$ , il est possible de choisir  $J$  tel que  $|E_J^2| \leq \varepsilon/2$ .

On obtient ainsi une précision  $|E_J| \leq \varepsilon$ , avec un nombre de points de quadratures

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= \sum_{j=0}^J \text{Card}(K_j) l(j) \\ &\leq C_a \sum_{j=0}^J 2^j (d_j - d_{j-1}) (\log_2(\varepsilon) + |\gamma|J) \\ &\leq C_b J (-\log_2(\varepsilon) + |\gamma|J) \\ &\leq C_c (1/(\gamma+1) + |\gamma|/(\gamma+1)^2) [\log_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned}$$

où les constantes  $C_a$ ,  $C_b$  et  $C_c$  ne dépendent que de la fonction  $\phi$ .

#### 4. Méthode de quadrature pour les singularités d'ordre élevé

Considérons à présent le cas où la singularité de  $f$  en  $p$  est d'ordre  $r > 0$ . Lorsque  $p \in \text{supp}(\phi)$ , la fonction  $\phi$  doit être au moins de classe  $C^r$  afin de permettre l'existence de  $I$ . D'autre part, l'estimation de l'échelle d'arrêt par la méthode précédente diverge en général.

On utilise alors une technique de régularisation introduite par Nedelec [8] pour le calcul d'intégrale singulières dans le cadre des éléments finis : la distribution  $f$  vérifie en effet  $f = g^{[r]}$ , où  $g$  est une distribution d'ordre 0, et on se ramène au calcul de  $I = (-1)^r \langle g, \phi^{([r])} \rangle$  avec  $[r]$  la partie entière de  $r$ .

Ce dernier calcul s'effectue par la méthode décrite dans la section précédente grâce à une propriété remarquable des fonctions d'échelles à support compact, décrite dans [7] : on a l'identité  $\phi^{([r])} = \sum_{k=0}^{[r]} (-1)^k \binom{[r]}{k} \varphi(\cdot - k)$  où  $\varphi$  est une fonction d'échelle continue à support compact, vérifiant  $\varphi = 2 \sum_{n=0}^{N-r} g_n \varphi(2 \cdot - n)$  avec  $\sum h_n e^{in\omega} = [(1 + e^{i\omega})/2]^r \sum g_n e^{in\omega}$ .

Par exemple, dans le cas où  $f = vp(\frac{1}{x})$ , on obtient  $I = \langle \ln|x|, \varphi(\cdot - 1) \rangle - \langle \ln|x|, \varphi \rangle$ , que l'on calcule par la méthode de la section précédente. Remarquons que cette technique s'applique immédiatement au calcul des éléments la matrice de la transformée de Hilbert.

Note remise et acceptée le 11 mai 1996.

### Références bibliographiques

- [1] Coifman R., Beylkin G. et Rocklin V., 1991. Wavelet transform and numerical algorithms 1, *Comm. Pure, Appl. Math.*, XLV.
- [2] Dahmen W. et Micchelli C. A., 1993. Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets, *SIAM J. Num. Anal.*, 30, (2), p. 507-537.
- [3] Daubechies I., 1992. *Ten lectures in Wavelets*, 61, CBMS-NFS 61.
- [4] Dyn N., 1992. Subdivision schemes in computer-aided geometric design, dans *Advances in Numerical Analysis II, Wavelets, Subdivision algorithms, and Radial Basis Functions*, Light W. A. éd., Clarendon Press, Oxford, p. 36-104.
- [5] Ezzine A., septembre 1996. Étude et réalisation des algorithmes de quadratures pour la résolution des équations intégrales dans une base d'ondelettes, *Thèse de doctorat*, École nationale des Ponts et Chaussées.
- [6] Kunoth A., 1995. Computing refinable integrals. Documentation of the program. Version 1.1, *Technical report ISC-95-02-Math*, Texas A&M University.
- [7] Lemarié P. G., 1991. Fonctions à support compact dans les analyses multirésolution, *Rev. Iberoamericana*, 7, p. 157-182.
- [8] Nedelec J. C., 1982. Integral equation with non integrable kernel, *Integral Equations Operator Theory*, 5, p. 562-572.
- [9] Sweldens W. et Piessens R., 1994. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 31, (4), p. 1240-1264.