



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude de la théorie du contrôle aux dérivées partielles

Akli Haddak

► **To cite this version:**

Akli Haddak. Contribution à l'étude de la théorie du contrôle aux dérivées partielles. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1990. Français. NNT : . pastel-00569135

**HAL Id: pastel-00569135**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00569135>**

Submitted on 24 Feb 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE de DOCTORAT de l'ECOLE NATIONALE  
des PONTS et CHAUSSEES**

Spécialité

**MATHEMATIQUES**

présentée

par Monsieur Akli HADDAK  
pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET  
CHAUSSEES**

Sujet de la thèse:

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA THEORIE  
DU CONTROLE AUX DERIVEES PARTIELLES.**

soutenue le Lundi 12 Novembre 1990

devant le jury composé de:

<i>Monsieur</i>	<i>M. ROBIN</i>	<i>Président</i>
<i>Monsieur</i>	<i>A. MOKKADEM</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Monsieur</i>	<i>C.H. MOOG</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>Monsieur</i>	<i>M. GIUSTI</i>	<i>Examineur</i>
<i>Madame</i>	<i>F. LAMNABHI – LAGARRIGUE</i>	<i>Examineur</i>
<i>Monsieur</i>	<i>J.F. POMMARET</i>	<i>Examineur</i>





A mes grand-parents,  
à mes parents,  
à mes sœurs,  
à mes frères.



J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Pommaret, qui a dirigé cette thèse avec patience et efficacité et m'a prodigué ses conseils, avec sa bienveillance coutumière.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Robin de m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Je suis très reconnaissant à Messieurs Mokkadem et Moog qui ont accepté de rapporter sur ce travail et m'ont fait l'honneur de participer au jury. Je souhaiterais aussi les remercier pour leurs conseils au cours de mon travail.

Et je tiens aussi à remercier Monsieur Giusti et Madame Lamnabhi-Lagarrigue qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Bouleau et Chevallier pour m'avoir accueilli au CERMA ainsi que pour toutes les facilités qu'ils m'ont accordées, qui ont permis ce travail.

Je n'oublie pas de remercier, Madame Serre ainsi que le personnel de la direction de la recherche de l'ENPC pour toute l'aide qu'ils m'ont apportée.

Enfin je remercie tout ceux qui m'ont entouré et apporté leur soutien, notamment ma famille, mes amis mais aussi mes collègues et camarades, pour leur aide et pour la bonne ambiance amicale qui règne au centre.



# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>5</b>
EXAMEN CRITIQUE DES CONCEPTS DE BASE DE LA THEORIE DU CONTROLE CLASSIQUE ET DE LEUR GENERALISATION . . . . .	5
<b>I PROBLEMES CLASSIQUES</b>	<b>9</b>
<b>I RAPPELS SUR CERTAINS OUTILS GEOMETRIQUES</b>	<b>11</b>
I.1 VARIETES DIFFERENTIABLES . . . . .	11
I.2 APPLICATIONS DIFFERENTIABLES . . . . .	12
I.3 SOUS-VARIETES . . . . .	12
I.3.1 CHAMPS DE VECTEURS . . . . .	13
I.3.2 APPLICATION TANGENTE . . . . .	13
I.3.3 DERIVEES DE LIE . . . . .	13
I.3.4 CROCHET DE CHAMPS DE VECTEURS . . . . .	14
I.3.5 ALGEBRE DE LIE . . . . .	14
I.3.6 DISTRIBUTIONS . . . . .	14
I.3.7 VARIETES INTEGRALES . . . . .	15
<b>II THEORIE DU CONTROLE CLASSIQUE: POSITION DES PROBLEMES</b>	<b>16</b>
II.1 CONTROLABILITE . . . . .	16
II.2 OBSERVABILITE . . . . .	19
<b>II APPROCHE GEOMETRIQUE</b>	<b>21</b>
<b>I THEORIE FORMELLE DES EDP</b>	<b>23</b>
I.1 VARIETES FIBREES . . . . .	23
I.2 FIBRES VECTORIELS . . . . .	24
I.3 FONCTIONS DE TRANSITION . . . . .	26
I.4 FIBRE TANGENT . . . . .	27
I.5 PRODUIT FIBRE . . . . .	28
I.6 FIBRE VERTICAL . . . . .	28
I.7 SUITES EXACTES . . . . .	30



I.8	ESPACES DE JETS . . . . .	31
I.9	PROPRIETES IMPORTANTES DE LA THEORIE DES JETS . . . . .	32
I.10	SYSTEMES NON-LINEAIRES D'EDP . . . . .	34
I.11	COMPATIBILITE FORMELLE . . . . .	35
I.12	INTEGRABILITE FORMELLE . . . . .	35
I.13	SYMBOLE D'UN SYSTEME E.D.P . . . . .	38
I.14	COHOMOLOGIE DE SPENCER . . . . .	42
<b>II THEORIE DU CONTROLE AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES</b>		<b>58</b>
II.1	SYSTEMES DE CONTROLE AUX EDP . . . . .	58
II.2	CONTROLABILITE . . . . .	58
II.3	CAUSALITE . . . . .	61
II.3.1	VARIETE CARACTERISTIQUE . . . . .	63
II.3.2	VARIETE SYSTATIQUE . . . . .	65
II.4	POURSUITE DE MODELE EXACTE . . . . .	66
II.5	EQUIVALENCE . . . . .	69
II.6	TOURBILLONS DE BENARD: . . . . .	73
II.6.1	CAS NONLINEAIRE:DYNAMIQUE DES CABLES . . . . .	77
II.6.2	ELECTROMAGNETISME . . . . .	79
II.6.3	EQUATION D'EULER . . . . .	79
<b>III APPROCHE ALGEBRIQUE</b>		<b>83</b>
<b>I RAPPELS SUR CERTAINS OUTILS ALGEBRIQUES</b>		<b>85</b>
I.1	ANNEAUX ET CORPS . . . . .	85
I.2	EXTENSIONS ALGEBRIQUES . . . . .	88
I.2.1	CLOTURE ALGEBRIQUE . . . . .	89
I.3	ALGEBRE DIFFERENTIELLE . . . . .	89
I.3.1	MORPHISMES DIFFERENTIELS . . . . .	90
I.3.2	POLYNOMES DIFFERENTIELS . . . . .	90
I.3.3	CLOTURE DIFFERENTIELLE ALGEBRIQUE . . . . .	91
<b>II THEORIE DU CONTROLE AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ALGEBRIQUES</b>		<b>92</b>
II.1	APPLICATIONS DE L'ALGEBRE DIFFERENTIELLE . . . . .	92
II.2	SYSTEMES DE CONTROLE AUX DERIVEES PARTIELLES . . . . .	94
II.2.1	KORTEWEG DE VRIES . . . . .	96
II.3	OBSERVABILITE . . . . .	97
II.4	DEGRE DE TRANSCENDANCE DIFFERENTIELLE . . . . .	100
II.5	CONTROLABILITE . . . . .	104
II.6	REALISATION MINIMALE . . . . .	108
II.7	OBSERVABILITE GRACE A UNE SEULE SORTIE . . . . .	111
II.8	CONTROLABILITE GRACE A UNE SEULE ENTREE . . . . .	111

II.9 INVERSIBILITE . . . . .	113
II.9.1 INVERSIBILITE A GAUCHE . . . . .	113
II.9.2 INVERSIBILITE A DROITE . . . . .	115
II.10 BOUCLAGE . . . . .	117
II.11 CAUSALITE . . . . .	120
II.12 POURSUITE DE MODELE . . . . .	124
<b>III APPLICATIONS ALGEBRIQUES DIFFERENTIELLES:</b>	<b>126</b>
III.1 TOURBILLONS DE BENARD . . . . .	126
III.2 DYNAMIQUE DES CABLES . . . . .	127
III.3 EQUATIONS DE MAXWELL . . . . .	127
III.3.1 1 <sup>er</sup> Groupe . . . . .	127
III.3.2 2 <sup>ieme</sup> Groupe . . . . .	128
<b>IV THEORIE DES GROUPES ET CONTROLABILITE</b>	<b>131</b>
<b>I INVARIANCE</b>	<b>134</b>
I.1 PSEUDOGROUPES DE LIE . . . . .	135
I.2 CENTRALISATEUR . . . . .	136
<b>II ALGEBRE DE CONTROLE</b>	<b>137</b>
II.1 CONTROLABILITE FAIBLE . . . . .	137
II.2 APPLICATION: . . . . .	138
<b>CONCLUSION</b>	<b>141</b>
<b>ANNEXE</b>	<b>149</b>



# INTRODUCTION

## EXAMEN CRITIQUE DES CONCEPTS DE BASE DE LA THEORIE DU CONTROLE CLASSIQUE ET DE LEUR GENERALISATION

Nous allons essayer, dans ces quelques pages, de donner un bref aperçu des résultats que nous allons présenter, ainsi que des motivations qui nous ont poussé à les formuler avec des outils mathématiques peu connus, mais adéquats pour ce genre de problèmes, à savoir la théorie formelle des équations aux dérivées partielles (EDP), la théorie des jets et l'algèbre différentielle.

La théorie du contrôle classique a d'abord été décrite et conçue comme l'étude de systèmes d'équations différentielles ordinaires à coefficients constants, avec une seule entrée et une seule sortie.

Cette situation a donc naturellement amené les ingénieurs à utiliser l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, matrices) et les transformations de Laplace pour l'étude de tels systèmes.

L'évolution de la technologie, de l'électronique et de l'informatique a ouvert un nouveau chemin à la théorie du contrôle.

Vers 1960, trois contributions remarquables, ont été faites simultanément, qui sont:

- laprogrammation dynamique (proposée par R.E. Bellman)
- le principe du maximum de Pontryagin (L.S. Pontryagin et al)
- la théorie généralisée des systèmes linéaires (R.E. Kalman).

C'est principalement cette dernière que nous examinerons. Elle nous conduit donc à parler de la représentation par l'espace d'état introduite par Kalman et qui fut considérée, jusqu'à ces dernières années, comme la seule représentation utile pour l'étude des systèmes de contrôle linéaires [37, 75].

L'extension de cette approche aux systèmes de contrôle non linéaires constitue une part importante, sinon prépondérante, des recherches modernes en théorie algébrique et géométrique du contrôle ([34, 66, 43, 30]).

Cette situation sera présentée plus en détail dans le premier chapitre avec les problèmes

qu'elle fait surgir.

En un mot, on peut dire que l'étude d'un système  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$  avec les entrées  $u$ , les états  $x$  et les sorties  $y$  est décomposée en deux études partielles:

1. La relation entrée/état conduit au concept de contrôlabilité, testé par le critère formel bien connu  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n = \text{dimension de l'espace d'état} = \text{nb de } x$
2. La relation état/sortie conduit au concept d'observabilité, testé par le critère formel bien connu  $\text{rang}(C, CA, \dots, CA^{n-1}) = n$

Il semble donc à première vue, que ces notions soient indépendantes, puisqu'elles sont liées à des couples de matrices différents :  $(A, B)$  pour la contrôlabilité,  $(A, C)$  pour l'observabilité. L'un des but de cette thèse est de mettre en évidence les difficultés liées à l'usage de l'état comme intermédiaire pour décrire les relations entrée/sortie.

En effet, si le système est observable, la connaissance des  $x$  est équivalente à celle des  $y$ , mais les équations différentielles ordinaires (EDO) correspondantes sont d'ordre supérieur à 1 et on ne peut plus alors utiliser ni les systèmes dynamiques ni les critères précédents.

De plus, il semble aujourd'hui admis ([26, 24]) que les méthodes du cas non-linéaire ne doivent pas être calquées sur les méthodes du cas linéaire, c'est-à-dire le cas linéaire doit être plutôt considéré comme un cas particulier du cas non-linéaire avec toutes les spécificités en résultant.

D'un autre côté, notre but est d'esquisser une *théorie du contrôle aux dérivées partielles*, c'est-à-dire l'étude des relations entrée/sortie définies par des EDP linéaires ou non-linéaires, d'ordre quelconque, ayant un nombre quelconque de variables indépendantes, d'entrées et de sorties. Ce faisant nous voulons évidemment que les concepts introduits dans ce cadre général soient cohérents avec ceux dont nous venons de parler. Ainsi l'ordre de généralisation de ce travail peut il être présenté sous la forme des inclusions suivantes:

$$\begin{array}{l} E.D.O \quad \text{ordre} = 1 \\ \cap \\ E.D.O \quad \text{ordre} \geq 1 \\ \cap \\ E.D.P \quad \text{ordre} \geq 1 \end{array}$$

Pour les mêmes raisons que ci dessus, il en résulte aussi la nécessité de revisiter les autres concepts introduits classiquement et conjointement à la description par l'état, plus particulièrement: inversibilité, équivalence, linéarisation, poursuite de modèle, causalité, ...

Cependant, on remarque tout de suite que dans cette approche générale, les objets algébriques ou géométriques usuels (matrices et leurs opérations, champs de vecteurs et

leurs opérations, transformation de Laplace, ...) n'ont plus leur place et doivent donc être remplacés par des objets plus généraux (théorie des jets, prolongement, algèbre homologique, opérateur de Spencer, ...).

De plus, bien que la théorie du contrôle classique repose sur des définitions d'analyse fonctionnelle (par exemple la contrôlabilité revient à choisir une entrée qui permette de passer d'un état initial donné à un état final donné en un temps fini), les critères permettant de les tester sont d'ordre "formel".

Pour comprendre le sens de ce mot il faut avoir en tête la possibilité de pouvoir répondre par l'affirmative ou la négative à la question "Ce système est-il contrôlable (observable)?" en utilisant seulement un moyen informatique de *calcul formel* ("computer algebra" en anglais) du type MACSYMA, REDUCE, ... [10, 57].

On remarque alors que la question posée doit elle aussi, pouvoir être traduite en langage formel, pour pouvoir être résolue par calcul formel (nombre infini de vérifications), un critère étant simplement un moyen de reconnaître plus facilement des situations spécifiques (nombre fini de vérifications). L'idée sous-jacente est alors d'étudier une propriété quelconque mais formelle par un algorithme constructible et donc fini.

A notre connaissance, une modification de la définition même de la contrôlabilité (observabilité) d'un système pour l'exprimer en des termes *formels* (et non plus *fonctionnels*), n'a pas été réalisée jusqu'à présent bien qu'elle ait été présentée de façon intuitive par plusieurs auteurs [43, 37]. En particulier, la tentative de généralisation constituée par la théorie du contrôle aux paramètres distribués définit la contrôlabilité uniquement en terme de conditions aux limites (amortissement d'une membrane vibrante par exemple) alors que ces conditions ne jouent aucun rôle dans le test précité. L'ordre de généralisation précédent peut donc être complété par le schéma suivant:

### FONCTIONNEL $\longrightarrow$ FORMEL

L'originalité de ce travail réside dans la manière d'effectuer la généralisation précitée grâce à l'emploi simultané ou alternatif de deux outils modernes et très peu connus des automaticiens, la théorie formelle des EDP et l'algèbre différentielle.[49, 50, 39, 38] Nous donnons maintenant quelques indications d'ordre historique sur les évolutions parallèles de ces deux outils et sur les motivations qui nous ont poussées à les introduire en théorie du contrôle.

La théorie formelle des EDP consiste, en un mot à étudier l'espace des solutions d'un système E.D.P sans l'intégrer explicitement (ce qui est en général bien sûr impossible par un logiciel de calcul formel). Ainsi dans le cas de la contrôlabilité, la définition fait appel aux conditions initiales alors que le critère correspondant les ignore. Brièvement on peut dire que cette théorie formelle est née en 1830 avec le travail de Galois qui consiste à étudier les racines d'un polynôme (EDO d'ordre zéro) sans les calculer explicitement. Le passage de l'algèbre à la géométrie a été effectué à la fin du siècle dernier

par l'Ecole Française d'EDP ( RIQUIER, TRESSE, PICARD, VESSIOT, DRACH, ... ). Il a ensuite été perfectionné par une vision plus générale (JANET, LIOUVILLE, RITT, THOMAS)[60, 36, 68], mais fortement dépendant du système de coordonnées employé.

Vers 1950, la théorie des jets de C.EHRESMANN( [ ] ) puis entre 1965 et 1975 le travail de l'Ecole Américaine (D.C.SPENCER pour les EDP, E.R.KOLCHIN pour l'algèbre différentielle [39]) ont permis de rendre intrinsèques les notions précédentes, au prix d'un formalisme puissant mais sophistiqué (algèbre homologique, chasse aux diagrammes, cohomologie de Spencer d'un côté, algèbre commutative, langage de la géométrie algébrique de l'autre).

Ces travaux ont été repris, développés puis appliqués à la physique mathématique par J.F.POMMARET très récemment ([50, 51]). On notera cependant que l'importance de l'algèbre différentielle dans la théorie du contrôle classique (EDO) a été pressentie par M.FLIESS dès 1983 dans le cadre algébrique ([25]) et 1985 dans le cadre différentiel ([15, 19, 23, 24]).

L'ambition de ce travail est de présenter de la façon la plus simple possible cette approche formelle et les outils qui la permettent. Nous avons adopté une présentation qui rend la lecture accessible à des lecteurs non-spécialistes de ces outils tout en restant très proche des manipulations de calcul formel sur ordinateur qui rendent nos résultats constructibles. En particulier, nous avons insisté surtout sur la méthodologie renvoyant le lecteur à certains ouvrages spécialisés pour certaines démonstrations. De très nombreux exemples tirés de différentes branches de la physique ( mécanique, thermodynamique, ... ) illustrent ce travail.

**CHAPITRE I**  
**PROBLEMES CLASSIQUES**





# Partie I

## RAPPELS SUR CERTAINS OUTILS GEOMETRIQUES

### I.1 VARIETES DIFFERENTIABLES

Une variété est un espace topologique qui "ressemble localement" à  $\mathbf{R}^n$ , espace Euclidien des n-uples réels  $x = (x^1, \dots, x^n)$  muni de la topologie usuelle (Voir [48, 2]).

**Définition I.1.1** Une variété différentiable  $X$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé tel que pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  et un homéomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ , où  $\varphi$  est une carte de  $X$  et  $U$  le domaine de cette carte.

La collection des cartes  $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in A\}$ , où les  $U_\alpha$  sont les domaines des  $\varphi_\alpha$ , est appelée un atlas pour  $X$  si  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X$ . Ces cartes doivent être telles que si deux cartes sont définies sur l'intersection  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ , il existe un difféomorphisme  $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  décrivant les lois de transition.

Il est clair que ces lois  $\varphi_{\alpha\beta}$  vérifient  $\varphi_{\alpha\alpha} = Id$  et  $\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}$  et par conséquent il s'ensuit que  $\varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$ .

La variété  $X$  est dite différentiable (de classe  $C^p$ ) s'il existe un atlas  $\mathcal{A}$  tel que toutes les cartes de l'atlas  $\mathcal{A} = \{(\varphi_\alpha, U_\alpha) | \alpha \in A\}$  soient différentiables (de classe  $C^p$ ).

**Remarque :** Le cas  $p = 0$  correspond au cas des variétés topologiques que nous n'aborderons pas ici, et nous ne considérons plus dans la suite que des variétés de classe  $C^\infty$  ou  $C^\omega$  (analytique).

En pratique, on notera les changements de cartes simplement sous la forme  $\bar{x} = \varphi(x)$ , sans indiquer les cartes utilisées, le but de ces manipulations étant de savoir effectuer des changements de coordonnées quelconques.

**Exemple :** La sphère  $S^1 = \{x \in \mathbf{R}^2 | \|x\| = (\sum_{i=1}^2 (x^i)^2)^{1/2} = 1\}$  est une variété différentiable munie des ouverts  $U_1 = \{x \in S^1 | x^1 \geq -1/2\}$ ,  $U_2 = \{x \in S^1 | x^1 \leq 1/2\}$ .

## I.2 APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

**Définition I.2.1** Une application  $f : X \rightarrow Y$  entre deux variétés différentiables  $X$  et  $Y$ , est de classe  $C^p$  en un point  $x \in X$  si

$(\varphi, U)$  étant une carte de  $X$ ,  $(\psi, V)$  étant une carte de  $Y$  avec domaine  $f \subset U$  et  $\text{im}f \subset V$ , l'application composée  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est de classe  $C^p$  au point  $\varphi(x)$ .

En pratique on notera simplement  $y = f(x)$  une expression locale sans faire toujours référence aux cartes choisies.

**Définition I.2.2** Un  $C^k$  difféomorphisme (de variétés) est une application  $C^k$  différentiable inversible.

**Exemple :**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$  est un homéomorphisme qui n'est pas un difféomorphisme.

**Définition I.2.3** 1. On dit que  $f$  est une immersion (resp submersion) en  $x \in X$  si le rang (jacobien) de  $f$  en  $x$  est égal à la dimension de  $X$  (resp  $Y$ ).

2. On dit que  $f$  est étale en un point de  $X$  (resp étale sur  $X$ ) si  $X$  et  $Y$  ont même dimension  $n$  et si le rang de  $f$  en  $x$  (resp le rang de  $f$  en tout point de  $X$ ) est égal à  $n$ .

3. On dit que  $f$  est un plongement de  $X$  dans  $Y$ , si  $f$  est une immersion injective de  $X$  dans  $Y$  et si  $f$  est un homéomorphisme de  $X$  sur  $f(X)$  (pour la topologie induite).

## I.3 SOUS-VARIETES

**Définition I.3.1** Soit une variété  $X$  de dimension  $n$  et de classe  $C^\infty$ .

Une sous-variété de dimension  $d$  ( $d \leq n$ ) de  $X$  est une partie  $Z$  de  $X$  vérifiant la propriété suivante :

- $\forall x \in Z$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $X$  contenant  $x$  telle que  $\varphi(U \cap Z)$  soit l'ensemble des points  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $\varphi(U)$  vérifiant  $x^{d+1} = \dots = x^n = 0$ . (Les cartes vérifiant cette propriété seront dites adaptées à  $Z$ )

**Remarque :**

1. Même si l'espace des solutions d'un système EDO peut être identifié à une variété de dimension finie (espace des états), dans le cas général des EDP, un tel résultat n'est pas vrai. On introduira plus loin la théorie des jets qui a été créée pour résoudre cette difficulté et on conçoit donc clairement à ce niveau le lien nécessaire entre théorie des jets et réalisation des systèmes de contrôle, même si en général il faille éviter de passer par le concept d'état dès que celui-ci a une dimension infinie.
2. La théorie formelle des EDP est donc aux antipodes d'une conception Banachique de l'espace des solutions.

### I.3.1 CHAMPS DE VECTEURS

**Définition I.3.2** Soit  $X$  une variété de dimension  $n$  et  $T = T(X)$  le fibré tangent à  $X$  (Pour une définition plus précise voir chapitre II, I). Un champ de vecteurs est une section  $\xi$  de  $T$ , c'est à dire une application  $\xi : X \longrightarrow T(X)$  vérifiant  $\pi \circ \xi = id_X$ , ou  $\pi : T(X) \longrightarrow X$  est la projection canonique.

Un champ de vecteurs est donc une correspondance qui, à tout  $x \in X$ , associe un vecteur  $\xi(x)$  tangent à  $X$  en  $x$ , c'est à dire un élément de  $T_x(X)$ .

**Remarque :** Si cependant, on choisit une carte de  $(U, \varphi)$  d'un atlas de  $X$ , les coordonnées de  $\xi(x)$  dans cette carte seront appelées *composantes* de  $\xi(x)$  dans la base  $(\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i})$  de  $T_x(X)$  et notées  $\xi^i(x)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ce qui permet d'écrire un vecteur sous la forme  $\xi = \xi^i(x)\partial_i$  tout en ayant les changements de cartes  $\bar{x} = \varphi(x) \implies \bar{\xi}^j(\varphi(x)) = \xi^i(x)\partial_i\varphi^j(x)$  ou la convention de sommation d'Einstein est utilisée.

Désormais c'est cette notation que nous adopterons pour les champs de vecteurs et on notera de la même manière  $T$  et l'ensemble de ses sections, le contexte indiquant toujours clairement le choix à adopter.

### I.3.2 APPLICATION TANGENTE

Par analogie avec ce qui précède, si  $f : X \longrightarrow Y$  est une application, on introduira l'application tangente  $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$  en définissant  $\eta = T(f)(\xi)$  par  $\eta^k(f(x)) = \xi^i(x)\partial_i f^k(x)$  lorsque  $y^k = f^k(x)$  en coordonnées locales.

### I.3.3 DERIVEES DE LIE

Dans le cas où  $X$  est une variété  $C^\infty$ , on désignera par  $C^\infty(X)$  l'algèbre des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $X$ .

**Définition I.3.3** Pour tout  $\xi \in T$  et tout  $x \in T$ , on définit l'opérateur de dérivation associé à  $\xi(x)$  en  $x$  de la façon suivante:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_\xi : C^\infty(X) & \longrightarrow & C^\infty(X) \\ f & \longmapsto & \mathcal{L}_\xi f \end{array}$$

Qui à chaque  $f \in C^\infty(X)$  associe la fonction  $\mathcal{L}_\xi f$  notée aussi plus simplement  $(\xi.f)$  définie en coordonnées locales  $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$  par:

$$\mathcal{L}_\xi f(x) = \xi^i(x)\partial_i f(x)$$

ou la convention de sommation d'Einstein est utilisée.

Cet opérateur  $\mathcal{L}_\xi$  qui est linéaire, est appelé *dérivée de Lie* de  $f$  par rapport à  $\xi$  et on vérifie que la définition est compatible avec les changements de cartes.

**Propriétés :**

- $\mathcal{L}_{(\xi+\eta)}f = \mathcal{L}_\xi f + \mathcal{L}_\eta f \quad \forall f \in C^\infty(X)$
- $\mathcal{L}_\xi(f+g) = \mathcal{L}_\xi f + \mathcal{L}_\xi g \quad \forall f, g \in C^\infty(X)$
- $\mathcal{L}_\xi(fg) = g\mathcal{L}_\xi f + f\mathcal{L}_\xi g \quad \forall f, g \in C^\infty(X)$

### I.3.4 CROCHET DE CHAMPS DE VECTEURS

**Définition I.3.4** *Le crochet de deux champs de vecteurs  $\xi, \eta \in T(X)$  est défini de la façon suivante :*

$$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}f = \mathcal{L}_\xi \mathcal{L}_\eta f - \mathcal{L}_\eta \mathcal{L}_\xi f$$

qu'on écrit de façon plus simple  $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$

Si  $\xi^i$  et  $\eta^i$  désignent les composantes locales de  $\xi$  et  $\eta$  dans une carte, les composantes  $\zeta^i$  de  $\zeta = [\xi, \eta]$  sont :

$$\zeta^i = (\xi^r \partial_r \eta^i - \eta^r \partial_r \xi^i)$$

**Propriétés :** Le crochet de deux champs de vecteurs vérifie:

- $[\xi_1 + \xi_2, \eta] = [\xi_1, \eta] + [\xi_2, \eta]$  bilinéaire
- $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$  antisymétrique
- $[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0 \quad (\forall \xi, \eta, \zeta \in \Gamma(X))$  Identité de Jacobi.

### I.3.5 ALGEBRE DE LIE

Tout sous-ensemble de  $T$  stable par crochet est appelé une *algèbre de Lie* (de champs de vecteurs).

### I.3.6 DISTRIBUTIONS

**Définition I.3.5** *Soit  $X$  une variété différentiable de dimension  $n$ . Une distribution  $\Delta$  (de dimension ou de rang  $p$ ) sur  $X$  (ou  $p$ -champ) est définie par la donnée, pour tout  $x \in X$ , d'un sous-espace vectoriel  $\Delta_x \subset T_x(X)$  (de dimension ou de rang  $p$ ).*

*Cette distribution sera dite de classe  $C^k$  si sur chaque voisinage ouvert  $U$  de  $X$  il existe une base de  $\Delta$  formée de vecteurs de classe  $C^k$ .*

On suppose bien sûr ici que  $X$  est de  $C^r$ , avec  $r \geq k + 1$ .

**Exemple :** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une *submersion* de  $X$  sur une variété de dimension  $(n-p)$ . On obtient un  $p$ -champ (ou une distribution de dimension  $\Delta$ ) sur  $X$  en associant, à chaque  $x \in X$ , le sous-espace  $\Delta_x = \ker T(f)_x$ , c'est-à-dire le sous-espace tangent en  $x$  à la sous-variété  $f^{-1}(f(x))$  de  $X$ .

### I.3.7 VARIETES INTEGRALES

Une variété *intégrale* de  $\Delta$  est une sous-variété *connexe* de  $X$  dont l'espace tangent en chaque point  $x$  est  $\Delta_x$ .

**Définition I.3.6** Une distribution est dite *intégrable* si par tout point de  $X$  passe une et une seule variété *intégrale* maximale.

**Remarque :**

- On dit qu'un champ de vecteurs  $\xi$ , défini sur une partie ouverte  $U$  de  $X$ , appartient à  $\Delta$  si, pour tout  $x \in U$ , on a:  $\xi(x) \in \Delta_x \subset T_x$ .
- $\Delta \subset \Delta'$  si  $\forall x \in X$ ,  $\Delta(x) \subset \Delta'(x)$ .

**Définition I.3.7** • On dit que  $\Delta$  est *involutif* si, quels que soient les champs de vecteurs  $\xi, \eta$  appartenant à  $\Delta$ , le champ  $[\xi, \eta]$  appartient à  $\Delta$ . On dira  $[\Delta, \Delta] \subset \Delta$

- Une distribution  $\Delta$  est *non-singulière* (de dimension constante) s'il existe un entier  $d$  tel que  $\dim \Delta_x = d$  pour tout  $x \in X$ .
- Un point  $x \in X$  est un point *régulier* d'une distribution  $\Delta$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que  $\Delta$  soit *non-singulière* dans  $U$ .

**Remarque :** L'ensemble de tous les points réguliers  $C^\infty$  est une sous-variété ouverte, dense dans  $X$ , obtenue en égalant à zéro certains déterminants non-identiquement nuls.

**Définition I.3.8** Un invariant d'une distribution  $\Delta$  est une fonction sur  $X$  tuée par tout champ de vecteur de  $\Delta$  au sens de la dérivée de Lie.

**Théorème I.3.9 (de Frobenius)** Pour qu'une distribution  $\Delta$  soit *intégrable*, il faut et il suffit qu'elle soit *involutive*. En particulier une distribution *involutive* et *régulière* de dimension  $p$  admet au plus  $(n - p)$  invariants fonctionnellement indépendants.

## Partie II

# THEORIE DU CONTROLE CLASSIQUE: POSITION DES PROBLEMES

Nous avons rédigé cette partie en adaptant un peu les définitions dans le but de pouvoir les généraliser aux cas des EDP.

### II.1 CONTROLABILITE

La contrôlabilité a été généralisée au cas des systèmes non-linéaires affines, en remplaçant des études de rang de matrices par des études de rang de distribution et en remarquant qu'aux opérations matricielles ([42, 37, 59]) vont correspondre les crochets de champs de vecteurs ([43, 66, 34, 30, 75]).

Cette notion de contrôlabilité est une notion purement générique (voir [75, 43], ...) et on veut aussi que sa généralisation puisse être testée grâce à un critère purement formel ([43]).

En particulier, un tel critère doit pouvoir être implémenté sur un logiciel de calcul formel. Malheureusement, cette notion de contrôlabilité ne répond pas à tous nos souhaits, comme nous allons le voir sur des exemples qui montrent la difficulté d'étendre au cas non-linéaire des méthodes adaptées au cas linéaire.

Dans le cas de systèmes affines de la forme suivante:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} g_{\alpha}(x)u^{\alpha}$$

où les sorties sont identifiées à l'état et  $f, g_{\alpha}$  sont des champs de vecteurs analytiques sur la variété  $X$ .

**Remarque :** Dans les systèmes considérés ici les sorties sont identifiées à l'état et les définitions sont données en conséquence. Ces systèmes sont appelés dans la littérature systèmes à sorties complètes.

Soit  $D$  la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $(f, g_1, \dots, g_m)$  et tous les crochets constructibles, c'est à dire la plus petite distribution contenant l'algèbre de Lie engendrée par  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ .

On a le critère formel suivant:

**Critère II.1.1 (Formel)** *Un système sera dit "faiblement contrôlable" (en un point  $x$ , sur un voisinage de  $x$ ) si le rang de  $D$  est égal à  $n$  (en un point  $x$ , sur un voisinage de  $x$ ).*

**Exemple :** Soient les deux systèmes suivants:  $\dot{x} = 1$  et  $\dot{x} = 0$ . Ces systèmes ne sont manifestement pas contrôlable car il n'y a pas d'entrée qui agisse sur le système.

Cependant  $\text{rang} D = \text{rang}(\frac{\partial}{\partial x}) = 1$  pour le premier système alors que  $\text{rang} D = \text{rang}(0) = 0$  pour le second.

Pour éviter de telles situations, considérons la distribution engendrée par les champs de vecteurs  $\{g_1, \dots, g_m\}$  et tous les crochets constructibles au moyen de  $f$ . Nous la noterons  $\Delta$  et nous montrerons comment introduire  $\Delta$  sans faire référence à  $D$ , contrairement à ce qui est répandu dans la littérature. En effet, on peut vérifier facilement que  $\Delta$  est introduite à partir de  $D$  pour des raisons de convenance par plusieurs auteurs ([30, 34, 66]). L'introduction de  $\Delta$  conduit à la définition classique suivante:

**Définition II.1.2** *Un système sera dit "fortement contrôlable" (en un point  $x$ , sur un voisinage de  $x$ ) si et seulement si le rang de  $\Delta$  est égal à  $n$  (en un point  $x$ , sur un voisinage de  $x$ ).*

**Remarque :**

- Comme nous allons le voir par la suite, cette distribution  $\Delta$ , et donc cette définition de contrôlabilité, est celle que nous obtiendrons indépendamment par l'algèbre différentielle comme dans l'approche de J.F.Pommaret([52]).
- De plus, seule la distribution  $\Delta$  correspond exactement au cas linéaire car  $f(x) = Ax$  ne peut disparaître dans  $D$  que si l'on pose  $x = 0$ , ce qui est contraire à une notion globale de la contrôlabilité

Cette remarque montre bien qu'il faut considérer le cas linéaire comme un cas particulier du cas non-linéaire.

**Remarque :** On notera que dans le cas linéaire, si un système de contrôle n'est pas contrôlable, on peut trouver au moins un vecteur orthogonal aux colonnes de  $M = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ .

L'existence de tels vecteurs a été utilisée par plusieurs auteurs comme une description alternative du défaut de contrôlabilité, en terme d'accessibilité ([58]) ou de critère équivalent ([37]). L'existence de tels vecteurs nous conduit dans cas non-linéaire précédent



à la définition suivante, qui paraît arbitraire pour l'instant et ne prendra de signification définitive que dans le prochain chapitre au niveau différentiel et dans celui qui le suivra au niveau algébrique.

**Définition II.1.3** *On appelle observable toute fonction de l'entrée, de la sortie ainsi que de leurs dérivées respectives (l'entrée et la sortie sont évidemment solutions du système de contrôle).*

*L'observable sera dite "libre", si elle ne vérifie aucune EDO.*

*Elle sera dite "contrainte", si elle vérifie au moins une EDO.*

*Un système de contrôle sera dit contrôlable s'il n'admet pas d'observable contrainte (c'est à dire si toute observable est libre).*

**Remarque :**

- Comme nous pourrons le voir par la suite, c'est de cette façon que nous introduirons  $\Delta$  en établissant l'équivalence entre l'existence d'observable "contrainte" et la chute du rang de la distribution  $\Delta$ .
- Cette définition de la contrôlabilité, introduite de façon indépendante de l'analyse fonctionnelle, sera généralisée au cas des EDP, ce qui est notre but, grâce à l'algèbre différentielle.

Nous allons brièvement montrer que cette définition (qui nous le rappelons encore ne sera justifiée que dans le cadre de l'algèbre différentielle) est cohérente avec la notion classique de contrôlabilité dans le cas linéaire, et qu'elle est même équivalente, bien que cela ne soit pas évident a priori. L'exemple suivant permet de comprendre simplement ce qui se passe.

**Exemple :** Examinons l'exemple suivant, avec  $u$  étant l'entrée, les  $y$  jouent le rôle d'état=sortie et  $\alpha \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} \dot{y}^1 &= y^2 + u \\ \dot{y}^2 &= \alpha y^1 + u \end{cases}$$

On remarque que la matrice de contrôlabilité  $C$  de ce système:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} = (B, AB)$$

n'est de rang maximum que si  $\alpha \neq 1$  car  $\det C = \alpha - 1 = 0$  dans ce cas.

Montrons que dans ce cas on a une observable liée du système. Comme le système est linéaire on va chercher cette observable  $z$  sous la forme  $z = y^1 + \lambda y^2$  or  $\dot{z} = \dot{y}^1 + \lambda \dot{y}^2$  d'où d'après le système on obtient  $\dot{z} = y^2 + \lambda y^1 + u + \lambda u$ .

Pour  $\lambda = -1$  on obtient  $\dot{z} = y^2 - y^1 = -z$ . Le fait que  $\dot{z} + z = 0$  amène une équation non contrôlable et en fait  $z = 0$  pour  $t = 0 \implies z = 0 \forall t$ .

Ayant vu la cohérence de cette définition il nous restera à l'étendre aux cas des EDP et aussi à montrer qu'elle donne un test cohérent dans le cas affine ce qui sera fait dans le chapitre suivant et montre aussi la nécessité de révisiter le concept de contrôlabilité, non seulement pour le généraliser aux EDP mais aussi pour le rendre cohérent avec avec les différentes situations rencontrées avec des EDO.

En conclusion les problèmes posés par la contrôlabilité sont les suivants:

1. Existe-t-il une définition intrinsèque ne dépendant que de la relation entrée/sortie (faisant intervenir éventuellement les dérivées d'ordre  $\geq 1$ ) et non de la représentation par état ?
2. Peut-on alors étendre le concept de réalisation minimale?
3. Existe-t-il un critère formel correspondant à la définition précédente qui redonne le critère du cas linéaire tout en n'utilisant que la distribution  $\Delta$  et non la distribution  $D$  dans le cas affine, de façon à assurer la cohérence interne de la théorie?
4. Peut-on considérer ces points de vue comme des cas particuliers d'un concept plus général encore, valable pour les EDP?

## II.2 OBSERVABILITE

L'observabilité est souvent vue comme une notion duale de celle de contrôlabilité. Considérons le système de contrôle suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{\alpha=1}^m g_{\alpha}(x)u^{\alpha} \\ y &= h(x) \end{cases}$$

$y$  désignant la sortie  $(y^1, \dots, y^p) \in \mathbb{R}^p$ .

Pour l'étude de l'observabilité de tels systèmes non-linéaires, on considère le plus petit sous-espace de  $C^{\infty}(X)$  qui contient les fonctions  $(h_1, \dots, h_p)$  et ainsi que les dérivées de Lie  $\{\mathcal{L}_f h_1, \mathcal{L}_f^2 h_1, \dots, \mathcal{L}_{g_1} h_1, \dots, \mathcal{L}_{g_m} h_1, \dots, \mathcal{L}_f^k \mathcal{L}_{g_i}^l h_j, \mathcal{L}_{g_i} \mathcal{L}_{g_k} h_j, \dots\}$ .

Ce sous-espace sera dénoté par  $\theta$  est appelé espace d'observation.

De plus on associe à  $\theta$ , la distribution  $D_{\theta} = \{v \in T \mid \mathcal{L}_v \gamma = 0, \forall \gamma \in \theta\}$ .

**Critère Formel II.2.1** *Une condition suffisante pour que le système de contrôle soit localement observable (au point  $x$  de  $X$ ) est  $\dim \Omega_{\theta} = n$*

**Remarque :** Lorsqu'on se donne une relation entrée/sortie directement, par exemple d'ordre supérieur à 1, et qu'on la ramène à la forme canonique entrée/état /sortie, il est essentiel de remarquer que cette forme est *automatiquement* observable puisque l'état est défini à partir de l'entrée et de la sortie par construction. La notion d'observabilité, liée à une représentation canonique, est donc purement abstraite en ce sens qu'elle dépend de la représentation choisie sans être une propriété structurelle du système entrée/sortie

comme l'était la contrôlabilité.

**Exemple :** Partons de  $\ddot{y} + \dot{u} = 0$  et choisissons l'état  $x^1 = y$ ,  $x^2 = \dot{y} + u$ . On obtient le système  $\dot{x}^1 = x^2 - u$ ,  $\dot{x}^2 = 0$  avec  $y = x^1$  qui est évidemment observable. En conclusion, les problèmes posés par l'observabilité sont les suivants:

1. Contrairement à la contrôlabilité, la notion d'observabilité n'a pas de caractère intrinsèque car elle ne dépend pas seulement de la relation entrée/sortie mais présente un caractère intermédiaire lié à la représentation choisie. Ce point sera particulièrement bien mis en évidence grâce à l'usage de l'algèbre différentielle .
2. De toutes les façons, existe-t-il une définition formelle de l'observabilité, vérifiable par un test formel et pouvant être généralisée au cas du contrôle aux dérivées partielles?

**CHAPITRE II**  
**APPROCHE GEOMETRIQUE**



# Partie I

## THEORIE FORMELLE DES EDP

### I.1 VARIETES FIBREES

Soient  $X$  et  $\mathcal{E}$  deux variétés de dimension respectivement  $n$  et  $(m + n)$  ( $\dim X = n$  et  $\dim \mathcal{E} = m + n$ )

Soit  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow X$  une submersion surjective.

Les coordonnées locales d'un point  $x$  de  $X$  sont désignées par  $(x^i)_{1 \leq i \leq n}$ .

**Définition I.1.1** On dit que  $\mathcal{E}$  est une "variété fibrée" sur  $X$  si pour tout point de  $\mathcal{E}$  il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de ce point dans  $\mathcal{E}$ , et une carte locale de  $\mathcal{E}$  ainsi qu'une carte locale  $\{U, \varphi\}$  de  $X$ , avec  $U = \pi(\mathcal{U})$  telle que le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 (x^i, y^k) & \mathcal{E} & \supset \mathcal{U} & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\
 \downarrow & \pi \downarrow & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
 (x^i) & X & \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

commute.

Les coordonnées locales d'un point de  $\mathcal{E}$  seront notées par  $(x^i, y^k)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq m}$ . Les changements de coordonnées sont donc de la forme  $\bar{x} = \varphi(x)$ ,  $\bar{y} = \Psi(x, y)$ .

**Remarque :**

- $X$  est appelé variété de base et  $\mathcal{E}$  variété totale
- Pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_x = \pi^{-1}(x)$  est une sous-variété fermée de  $\mathcal{E}$ , appelée la "fibre" au dessus de  $x$ .
- Il est clair que  $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{E}_x$  et que deux fibres distinctes  $\mathcal{E}_{x_1}$  et  $\mathcal{E}_{x_2}$  sont disjointes si  $x_1 \neq x_2$ .
- Par la suite  $X$  désignera une variété connexe, paracompacte et  $C^\omega$  (analytique) ou  $C^\infty$  (différentiable).

- Une variété fibrée  $\mathcal{E}$  sur  $X$  est appelée triviale si  $\mathcal{E} = X \times Y$  avec  $Y$  une variété de dimension  $m$ .

**Définition I.1.2** On appelle *section locale* de  $\mathcal{E}$  au dessus d'un ouvert  $U$  de  $X$ , une application  $f : U \rightarrow \mathcal{E}$  telle que  $(\pi \circ f)(x) = x$ ,  $\forall x \in U$  donc  $\pi \circ f = id_U$ .

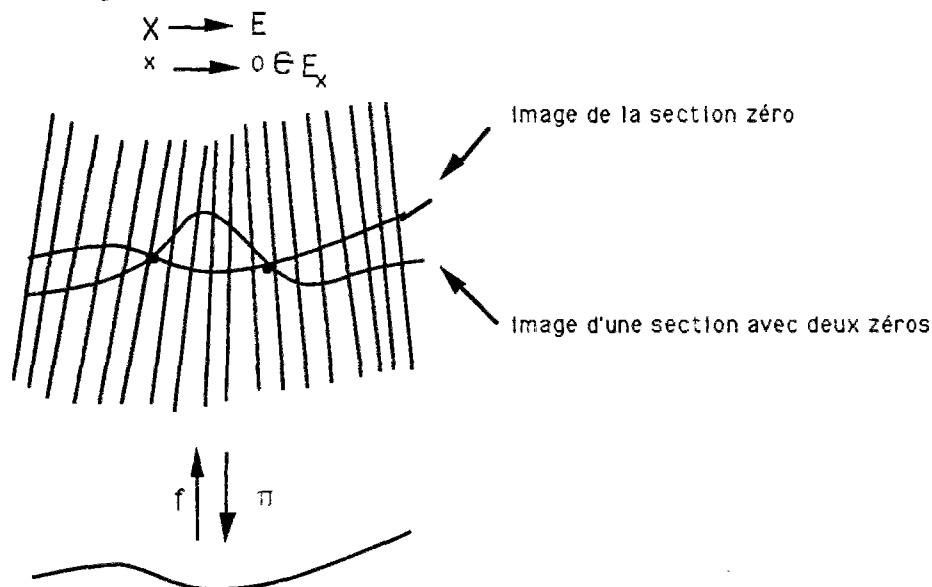
Si  $U = X$ , alors  $\pi \circ f = id_X$  et dans ce cas on parlera de sections globales.

$$f : X \rightarrow \mathcal{E} \\ (x^i) \rightarrow (x^i, f^k(x))$$

et on écrira

$$\mathcal{E} \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{\pi} \end{array} X$$

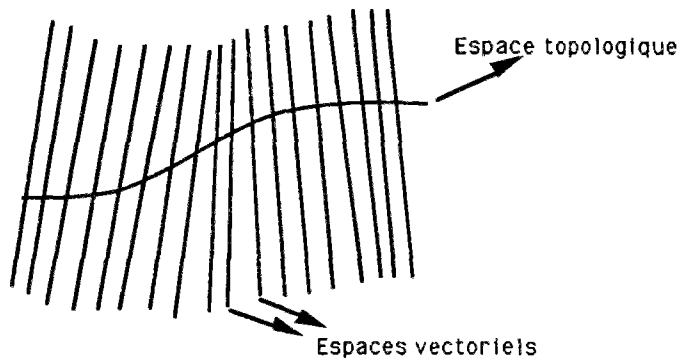
**Exemple :** Tout fibré vectoriel a une section "zéro".



On identifie sans difficulté l'image de la section "zéro" avec la variété de base  $X$ .

## I.2 FIBRES VECTORIELS

En géométrie différentielle, on associe souvent à tout point d'une variété un espace vectoriel, comme c'est le cas pour les espaces tangents.



**Définition I.2.1** Un fibré vectoriel est un triplet  $(E, \pi, X)$  où  $\pi : E \rightarrow X$  est la projection et tout  $E_x = \pi^{-1}(x)$  a la structure d'espace vectoriel de dimension  $m$  égale à celle de la fibre type, tel qu'il vérifie:

**L'axiome de trivialité locale:** Tout point de  $X$  a un voisinage  $U$ , pour lequel il existe un homéomorphisme

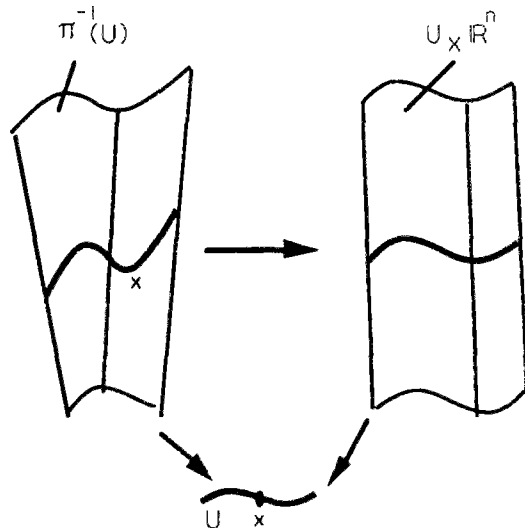
$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$$

tel que pour tout  $x \in X$ , l'application

$$\Phi_x = \Phi|_{E_x} : E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^m$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels, en notant  $E_x$  la fibre au dessus du point  $x$  de  $X$ .

Fibrés vectoriels



**Remarque :**

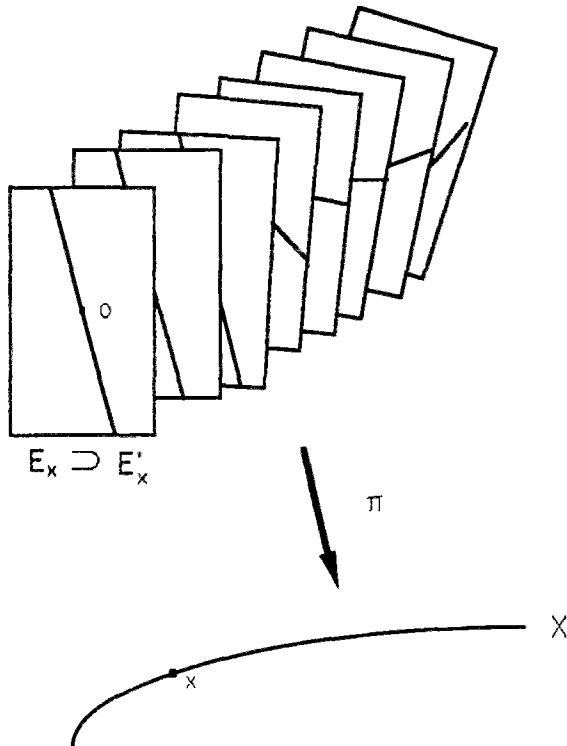
- Un fibré vectoriel  $E$  sur  $X$  est appelé trivial si  $E$  peut s'écrire  $X \times \mathbb{R}^m$  (ou  $X \times Y$ ). En pratique, tout changement de coordonnées locales est de la forme  $\bar{x} = \varphi(x)$ ,  $\bar{y} = A(x)y$ . On dénotera par  $\dim E$  la dimension de la fibre.



- Par abus de langage, on notera que si  $E$  est un fibré vectoriel de dimension  $m$  sur une variété  $X$  de dimension  $n$ , alors naturellement  $E$  est une variété de dimension  $m+n$ .  $E$  apparait donc, simplement comme l'union d'espaces vectoriels disjoints  $E_x = \pi^{-1}(x)$ .

**Définition I.2.2** Si  $E$  est un fibré vectoriel et  $E' \subset E$  un sous-ensemble, tel que pour tout point dans  $X$ , il existe une carte fibrée  $(\varphi, U)$  avec  $\varphi(\pi^{-1}(U) \cap E') = U \times \mathbb{R}^k \subset U \times \mathbb{R}^m$  alors on dit que  $(E', \pi|_{E'}, X)$  est un sous-fibré vectoriel de  $E$ .

**Exemple :** Si  $\Phi : E \rightarrow F$  est un morphisme de fibrés de rang constant ( $\forall x \in X$   $\text{rang} \Phi_x = \text{constante}$ , ou  $\Phi_x : E_x \rightarrow F_x$  est linéaire.) alors  $\ker \Phi = \bigcup_{x \in X} \ker \Phi_x$  est un sous fibré de  $E$ , de même pour  $\text{im} \Phi = \bigcup_{x \in X} \text{im} \Phi_x$  qui est aussi un sous-fibré de  $F$ .



Cette définition servira pour introduire les systèmes EDP linéaires, comme nous le verrons plus tard.

### I.3 FONCTIONS DE TRANSITION

Il existe une autre façon d'introduire les fibrés qui se fait grâce aux *fonctions de transitions*. Cette approche est partiellement utilisée en calcul tensoriel.

De façon générale, on peut regrouper les "changements de coordonnées" ou les "fonctions de transitions" pour une variété fibrée sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \bar{y} = \psi(x, y) \\ \bar{x} = \varphi(x) \end{cases}$$

Dans le cas des fibrés affines et vectoriels on a la forme suivante:

$$\begin{array}{ll} \bar{x} = \varphi(x) \text{ et } \bar{y} = A(x)y + B(x) & \text{fibré affine} \\ \bar{x} = \varphi(x) \text{ et } \bar{y} = A(x)y & \text{fibré vectoriel} \end{array}$$

**Remarque :** A tout fibré affine  $\mathcal{E}$  on peut associer un fibré vectoriel  $E$  de la façon suivante

$$\begin{array}{ccc} E & \dashrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\pi} & X \\ (\bar{x} = \varphi(x), \bar{v} = A(x)v) & & (\bar{x} = \varphi(x), \bar{y} = A(x)y + B(x)) & & \end{array}$$

On dit aussi que  $\mathcal{E}$  est *modélisé* sur le fibré vectoriel  $E$ .

Le paragraphe suivant précise un cas particulier de fibrés.

## I.4 FIBRE TANGENT

Soit  $X$  une variété, connexe, paracompacte, on notera  $T = T(X)$  son *fibré tangent* de coordonnées locales  $(x^i, u^i)_{1 \leq i \leq n}$  et de fonctions de transitions:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x) \\ \bar{u}^j = \partial_i \varphi^j(x) u^i \end{cases}$$

et on notera  $T^* = T^*(X)$  son *fibré cotangent* de coordonnées locales  $(x^i, u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et de fonctions de transitions:

$$\begin{cases} \bar{x} = \varphi(x) \\ \partial_i \varphi^j(x) \bar{u}_j = u_i \end{cases}$$

Ainsi l'espace tangent à une variété différentiable  $X$  est  $T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x X$ .

**Exemple :** [de Fibrés vectoriels]

- On notera le *r-produit extérieur* par  $\Lambda^r T^*$ , le *r-produit symétrique* par  $S_r T^*$ , et le *r-produit tensoriel* par  $\otimes^r T^*$ .

- Une *r-forme*  $\omega$  est une section du fibré  $\Lambda^r T^*$  sur  $X$ :

$X \xrightarrow{\omega} \Lambda^r T^*$ , qu'on écrit simplement

$$\omega = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_r} \omega_{i_1 \dots i_r}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

et en notation condensée  $\omega = \omega_I(x) dx^I$ .

- De plus on a:  $\dim T^* = n = \dim X$ ,

$$\dim \Lambda^k T^* = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \dim S_q T^* = \frac{(n+q-1)!}{q!(n-1)!}$$

## I.5 PRODUIT FIBRE

**Définition I.5.1** Le produit fibré de deux variétés fibrées sur  $X$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ , noté  $\mathcal{E} \times_X \mathcal{F}$  est l'ensemble des points de  $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$  ayant même projection sur  $X$  selon  $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow X$  et  $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow X$ .

C'est aussi l'ensemble qui rend le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 & (x, y, z) & (x, z) \\
 \mathcal{E} \times \mathcal{F} \supset & \mathcal{E} \times_X \mathcal{F} & \longrightarrow \mathcal{F} \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 & \mathcal{E} & \longrightarrow X \\
 & (x, y) & (x)
 \end{array}$$

**Exemple** : [Fibré Trivial]  $\mathcal{E} = X \times Y$ ,  $\mathcal{F} = Y \times Z$  alors  $\mathcal{E} \times_X \mathcal{F} = X \times Y \times Z$

Soient  $\varphi : X \longrightarrow X'$  et  $\pi' : \mathcal{E}' \longrightarrow X'$  une variété fibrée sur  $X'$ . On notera par  $\varphi^{-1}(\mathcal{E}')$  le sous-ensemble de  $X \times \mathcal{E}'$  consistant en l'ensemble des points  $(x, (x', y'))$  tel que  $x' = \varphi(x) = \pi'(x', y')$ .

**Définition I.5.2** On appelle  $\varphi^{-1}(\mathcal{E}')$  l'image réciproque de  $\mathcal{E}'$  par  $\varphi$ .

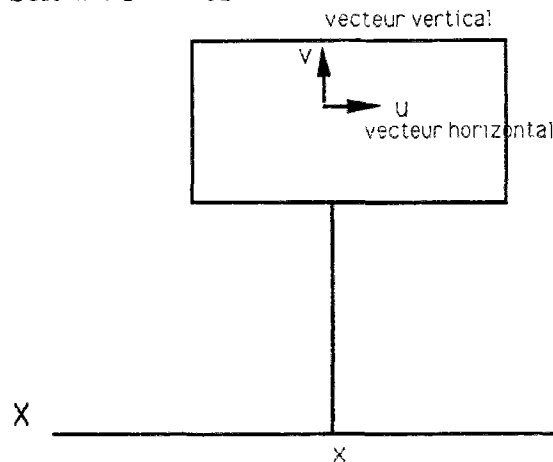
**Remarque** : On peut définir  $\varphi^{-1}(\mathcal{E}')$  comme le fibré rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 \varphi^{-1}(\mathcal{E}') & \longrightarrow & \mathcal{E}' \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \longrightarrow & X'
 \end{array}$$

Donc  $\varphi^{-1}(\mathcal{E}')$  peut-être considéré comme le produit fibré de  $X$  et  $\mathcal{E}'$  sur  $X'$ .

## I.6 FIBRE VERTICAL

Soit  $\pi : \mathcal{E} \longrightarrow X$



alors

$$T(\pi) : \begin{array}{ccc} T(\mathcal{E}) & \longrightarrow & T(X) \\ (x^i, y^k, u^i, v^k) & \longmapsto & (x^i, u^i) \end{array}$$

$$\text{avec } \bar{u}^j = \partial_i \varphi^j u^i \quad \bar{v}^l = \frac{\partial \psi^l}{\partial x^i} u^i + \frac{\partial \psi^l}{\partial y^k} v^k$$

Si on pose  $u^i = 0$ , on peut définir un fibré vectoriel sur  $\mathcal{E}$  qui aura pour coordonnées locales

$$(x^i, y^k, 0, v^k) \longrightarrow (x^i, y^k)$$

et pour fonctions de transitions

$$\bar{v}^l = \frac{\partial \psi^l}{\partial y^k}(x, y) v^k$$

Donc l'ensemble noté  $E = V(\mathcal{E})$  muni des fonctions de transitions suivantes, désigne le vertical de  $\mathcal{E}$ :

$$\begin{cases} \bar{x} & = \varphi(x) \\ \bar{y} & = \psi(x, y) \\ \bar{v}^l & = \frac{\partial \psi^l}{\partial y^k}(x, y) v^k \end{cases}$$

**Propriétés :**

1.  $E = V(\mathcal{E})$  est fibré sur  $X$

$$\begin{array}{ccccc} V(\mathcal{E}) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & X \\ (x, y, v) & \longrightarrow & (x, y) & \longrightarrow & (x) \end{array}$$

2.  $V(\mathcal{E})$  est aussi un fibré vectoriel sur  $\mathcal{E}$

**Démonstration :** Soit le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} T(\mathcal{E}) & \xrightarrow{T(\pi)} & T(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{E} & \xrightarrow{\pi} & X \end{array}$$

On peut remarquer que le produit fibré  $T(X) \times_X \mathcal{E}$  est définie de la façon suivante en coordonnées:

$$(x, u) \times (x, y) \longrightarrow (x, y, u)$$

d'où la possibilité de le fibrer sur  $\mathcal{E}$ , et on a la suite suivante

$$\begin{array}{ccccccc} & (x, y, 0, v) & \longrightarrow & (x, y, u, v) & \longrightarrow & (x, y, u) & \\ 0 & \longrightarrow & V(\mathcal{E}) & \longrightarrow & T(\mathcal{E}) & \xrightarrow{T(\pi)} & T(X) \times_X \mathcal{E} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathcal{E} & \equiv & \mathcal{E} & \equiv & \mathcal{E} \\ & & (x, y) & \longrightarrow & (x, y) & \longrightarrow & (x, y) \end{array}$$

Cette suite

$$0 \longrightarrow V(\mathcal{E}) \longrightarrow T(\mathcal{E}) \xrightarrow{T(\Pi)} T(X) \times_X \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

montre que  $V(\mathcal{E})$  est un fibré vectoriel sur  $\mathcal{E}$  comme noyau d'un morphisme de fibrés vectoriels sur  $\mathcal{E}$  de rang constant.  $\diamond$

## I.7 SUITES EXACTES

Soient  $E, E', E''$  des fibrés vectoriels sur  $X$  et  $\Phi : E \longrightarrow E', \Psi : E' \longrightarrow E''$  des morphismes tel que  $\Psi \circ \Phi = 0$ .

**Définition I.7.1** La suite de fibrés vectoriels sur  $X$ :

$$E \xrightarrow{\Phi} E' \xrightarrow{\Psi} E''$$

est dite exacte si :

1.  $\text{Im}\Phi = \text{Ker}\Psi$  comme sous-ensembles de  $E'$
2. Les suites d'espaces vectoriels:

$$E_x \xrightarrow{\Phi_x} E'_x \xrightarrow{\Psi_x} E''_x$$

sont exactes  $\forall x \in X$ .

La remarque suivante précise certaines propriétés qui seront essentielles pour des applications en calcul formel.

**Remarque :** On a toujours la suite exacte courte suivante

$$0 \longrightarrow \ker \Phi \longrightarrow E \xrightarrow{\Phi} F \longrightarrow \text{coker}\Phi \longrightarrow 0$$

Sous forme matricielle locale, nous écrirons pour simplifier  $\Phi(x)u = v$  ou  $u$  et  $v$  sont des vecteurs colonnes, ce qui permet de scinder la matrice  $\Phi$  de la façon canonique suivante, ou par définition on pose  $\text{rang}\Phi = \dim \text{im}\Phi$

$$\dim F \left\{ \begin{array}{l} \dim \text{im}\Phi \\ \dim \text{coker}\Phi \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline \phantom{0} & \phantom{0} \\ \hline \phantom{0} & \phantom{0} \\ \hline \end{array} \right\} \begin{pmatrix} u \\ \phantom{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \phantom{0} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\phantom{\text{rang}\Phi} \phantom{\dim \ker \Phi}}_{\text{rang}\Phi} \quad \underbrace{\phantom{\text{rang}\Phi} \phantom{\dim \ker \Phi}}_{\dim \ker \Phi}$$

$$\underbrace{\phantom{\text{rang}\Phi} \phantom{\dim \ker \Phi}}_{\dim E}$$

Puisque  $\text{coker}\Phi = F/\text{im}\Phi$ , un simple décompte des dimensions montre que:

$$\dim \ker \Phi - \dim E + \dim F - \dim \text{coker}\Phi = 0$$

En effet

$$\text{rang}\Phi = \dim \text{im}\Phi = \dim E - \dim \ker \Phi = \dim F - \dim \text{coker}\Phi$$

## I.8 ESPACES DE JETS

**Définition I.8.1** On appelle "longueur" d'un multi-indice  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  le nombre  $|\mu| = \mu_1 + \dots + \mu_n$  et on définit:  $\mu + 1_i = (\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_i + 1, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n)$ .

**Définition I.8.2** Pour tout entier  $q \geq 0$ , on dit que deux sections  $f$  et  $g$  d'une variété fibrée  $\mathcal{E}$  sur  $X$  sont "q-équivalentes" en un point  $x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$  si

$$f^k(x) = g^k(x) \text{ et } \partial_\mu f^k(x) = \partial_\mu g^k(x) \forall k \text{ et } 1 \leq |\mu| \leq q$$

ou  $\partial_\mu = (\partial_1)^{\mu_1} \dots (\partial_n)^{\mu_n}$ .

Cette relation d'équivalence nous permet de définir la classe d'équivalence d'une section  $f$  qu'on appellera le "q-jet de  $f$  en  $x$ " et qu'on notera par  $j_q(f)(x)$

Le point  $x$  est appelé la "source" du jet et le point  $f(x) \in \mathcal{E}$  est appelé le "but" du jet.

On introduit donc l'ensemble  $J_q(\mathcal{E})_x$  de tous les q-jets en  $x$  de sections de  $\mathcal{E}$  sur un voisinage de  $x$  et enfin l'ensemble  $J_q(\mathcal{E}) = \bigcup_{x \in X} J_q(\mathcal{E})_x$ .

**Définition I.8.3** On dit que l'ensemble  $J_q(\mathcal{E})$  est le "fibré des q-jets de  $\mathcal{E}$ ".

En coordonnées locales, un point de  $J_q(\mathcal{E})$  sera désigné par

$$(x, y_q) = (x^i, y_\mu^k) \quad 0 \leq |\mu| \leq q \text{ avec } y_0^k = y^k$$

et on a

$$\dim J_q(\mathcal{E}) = n + m \frac{(q+n)!}{q!n!}$$

On notera par

$$\begin{aligned} \pi_q^{q+r} : J_{q+r}(\mathcal{E}) &\longrightarrow J_q(\mathcal{E}) \\ (x, y_{q+r}) &\longrightarrow (x, y_q) \end{aligned}$$

**Propriétés :**

- $J_0(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$
- $J_q(\mathcal{E})$  est une variété fibrée sur  $X$  et  $\mathcal{E}$ .

**Exemple :** Nous précisons sur un exemple ci dessous la correspondance entre la notation indicielle "classique"  $\partial_{i_1 \dots i_q} y^k$  ou  $y_{i_1 \dots i_q}^k$  et la notation multi-indicielle.

Ainsi, si  $n = 3, m = 1, \partial_{122} y$  s'écrira  $\partial_{(1,2,0)} y$  et de même  $\partial_{123} y$  s'écrira  $\partial_{(1,1,1)} y$ .

A toute section  $f$  de  $\mathcal{E}$  on associera la section  $J_q(f)$  de  $J_q(\mathcal{E})$ , définie par

$$\begin{aligned} j_q(f) : X &\longrightarrow J_q(\mathcal{E}) \\ (x) &\longrightarrow (x, \partial_\mu f^k(x)) \end{aligned}$$

pour  $k = 1, \dots, m; 0 \leq |\mu| \leq q$ .

## I.9 PROPRIETES IMPORTANTES DE LA THEORIE DES JETS

Nous allons donner les principales propriétés de la théorie des jets sans démonstration.

**Proposition I.9.1**  $J_q(\mathcal{E})$  est un fibré affine sur  $J_{q-1}(\mathcal{E})$  modelé sur le fibré vectoriel  $S_q T^* \otimes V(\mathcal{E})$ .

$$S_q T^* \otimes V(\mathcal{E}) \dashrightarrow J_q(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi_{q-1}^q} J_{q-1}(\mathcal{E})$$

**Proposition I.9.2** On a un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels sur  $J_q(\mathcal{E})$

$$\begin{array}{ccc} V(J_q(\mathcal{E})) & \simeq & J_q(V(\mathcal{E})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_q(\mathcal{E}) & \equiv & J_q(\mathcal{E}) \end{array}$$

et la suite exacte de fibrés vectoriels ramenés sur  $J_q(\mathcal{E})$  par images réciproques.

$$0 \longrightarrow S_q T^* \otimes V(\mathcal{E}) \xrightarrow{\varepsilon_q} J_q(V(\mathcal{E})) \xrightarrow{V(\pi_{q-1}^q)} J_{q-1}(V(\mathcal{E})) \longrightarrow 0$$

**Exemple :**  $\delta\hat{q} = \delta q$  est un des exemples les plus connus qui illustrent le fait que  $V(J_q(\mathcal{E})) \simeq J_q(V(\mathcal{E}))$  lorsque  $q = 1, n = 1$ .

**Proposition I.9.3** Avec  $J_1^{r+s}(\mathcal{E}) = \underbrace{J_1(J_1(\dots(J_1(\mathcal{E}))))}_{r+s \text{ fois}}$  si l'on considère  $J_{r+s}(\mathcal{E}), J_r(J_s(\mathcal{E}))$ , et  $J_{r+1}(J_{s-1}(\mathcal{E}))$  comme des sous-variétés fibrées de  $J_1^{r+s}(\mathcal{E})$ , on a la formule

$$J_{r+s}(\mathcal{E}) = J_r(J_s(\mathcal{E})) \cap J_{r+1}(J_{s-1}(\mathcal{E})) \quad \forall r, s \geq 0$$

Les démonstrations de ces propositions sont assez techniques bien que sans difficulté et ne sont pas données ici car seuls les résultats importent pour les applications. Le lecteur intéressé par leur démonstration pourra consulter les références ([?, ?, ?])

**Exemple :**  $n = 1, m = 1 \implies \mathcal{E} = \mathbf{R} \times \mathcal{R}, r = 1, s = 2$

On notera les coordonnées locales de chacun des fibrés de jets respectivement par:

$$\begin{array}{ll} J_1(\mathcal{E}) & \longrightarrow (x, y_0, y_1) \\ J_1^2(\mathcal{E}) = J_1(J_1(\mathcal{E})) & \longrightarrow (x, y_{00}, y_{01}, y_{10}, y_{11}) \\ J_1^3(\mathcal{E}) = J_1(J_1(J_1(\mathcal{E}))) & \longrightarrow (x, y_{000}, y_{001}, y_{010}, y_{100}, y_{011}, y_{101}, y_{110}, y_{111}) \end{array}$$

On a de plus

$$J_1(J_2(\mathcal{E})) \subset J_1^3(\mathcal{E}) \text{ est défini par } \begin{cases} y_{010} - y_{001} = 0 \\ y_{110} - y_{101} = 0 \end{cases}$$

$$J_2(J_1(\mathcal{E})) \subset J_1^3(\mathcal{E}) \text{ est défini par } \begin{cases} y_{100} - y_{010} = 0 \\ y_{101} - y_{011} = 0 \end{cases}$$

$$J_1(J_2(\mathcal{E})) \cap J_2(J_1(\mathcal{E})) \subset J_1^3(\mathcal{E}) \text{ est défini par } \begin{cases} y_{000} & \longrightarrow y \\ y_{100} = y_{010} = y_{001} & \longrightarrow y_1 \\ y_{110} = y_{101} = y_{011} & \longrightarrow y_{11} \\ y_{111} & \longrightarrow y_{111} \end{cases}$$

Ainsi donc

$$J_3(\mathcal{E}) \text{ est défini par } (x, y, y_1, y_{11}, y_{111}) = (x, y_3)$$

Examinons maintenant plus particulièrement le cas linéaire:  
Soit  $E$  un fibré vectoriel:

$$E \longrightarrow X = \begin{cases} \bar{x} = \varphi(x) \\ \bar{y} = A(x)y \end{cases}$$

**Propriétés :**

1.  $J_{r+s}(E) = J_r(J_s(E)) \cap J_{r+1}(J_{s-1}(E))$
- 2.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_q T^* \otimes E & \longrightarrow & J_q(E) & \xrightarrow{\Pi_{q-1}^q} & J_{q-1}(E) \longrightarrow 0 \\ & & (x, y_{|\mu|}^k)_{|\mu|=q} & \longrightarrow & (x, 0, \dots, 0, y_{|\mu|}^k)_{|\mu|=q} & & \\ & & & & (x, y_q) & \longrightarrow & (x, y_{q-1}) \end{array}$$

Ces relations expliquent pourquoi on utilisera systématiquement les lettres capitales droites dans le cas linéaire.



## I.10 SYSTEMES NON-LINEAIRES D'EDP

Soient  $\Phi$  une fonction définie sur  $J_q(\mathcal{E})$  et  $f_q$  une section de  $J_q(\mathcal{E})$ . On note alors souvent  $(\Phi \circ f_q)(x)$  simplement par  $\Phi(x, f_q(x))$  lorsqu'on évaluera  $\Phi(x, y_q)$  en coordonnées locales; avec  $y_q = f_q(x)$  et en particulier  $y = f(x)$ .

**Définition I.10.1** On définit la dérivée formelle  $d_i\Phi$  de  $\Phi$  par la formule:

$$d_i\Phi = \partial_i\Phi + y_{\mu+1}^k \frac{\partial\Phi}{\partial y_\mu^k}, \quad 0 \leq |\mu| \leq q$$

De façon à avoir  $(d\Phi) \circ f_{q+1} = \partial_i(\Phi \circ f_q)$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

**Définition I.10.2** Un opérateur différentiel non-linéaire d'ordre  $q$  de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$  est une application  $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  de l'ensemble des sections locales de  $\mathcal{E}$  dans l'ensemble des sections locales de  $\mathcal{F}$  déterminée par le morphisme  $\Phi : J_q(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{F}$ .

En général on suppose que  $\Phi$  est un épimorphisme.

**Définition I.10.3** On appelle  $r$ -prolongement de  $\Phi$  le morphisme

$$\rho_r(\Phi) : J_{q+r}(\mathcal{E}) \rightarrow J_r(\mathcal{F})$$

défini localement par les équations

$$d_\nu\Phi^\tau = z_\nu^\tau \text{ lorsque } 0 \leq |\nu| \leq r \text{ et } \Phi^\tau(x, y_q) = z^\tau$$

La définition suivante précise les notations adoptées pour certains cas particuliers:

**Définition I.10.4** • Si  $\mathcal{E}$  est une variété fibrée sur  $X$ , un système non-linéaire d'ordre  $q$  sur  $\mathcal{E}$  est une sous-variété fibrée  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$ .

- Si  $\mathcal{E}$  est un fibré affine sur  $X$ , alors on définit un système affine d'ordre  $q$  sur  $\mathcal{E}$  comme un sous-fibré affine de  $J_q(\mathcal{E})$ .
- Enfin si  $E$  est un fibré vectoriel sur  $X$ , un système linéaire d'ordre  $q$  sur  $E$  est un sous-fibré vectoriel  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$ .

**Définition I.10.5** Une solution locale (globale) de  $\mathcal{R}_q$  est une section locale (globale)  $f$  de  $\mathcal{E}$  tel que  $j_q(f)$  soit une section locale (globale) de  $\mathcal{R}_q$ .

**Définition I.10.6** On définit de même le  $r$ -prolongement de  $\mathcal{R}_q$  comme le sous-ensemble  $\rho_r(\mathcal{R}_q) = J_r(\mathcal{R}_q) \cap J_{q+r}(\mathcal{E}) \subset J_r(J_q(\mathcal{E}))$ .

Quand il n'y a pas de possibilité de confusion, on notera alors simplement  $\rho_r(\mathcal{R}_q)$  par  $\mathcal{R}_{q+r}$ . Par dérivation composée, on obtient:

**Lemme I.10.7** Si  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$  est un système d'ordre  $q$  sur  $\mathcal{E}$  et si  $\rho_r(\mathcal{R}_q)$  est un système d'ordre  $q+r$  sur  $\mathcal{E}$ , alors on a:

$$\rho_{r+s}(\mathcal{R}_q) = \rho_s(\rho_r(\mathcal{R}_q)) = \mathcal{R}_{q+r+s}$$

**Définition I.10.8** On définit les sous-ensembles:

$$\mathcal{R}_{q+r}^{(s)} = \pi_{q+r}^{q+r+s}(\mathcal{R}_{q+r+s}) \subseteq \mathcal{R}_{q+r}, \quad \forall r, s \geq 0.$$

## I.11 COMPATIBILITE FORMELLE

**Définition I.11.1** • On dit qu'un système  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$  est formellement compatible si l'application  $\pi_{q+r} : \mathcal{R}_{q+r} \longrightarrow X$  est surjective  $\forall r \geq 0$ .

- On dit qu'il est compatible s'il admet au moins une solution.
- En particulier un système linéaire est toujours formellement compatible, puisqu'il admet toujours la solution nulle.

**Remarque :** On a toujours  $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)} \subset \mathcal{R}_{q+r}$  et le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{q+r+s} & \xrightarrow{\pi_{q+r}^{q+r+s}} & \mathcal{R}_{q+r}^{(s)} \subset \mathcal{R}_{q+r} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_{q+r+s}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\pi_{q+r}^{q+r+s}} & J_{q+r}(\mathcal{E}) \end{array}$$

ou les flèches verticales sont des inclusions.

Un problème essentiel du calcul formel, qui sera résolu plus loin, est de savoir si un système est formellement compatible grâce à un algorithme fini qui évite l'infinité de vérification qui est exigé par la définition.

## I.12 INTEGRABILITE FORMELLE

**Définition I.12.1** Un système  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$  est formellement intégrable si,  $\forall r \geq 0$ :

- $\mathcal{R}_{q+r}$  est une sous-variété fibrée de  $J_{q+r}(\mathcal{E})$
- $\pi_{q+r}^{q+r+1} : \mathcal{R}_{q+r+1} \longrightarrow \mathcal{R}_{q+r}$  est un épimorphisme.

Un système est dit involutif s'il est formellement intégrable avec un symbole involutif. (Cette définition sera donnée plus loin.)

**Remarque :** En pratique, un système est formellement intégrable si ses prolongements successifs permettent de calculer les séries formelles solutions terme par terme grâce à un ordinateur.

**Exemple :** Soient  $X = \mathbb{R}^n$  et  $E = T(X) = T$  et soit le système  $R_1 \subset J_1(T)$  défini par les équations:

$$\xi_j^i + \xi_i^j = 0$$

alors son premier prolongement  $R_2 \subset J_2(T)$  est défini par les équations:

$$\begin{cases} \xi_j^i + \xi_i^j = 0 \\ \xi_{ij}^k = 0 \end{cases}$$

Donc d'après la deuxième équation, on voit que tous les jets d'ordre 2 sont nuls.  
 $R_1$  est donc formellement intégrable.

**Exemple :[JANET]**

$n = 3, m = 1, q = 2$ .  $E = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ . On considère le système linéaire suivant:

$$\mathbf{R}^2 \subset J_2(E) \begin{cases} y_{33} - x^2 y_{11} = 0 \\ y_{22} = 0 \end{cases}$$

La projection  $\pi_2^3 : R_3 \longrightarrow R_2$  est un épimorphisme mais la projection  $\pi_3^4 : R_4 \longrightarrow R_3$  n'est pas un épimorphisme. En effet elle conduit à une nouvelle EDP d'ordre 3:  $y_{112} = 0$  qui ne peut pas être obtenue comme combinaison linéaire des  $2 + 6 = 8$  équations définissant  $R_3$ .

$$R_3 = \begin{cases} y_{333} - x^2 y_{113} & = 0 \\ y_{233} - x^2 y_{112} - y_{11} & = 0 \\ y_{223} & = 0 \\ y_{222} & = 0 \\ y_{133} - x^2 y_{111} & = 0 \\ y_{122} & = 0 \\ y_{33} - x^2 y_{11} & = 0 \\ y_{22} & = 0 \end{cases}$$

On en déduit  $\dim R_3 = 20 - 8 = 12$ .

$$R_4 = \begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{2233} - x^2 y_{1122} - 2y_{112} & = 0 \\ y_{2233} & = 0 \\ y_{1122} & = 0 \end{cases}$$

$\implies y_{112} = 0$  nouvelle équation d'ordre 3 et donc l'application  $\pi_3^4 : R_4 \longrightarrow R_3$  n'est pas surjective.

**Lemme I.12.2** *La solution de ce système dépend de 12 constantes.*

**Démonstration :** Vérifions le par le calcul:

Soit  $y = f(x^1, x^2, x^3)$  la solution du système  $R_2$ . Alors d'après l'équation  $y_{22} = 0$  on tire  $y_2 = A(x^1, x^2)$  et la solution générale est de la forme  $y = A(x^1, x^3)x^2 + B(x^1, x^3)$ .

Mais  $y$  vérifie aussi  $y_{33} - x^2 y_{11} = 0$  d'où on en tire

$$(x^2)^2 \partial_{11} A + x^2 (\partial_{11} B - \partial_{33} A) - \partial_{33} B = 0$$

et par identification, on obtient :  $\partial_{11}A = 0, \partial_{33}A - \partial_{11}B = 0, \partial_{33}B = 0$   
ce qui donne

$$\begin{aligned} B &= x^3\alpha(x^1) + \beta(x^1) \\ A &= a(x^3)x^1 + b(x^3) \\ x^1\partial_{33}a(x^3) + \partial_{33}b(x^3) - x^3\partial_{11}\alpha(x^1) - \partial_{11}\beta(x^1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{si } x^1 = 0 : \partial_{33}b(x^3) = x^3\partial_{11}\alpha(0) - \partial_{11}\beta(0) \implies b(x^3) = m\frac{(x^3)^3}{6} + s\frac{(x^3)^2}{2} + px^3 + q$$

$$\text{si } x^3 = 0 : \partial_{11}\beta(x^1) = x^1\partial_{33}a(0) + \partial_{33}b(0) \implies \beta(x^1) = r\frac{(x^1)^3}{6} + s\frac{(x^1)^2}{2} + tx^1 + u$$

En remplaçant dans l'équation  $\partial_{33}A - \partial_{11}B = 0$ , on obtient:

$$\begin{aligned} x^1\partial_{33}a(x^3) + mx^3 + s - x^3\partial_{11}\alpha(x^1) - rx^1 - s &= 0 \\ \implies x^3(\partial_{11}\alpha(x^1) - m) &= x^1(\partial_{33}a(x^3) - r) \\ \implies \frac{\partial_{11}\alpha(x^1) - m}{x^1} &= \frac{\partial_{33}a(x^3) - r}{x^3} = e = cte \\ \implies \begin{cases} a(x^3) &= e\frac{(x^3)^3}{6} + r\frac{(x^3)^2}{2} + gx^3 + h \\ \alpha(x^1) &= e\frac{(x^1)^3}{6} + m\frac{(x^1)^2}{2} + nx^1 + v \end{cases} \end{aligned}$$

Donc  $y = f(x^1, x^2, x^3)$  dépend des 12 constantes arbitraires

$$\{e, g, h, m, n, p, q, r, s, t, u, v\} \subset \mathbf{R}^{12}$$

Ainsi l'espace des solutions est de dimension 12 sur les constantes.  $\diamond$

Bien que la dimension de l'espace vectoriel sur les constantes d'un système EDP linéaire homogène soit en général infinie, dans tous les cas il est souvent difficile de le vérifier et dans le cas contraire, de trouver la dimension sans avoir recours à des algorithmes utilisant la cohomologie de Spencer, que nous allons maintenant définir. Nous détaillerons ces algorithmes plus loin sur l'exemple précédant, en ayant recours à un ordinateur.

**Exemple :**  $n = 2, m = 1, q = 2;$

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} y_{22} - 1/2(y_{11})^2 &= 0 \\ y_{12} - y_{11} &= 0 \end{cases}$$

D'où

$$\mathcal{R}_3 \begin{cases} y_{22} - 1/2(y_{11})^2 &= 0 \\ y_{12} - y_{11} &= 0 \\ y_{222} - y_{11}y_{112} &= 0 \\ y_{122} - y_{11}y_{111} &= 0 \\ y_{112} - y_{111} &= 0 \\ y_{122} - y_{112} &= 0 \end{cases}$$

La combinaison des trois dernières équations nous donne alors la nouvelle équation  $(y_{11} - 1)y_{111} = 0$  et cela nous montre que  $\mathcal{R}_3$  n'est pas une variété fibrée.

Cette dernière équation nous donne dans  $\mathcal{R}_4$  l'équation  $(y_{111})^2 + (y_{11} - 1)y_{1111} = 0$  et donc  $(y_{111})^3 = 0 \implies y_{111} = 0$ .

Alors  $\pi_2^3 : \mathcal{R}_3 \longrightarrow \mathcal{R}_2$  est surjective tandis que  $\pi_3^4 : \mathcal{R}_4 \longrightarrow \mathcal{R}_3$  ne l'est pas à cause de l'équation  $y_{111} = 0$  qui est toujours vérifiée sur  $\mathcal{R}_4$ , mais non sur  $\mathcal{R}_3$ .

En effet si  $y_{111} \neq 0$  sur  $\mathcal{R}_3$  alors  $y_{11} = 1$  d'où  $(y_{111})^2 = 0$ , d'où contradiction.

**Exemple :** Examinons le système suivant:  $n = 2, m = 1, q = 1$ ;

$x^1 y_2 - x^2 y_1 = 0$ , la solution  $y = (x^1)^2 + (x^2)^2$  définie sur un voisinage de l'origine  $(0, 0)$  ne peut-être obtenue par les méthodes développées ici, car l'origine est un point singulier pour la variété.

Donc ces méthodes ne nous donnent pas toutes les solutions formelles des systèmes considérés.

## I.13 SYMBOLE D'UN SYSTEME E.D.P

Dans ce qui suit, on écrira  $E = V(\mathcal{E})$  pour toute variété fibrée.

Cette notation permettra d'étendre les résultats obtenues aux systèmes linéaires sans changer de notation.

**Définition I.13.1** *Le symbole de  $\mathcal{R}_q$  est la famille*

$$M_q = V(\mathcal{R}_q) \cap S_q T^* \otimes V(\mathcal{E}) = R_q \cap S_q T^* \otimes E$$

*d'espaces vectoriels sur  $\mathcal{R}_q$ .*

L'exemple (2) précédent nous montre que de telles familles ne constituent pas en général des fibrés vectoriels sur  $\mathcal{R}_q$ .

Introduisons maintenant un nouvel espace vectoriel  $F_0$  sur  $\mathcal{R}_q$  de telle sorte que le diagramme suivant ramené sur  $\mathcal{R}_q$  par image réciproque soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M_q & \longrightarrow & S_q T^* \otimes E & \longrightarrow & F_0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R}_q & \longrightarrow & J_q(E) & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ce diagramme va nous permettre de définir le *r-prolongement* du symbole  $M_q$  de  $\mathcal{R}_q$ .

**Définition I.13.2** *On appelle r-prolongement du symbole  $M_q$ , le noyau  $\rho_r(M_q)$  du morphisme composé suivant:*

$$S_{q+r} T^* \otimes E \longrightarrow S_r T^* \otimes S_q T^* \otimes E \longrightarrow S_r T^* \otimes F_0$$

**RECAPITULATIF:** Dans le cas où le système d'équations aux dérivées partielles est donné par des formules explicites en coordonnées locales, on a alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_q \quad \Phi^\tau(x, y_q) &= 0, & \tau = 1, \dots, \dim(F_0) \\ \mathcal{R}_{q+r} \quad d_\nu \Phi^\tau &= 0, & 0 \leq |\nu| \leq r \\ M_q \quad \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k}(x, y_q) v_\mu^k &= 0, & |\mu| = q, (x, y_q) \in \mathcal{R}_q. \\ M_{q+r} \quad \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k}(x, y_q) v_{\mu+\nu}^k &= 0, & |\mu| = q, |\nu| = r, (x, y_q) \in \mathcal{R}_q. \end{aligned}$$

Ainsi on remarque que le symbole de  $\mathcal{R}_{q+r}$  est bien le r-prolongement du symbole de  $\mathcal{R}_q$ , ce qui justifie la notation  $M_{q+r} = \rho_r(M_q)$  et on a les suites exactes de familles d'espaces vectoriels sur  $\mathcal{R}_q$ :

$$0 \longrightarrow M_{q+r} \longrightarrow S_{q+r}T^* \otimes E \longrightarrow S_rT^* \otimes F_0$$

**Remarque :**

- L'étude du symbole nous permet de ramener l'étude différentielle du système d'équations aux dérivées partielles à l'étude purement algébrique du symbole, et pour ce faire il est nécessaire d'introduire une nouvelle notion qui est la cohomologie de Spencer.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_q & \rightsquigarrow & M_q \\ \vdots & & \vdots \\ \text{étude différentielle} & \vdots & \text{étude algébrique} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{q+r} & \rightsquigarrow & M_{q+r} \end{array}$$

- Comme on a pu le constater sans doute le r-prolongement du symbole d'ordre  $q$  se fait simplement par un processus d'algèbre linéaire.

**Exemple :**  $n = 2, m = 1, q = 2;$

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} y_{22} - 1/2(y_{11})^2 = 0 \\ y_{12} - y_{11} = 0 \end{cases}$$

Son symbole est :

$$M_2 \begin{cases} v_{22} - y_{11}v_{11} = 0 \\ v_{12} - v_{11} = 0 \end{cases}$$

et  $M_2$  est un fibré vectoriel sur  $\mathcal{R}_2$  avec  $\dim M_2 = 1$ .

Le premier prolongement du symbole est :

$$M_3 \begin{cases} v_{222} - y_{11}v_{112} = 0 \\ v_{122} - y_{11}v_{111} = 0 \\ v_{112} - v_{111} = 0 \\ v_{122} - v_{112} = 0 \end{cases}$$

mais  $M_3$  n'est pas un fibré vectoriel sur  $\mathcal{R}_2$  car  $(y_{11} - 1)v_{111} = 0$ .

**Exemple :**  $n = 3, m = 1, q = 2$ ;

$$R_2 \begin{cases} y_{33} - x^2y_{11} = 0 \\ y_{22} = 0 \end{cases}$$

Son symbole est :

$$M_2 \begin{cases} v_{33} - x^2v_{11} = 0 \\ v_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\dim M_2 = 6 - 2 = 4.$$

Le premier prolongement du symbole est :

$$M_3 \begin{cases} v_{333} - x^2v_{113} = 0 \\ v_{233} - x^2v_{112} = 0 \\ v_{223} = 0 \\ v_{222} = 0 \\ v_{133} - x^2v_{111} = 0 \\ v_{122} = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \dim M_3 = 10 - 6 = 4.$$

Son deuxième prolongement est le suivant:

$$M_4 \begin{cases} v_{3333} - x^2v_{1133} = 0 \\ v_{2333} - x^2v_{1123} = 0 \\ v_{2233} = 0 \\ v_{2223} = 0 \\ v_{2222} = 0 \\ v_{1333} - x^2v_{1113} = 0 \\ v_{1233} - x^2v_{1112} = 0 \\ v_{1223} = 0 \\ v_{1222} = 0 \\ v_{1133} - x^2v_{1111} = 0 \\ v_{1122} = 0 \end{cases}$$

De là, on peut construire les suites suivantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & S_2 T^* \otimes E & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & J_2(E) & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

on peut lui associer le tableau des dimensions suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & & \\
 0 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & S_3 T^* \otimes E & \longrightarrow & T^* \otimes F_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_3 & \longrightarrow & J_3(E) & \longrightarrow & J_1(F_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & J_2(E) & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Suivi du tableau des dimensions correspondantes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 6 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Enfin, on peut établir le diagramme:



$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & S_4 T^* \otimes E & \longrightarrow & S_2 T^* \otimes F_0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_4 & \longrightarrow & J_4(E) & \longrightarrow & J_2(F_0) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R_3 & \longrightarrow & J_3(E) & \longrightarrow & J_1(F_0) & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

Avec le tableau des dimensions correspondant:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 12 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 35 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 0 & & 
\end{array}$$

Le défaut d'intégrabilité formelle est donc caractérisé par le fait que l'application  $\pi_3^4 : R_4 \longrightarrow R_3$  n'est pas surjective car  $R_4$  introduit une nouvelle équation d'ordre 3,  $y_{112} = 0$  qui n'est pas une combinaison linéaire des équations de  $R_3$ .

## I.14 COHOMOLOGIE DE SPENCER

Dans l'étude de la cohomologie de Spencer, on adoptera pour les éléments de  $\Lambda^s T^* \otimes S_q T^* \otimes E$ , les coordonnées suivantes:  $\omega_{\mu,I}^k dx^I$  avec  $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s}$  et  $i_1 \leq \dots \leq i_s$ , et on introduira la famille de formes  $w_\mu^k = w_{\mu,I}^k dx^I$ .

**Définition I.14.1** On appelle application de Spencer, l'application suivante:

$$\delta : \Lambda^s T^* \otimes S_{q+1} T^* \otimes E \longrightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes S_q T^* \otimes E$$

définie par  $(\delta \omega)_\mu^k = dx^i \wedge \omega_{\mu+1}^k$ , et induite par la composition:

$$\Lambda^s T^* \otimes S_{q+1} T^* \longrightarrow \Lambda^s T^* \otimes T^* \otimes S_q T^* \longrightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes S_q T^*$$

où l'épimorphisme à droite est la multiplication extérieure.

**Lemme I.14.2**  $\delta \circ \delta = 0$

**Démonstration :** En effet on a

$$\begin{aligned}
(\delta^2\omega)_\mu &= (\delta(\delta\omega))_\mu = dx^i \wedge (\delta\omega)_{\mu+1,i} \\
&= dx^i \wedge dx^j \wedge \omega_{\mu+1,i+1,j} \\
&= \omega_{\mu+1,i+1,j,I} \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \\
&= \omega_{\mu+1,j+1,i,I} \wedge dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\
&= -\omega_{\mu+1,i+1,j,I} \wedge dx^i \wedge dx^j \wedge dx^I \\
&= 0
\end{aligned}$$

◇

**Proposition I.14.3** *Il existe une application induite*

$$\delta : \Lambda^s T^* \otimes M_{q+r+1} \longrightarrow \Lambda^{s+1} T^* \otimes M_{q+r}$$

**Démonstration :** Pour simplifier, on fera la démonstration en coordonnées locales pour un système linéaire. ◇

**Définition I.14.4** *Soit  $H_{q+r}^s = H_{q+r}^s(M_q)$  la cohomologie des  $\delta$  suites définies par la proposition précédente, en  $\Lambda^{s+1} T^* \otimes M_{q+r}$ .*

- *Le symbole  $M_q$  est dit s-acyclique si  $H_{q+r}^1 = \dots = H_{q+r}^s, \forall r \geq 0$ .*
- *Le symbole  $M_q$  est dit involutif s'il est n-acyclique.*
- *Le symbole est dit de type fini si  $M_{q+r} = 0$  pour un certain  $r \geq 0$ .*

Les démonstrations des résultats suivants sont très techniques et nous renvoyons le lecteur à (Sweeney, [49]).

**Lemme I.14.5**  *$S_q T^* \otimes E$  est involutif,  $\forall q \geq 0$ .*

**Théorème I.14.6**  *$M_{q+r}$  devient involutif pour  $r$  assez grand.*

**Remarque :**  $M_{q+r}$  ne devient pas nécessairement 2-acyclique avant de devenir involutif mais il n'existe aucun critère connu en général, pour décider de la 2-acyclité (Pour des contre-exemples voir [51]).

**Remarque :** On notera que l'involutivité peut exister même si les dimensions des espaces vectoriels  $M_{q+r}$  peuvent varier d'un point à un autre point, au dessus de  $\mathcal{R}_q$ .

**Proposition I.14.7** *Tout symbole est 1-acyclique.*

**Démonstration :** Utilisant les propositions précédentes nous obtenons le diagramme commutatif suivant; avec les lignes qui sont exactes et la colonne du milieu qui est exacte, en accord avec le fait que  $S_{q+r+1}T^* \otimes E$  est involutif (voir lemme précédent).

$$\begin{array}{ccccc}
& 0 & & 0 & & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M_{q+r+1} & \longrightarrow & S_{q+r+1}T^* \otimes E & \longrightarrow & S_{r+1}T^* \otimes F_0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & \delta & & \delta & & \delta \\
0 & \longrightarrow & T^* \otimes M_{q+r} & \longrightarrow & T^* \otimes S_{q+r}T^* \otimes E & \longrightarrow & T^* \otimes S_r T^* \otimes F_0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \delta & & \delta & & \\
& & \Lambda^2 T^* \otimes S_{q+r-1}T^* \otimes E & \longleftarrow & \Lambda^2 T^* \otimes S_{q+r-1}T^* \otimes E & \longrightarrow & 
\end{array}$$

◇

**Proposition I.14.8** *Si  $M_q$  est involutif et de type fini, alors  $M_q = 0$ .*

**Proposition I.14.9** *Si  $M_q$  est involutif alors  $M_{q+r}$  est involutif  $\forall r \geq 0$ .*

Le théorème suivant (Goldschmidt) va permettre d'étudier les rangs des prolongements grâce à un algorithme fini.

**Théorème I.14.10 (Goldschmidt)** *Si  $M_q$  est 2-acyclique et si  $M_{q+1}$  est un fibré vectoriel sur  $\mathcal{R}_q$ , alors  $M_{q+r}$  est un fibré vectoriel sur  $\mathcal{R}_q$ ,  $\forall r \geq 0$ .*

**Remarque :** Considérons la  $\delta$ -suite suivante:

$$0 \longrightarrow M_{q+r} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes M_{q+r} \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Lambda^r T^* \otimes M_q \xrightarrow{\delta} \delta(\Lambda^r T^* \otimes M_q) \longrightarrow 0$$

$M_q$  est involutif si et seulement si ces  $\delta$ -suites sont exactes,  $\forall r \geq 0$ .

**Exemple :** Reprenons l'exemple de Janet avec  $E = X \times \mathbf{R}$ .

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & S_4 T^* & \longrightarrow & S_2 T^* \otimes F_0 \longrightarrow H_2^2(M_2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \delta & & \delta & & \delta \\
 0 & \longrightarrow & T^* \otimes M_3 & \longrightarrow & T^* \otimes S_3 T^* & \longrightarrow & T^* \otimes T^* \otimes F_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \delta & & \delta & & \delta \\
 0 & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes M_2 & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes S_2 T^* & \longrightarrow & \Lambda^2 T^* \otimes F_0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \delta & & \delta & & \\
 0 & \longrightarrow & \Lambda^3 T^* \otimes T^* & \xlongequal{\quad} & \Lambda^3 T^* \otimes T^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

On peut donc définir  $H_2^2(M_2)$  soit par la ligne supérieure et alors  $\dim H_2^2(M_2) = 4 + (6 \times 2) - 15 = 1$ , soit par la colonne de gauche et  $\dim H_2^2(M_2) = ((3 \times 4) - (1 \times 3)) - ((3 \times 4) - 4) = 9 - 8 = 1$ , ce qui montre bien que  $M_2$  n'est pas 2-acyclique.

La notion d'acyclicité, en plus de son usage pour étudier les propriétés de rang déjà rencontrées, sert essentiellement d'ingrédient algébrique au théorème suivant et à ses 2 corollaires que nous ne démontrerons pas mais que nous illustrerons en détail sur un exemple, puisque ces résultats sont la clef des méthodes constructibles en théorie formelle des EDP et donc en théorie du contrôle aux dérivées partielles.

**Théorème I.14.11** Si  $M_q$  est 2-acyclique alors  $\rho_r(\mathcal{R}_q^{(1)}) = \mathcal{R}_{q+r}^{(1)}$

**Corollaire I.14.12 (critère d'intégrabilité formelle)** Si  $M_q$  est 2-acyclique et  $\mathcal{R}_q^{(1)} = \mathcal{R}_q$  alors  $\mathcal{R}_q$  est formellement intégrable.

**Corollaire I.14.13** Si  $R_q$  n'est pas formellement intégrable, une utilisation "en cascade" du théorème et du critère précédent permet, en général, de déterminer 2 nombres entiers  $r, s \geq 0$  tels que le système  $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$  soit formellement intégrable (avec éventuellement un symbole involutif).

**Démonstration :** Nous voulons seulement ici donner une idée intuitive de la démonstration ainsi que du maniement inductif du théorème et du critère.

Si  $\mathcal{R}_q^{(1)} = \mathcal{R}_q$  et si  $M_q$  est 2-acyclique (en pratique on doit passer par l'involution pour le vérifier de façon constructible) alors le critère s'applique. Si  $\mathcal{R}_q^{(1)} = \mathcal{R}_q$  et si  $M_q$  est non 2-acyclique on répète l'argument avec  $\mathcal{R}_{q+r}$  lorsque  $M_{q+r}$  devient involutif.

Si  $\mathcal{R}_q^{(1)} \subset \mathcal{R}_q$  et si  $M_q$  est involutif on repart à nouveau avec  $\mathcal{R}_q^{(1)}$  mais en ayant la

possibilité d'utiliser le théorème pour ramener l'étude des prolongements de  $\mathcal{R}_q^{(1)}$  à ceux de  $\mathcal{R}_q$ .

On continue ainsi jusqu'à l'obtention de  $\mathcal{R}_{q+r}^{(s)}$ , l'arrêt de l'algorithme étant du à une propriété Noethérienne des familles emboîtées de symboles ainsi construites.  $\diamond$

*Nous revenons à l'étude de l'involution, en essayant de donner des algorithmes plus pratiques pour prouver cette propriété.*

Nous allons introduire certains nombres entiers encore appelés *caractères* qui, par la suite, joueront un très grand rôle pour la détermination de l'espace des solutions et pour la généralisation de la théorie du contrôle au cas des équations aux dérivées partielles.

**Définition I.14.14** Dans un symbole donné en coordonnées locales, on peut définir les applications  $\delta_i$  par les formules  $(\delta_i \omega)_\mu^k = \omega_{\mu+1}^k$ , dans le but d'avoir  $\delta \omega = dx^i \wedge \delta_i \omega$  et les ensembles:

$$(M_{q+r})^i = \{\omega \in M_{q+r} \mid \delta_1 \omega = 0, \dots, \delta_i \omega = 0\} \text{ avec } (M_{q+r})^n = 0$$

On appelle caractères locaux de  $M_q$  les  $n$  nombres:

$$\alpha_q^i = \dim(M_q)^{i-1} - \dim(M_q)^i.$$

**Définition I.14.15** On appelle "composantes de classe  $i$ ", les  $v_\mu^k$  qui sont telles que  $\mu_1 = 0, \dots, \mu_{i-1} = 0, \mu_i \neq 0$ .

Alors  $(M_{q+r})^i = \{ \text{éléments de } M_{q+r} \text{ dont les composantes de classe } 1, \dots, i \text{ sont annulées} \}$ .

**Proposition I.14.16**  $M_q$  est involutif si et seulement si il existe un système de coordonnées locales (appelé  $\delta$ -régulier) dans lequel nous avons les suites exactes courtes suivantes, pour  $i = 1, \dots, n$ :

$$0 \longrightarrow (M_{q+1})^i \longrightarrow (M_{q+1})^{i-1} \xrightarrow{\delta_i} (M_q)^{i-1} \longrightarrow 0$$

**Propriétés :** Les caractères d'un symbole involutif sont intrinsèquement définis et vérifient les inégalités:

$$0 \leq \alpha_q^i \leq m \frac{(q+n-i-1)!}{(q-1)!(n-i)!}, \quad \alpha_q^1 \geq \alpha_q^2 \geq \dots \geq \alpha_q^n \geq 0.$$

**Démonstration :** La première inégalité résulte de la suite :

$$0 \longrightarrow (M_q)^i \longrightarrow (M_q)^{i-1} \xrightarrow{\delta_i} (S_{q-1} T^* \otimes E)^{i-1}.$$

La démonstration de la seconde est beaucoup plus technique ( voir Janet, Cartan) et le lecteur pourra consulter ([49]) .  $\diamond$

Il s'en suit que, pour un symbole involutif  $M_q$ , on a la relation suivante pour n'importe quel  $r \geq 0$ :

$$\dim M_{q+r} = \alpha_q^1 + \dots + \frac{(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \alpha_q^i + \dots + \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!} \alpha_q^n$$

où le dernier caractère  $\alpha_q^n$  va jouer le rôle le plus important car il correspond dans le cas des systèmes à symbole involutif *au nombre d'inconnues qui peuvent être choisies arbitrairement*, car on a

$$\dim R_{q+r} - \dim R_{q-1} + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r!i!} \alpha_q^i.$$

Ce qui est un polynôme en  $r$  de terme de plus haut degré égal à  $\alpha_q^n (r^n/n!)$  alors que le nombre de termes d'une série de Taylor tronquée à l'ordre  $q+r$  est le polynôme  $\frac{(q+r+n)!}{(q+r)!n!}$ , dont le terme de plus de plus haut degré est  $\frac{r^n}{n!}$ .

**Remarque :** En pratique, on a en général :

$$\begin{aligned} \dim(M_{q+1})^{i-1} - \dim(M_{q+1})^i &\leq \dim(M_q)^{i-1} \\ \dim M_{q+1} &\leq \sum_{i=1}^n \dim(M_q)^{i-1} \end{aligned}$$

Soit  $\dim M_{q+1} \leq \alpha_q^1 + \dots + i\alpha_q^i + \dots + n\alpha_q^n$  et l'égalité n'a donc lieu que si et seulement si  $M_q$  est involutif.

**Remarque :** En pratique encore, le défaut d'involution peut provenir d'un mauvais système de coordonnées ou d'une propriété intrinsèque, l'un des groupes de cohomologie devenant non nul.

**Exemple :** Reprenons l'exemple de Janet:

$$M_2 \begin{cases} v_{33} - x^2 v_{11} & = 0 \\ v_{22} & = 0 \end{cases}$$

$M_2$  n'est pas involutif puisqu'il n'est pas 2-acyclique car  $\dim H_2^2(M_2) = 1$ .

Par contre, nous allons montrer que  $M_3$  est involutif dans le système de coordonnées choisi:

$$M_3 = (M_3)^0 \begin{cases} v_{333} - x^2 v_{113} & = 0 \\ v_{233} - x^2 v_{112} & = 0 \\ v_{223} & = 0 \\ v_{222} & = 0 \\ v_{133} - x^2 v_{111} & = 0 \\ v_{122} & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{classe3} & \{v_{333}\} \\
\text{classe2} & \{v_{222}, v_{223}, v_{233}\} \\
\text{classe1} & \{v_{111}, v_{112}, v_{113}, v_{122}, v_{123}, v_{133}\}
\end{aligned}$$

$$(M_3)^1 \begin{cases} v_{333} = 0 \\ v_{233} = 0 \\ v_{223} = 0 \\ v_{222} = 0 \end{cases} \quad \dim(M_3)^1 = 0$$

$$(M_3)^2 \{ v_{333} = 0 \quad \dim(M_3)^2 = 0, \quad \dim(M_3)^3 = 0$$

D'où  $\alpha_3^1 = 4$ ,  $\alpha_3^2 = 0$ ,  $\alpha_3^3 = 0$ .

On vérifie bien que  $\dim M_4 = 4 = \alpha_3^1$  et par suite  $\dim M_q = 4$ ,  $\forall q \geq 2$ .

Effectuons l'échange des coordonnées  $(x^1, x^2) \rightarrow (x^2, x^1)$  on obtient:

$$\bar{M}_3 = (\bar{M}_3)^0 \begin{cases} v_{333} - x^1 v_{223} = 0 \\ v_{133} - x^1 v_{122} = 0 \\ v_{113} = 0 \\ v_{111} = 0 \\ v_{233} - x^1 v_{222} = 0 \\ v_{112} = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{M}_3)^1 \begin{cases} v_{333} - x^1 v_{223} = 0 \\ v_{233} - x^1 v_{222} = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{M}_3)^2 \{ v_{333} = 0$$

D'où

$$\bar{\alpha}_3^1 = 4 - 2 = 2, \bar{\alpha}_3^2 = 2 - 0 = 2, \bar{\alpha}_3^3 = 0 \text{ et } \bar{\alpha}_3^1 + 2\bar{\alpha}_3^2 + 3\bar{\alpha}_3^3 = 6 \geq 4$$

Le nouveau système de coordonnées n'est pas  $\delta$ -régulier et  $M_3$  n'est donc pas involutif dans ce système de coordonnées bien que l'on puisse dire que  $M_3$  est involutif au sens de la définition précédente.

Introduisons maintenant le tableau obtenu grâce à l'ordinateur:

Dérivées des inconnues											Dérivées des équations								
order	8	7	6	5	4	3	2	1	0	rank of system				T	N	N	O		
number	45	36	28	21	15	10	6	3	1					O	U	U	R		
total number	165	120	84	56	35	20	10	4	1					T	M	M	D		
rank of symbol	41	32	24	17	11	6	2	A	B					B	E				
	74		43																
	58																		
	103													2	2	0			
	79													8	6	1			
														20	12	2			
															39	40	20	3	
																66	70	30	4
															102	112	42	5	
	148-1=147														168	56	6		

FULL "PUZZLE"

		0	0	0					
	1	1	1	1					
6	6	7	8	9	10				
6	2	8	12	19	27	36	46		
2	8	20	39	66	102	148			

VANISHING DIFFERENCE TRIANGLE

Exemple : Revenons au système de Janet.

$$R_2 \begin{cases} y_{33} - x^2 y_{11} = u \\ y_{22} = v \end{cases}$$

$$M_2 \begin{cases} v_{33} - x^2 v_{11} = 0 \\ v_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{classe3} & \{v_{33}\} \quad \text{nombre1} \\ \text{classe2} & \{v_{22}, v_{23}\} \quad \text{nombre2} \\ \text{classe1} & \{v_{11}, v_{12}, v_{13}\} \quad \text{nombre3} \end{array} \right\} \text{total} = 6$$

$$\begin{aligned} \dim(M_2)^0 &= \dim(M_2) = (3+2+1) - 2 = 4 \\ \dim(M_2)^1 &= \dim \left( \begin{cases} v_{33} = 0 \\ v_{22} = 0 \end{cases} \right) = (2+1) - 2 = 1 \\ \dim(M_2)^2 &= \dim \left( \{v_{33} = 0\} \right) = 1 - 1 = 0 \\ \dim(M_2)^3 &= \dim(\text{zéro équations}) = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$



Donc on a:

$$\alpha_2^1 = 4 - 1 = 3, \alpha_2^2 = 1 - 0 = 1, \alpha_2^3 = 0 - 0 = 0$$

Ainsi

$$\dim M_3 = 4 < 3 + (2 \times 1) = 5$$

On ne peut conclure ainsi car l'involution dépend du système de coordonnées locales, mais nous avons vu que  $\dim H_2^2(M_2) = 1$ . Ce qui montre que  $M_2$  n'est pas involutif. Ce résultat intrinsèque montre qu'il ne peut y avoir de systèmes de coordonnées  $\delta$ -réguliers donnant lieu à l'involution.

Maintenant, avec  $M_3$ , on va construire les diagrammes commutatifs et exacts suivants:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & S_3 T^* \otimes E & \longrightarrow & T^* \otimes F_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_3 & \longrightarrow & J_3(E) & \longrightarrow & J_1(F_0) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_2 & \longrightarrow & J_2(E) & \longrightarrow & F_0 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Suivi du tableau des dimensions correspondantes:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 6 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 8 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 10 & \longrightarrow & 2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Ce dernier a été obtenu à l'aide des relations suivantes:

$$\dim S_q T^* = \frac{(q+n-1)!}{q!(n-1)!} = C_{q+n-1}^q \implies \dim S_3 T^* \otimes E = \frac{(3+3-1)!}{3!2!} \times 1 = \frac{20}{2} = 10$$

$$\dim \Lambda^q T^* = C_n^q, \dim J_q(E) = m \frac{(q+n)!}{q!n!} = m C_{q+n}^q \implies \begin{cases} \dim J_2(E) &= 1 \times \frac{5!}{2!3!} &= 10 \\ \dim J_3(E) &= 1 \times \frac{6!}{3!3!} &= 20 \\ \dim J_2(F_0) &= 2 \times \frac{(1+3)!}{3!} &= 8 \end{cases}$$

Puis on peut construire le tableau qui correspond à l'étape suivante:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & S_4 T^* \otimes E & \longrightarrow & S_2 T^* \otimes F_0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & R_4 & \longrightarrow & J_4(E) & \longrightarrow & J_2(F_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_3 & \longrightarrow & J_3(E) & \longrightarrow & J_1(F_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Avec le tableau des dimensions correspondant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 12 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 15 & \longrightarrow & 35 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & 12 & \longrightarrow & 20 & \longrightarrow & 8 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

L'impossibilité de boucher le diagramme avec des zéros est lié au défaut d'intégrabilité formelle  $R_3^{(1)} \neq R_3$  que nous avons déjà rencontré.

Passons à l'étape suivante:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & M_5 & \longrightarrow & S_5 T^* \otimes E & \longrightarrow & S_3 T^* \otimes F_0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 0 & \longrightarrow & R_5 & \longrightarrow & J_5(E) & \xrightarrow{\rho_3(\Phi)} & J_3(F_0) & \longrightarrow & Q_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & R_4 & \longrightarrow & J_4(E) & \longrightarrow & J_2(F_0) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & 
 \end{array}$$

Avec le tableau des dimensions correspondant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & 4 & & \longrightarrow & 21 & \longrightarrow & 20 & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow 0 \\
0 & \longrightarrow & 17 & & \longrightarrow & 56 & \longrightarrow & 40 & & \downarrow & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \longrightarrow & 0 & \\
0 & \longrightarrow & 15 & & \longrightarrow & 35 & \longrightarrow & 20 & & & \\
& & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
& & & & & 0 & & 0 & & & \\
& & & & & & & & & & 
\end{array}$$

obtenu grâce à un ordinateur en remarquant que  $\text{rang} \rho_r(\Phi) = \dim \text{im} \rho_r(\Phi)$ , avec  $\mathcal{Q}_r = \text{coker} \rho_r(\Phi)$ , on a ici par décompte des dimensions  $\dim \mathcal{Q}_3 = 1$  et on a donc une condition de compatibilité entre  $u$  et  $v$ .

Elle peut être obtenue ici directement par ordinateur (voir annexe) sous la forme:

$$v_{233} - x^2 v_{112} - 3v_{111} - u_{222} = 0$$

On peut, de manière similaire, construire des diagrammes analogues à tout ordre et calculer les dimensions des fibrés grâce au tableau obtenu par ordinateur. Nous nous occuperons maintenant de l'étude des propriétés des symboles.

**Remarque :** *En pratique*, pour vérifier l'involution, il est utile d'introduire en face des équations de chaque système un tableau classant les variables indépendantes en *multiplicatives* et *non-multiplicatives*. Pour cela on résoud en cascade les équations par rapport aux classes les plus hautes en adoptant l'ordre lexicographique sur  $(\mu, k)$  et on associe à une équation dont le  $v_\mu^k$  le plus haut est de classe  $i$ , les variables multiplicatives  $x^1, \dots, x^i$  et les variables non multiplicatives  $x^{i+1}, \dots, x^n$  représentées par des points.

Le symbole sera involutif si le prolongement peut se faire en utilisant seulement les variables multiplicatives.

**Exemple :**

1)  $M_3$  involutif?

$$M_3 \left\{ \begin{array}{ll} v_{333} - x^2 v_{113} = 0 & \boxed{\begin{array}{ccc} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \end{array}} \\ v_{233} - x^2 v_{112} = 0 & \\ v_{223} = 0 & \\ v_{222} = 0 & \\ v_{133} - x^2 v_{111} = 0 & \\ v_{122} = 0 & \end{array} \right. (\mathcal{P}_3)$$

$$\dim M_3 = 10 - 6 = 4.$$

On peut déduire du tableau  $(\mathcal{P}_3)$  que  $M_3$  est involutif car en prolongeant par rapport

aux  $3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 11$  variables multiplicatives le prolongement obtenu sera de dimension  $15 - 11 = 4$ ; c'est-à-dire coïncidera avec  $M_4$ , défini par les équations suivantes:

$$M_4 \left\{ \begin{array}{l} v_{3333} - (x^2)^2 v_{1111} = 0 \\ v_{2333} - x^2 v_{1123} = 0 \\ v_{2233} = 0 \\ v_{2223} = 0 \\ v_{2222} = 0 \\ v_{1333} - x^2 v_{1113} = 0 \\ v_{1233} - x^2 v_{1112} = 0 \\ v_{1223} = 0 \\ v_{1222} = 0 \\ v_{1133} - x^2 v_{1111} = 0 \\ v_{1122} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \end{array}} \quad (\mathcal{P}_4)$$

On obtient bien  $\dim M_4 = 15 - 11 = 4$ . Le tableau  $(\mathcal{P}_4)$  confirme alors que  $M_4$  est involutif et nous permet d'en déduire la dimension de  $M_5$ , soit  $\dim M_5 = 21$  (inconnues)  $- 17$  (équations)  $= 4$ .

On sait donc que  $M_3$  est involutif mais cependant la projection  $R_4 \rightarrow R_3$  n'est pas surjective, car on a une nouvelle équation d'ordre 3 apportée par  $R_4$ , c'est-à-dire  $y_{112} = 0$ . En accord avec la démonstration du corollaire 2, on repart à nouveau avec le système  $R_3^{(1)}$ , cette fois pour pouvoir appliquer le théorème avec  $q = 3$ .

**Étude du symbole  $M_3^{(1)}$ :**

Comme  $M_3$  est involutif  $\implies (R_3^{(1)}) + r = R_{3+r}^{(1)} \quad \forall r \geq 0$ , en particulier on a  $(R_3^{(1)}) + 1 = R_4^{(1)}$ .

On va donc étudier l'involutivité de  $M_3^{(1)}$  et comparer  $\pi_3^4(R_4^{(1)}) = R_3^{(2)}$  avec  $R_3^{(1)}$ .

D'après ce qui précède, on a:

$$R_4 \left\{ \begin{array}{l} R_3^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} y_{33} - x^2 y_{11} = 0 \\ y_{22} = 0 \\ y_{333} - x^2 y_{113} = 0 \\ y_{233} - y_{11} = 0 \\ y_{223} = 0 \\ y_{222} = 0 \\ y_{133} - x^2 y_{111} = 0 \\ y_{122} = 0 \\ y_{112} = 0 \end{array} \right. \\ y_{3333} - x^2 y_{1133} = 0 \\ y_{2333} - x^2 y_{1123} - y_{113} = 0 \\ y_{2233} = 0 \\ y_{2223} = 0 \\ y_{2222} = 0 \\ y_{1333} - x^2 y_{1113} = 0 \\ y_{1133} - x^2 y_{1111} = 0 \\ y_{1223} = 0 \\ y_{1222} = 0 \\ y_{1122} = 0 \end{array} \right.$$

$$\dim R_4 = 35 - 20 = 15$$

En projetant une fois  $R_4$ , on obtient  $R_3^{(1)}$  et son symbole  $M_3^{(1)}$ .

$$M_3^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} M_3 \left\{ \begin{array}{l} v_{333} - x^2 v_{113} = 0 \\ v_{233} = 0 \\ v_{223} = 0 \\ v_{222} = 0 \\ v_{133} - x^2 v_{111} = 0 \\ v_{122} = 0 \end{array} \right. \\ v_{112} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{ccc} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & \star \end{array} \\ \hline \end{array} \quad (\mathcal{P}_3^{(1)})$$

$$\dim M_3^{(1)} = 10 - 7 = 3$$

Dans ce tableau, le signe  $\star$  indique que  $M_4^{(1)} = \rho_1(M_3^{(1)})$  va être défini par une nouvelle équation d'ordre 4, soit  $v_{1123} = 0$ , qui n'est pas obtenue en prolongeant par rapport aux variables multiplicatives.

Le tableau  $(\mathcal{P}_3^{(1)})$  nous indique que  $M_3^{(1)}$  n'est pas involutif car son premier prolongement  $M_4^{(1)}$  aurait la dimension  $15 - 12 = 3 > \dim M_4^{(1)}$ .

En effet le prolongement  $(M_3^{(1)})_{+1}$  du symbole  $M_3^{(1)}$  de  $R_3^{(1)}$  est le symbole  $M_4^{(1)}$  du prolongement  $R_4^{(1)}$  de  $R_3^{(1)}$ .

$$M_4^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} v_{3333} - (x^2)^2 v_{1111} = 0 \\ v_{2333} = 0 \\ v_{2233} = 0 \\ v_{2223} = 0 \\ v_{2222} = 0 \\ v_{1333} - x^2 v_{1113} = 0 \\ v_{1233} = 0 \\ v_{1223} = 0 \\ v_{1222} = 0 \\ v_{1133} - x^2 v_{1111} = 0 \\ v_{1123} = 0 \\ v_{1122} = 0 \\ v_{1112} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{|l} x^1 & x^2 & x^3 \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & x^2 & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \\ x^1 & . & . \end{array} \cdot (\mathcal{P}_4^{(1)})$$

$$\dim M_4^{(1)} = 15 - 13 = 2$$

Le tableau  $(\mathcal{P}_4^{(1)})$  nous indique que  $M_4^{(1)}$  est involutif et donc ses prolongements sont aussi involutifs.

Utilisons alors l'égalité suivante:

$$(R_4^{(1)})_{+1} = ((R_{3+1})^{(1)})_{+1} = ((R_3^{(1)})_{+1})_{+1} = ((R_3^{(1)})_{+2}) = R_5^{(1)}$$

car  $M_3$  est involutif, et nous allons donc maintenant comparer  $\pi_4^5(R_5^{(1)}) = R_4^{(2)}$  avec  $R_4^{(1)}$ . D'un autre côté nous avons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow M_5 \longrightarrow R_5 \longrightarrow R_4^{(1)} \longrightarrow 0$$

et donc  $\dim R_4^{(1)} = \dim R_5 - \dim M_5 = (56 - 39) - 4 = 17 - 4 = 13$   
en utilisant le tableau obtenu par ordinateur.

De plus, on a la suite exacte:

$$0 \longrightarrow R_6^4 \longrightarrow R_6 \xrightarrow{\pi_4^6} R_4^{(2)} \longrightarrow 0$$

et le même tableau donne:  $\dim R_4^{(2)} = \dim R_6 - \dim R_6^4 = (84 - 66) - (28 + 21 - 43) = 18 - 6 = 12$

Ainsi  $R_4^{(2)}$  est défini par une équation de plus que  $R_4^{(1)}$ .

Un calcul sans difficulté (qui peut être fait sur ordinateur) montre que cette équation supplémentaire est  $y_{1111} = 0$ .

Nous allons donc, conformément aux règles du corollaire 2, repartir à nouveau avec  $R_4^{(2)}$ . Son symbole  $M_4^{(2)}$  est le suivant:

$$M_4^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} v_{3333} \\ v_{2333} \\ v_{2233} \\ v_{2223} \\ v_{2222} \\ v_{1333} - x^2 v_{1113} \\ v_{1233} \\ v_{1223} \\ v_{1222} \\ v_{1133} \\ v_{1123} \\ v_{1122} \\ v_{1112} \\ v_{1111} \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \boxed{\begin{array}{l} x^1 \quad x^2 \quad x^3 \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad x^2 \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad . \\ x^1 \quad . \quad \star \end{array}} (\mathcal{P}_4^{(2)})$$

où  $\star$  correspond à une nouvelle équation d'ordre 5:  $v_{11113} = 0$ , pour  $M_5^{(2)}$  que l'on peut obtenir en prolongeant seulement par rapport aux variables multiplicatives.

Le symbole  $M_4^{(2)}$  n'est donc pas involutif mais  $(M_4^{(2)})_{+1} = 0$  car il va compter  $20 + 1$  (nouvelle équation) = 21 équations pour 21 dérivées.

D'un autre côté, puisque  $M_4^{(1)}$  est involutif, on a:

$$(R_4^{(2)})_{+1} = ((R_4^{(1)})^{(1)})_{+1} = ((R_4^{(1)})_{+1})^{(1)} = (R_5^{(1)})^{(1)} = R_5^{(2)}$$

$$(R_5^{(2)})_{+1} = (R_4^{(2)})_{+2} = ((R_4^{(1)})^{(1)})_{+2} = ((R_4^{(1)})_{+2})^{(1)} = (R_6^{(1)})^{(1)} = R_6^{(2)}$$

On a donc  $M_5^{(2)} = (M_4^{(2)})_{+1} = 0$  et puisque  $R_5^{(2)}$  a un symbole nul donc trivialement involutif, on est amené à comparer  $\pi_5^6(R_6^{(2)}) = R_5^{(3)}$  avec  $R_5^{(2)}$ .

Le tableau obtenu par ordinateur nous donne:

$$\dim R_5^{(2)} = 18 - 6 = 12$$

d'après le diagramme commutatif et exact suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_7^5 & \longrightarrow & J_7^5(E) & \longrightarrow & 58 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_7 & \longrightarrow & J_7(E) & \longrightarrow & 102 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \pi_7^5 & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & R_5^{(2)} & \longrightarrow & J_5(E) & \longrightarrow & 44 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

en introduisant  $J_{q+r}^q(E) = \ker \pi_{q+r}^q$ .

De manière similaire, on a:

$$\dim R_5^{(3)} = \dim R_8 - \dim R_8^5 = \dim R_8 - (\dim J_8^5(E) - 103) = (165 - 147) - (28 + 36 + 45 - 103) = (165 - 147) - (109 - 103) = 18 - 6 = 12.$$

Ainsi  $R_5^{(2)} = R_5^{(3)}$  et  $R_5^{(2)}$  est donc formellement intégrable avec un symbole nul.

Nous avons donc démontré que l'espace des solutions de  $R_2$  est un espace vectoriel de dimension 12 sur les constantes, puisqu'il coïncide avec l'espace des solutions de  $R_5^{(2)}$  qui est un système involutif, de dimension 12, à symbole nul.

Nous allons maintenant utiliser ce résultat pour résoudre la seconde question concernant les conditions de compatibilité sur les seconds membres.

En effet, introduisons  $u$  et  $v$  comme seconds membres de  $R_2$  (à ne pas confondre avec les notations analogues pour l'espace tangent à une variété fibrée et les symboles), nous devons ajouter à  $R_5^{(2)}$  des seconds membres dépendant de  $u$  et  $v$  jusqu'à l'ordre  $7 - 2 = 5$ . Maintenant, comme  $R_5^{(2)}$  est involutif, les conditions de compatibilité pour ses seconds membres sont seulement d'ordre 1 d'après le critère qui nécessite qu'un seul prolongement.

Il en découle que les conditions de compatibilité pour  $R_2$  sont d'ordre 6 au plus, ce qui explique pourquoi le tableau obtenu par ordinateur s'arrête après 6 prolongements.

Introduisons les conoyaux  $\mathcal{Q}_r$  dans les suites exactes .

$$0 \longrightarrow R_{q+r} \longrightarrow J_{q+r}(E) \longrightarrow J_r(F) \longrightarrow \mathcal{Q}_r \longrightarrow 0$$

On obtient alors à partir du tableau:

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_2 = 0, \dim \mathcal{Q}_3 = 1, \dots, \dim \mathcal{Q}_5 = \dim J_2(\mathcal{Q}_3) = 10, \dim \mathcal{Q}_6 = \dim J_3(\mathcal{Q}_3) + 1 = 20 + 1 = 21$$

ce qui montre l'existence d'une condition de compatibilité d'ordre *effectif* 6 dont on doit tenir compte et qui pourrait être facilement obtenue explicitement par l'ordinateur.



## Partie II

# THEORIE DU CONTROLE AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Le but de cette partie est de donner les définitions permettant de généraliser les concepts de la théorie du contrôle classique (contrôlabilité, observabilité, poursuite de modèle, causalité) au cas des équations aux dérivées et parfois aussi de préciser certaines notions qui sont souvent confondues dans le cas des EDO linéaires.

L'outil utilisé ici est la géométrie différentielle et la théorie des jets.

Certains de ces résultats seront retrouvés grâce à l'algèbre différentielle qui leur donnera d'ailleurs un sens beaucoup plus précis. Chaque notion introduite sera illustrée par des exemples détaillés.

## II.1 SYSTEMES DE CONTROLE AUX EDP

**Définition II.1.1** *Un système de contrôle aux dérivées partielles est considéré comme une sous-variété  $\mathcal{R}_q \subset J(\mathcal{E} \times_X \mathcal{F})$  fibrée sur  $X$ , où  $X$  désigne l'espace des variables indépendantes (le temps, la position ...),  $\mathcal{E}$  représente les entrées ou les causes,  $\mathcal{F}$  les sorties ou les effets et l'indice  $q$  est l'ordre du système.*

**Définition II.1.2** *On appelle système résolvant pour l'entrée (la sortie) le système  $\mathcal{P}_{q+r} \subset J_{q+r}(\mathcal{E})$  ( $\mathcal{Q}_{q+r} \subset J_{q+r}(\mathcal{F})$ ) obtenu en éliminant la sortie (l'entrée). Ces systèmes sont aussi les projections de  $\mathcal{R}_{q+r}$  dans  $J_{q+r}(\mathcal{E})$  et  $J_{q+r}(\mathcal{F})$  obtenus grâce aux projections canoniques sur  $J_q(\mathcal{E})$  et  $J_q(\mathcal{F})$ .*

## II.2 CONTROLABILITE

Nous allons commencer par considérer les systèmes entrées/sorties  $(u, y)$  de la forme suivante:

$$\mathcal{R}_1 \quad \dot{y}^k = f^k(y) + \sum_{\alpha=1}^m g_{\alpha}^k(y) u^{\alpha} \quad k = 1, \dots, p$$

**Remarque :**

- D'après la définition d'une observable, on appelle ici *observable* toute fonction de  $y$ ,  $u$  et de leurs jets.
- Les jets d'ordre  $> 1$  de  $y$  n'apparaîtront pas car ils peuvent être aisément calculés à partir de  $\mathcal{R}_1$  par différentiations successives. Ainsi toute observable  $z$  pourra s'écrire  $z = h(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, y)$ .

**Définition II.2.1** • Soit  $\Delta$  la distribution involutive contenant les  $\{g_\alpha, \alpha = 1, \dots, m\}$  et invariante par les champs de vecteurs  $\{f, g_\alpha, \alpha = 1, \dots, m\}$  ([66]).

- Soit  $D$  la plus petite distribution involutive contenant  $\{f, g_\alpha, \alpha = 1, \dots, m\}$  ([34, 30]).

On notera que  $D = f + \Delta$ .

Nous allons montrer, contrairement aux travaux classiques déjà étudiés dans le chapitre I, comment seule la distribution  $\Delta$  intervient dans notre définition de la contrôlabilité ([52, 27]).

**Théorème II.2.2** •  $\text{rang} \Delta = n$  si et seulement s'il n'existe pas d'observable liée.

- Si  $\text{rang} \Delta = r < n$  alors il existe  $(n - r)$  observables liées, fonctionnellement indépendantes, solutions chacune d'E.D.O d'ordre au plus  $n - r$ .

**Démonstration :** Considérons le système  $\mathcal{R}_1$  et une observable  $z = h(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, y)$ .

On sait déjà que cette observable  $z$  ne dépend pas des jets de  $y$  mais seulement de  $y$ .

Prouvons d'abord, pour commencer, que l'existence d'une observable liée  $z = h(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, y)$  implique que "h" ne peut être dépendant de  $\dot{u} = \frac{\partial}{\partial t} u$ .

En fait, supposons que  $h$  dépend seulement de  $u$  et  $y$ . Alors

$$\dot{z} = \frac{\partial h}{\partial y^k} (f^k + g_\alpha^k u^\alpha) + \frac{\partial h}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha \implies \frac{\partial h}{\partial u^\alpha} = 0$$

autrement  $z$  ne peut pas être une observable liée par une équation EDO (cas particulier des EDP) de la forme  $\dot{z} = \varphi(z)$ .

Le même raisonnement, utilisé de façon inductive, permettrait alors de montrer que  $h$  ne contient pas les jets de  $u$ .

Soit  $z = h(y)$  une observable liée. On a maintenant:

$$\dot{z} = (\partial h / \partial y^k) f^k + (\partial h / \partial y^k) g_\alpha^k u^\alpha$$

et pour que  $z$  soit une observable liée, nous devons avoir  $g_\alpha^k \partial h / \partial y^k = 0 \quad \forall \alpha$ , autrement les jets de  $u$  peuvent apparaître dans  $\dot{z}$  et  $u$  ne pourra pas être éliminé entre  $z$  et  $\dot{z}$ , pour

pouvoir avoir une équation différentielle indépendante de  $u$ , de même que  $\dot{u}$  ne pourra être pas éliminé entre  $z, \dot{z}$  et  $\ddot{z}, \dots$ , etc .

Posons  $L_{g_\alpha} h = \sum_{k=1}^{k=p} g_\alpha^k \partial h / \partial y^k = 0 \quad \forall \alpha$ , on a  
 $\ddot{z} = (\partial^2 h / \partial y^k \partial y^l) f^k (f^l + g_\alpha^l u^\alpha) + (\partial h / \partial y^k) (\partial f^k / \partial y^l) (f^l + g_\alpha^l u^\alpha) = (\partial^2 h / \partial y^k \partial y^l) f^k f^l + (\partial h / \partial y^k) (\partial f^k / \partial y^l) f^l + [(\partial^2 h / \partial y^k \partial y^l) f^k g_\alpha^l + (\partial h / \partial y^k) (\partial f^k / \partial y^l) g_\alpha^l] u^\alpha$

et nous devons avoir avec des notations simplifiées:

$$\partial_{kl} h f^k g_\alpha^l + \partial_k h \partial_l f^k g_\alpha^l = 0.$$

Mais  $L_{g_\alpha} h = 0 \quad \forall \alpha \Rightarrow L_f(L_{g_\alpha} h) = 0, \forall \alpha$ , donc  $f^k g_\alpha^l \partial_{kl} h + f^k (\partial_k g_\alpha^l) \partial_k h = 0$ .  
 Alors, par différence, nous avons  $\partial_k h (\partial_l f^k g_\alpha^l - f^k \partial_k g_\alpha^l) = 0$  et nous pouvons écrire,  $L_{[f, g_\alpha]} h = 0$ .

Ainsi de suite ..., nous montrons que  $h$  doit être tué par les  $g_\alpha$  et leurs crochets avec  $f$ .  
 De façon symbolique avec  $z = h(y)$ , nous avons:

$$\dot{z} = L_f h + L_{g_\alpha} h u^\alpha = 0 \quad \forall \alpha \Rightarrow L_{g_\alpha} h = 0$$

$$\ddot{z} = L_f L_f h + L_{g_\alpha} L_f h u^\alpha = L_f L_f h + (L_f L_{g_\alpha} h - L_{[f, g_\alpha]} h) u^\alpha = L_f L_f h - L_{[f, g_\alpha]} h u^\alpha \Rightarrow L_{[f, g_\alpha]} h = 0, \dots$$

Donc  $z = h(y)$  doit être tué par la distribution  $\Delta = \{g_\alpha, [f, g_\alpha], \dots\}$ .

Si la distribution  $\Delta$  est de rang maximum, il ne peut exister d'observable liée autre qu'une constante.

Si par contre, on suppose  $\text{rang} \Delta = r < n$ , alors, dans ce cas, on a  $(n - r)$  invariants, d'après le théorème de Frobénius.

Dans ce cas, s'il existe une observable liée  $z$ , elle doit vérifier:

$$\begin{aligned} z &= h(y) &= a_0(y) \\ \dot{z} &= L_f h(y) &= a_1(y) \\ \ddot{z} &= L_f L_f h(y) &= a_2(y) \\ &\vdots & \end{aligned}$$

et ainsi de suite .

Nous pouvons voir que  $z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots$  sont tuées par les  $g_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, m$  et leurs crochets avec  $f$ , donc ce sont des observables liées.

En fait  $L_{g_\alpha} L_f h = L_f L_{g_\alpha} h + L_{[f, g_\alpha]} h = 0, \dots$ , et on peut dire que  $z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots$ , sont des invariants de  $\Delta$ . Mais la distribution  $\Delta$  a le rang  $r$  par hypothèse et ne peut admettre plus de  $n - r$  invariants, ce qui fait que  $z, \dots, z^{(n-r)}$  sont nécessairement liées par une EDO.  $\diamond$

Nous venons de montrer que la recherche des observables liées conduisait, au moins dans le cas classique (linéaire ou non-linéaire), à retrouver des critères cohérents de contrôlabilité (dite "forte").

Nous pouvons donc maintenant étendre cette définition aux systèmes EDP en posant:

**Définition II.2.3** *Un système de contrôle aux dérivées partielles sera dit contrôlable s'il n'existe pas d'observable liée.*

**Remarque :** A l'opposé, un système de contrôle sera dit *complètement incontrôlable* si toutes les observables sont liées.

En particulier, cela implique que l'on ne puisse se donner aucune des sorties de façon arbitraire, ce qui veut dire que, dans ce cas, le  $n^{\text{ième}}$  caractère est nul.

Il est extrêmement important dans la pratique de posséder un tel test car on verra dans le paragraphe consacré aux applications qu'il est très difficile de reconnaître intuitivement une telle propriété. Comme nous l'avons déjà indiqué, l'intégrabilité formelle jouera alors un rôle clef.

## II.3 CAUSALITE

### PRESENTATION:

Il existe un problème fondamental en théorie du contrôle qui est le suivant: étant donné un ensemble de variables qui sont les inconnues d'un système d'équations aux dérivées partielles, on cherche à savoir lesquelles de ces variables pourraient jouer le rôle d'entrée ou de sortie ?

Certaines réponses ont été apportées à ce problème, notamment dans le cas des équations différentielles ordinaires linéaires par J.C.Willems ([73]) et ensuite par J.Van der Shaft ([69, 70]), ainsi que Krener et récemment par M.Fliess ().

Dans le cadre de la théorie du contrôle classique, la définition la plus usuelle tirée de l'analyse fonctionnelle est la suivante:

**Définition II.3.1** *Un système est dit causal si la connaissance de l'entrée jusqu'à un instant donné et des conditions initiales sur la sortie suffit à déterminer la sortie jusqu'à cet instant.*

**Remarque :** Une définition n'est utile que si on peut la vérifier:

- Il existe un critère formel permettant de tester cette définition dans le cas des systèmes linéaires, basé sur la comparaison de l'ordre des dérivées respectives de la sortie et de l'entrée d'une part et d'autre part sur la relative indépendance des entrées entre elles.(J.C.Willems [74])(voir plus loin)
- On notera, comme on le verra par la suite, que les conditions de causalité sont liées à une forme adéquate des systèmes considérés.

Nous allons maintenant examiner certains exemples qui nous permettrons de clarifier la notion de causalité:

**Exemple :** Avec les notations classiques, une seule variable indépendante "t".

1. Soit le système  $\dot{y} + u = 0$ , c'est un système causal car l'ordre de la sortie est plus grand que celui de l'entrée.
2. Pour les mêmes raisons que plus haut, le système  $\dot{y} + \dot{u} = 0$  est aussi causal.
3. Par contre le système suivant  $\dot{y} + \ddot{u} = 0$  n'est pas causal.

**Remarque :**

1. Cependant, si on considère le premier exemple  $\dot{y} + u = 0$  et on choisit l'entrée dans une classe de fonctions, par exemple un signal sinusoïdal  $u = \sin(t)$ , par conséquent la relation  $\dot{u} = \cos(t)$  et donc  $\ddot{u} + u = 0$  ; on obtient donc le système suivant:

$$(I) \begin{cases} \dot{y} + u = 0 \\ \ddot{u} - u = 0 \end{cases} \implies (II) \begin{cases} \dot{y} + \ddot{u} = 0 \\ \ddot{u} - u = 0 \end{cases}$$

présenté sous la forme (I) le système est causal alors que sous la forme (II) il ne l'est plus, d'où l'importance de la présentation choisie.

2. Concrètement ce que l'on veut est la chose suivante:  
Une fois les entrées et les conditions initiales sur les sorties données, on veut pouvoir *intégrer* le système *sans avoir à dériver les entrées*.

Commençons par examiner la définition de Willems que l'on peut résumer comme suit:

**Définition II.3.2** On appelle variables externes, l'ensemble des inconnues vérifiant un système différentiel mixte.

Dans l'ensemble des variables externes, on va effectuer une partition en deux sous-ensembles.

- Le premier est constitué de variables  $u$  indépendantes ou libres, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune EDO (Ce choix peut évidemment être étendu tel quel à un système EDP).
- Le second est constitué de variables  $y$  telles que le système puisse être décrit sous la forme dite *résolue*:  $P(\partial_x)u = Q(\partial_x)y = 0$  où  $P$  et  $Q$  sont des opérateurs différentiels en  $\partial_x$ .

En utilisant la transformée de Laplace, on peut introduire l'indéterminée  $s$  et les matrices  $P(s)$ ,  $Q(s)$  à coefficients polynomiaux (éventuellement fonctions de  $x$ ). Le choix des sorties est alors conditionné par les relations suivantes:

$$\det Q(s) \neq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Q^{-1}(s)P(s) < \infty.$$

qui généralisent respectivement la condition de fini pour le système et la comparaison des ordres.

Contrairement à ce qui se passe pour les entrées, ces conditions ne peuvent être étendues ni au cas non-linéaire, ni au cas des EDP .

En fait nous allons voir que l'important est de restreindre les relations aux seules sous matrices contenant  $s$  avec une puissance égale à l'ordre du système. Dans ce cas, la condition  $\det Q(s)$  jointe à  $n = 1$  n'est autre qu'un cas particulier du théorème 6.7 de ([49]) que nous allons présenter dans la section suivante. Pour cela nous devons d'abord étendre au cas des EDP l'introduction des matrices à coefficients polynomiaux qui vient d'être faite pour le cas des EDO où  $\dim T^* = 1$ .

### II.3.1 VARIETE CARACTERISTIQUE

Soit  $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \longrightarrow F$  un opérateur différentiel linéaire.

**Définition II.3.3** Pour n'importe quel covecteur  $\chi = \xi_i dx^i \in T^*$ , nous définirons l'application:  $\sigma_\chi(\mathcal{D}) : E \longrightarrow F$  comme la composition de:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & S_q T^* \otimes E \xrightarrow{\sigma(\Phi)} F \\ (x, y^k) & \longrightarrow & (x, \chi_\mu y^k) \longrightarrow (x, A_k^{\tau\mu}(x) \chi_\mu y^k) \end{array}$$

$$\text{où } k = 1, \dots, \dim E ; \tau = 1, \dots, \dim F ; \chi_\mu = (\chi_1)^{\mu_1} \dots (\chi_n)^{\mu_n}$$

**Remarque :** En particulier si  $E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \xrightarrow{\mathcal{D}'} G$  est une suite différentielle, c'est-à-dire:

$$\mathcal{D}' \circ \mathcal{D} \equiv 0 \quad \text{alors} \quad \sigma_\chi(\mathcal{D}') \circ \sigma_\chi(\mathcal{D}) \equiv 0 \quad \forall \chi \in T^*$$

$$\text{et} \quad E \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D})} F \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}')} G \quad \text{est aussi une suite.}$$

**Définition II.3.4** Un covecteur non nul  $\chi \in T^*$  est dit "caractéristique" pour  $\mathcal{D}$  si  $\sigma_\chi(\mathcal{D})$  n'est pas injective.

**Définition II.3.5** Pour préciser cette définition, on dit qu'un opérateur est elliptique s'il n'a pas de covecteur caractéristique non nul réel.

**Exemple :**

1.  $\mathcal{D}\xi \equiv \partial_{11}\xi + \partial_{22}\xi$  est elliptique parce que  $(\chi_1)^2 + (\chi_2)^2 = 0$  n'a pas d'autres solutions réelles que  $\chi_1 = 0$  et  $\chi_2 = 0$ , mais cependant le covecteur  $(\chi_1, i\chi_1)$  est caractéristique pour  $\mathcal{D}$  car  $(\chi_1)^2 + (i\chi_1)^2 = (\chi_1)^2 - (\chi_1)^2 \equiv 0$

## 2. Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0.$$

$$\chi = \lambda dx + \mu dy \implies \det \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda^2 + \mu^2)$$

C'est donc un opérateur elliptique.

**Remarque :** Tout opérateur de *type fini* est elliptique car on doit résoudre  $\xi_\mu = 0$  pour  $|\mu|$  assez grand, ce qui n'est possible que si  $\xi = 0$ .

**Définition II.3.6** • Pour  $x \in X$ , l'ensemble des covecteurs caractéristiques dans  $\mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{C}^n$ ) est une variété algébrique  $V_x$  appelé "variété caractéristique" de  $\mathcal{D}$  en  $x$ .

- On appelle alors  $V = \bigcup_{x \in X} V_x$  la variété caractéristique de  $\mathcal{D}$  et on notera, par abus de langage :  $V \subseteq T^*$

**Définition II.3.7**  $\mathcal{D}$  est dit "sous-déterminé" (déterminé) si  $\forall x \in X, \exists \chi \in T_x^*$  tel que  $\sigma_\chi(\mathcal{D}) : E_x \longrightarrow F_x$  soit surjective (bijective). Autrement  $\mathcal{D}$  est dit "sur-déterminé".

**Remarque :** Le cas  $\mathcal{D}$  "sur-déterminé" comprend le cas où  $\sigma_x(\mathcal{D}) : E_x \longrightarrow E'_x$  est injective et non-surjective mais il ne correspond pas qu'à cela.

**Théorème II.3.8** (théorème 6.7 [49] précité) Si  $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \longrightarrow F$  est sous-déterminé ou déterminé, alors les morphismes  $\rho_r(\Phi) : J_{q+r}(E) \longrightarrow J_r(F)$  sont des épimorphismes  $\forall r \geq 0$  et  $\mathcal{D}$  est involutif (formellement intégrable à symbole involutif)

La suite de Janet est alors de la forme:  $0 \longrightarrow \Theta \longrightarrow E \xrightarrow{\mathcal{D}} F \longrightarrow 0$

**Démonstration :** La démonstration est technique et le théorème n'est donné ici que parce que la vérification d'une telle propriété peut se faire par calcul formel sur ordinateur.

Nous allons cependant esquisser les grandes lignes de la démonstration. Tout d'abord on montre que le symbole  $\sigma_r(\Phi) : S_{q+r}T^* \otimes E \longrightarrow S_rT^* \otimes F$  est surjectif,  $\forall r \geq 0$  et on déduit d'une chasse la surjectivité de  $\rho_r(\Phi)$ ,  $\forall r \geq 0$ , ainsi que l'intégrabilité formelle.  $\diamond$

**Théorème II.3.9** Un opérateur formellement intégrable est de type fini si et seulement si sa variété caractéristique est zéro.

$$\mathcal{D} \text{ type fini} \iff V = \bigcup_{x \in X} V_x, \quad V_x = (0, \dots, 0) \in T_x^*, \quad \forall x \in X.$$

**Exemple :**

1.  $\partial_i \xi_j + \partial_j \xi_i = 0$  (déformation nulle mécanique).

2. **contre exemple:**

Nous avons montré que l'exemple de Janet était de type fini sans être formellement intégrable. La détermination directe de la variété caractéristique donnerait les deux équations algébriques  $(\xi_3)^2 - x^2(\xi_1)^2 = 0$ , ce qui, à l'origine, entraînerait seulement  $\xi_2 = \xi_3 = 0$ .

Nous allons cependant montrer que l'étude de la variété caractéristique même si elle doit (et peut, grâce au calcul formel), être faite pour étudier les propriétés formelles d'un opérateur différentiel, n'est cependant pas spécifique de cet opérateur.

En effet si deux opérateurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont tels que  $\mathcal{D}' \circ \mathcal{D} \equiv 0$ , alors  $\sigma_x(\mathcal{D}') \circ \sigma_x(\mathcal{D}) \equiv 0$ . Donc si l'on veut résoudre  $\sigma_x(\mathcal{D}')\eta = 0$ , on remarque que tout  $\eta$  de la forme  $\eta = \sigma_x(\mathcal{D})\xi$  convient,  $\forall \chi \in T^*$ . Ainsi la variété caractéristique de  $\mathcal{D}'$  est tout  $T^*$ , ce qui donne une condition nécessaire (mais pas suffisante) pour qu'un opérateur décrive les conditions de compatibilité d'un autre.

C'est pour préciser ce point que l'on est amené à une autre définition dont l'usage sera important en algèbre différentielle.

Cette définition est donnée de façon à éviter la situation que l'on vient de décrire.

### II.3.2 VARIETE SYSTATIQUE

Nous allons maintenant associer à tout opérateur linéaire  $\mathcal{D} = \Phi \circ j_q : E \longrightarrow F$  une autre variété algébrique  $W$  qui jouera un rôle surtout quand  $\mathcal{D}$  est involutif.

Le rang de la matrice  $\sigma_x(\mathcal{D})$  en n'importe quel point  $x \in X$  est égal à  $m - \alpha_q^n(x)$ , excepté pour les covecteurs  $\chi \in T_x^*$  qui annulent tous les déterminants d'ordre  $m - \alpha_q^n(x)$  de cette matrice.

Nous poserons donc en  $x \in X$ :

$$\alpha_q^n(x) = \min_x \dim \ker \sigma_x(\mathcal{D})$$

**Définition II.3.10** • *Les covecteurs en  $x$  qui annulent tous les déterminants d'ordre  $m - \alpha_q^n(x)$  sont appelés "systatiques".*

- *L'ensemble des covecteurs systatiques en un point  $x \in X$  est une variété algébrique  $W_x$  et nous appellerons  $W = \bigcup_{x \in X} W_x$  la "variété systatique" de  $\mathcal{D}$ .*

**Remarque :**  $\alpha_q^n$  n'est effectivement le  $n^{\text{ième}}$  caractère que si  $\mathcal{D}$  est involutif, ce qui justifie la notation. Plus généralement, pour montrer que les caractères d'un symbole involutif ne dépendent pas de  $x$ , on se référera au théorème (2.29 [49] p 106). Dans la suite on ne fera pas apparaître le point  $x$ .

**Propriétés :**



1. Si  $\alpha_q^n = 0$  alors  $W = V \subset T^*$  parce que dans ce cas  $V$  et  $W$  sont définies par les mêmes équations polynomiales.
2. Si  $\alpha_q^n > 0$  alors  $W \subset V = T^*$  parce que  $\dim \ker \sigma_\chi(\mathcal{D}) \geq \alpha_q^n > 0$ ,  $\forall \chi \in T^*$ .

Dans tous les cas nous avons  $W \subseteq V$  et  $W \subset T^*$ . D'où l'importance de cette variété systatique  $W$ , surtout dans le cas  $\alpha_q^n > 0$ .

En particulier, on peut montrer:

**Théorème II.3.11** *Quand  $\mathcal{D}$  est involutif, la suite:*

$$0 \longrightarrow \text{Ker} \sigma_\chi(\mathcal{D}) \longrightarrow E \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D})} F_0 \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}_1)} F_1 \dots \dots \xrightarrow{\sigma_\chi(\mathcal{D}_n)} F_n \longrightarrow 0$$

*est exacte si et seulement si  $\chi \notin W$ .*

On voit donc l'importance de l'étude de  $W$ , liée en particulier à la recherche du caractère  $\alpha_q^n$  lorsque  $\mathcal{D}$  est involutif.

Nous verrons dans le chapitre III le lien existant entre cette notion géométrique et sa contrepartie algébrique.

Nous avons maintenant en main les outils nécessaires pour généraliser la définition de la causalité au cas des EDP. Pour cela, on remarque d'abord qu'il suffit de restreindre notre étude à la matrice caractéristique, à condition que le système soit formellement intégrable. (Cette condition n'étant pas connue par J.C.Willems ([74]), c'est la raison pour laquelle il a du considérer la matrice de transfert au lieu de son symbole).

Dans ce cas, on posera:

**Définition II.3.12** *Un système linéaire de contrôle aux dérivées partielles est dit causal si la restriction de la matrice caractéristique aux sorties est de rang maximum.*

**Remarque :** Cette définition peut s'étendre au cas non-linéaire, en considérant dans ce cas la partie du symbole qui permet le calcul du caractère d'ordre  $n$  dans un système de coordonnées  $\delta$ -régulier. (Voir plus loin le cas des équations d'Euler pour les fluides parfaits incompressibles.)

**Remarque :** Même si les entrées ne sont pas libres, chaque sortie doit vérifier au moins une EDP sur les entrées.

## II.4 POURSUITE DE MODELE EXACTE

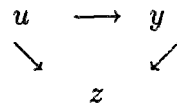
Etant donné un système de contrôle, on voudrait savoir s'il est possible de modifier sa trajectoire en le connectant avec un autre système afin d'obtenir une trajectoire similaire à celle d'un système modèle répondant à certaines conditions.

Si on adjoint le système du côté des entrées, on parle de poursuite de modèle exacte à gauche sinon de poursuite de modèle exacte à droite quand il s'agit de modifier les sorties.

Cependant on peut reformuler le problème de la façon suivante:

Etant donné que la relation entrée/sortie est définie par une correspondance différentielle (par exemple de la forme  $\mathcal{D}_1 y = \mathcal{D}_2 u$  ou  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  sont deux opérateurs différentiels dans le cas d'une correspondance linéaire), on cherche à résoudre les problèmes suivants:

Si on veut agir sur les sorties  $y$ , on se donne donc un nouveau système de contrôle entre  $y$  et  $z$ , c'est à dire ayant déjà une correspondance différentielle entre  $u$  et  $y$ , on se donne une nouvelle correspondance différentielle entre  $y$  et  $z$  conformément au diagramme suivant:



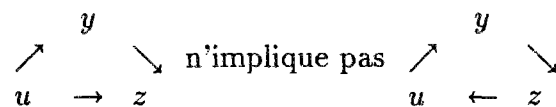
La correspondance résultant entre  $u$  et  $z$  s'obtient donc par élimination différentielle de  $y$ , c'est à dire par étude de l'intégrabilité formelle en  $y$  du système total ainsi formé entre  $(u, y, z)$ .

Il est à noter que ces problèmes sont délicats à résoudre et qu'il est difficile de formuler des critères permettant de spécifier ce genre de situations que l'on traite le plus souvent cas par cas, grâce à l'élimination différentielle (Problème de Bäcklund direct, voir [50]). En effet, il n'existe pas d'autre résultat aujourd'hui que la possibilité de construire un *arbre fini* des divers cas d'élimination possibles résultant des inégalités qui apparaissent dans l'étude des rangs (symboles ou systèmes). (On consultera à ce propos Seidenberg, Diop, ...)

De façon pratique étant donné deux flèches correspondant chacune à une correspondance différentielle, existe-t-il une troisième flèche rendant commutatif le diagramme précédent. Le problème est compliqué par le fait que composer deux correspondances n'a de sens que si les deux systèmes résolvants qu'elles déterminent pour l'inconnue à éliminer sont les mêmes. De toutes les façons, les exemples qui suivent montrent qu'un *diagramme de correspondance n'a pas de signification propre tant que l'on ne se donne pas un sens logique entrée  $\longrightarrow$  sortie sur chacune.*

Nous conjecturons que le rôle de la causalité est justement d'opposer une telle possibilité de manière à satisfaire à la transitivité par composition des flèches.

**Remarque :** Le rôle des flèches est essentiel. Ainsi:



**Exemple :**

$$\begin{array}{l} \dot{y} = u, \quad \dot{z} = y \longrightarrow \ddot{z} = u \\ \dot{y} = u, \quad \ddot{z} = u \longrightarrow \ddot{z} = \dot{y} \text{ et non } \dot{z} = y. \end{array}$$

**Remarque :** Il n'est pas aisé de formuler les expressions des correspondances du diagramme précédent en terme de systèmes mixtes (deux systèmes mixtes donnant lieu à un troisième). Encore une fois, ceci sera clarifié dans le chapitre (III).

**Exemple :** Poursuite de modèle à droite:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 & = u^1 \\ u^2 \dot{y}^2 - y^2 \dot{u}^2 & = (u^2)^2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{z}^1 & = y^1 \\ \dot{z}^2 & = y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\bar{z}}^1 & = u^1 \\ u^2 \dot{\bar{z}}^2 - \dot{z}^2 \dot{u}^2 & = (u^2)^2 \end{cases}$$

Le système de gauche peut être mis sous la forme standard entrée  $\rightarrow$  état  $\rightarrow$  sortie. Cependant l'élimination de  $(u^1, u^2)$  entre les systèmes de gauche et de droite fournit  $\dot{\bar{z}}^1 = \dot{y}^1$  (et non  $\dot{z}^1 = y^1$ ) et une équation d'ordre 3 entre  $y^2$  et  $z^2$  (au lieu de  $\dot{z}^2 = y^2$ ).

**Remarque :** Dans ce cas la définition déjà donnée de la causalité est transitive car la composition de deux opérateurs différentiels à symboles surjectifs (sous-déterminés) est encore un opérateur à symbole surjectif (sous-déterminé). Cette remarque montre encore une fois l'importance des matrices caractéristiques dans l'étude des systèmes formellement intégrables.

## II.5 EQUIVALENCE

Sous ce vocable, le but de ce paragraphe est d'introduire et de préciser la notion de transformation de système de contrôle. Ceci nous permet alors de considérer dans un cadre unique des problèmes tels que ceux du bouclage (statique /dynamique), de la linéarisation ou de l'invariance, dont les rapports restent encore assez imprécis en l'absence de formulation mathématique adéquate. En particulier nous verrons que l'aspect dynamique ne peut être vraiment bien interprété que dans le cadre de l'algèbre différentielle. Pour cette raison nous allons limiter notre étude au cas statique.

Notre propos n'est pas de dresser une revue des problèmes d'équivalence (voir Claude [4], Fliess, Moog [5, 35], Tchon[67], Burnestein [3],...), mais plutôt de présenter de façon critique un certain nombre d'exemples dans le cadre général développé dans le second chapitre.

Le problème général en théorie du contrôle classique, est de trouver une transformation  $(u, x) \rightarrow (v, y)$  permettant de passer d'un système quelconque  $\dot{x} = f(x, u)$  à un système donné ou modèle  $\dot{y} = g(y, v)$  ayant des propriétés fixées à l'avance : linéaire, bilinéaire, affine, découplé,... On parlera de linéarisation, découplage,...

En pratique on doit résoudre le système (écrit sans indices pour simplifier)

$$\frac{\partial y}{\partial x} f(x, u) + \frac{\partial y}{\partial u} \dot{u} = g(y(x, u), v(x, u))$$

Ainsi, une première conséquence est  $y = \varphi(x)$ , les autres conséquences différentielles dépendant de  $f(x, u)$  et  $g(y, v)$ .

Il est essentiel de noter, comme nous allons l'illustrer dans les exemples suivants, que le problème est d'abord d'obtenir un système EDP partir de systèmes EDO, puis de rechercher des solutions de ce système EDP. C'est cette constatation qui est au coeur de cette thèse et qui sera généralisée dans le second chapitre.

Les exemples suivants sont tirés des références citées ([4, 3, 35]) mais les notations ont été légèrement modifiées pour être cohérentes avec celles de ce travail.

**Exemple :**

$$(I) \begin{cases} \dot{x}^1 = 1 \\ \dot{x}^2 = u \\ \dot{x}^3 = x^1 u \end{cases} \longrightarrow (II) \begin{cases} \dot{y}^1 = 1 \\ \dot{y}^2 = y^3 \\ \dot{y}^3 = u \end{cases}$$

Ici on cherche à linéariser le système en changeant juste les sorties, donc la nouvelle sortie est fonction des anciennes sorties  $x$  et entrées  $u$ . D'où:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} u + \frac{\partial y^1}{\partial x^3} x^1 u &= 1 \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} x^1 u &= y^3 \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} + \frac{\partial y^3}{\partial x^2} u + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} x^1 u &= u \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} &= 1, & (1) & \quad \frac{\partial y^1}{\partial x^2} + \frac{\partial y^1}{\partial x^3} x^1 &= 0 & (2) \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} &= y^3, & (3) & \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} x^1 &= 0 & (4) \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} &= 0, & (5) & \quad \frac{\partial y^3}{\partial x^2} + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} x^1 &= 1 & (6) \end{aligned}$$

On tire en dérivant (2) par rapport à  $x^1$  et en utilisant (1) on a:  $\implies \frac{\partial y^1}{\partial x^3} = 0 \implies \frac{\partial y^1}{\partial x^2} = 0$   
 puis en dérivant (6) et en utilisant (5) on a:  $\implies \frac{\partial y^3}{\partial x^3} = 0 \implies \frac{\partial y^3}{\partial x^2} = 1 \implies y^2 = x^1 + cste$   
 Enfin on procède de même avec (3) et (4) et en utilisant les conséquences de (5) et (6)  
 on obtient:  $1 + 0x^1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} = 0 \implies \frac{\partial y^2}{\partial x^3} = -1$ ,  $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = x^1$

Une transformation serait donc:

$$y^1 = x^1, \quad y^2 = x^1 x^2 - x^3, \quad y^3 = x^2$$

On vérifie alors que :

$$\frac{\partial(y^1, y^2, y^3)}{\partial(x^1, x^2, x^3)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x^1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

**Remarque :** Dans cet exemple, on a transformé seulement les sorties en laissant fixes les entrées. En particulier, si les deux systèmes coïncident, le problème posé est celui de l'invariance d'un système de contrôle par rapport à des transformations de la sortie ne modifiant pas les entrées. Le problème sera étudié plus en détail dans le chapitre (IV).

**Exemple :[LINEARISATION]**

$$(I) \begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = u^2 \\ \dot{x}^3 = x^1 + u^3 \\ \dot{x}^4 = (x^1)^2 - 2x^2 + x^1 u^1 \end{cases} \implies (II) \begin{cases} \dot{y}^1 = y^2 \\ \dot{y}^2 = v^1 \\ \dot{y}^3 = v^2 \\ \dot{y}^4 = v^3 \end{cases}$$

La transformation utilisée est définie par les équations suivantes:

$$\begin{aligned} y^1 &= \frac{(x^1)^2}{2} - x^4, & y^2 &= -(x^1)^2 + 2x^2, & y^3 &= x^1, & y^4 &= x^3 \\ u^1 &= v^2, & u^2 &= \frac{1}{2}v^1 + x^1 v^2, & u^3 &= -x^1 + v^3 \end{aligned}$$

Le jacobien de cette transformation est:

$$\frac{\partial(v^1, v^2, v^3, y^1, y^2, y^3, y^4)}{\partial(u^1, u^2, u^3, x^1, x^2, x^3, x^4)} = \frac{\partial(v^1, v^2, v^3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \times \frac{\partial(y^1, y^2, y^3, y^4)}{\partial(x^1, x^2, x^3, x^4)} = 4 \neq 0$$

**Remarque :** Dans cet exemple, on a transformé l'entrée et la sortie par un difféomorphisme. L'existence d'une solution pour le système EDP définissant les transformations cherchées montre que ce système est compatible. Cependant l'étude complète d'un tel système, ne peut être faite à la main et nécessite l'usage du calcul formel sur ordinateur.

**Exemple :[LINEARISATION AVEC UNE ENTREE]**

L'intérêt de cet exemple est de fournir un cas non trivial d'étude de système EDP suffisamment simple pour être calculé "à la main" mais suffisamment complexe pour ne pas être trivial.

$$(I) \begin{cases} \dot{x}^1 = f^1(x) + g^1(x)u \\ \dot{x}^2 = f^2(x) + g^2(x)u \end{cases} \longrightarrow (II) \begin{cases} \dot{y}^1 = v \\ \dot{y}^2 = y^1 \end{cases}$$

Les transformations utilisées sont de la forme:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ v = \Psi(x) = \alpha(x)u + \beta(x) \end{cases}$$

avec  $\alpha(x) \cdot \frac{\partial(\varphi)}{\partial(x)} \neq 0$ .

En dérivant et en remplaçant dans le système, on obtient:

$$\begin{cases} \partial_1 \varphi^1(f^1 + g^1 u) + \partial_2 \varphi^1(f^2 + g^2 u) = \alpha u + \beta \\ \partial_1 \varphi^2(f^1 + g^1 u) + \partial_2 \varphi^2(f^2 + g^2 u) = \varphi^1 \end{cases}$$

Puis on en déduit:

$$\begin{cases} \partial_1 \varphi^1 f^1 + \partial_2 \varphi^1 f^2 = \beta, & (1) & \partial_1 \varphi^1 g^1 + \partial_2 \varphi^1 g^2 = \alpha & (2) \\ \partial_1 \varphi^2 f^1 + \partial_2 \varphi^2 f^2 = \varphi^1, & (3) & \partial_1 \varphi^2 g^1 + \partial_2 \varphi^2 g^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Posons  $\Delta = g^2 f^1 - f^2 g^1$  et calculons le jacobien de cette transformation:

$$\frac{\partial(y^1, y^2, v)}{\partial(x^1, x^2, u)} = \alpha \frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^1, x^2)} \neq 0$$

. On a donc  $g \neq 0$  sinon  $\alpha = 0$ ,  $\Delta \neq 0$  sinon  $\varphi^1 = 0$ . Posons alors  $\lambda \Delta = \varphi^1$  avec  $\lambda \neq 0$  car sinon  $\varphi^2 = cste$ , posons aussi  $\partial_1 \varphi^2 = \lambda g^2$ ,  $\partial_2 \varphi^2 = -\lambda g^1$

On en tire  $g^1 \partial_1 \lambda + g^2 \partial_2 \lambda + \lambda(\partial_1 g^1 + \partial_2 g^2) = 0$

$$\implies \alpha = \Delta(g^1 \partial_1 \lambda + g^2 \partial_2 \lambda) + \lambda(g^1 \partial_1 \Delta + g^2 \partial_2 \Delta) = \lambda[g^1 \partial_1 \Delta + g^2 \partial_2 \Delta - \Delta(\partial_1 g^1 + \partial_2 g^2)] = \lambda \det(g, [f, g])$$

$$\implies \det g, [f, g] \neq 0$$

Soit  $\varphi^2$  satisfaisant à (4), en utilisant (3) puis (1)(2) cela nous donne  $\alpha$  et  $\beta$ .

**Exemple :[LINEARISATION (Claude)]**

$$(I) \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + 2x^2 u^3 + 2x^2 u^1 + 2x^2 u^2 \\ \dot{x}^2 = x^3 + u^1 + u^2 \\ \dot{x}^3 = x^4 - (x^3)^2 - (x^5)^2 + u^1 \\ \dot{x}^4 = x^5 + 2x^3(x^4 - (x^3)^2 - (x^5)^2) + 2x^3 u^1 + 2x^5 u^2 \\ \dot{x}^5 = u^2 \end{cases} \longrightarrow (II) \begin{cases} \dot{y}^1 = y^2 \\ \dot{y}^2 = y^3 + u^1 + u^2 \\ \dot{y}^3 = y^4 + u^1 \\ \dot{y}^4 = y^5 \\ \dot{y}^5 = u^2 \end{cases}$$

On vérifie que le premier système, bien que non-linéaire, peut être observé grâce à  $y^1 = x^1 - (x^2)^2$  et  $y^3 = x^3$  car  $y^2 = \dot{y}^1, y^3 = \dot{y}^2 - u^1 - u^2, y^4 = \dot{y}^3 - u^1, y^5 = \dot{y}^4 = \dot{y}^5 - \dot{u}^1$  et peut donc être décrit de façon plus directe comme un système linéaire entrée/sortie

mais d'ordre supérieur (ordre 5 ici),  $\ddot{y}^1 - \ddot{u}^1 - \ddot{u}^2 - u^2 = 0$  sur lequel on pourrait faire directement les changements de variables.

La possibilité d'observer un système quelconque algébrique au moyen d'une seule sortie sera démontrée au chapitre (III).

**Exemple :**

$$(I) \begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u \\ \dot{x}^2 = x^1 + u \end{cases} \longrightarrow (II) \begin{cases} \dot{y}^1 = y^2 + u \\ \dot{y}^2 = y^1 + u \end{cases}$$

Un calcul sans difficulté mais fastidieux montre que les transformations qui laissent invariante le système sont de la forme:

$$\begin{cases} y^1 = x^1 + \lambda(x^1 - x^2) + \mu/(x^1 - x^2) \\ y^2 = x^2 - \lambda(x^1 - x^2) + \mu/(x^1 - x^2) \end{cases} \quad \lambda, \mu = \text{constante}$$

Cependant avec  $x = x^1$  et  $y = y^1$ , on obtient  $x^2 = \dot{x}^1 - u$ ,  $y^2 = \dot{y}^1 - u$  et on peut étudier l'invariance du système:

$$(I) \{ \ddot{x} - x - u - \dot{u} = 0 \longrightarrow (II) \{ \ddot{y} - y - u - \dot{u} = 0$$

Avec  $y = \varphi(x)$  on obtient:

$$\partial_x \varphi(x + u + \dot{u}) + \partial_{xx} \varphi(\dot{x})^2 = \varphi + u + \dot{u}$$

Décomposons sur la base  $1, u + \dot{u}, \dot{x}$ , on obtient:

$$x \partial_x \varphi = \varphi, \quad \partial_x \varphi = 1, \quad \partial_{xx} \varphi = 0 \implies y = x$$

**Remarque :** L'étude de l'équivalence dépend donc en général de la représentation entrée/sortie choisie.

Dans cette partie, nous allons appliquer les notions que nous avons développées à des exemples de la physique.

## II.6 TOURBILLONS DE BENARD:

Ici on étudie le problème des cellules de convections stationnaires de Bénard, où les cellules de convections apparaissent dans un fluide entre deux plateaux horizontaux à des températures différentes. (voir Landau et Lifschitz, Hydrodynamique [41], [1]).

Le phénomène est étudié comme suit: les trois variables indépendantes sont les coordonnées cartésiennes  $(x^1, x^2, x^3)$  et les cinq variables dépendantes ou inconnues sont la (perturbation) de la température  $\theta$ , la (perturbation) de la pression  $\pi$  et la vitesse  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ . Les 5 inconnues sont reliées par 5 équations aux dérivées partielles, qui, après linéarisation se présentent sous la forme vectorielle suivante, où l'on pose

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} & = 0 \quad (\text{Conservation de la masse.}) \\ \Delta \vec{v} - \theta \vec{g} - \vec{\nabla} \pi & = 0 \quad (\text{Equations de Navier-Stokes.}) \\ \Delta \theta - \vec{g} \cdot \vec{v} & = 0 \quad (\text{Equation de la chaleur.}) \end{cases}$$

Dans ce cas, le système résolvant pour la température, considérée comme une entrée unique, peut être obtenue par des manipulations délicates d'analyse vectorielle:

1. Elimination de  $\pi$ , en prenant le rotationnel des équations de Navier-Stokes.

$$\Rightarrow \Delta(\vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + (\vec{g} \wedge \vec{\nabla})\theta = 0.$$

2. Elimination de  $\vec{v}$ , en prenant le rotationnel de la dernière équation obtenue et la condition sur la divergence, on obtient:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta(\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{v}) + \vec{\nabla} \wedge ((\vec{g} \wedge \vec{\nabla})\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \Delta \vec{v} + (\vec{g} \cdot \vec{\nabla})(\vec{\nabla} \theta) - \vec{g} \Delta \theta &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \Delta \Delta \theta + ((\vec{g} \cdot \vec{\nabla})(\vec{g} \cdot \vec{\nabla})\theta) - g^2 \Delta \theta &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \Delta \Delta \theta - g^2(\partial_{11} + \partial_{22})\theta &= 0 \end{aligned}$$

La dernière équation, nous montre que la (perturbation de) température ne peut être donnée arbitrairement. Un calcul semblable mais encore plus compliqué, permettrait de même de trouver les équations:  $\Delta \Delta \Delta \Delta \pi - g^2(\partial_{11} + \partial_{22})\Delta \pi = 0$  pour la pression  $\pi$  et  $\Delta(\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) = 0$  nous donne  $\Delta \Delta \Delta \Delta v^i - g^2(\partial_{11} + \partial_{22})\Delta v^i = 0$  pour  $i = 1, 2$  enfin  $\Delta \Delta \Delta v^3 - g^2(\partial_{11} + \partial_{22})v^3 = 0$ .

Ce qui explique pourquoi certains auteurs ont utilisé l'entrée unique  $v^3$  au lieu de  $\theta$ . Cela nous amène à nous poser deux questions importantes pour les applications:



1. Nous avons vu qu'il est très difficile d'étudier des équations non-linéaires et que nous devons souvent les linéariser. Alors on peut se poser le problème de la définition de la linéarisation et des liens existants dans les opérations formelles (comme la différentiation, les prolongements, les éliminations, et les projections ...), dans les cas non-linéaires.

La réponse est donnée par le résultat suivant ([49, 50]) qui généralise la relation  $\delta\dot{q} = \widehat{\delta}q$ , bien connue par les physiciens, existant dans le calcul variationnel de la mécanique analytique:

**Proposition II.6.1** *Il existe un isomorphisme  $V(J_q(\mathcal{E})) \simeq J_q(V(\mathcal{E}))$ .*

En effet, si on se donne  $y = f(x)$  solution du système non-linéaire  $\mathcal{R}_q \subset J_q(\mathcal{E})$ . On peut considérer l'inclusion induite  $V(\mathcal{R}_q) \subset V(J_q(\mathcal{E}))$ . Alors une solution

$$f : X \longrightarrow \mathcal{E} : x \longrightarrow (x, f(x))$$

est telle que

$$j_q(f) : X \longrightarrow J_q(\mathcal{E}) : x \longrightarrow (x, \partial_\mu f^k)$$

admet la restriction  $j_q(f) : X \longrightarrow \mathcal{R}_q$  et on peut définir  $j_q(f)^{-1}(V(\mathcal{R}_q))$  comme le sous-ensemble dans le produit  $X \times (V(\mathcal{R}_q))$  ayant pour projection  $x \in X$  et  $j_q(f)(x) \in \mathcal{R}_q$ .

Cela nous montre que c'est un système linéaire d'EDP sur  $f^{-1}(V(\mathcal{E}))$  qui est la linéarisation propre aux physiciens. On déduit de la proposition précédente qu'un système et sa version linéarisée ont les mêmes propriétés formelles, ce qui n'est pas tout à fait évident à première vue.

2. Nous avons vu que la température à elle seule doit satisfaire au moins une EDP (et exactement une dans ce cas). Cette même propriété était valable aussi pour les autres inconnues.

Mais il serait très difficile d'étendre ce type de calcul à des observables quelconques (même linéaires)

On peut alors se demander s'il est possible de savoir que toutes les observables sont liées par un critère qui ne nécessite pas l'obtention des EDP vérifiées par chacune des inconnues, puisque de telles équations sont déjà difficiles à obtenir par usage du calcul vectoriel. Après avoir donné ce critère nous donnerons d'autres exemples où l'approche tensorielle n'est pas possible.

Pour répondre à une partie de cette dernière question, revenons un peu à la définition de la matrice caractéristique  $A$  d'un opérateur de la façon suivante: Pour tout  $\chi \in T^*$ , covecteur sur  $X$ , on peut considérer la matrice caractéristique à valeur polynômiale  $A = (A_k^\tau)$  où

$$A_k^\tau \equiv \frac{\partial \Phi^\tau}{\partial y_\mu^k}(x, y_q) \chi^\mu \quad |\mu| = q$$

avec  $\chi^\mu = (\chi_1)^{\mu_1} \cdots (\chi_n)^{\mu_n}$  et  $\chi = \chi_1 dx^1 + \cdots + \chi_n dx^n$

Nous avons défini le  $n^{\text{ème}}$  caractère  $\alpha_q^n$  d'ordre  $q$  comme étant exactement:

$$\alpha_q^n = \min_{x \in T} \dim \ker A$$

dans le cas présent on a le système d'ordre 2:

$$\begin{cases} v_1^1 + v_2^2 + v_3^3 & = 0 \\ v_{11}^1 + v_{22}^1 + v_{33}^1 - \pi_1 & = 0 \\ v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2 - \pi_2 & = 0 \\ v_{11}^3 + v_{22}^3 + v_{33}^3 + g\theta - \pi_3 & = 0 \\ \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} + gv^3 & = 0 \end{cases}$$

La matrice caractéristique de ce système est donnée par la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que le déterminant de cette matrice est nul et comme le système n'est pas formellement intégrable, on ne peut rien conclure sur les caractères. Il y a donc lieu de le compléter en un système formellement intégrable.

Considérons maintenant le même système augmenté de la nouvelle équation  $\vec{g} \cdot \vec{\nabla} \theta + \Delta \pi = 0$ , obtenue en prenant la divergence des équations de Navier-Stokes en tenant compte de la conservation de la masse.

Le nouveau système  $R_2^{(1)}$  est:

$$\begin{cases} v_1^1 + v_2^2 + v_3^3 & = 0 \\ v_{11}^1 + v_{12}^2 + v_{13}^3 & = 0 \\ v_{12}^1 + v_{22}^2 + v_{23}^3 & = 0 \\ v_{13}^1 + v_{23}^2 + v_{33}^3 & = 0 \\ v_{11}^1 + v_{22}^1 + v_{33}^1 - \pi_1 & = 0 \\ v_{11}^2 + v_{22}^2 + v_{33}^2 - \pi_2 & = 0 \\ v_{11}^3 + v_{22}^3 + v_{33}^3 + g\theta - \pi_3 & = 0 \\ \theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{33} + gv^3 & = 0 \\ g\theta_1 + \pi_{11} + \pi_{22} + \pi_{33} & = 0 \end{cases}$$

La matrice caractéristique de ce système est alors:

$$\begin{pmatrix} \chi_1^2 & \chi_1 \chi_2 & \chi_1 \chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_1 \chi_2 & \chi_2^2 & \chi_2 \chi_3 & 0 & 0 \\ \chi_3 \chi_1 & \chi_3 \chi_2 & \chi_3^2 & 0 & 0 \\ \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 \end{pmatrix}.$$

Elle contient donc la sous-matrice  $5 \times 5 [\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2] \times I_{5 \times 5}$ . Son rang est aussi maximum et  $\alpha_2^3 = \min_{\chi \in T^*} \dim \ker A = 0$  ce qui montre que toutes les inconnues  $(v^1, v^2, v^3, \pi, \theta)$  sont des observables contraintes et donc vérifient au moins une EDP à coefficients constants.

Ainsi toute observable vérifiant au moins une EDP. ( Une observable non-linéaire vérifie une EDP non-linéaire ).

**Remarque :** On pourra vérifier, en prolongeant grâce aux variables multiplicatives que le système  $R_2^{(1)}$  est involutif. Il n'est pas de type fini car la variété caractéristique est seulement définie par la condition  $(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + (\xi_3)^2 = 0$  et elle n'est donc pas nulle. (voir tableau ci dessous)

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_{33} + \pi_{22} + \pi_{11} - g\theta \\ \theta_{33} + \theta_{22} + \theta_{11} + gv^3 \\ v_{33}^3 + v_{22}^3 + v_{11}^3 + g\theta - \pi_3 \\ v_{33}^2 + v_{22}^2 + v_{11}^2 - \pi_2 \\ v_{33}^1 + v_{22}^1 + v_{11}^1 - \pi_1 \\ v_{23}^2 + v_{13}^1 - v_{22}^3 - v_{11}^3 - g\theta + \pi_3 \\ v_{23}^3 + v_{22}^2 + v_{12}^1 \\ v_{13}^3 + v_{12}^2 + v_{11}^1 \\ v_1^1 + v_2^2 + v_3^3 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & . \\ 1 & 2 & . \\ 1 & . & . \\ 1 & . & . \end{array}}$$

On a de plus

$$(M_2^{(1)})^0 = \left\{ \begin{array}{l} \pi_{33} + \pi_{22} + \pi_{11} \\ \theta_{33} + \theta_{22} + \theta_{11} \\ v_{33}^3 + v_{22}^3 + v_{11}^3 \\ v_{33}^2 + v_{22}^2 + v_{11}^2 \\ v_{33}^1 + v_{22}^1 + v_{11}^1 \\ v_{23}^2 + v_{13}^1 - v_{22}^3 - v_{11}^3 \\ v_{23}^3 + v_{22}^2 + v_{12}^1 \\ v_{13}^3 + v_{12}^2 + v_{11}^1 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$(M_2^{(1)})^1 = \left\{ \begin{array}{l} p_{i33} + \pi_{22} \\ \theta_{33} + \theta_{22} \\ v_{33}^3 + v_{22}^3 \\ v_{33}^2 + v_{22}^2 \\ v_{33}^1 + v_{22}^1 \\ v_{23}^2 - v_{22}^3 \\ v_{23}^3 + v_{22}^2 \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{array}$$

$$(M_2^{(1)})^2 = \begin{cases} p_{33}^i = 0 \\ \theta_{33} = 0 \\ v_{33}^3 = 0 \\ v_{33}^2 = 0 \\ v_{33}^1 = 0 \end{cases}$$

Donc on a les dimensions suivantes:

$$\dim(M_2^{(1)})^0 = \dim M_2^{(1)} = 30 - 8 = 22, \quad \dim(M_2^{(1)})^1 = 15 - 7 = 8, \quad \dim(M_2^{(1)})^2 = 5 - 5 = 0.$$

Les caractères sont alors :  $\alpha_2^1 = 14, \alpha_2^2 = 8, \alpha_2^3 = 0$ .

**Remarque :** On notera que pour les ingénieurs, la connaissance des EDP satisfaites par  $\theta$  ou  $v^3$  est essentielle pour l'étude de la stabilité de ce problème.

## II.6.1 CAS NONLINEAIRE: DYNAMIQUE DES CABLES

Nous allons étudier les équations trouvées lors de l'étude du problème du galop dans la vibration des câbles, qui est un phénomène très important pour les ingénieurs électriciens, mais encore non complètement résolu. Pour simplifier, nous allons considérer le cas des vibrations d'un câble inextensible.

Soit  $x^1 = s$  l'abscisse curviligne le long du câble,  $x^2 = t$  le temps et  $\omega = (\omega_{ij})$  étant la métrique euclidienne standard sur  $\mathbb{R}^n$ .

Les équations de vibrations pour un câble inextensible sont:

$$\begin{cases} \partial_{tt} y^k & = \partial_s(z \partial_s y^k) \\ \omega_{kl} \partial_s y^k \partial_s y^l & = 1 \end{cases}$$

où  $y^1, \dots, y^m$  décrivent la position et  $z$  est la tension.

Comme dans l'exemple précédent, nous avons:

**Proposition II.6.2** *Toute observable est contrainte car  $\alpha_2^2 = 0$ .*

**Démonstration :** Pour justifier notre affirmation, nous allons le prouver directement quand  $m = 1$  et

$$\partial_{tt} y = \partial_s(z \partial_s y), \text{ avec } \partial_s y = 1$$

On obtient  $\partial_{tt} y = \partial_s z$  et donc  $\partial_{ss} z = 0$ .

Dans le cas général, comme ce fut le cas pour les tourbillons de Bénard, *il est essentiel de noter que le système n'est pas formellement intégrable* et il est donc nécessaire de le prolonger.

On obtient, en utilisant la notation des jets, après différents prolongements des équations:

$$\begin{cases} \omega_{kl}(y_s^k y_{stt}^l + y_{st}^k y_{st}^l) & = 0 \\ \omega_{kl}(y_s^k y_{sss}^l + y_{ss}^k y_{ss}^l) & = 0 \end{cases}$$

De l'équation initiale :

$$y_{tt}^k = zy_{ss}^k + z_s y_s^k$$

on en déduit:

$$y_{stt}^k = zy_{sss}^k + 2z_s y_{ss}^k + z_{ss} y_s^k$$

et finalement l'équation du second ordre suivante:

$$z_{ss} + \omega_{kl}(y_{st}^k y_{st}^l - zy_{ss}^k y_{ss}^l) = 0$$

Le déterminant caractéristique d'ordre deux, dans ce cas non-linéaire, est :

$$\chi_1^2(\chi_2 - z\chi_1)^m$$

et le second caractère est donc zéro, même si ce système obtenu n'est pas encore formellement intégrable. Cependant, il est plus difficile d'exhiber au moins une EDP du système résolvant relatif à chacune des inconnues. On les donne ici pour le cas  $m = 2$  car pour  $m = 3$  le calcul est déjà impossible sans ordinateur. (L'existence de telles EDP est cependant assurée par la proposition précédente.)

**cas  $m = 2$ :**

Posons:

$$y_s^1 = \cos\theta$$

$$y_s^2 = \sin\theta$$

Nous obtenons:

$$\begin{cases} \theta_{tt} - z\theta_{ss} - 2z_s\theta_s & = 0 \\ z_{ss} + (\theta_t)^2 - z(\theta_s)^2 & = 0 \end{cases}$$

on peut vérifier que le second caractère de ce système pour  $(\theta, z)$  demeure zéro.

Un tel système linéaire et non homogène en  $z$  avec des dérivées seulement par rapport à  $s$ , peut être transformé en un autre formellement intégrable grâce à l'algorithme déjà développé. Cherchons maintenant les équations vérifiées par  $\theta$  et  $z$  séparément c'est-à-dire les systèmes résolvants pour  $\theta$  et  $z$ . Dans le cas de  $\theta$  cela revient aussi à rechercher les conditions de compatibilité en  $\theta$ , du système en  $z$ , (pour plus de détails se reporter au dernier chapitre).

Posons:

$$\alpha = 2(\theta_s)^2[(\theta_{sss}/\theta_s) - \frac{3}{2}(\theta_{ss}/\theta_s)^2 + 2(\theta_s)^2]$$

En dérivant la première EDP du système par rapport à  $s$  et en utilisant la seconde, nous avons:

$$\alpha z = 2\theta_s\theta_{stt} - 3\theta_{ss}\theta_{tt} + 4(\theta_s\theta_t)^2$$

et

$$\alpha z_s = \theta_{tt}\theta_{sss} - \theta_{ss}\theta_{stt} + 2(\theta_s^3)\theta_{tt} - 2\theta_s(\theta_t)^2\theta_{ss}$$

L'élimination différentielle de  $z$  dans ces dernières équations nous donne finalement une équation d'ordre quatre en  $\theta$  qui est invariante par  $\theta \rightarrow -\theta$  et détermine une EDP d'ordre 5 au moins pour chaque  $y^k$ ,  $k = 1, 2$ .

Le système résolvant en  $z$  est plus difficile à étudier car le système initial en  $\theta$  est formé de polynômes différentiels. Dérivant la seconde EDP par rapport à  $s$  et  $t$  nous obtenons 3 EDP de la forme  $\theta_{tt} = \dots, \theta_{st} = \dots, \theta_{ss} = \dots$ . Parmi les dérivées croisées que l'on doit calculer pour vérifier l'intégrabilité formelle, l'une nous conduit à une identité à zéro alors que l'autre conduit à une seconde équation algébrique entre  $\theta_s$  et  $\theta_t$ . Grâce à une nouvelle dérivation et élimination linéaire des jets d'ordre 2, nous obtenons une troisième équation algébrique entre  $\theta_s$  et  $\theta_t$ . Un calcul fastidieux du résultant nous donnera finalement une EDP d'ordre 5 en  $z$ , résultat non-évident à première vue pour un mécanicien.  $\diamond$

## II.6.2 ELECTROMAGNETISME

Nous allons considérer ici les équations de Maxwell.

Les équations de Maxwell relient le champ électrique  $\vec{E}(x, t)$ , le champ magnétique  $\vec{B}(x, t)$ , l'induction électrique  $\vec{D}(x, t)$ , l'induction magnétique  $\vec{H}(x, t)$ , la densité du courant électrique  $\vec{j}(x, t)$  et la densité de charge  $\rho(x, t)$ . Les variables indépendantes sont  $(x, t) \in \mathbf{R}^4$  ou  $x$  représente les coordonnées de l'espace et  $t$  le temps. Les entrées sont  $(\vec{j}, \rho)$  et les sorties sont  $(\vec{E}, \vec{B})$  et  $(\vec{D}, \vec{H})$  reliées par des lois de comportement convenables.

Les équations de Maxwell dans un milieu quelconque sont:

$$\begin{cases} (1) \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ (2) \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho \end{cases}$$

Dans l'électronique on pose  $\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ .

Des équations (2) on en déduit que  $\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Des équations (1) on déduit l'existence du quadripotentiel  $(\vec{A}, V)$  tel que  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . En les portant dans (2) on obtient des équations avec moins de sorties mais d'ordre deux.

## II.6.3 EQUATION D'EULER

On considère maintenant les équations d'Euler d'un fluide non visqueux incompressible. Les équations d'un tel fluide ont été établies par L.Landau-E.Lifschitz [?] et s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \varrho + \vec{\nabla} p = 0 & \boxed{3 \text{ équations}} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 & \boxed{1 \text{ équation}} \end{cases}$$

où pour  $n = 4$ ,  $(x, t) = (x^1, x^2, x^3, t)$  représentant les variables indépendantes est un point de l'espace-temps  $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}$ , les variables dépendantes ou les inconnues étant représentées elles par  $v(x, t) = (v^1(x, t), v^2(x, t), v^3(x, t))$  pour la vitesse et  $p$  pour la pression.

Commençons par examiner le cas  $n = 2$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \implies \boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0}$$

On remarque ici que toutes les inconnues  $v$  et  $p$  satisfont chacune à au moins une EDP,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$  pour la vitesse et  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$  pour la pression. D'où la proposition suivante:

**Proposition II.6.3** *Toutes les observables sont contraintes et  $\alpha_1^4 = 0$ .*

**Démonstration :** La matrice caractéristique devient en posant  $x^4 = t$ :

$$\begin{pmatrix} \xi_4 + v^i \xi_i & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & \xi_4 + v^i X_i & 0 & \xi_2 \\ 0 & 0 & \xi_4 + v^i X_i & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix}$$

son déterminant caractéristique est  $-(\xi_4 + v^i X_i)^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$ . Il est donc non identiquement nul et donne  $\alpha_1^4$ .

On remarque cependant que le système de coordonnées  $(x^1, x^2, x^3, x^4)$  n'est pas  $\delta$ -régulier car  $(M_1)^3$  est défini par  $v_4^k$  pour  $k = 1, 2, 3$  ce qui donnerait un caractère d'indice 4 égal à 1. Un calcul simple montre que les caractères sont:

$$\alpha_1^1 = 4, \alpha_1^2 = 4, \alpha_1^3 = 4, \alpha_1^4 = 0$$

ce qui montre que le dernier caractère est nul alors que les précédents sont égaux à leur valeur maximum 4.

Le symbole  $M_1$  est involutif et on vérifie aisément que  $R_2 \longrightarrow R_1$  est surjectif ce qui montre que le système est involutif.  $\diamond$

Nous allons maintenant étudier séparément le cas  $n = 3$ .

Le système est de la forme:

$$\begin{cases} \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x^1} = 0 \\ \frac{\partial v^2}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^2}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + \frac{\partial v^2}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

En dérivant la deuxième équation par rapport à  $x^1$  et la première par rapport à  $x^2$ . Puis en soustrayant, on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\partial_1 v^2 - \partial_2 v^1) + v^1 \partial_{11} v^2 + v^2 \partial_{12} v^2 - v^1 \partial_{12} - v^2 \partial_{22} v^1 = 0 & (3) \\ \partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

Ce qu'on peut représenter sous la forme vectorielle suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{v} + \vec{v} \wedge \Delta \vec{v} = 0 \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Avec des notations légèrement simplifiées, on a par dérivation de l'équation (3) par rapport à  $x^2$ :

$$\partial_{t_{12}}v^2 - \partial_{t_{22}}v^1 + v^1\Lambda\partial_2v^2 - v^2\Lambda\partial_2v^1 + \partial_2v^1\Lambda v^2 - \partial_2v^2\Lambda v^1 = 0$$

Puis, en utilisant l'équation (4), on en déduit:

$$-\partial_{t_{11}}v^1 - \partial_{t_{22}}v^1 - v^1\Lambda\partial_1v^1 - v^2\Lambda\partial_1v^1 + \partial_2v^1\Lambda v^2 + \partial_1v^1\Lambda v^1 = 0$$

On en tire l'équation suivante:

$$(\partial_2v^1)\Lambda v^2 - (\Lambda\partial_2v^1)v^2 = A \quad (5)$$

Où  $A$  est une fonction de  $v^1$  et de ses dérivées. Puis en dérivant l'équation (5) et en utilisant l'égalité  $\partial_1v^1 = -\partial_2v^2$ , on aboutit à l'équation (6) suivante:

$$(\partial_{22}v^1)\Lambda v^2 - (\Lambda\partial_{22}v^1)v^2 = B$$

avec  $B$  étant aussi une fonction de  $v^1$  et de ses dérivées. En réunissant l'équation (5) et (6), on obtient le système suivant, dont les inconnues sont  $\Lambda v^2$  et  $v^2$ :

$$\begin{cases} (\partial_2v^1)\lambda v^2 - (\lambda\partial_2v^1)v^2 & = A \\ (\partial_{22}v^1)\lambda v^2 - (\lambda\partial_{22}v^1)v^2 & = B \end{cases}$$

En résolvant le système par rapport à  $\lambda v^2$  et  $v^2$ , on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} v^2 & = C \\ \lambda v^2 & = D \end{cases}$$

En remarquant que  $D$  et  $C$  sont aussi des fonctions de  $v^1$  et de ses dérivées. Enfin, l'équation  $\lambda C - D = 0$  nous donne une relation EDP vérifiée par l'inconnue  $v^1$ , qui doit être au moins d'ordre 6.

On pourrait faire de même avec  $v^2$ . On peut conclure donc que le système est complètement non-contrôlable ce qui est en accord avec la proposition précédente  $\alpha_1^4 = 0$ .





**CHAPITRE III**  
**APPROCHE ALGEBRIQUE**



# Partie I

## RAPPELS SUR CERTAINS OUTILS ALGEBRIQUES

### I.1 ANNEAUX ET CORPS

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques définitions et notations de l'algèbre commutative. Ces généralités sur les anneaux et les corps seront étendues ensuite au cas différentiel, le jeu étant alors d'essayer d'ajouter l'adjectif "différentiel" chaque fois que cela sera possible.

**Définition I.1.1** *Un anneau commutatif unitaire  $A$  est un ensemble non vide muni de deux lois de compositions  $+$  (l'addition) et  $\times$  (la multiplication) tel que:*

- i.  $(A, +)$  soit un groupe abélien.*
- ii.  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ ,  $\forall a, b, c \in A$  (associativité)*
- iii.  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  et  $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ ,  $\forall a, b, c \in A$  (distributivité)*
- iv.  $a \times b = b \times a$ ,  $\forall a, b \in A$  (commutativité).*
- v.  $\exists e \in A / e \times a = a \times e = a \forall a \in A$  (élément neutre).*

On ne considérera dans la suite que de tels anneaux et le signe  $\times$  sera omis ( $a \times b$  noté  $ab$ ).

**Exemple :**  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

**Définition I.1.2** *Un anneau  $A$  tel que:  $ab = 0 \implies a = 0$  ou  $b = 0$  est appelé anneau intègre.*

**Exemple :** Si  $A$  est un anneau, alors l'ensemble des polynômes (resp. des séries formelles) en l'indéterminé  $X$ , à coefficients dans  $A$ , forme un anneau noté  $A[X]$  (resp.  $A[[X]]$ ) pour les lois  $(+, \times)$ .

**Définition I.1.3** Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux. Une application  $f : A \longrightarrow B$  est appelée un homomorphisme d'anneaux, si

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(ab) &= f(a)f(b) \end{aligned} \quad \forall a, b \in A.$$

Un homomorphisme injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) est appelé monomorphisme (resp. épimorphisme, resp. isomorphisme) et on le représente par la suite  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$  (resp.  $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ , resp.  $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ ).

De façon générale, on peut construire la suite suivante:

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

ou  $\operatorname{coker} f = B/\operatorname{im} f$  et  $\ker f = \{x \in A, f(x) = 0\}$ . Dans cette suite  $\ker f$  est un sous-anneau de  $A$ , et plus particulièrement un idéal de  $A$ .

**Définition I.1.4** Un sous-ensemble  $I$ , d'un anneau  $A$  est appelé idéal si  $\forall a \in A$  et  $\forall b \in I$ ,  $ab \in I$  (ou  $AI \subset I$ ). Si les  $b_i$  sont des éléments donnés de  $A$ , l'ensemble des éléments de la forme  $a_1b_1 + \dots + a_nb_n$  ou  $a_i \in A$ , est un idéal noté  $(b_1, \dots, b_n)$ , on appelle générateurs de cet idéal les éléments  $b_1, \dots, b_n$ .

Il existe quelques classes d'idéaux qui nous seront utiles par la suite, nous allons donc les définir.

**Définition I.1.5** Un idéal  $I$  d'un anneau  $A$  est dit premier si  $\forall a, b \in A, ab \in I \implies a \in I$  ou  $b \in I$ .

**Exemple :** Le noyau de l'homomorphisme  $f : A \longrightarrow A'$  d'anneaux est un idéal premier  $I = \ker f$ .

**Définition I.1.6** On appelle racine d'un idéal  $I$  d'un anneau  $A$ , l'ensemble noté  $\sqrt{I}$ , défini par  $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbf{N}^*, a^n \in I\}$ .

**Remarque :**

- $I \subset \sqrt{I}$  et  $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$ .
- Les idéaux tels que  $\sqrt{I} = I$  sont dit *parfaits* ou *radiciels*, c'est d'ailleurs une classe d'idéaux qui jouera un rôle important en algèbre différentielle.

**Propriétés :**

- L'intersection d'idéaux parfaits est parfaite.

- Si  $I$  est contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers  $P_1 \cup \dots \cup P_n$  alors  $\exists i \in \{1, \dots, n\} | I \subset P_i$ .

**Définition I.1.7** Un anneau  $A$  est dit de type fini, s'il est engendré par une famille finie d'éléments  $a_i, i = 1, \dots, r$ .

**Remarque :** Si  $I$  est un idéal premier d'un anneau  $A$ , on peut définir l'anneau quotient  $A/I$  qui dans ce cas est intègre.

**Définition I.1.8** Un anneau  $A$  est noethérien, s'il satisfait aux conditions équivalentes suivantes:

1. Tout idéal  $I$  de  $A$  est de type fini.
2. Toute suite croissante  $(I_n)$  d'idéaux de  $A$  est stationnaire.

**Exemple :**

- Tout corps  $K$  est noethérien.
- L'anneau des polynômes  $K[X_1, \dots, X_n]$  avec un nombre fini d'indéterminées est noethérien si  $K$  est noethérien.
- Si  $A$  est noethérien, tout anneau quotient est noethérien.

Si  $P$  est un idéal premier de  $K[X_1, \dots, X_n]$ , on dénote par  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  son zéro générique, image de  $X$  dans l'épimorphisme d'évaluation:

$$\begin{array}{ccc} K[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & K[X_1, \dots, X_n]/P \longrightarrow 0 \\ X_i & \longrightarrow & \xi_i \end{array}$$

et on a donc  $K[\xi_1, \dots, \xi_n] = K[X_1, \dots, X_n]/P$ .

On peut alors construire son anneau de fraction  $K(\xi_1, \dots, \xi_n) = Q(K[X_1, \dots, X_n]/P)$ .

**Définition I.1.9** Un corps  $K$  est un anneau tel que  $\forall a, b \in K (b \neq 0) \implies a + b \in K, a - b \in K, ab \in K, a/b \in K$ .

Dans ce qui suit tous les corps considérés seront de caractéristique zéro, c'est-à-dire contiendront  $\mathbb{Q}$ .

## I.2 EXTENSIONS ALGEBRIQUES

Une extension de corps  $L/K$  est la donnée de deux corps avec  $K \subset L$ .

**Définition I.2.1** *Etant donné une extension de corps  $L/K$ , soit  $E$  un sous-ensemble de  $L$ .*

*On note  $K[E]$  (resp.  $K(E)$ ) le sous-anneau (resp. sous-corps) de  $L$  contenant  $K$  et  $E$ . Si  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ , on adoptera les notations simplifiées  $K[e_1, \dots, e_n]$  et  $K(e_1, \dots, e_n) = Q(K[e_1, \dots, e_n])$ .*

Ces notations sont justifiées par le fait que tout élément de  $K[e_1, \dots, e_n]$  (resp.  $K(e_1, \dots, e_n)$ ) est un polynôme (resp. une fraction rationnelle) en les  $e_i$ .

**Définition I.2.2** *Le degré d'une extension  $L/K$  est la dimension (finie ou infinie) de l'espace vectoriel  $L$  sur le corps  $K$ , noté  $|L/K|$ .*

**Proposition I.2.3** *Etant données deux extensions emboîtées  $K \subset L \subset M$  on a :*

$$|M/K| = |M/L| |L/K|.$$

**Définition I.2.4** *Un élément  $a$  de  $L$  est dit algébrique (resp. transcendant) sur  $K$  s'il existe (resp. s'il n'existe pas)  $P \in K[X]$ ,  $P \neq 0$  tel que  $P(a) = 0$ .*

**Corollaire I.2.5** *Si  $u$  et  $v$  sont algébriques sur  $K$ ,  $u + v$  et  $uv$  le sont aussi.*

**Exemple :** Une extension de la forme  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  est une extension algébrique car tout élément  $u \in L$  est algébrique sur  $K$ . Donc  $\text{trd} L/K = |L/K| = 0$ .

**Remarque :** Les nombres algébriques (resp. transcendants) sont des éléments algébriques (resp. transcendants) sur  $\mathbb{Q}$ .

**Exemple : [Nombres algébriques]**

Soient  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$ , alors il existe  $P_1, P_2 \in \mathbb{Q}(X)$ , tel que  $P_1(X) = X^2 - 2 = 0$  et  $P_2(X) = X^2 - 3 = 0$  tel que  $P_1(\sqrt{2}) = 0$  et  $P_2(\sqrt{3}) = 0$ .

On peut donc considérer les extensions algébriques  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  ainsi que  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  qui peut être générée par un seul élément  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  et on a  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . Plus généralement, on a :

**Théorème I.2.6** *Toute extension algébrique finie peut-être engendrée par un élément unique, appelé élément primitif.*

**Remarque :** Ici on considère  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  et non leurs développements  $1,414\dots$  ou  $1,732\dots$  ce sera aussi le cas pour pour les extensions différentielles.

**Exemple : [Nombres transcendants]**

Soient  $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$  (Liouville),  $e$  (Hermite),  $\pi$  (Lindermann). Ces nombres ne vérifient aucune équation algébrique à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  et donnent lieu à des extensions transcendants  $L = \mathbb{Q}(\pi)$ ,  $L = \mathbb{Q}(\pi, e)$ .

On notera que l'on considère l'élément  $\pi$  et non le développement  $\pi = 3,1416\dots$ .

### I.2.1 CLOTURE ALGÈBRIQUE

L'ensemble des éléments algébriques sur  $K$  forme un corps, appelé *clôture algébrique* de  $K$  et noté  $\bar{K}$ .

**Exemple :**  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{C}$ , d'après le théorème fondamental de l'algèbre.

## I.3 ALGÈBRE DIFFÉRENTIELLE

Le but de ce paragraphe est de présenter les notions de base de l'algèbre différentielle nécessaires pour les applications en les illustrant. Nous insisterons sur l'aspect "dérivées partielles" et les notations seront choisies de manière à rendre évidente le lien existant entre l'algèbre différentielle et la géométrie différentielle.

**Définition I.3.1** Soit  $A$  un anneau commutatif. Une dérivation de  $A$  est une application "d" de  $A$  dans lui-même satisfaisant:

$$\forall a, b \in A \quad \boxed{\begin{array}{l} d(a+b) = da + db \\ d(ab) = (da)b + a(db) \end{array}}$$

Et si  $a \in A$  a un inverse  $a^{-1}$  dans  $A$ , alors  $d(a^{-1}) = -a^{-1}daa^{-1} = -a^{-2}da$ .

**Remarque :** Toute dérivation  $d$  définie sur un anneau intègre s'étend d'une manière unique à son corps quotient de la façon suivante:  $d(a/b) = (bda - adb)/b^2$ .

**Définition I.3.2** Un anneau différentiel  $A$  est un anneau commutatif muni d'un ensemble fini  $\mathcal{D} = \{d_i, i = 1, \dots, n\}$  de dérivations qui commutent:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \forall a \in A \quad d_i d_j(a) = d_j d_i(a)$$

**Définition I.3.3** Un corps (resp. un idéal) différentiel est donc un corps  $K$  (resp. un idéal  $I$ ) muni d'un ensemble de dérivations  $\mathcal{D} = \{d_i, i = 1, \dots, n\}$ , tel que:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \text{alors} \quad \forall a \in K \implies d_i a \in K \quad (\text{resp. } \forall a \in I \implies d_i a \in I).$$

**Remarque :**

1. Dans le cas  $n = 1$ , on parle de corps différentiel ordinaire. C'est le cas qui va correspondre aux cas des équations différentielles ordinaires et donc au cas de la théorie du contrôle classique.



2. Le cas  $n > 1$ , correspondant aux EDP et donc à la théorie du contrôle aux dérivées partielles.
3. Tout corps ordinaire est un corps différentiel pour  $\mathcal{D} = \{0\}$ .
4. Un cas particulier est celui des ODE et PDE linéaires, qui correspond à la notion de modules différentiels et d'espaces différentiels. (voir Fließ)

**Définition I.3.4** *Un module différentiel (resp. un espace vectoriel différentiel) est un module  $M$  (resp. espace vectoriel  $E$ ) sur un anneau différentiel  $(A, \partial)$  (resp. corps différentiel  $(K, \partial)$ ), muni de dérivations  $d$  telle que*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in M (\forall x, y \in E) \quad d(x + y) &= dx + dy \\ \forall a \in A (\forall a \in K) \quad \forall x \in M (\forall x \in E) \quad d(ax) &= (\partial a)x + adx \end{aligned}$$

### I.3.1 MORPHISMES DIFFERENTIELS

**Définition I.3.5** *Un morphisme d'anneaux différentiels  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, tel que :*

$$\forall i = 1, \dots, n, \forall x \in A, \varphi(d_i x) = d_i \varphi(x).$$

**Proposition I.3.6** *Le noyau d'un morphisme d'anneaux différentiels est un idéal différentiel.*

### I.3.2 POLYNOMES DIFFERENTIELS

On dénote par  $K\{y\} = \lim_{q \rightarrow \infty} K[y_q]$  des polynômes différentiels en  $y$  muni des dérivations formelles  $d_i$  telles que :

$$d_i|_K = \partial_i, \quad d_i y_\mu^k = y_{\mu+1, i}^k$$

Par quotient, ensuite, on définit corps différentiel  $K \langle y \rangle = Q(K\{y\})$  des fonctions rationnelles différentielles en  $y$  (quotients de polynômes différentiels).

Comme  $K\{y\}$  est un anneau intègre, la dérivation s'étend de manière unique au corps quotient  $K \langle y \rangle$ .

**Remarque :**

- Dans un anneau différentiel  $A$ , les éléments de  $A$  tel que  $d_i a = 0$  pour  $i = 1, \dots, n$  forment un sous-anneau  $C$ , appelé *anneau des constantes*.
- Si  $A$  est un corps, il en est de même de  $C$ .

On notera que  $C$  contient le sous anneau  $\mathbb{Q}$  engendré par l'élément unité de  $A$ .

### I.3.3 CLOTURE DIFFÉRENTIELLE ALGÈBRE

**Remarque :** Comme dans le corollaire précédent, on peut montrer par un décompte des dérivées que si  $u$  et  $v$  sont différentiellement algébriques sur  $K$ , alors  $u + v$  et  $uv$  le sont aussi. On peut alors introduire la définition suivante:

**Définition I.3.7** *Soit  $N$  une extension (différentielle) d'un corps (différentiel)  $K$ . On appelle clôture (différentielle) algébrique de  $K$  dans  $N$ , le corps (différentiel)  $K'$ , qui est formé des éléments de  $N$  vérifiant au moins une équation (différentiel, ODE ou EDP) algébrique à coefficients dans  $K$ .*

**Remarque :**

1. Dans un anneau commutatif l'intersection de n'importe quel collection d'idéaux parfaits est un idéal parfait.
2. Il en est de même dans un anneau différentiel, l'intersection d'idéaux différentiels est un idéal différentiel. L'intersection (finie ou infinie) d'idéaux différentiels parfaits est un idéal différentiel parfait.

De plus, on voudrait que la racine d'un idéal différentiel soit un idéal différentiel. On introduit pour cela les anneaux de Ritt que l'on considérera exclusivement dans la suite.

**Définition I.3.8** *Un anneau de Ritt est un anneau différentiel contenant  $\mathbb{Q}$ .*

**Propriétés :**

- La racine d'un idéal différentiel est un idéal différentiel.
- Tout idéal différentiel parfait est une intersection d'idéaux différentiels premiers.

## Partie II

# THEORIE DU CONTROLE AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES ALGEBRIQUES

## II.1 APPLICATIONS DE L'ALGEBRE DIFFERENTIELLE

Considérons pour commencer les systèmes de contrôle  $\mathcal{R}_1$  de la forme:

$$\dot{y} = f(y) + \sum_{i=1}^{i=m} g_i(y)u^i$$

où les  $(u^i)_{1 \leq i \leq m}$  sont des indéterminées appelées "entrées" et les  $y = (y^1, \dots, y^p)$  sont des indéterminées appelées "sorties".

On suppose alors que le système de contrôle est défini par un idéal différentiel  $\tau$  dans l'anneau différentiel  $K\{u, y\}$  pour la dérivation ordinaire notée par un point.

**Remarque :** Dans le cadre de la théorie du contrôle classique les entrées sont supposées indépendantes (libres), donc le seul idéal différentiel qu'elles définissent indépendamment de la sortie est l'idéal différentiel zéro.

**Proposition II.1.1** *l'idéal différentiel  $\tau$  est un idéal différentiel premier.*

**Démonstration :** Soit

$$\begin{aligned} h : K\{u, y\} &\longrightarrow K(y) \langle u \rangle \\ (u, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) &\longrightarrow (u, y, f(y) + g(y)u, \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial y} \dot{y}u + g\dot{u}, \dots) \end{aligned}$$

Le morphisme différentiel obtenu en munissant  $K(y) \langle u \rangle$  de la dérivation  $. : y \longrightarrow f(y) + g(y)u$ .

Cette application est bien définie car tous les  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$  sont explicitées en fonction de  $y$  par induction.

$\mathfrak{r}$  est donc le noyau d'une application d'un anneau dans un corps donc  $\mathfrak{r}$  est premier. De plus l'anneau  $K\{u, y\}$  et le corps  $K(y) \langle u \rangle$  sont stables par différentiation donc l'idéal  $\mathfrak{r}$  est un idéal différentiel premier.  $\diamond$

**Remarque :**

- Plus généralement, on notera que les idéaux différentiels définis par des équations résolues par rapport à certaines variables sont parmi les situations les plus faciles à étudier. (Exemple: les équations dites d'évolution en physique mathématique).
- En particulier, tout idéal linéaire est donc premier puisque le théorème de Cramer permet justement de le ramener à la forme précitée.

**Remarque :** Dans le cas des systèmes  $\dot{y} = A(y) + B(y)u$  où  $A$  et  $B$  sont des fonctions rationnelles de  $y$ , la démonstration précédente reste valable (comparer à C.H.Moog, J.Perraud, P.Bentz and Q.T.Vo [6]).

Lorsque la situation précédente n'est pas réalisée, nous allons présenter quelques exemples d'idéaux différentiels et mettre en évidence la difficulté qu'il y a à démontrer qu'ils sont premiers, parfaits ou que leurs racines sont premières dès qu'il ne s'agit plus d'idéaux de la forme explicite donnée plus haut. Un critère général, adapté du critère d'intégrabilité formelle, a été donné dans ([50]), mais sa démonstration est trop technique pour que nous puissions la présenter ici. Ce critère généralise et précise un critère donné précédemment par Rosenbrock ([59]). Ces deux résultats sont les seuls connus actuellement.

**Exemple :** Soit  $\mathfrak{a}$  l'idéal différentiel généré par  $P \equiv y_x^2 - 4y$ .

Alors  $d_x P = 2y_x(y_{xx} - 2)$ . Ainsi, les solutions de  $P$  au sens classique satisfont  $y_x = 0$  (et donc  $y = 0$ ) ou  $y_{xx} = 2$  (et donc nécessairement  $y \neq 0$ ), prouvant que l'espace des solutions de  $P = 0$  peut être divisé en  $y = 0$  et  $y = (x + a)^2$  avec  $a = cst$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

Dans tous les cas  $y_x(y_{xx} - 2)$  est un produit mais ni  $y_x$  ni  $(y_{xx} - 2)$  n'appartiennent à l'idéal différentiel  $\mathfrak{a}$  généré par  $P$  qui n'est donc pas premier mais contenu dans l'intersection de deux idéaux différentiels premiers générés par  $y$  d'une part et  $(P, y_{xx} - 2)$  d'autre part (voir [39]).

On peut montrer ( voir [38]) que  $y_{xxx} \in \mathfrak{a}$  et un tel résultat montre que  $\mathfrak{a}$  est strictement contenu dans l'intersection puisque  $y_{xxx} \notin \mathfrak{a}$  mais appartient à l'intersection.

**Exemple :** Soit  $\mathfrak{a}$  l'idéal différentiel généré par  $P \equiv y_x^2 - 4y^3$ .

On a successivement et de façon similaire:

$$d_x P \equiv 2y_x(y_{xx} - 6y^2), \quad d_{xx} P \equiv 2y_{xx}(y_{xx} - 6y^2) + 2y_x(y_{xxx} - 12yy_x).$$

$$\text{Comme } (y_{xx} - 6y^2)d_{xx} P \equiv y_{xx}(y_{xx} - 6y^2)^2 + 2y_x(y_{xx} - 6y^2)(y_{xxx} - 12yy_x)$$

$$\implies y_{xx}(y_{xx} - 6y^2)^2 \in \mathfrak{a}$$

$$\text{or } (y_x^2 - 4y^3)(y_{xx} - 6y^2) = y_x^2(y_{xx} - 6y^2) - 4y^3(y_{xx} - 6y^2)$$

$$\text{donc } y^3(y_{xx} - 6y^2) \in \mathfrak{a}$$

De plus, on montre que

$$(y_{xx} - 6y^2)^4 \equiv (y_{xx})^2(y_{xx} - 6y^2)^2 - 12y^2y_{xx}(y_{xx} - 6y^2)^2 + 36y^4(y_{xx} - 6y^2)^2$$

$$\text{on en conclut que } (y_{xx} - 6y^2)^4 \in \mathfrak{a}.$$

On en déduit que toute solution de  $P = 0$  est aussi solution de  $y_{xx} - 6y^2 = 0$ , donc que  $\mathfrak{a}$  n'est pas premier mais que l'espace des solutions ne peut être réunion de plusieurs parties irréductibles comme dans l'exemple précédent.

**Exemple :** Soit  $\dot{y}^2 - uy = 0$ .

En dérivant, on obtient  $2\dot{y}\ddot{y} - u\dot{y} - \dot{u}y = 0$ , puis en factorisant et en multipliant par  $\dot{y}$ , on a:  $(2\dot{y} - u)\dot{y}^2 - \dot{u}y\dot{y} = 0$ , ensuite en utilisant l'égalité  $\dot{y}^2 = uy$  on a:  $(2\dot{y} - u)uy - \dot{u}y\dot{y} = 0$ , on en tire:  $(2u\dot{y} - u^2 - \dot{u}y)y = 0$

Ceci, bien sûr, se complique lorsqu'on passe au cas de plusieurs dérivations.

**Exemple :** Examinons l'exemple suivant, avec  $n = 2$ ,  $m = 1$ :

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} y_{22} - 1/2(y_{11})^2 & = 0 \\ y_{12} - y_{11} & = 0 \end{cases}$$

En différenciant, on a:

$$\mathcal{R}_3 \begin{cases} y_{122} - y_{11}y_{111} & = 0 \\ -y_{122} + y_{112} & = 0 \\ -y_{112} + y_{111} & = 0 \end{cases}$$

Par combinaisons de ces équations, on obtient:  $y_{111}(1 - y_{11}) = 0$ .

Deux cas semblent se présenter alors:  $y_{11} = 1$  ou  $y_{111} = 0$ .

Mais si on dérive encore, on obtient:  $-(y_{111})^2 + (1 - y_{11})y_{1111} = 0 \implies (y_{111})^3 = 0$  car en effet  $y_{111}[y_{1111}(1 - y_{11})] = 0$ .

**Remarque :** Comme on l'a déjà montré, ce système n'est pas formellement intégrable car on a obtenu une nouvelle équation d'ordre 3 qui n'est pas une combinaison linéaire des équations précédentes d'ordre 2 et 3.

(En effet l'application  $\mathcal{R}_4 \rightarrow \mathcal{R}_3$  n'est pas surjective car un point de  $\mathcal{R}_3$  tel que  $y_{11} = 1$ ,  $y_{111} = 1$  ne peut être la projection d'un point de  $\mathcal{R}_4$  pour lequel nécessairement  $y_{111} = 0$ ).

## II.2 SYSTEMES DE CONTROLE AUX DERIVEES PARTIELLES

Nous allons définir maintenant la notion de systèmes de contrôle aux dérivées partielles grâce à l'algèbre différentielle.

On supposera désormais que l'on considère un système de contrôle défini par un idéal différentiel premier  $\tau$  et on introduira le corps différentiel des entrées/sorties  $N = Q(K\{u, y\}/\tau) = K \langle \xi, \eta \rangle$

**Dans le cas général:**

Les entrées peuvent vérifier des équations différentielles ou aux dérivées partielles indépendamment de la sortie et définies par un idéal premier que nous appellerons  $\mathfrak{p} = \tau \cap K\{u\}$ . Cet idéal permet de définir le corps différentiel des entrées  $L = Q(K\{u\}/\mathfrak{p}) = K \langle \xi \rangle$ .

De façon similaire, on introduira l'idéal différentiel premier  $\mathfrak{q} = \tau \cap K\{y\}$ .

Cet idéal permet de définir le corps différentiel des sorties:  $M = Q(K\{y\}/\mathfrak{q}) = K \langle \eta \rangle$ .

**Remarque :** Il faut bien entendu, dans chaque cas, d'abord vérifier si l'on a un idéal différentiel premier et sinon le factoriser (Nous ne connaissons pas d'algorithme *général* pour résoudre cette question).

**Remarque :** En accord avec le chapitre sur la théorie des jets et des EDP formelles, on peut supposer le système de contrôle formellement intégrable (et même involutif).

Il faut cependant bien remarquer que l'on doit le rendre formellement intégrable, s'il ne l'est pas pour connaître les propriétés de l'extension  $N/K$ . (Degré de transcendance pur ou différentiel).

**Remarque :** La détermination de  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  à partir de  $\tau$  revient à construire les systèmes résolvants (pour l'entrée et la sortie respectivement) du chapitre II. Il faut alors de même les rendre formellement intégrable pour connaître les propriétés des extensions  $L/K$  (entrée) et  $M/K$  (sortie).

**Exemple :** Equations de MAXWELL dans un espace libre. (voir [73] )

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} & = \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & = \vec{j} \end{cases}$$

ou  $\vec{D}(x, t)$ ,  $\vec{H}(x, t)$  représentent respectivement les inductions électrique et magnétique qui jouent le rôle de sorties, tandis que  $\vec{j}(x, t)$  et  $\rho(x, t)$ , qui représentent respectivement la densité du courant et la densité de charge électrique, jouent le rôle d'entrées.

Des équations du système, on tire une nouvelle équation pour  $\vec{j}$  et  $\rho$  donc une équation pour les entrées indépendamment des sorties:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

## II.2.1 KORTEWEG DE VRIES

$((x^1, x^2), u; y)$ ,  $n = 2$ ,  $q = 2$ :

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} 2u + y_1 + (y)^2 & = 0 \\ u_{11} + 2u(y)^2 + 4(u)^2 - 2u_1y - (1/2)y_2 & = 0. \end{cases}$$

Pour éliminer la sortie  $y$ , on remarque que l'on peut écrire les deux équations sous la forme résolue:

$$\mathcal{R}_2 \begin{cases} y_1 & = -2u - (y)^2 \\ y_2 & = 2u_{11} + 4u(y)^2 + 8(u)^2 - 4u_1y \end{cases}$$

En effectuant alors les dérivées croisées et substituant, on obtient facilement la condition différentielle constituant le système résolvant pour l'entrée:

$$u_{111} + u_2 + 12uu_1 = 0$$

Cette équation étant une équation d'évolution est formellement intégrable (peut être résolue en  $u_2$ ) et donne lieu à un idéal premier par un raisonnement analogue à celui fait déjà au début de ce chapitre. On obtient ainsi  $N = L(y)$ , ce qui montre a posteriori que le système de contrôle est défini par un idéal différentiel premier.

Ce système est inversible à gauche, c'est-à-dire que l'entrée peut être connue en fonction de la sortie. En reportant  $u = -(1/2)y_1 - (1/2)(y)^2$  dans la seconde équation, on obtient après quelques manipulations:

$$y_{111} + y_2 - 6(y)^2y_1 = 0$$

qui donne lieu à un idéal différentiel premier pour les mêmes raisons que ci-dessus.

**Remarque :** Les deux particularités qui ont permis de trouver les systèmes résolvants ne se rencontrent pas en général dans d'autres systèmes, comme nous le verrons. (Problème de Bénard, vibration des câbles, ... [1])

**Remarque :** L'entrée et la sortie sont différentiellement algébrique sur  $K = \mathbb{Q}$ . On en déduit alors que tout élément de  $N$  est différentiellement algébrique sur  $K$  ce qui montre que  $\text{diff trd } N/K = 0$ . Nous verrons ci-après un *calcul direct* qui évite de faire référence aux systèmes résolvants et qui est donc très important en pratique.

**Remarque :**  $\mathcal{R}_2$  n'est pas formellement intégrable (vis-à-vis de l'entrée *et* de la sortie) car la première équation du système ne comporte que des jets d'ordre 1. Le système formellement intégrable est  $\mathcal{R}_2^{(1)}$  qui est alors:

$$\begin{cases} y_{11} + 2yy_1 + 2u_1 & = 0 \\ y_{12} + 2yy_2 + 2u_2 & = 0 \\ u_{11} + 2u(y)^2 + 4(u)^2 - 2uy - (1/2)y_2 & = 0 \\ y_1 + (y)^2 + 2u & = 0 \end{cases}$$

Il est *essentiel* dans ce cadre de faire jouer le même rôle à l'entrée et à la sortie.

**Remarque :** Bien que  $\mathcal{R}_2$  ne semble pas causal,  $\mathcal{R}_2^{(1)}$  contient des jets d'ordre 2 de  $y$ . D'un autre côté, le choix de l'entrée et de la sortie permet pour la sortie d'avoir un système de type fini  $y_1 = \dots, y_2 = \dots$  sur l'entrée comme en théorie du contrôle classique. Cependant l'échange entrée/sortie est tout à fait possible (il est d'ailleurs réalisé dans la théorie des solitons).

Nous allons maintenant calculer le degré de transcendance différentiel:  
Le symbole du système est le suivant:

$$M_2 \begin{cases} Y_{11} = 0 \\ Y_{12} = 0 \\ U_{11} = 0 \end{cases}$$

Le système de coordonnées  $(x^1, x^2)$  n'est pas  $\delta$ -régulier et il faut faire la permutation (12)  $\rightarrow$  (21) pour trouver:

$$M_2 \begin{cases} Y_{22} = 0 \\ U_{22} = 0 \\ Y_{12} = 0 \end{cases}$$

On en déduit que le caractère  $\alpha_2^2 = 0$ . Ce qui montre que le degré de transcendance différentiel est nul. On remarque encore une fois la nécessité de rendre un système donné formellement intégrable pour pouvoir donner une signification aux caractères.

Par contre,  $\mathcal{R}_2$  donne  $U_{11} = 0$  donc  $U_{22} = 0$  après changement de coordonnées et donc ne suffit pas pour calculer *diff trd*.

## II.3 OBSERVABILITE

Pour faire comprendre simplement le concept d'observabilité, considérons un système de contrôle de la forme suivante:

$$\dot{y} = f(y) + \sum_{i=1}^{i=m} g_i(y)u^i$$

Nous allons étudier le comportement de certaines fonctions  $z = h(y)$ .

Notons par  $\tau$  (respectivement  $\mathfrak{s}$ ) les idéaux différentiels générés par l'entrée  $u$  et la sortie  $y$  (respectivement  $z$ ) et désignons par  $N$  et  $N'$  les corps différentiels définis respectivement par les idéaux différentiels  $\tau$  et  $\mathfrak{s}$ .

**Définition II.3.1** *Un système de contrôle est dit observable par les  $z$  si et seulement si tout  $y$  peut s'écrire comme fonction différentielle rationnelle des  $u$  et des  $z$ .*

**Proposition II.3.2** *Un système de contrôle est observable si et seulement si  $N = N'$ .*

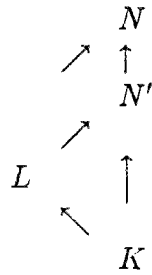


**Démonstration :** Dans tous les cas on a  $N' \subseteq N$  car  $z = h(y)$ .

Si le système est observable alors on peut exprimer  $y$  comme fonction différentielle rationnelle de  $z$  et  $u$  et donc  $y \in N' \rightarrow N \subseteq N'$ .

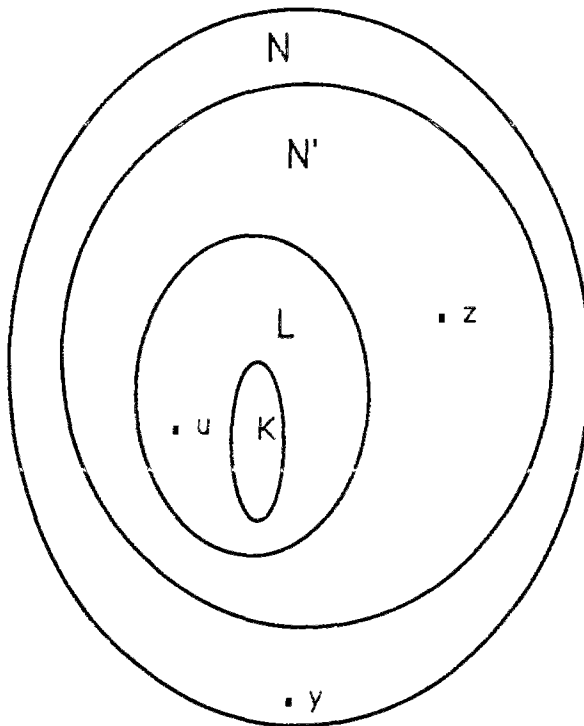
◇

On peut donc représenter le système par le diagramme suivant:



ou  $L$  est le corps différentiel des entrées.

**Remarque :** Il est souvent préférable de représenter les corps de façon ensembliste comme ci-dessous.



Plus généralement pour un système de contrôle aux dérivées partielles quelconque algébrique, on posera:

**Définition II.3.3** On appelle observable tout élément de  $N$ , c'est-à-dire toute fonction rationnelle différentiable de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées.

On vérifie aisément que cette définition est cohérente avec celle qui précède et étendre, sans changer les notations, la définition de l'observabilité à ce cas général.

**Remarque :**  $N = N'$  n'implique pas  $M = M'$  en introduisant les corps différentiels de sorties relatifs à  $y$  et  $z$ .

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{y}^1 &= u^2 \\ \dot{y}^2 &= y^1 u^1 \\ \dot{y}^3 &= y^2 u^1 \\ z^1 &= y^2 \\ z^2 &= y^3 \end{cases}$$

On a  $y^1 = \frac{z^1}{u^1}$ ,  $y^2 = z^1$ ,  $y^3 = z^2$  et le système est observable.

On a bien sûr  $M' \subset M$ . De plus, on a  $y^1 \dot{y}^3 - y^2 \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow y^1 = \frac{\dot{y}^2}{y^3} y^2 = \frac{\dot{z}^1}{z^2} z^2$  et donc  $M \subset M'$  d'où  $M = M'$ .

**Exemple :**

Soit le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 &= y^1 + y^3 + u^1 \\ \dot{y}^2 &= y^2 + y^4 + 2y^3 u^1 \\ \dot{y}^3 &= y^3 + 3u^1 \\ \dot{y}^4 &= y^1 y^2 y^3 + (1 + 2y^3)^2 u^1 + 2y^4 u^2 \\ z^1 &= y^1 \\ z^2 &= y^2 \end{cases}$$

Ici on a  $y^1 = z^1$ ,  $y^2 = z^2$ ,  $y^3 = \dot{z}^1 - z^1 - u^1$ ,  $y^4 = \dot{z}^2 - z^2 - 2y^3 u^1$ .

Ce système est donc observable.

Mais on a une inclusion stricte  $M' \subset M$ , car on ne peut exprimer ni  $y^3$  ni  $y^4$  comme fonctions différentielles rationnelles des  $z$  seuls (c'est-à-dire sans utiliser  $u$ ).

**Remarque :** Lorsqu'on ramène un système de contrôle d'ordre supérieur au premier ordre, la forme résolue ainsi obtenue est *toujours* observable (contrairement à ce qui se passe dans le cas général). En effet on a toujours  $N' \subseteq N$  mais comme les  $y$  sont déterminés à partir de certaines dérivées des  $z$ , on a ainsi aussi  $N \subseteq N'$  ce qui entraîne  $N = N'$ .

**Exemple :** Soit le système  $\ddot{z} - z - u - \dot{u} = 0$

Posons  $y^1 = z$ ,  $y^2 = \dot{z} - u$ . On obtient alors:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 &= y^2 + u \\ \dot{y}^2 &= y^1 + u \\ z &= y^1 \end{cases}$$

Par contre ce système n'est pas observable par  $y^1 - y^2$  ou même  $y^1 + y^2$ . Plus généralement, le problème d'observabilité revient à reconnaître si un élément d'un corps différentiel donné appartient à un sous corps différentiel donné. Ce problème qui paraît simple dans les situations précédentes, peut en effet être *extrêmement* compliqué comme le montre l'exemple suivant adapté de ([50]).

**Exemple :**  $K = \mathbb{Q}$ ,  $N = \mathbb{Q} \langle y^1, y^2 \rangle$ ,  $N' = \mathbb{Q} \langle y_x^1 y_{xx}^2, y_x^2 y_{xx}^1, y_{xx}^1 y_{xxx}^2 - y_{xx}^2 y_{xxx}^1 \rangle$ .

Il n'est pas évident du tout a priori que  $y_x^1 y_x^2 \in N'$ .

Après un calcul extrêmement fastidieux posons  $\Phi \equiv y_x^1 y_{xx}^2$ ,  $\Psi \equiv y_x^2 y_{xx}^1$ ,  $\Omega = y_{xx}^1 y_{xxx}^2 - y_{xx}^2 y_{xxx}^1$ , on obtient finalement:

$$y_x^1 y_x^2 = \frac{(d_x \Omega) \Phi \Psi (\Phi - \Psi) - 3 \Omega \Phi \Psi (d_x \Phi - d_x \Psi)}{(d_x \Omega) (\Phi d_x \Psi - \Psi d_x \Phi) - 2 \Omega^2 (\Phi + \Psi) - \Omega d_x (\Phi d_x \Psi - \Psi d_x \Phi)}$$

On peut aussi présenter ce résultat d'une façon plus proche de nos définitions de l'observabilité, en remarquant que ce résultat revient à montrer que  $N' \langle y_x^1 y_x^2 \rangle = N'$ .

## II.4 DEGRE DE TRANSCENDANCE DIFFERENTIELLE

**Définition II.4.1** Soient  $K \subset L$ , deux corps différentiels.

L'extension différentielle  $L/K$  est différentiellement algébrique, si tout élément de  $L$  est solution d'au moins une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) à coefficients dans  $K$ , c'est-à-dire si et seulement si tout élément de  $L$  est différentiellement algébrique sur  $K$ . Dans le cas contraire, elle est dite différentiellement transcendante.

**Définition II.4.2** Les quantités  $(\eta^1, \dots, \eta^m)$  sont dites différentiellement algébriquement dépendantes, si elles annulent au moins un polynôme différentiel en  $m$  indéterminées  $(y^1, \dots, y^m)$ . Dans le cas contraire, elles sont dites différentiellement indépendantes.

**Exemple :**  $\bar{K} = \mathbb{Q}$  et  $L = K \langle \cos(x), \sin(x) \rangle$  ou  $\eta^1 = \cos(x)$  et  $\eta^2 = \sin(x)$  sont solutions des équations  $\ddot{y}^1 - y^1 = 0$ ,  $\ddot{y}^2 - y^2 = 0$  et  $(y^1)^2 + (y^2)^2 = 1$ .

$\eta^1$  et  $\eta^2$  sont donc différentiellement algébriquement dépendants et  $L/K$  est donc différentiellement algébrique.

**Définition II.4.3** Le degré de transcendance différentielle (noté *diff trd*) de l'extension différentielle  $L/K$  est le nombre maximum d'éléments différentiellement transcendants de  $L$  qui sont différentiellement algébriquement indépendants sur  $K$ .

On peut montrer que ce nombre ne dépend que de l'extension et non des générateurs choisis.

**Exemple :** Soit  $K$  et  $L = Q(K\{y^1, y^2\}/y_x^1 - y^2) = K \langle \eta^1, \eta^2 \rangle$

Ici *diff trd*  $L/K = 1$  car  $\eta^1$  ou  $\eta^2$  peuvent être choisis arbitrairement.

**Définition II.4.4** Une base de transcendance différentielle est constituée par un ensemble d'éléments indépendants en nombre maximum. Toutes ces bases ont le même nombre d'éléments.

**Remarque :**

- Si  $K \subset L \subset M$  sont trois corps différentiels, on a  $\text{diff trd}M/K = \text{diff trd}M/L + \text{diff trd}L/K$
- $\text{diff trd}L/K = 0 \iff L/K$  est différentiellement algébrique.
- Si  $L = Q(K\{y^1, \dots, y^m\}/\mathfrak{p})$  alors  $0 \leq \text{diff trd}L/K \leq m$

**Propriétés :** Soit  $K \subset L$ , ou  $L/K$  est engendrée par un nombre fini d'éléments, c'est-à-dire  $L = K\{\eta^1, \dots, \eta^m\}$ .

Si  $n = 1$  on a  $\text{diff trd}L/K = 0 \iff \text{trd}L/K < \infty$  et ce résultat conduit à l'introduction de l'état. Mais cette propriété n'est plus vrai si  $n > 1$  où l'on a seulement  $\text{trd}L/K < \infty \Rightarrow \text{diff trd}L/K = 0$ .

**Exemple :** Cas  $n = 3 \geq 1$ .

Si  $K = \mathbf{Q}$ ,  $L = Q(K\{y^1, y^2\}/(\tilde{y}^1, \tilde{y}^2 - \dot{y}^1)) = K(y^1, y^2, \dot{y}^1, \dot{y}^2)$ .

On a  $\text{diff trd}L/K = 0$  car  $\tilde{y}^1 = 0$ ,  $\tilde{y}^2 = 0$  et  $\text{trd}L/K = 4$ .

**Exemple :** Soient  $K = \mathbf{Q} \langle x^1, x^2, x^3 \rangle$  et  $L$  définie par le système suivant:

$$\begin{cases} y_{33} - x^2 y_{11} & = 0 \\ y_{22} & = 0 \end{cases}$$

D'après le chapitre II, on peut en déduire que  $\text{diff trd}L/K = 0$  et  $\text{trd}L/K = 12 < \infty$ .

**Exemple :** Cas  $n = 2, m = 2$ : (Cauchy-Riemann).

On étudie les transformations holomorphes du plan complexe  $X + iY = f(x + iy)$  de la forme  $Z = f(z)$ . Ces transformations vérifient:

$$\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.$$

Dans ce cas  $\text{diff trd}L/K = 0$  car

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = 0$$

. Par contre, on a bien sûr  $\text{trd}L/K = \infty$ .

Nous allons maintenant indiquer un algorithme pratique pour calculer le degré de transcendance différentiel d'une extension définie par un système EDP algébrique. Cet

algorithme est très important en pratique comme nous le montrerons par la suite.

Nous allons supposer que la seule donnée est celle d'un certain nombre d'EDP algébriques et scinder les opérations successives en un certain nombre d'étapes, en précisant chaque fois si la faisabilité algorithmique est connue ou non.

1. Par dérivations successives, nous obtenons un idéal différentiel  $\tau \subset K\{y^1, \dots, y^m\}$  par exemple. Cet idéal, comme nous l'avons déjà vu sur des exemples, peut n'être ni premier, ni parfait.  
Il n'existe pas, à notre connaissance, de moyen constructif pour prendre la racine. nous devons donc supposer que cette étape a été réalisée en fonction de chaque cas particulier.
2. En supposant que  $\tau$  est parfait, on peut alors utiliser le théorème de la base différentielle de Ritt et son corollaire que voici ( ).

**Corollaire II.4.5** *Tout idéal différentiel parfait dans  $K\{y^1, \dots, y^m\}$  peut être représenté comme l'intersection finie non-redondante d'un nombre fini d'idéaux différentiels premiers.*

**Théorème II.4.6 (de la Base différentielle de Ritt) :**

*idéal différentiel parfait  $\tau \subset K\{y^1, \dots, y^m\}$  est obtenue comme la racine de l'idéal différentiel engendré par une partie finie (d'ordre  $q$ ) de  $\tau$ .*

Tout

On peut alors seulement scinder le problème donné en se ramenant à considérer chaque composante et on peut donc supposer que cette étape a été réalisée en considérant désormais un idéal différentiel premier  $\mathfrak{p}$  mais on demeure dans un "cercle vicieux" du fait de 1) car même si l'on sait qu'il existe une partie finie de  $\mathfrak{p}$  qui suffit à définir  $\mathfrak{p}$ , encore une fois on ne sait pas prendre la racine en général. Pour contourner cette difficulté, il existe un critère pour reconnaître si un idéal différentiel engendré par un nombre fini de polynômes différentiels est premier ou non. Ce critère est l'adoption au cadre algébrique du critère d'intégrabilité formelle de Janet-Spencer-Quillen-Goldschmit ([50]) et permet d'éviter de prendre la racine à condition d'avoir un symbole 2-acyclique ou involutif.

**Critère II.4.7** *Soit  $\mathfrak{p}_q \subset K[y_q]$  premier. Si l'idéal obtenu en prolongeant une fois est un idéal premier  $\mathfrak{p}_{q+1} \subset K[y_{q+1}]$  avec  $\mathfrak{p}_{q+1} \cap K[y_q] = \mathfrak{p}_q$  et si le symbole  $M_q$  de  $\mathcal{R}_q$  défini par  $\mathfrak{p}_q$  est 2-acyclique avec  $M_{q+1}$  fibré vectoriel, alors  $\mathfrak{p}_q$  engendre un idéal différentiel premier.*

Ce résultat qui précise des énoncés partiels (de Kolchin [39]) montre encore une fois l'importance extrême des notions d'acyclicité et d'intégrabilité formelle. Nous pensons même qu'une utilisation systématique de ce critère doit permettre la décomposition pratique recherchée dans les étapes précédentes.

3. On a donc un idéal différentiel premier  $\mathfrak{p}$  que l'on étudie grâce à une partie finie  $\mathfrak{p}_q$  qui engendre un système EDP formellement intégrable dont on peut supposer le symbole involutif, quitte à prolonger un nombre fini de fois.

Dans ce cas, la définition des caractères donnés dans le chapitre II, montre que:

$$\dim M_{q+r} = \sum_{i=1}^n \frac{(r+i-1)!}{r!(i-1)!} \alpha_q^i \quad \forall r \geq 0.$$

Ainsi  $\dim \mathcal{R}_{q+r} = \dim \mathcal{R}_{q-1} + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r!i!} \alpha_q^i$

et  $\dim \mathfrak{p}_{q+r} = \dim \mathfrak{p}_{q-1} + \sum_{i=1}^n \frac{(r+i)!}{r!i!} \alpha_q^i$

comme  $\frac{(r+i)!}{r!i!} = \frac{(r+1)\dots(r+i)}{i!}$ , le terme de plus haut degré en  $r$  est donc  $(\frac{\alpha_q^n}{n!})r^n$  qui doit être identique au terme de plus haut degré en  $r$  soit  $(\frac{\alpha}{n!})r^n$ , résultant d'un degré de transcendance différentiel égal à  $\alpha$ . Ceci n'est possible que si  $\alpha_q^n = \alpha$ , ce qui permet d'obtenir l'algorithme de calcul du degré de transcendance différentiel au moyen de la proposition suivante:

**Proposition II.4.8** *diff trd* $L/K =$  caractère  $\alpha_q^n$

Nous avons montré que  $\alpha_q^n$  est obtenu en contruisant la matrice caractéristique et en recherchant la variété systatique dans le cas linéaire.

Dans le cas algébrique  $\alpha_q^n$  dépend seulement de  $L/K$  et donc pas des générateurs. Pour les mêmes raisons que ci-dessus (calcul du degré de transcendance) le plus petit caractère non-nul dépend seulement de  $L/K$  et non des générateurs en remarquant que

$$\alpha_q^1 \geq \dots \geq \alpha_q^n \geq 0.$$

Ce dernier caractère est connu dans la littérature classique sous le nom de "type" (Kolchin [39]).

On voit donc en pratique, que toute la difficulté de la détermination de *diff trd* $L/K$  est de pouvoir décrire  $L/K$  par un système EDP formellement intégrable.

**Exemple** :[Cauchy-Riemann]

Soit  $\chi = \lambda dx + \mu dy \in T^*$ .

La matrice caractéristique est donc:

$$\begin{pmatrix} \mu & -\lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

de déterminant  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ .

Son rang générique est 2 et donc  $\alpha_1^2 = 2 - 2 = 0$ , car le système est formellement intégrable, à symbole involutif.

## II.5 CONTROLABILITE

Nous allons essayer dans ce paragraphe de généraliser la notion de contrôlabilité au cas des équations aux dérivées partielles, de façon à retrouver des critères connus dans les cas linéaires et affines de la théorie du contrôle classique.

**Définition II.5.1** *On appelle observable libre (resp. contrainte) toute fonction rationnelle de l'entrée, de la sortie et de leurs dérivées ne vérifiant aucune EDP algébrique sur  $K$ , (resp. vérifiant au moins une EDP algébrique sur  $K$ ).*

**Remarque :** Les observables sont en fait les éléments de  $N$ , ce qui est cohérent avec les définitions de l'observabilité dans le paragraphe précédent. La recherche des observables contraintes équivaut à la détermination de la clôture algébrique de  $K$  dans  $N$ .

**Définition II.5.2** *Un système de contrôle sera dit algébriquement contrôlable si et seulement si sa clôture différentielle algébrique  $K'$  est égale à  $K$ .*

**Proposition II.5.3** *Un système de contrôle linéaire de la forme  $\dot{y} = Ay + Bu$  est contrôlable au sens de la définition précédente si et seulement si il est contrôlable au sens classique (voir chapitre I).*

**Démonstration :** Cas linéaire: ([51], p 523)

Soit le système de contrôle linéaire  $\dot{y} = Ay + Bu$ , d'après le théorème de Cayley-Hamilton  $\exists \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  tel que:

$$\alpha_n A^n + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

alors on a:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1 & \dot{y} = Ay + Bu \\ \alpha_2 & \ddot{y} = A^2y + ABu + B\dot{u} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & y^{(n)} = A^n y + A^{n-1}Bu + \dots + Bu^{(n-1)}. \end{array}$$

Supposons le système non contrôlable:

grâce à la linéarité, on peut choisir un élément  $\xi = \tilde{a}y$  où  $\tilde{a}$  est un vecteur constant orthogonal aux vecteurs  $(B, \dots, A^{(n-1)}B)$ , c'est-à-dire tel que l'on ait  $\tilde{a}B = 0, \dots, \tilde{a}A^{n-1}B = 0$ . On obtient:

$$\begin{array}{l|l} \alpha_1 & \tilde{a}\dot{y} = \tilde{a}Ay \\ \alpha_2 & \tilde{a}\ddot{y} = \tilde{a}A^2y \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \tilde{a}y^{(n)} = \tilde{a}A^n y. \end{array}$$

En sommant, on a:

$$\alpha_1 \tilde{a} \dot{y} + \alpha_2 \tilde{a} \ddot{y} + \dots + \alpha_n \tilde{a} y^{(n)} = \alpha_1 \tilde{a} A y + \alpha_2 \tilde{a} A^2 y + \dots + \alpha_n \tilde{a} A^n y = \tilde{a} (\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n) y = \tilde{a} (-\alpha_0 I) y = -\tilde{a} \alpha_0 y = \alpha_0 \tilde{a} y = -\alpha_0 \xi \Rightarrow$$

$$\alpha_0 \tilde{a} y + \alpha_1 \tilde{a} \dot{y} + \alpha_2 \tilde{a} \ddot{y} + \dots + \alpha_n \tilde{a} y^{(n)} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_0 \xi + \alpha_1 \dot{\xi} + \dots + \alpha_n \xi^{(n)} = 0}$$

Ainsi donc si le rang de  $(B, AB, \dots, A^{n-1}B) < n$ ; il existe au moins une observable vérifiant une EDP.

Réciproquement, s'il existe un tel élément, en remontant la démonstration, on voit que le rang de la matrice de contrôlabilité n'est pas maximum.  $\diamond$

**Remarque :**

1. Pour les cas non-linéaire ou aus EDP, il est nécessaire de remplacer la clôture différentielle algébrique par la clôture différentielle. C'est d'ailleurs l'existence de cette dernière que l'on prouve grâce à la géométrie différentielle par la nullité du dernier ( $n^{\text{ième}}$ ) caractère.
2. Pour le cas non-linéaire mais affine, on se reportera à la démonstration faite pour la contrôlabilité forte au chapitre II. On remarquera donc à cet effet que la notion de clôture différentielle algébrique a été étendue par *analogie* au cas strictement différentiel sans que cela implique que les observables contraintes soient elles-mêmes des fonctions rationnelles. Il semble donc que la notion de contrôlabilité algébrique soit plus faible que la notion de contrôlabilité différentielle. *Ces deux notions doivent donc être distinguées clairement.* les exemples ci-dessous précisent ce point.

**Remarque :** On peut donc représenter le système par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{c} N = Q(K\{u, y\}/\tau) \\ \uparrow \\ K' \\ \uparrow \\ K \end{array}$$

**Remarque :** Il est à noter que la recherche de la clôture différentielle algébrique est un problème très délicat, pour lequel on connaît peu de tests. En dehors des cas linéaires et affines précités, on notera le cas extrême  $K' = N$  que l'on peut reconnaître en montrant que  $\text{diff trd} N/K = 0$ , grâce au calcul du  $n^{\text{ième}}$  caractère. (voir KdV, Bénard, Cable).

**Exemple :** Soit le système linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = -y^2 + u \\ \dot{y}^2 = -y^1 + \alpha u \end{cases}$$



Ici, comme c'est un système linéaire, on cherche les observables sous la forme  $z = \lambda y^1 + y^2$  (combinaisons linéaires des  $y$ ).

Si un tel système existe, il doit vérifier  $\dot{z} + \gamma z = 0$  donc  $\lambda \dot{y}^1 + \dot{y}^2 + \gamma y^2 + \gamma \lambda y^1 = 0$  or d'après le système on a l'équation:

$$-\alpha \dot{y}^1 + \dot{y}^2 - \alpha y^2 + y^1 = 0$$

Par identification, on obtient le système suivant:

$$\begin{cases} \lambda &= -\alpha \\ -\alpha &= \gamma \Rightarrow \alpha^2 &= 1 \\ 1 &= \gamma \lambda \Rightarrow (\alpha, \gamma) &= (\pm 1, \mp 1) \end{cases}$$

donc on a 2 cas:

**1<sup>er</sup> cas:** si  $\alpha = 1 \Rightarrow \exists z = -y^1 + y^2$  vérifiant  $\dot{z} - z = 0$ .

**2<sup>ème</sup> cas:** si  $\alpha = -1 \Rightarrow \exists z = y^1 + y^2$  vérifiant  $\dot{z} + z = 0$ .

Et on peut montrer que dans ce cas le système n'est pas contrôlable au sens classique.

**Exemple :** Soit le système  $u\ddot{y} - \dot{u} = 1$ .

En changeant légèrement les notations, on peut introduire l'état  $(u, y, w)$  et l'entrée  $v$ , tel que le système puisse être mis sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{u} &= uv \\ \dot{y} &= w \\ \dot{w} &= 1/u + v \end{cases}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} f &= w\partial/\partial y + (1/u)\partial/\partial w \\ g &= u\partial/\partial u + \partial/\partial w \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [f, g] &= -\partial/\partial y - (1/u)\partial/\partial w \\ [g, [f, g]] &= (1/u)\partial/\partial w \end{aligned}$$

La distribution  $\Delta$  est de rang maximum 3. Donc le système est fortement contrôlable. Ainsi on ne pourra pas trouver d'observable contrainte vérifiant une EDP donc  $K = K'$ .

**Remarque :** La méthode utilisée correspond à une description différente, mais équivalente de  $N$ . En effet  $w = \dot{y}$ ,  $v = \frac{\dot{u}}{u}$  sont des éléments de  $N$ . Nous allons montrer ci-dessous directement que  $K = K'$  sur la description initiale de  $N$  par le système de contrôle  $u\ddot{y} - \dot{u} = 1$ .

Pour cela soit  $z = f(u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots, y, \dot{y})$  une observable contrainte par  $\dot{z} = \Phi(z)$ . On en déduit de suite que  $z = f(u, y, \dot{y})$  doit satisfaire à:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \left( \frac{1 + \dot{u}}{u} \right) \equiv \Phi(f(u, y, \dot{y})).$$

Ce qui nécessite:  $\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + u \frac{\partial f}{\partial u} = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} - \frac{\partial f}{\partial u} = \Phi(f(u, y, \dot{y}))$ .

Ceci n'est possible que si tous les mineurs de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} \dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \dot{y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \dot{y}} \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \end{pmatrix}$$

sont nuls.

La première et la dernière colonne donnent:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial \dot{y}} + u \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial y} \dot{y} - u \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} = 0$$

ce qui, après utilisation de l'équation précédente entraîne:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u} = 0.$$

En effectuant alors les dérivées successives croisées, on a:

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \dot{y}} - u \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = -\frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial f}{\partial u} \right) + u \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}$$

Ce qui montre que  $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow f = \text{cte}$  est une observable triviale. par suite  $K' = K$ .

**Exemple :** Considérons maintenant le système:  $u\ddot{y} - \dot{u} = 0$ .

De façon similaire, on introduit l'état  $(u, y, w)$  et l'entrée  $v$  tel que le système prenne la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{u} = uv \\ \dot{y} = w \\ \dot{w} = v \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} f &= w\partial/\partial y \\ g &= u\partial/\partial u + \partial/\partial w \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} [f, g] &= -\partial/\partial y \\ [g, [f, g]] &= 0 \end{aligned}$$

Donc la distribution est toujours de rang 2. Ainsi ce système n'est pas fortement contrôlable et dans ce cas on pourra vérifier que l'élément  $z = \dot{y} - \log u$  est une observable contrainte vérifiant l'équation différentielle  $\dot{z} = 0$ .

**Remarque :** On notera que dans cet exemple où le système n'est pas linéaire, l'observable

contrainte n'appartient pas à la clôture *algébrique* différentielle mais en revanche, elle appartient à la clôture différentielle (analytique ou généralisée). Par une méthode semblable à celle de la remarque précédente, on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, u \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow z = h(\dot{y} - \log u)$$

**Remarque :** On pourra aussi noter que l'on peut considérer une autre notion de contrôlabilité en prenant la clôture différentielle  $K''$  de  $K$  dans  $M$ .

Dans le cas des situations linéaires et affines déjà rencontrées, on a  $K' = K''$  mais ce n'est pas le cas en général.

Cette notion de contrôlabilité détermine aussi une réalisation minimale comme nous allons le voir, mais nous ne connaissons aucun équivalent classique.

**Définition II.5.4** *Un système de contrôle est dit contrôlable au "sens 2" si et seulement si  $K = K''$ .*

**Proposition II.5.5** *Contrôlable au sens algébrique  $\Rightarrow$  contrôlable au "sens 2".*

**Démonstration :** En effet, on a toujours  $K \subseteq K'' \subseteq K'$ . Si  $K'' \neq K \Rightarrow K' \neq K$ .  $\diamond$

**Exemple :** Soit  $K = \mathbb{Q}$  et le système suivant:  $\dot{y}^1 + \dot{u} = 0$ ,  $\dot{y}^2 = 1$ .

On a  $K'' = K \langle \eta^2 \rangle \subset K' = K \langle \eta^1 + u, \eta^2 \rangle$ .

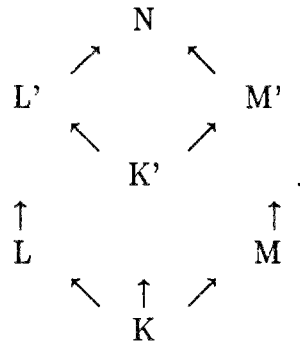
## II.6 REALISATION MINIMALE

La théorie du contrôle classique correspond au cas  $n = 1$  (une seule dérivation) et  $\text{diff trd } N/L = 0$  (La dimension de l'espace d'état est finie) avec  $\text{diff trd } L/K =$  nombre d'entrées.

Dans le cas général, soient  $L'$  le corps composite de  $L$  et  $K'$  dans  $N$ , puis  $M'$  le corps composite de  $M$  et  $K'$  dans  $N$ .

**Définition II.6.1** *On peut représenter le système par les quatre corps  $(K, L, M, N)$ . La représentation minimale algébrique du système est réalisée par les quatre corps suivants  $(K', L', M', N)$  ou  $k'$  est la clôture différentielle algébrique de  $K$  dans  $N$ .*

On obtient donc le diagramme suivant:



Dans ce cas on a:

**Proposition II.6.2**  $\text{diff trd}N/L' = 0$ . La dimension du nouvel espace d'état est aussi finie.

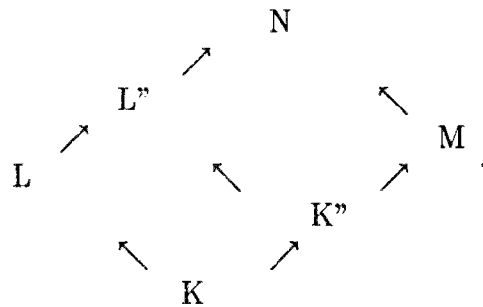
**Démonstration :**

$$\text{On a } \text{diff trd}L'/K \leq \text{diff trd}N/K = \text{diff trd}N/L + \text{diff trd}L/K = m.$$

$$\text{or } 0 = \text{diff trd}N/L = \text{diff trd}N/L' + \text{diff trd}L'/L \Rightarrow \text{diff trd}N/L' = 0.$$

$$\text{De plus } \text{diff trd}L'/K' = \text{diff trd}L/K \quad \diamond$$

**Remarque :** La seconde notion de contrôlabilité donne le schéma suivant de réalisation minimale:



où l'on remplace les corps  $K, L, M, N$  par les corps  $K'', L'', M, N$

**Exemple :** Soit le système suivant  $\ddot{y} - \dot{u} = 0$ , qu'on peut mettre sous la forme canonique suivante:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^2 + u \\ \dot{x}^2 = 0 \\ \dot{x}^3 = x^1 \\ y = x^3 \end{cases}$$

La matrice de contrôlabilité est donc:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son rang est 2, et le système n'est donc pas contrôlable au sens usuel.

Cherchons alors les éléments de la clôture algébrique. Dénotons par  $z$  les éléments de  $K'$ .  $z$  vérifie alors :

$$\begin{cases} z = h(u, \dot{u}, y, \dot{y}, \ddot{y}) \\ \dot{z} = \Phi(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{\partial h}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial h}{\partial \dot{y}} \ddot{y} + \frac{\partial h}{\partial \ddot{y}} \dddot{y} = \Phi(h(u, \dot{u}, y, \dot{y}, \ddot{y}))$$

On en déduit donc:  $\frac{\partial h}{\partial \dot{u}} = 0$ ,  $\frac{\partial h}{\partial \ddot{y}} = 0 \Rightarrow z = h(u, y, \dot{y})$

On dérive de nouveau et on obtient:

$$\dot{z} = \frac{\partial h}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial h}{\partial \dot{y}} \ddot{y} = \left( \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial \dot{y}} \right) \dot{u} + \frac{\partial h}{\partial y} \dot{y} = \Phi(h(u, y, \dot{y}))$$

On en tire:

$$\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial h}{\partial \dot{y}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial h}{\partial \dot{y}}$$

Ainsi on a  $z = h(u, y, \dot{y}) = g(u + \dot{y}, y)$

Montrons maintenant que  $h$  ne dépend pas de  $y$ , en effet, en posant  $v = u + \dot{y}$ , on a:

$$\frac{\partial g(v, y)}{\partial y} \dot{y} = \Phi(g(v, y))$$

Alors, en dérivant une fois par rapport à  $\dot{y}$  et à  $u$ , on obtient:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v} \dot{y} + \frac{\partial g}{\partial y} = \Phi' \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial v} \dot{y} = \Phi' \frac{\partial g}{\partial v} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

On en conclut que  $z = f(u + \dot{y})$ , et on trouve la clôture différentielle algébrique  $K' = K \langle \dot{\eta} + \xi \rangle$ .

## II.7 OBSERVABILITE GRACE A UNE SEULE SORTIE

**PROBLEME:** Etant donné un système avec  $m$  entrées et  $p$  sorties, on peut se poser la question suivante: Existe-t-il un système équivalent avec une seule sortie dont la mesure peut redonner les autres sorties?

La réponse à cette question est positive, sous les conditions du théorème d'algèbre différentielle (de l'élément primitif) suivant:

**Théorème II.7.1 (Kolchin p 103)** *Soit  $K$  un corps différentiel muni de  $n$  dérivations indépendantes. Alors toute extension différentiellement algébrique  $L/K$  (c'est à dire telle que  $\text{diff trd}L/K = 0$ ) générée par un nombre fini d'éléments, peut être engendrée par un seul élément appelé élément primitif.*

**Corollaire II.7.2** *Tout système de contrôle aux dérivées partielles algébriques tel que  $\text{diff trd}N/L = 0$  peut être observé par une seule sortie, à condition d'élargir si nécessaire le corps de base.*

**Exemple :** Si on considère le système suivant:

$$\begin{aligned} y_x^1 + y^2 - u &= 0 \\ y_x^2 + y^1 - u &= 0 \end{aligned}$$

Si on pose  $z = y^1$  alors on peut récupérer  $y^2$  comme fonction rationnelle différentielle de  $z$ .

**Contre-Exemple :**  $K = \mathbb{Q}$ .  $\dot{y}^1 = y^1, \dot{y}^2 = y^2$

Il faut utiliser  $\mathbb{Q}(x)$  au lieu de  $\mathbb{Q}$  et considérer  $z = y^2 + xy^1$ , d'où  $\dot{z} = y^2 + (1+x)y^1 \Rightarrow y^1 = \dot{z} - z, y^2 = (1+x)z - x\dot{z}$ .

## II.8 CONTROLABILITE GRACE A UNE SEULE ENTREE

Dans cette section nous allons donner une signification algébrique à la contrôlabilité d'un système grâce à une entrée par l'intermédiaire de l'algèbre différentielle tout en améliorant le résultat connu suivant ([75, 37]).

**Théorème II.8.1** *Si  $A$  est cyclique et  $(A, B)$  est contrôlable (avec  $\dot{y} = Ay + Bu$ ), alors il existe un vecteur  $b$  combinaison linéaire des colonnes de  $B$  tel que  $(A, b)$  soit contrôlable.*

**Remarque :** On remarquera que ce résultat est purement formel puisque, si l'on écrit  $\dot{y} = Ay + bv$ , en fait la nouvelle entrée considérée  $v$  n'est pas déterminé par l'entrée donnée  $u$ , qui devient paramétrée par  $v$ . Au contraire, nous allons, sous les mêmes hypothèses, ramener le système de contrôle à un système mono-entrée/mono-sortie dans lequel la nouvelle ne dépend que des entrées données. Ce résultat nouveau montre donc l'importance de du concept d'élément primitif en théorie du contrôle même dans le cadre non linéaire Nous allons maintenant introduire un théorème qui va nous servir par la suite (voir J.P.Lafon *Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative* pour le cadre algébrique et Kolchin [39] pour le cas différentiel).

**Théorème II.8.2 (Luröth)** *Si  $u^1, \dots, u^m$  sont différentiellement transcendants sur  $K$  et  $L$  est un corps différentiel intermédiaire entre  $K$  et  $K \langle u^1, \dots, u^m \rangle$  tel que  $\text{difftrd } L/K = 1$ , alors il existe  $v \in L$  tel que  $L = K \langle v \rangle$ .*

Le théorème suivant constitue l'application du théorème de Luröth à la théorie du contrôle.

**Théorème II.8.3** *Tout système de contrôle admettant un élément primitif peut se ramener à un système mono-entrée/mono-sortie.*

**Démonstration :** Nous allons ici donner une esquisse de la démonstration.

1.  $A$  cyclique  $\Rightarrow \exists \tilde{w}$  tel que  $\tilde{w}A, \tilde{w}A^2, \dots, \tilde{w}A^{n-1}$  soient indépendants.  
Il existe donc un élément primitif  $\xi = \tilde{w}y$ , vérifiant:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \tilde{w}Ay & + & \tilde{w}Bu \\ \ddot{\xi} &= \tilde{w}A^2y & + & \tilde{w}ABu + \tilde{w}B\dot{u} \\ \vdots &= \vdots & + & \vdots \\ \xi^{(n-1)} &= \tilde{w}A^{(n-1)}y & + & \dots + \dots \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\xi^{(n)} = \text{fct}(y, \dots, u, \dot{u}, \dots, u^{n-1})$ . De plus quand le système est linéaire,  $\xi$  vérifie l'équation suivante:

$$\xi^{(n)} + c_{n-1}\xi^{(n-1)} + \dots + c_0\xi = \sum_{i=0}^{n-1} d_i u^{(i)}$$

où les coefficients  $c_i$  et  $d_i$  sont constants.

2.  $(A, B)$  contrôlable  $\Rightarrow \xi$  transcendant sur  $K$ .  
Alors posons  $H = K \langle \xi \rangle \cup K \langle u \rangle$  qui est de donc de degré de transcendance différentiel égale à 1. Donc d'après le théorème de Luröth il existe  $v \in K \langle u \rangle$  tel que  $H = K \langle v \rangle$ . Et  $v$  est transcendant de degré 1 sur  $K$ . Et le système mono-entrée défini par l'extension  $K \langle \xi \rangle / K$  est donc contrôlable.
3. Description: dans le cas linéaire on prendra pour nouvelle entrée  $v = \sum_{i=0}^{n-1} d_i u^{(i)}$ . Et on aura donc un système de contrôle mono-entrée/mono-sortie (sortie  $\xi$ ) contrôlable.

◇

## II.9 INVERSIBILITE

Pour l'inversibilité, il y a eu de distinguer deux notions d'inversibilité pour les systèmes non carrés (nombre d'entrées  $\neq$  nombre de sorties): l'inversibilité à gauche et inversibilité à droite.

### II.9.1 INVERSIBILITE A GAUCHE

Pour l'inversibilité à gauche, nous sommes confrontés à deux définitions qui sont les suivantes :

**Définition II.9.1** *On dit qu'un système  $\Sigma$  est inversible à gauche, si et seulement si, on peut récupérer l'entrée comme fonction rationnelle des sorties et de leurs dérivées.*

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^2 \\ \dot{x}^2 = u^1 x^1 \\ \dot{x}^3 = u^1 x^2 \\ y^1 = x^2 \\ y^2 = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(\dot{y}^1/u^1) = u^2 \\ \dot{y}^2 = u^1 y^1 \end{cases} \quad \text{relation entrée/sortie directe.}$$

$$\text{d'où nous en tirons } \begin{cases} \dot{y}^1 = \dot{x}^2 = u^1 x^1 \\ \dot{y}^2 = \dot{x}^3 = u^1 x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^1 = \frac{\dot{y}^2}{y^1} \\ u^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^1}{u^1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}^1 y^1}{y^2}\right) \end{cases}$$

Ce système est donc inversible à gauche au sens de cette définition et de celle qui va suivre. (voir M.Fliess: Some remarks on nonlinear invertibility and dynamic state-feedback.) L'interprétation algébrique de cette définition est la suivante:

**Définition II.9.2** *Un système de contrôle aux dérivées partielles algébrique est inversible à gauche si  $L \subset M$ .*

Dans le cas classique (une seule dérivation), on en tire les conséquences suivantes:

**Remarque :**  $K \subset L \subset M = N$  et donc

$$\text{diff trd}M/K = \text{diff trd}N/K = \text{diff trd}N/L + \text{diff trd}L/K = m$$

et par suite  $\text{diff trd}N/M = 0$

Ce résultat peut conduire à la définition suivante qui est adoptée plus ou moins explicitement par plusieurs auteurs (Moog, Fliess).



**Définition II.9.3** Un système de contrôle est inversible à gauche si et seulement si chaque entrée est différentiellement algébrique sur les sorties.

**Remarque :** On a maintenant  $M \subset N$  ce qui entraîne:

$$\text{diff trd}N/K = \text{diff trd}N/L + \text{diff trd}L/K = 0 + m = m = \text{diff trd}N/M + \text{diff trd}M/K.$$

Ainsi la première définition implique cette seconde définition.

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = 1 \\ y^1 = x^2 \\ y^2 = x^2 u^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}^1 = u^1 \\ \frac{d}{dt}(y^2/u^2) = 1 \end{cases}$$

$$d'où \begin{cases} u^1 = \dot{y}^1 \\ u^2 + \frac{\dot{u}^2}{u^2} y^2 = \dot{y}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u^1 - \dot{y}^1 = 0 \\ \dot{u}^2 y^2 - \dot{y}^2 u^2 + (u^2)^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système n'est pas inversible à gauche au sens de la première définition, puisqu'on ne peut récupérer  $u^2$  comme fonction différentielle rationnelle de la sortie, mais cependant il l'est au sens de la deuxième définition car chaque entrée est solution implicite d'une équation différentielle à coefficient dans  $K \langle y^1, y^2 \rangle$ . (voir référence: M.Fliess [16]).

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = u^2 x^1 \\ \dot{x}^3 = u^2 x^2 \\ y^1 = x^2 \\ y^2 = x^3 \end{cases}$$

En effet si  $u^2 = 0 \implies \dot{y}^i = 0$  pour  $i = 1, 2 \forall u^1 \implies y^i = \text{cte}$  pour  $i = 1, 2 \forall u^1$ , donc le système n'est pas inversible à gauche au sens de Hirschorn [31, 32] (injectivité) mais par contre on a :

$$\begin{cases} \dot{y}^2 = u^2 x^2 = u^2 y^1 \implies u^2 = \frac{\dot{y}^2}{y^1} \\ x^1 = \frac{\dot{x}^2}{u^2} = \frac{\dot{y}^1}{u^2} \implies u^1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}^1 y^1}{y^2} \right) \end{cases}$$

On peut donc récupérer  $u^1$  et  $u^2$  comme fonctions différentielles des sorties  $y^1$  et  $y^2$ , donc il est inversible à gauche au sens des deux autres définitions précédentes.

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = x^3 \\ \dot{x}^3 = x^1 u^1 \\ \dot{x}^4 = u^2 \\ y^1 = x^1 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = \dot{x}^2 = x^3 \end{cases}$$

$$\ddot{y}^2 = \dot{x}^3 = x^1 u^1 = y^1 \dot{y}^1$$

On ne peut donc récupérer  $u^2$  à partir de  $y^1$  et  $y^2$ .

Voilà donc un système qui n'est pas inversible à gauche au sens des trois définitions.

## II.9.2 INVERSIBILITE A DROITE

Ici aussi, nous allons énoncer deux définitions différentes, concernant l'inversibilité à droite, que nous verrons être liée à la notion de découplage par bouclage dynamique, d'où l'importance qu'a prise ces dernières années cette notion.

D'après plusieurs auteurs (Fliess[15, 16, 17], Moog [35], Descusse[7], Nijmeijer[31, 32]) on peut poser:

**Définition II.9.4** *Un système est inversible à droite si et seulement s'il n'existe pas de relations (équations différentielles ou EDP) entre les sorties seules, indépendantes des entrées.*

(Référence voir [17])

L'interprétation formelle permettant de comprendre cette définition est la suivante:

**Critère II.9.5** *Le système est inversible à droite au sens de cette première définition si et seulement si*

$$\rho = \text{diff trd} M/K = p = \text{nombre de sorties}$$

**Remarque :** Cela signifie que toutes les sorties sont différentiellement transcendantes sur le corps  $K$ . Cependant par dualité d'échange entrée/sortie avec la définition d'inversibilité à gauche, on peut poser:

**Définition II.9.6** *Un système est inversible à droite si et seulement si on peut récupérer les sorties comme fonctions différentielles rationnelles des entrées.*

(Référence voir [53])

L'interprétation formelle permettant de comprendre cette définition est la suivante:

**Critère II.9.7** *Le système est inversible à droite au sens de cette seconde définition si et seulement si  $M \subset L$ .*

**Remarque :** On a donc:  $K \subset M \subset L = N$

La seconde définition implique la première par comparaison des degrés de transcendance différentielle.

**Remarque :** On peut noter donc qu'un système ayant plus de sorties que d'entrées ( $m < p$ ) ne peut être inversible à droite, car sinon on aurait  $\rho = \text{diff trd}M/K = p > \text{diff trd}N/K = \text{diff trd}L/K = m$  ce qui est impossible [46].

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = x^4 + u^2 \\ \dot{x}^3 = x^3 u^1 + u^2 \\ \dot{x}^4 = u^3 \\ y^1 = x^1 \\ y^2 = x^2 - x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = x^4 - x^3 u^1 \\ \dot{y}^2 = u^3 - u^1 u^2 - x^3 (\dot{u}^1 + (u^1)^2) \end{cases}$$

Ici, on ne peut pas obtenir de relations entre les sorties indépendantes de l'état et des entrées donc il est inversible à droite au sens des deux définitions.

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = u^1 \\ \dot{x}^2 = u^2 \\ \dot{x}^3 = x^2 u^1 \\ \dot{x}^4 = u^3 \\ y^1 = x^1 \\ y^2 = x^2 \\ y^3 = x^3 \end{cases}$$

En dérivant, on obtient les relations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{y}^1 = u^1 \\ \dot{y}^2 = u^2 \\ \dot{y}^3 = x^2 u^1 \end{cases}$$

d'où  $\dot{y}^3 = y^2 \dot{y}^1 \implies \dot{y}^3 - y^2 \dot{y}^1 = 0$  ceci nous donne donc une *relation entre les sorties seules*, donc ce système est non inversible à droite au sens des deux définitions, car si les  $y$  étaient fonctions des  $u$ , les  $u$  seraient différentiellement dépendants entre eux .

**Remarque :** L'inversibilité à droite joue un rôle important dans le découplage des systèmes de contrôle par bouclage dynamique (voir Fliess, Moog, Descusse, Nijmeijer [44, 45]) et peut être étendue telle quelle aux systèmes de contrôles aux dérivées partielles. On obtient:

**Théorème II.9.8** *Un système de contrôle EDP inversible à droite au sens de la première définition est découplable par bouclage dynamique sur l'entrée.*

**Exemple :** On considère maintenant le système de contrôle aux EDP, avec deux variables indépendantes  $(x^1, x^2)$ , deux entrées  $(u^1, u^2)$  et deux sorties  $(y^1, y^2)$ .

$$\begin{cases} y_{11}^1 + y_{12}^2 - y^2 = u^1 \\ y_{12}^1 + y_{22}^2 + y^1 = u^2 \end{cases} \iff \begin{cases} u_{22}^1 - u_{12}^2 + u^2 = y^1 \\ u_{11}^2 - u_{12}^1 - u^1 = y^2 \end{cases}$$

Ce système est inversible à droite et à gauche. D'après la forme même des systèmes de la théorie du contrôle classique (et en particulier la forme canonique) de telles situations ne sont pas possibles classiquement, ce qui explique pourquoi elles n'ont pas été considérées en général.

En conclusion, la notion d'inversibilité (à droite, à gauche) doit être reconsidérée dans le cadre de l'algèbre différentielle.

En particulier on doit distinguer entre l'étude de l'inversibilité des opérateurs (définition forte) et celle de leurs symboles (définition faible).

## II.10 BOUCLAGE

Le bouclage est une notion clé de la théorie du contrôle classique, mais cependant elle reste vague. Plusieurs définitions ont déjà été données grâce à l'algèbre différentielle (M.Fliess, J.F.Pommaret). Notre propos, ici, est d'étendre ces définitions aux dérivées partielles et de les expliciter en les illustrant par des exemples concrets.

**Définition II.10.1** *Le bouclage est une transformation sur les entrées et/ou les sorties et leurs dérivées, qui permet au système d'avoir certaines propriétés qu'il ne possédait pas avant (linéarisation, découplage). On demande en général, que cette transformation qui intervient habituellement dans les problèmes de synthèse, soit inversible.*

Afin d'explicitier la définition en algèbre différentielle que nous allons donner de cette notion, nous allons préciser certaines notions sur des exemples non-différentiels.

Notre problème est de distinguer tout d'abord entre isomorphismes et automorphismes.

**Exemple :** Considérons l'application de  $L/K$  ou  $K = \mathbb{Q}$ ,  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  qui laisse invariant  $\mathbb{Q}$  et transforme  $\sqrt{3}$  en  $-\sqrt{3}$ .

On a donc le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & y^2 - 3 & \longrightarrow & y^2 - 3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K[y] & \longrightarrow & K[y] & & \\
 & & y & \longrightarrow & -y & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & K[\eta] & \longrightarrow & K[\eta] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \eta & \longrightarrow & -\eta & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Ici  $K[\eta]$  est le corps résiduel et de plus on a  $K[\eta] = K[-\eta] = L$ .

En posant  $\text{aut}(L/K) = \{\varphi : L \rightarrow L, \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \forall a, b \in L; \varphi(a) = a, \forall a \in K\}$ , on a ici un exemple de transformations du groupe  $\text{aut}(L/K)$  des automorphismes de  $L$  préservant  $K$ .

Mais souvent cela n'est pas le cas, comme le montre l'exemple suivant où on a juste un isomorphisme de  $L$  préservant  $K$ , c'est-à-dire un élément de  $\text{iso}(L/K)$ .

**Exemple :** Ici on considère la transformation qui laisse inchangé  $K = \mathbb{Q}$  et transforme  $\sqrt{3}$  en  $2\sqrt{3}$ .

On a donc le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & z^2 - 12 & \longrightarrow & 4(y^2 - 3) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & K[z] & \longrightarrow & K[y] & & \\
 & & z & \longrightarrow & 2y & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \searrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & K[\xi] & \longrightarrow & K[\eta] & \longrightarrow & 0 \\
 & & \xi & \longrightarrow & 2\eta & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 
 \end{array}$$

Ici on a un isomorphisme  $K[z] \rightarrow L$  dont le noyau est l'idéal par  $z^2 - 12$  mais maintenant l'image de  $\xi = \sqrt{12}$  est devenue  $2\sqrt{3} \in L$ , ce qui donne l'impression d'avoir à faire à un automorphisme de  $L/K$ , mais ce n'est pas vrai car l'image de  $(\sqrt{3})^2 - 3 = 0$  serait  $(2\sqrt{3})^2 - 3 = 9 \neq 0$ .

**Définition II.10.2** On appelle bouclage dynamique un isomorphisme différentiel préservant  $K$  et transformant  $L$  (quand c'est un bouclage sur les entrées) en un autre corps  $L'$  isomorphe, et éventuellement  $M$  en  $M'$  et  $N$  en  $N'$  avec  $M$  isomorphe à  $M'$  et  $N$  isomorphe à  $N'$ .

Dans le cas où  $L'$  ou  $M'$  sont encore dans  $N$  on dira que le bouclage des entrées est admissible par rapport à  $N$  (voir Kaplansky, p15).

**Remarque :**

1. Les notions ci-dessus peuvent être utilisées soit pour les entrées soit pour les sorties.
2. Le fait que le bouclage soit inversible, permet de conserver les mêmes degrés de transcendance différentielle entre corps différentiels correspondants.
3. Il est possible d'envisager des transformations qui ne conservent pas l'extension  $N$ , mais dans ce cas la difficulté réside dans le fait que dans l'algèbre ordinaire, il existe

un corps  $\mathbb{C}$  contenant tous les nombres algébriques, alors que dans le cas différentiel cela n'est pas possible en pratique (concept d'extension universelle).

**Remarque :** Contrairement à tous les exemples que l'on rencontre en général, le morphisme central peut ne pas être un isomorphisme bien que le morphisme induit entre les anneaux résiduels puisse être un isomorphisme. On considérera par exemple  $z = y^2$ , avec les équations correspondantes  $z^2 - 8z + 4 = 0$ ,  $y^2 - 2y - 2 = 0$  avec  $\eta = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow \zeta = 4 + 2\sqrt{3} = 2\eta + 2$  inversible. Dans le cas différentiel (ordinaire ou partiel), il suffit d'ajouter le mot "différentiel" devant les concepts que nous venons d'introduire et de supposer que  $\varphi : L \rightarrow L$  commute avec les  $d_i$  (et  $\partial_i$ ).

Nous allons traiter en détail le système suivant pour montrer comment on peut représenter graphiquement un bouclage dynamique et de telle façon que l'énoncé puisse être applicable au cas partiel sans changement.

**Exemple :**

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = x^1 u^1 \\ \dot{x}^2 = x^3 u^1 \\ \dot{x}^3 = x^1 u^2 \\ y^1 = x^1 \\ y^2 = x^2 \end{cases}$$

La relation entrée/sortie est:

$$\dot{y}^1 - u^1 y^1 = 0, \quad \ddot{y}^2 - \left(\frac{\dot{u}^1}{u^1}\right) \dot{y}^2 - u^1 u^2 y^1 = 0.$$

On en déduit que  $y^1$  et  $y^2$  sont transcendants sur  $K = \mathbb{Q}$

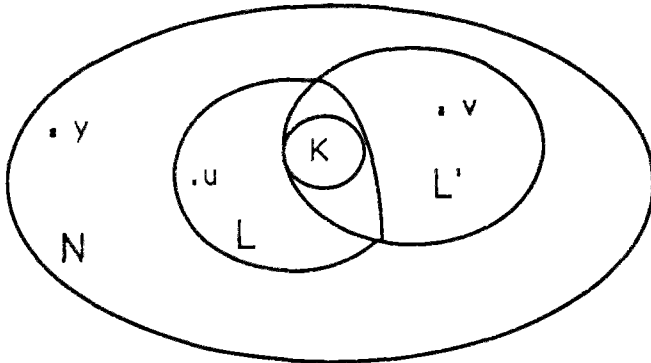
et que  $\text{diff trd } L/K = \text{diff trd } M/K = 2$  avec  $L = K \langle u^1, u^2 \rangle$  et  $M = K \langle y^1, y^2 \rangle$ .

Par suite  $v^1 = \dot{y}^1$  et  $v^2 = \left(\frac{\dot{u}^1}{u^1}\right) \dot{y}^2 - u^1 u^2 y^1$  sont différentiellement transcendants sur  $K$  (ref. FLIESS) et on a donc linéarisé le système par bouclage dynamique pour obtenir  $\dot{y}^1 - v^1 = 0$ ,  $\ddot{y}^2 - v^2 = 0$ . Le morphisme  $K\{v, y\} \rightarrow K\{u, y\}$ : obtenu en posant  $v^1 = \dot{y}^1$ ,  $v^2 = \left(\frac{\dot{u}^1}{u^1}\right) \dot{y}^2 - u^1 u^2 y^1$  n'est pas un isomorphisme différentiel car on ne peut pas récupérer  $u^1$  et  $u^2$  à partir de  $v^1$ ,  $v^2$ ,  $y^1$ ,  $y^2$  et de leurs dérivées. Cependant tenant compte de  $\dot{y}^1 = u^1 y^1$ , on a alors

$$\begin{cases} u^1 = \frac{v^1}{y^1} \\ u^2 = \left(v^2 - (y^1 \dot{y}^2 / v^2) \frac{d}{dt}(v^1 / y^1)\right) / v^1 \end{cases}$$

et on obtient un isomorphisme différentiel de  $K \langle u \rangle$  sur  $K \langle v \rangle$  compatible avec  $N$  qui comprend les images par évaluation de  $u$  et  $v$ .

Ceci correspond au dessin suivant:



Par contre posant directement  $v^1 = u^1 y^1$ , on obtiendrait  $u^1 = \frac{v^1}{y^1}$ . L'intervention des fractions rationnelles pour inverser montre l'intérêt de l'usage de corps différentiels plutôt que d'anneaux différentiels.

**Remarque :** Le découplage par bouclage dynamique ainsi obtenu suivant une méthode préconisée par M. Fliess, peut donc être étendu au cas des dérivées partielles à condition de supposer que  $\text{diff trd } N/M = 0$ , ce qui entraîne nécessairement qu'il y a autant d'entrées libres que de sorties libres.

**Remarque :** En géométrie différentielle, les bouclages dynamiques ont été considérés comme des transformations entre les jets d'ordre 1 (et non plus entre les indéterminées) que l'on étend jusqu'aux jets d'ordre infini. (voir A.M. Vinogradov, ...).

## II.11 CAUSALITE

La causalité semble une notion très essentielle dans la définition des systèmes de contrôle classique mais cependant sa définition ou les critères permettant de la tester sont presque inexistantes.

Sa généralisation au cas non-linéaire et aux EDP est donc très difficile.

Nous allons essayer de donner une approche et des critères permettant de la tester dans le cadre de la théorie du contrôle aux EDP, grâce à l'algèbre différentielle.

Pour cette généralisation, nous nous basons sur la définition donnée par Willems [73,?], que voici:

1. La première condition imposée est que les entrées doivent être *libres*: "elles ne vérifient aucune relation algébrique ou différentielle entre elles".
2. Comme dans le cas classique,  $\text{diff trd } N/L = 0$ , cela signifie donc que les entrées forment une base de transcendance différentielle de  $N/K$ . Ce point de vue a été repris par Fliess récemment ().  
On peut donc généraliser cette condition au cas des systèmes de contrôle aux EDP.

Cependant l'exemple très simple suivant nous montrera que cette définition n'est certainement pas suffisante.

**Exemple :**  $\dot{y} + u = 0$ .  $u$  ou  $y$  forment séparément une base (à 1 élément) de transcendance différentielle de  $N/K$  et tout le problème est de prendre  $u$  et non  $y$ . Dans le cas linéaire classique J.Willems a proposé une condition supplémentaire de choix que l'on obtient de la façon suivante:

Soit  $P(\partial_x)u + Q(\partial_x)y$  la forme résolue du système de contrôle obtenue en utilisant des matrices à coefficients opérateurs différentiels. Remplaçant  $\partial_x$  par l'indéterminé  $s$  de la transformée de Laplace, on obtient donc 2 matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  auxquelles on demandera de satisfaire la condition suivante:

$$\det Q(s) \neq 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} Q(s)^{-1}P(s) < \infty$$

Cette définition nécessite deux remarques:

1. Elle est inapplicable aux systèmes non-linéaires.
2. Elle prend en compte toutes les dérivations apparaissant dans le système.

Notre but maintenant est de montrer qu'un examen attentif de l'intégrabilité formelle permet de corriger la deuxième remarque tout en traçant la voie pour répondre à la première.

Pour cela nous considérerons un exemple simple:

**Exemple :**  $y_{xx}^1 + y_x^1 + u_x^1 = 0$ ,  $y_x^2 + u^2 = 0$ .

Un examen simple de la matrice de transfert montre que le système est causal d'après la définition ci-dessus. Cependant, il ne l'est plus si on restreint la matrice  $Q(s)$  aux dérivées du plus grand ordre, car elle cesse d'être inversible. Mais on remarque aussi que le système n'est pas formellement intégrable.

Le système formellement intégrable correspondant est alors:

$$y_{xx}^1 + y_x^1 + u_x^1 = 0, \quad y_{xx}^2 + u_x^2 = 0, \quad y_x^2 + u^2 = 0.$$

On remarque alors simplement que la restriction des nouvelles matrices  $P(s)$  et  $Q(s)$  aux dérivées d'ordre 2 *seulement* permet de vérifier la causalité au même titre que précédemment.

D'après l'exemple précédent, la causalité peut donc être étudiée seulement sur les jets d'ordre maximum du système formellement intégrable correspondant. Elle revient donc à étudier les propriétés des matrices caractéristiques et en particulier *seule subsiste la condition  $Q(s)$  inversible*.

Dans le cas général, on rend donc le système formellement intégrable par rapport à l'entrée et à la sortie. On détermine alors la matrice caractéristique dans le cas d'un système linéaire où la matrice permettant de calculer l'indice d'ordre  $n$  dans le cas non linéaire. La causalité est alors généralisée par la définition suivante:



**Définition II.11.1** *Un système de contrôle aux dérivées partielles formellement intégrable est dit causal si la restriction de la matrice précédente aux sorties est de rang maximum.*

**Remarque :** On en déduit dans le cas algébrique que  $\text{diff trd } N/L = 0$ . Ce qui montre alors que pour que le système, rendu formellement intégrable par rapport aux sorties seulement, soit causal il faut que son caractère d'indice  $n$  soit nul. On en déduit alors que le seul nombre intrinsèque de  $N/L$  sera le plus petit caractère non nul dans ces conditions.

**Remarque :** La définition précédente montre donc que toutes les bases de transcendance de  $N/K$  ne sont pas équivalentes du point de vue de la causalité et sert donc à préciser ce choix. Ainsi, pour le système très simple  $y_x + u = 0$ ,  $y$  et  $u$  peuvent être choisis comme bases de transcendance différentielle alors qu'avec la définition précédente on doit retenir  $u$  seulement.

D'une façon plus générale, par contraste avec le cas ordinaire, le problème dans le cas partiel est de calculer les caractères (polynômes de Hilbert) des différentes combinaisons possibles selon que l'on considère entrée+sortie, entrée/sortie, sortie/entrée, entrée ou sortie.

Dans le cas algébrique cela revient à connaître les propriétés des extensions corespondantes  $N/K$ ,  $N/L$ ,  $N/M$ ,  $L/K$  ou  $M/K$ .

Pour faciliter la compréhension de ce problème très technique, nous allons résumer et examiner ici sous forme de tableau les différents cas qui peuvent se présenter en les illustrant séparément.

symbole	non-surjective	surjective	
		injective	non-injective
système	sur-déterminé	déterminé	sous-déterminé
$\text{trd } L/K < \infty$	oui (Opérateur de Killing)	oui $(y_{xx}) = 0$	0
$\text{diff trd } L/K = 0$	+ oui $(x^1, x^2, x^3)$ $y_1 = 0, y_2 = 0$	+ (Cauchy-Riemann)	0
$\text{trd } L/K = \infty$	oui $(y_1 + z_1 = 0)$  $(y_2 + z_2 = 0)$	0	oui Divergence (divergence)
$\text{diff trd } L/K > 0$			

**Exemple :[Killing]**

$\partial_i \xi^j + \partial_j \xi^i = 0$ . En effet ce système est formellement intégrable car il n'y a que des équations du premier ordre ne contenant pas de jets d'ordre 0.

De plus, la matrice caractéristique, est de rang maximum car elle contient la sous-matrice diagonale  $(2\chi_1, \dots, 2\chi_n)$ .

On a  $\partial_{ij} \xi^k = 0, \forall i, j, k$ ; donc toutes les dérivées d'ordre deux sont fixées d'où  $\text{trd} L/K < \infty$  et tous les caractères sont nuls.

**Exemple :**

$$n = 2, m = 2, \partial_1 y^1 + \partial_2 y^2 = 0$$

Donc le symbole ici est  $(\chi^1, \chi^2)$  et le rang est alors maximum ie 1.

Par conséquent  $\alpha_1^2 = \text{diff trd} L/K = 1$ .

**Exemple :**

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Le symbole est le suivant

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \det A = \lambda^2 + \mu^2 \geq 0$$

Donc la matrice caractéristique est inversible d'où l'opérateur est déterminé.

On va montrer que  $\alpha_1^2 = \text{diff trd} L/K = 0$ , car toute observable est liée.

En effet, on a:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

On en tire que  $\Delta Y = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0, \Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0$ .

Prenons une observable  $Z = X + yY$ , alors on a:

$$\begin{cases} \partial_x Z = \partial_x X + y \partial_x Y \\ \partial_y Z = \partial_y X + y \partial_y Y + Y \end{cases}$$

$$\text{Ensuite} \begin{cases} \partial_{xx} Z = \partial_{xx} X + y \partial_{xx} Y \\ \partial_{yy} Z = \partial_{yy} X + y \partial_{yy} Y + 2 \partial_y Y \end{cases}$$

On obtient donc  $\Delta Z = 2 \partial_y Y$

$$\text{or} \begin{cases} \partial_x Z = \partial_x X - y \partial_y X \\ \partial_y Z = \partial_y X + y \partial_x X + Y \end{cases}$$

On obtient de même  $\Delta Z = 2 \partial_x X$

Donc toute observable est contrainte et  $\text{diff trd} L/K = 0$ , mais cependant cet opérateur a une infinité de solutions donc  $\text{trd} L/K = \infty$ .

## II.12 POURSUITE DE MODELE

Nous allons essayer de donner une formulation du problème de la poursuite de modèle grâce à l'algèbre différentielle. Nous rattacherons ce concept à la théorie de l'élimination différentielle, tout en l'étendant aux dérivées partielles.

### POSITION DU PROBLEME

Le problème est le suivant : étant donné un premier système de contrôle, est-il possible de trouver un second système *compatible avec celui-ci* tel que le système composé résultant soit un *système modèle* choisi.

Suivant que la compatibilité se pose du côté des entrées (resp. des sorties) du premier système, on parlera de poursuite de modèle à gauche (resp. à droite).

Nous allons montrer que ce genre de problème est un exemple de situation aussi simple dans le cas algébrique qu'il est difficile à décrire dans le cas différentiel.

### FORMULATION :

Avec des notations spécifiques, le problème posé revient à ceci:

On part d'un système de contrôle  $L/K \rightarrow M/K$  défini par un idéal différentiel dans l'anneau différentiel  $L \otimes_K M$ . Pour être compatible le second système doit être de la forme  $M/K \rightarrow N/K$  (sortie du premier = entrée du second) défini par un idéal différentiel dans l'anneau différentiel  $M \otimes_K N$ . On peut injecter  $L \otimes_K M$  et  $M \otimes_K N$  dans  $L \otimes_K M \otimes_K N$  et étendre les idéaux correspondants.

Mais  $L \otimes_K N$  peut être considéré comme un sous-anneau différentiel de  $L \otimes_K M \otimes_K N$  auquel on peut restreindre l'idéal composé précédent, ce qui détermine alors le système de contrôle composé  $L/K \rightarrow N/K$ .

Il est déjà difficile de procéder à l'élimination de  $M/K$  et le problème de la détermination du second système de contrôle lorsqu'on connaît le premier et le composé (modèle choisi) est encore plus dure.

**Remarque :** Ce problème relève en effet de l'élimination différentielle et les algorithmes développés dans ce domaine sont très rares et c'est d'autant plus difficile quand il s'agit de systèmes EDP.

**Exemple :** On se donne ici un problème de poursuite de modèle à droite on prend pour entrées  $(u^1, u^2, u^3)$  et pour sorties  $(y^1, y^2)$  et  $(z^1, z^2)$ .

Et on considère les systèmes suivants:

$$(I) \begin{cases} \dot{y}^1 & = u^1 \\ u^2 \dot{y}^2 - \dot{u}^2 y^2 & = u^2 u^3 \end{cases} \quad \text{qui détermine} \quad L/K \rightarrow M/K$$

$$(II) \begin{cases} \dot{z}^1 & = u^1 \\ u^2 \dot{z}^2 - \dot{u}^2 z^2 & = u^2 u^3 \end{cases} \quad \text{qui détermine} \quad L/K \rightarrow N/K$$

Après identification différentielle, on peut trouver les équations

$$\begin{cases} \dot{z}^1 - y^1 = 0 \\ \dot{z}^2 - y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{qui détermine} \quad M/K \longrightarrow N/K$$

qui est le système recherché.

On pourra vérifier que le degré de transcendance du premier système est 2 tandis que celui du second est 3.

**Remarque :** On voit donc dans cet exemple que la condition  $\text{diff trd } N/K = \text{diff trd } L/K$  est une condition suffisante mais non nécessaire d'existence du corps  $M$  et donc de la solution du problème de poursuite à droite.

**Exemple :** On prend deux systèmes avec pour entrée  $u$  et des sorties  $(y^1, y^2)$  et  $(z^1, z^2)$  respectivement.

On se pose le problème de passer du système EDP non-linéaire  $y^2 \dot{y}^1 - u = 0$  au système linéaire modèle  $\dot{z}^1 - u = 0$  par une transformation sur les sorties.

Donc un problème de poursuite de modèle à droite  $\dot{z}^1 = y^2 \dot{y}^1$

## Partie III

# APPLICATIONS ALGEBRIQUES DIFFERENTIELLES:

Nous allons essayer de présenter ici quelques exemples de systèmes de théorie de contrôle aux EDP traitées grâce l'algèbre différentielle.

La variété des domaines d'application montrera l'utilité de ces méthodes.

### III.1 TOURBILLONS DE BENARD

On adopte les notations du chapitre précédent en les adaptant au cadre algébrique. On désigne par  $(x^1, x^2, x^3)$  des indéterminées différentielles formant le corps de base  $K = \mathbb{Q} \langle x^1, x^2, x^3 \rangle$  et cinq inconnues qui sont successivement la température  $\theta$ , la pression  $\pi$  et la vitesse  $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ . On pose  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  pour le champ de gravitation.

Le système est le suivant:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \vec{v} & = 0 \\ \Delta \vec{v} - \theta \vec{g} \vec{\nabla} \pi & = 0 \\ \Delta \theta - \vec{g} \cdot \vec{v} & = 0 \end{cases}$$

Ici chacune des variables  $(\theta, \pi, \vec{v}^1, \vec{v}^2, \vec{v}^3)$  vérifie une EDP indépendamment des autres variables. On a donc:

**Proposition III.1.1**  $\text{diff trd } N/K = 0 \Rightarrow \text{toute observable est contrainte.}$

**Démonstration :** On utilise le fait que  $\text{diff trd } N/K =$  caractère d'indice  $n$  du système de contrôle. Toute la difficulté est de prendre en compte le fait que le système de Boussinesq n'est pas formellement intégrable. Ceci est évident car toutes les variables sont solutions d'au moins une EDP indépendante des autres variables  $\diamond$

**Remarque :** La détermination du  $n^{\text{ième}}$  caractère permet d'éviter la détermination des EDP vérifiées par chacune des observables. Dans le cas présent, le fait que le système

soit linéaire à coefficients constants simplifie l'opération.  
Le problème suivant, non linéaire, est plus délicat à étudier.

## III.2 DYNAMIQUE DES CABLES

On reprend donc les mêmes équations (algébriques) des câbles et on les étudie grâce à l'algèbre différentielle.

Soit  $x^1 = s$  l'abscisse curviligne le long du câble,  $x^2 = t$  représentant le temps et  $w = (w_{ij})$  étant la métrique euclidienne standard sur  $\mathbf{R}^n$ .

Les équations aux dérivées partielles des vibrations des câbles sont les suivantes :

$$\begin{cases} \partial_{tt}y^k & = \partial_s(u\partial_s y^k) \\ w_{kl}\partial_s y^k \partial_s y^l & = 1 \end{cases}$$

Avec  $(y^1, \dots, y^m)$  et  $u$  décrivant respectivement la position et la tension.

Ce système n'est pas formellement intégrable mais cependant on peut montrer que:

**Proposition III.2.1**  $\text{diff trd } N/K = 0 \Rightarrow \text{toute observable est contrainte.}$

**Démonstration :**

Dans le cas  $m = 1$ , on peut directement la calculer. En effet on a:

$$\partial_{tt}y = \partial_s(u\partial_s y) \quad \text{avec} \quad \partial_s y = 1$$

$$\text{d'où} \quad \partial_{tt}y = \partial_s u \partial_s y + u \partial_{ss}y = \partial_s u \quad \partial_{ss}u = 0$$

Dans le cas général comme pour les équations des cellules de Bénard, on peut montrer que toute observable est contrainte en montrant que le déterminant caractéristique à l'ordre 2 que voici:

$$(\chi_1)^2(\chi_2 - \chi_1)^m$$

est de rang maximum donc le caractère  $\alpha_2^n = 0$ . Et ainsi  $\text{diff trd } N/K = 0$ .  $\diamond$

**Remarque :** Dans les deux cas ci-dessus  $N$  est à lui même la clôture différentielle de  $K$  dans  $N$ . Au sens de notre définition, ces systèmes de contrôle ne sont donc pas contrôlables.

## III.3 EQUATIONS DE MAXWELL

### III.3.1 1<sup>er</sup> Groupe

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0.$$

La matrice  $6 \times 4$  caractéristique est ici :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 & \chi_4 & 0 & 0 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 & 0 & \chi_4 & 0 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 & 0 & 0 & \chi_4 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \end{pmatrix}$$

Son rang générique est 3 car  $\sum_{i=1}^3 \chi_i \times i^{\text{ième ligne}} - \chi_4 4^{\text{ième ligne}} = 0$ .

Le degré de transcendance différentielle de l'extension engendrée par  $(\vec{E}, \vec{B})$  solutions génériques de l'équation de Maxwell est donc  $6 - 3 = 3$ .

Ceci ne contredit pas le fait qu'on peut poser  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$  puisque l'on sait qu'il est possible d'utiliser la jauge de Lorentz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0$  qui réduit à 3 le degré de transcendance différentielle de l'extension engendrée par  $(\vec{A}, V)$ .

### III.3.2 2<sup>ième</sup> Groupe

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\partial D}{\partial t} = \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho.$$

Le terme de source  $(\rho, \vec{j})$  est ici l'entrée alors que  $(\vec{H}, \vec{D})$  caractérise la sortie. La matrice caractéristique est alors :

$$\begin{pmatrix} -\chi_4 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ 0 & -\chi_4 & 0 & \vdots & \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ 0 & 0 & -\chi_4 & \vdots & -\chi_2 & \chi_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & & & \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et son rang est encore 3 comme précédemment (dualité bien connue entre  $(\vec{E}, \vec{B})$  et  $(\vec{H}, \vec{D})$  lorsque l'on utilise la présentation quadridimensionnelle de l'électromagnétisme). On peut extraire la matrice  $3 \times 3$  suivante relative à  $\vec{D}$ :

$$\begin{pmatrix} -\chi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\chi_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\chi_4 \end{pmatrix}$$

qui est de rang 3.

Avec les notations habituelles pour les systèmes de contrôle, on a  $K = \mathbb{Q}$  et  $\text{diff trd } N/L = 6 - 3 = 3$ .

Puisque le système est inversible à gauche ( $\vec{j}$  et  $\rho$  peuvent être exprimés comme fonctions différentielles de  $\vec{H}$  et  $\vec{D}$ ), on a  $M = N$  et  $\text{diff trd } N/K = 6$ .

Le système résolvant déterminant  $L$  n'est autre que la condition de compatibilité (conservation du courant):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

On a alors  $\text{diff trd } L/K = 4 - 1 = 3$  et on vérifie donc bien que  $\text{diff trd } N/K = \text{diff trd } N/L + \text{diff trd } L/K$ .

La détermination directe de  $\text{diff trd } N/K$  doit prendre en compte le fait que le 2<sup>ème</sup> groupe d'équations de Maxwell n'est pas formellement intégrable, du fait de la conservation du courant. En rajoutant la ligne correspondante on trouve bien encore  $\text{diff trd } N/K = (3 + 3 + 4) - (3 + 1) = 6$ .

**Exemple :** Un autre exemple intéressant lié au problème de Backlund est la correspondance de Cole-Hopf transformant l'équation de Burgers:

$$q_t + qq_x - \nu q_{xx} = 0$$

où  $\nu$  est la viscosité (on prendra  $\nu = 1$ ) avec de la chaleur:

$$p_t - \nu p_{xx} = 0$$

où  $\nu$  est la conductivité thermique (on prendra  $\nu = 1$ )

Dans cet exemple, on va montrer l'utilité du critère sur les idéaux premiers. Considérons les équations suivantes ou le système d'ordre 1 suivant:

$$\begin{cases} pq + 2p_x & = 0 \\ 4p_t + (2q_x - q^2)p & = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour symbole:

$$\begin{cases} U_x & = 0 \\ 4U_t + 2pV_x & = 0 \end{cases} \begin{array}{|c|c|} \hline t & x \\ \hline t & x \\ \hline \end{array}$$

avec  $(U, V)$  un vecteur tangent au point  $(p, q)$  dans le symbole.

Le symbole d'ordre 1 est involutif, et donc le système est formellement intégrable. Cependant le symbole d'ordre 2 suivant:

$$\begin{cases} U_{xt} & = 0 \\ 2pV_{xx} & = 0 \end{cases}$$

n'est pas une variété fibrée, car on a une chute de rang suivant que  $p = 0$  ou pas, et donc d'après le théorème sur les idéaux premiers, cet idéal différentiel n'est pas premier. En effet, on vérifie que  $p(q_t + qq_x - \nu q_{xx})$  appartient à l'idéal en dérivant la première équation par rapport à  $t$ , la seconde par rapport à  $x$  et en soustrayant.

On peut montrer aussi :

**Proposition III.3.1**  $\text{diff trd } N/K = 0$  et donc que toute observable est liée.



**Démonstration :** Par élimination différentielle, on peut montrer que  $p$  et  $q$  vérifient respectivement les équations aux EDP suivantes:

$$q_t + qq_x - q_{xx} = 0 \quad \text{et} \quad p_t - p_{xx} = 0$$

On peut le vérifier directement en calculant le caractère d'indice  $n$  de  $N/K$  qui est ici trivialement zéro. ◇

**CHAPITRE IV**

**THEORIE DES GROUPES ET**  
**CONTROLABILITE**



Le but de ce chapitre est de montrer, dans le cas des systèmes de contrôle classique, le lien existant entre le groupe d'invariance (sur l'état ou la sortie) déjà rencontré au chapitre *II* et la contrôlabilité (faible/forte). L'étude du groupe, même dans ce cas, fait appel à des résultats délicats de la théorie des systèmes EDP. Plusieurs exemples et contre-exemples illustrent ces propos. L'extension de ces méthodes à la théorie du contrôle aux dérivées partielles semble possible mais nous n'avons pas pour l'instant de résultats généraux. Cependant, nous montrons sur un exemple que, même dans le cas classique, les groupes d'invariance en jeu peuvent être des pseudogroupes de Lie, c'est-à-dire des groupes de transformations définies comme les solutions de systèmes EDP.

Plus précisément, soit un système de contrôle classique de la forme:

$$\dot{y} = f(y) + g(y)u.$$

Nous avons introduit au chapitre *I* les distributions de champs de vecteurs  $D$  (faible) et  $\Delta$  (forte) liées par la relation  $D = f + \Delta$ . Nous avons montré comment la contrôlabilité formelle était liée à la distribution  $\Delta$ . Dans ce chapitre, nous allons montrer, au contraire, que l'invariance du système en  $y$  est déterminé par  $D$ , ce qui prouve que la relation existant entre  $D$  et  $\Delta$  est une simple coïncidence puisque les concepts conduisant à ces deux distributions sont différents.

# Partie I

## INVARIANCE

Si on se donne un système de contrôle aux dérivées partielles  $\Phi^r(x, u_q, y_q) = 0$  d'ordre  $q$  entre les entrées  $u$  et les sorties  $y$ , on peut chercher toutes les transformations préservant  $x$  et  $u$ , de la forme  $\bar{y} = g(y)$  qui laissent invariant le système, c'est-à-dire telles que  $\Phi^r(x, u_q, \bar{y}_q) = 0$ .

Les deux exemples suivants, montrent comment étudier le problème en général et fournissent la réponse à la question de savoir quel type de groupe on rencontre.

**Exemple :**

$$(x, u, y) \quad y_{xxx} - uy_x = 0.$$

On a successivement:

$$\begin{cases} \bar{y}_x &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} y_x \\ \bar{y}_{xx} &= \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} (y_x)^2 + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} y_{xx} \\ \bar{y}_{xxx} &= \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial y^3} (y_x)^3 + 3 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} y_x y_{xx} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} y_{xxx}. \end{cases}$$

En remplaçant dans  $y_{xxx} - uy_x = 0$ , on obtient:

$$\frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial y^3} (y_x)^3 + 3 \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} y_x y_{xx} = 0$$

Comme ceci doit être vrai  $\forall y, y_x, y_{xx}$ , on doit avoir:

$$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \bar{y}}{\partial y^3} = 0$$

et ainsi  $\bar{y} = ay + b$  avec  $a, b$  constants. On trouve ici un groupe de Lie à 2 paramètres  $(a, b)$  agissant sur l'espace des sorties. L'exemple suivant montre que cette situation est très particulière, même en théorie du contrôle classique, comme nous le verrons plus loin sur un autre exemple.

**Exemple :**

$$(x, u, y^1, y^2) \quad y^2 y_x^1 - u = 0.$$

On a  $\bar{y}_x^i = \frac{\partial \bar{y}^i}{\partial y^k} y_x^k$  et donc:

$$\bar{y}^2 \left( \frac{\partial \bar{y}^1}{\partial y^1} y_x^1 + \frac{\partial \bar{y}^1}{\partial y^2} y_x^2 \right) - u = 0.$$

Comme ceci doit être vrai  $\forall u$ , par identification on obtient:  $\bar{y}^2 \frac{\partial \bar{y}^1}{\partial y^1} = y^2$ ,  $\bar{y}^2 \frac{\partial \bar{y}^1}{\partial y^2} = 0$ . Par chance, on peut intégrer ces équations et obtenir:

$$\bar{y}^1 = g(y^1), \quad \bar{y}^2 = y^2 / (\partial g / \partial y^1)$$

De plus, on remarque que le système EDP obtenu à partir de l'EDO donnée n'est pas formellement intégrable.

En effet, en dérivant la première équation par rapport à  $y^2$  et la seconde par rapport à  $y^1$ , on obtient:

$$\frac{\partial(\bar{y}^1, \bar{y}^2)}{\partial(y^1, y^2)} = 1$$

ce que l'on peut vérifier directement.

## I.1 PSEUDOGROUPES DE LIE

Ce qui précède montre donc que, d'où qu'on parte d'EDO ou d'EDP, l'important est de faire des éliminations convenables conduisant à un nouveau système d'EDP qui est tel que toutes les transformations solutions conservent le système de contrôle donné. On obtient donc:

**Définition I.1.1** *Un pseudogroupe de Lie est un groupe de transformations qui sont toutes solutions d'un même système EDP.*

*On dénotera par  $\Gamma \subset \text{aut}(Y)$  un tel pseudogroupe de Lie.*

Les pseudogroupes de Lie sont encore très mal connus des mathématiciens appliqués et à notre connaissance, n'ont pas encore été introduits de façon générale en théorie du contrôle.

Pour étudier plus facilement  $\Gamma$ , on est amené à considérer des transformations proches de l'identité, c'est-à-dire à poser  $\bar{y} = y + t\eta(y)$  puis à linéariser en  $t$  le système de définition. On peut alors montrer que le nouveau système linéaire définissant ce que l'on appelle les "*transformations infinitésimales*" est tel que si deux champs de vecteurs  $\eta^1$  et  $\eta^2$  sont solutions, le crochet  $[\eta^1, \eta^2]$  est aussi une solution.

On dénotera par  $\Theta \subset T(Y)$  une telle algèbre de Lie, le plus souvent de dimension infinie.

**Exemple :** L'exemple précédent donne le système linéaire involutif suivant:

$$y^2 \frac{\partial \eta^1}{\partial y^1} + \eta^2 = 0, \quad \frac{\partial \eta^1}{\partial y^2} = 0 \implies \frac{\partial \eta^1}{\partial y^1} + \frac{\partial \eta^1}{\partial y^2} = 0$$

que l'on peut intégrer aisément, ce qui n'est pas le cas en général.

## I.2 CENTRALISATEUR

Dans le cas général, on peut définir une autre algèbre de Lie:

**Définition I.2.1** On définit le centralisateur  $C(\Theta)$  par:

$$C(\Theta) = \{\zeta \in T \mid [\zeta, \eta] = 0, \forall \eta \in \Theta\}$$

On peut montrer () que si  $\Gamma$  est transitif, c'est à dire ne comporte pas d'équations de définitions d'ordre zéro, alors  $\dim C(\Theta) < \infty$ .

**Exemple :** Dans le cas précédent on obtient:

$$C(\Theta) = \{\lambda y^2 \partial / \partial y^2 \mid \lambda = cst\}$$

algèbre de Lie du groupe des homothéties sur  $y^2$ . Ainsi dans le cas général, un premier problème est de savoir si le groupe d'invariance est un pseudogroupe de Lie (infini) ou un groupe de Lie (fini). La réponse, délicate, est donnée par le théorème du chapitre II qui montre qu'un système formellement intégrable est de type fini si et seulement si sa variété caractéristique est réduite à zéro (On utilise pour ce critère le système linéarisé, après l'avoir rendu formellement intégrable).

## Partie II

# ALGEBRE DE CONTROLE

### II.1 CONTROLABILITE FAIBLE

Nous allons maintenant appliquer ces résultats au cas des systèmes de contrôle classiques de la forme  $y_x^k = f^l(\bar{y}) + g_r^l u^r$ , on en déduit alors les EDP suivantes:

$$\frac{\partial \bar{y}^l}{\partial y^k} f^k(y) = f^l(\bar{y}), \quad \frac{\partial \bar{y}^l}{\partial y^k} g_r^k(y) = g_r^l(\bar{y})$$

Comme précédemment, il est essentiel de noter que ce système n'est pas en général formellement intégrable.

Pour le voir, nous allons d'abord le linéariser en obtenant:

$$f^k(y) \frac{\partial \eta^l}{\partial y^k} + \eta^k \frac{\partial f^k(y)}{\partial y^k} = 0, \quad g_r^k(y) \frac{\partial \eta^l}{\partial y^k} + \eta^k \frac{\partial g_r^k(y)}{\partial y^k} = 0.$$

c'est-à-dire  $[\eta, f] = 0$ ,  $[\eta, g_r] = 0$ . Pour rendre le système formellement intégrable, on est obligé de saturer les crochets..., c'est-à-dire d'introduire la distribution  $D$  telle que  $[\eta, D] = 0$ . Si l'on note  $C$  l'algèbre de Lie de contrôle, c'est-à-dire la plus petite algèbre de Lie sur les constantes engendrées par  $(f, g_r)$ , on obtient alors  $C = C(\Theta)$ , ce qui montre l'origine très générale de ces concepts.

**Exemple :**

$$(x, u, y^1, y^2) \quad y_x^1 = y^2 + u, \quad y_x^2 = \alpha y^1 + u, \quad \alpha = cste$$

Des calculs pénibles mais sans difficulté montrent que:

$$\begin{aligned} \alpha \neq 0, 1 &\Rightarrow y^1 = x^1, & y^2 &= x^2 \\ \alpha = 0 &\Rightarrow y^1 = x^1 + \nu, & y^2 &= x^2 \\ \alpha = 1 &\Rightarrow y^1 = x^1 + \lambda(x^1 - x^2) + \frac{\mu}{(x^1 - x^2)}, & y^2 &= x^2 - \lambda(x^1 - x^2) + \frac{\mu}{(x^1 - x^2)} \end{aligned}$$

avec  $\lambda, \mu, \nu = cste$ .

On a donc un groupe d'invariance de type fini.

**Exemple :**

$$(x, u, y^1, y^2, y^3) \quad y_x^1 = y^1 u, \quad y_x^2 = y^3, \quad y_x^3 = u$$



On obtient alors le système involutif:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta^1}{\partial y^2} = 0, & \eta^1 - y^1 \frac{\partial \eta^1}{\partial y^1} - \frac{\partial \eta^1}{\partial y^3} = 0 \\ \frac{\partial \eta^2}{\partial y^2} = 0, & y^1 \frac{\partial \eta^2}{\partial y^1} + \frac{\partial \eta^2}{\partial y^3} = 0 \\ \eta^3 = 0, & \frac{\partial \eta^3}{\partial y^1} = \frac{\partial \eta^3}{\partial y^2} = \frac{\partial \eta^3}{\partial y^3} = 0 \end{cases}$$

qui est de type fini.

Dans le cas général, le symbole d'ordre 1 est donné par les équations:

$$\{v_k^l | h^k(y)v_k^l = 0, h \in D\}$$

Ainsi le covecteur  $\chi = \chi_k dy^k$  est caractéristique si et seulement si  $h^k(y)\chi_k = 0$ , ce qui montre:

**Théorème II.1.1** *Un système de contrôle affine admet un pseudogroupe d'invariance de type fini si et seulement si rang  $D =$  nombre de sorties.*

Nous allons affiner ce résultat en cherchant sous quelles conditions  $\Gamma$  est réduit à l'identité ou, plus particulièrement,  $\Theta = 0$ .

Pour ce faire, on remarque que, si  $[\eta, h] = 0 \forall h \in D$  et si  $\{h_l\}$  engendrent  $D$ , on a  $h = \lambda^l(y)h_l, \forall h \in D$ .

Par suite  $[\eta, h_l] = 0, [\eta, h] = 0 \Rightarrow (\eta \cdot \lambda^l)h_l = 0$ , d'où on en déduit  $\eta \cdot \lambda^l = 0$  si  $D$  est de rang maximum.

**Définition II.1.2** *Les fonctions  $\lambda(y)$  sont appelées fonctions stationnaires et  $C$  est dit stationnaire si la seule solution  $\eta$  du système précédent (équations d'ordre zéro pour  $\Theta$ ) est la solution nulle.*

**Corollaire II.1.3** *Le groupe d'invariance sur les sorties d'un système de contrôle affine est réduit à l'identité si et seulement si  $D$  est de rang maximum et  $C$  est stationnaire.*

## II.2 APPLICATION:

Dans le cas de systèmes linéaires de la forme  $y_x = Ay + Bu$ , si le groupe est réduit à l'identité, il doit l'être en tout point, en particulier en  $y = 0$ . Ainsi la distribution  $\Delta = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$  de vecteurs-colonnes doit être de rang maximum et le système doit être contrôlable. Bien entendu, ce n'est pas suffisant et il faut alors, en posant  $Ay = \lambda^l(y)h_l$ , que  $\eta \cdot \lambda^l = 0$ . Mais dans ce cas les  $h_l$  sont des champs de vecteurs de composantes constantes formant une sous-matrice carrée  $H$  inversible de  $\Delta$ . On a donc  $\lambda = H^{-1}Ay$  en notation matricielle et on doit donc avoir  $H^{-1}A\eta = 0$ , c'est-à-dire  $A\eta = 0$  dont la solution ne peut se réduire à zéro (cas stationnaire) que si  $\det A \neq 0$ .

**Exemple :** Dans l'exemple linéaire précédent, on a  $\det A = \alpha, \det(B, AB) = \alpha - 1$  et

le groupe d'invariance est réduit à l'identité lorsque  $\alpha \neq 0, 1$ .

**Remarque :** Si l'on transforme un système d'ordre supérieur en un système du premier ordre en prenant pour état certaines dérivées de la sortie, on peut prolonger ainsi le groupe d'invariance pour obtenir celui de la représentation canonique.

**Exemple :** Dans le premier exemple, on peut poser  $y^1 = y$ ,  $y^2 = y_x$ ,  $y^3 = y_{xx}$  et on obtient:

$$\begin{cases} y_x^1 = y^2 \\ y_x^2 = y^3 \\ y_x^3 = y^2 u \end{cases}$$

dont le groupe d'invariance est

$$\begin{cases} \bar{y}^1 = ay^1 + b \\ \bar{y}^2 = ay^2 \\ \bar{y}^3 = ay^3 \end{cases}$$

Ce groupe est obtenu en prolongeant le groupe  $\bar{y} = ay + b$  jusqu'aux jets d'ordre 2. Les crochets successifs conduisent aux 3 champs:

$$y^2 \partial_1 + y^3 \partial_2, y^2 \partial_3, -y^2 \partial_2 + y^3 \partial_3$$

et au crochet supplémentaire  $y^2 \partial_1$ .

Ainsi l'algèbre de Lie de contrôle peut être engendrée par  $y^2 \partial_1, y^3 \partial_2, y^2 \partial_3$  avec la fonction stationnaire  $\frac{y^2}{y^3}$ .

**Contre-Exemple :** La procédure inverse n'est pas possible.

Ainsi, en partant du système  $y_x^1 = y^2 + u$ ,  $y_x^2 = \alpha y^1 + u$  et en posant  $y = y^1$ , on a  $y_{xx} = \alpha y + u + u_x$  dont le groupe d'invariance est

$$\begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \bar{y} = y + a \\ \alpha \neq 0 \Rightarrow \bar{y} = y \end{cases}$$

La valeur critique  $\alpha = 1$  n'apparaît pas ici.

Nous espérons que les quelques résultats présentés montreront la nécessité d'introduire les pseudogroupes de Lie en théorie du contrôle (ordinaire ou partiel) et d'utiliser la théorie formelle des EDP pour leur étude.



# CONCLUSION

La théorie du contrôle classique a commencé par étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires en les considérant soit comme des systèmes dynamiques dépendant de l'entrée, soit comme des relations fonctionnelles entre l'entrée et la sortie. Dans ce cas on a utilisé les méthodes de l'algèbre linéaire.

La théorie du contrôle a, ensuite essayé d'étendre ces notions au cas de systèmes EDO non linéaires, en utilisant alors les méthodes de géométrie différentielle. On remarque alors que cette extension peut être faite de plusieurs façons et conduit, en particulier aux concepts de contrôlabilité forte et faible.

Ce n'est qu'au cours des neuf dernières années que plusieurs tentatives formelles nouvelles ont vu le jour, grâce notamment à l'algèbre différentielle.

Il était donc tentant de savoir si ces résultats, établis pour des EDO, provenaient en fait de résultats valables pour les EDP.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que la réponse à cette question est affirmative à la condition cependant d'utiliser des mathématiques nouvelles. Même si ce point est bien établi, il ne faudrait pas cependant penser, qu'une approche aussi générale permet de résoudre tout problème de théorie du contrôle aux dérivées partielles. Un point essentiel à noter, est que, même si le point de vue algébrique, culminant dans l'utilisation de l'algèbre différentielle, permet une nouvelle approche formelle de la contrôlabilité, deux problèmes se posent alors:

1. L'approche algébrique est simplement utilisée pour conduire à un mode de pensée spécifique que l'on adapte ensuite au cadre différentielle. Ainsi, il faut distinguer la contrôlabilité "algébrique" de la contrôlabilité (tout court ou différentielle).
2. Même si nous avons retrouvé et clarifié les tests formels permettant de vérifier la contrôlabilité dans les cas connus, un test général reste à découvrir (si tant est qu'il en existe un en général !).

Parallèlement à la théorie du contrôle, il existe des problèmes inhérents aux techniques de calcul formel utilisées. Ainsi, l'algèbre différentielle est pour l'instant très largement dépendant du système de coordonnées et les méthodes formelles d'élimination doivent être encore améliorées.

Nous espérons avoir au moins apporté un point de vue nouveau sur des questions classiques de théorie du contrôle tout en montrant l'utilité de la théorie du contrôle aux dérivées partielles et la nécessité d'introduire le calcul formel sur ordinateur dans ce nouveau domaine des mathématiques appliquées.

# Bibliographie

- [1] O.Bendiab and A.Haddak and J.F.Pommaret. *Nonlinear Differential Formal Calculus in Automation and Robotics*, To appear 1989
- [2] T.H.Bröcker and K.Jänich. *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982, 160p.
- [3] G.Burstein. *Books Reviewsof "Agebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory"*, M.Fliess and M.Hazewinkel, eds, p 181-226, Reidel, Dodrecht, Holland, in Acta Applicande Mathematicae 11, 1988.
- [4] D.Claude. *Everything you always wanted to Know about Linearization*, in "Agebraic and Geometric Methodsin Nonlinear Control Theory", M.Fliess and M.Hazewinkel, eds, p 181-226, Reidel, Dodrecht.
- [5] G.Conte and C.H.Moog and A.Perdon. *Un théorème sur la représentation entrée/sortie d'un système non-linéaire*, Cr.Acad.Sc., Paris,T.307,I,7,1988, p 363-366.
- [6] C.H.Moog and J.Perraud and P.Bertz and Q.T.Vo. *Prime Differential Ideals in Nonlinear Rational Controls Systems*, Preprints of the I.F.A.C., Symposium,Capri,Italy, June 14-16,1989, pp 178-182.
- [7] C.H.Moog and J.Descusse. *Decoupling with Dynamic Compensation for Strong Invertible Affine Nonlinear Systems* International Journal Control, To appear.
- [8] C.H.Moog and J.W.Grizzle. *Decouplage Non Linéaire vu de l'algèbre linéaire* Cr.Acad.Sc., Paris,T.307,I,1988, p. 497-500.
- [9] T.K.Caughey and H.M.Irvine, *The linear theory of free vibrations of a suspended cable*, Proc.R.Soc.Lond ,341,1974, p 299-315.
- [10] J.Davenport and Y.Siret and E.Tournier, *Calcul Formel*, Masson, Paris, 1986, 264p.
- [11] M.D.Di Benedetto and J.W.Grizzle and C.H.Moog, *Rank Invariants of Nonlinear Systems* To appear.
- [12] S.Diop, *Théorie de l'élimination et principe du modèle interne en automatique* Thèse de Doctorat, Université D'Orsay, 1989.

- [13] J.Doubrovine and S.Novikov and A.Fomenko, *Géométrie Contemporaine: méthodes et applications*, Mir, Moscou, 1982.
- [14] M.Fliess, *Généralisation non-linéaire de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage*, Paris,1989, Cr.Acad.Sc.,T308,I,12, pp 377-379.
- [15] M.Fliess, *Some remarks on nonlinear invertibility and dynamics state-feedback*, in "Theory and Applications of Nonlinear Control Systems", MTNS-85, C.I.Byrnes and A.Lindquist, eds.,North-Holland, Amsterdam, 1986, pp115-121.
- [16] M.Fliess, *Vers une Nouvelle Théorie du Bouclage Dynamique sur la Sortie des Systèmes non linéaires* , in "Analysis and Optimization of Systems", Proc. Conf. Inform.Sci., 83, pp. 293-299, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [17] M.Fliess, *A Note on the Invertibility of Nonlinear Input-Output Differential Systems* , Systems Control Lett., 8, 1986, pp. 147-151.
- [18] M.Fliess, *Nonlinear Control Theory and Differential Algebra: Some Illustrative Examples* , Proc. 10th IFAC World Congress, Munich, July 1987.
- [19] M.Fliess, *Quelques Définitions de la théorie des Systèmes à la Lumière des Corps Différentiels*, Cr.Acad.Sc.,Paris, I, 304.
- [20] M.Fliess,  
*Commandabilité, matrices de transfert et modes cachés*, Cr.Acad.Sc.,Paris,t,309, I,1989, p 847-851.
- [21] M.Fliess, *Généralisation non linéaire de la forme canonique de commande et linéarisation par bouclage*, Cr.Acad.Sc.,Paris,t,308, I,1989, p 377-379.
- [22] M.Fliess, *Nonlinear Control Theory and Differential Algebra* , Proc. 10th IFAC World Congress, Munich, July 1987.
- [23] M.Fliess, *Automatique et corps différentiels*, Forum Math., 1, 1989, pp. 227-238.
- [24] M.Fliess, *Controllability Revisited*, Pour les soixante ans du professeur R.E.Kalman, inventeur de l'Automatique Moderne, en hommage respectueux.
- [25] M.Fliess and C.Reutenauer, *Théorie de Picard-Vessiot des systèmes réguliers (ou bilinéaires)*, Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique, l'Analyse de Systèmes et le Traitement du Signal, I.D.Landau, pp.557-581,1983,C.N.R.S., Paris.
- [26] M.Fliess and M.Hasler, *Questioning the classic state space description via circuit examples*, in Mathematical Theory of Network Systems, MTNS-89, Amsterdam, June 1989, M.A.Kaashock, A.C.M.Ram and J.H. van Schuppen eds., Progress in Systems and Control Theory, Birkhäuser, Boston.

- [27] A.Haddak, *Differential Algebra and Controllability*, In "Nonlinear Control Systems Design", Proc.IFAC Symp. Capri, 1989, A.Isidori ed., Pergamon Press, Oxford, PP.434-437 .
- [28] A.Haddak, *Effective Methods for Systems of Algebraic Partial Differential Equations*, In " Effective Methods in Algebraic Geometry", eds C.Traverso and D.Lazard, To appear.
- [29] A.Haddak and J.F.Pommaret and O.Bendiab . *Nonlinear Differential Formal Calculus in Automation and Robotics*, To appear 1989.
- [30] R.Hermann and A.J.Krener, *Nonlinear Controllability and Observability*, IEEE Trans. Automat. Contr., 22, 1977, pp. 728-740.
- [31] R.M.Hirschorn, *Invertibility of Nonlinear Control Systems*, SIAM J.Contr. Optimiz., 17, 1979, pp. 289-297.
- [32] R.M.Hirschorn, *Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems*, IEEE Trans. Automat. contr., 24, 1979, pp. 855-865.
- [33] S.T.Hu, *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, New York, 1968.
- [34] A.Isidori, *Nonlinear Control Theory: An Introduction*, Lect.Notes, Control Inform.Sc, 72, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 297p.
- [35] A.Isidori and C.H.Moog and A.De.Luca, *A Sufficient Condition for full linearization via Dynamic State Feedback*, Proceeding of the 25th IEEE Conference on Decision and Control, Athens, Greece, December, 10-12, 1986.
- [36] M.Janet, *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Cahiers scientifiques, fax IV, Gauthier-Villars, Paris, 1929, 65p.
- [37] T.Kailath , *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980, 682p.
- [38] I.Kaplansky, *An Introduction to Differential Algebra*, Hermann, Paris, 1976, 64p.
- [39] E.R.Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press, New York, 1973.
- [40] S.Lang , *Algebra*, Addison Wesley, California, second edition, 1984, pp.714.
- [41] Landau.L and E.Lifschitz, *Hydrodynamics*, Mir, Moscow, 1986.
- [42] J.Lifermann, *Systèmes linéaires variables d'état*, Masson & C<sup>ie</sup>, Paris, 1972, 228p.
- [43] C.Lobry, *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, SIAM J. Control, 8, 1970, pp. 573-605.



- [44] H.Nijmeijer *Right-Invertibility of Nonlinear Control Systems: a Geometric Approach*, Memo. 484, Technische Hogeschool Twente, Enschede, 1984.
- [45] H.Nijmeijer and W.Respondek *Dynamic input-output decoupling of Nonlinear Control Systems*, To appear in IEEE Trans. Autom. Control 1986.
- [46] H.Nijmeijer and H.Schumacher *Les systèmes non linéaires à plus d'entrées que de sorties ne sont pas inversibles*, Cr.Acad.Sc.,Paris,t,299, I,n<sup>o</sup>15, 1984, p 377-379.
- [47] D.G.Northcott, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1966, 184p.
- [48] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Dunod, Paris, 1969, 278p.
- [49] J.F.Pommaret, *Systems of Partial Differential Equations and Lie Pseudogroups*, Gordon & Breach, New York, 1978, 411p.
- [50] J.F.Pommaret, *Differential Galois Theory*, Gordon & Breach, New York,1983, 760p.
- [51] J.F.Pommaret, *Lie Pseudogroups and Mechanics*, Gordon & Breach, New York, 1988, 591p.
- [52] J.F.Pommaret, *Géométrie Différentielle Algébrique et Théorie du Contrôle*, Cr.Acad.Sci., Paris, T 302,I, 1986,p 547-550.
- [53] J.F.Pommaret, *Problèmes formels en théorie du Contrôle aux dérivées partielles*, Cr.Acad.Sci., Paris, oct. 1989, 457-10, T308,I,14.
- [54] J.F.Pommaret, *Differential Algebra and Partial Differential Control Theory*, In "Nonlinear Control Systems Design",Proc.IFAC Symp. Capri, 1989, A.Isidori ed., Pergamon Press, Oxford, PP.430-433.
- [55] J.F.Pommaret, *Partial Differential Control Theory and Causality*, Proc. "New Trends in System Theory", Genova,Italy, July 9-11,1990.
- [56] J.F.Pommaret, *Group Theory and Controllability of Partial Differential Control Systems*, Proc. " Analysis and Optimization of Systems ", INRIA, June 12-15,1990, Antibes, France.
- [57] R.H.Rand *Computer Algebra in Applied Mathematics: an Introduction to MAC-SYMA*, in Pitman Advanced Publishing Program, Research Notes in Mathematics, 94, London, 1984, pp.181.
- [58] H.Reinhard, *Equations Différentielles.Fondements et Applications*, Gauthiers-Villars, Paris,1982.
- [59] H.H.Rosenbrock, *State-Space and Multivariable Theory*, Nelson, London, 1970.

- [60] J.F.Ritt, *Differential Algebra*, Dover, New York, 1950,1966, 184p.
- [61] D.J.Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Prentice-Hall, London Mathematical Society Lecture Notes, Series 142, Cambridge,1989, 293p.
- [62] D.H.Sattinger and O.L.Weaver *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences 61, Berlin,1985, 215p.
- [63] A.Seidenberg, *An Elimination Theory for Differential Algebra*, Univ. California Publications in Math.,(N.S.), 3 (1956), 31-65.
- [64] I.R.Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin,1977, 439p.
- [65] M.Spivak, *Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Houston, Texas,1979.
- [66] H.J.Sussmann  
and V.Jurdjevic, *Controllability of Nonlinear Systems*, J.Diff.Equations,12,1972,  
pp. 95-116.
- [67] K.Tchon, *Generic Properties of Linear and Nonlinear Systems: A Comparative Study*, C.I.Byrnes and A.Lindquist, eds.,North-Holland, Amsterdam, 1986, pp 521-532.
- [68] J.M.Thomas, *Systems and Roots*, W.Byrd Press, New York,1962.
- [69] A.J.Van der Schaft, *On realization of nonlinear systems*, Math.Syst.Theory,19,1987,  
p 239-275.
- [70] A.J.Van der Schaft, *A Realization Procedure for Systems of Nonlinear Higher-Order Differential Equations*, Preprints 10th World Congress on Automatic Control, Munich, July 27-31, 1987, Vol. 8, pp. 97-102.
- [71] A.J.Van der Schaft, *Structural Properties of Realizations of External Differential Systems*, In "Nonlinear Control Systems Design",Proc.IFAC Symp. Capri, 1989, A.Isidori ed., Pergamon Press, Oxford, PP.246-251 .
- [72] A.M.Vinogradov, *Local Symmetries and Conservation Laws*, Acta Appl. Math., 2, 1984, p 21-78.
- [73] Jan.C.Willems, *From Time Series to Linear System: Part I. Finite Dimensional Linear Time Invariant Systems*, Automatica, Vol. 22, No. 5, pp.561-580, 1986.
- [74] Jan.C.Willems, *Models for Dynamics* , To appear in Dynamics Reported, July 1987, University of Groningen,The Netherlands.
- [75] W.M.Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

- [76] R.Le Borzec and J.Lotterie, *Principes de la théorie des mécanismes*, Dunod, Paris,1975,190 p.
- [77] Shih Wei Hui. *Sur les solutions analytiques de l'équation d'Euler d'un fluide non visqueux. incompressible. C.R.Acad. Sc. Paris, t.300, série I, n8, 1985, p 231-234.*
- [78] Weishu Shi. *Un invariant numérique associé à un système d'équations aux dérivées partielles. C.R.Acad. Sc. Paris, t.304, série I, n17, 1987, p 535-538.*
- [79] L.Landau et E.Lifschitz. *Physique théorique, 6, MIR, Moscou, 1954.*

# ANNEXE



(c2) derivabbrev:true\$

Time= 4 msec.

(c3) lit(y,m):=block([k],k:makelist(concat(y,j), j, 1, m), k ) \$

Time= 9 msec.

(c4) dependre(x, y, n, m) := block([l1,l2,l3],  
l1 : makelist(concat(x, i), i, 1, n), l2 : makelist(concat(y, j), j, 1, m),  
l3 : depends(l2, l1))\$

Time= 6 msec.

(c5) x:lit(x,3);

Time= 133 msec.

(d5) [x1, x2, x3]

(c6) p:lit(p,2);

Time= 45 msec.

(d6) [p1, p2]

(c7) depends(p,x);

Time= 7 msec.

(d7) [p1(x1, x2, x3), p2(x1, x2, x3)]

(c8) depends(y,x);

Time= 4 msec.

(d8) [y(x1, x2, x3)]

(c9) p:[diff(y,x3,2)-x2\*diff(y,x1,2),diff(y,x2,2)];

Time= 73 msec.

(d9) [y<sub>x3 x3</sub> - x2 y<sub>x1 x1</sub>, y<sub>x2 x2</sub>]

(c10) p1:p[1];

Time= 6 msec.

(d10) y<sub>x3 x3</sub> - x2 y<sub>x1 x1</sub>

(c11) p2:p[2];

Time= 5 msec.

(d11) y<sub>x2 x2</sub>

(c12) h0:[diff(y,x1),diff(y,x2),diff(y,x3)];

Time= 32 msec.

(d12) [y<sub>x1</sub>, y<sub>x2</sub>, y<sub>x3</sub>]

(c13) union(a):=block([g,m],m:length(a),g:[],for i:1 thru m do

( g:appendl(g,a[i]) ) ,g )\$

Time= 7 msec.

(c14) appendl(l2,l1):=block([l,r1,r2],l:l2,r1:length(l1),r2:length(l2),  
for i:1 thru r1 do (if not(member(l1[i],l2)) then l:endcons(l1[i],l)),l)\$

Time= 7 msec.

(c15) dift1(y,x):=block([a,v,m],m:length(y),for j: 1 thru m do

(b[j]:makelist(diff(y[j],x[i]),i,1,n)), v:makelist(b[j],j,1,m) ,a:union(v))\$

Time= 6 msec.

(c16) dift(y,x,n):=block([a,v,m],m:length(y),for j: 1 thru m do

(b[j]:makelist(diff(y[j],x[i]),i,1,n)), v:makelist(b[j],j,1,m) ,a:union(v))\$

Time= 7 msec.

(c17) difg(y,q,x,n):=block([f,h],h:lit(h,q),h[1]:y,

for j: 2 thru q do (h[j]:dift(h[j-1],x,n) ),f:h[q])\$

Time= 7 msec.

(c18) difp(y,q,x,n):=block([g,h],g:lit(g,q),g[1]:y,for j: 1 thru q do

(g[j]:difg(y,j,x,n)),h:g[q])\$

Time= 7 msec.

(c19) difpu(y,q,x,n):=block([g,h],g:lit(g,q),g[1]:y,for j: 1 thru q do  
(g[j]:difg(y,j,x,n)),h:union(g))\$  
Time= 7 msec.

(c20) union3(a):=block([g,m],m:length(a),g:[],for i:1 thru m do  
( g:append(g,a[i]) ),g )\$  
Time= 8 msec.

(c21) v1:difpu(p,6,x,3)\$  
Time= 59009 msec.

(c22) u1:difg(h0,7,x,3)\$  
Time= 22370 msec.

(c23) length(u1);  
Time= 4 msec.

(d23) 36

(c24) length(v1);  
Time= 4 msec.

(d24) 112

(c25) r1:rank( coefmatrix(v1 , u1 ) );  
Time= 78152 msec.

(d25) 32

(c26) u2:difg(h0,8,x,3)\$  
Time= 32144 msec.

(c27) v2:difpu(p,7,x,3)\$  
Time= 112054 msec.

(c28) r2:rank( coefmatrix( v2 , u2 ) );  
Time= 147279 msec.

(d28) 41

(c29) u3:union([u1,u2]);  
Time= 3077 msec.

(d29) [y  
x1 x1 x1 x1 x1 x1 x1 x1' y  
x1 x1 x1 x1 x1 x1 x1 x1' x1 x1 x1 x1 x1 x1 x2'

y  
x1 x1 x1 x1 x1 x1 x3' y  
x1 x1 x1 x1 x1 x2 x2' y  
x1 x1 x1 x1 x1 x2 x3'

y  
x1 x1 x1 x1 x1 x3 x3' y  
x1 x1 x1 x1 x2 x2 x2' y  
x1 x1 x1 x1 x2 x2 x3'

y  
x1 x1 x1 x1 x2 x3 x3' y  
x1 x1 x1 x1 x3 x3 x3' y  
x1 x1 x1 x2 x2 x2 x2'

y  
x1 x1 x1 x2 x2 x2 x3' y  
x1 x1 x1 x2 x2 x3 x3' y  
x1 x1 x1 x2 x3 x3 x3'

y  
x1 x1 x1 x3 x3 x3 x3' y  
x1 x1 x2 x2 x2 x2 x2' y  
x1 x1 x1 x2 x3 x3 x3'

y  
x1 x1 x2 x2 x2 x3 x3' y  
x1 x1 x2 x2 x3 x3 x3' y  
x1 x1 x2 x3 x3 x3 x3'

EOP  
y  
x1 x1 x3 x3 x3 x3 x3' y  
x1 x2 x2 x2 x2 x2 x2' y  
x1 x2 x2 x2 x2 x2 x3'

y  
x1 x2 x2 x2 x2 x3 x3' y  
x1 x2 x2 x2 x3 x3 x3' y  
x1 x2 x2 x3 x3 x3 x3'

y  
x1 x2 x3 x3 x3 x3 x3' y  
x1 x3 x3 x3 x3 x3 x3' y  
x2 x2 x2 x2 x2 x2 x2'

y  
x2 x2 x2 x2 x2 x2 x3' y  
x2 x2 x2 x2 x2 x3 x3' y  
x2 x2 x2 x2 x3 x3 x3'

```

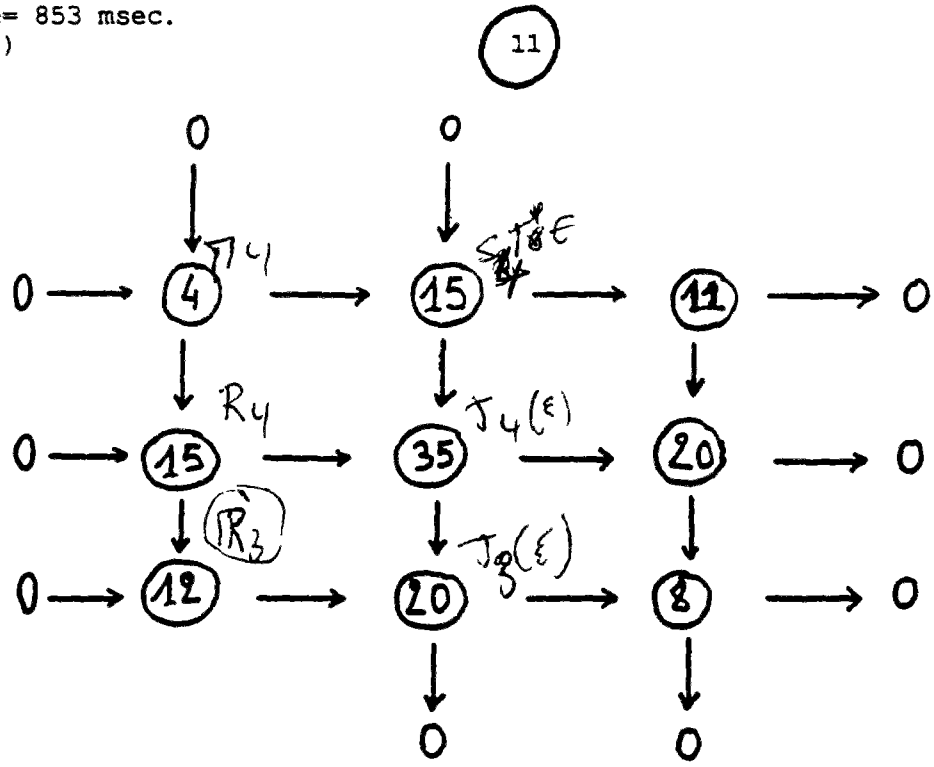
;
Time= 5898 msec.
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ - x2 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
(d90) [ 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
EOP [ 0 - x2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 - x2 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 - x2 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 - x2 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ]
[ 0 0 0 0 0 - x2 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ]
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 ]

```

```

(c91) rank(%);
Time= 853 msec.
(d91)

```





(c64) rank(a3);  
Time= 24010 msec.  
(d64)



(c65) r:[u,v];  
Time= 9 msec.  
(d65)

[u, v]

(c66) depends(r,x);  
Time= 12 msec.  
(d66)

[u(x1, x2, x3), v(x1, x2, x3)]

(c67) m13:difpu(r,4,x,3)\$  
", " is not a prefix operator.  
, \*\*\$\*\* xml3 : difpu ( r , 4 , x ,  
Please rephrase or edit.

(c67) m13:difpu(r,4,x,3)\$  
Time= 9269 msec.

(c68) length(m13);  
Time= 4 msec.  
(d68)

40

(c69) addcol(a3,m13)\$  
Time= 1351 msec.

(c70) length(d69);  
Time= 6 msec.  
(d70)

40

(c71) a4:addcol(a3,m13)\$  
Time= 1354 msec.

(c72) length(transpose(a4));  
Time= 814 msec.  
(d72)

53

(c73) triangularize(a4)\$  
Time= 54156 msec.

(c74) d72[40];

;  
(c77) d73[40,53];  
Time= 8 msec.

(d77)  $(8 v_{x_2 x_3 x_3} - 24 v_{x_1 x_1} - 8 u_{x_2 x_2 x_2}) x_2^6 - 8 v_{x_1 x_1 x_2} x_2^7$

(c78) d77\*(x2\*\*(-6));  
Time= 15 msec.

(d78)  $(8 v_{x_2 x_3 x_3} - 24 v_{x_1 x_1} - 8 u_{x_2 x_2 x_2}) x_2^6 - 8 v_{x_1 x_1 x_2} x_2^7$   
-----  
 $x_2^6$

(c79) ratsimp(%);  
Time= 179 msec.

(d79)  $-8 v_{x_1 x_1 x_2} x_2 + 8 v_{x_2 x_3 x_3} - 24 v_{x_1 x_1} - 8 u_{x_2 x_2 x_2}$

(c80)

Time= 193 msec.

(d47) [y<sub>x3 x3</sub> - x<sub>2</sub> y<sub>x1 x1</sub>, y<sub>x2 x2</sub>, y<sub>x1 x3 x3</sub> - x<sub>2</sub> y<sub>x1 x1 x1</sub>,

y<sub>x2 x3 x3</sub> - x<sub>2</sub> y<sub>x1 x1 x2</sub> - y<sub>x1 x1</sub>, y<sub>x3 x3 x3</sub> - x<sub>2</sub> y<sub>x1 x1 x3</sub>, y<sub>x1 x2 x2</sub>,

y<sub>x2 x2 x2</sub>, y<sub>x2 x2 x3</sub>]  
(c48) b2:append1(b1,f2)\$  
Time= 427 msec.

(c49) b3:append1(b2,f3)\$  
Time= 957 msec.

(c50) b4:append1(b3,f4)\$  
Time= 2155 msec.

(c51) b5:append1(b4,f5)\$  
Time= 4656 msec.

(c52) b6:append1(b5,f6)\$  
Time= 9394 msec.

(c53) length(b5);  
Time= 4 msec.  
(d53) 112

(c54) length(b6);  
Time= 5 msec.  
(d54) 168

(c55) k2:append(h1,h2);  
Time= 7 msec.

(d55) [y<sub>x1 x1</sub>, y<sub>x1 x2</sub>, y<sub>x1 x3</sub>, y<sub>x2 x2</sub>, y<sub>x2 x3</sub>, y<sub>x3 x3</sub>, y<sub>x1 x1 x1</sub>,

y<sub>x1 x1 x2</sub>, y<sub>x1 x1 x3</sub>, y<sub>x1 x2 x2</sub>, y<sub>x1 x2 x3</sub>, y<sub>x1 x3 x3</sub>, y<sub>x2 x2 x2</sub>,

y<sub>x2 x2 x3</sub>, y<sub>x2 x3 x3</sub>, y<sub>x3 x3 x3</sub>]

(c56) k3:append(k2,h3)\$  
Time= 8 msec.

(c57) k4:append(k3,h4)\$  
Time= 8 msec.

(c58) length(k3);  
Time= 4 msec.  
(d58) 31

(c59) length(k4);  
Time= 4 msec.  
(d59) 52

(c60) k5:append(k4,h5)\$  
Time= 8 msec.

(c61) k6:append(k5,h6)\$  
Time= 9 msec.

(c62) k7:append(k6,h7)\$  
Time= 10 msec.

(c63) length(k7);  
Time= 6 msec.  
(d63) 161

(c64) k8:append(h5,h6)\$

```

      | \ ^ / |
    . | \ | / | . CERMA
      | MAPLE |
    < _____ > For on-line help, type help();
      |

```

[rank]

```

words used=138735, alloc=77824, time=19.23
words used=238741, alloc=122880, time=28.32
words used=250029, alloc=129024, time=29.93
words used=338840, alloc=143360, time=36.05
words used=438848, alloc=202752, time=41.78
words used=500064, alloc=235520, time=46.95
words used=538867, alloc=235520, time=50.15

```

.....

```

words used=79771839, alloc=610304, time=9758.58
words used=79862762, alloc=610304, time=9770.23
words used=79962769, alloc=610304, time=9782.87
words used=80021900, alloc=610304, time=9794.18
words used=80062910, alloc=610304, time=9799.33
words used=80162923, alloc=610304, time=9811.85
words used=80263067, alloc=610304, time=9824.42
words used=80272038, alloc=610304, time=9829.48

```

147

```

      | \ ^ / |
    . | \ | / | . CERMA
      | MAPLE |
    < _____ > For on-line help, type help();
      |

```

[rank]

```

words used=263498, alloc=139264, time=35.73
words used=275385, alloc=139264, time=40.17
words used=363513, alloc=139264, time=48.65
words used=463531, alloc=200704, time=54.83
words used=525425, alloc=235520, time=60.28

```

.....

```

words used=221331845, alloc=966656, time=32915.13

```

202

```
(c59) coefmatrix([p, q, r, d8, d9, d10, d11, d12, d13, d48, d49, d50, d51, d52, d53,
4, d55, d56],
[diff(y1, x1), diff(y1, x2), diff(y2, x1), diff(y2, x2), diff(y1, x1, 2),
diff(y1, x1, 1, x2, 1), diff(y1, x2, 2),
```

18

```
diff(y2, x1, 2), diff(y2, x1, 1, x2, 1), diff(y2, x2, 2),
diff(y1, x1, 3), diff(y1, x1, 2, x2, 1), diff(y1, x1, 1, x2, 2), diff(y1, x2, 3),
diff(y2, x1, 3), diff(y2, x1, 2, x2, 1), diff(y2, x1, 1, x2, 2), diff(y2, x2, 3)]];
Time= 5111 msec.
```

```
[ 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 ]
(d59) [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 ]
EOP [ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ]
[
[ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 ]
```

```
(c60) rank(%);
Time= 1652 msec.
(d60)
```

17

[ 0 ] [ 4096 w12 - 2048 v11 - 2048 u22 ]

```
(c44) %[18,19];
Time= 4 msec.
(d44)
```

4096 w12 - 2048 v11 - 2048 u22

```
(c45) solve(%,[u,v,w,u1,u2,v1,v2,w1,w2,u11,u12,u22,v11,v12,v22,w11,w12,w22]);
Time= 673 msec.
```

```
(d45) [[u = %r7, v = %r17, w = %r16, u1 = %r15, u2 = %r14, v1 = %r13,
v2 = %r12, w1 = %r11, w2 = %r10, u11 = %r9, u12 = %r8, u22 = 2 %r2 - %r6,
v11 = %r6, v12 = %r5, v22 = %r4, w11 = %r3, w12 = %r2, w22 = %r1]]
```

```
(c46) solve(d44,[w12,v11,u22]);
Time= 96 msec.
```

```
(d46) [w12 =  $\frac{\%r19 + \%r18}{2}$ , v11 = %r19, u22 = %r18]
```

# TOURBILLONS DE BÉNARD

$$\vec{g} = (0, 0, -g)^T$$

Boussinesq

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{masse}) \\ \Delta \vec{v} - \theta \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot \pi = 0 \quad (\text{Navier-Stokes}) \\ \Delta \theta - \vec{v} \cdot \vec{g} = 0 \quad (\text{chaleur}) \end{array} \right.$$

```
(c5) mat:matrix([0, x,d3,0,0],[0, y,0,d3,0],[g, z,0,0,d3],[d3,0,0,0,g],[0,0,x,y
-z]);
```

Time= 43 msec.

(d5)	[	0	x <sup>2</sup>	z <sup>2</sup>	+ y <sup>2</sup>	+ x <sup>2</sup>	0	0	]	← v <sub>x</sub>
	[	0	y	0	z <sup>2</sup>	+ y <sup>2</sup>	+ x <sup>2</sup>	0	]	← v <sub>y</sub>
	[	g	z	0	0	z <sup>2</sup>	+ y <sup>2</sup>	+ x <sup>2</sup>	]	← v <sub>z</sub>
	[	z <sup>2</sup>	+ y <sup>2</sup>	+ x <sup>2</sup>	0	0	0	g	]	← θ
	[	0	0	-x	-y	-z			]	← π

```
(c6) determinant(%);
```

Time= 274 msec.

```
(d6) (z2 + y2 + x2) (y (y (z2 + y2 + x2) - g2 y) + z (z2 + y2 + x2))
+ x (z2 + y2 + x2) (x (z2 + y2 + x2) - g2 x)
```

```
(c10) ev(%,(z**2)+(y**2)+(x**2)=lamda);
```

Time= 123 msec.

```
(d10) lamda (lamda2 z2 + y (lamda2 y - g2 y)) + lamda x (lamda2 x - g2 x)
```

```
(c15) %/lamda;
```

Time= 8 msec.

```
(d15) lamda2 z2 + lamda2 y2 - g2 y2 + (lamda - g) (lamda + g) x2
```

```
(c18) expand(d16);
```

Time= 70 msec.

```
(d18) lamda2 z2 + lamda2 y2 - g2 y2 + lamda2 x2 - g2 x2
```

$$\det \rightarrow \Delta \left( \Delta^3 - g^2 (\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2) \right)$$