



**HAL**  
open science

# Modélisation multi-échelles de nappes fibrées en compression

Eric Lignon

► **To cite this version:**

Eric Lignon. Modélisation multi-échelles de nappes fibrées en compression. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Ecole Polytechnique X, 2011. Français. NNT: . pastel-00588116

**HAL Id: pastel-00588116**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00588116>**

Submitted on 22 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Modélisation multi-échelles de nappes fibrées en compression

---

*Thèse présentée pour l'obtention du titre de*

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

*par*

**ÉRIC LIGNON**

*Soutenue le 21 Janvier 2011 devant le jury composé de :*

M. Dominique CHAPELLE	Rapporteur
M. Marc GEERS	Examineur
M. Patrice HAURET	Examineur
M. Patrick LE TALLEC	Directeur de thèse
M. Michel POTIER-FERRY	Rapporteur
M. Nicolas TRIANTAFYLIDIS	Président
M. Peter WRIGGERS	Examineur



# Modélisation multi-échelles de nappes fibrées en compression

Éric Lignon



*Aucun de nous, en agissant seul, ne peut atteindre le succès.*

**Nelson Mandela**



À la mémoire de mes grands parents,



## Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu mon directeur de thèse, Patrick Le Tallec, pour sa patience et ses nombreux conseils durant ces trois années passées au Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique. Tout en me laissant mon autonomie, il a toujours été présent lorsque j'en avais besoin, et s'est montré d'une grande disponibilité malgré sa charge de travail impressionnante, y compris lorsque je débarquais dans son bureau à l'improviste tard dans la soirée... Cela a été un honneur de travailler avec un chercheur de sa renommée, mais surtout une très grande chance pour moi d'être encadré par un homme aussi généreux et pédagogue. Merci encore Patrick!

Les chapitres qui suivent sont le fruit d'une collaboration fructueuse avec la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin. Je tiens en particulier à remercier Ramzy Boussetta pour le temps qu'il a passé à suivre l'avancement de mon travail et pour son aide lors de l'implémentation de nos modèles. J'aimerais aussi remercier vivement Patrice Hauret, qui a rendu possible ce travail en me mettant en relation avec Patrick Le Tallec, puis m'a donné de nombreux conseils et transmis son enthousiasme lors de nos réunions régulières.

Le travail présenté dans ce rapport doit également beaucoup à Nicolas Triantafyllidis, avec qui j'ai pu travaillé lors d'un court séjour à l'université du Michigan puis au LMS, et qui m'a fait le plaisir d'accepter d'être le président de mon jury de thèse. Je tiens à le remercier pour sa gentillesse, son accueil chaleureux à Ann Arbor, et surtout pour son aide précieuse sur mes travaux d'analyse de stabilité.

Par ailleurs, je remercie les rapporteurs de cette thèse, Dominique Chapelle et Michel Potier-Ferry, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail lors de la lecture de mon manuscrit et pour leurs remarques constructives, qui alimenteront probablement la poursuite de recherches complémentaires. Merci également à Marc Geers et Peter Wriggers, qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de cette thèse.

Le Laboratoire de Mécanique des Solides de l'Ecole Polytechnique est un cadre privilégié pour effectuer une thèse, alliant excellence et bonne ambiance, et je remercie son directeur Bernard Halphen, et son successeur Patrick Le Tallec, de m'y avoir accueilli. Je remercie tous les chercheurs que j'ai eu l'occasion d'y côtoyer, et qui m'ont fait part de leur expérience et conseillé lors de discussions informelles dans la salle café. Surtout, j'aimerais adresser un grand merci à l'ensemble des doctorants et post-docs que j'ai pu rencontré au LMS pendant ces trois années. Leur amitié et leur bonne humeur m'ont souvent permis de surmonter des moments difficiles face à mon ordinateur! Enfin, j'ai bien sûr une pensée pour toute l'équipe administrative du LMS (Alexandra, Christiane, Flora, Liliane, Christian), qui a grandement facilité mes démarches administrative pendant la thèse, et cela toujours avec le sourire. J'en profite pour adresser ma reconnaissance à tous les membres de l'équipe "Etudes et Recherches", qui m'ont accueilli chaleureusement lors de mon séjour de 3 mois à Ladoux, et que je suis très heureux de rejoindre à l'issue de cette thèse.

J'ai bien sûr une pensée pour tous les autres étudiants que j'ai pu rencontrer à l'X pendant ces trois années, que ce soit par l'intermédiaire de l'association X'Doc ou au détour d'un couloir. Et je n'oublie pas mes "stagiaires" préférés, à savoir Houda, Claudia, Jean François et Amine, qui m'ont supporté et encouragé dans les périodes difficiles, et avec qui j'ai passé d'excellents moments. Car

en plus d'avoir été un projet scientifique intense, cette thèse a avant tout été pour moi une aventure humaine très enrichissante grâce à vous, merci à tous !

Enfin, j'aimerais remercier de tout coeur mes amis qui m'ont encouragé pendant ces trois années et qui ont supporté mon humeur détestable. Je pense notamment à Vincent et Fabien qui m'ont écouté me plaindre, et à l'ensemble du groupe des "Rémois" avec qui les bons moments passés ensemble me permettaient de recharger les batteries.

Je clôturerai cette page en ayant évidemment une pensée pour ma famille, qui a toujours été là quand j'en avais besoin. Merci pour votre amour, votre soutien moral et parfois même votre aide mathématique ou informatique ! J'ai beaucoup de chance d'avoir des gens comme vous pour m'entourer.

Palaiseau, le 21 Janvier 2011,  
Eric Lignon



# Table des matières

Table des matières	ix
Résumé court en français	xiii
Short Abstract in English	xv
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1.1 Présentation du problème . . . . .	1
1.1.1 Nappes fibrées dans une structure 3D : cadre général . . . . .	1
1.1.2 Exemple représentatif : compression sous flexion circulaire . . . . .	3
1.2 Mise en évidence des phénomènes importants . . . . .	4
1.2.1 Phénomènes physiques macroscopiques . . . . .	4
1.2.2 Phénomènes physiques mésoscopiques . . . . .	6
1.2.3 Contraintes numériques . . . . .	7
1.3 Enjeux de la modélisation et travaux existants . . . . .	8
1.4 Plan de la thèse . . . . .	10
<hr/>	
<b>1 Modélisation macroscopique d'une nappe renforcée</b>	<b>13</b>
<b>2 Cinématique et modèle macroscopique</b>	<b>15</b>
2.1 Hypothèses et notations utilisées . . . . .	16
2.1.1 Géométrie de la nappe fibrée au repos . . . . .	16
2.1.2 Modélisation en grandes déformations . . . . .	18
2.2 Problématique et modèles existants . . . . .	22
2.3 Modélisation d'une fibre . . . . .	26
2.3.1 Cinématique . . . . .	26
2.3.2 Mesure des déformations . . . . .	26
2.3.3 Modèle énergétique . . . . .	27
2.4 Modélisation d'une nappe fibrée . . . . .	28
2.4.1 Cinématique . . . . .	29
2.4.2 Mesure des déformations des câbles . . . . .	32
2.4.3 Modèle énergétique . . . . .	32
2.4.4 Formulation variationnelle du problème de nappe isolée . . . . .	36
2.5 Méthode de résolution formelle . . . . .	37
2.5.1 Equations d'Euler-Lagrange linéarisées . . . . .	37
2.5.2 Projection sur l'espace des directeurs orthonormés . . . . .	38
2.5.3 Calcul des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	40
<b>3 Ecriture formelle et analyse du modèle</b>	<b>43</b>

3.1	Verrouillage numérique des structures minces . . . . .	44
3.2	Formulation non linéaire continue . . . . .	44
3.2.1	Problème 2D sous forme asymptotique . . . . .	44
3.2.2	Problèmes non linéaires limites . . . . .	47
3.3	Résolution par la méthode des éléments finis classique . . . . .	50
3.3.1	Problème non linéaire discrétisé . . . . .	50
3.3.2	Problème discret linéarisé . . . . .	53
3.3.3	Problème linéarisé autour d'une configuration de référence plane . . . . .	54
3.3.4	Convergence sur un problème de nappe non inhibée . . . . .	56
3.4	Formulation mixte non linéaire . . . . .	59
3.4.1	Problème mixte continu . . . . .	59
3.4.2	Éléments finis mixtes : cas général . . . . .	60
3.4.3	Problème linéarisé . . . . .	61
3.4.4	Analyse du problème linéarisé . . . . .	63
3.4.5	Convergence uniforme : condition inf-sup . . . . .	67
3.4.6	Démonstration de la condition inf-sup pour une nappe plane . . . . .	69
3.4.7	Les pistes pour une convergence uniforme plus générale . . . . .	73
3.5	Technique de sous-intégration partielle sélective . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Méthode de résolution et applications numériques</b>	<b>77</b>
4.1	Discrétisation par éléments finis . . . . .	78
4.1.1	Discrétisation par éléments finis . . . . .	78
4.1.2	Restriction cinématique . . . . .	81
4.1.3	Problème discret à résoudre . . . . .	82
4.2	Méthode de résolution . . . . .	83
4.2.1	Equations d'Euler-Lagrange linéarisées . . . . .	83
4.2.2	Projection sur l'espace des directeurs orthonormés . . . . .	85
4.2.3	Calcul des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	86
4.2.4	Gestion des conditions aux limites . . . . .	87
4.2.5	Algorithme complet . . . . .	87
4.3	Comportement asymptotique : tests numériques . . . . .	89
4.3.1	Problème en flexion non inhibée : flexion Cantilever . . . . .	90
4.3.2	Problème en flexion pure inhibée : nappe bisupportée sous poids propre . . . . .	97
4.4	Validation du modèle sur des tests analytiques . . . . .	105
4.4.1	Flexion sous effort tranchant . . . . .	106
4.4.2	Flambement sous compression axiale . . . . .	109
4.5	Compression d'une nappe sous flexion circulaire . . . . .	120
<hr/>		
<b>II</b>	<b>Modélisation multi-échelles d'une nappe renforcée</b>	<b>127</b>
<b>5</b>	<b>Modélisation multi-échelles des composites fibrés - Etat de l'art</b>	<b>129</b>
5.1	Principe des méthodes d'homogénéisation . . . . .	130
5.2	Approches analytiques . . . . .	130
5.2.1	Résultats d'homogénéisation en élasticité linéaire . . . . .	130
5.2.2	Homogénéisation analytique en élasticité non linéaire . . . . .	136
5.3	Approches numériques . . . . .	137
5.3.1	Homogénéisation numérique du premier ordre . . . . .	137
5.3.2	Homogénéisation numérique du second ordre . . . . .	140

5.4	Conclusions et application sur notre problème de nappe . . . . .	141
<b>6</b>	<b>Modèle multi-échelles par analyse asymptotique</b>	<b>143</b>
6.1	Formulation du problème . . . . .	144
6.1.1	Problème mécanique - Décomposition de domaine . . . . .	144
6.1.2	Forme des déformations . . . . .	146
6.1.3	Modèle énergétique . . . . .	147
6.1.4	Equations d'équilibre . . . . .	149
6.2	Analyse asymptotique du problème . . . . .	150
6.2.1	Développements asymptotiques . . . . .	150
6.2.2	Etude de l'ordre 0 . . . . .	151
6.2.3	Etude de l'ordre 1 . . . . .	153
6.2.4	Etude de l'ordre 2 . . . . .	155
6.3	Choix de la stratégie multi-échelles . . . . .	156
6.3.1	Déformations microscopiques dans la gomme . . . . .	156
6.3.2	Description macroscopique des câbles . . . . .	157
6.3.3	Problème complet à l'échelle globale . . . . .	157
6.3.4	Coercivité du modèle . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Description du problème local</b>	<b>163</b>
7.1	Formulation du problème local continu 2D . . . . .	164
7.1.1	Géométrie d'une cellule élémentaire 2D . . . . .	164
7.1.2	Contraintes cinématiques . . . . .	165
7.1.3	Formulation variationnelle . . . . .	166
7.2	Résolution par la méthode des éléments finis . . . . .	167
7.2.1	Discretisation du problème 3D . . . . .	167
7.2.2	Méthode de résolution de Newton . . . . .	169
7.3	Calcul des dérivées globales . . . . .	170
7.3.1	Calcul de la dérivée première . . . . .	170
7.3.2	Calcul de la dérivée seconde . . . . .	170
<b>8</b>	<b>Méthode multi-échelles et applications numériques</b>	<b>173</b>
8.1	Méthode multi-échelles pour une matrice incompressible . . . . .	174
8.1.1	Problématique . . . . .	174
8.1.2	Gestion de l'incompressibilité . . . . .	176
8.1.3	Traitement modifié de la condition d'incompressibilité . . . . .	180
8.1.4	Coercivité de l'énergie globale . . . . .	181
8.1.5	Problème discret - Diminution du coût des calculs . . . . .	182
8.2	Analyse numérique du problème multi-échelles linéarisé . . . . .	185
8.2.1	Problème local incompressible . . . . .	187
8.2.2	Problème global continu . . . . .	191
8.2.3	Problème global discret . . . . .	194
8.2.4	Convergence de la méthode . . . . .	196
8.3	Applications numériques . . . . .	203
8.3.1	Tests sur une nappe cylindrique . . . . .	203
8.3.2	Test de flexion circulaire d'une nappe plane . . . . .	210

---

<b>III</b>	<b>Analyse de stabilité multi-échelles</b>	<b>215</b>
9	Introduction à la stabilité des solides élastiques	217
9.1	Motivation : Stabilité de structures industrielles	218
9.2	Stabilité d'un équilibre	219
9.2.1	Equilibre d'un solide hyperélastique	219
9.2.2	Définition de la stabilité	220
9.2.3	Analyse de stabilité d'un équilibre	221
9.3	Courbes d'équilibre et points de bifurcation	221
9.3.1	Point de bifurcation	223
9.3.2	Point limite	225
9.3.3	Influence des imperfections sur la bifurcation	226
9.4	Calculs numériques en présence d'instabilités	228
9.4.1	Méthodes incrémentales	228
9.4.2	Méthode asymptotique	230
9.4.3	Contrôle de longueur d'arc	231
9.5	Analyse de stabilité multi-échelles	233
10	Etude de flambement d'une nappe en flexion circulaire	235
10.1	Présentation du problème	236
10.2	Formulation du problème continu	238
10.2.1	Calcul de la solution principale	238
10.2.2	Analyse de stabilité de l'équilibre	241
10.3	Méthode de résolution à l'échelle locale	246
10.3.1	Calcul de la solution principale	246
10.3.2	Calcul numérique des modes propres	249
10.3.3	Estimation du chargement critique	253
10.3.4	Description du flambement	254
10.4	Méthode de résolution à l'échelle globale	254
10.4.1	Calcul de la solution principale périodique	254
10.4.2	Détection de l'apparition du flambement	256
10.5	Applications numériques	257
10.5.1	Description des modèles	257
10.5.2	Solution principale	258
10.5.3	Calcul de la première branche de bifurcation	261
<hr/>		
	Conclusion générale	269
	Annexes	271
A	Approximations en petites déformations	271
A.1	Approximation générale	271
A.2	Application à la loi de Mooney-Rivlin	272
	Bibliographie	275

## Résumé court en français

Les nappes en matériau flexible renforcées par des câbles apparaissent dans de nombreux systèmes industriels. Le rôle essentiel des renforts fibrés est d'apporter à la structure une rigidité plus importante en extension et en flexion. Mais il peut arriver qu'ils subissent une compression axiale importante, éventuellement couplée à de la flexion, conduisant à des instabilités de type flambement dans le plan de nappe. La thèse introduit une modélisation mécanique et numérique originale de ces nappes permettant de décrire ces instabilités afin de mieux les comprendre, d'en contrôler les effets et de dimensionner ce type de structures par calcul. Il prend en compte la flexion globale des fibres, ainsi que la gestion des effets locaux induits dans la matrice.

La modélisation a été développée à deux échelles :

- une échelle macroscopique, introduisant une cinématique enrichie de milieu continu, reposant sur une densité surfacique de poutres résistant aux flexions (dans le plan et hors plan). Un modèle d'éléments finis spécifique a été développé. On vérifie que ce modèle de structure mince n'est pas sujet au phénomène de verrouillage numérique grâce à une analyse théorique ainsi qu'à une série de tests numériques ;
- une échelle microscopique décrite par un modèle de cellule local construit et justifié par analyse asymptotique, et résolu par éléments finis.

La modélisation a été analysée sous trois aspects

- l'aptitude à prendre en compte l'incompressibilité de la matrice sans verrouillage numérique.
- l'étude de flambement sous compression par analyse de stabilité multi-échelles calculant la charge critique et le mode de flambement attendu,
- la pertinence numérique des résultats obtenus par rapport aux simulations expérimentales disponibles.

**Mots-clés :** *Modélisation multi-échelles; Analyse de stabilité; Verrouillage numérique; Matériaux composites renforcés; Incompressibilité; Hyperélasticité.*





## Short Abstract in English

Fiber reinforced layers are very popular in industry but are prone to structural instabilities observed in various experimental and technological environments. Such situations combine global inplane buckling of reinforcing fibers and local shearing or compression of filling material. The purpose of the work is to develop enriched multiscale models, able to treat both aspects through an adequate kinematic description of the different components and a proper exchange of information between local and global models.

The macroscopic level introduces in addition to the filling material a surface density of rods able to resist against in plane and out of plane bending. A new finite element model is then developed at this macroscopic level and we show through theoretical analysis and numerical tests that the model is locking-free.

At microscopic level, a local cell model is introduced and justified through asymptotic analysis, model which is then solved by a local nonlinear finite element model.

Some numerical precautions are added in the multiscale approach to avoid a numerical locking on incompressible materials. In addition, a multiscale stability analysis is conducted in buckling situations predicting the critical load and the corresponding buckling mode. The models are finally validated on available experimental set up.

**Keywords :** *Multiscale modeling; stability analysis; Numerical locking; Fiber-reinforced composite materials; Incompressibility; Hyperelasticity.*



# Introduction générale

L'objectif de ce chapitre est de présenter succinctement le problème mécanique qui nous intéresse dans cette thèse. On décrit les principaux phénomènes physiques qui devront être pris en compte, ainsi que les difficultés numériques qui sont susceptibles d'apparaître lors de notre modélisation.

## ■ 1.1 Présentation du problème

### 1.1.1 Nappes fibrées dans une structure 3D : cadre général

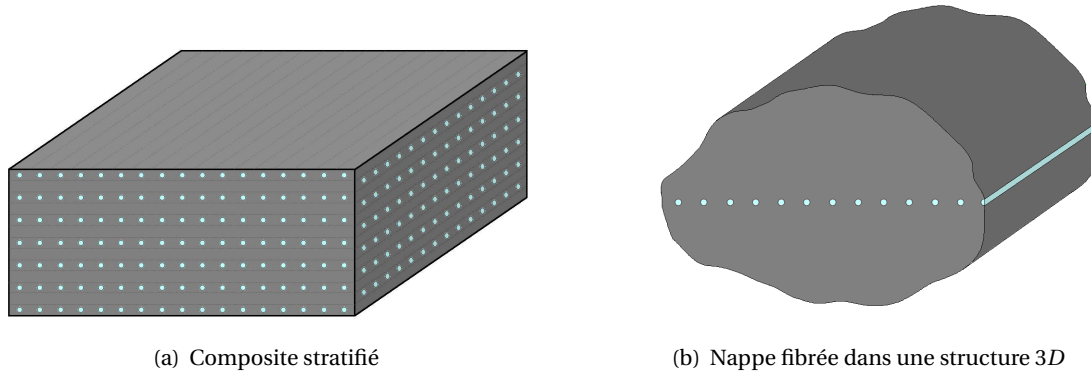
Les matériaux composés de couches de fibres sont très présents dans l'industrie. Ils sont notamment utilisés dans les sports automobiles et dans l'aéronautique, secteurs de pointe dans lesquels le compromis rigidité/poids est très important. Ces composites sont constitués de deux parties : la matrice et des renforts fibrés. Les fibres assurent la solidité et la rigidité du matériau. La matrice, quant à elle, sert uniquement à maintenir les fibres solidaires les unes des autres. Elle est donc souvent choisie peu résistante et assez légère.

Un matériau composite est généralement stratifié, c'est à dire que plusieurs couches de fibres (appelées "plis") sont empilées. Ces plis peuvent être constitués soit de fibres placées toutes dans le même sens (plis unidirectionnels, cf (Grandidier and Potier-Ferry, 1990)), soit d'un tissage de fibres (comme pour un tissu classique, voir figure 1.1(a) - cf (Drapier et al., 1996)).

On considèrera surtout dans cette étude des nappes fibrées qui sont entourées de matrice homogène, comme illustré sur la figure 1.1(b). Cela peut correspondre à des structures possédant une seule couche de fibres, ou bien à des composites stratifiés dans lesquels les plis sont éloignés les uns des autres.

Le travail rapporté dans ce mémoire porte sur la modélisation d'une nappe fibrée noyée dans une structure 3D, dans le cas particulier où :

- le comportement des matériaux est hyperélastique ;
- la structure peut subir de grandes déformations ;
- la matrice est incompressible ;
- l'écartement entre les fibres est constant.



(a) Composite stratifié

(b) Nappe fibrée dans une structure 3D

FIG. 1.1: Exemples de structures avec une ou plusieurs couches fibrées

Un exemple standard de nappes correspondant à ces hypothèses est celui des plis de renforts présents dans un pneumatique, qui sont composés de gomme incompressible et de câbles (textiles ou métalliques), comme représenté sur la figure 1.2.

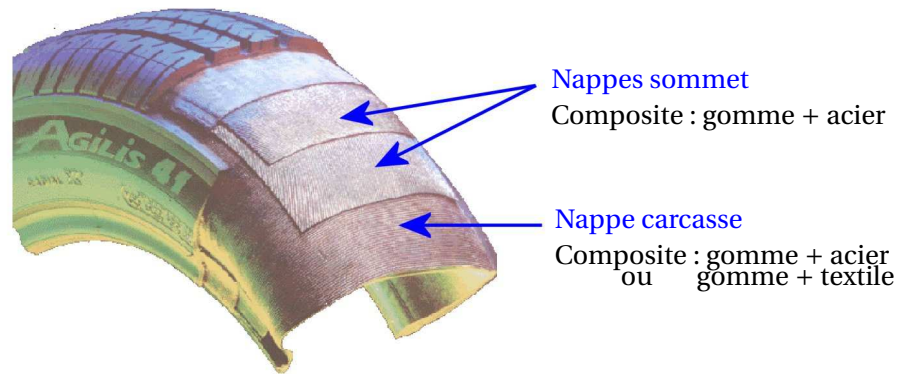


FIG. 1.2: Nappes fibrées dans un pneumatique (société Michelin)

La structure d'une nappe fibrée est assez complexe, et peut être décomposée en trois échelles, comme résumé sur la figure 1.3 :

- niveau macroscopique : on se place à l'échelle de la nappe fibrée, dont le volume est noté  $\Omega_M$ . Chaque point matériel de son plan est au centre d'un volume élémentaire représentatif noté  $\Omega_m$ , comprenant des parties fibres et matrice ;
- niveau mésoscopique : on se place à l'échelle d'une fibre. Chaque point matériel est à l'intérieur d'un volume élémentaire constitué d'une section de fibre entourée d'un petit volume de matrice ;
- niveau microscopique : échelle du comportement élémentaire.

Dans cette étude, on ne descendra jamais jusqu'à l'échelle microscopique, en se limitant aux niveaux macroscopique et mésoscopique. On suppose pour cela que l'on dispose d'une loi de comportement approchée à l'échelle mésoscopique.

L'objectif de ce travail est d'élaborer une méthode numérique permettant de simuler de manière fiable le comportement d'une telle nappe fibrée, couplée avec le reste de la structure 3D, dans des situations de grande déformation avec forte flexion et compression potentielle.

Dans un contexte industriel, les coûts de calcul doivent rester raisonnables, c'est pourquoi on souhaite que les calculs soient réalisés le plus possible à l'échelle macroscopique. Un exemple d'éléments finis utilisés à l'échelle macroscopique est donné sur la figure 1.4.

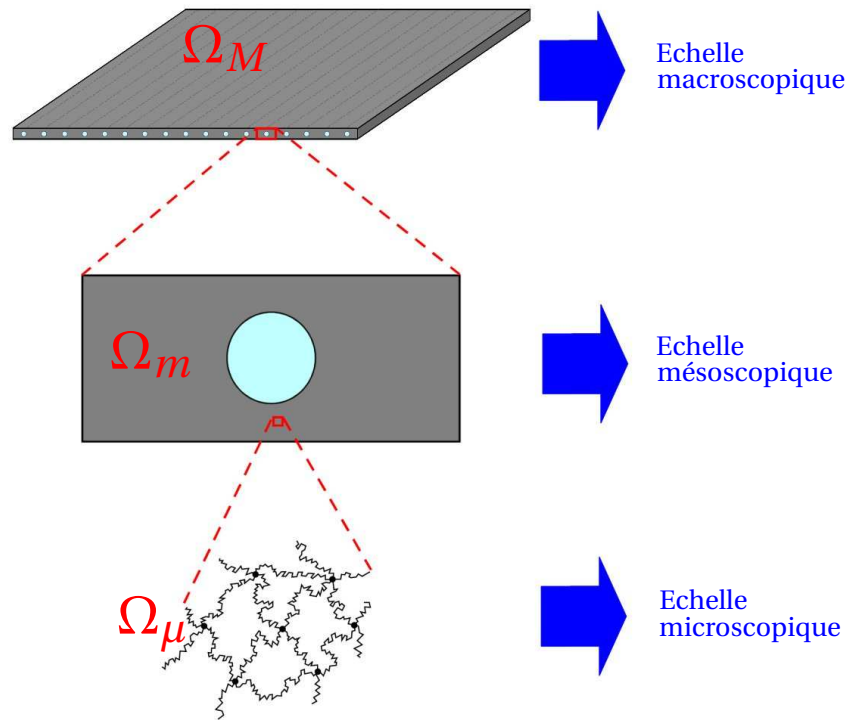


FIG. 1.3: Décomposition multi-échelles d'une nappe fibrée

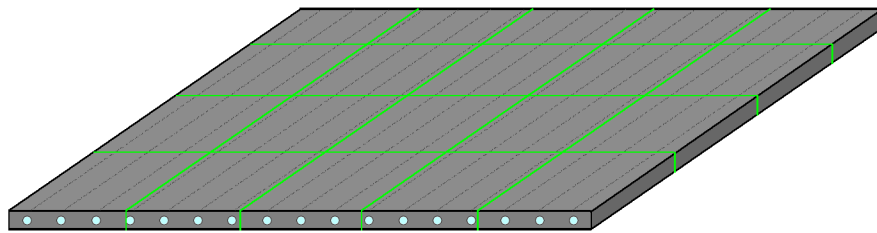


FIG. 1.4: Éléments finis grossiers pour la simulation de la nappe fibrée

Néanmoins, du fait de leur structure multi-échelles, le comportement mécanique des nappes fibrées est très complexe, surtout en situations de forte flexion et de compression dans le sens des fibres : la réponse du composite dépend alors des deux échelles par :

- la rigidité des fibres en compression (échelle macroscopique) ;
- la rigidité des fibres en flexion (échelle macroscopique) ;
- les efforts exercés par la gomme sur les fibres (échelle mésoscopique).

On décrit une telle situation dans ce qui suit.

### 1.1.2 Exemple représentatif : compression sous flexion circulaire

Comme on vient de le dire, le comportement le plus complexe d'une nappe fibrée correspond à une forte flexion des fibres couplée à une compression axiale.

Pour valider notre modèle, nous avons donc choisi de mettre en place un cas test relativement simple imposant ce type de chargement à la couche de fibres :

On considère une éprouvette de gomme comprenant une nappe fibrée dans sa partie inférieure. Une fine lame métallique est collée sur sa surface supérieure, dont le rôle sera d'empêcher toute extension ou compression. La géométrie de l'éprouvette est représentée sur la figure 1.5.

On impose une flexion circulaire sur la surface supérieure de cette éprouvette, comme indiqué sur la figure 1.6. La lame métallique disposée sur la partie supérieure empêchant toute extension, la flexion engendre alors une mise en compression axiale des fibres.

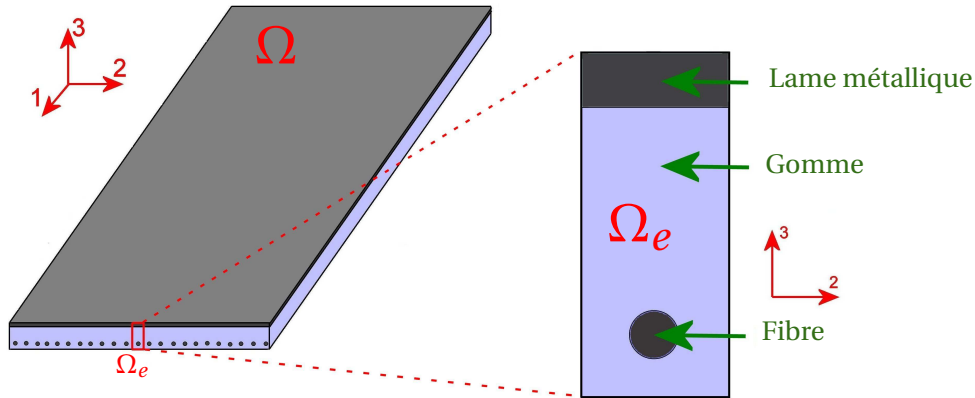


FIG. 1.5: Géométrie

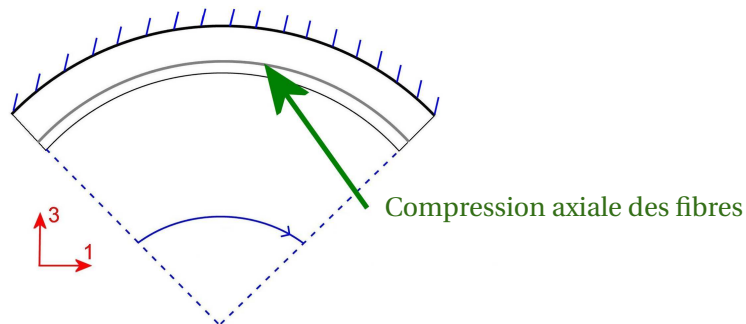


FIG. 1.6: Chargement

Cet exemple représentatif de flexion déviée a un rôle très important tout au long de ce mémoire. Il est analysé en détail dans la partie III, et sert à la validation de nos modèles dans les parties I et II.

## ■ 1.2 Mise en évidence des phénomènes importants

On décrit dans cette section tous les phénomènes physiques et numériques qui peuvent avoir un rôle important dans la modélisation des nappes fibrées.

### 1.2.1 Phénomènes physiques macroscopiques

Les phénomènes physiques macroscopiques qui ont un rôle important sont mis en valeur par des résultats expérimentaux.

## Rigidité dans le sens des fibres

Les nappes fibrées présentent un effet orthotrope : les fibres assurant la rigidité du matériau, la nappe sera beaucoup plus résistante en traction et en flexion dans leur direction.

Notre modélisation devra prendre en compte cette résistance des fibres en traction et en flexion, alors que la nappe se comportera essentiellement comme une membrane dans la direction normale aux fibres.

## Instabilités en compression axiale

La résistance des câbles en compression étant très élevée par rapport à celle en flexion, on peut s'attendre en pratique à ce qu'une fibre mise en forte compression présente une instabilité de flambement. Pour étudier ce phénomène, on réalise l'expérience de flexion circulaire décrite dans la sous-section 1.1.2.

Le montage utilisé est représenté sur la figure 1.7 : la nappe fibrée est placée en dessous d'une large épaisseur de gomme incompressible, sur laquelle on colle une fine lame en acier (appelée clinquant). Cette éprouvette est encastrée entre deux mors indéformables, qui permettent d'imposer deux couples purs de signes opposés à ses extrémités.

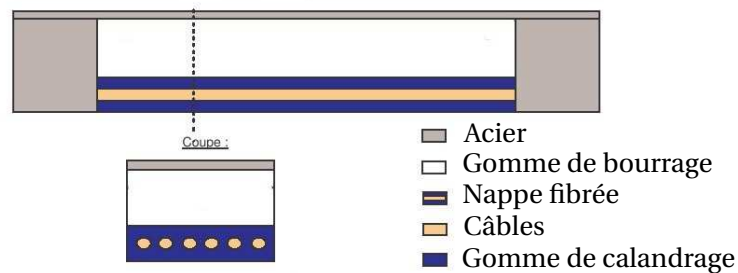


FIG. 1.7: Montage de l'expérience de flexion circulaire

Les deux couples purs opposés produisent un moment constant sur la longueur de l'éprouvette. Les matériaux étant supposés élastiques, la courbure est alors elle aussi constante dans l'éprouvette. Cela signifie que la déformée forme un arc de cercle (modulo les imperfections sur la géométrie et le chargement), comme on peut le vérifier sur la figure 1.8.



FIG. 1.8: Flexion circulaire d'une nappe fibrée (d'après (Caillard, Michelin))

La lame métallique située sur la surface supérieure est prise très résistante en extension. Ainsi, la fibre neutre de l'éprouvette se situe près de la surface supérieure, et la nappe fibrée située en dessous



est alors compressée. Lorsque la courbure augmente, cette compression va finir par provoquer un flambement collectif des câbles dans le plan de la nappe, comme illustré sur la figure 1.9



FIG. 1.9: Flambement de la nappe sous flexion circulaire (d'après (Caillard, Michelin))

Ce type d'instabilités est dû au comportement non linéaire de la nappe fibrée, et il est important que notre modèle soit capable de les simuler. Il est en particulier contrôlé par la présence de gomme entre les fibres qui impose un comportement collectif des fibres, modifie le seuil d'instabilité, et pilote le comportement post-flambement.

## 1.2.2 Phénomènes physiques mésoscopiques

Les résultats expérimentaux ne permettent pas d'observer ce qui se passe à l'intérieur des nappes, à l'échelle mésoscopique. En particulier, on ne peut pas mesurer les déformations de la gomme localisées à l'interface avec un câble ou encore son cisaillement par la mise en flexion des câbles voisins. Pour étudier l'importance de ces micro-déformations, une solution est de réaliser des simulations numériques soit sur la géométrie complète de la nappe, soit à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif.

Un exemple de calcul mésoscopique est donné sur la figure 1.10, correspondant à une flexion circulaire avec compression de la nappe fibrée comme décrit précédemment. Ce calcul a été réalisé sur un maillage 2D avec le logiciel libre Freefem++, dans lequel on impose la dérivée normale à cette section  $\frac{\partial u}{\partial X_1}$  de manière à modéliser la compression axiale produite par la mise en flexion (plus de détails sont donnés dans le chapitre 10 de ce rapport).

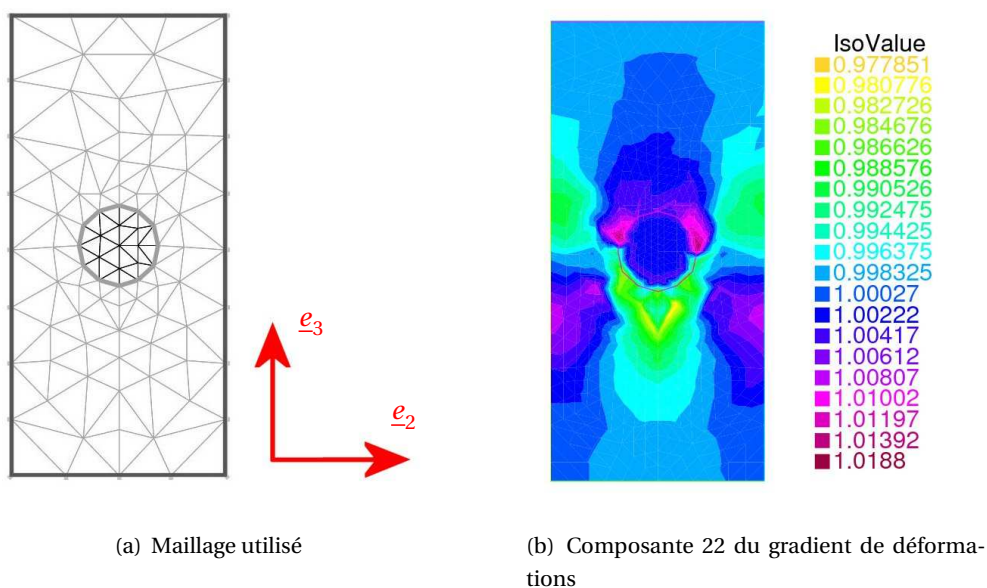


FIG. 1.10: Déformations localisées près des câbles (résultat obtenu avec des éléments finis P2 dans le logiciel Freefem++).

Ces résultats montrent l'existence de déformations importantes de la gomme localisée près des câbles, traduisant un couplage entre les deux matériaux :

- La gomme guide la position des fibres par sa résistance en traction/compression ;
- La torsion des câbles est contrôlée par la mise en cisaillement de la gomme.

Ces remarques prouvent l'importance de l'échelle mésoscopique sur le comportement global de la nappe à l'échelle macroscopique.

### 1.2.3 Contraintes numériques

Nous avons décrit les phénomènes physiques qui semblent indispensables à prendre à compte dans les sous-sections 1.2.1 et 1.2.2. Ces facteurs vont nous guider par la suite pour choisir une modélisation adaptée au problème. Cependant, nos choix doivent aussi dépendre de contraintes numériques, qui font l'objet de cette sous-section.

#### Verrouillage numérique

Le verrouillage numérique est un phénomène indésirable qui sera étudié plus en détails dans le chapitre 3. Il se présente dans des situations mécaniques où coexistent des modes de déformation de rigidité très différentes, qui seront mal respectés par approximation numérique. D'un point de vue mathématique, ce phénomène est décrit par le cadre abstrait suivant :

On considère une formulation variationnelle, faisant intervenir un petit paramètre  $\epsilon$ , de la forme : (cf (Chapelle and Bathe, 2003))

Trouver  $u_\epsilon \in \mathcal{V}$  tel que

$$A(u_\epsilon, v) + \epsilon^{-2} \langle \Gamma(u_\epsilon), \Gamma(v) \rangle = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{V} ,$$

où  $A$  est une forme bilinéaire symétrique positive,  $F$  représente une forme linéaire,  $\Gamma$  est un opérateur continu de  $\mathcal{V}$  dans un espace  $\mathcal{W}$  dont  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire. Au delà d'une rigidité homogène présente dans le terme  $A$ , le système est donc très raide sur les déformations  $\Gamma(u)$ .

Le terme  $\epsilon^{-2}$  a alors le rôle d'un paramètre de pénalisation correspondant à la contrainte  $\Gamma(v) = 0$ . Et lorsqu'on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, on peut montrer que la suite de solutions  $(u_\epsilon)$  converge vers  $u_0$ , solution du problème :

Trouver  $u \in \mathcal{V}_0$  tel que

$$A(u, v) = F(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}_0 ,$$

avec

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ v \in \mathcal{V} \text{ tels que } \Gamma(v) = 0 \right\} .$$

Quand l'espace  $\mathcal{V}_0$  n'est pas vide, et si le chargement est compatible (c'est à dire  $F \in \mathcal{V}'_0$ ), ce problème limite est bien posé et admet une solution non nulle.

On discrétise ce problème (par exemple par une méthode d'éléments finis), et on note  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$  le sous-espace discret. Pour une taille de maille  $h$  fixée, si  $\mathcal{V}^h$  n'est pas suffisamment riche, on risque d'être proche de la situation  $\mathcal{V}^h \cap \mathcal{V}_0 = \{0\}$ . Dans ce cas, la solution du problème discrétisé tend vers 0 quand  $\epsilon$  diminue, ce qui signifie mécaniquement que le système apparaît alors de plus en plus raide contrairement au problème continu.

En pratique, le paramètre  $\epsilon$  n'approchera jamais 0, mais les remarques précédentes illustrent la dépendance entre la taille de maillage et la valeur du paramètre  $\epsilon$ . A  $\epsilon$  fixé, si on ne prend pas de précautions, il faudra utiliser des tailles de maille  $h$  très petites pour approcher correctement la solution continue en norme  $A(\cdot, \cdot) + \epsilon^{-2} \langle \Gamma(\cdot), \Gamma(\cdot) \rangle$ , ce qui est clairement indésirable.

Les nappes fibrées considérées dans ce travail possèdent deux sources potentielles de verrouillage numérique :

- l'incompressibilité de la gomme constitutive de la matrice ;
- la faible épaisseur de la structure.

Une analyse spécifique devra vérifier si notre modèle présente un risque de verrouillage numérique pour ces deux facteurs.

### Flambement numérique

Pour éviter un verrouillage numérique dû à la faible épaisseur de la nappe renforcée, une solution consiste à supposer que la gomme va subir la totalité du cisaillement, et donc que les fibres vont résister uniquement en extension/compression. Ce modèle, appelé "modèle de nappe arasée", sera détaillé dans le chapitre 2.

Mais le comportement des fibres en compression est difficile à modéliser. Par exemple, avec des éléments finis classiques, une mise en compression axiale peut provoquer un phénomène indésirable tel qu'observé sur la figure 1.11, appelé "Flambement numérique". Le modèle numérique devient instable, avec l'apparition de plis à l'échelle du maillage. Cela engendre deux problèmes :

- les résultats numériques ne sont ni fiables ni exploitables dans la zone de flambage, car la solution numérique calculée y oscille de façon parasite à l'échelle du maillage ;
- l'énergie n'a pas de véritable minimum dans l'espace des déplacements autorisés par la discrétisation par éléments finis. Plusieurs solutions d'énergie voisine coexistent, ce qui conduit à des problèmes de convergence numérique, le code ne sachant pas vers quelle solution bifurquer.

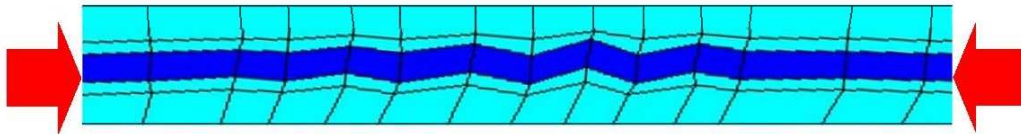


FIG. 1.11: Résultat observé avec un modèle de nappe arasée suite à une mise en compression axiale, avec un logiciel éléments finis en déplacements utilisant des éléments 2D Q1 axisymétriques (d'après (Dejonghe, Michelin))

De manière grossière, il coûte moins cher (énergétiquement parlant) de faire osciller la nappe d'une maille à l'autre (donc de faire travailler la gomme en cisaillement) que de comprimer le câble. Ce phénomène purement numérique est dû au fait que le modèle ne "voit pas" la mise en flexion des câbles.

Cet exemple montre que les modèles utilisés de manière classique ne sont pas assez riches : la flexion des câbles ne peut pas être prise en compte par une formulation éléments finis à l'échelle de la nappe basée sur des déplacements  $C^\infty$  par éléments mais  $C^0$  d'un élément à l'autre, car chaque élément ne voit que du cisaillement. Il faut donc qu'une information plus riche passe entre 2 éléments consécutifs d'une nappe.

## ■ 1.3 Enjeux de la modélisation et travaux existants

Pour résumer les sections 1.1 et 1.2, la modélisation des nappes fibrées exige des spécificités qui peuvent être décomposées suivant les échelles où elles interviennent :

**A l'échelle macroscopique :**

- **A** : Prise en compte de l'orthotropie dans des calculs en grandes déformations ;
- **B** : Gestion du verrouillage numérique dû à l'incompressibilité de la gomme ;
- **C** : Gestion du verrouillage numérique dû à la faible épaisseur de la nappe ;
- **D** : Prise en compte de la flexion des câbles dans l'énergie, pour détecter des instabilités avec les bons modes de flambement, et donc éviter un flambage numérique en compression.

**A l'échelle mésoscopique :**

- **E** : Calcul des micro-déformations dans la gomme, permettant de prendre en compte le couplage entre les câbles et la gomme ;
- **F** : Gestion locale du verrouillage numérique dû à l'incompressibilité de la gomme.

La plupart de ces problématiques a déjà été largement étudié dans la littérature : La résolution numérique du problème macroscopique en grandes déformations (point **A**) sera faite par la méthode des éléments finis. Cette méthode a commencé à être utilisée en mécanique du solide il y a plus de cinquante ans (cf (Argyris, 1954) et (Clough, 1960)). Son application était réservée au départ à des problèmes d'élasticité linéaire, cadre dans lequel elle est détaillée mathématiquement par (Ciarlet, 1978). Il faut attendre près d'une vingtaine d'année pour qu'une extension à l'élasticité non linéaire en grandes déformations soit proposée par (Oden, 1972), puis analysée dans (Le Tallec, 1982). Aujourd'hui, les calculs non linéaires par la méthode des éléments finis sont maintenant bien connus et maîtrisés, souvent résolus par une méthode de Newton-Raphson (ou ses variantes). L'ouvrage récent de (Bonnet and Frangi, 2006) résume les nombreuses applications actuelles de la méthodes des éléments finis en mécanique non linéaire.

Cependant, l'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite quelques précautions : certains problèmes mécaniques dépendent d'un petit paramètre, noté  $\epsilon$ , pouvant détériorer la précision d'une discrétisation par éléments finis classique. C'est notamment le cas des matériaux quasi-incompressibles (rigidité en compression en  $O(\epsilon^{-1})$ ) et des structures fines (épaisseur en  $O(\epsilon)$ ). Pour la première catégorie de problèmes (point **B**), des solutions simples basées sur une sous-intégration du terme de pénalisation de l'incompressibilité sont connues depuis longtemps, comme expliqué par exemple par (Zienkiewicz, 1971), (Le Tallec, 1994). Le verrouillage numérique des structures fines (point **C**) telles que les coques est plus complexe, et est l'objet de nombreuses recherches encore aujourd'hui. Une présentation détaillée de ces problèmes est proposée par exemple dans les ouvrages (Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia, 1997) et (Chapelle and Bathe, 2003).

Dans notre cas, la structure fine correspond à un matériau composite constitué de fibres très rigides en traction/compression et en flexion. Pour tenir compte de leur résistance en flexion (point **D**), ces fibres peuvent être représentées comme des poutres  $1D$  en grandes rotations, dont la modélisation fut l'objet de nombreux travaux. On choisira en particulier de se baser sur la mesure des déformations non linéaires introduite par (Antman and Kenney, 1981), et on pourra s'inspirer des méthodes de résolution décrites dans (Simo and Vu-Quoc, 1986) ou (Le Tallec et al., 1991). Par ailleurs, l'une des particularités de ces structures élancées est leur comportement non linéaire en compression. Ces non-linéarités provoquent très souvent des instabilités. L'étude de la stabilité de matériaux élastique homogènes est aujourd'hui bien maîtrisée (voir par exemple (Quoc-Son, 2000)), mais le cas des matériaux composites est plus complexe à traiter. Dans le cas où la structure est périodique, un résultat fondamental a été établi par (Geymonat et al., 1993), qui permet de réduire l'étude à une unique cellule élémentaire périodique en montrant que les modes d'instabilités d'écrivent sous forme d'ondes de Bloch. Ce résultat a depuis été largement appliqué (cf (Triantafyllidis and Schraad, 1998), (Nestorovic and Triantafyllidis, 2004), (Gong et al., 2005), (Triantafyllidis et al., 2006)).

Enfin, les méthodes multi-échelles permettant de prendre en compte les déformations microscopiques (point E) sont à l'heure actuelle en plein développement. La solution du problème intervenant à l'échelle locale peut soit être approchée analytiquement (cf (Castaneda and Tiberio, 2000)), soit être aussi calculée des éléments finis (cf méthode EF2 dans (Feyel et al., 2000)). Par ailleurs, ces méthodes ont récemment été adaptées pour pouvoir prendre en compte des gradients d'ordre supérieurs à l'échelle locale par (Kouznetsova et al., 2002). Cette extension présente l'avantage de pouvoir traiter à deux échelles des structures fines telles que les coques, comme cela est réalisé par (Geers et al., 2007).

L'originalité de cette thèse réside dans la construction d'une modélisation qui parvient à associer toutes ces spécificités, qui soit validable par analyse de stabilité et exploitable dans un cadre industriel.

## ■ 1.4 Plan de la thèse

Les considérations décrites dans la section 1.3 nous permettent de décrire les directions principales du travail effectué pendant cette thèse. Notre démarche s'articule en trois étapes essentielles :

### Première partie : Modélisation macroscopique d'une nappe renforcée

Nous présentons dans la première partie une modélisation macroscopique négligeant les déformations localisées dans la gomme :

- Nous commençons par décrire une première modélisation de nappe renforcée dans le **chapitre 2** (pp. 15 à 42). Ce modèle se limite à la considération des phénomènes apparaissant à l'ordre 0 à l'échelle macroscopique : les renforts fibrés de la structure sont représentés par des poutres en grandes rotations, de manière à prendre en compte leur flexion. On réalise une estimation grossière de l'énergie de gomme en négligeant les micro-fluctuations à l'échelle mésoscopique.
- L'objectif du **chapitre 3** (pp. 43 à 76) est de construire une méthode numérique qui permettra d'éviter le phénomène de verrouillage numérique en cisaillement lors de la résolution du problème macroscopique par éléments finis. Pour cela, le modèle non linéaire est analysé de manière formelle, et on introduit une formulation mixte équivalente. Au final, il ressort que l'approximation discrète doit être quadratique sur les déplacements et sur les rotations, et une intégration numérique avec sous-intégration partielle sélective est justifiée par la formulation mixte.
- Le **chapitre 4** (pp. 77 à 126) décrit la discrétisation du modèle de nappe renforcée, et présente un algorithme de Newton-Raphson projeté pour résoudre le problème non linéaire. Une série de tests est réalisée pour valider le modèle non linéaire :
  - Des tests à flexion de câbles inhibée ou non sont réalisés pour des épaisseurs tendant vers 0, de manière à vérifier l'absence de verrouillage numérique et de modes parasites ;
  - Les résultats du modèle sont comparés à des solutions analytiques sur un cas de nappe cylindrique en flexion ou en compression
  - L'apparition d'instabilités est vérifiée sur un cas de compression sous flexion circulaire.

Ce premier modèle macroscopique peut ainsi être validé sur des cas où la gomme reste peu déformée. La question qui se pose alors est : Comment prendre en compte les déformations de la gomme localisées à l'échelle d'une fibre ? C'est l'objet de la deuxième partie.

## Deuxième partie : Modélisation multi-échelles d'une nappe renforcée

Un degré de précision supplémentaire est introduit ici en descendant à l'échelle mésoscopique, de manière à tenir compte des micro-déformations de la gomme. Cette modélisation multi-échelles, décrite dans la partie I, est justifiée par une analyse asymptotique.

- Le **chapitre 5** (pp. 129 à 142) est consacré à un état de l'art sur les méthodes multi-échelles appliquées à des composites fibrés. Il commence par détailler les approches d'homogénéisation analytique possibles, puis présente quelques méthodes numériques, dans lesquelles le problème local est résolu numériquement. Nous concluons en montrant que les modèles existants ne sont pas adaptés à notre problème de nappe fibrée, ce qui justifie la construction d'une approche multi-échelles spécifique.
- L'objectif du **chapitre 6** (pp. 143 à 161) est d'élaborer une stratégie multi-échelles qui soit justifiée mécaniquement. Nous y détaillons une analyse asymptotique permettant de comprendre quelles quantités doivent être conservées au premier ordre, et permettant d'introduire un problème local caractérisant asymptotiquement les microdéformations de la gomme.
- Dans le chapitre **chapitre 7** (pp. 163 à 171), nous écrivons la formulation variationnelle continue du problème local et nous expliquons la méthode numérique utilisée pour le résoudre. Nous y détaillons également la manière dont sont calculés les efforts et les raideurs remontés à l'échelle globale.
- Le **chapitre 8** (pp. 173 à 214) est consacré à l'étude des mécanismes de transitions entre échelles dans un calcul numérique. Une attention particulière est accordée au cas où la gomme est incompressible, de manière à assurer que le problème est bien posé et qu'aucun risque de verrouillage en variation de volume n'apparaît. Nous y présentons une série de tests numériques permettant de valider notre stratégie multi-échelles.

## Troisième partie : Analyse de stabilité multi-échelles

Dans la troisième et dernière partie de notre étude, nous nous intéressons plus précisément aux instabilités apparaissant dans certains problèmes où les nappes fibrées sont soumises à une compression axiale.

- Dans le chapitre **chapitre 9** (pp. 217 à 234), nous rappelons les notions essentielles de la stabilité d'un solide élastique. Nous y présentons également les méthodes numériques adaptées aux problèmes présentant des points de bifurcation et nous introduisons les résultats existants concernant la stabilité des matériaux composites.
- Enfin, l'objectif du **chapitre 10** (pp. 235 à 267) est de modéliser le flambement des nappes fibrées lorsque les câbles sont soumis à une compression axiale. Pour cela, nous nous plaçons dans le cas particulier du problème de flexion circulaire décrit dans la sous section 1.1.2. Nous réalisons une analyse de stabilité multi-échelles basée sur le résultat de (Geymonat et al., 1993), qui permet de réduire le problème à une cellule élémentaire  $2D$  et de modéliser les modes propres sous forme

d'ondes de Bloch. Cette étude va nous permettre de mieux comprendre le mécanisme d'instabilités des nappes, et de valider les résultats de flambement obtenus par les deux modèles développés pendant cette thèse.

Première partie

# Modélisation macroscopique d'une nappe renforcée





## Cinématique et modèle macroscopique

### ■ Introduction

L'objectif de ce chapitre est de construire une première modélisation de nappe renforcée, comme celle représentée sur la figure 2.1. On se limite pour le moment à la considération des phénomènes apparaissant à l'ordre 0 à l'échelle macroscopique : l'enjeu est alors de gérer convenablement les renforts fibrés de la structure et de prendre en compte leur flexion. On néglige donc pour le moment les déformations intervenant à des ordres supérieurs, notamment les micro-fluctuations de la gomme à l'échelle d'une fibre, qui seront étudiées plus tard dans la partie II.

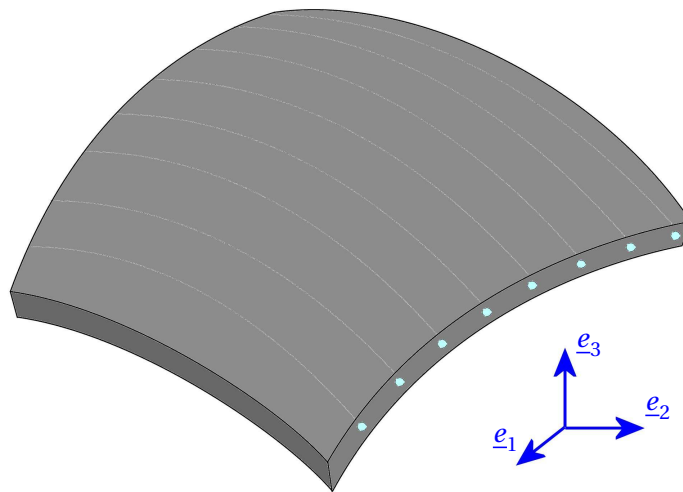


FIG. 2.1: Exemple de nappe courbe dans le repère global  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans un premier temps on décrit la géométrie de la nappe fibrée considérée dans son état de référence et on introduit les notations choisies. Dans la section 2.2, on commence par faire un court bilan des modèles existants pour notre problème et on analyse leurs limites, ce qui va justifier les choix réalisés dans notre approche. Ensuite, dans les section 2.3 et 2.4, on explique le modèle original de nappe renforcée qui a été développé, avant de décrire la méthode de résolution utilisée dans la section 2.5.

## 2.1 Hypothèses et notations utilisées

On se place dans l'espace physique  $E = \mathbb{R}^3$ , dans lequel on choisit un *repère global* orthonormé  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère une nappe fibrée composée d'une matrice de gomme quasi-incompressible et de renforts cylindriques très rigides, de caractéristiques mécaniques constantes (voir figure 2.1). Les modules d'Young de la gomme et des câbles sont notés respectivement  $E_g$  et  $E_c$ , alors que les coefficients de Poisson sont appelés  $\nu_g$  et  $\nu_c$ . Plus généralement, la membrane pourra être représentée par un matériau hyperélastique (notion détaillée dans la sous section 2.1.2) et les caractéristiques mécaniques des câbles pourront être décrites par le biais des rigidités en traction, cisaillement, flexion et torsion respectivement. On suppose que cette nappe est soumise à des pressions sur ses faces supérieure et inférieure dûes aux efforts exercés par le milieu 3D environnant (nuls si la nappe est isolée). De manière plus précise, nous allons décrire les hypothèses réalisées sur la géométrie de la nappe dans la sous section 2.1.1 avant de faire quelques rappels sur la modélisation de la gomme dans la sous section 2.1.2.

### 2.1.1 Géométrie de la nappe fibrée au repos

La géométrie de la nappe est définie par sa surface moyenne, notée  $\mathcal{S}_m$ , et par son épaisseur  $t$ , supposée constante. Dans le cas de géométries complexes, la surface moyenne est décrite par une collection de cartes  $\underline{\Psi}^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ , pouvant être analysées séparément. Dans la suite, on va supposer pour simplifier que  $\mathcal{S}_m$  est définie par une carte unique  $\underline{\Psi}_0$ , application bijective et régulière de  $\bar{P} \subset \mathbb{R}^2$  dans  $\mathcal{S}_m \subset E$  :

$$\mathcal{S}_m = \underline{\Psi}_0(\bar{P})$$

On définit la base du plan tangent :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \begin{cases} \underline{a}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial \underline{\Psi}_0}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \\ \underline{a}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial \underline{\Psi}_0}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

Pour simplifier, contrairement à ce qui est souvent fait dans la théorie des coques, on va supposer que le domaine  $\bar{P}$  et l'application  $\underline{\Psi}_0$  sont choisis de telle sorte que :

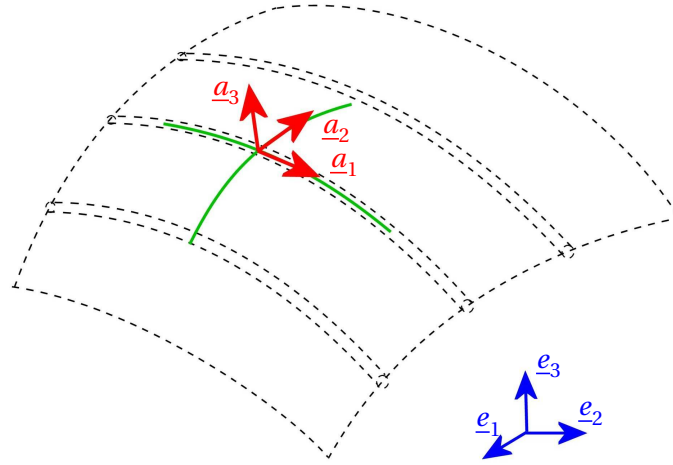
- $\underline{a}_1$  indique la direction des fibres au repos ;
- les deux vecteurs  $\underline{a}_1$  et  $\underline{a}_2$  sont unitaires et orthogonaux.

Ainsi, le plan de référence  $\bar{P}$  correspond simplement à la surface  $\mathcal{S}_m$  qui a été "aplatie".

Si on pose en plus  $\underline{a}_3 = \underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2$ , cela nous permet de travailler dans une base orthonormée locale  $(\underline{a}_i)_{i=1,2,3}$ , appelée *base matériau*, telle que : (voir figure 2.2)

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \begin{cases} \underline{a}_1 & \text{indique la direction des fibres au repos} \\ \underline{a}_2 & \text{est orthogonal aux fibres dans le plan tangent} \\ \underline{a}_3 & \text{est la normale au plan tangent de la nappe} \end{cases}$$

Les coordonnées d'un point  $M \in \Omega$  seront notées  $(X_1, X_2, X_3)$  dans le repère global, alors que celles du point correspondant  $\hat{M}$  dans le volume de référence  $\hat{\Omega}$  seront notées  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  dans le repère local. On remarquera que dans le cas d'une nappe dont la configuration au repos est plane, ces deux systèmes de coordonnées sont identiques.

FIG. 2.2: Définition locale de la base matériau  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$ 

Les notations géométriques prises dans la suite de ce rapport sont récapitulées sur la figure 2.3 : Comme nous l'avons déjà indiqué, l'épaisseur  $t$  de la nappe est supposée constante sur toute la surface. Le volume de la nappe  $\Omega$  peut alors être défini par une nouvelle application  $\underline{\Psi}$ , bijective et régulière de  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$  dans  $\Omega \subset E$  définie par

$$\forall (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \bar{\Omega} = \bar{P} \otimes \left[ -\frac{t}{2}; \frac{t}{2} \right], \quad \underline{\Psi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{\Psi}_0(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 \underline{a}_3(\xi_1, \xi_2) \quad (2.1)$$

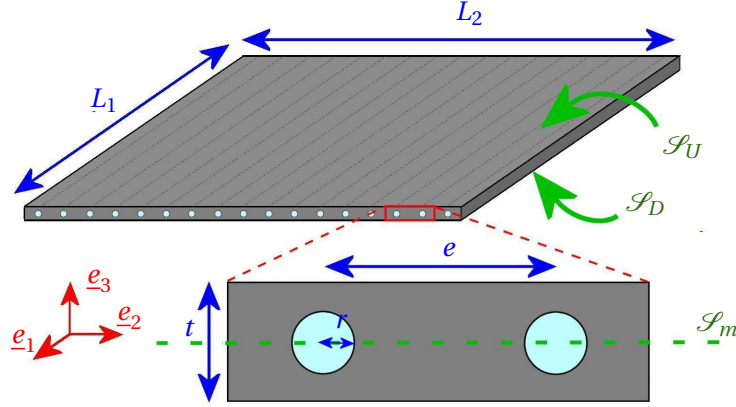


FIG. 2.3: Dimensions caractéristiques d'une nappe fibrée

Les faces supérieure et inférieure de la nappe sont respectivement notées  $\mathcal{S}_U$  et  $\mathcal{S}_D$ , définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_U &= \left\{ \underline{\Psi}_0(\xi_1, \xi_2) + \frac{t}{2} \underline{a}_3(\xi_1, \xi_2) \text{ avec } (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} \right\} \\ \mathcal{S}_D &= \left\{ \underline{\Psi}_0(\xi_1, \xi_2) - \frac{t}{2} \underline{a}_3(\xi_1, \xi_2) \text{ avec } (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} \right\} \end{aligned}$$

On note  $L_1$  la longueur moyenne d'une fibre de la nappe et  $L_2$  la largeur moyenne de la nappe perpendiculairement aux fibres. Le rayon des fibres cylindriques et leur écartement sont supposés constants sur toute la surface de la nappe, et sont notés respectivement  $r$  et  $e$ . Les fractions volumiques de chaque matériau sont alors aussi constantes sur toute la surface de la nappe, et valent :

$$f_c = \frac{\pi r^2}{e t} \quad \text{et} \quad f_g = 1 - f_c = \frac{e t - \pi r^2}{e t} \quad (2.2)$$

Dans la suite, on notera les numéros de composantes par des lettres grecques pour les tenseurs de surface (variant entre 1 et 2) et par des indices latins pour les tenseurs 3D (variant entre 1 et 3). Par ailleurs, on utilisera la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

### 2.1.2 Modélisation en grandes déformations

La gomme qui compose les nappes étudiées est un matériau élastomère, élaboré en grande partie à base de caoutchouc, mais auquel on peut ajouter 10 à 20 composants différents. Certains sont nécessaires pour la vulcanisation (soufre, oxyde de zinc, ...), d'autres permettent d'en accélérer le processus. Certains autres protègent (antioxygènes, ...), ramollissent (huiles, graisses, acides gras, ...), ou encore colorent le vulcanisat (oxyde de zinc, lithopone, ...). Pour faciliter le mélange de ces ingrédients au caoutchouc brut, on peut ajouter une huile de mise en oeuvre. La majorité des caoutchoucs utilisés pour les applications mécaniques contiennent en plus une charge : les charges peuvent améliorer l'élasticité du produit final sans augmenter sa résistance (ce sont alors des produits à base de carbonate de calcium ou de sulfate de baryum) ou améliorer la résistance du produit final (noir de carbone, oxyde de zinc, carbonate de magnésium ou différentes argiles). Le noir de carbone, qui reste la principale charge renforçante du caoutchouc, se présente sous la forme de petites particules de carbones mélangées à la gomme naturelle avant vulcanisation. Le caoutchouc est alors un matériau diphasique composé de constituants avec des propriétés mécaniques complètement différentes.

Une propriété mécanique particulièrement prisée de ces matériaux est leur remarquable élasticité, due à la structure moléculaire des élastomères. Le caoutchouc peut subir des grandes déformations (éventuellement de plusieurs centaines de pour cent) et revenir ensuite à sa configuration initiale. Il faut également évoquer la quasi incompressibilité de ces matériaux : le module de compressibilité du caoutchouc varie entre 1000 et 2000 MPa, alors que l'ordre de grandeur du module de cisaillement est d'environ 1 MPa. Cette différence signifie que le caoutchouc ne varie guère de volume, même sous de fortes contraintes. Son comportement est ainsi quasi incompressible. (Le lecteur intéressé pourra regarder (Saad, 2003) pour plus de détails sur le comportement des caoutchoucs)

La nature complexe de la gomme lui confère des comportements hautement non linéaires. L'objectif de cette sous section est de faire quelques rappels de mécanique des milieux continus, et d'introduire les outils permettant de modéliser ce type de comportement en grandes déformations (cf (Holzapfel, 2000)).

#### Mesure des déformations

On considère un solide déformable  $S$ , et on se place dans un repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

L'ensemble des particules  $P$  constituant le solide occupe au repos un volume  $\Omega_0$ , de frontière  $\partial\Omega_0$ . La position  $\underline{X}$  de chaque point matériel constitutif  $M$  à l'instant initial définit la *configuration de référence*  $\mathcal{C}_0$ .

En mécanique des grandes transformations, il est important de distinguer la configuration initiale et la *configuration déformée*. On suppose que dans sa configuration déformée, notée  $\mathcal{C}$ , le solide occupe le volume  $\Omega$  et sa frontière est devenue  $\partial\Omega$ . Nous utiliserons le même repère pour la configuration initiale et la configuration déformée.

Comme cela est souvent fait en mécanique du solide, on modélise le mouvement par une représentation lagrangienne (voir figure 2.4). Le mouvement est alors caractérisé par la transformation  $\Phi$  qui définit la position déformée  $\underline{x}(\underline{X})$  de chaque point matériel en fonction de sa position  $\underline{X}$  en configuration de référence :

$$\forall \underline{X} \in \mathcal{C}_0, \quad \underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}) \quad (\text{représentation lagrangienne})$$

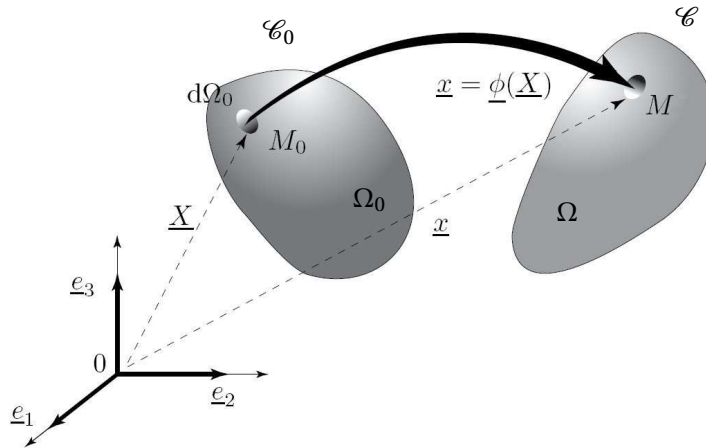


FIG. 2.4: Description lagrangienne du mouvement (figure issue de (Le Tallec, 2009))

Pour caractériser la déformation au voisinage de la particule, on introduit l'application linéaire tangente au mouvement, appelée *tenseur gradient de déformation* :

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}(\underline{X})$$

Considérons un vecteur matériel  $d\underline{X}$  situé en  $\underline{X}$  dans la configuration de référence, son transformé dans la configuration  $\mathcal{C}$  s'obtient par la relation :

$$d\underline{x} = \underline{\underline{F}}(\underline{X}) \cdot d\underline{X}$$

Les variations de volume au cours de la transformation  $\Phi$  sont alors caractérisées par  $J = \det(\underline{\underline{F}})$ .

Pour caractériser les changements de forme entre les configurations  $\mathcal{C}_0$  et  $\mathcal{C}$ , il faut caractériser les variations de longueur et les variations d'angle, soit, en fait, les variations de produit scalaire. On forme donc le produit scalaire de deux vecteurs matériels  $d\underline{x}$  et  $d\underline{y}$ , et on examine sa variation en fonction des vecteurs initiaux  $d\underline{X}$  et  $d\underline{Y}$ . Pour cela, on introduit le *tenseur de Cauchy Green droit*  $\underline{\underline{C}}$ , symétrique et défini positif, défini par

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}) = \underline{\underline{F}}^T(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{X})$$

Ce tenseur permet de calculer les longueurs et les angles en configuration actuelle en fonction de la position des vecteurs matériels en configuration de référence :

$$d\underline{x} \cdot d\underline{y} = d\underline{X} \cdot \underline{\underline{C}}(\underline{X}) \cdot d\underline{Y}$$

Le *tenseur de déformation de Green Lagrange*  $\underline{\underline{e}}$ , symétrique, est relié à  $\underline{\underline{C}}$  par

$$\underline{\underline{e}}(\underline{X}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}(\underline{X}) - \underline{\underline{I}})$$

Ce tenseur  $\underline{\underline{e}}$  mesure localement la différence de produit scalaire avant et après transport de tout couple de vecteurs matériels infinitésimaux  $\underline{dx}$  et  $\underline{dy}$  situés en  $\underline{X}$  :

$$\underline{dx} \cdot \underline{dy} - \underline{dX} \cdot \underline{dY} = 2 \underline{dX} \cdot \underline{\underline{e}}(\underline{X}) \cdot \underline{dY}$$

Par ailleurs, si l'on introduit le *vecteur déplacement*, défini par

$$\underline{u}(\underline{X}) = \underline{x}(\underline{X}) - \underline{X}$$

alors  $\underline{\underline{e}}$  s'exprime en fonction du gradient des déplacements de la manière suivante

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right)$$

### Propriétés d'une loi de comportement en grandes déformations

Maintenant que nous avons décrit les déformations d'un milieu continu, l'autre point capital en mécanique est la notion de *contraintes*. Elles sont modélisées par un tenseur du second ordre symétrique, noté  $\underline{\underline{\sigma}}$ , appelé *tenseur des contraintes de Cauchy*.

Le matériau est *élastique* si le tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant  $t$  dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant, ainsi la contrainte ne dépend pas du chemin suivi par la déformation. Par contre, le travail fourni par cette contrainte dépend généralement du chemin suivi.

Par contre, un matériau élastique est dit *hyperélastique* si le tenseur des contraintes dérive d'une fonction d'énergie du matériau. Ceci implique que le travail mis en jeu pour aller d'un état de déformation à un autre ne dépend pas du chemin suivi.

Pour respecter le principe d'*objectivité*, on montre que l'énergie peut toujours être considérée comme une fonction du tenseur des déformations  $\underline{\underline{e}}$ . On définit alors le tenseur du second ordre symétrique, appelé *second tenseur de Piola Kirchhoff*, par

$$\underline{\underline{S}}(\underline{X}) = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{e}}}(\underline{X}) = J(\underline{X}) \underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{F}}^{-T}(\underline{X})$$

On introduit également un dernier tenseur des contraintes, appelé *premier tenseur de Piola Kirchhoff* (ou encore tenseur de Boussinesq), défini par :

$$\underline{\underline{P}}(\underline{X}) = \frac{\partial w}{\partial \underline{\underline{F}}}(\underline{X}) = \underline{\underline{F}}(\underline{X}) \cdot \underline{\underline{S}}(\underline{X})$$

Si de plus le matériau est isotrope (la loi de comportement doit être invariante par rotation de la configuration de référence), on pourra exprimer  $w$  en fonction des invariants du tenseur  $\underline{\underline{C}}$ . Cette énergie est également appelée "*énergie de déformation*", et s'exprime en fonction des invariants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  du tenseur  $\underline{\underline{C}}$ , définis par

$$\begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\underline{\underline{C}}) & = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( \text{Tr}(\underline{\underline{C}})^2 - \text{Tr}(\underline{\underline{C}}^2) \right) & = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \\ I_3 = \det(\underline{\underline{C}}) & = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{cases}$$

où  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  correspondent aux élongations dans les directions principales de  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{C}}$ .

Par ailleurs, il a été démontré dans (Ciarlet, 1988) que l'énergie de déformation doit posséder des propriétés convenables supplémentaires pour que le problème mathématique soit bien posé dans le cas de grandes déformations. D'une manière générale, dans une déformation régulière, l'énergie de déformation doit tendre vers l'infini lorsque les quantités  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i \lambda_j$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  tendent vers 0 ou vers l'infini, de manière à éviter des phénomènes d'écrasement ou d'extension infinie de la matière. En particulier, l'existence d'un minimum absolu est assurée lorsque la densité d'énergie est une fonction *polyconvexe* et coercive au sens de Ball (voir (Ball, 1977)) :

Définition : Une fonction  $w(\underline{F})$  est dite "polyconvexe" si elle s'exprime comme une fonction convexe de la variable  $\left(\underline{F}, \underline{\text{cof}}(\underline{F}), \underline{\text{det}}(\underline{F})\right)$ .

On va décrire dans ce qui suit quelques exemples d'énergies de déformation  $w$  très utilisées dans la littérature.

### Quelques exemples de lois hyperélastiques

De nombreuses formes de l'énergie de déformation ont été proposées dans la littérature, certaines se basant sur une théorie statistique, d'autres purement phénoménologiques. On peut les classer en deux catégories :

- celles qui s'expriment en fonction des invariants  $(I_1, I_2, I_3)$  ;
- celles qui s'expriment en fonction des élongations principales  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

On décrit dans ce qui suit quelques énergies de déformation parmi les plus utilisées pour les matériaux élastomères, et qui peuvent être appliquées pour la partie gomme de la nappe.

Les matériaux élastomères sont souvent considérés comme incompressibles. Toute déformation admissible respecte alors la contrainte  $I_3 = 1$ , de telle sorte que l'énergie de déformation  $w_{inc}$  ne dépend que des invariants  $I_1$  et  $I_2$ . Dans la pratique, il est courant de les associer à un matériau quasi-incompressible, qui va relaxer la contrainte :

$$I_3(\underline{C}) \approx 1$$

Leur énergie de déformation peut s'écrire sous la forme d'une énergie de déformation de matériau incompressible  $w_{inc}$ , ne dépendant que des invariants  $I_1$  et  $I_2$ , à laquelle on ajoute un terme de pénalisation de  $I_3(\underline{C}) - 1$ . On peut par exemple définir l'énergie de déformation suivante :

$$w_\epsilon(I_1, I_2, I_3) = w_{inc}(I_1, I_2) + \mu(I_3) + \frac{\kappa}{2}(\sqrt{I_3} - 1)^2 \quad (2.3)$$

où  $\mu$  est une fonction convexe.

Ces matériaux quasi-incompressibles se réduisent formellement au matériau incompressible correspondant pour le choix  $\kappa = +\infty$ . Ils sont souvent préférés aux matériaux incompressibles pour deux raisons :

- Ils prennent en compte les petits effets de compressibilité qui sont observés expérimentalement (cf (Ogden, 1976)) ;
- En dehors des phénomènes de verrouillage numérique, le calcul de leur équilibre est plus simple, puisqu'il n'utilise pas de variable supplémentaire  $p$  pour calculer la pression hydrostatique.



Les modèles de cette forme rencontrés les plus fréquemment sont les **modèles de Rivlin**, pour lesquels l'énergie de déformation incompressible s'écrit sous la forme :

$$w_{inc}(I_1, I_2) = \sum_{i,j} C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad (2.4)$$

en particulier, les deux modèles de Rivlin les plus simples sont :

– le **modèle de Mooney-Rivlin** :

$$w_{inc}(I_1, I_2) = C_1 * (I_1 - 3) + C_2 * (I_2 - 3) \quad (2.5)$$

– le **modèle néo-hookéen** (cf (Treloar, 1975))

$$w_{inc}(I_1, I_2) = C * (I_1 - 3) \quad (2.6)$$

Ces lois polynomiales sont d'identification aisée, et permettent en général un bon lissage des résultats expérimentaux jusqu'à des taux de déformation modérés. Pour des taux de déformation plus élevés, il faudra souvent augmenter l'ordre du polynôme. Toutefois, le fait de travailler avec un nombre de coefficients élevé conduit à des instabilités numériques aux limites du domaine d'investigation en déformation.

Remarque : Le **modèle de St Venant-Kirchhoff** (cf (Saint-Venant, 1844) et (Kirchhoff, 1852)) définit l'énergie de déformation hyperélastique :

$$w_{inc} = \frac{\lambda}{2} Tr(\underline{\underline{e}})^2 + \mu Tr(\underline{\underline{e}}^2) \quad (2.7)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé utilisés classiquement en élasticité linéaire. Cette expression est justifiée sous l'hypothèse de petites déformations et grands déplacements, et est souvent utilisée (cf (Ogden, 1972), (Washizu, 1975)) notamment pour les structures fines (poutres, plaques,...). Mais il est très dangereux de l'utiliser sur des problèmes en grandes déformations, car l'énergie n'est pas polyconvexe et peut rester finie pour des taux de compression infinis.

□

Les modèles qui s'expriment en fonction des élongations les plus connus sont les **modèles de Ogden** (cf (Ogden, 1997)). L'énergie de déformation s'écrit alors sous la forme :

$$w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i^{-1} \left( \sum_{j=1}^3 \lambda_j^{\alpha_i} - 3 \right) \quad (2.8)$$

Ces modèles permettent en général d'avoir un bon lissage avec peu de paramètres pour des niveaux de déformations plus élevés. Toutefois leur identification est moins aisée.

Pour plus de précisions, le lecteur peut consulter (Ciarlet, 1988), qui donne une discussion très complète sur les lois de comportement élastique tridimensionnel.

## ■ 2.2 Problématique et modèles existants

### Modèle de nappe arasée

Un premier modèle de nappe renforcée, que l'on appellera *modèle de nappe arasée*, s'appuie sur les travaux d'homogénéisation de (Gardin et al., 1998) . Les déformations de la gomme n'étant pas homogènes sur la géométrie de nappe exacte (figure 2.5(a)) du fait des micro-déformations autour des

câbles, il semble difficile d'estimer la moyenne des efforts à l'échelle macroscopique. L'idée est alors d'approcher cette géométrie par un milieu bidimensionnel (figure 2.5(b)), qui conserve la même périodicité selon  $\underline{a}_2$  et la même fraction volumique de renforts  $f_c = \frac{\pi r^2}{e t}$ , mais approche les renforts cylindriques par des cylindres à section rectangulaire. Sur une telle géométrie, on peut alors montrer que les déformations de la gomme sont homogènes sur chaque couche à section rectangulaire.

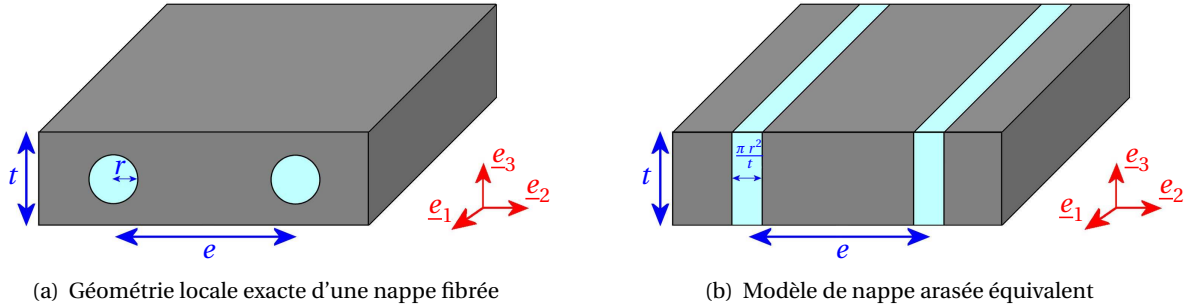


FIG. 2.5: Approximation de la géométrie dans le modèle de nappe arasée

*Remarque* : Cette approximation géométrique sera d'autant plus précise qu'il y aura peu de gomme au dessus et en dessous du câble, c'est à dire lorsque le rayon de câble  $r$  approchera la moitié de l'épaisseur de nappe  $t$ , comme illustré sur la figure 2.6.

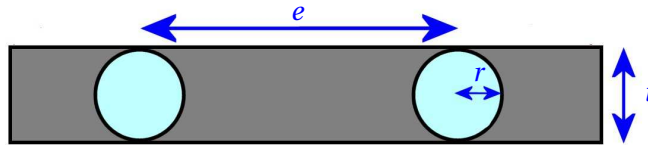


FIG. 2.6: Représentation du cas limite  $r \approx \frac{t}{2}$

Ce problème fait alors intervenir deux petits paramètres :

- le rapport entre la période d'empilement  $e$  et la taille de la structure  $L$  ;
- le rapport de raideurs entre la partie gomme et la partie câbles.

Si on introduit le paramètre  $\epsilon = \frac{e}{L} \ll 1$ , il est démontré dans (Grandidier and Potier-Ferry, 1990) que le rapport de raideurs doit être choisi pour respecter l'ordre de grandeur :

$$\eta = \frac{E_g}{E_c} = O(\epsilon^2) \quad (2.9)$$

Sous ces hypothèses, (Gardin et al., 1998) réalise une analyse asymptotique dans un cadre d'élasticité linéaire en supposant la gomme compressible. Il est démontré qu'à la limite, les renforts sont soumis à un état de flexion/compression pure, et vérifient l'hypothèse de Navier-Bernoulli : cisaillement nul et extension transverse négligeable. En conséquence, la matrice supporte la totalité de la déformation en cisaillement et en extension transverse. La résolution des équations d'équilibre sur une couche de gomme montre alors que la déformation  $\underline{e}$  est homogène. Le tenseur de Green-Lagrange local dans la gomme  $\underline{e}_g$  est alors approché en fonction du tenseur des déformations moyennes  $\underline{e}$  par l'expression :

$$\underline{e}_g = \frac{1}{1 - f_c} \underline{e},$$

et la déformation de câble se réduit à

$$\underline{e}_c = e_{11} \underline{a}_1 \otimes \underline{a}_1.$$

Finalement, en deux dimensions, (Gardin et al., 1998) obtient la loi de comportement :

$$\begin{pmatrix} \langle \sigma_{11} \rangle \\ \langle \sigma_{33} \rangle \\ \langle \sigma_{13} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_c E_c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E_g}{(1-f_c)(1-\nu_g^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_g}{(1-f_c)(1+\nu_g)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle e_{11} \rangle \\ \langle e_{33} \rangle \\ \langle e_{13} \rangle \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{E_c f_c^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \langle e_{13} \rangle \end{pmatrix}$$

Pour simplifier, on peut en plus supposer que la nappe travaille surtout en membrane, la flexion étant prise en compte par l'épaisseur du milieu 3D environnant (cf (Barbier, Michelin) et (Palgen, Michelin)). On va donc simplifier cette expression en négligeant le terme de flexion

$$-\frac{E_c f_c^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \langle e_{13} \rangle.$$

En termes d'énergie, si on intègre l'énergie associée à la gomme sur le volume occupé par la gomme, on obtient alors la densité volumique d'énergie

$$w^M(\underline{e}) = \underbrace{(1-f_c) w_{inc}\left(\frac{1}{1-f_c} \underline{e}\right)}_{w_{inc}^M(\underline{e})} + f_c w_{cab}(e_{11}) \quad (2.10)$$

où  $w_{inc}$  est la densité volumique d'énergie pour une gomme incompressible homogène.

L'approximation 2.10 est valable en élasticité linéaire, et on cherche à savoir si elle peut s'étendre à un cadre non linéaire. Malheureusement, en présence de fortes non-linéarités, le calcul d'une densité d'énergie avec un tenseur pondéré ne respectant pas les invariances mécaniques peut se révéler dangereux. Une solution est alors de supposer que les déformations restent assez petites pour approcher un régime linéaire, de manière à faire sortir le facteur  $\frac{1}{1-\nu}$  de l'énergie. Finalement, pour une gomme quasi-incompressible au comportement non linéaire, cela nous conduit à choisir comme densité d'énergie homogénéisée :

$$w^M(\underline{e}) = \underbrace{\frac{1}{1-f_c} w_{inc}(\underline{e})}_{w_{inc}^M(\underline{e})} + f_c w_{cab}(e_{11}) + \frac{\kappa}{2} \left( \det(\underline{\nabla} \underline{x}) - 1 \right)^2 \quad (2.11)$$

Ce modèle de nappe arasée donne de bons résultats sur des problèmes dans lesquels les fibres de la nappe sont sollicitées en traction, même pour des valeurs de  $\epsilon$  relativement grandes (cf (Barbier, Michelin)).

Mais par contre, si la nappe est mise en compression dans le sens des fibres et que le milieu 3D environnant ne la maintient pas correctement, les limites de ce modèle apparaissent. On illustre sur la figure 2.7 le résultat d'un calcul de nappe en compression axiale avec des éléments finis en déplacements Q1 2D axisymétrique utilisant ce modèle. Il montre un phénomène d'oscillations hors plan entre les éléments, appelé *flambement numérique*, lorsque les câbles sont mis en compression axiale.

De manière grossière, il coûte moins cher énergétiquement de mettre la gomme en cisaillement d'une maille à l'autre plutôt que de mettre les câbles en compression. Ce résultat non physique est dû au fait que l'énergie de notre modèle ne fait pas intervenir la flexion des câbles, qui doit empêcher ce genre de phénomènes. Cet exemple montre donc l'importance de prendre en compte correctement la flexion hors plan des câbles, ce qui peut être fait par exemple en utilisant un modèle macroscopique de coque.

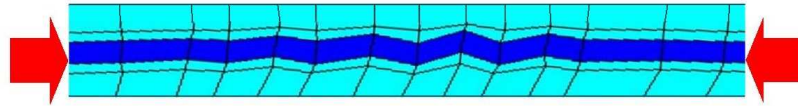


FIG. 2.7: Flambement numérique hors plan en compression axiale : résultat obtenu avec le modèle de nappe arasée sur des éléments 2D Q1 axisymétriques (tiré de (Dejonghe, Michelin))

### Modèle de coque

Pour contrôler les flexions hors plan d'une structure fine tout en conservant des éléments finis  $C^0$ , le principe de la théorie des coques est de contrôler les rotations du vecteur normal à la surface moyenne  $\underline{a}_3$  (voir (Chapelle and Bathe, 2003)). Pour prendre en compte le fait que la nappe résiste en flexion dans le sens des fibres et non perpendiculairement à celles-ci, il suffira alors d'utiliser une loi de comportement orthotrope homogénéisée. Cette idée a été appliquée par exemple par (Chapelle and Ferent, 2003), qui modélise des nappes de renfort dans une structure grâce à des éléments finis de coque 3D.

Le modèle de coque permet de contourner le problème de flambement numérique observé sur la figure 2.7 en prenant en compte les flexions hors plan. Néanmoins, celui-ci demeure insuffisant : sous certaines sollicitations, nous avons vu en introduction qu'une nappe fibrée mise en compression peut se mettre à flamber dans le plan, et non hors plan (voir figure 2.8).



FIG. 2.8: Flambement dans le plan en flexion/compression

Le modèle de coque ne permet de prendre en compte que la flexion hors plan, donc il ne pourra pas modéliser correctement les flexions dans le plan comme on souhaiterait le faire. Pour l'enrichir, il semble nécessaire de tenir compte des rotations du vecteur directeur  $\underline{a}_1$  le long des fibres en plus de celles de  $\underline{a}_3$ .

On se dirige alors vers un modèle de nappe fibrée qui aurait pour inconnues dans son plan médian : 3 degrés de libertés de déplacements, et 3 degrés de libertés de rotations. L'énergie devra tenir compte de leurs variations dans le sens de fibres, ce qui donne envie de modéliser les fibres présentes dans la nappe comme des poutres pouvant résister en flexion dans toutes les directions.

Tout ceci nous amène à choisir la modélisation macroscopique originale, basée sur la représentation de chaque fibre comme une poutre en grands déplacements et grandes rotations, couplées entre elles par la gomme qui les entoure.

La suite de ce chapitre présente notre modèle de nappe renforcée, et est organisé comme suit : nous allons dans un premier temps décrire le modèle de poutre en grands déplacements qui permet de modéliser chaque fibre, en s'inspirant notamment des travaux de (Antman and Kenney, 1981), (Bourgat et al., 1988) et (Le Tallec et al., 1991). Dans un second temps, nous allons détailler la manière d'insérer ce modèle de poutre 1D pour modéliser une nappe fibrée 3D. Enfin, nous expliquerons la méthode de résolution employée pour résoudre le problème discret non linéaire.

## 2.3 Modélisation d'une fibre

Les notations choisies dans cette section sont légèrement différentes du reste du rapport, puisque nous y considérons une fibre isolée 1D. Dans sa configuration de référence, cette fibre a une longueur  $L$  et des sections droites notées  $\Omega_{sec}(s)$ ,  $s \in [0, L]$  ( $s$  est l'abscisse curviligne identifiant les sections matérielles le long de la poutre), définies par un couple de vecteurs orthonormaux  $(\underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$ .

On se place dans l'espace physique  $E = \mathbb{R}^3$ , dans lequel on choisit un repère orthonormé  $(\underline{e}_i)_{i=1,2,3}$ . La configuration de référence s'identifie alors au domaine  $\Omega_{cab}$  défini par :

$$\Omega_{cab} = \left\{ \underline{x}_{cab}^0(s, X_2, X_3) = \underline{r}^0(s) + X_2 \underline{d}_2^0(s) + X_3 \underline{d}_3^0(s), \quad s \in [0, L], (X_2, X_3) \in \Omega_{sec}(s) \right\}$$

Aucune hypothèse n'est faite sur la configuration de repos de la fibre neutre, qui peut donc être non rectiligne.

### 2.3.1 Cinématique

On suppose que les sections de la fibre sont indéformables. Dans ce cas, sa configuration est caractérisée par une fonction vecteur position  $\underline{r}$  et une paire de fonctions vecteurs orthonormés  $\underline{d}_2$  et  $\underline{d}_3$ , comme illustré sur la figure 2.9. Les positions après déformation sont alors définies par l'expression :

$$\forall s \in [0, L], \forall (X_2, X_3) \in \Omega_{sec}(s), \quad \underline{x}_{cab}(s, X_2, X_3) = \underline{r}(s) + X_2 \underline{d}_2(s) + X_3 \underline{d}_3(s) \quad (2.12)$$

avec  $\underline{d}_\alpha(s) \cdot \underline{d}_\beta(s) = \delta_{\alpha\beta}$  pour  $2 \leq \alpha, \beta \leq 3$ ,  $s \in [0, L]$ .

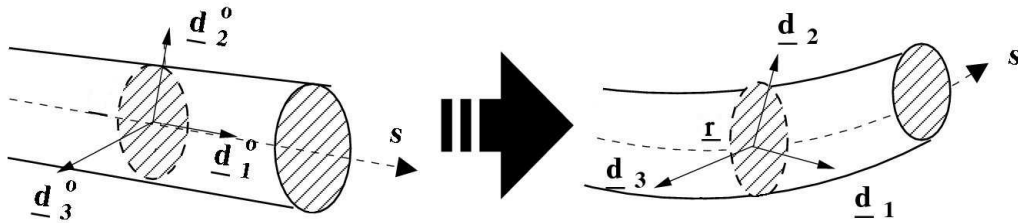


FIG. 2.9: Cinématique d'une fibre

On note  $\underline{d}_1$  le vecteur normal à la section :

$$\forall s \in [0, L], \quad \underline{d}_1(s) = \underline{d}_2(s) \wedge \underline{d}_3(s)$$

Les trois vecteurs  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$ , appelés "directeurs", forment alors une base orthonormée :

$$\forall s \in [0, L], \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j = \delta_{ij} \quad (2.13)$$

*Remarque* : Ce modèle est une extension du modèle de Kirchhoff-Love, qui ne suppose pas  $\underline{d}_1(s) = \underline{r}'(s)$ . Cela permet de prendre en compte des grands allongements et cisaillements de la poutre.

### 2.3.2 Mesure des déformations

On pourrait représenter les directeurs en fonction d'une base orthonormale fixée à l'aide d'angles d'Euler. Mais l'introduction de ces angles compliquerait notre analyse du fait de leur singularité polaire. Pour contourner ce problème, on adopte la mesure objective des déformations introduite par

(Antman and Kenney, 1981), basée sur une caractérisation intrinsèque de l'orthonormalité des directeurs :

Puisque les vecteurs ( $\underline{d}_i$ ) sont orthonormés, il existe une fonction vecteur  $\underline{u}$  de rotation élémentaire telle que

$$\forall i \in [1, 3], \underline{d}'_i = \underline{u} \wedge \underline{d}_i$$

où ( $\cdot$ )' désigne la dérivée curviligne le long de la fibre neutre. On peut remarquer que  $\underline{u}$  est analogue au vecteur de vitesse angulaire. Inversement, on peut exprimer les composantes du vecteur  $\underline{u}$  dans la base ( $\underline{d}_i$ ) en fonction de ces directeurs :

$$u_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \underline{d}'_j \cdot \underline{d}_k$$

où  $\underline{e}$  représente le tenseur d'orientation dans  $\mathbb{R}^3$  (aussi appelé tenseur de permutation de Levi-Vivita).

Par ailleurs, le triplet de directeurs ( $\underline{d}_i$ ) formant une base orthonormée, le vecteur  $\underline{r}'$  peut être décomposé en fonction de ses composantes dans cette base :

$$\underline{r}' = v_i \underline{d}_i$$

avec  $\forall i \in [1, 3], v_i = \underline{r}' \cdot \underline{d}_i$ .

Les triplets ( $v_i$ ) et ( $u_i$ ) forment une mesure objective des déformations subies par la fibre dans le mouvement  $\Phi = (\underline{r}, \underline{d}_i)$ . En effet, ils sont définis indépendamment de tout observateur et leur connaissance permet de déterminer ( $\underline{r}, \underline{d}_i$ ) à un mouvement rigide près (voir (Le Tallec et al., 1991)). De plus, ils s'interprètent géométriquement dans le cas où  $\underline{x}'$  reste proche de  $\underline{d}_1$  :

$$\begin{cases} v_1 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_1 : \text{allongement} \\ v_2 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_2 : \text{cisaillement} \\ v_3 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_3 : \text{cisaillement} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} u_1 = \underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3 : \text{torsion} \\ u_2 = \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3 : \text{flexion hors plan autour de } \underline{d}_2 \\ u_3 = \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2 : \text{flexion dans le plan autour de } \underline{d}_3 \end{cases} \quad (2.15)$$

### 2.3.3 Modèle énergétique

L'énergie interne de la fibre est prise de la forme :

$$\begin{aligned} E_{fib}(\underline{r}, \underline{d}_i) &= E_{mb}(\underline{r}, \underline{d}_i) + E_{fl}(\underline{r}, \underline{d}_i) \\ &= \int_0^L w_{mb}(\underline{v}) ds + \int_0^L w_{fl}(\underline{u}) ds \end{aligned} \quad (2.16)$$

où  $E_{mb}$  est la partie d'énergie dite "de membrane", qui dépend uniquement des déformations du premier ordre  $\underline{v}$ , et  $E_{fl}$  est la partie d'énergie dite "de flexion", dépendant des déformations du second ordre  $\underline{u}$

Dans le cas où la fibre a une configuration au repos rectiligne, nous choisissons un potentiel d'énergie élastique quadratique (voir par exemple (Bourgat et al., 1988)) :

$$w_{fib}(\underline{u}, \underline{v}) = \underbrace{\frac{EA}{2} (v_1 - 1)^2 + \frac{GA}{2} (v_2^2 + v_3^2)}_{w_{mb}(\underline{v})} + \underbrace{\frac{EI}{2} (u_2^2 + u_3^2) + \frac{GJ}{2} u_1^2}_{w_{fl}(\underline{u})} \quad (2.17)$$

où  $E$  est le module d'Young du matériau,  $G$  est le module de cisaillement,  $A$  est l'aire d'une section,  $I$  est son moment quadratique, et  $J$  est son moment polaire d'inertie. On peut aussi interpréter ces coefficients directement en terme de résistance à l'allongement  $EA$ , au cisaillement  $GA$ , à la flexion  $EI$  et à la torsion  $GJ$ .

Cette expression prend en compte le cisaillement, la tension, la flexion et la torsion. Elle peut être généralisée par l'introduction d'une résistance à la flexion  $EI$  variable en fonction de la flexion ( $u_2^2 + u_3^2$ ). En tout état de cause, cette densité d'énergie est objective et transversalement isotrope, et correspond donc au cas d'une poutre à section circulaire.

Dans le cas d'une configuration au repos non rectiligne, (Campos and Rochinha, 1996) propose une forme d'énergie très comparable :

$$w_{fib}(\underline{u}, \underline{v}) = \underbrace{\frac{EA}{2}(v_1 - v_1^0)^2 + \frac{GA}{2}((v_2 - v_2^0)^2 + (v_3 - v_3^0)^2)}_{w_{mb}(\underline{v})} + \underbrace{\frac{EI}{2}((u_2 - u_2^0)^2 + (u_3 - u_3^0)^2) + \frac{GJ}{2}(u_1 - u_1^0)^2}_{w_{f1}(\underline{u})} \quad (2.18)$$

Cette énergie est logique dans le cas d'une fibre présentant initialement de la flexion ou de la torsion. Par contre, si il y a un cisaillement initial, c'est à dire  $\underline{r}' \neq \underline{d}_1^0$ , l'extension du câble ne correspond pas à la quantité  $v_1 = \underline{r}' \cdot \underline{d}_1$  et donc cette écriture ne semble plus adaptée.

L'idée est alors de contrôler l'extension de la fibre par la norme  $\|\underline{r}'\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ . De plus, si l'on souhaite contrôler le cisaillement (c'est à dire l'angle entre le directeur et la fibre moyenne) dans le câble indépendamment de l'allongement de celui-ci, on utilise les quantités :

$$\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \text{ et } \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Cela pousse à écrire plutôt la densité linéique d'énergie de membrane sous la forme :

$$w_{mb}(\underline{v}) = \frac{EA}{2} \left( \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} - 1 \right)^2 + \frac{GA}{2} \left[ \left( \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} - v_2^0 \right)^2 + \left( \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} - v_3^0 \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

*Remarque 1* : Initialement, on a  $\sqrt{(v_1^0)^2 + (v_2^0)^2 + (v_3^0)^2} = \|\underline{x}'_0\| = \|\underline{a}_1\| = 1$ , et donc en petites déformations et grandes rotations, le modèle 2.19 redonne asymptotiquement 2.17.

*Remarque 2* : Sur un maillage éléments finis, même si on a  $\underline{x}'_0 = \underline{d}_1^0$  à chaque noeud du maillage, cette égalité peut ne pas être respectée aux points de Gauss en fonction de l'interpolation utilisée... On voit alors un cisaillement initial de la fibre qui est uniquement numérique.

## ■ 2.4 Modélisation d'une nappe fibrée

Cette section présente l'aspect *original* de notre modélisation macroscopique. La section 2.3 a décrit le modèle de poutre utilisé pour décrire chaque fibre 1D, permettant notamment de prendre en compte sa résistance en flexion. On revient maintenant à l'étude de la nappe fibrée 3D complète, pour construire une modélisation utilisant le modèle de poutre qui vient d'être introduit, comme cela a été initié par (Charlotte, Michelin). On reprend ici les notations qui ont été introduites dans la section 2.

### 2.4.1 Cinématique

Supposons que la nappe contienne  $N$  fibres identiques parallèles, réparties régulièrement avec un écartement  $e$  constant. La difficulté qui se pose est de trouver comment passer du modèle d'une fibre  $1D$  seule à un modèle de nappe renforcée  $3D$ .

L'écartement entre les câbles étant supposé constant et petit par rapport aux dimensions  $L_1$  et  $L_2$ , l'idée est alors d'homogénéiser les  $N$  câbles en une "densité de câbles" sur la surface moyenne  $\mathcal{S}_m$  de la nappe, comme représenté sur la figure 2.10.

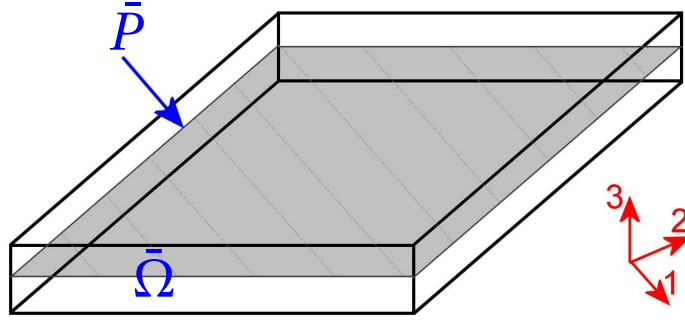


FIG. 2.10: Distribution continue de câbles dans le plan médian de référence de la nappe

On dispose alors d'un milieu continu  $3D$  où évolue la gomme, dans lequel on calcule la position déformée  $\underline{x}$ , couplé à une surface sur laquelle on aura besoin de calculer les positions déformées  $\underline{r}$  et les directeurs  $\{\underline{d}_i\}_{i=1,2,3}$  pour décrire le comportement des fibres.

Pour relier les deux descriptions, on suppose que la position moyenne  $\underline{r}$  de la fibre moyenne des câbles est héritée de la déformation globale  $\underline{x}$  du milieu continu en ce point :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{x}(\xi_1, \xi_2, 0) . \quad (2.20)$$

En résumé, avec cette description cinématique, les inconnues continues sont :

- La transformation  $\underline{x}(\xi_i)$  dans le *volume* de référence  $\bar{\Omega}$ ;
- La position de la fibre moyenne  $\underline{r}(\xi_\alpha)$  et les directeurs  $\{\underline{d}_i(\xi_\alpha)\}_{i=1,2,3}$  dans le *plan* de référence  $\bar{P}$ .

Les déformations  $\underline{x}$  sont contrôlées par l'intermédiaire de leur gradient dans les 3 directions, ce qui pousse à choisir de manière classique leurs composantes dans l'espace de Sobolev  $H^1(\bar{\Omega})$ , c'est à dire de carré intégrable et avec un gradient également de carré intégrable sur le volume :

$$\begin{aligned} H(\bar{\Omega}) &= \left\{ \underline{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in H^1(\bar{\Omega}) \right\} \\ &= \left\{ \underline{v} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in L^2(\bar{\Omega}) \text{ et } \underline{\nabla} v_i \in L^2(\bar{\Omega})^3 \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

La définition de l'espace dans lequel évoluent les variables  $\underline{r}$  et  $\{\underline{d}_i\}_{i=1,2,3}$  est plus complexe : elles sont définies sur le plan de référence  $\bar{P}$ , mais nous verrons dans la sous section 2.4.3 que l'énergie de câble ne prend en compte que leur dérivée dans la direction des câbles. Enfin, le comportement des câbles est couplé à celui de la gomme, et la gomme peut contrôler leurs variations perpendiculairement aux fibres (même si la rigidité de la gomme est évidemment beaucoup plus faible que celle des câbles). On peut donc supposer que les composantes de ces variables peuvent être choisies dans l'espace  $H^1(\bar{P})$ , c'est à dire de carré intégrable et avec un gradient également de carré intégrable sur le plan de référence :

$$H(\bar{P}) = \left\{ \underline{v} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in H^1(\bar{P}) \right\} \quad (2.22)$$



Finalement, on fixe les espaces de transformations  $K$  et  $K_0$  suivants :

$$K = \left\{ (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in (H(\bar{\Omega}) \times H(\bar{P}) \times H(\bar{P})^3) \text{ tels que } \right. \\ \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{x}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \cap \mathcal{CL} ; \quad (2.23)$$

$$K_0 = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in (H(\bar{\Omega}) \times H(\bar{P}) \times H(\bar{P})^3) \text{ tels que } \right. \\ \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\delta r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{\delta x}(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \cap \mathcal{CL}_0 ; \quad (2.24)$$

où  $\mathcal{CL}$  représente les conditions aux limites aux bords de la nappe, alors que  $\mathcal{CL}_0$  représente les conditions aux limites homogènes associées.

Outre ces conditions, on rappelle qu'on doit prendre aussi en compte la condition d'orthonormalité des directeurs 2.13 :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \quad (2.25)$$

Pour récapituler ces 9 contraintes, on introduit un opérateur  $\underline{\underline{G}} : H(\bar{P})^3 \rightarrow W_{sym}^{33}(\bar{P})$ , défini par

$$\forall (\underline{d}_k) \in H(\bar{P})^3, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \\ \forall i, j = 1, 2, 3 \quad G_{ij}[\underline{d}_k](\xi_1, \xi_2) = \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) - \delta_{ij} \quad (2.26)$$

Ici, l'espace  $W_{sym}^{33}(\bar{P})$  représente les fonctions tenseurs symétriques :

$$W_{sym}^{33}(\bar{P}) = \left\{ \underline{\underline{R}} \in W^{1,q}(\bar{P})^{3 \times 3} \text{ tels que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \underline{\underline{R}}^T(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{R}}(\xi_1, \xi_2) \right\}$$

où  $1 \leq q < 2$  par le théorème d'injection de Sobolev.

De manière similaire, on définit  $W_{anti}^{33}(\bar{P})$  comme étant l'espace des fonctions tenseurs antisymétriques de  $H(\bar{P})^{3 \times 3}$  :

$$W_{anti}^{33}(\bar{P}) = \left\{ \underline{\underline{R}} \in W^{1,q}(\bar{P})^{3 \times 3} \text{ tels que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \underline{\underline{R}}^T(\xi_1, \xi_2) = -\underline{\underline{R}}(\xi_1, \xi_2) \right\}$$

La condition d'orthonormalité 2.25 peut alors être réécrite sous la forme :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\underline{G}}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{0}} \quad (2.27)$$

Cela nous permet de définir l'espace  $K^{ort}$  des déformations cinématiquement admissibles :

$$K^{ort} = \left\{ (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in K \text{ tels que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\underline{G}}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{0}} \right\} \quad (2.28)$$

On peut remarquer que  $K^{ort}$  est une sous variété non linéaire de  $K$  fermée (noyau d'une application continue sur  $K$ ), son espace tangent  $dK^{ort}$  étant égal au noyau du gradient de  $\underline{\underline{G}}$  en ce point. Par définition de  $\underline{\underline{G}}$ , on a donc pour toute configuration  $(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in K^{ort}$  :

$$dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \right. \\ \left. \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) + \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{\delta d}_j(\xi_1, \xi_2) = 0 \right\} \quad (2.29)$$

Comme cela est fait dans (Bourgat et al., 1988), on peut montrer que l'espace tangent  $dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)$  peut s'écrire de manière équivalente

$$dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \exists (\omega_k)_{k=1,2,3}, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \right. \\ \left. \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{\delta d}_j(\xi_1, \xi_2) = e_{ijk} \omega_k(\xi_1, \xi_2) \right\} \quad (2.30)$$

où  $e_{ijk}$  représente le tenseur d'orientation dans  $\mathbb{R}^3$ . Les fonctions  $\underline{d}_i$  et  $\underline{\delta d}_j$  appartenant à  $H^1(\bar{P})$ , il est clair que les  $(\omega_k)_{k=1,2,3}$  sont de carré intégrables sur  $\bar{P}$ . Plus précisément, d'après la condition 2.27, les directeurs sont normés, donc ils appartiennent à l'espace  $H^1(\bar{P}) \cap L^\infty(\bar{P})$ . Cette propriété est intéressante, puisque le produit d'une fonction  $L^\infty$  avec une fonction  $L^2$  est une fonction  $L^2$ . Toutefois, on ne peut pas garantir que les variations  $\underline{\delta d}_j$  sont bornées. Ceci implique que le gradient des fonctions  $\omega_k$ , défini par

$$\underline{\nabla \omega}_k = e_{ijk} \left[ \underline{\nabla d}_i \cdot \underline{\delta d}_j + \underline{\nabla \delta d}_j \cdot \underline{d}_i \right]$$

n'est pas nécessairement de carré intégrable. Ainsi, les fonctions  $(\omega_k)_{k=1,2,3}$  ne sont pas dans  $H^1(\bar{P})$ , mais dans un espace de sobolev  $W^{1,q}(\bar{P})$ , où  $1 \leq q < 2$  par le théorème d'injection de Sobolev.

On en déduit alors que l'espace tangent peut s'écrire de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = & \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \exists \underline{\omega} \in W^{1,q}(\bar{P})^3, \right. \\ & \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \forall i = 1, 2, 3, \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) = \underline{\omega}(\xi_1, \xi_2) \wedge \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ce qui nous pousse à introduire l'ensemble des variations admissibles  $\mathcal{U}$  suivant :

$$\mathcal{U} = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in (H(\bar{\Omega}) \times H(\bar{P}) \times W^{1,q}(\bar{P})) \cap \mathcal{CL}_0 \right\} \quad (2.32)$$

Par ailleurs, à tous vecteur de rotation  $\underline{\omega} \in W^{1,q}(\bar{P})^3$ , on peut associer un tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}} \in W_{anti}^{33}(\bar{P})$ , appelé tenseur de rotation infinitésimale, défini par :

$$\forall \underline{d} \in H(\bar{P}), \forall (\xi_\alpha) \in \bar{P}, \underline{\underline{\Omega}}(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}(\xi_\alpha) = \underline{\omega}(\xi_\alpha) \wedge \underline{d}(\xi_\alpha)$$

Cela nous conduit à une dernière écriture de l'espace tangent :

$$\begin{aligned} dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = & \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \exists \underline{\underline{\Omega}} \in W_{anti}^{33}(\bar{P}), \right. \\ & \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \forall i = 1, 2, 3, \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{\Omega}}(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \right\} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Remarque : On peut également montrer que l'espace  $\overline{dK^{ort}}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)$  défini par

$$\begin{aligned} \overline{dK^{ort}}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = & \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } , \right. \\ & \forall (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \bar{\Omega}, \underline{\delta x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{0}, \\ & \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \left\{ \begin{array}{l} \underline{\delta r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \\ \forall i, j = 1, 2, 3, \underline{\delta d}_i \cdot \underline{d}_j - \underline{d}_i \cdot \underline{\delta d}_j = 0 \end{array} \right\} \right\} \\ = & \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \exists \underline{\underline{S}} \in W_{sym}^{33}(\bar{P}), \right. \\ & \forall (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \bar{\Omega}, \underline{\delta x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{0}, \\ & \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \left\{ \begin{array}{l} \underline{\delta r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \\ \forall i = 1, 2, 3, \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{S}}(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \end{array} \right\} \right\} \end{aligned}$$

est un complémentaire de  $dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)$  dans l'espace  $K_0$ , de telle sorte que

$$\forall (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in K^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i), \quad K_0 = dK^{ort}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \oplus \overline{dK^{ort}}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \quad (2.34)$$

La cinématique de la nappe ainsi que les espaces de configurations admissibles sont alors complètement définis. Il nous reste à décrire le problème mécanique avec cette cinématique : on commence par décrire la mesure des déformations des câbles à l'intérieur de la nappe 3D dans la sous section 2.4.2, puis on propose un modèle énergétique macroscopique dans la sous section 2.4.3.

## 2.4.2 Mesure des déformations des câbles

La mesure des déformations d'une fibre 1D décrite dans la section 2.3 doit être étendue au cas de la nappe fibrée 3D. Ces mesures des déformations dépendaient des dérivées de  $\underline{r}$  et  $\underline{d}_i$  le long de la fibre moyenne. Dans le cas 3D, ces dérivées sont notées :

$$\left( \cdot \right)'(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \quad (2.35)$$

A partir de ce calcul de dérivées longitudinales, on définit les mesures de déformations des fibres de la même manière que dans la section 2.3 :

$$\forall i = 1, 2, 3, \quad \begin{cases} v_i = \underline{r}' \cdot \underline{d}_i \\ u_i = \frac{1}{2} e_{ijk} \underline{d}'_j \cdot \underline{d}_k \end{cases} \quad (2.36)$$

Cependant, comme nous l'avons précisé, la position de la fibre moyenne des câbles  $\underline{r}$  est héritée des déformations 3D par la relation 8.2. En pratique, on dispose uniquement du gradient 3D de ces déformations dans le repère global  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_X x$ . Le calcul de la dérivée le long d'une fibre est alors défini par l'expression suivante :

$$\underline{r}'(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial x}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2, 0) = \underline{\underline{\nabla}}_X x(\xi_1, \xi_2, 0) \cdot \underline{a}_1(\xi_1, \xi_2) \quad (2.37)$$

Par ailleurs, si on veut tenir compte des déformations localisées dans la gomme provoquées par une rotation des fibres, il est important de mesurer l'écart entre les gradients de déformations dans la gomme et les directeurs. Cela est réalisé en introduisant les projections du gradient de gomme respectivement sur les directeurs  $\underline{d}_1^0$  et  $\underline{d}_2^0$  :

$$\underline{F}_1(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{\nabla}}_X x(\xi_1, \xi_2, 0) \cdot \underline{d}_1^0(\xi_1, \xi_2) \quad (2.38)$$

$$\underline{F}_2(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{\nabla}}_X x(\xi_1, \xi_2, 0) \cdot \underline{d}_2^0(\xi_1, \xi_2) \quad (2.39)$$

où comme dans la section 2.3,  $\underline{d}_i^0$  désigne la configuration de référence du vecteur  $\underline{d}_i$ .

*Remarque* : Dans les cas où les câbles ne présentent pas de cisaillement initial, c'est à dire  $\underline{d}_1^0 = \underline{a}_1$ , les mesures  $\underline{r}'$  et  $\underline{F}_1$  sont égales. C'est notamment le cas pour une nappe plane dans laquelle les câbles sont rectilignes dans leur configuration de référence. Mais cette égalité ne sera pas toujours vraie.

## 2.4.3 Modèle énergétique

On fait l'hypothèse que l'énergie totale de déformation d'une nappe fibrée est égale à la somme de :

- une densité surfacique d'énergie de déformation de câble intégrée sur la surface moyenne de la nappe ;
- une densité surfacique d'énergie de gomme intégrée sur la surface moyenne de la nappe : elle devra prendre en compte une énergie de gomme homogénéisée intégrée dans l'épaisseur, ainsi que un terme de couplage décrivant les surcontraintes dans la gomme dûes aux rotations des câbles.

$$E_{nap}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = \underbrace{\int \int_{\bar{p}} w_{cab}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}_{E_{cab}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)} + \underbrace{\int \int_{\bar{p}} w_{gom}^M(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}_{E_{gom}^M(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)} \quad (2.40)$$

On décrit le calcul de chacun de ces termes dans la suite de cette partie.

### Energie des câbles

On suppose connue la densité linéique d'énergie pour une fibre, notée  $w_{fib}$  et décrite dans la section 2.3. On souhaite maintenant en déduire une densité surfacique d'énergie de câble  $w_{cab}$  sur  $\mathcal{S}_m$  dans le problème de nappe.

Considérons une tranche de nappe dans le plan  $(a_2, a_3)$  de largeur  $L = N * e$  et de longueur  $dl$ . On suppose que cette région contient  $N$  sections de fibres identiques, séparées d'une distance  $e$  constante, qui subissent localement des déformations  $(\underline{v}, \underline{u})$ . L'énergie totale de câble dans ce petit volume vaut alors

$$W_{sec}(\underline{v}, \underline{u}) = \sum_{i=1}^N w_{fib}^i(\underline{v}, \underline{u}) = N * w_{fib}(\underline{v}, \underline{u}) * dl$$

Or cette énergie de câble peut également être exprimée en fonction de la densité surfacique d'énergie  $w_{cab}$  :

$$W_{sec}(\underline{v}, \underline{u}) = N * e * w_{cab}(\underline{v}, \underline{u}) * dl$$

Ainsi, en s'appuyant sur ce résultat d'homogénéisation très simple et en reprenant la décomposition 2.16 de  $w_{fib}$ , on arrive à l'expression suivante de la densité d'énergie surfacique de déformation de câble :

$$w_{cab}(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{e} w_{fib}(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{e} w_{mb}(\underline{v}) + \frac{1}{e} w_{fl}(\underline{u}) \quad (2.41)$$

Ci-dessus  $w_{mb}$  et  $w_{fl}$  sont les densités linéiques d'énergie de câble respectivement en membrane et en flexion, définies par l'expression 2.18.

### Energie de gomme macroscopique

On décompose la densité surfacique d'énergie de gomme en trois termes :

- un terme de déformation homogène ;
- un terme traduisant l'incompressibilité ;
- un terme de couplage gomme/câble.

$$w_{gom}^M(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = \underbrace{\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} w_{inc}^M(\underline{e}) d\xi_3}_{(1)} + \underbrace{\frac{\kappa}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \left( \det(\underline{\nabla} \underline{x}) - 1 \right)^2 d\xi_3}_{(2)} + \underbrace{w_{coupl}(\underline{\nabla}_2 \underline{D} \underline{r}, \underline{d}_i)}_{(3)} \quad (2.42)$$

On détaille le calcul de chacun de ces trois termes dans ce qui suit :

Terme 1 : Energie homogénéisée de gomme compressible.

Comme cela a été dit dans la section 2.2, les déformations à l'intérieur de la gomme ne sont pas homogènes et donc on ne dispose pas de loi de comportement à l'échelle macroscopique. Il est alors nécessaire de réaliser une approximation pour homogénéiser la densité d'énergie mésoscopique, comme cela a été fait dans le modèle de nappe arasée. On reprend donc la même densité volumique d'énergie macroscopique que dans l'expression 2.11, à savoir :

$$w_{inc}^M(\underline{e}) = \frac{1}{1 - f_c} w_{inc}(\underline{e})$$

Terme 2 : Pénalisation de la contrainte d'incompressibilité.

Ce terme de pénalisation est classique pour les matériaux quasi-incompressibles (cf expression 2.3). Il sera traité par sous-intégration comme cela est décrit par exemple dans (Le Tallec, 1994).

Terme 3 : Couplage gomme/câble.

Ce terme de couplage doit prendre en compte la surcontrainte près de l'interface dûe à la rotation du câble par rapport à la déformation moyenne de la nappe. Pour calculer une approximation de ce cisaillement dans la gomme, on travaille sur la géométrie locale simplifiée représentée sur la figure 2.11(b).

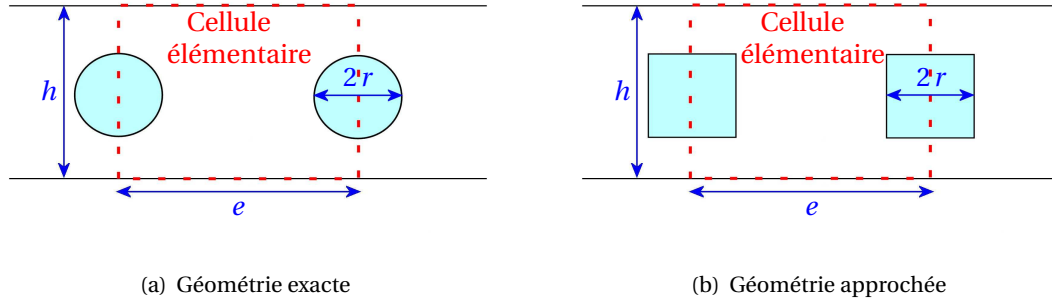


FIG. 2.11: Simplification de la géométrie pour approcher le cisaillement de la gomme

On suppose que la configuration étudiée est en petit cisaillement et respecte donc  $\underline{d}_2 \approx \underline{F}_2$ , où  $\underline{F}_2$  est défini par l'expression 2.39. Comme on peut le voir sur la figure 2.12(a), lorsque la section du câble tourne autour de  $\underline{d}_1$ , le cisaillement moyen  $\alpha$  dans une cellule élémentaire vaut :

$$\alpha = \text{angle}(\underline{F}_2, \underline{d}_2) \approx \sin(\underline{F}_2, \underline{d}_2) = \underline{F}_2 \cdot \underline{d}_3$$

Mais nous devons tenir compte du fait que la section du câble est supposée rigide, ce qui implique que tout le cisaillement est encaissé par la gomme. Le cisaillement  $\beta$  qui est réellement subi par la gomme vaut alors (cf figure 2.12(b))

$$\beta = \text{angle}(\underline{d}_2, e\underline{F}_2 - 2r\underline{d}_2) \approx \frac{e}{e-2r} \underline{F}_2 \cdot \underline{d}_3$$

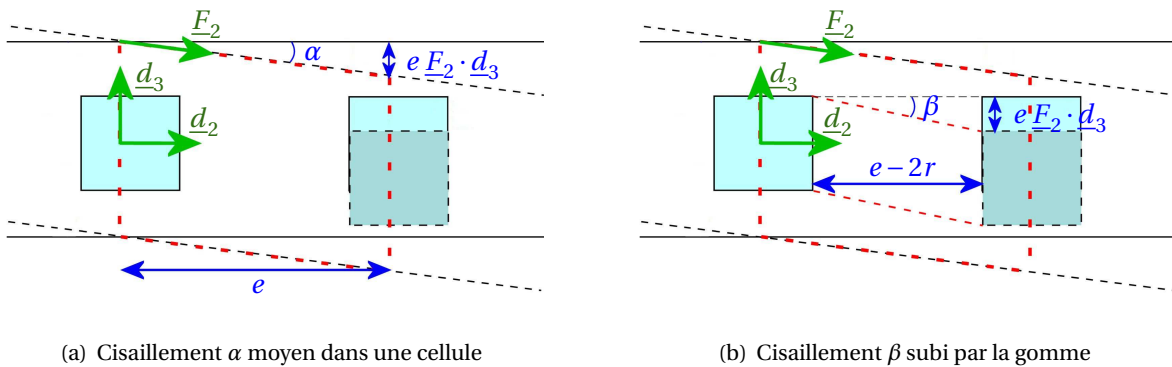


FIG. 2.12: Cisaillement de la gomme provoqué par une rotation des câbles

La cission  $\tau$  provoquée par une variation d'angle  $\beta$  s'écrit sous la forme :

$$\tau = G_{gom} \cdot \beta$$

Si on intègre ce terme sur le volume de gomme d'une cellule élémentaire et que l'on moyenne dans la largeur de la nappe, on obtient alors la contrainte :

$$T = \frac{\partial w_{coupl}}{\partial F_{23}} = \frac{1}{e} V_{gom} * G_{gom} * \beta$$

où  $V_{gom} = eh - \pi r^2$  est le volume de gomme.

Cela nous pousse à ajouter dans le terme de couplage suivant dans l'énergie interne de la nappe :

$$E_{coupl}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = \iint_{\mathcal{S}_m} w_{coupl}(\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2) dX_{2D} = \iint_{\mathcal{S}_m} \frac{1}{2} c_{coupl} (\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2)^2 dX_{2D} \quad (2.43)$$

$$\text{avec } c_{coupl} = \frac{eh - \pi r^2}{e - 2r} G_{gom}$$

**Remarque** : D'un point de vue numérique, ce terme de couplage permet d'assurer la coercivité de notre problème en contrôlant les rotations des sections de la fibres autour de  $\underline{d}_1$  si celles-ci ne sont pas imposées par des conditions aux limites.

En résumant nos différentes constructions, l'énergie macroscopique de nappe que nous choisissons ici est finalement :

$$E_{nap} = \iint_{\bar{p}} \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{1}{1-f_c} w_{inc}(\underline{e}) d\xi_3 + \frac{\kappa}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (J-1)^2 d\xi_3 + \frac{1}{2} c_{coupl} (\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2)^2 + \frac{1}{e} w_{mb}(\underline{v}) + \frac{1}{e} w_{fl}(\underline{u}) \right\} d\xi_\alpha \quad (2.44)$$

où  $\underline{e}$  est le tenseur des déformations de Green-Lagrange,  $J$  est le jacobien, et les vecteurs  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  sont les mesures de déformations des câbles, définis par l'expression 2.36.

Nous avons supposé dans la construction de cette énergie que les configurations  $(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)$  évoluent exclusivement dans la variété  $K^{ort}$ . Lors de la discrétisation du problème de nappe, nous verrons qu'on peut rencontrer des situations dans lesquelles la configuration n'appartient pas exactement à  $K^{ort}$ . Cela pourrait s'avérer dangereux, car l'énergie ainsi définie n'est pas coercive sur tout l'espace  $K$ . Par exemple, les composantes du vecteur dérivée  $\underline{d}'_1$  sont contrôlées selon  $\underline{d}_2$  et  $\underline{d}_3$ , mais aucun des termes de 2.44 ne permet de contrôler sa composante selon  $\underline{d}_1$ . Pour remédier à cela, nous proposons deux légères modifications dans cette énergie :

- On définit les mesures de flexion/torsion de manière symétrique, sous forme de carrés :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}_2^0 \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}_3^0 \cdot \underline{d}_2^0)^2 \\ \tilde{u}_2^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}_1^0 \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}_3^0 \cdot \underline{d}_1^0)^2 \\ \tilde{u}_3^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}_1^0 \cdot \underline{d}_2^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}_2^0 \cdot \underline{d}_1^0)^2 \end{cases} \quad (2.45)$$

- On ajoute un terme de contrôle des allongements dans le plan de la nappe  $\underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_i$  et  $\underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i$  :

$$EI \left[ (\underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_i)^2 + (\underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i)^2 \right]$$

L'intérêt d'utiliser ici le coefficient  $EI$  sera visible dans l'analyse asymptotique du chapitre 3. Ceci nous amène alors à utiliser la densité d'énergie de flexion modifiée :

$$w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}'_j) = \frac{EI}{2} (\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) + \frac{GJ}{2} \tilde{u}_1^2 + \frac{EI}{2} \left[ (\underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_i)^2 + (\underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i)^2 \right] \quad (2.46)$$

Au final, l'énergie augmentée de la nappe vaut donc :

$$E_{nap} = \iint_{\bar{p}} \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{1}{1-f_c} w_{inc}(\underline{e}) d\xi_3 + \frac{\kappa}{2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} (J-1)^2 d\xi_3 + \frac{1}{2} c_{coupl} (\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2)^2 + \frac{1}{e} w_{mb}(\underline{v}) + \frac{1}{e} w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}_{j,1}, \underline{d}_{k,2}) \right\} d\xi_\alpha \quad (2.47)$$

Cette nouvelle énergie paraît bien coercive pour toute configuration dans laquelle les directeurs  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  forment une base locale en tout point du plan. Toutes les déformations sont en effet contrôlées dans  $K$  au sens suivant :

- Les positions  $\underline{x}$  et leur gradient  $\underline{F} = \underline{\nabla}_{3D}\underline{x}$  sont contrôlés de manière classique dans tout le volume 3D par l'énergie de gomme et les conditions aux limites ;
- Les positions  $\underline{r}$  sont contrôlées par la gomme environnante ;
- Les gradients  $\underline{\nabla}_{2D}\underline{r}$  et les directeurs  $\underline{d}_i$  sont contrôlés par l'énergie de membrane des câbles ainsi que le couplage gomme/câble ;
- On suppose que les gradients des directeurs  $\underline{\nabla}_{2D}\underline{d}_i$  sont contrôlés faiblement par la gomme. En plus, les dérivées curvilignes des directeurs  $\underline{d}'_i$  sont contrôlées en tout point dans la base locale  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  par le terme d'énergie modifiée de flexion  $w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}'_j)$ .

Cette estimation de l'énergie, et en particulier celle de la gomme, reste assez grossière. Mais comme nous l'avons dit en introduction de ce chapitre, on se limite pour le moment à la considération des phénomènes apparaissant à l'ordre 0 à l'échelle macroscopique. A ce niveau, les éléments importants sont surtout la bonne prise en compte de la flexion des câbles et le couplage des câbles entre eux par l'intermédiaire de la gomme. Une estimation plus précise de l'énergie de gomme sera présentée dans la partie II de cette thèse, où nous décrirons une modélisation multi-échelles permettant de bien prendre en compte les déformations mésoscopiques de la gomme.

#### 2.4.4 Formulation variationnelle du problème de nappe isolée

On suppose maintenant que la nappe est soumise à des densités surfaciques d'effort  $\underline{g}_U$  et  $\underline{g}_D$  sur ses surfaces supérieure et inférieure. Pour des charges mortes, on peut introduire alors la fonctionnelle  $J : K \rightarrow \mathbb{R}$  correspondant à l'énergie potentielle

$$J(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) = E_{nap}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) - \iint_{\bar{P}} \left[ \underline{g}_U(\xi_\alpha) \cdot \underline{x}(\xi_\alpha, \frac{h}{2}) + \underline{g}_D(\xi_\alpha) \cdot \underline{x}(\xi_\alpha, -\frac{h}{2}) \right] d\xi_\alpha$$

où  $E_{nap}$  est l'énergie interne de la nappe donnée par l'expression 2.40.

Le problème d'équilibre de la nappe se ramène alors au problème variationnel :

**Pb 2.4.1** Trouver  $(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in K^{ort}$  solution de

$$\min_{(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \in K^{ort}} J(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \quad (2.48)$$

L'une des difficultés imposées par notre modèle est que l'espace des configurations admissibles  $K^{ort}$  est une variété différentielle non linéaire, et non un espace linéaire comme c'est le cas classiquement. Pour contourner cette difficulté, on va plutôt travailler sur l'espace vectoriel  $K$  entier et imposer la condition 2.27 par multiplicateurs de Lagrange. On forme donc le lagrangien :

$$L\left(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}\right) = J(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) + \iint_{\bar{P}} \underline{\lambda}(\xi_\alpha) : \underline{G}[\underline{d}_i](\xi_\alpha) d\xi_\alpha \quad (2.49)$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\underline{\lambda}$  est symétrique, et ses composantes sont dans l'espace dual de  $W^{1,q}(\bar{P})$ , donc il est défini dans l'espace  $\mathcal{R}_{sym}^{33} = (W^{1,q}(\bar{P}))'_{sym}{}^{3 \times 3}$ .

On recherche alors en toute généralité la solution du problème d'Euler-Lagrange :

**Pb 2.4.2** Trouver  $(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in K \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que

$$\begin{cases} \forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in K_0, & \frac{\partial E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) + \iint_{\bar{P}} \underline{\lambda}(\xi_\alpha) : \left[ \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{d}_i} \cdot \hat{d}_i \right] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = F(\hat{x}) \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, & \underline{G}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \end{cases} \quad (2.50)$$

où  $F$  est une forme linéaire définie sur  $H(\bar{\Omega})$ , correspondant aux efforts extérieurs appliqués sur la nappe.

On pourrait s'inspirer de (Bourgat et al., 1988) pour démontrer que ce problème est bien posé si le chargement est indépendant de la déformation. Ce système d'équations est non linéaire, et sera résolu par une méthode itérative de Newton projetée. Pour cela, il est nécessaire de linéariser les équations à chaque itération, ce que nous allons faire formellement dans ce qui suit.

## ■ 2.5 Méthode de résolution formelle

### 2.5.1 Equations d'Euler-Lagrange linéarisées

Plaçons nous dans une configuration  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort}$ , qui peut par exemple correspondre à la configuration correspondant à l'itération  $n$  d'une méthode de Newton. On cherche à construire une nouvelle configuration, notée  $(\underline{x}^{n+1}, \underline{r}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1}) \in K^{ort}$ , qui s'approche de la solution du problème Pb2.4.2. Pour cela, la manière classique de faire est de linéariser les équations d'Euler-Lagrange 8.12 autour de la configuration  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ , puis de calculer l'incrément  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i)$  par simple résolution d'un système linéaire, et enfin de projeter la solution incrémentée sur la variété des solutions admissibles.

Linéarisons donc les équations 8.12 autour de la configuration  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort}$  et  $\underline{\lambda} \in \mathcal{R}_{sym}^{33}$ .

On obtient :

**Pb 2.5.1** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0$  et  $\underline{\delta \lambda} \in \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in K_0$ , on ait

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) + \frac{\partial^2 E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)^2}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \right] \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \\ & + \iint_{\bar{P}} \sum_{i,j} (\lambda_{ij} + \delta \lambda_{ij}) \left( \hat{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \hat{d}_j(\xi_\alpha) \right) \\ & + \iint_{\bar{P}} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \left( \hat{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{\delta d}_j(\xi_\alpha) + \underline{\delta d}_i(\xi_\alpha) \cdot \hat{d}_j(\xi_\alpha) \right) \\ = & F(\hat{x}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\forall (\xi_\alpha) \in \bar{P}, \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \quad \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\delta d}_j(\xi_\alpha) + \underline{\delta d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) = 0. \quad (2.52)$$

L'équation 2.52 signifie que  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i)$  appartient à l'espace tangent  $dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ . Elle est équivalente à

$$\exists \underline{\omega} \in W^{1,q}(\bar{P})^3, \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad \forall (\xi_\alpha) \in \bar{P}, \quad \underline{\delta d}_i(\xi_\alpha) = \underline{\omega}(\xi_\alpha) \wedge \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) = \underline{D}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\omega}(\xi_\alpha). \quad (2.53)$$

Ici  $\underline{D}_i \in H_{anti}^{33}(\bar{P})$  est le tenseur de rotation élémentaire associé au vecteur  $\underline{d}_i$ , défini par :

$\forall \underline{v} \in H(\bar{P}), \quad \underline{D}_i \cdot \underline{v} = \underline{v} \wedge \underline{d}_i$ . L'inconnue du problème linéarisé devient alors  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in \mathcal{U}$ .



On se limite alors à des fonctions tests  $(\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i)$  appartenant également à l'espace tangent  $dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ , sous la forme :

$$\forall (\xi_\alpha) \in \bar{P}, \quad (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i)(\xi_\alpha) = (\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega} \wedge \underline{d}_i^n)(\xi_\alpha) = (\hat{x}, \hat{r}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega})(\xi_\alpha) ,$$

avec  $(\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega}) \in \mathcal{U}$ , de telle sorte que ces fonctions tests satisfont

$$\hat{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \hat{d}_j(\xi_\alpha) = 0 .$$

Le problème linéarisé devient alors :

**Pb 2.5.2** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\delta \lambda} \in \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega}) \in \mathcal{U}$ , on ait

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_{nap}}{\partial(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega}) + (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{D}_i^n \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{\partial^2 E_{nap}}{\partial(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)^2}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega}) \\ & - \iint_{sur\,fe} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \underline{\omega}(\xi_\alpha) \cdot \left( \underline{D}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{D}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{D}_j^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{D}_i^n(\xi_\alpha) \right) \hat{\omega}(\xi_\alpha) \\ & = F(\hat{x}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega}) . \end{aligned} \tag{2.54}$$

Ce problème linéarisé peut alors s'écrire sous la forme générique :

**Pb 2.5.3** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in \mathcal{U}$  et  $\underline{\delta \lambda} \in \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega}) \in \mathcal{U}$ , on ait

$$a((\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega})) = l(\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega}) , \tag{2.55}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} a((\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega})) &= (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{D}_i^n \cdot \underline{\omega}) \cdot \frac{\partial^2 E_{nap}}{\partial(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)^2}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega}) \\ &\quad - \iint_{sur\,fe} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \underline{\omega}(\xi_\alpha) \cdot \left( \underline{D}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{D}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{D}_j^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{D}_i^n(\xi_\alpha) \right) \hat{\omega}(\xi_\alpha) ; \\ l(\hat{x}, \hat{r}, \hat{\omega}) &= F(\hat{x}) - \frac{\partial E_{nap}}{\partial(\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \underline{D}_i^n \cdot \hat{\omega}) . \end{aligned} \right.$$

Remarque : En réduisant l'espace des fonctions tests à  $dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ , nous avons fait disparaître l'incrément des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\delta \lambda}$  du problème linéarisé. Pourtant, la valeur actualisée des multiplicateurs sera nécessaire à l'itération suivante, donc il nous faut trouver une méthode pour les calculer. Cela est fait dans la sous-section 2.5.3.

## 2.5.2 Projection sur l'espace des directeurs orthonormés

Dans la sous-section 2.5.1, nous avons fait l'hypothèse que la configuration courante  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$  appartient à la variété  $K^{ort}$  puis nous avons voulu construire une nouvelle configuration  $(\underline{x}^{n+1}, \underline{r}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1})$  supposée également dans  $K^{ort}$ . Pour passer de l'une à l'autre, nous avons utilisé un incrément de la forme

$$(\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) = (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega} \wedge \underline{d}_i^n) ,$$

où  $\underline{\omega} \in W^{1,q}(\bar{P})^3$  est une fonction vecteur de rotation infinitésimale, auquel on associe un tenseur antisymétrique  $\underline{\Omega} \in W_{sym}^{33}(\bar{P})$  défini par :  $\forall \underline{d} \in H(\bar{P}), \quad \underline{\Omega} \cdot \underline{d} = \underline{\omega} \wedge \underline{d}$ .

Mais ce que nous avons "caché", c'est que la variété  $K^{ort}$  est non linéaire, ce qui signifie que

$$(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) + (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega} \wedge \underline{d}_i^n) \notin K^{ort} . \quad (2.56)$$

Donc on ne peut pas passer d'une configuration à une autre par une simple incrémentation de la forme

$$(\underline{x}^{n+1}, \underline{r}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1}) = (\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) + (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\omega} \wedge \underline{d}_i^n) .$$

Il est nécessaire de projeter les directeurs actualisés  $(\underline{d}_i^{n+1}) \in H(\bar{P})$  pour vérifier la contrainte d'orthonormalité 2.27 :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{G}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{0} .$$

Pour ce faire, étant donné que les directeurs d'origine  $(\underline{d}_i^n) \in H(\bar{P})^3$  sont supposés orthonormés, il suffit de chercher les nouveaux directeurs  $(\underline{d}_i^{n+1})$  comme étant une rotation de ceux-ci, ce qui s'écrit :

$$\forall i = 1, 2, 3 , \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{d}_i^{n+1}(\xi_1, \xi_2) = \underline{\Pi}(\underline{\Omega}(\xi_1, \xi_2)) \cdot \underline{d}_i^n(\xi_1, \xi_2) .$$

L'exponentielle d'un tenseur antisymétrique étant un tenseur orthogonal, on peut choisir l'opérateur de rotation  $\underline{\Pi}$  comme étant l'exponentielle du tenseur  $\underline{\Omega}$  :

$$\forall i = 1, 2, 3 , \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{d}_i^{n+1}(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{\underline{\exp}}}(\underline{\underline{\underline{\Omega}}}(\xi_1, \xi_2)) \cdot \underline{d}_i^n(\xi_1, \xi_2) .$$

De plus, cette exponentielle peut être écrite sous forme explicite :

$$\underline{\underline{\underline{\exp}}}(\underline{\underline{\underline{\Omega}}}) = \underline{\underline{\underline{I}}} + \frac{2}{1 + \|\underline{\underline{\underline{\tilde{\omega}}}}\|^2} \left( \underline{\underline{\underline{\tilde{\Omega}}}} + \underline{\underline{\underline{\tilde{\Omega}}}}^2 \right) ,$$

avec  $\underline{\underline{\underline{\tilde{\omega}}}} = \frac{\tan(\frac{1}{2} \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|)}{\|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|} \underline{\underline{\underline{\omega}}}$ .

En faisant l'hypothèse de petites rotations, (Hughes and Winget, 1980) propose alors l'approximation du second ordre  $\tan(\frac{1}{2} \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|) \approx \frac{1}{2} \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|$ , ce qui donne

$$\underline{\underline{\underline{\tilde{\omega}}}} \approx \frac{1}{2} \underline{\underline{\underline{\omega}}} ,$$

de telle sorte que l'exponentielle peut être approchée par l'opérateur :

$$\underline{\underline{\underline{\Pi}}}(\underline{\underline{\underline{\omega}}}) = \underline{\underline{\underline{I}}} + \frac{2}{4 + \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2} \left( 2\underline{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \right) . \quad (2.57)$$

**Théorème 2.5.1** *L'opérateur  $\underline{\underline{\underline{\Pi}}}$  défini par 2.57 est un opérateur orthogonal.*

Démonstration :

Vérifions que l'opérateur  $\underline{\underline{\underline{\Pi}}}$  est orthogonal :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{\underline{\underline{\Pi}}}(\underline{\underline{\underline{\omega}}})^T \cdot \underline{\underline{\underline{\Pi}}}(\underline{\underline{\underline{\omega}}}) = \left[ \underline{\underline{\underline{I}}} + \frac{2}{4 + \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2} \left( 2\underline{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \right) \right]^T \cdot \left[ \underline{\underline{\underline{I}}} + \frac{2}{4 + \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2} \left( 2\underline{\underline{\underline{\Omega}}} + \underline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 \right) \right] .$$

En utilisant l'antisymétrie du tenseur  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$ , on obtient

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{\underline{\underline{\Pi}}}(\underline{\underline{\underline{\omega}}})^T \cdot \underline{\underline{\underline{\Pi}}}(\underline{\underline{\underline{\omega}}}) = \underline{\underline{\underline{I}}} + \frac{4}{(4 + \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2)^2} \left( -\|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2 \underline{\underline{\underline{\Omega}}}^2 + \underline{\underline{\underline{\Omega}}}^4 \right) .$$

Le polynôme caractéristique du tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$  vaut  $P(x) = \det(x\underline{\underline{\underline{I}}} - \underline{\underline{\underline{\Omega}}}) = x^3 - \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2 x$ . D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le tenseur  $\underline{\underline{\underline{\Omega}}}$  annule ce polynôme, donc

$$\underline{\underline{\underline{\Omega}}}^3 - \|\underline{\underline{\underline{\omega}}}\|^2 \underline{\underline{\underline{\Omega}}} = \underline{\underline{\underline{0}}} .$$

On en déduit que  $\underline{\underline{\Pi}}(\underline{\omega})$  est bien orthogonal :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} \ , \ \underline{\underline{\Pi}}(\underline{\omega})^T \cdot \underline{\underline{\Pi}}(\underline{\omega}) = \underline{\underline{I}} \ .$$

■

Finalement, la configuration actualisée admissible est définie par

$$(\underline{x}^{n+1}, \underline{r}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1}) = (\underline{x}^n + \underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\underline{\Pi}}(\underline{\omega}) \cdot \underline{d}_i^n) \ . \quad (2.58)$$

### 2.5.3 Calcul des multiplicateurs de Lagrange

Comme nous l'avons remarqué dans la sous-section 2.5.1, le système linéaire 2.54 issu des équations d'Euler Lagrange linéarisées ne permet pas le calcul de l'incrément des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\underline{\delta \lambda}}$ . Nous cherchons donc ici une autre méthode pour actualiser ces multiplicateurs.

Commençons par rappeler la décomposition 2.34 de l'espace des champs  $K_0$  en espaces supplémentaires :

$$\forall (\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort} \quad K_0 = dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \oplus \overline{dK^{ort}}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \ .$$

Le problème variationnel 8.12 est alors équivalent à

Trouver  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort}$  et  $\underline{\underline{\lambda}} \in \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que on ait

$$\forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) + \int \int_{\bar{P}} \underline{\underline{\lambda}}(\xi_\alpha) : \underbrace{\left[ \frac{\partial \underline{\underline{G}}}{\partial \underline{d}_i} \cdot \hat{d}_i \right]}_{(\xi_\alpha)} d\xi_\alpha = F(\hat{x}) \quad (2.59) \\ = 0 \text{ car } (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \end{aligned}$$

$$\text{et } \forall (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in \overline{dK^{ort}}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n),$$

$$\frac{\partial E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) + \int \int_{\bar{P}} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left( \hat{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \hat{d}_j(\xi_\alpha) \right) d\xi_\alpha = F(\hat{x}) \ . \quad (2.60)$$

L'équation 2.59, qui utilise des fonctions tests  $(\hat{x}, \hat{r}, \hat{d}_i) \in dK^{ort}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ , ne fait pas intervenir les multiplicateurs de Lagrange. Le calcul de  $\underline{\underline{\lambda}}$  va donc se baser sur la relation 2.60.

Commençons par rappeler la définition de l'espace  $\overline{dK^{ort}}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$ , donnée par 2.34 :

$$\begin{aligned} \overline{dK^{ort}}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in K_0 \text{ tels que } \exists \underline{\underline{S}} \in W_{sym}^{33}(\bar{P}), \right. \\ \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} \ , \ \left\{ \begin{array}{l} \underline{\delta x}(\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \\ \forall i = 1, 2, 3 \ , \ \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) = \underline{\underline{S}}(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_i^n(\xi_1, \xi_2) \end{array} \right\} \right\} \ . \end{aligned}$$

L'équation 2.60 se simplifie alors à

$$\forall \underline{\underline{S}} \in W_{sym}^{33}(\bar{P}),$$

$$\frac{\partial E_{nap}}{\partial \underline{d}_i}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{d}_i + \int \int_{\bar{P}} \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left( \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) \right) d\xi_\alpha = 0 \ . \quad (2.61)$$

Explicitons alors la forme de l'énergie interne  $E_{nap}$  :

$$E_{nap}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) = \int \int_{\bar{P}} w_{nap}(\underline{\nabla}_{3D} \underline{x}, \underline{\nabla}_{2D} \underline{r}, \underline{d}_i, \underline{d}_i') d\xi_1 d\xi_2 \ .$$

On en déduit la forme de sa dérivée par rapport aux vecteurs directeurs : (on suppose dans cette section à les variations des directeurs sont de trace nulle sur le bord)

$$\begin{aligned} \forall (\hat{\underline{d}}_1, \hat{\underline{d}}_2, \hat{\underline{d}}_3) \in H_0(\bar{P})^3, \quad \frac{\partial E_{nap}}{\partial \underline{d}_i}(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \cdot \hat{\underline{d}}_i &= \iint_{\bar{P}} \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} \cdot \hat{\underline{d}}_i + \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \cdot \hat{\underline{d}}'_i d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \iint_{\bar{P}} \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \hat{\underline{d}}_i d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.62) \end{aligned}$$

L'égalité 2.61 se réécrit alors

$$\forall \underline{\underline{S}} \in W_{sym}^{33}(\bar{P}),$$

$$\begin{aligned} &\iint_{\bar{P}} \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \underline{\underline{S}}(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \\ &+ \sum_{i,j} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left( \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\underline{S}}(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) \cdot \underline{\underline{S}}(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) \right) d\xi_\alpha = 0. \quad (2.63) \end{aligned}$$

On doit alors trouver une manière adéquate pour décrire l'espace des fonctions tenseurs symétriques  $W_{sym}^{33}(\bar{P})$ . Pour cela, on introduit les produits tensoriels des directeurs  $\underline{\underline{T}}_{kl}$  :

$$\forall k, l = 1, 2, 3, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\underline{T}}_{kl}(\xi_\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \underline{d}_k(\xi_\alpha) \otimes \underline{d}_k(\xi_\alpha) & \text{si } k = l \\ \frac{1}{2} [\underline{d}_k(\xi_\alpha) \otimes \underline{d}_l(\xi_\alpha) + \underline{d}_l(\xi_\alpha) \otimes \underline{d}_k(\xi_\alpha)] & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (2.64)$$

On peut aisément vérifier que ces produits tensoriels  $\underline{\underline{T}}_{kl}$  ont leurs composantes dans  $H(\bar{P})$  et sont symétriques, qui appartiennent donc à  $W_{sym}^{33}(\bar{P})$ . De plus, ils sont linéairement indépendants, donc ils permettent d'engendrer l'espace des tenseurs symétriques  $W_{sym}^{33}(\bar{P})$  :

$$\begin{aligned} W_{sym}^{33}(\bar{P}) &= \left\{ \underline{\underline{S}} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ tels que } \exists c_{kl} \in H(\bar{P}) \right. \\ &\quad \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\underline{S}}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k,l} c_{kl}(\xi_1, \xi_2) \underline{\underline{T}}_{kl}(\xi_1, \xi_2) \right\}. \quad (2.65) \end{aligned}$$

La configuration actuelle  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n)$  étant supposée dans  $K^{ort}$ , les directeurs  $(\underline{d}_i)_{i=1,2,3}$  sont ortho-normés en tout point  $((\xi_1, \xi_2) \in \bar{P})$ . On en déduit :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i^n(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j^n(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij}.$$

D'après la définition 2.64 des tenseurs  $(\underline{\underline{T}}_{kl})$ , on peut alors facilement montrer que

$$\forall k, l = 1, 2, 3, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{\underline{T}}_{kl} \cdot \underline{d}_j = \underline{d}_j \cdot \underline{\underline{T}}_{kl} \cdot \underline{d}_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jk} & \text{si } k = l \\ \frac{1}{2} (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{jl} \delta_{ik}) & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

Si on somme ces relations, on obtient alors :  $\forall k, l = 1, 2, 3, \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P},$

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} (\underline{d}_i \cdot \underline{\underline{T}}_{kl} \cdot \underline{d}_j + \underline{d}_j \cdot \underline{\underline{T}}_{kl} \cdot \underline{d}_i) = \begin{cases} \lambda_{kk} & \text{si } k = l \\ \lambda_{kl} + \lambda_{lk} = 2 \lambda_{kl} & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (2.66)$$

Si on utilise la décomposition 2.65 de  $W_{sym}^{33}(\bar{P})$  et qu'on injecte 2.66 dans l'égalité 2.63, on obtient alors les égalités :

$$\forall i, j = 1, 2, 3, \quad \forall c_{ij} \in H(\bar{P}),$$

$$\begin{cases} \iint_{\bar{P}} c_{ij}(\xi_\alpha) \left\{ \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{d}_i \right) + \lambda_{ii} \right\} d\xi_\alpha = 0 & \text{si } i = j \\ \iint_{\bar{P}} c_{ij}(\xi_\alpha) \left\{ \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{d}_j \right) + \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_j} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_j} \right)' \right] \cdot \left( \frac{1}{2} \underline{d}_i \right) + 2 \lambda_{ij} \right\} d\xi_\alpha = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Finalement, on en déduit la valeur des multiplicateurs de Lagrange pour la configuration courante  $(\underline{x}^n, \underline{r}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort}$  :

$$\forall (\xi_\alpha) \in \bar{P}, \forall i \in [1, 3], \forall j \in [i, 3],$$

$$\lambda_{ij}(\xi_\alpha) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{4} \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_i} \right)' \right] \cdot \underline{d}_j^n(\xi_\alpha) + \left[ \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}_j} - \left( \frac{\partial w_{nap}}{\partial \underline{d}'_j} \right)' \right] \cdot \underline{d}_i^n(\xi_\alpha) & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.67)$$

Pour résumer, les sous-sections 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3 permettent de définir une méthode incrémentale de résolution des équations d'Euler-Lagrange 8.12. Chaque itération partant d'une configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \in K^{ort}$  est décomposée en 3 étapes :

- Calcul des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\lambda}^n$  avec la relation 2.67 ;
- Calcul de l'incrément  $(\delta \underline{x}, \underline{\omega}) \in \mathcal{U}$  par résolution du système 2.54 ;
- Projection sur la variété  $K^{ort}$  avec l'opérateur défini par 2.57 et 2.58, pour obtenir la nouvelle configuration  $(\underline{x}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1}) \in K^{ort}$ .

## ■ Conclusions

Les nappes fibrées sont des structures fines constituées de câbles rigides enrobés dans une gomme molle incompressible. Comme nous l'avons vu dans la section 2.2, il est important que la modélisation de ces nappes prenne convenablement en compte leur *structure hétérogène* ainsi que la *flexion des câbles*, que ce soit hors plan ou dans le plan de la nappe.

Ce chapitre a présenté un premier *modèle original* de nappes fibrées, utilisant une représentation de poutre pour les câbles et une énergie homogénéisée pour la gomme, ce qui permet de répondre à toutes ces attentes. Une méthode de résolution formelle itérative a été décrite, permettant d'assurer que la solution appartient à l'espace des configurations admissibles, qui est une variété non linéaire.

La résolution numérique de ce problème non linéaire va se faire par une Méthode d'Éléments Finis (MEF). Mais il est bien connu (voir par exemple (Chapelle and Bathe, 2003)) que la MEF classique appliquée à des structures minces présente un risque de verrouillage numérique, c'est à dire que sa convergence ne sera pas uniforme par rapport à l'épaisseur de la nappe.

Avant de discrétiser notre problème de nappe continu, il est donc nécessaire de réaliser une étude formelle permettant d'assurer que la méthode numérique choisie ne présente pas de risque de verrouillage pour des faibles épaisseurs, ce qui est fait dans le chapitre 3. Le type d'éléments finis ainsi que l'algorithme de résolution seront ensuite présentés dans le chapitre 4.

## Écriture formelle et analyse du modèle

### ■ Introduction

L'objectif de ce chapitre est de construire une méthode numérique satisfaisante pour discrétiser le modèle décrit dans le chapitre 2. Plus précisément, l'épaisseur des nappes étudiées sera souvent très petite par rapport aux autres dimensions caractéristiques, en particulier par rapport à la longueur des fibres qu'elles contiennent. Ce type de *structures minces* apparaît fréquemment dans le milieu industriel, l'objectif étant d'avoir une structure la plus mince et robuste possible pour utiliser un minimum de matériau dans sa construction. En général, la solution calculée par une méthode d'éléments finis classique peut fortement se détériorer lorsque l'épaisseur d'une structure tend vers 0. Notre méthode numérique devra donc garantir que l'approximation discrète calculée reste bonne même pour des épaisseurs très faibles.

La construction de la méthode numérique se fait en plusieurs étapes :

- Dans la première section, on rappelle la problématique générale dans le cas des structures minces, et on récapitule quelques travaux existants pour d'autres types de structures minces classiques ;
- La section 3.2 présente le modèle mathématique non linéaire qui sera utilisé pour décrire le problème de nappe renforcée, écrit sous forme asymptotique ;
- Nous expliquons ensuite dans la section 3.3 ce qui se passe si l'on discrétise directement ce modèle par des éléments finis standards, de manière à comprendre l'origine du phénomène de verrouillage numérique ;
- Des multiplicateurs de Lagrange sont alors introduits dans la section 3.4 pour construire une formulation mixte du problème. On essaie alors de montrer que des éléments finis mixtes assez simples permettent de contourner les risques de verrouillage ;
- Enfin, nous prouvons dans la section 3.5 que le problème discret construit par éléments finis mixtes est en fait équivalent à réaliser une sous intégration partielle sélective sur des éléments finis standards.

Des tests numériques seront ensuite montrés dans le chapitre 4 pour prouver que la méthode numérique ainsi construite donne de bons résultats dans différentes situations asymptotiques (flexion ou membrane dominée).

## ■ 3.1 Verrouillage numérique des structures minces

Il est bien connu que la formulation d'*éléments finis robustes* pour l'analyse numérique des structures minces présente des difficultés. Lorsque l'épaisseur est petite, le terme d'énergie de membrane des fibres prend plus d'importance, et les problèmes tangents qui apparaissent peuvent prendre deux formes, suivant la configuration et le chargement considérés :

$$\forall \underline{\hat{U}} \in \mathcal{V} \quad A_{mb}(\underline{U}^{\tilde{c}}, \underline{\hat{U}}) + \epsilon^2 A(\underline{U}^{\tilde{c}}, \underline{\hat{U}}) = f(\underline{\hat{U}}) \quad (3.1)$$

$$\forall \underline{\hat{U}} \in \mathcal{V} \quad A(\underline{U}^{\tilde{c}}, \underline{\hat{U}}) + \epsilon^{-2} A_{mb}(\underline{U}^{\tilde{c}}, \underline{\hat{U}}) = f(\underline{\hat{U}}) \quad (3.2)$$

Le problème 3.1, dit "*à flexion pure inhibée*", peut normalement être discrétisé directement et être résolu par la méthode des éléments finis avec de bons résultats même si l'épaisseur devient très fine. Par contre, lorsqu'on résout numériquement le problème 3.2, qu'on appellera "*problème à flexion non inhibée*", il arrive bien souvent que le matériau paraisse plus raide lorsque le paramètre  $\epsilon$  diminue. Ce phénomène est appelé *verrouillage numérique*, et il constitue l'une des difficultés majeures dans la formulation d'éléments finis robustes pour l'analyse numérique des structures minces.

Le phénomène de verrouillage numérique a été largement étudié dans le cas des poutres (cf (Arnold, 1981), (Chenais and Paumier, 1994), (Chapelle, 1997)), des plaques (cf (Brezzi and Fortin, 1991), (Chapelle, 1993)) ou encore des coques (cf (Sanchez-Palencia, 1989a), (Pitkäranta, 1992), (Arnold and Brezzi, 1997)). Il apparait aussi dans les formulations incompressibles de la mécanique des milieux continus, pour lesquelles de nombreux travaux ont été réalisés dans la recherche de remèdes contre cette pathologie (voir (Hughes, 1987), (Batoz and Dhatt, 1990) ou (Bathe, 1996)). Dans la plupart des cas, les *formulations mixtes* permettent de construire rigoureusement des méthodes numériques qui échappent au verrouillage. Mais dans le cas des coques, il n'existe actuellement aucun élément dont on ait pu démontrer qu'il serait parfaitement robuste, même si tous les problèmes sont désormais bien compris (voir en particulier (Chapelle and Bathe, 2003)).

La forme de notre problème de nappe fibrée est très similaire aux problèmes de coques, puisque la géométrie de la surface moyenne  $y$  est quelconque et que la flexion pourra être inhibée ou non dans le problème limite. L'approche décrite dans ce chapitre pour échapper au verrouillage est donc en grande partie inspirée des méthodes développées pour les coques.

## ■ 3.2 Formulation non linéaire continue

### 3.2.1 Problème 2D sous forme asymptotique

#### Simplification du problème continu

On rappelle que l'énergie de déformation de la nappe peut être décomposée en trois termes principaux : une énergie de la gomme (qui travaille faiblement en membrane et en flexion), une énergie de flexion des fibres et une énergie de membrane des fibres.

Pour simplifier l'étude formelle réalisée dans ce chapitre, on va supposer que le problème de nappe fibrée 3D décrit dans le chapitre 2 peut être approché par un problème 2D sur la surface moyenne de la nappe, dans lequel les seules inconnues sont  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in H(\bar{P}) \times H(\bar{P})^3$ . L'énergie totale de la nappe

donnée par l'expression 2.47 est alors remplacée par une énergie de la forme :

$$E_{nap} = \iint_{\bar{P}} w_{gom}^{2D} + w_{fl} + w_{mb} d\xi_\alpha \quad (3.3)$$

On réalise les hypothèses suivantes :

- La densité surfacique d'énergie de gomme dépend du gradient surfacique  $\underline{\nabla}_{2D} r$  (membrane). Mais du fait de l'interaction entre les câbles et la gomme, elle apporte d'une certaine manière une faible résistance en flexion perpendiculairement aux fibres, et on peut supposer qu'elle dépend également des directeurs  $\underline{d}_i$  et de leurs dérivées surfaciques  $\underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i$  (flexions) :

$$w_{gom}^{2D} = w_{gom}^{2D} \left( \underline{\nabla}_{2D} r, \underline{d}_i, \underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i \right)$$

- Comme dans le chapitre 2, l'énergie de flexion des fibres s'écrit sous la forme :

$$w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}'_j) = \frac{EI}{2e} (\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) + \frac{GJ}{2e} \tilde{u}_1^2 + \frac{EI}{2e} \left[ (\underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_i)^2 + (\underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i)^2 \right]$$

où les  $\tilde{u}_i$  sont définis par l'expression 2.45 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_2^0)^2 \\ \tilde{u}_2^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_1^0)^2 \\ \tilde{u}_3^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_1^0)^2 \end{cases}$$

- Enfin, l'énergie de traction/compression des fibres dépend de la mesure  $v_i = \underline{r}' \cdot \underline{d}_i$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned} w_{mb} &= w_{mb}(\underline{r}', \underline{d}_i) \\ &= (\underline{v} - \underline{v}_0) \cdot \underline{K}^{mb} \cdot (\underline{v} - \underline{v}_0) \\ &= K_{ii}^{mb} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i})^2 \end{aligned}$$

Au vu des conditions aux limites  $\mathcal{CL}$  imposées, les transformations évoluent alors dans l'espace  $\tilde{K}$  défini par :

$$\tilde{K} = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in (H(\bar{P}) \times H(\bar{P})^3) \cap \mathcal{CL} \right\} \quad (3.4)$$

où  $H(\bar{P})$  représente toujours l'ensemble des fonctions vecteurs  $\underline{v}$  définies sur le plan de référence  $\bar{P}$ , de carré intégrable et dont le gradient est aussi de carré intégrable :

$$\begin{aligned} H(\bar{P}) &= \left\{ \underline{v} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in H^1(\bar{P}) \right\} \\ &= \left\{ \underline{v} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in L^2(\bar{P}) \text{ et } \underline{\nabla}_{2D} v_i \in L^2(\bar{P})^2 \right\} \end{aligned}$$

L'espace des variations  $\tilde{K}_0$  est alors défini de la même manière par

$$\tilde{K}_0 = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in (H(\bar{P}) \times H(\bar{P})^3) \cap \mathcal{CL}_0 \right\} \quad (3.5)$$

Par ailleurs, comme cela était fait dans le chapitre 2, on impose aux directeurs d'être orthonormés en tout point de la surface :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij}$$

La variété  $\tilde{K}^{ort}$  contenant les déformations cinématiquement admissibles qui prennent en compte cette contrainte d'orthonormalité est alors définie par

$$\tilde{K}^{ort} = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K} \text{ tels que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{G}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \right\} \quad (3.6)$$



où on rappelle que l'opérateur  $\underline{G}: H(\bar{P})^3 \rightarrow W_{sym}^{33}(\bar{P})$  est défini par l'équation 2.26 :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad G_{ij}[\underline{d}_k](\xi_1, \xi_2) = \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) - \delta_{ij}$$

Pour toute configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}^{ort}$ , l'espace des variations cinématiquement admissibles est alors défini par l'espace tangent :

$$d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \left\{ (\delta \underline{r}, \delta \underline{d}_i) \in \tilde{K}_0 \text{ tels que } \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \right. \\ \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \delta \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) + \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \delta \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = 0 \right\} \quad (3.7)$$

### Ecriture asymptotique

L'objectif dans ce chapitre est d'étudier les nappes pour lesquelles l'épaisseur  $h$  est inférieure de plusieurs ordres de grandeur à la longueur moyenne des fibres, notée  $L_1$ . On dit que ces nappes sont "minces". Les différents termes de l'énergie n'évoluant pas de la même manière lorsque l'épaisseur change, il est nécessaire d'explicitier leur dépendance par rapport au petit paramètre  $\tilde{\epsilon} = \frac{h}{L_1}$  pour comprendre leur comportement lorsque celui-ci tend vers 0.

Come cela est fait par exemple dans (Chapelle, 1997), on peut montrer avec un adimensionnement par le module des câbles  $E_c$  pour les contraintes, et par la longueur moyenne des câbles  $L_1$  pour les longueurs, que les termes d'énergie de câbles vérifient les ordres de grandeur :

$$w_{mb}(\underline{r}', \underline{d}_i) = \tilde{\epsilon} \left( \underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i} \right) \cdot \underline{K}^0 \cdot \left( \underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i} \right) \quad \text{et} \quad w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}'_j) = \tilde{\epsilon}^3 w_{fl}^0(\underline{d}_i, \underline{d}'_j)$$

où le tenseur  $\underline{K}^0$  et la densité d'énergie  $w_{fl}^0$  sont indépendants de  $\tilde{\epsilon}$ .

Le terme d'énergie de gomme est plus complexe à adimensionner, car il fait intervenir deux petits paramètres : le rapport de longueurs  $\frac{h}{L_1}$  et le rapport de rigidités  $\frac{E_{gom}}{E_{cab}}$ . Pour tenir compte du fait que la gomme est beaucoup moins rigide que les câbles, et que les couches supérieure et inférieure contribuent à résister à la flexion de la nappe fibrée, on fait l'**hypothèse** que ces paramètres sont choisis de manière à ce que l'énergie de gomme s'écrive sous la forme :

$$w_{gom}^{2D}(\underline{\nabla}_{2D} \underline{r}, \underline{d}_i, \underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i) = \tilde{\epsilon}^3 w_{gom}^0(\underline{\nabla}_{2D} \underline{r}, \underline{d}_i, \underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i)$$

où  $w_{gom}^0$  est indépendant de  $\tilde{\epsilon}$ . Autrement dit, on suppose que l'énergie de déformation de gomme est du même ordre que l'énergie de flexion des câbles.

On regroupe alors les deux termes évoluant en  $O(\tilde{\epsilon})$  pour former la densité surfacique d'énergie adimensionnée :

$$w_0(\underline{\nabla}_{2D} \underline{r}, \underline{d}_i, \underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i) = w_{gom}^0(\underline{\nabla}_{2D} \underline{r}, \underline{d}_i, \underline{\nabla}_{2D} \underline{d}_i) + w_{fl}^0(\underline{d}_i, \underline{d}'_j)$$

Au final, l'énergie interne de la nappe peut donc s'écrire sous la forme :

$$E_{nap}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \tilde{\epsilon}^3 \underbrace{\int \int_{\bar{P}} w_0 d\xi_\alpha}_{E_0(\underline{r}, \underline{d}_i)} + \tilde{\epsilon} \frac{1}{2} \underbrace{\int \int_{\bar{P}} \left( \underline{v}(\underline{r}', \underline{d}_i) - \underline{v}_0 \right) \cdot \underline{K}^0 \cdot \left( \underline{v}(\underline{r}', \underline{d}_i) - \underline{v}_0 \right) d\xi_\alpha}_{a_{mb}^0 \left( \left( \underline{v}(\underline{r}', \underline{d}_i) - \underline{v}_0 \right), \left( \underline{v}(\underline{r}', \underline{d}_i) - \underline{v}_0 \right) \right)} \quad (3.8)$$

Avec ces notations, le problème non linéaire à résoudre s'écrit finalement sous la forme du développement asymptotique suivant :

**Pb 3.2.1 Développement asymptotique du problème de nappe simplifié**

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\epsilon}^3 \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) + \tilde{\epsilon} \int_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha \\ + \int_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \hat{\underline{d}}_j + \hat{\underline{d}}_i \cdot \underline{d}_j](\xi_\alpha) d\xi_\alpha = F(\hat{\underline{r}}) \quad \forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Remarque : On rappelle que pour une configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}^{ort}$  donnée, la valeur des multiplicateurs de Lagrange est connue et donnée par l'expression 2.67. En reprenant l'expression de l'énergie 3.8, on obtient :

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^3 \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_i'} \right)' \right) \cdot \underline{d}_i - \tilde{\epsilon} K_{ii}^0 (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i) & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{4} \left[ \tilde{\epsilon}^3 \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_i} - \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_i'} \right)' \right) \cdot \underline{d}_j + \tilde{\epsilon}^3 \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_j} - \left( \frac{\partial w_0}{\partial \underline{d}_j'} \right)' \right) \cdot \underline{d}_i \right] & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.9)$$

On arrive ainsi à un problème non linéaire, dont les inconnues sont les positions  $\underline{x}$  et les directeurs  $\underline{d}_i$ , dans lequel un petit paramètre  $\tilde{\epsilon}$  apparaît avec un poids variant de  $\tilde{\epsilon}$  à  $\tilde{\epsilon}^3$  devant les différents termes. Etant donné la façon dont  $\tilde{\epsilon}$  apparaît dans ce problème, il est légitime de se demander quelle influence ce paramètre peut avoir sur le modèle lorsqu'il devient petit. On aimerait en particulier étudier l'influence du paramètre sur la qualité des approximations numériques qu'on peut faire de ce modèle, de façon à détecter des difficultés de type "verrouillage numérique", dont on sait qu'elles arrivent effectivement pour d'autres formulations de structures minces comme les coques (voir par exemple (Chapelle, 1996a)). On va dans un premier temps s'intéresser au comportement asymptotique du modèle continu dans la sous section 3.2.2, tandis que la question des méthodes numériques est traitée dans la section 3.3.

**3.2.2 Problèmes non linéaires limites**

Pour réaliser l'analyse asymptotique de notre problème de nappe, on s'inspire du cas des coques linéaires (voir par exemple (Sanchez-Palencia, 1989a), (Pitkäranta, 1992) ou (Ciarlet, 2000)). On introduit une sous variété non linéaire de  $\tilde{K}$  fermée, notée  $\tilde{K}_{fl}$ , qui va jouer un rôle essentiel :

$$\tilde{K}_{fl} = \{(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{\mathcal{K}} \text{ tel que } \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{v}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \underline{v}(\underline{r}^0, \underline{d}_i^0) = \underline{v}_0\} \quad (3.10)$$

où l'expression des déformations  $\underline{v}(\underline{r}, \underline{d}_i)$  est donnée par l'équation 2.14.

La sous variété  $\tilde{K}_{fl}^{ort}$  correspond aux configurations pour lesquelles les déformations d'allongement et de cisaillement des câbles sont nulles, c'est pourquoi on l'appellera *espace des transformations en flexion pure*. En fonction du contenu de la variété  $\tilde{K}_{fl}$ , la nappe sera dite

- "à flexion pure non inhibée" si d'autres configurations que la configuration de référence appartiennent à  $\tilde{K}_{fl}$  ;
- "à flexion pure inhibée" si  $\tilde{K}_{fl}$  est réduit à la configuration de référence.

Ces termes sont utilisés par analogie avec le cas des coques linéaires décrit dans (Sanchez-Palencia, 1989a) et (Sanchez-Palencia, 1989b). Nous étudions ces deux types de problèmes limites dans la suite de cette section.

### Flexion pure inhibée

Plaçons nous d'abord dans le cas où  $\tilde{K}_{fl}$  est réduit à la configuration de référence :

$$\tilde{K}_{fl} = \{(\underline{r}^0, \underline{d}_i^0)\}$$

Dans ce cas, pour que la solution reste bornée quand  $\epsilon$  tend vers 0, on suppose que le chargement est de l'ordre  $O(\epsilon)$ , de telle sorte que le second membre peut s'écrire sous la forme

$$F(\underline{\hat{r}}) = \tilde{\epsilon} \iint_{\bar{P}} \underline{g} \cdot \underline{\hat{r}} \, d\xi_\alpha$$

où  $\underline{g} \in L^2(\bar{P})$  est supposée indépendante de  $\tilde{\epsilon}$ .

Le problème Pb3.2.1 est alors équivalent au problème perturbé suivant :

#### Pb 3.2.2 Problème non linéaire en membrane dominante

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \int_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\underline{\hat{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\hat{d}}_i) d\xi_\alpha + \tilde{\epsilon}^2 \frac{\partial E_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} (\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\underline{\hat{r}}, \underline{\hat{d}}_i) \\ + \int \int_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \underline{\hat{d}}_j + \underline{\hat{d}}_i \cdot \underline{d}_j] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \int \int_{\bar{P}} \underline{g} \cdot \underline{\hat{r}} \, d\xi_\alpha \quad \forall (\underline{\hat{r}}, \underline{\hat{d}}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Ainsi, lorsque  $\tilde{\epsilon}$  tend vers 0, le problème non linéaire devrait converger formellement vers le problème limite :

#### Pb 3.2.3 Problème non linéaire limite en membrane dominante

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \int_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\underline{\hat{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\hat{d}}_i) d\xi_\alpha \\ + \int \int_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \underline{\hat{d}}_j + \underline{\hat{d}}_i \cdot \underline{d}_j] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \int \int_{\bar{P}} \underline{g} \cdot \underline{\hat{r}} \, d\xi_\alpha \quad \forall (\underline{\hat{r}}, \underline{\hat{d}}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Ce problème limite n'est pas toujours bien posé. D'une part, compte tenu de l'expression de l'énergie limite dans le problème Pb3.2.3, l'espace de travail du problème de membrane dominante est plutôt du type  $L^2(\bar{P})$  au lieu de  $H^1(\bar{P})$ . D'autre part, il peut exister des chargements qui ne sont pas dans l'image de l'opérateur de raideur  $\underline{K}^0$ .

#### Exemple de problème à flexion de câble purement inhibée :

On considère une nappe initialement plane, supportée à ces deux extrémités dans le sens des fibres (cf figure 3.1(a)). On suppose ainsi que les trois composantes de déplacements sont bloquées à ces extrémités, mais que les rotations sont laissées libres. On soumet cette nappe à une densité de force transverse uniforme (qui peut être considérée comme son poids propre).

Il est évident que les conditions aux limites bloquant les déplacements aux extrémités, toute déformation va créer un allongement des câbles (cf figure 3.1(b)), de telle sorte que  $\tilde{K}_{fl} = \{(\underline{r}^0, \underline{d}_i^0)\}$ . Ce problème est donc un problème à flexion des câbles purement inhibée. Il sera étudié plus en détails dans le chapitre 4 sur quelques exemples numériques.

□

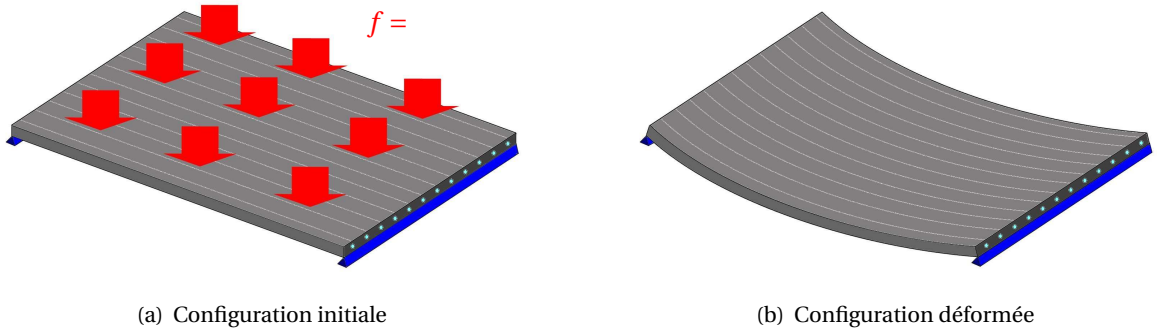


FIG. 3.1: Exemple de problème à flexion de câble purement inhibée

### Flexion pure non inhibée

Dans le cas où  $\tilde{K}_{fl}$  contient d'autres configurations, on suppose que le chargement est de l'ordre  $O(\epsilon^3)$  pour que la solution reste bornée quand  $\epsilon$  tend vers 0, de telle sorte le second membre peut s'écrire sous la forme

$$F(\hat{r}) = \epsilon^3 \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} \, d\xi_\alpha$$

où  $\underline{f} \in L^2(\bar{P})$  est supposée indépendante de  $\tilde{\epsilon}$ .

On est alors amené à étudier le problème suivant, dans lequel on remarque que le terme prépondérant est le contraire du problème avec flexion pure inhibée :

#### Pb 3.2.4 *Problème non linéaire en flexion dominante*

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \tilde{\epsilon}^{-2} \iint_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\ \quad + \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j](\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} \, d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Si on fait tendre  $\tilde{\epsilon}$  vers 0 dans cette minimisation, on constate qu'on tend à imposer sur la solution la contrainte

$$\nu_i(\underline{r}, \underline{d}_i) = \underline{r}' \cdot \underline{d}_i = \nu_{0i}$$

ce qui signifie qu'à la limite, les fibres ne subissent ni allongement ni cisaillement. Pour cette raison, les nappes à flexion pure non inhibée seront parfois dites "à flexion dominante" (cf (Pitkäranta, 1992)). Lorsque  $\tilde{\epsilon}$  tend vers 0, le problème non linéaire converge formellement vers le problème limite sur la sous variété  $\tilde{K}_{fl}$  :

#### Pb 3.2.5 *Problème non linéaire limite en flexion dominante*

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K}_{fl} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j](\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} \, d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_{fl}^0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

**Exemple de problème à flexion de câble non inhibée :**

On considère une nappe initialement plane, encastrée à l'une de ses extrémités et libre à l'autre bout (cf figure 3.2(a)). On suppose ainsi que les trois composantes de déplacements et les trois composantes de rotations sont bloquées à l'extrémité encastrée, mais que tous les degrés de liberté sont laissés libres ailleurs. On soumet cette nappe à une densité de force transverse uniforme (qui peut être considérée comme son poids propre).

L'extrémité non encastrée pouvant bouger n'importe comment, les câbles pourront toujours trouver une configuration en flexion pure lorsque la force reste d'intensité raisonnable (cf figure 3.2(b)). Leur énergie de membrane/cisaillement est alors nulle, de telle sorte que  $\tilde{K}_{fl} \neq \{r^0, \underline{a}_i^0\}$ . Ce problème est donc un problème à flexion des câbles non inhibée. Il sera étudié plus en détails dans le chapitre 4 sur quelques exemples numériques. □

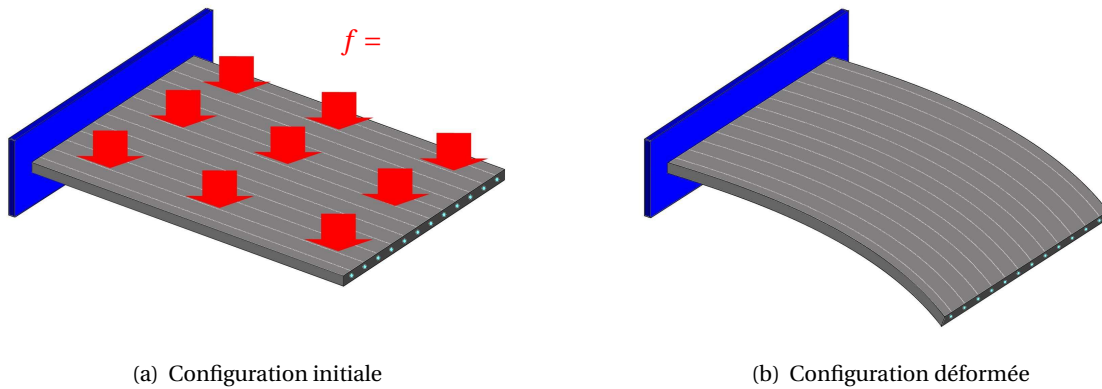


FIG. 3.2: Exemple de problème à flexion de câble non inhibée

L'objectif du reste de ce chapitre est de trouver une méthode numérique permettant d'approcher correctement la solution exacte de ce type de problème non linéaire, y compris lorsque l'épaisseur diminue et qu'on se rapproche des problèmes limites qu'on vient de décrire. On commence par analyser la méthode des éléments finis classique dans la section 3.3.

## ■ 3.3 Résolution par la méthode des éléments finis classique

### 3.3.1 Problème non linéaire discrétisé

La discrétisation du problème ainsi que la méthode de résolution seront détaillés dans le chapitre 4. On ne va donner ici que les idées principales et les notations utilisées.

#### Discrétisation de la surface

On suppose que la géométrie de la surface  $\mathcal{S}_m$  est suffisamment régulière pour pouvoir être décomposée en  $NE_h$  éléments finis quadrangulaires réguliers (comme ceux illustrés sur la figure 3.3) :

$$\mathcal{S}_m = \bigcup_{e=1}^{NE_h} E_e^h$$

où  $h$  représente le diamètre maximum d'un élément.

Il est à noter que l'approximation n'est pas nécessairement la même pour les déplacements  $\underline{\delta r}$  que pour les directeurs  $\underline{\delta d}_i$ . Ainsi dans chaque élément fini, le nombre de noeuds où sont calculés les incréments de déplacements  $\underline{\delta r}$  peut être différent du nombre de noeuds où sont calculés les incréments de directeurs  $\underline{\delta d}_i$ , comme le montre la figure 3.4. On prend comme notations :

- $NN_x^h$  : nombre de noeuds interpolant les déplacements  $\underline{\delta r}$ , notés  $(M_p)_{p \in [1; NN_x^h]}$  ;
- $NN_d^h$  : nombre de noeuds interpolant les directeurs  $\underline{d}_i$ , notés  $(N_p)_{p \in [1; NN_d^h]}$ .

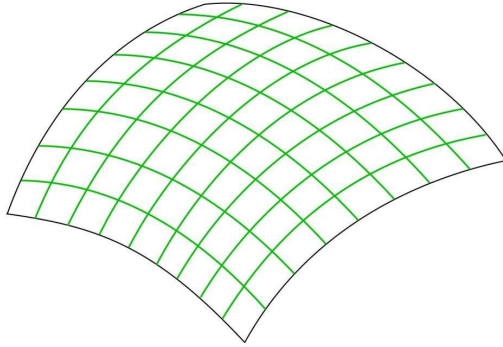


FIG. 3.3: Décomposition de la surface  $\mathcal{S}_m$  en éléments finis quadrangulaires

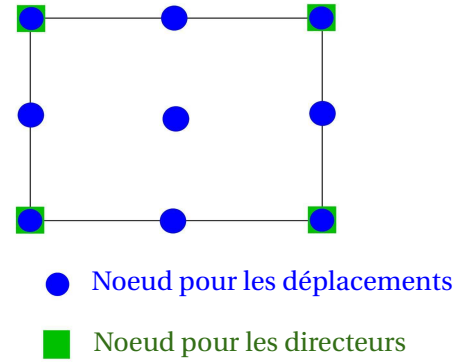


FIG. 3.4: Exemple d'élément fini quadrangulaire

### Restriction cinématique

La difficulté lorsqu'on discrétise le problème Pb3.2.1 est de traiter la contrainte d'orthonormalité des directeurs. On pourrait de reprendre directement la contrainte continue

$$\iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left[ \underline{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j(\xi_\alpha) - \delta_{ij} \right]$$

et de discrétiser l'espace des multiplicateurs  $\mathcal{R}_{sym}^{33}$  de manière très riche. Mais cela reviendrait à imposer l'orthonormalité des directeurs 2.27 en tout point de la surface de la nappe, alors que l'interpolation polynomiale utilisée ne le permet pas. Nous sommes donc amenés à relaxer cette contrainte d'orthogonalité, qui n'est plus imposée sur toute la surface, mais uniquement aux  $NN_d^h$  noeuds où sont définis les directeurs :

$$\forall p \in [1, NN_d^h] , \quad \underline{G}[\underline{d}_i](N_p) = \underline{0} \quad (3.11)$$

De telle sorte que l'espace des configurations admissibles  $\tilde{K}^{ort}$  est remplacé par la variété  $\tilde{K}^{rel}$  contenant les déformées vérifiant la condition d'orthonormalité relaxée :

$$\tilde{K}^{rel} = \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K} \text{ tels que } \forall p \in [1, NN_d^h] , \quad \underline{G}[\underline{d}_i](N_p) = \underline{0} \right\}$$

Pour toute configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}^{rel}$ , on définit l'espace tangent  $d\tilde{K}^{rel}$  :

$$d\tilde{K}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in \tilde{K}_0 \text{ tels que } \forall p \in [1, NN_d^h], \forall i, j = 1, 2, 3, \right. \\ \left. \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) = \underline{0} \right\}$$

### Espaces fonctionnels discrets

Comme cela est fait de manière classique dans la méthode des éléments finis, les composantes des inconnues (dans ce cas les déplacements  $\underline{\delta r}$  et les directeurs  $\underline{d}_i$ ) sont approchées par des fonctions

polynomiales par élément à partir de leurs valeurs nodales. L'espace d'approximation des déplacements  $\underline{\delta r}$  est noté  $\tilde{\mathcal{V}}_h$ , alors que les directeurs discrétisés appartiennent à l'espace noté  $\tilde{\mathcal{W}}_h$ . Par exemple, pour le choix d'éléments finis présenté sur la figure 3.4, qui sont des quadrilatères d'ordre 2 pour les déplacements et des quadrilatères d'ordre 1 pour les directeurs, ces espaces sont alors définis par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{V}}_h &= \left\{ \underline{u} \in H(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], \quad u_{|E_e}^i \in Q_2 \right\} \\ \tilde{\mathcal{W}}_h &= \left\{ \underline{d} \in H(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], \quad d_{|E_e}^i \in Q_1 \right\}\end{aligned}$$

On définit les espaces de configurations discrètes vérifiant les conditions aux limites à partir de ces espaces d'approximation par :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{K}}_h &= \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{\mathcal{V}}_h \times \tilde{\mathcal{W}}_h^3 \cap \mathcal{C}\mathcal{L} \right\} \\ \tilde{\mathcal{K}}_h^0 &= \left\{ (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{\mathcal{V}}_h \times \tilde{\mathcal{W}}_h^3 \cap \mathcal{C}\mathcal{L}_0 \right\}\end{aligned}$$

L'espace des déformations discrètes admissibles est quant à lui défini par la variété fermée

$$\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel} = \tilde{\mathcal{K}}_h \cap \tilde{\mathcal{K}}^{rel}$$

Comme dans le cas continu, pour toute configuration discrète  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}$ , on définit l'espace tangent  $d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}$  dans lequel seront recherchées les variations discrètes :

$$d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \tilde{\mathcal{K}}_h^0 \cap d\tilde{\mathcal{K}}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i)$$

De la même manière que ce qui a été fait dans la section 2.4 pour le sous espace  $d\tilde{\mathcal{K}}_h^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i)$ , on pourrait démontrer que ce sous-espace vectoriel s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) &= \left\{ (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in \tilde{\mathcal{K}}_h^0 \text{ tels que } \exists (\underline{\omega}_p) \in \mathbb{R}^{3*NN_d^h}, \right. \\ &\quad \left. \forall p \in [1; NN_d^h], \quad \forall i = 1, 2, 3, \quad \underline{\delta d}_i(N_p) = \underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i(N_p) \right\}\end{aligned}\tag{3.12}$$

*Remarque* : Les vecteurs  $\underline{\omega}_p \in \mathbb{R}^3$  sont uniquement définis ponctuellement aux noeuds, et ne sont jamais interpolés. Ainsi, les problèmes tangents discrets seront écrits en fonction des variations des inconnues  $(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i)$ , et non en fonction des vecteurs de rotation  $\underline{\omega}$  comme on l'avait fait dans la section 2.5.

### Problème discret non linéaire

Le problème continu Pb3.2.1 est alors approché par le problème discret :

#### Pb 3.3.1 Problème non linéaire discrétisé

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \lambda_{ij}^p) \in \tilde{\mathcal{K}}_h \times \mathbb{R}^{3*3*NN_d^h}$  tel que

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\epsilon}^3 \frac{\partial E_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) &+ \tilde{\epsilon} \iint_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}} \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha \\ &+ \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) = F(\hat{\underline{r}}) \quad \forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \in \tilde{\mathcal{K}}_h^0 \\ \forall p \in [1; NN_d^h], \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \quad \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) &= \delta_{ij} \end{aligned} \right.$$

Ce système d'équations est non linéaire, et pourrait être résolu par une méthode itérative de Newton projetée, introduite au chapitre 2 et détaillée dans le chapitre 4.

*Remarque* : Les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}^p$  sont uniquement des valeurs ponctuelles. Ainsi, on ne fait pas correspondre d'espace discret à l'espace continu des multiplicateurs  $\mathcal{R}_{sym}^{33}$  et les  $\lambda_{ij}^p$  ne sont pas interpolés.

### 3.3.2 Problème discret linéarisé

Pour simplifier cette étude formelle, nous allons faire l'hypothèse de petites déformations autour d'un état précontraint  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}_h^{rel}$  et  $(\lambda_{ij}^p) \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$ . Cela nous autorise à linéariser le problème et on se ramène à la résolution du problème tangent :

Trouver  $(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in \tilde{K}_h^0$  et  $\delta \lambda_{ij}^p \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$  tels que,  $\forall (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \in \tilde{K}_h^0$ , on ait

$$\begin{aligned}
& \tilde{\epsilon}^3 \left[ \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) + \frac{\partial^2 E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)^2}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \right] \cdot (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \\
& + \tilde{\epsilon} \int_{\tilde{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha \\
& + \tilde{\epsilon} \int_{\tilde{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{\delta d}_i + \underline{\delta r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha \\
& + \tilde{\epsilon} \int_{\tilde{P}} (\underline{\delta r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\delta d}_i) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha \\
& + \sum_{p=1}^{NN_d^h} (\lambda_{ij}^p + \delta \lambda_{ij}^p) \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) \\
& + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) \\
& = F(\hat{\underline{r}})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\forall p \in [1; NN_d^h], \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \quad \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) = 0 \tag{3.14}$$

Dans ce problème, les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}^p$  sont donnés par l'expression 3.9. Nous supposons ici que la rigidité géométrique est très petite pour la configuration considérée (hypothèse valable uniquement dans le cas non-inhibé) :

$$K_{ii}^0(\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{0i}) = O(\epsilon^2), \tag{3.15}$$

ce qui permet d'adimensionner les multiplicateurs sous la forme

$$\lambda_{ij}^p = \tilde{\epsilon}^3 \tilde{\lambda}_{ij}^p \tag{3.16}$$

Par ailleurs, l'équation 3.14 signifie que l'incrément  $(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i)$  appartient à l'espace tangent  $d\tilde{K}^{rel} \cap \tilde{K}_h^0$ . En réduisant l'espace des fonctions tests à  $d\tilde{K}^{rel} \cap \tilde{K}_h^0$ , ce problème linéaire s'écrit :

#### Pb 3.3.2 Problème linéaire discret

Trouver  $\underline{U}_h^\epsilon = (\underline{\delta r}_h^\epsilon, \underline{\delta d}_{hi}^\epsilon) \in d\tilde{K}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cap \tilde{K}_h^0$  tel que

$$\tilde{\epsilon}^3 A(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) + \tilde{\epsilon} A_{mb}(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) = F^\epsilon(\hat{\underline{U}}) \quad \forall \hat{\underline{U}} = (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \in d\tilde{K}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cap \tilde{K}_h^0 \tag{3.17}$$

sous la notation

$$\begin{aligned}
A : \quad \tilde{K}^0 \times \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i), (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) &\longrightarrow (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \cdot \frac{\partial^2 E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)^2} \cdot (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) \\
&+ \sum_{p=1}^{NN_d^h} \tilde{\lambda}_{ij}^p \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
A_{mb} : \quad \tilde{K}^0 \times \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i), (\hat{\underline{r}}, \hat{\underline{d}}_i) &\longrightarrow \int_{\tilde{P}} (\underline{\delta r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\delta d}_i) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) \\
&+ (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{\underline{r}}' \cdot \underline{\delta d}_i + \underline{\delta r}' \cdot \hat{\underline{d}}_i) d\xi_\alpha
\end{aligned} \tag{3.19}$$



$$\begin{aligned}
F^\varepsilon : \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\hat{r}, \hat{d}_i) &\longmapsto F(\hat{r}) - \tilde{\varepsilon}^3 \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) \\
&\quad - \tilde{\varepsilon} \int_{\tilde{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - \nu_{oi}) K_{ii}^0 (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Si on suppose que la configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i)$  appartient à la variété  $\tilde{K}^{ort}$ , alors le problème Pb3.3.2 est une approximation du problème linéarisé continu :

**Pb 3.3.3 Problème linéaire continu**

Trouver  $\underline{U}^\varepsilon = (\underline{\delta r}^\varepsilon, \underline{\delta d}_i^\varepsilon) \in d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i)$  tel que

$$\tilde{\varepsilon}^3 A(\underline{U}^\varepsilon, \hat{U}) + \tilde{\varepsilon} A_{mb}(\underline{U}^\varepsilon, \hat{U}) = F^\varepsilon(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} = (\hat{r}, \hat{d}_i) \in d\tilde{K}^{ort} \tag{3.21}$$

Cette approximation est non conforme en général : si la configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i)$  n'est pas plane, l'espace  $d\tilde{K}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cap \tilde{K}_h^0$  n'est pas inclus dans  $d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i)$ . Mais dans le cas d'une linéarisation autour d'une configuration plane, on peut vérifier que d'après 3.12, on a en tout point

$$\begin{aligned}
\forall (\xi_1, \xi_2) \in \tilde{P}, \quad \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{p=1}^{NN_d^h} \varphi_p(\xi_1, \xi_2) \underline{\delta d}_i(N_p) \\
&= \sum_{p=1}^{NN_d^h} \varphi_p(\xi_1, \xi_2) [\underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i] \\
&= \left[ \sum_{p=1}^{NN_d^h} \varphi_p(\xi_1, \xi_2) \underline{\omega}_p \right] \wedge \underline{d}_i \\
&= \underline{\omega}(\xi_1, \xi_2) \wedge \underline{d}_i
\end{aligned}$$

et que donc l'espace discret  $d\tilde{K}^{rel}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cap \tilde{K}_h^0$  est inclus dans  $d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i)$  dans ce cas particulier.

Les problèmes linéaires 3.3.2 et 3.3.3 sont dépendants du petit paramètre  $\tilde{\varepsilon}$ . De manière comparable au cas non linéaire étudié dans la sous section 3.2.2, leur comportement asymptotique dépend de la forme du sous espace suivant :

$$d\tilde{K}_{fl}(\underline{r}, \underline{d}_i) = \{\underline{U} \in d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i) \text{ tel que } A_{mb}(\underline{U}, \underline{U}) = 0\}$$

Cet espace s'écrit de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned}
d\tilde{K}_{fl}(\underline{r}, \underline{d}_i) &= \{(\hat{r}, \hat{d}_i) \in d\tilde{K}^{ort}(\underline{r}, \underline{d}_i) \text{ tel que} \\
&\quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in \tilde{P}, \quad \hat{r}'(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) + \underline{r}'(\xi_1, \xi_2) \cdot \hat{d}_i(\xi_1, \xi_2) = 0\}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que pour une configuration  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}_{fl}$ , l'espace  $d\tilde{K}_{fl}(\underline{r}, \underline{d}_i)$  représente l'espace tangent à la sous variété  $\tilde{K}_{fl}$ . Cette remarque va nous permettre de mieux comprendre le lien entre les problèmes non linéaires limites décrits dans la sous section 3.2.2 et le comportement des problèmes linéarisés étudiés ici.

### 3.3.3 Problème linéarisé autour d'une configuration de référence plane

On peut expliciter  $A(\cdot, \cdot)$  et vérifier sa coercivité quand on linéarise autour d'une configuration plane et que l'on suppose que le terme de couplage a un comportement adéquat en flexion.

Pour ce faire, on commence par rappeler qu'après adimensionnement, l'énergie de flexion introduite au chapitre 2 pouvait s'écrire sous la forme augmentée :

$$\begin{aligned}
w_{fl}^0 = & \frac{1}{2} \frac{I}{e L_1^2} \left[ \left( \underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_2{}^{0'} \cdot \underline{d}_3^0 \right)^2 + \left( \underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_3{}^{0'} \cdot \underline{d}_2^0 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{4} \frac{I}{e L_1^2} \left[ \left( \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_1{}^{0'} \cdot \underline{d}_3^0 \right)^2 + \left( \underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_2{}^{0'} \cdot \underline{d}_1^0 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{4} \frac{I}{e L_1^2} \left[ \left( \underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_1{}^{0'} \cdot \underline{d}_2^0 \right)^2 + \left( \underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_3{}^{0'} \cdot \underline{d}_1^0 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{I}{e L_1^2} \left[ \left( \underline{d}_{1,1} \cdot \underline{d}_1 \right)^2 + \left( \underline{d}_{2,1} \cdot \underline{d}_2 \right)^2 + \left( \underline{d}_{3,1} \cdot \underline{d}_3 \right)^2 \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{I}{e L_1^2} \left[ \left( \underline{d}_{1,2} \cdot \underline{d}_1 \right)^2 + \left( \underline{d}_{2,2} \cdot \underline{d}_2 \right)^2 + \left( \underline{d}_{3,2} \cdot \underline{d}_3 \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

que l'on peut encore écrire sous la forme

$$w_{fl}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}^1 \left( \underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_j \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_i a_{ii}^2 \left( \underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i \right)^2$$

où tous les coefficients  $a_{ij}^1$  sont strictement positifs. La dérivée seconde autour d'une configuration plane donne :

$$\underline{\delta d}_i \cdot \frac{\partial^2 w_{fl}^0}{\partial \underline{d}_i^2} \cdot \underline{\hat{d}}_i = \sum_{i,j} a_{ij}^1 \left( \underline{\delta d}_{i,1} \cdot \underline{d}_j \right) \left( \underline{\hat{d}}_{i,1} \cdot \underline{d}_j \right) + \sum_i a_{ii}^2 \left( \underline{\delta d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i \right) \left( \underline{\hat{d}}_{i,2} \cdot \underline{d}_i \right)$$

On sait aussi que le terme de cisaillement de gomme peut s'écrire sous la forme linéarisée :

$$\underline{\delta r} \cdot \frac{\partial^2 w_{inc}^0}{\partial \underline{r}^2} \cdot \underline{\hat{r}} = \frac{1}{4} \left( \underline{\nabla \delta r} + \underline{\nabla \delta r}^T \right) : \underline{\underline{K}}_{inc}^0 : \left( \underline{\nabla \hat{r}} + \underline{\nabla \hat{r}}^T \right)$$

où  $\underline{\underline{K}}_{inc}^0 = \frac{\partial^2 w_{inc}^0}{\partial \underline{e}^2}$  est le tenseur d'élasticité, supposé défini positif.

Enfin, on peut supposer que le terme de couplage dans l'épaisseur va contrôler partiellement la flexion transverse sous la forme d'une somme à coefficients positifs :

$$w_{coupl}^0 = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \left( \underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_j \right)^2$$

qui se linéarise en

$$\underline{\delta d}_i \cdot \frac{\partial^2 w_{coupl}^0}{\partial \underline{d}_i^2} \cdot \underline{\hat{d}}_i = \sum_{i \neq j} a_{ij}^2 \left( \underline{\delta d}_{i,2} \cdot \underline{d}_j \right) \left( \underline{\hat{d}}_{i,2} \cdot \underline{d}_j \right)$$

Au final, la forme bilinéaire  $A(.,.)$  s'écrit alors :

$$A\left(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i\right), \left(\underline{\hat{r}}, \underline{\hat{d}}_i\right) = \sum_{\alpha, i, j} a_{ij}^\alpha \left( \underline{\delta d}_{i,\alpha} \cdot \underline{d}_j \right) \left( \underline{\hat{d}}_{i,\alpha} \cdot \underline{d}_j \right) + \frac{1}{4} \left( \underline{\nabla \delta r} + \underline{\nabla \delta r}^T \right) : \underline{\underline{K}}_{inc}^0 : \left( \underline{\nabla \hat{r}} + \underline{\nabla \hat{r}}^T \right)$$

Elle est clairement continue et coercive sur tout l'espace  $\tilde{K}^0$  dès que les déplacements sont contrôlés sur une partie de la frontière de  $\bar{P}$ .

On note alors respectivement  $\|A\| > 0$  et  $\alpha > 0$  les constantes de continuité et de coercivité de  $A(.,.)$ , définies par les relations :

$$\forall (\underline{U}, \underline{\hat{U}}) \in \tilde{K}^0 \times \tilde{K}^0, \quad |A(\underline{U}, \underline{\hat{U}})| \leq \|A\| \|\underline{U}\|_{\tilde{K}} \|\underline{\hat{U}}\|_{\tilde{K}} \quad (3.22)$$

$$\forall \underline{U} \in \tilde{K}^0, \quad A(\underline{U}, \underline{U}) \geq \alpha \|\underline{U}\|^2 \quad (3.23)$$

Par contre, la forme bilinéaire  $A_{mb}(\cdot, \cdot)$  n'est pas coercive sur l'espace  $\tilde{K}^0$ . Les seules informations dont nous disposons sont sa continuité et sa positivité :

$$\forall (\underline{U}, \hat{U}) \in \tilde{K}^0 \times \tilde{K}^0, \quad |A_{mb}(\underline{U}, \hat{U})| \leq \|A_{mb}\| \|\underline{U}\|_{\tilde{K}} \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \quad (3.24)$$

$$\forall \underline{U} \in \tilde{K}^0, \quad A_{mb}(\underline{U}, \underline{U}) \geq 0 \quad (3.25)$$

L'objectif de la suite de cette section est d'étudier l'erreur commise en approchant le problème Pb3.3.3 par le problème discret Pb3.3.2, en particulier lorsque le paramètre  $\tilde{\epsilon}$  tend vers 0 pour les problèmes à flexion non-inhibée décrits dans la section 3.2.

### 3.3.4 Convergence sur un problème de nappe non inhibée

Supposons que l'espace  $d\tilde{K}_{fl}(r, \underline{d}_i)$  contient au moins un élément non nul :

$$d\tilde{K}_{fl}(r, \underline{d}_i) \neq \{0\}$$

Cette situation pourra en particulier être rencontrée lorsque la configuration  $(r, \underline{d}_i)$  appartient à la variété  $\tilde{K}_{fl}$  non nulle, lorsque le problème non linéaire est à flexion non inhibée, de la forme du problème Pb3.2.4. Un exemple a été représenté sur la figure 3.2.

Comme cela a été fait pour les problèmes non linéaires à flexion non inhibée dans la sous section 3.2.2, on va supposer que le chargement est de la forme : (cf (Sanchez-Palencia, 1989a))

$$F^\epsilon(\hat{U}) = \tilde{\epsilon}^3 F^0(\hat{U})$$

où  $F^0$  est une forme linéaire indépendante de  $\tilde{\epsilon}$ .

Pour illustrer notre propos, on va supposer que l'on a pu construire notre discrétisation par éléments finis de manière à garantir l'inclusion ;

$$d\tilde{K}_h^{rel} = d\tilde{K}^{rel} \cap \tilde{K}_h^0 \subset d\tilde{K}^{ort} \quad (3.26)$$

Le problème général 3.3.3 se ramène alors au problème contraint :

#### Pb 3.3.4 Problème linéaire continu avec flexion non inhibée

Trouver  $\underline{U}^\epsilon \in d\tilde{K}^{ort}$  tel que

$$A(\underline{U}^\epsilon, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}^\epsilon, \hat{U}) = F^0(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} \in d\tilde{K}^{ort} \quad (3.27)$$

La discrétisation de ce problème par la méthode des éléments finis s'écrit alors :

#### Pb 3.3.5 Problème linéaire discret avec flexion non inhibée

Trouver  $\underline{U}_h^\epsilon \in d\tilde{K}_h^{rel}$  tel que

$$A(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{U}) = F^0(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel} \quad (3.28)$$

On peut observer que lorsque le paramètre  $\tilde{\epsilon}$  est très petit, le problème Pb3.3.4 s'interprète comme la pénalisation du problème sous contrainte suivant : (voir dans le cas des coques linéaires : (Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia, 1992) ou (Chenais and Paumier, 1994))

Trouver  $\underline{U}^0 \in d\tilde{K}^{ort}$  tel que

$$A(\underline{U}^0, \hat{U}) = F^0(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} \in d\tilde{K}^{ort}$$

sous la contrainte imposée par pénalisation :

$$A_{mb}(\underline{U}^0, \underline{U}^0) = 0 \quad (3.29)$$

Ce problème limite peut aussi s'écrire sur le sous espace  $d\tilde{K}_{fl}$  :

Trouver  $\underline{U}^0 \in d\tilde{K}_{fl}$  tel que

$$A(\underline{U}^0, \hat{U}) = F^0(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} \in d\tilde{K}_{fl}$$

Ce problème limite est bien posé puisqu'il n'est que la restriction du problème elliptique 3.3.4 à un sous espace.

On va montrer dans ce qui suit que la méthode des éléments finis standard n'est pas adaptée à la résolution d'un tel problème lorsque l'épaisseur devient très petite. Plus précisément, l'estimation d'erreur entre la solution discrète  $\underline{U}_h^\epsilon$  et la solution continue  $\underline{U}^\epsilon$  explose lorsque le paramètre  $\tilde{\epsilon}$  diminue, comme le montre le théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** *Sur le problème avec flexion non inhibée Pb3.3.4, la convergence des éléments finis classiques n'est pas uniforme selon l'épaisseur.*

*Plus précisément : sous les hypothèses 3.22-3.25 et 3.26, si on note  $\underline{U}^{\tilde{\epsilon}}$  et  $\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}}$  les solutions des problèmes Pb3.3.4 et Pb3.3.5, alors l'estimation classique dégénère en*

$$\exists C > 0, \forall \tilde{\epsilon} > 0, \left\| \underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} \right\|_{\tilde{K}} \leq C \tilde{\epsilon}^{-2} \inf_{\underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel}} \left\| \underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}}$$

Démonstration :

Cette démonstration est classique.

Etant donné que  $A(.,.) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(.,.)$  est coercive sur  $\tilde{K}^0$  et que  $d\tilde{K}_h^{rel}$  et  $d\tilde{K}^{ort}$  sont des sous-espaces fermés de  $\tilde{K}^0$  par construction, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram pour établir l'existence et l'unicité des solutions des problèmes Pb3.3.4 et Pb3.3.5, notées respectivement  $\underline{U}^{\tilde{\epsilon}}$  et  $\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}}$ .

D'après 3.27 et 3.28, on a alors :

$$\forall \hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}, \quad A(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}}, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}}, \hat{U}) = A(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}}, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}}, \hat{U})$$

On en déduit  $\forall \hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}, \forall \underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel},$

$$A(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \hat{U}) = A(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \hat{U})$$

En particulier, pour  $\hat{U} = \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel}$ , on obtient  $\forall \underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel},$

$$\begin{aligned} & A(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*) \\ &= A(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*, \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*) \end{aligned} \quad (3.30)$$

On utilise alors la coercivité de  $A(.,.)$  et la positivité de  $A_{mb}(.,.)$  sur  $d\tilde{K}^{ort}$  pour déduire :

$$\forall \hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}, \quad A(\hat{U}, \hat{U}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\hat{U}, \hat{U}) \geq \alpha \|\hat{U}\|_{\tilde{K}}^2$$

Par ailleurs, la continuité de  $A(\cdot, \cdot)$  et  $A_{mb}(\cdot, \cdot)$  nous donne :

$$\begin{aligned} \forall \hat{U}, \hat{V} \in d\tilde{K}_h^{rel}, \quad A(\hat{U}, \hat{V}) + \tilde{\epsilon}^{-2} A_{mb}(\hat{U}, \hat{V}) &\leq \|A\| \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \|\hat{V}\|_{\tilde{K}} + \tilde{\epsilon}^{-2} \|A_{mb}\| \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \|\hat{V}\|_{\tilde{K}} \\ &\leq \tilde{\epsilon}^{-2} (\|A\| + \|A_{mb}\|) \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \|\hat{V}\|_{\tilde{K}} \quad (\text{pour } \epsilon < 1) \end{aligned}$$

Ces deux inégalités rassemblées nous donnent après report dans 3.30 :

$$\alpha \left\| \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}}^2 \leq \tilde{\epsilon}^{-2} (\|A\| + \|A_{mb}\|) \|\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}$$

ou encore après division par  $\|\underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}$  :

$$\alpha \left\| \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} \leq \tilde{\epsilon}^{-2} (\|A\| + \|A_{mb}\|) \|\underline{U}^{\tilde{\epsilon}} - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}$$

On en déduit le résultat du théorème par inégalité triangulaire. ■

Cette dégénérescence s'observe expérimentalement et se retrouvera sur certains essais numériques du chapitre 4.

La convergence non uniforme d'éléments finis standards peut s'expliquer facilement : A la limite, la solution du problème continu va converger vers la solution du problème limite :

Trouver  $\underline{U}^0 \in d\tilde{K}_{fl}^{ort}$  tel que

$$A(\underline{U}^0, \hat{U}) = F^0(\hat{U}) \quad \forall \hat{U} \in d\tilde{K}_{fl}^{ort} \quad (3.31)$$

Pour une taille de maille  $h$  fixée, même si l'espace d'approximation  $d\tilde{K}_h^{rel}$  approche très bien  $d\tilde{K}^{ort}$ , rien ne nous garantit qu'il est assez riche dans  $d\tilde{K}^{ort}$  pour pouvoir satisfaire la contrainte 3.29 de manière précise. Dans le pire des cas, il est tout à fait possible de rencontrer la situation

$$d\tilde{K}_h^{rel} \cap d\tilde{K}_{fl}^{ort} = \underline{0}$$

auquel cas la discrétisation fournira alors une solution approchée nulle à la limite où  $\epsilon$  tend vers 0 :

$$\lim_{\tilde{\epsilon} \rightarrow 0} \underline{U}_h^{\tilde{\epsilon}} = \underline{0} \neq \underline{U}^0$$

Ce phénomène purement numérique est appelé *verrouillage numérique*.

En pratique, on s'intéresse rarement au cas limite (l'épaisseur de la nappe a une valeur finie). Donc la solution calculée n'est jamais exactement nulle, et par ailleurs la théorie des éléments finis nous garantit que, pour une épaisseur donnée, on peut toujours calculer une solution suffisamment précise en utilisant un pas de discrétisation suffisamment petit. Mais le problème est qu'il faut utiliser d'autant plus d'éléments que l'épaisseur est faible, alors qu'on aimerait disposer d'un outil d'approximation dont la précision est indépendante de l'épaisseur.

Par ailleurs, nous avons vu qu'il existe des liens entre les problèmes limites non linéaires décrits dans la sous-section 3.2.2 et les problèmes limites linéaires observés ici. Cependant, ceci n'est pas généralisable : si le problème de nappe non linéaire est résolu par une méthode itérative, les problèmes tangents traités à chaque itération n'appartiennent pas nécessairement tous à la même catégorie. Par conséquent, le caractère non linéaire de notre problème impose à la méthode numérique utilisée de fonctionner à la fois pour des problèmes où la flexion est inhibée ou non inhibée (plus de détails dans (Chapelle and Bathe, 2003)).

Les sections 3.4 et 3.5 vont décrire la construction d'une méthode numérique permettant de contourner le problème de verrouillage numérique sur des problèmes à flexion non inhibée. Il restera ensuite à vérifier que cette méthode reste adaptée à des problèmes à flexion pure inhibée, ce qui sera fait par des tests numériques dans le chapitre 4.

## ■ 3.4 Formulation mixte non linéaire

### 3.4.1 Problème mixte continu

L'objectif de cette section est de trouver une méthode d'approximation du problème non linéaire Pb3.2.1, pour laquelle le problème tangent n'est pas sujet au phénomène de verrouillage numérique dans le cas de flexion non inhibée. Pour cela, une solution classique consiste à utiliser des *méthodes mixtes*, dont les fondements ont été établis par (Babuska, 1973) et (Brezzi, 1974). Ces méthodes consistent à introduire une inconnue auxiliaire, qu'on peut interpréter comme le multiplicateur de Lagrange de la contrainte 3.10 sur les déplacements.

Rappelons la forme du problème non linéaire à flexion non inhibée Pb3.2.4, pour lequel des phénomènes de verrouillage numérique peuvent apparaître :

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \tilde{e}^{-2} \iint_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\ \quad + \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j](\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

Dans cette expression, contrairement aux formulations asymptotiques sur des structures minces, le terme d'énergie  $E_0$  contrôle toutes les déformations grâce à l'énergie de gomme supposée en  $O(\tilde{e}^3)$ . Cependant, rien ne nous empêche de nous inspirer de l'écriture utilisée pour le cas des coques linéaires dans (Arnold and Brezzi, 1997) : on introduit un paramètre  $c_0 > 0$  et on note  $\tilde{e}^2 = \frac{\tilde{e}^2}{1 - c_0 \tilde{e}^2}$ . Le problème peut alors s'écrire de manière équivalente sous la forme :

#### Pb 3.4.1 Problème non linéaire en flexion dominante

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in \tilde{K} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \tilde{e}^{-2} \iint_{\bar{P}} (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\ \quad + \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) [\underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j](\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

avec

$$\tilde{E}_0(\underline{r}, \underline{d}_i) = E_0(\underline{r}, \underline{d}_i) + c_0 a_{mb}^0(\underline{v}(\underline{r}, \underline{d}_i), \underline{v}(\underline{r}, \underline{d}_i)) \quad (3.32)$$

La dérivée seconde de cette nouvelle énergie sera alors bien coercive sur tout l'espace  $\tilde{K}_0$ , d'après 3.23 et 3.25.

Afin de contourner les risques de verrouillage numérique lorsque le problème de nappe est dominé en flexion, on introduit des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{p}$  dans le problème non linéaire de départ :

$$\forall i = 1, 2, 3, \quad p_i = \epsilon^{-2} K_{ii}^0 (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) \quad (3.33)$$

Ces multiplicateurs évoluent dans l'espace  $\mathcal{Q}$  défini par

$$\mathcal{Q} = \left\{ \underline{p} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tel que } p_i \in L^2(\bar{P}) \right\}$$

On peut observer que  $\underline{p}$  correspond à une forme adimensionnelle de l'effort tranchant. En récrivant 3.33 sous forme variationnelle, on peut alors transformer le problème Pb3.4.1 pour obtenir le problème mixte non linéaire :

### Pb 3.4.2 Problème mixte non linéaire

Trouver  $\left( (\underline{r}, \underline{d}_i); \underline{p}; \underline{\lambda} \right) \in \tilde{K} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} (\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \iint_{\bar{P}} p_i (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\ \quad + \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left[ \underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j \right] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} f \cdot \hat{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_0 \\ \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) d\xi_\alpha - \epsilon^2 \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i K_{ii}^{-1} p_i d\xi_\alpha = 0 \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{Q} \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

La méthode numérique consiste alors à discrétiser le problème Pb3.4.2 entier, y compris les multiplicateurs  $\underline{p}$ , plutôt que le problème en déplacements Pb3.4.1. On va décrire dans ce qui suit les espaces d'approximations permettant d'assurer une convergence indépendante de l'épaisseur, au moins dans le cas particulier du problème linéarisé autour d'une configuration plane.

## 3.4.2 Eléments finis mixtes : cas général

### Discrétisation du problème

Comme cela a été expliqué dans la section 3.4.1, le problème Pb3.4.2 est discrétisé par des éléments finis permettant d'interpoler à la fois les inconnues primales  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}$  et les inconnues auxiliaires  $\underline{p} \in \mathcal{Q}$ .

Les notations utilisées dans cette partie seront les mêmes que pour la discrétisation du problème primal dans la sous-section 3.3.1. On suppose que la géométrie de la surface  $\mathcal{S}_m$  est suffisamment régulière pour pouvoir être décomposée en  $NE_h$  éléments finis quadrangulaires réguliers :

$$\mathcal{S}_m = \bigcup_{e=1}^{NE_h} E_e^h$$

où  $h$  représente le diamètre maximum d'un élément.

Les interpolations des trois types d'inconnues  $\underline{\delta r}$ ,  $\underline{d}_i$  et  $\underline{p}$  sont indépendantes. Ainsi dans chaque élément fini, le nombre de noeuds où sont calculés chacun de ces champs est différent, comme le montre la figure 3.5. On prend comme notations :

–  $NN_x^h$  : nombre de noeuds interpolant les déplacements  $\underline{\delta r}$ , notés  $(M_p)_{p \in [1; NN_x^h]}$  ;

- $NN_d^h$  : nombre de noeuds interpolant les directeurs  $\underline{d}_i$ , notés  $(N_p)_{p \in [1; NN_d^h]}$  ;
  - $NN_p^h$  : nombre de noeuds interpolant les efforts  $\underline{p}$ , notés  $(O_p)_{p \in [1; NN_p^h]}$ .
- Par ailleurs, on note  $NF_h$  le nombre d'arrêtes du maillage, appelées  $(F_k^h)_{k=1, NF_h}$ .

Comme cela était déjà le cas dans le problème primal, la condition d'orthonormalité des directeurs doit être relaxée pour être imposée seulement aux  $NN_d^h$  noeuds interpolant les directeurs :

$$\forall p \in [1, NN_d^h] \quad , \quad \underline{G}[\underline{d}_i](N_p) = \underline{0}$$

Les espaces des configurations continus et discrétisés respectant cette contrainte sont notés de la même manière que dans la sous section 3.3.1. En plus de ceux-ci, on note  $\mathcal{Q}_h$  l'espace des variables auxiliaires  $\underline{p}$  discrètes. Par exemple, le choix d'éléments finis représenté sur la figure 3.5 correspond à l'espace

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ \underline{p} \in L^2(\bar{P}) \quad , \quad \forall e \in [1; NE_h] \quad , \quad p_{|E_e^h}^i \in P_0 \right\}$$

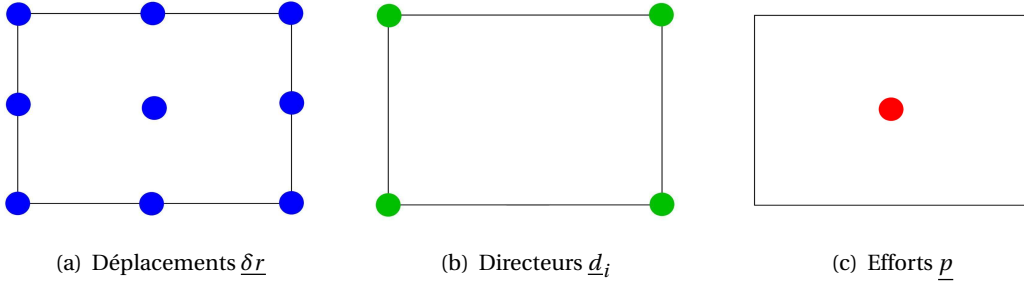


FIG. 3.5: Exemple de degrés de liberté pour les inconnues du problème mixte

*Remarque* : Comme nous l'avons déjà précisé pour le problème primal discrétisé en non linéaire, les vecteurs de rotation  $\underline{\omega}_p \in \mathbb{R}^3$  et les multiplicateurs  $\lambda_{ij}^p \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sont uniquement définis ponctuellement aux noeuds, et ne sont jamais interpolés.

Avec ces notations, le problème mixte non linéaire est approché par

### Pb 3.4.3 Problème discret mixte non linéaire

Trouver  $(\underline{r}, \underline{d}_i; \underline{p}; \underline{\lambda}) \in \tilde{K}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathbb{R}^{3 \times 3 * NN_d^h}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \iint_{\bar{P}} p_i (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \hat{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p [\underline{d}_i \cdot \hat{d}_j + \hat{d}_i \cdot \underline{d}_j] (N_p) \\ \qquad \qquad \qquad = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in \tilde{K}_h^0 \\ \int \int_{\bar{P}} \hat{p}_i (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) d\xi_\alpha - \epsilon^2 \int \int_{\bar{P}} \hat{p}_i K_{ii}^{-1} p_i d\xi_\alpha = 0 \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{Q}_h \\ \forall p \in [1; NN_d^h] \quad , \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) = \delta_{ij} \end{array} \right.$$

### 3.4.3 Problème linéarisé

Comme pour le problème primal dans la sous section 3.3.2, on se place ici dans le cadre de petites perturbations autour d'un état précontraint  $(\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}^{ort}$  pour simplifier cette étude formelle. On suppose les multiplicateurs  $(\lambda_{ij}^p) \in \mathbb{R}^{6 * NN_d^h}$  et  $\underline{p} \in \mathcal{Q}_h$  connus, calculés à partir des efforts internes. L'hypothèse des petites déformations nous amène à la résolution du problème tangent :



**Pb 3.4.4 Problème discret mixte linéarisé**

Trouver  $((\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i); \underline{p}) \in d\tilde{K}_h \times \mathcal{Q}_h$  tels que,  $\forall (\hat{r}, \hat{d}_i) \in d\tilde{K}_h, \forall \hat{p} \in \mathcal{Q}_h$ , on ait

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) + \frac{\partial^2 \tilde{E}_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)^2}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \right] \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) \\
& + \iint_{\bar{P}} (p_i + \delta p_i) (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\
& + \iint_{\bar{P}} p_i (\hat{r}' \cdot \underline{\delta d}_i + \underline{\delta r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\
& + \sum_{p=1}^{NN_d^h} (\lambda_{ij}^p + \delta \lambda_{ij}^p) (\hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p)) \\
& + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p (\hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p)) \\
& = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} d\xi_\alpha \\
& \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i (\underline{\delta r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\delta d}_i) d\xi_\alpha - \epsilon^2 \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i K_{ii}^{-1} (p_i + \delta p_i) d\xi_\alpha = - \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) d\xi_\alpha \\
& \forall p \in [1; NN_d^h], \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \quad \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) = 0
\end{aligned}$$

Nous supposons que la rigidité géométrique satisfait l'hypothèse 3.15 pour la configuration considérée, ce qui permet d'adimensionner les multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_{ij}^p = \tilde{\epsilon}^3 \tilde{\lambda}_{ij}^p$$

Pour écrire le problème Pb3.4.4 sous forme générique, on introduit les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned}
A : \tilde{K}^0 \times \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i), (\hat{r}, \hat{d}_i) &\longmapsto (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \cdot \frac{\partial^2 E_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)^2} \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) + \iint_{\bar{P}} p_i (\hat{r}' \cdot \underline{\delta d}_i + \underline{\delta r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \\
& + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \tilde{\lambda}_{ij}^p (\hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p)) \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B : \mathcal{Q} \times \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\delta p}, (\hat{r}, \hat{d}_i)) &\longmapsto \iint_{\bar{P}} \delta p_i (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{\delta p}, \hat{p}) &\longmapsto \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i K_{ii}^{-1} \delta p_i d\xi_\alpha \quad (3.36)
\end{aligned}$$

et les formes linéaires :

$$\begin{aligned}
L^\epsilon : \tilde{K}^0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\hat{r}, \hat{d}_i) &\longmapsto \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \hat{r} d\xi_\alpha - \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial(\underline{r}, \underline{d}_i)}(\underline{r}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{r}, \hat{d}_i) - \iint_{\bar{P}} p_i (\hat{r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \hat{d}_i) d\xi_\alpha \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M^\epsilon : \mathcal{Q} &\rightarrow \mathbb{R} \\
\hat{p} &\longmapsto \epsilon^2 \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i K_{ii}^{-1} p_i d\xi_\alpha - \iint_{\bar{P}} \hat{p}_i (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) d\xi_\alpha \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Comme cela a déjà été fait dans la section 3.3, on notera  $\underline{U} = (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) \in d\tilde{K}^{rel}$  et  $\hat{U} = (\hat{r}, \hat{d}_i) \in d\tilde{K}^{rel}$  dans les expressions qui sont indépendantes de notre problème. Le problème mixte Pb3.4.4 peut alors s'écrire sous forme générique :

**Pb 3.4.5 Problème mixte linéaire discret**

Trouver  $(\underline{U}_h^e, \underline{p}_h^e) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  tels que

$$\begin{cases} A(\underline{U}_h^e, \hat{U}) + B(\underline{p}_h^e, \hat{U}) = L^e(\hat{U}) & \forall \hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ B(\hat{p}, \underline{U}_h^e) - \epsilon^2 C(\underline{p}_h^e, \hat{p}) = M^e(\hat{p}) & \forall \hat{p} \in \mathcal{Q}_h \end{cases} \quad (3.39)$$

Ce problème mixte discret est une approximation du problème continu :

**Pb 3.4.6 Problème mixte linéaire continu**

Trouver  $(\underline{U}^e, \underline{p}^e) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}$  tels que

$$\begin{cases} A(\underline{U}^e, \hat{U}) + B(\underline{p}^e, \hat{U}) = L^e(\hat{U}) & \forall \hat{U} \in d\tilde{K}^{ort} \\ B(\hat{p}, \underline{U}^e) - \epsilon^2 C(\underline{p}^e, \hat{p}) = M^e(\hat{p}) & \forall \hat{p} \in \mathcal{Q} \end{cases} \quad (3.40)$$

**3.4.4 Analyse du problème linéarisé**

Dans ce qui suit, on suppose que les trois formes bilinéaires définies par 3.34-3.36 sont continues :

$$\begin{cases} \forall (\underline{U}, \hat{U}) \in d\tilde{K}^{rel} \times d\tilde{K}^{rel}, & |A(\underline{U}, \hat{U})| \leq \|A\| \|\underline{U}\|_{\tilde{K}} \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \\ \forall (\underline{p}, \underline{U}) \in \mathcal{Q} \times d\tilde{K}^{rel}, & |B(\underline{p}, \underline{U})| \leq \|B\| \|q\|_{\mathcal{Q}} \|\underline{u}\|_{\tilde{K}} \\ \forall (\underline{p}, \hat{p}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}, & |C(\underline{p}, \hat{p})| \leq \|C\| \|\underline{p}\|_{\mathcal{Q}} \|\hat{p}\|_{\mathcal{Q}} \end{cases} \quad (3.41)$$

Par ailleurs, on admet que  $A$  et  $C$  sont coercives, ce qui est le cas quand on linéarise autour d'une configuration plane non précontrainte, comme cela a été vu dans la sous-section 3.3.3. Ainsi, il existe deux constantes  $\alpha_A > 0$  et  $\alpha_C > 0$  telles que

$$\begin{cases} \forall \underline{U} \in d\tilde{K}^{rel}, & A(\underline{U}, \underline{U}) \geq \alpha_A \|\underline{u}\|_{\tilde{K}}^2 \\ \forall \underline{p} \in \mathcal{Q}, & C(\underline{p}, \underline{p}) \geq \alpha_C \|\underline{p}\|_{\mathcal{Q}}^2 \end{cases} \quad (3.42)$$

**Théorème 3.4.1** Les problèmes Pb3.4.5 et Pb3.4.6 possèdent chacun une unique solution, respectivement notées  $(\underline{U}_h, \underline{p}_h) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  et  $(\underline{U}, \underline{p}) \in d\tilde{K}^{rel} \times \mathcal{Q}$ .

*Démonstration :*

On introduit la forme bilinéaire :

$$\tilde{A} : \left( (\underline{U}, \underline{p}); (\hat{U}, \hat{p}) \right) \in (\tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{Q})^2 \longmapsto A(\underline{U}, \hat{U}) + B(\underline{p}, \hat{U}) - B(\hat{p}, \underline{U}) + \epsilon^2 C(\underline{p}, \hat{p})$$

Le problème Pb3.4.6 est équivalent à :

Trouver  $(\underline{U}^e, \underline{p}^e) \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{Q}$  tels que

$$\tilde{A}(\underline{U}^e, \underline{p}^e; (\hat{U}, \hat{p})) = L^e(\hat{U}) + M^e(\hat{p}) \quad \forall (\hat{U}, \hat{p}) \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{Q}$$

D'après l'hypothèse 3.42, on peut établir la coercivité de  $\tilde{A}(\cdot, \cdot)$  :

$\forall (\hat{U}, \hat{p}) \in \tilde{\mathcal{V}} \times \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\underline{U}, \underline{p}; (\underline{U}, \underline{p})) &= A(\underline{U}, \underline{U}) + \epsilon^2 C(\underline{p}, \underline{p}) \\ &\geq \alpha_A \|\underline{U}\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}\|_{\mathcal{Q}}^2 \\ &\geq \min(\alpha_A, \epsilon^2 \alpha_C) \|\underline{U}, \underline{p}\|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\|\underline{U}, \underline{p}\| = \sqrt{\|\underline{U}\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 + \|\underline{p}\|_{\mathcal{Q}}^2}$$

Le théorème de Lax-Milgram permet alors de démontrer l'existence et l'unicité de la solution des deux problèmes. ■

### Convergence non uniforme des éléments finis mixtes

L'objectif de la formulation mixte était de construire une méthode d'approximation assurant une convergence uniforme. Nous allons donc réaliser ici une première estimation d'erreur et voir si on peut assurer que celle-ci est indépendante du petit paramètre  $\epsilon$ .

On va faire l'hypothèse simplificatrice de conformité  $d\tilde{K}_h^{rel} \subset d\tilde{K}^{ort}$ . Comme nous l'avons vu précédemment, cette hypothèse est vérifiée dans le cas d'une linéarisation autour d'une configuration plane. Elle est très rarement vérifiée sinon quand on prend des champs  $\underline{\delta d}_i$  polynomiaux par morceaux.

L'approche choisie pour estimer l'erreur nécessite d'introduire la semi-norme sur les multiplicateurs  $\underline{p} \in \mathcal{Q}$  :

$$\|\underline{p}\| = \sup_{\underline{U} \in d\tilde{K}^{ort}} \frac{B(\underline{p}, \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{K}}}$$

On établit alors le théorème de convergence suivant :

#### **Théorème 3.4.2 Convergence non uniforme en $\epsilon$**

Notons  $(\underline{U}^\epsilon, \underline{p}^\epsilon) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}$  et  $(\underline{U}_h^\epsilon, \underline{p}_h^\epsilon) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  les solutions respectives des problèmes Pb3.4.6 et Pb3.4.5. Il existe une constante  $\gamma$  indépendante de  $h$  et  $\epsilon$  telle que :

$$\|(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}_h^\epsilon)\|_{\tilde{K}} + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon\| \leq \gamma \inf_{\substack{\underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ \underline{p}^* \in \mathcal{Q}_h}} (\epsilon^{-1} \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}})$$

#### Démonstration :

On détaille la démonstration classique, que l'on peut trouver par exemple dans (Arnold and Brezzi, 1997).

Puisque  $(\underline{U}^\epsilon, \underline{p}^\epsilon) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}$  est solution de Pb3.4.6 et  $(\underline{U}_h^\epsilon, \underline{p}_h^\epsilon) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  est solution de Pb3.4.5, on a en particulier :

$$\begin{cases} A(\underline{U}^\epsilon, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}^\epsilon, \hat{\underline{U}}) = L^\epsilon(\hat{\underline{U}}) & \forall \hat{\underline{U}} \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}^\epsilon) - \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon, \hat{\underline{p}}) = M^\epsilon(\hat{\underline{p}}) & \forall \hat{\underline{p}} \in \mathcal{Q}_h \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) = L^\epsilon(\hat{\underline{U}}) & \forall \hat{\underline{U}} \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}_h^\epsilon) - \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon, \hat{\underline{p}}) = M^\epsilon(\hat{\underline{p}}) & \forall \hat{\underline{p}} \in \mathcal{Q}_h \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} A(\underline{U}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}_h^\epsilon, \hat{\underline{U}}) = A(\underline{U}^\epsilon, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}^\epsilon, \hat{\underline{U}}) & \forall \hat{\underline{U}} \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}_h^\epsilon) - \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon, \hat{\underline{p}}) = B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}^\epsilon) - \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon, \hat{\underline{p}}) & \forall \hat{\underline{p}} \in \mathcal{Q}_h \end{cases}$$

On en déduit :

$$\forall (\underline{U}^*, \underline{p}^*) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h,$$

$$\begin{cases} A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{\underline{U}}) = A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{\underline{U}}) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{\underline{U}}) & \forall \hat{\underline{U}} \in d\tilde{K}_h^{rel} \\ B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) - \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{\underline{p}}) = B(\hat{\underline{p}}, \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*) - \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{\underline{p}}) & \forall \hat{\underline{p}} \in \mathcal{Q}_h \end{cases}$$

En particulier, en prenant  $\hat{\underline{U}} = \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*$  et  $\hat{\underline{p}} = \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*$ , on obtient :

$$\forall (\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{p}}) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h,$$

$$\begin{cases} A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) = A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) \\ B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) - \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) = B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*) - \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) \end{cases}$$

Si on soustrait la seconde équation à la première, on obtient :

$$\begin{aligned} A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) &= A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) \\ &\quad - B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*) + \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) \end{aligned} \quad (3.43)$$

La coercivité de  $A(.,.)$  et  $C(.,.)$  nous permet d'obtenir l'inégalité :

$$A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) \geq \alpha_A \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2$$

La continuité de  $A(.,.)$ ,  $B(.,.)$  et  $C(.,.)$  nous donne également :

$$\begin{aligned} A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) &\leq \|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \\ | - B(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) | &\leq \|B\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \\ C(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) &\leq \|C\| \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

Alors que par définition de la semi-norme  $\|\cdot\|$ , on a l'inégalité :

$$\begin{aligned} B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) &= \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \frac{B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*)}{\|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}}} \\ &\leq \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \sup_{0 \neq \hat{U} \in d\tilde{\mathcal{K}}^{ort}} \frac{B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U})}{\|\hat{U}\|_{\tilde{\mathcal{K}}}} \\ &\leq \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \end{aligned}$$

On en déduit donc l'inégalité globale :

$$\begin{aligned} \alpha_A \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq \|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \\ &\quad + \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad + \|B\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + \epsilon^2 \|C\| \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \end{aligned} \quad (3.44)$$

On réécrit cette inégalité sous la forme :

$$\begin{aligned} \alpha_A \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} (\|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|) \\ &\quad + \epsilon \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} (\epsilon^{-1} \|B\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} + \epsilon \|C\| \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, 1 * x + 1 * y \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.46)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{\alpha_A} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}} + \epsilon \sqrt{\alpha_C} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right)^2 \leq \alpha_A \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{K}}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 \quad (3.47)$$

Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\forall (x, y), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^2, \lambda x + \mu y \leq (\lambda + \mu) (x + y) \quad (3.48)$$

L'inéquation 3.48 appliquée au membre droit de 3.44 donne : (en supposant  $\epsilon < 1$ )

$$\begin{aligned} & \left\| \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} \left( \|A\| \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\| \right) + \\ & \epsilon \left\| \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \left( \epsilon^{-1} \|B\| \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \|C\| \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \leq C \left( \left\| \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \\ & \quad * \left( \epsilon^{-1} \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\| + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les deux inéquations 3.47 et 3.49 combinées nous donnent alors :

$$\left\| \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \leq C \left( \epsilon^{-1} \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\| + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \quad (3.50)$$

Quels que soient  $(\underline{U}^*, \underline{p}^*) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$ , on déduit de 3.50 par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}_h^\epsilon \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon \right\|_{\mathcal{Q}} & \leq \left( \left\| \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) + \left( \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \\ & \leq C \left( \epsilon^{-1} \left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^* \right\|_{\tilde{K}} + \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\| + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}^* \right\|_{\mathcal{Q}} \right) \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat du théorème :

$$\left\| \underline{U}^\epsilon - \underline{U}_h^\epsilon \right\|_{\tilde{K}} + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon \right\|_{\mathcal{Q}} \leq c \inf_{\hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}, \hat{p} \in \mathcal{Q}_h} \left[ \epsilon^{-1} \left\| \underline{U}^\epsilon - \hat{U} \right\|_{\tilde{K}} + \left\| \underline{p}^\epsilon - \hat{p} \right\| + \epsilon \left\| \underline{p}^\epsilon - \hat{p} \right\|_{\mathcal{Q}} \right]$$

■

Ce théorème n'assure pas la convergence uniforme des éléments finis mixtes pour des espaces de discrétisation quelconques. La coercivité des formes linéaires  $A(.,.)$  et  $C(.,.)$  n'est pas suffisante, car le système variationnel est globalement non elliptique (voir (Chapelle, 1996b)).

On propose dans ce qui suit un choix d'espaces d'approximation, pour lesquels on va essayer de fournir des estimations d'erreurs indépendantes du paramètre  $\epsilon$ .

### Notre choix d'espaces d'approximation

On propose ici un choix d'espaces d'approximation original, récapitulé sur la figure 3.6. Les déplacements  $\underline{\delta r}$  sont choisis sous la forme de fonctions linéaires sur chaque élément, auxquelles on ajoute des "bulles" quadratiques sur chaque arête. Si on note  $\bar{B}_2(I_e^h)$  l'espace des bulles sur les arêtes d'un élément  $I_e^h$ , l'espace des déplacements discrétisés  $\tilde{\mathcal{V}}_h$  s'écrit alors :

$$\tilde{\mathcal{V}}_h = \left\{ \underline{\delta r} \in H(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], \underline{\delta r}|_{I_e^h} \in Q_1 + \bar{B}_2(I_e^h) \right\} \quad (3.51)$$

Les directeurs sont quant à eux égaux à des fonctions linéaires par élément auxquelles sont additionnées des bulles quadratiques centrées sur chaque élément. On définit  $\overset{\circ}{B}_2(I_e^h)$  comme étant l'espace des bulles quadratiques centrées sur l'élément  $I_e^h$ . L'espace des directeurs discrétisés  $\tilde{\mathcal{W}}_h$  vaut alors :

$$\tilde{\mathcal{W}}_h = \left\{ \underline{d} \in H(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], \underline{d}|_{I_e^h} \in Q_1 + \overset{\circ}{B}_2(I_e^h) \right\} \quad (3.52)$$

L'espace  $\tilde{K}_h^0$  est toujours donné par

$$\tilde{K}_h^0 = \left( \tilde{\mathcal{V}}_h \times \tilde{\mathcal{W}}_h^3 \right) \cap \mathcal{L}_0$$

Enfin, les variables auxiliaires  $\underline{p}$  sont prises constantes par morceaux de manière classique, de telle sorte que l'espace  $\mathcal{Q}_h$  est défini par :

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ \underline{p} \in L^2(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], p|_{I_e^h} \in P_0 \right\} \quad (3.53)$$

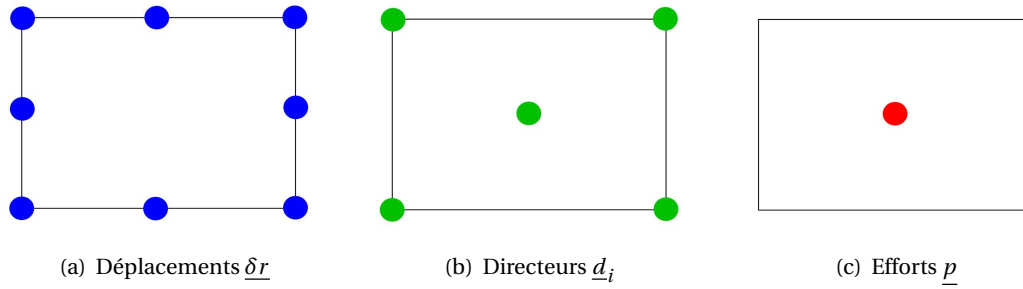


FIG. 3.6: Degrés de liberté minimum pour les inconnues du problème mixte.

*Remarque* : Un autre choix d'approximation est celui donné par la figure 3.7 :

- Les déplacements  $\underline{\delta r}$  sont Q2 sur chaque élément ;
- Les directeurs  $\underline{d}_i$  sont Q2 sur chaque élément ;
- Les efforts  $\underline{p}$  sont pris constants par élément.

Cette interpolation est plus riche que la précédente. Ainsi, si on prouve que la convergence est uniforme pour les espaces représentés sur la figure 3.6, cela impliquera qu'elle l'est aussi pour cette interpolation quadratique.

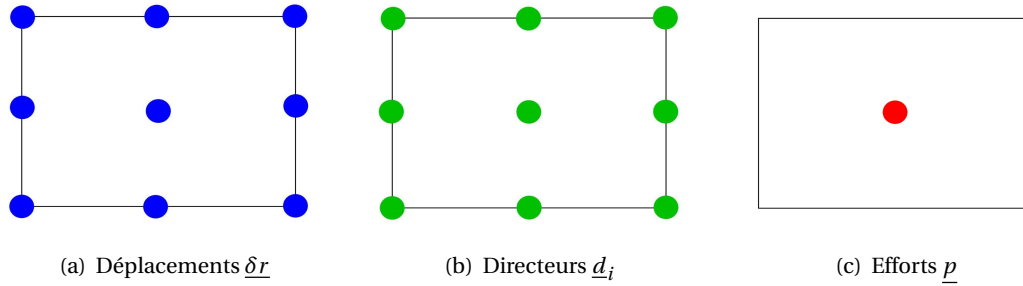


FIG. 3.7: Élément fini Q2 en déplacements et en rotations pour le problème de nappe simplifié.

### 3.4.5 Convergence uniforme : condition inf-sup

On admet ici encore que la condition de coercivité 3.42 sur les formes bilinéaires  $A(.,.)$  et  $C(.,.)$  est satisfaite. Nous avons vu dans la sous-section précédente que cette condition n'est pas suffisante pour assurer la convergence uniforme des éléments mixtes. Nous devons donc y ajouter une hypothèse de stabilité. Une condition de stabilité classique, appelée "*condition inf-sup*", s'écrit alors : (voir (Brezzi and Fortin, 1991) pour plus de détails)

#### **Théorème 3.4.3 Condition inf-sup**

Notons  $(\underline{U}^\epsilon, \underline{p}^\epsilon) \in d\tilde{\mathcal{K}}^{ort} \times \mathcal{Q}$  et  $(\underline{U}_h^\epsilon, \underline{p}_h^\epsilon) \in d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  les solutions respectives des problèmes Pb3.4.6 et Pb3.4.5. Supposons qu'il existe une constante  $\gamma > 0$  indépendante de  $h$  et  $\epsilon$  telle que

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}, \quad \sup_{\underline{U} \in d\tilde{\mathcal{K}}_h^{rel}} \frac{B(\underline{p}; \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{\mathcal{K}}}} \geq \gamma \|\underline{p}\| \quad (3.54)$$

Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et  $\epsilon$  telle que :

$$\|(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}_h^\epsilon)\|_{\tilde{\mathcal{V}}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} \leq C \inf_{\substack{\underline{U}^* \in \tilde{\mathcal{V}}_h \\ \underline{p}^* \in \mathcal{Q}_h}} (\|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{V}}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}) \quad (3.55)$$

Démonstration :

On détaille ici la démonstration qui peut être trouvé dans (Arnold and Brezzi, 1997).

Notons  $(\underline{U}^\epsilon, \underline{p}^\epsilon) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}$  et  $(\underline{U}_h^\epsilon, \underline{p}_h^\epsilon) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  les solutions respectives des problèmes Pb3.4.6 et Pb3.4.5. Reprenons l'équation 3.43 :  $\forall (\underline{U}^*, \underline{p}^*) \in d\tilde{K}^{rel} \times \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + \epsilon^2 C(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) &= A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*) \\ &\quad - B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*) + \epsilon^2 C(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*) \end{aligned}$$

En reprenant le même raisonnement que pour établir l'inéquation 3.44, on montre que :

$$\begin{aligned} \alpha_A \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq \|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \\ &\quad + \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad + \epsilon^2 \|c\| \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \end{aligned}$$

On peut donc choisir une constante  $C > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \epsilon^2 \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 &\leq C(\|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \\ &\quad + \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad + \epsilon^2 \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

D'après la condition 3.54, on a :

$$\forall \underline{p}^* \in \mathcal{Q}, \quad \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}} \frac{B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U})}{\|\hat{U}\|_{\tilde{K}}} \quad (3.57)$$

Or, on sait que :

$$A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{U}) + B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U}) = A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{U}) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U})$$

donc

$$\begin{aligned} B(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U}) &= A(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{U}) - A(\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*, \hat{U}) + B(\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U}) \\ &\leq \|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} + \|A\| \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \|\hat{U}\|_{\tilde{K}} \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{\hat{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}} \frac{b(\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*, \hat{U})}{\|\hat{U}\|_{\tilde{K}}} \leq \|A\| \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|A\| \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|$$

En injectant cette inégalité dans 3.57, et en posant  $\alpha = \max(\frac{1}{\gamma} \|A\|, \frac{1}{\gamma}, \tilde{C})$ , on obtient :

$$\|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\| \leq \alpha \left( \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \right) \quad (3.58)$$

Si on injecte 3.58 dans 3.56 et qu'on ajoute un terme  $\|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \epsilon^2 \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|^2 &\leq \\ &C \left[ \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \left( (1 + \alpha) \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \right) \right. \\ &\quad + \epsilon \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \times \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \\ &\quad + (1 + \alpha) \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} * \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} \\ &\quad + \alpha \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} * \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \\ &\quad \left. + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| * \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| \right] \end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à 3.48, on en déduit qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que :

$$\begin{aligned} & \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \epsilon^2 \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}^2 \\ & + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}}^2 + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\|^2 \leq C' \left( \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| \right) \\ & \quad * \left( \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

L'inégalité de Schwarz appliquée au premier membre donne :

$$\begin{aligned} & \left( \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \epsilon \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right. \\ & \left. + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| \right)^2 \leq 4C' \left( \|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| \right) \\ & \quad * \left( \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

donc

$$\|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \epsilon \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} + \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| \leq 4C' \left( \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right)$$

En utilisant l'inégalité 3.58, on en déduit :

$$\exists C > 0, \forall (\underline{U}^*, \underline{p}^*) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h,$$

$$\|\underline{U}_h^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|\| + \epsilon \|\underline{p}_h^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \leq C \left( \|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{K}} + \|\|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}} \right)$$

On en déduit alors le résultat du théorème par une simple inégalité triangulaire. ■

### 3.4.6 Démonstration de la condition inf-sup pour une nappe plane

On souhaite démontrer que les espaces d'éléments finis présentés dans la sous section 3.4.2 vérifient la condition inf-sup 3.54 pour notre problème de nappe. Plusieurs méthodes de démonstrations sont récapitulées dans la thèse (Chapelle, 1996b), mais peu d'entre elles ont pu être appliquées au cas des coques, comparable à notre problème de nappe.

La démonstration de la condition inf-sup la plus classique s'appuie sur le lemme de Fortin, qui donne une condition suffisante pour établir 3.54 : (voir (Brezzi and Fortin, 1991))

#### Lemme 3.4.1 Lemme de Fortin

Supposons qu'il existe un opérateur linéaire continu  $\Pi_h$  de  $d\tilde{K}^{ort}$  dans  $d\tilde{K}_h^{rel}$  tel que

$$\forall (\underline{U}, \underline{p}) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}_h, \quad B(\underline{p}; \Pi_h(\underline{U})) = B(\underline{p}; \underline{U}) \quad (3.61)$$

$$\exists C > 0, \forall \underline{U} \in d\tilde{K}^{ort}, \quad \|\Pi_h(\underline{U})\|_{\tilde{K}} \leq C \|\underline{U}\|_{\tilde{K}} \quad (3.62)$$

Alors la condition inf-sup 3.54 est vérifiée.

Démonstration du lemme 3.4.1 :

Supposons qu'il existe un opérateur  $\Pi_h : d\tilde{K}^{ort} \rightarrow d\tilde{K}_h^{rel}$  vérifiant 3.61 et 3.62.

On a alors

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}, \quad \forall \underline{U} \in d\tilde{K}^{ort}, \quad \frac{B(\underline{p}; \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{K}}} \leq \frac{1}{C} \frac{B(\underline{p}; \Pi_h(\underline{U}))}{\|\Pi_h(\underline{U})\|_{\tilde{K}}} \leq \frac{1}{C} \sup_{\underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel}} \frac{B(\underline{p}; \underline{U}^*)}{\|\underline{U}^*\|_{\tilde{K}}}$$



On en déduit facilement que la condition inf-sup est vérifiée :

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}, \quad \|\underline{p}\| = \sup_{\underline{U} \in d\tilde{K}^{ort}} \frac{B(\underline{p}, \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{K}}} \leq \frac{1}{C} \sup_{\underline{U}^* \in d\tilde{K}_h^{rel}} \frac{b(\underline{p}; \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{K}}} \quad \blacksquare$$

Grâce à ce lemme, il suffit de trouver un opérateur  $\Pi_h$  vérifiant les deux conditions 3.61 et 3.62 pour assurer que la condition inf-sup est satisfaite, et donc que la convergence de nos éléments finis est uniforme. Mais comme pour les coques dans (Arnold and Brezzi, 1997), notre méthode de démonstration n'est valide que dans le cas d'une nappe plane, de manière à ce que les directeurs soient constants par élément :

**Hypothèse :** Les vecteurs  $\underline{r}' \in H(\bar{P})$  et  $\underline{d}_i \in H(\bar{P})^3$  sont constants sur toute la surface de la nappe.

Construction de l'opérateur  $\Pi_h$  :

On cherche l'opérateur  $\Pi_h : d\tilde{K}^{ort} \rightarrow d\tilde{K}_h^{rel}$  sous la forme :

$$\Pi_h(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i) = (\pi_r(\underline{\delta r}), \pi_d(\underline{\delta d}_i))$$

avec  $\pi_r : H(\bar{P}) \rightarrow Q_1(\mathcal{T}_h) + \bar{B}_2(\mathcal{T}_h)$  et  $\pi_d : H(\bar{P}) \rightarrow Q_1(\mathcal{T}_h) + \overset{\circ}{B}_2(\mathcal{T}_h)$ ,

où on rappelle que les espaces  $\bar{B}_2(\mathcal{T}_h)$  et  $\overset{\circ}{B}_2(\mathcal{T}_h)$  sont les espaces introduits dans les définitions 3.51 et 3.52 :

- $\bar{B}_2(\mathcal{T}_h)$  correspond à l'ensemble des fonctions vecteurs  $\underline{\delta r}$  de  $H(\bar{P})$  qui s'écrivent sous forme de fonctions bulles centrées sur les arêtes du maillage  $\mathcal{T}_h$  ou tout espace plus gros ;
- $\overset{\circ}{B}_2(\mathcal{T}_h)$  correspond à l'ensemble des fonctions vecteurs  $\underline{\delta r}$  de  $H(\bar{P})$  qui s'écrivent sous forme de fonctions bulles centrées sur les éléments du maillage  $\mathcal{T}_h$  ou tout espace plus gros.

Nous avons vu dans le chapitre 2 que pour tout  $(\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i)$  dans l'espace tangent  $d\tilde{K}^{ort}(\underline{x}, \underline{d}_i)$ , il existe un unique vecteur  $\underline{\omega} \in W^{1,q}(\bar{P})^3$  tel que

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \forall i = 1, 2, 3, \quad \underline{\delta d}_i(\xi_1, \xi_2) = \underline{\omega}(\xi_1, \xi_2) \wedge \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2)$$

De plus, dans le cas particulier d'une nappe plane considéré ici, on peut facilement montrer que ce vecteur  $\underline{\omega}$  appartient à l'espace  $H(\bar{P})$ . Dans ce qui suit, c'est ce vecteur  $\underline{\omega}$  qui sera interpolé.

On cherche alors  $\pi_r$  et  $\pi_d$  sous la forme

$$\begin{aligned} \pi_r(\underline{\delta r}) &= \pi^1(\underline{\delta r}) + \pi_r^2(\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) \\ \pi_d(\underline{\delta d}_i) &= \pi_d(\underline{\omega}) \wedge \underline{d}_i \\ \pi_d(\underline{\omega}) &= \pi^1(\underline{\omega}) + \pi_d^2(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) \end{aligned}$$

avec  $\pi^1 : H(\bar{P}) \rightarrow Q_1(\mathcal{T}_h)$

et  $\pi_r^2 : H(\bar{P}) \rightarrow \bar{B}_2(\mathcal{T}_h)$

et  $\pi_d^2 : H(\bar{P}) \rightarrow \overset{\circ}{B}_2(\mathcal{T}_h)$

On sait d'abord qu'il existe un opérateur de projection de Clément  $\pi^1 : H(\bar{P}) \rightarrow Q_1(\mathcal{T}_h)$  qui vérifie : (cf (Clement, 1975))

$$\forall \underline{v} \in H(\bar{P}), \forall e \in [1; NE_h], \quad \|\underline{v} - \pi^1(\underline{v})\|_{0,E_e^h} + h \|\underline{v} - \pi^1(\underline{v})\|_{1,E_e^h} \leq C_1 h \|\underline{v}\|_{1,E_e^h} \quad (3.63)$$

La construction des opérateurs  $\pi_r^2$  et  $\pi_d^2$  est spécifique à notre problème et dépend de la forme bilinéaire  $B(.,.)$  :

$$B(\underline{p}; (\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i)) = \iint_{\bar{P}} p_i (\underline{\delta r}' \cdot \underline{d}_i + \underline{r}' \cdot \underline{\delta d}_i) d\xi_\alpha$$

- Démonstration de la relation 3.61 :

★ Cherchons d'abord à définir un opérateur  $\pi_d^2$  de manière à satisfaire la relation 3.61 :  
Soit  $\underline{\omega} \in H(\bar{P})$ . On cherche à construire  $\pi_d^2(\underline{\omega})$  tel que :

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}_h, \quad \iint_{\bar{P}} p_i \underline{r}' \cdot (\pi_d(\underline{\omega}) \wedge \underline{d}_i) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} p_i \underline{r}' \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{d}_i) d\xi_\alpha$$

Les multiplicateurs  $\underline{p} \in \mathcal{Q}_h$  étant constants par élément, ceci est équivalent à :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \iint_{E_e^h} \underline{r}' \cdot (\pi_d(\underline{\omega}) \wedge \underline{d}_i) d\xi_\alpha = \iint_{E_e^h} \underline{r}' \cdot (\underline{\omega} \wedge \underline{d}_i) d\xi_\alpha$$

L'hypothèse selon laquelle  $\underline{r}'$  et  $\underline{d}_i$  sont constants par élément nous permet alors d'arriver à la condition :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \iint_{E_e^h} \pi_d^2(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) d\xi_\alpha = \iint_{E_e^h} (\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) d\xi_\alpha \quad (3.64)$$

Sur chaque élément  $T \in \mathcal{T}_h$ , l'opérateur s'écrit sous la forme d'une fonction bulle  $\overset{o}{b}_e$  centrée sur l'élément :

$$\forall e \in [1; NE_h], \forall \xi_\alpha \in E_e^h, \quad \pi_d^2(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) (\xi_\alpha) = C_e(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) \overset{o}{b}_e(\xi_\alpha)$$

L'équation 3.64 nous donne alors la valeur de  $C_e(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega}))$  permettant de satisfaire 3.61 :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad C_e(\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) = \frac{\iint_{E_e^h} (\underline{\omega} - \pi_d^1(\underline{\omega})) d\xi_\alpha}{\iint_{E_e^h} \overset{o}{b}_e(\xi_\alpha) d\xi_\alpha} \quad (3.65)$$

Sur l'élément de référence  $\hat{E} = [-1; 1]^2$ , l'opérateur  $\pi_d^2$  ainsi construit vérifie l'inégalité en normes :

$$\forall \underline{\omega} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_d^2(\underline{\omega})\|_{0,\hat{E}} = \|\underline{\omega}\|_{0,\hat{E}}$$

Par équivalence des normes sur l'élément de référence, on en déduit

$$\exists C_d > 0, \quad \forall \underline{d} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_d^2(\underline{\omega})\|_{0,\hat{E}} + \|\pi_d^2(\underline{\omega})\|_{1,\hat{E}} \leq C_d \|\underline{\omega}\|_{0,\hat{E}}$$

Or, lorsqu'on passe de l'élément de référence à un élément de taille  $h \times h$ , on peut montrer que les normes vérifient les relations :

$$\forall \underline{\omega} \in H(\hat{E}), \quad \begin{cases} \|\underline{\omega}\|_{0,E_e^h} = h \|\underline{\omega}\|_{0,\hat{E}} \\ \|\underline{\omega}\|_{1,E_e^h} = \|\underline{\omega}\|_{1,\hat{E}} \end{cases}$$

Ce passage à l'élément de référence nous permet donc de montrer que l'opérateur  $\pi_d^2$  vérifie l'inégalité :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \exists C_d > 0, \quad \forall \underline{\omega} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_d^2(\underline{\omega})\|_{0,E_e^h} + h \|\pi_d^2(\underline{\omega})\|_{1,E_e^h} \leq C_d \|\underline{\omega}\|_{0,E_e^h} \quad (3.66)$$

★ De la même manière, on cherche l'opérateur  $\pi_r$  de manière à satisfaire la relation 3.61 :

Soit  $\underline{\delta r} \in H(\bar{P})$ . On cherche à construire  $\pi_r(\underline{\delta r})$  tel que :

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}_h, \quad \iint_{\bar{P}} p_i \pi_r(\underline{\delta r})' \cdot \underline{d}_i d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} p_i \underline{\delta r}' \cdot \underline{d}_i d\xi_\alpha$$

En utilisant le fait que les multiplicateurs de Lagrange  $\underline{p}$  sont pris constants par élément et que les directeurs sont supposés constants partout dans la nappe, on arrive à la condition :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \iint_{E_e^h} \pi_r(\underline{\delta r})' d\xi_\alpha = \iint_{E_e^h} \underline{\delta r}' d\xi_\alpha$$

c'est à dire :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \int_{\delta E_e^h} (\underline{a}_1 \cdot \underline{n}) \pi_r(\underline{\delta r}) ds = \int_{\delta E_e^h} (\underline{a}_1 \cdot \underline{n}) \underline{\delta r} ds$$

Une condition suffisante est alors d'imposer l'égalité des moyennes sur chaque arête  $F_k^h$  du maillage :

$$\forall k \in [1; NF_h], \quad \int_{F_k^h} (\underline{a}_1 \cdot \underline{n}) \pi_r^2 [\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})] (\xi_\alpha) ds = \int_{F_k^h} (\underline{a}_1 \cdot \underline{n}) (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) ds$$

On suppose que le vecteur  $\underline{a}_1$  est constant sur la nappe, en particulier sur chaque arête  $k \in [1; NF_h]$ , et que les arêtes sont droites, donc que le vecteur normal  $\underline{n}$  y est constant. On en déduit la condition suffisante (pas nécessaire pour les arêtes vérifiant  $\underline{a}_1 \underline{n} = 0$ ) :

$$\forall k \in [1; NF_h], \quad \int_{F_k^h} \pi_r^2 [\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})] (\xi_\alpha) ds = \int_{F_k^h} (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) ds \quad (3.67)$$

Sur chaque arête  $k \in [1; NF_h]$ , l'opérateur s'écrit sous la forme d'une fonction bulle  $\bar{b}_k$  centrée sur l'arête :

$$\forall k \in [1; NF_h], \forall \xi_\alpha \in F_k^h, \quad \pi_r^2 [\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})] (\xi_\alpha) = C_k (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) \bar{b}_k(\xi_\alpha)$$

L'équation 3.67 nous donne alors la valeur de  $C_k (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r}))$  permettant de satisfaire 3.61 :

$$\forall k \in [1; NF_h], \quad C_k (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) = \frac{\int_{F_k^h} (\underline{\delta r} - \pi_r^1(\underline{\delta r})) d\xi_\alpha}{\int_{F_k^h} \bar{b}_k(\xi_\alpha) d\xi_\alpha} \quad (3.68)$$

De la même manière que pour l'opérateur  $\pi_d^2$ , on passe à l'élément de référence  $\hat{E} = [-1; 1]^2$  : l'opérateur  $\pi_r^2$  ainsi construit vérifie l'inégalité en semi-normes :

$$\forall \underline{\delta r} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_r^2(\underline{\delta r})\|_{1, \hat{E}} = \|\underline{\delta r}\|_{1, \hat{E}}$$

La semi-norme  $\|\cdot\|_{1, \hat{E}}$  peut être comparée à la norme  $\|\cdot\|_{0, \hat{E}}$  par l'inégalité :

$$\exists C_x > 0, \quad \forall \underline{\delta r} \in H(\hat{E}), \quad \|\underline{\delta r}\|_{0, \hat{E}} \leq C_x \|\underline{\delta r}\|_{1, \hat{E}}$$

On en déduit :

$$\exists C_x > 0, \quad \forall \underline{\delta r} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_r^2(\underline{\delta r})\|_{0, \hat{E}} + \|\pi_r^2(\underline{\delta r})\|_{1, \hat{E}} \leq C_x \left( \|\underline{\delta r}\|_{0, \hat{E}} + \|\underline{\delta r}\|_{1, \hat{E}} \right)$$

Le passage à l'élément réel de taille  $h \times h$  nous donne alors l'inégalité suivante :

$$\exists C_x > 0, \quad \forall \underline{\delta r} \in H(\hat{E}), \quad \|\pi_r^2(\underline{\delta r})\|_{0, E_e^h} + h \|\pi_r^2(\underline{\delta r})\|_{1, E_e^h} \leq C_x \left( \|\underline{\delta r}\|_{0, E_e^h} + h \|\underline{\delta r}\|_{1, E_e^h} \right) \quad (3.69)$$

En choisissant les opérateurs  $\pi_d$  et  $\pi_r$  comme précédemment, on garantit donc que la condition 3.61 est satisfaite. Par ailleurs, on peut voir que pour le choix de multiplicateurs de Lagrange constants par morceaux, les espaces primaux  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{W}_h$  sont optimaux, c'est à dire qu'il n'existe pas d'espaces de discrétisation de dimension inférieure vérifiant la condition 3.61 pour le maillage  $\mathcal{T}_h$  donné.

- Démonstration de l'inégalité 3.62 :

On vient de construire un opérateur  $\Pi_h$  permettant de satisfaire la condition 3.61 dans le cas d'une nappe plane. Pour pouvoir utiliser le lemme de Fortin, il nous reste à vérifier que cet opérateur satisfait également l'inégalité 3.62 :

La norme sur  $K$  est définie par :

$$\|\underline{\delta r}, \underline{\delta d}_i\|_{\tilde{K}}^2 = \|\underline{\delta r}\|_{H^1}^2 + \sum_{i=1}^3 \|\underline{\delta d}_i\|_{H^1}^2$$

avec

$$\|\cdot\|_{H^1}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{0,E_e^h}^2 + h^2 \|\cdot\|_{1,E_e^h}^2$$

On part des décompositions suivantes :

$$\begin{aligned} \|\pi_r(\underline{\delta r})\|_{H^1}^2 &= \|\pi^1(\underline{\delta r}) + \pi_r^2(\underline{\delta r} - \pi^1(\underline{\delta r}))\|_{H^1}^2 \\ &= \|\underline{\delta r} + [\pi^1(\underline{\delta r}) - \underline{\delta r}] + \pi_r^2(\underline{\delta r} - \pi^1(\underline{\delta r}))\|_{H^1}^2 \\ &\leq \|\underline{\delta r}\|_{H^1}^2 + \|\pi^1(\underline{\delta r}) - \underline{\delta r}\|_{H^1}^2 + \|\pi_r^2(\underline{\delta r} - \pi^1(\underline{\delta r}))\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

Etant donné que  $\underline{\delta d}_i = \underline{\omega} \wedge \underline{d}_i$  et que les  $\underline{d}_i$  sont constants de norme unité, on a  $\|\underline{\delta d}_i\|_{H^1}^2 = \|\underline{\omega}\|_{H^1}^2$  et

$$\begin{aligned} \|\pi_d(\underline{\delta d}_i)\|_{H^1}^2 &= \|\pi_d(\underline{\omega})\|_{H^1}^2 \\ &= \|\pi^1(\underline{\omega}) + \pi_d^2(\underline{\omega} - \pi^1(\underline{\omega}))\|_{H^1}^2 \\ &= \|\underline{\omega} + [\pi^1(\underline{\omega}) - \underline{\omega}] + \pi_d^2(\underline{\omega} - \pi^1(\underline{\omega}))\|_{H^1}^2 \\ &\leq \|\underline{\omega}\|_{H^1}^2 + \|\pi^1(\underline{\omega}) - \underline{\omega}\|_{H^1}^2 + \|\pi_d^2(\underline{\omega} - \pi^1(\underline{\omega}))\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

En décomposant les normes  $\|\cdot\|_{H^1}$  sur les éléments du maillage, et en combinant les inégalités 3.63, 3.66 et 3.69, on montre alors facilement que l'inégalité souhaitée est vérifiée :

$$\exists C > 0, \quad \forall \underline{U} \in d\tilde{K}^{rel}, \quad \|\Pi_h(\underline{U})\|_{\tilde{K}} \leq C \|\underline{U}\|_{\tilde{K}}$$

L'opérateur  $\Pi_h : \tilde{K}^{rel} \rightarrow \tilde{K}_h^{rel}$  satisfait donc les deux conditions 3.61 et 3.62 du lemme de Fortin, on en déduit par conséquent que notre choix de discrétisation vérifie la condition inf-sup 3.54 lorsque la nappe est plane. ■

La construction de l'opérateur précédent ne fonctionne pas pour des configurations non planes. Dans ce qui suit, on va donc chercher s'il existe une méthode permettant d'assurer une convergence uniforme dans le cas général.

### 3.4.7 Les pistes pour une convergence uniforme plus générale

L'hypothèse de nappe plane que nous avons dû faire dans la sous section 3.4.5 pour démontrer la condition inf-sup 3.54 est très restrictive. Numériquement, il semble que les espaces de discrétisation choisis convergent vers la solution continue indépendamment de l'épaisseur. On aimerait donc démontrer cette convergence uniformément par rapport au paramètre  $\epsilon$  dans un cadre plus général.

Dans le cas des coques linéaires, il a été établi dans (Bramble and Sun, 1998) qu'une condition plus faible que la condition inf-sup est suffisante pour assurer la convergence uniforme 3.55 :

#### Lemme 3.4.2 Condition inf-sup relaxée - (Bramble and Sun, 1998)

Notons  $(\underline{U}^\epsilon, \underline{p}^\epsilon) \in d\tilde{K}^{ort} \times \mathcal{Q}$  et  $(\underline{U}_h^\epsilon, \underline{p}_h^\epsilon) \in d\tilde{K}_h^{rel} \times \mathcal{Q}_h$  les solutions respectives des problèmes Pb3.4.6 et Pb3.4.5. Supposons qu'il existe deux constantes  $\gamma > 0$  et  $C > 0$  indépendantes de  $h$  et  $\epsilon$  telles que :

$$\forall \underline{p} \in \mathcal{Q}, \quad \|\underline{p}\| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\underline{U} \in d\tilde{K}_h^{rel}} \frac{B(\underline{p}, \underline{U})}{\|\underline{U}\|_{\tilde{K}}} + C \epsilon \|\underline{p}\|_{\mathcal{Q}} \quad (3.70)$$

Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $h$  et  $\epsilon$  telle que :

$$\|(\underline{U}^\epsilon - \underline{U}_h^\epsilon)\|_{\tilde{\mathcal{V}}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}_h^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} \leq C \inf_{\substack{\underline{U}^* \in \tilde{\mathcal{V}}_h \\ \underline{p}^* \in \mathcal{Q}_h}} (\|\underline{U}^\epsilon - \underline{U}^*\|_{\tilde{\mathcal{V}}} + \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\| + \epsilon \|\underline{p}^\epsilon - \underline{p}^*\|_{\mathcal{Q}}) \quad (3.71)$$

Cette condition relaxée est satisfaite dans le cas de coques linéaires, à condition que les coefficients géométriques soient lipschitziens et que la taille des mailles respecte  $h^2 = O(\epsilon)$ . Mais pour cela, la formulation mixte doit être écrite de manière à ne pas avoir de coefficients géométriques devant les termes de dérivées dans la forme bilinéaire  $B(\cdot, \cdot)$ . C'est pourquoi (Bramble and Sun, 1998) inclut ces coefficients géométriques dans les multiplicateurs de Lagrange.

Mais dans le cas de notre problème non linéaire Pb3.4.2, les directeurs  $\underline{d}_i$  jouent le rôle de ces coefficients géométriques. Ils ne peuvent pas être inclus dans les multiplicateurs de Lagrange, sinon le problème linéarisé deviendrait non symétrique. Cette condition relaxée ne peut donc pas être utilisée dans notre cas, et il va nous falloir rechercher d'autres méthodes permettant de vérifier la condition inf-sup 3.54.

L'extension de la construction d'un opérateur  $\Pi_h$  vérifiant 3.61 et 3.62 à des configurations non planes semble nécessiter l'ajout de bulles de degrés plus élevés si on veut satisfaire l'égalité

$$\forall (\underline{U}, \underline{p}) \in d\tilde{K}^{rel} \times \mathcal{Q}_h \quad B(\underline{p}; \Pi_h(\underline{U})) = B(\underline{p}; \underline{U})$$

L'utilisation du Lemme de Fortin pour des éléments finis quadratiques semble donc désespérée. Le problème est d'ailleurs le même que dans le cas des coques, pour lesquelles le lemme de Fortin ne peut être utilisé que sous l'une hypothèse de coefficients constants par morceaux (voir (Arnold and Brezzi, 1997)).

Il est montré dans (Chapelle, 1996b) que la plupart des méthodes analytiques permettant de démontrer la condition inf-sup dans le cas de poutres ou de plaques ne sont pas applicables aux coques, et on ne connaît pas pour l'instant d'élément dont on ait pu démontrer qu'il serait parfaitement robuste. Cependant, dans le cas des coques, on dispose de méthodologies détaillées et rigoureuses pour évaluer la robustesse des éléments de coques au moyen de cas-tests (voir (Pitkäranta et al., 1995), (Chapelle and Bathe, 1998) et (Bathe et al., 2000)).

Il semble que notre problème de nappe fibrée est très similaires aux problèmes de coques. Ainsi, pour vérifier que la discrétisation que nous avons choisie assure une convergence uniforme quelque soit la géométrie de la nappe, il faudrait s'inspirer de ces cas-tests numériques pour en développer de nouveaux, adaptés aux caractéristiques des nappes fibrées. Ce résultat est admis pour le moment.

Les méthodes mixtes sont donc un outil puissant qui permet de contourner le problème de verrouillage numérique pour des problèmes pénalisés. Cependant, l'ajout de variables auxiliaires peut paraître contraignant pour l'implémentation dans un code éléments finis classique, et surtout augmente significativement la taille du système à résoudre. Il est alors intéressant de montrer que ces variables auxiliaires peuvent être supprimées lorsqu'elles sont discontinues d'un élément à l'autre, de telle sorte que l'on aboutit à un problème en déplacements/rotations classique sans verrouillage.

### ■ 3.5 Technique de sous-intégration partielle sélective

On reprend la formulation mixte présentée dans la section 3.4, avec des variables auxiliaires  $\underline{p}$  prises constantes par élément. L'objectif de cette section est alors de montrer que le problème mixte est équivalent à un problème discret en déplacements/rotations classique, dans lequel la contrainte pénalisée est sous-intégrée.

Nous avons construit dans la section 3.4 le problème mixte Pb3.4.3, dans lequel les équations d'équilibre s'écrivent sous forme faible :

$$\forall (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}_h^0,$$

$$\frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} \cdot (\underline{r}, \underline{d}_i) + \iint_{\bar{P}} p_i^h (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i^h + \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i) d\xi_\alpha + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left[ \underline{d}_i^h \cdot \underline{d}_i + \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j^h \right] (N_p) = \iint_{\bar{P}} f \cdot \underline{r} d\xi_\alpha \quad (3.72)$$

$$\iint_{\bar{P}} \hat{p}_i \left( \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h - v_{0i} - \epsilon^2 K_{ii}^{-1} p_i^h \right) d\xi_\alpha = 0 \quad \forall \hat{p} \in \mathcal{Q}_h \quad (3.73)$$

Puisque les variables auxiliaires sont prises constantes par élément, l'équation 3.73 donne la forme explicite de  $p_i^h$  en fonction des inconnues primales discrètes  $(\underline{r}_h, \underline{d}_i^h) \in \tilde{K}_h$  :

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad p_i^h|_{E_e^h} = \epsilon^{-2} \underline{K}_{ii} < \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h - v_{0i} >_{E_e^h}$$

Si on injecte cette expression dans la forme faible 3.72, on obtient un nouveau problème équivalent à Pb3.4.3, dans lequel les seules inconnues sont les variables primales  $(\underline{r}_h, \underline{d}_i^h) \in \tilde{K}_h$  :

**Pb 3.5.1 Problème non linéaire sous intégré en flexion dominante**

Trouver  $(\underline{r}_h, \underline{d}_i^h; \lambda_{ij}^p) \in \tilde{K}_h \times \mathbb{R}^{3*3*NN_d^h}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} (\underline{r}_h, \underline{d}_i^h) \cdot (\underline{r}, \underline{d}_i) + \epsilon^{-2} \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e^h} < \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h - v_{0i} >_{E_e^h} K_{ii}^0 < \underline{r}' \cdot \underline{d}_i^h + \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i >_{E_e^h} d\xi_\alpha \\ \quad + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left[ \underline{d}_i^h \cdot \underline{d}_i + \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j^h \right] (N_p) = \iint_{\bar{P}} f \cdot \underline{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}_h^0 \\ \forall p \in [1; NN_d^h], \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \quad \underline{d}_i^h(N_p) \cdot \underline{d}_j^h(N_p) = \delta_{ij} \end{array} \right. \quad (3.74)$$

Ce nouveau problème est un problème contraint lorsqu'on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, comme l'était le problème Pb3.2.4. Mais il est important de remarquer que la contrainte  $\underline{r}' \cdot \underline{d}_i = v_{0i}$  a été remplacée par

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad < \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h >_{E_e^h} = < v_{0i} >_{E_e^h}$$

De ce fait, la contrainte imposée est moins drastique, et dépend maintenant du pas du maillage. Ainsi, la méthode mixte peut s'interpréter comme une opération par laquelle on calibre judicieusement la contrainte à appliquer en fonction des espaces de discrétisation employés, de façon à éviter le verrouillage.

On rappelle que le terme d'énergie adimensionnée  $\tilde{E}_0$  est défini par l'expression 3.32 :

$$\tilde{E}_0(\underline{r}, \underline{d}_i) = E_0(\underline{r}, \underline{d}_i) + c_0 (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i}) K_{ii}^0 (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i - v_{0i})$$

Donc finalement, l'équation 3.74 se réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0}{\partial (\underline{r}, \underline{d}_i)} (\underline{r}_h, \underline{d}_i^h) \cdot (\underline{r}, \underline{d}_i) &+ c_0 \iint_{\bar{P}} (\underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h - v_{0i}) K_{ii}^0 (\underline{r}' \cdot \underline{d}_i^h + \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i) d\xi_\alpha \\ &+ (\tilde{\epsilon}^{-2} - c_0) \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e^h} < \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i^h - v_{0i} >_{E_e^h} K_{ii}^0 < \underline{r}' \cdot \underline{d}_i^h + \underline{r}'_h \cdot \underline{d}_i >_{E_e^h} d\xi_\alpha \\ &+ \iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left[ \underline{d}_i^h \cdot \underline{d}_j + \underline{d}_i \cdot \underline{d}_j^h \right] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = \iint_{\bar{P}} f \cdot \underline{r} d\xi_\alpha \quad \forall (\underline{r}, \underline{d}_i) \in \tilde{K}_0 \end{aligned}$$

On en déduit donc que le problème mixte Pb3.4.3 est équivalent à un problème dont les inconnues sont uniquement les variables primales  $(\underline{r}_h, \underline{d}_i^h) \in \tilde{K}_h$ , mais dans lequel l'énergie interne de la nappe

est approchée par

$$\begin{aligned}
 E_{nap}^h(\underline{r}, \underline{d}_i) = & \underbrace{c_0 \tilde{\epsilon}^2 \iint_{\bar{p}} K_{ii}^{mb} (\underline{r}_h \cdot \underline{d}_i^h - \nu_{0i})^2}_{E_{mb}} + (1 - c_0 \tilde{\epsilon}^2) \underbrace{\sum_{e=1}^{NE_h} |E_e^h| K_{ii}^{mb} < \underline{r}_h \cdot \underline{d}_i^h - \nu_{0i} >_{E_e^h}^2}_{E_{mb}^h} \\
 & + \underbrace{\iint_{\bar{p}} \frac{1}{e} w_{fl}}_{E_{fl}} + \underbrace{\iint_{\bar{p}} w_{gom}^{2D}}_{E_{gom}} \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette expression une méthode de *sous-intégration partielle sélective*, dans laquelle seul le terme d'énergie de membrane des câbles est en partie sous-intégré.

Les méthodes de sous-intégration sont utilisées par les ingénieurs depuis longtemps sur des problèmes sous contraintes, car elles permettent de relaxer la contrainte entraînant le verrouillage, ce qui laisse espérer une meilleure convergence. On est finalement aussi ramené à utiliser une telle méthode, mais son équivalence avec le problème mixte Pb3.4.3 nous permet de la justifier proprement et d'assurer qu'elle échappe au verrouillage sur des cas à flexion non inhibée. Mais il nous reste à vérifier que cette méthode fonctionne aussi sur des problèmes à flexion non inhibée, c'est le but de la section suivante.

## ■ Conclusions

La résolution de la plupart des problèmes sur des structures minces par la méthode des éléments finis standard n'est pas robuste, puisqu'elle est sujet au phénomène de verrouillage numérique. Nous avons montré que c'est en particulier le cas pour notre problème de nappe renforcée.

Une formulation mixte du problème nous a permis de démontrer rigoureusement qu'une méthode de sous-intégration partielle sélective résout ce problème dans le cas d'une nappe plane pour des éléments  $Q_2$  en déplacements et en rotations (voir figure 3.8). De la même manière que pour les coques (voir (Arnold and Brezzi, 1997)), on peut raisonnablement espérer que cette méthode donne aussi de bons résultats dans le cas général.

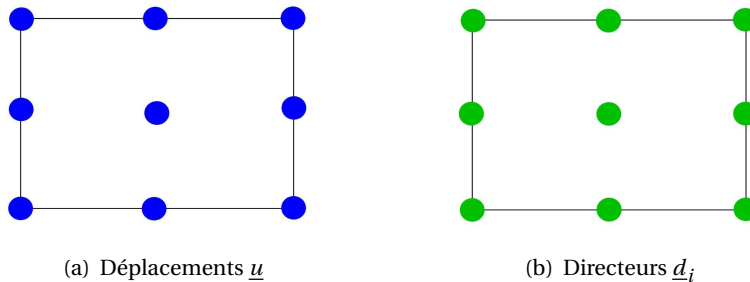


FIG. 3.8: Élément fini  $Q_2$  pour le problème de nappe 2D, à utiliser avec une sous-intégration des termes de membrane.

Les tests numériques effectués dans le chapitre 4 devront finir de valider cette méthode sur deux critères :

- Ils devront montrer que le phénomène de verrouillage numérique a été supprimé par la sous-intégration ;
- Mais ils devront également vérifier que la méthode reste assez consistante pour traiter les problèmes où la flexion des fibres est inhibée, en contrôlant l'absence de modes parasites.

# Méthode de résolution et applications numériques

## ■ Introduction

L'objectif général de ce chapitre est de décrire la méthode employée pour appliquer numériquement le modèle décrit dans les chapitres 2 et 3, et de la vérifier sa validité sur des tests numériques.

Le chapitre peut être séparé en deux grandes parties :

- La première partie du chapitre est consacrée à la description d'une méthode de résolution numérique originale :
  - Dans la section 4.1, nous détaillons les hypothèses réalisées pour discrétiser le problème de nappe continu. Nous présentons en particulier les espaces d'éléments finis utilisés et la manière de relaxer la contrainte d'orthogonalité ;
  - Ensuite, nous décrivons de l'algorithme complet de résolution dans la section 4.2, en détaillant les étapes spécifiques à notre problème.
- La deuxième partie de ce chapitre rassemble quelques tests numériques permettant d'évaluer la validité de notre modèle. Ces tests sont répartis en trois catégories :
  - Dans un premier temps, nous réalisons des tests dits "asymptotiques" dans la section 4.3 : on étudie les résultats de notre modèle sur des cas analytiques relativement simples lorsque l'épaisseur tend vers 0, de manière à vérifier que le phénomène de verrouillage numérique est supprimé et qu'aucun mode parasite n'apparaît ;
  - Ensuite, dans la section 4.4, nous validons notre modèle avec des exemples analytiques plus complexes sur une nappe cylindrique. Par rapport aux tests précédents, la solution a ici la particularité de dépendre à la fois de l'énergie de gomme et de l'énergie de câble ;
  - Enfin, nous étudions un cas réel de flambement d'une nappe fibrée dans la section 4.5, en testant notre modèle sur le cas de compression sous flexion circulaire décrit dans le chapitre d'introduction.



## 4.1 Discrétisation par éléments finis

### 4.1.1 Discrétisation par éléments finis

#### Espaces discrets

On suppose que la géométrie de la nappe est suffisamment régulière pour pouvoir diviser son volume  $\Omega$  en  $NE_h$  éléments finis hexaédriques réguliers, en choisissant de prendre un seul élément fini dans l'épaisseur (comme représenté sur la figure 4.1) :

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{NE_h} \Omega_e^h$$

où  $h$  représente le diamètre maximum d'un élément. Ce maillage 3D contient  $NN_x^h$  noeuds dans le volume  $\Omega$ , notés  $(N_x^k)_{k \in [1; NN_x^h]}$ , auxquels seront calculés les déplacements  $\underline{\delta x}$ . Chaque élément fini  $\Omega_e^h$  contient  $NNE_x^h$  de ces noeuds. Ces noeuds seront appelés "noeuds de déplacements".

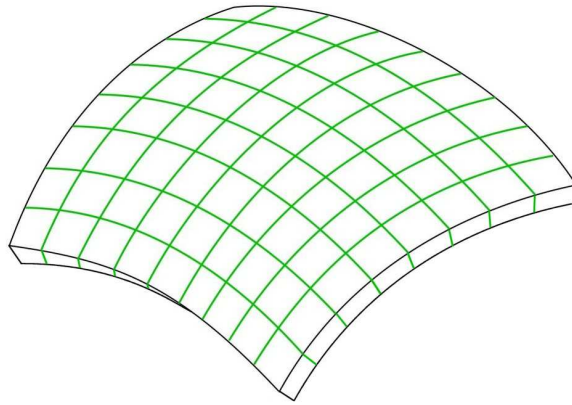


FIG. 4.1: Décomposition de la nappe en éléments finis quadrangulaires

Cette discrétisation du volume  $\Omega$  nous permet de construire en même temps une décomposition de la surface moyenne  $\mathcal{S}_m$  en  $NE_h$  éléments finis quadrangulaires réguliers :

$$\mathcal{S}_m = \bigcup_{e=1}^{NE_h} E_e^h .$$

On définit alors  $NN_d^h$  noeuds sur ce maillage 2D, notés  $(N_d^k)_{k \in [1; NN_d^h]}$ , auxquels seront calculés les vecteurs directeurs des câbles. Chaque élément fini  $E_e^h$  contient  $NNE_d^h$  de ces noeuds, appelés "noeuds de rotation". Par contre, aucun degré de liberté supplémentaire n'est ajouté pour calculer les positions  $\underline{r}$  sur la surface moyenne, puisqu'elles sont directement interpolées à partir des valeurs  $\underline{x}$  aux  $NN_x^h$  noeuds de déplacements.

On notera que les noeuds interpolant les déplacements  $\underline{\delta x}$  sont indépendants des noeuds interpolant les directeurs  $\underline{\delta d}_i$ . Ainsi, on laisse la possibilité qu'un noeud de rotation ( $N_d^j$ ) ne coïncide avec aucun noeud de translation (voir un exemple sur la figure 4.2(a)).

En pratique, on souhaite utiliser des éléments finis à la fois classiques (pour répondre aux attentes des futurs utilisateurs) et assez riches pour vérifier les conditions décrites dans le chapitre 3. Ainsi, dans tout ce qui suit, nous choisissons d'utiliser des éléments finis 3D Q2 en déplacements (hexaèdres à 27 noeuds) et des éléments finis 2D Q2 en rotations, comme celui décrit sur la figure 4.2(b).

On a alors  $NNE_x^h = 27$  et  $NNE_d^h = 9$ . Les espaces d'approximation des déplacements et des rotations s'écrivent dans ce cas :

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \underline{\delta x} \in H(\bar{\Omega}), \quad \forall e \in [1; NE_h], \delta x|_{\Omega_e^h} \in Q_2 \right\} .$$

$$\mathcal{W}_h = \left\{ \underline{d} \in H(\bar{P}), \quad \forall e \in [1; NE_h], d|_{E_e^h} \in Q_1 \right\} .$$

Finalement, les espaces d'approximation des transformations et des variations s'écrivent respectivement :

$$K_h = \left\{ (\underline{x}, r, \underline{d}_i) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h^3 \cap \mathcal{CSL} \right\} .$$

$$K_h^0 = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h^3 \cap \mathcal{CSL}_0 \right\} .$$

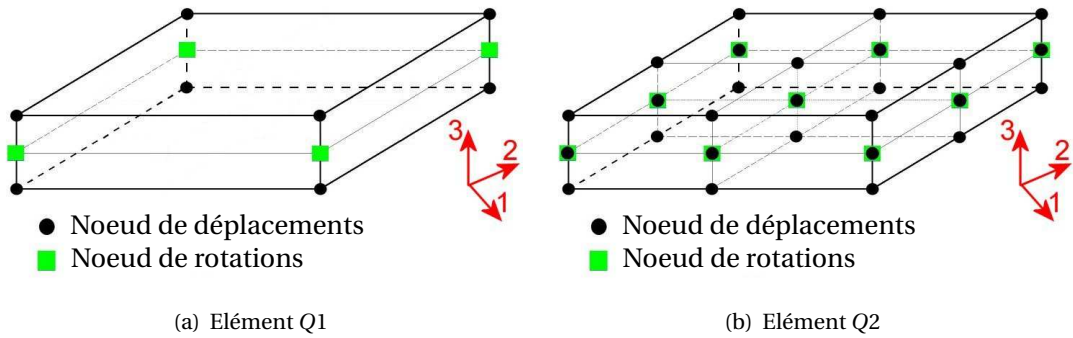


FIG. 4.2: Exemples d'éléments finis hexaédriques pour la nappe fibrée

### Représentation paramétrique

Plaçons nous dans l'élément fini 3D  $\Omega_e^h$  ( $e \in [1; NE_h]$ ), contenant l'élément fini 2D  $E_e^h$ .

Nous donnons ici quelques précisions sur la manière d'interpoler les déplacements  $\underline{\delta x}$  et les rotations  $\underline{d}_i$  dans cet élément, ainsi que la façon de calculer leurs déformations.

L'interpolation est faite en se ramenant aux éléments de référence  $\hat{\Omega} = [-1; 1]^3$  et  $\hat{P} = [-1; 1]^2$ . Les coordonnées paramétriques dans l'élément de référence  $\hat{\Omega} = [-1; 1]^3$  sont notées  $(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$ . On suppose que la coordonnée  $\hat{X}_3$  correspond à la direction transverse de la nappe, et donc que le plan  $\hat{P}$  où sont définis les directeurs peut s'écrire :

$$\hat{P} = \left\{ (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) \in \hat{\Omega} \text{ tel que } \hat{X}_3 = 0 \right\} . \quad (4.1)$$

Les fonctions de formes quadratiques 1D sur le segment  $[-1; 1]$ , sont notées  $\varphi_i$ , et définies comme étant les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux point  $-1, 0$  et  $1$  :

$$\forall \hat{s} \in [-1; 1], \quad \begin{cases} \varphi_1(\hat{s}) = \frac{1}{2}\hat{s}(1 - \hat{s}) ; \\ \varphi_2(\hat{s}) = (1 - \hat{s}^2) ; \\ \varphi_3(\hat{s}) = \frac{1}{2}\hat{s}(1 + \hat{s}) . \end{cases}$$

Les fonctions de forme 2D définies sur  $\hat{P}$  sont construites à partir de de celles-ci :

$$\forall (\hat{X}_1, \hat{X}_2) \in \hat{P}, \quad \varphi_{ij}(\hat{X}_1, \hat{X}_2) = \varphi_i(\hat{X}_1)\varphi_j(\hat{X}_2) .$$

Il en est de même pour les fonctions de forme 3D définies sur  $\hat{\Omega}$  :

$$\forall (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) \in \hat{\Omega}, \quad \varphi_{ijk}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \varphi_i(\hat{X}_1)\varphi_j(\hat{X}_2)\varphi_k(\hat{X}_3) .$$

Introduisons  $(M_e^k)_{k \in [1; NNE_x^h]}$  les  $NNE_x^h$  noeuds de déplacements de l'élément considéré, et  $(N_e^k)_{k \in [1; NNE_d^h]}$  ses  $NNE_d^h$  noeuds de rotations. Nous notons alors pour simplifier  $\underline{X}_k^e$  le vecteur de position initiale du point  $M_e^k$  :  $\underline{X}_k^e = \underline{X}(M_e^k)$ .

Les points de l'élément fini courant  $\Omega_e^h$  sont alors mis classiquement en relation avec ceux de l'élément de référence par la représentation paramétrique :

$$\forall (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) \in \hat{\Omega}, \quad \underline{X}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \underline{X}_{ijk}^e \varphi_i(\hat{X}_1) \varphi_j(\hat{X}_2) \varphi_k(\hat{X}_3) , \quad (4.2)$$

de telle sorte que la matrice jacobienne est définie par :

$$\underline{J} = \frac{\partial \underline{X}}{\partial \hat{X}}(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \underline{X}_{ijk}^e \otimes \left[ \begin{array}{l} \varphi'_i(\hat{X}_1) \varphi_j(\hat{X}_2) \varphi_k(\hat{X}_3) \underline{e}_1 \\ + \varphi_i(\hat{X}_1) \varphi'_j(\hat{X}_2) \varphi_k(\hat{X}_3) \underline{e}_2 \\ + \varphi_i(\hat{X}_1) \varphi_j(\hat{X}_2) \varphi'_k(\hat{X}_3) \underline{e}_3 \end{array} \right] . \quad (4.3)$$

### Configuration des câbles au repos

Nous utilisons les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne  $\underline{J}$  pour définir l'orientation des fibres sur la surface moyenne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{J}_1 = \underline{J} \cdot \underline{e}_1 ; \\ \underline{J}_2 = \underline{J} \cdot \underline{e}_2 ; \\ \underline{J}_3 = \underline{J} \cdot \underline{e}_3 . \end{array} \right.$$

D'après l'hypothèse 4.1, le plan tangent de la nappe au point considéré est engendré par les vecteurs  $(\underline{J}_1, \underline{J}_2)$ . On préfère le définir avec les deux vecteurs orthonormés définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v}_1 = \|\underline{J}_1\|^{-1} \underline{J}_1 ; \\ \underline{v}_2 = \|\underline{J}_1 \wedge \underline{J}_2\|^{-1} (\underline{J}_1 \wedge \underline{J}_2) \wedge \underline{J}_1 . \end{array} \right.$$

La direction des câbles par rapport à ces deux vecteurs orthonormés est définie grâce à un angle  $\alpha$ , appelé "angle d'orthotropie". On définit alors le triplet  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$  introduit dans le chapitre 2 définissant la base locale associée au câble :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{a}_1 = \cos(\alpha) \underline{v}_1 + \sin(\alpha) \underline{v}_2 ; \\ \underline{a}_2 = -\sin(\alpha) \underline{v}_1 + \cos(\alpha) \underline{v}_2 ; \\ \underline{a}_3 = \underline{a}_1 \wedge \underline{a}_2 . \end{array} \right. \quad (4.4)$$

On résume la signification de ces vecteurs sur la figure 4.3.

### Mesure des déformations

Les mesures de déformations des câbles introduites dans le chapitre 2 ont fait intervenir deux types de dérivées curvilignes :  $\frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi_1}$  et  $\frac{\partial \underline{d}_i}{\partial \xi_1}$ . Nous détaillons ici leur calcul.

#### Dérivée curviligne d'un champ 3D

Tout champ de déplacement  $\underline{u}(\underline{X})$  est représenté par interpolation des valeurs nodales  $\underline{u}_k^e = \underline{u}(\underline{X}_k^e)$

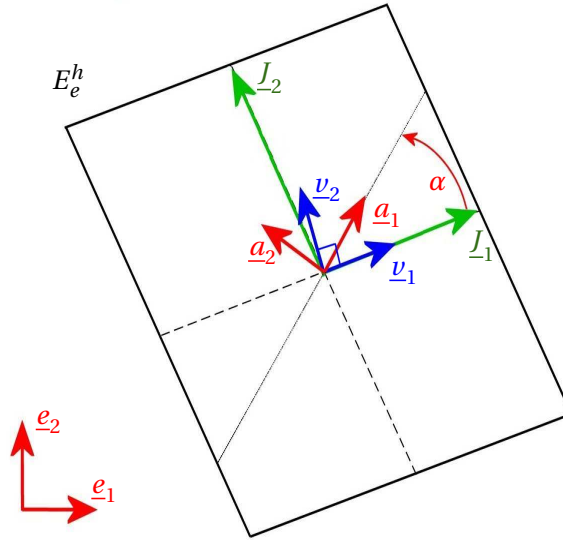


FIG. 4.3: Vecteurs utilisés pour définir l'orientation des câbles au repos

avec les fonctions de formes 3D décrites précédemment. En d'autres termes, on pose pour tout point de l'élément fini  $\Omega_e^h$  une interpolation  $\underline{u}_h$  d'un champ  $\underline{u}$  sous la forme :

$$\underline{u}_h(\underline{X}) = \sum_{k=1}^{NNE_x^h} \varphi_k(\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3) \underline{u}_k^e \quad \text{pour tout } \underline{X} \in \Omega_e^h \text{ défini par 4.2 .}$$

Le gradient de ce champ de déplacement  $\underline{u}_h$  peut alors être calculé par dérivée composée en fonction de la matrice jacobienne  $\underline{J}$  définie par 4.3 :

$$\underline{\underline{\nabla u_h}} = \frac{\partial \underline{u}_h}{\partial \underline{\hat{X}}} \cdot \underline{J}^{-1} .$$

Une fois ce gradient calculé, la dérivée curviligne s'obtient de manière triviale par l'expression 2.37 :

$$\frac{\partial \underline{u}_h}{\partial \xi_1} = \underline{\underline{\nabla u_h}} \cdot \underline{a}_1 .$$

#### Dérivée curviligne d'un champ 2D

La stratégie qui vient d'être décrite doit être légèrement adaptée pour les directeurs. En effet, contrairement aux déplacements, les directeurs ne sont interpolés que sur la surface moyenne. On doit alors ne garder que les deux premières colonnes de la matrice  $\underline{J}^{-1}$ , dénotées pour simplifier par la matrice  $\left[ \underline{J}^{-1} \right]_{2D} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ . La dérivée curviligne des directeurs est alors calculée par :

$$\forall i \in [1, 3], \quad \frac{\partial \underline{d}_i}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \underline{d}_i}{\partial \underline{\hat{X}}_{2D}} \cdot \left[ \underline{J}^{-1} \right]_{2D} \cdot \underline{a}_1 .$$

#### 4.1.2 Restriction cinématique

La difficulté qui apparait lorsqu'on discrétise le problème Pb3.2.1 est de savoir ce que l'on fait de la contrainte d'orthonormalité des directeurs. On serait tenté de reprendre directement la contrainte continue

$$\iint_{\bar{P}} \lambda_{ij}(\xi_\alpha) \left[ \underline{d}_i(\xi_\alpha) \cdot \underline{d}_j(\xi_\alpha) \right] ,$$

et de discrétiser l'espace des multiplicateurs  $\mathcal{R}_{sym}^{33}$  de la même manière que l'espace des directeurs. Mais cela reviendrait à imposer l'orthonormalité des directeurs 2.27 en tout point de la surface de la nappe, alors que l'interpolation polynomiale utilisée ne le permet pas. Nous sommes donc amenés à relaxer cette contrainte d'orthogonalité, qui n'est plus imposée sur toute la surface, mais uniquement aux  $NN_d^h$  noeuds de rotation du maillage :

$$\forall p \in [1, NN_d^h] , \quad \underline{\underline{G}}[\underline{d}_i](N_p) = \underline{0} . \quad (4.5)$$

*Remarque* : Comme dans le cas continu, la contrainte nodale 4.5 est imposée par 6 multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_{ij}$ . Mais il est important de préciser que ces multiplicateurs de Lagrange ne sont définis qu'aux  $NN_d^h$  noeuds de rotation du maillage, et non interpolés sur toute la surface.

On définit alors la variété des configurations admissibles  $K_h^{rel}$  contenant les déformées vérifiant la condition d'orthonormalité relaxée par :

$$K_h^{rel} = \left\{ (\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h \text{ tels que } \forall p \in [1, NN_d^h] , \quad \underline{\underline{G}}[\underline{d}_i](N_p) = \underline{0} \right\} .$$

Pour toute configuration  $(\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h^{rel}$ , on définit l'espace tangent  $dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)$  par :

$$dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in K_h^0 \text{ tels que } \forall p \in [1, NN_d^h], \forall i, j, \quad \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) = \underline{0} \right\} .$$

De manière similaire au cas continu décrit dans le chapitre 2, cet espace peut être défini de manière équivalente par :

$$dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in K_h^0 \text{ tels que } , \quad (4.6) \right. \\ \left. \forall p \in [1; NN_d^h], \exists \underline{\omega}_p \in \mathbb{R}^3, \forall i \in [1; 3], \quad \underline{\delta d}_i(N_p) = \underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i(N_p) \right\} .$$

Son complémentaire dans  $K_h^0$  est défini par :

$$\overline{dK_h^{rel}}(\underline{x}, \underline{d}_i) = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in K_h^0 \text{ tels que } , \quad (4.7) \right. \\ \left. \begin{cases} \forall p \in [1; NN_x^h], \quad \underline{\delta x}(M_p) = \underline{0} \\ \forall p \in [1; NN_d^h], \exists \underline{S}_p \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \forall i \in [1; 3], \quad \underline{\delta d}_i(N_p) = \underline{S}_p \cdot \underline{d}_i(N_p) \end{cases} \right\} ,$$

de telle sorte que

$$\forall (\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h^{rel}, \quad K_h^0 = dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i) \oplus \overline{dK_h^{rel}}(\underline{x}, \underline{d}_i) . \quad (4.8)$$

*Remarque* : De même que pour les multiplicateurs de Lagrange, les variables  $\underline{\omega}$  et  $\underline{S}$  introduites dans les définitions d'espaces 4.6 et 4.7 sont uniquement définies aux noeuds de rotations. Ces variables ne sont pas interpolées et ne peuvent pas être utilisées telles quelles dans les formulations variationnelles, contrairement à ce qui était fait dans le cas continu.

### 4.1.3 Problème discret à résoudre

Maintenant que la cinématique discrète a été présentée, il nous reste à décrire le modèle mécanique utilisé. On rappelle que l'énergie interne du problème de nappe continu est donné dans le chapitre 2 par l'expression 2.44. Nous la réécrivons ici sous la forme :

$$E_{nap} = \underbrace{\iint_{\bar{P}} \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 d\xi_{2D}}_{E_{mb}} + \underbrace{\iint_{\bar{P}} \frac{1}{e} w_{fl} d\xi_{2D}}_{E_{fl}} + \underbrace{\iiint_{\Omega} w_g^M d\xi_{3D}}_{E_{gom}} + \underbrace{\iint_{\bar{P}} w_{coupl} d\xi_{2D}}_{E_{coupl}} .$$

Nous avons vu dans le chapitre 3 que cette énergie ne doit pas être intégrée de manière exacte avec des éléments finis standards. Pour éviter le phénomène de verrouillage numérique, il est nécessaire de sous-intégrer le terme d'énergie de membrane des câbles.

On introduit pour cela un paramètre  $\rho$ , appelé coefficient de sous-intégration. L'analyse formelle réalisée dans le chapitre 3 prédit alors que ce paramètre s'écrit de la forme

$$\rho = c_0 \left( \frac{r}{L_1} \right)^2 \quad \text{avec } c_0 \geq 0 .$$

Finalement, l'énergie interne de la nappe sera approché dans le problème discret par

$$E_{nap}^h = \underbrace{\rho \int_{\bar{P}} \int_{\bar{e}} \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 d\xi_{2D}}_{E_{mb}} + (1 - \rho) \underbrace{\sum_{e=1}^{NE_h} |I_e^h| \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} < v_i - v_{0i} >_{E_e^h}^2}_{E_{mb}^h} + \underbrace{\int_{\bar{P}} \int_{\bar{e}} \frac{1}{e} w_{fl} d\xi_{2D}}_{E_{fl}} + \underbrace{\int_{\bar{\Omega}} \int_{\bar{\omega}} w_g^M d\xi_{3D}}_{E_{gom}} + \underbrace{\int_{\bar{P}} w_{coupl} d\xi_{2D}}_{E_{coupl}} . \quad (4.9)$$

Le problème discret qui est résolu pour approcher la solution du problème continu Pb2.4.2 s'écrit alors :

**Pb 4.1.1** Trouver  $(\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h$  et  $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in K_h^0$ , on ait

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial (\underline{x}, \underline{d}_i)} (\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left( \hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) \right) = F(\hat{x}) \\ \forall p \in [1, NN_d^h] , \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3 , \quad \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (4.10)$$

Ce système d'équation est non linéaire, et sera résolu par une méthode itérative de Newton projetée. L'étape de projection permet de garantir que chaque itéré reste dans la variété  $K_h^{rel}$ . Ceci augmente la robustesse et permet de ne manipuler que des matrices tangentes symétriques. La première chose à faire est de linéariser les équations 4.10 à chaque itération, ce que nous allons faire dans ce qui suit.

## ■ 4.2 Méthode de résolution

### 4.2.1 Equations d'Euler-Lagrange linéarisées

Plaçons nous dans une configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \in K_h^{rel}$  satisfaisant la contrainte d'orthonormalité 4.5, qui peut par exemple correspondre à la configuration correspondant à l'itération  $n$  d'une méthode de Newton. On cherche à construire une nouvelle configuration, notée  $(\underline{x}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1}) \in K_h^{rel}$ , qui s'approche de la solution du problème Pb4.1.1. Pour cela, la manière classique de faire est de linéariser les équations d'Euler-Lagrange 4.10 autour de la configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$  puis de calculer l'incrément  $(\delta x, \delta d_i)$  par simple résolution d'un système linéaire, afin de projeter la solution incrémentée sur la variété des solutions admissibles.

Linéarisons donc les équations 4.10 autours de la configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \in K_h^{rel}$  et  $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$ . On obtient :

**Pb 4.2.1** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in K_h^0$  et  $\underline{\delta \lambda} \in \mathbb{R}^{6 * NN_d^h}$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in K_h^0$ , on ait

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) + \frac{\partial^2 E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)^2}(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \cdot (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \right] \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) \\ & + \sum_{p=1}^{NN_d^h} (\underline{\lambda} + \underline{\delta \lambda}) \left( \hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j^n(N_p) + \underline{d}_i^n(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) \right) \\ & + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \underline{\lambda} \left( \hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) \right) \\ = & F(\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\forall p \in [1, NN_d^h], \quad \forall 1 \leq i \leq j \leq 3, \quad \underline{d}_i^n(N_p) \cdot \underline{\delta d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j^n(N_p) = 0 \quad (4.12)$$

L'équation 4.12 signifie que  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i)$  appartient à l'espace tangent  $dK_h^{rel}(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ , et est équivalente à

$$\forall p \in [1, NN_d^h], \exists \underline{\omega}_p \in \mathbb{R}^3, \forall i \in [1; 3], \quad \underline{\delta d}_i(N_p) = \underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i(N_p) = \underline{D}_i(N_p) \cdot \underline{\omega}_p, \quad (4.13)$$

où  $\underline{D}_i$  est le tenseur de rotation élémentaire associé au vecteur  $\underline{d}_i$ , défini par :  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \underline{D}_i \cdot \underline{v} = \underline{v} \wedge \underline{d}_i$ .

On se limite alors à des fonctions tests  $(\hat{x}, \hat{d}_i)$  appartenant également à l'espace tangent  $dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ . Elles sont donc telles que :

$$\forall p \in [1, NN_d^h], \exists \hat{\omega}_p \in \mathbb{R}^3, \forall i \in [1; 3], \quad \hat{d}_i(N_p) = \hat{\omega}_p \wedge \underline{d}_i(N_p) = \underline{D}_i(N_p) \cdot \hat{\omega}_p, \quad (4.14)$$

de telle sorte que ces fonctions tests satisfont automatiquement :

$$\hat{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) = 0.$$

Le problème linéarisé devient alors :

**Pb 4.2.2** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$  tels que,  $\forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ , on ait

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) + (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \cdot \frac{\partial^2 E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)^2}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) \\ & - \sum_{p=1}^{NN_d^h} \underline{\lambda} \left( \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_j(N_p) \cdot \hat{d}_i(N_p) \right) \\ = & F(\hat{x}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ce problème linéarisé peut alors s'écrire sous la forme générique :

**Pb 4.2.3** Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$  tel que,  $\forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ , on ait

$$a\left((\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i), (\hat{x}, \hat{d}_i)\right) = l\left(\hat{x}, \hat{d}_i\right)$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} a\left((\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i), (\hat{x}, \hat{d}_i)\right) &= \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) \\ &\quad - \sum_{p=1}^{NN_d^h} \underline{\lambda} \left( \underline{\delta d}_i(N_p) \cdot \hat{d}_j(N_p) + \underline{\delta d}_j(N_p) \cdot \hat{d}_i(N_p) \right) \\ l\left(\hat{x}, \hat{d}_i\right) &= F(\hat{x}) - \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{x}, \hat{d}_i) \end{aligned} \right.$$

Remarque : En réduisant l'espace des fonctions tests à  $dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ , nous avons fait disparaître l'incrément des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\delta \lambda}$  du problème linéarisé. Pourtant, la valeur actualisée des multiplicateurs sera nécessaires à l'itération suivante, donc il nous faut trouver une méthode pour les calculer. Cela est fait dans la sous section 4.2.3.

## Ecriture globale

On regroupe les les valeurs nodales des déplacements  $\underline{\delta x} \in \mathcal{V}_h$  dans un vecteur global noté  $\underline{\delta \mathbb{X}} \in \mathbb{R}^{3*NN_x^h}$ , et les variations des directeurs  $\underline{\delta d}_i \in \mathcal{W}_h$  dans un vecteur global noté  $\underline{\delta \mathbb{D}} \in \mathbb{R}^{9*NN_d^h}$ .

On peut alors construire de manière classique une matrice  $\underline{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{NDG \times NDG}$  et un vecteur global  $\underline{\mathbb{L}} \in \mathbb{R}^{NDG}$ , construits à partir des expressions de  $a(\cdot, \cdot)$  et  $l(\cdot)$  et des fonctions de formes  $\varphi_i$ , tels que :

$$\forall (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h, \forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h, \quad a\left((\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i), (\hat{x}, \hat{d}_i)\right) = (\underline{\delta \mathbb{X}}^T \underline{\delta \mathbb{D}}^T) \cdot \underline{\mathbb{A}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{U}} \\ \hat{\underline{D}} \end{pmatrix}$$

$$\forall (\hat{x}, \hat{d}_i) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h, \quad l\left(\hat{x}, \hat{d}_i\right) = \underline{\mathbb{L}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{U}} \\ \hat{\underline{D}} \end{pmatrix}$$

Pour tenir compte de la restriction du problème au sous-espace  $dK_h(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$ , on réécrit les conditions 4.13 et 4.14 sous la forme :

$$\begin{cases} \underline{\delta \mathbb{D}} = \underline{\mathbb{B}} \cdot \underline{\mathbb{W}} \\ \hat{\underline{D}} = \underline{\mathbb{B}} \cdot \hat{\underline{W}} \end{cases}$$

où  $\underline{\mathbb{W}}$  et  $\hat{\underline{W}}$  contiennent respectivement les valeurs  $\underline{\omega}_p$  et  $\hat{\omega}_p$ , sont de dimension  $NDR = 3 * NN_d^h$ , et où la matrice  $\underline{\mathbb{B}}$  est de dimension  $NDG \times NDR$ .

Le problème Pb4.2.3 peut alors être écrit sous la forme :

**Pb 4.2.4** Trouver  $(\underline{\delta \mathbb{X}}, \underline{\mathbb{W}}) \in \mathbb{R}^{3*NN_x^h} \times \mathbb{R}^{3*NN_d^h}$  tel que

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbb{A}}_{xx} & \underline{\mathbb{A}}_{xd} \cdot \underline{\mathbb{B}} \\ \underline{\mathbb{B}}^T \cdot \underline{\mathbb{A}}_{dx} & \underline{\mathbb{B}}^T \cdot \underline{\mathbb{A}}_{dd} \cdot \underline{\mathbb{B}} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbb{K}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta \mathbb{X}} \\ \underline{\mathbb{W}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\mathbb{L}}_x \\ \underline{\mathbb{B}}^T \cdot \underline{\mathbb{L}}_d \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbb{F}}} \quad (4.16)$$

## 4.2.2 Projection sur l'espace des directeurs orthonormés

Dans la sous section 4.2.1, nous avons fait l'hypothèse que la configuration courante  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)$  appartient à la variété  $K_h^{rel}$  puis nous avons voulu construire une nouvelle configuration  $(\underline{x}^{n+1}, \underline{d}_i^{n+1})$  supposée également dans  $K_h^{rel}$ . Mais ce que nous avons "caché", c'est que la variété  $K_h^{rel}$  est non linéaire, ce qui signifie que l'incrémenté

$$(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) + (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \notin K_h^{rel} .$$

Donc on ne peut pas passer d'une configuration à une autre par une simple incrémentation de la forme

$$\forall p \in [1; NN_d^h], \quad \underline{d}_i^{n+1}(N_p) = \underline{d}_i^n(N_p) + \underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i^n(N_p) .$$

A chaque noeud de rotation  $N_p$ , il est nécessaire de projeter la configuration incrémenté  $(\underline{x}^n(N_p), \underline{d}_i^n(N_p)) + (\underline{\delta x}(N_p), \underline{\omega}_p \wedge \underline{d}_i^n(N_p))$  pour avoir une configuration actualisée admissible. Après projection, la configuration modifiée s'écrit :

$$\forall p \in [1; NN_d^h], \quad \begin{cases} \underline{x}^{n+1}(N_p) = \underline{x}^n(N_p) + \underline{\delta x}(N_p) \\ \underline{d}_i^{n+1}(N_p) = \underline{\Pi}(\underline{\omega}_p) \cdot \underline{d}_i^n(N_p) \in SO(3) \end{cases} \quad (4.17)$$



La construction de la projection  $\underline{\underline{\Pi}}$  sur  $SO(3)$  s'appuie sur le fait que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}$  (de vecteur rotation  $\underline{\omega}$ ) est une matrice orthogonale. Comme cela a été fait dans le cas continu, on définit en fait  $\underline{\underline{\Pi}}$  comme étant l'approximation au second ordre de l'exponentielle :

$$\underline{\underline{\Pi}}(\underline{\omega}) = \underline{\underline{I}} + \frac{2}{4 + \|\underline{\omega}\|^2} \left( 2\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}}^2 \right) \quad (4.18)$$

Nous avons déjà démontré que cette projection est bien orthogonale dans la section 2.5.

### 4.2.3 Calcul des multiplicateurs de Lagrange

Comme nous l'avons remarqué dans la sous-section 4.2.1, le système linéaire 4.15 issu des équations d'Euler Lagrange linéarisées ne permet pas le calcul de l'incrément des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{\delta\lambda} \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$ . Nous cherchons donc ici une autre méthode pour actualiser ces multiplicateurs.

Commençons par rappeler la décomposition 4.8 de l'espace des champs  $K_h^0$  en espaces supplémentaires :

$$K_h^0 = dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i) \oplus \overline{dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)}$$

Le problème variationnel Pb4.1.1 est alors équivalent à

Trouver  $(\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h^{rel}$  et  $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{6*NN_d^h}$  tels que on ait

$$\forall (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) \in dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i),$$

$$\frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \underline{\lambda} \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) = F(\hat{\underline{x}}) \quad (4.19)$$

$$= 0 \text{ car } (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) \in dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)$$

$$\text{et } \forall (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) \in \overline{dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)},$$

$$\frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \underline{\lambda} \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) = F(\hat{\underline{x}}) \quad (4.20)$$

La valeur des multiplicateurs de Lagrange est donc déterminée à partir de l'équation 4.20. Pour l'explicitier, on reprend la définition 4.7 de l'espace  $\overline{dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)}$  :

$$\overline{dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_i)} = \left\{ (\underline{\delta x}, \underline{\delta d}_i) \in K_h^0 \text{ tels que } \left. \begin{array}{l} \forall p \in [1; NN_x^h], \quad \underline{\delta x}(M_p) = \underline{0} \\ \forall p \in [1; NN_d^h], \exists \underline{S}_p \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}, \forall i \in [1; 3], \quad \underline{\delta d}_i(N_p) = \underline{S}_p \cdot \underline{d}_i(N_p) \end{array} \right\}$$

L'espace des matrices de dimension  $3 * 3$  symétriques peut être engendré par les 6 matrices :

$$\forall i \in [1, 3], \forall j \in [i, 3], \quad \underline{S}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} \underline{d}_i \otimes \underline{d}_j & \text{si } i = j \\ \frac{1}{2} \left[ \underline{d}_i \otimes \underline{d}_j + \underline{d}_j \otimes \underline{d}_i \right] & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Par résolution de 4.20 avec ces matrices symétriques, on obtient au final les valeurs de toutes les composantes du multiplicateur de Lagrange :

$$\forall p \in [1, NN_d^h], \forall i \in [1, 3], \forall j \in [i, 3], \quad \lambda_{ij}^p = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial \underline{d}_i(N_p)} \cdot \underline{d}_i(N_p) & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial \underline{d}_i(N_p)} \cdot \underline{d}_j(N_p) + \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial \underline{d}_j(N_p)} \cdot \underline{d}_i(N_p) \right] & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (4.21)$$

### 4.2.4 Gestion des conditions aux limites

En plus des conditions aux limites classiques sur les déplacements  $\underline{\delta x}$ , notre modèle doit gérer des conditions aux limites sur les rotations des directeurs. Par exemple, lorsqu'une face est encadrée, on souhaite que les rotations des câbles soient contrôlées.

Pour imposer des vecteurs directeurs donnés  $(\underline{d}_1^i, \underline{d}_2^i, \underline{d}_3^i)$  en un noeud de rotations  $N_p$  à partir d'une configuration courante  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$ , on veut approcher :

$$\forall k \in [1, 3], \underline{\delta d}_k(N_p) = \underline{d}_k^i(N_p) - \underline{d}_k(N_p)$$

Si on considère la variation dans l'espace  $dK_h^{rel}(\underline{x}, \underline{d}_k)$  et qu'on utilise la relation 4.13, cette condition devient :

$$\forall k \in [1, 3], \underline{D}_k(N_p) \cdot \underline{\omega}_p = \underline{d}_k^i(N_p) - \underline{d}_k(N_p)$$

On va donc pénaliser le terme

$$\sum_{k=1}^3 \left( \underline{D}_k(N_p) \cdot \underline{\omega}_p - \underline{d}_k^i(N_p) + \underline{d}_k(N_p) \right)^2 \quad (4.22)$$

Cette contrainte est fortement non linéaire, et on ne peut pas garantir que la configuration convergée la satisfasse par simple pénalisation à chaque itération dans la méthode de Newton. Pour remédier à cela, le contrôle des rotations des câble se fait en deux étapes dans la méthode de Newton :

- 1<sup>ere</sup> itération : Le câble est initialement dans sa configuration de repos, et on va pénaliser la variation de rotation  $\underline{\omega}$  selon 4.22 pour se rapprocher de la rotation souhaitée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{d}_k(N_p) = \underline{d}_k^0(N_p) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \\ \sum_{k=1}^3 \left\| \underline{D}_k(N_p) \cdot \underline{\omega}_p - \underline{d}_k^i(N_p) + \underline{d}_k(N_p) \right\|^2 \rightarrow 0 \text{ par pénalisation} \end{array} \right. \quad (4.23)$$

- Itérations suivantes : On affecte exactement la valeur voulue à tous les vecteurs directeurs imposés, et on impose la rotation à zéro en ces points :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{d}_k(N_p) = \underline{d}_k^i(N_p) \quad \text{pour } k = 1, 2, 3 \\ \underline{\omega}_p = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

### 4.2.5 Algorithme complet

Les outils introduits dans les sous-sections précédentes nous permettent de construire un algorithme de Newton-Raphson projeté, décrit dans ce qui suit :

#### Initialisation

Supposons que l'on travaille sur un maillage nous fournissant les coordonnées  $(\underline{X}(M_p))_{p \in [1; NN_x^h]}$  des noeuds de déplacement au repos.

La configuration initiale des inconues  $\underline{x}(M_p)$  est alors défini simplement par

$$\forall p \in [1; NN_x^h], \quad \underline{x}^0(M_p) = \underline{X}(M_p) \quad (4.25)$$

ou par lecture d'une configuration préalablement calculée.

L'initialisation des vecteurs directeurs à chaque noeud de rotation  $N_p$  du maillage se fait à partir du triplet  $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3)$  construit selon l'expression 4.4 :

$$\forall p \in [1, NN_d^h], \quad \begin{cases} \underline{d}_1^0(N_p) = \underline{a}_1(N_p) \\ \underline{d}_2^0(N_p) = \underline{a}_2(N_p) \\ \underline{d}_3^0(N_p) = \underline{a}_3(N_p) \end{cases} \quad (4.26)$$

Il est à noter que dans le cas d'une nappe initialement non plane, la relation  $\underline{d}_1^0 = \underline{a}_1$  est valable à chaque noeud de rotation par construction, mais l'interpolation ne permet pas de la satisfaire à chaque point de Gauss de la surface moyenne. Cela peut créer un cisaillement initial dans les câbles.

### Critère d'arrêt

#### Norme sur l'incrément de déplacements :

Une première norme est proposée par (Bourgat et al., 1988) :

$$\frac{\left( \iint_{\Omega} \|\underline{x}^n - \underline{x}^{n-1}\|^2 dX_{3D} + \iint_{\mathcal{S}_m} \|\underline{d}_2^n - \underline{d}_2^{n-1}\|^2 + \|\underline{d}_3^n - \underline{d}_3^{n-1}\|^2 ds \right)^{1/2}}{\left( \iint_{\Omega} \|\underline{x}^n - \underline{x}^0\|^2 dX_{3D} + \iint_{\mathcal{S}_m} \|\underline{d}_2^n\|^2 + \|\underline{d}_3^n\|^2 \right)^{1/2}}$$

Cette norme ne parait pas appropriée pour deux raisons :

- la différence entre directeurs  $\underline{d}_i^n - \underline{d}_i^{n-1}$  n'a pas de sens physique ;
- elle mélange les grandeurs  $\underline{x}$ , qui sont des longueurs, aux directeurs  $\underline{d}_i$  qui sont unitaires.

Pour résoudre ces problème, nous avons utilisé des angles d'Euler pour quantifier l'incrément de rotation des câbles, notés :

$$\begin{cases} \underline{\theta}^n : \text{angles d'Euler entre le triplet courant } (\underline{d}_i^n)_{i=1,2,3} \text{ et le triplet initial } (\underline{d}_i^0)_{i=1,2,3} \\ \underline{\delta\theta}^n : \text{angles d'Euler entre le triplet courant } (\underline{d}_i^n)_{i=1,2,3} \text{ et le triplet précédent } (\underline{d}_i^{n-1})_{i=1,2,3} \end{cases}$$

Pour surmonter la seconde difficulté, à savoir la différence de grandeur entre les objets à quantifier, on introduit une longueur caractéristique de câble, notée  $L_c$ . Typiquement, cette longueur représente la longueur de flambement moyenne pouvant apparaitre sur les câbles.

On choisit alors d'utiliser la norme sur les incréments de déplacements suivante :

$$\|\|\underline{x}^n, \underline{d}_i^n\|\| = \frac{\left( \iint_{\Omega} \|\underline{x}^n - \underline{x}^{n-1}\|^2 d\xi_{3D} + L_c^2 \iint_{\mathcal{S}_m} \|\underline{\delta\theta}^n\|^2 d\xi_{2D} \right)^{1/2}}{\left( \iint_{\Omega} \|\underline{x}^n - \underline{x}^0\|^2 d\xi_{3D} + L_c^2 \iint_{\mathcal{S}_m} \|\underline{\theta}^n\|^2 d\xi_{2D} \right)^{1/2}} . \quad (4.27)$$

Pour  $\epsilon > 0$ , le critère d'arrêt sur les déplacements utilisé dans l'algorithme de Newton s'écrit finalement

$$\|\|\underline{x}^n, \underline{d}_i^n\|\| \leq \epsilon . \quad (4.28)$$

#### Norme sur le résidu :

De même que pour les déplacements, il est nécessaire de prendre en compte la longueur caractéristique d'un câble pour définir la norme sur le résidu. On définit pour cela la norme :

$$\|\|\frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)}\|\| = \left( \iint_{\Omega} \left\| \frac{\partial w}{\partial \underline{x}} - \underline{f} \right\|^2 d\xi_{3D} + \frac{1}{L_c^2} \iint_{\mathcal{S}_m} \sum_{i=1}^3 \left\| \underline{D}_i \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{d}_i} \right\|^2 d\xi_{2D} \right)^{1/2} . \quad (4.29)$$

Pour  $\epsilon > 0$ , le critère d'arrêt sur le résidu s'écrit :

$$\|\|\frac{\partial E_{nap}^h}{\partial(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n)}\|\| \leq \epsilon . \quad (4.30)$$

### Méthode de Newton projetée

Si on rassemble les informations introduites dans cette section, on obtient finalement la méthode de Newton-Raphson projetée décrite par l'algorithme 1 :

**Input** : Maillage et chargement imposé  
**Input** : Nombre d'itérations maximum  $N_{max}$  et précision  $\epsilon$   
 Initialiser le numéro d'itération  $n = 0$  ;  
 Initialiser  $\underline{x}^0$  d'après 4.25 ;  
 Initialiser  $(\underline{d}_i^0)_{i=1,2,3}$  d'après 4.26 ;  
**while**  $n < N_{max}$  **et calcul non convergé do**  
    $n=n+1$  (début de l'itération suivante) ;  
   Construire  $\underline{\lambda}$  à partir de la configuration courante  $(\underline{x}^{n-1}, \underline{d}_i^{n-1}) \in K_h^{rel}$  selon 4.21 ;  
   Construire la matrice  $\underline{\mathbb{K}}$  et le second membre  $\underline{\mathbb{F}}$  à partir de 4.16 ;  
   Tenir compte des conditions aux limites par 4.23 ou 4.24 ;  
   Calculer la variation  $(\underline{\delta x}, \underline{\omega}) \in \mathcal{V}_h$  en résolvant le problème linéaire Pb4.2.4 ;  
   Actualiser la configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \in K_h^{rel}$  par projection selon 4.17 ;  
   **if conditions 4.28 et 4.30 satisfaites then**  
     **fin de l'algorithme** (Calcul convergé);  
   **else**  
     **Continuer** ;  
   **end**  
**end**  
**Output** : Configuration  $(\underline{x}^n, \underline{d}_i^n) \in K_h^{rel}$  à l'équilibre  
**Algorithme 1** : Algorithme de Newton-Raphson projetée pour résoudre un problème de nappe renforcée

## 4.3 Comportement asymptotique : tests numériques

Nous présentons dans cette section trois tests numériques correspondant au cadre formel étudié dans le chapitre 3. Ils ont pour but de vérifier si cette méthode satisfait aux deux conditions :

- Le verrouillage numérique est évité pour des problèmes à flexion non inhibée ;
- Aucun mode parasite n'apparaît sur les problèmes à flexion inhibée.

Nous considérons une nappe fibrée rectangulaire, dont les côtés latéraux sont parallèles à  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ . Les dimensions de cette nappe dans la plan sont notées  $L_1$  et  $L_2$ . Nous supposons que l'épaisseur  $t$ , le rayon des fibres  $r$  et l'écartement entre elles, noté  $e$ , sont constants sur toute la surface de la nappe.

Nous définissons une nappe de référence dont les dimensions sont fixes, notées  $(L_1, L_2, t^0, e^0, n, r^0)$ . Dans cette nappe de référence, la gomme est modélisée par un modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible. Sa densité volumique d'énergie s'écrit :

$$w_g = C_1(I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 * (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2$$

Nous choisissons les valeurs de référence :

$$\begin{cases} C_1^0 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2^0 = 1.062 \text{ MPa} \\ \kappa^0 = 1000. \text{ MPa} \end{cases}$$

Les câbles sont quant à eux représentés par le modèle de densité de poutres décrit dans le chapitre 2. Leur densité surfacique d'énergie correspondante s'écrit donc :

$$w_c(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{2e} \left[ E_c A (v_1 - 1)^2 + G_c A (v_2^2 + v_3^2) + E_c I (u_2^2 + u_3^2) + G_c J u_1^2 \right]$$

Nous choisissons les valeurs de coefficients suivantes pour la nappe de référence :

$$\begin{cases} A^0 = \pi r^{02} = 0.56 \text{ mm}^2 \\ I^0 = \frac{\pi}{4} r^{04} = 0.025 \text{ mm}^4 \\ J^0 = \frac{\pi}{2} r^{04} = 0.05 \text{ mm}^4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_c = 100 \text{ GPa} \\ \nu_c = 0.3 \end{cases} \Rightarrow G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} = 38.5 \text{ GPa}$$

Notre objectif étant d'étudier le comportement de notre modèle numérique dans les cas extrêmes décrits dans le chapitre 3, nous introduisons un petit paramètre  $\epsilon$  pouvant tendre vers 0. Pour correspondre exactement au cadre de l'analyse réalisée dans le chapitre 3, nous faisons dépendre les dimensions géométriques de ce petit paramètre au sens suivant :

$$\begin{cases} t^\epsilon = \epsilon t^0 \\ e^\epsilon = \epsilon e^0 \\ r^\epsilon = \epsilon r^0 \end{cases},$$

ce qui implique

$$\begin{cases} A^\epsilon = \pi r^{\epsilon 2} = \epsilon^2 * A^0 \\ I^\epsilon = \frac{\pi}{4} r^{\epsilon 4} = \epsilon^4 * I^0 \\ J^\epsilon = \frac{\pi}{2} r^{\epsilon 4} = \epsilon^4 * J^0 \end{cases}.$$

Les coefficients de gomme intervenant dans le modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible sont eux aussi dépendant de  $\epsilon$  :

$$\begin{cases} C_1^\epsilon = \epsilon^2 C_1^0 \\ C_2^\epsilon = \epsilon^2 C_2^0 \\ \kappa^\epsilon = \epsilon^2 \kappa^0 \end{cases}.$$

L'analyse réalisée dans le chapitre 3 prédit que le coefficient de sous-intégration  $\rho$  apparaissant dans l'énergie discrète 4.9 est de la forme

$$\rho = c_0 \left( \frac{r^\epsilon}{L} \right)^2.$$

Les tests qui suivent feront également varier ce coefficient de sous-intégration  $\rho$ , de manière à vérifier qu'il peut être choisi de cette forme.

### 4.3.1 Problème en flexion non inhibée : flexion Cantilever

Dans les deux premiers tests qui suivent, nous considérons une nappe fibrée rectangulaire, dans laquelle les fibres sont orientées suivant  $e_1$  et donc alignées avec le maillage. Les dimensions caractéristiques de la nappe de référence sont :

$$\begin{cases} L_1 = 100 \text{ mm} \\ L_2 = 10 \text{ mm} \\ t^0 = 1.8 \text{ mm} \\ e^0 = 2.25 \text{ mm} \\ r^0 = 0.42 \text{ mm} \end{cases}$$

Nous discrétisons cette nappe avec les éléments finis Q2 décrits dans la section 4.1, avec  $NE_1 = 10$  éléments dans la direction des câbles, alors qu'on ne prend que  $NE_2 = 1$  et  $NE_3 = 1$  élément dans les directions latérale et transverse.

Dans ce premier test, nous encastrons la nappe à l'une de ses extrémités et nous laissons libre l'autre côté (cf figure 4.4(a)). Nous soumettons cette nappe à une densité de force transverse uniforme (qui peut être considérée comme son poids propre).

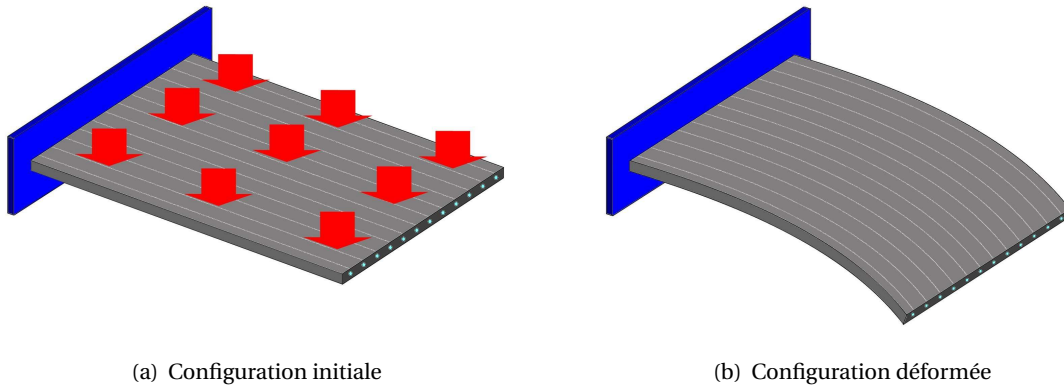


FIG. 4.4: Nappe plane encastrée à une extrémité sous poids propre.

Pour modéliser cette situation dans notre modèle éléments finis, nous bloquons les trois composantes de déplacements aux 3  $NE_2$  noeuds de translations de la face encastrée, ainsi que les trois composantes de rotations aux  $NE_2$  noeuds à rotations de cette face. Tous les degrés de liberté des autres noeuds sont laissés libres.

L'extrémité non encastrée étant laissée libre, les câbles pourront toujours trouver une configuration en flexion pure lorsque la force reste d'intensité raisonnable (cf figure 4.4(b)). Leur énergie de membrane/cisaillement est alors nulle, de telle sorte que  $\tilde{K}_{fl} \neq \{\underline{x}^0, \underline{d}_i^0\}$ . Ce problème est donc un problème à flexion des câbles non inhibée.

Dans ce problème, le rôle de la gomme est négligeable. Pour une densité surfacique de force  $\underline{f} = f_3 \underline{e}_3$  donnée, en supposant les déformations restent petites, nous pouvons alors approcher la solution par une expression analytique en linéarisant le problème variationnel Pb2.4.2 autour de la configuration de repos plane :

Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\omega}) \in \mathcal{V}_0$  tels que

$$\forall (\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{\omega}}) \in \mathcal{V}_0, \quad (\underline{\delta x}, \underline{\omega} \wedge \underline{e}_i) \cdot \frac{\partial^2 E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{d}_i)^2} \cdot (\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{\omega}} \wedge \underline{e}_i) = \iint_{\bar{P}} \underline{f} \cdot \underline{\hat{x}} \, dX_1 \, dX_2 \quad (4.31)$$

où l'espace  $\mathcal{V}_0$  est défini par

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ (\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{\omega}}) \in H^1(\bar{P}) \text{ tels que } \forall X_2 \in [0; L_2], \underline{\hat{x}}(0, X_2) = \underline{\hat{\omega}}(0, X_2) = \underline{0} \right\}$$

Le membre de gauche de l'équation 4.31 s'écrit de manière explicite :

$$\begin{aligned}
 (\underline{\delta x}, \underline{\omega} \wedge \underline{e}_i) \cdot \frac{\partial^2 E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{d}_i)^2} \cdot (\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{\omega}} \wedge \underline{e}_i) &= \iint_{\bar{P}} \frac{1}{e^\epsilon} EA^\epsilon \delta x'_1 \hat{x}'_1 \\
 &+ \frac{1}{e^\epsilon} GA^\epsilon (\delta x'_2 - \omega_3) (\hat{x}'_2 - \hat{\omega}_3) \\
 &+ \frac{1}{e^\epsilon} GA^\epsilon (\delta x'_2 - \omega_3) (\hat{x}'_2 - \hat{\omega}_3) \\
 &+ \frac{1}{e^\epsilon} EI^\epsilon (\omega'_2 \hat{\omega}'_2 + \omega'_3 \hat{\omega}'_3) \\
 &+ \frac{1}{e^\epsilon} GJ^\epsilon \omega'_1 \hat{\omega}'_1 \\
 &+ t^\epsilon c_{coupl}^\epsilon \omega_1 \hat{\omega}_1 dX_1 dX_2
 \end{aligned}$$

Ainsi, après une intégration par parties, l'équation variationnelle 4.31 s'écrit sous forme forte :

Trouver  $(\underline{\delta x}, \underline{\omega}) \in \mathcal{V}_0$  tels que

$$\begin{cases}
 \delta x_1'' = 0 \\
 \delta x_2'' - \omega_3' = 0 \\
 \delta x_3'' + \omega_2' = -\frac{e^\epsilon f_3}{GA^\epsilon} \\
 -\frac{1}{e} GJ^\epsilon \omega_1'' + t^\epsilon c_{coupl}^\epsilon \omega_1 = 0 \\
 EI^\epsilon \omega_2'' + GA^\epsilon (\delta x_3' + \omega_2) = 0 \\
 EI^\epsilon \omega_3'' - GA^\epsilon (\delta x_2' - \omega_3) = 0
 \end{cases} \quad (4.32)$$

sous les conditions aux limites supplémentaires

$$\forall X_2 \in [0; L_2], \begin{cases}
 \delta x_1'(L_1, X_2) = 0 \\
 \delta x_2'(L_1, X_2) - \omega_3(L_1, X_2) = 0 \\
 \delta x_3'(L_1, X_2) + \omega_2(L_1, X_2) = 0 \\
 \underline{\omega}'(L_1, X_2) = \underline{0}
 \end{cases}$$

La solution analytique de ce système d'équation différentielles linéaires est alors :

$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2]$ ,

$$\begin{cases}
 \delta x_1(X_1, X_2) = 0 \\
 \delta x_2(X_1, X_2) = 0 \\
 \delta x_3(X_1, X_2) = X_1 \left[ -\frac{1}{24 EI^\epsilon} X_1^3 + \frac{L}{6 EI^\epsilon} X_1^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{2 EI^\epsilon} + \frac{1}{EA^\epsilon} \right) X_1 + \frac{L}{EA^\epsilon} \right] e^\epsilon f_3 \\
 \delta x_1(X_1, X_2) = 0 \\
 \delta x_2(X_1, X_2) = X_1 \left( \frac{1}{3} X_1^2 - L X_1 + L^2 \right) \frac{e^\epsilon f_3}{2 EI^\epsilon} \\
 \delta x_3(X_1, X_2) = 0
 \end{cases} \quad (4.33)$$

Dans les tests réalisés ici, nous souhaitons obtenir un déplacement vertical en bout de nappe de  $\delta = 1 \text{ mm}$ , soit 1% de la longueur. D'après les expressions analytiques 4.33, on exerce pour cela une densité surfacique d'efforts

$$f_3 = -\frac{8 EI^\epsilon}{e^\epsilon L^4} \delta$$

Dans ce qui suit, nous comparons les résultats obtenus avec notre modèle avec cette solution analytique. Tout d'abord, si on ne réalise pas de sous-intégration numérique, on peut observer sur la figure 4.5 que les résultats numériques s'éloignent de la solution analytique lorsque  $\epsilon$  diminue.

Nous vérifions alors que ce phénomène n'a pas de signification physique en augmentant le nombre d'éléments finis dans la direction des câbles. Nous vérifions sur la figure 4.6 que l'on retrouve bien la solution analytique si on augmente le nombre d'éléments. Ainsi, pour une taille de maille donnée, la précision du modèle sans sous-intégration numérique se détériore lorsque le paramètre  $\epsilon$  diminue, ce qui est une caractéristique du phénomène de verrouillage numérique.

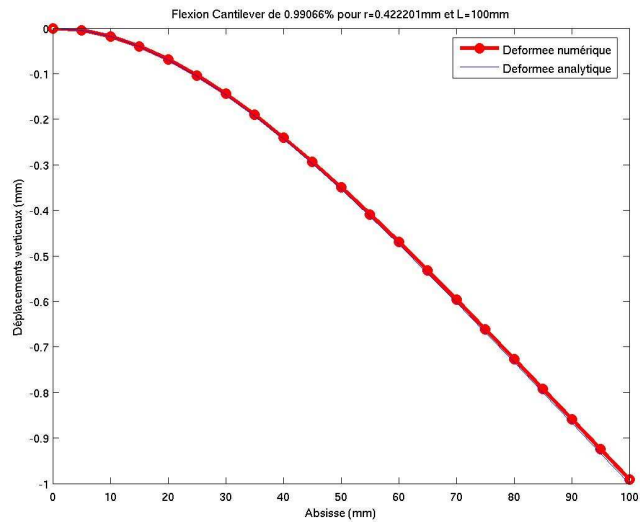
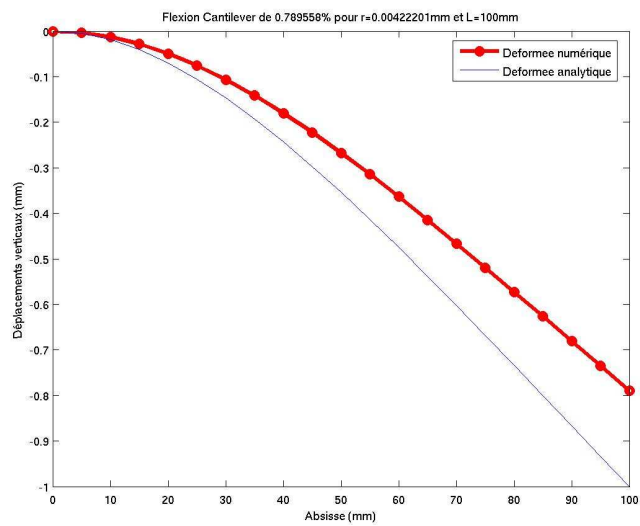
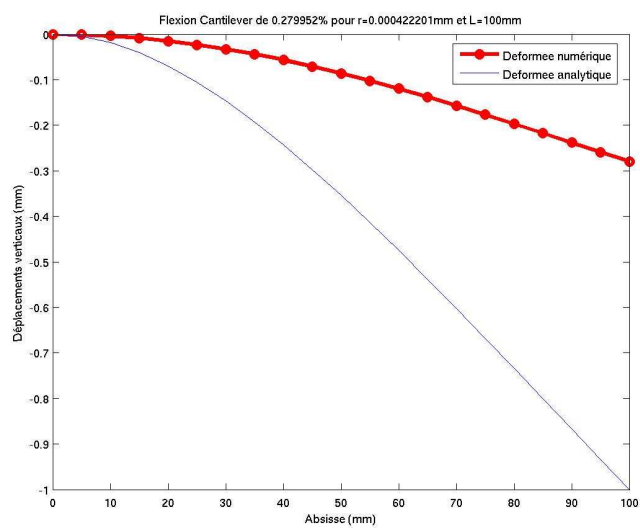
(a)  $\epsilon = 1$ (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ (c)  $\epsilon = 10^{-3}$ 

FIG. 4.5: Phénomène de verrouillage numérique sur un problème dominé en flexion lorsque l'épaisseur diminue et que l'énergie est intégrée de manière exacte.



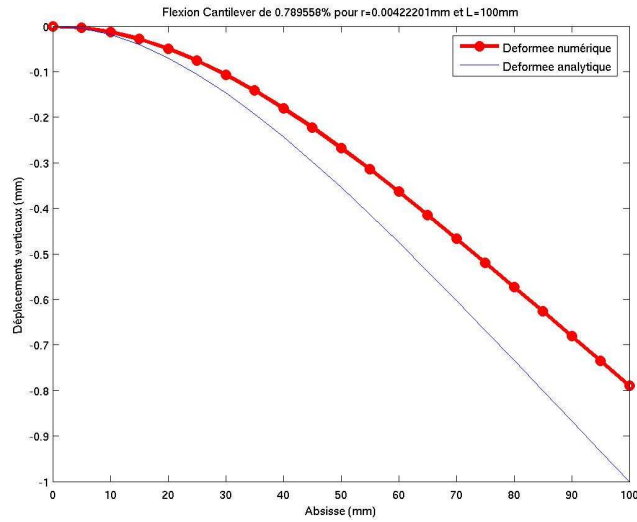
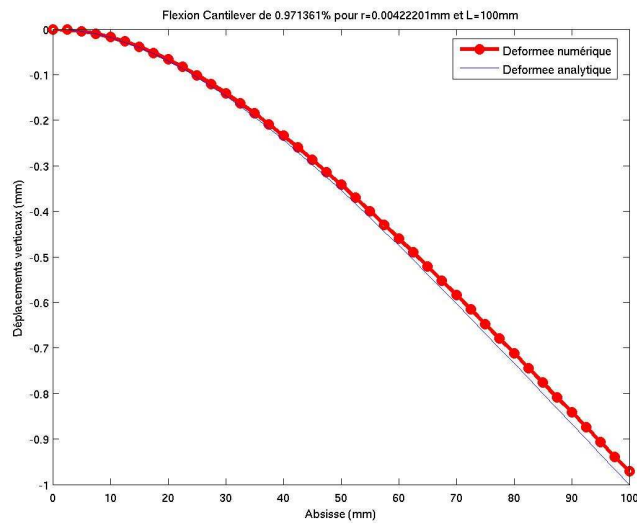
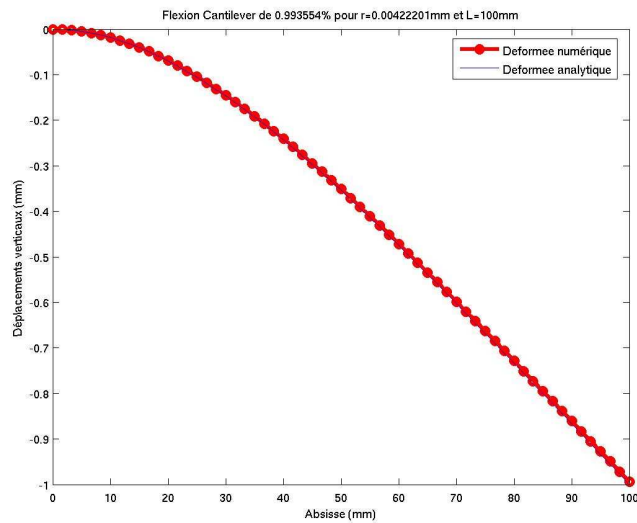
(a)  $NE = 10$ (b)  $NE = 20$ (c)  $NE = 30$ 

FIG. 4.6: Convergence en maillage sur un problème dominé en flexion pour une nappe d'épaisseur très petite ( $\epsilon = 10^{-2}$ ).

Pour éviter le phénomène de verrouillage numérique qui vient d'être mis en évidence sur ce problème dominé en flexion, les conclusions du chapitre 3 nous poussent à sous-intégrer le terme de membrane des câbles dans l'énergie. Nous réalisons alors les mêmes tests que précédemment pour plusieurs valeurs du coefficient de sous-intégration  $\rho$ . Les résultats obtenus sont récapitulés dans la tableau 4.1.

	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$	$\epsilon = 10^{-3}$
$\rho = 1$	99.0%	99.1%	78.9%	27.9%
$\rho = 10^{-1}$	99.1%	99.6%	95.5%	51.2%
$\rho = 10^{-2}$	99.3%	99.6%	99.1%	78.9%
$\rho = 10^{-3}$	99.3%	99.7%	99.6%	95.5%
$\rho = 10^{-4}$	99.4%	99.9%	99.6%	99.1%
$\rho = 10^{-5}$	99.4%	99.9%	99.7%	99.6%

TAB. 4.1: Pourcentages de déflexion pour une déflexion voulue de 1%

On peut observer que pour des petite valeurs du coefficient  $\rho$ , le modèle converge vers la solution analytique même lorsque le paramètre  $\epsilon$  est très petit. Plus précisément, nous voyons clairement apparaître une dépendance quadratique de la valeur optimale de  $\rho$  par rapport à  $\epsilon$ . Cela nous pousse donc à choisir le coefficient de sous-intégration  $\rho$  de la forme

$$\rho = \max\left(1., c_0 \left(\frac{r}{L_{cab}}\right)^2\right), \quad (4.34)$$

comme l'analyse formelle du chapitre 3 l'avais prédit. Dans ce cas particulier, les résultats présentés dans le tableau 4.1 nous montrent que la valeur  $c_0 = 10^6$  semble correcte. Nous présentons quelques résultats obtenus avec cette valeur du coefficient de sous-intégration sur la figure 4.7.

Tous les résultats qui ont été présentés jusque maintenant correspondent à des petites déformations autour d'une configuration plane. Pour valider notre modèle, il nous est alors nécessaire de vérifier que ces résultats sont aussi valables lorsqu'on s'éloigne d'une configuration plane ou que les déformations deviennent plus importantes.

Pour cela, nous reprenons le même test que précédemment, mais en imposant un déplacement vertical en boût de nappe de  $\delta = 10mm$ , soit des déformations 10 fois plus grandes qu'avant. Nous faisons alors varier les paramètres  $\epsilon$  et  $\rho$  comme alors précédemment, et nous récapitulons les résultats dans le tableau 4.2.

	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 10^{-1}$	$\epsilon = 10^{-2}$
$\rho = 1$	97.8%	78.6%	27.9%
$\rho = 10^{-1}$	98.4%	94.8%	51.1%
$\rho = 10^{-2}$	98.5%	98.4%	78.6%
$\rho = 10^{-3}$	98.6%	98.9%	94.8%
$\rho = 10^{-4}$	98.6%	99.1%	98.4%
$\rho = 10^{-5}$	98.6%	99.2%	98.9%

TAB. 4.2: Pourcentages de déflexion pour une déflexion voulue de 10%

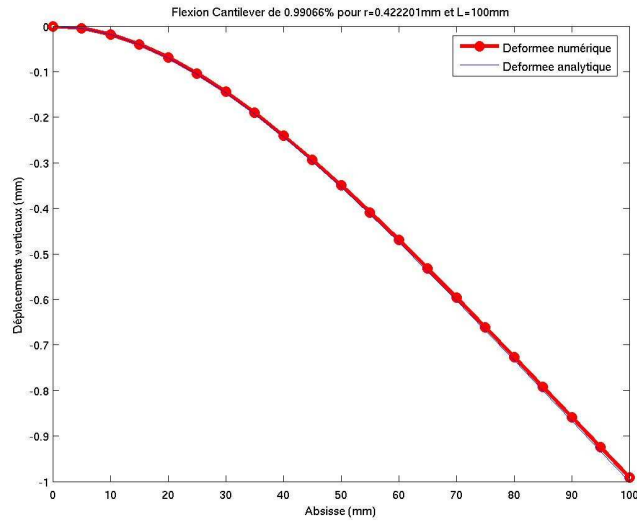
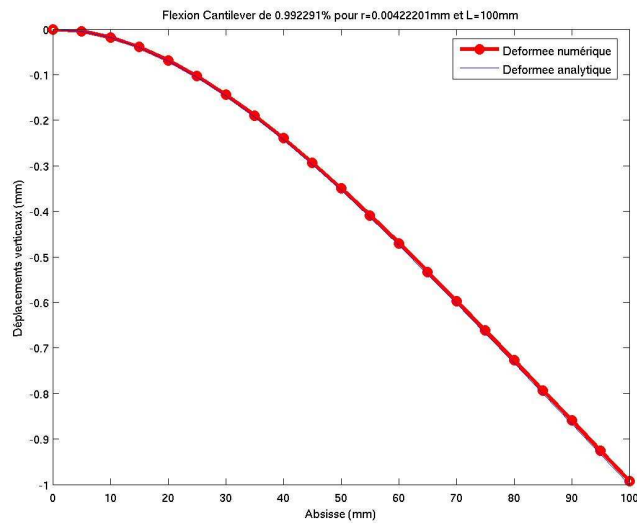
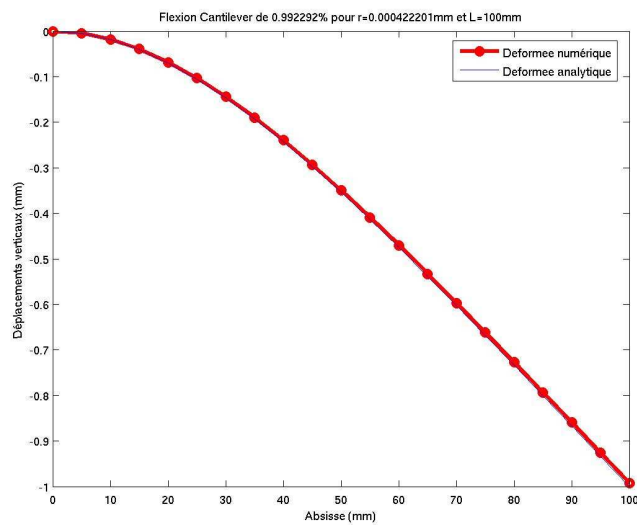
(a)  $\epsilon = 1$ (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ (c)  $\epsilon = 10^{-3}$ 

FIG. 4.7: Absence de verrouillage numérique sur un problème dominé en flexion lorsque l'épaisseur diminue et que le terme d'énergie de membrane est sous-intégré en utilisant le coefficient de sous-intégration donné par l'expression 4.34

Nous pouvons observer que la sous-intégration supprime également le phénomène de verrouillage numérique lorsque la configuration s'éloigne d'une configuration plane. Cependant, en comparant les tableaux 4.1 et 4.2, nous voyons apparaître une différence d'un facteur 10 : on retrouve la même valeur optimale de  $\rho$  pour  $\epsilon = \epsilon = 10^{-2}$  dans le cas d'une déflexion de  $\delta = 10mm$  que pour  $\epsilon = \epsilon = 10^{-3}$  dans le cas où  $\delta = 1mm$ . Cette remarque semble indiquer que le coefficient de sous-intégration devrait en fait dépendre également de la raideur géométrique  $EA(\nu_1 - 1)$ . Ce phénomène est dû à l'aspect non linéaire de notre problème, c'est pourquoi il n'était pas visible dans l'analyse formelle linéaire réalisée dans le chapitre 3. Ces cas extrêmes ne sont pas gérés dans le cadre de cette thèse. Nous conserverons donc dans tout ce qui suit la valeur du coefficient de sous-intégration donnée par l'expression 4.34.

### 4.3.2 Problème en flexion pure inhibée : nappe bisupportée sous poids propre

#### Fibres alignées avec le maillage

Dans ce second test, la nappe précédemment décrite est maintenant supportée à ses deux extrémités dans le sens des fibres (cf figure 4.8(a)), et soumise à une densité de force transverse uniforme (qui peut être considérée comme son poids propre).

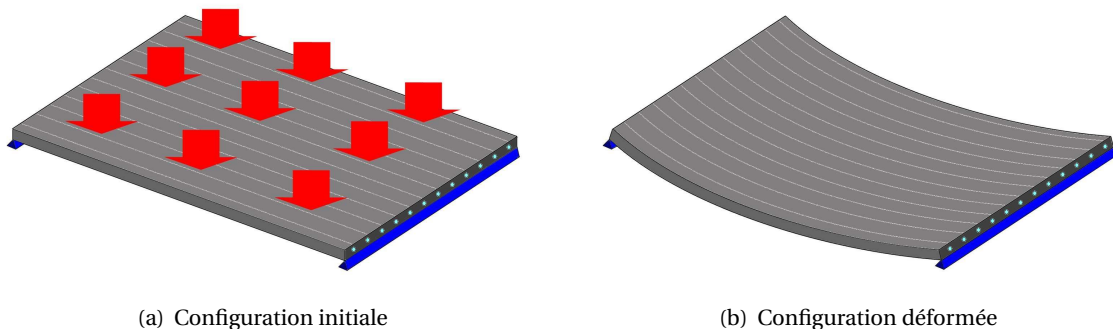


FIG. 4.8: Nappe plane bisupportée sous poids propre.

On suppose ainsi que les trois composantes de déplacements sont bloquées à ces extrémités. Pour modéliser cette situation dans notre modèle éléments finis, nous bloquons les trois composantes de déplacements aux 2  $NE_2$  noeuds de translations situés aux intersections de la surface moyenne de la nappe et des extrémités où la nappe est supportée, mais que les rotations  $y$  sont laissées libres. Tous les degrés de liberté des autres noeuds sont laissés libres.

Les extrémités des câbles initialement rectilignes étant fixes, il est évident que tout déplacement va créer un allongement des câbles (cf figure 4.8(b)), de telle sorte que  $\tilde{K}_{fI} = \{(\underline{x}^0, \underline{d}_i^0)\}$ . Ce problème est donc un problème à flexion des câbles purement inhibée.

Comme dans le test précédent, le rôle de la gomme est ici négligeable. Pour une densité surfacique de force  $\underline{f} = f_3 \underline{e}_3$  donnée, en supposant les déformations restent petites, nous pouvons essayer d'approcher la solution par une expression analytique en linéarisant le problème variationnel Pb2.4.2 autour de la configuration de repos plane. En procédant comme cela a été fait dans la sous-section 4.3.1, nous admettons qu'on se ramène au même système d'équations différentielles 4.32 sous les

conditions aux limites :

$$\forall X_2 \in [0; L_2], \quad \begin{cases} \delta x(0, X_2) = \delta x(L_1, X_2) = 0 \\ \underline{\omega}'(0, X_2) = \underline{\omega}'(L_1, X_2) = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce problème vérifie alors :

$$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \quad \begin{cases} \delta x_1(X_1, X_2) = 0 \\ \delta x_2(X_1, X_2) = 0 \\ \delta x_3(X_1, X_2) = \frac{f_3}{2EI} \left( \frac{1}{12} X_1^4 - \frac{1}{6} L X_1^3 \right) - \frac{f_3}{2GA} X_1^2 + \frac{f_3}{2} \left( \frac{1}{GA} + \frac{L^2}{12EI} \right) L X_1 \end{cases} \quad (4.35)$$

*Remarque* : Lorsqu'on résoud analytiquement le système d'équations différentielles précédent, on voit clairement l'importance numérique du terme de couplage  $c_{coupl} \omega_1 \hat{\omega}_1$ . Si ce terme n'était présent, le problème précédent serait mal posé car la rotation  $\omega_1$  serait définie à une constante près, ce qui signifie que l'énergie serait non coercive.

Lorsque le diamètre des fibres tend vers 0, alors  $1/GA$  devient négligeable par rapport à  $L^2/EI$ , donc les déplacements peuvent être approchés par :

$$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \quad \begin{cases} \delta x_1(X_1, X_2) = 0 \\ \delta x_2(X_1, X_2) = 0 \\ \delta x_3(X_1, X_2) = \frac{f_3}{2EI} \left( \frac{1}{12} X_1^4 - \frac{1}{6} L X_1^3 \right) + \frac{L^2 f_3}{24EI} L X_1 \end{cases} \quad (4.36)$$

Pour obtenir un déplacement vertical  $\delta$  au centre de la nappe, la linéarisation du problème nous suggère d'imposer la densité surfacique d'effort :

$$f_3 = - \frac{64 EI}{e L^4} \delta$$

On voit dans cette expression que la rigidité de la nappe au voisinage de la configuration plane est proportionnelle à  $\frac{EI}{e}$ . Cela est logique, puisqu'on retrouve une forme similaire aux problèmes de plaques linéaires, qui résistent uniquement en flexion.

Mais dans notre cas, le domaine de validité de cette linéarisation diminue en fait avec  $\epsilon$ , et c'est très rapidement le terme de membrane des câbles qui résiste dans le problème de nappe bisupporté. On représente la forte non-linéarité présente dans ce problème sur la figure 4.9. Il est alors difficile de contrôler proprement les calculs numériques lorsque le paramètre  $\epsilon$  diminue.

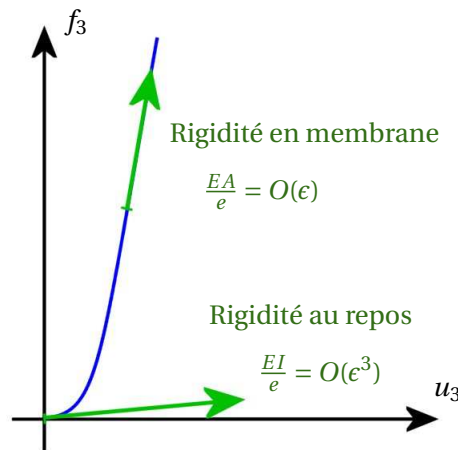


FIG. 4.9: Forte non linéarité du problème dominé en membrane.

Pour éviter cette forte linéarité et ainsi travailler sur un problème qui est mieux contrôlé, nous exerçons d'abord une traction horizontale de la nappe, de manière à obtenir  $\underline{x}' = (1 + \gamma)\underline{e}_1$ . Pour imposer cette tension, nous bloquons toujours les déplacements  $\delta x_2$  et  $\delta x_3$  en bout de nappe, mais nous y exerçons en plus une densité linéique d'efforts  $\underline{f} = \frac{EA}{e} \gamma \underline{e}_1$ .

La tension rend alors le terme de membrane prédominant, et la rigidité en flexion de la nappe est alors négligeable par rapport à la rigidité en membrane. La solution du problème peut alors être approchée en résolvant le problème de membrane linéaire

Trouver  $\underline{\delta x}$  minimisant

$$\int \int_{\bar{p}} \frac{1}{2} \frac{EA}{e} (\|(1 + \gamma)\underline{e}_1 + \underline{\delta x}'\| - 1)^2 - \underline{f} \cdot \underline{\delta x} \, dX_1 dX_2$$

sous la contrainte  $\forall X_2 \in [0; L_2], \underline{\delta x}(0, X_2) = \underline{\delta x}(L_1, X_2) = \underline{0}$ .

Nous admettons que la solution de ce problème est

$$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \begin{cases} \delta x_1 = 0 \\ \delta x_2 = 0 \\ \delta x_3 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \frac{f_3 e}{EA} X_1 (L - X_1) \end{cases}$$

Pour obtenir un déplacement vertical  $\delta$  au centre de la nappe, la linéarisation du problème nous suggère d'imposer la densité surfacique d'effort :

$$f_3 = \frac{8\gamma}{1 + \gamma} \frac{EA}{eL} \delta$$

Dans les tests présentés ici, nous choisissons d'imposer d'abord une tension horizontale de  $0.5mm$ , puis une déflexion de  $0.1mm$  au milieu de la nappe.

Il est bien connu que la méthode des éléments finis standard est adaptée à ce genre de problèmes dominés en membrane. On vérifie donc sur la figure 4.10 la bonne convergence de notre modèle en l'absence de sous-intégration quelque soit la valeur de  $\epsilon$ .

Le résultat qui est plus important est donné sur la figure 4.11 : la bonne convergence est conservée lorsqu'on utilise le coefficient de sous-intégration 4.34 et aucun mode parasite n'est observable même pour des petites valeurs de  $\epsilon$ .

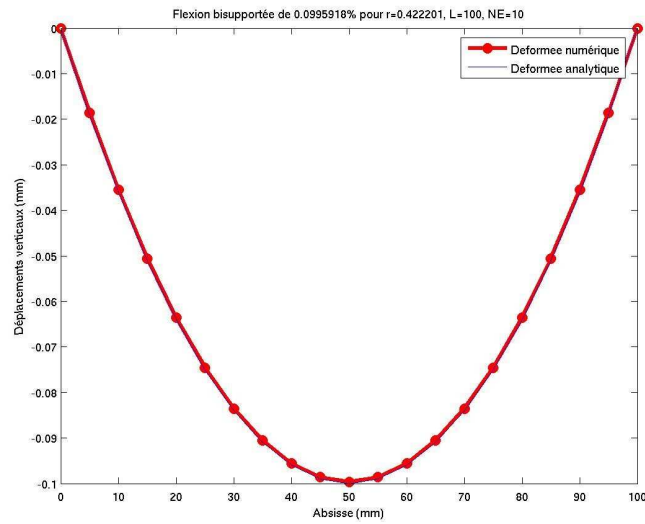
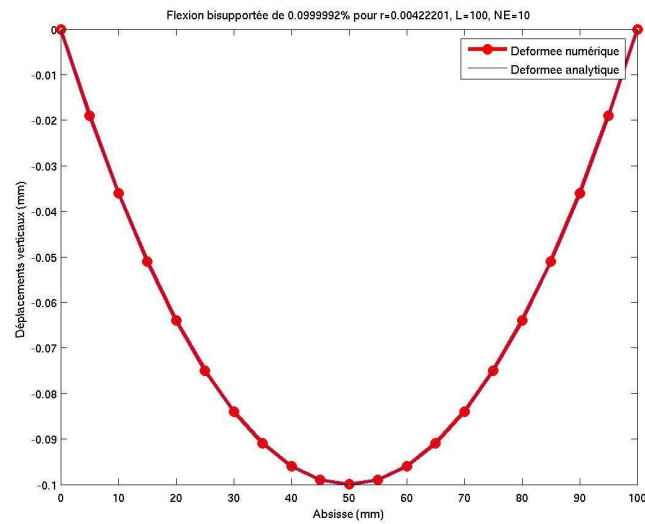
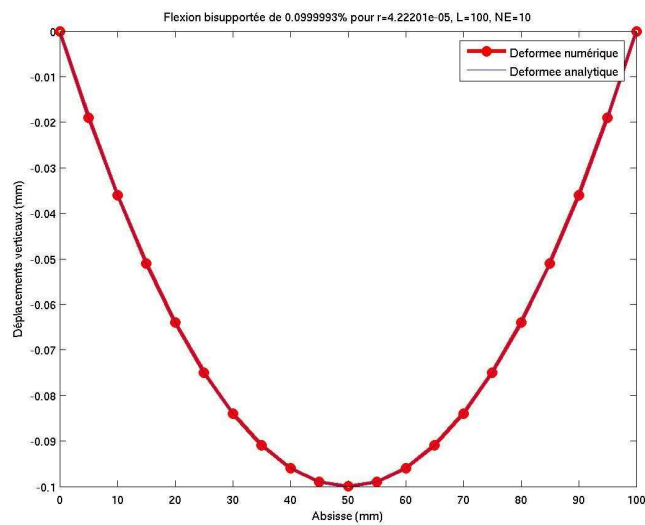
(a)  $\epsilon = 1$ (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ (c)  $\epsilon = 10^{-4}$ 

FIG. 4.10: Convergence des éléments finis sur un problème dominé en membrane lorsque l'épaisseur diminue et que l'énergie est intégrée de manière exacte.

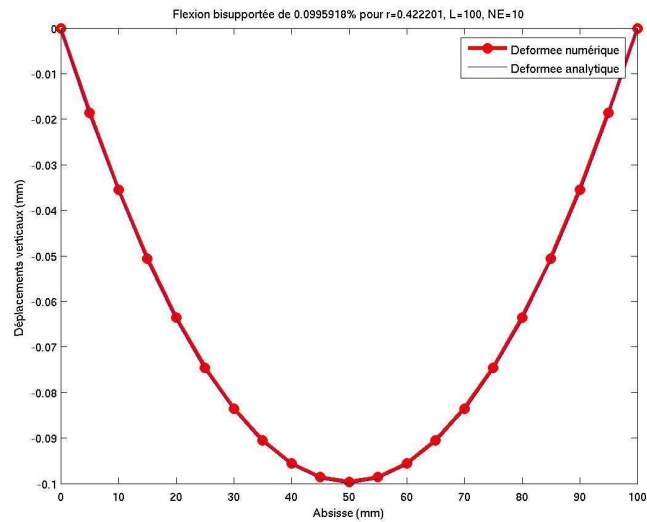
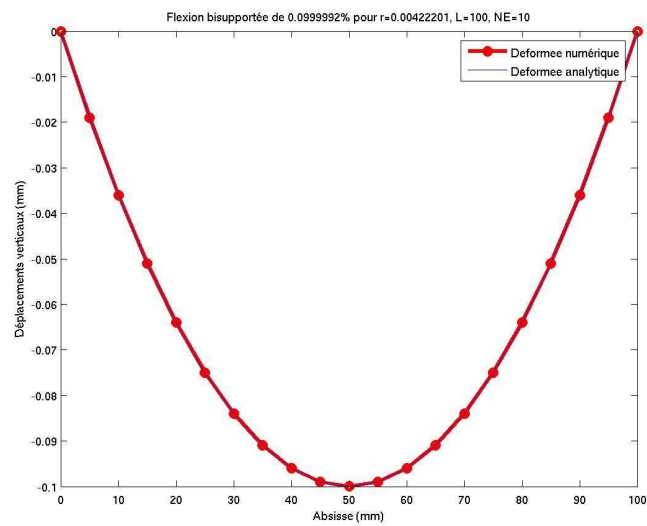
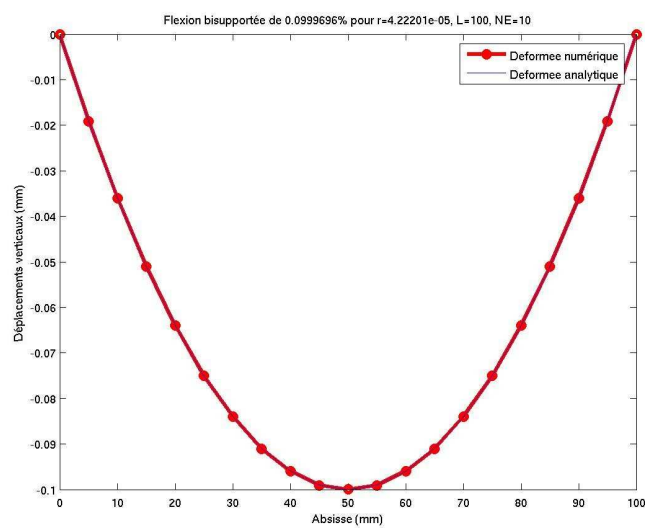
(a)  $\epsilon = 1$ (b)  $\epsilon = 10^{-2}$ (c)  $\epsilon = 10^{-4}$ 

FIG. 4.11: Absence de modes parasites sur un problème dominé en membrane lorsque l'épaisseur diminue et que le terme d'énergie de membrane est sous-intégré en utilisant le coefficient de sous-intégration donné par l'expression 4.34.



### Fibres inclinées par rapport au maillage

Nous avons vérifié avec le test précédent qu'aucun mode parasite n'apparaît sur un problème à flexion pure inhibée dans lequel les fibres sont alignées avec le maillage. Mais cette situation semble particulière, et il convient d'étudier un cas plus général à flexion pure inhibée.

Pour ce faire, nous considérons maintenant une nappe fibrée carrée, dans laquelle les fibres forment un angle  $\alpha = \frac{5\pi}{12}$  avec  $\underline{e}_2$  et ne sont donc plus alignées avec le maillage (cf figure 4.12).

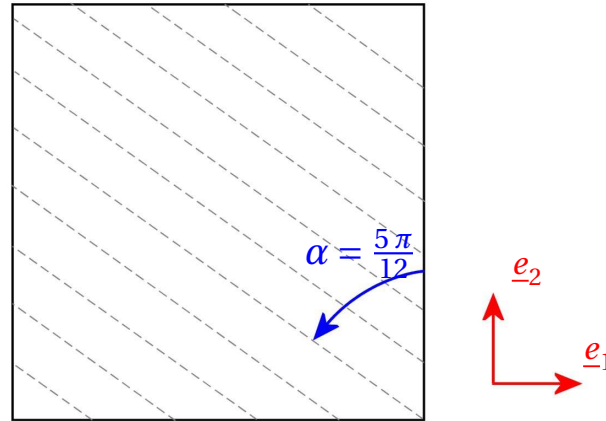


FIG. 4.12: Nappe plane supportée aux bords avec fibres inclinées.

Les dimensions caractéristiques de la nappe de référence sont :

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 100mm \\ t^0 = 1.8mm \\ e^0 = 2.25mm \\ r^0 = 0.42mm \end{cases}$$

La nappe est supportée à ses quatre bords et soumise à une densité de force transverse sinusoïdale :

$$\underline{f}_c = \epsilon f_0 \sin\left(2\pi \frac{X_2}{L_2}\right) \underline{e}_3$$

Nous discrétisons cette nappe avec les éléments finis Q2 décrits dans la section 4.1, avec  $NE$  éléments dans les deux directions du plan, alors qu'on ne prend que  $NE_3 = 1$  élément dans l'épaisseur.

La solution de ce problème est approchée sur la figure 4.13, qui correspond au résultat obtenu sur un maillage très fin sans sous-intégration de l'énergie de câble.

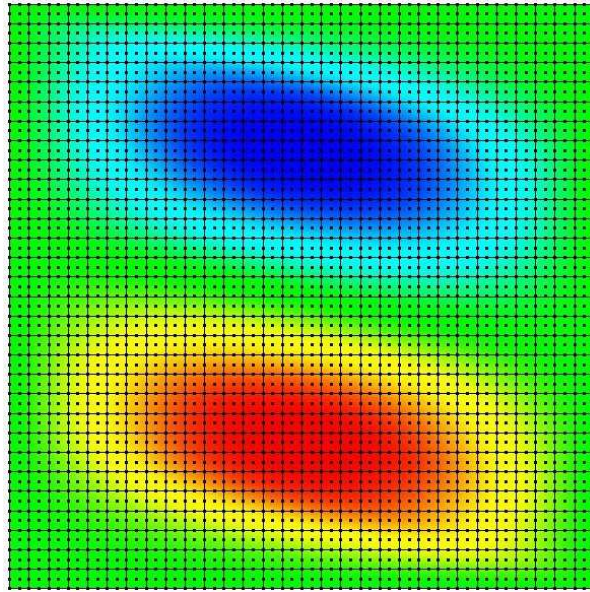


FIG. 4.13: Solution approchée du problème de nappe supportée aux bords avec fibres inclinées.

Sur ce problème, on observe qu'une sous-intégration exagérée de l'énergie de membrane peut engendrer deux types de modes parasites :

- des modes en forme de sablier à l'échelle des éléments finis (cf figure 4.14(a)) ;
- des modes en forme de lignes parallèles aux fibres (cf figure 4.14(b)).

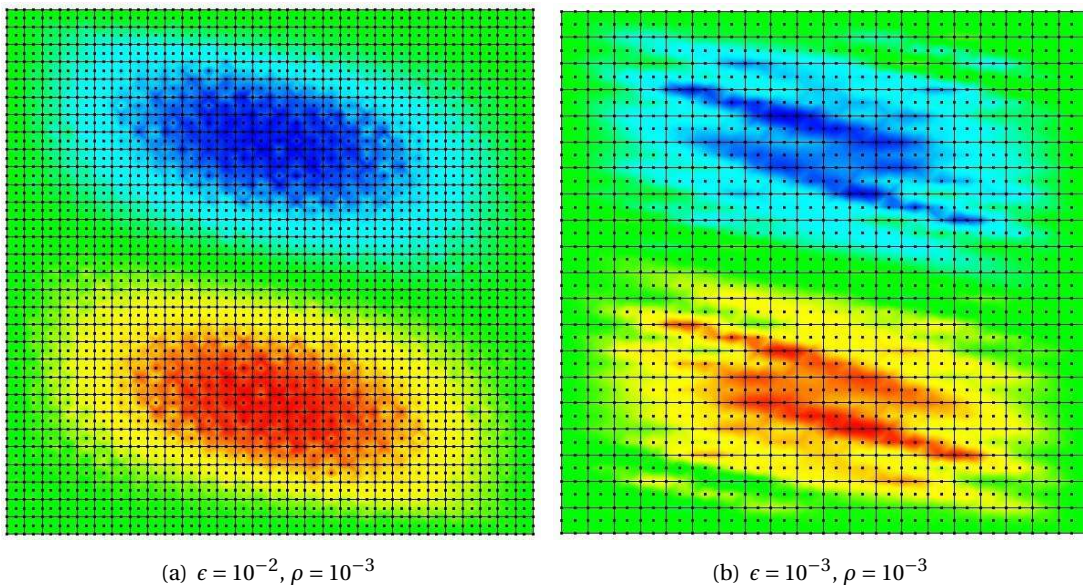


FIG. 4.14: Formes de modes parasites pouvant apparaître avec une sous-intégration trop forte.

Dans notre cas, on reprend un coefficient de sous-intégration  $\rho$  défini par l'expression 4.34, et on vérifie sur la figure 4.15 qu'aucun mode parasite n'apparaît en allant jusqu'à des rapports  $\frac{l}{L}$  de l'ordre de  $10^{-4}$ . Même si quelques légers modes sont visibles devient extrêmement fine (cf figure 4.16), ce résultat est très satisfaisant puisqu'il couvre les ordres de grandeur considérés dans notre cas.

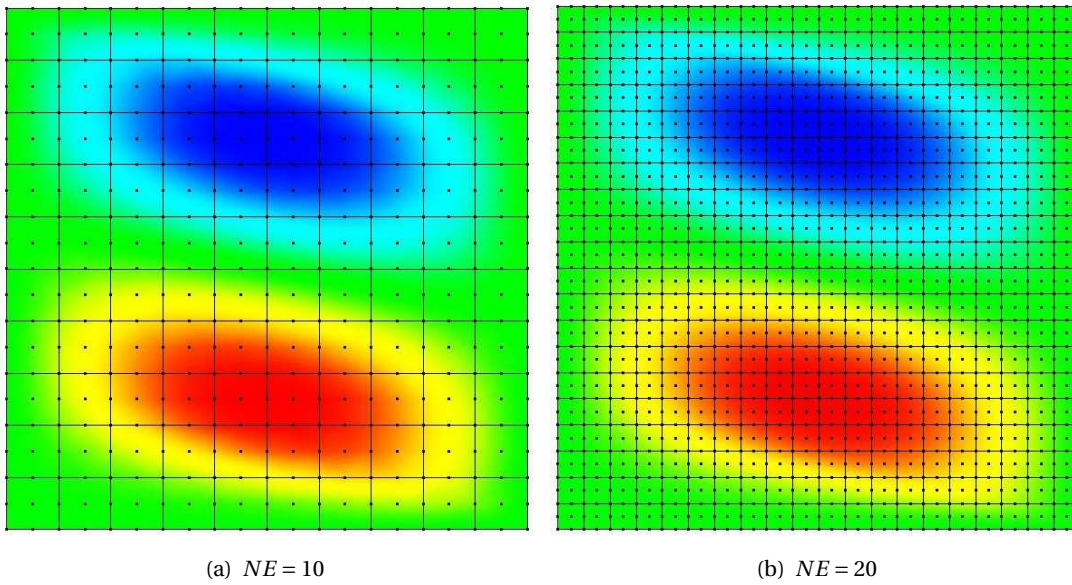


FIG. 4.15: Résultats obtenus avec notre modèle pour  $\epsilon = 10^{-4}$ .

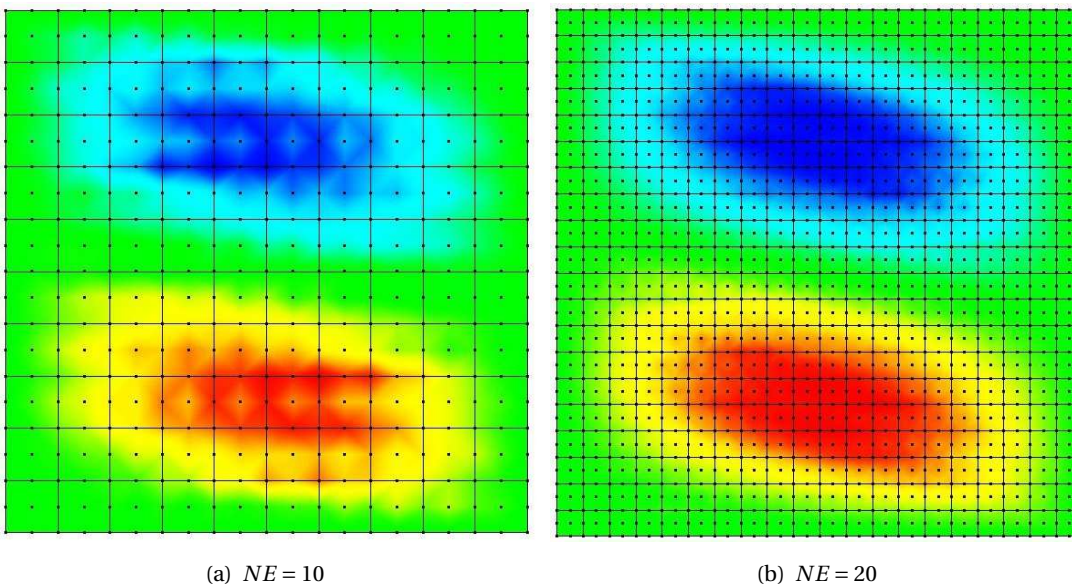


FIG. 4.16: Résultats obtenus avec notre modèle pour  $\epsilon = 10^{-5}$ .

Les trois tests présentés dans cette section ont prouvé que la sous-intégration du terme de membrane permet d'obtenir une bonne convergence à la fois sur les problèmes dominés en flexion et dominés en membrane. Nous utiliserons donc le coefficient de sous-intégration 4.34 dans tous les autres tests numériques de ce mémoire.

## ■ 4.4 Validation du modèle sur des tests analytiques

Les tests qui sont présentés dans la section 4.3 avaient pour but de vérifier la bonne gestion numérique de l'énergie des câbles lorsque l'épaisseur de la nappe tend vers 0. La valeur des coefficients dans l'énergie de gomme et l'épaisseur de gomme autour des fibres y ont un rôle négligeable. Pour valider la modélisation numérique d'une nappe composite dans son intégralité, nous considérons alors une autre catégorie du problème :

Le problème mécanique étudié ici concerne une nappe fibrée cylindrique, dans laquelle les câbles sont parallèles à l'axe du cylindre. La longueur du cylindre est notée  $L_1$  et son rayon  $R$ . Nous supposons que l'épaisseur de la nappe  $t$ , le rayon des fibres  $r$  et l'écartement entre elles, noté  $e$ , sont constants sur toute la surface de la nappe. Nous résumons ces notations sur la figure 4.17.

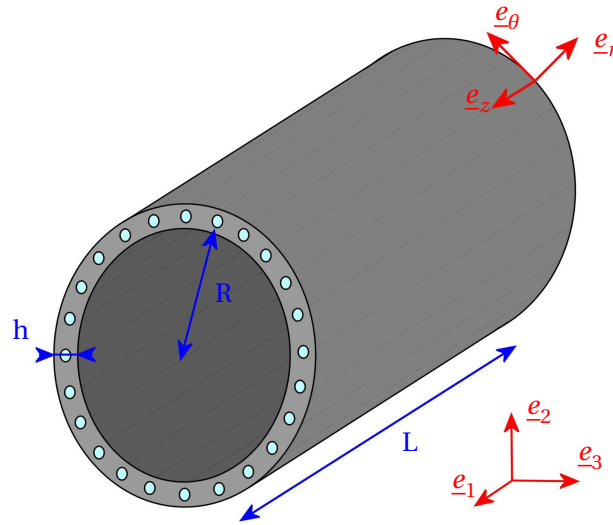


FIG. 4.17: Notations utilisées dans les tests sur une nappe cylindrique.

La gomme composant cette nappe est modélisée par un modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible. Sa densité volumique d'énergie est choisie de la forme

$$w_g = C_1(I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 * (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{1}{2} \kappa (J - 1)^2$$

Les câbles sont quant à eux représentés par le modèle de densité de poutres décrit dans le chapitre 2. Leur densité surfacique d'énergie correspondante s'écrit donc :

$$w_c(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{2e} \left[ E_c A (v_1 - 1)^2 + G_c A (v_2^2 + v_3^2) + E_c I (u_2^2 + u_3^2) + G_c J u_1^2 \right]$$

Ce problème de nappe cylindrique est très intéressant, car il met à contribution tous les termes apparaissant dans notre énergie, et nous avons prouvé dans une annexe non publique de cette thèse que la solution peut être approchée par les expressions analytiques établies dans (Boussetta and Caillard, Michelin).

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus avec deux types de sollicitation :

- La sous-section 4.4.1 s'intéresse à la flexion hors-plan des fibres sous un effort tranchant ;
- Nous étudions dans la sous section 4.4.2 si notre modèle reproduit les instabilités de type type flambement hors plan sous une compression axiale.

#### 4.4.1 Flexion sous effort tranchant

On considère ici une nappe cylindrique telle que décrite précédemment. On encastre ce cylindre à l'une des extrémités, et on applique un effort tranchant  $\underline{f} = f \underline{e}_r$  à l'autre extrémité, en y laissant tous les déplacements libres. Ce chargement est représenté sur la figure 4.18.

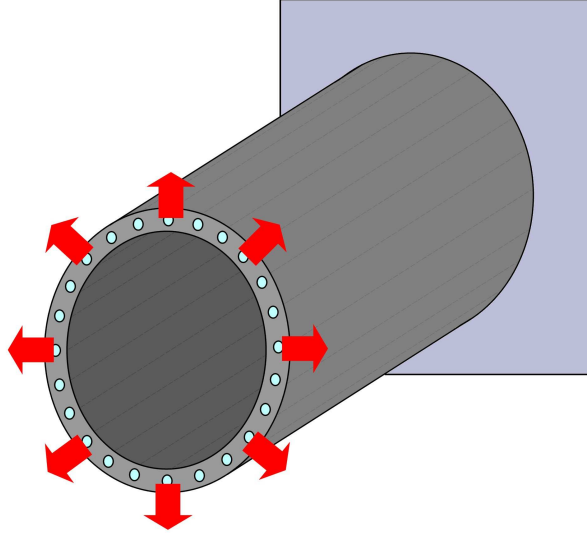


FIG. 4.18: Effort tranchant sur une nappe cylindrique encastree.

On peut remarquer que ce problème est axisymétrique autour de  $\underline{e}_z = \underline{e}_1$ . Il n'est donc pas nécessaire de modéliser la totalité de la structure pour calculer numériquement sa solution. Nous choisissons ici de réaliser nos calculs sur un tranche de la nappe correspondant à un petit angle  $d\theta$  dans le cylindre, comme représenté sur la figure 4.19, en imposant des conditions de périodicité sur les déplacements radiaux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_r$ , latéraux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_\theta$  et axiaux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_z$  entre les faces  $\mathcal{S}_+$  et  $\mathcal{S}_-$ .

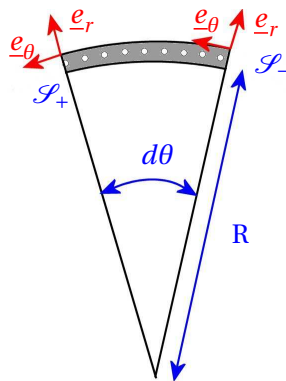


FIG. 4.19: Tranche de nappe considérée dans nos calculs, utilisée avec conditions de périodicité.

Les calculs numériques réalisés pour simuler ce problème mécanique sont réalisés avec des éléments finis Q2 comme décrit dans la section 4.1 de ce chapitre. L'angle  $d\theta$  de la tranche étant choisi petit et la nappe étant fine, nous choisissons de ne prendre qu'un seul élément fini à la fois dans l'épaisseur de la nappe et perpendiculairement aux fibres :

$$\begin{cases} NE_r = 1 \\ NE_\theta = 1 \end{cases}$$

Nous utilisons  $NE_z = 20$  éléments finis dans le sens des fibres. Le maillage correspondant de la tranche de nappe cylindrique est représenté sur la figure 4.20.

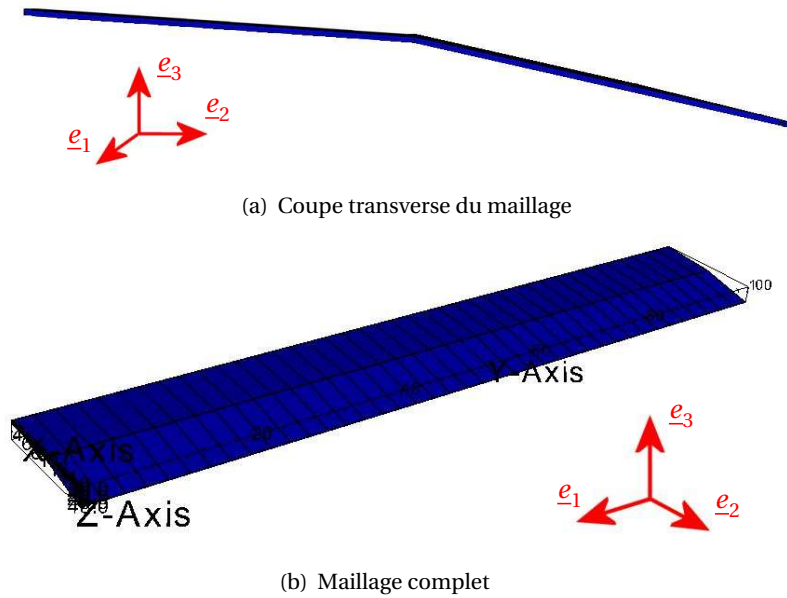


FIG. 4.20: Maillage d'une tranche de nappe cylindrique d'épaisseur très petite.

Tous les tests numériques présentés dans cette sous-section ont été réalisés avec les paramètres géométriques suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 100\text{mm} \\ R = 100\text{mm} \\ d\theta = 0,07\text{rad} \\ e = 2.25\text{mm} \\ r = 0.42\text{mm} \end{array} \right.$$

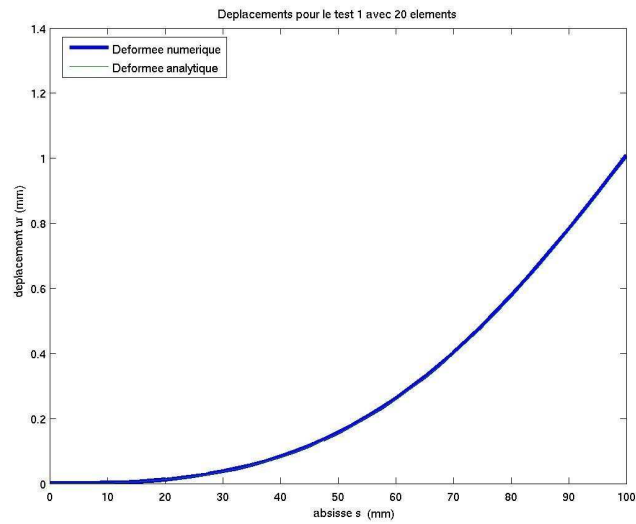
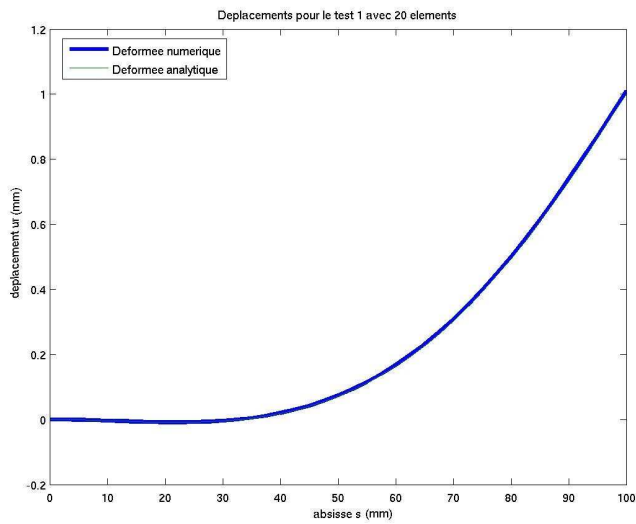
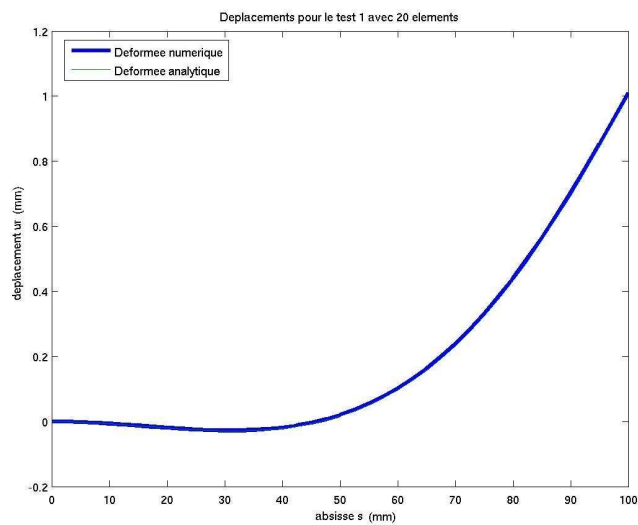
Par ailleurs, nous avons choisi les coefficients matériaux

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.539\text{ MPa} \\ C_2 = 1.062\text{ MPa} \\ \kappa = 1000.\text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi r^2 = 0.56\text{mm}^2 \\ I = \frac{\pi}{4} r^4 = 0.025\text{mm}^4 \\ J = \frac{\pi}{2} r^4 = 0.05\text{mm}^4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_c = 100\text{ GPa} \\ \nu_c = 0.3 \end{array} \right. \Rightarrow G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)} = 38.5\text{ GPa}$$

Pour mettre en évidence l'influence de la gomme sur ce problème, nous faisons varier l'épaisseur  $t$  de la nappe et nous comparons les résultats obtenus. Nous montrons trois exemples de résultats correspondant à un déplacement en bout de nappe de  $u_r^{max} = 1\text{mm}$  sur la figure 4.21 pour les valeurs

$$\left\{ \begin{array}{l} t = 0.86\text{mm} \\ t = 1.8\text{mm} \\ t = 3.\text{mm} \end{array} \right.$$

(a)  $t = 0.86\text{mm}$ (b)  $t = 1.8\text{mm}$ (c)  $t = 3.0\text{mm}$ FIG. 4.21: Déplacements transverses  $u_r$  sur un problème de nappe cylindrique sous effort tranchant.

Nous remarquons que le changement de l'épaisseur  $t$  modifie significativement l'allure de la solution. Cela montre que la gomme a une influence importante sur le comportement en flexion des fibres dans le cas d'une nappe cylindrique.

Dans les trois situations présentées ici, les résultats obtenus avec notre modèle numérique coïncident parfaitement avec la solution analytique donnée par (Boussetta and Caillard, Michelin). Cela nous permet donc de valider le calcul de l'énergie de gomme dans notre modèle.

#### 4.4.2 Flambement sous compression axiale

Les tests numériques présentés dans la section 4.3 et dans la sous-section 4.4 nous ont permis de valider le calcul des énergie de gomme et de câble sur des problèmes stables, dans lesquels la solution est régulière.

Mais une caractéristique importante des nappes fibrées est qu'elles deviennent rapidement instables lorsqu'elles subissent une compression axiale. Il est indispensable que le modèle numérique utilisé pour simuler leur comportement reproduise correctement ces instabilités. Ainsi, l'objectif de cette sous-section est de vérifier que notre modèle est capable de reproduire les instabilités prédites par les solutions analytiques décrites dans (Boussetta and Caillard, Michelin).

Nous considérons une nappe cylindrique dont la géométrie est identique à celle décrite dans la sous section 4.4.1. Nous bloquons les déplacements des fibres à une extrémité du cylindre, et nous imposons un déplacement axial selon  $\underline{e}_z$  à l'autre extrémité, en y bloquant les déplacements selon  $\underline{e}_r$  et  $\underline{e}_\theta$ , de manière à placer les fibres en compression axiale. Ce chargement est représenté sur la figure 4.22.

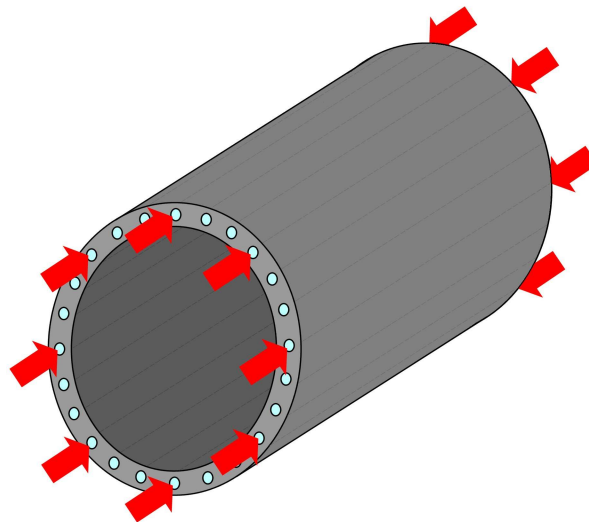


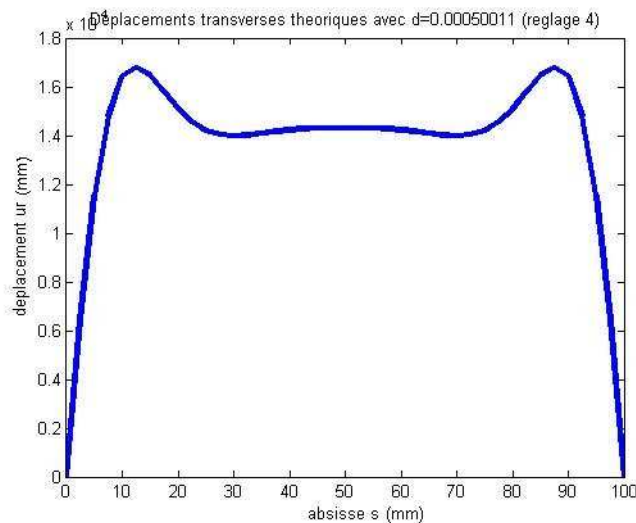
FIG. 4.22: Compression axiale d'une nappe cylindrique

Ici encore, le problème est axisymétrique autour de  $\underline{e}_z = \underline{e}_1$ . Nous réduisons donc les calculs à une petite tranche telle que celle représentée sur la figure 4.19, en imposant des conditions de périodicité sur les déplacements radiaux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_r$ , latéraux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_\theta$  et axiaux  $\underline{u} \cdot \underline{e}_z$  entre les faces  $\mathcal{S}_+$  et  $\mathcal{S}_-$ . Le maillage utilisé est le même que pour l'étude de la nappe sous effort tranchant, représenté sur la figure 4.20. Dans ce maillage, nous imposons les déplacements des  $2 NN_\theta$  noeuds se trouvant à l'intersection entre la surface moyenne de la nappe et les extrémités du cylindre, mais leurs rotations sont laissées libres.

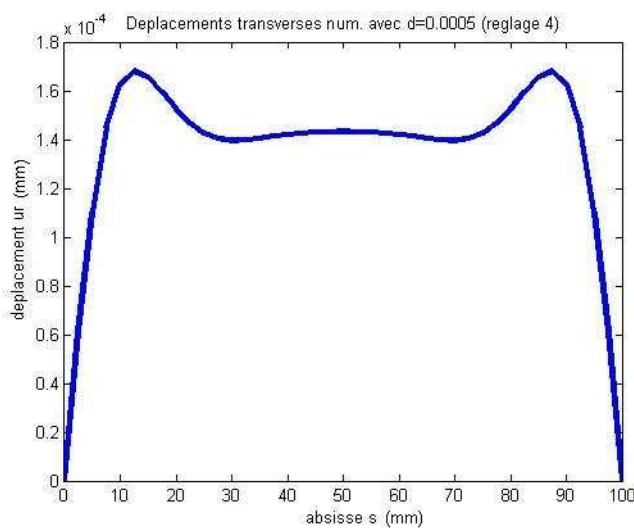


La compression axiale est imposée en contrôlant uniquement les déplacements des noeuds situés à l'intersection entre les extrémités et la surface moyenne de la nappe. Les rotations à ces noeuds, ainsi que les déplacements des noeuds situés sur les faces supérieure et inférieure sont quant à eux laissés libres.

On souhaite alors vérifier que notre modèle peut reproduire les instabilités calculées analytiquement dans (Boussetta and Caillard, Michelin). Dans cette analyse, l'épaisseur de la nappe a été supposée très faible, ce qui a permis de négliger les variations de  $\frac{\partial x}{\partial \xi_1}$  et  $\frac{\partial x}{\partial \xi_2}$  dans l'épaisseur. Malheureusement en pratique, cette hypothèse n'est plus vérifiée dès que l'épaisseur devient modérée du fait de nos conditions aux limites : nous pouvons voir sur les figures 4.23 et 4.24 que la solution principale calculée numériquement avec notre modèle est différente de la solution analytique dès que l'épaisseur est trop importante. Ce phénomène est dû au fait que les déplacements sont contrôlés uniquement sur le plan médian et que des effets 3D peuvent apparaître lorsque l'épaisseur augmente.

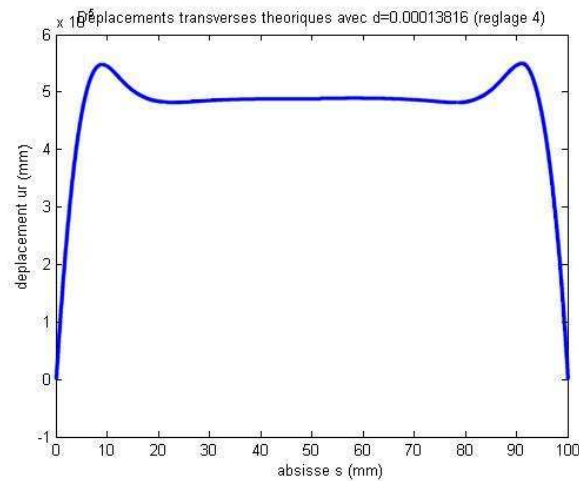


(a) Déplacements transverse théoriques

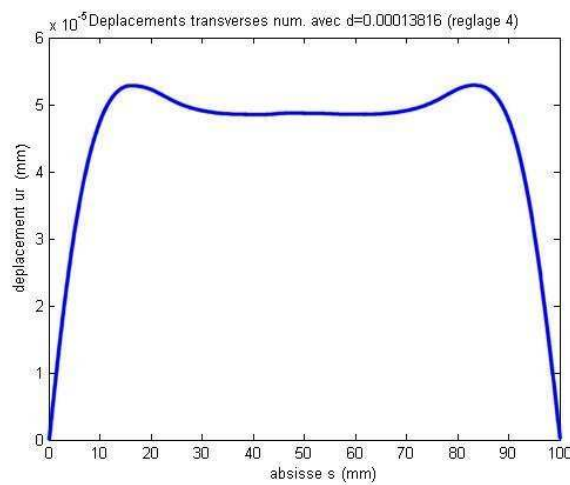


(b) Déplacements transverse numériques

FIG. 4.23: Solutions principales analytique et numérique identiques pour une épaisseur  $t = 0.1 \text{ mm}$



(a) Déplacements transverses théoriques



(b) Déplacements transverses numériques

FIG. 4.24: Solutions principales analytique et numérique différentes pour une épaisseur  $t = 1.8\text{ mm}$ 

Pour vérifier que notre modèle prédit correctement les phénomènes d'instabilité sur ce problème, nous allons donc le valider par rapport à la théorie sur des problèmes dans lesquels l'épaisseur est très petite. Nous choisissons ainsi les dimensions géométriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 100\text{ mm} \\ R = 100\text{ mm} \\ d\theta = 0,07\text{ rad} \\ e = 2.25\text{ mm} \\ t = 0.1\text{ mm} \end{array} \right.$$

Pour étudier l'influence de chacun des coefficients matériaux, nous considérons alors 4 réglages suivants :

Règlage A :

Règlage B :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0.54\text{ MPa} \\ C_2 = 1.06\text{ MPa} \\ EA = 6194\text{ MPa}\cdot\text{mm}^2 \\ EI = 2037\text{ MPa}\cdot\text{mm}^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 5.39\text{ MPa} \\ C_2 = 10.62\text{ MPa} \\ EA = 6194\text{ MPa}\cdot\text{mm}^2 \\ EI = 2037\text{ MPa}\cdot\text{mm}^4 \end{array} \right.$$

Règlage C :

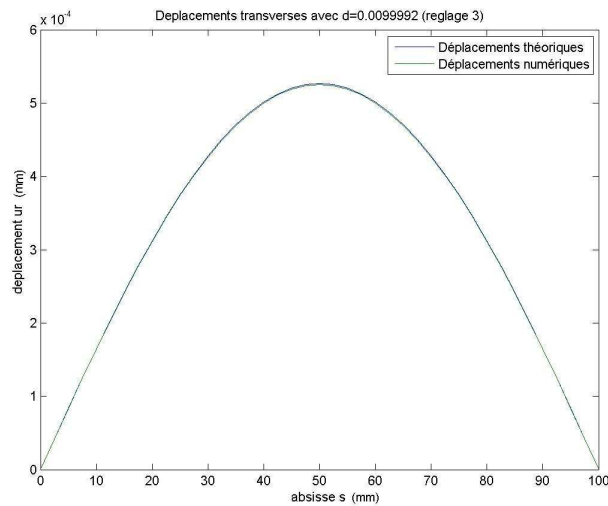
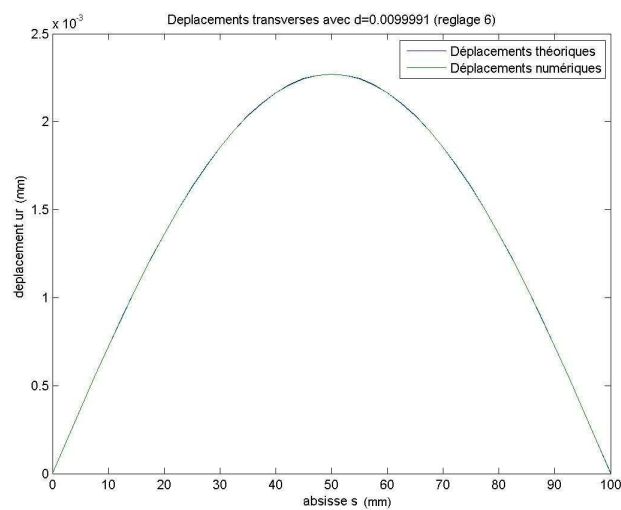
$$\begin{cases} C_1 = 5.39 \text{ MPa} \\ C_2 = 10.62 \text{ MPa} \\ EA = 6194 \text{ MPa.mm}^2 \\ EI = 118 \text{ MPa.mm}^4 \end{cases}$$

Règlage D :

$$\begin{cases} C_1 = 5.39 \text{ MPa} \\ C_2 = 10.62 \text{ MPa} \\ EA = 6194 \text{ MPa.mm}^2 \\ EI = 1 \text{ MPa.mm}^4 \end{cases}$$

Lorsque la compression reste petite, l'équilibre principal est stable et peut être calculé numériquement en quelques incréments de chargement. Nous pouvons vérifier sur la figure 9.1 que les solutions principales analytiques (données par (Boussetta and Caillard, Michelin)) et calculées numériques sont identiques dans ce cas.

Remarque : Pour tous les résultats numériques donnés ici, la convergence très rapide : le modèle converge en seulement 3 itérations pour chaque incrément de charge.

(a) Règlage A,  $\delta = 0.01 \text{ mm}$ (b) Règlage B,  $\delta = 0.01 \text{ mm}$

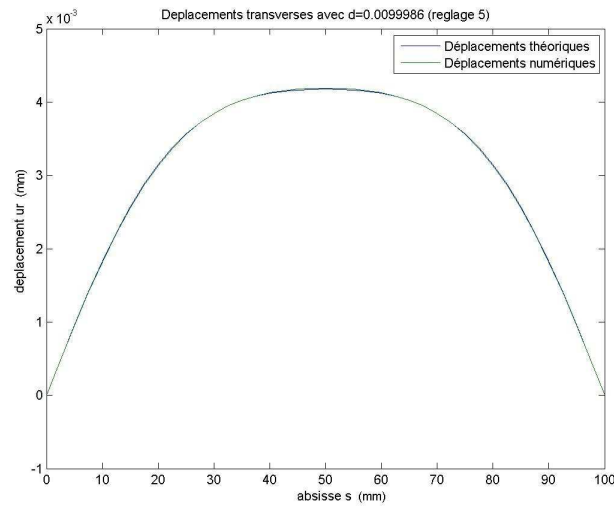
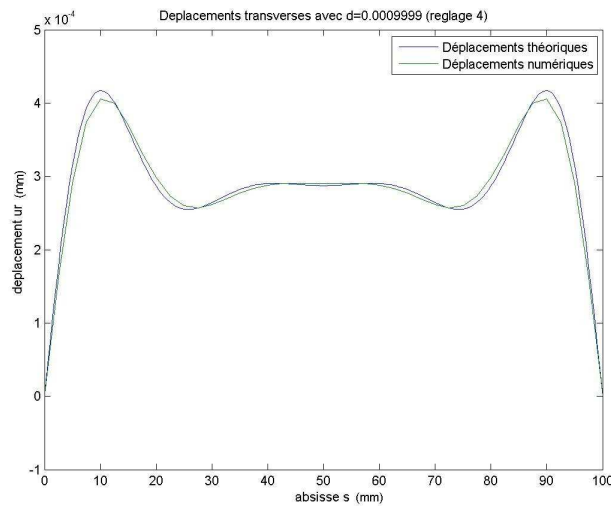
(c) Règlage C,  $\delta = 0.01\text{ mm}$ (d) Règlage D,  $\delta = 0.001\text{ mm}$ 

FIG. 4.25: Comparaison des solutions principales calculées analytiquement et numériquement.

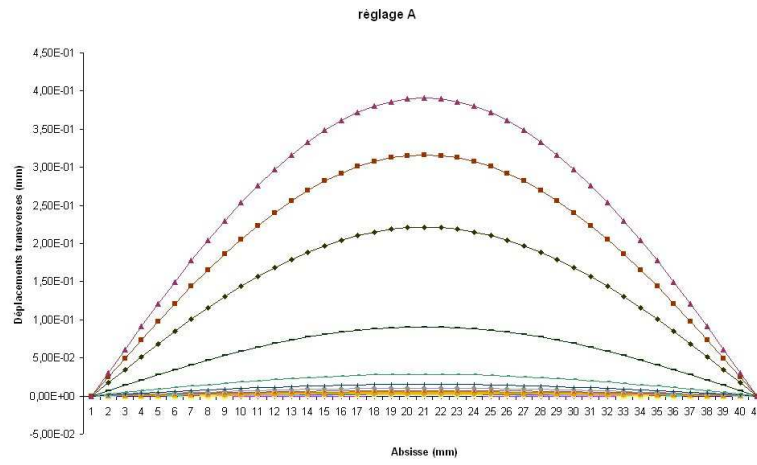
Lorsque la compression axiale des fibres augmente, l'équilibre devient instable et les fibres ont tendance à flamber dans la direction  $\underline{e}_r$  normale au plan tangent de la nappe. La théorie décrite dans (Boussetta and Caillard, Michelin) prédit que ce flambement apparaît pour les déplacements axiaux en bouts de nappe valant respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_A^c = 0.0222\text{ mm} \\ \delta_B^c = 0.0723\text{ mm} \\ \delta_C^c = 0.0169\text{ mm} \\ \delta_D^c = 0.0016\text{ mm} \end{array} \right.$$

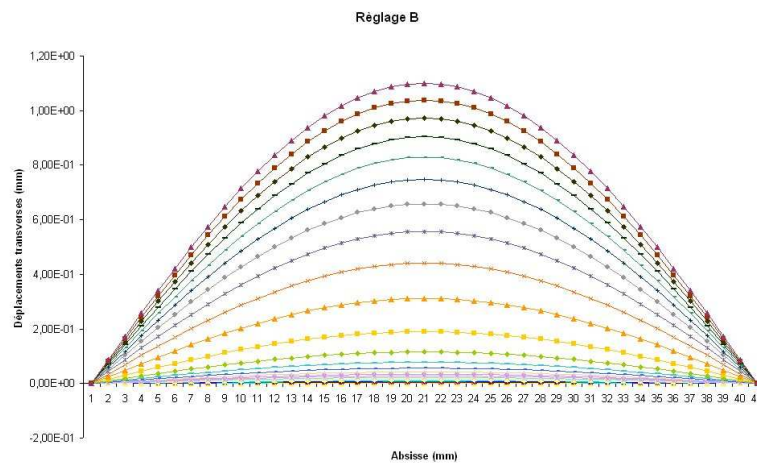
Nous vérifions que notre modèle reproduit correctement ces instabilités en imposant les déplacements axiaux suivants en bouts de nappes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_A^{max} = 0.04\text{ mm} \\ \delta_B^{max} = 0.1\text{ mm} \\ \delta_C^{max} = 0.028\text{ mm} \\ \delta_D^{max} = 0.0022\text{ mm} \end{array} \right.$$

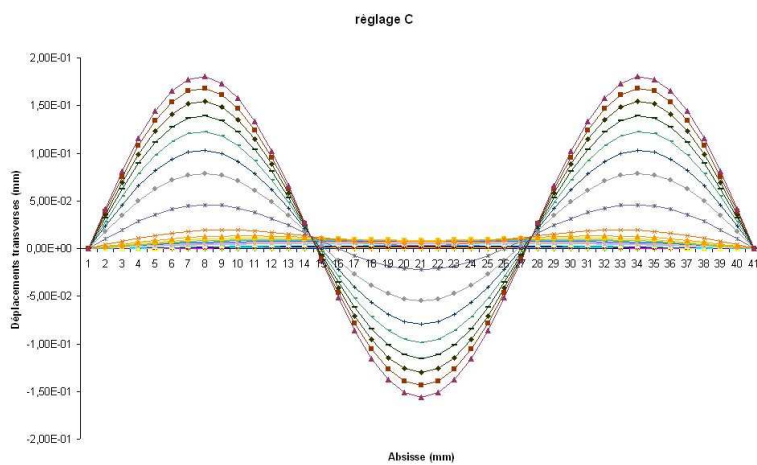
Ces déplacements sont imposés en  $N_{incr} = 30$  incréments de chargement. Nous pouvons voir la solution post-bifurquée obtenue numériquement sur la figure 4.26.



(a) Règlage A -  $\delta_A^{max} = 0.04mm$



(b) Règlage B -  $\delta_B^{max} = 0.1mm$



(c) Règlage C -  $\delta_C^{max} = 0.028mm$

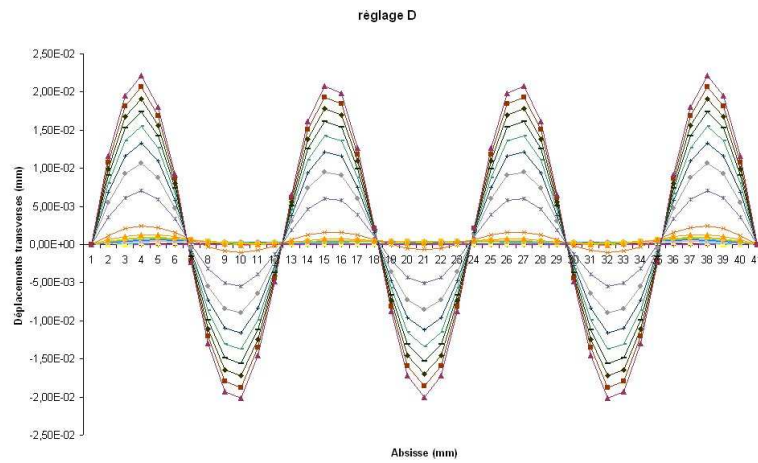
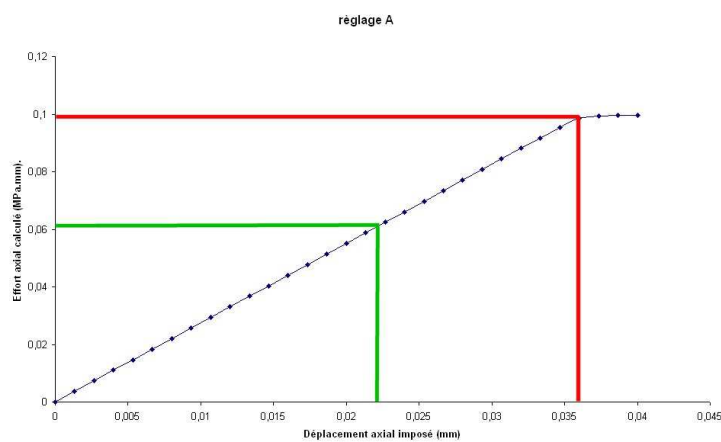
(d) Règlage D -  $\delta_D^{max} = 0.0022\text{mm}$ 

FIG. 4.26: Solution post-bifurquée calculée numériquement sur le problème parfait.

Nous souhaitons alors déterminer si l'apparition du flambement coïncide avec la compression critique prédite par la théorie. Comme nous l'expliquerons dans le chapitre 9 de ce rapport, l'apparition du flambement correspond à une bifurcation vers une autre branche d'équilibre, qui se caractérise souvent par un brusque changement de pente dans la courbe d'équilibre. Nous mesurons alors l'effort axial correspondant à la compression imposée à chacun des 30 incréments de chargement, et nous traçons les courbes obtenues sur la figure 4.27.



(a) Règlage A

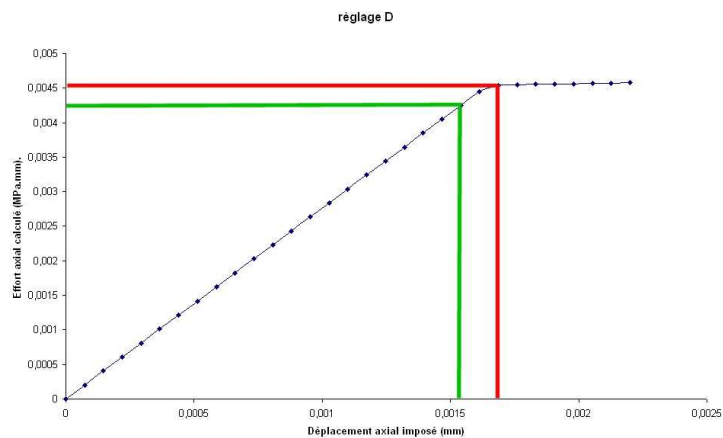
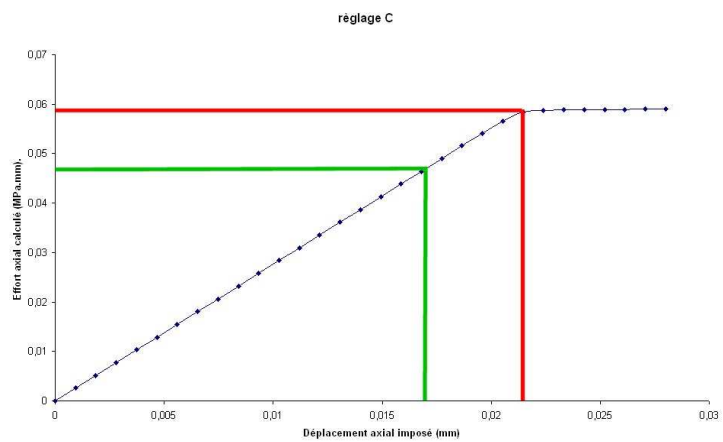
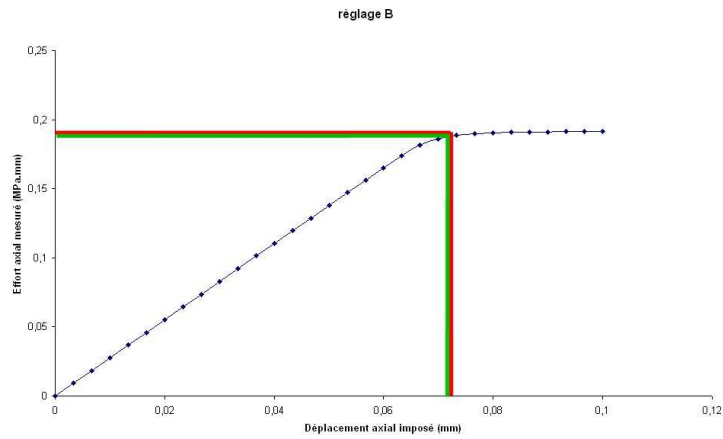
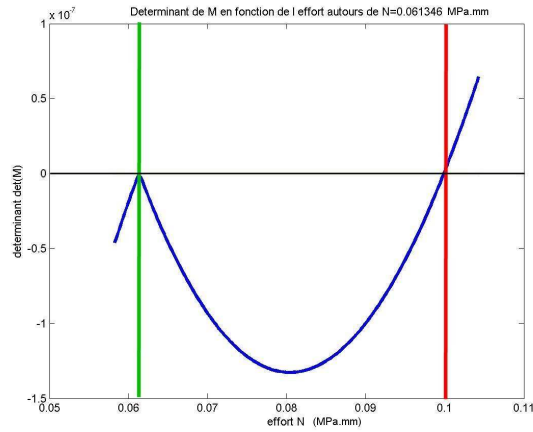


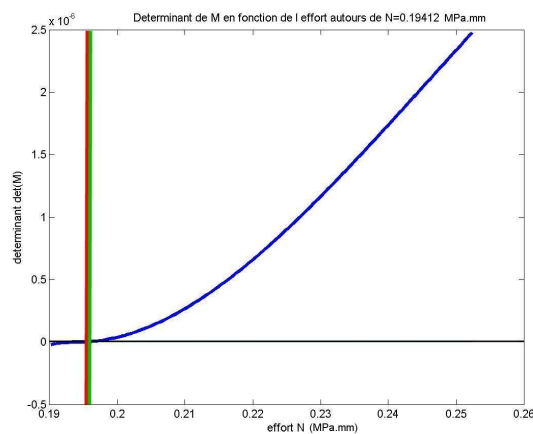
FIG. 4.27: Apparition du flambement sur le problème parfait : seuil de flambement théorique en vert ; seuil de flambement observé numériquement en rouge.

Nous pouvons observer sur la figure 4.27 que le flambement obtenu numériquement débute plus tard que la compression critique prédite par la théorie. Pour expliquer ce phénomène, nous traçons sur la figure 4.28 la valeur analytique du jacobien du système en fonction de la compression axiale exercée. La courbure critique calculée analytiquement correspond au premier zéro de cette courbe, représenté en vert sur cette figure. Nous remarquons alors que la courbure critique pour laquelle le

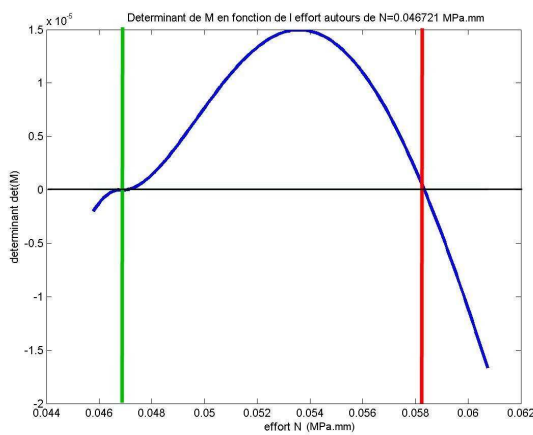
flambement débute avec notre modèle numérique correspond également à un zéro de la courbe, mais pas premier. Cela signifie que notre modèle ne "voit pas" la première branche de bifurcation, et dévie plus tard vers un autre mode d'instabilité.



(a) Règlage A

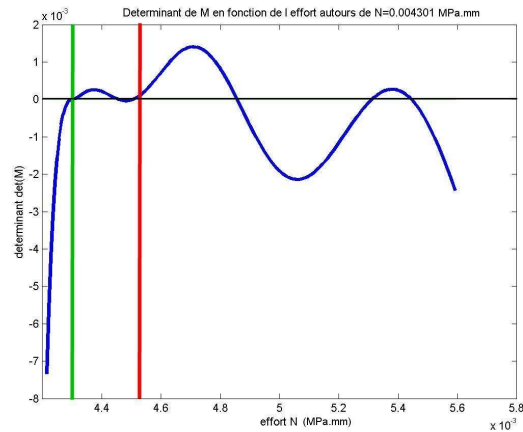


(b) Règlage B



(c) Règlage C





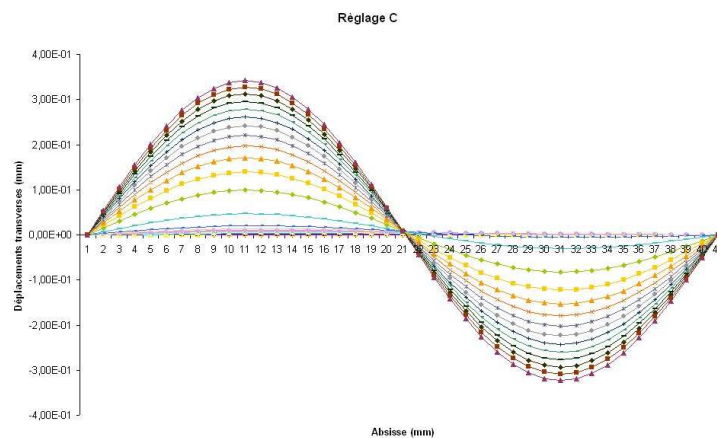
(d) Règlage D

FIG. 4.28: Valeur analytique du jacobien du système en fonction de la compression axiale exercée, comparée aux seuils de flambement théorique (en vert) et numérique (en rouge)

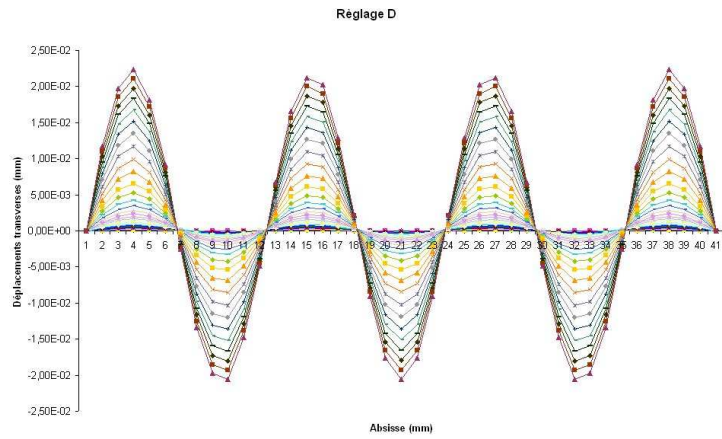
Le fait que notre modèle ne dévie pas vers la première branche de bifurcation s'explique en fait par la symétrie du problème parfait. Pour corriger ceci, nous introduisons des petites imperfections géométriques à notre problème initial. On vérifie sur quelques cas que le modèle global bifurque alors exactement pour la valeur de chargement théorique. Nous pouvons voir sur la figure 4.29(b) que ces perturbations permettent de modéliser numériquement des modes de flambement antisymétriques.

Nous pouvons alors vérifier sur la figure 4.30 que les imperfections permettent à notre modèle numérique de modéliser un flambement qui débute exactement pour la compression critique prédite théoriquement.

Pour résumer, les résultats numériques présentés dans les sous-sections 4.4.1 et 4.4.2 nous ont permis de vérifier que notre modèle modélise correctement les phénomènes de flexion et de flambement dans la direction normale au plan tangent de la nappe.

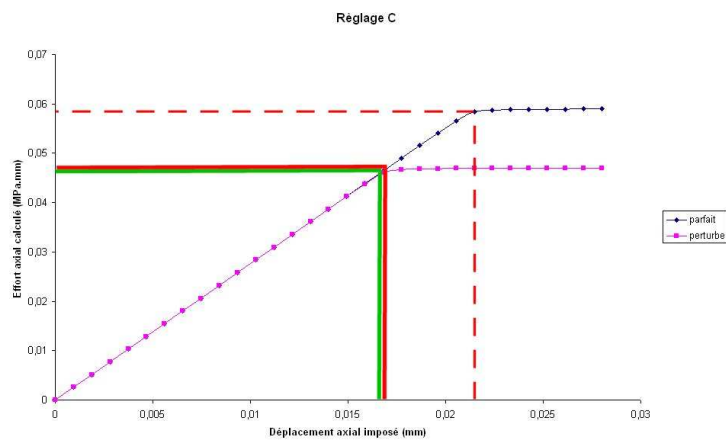


(a) Règlage C

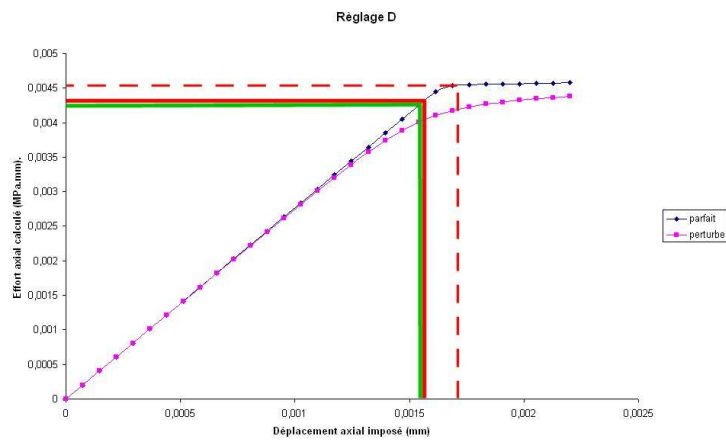


(b) Règlage D

FIG. 4.29: Modes de flambement sur le problème perturbé



(a) Règlage C



(b) Règlage D

FIG. 4.30: Apparition du flambement sur le problème perturbé : seuil de flambement théorique en vert ; seuil de flambement observé numériquement en rouge

## 4.5 Compression d'une nappe sous flexion circulaire

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.2, une caractéristique importante de ce problème de nappe fibrée est que la flexion des fibres doit être correctement prise en compte dans la direction normale au plan de la nappe, mais aussi dans le plan de la nappe.

L'objectif de cette section est donc de vérifier que les instabilités de type flambement dans le plan de la nappe sont correctement modélisées par notre modèle, de manière à compléter les résultats présentés dans la section 4.4.

Nous reprenons pour cela le problème mécanique présenté dans la sous-section 1.1.2, et qui sera analysé plus en détails dans le chapitre 10 de ce mémoire :

On considère une éprouvette initialement plane, de dimensions  $L_1$  et  $L_2$  dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , alors que son épaisseur selon  $\underline{e}_3$  est notée  $h$ . Ce solide est composé de trois matériaux :

- Une fine lame métallique, appelée clinquant, sur la partie supérieure. Cette lame est supposée avoir une rigidité en extension très élevée, de telle sorte qu'elle sera supposée inextensible dans la suite ;
- Des câbles de renforts à section circulaire, de rayon  $r$ , situés dans la partie inférieure de la nappe. Au repos, ces câbles sont supposés rectilignes et parallèles à  $\underline{e}_1$ , et leur écartement  $e$  est supposé constant ;
- Une gomme hyperélastique pouvant subir de très grandes déformations.

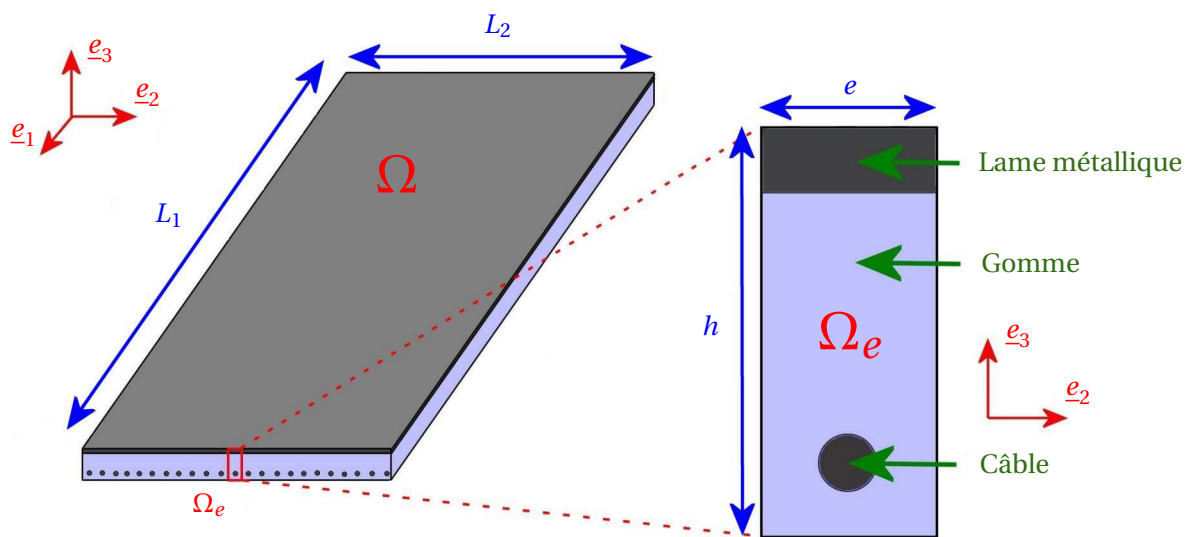


FIG. 4.31: Géométrie de l'éprouvette

Cette éprouvette est soumise à une flexion circulaire sur sa face supérieure, de manière à créer un compression axiale des câbles dans la partie inférieure, comme illustré sur la figure 4.32.

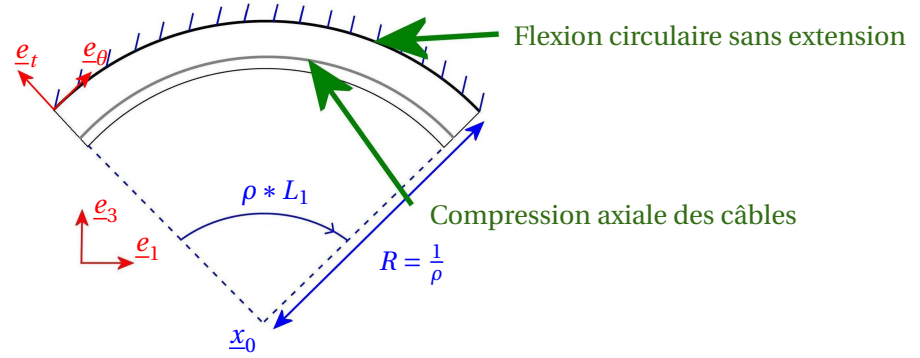


FIG. 4.32: Chargement sur l'éprouvette

Dans toute cette section, nous travaillons sur une éprouvette dont les dimensions géométriques sont les suivantes :

- Epaisseur du clinquant :  $H_{cli} = 1.1\text{ mm}$  ;
- Epaisseur de gomme :  $H_{gom} = 12.5\text{ mm}$  ;  
→ Epaisseur totale :  $H = 13.6\text{ mm}$  ;
- Hauteur de la ligne moyenne des câbles :  $h = 1.425\text{ mm}$  ;
- Rayon d'un câble cylindrique :  $r = 0.42\text{ mm}$  ;
- Ecartement entre deux câbles :  $e = 2.25\text{ mm}$ .

Le clinquant est constitué d'un métal très rigide ne subissant que de petites déformations. Nous le modélisons par un matériau de Saint-Venant Kirchhoff, de densité volumique d'énergie

$$w_{cli}(\underline{e}) = \frac{\nu_{cli} E_{cli}}{(1 + \nu_{cli})(1 - 2\nu_{cli})} \left[ Tr(\underline{e}) \right]^2 + \frac{E_{cli}}{2(1 + \nu_{cli})} Tr(\underline{e}^2)$$

en choisissant les coefficients suivants :

$$\begin{cases} E_{cli} = 200 \text{ GPa} \\ \nu_{cli} = 0.33 \end{cases}$$

La gomme pouvant subir de grandes déformations, il est indispensable de la modéliser avec une énergie polyconvexe. Nous utilisons un modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible :

$$w = C_1 (I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 * (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{1}{2\epsilon} (J - 1)^2$$

en choisissant les coefficients

$$\begin{cases} C_1 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.062 \text{ MPa} \\ \epsilon^{-1} = 1000. \text{ MPa} \end{cases}$$

Enfin, la couche renforcée centrée autour des fibres est modélisée par des éléments finis enrichis comme décrits dans la section 4.1. Nous choisissons ici prendre ces éléments finis enrichis d'épaisseur

$$h_{nap} = 1.45\text{ mm}$$

Nous noterons que le choix de cette épaisseur  $h_{nap}$  n'influence pas les résultats numériques obtenus. Les câbles y sont représentés par le modèle de densité de poutres décrit dans le chapitre 2. Leur densité surfacique d'énergie correspondante s'écrit donc :

$$w_c(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{2e} \left[ E_c A (v_1 - 1)^2 + G_c A (v_2^2 + v_3^2) + E_c I (u_2^2 + u_3^2) + G_c J u_1^2 \right]$$

en choisissant les coefficients

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \pi r^2 = 0.56 \text{ mm}^2 \\ I = \frac{\pi}{4} r^4 = 0.025 \text{ mm}^4 \\ J = \frac{\pi}{2} r^4 = 0.05 \text{ mm}^4 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{cab} = 100 \text{ GPa} \\ \nu_{cab} = 0.30 \end{array} \right. \Rightarrow G_{cab} = \frac{E_{cab}}{2(1 + \nu_{cab})} = 38.5 \text{ GPa}$$

### Choix des conditions aux limites

Pour imposer numériquement la flexion circulaire sur l'éprouvette, nous choisissons d'imposer les conditions aux limites suivantes :

- Conditions de Dirichlet sur la surface supérieure, pour y imposer une flexion circulaire sans extension ;
- Périodicité des déplacements entre les faces latérales ;
- Les déplacements aux extrémités de l'éprouvette restent dans le plan normal à  $\underline{e}_\theta$  ( $\rho X_1$ ).

Si on se contente d'utiliser les conditions aux limites sur les déplacements décrites précédemment, en laissant libre les rotations des directeurs aux extrémités, alors des effets de bords indésirables apparaissent (cf figure 4.33). Par conséquent, en plus de ces conditions aux limites, nous imposons les directeurs aux extrémités :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 = \underline{e}_\theta \\ d_2 = \underline{e}_2 \\ d_3 = \underline{e}_r \end{array} \right.$$

Nous vérifions sur la figure 4.34 que les effets de bords ont disparu avec ces conditions aux limites.

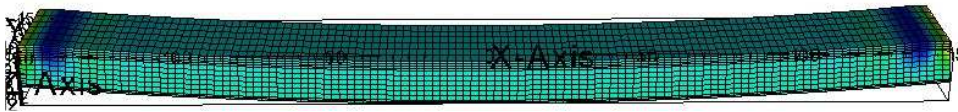


FIG. 4.33: Présence d'effets de bord en flexion circulaire lorsque les rotations ne sont pas contrôlées aux limites

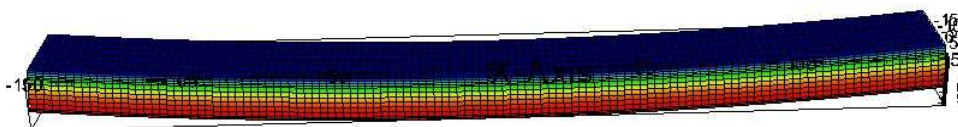


FIG. 4.34: Absence d'effets de bord en flexion circulaire lorsque les rotations sont imposées aux extrémités

### Perturbation géométrique

Pour pousser notre modèle numérique vers la première branche de bifurcation, nous insérons une perturbation géométrique de forme sinusoïdale à la géométrie parfaite de l'éprouvette, comme représenté sur la figure 4.35. La longueur d'onde de cette imperfection est calculée d'après les résultats de l'analyse de stabilité réalisée dans le chapitre 10 de ce mémoire.

*Remarque* : Notre choix d'imposer complètement les rotations des directeurs aux extrémités des fibres rend difficile tout changement de mode. La forme de la perturbation ne doit donc pas être choisie de manière aléatoire.

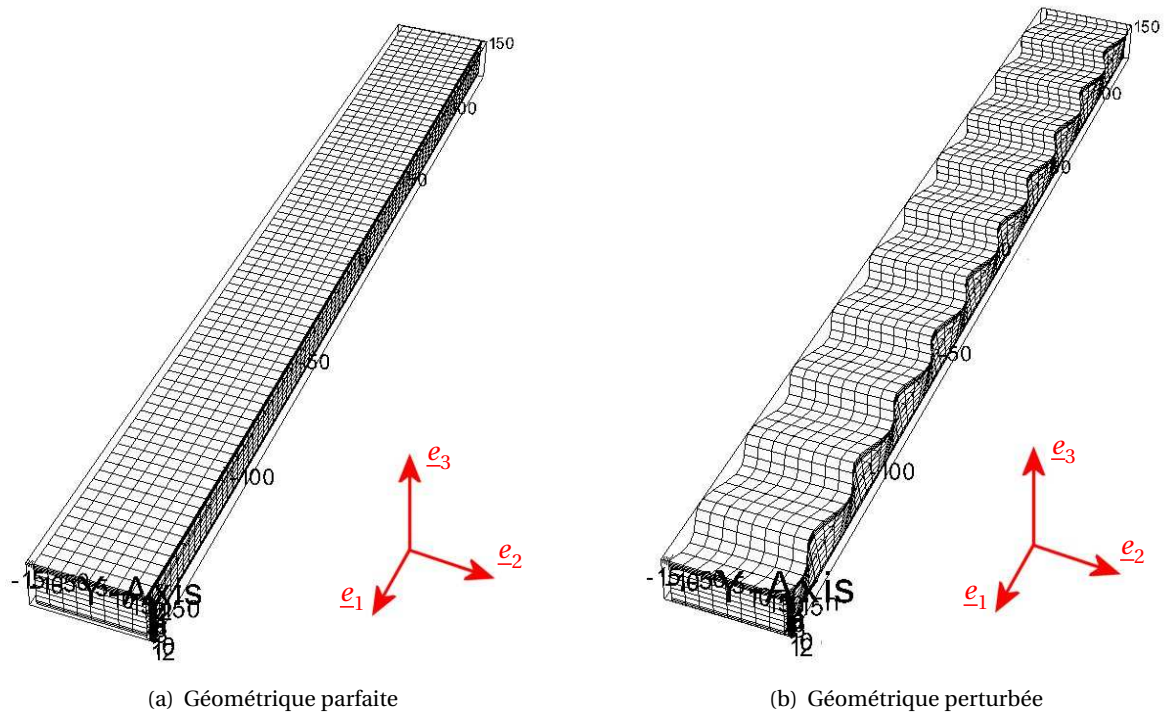


FIG. 4.35: Perturbation géométrique du problème de flexion circulaire (perturbation  $\times 100$ )

### Modélisation du flambement

Nous augmentons progressivement la courbure en utilisant une méthode incrémentale, et nous mesurons les déplacements calculés à chaque incrément de chargement. Nous observons alors que les déplacements latéraux croissent rapidement au delà d'une certaine courbure, illustrant un flambement de la nappe dans le plan de la nappe (cf figure 4.36).

Par contre, nous observons sur la figure 4.37 que le flambement des fibres se situe uniquement dans le plan de la nappe, et que les déplacements transverses restent quant à eux assez réguliers.

Pour déterminer la courbure à partir de laquelle le flambement apparaît, nous procédons comme pour le problème de nappe cylindrique décrit dans la sous-section 4.4.2 : nous traçons la courbe représentant l'évolution de l'amplitude des déplacements transverses lorsque la courbure augmente. Un exemple de courbe d'équilibre obtenue est donnée sur la figure 4.38.

Nous y observons que les déplacements transverses augmentent brusquement aux alentours de la courbure  $\rho = 2. * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ , ce qui caractérise la bifurcation de la solution vers une autre branche d'équilibre.

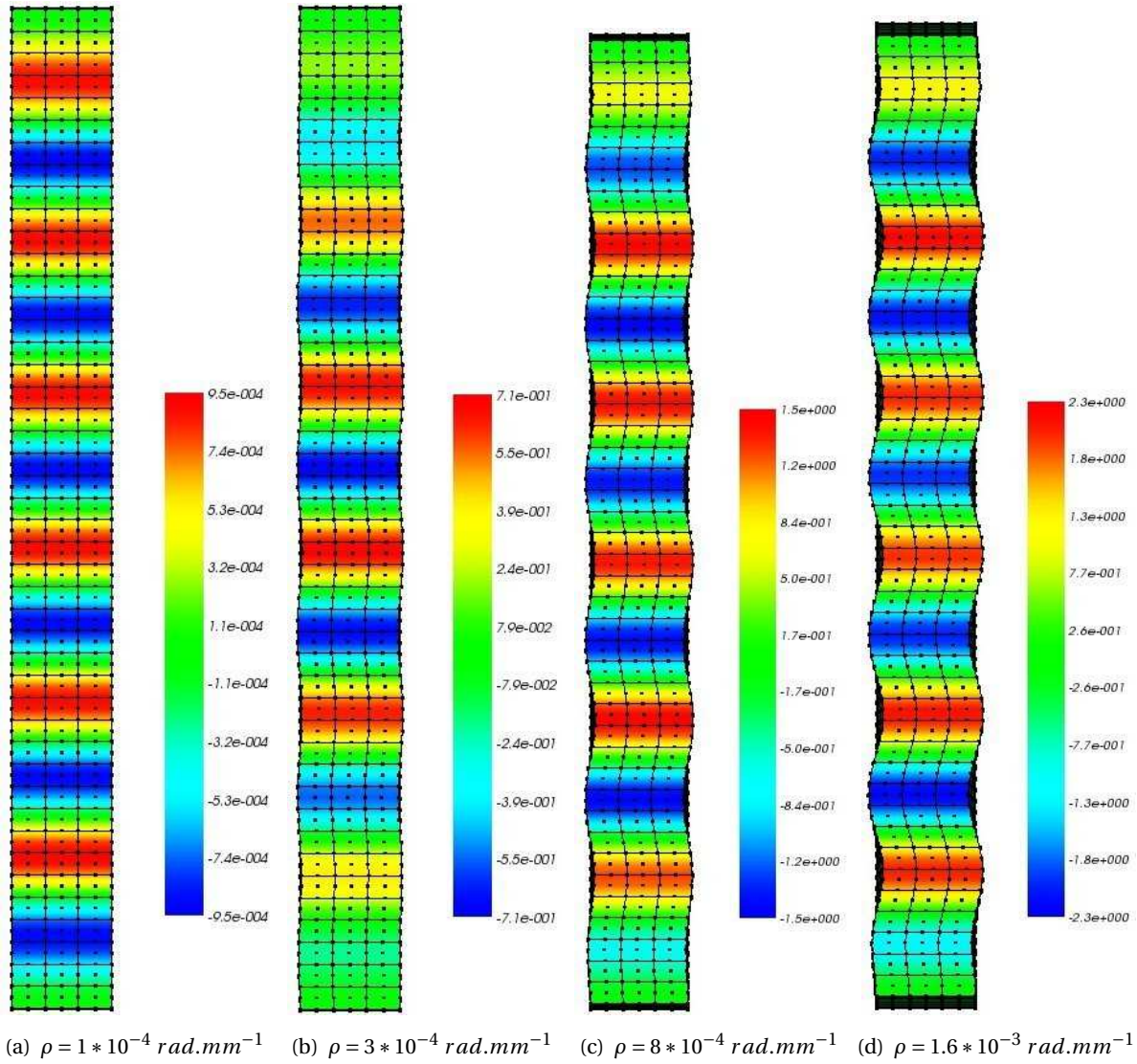
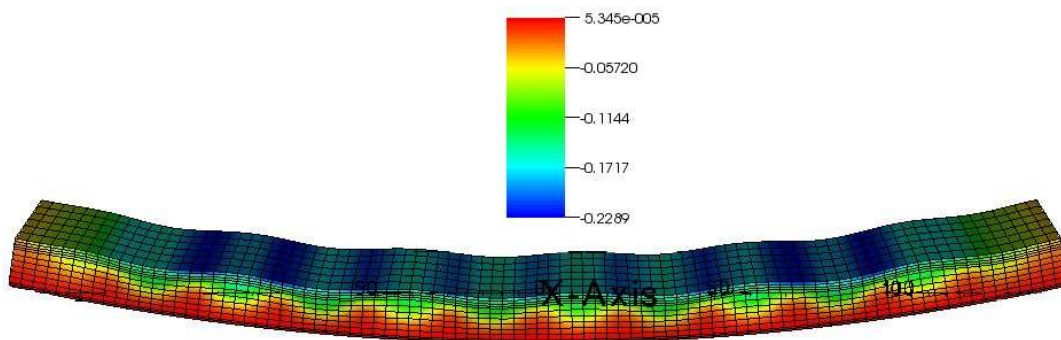


FIG. 4.36: Flambement dans le plan de la nappe lorsque la courbure augmente

FIG. 4.37: Absence de flambement hors plan (pour une courbure  $\rho = 1.6 * 10^{-3} \text{ rad.mm}^{-1}$ )

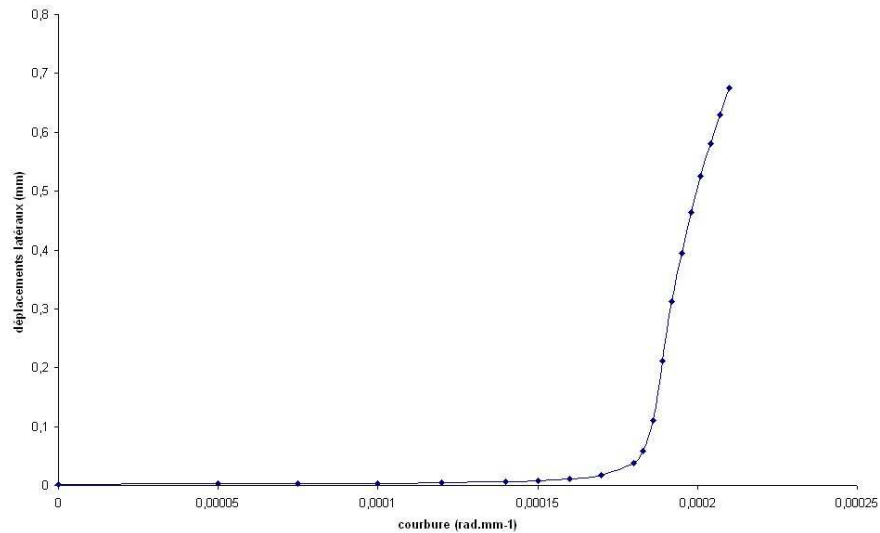


FIG. 4.38: Augmentation de l'amplitude des déplacements latéraux en fonction de la courbure

### Convergence en maillage

Enfin, si nous raffinons le maillage utilisé pour la résolution numérique de ce problème, alors nous pouvons vérifier que le seuil de flambement observé numériquement converge clairement vers une valeur finie (cf figure 4.39).

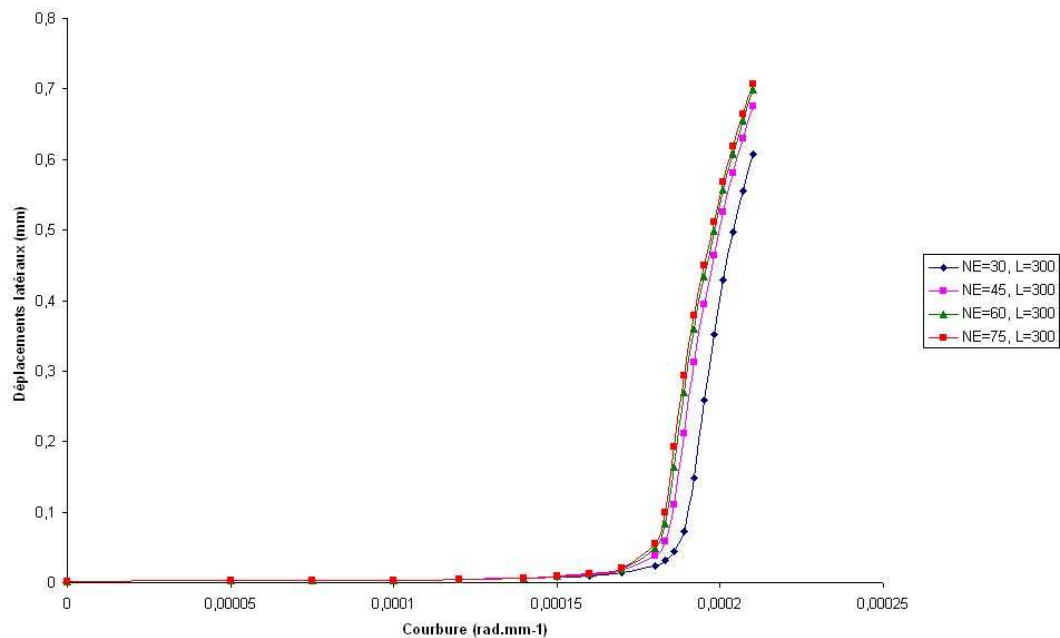


FIG. 4.39: Convergence en maillage sur le problème de nappe en flexion circulaire

Ce test de compression sous flexion circulaire nous a permis de vérifier que notre modèle de nappe renforcée est capable de modéliser des instabilités de type flambement dans le plan de la nappe.



Cependant, nous noterons que la valeur de la courbure à partir de laquelle le flambement apparaît n'a pu être comparée à aucun résultat théorique. Nous réaliserons dans le chapitre 10 de ce mémoire une analyse de stabilité permettant de vérifier que ce seuil de flambement est correcte.

## ■ Conclusions

Nous avons décrit dans la section 4.1 la discrétisation d'un problème de nappe fibrée par des éléments finis quadratiques pour les déplacements et les rotations, utilisés avec une méthode de sous-intégration de l'énergie membranaire des câbles. La résolution du problème discret est alors effectuée par une méthode de Newton projetée permettant d'assurer l'orthonormalité des directeurs caractérisant les rotations des sections de câbles, présentée dans la section 4.2.

Le modèle de nappe décrit dans le chapitre 2 et résolu par cette méthode a été validé par rapport à deux critères principaux :

- Nous avons prouvé dans la section 4.3 que la méthode de sous-intégration du terme d'énergie de membrane, introduite dans le chapitre 3, supprime correctement les phénomènes de verrouillage numérique sur des problèmes dominés en flexion, et qu'elle n'engendre pas pour autant de modes parasites sur des problèmes dominés en membrane ;
- Nous avons vérifié dans les sections 4.4 et 4.5 que notre modèle est capable de reproduire des instabilités de type flambement, les modes d'instabilité pouvant être hors plan ou dans le plan de la nappe.

Cependant, l'énergie de gomme reste assez grossière dans ce modèle, en utilisant une pondération et un terme de couplage gomme/câbles justifiables uniquement pour des énergies quadratiques. L'objectif de la deuxième partie de ce mémoire sera donc de proposer une méthode multi-échelles permettant de gagner un degré de précision dans la modélisation de la gomme.

Deuxième partie

# Modélisation multi-échelles d'une nappe renforcée



## Modélisation multi-échelles des composites élastomères fibrés

### ■ Introduction

La partie I a permis de construire un premier modèle de nappe renforcée purement macroscopique. Les résultats numériques du chapitre 4 ont montré que cette modélisation macroscopique donne de bons résultats sur des cas où les déformations de la gomme restent modérées. Mais le couplage entre les câbles et la gomme fait l'hypothèse de faibles déformations, et il semble trop grossier pour pouvoir modéliser correctement des situations à fort gradient. Il nous faut donc gagner un degré supplémentaire de précision, et prendre en compte les déformations locales à l'échelle mésoscopique. A terme, l'objectif de cette partie est donc d'élaborer une stratégie multi-échelles, de manière à calculer localement la densité surfacique de gomme  $w_{gom}^m(\xi_1, \xi_2)$ , et ainsi remplacer l'estimation macroscopique définie par l'expression 2.42.

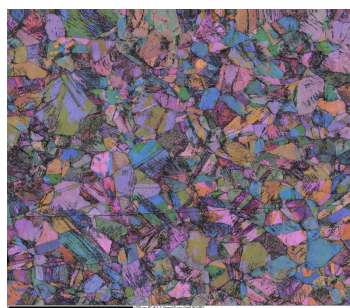
Dans ce chapitre, le but est de dresser un état de l'art des méthodes d'homogénéisation existantes, de manière à déterminer si l'une d'entre elles pourrait être adéquate dans notre cas. Pour cela, nous avons divisé ce chapitre en quatre sections :

- La première section est très générale, et présente le principe d'une méthode d'homogénéisation ;
- Nous étudions ensuite dans la section 5.2 les méthodes d'homogénéisation dites "analytiques" (cf (Nemat-Nasser and Hori, 1993)), qui établissent des approximations du tenseur de contrainte en fonction du tenseur de déformation moyen sous forme explicite. On commence par rappeler les méthodes classiques établies en élasticité linéaire, puis on décrit brièvement les résultats récents en homogénéisation analytique non linéaire ;
- La section 5.3 présente les méthodes d'homogénéisation "numériques". Contrairement aux précédentes, ces méthodes n'utilisent pas d'expressions explicites, mais vont calculer la réponse macroscopique en résolvant numériquement un problème à l'échelle locale (voir par exemple (Feyel et al., 2000)). Ces méthodes n'étaient au départ adaptées qu'à des problèmes dans lesquels les échelles étaient très séparées. Nous présentons quelques travaux récents qui proposent une extension des méthodes d'homogénéisation numérique à des cas où les échelles sont couplées (cf (Kouznetsova et al., 2004)) ;

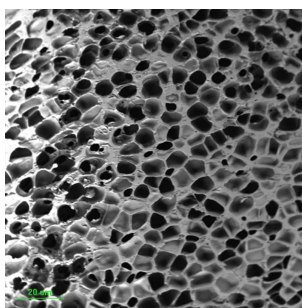
- Enfin, nous conclurons cette étude bibliographique dans la section 5.4, où nous analyserons l'application de ces méthodes multi-échelles à notre problème de nappe.

## 5.1 Principe des méthodes d'homogénéisation

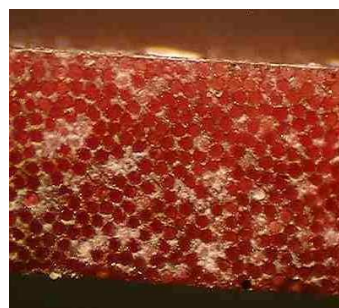
De manière générale, les matériaux composites font intervenir plusieurs échelles : celle de la structure, et celle des hétérogénéités. Leur comportement global dépend souvent des effets locaux, ce qui rend complexe leur modélisation.



(a) Cartographie EBSD d'un acier (d'après Dirk Mohr/MIT, 2009)



(b) Mousse polymère (d'après [www.lv-em.com](http://www.lv-em.com))



(c) Composite epoxy/fibres de verre (d'après [www.bris.ac.uk](http://www.bris.ac.uk))

FIG. 5.1: Exemples de microstructures dans des matériaux composites.

Pour prédire le comportement macroscopique de ces matériaux hétérogènes sans directement prendre en compte le comportement local à une échelle inférieure, nous pouvons utiliser une approche de type "*homogénéisation*". Les méthodes d'homogénéisation reposent sur l'hypothèse que l'on peut considérer le matériau comme homogène à l'échelle macroscopique, et définir en tout point un "*volume élémentaire représentatif*" (VER) de la géométrie microscopique du matériau. La géométrie du VER pourra être exacte dans le cas où la microstructure est périodique, ou statistique lorsque la microstructure est aléatoire.

On définit alors les variables d'état macroscopiques comme étant des moyennes de variables microscopiques sur ce VER. Ainsi, si on suppose que les échelles sont très séparées, on peut obtenir la réponse  $\underline{P}_M = \underline{P}(\underline{F}_M)$  pour une structure élastique, où  $\underline{P}_M$  et  $\underline{F}_M$  sont respectivement les moyennes de la contrainte et de la déformation locales, calculées à déformation moyenne imposée. Ce principe est représenté sur la figure 5.2.

Ce chapitre a uniquement pour but de résumer les principales idées possibles pour modéliser un matériau composite, et ne se veut en aucun cas exhaustif. Nous n'entrerons pas dans les détails des méthodes abordées, on réfère le lecteur à la thèse (Gloria, 2007) pour une analyse mathématique plus détaillée des méthodes numériques multi-échelles appliquées à l'élasticité non linéaire.

## 5.2 Approches analytiques

### 5.2.1 Résultats d'homogénéisation en élasticité linéaire

Les premiers résultats d'homogénéisation sont très anciens ((Voigt, 1887)), et correspondent à des bornes dans le cadre de l'élasticité linéaire. Depuis, de nombreux travaux ont été réalisés pour obtenir des approximations plus précises, que nous décrivons dans ce qui suit. La notion d'échelle peut être introduite de deux manières, ce qui permet de séparer ces méthodes en deux catégories.

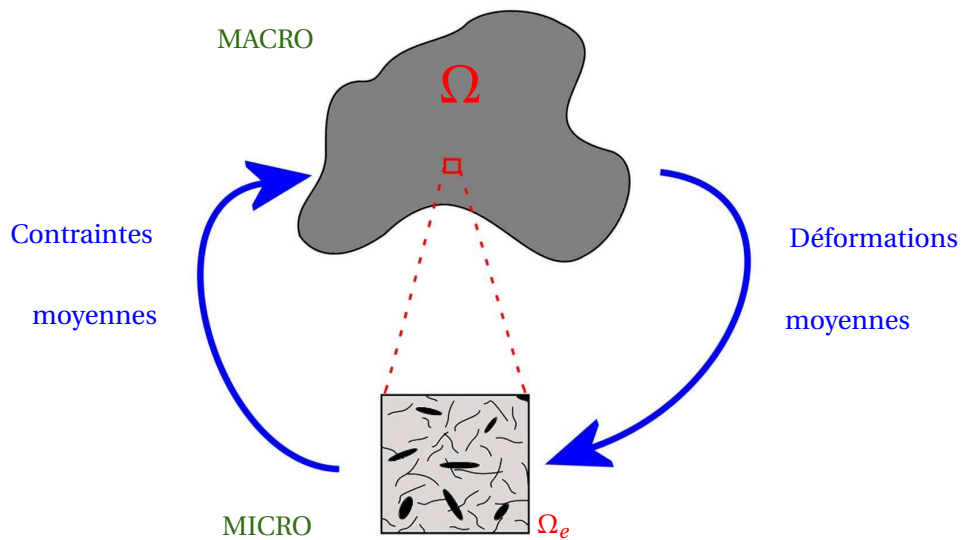


FIG. 5.2: Principe des méthodes d'homogénéisation

### Théorie du champ moyen

Cette approche a été initialement proposée par les mécaniciens, et un état de l'art en est présenté dans la revue (Bornert et al., 2001). La théorie du champ moyen considère un milieu hétérogène dont la microstructure peut être aléatoire (pas nécessairement périodique). On suppose que le milieu est statistiquement homogène, et qu'il existe un "volume élémentaire représentatif" (VER). Ce VER doit être statistiquement représentatif du matériau. Par conséquent, il doit contenir plusieurs micro-hétérogénéités de chaque phase, et sa taille  $l$  est beaucoup plus importante que celle de ces hétérogénéités, caractérisée par une grandeur  $d$ . La seconde condition est que le VER doit être assez petit par rapport à la taille caractéristique de la structure globale, notée  $L$ , de manière à ce que les champs de déformations et de contraintes puissent y être supposés constants. On résume ces conditions par la relation : (cf figure 5.3)

$$d \ll l \ll L$$

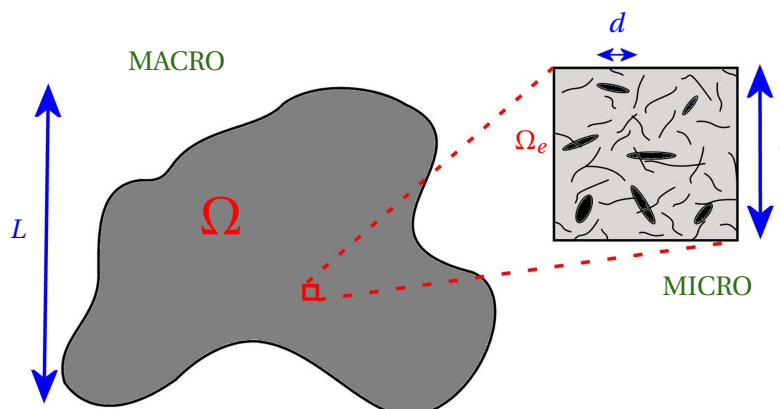


FIG. 5.3: Théorie du champ moyen sur un composite à microstructure aléatoire

Une fois que le VER a été choisi, on peut l'utiliser pour déterminer les propriétés effectives du matériau homogénéisé. Pour un comportement élastique linéaire, on calcule ainsi le module effectif

$\underline{\underline{C}}_{eff}$  défini par

$$\underline{\underline{\sigma}}_M = \underline{\underline{C}}_{eff} : \underline{\underline{\epsilon}}_M$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_M$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_M$  sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy et le tenseur des déformations linéarisées macroscopiques, définis comme la moyenne sur le VER  $\Omega_e$  des champs microscopiques

$\underline{\underline{\sigma}}_m$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_m$  :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}_M &= \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}}_m(X) dX \\ \underline{\underline{\epsilon}}_M &= \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) dX \end{aligned} \quad (5.1)$$

Une fois que ce tenseur tangent  $\underline{\underline{C}}_{eff}$  est connu, il peut alors être utilisé de manière classique pour la résolution du problème macroscopique.

Si on utilise le *lemme de Hill* (cf (Hill, 1963)), les définitions 5.1 mènent à une propriété essentielle de la théorie du champ moyen : le travail de déformation est le même dans les représentations microscopique et macroscopique : (sous certaines conditions aux limites non détaillées ici)

$$\frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\sigma}}_m(X) : \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) dX = \underline{\underline{\sigma}}_M : \underline{\underline{\epsilon}}_M \quad (5.2)$$

Remarque : La relation 5.2 est valable quel que soit le lien entre  $\underline{\underline{\sigma}}_m(X)$  et  $\underline{\underline{\epsilon}}_m(X)$ , donc restera vraie pour toute loi de comportement, y compris non linéaire.

Le but d'un processus d'homogénéisation est de calculer la réponse macroscopique  $\underline{\underline{C}}_{eff}$  d'une structure soumise à un chargement en connaissant le comportement microscopique. Cela se fait en trois étapes :

- 1) Déterminer les conditions aux limites liant les déplacements microscopiques  $\underline{u}_m$  à  $\underline{\underline{\epsilon}}_M$  et permettant de satisfaire le lemme de Hill ; (*localisation*)
- 2) Résoudre le problème local sous ces conditions aux limites ; (*résolution*)
- 3) Calculer  $\underline{\underline{\sigma}}_M$  en moyennant  $\underline{\underline{\sigma}}_m$  sur le VER (*homogénéisation*), et ainsi construire la relation

$$\underline{\underline{\sigma}}_M = \underline{\underline{C}}_{eff} : \underline{\underline{\epsilon}}_M .$$

Remarque : On pourrait réaliser cette démarche dans le sens inverse : on peut piloter le problème en contraintes en imposant un tenseur de contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\sigma}}_M$  pour calculer la déformation moyenne  $\underline{\underline{\epsilon}}_M$ . Dans ce cas, les conditions aux limites de l'étape 1 devront lier  $\underline{\underline{\sigma}}_m \cdot \underline{n}$  à  $\underline{\underline{\sigma}}_M$ .

Le problème local défini dans l'étape 2 est en général très complexe, et ne pourra pas être résolu analytiquement. On est alors obligé de réaliser des approximations pour le simplifier.

L'approximation la plus simple, et qui est apparue la première historiquement (cf (Voigt, 1887)), consiste à supposer que la déformation est homogène partout dans le VER :  $\forall X \in \Omega_e, \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) = \underline{\underline{\epsilon}}_M$ . Cette approximation est appelée approximation de Voigt, et on a alors :

$$\underline{\underline{C}}_{eff} \approx \underline{\underline{C}}_{Voigt} = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{C}}(X) dX$$

De la même manière, si on pilote le problème en contraintes et qu'on suppose qu'elles sont constantes dans le VER, on obtient l'approximation de Reuss (cf (Reuss, 1929)) :

$$\underline{\underline{C}}_{eff}^{-1} \approx \underline{\underline{C}}_{Reuss}^{-1} = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{C}}^{-1}(X) dX$$

Ces deux approximations sont bien sûr grossières, puisqu'elles prennent en compte la fraction volumique de chaque phase, mais pas leur géométrie. Cependant elles restent très utilisées car elles représentent des bornes rigoureuses :

$$\underline{\underline{C}}_{Reuss} \leq \underline{\underline{C}}_{eff} \leq \underline{\underline{C}}_{Voigt} \quad (5.3)$$

D'autres types d'approximation plus sophistiqués ont été réalisés depuis, en se basant principalement sur la formulation intégrale du problème mécanique standard. Pour tout tenseur du 4<sup>e</sup> ordre  $\underline{\underline{C}}_0$ , définissons la polarisation  $\underline{\underline{\tau}}$  comme

$$\underline{\underline{\tau}}(X) = \left[ \underline{\underline{C}}(X) - \underline{\underline{C}}_0 \right] : \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) \quad \text{c'est à dire} \quad \underline{\underline{\sigma}}_m(X) = \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) + \underline{\underline{\tau}}(X)$$

ainsi que sa moyenne

$$\underline{\underline{\bar{\tau}}} = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\tau}}(X) dX$$

On considère alors l'équation, dite de Lippman et Schwinger :

$$\forall X \in \Omega_e, \quad \underline{\underline{\epsilon}}_m(X) - \underline{\underline{\epsilon}}_M = - \int_{\Omega_e} \underline{\underline{\Gamma}}_0(X-Y) : \left[ \underline{\underline{\tau}}(Y) - \underline{\underline{\bar{\tau}}} \right] dY \quad (5.4)$$

où le tenseur  $\underline{\underline{\Gamma}}_0$  est l'opérateur de Green modifié en déformation, associé au milieu infini homogène de module  $\underline{\underline{C}}_0$ .

La solution de l'équation 5.4 peut être approximée en supposant que la polarisation  $\underline{\underline{\tau}}$  est constante par phase. Cette hypothèse est inspirée du travail d'Eshelby (cf (Eshelby, 1957)), où la solution analytique exacte du problème d'inclusion elliptique dans un milieu infini est présentée.

Dans cette solution, la déformation dans l'inclusion est homogène. Dans le cas de plusieurs inclusions dans un milieu infini, l'hypothèse de polarisation constante par phase nous donne une approximation. Sur cette base, on peut établir les bornes de Hashin-Shtrikman (cf (Hashin, 1962) et (Hashin and Shtrikman, 1963)). On peut remarquer que ces bornes prennent en compte la covariance de la distribution des phases, et donc sont du deuxième ordre alors que les bornes de Voigt et Reuss s'arrêtaient au premier ordre (fraction volumique de chaque phase).

A partir de l'équation 5.4, on peut également obtenir de nombreuses estimations en changeant le choix du milieu de référence caractérisé par le module  $\underline{\underline{C}}_0$ . L'exemple le plus connu est l'approximation de Mori-Tanaka (cf (Mori and Tanaka, 1973)), qui choisit  $\underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{C}}_{matrice}$  dans le cas d'un composite matrice-inclusion.

## Homogénéisation asymptotique

Le problème d'homogénéisation de structures hétérogènes peut également être vu d'un point de vue plus mathématique, comme cela a été initié dans (Benssousan et al., 1978) et (Sanchez-Palencia, 1980).

L'hypothèse fondamentale de l'homogénéisation asymptotique est que la structure possède une *géométrie périodique*, de telle sorte que les coefficients matériaux se reproduisent d'une cellule infiniment petite à une autre. Cette hypothèse est souvent valable pour les milieux hétérogènes fabriqués (contreplaqués, composites carbone-epoxy, nids d'abeilles, matériaux cellulaires, ...), mais par contre le sera très rarement pour des matériaux naturels.



*Remarque* : Dans le cas particulier des composites renforcés par des fibres, plusieurs modèles périodiques 2D sont utilisés dans la littérature : ils peuvent être approchés par des matériaux stratifiés (cf (Gardin et al., 1998)) si on se place dans le plan  $(e_1, \underline{2})$ , ou bien représentés comme un empilement périodique de renforts cylindriques si on se place dans le plan  $(e_1, \underline{3})$ .

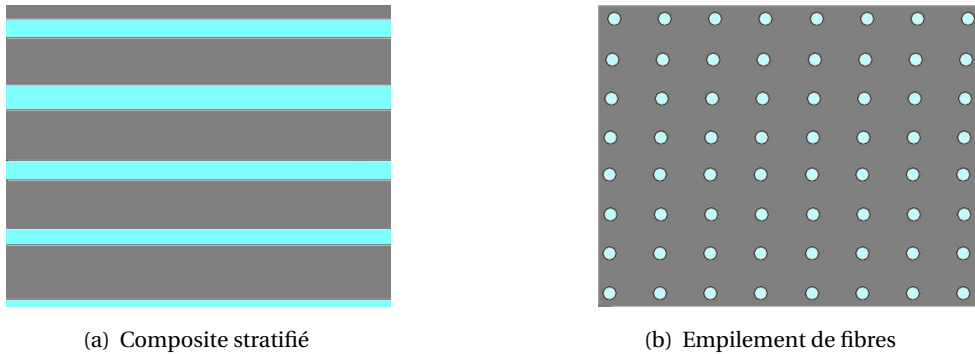


FIG. 5.4: Exemples de modèles périodiques 2D approchant un composite renforcé par des fibres

D'une manière générale, on note  $X$  les coordonnées (macroscopiques) du milieu  $\Omega$ , de dimension caractéristique  $L$ . On suppose que le tenseur d'élasticité  $\underline{\underline{C}}_\epsilon$  est périodique, de période  $\epsilon P$  :

$$\forall X, \quad \underline{\underline{C}}_\epsilon(X + \epsilon P) = \underline{\underline{C}}_\epsilon(X)$$

On introduit alors l'échelle microscopique, caractérisée par des coordonnées  $Y$  définies dans une cellule élémentaire  $\Omega_\epsilon$  par la relation : (cf figure 5.5)

$$Y = \frac{1}{\epsilon} X$$

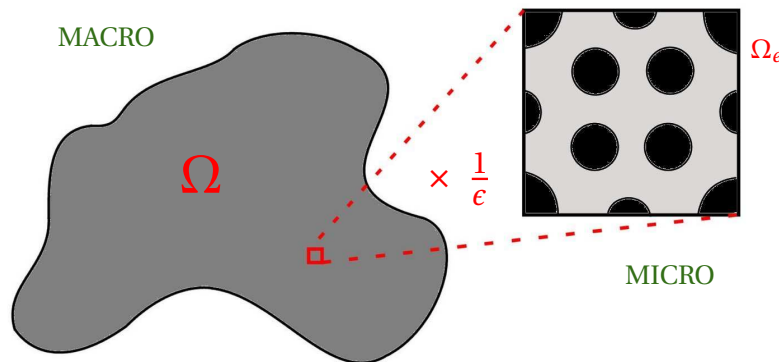


FIG. 5.5: Homogénéisation asymptotique sur un composite à microstructure périodique

On introduit aussi le tenseur  $\underline{\underline{C}}$   $P$ -périodique :

$$\underline{\underline{C}}\left(\frac{1}{\epsilon} X\right) = \underline{\underline{C}}_\epsilon(X)$$

L'idée principale est alors de rechercher le champ de déplacements sous la forme d'un développement de la forme :

$$u_\epsilon(X) = u_0(Z, Y) + \epsilon u_1(Z, Y) + \epsilon^2 u_2(Z, Y) + \dots$$

où on a posé  $Z \equiv X$  et  $Y = \frac{1}{\epsilon} X$ , et où les termes  $u_i$  sont  $P$ -périodiques par rapport à  $Y$ .

Le gradient des déplacements s'écrit alors :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial X} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial Z} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{u}}{\partial Y}$$

Dans la suite, par abus de notations, on remplace  $Z$  par  $X$  :

$$u_\epsilon = u_0(X, Y) + \epsilon u_1(X, Y) + \epsilon^2 u_2(X, Y) + \dots \quad (5.5)$$

et la dérivée par rapport à  $X$  devient :

$$\frac{d \underline{u}}{d X} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial X} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{u}}{\partial Y} \quad (5.6)$$

De ce fait, le tenseur des déformations linéarisées devient

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \epsilon^{-1} \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_0 + \left[ \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_0 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_1 \right] + \epsilon \left[ \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_1 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_2 \right] + \dots$$

Si on utilise ce développement dans le problème d'équilibre

$$div_X(\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon) = \underline{0}$$

avec la loi de comportement

$$\underline{\underline{\sigma}}_\epsilon(X) = \underline{\underline{C}}_\epsilon(X) : \underline{\underline{\epsilon}}_\epsilon(X) ,$$

on obtient alors l'équation d'équilibre suivante :

$$\epsilon^{-2} \left[ div_Y \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_0 \right) \right] \quad (5.7)$$

$$+ \epsilon^{-1} \left[ div_X \left( \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_0 \right) + div_Y \left( \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_0 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_1 \right) \right) \right] \quad (5.8)$$

$$+ \left[ div_X \left( \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_0 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_1 \right) \right) + div_Y \left( \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_1 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_2 \right) \right) \right] \quad (5.9)$$

$$+ \epsilon \left[ div_X \left( \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_1 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_2 \right) \right) + div_Y \left( \underline{\underline{C}} : \left( \underline{\underline{\nabla}}_X^{sym} u_2 + \underline{\underline{\nabla}}_Y^{sym} u_3 \right) \right) \right] \\ + \dots \\ = 0 \quad (5.10)$$

L'équation 5.10 est en fait infinie, et on suppose que le paramètre  $\epsilon$  est suffisamment petit pour négliger les termes au delà de l'ordre  $n$ . Cette démarche justifie l'adjectif "asymptotique" dans le nom de cette théorie, car elle n'est valable que pour  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En pratique, on s'arrête le plus souvent à l'ordre  $n = 0$ . On ne garde alors que les trois équations correspondant aux premiers ordres en  $\epsilon$ , qui peuvent être étudiées de manière séquentielle :

- **Ordre -2** : L'équation 5.7 devient satisfaite automatiquement si on fait l'hypothèse que  $\underline{u}_0$  ne varie qu'à l'échelle globale et est indépendante de  $Y$  (cf (Hori and Nemat-Nasser, 1999)) ;
- **Ordre -1** : L'équation 5.8 correspond à un problème d'équilibre local, avec pour inconnue le déplacement  $\underline{u}_1$ , en supposant  $\underline{u}_0$  donné. Il peut être résolu avec des conditions de périodicité aux limites. Sa solution exige de savoir résoudre analytiquement ou numériquement six problèmes indépendants d'élasticité linéaire ;

- **Ordre 0** : Une fois que  $\underline{u}_1$  a été calculé en fonction de  $\underline{u}_0$  grâce à l'équation 5.8, on peut moyenner l'équation 5.9 sur une cellule élémentaire, et le résultat nous donnera l'expression du tenseur élastique homogénéisé ainsi que l'équation d'équilibre macroscopique.

Volontairement, nous ne sommes pas entré dans les détails de cette analyse, le lecteur intéressé pourra regarder (Le Bris, 2005) et (Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia, 1992). On notera que cette stratégie est efficace et très répandue dans la littérature. Mais elle comporte certaines limites :

- Son application près des bords de la structure nécessite quelques précautions (cf (Dumontet, 1986)) ;
- Cette théorie n'est pas adaptée aux cas où les échelles ne peuvent pas être considérées comme infiniment séparées ;
- La condition de géométrie périodique limite le type de matériaux sur lesquels on peut l'utiliser.

## 5.2.2 Homogénéisation analytique en élasticité non linéaire

Le cadre de l'élasticité linéaire n'est valable que pour des problèmes où les déformations restent petites, comme c'est le cas par exemple pour la plupart des problèmes sur des géomatériaux ou des métaux. Par contre, les matériaux élastomères peuvent résister à de grandes déformations et leur comportement est alors fortement non linéaire. Ainsi, l'homogénéisation non linéaire des composites constitués d'une matrice élastomère, qui sont très utilisés dans l'industrie, a fait l'objet d'une vaste littérature, que ce soit pour les élastomères poreux ou au contraire renforcés (voir la thèse (Lopez-Pamies, 2006) et les références qu'elle contient).

La difficulté principale lorsqu'on passe à des problèmes non linéaires est que la forme de la loi de comportement n'est pas préservée quand on la moyenne. Ainsi, les méthodes analytiques décrites dans le cadre de l'élasticité linéaire ne sont plus valables (cf (Ponte Castaneda and Suquet, 1998)), et des modèles analytiques plus élaborés doivent être construits. Ce thème de recherche est assez récent et comprend un grand nombre de publications ces dernières années. On cite dans cette section un petit échantillon de résultats dans le cas particulier des composites élastomères fibrés, sans entrer dans leurs détails, et cette liste ne se veut pas être exhaustive.

Dans un premier temps, de nombreux modèles phénoménologiques ont été construits. Le premier résultat est dû à (Spencer, 1972), qui modélisa les fibres comme des lignes matérielles non extensibles. Plus tard, des modèles phénoménologiques plus réalistes furent utilisés, dans lesquels la direction des fibres est pénalisée : (Spencer, 1984), (Qiu and Pence, 1997), (Merodio and Ogden, 2005), (Horgan and Saccomandi, 2005), ...

Ces modèles présentent l'avantage d'être simples et de pouvoir être calibrés pour faire apparaître des instabilités macroscopiques à des valeurs de chargement observées expérimentalement (cf (Triantafyllidis and Abeyaratne, 1983)). Cependant, leur domaine de validité reste souvent assez limité.

En plus de ces modèles phénoménologiques, des modèles théoriques ont été développés. On notera en particulier (He et al., 2006), qui fournit un résultat d'homogénéisation exact sous certaines conditions sur la microstructure et le chargement, ainsi que les approximations de (deBotton et al., 2006) et (Guo et al., 2006) pour des matériaux néo-hookéens incompressibles.

Mais l'approche analytique qui semble la plus prometteuse est la théorie d'homogénéisation du second ordre élaborée par (Castaneda and Tiberio, 2000). Elle a déjà permis de construire un modèle

tridimensionnel décrivant le comportement homogénéisé de matériaux élastomères fibrés, sous l'hypothèse que les deux matériaux sont isotropes incompressibles, que ce soit pour une microstructure aléatoire ((Lopez-Pamies and Castaneda, 2006a), (Lopez-Pamies and Castaneda, 2006b) ou (Agoras et al., 2009a)) ou périodique ((Brun et al., 2007)). On notera qu'elle a également été appliquée à des composites élastomères poreux ((Lopez-Pamies and Castaneda, 2004) ; (Michel et al., 2007)).

## ■ 5.3 Approches numériques

Les méthodes élaborées en homogénéisation analytique présentent l'avantage que leur coût de calcul est le même qu'une loi de comportement usuelle lorsqu'elles sont utilisées dans un code d'éléments finis. Cependant, elles ne restent valables que pour un nombre limité de géométries et de matériaux, et font toujours l'hypothèses d'échelles très séparées.

La complexité croissante des comportements mécaniques couplée au développement des moyens de calcul ont alors poussé à une utilisation de plus en plus fréquente de méthodes numériques pour résoudre les problèmes multi-échelles.

L'application la plus simple des méthodes numériques est la "méthode de cellule élémentaire". Celle-ci consiste à réaliser un grand nombre de calculs sur le VER d'un matériau composite, puis de filtrer leurs résultats pour approcher les coefficients d'une loi macroscopique. Cependant, cette approche suppose que l'on connaît la forme de la loi macroscopique. Comme l'a montré (Mchugh et al., 1993), la forme d'une loi de comportement non linéaire n'est pas préservée entre les échelles microscopique et macroscopique. Ainsi, il semble très difficile de postuler la forme d'une loi homogénéisée à l'avance puis d'en calculer ses coefficients par cette méthode.

La solution est alors de construire une méthode numérique indépendante des lois de comportement utilisées, ce qui conduit aux méthodes dites d'homogénéisation numérique.

### 5.3.1 Homogénéisation numérique du premier ordre

La différence principale entre les homogénéisations numériques et analytiques réside dans la manière d'approcher la solution à l'échelle locale : alors que les méthodes analytiques cherchent à l'approcher par une expression explicite, les méthodes d'homogénéisation numériques résolvent le problème aux limites microscopique numériquement.

Ainsi, les trois étapes qui avaient été décrites dans la sous-section 5.2.1 restent valables, en les adaptant au cadre des grandes déformations, qui utilise le gradient des déformations  $\underline{\underline{F}}$  et sa variable conjuguée, le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}} = \delta w / \delta \underline{\underline{F}}$  (cf figure 5.6). Il faut :

- 1) Déterminer les conditions aux limites liant la déformée  $\underline{\underline{x}}_m$  au gradient  $\underline{\underline{F}}_M$  ; (*localisation*)
- 2) Résoudre numériquement le problème aux limites correspondant ; (*résolution*)
- 3) Calculer  $\underline{\underline{P}}_M$  en moyennant  $\underline{\underline{P}}_m$  sur le VER. (*homogénéisation*)

Les idées principales de cette méthode ont été présentées dans (Suquet, 1985).

Par rapport à l'homogénéisation analytique, on suppose toujours que les échelles sont infiniment séparées, mais par contre aucune hypothèse n'est faite sur la loi de comportement de chaque matériau. On s'intéresse ici aux matériaux hyperélastiques utilisant une densité d'énergie polyconvexe  $w$  quelconque, mais ces méthodes ont également été utilisées sur des problèmes plus complexes (cf (Miehe et al., 1999), (van der Sluis et al., 2000), (Mielke, 2003),...).

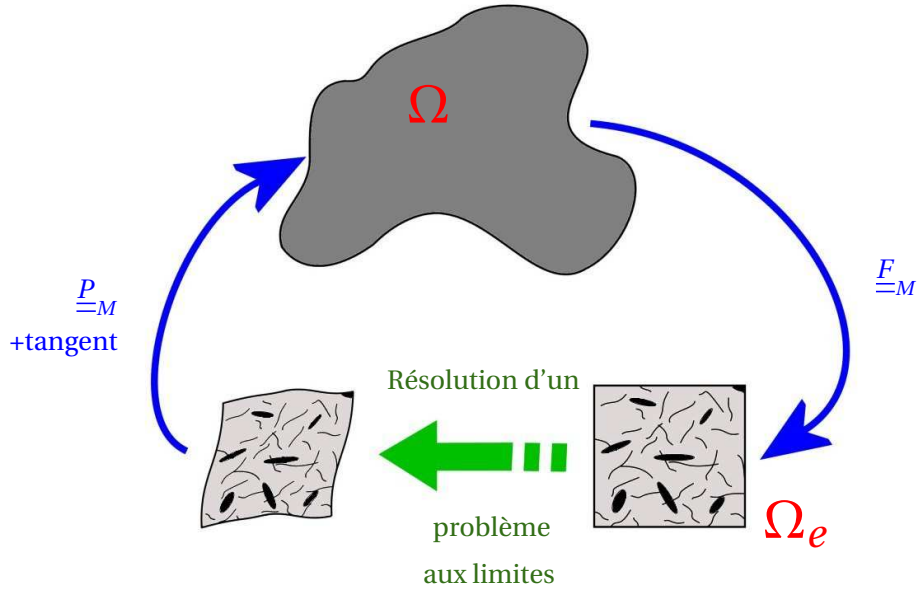


FIG. 5.6: Homogénéisation numérique du premier ordre

Plusieurs types de conditions aux limites peuvent être utilisés dans le problème local, la seule contrainte étant qu'elles permettent de satisfaire le lemme de Hill :

$$\underline{P}_M : \underline{F}_M = \frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{P}_m(X) : \underline{F}_m(X) dX \quad (5.11)$$

Dans la littérature, trois types de conditions aux limites vérifiant la condition 5.11 sont souvent utilisés :

$$\underline{x} = \underline{F}_M \cdot \underline{X} \quad \text{sur } \delta\Omega_e \quad (\text{déplacements imposés}) \quad (5.12)$$

$$\underline{t} = \underline{P}_M \cdot \underline{n} \quad \text{sur } \delta\Omega_e \quad (\text{efforts imposés}) \quad (5.13)$$

$$\begin{cases} \underline{x}^+ - \underline{x}^- = \underline{F}_M \cdot (\underline{X}^+ - \underline{X}^-) \\ \underline{t}^+ = -\underline{t}^- \end{cases} \quad (\text{périodicité avec déformation imposée}) \quad (5.14)$$

Il a été observé dans la littérature (cf (van der Sluis et al., 2000), (Terada et al., 2000) ou (Wohlmuth, 2001)) que les conditions de périodicité donnent de meilleures estimations des propriétés macroscopiques. On privilégiera donc ce type de conditions aux limites dans le problème local, qui sont d'ailleurs logiques lorsqu'on se place loin des bords de la structure.

Une fois que le problème local a été défini avec ses conditions aux limites, plusieurs méthodes numériques de résolution sont possibles :

- Dans la majorité des cas, la méthode des éléments finis classique est choisie (cf (Feyel and Kl, 2003), (Kouznetsova et al., 2001), (Temizer and Wriggers, 2007), (Oezdemir et al., 2008),...);
- Pour accélérer les calculs, la transformée de Fourier rapide (FFT) est parfois utilisée (cf (Moulinec and Suquet, 1994), (Moulinec and Suquet, 1998) et (Michel et al., 1999)).

On remarquera que la résolution numérique des problèmes locaux se fait "à la volée", c'est à dire en même temps que le calcul macroscopique. Une telle méthode est dite *concurrentielle*, puisque les

solveurs aux deux échelles sont concurrents pour se partager les ressources de la machine de calcul. Par opposition, on dit qu'une méthode est *séquentielle* si les résolutions aux deux échelles se sont pas simultanées. Par exemple, il est possible de lancer une série de calculs microscopiques, puis de se servir de ces résultats par interpolation pour approcher la loi de comportement homogénéisée dans un calcul macroscopique.

Ces méthodes d'homogénéisation numérique sont très utiles, et sont très répandues dans la littérature pour modéliser le comportement de matériaux composites où les hétérogénéités sont petites. Cependant elles restent d'un coût élevé, ce qui rend difficile leur utilisation industrielle. Et comme nous l'avons déjà précisé, elles supposent que les échelles microscopique et macroscopique sont infiniment séparées. Cette approche n'est donc justifiée que lorsque la taille des hétérogénéités est très petite, auquel cas le plus souvent on résout un problème local par point d'intégration macroscopique.

Cependant dans (Loehnert and Wriggers, 2008), il est montré par des tests numériques que l'on peut obtenir de bons résultats en utilisant une homogénéisation du premier ordre sur certains problèmes non linéaires où l'épaisseur de la structure est de l'ordre de grandeur de la taille des hétérogénéités. Mais ce résultat n'est pas général.

Par ailleurs, certains auteurs ont proposé des adaptations pour traiter des problèmes où les échelles sont moins séparées, comme (Ibrahimbegovic and Markovic, 2003) et (Markovic and Ibrahimbegovic, 2004). Une stratégie multi-échelles est proposée, dans laquelle la dimension du VER correspond à la taille d'un élément fini macroscopique (cf figure 5.7), et les conditions aux limites imposent aux déplacements locaux de correspondre exactement aux déplacements globaux :

$$\forall X \in \delta\Omega_e, \quad \underline{u}_m(X) = \underline{u}_M(X) \quad (5.15)$$

Ce type de méthode présente deux inconvénients :

- Les conditions aux limites de type Dirichlet 5.15 semblent trop fortes pour pouvoir modéliser toutes les micro-déformations ;
- Cette méthode n'est pas justifiable de manière asymptotique, et ne peut pas être interprétée mécaniquement.

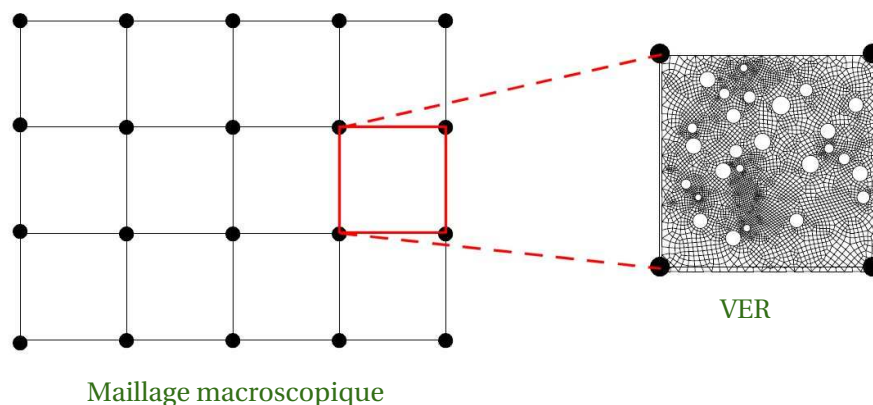


FIG. 5.7: Homogénéisation d'un problème à échelles couplées (de (Markovic, 2004))

Pour dépasser ces limites, une méthode originale a été proposée récemment dans (Kouznetsova, 2002), que l'on décrit dans ce qui suit.

### 5.3.2 Homogénéisation numérique du second ordre

Les méthodes d'homogénéisation numérique classiques (dites "du premier ordre"), présentent deux inconvénients : Comme nous l'avons dit précédemment, elles supposent que les échelles microscopique et macroscopique sont infiniment séparées, donc ne sont pas adaptées à des structures hétérogènes "fines" ; Une autre limite est qu'elles ne prennent pas en compte les dimensions absolues de la microstructure, ce qui signifie que les effets d'échelle ne sont pas gérés.

Pour dépasser ces limites, une extension de la méthode d'homogénéisation numérique classique a été introduite récemment dans (Kouznetsova et al., 2002) et (Kouznetsova et al., 2004). On l'appellera "homogénéisation numérique du second ordre", du fait qu'elle prend en compte le gradient du second ordre des déformations macroscopiques, noté  $\underline{\underline{G}}_M$ .

Le couplage entre les deux échelles s'appuie sur le développement en série de Taylor du champ de déformations macroscopique  $\underline{x}_M = \Phi(\underline{X})$  :

$$\forall \delta \underline{X}, \quad \delta \underline{x}_M = \underline{\underline{F}}_M \cdot \delta \underline{X} + \underline{\underline{G}}_M \cdot \delta \underline{X} \cdot \delta \underline{X} + O(\delta \underline{X}^3) \quad (5.16)$$

Ainsi, la cinématique macroscopique peut être approchée au second ordre à partir du tenseur gradient de déformations  $\underline{\underline{F}}_M = \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \underline{X}}$  et de son gradient  $\underline{\underline{G}}_M = \frac{\partial}{\partial \underline{X}} \underline{\underline{F}}_M$ , alors que l'homogénéisation classique s'arrête au premier ordre. L'échelle macroscopique transmet à l'échelle microscopique les gradients  $\underline{\underline{F}}_M$  et  $\underline{\underline{G}}_M$ , et les déformations dans le VER sont alors recherchées sous la forme :

$$\forall \delta \underline{X}, \quad \delta \underline{x}_m = \underline{\underline{F}}_M \cdot \delta \underline{X} + \underline{\underline{G}}_M \cdot \delta \underline{X} + \delta \underline{w}(\delta \underline{X}) \quad (5.17)$$

où le terme  $\delta \underline{w}$  représente le champ des fluctuations microscopiques provoquées par les hétérogénéités de la microstructure. Le champ  $\underline{w}$  est soumis à un certain nombre de conditions aux limites permettant de contrôler d'une certaine manière les gradients macroscopiques  $\underline{\underline{F}}_M$  et  $\underline{\underline{G}}_M$  (le lecteur intéressé pourra lire (Kouznetsova, 2002) pour plus de détails). Le problème aux limites sur  $\underline{w}$  ainsi défini peut alors être résolu par la méthode des éléments finis.

En retour, le modèle macroscopique utilise les variables macroscopiques  $\underline{\underline{P}}_M$  et  $\underline{\underline{Q}}_M$  des gradients  $\underline{\underline{F}}_M$  et  $\underline{\underline{G}}_M$ , telles que la condition de Hill-Mandel étendue suivante soit vérifiée :

$$\frac{1}{|\Omega_e|} \int_{\Omega_e} \underline{\underline{P}}_M : \nabla \underline{x}_m dX = \underline{\underline{P}}_M : \underline{\underline{F}}_M + \underline{\underline{Q}}_M : \underline{\underline{G}}_M \quad (5.18)$$

On résume ce fonctionnement sur la figure 5.8.

Cette méthode d'homogénéisation du second ordre semble très intéressante, puisqu'elle permet notamment de "voir" la flexion à l'échelle microscopique. Cela est utile dans les zones de fortes déformations localisées ou pour les structures possédant des dimensions macroscopiques relativement petites par rapport à la taille du VER. Plusieurs applications de cette méthode ont récemment été récapitulées dans (Geers et al., 2010).

Dans notre cas, on remarquera surtout l'application décrite dans (Geers et al., 2007) : une méthode d'homogénéisation numérique y est présentée sur des coques (de Kirchhoff-Love ou de Mindlin-Reisner) constituées d'un matériau composite, périodique sur la surface moyenne, dans lequel la

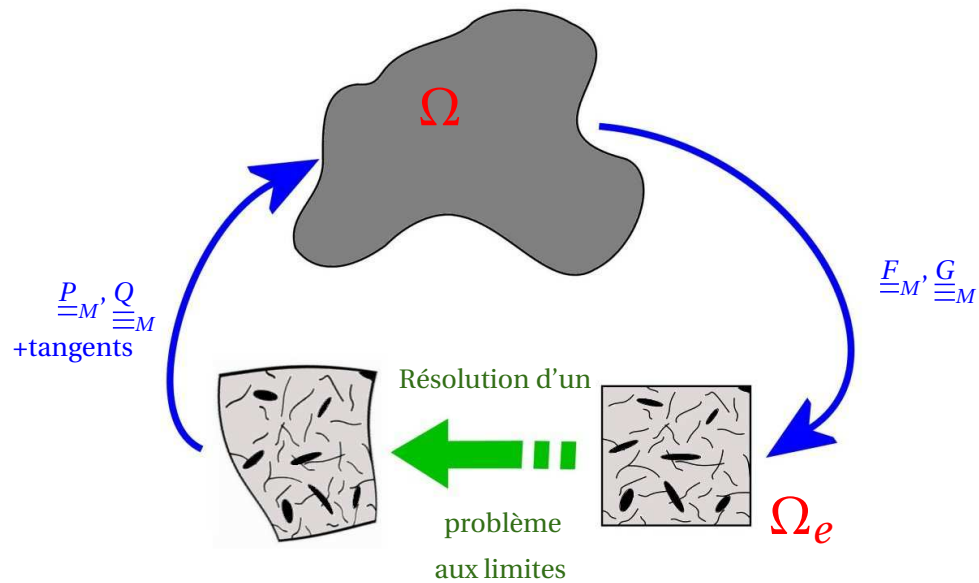


FIG. 5.8: Homogénéisation numérique du second ordre

taille des hétérogénéités est de l'ordre de l'épaisseur de la structure. Le VER utilisé représente toute l'épaisseur de la coque, et l'énergie est homogénéisée dans le plan tangent, alors qu'elle est intégrée dans l'épaisseur de la nappe. Les mesures de déformations en membrane, cisaillement transverse et surtout en courbure sont donnés aux problème locaux, qui vont calculer les efforts et les moments correspondants, ainsi que leurs tenseurs tangents. De cette manière, l'échelle macroscopique peut utiliser un modèle de coque classique, dont la loi de comportement est calculée en temps réel à l'échelle locale.

Le type de coques hétérogènes qui est considéré dans (Geers et al., 2007) ressemble en plusieurs points à notre problème de nappe :

- La structure est fine ;
- La taille des hétérogénéités est de l'ordre de l'épaisseur ;
- Le modèle global utilise des termes de flexion.

Ainsi, cet exemple est très encourageant pour élaborer une méthode d'homogénéisation adaptée à notre problème.

## ■ 5.4 Conclusions et application sur notre problème de nappe

Résumons les résultats remarquables décrits dans ce chapitre : la plupart des méthodes analytiques ne sont pas adaptées aux problèmes non linéaires comme ceux rencontrés dans la modélisation de matériaux élastomères. Dans le cas de grandes déformations, de très bons résultats ont pu être obtenus avec des méthodes récentes, notamment les estimations issues de l'homogénéisation du second ordre introduite dans (Castaneda and Tiberio, 2000), mais cette théorie reste limitée par deux paramètres : elle n'a été développée que pour certaines lois de comportement, et n'est applicable qu'à des problèmes dans lesquels les échelles sont infiniment séparées.

La solution est alors souvent d'utiliser des méthodes d'homogénéisation numériques. Les méthodes classiques (du premier ordre) présentent l'avantage de pouvoir être utilisées avec n'importe quelle



loi de comportement non linéaire, mais elles restent limitées par l'hypothèse d'échelles très séparées. Pour contourner ce problème, une méthode d'homogénéisation prenant en compte le gradient du second ordre a été introduite dans (Kouznetsova, 2002). Cette méthode permet de prendre en compte des phénomènes de flexion à l'échelle locale, et a déjà été appliquée à des problèmes de structure mince dans (Geers et al., 2007). Elle paraît donc la mieux adaptée à notre problème de nappe.

Cependant, le modèle macroscopique de nappe que nous avons introduit dans la partie I utilise des degrés de liberté supplémentaires pour modéliser la rotation des sections du câble. En plus des degrés de liberté utilisés dans (Geers et al., 2007) pour un modèle de coque, on aimerait pouvoir modéliser le cisaillement de la gomme provoqué par une torsion des câbles à l'échelle microscopique. La méthode d'homogénéisation décrite dans (Kouznetsova, 2002) ne semble pas assez riche pour réaliser cela.

En conclusion, les modèles existants ne semblent *pas adaptés* à notre problème de nappe, et l'un des travaux de cette thèse a été de développer une méthode multi-échelles originale, spécifique au cas des nappes renforcées. On réalise dans le chapitre 6 une *analyse asymptotique formelle* du problème de nappe fibrée. Cette analyse met en évidence les paramètres macroscopiques qui interviennent au premier ordre à l'échelle locale, ce qui nous permet de construire un modèle mésoscopique de manière rigoureuse. Ce problème est résolu *numériquement* par la méthode des éléments finis : on décrit le problème discret ainsi que le calcul des transitions micro-macro dans le chapitre 7. Enfin, la méthode multi-échelles appliquée au cas de *matériaux incompressibles* est expliquée dans le chapitre 8, et est validée par quelques tests numériques.

## Construction d'un modèle multi-échelles par analyse asymptotique

### ■ Introduction

La première partie de ce mémoire a présenté un modèle permettant notamment de prendre en compte la résistance en flexion des fibres dans un matériau polymère renforcé. Cette modélisation ne considère pas les efforts localisés dans la gomme au voisinage de ces fibres, qui pourraient pourtant avoir une importance non négligeable dû aux fortes non linéarités en présence de grandes déformations. Nous avons vu dans le chapitre 5 que les méthodes multi-échelles classiques ne semblent pas adaptées à notre problème de nappe.

L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier une nappe fibrée dans son environnement 3D avec plus de précision, afin d'élaborer une stratégie multi-échelles qui soit à la fois justifiée et rapide. On procède pour cela en trois étapes :

- Dans un premier temps, la section 6.1 présente le problème mécanique continu servant de base à notre étude. Nous y décrivons les hypothèses réalisées sur les grandeurs géométriques et mécaniques, et en réalisons un adimensionnement ;
- Dans la section 6.2, nous commençons par réaliser un développement asymptotique à deux échelles des différents champs d'inconnues du problème continu. Nous détaillons une analyse asymptotique qui permet de dégager les termes ayant une influence non négligeable sur l'équilibre de la structure. Cette analyse asymptotique n'est pas classique, dans le sens où elle associe les notions d'homogénéisation (dans le plan de la nappe) et de couche limite (dans la direction normale) ;
- Finalement, nous récapitulons les éléments formant la base de notre approche multi-échelles dans la section 6.3. Nous y expliquons la manière dont seront décrites les fibres et la gomme dans la suite de cette partie.

## 6.1 Formulation du problème

### 6.1.1 Problème mécanique - Décomposition de domaine

#### Présentation

Nous considérons dans tout ce chapitre une nappe fibrée noyée dans un milieu 3D, comme illustré sur la figure 6.1. L'objectif est de déterminer le comportement limite d'une telle structure lorsque le diamètre des renforts fibrés tend vers 0.

Nous réalisons les deux hypothèses suivantes :

- L'écartement entre les fibres est supposé constant sur toute la surface de la nappe ;
- Les fibres sont modélisées comme des tubes cylindriques, constituées d'un matériau isotrope très rigide par rapport à la gomme.

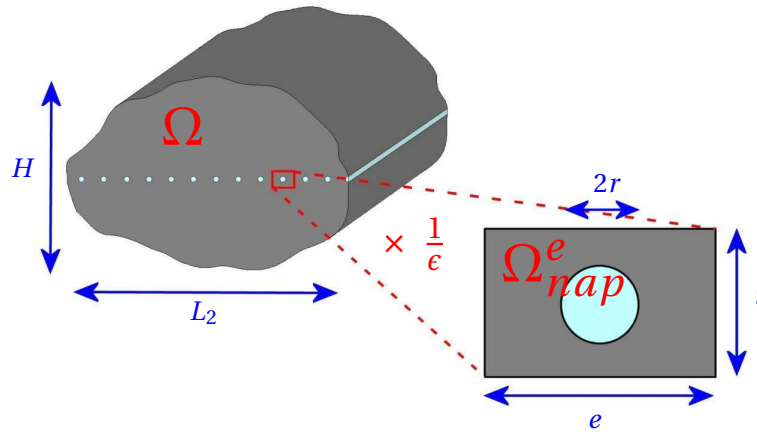


FIG. 6.1: Nappe fibrée d'épaisseur  $O(\epsilon)$  isolée dans une structure 3D

Ce type de problème n'est pas classique. Habituellement en homogénéisation asymptotique, on considère des géométries périodiques dans toutes les directions, comme celle représentée sur la figure 6.2.

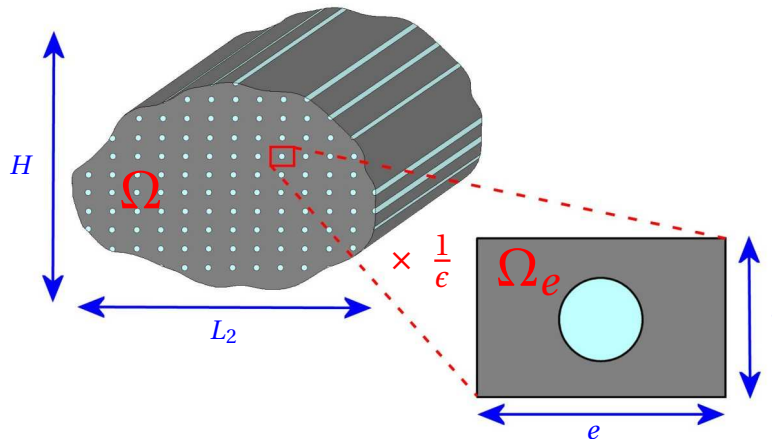


FIG. 6.2: Homogénéisation d'un composite fibré périodique

Ce type de matériaux fibrés est étudié par exemple dans (Gardin et al., 1998) (matériau multi-couches constitué de matériaux renforcés et d'un matériau de remplissage) ou (Grandidier, 1998) (empilement périodique de fibres).

Dans notre cas, le problème est effectivement périodique dans le plan de la nappe. Par contre, les fibres sont très rigides et forment une perturbation de taille  $\epsilon$  dans la direction transverse.

### Notations

On se place dans l'espace physique  $E = \mathbb{R}^3$ , dans lequel on choisit un *repère global* orthonormé  $(0, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère une nappe fibrée infiniment fine de surface moyenne  $\mathcal{S}_m$ , entourée par un volume  $\Omega$  de gomme homogène. Nous supposons pour simplifier que la nappe est plane dans sa configuration de repos. Pour fixer les idées, on se place alors dans le cas où le plan de la nappe correspond au plan  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , la direction des câbles étant donnée par le vecteur  $\underline{e}_1$ , et le vecteur  $\underline{e}_2$  indiquant la direction perpendiculaire dans le plan de la nappe. La surface  $\mathcal{S}_m$  et le plan de référence  $\bar{P}$  introduits au chapitre 2 sont alors confondus. Toutes les notations géométriques qui suivent sont récapitulées sur la figure 6.3.

On note respectivement  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  les volumes de gomme situés au dessus et en dessous de la nappe fibrée :

$$\Omega = \Omega_U \cup \Omega_D$$

Le contour extérieur  $\partial\Omega$  du solide est alors décomposé selon  $\partial\Omega_U^{ext}$  et  $\partial\Omega_D^{ext}$  :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_U^{ext} \cup \partial\Omega_D^{ext}$$

Nous faisons l'hypothèse que ces volumes sont d'épaisseur constante selon  $\underline{e}_3$ , et qu'ils sont définis par :

$$\begin{cases} \Omega_U = \mathcal{S}_m \times [0; \frac{H}{2}] \\ \Omega_D = \mathcal{S}_m \times [-\frac{H}{2}; 0] \end{cases} \quad (6.1)$$

Le rayon des fibres étant supposé très petit par rapport aux dimensions macroscopiques, nous l'adimensionnons en le divisant par un petit paramètre, noté  $\epsilon$ , qui caractérise le rapport entre les dimensions microscopiques et macroscopiques. L'écartement entre les câbles est supposé dépendre linéairement de ce même paramètre  $\epsilon$ . Par ailleurs, on définit également une épaisseur  $\epsilon t$  autour des fibres, correspondant à la zone dans laquelle les déformations de gomme peuvent varier rapidement. Pour récapituler, les dimensions locales adimensionnées sont notées :

$$\begin{cases} e : \text{écartement entre deux fibres;} \\ r : \text{rayon d'une fibre cylindrique;} \\ t : \text{épaisseur de la couche renforcée.} \end{cases}$$

Ces trois longueurs adimensionnées permettent de définir la géométrie 2D de référence d'une cellule élémentaire  $\Omega_{nap}^e$  caractéristique de la couche renforcée. Une telle cellule sera aussi appelée VER (Volume Élémentaire Représentatif). Par rapport à la réalité, elle est dilatée d'un facteur  $\frac{1}{\epsilon}$ . Elle comprend une section de fibre, notée  $\Omega_c^e$ , ainsi qu'un domaine constitué de gomme, noté  $\Omega_g^e$  :

$$\Omega_{nap}^e = \Omega_c^e \cup \Omega_g^e$$

Le contour séparant  $\Omega_c^e$  de  $\Omega_g^e$  est appelé  $\Gamma_C$ . Les bords extérieurs du VER sont quant à eux notés :

$$\begin{cases} \Gamma_U : \text{bord supérieur du VER;} \\ \Gamma_D : \text{bord inférieur du VER;} \\ \Gamma_R : \text{bord droit du VER;} \\ \Gamma_L : \text{bord gauche du VER.} \end{cases}$$

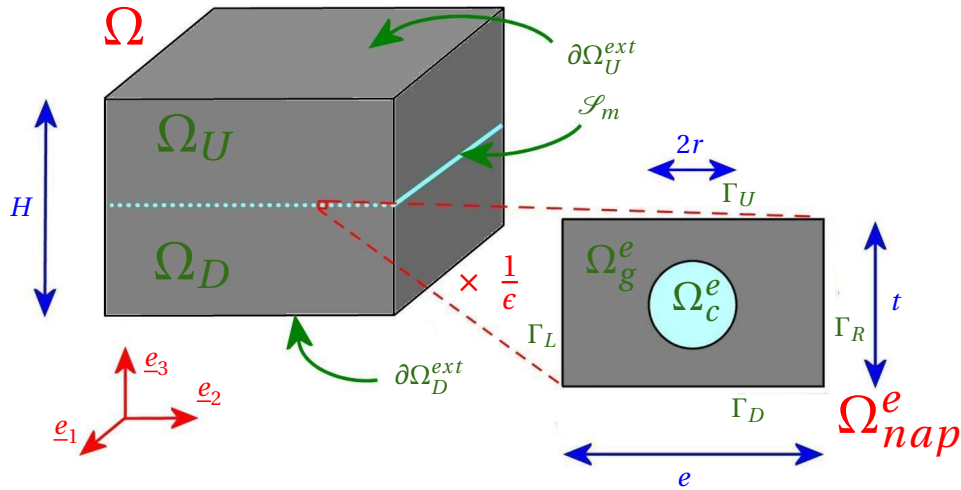


FIG. 6.3: Notations géométriques utilisées dans l'analyse asymptotique

*Remarque* : Nous avons supposé que la nappe est plane dans sa configuration de repos et que le solide considéré est un pavé d'épaisseur constante  $H$ . Ces hypothèses ont uniquement été réalisées pour alléger les écritures formelles de ce chapitre. La méthode élaborée sera tout à fait valable pour des configurations plus générales.

### 6.1.2 Forme des déformations

La gomme composant les volumes  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  étant prise homogène, nous pouvons supposer que ses déformations seront "lentes" par rapport à l'échelle  $\epsilon L$ . Plus précisément, nous considérons que les positions déformées des points matériels les constituant (notées  $\underline{x}_U^\epsilon$  et  $\underline{x}_D^\epsilon$ ) ne dépendent que de coordonnées macroscopiques

$$\underline{X} = (X_1, X_2, X_3)$$

et que leur gradient en  $X$  est petit par rapport à  $\frac{1}{\epsilon}$ . Par contre, lorsqu'on se place près de la surface de la nappe  $\mathcal{S}_m$ , les fibres constituent des hétérogénéités dans la gomme qui engendrent des déformations variant rapidement. Pour modéliser mathématiquement ces variations microscopiques, on introduit les variables locales

$$\begin{cases} Y_2 = \frac{1}{\epsilon} X_2 & \in [-\frac{\epsilon}{2}; \frac{\epsilon}{2}] \\ Y_3 = \frac{1}{\epsilon} X_3 & \in [-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}] \end{cases}$$

Les positions déformées des points de la couche renforcée ( $\underline{x}_c^\epsilon$  dans les fibres et  $\underline{x}_g^\epsilon$  dans la gomme) dépendent alors des coordonnées  $(\underline{X}_{2D}, \underline{Y}) = (X_1, X_2, Y_2, Y_3)$ , et sont prises périodiques par rapport à la variable  $Y_2$ , de période  $e$ . Le gradient de déformation vaut alors :

$$\underline{\underline{\nabla}} \underline{x} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{Y}} \quad (6.2)$$

avec

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}_{2D}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_1} \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}}{\partial X_2} \otimes \underline{e}_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{Y}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3$$

### Contraintes cinématiques

Les transformations  $\underline{x}_U^\epsilon, \underline{x}_D^\epsilon, \underline{x}_c^\epsilon$  et  $\underline{x}_g^\epsilon$  dans les différents domaines ne sont pas indépendantes. Pour les relier, nous faisons l'hypothèse que les déplacements sont continus dans le solide. Ceci suppose notamment qu'il n'y a pas de décollement entre les fibres et la gomme sur le contour  $\Gamma_c$ .

Nous imposons donc la condition sur le contour des câbles : :

$$\forall X_{2D} \in \bar{P}, \forall Y \in \Gamma_c, \quad \underline{x}_c^\epsilon(X_{2D}, Y) = \underline{x}_g^\epsilon(X_{2D}, Y) \quad (6.3)$$

La condition de continuité entre  $\underline{x}_g^\epsilon$  et  $\underline{x}_U^\epsilon$  (respectivement  $\underline{x}_D^\epsilon$ ) sur la surface supérieure  $\mathcal{S}_U$  (respectivement  $\mathcal{S}_D$ ) est plus délicate, car elle relie une transformation variant localement à une transformation purement macroscopique. On peut alors remarquer que le multiplicateur de Lagrange associé à cette condition de continuité correspond à l'effort exercé par le volume  $\Omega_U$  sur la nappe. Cet effort étant supposé varier lentement, cela signifie que le multiplicateur de Lagrange peut être pris constant à l'échelle local. Cela nous amène alors à imposer la condition de continuité entre  $\underline{x}_g^\epsilon$  et  $\underline{x}_U^\epsilon$  (respectivement  $\underline{x}_D^\epsilon$ ) uniquement en moyenne à l'échelle locale :

$$\forall X_{2D} \in \bar{P}, \quad \begin{cases} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \underline{x}_g^\epsilon(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \underline{x}_U^\epsilon(X_{2D}, \frac{\epsilon t}{2}) \\ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \underline{x}_g^\epsilon(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = \underline{x}_D^\epsilon(X_{2D}, -\frac{\epsilon t}{2}) \end{cases} \quad (6.4)$$

Dans la suite, nous notons respectivement  $\underline{\lambda}_c^\epsilon(X_{2D}, Y)$ ,  $\underline{\lambda}_U^\epsilon(X_{2D})$  et  $\underline{\lambda}_D^\epsilon(X_{2D})$  les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes.

### 6.1.3 Modèle énergétique

On modélise la gomme et chaque fibre comme deux matériaux hyperélastiques, caractérisés par des densités d'énergie  $w_c(\underline{F})$  et  $w_g(\underline{F})$ .

#### Energie dans les fibres

Les fibres étant très rigides, nous supposons qu'elles subissent des déformations assez faibles. Nous choisissons alors de modéliser le matériau isotrope les constituant par un matériau de Saint-Venant Kirchhoff :

$$w_c(\underline{F}) = \frac{1}{2} \lambda_c \left[ \text{Tr}(\underline{e}) \right]^2 + \mu_c \text{Tr}(\underline{e}^2) \quad (6.5)$$

où  $\underline{e}$  est le tenseur de déformation de Green Lagrange, et  $\lambda_c$  et  $\mu_c$  sont les coefficient de Lamé. On rappelle que ces coefficients sont reliés au module de Young  $E_c$  et au coefficient de Poisson  $\nu_c$  par les relations :

$$\lambda_c = \frac{\nu_c E_c}{(1 + \nu_c)(1 - 2\nu_c)} \quad \mu_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu_c)}$$

Le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est alors donné par :

$$\underline{P}_c = \frac{\partial w_c}{\partial \underline{F}} = \underline{F} \cdot \frac{\partial w_c}{\partial \underline{e}} = \underline{F} \cdot \left[ \lambda_c \text{Tr}(\underline{e}) \underline{I} + 2\mu_c \underline{e} \right] \quad (6.6)$$

#### Energie dans la gomme

L'analyse asymptotique réalisée dans ce chapitre est valable pour toute gomme hyperélastique quasi-incompressible. Nous notons  $w_g^\epsilon$  la densité volumique d'énergie de ce matériau, qui pourra par exemple être l'une des énergies présentées dans la section 2.1.2.

On rappelle que la gomme est supposée beaucoup moins rigide que les fibres. Ainsi, deux petits paramètres interviennent dans ce problème :

- Le rapport  $\epsilon$  entre le rayon d'une fibre et les dimensions macroscopiques ;
- Le rapport  $\eta$  entre la rigidité de la gomme et celle des fibres.

Nous faisons ici l'hypothèse que ces deux rapports sont dépendants, et que nous avons  $\eta \approx \epsilon^2$  de manière à ce que le produit par  $\eta$  d'un carré de déformation d'ordre  $\frac{1}{\epsilon}$  donne une énergie dont la densité volumique est en  $O(1)$ .

Nous adimensionnons alors l'énergie de gomme en la divisant par  $\epsilon^2$  :

$$w_g^\epsilon(\underline{\underline{F}}) = \epsilon^2 w_g(\underline{\underline{F}}) \quad (6.7)$$

### Energie totale de la structure

L'énergie totale de la structure est égale à la somme de trois énergie :

- L'énergie de gomme dans le volume  $\Omega_U$ , notée  $E_U$  ;
- L'énergie de la nappe composite sur la surface  $\mathcal{S}_m$ , notée  $E_{nap}$  ;
- L'énergie de gomme dans le volume  $\Omega_D$ , notée  $E_D$ .

En tenant compte de l'adimensionnement de l'énergie de gomme 6.7 et de la forme des volumes  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  donnés par l'expression 6.1, les énergies  $E_U$  et  $E_D$  sont données par les expressions :

$$\begin{aligned} E_U &= \iiint_{\Omega_U} w_g^\epsilon(\underline{\underline{\nabla x_U^\epsilon}}) dX \\ &= \epsilon^2 \iint_{\bar{P}} \int_0^{\frac{H}{2}} w_g(\underline{\underline{\nabla x_U^\epsilon}}) dX_3 dX_{2D} \\ E_D &= \iiint_{\Omega_D} w_g^\epsilon(\underline{\underline{\nabla x_D^\epsilon}}) dX \\ &= \epsilon^2 \iint_{\bar{P}} \int_{-\frac{H}{2}}^0 w_g(\underline{\underline{\nabla x_D^\epsilon}}) dX_3 dX_{2D} \end{aligned}$$

L'énergie de la nappe composite nécessite plus de réflexion, du fait des différentes échelles intervenant. L'énergie est calculée localement sur une cellule élémentaire  $\Omega_{nap}^\epsilon$ , puis est moyennée dans la largeur car on homogénéise dans le plan de la nappe, mais par contre est intégrée dans l'épaisseur. La densité surfacique d'énergie obtenue, notée  $w_{nap}$ , est alors intégrée sur la surface  $\mathcal{S}_m$  :

$$\begin{aligned} E_{nap} &= \iint_{\mathcal{S}_m} w_{nap}(\underline{\underline{\nabla x^\epsilon}}) dX_{2D} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_m} \left\{ \frac{\epsilon}{e} \iint_{\Omega_{nap}^\epsilon} w(\underline{\underline{\nabla x^\epsilon}}) dY \right\} dX_{2D} \\ &= \iint_{\mathcal{S}_m} \left\{ \frac{\epsilon}{e} \iint_{\Omega_c^\epsilon} w_c(\underline{\underline{\nabla x_c^\epsilon}}) dY + \frac{\epsilon^3}{e} \iint_{\Omega_g^\epsilon} w_g(\underline{\underline{\nabla x_g^\epsilon}}) dY \right\} dX_{2D} \end{aligned}$$

Pour résumer, l'énergie totale de la structure s'écrit donc :

$$E = \iint_{\bar{P}} \left\{ \epsilon^2 \int_0^{\frac{H}{2}} w_g(\underline{\underline{\nabla x_U^\epsilon}}) dX_3 + \epsilon^2 \int_{-\frac{H}{2}}^0 w_g(\underline{\underline{\nabla x_D^\epsilon}}) dX_3 + \epsilon \frac{1}{e} \iint_{\Omega_c^\epsilon} w_c(\underline{\underline{\nabla x_c^\epsilon}}) dY + \epsilon^3 \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^\epsilon} w_g(\underline{\underline{\nabla x_g^\epsilon}}) dY \right\} dX_{2D} \quad (6.8)$$

où on rappelle que les gradients  $\underline{\underline{\nabla x_c^\epsilon}}$  et  $\underline{\underline{\nabla x_g^\epsilon}}$  dans la nappe sont donnés par l'expression 6.2 :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\nabla x_c^\epsilon}} = \frac{\partial x_c^\epsilon}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial x_c^\epsilon}{\partial Y} \\ \underline{\underline{\nabla x_g^\epsilon}} = \frac{\partial x_g^\epsilon}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial x_g^\epsilon}{\partial Y} \end{cases}$$

### 6.1.4 Equations d'équilibre

#### Chargement

Supposons que la structure est soumise à des densités volumiques de forces, valant respectivement  $\underline{f}_U^\epsilon$  et  $\underline{f}_D^\epsilon$  dans les volumes  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$ , ainsi qu'à des efforts surfaciques  $\underline{g}_U^\epsilon$  et  $\underline{g}_D^\epsilon$  sur ses bords extérieurs  $\partial\Omega_U^{ext}$  et  $\partial\Omega_D^{ext}$ .

D'après l'adimensionnement 6.7, pour que la gomme puisse résister au chargement imposé, il est nécessaire que les termes d'ordre 0 et d'ordre 1 de ces efforts soient nuls. Nous supposons alors que les efforts ont la forme suivante :

$$\begin{cases} \underline{f}_U^\epsilon = \epsilon^2 \underline{f}_U^2 + \epsilon^3 \underline{f}_U^3 \\ \underline{f}_D^\epsilon = \epsilon^2 \underline{f}_D^2 + \epsilon^3 \underline{f}_D^3 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$\begin{cases} \underline{g}_U^\epsilon = \epsilon^2 \underline{g}_U^2 + \epsilon^3 \underline{g}_U^3 \\ \underline{g}_D^\epsilon = \epsilon^2 \underline{g}_D^2 + \epsilon^3 \underline{g}_D^3 \end{cases} \quad (6.10)$$

#### Equations d'Euler-Lagrange

D'après la forme de l'énergie 6.8, les conditions de continuité 6.3 et 6.4, et les expressions des efforts 6.9 et 6.10, l'équation d'Euler-Lagrange correspond à l'équilibre de la structure s'écrit alors

$\forall \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y)$   $Y_2$ -périodique,  $\hat{\underline{x}}_U(X)$ ,  $\hat{\underline{x}}_D(X)$ ,  $\hat{\underline{x}}_c(X_{2D}, Y)$ ,

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{P}} \left\{ \begin{aligned} & \epsilon^2 \int_0^{\frac{H}{2}} \frac{P}{\underline{g}} \left( \frac{\partial \underline{x}_U^\epsilon}{\partial X_{3D}} \right) : \frac{\partial \hat{\underline{x}}_U}{\partial X_{3D}} dX_3 \\ & + \epsilon^2 \int_{-\frac{H}{2}}^0 \frac{P}{\underline{g}} \left( \frac{\partial \underline{x}_D^\epsilon}{\partial X_{3D}} \right) : \frac{\partial \hat{\underline{x}}_D}{\partial X_{3D}} dX_3 \\ & + \epsilon \frac{1}{e} \iint_{\Omega_c^\epsilon} \frac{P}{\underline{c}} \left( \frac{\partial \underline{x}_c^\epsilon}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{x}_c^\epsilon}{\partial Y} \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}_c}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \hat{\underline{x}}_c}{\partial Y} \right) dY \\ & + \epsilon^3 \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^\epsilon} \frac{P}{\underline{g}} \left( \frac{\partial \underline{x}_g^\epsilon}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{x}_g^\epsilon}{\partial Y} \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}_g}{\partial X_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \hat{\underline{x}}_g}{\partial Y} \right) dY \\ & - \left[ \epsilon^2 \underline{g}_U^2 + \epsilon^3 \underline{g}_U^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, \frac{H}{2}) \\ & - \left[ \epsilon^2 \underline{g}_D^2 + \epsilon^3 \underline{g}_D^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, -\frac{H}{2}) \\ & - \int_0^{\frac{H}{2}} \left[ \epsilon^2 \underline{f}_U^2 + \epsilon^3 \underline{f}_U^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, X_3) dX_3 \\ & - \int_{-\frac{H}{2}}^0 \left[ \epsilon^2 \underline{f}_D^2 + \epsilon^3 \underline{f}_D^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, X_3) dX_3 \\ & - \int_{\Gamma_c} \lambda_c^\epsilon(X_{2D}, Y) \cdot \left[ \hat{\underline{x}}_c(X_{2D}, Y) - \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y) \right] dY \\ & - \lambda_U^\epsilon(X) \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 - \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, 0) \right] \\ & - \lambda_D^\epsilon(X) \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 - \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, 0) \right] \end{aligned} \right\} dX_{2D} = 0 \quad (6.11) \end{aligned}$$



## 6.2 Analyse asymptotique du problème

### 6.2.1 Développements asymptotiques

Les inconnues intervenant dans l'équation 6.11 sont dépendantes du petit paramètre  $\epsilon$ . Pour comprendre l'influence de ce petit paramètre, on décompose alors les champs de transformation et les multiplicateurs de Lagrange sous la forme de développements limités :

$$\begin{cases} \underline{x}_c^\epsilon(X_{2D}, Y) = \underline{x}_c^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{x}_c^1(X_{2D}, Y) + \epsilon^2 \underline{x}_c^2(X_{2D}, Y) + \dots \\ \underline{x}_g^\epsilon(X_{2D}, Y) = \underline{x}_g^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y) + \epsilon^2 \underline{x}_g^2(X_{2D}, Y) + \dots \\ \underline{x}_U^\epsilon(X_{3D}) = \underline{x}_U^0(X_{3D}) + \epsilon \underline{x}_U^1(X_{3D}) + \epsilon^2 \underline{x}_U^2(X_{3D}) + \dots \\ \underline{x}_D^\epsilon(X_{3D}) = \underline{x}_D^0(X_{3D}) + \epsilon \underline{x}_D^1(X_{3D}) + \epsilon^2 \underline{x}_D^2(X_{3D}) + \dots \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} \underline{\lambda}_c^\epsilon(X_{2D}, Y) = \underline{\lambda}_c^0(X_{2D}, Y) + \epsilon \underline{\lambda}_c^1(X_{2D}, Y) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y) + \dots \\ \underline{\lambda}_U^\epsilon(X_{2D}) = \underline{\lambda}_U^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{\lambda}_U^1(X_{2D}) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_U^2(X_{2D}) + \dots \\ \underline{\lambda}_D^\epsilon(X_{2D}) = \underline{\lambda}_D^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{\lambda}_D^1(X_{2D}) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_D^2(X_{2D}) + \dots \end{cases} \quad (6.13)$$

Dans ces expressions, tous les termes intervenant dans les développements sont alors indépendants de  $\epsilon$ . De plus, les fonctions  $\underline{x}_g^i$  sont prises dans l'espace des fonctions  $Y_2$  périodiques.

Ce développement fait l'hypothèse que la variable microscopique n'intervient que sur les correcteurs. Dans des cas simples, cette hypothèse se vérifie classiquement par analyse à l'ordre  $-1$ .

### Equation d'Euler-Lagrange

Nous insérons alors les développements asymptotiques 6.12 et 6.13 dans l'équation d'Euler 6.11 :

$\forall \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y)$   $Y_2$ -périodique,  $\hat{\underline{x}}_U(X_{2D}), \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}), \hat{\underline{x}}_c(X_{2D}, Y)$ ,

$$\begin{aligned} & \iint_{\bar{P}} \left\{ \begin{aligned} & \epsilon^2 \int_0^{\frac{H}{2}} \frac{P}{\underline{g}} \left( \frac{\partial \underline{x}_U^0}{\partial \underline{X}_{3D}} + \epsilon \frac{\partial \underline{x}_U^1}{\partial \underline{X}_{3D}} + \dots \right) : \frac{\partial \hat{\underline{x}}_U}{\partial \underline{X}_{3D}} dX_3 \\ & + \epsilon^2 \int_{-\frac{H}{2}}^0 \frac{P}{\underline{g}} \left( \frac{\partial \underline{x}_D^0}{\partial \underline{X}_{3D}} + \epsilon \frac{\partial \underline{x}_D^1}{\partial \underline{X}_{3D}} + \dots \right) : \frac{\partial \hat{\underline{x}}_D}{\partial \underline{X}_{3D}} dX_3 \\ & + \epsilon \frac{1}{e} \iint_{\Omega_c^\epsilon} \frac{P}{\underline{c}} \left( \left[ \frac{\partial \underline{x}_c^0}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial \underline{Y}} \right] + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_c^2}{\partial \underline{Y}} \right] + \epsilon^2 \left[ \frac{\partial \underline{x}_c^2}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_c^3}{\partial \underline{Y}} \right] + \dots \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}_c}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \hat{\underline{x}}_c}{\partial \underline{Y}} \right) dY \\ & + \epsilon^3 \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^\epsilon} \frac{P}{\underline{g}} \left( \left[ \frac{\partial \underline{x}_g^0}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_g^1}{\partial \underline{Y}} \right] + \epsilon \left[ \frac{\partial \underline{x}_g^1}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_g^2}{\partial \underline{Y}} \right] + \dots \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}_g}{\partial \underline{X}_{2D}} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \hat{\underline{x}}_g}{\partial \underline{Y}} \right) dY \\ & - \left[ \epsilon^2 \underline{g}_U^2 + \epsilon^3 \underline{g}_U^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, \frac{H}{2}) \\ & - \left[ \epsilon^2 \underline{g}_D^2 + \epsilon^3 \underline{g}_D^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, -\frac{H}{2}) \\ & - \int_0^{\frac{H}{2}} \left[ \epsilon^2 \underline{f}_U^2 + \epsilon^3 \underline{f}_U^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, X_3) dX_3 \\ & - \int_{-\frac{H}{2}}^0 \left[ \epsilon^2 \underline{f}_D^2 + \epsilon^3 \underline{f}_D^3 \right] \cdot \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, X_3) dX_3 \\ & - \int_{\Gamma_c} \left[ \underline{\lambda}_c^0(X_{2D}, Y) + \epsilon \underline{\lambda}_c^1(X_{2D}, Y) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y) + \dots \right] \cdot \left[ \hat{\underline{x}}_c(X_{2D}, Y) - \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y) \right] dY \\ & - \left[ \underline{\lambda}_U^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{\lambda}_U^1(X_{2D}) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_U^2(X_{2D}) + \dots \right] \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 - \hat{\underline{x}}_U(X_{2D}, 0) \right] \\ & - \left[ \underline{\lambda}_D^0(X_{2D}) + \epsilon \underline{\lambda}_D^1(X_{2D}) + \epsilon^2 \underline{\lambda}_D^2(X_{2D}) + \dots \right] \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \hat{\underline{x}}_g(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 - \hat{\underline{x}}_D(X_{2D}, 0) \right] \end{aligned} \right\} dX_{2D} = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

### Conditions aux limites

On reprend les conditions de continuité des déplacements 6.3 et 6.4, et on les réécrit à chaque ordre :

– A l'ordre 0, ces conditions aux limites nous donnent :

$$\forall X \in \bar{P}, \quad \underline{x}_c^0(X_{2D}) = \underline{x}_g^0(X_{2D}) = \underline{x}_U^0(X_{2D}, 0) = \underline{x}_D^0(X_{2D}, 0) \quad (6.15)$$

Dans la suite, on notera cette valeur commune  $\underline{r}_0(X_{2D})$ .

– A l'ordre 1, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\forall X \in \bar{P} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall Y \in \Gamma_c, \quad \underline{x}_c^1(X_{2D}, Y) = \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \frac{t}{2} \frac{\partial \underline{x}_U^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \underline{x}_U^1(X_{2D}, 0) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = -\frac{t}{2} \frac{\partial \underline{x}_D^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \underline{x}_D^1(X_{2D}, 0) \end{array} \right. \quad (6.16)$$

A partir de l'équation d'Euler-Lagrange 6.14 et des conditions aux limites que nous venons de décrire, la suite de ce chapitre a pour but d'étudier les premiers ordres en  $\epsilon$ , de manière à discerner les termes ayant un rôle significatif et adapter au mieux notre méthode multi-échelles. Les termes n'ayant pas d'influence sur nos choix ne seront pas détaillés ici.

## 6.2.2 Etude de l'ordre 0

### Premier terme : Pas d'efforts extérieurs

A l'ordre 0, le premier terme qui intervient dans 6.14 concerne les multiplicateurs de Lagrange :

$\forall \hat{x}_g(X_{2D}, Y)$   $Y_2$ -périodique,

$$\iint_{\bar{P}} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_c} \underline{\lambda}_c^0(X_{2D}, Y) \cdot \hat{x}_g(X_{2D}, Y) dY \\ + \underline{\lambda}_U^0(X_{2D}) \cdot \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 \\ + \underline{\lambda}_D^0(X_{2D}) \cdot \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 \end{array} \right\} dX_{2D} = 0$$

En considérant des fonctions tests  $\hat{x}_g(X_{2D}, Y)$  nulles partout sauf au voisinage des bords, on en déduit facilement que :

$$\forall X_{2D} \in \bar{P} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall Y \in \Gamma_c, \quad \underline{\lambda}_c^0(X_{2D}, Y) = \underline{0} \\ \underline{\lambda}_U^0(X_{2D}) = \underline{0} \\ \underline{\lambda}_D^0(X_{2D}) = \underline{0} \end{array} \right. \quad (6.17)$$

Tous les multiplicateurs de Lagrange sont donc nuls à l'ordre 0. Or les multiplicateurs de Lagrange correspondent aux efforts exercés entre les différents domaines. On en déduit donc à l'ordre 0 :

- Les volumes  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  n'exercent pas d'efforts sur la nappe ;
- La gomme de la nappe n'exerce pas d'efforts sur les câbles.

### Second terme : Déformation d'une section de câble

Toujours à l'ordre 0, en tenant compte du fait que  $\underline{\lambda}_c^0(X_{2D}, Y) = \underline{0}$ , on obtient l'équation d'Euler-Lagrange sur une section de câble  $\Omega_c^e$  :

$\forall X_{2D} \in \bar{P}, \quad \forall \underline{\hat{x}}_c(Y),$

$$\iint_{\Omega_c^e} P \left( \frac{\partial r^0}{\partial X_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y} \right) : \frac{\partial \underline{\hat{x}}_c}{\partial Y} dY = 0$$

Ce problème local a comme inconnue le champ  $\underline{x}_c^1$  en supposant  $\frac{\partial r^0}{\partial X_{2D}}$  connu, ce qui peut être écrit de manière plus précise :

**Pb 6.2.1 Problème local sur une section de câble à l'ordre 0**

Etant donnés  $\underline{F}_1^0 = \frac{\partial r^0}{\partial X_1}$  et  $\underline{F}_2^0 = \frac{\partial r^0}{\partial X_2}$  fixés, trouver le champ  $\underline{x}_c^1(Y_2, Y_3)$  tel que

$\forall \underline{\hat{x}}_c(Y_2, Y_3)$

$$\iint_{\Omega_c^e} P \left( \frac{\partial r^0}{\partial X_1} \otimes \underline{e}_1 + \left[ \frac{\partial r^0}{\partial X_2} + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_2} \right] \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \frac{\partial \underline{\hat{x}}_c}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{x}}_c}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right] dY_2 dY_3 = 0 \quad (6.18)$$

Ce problème n'est pas bien posé puisque la solution est définie à un mouvement rigide près, mais nous cherchons à déterminer la forme de l'ensemble des solutions  $\underline{x}_c^1$  possibles.

Pour simplifier les notations, commençons par introduire le tenseur gradient de déformation  $\underline{\underline{F}}^0$  défini par :

$$\underline{\underline{F}}^0(X_{2D}, Y) = \frac{\partial r^0}{\partial X_1}(X_{2D}) \otimes \underline{e}_1 + \left[ \frac{\partial r^0}{\partial X_2}(X_{2D}) + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_2}(X_{2D}, Y) \right] \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_3}(X_{2D}, Y) \otimes \underline{e}_3$$

ainsi que le tenseur de déformation de Green Lagrange :

$$\underline{\underline{e}}^0(X_{2D}, Y) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}^{0T}(X_{2D}, Y) \cdot \underline{\underline{F}}^0(X_{2D}, Y) - \underline{\underline{I}} \right)$$

Nous réalisons l'intégration par parties de l'équation 6.18 s'écrit :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_c^e} P(\underline{\underline{F}}^0) : \left[ \frac{\partial \underline{\hat{x}}_c}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{x}}_c}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right] dY_2 dY_3 &= \int_{\partial \Omega_c^e} \left[ \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{n} \right] \cdot \underline{\hat{x}}_c dY \\ &\quad - \iint_{\Omega_c^e} \left[ \frac{\partial}{\partial Y_2} \left( \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{e}_2 \right) + \frac{\partial}{\partial Y_3} \left( \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{e}_3 \right) \right] \cdot \underline{\hat{x}}_c dY_2 dY_3 \end{aligned}$$

où le vecteur  $\underline{n}$  désigne le vecteur normal sortant à la bordure de la section.

On en déduit les équations d'équilibre :

$$\forall (Y_2 dY_3) \in \Omega_c^e, \quad \frac{\partial}{\partial Y_2} \left( \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{e}_2 \right) + \frac{\partial}{\partial Y_3} \left( \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{e}_3 \right) = \underline{0} \quad (6.19)$$

$$\forall Y \in \partial \Omega_c^e, \quad \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{F}}^0) \cdot \underline{n} = \underline{0} \quad (6.20)$$

où le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{P}}_c$  est relié aux tenseurs  $\underline{\underline{F}}^0$  et  $\underline{\underline{e}}^0$  par l'expression 6.6.

Recherchons la solution (que nous supposons unique à un mouvement rigide près) sous la forme homogène en déformation : le tenseur gradient de déformations  $\underline{\underline{F}}^0$  est indépendant de la variable locale  $Y$ . Si on insère l'expression 6.6 dans l'équation 6.20, on obtient les conditions sur les composantes du tenseur de déformation de Green Lagrange :

$$\text{pour } i \neq j, \quad \forall (Y_2, Y_3) \in \Omega_c^e, \quad e_{ij}^0(Y_2, Y_3) = 0$$

ce qui signifie que la section du câble ne subit pas de cisaillement à l'ordre 0, donc les vecteurs colonnes du tenseur  $\underline{\underline{F}}^0$  sont orthogonaux (mais pas nécessairement normés). Dans la suite, nous noterons :

$$\begin{cases} \underline{d}_2^0(X_{2D}) &= \underline{\underline{F}}^0(X_{2D}) \cdot \underline{e}_2 \\ &= \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_2}(X_{2D}) + \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_2}(X_{2D}, Y) \\ \underline{d}_3^0(X_{2D}) &= \underline{\underline{F}}^0(X_{2D}) \cdot \underline{e}_3 \\ &= \frac{\partial \underline{x}_c^1}{\partial Y_3}(X_{2D}, Y) \end{cases} \quad (6.21)$$

On en déduit que les déformations locales du premier ordre  $\underline{x}_c^1$  s'écrivent sous la forme de la transformation homogène :

$$\forall X_{2D} \in \mathcal{S}_m, \forall Y \in \Omega_c^e, \quad \underline{x}_c^1(X_{2D}, Y_2, Y_3) = \underline{r}^1(X_{2D}) + Y_2 \left[ \underline{d}_2^0(X_{2D}) - \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_2}(X_{2D}) \right] + Y_3 \underline{d}_3^0(X_{2D}) \quad (6.22)$$

Par ailleurs, l'équation 6.20 implique également les relations :

$$\begin{cases} \lambda_c (e_{11}^0 + e_{22}^0 + e_{33}^0) + 2\mu_c e_{22}^0 = 0 \\ \lambda_c (e_{11}^0 + e_{22}^0 + e_{33}^0) + 2\mu_c e_{33}^0 = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$e_{22}^0 = e_{33}^0 = - \frac{\lambda_c}{\underbrace{2(\lambda_c + \mu_c)}_{\nu_c}} e_{11}^0 \quad (6.23)$$

où  $e_{11}^0 = \left\| \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_1} \right\|^2 - 1$  est une donnée du problème.

On en déduit alors que la norme des deux vecteurs  $\underline{d}_2^0$  et  $\underline{d}_3^0$ , orthogonaux à  $\underline{F}_1^0 = \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_1}$ , dépend de la norme de  $\underline{F}_1^0$  :

$$\|\underline{d}_2^0\| = \|\underline{d}_3^0\| = \sqrt{1 - \nu_c + \nu_c \|\underline{F}_1^0\|^2} \quad (6.24)$$

Finalement, l'étude locale à l'ordre 0 nous fournit les informations suivantes :

- La section de câble ne subit pas de cisaillement à l'ordre 0 ;
- Sa transformation est de la forme 6.22 ;
- La norme des vecteurs orthogonaux  $\underline{d}_2^0$  et  $\underline{d}_3^0$  est donnée par l'expression 6.24. En particulier, si  $\|\underline{F}_1^0\| = 1$ , alors  $\|\underline{d}_2^0\| = \|\underline{d}_3^0\| = 1$  ;
- Les degrés de liberté restant pour le câble à l'ordre 1 au niveau local sont : la translation  $\underline{r}^1$ , et la rotation des vecteurs orthogonaux  $\underline{d}_2^0$  et  $\underline{d}_3^0$  autour de  $\underline{F}_1^0 = \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_1}$ .

### 6.2.3 Etude de l'ordre 1

#### Premier terme : Pas d'efforts extérieurs

A l'ordre 1 dans la gomme, le premier terme qui intervient dans 6.14 concerne les multiplicateurs de Lagrange :

$\forall \hat{x}_g(X_{2D}, Y)$   $Y_2$ -périodique,

$$\iint_{\bar{P}} \left\{ \begin{aligned} & \int_{\Gamma_c} \underline{\lambda}_c^1(X_{2D}, Y) \cdot \hat{x}_g(X_{2D}, Y) dY \\ & + \underline{\lambda}_U^1(X_{2D}) \cdot \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 \\ & + \underline{\lambda}_D^1(X_{2D}) \cdot \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 \end{aligned} \right\} dX_{2D} = 0$$

Comme cela a été fait à l'ordre 0 dans la sous section précédente, ceci implique que ces multiplicateur sont nuls :

$$\forall X_{2D} \in \bar{P} \quad \begin{cases} \forall Y \in \Gamma_c, \quad \underline{\lambda}_c^1(X_{2D}, Y) = \underline{0} \\ \underline{\lambda}_U^1(X_{2D}) = \underline{0} \\ \underline{\lambda}_D^1(X_{2D}) = \underline{0} \end{cases}$$

On en déduit donc à l'ordre 1 :

- Les volumes  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  n'exercent pas d'efforts sur la nappe ;
- La gomme de la nappe n'exerce pas d'efforts sur les câbles.

### Second terme : Condition globale sur les câbles

Le second terme qui intervient à l'ordre 1 dans l'équation 6.14 fait intervenir les fonctions tests  $\hat{x}_c$  dépendant uniquement des coordonnées macroscopiques  $X_{2D}$ . Par analogie avec la forme de la transformation à l'ordre 0, nous noterons ici ces fonctions tests  $\hat{r}$  :

$\forall \hat{r}(X_1, X_2)$

$$\iint_{\bar{P}=\underline{c}} \underline{P} \left( \frac{\partial \hat{r}^0}{\partial X_1}(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_1 + \underline{d}_2^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_2 + \underline{d}_3^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \frac{\partial \hat{r}}{\partial X_1} \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \hat{r}}{\partial X_2} \otimes \underline{e}_2 \right] dX_1 dX_2 = 0$$

D'après l'étude locale réalisée à l'ordre 0, on sait que :

$$\forall (X_1, X_2) \in \bar{P}, \quad \underline{P}_{\underline{c}}(X_1, X_2) \cdot \underline{e}_2 = \underline{P}_{\underline{c}}(X_1, X_2) \cdot \underline{e}_3 = \underline{0}$$

L'équation précédente s'écrit donc :

$\forall \hat{r}(X_1, X_2)$

$$\iint_{\bar{P}=\underline{c}} \underline{P} \left( \frac{\partial \hat{r}^0}{\partial X_1}(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_1 + \underline{d}_2^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_2 + \underline{d}_3^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_3 \right) : \frac{\partial \hat{r}}{\partial X_1} \otimes \underline{e}_1 dX_1 dX_2 = 0$$

En intégrant par partie, on obtient alors la condition :

$$\forall (X_1, X_2) \in \bar{P}, \quad \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \underline{P}_{\underline{c}} \left( \frac{\partial \hat{r}^0}{\partial X_1}(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_1 + \underline{d}_2^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_2 + \underline{d}_3^0(X_1, X_2) \otimes \underline{e}_3 \right) \right) \cdot \underline{e}_1 = \underline{0}$$

En utilisant l'expression 6.6 du tenseur des contraintes, on en déduit alors que la quantité suivante est constante le long de chaque fibre :

$$\lambda_c (e_{11}^0 + e_{22}^0 + e_{33}^0) + 2\mu_c e_{11}^0 = cste$$

D'après la relation 6.23 reliant  $e_{22}^0$  et  $e_{33}^0$  à  $e_{11}^0$ , on en déduit que

$$E_c e_{11}^0 = cste$$

En supposant que les conditions aux limites sont choisies de telle sorte à ne pas imposer de compression/traction aux câbles, on obtient alors  $e_{11}^0 = cste = 0$ . Cela signifie que

$$\left\| \frac{\partial \hat{r}^0}{\partial X_1} \right\| = 1 \tag{6.25}$$

Nous reprenons alors la relation 6.24, et nous en concluons que les trois vecteurs orthogonaux  $\underline{d}_1^0 = \frac{\partial r^0}{\partial X_1}$ ,  $\underline{d}_2^0$  et  $\underline{d}_3^0$  sont tous normés.

Finalement, l'étude local à l'ordre 0 et l'étude global à l'ordre 1 nous ont permis de montrer que les sections de câbles restent invariantes à l'ordre 1 et qu'elles ne subissent ni cisaillement, ni extension/compression. Leur transformation est caractérisée par le tenseur de rotation défini par

$$\underline{R}^0(X_{2D}) = \frac{\partial r^0}{\partial X_1}(X_{2D}) \otimes \underline{e}_1 + \underline{d}_2^0(X_{2D}) \otimes \underline{e}_2 + \underline{d}_3^0(X_{2D}) \otimes \underline{e}_3 \quad (6.26)$$

*Remarque* : L'ordre 1 de l'équation 6.14 nous fournit également un problème local linéarisé sur chaque section de câble. Nous ne le détaillons pas ici car il n'aura pas d'utilité par la suite.

## 6.2.4 Etude de l'ordre 2

De nombreux termes apparaissent à l'ordre 2 dans l'équation d'Euler-Lagrange 6.14. On se limite ici à l'étude du seul terme nous intéressant, à savoir le problème local sur la gomme à l'intérieur de la nappe :

### Pb 6.2.2 Problème local sur la gomme à l'ordre 2 (dans le repère global)

En un point macroscopique  $X_{2D} \in \mathcal{S}_m$  donné, on suppose que  $\frac{\partial r^0}{\partial X_{2D}}$ ,  $\underline{x}_c^1$ ,  $\underline{x}_U^1$  et  $\underline{x}_D^1$  sont fixés.

Trouver  $\underline{x}_g^1(X_{2D}, Y)$   $Y_2$ -périodique,  $\underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y)$ ,  $\underline{\lambda}_U^2(X_{2D})$  et  $\underline{\lambda}_D^2(X_{2D})$  tels que :

$\forall \hat{x}_g(Y)$   $Y_2$ -périodique,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^e} \underline{P} \left( \frac{\partial r^0}{\partial X_{2D}} + \frac{\partial \underline{x}_g^1}{\partial Y} \right) : \frac{\partial \hat{x}_g}{\partial Y} dY + \int_{\Gamma_c} \underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y) \cdot \hat{x}_g(X_{2D}, Y) dY \\ & - \frac{1}{e} \underline{\lambda}_U^2(X_{2D}) \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 - \frac{1}{e} \underline{\lambda}_D^2(X_{2D}) \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{x}_g(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = 0 \end{aligned}$$

sous les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall Y \in \Gamma_c, \quad \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y) = \underline{x}_c^1(X_{2D}, Y) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \underline{x}_U^1(X_{2D}, 0) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = \underline{x}_D^1(X_{2D}, 0) \end{array} \right.$$

Dans ce problème local, on pourra tenir compte des résultats obtenus aux ordres précédents, à savoir l'expression 6.22 des déformations locales d'une section de fibre :

$$\underline{x}_c^1(X_{2D}, Y) = \underline{r}^1(X_{2D}) + Y_2 \left[ \underline{d}_2^0(X_{2D}) - \frac{\partial r^0}{\partial X_2}(X_{2D}) \right] + Y_3 \underline{d}_3^0(X_{2D})$$

et le fait que le triplet  $(\frac{\partial r^0}{\partial X_1}, \underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$  forme un repère orthonormé direct.

Ce problème local sera décrit plus en détails dans la sous section 6.3.3, puis dans le chapitre 7.

## 6.3 Choix de la stratégie multi-échelles

### 6.3.1 Déformations microscopiques dans la gomme

Nous avons vu dans l'analyse asymptotique de la section 6.2 que les déformations mésoscopiques de la gomme peuvent être calculées au premier ordre en résolvant le problème local non linéaire Pb6.2.2.

Dans ce problème local, il faut tenir compte des informations issues de l'analyse de la partie câbles aux ordres inférieurs :

- Chaque section de câble est invariante. Sa transformation à l'ordre 1 est donnée par l'expression 6.22, caractérisée par la translation  $\underline{r}^1$  et les directeurs orthonormés  $\underline{d}_2^0$  et  $\underline{d}_3^0$ .
- Les fibres ne subissent ni compression/traction ni cisaillement à l'ordre 0, ce qui signifie que  $\frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_1} = \underline{d}_1^0 = \underline{d}_2^0 \wedge \underline{d}_3^0$ . On introduit alors le tenseur de rotation défini par l'expression 6.26 :

$$\underline{\underline{R}}^0(X_{2D}) = \underline{d}_1^0(X_{2D}) \otimes \underline{e}_1 + \underline{d}_2^0(X_{2D}) \otimes \underline{e}_2 + \underline{d}_3^0(X_{2D}) \otimes \underline{e}_3;$$

On peut noter que ce problème local est invariant par translation et par rotation. On se place alors dans le repère local de la section de câble  $(\underline{d}_1^0, \underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$ , en réalisant le changement de variable :

$$\underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, Y_3) = \underline{\underline{R}}^{0T}(X_{2D}) \cdot \left[ \underline{x}_g^1(X_{2D}, Y_2, Y_3) - \underline{r}^1(X_{2D}) + Y_2 \frac{\partial \underline{r}^0}{\partial X_2}(X_{2D}) \right]$$

Avec ce changement de variable, le problème local s'écrit :

#### Pb 6.3.1 Problème local sur la gomme à l'ordre 2 (dans le repère local)

En un point macroscopique  $X_{2D} \in \mathcal{S}_m$  donné, on suppose que  $\underline{r}^0(X_{2D})$ ,  $\underline{r}^1(X_{2D})$ ,  $\underline{\underline{R}}^0(X_{2D})$ ,  $\underline{x}_U^1(X_{2D})$  et  $\underline{x}_D^1(X_{2D})$  sont donnés.

Trouver  $\underline{x}_m(X_{2D}, Y)$ ,  $\underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y)$ ,  $\underline{\lambda}_U^2(X_{2D})$  et  $\underline{\lambda}_D^2(X_{2D})$  tels que :

$\forall \hat{\underline{x}}_g(Y)$   $Y_2$ -périodique,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^e} \underline{P}_{\underline{g}} \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \hat{\underline{x}}}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) dY_2 dY_3 \\ & + \int_{\Gamma_c} \underline{\lambda}_c^2(X_{2D}, Y) \cdot \hat{\underline{x}}(X_{2D}, Y) dY \\ & - \frac{1}{e} \underline{\lambda}_U^2(X_{2D}) \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{\underline{x}}(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 \\ & - \frac{1}{e} \underline{\lambda}_D^2(X_{2D}) \cdot \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \hat{\underline{x}}(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = 0 \end{aligned}$$

sous les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \forall (Y_2, Y_3) \in \Gamma_c, & \underline{x}_m(X_{2D}, Y) = Y_2 \underline{e}_2 + Y_3 \underline{e}_3 \\ \forall Y_3 \in [-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}], & \underline{x}_m(\frac{e}{2}, Y_3) = \underline{x}_m(-\frac{e}{2}, Y_3) + e \underline{F}_2(X_{2D}) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \frac{t}{2} \underline{\xi}_U(X_{2D}) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = -\frac{t}{2} \underline{\xi}_D(X_{2D}) \end{cases} \quad (6.27)$$

Grâce au changement de variable effectué, le problème local au point macroscopique  $(X_{2D})$  dépend seulement des 9 degrés de liberté macroscopiques suivants :

– La dérivée dans le plan de la nappe

$$\underline{F}_2(X_{2D}) = \underline{R}^{0T}(X_{2D}) \cdot \frac{\partial r^0}{\partial X_2}(X_{2D}) \in \mathbb{R}^3;$$

– Les quantités : (leur interprétation physique sera présentée dans la sous section 6.3.3)

$$\underline{\xi}_U(X_{2D}) = \underline{R}^{0T}(X_{2D}) \cdot \left[ \frac{\partial \underline{x}_U^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \frac{2}{t} (\underline{x}_U^1(X_{2D}, 0) - \underline{r}^1(X_{2D})) \right] \in \mathbb{R}^3;$$

$$\underline{\xi}_D(X_{2D}) = \underline{R}^{0T}(X_{2D}) \cdot \left[ \frac{\partial \underline{x}_D^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \frac{2}{t} (\underline{r}^1(X_{2D}) - \underline{x}_D^1(X_{2D}, 0)) \right] \in \mathbb{R}^3;$$

Nous détaillerons la résolution de ce problème par la méthode des éléments finis dans le chapitre 7 de ce mémoire.

### 6.3.2 Description macroscopique des câbles

Nous avons montré dans l'analyse asymptotique de la section 6.2 que les sections de fibres ne se déforment pas à l'ordre 0.

En se basant sur ce résultat, nous négligeons leurs déformations microscopiques aux ordres supérieurs en  $\epsilon$ , et nous supposons ces sections totalement indéformables. Leur transformation s'écrit alors sous la forme :

$$\underline{x}_c^\epsilon(X_{2D}, Y) = \underline{r}^\epsilon(X_{2D}) + \epsilon Y_2 \underline{d}_2^\epsilon(X_{2D}) + \epsilon Y_3 \underline{d}_3^\epsilon(X_{2D})$$

sous la contrainte

$$\forall X_{2D} \in \bar{P}, \forall i, j = 2, 3, \quad \underline{d}_i^\epsilon(X_{2D}) \cdot \underline{d}_j^\epsilon(X_{2D}) = \delta_{ij}.$$

Cette simplification permet de calculer le comportement des fibres directement à l'échelle macroscopique. Nous les modélisons par des poutres en grandes rotations, comme cela a déjà été réalisé dans le chapitre 2.

### 6.3.3 Problème complet à l'échelle globale

#### Cinématique macroscopique

Pour récapituler, avec l'approche multi-échelles que nous sommes en train de construire, les fonctions variant uniquement à l'échelle macroscopique sont :

- $\underline{x}_U^\epsilon(X_1, X_2, X_3)$  : transformation de la gomme située au dessus de la nappe ;
- $\underline{x}_D^\epsilon(X_1, X_2, X_3)$  : transformation de la gomme située en dessous de la nappe ;
- $\underline{r}^\epsilon(X_1, X_2)$  : position de la surface moyenne après transformation ;
- $(\underline{d}_i^\epsilon(X_1, X_2))_{i=1,2,3}$  : directeurs des sections indéformables après transformation, définissant la rotation  $\underline{R}^\epsilon(X_1, X_2)$ .

Lorsque l'épaisseur tend vers 0, ces variables sont couplées par la relation

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{x}_U^\epsilon(X_1, X_2, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{x}_D^\epsilon(X_1, X_2, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{r}^\epsilon(X_1, X_2)$$

et les déformations macroscopiques de la gomme 3D convergent alors vers la transformation

$$\underline{x}_M^0(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{x}_U^\epsilon(X_1, X_2, X_3) & \text{si } X_3 \geq 0 \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{x}_D^\epsilon(X_1, X_2, X_3) & \text{si } X_3 \leq 0 \end{cases}$$



Si on le souhaite, on peut également construire une transformation macroscopique moyenne à travers la nappe par interpolation quadratique entre  $\underline{r}^\epsilon$ ,  $\underline{x}_U^\epsilon$  et  $\underline{x}_D^\epsilon$ . Pour cela, on introduit la transformation suivante, qui prolonge les estimations précédentes dans l'épaisseur de la nappe par interpolation : (illustré sur la figure 6.4)

$$\underline{x}_M^\epsilon(X_1, X_2, X_3) = \begin{cases} \underline{x}_U^\epsilon(X_1, X_2, X_3) & \text{si } X_3 > \epsilon \frac{t}{2} \\ L_0\left(\frac{2X_3}{\epsilon h}\right)\underline{r}^\epsilon(X_1, X_2) + L_U\left(\frac{2X_3}{\epsilon h}\right)\underline{x}_U^\epsilon(X_1, X_2, \epsilon \frac{t}{2}) \\ \quad + L_D\left(\frac{2X_3}{\epsilon h}\right)\underline{x}_D^\epsilon(X_1, X_2, -\epsilon \frac{t}{2}) & \text{si } -\epsilon \frac{t}{2} \leq X_3 \leq \epsilon \frac{t}{2} \\ \underline{x}_D^\epsilon(X_1, X_2, X_3) & \text{si } X_3 < -\epsilon \frac{t}{2} \end{cases} \quad (6.28)$$

où  $L_D(\cdot)$ ,  $L_0(\cdot)$  et  $L_U(\cdot)$  sont les trois polynômes de Lagrange associés aux points  $-1$ ,  $0$  et  $1$ , définis par

$$\begin{cases} L_D(Y_3) = \frac{1}{2} Y_3 (Y_3 - 1) \\ L_0(Y_3) = 1 - Y_3^2 \\ L_U(Y_3) = \frac{1}{2} Y_3 (Y_3 + 1) \end{cases}$$

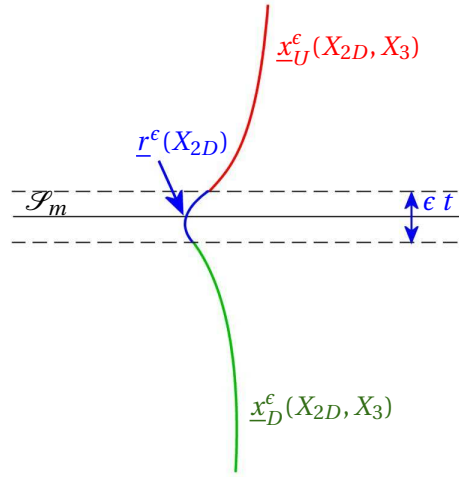


FIG. 6.4: Transformation lissée  $\underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, X_3)$ .

Cette transformation est bien définie et régulière dans tout le voisinage de la nappe. On retrouve alors la même cinématique macroscopique que dans la partie I de ce mémoire, puisque les inconnues sont alors :

- La transformation  $\underline{x}_M^\epsilon$  définie dans tout le solide  $3D$  ;
- La position de la fibre moyenne  $\underline{r}^\epsilon$  et les directeurs  $(\underline{d}_i^\epsilon)_{i=1,2,3}$  caractérisant les rotations des sections indéformables des fibres, définis sur la surface moyenne de la nappe.

Par ailleurs, nous remarquons que cette transformation vérifie :

$$\begin{aligned} \forall X_{2D} \in \mathcal{S}_m, \quad \frac{2}{\epsilon t} \left[ \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, \frac{\epsilon t}{2}) - \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, 0) \right] &= \frac{\partial \underline{x}_U^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \frac{2}{t} (\underline{x}_U^1(X_{2D}, 0) - \underline{r}^1(X_{2D})) + O(\epsilon) \\ &= \underline{\underline{R}}^0 \cdot \underline{\underline{\xi}}_U(X_{2D}) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} \forall X_{2D} \in \mathcal{S}_m, \quad \frac{2}{\epsilon t} \left[ \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, 0) - \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, -\frac{\epsilon t}{2}) \right] &= \frac{\partial \underline{x}_D^0}{\partial X_3}(X_{2D}, 0) + \frac{2}{t} (\underline{r}^1(X_{2D}) - \underline{x}_D^1(X_{2D}, 0)) + O(\epsilon) \\ &= \underline{\underline{R}}^0 \cdot \underline{\underline{\xi}}_D(X_{2D}) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Ce qui conduit au résultat :

$$\forall X_{2D} \in \mathcal{S}_m, \quad \begin{cases} \underline{\xi}_U = \underline{\underline{R}}^{0T} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon t} \left[ \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, \frac{\epsilon t}{2}) - \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, 0) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{\xi}_U(\underline{x}_M^\epsilon) \\ \underline{\xi}_D = \underline{\underline{R}}^{0T} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2}{\epsilon t} \left[ \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, 0) - \underline{x}_M^\epsilon(X_{2D}, -\frac{\epsilon t}{2}) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{\xi}_D(\underline{x}_M^\epsilon) \end{cases} \quad (6.29)$$

Avec cette remarque, les déformations  $\underline{\xi}_U(X_{2D})$  et  $\underline{\xi}_D(X_{2D})$  transmises au problème local peuvent être vues comme des estimations à l'ordre 0 de la dérivée transverse des déformations dans les parties supérieure et inférieure de la nappe. La dérivée dans le plan de la nappe  $\underline{F}_2$  est quant à elle définie par :

$$\forall X_{2D} \in \mathcal{S}_m, \quad \underline{F}_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \underline{r}^\epsilon}{\partial X_2}(X_{2D}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial \underline{x}_M^\epsilon}{\partial X_2}(X_{2D}, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \underline{F}_2(\underline{x}_M^\epsilon) \quad (6.30)$$

*Remarque* : Les déformations  $\underline{\xi}_U(X_{2D})$  et  $\underline{\xi}_D(X_{2D})$  ne devront pas être confondues avec les dérivées transverses de la transformation limite  $\underline{x}_M^0$  :

$$\begin{cases} \underline{\xi}_U(X_{2D}) \neq \underline{\underline{R}}^{0T} \cdot \frac{\partial \underline{x}_U^0}{\partial X_3}(X_{2D}, O^+) \\ \underline{\xi}_D(X_{2D}) \neq \underline{\underline{R}}^{0T} \cdot \frac{\partial \underline{x}_D^0}{\partial X_3}(X_{2D}, O^-) \end{cases}$$

### Energie macroscopique

Avec la cinématique qui vient d'être décrite, l'énergie calculée à l'échelle globale de la structure est composée de trois termes :

- L'énergie de gomme homogène en dehors de la nappe, calculée de manière classique par

$$E_{couches} = \iiint_{\Omega_U} \underline{\underline{w}}_g^\epsilon(\nabla \underline{x}_M^\epsilon) dX + \iiint_{\Omega_D} \underline{\underline{w}}_g^\epsilon(\nabla \underline{x}_M^\epsilon) dX ;$$

- L'énergie des fibres à section indéformable est donnée par

$$E_{cab} = \iint_{\bar{P}} w_{cab}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 ,$$

où  $w_{cab}$  est la densité surfacique d'énergie des fibres qui était déjà utilisée dans le chapitre 2, calculée macroscopiquement selon l'expression 2.41 :

$$w_{cab}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{e} w_{mb}^\epsilon \left( \frac{\partial \underline{r}^\epsilon}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_i^\epsilon(\xi_1, \xi_2) \right) + \frac{1}{e} w_{fl}^\epsilon \left( \underline{d}_i^\epsilon(\xi_1, \xi_2), \underline{d}_j^{\epsilon'}(\xi_1, \xi_2) \right) ;$$

- L'énergie de gomme dans la nappe est quant à elle calculée à l'échelle locale, :

$$E_{gom}^m = \iint_{\mathcal{S}_m} w_{gom}^m \left( \underline{F}_2(\underline{x}_M^\epsilon), \underline{\xi}_U(\underline{x}_M^\epsilon), \underline{\xi}_D(\underline{x}_M^\epsilon) \right) d\xi_1 d\xi_2 , \quad (6.31)$$

où  $w_{gom}^m$  est l'énergie locale minimum calculée par résolution du problème Pb6.3.1 et moyennée dans la largeur :

$$w_{gom}^m \left( \underline{F}_2(\underline{x}_M^\epsilon), \underline{\xi}_U(\underline{x}_M^\epsilon), \underline{\xi}_D(\underline{x}_M^\epsilon) \right) = \frac{\epsilon}{e} \inf_{\underline{x}_m | CL(\underline{F}(\underline{x}_M))} \iint_{\Omega_g^\epsilon} w_g^\epsilon(\nabla \underline{x}_m) dY_2 dY_3 \quad (6.32)$$

sous les conditions aux limites 6.27.

Au final l'énergie interne de la nappe, qui était jusque maintenant approchée à l'échelle globale par l'expression 2.44, est donc calculée par

$$E_{nap} = \int \int_{\bar{P}} \left\{ w_{gom}^m \left( \underline{F}_2(\underline{x}_M), \underline{\xi}_U(\underline{x}_M), \underline{\xi}_D(\underline{x}_M) \right) + \frac{1}{e} w_{mb}(\underline{v}) + \frac{1}{e} w_{f1}(\underline{u}) \right\} d\xi_1 d\xi_2 \quad (6.33)$$

*Remarque* : Cette énergie pourra être augmentée pour être plus robuste de la même manière que cela a été fait dans l'énergie ?? du chapitre 2.

### 6.3.4 Coercivité du modèle

Ce modèle multi-échelles de nappe renforcée a été construit sous l'hypothèse que la nappe est "maintenue" par des couches de gomme homogène supérieure  $\Omega_U$  et inférieure  $\Omega_D$ .

Les déformations macroscopiques transmises au problème sur la gomme ne correspondent alors qu'à des termes de membrane et de cisaillement, et nous négligeons les termes de flexion dans la gomme intervenant à des ordres supérieurs. Ainsi, la nappe se présente comme un "fil" dans la direction  $\underline{a}_2$  perpendiculaire aux fibres, qui résiste en membrane et en cisaillement, mais pas du tout en flexion.

Mais nous noterons que ce modèle n'est pas directement applicable au cas d'une nappe isolée. L'absence de résistance en flexion autour de  $\underline{a}_1$  dans la nappe a pour conséquence que l'énergie ainsi construite n'est pas coercive dans l'espace  $K$  définie par l'expression 2.23 :

$$K = \left\{ (\underline{x}, \underline{d}_i) \in (H(\bar{\Omega}) \times H(\bar{P})^3) \cap \mathcal{LL} \right\}$$

où  $H(\cdot) = \left\{ \underline{v} : \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } v_i \in H^1(\cdot) \right\}$ .

Concrètement, cela signifie qu'il existe des modes de déformation d'énergie nulle. Par exemple, si on considère une nappe qui est plane dans sa configuration de repos, alors la configuration représentée sur la figure 6.5 est également d'énergie nulle : aucun câble n'est déformé et le problème local Pb6.3.1 n'est soumis qu'à une rotation  $\underline{R}$  fonction de  $X_2$ .

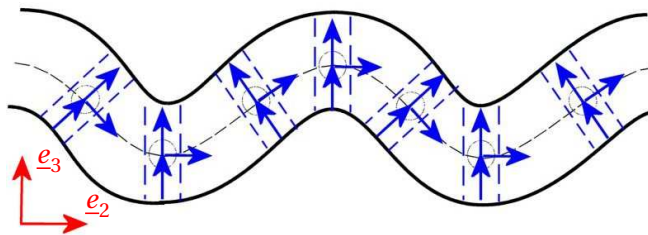


FIG. 6.5: Mode de déformation d'énergie nulle pour le modèle multi-échelles de nappe fibrée sans présence de gomme en parties haute et basse.

En conséquence, nous veillerons à toujours utiliser ce modèle multi-échelles sur des problèmes dans lesquels la nappe fibrée est entourée par d'autres couches fibrées. A défaut, nous pourrions chercher à régulariser l'énergie du problème.

## ■ Conclusions

Afin de déterminer l'approche multi-échelles adaptée à l'étude d'une nappe fibrée, nous avons réalisé une analyse asymptotique du problème en l'adimensionnant et en cherchant une estimation des transformations sous forme d'un développement à deux échelles.

Cette étude asymptotique nous a apporté deux informations ayant un rôle important dans nos choix :

- La section des fibres ne se déforme pas au premier ordre. Nous avons donc choisi de calculer les déformations des fibres directement à l'échelle macroscopique, en les modélisant comme des poutres à section indéformable en grandes rotations, comme cela a déjà été présenté dans le chapitre 2.
- Les fibres ne subissent ni allongement/traction ni cisaillement à l'ordre 1. A partir de ce résultat, nous avons construit un problème local sur la gomme dépendant de seulement 9 degrés de liberté macroscopiques. Ce problème local permet de calculer les déformations locales de la gomme autour d'une fibre à l'ordre 0, et remonte la moyenne des efforts à l'échelle globale.

Avec cette approche, nous conservons la même cinématique enrichie que dans la partie I à l'échelle macroscopique : on calcule une estimation de la transformation  $\underline{x}_M^\epsilon$  de la gomme dans tout le solide  $3D$ , et les directeurs  $(\underline{d}_i)_{i=1,2,3}$  sur la surface moyenne  $\mathcal{S}_m$  pour caractériser la rotation des sections de fibres. Par contre, ce modèle nous donne accès à une description de l'énergie générée dans la gomme par des microfluctuations induites par le mouvement du câble.



## Description du problème local

### ■ Introduction

L'objectif de ce chapitre est de décrire plus en détail la résolution du problème local de gomme introduit par l'étude asymptotique dans le chapitre 6.

Le principe général d'un problème local est le suivant : pour des déformations macroscopique données, nous calculons l'équilibre local en cherchant les déformations locales vérifiant "en moyenne" ces paramètres macroscopiques et minimisant l'énergie sur une cellule élémentaire. Une fois cette résolution accomplie, on remonte à l'échelle macroscopique la moyenne de l'énergie locale, ainsi que ces dérivées première (contrainte équivalente) et seconde (raideur équivalente) par rapport aux déformations macroscopiques.

Le chapitre est organisé comme suit :

- Dans un premier temps, nous présentons en détails le problème local continu dans la section 7.1 : sa géométrie et ses conditions aux limites sont rappelées, et nous écrivons sa formulation variationnelle ;
- Ensuite la section 7.2 décrit sa résolution numérique par une méthode d'éléments finis : nous détaillons la forme du maillage utilisée et présentons les principales étapes de la méthode de Newton locale ;
- Enfin, nous montrerons dans la section 7.3 comment peuvent être calculées les dérivées de l'énergie locale par rapport aux paramètres macroscopiques à partir de l'équilibre obtenu par une méthode de Newton.

## 7.1 Formulation du problème local continu 2D

Supposons que les déformations macroscopiques sont connues localement, définies par la transformation 3D  $\underline{x}_M(X_{2D}, X_3)$ , et les directeurs  $(\underline{d}_i(X_{2D}))_{i=1,2,3}$  caractérisant la rotation d'une section de câble. Nous noterons  $\underline{\underline{R}}(X_{2D})$  le tenseur de rotation défini par les directeurs  $(\underline{d}_i(X_{2D}))_{i=1,2,3}$ .

On considère la cellule élémentaire se situant en un point macroscopique  $X_{2D}$  sur la surface moyenne de la nappe, et on cherche à calculer à un mouvement rigide près la transformation de la gomme à l'échelle mésoscopique, notée  $\underline{x}_m(X_{2D}, Y)$ . Cette transformation locale est liée à la transformation de gomme

$$\underline{x}_g(X_{2D}, Y) = \underline{r}(X_{2D}) + \epsilon \underline{\underline{R}}(X_{2D}) \cdot \underline{x}_m(X_{2D}, Y)$$

### 7.1.1 Géométrie d'une cellule élémentaire 2D

Une cellule élémentaire de gomme (appelée aussi VER), notée  $\Omega_g^\epsilon$  après adimensionnement par  $\epsilon$ , correspond à un petit échantillon de gomme à l'échelle d'une fibre autour d'un point macroscopique  $X_{2D}$  de la surface de la nappe. Cette cellule est décrite en se plaçant dans le repère orthonormé local  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$  associé à une section de câble, en supposant que :

- $\underline{d}_1(X_{2D})$  est la normale à la section du câble ;
- $\underline{d}_2(X_{2D})$  indique la direction perpendiculaire à la fibre dans le plan de la nappe ;
- $\underline{d}_3(X_{2D})$  correspond à la normale au plan de la nappe ;
- $\underline{r}(X_{2D})$  correspond à la position du centre du câble.

La géométrie du VER sont caractérisées par :

- une largeur  $e$  selon  $\underline{d}_2^0$ , qui correspond à l'écartement entre deux fibres après division par le paramètre d'adimensionnement  $\epsilon$  ;
- une hauteur  $t$  selon  $\underline{d}_3^0$ , qui correspond à l'épaisseur dans laquelle les déformations de la gomme sont supposées varier rapidement, après division de cette épaisseur par le paramètre d'adimensionnement  $\epsilon$  ;
- un trou circulaire de rayon  $r$ , qui correspond au rayon d'une fibre après division par le paramètre d'adimensionnement  $\epsilon$ .

Dans cette cellule 2D, les coordonnées  $(Y_2, Y_3)$  dans le repère  $(\underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$  varient alors dans les intervalles suivants :

$$\begin{cases} Y_2 \in \left[-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right] \\ Y_3 \in \left[-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right] \end{cases}$$

Nous désignons par  $\Omega_g^\epsilon$  le volume du VER, et ses bordures sont notées :

- $\Gamma_U$  : bordure supérieur de  $\Omega_g^\epsilon$  ;
- $\Gamma_D$  : bordure inférieure de  $\Omega_g^\epsilon$  ;
- $\Gamma_R$  : bordure droite de  $\Omega_g^\epsilon$  ;
- $\Gamma_L$  : bordure gauche de  $\Omega_g^\epsilon$  ;
- $\Gamma_C$  : bordure autour du câble, définie par :

$$\Gamma_C = \left\{ (Y_2, Y_3) \text{ tels que } Y_2^2 + Y_3^2 = r^2 \right\}.$$

Ces dimensions sont récapitulées sur la figure 7.1

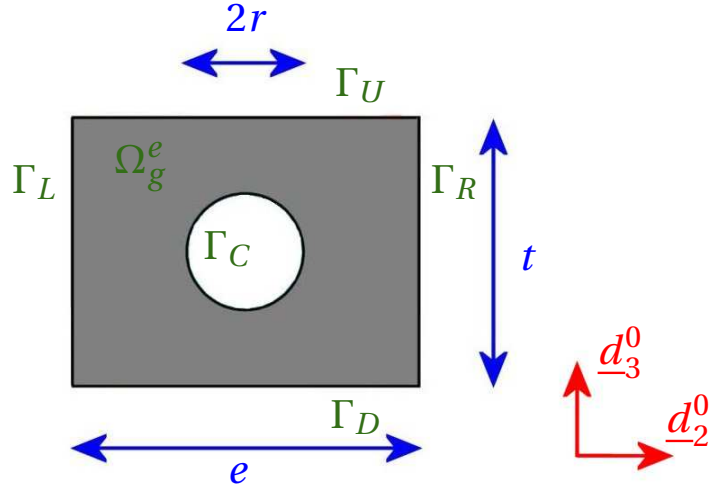


FIG. 7.1: Géométrie d'une cellule élémentaire 2D sur la gomme

## 7.1.2 Contraintes cinématiques

### Paramètres macroscopiques

Comme cela a été démontré par l'analyse asymptotique réalisée dans le chapitre 6, la section de la fibre peut être supposée indéformable à l'échelle locale. La transformation de celle-ci est alors définie par la position  $\underline{r}(X_{2D})$  de sa ligne moyenne et la rotation  $\underline{R}(X_{2D})$ , envoyant le repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  sur le trièdre  $(\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3)$ . Ces déformations sont supposées connues à l'échelle locale.

Le problème local étant invariant par translation et par rotation, nous avons alors montré dans la sous section 6.3.3 que le problème local sur  $\underline{x}_m$  dépend seulement de 9 degrés de liberté macroscopiques en se plaçant dans le repère de la section de la fibre. Ces degrés de liberté sont :

- La dérivée dans le plan de la nappe

$$\underline{F}_2(X_{2D}) = \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi_2}(X_{2D}) = \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(X_{2D}, 0) \in \mathbb{R}^3 ; \quad (7.1)$$

- La dérivée transverse moyenne dans la partie supérieure de la nappe

$$\underline{\xi}_U(X_{2D}) = \frac{2}{\epsilon t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot (\underline{x}_M(X_{2D}, \epsilon \frac{t}{2}) - \underline{x}_M(X_{2D}, 0)) \in \mathbb{R}^3 ; \quad (7.2)$$

- La dérivée transverse moyenne dans la partie inférieure de la nappe

$$\underline{\xi}_D(X_{2D}) = \frac{2}{\epsilon t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot (\underline{x}_M(X_{2D}, 0) - \underline{x}_M(X_{2D}, -\epsilon \frac{t}{2})) \in \mathbb{R}^3 . \quad (7.3)$$

Dans la suite, ces paramètres macroscopiques seront souvent rassemblés de manière générique dans le vecteur de taille  $n_M = 9$  :

$$\underline{F}(X_{2D}) = \begin{pmatrix} \underline{F}_2(X_{2D}) \\ \underline{\xi}_U(X_{2D}) \\ \underline{\xi}_D(X_{2D}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9 . \quad (7.4)$$

En imposant aux déformations locales de respecter en moyenne ces déformations globales, nous cherchons en fait une correction locale de la transformation macroscopique moyenne :

$$\widetilde{\underline{x}}_M(X_{2D}, Y_2, Y_3) = \underline{x}_M(X_{2D}, 0) + \epsilon Y_2 \underline{F}_2(X_{2D}) + \epsilon \frac{Y_3}{2t} (2 Y_3 - t) \underline{\xi}_D(X_{2D}) + \epsilon \frac{Y_3}{2t} (2 Y_3 + t) \underline{\xi}_U(X_{2D}) . \quad (7.5)$$



### Conditions aux limites

La section du câble étant supposée rigide et définissant le référentiel utilisé pour caractériser  $\underline{x}_m$ , on impose la condition de Dirichlet suivante sur son contour :

$$\forall (Y_2, Y_3) \in \Gamma_C, \quad \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, Y_3) = Y_2 \underline{e}_2 + Y_3 \underline{e}_3 \quad (7.6)$$

Dans la suite, on note  $K_{loc}$  l'espace des transformations locale de carré intégrable, et dont le gradient est de carré intégrable, qui vérifient cette condition aux limites :

$$K_{loc} = \left\{ \underline{x}_m \in H^1(\Omega_g^e), \underline{x}_m \text{ vérifie la condition aux limites 7.6} \right\}$$

et  $K_{loc}^0$  l'espace des variations nulles sur  $\Gamma_C$  :

$$K_{loc}^0 = \left\{ \hat{\underline{x}}_m \in H^1(\Omega_g^e) \text{ telles que } \forall (Y_2, Y_3) \in \Gamma_C, \hat{\underline{x}}_m(X_{2D}, Y_2, Y_3) = 0 \right\}$$

Par ailleurs, la dérivée dans le plan de la nappe  $\underline{F}_2$  est imposée par dilatation homogène et correction périodique entre  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_L$  :

$$\forall Y_3 \in [-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}], \quad \underline{x}_m(X_{2D}, \frac{e}{2}, Y_3) = \underline{x}_m(X_{2D}, -\frac{e}{2}, Y_3) + e \underline{F}_2(X_{2D}) \quad (7.7)$$

Les dérivées transverses  $\xi_{\underline{U}}$  et  $\xi_{\underline{D}}$  sont quant à elles imposées en moyenne sur  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_D$  :

$$\frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \frac{t}{2} \xi_{\underline{U}}(X_{2D}) \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = -\frac{t}{2} \xi_{\underline{D}}(X_{2D}) \quad (7.9)$$

### 7.1.3 Formulation variationnelle

Nous avons choisi d'imposer les conditions 7.7, 7.8 et 7.9 avec des multiplicateurs de Lagrange, notés respectivement  $\underline{\lambda}_{RL}(X_{2D}, Y_3) \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ ,  $\underline{\lambda}_U(X_{2D}) \in \mathbb{R}^3$  et  $\underline{\lambda}_D(X_{2D}) \in \mathbb{R}^3$ .

Avec ces choix, le calcul du minimum de l'énergie à l'échelle locale

$$\frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^e} w_g dY \quad (7.10)$$

sous conditions aux limites imposées se ramène alors au problème d'Euler-Lagrange

#### Pb 7.1.1 Problème local 2D continu

Trouver  $\underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, Y_3) \in K_{loc}^0$  vérifiant les conditions aux limites 7.7, 7.8 et 7.9, et  $\underline{\lambda}_{RL}(X_{2D}, Y_3)$ ,  $\underline{\lambda}_U(X_{2D})$  et  $\underline{\lambda}_D(X_{2D})$  tels que

$\forall \hat{\underline{x}}(Y_2, Y_3) \in K_{loc}^0$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e} \iint_{\Omega_g^e} \frac{\partial w_g}{\partial \underline{F}} \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) : \left( \frac{\partial \hat{\underline{x}}}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \hat{\underline{x}}}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) dY_2 dY_3 \\ & - \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \underline{\lambda}_{RL}(X_{2D}, Y_3) \cdot \left[ \hat{\underline{x}}\left(\frac{e}{2}, Y_3\right) - \hat{\underline{x}}\left(-\frac{e}{2}, Y_3\right) \right] dY_3 \\ & - \underline{\lambda}_U(X_{2D}) \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{\Gamma_U} \hat{\underline{x}}(Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 \right] \\ & - \underline{\lambda}_D(X_{2D}) \cdot \left[ \frac{1}{e} \int_{\Gamma_D} \hat{\underline{x}}(Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 \right] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

Dans le cas d'une gomme compressible, nous admettons que ce problème de minimisation sous contraintes est un problème bien posé. Par contre, un problème se pose quand la gomme est modélisée comme un matériau incompressible, c'est à dire lorsqu'on impose en plus la contrainte

$$\forall (Y_2, Y_3) \in \Omega_g^e, \quad \det(\underline{\underline{\nabla x_m}}) = 1$$

Dans ce cas limite, le problème est bien posé à condition que les déformations macroscopiques n'imposent pas une variation de volume. La section du câble étant supposée indéformable, ses rotations n'engendrent pas de variation de volume. Une condition suffisante assurant l'existence d'une solution locale incompressible est alors qu'il existe un relèvement des conditions aux limites extérieures qui respecte le volume global. Si on utilise le relèvement moyen  $\widetilde{x_M}$  défini par l'expression 7.5, cette condition suffisante s'écrit :

$$\frac{1}{t} e \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \widetilde{x_M}}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \widetilde{x_M}}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) dY = 1 .$$

Par développement du déterminant sous la forme d'un polynôme de degré 1 en  $Y_3$  et après intégration en  $Y_3$  qui annule la contribution du terme linéaire en  $Y_3$ , cette condition s'écrit :

$$\det \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{F}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{2} (\underline{\xi}_U + \underline{\xi}_D) \otimes \underline{e}_3 \right) = 1 . \quad (7.12)$$

Nous supposons dans ce chapitre que cette condition d'admissibilité est bien vérifiée dans le cas où la gomme est incompressible. Nous décrivons dans le chapitre 8 la manière d'assurer cette condition.

L'existence et l'unicité de la solution du problème continu 2D Pb7.1.1 étant ainsi supposées, nous décrivons dans la section qui suit la méthode numérique utilisée pour sa résolution.

## ■ 7.2 Résolution par la méthode des éléments finis

### 7.2.1 Discrétisation du problème 3D

#### Maillage

Le problème 2D continu Pb7.1.1 pourrait directement être résolu par une méthode d'éléments finis classique. Cependant, la résolution du problème locale est effectué dans un code éléments finis ne manipulant que des problème 3D. Par conséquent, nous adaptons légèrement la géométrie et le maillage utilisés :

Au lieu d'utiliser un maillage 2D discrétisant la cellule  $\Omega_g^e$ , nous travaillons sur un maillage 3D constitué d'éléments finis hexaédriques. Pour tenir compte du fait que le problème est 2D, le maillage ne comporte qu'un seul élément Q1 dans la direction  $\underline{d}_1^0$ , et on impose des conditions de périodicité des déplacements entre les noeuds des faces avant et arrière (notées respectivement  $\mathcal{S}_F$  et  $\mathcal{S}_B$ ). Dans le plan  $(\underline{d}_2^0, \underline{d}_3^0)$ , nous choisissons des éléments finis  $Q_2$ . Un exemple de tel maillage est représenté sur la figure 7.2. Il comprend des noeuds sur les milieux des arêtes et au centre des faces sur  $\mathcal{S}_F$  et  $\mathcal{S}_B$ , et ne comporte aucun noeud interne.

Les conditions aux limites 7.7, 7.8 et 7.9 sont alors imposées uniquement sur les contours de la face  $\mathcal{S}_F$ . Elles seront automatiquement satisfaites sur la face  $\mathcal{S}_B$  par périodicité.

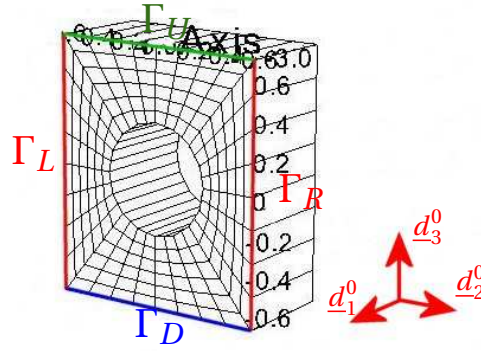


FIG. 7.2: Exemple de maillage utilisé pour la résolution du problème local

### Notations

Le maillage de  $\Omega_g^e$  comprend  $NE_{loc}$  éléments, de taille moyenne  $h_{loc}$ . Nous notons  $NN_{loc}$  le nombre de noeuds situés sur la face  $\mathcal{S}_F$ . Le maillage local étant constitué de seulement deux rangées de noeuds dans la direction  $\underline{d}_1^0$  par construction, il comportera alors  $2 NN_{loc}$  noeuds au total.

Pour gérer les conditions aux limites 7.6-7.9, nous introduisons en plus les notations suivantes :

- $NU_{loc}$  : nombre de noeuds sur  $\Gamma_U$  ;
- $ND_{loc}$  : nombre de noeuds sur  $\Gamma_D$  ;
- $NR_{loc}$  : nombre de noeuds sur  $\Gamma_R$  (et sur  $\Gamma_L(X_1)$ ) ;
- $NC_{loc}$  : nombre de noeuds sur  $\Gamma_C$ .

Les déplacements étant nuls sur le contour du câble, les degrés de liberté correspondant aux  $2 NC_{loc}$  noeuds de cette surface sont supprimés. Le nombre de degrés de liberté non bloqués est alors noté  $ndl = 6(NN_{loc} - NC_{loc})$ . Ces degrés de liberté sont répartis en deux catégories :

- Les degrés de liberté dépendant des conditions aux limites (périodicité entre  $\mathcal{S}_F$  et  $\mathcal{S}_B$ , périodicité entre  $\Gamma_R$  et  $\Gamma_L$ , déplacement moyen imposé sur  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_D$ ). Ils sont au nombre de

$$n_{dd} = 3 (NN_{loc} - NC_{loc}) + 3 NR_{loc} + 6;$$

- Les degrés de liberté indépendants, au nombre de

$$n_{di} = ndl - n_{dd}.$$

Les vecteurs et les matrices utilisées suivent les notations suivantes :

- $\underline{U} \in \mathbb{R}^{ndl}$  : vecteur complet des déplacements nodaux ;
- $W$  : Approximation de l'énergie continue 7.10 ;
- $\underline{F} = \frac{\partial W}{\partial \underline{U}} \in \mathbb{R}^{ndl}$  : vecteur complet des forces nodales
- $\underline{K} = \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{U}^2} \in \mathbb{R}^{ndl \times ndl}$  : matrice de rigidité complète

Les conditions aux limites 7.7-7.9 sont alors récapitulées sous forme discrète par :

$$\underline{M} \cdot \underline{U} - \underline{N} \cdot \underline{Q} - \underline{C} = \underline{0} \quad (7.13)$$

où  $\underline{M} \in \mathbb{R}^{n_{dd} \times ndl}$  et  $\underline{N} \in \mathbb{R}^{n_{dd} \times n_M}$ . On note  $\underline{R} \in \mathbb{R}^{n_{dd}}$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associés à ces conditions aux limites. Par construction, dans notre problème, il y a 9 paramètres contrôlant les conditions aux limites, donc  $n_M = 9$ .

On présente dans ce qui suit une méthode pour résoudre le problème local puis pour calculer les dérivées globales. Cette méthode n'est pas optimale, puisque plusieurs degrés de libertés pourraient être supprimés. Mais l'objectif est ici de présenter une manière générique de traiter l'échelle locale, sans chercher à optimiser les calculs.

### Problème discret

On introduit le Lagrangien suivant prenant en compte l'énergie élastique et les conditions aux limites imposées :

$$L(\underline{U}, \underline{R}, \underline{Q}) = W(\underline{U}) - \underline{R} \cdot \left[ \underline{M} \cdot \underline{U} - \underline{N} \cdot \underline{Q} - \underline{C} \right] \quad (7.14)$$

Avec ces notations, le problème local discrétisé se ramène alors au problème d'Euler-Lagrange :

#### Pb 7.2.1 Problème local 2D discret

Trouver  $\underline{U}_{min} \in \mathbb{R}^{ndl}$  et  $\underline{R}_{min} \in \mathbb{R}^{ndd}$  tels que

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_{min}, \underline{R}_{min}, \underline{Q}) = \underline{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \underline{R}}(\underline{U}_{min}, \underline{R}_{min}, \underline{Q}) = \underline{0} \end{cases} \quad (7.15)$$

### 7.2.2 Méthode de résolution de Newton

La résolution du problème non-linéaire Pb7.2.1 est réalisée de manière classique avec une méthode de Newton-Raphson dans un code éléments finis. Les équations intervenant dans cette méthode étant réutilisées dans la suite de ce chapitre, on les décrit brièvement dans ce qui suit :

L'objectif est d'atteindre l'équation 7.15 :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \underline{U}}(\underline{U}, \underline{R}, \underline{Q}) = \underline{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \underline{R}}(\underline{U}, \underline{R}, \underline{Q}) = \underline{0} \end{cases}$$

On rappelle que  $\underline{F} = \frac{\partial W}{\partial \underline{U}}(\underline{U})$  représente le vecteur des forces nodales associée aux déplacements  $\underline{U}$ .

En reprenant l'écriture 7.14 du lagrangien, le système d'équations à atteindre s'écrit aussi :

$$\begin{cases} \underline{F} - \underline{M}^T \cdot \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{M} \cdot \underline{U} - \underline{N} \cdot \underline{Q} - \underline{C} = \underline{0} \end{cases}$$

On procède par itérations pour atteindre ces équations, en recherchant à chaque étape l'incrément de déplacements  $\delta \underline{U}$  et les multiplicateurs  $\underline{R}$  permettant de s'en rapprocher au mieux. Pour cela, on exprime la variation  $\delta \underline{F}$  des forces nodales en fonction de de déplacements  $\delta \underline{U}$  grâce à la matrice de rigidité  $\underline{K}$  du problème :

$$\begin{cases} \underline{F}^c + \underline{K} \cdot \delta \underline{U} - \underline{M}^T \cdot \underline{R} = \underline{0} \\ -\underline{M} \cdot (\underline{U}^c + \delta \underline{U}) + \underline{N} \cdot \underline{Q} + \underline{C} = \underline{0} \end{cases}$$

Ceci est équivalent à résoudre le système linéaire :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{K} & -\underline{M}^T \\ -\underline{M} & \underline{0} \end{pmatrix}}_{\underline{\tilde{K}}} \cdot \begin{pmatrix} \delta \underline{U} \\ \underline{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\underline{F}^c \\ \underline{M} \cdot \underline{U}^c - \underline{N} \cdot \underline{Q} - \underline{C} \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

On considère que la méthode de Newton a convergé lorsque la norme de l'incrément  $\|\delta \underline{U}\|$  ou celle du résidu  $\|\underline{F}^c - \underline{M}^T \cdot \underline{R}\|$  est suffisamment petite.

Lorsque l'équilibre local est atteint par cette méthode, on dispose donc "gratuitement" (c'est à dire sans faire de calcul supplémentaire) des quantités suivantes :

- Le vecteur des déplacements nodaux  $\underline{U} \in \mathbb{R}^{ndl}$  ;
- Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\underline{R} \in \mathbb{R}^{nnd}$  ;
- Le vecteur des forces nodales  $\underline{F} = \frac{\partial W}{\partial \underline{U}} \in \mathbb{R}^{nn}$  ;
- La matrice de rigidité  $\underline{K} = \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{U}^2} \in \mathbb{R}^{nn*nn}$ .

Nous décrivons dans la section suivante comment peuvent être calculées les dérivées globales à partir de ces quantités locales.

## 7.3 Calcul des dérivées globales

### 7.3.1 Calcul de la dérivée première

Pour un vecteur de déformations macroscopiques  $\underline{Q}$  donné, on suppose avoir calculé l'équilibre local correspondant par la méthode de Newton décrite dans la sous-section 7.2.2. On souhaite alors calculer les "contraintes" équivalentes

$$\frac{\partial W_{min}}{\partial \underline{Q}} = \frac{\partial L}{\partial \underline{U}} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial \underline{Q}} + \frac{\partial L}{\partial \underline{R}} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{Q}} + \frac{\partial L}{\partial \underline{Q}}$$

Si l'équilibre local a été atteint pour les déplacements  $\underline{U}_{min}$  et les multiplicateurs  $\underline{R}_{min}$ , cela signifie que l'équation 7.15 est satisfaite :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \underline{U}}(\underline{U}_{min}, \underline{R}_{min}, \underline{Q}) = \underline{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \underline{R}}(\underline{U}_{min}, \underline{R}_{min}, \underline{Q}) = \underline{0} \end{cases}$$

On en déduit donc que la dérivée de l'énergie s'écrit plus simplement sous la forme :

$$\frac{\partial W_{min}}{\partial \underline{Q}}(\underline{Q}) = \frac{\partial L}{\partial \underline{Q}}(\underline{U}_{min}, \underline{R}_{min}, \underline{Q}) \quad (7.17)$$

On reprend alors l'écriture du Lagrangien 7.14 :

$$L(\underline{U}, \underline{R}, \underline{Q}) = W(\underline{U}) - \underline{R} \cdot \left[ \underline{M} \cdot \underline{U} - \underline{N} \cdot \underline{Q} - \underline{C} \right]$$

La dérivée première de l'énergie 7.17 s'écrit alors :

$$\frac{\partial W_{min}}{\partial \underline{Q}}(\underline{Q}) = \underline{N}^T \cdot \underline{R}_{min} \quad (7.18)$$

### 7.3.2 Calcul de la dérivée seconde

En plus de la dérivée première calculée précédemment, nous souhaitons calculer la dérivée seconde de l'énergie locale pour la transmettre à l'échelle macroscopique. Nous verrons dans la sous-section

?? que cette "raideur" servira dans la résolution du problème global avec une méthode de Newton-Raphson.

Pour toute variation  $\underline{\delta Q}$  du vecteur des déformations macroscopiques, on cherche à calculer la valeur de  $\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} \cdot \underline{\delta Q}$ . Supposons que la variation  $\underline{\delta Q}$  provoque des variations  $\underline{\delta U}_{min}$  des déplacements et  $\underline{\delta R}_{min}$  du multiplicateur de Lagrange. D'après l'expression 7.18 de la dérivée première, on sait que

$$\frac{\partial^2 W}{\partial Q^2} \cdot \underline{\delta Q} = \underline{N}^T \cdot \underline{\delta R}_{min} \quad (7.19)$$

On déduit alors du système 7.16 les nouvelles relations :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{K} & -\underline{M}^T \\ -\underline{M} & \underline{0} \end{pmatrix}}_{\underline{\tilde{K}}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta U}_{min} \\ \underline{\delta R}_{min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{N} \cdot \underline{\delta Q} \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

On peut remarquer que l'on retrouve la matrice  $\underline{\tilde{K}}$  qui a déjà été construite dans l'équation 7.16 dans la méthode de Newton. Ainsi, lorsque la méthode de Newton a convergé, on va réutiliser la matrice de rigidité calculée à la dernière itération pour calculer notre dérivée seconde.

On résoud donc les  $n_M = 9$  systèmes linéaires pour calculer les variations de déplacements associées aux variations de chacune des composantes de  $\underline{Q}$  :

$$\underline{\tilde{K}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta U}_{min} \\ \underline{\delta R}_{min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{N}_m \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{pmatrix} \underline{\delta U}_{min} \\ \underline{\delta R}_{min} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\delta U}^1 & \dots & \underline{\delta U}^{n_M} \\ \underline{\delta R}_{min}^1 & \dots & \underline{\delta R}_{min}^{n_M} \end{pmatrix}$$

Une fois que l'on a calculé les  $n_M$  variations des multiplicateurs, on en déduit la dérivée seconde recherchée par un calcul similaire à celui de la dérivée première :

$$\frac{\partial^2 W_{min}}{\partial Q^2} = \underline{N}^T \cdot \underline{\delta R}_{min}$$

## ■ Conclusions

Nous avons décrit dans ce chapitre la gestion numérique du problème local :

- La résolution du problème local non linéaire par une méthode d'éléments finis a été détaillée ;
- Nous avons également présenté une manière générique permettant de calculer les dérivées première et seconde de l'énergie locale, en utilisant notamment la matrice de rigidité utilisée dans la méthode de Newton locale.

Nous allons maintenant décrire dans le chapitre 8 la manière de coupler les problèmes mésoscopique et macroscopique, notamment dans le cas de matériaux incompressibles.



# Méthode multi-échelles et applications numériques

## ■ Introduction

Dans ce chapitre, nous procédons à une étude approfondie de la méthode numérique multi-échelles issue de l'analyse asymptotique. Plus précisément, le chapitre 6 nous a permis de distinguer les quantités macroscopiques ayant un rôle significatif à l'échelle mésoscopique et nous ont conduit à conserver la cinématique macroscopique utilisée dans la partie I de ce mémoire.

Notre objectif est maintenant de décrire la stratégie globale de calcul multi-échelles, et de détailler en particulier la gestion de l'incompressibilité. Pour cela, nous avons divisé le chapitre en trois sections :

- Dans un premier temps, nous présentons dans la section 8.1 les problématiques apparaissant à l'échelle globale lorsqu'on souhaite calculer l'énergie de gomme à une échelle inférieure par le problème local décrit dans le chapitre 7. Ces difficultés concernent la gestion de l'incompressibilité aux deux échelles, la coercivité du modèle et le coût des calculs. Nous décrivons une méthode multi-échelles permettant de bien prendre en compte ces éléments ;
- Par la suite, nous réalisons une analyse numérique du modèle multi-échelles construit dans la 8.2, linéarisé autour d'une configuration plane, moyennant une hypothèse de compatibilité entre éléments finis. Cette étude a pour objectif de vérifier que les problèmes sont bien posés aux deux échelles, et que la stratégie de discrétisation proposée garantisse que la solution du problème discret converge correctement vers la solution continue ;
- Enfin, la section 8.3 présente quelques résultats numériques sur des problèmes dans lesquels la gomme possède un rôle important dans le comportement global de la nappe fibrée. Ces tests nous permettent de valider la méthode multi-échelles élaborée.



## 8.1 Méthode multi-échelles pour une matrice incompressible

### 8.1.1 Problématique

Notre objectif est ici de modéliser une nappe fibrée de manière multi-échelles. Nous conservons dans cette section les mêmes notations que celles introduites dans le chapitre 2.

Comme nous l'avons montré dans la section 6.3, la cinématique globale résultant de notre analyse asymptotique reste la même que celle qui était utilisée pour notre modèle macroscopique (cf chapitre 2). On en rappelle ici les principales caractéristiques :

La nappe est modélisée comme un milieu continu 3D où évolue la gomme, décrit par la position déformée  $\underline{x}_M$ , couplé à une surface sur laquelle le comportement des fibres est décrit par leurs positions déformées  $\underline{r}$  et leurs directeurs  $(\underline{d}_i)_{i=1,2,3}$ .

Avec cette description cinématique, les inconnues continues sont donc :

- La transformation  $\underline{x}_M(\xi_i)$  dans le *volume* de référence  $\bar{\Omega}$  ;
- La position de la fibre moyenne  $\underline{r}(\xi_\alpha)$  et les directeurs  $\{\underline{d}_i(\xi_\alpha)\}_{i=1,2,3}$  sur le *plan* de référence  $\bar{P}$ .

Nous supposons par ailleurs que la position  $\underline{r}$  de la fibre moyenne des câbles est héritée de la déformation globale  $\underline{x}$  du milieu continu en ce point :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{x}_M(\xi_1, \xi_2, 0) , \quad (8.1)$$

et que les directeurs sont contraints par la relation d'orthogonalité

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{d}_i(\xi_1, \xi_2) \cdot \underline{d}_j(\xi_1, \xi_2) = \delta_{ij} . \quad (8.2)$$

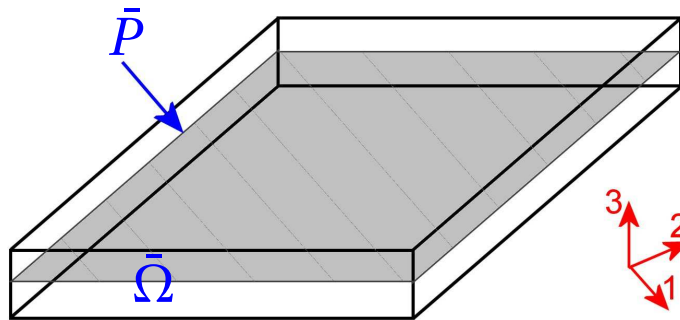


FIG. 8.1: Distribution continue de câbles dans le plan médian de la nappe.

D'après l'analyse réalisée dans le chapitre 6, l'énergie totale de la nappe peut alors être approchée au premier ordre par l'expression 6.33 :

$$E_{nap} = \iint_{\bar{P}} \left\{ w_{gom}^m \left( E_2(\underline{x}_M), \xi_U(\underline{x}_M), \xi_D(\underline{x}_M) \right) + \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 + \frac{1}{e} w_{fl}(\underline{u}) \right\} d\xi_1 d\xi_2 ,$$

à laquelle se rajoute l'énergie développée par la déformation de la gomme dans les volumes inférieurs  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$ .

On rappelle que l'énergie de flexion  $w_{fl}$  est donnée typiquement par

$$w_{fl}(\underline{d}_i, \underline{d}'_i) = \frac{EI}{2e} (\tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2) + \frac{GJ}{2e} \tilde{u}_1^2 + \frac{EI}{2e} \left[ (\underline{d}_{i,1} \cdot \underline{d}_i)^2 + (\underline{d}_{i,2} \cdot \underline{d}_i)^2 \right] ,$$

où les  $\tilde{u}_i$  sont définis par l'expression 2.45 :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_2{}^{0'} \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_3{}^{0'} \cdot \underline{d}_2^0)^2 \\ \tilde{u}_2^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_3 - \underline{d}'_1{}^{0'} \cdot \underline{d}_3^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_3 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_3{}^{0'} \cdot \underline{d}_1^0)^2 \\ \tilde{u}_3^2 = \frac{1}{2} (\underline{d}'_1 \cdot \underline{d}_2 - \underline{d}'_1{}^{0'} \cdot \underline{d}_2^0)^2 + \frac{1}{2} (\underline{d}'_2 \cdot \underline{d}_1 - \underline{d}'_2{}^{0'} \cdot \underline{d}_1^0)^2 \end{cases} .$$

Le dernier terme de l'énergie est un terme qui s'annule quand la contrainte d'orthogonalité est partout vérifiée, et qui garantit une coercivité globale de l'énergie même si cette contrainte n'est pas vérifiée.

L'énergie de gomme  $w_{gom}^m$  est quant à elle calculée localement selon l'expression 6.32 :

$$w_{gom}^m(\underline{F}(\underline{x}_M), \underline{\xi}_U(\underline{x}_M), \underline{\xi}_D(\underline{x}_M)) = \frac{\epsilon^3}{e} \inf_{\underline{x}_m \in CL(\underline{x}_M)} \iint_{\Omega_g^e} w_g(\underline{\nabla} \underline{x}_m) dY_2 dY_3 . \quad (8.3)$$

Pour résoudre numériquement le problème de minimisation de l'énergie sous un chargement donné, on discrétise la géométrie de la nappe avec les mêmes éléments finis que dans le chapitre 4 : nous utilisons des éléments finis 3D Q2 (hexaèdres à 27 noeuds) pour la transformation  $\underline{x}_M$ , et des éléments finis 2D Q2 pour les directeurs  $\{\underline{d}_i\}_{i=1,2,3}$  (cf figure 8.2). Nous devons alors déterminer comment intégrer numériquement l'énergie dans ces éléments finis.

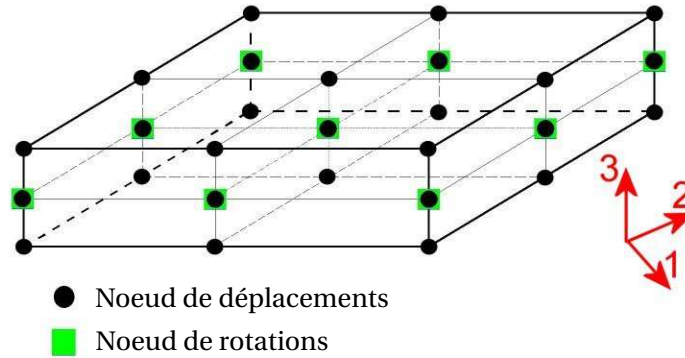


FIG. 8.2: Eléments finis Q2 utilisés pour discrétiser la nappe fibrée.

★ Comme cela était fait dans le chapitre 4, l'énergie des câbles est calculée avec une sous intégration partielle du terme de membrane. Nous avons démontré dans les chapitres 3 et 4 que cette méthode d'intégration permet d'éviter les phénomènes de verrouillage numérique en cisaillement ;

★ Une manière intuitive de calculer numériquement l'énergie de gomme 8.3 est de résoudre un problème local à chaque point de Gauss de la surface moyenne de la nappe, comme représenté sur la figure 8.3.

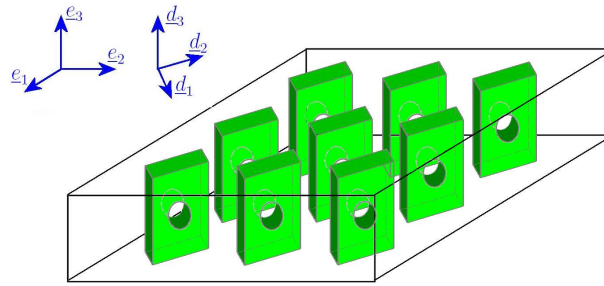


FIG. 8.3: Intégration de l'énergie de gomme : un problème local par point de Gauss 2D.

Mais cette méthode d'intégration de l'énergie de gomme présente trois défauts majeurs :

- La gomme est modélisée dans notre cas comme un matériau quasi-incompressible. Sa densité volumique d'énergie peut alors être écrite sous la forme : (cf chapitre 2)

$$w_g(\underline{F}) = w_{inc}(\underline{F}) + \frac{\kappa}{2} \left( \det(\underline{F}) - 1 \right)^2 .$$

A la limite quand  $\epsilon$  tend vers 0, la gomme devient totalement incompressible. Dans ce cas, si les déformations globales transmises à l'échelle locale ne sont pas isochores, c'est à dire ne respectent pas le volume global de la cellule  $\Omega_g^e$ , le problème local pourra être mal posé et ne posséder aucune solution.

Inversement, si on impose aux déformations globales  $\underline{x}_M$  d'être isochores en tout point de Gauss de la surface moyenne  $\mathcal{S}_m$ , il est évident l'on risque de créer un verrouillage numérique au niveau discret global en le rendant trop rigide aux changements de volume. Ces deux considérations semblent donc contradictoires. Nous allons proposer une solution originale à ce problème dans la sous-section 8.1.2 ;

- Comme nous l'avons précisé dans le chapitre 6, l'énergie ainsi calculée n'est pas coercive sur l'espace des transformations globales  $K$ , car la flexion perpendiculairement aux câbles n'est pas du tout prise en compte. Nous décrivons dans la sous-section 8.1.4 une légère modification de l'énergie permettant de la rendre coercive ;
- Enfin, la résolution de 9 problèmes locaux par élément fini macroscopique est très coûteuse dans le cadre d'une utilisation industrielle, il serait préférable de diminuer le nombre de problèmes locaux à résoudre. Grâce aux modifications introduites dans les sous-sections 8.1.2 et 8.1.4, nous présenterons une méthode numérique plus rapide dans la sous-section 8.1.5.

### 8.1.2 Gestion de l'incompressibilité

Comme nous venons de la préciser, des difficultés apparaissent dans notre méthode multi-échelles lorsque la gomme devient incompressible. Pour garantir que le problème est bien posé et une bonne convergence de notre modèle dans ces cas limites, la prise en compte de l'incompressibilité doit être gérée à trois niveaux :

- A l'échelle locale ;
- A l'échelle globale ;
- Dans les transitions entre les échelles.

Nous décrivons chacun de ces aspects dans ce qui suit.

### Incompressibilité dans le problème local

Au niveau local, comme cela a été décrit dans le chapitre 7, nous approchons autour de tout point  $X_{2D}$  de la surface moyenne la transformation de la gomme par

$$\underline{x}_g(X_{2D}, Y) = \underline{r}(X_{2D}) + \epsilon \underline{R}(X_{2D}) \cdot \underline{x}_m(X_{2D}, Y)$$

où le champ  $\underline{x}_m$  est solution du problème local Pb6.3.1 de minimisation d'énergie sous les conditions aux limites 6.27 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (Y_2, Y_3) \in \Gamma_c, \quad \underline{x}_m(X_{2D}, Y) = Y_2 \underline{e}_2 + Y_3 \underline{e}_3 \\ \forall Y_3 \in [-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}], \quad \underline{x}_m(\frac{e}{2}, Y_3) = \underline{x}_m(-\frac{e}{2}, Y_3) + e \underline{F}_2(X_{2D}) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, \frac{t}{2}) dY_2 = \frac{t}{2} \underline{\xi}_U(X_{2D}) \\ \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \underline{x}_m(X_{2D}, Y_2, -\frac{t}{2}) dY_2 = -\frac{t}{2} \underline{\xi}_D(X_{2D}) \end{array} \right.$$

Dans cette expression, nous rappelons que la rotation  $\underline{R}$  est la rotation qui envoie le trièdre des directeurs de sa position initiale à sa position actuelle, et que les quantités  $\underline{F}_2(\underline{x}_M)$ ,  $\underline{\xi}_U(\underline{x}_M)$  et  $\underline{\xi}_D(\underline{x}_M)$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_2(\underline{x}_M(X_{2D})) = \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi_2}(X_{2D}) = \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(X_{2D}, 0) \in \mathbb{R}^3 ; \\ \underline{\xi}_U(\underline{x}_M(X_{2D})) = \frac{2}{\epsilon t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot (\underline{x}_M(X_{2D}, \frac{\epsilon t}{2}) - \underline{x}_M(X_{2D}, 0)) \\ \quad = \frac{2}{t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \int_0^{\frac{t}{2}} \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial X_3}(X_{2D}, \epsilon Y_3) dY_3 \in \mathbb{R}^3 ; \\ \underline{\xi}_D(\underline{x}_M(X_{2D})) = \frac{2}{\epsilon t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot (\underline{x}_M(X_{2D}, 0) - \underline{x}_M(X_{2D}, -\frac{\epsilon t}{2})) \\ \quad = \frac{2}{t} \underline{R}^T(X_{2D}) \cdot \int_{-\frac{t}{2}}^0 \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial X_3}(X_{2D}, \epsilon Y_3) dY_3 \in \mathbb{R}^3 . \end{array} \right. \quad (8.4)$$

Ces paramètres sont rassemblés dans le vecteur des déformations macroscopiques

$$\underline{F}(\underline{x}_M) = \begin{pmatrix} \underline{F}_2(\underline{x}_M) \\ \underline{\xi}_U(\underline{x}_M) \\ \underline{\xi}_D(\underline{x}_M) \end{pmatrix} .$$

La gomme est modélisée comme un matériau quasi-incompressible homogène classique. Sa densité d'énergie peut par exemple être choisie parmi celles décrites dans le chapitre 2. Pour fixer les idées, on note son énergie de la forme :

$$w_g(\underline{F}) = w_{inc}(\underline{F}) + \frac{\kappa}{2} \left( \det(\underline{F}) - 1 \right)^2 ,$$

où le gradient 3D  $\underline{F}$  est défini par l'expression

$$\underline{F} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 .$$

Ce problème local est résolu par une méthode d'éléments finis comme cela a été décrit dans le chapitre 7, dans laquelle le terme de pénalisation de l'incompressibilité est sous-intégré de manière classique, pour éviter tout verrouillage numérique. Typiquement, pour des éléments quadratiques Q2 en déplacements, nous choisissons de réaliser une sous-intégration P1 de ce terme d'incompressibilité, à savoir on projette d'abord  $\det(\underline{F})$  sur l'espace P1 avant de l'intégrer, comme représenté sur la figure 8.4.

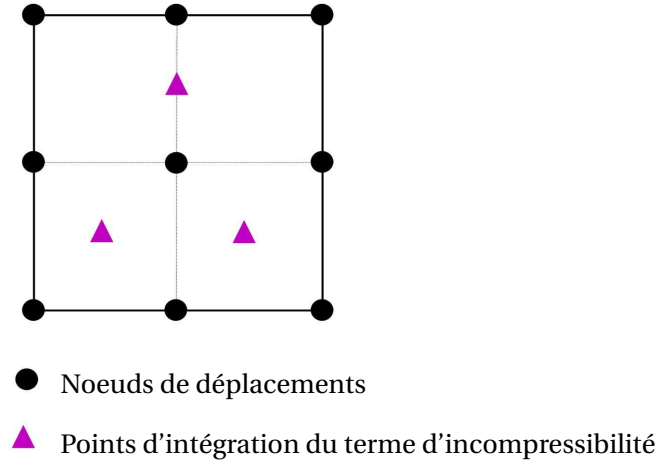


FIG. 8.4: Sous-intégration P1 du terme d'incompressibilité dans un éléments fini Q2 en déplacements.

Lorsque le module de compressibilité  $\kappa$  tend vers l'infini, la gomme devient totalement incompressible. Dans ce cas limite, il est nécessaire que les conditions aux limites conservent le volume de la cellule élémentaire pour garantir l'existence d'une solution :

$$\frac{1}{t e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det(\underline{\nabla} \underline{x}_m) dY_2 dY_3 = \frac{1}{t e} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_2} \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \underline{x}_m}{\partial Y_3} \otimes \underline{e}_3 \right) dY_2 dY_3 = 1 .$$

Comme nous l'avons vu en 7.12, une condition suffisante d'admissibilité sur les déformations globales s'écrit simplement sous la forme :

$$c_{iso}(\underline{F}) = \det \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{F}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{2} (\underline{\xi}_U + \underline{\xi}_D) \otimes \underline{e}_3 \right) = 1 . \quad (8.5)$$

### Incompressibilité à l'échelle globale

Comme nous venons de le voir, la prise en compte de l'incompressibilité ne peut pas se limiter à l'échelle locale. Pour garantir l'existence d'une solution locale, les déformations globale  $\underline{x}_M$  doivent satisfaire la condition d'admissibilité locale 8.5 à chaque point de la surface moyenne de la nappe où est résolu un problème local.

Pour satisfaire cette condition, la manière la plus simple est de pénaliser la condition d'admissibilité, comme cela serait fait pour une matériau quasi-incompressible homogène classique :

$$E_{gom} = \int_{\bar{P}} w_{gom}^m(\underline{F}(\underline{x}_M)) d\xi_\alpha + \int_{\bar{P}} \frac{\kappa_g}{2} (c_{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M)) - 1)^2 d\xi_\alpha , \quad (8.6)$$

où  $w_{gom}^m$  représente toujours l'énergie de gomme calculée localement moyennée dans la largeur :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad w_{gom}^m(\underline{F}(\underline{x}_M)) = \frac{\epsilon^3}{e} \inf_{\underline{x}_m|_{CL}} \int_{\Omega_g^e} w_g(\underline{\nabla} \underline{x}_m) dY_2 dY_3 .$$

Cependant, il est bien connu cette contrainte globale ne peut pas être imposée en tout point de la nappe, car cela provoquerait un verrouillage numérique lors de la résolution numérique.

Le terme de pénalisation de l'incompressibilité globale doit donc être sous-intégré, ce qui signifie que implique que les déformations globales transmises à l'échelle locale ne seront pas exactement isochores. Cette sous-intégration sera spécifiée plus loin.

## Projection dans la transition macro-micro

L'idée originale permettant de traiter localement les matériaux incompressibles malgré une sous-intégration à l'échelle globale est d'inclure une projection sur l'espace des déformations isochores dans la transition entre les échelles.

Nous notons  $\underline{P}^{iso} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^9$  la projection moindres carrés sur la variété non linéaire des vecteurs vérifiant la contraintes non linéaire 8.5. Le projeté  $\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M) = \underline{P}^{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M))$  est défini comme la solution du problème :

Pour un vecteur  $\underline{F}(\underline{x}_M) \in \mathbb{R}^9$  donné, trouver  $\underline{F}^{iso} \in \mathbb{R}^9$  qui minimise

$$\left| \underline{F}^{iso} - \underline{F}(\underline{x}_M) \right|^2$$

sous la contrainte 8.5

$$c_{iso}(\underline{F}^{iso}) = 1 \quad .$$

Le problème d'Euler-Lagrange non linéaire correspondant s'écrit :

Pour un vecteur  $\underline{F}(\underline{x}_M) \in \mathbb{R}^9$  donné, trouver  $\underline{F}^{iso} \in \mathbb{R}^9$  et  $\lambda^{iso} \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} \underline{F}^{iso} - \underline{F}(\underline{x}_M) - \lambda^{iso} \frac{\partial c_{iso}}{\partial \underline{F}}(\underline{F}^{iso}) = \underline{0} \\ c_{iso}(\underline{F}^{iso}) = 1 \end{cases} \quad (8.7)$$

Le projeté  $\underline{F}^{iso} = \underline{P}^{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M))$  est ainsi calculé en résolvant ce problème par une méthode de Newton. Une fois ce calcul réalisé, nous pouvons calculer ses dérivées premières directionnelles  $\frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}}(\underline{F}^{iso}) \cdot \underline{e}_i$

et secondes  $\frac{\partial^2 \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}^2}(\underline{F}^{iso}) : (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j)$  par résolution des équations linéaires issues de 8.7 :

$$\forall i \in [1;9], \quad \begin{cases} \left[ \underline{I} - \lambda^{iso} \frac{\partial^2 c_{iso}}{\partial \underline{F}^2} \right] \cdot \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i \right) - \frac{\partial c_{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \left( \frac{\partial \lambda^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i \right) = \underline{e}_i \\ \frac{\partial c_{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i = 0 \end{cases}$$

$$\forall i, j \in [1;9], \quad \begin{cases} \left[ \underline{I} - \lambda^{iso} \frac{\partial^2 c_{iso}}{\partial \underline{F}^2} \right] \cdot \left( \frac{\partial^2 \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}^2} : \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \right) - \frac{\partial c_{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \lambda^{iso}}{\partial \underline{F}^2} : \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \right) \\ = \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_j \right) \cdot \left[ \lambda^{iso} \frac{\partial^3 c_{iso}}{\partial \underline{F}^3} \cdot \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i \right) + \frac{\partial^2 c_{iso}}{\partial \underline{F}^2} \cdot \left( \frac{\partial \lambda^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i \right) \right] \\ \frac{\partial c_{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \frac{\partial^2 \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}^2} : (\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j) + \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_i \right) \cdot \frac{\partial^2 c_{iso}}{\partial \underline{F}^2} \cdot \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{e}_j \right) = 0 \end{cases}$$

Nous résolvons ensuite un problème local dépendant maintenant des paramètres macroscopiques  $\underline{F}^{iso} = \underline{P}^{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M))$ , qui calcule les quantités (voir chapitre 7) :

$$w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}) \quad , \quad \frac{\partial w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^{iso}}(\underline{F}^{iso}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^{iso^2}}(\underline{F}^{iso}) \quad .$$

Nous en déduisons alors les dérivées de l'énergie locales par rapport aux déformations globales par une formule de dérivée de fonctions composées classique

$$\begin{cases} \frac{\partial w_{gom}^m}{\partial \underline{F}}(\underline{P}^{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M))) = \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}}(\underline{F}(\underline{x}_M)) \right)^T \cdot \frac{\partial w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^{iso}} \\ \frac{\partial^2 w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^2}(\underline{P}^{iso}(\underline{F}(\underline{x}_M))) = \left( \frac{\partial^2 \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}^2}(\underline{F}(\underline{x}_M)) \right)^T \cdot \frac{\partial w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^{iso}} + \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}}(\underline{F}(\underline{x}_M)) \right)^T \cdot \frac{\partial^2 w_{gom}^m}{\partial \underline{F}^{iso^2}} \cdot \left( \frac{\partial \underline{P}^{iso}}{\partial \underline{F}}(\underline{F}(\underline{x}_M)) \right) \end{cases} \quad (8.8)$$

L'utilisation de la projection  $\underline{P}^{iso}$  est très importante à deux points de vue :

- A l'échelle mésoscopique, elle permet d'assurer que le problème local incompressible est bien posé ;
- A l'échelle macroscopique, elle permet de ne pas imposer une incompressibilité exacte à chaque point de la nappe où est appelé un problème local. Cela évite les risques de verrouillage numérique, quelque soit le nombre de problèmes locaux réalisés.

### 8.1.3 Traitement modifié de la condition d'incompressibilité

Plaçons nous dans le cas de fibres d'un diamètre faible (c'est à dire  $\epsilon \ll 1$ ).

Puisque le déterminant est invariant par rotation, le terme  $c_{iso}(\underline{F})$  peut se réécrire :

$$\begin{aligned} c_{iso}(\underline{F}) &= \det \left( \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{F}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{2} (\underline{\xi}_U + \underline{\xi}_D) \otimes \underline{e}_3 \right) \\ &= \det \left( \underline{R} \cdot \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{R} \cdot \underline{F}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{1}{2} \underline{R} \cdot (\underline{\xi}_U + \underline{\xi}_D) \otimes \underline{e}_3 \right) \end{aligned}$$

Si l'on reprend les définitions 8.4 de  $\underline{F}_2$ ,  $\underline{\xi}_U$  et  $\underline{\xi}_D$ , nous en déduisons :

$$\begin{aligned} c_{iso}(\underline{F}) &= \det \left( \underline{d}_1(\xi_{2D}) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, 0) \otimes \underline{e}_2 + \left( \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_3}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) dY_3 \right) \otimes \underline{e}_3 \right) \\ &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \underline{d}_1(\xi_{2D}) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, 0) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_3}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) \otimes \underline{e}_3 \right) dY_3 \end{aligned}$$

Le diamètre des fibres étant supposé très petit, leur résistance au cisaillement est très grande. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 de ce mémoire, nous aurons alors  $\underline{d}_1$  très proche de  $\underline{F}_1 = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_3=0}$  :

$$\frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}(\xi_{2D}, 0) = \underline{d}_1(\xi_{2D}) + O(\epsilon)$$

Par ailleurs, comme cela a été montré dans le chapitre 6, les dérivées  $\frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}$  et  $\frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}$  sont supposées varier lentement dans l'épaisseur de la nappe :

$$\forall Y_3 \in \left[-\frac{t}{2}; \frac{t}{2}\right] \begin{cases} \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) = \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}(\xi_{2D}, 0) + O(\epsilon) \\ \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) = \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, 0) + O(\epsilon) \end{cases}$$

Nous déduisons de ces deux approximations le résultat suivant :

$$\begin{aligned} c_{iso}(\underline{F}) &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}(\xi_{2D}, 0) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, 0) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_3}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) \otimes \underline{e}_3 \right) dY_3 + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_1}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_3}(\xi_{2D}, \epsilon Y_3) \otimes \underline{e}_3 \right) dY_3 + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \det \left( \underline{\nabla}_{3D} \underline{x}_M \right) dY_3 + O(\epsilon) \\ &= \frac{1}{\epsilon t} \int_{-\frac{\epsilon t}{2}}^{\frac{\epsilon t}{2}} \det \left( \underline{\nabla}_{3D} \underline{x}_M \right) d\xi_3 + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque l'épaisseur de la nappe est suffisamment faible, le terme de pénalisation de la condition d'admissibilité présent dans l'expression 8.6 peut être remplacé par l'exigence plus forte :

$$\iint_{\bar{P}} \frac{\kappa_g}{2} (c_{iso}(F(\underline{x}_M)) - 1)^2 d\xi_\alpha = \frac{\kappa_g}{2 \epsilon t} \iiint_{\bar{\Omega}} \frac{\kappa_g}{2} \left( \det(\underline{\nabla}_{3D} \underline{x}_M) - 1 \right)^2 d\xi_{3D} + O(\epsilon)$$

Finalement, l'énergie de gomme utilisée à l'échelle globale pénalise l'incompressibilité 3D comme cela serait fait pour un matériau quasi-incompressible homogène classique :

$$E_{gom} = \iint_{\bar{P}} w_{gom}^m(F^{iso}(\underline{x}_M)) d\xi_\alpha + \frac{\kappa_g}{2 \epsilon t} \iiint_{\bar{\Omega}} \frac{\kappa_g}{2} \left( \det(\underline{\nabla}_{3D} \underline{x}_M) - 1 \right)^2 d\xi_{3D} , \quad (8.9)$$

où  $w_{gom}^m$  représente toujours l'énergie de gomme calculée localement moyennée dans la largeur :

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad w_{gom}^m(F^{iso}(\underline{x}_M)) = \frac{\epsilon^3}{e} \inf_{\underline{x}_m | CL(F^{iso})} \iint_{\Omega_g^e} w_g(\underline{\nabla} \underline{x}_m) dY_2 dY_3 .$$

#### 8.1.4 Coercivité de l'énergie globale

La deuxième limite de notre modèle est qu'il n'est pas coercif dans le cas où la nappe n'est pas entourée par d'autres couches de matériaux. Plus précisément, il ne prend pas en compte la flexion de la nappe perpendiculairement aux câbles, ce qui autorise des modes d'énergie nulle comme représenté sur la figure 8.5.

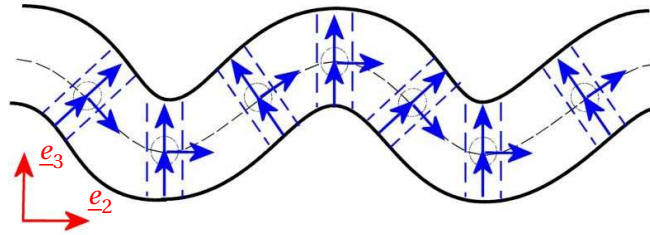


FIG. 8.5: Mode de déformation d'énergie nulle pour le modèle multi-échelles non coercif

Ce phénomène vient du fait que le gradient dans le plan de la nappe, noté  $\underline{F}_2$ , est supposé constant dans l'épaisseur lorsqu'on calcule l'énergie de gomme à l'échelle locale.

Dans le modèle global de nappe isolée qui a été présenté dans la partie I de ce mémoire, ce problème n'apparaissait pas car l'énergie de gomme introduite contrôlait les variations de  $\frac{\partial \underline{x}_M}{\partial \xi_2}$  dans l'épaisseur de la nappe. Même si la résistance de la gomme en flexion est faible, cela suffisait à rendre le modèle coercif.

Pour rendre notre modèle plus robuste lorsque l'épaisseur de la structure est petite indépendamment de la présence éventuelle de couches supérieure et inférieure de gomme, nous souhaitons donc conserver "un peu" d'énergie de gomme calculée à l'échelle globale. Nous rappelons que la densité surfacique d'énergie de gomme proposée dans une approche purement macroscopique était donnée par 2.42 :

$$w_{gom}^M(\underline{x}_M, \underline{d}_i) = \int_{-\frac{\epsilon t}{2}}^{\frac{\epsilon t}{2}} w_{inc}(\underline{\nabla} \underline{x}_M) d\xi_3 + \frac{1}{2} c_{coupl} (\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2(\underline{x}_M))^2 .$$



Nous choisissons alors de remplacer la densité la densité surfacique de gomme  $w_{gom}^m$ , calculée localement selon 8.3, par l'expression équivalente à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$

$$w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) \rightarrow \alpha w_{gom}^M(\underline{x}_M, \underline{d}_i) + w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) - \alpha \widetilde{w_{gom}^M}(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) . \quad (8.10)$$

Ici  $\alpha \ll 1$  est un petit paramètre, et  $\widetilde{w_{gom}^M}$  correspond à l'énergie calculée à l'échelle globale lorsqu'on considère que la dérivée dans le plan de la nappe  $\underline{F}_2$  est constante dans l'épaisseur :

$$\widetilde{w_{gom}^M}(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) = \int_{-\frac{\epsilon t}{2}}^{\frac{\epsilon t}{2}} w_{inc}(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) d\xi_3 + \frac{1}{2} c_{coupl}(\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2(\underline{x}_M))^2 .$$

L'utilisation combinée de l'écriture pénalisée 8.9 et de la forme régularisée 8.10 de l'énergie de gomme locale conduit à notre définition finale de l'énergie multi-échelles de nappe :

$$E_{nap} = \underbrace{\int \int_{\bar{P}} \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 d\xi_{2D}}_{E_{mb}} + \underbrace{\int \int_{\bar{P}} \frac{1}{e} w_{fl} d\xi_{2D}}_{E_{fl}} + \frac{\kappa_g}{2 \epsilon t} \int \int \int_{\bar{\Omega}} \frac{\kappa_g}{2} \left( \det(\nabla_{3D} \underline{x}_M) - 1 \right)^2 d\xi_{3D} \\ + \underbrace{\int \int_{\bar{P}} \alpha w_{gom}^M(\underline{x}_M, \underline{d}_i) + w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) - \alpha \widetilde{w_{gom}^M}(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) d\xi_{2D}}_{E_{gom}} . \quad (8.11)$$

Dans cette nouvelle énergie, nous pouvons alors remarquer deux choses :

- Le terme  $\alpha w_{gom}^M(\underline{x}_M)$  permet de prendre en compte la variation des déformations dans l'épaisseur, donc assure formellement une coercivité locale ;
- Le paramètre  $\alpha$  étant choisi petit, nous pouvons supposer que le terme  $w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}) - \alpha \widetilde{w_{gom}^M}(\underline{F}^{iso})$  est toujours positif, ce qui signifie que la contribution de l'énergie microscopique est toujours positive.

Avec la nouvelle énergie coercive 8.11, calculée localement, le problème multi-échelles continu réduit à l'échelle de la nappe unique s'écrit de la même manière que le problème global Pb2.4.2 :

**Pb 8.1.1** Trouver  $(\underline{x}, \underline{d}_i; \underline{\lambda}) \in K \times \mathcal{R}_{sym}^{33}$  tels que

$$\begin{cases} \forall (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) \in K_0 , \quad \frac{\partial E_{nap}}{\partial (\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) + \int \int_{\bar{P}} \underline{\lambda}(\xi_\alpha) : \left[ \frac{\partial \underline{G}}{\partial \underline{d}_i} \cdot \hat{\underline{d}}_i \right] (\xi_\alpha) d\xi_\alpha = F(\hat{\underline{x}}) \\ \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P} , \quad \underline{G}[\underline{d}_i](\xi_1, \xi_2) = \underline{0} \end{cases} \quad (8.12)$$

Dans le cas d'une nappe noyée dans une structure tridimensionnelle, il convient de rajouter à l'énergie  $E_{nap}$  l'énergie tridimensionnelle

$$E_{couches} = \int \int \int_{\Omega_U} w_g(\underline{\nabla} \underline{x}_M) d\xi_{3D} + \int \int \int_{\Omega_D} w_g(\underline{\nabla} \underline{x}_M) d\xi_{3D}$$

### 8.1.5 Problème discret - Diminution du coût des calculs

Reprenons la discrétisation par éléments finis décrite dans le chapitre 4 et rappelée dans la sous-section 8.1.1.

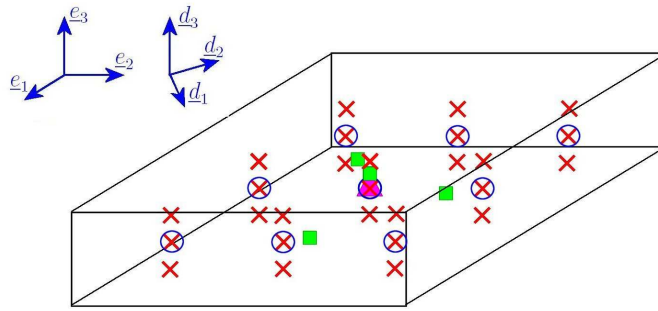
Nous avons vu dans le chapitre 3 que cette énergie ne doit pas être intégrée de manière exacte avec des éléments finis standards. Pour éviter le phénomène de verrouillage numérique, il est nécessaire

de sous-intégrer le terme d'énergie de membrane des câbles. Comme cela a déjà été fait dans le chapitre 4, on introduit un paramètre  $\rho$ , appelé coefficient de sous-intégration, et on approche l'énergie de membrane des câbles par :

$$\rho \underbrace{\int_{\bar{P}} \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 d\xi_{2D}}_{E_{mb}} + (1 - \rho) \underbrace{\sum_{e=1}^{NE_h} |I_e^h| \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} \langle v_i - v_{0i} \rangle_{E_e^h}^2}_{E_{mb}^h}$$

Pour calculer une énergie discrète qui soit à la fois coercive et suffisamment précise, nous intégrons les autres termes de la même manière que dans le chapitre 4 : (récapitulé sur la figure 8.6)

- Le terme d'énergie de gomme 3D  $\alpha w_{inc}(\underline{\nabla}x_M)$  est intégré de manière exacte aux 27 points de Gauss 3D de chaque élément fini ;
- Le terme de flexion  $\frac{1}{e} w_{fl}$  et le terme de couplage  $\alpha \frac{1}{2} c_{coupl} (\underline{d}_3 \cdot \underline{F}_2(x_M))^2$  sont intégrés de manière exacte aux 9 points de Gauss 2D du plan médian de chaque élément fini de nappe ;
- Le terme de pénalisation  $\frac{\kappa_g}{2} (\det(\underline{\nabla}x_M) - 1)^2$  est sous-intégré de manière classique, calculé à partir de 4 points de Gauss 3D dans chaque élément fini. Dans des éléments finis 3D Q2 en déplacements, nous choisissons de réaliser une sous-intégration P1, où  $\det(\underline{\nabla}x_M)$  est d'abord projeté par élément fini sur les polynômes de degré 1 avant d'être intégré, comme illustré sur la figure 8.6.



- × Intégration Q2 de l'énergie de gomme
- Intégration P1 du terme de pénalisation de l'incompressibilité
- Intégration Q2 du terme de flexion des câbles et du terme de couplage gomme/câble
- ▲ Intégration P0 du terme de membrane des câbles

FIG. 8.6: Intégration du terme coercif de l'énergie global

Il ne nous reste plus qu'à déterminer la manière d'intégrer le dernier terme

$$\int_{\bar{P}} w_{gom}^m(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) - \alpha \widetilde{w_{gom}^M}(\underline{F}^{iso}(\underline{x}_M)) d\xi_{2D} .$$

Pour cela, nous constatons deux choses :

- Les termes précédemment décrits suffisent à rendre l'énergie coercive. Cela signifie que ce dernier terme, qui est supposé positif, peut être intégré en un nombre réduit de points ;
- L'utilisation de la projection dans la transition entre les échelles, comme décrit dans la sous-section 8.1.2, évite les phénomènes de verrouillage numérique même si on utilise un nombre élevé de problèmes locaux par élément fini macroscopique.

En conclusion, cette correction locale peut être intégrée en un nombre quelconque de points. Le choix de ce nombre de points influe sur deux critères :

- 1) La précision des calculs pour une taille de maille  $h$  donnée ;
- 2) Le coût des calculs.

Dans notre cas, nous privilégions la vitesse des calculs et nous choisissons de n'appeler qu'un seul problème local par élément fini macroscopique, comme représenté sur la figure 8.7. L'énergie interne de la nappe sera approché dans le problème discret par

$$\begin{aligned}
 E_{nap}^h = & \underbrace{\rho \iint_{\bar{p}} \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} (v_i - v_{0i})^2 d\xi_{2D}}_{E_{mb}^h} + (1 - \rho) \underbrace{\sum_{e=1}^{NE_h} |I_e^h| \frac{1}{e} K_{ii}^{mb} \langle v_i - v_{0i} \rangle_{E_e^h}^2}_{E_{mb}^h} \\
 & + \iint_{\bar{p}} \frac{1}{e} w_{fl} d\xi_1 d\xi_2 + \frac{\kappa_g}{2 \epsilon t} \iiint_{\bar{\Omega}} \frac{\kappa_g}{2} \left( \det \left( \underline{\nabla}_{3D} \underline{x}_M \right) - 1 \right)^2 d\xi_{3D} \quad (8.13) \\
 & + \underbrace{\iint_{\bar{p}} \alpha w_{gom}^M(\underline{x}_M, \underline{d}_i) d\xi_{2D} + \sum_{e=1}^{NE_h} |I_e^h| \left[ w_{gom}^m \left( \langle \underline{F}(\underline{x}_M) \rangle_{E_e^h}^{iso} \right) - \alpha \widehat{w_{gom}^M} \left( \langle \underline{F}(\underline{x}_M) \rangle_{E_e^h}^{iso} \right) \right]}_{E_{gom}^h} .
 \end{aligned}$$

Ici  $\langle \underline{F}(\underline{x}_M) \rangle_{E_e^h}$  représente la moyenne dans le plan de  $\underline{F}(\underline{x}_M)$  sur l'élément fini  $E_e^h$ , avec  $\underline{F}$  défini en 8.4.

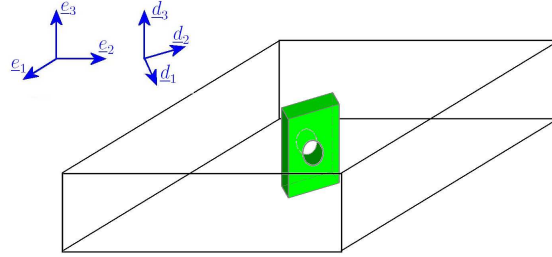


FIG. 8.7: Intégration de l'énergie de gomme : un seul problème local par élément fini global

Le problème discret multi-échelles à résoudre pour la nappe isolée s'écrit alors de la même manière que le problème global Pb4.1.1 :

### Pb 8.1.2 Problème discret multi-échelles

Trouver  $(\underline{x}, \underline{d}_i) \in K_h$  et  $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{6 * NN_d^h}$  tels que,  $\forall (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) \in K_h^0$ , on ait

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{nap}^h}{\partial (\underline{x}, \underline{d}_i)}(\underline{x}, \underline{d}_i) \cdot (\hat{\underline{x}}, \hat{\underline{d}}_i) + \sum_{p=1}^{NN_d^h} \lambda_{ij}^p \left( \hat{\underline{d}}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) + \underline{d}_i(N_p) \cdot \hat{\underline{d}}_j(N_p) \right) = F(\hat{\underline{x}}) \\ \forall p \in [1, NN_d^h] , \forall 1 \leq i \leq j \leq 3 , \underline{d}_i(N_p) \cdot \underline{d}_j(N_p) = \delta_{ij} \end{cases}$$

La résolution de ce problème non-linéaire est réalisée par la méthode de Newton projetée décrite par l'algorithme 1. L'unique différence est que la matrice de rigidité  $\underline{\mathbb{K}}$  et le second membre  $\underline{F}$  sont calculés grâce à des calculs réalisés à l'échelle mésoscopique en utilisant les dérivées 8.8.

Dans le cas d'une nappe noyée dans une structure tridimensionnelle, il suffit d'ajouter à ceci la discrétisation des couches  $\Omega_U$  et  $\Omega_D$  par des éléments finis classiques.

## ■ 8.2 Analyse numérique du problème multi-échelles linéarisé

L'objectif de cette section est de vérifier la bonne convergence de la méthode numérique décrite dans la section 8.1 lorsque la gomme est incompressible et que l'épaisseur de la nappe tend vers 0. Plus précisément, nous souhaitons démontrer deux choses :

- Les problèmes continus local et global sont bien posés ;
- Avec notre choix de discrétisation et de sous-intégration, la solution discrète converge vers la solution du problème continu.

Dans cette analyse, nous nous limitons au cadre du problème linéarisé autour d'un état de repos plan. Nous reprenons les hypothèses dimensionnelles réalisées dans les chapitres 3 et 6 de ce mémoire, de manière à adimensionner notre problème multi-échelles. Mais par rapport au chapitre 3, le problème reste ici 3D sur le volume  $\bar{\Omega}$  et non dans le plan  $\bar{P}$ .

Par ailleurs, nous considérons ici le cas limite dans lequel la gomme est considérée comme étant totalement incompressible. Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, cette contrainte d'incompressibilité devra être prise en compte aux échelles mésoscopiques et macroscopiques.

### Notations

★ A l'échelle globale, comme cela a été montré dans le chapitre 3, l'hypothèse de nappe plane nous permet de formuler les problèmes linéaires continu et discret en fonction des déplacements de la gomme  $\underline{\delta x}_M \in H^1(\bar{\Omega})^3$ , des déplacements de la câbles  $\underline{\delta r} \in H^1(\omega)$  et des rotations  $\underline{\omega} \in H^1(\omega)^3$  à l'échelle macroscopique. Pour simplifier, nous noterons dans cette section les déplacements macroscopiques généralisés  $u = (\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega})$ , qui évoluent dans l'espace continu

$$\mathcal{V} = \left\{ (\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in H^1(\bar{\Omega})^3 \times H^1(\bar{P})^3 \times H^1(\bar{P})^3 \text{ tels que} \right. \\ \left. \forall (\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}, \quad \underline{\delta r}(\xi_1, \xi_2) = \underline{\delta x}_M(\xi_1, \xi_2, 0) \right\} \cap \mathcal{EL}_0 ,$$

muni de la norme

$$\|(\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega})\|_{\mathcal{V}} = \sqrt{\|\underline{\delta x}_M\|_{1, \bar{\Omega}}^2 + \|\underline{\delta r}\|_{1, \bar{P}}^2 + \|\underline{\omega}\|_{1, \bar{P}}^2} .$$

★ A l'échelle locale, les déplacements sont notés  $u_{loc} = \underline{\delta x}_m$  et évoluent dans l'espace continu local

$$\mathcal{V}_{loc} = \left\{ \underline{v} \in H^1(\Omega_g^e), \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_C \right\} . \quad (8.14)$$

L'espace des déplacements périodiques admissibles s'écrit alors :

$$\mathcal{V}_{loc}^{per} = \left\{ \underline{v} \in \mathcal{V}_{loc}, \underline{v} \text{ périodique selon } Y_2 \right. \\ \left. \text{et } \underline{v} \text{ de moyenne nulle sur } \Gamma_U \text{ et } \Gamma_D \right\} . \quad (8.15)$$

Observons que l'espace  $H_0^1(\Omega_g^e)^3$  est inclus dans  $\mathcal{V}_{loc}^{per}$ .

Enfin, on définit l'espace local  $\mathcal{V}_{loc}^{iso}$  des déplacements préservant le volume d'une cellule élémentaire :

$$\mathcal{V}_{loc}^{iso} = \left\{ \underline{v} \in \mathcal{V}_{loc} \text{ tels que } b_{loc}(\underline{v}, c) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R} \right\} ,$$

où  $b_{loc}(\underline{v}, q) = \iint_{\Omega_g^e} q \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial Y_2} + \frac{\partial \underline{v}}{\partial Y_3} \right) dY$  définit la contrainte d'incompressibilité.

★ Transition entre les échelles : Lorsqu'on linéarise, les déformations globales qui sont imposées à l'échelle locale peuvent être approchées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{F}_2(u) = \underline{e}_2 \wedge \underline{\omega} + \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \\ \underline{\xi}_U(u) = \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{\epsilon t}{2} (\delta x_M(\epsilon t/2) - \delta x_M(0)) \\ \quad = \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{\epsilon t}{2} \int_0^{t/2} \frac{\partial \delta x_M}{\partial X_3} dY_3 \\ \underline{\xi}_D(u) = \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{\epsilon t}{2} (\delta x_M(0) - \delta x_M(-\epsilon t/2)) \\ \quad = \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_{-t/2}^0 \frac{\partial \delta x_M}{\partial X_3} dY_3 \end{array} \right.$$

Ces relations sont récapitulées par l'opérateur de trace ponctuelle

$$\begin{aligned} \underline{F} &: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^9 \\ u &\mapsto \underline{F}(u) = \begin{pmatrix} \underline{F}_2(u) \\ \underline{\xi}_U(u) \\ \underline{\xi}_D(u) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Cet opérateur est continu au sens suivant :

$$\forall \xi_\alpha \in \bar{P}, \forall (\underline{x}_M, \underline{r}, \underline{\omega}) \in \mathcal{V},$$

$$\begin{aligned} |\underline{F}(\underline{x}_M, \underline{r}, \underline{\omega})(\xi_\alpha)|^2 &= \left| \underline{e}_2 \wedge \underline{\omega} + \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \right|^2 + \left| \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_0^{t/2} \frac{\partial \delta x_M}{\partial X_3} dY_3 \right|^2 \\ &\quad + \left| \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_{-t/2}^0 \frac{\partial \delta x_M}{\partial X_3} dY_3 \right|^2 \\ &\leq C_F^2 \left( |\underline{\omega}|^2 + |\underline{\nabla}_{2D} r|^2 + \int_{-t/2}^{t/2} |\underline{\nabla}_{3D} x_M|^2 dY_3 \right), \end{aligned}$$

de telle sorte que

$$\forall v \in \mathcal{V}, \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(v)|^2 d\xi_\alpha \leq C_F^2 \|v\|_{\mathcal{V}}^2. \quad (8.17)$$

Par ailleurs, la trace ponctuelle  $\underline{F}(u)$  doit respecter la contrainte d'incompressibilité linéarisée suivante pour permettre d'obtenir un problème local bien posé :

$$c_{iso}(\underline{F}(u)) = \underline{F}_2(u) \cdot \underline{e}_2 + \frac{1}{2} (\underline{\xi}_U(u) + \underline{\xi}_D(u)) \cdot \underline{e}_3 = 0 \quad (8.18)$$

Nous introduisons aussi l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace des vecteurs respectant cette contrainte, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{P}^{iso} &: \mathbb{R}^9 \rightarrow Ker(c_{iso}) \cap \mathbb{R}^9 \\ \underline{F} = \begin{pmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{\xi}_U \\ \underline{\xi}_D \end{pmatrix} &\mapsto \underline{F}^{iso} = \begin{pmatrix} \underline{F}_2 \\ \underline{\xi}_U \\ \underline{\xi}_D \end{pmatrix} - \frac{2}{3} c_{iso}(\underline{F}) \begin{pmatrix} \underline{e}_2 \\ \frac{1}{2} \underline{e}_3 \\ \frac{1}{2} \underline{e}_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cet opérateur est également continu :

$$\forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, |\underline{P}^{iso}(\underline{F})| \leq C_P |\underline{F}| \quad (8.19)$$

Remarque : Nous noterons souvent  $(.)^{iso}$  à la place de  $P^{iso}(\cdot)$  pour alléger les expressions.

### 8.2.1 Problème local incompressible

#### Problème continu

A l'échelle locale, l'incompressibilité est imposée par des multiplicateurs de Lagrange, notés  $p_{loc}$ , correspondant à la pression hydrostatique. L'espace de pressions locales est défini par :

$$\mathcal{Q}_{loc} = \left\{ q_{loc} \in L^2(\Omega_g^e) \right\}$$

On se place en un point macroscopique  $(\xi_1, \xi_2) \in \bar{P}$  de la surface moyenne de la nappe.

On note  $\underline{F} \in \mathbb{R}^9$  la trace ponctuelle calculée d'après l'expression 8.16 au point  $(\xi_1, \xi_2)$ . On introduit alors une extension continue régulière

$$\begin{aligned} Ext : \mathbb{R}^9 &\rightarrow H^2(\Omega_g^e) \cap \mathcal{V}_{loc}^{iso} \\ \underline{F} &\mapsto Ext(\underline{F}) \end{aligned} \quad (8.20)$$

qui définit un déplacement "macroscopique" induit par  $\underline{F}(u)$  sur  $\Omega_g^e$ , correspondant à la partie non périodique du déplacement local.

En introduisant une fonction scalaire  $\varphi(Y_2, Y_3)$ , qui vaut 1 sur les bords extérieurs  $\Gamma_R \cup \Gamma_L \cup \Gamma_U \cup \Gamma_D$  et 0 sur le contour du câble  $\Gamma_C$ , l'opérateur d'extension peut être défini par

$$\forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, \quad Ext(\underline{F})(Y_2, Y_3) = \varphi(Y_2, Y_3) \left[ Y_2 \underline{F}_2 + \frac{1}{t} Y_3 (Y_3 + \frac{t}{2}) \underline{\xi}_U - \frac{1}{t} Y_3 (Y_3 - \frac{t}{2}) \underline{\xi}_D \right].$$

On vérifie alors que cette extension préserve le volume de la cellule  $\Omega_g^e$  si  $c_{iso}(\underline{F}) = 0$ . En effet

$$\begin{aligned} \forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, \forall c \in \mathbb{R}, \quad b_{loc}(Ext(\underline{F}), c) &= c \iint_{\Omega_g^e} \frac{\partial Ext_2(\underline{F})}{\partial Y_2} + \frac{\partial Ext_3(\underline{F})}{\partial Y_3} dY \\ &= c \int_{\partial\Omega_g^e} Ext_2(\underline{F}) n_2 + Ext_3(\underline{F}) n_3 dY \end{aligned}$$

Par construction, l'extension est nulle sur le contour du câble  $\Gamma_C$ , donc

$$\begin{aligned} \forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, \forall c \in \mathbb{R}, \quad b_{loc}(Ext(\underline{F}), c) &= c \left( \int_{\Gamma_R} Ext_2(\underline{F}) dY_3 - \int_{\Gamma_L} Ext_2(\underline{F}) dY_3 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_U} Ext_3(\underline{F}) dY_2 - \int_{\Gamma_D} Ext_3(\underline{F}) dY_2 \right) \\ &= c \left( t e \underline{F}_2 \cdot e_2 + \frac{t}{2} e \underline{\xi}_U \cdot e_3 + \frac{t}{2} e \underline{\xi}_D \cdot e_3 \right) \\ &= c t e c_{iso}(\underline{F}) \end{aligned} \quad (8.21)$$

Dans ce formalisme, le problème local incompressible continu s'écrit alors sous la forme d'un problème mixte classique :

#### Pb 8.2.1 Problème local incompressible continu

Pour un vecteur  $\underline{F} \in \mathbb{R}^9$  fixé, trouver  $u_{loc}(\underline{F}) \in \mathcal{V}_{loc}^{per}$  et  $p_{loc}(\underline{F}) \in \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} \forall v_{loc} \in \mathcal{V}_{loc}^{per}, & a_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), v_{loc}) + b_{loc}(v_{loc}, p_{loc}(\underline{F})) = 0 \\ \forall q_{loc} \in \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}, & b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), q_{loc}) = 0 \end{cases}$$

Dans ce problème, les deux formes bilinéaires intervenant sont définies par linéarisation des opérateurs de rigidité et d'incompressibilité locaux :

$$\begin{aligned} a_{loc} : \mathcal{V}_{loc} \times \mathcal{V}_{loc} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\underline{\delta x}_m, \underline{\hat{x}}_m) &\mapsto \iint_{\Omega_g^e} \frac{\nabla \delta x}{m} : \frac{\partial^2 w_g}{\partial \underline{F}^2}(\underline{I}) : \underline{\nabla \hat{x}}_m dY_2 dY_3 \end{aligned}$$

$$b_{loc} : \mathcal{V}_{loc} \times \mathcal{Q}_{loc} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\delta x_m, p_{loc}) \mapsto \iint_{\Omega_g^e} p_{loc} \left( \frac{\partial \delta x_m}{\partial Y_2} \cdot e_2 + \frac{\partial \delta x_m}{\partial Y_3} \cdot e_3 \right) dY_2 dY_3$$

Nous faisons l'hypothèse que la forme bilinéaire  $a_{loc}(\cdot, \cdot)$  est continue :

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \quad |a_{loc}(u, v)| \leq \|a_{loc}\| \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \quad (8.22)$$

De plus,  $a_{loc}(\cdot, \cdot)$  est supposée symétrique et coercive sur l'espace des déplacements admissibles s'annulant sur le câble :

$$\exists \alpha_{loc} > 0, \forall u_{loc} \in \mathcal{V}_{loc}, \quad a_{loc}(u_{loc}, u_{loc}) \geq \alpha_{loc} \|u_{loc}\|_{\mathcal{V}}^2 \quad (8.23)$$

D'après (Temam, 2001), la forme bilinéaire  $b_{loc}(\cdot, \cdot)$  est également continue :

$$\forall u \in \mathcal{V}, \forall q \in \mathcal{Q}, \quad |b_{loc}(u, q)| \leq \|b_{loc}\| \|u\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{Q}} \quad (8.24)$$

et les espaces locaux  $H_0^1(\Omega_g^e)$  et  $\mathcal{Q}_{loc}$  vérifient la condition inf-sup continue :

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{q_{loc} \in \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}} \sup_{v_{loc} \in H_0^1(\Omega_g^e)} \frac{b_{loc}(v_{loc}, q_{loc})}{\|v_{loc}\|_1 \|q_{loc}\|_0} \geq \beta \quad (8.25)$$

Puisque l'espace  $H_0^1(\Omega_g^e)$  est inclus dans  $\mathcal{V}_{loc}^{per}$ , ceci signifie que la condition inf-sup est également vérifiée sur  $\mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R} \times \mathcal{V}_{loc}^{per}$ .

Sous ces hypothèses, nous prouvons dans ce qui suit que le problème local continu Pb8.2.1 est bien posé :

**Théorème 8.2.1** *Le problème local continu Pb8.2.1 admet une unique solution  $(u_{loc}(\underline{F}), p_{loc}(\underline{F})) \in \mathcal{V}_{loc} \times \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}$  (la pression  $p_{loc}(\underline{F})$  est défini à une constante près).*

*De plus, la solution  $u_{loc}(\underline{F})$  appartient à l'espace  $H^2(\Omega_g^e) \cap \mathcal{V}_{loc}^{iso}$  et dépend continûment de  $\underline{F}$ . De même,  $p_{loc}(\underline{F})$  appartient à l'espace  $H^1(\Omega_g^e)$  et dépend continûment de  $\underline{F}$ .*

Démonstration :

★ Introduisons l'opérateur linéaire continu  $A_{loc} : \mathcal{V}_{loc} \rightarrow \mathcal{V}'_{loc}$  défini par

$$\forall v_{loc} \in \mathcal{V}_{loc}, \quad (A_{loc} u_{loc}) v_{loc} = a_{loc}(u_{loc}, v_{loc})$$

Nous introduisons également l'opérateur linéaire continu  $B_{loc} : \mathcal{V}_{loc} \rightarrow (\mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R})'$  défini par

$$\forall q_{loc} \in \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}, \quad (B_{loc} u_{loc}) q_{loc} = b_{loc}(u_{loc}, q_{loc})$$

et dont le transposé sera noté  $B_{loc}^T : \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{V}'_{loc}$ .

Le problème Pb8.2.1 se réécrit alors sous la forme :

Pour un vecteur  $\underline{F} \in \mathbb{R}^9$  fixé, trouver  $u_{loc}(\underline{F}) \in \mathcal{V}_{loc}^{per}$  et  $p_{loc}(\underline{F}) \in \mathcal{Q}_{loc}/\mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} \forall v_{loc} \in \mathcal{V}_{loc}^{per}, & A_{loc} u_{loc}(\underline{F}) + B_{loc}^T p_{loc}(\underline{F}) = -A_{loc} Ext(\underline{F}) \\ B_{loc} u_{loc}(\underline{F}) = -B_{loc} Ext(\underline{F}) \end{cases}$$

Ce problème mixte correspond au cadre étudié par exemple dans (Brezzi and Fortin, 1991). D'après le théorème II.1.1 de cet ouvrage, la coercivité de la forme bilinéaire  $a_{loc}(\cdot, \cdot)$  et l'hypothèse 8.25 garantissent l'existence d'une solution unique  $(u_{loc}(\underline{F}), p_{loc}(\underline{F}))$  au problème Pb8.2.1.

★ Il est également établi dans (Brezzi and Fortin, 1991) que les solutions  $u_{loc}(\underline{F})$  et  $p_{loc}(\underline{F})$  dépendent continuellement des seconds membres, à savoir ici  $-A_{loc} Ext(\underline{F})$  et  $-B_{loc} Ext(\underline{F})$ . Les continuités des opérateurs linéaires  $A_{loc}$  et  $B_{loc}$ , ainsi que celle de  $Ext$ , permettent d'établir que  $u_{loc}(\underline{F})$  et  $p_{loc}(\underline{F})$  dépendent continuellement de  $\underline{F}$ .

★ Par ailleurs, si  $c_{iso}(\underline{F}) = 0$ , alors cette unique solution vérifie

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), c) = 0 .$$

En effet,  $Ext(\underline{F}) \in \mathcal{V}_{loc}^{iso}$  si  $c_{iso}(\underline{F}) = 0$  d'après 8.21, donc on vérifie d'abord que

$$b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), c) = b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}), c)$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), c) &= c \iint_{\Omega_g^e} \frac{\partial u_{loc}(\underline{F})}{\partial Y_2} + \frac{\partial u_{loc}(\underline{F})}{\partial Y_3} dY \\ &= c \int_{\partial\Omega_g^e} u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_2 n_2 + u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_3 n_3 dY \end{aligned}$$

Les déplacements étant nuls sur le contour du câble  $\Gamma_C$ , ceci s'écrit

$$\begin{aligned} b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + u_{loc}(\underline{F}), c) &= c \left( \int_{\Gamma_R} u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_2 dY_3 - \int_{\Gamma_L} u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_2 dY_3 \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_U} u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_3 dY_2 - \int_{\Gamma_D} u_{loc}(\underline{F}) \cdot \underline{e}_3 dY_2 \right) \end{aligned}$$

La  $Y_2$ -périodicité et la moyenne nulle de  $u_{loc}$  sur  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_D$  nous donnent alors le résultat.

★ Enfin, la densité de forces extérieures vues par le problème local vaut

$$\underline{f} = \text{div} \left( \frac{\partial^2 w_g}{\partial \underline{F}^2}(\underline{I}) : \underline{\underline{Ext}}(\underline{F}) \right)$$

Puisque  $Ext(\underline{F}) \in H^2(\Omega_g^e)$ , alors  $\underline{f} \in L^2(\Omega_g^e)$ . Comme cela est montré par exemple dans (Girault and Raviart, 1981), la régularité du domaine  $\Omega_g^e$  assure alors que la solution  $(u_{loc}(\underline{F}), p_{loc}(\underline{F}))$  est régulière et appartient à l'espace  $H^2(\Omega_g^e) \times H^1(\Omega_g^e)$  à condition que les coefficients de la hessienne  $\frac{\partial^2 w_g}{\partial \underline{F}^2}$  soient réguliers en espace. ■

Le résultat du théorème 8.2.1 nous permet alors de définir l'opérateur :

$$\begin{aligned} Tr^{-1} : \mathbb{R}^9 &\rightarrow H^2(\Omega_g^e) \cap \mathcal{V}_{loc} \\ \underline{F} &\mapsto u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Les continuités de  $Ext(\cdot)$  et  $u_{loc}(\cdot)$  prouvent alors que l'opérateur  $Tr^{-1}$  est également continu

$$\forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, \quad \|Tr^{-1}(\underline{F})\|_1 \leq C_T |\underline{F}| ,$$

et par ailleurs, si  $c_{iso}(\underline{F}) = 0$ , alors  $Tr^{-1}(\underline{F})$  vérifie la condition d'incompressibilité globale

$$\forall q_{loc} \in \mathcal{Q}_{loc}, \quad b_{loc}(u_{loc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), q_{loc}) = 0$$



### Discrétisation par éléments finis

On discrétise le problème local continu 8.2.1 en introduisant les espaces d'approximation  $\mathcal{V}_{hloc} \subset \mathcal{V}_{loc}$  et  $\mathcal{Q}_{hloc} \subset \mathcal{Q}_{loc}$ . La taille moyenne d'une maille sera notée  $h_{loc}$ . On suppose que les espaces d'approximation  $\mathcal{V}_{hloc}$  et  $\mathcal{Q}_{hloc}$  vérifient la condition inf-sup discrète

$$\exists \gamma > 0, \quad \inf_{q_h \in \mathcal{Q}_{hloc}/\mathbb{R}} \sup_{v_h \in \mathcal{V}_{hloc} \cap H_0^1(\Omega_g^e)} \frac{b_{loc}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq \gamma \quad (8.27)$$

Un exemple classique d'espaces discrets vérifiant cette condition inf-sup est

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{hloc} = \{v_h \in H^1(\Omega_g^e), \forall e \in [1; NE], v_{h|\Omega_e} \in Q_2\} \\ \mathcal{Q}_{hloc} = \{q_h \in L^2(\Omega_g^e), \forall e \in [1; NE], q_{h|\Omega_e} \in P_1\} \end{cases}$$

Le problème discret local s'écrit alors :

#### Pb 8.2.2 Problème local incompressible discret

Pour un vecteur  $\underline{F} \in \mathbb{R}^9$  fixé, trouver  $u_{hloc}(\underline{F}) \in \mathcal{V}_{hloc}^{per} = \mathcal{V}_{hloc} \cap \mathcal{V}_{loc}^{per}$  et  $p_{hloc}(\underline{F}) \in \mathcal{Q}_{hloc}/\mathbb{R}$  tels que

$$\begin{cases} \forall v_{hloc} \in \mathcal{V}_{hloc}^{per}, & a_{loc}(u_{hloc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), v_{hloc}) + b_{loc}(v_{hloc}, p_{hloc}(\underline{F})) = 0 \\ \forall q_{hloc} \in \mathcal{Q}_{hloc}/\mathbb{R}, & b_{loc}(u_{hloc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), q_{hloc}) = 0 \end{cases}$$

Grâce à l'hypothèse 8.27, on peut prouver l'existence et l'unicité de la solution  $(u_{hloc}(\underline{F}), p_{hloc}(\underline{F})) \in \mathcal{V}_{hloc} \times \mathcal{Q}_{hloc}/\mathbb{R}$  pour un  $\underline{F}$  donné de la même manière que dans le cas continu. On définit alors l'opérateur

$$\begin{aligned} Tr_h^{-1} : \mathbb{R}^9 &\rightarrow \mathcal{V}_{loc} \\ \underline{F} &\mapsto u_{hloc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), \end{aligned} \quad (8.28)$$

qui vérifie le résultat suivant :

**Théorème 8.2.2** L'opérateur  $Tr_h^{-1}$  est continu : il existe une constante  $C > 0$  indépendante de  $h$  telle que :

$$\forall \underline{F} \in \mathbb{R}^9, \quad \|Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 \leq C_T |\underline{F}|. \quad (8.29)$$

De plus, l'erreur commise en passant de  $Tr^{-1}(\cdot)$  à  $Tr_h^{-1}(\cdot)$  est estimée par

$$\|Tr^{-1}(\underline{F}) - Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 \leq C h_{loc} |\underline{F}|. \quad (8.30)$$

Enfin, puisque  $u_{hloc}(\underline{F}) \in \mathcal{V}_{loc}^{per}$ , on a comme dans le cas continu : si  $c_{iso}(\underline{F}) = 0$ , alors

$$\forall q_{hloc} \in \mathcal{Q}_{hloc}, \quad b_{loc}(u_{hloc}(\underline{F}) + Ext(\underline{F}), q_{hloc}) = 0$$

Démonstration :

D'après l'hypothèse 8.27, le théorème 3.4.3 établi dans le chapitre 3 nous donne ici :

$\exists C > 0$ ,

$$\begin{aligned} &\|Tr^{-1}(\underline{F}) - Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 + \|p_{loc}(\underline{F}) - p_{hloc}(\underline{F})\|_0 \\ &\leq C \inf_{\substack{v_h \in \mathcal{V}_{hloc}^{per} \\ q_h \in \mathcal{Q}_{hloc}/\mathbb{R}}} \left( \|u_{loc}(\underline{F}) - v_h\|_1 + \|p_{loc}(\underline{F}) - q_h\|_0 \right) \end{aligned}$$

Pour des éléments finis d'ordre 1 ou supérieur, étant donné que  $u_{loc}(\underline{F}) \in H^2(\Omega_g^e)$  et  $p_{loc}(\underline{F}) \in H^1(\Omega_g^e)$ , nous en déduisons

$$\|Tr^{-1}(\underline{F}) - Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 + \|p_{loc}(\underline{F}) - p_{hloc}(\underline{F})\|_0 \leq C h_{loc} (|u_{loc}(\underline{F})|_2 + |p_{loc}(\underline{F})|_1). \quad (8.31)$$

De plus, les continuités de  $u_{loc}(\cdot)$  et  $p_{loc}(\cdot)$  par rapport à  $\underline{F}$  nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_{loc}(\underline{F})\|_2 \leq C \|\underline{F}\| \\ \|p_{loc}(\underline{F})\|_1 \leq C \|\underline{F}\| \end{array} \right. ,$$

donc l'estimation 8.31 implique

$$\|Tr^{-1}(\underline{F}) - Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 + \|p_{loc}(\underline{F}) - p_{hloc}(\underline{F})\|_0 \leq C h_{loc} \|\underline{F}\| . \quad (8.32)$$

Nous en déduisons

$$\|Tr^{-1}(\underline{F}) - Tr_h^{-1}(\underline{F})\|_1 \leq C h_{loc} \|\underline{F}\| ;$$

Enfin, la continuité de  $Tr_h^{-1}(\cdot)$  se démontre quant à elle de la même manière que pour le problème continu. ■

Par construction du problème local Pb8.2.2, on remarquera aussi que l'opérateur  $Tr^{-1}$  satisfait la relation suivante :

$$\begin{aligned} \forall \underline{F}, \underline{G} \in \mathbb{R}^9, \quad a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}), Tr^{-1}(\underline{G})) &= a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}), u_{loc}(\underline{G})) + a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}), Ext(\underline{G})) \\ &= -b_{loc}(u_{loc}(\underline{G}), p_{loc}(\underline{F})) + a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}), Ext(\underline{G})) \\ &= b_{loc}(Ext(\underline{G}), p_{loc}(\underline{F})) + a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}), Ext(\underline{G})) \end{aligned} \quad (8.33)$$

De la même manière, on montre que l'opérateur  $Tr_h^{-1}$  vérifie :

$$\forall \underline{F}, \underline{G} \in \mathbb{R}^9, \quad a_{loc}(Tr_h^{-1}(\underline{F}), Tr_h^{-1}(\underline{G})) = b_{loc}(Ext(\underline{G}), p_{hloc}(\underline{F})) + a_{loc}(Tr_h^{-1}(\underline{F}), Ext(\underline{G})) \quad (8.34)$$

Ces deux propriétés intéressantes nous seront utiles par la suite.

## 8.2.2 Problème global continu

À l'échelle globale, nous supposons que le problème linéarisé dérivant du problème continu Pb8.1.1 s'écrit alors sous la forme adimensionnée abstraite

### Pb 8.2.3 Problème global continu incompressible adimensionné

Trouver  $u^\epsilon \in \mathcal{V}$  tels que  $\forall v \in \mathcal{V}$ ,

$$\epsilon^3 a(u^\epsilon, v) + \epsilon^3 \iint_{\mathcal{S}_m} a_{loc}(Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(v))) d\xi_\alpha + \epsilon a_{mb}(u^\epsilon, v) + \epsilon a_{inc}(u^\epsilon, v) = L^\epsilon(v)$$

Ce problème fait intervenir les trois nouvelles formes bilinéaires suivantes :

- La forme bilinéaire principale comprend les termes d'énergie de gomme macroscopique, de couplage et de flexion des fibres. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} a : \quad \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ ((\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (\underline{\hat{x}}_M, \underline{\hat{r}}, \underline{\hat{\omega}})) &\mapsto \alpha \iiint_{\bar{\Omega}} \nabla \underline{\delta x}_M : \frac{\partial^2 w_{inc}}{\partial \underline{F}^2} : \nabla \underline{\hat{x}}_M dX_{3D} \\ &+ \alpha \iint_{\bar{P}} \left( \frac{\partial \underline{\delta r}}{\partial X_2}, \underline{\omega} \wedge \underline{e}_3 \right) \cdot \frac{\partial^2 w_{coupl}}{\partial (\underline{F}_2, \underline{d}_3)^2} \cdot \left( \frac{\partial \underline{\hat{r}}}{\partial X_2}, \underline{\hat{\omega}} \wedge \underline{e}_3 \right) dX_{2D} \\ &+ \frac{1}{e} \iint_{\bar{P}} (\underline{\omega} \wedge \underline{e}_i) \cdot \frac{\partial^2 w_{fl}}{\partial \underline{d}_i^2} \cdot (\underline{\hat{\omega}} \wedge \underline{e}_i) dX_{2D} \end{aligned}$$

– La seconde forme bilinéaire représente le terme de membrane des câbles :

$$a_{mb} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (\underline{\hat{x}}_M, \underline{\hat{r}}, \underline{\hat{\omega}})) \mapsto \iint_{\bar{P}} \left( \frac{\partial \delta r_i}{\partial X_1} + (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_1) \cdot \underline{\omega} \right) K_{ii}^{mb} \left( \frac{\partial \delta \hat{r}_i}{\partial X_1} + (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_1) \cdot \underline{\hat{\omega}} \right) dX_{2D}$$

– La troisième forme bilinéaire pénalise l'incompressibilité à l'échelles globale :

$$a_{inc} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (\underline{\hat{x}}_M, \underline{\hat{r}}, \underline{\hat{\omega}})) \mapsto \iiint_{\bar{\Omega}} \text{div}(\underline{\delta x}_M) \text{div}(\underline{\hat{x}}_M) dX_{3D}$$

Par ailleurs, la forme linéaire  $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  apparaissant dans le membre de droite représente les efforts extérieurs exercés sur la nappe, et est supposée continue.

Les formes bilinéaires  $a(\cdot, \cdot)$  et  $a_{mb}(\cdot, \cdot)$  sont les mêmes que celles qui ont été utilisées dans le chapitre 3 (modulo le paramètre  $\alpha$  et l'intégration de l'énergie de gomme dans l'épaisseur). Comme cela avait été précisé dans le chapitre 3, ces formes bilinéaires sont continues et symétriques. De plus,  $a_{inc}(\cdot, \cdot)$  est positive et  $a(\cdot, \cdot) + a_{mb}(\cdot, \cdot)$  est coercive sur l'espace  $\mathcal{V}$  :

$$\exists \alpha_A > 0, \forall u \in \mathcal{V}, \quad a(u, u) + a_{mb}(u, u) \geq \alpha_A \|u\|_{\mathcal{V}}^2 \quad (8.35)$$

Dans la suite, nous appellerons par abus de notation

$$a(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot) + c_0 a_{mb}(\cdot, \cdot) \quad \text{et} \quad a_{mb}(\cdot, \cdot) = (1 - \epsilon^2 c_0) a_{mb}(\cdot, \cdot) .$$

Par ailleurs, pour simplifier les écritures, nous introduisons la nouvelle forme bilinéaire

$$a_1 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \mapsto \iint_{\mathcal{S}_m} a_{loc} \left( Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(v)) \right) d\xi_\alpha \quad (8.36)$$

Nous supposons que le problème linéaire est dominé en flexion. De la même manière que ce qui a été fait dans le chapitre 3 de ce mémoire, nous pouvons alors construire une formulation mixte équivalente en introduisant les multiplicateurs  $q_{mb}$  et  $q_{inc}$ , définis par

$$q_{mb}^i = \epsilon^{-2} \left( \frac{\partial \delta r_i}{\partial X_1} + (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_1) \cdot \underline{\omega} \right) K_{ii}^{mb} \quad \text{et} \quad q_{inc} = \epsilon^{-2} \text{div}(\underline{\delta x}_M) ,$$

qui correspondent respectivement aux efforts de membrane et à la pression hydrostatique. Ces multiplicateurs sont définis dans l'espace

$$\mathcal{Q} = \left\{ q = (q_{mb}, q_{inc}) \in L^2(\bar{P})^3 \times L^2(\bar{P}) \right\}$$

La formulation mixte utilisera les deux nouvelles formes bilinéaires :

$$b : \mathcal{V} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( (\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}), (q_{mb}, q_{inc}) \right) \mapsto \sum_{i=1}^3 \iint_{\bar{P}} q_{mb}^i \left( \frac{\partial \delta r_i}{\partial X_1} + (\underline{e}_i \wedge \underline{e}_1) \cdot \underline{\omega} \right) dX_1 dX_2$$

$$+ \iiint_{\bar{\Omega}} q_{inc} \text{div}(\underline{\delta x}_M) dX_{3D}$$

$$c : \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left( (p_{mb}, p_{inc}), (q_{mb}, q_{inc}) \right) \mapsto \sum_{i=1}^3 \iint_{\bar{P}} p_{mb}^i K_{ii}^{mb-1} q_{mb}^i dX_1 dX_2$$

$$+ \iiint_{\bar{\Omega}} p_{inc} q_{inc} dX_{3D}$$

Ces deux formes bilinéaires sont continues, et  $c(.,.)$  est symétrique et coercive sur l'espace  $\mathcal{Q}$  :

$$\exists \alpha_C > 0, \forall q \in \mathcal{Q}, \quad c(q, q) \geq \alpha_C \|q\|_{\mathcal{Q}}^2 \quad (8.37)$$

Après division par  $\epsilon^3$ , le problème mixte apparaissant à l'échelle globale s'écrit alors :

**Pb 8.2.4 Problème mixte global continu**

Trouver  $u^\epsilon \in \mathcal{V}$  et  $p^\epsilon \in \mathcal{Q}$  tels que

$$\begin{cases} \forall v \in \mathcal{V}, & a(u^\epsilon, v) + a_1(u^\epsilon, v) + b(v, p^\epsilon) = L(v) \\ \forall q \in \mathcal{Q}, & b(u^\epsilon, q) - \epsilon^2 c(p^\epsilon, q) = 0 \end{cases} \quad (8.38)$$

Pour vérifier que ce problème est bien posé, on commence par établir le résultat suivant :

**Théorème 8.2.3** *La forme bilinéaire  $a_1(.,.)$  est symétrique, positive et continue sur  $\mathcal{V}$ .*

Démonstration :

La symétrie de  $a_1(.,.)$  sur  $\mathcal{V}$  est évidente par construction, et sa positivité vient simplement de celle de  $a_{loc}(.,.)$ . Nous démontrons qu'elle est continue :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathcal{V}, \quad |a_1(u, v)| &= \left| \iint_{\mathcal{S}_m} a_{loc} \left( Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(v)) \right) d\xi_\alpha \right| \\ &\leq \iint_{\mathcal{S}_m} |a_{loc} \left( Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(v)) \right)| d\xi_\alpha \end{aligned}$$

La forme bilinéaire  $a_{loc}(.,.)$  et les opérateurs  $Tr^{-1}(.)$  et  $P^{iso}$  étant continus, on en déduit :

$$\begin{aligned} |a_1(u, v)| &\leq \iint_{\mathcal{S}_m} \|a_{loc}\| \left| Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(u)) \right|_{1, \Omega_g^e} \left| Tr^{-1}(\underline{F}^{iso}(v)) \right|_{1, \Omega_g^e} d\xi_\alpha \\ &\leq \iint_{\mathcal{S}_m} \|a_{loc}\| C_T^2 \left| \underline{F}^{iso}(u) \right| \left| \underline{F}^{iso}(v) \right| d\xi_\alpha \\ &\leq \iint_{\mathcal{S}_m} \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 |\underline{F}(u)| |\underline{F}(v)| d\xi_\alpha \end{aligned}$$

On déduit alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a_1(u, v)| \leq \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 \left( \iint_{\mathcal{S}_m} |\underline{F}(u)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \iint_{\mathcal{S}_m} |\underline{F}(v)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2}$$

L'inégalité 8.17 sur la trace  $\underline{F}(.)$  nous permet alors de conclure :

$$\forall u, v \in \mathcal{V}, \quad |a_1(u, v)| \leq \underbrace{\|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 C_F^2}_{\|a_1\|} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \quad (8.39)$$

■

**Théorème 8.2.4** *Le problème mixte global Pb8.2.4 admet une unique solution  $(u^\epsilon, p_{inc}^\epsilon, p_{mb}^\epsilon)$  dans l'espace  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q} \times \mathcal{M}$ .*

Démonstration :

On introduit la forme bilinéaire :

$$A: \quad ((u, p), (v, q)) \in (\mathcal{V} \times \mathcal{Q})^2 \quad \longmapsto \quad a(u, v) + a_1(u, v) + b(p, v) - b(q, u) + \epsilon^2 c(p, q)$$

Le problème Pb8.2.4 est alors équivalent à :

Trouver  $u^\epsilon \in \mathcal{V}$  et  $p^\epsilon \in \mathcal{Q}$  tels que

$$A((u^\epsilon, p^\epsilon), (v, q)) = L^\epsilon(u) \quad \forall (v, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$$

La coercivité de  $a(\cdot, \cdot)$  et  $c(\cdot, \cdot)$  accompagnée de la positivité de  $a_1(\cdot, \cdot)$  permettent d'établir la coercivité de  $A(\cdot, \cdot)$  sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  :

$\forall (u, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{A}((u, p), (u, p)) &= a(u, u) + a_1(u, u) + \epsilon^2 c(p, p) \\ &\geq \alpha_A \|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \epsilon^2 \alpha_C \|p\|_{\mathcal{Q}}^2 \\ &\geq \min(\alpha_A, \epsilon^2 \alpha_C) \|u, p\|^2 \end{aligned}$$

avec

$$\|u, p\| = \sqrt{\|u\|_{\mathcal{V}}^2 + \|p\|_{\mathcal{Q}}^2}$$

Le théorème de Lax-Milgram permet alors de démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème. ■

### 8.2.3 Problème global discret

Nous discrétisons le problème global continu Pb8.2.4 par des éléments finis de taille moyenne  $h$ , et nous notons les espaces d'approximation correspondants  $\mathcal{V}_h$  et  $\mathcal{Q}_h$ . Un choix possible d'espaces discrets est

$$\mathcal{V}_h = \left\{ (\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}) \in \mathcal{V}, \quad \forall e \in [1; NE_h], \delta x_{M|\Omega_e}^i \in Q_2 \text{ et } \omega_{|E_e}^i \in Q_1 \right\}$$

$$\mathcal{Q}_h = \left\{ (q_{hmb}, q_{hinc}) \in L^2(\bar{P})^3 \times L^2(\bar{\Omega}), \quad \forall e \in [1; NE_h], q_{hmb|E_e}^i \in P_0 \text{ et } q_{hinc|\Omega_e} \in P_0 \right\}$$

Nous supposons que ces espaces vérifient la condition inf-sup discrète

$$\exists \beta_h > 0, \quad (q_{hmb}, q_{hinc}) \in \mathcal{Q}, \quad \sup_{v_h \in \mathcal{V}_h} \frac{b(v_h, (q_{hmb}, q_{hinc}))}{\|v_h\|_{\mathcal{V}}} \geq \gamma \|p_{mb}, p_{inc}\|, \quad (8.40)$$

où la semi-norme sur les multiplicateurs  $(p_{mb}, p_{inc}) \in \mathcal{Q}$  est définie par :

$$\|p_{mb}, p_{inc}\| = \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{b((p_{mb}, p_{inc}), v)}{\|v\|_{\mathcal{V}}}.$$

On note  $\langle \underline{F}(v) \rangle_e$  la moyenne de  $\underline{F}(v)$  sur l'élément fini macroscopique  $E_e$ . On introduit alors la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a_{1h} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u_h, v_h) &\mapsto \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(u_h) \rangle_e^{iso}), Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e^{iso}) \right) d\xi_\alpha \end{aligned} \quad (8.41)$$

Le problème discret approchant le problème Pb8.2.4 s'écrit alors :

#### Pb 8.2.5 Problème mixte global discret

Trouver  $u_h^\epsilon \in \mathcal{V}_h$  et  $p_h^\epsilon \in \mathcal{Q}_h$  tels que

$$\begin{cases} \forall v_h \in \mathcal{V}_h, & a(u_h^\epsilon, v_h) + a_{1h}(u_h^\epsilon, v_h) + b(v_h, p_h^\epsilon) = L(v_h) \\ \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, & b(u_h^\epsilon, q_h) - \epsilon^2 c(p_h^\epsilon, q_h) = 0 \end{cases} \quad (8.42)$$

Pour prouver que ce problème est bien posé, on procède comme dans le cas continu, en commençant par étudier la forme bilinéaire  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$  :

**Théorème 8.2.5** *La forme bilinéaire  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$  est symétrique, positive et continue sur  $\mathcal{V}_h$ .*

Démonstration :

La symétrie de  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$  et sa positivité sur  $\mathcal{V}_h$  sont évidentes par construction. Nous démontrons alors sa continuité :

$\forall u_h, v_h \in \mathcal{V}_h$ ,

$$\begin{aligned} |a_{1h}(u_h, v_h)| &= \left| \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(u_h) \rangle_e^{iso}), Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e^{iso}) \right) d\xi_\alpha \right| \\ &\leq \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} \left| a_{loc} \left( Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(u_h) \rangle_e^{iso}), Tr_h^{-1}(\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e^{iso}) \right) \right| d\xi_\alpha \\ &\leq \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} \|a_{loc}\| C_T^2 \left| \langle \underline{F}(u_h) \rangle_e^{iso} \right| \left| \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e^{iso} \right| d\xi_\alpha \\ &\leq \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 \left| \langle \underline{F}(u_h) \rangle_e \right| \left| \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e \right| d\xi_\alpha \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|a_{1h}(u_h, v_h)| \leq \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 \left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(u_h) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} .$$

Or pour tout élément  $e \in [1; NE_h]$ ,

$$\begin{aligned} \iint_{E_e} |\underline{F}(v_h)|^2 d\xi_\alpha &= \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e + (\underline{F}(v_h) - \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e)|^2 d\xi_\alpha \\ &= \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 + |\underline{F}(v_h) - \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 + 2 \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e \cdot (\underline{F}(v_h) - \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e) d\xi_\alpha \\ &= \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 + |\underline{F}(v_h) - \langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \\ &\geq \iint_{E_e} |\langle \underline{F}(v_h) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha . \end{aligned}$$

On en déduit alors l'inégalité :

$$\begin{aligned} |a_{1h}(u_h, v_h)| &\leq \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 \left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\underline{F}(u_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\underline{F}(v_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \\ &\leq \|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 \left( \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(u_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(v_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \end{aligned}$$

L'inégalité 8.17 sur la trace  $\underline{F}(\cdot)$  nous permet alors de conclure :

$$\forall u_h, v_h \in \mathcal{V}_h, \quad |a_{1h}(u_h, v_h)| \leq \underbrace{\|a_{loc}\| C_T^2 C_P^2 C_F^2}_{\|a_{1h}\|} \|u_h\|_{\mathcal{V}} \|v_h\|_{\mathcal{V}} .$$

Remarque : La constante de continuité  $\|a_{1h}\|$  est indépendante de la taille de maille  $h$ . ■

**Théorème 8.2.6** *Le problème mixte discret Pb8.2.5 admet une unique solution  $(u_h, p_{hinc}^e, p_{hmb}^e) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{M}_h$ .*

Démonstration :

Grâce au résultat du théorème 8.2.5, la démonstration est alors identique à celle du théorème 8.2.4 dans le cas continu. ■

### 8.2.4 Convergence de la méthode

Nous venons de prouver que les problèmes continu et discret sont bien posés pour toute valeur de  $\epsilon$ . Notre objectif est maintenant de vérifier que la solution du problème discret converge convenablement vers la solution du problème continu. Nous établissons pour cela le théorème suivant :

#### **Théorème 8.2.7 Convergence uniforme**

La solution  $(u_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  du problème discret Pb8.2.5 converge vers la solution continue  $(u^\epsilon, p^\epsilon) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  du problème Pb8.2.4 lorsque les tailles de maille  $h$  et  $h_{loc}$  tendent vers 0. De plus, cette convergence est uniforme par rapport au petit paramètre  $\epsilon$  :

$\exists C > 0$  et  $C' > 0$  indépendants de  $\epsilon, h$  et  $h_{loc}$  tels que

$$\begin{aligned} & \|u_h^\epsilon - u^\epsilon\|_{\mathcal{V}} + \|p_h^\epsilon - p^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} + \epsilon \|p_h^\epsilon - p^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} \\ & \leq C \inf_{\substack{v^* \in \mathcal{V}_h \\ q^* \in \mathcal{Q}_h}} \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right) \\ & \quad + C' \left( h |u^\epsilon|_{2,\tilde{\Omega}} + h_{loc} \|u^\epsilon\|_{\mathcal{V}} \right) \end{aligned} \quad (8.43)$$

La difficulté supplémentaire qui apparaît ici par rapport à l'analyse réalisée dans le chapitre 3 de ce mémoire est que la forme bilinéaire  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$  utilisée dans le problème discret est différente de la forme bilinéaire  $a_1(\cdot, \cdot)$  du problème continu, du fait de la résolution approchée du problème local en un nombre réduit de points d'intégration.

Pour prouver ce résultat, nous nous inspirons alors du premier lemme de Strang (voir par exemple (Strang, 1972) et (Ciarlet, 1991)) pour décomposer la démonstration en deux parties :

- On commence par estimer l'erreur commise en remplaçant  $a_1(\cdot, \cdot)$  par  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$  ;
- Puis on utilise cette erreur grâce à une extension du lemme de Strang.

### Erreur de consistance

#### **Lemme 8.2.1 Estimation de l'erreur de consistance**

Notons  $(u, p) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  la solution continu du problème global Pb8.2.4.

Alors il existe deux constantes  $C > 0$  et  $C' > 0$  indépendantes des tailles de maillage  $h$  et  $h_{loc}$  telles que

$$\forall v_h, w_h \in \mathcal{V}_h, \quad |a_1(v_h, w_h) - a_{1h}(v_h, w_h)| \leq C \|v_h - u\|_{\mathcal{V}} + C' \left( h |u^\epsilon|_{2,\tilde{\Omega}} + h_{loc} \|u^\epsilon\|_{\mathcal{V}} \right) \|w_h\|_{\mathcal{V}}. \quad (8.44)$$

Démonstration :

Décomposons le terme  $a_1(v_h, w_h) - a_{1h}(v_h, w_h)$  :

$$a_1(v_h, w_h) - a_{1h}(v_h, w_h) = a_1(v_h - u, w_h) - a_{1h}(v_h - u, w_h) \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} & + \iint_{\tilde{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) d\xi_\alpha \\ & \quad - \iint_{\tilde{P}} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) d\xi_\alpha \end{aligned} \quad (8.46)$$

$$+ \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} \left( \underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e \right), Tr_h^{-1} P^{iso} \left( \underline{F}(w_h) \right) \right) d\xi_\alpha \quad (8.47)$$

$$+ \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} \left( \langle \underline{F}(u) \rangle_e \right), Tr_h^{-1} P^{iso} \left( \underline{F}(w_h) - \langle \underline{F}(w_h) \rangle_e \right) \right) d\xi_\alpha \quad (8.48)$$

Nous pouvons commencer par remarquer que les opérateurs étant tous linéaires, le terme 8.48 est nul. En effet, comme  $\langle \underline{F}(u) \rangle_e$  est constant par élément :

$$\begin{aligned}
& \forall e \in [1; NE_h], \quad \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h) - \langle \underline{F}(w_h) \rangle_e) \right) d\xi_\alpha \\
&= \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \\
&\quad - |E_e| a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(w_h) \rangle_e) \right) \\
&= a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), \iint_{E_e} Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) d\xi_\alpha \right) \\
&\quad - |E_e| a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(w_h) \rangle_e) \right) \\
&= |E_e| a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(w_h) \rangle_e) \right) \\
&\quad - |E_e| a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\langle \underline{F}(w_h) \rangle_e) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous majorons ensuite séparément la valeur absolue des termes 8.45-8.47 :

★ **Majoration du terme 8.45 :**

D'après les théorèmes 8.2.3 et 8.2.5, les formes bilinéaires  $a_1(.,.)$  et  $a_{1h}(.,.)$  sont continues, ce qui permet de majorer facilement ce premier terme :

$$\begin{aligned}
|a_1(v_h - u, w_h) - a_{1h}(v_h - u, w_h)| &\leq |a_1(v_h - u, w_h)| + |a_{1h}(v_h - u, w_h)| \\
&\leq (\|a_1\| + \|a_{1h}\|) \|v_h - u\|_\gamma \|w_h\|_\gamma
\end{aligned} \tag{8.49}$$

★ **Majoration du terme 8.46 :**

D'après les relations 8.33 et 8.34, les deux termes de 8.46 peuvent se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
& \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \\
&= \iint_{\mathcal{S}_m} \iint_{\bar{P}} b_{loc} \left( Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)), p_{loc}(\underline{F}^{iso}(u)) \right) + a_{loc} \left( Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \\
& \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \\
&= b_{loc} \left( Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)), p_{hloc}(\underline{F}^{iso}(u)) \right) + a_{loc} \left( Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha
\end{aligned}$$

En soustrayant ces deux expressions, on en déduit que le terme 8.46 vérifie :

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) - a_{loc} \left( Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \right| \\
&\leq \iint_{\bar{P}} \left| a_{loc} \left( Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)) - Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) \right| d\xi_\alpha \\
&\quad + \iint_{\bar{P}} \left| b_{loc} \left( Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)), p_{loc}(\underline{F}^{iso}(u)) - p_{hloc}(\underline{F}^{iso}(u)) \right) \right| d\xi_\alpha \\
&\leq \iint_{\bar{P}} \|a_{loc}\| \left\| Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)) - Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)) \right\| \left\| Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)) \right\| d\xi_\alpha \\
&\quad + \iint_{\bar{P}} \|b_{loc}\| \left\| Ext(\underline{F}^{iso}(w_h)) \right\| \left\| p_{loc}(\underline{F}^{iso}(u)) - p_{hloc}(\underline{F}^{iso}(u)) \right\| d\xi_\alpha
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité 8.32 et la continuité des opérateurs  $\underline{F}(.)$ ,  $P^{iso}$  et  $Ext(.,.)$ , on en déduit :

$$\begin{aligned}
& \left| \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) - a_{loc} \left( Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(u)), Tr_h^{-1} (\underline{F}^{iso}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \right| \\
&\leq h_{loc} (\|a_{loc}\| C_T + \|b_{loc}\|) C_P^2 \|Ext\|^2 \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(u)| |\underline{F}(w_h)| d\xi_\alpha
\end{aligned}$$



D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) - a_{loc} \left( Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) d\xi_\alpha \right| \\ & \leq h_{loc} (\|a_{loc}\|_{C_T} + \|b_{loc}\|) C_P^2 \|Ext\|^2 \left( \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(u)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \iint_{\bar{P}} |\underline{F}(w_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \end{aligned}$$

L'inégalité 8.17 sur la trace  $\underline{F}(\cdot)$  montre finalement :

$$\begin{aligned} & \left| \iint_{\bar{P}} a_{loc} \left( Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) - a_{loc} \left( Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(u) \right), Tr_h^{-1} \left( \underline{F}^{iso}(w_h) \right) \right) d\xi_\alpha \right| \\ & \leq h_{loc} (\|a_{loc}\|_{C_T} + \|b_{loc}\|) C_P^2 \|Ext\|^2 C_F^2 \|u\|_\mathcal{V} \|w_h\|_\mathcal{V} \\ & \leq h_{loc} C \|u\|_\mathcal{V} \|w_h\|_\mathcal{V} \end{aligned} \quad (8.50)$$

★ **Majoration du terme 8.47 :**

Dans un premier temps, nous considérons un élément fini  $E_e$  de dimensions  $h \times h$ , et nous nous intéressons à la majoration du terme suivant :

$$\iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha$$

D'après la définition 8.16 de  $\underline{F}(u)$ , nous établissons l'inégalité :

$$\begin{aligned} \iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha &= \iint_{E_e} \left| \underline{e}_2 \wedge \underline{\omega} + \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} - \langle \underline{e}_2 \wedge \underline{\omega} + \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \rangle_e \right|^2 \\ &+ \left| \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_0^{t/2} \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} dY_3 - \langle \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_0^{t/2} \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} dY_3 \rangle_e \right|^2 \\ &+ \left| \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_{-t/2}^0 \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} dY_3 - \langle \underline{e}_3 \wedge \underline{\omega} + \frac{2}{t} \int_{-t/2}^0 \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} dY_3 \rangle_e \right|^2 d\xi_\alpha \\ &= \iint_{E_e} \left| \underline{e}_2 \wedge (\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e) + \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} - \langle \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \rangle_e \right|^2 \\ &+ \left| \underline{e}_3 \wedge (\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e) + \frac{2}{t} \int_0^{t/2} \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} dY_3 - \frac{2}{t} \int_0^{t/2} \langle \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} \rangle_e dY_3 \right|^2 \\ &+ \left| \underline{e}_3 \wedge (\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e) + \frac{2}{t} \int_{-t/2}^0 \left( \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} - \langle \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} \rangle_e \right) dY_3 \right|^2 d\xi_\alpha \\ &\leq 2 \iint_{E_e} |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 + \left| \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} - \langle \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \rangle_e \right|^2 \\ &+ |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 + \frac{4}{t^2} \left| \int_0^{t/2} \left( \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} - \langle \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} \rangle_e \right) dY_3 \right|^2 \\ &+ |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 + \frac{4}{t^2} \left| \int_{-t/2}^0 \left( \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} - \langle \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} \rangle_e \right) dY_3 \right|^2 d\xi_\alpha \\ &\leq 6 \iint_{E_e} |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 d\xi_{2D} \\ &+ 2 \iint_{E_e} \left| \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} - \langle \frac{\partial \delta r}{\partial \xi_2} \rangle_e \right|^2 d\xi_{2D} \\ &+ \frac{8}{t^2} \int_{-t/2}^{t/2} \iint_{E_e} \left| \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} - \langle \frac{\partial \delta x_M}{\partial \xi_3} \rangle_e \right|^2 d\xi_{2D} dY_3 \\ &\leq 6 \iint_{E_e} |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 d\xi_{2D} \\ &+ 2 \iint_{E_e} |\underline{\nabla}_{2D} \delta r - \langle \underline{\nabla}_{2D} \delta r \rangle_e|^2 d\xi_{2D} \\ &+ \frac{8}{t^2} \int_{-t/2}^{t/2} \iint_{E_e} |\underline{\nabla}_{3D} \delta x_M - \langle \underline{\nabla}_{3D} \delta x_M \rangle_e|^2 d\xi_{2D} dY_3 \end{aligned}$$

Par résultat d'interpolation (cf (Ciarlet, 1991)), nous avons sur tout élément  $e \in [1; NE_h]$  de taille moyenne  $h$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_e} |\underline{\nabla}_{3D} \delta x_M - \langle \underline{\nabla}_{3D} \delta x_M \rangle_e|^2 d\xi_{2D} dY_3 \leq C h^2 |\underline{\delta x}_M|_{2,\Omega_e}^2 \\ \iint_{E_e} |\underline{\nabla}_{2D} \delta r - \langle \underline{\nabla}_{2D} \delta r \rangle_e|^2 d\xi_{2D} \leq C h^2 |\underline{\delta r}|_{2,E_e}^2 \\ \iint_{E_e} |\underline{\omega} - \langle \underline{\omega} \rangle_e|^2 d\xi_{2D} \leq C h^2 |\underline{\omega}|_{1,E_e}^2 \end{array} \right.$$

Nous définissons la semi-norme

$$|\underline{\delta x}_M, \underline{\delta r}, \underline{\omega}|_{2,\Omega_e} = \sqrt{|\underline{\delta x}_M|_{2,\Omega_e}^2 + |\underline{\delta r}|_{2,E_e}^2 + |\underline{\omega}|_{1,E_e}^2} .$$

Ces résultats nous permettent alors d'obtenir l'estimation

$$\forall e \in [1; NE_h], \quad \iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \leq C h^2 |u|_{2,E_e}^2$$

On en déduit finalement

$$\left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \leq C h |u|_{2,\tilde{\Omega}} \quad (8.51)$$

Revenons alors à la majoration du terme 8.47 :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \right| \\ & \leq \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} \left| a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) \right) \right| d\xi_\alpha \\ & \leq \|a_{loc}\| C_T^2; C_P^2 \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e| |\underline{F}(w_h)| d\xi_\alpha \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \right| \\ & \leq \|a_{loc}\| C_T^2; C_P^2 C_F \left( \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} |\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \left( \iint_{\tilde{\mathcal{P}}} |\underline{F}(w_h)|^2 d\xi_\alpha \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Et finalement, l'inégalité 8.51 jointe à 8.17 nous permet d'obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{e=1}^{NE_h} \iint_{E_e} a_{loc} \left( Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(u) - \langle \underline{F}(u) \rangle_e), Tr_h^{-1} P^{iso} (\underline{F}(w_h)) \right) d\xi_\alpha \right| \\ & \leq C h \|a_{loc}\| C_T^2; C_P^2 C_F |u|_{2,\tilde{\Omega}} \|w_h\|_{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (8.52)$$

Le résultat du lemme est alors obtenu en rassemblant les inégalités 8.49, 8.50 et 8.52. ■

## Extension du lemme de Strang

### Lemme 8.2.2 Extension du lemme de Strang aux formulations mixtes

Notons  $(u^\epsilon, p^\epsilon) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$  et  $(u_h^\epsilon, p_h^\epsilon) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$  les solutions respectives des problèmes Pb8.2.4 et Pb8.2.5. L'erreur entre la solution discrète et la solution continue peut être estimée par

$$\begin{aligned} & \|u_h^\epsilon - u^\epsilon\|_{\mathcal{V}} + \|p_h^\epsilon - p^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} + \epsilon \|p_h^\epsilon - p^\epsilon\|_{\mathcal{Q}} \\ & \leq C \inf_{\substack{v^* \in \mathcal{V}_h \\ q^* \in \mathcal{Q}_h}} \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right) \\ & \quad + \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(v^*, w^*) - a_{1h}(v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \end{aligned} \quad (8.53)$$

Démonstration :

Etant donné que  $(u^\epsilon, p^\epsilon)$  et  $(u_h^\epsilon, p_h^\epsilon)$  satisfont par hypothèse les équations 8.38 et 8.42, on en déduit qu'ils vérifient en particulier les relations :

$\forall v_h \in \mathcal{V}_h, \forall q_h \in \mathcal{Q}_h,$

$$\begin{cases} a(u_h^\epsilon, v_h) + a_{1h}(u_h^\epsilon, v_h) + b(v_h, p_h^\epsilon) \\ \quad = a(u^\epsilon, v_h) + a_1(u^\epsilon, v_h) + b(v_h, p^\epsilon) \\ b(u_h^\epsilon, q_h) - \epsilon^2 c(p_h^\epsilon, q_h) = b(u^\epsilon, q_h) - \epsilon^2 c(p^\epsilon, q_h) \end{cases}$$

On en déduit :

$\forall v_h \in \mathcal{V}_h, \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \forall v^* \in \mathcal{V}_h, \forall q^* \in \mathcal{Q}_h,$

$$\begin{cases} a(u_h^\epsilon - v^*, v_h) + a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, v_h) + b(v_h, p_h^\epsilon - q^*) \\ \quad = a(u^\epsilon - v^*, v_h) + a_1(u^\epsilon - v^*, v_h) + b(v_h, p^\epsilon - q^*) \\ \quad \quad + [a_1(v^*, v_h) - a_{1h}(v^*, v_h)] \\ b(u_h^\epsilon - v^*, q_h) - \epsilon^2 c(p_h^\epsilon - q^*, q_h) = b(u^\epsilon - v^*, q_h) - \epsilon^2 c(p^\epsilon - q^*, q_h) \end{cases} \quad (8.54)$$

En particulier pour  $v_h = u_h^\epsilon - v^*$  et  $q_h = p_h^\epsilon - q^*$ , on obtient :

$\forall v^* \in \mathcal{V}_h, \forall q^* \in \mathcal{Q}_h,$

$$\begin{cases} a(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + b(u_h^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) \\ \quad = a(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_1(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + b(u_h^\epsilon - v^*, p^\epsilon - q^*) \\ \quad \quad + [a_1(v^*, u_h^\epsilon - v^*) - a_{1h}(v^*, u_h^\epsilon - v^*)] \\ b(u_h^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) - \epsilon^2 c(p_h^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \\ \quad = b(u^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) - \epsilon^2 c(p^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \end{cases}$$

Si on soustrait les deuxième et troisième équations à la première, on trouve :

$\forall v^* \in \mathcal{V}_h, \forall q^* \in \mathcal{Q}_h,$

$$\begin{aligned} & a(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + \epsilon^2 c(p_h^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \\ & = a(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_1(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) \\ & \quad + b(u_h^\epsilon - v^*, p^\epsilon - q^*) - b(u^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) \\ & \quad + \epsilon^2 c(p^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \\ & \quad + [a_1(v^*, u_h^\epsilon - v^*) - a_{1h}(v^*, u_h^\epsilon - v^*)] \end{aligned} \quad (8.55)$$

On utilise alors les coercivités dans le premier membre de cette équation :

$$a(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) \geq \alpha_A \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}^2$$

$$c(p_h^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \geq \alpha_C \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}^2$$

Dans le second membre, en utilisant les continuités des formes bilinéaires, on peut réaliser les majorations :

$$a(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) + a_1(u^\epsilon - v^*, u_h^\epsilon - v^*) \leq (\|a\| + \|a_1\|) \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}$$

$$b(u_h^\epsilon - v^*, p^\epsilon - q^*) \leq \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}$$

$$\epsilon^2 c(p^\epsilon - q^*, p_h^\epsilon - q^*) \leq \epsilon^2 \|c\| \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}$$

$$a_1(v^*, u_h^\epsilon - v^*) - a_{1h}(v^*, u_h^\epsilon - v^*) \leq \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(v^*, w^*) - a_{1h}(v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right)$$

Comme cela était le cas dans le chapitre 3, la majoration du dernier terme est plus subtile :

$$-b(u^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) \leq \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}$$

Par la condition inf-sup 8.40, il existe  $w_h \in \mathcal{V}_h$  tel que :

$$\|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \leq \frac{1}{\gamma} \frac{b(w_h, p_h^\epsilon - q^*)}{\|w_h\|_{\mathcal{V}}}$$

En utilisant 8.54, on a

$$\begin{aligned} b(w_h, p_h^\epsilon - q^*) &= b(w_h, p^\epsilon - q^*) + a(u^\epsilon - v^*, w_h) - a(u_h^\epsilon - v^*, w_h) \\ &\quad + a_1(u^\epsilon - v^*, w_h) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w_h) \\ &\leq \|w_h\|_{\mathcal{V}} \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \|a\| \|w_h\|_{\mathcal{V}} (\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}) \\ &\quad + \|w_h\|_{\mathcal{V}} \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \end{aligned}$$

En assemblant ces deux dernière inégalités, on obtient

$$\begin{aligned} \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} &\leq \frac{1}{\gamma} \left[ \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \|a\| (\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.56)$$

Nous en déduisons donc la majoration :

$$\begin{aligned} -b(u^\epsilon - v^*, p_h^\epsilon - q^*) &\leq \frac{1}{\gamma} \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \left[ \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \|a\| (\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right] \end{aligned}$$

Si on injecte toutes ces majorations dans la relation 8.55 et que l'on ajoute le terme  $\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}^2 + \|p^\epsilon - q^*\|^2$ , on obtient alors l'inégalité :

$$\begin{aligned}
& \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}}^2 + \|p^\epsilon - q^*\|^2 + \epsilon^2 \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}^2 \\
& \leq C \left[ \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} (\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\|) + \epsilon \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} (\|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}}) \right. \\
& \quad + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \|p^\epsilon - q^*\| + \|p^\epsilon - q^*\| \|p^\epsilon - q^*\| \\
& \quad \left. + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right] \\
& \leq C \left( \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| \right) \\
& \quad * \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right. \\
& \quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz appliquée au premier membre donne alors :

$$\begin{aligned}
& (\|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}})^2 \\
& \leq 4C \left( \|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| \right) \\
& \quad * \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right. \\
& \quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

Par simplification, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} & \leq C \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right. \\
& \quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité 8.56, on trouve finalement :

$$\begin{aligned}
\|u_h^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p_h^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} & \leq C \left( \|u^\epsilon - v^*\|_{\mathcal{V}} + \|p^\epsilon - q^*\| + \epsilon \|p^\epsilon - q^*\|_{\mathcal{Q}} \right. \\
& \quad \left. + \left( \sup_{w^* \in \mathcal{V}_h} \frac{|a_1(u^\epsilon - v^*, w^*) - a_{1h}(u_h^\epsilon - v^*, w^*)|}{\|w^*\|_{\mathcal{V}}} \right) \right)
\end{aligned}$$

On en déduit alors le résultat du lemme par inégalité triangulaire. ■

Démonstration du théorème 8.2.7:

Le résultat du théorème est alors immédiat en rassemblant les lemmes 8.2.1 et 8.2.2. ■

Remarque : Ce théorème prouve que la solution discrète converge vers la solution du problème continu indépendamment de l'épaisseur, malgré l'erreur de consistance introduite par la sous-intégration et la discrétisation dans  $a_{1h}(\cdot, \cdot)$ . Cependant, il est à noter que cette erreur est linéaire par rapport à la taille de maille  $h$ , ce qui rend la convergence non optimale avec l'utilisation d'éléments finis d'ordre 2.

## 8.3 Applications numériques

L'objectif de section est de vérifier que le modèle multi-échelles qui vient d'être construit donne des résultats numériques corrects, et qu'il est capable de modéliser les instabilités de la nappe sous compression. Nous reprenons pour cela en grande partie les tests numériques réalisés dans le chapitre 4 de ce mémoire.

### 8.3.1 Tests sur une nappe cylindrique

#### Flexion sous effort tranchant

Nous commençons par valider notre modèle multi-échelles sur le problème de nappe cylindrique sous effort tranchant décrit dans la sous-section 4.4.1. Nous reprenons ici exactement les mêmes valeurs de coefficients que celles qui ont été utilisées dans le chapitre 4.

Nous considérons dans un premier temps le cas d'une nappe d'épaisseur  $t = 1.8mm$ , que l'on discrétise avec un seul élément fini dans l'épaisseur. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 8.8.

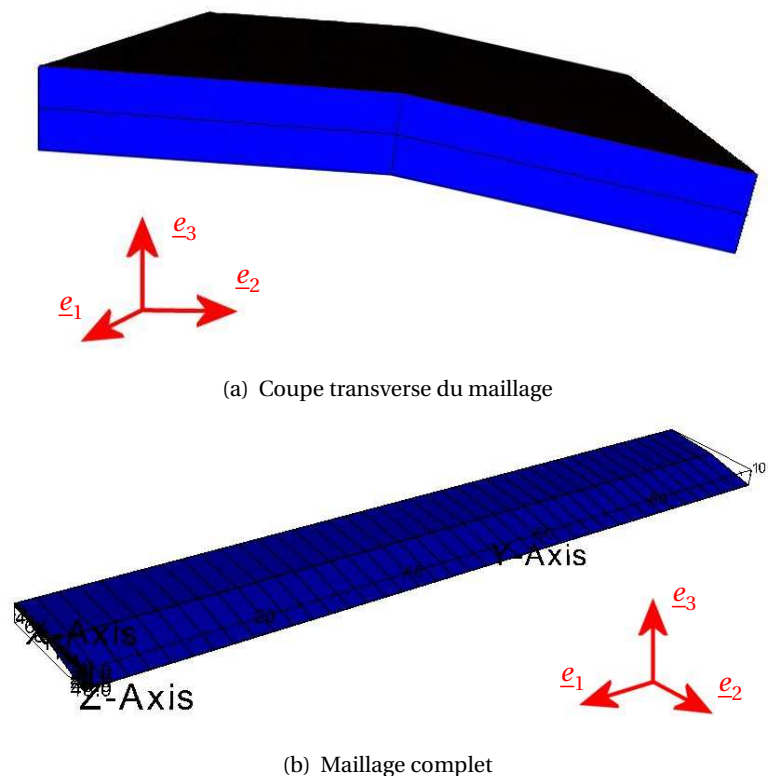
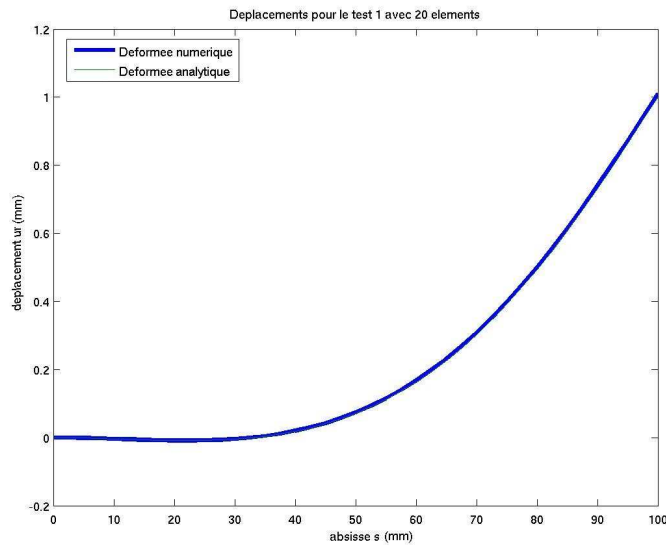


FIG. 8.8: Maillage d'une nappe fibrée isolée.

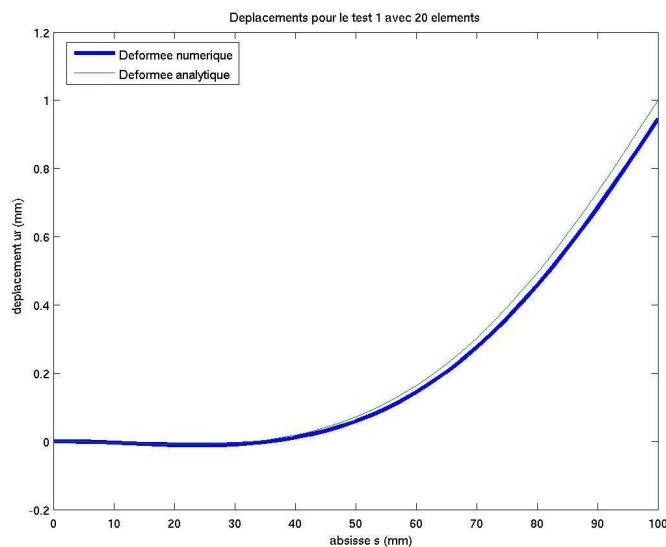
Nous comparons alors sur la figure 8.9 les résultats numériques obtenus avec le modèle global et le modèle multi-échelles par rapport à la solution analytique décrite par (Boussetta and Caillard, Michelin).

Nous observons qu'il y a une petite différence entre la solution obtenue avec le modèle multi-échelles et la solution analytique, alors que la solution calculée avec le modèle global coïncide parfaitement avec la solution analytique. Cette différence s'explique par le fait que le modèle multi-échelles néglige les variations de gradient dans l'épaisseur de la gomme, alors que l'extension ou la compression

de la gomme dans les parties inférieure et supérieure de la nappe ont un rôle important dans la solution analytique proposée.



(a) Modèle global



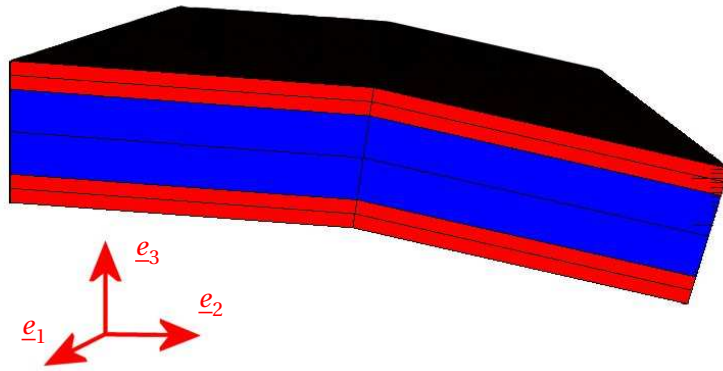
(b) Modèle multi-échelles

FIG. 8.9: Résultats obtenus sur le problème de nappe cylindrique sous effort tranchant pour une nappe isolée.

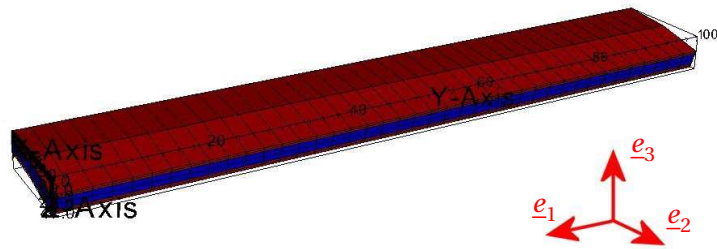
Le modèle multi-échelles fait l'hypothèse que la nappe renforcée est entourée par d'autres couches. Pour valider notre modèle, nous allons alors entourer la nappe précédente par deux fines couches de gomme homogène, chacune d'épaisseur  $0.6\text{mm}$ , de telle sorte que l'épaisseur totale de la structure vaut  $t = 3\text{mm}$ . On discrétise alors cette structure par  $NE_r = 3$  éléments finis dans l'épaisseur :

- L'élément fini central, d'épaisseur  $1.8\text{mm}$ , utilise notre modèle multi-échelles pour calculer l'énergie de la couche renforcée composite ;
- les deux éléments fini l'entourant sont standards, modélisant une gomme homogène.

On représente le maillage utilisé sur la figure 8.10.



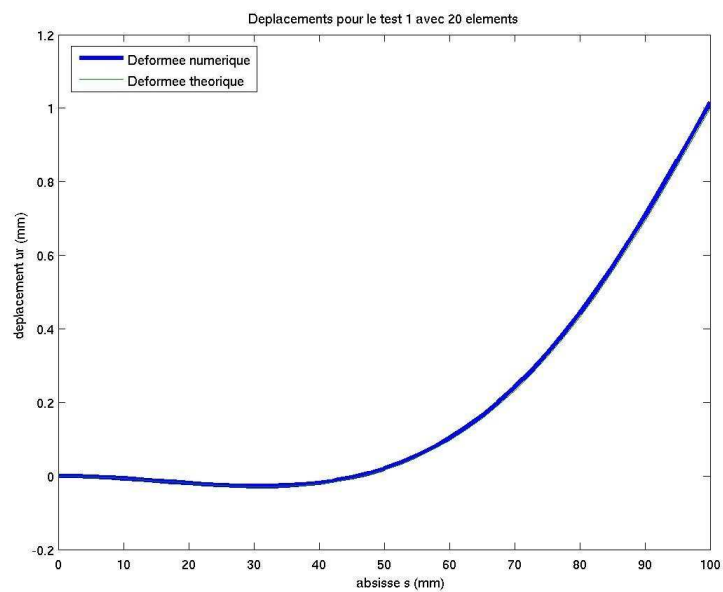
(a) Coupe transverse



(b) Maillage complet

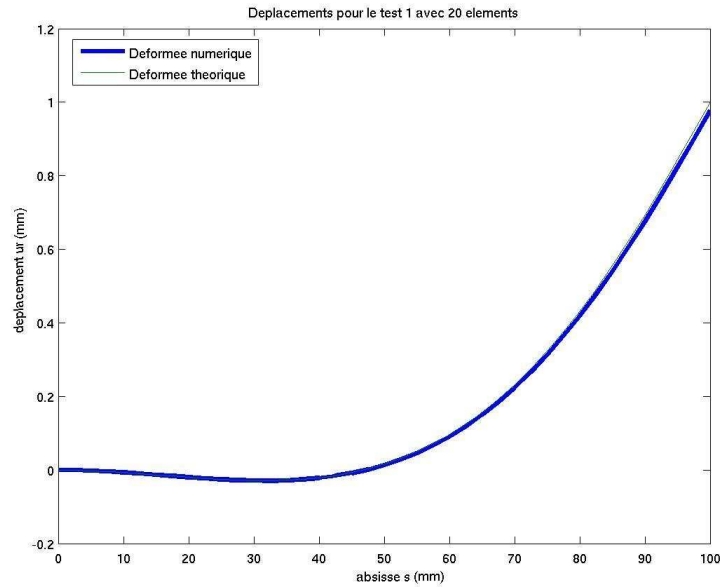
FIG. 8.10: Maillage d'une nappe fibrée entourée de deux fines couches de gomme.

Nous vérifions sur la figure 8.11 que ces deux fines couches de gommages suffisent à très bien approcher la solution analytique, de telle sorte que le comportement en flexion transverse de notre modèle multi-échelles est validé.



(a) Modèle global





(b) Modèle multi-échelles

FIG. 8.11: Résultats obtenus sur le problème de nappe cylindrique sous effort tranchant pour une nappe entourée de deux fines couches de gomme.

### Flambement sous compression axiale

Pour vérifier que notre modèle multi-échelles modélise correctement les phénomènes de flambement hors plan, nous reprenons le test de compression axiale d'une nappe cylindrique décrit dans la sous-section 4.4.2.

Nous reprenons ici exactement les mêmes valeurs de coefficients que celles qui ont été utilisées dans le chapitre 4, à ceci près que l'épaisseur est choisie plus grande, de manière à pouvoir utiliser un problème sur une géométrie réaliste.

Comme nous l'avons montré dans le chapitre 4, le fait de choisir une épaisseur relativement grosse ne permet plus d'utiliser les résultats analytiques présentés dans (Boussetta and Caillard, Michelin). Le modèle global ayant été totalement validé dans la sous-section 4.4.2, nous allons donc valider notre modèle multi-échelles en le comparant à celui-ci.

Nous considérons ici une nappe d'épaisseur  $t = 1.8\text{mm}$ , entourée par deux fines couches de gomme d'épaisseur  $0.6\text{mm}$ . Nous utilisons le même maillage que celui présenté sur la figure 8.10 pour discrétiser le problème. Nous choisissons les autres dimensions géométriques comme précédemment :

$$\begin{cases} L = 100\text{mm} \\ R = 100\text{mm} \\ d\theta = 0,07\text{rad} \\ e = 2.25\text{mm} \end{cases}$$

Pour étudier l'influence de chacun des coefficients matériaux, nous considérons alors 2 réglages suivants :

Règlage A :

$$\begin{cases} C_1 = 0.54 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.06 \text{ MPa} \\ EA = 18582 \text{ MPa.mm}^2 \\ EI = 2037 \text{ MPa.mm}^4 \end{cases}$$

Règlage B :

$$\begin{cases} C_1 = 5.39 \text{ MPa} \\ C_2 = 10.62 \text{ MPa} \\ EA = 18582 \text{ MPa.mm}^2 \\ EI = 1 \text{ MPa.mm}^4 \end{cases}$$

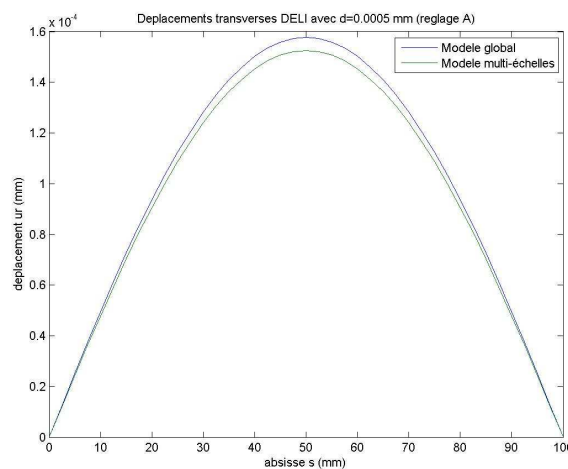
On peut remarquer que le rapport entre la rigidité de la gomme et la résistance en flexion des fibres est beaucoup plus grand dans le réglage B que dans le réglage A. Les tests numériques réalisés sur ces deux cas extrêmes permettront donc de valider notre modèle multi-échelles quelles que soient les propriétés des matériaux utilisés.

Lorsque la compression reste petite, l'équilibre principal est stable et peut être calculé numériquement en quelques incréments de chargement. Nous pouvons vérifier sur la figure 8.12 que les solutions principales obtenues avec les deux modèles sont identiques dans ce cas.

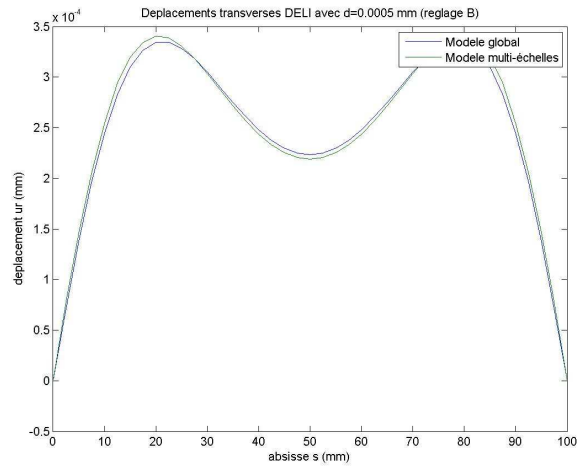
Lorsque la compression axiale des fibres augmente, l'équilibre devient instable et les fibres ont tendance à flamber dans la direction  $e_r$  normale au plan tangent de la nappe. Nous vérifions que le modèle multi-échelles reproduit les mêmes instabilités que le modèle global en imposant les déplacements axiaux suivants en bouts de nappes :

$$\begin{cases} \delta_A^{max} = 0.04 \text{ mm} \\ \delta_B^{max} = 0.0022 \text{ mm} \end{cases}$$

Ces déplacements sont imposés en  $N_{incr} = 30$  incréments de chargement. Nous pouvons voir la solution post-bifurquée obtenue numériquement sur la figure 8.13.

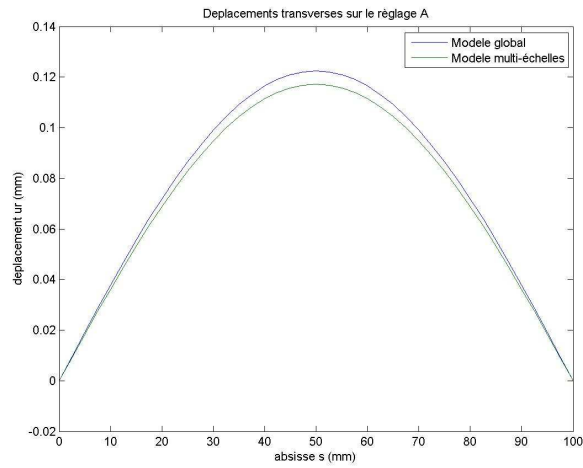


(a) Règlage A

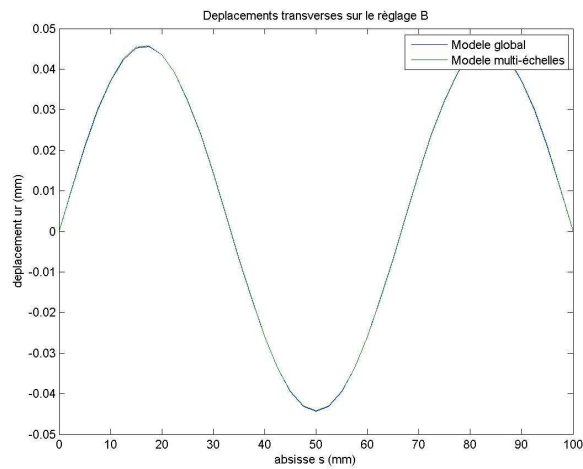


(b) Rèlage B

FIG. 8.12: Comparaison des solutions principales obtenues avec le modèle global et le modèle multi-échelles sur le problème de nappe cylindrique en compression axiale (pour  $\delta = 0.0005\text{mm}$ ).



(a) Rèlage A

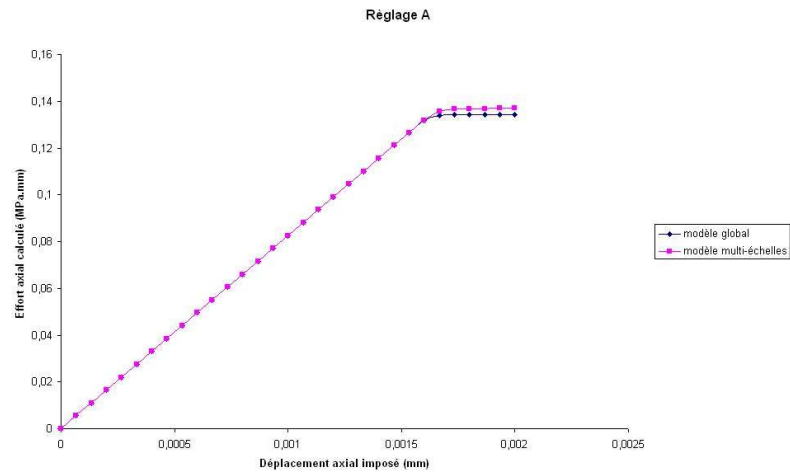


(b) Rèlage B

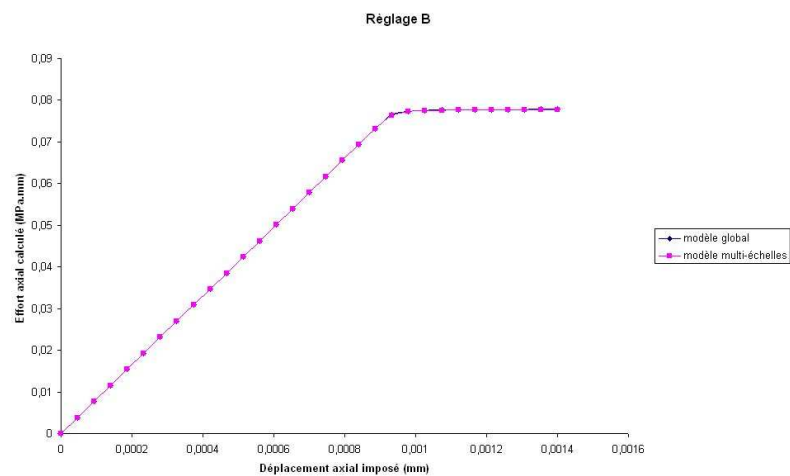
FIG. 8.13: Comparaison des déplacements transverse post-bifurcation obtenus avec le modèle global et le modèle multi-échelles sur le problème de nappe cylindrique en compression axiale.

Nous souhaitons alors déterminer si le flambement apparaît au même moment avec les deux modèles. De la même manière que dans le chapitre 4, nous mesurons l'effort axial correspondant à la compression imposée à chacun des 30 incréments de chargement, et nous traçons les courbes obtenues sur la figure 8.14.

Nous vérifions sur ces courbes que les deux modèles détectent l'apparition du flambement pour le même chargement critique.



(a) Règlage A



(b) Règlage B

FIG. 8.14: Comparaison des seuils de flambement obtenus avec le modèle global et le modèle multi-échelles sur le problème de nappe cylindrique en compression axiale.

Pour résumer, les résultats numériques présentées dans cette sous-section nous ont permis de vérifier que le modèle multi-échelles est capable de modéliser les phénomènes de flexion et de flambement dans la direction normale au plan tangent de la nappe. De petites différences sont observables par rapport aux résultats obtenus avec le modèle global, dues à la diminution de la résistance de la gomme en flexion. Mais les résultats restent proches, voire quasiment égaux si la nappe renforcée est entourée par d'autres couches de gomme.

### 8.3.2 Test de flexion circulaire d'une nappe plane

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.2, une caractéristique importante de notre problème de nappe fibrée est que la flexion des fibres doit être correctement prise en compte dans la direction normal au plan de la nappe, mais aussi dans le plan de la nappe.

L'objectif de cette section est donc de vérifier que les instabilités de type flambement dans le plan de la nappe sont correctement modélisées par le modèle multi-échelles, de manière à compléter les résultats présentés dans la section 8.3.1.

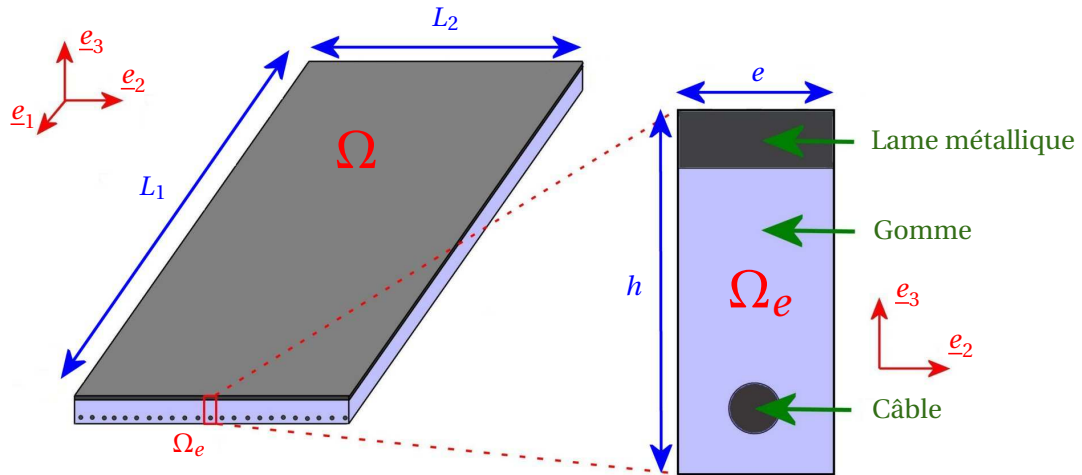


FIG. 8.15: Géométrie de l'éprouvette.

Nous reprenons pour cela le problème mécanique sur lequel a été validé le modèle global dans la section 4.5. Nous rappelons que nous considérons une éprouvette telle que celle décrite sur la figure 8.15, soumise à une flexion circulaire comme illustré sur la figure 8.16. Les dimensions géométriques et les valeurs des coefficients matériaux sont toutes identiques à celles prises dans la section 4.5.

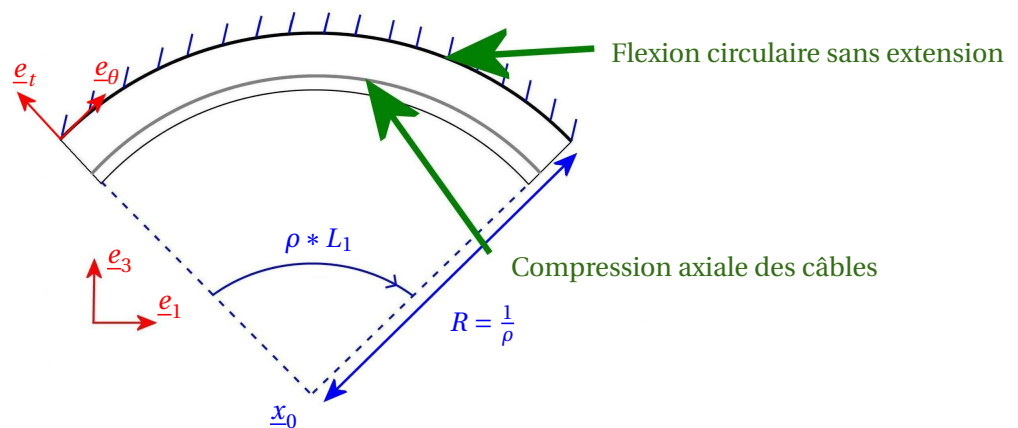


FIG. 8.16: Chargement sur l'éprouvette.

De la même manière que dans le chapitre 4, nous ajoutons à la géométrie parfaite de l'éprouvette une perturbation sinusoïdale d'amplitude  $0.001\text{ mm}$ , permettant de pousser notre modèle numérique vers la première branche de bifurcation (voir figure 8.17). Nous augmentons alors progressivement la courbure en utilisant une méthode incrémentale, et nous mesurons les déplacements calculés à chaque incrément de chargement.

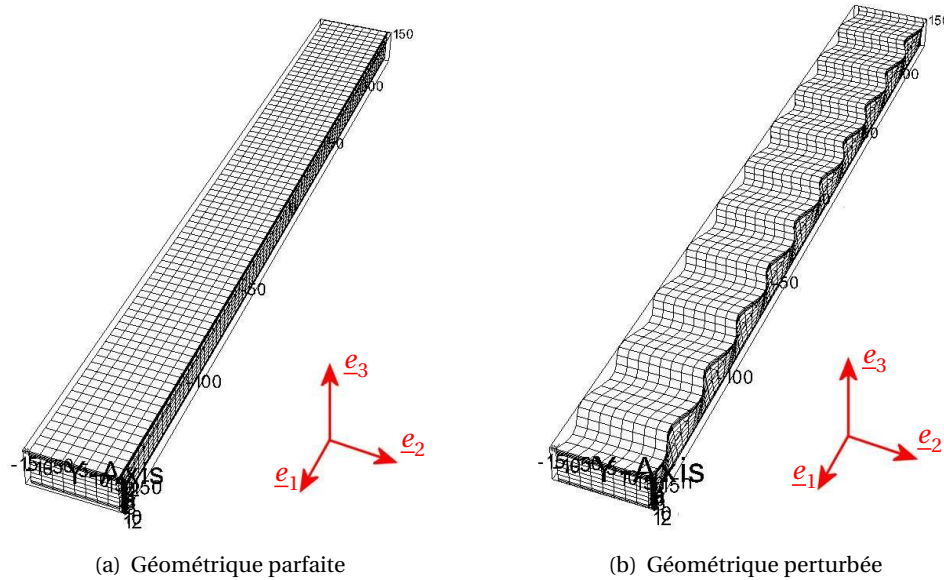
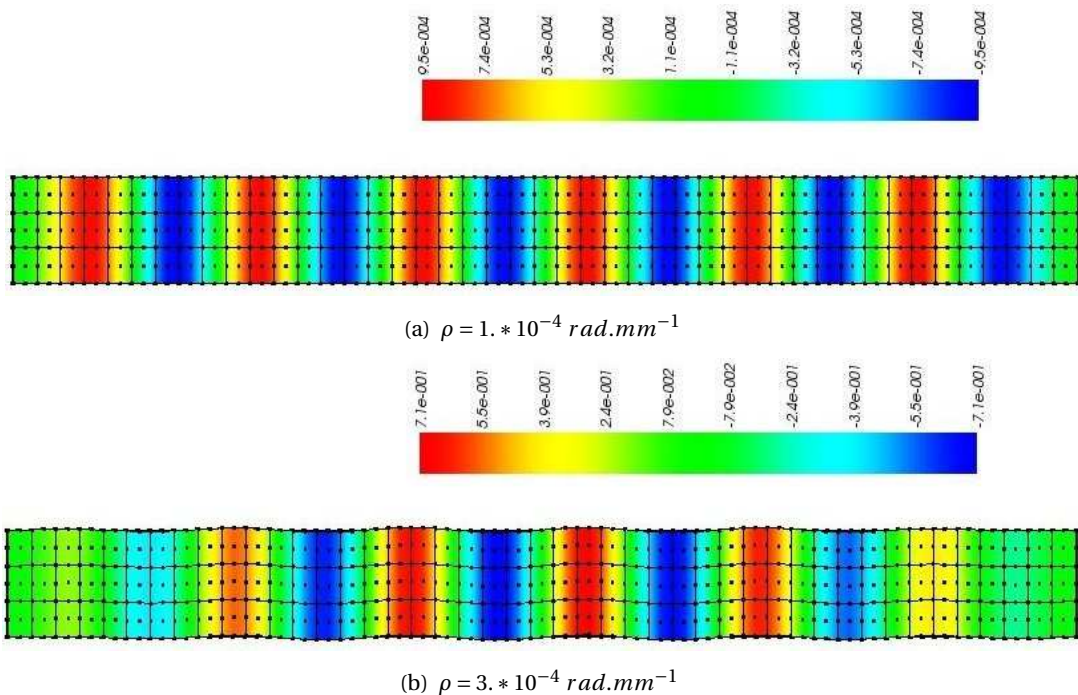


FIG. 8.17: Perturbation géométrique du problème de flexion circulaire (perturbation  $\times 2000$ ).

Comme c'était le cas dans le chapitre 4 avec notre modèle global, nous observons que les déplacements latéraux croissent rapidement au delà d'une certaine courbure, illustrant un flambement de la nappe dans le plan de la nappe (cf figure 8.18). Nous vérifions sur la figure 8.19 que le flambement des fibres se situe uniquement dans le plan de la nappe, et que les déplacements transverses restent quant à eux assez réguliers.



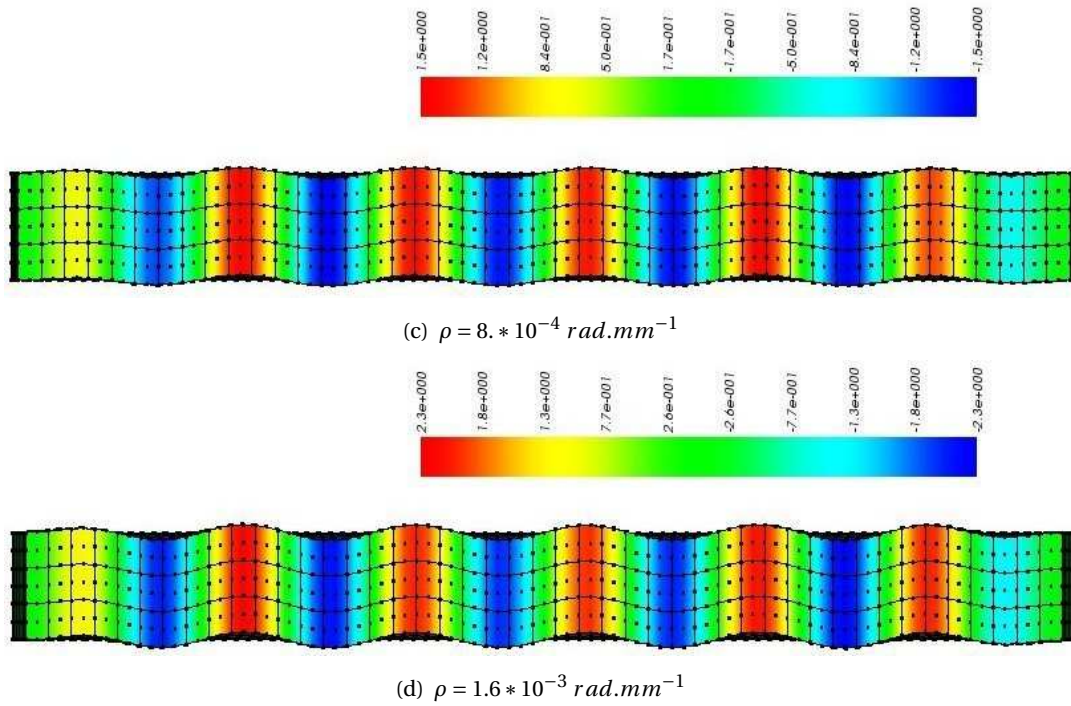


FIG. 8.18: Flambement dans le plan de la nappe obtenu avec le modèle multi-échelles lorsque la courbure augmente.

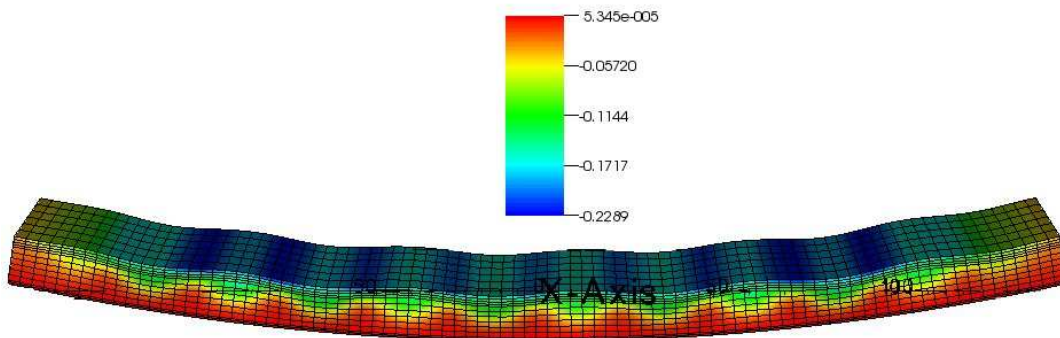


FIG. 8.19: Absence de flambement hors plan avec le modèle multi-échelles (pour  $\rho = 1.6 * 10^{-3} \text{ rad.mm}^{-1}$ ).

Pour déterminer la courbure à partir de laquelle le flambement apparaît, nous traçons la courbe représentant l'évolution de l'amplitude des déplacements transverses lorsque la courbure augmente pour deux tailles de maillage sur les figures 8.20 et 8.21.

Comme c'était le cas dans le chapitre 4, on peut remarquer sur ces courbes que les déplacements transverses augmentent brusquement, ce qui caractérise la bifurcation de la solution vers une autre branche d'équilibre.

Cependant, nous observons sur ces courbes que le flambement de la nappe apparaît légèrement plus tard avec le modèle multi-échelles, quel que soit le maillage macroscopique utilisé. Nous interpréterons cette petite différence dans la partie III de ce mémoire, grâce à une analyse de stabilité permettant de prédire le seuil de flambement exact.

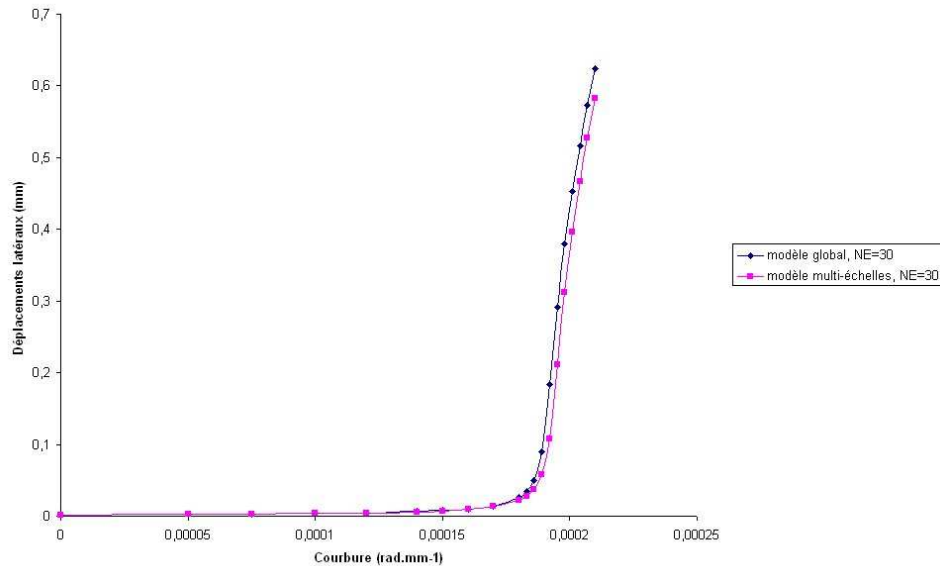


FIG. 8.20: Comparaison des seuils de flambement observés numériquement avec le modèle global et le modèle multi-échelles pour 30 éléments finis dans la longueur.

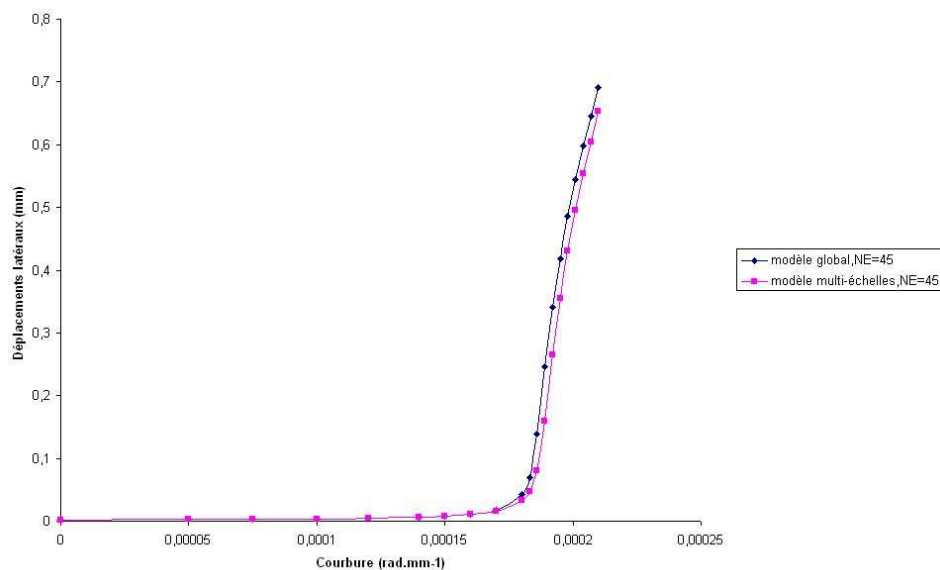


FIG. 8.21: Comparaison des seuils de flambement observés numériquement avec le modèle global et le modèle multi-échelles pour 45 éléments finis dans la longueur.

## ■ Conclusions

Nous avons décrit dans la section 8.1 une méthode multi-échelles basée sur le résultat de l'analyse asymptotique réalisée dans le chapitre 6. Cette méthode utilise une projection dans la transition entre les échelles permettant de traiter les cas où la gomme est incompressible : cette projection assure que le problème local est bien posé en évitant tout risque de verrouillage lié à l'incompressibilité. De plus, nous avons légèrement modifié la forme de l'énergie de la nappe sans modifier sa limite asymptotique en y insérant un terme d'énergie macroscopique intégré de manière exacte, de



manière à la rendre coercive, ce qui nous autorise à réduire le nombre de problèmes locaux à un seul par élément fini macroscopique.

Dans la section 8.2, nous avons montré par une analyse formelle que le problème linéarisé autour d'une configuration plane est alors bien posé. Il a également été prouvé par une extension du lemme de Strang que la solution du problème discret converge uniformément vers la solution continue, moyennant une condition inf-sup qu'il est légitime de supposer dans notre choix d'éléments finis. Enfin, nous avons vérifié dans la section 8.3 que le modèle multi-échelles ainsi construit est capable de reproduire les instabilités hors plan et dans le plan qui avaient été observées dans le chapitre 4.

Cependant, les tests de nappe en flexion circulaire présentés dans la sous-section 8.3.2 ont montré une petite différence entre les seuils de flambement détectés par les modèles global et multi-échelles. Ne disposant pas d'expressions analytiques pour ce problème, la question légitime qui se pose est alors :

**Est-ce que l'approche multi-échelles nous a permis de gagner en précision ?  
Ou bien au contraire les approximations réalisées sont-elles trop fortes ?**

L'objectif de la dernière partie de cette thèse est d'étudier les phénomènes d'instabilités de solides élastiques et de développer une méthode permettant de mieux prédire leur apparition. Cela nous permettra de mieux comprendre les résultats obtenus avec nos deux modèles sur les tests de nappe en flexion circulaire, de manière à pouvoir interpréter la petite différence entre leurs résultats.

Troisième partie

## **Analyse de stabilité multi-échelles**



## Introduction à la stabilité des solides élastiques

### ■ Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse de stabilité des structures élastiques. L'objectif principal est d'introduire les outils nécessaires à l'étude de stabilité de nos nappes fibrées en compression. Nous y détaillons des concepts généraux tels que les courbes d'équilibre, les points de bifurcation, ou les imperfections, en s'inspirant notamment des ouvrages (Quoc-Son, 2000) et (Stolz, 2003), et nous présentons les principaux outils numériques permettant l'analyse de stabilité et la modélisation post-bifurcation des matériaux homogènes et hétérogènes. Nous avons divisé ce chapitre en cinq sections principales :

- Dans un premier temps, la section 9.1 présente quelques conséquences des phénomènes d'instabilités sur des structures industrielles, de manière à motiver le calcul de leur charge critique ;
- On rappelle dans la section 9.2 les équations d'équilibre d'un solide hyperélastique et la définition de sa stabilité. Cela nous permet notamment d'introduire le critère de dérivée seconde ;
- Nous définissons les notions importantes de l'analyse de stabilité dans la section 9.3, à savoir :
  - les points de bifurcation ;
  - les points limites ;
  - l'influence des imperfections.
- La section 9.4 s'écarte des définitions mécaniques pour décrire les spécificités de la modélisation numérique de problèmes post-bifurcation : on commence par expliquer les obstacles rencontrés lors de l'utilisation de méthodes incrémentales classiques, puis on présente deux alternatives : la méthode asymptotique numérique et la méthode de contrôle de longueur d'arc.
- Enfin, on précise dans la section 9.5 les difficultés qui apparaissent lorsqu'on veut étudier la stabilité de matériaux composites. Nous y présentons quelques résultats récents dans ce domaine qui seront utiles à l'analyse de stabilité de nos nappes fibrées réalisée dans le chapitre 10.

## ■ 9.1 Motivation : Stabilité de structures industrielles

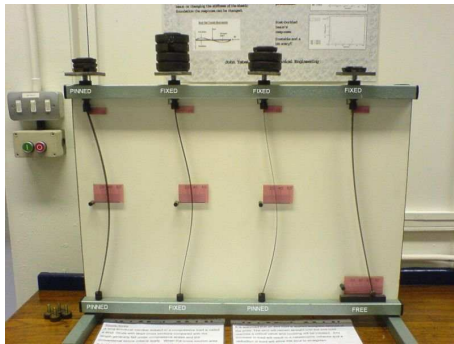
### Stabilité de structures industrielles

Les structures minces (poutres, plaques, coques, ...) sont utilisées dans de nombreux domaines industriels, en voici quelques exemples :

- Poutres (métalliques ou en béton armé) dans les structures Génie Civil
- Coques cylindriques autour de réservoirs ;
- Coques hémisphériques formant la coupole d'un bâtiment ;
- Carosseries de véhicules, ...

Ce type de structures présente l'avantage de posséder d'excellentes capacités à transmettre et supporter des chargements très variés, tout en ayant un poids relativement réduit.

Malheureusement, leur comportement devient non linéaire en compression, ce qui les rend souvent sujettes à des instabilités structurelles. Ces instabilités correspondent à la perte d'unicité de l'équilibre : plusieurs champs de déformation peuvent être solution d'un problème aux conditions limites pour un même état de contrainte. La réponse physique peut alors devenir différente de la réponse principale attendue (cf figure 9.1).



(a) Flambement de poutres en compression axiale (d'après <http://fr.wikipedia.org>)



(b) Flambement de rails sous dilatation thermique pendant l'été 2003 (d'après [www.bastison.net](http://www.bastison.net))

FIG. 9.1: Exemples de flambement de structures fines.

Des modes de bifurcation de natures différentes sont possibles, pouvant intervenir à différentes échelles. Des exemples typiques d'une telle perte spontanée d'homogénéité de la déformation de l'échantillon sont (figure 9.2) : (voir par exemple (Sulem and Vardoulakis, 1990))

- des modes globaux de type "mise en tonneau" ou "flambement", qui correspondent à un type de bifurcation continue ou diffuse ;
- La formation d'une bande de cisaillement, qui correspond à un type de bifurcation discontinue ou localisée.

Ces instabilités structurelles peuvent avoir des conséquences "catastrophiques", car une instabilité globale de type flambement peut initier la rupture d'un matériau et mener à la ruine de la structure (cf figure 9.3). Le dimensionnement des structures minces requiert donc d'avoir au préalable une bonne compréhension de ces instabilités, puis de développer des outils fiables permettant de prédire l'apparition de ces instabilités.

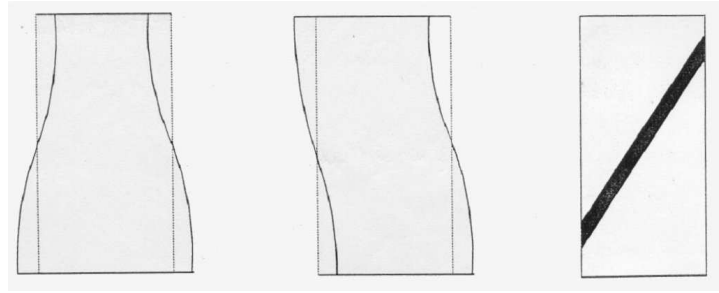
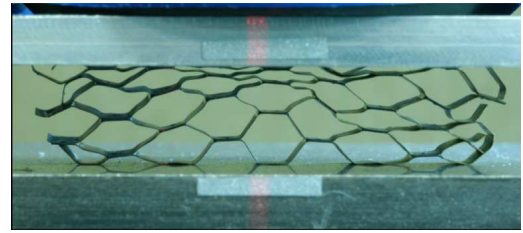


FIG. 9.2: Exemples d'instabilités : (a) Mode global symétrique (mise en tonneau) ; (b) Mode global antisymétrique (flambement) ; (c) Bande de cisaillement localisée. (Sulem and Vardoulakis, 1990)



(a) Poutre porteuse flambée après un effondrement



(b) Ecrasement d'une structure en nid d'abeilles (d'après N. Triantafyllidis)

FIG. 9.3: Exemples de ruines initiées par une instabilité.

On présente dans ce qui suit les notions principales d'analyse de stabilité dans le cas particulier de matériaux hyperélastiques sous un chargement statique. On considère dans un premier temps le cas où les matériaux sont homogènes, avant de s'intéresser à la bifurcation de matériaux composites.

## ■ 9.2 Stabilité d'un équilibre

### 9.2.1 Equilibre d'un solide hyperélastique

Considérons un solide  $S$  constitué d'un matériau hyperélastique d'énergie de déformation  $w$  (par exemple l'une des énergies décrites dans le chapitre 2). Dans sa configuration de référence  $\mathcal{C}_0$ , ce solide occupe un volume  $\Omega_0$  et sa frontière est notée  $\delta\Omega_0$ . Ce solide est soumis à une densité volumique de forces, notée  $\underline{f}$ , à des efforts surfaciques  $\underline{g}$  sur la partie de frontière  $S_g \subset \delta\Omega_0$ , et à des déplacements imposés  $\underline{u}_d$  sur  $S_d \subset \delta\Omega_0$ .

En description lagrangienne, les équations d'équilibre s'écrivent alors sous forme locale :

$$\begin{cases} \forall \underline{X} \in \Omega_0, & \underline{\text{div}}(\underline{P}) + \underline{f} = \underline{0} \\ \underline{P} \cdot \underline{n} = \underline{g} & \text{sur } S_g \\ \underline{x} = \underline{X} + \underline{u}_d & \text{sur } S_d \end{cases} \quad (9.1)$$

où  $\underline{P}$  est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, qui s'exprime en fonction du tenseur gradient de déformation  $\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$  par l'intermédiaire de la loi de comportement non linéaire :

$$\underline{P} = \frac{\partial w}{\partial \underline{F}} = 2 \underline{F} \cdot \frac{\partial w}{\partial \underline{C}} \quad (9.2)$$

Dans le cas où les efforts  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$  sont indépendants de la déformation, ces équations d'équilibre sont équivalentes à chercher un point stationnaire pour l'énergie potentielle du système définie par :

$$\mathcal{E}(\underline{x}) = \iiint_{\Omega_0} w(\underline{\nabla x}) dX - \iint_{\Omega_0} \underline{f} \cdot \underline{x} dX - \iint_{\delta\Omega_0} \underline{g} \cdot \underline{x} ds . \quad (9.3)$$

Si on note  $H$  l'ensemble des configurations cinématiquement admissibles, ce problème d'équilibre s'écrit donc :

**Pb 9.2.1** Trouver  $\underline{x}_e \in H$  tel que

$$\forall \underline{\delta x} \in H_0, \quad \mathcal{E}_{,x}^e[\underline{\delta x}] = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_e) \cdot \underline{\delta x} = 0 . \quad (9.4)$$

Ce problème mathématique est très intéressant, et a été étudié par exemple dans (Ciarlet, 1988). L'existence d'une solution n'est assurée que si la densité d'énergie possède des propriétés convexes, comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre 2 :

- l'énergie de déformation doit *tendre vers l'infini* lorsque les quantités  $\lambda_i$ ,  $\lambda_i \lambda_j$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  tendent vers 0 ou vers l'infini, de manière à éviter des phénomènes d'écrasement ou d'extension infinie ;
- la densité d'énergie est une fonction *polyconvexe* et coercive au sens de Ball (voir (Ball, 1977)).

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons donc que l'énergie de déformation  $w$  du matériau hyperélastique considéré vérifie ces conditions, ce qui assure l'existence d'une configuration d'équilibre, notée  $\mathcal{C}_e$ . Cependant, contrairement à l'élasticité linéaire, l'énergie n'étant pas convexe par rapport à  $\underline{C}$ . Cette solution  $\underline{x}_e$  ne correspondra donc pas nécessairement à un minimum de l'énergie, ce qui pourra être la cause d'*instabilités*.

## 9.2.2 Définition de la stabilité

Considérons une configuration d'équilibre  $\mathcal{C}_e$ , solution du problème Pb9.3.1. Cet équilibre dépend de plusieurs paramètres :

- la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  ;
- le chargement, correspondant aux efforts  $\underline{f}$  et  $\underline{g}$  ;
- les coefficients de la loi de comportement 9.2.

Les structures parfaites n'existent que dans la théorie. En pratique, elles présenteront toujours des défauts infimes aléatoires à l'échelle microscopique, non pris en compte dans les calculs. Pour s'assurer de la fiabilité des résultats numériques, il est alors capital que ces petites perturbations aient une influence négligeable sur la configuration d'équilibre, ce qui pousse en particulier à introduire la notion de stabilité :

La position d'équilibre  $\underline{x}_e$  sera dite *stable* si une petite perturbation de la configuration initiale  $\mathcal{C}_0$  n'entraîne qu'une faible variation de l'équilibre.

Plus précisément, si on considère une configuration initiale perturbée  $\mathcal{C}_0^*$  et que l'on note  $\mathcal{C}_e^*$  la configuration d'équilibre qui lui est associée, l'équilibre sera dit stable si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \|\mathcal{C}_0^* - \mathcal{C}_0\| < \alpha \Rightarrow \|\mathcal{C}_e^* - \mathcal{C}_e\| < \epsilon \quad (9.5)$$

où  $\|\cdot\|$  est une mesure de l'écart entre deux configurations. Autrement dit, on demande à ce que la configuration finale soit une fonction continue de la configuration initiale.

Nous allons décrire dans ce qui suit comment vérifier cette condition en pratique.

### 9.2.3 Analyse de stabilité d'un équilibre

Intuitivement, on peut penser que si l'énergie augmente partout autour du point d'équilibre  $\underline{x}_e$ , toute configuration perturbée serait amenée à rester proche de cet équilibre pour minimiser son énergie. Cette idée se traduit par le critère de stabilité énergétique suivant :

#### **Théorème 9.2.1** *Théorème de Lejeune-Dirichlet*

*L'équilibre est stable s'il correspond à un minimum local de l'énergie potentielle. Plus précisément, le point d'équilibre  $\underline{x}_e$  doit satisfaire :*

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{V}(\underline{x}_e), \text{ si } \underline{x} \neq \underline{x}_e \text{ alors } \mathcal{E}(\underline{x}) > \mathcal{E}(\underline{x}_e)$$

Malheureusement, la démonstration de ce théorème n'est valable qu'en dimension finie. Néanmoins, une version généralisée en dimension infinie a pu être établie sous des hypothèses supplémentaires de différentiabilité :

**Théorème 9.2.2** *Supposons qu'il existe un espace vectoriel  $H$  muni de la norme  $\underline{x}$  dans lequel l'énergie est bien définie. Si au point d'équilibre  $\underline{x}_e$  les hypothèses suivantes sont satisfaites :*

– *L'énergie est différentiable au sens de Fréchet dans  $H$  jusqu'au deuxième ordre :*

$$\forall \underline{x} \in H, \mathcal{E}(\underline{x}) - \mathcal{E}(\underline{x}_e) = \mathcal{E}_{,qq}^e[\underline{x} - \underline{x}_e, \underline{x} - \underline{x}_e] + o(\|\underline{x} - \underline{x}_e\|^2)$$

– *La seconde variation  $\delta^2 \mathcal{E}^e$  est coercive dans  $H_0$  :*

$$\exists \alpha > 0, \forall \underline{\delta x} \in H_0, \mathcal{E}_{,xx}^e[\underline{\delta x}, \underline{\delta x}] > \alpha \|\underline{\delta x}\|^2$$

– *Les déplacements des mouvements perturbés appartiennent à l'espace des fonctions  $C^0(H)$ .*

*alors l'équilibre est stable.*

Ce chapitre se limitant à introduire les notions principales de l'analyse de stabilité, la démonstration formelle de ce théorème est admise. Plus de détails sont disponibles dans (Quoc-Son, 2000).

On peut aussi démontrer le résultat suivant par une étude du problème linéarisé (voir par exemple ( )) :

**Critère de seconde variation :** *Si la seconde variation est négative sur une direction, alors l'équilibre est linéairement instable : il existe une perturbation linéaire avec croissance exponentielle en temps.*

Ce critère peut être très utile en pratique : plaçons nous dans le cas d'un problème discret, résolu par une méthode incrémentale. La dérivée seconde  $\mathcal{E}_{,xx}$  correspond alors à la matrice de rigidité du problème linéaire tangent, notée  $\underline{\underline{K}}$ . Ainsi, la positivité de la dérivée seconde est équivalente à ce que toutes les valeurs propres de  $\underline{\underline{K}}$  soient strictement positives. Cette remarque fournit un moyen simple et rapide pour étudier la stabilité d'un équilibre calculé numériquement.

## ■ 9.3 Courbes d'équilibre et points de bifurcation

Lors de la conception d'une structure, il est indispensable d'assurer que son comportement restera contrôlé pour les chargements auxquels elle pourra être soumise, décrits dans un cahier des charges. Pour cela, on calcule la *charge critique* du problème, défini comme étant le plus petit chargement



pour lequel le système devient instable.

Plus généralement, on suppose dans cette section que le chargement dépend d'un paramètre de contrôle, noté  $\lambda$ . Lorsque ce paramètre est fixé, l'équilibre du système est défini par :

**Pb 9.3.1 Problème d'équilibre**

A  $\lambda$  fixé, trouver  $\underline{x}_\lambda \in H$  tel que

$$\forall \underline{\delta x} \in H_0, \quad \mathcal{E}_{,x}(\underline{x}_\lambda, \lambda)[\underline{\delta x}] = 0 \quad (9.6)$$

Lorsque  $\lambda$  varie, compte tenu de la continuité de  $\mathcal{E}_{,x}$  par rapport à  $\underline{x}$  et  $\lambda$ , on peut représenter l'ensemble des équilibres  $\underline{x}_\lambda$  sous forme d'une ou plusieurs courbes. On les définit comme étant les *courbes d'équilibre* du système.

Pour décrire ces courbes, on peut adopter la représentation paramétrique classique :

$$\underline{x} = \underline{x}(\tau) \quad \lambda = \lambda(\tau)$$

où  $\tau$  désigne un paramètre quelconque. Dans la suite, les fonctions  $\underline{x}(\tau)$  et  $\lambda(\tau)$  sont supposées des fonctions au moins de classe  $\mathcal{C}^1$ , de manière à ce que leur tangente soit continue.

On souhaite établir un lien entre ces courbes d'équilibre et la stabilité. Pour cela, considérons un solide dans sa configuration de référence  $\mathcal{C}_0$ , sur lequel on applique un chargement progressif caractérisé par le paramètre  $\lambda$ .

Pour des structures réalistes, on peut faire l'hypothèse qu'une unique courbe d'équilibre passera par le point  $(\underline{x}_0, 0)$ . On appellera cette courbe la *branche principale*, et l'ensemble des configurations d'équilibre  $(\underline{x}, \lambda)$  qui sont sur cette courbe forme la *solution principale* du problème.

Pour des chargements proches de 0, on peut supposer raisonnablement que la solution principale est stable, et qu'elle est l'unique équilibre du problème. On définit alors la "*charge critique*" le paramètre  $\lambda_c = \lambda(\tau_c)$  à partir duquel l'équilibre principal devient instable.

Si on augmente le chargement  $\lambda$  d'un incrément infinitésimal  $\delta\lambda$ , la solution  $\underline{x} \in H$  va varier de  $\delta\underline{x} \in H_0$ , solution du problème tangent :

On désigne par  $(\cdot)$  la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne  $\tau$ . Sous cette notation, les variations de  $\underline{x}$  et de  $\lambda$  par rapport à  $\tau$  sont solutions du problème en vitesse obtenu en dérivant 9.3.1 par rapport à  $\tau$  :

**Pb 9.3.2 Problème en vitesses**

Soit  $(\underline{x}, \lambda)$  un point d'équilibre. Trouver  $(\dot{\underline{x}}, \dot{\lambda}) \in H_0 \times \mathbb{R}$  tel que

$$\forall \underline{v} \in H_0, \quad \mathcal{E}_{,xx}(\underline{x}, \lambda)[\underline{v}, \dot{\underline{x}}] + \mathcal{E}_{,x\lambda}(\underline{x}, \lambda)[\underline{v}, \dot{\lambda}] = 0 \quad (9.7)$$

Si l'équilibre  $(\underline{x}, \lambda)$  est stable, la dérivée seconde  $\mathcal{E}_{,xx}$  est régulière (d'après le théorème 9.2.2) et ce problème linéaire admettra une unique solution. Par analogie, le point  $(\underline{x}, \lambda)$  correspondant à une configuration stable sera appelé *point régulier*. Ce cas est représenté sur la figure 9.4(a).

Mais dans le cas d'une instabilité, la dérivée seconde  $\mathcal{E}_{,xx}$  peut devenir singulière. Le système précédent pourra alors avoir aucune ou plusieurs solutions, comme représenté sur la figure 9.4(a). Un tel point  $(\underline{x}, \lambda)$  est appelé *point singulier*.

L'unicité de la solution  $\dot{\underline{x}} \in H_0$  de ce problème linéaire dépend alors évidemment de la coercivité de  $\mathcal{E}_{,xx}$ .

Lorsqu'on parcourt la courbe principale en partant du point  $(\underline{x}_0, 0)$ , on appelle ainsi le plus petit paramètre  $\lambda_c$  correspondant à un point singulier. Cette charge critique sera caractérisée en pratique

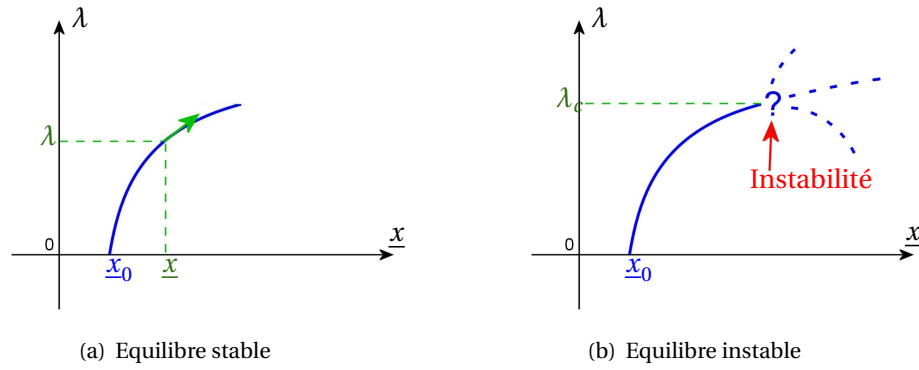


FIG. 9.4: Stabilité sur des courbes d'équilibre

par la *perte d'unicité* de la solution  $\underline{x}$  en fonction du paramètre  $\lambda$ . En terme de problème tangent, il existe des accroissements de déplacement  $\underline{\delta x}$  à accroissement de chargement  $\delta \lambda$  nul.

La recherche de la charge critique se ramène donc au problème aux valeurs propres généralisé :

**Pb 9.3.3 Problème aux valeurs propres généralisé**

Trouver  $\lambda_c$  et  $\underline{\delta x}_c$  tels que

$$\forall \underline{v} \in H_0, \mathcal{E}_{,xx}(\underline{x}, \lambda_c)[\underline{v}, \underline{\delta x}_c] = 0$$

Ces équations permettent de définir les valeurs propres  $\lambda_c$  et les modes propres associés  $\underline{\delta x}_c$ . Nous allons voir dans la suite de cette section que les points singuliers peuvent être séparés en deux catégories :

- les points de bifurcation ;
- les points limites.

**9.3.1 Point de bifurcation**

**Définition :** Un point d'équilibre est un point de bifurcation s'il est le point d'intersection d'au moins deux courbes d'équilibres.

Dans ce cas, les courbes coupant la branche principale seront appelées "*branches bifurquées*". Puisque deux courbes peuvent se couper transversalement ou tangentiellement, on parlera de bifurcation angulaire ou de bifurcation tangente selon que les directions des tangents à ces courbes peuvent être distinctes ou identiques au point d'intersection.

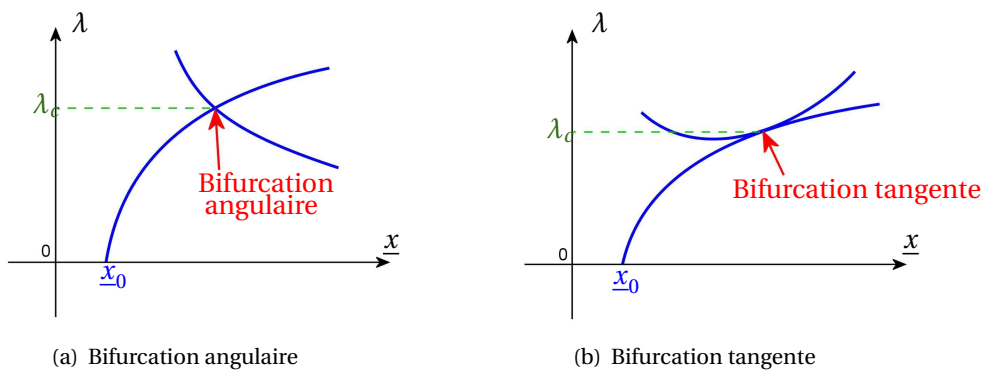


FIG. 9.5: Types de bifurcations d'une courbe d'équilibre

**Exemple : Système barre-ressort**

L'exemple le plus simple pour illustrer le phénomène de bifurcation est le système "barre-ressort" : on considère une barre rigide (supposée infiniment rigide en compression et en flexion) de longueur  $L$ , initialement verticale. Son extrémité inférieure est fixée au point  $O$ , mais est articulée. Sa rotation  $\theta$  est contrôlée par un ressort spiral élastique, tendant à le maintenir dans sa position verticale. On souhaite étudier les positions d'équilibre de la barre sous l'action d'une charge verticale descendante d'amplitude  $\lambda > 0$ . Ces notations sont résumées sur la figure 9.6(a).

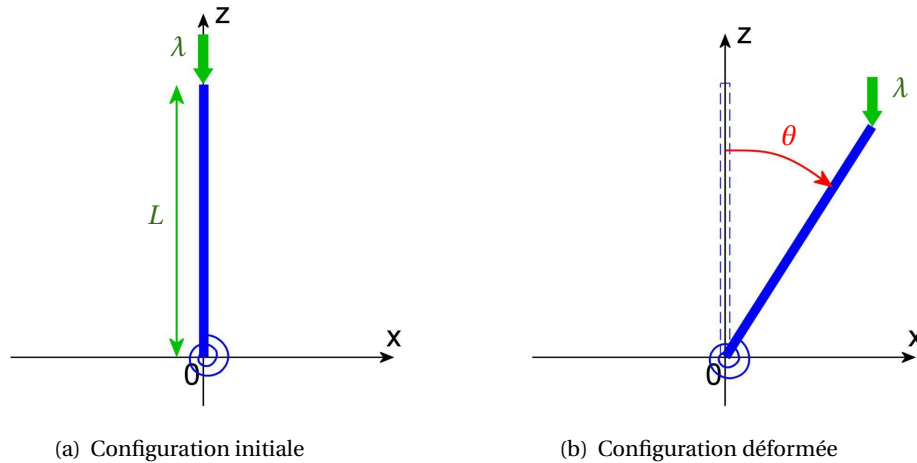


FIG. 9.6: Système barre-ressort

On suppose que le moment de rappel  $C$  du ressort s'exprime en fonction de l'angle de rotation  $\theta$  sous la forme non linéaire :

$$C(\theta) = k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3$$

L'énergie potentielle totale du système soumis à la charge  $\lambda$  s'écrit alors :

$$\mathcal{E}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2}k_1\theta^2 + \frac{1}{3}k_2\theta^3 + \frac{1}{4}k_3\theta^4 + \lambda L \cos(\theta)$$

L'équilibre du système s'exprime par  $\mathcal{E}_{,\theta} = 0$ , c'est à dire :

$$\mathcal{E}_{,\theta}(\theta, \lambda) = k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3 - \lambda L \sin(\theta) = 0 \quad (9.8)$$

Une solution triviale de cette équation d'équilibre est  $\theta = 0$  (barre verticale). Nous l'appellerons "solution principale". On souhaite déterminer si cette position d'équilibre est stable ou non. Pour cela, appliquons le critère de seconde variation en utilisant la dérivée seconde de l'énergie :

$$\mathcal{E}_{,\theta\theta}(\theta, \lambda) = k_1 + 2k_2\theta + 3k_3\theta^2 - \lambda L \cos(\theta)$$

Sur la branche principale  $\theta = 0$ , cette dérivée seconde s'annule lorsque  $\lambda = \frac{k_1}{L}$ , qui correspond donc à un point singulier. Ce chargement est appelé "chargement critique", et sera noté  $\lambda_c$  dans la suite.

Si on reprend l'équation d'équilibre 9.8, on comprend que ce point de bifurcation correspond au croisement de la branche principale avec la branche bifurquée qui a pour équation :

$$\lambda(\theta) = \frac{k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3}{L \sin(\theta)}$$

qui peut être approchée au second ordre :

$$\lambda(\theta) \approx \frac{1}{L} \left( k_1 + k_2\theta + \left( k_3 + \frac{k_1}{6} \right) \theta^2 \right)$$

Comme représenté sur la figure 9.7, on vérifie bien que cette courbe d'équilibre bifurquée, notée  $\mathcal{C}'$ , croise la courbe principale  $\mathcal{C}_0$  au point de bifurcation  $(0, \frac{k_1}{L})$ .

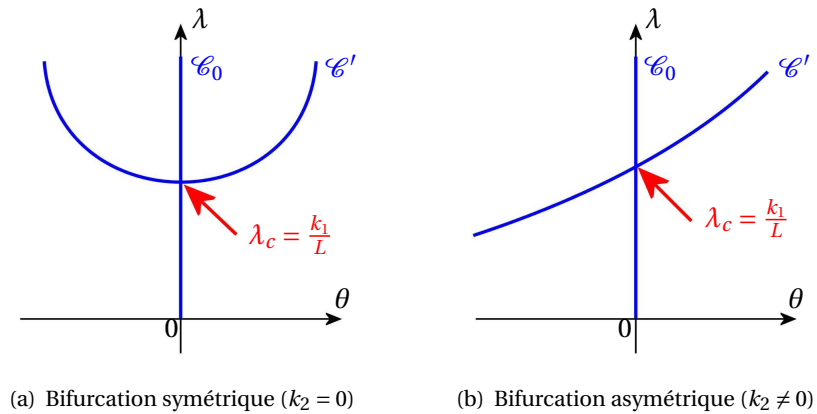


FIG. 9.7: Courbes d'équilibre du système barre-ressort

□

### 9.3.2 Point limite

**Définition :** Un point d'une courbe d'équilibre est un point limite si les conditions suivantes sont réunies :

- Il s'agit d'un point à tangente "horizontale", ce qui signifie que la composante de la tangente à la courbe suivant l'axe  $\lambda$  est nulle (autrement dit,  $\underline{\delta x}_c$  est parallèle à  $\underline{\dot{x}}$  ;
- Ce n'est pas un point de bifurcation.

Mécaniquement, les points limites correspondent à des charges extrêmes, puisque la structure ne possède pas d'équilibre élastique pour des chargements plus élevés.

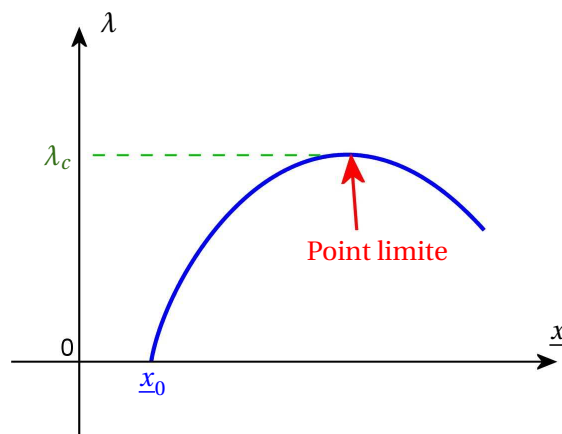


FIG. 9.8: Point limite d'une courbe d'équilibre

Les définitions et les exemples présentés dans cette section supposaient que la géométrie était parfaite. Mais en pratique, une structure possède toujours des défauts à une échelle inférieure. Nous allons donc décrire dans la section qui suit l'influence d'imperfections sur l'équilibre et la stabilité.

### 9.3.3 Influence des imperfections sur la bifurcation

Dans cette sous section, l'objectif est d'étudier comment se modifient les courbes d'équilibre au voisinage d'un point de bifurcation lorsque le système est perturbé par la présence d'imperfections. Pour cela, commençons par reprendre l'exemple de système barre-ressort décrit précédemment :

#### Exemple : Système barre-ressort perturbé

Reprenons l'exemple de système barre-ressort décrit précédemment, mais en supposant cette fois que le ressort en spirale utilisé présente un défaut qui tend à le maintenir incliné d'un petit angle  $\theta^*$ . Les rotations  $\theta$  de la barre sont mesurées par rapport à cette configuration de repos perturbée (cf figure 9.9).

Ce système perturbé est toujours conservatif, et son énergie potentielle totale devient alors :

$$\mathcal{E}(\theta, \lambda) = \frac{1}{2}k_1\theta^2 + \frac{1}{3}k_2\theta^3 + \frac{1}{4}k_3\theta^4 + \lambda L \cos(\theta^* + \theta)$$

de telle sorte que son équation d'équilibre s'écrit :

$$\mathcal{E}_{,\theta}(\theta, \lambda) = k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3 - \lambda L \sin(\theta^* + \theta) = 0 \quad (9.9)$$

On peut simplement remarquer que la configuration  $\theta = 0$  n'est plus un équilibre dès que  $\lambda > 0$ , donc il n'existe plus d'équilibre trivial. Ceci est logique, puisqu'une courbe initialement non verticale aura toujours tendance à s'incliner de plus en plus sous l'application d'une charge verticale.

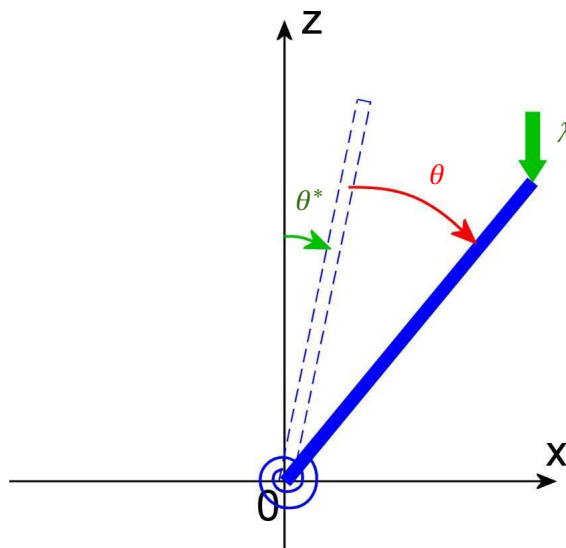


FIG. 9.9: Système barre-ressort perturbé

On ne détaillera pas dans ce rapport l'étude de l'équation d'équilibre perturbé. On pourrait montrer par un développement asymptotique que les courbes d'équilibre de ce problème perturbé sont de la forme représentées sur la figure 9.10 : l'équilibre perturbé est proche de l'équilibre parfait principal pour des chargements petits, mais il dévie ensuite vers une des branches bifurquées sans passer par un point de bifurcation.

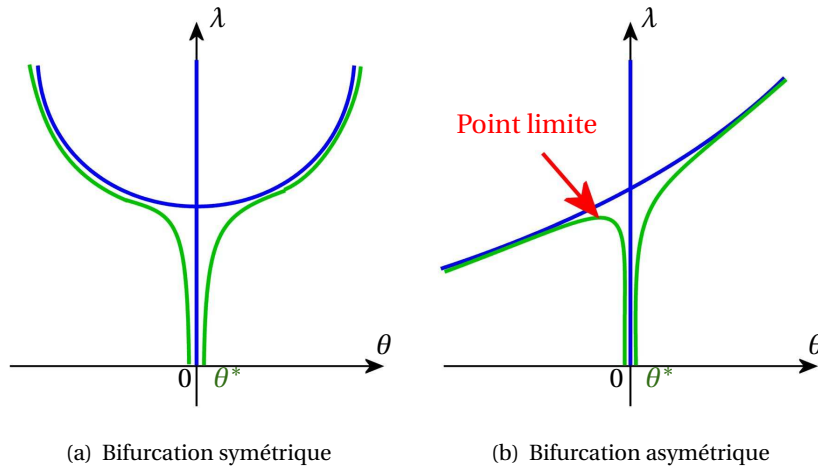


FIG. 9.10: Courbes d'équilibre du système barre-ressort perturbé

□

Le type de résultats observés sur l'exemple précédent peut être étendu à tout type de problème :

- Pour des chargements de faible amplitude, l'équilibre perturbé est très proche de l'équilibre principal ;
- Lorsqu'on approche du chargement critique, l'équilibre perturbé s'éloigne de la courbe principale pour dévier très rapidement vers la courbe bifurquée la plus proche.

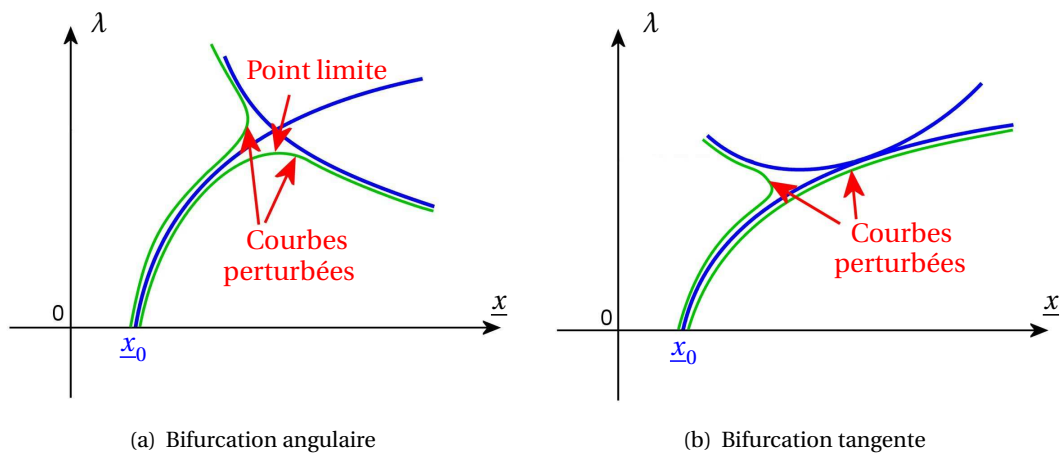


FIG. 9.11: Influence de perturbations sur les points de bifurcations

Finalement, on peut faire deux remarques intéressantes sur l'impact des imperfections, visibles sur les courbes de la figure 9.11 :

- La perturbation d'un système parfait va "gommer" ses points de bifurcation et la faire dévier vers une de ses branches bifurquées ;
- Toutefois, un point de bifurcation peut être remplacé par un point limite (cf figure 9.11(a)).

Nous verrons dans la section suivante que ces remarques sont notamment importantes lorsqu'on veut calculer numériquement le comportement d'un problème non linéaire présentant des instabilités.

## 9.4 Calculs numériques en présence d'instabilités

Les calculs numériques appliqués à un problème présentant des instabilités peuvent avoir deux objectifs :

- Calculer la charge critique supportée par la structure avant de devenir instable ;
- Modéliser le comportement de la structure post-bifurcation.

Dans tous les cas, il est important de reconstituer l'ensemble de la courbe d'équilibre.

Pour franchir un point critique et étudier la solution après bifurcation, la convergence d'une méthode de résolution classique risque d'être très lente. Cet inconvénient devient plus grave pour les calculs multi-échelles sur des matériaux hétérogènes, pour lesquels les temps de calculs à chaque itération peuvent être assez importants. De nouvelles méthodes de résolutions, appelées "*méthodes de continuation*", ont récemment été développées pour diminuer les calculs sur ces problèmes présentant des points singuliers. On présente dans cette section les trois approches principales permettant de suivre efficacement les courbes d'équilibre.

### 9.4.1 Méthodes incrémentales

Le recours au calcul numérique est souvent nécessaire pour traiter les problèmes de solides rencontrés en pratique. En transformations finies, l'apparition de non-linéarités géométriques pousse à utiliser des méthodes itératives de type Newton-Raphson. Cependant, la convergence de ces méthodes est garantie uniquement lorsque la configuration initiale est dans un "voisinage" de la solution. Pour calculer l'équilibre d'une structure sous une charge  $\lambda$  élevée, il sera donc plus prudent d'augmenter la charge par incréments, en calculant l'équilibre correspondant à chaque étape par un algorithme de Newton classique (voir (Oden, 1972) ou plus récemment (Le Tallec, 1994)).

Le principe de ces méthodes incrémentales est donc de suivre les branches d'équilibre de manière progressive, en augmentant le chargement linéairement. On résume leur fonctionnement par l'algorithme 2.

```

Input : Configuration initiale  $\underline{x}_0$ 
Input : Charge totale  $\Lambda = n * \delta\lambda$ 
Initialiser la charge  $\lambda$  à 0 ;
for  $k=1$  à  $n$  do
    Incréments la charge :  $\lambda = \lambda + \delta\lambda$  ;
    Initialiser  $\underline{x} = \underline{x}_{k-1}$  ;
    while  $\| \underline{E}_{,x}(\underline{x}, \lambda) \| > \epsilon$  do
        Calculer  $\underline{E}_{,xx}(\underline{x}, \lambda)$  et  $\underline{E}_{,x}(\underline{x}, \lambda)$  ;
        Résoudre le problème linéaire  $\underline{E}_{,xx}(\underline{x}, \lambda) \cdot \underline{\delta x} = -\underline{E}_{,x}(\underline{x}, \lambda)$  ;
        Actualiser  $\underline{x} = \underline{x} + \underline{\delta x}$  ;
    end
    Actualiser la configuration courante :  $\underline{x}_k = \underline{x}$  ;
end
Output : Configuration  $\underline{x}_n$  à l'équilibre sous la charge  $\Lambda$ 
Algorithme 2 : Méthode incrémentale de suivi d'une branche d'équilibre

```

*Remarque* : Chaque incrément est résolu ici par un algorithme de Newton-Raphson classique, ce qui n'est pas optimal. Le coût de calcul peut être optimisé en utilisant des algorithmes de descente (cf (Cornuault, 1988)) permettant en particulier de ne pas recalculer la matrice  $\underline{\underline{E}}_{,xx}$  à chaque itération. On ne détaillera pas ce point ici.

Ces méthodes incrémentales sont difficilement applicables sur un problème présentant un point de bifurcation : Au voisinage du point de bifurcation, le déterminant de la matrice de rigidité utilisée dans l'algorithme de Newton sera très petit, ce qui signifie que cette matrice est mal conditionnée et que la convergence risque d'être très lente, voire même impossible ! On illustre ce problème sur la figure 9.12, avec un point de bifurcation où le problème linéaire tangent est mal posé en  $\underline{\delta x}$ .

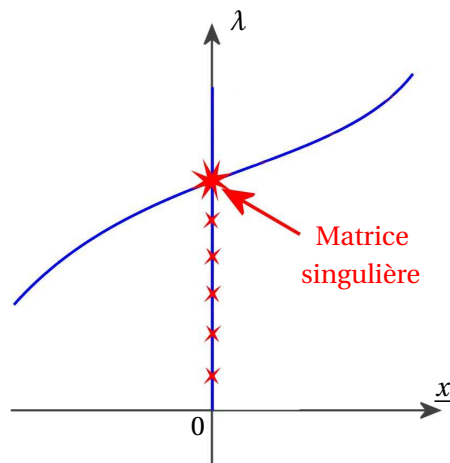


FIG. 9.12: Calcul incrémental sur un problème parfait

*Remarque* : Dans une méthode incrémentale sur un problème parfait, la charge critique peut ainsi être déterminée juste en regardant si la plus petite valeur propre de la matrice de rigidité (qui est donnée lors de la décomposition de Cholesky  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$  lors de la factorisation) est proche de zéro.

On peut alors penser à une solution très simple pour éviter ce genre de problème de convergence dans une méthode incrémentale : Nous avons vu dans la sous section 9.3.3 que les points de bifurcation sont "gommés" lorsqu'on introduit des imperfections dans la configuration initiale. Ainsi, si on réalise un calcul incrémental à partir d'une configuration perturbée, on peut éviter la zone où la matrice devient singulière, et obtenir une convergence rapide vers la branche bifurquée (cf figure 9.13(a)).

Cependant, comme nous l'avons vu dans la sous section 9.3.3, un point de bifurcation peut très bien être remplacé par un point limite lorsqu'on ajoute une perturbation. Cette situation est catastrophique pour les méthodes incrémentales : il se peut que la charge dépasse ce point limite pendant l'incrément, auquel cas le calcul va diverger (voir figure 9.13(b)).

Par conséquent, si on ne peut pas garantir l'absence de points limites lorsqu'on introduit une perturbation de l'état initial, l'utilisation des méthodes incrémentales est dangereuse. Il faut alors construire des méthodes un peu plus complexes permettant de gérer ce genre de situations (voir par exemple (Lahman et al., 2002)). C'est le sujet de la suite de cette section.



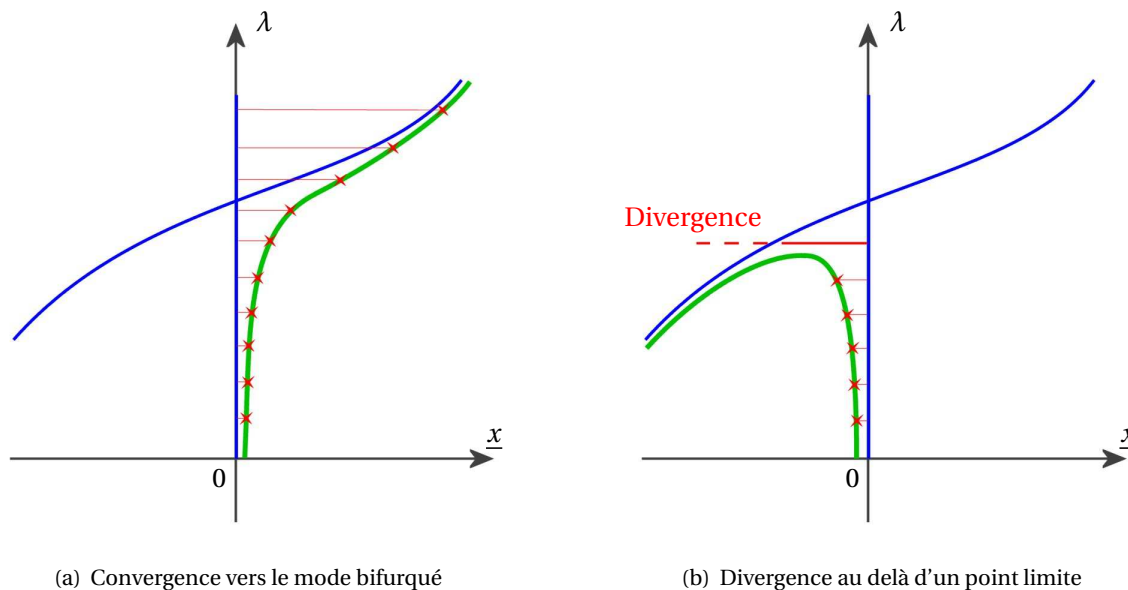


FIG. 9.13: Calculs incrémentaux sur un problème perturbé

### 9.4.2 Méthode asymptotique

On rappelle que l'objectif général est de suivre une branche d'équilibre de manière progressive. Supposons que cette courbe est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{x}(\tau) \\ \lambda = \lambda(\tau) \end{cases} \quad (9.10)$$

où  $\tau$  est un paramètre cinématique quelconque. On suppose que l'on connaît une position d'équilibre  $\underline{x}_0$  à la valeur initiale  $\lambda_0 = 0$ , qui peut par exemple être la configuration au repos.

Pour franchir un point limite, la difficulté concerne le contrôle des pas de calcul, car l'incrément de charge  $\delta\lambda$  ne doit pas être choisi de manière arbitraire et ce contrôle ne doit pas y être monotone. Une première solution a été développée par (Damil and Potier-Ferry, 1990), basée sur des développements asymptotiques d'ordre supérieur de l'inconnue  $\underline{x}$  et de la charge  $\lambda$ . Cette méthode est aujourd'hui appelée *méthode asymptotique numérique* (ANM).

Plus précisément : soit  $(\underline{x}_0, \lambda_0)$  une configuration d'équilibre régulière, vérifiant l'équation d'équilibre :

$$\mathcal{E}_{,x}(\underline{x}_0, \lambda_0) = 0$$

On cherche à approcher le comportement de  $\underline{x}$  et  $\lambda$  si on suit la branche d'équilibre autour de  $(\underline{x}_0, \lambda_0)$ . Si on note toujours  $\tau$  le paramètre cinématique décrivant l'abscisse curviligne le long de la courbe en partant de  $(\underline{x}_0, \lambda_0)$ , alors  $\underline{x}(\tau)$  et  $\lambda(\tau)$  sont recherchés sous la forme de séries entières tronquées à l'ordre  $n$  :

$$\begin{cases} \underline{x}(\tau) = \underline{x}_0 + \tau \underline{x}_1 + \tau^2 \underline{x}_2 + \dots + \tau^n \underline{x}_n \\ \lambda(\tau) = \lambda_0 + \tau \lambda_1 + \tau^2 \lambda_2 + \dots + \tau^n \lambda_n \end{cases}$$

Une méthode de perturbation permet alors de calculer tous les  $(\underline{x}_k)_{k=1,n}$  et  $(\lambda_k)_{k=1,n}$  en résolvant plusieurs problèmes linéaires utilisant la même matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{E}}_{,xx}$  calculée autour d'un point régulier. Ainsi, un seul calcul de matrice, et une seule factorisation de cette matrice sont réalisés à chaque pas, ce qui permet de gagner en temps de calcul. De plus, en choisissant des ordres  $n$

élevés, on peut espérer que le rayon de convergence permette de choisir de plus grands pas de calcul pour suivre de proche en proche un trajet de chargement, et le reconstruire sous forme polynomiale par morceaux par rapport au paramètre  $\tau$ .

On résume le fonctionnement de cette méthode par l'algorithme 3. Cette méthode est décrite plus en détails dans (Cochelin et al., 2007) et (Cochelin, 1994). Un état de l'art sur son développement est disponible dans (Potier-Ferry, 2004), et on notera que plusieurs travaux récents utilisent cette méthode pour l'étude de bifurcations (voir (Cadou et al., 2006), (Yvonnet et al., 2007), (Nezamabadi et al., 2009),...).

```

Input : Configuration au repos  $\underline{x}_0$ 
Input : Pas du paramètre  $\tau$  fixé, noté  $\delta\tau$ 
Initialiser la charge  $\lambda_0$  à 0 ;
for  $i=1$  à  $N$  do
  Calculer  $\overline{E_{,xx}}$ ;
  Factoriser la matrice une fois pour toute ;
  for  $k=1$  à  $n$  do
    Calculer  $\underline{x}_k$  et  $\lambda_k$  par perturbations ;
  end
  Actualiser la configuration :  $\underline{x}_0 = \sum_{k=0}^n \delta\tau^k \underline{x}_k$ ;
  Actualiser le chargement :  $\lambda_0 = \sum_{k=0}^n \delta\tau^k \lambda_k$ ;
end
Output : Configuration  $\underline{x}_0$  à l'équilibre sous la charge  $\lambda_0$ 
Algorithme 3 : Méthode asymptotique numérique de suivi d'une branche d'équilibre

```

### 9.4.3 Contrôle de longueur d'arc

Comme nous l'avons dit dans la sous section précédente, l'objectif est ici de suivre une courbe d'équilibre caractérisée par les équations 9.10 à partir d'une configuration  $(\underline{x}(0), \lambda(0)) = (\underline{x}_0, 0)$  connue.

Au voisinage d'un point critique, le rayon de convergence d'une méthode de Newton-Raphson ou même du développement asymptotique peut devenir assez limité, voire nul dans une approche incrémentale. Ceci a poussé certains auteurs à utiliser un autre type de méthodes, appelées "méthodes de contrôle par longueur d'arc" ("arc-length methods" en anglais).

L'idée principale de ces méthodes est de considérer le pas  $\delta\lambda$  comme une inconnue, fixée par un contrôle de longueur d'arc le long de la courbe d'équilibre :

$$\forall \tau > 0, \quad \left\| \frac{\partial \underline{x}}{\partial \tau} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right\|^2 = 1$$

On va alors résoudre l'équation d'équilibre  $\mathcal{E}_{,x}(\underline{x}, \lambda) = 0$  sous cette contrainte par une méthode itérative de type Newton-Raphson classique, en résolvant à chaque itération le problème non linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial (\underline{x}, \lambda)}(\underline{x} + \delta \underline{x}, \lambda + \delta \lambda) = 0 \\ \|\delta \underline{x}\|^2 + \|\delta \lambda\|^2 = \delta \tau^2 \end{cases} \quad (9.11)$$

Ce problème est résolu le plus souvent par une méthode de Newton, en partant d'une configuration  $(\underline{x}, \lambda)$  satisfaisant l'équation d'équilibre  $\mathcal{E}_{,x}(\underline{x}, \lambda) = 0$ .

On résume le fonctionnement de ces méthodes par l'algorithme 4. Une description détaillée de ce type de méthodes est disponible dans (Keller, 1983).

**Input :** Configuration au repos  $\underline{x}_0 = \underline{x}_0$   
**Input :** Pas du paramètre  $\tau$  fixé, noté  $\delta\tau$   
 Initialiser la charge  $\lambda_0$  à 0 ;  
**for**  $k=1$  à  $n$  **do**  
   Initialiser  $\underline{\delta x} = 0$  et  $\delta\lambda = 0$  ;  
   **while**  $\|R\acute{e}sidu\| > \epsilon$  **do**  
     Calculer  $\frac{\partial^2 E}{\partial(\underline{x}, \lambda)^2}$  et  $\frac{\partial E}{\partial(\underline{x}, \lambda)}$  ;  
     Résoudre le problème 9.11 linéarisé ;  
     Actualiser  $\underline{\delta x}$  et  $\delta\lambda$  ;  
   **end**  
   Actualiser la configuration :  $\underline{x}_k = \underline{x}_{k-1} + \underline{\delta x}$  ;  
   Actualiser le chargement :  $\lambda_k = \lambda_{k-1} + \delta\lambda$  ;  
**end**  
**Output :** Configuration  $\underline{x}_n$  à l'équilibre sous la charge  $\lambda_n$   
**Algorithme 4 :** Méthode de suivi d'une branche d'équilibre par contrôle de longueur d'arc

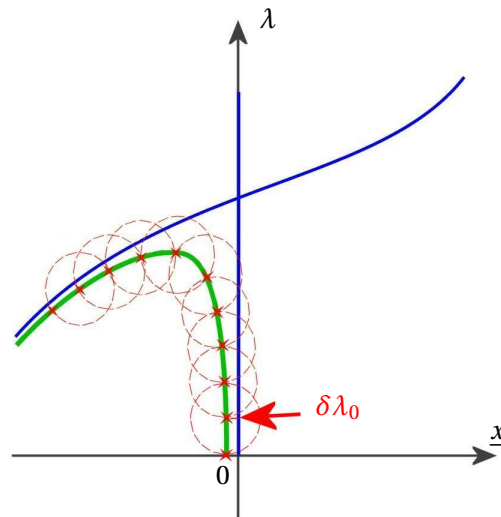


FIG. 9.14: Calcul par contrôle de longueur d'arc

*Remarque :* Dans tout ce qui précède, on a supposé qu'il existait un seul mode propre aux points de bifurcation. Il peut arriver que plusieurs modes bifurqués apparaissent, auquel cas on parle de "point de bifurcation en mode multiple". Ce cas dépasse le cadre de ce rapport, et nous reportons le lecteurs aux ouvrages (Koiter, 1945), (Triantafyllidis and Peek, 1992), (Peek and Triantafyllidis, 1992) ou encore (Casciero et al., 1992).

## ■ 9.5 Analyse de stabilité multi-échelles

Les définitions et les exemples donnés dans les sections précédentes de ce chapitre ont supposé que l'on dispose de l'énergie exacte de la structure. Elles sont bien applicables aux matériaux hyperélastiques homogènes, mais posent problème pour les matériaux hétérogènes, pour lesquels on ne dispose que d'une énergie homogénéisée à l'échelle macroscopique (pouvant être calculée par les méthodes résumées dans le chapitre 5). Les phénomènes d'instabilité dans les matériaux hétérogènes peuvent aussi bien apparaître à l'échelle microscopique qu'à l'échelle macroscopique, ce qui complique leur étude. On propose dans cette section un état de l'art non exhaustif des résultats disponibles dans la littérature pour ce genre de matériaux.

L'étude de la stabilité des matériaux hétérogènes est un sujet de recherche assez nouveau (les premiers travaux sont dûs à (Triantafyllidis and Abeyaratne, 1983) et (Abeyaratne and Triantafyllidis, 1984)), mais fait l'objet d'une large littérature depuis quelques années. On ne décrit ici qu'une petite sélection de travaux. Les matériaux hétérogènes peuvent être classés en deux grandes catégories, selon le type de structure locale :

- Microstructure périodique : ils correspondent majoritairement à des matériaux utilisés dans l'industrie, fabriqués de manière connue et reproductible (renforts fibrés, nids d'abeilles, matériaux cellulaires, ...).
- Microstructure aléatoire : Tous les matériaux, qu'ils soient naturels (roches, tissus vivants,...) ou industriels (métaux, élastomères, ...), ont une structure hétérogène aléatoire à l'échelle de la matière.

### **Composites à microstructure périodique :**

Dans ce cas, la périodicité de ces solides permet des calculs exacts de l'apparition de leur instabilité sous un chargement macroscopique arbitraire si on suppose que les dimensions macroscopiques de la structure sont infinies. On suppose que le chargement imposé est choisi de telle sorte que toutes les cellules élémentaires se déforment de manière identique dans la solution fondamentale.

Les travaux de (Muller, 1987) ont montré que lorsque la fonction d'énergie n'est pas convexe, il est nécessaire de tenir compte de toutes les tailles de cellules périodiques pour calculer l'énergie de déformation homogénéisée. La charge critique est alors définie comme l'infimum des charges critiques calculées sur toutes les tailles de cellules. La méthode donne de bons résultats (voir (Abdelmoula et al., 1993)), mais est très coûteuse en temps de calculs.

Une méthode équivalente beaucoup plus rapide a alors été développée : il a été établi par (Geymonat et al., 1993) que dans le cas des solides 3D périodiques en grandes déformations, les modes d'instabilités microscopiques (c'est à dire ayant un longueur d'onde finie par rapport à la microstructure) peuvent être représentés sous forme d'ondes de Bloch (cf (Bloch, 1928)). Le calcul de charge critique est alors réalisé à partir d'une cellule élémentaire, et il est démontré que cela est équivalent aux calculs sur une cellule à période spatiale variable réalisés par (Muller, 1987). De plus, dans le cas où la longueur d'onde du mode d'instabilité tend vers l'infini par rapport à la taille d'une cellule élémentaire, il est également prouvé dans (Geymonat et al., 1993) que l'instabilité macroscopique correspondante peut être calculée à partir de la perte de rang-1 convexité du module tangent homogénéisé. Ce dernier résultat généralise le travail (Triantafyllidis and Maker, 1985), qui avait établi le lien entre les instabilités apparaissant à l'échelle macroscopique et la perte de rang-1 convexité dans le cas particulier des matériaux composites stratifiés renforcés par des fibres.

En reprenant les résultats de (Geymonat et al., 1993), (Triantafyllidis and Bardenhagen, 1996) définit les surfaces de charge en contraintes dans l'espace des déformations pour des solides pério-

diques infinis. Cette approche a depuis été utilisée pour de nombreux matériaux périodiques : nids d'abeilles en aluminium dans (Triantafyllidis and Schraad, 1998) et (Michailidis et al., 2009), composites renforcés par des fibres dans (Nestorovic and Triantafyllidis, 2004), mousses de Kelvin dans (Gong et al., 2005), élastomères poreux dans (Triantafyllidis et al., 2006).

#### **Composites à microstructure aléatoire :**

Pour ce type de matériaux, on ne dispose que d'informations statistiques sur ce qui se passe à l'échelle microscopique. Il n'existe pas de résultats exacts dans ce cas, ce qui rend leur étude plus difficile. D'après (Michel et al., 2010), il semble que les instabilités apparaissant à une échelle voisine de celle d'une cellule élémentaire tendent à disparaître lorsque la microstructure est perturbée de manière aléatoire par rapport à son état purement périodique. Cela suggère que les instabilités qui apparaissent dans des composites aléatoires sont plutôt "macroscopiques", avec des longueurs d'onde très grandes par rapport à la taille caractéristique de la microstructure. Ainsi, plusieurs auteurs ont étudié la stabilité de tels composites aléatoires en utilisant la condition d'ellipticité sur l'énergie homogénéisée à l'échelle globale. On citera par exemple les travaux récents (Lopez-Pamies and Castaneda, 2006b), (Lopez-Pamies and Castaneda, 2009) ou (Agoras et al., 2009b).

## **■ Conclusions**

L'étude de la stabilité des structures est fondamentale, en particulier dans les domaines industriels cherchant à optimiser les caractéristiques des matériaux utilisés. Elle est donc encore l'objet de nombreux travaux scientifiques. Ce chapitre a permis d'introduire les notions de base de la stabilité, à savoir les points de bifurcation, les points limites et l'influence des perturbations.

Nous avons présenté les principales méthodes numériques permettant de réaliser des calculs post-bifurcations, ainsi que les résultats récents obtenus sur l'analyse de stabilité des matériaux composites. Nous allons mettre en oeuvre ces techniques de stabilité multi-échelles dans le chapitre 10.

## Etude de flambement d'une nappe en flexion circulaire

### ■ Introduction

L'objectif de ce chapitre est de modéliser le flambement des nappes fibrées lorsque les câbles sont soumis à une compression axiale. Pour cela, nous avons choisi de nous placer dans le cas particulier d'une flexion circulaire. Nous réalisons une analyse de stabilité multi-échelles basée sur le résultat de (Geymonat et al., 1993), qui permet de réduire le problème à une cellule élémentaire  $2D$  et de modéliser les modes propres sous forme d'ondes de Bloch. Cette étude va nous permettre de mieux comprendre le mécanisme d'instabilités des nappes, et de valider les résultats de flambement obtenus par nos modèles dans les parties I et II. Le chapitre s'organise en cinq sections :

- La section 10.1 présente le problème mécanique (géométrie et chargement) et explique la mise en compression axiale des câbles ;
- Nous introduisons la formulation continue du problème dans la section 10.2, en supposant que la structure est infinie dans le plan de la nappe. On commence par décrire la forme de la solution principale à l'équilibre, puis nous utilisons le résultat de (Geymonat et al., 1993) pour pouvoir écrire les modes propres sous la forme d'ondes de Bloch. Le principal résultat est que les calculs d'équilibre et des modes d'instabilité peuvent être réduits à une cellule élémentaire  $2D$  ;
- La section 10.3 donne les détails du calcul de la courbure critique par ondes de Bloch sur une cellule élémentaire  $2D$  : nous y présentons la discrétisation et l'algorithme de résolution ;
- Parallèlement à cette analyse de stabilité multi-échelles, nous précisons dans la section 10.4 la gestion du phénomène de bifurcation dans les calculs  $3D$  macroscopiques, réalisés par une méthode incrémentale associée à une méthode de Newton-Raphson : une perturbation géométrique est ajoutée à la configuration de repos parfaite pour pousser le modèle à bifurquer vers la branche de bifurcation voulue. Une approximation de la courbure critique peut alors être calculée en diminuant l'amplitude de l'imperfection ;
- Enfin, nous présentons les résultats numériques obtenus avec les deux méthodes dans la section 10.5 : nous y vérifions que le flambement prédit est latéral dans le plan de la nappe, comme le montre l'expérience, et que nos modèles macroscopiques et multi-échelles permettent chacun de détecter correctement la bifurcation.

## 10.1 Présentation du problème

### Géométrie

On reprend dans ce chapitre la géométrie de l'éprouvette décrite dans le chapitre 1. On se place dans l'espace  $E = \mathbb{R}^3$ , dans lequel on choisit un repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . On considère une éprouvette initialement plane, dont le volume est noté  $\Omega$ . On note  $L_1$  et  $L_2$  ses dimensions dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , alors que son épaisseur selon  $\underline{e}_3$  est notée  $h$ . Ce solide est composé de trois matériaux :

- Une fine lame métallique, appelée clinquant, sur la partie supérieure. Cette lame est supposée avoir une rigidité en extension très élevée, de telle sorte qu'elle sera supposée inextensible dans la suite;
- Des câbles de renforts à section circulaire, de rayon  $r$ , situés dans la partie inférieure de la nappe. Au repos, ces câbles sont supposés rectilignes et parallèles à  $\underline{e}_1$  ;
- Une gomme hyperélastique pouvant subir de très grandes déformations.

On suppose par ailleurs que l'écartement entre les câbles est constant, noté  $e$ . Cette hypothèse permet de considérer une géométrie périodique, de telle sorte que le volume 3D de l'éprouvette, noté  $\Omega$ , peut être décomposé en cellules élémentaires 2D identiques, notées  $\Omega_e$ .

Toutes ces notations sont résumées sur la figure 10.1.

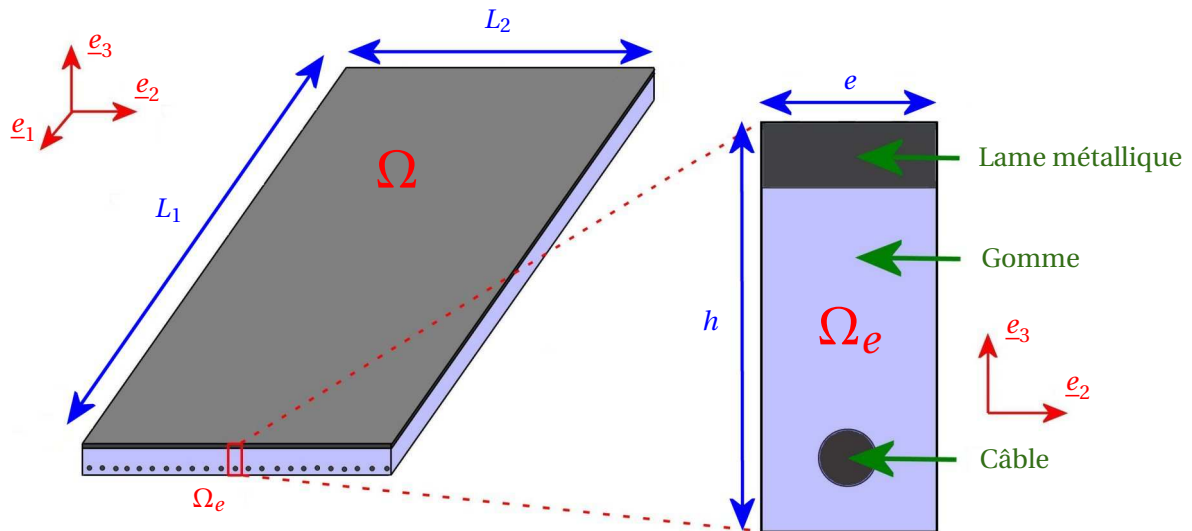


FIG. 10.1: Géométrie de l'éprouvette

Par ailleurs, on va supposer dans la suite que la relation suivante est respectée :

$$e, h \ll L_1, L_2$$

Cette hypothèse permet de supposer que le solide est de dimension infinie dans les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ , ce qui permet de négliger les effets de bords. Ainsi, on pourra considérer que toutes les cellules élémentaire  $\Omega_e$  se déforment de la même manière pour un chargement uniforme.

## Chargement

L'idée générale du problème est de soumettre la nappe à une flexion circulaire sur sa face supérieure, de manière à créer une compression axiale des câbles dans la partie inférieure.

Plus précisément, on souhaite créer une courbure  $\rho$  dans l'ensemble de la structure, en supposant que la lame métallique supérieure ne subit pas d'extension. On choisit pour cela d'imposer les déplacements suivant sur cette face supérieure : (le chargement est résumé sur la figure 10.2)

$$\begin{aligned} \forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \underline{x}(X_1, X_2, h) &= \underline{x}_0 + \frac{1}{\rho} \underline{e}_r(\rho X_1) + X_2 \underline{e}_2 \\ &= \underline{x}_0 + \frac{1}{\rho} \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{e}_3 + X_2 \underline{e}_2 \end{aligned} \quad (10.1)$$

où  $\underline{R}(\rho X_1)$  est le tenseur de rotation d'angle  $\theta = \rho X_1$  défini par

$$\underline{R}(\rho X_1) = \underline{e}_\theta(\rho X_1) \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_r(\rho X_1) \otimes \underline{e}_3 \quad (10.2)$$

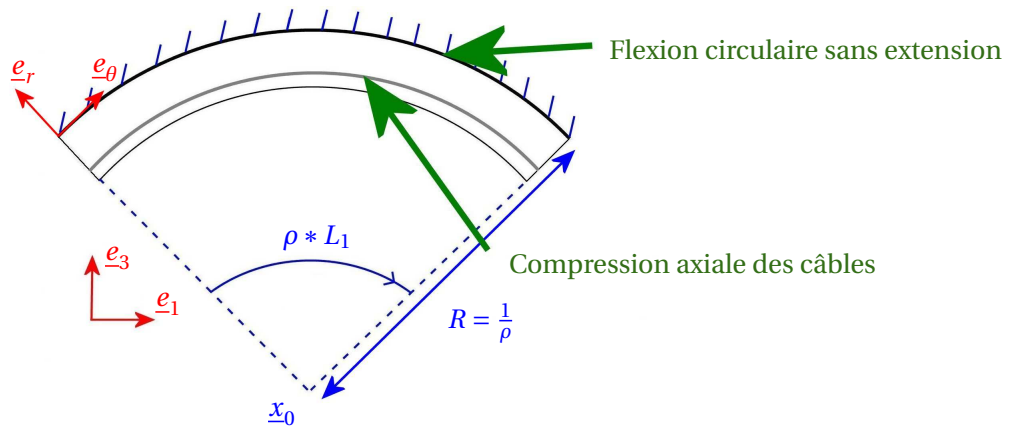


FIG. 10.2: Chargement sur l'éprouvette

Les déplacements sont laissés libres sur la face inférieure de l'éprouvette. De plus, le solide étant supposé infini dans les directions  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_2$ , on néglige les effets sur les bords latéraux de la nappe. On ne prendra donc pas la peine de décrire de conditions aux limites à ces extrémités.

Il est bien connu que les structures fines résistent mal à de fortes compressions. La modélisation du flambement des nappes fibrées sous compression a d'ailleurs déjà été étudiée par exemple par (Gardin et al., 1998) en l'assimilant à un milieu stratifié 2D. Si la compression des câbles devient trop forte, on s'attend à ce que l'équilibre devienne instable, conduisant à un flambement global de la structure comme illustré sur le schéma 10.3.

*Remarque :* Avec le chargement imposé expérimentalement, la lame métallique supérieure est en légère extension, et la ligne d'extension nulle de l'éprouvette se situe juste en dessous de celle-ci. Nous supposons ici que cette lame ne subit pas d'extension pour simplifier les conditions aux limites utilisées numériquement, ce qui ne modifie pas significativement la compression subie par les câbles.

L'objectif de la suite de ce chapitre est d'étudier la stabilité de la structure en fonction du paramètre de courbure  $\rho$ , et de détecter les points de bifurcations de la solution principale. La section 10.2 présente la théorie continue permettant de résoudre ce problème multi-échelles.



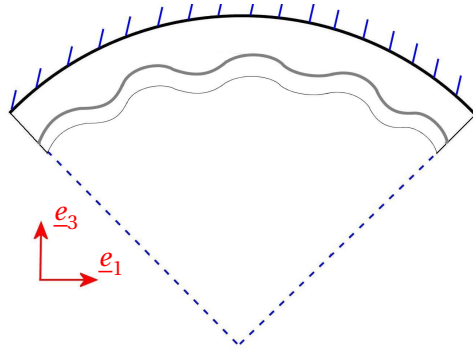


FIG. 10.3: Flambement de l'éprouvette en forte flexion circulaire

## 10.2 Formulation du problème continu

Commençons par définir les espaces mathématiques dans lesquels on travaille. On suppose que les déplacements ont leurs composantes dans  $H_{loc}^1(\Omega)$ , c'est à dire de carré localement intégrable et avec un gradient également de carré localement intégrable sur le volume. On introduit donc l'espace suivant :

$$H(\Omega) = \{ \underline{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_i \in H_{loc}^1(\Omega) \}$$

On définit alors l'espace des configurations admissibles par :

$$H_\rho(\Omega) = \left\{ \underline{x} \in H(\Omega) \text{ tels que } \forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \underline{x}(X_1, X_2, h) = \underline{x}_0 + \frac{1}{\rho} R(\rho X_1) \cdot \underline{e}_3 + X_2 \underline{e}_2 \right\}$$

On lui associe l'espace des variations admissibles :

$$H_0(\Omega) = \left\{ \underline{x} \in H(\Omega) \text{ tels que } \forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \underline{x}(X_1, X_2, h) = \underline{0} \right\}$$

### 10.2.1 Calcul de la solution principale

Comme cela a été rappelé dans le chapitre 9, les configurations d'équilibre  $\underline{x} \in H_\rho(\Omega)$  d'un solide hyperélastique sont définies comme étant les solutions de l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

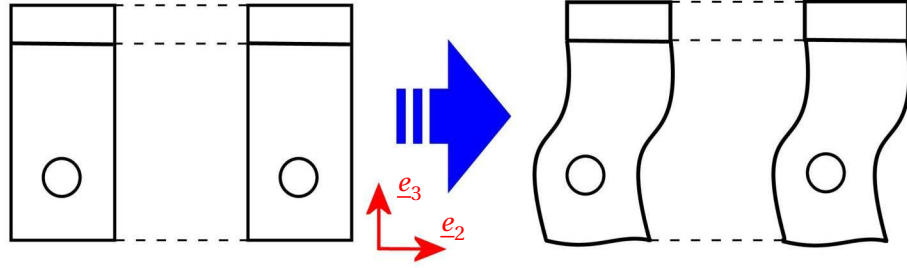
$$\forall \hat{\underline{x}} \in H_0(\Omega), \iint \int_{\Omega} \underline{P}(\underline{\nabla} \underline{x}) : \underline{\nabla} \hat{\underline{x}} dX_1 dX_2 dX_3 = 0 \quad (10.3)$$

Ce problème est écrit ici sous une forme très générale, et il faut tenir compte des hypothèses qui ont été réalisées dans la section 10.1. Dans ce qui suit, nous allons donc restreindre l'espace des configurations admissibles et montrer que ce problème d'équilibre peut être ramené à un problème sur une unique cellule élémentaire  $\Omega_e$ .

#### Forme de la solution principale

Les effets de bords étant négligés, on peut supposer que toutes les cellules élémentaires se déforment de la même manière dans la solution fondamentale. Pour que deux cellules voisines dans la direction  $\underline{e}_2$  se déforment de façon identique (comme sur la figure 10.4), les déplacements doivent être périodiques, ce qui s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{x}(X_1, X_2 + n * e, X_3) = \underline{x}(X_1, X_2, X_3) + n * e \underline{e}_2 \quad (10.4)$$

FIG. 10.4: Solution principale :  $X_2$ -périodicité des déplacements

Autrement dit, le déplacement se répète en  $X_2$  de cellule en cellule. Par ailleurs, on suppose que le mouvement le long de  $X_1$  est une simple rotation. Les configurations déformées de deux cellules élémentaires, initialement parallèles et distantes de  $dX_1$ , doivent être identiques à une rotation d'angle  $d\theta = \rho dX_1$  près, comme représenté sur la figure 10.5. Cela se traduit par la relation suivante :

$$\forall dl \in \mathbb{R}, \forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \forall X_3 \in [0; h],$$

$$\underline{x}(X_1 + dl, X_2, X_3) - \underline{x}_0(X_2) = \underline{R}(\rho dl) \cdot (\underline{x}(X_1, X_2, X_3) - \underline{x}_0(X_2)) \quad (10.5)$$

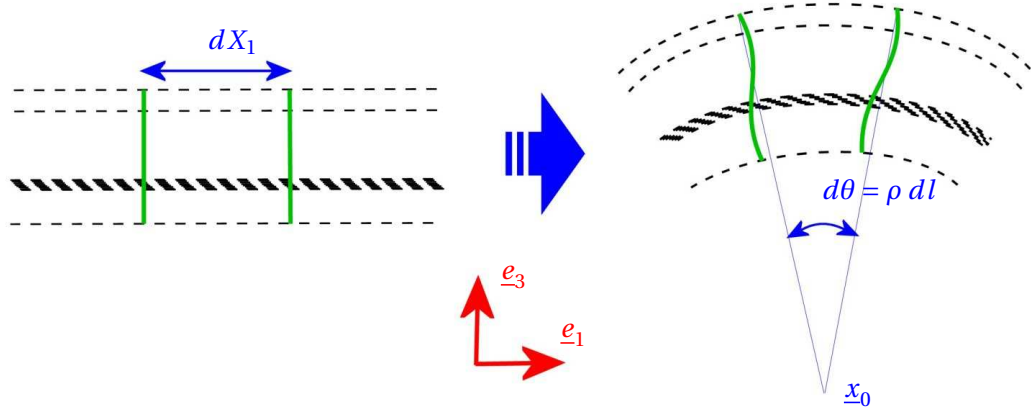


FIG. 10.5: Solution principale : cellules déformées identiques à une rotation près

Les deux propriétés d'invariance 10.4 et 10.5 impliquent que la solution fondamentale  $\underline{x} \in H_\rho(\Omega)$  doit être cherchée sous la forme :

$$\forall X_1 \in [0; L_1], \forall X_2 \in [0; L_2], \forall X_3 \in [0; h], \underline{x}(X_1, X_2, X_3) = \underline{x}_0 + \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{p}(X_2, X_3) + X_2 \underline{e}_2 \quad (10.6)$$

où  $\underline{p}$  est une fonction vecteur exprimée dans le repère local à chaque cellule, indépendante de  $X_1$  et périodique par rapport à  $X_2$  :

$$\forall X_3 \in [0; h], \forall X_2 \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}], \forall n \in \mathbb{Z}, \underline{p}(X_2 + n * e, X_3) = \underline{p}(X_2, X_3) \quad (10.7)$$

Par ailleurs,  $\underline{p}$  vérifie la condition aux limites :

$$\forall X_2 \in [-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}], \underline{p}(X_2, h) = \frac{1}{\rho} \underline{e}_3 \quad (10.8)$$

On voit donc que nous sommes ramenés à considérer des fonctions évoluant sur une cellule élémentaire  $\Omega_e$ , définies dans l'espace :

$$K(\Omega_e) = \left\{ \underline{p} : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_i \in H_{loc}^1(\Omega) \right\}$$

L'espace des fonctions  $X_2$ -périodiques sur  $\Omega_e$  est noté :

$$K_{per}(\Omega_e) = \left\{ \underline{p} \in K(\Omega_e) \text{ tels que } \forall X_3 \in [0; h], \underline{p}\left(-\frac{e}{2}, X_3\right) = \underline{p}\left(\frac{e}{2}, X_3\right) \right\}$$

On définit alors l'espace des fonctions  $\underline{p}$  admissibles par :

$$K_\rho(\Omega_e) = \left\{ \underline{p} \in K(\Omega_e) \text{ tels que } \forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \underline{p}(X_2, h) = \frac{1}{\rho} \underline{e}_3 \right\}$$

On lui associe l'espace des variations admissibles :

$$K_0(\Omega_e) = \left\{ \underline{p} \in K(\Omega_e) \text{ tels que } \forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \underline{p}(X_2, h) = \underline{0} \right\}$$

L'espaces des solutions périodiques admissibles est alors défini par  $K_\rho^{per}(\Omega_e) = K_{per}(\Omega_e) \cap K_\rho(\Omega_e)$ , et les variations périodiques admissibles seront prises dans  $K_0^{per}(\Omega_e) = K_{per}(\Omega_e) \cap K_0(\Omega_e)$ .

On peut remarquer que pour toute configuration déformée  $\underline{x} \in H(\Omega)$  de la forme 10.6, le gradient de déformation  $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$  est égal à :

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial X_1} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \underline{R}(\rho X_1) \cdot (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \underline{R}(\rho X_1) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3$$

On rappelle que le tenseur de rotation  $\underline{R}$  est défini par l'expression 10.2 :

$$\underline{R}(\rho X_1) = \underline{e}_\theta(\rho X_1) \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_r(\rho X_1) \otimes \underline{e}_3$$

Des dérivées des vecteurs du repère local

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial X_1}(\rho X_1) = -\rho \underline{e}_\theta(\rho X_1) \\ \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial X_1}(\rho X_1) = \rho \underline{e}_r(\rho X_1) \end{cases}$$

on déduit le calcul de la dérivée de  $\underline{R}$  par rapport à  $X_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{R}}{\partial X_1}(\rho X_1) &= \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial X_1}(\rho X_1) \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial X_1}(\rho X_1) \otimes \underline{e}_3 \\ &= \rho \underline{e}_r(\rho X_1) \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 - \rho \underline{e}_\theta(\rho X_1) \otimes \underline{e}_3 \\ &= \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{A}(\rho) \end{aligned}$$

où le tenseur antisymétrique  $\underline{A}$  a été défini par

$$\underline{A}(\rho) = \rho(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) \quad (10.9)$$

Ainsi, le tenseur gradient de déformation  $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$  peut être simplifié sous la forme :

$$\underline{\underline{F}}(X_1, X_2, X_3) = \underline{R}(\rho X_1) \cdot \left[ \underline{A}(\rho) \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + (\underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3)) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right]$$

### Problème 2D associé

On cherche donc la solution principale  $\underline{x}_b$  sous la forme 10.6, satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange 10.3 locale par cellule. Elle doit en particulier satisfaire l'équation :

$$\forall \underline{\hat{p}} \in K_0^{per}(\Omega_e), \iint \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial \underline{F}} \left( \underline{A} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \left( \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \underline{A} \cdot \underline{\hat{p}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX = 0$$

Dans cette équation, le terme de rotation n'intervient pas, car les équations d'équilibre sont invariantes par changement de référentiel.

En utilisant la périodicité par rapport à  $X_2$  et l'indépendance en  $X_1$ , ceci est équivalent au problème suivant sur une cellule élémentaire 2D :

#### Pb 10.2.1 Problème d'équilibre sur une cellule élémentaire

Trouver  $\underline{p} \in K_0^{per}(\Omega_e)$  tel que

$$\forall \underline{\hat{p}} \in K_0^{per}(\Omega_e), \iint_{\Omega_e} \frac{\partial w}{\partial \underline{F}} \left( \underline{A} \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \left( \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \underline{A} \cdot \underline{\hat{p}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 = 0 \quad (10.10)$$

*Remarque* : On notera que le volume élémentaire  $\Omega_e$  apparaissant dans cette analyse de stabilité ne correspond pas au volume élémentaire  $\Omega_{nap}^e$  qui a été utilisé dans la méthode multi-échelles, décrite dans la deuxième partie de ce rapport. Le premier considère toute l'épaisseur  $h$  de la structure, alors que le second ne représente que la couche renforcée par des câbles, d'épaisseur  $h_{nap}$ . On résume ceci sur la figure 10.6.

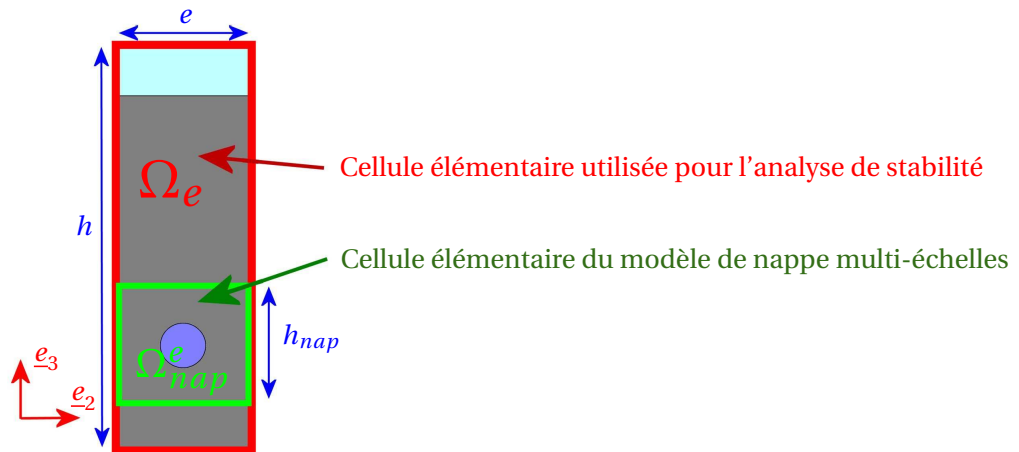


FIG. 10.6: Cellules élémentaires utilisées

### 10.2.2 Analyse de stabilité de l'équilibre

### Critère de seconde variation

On cherche dans cette partie à déterminer si la solution principale décrite précédemment est stable. On utilise pour cela le critère de seconde variation décrit dans le chapitre 9, qui donne une condition suffisante pour exclure toute bifurcation le long d'un chemin d'équilibre.

*Remarque* : Dans le cas de matériaux élasto-plastiques, le critère de seconde variation est remplacé par une condition analogue, appelée "critère de bifurcation de Hill" (cf (Hill, 1958)). La démarche décrite ici pourra donc facilement être généralisée à cette classe de matériaux, comme cela est fait dans (Triantafyllidis et al., 2006).

Etant donnée une courbure  $\rho$ , on suppose avoir résolu le problème d'équilibre avec la méthode que l'on vient de décrire, et on note  $\underline{x}_b$  la solution principale périodique. On connaît alors le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{P}}$  ainsi que le tenseur tangent du 4<sup>e</sup> ordre noté  $\underline{\underline{L}}$ , tous deux exprimés dans le repère  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3) \otimes (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . Les caractéristiques de notre problème nous assurent qu'ils sont tous les deux indépendants de  $X_1$  et périodiques en  $X_2$  :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{P}}(\rho, X_2 + n * e, X_3) &= \underline{\underline{P}}(\rho, X_2, X_3) \\ \underline{\underline{L}}(\rho, X_2 + n * e, X_3) &= \underline{\underline{L}}(\rho, X_2, X_3)\end{aligned}$$

On introduit la fonctionnelle quadratique en  $\underline{\delta x}$  suivante :

$$\begin{aligned}F_\Omega : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{H}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\rho, \underline{\delta x}) &\mapsto \iint\int_\Omega \overline{\underline{\underline{\nabla \delta x}}} : \underline{\underline{L}}(\rho, X_2, X_3) : \underline{\underline{\nabla \delta x}} d\Omega\end{aligned}\quad (10.11)$$

où l'espace  $\mathbb{H}(\Omega)$  est défini par

$$\mathbb{H}(\Omega) = \left\{ \underline{z} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ tels que } \exists (\underline{x}, \underline{y}) \in H(\Omega)^2, \underline{z} = \underline{x} + i \underline{y} \right\}$$

De la même manière, on introduit l'espace de fonctions complexes définies sur une cellule élémentaire :

$$\mathbb{K}(\Omega_e) = \left\{ \underline{z} : \Omega_e \rightarrow \mathbb{C}^3 \text{ tels que } \exists (\underline{x}, \underline{y}) \in K(\Omega_e)^2, \underline{z} = \underline{x} + i \underline{y} \right\}$$

Par analogie, on utilisera également les notations  $\mathbb{H}_0(\Omega)$  et  $\mathbb{K}_0(\Omega_e)$  pour les espaces de fonctions respectant les conditions aux limites homogènes.

*Remarque* : Le tenseur tangent  $\underline{\underline{L}}$  est réel symétrique, ce qui implique que  $\overline{\underline{\underline{\nabla \delta x}}} : \underline{\underline{L}}(\rho, X_2, X_3) : \underline{\underline{\nabla \delta x}}$  est bien dans  $\mathbb{R}$  pour toute fonction  $\underline{\delta x} \in \mathbb{H}(\Omega)$ .

Le critère de seconde variation est basé sur la définie-positivité de la fonctionnelle  $F_\Omega$  sur le sous-espace  $\mathbb{H}_0(\Omega)$ . Par conséquent, l'équilibre principal est stable si sa plus petite valeur propre  $\beta(\rho)$  définie ci-dessous est strictement positive :

$$\beta(\rho) = \min_{\underline{\delta x} \in \mathbb{H}_0(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\|\underline{\delta x}\|_{\mathbb{H}}^2} F_\Omega(\rho, \underline{\delta x}) \right\}\quad (10.12)$$

Il est linéairement instable si  $\beta(\rho) < 0$ .

On a introduit ici la semi-norme  $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$  sur l'espace  $\mathbb{H}(\Omega)$ , définie par :

$$\|\underline{\delta x}\|_{\mathbb{H}}^2 = \iint\int_\Omega \overline{\underline{\underline{\nabla \delta x}}} : \underline{\underline{\nabla \delta x}} d\Omega\quad (10.13)$$

### Modes propres

Notre structure étant supposée parfaitement périodique, on utilise le résultat de (Geymonat et al., 1993), selon lequel les modes propres de bifurcation  $\underline{\delta x} \in \mathbb{H}_0(\Omega)$  peuvent être exprimés sous la forme d'ondes de Bloch (cf (Bloch, 1928)) :

$$\underline{\delta x}[\omega_1, \omega_2, \underline{\delta p}](X_1, X_2, X_3) = \exp(i\omega_1 X_1 + i\omega_2 X_2) \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{\delta p}(X_2, X_3) \quad (10.14)$$

où  $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^+ \times \left[0; \frac{2\pi}{e}\right]$  sont les nombres d'ondes du mode propre dans les directions des coordonnées  $X_1$  et  $X_2$  respectivement, alors que  $\underline{\delta p}$  appartient à l'espace  $\mathbb{K}_0(\Omega_e)$  et est  $X_2$ -périodique :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta p}(X_2 + n * e, X_3) = \underline{\delta p}(X_2, X_3)$$

Introduisons la nouvelle variable  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  définie par :

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta q}(X_2, X_3) = \exp(i\omega_2 X_2) \underline{\delta p}(X_2, X_3)$$

et vérifiant donc les conditions aux limites :

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \quad \underline{\delta q}(X_2 + e, X_3) = \exp(-i\omega_2 e) \underline{\delta q}(X_2, X_3) \quad (10.15)$$

L'expression des modes propres 10.14 peut alors être réécrite sous la forme :

$$\underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)](X_1, X_2, X_3) = \underline{R}(\rho X_1) \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) \exp(i\omega_1 X_1) \quad (10.16)$$

avec  $(\omega_1, \omega_2) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  et  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  vérifiant la condition 10.15.

*Remarque* : Le nombre d'ondes  $\omega_2$  n'apparaît plus explicitement dans l'écriture des modes propres 10.16, mais il intervient bel et bien, caché dans les conditions aux limites 10.15 sur  $\underline{\delta q}$ .

Pour toute fonction  $\underline{\delta x}$  s'écrivant sous la forme 10.16, le gradient de déformations 3D s'écrit :

$$\underline{\nabla \delta x} = \exp(i\omega_1 X_1) \underline{R}(\rho X_1) \cdot \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) + i\omega_1 \underline{\delta q}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \delta q}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \delta q}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \quad (10.17)$$

où le tenseur  $\underline{A}$  est toujours défini par l'expression 10.9.

Par conséquent, pour trouver la plus petite valeur propre  $\beta(\rho)$  de  $F_\Omega$ , il n'est pas nécessaire de scanner toutes les fonctions de  $\mathbb{H}_0(\Omega_e)$ . Il est suffisant de parcourir tous les nombres d'ondes  $(\omega_1, \omega_2)$  dans  $\mathbb{R}^+ \times \left[0; \frac{2\pi}{e}\right]$  et toutes les fonctions  $\underline{\delta q} \in \mathbb{K}_0(\Omega_e)$  vérifiant la condition 10.15 pour construire :

$$\beta(\rho) = \min_{\omega_1, \omega_2, \underline{\delta q}} \left\{ \frac{1}{\left\| \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)] \right\|_\Omega^2} F_\Omega \left( \rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)] \right) \right\}$$

Son calcul peut être décomposé en introduisant la quantité suivante, correspondant à la plus petite valeur propre pour un nombre d'ondes  $(\omega_1, \omega_2)$  fixé :

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \min_{\underline{\delta q}(\omega_2)} \left\{ \frac{1}{\left\| \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)] \right\|_\Omega^2} F_\Omega \left( \rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)] \right) \right\} \quad (10.18)$$

de telle sorte que  $\beta(\rho)$  est égal à

$$\beta(\rho) = \inf_{\omega_1, \omega_2} \left\{ \gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) \right\} \quad (10.19)$$

Reprenons alors l'expression 10.11 de  $F_\Omega$  en remplaçant  $\underline{\nabla \delta x}$  par 10.17, et en utilisant le principe d'indifférence matérielle pour éliminer  $\underline{R}$ . La fonctionnelle  $F_\Omega$  se réduit à :

$$\begin{aligned} F_\Omega(\rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]) &= \iiint_{\Omega} \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) - i\omega_1 \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\ &\quad : \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) + i\omega_1 \underline{\delta q}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 \end{aligned}$$

En utilisant l'indépendance par rapport à  $X_1$  et la périodicité en  $X_2$ , le calcul de  $F_\Omega$  peut être ramené à une intégrale sur le volume élémentaire 2D  $\Omega_e$  :

$$\begin{aligned} F_\Omega(\rho, \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)]) &= n * L * \iint_{\Omega_e} \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) - i\omega_1 \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\ &\quad : \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) + i\omega_1 \underline{\delta q}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 \\ &= n * L * F_{\Omega_e}(\rho, \omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)) \end{aligned} \quad (10.20)$$

De la même manière, le calcul de norme 10.13 peut être ramené à une intégrale sur le volume élémentaire 2D :

$$\begin{aligned} \left\| \underline{\delta x}[\omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2)] \right\|_{\Omega}^2 &= n * L * \iint_{\Omega_e} \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) - i\omega_1 \underline{\delta \bar{q}}(X_2, X_3) \right) \cdot \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta q}(X_2, X_3) + i\omega_1 \underline{\delta q}(X_2, X_3) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \\ &\quad + \frac{\partial \underline{\delta \bar{q}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{\delta q}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \\ &= n * L * \left\| \omega_1, \underline{\delta q}(\omega_2) \right\|_{\Omega_e}^2 \end{aligned} \quad (10.21)$$

Par ailleurs, le tenseur tangent étant symétrique, les parties imaginaires de toutes nos expressions sont nulles. Il est donc possible de travailler avec des fonctions à valeurs réelles :

Notons  $\underline{\delta q} = \underline{\delta u} + i\underline{\delta v}$ , avec  $\underline{\delta u} \in K_0(\Omega_e)$  et  $\underline{\delta v} \in K_0(\Omega_e)$ . Les expressions 10.20 et 10.21 deviennent

alors :

$$\begin{aligned}
F_{\Omega_e}(\rho, \omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)) &= \iint_{\Omega_e} \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \delta u}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \delta u}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\
&\quad : \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \delta u}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \delta u}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\
&\quad + \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \delta v}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \delta v}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] \\
&\quad : \underline{L}(\rho, X_2, X_3) : \left[ \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \delta v}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \delta v}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3
\end{aligned} \tag{10.22}$$

et

$$\begin{aligned}
\|\omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)\|_{\Omega_e}^2 &= \iint_{\Omega_e} \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3) \right) \cdot \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta u}(X_2, X_3) - \omega_1 \underline{\delta v}(X_2, X_3) \right) \\
&\quad + \iint_{\Omega_e} \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3) \right) \cdot \left( \underline{A} \cdot \underline{\delta v}(X_2, X_3) + \omega_1 \underline{\delta u}(X_2, X_3) \right) \\
&\quad + \frac{\partial \delta u}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial X_2}(X_2, X_3) + \frac{\partial \delta v}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial X_2}(X_2, X_3) \\
&\quad + \frac{\partial \delta u}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial X_3}(X_2, X_3) + \frac{\partial \delta v}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \delta v}{\partial X_3}(X_2, X_3) dX_2 dX_3
\end{aligned} \tag{10.23}$$

Les conditions aux limites 10.15 se traduisent quant à elles par un couplage entre  $\underline{\delta u}$  et  $\underline{\delta v}$  :

$$\forall X_3 \in [0; h], \begin{cases} \underline{\delta u}(\frac{e}{2}, X_3) = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta u}(-\frac{e}{2}, X_3) + \sin(\omega_2 e) \underline{\delta v}(-\frac{e}{2}, X_3) \\ \underline{\delta v}(\frac{e}{2}, X_3) = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta v}(-\frac{e}{2}, X_3) - \sin(\omega_2 e) \underline{\delta u}(-\frac{e}{2}, X_3) \end{cases} \tag{10.24}$$

On en déduit donc que la plus petite valeur propre  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  à  $(\omega_1, \omega_2)$  fixé, dont l'expression était donnée par 10.18, peut être calculée à partir d'un seul calcul sur un volume élémentaire  $2D \Omega_e$  :

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \min_{\underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)} \left\{ \frac{1}{\|\omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)\|_{\Omega_e}^2} F_{\Omega_e}(\rho, \omega_1, \underline{\delta u}(\omega_2), \underline{\delta v}(\omega_2)) \right\} \tag{10.25}$$

sous les conditions aux limites 10.24.

### Courbure critique

On suppose que le solide considéré est en équilibre stable dans sa configuration non déformée sans chargement (c'est le cas pour un problème mécanique bien posé). La plus petite valeur propre  $\beta$  est strictement positive pour une courbure nulle :

$$\beta(0) > 0$$

Lorsqu'on augmente la courbure  $\rho$ , cette plus petite valeur propre va diminuer. Tant qu'elle reste strictement positive, la solution fondamentale périodique calculée précédemment sera le seul équilibre du système, et cet équilibre sera stable. Par contre, lorsque  $\beta(\rho) < 0$ , alors la courbe d'équilibre rencontre un point singulier. La solution perd son unicité et devient linéairement instable.



La première instabilité est donc détectée par la plus petite racine de  $\beta(\rho)$ , qui est appelé "courbure critique microscopique" et sera noté  $\rho_c$ .

Autrement dit, on peut définir la courbure critique  $\rho_c$  par rapport à  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  :  $\rho_c$  correspond à la valeur infimum des courbures  $\rho_m$  pour lesquelles il existe des nombres d'ondes  $(\omega_1^c, \omega_2^c) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  satisfaisant :

$$\rho_c = \inf(\rho_m) \quad \text{tels que} \quad \gamma(\rho_m, \omega_1^c, \omega_2^c) < 0 \quad (10.26)$$

On décrit dans ce qui suit la discrétisation de ce problème de stabilité, et la méthode numérique permettant de calculer cette courbure critique et le premier mode de flambement correspondant.

## ■ 10.3 Méthode de résolution à l'échelle locale

L'intégralité des calculs effectués dans ce chapitre pour étudier la stabilité microscopique ont été réalisés dans le logiciel libre Freefem++. Ce logiciel permet de résoudre des problèmes non linéaires 2D ou 3D par la méthode des éléments finis. Ses principales caractéristiques sont :

- L'utilisateur programme dans un langage haut niveau propre à Freefem++ (proche du C++);
- Le logiciel contient un générateur de maillage automatique basé sur l'algorithme de Delaunay-Voronoi;
- La description du problème est donnée directement sous forme variationnelle, ce qui permet de retranscrire de manière simple et intuitive une formulation mathématique.

On notera que la méthode de résolution de systèmes non linéaires (algorithme de Newton-Raphson classique dans notre cas) et les lois de comportement sont programmées par l'utilisateur. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter le site internet <http://www.freefem.org/ff++/>.

### 10.3.1 Calcul de la solution principale

Reprenons le problème d'équilibre continu Pb10.2.1 sur une cellule élémentaire 2D :

Trouver  $\underline{p} \in K_{per}(\Omega_e)$  tel que

$$\forall \underline{\hat{p}} \in K_{per}(\Omega_e), \iint_{\Omega_e} \underline{P} \left( \underline{A}(\rho) \cdot \underline{p}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \left( \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right) : \left[ \underline{A}(\rho) \cdot \underline{\hat{p}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 = 0$$

sous la contrainte

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \underline{p}(X_2, h) = \frac{1}{\rho} \underline{e}_3$$

Pour construire ce problème sur une cellule 2D, nous avons utilisé l'hypothèse que la solution fondamentale correspond à une flexion circulaire autour du vecteur  $\underline{e}_2$ . Ce problème étant 2D, il utilise uniquement le gradient 2D de la variable  $\underline{p}$ .

Ainsi, si l'on discrétisait directement ce problème 2D, nous ne disposerions pas à l'équilibre d'une matrice de rigidité dépendant de la dérivée  $\frac{\partial x}{\partial X_1}$ . Cela nous obligerait à reconstruire une matrice pour chaque nombre d'onde  $\omega_1$  lors de l'analyse de stabilité. Le calcul de lois de comportement non linéaires dans Freefem++ nécessite un nombre d'opérations non optimisées relativement grand, ce qui rend assez coûteux le calcul d'une matrice de rigidité. Nous proposons donc ici une stratégie

permettant de ne pas recalculer la matrice de rigidité pendant la phase d'analyse de stabilité, une fois qu'un équilibre est atteint.

Pour optimiser les temps de calcul pour le solveur qui a été choisi, l'idée de base est de faire dépendre l'énergie d'un gradient 3D, tout en conservant un problème sur une cellule 2D. On introduit pour cela une variable auxiliaire, notée  $\underline{d}$ , représentant la dérivée normale  $\frac{\partial x}{\partial X_1}$  dans le repère local. La fonction vecteur  $\underline{d}$  va évoluer dans les espaces suivants :

$$L(\Omega_e) = \{\underline{d} : \Omega_e \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_i \in L^2(\Omega)\}$$

L'espace des fonctions  $X_2$ -périodiques est noté :

$$L_{per}(\Omega_e) = \left\{ \underline{d} \in L(\Omega_e) \text{ telles que } \forall X_3 \in [0; h], \underline{d}\left(-\frac{e}{2}, X_3\right) = \underline{d}\left(\frac{e}{2}, X_3\right) \right\}$$

On construit ainsi le problème 2D à deux inconnues :

**Pb 10.3.1 Problème d'équilibre sur une cellule élémentaire avec variable auxiliaire**

Trouver  $(\underline{p}, \underline{d}) \in K_{per}(\Omega_e) \times L_{per}(\Omega_e)$  tel que  $\forall \underline{\hat{p}} \in K_{per}(\Omega_e) \times L_{per}(\Omega_e)$

$$\int \int_{\Omega_e} \underline{P} \left( \begin{array}{l} \delta \underline{d}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \left( \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \right) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \\ \left[ \underline{\hat{d}}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_1 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_2 + \frac{\partial \underline{\hat{p}}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \otimes \underline{e}_3 \right] dX_2 dX_3 = 0 \end{array} \right) : \quad (10.27)$$

sous les contraintes :

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \underline{p}(X_2, h) = \frac{1}{\rho} \underline{e}_3 \quad (10.28)$$

$$\forall X_2 \in \left[-\frac{e}{2}; \frac{e}{2}\right], \forall X_3 \in [0; h], \underline{d} = \underline{A}(\rho) \cdot \underline{p} \quad (10.29)$$

On discrétise le problème Pb10.3.1 par la méthode des éléments finis dans le logiciel Freefem++, en utilisant des éléments triangulaires P2. On utilise pour cela un maillage 2D comme celui représenté sur la figure 10.7, constitué d'éléments triangulaires P2.

Afin de faciliter les conditions de périodicité, que ce soit dans le calcul de la solution principale ou dans l'analyse de stabilité par ondes de Bloch, on construit le maillage de telle sorte que les noeuds situés sur les faces de gauche et de droite aient la même ordonnée dans la configuration de référence.

Le maillage comporte  $N$  noeuds, en chacun desquels on définit 6 degrés de liberté :

- 3 ddl pour interpoler l'inconnue  $\underline{p} \in K_{per}(\Omega_e) : \forall n \in [1; N], \underline{P}_n \in \mathbb{R}^3$  ;
- 3 ddl pour interpoler la dérivée  $\underline{d} \in L_{per}(\Omega_e) : \forall n \in [1; N], \underline{D}_n \in \mathbb{R}^3$ .

Les vecteurs globaux des inconnues discrètes sont notés  $\underline{P} \in \mathbb{R}^{3N}$  et  $\underline{D} \in \mathbb{R}^{3N}$ , et on appelle  $\underline{U} = (\underline{P}, \underline{D}) \in \mathbb{R}^{6N}$  le vecteur complet des inconnues globales. On note  $N_L = N_R$ ,  $N_U$  et  $N_D$  les nombres de noeuds respectivement sur les faces latérales  $\Gamma_L$  et  $\Gamma_R$ , sur  $\Gamma_U$  et sur  $\Gamma_D$ .

On suppose que pour une configuration  $\underline{U} = (\underline{P}, \underline{D})$  donnée, on est capable de calculer l'énergie de déformation totale dans la cellule, notée  $W(\underline{P}, \underline{D})$ , ainsi que ses dérivées première et seconde :

$$\underline{F} = \frac{\partial W}{\partial \underline{U}} = \begin{pmatrix} \underline{F}_p \\ \underline{F}_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6N} \quad \underline{K} = \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{U}^2} = \begin{pmatrix} \underline{K}_{pp} & \underline{K}_{pd} \\ \underline{K}_{dp} & \underline{K}_{dd} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6N \times 6N}$$

La condition aux limites 10.28 ainsi que la  $X_2$ -périodicité de la fonction  $\underline{p}$  sont résumées sous forme matricielle par :

$$\underline{M} \cdot \underline{P} = \underline{C} \quad (10.30)$$

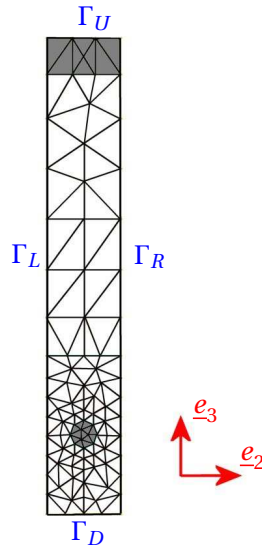


FIG. 10.7: Maillage utilisé pour le problème 2D

La matrice  $\underline{\underline{M}}$  utilisée est de dimension  $3N_d \times 3N$ , où  $N_d = N_R + N_U - 1$  désigne le nombre de noeuds dépendants. Cette condition sera imposée avec un multiplicateur de Lagrange  $\underline{\underline{\lambda}} \in \mathbb{R}^{3 \cdot N_d}$ . On note alors  $N_i = N - N_d$  le nombre de noeuds indépendants des conditions aux limites.

Pour ailleurs, la relation 10.29 reliant  $\underline{d}$  à  $\underline{p}$  est supposée satisfaite dans la solution fondamentale continue. Au niveau discret, on l'impose en chaque noeud :

$$\forall n \in [1; N], \quad \underline{D}_n = \underline{\underline{A}}(\rho) \cdot \underline{P}_n \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{A}}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\rho \\ 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On résume ces relations nodales sous la forme matricielle globale :

$$\underline{U} = \begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{D} \end{pmatrix} = \underline{\underline{N}}(\rho) \cdot \underline{P} \quad (10.31)$$

La matrice  $\underline{\underline{N}}$  introduite est de dimension  $6N \times 3N$ .

Si on récapitule, pour une courbure  $\rho$  donnée, on cherche la solution  $(\underline{P}, \underline{\underline{\lambda}}) \in \mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}^{3N_d}$  des équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{N}}^T(\rho) \cdot \underline{F}(\underline{\underline{N}}(\rho) \cdot \underline{P}) + \underline{\underline{M}}^T \cdot \underline{\underline{\lambda}} = \underline{0} \\ \underline{\underline{M}} \cdot \underline{P} - \underline{C}(\rho) = \underline{0} \end{cases} \quad (10.32)$$

On résout ce système d'équations non linéaires par une méthode itérative de Newton-Raphson, qui utilise la matrice tangente :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{N}}^T(\rho) \cdot \underline{\underline{K}}(\underline{\underline{N}}(\rho) \cdot \underline{P}) \cdot \underline{\underline{N}}(\rho) & \underline{\underline{M}} \\ \underline{\underline{M}}^T & \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3(N+N_d) \times 3(N+N_d)} \quad (10.33)$$

La méthode de Newton utilisée pour résoudre ce problème est décrite plus précisément par l'algorithme 5.

**Input :** Courbure  $\rho$

Initialiser  $\underline{P}_0$  pour une nappe plane au repos ;

**while**  $\|\underline{dP}\| > \epsilon$  **do**

Affecter  $\begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{D} \end{pmatrix} = \underline{N} \cdot \underline{P}$  ;

Calculer  $\underline{\underline{K}}(\underline{P}, \underline{D}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{xx} & \underline{\underline{K}}_{xd} \\ \underline{\underline{K}}_{dx} & \underline{\underline{K}}_{dd} \end{pmatrix}$  ;

Calculer  $\underline{F}(\underline{P}, \underline{D}) = \begin{pmatrix} \underline{F}_x \\ \underline{F}_d \end{pmatrix}$  ;

Faire  $\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \underline{N}^T \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{N} & \underline{M} \\ \underline{M}^T & \underline{0} \end{pmatrix}$  ;

Faire  $\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \underline{N}^T \cdot \underline{F} \\ \underline{C} - \underline{M}^T \cdot \underline{P} \end{pmatrix}$  ;

Résoudre  $\begin{pmatrix} \underline{dP} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$  ;

Actualiser  $\underline{P} = \underline{P} + \underline{dP}$  ;

**end**

**Output :** Configuration à l'équilibre  $\underline{P}_{eq}(\rho)$

**Output :** Matrice de rigidité à l'équilibre  $\underline{\underline{K}}_{eq}(\rho) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{pp}^{eq}(\rho) & \underline{\underline{K}}_{pd}^{eq}(\rho) \\ \underline{\underline{K}}_{dp}^{eq}(\rho) & \underline{\underline{K}}_{dd}^{eq}(\rho) \end{pmatrix}$

**Algorithme 5 :** Algorithme de Newton pour calculer l'équilibre principal à  $\rho$  fixé

### 10.3.2 Calcul numérique des modes propres

Dans cette sous-section, on fixe une courbure  $\rho$ , et on suppose que l'algorithme 5 a convergé vers la configuration d'équilibre  $\underline{U}_{eq}$ . On note  $\underline{\underline{K}}_{eq}(\rho) \in \mathbb{R}^{6N \times 6N}$  la matrice de rigidité calculée à l'équilibre.

**Fonctionnelle étudiée :**

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, on rappelle qu'on étudie le signe de la plus petite valeur propre  $\beta(\rho)$  de la fonctionnelle quadratique  $F_{\Omega_e}$  définie par 10.20. Par conséquent, dans la version discrétisée du problème, on introduit la forme quadratique  $\mathcal{F}(\rho, \delta \underline{U})$  :

$$\mathcal{F}(\rho, \delta \underline{U}) = \delta \underline{U} \cdot \underline{\underline{K}}_{eq}(\rho) \cdot \delta \underline{U}$$

avec la condition aux limites sur  $\Gamma_U$  :

$$\forall i \in [1; N_U], \quad \delta U_U^i = 0 \quad (10.34)$$

La matrice de rigidité  $\underline{\underline{K}}_{eq}(\rho)$  étant symétrique, il est possible de travailler sur des vecteurs à composantes réelles en décomposant  $\delta \underline{U}$  sous sa forme complexe :

$$\delta \underline{U} = \delta \underline{U}_1 + i \delta \underline{U}_2$$

On définit alors la matrice  $\underline{\underline{K}}(\rho) \in \mathbb{R}^{12N \times 12N}$  par

$$\underline{\underline{K}}(\rho) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{K}}_{eq}(\rho) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\underline{K}}_{eq}(\rho) \end{pmatrix} \quad (10.35)$$

de telle sorte que la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\rho, \underline{\delta U}_1 + i \underline{\delta U}_2) &= \underline{\delta U}_1 \cdot \underline{K}_{eq}(\rho) \cdot \underline{\delta U}_1 + \underline{\delta U}_2 \cdot \underline{K}_{eq}(\rho) \cdot \underline{\delta U}_2 \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\delta U}_1^T & \underline{\delta U}_2^T \end{pmatrix} \cdot \underline{K}(\rho) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta U}_1 \\ \underline{\delta U}_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Si on tient compte de la représentation des modes propres sous forme d'ondes de Bloch (cf équation 10.16), on va étudier la fonctionnelle sur un sous espace de variations  $\underline{\delta U} = (\underline{\delta P}, \underline{\delta D})$  respectant la relation en chaque noeud :

$$\forall n \in [1; N], \quad \underline{\delta D}^n = \underline{A}(\rho) \cdot \underline{\delta P}^n + i \omega_1 \underline{\delta P}^n \quad (10.36)$$

ainsi que les conditions aux limites 10.15 :

$$\forall i \in [1; N_R], \quad \underline{\delta P}_R^i = \exp(-i\omega_2 e) \underline{\delta P}_L^i \quad (10.37)$$

Si on travaille avec des vecteurs à composantes réelles, en décomposant

$$\underline{\delta U} = \begin{pmatrix} \underline{\delta P} \\ \underline{\delta D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\delta P}_1 \\ \underline{\delta D}_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \underline{\delta P}_2 \\ \underline{\delta D}_2 \end{pmatrix}$$

Les relations 10.36 et 10.37 donnent les relations suivantes sur les vecteurs  $\underline{\delta P}_1, \underline{\delta D}_1, \underline{\delta P}_2$  et  $\underline{\delta D}_2$  :

$$\forall n \in [1; N], \quad \begin{cases} \underline{\delta D}_1^n = \underline{A}(\rho) \cdot \underline{\delta P}_1^n - \omega_1 \underline{\delta P}_2^n \\ \underline{\delta D}_2^n = \underline{A}(\rho) \cdot \underline{\delta P}_2^n + \omega_1 \underline{\delta P}_1^n \end{cases} \quad (10.38)$$

$$\forall i \in [1; N_R], \quad \begin{cases} \underline{\delta P}_{1R}^i = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta P}_{1L}^i + \sin(\omega_2 e) \underline{\delta P}_{2L}^i \\ \underline{\delta P}_{2R}^i = \cos(\omega_2 e) \underline{\delta P}_{2L}^i - \sin(\omega_2 e) \underline{\delta P}_{1L}^i \end{cases} \quad (10.39)$$

La relation nodale 10.36 s'écrit sous forme matricielle au niveau global :

$$\begin{pmatrix} \underline{\delta P}_1 \\ \underline{\delta D}_1 \\ \underline{\delta P}_2 \\ \underline{\delta D}_2 \end{pmatrix} = \underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta P}_1 \\ \underline{\delta P}_2 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, en tenant compte des conditions aux limites 10.39, on réduit le nombre de degrés de liberté en éliminant les noeuds situés à droite dans notre système, ainsi que ceux situés sur la frontière supérieure grâce à la condition 10.34 :

$$\begin{pmatrix} \underline{\delta P}_1 \\ \underline{\delta P}_2 \end{pmatrix} = \underline{\tilde{M}}(\omega_2) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta R}_1 \\ \underline{\delta R}_2 \end{pmatrix}$$

avec  $\underline{\tilde{M}}(\omega_2) \in \mathbb{R}^{6N \times 6(N-Nd)}$  et  $\underline{\delta R}_1, \underline{\delta R}_2 \in \mathbb{R}^{3(N-Nd)}$ .

*Remarque* : Dans (Triantafyllidis et al., 2006), la matrice de rigidité  $\underline{\hat{K}}$  utilisée dans l'analyse par ondes de Bloch est beaucoup plus petite du fait que les degrés de liberté correspondant aux noeuds intérieurs ont été supprimés. Ceci n'est pas possible dans notre cas, la courbure  $\rho$  est imposée à chaque noeud par l'intermédiaire de la relation  $\underline{D}_n = \underline{A}(\rho) \cdot \underline{P}_n$ , ce qui crée des forces nodales qui seront non nulles à l'équilibre.

Les restrictions que nous venons d'écrire sur la forme des modes propres étudiés nous amène à étudier la nouvelle fonctionnelle quadratique :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{F}}(\rho, \omega_1, \omega_2, \underline{\delta R}_1, \underline{\delta R}_2) &= \left( \underline{\delta U}_1^T \quad \underline{\delta U}_2^T \right) \cdot \underline{\mathbb{K}}(\rho) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta U}_1 \\ \underline{\delta U}_2 \end{pmatrix} \\
&= \left( \underline{\delta R}_1^T \quad \underline{\delta R}_2^T \right) \cdot \underline{\tilde{M}}^T(\omega_2) \cdot \underline{\tilde{N}}^T(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\mathbb{K}}(\rho) \cdot \underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\tilde{M}}(\omega_2) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta R}_1 \\ \underline{\delta R}_2 \end{pmatrix} \\
&= \left( \underline{\delta R}_1^T \quad \underline{\delta R}_2^T \right) \cdot \underline{\tilde{K}}(\rho, \omega_1, \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} \underline{\delta R}_1 \\ \underline{\delta R}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{10.40}$$

avec

$$\underline{\tilde{K}}(\rho, \omega_1, \omega_2) = \underline{\tilde{M}}^T(\omega_2) \cdot \underline{\tilde{N}}^T(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\mathbb{K}}(\rho) \cdot \underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\tilde{M}}(\omega_2) \tag{10.41}$$

### Calcul de la plus petite valeur propre

Avec ce choix de paramétrisation, notre problème aux valeurs propres 10.18 se réduit à

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \inf_{\underline{\delta R}_1, \underline{\delta R}_2} \left\{ \frac{1}{\|\underline{\delta R}_1, \underline{\delta R}_2\|} \tilde{\mathcal{F}}(\rho, \omega_1, \omega_2, \underline{\delta R}_1, \underline{\delta R}_2) \right\}$$

Mais il nous faut déterminer une norme discrète  $\|\cdot\|$  adéquate, de la même manière que la norme continue 10.23 avait été construite dans la section précédente.

Partons de la semi-norme continue sur le gradient 3D des déformations :

$$\begin{aligned}
\|\underline{p}, \underline{d}\|_{\Omega_e}^2 &= \iint_{\Omega_e} \underline{\nabla}_{3D} x : \underline{\nabla}_{3D} x dX_2 dX_3 \\
&= \iint_{\Omega_e} \underline{d}(X_2, X_3) \cdot \underline{d}(X_2, X_3) \\
&\quad + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_2}(X_2, X_3) \\
&\quad + \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) \cdot \frac{\partial \underline{p}}{\partial X_3}(X_2, X_3) dX_2 dX_3
\end{aligned} \tag{10.42}$$

On définit alors  $\underline{\underline{L}} \in \mathbb{R}^{6N \times 6N}$  la matrice intervenant dans la norme discrète correspondante :

$$\left\| \begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{D} \end{pmatrix} \right\|^2 = \|\underline{U}\|^2 = \begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{P} \\ \underline{D} \end{pmatrix} \tag{10.43}$$

On construit alors la matrice de taille  $12N \times 12N$  :

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \underline{L} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{L} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{12N \times 12N}$$

de telle sorte que

$$\|\underline{U}_1 + i \underline{U}_2\|^2 = \begin{pmatrix} \underline{U}_1 & \underline{U}_2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} \tag{10.44}$$

Lorsqu'on élimine les degrés de liberté comme cela a été fait pour aboutir à la forme quadratique 10.40, nous sommes alors amenés à définir la norme suivante sur le vecteur réduit  $\underline{R}$  :

$$\|\underline{R}_1 + i \underline{R}_2\|^2 = \begin{pmatrix} \underline{R}_1 & \underline{R}_2 \end{pmatrix} \cdot \underline{\tilde{L}}(\rho, \omega_1, \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} \underline{R}_1 \\ \underline{R}_2 \end{pmatrix} \tag{10.45}$$

avec

$$\underline{\tilde{L}}(\rho, \omega_1, \omega_2) = \underline{\tilde{M}}^T(\omega_2) \cdot \underline{\tilde{N}}^T(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\underline{L}}(\rho) \cdot \underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\tilde{M}}(\omega_2) \tag{10.46}$$

Pour toute courbure  $\rho$ , et tout nombre d'onde  $(\omega_1, \omega_2)$ , l'approche microscopique nous amène donc à étudier la plus petite valeur propre  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  définie par :

$$\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) = \inf_{\underline{R}} \left\{ \frac{\underline{R} \cdot \underline{\tilde{K}}(\rho, \omega_1, \omega_2) \cdot \underline{R}}{\underline{R} \cdot \underline{\tilde{L}}(\rho, \omega_1, \omega_2) \cdot \underline{R}} \right\} \quad (10.47)$$

Cela est équivalent à rechercher le plus petit nombre réel  $\gamma_{min} \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe un vecteur  $\underline{P}_\gamma$  vérifiant :

$$\underline{\tilde{K}} \cdot \underline{P}_\gamma - \gamma_{min} \underline{\tilde{L}} \cdot \underline{P}_\gamma = \underline{0}$$

Le calcul de  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  est réalisé à l'intérieur du logiciel Freefem++ par la routine "Eigenvalue", qui utilise la *méthode des puissances*. Cette méthode permet de calculer rapidement la valeur propre de plus petite valeur absolue. On rappelle brièvement son fonctionnement dans ce qui suit.

Partons d'un vecteur  $\underline{P}_0$  aléatoire et construisons la suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \underline{\tilde{K}} \cdot \underline{P}_{n+1} = \underline{\tilde{L}} \cdot \underline{P}_n$$

Il peut alors être démontré qu'après un nombre suffisant d'itérations, on a en moyenne

$$\underline{P}_{n+1} \approx \frac{1}{\lambda_{min}} \underline{P}_n$$

où  $\lambda_{min}$  est la valeur propre dont la valeur absolue est la plus petite, et donc la suite  $(\underline{P}_n)$  converge vers le vecteur propre associé  $\underline{P}_{min}$ .

Donc en réalisant quelques itérations pour plusieurs vecteurs initiaux  $\underline{P}_0$  aléatoires, on obtient une approximation de la valeur propre  $\lambda_{min}$  de plus petite valeur absolue, ainsi que le mode propre associé  $\underline{P}_{min}$ .

Dans notre cas, on souhaite calculer la plus petite valeur propre (qui peut être négative), et non celle qui a la plus petite valeur absolue. Cependant, on sait que toutes les valeurs propres sont initialement positives, et on souhaite détecter le moment où la plus petite d'entre elles devient négative ou nulle. Pour cela, il est suffisant de calculer la valeur propre la plus proche de  $\sigma = -1$  en réalisant à chaque itération :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\underline{\tilde{K}} - \sigma \underline{\tilde{L}}) \cdot \underline{P}_{n+1} = \underline{\tilde{L}} \cdot \underline{P}_n$$

La méthode pour calculer  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  est résumée par l'algorithme 6.

**Input** : Courbure  $\rho$ , nombres d'onde  $\omega_1$  et  $\omega_2$

**Input** : Matrices  $\underline{\tilde{L}} \in \mathbb{R}^{12N \times 12N}$  et  $\underline{\tilde{K}}(\rho) \in \mathbb{R}^{12N \times 12N}$

Calculer  $\underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1)$  et  $\underline{\tilde{M}}(\omega_2)$ ;

Construire  $\underline{\tilde{K}}(\rho, \omega_1, \omega_2)$  selon 10.41 ;

Construire  $\underline{\tilde{L}}(\rho, \omega_1, \omega_2)$  selon 10.46 ;

Calculer  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  défini par 10.47 avec la méthode des puissances avec un shift de  $-1$ ;

**Output** : Valeur de  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$

**Algorithme 6** : Algorithme de calcul de la plus petite valeur propre  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$

### 10.3.3 Estimation du chargement critique

On rappelle la définition de la courbure critique introduite dans la sous section 10.2.2 :  $\rho_c$  correspond à la plus petite courbure pour laquelle il existe des nombres d'ondes  $(\omega_1^c, \omega_2^c) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  satisfaisant :

$$\gamma(\rho_c, \omega_1^c, \omega_2^c) \leq 0$$

Son calcul se fait alors de manière intuitive, en augmentant progressivement la courbure  $\rho$  depuis 0 jusqu'à voir apparaître une instabilité caractérisée par des nombres d'ondes  $(\omega_1^c, \omega_2^c)$ .

De manière plus précise, pour tout nombre d'onde  $(\omega_1, \omega_2)$  fixé, on définit  $\rho_m(\omega_1, \omega_2)$  comme étant la plus petite racine de  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$ , c'est à dire

$$\gamma(\rho_m(\omega_1, \omega_2), \omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \rho < \rho_m(\omega_1, \omega_2), \quad \gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) > 0 \quad (10.48)$$

Pour calculer la surface  $\rho_m$  en fonction des nombres d'onde  $(\omega_1, \omega_2)$ , la méthode intuitive serait de parcourir une grille de valeurs  $(\omega_1^k, \omega_2^k)$ , puis de calculer  $\rho_m$  en partant d'une courbure nulle et en l'incrémentant jusqu'à obtenir  $\gamma(\rho, \omega_1^k, \omega_2^k) \leq 0$ . Mais il faut garder en mémoire que la résolution d'un problème d'équilibre pour une courbure donnée a un coût de calcul élevé, et donc on préférera une stratégie minimisant le nombre de résolutions. La méthode utilisée pour calculer  $\rho_m$  est décrite par l'algorithme 7.

```

Calculer la matrice  $\underline{\underline{L}}$  correspondant à la norme 10.45 ;
Initialiser tous les éléments du tableau  $\rho_m(:, :)$  à  $\rho_{max} + 1$  ;
for  $\rho$  de 0 à  $\rho_{max}$  do
    Calculer l'équilibre par l'algorithme 5  $\Rightarrow \underline{\underline{K}}_{eq}(\rho)$  ;
    Construire  $\underline{\underline{K}}(\rho)$  avec l'expression 10.35 ;
    for  $\omega_1$  de 0 à  $\omega_1^{max}$  do
        for  $\omega_2$  de 0 à  $\frac{2\pi}{e}$  do
            if  $\rho_m(\omega_1, \omega_2) > \rho$  then
                Calculer  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2)$  par l'algorithme 6 ;
                if  $\gamma(\rho, \omega_1, \omega_2) \leq 0$  then
                    |  $\rho_m(\omega_1, \omega_2) = \rho$  ;
                end
            end
        end
    end
end
Output : Tableau  $\rho_m(:, :)$ 
Algorithme 7 : Algorithme de calcul de la surface  $\rho_m$ 

```

*Remarque* : Une fois que la surface  $\rho_m$  est calculée, la courbure critique  $\rho_c$  correspond à sa borne inférieure. On peut en effet la définir par :

$$\rho_c = \inf_{\omega_1, \omega_2} \{\rho_m(\omega_1, \omega_2)\} \quad (10.49)$$



### 10.3.4 Description du flambement

Une fois que l'on a calculé le chargement à partir duquel le comportement d'une structure devient instable, il est également important de modéliser le mode de bifurcation qui apparaît, de manière à mieux comprendre son origine.

Dans notre cas, nous avons décrit dans la sous section précédente la méthode de calcul de la courbure critique  $\rho_c$  (cf algorithme 7). Notons  $(\omega_1^c, \omega_2^c) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  les nombres d'ondes correspondant à l'infimum 10.49 :

$$\gamma(\rho_c, \omega_1^c, \omega_2^c) \leq 0$$

On rappelle que  $\gamma(\rho_c, \omega_1^c, \omega_2^c)$  est définie par 10.47, et a été calculée avec la méthode des puissances. Cette méthode calcule également une approximation du vecteur propre  $\underline{\delta R}_c$  correspondant à la valeur propre de plus petite valeur absolue, qui caractérise dans notre cas le mode propre associé à la première bifurcation. On peut alors reconstruire les variables complètes décrivant le mode de flambement :

$$\begin{pmatrix} \frac{\delta P_1^c}{\delta D_1^c} \\ \frac{\delta P_2^c}{\delta D_2^c} \end{pmatrix} = \underline{\tilde{N}}(\rho, \omega_1) \cdot \underline{\tilde{M}}(\omega_2) \cdot \underline{\delta R}_c$$

Ainsi, les nombres d'ondes  $(\omega_1^c, \omega_2^c) \in \left[0; \frac{2\pi}{e}\right] * \mathbb{R}^+$  vérifiant 10.26 nous donnent la longueur d'onde du flambement correspondant :

$$L_\alpha^c = \frac{2\pi}{\omega_\alpha}$$

De plus la forme des oscillations est donnée par le mode propre  $\underline{\delta P}_1^c$ . On peut ainsi vérifier si la première instabilité correspond à un flambement dans le plan de la nappe ou bien hors plan.

## 10.4 Méthode de résolution à l'échelle globale

On décrit dans ce qui suit une méthode permettant de modéliser les instabilités macroscopiques apparaissant dans ce même problème. Ces résultats seront comparés dans la section 10.5 avec ceux de la stratégie microscopique que l'on vient de décrire.

### 10.4.1 Calcul de la solution principale périodique

Le calcul de la solution principale par un modèle macroscopique est réalisé sur la géométrie parfaite de l'éprouvette 3D, discrétisée par des éléments finis. Un exemple de maillage global est représenté sur la figure 10.8(a). Plus précisément, la répartition des éléments finis dans l'épaisseur de la nappe respecte la forme illustrée sur la figure 10.8(b) :

- Une couche d'éléments finis Q2 standards est utilisée pour modéliser le clinquant sur la partie supérieur de l'éprouvette ;
- Une couche d'éléments finis Q2 enrichis (décrits dans les chapitres 4 et 8 de ce mémoire) d'épaisseur  $h_{nap}$ , centrée sur les câbles, est utilisée pour discrétiser la couche renforcée de l'éprouvette ;
- Des éléments finis Q2 standards sont utilisés pour discrétiser le reste de la gomme constituant la structure.

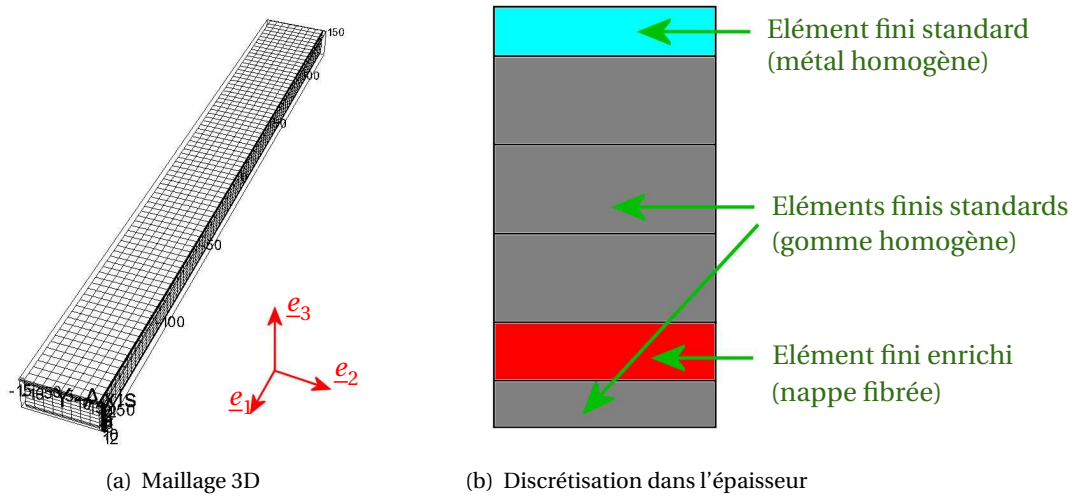


FIG. 10.8: Maillage de la géométrie parfaite de l'éprouvette

Pour imposer numériquement la flexion circulaire sur l'éprouvette sans créer d'effets de bords (indésirables si on souhaite approcher le cas d'une nappe de dimension infinie), nous reprenons les conditions aux limites décrites dans le chapitre 4 de ce mémoire :

- Une flexion circulaire sans extension est imposée sur la surface supérieure par des conditions de Dirichlet ;
- Les déplacements aux extrémités de l'éprouvette restent dans le plan normal à  $\underline{e}_\theta(\rho X_1)$ , ce qui peut être représenté mécaniquement par l'utilisation de mors aux parois parfaitement lisses ;
- Les déplacements sont périodiques dans la direction perpendiculaire aux fibres ;
- La rotation des directeurs est imposée aux extrémités :

$$\begin{cases} \underline{d}_1 = \underline{e}_\theta \\ \underline{d}_2 = \underline{e}_2 \\ \underline{d}_3 = \underline{e}_r \end{cases}$$

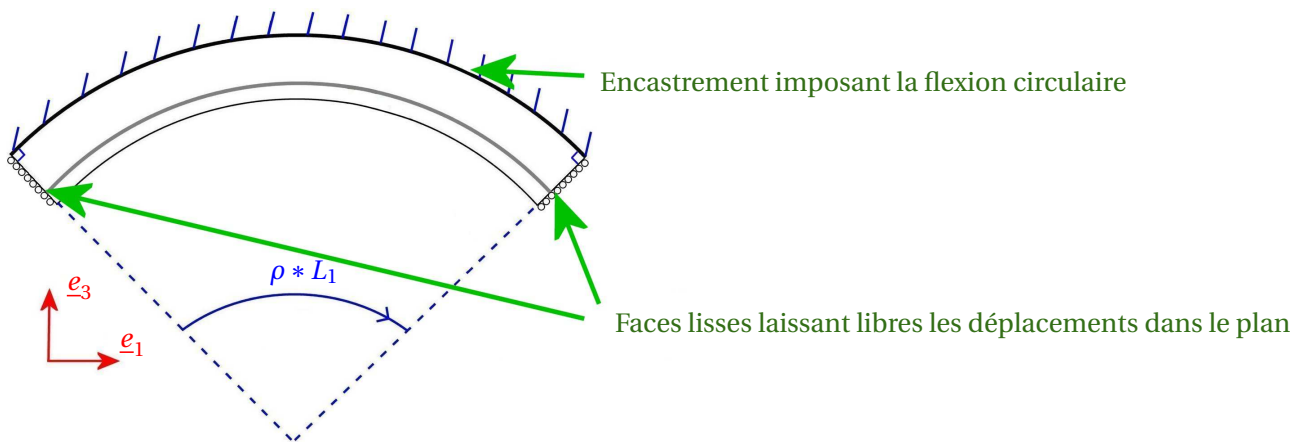


FIG. 10.9: Chargement sur l'éprouvette

## 10.4.2 Détection de l'apparition du flambement

### Etude de la matrice de rigidité

La manière la plus simple pour analyser la stabilité macroscopique de la structure parfaite est d'étudier la plus petite valeur propre de la matrice de rigidité du système discret. Le changement de signe de cette valeur propre à l'équilibre lorsque le chargement augmente caractérise l'apparition d'un point singulier.

Nous décrivons dans la sous section suivante une autre méthode simple permettant de détecter une bifurcation, basée sur la théorie des imperfections décrite dans la section 9.3.3.

### Méthode de perturbations

Pour garantir une bonne convergence avec une méthode incrémentale lors de calculs post-flambement, nous avons vu dans la sous-section 9.4.1 qu'il est nécessaire d'ajouter des imperfections au système parfait considéré pour le faire dévier vers une branche de bifurcation. Nous utilisons ce principe pour détecter numériquement l'apparition d'un flambement lors de calculs globaux :

Nous insérons une perturbation géométrique de forme sinusoïdale à la géométrie parfaite de l'éprouvette, comme représenté sur la figure 10.10. La longueur d'onde de cette imperfection sera prise égale à la longueur d'onde du flambement correspondant à la première bifurcation détectée par l'analyse de stabilité locale.

Nous mesurons alors la *distance* entre la configuration perturbée déformée et la configuration parfaite déformée lorsque la courbure augmente. La bifurcation vers la branche voulue se traduit alors par un accroissement brutal de cette distance. Pour calculer le seuil de flambement apparaissant à l'échelle macroscopique, il suffira d'observer à quel moment a lieu cette bifurcation lorsque la taille de l'imperfection tend vers 0.

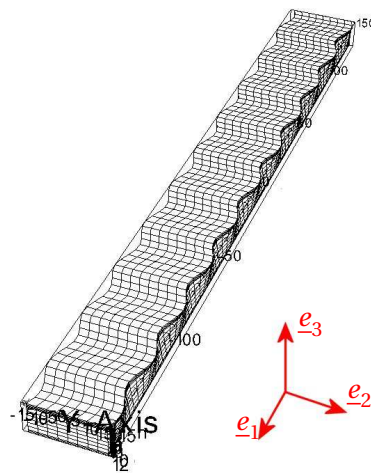


FIG. 10.10: Maillage perturbé pour le problème global 3D (perturbation  $\times 100$ )

*Remarque* : Notre choix d'imposer complètement les rotations des directeurs aux extrémités des fibres rend difficile tout changement de mode. La forme de la perturbation ne doit donc pas être choisie de manière aléatoire.

## 10.5 Applications numériques

Nous présentons dans cette section quelques résultats numériques obtenus avec les approches décrites dans les sections 10.3 et 10.4. L'objectif principal est de comparer l'apparition du flambement observée à l'échelle macroscopique avec les deux modèles construits dans les parties I et II de ce mémoire, de manière à valider leur aptitude à correctement modéliser les flambement dans le plan d'une nappe fibrée.

### 10.5.1 Description des modèles

#### Modèle local

Dans toute cette section, nous travaillons sur une éprouvette dont les dimensions locales sont les suivantes :

- Epaisseur du clinquant :  $H_{cli} = 1.1\text{ mm}$  ;
- Epaisseur de gomme :  $H_{gom} = 12.5\text{ mm}$  ;  
→ Epaisseur totale :  $H = 13.6\text{ mm}$  ;
- Hauteur de la ligne moyenne des câbles :  $h = 1.425\text{ mm}$  ;
- Rayon d'un câble cylindrique :  $r = 0.42\text{ mm}$  ;
- Ecartement entre deux câbles :  $e = 2.25\text{ mm}$ .

Le clinquant est constitué d'un métal très rigide ne subissant que de petites déformations. Nous le modélisons par un matériau de Saint-Venant Kirchhoff, de densité volumique d'énergie

$$w_{cli}(\underline{e}) = \frac{\nu_{cli} E_{cli}}{(1 + \nu_{cli})(1 - 2\nu_{cli})} \left[ Tr(\underline{e}) \right]^2 + \frac{E_{cli}}{2(1 + \nu_{cli})} Tr(\underline{e}^2)$$

en choisissant les coefficient suivants :

$$\begin{cases} E_{cli} = 200 \text{ GPa} \\ \nu_{cli} = 0.33 \end{cases}$$

De la même manière, le métal constituant les fibres cylindriques est modélisé par un matériau de Saint-Venant Kirchhoff, de densité volumique d'énergie

$$w_{cab}(\underline{e}) = \frac{\nu_{cab} E_{cab}}{(1 + \nu_{cab})(1 - 2\nu_{cab})} \left[ Tr(\underline{e}) \right]^2 + \frac{E_{cab}}{2(1 + \nu_{cab})} Tr(\underline{e}^2)$$

en choisissant les coefficient suivants :

$$\begin{cases} E_{cab} = 100 \text{ GPa} \\ \nu_{cab} = 0.30 \end{cases}$$

Enfin, la gomme pouvant subir de grandes déformations, il est indispensable de la modéliser avec une énergie polyconvexe. Nous utilisons un modèle de Mooney-Rivlin quasi-incompressible :

$$w = C_1 (I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 * (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{1}{2\epsilon} (J - 1)^2$$

en choisissant les coefficient suivants :

$$\begin{cases} C_1 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.062 \text{ MPa} \\ \epsilon^{-1} = 1000. \text{ MPa} \end{cases}$$

## Modèle macroscopique

### Géométrie

Nous choisissons de considérer une éprouvette 3D dont les dimensions globales sont les suivantes :

- Longueur (dans le sens des câbles) :  $L_1 = 300\text{mm}$  ;
- Largeur :  $L_2 = 30\text{mm}$  ;
- Epaisseur de l'élément correspondant à la couche renforcée, centrée sur les câbles :  $h_{nap} = 1.45\text{mm}$ .

Remarque : Avec notre choix de conditions aux limites, nous approchons le cas d'une nappe infinie. Nous vérifierons que le choix de ces dimensions globales n'a aucune influence sur les résultats numériques obtenus.

Dans la couche d'éléments correspondant à la nappe renforcée, on utilise la modélisation décrite dans les deux premières parties de ce rapport :

- L'énergie de gomme est approchée macroscopiquement comme décrit dans le chapitre 2, ou calculée localement comme décrit dans le chapitre 8 ;
- Les câbles sont représentés par un modèle de densité de poutres, comme décrit dans le chapitre 2. La densité surfacique d'énergie correspondante s'écrit :

$$w_{cab}(\underline{v}, \underline{u}) = \frac{1}{2e} \left[ E_{cab} A (v_1 - 1)^2 + G_{cab} A (v_2^2 + v_3^2) + E_{cab} I (u_2^2 + u_3^2) + G_{cab} J u_1^2 \right]$$

avec

$$\begin{cases} A = \pi r^2 = 0.56\text{mm}^2 \\ I = \frac{\pi}{4} r^4 = 0.025\text{mm}^4 \\ J = \frac{\pi}{2} r^4 = 0.05\text{mm}^4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} E_{cab} = 100 \text{ GPa} \\ \nu_{cab} = 0.30 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad G_{cab} = \frac{E_{cab}}{2(1 + \nu_{cab})} = 38.5 \text{ GPa}$$

En dehors de cette couche renforcée, les modèles utilisés pour la gomme et la lame métallique (clicquant) sont les mêmes que ceux utilisés à l'échelle mésoscopique. Cependant, contrairement à ce qui est fait dans le modèle mésoscopique, le terme de pénalisation de l'incompressibilité de la gomme est sous intégré.

### 10.5.2 Solution principale

L'objectif de cette sous-section est de vérifier que les solutions principales calculées à l'échelle locale et à l'échelle globale sont identiques.

#### Calculs locaux

Nous représentons sur la figure 10.11 les déplacements locaux dans une cellule élémentaire pour une courbure  $\rho = 1. * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ , calculés en utilisant l'algorithme 5.

Nous pouvons voir sur la figure 10.11(b) que la surface inférieure descend, le déplacement vertical moyen valant  $-0.010435\text{mm}$ . Ce phénomène est logique, puisque la gomme quasi-incompressible a tendance à gonfler transversalement lorsqu'elle est soumise à une compression axiale.

Par ailleurs, nous observons sur la figure 10.11(a) les déformations microscopiques de la gomme engendrées par le câble, qui joue un rôle de gêne géométrique.

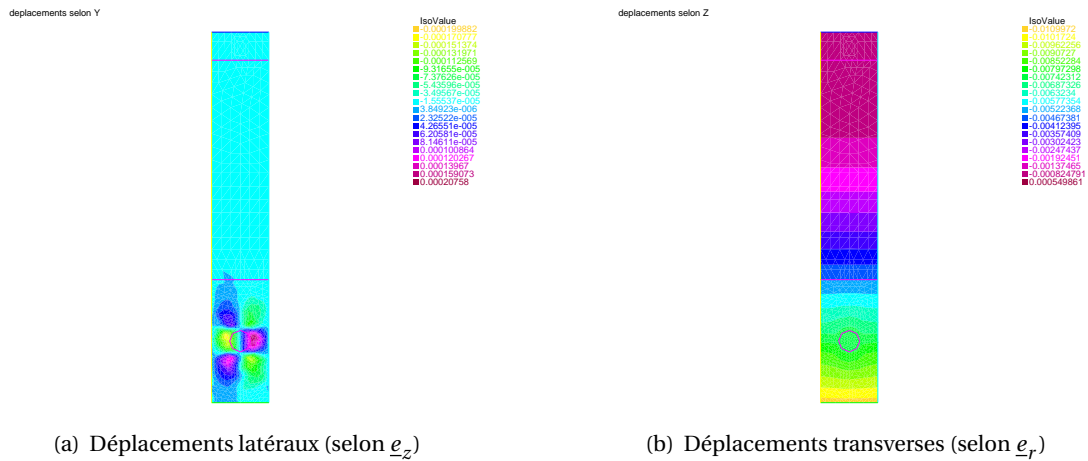
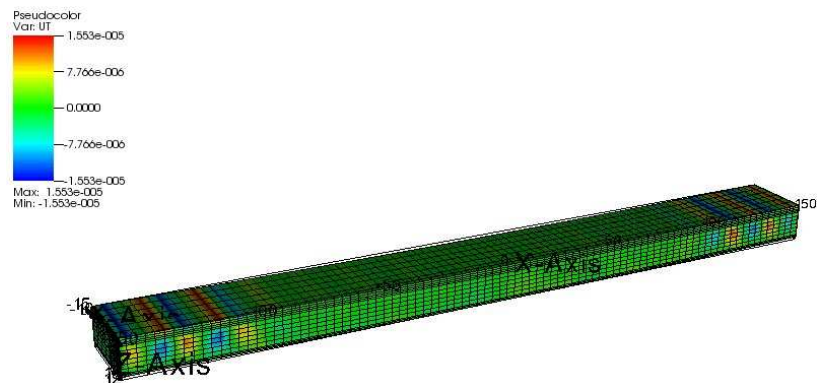


FIG. 10.11: Solution principale calculée par le modèle local pour  $\rho = 1. * 10^{-4} rad.mm^{-1}$ .

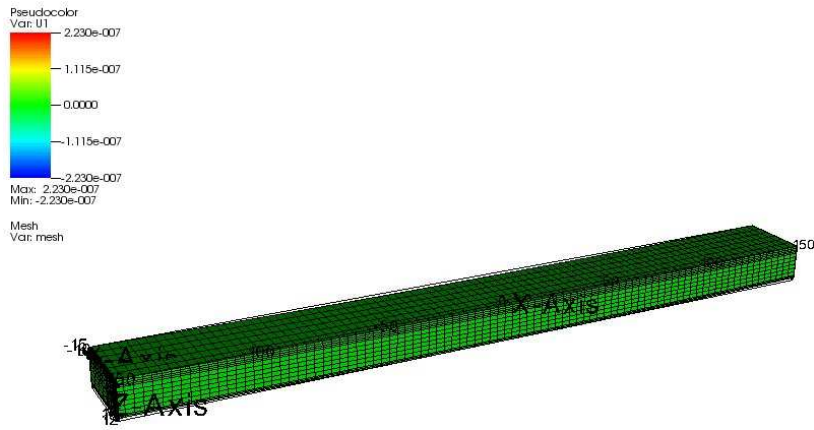
### Calculs à l'échelle de la nappe

La solution principale calculée avec le modèle global sur une géométrie parfaite est illustrée sur la figure 10.12 : nous pouvons y vérifier que cette solution respecte les hypothèses réalisées pour l'analyse de stabilité multi-échelles, en approchant très bien le cas d'une nappe infinie :

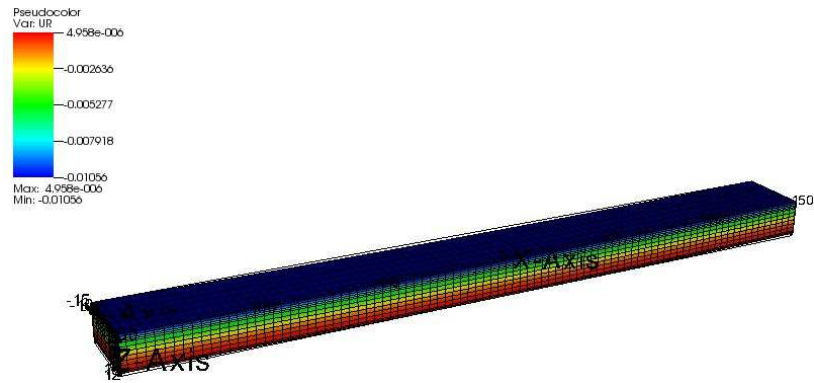
- Les déplacements longitudinaux selon  $e_\theta$  sont très petits, ce qui signifie que chaque section reste plane ;
- Les déplacements latéraux selon  $e_2$  sont nuls, ce qui implique que la  $X_2$ -périodicité est vérifiée ;
- Les déplacements transverses sont uniformes sur toute la surface de l'éprouvette.



(a) Déplacements longitudinaux (selon  $e_\theta$ )



(b) Déplacements latéraux (selon  $e_2$ )



(c) Déplacements transverses (selon  $e_r$ )

FIG. 10.12: Solution principale calculée par le modèle global pour  $\rho = 1. * 10^{-4} rad.mm^{-1}$ .

Plus précisément, si on considère la coupe transverse de l'éprouvette représentée sur la figure 10.13 : nous mesurons que les déplacements transverses sur la surface inférieure valent  $-0.010539mm$ , ce qui est très proche de la valeur prédite par l'étude locale.

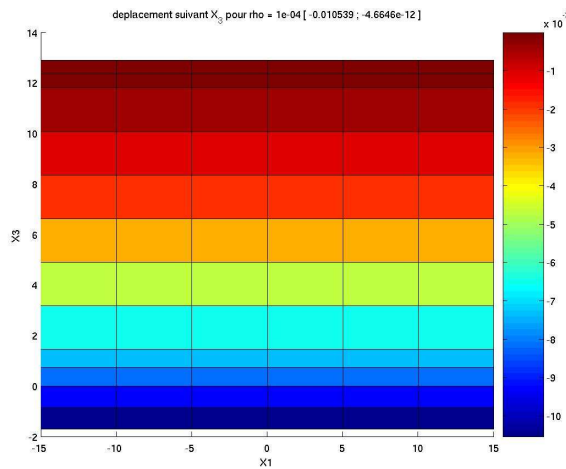


FIG. 10.13: Déplacements transverses calculés par le modèle global.

Nous pouvons donc en déduire que les solutions principales calculées à l'échelle locale et à l'échelle globale sont identiques (à 1% près).

### 10.5.3 Calcul de la première branche de bifurcation

La solution principale ayant été validée dans la sous-section précédente, notre objectif est maintenant de déterminer si nos modèles 3D détectent sa perte de stabilité pour la même courbure critique que celle prédite par l'analyse de stabilité locale.

#### Calculs locaux

Nous appliquons l'algorithme 7 permettant de calculer la surface  $\rho_m$  décrivant les plus petite courbure pour lesquelles un flambement de longueur d'onde donnée peut apparaître. Nous représentons cette surface sur la figure 10.14.

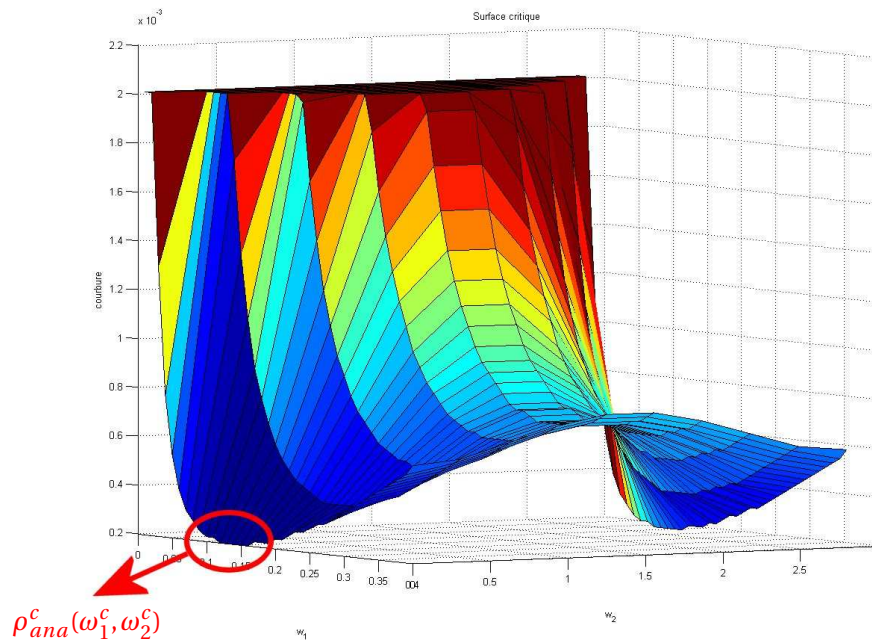


FIG. 10.14: Courbe  $\rho_m(\omega_1, \omega_2)$  calculée d'après l'analyse de stabilité locale.

Si nous reprenons la formule 10.49, nous pouvons lire sur cette figure que la courbure critique correspondant à l'infimum de la surface  $\rho_m$  vaut

$$\rho_{ana}^c = 1.95 * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$$

Le nombre d'ondes du flambement correspondant à cette courbure critique peut également être lu sur cette figure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1^c = 0.135 \text{ rad.mm}^{-1} \\ \omega_2^c = 0 \text{ rad.mm}^{-1} \end{array} \right.$$

Le fait que  $\omega_2^c = 0$  signifie que le système reste périodique par rapport à la variable  $X_2$ , et que le flambement, de longueur d'onde  $L_1^c = \frac{2\pi}{\omega_1^c}$  ne se produit que dans la direction des fibres, ce qui est logique.

Une fois la courbure critique  $\rho_{ana}^c$  et les nombres d'ondes correspondants  $(\omega_1^c, \omega_2^c)$  calculés, nous disposons du mode propre solution du problème aux valeurs propres 10.25. Nous représentons les composantes de la partie réelle de ce mode sur la figure 10.15.



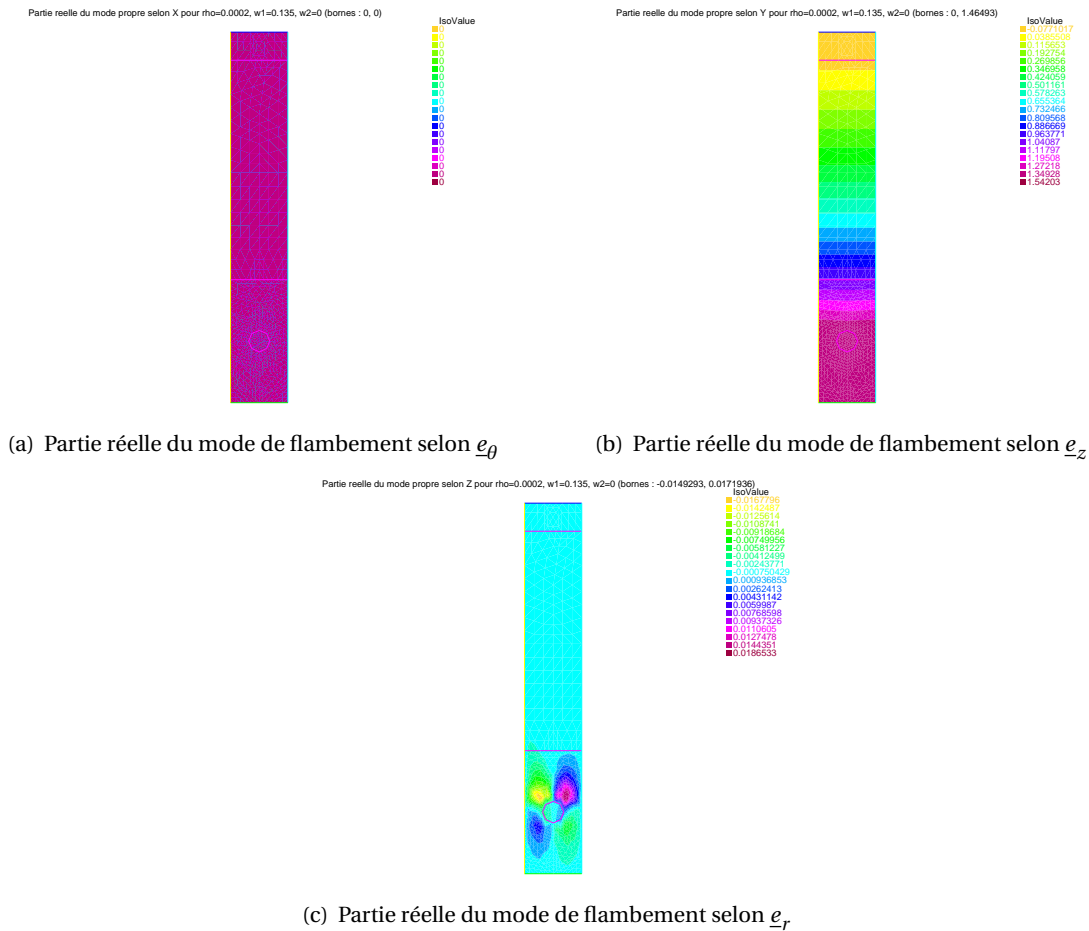


FIG. 10.15: Composantes du mode de flambement obtenu avec l'analyse locale lors d'une flexion circulaire.

Nous observons sur ces résultats que seule la moyenne de sa composante selon  $\underline{e}_z$  est non nulle. Cela signifie que la première instabilité qui apparaît correspond à un flambement latéral dans la plan de la nappe.

Ce résultat est validé expérimentalement, puisque nous vérifions sur la figure 10.16 que les fibres se mettent effectivement à flamber dans la plan de la nappe en pratique.



FIG. 10.16: Flambement sous flexion circulaire observé expérimentalement (d'après (Caillard, Michelin)).

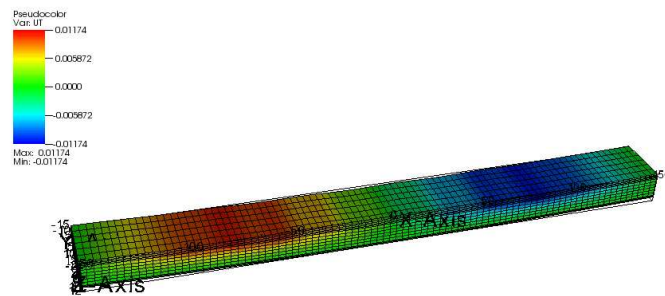
### Calculs à l'échelle de la nappe

Nous souhaitons vérifier que le flambement prédit par l'analyse de stabilité locale, de longueur d'onde  $L_1^c = \frac{2\pi}{\omega_1^c}$ , peut être détecté par les deux modèles de nappes renforcées décrits dans les parties I et II de ce mémoire. Pour cela, nous poussons les modèles vers cette branche de bifurcation en

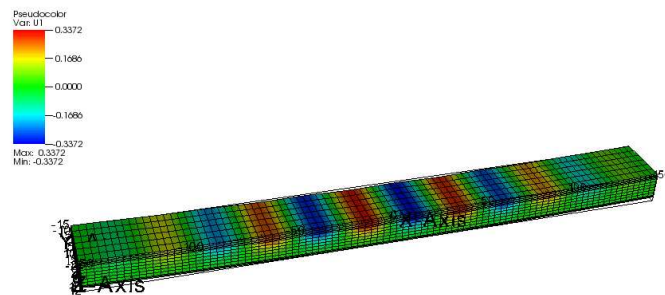
perturbant légèrement la géométrie de l'éprouvette 3D : nous ajoutons une imperfection de forme sinusoïdale dans le sens des câbles, dont la longueur d'onde est égale à  $L_1^c = \frac{2\pi}{\omega_1^c}$  (cf figure 10.10).

D'après la convergence en maillage présentée dans le chapitre 4 de ce mémoire, les résultats numériques ne sont pas significativement améliorés pour des maillages plus fins que 45 éléments dans la longueur. Par conséquent, nous choisissons cette taille de maillage pour tous les résultats présentés ici.

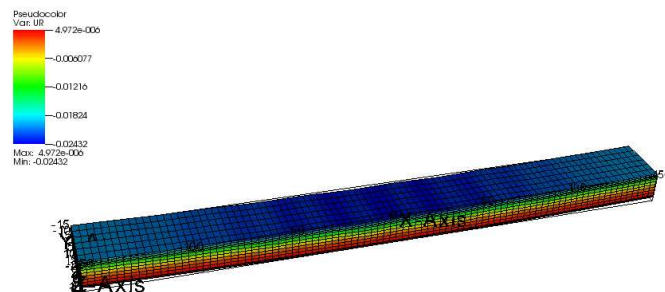
Nous vérifions sur la figure 10.17 que le mode de flambement qui apparaît avec le modèle global (décrit dans la partie I) lorsque la courbure augmente correspond bien au flambement voulu dans le plan de la nappe. De petits déplacements sont visibles le long des vecteurs  $\underline{e}_\theta$  et  $\underline{e}_r$ . Ils sont dûs aux conditions aux limites choisies, qui limitent l'amplitude du flambement près des bords, ce qui crée une plus forte compression axiale dans ces zones.



(a) Déplacements longitudinaux (selon  $\underline{e}_\theta$ )



(b) Déplacements latéraux (selon  $\underline{e}_z$ )



(c) Déplacements transverses (selon  $\underline{e}_r$ )

FIG. 10.17: Composantes du mode de flambement obtenu avec le modèle global lors d'une flexion circulaire (pour une courbure  $\rho = 2.1 * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ ).

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, l'amplitude de ce flambement latéral continue à croître lorsque la courbure augmente (cf figure 10.18).

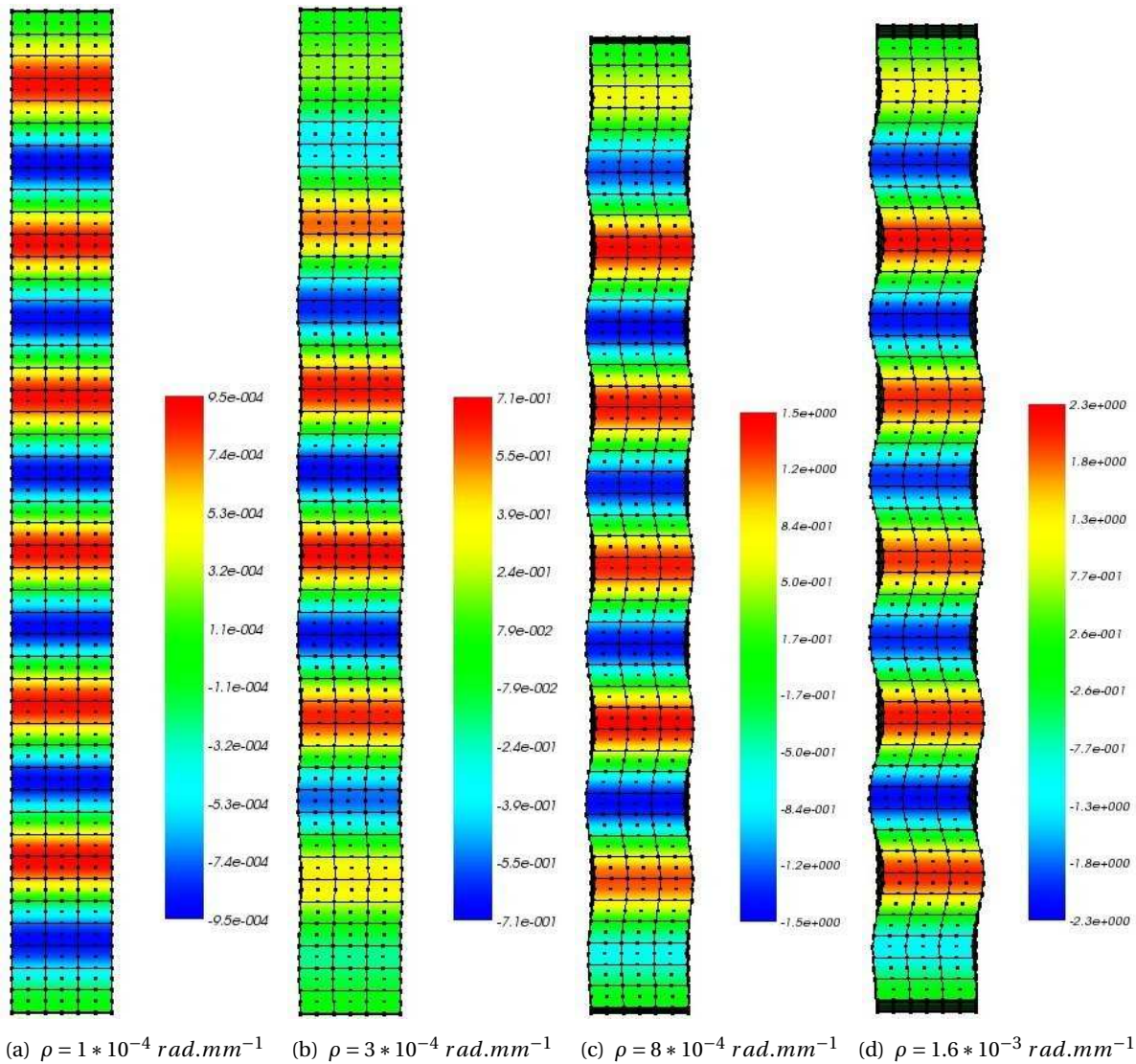


FIG. 10.18: Flambement dans le plan de la nappe lorsque la courbure augmente.

Pour déterminer la courbure à partir de laquelle le flambement apparaît, nous traçons sur la figure 10.19 la courbe représentant l'évolution de l'amplitude des déplacements transverses lorsque la courbure augmente. Nous y observons que les déplacements transverses augmentent brusquement aux alentours de la courbure  $\rho = 2. * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$ , ce qui caractérise la bifurcation de la solution vers une autre branche d'équilibre.

L'amplitude de l'imperfection initiale joue un rôle important dans ce problème : nous pouvons voir sur la figure 10.20 que la rupture de pente devient plus brutale lorsque la perturbation diminue. A la limite quand les imperfections tendent vers zéro, le seuil de flambement observé avec le modèle global vaut environs

$$\rho_{global}^c = 1.85 * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1}$$

On observe donc une différence d'environ 5% par rapport à la courbure critique prédite par l'analyse de stabilité locale.

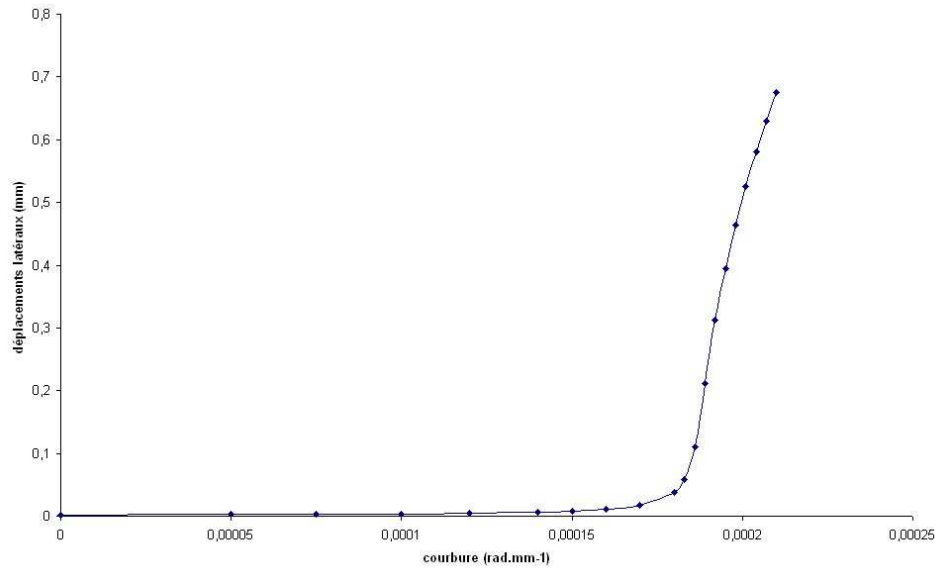


FIG. 10.19: Augmentation de l'amplitude des déplacements latéraux en fonction de la courbure.

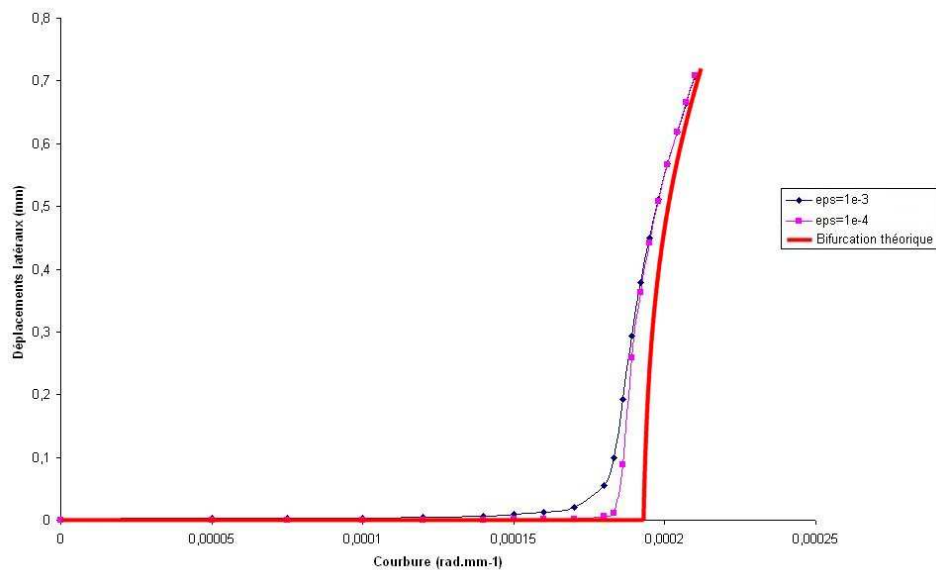


FIG. 10.20: Seuil de flambement observé numériquement avec le modèle global lorsque l'amplitude de l'imperfection diminue.

*Remarque* : En observant les petits modes parasites près des bords sur la figure 10.17(a), nous pourrions penser que l'erreur de 5% sur le calcul de la courbure critique est dû à l'influence de nos conditions aux limites. Mais la figure 10.21 montre que le seuil de flambement calculé est indépendant de la longueur de l'éprouvette. Nous en déduisons que l'erreur est dû à notre modèle.

Nous comparons alors ces résultats obtenus avec le modèle global avec ceux obtenus avec le modèle multi-échelles (décrit dans la partie II de ce mémoire) sur la figure 10.22.

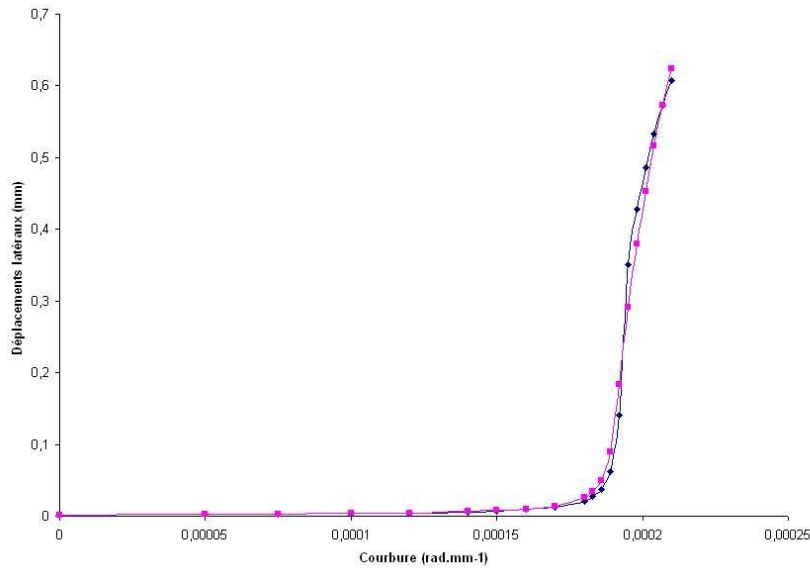


FIG. 10.21: Influence nulle de la longueur de l'éprouvette modélisée.

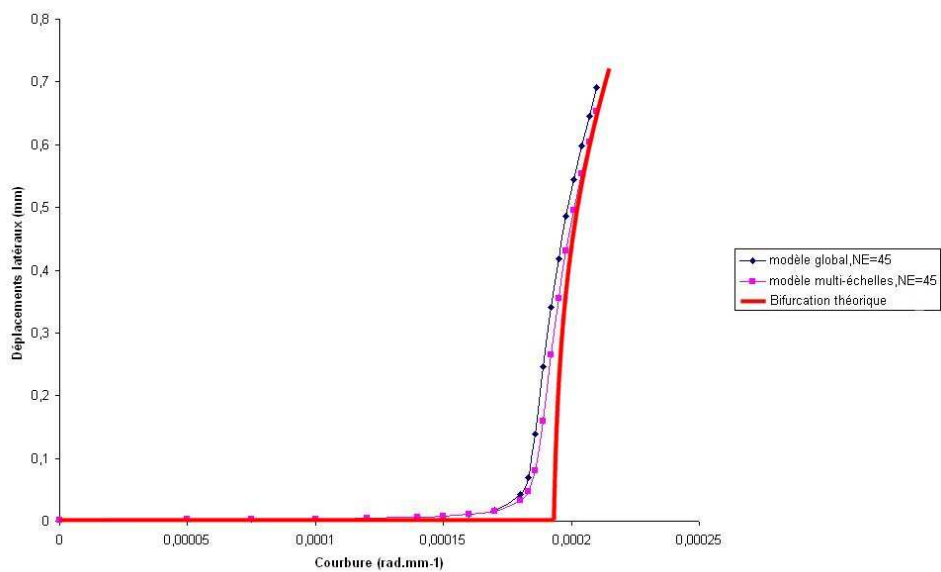


FIG. 10.22: Seuil de flambement observé numériquement avec les modèles global et multi-échelles.

Nous observons que le seuil de flambement observé avec le modèle multi-échelles à la limite quand les imperfections tendent vers zéro vaut environs

$$\rho_{multi}^c = 1.88 * 10^{-4} \text{ rad.mm}^{-1} .$$

Ce résultat prouve que la prise en compte des efforts locaux dans la gomme permet de se rapprocher de la théorie, et montre l'apport de notre approche multi-échelles.

Remarque : Nous noterons qu'il subsiste une petite différence entre l'analyse locale et les résultats obtenus avec notre modèle multi-échelles. Il semble que cette différence soit dûe au fait que les sections de câbles sont supposées indéformables dans nos modèles alors que ce n'est pas le cas dans l'analyse de stabilité. Le faible gonflement de la section de câble (de l'ordre de  $1. * 10^{-4} mm$ ) est suffisant pour retarder légèrement l'apparition du flambement dans l'analyse locale.

## ■ Conclusions

Les sections 10.2 et 10.3 ont décrit une méthode d'analyse de stabilité de notre structure 3D, basée sur les résultats de (Geymonat et al., 1993) et reprenant en grande partie la démarche décrite dans (Triantafyllidis et al., 2006), en recherchant les modes d'instabilité sous forme d'ondes de Bloch. Cette démarche s'avère rapide et précise, et peut facilement être adapté à tout problème pour lequel une cellule élémentaire 2D peut être identifiée et où la solution fondamentale est périodique.

Elle permet de calculer la courbure critique à partir de laquelle l'équilibre principal devient instable, et de prédire la forme du mode d'instabilité correspondant. Les résultats numériques obtenus par cette méthode ont été présentés dans la section 10.5 et comparés avec les résultats obtenus avec nos deux modèles sur la géométrie 3D globale. Cela a prouvé que ces modèles de nappe fibrée reproduisent correctement les instabilités de type flambement, même lorsque ceux-ci sont dans le plan de la nappe. Ces deux modèles sont donc complètement validés.

Enfin, ces résultats ont montré que notre modèle multi-échelles permet de modéliser les instabilités dans le plan de la nappe de manière plus précise, grâce à la prise en compte des micro-fluctuations dans la gomme.



# Conclusion générale

L'enjeu initial de ce travail de thèse était de proposer une méthode multi-échelles originale permettant de modéliser les nappes fibrées renforçant une structure 3D. Il s'agissait en particulier de répondre à une problématique triple :

- Prendre en compte la flexion des câbles à l'échelle globale pour détecter des instabilités avec les bons modes de flambement ;
- Calculer à une échelle inférieure les déformations de la gomme localisées autour des fibres ;
- Garantir une bonne convergence en évitant les phénomènes de verrouillage numérique liés à l'incompressibilité de la gomme ou aux termes membranaires des câbles.

Un premier modèle de nappe fibrée a été proposé dans le chapitre 2 en négligeant les déformations microscopiques de la gomme. Ce modèle est basé sur une densité surfacique de câbles à section indéformable sur la surface moyenne de la nappe, permettant de prendre en compte à la fois les flexions hors plan, mais aussi la flexion des câbles dans le plan de la nappe, ce qui le différencie des modèles de coques habituels.

L'analyse formelle réalisée dans le chapitre 3 a étudié la convergence de ce modèle lorsque l'épaisseur diminue par une formulation mixte, ce qui nous a permis de justifier une méthode de sous-intégration partielle sélective. Les tests numériques réalisés dans le chapitre 4 ont vérifié que la sous-intégration de l'énergie membranaire des câbles rend possible la convergence même lorsque la structure est très fine. De plus, les exemples montrés dans ce chapitre ont prouvé que ce premier modèle est capable de reproduire correctement des instabilités de type flambement, même lorsque le mode de flambement est dans le plan de la nappe.

L'objectif de la seconde partie de cette thèse était d'ajouter un degré de précision au premier modèle en prenant en compte les déformations se situant à une échelle inférieure. Mais l'étude bibliographique réalisée dans le chapitre 5 a montré que les méthodes d'homogénéisation classiques ne sont pas applicables dans notre cas à cause des spécificités de notre problème (comportement non linéaire, échelles non découplées, cinématique globale enrichie).

Nous avons alors réalisé une étude asymptotique dans le chapitre 6 pour mieux comprendre les approximations pouvant être réalisées au premier ordre et ainsi construire un modèle multi-échelles adapté. Cette analyse nous a conduit à conserver l'hypothèse de section indéformable pour les câbles, de telle sorte que leur comportement est entièrement modélisé à l'échelle globale. Les déformations microscopiques de la gomme peuvent quant à elles être calculées dans un problème local dépendant de 9 degrés de liberté macroscopique, qui a été décrit dans le chapitre 7. L'application directe du modèle multi-échelles ainsi construit comporte deux inconvénients majeurs :

- L'énergie de la nappe est non coercive du fait que la flexion perpendiculairement aux câbles n'est plus du tout prise en compte ;
- Dans le cas où la gomme est incompressible, le problème local risque d'être mal posé et le problème global présente un risque de verrouillage numérique.



Nous avons alors décrit dans le chapitre 8 une méthode multi-échelles permettant d'éliminer ces deux limites en utilisant une projection dans la transition entre les échelles et en ajoutant un terme coercif d'énergie macroscopique. Il a alors été prouvé dans ce même chapitre que la solution du problème discret converge uniformément vers la solution continue, et des tests numériques ont vérifié que les phénomènes d'instabilités en compression axiale sont correctement reproduits. Il s'agit là de premiers calculs opérationnels non linéaires à deux échelles appliqués à des problèmes de flambement.

Enfin, nous avons proposé dans le chapitre 10 une méthode de stabilité multi-échelles basée sur le résultat de (Geymonat et al., 1993) pour modéliser les modes instables comme des ondes de Bloch. Cette méthode se révèle être très précise et relativement peu coûteuse puisqu'elle ramène les calculs à une unique cellule élémentaire périodique. La comparaison des résultats donnés par cette méthode avec ceux obtenus avec nos deux modèles (global et multi-échelles) sur un problème de compression sous flexion circulaire nous a permis de complètement valider nos modèles.

## Perspectives

Certains des tests réalisés avec notre modèle multi-échelles dans le chapitre 8 ont mis en évidence le rôle de termes apparaissant à un *ordre supérieur*. Pour compléter notre modèle et améliorer la *précision* des résultats, il semble donc judicieux de chercher à inclure des termes de flexion globale dans le problème local. On pourra par exemple s'inspirer de (Geers et al., 2007), qui prend en compte la flexion de coques au niveau local en appliquant une technique d'homogénéisation numérique du second ordre. Par ailleurs, une autre piste permettant de gagner en précision serait d'ajouter dans notre modèle un problème local sur les fibres, de manière à gérer des géométries locales plus complexes.

Par ailleurs, l'application directe de la stratégie multi-échelles décrite dans la partie II représente un coût de calculs beaucoup plus élevé que les méthodes basées sur des approximations macroscopiques. Par conséquent, son objectif actuel n'est pas de concurrencer les méthodes globales, mais plutôt de les compléter en apportant une meilleure précision dans les zones de fortes déformations. Pour pouvoir l'utiliser plus généralement dans un contexte industriel, un travail important doit être consacré à l'accélération des calculs. Plusieurs pistes sont exploitables pour réduire les temps de calculs : la technique la plus répandue est de résoudre tous les problèmes locaux *en parallèle* (et non de manière séquentielle comme cela est fait pour le moment), comme cela est décrit par exemple dans (Feyel et al., 2000). Par ailleurs, une autre piste est l'utilisation de bases réduites, qui font actuellement l'objet de nombreux travaux de recherches (cf (Yvonnet and He, 2006), (Yvonnet et al., 2007) et (Monteiro et al., 2008)). Enfin, d'autres méthodes d'autres méthodes pourront être envisagées, telles que les méthodes d'interpolation après avoir construit une base de donnée à partir de calculs préliminaires (cf (Temizer and Wriggers, 2007) et (Yvonnet et al., 2009)).

## Approximations en petites déformations

### ■ A.1 Approximation générale

On rappelle que l'énergie d'un matériaux isotrope hyperélastique dépend uniquement des invariants du tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{C}}$  :

$$w = w(I_1, I_2, I_3)$$

avec

$$\begin{cases} I_1 = Tr(\underline{\underline{C}}) \\ I_2 = \frac{1}{2} \left( Tr(\underline{\underline{C}})^2 - Tr(\underline{\underline{C}}^2) \right) \\ I_3 = det(\underline{\underline{C}}) \end{cases}$$

Ces invariants peuvent également être écrits en fonction du tenseur  $\underline{\underline{e}}$  :

$$\begin{cases} I_1 = 3 + 2 Tr(\underline{\underline{e}}) \\ I_2 = 3 + 4 Tr(\underline{\underline{e}}) + 2 \left( Tr(\underline{\underline{e}})^2 - Tr(\underline{\underline{e}}^2) \right) \\ I_3 = 1 + 2 Tr(\underline{\underline{e}}) + 2 \left( Tr(\underline{\underline{e}})^2 - Tr(\underline{\underline{e}}^2) \right) + det(\underline{\underline{e}}) \end{cases}$$

Le jacobien  $J = det(\underline{\underline{F}}) = \sqrt{I_3}$  peut quant à lui être approché au second ordre :

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{I_3} \\ &= \left[ 1 + 2 Tr(\underline{\underline{e}}) + 2 \left( Tr(\underline{\underline{e}})^2 - Tr(\underline{\underline{e}}^2) \right) + det(\underline{\underline{e}}) \right]^{1/2} \\ &\approx 1 + \frac{1}{2} \left[ 2 Tr(\underline{\underline{e}}) + 2 \left( Tr(\underline{\underline{e}})^2 - Tr(\underline{\underline{e}}^2) \right) \right] - \frac{1}{8} \left[ 2 Tr(\underline{\underline{e}}) \right]^2 \\ &\approx 1 + Tr(\underline{\underline{e}}) + \frac{1}{2} Tr(\underline{\underline{e}})^2 - Tr(\underline{\underline{e}}^2) \end{aligned}$$

En utilisant ces relations, sous l'hypothèse de petites déformations, toute énergie isotrope hyperélastique doit pouvoir être approchée au second ordre par une énergie de type St Venant-Kirchhoff :

$$w = \frac{\lambda}{2} Tr(\underline{\underline{e}})^2 + \mu Tr(\underline{\underline{e}}^2)$$

Une fois que cette écriture a été obtenu, on peut en déduire le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau par les formules classiques :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Ces relations s'inversent en

$$\lambda = E \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = E \frac{1}{2(1 + \nu)}$$

*Remarque* : On peut remarquer que cette expression est quadratique par rapport aux coefficients de  $\underline{e}$ . Toute énergie doit en effet être construite de manière à ne pas avoir de terme linéaire dans son approximation au second ordre, car le solide est au repos dans sa configuration de référence, ce qui implique :

$$\frac{\partial w}{\partial \underline{e}}(\underline{0}) = \underline{0}$$

## ■ A.2 Application à la loi de Mooney-Rivlin

On rappelle que la loi de Mooney-Rivlin quasi-incompressible que l'on a utilisée s'écrit sous la forme :

$$w = C_1(I_1 - 3 - \ln(I_3)) + C_2 * (I_2 - 3 - 2 \ln(I_3)) + \frac{1}{2\epsilon}(J - 1)^2$$

On réalise alors l'approximation au second ordre du terme  $\ln(I_3)$  :

$$\begin{aligned} \ln(I_3) &= \ln \left[ 1 + 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) + 2 \left( \operatorname{Tr}(\underline{e})^2 - \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \right) + \det(\underline{e}) \right] \\ &\approx \left[ 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) + 2 \left( \operatorname{Tr}(\underline{e})^2 - \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \right) \right] - \frac{1}{2} \left[ 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) \right]^2 \\ &\approx 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) - 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \end{aligned}$$

On en déduit alors les approximations de chacun des termes de l'énergie :

$$\begin{aligned} I_1 - 3 - \ln(I_3) &\approx 3 + 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) - 3 - 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}) + 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \\ &\approx 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 - 3 - 2 \ln(I_3) &\approx 3 + 4 \operatorname{Tr}(\underline{e}) + 2 \left( \operatorname{Tr}(\underline{e})^2 - \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \right) - 3 - 4 \operatorname{Tr}(\underline{e}) + 4 \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \\ &\approx 2 \operatorname{Tr}(\underline{e})^2 + 2 \operatorname{Tr}(\underline{e}^2) \end{aligned}$$

$$(J - 1)^2 \approx \operatorname{Tr}(\underline{e})^2$$

Donc finalement l'approximation au second ordre de notre énergie s'écrit :

$$w \approx \underbrace{\left( 2C_2 + \frac{1}{2\epsilon} \right)}_{\frac{\lambda}{2}} \operatorname{Tr}(\underline{e})^2 + \underbrace{(2C_1 + 2C_2)}_{\mu} \operatorname{Tr}(\underline{e}^2)$$

*Remarque* : Lorsque le coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon}$  tend vers l'infini,  $\lambda$  tend vers l'infini et donc le coefficient de Poisson  $\nu$  tend vers 0. Cela prouve que la pénalisation approche bien les matériaux incompressibles.

Valeurs choisies en pratique pour la gomme dans les tests :

$$\begin{cases} C_1 = 0.539 \text{ MPa} \\ C_2 = 1.062 \text{ MPa} \end{cases}$$

D'après (Le Tallec, 1994), le coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon}$  doit respecter l'ordre de grandeur :

$$10^2 G \leq \frac{1}{\epsilon} \leq 10^6 G$$

où  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  est le module de cisaillement.

Pour des valeurs plus petites de  $\frac{1}{\epsilon}$ , ils y aura une perte de précision car l'incompressibilité sera mal prise en compte. Pour des valeurs de  $\frac{1}{\epsilon}$  plus élevées, le conditionnement devient trop élevé.

Dans notre cas, on choisira donc des valeurs de  $\frac{1}{\epsilon}$  comprises dans l'intervalle :

$$3. * 10^2 \text{ MPa} \leq \frac{1}{\epsilon} \leq 3. * 10^6 \text{ MPa}$$

Avec un coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon} = 10^3 \text{ MPa}$ , cela revient à prendre en petites déformations un module d'Young et un coefficient de Poisson égaux à :

$$\begin{cases} E = 9,6 \text{ MPa} \\ \nu = 0.498 \end{cases}$$

Si on prend un coefficient de pénalisation  $\frac{1}{\epsilon} = 10^3 \text{ MPa}$ , on obtient alors les valeurs

$$\begin{cases} E = 9,6 \text{ MPa} \\ \nu = 0.4998 \end{cases}$$

Le coefficient de Poisson est très proche de  $\frac{1}{2}$  déjà pour  $\frac{1}{\epsilon} = 10^3 \text{ MPa}$ , on choisira donc cette valeur pas trop élevée pour éviter tout verrouillage numérique.



## Bibliographie

- Abdelmoula, R., F. Krasucki, and J. Marigo, Microbuckling analysis of unidirectional fibred composites, *Mecamat 93 - International Seminar on Micromechanics of Materials. Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, Eyrolles*, pp. 303–314, 1993.
- Abeyaratne, R., and N. Triantafyllidis, An Investigation of Localization in a Porous Elastic Material Using Homogenization Theory, *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS-TRANSACTIONS OF THE ASME*, 51, 481–486, 1984.
- Agoras, M., O. Lopez-Pamies, and P. P. Castaneda, A general hyperelastic model for incompressible fiber-reinforced elastomers, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 57, 268–286, 2009a.
- Agoras, M., O. Lopez-Pamies, and P. P. Castaneda, Onset of macroscopic instabilities in fiber-reinforced elastomers at finite strain, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 57, 1828–1850, 2009b.
- Antman, S., and C. Kenney, Large buckled states of nonlinearly elastic rods under torsion, thrust, and gravity, *Archive for rational mechanics and analysis*, 1981.
- Argyris, J., Energy theorems and structural analysis, *Aircraft Engineering*, 26, 347–356, 383–387, 394, 1954.
- Arnold, D., Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem, *Numerische Mathematik*, 37, 405–421, 1981.
- Arnold, D., and F. Brezzi, Locking-free finite element methods for shells, *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, 66, 1–14, 1997.
- Babuska, I., The finite element method with Lagrangian multipliers, *Numerische Mathematik*, 20, 179–192, 1973.
- Ball, J., Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity, *ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS*, 63, 337–403, 1977.
- Barbier, A., Note interne, Michelin.
- Bathe, K., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.
- Bathe, K., A. Iosilevich, and D. Chapelle, An inf-sup test for shell finite elements, *COMPUTERS & STRUCTURES*, 75, 439–456, 2000.
- Batoz, J., and G. Dhatt, *Modélisation des Structures par Eléments Finis*, Hermes, 1990.
- Benssousan, A., J. Lions, and G. Papanicoulan, *Asymptotic analysis of periodic structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.

- Bloch, F., Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern, *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 52, 555–600, 1928.
- Bonnet, M., and A. Frangi, *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.
- Bornert, M., T. Bretheau, and P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux*, Volumes 1 & 2, Hermes Science Publications, 2001.
- Bourgat, J., P. Le Tallec, and S. Mani, Numerical simulation of the large displacements of an elastic rod in flexion and torsion, *Journal of theoretical and applied mechanics*, 1988.
- Boussetta, R., and J. Caillard, *Note interne*, Michelin.
- Bramble, J., and T. Sun, A locking-free finite element method for Naghdi shells, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, 89, 119–133, 1998.
- Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddlepoint problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO Analyse Numérique*, pp. 129–151, 1974.
- Brezzi, F., and M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer, 1991.
- Brun, M., O. Lopez-Pamies, and P. P. Castaneda, Homogenization estimates for fiber-reinforced elastomers with periodic microstructures, *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, 44, 5953–5979, 2007.
- Cadou, J., M. Potier-Ferry, and B. Cochelin, A numerical method for the computation of bifurcation points in fluid mechanics, *EUROPEAN JOURNAL OF MECHANICS B-FLUIDS*, 25, 234–254, 2006.
- Caillard, J., *Note interne*, Michelin.
- Campos, A., and F. Rochinha, Dynamics of rods : numerical formulation, *Advances in Computational Techniques for Structural Engineering*, 1996.
- Casciero, R., G. Salerno, and A. Lanzo, Finite element asymptotic analysis of slender elastic structures : a simple approach, *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 35, 1397–1426, 1992.
- Castaneda, P., and E. Tiberio, A second-order homogenization method in finite elasticity and applications to black-filled elastomers, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 48, 1389–1411, 2000.
- Chapelle, D., Une formulation mixte de plaques où l'effort tranchant est approché dans son espace naturel, 1993.
- Chapelle, D., *Modèles de coques minces : comportements asymptotiques et méthodes numériques*, 1996a.
- Chapelle, D., *Etude des phénomènes de verrouillage numérique pour les problèmes de coques minces*, Ph.D. thesis, Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, 1996b.
- Chapelle, D., A locking-free approximation of curved rods by straight beam elements, *NUMERISCHE MATHEMATIK*, 77, 299–322, 1997.
- Chapelle, D., and K. Bathe, Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, *Comput. & Structures*, 66, 19–36, 711–712, 1998.

- Chapelle, D., and K. Bathe, *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*, Springer, 2003.
- Chapelle, D., and A. Ferent, Modeling of the inclusion of a reinforcing sheet within a 3D medium, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, *13*, 573–595, 2003.
- Charlotte, M., *Note interne*, Michelin.
- Chenais, D., and J. Paumier, On the locking phenomenon for a class of elliptic problems, *Numerische Mathematik*, *67*, 427–440, 1994.
- Ciarlet, P., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
- Ciarlet, P., *Mathematical Elasticity - Volume I : 3-dim elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- Ciarlet, P., Basic error estimates for elliptic problems, *Handbook of Numerical Analysis* (P.G. Ciarlet and L. Lions, North-Holland), Vol. II, 1991, pages 17-351.
- Ciarlet, P., *Mathematical Elasticity - Volume III : Theory of Shells*, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- Clement, P., Approximation by finite-element functions using local regularization, *REVUE FRANCAISE D AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPERATIONNELLE*, *9*, 77–84, 1975.
- Clough, R., The finite element method in plane stress analysis, *Proceedings Second ASCE Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, PA, 1960.
- Cochelin, B., A path-following technique via in an asymptotic-numerical method, *COMPUTERS & STRUCTURES*, *53*, 1181–1192, 1994.
- Cochelin, B., N. Damil, and M. Potier-Ferry, *Méthode asymptotique numérique*, Hermès Science Publications, 2007.
- Cornuault, C., *Mise en oeuvre de logiciels performants pour l'analyse non linéaire en calcul de structures*, Calcul des structures et intelligence artificielle, Vol. 2, 1988.
- Damil, N., and M. Potier-Ferry, A new method to compute perturbed bifurcations - application to the buckling of imperfect elastic structures, *INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCE*, *28*, 943–957, 1990.
- deBotton, G., I. Hariton, and E. Socolsky, Neo-Hookean fiber-reinforced composites in finite elasticity, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, *54*, 533–559, 2006.
- Dejonghe, J., *Note interne*, Michelin.
- Drapier, S., C. Gardin, J. C. Grandidier, M. PotierFerry, and Vh, Structure effect and microbuckling, *Composites Science and Technology*, *56*, 861–867, 1996, 12 ELSEVIER SCI LTD.
- Dumontet, H., Study of a boundary-layer problem in elastic composite-materials, *RAIRO-MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS-MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE*, *20*, 265–286, 1986.
- Eshelby, J. D., The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, *241*, 376–396, 1957.
- Feyel, F., and Kl, A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *192*, 3233–3244, 2003, 36 ELSEVIER SCIENCE SA.



- Feyel, F., J. L. Chaboche, and Vn, Fe2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183, 309–330, 2000, 13 ELSEVIER SCIENCE SA.
- Gardin, C., J. Grandidier, and P-F. M., Homogenized models for compressive behaviour of long fibre composite materials, *Tech. rep., Rapport de recherche*, 1998.
- Geers, M. G. D., E. W. C. Coenen, V. G. Kouznetsova, and Rt, Multi-scale computational homogenization of structured thin sheets, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 15, S393–S404, 2007, geers, M. G. D. Coenen, E. W. C. Kouznetsova, V. G. 30 IOP PUBLISHING LTD Sp. Iss. SI.
- Geers, M. G. D., V. G. Kouznetsova, and W. A. M. Brekelmans, Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges, *JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS*, 234, 2175–2182, 2010, 4th International Conference on Advanced Computational Methods in Engineering, Liege, BELGIUM, MAY 26-28, 2008.
- Geymonat, G., S. Muller, and N. Triantafyllidis, Homogenization of nonlinearly elastic-materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity, *ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS*, 122, 231–290, 1993.
- Girault, V., and P. Raviart, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Lecture Notes in Mathematics 127*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1981.
- Gloria, A., Modélisation et méthodes numériques multi-échelles en élasticité non linéaire (multiscale modeling and numerical methods in nonlinear elasticity), Ph.D. thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.
- Gong, L., S. Kyriakides, and N. Triantafyllidis, On the stability of Kelvin cell foams under compressive loads, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 53, 771–794, 2005.
- Grandidier, J., Résistance en compression des composites à fibres longues, *Tech. rep., Dossier d'habilitation à diriger les recherches*, 1998.
- Grandidier, J., and M. Potier-Ferry, Microflambage des fibres dans un matériau composite à fibres longues, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'univers, Sciences de la Terre*, 310, 1–6, 1990.
- Guo, Z. Y., X. Q. Peng, and B. Moran, A composites-based hyperelastic constitutive model for soft tissue with application to the human annulus fibrosus, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 54, 1952–1971, 2006.
- Hashin, Z., The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials, *Journal of Applied Mechanics*, pp. 143–150, 1962.
- Hashin, Z., and S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 11, 127–140, 1963.
- He, Q. C., H. Le Quang, and Z. Q. Feng, Exact results for the homogenization of elastic fiber-reinforced solids at finite strain, *JOURNAL OF ELASTICITY*, 83, 153–177, 2006.
- Hill, R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 1958.

- Hill, R., Elastic properties of reinforced solids - some theoretical principles, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 11, 357–372, 1963.
- Holzappel, G., *Nonlinear solid mechanics*, Wiley, 2000.
- Horgan, C., and G. Saccomandi, A new constitutive theory for fiber-reinforced incompressible nonlinearly elastic solids, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 53, 1985–2015, 2005.
- Hori, M., and S. Nemat-Nasser, On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids, *MECHANICS OF MATERIALS*, 31, 667–682, 1999.
- Hughes, T., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.
- Hughes, T., and J. Winget, Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis, *International Journal for numerical methods in engineering*, 1980.
- Ibrahimbegovic, A., and D. Markovic, Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 192, 3089–3107, 2003.
- Keller, H., The bordering algorithm and path following near singular points of higher nullity, *SIAM JOURNAL ON SCIENTIFIC AND STATISTICAL COMPUTING*, 4, 573–582, 1983.
- Kirchhoff, Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile, *Sitzungsber.Akad.Wiss.Wien*, 9, 762–773, 1852.
- Koiter, W., Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht, Ph.D. thesis, University of Delft, 1945.
- Kouznetsova, V., Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials, Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2002.
- Kouznetsova, V., M. G. D. Geers, W. A. M. Brekelmans, and Jv, Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, 1235–1260, 2002, 53 JOHN WILEY & SONS LTD.
- Kouznetsova, V., W. Brekelmans, and F. Baaijens, An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials, *COMPUTATIONAL MECHANICS*, 27, 37–48, 2001.
- Kouznetsova, V. G., M. G. D. Geers, W. A. M. Brekelmans, and Ek, Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materials : a nested finite element solution strategy, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 5525–5550, 2004, 55 ELSEVIER SCIENCE SA.
- Lahman, H., J. Cadou, H. Zahrouni, N. Damil, and M. Potier-Ferry, High-order predictor-corrector algorithms, *INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING*, 55, 685–704, 2002.
- Le Bris, C., Systèmes multi-échelles, Modélisation et simulation, Mathématiques & applications, Volume 47, Hermes Science Publications, 2005.
- Le Tallec, P., Existence and approximation results for nonlinear mixed problems, *Numerische Mathematik*, 38, 365–382, 1982.

- Le Tallec, P., Numerical methods for nonlinear three dimensional elasticity, Handbook of Numerical Analysis (P.G. Ciarlet and L. Lions, North-Holland), Vol. III, 1994, pages 465-624.
- Le Tallec, P., *Modélisation et calcul des milieux continus*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2009.
- Le Tallec, P., S. Mani, and F. Rochinha, Finite element computation of hyperelastic rods in large displacements, *Mathematical modelling and numerical analysis*, 1991.
- Loehnert, S., and P. Wriggers, Effective behaviour of elastic heterogeneous thin structures at finite deformations, *COMPUTATIONAL MECHANICS*, 41, 595–606, 2008.
- Lopez-Pamies, O., On the effective behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability of elastomeric composites, Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, 2006.
- Lopez-Pamies, O., and P. Castaneda, Second-order homogenization estimates incorporating field fluctuations in finite elasticity, *MATHEMATICS AND MECHANICS OF SOLIDS*, 9, 243–270, 2004.
- Lopez-Pamies, O., and P. Castaneda, On the overall behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability in reinforced rubbers at large deformations : I - Theory, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 54, 807–830, 2006a.
- Lopez-Pamies, O., and P. Castaneda, On the overall behavior, microstructure evolution, and macroscopic stability in reinforced rubbers at large deformations : II - Application to cylindrical fibers, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 54, 831–863, 2006b.
- Lopez-Pamies, O., and P. P. Castaneda, Microstructure evolution in hyperelastic laminates and implications for overall behavior and macroscopic stability, *MECHANICS OF MATERIALS*, 41, 364–374, 2009, 44th Annual Technical Meeting of the Society-of-Engineering-Science, College Station, TX, OCT 21-24, 2007.
- Markovic, D., Modélisation multiéchelles de structures hétérogènes aux comportements anélastiques non linéaires, Ph.D. thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2004.
- Markovic, D., and A. Ibrahimbegovic, On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 193, 5503–5523, 2004.
- Mchugh, P., R. Asaro, and C. Shih, Computational modeling of metal-matrix composite-materials .3. Comparisons with phenomenological models, *ACTA METALLURGICA ET MATERIALIA*, 41, 1489–1499, 1993.
- Merodio, J., and R. Ogden, Mechanical response of fiber-reinforced incompressible non-linearly elastic solids, *INTERNATIONAL JOURNAL OF NON-LINEAR MECHANICS*, 40, 213–227, 2005.
- Michailidis, P. A., N. Triantafyllidis, J. A. Shaw, and G. D. S., Superelasticity and stability of a shape memory alloy hexagonal honeycomb under in-plane compression, *International Journal of Solids and Structures*, 2009.
- Michel, J., H. Moulinec, and P. Suquet, Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 172, 109–143, 1999.
- Michel, J., O. Lopez-Pamies, P. Ponte Castañeda, and N. Triantafyllidis, Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained fiber-reinforced elastomers, *Submitted*, 2010.

- Michel, J. C., O. Lopez-Pamies, P. P. Castaneda, and N. Triantafyllidis, Microscopic and macroscopic instabilities in finitely strained porous elastomers, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 55, 900–938, 2007.
- Miehe, C., J. Schroder, and J. Schotte, Computational homogenization analysis in finite plasticity - Simulation of texture development in polycrystalline materials, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 171, 387–418, 1999.
- Mielke, A., Energetic formulation of multiplicative elasto-plasticity using dissipation distances, *CONTINUUM MECHANICS AND THERMODYNAMICS*, 15, 351–382, 2003.
- Monteiro, E., J. Yvonnet, and Q. C. He, Computational homogenization for nonlinear conduction in heterogeneous materials using model reduction, *COMPUTATIONAL MATERIALS SCIENCE*, 42, 704–712, 2008.
- Mori, T., and K. Tanaka, Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *ACTA METALLURGICA*, 21, 571–574, 1973.
- Moulinec, H., and P. Suquet, A fast numerical-method for computing the linear and nonlinear mechanical-properties of composites, *COMPTEs RENDUS DE L ACADEMIE DES SCIENCES SERIE II*, 318, 1417–1423, 1994.
- Moulinec, H., and P. Suquet, A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 157, 69–94, 1998.
- Muller, S., Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic-materials, *ARCHIVE FOR RATIONAL MECHANICS AND ANALYSIS*, 99, 189–212, 1987.
- Nemat-Nasser, S., and M. Hori, *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials*, North-Holland series in applied mathematics and mechanics, 1993.
- Nestorovic, M., and N. Triantafyllidis, Onset of failure in finitely strained layered composites subjected to combined normal and shear loading, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 52, 941–974, 2004.
- Nezamabadi, S., J. Yvonnet, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry, A multilevel computational strategy for handling microscopic and macroscopic instabilities, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 198, 2099–2110, 2009.
- Oden, J., *Finite elements for nonlinear continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- Oezdemir, I., W. A. M. Brekelmans, and M. G. D. Geers, FE2 computational homogenization for the thermo-mechanical analysis of heterogeneous solids, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 198, 602–613, 2008.
- Ogden, R., Large deformation isotropic elasticity - correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids, *PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON SERIES A-MATHEMATICAL AND PHYSICAL SCIENCES*, 328, 567–583, 1972.
- Ogden, R., Volume changes associated with the deformation of rubber-like solids, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 24, 323–338, 1976.
- Ogden, R., *Nonlinear elastic deformations*, Dover Publications, New-York, 1997.

- Palgen, L., Note interne, Michelin.
- Peek, R., and N. Triantafyllidis, Worst shape of imperfections for space truses with many simultaneously buckling members, *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, 29, 2385–2402, 1992.
- Pitkäranta, J., The problem of membrane locking in finite element analysis of cylindrical shells, *NUMERISCHE MATHEMATIK*, 61, 523–542, 1992.
- Pitkäranta, J., Y. Leino, O. Ovaskainen, and J. Piila, Shell deformation states and the finite element method : A benchmark study of cylindrical shells, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 128, 81–121, 1995.
- Ponte Castaneda, P., and P. Suquet, Nonlinear composites, in *ADVANCES IN APPLIED MECHANICS*, VOL 34, vol. 34 of *ADVANCES IN APPLIED MECHANICS*, pp. 171–302, 1998.
- Potier-Ferry, M., Méthodes asymptotiques numériques, *Revue Européenne des Eléments Finis*, 13, 2004.
- Qiu, G., and T. Pence, Remarks on the behavior of simple directionally reinforced incompressible nonlinearly elastic solids, *JOURNAL OF ELASTICITY*, 49, 1–30, 1997.
- Quoc-Son, N., *Stabilité et mécanique non linéaire*, Hermes Science Publications, 2000.
- Reuss, A., Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *ZAMM*, 9, 49–58, 1929.
- Saad, P., Modélisation et identification du comportement non linéaire des cales en caoutchouc, Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2003.
- Saint-Venant, A. D., Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité, nepeuvent cependant pas être considérés comme très petits, *Bull. Soc. Philomath.*, 5, 26–28, 1844.
- Sanchez-Hubert, J., and E. Sanchez-Palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation : application à la mécanique des milieux continus*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 1992.
- Sanchez-Hubert, J., and E. Sanchez-Palencia, *Coques élastiques minces - Propriétés asymptotiques*, Masson, 1997.
- Sanchez-Palencia, E., *Non homogeneous media and vibration theory. Lecture Notes in Physics 127*, Springer, Berlin, 1980.
- Sanchez-Palencia, E., Statique et dynamique des coques minces. I : Cas de flexion pure non inhibée, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 309, 411–417, 1989a.
- Sanchez-Palencia, E., Statique et dynamique des coques minces. II : Cas de flexion pure inhibée, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 309, 531–537, 1989b.
- Simo, J., and L. Vu-Quoc, A three-dimensional finite-strain rod model. part ii : computational aspects, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1986.
- Spencer, A., *Deformations of fibre-reinforced materials*, Oxford University Press, Oxford, 1972.

- Spencer, A., *Continuum theory of the mechanics of fibre-reinforced composites*, Springer, Wein, New York, 1984.
- Stolz, C., *Stabilité des matériaux et des structures*, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2003.
- Strang, G., *Variational crimes in the finite element method*, Mathematical Foundations of the Finite Element Method, Academic Press, New York, 1972.
- Sulem, J., and I. Vardoulakis, Bifurcation analysis of the triaxial test on rock specimens. A theoretical model for shape and size effect, *ACTA MECHANICA*, 83, 195–212, 1990.
- Suquet, P. M., *Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity*, in Sawczuk, A. and Bianchi, G., editors, *Plasticity today : modelling, methods and applications*, pages 279-310, Elsevier Applied Science Publishers, London, 1985.
- Temam, R., *Navier-Stokes Equations : Theory and Numerical Analysis*, American Mathematical Society, 2001.
- Temizer, I., and P. Wriggers, An adaptive method for homogenization in orthotropic nonlinear elasticity, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 196, 3409–3423, 2007.
- Terada, K., M. Hori, T. Kyoya, and N. Kikuchi, Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches, *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, 37, 2285–2311, 2000.
- Treloar, L., *The physics of rubber elasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1975.
- Triantafyllidis, N., and R. Abeyaratne, Instabilities of a finitely deformed fiber-reinforced elastic-material, *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS-TRANSACTIONS OF THE ASME*, 50, 149–156, 1983.
- Triantafyllidis, N., and S. Bardenhagen, The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 44, 1891–1928, 1996.
- Triantafyllidis, N., and B. Maker, On the comparison between microscopic and macroscopic instability mechanisms in a class of fiber-reinforced composites, *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS-TRANSACTIONS OF THE ASME*, 52, 794–800, 1985.
- Triantafyllidis, N., and R. Peek, On stability and the worst imperfection shape in solids with nearly simultaneous eigenmodes, *INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES*, 29, 2281–2299, 1992.
- Triantafyllidis, N., and M. Schraad, Onset of failure in aluminum honeycombs under general in-plane loading, *JOURNAL OF THE MECHANICS AND PHYSICS OF SOLIDS*, 46, 1089–1124, 1998.
- Triantafyllidis, N., M. Nestorovic, and M. Schraad, Failure surfaces for finitely strained two-phase periodic solids under general in-plane loading, *JOURNAL OF APPLIED MECHANICS-TRANSACTIONS OF THE ASME*, 73, 505–515, 2006, 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, Honolulu, HI, JUL 06-10, 2003.
- van der Sluis, O., P. Schreurs, W. Brekelmans, and H. Meijer, Overall behaviour of heterogeneous elastoviscoplastic materials : effect of microstructural modelling, *MECHANICS OF MATERIALS*, 32, 449–462, 2000.

- Voigt, W., Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle, *Abh.Kgl.Ges.Wiss.Göttingen, Math.Kl.*, 34, 3–51, 1887.
- Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Elsevier; 2nd edition, 1975.
- Wohlmuth, B., *Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.
- Yvonnet, J., and Q. C. He, The reduced model multiscale method (r3m) for the non-linear homogenization of hyperelastic media at finite strains, *Proceedings of computational physics*, 2006.
- Yvonnet, J., H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry, A model reduction method for the post-buckling analysis of cellular microstructures, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 197, 265–280, 2007.
- Yvonnet, J., D. Gonzalez, and Q. C. He, Numerically explicit potentials for the homogenization of nonlinear elastic heterogeneous materials, *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, 198, 2723–2737, 2009.
- Zienkiewicz, O., *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1971.