



**HAL**  
open science

# Intégration du comportement thermomécanique des pièces dans l'analyse des spécifications géométriques : application à une turbine de moteur d'hélicoptère

Laurent Pierre

► **To cite this version:**

Laurent Pierre. Intégration du comportement thermomécanique des pièces dans l'analyse des spécifications géométriques : application à une turbine de moteur d'hélicoptère. Mécanique [physics.med-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2011. Français. NNT : 2011ENAM0008 . pastel-00594317

**HAL Id: pastel-00594317**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00594317v1>**

Submitted on 19 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Sciences des Métiers de l'Ingénieur

## Doctorat ParisTech

# THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

**Spécialité " Mécanique "**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Laurent PIERRE**

le 4 mai 2011

## **Intégration du comportement thermomécanique des pièces dans l'analyse des spécifications géométriques : application à une turbine de moteur d'hélicoptère**

Directeur de thèse : **Jean-Pierre NADEAU**

Co-encadrement de la thèse : **Denis TEISSANDIER**

### **Jury**

**M. Bernard ANSELMETTI**, Professeur des Universités, LURPA, Université Paris-Sud XI

**M. Alain DAIDIÉ**, Professeur des Universités, Institut Clément Ader, INSA Toulouse

**M. Jean-Pierre NADEAU**, Professeur des Universités, I2M, Arts et Métiers ParisTech

**M. Denis TEISSANDIER**, Maître de conférences, I2M, Université Bordeaux 1

**M. François VILLENEUVE**, Professeur des Universités, G-SCOP, Université de Grenoble

**M. Gérald SENGER**, Ingénieur R&D, Turbomeca

**M. Nicolas ZOULOUMIAN**, Ingénieur R&D, Turbomeca

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Invité

Invité

**T  
H  
È  
S  
E**



# Remerciements

*Les travaux de recherche exposés dans ce mémoire ont été réalisés au sein l'Institut d'Ingénierie et de Mécanique de Bordeaux (I2M) et initialement dans deux laboratoires bordelais : le laboratoire Transferts Écoulements Fluides Énergétique (TRFEE) et le Laboratoire de Mécanique Physique (LMP). Je remercie les directeurs de ces deux entités, MM. Eric Arquis et Marc Deschamps, de m'avoir accueilli.*

*Je tiens à remercier M. François Villeneuve (Professeur à l'Université de Grenoble) de l'honneur qu'il m'a fait en présidant ce jury de thèse.*

*Je tiens aussi à remercier M. Bernard ANSELMETTI (Professeur à l'Université Paris-Sud XI) et M. Alain DAIDIÉ (Professeur à l'INSA Toulouse) de l'intérêt porté à mes travaux et d'avoir accepté de rapporter mes travaux de thèse.*

*Je remercie vivement M. Jean-Pierre Nadeau (Professeur à Arts et Métiers ParisTech) et M. Denis Teissandier (Maître de conférences à l'Université Bordeaux 1) pour m'avoir fait confiance et proposé un tel sujet, mais aussi pour leur encadrement, leurs conseils et leur expérience qu'ils ont su me faire partager.*

*Je remercie aussi l'ensemble des personnes de la Société Turboméca qui s'est investi en apportant toutes leurs connaissances techniques à ce travail.*

*Afin de ne pas faire d'impair, ces remerciements s'adressent aussi à l'ensemble des personnes qui a permis le bon déroulement de cette thèse (doctorants, secrétaires, personnels, techniciens, enseignants, enseignants-chercheurs, chercheurs, ...) de l'Institut mais aussi d'Arts et Métiers et de l'Université Bordeaux 1.*

*Enfin, je tiens particulièrement à remercier ma famille et mes amis.*

*Je souhaite enfin apporter toute ma reconnaissance à Vanessa qui a su me soutenir pendant la rédaction de ce document ainsi que pour la préparation de la soutenance.*

# Table des matières

<b>Table des matières</b> .....	<b>1</b>
<b>Table des figures</b> .....	<b>7</b>
<b>Table des tableaux</b> .....	<b>11</b>
<b>- Chapitre I - Contexte Général</b> .....	<b>1</b>
I-1 DESCRIPTION D'UN TURBOMOTEUR .....	3
I-2 CENTRE DE L'ETUDE ET PROBLEMATIQUE .....	6
I-3 VARIABILITE DU JEU ROTOR STATOR EN SOMMET D'AUBES .....	9
I-4 POSITIONNEMENT DU TRAVAIL .....	14
I-5 STRUCTURATION DU DOCUMENT DE THESE .....	17
<b>- Chapitre II - Modélisation des variations géométriques par des chaînes de cotes : problématique et état de l'art</b> .....	<b>19</b>
II-1 MODELISATIONS PRENANT EN COMPTE DES SOLIDES INDEFORMABLES .....	21
II-1.1 Hypothèses physiques .....	21
II-1.2 Modélisation d'un mécanisme .....	22
II-1.2.1 Modélisation des surfaces fabriquées par des surfaces de substitution.....	22

II-1.2.2	Caractérisation des écarts géométriques d'une pièce.....	23
II-1.2.3	Caractérisation des écarts géométriques entre deux surfaces potentiellement en contact.....	26
II-1.2.4	Loi de comportement géométrique d'un mécanisme.....	29
II-1.3	Transfert d'une exigence fonctionnelle.....	34
II-1.3.1	Formalisation des chaînes de cotes 3d influentes sur une condition fonctionnelle.....	34
II-1.3.2	Spécification et répartition des limites des défauts géométriques sur les pièces.....	38
II-1.4	Synthèse.....	41
II-2	MODELISATIONS PRENANT EN COMPTE DES SOLIDES DEFORMABLES.....	42
II-2.1	Modélisation des assemblages souples par soudage.....	42
II-2.2	Simulation par la mesure d'affleurement de pièces de carrosserie.....	45
II-2.3	Réglage des liaisons d'un assemblage constitué de pièces souples.....	47
II-2.3.1	Assemblages d'une pièce souple dans un bâti rigide.....	47
II-2.3.2	Assemblages de plusieurs pièces souples.....	48
II-2.4	Prise en compte du comportement élastique d'un mécanisme en fonctionnement.....	49
II-2.5	Evolution d'une exigence fonctionnelle pendant le cycle de vie d'un produit.....	52
II-3	SYNTHESE SUR LES OUTILS DE CHAINES DE COTES TRIDIMENSIONNELLES.....	53
	<b>- Chapitre III - Mise en œuvre de chaînes de cotes 3d par des opérations sur des polytopes.....</b>	<b>55</b>
III-1	PROPRIETES SUR LES POLYTOPES.....	57
III-1.1	Définitions duales d'un polytope.....	57
III-1.2	Intersection de polytopes.....	61
III-1.3	Somme de Minkowski de polytopes.....	61
III-2	CARACTERISATION DES SPECIFICATIONS PAR DES POLYTOPES.....	62
III-2.1	Caractérisation de spécifications géométriques.....	62
III-2.1.1	Polytope géométrique d'une surface de classe complexe.....	62
III-2.1.2	Polytope géométrique d'une surface plane.....	64
III-2.1.3	Polytope géométrique d'une surface cylindrique.....	67
III-2.2	Caractérisation de spécifications géométriques ISO.....	68

III-2.2.1	Spécifications de position .....	69
III-2.2.2	Spécifications d'orientation .....	70
III-2.2.3	Synthèse .....	74
III-2.3	Caractérisation d'une spécification de contact .....	76
III-2.3.1	Caractérisation d'une liaison : méthode générale .....	76
III-2.3.2	Caractérisation d'une liaison appui plan .....	77
III-2.3.3	Caractérisation d'une liaison pivot glissant .....	80
III-2.4	Caractérisation d'une exigence fonctionnelle .....	81
III-2.4.1	Application à l'exemple .....	82
III-3	TRANSFERT D'UNE EXIGENCE PAR DES OPERATIONS SUR DES POLYTOPES .....	85
III-3.1	Formalisation des lois de comportement géométrique par des opérations sur des polytopes .....	85
III-3.2	Formalisation du transfert d'une exigence fonctionnelle .....	90
III-4	SYNTHESE SUR L'ANALYSE DE TOLERANCES PAR DES OPERATIONS SUR DES POLYTOPES .....	94
 <b>- Chapitre IV - Prise en compte des variations thermomécaniques dans les chaînes de cotes 3d .....</b>		
IV-1	HYPOTHESES PHYSIQUES .....	98
IV-2	DEFINITION DES SITUATIONS DE VIE .....	99
IV-2.1	Situation de vie de référence .....	99
IV-2.2	Situation de vie thermomécanique .....	101
IV-3	IDENTIFICATION DES PARTIES THERMOMECHANIQUEMENT INFLUENTES .....	102
IV-3.1	Simulation thermique sur le produit étudié .....	103
IV-3.2	Simulation thermomécanique « à l'état libre » des pièces .....	104
IV-3.3	Caractérisation des écarts entre le modèle déformé et le modèle nominal ... .....	105
IV-4	PRISE EN COMPTE DES DEFORMATIONS THERMOMECHANIQUES .....	106
IV-4.1	Intégration des déformations thermomécaniques .....	106
IV-4.1.1	Intégration des déformations thermomécaniques dans les pièces	106
IV-4.1.2	Intégration des déformations thermomécaniques dans les contacts ... .....	108
IV-4.2	Formalisation des lois de comportement géométrique des mécanismes	115
IV-4.3	Formalisation du transfert d'une exigence fonctionnelle .....	118

IV-4.3.1 Formalisation du polytope géométrique dans le cas de pièces bridées .....	118
IV-4.3.2 Formalisation du polytope géométrique entre deux surfaces d'un mécanisme ne contenant pas de bridage .....	121
IV-4.3.3 Intégration des écarts de dimension et de forme d'origine thermomécanique des surfaces spécifiées par l'exigence fonctionnelle .....	123
IV-4.4 Caractérisation de l'exigence fonctionnelle .....	125
IV-5 CONCLUSION .....	126
<b>- Chapitre V - Qualification des variantes d'architecture de turbine .....</b>	<b>129</b>
V-1 CRITERES DE PERFORMANCE D'UNE TURBINE .....	134
V-1.1 Critères de performance d'une turbine .....	134
V-1.2 Paramétrage géométrique du stator .....	135
V-1.3 Expression des critères performance d'une turbine en fonction des paramètres géométriques du stator .....	137
V-2 DEFINITION DES VARIANTES D'ARCHITECTURE .....	137
V-3 EVALUATION DES PERFORMANCES DES VARIANTES D'ARCHITECTURES .....	137
V-4 HIERARCHISATION DES SOLUTIONS D'ARCHITECTURES ENVISAGEES DE STATOR....	138
V-5 CONCLUSIONS .....	138
<b>Conclusions générales et Perspectives .....</b>	<b>141</b>
<b>Références bibliographiques .....</b>	<b>147</b>

## Table des figures

Figure 1 : Flux fonctionnel d'un turbomoteur. ....	3
Figure 2 : Schéma d'un turbomoteur de la société Turbomeca. ....	5
Figure 3 : Section de fuite et jeu en sommet d'aube. ....	7
Figure 4 : Assemblage d'une turbine haute pression (THP). ....	8
Figure 5 : Evolution du déplacement d'un point du rotor et du stator. ....	10
Figure 6 : Diagramme des causes de la variation du jeu rotor/stator. ....	13
Figure 7 : Description de l'approche multiphysique proposée. ....	15
Figure 8 : Synoptique de la structuration du document de thèse. ....	17
Figure 9 : Modèle nominal (modèle CAO). ....	22
Figure 10 : Skin modèle. ....	22
Figure 11 : Représentation d'une pièce par des surfaces de substitution. ....	23
Figure 12 : Ecart de situation. ....	24
Figure 13 : Ecart de dimension. ....	25
Figure 14 : Natures d'un contact appui plan [Dantan, 2000]. ....	27
Figure 15 : Modèle nominal du mécanisme étudié. ....	28
Figure 16 : Représentation d'une pièce par un graphe. ....	30
Figure 17 : Représentation du mécanisme par un graphe de contacts. ....	30

Figure 18 : Représentation du cycle.....	31
Figure 19 : Définition d'une condition fonctionnelle.....	35
Figure 20 : Sous-graphe influent dans le graphe de contacts.....	40
Figure 21 : Spécifications ISO influentes sur la condition CF.....	40
Figure 22 : Carrosserie automobile et sa structure en poutre [Shiu et al, 1997].....	43
Figure 23 : Exemple d'assemblage multiposte [Ding et al, 2002a].....	44
Figure 24 : Exemple d'affleurement de carrosserie [Wickman et al, 2004].....	45
Figure 25 : Evaluation de la robustesse des assemblages souples [Söderberg et al, 2006b].....	46
Figure 26 : Exemple d'une voiture physique et sa représentation virtuelle [Wickman et al, 2004].....	47
Figure 27 : Exemple d'une portière de voiture [Cid et al, 2004].....	48
Figure 28 : Différentes modélisations proposées [Samper S. et al, 1998].....	50
Figure 29 : Méthode séquentielle proposée par [Samper S. et al, 2003].....	50
Figure 30 : Méthode simultanée proposée par [Samper S. et al, 2003].....	51
Figure 31 : Evolution du domaine jeu d'un roulement [Samper S. et al, 2007].....	51
Figure 32 : Exemples de polytopes définis à partir de points.....	58
Figure 33 : Exemple d'un 2-polytope défini à partir d'hyperplans.....	59
Figure 34 : Vérification de l'inclusion du 3-polytope [Teissandier et al, 1999b].....	60
Figure 35 : Intersection de 3-polytopes dans $\mathbb{R}^3$ [Teissandier et al, 1999b].....	61
Figure 36 : Somme de Minkowski de 3-polytopes dans $\mathbb{R}^3$ .....	62
Figure 37 : Contraintes géométriques d'une surface quelconque [Teissandier et al, 1999b].....	63
Figure 38 : Contraintes géométriques d'une surface nominale plane.....	65
Figure 39 : 3-polytope géométrique $\mathcal{D}_{1,1/1,0}^g$ de $S_{1,1}$ par rapport à $S_{1,0}$ au point P.....	67
Figure 40 : 3-polytope géométrique d'une surface plane de contour circulaire.....	67
Figure 41 : 4-polytope géométrique d'une surface circulaire projeté dans $\mathbb{R}^3$ .....	68
Figure 42 : 3- polytope d'une spécification de localisation entre deux plans au point P. .....	70
Figure 43 : 4- polytope d'une spécification de coaxialité entre deux surfaces cylindriques au point P projeté dans $\mathbb{R}^3$ .....	70
Figure 44 : 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un axe dans une zone de tolérance cylindrique.....	72

Figure 45 : 1-polytope d'une spécification de parallélisme d'un axe dans une zone de tolérance définie par deux plans parallèles. ....	72
Figure 46 : 2-polytope d'une spécification de parallélisme d'un plan de contour rectangulaire.....	73
Figure 47 : 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan de contour circulaire. ....	73
Figure 48 : 1-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan de contour rectangulaire.....	74
Figure 49 : parallélisme et localisation entre les deux mêmes surfaces .....	74
Figure 50 : Analyse des tolérances d'une pièce.....	75
Figure 51 : Deux surfaces nominalement planes de contour rectangulaire en contact... ..	77
Figure 52 : 3-polytope de contact $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^c$ de $S_{1,1}$ par rapport à $S_{2,1}$ au point P.....	79
Figure 53 : 3-polytope de contact de deux surfaces planes de contours circulaires. ....	79
Figure 54 : Deux surfaces nominalement cylindriques en contact. ....	80
Figure 55 : 4-polytope de contact entre deux surfaces cylindriques projeté dans $\mathbb{R}^3$ ....	81
Figure 56 : 2-polytope fonctionnel $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$ de l'exigence entre $S_{1,1}$ et $S_{2,1}$ au point A. ....	83
Figure 57 : 1-polytope fonctionnel $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$ de l'exigence entre $S_{1,1}$ et $S_{2,1}$ au point A projeté dans $(\mathbf{p}_z, \mathbf{e}_{A,y})$ . ....	84
Figure 58 : Description de la boucle formalisant les lois de comportement géométrique. ....	85
Figure 59 : Somme de Minkowski $\mathcal{D}_1^c$ des deux polytopes de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,\min}$ et $\mathcal{D}_{2,3/1,3}^c$ .....	87
Figure 60 : Spécifications d'orthogonalité et leurs polytopes géométriques associés....	88
Figure 61 : Construction du 2-polytope géométrique global.....	89
Figure 62 : Inclusion de la somme des polytopes géométriques dans la somme des polytopes de contact.....	89
Figure 63 : Description des chemins influents sur la condition fonctionnelle.....	90
Figure 64 : Sous-graphe influent dans le graphe de contacts. ....	91
Figure 65 : Spécifications ISO influentes sur CF. ....	92
Figure 66 : Construction du polytope de géométrie $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$ .....	93
Figure 67 : 2-Polytopes caractérisant le respect de l'exigence fonctionnelle.....	93
Figure 68 : Système étudié avec le graphe de contact associé.....	97

Figure 69 : Système dans la situation de vie de référence. ....	100
Figure 70 : Système dans des situations de vie thermomécaniques. ....	102
Figure 71 : Simulations thermiques du système dans deux situations de vie différentes. .....	103
Figure 72 : Simulation thermomécanique à l'état libre de la pièce 1.....	104
Figure 73 : Association du modèle déformé par rapport au modèle nominal. ....	105
Figure 74 : Modélisations des pièces par des graphes. ....	106
Figure 75 : Liaison pivot glissant dans une situation de vie thermomécanique.....	110
Figure 76 : Evolution du polytope de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$ dans le plan $(\rho_y, \rho_z)$ de la situation de vie de référence vers une situation de vie thermomécanique. ....	111
Figure 77 : Evolution du polytope de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$ au point A dans le plan $(\rho_z, \varepsilon_{A-y})$ de la situation de vie de référence vers une situation de vie thermomécanique....	112
Figure 78 : Caractérisation des sommets du polytope de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$ au point A dans le plan $(\rho_z, \varepsilon_{A-y})$ . ....	113
Figure 79 : Polytope de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$ dans la situation de vie I. ....	114
Figure 80 : Polytope de contact $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$ dans la situation de vie II. ....	115
Figure 81 : Formalisation des lois de comportement géométrique dans la situation de vie I.....	117
Figure 82 : Formalisation des lois de comportement géométriques dans la situation de vie II. ....	117
Figure 83 : Simulation thermomécanique complète situation de vie I.....	119
Figure 84 : Polytope géométrique $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^{g,th}$ dans la situation de vie I. ....	120
Figure 85 : Polytope géométrique $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$ dans la situation de vie I. ....	121
Figure 86 : Polytope géométrique $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$ dans la situation de vie I. ....	122
Figure 87 : Section de la surface 1,1 au point A. ....	123
Figure 88 : Organigramme synthétisant la démarche proposée. ....	128
Figure 89 : Qualification de variantes d'architecture de turbine.....	133
Figure 90 : Section de fuite et jeu en sommet d'aube. ....	134
Figure 91 : Association d'une surface de substitution à un profil réel circulaire.....	135
Figure 92 : Paramétrage de la section nominale circulaire. ....	136

## Table des tableaux

Tableau 1 : Types des liaisons.....	26
-------------------------------------	----



- Chapitre I -

Contexte Général



## Avant propos

Les travaux de cette thèse sont menés dans le cadre de l'ERT 1070 IMPACT (Equipe de Recherche Technologique Innovation Moteur pour l'Anneau et le Contrôle du jeu Turbine haute pression). Le partenaire industriel de ces travaux est l'entreprise Turbomeca située à Bordes (64). L'objectif des travaux conduits par l'ERT 1070 IMPACT est d'apporter des solutions techniques pour améliorer les performances des moteurs d'hélicoptère pour chacun des différents régimes de fonctionnement. Une des voies pour améliorer les performances de ces turbomoteurs est l'optimisation du rendement énergétique des différents composants constitutifs et, plus particulièrement, la maîtrise des jeux entre les sommets des aubes de la turbine haute pression et le stator.

Cette maîtrise passe pour l'industriel, lors de la conception, par une démarche de choix de types de liaison, de formes, de dimensionnement et de tolérancement géométrique.

## I-1 Description d'un turbomoteur

Le turbomoteur fait partie de la famille des turbomachines au même titre que le turbopropulseur, le turboréacteur, etc. Une turbomachine est un ensemble mécanique dont le rôle est d'assurer un échange d'énergie entre un fluide en écoulement et un rotor animé d'un mouvement de rotation généralement uniforme autour de son axe [Pluiose et al, 2002]. D'une manière générale, les turbomachines permettent d'échanger l'énergie fournie par un fluide vers un dispositif mécanique.

Dans le cas particulier d'un turbomoteur, l'énergie dégagée par la combustion est transformée en énergie mécanique (voir figure 1). L'énergie mécanique recueillie sur l'arbre de sortie est généralement utilisée pour la propulsion aéronautique et aussi pour la traction ferroviaire.



Figure 1 : Flux fonctionnel d'un turbomoteur.

La figure 2 schématise un turbomoteur de la société Turbomeca. Il se décompose en deux étages distincts :

- ensemble générateur de gaz,
- étage de puissance.

L'ensemble générateur de gaz a pour fonction de générer les gaz à haute pression par une combustion du carburant tandis que l'étage de puissance transmet l'énergie des gaz issus de la combustion vers la boîte de transmission de puissance dans le cas particulier d'un turbomoteur.

L'air est capté par l'entrée d'air et transite dans le générateur de gaz au travers de plusieurs sous-ensembles :

- le compresseur axial,
- le compresseur centrifuge,
- la chambre de combustion,
- la turbine haute pression.

L'étage de compression se décompose en deux parties. Le compresseur axial dont la fonction est d'augmenter l'énergie cinétique, aspire l'air et fait accroître sa vitesse. Ensuite le compresseur centrifuge transforme l'énergie cinétique de l'air en énergie potentielle. La vitesse de l'air est ainsi réduite et sa pression augmente considérablement.

L'air comburant, à une pression élevée, est mélangé au carburant. Ce mélange s'enflamme instantanément dans la chambre de combustion. Cette combustion crée des gaz de combustion à grande vitesse qui provoquent une poussée en sortie de la chambre de combustion.

Une partie de la poussée est ensuite récupérée par la turbine haute pression afin d'entraîner en rotation les étages du compresseur. L'arbre couplant le rotor de la turbine haute pression au rotor du compresseur permet de transmettre l'énergie mécanique de la turbine haute pression aux compresseurs.

La poussée restante issue du générateur de gaz transite alors vers l'étage de turbine basse pression. Le flux de gaz traverse la turbine basse pression, récupérant la quasi-totalité de l'énergie cinétique de la poussée restante, pour la transformer en énergie mécanique. L'arbre de la turbine basse pression peut alors transmettre vers la boîte de transmission de puissance l'énergie mécanique produite par le turbomoteur.

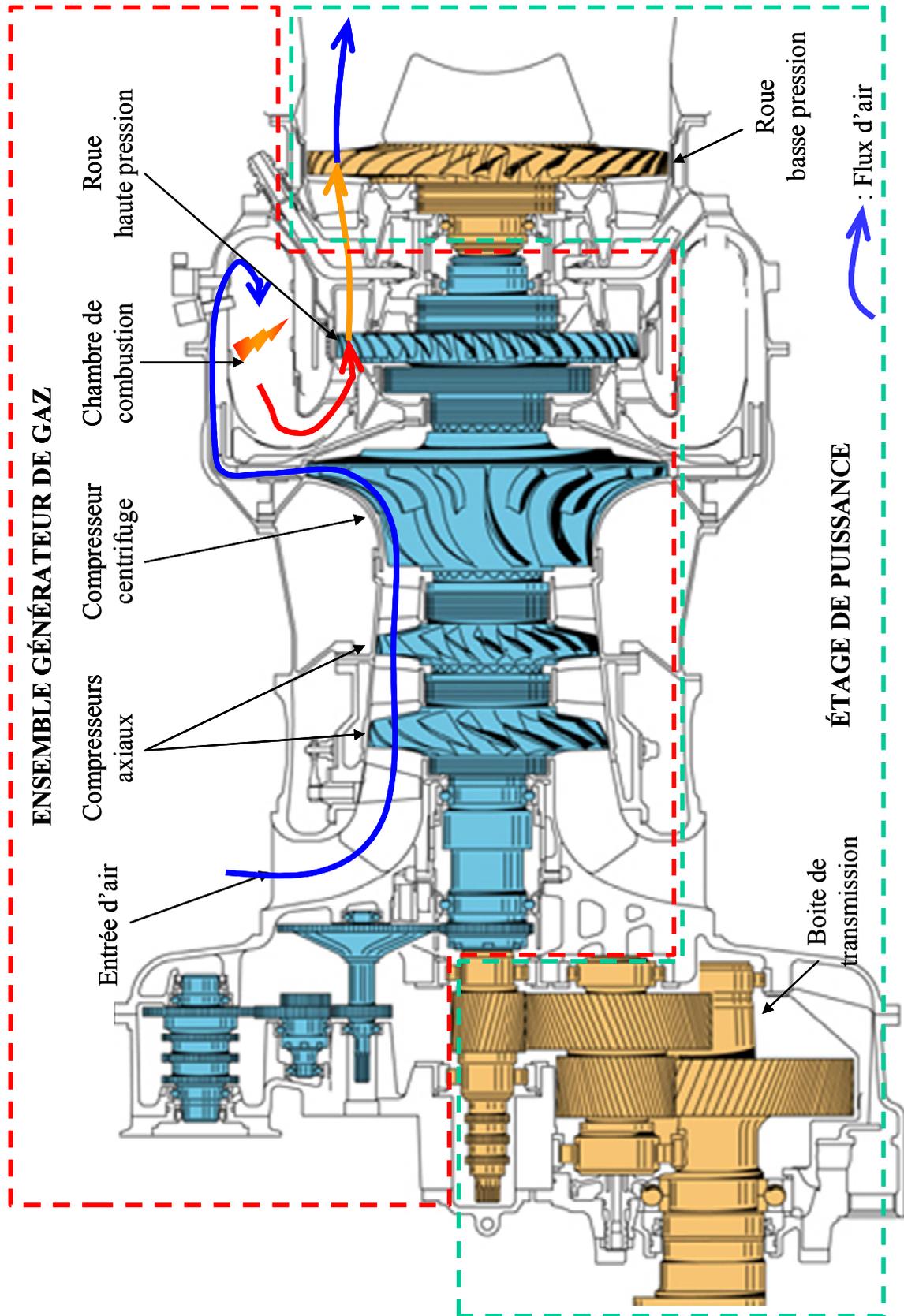


Figure 2 : Schéma d'un turbomoteur de la société Turbomeca.

## I-2 Centre de l'étude et problématique

L'amélioration de la performance d'un turbomoteur exige de maximiser son rendement énergétique qui est fortement corrélé au rendement des étages de turbine. Le rendement d'un turbomoteur dépend en général de différentes pertes énergétiques.

Ces pertes énergétiques sont d'origines différentes. Une classification couramment utilisée [Pluviose et al, 2003] comprend quatre types de pertes :

- les pertes aérodynamiques d'aubages : elles sont dues à la viscosité du fluide créant des pertes de charges sur les différentes aubes,
- les pertes par frottement de disque : elles sont provoquées par la viscosité du fluide agissant sur les surfaces inactives du rotor,
- les pertes par fuites : elles sont générées par la fraction volumique de fluide s'échappant du système,
- les pertes mécaniques : elles sont induites par la puissance consommée par les organes de type paliers et butées et les systèmes auxiliaires de la machine : pompe à huile, variateur de vitesse, etc.

Nous allons considérer les pertes par fuites. Ces fuites peuvent être qualifiées d'internes ou d'externes. Les fuites internes sont recueillies dans une autre partie du système, tandis que les fuites externes sont évacuées vers l'extérieur de la machine. Ainsi, les fuites de fluide s'échappant du carter de la turbine sont considérées comme des fuites externes, alors que le flux de gaz s'écoulant entre le sommet des pales de la turbine haute pression et le stator, sera caractérisé comme une fuite interne. En effet, les gaz ne travaillant pas dans la turbine haute pression seront récupérés par la turbine basse pression.

Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons uniquement à la fuite interne des gaz entre le rotor et le stator de la turbine haute pression. La fuite des gaz entre le rotor et le stator correspond au débit de fluide s'écoulant entre le sommet des pales du rotor et le stator. Le débit est lié à la dimension de la section de fuite, notée  $S_{\text{fuite}}$ , correspondant à la différence entre la section du stator et la section du rotor (voir figure 3). La section de fuite est dépendante du jeu noté  $J$ , entre le sommet des aubes et le stator.

La figure 3 représente la section de fuite et le jeu rotor stator dans trois vues différentes :

- une vue 3d du modèle nominal en rendu réaliste,
- une section du modèle nominal suivant l'axe de rotation du rotor : le cercle définissant le rotor correspond au cercle circonscrit aux sommets des aubes,
- une section réelle suivant l'axe de rotation du rotor illustrée par un skin modèle : elle donne une représentation des principaux types d'écarts géométriques possibles.

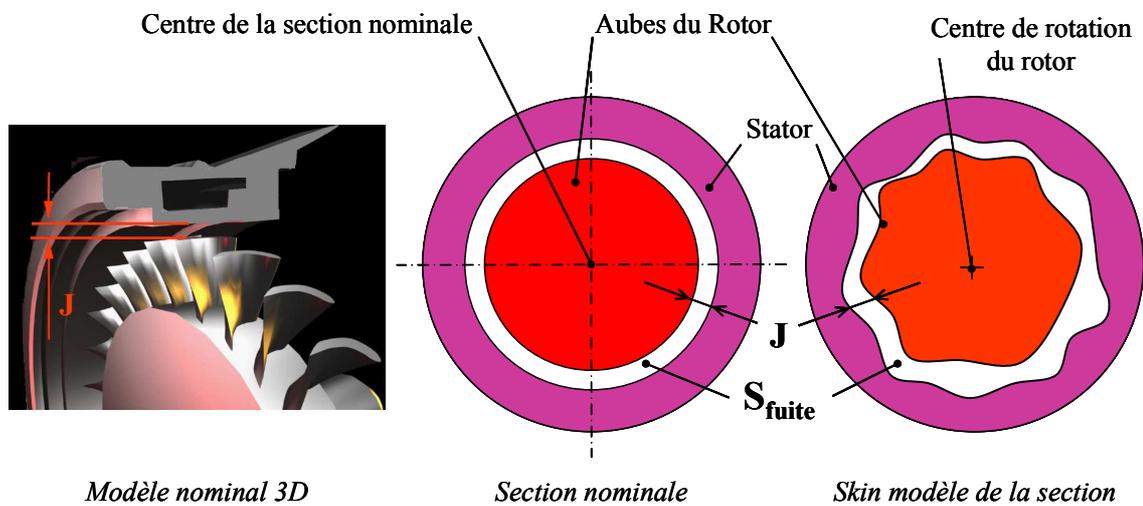


Figure 3 : Section de fuite et jeu en sommet d'aube.

Le jeu local rotor stator en sommet d'aubes, noté  $J$ , correspond à la distance entre un point situé sur une aube du rotor et un point situé sur l'anneau du stator. Les deux points sont choisis tels qu'ils soient sur le même rayon. La variabilité du jeu  $J$  dépend de la variabilité géométrique du rotor en sommet d'aubes, de la variabilité géométrique de l'anneau du stator en vis-à-vis des aubes et des variations de positions entre le rotor et le stator. Une définition plus précise de ce jeu sera donnée dans la suite de ce document.

Dans toutes les phases de fonctionnement, le jeu  $J$  doit être maîtrisé, en s'assurant d'une part que le rotor ne vienne pas toucher le stator, et d'autre part que la section de fuite ne soit pas trop importante. La touche d'une pale sur le stator peut endommager la turbine voire nuire à son intégrité. Une valeur minimale du jeu  $J$  permet

de garantir l'intégrité de la turbine tandis qu'une valeur maximale de  $S_{\text{fuite}}$  garantit un rendement optimal.

Il s'agit de trouver le meilleur compromis entre le risque de touche d'une pale sur le stator et un rendement optimal. Ce compromis est réalisé dans le cycle de conception de la turbine pour différentes simulations des phases de fonctionnement de la turbine.

La figure 4 présente les différentes pièces ou groupements de pièces impliquées dans l'évolution du jeu et de la section de fuite. Elles correspondent à la chaîne d'assemblage réalisant la turbine haute pression (THP). Le stator est constitué par l'anneau (lui-même décomposé en secteurs d'anneau) et un support d'anneau (SATHP) qui est relié au carter. L'ensemble rotor inclut un arbre creux, le rotor lui-même et les aubes. Le rotor est lié au carter par des roulements et des paliers avant (SPAV) non représentés et arrière (SPAR). Enfin, le carter lui-même fait partie de l'assemblage.

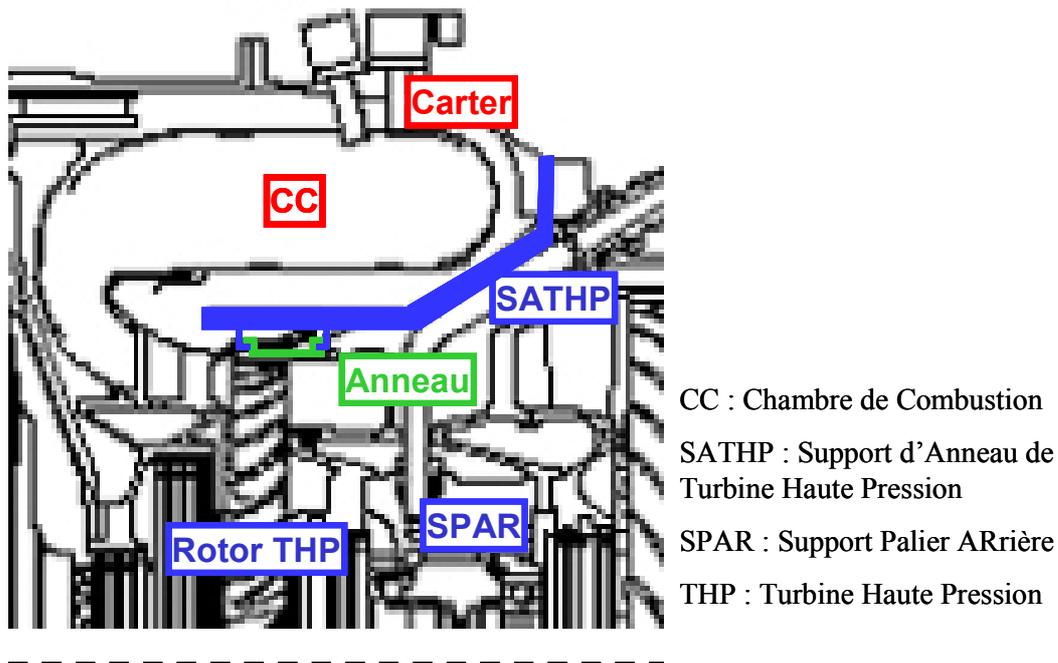


Figure 4 : Assemblage d'une turbine haute pression (THP).

---

L'étude repose sur l'amélioration de la performance de la turbine haute pression. L'amélioration de la performance consiste à garantir un rendement optimal sans avoir de touche d'une pale sur le stator. La section de fuite permet de caractériser le rendement énergétique tandis que le jeu permet de définir le risque

**de touche entre le rotor et le stator. La problématique est de trouver le meilleur compromis afin d'optimiser le rendement énergétique tout en garantissant l'intégrité de la turbine haute pression durant toutes ses phases de fonctionnement.**

---

### **I-3 Variabilité du jeu rotor stator en sommet d'aubes**

La variabilité du jeu J dépend de la variabilité géométrique du rotor, de la variabilité géométrique du stator et des variations de positions entre le rotor et le stator. Certaines variabilités géométriques du rotor et du stator ont des origines liées au cycle de fonctionnement de la turbine et d'autres sont indépendantes du cycle fonctionnement de la turbine.

Les variabilités indépendantes du cycle de fonctionnement sont :

- la variabilité géométrique due aux procédés d'obtention des pièces,
- la variabilité due aux procédés d'assemblages des pièces.

Lors de la fabrication des pièces, des défauts inhérents aux procédés d'obtention mis en œuvre vont impacter directement le jeu rotor stator en sommet d'aubes.

De plus, lors de l'assemblage d'une turbine, la présence de jeu dans certaines liaisons et d'éventuelles déformations de pièces génère également des variations sur le jeu rotor stator.

Les jeux internes à des composants standards tels que les roulements utilisés pour assurer le guidage en rotation du rotor influent aussi sur le jeu J.

Quel que soit le régime de fonctionnement de la turbine, les défauts de fabrication, les défauts d'assemblages et les jeux des roulements sont toujours présents.

Le fonctionnement de la turbine induit des effets physiques sur les différents éléments constitutifs de la turbine créant diverses variations géométriques :

- les variations dues aux contraintes thermomécaniques,
- les variations dues aux effets centrifuges,
- les variations dues aux manœuvres de l'aéronef.

Il convient de citer aussi les variations liées à la dynamique de la ligne d'arbre. Ces variations dépendent des défauts géométriques du rotor, des hétérogénéités de densité de matière dans les pièces et également de la vitesse de rotation de l'arbre. Elles

proviennent de phénomènes à la fois dépendants et indépendants du cycle de fonctionnement.

Ces différents types de variations ne sont pas exhaustifs mais sont les plus significatifs dans l'estimation du jeu J. L'étude expérimentale d'un cycle de fonctionnement d'une turbine haute pression a servi de support pour identifier certaines variations géométriques. Les courbes de la figure 5 synthétisent des essais sur banc d'une turbine haute pression dont le but est d'étudier l'évolution du jeu rotor stator en régime transitoire.

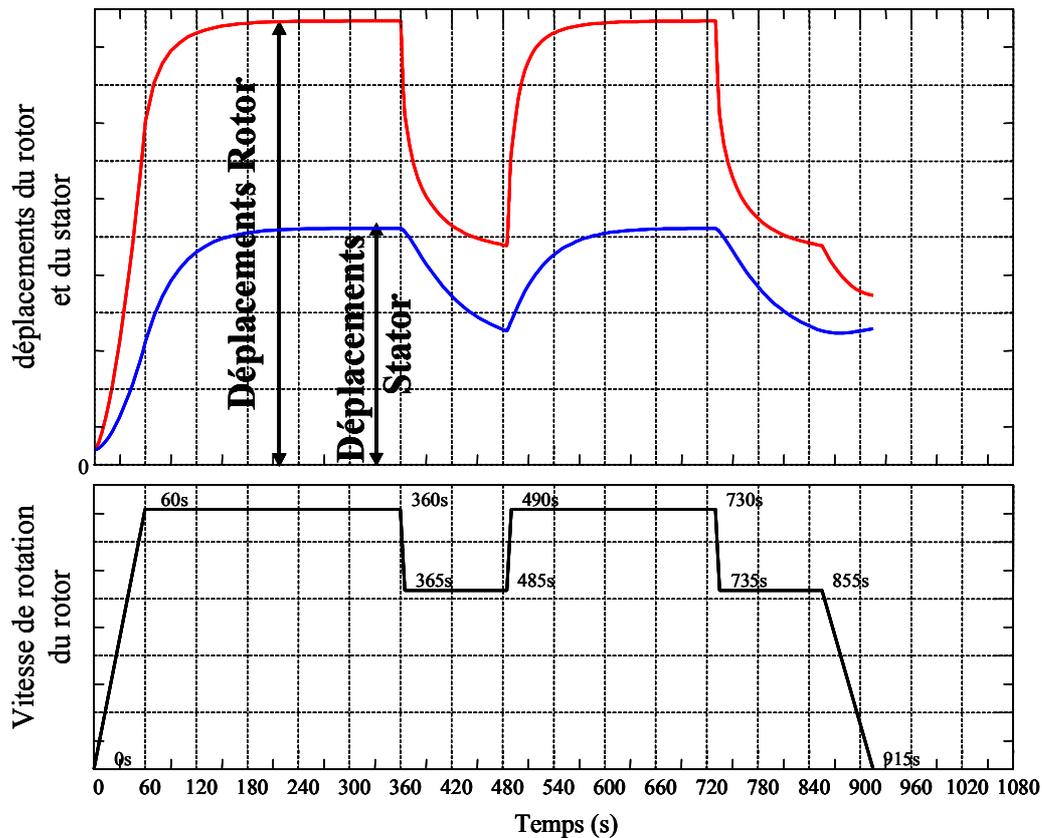


Figure 5 : Evolution du déplacement d'un point du rotor et du stator.

Ce cycle de fonctionnement est composé d'une phase de démarrage, de quatre paliers successifs au niveau de la vitesse de rotation de l'arbre puis d'une phase d'arrêt. Parmi les quatre paliers, deux correspondent à des paliers de vitesse maximale de l'arbre.

Dans la partie supérieure de la figure 5, l'évolution des déplacements du sommet des pales du rotor et de l'anneau du stator est représentée.

La différence de déplacement entre les sommets des aubes du rotor et la face interne de l'anneau stator permet de caractériser l'évolution du jeu  $J$  en sommet d'aubes. Un premier constat révèle que les deux évolutions dépendent des phases du cycle de fonctionnement de la turbine. Il est aisé de remarquer que les variations des déplacements du rotor et du stator sont très sensibles au régime de fonctionnement de la turbine haute pression. Pour chaque régime de fonctionnement et pendant les phases transitoires, le jeu en sommet d'aubes de turbine est donc différent.

La phase de démarrage du turbomoteur est caractérisée par une augmentation de la vitesse de rotation du rotor pour atteindre le premier palier de vitesse maximale (voir figure 5). Cette mise en rotation provoque dès les premiers instants des déformations du rotor beaucoup plus rapides et importantes que celles du stator. Le sommet des pales (partie supérieure des aubes) subit donc un déplacement dû, d'une part, à l'allongement lié aux effets centrifuges et, d'autre part, à la dilatation liée à l'augmentation de température. Ces divers phénomènes physiques en présence peuvent conduire à une différence de déplacements entre le bord d'attaque et le bord de fuite. Le bord d'attaque est la partie du profil des pales qui entre en premier en contact avec le flux de gaz tandis que le bord de fuite caractérise la partie du profil qui entre en contact en dernier avec le flux de gaz.

L'anneau du stator subit des variations de températures qui vont générer des dilatations. La forme de l'anneau, ses dimensions et le matériau utilisé, les liaisons avec les pièces adjacentes, la déformation des pièces jusqu'à la pièce de référence non affectée par le chargement transitoire vont induire un comportement thermomécanique complexe. Les déplacements du bord d'attaque et du bord de fuite de l'anneau seront différents.

Le premier palier de vitesse correspond à un régime de fonctionnement à vitesse maximale. Bien qu'il n'y ait plus de variation de vitesse, les déplacements du rotor et du stator continuent encore d'évoluer jusqu'à une phase stabilisée. La constante de temps de mise en température stabilisée par le flux de gaz chauds est en effet plus grande que celle de mise en vitesse du rotor. Cette mise en température augmente les déformations d'origine thermomécanique sur l'ensemble du stator et du rotor et génère un déplacement supplémentaire des sommets d'aubes et de la face interne de l'anneau.

A chaque changement de régime de fonctionnement, l'évolution des déplacements n'est pas instantanée. Lors du passage du premier palier au second palier le changement de régime du moteur est quasi instantané. La variation de l'allongement des pales, due à la diminution de vitesse, est immédiate tandis que la variation des déplacements induite par les contraintes thermomécaniques est plus longue. Lorsque la vitesse de rotation de la turbine augmente (passage du second palier au troisième palier) ou lorsqu'elle diminue (passage du troisième palier au quatrième palier), les variations de déplacements tendent rapidement vers un état stationnaire. La rapidité de l'établissement d'un régime stationnaire dépend de la géométrie du rotor, de celle du stator ainsi que des différentes pièces et assemblage réalisant la turbine haute pression.

D'autres phénomènes physiques, non visibles sur les courbes de la figure 5, ont une influence sur l'évolution du jeu rotor/stator. Les défauts de fabrication et d'assemblage des pièces provoquent des défauts géométriques du rotor. Ces défauts géométriques associés à l'hétérogénéité de densité du rotor agissent sur la dynamique de la ligne d'arbre. Ces perturbations dynamiques de la ligne d'arbre, communément appelées le balourd, génèrent des vibrations de l'arbre et vont potentiellement agir sur la position relative entre le rotor et le stator. Ces vibrations peuvent entraîner, si elles ne sont pas maîtrisées, des risques de touche et des endommagements irréversibles de la turbine.

Les changements de direction violents, les changements d'altitude brusques constituent une partie des manœuvres sollicitant les capacités de l'aéronef à l'extrême. L'ensemble de ces manœuvres provoque des fortes accélérations de l'ensemble des éléments constitutifs de la turbine. Ces différentes sollicitations mécaniques extérieures à la turbine entraînent des petites déformations du rotor de la turbine mais aussi du stator. Ces déformations conduisent également à une variation du jeu en sommet d'aubes de turbine haute pression.

La figure 6 récapitule l'ensemble des phénomènes ayant un effet sur le jeu J, jeu local rotor/stator en sommet d'aubes.

Ces phénomènes peuvent être estimés par des mesures, des simulations et/ou des retours d'expériences (provenant de divers essais et de la maintenance par exemple). Cependant ces phénomènes doivent être pris en compte dès les phases de conception en considérant toutes les phases de fonctionnement de la turbine.

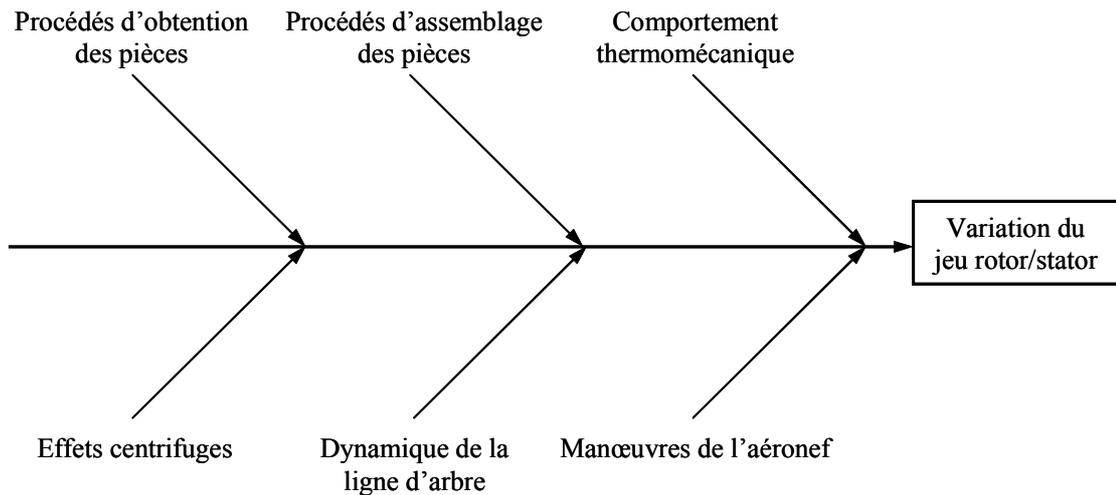


Figure 6 : Diagramme des causes de la variation du jeu rotor/stator.

Généralement une démarche de tolérancement géométrique permet de prendre en compte les défauts dus aux procédés d'obtention des pièces mais aussi dus aux procédés d'assemblage des pièces. Les modélisations utilisées peuvent considérer des pièces infiniment rigides ou souples afin d'intégrer d'éventuelles déformations induites par le procédé d'assemblage. Les spécifications géométriques permettent de garantir que l'ensemble des défauts de fabrication et d'assemblages respecte les exigences fonctionnelles attendues dans le cahier des charges. Ces spécifications sont mises en place à partir d'un modèle de chaînes de cotes unidirectionnelles ou tridimensionnelles (3d) prenant en compte éventuellement des architectures hyperstatiques.

La modélisation du comportement thermomécanique d'un système peut être réalisée par une approche numérique ou analytique. Les outils de modélisation par éléments finis sont les approches numériques les plus couramment utilisées. Ces deux types d'approche se décomposent généralement en deux études. L'étude thermique détermine le champ de température présent dans le système. En utilisant ce champ de température, l'étude thermomécanique permet de caractériser les déformations thermomécaniques et les contraintes mécaniques dans le système.

L'allongement des pales dû aux effets centrifuges peut être modélisé par une méthode analytique ou éléments finis. Ainsi l'allongement des pales peut être prédit et estimé dès les phases de conception.

Le contrôle dynamique de la ligne d'arbre est maîtrisé en phase d'assemblage en réalisant un équilibrage dynamique de l'arbre.

Les manœuvres extrêmes de l'aéronef créant des sollicitations indépendantes du régime de fonctionnement de la turbine doivent être prises en compte lors de la conception de la turbine. Cette prise en compte passe par une étude dynamique de l'ensemble de la turbine.

Pour maîtriser correctement la section de fuite et le risque de touche pendant le fonctionnement de la turbine, il est nécessaire de disposer, pendant la phase de conception, de modèles multiphysique capables de prendre en compte tous les phénomènes influents sur le jeu rotor/stator en sommets d'aubes.

---

**La variabilité du jeu rotor stator en sommet d'aubes est liée à des phénomènes dépendants ou non du cycle de fonctionnement de la turbine haute pression. Ces phénomènes sont d'origines différentes : procédés d'obtention et d'assemblage des pièces, contraintes thermomécaniques, effets centrifuges, etc. Afin de pouvoir prendre en compte ces différents phénomènes pendant le cycle de conception, il est nécessaire de mettre en place des modèles multiphysique interprétant le comportement de la turbine haute pression durant son cycle de fonctionnement.**

---

## **I-4 Positionnement du travail**

Dans le paragraphe I-2, une classification des différentes pertes réduisant le rendement énergétique de la turbine a été énoncée. Puis, un recensement des phénomènes ayant un impact sur la variabilité du jeu rotor stator en sommet d'aubes de turbine haute pression a été effectué.

Les pertes aérodynamiques d'aubages et les pertes par frottement de disque sont induites par la viscosité du fluide agissant sur les surfaces actives du rotor mais aussi inactives du rotor. La maîtrise de ces différentes pertes est déterminante dans la définition de la géométrie nominale des pièces constitutives du rotor et impose de contrôler la variabilité géométrique du rotor. Les fuites internes, et plus particulièrement la fuite en sommet d'aubes de turbine haute pression, sont dépendantes de la section de fuite. La variabilité de la section de fuite est caractérisée par la variabilité du rotor, du stator et par les variations de position entre le rotor et le stator.

D'un point de vue rendement énergétique, la géométrie du rotor est définie pour minimiser les pertes aérodynamiques d'aubages et les pertes par frottement de disque.

La position relative entre le rotor et le stator est maîtrisée par un équilibrage dynamique du rotor avant l'assemblage avec le stator. Il convient donc de caractériser la variabilité du stator pour identifier d'éventuels paramètres à maîtriser afin de limiter les pertes générées par la section de fuite en sommet d'aubes.

Dans la suite de ce travail, nous allons nous consacrer uniquement à l'étude la variabilité du jeu due à l'architecture des parties statiques de la turbine haute pression. Nous prendrons en compte la variabilité de l'anneau, du support d'anneau (SATHP), du support palier arrière (SPAR), du carter mais aussi des liaisons entre ces différentes pièces.

Les phénomènes qui sont apparus comme les plus influents sur la variabilité du stator sont les procédés d'obtention des pièces, les procédés d'assemblage des pièces et le comportement thermomécanique. Afin de prendre en compte les défauts de fabrication, les défauts d'assemblage ainsi que les déformations thermomécaniques, nous allons réaliser une approche multiphysique de l'étude de la variabilité du jeu rotor stator en sommet d'aubes. La figure 7 illustre l'approche multiphysique proposée afin de pouvoir qualifier les différentes architectures de turbine envisagées lors du cycle de conception.

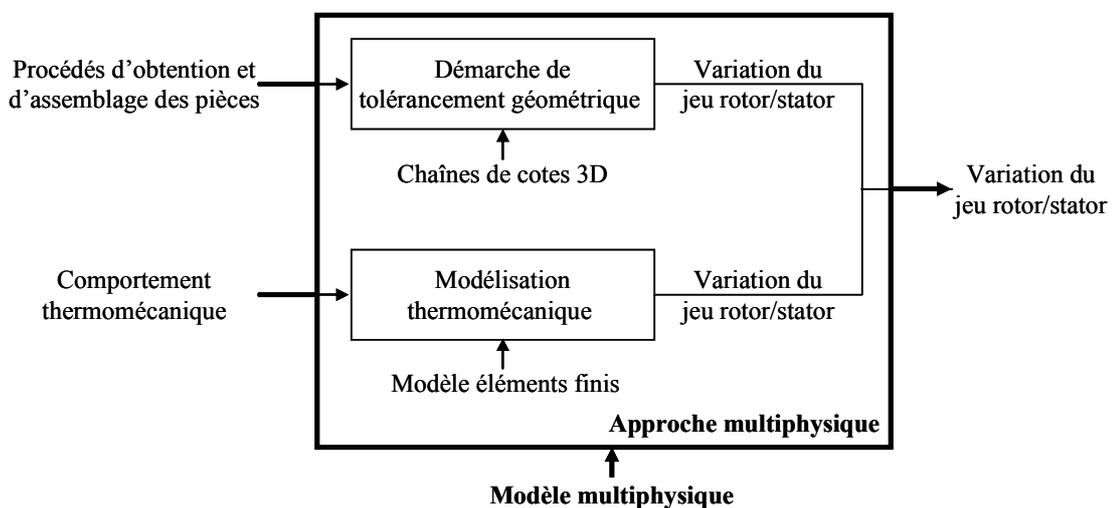


Figure 7 : Description de l'approche multiphysique proposée.

Ce travail se restreint à simuler le comportement des parties statiques d'une turbine haute pression uniquement dans les configurations où la turbine fonctionne en régime stabilisé. En effet nous ne prendrons pas en compte les phénomènes thermomécaniques liés aux régimes transitoires, dont la modélisation en 3d demeure un

challenge pour de nombreuses équipes de recherche. Nous étudierons la turbine dans différentes situations de fonctionnement : une situation de référence correspondra à la turbine neuve à 20°C et les autres correspondront à des phases de fonctionnement caractérisées par des champs de température stabilisés.

Nous admettrons que les défauts de fabrication pris en compte ne sont pas sensibles au fonctionnement de la turbine. Quels que soient la vitesse de rotation et le champ de température, les défauts de fabrication resteront les mêmes. La maîtrise des défauts de fabrication sera exprimée à l'aide des spécifications géométriques. L'analyse des spécifications géométriques sera réalisée à l'aide d'outils de chaînes de cotes 3d prenant en compte des architectures hyperstatiques. La détermination des déformations thermomécaniques des pièces sera réalisée grâce à des simulations éléments finis réalisée par un outil du commerce : SAMCEF®.

Ainsi, nous allons proposer une approche permettant d'intégrer le comportement thermomécanique des pièces dans l'analyse des spécifications géométriques. Le but de ce travail est de l'appliquer à une turbine haute pression afin de pouvoir qualifier selon deux critères de performance, différentes architectures de stator lors des phases amont de conception.

---

**L'objectif de ce travail est de proposer une approche multiphysique capable de prendre en compte les variabilités dues aux procédés d'obtention et d'assemblages des pièces mais aussi les variations dues aux comportements thermomécaniques des pièces. La prise en compte de la variabilité due aux procédés de fabrication et d'assemblage des pièces s'appuiera sur un modèle de chaînes de cotes 3d. Les variations thermomécaniques des pièces seront déterminées à partir d'un modèle éléments finis.**

**Cette approche multiphysique permettra de qualifier des architectures des parties statiques de turbine lors du cycle de conception en prenant en compte plusieurs phases de fonctionnement caractérisées par des champs de température stabilisés. Cette qualification sera réalisée selon deux critères de performance.**

---

## I-5 Structuration du document de thèse

Une vue générale de la structuration du document de thèse est donnée par la figure 8.

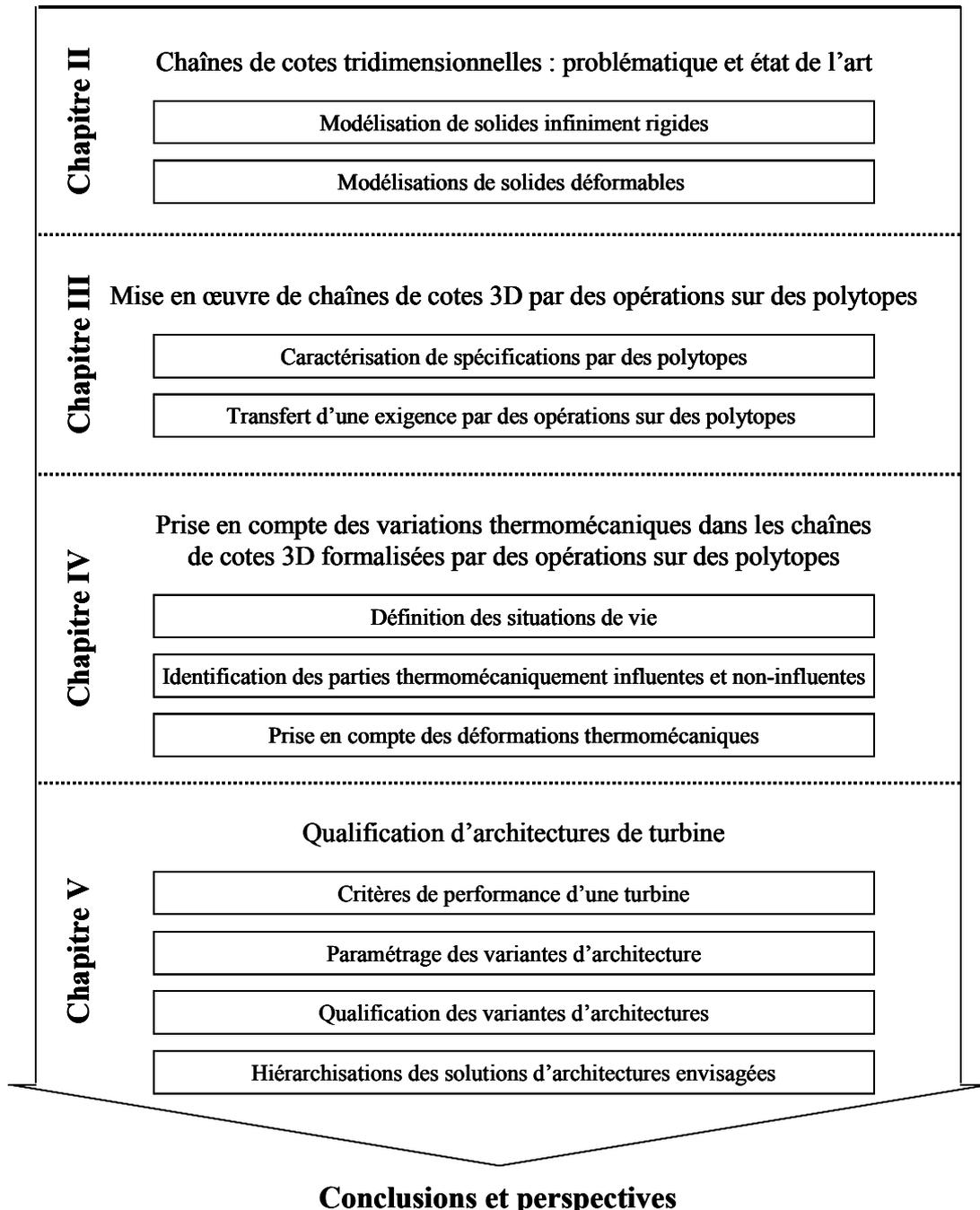


Figure 8 : Synoptique de la structuration du document de thèse.

Dans le **chapitre II**, nous présenterons les différentes modélisations couramment utilisées dans les chaînes de cotes 3d et plus particulièrement celles prenant en compte des architectures hyperstatiques. La prise en compte des écarts de

fabrication des pièces et des écarts résultant du contact potentiel entre deux pièces, conduira à l'étude du transfert d'une exigence fonctionnelle, étant données les spécifications de contact, sur les spécifications géométriques des pièces. Par la suite, nous ferons un état de l'art des différentes approches permettant de prendre en compte la souplesse des pièces dans les chaînes de cotes 3d.

La mise en œuvre d'une méthode sera proposée dans le **chapitre III**, pour formaliser le comportement géométrique d'un mécanisme par l'intermédiaire des surfaces de substitution. Après avoir présenté comment les spécifications géométriques et les spécifications de contact peuvent être prises en compte par des polytopes, le transfert d'une exigence fonctionnelle sera illustré sur un exemple simple. La formalisation des chaînes de cotes 3d reposera sur des opérations de polytopes : somme de Minkowski et intersection.

Dans **chapitre IV**, une démarche permettant de prendre en compte la variabilité d'origine thermomécanique des pièces dans les chaînes de cotes 3d sera proposée. A partir d'une situation de vie de référence, le comportement thermomécanique du mécanisme sera pris en compte par l'évolution des spécifications caractérisant les écarts géométriques des pièces et les contacts entre les pièces. Le but de ce chapitre sera de proposer une méthode permettant d'intégrer des résultats issus de calcul éléments finis dans une modélisation de chaînes de cotes 3d.

Enfin, au **chapitre V**, nous validerons cette démarche sur un exemple industriel. L'application à une turbine haute pression de la société Turbomeca permettra de qualifier les architectures des parties statiques envisagées en conception préliminaire. Un paramétrage des différentes architectures des parties statiques de la turbine sera défini à partir de la variabilité architecturale du carter, des liaisons entre les pièces du carter et de la géométrie de l'anneau. Afin de comparer les différentes architectures, des critères de qualification seront mis en place à partir de l'étude de la variabilité du jeu rotor/stator en sommet d'aubes. Ainsi nous pourrons qualifier la turbine dans une situation de vie correspondant au point de fonctionnement de puissance maximale. Enfin la hiérarchisation des variantes d'architectures pourra être alors effectuée. Les données et les résultats de ce chapitre seront reportés dans une annexe confidentielle.

Dans un dernier chapitre, les conclusions et les perspectives de ce travail seront exposées.

- Chapitre II -

Modélisation des variations géométriques par des chaînes de cotes : problématique et état de l'art



Dans le chapitre précédent, nous avons justifié la nécessité de conduire une approche multiphysique afin de caractériser les diverses variations influentes sur le jeu rotor stator en sommets d'aubes. En effet, les variabilités inhérentes aux procédés d'obtention et d'assemblages des pièces doivent être prises en compte, en intégrant les variations d'origine thermomécanique, et ce pour un ensemble de configurations représentatives du cycle de fonctionnement de la turbine. Une configuration correspond à un régime particulier où la vitesse de rotation du rotor est constante telle qu'un champ de température soit stabilisé sur la turbine.

Ce chapitre a pour objectif de rappeler la problématique des chaînes de cotes 3d reposant sur les lois de comportement géométrique d'un mécanisme. Les lois de comportement géométrique d'un mécanisme permettent d'identifier les chaînes de cotes 3d influentes sur une exigence fonctionnelle (exprimée sur le produit), laquelle est transférée en spécifications géométriques (exprimées sur les pièces constitutives). Dans un premier temps, un état de l'art des différents modèles de chaînes de cotes 3d, composés de solides infiniment rigides, sera réalisé. Après avoir introduit la notion de solides souples, les modélisations simulant les déformations des pièces induites par le processus d'assemblage et par la variabilité géométrique des pièces seront présentées. Finalement, une synthèse des différentes modélisations de chaînes de cotes 3d intégrant le comportement d'un mécanisme composé de solides souples sera effectuée.

## **II-1 Modélisations prenant en compte des solides indéformables**

### **II-1.1 Hypothèses physiques**

Les modèles géométriques utilisés dans les chaînes de cotes tridimensionnelles reposent en général sur les hypothèses suivantes :

- pas de défaut de forme des surfaces réelles,
- pas de déformation locale des surfaces en contact,
- pas de pièces déformables.

## II-1.2 Modélisation d'un mécanisme

### II-1.2.1 Modélisation des surfaces fabriquées par des surfaces de substitution

Les surfaces réelles, issues de la fabrication, sont modélisées par des surfaces de substitution [Bourdet et al, 1995]. Une surface de substitution est une surface idéale (i.e. géométriquement parfaite) qui a le même type que la surface nominale dont elle caractérise une réalisation physique particulière. Une surface nominale plane sera modélisée par une surface de substitution plane. Les figures suivantes illustrent les trois modélisations différentes utilisées en tolérancement : le modèle nominal (voir figure 9), le skin modèle (voir figure 10) et le modèle des surfaces de substitution (voir figure 11).

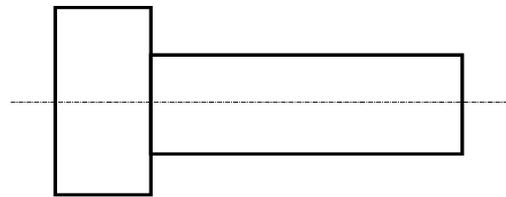


Figure 9 : Modèle nominal (modèle CAO).

Le modèle nominal est le modèle utilisé par un modeleur géométrique : il est géométriquement parfait par définition.

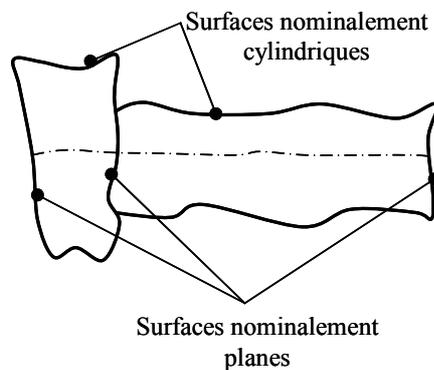


Figure 10 : Skin modèle.

Le skin modèle donne une représentation des surfaces réelles de la pièce. La « peau » de la pièce est représentée sous forme schématique avec ses défauts potentiels. Il sert de support graphique à l'expression des spécifications géométriques [Dantan et al, 2008]. On remarque que le skin modèle de l'arbre est constitué de cinq surfaces

réelles (voir figure 11) : deux surfaces nominalement cylindriques et trois surfaces nominalement planes.

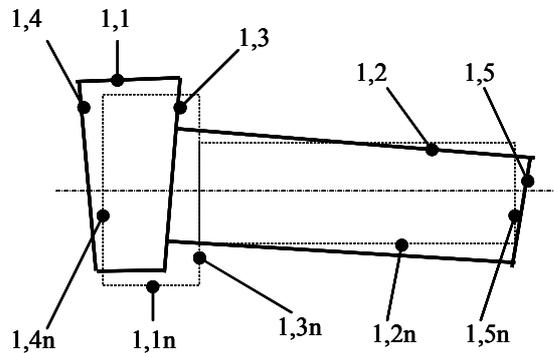


Figure 11 : Représentation d'une pièce par des surfaces de substitution.

Le modèle des surfaces de substitution est donc composé de cinq surfaces : trois surfaces planes et deux surfaces cylindriques. Les défauts géométriques d'une surface réelle sont définis par la position relative entre une surface de substitution et la surface nominale correspondante. La figure 11 illustre les défauts de la position relative des surfaces de substitution désignées par 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 et 1,5 de l'arbre 1. Chaque surface est désignée par un couple de numéros : 1,2 signifie surface (de substitution) 2 de la pièce 1. Les surfaces 1,1n ; 1,2n ; 1,3n ; 1,4n et 1,5n désignent respectivement les surfaces nominales correspondantes aux surfaces 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 et 1,5.

---

**Toutes les surfaces réelles d'une pièce sont modélisées par des surfaces de substitution. Une surface de substitution est de même type que la surface nominale dont elle modélise une réalisation physique particulière.**

---

### II-1.2.2 Caractérisation des écarts géométriques d'une pièce

Les écarts géométriques d'une surface de substitution caractérisent les défauts issus de la fabrication, par rapport à la surface nominale qui sert de référence.

Les écarts de situation permettent de caractériser le positionnement des éléments de situation de la surface de substitution par rapport aux éléments de situation de la surface nominale correspondante [Clément et al, 1994], [Ballu et al, 2010]. Sur la figure 12,  $d_{1,1/1,1n}$  et  $d_{1,2/1,2n}$  illustrent respectivement les écarts de situation entre les surfaces 1,1 et 1,1n et entre les surfaces 1,2 et 1,2n.

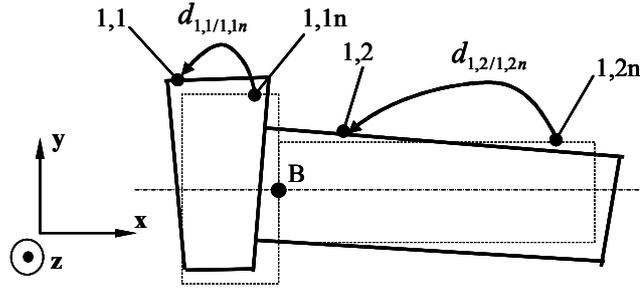


Figure 12 : Ecarts de situation.

Ces écarts de situation peuvent être formalisés mathématiquement par :

- un vecteur [Roy et al, 1999], [Wu et al, 1988]
- un torseur de petits déplacements [Wirtz, 1991], [Bourdet et al, 1995], [Clozel, 2001], [Marguet et al, 2003], [Anselmetti, 2006]
- une matrice [Turner, 1990]
- un tenseur métrique [Serre et al, 2001].

Nous utiliserons le torseur de petits déplacements [Clément et al, 1988] pour caractériser les écarts de situation entre deux surfaces.

La relation suivante illustre l'écriture du torseur de petits déplacements de la surface de substitution 1,1 par rapport à la surface nominale 1,1n noté  $[d_{1,1/1,1n}]$  au point B dans une base  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$[d_{1,1/1,1n}]_B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,1n} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,1/1,1n} \end{bmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,1n} = \begin{bmatrix} r_{1,1/1,1n,x} \\ \rho_{1,1/1,1n,y} \\ \rho_{1,1/1,1n,z} \end{bmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,1/1,1n} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{B-1,1/1,1n,x} \\ \varepsilon_{B-1,1/1,1n,y} \\ \varepsilon_{B-1,1/1,1n,z} \end{bmatrix} \quad (1)$$

La résultante du torseur, notée  $\boldsymbol{\rho}_{1,1/1,1n}$ , caractérise les écarts de rotation tandis que le moment du torseur, noté  $\boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,1/1,1n}$ , caractérise les écarts de translation au point B. Les composantes  $r_{1,1/1,1n,x}$  et  $\varepsilon_{1,1/1,1n,x}$  correspondent aux degrés d'invariance de la surface 1,1 : elles caractérisent les écarts laissant globalement invariante la surface de substitution. Les composantes  $\rho_{1,1/1,1n,y}$ ,  $\rho_{1,1/1,1n,z}$ ,  $\varepsilon_{B-1,1/1,1n,y}$  et  $\varepsilon_{B-1,1/1,1n,z}$  caractérisent les écarts de situation de la surface 1,1.

Les écarts de situation ne prennent pas en compte les écarts intrinsèques aux surfaces 1,1 et 1,2. En effet, la variation de diamètre d'un cylindre de substitution n'est

pas définie par ses écarts de situation. Sur la figure 13, le diamètre de la surface nominale  $D_{1,1n}$  et le diamètre de la surface de substitution  $D_{1,1}$  sont représentés.

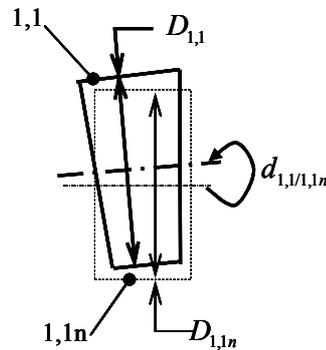


Figure 13 : Ecart de dimension.

La différence entre le diamètre de la surface de substitution et le diamètre de la surface nominale est l'écart de dimension d'une surface cylindrique :

$$D_{1,1} - D_{1,1n} = d_{1,1} \quad (2)$$

Avec :

- $D_{1,1}$  diamètre de la surface de substitution de la surface 1,1,
- $D_{1,1n}$  diamètre nominal de la surface 1,1,
- $d_{1,1}$  écart de dimension de la surface 1,1.

Ainsi, les écarts géométriques d'une surface sont :

- les écarts de situation,
- les écarts de dimension (diamètre d'un cylindre, angle au sommet d'un cône, etc.).

Les écarts de situation et de dimensions intrinsèques définissent les écarts géométriques d'une pièce, que nous appellerons simplement écarts de pièce. Ils vont être intégrés dans les chaînes de cotes 3d.

---

**Une surface de substitution est caractérisée par des écarts de situation et éventuellement par un (ou des) écart(s) de dimension(s). Les écarts de situation définissent la position relative entre les éléments de situation d'une surface de substitution et la surface nominale correspondante ; un écart de dimension caractérise la différence entre une dimension intrinsèque de la surface de**

**substitution et la dimension intrinsèque nominale correspondante. L'ensemble de ces écarts va permettre de caractériser les écarts géométriques d'une pièce.**

### II-1.2.3 Caractérisation des écarts géométriques entre deux surfaces potentiellement en contact

La définition d'un contact entre deux surfaces, c'est à dire d'une liaison, peut être caractérisée par un ensemble de paramètres. Plusieurs travaux ont été menés sur ce sujet : [Defazio et al, 1993], [Dantan, 2000], [Whitney et al, 2001] et [Shen et al, 2008]. Nous allons utiliser par la suite la définition proposée dans [Dufaure et al, 2008], qui est une application directe de celle proposée dans [Dantan et al, 2005].

Une liaison est définie par les paramètres suivants :

- type : appui plan, pivot glissant, linéaire annulaire, ...
- élément(s) de situation : plan, droite, point
- nature : fixe, glissant ou flottant
- jeu : jeu minimal et maximal :  $J_{min}$ ,  $J_{max}$
- direction de contact forcé : optionnelle.

Le type de la liaison est conforme aux types de liaison définis dans [ISO 3952-1, 1981]. Il est défini en fonction des types des deux surfaces en contact et de leur position relative. Le tableau 1 récapitule l'ensemble des liaisons élémentaires définies par combinaison des surfaces potentiellement en contact.

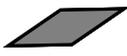
			
	Rotule	Linéaire annulaire	Ponctuelle
		Pivot glissant	Linéaire rectiligne
			Appui plan

Tableau 1 : Types des liaisons.

Les éléments de situation positionnent la liaison dans l'espace, et par conséquent définissent les directions des degrés de mobilité [Dufaure et al, 2008], [Ballu et al., 2010]. Une liaison rotule sera définie par un point ; une liaison linéaire rectiligne par une droite et un plan, etc.

La nature du contact renseigne le comportement de la liaison. La figure 14 illustre le comportement d'une liaison appui plan dans les trois configurations suivantes [Dantan et al, 2005] :

- Flottant : les déplacements correspondant aux différents degrés de liberté sont possibles, et les autres déplacements sont limités par un jeu.
- Glissant : les déplacements correspondant aux différents degrés de liberté sont possibles, mais les surfaces restent en contact permanent l'une sur l'autre. Le jeu de la liaison est nul.
- Fixe : aucun déplacement n'est possible (les degrés de liberté sont supprimés).

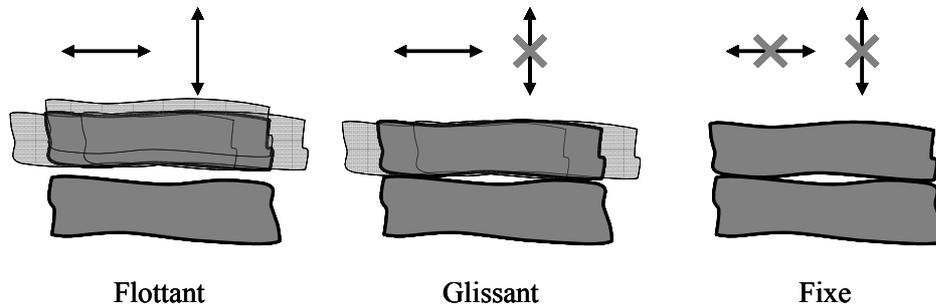


Figure 14 : Natures d'un contact appui plan [Dantan, 2000].

Dans le cas d'une liaison pivot glissant, linéaire annulaire ou rotule, le jeu est défini comme étant la différence entre le diamètre de l'alésage et le diamètre de l'arbre. Le jeu peut être positif, nul ou négatif. Dans le cas d'une liaison ponctuelle, linéaire rectiligne ou appui plan, le jeu définit la distance entre les deux surfaces potentiellement en contact. Le jeu peut être alors positif ou nul.

Considérons la figure 15 : deux pièces 1 et 2 sont en contact de type pivot glissant via leurs surfaces respectives 1,2 et 2,2 et en contact appui plan via leurs surfaces respectives 1,3 et 2,3.

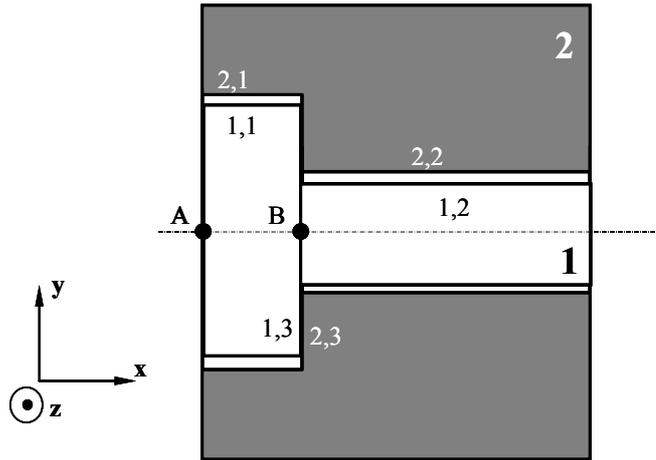


Figure 15 : Modèle nominal du mécanisme étudié.

La liaison pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2 a pour élément de situation la droite  $(B, \mathbf{x})$ . On pose par hypothèse que le jeu minimal est strictement positif, la nature de la liaison est donc flottante.

La liaison pivot glissant peut donc être définie par les paramètres suivants :

- type : pivot glissant
- éléments de situation : droite  $(B, \mathbf{x})$
- nature : flottant
- jeu :  $0 < J_{\min} < J_{\max}$

Les écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact peuvent être formalisés mathématiquement par un torseur de petits déplacements. Le torseur  $[d_{1,2/2,2}]$  définit les écarts de la liaison pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2 au point B dans la base  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  :

$$[d_{1,2/2,2}] = \begin{matrix} \mathbf{p}_{1,2/2,2} \\ \mathbf{\varepsilon}_{B-1,2/2,2} \end{matrix} \text{ avec } \mathbf{p}_{1,2/2,2} = \begin{matrix} r_{1,2/2,2,x} \\ \rho_{1,2/2,2,y} \\ \rho_{1,2/2,2,z} \end{matrix} \text{ et } \mathbf{\varepsilon}_{B-1,2/2,2} = \begin{matrix} e_{B-1,2/2,2,x} \\ \varepsilon_{B-1,2/2,2,y} \\ \varepsilon_{B-1,2/2,2,z} \end{matrix} \quad (3)$$

Les composantes  $r_{1,2/2,2,x}$  et  $e_{B-1,2/2,2,x}$  correspondent aux mobilités de la liaison. Les composantes  $\rho_{1,2/2,2,x}$ ,  $\rho_{1,2/2,2,y}$ ,  $\varepsilon_{B-1,2/2,2,y}$  et  $\varepsilon_{B-1,2/2,2,z}$  correspondent aux écarts de situation entre les surfaces potentiellement en contact, nous appellerons ces écarts les écarts de liaison. Dans le cas où les écarts  $\rho_{1,2/2,2,x}$ ,  $\rho_{1,2/2,2,y}$ ,  $\varepsilon_{B-1,2/2,2,y}$  et  $\varepsilon_{B-1,2/2,2,z}$  sont

nuls, les éléments de situation des deux surfaces potentiellement en contact sont confondus.

D'une manière analogue à la liaison pivot glissant, la liaison appui plan entre les surfaces 1,3 et 2,3 peut être définie par les paramètres suivants :

- type : appui plan
- éléments de situation : plan ( $B, \mathbf{x}$ )
- nature : glissant
- jeu :  $J=0$ .

Les écarts de situation de la liaison appui plan, noté  $d_{1,3/2,3}$ , peuvent être formalisés par le torseur  $[d_{1,3/2,3}]$ .

$$[d_{1,3/2,3}] = {}_B \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{1,3/2,3} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,3/2,3} \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{p}_{1,3/2,3} = \begin{cases} r_{1,3/2,3,x} \\ \rho_{1,3/2,3,y} = 0 \\ \rho_{1,3/2,3,z} = 0 \end{cases} \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,3/2,3} = \begin{cases} \varepsilon_{B-1,3/2,3,x} = 0 \\ \mathbf{e}_{B-1,3/2,3,y} \\ \mathbf{e}_{B-1,3/2,3,z} \end{cases} \quad (4)$$

---

**L'ensemble des liaisons élémentaires est défini par différents paramètres : type, élément(s) de situation, nature de contact et jeu. Ces paramètres permettent de définir les écarts de situation caractérisant le positionnement des deux surfaces potentiellement en contact.**

---

#### II-1.2.4 Loi de comportement géométrique d'un mécanisme

La formalisation de la structure d'un mécanisme peut s'appuyer sur un graphe de contacts à une composante connexe [Berge, 1967]. Cela veut dire que les arcs ne sont pas orientés (on parle alors d'arêtes) et il existe toujours au moins un chemin pour aller d'un sommet à un autre. De plus, le graphe sert de support graphique pour décrire la structure d'un mécanisme sur lequel on peut visualiser les chaînes de cotes [Ballu et al, 1999].

La figure 16, d'après la figure 15, donne une représentation par un graphe de l'arbre désigné 1 (grand cercle) comprenant trois surfaces 1,1, 1,2 et 1,3 (petits cercles). L'ensemble des surfaces nominales 1,1n 1,2n et 1,3n sont regroupées (partie de gauche) et représentées dans un seul petit cercle, intitulé 1,0, représentant un repère associé au modèle nominal de la pièce 1 [Teissandier et al, 1999a]. L'arête reliant la surface 1,1 au

sommet 1,0 représente les écarts de situation de la surface 1,1 par rapport à sa surface nominale.

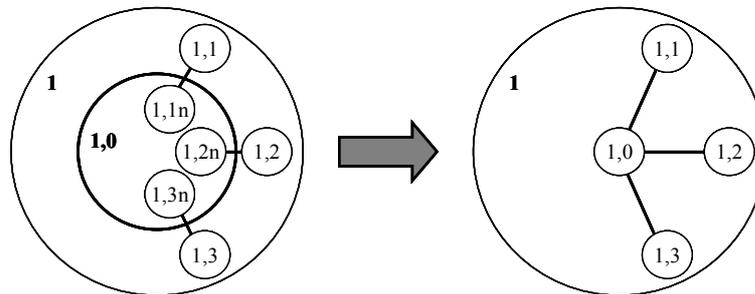


Figure 16 : Représentation d'une pièce par un graphe.

Au niveau de la représentation des contacts entre deux pièces (voir figure 17), les arêtes qui relient deux surfaces appartenant à deux pièces différentes représentent les liaisons. L'arête reliant la surface 1,2 à la surface 2,2 représente la liaison pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2. L'arête reliant les surfaces 1,3 et 2,3 représente la liaison appui plan entre ces deux surfaces.

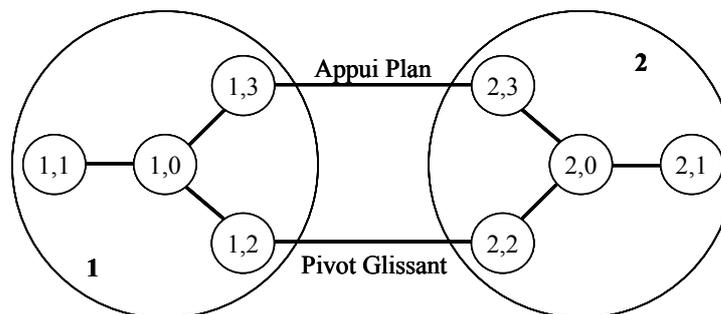


Figure 17 : Représentation du mécanisme par un graphe de contacts.

La recherche des cycles indépendants permet de déterminer les relations qui caractérisent les lois de comportement géométrique d'un mécanisme [Ballot, 1995]. Un cycle est une chaîne finie d'arêtes qui part d'un sommet donné et aboutit au même sommet. De plus, nous ne considérons que les cycles simples où les arêtes utilisées sont toutes différentes [Berge, 1967]. Concrètement, un cycle est une boucle topologique constituée d'une suite d'arêtes consécutives passant une et une seule fois par pièce. Un mécanisme ne peut exister, c'est à dire être assemblé, que si chaque boucle topologique est satisfaite. Quel que soit l'outil mathématique utilisé pour formaliser les écarts de situation, chaque cycle est caractérisé en s'appuyant sur la relation de Chasles.

Dans le cas d'un graphe à une composante connexe, le nombre de cycles indépendant est donné par le nombre cyclomatique  $\mu$ . Ce nombre est défini par la relation suivante où  $a$  et  $p$  correspondent respectivement au nombre d'arêtes et au nombre de surfaces additionné au nombre de pièces :

$$\mu = a - p + 1 \quad (5)$$

Les lois de comportement géométrique d'un mécanisme sont donc définies par la fermeture de  $\mu$  cycles.

Dans l'exemple de la figure 17, la relation (5) devient :

$$a = 8 \quad p = 8 \Rightarrow \mu = 8 - 8 + 1 = 1$$

$\mu = 1$  indique que les lois de comportement géométrique  $LC$  du mécanisme sont définies par la fermeture d'un seul cycle  $C$ . La relation suivante caractérise les lois de comportement géométrique de notre exemple :

$$LC : d_{1,0/1,2} + d_{1,2/2,2} + d_{2,2/2,0} + d_{2,0/2,3} + d_{2,3/1,3} + d_{1,3/1,0} = 0 \quad (6)$$

La figure 18 représente le cycle  $C$ .

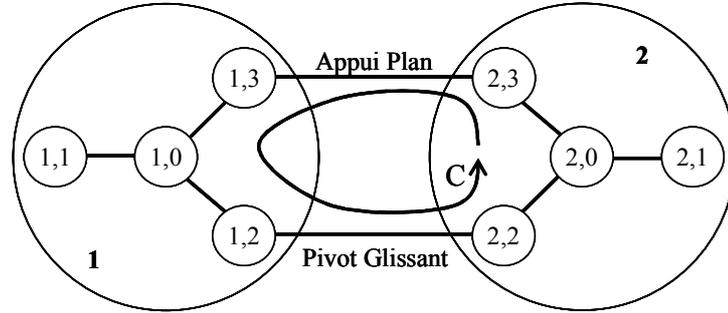


Figure 18 : Représentation du cycle.

La caractérisation de la relation (6) par des torseurs de petits déplacements conduit à définir le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{1,0/1,2,x} + r_{1,2/2,2,x} + r_{2,2/2,0,x} + r_{2,0/2,3,x} + r_{2,3/1,3,x} + r_{1,3/1,0,x} = 0 \\ \rho_{1,0/1,2,y} + \rho_{1,2/2,2,y} + \rho_{2,2/2,0,y} + \rho_{2,0/2,3,y} + 0 + \rho_{1,3/1,0,y} = 0 \\ \rho_{1,0/1,2,z} + \rho_{1,2/2,2,z} + \rho_{2,2/2,0,z} + \rho_{2,0/2,3,z} + 0 + \rho_{1,3/1,0,z} = 0 \\ e_{B-1,0/1,2,x} + e_{B-1,2/2,2,x} + e_{B-2,2/2,0,x} + \varepsilon_{B-2,0/2,3,x} + 0 + \varepsilon_{B-1,3/1,0,x} = 0 \\ \varepsilon_{B-1,0/1,2,y} + \varepsilon_{B-1,2/2,2,y} + \varepsilon_{B-2,2/2,0,y} + e_{B-2,0/2,3,y} + e_{B-2,3/1,3,y} + e_{B-1,3/1,0,y} = 0 \\ \varepsilon_{B-1,0/1,2,z} + \varepsilon_{B-1,2/2,2,z} + \varepsilon_{B-2,2/2,0,z} + e_{B-2,0/2,3,z} + e_{B-2,3/1,3,z} + e_{B-1,3/1,0,z} = 0 \end{array} \right. \quad (7)$$

Les inconnues sont les écarts correspondant aux mobilités dans les liaisons (notées  $r_{i,j/u,v}$  et  $e_{i,j/u,v}$ ), et aux degrés d'invariance des surfaces (notées  $r_{i,j/i,0}$  et  $e_{i,j/i,0}$ ). Les données sont les écarts de pièces notés  $\rho_{i,j/i,0}$  et  $\varepsilon_{i,j/i,0}$ , ainsi que les écarts de liaisons notés  $\rho_{i,j/u,v}$  et  $\varepsilon_{i,j/u,v}$ .

Pour faciliter la résolution des lois de comportement géométrique, les inconnues correspondant aux degrés d'invariance des surfaces (également appelées « indéterminées » [Ballot, 1995]) peuvent être considérés nulles [Bourdet et al, 2010]. Ainsi, la résolution de la lois de comportement géométrique définie par (6) conduit au système d'équations suivant d'après (7) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1,2/2,2,x} \\ r_{2,3/1,3,x} \\ e_{B-1,2/2,2,x} \\ e_{B-2,3/1,3,y} \\ e_{B-2,3/1,3,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_{1,0/1,2,y} - \rho_{1,2/2,2,y} - \rho_{2,2/2,0,y} - \rho_{2,0/2,3,y} - \rho_{1,3/1,0,y} \\ -\rho_{1,0/1,2,z} - \rho_{1,2/2,2,z} - \rho_{2,2/2,0,z} - \rho_{2,0/2,3,z} - \rho_{1,3/1,0,z} \\ -\varepsilon_{B-2,0/2,3,x} - \varepsilon_{B-1,3/1,0,x} \\ -\varepsilon_{B-1,0/1,2,y} - \varepsilon_{B-1,2/2,2,y} - \varepsilon_{B-2,2/2,0,y} \\ -\varepsilon_{B-1,0/1,2,z} - \varepsilon_{B-1,2/2,2,z} - \varepsilon_{B-2,2/2,0,z} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Ce système est caractérisé par un nombre d'équations  $q$ , par un nombre d'inconnues  $n$  et par le rang du système  $r$ . D'une façon générale, le degré de mobilité  $m$  est le nombre d'inconnues non principales et le degré d'hyperstatisme  $h$  est le nombre d'équations non principales [Le Borzec, 1975]. Dans notre cas le degré d'hyperstatisme et le degré de mobilité sont :

$$m = n - r \quad n = 5 \quad r = 4 \Leftrightarrow m = 5 - 4 = 1 \quad (9)$$

$$h = q - r \quad q = 6 \quad r = 4 \Leftrightarrow h = 6 - 4 = 2 \quad (10)$$

La résolution du système conduit alors à déterminer les inconnues suivantes :

$$\begin{cases} e_{B-1,2/2,2,x} = -\varepsilon_{B-2,0/2,3,x} - \varepsilon_{B-1,3/1,0,x} \\ e_{B-2,3/1,3,y} = -\varepsilon_{B-1,0/1,2,y} - \varepsilon_{B-1,2/2,2,y} - \varepsilon_{B-2,2/2,0,y} \\ e_{B-2,3/1,3,z} = -\varepsilon_{B-1,0/1,2,z} - \varepsilon_{B-1,2/2,2,z} - \varepsilon_{B-2,2/2,0,z} \end{cases} \quad (11)$$

L'équation non principale (12) traduit la mobilité en rotation suivant  $x$  de la pièce 1 par rapport à la pièce 2 ; elle est caractérisée par une relation entre deux inconnues :

$$r_{1,2/2,2,x} + r_{2,3/1,3,x} = 0 \quad (12)$$

Les équations (13) caractérisent les deux hyperstatismes en rotation suivant **y** et **z**. Le système (8) admet une infinité de solutions si et seulement si les relations (13) sont satisfaites :

$$\begin{cases} \rho_{1,0/1,2,y} + \rho_{1,2/2,2,y} + \rho_{2,2/2,0,y} + \rho_{2,0/2,3,y} + \rho_{1,3/1,0,y} = 0 \\ \rho_{1,0/1,2,z} + \rho_{1,2/2,2,z} + \rho_{2,2/2,0,z} + \rho_{2,0/2,3,z} + \rho_{1,3/1,0,z} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Si les relations (13) ne sont pas vérifiées, le système (8) n'admet aucune solution. Ces deux relations traduisent les équations de compatibilité [Ballot, 1995].

D'un point de vue technologique, les relations (13) caractérisent deux conditions de montage, c'est à dire que la montabilité du mécanisme repose généralement sur plusieurs relations entre des défauts géométriques de pièces et des jeux. Les relations (13) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} \rho_{1,3/1,2,y} + \rho_{2,2/2,3,y} = -(\rho_{1,2/2,2,y}) \\ \rho_{1,3/1,2,z} + \rho_{2,2/2,3,z} = -(\rho_{1,2/2,2,z}) \end{cases} \quad (14)$$

Les relations (14) indiquent que le montage du système illustré en figure 15, repose d'une part sur le cumul des défauts d'orientation respectifs entre les surfaces de contact des pièces 1 et 2, et d'autre part sur la petite rotation relative entre les pièces 1 et 2 permise par le jeu de la liaison pivot glissant.

---

**La formalisation des lois de comportement géométrique d'un mécanisme s'appuie sur la théorie des graphes. Les lois de comportement géométrique sont déduites des fermetures de cycles indépendants dans un graphe à une composante connexe. Le nombre de cycles indépendants est donné par le nombre cyclomatique. La résolution du système linéaire caractérisant les lois de comportement géométrique permet de déterminer le degré d'hyperstatisme et les mobilités du mécanisme. Le degré d'hyperstatisme est donné par le nombre d'équations non principales tandis que le nombre de mobilités est donné le nombre d'inconnues non principales. Les équations de compatibilité d'un système hyperstatique caractérisent les conditions de montage.**

---

## II-1.3 Transfert d'une exigence fonctionnelle

### II-1.3.1 Formalisation des chaînes de cotes 3d influentes sur une condition fonctionnelle

Une condition (ou exigence) fonctionnelle est une condition sur une caractéristique fonctionnelle de position ou d'orientation entre deux surfaces qui en général appartiennent à des pièces différentes, et qui ne sont pas potentiellement en contact. La particularité d'une condition fonctionnelle est qu'elle s'exprime sur des pièces qui peuvent être mobiles l'une par rapport à l'autre.

Une condition fonctionnelle peut être unidirectionnelle, bidirectionnelle ou tridirectionnelle. Considérons une condition fonctionnelle entre deux surfaces  $(i, j)$  et  $(k, l)$ , deux surfaces quelconques d'un mécanisme avec  $i \neq k$ .

Une condition est exprimée sur un écart fonctionnel  $e$  suivant une direction caractérisée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ .

Dans le cas d'une condition unidirectionnelle on a :

- $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$  avec  $e = \mathbf{p}_{i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{cte}$  (condition d'orientation),
- $e_{\min} \leq e \leq e_{\max}$  avec  $e = \mathbf{\varepsilon}_{A-i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} = \mathbf{cte}$  (condition de position en un point A).

*Remarque* : une condition unidirectionnelle peut être uni-limite ou bi-limite.

Une condition bidirectionnelle exprime une condition sur un écart fonctionnel  $e$  suivant une direction comprise dans un plan de normale  $\mathbf{v}$  :

- $e \leq e_{\max}$  avec  $e = \mathbf{p}_{i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  (condition d'orientation),
- $e \leq e_{\max}$  avec  $e = \mathbf{\varepsilon}_{A-i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}$  et  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  (condition de position en un point A).

*Remarque* : si  $\forall \mathbf{u}, e_{\max} = cte$  alors la condition définit une cible caractérisée par un cercle de rayon  $e_{\max}$  et de normale  $\mathbf{v}$ .

Une condition tridirectionnelle exprime une condition sur un écart fonctionnel  $e$  suivant toutes les directions de l'espace euclidien :

- $e \leq e_{\max}$  avec  $e = \mathbf{p}_{i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}, \forall \mathbf{u} \in E^3$  (condition d'orientation),

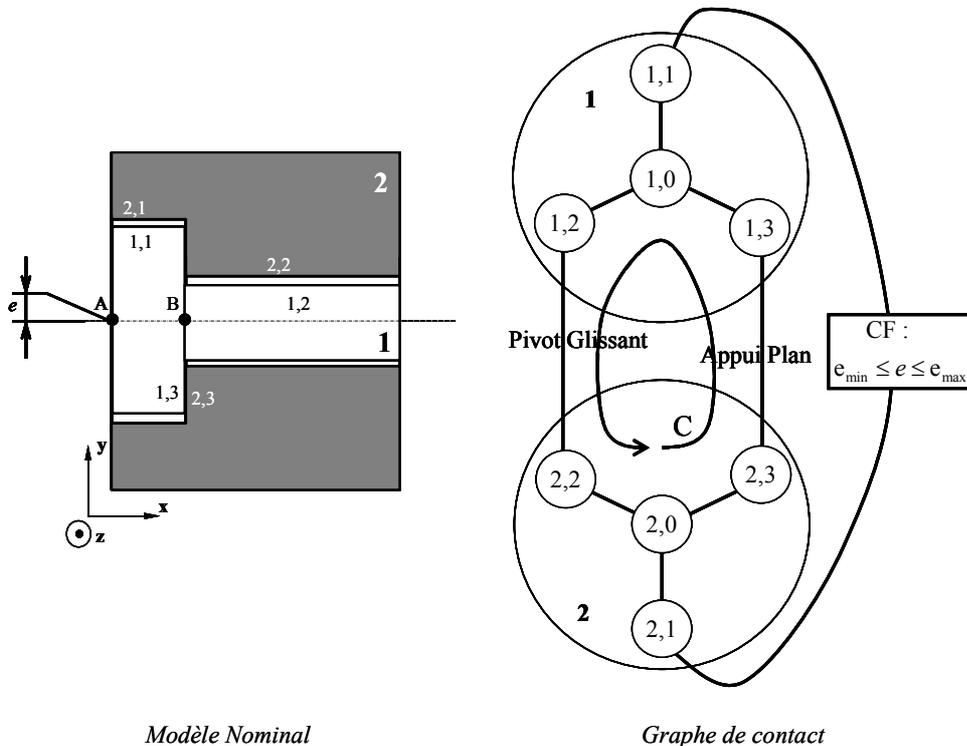
-  $e \leq e_{\max}$  avec  $e = \boldsymbol{\varepsilon}_{A-i,j/k,l} \cdot \mathbf{u}$ ,  $\forall \mathbf{u} \in E^3$  (condition de position en un point A).

Remarque : si  $\forall \mathbf{u}, e_{\max} = cte$  alors la condition définit une cible caractérisée par une sphère de rayon  $e_{\max}$ .

Le paramétrage de la caractéristique fonctionnelle  $e$  repose potentiellement sur les six écarts des petits déplacements relatifs entre les deux surfaces de la condition fonctionnelle, c'est-à-dire les surfaces  $(i, j)$  et  $(k, l)$ . Nous appellerons écarts fonctionnels, ces écarts.

La figure 19 reprend l'exemple présenté précédemment. Supposons qu'une condition fonctionnelle CF limitant la position relative des surfaces 1,1 et 2,1 soit à respecter. Elle est représentée sur le graphe dans un rectangle doté du label CF sur une arête reliant les surfaces 1,1 et 2,1. Il s'agit d'une condition de coaxialité que nous modélisons en une condition fonctionnelle unidirectionnelle dans cet exemple, telle que le déplacement du point A de l'axe de la surface 1,1 par rapport à l'axe de la surface 2,1 respecte suivant l'axe  $y$  :

$$e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \quad \text{avec} \quad e = \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,3/2,3} \cdot \mathbf{y} \quad (15)$$



Modèle Nominal

Graphe de contact

Figure 19 : Définition d'une condition fonctionnelle.

CF est une condition de position entre les surfaces 1,1 et 2,1 sur une caractéristique fonctionnelle  $e$ . Afin de caractériser  $e$  en fonction des écarts de pièces et de liaisons du système, il convient de déterminer  $d_{1,1/2,1}$  par la relation suivante :

$$CF \rightarrow \{d_{1,1/2,1} = d_{1,1/1,0} + d_{1,0/2,0} + d_{2,0/2,1}\} \quad (16)$$

Cette relation s'ajoute aux relations des lois de comportement géométrique  $LC$ . Ainsi la détermination de  $d_{1,1/2,1}$  consiste à résoudre le système de relations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} CF : d_{1,1/2,1} = d_{1,1/1,0} + d_{1,0/2,0} + d_{2,0/2,1} \\ LC : d_{1,0/1,2} + d_{1,2/2,2} + d_{2,2/2,0} + d_{2,0/2,3} + d_{2,3/1,3} + d_{1,3/1,0} = 0 \end{array} \right\} \quad (17)$$

D'une manière générale le système (17) contient  $\mu + 1$  relations,  $\mu$  étant le nombre de relations des lois de comportement géométrique  $LC$ . La résolution du système (17) permet de déterminer la caractéristique fonctionnelle en fonction des écarts de pièces et des écarts de liaisons influents. Autrement dit la résolution du système (17) permet de caractériser les chaînes de cotes 3d influentes sur la condition fonctionnelle CF.

La résolution du système (17) repose sur la résolution des lois de comportement géométrique  $LC$  formulées précédemment par la fermeture géométrique du cycle  $C$ , c'est-à-dire de  $d_{1,0/2,0}$ .

Si le système est isostatique, un écart fonctionnel peut être exprimé à l'aide d'une seule relation scalaire linéaire.

Si la condition est exprimée sur un écart dépendant d'une mobilité de liaison ou d'un degré d'invariance, le respect de l'exigence n'est toutefois pas possible. Dans notre exemple, cela correspondrait au cas où la condition fonctionnelle serait exprimée sur le déplacement en rotation suivant l'axe  $x$  de la surface 1,1 par rapport à la surface 2,1.

En désignant les écarts géométriques des pièces et les écarts géométriques de liaisons par des petits déplacements  $x_i$ , chaque écart fonctionnel peut être définie par une fonction  $f(x_i)$  où  $a_i$  correspond au coefficient d'influence de l'écart  $x_i$  sur l'écart fonctionnel  $e$  :

$$e = f(x_i) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i \quad (18)$$

Dans notre exemple, nous aboutissons à la relation suivante en considérant que la liaison appui plan entre les surfaces 1,3 et 2,3 est prépondérante devant la liaison pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2 :

$$e = \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,1/2,1} \cdot \mathbf{y} = \varepsilon_{B-1,1/1,0,y} + \varepsilon_{B-1,0/1,2,y} + \varepsilon_{B-1,2/2,2,y} + \varepsilon_{B-2,2/2,0,y} + \varepsilon_{B-2,0/2,1,y} - L_{1,1} \cdot \rho_{1,1/1,0,z} - L_{1,1} \cdot \rho_{1,0/1,3,z} - L_{1,1} \cdot \rho_{1,3/2,3,z} - L_{1,1} \cdot \rho_{2,3/2,0,z} - L_{1,1} \cdot \rho_{2,0/2,1,z} \quad (19)$$

Dans la relation (19), la caractéristique fonctionnelle  $e$  est l'écart fonctionnel caractérisant le déplacement en translation de 1,1 par rapport à 2,1 au point A suivant  $\mathbf{y}$ .

Si le système est hyperstatique, la résolution du système caractérisant sa loi de comportement géométrique repose sur plusieurs stratégies possibles.

La première stratégie consiste à lever les « sur-déterminations » caractérisées dans notre exemple par les conditions de montage (14) en faisant des hypothèses de prépondérances de contacts au niveau des liaisons. Cela consiste à modéliser le guidage en rotation de la pièce 1 sur la pièce 2 par une liaison linéaire annulaire (centrage court) et une liaison appui plan, ou alors par une liaison pivot glissant (centrage long) et une liaison ponctuelle. Cela rajoute deux inconnues dans le système (8) et ainsi supprime les conditions de montage (14). Les degrés de liaison ainsi supprimés ou relâchés impliquent l'ajout de conditions techniques [Bourdet et al, 2010], [Ballu et al, 2010]. Les outils Anatole développé par EADS IW [Marguet et al, 2003] et MECAMaster développé par MECAMaster Sarl [Clozel et al, 2010] fonctionnent sur ce principe. On parle aussi de relâcher des degrés de liaison dans les architectures hyperstatiques. D'autres méthodes suggèrent au concepteur de ne définir que des architectures isostatiques en choisissant des types de mise en position prédéfinis [Söderberg et al, 2001], [Anselmetti, 2006] et [Spensieri et al, 2009].

La seconde stratégie consiste à prendre en compte toutes les configurations possibles ou au moins considérer les configurations les plus critiques au regard d'une exigence fonctionnelle. Cette stratégie est détaillée dans [Ballot et al, 2001]. Tout écart fonctionnel peut être formalisé par une simple fonction linéaire d'écarts mais il y aura autant de fonctions linéaires que de configurations. Dans une architecture fortement hyperstatique où le nombre cyclomatique est élevé, le nombre de configurations peut croître très rapidement et devenir rédhibitoire.

La troisième stratégie consiste à manipuler des ensembles d'écarts. Ces ensembles d'écarts sont générés localement par des contraintes de contact entre les pièces et par des contraintes géométriques provenant de spécifications géométriques sur les pièces. Chaque cycle ou boucle topologique consiste alors à ne plus additionner des écarts mais des ensembles d'écarts : cela consiste à effectuer la somme de Minkowski d'ensemble d'écarts [Fleming, 1988]. Ces ensembles d'écarts sont appelés domaines [Giordano et al, 1993], [Dantan et al, 2002], espace de faisabilité [Turner, 1993], T-Maps [Mujezinovi et al, 2004] ou simplement objet polyédrique [Roy et al, 1999].

Nous allons conclure ce chapitre en nous appuyant sur la première stratégie. C'est la stratégie la plus utilisée car elle permet d'exprimer une caractéristique fonctionnelle unidirectionnelle par une simple relation linéaire entre des écarts de pièces et de liaisons. De plus, il est toujours possible d'exprimer une caractéristique fonctionnelle unidirectionnelle en fonctions d'écarts indépendants, propice aux traitements statistiques, [Chase et al, 1991], [Nigam et al, 1995], [Skowronski et al, 1997], [Anselmetti, 2007]. C'est pourquoi la plupart des outils de tolérancement commerciaux ne prennent en compte que des conditions unidirectionnelles. Par ailleurs, des travaux liés aux traitements statistiques par des domaines ont été initiés dans [Germain, 2007] et [Dantan et al., 2009].

La troisième stratégie est celle que nous avons retenue pour répondre à la problématique de ce travail, présentée dans le premier chapitre. Elle est développée dans le chapitre suivant.

---

**La formalisation des chaînes de cotes influentes sur une condition fonctionnelle consiste à définir la (ou les) relation(s) entre la caractéristique fonctionnelle et les écarts de pièces et de liaisons influents. La détermination de ces relations repose sur la loi de comportement du mécanisme.**

---

### **II-1.3.2 Spécification et répartition des limites des défauts géométriques sur les pièces**

Les écarts  $x_i$  de la (ou des) relation(s) (19) indiquent les écarts des pièces et des liaisons influents sur une condition fonctionnelle. L'ensemble de ces écarts définit le sous-graphe influent sur une condition fonctionnelle [Ballu et al, 2010]. De plus, chaque

écart  $x_i$  indique formellement s'il s'agit d'un écart de rotation ou de translation en précisant sa direction.

Dans une démarche de synthèse de tolérances, les limites des écarts de liaisons sont connues et il convient de déterminer :

- les spécifications ISO à définir sur chaque pièce influente,
- les limites des écarts de pièces influents.

Les spécifications ISO à définir sur chaque pièce influente ferment le (ou les) cycle(s) influent(s) [Ballu et al, 1999], [Ballu et al, 2010]. On entend ici par déterminer les spécifications ISO, le choix du ou des éléments tolérancés [ISO 1101, 2006], le choix de l'élément de référence ou du système de références [ISO 5459, 1988], le choix du type de spécification ISO [ISO 1101, 2006], voire de l'exigence [ISO 2692, 1992]. La détermination des dimensions des zones de tolérances et des limites de dimensions intrinsèques est réalisée par la détermination des limites des écarts de pièces influents.

De par la structure du graphe de contacts, au moins deux écarts  $x_i$  sont influents sur une pièce influente. Dans ce cas, il convient alors de déterminer la surface tolérancée et la surface de référence. En appliquant des critères sur les étendues des surfaces nominales (longueur nominale d'un cylindre, dimensions nominales du contour d'un plan par exemple), on choisit généralement la surface de plus grande étendue comme référence. Puis en fonction du type d'écarts de pièces influents, rotation ou translation, une spécification d'orientation ou de position peut être choisie en fonction du type des surfaces et de leurs positions relatives. Dans le cas de plusieurs surfaces influentes sur une pièce, il convient alors de les regrouper pour définir des groupes d'éléments tolérancés et/ou des systèmes de références. Les regroupements de surfaces sont étroitement liés à l'évolution du graphe de contacts dans le cycle de conception du produit [Dantan et al, 2005], [Dufaure et al, 2008]. D'une manière générale, la détermination des spécifications ISO est automatisable sur les pièces où les surfaces influentes sont regroupées [Clément et al, 1994]. De plus, il n'est pas rare qu'il y ait plusieurs solutions ISO. Des applications (CLIC) [Anselmetti, 2010] tentent d'apporter des solutions à ce problème.

La détermination des limites des écarts de pièces influents peut se faire selon le cas le plus défavorable ou selon divers traitements statistiques.

La figure 20 illustre les cycles influents  $CI_1$  et  $CI_2$ , constituant le sous-graphe influent. Les spécifications ISO influentes ferment les cycles  $CI_1$  et  $CI_2$  respectivement dans les pièces 1 et 2 [Ballu et al, 1999] (voir figures 20 et 21).

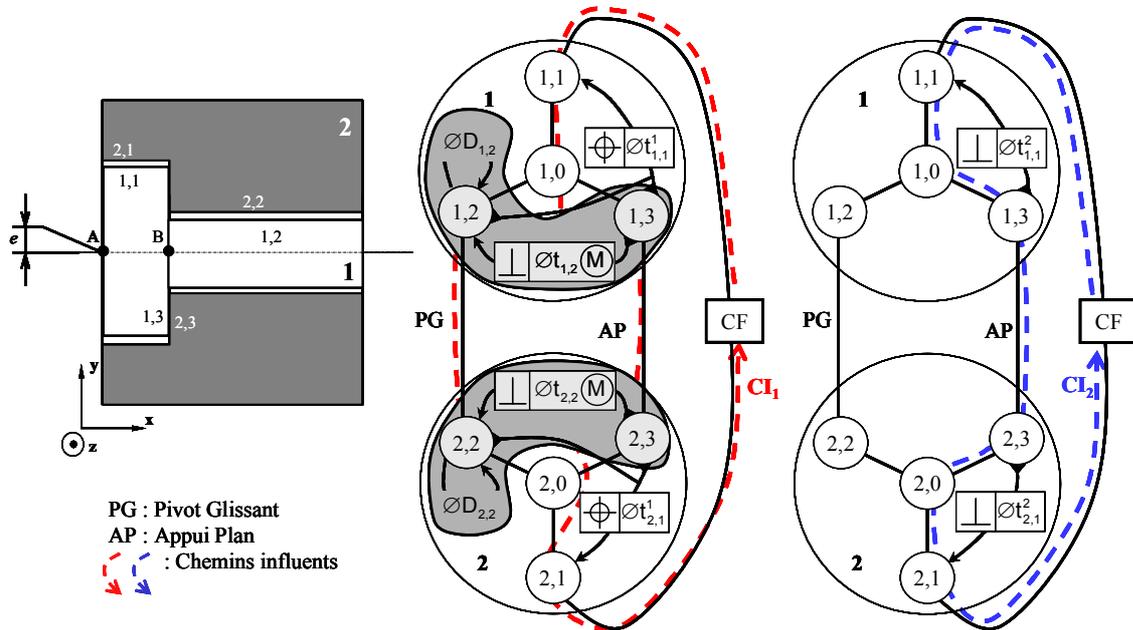


Figure 20 : Sous-graphe influent dans le graphe de contacts.

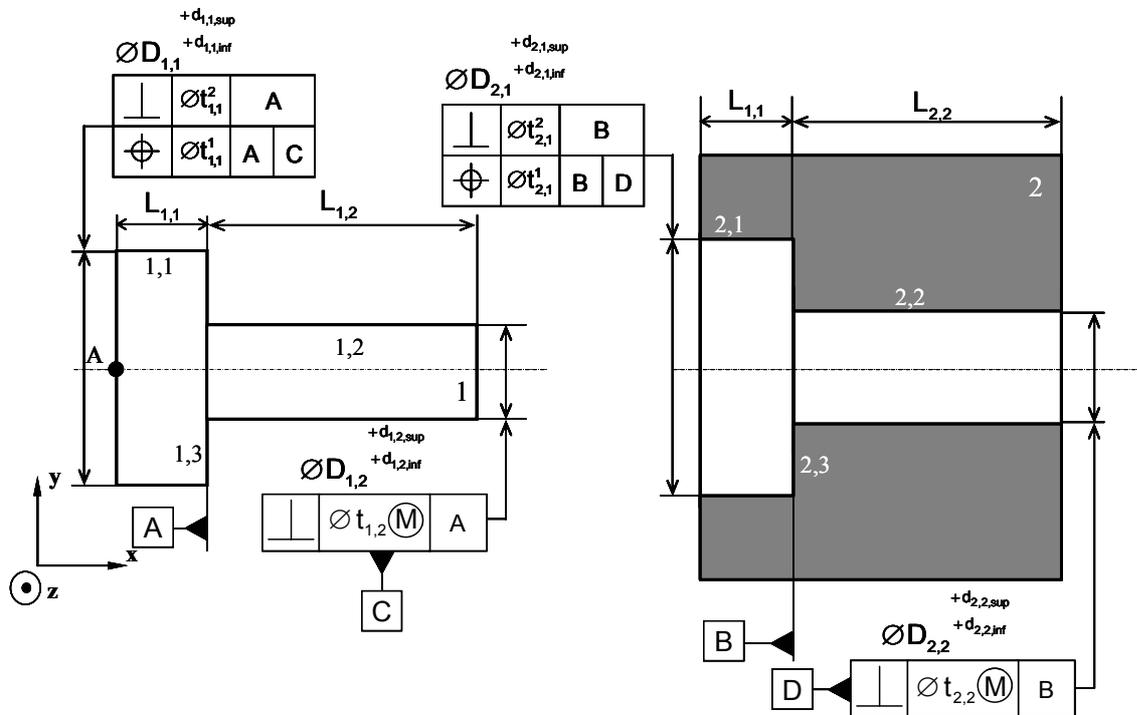


Figure 21 : Spécifications ISO influentes sur la condition CF.

**Les chaînes de cotes influentes sur une condition fonctionnelle permettent d'identifier les écarts de pièce et de liaison influents. Les spécifications influentes ferment le sous-graphe influent caractérisé par les écarts de pièce et de liaison influents. La répartition des limites des écarts de pièce influents peut être réalisée au pire des cas ou selon divers traitements statistiques.**

---

## **II-1.4 Synthèse**

Les lois de comportement géométrique caractérisent les dépendances entre les déplacements dus : aux degrés d'invariance des surfaces, aux écarts de pièces, aux mobilités des liaisons et aux écarts de liaisons. Les lois de comportement géométrique sont intrinsèques à un mécanisme. Elles permettent de déduire les écarts influents sur une condition fonctionnelle.

Une condition fonctionnelle dépend potentiellement de plusieurs écarts fonctionnels. Une loi de comportement géométrique d'un mécanisme isostatique modélisée en petits déplacements permet d'exprimer un écart fonctionnel par une relation linéaire des écarts de pièces et de liaisons influents. L'exploitation de ces relations permet de répartir les limites de défauts des pièces influentes sur une condition fonctionnelle au pire des cas ou par diverses méthodes statistiques.

Parmi les outils de tolérancement 3d prenant en compte uniquement des mécanismes isostatiques modélisant les écarts de pièces et de liaisons en petits déplacements, on peut citer :

- AnaTol<sup>®</sup> [Marguet et al, 2003],
- CLIC<sup>®</sup> [Anselmetti, 2010],
- MECAMaster<sup>®</sup> [Clozel et al, 2010], [MECAMaster, 2011],
- CeTOL<sup>®</sup> [CeTOL, 2011].

Nous allons maintenant aborder les différentes modélisations prenant en compte des solides souples ainsi que leur capacité à intégrer différents phénomènes physiques générant des déformations.

## **II-2 Modélisations prenant en compte des solides déformables**

Beaucoup de produits, comme les automobiles, les avions mais aussi les appareils domestiques sont construits à partir d'assemblages de tôle. Généralement ces tôles étant de grandes tailles et relativement fines, elles ont tendances à être très peu rigides. Ces pièces sont considérées souples par rapport aux forces exercées durant les phases d'assemblage comme le serrage. Ces processus d'assemblage sont appelés « assemblages souples ».

### **II-2.1 Modélisation des assemblages souples par soudage**

Le nombre de pièces peut être très grand dans certains produits, plusieurs centaines de pièces pour une structure automobile. Par exemple, 37 % des opérations d'assemblage dans la fabrication d'une structure automobile concernent des pièces non rigides [Shiu et al, 1997]. L'assemblage final est alors effectué par une succession d'opérations d'assemblage. L'étude de la propagation des variations dimensionnelles des pièces et des liaisons doit être réalisée de la conception du produit jusqu'au contrôle lors de sa réalisation finale.

Ces méthodes pour analyser la variation de ces types d'assemblages ont engendré de nombreux sujets de recherche aux Etats Unis. Comme le présente Chase [Chase et al, 1991], les simulations au pire des cas, statistiques et par tirage de Monte Carlo ont été largement utilisées. Toutes ces méthodes ont été utilisées pour simuler l'assemblage de pièces rigides ce qui ne convient pas pour l'étude d'assemblage de pièces souples comme les tôles.

L'introduction de la souplesse des pièces dans l'analyse de tolérances a nécessité de nouvelles techniques où les déformations dues aux effets des retours élastiques des procédés d'assemblage par soudage sont considérées. [Shiu et al, 1997] a proposé une représentation simple des structures par des poutres souples (figure 22).

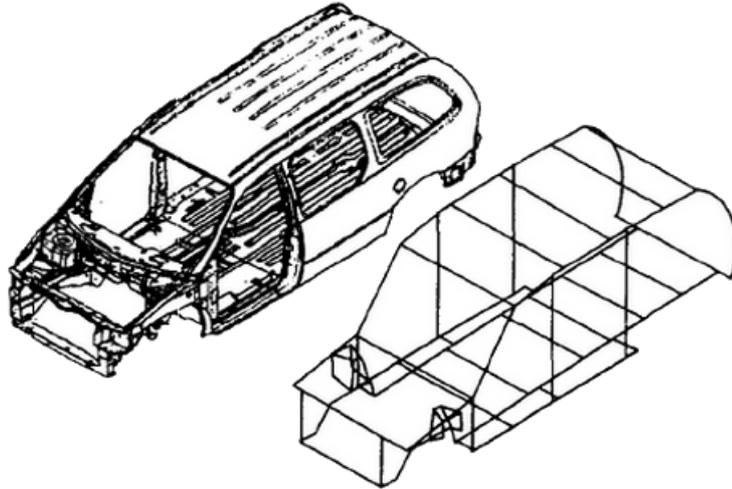


Figure 22 : Carrosserie automobile et sa structure en poutre [Shiu et al, 1997].

Au niveau des processus de soudage par point, [Liu et al, 1996] et [Liu et al, 1997] ont proposé des modèles pour analyser les effets des déformations et des retours élastiques sur la variation des assemblages en associant la mécanique linéaire et la statique. En utilisant des méthodes éléments finis, ils ont construit une matrice de sensibilité  $\mathbf{S}$  pour établir une relation linéaire entre l'écart des pièces non assemblées  $\mathbf{X}$  et l'écart global de l'assemblage  $\mathbf{Y}$ . La dispersion globale des écarts de l'assemblage par rapport aux écarts des nœuds des pièces a alors été mise en évidence par la relation suivante [Liu et al, 1997] :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} y_{a_1} \\ y_{a_2} \\ \vdots \\ y_{a_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & s_{m1} & s_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

[Ding et al, 2000] a présenté un modèle 3d pour le contrôle dimensionnel des assemblages de tôle réalisant des assemblages rigides. En ce qui concerne les assemblages multiposte (voir figure 23), [Ding et al, 2000] et [Ding et al, 2002a] ont développé un modèle 3d complet pour simuler la variation de rigidité des composants. D'après [Ding et al, 2002b], lors du lancement d'un processus d'industrialisation, les modèles peuvent aider dans le diagnostic des causes de variations géométriques.

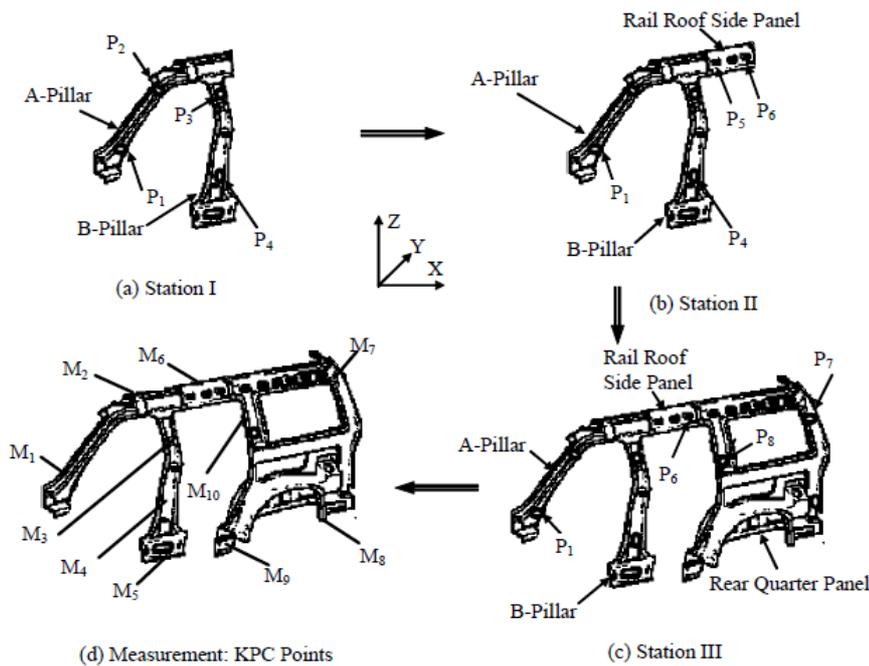


Figure 23 : Exemple d'assemblage multiposte [Ding et al, 2002a]

Selon [Camelio et al, 2003], il est critique de développer des modèles qualifiés réalistes pour les processus d'assemblage de tôle souples sans prendre en compte l'interaction de poste à poste dans des systèmes d'assemblage multiposte. Il présente alors une méthodologie afin de modéliser l'impact des écarts des pièces et des outillages sur la qualité dimensionnelle d'un système issu d'un processus multiposte avec des pièces de tôle souple. Il étudie aussi la propagation des écarts des différents sous-assemblages sur le produit final. Une méthode d'analyse des variabilités pour les assemblages souples en intégrant la covariance des différents composants assemblés est alors proposée par [Camelio et al, 2004].

[Hu et al, 2006] présente les développements des modèles de propagation de variabilités aux niveaux des étapes d'assemblage et au niveau du système. Ces modèles sont appliqués à la conception robuste et au contrôle des systèmes d'assemblage de pièces souples.

[Xie et al, 2007] présente une méthodologie modélisant la propagation des variations géométriques des assemblages souples prenant en compte l'effet des contacts entre les différents composants mais aussi les outils d'assemblage et de soudage. Cette méthodologie est fondée sur les méthodes éléments finis. Afin d'incorporer la variabilité due aux différentes variables, un modèle paramétrique est construit. Etant donné que le résultat issu de ce modèle est non linéaire, une analyse de sensibilité

traditionnelle ne permet pas d'estimer la réponse statistique des caractéristiques d'assemblage. Pour améliorer cette méthodologie par rapport à celle des tirages de Monte Carlo, une méthode par « réduction de dimension améliorée » est combinée afin d'avoir une bonne estimation de la propagation d'incertitude sur les processus d'assemblages non linéaires.

## II-2.2 Simulation par la mesure d'affleurement de pièces de carrosserie

Aujourd'hui, un certain nombre de caractéristiques produit est évalué et vérifié par l'utilisation de modèles numériques pour remplacer des séries de test et des prototypes physiques. Dans la plupart des cas, les modèles numériques décrivent les conditions nominales et ne prennent pas en considération la variabilité géométrique. Plusieurs études ont été menées sur l'analyse des affleurements des éléments de carrosserie automobile en Suède.

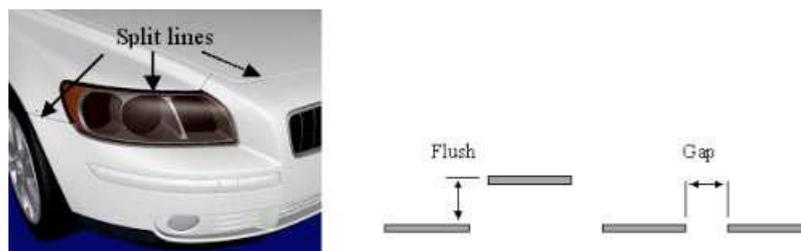


Figure 24 : Exemple d'affleurement de carrosserie [Wickman et al, 2004]

Le modèle de simulation de [Söderberg et al, 2002] permet de générer plus ou moins automatiquement des jointures de carrosserie avec plusieurs dimensions variables. Les variabilités sont prédites en utilisant un modèle de variabilité avec des simulations de Monte Carlo. L'analyse de tolérance proposée par [Lindkvist et al, 2003] permet d'optimiser les différents concepts envisagés lors de la conception préliminaire. [Söderberg et al, 2006a] présente un panel d'outils garantissant la qualité géométrique dès la conception préliminaire jusqu'à la production en passant par la phase de validation de processus et celle de pré-production.

[Söderberg et al, 2006b] incorpore des techniques éléments finis dans l'analyse de tolérance de pièces souples. Cette analyse peut être utilisée pour simuler le comportement d'assemblages flexibles composés des pièces souples, comme des tôles et des pièces en plastique. Ce travail présente un outil qui permet aux pièces et aux

assemblages souples d'être évalués en étudiant leur robustesse géométrique. L'outil d'analyse permet au concepteur d'évaluer la sensibilité géométrique d'une pièce ou d'un assemblage, quelles en sont les sources de variabilité et leur importance vis-à-vis de la robustesse complète. Il permet aux concepteurs et aux ingénieurs de production d'évaluer et d'améliorer les différents types de mise en position, les serrages avec la prise en compte de la déformation des pièces. Cette évaluation vise à détecter les solutions de conception et d'assemblages qui sont sensibles à la variabilité et qui peuvent provoquer des problèmes plus tard pendant la production.

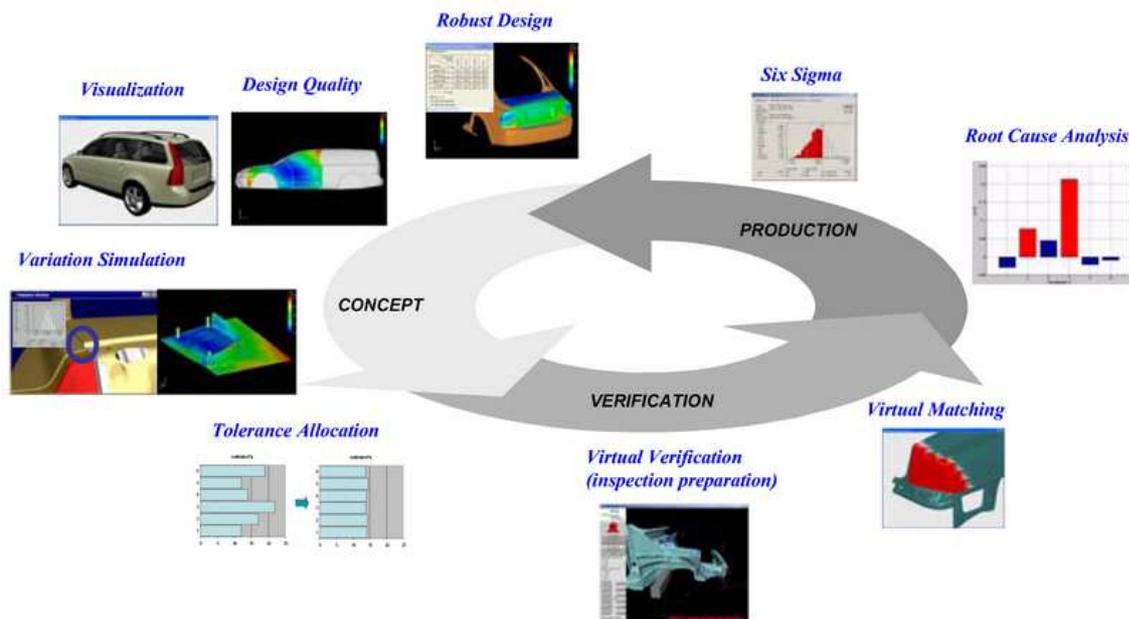


Figure 25 : Evaluation de la robustesse des assemblages souples  
[Söderberg et al, 2006b]

[Wickman et al, 2001] a relié un outil commercial de réalité virtuelle avec un logiciel de simulation de variabilité géométrique. Il permet de visualiser l'assemblage de pièces mesurées dans un environnement de réalité virtuelle. Ce modèle ne permet pas de prendre en compte la variabilité due à la souplesse des pièces, cependant le nombre de pièces plastiques ou métalliques fines est élevé dans les assemblages complexes de l'industrie automobile. [Wickman et al, 2004] propose alors de combiner le modèle de simulation des variabilités géométriques avec des outils de réalité virtuelle pour vérifier la géométrie réelle.



Figure 26 : Exemple d'une voiture physique et sa représentation virtuelle

[Wickman et al, 2004]

[Söderberg et al, 2008] présente un concept intégrant la sensibilité géométrique et visuelle avec des outils d'analyse et d'évaluation. Ce concept conduit à un outil simulant les déformations issues de la fabrication et de l'assemblage. Il permet de visualiser le produit final avec un niveau de réalisme bien avant la réalisation de prototypes. Plusieurs concepts différents peuvent ainsi être visualisés et comparés dans des environnements de réalité virtuelle.

Pour vérifier un concept choisi et contrôler les processus de production, la simulation par la mesure demande beaucoup de ressources. Dans [Wärmefjord et al, 2007] une méthode pour réduire le nombre de points de contrôle a été évaluée sans pour autant perdre trop d'informations. Cette méthode, qui est basée sur l'analyse de groupe de points, est à l'origine décrite par [Carlson et al, 2003]. L'utilisation de cette méthode pour réduire le nombre de points de contrôle conduit à une réduction des coûts pour la simulation et le contrôle mais aussi pour le stockage des données. En outre, le travail d'analyse est plus facile et le comportement du processus peut être contrôlé d'une façon plus lucide. Par une représentation graphique, [Wärmefjord et al, 2009] montre comment la réduction du nombre de points peut être effectuée tout en perdant le moins possible de données.

## **II-2.3 Réglage des liaisons d'un assemblage constitué de pièces souples**

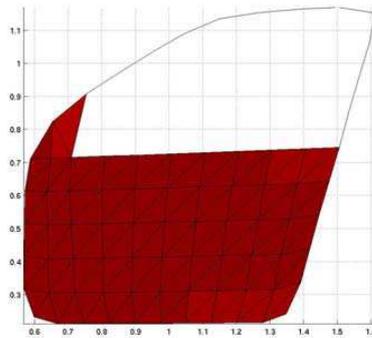
### **II-2.3.1 Assemblages d'une pièce souple dans un bâti rigide**

Une première étude initiée par [Cid et al, 2004] donne les étapes générales qui permettent de lier les variabilités géométriques des composants et leurs déformations. L'utilisation d'un cas simple montre l'intérêt d'intégrer les déformations dans les études de tolérances. Les travaux de [Cid, 2005] ajoutent la prise en compte du défaut de forme

et de la flexibilité d'un composant dans la continuité des travaux du LURPA initiés par [Ballot, 1995].

Il propose une méthodologie de résolution des problèmes d'assemblage in situ. L'ensemble de ces études concerne uniquement l'assemblage d'une pièce souple sur un bâti rigide. Après avoir mesuré l'assemblage, il détermine les réglages des différentes liaisons entre la pièce élastique et le bâti tout en optimisant des critères géométriques associés aux contraintes d'assemblage, à l'aide de la méthode des éléments finis sous l'hypothèse de petites perturbations en élasticité linéaire.

Ce modèle de propagation est utilisé par l'outil FLEX. L'outil FLEX modélise le comportement géométrique d'un solide souple dans un bâti rigide. Il prend en compte les défauts de forme ainsi que la flexibilité du composant souple.



*Figure 27 : Exemple d'une portière de voiture [Cid et al, 2004]*

### **II-2.3.2 Assemblages de plusieurs pièces souples**

[Cid et al, 2005] propose une extension à son travail en considérant non plus un seul solide souple mais plusieurs. A partir des variabilités géométriques des liaisons et de la géométrie réelle, le comportement géométrique d'un mécanisme est déterminé par l'utilisation de coefficients d'influence des paramètres.

En parallèle, [Chevassus et al, 2006] propose une méthode gérant efficacement les assemblages souples composés d'un nombre de liaisons plus grand que nécessaire provoquant ainsi des déformations et des contraintes. Afin de déterminer les valeurs optimales de réglage de ces dispositifs de liaisons hyperstatiques, [Breteau et al, 2007] intègre la mesure de pièce pour initialiser la simulation du processus d'assemblage.

Afin de déterminer les contraintes dans les assemblages de grandes dimensions sur-contraints, [Mounaud et al, 2007] s'intéresse aux contraintes mécaniques entre les composants. A partir des écarts géométriques de fabrication et des écarts dans les liaisons entre les composants, une exigence fonctionnelle caractérisant un effort limite pour les différentes liaisons de l'assemblage peut être considérée.

[Breteau, 2009] enrichi le modèle initié par G. Cid. en 2005. Toujours basé sur la mesure sur site des assemblages, ce nouveau modèle caractérise le comportement d'assemblages souples en prenant en compte plusieurs éléments flexibles avec des défauts de forme. Basé sur l'utilisation de l'outil FLEX, il propose la méthode MULTIFLEX permettant de simuler un assemblage de plusieurs composants souples à partir d'un état donné pour chaque composant.

[Mounaud et al, 2009] prend en compte l'ordre de montage des assemblages hyperstatiques. Ce modèle a pour objectif d'influencer l'ordre d'assemblage en intégrant les écarts de fabrication et la souplesse des pièces.

## **II-2.4 Prise en compte du comportement élastique d'un mécanisme en fonctionnement**

[Samper S. et al, 1997] propose un modèle pour prendre en compte le comportement élastique des assemblages. Il définit, pour un mécanisme, quatre types de modèles :

- modèle parfait,
- modèle rigide avec jeux et défauts de fabrication,
- modèle élastique sans jeu,
- modèle global.

Le modèle parfait correspond à une étude cinématique du mécanisme sans considérer les défauts de fabrication, les défauts d'assemblage et les déformations élastiques des pièces. Le second modèle prend en compte les défauts de fabrication et d'assemblages tout en considérant un comportement rigide des pièces. Le troisième modèle autorise uniquement le comportement élastique des pièces. Enfin, la dernière modélisation unifie le modèle prenant en compte les défauts de fabrication et d'assemblages des pièces avec la modélisation du comportement élastique des pièces. La figure 28 récapitule ces différents modèles.

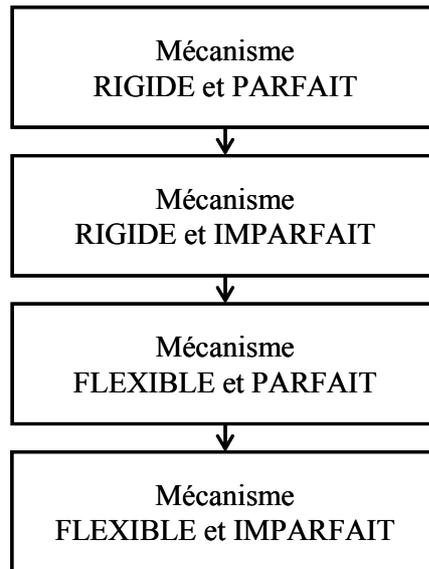


Figure 28 : Différentes modélisations proposées [Samper S. et al, 1998].

La difficulté réside dans la gestion des contacts avec jeu dans le modèle global [Samper S. et al, 1998]. En effet, selon les charges extérieures appliquées aux systèmes, toutes les positions possibles définies par le domaine jeu ne sont pas forcément réalisables.

[Samper S. et al, 2003] propose deux alternatives d'analyses d'assemblage souple avec défauts :

- la méthode séquentielle,
- la méthode simultanée.

La méthode séquentielle, décrite par la figure 29, réalise alternativement la modélisation de mécanisme rigide et imparfait avec la modélisation de mécanisme parfait et souple. L'inconvénient de cette méthode est que le nombre d'aller retour entre les deux modélisations peut vite devenir important dans le cas de mécanisme complexe.

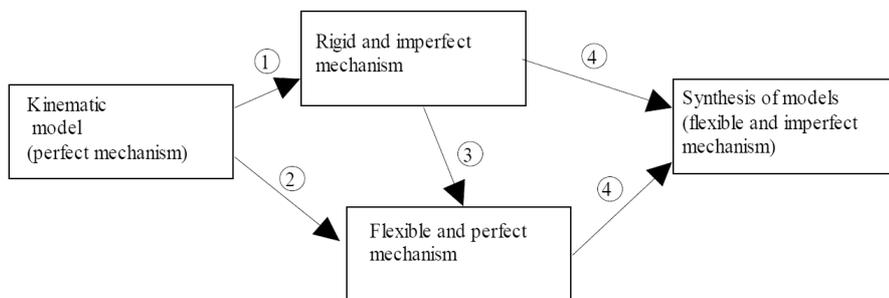


Figure 29 : Méthode séquentielle proposée par [Samper S. et al, 2003].

La seconde méthode proposée consiste à réaliser une étude simultanée du comportement élastique des pièces avec des défauts géométriques. L'avantage réside dans le fait que peu d'hypothèses simplificatrices sont retenues dans la modélisation. Cependant un grand nombre de possibilités de solutions peut être défini.

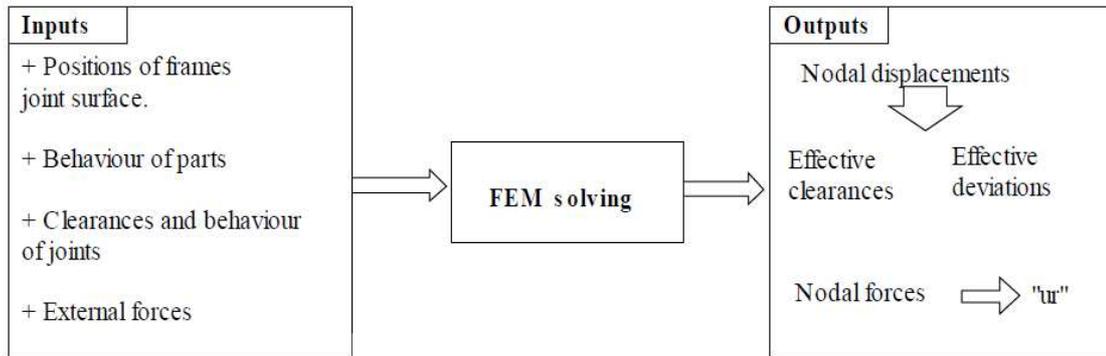


Figure 30 : Méthode simultanée proposée par [Samper S. et al, 2003].

La méthode simultanée a été appliquée à plusieurs exemples pour déterminer l'évolution des domaines jeu en prenant en compte les déformations élastiques des pièces [Samper S. et al, 2007]. La figure 31 représente l'importance de prendre en compte l'évolution du domaine jeu d'un roulement à bille en fonction de son chargement extérieur. L'évolution du domaine jeu dans le roulement dépend des déformations élastiques des pièces notamment dues à la pression de Hertz. L'évolution du domaine jeu d'un engrenage est aussi proposée.

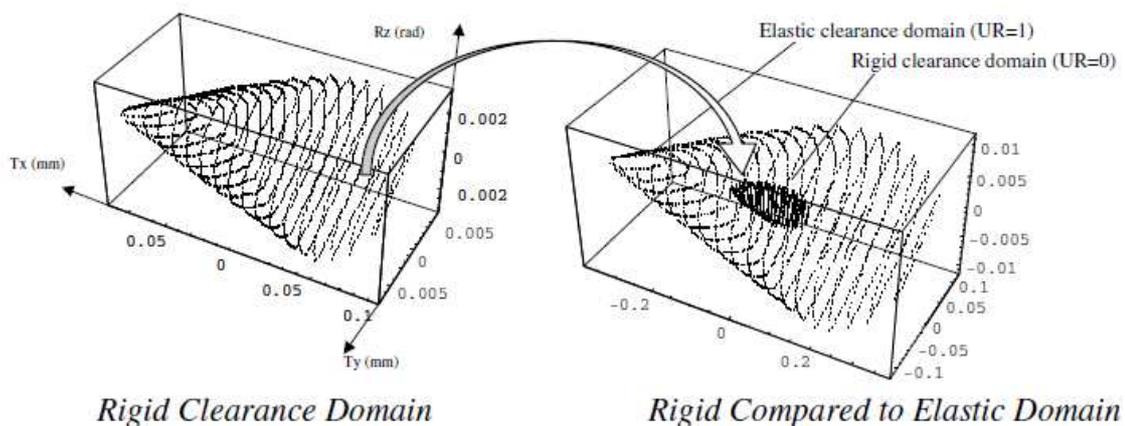


Figure 31 : Evolution du domaine jeu d'un roulement [Samper S. et al, 2007].

L'ensemble de ces travaux montre que le comportement élastique des composants d'un mécanisme ne doit pas être négligé. L'évolution des domaines en

fonction du comportement élastique du mécanisme, montre la possibilité d'intégrer le comportement souple des pièces dans les chaînes de cotes 3d.

## **II-2.5 Evolution d'une exigence fonctionnelle pendant le cycle de vie d'un produit**

[Mandil et al, 2009a] et [Mandil et al, 2009b] montre l'intérêt de prendre en compte les déformations thermomécaniques dans le cycle de vie d'un produit.

[Mandil et al, 2009a] propose une méthodologie pour prédire l'évolution d'une exigence fonctionnelle pendant le cycle de vie du produit. Les variations de contraintes thermomécaniques sont à l'origine de l'évolution de cette exigence fonctionnelle. La méthodologie proposée se décompose en trois étapes :

- Choix de l'exigence fonctionnelle et détermination des chaînes de cotes correspondantes,
- Détermination des déformations thermomécaniques des pièces,
- Intégrations des déformations thermomécaniques dans les dimensions nominales des pièces et vérification de l'exigence fonctionnelle.

L'évolution de l'exigence fonctionnelle est calculée en considérant que les dimensions nominales des pièces évoluent. Ces démarches permettent de déterminer si l'exigence fonctionnelle est dépendante ou non du cycle de fonctionnement d'un produit. Cette méthode permet de redimensionner les pièces afin que l'exigence fonctionnelle soit respectée tout au long du cycle de fonctionnement.

Toutefois cette proposition de méthodologie utilise une modélisation de pièce par un squelette. Les écarts géométriques d'une pièce sont formalisés par une matrice de Gramm. Une matrice de Gramm a la particularité de ne pas dépendre d'une base de projection étant donné que chaque terme de la matrice est le résultat d'un produit scalaire. Les écarts ne sont pas linéarisés. Les pièces ne sont composées que de barres. L'aspect tridimensionnel des pièces n'est pas pris en compte dans le calcul des déformations thermomécaniques.

## **II-3 Synthèse sur les outils de chaînes de cotes tridimensionnelles**

Dans une première partie, les modélisations de chaînes de cote 3d de solides infiniment rigides ont été présentées. Après avoir exposé les principales hypothèses classiquement émises en tolérancement géométrique, la modélisation des pièces par les surfaces de substitutions a été rappelée. Les modélisations des écarts géométriques dans les pièces et les liaisons permettent de définir la loi de comportement géométrique d'un mécanisme par la fermeture de cycles ou de boucles topologiques. La loi de comportement géométrique d'un mécanisme permet de formaliser les dépendances entre d'une part un écart fonctionnel et d'autre part des écarts de pièces et de liaisons influents. Ces dépendances assurent le transfert de la condition exprimée sur l'écart fonctionnel sur les limites des écarts de pièces influents.

Dans un second temps, ce chapitre a fait un état de l'art des différentes approches prenant en compte des solides déformables. La plupart des ces modélisations sont essentiellement liées à des activités de recherche dans l'automobile ou dans l'aéronautique. En effet, la modélisation des conséquences géométriques du soudage par point des tôles souples a montré l'intérêt de considérer des solides flexibles dans les chaînes de cotes 3d. De plus, les aspects esthétiques des affleurements des éléments de carrosserie automobile ont fortement contribué à orienter l'intégration des effets de la souplesse des pièces et des défauts géométriques dans des modèles de réalité virtuelle. Ensuite, l'étude du paramétrage et du réglage des liaisons dans des mécanismes fortement hyperstatiques a nécessité de prendre en compte l'élasticité d'une ou plusieurs pièces dans les modélisations de chaînes de côtes 3d. L'intégration des déformations élastiques dans les domaines écart et jeux a montré la possibilité d'utiliser des ensembles de contrainte pour caractériser le comportement élastique d'un mécanisme. Enfin, des études préliminaires ont montré l'intérêt de prendre en compte les déformations thermomécaniques dans les chaînes de cotes 3d. Ceci permet de vérifier le respect d'une exigence fonctionnelle tout au long du cycle de fonctionnement d'un produit subissant des contraintes thermomécaniques.

Nous pouvons ainsi remarquer que ce sont les phénomènes d'assemblages qui ont été considérés dans la plupart des modélisations de chaînes de cotes intégrant des pièces souples. Cependant, comme le fait remarque [Cid, 2005] en perspective de son

travail de thèse, « (...) d'autres phénomènes entrent en jeu tels les problèmes d'écoulements de fluides ou de variations de température ».

- Chapitre III -

Mise en œuvre de chaînes de cotes 3d par des  
opérations sur des polytopes



Dans le chapitre précédent, le concept des lois de comportement géométrique d'un mécanisme a été rappelé pour formaliser le transfert d'une exigence fonctionnelle.

Ce chapitre va présenter l'utilisation des polytopes afin de caractériser les limites admissibles des écarts de situation entre deux surfaces de substitution. Dans le cas de deux surfaces d'une même pièce, un polytope caractérise une spécification géométrique ; dans le cas de deux surfaces potentiellement en contact, un polytope caractérise une spécification de contact. Cela va permettre de formaliser les lois de comportement géométrique et plus généralement le transfert d'une exigence fonctionnelle par des opérations sur des polytopes : l'intersection et la somme de Minkowski.

Les premiers travaux corrélant le cumul des limites de défauts sur des pièces en contact et la somme de Minkowski d'ensembles de contraintes géométriques ont été réalisés par [Fleming, 1988]. Une synthèse de cette problématique est détaillée dans [Srinivasan, 1993]. Parmi les modélisations de chaînes de cotes par des opérations sur des ensembles de contraintes on peut citer :

- les domaines dont les premiers travaux ont été initiés en 1992 par Giordano à l'Université de Savoie [Giordano et al, 1992]
- la modélisation des spécifications géométriques par des objets polyédriques réalisée par [Roy et al, 1999]
- les T-Maps développés par Davidson et al . dans l'université d'Arizona [Wu et al, 2003].

Une des particularités du polytope est qu'il peut être défini par un ensemble fini d'inéquations linéaires [Teissandier et al, 1999b].

## III-1 Propriétés sur les polytopes

### III-1.1 Définitions duales d'un polytope

Deux définitions duales existent pour définir un polytope. La première définit un polytope de dimension  $p$  (noté  $p$ -polytope) comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans  $\mathbb{R}^n$ , avec  $p \leq n$ . La figure 32 donne une illustration de cette définition en représentant deux polytopes respectivement dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

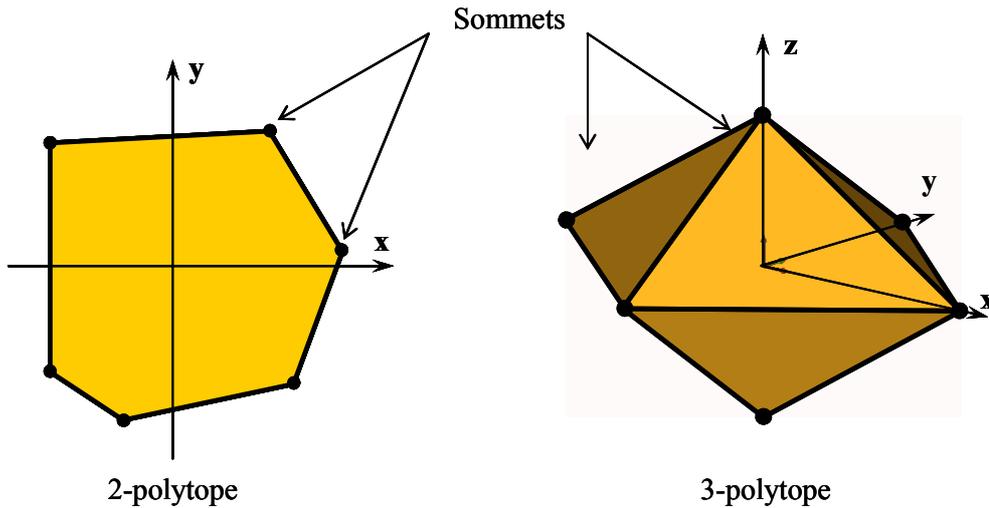


Figure 32 : Exemples de polytopes définis à partir de points.

Cette définition repose sur la v-représentation (caractérisation d'un polytope par ses sommets) [Fukuda, 2004].

La deuxième définit un polytope comme l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les frontières sont des hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  [Boissonnat et al, 1998], [Ziegler, 1995].

Un hyperplan est un sous-espace affine de dimension 0, 1, 2 ou  $(n-1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et est respectivement appelé point, droite, plan et hyperplan de dimension  $(n-1)$ . Un hyperplan de dimension  $(n-1)$  est appelé un  $(n-1)$ -hyperplan.

La figure 33 illustre la seconde définition dans  $\mathbb{R}^2$ .

Cette définition repose sur la h-représentation (caractérisation d'un polytope par ses hyperplans supports) [Fukuda, 2004].

Considérons  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  :

$$a_1x_1 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n = b \quad (21)$$

$\bar{H}^+$  est le demi-espace fermé :

$$a_1x_1 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n \geq b \quad (22)$$

$\bar{H}^-$  est le demi-espace fermé :

$$a_1x_1 + \dots + a_ix_i + \dots + a_nx_n \leq b \quad (23)$$

Nous choisirons de préférence un système d'inégalités pour  $m$  demi-espaces  $\bar{H}^-$  pour définir un polytope  $\mathcal{P}$  [Ziegler, 1995] tel que :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad (24)$$

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  est une notation usuelle pour le système d'inégalités suivant, où  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  sont les lignes de la matrice  $\mathbf{A}$  et  $b_1, \dots, b_m$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{b}$  :

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \leq b_1, \dots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} \leq b_m \quad (25)$$

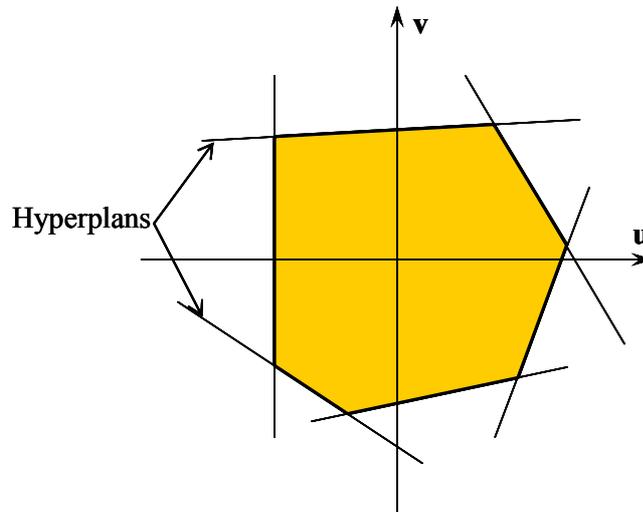


Figure 33 : Exemple d'un 2-polytope défini à partir d'hyperplans.

Un 0-polytope est un sommet, un 1-polytope est une arête (i.e. segment de droite), un 2-polytope est une face (i.e. plan délimité par un polygone convexe), un 3-polytope est polyèdre convexe et un  $(n-1)$ -polytope est une facette dans  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons un  $k$ -polytope  $\mathcal{P}$ . Un hyperplan  $H$  est un hyperplan support de  $\mathcal{P}$  si l'intersection entre  $H$  et  $\mathcal{P}$  est non vide et si  $\mathcal{P}$  est inclus dans  $\bar{H}^+$  ou  $\bar{H}^-$ .

Une face est l'intersection entre  $\mathcal{P}$  et un de ses hyperplans support. Les faces d'un  $k$ -polytope  $\mathcal{P}$  sont des sous-ensembles convexes de dimension  $m$  avec  $0 \leq m \leq k-1$ . On note une  $m$ -face une face de dimension  $m$ .

En tolérancement géométrique, les spécifications géométriques, les spécifications de contact et les exigences fonctionnelles sont généralement définies par un ensemble de demi-espaces fermés  $\bar{H}^-$  [Teissandier et al, 1999b]. Une spécification géométrique est caractérisée par un polytope géométrique, une spécification de contact

est caractérisée par un polytope de contact et une exigence fonctionnelle est caractérisée par un polytope fonctionnel.

Les composantes du vecteur  $\mathbf{x}$  dans la relation (24) sont les écarts de situation entre deux surfaces de substitution d'une même pièce (spécification géométrique), les écarts de situation entre deux surfaces de substitution potentiellement en contact (spécification de contact) ou bien les écarts de situation entre les deux surfaces substitution de l'exigence fonctionnelle. Les polytopes ont donc une dimension  $d$  avec  $1 \leq d \leq 6$  dans une chaîne de cotes tridirectionnelles. Le cas où  $d = 1$  correspond aux chaînes de cotes unidirectionnelles.

Le cumul des limites de défauts influents sur une exigence peut être modélisé par un polytope calculé, résultat d'un ensemble d'intersections et de sommes de Minkowski de polytopes géométriques et de polytopes de contact. Une exigence fonctionnelle peut être caractérisée par un polytope fonctionnel, c'est-à-dire un polytope cible. Il convient alors de vérifier si le polytope calculé est inclus dans le polytope fonctionnel, voir figure 34.

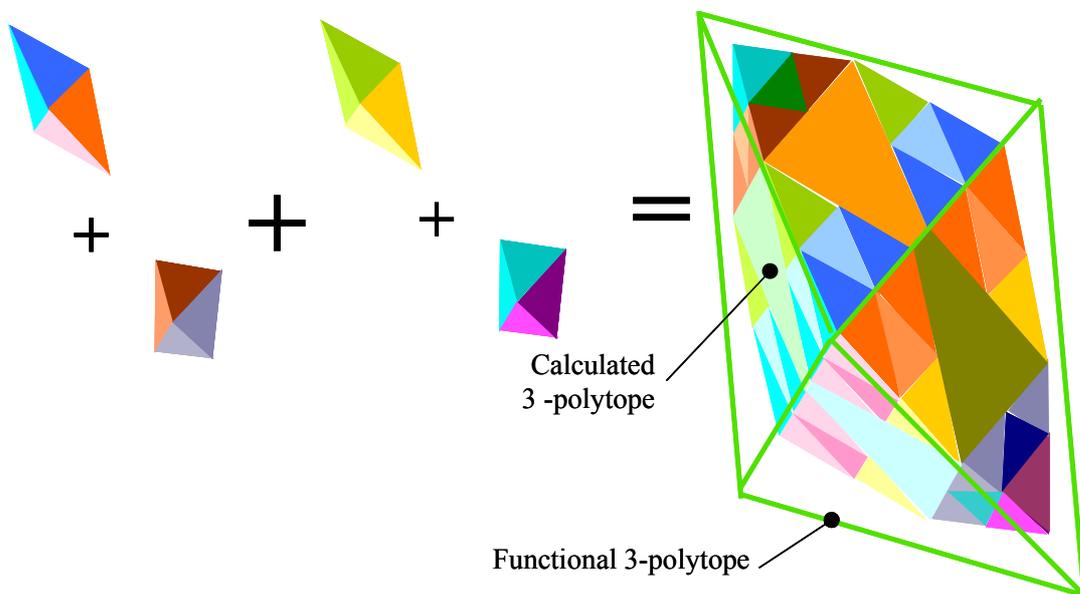


Figure 34 : Vérification de l'inclusion du 3-polytope [Teissandier et al, 1999b].

Les deux principales opérations réalisées sur les polytopes géométriques et les polytopes de contact sont donc l'intersection et la somme de Minkowski.

### III-1.2 Intersection de polytopes

Considérons deux  $n$ -polytopes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  définis selon la relation (24) :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \mathcal{P}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}.\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \text{ avec } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mp \times n} \text{ et } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{mp} \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}(\mathbf{C}, \mathbf{d}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{C}.\mathbf{x} \leq \mathbf{d}\} \text{ avec } \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{mq \times n} \text{ et } \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{mq} \end{aligned} \quad (26)$$

Définissons le polytope  $\mathcal{R}$  comme l'intersection du polytope  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{E}, \mathbf{f}) &= \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{E}.\mathbf{x} \leq \mathbf{f}\}; \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(mp+mq) \times n} \text{ et } \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{mp+mq} \\ \text{avec : } \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_{mp} \\ \mathbf{c}_1 \\ \dots \\ \mathbf{c}_{mq} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{mp} \\ d_1 \\ \dots \\ d_{mq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

La figure 35 illustre l'intersection de deux polytopes de dimension 3  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ .

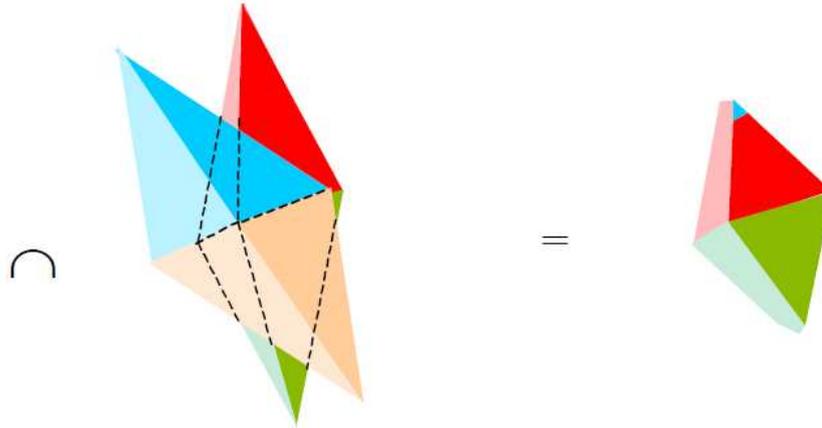


Figure 35 : Intersection de 3-polytopes dans  $\mathbb{R}^3$  [Teissandier et al, 1999b].

### III-1.3 Somme de Minkowski de polytopes

La somme de Minkowski de deux polytopes  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathcal{R} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{p} \in \mathcal{P}, \exists \mathbf{q} \in \mathcal{Q} : \mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}\} \quad (28)$$

En dimension 1, cela consiste à additionner des variables bornées à des intervalles. Cette méthode est utilisée en chaînes de cotes unidirectionnelles. En

dimension 2 et 3, la somme de Minkowski consiste à effectuer un balayage d'un point de référence d'un opérande sur la frontière de l'autre opérande [Wu et al., 2003], [Barki et al., 2009].

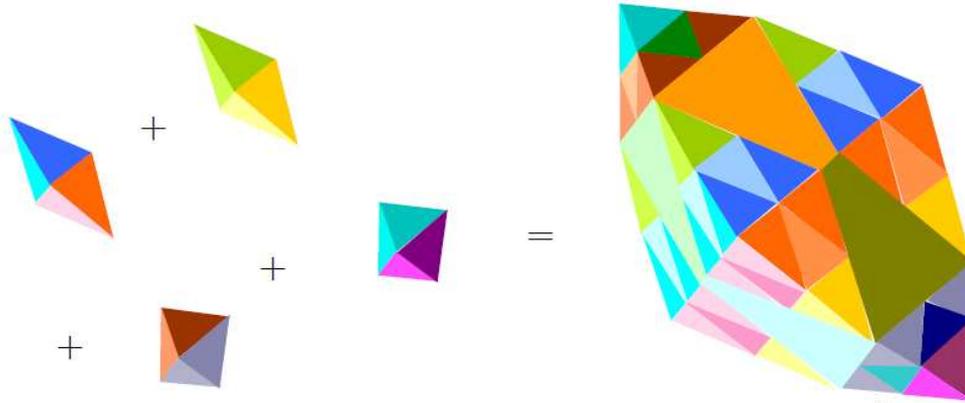


Figure 36 : Somme de Minkowski de 3-polytopes dans  $\mathbb{R}^3$ .

Un polytope peut être caractérisé par sa v-représentation ou sa h-représentation. Les deux opérations (intersection et somme de Minkowski) permettant de mettre en œuvre des chaînes de cotes 3d ont été énoncées. Nous allons montrer comment les limites admissibles des écarts de situation entre des surfaces de substitution peuvent être formalisées par un ensemble fini de demi-espaces fermés dont les frontières sont des  $d$  – hyperplans avec  $1 \leq d \leq 6$ , c'est-à-dire par une h-représentation.

## III-2 Caractérisation des spécifications par des polytopes

### III-2.1 Caractérisation de spécifications géométriques

#### III-2.1.1 Polytope géométrique d'une surface de classe complexe

Considérons une surface nominale  $S_{i,0}$  appartenant à la classe des surfaces complexes [Hervé, 1976]. Une zone de tolérance  $ZT$  est générée autour de la surface  $S_{i,0}$  par un offset extérieur et un offset intérieur selon le principe défini par Requichaa [Requichaa, 1983]. Toute surface de substitution  $S_{i,j}$  correspondant à une réalisation physique de la surface nominale  $S_{i,0}$  est située à l'intérieur de la zone de tolérance en satisfaisant la relation suivante (voir figure 37) :

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N \in S_{i,0} \quad \text{avec } 0 \leq k \leq 1 \quad (k-1).t \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,0} \cdot \mathbf{n}_N \leq k.t \quad (29)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,0}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{i,0}$  au point  $N$ ,
- $\mathbf{n}_N$  : normale de la surface  $S_{i,0}$  au point  $N$
- $t$  : dimension de la zone de tolérance  $ZT$
- $k$  : paramètre positionnant la zone de tolérance autour de la surface nominale. La surface nominale est la surface médiane de la zone de tolérance pour  $k = 0,5$ .

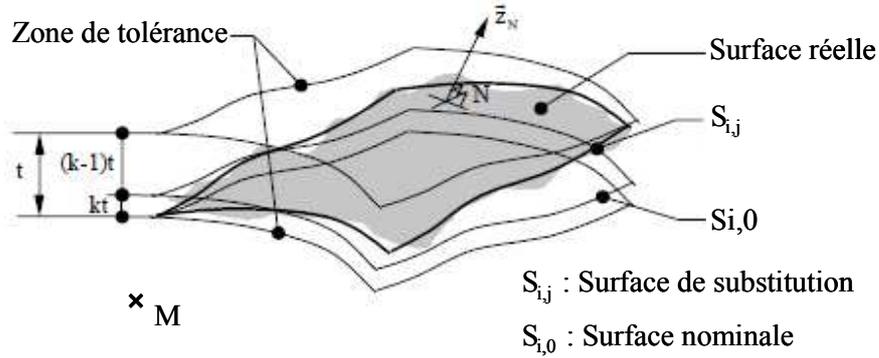


Figure 37 : Contraintes géométriques d'une surface quelconque  
[Teissandier et al, 1999b].

Pour tout point  $M$  de l'espace euclidien, la propriété des champs de petits déplacements [Clément et al, 1988] permet d'écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,0} = \boldsymbol{\varepsilon}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{NM} \wedge \boldsymbol{\rho}_{i,j/i,0} \quad (30)$$

La relation (29) peut alors être exprimée en fonction du déplacement du point  $M$  :

$$\forall N \in S_{i,0}, \quad (k-1).t \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{NM} \wedge \boldsymbol{\rho}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_N \leq k.t \quad \text{avec } 0 \leq k \leq 1 \quad (31)$$

Finalement la relation (31) peut s'écrire en fonction d'un ensemble d'inégalités selon (24) :

$$\forall N \in S_{i,0}, \quad \left. \begin{array}{l} +(\boldsymbol{\varepsilon}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{NM} \wedge \boldsymbol{\rho}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_N \leq k.t \\ -(\boldsymbol{\varepsilon}_{M-i,j/i,0} + \mathbf{NM} \wedge \boldsymbol{\rho}_{i,j/i,0}) \cdot \mathbf{n}_N \leq (1-k).t \end{array} \right\} \text{avec } 0 \leq k \leq 1 \quad (32)$$

Dans une base  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ , les vecteurs  $\mathbf{z}_N$  et  $\mathbf{NM}$  peuvent s'écrire :

$$\mathbf{z}_N \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \\ c_N \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{NM} \begin{pmatrix} d_{NMx} \\ d_{NMy} \\ d_{NMz} \end{pmatrix} \quad (33)$$

La relation (32) peut s'écrire alors sous la forme :

$$\forall N \in S_{i,0}, \left\{ \begin{array}{l} +(\varepsilon_{1/0x,M} + d_{NMy} \cdot \rho_{1/0z} - d_{NMz} \cdot \rho_{1/0y}) \cdot a_N + (\varepsilon_{1/0y,M} - d_{NMx} \cdot \rho_{1/0z} + d_{NMz} \cdot \rho_{1/0x}) \cdot b_N \\ +(\varepsilon_{1/0z,M} + d_{NMx} \cdot \rho_{1/0y} - d_{NMy} \cdot \rho_{1/0x}) \cdot c_N \leq k \cdot t \\ -(\varepsilon_{1/0x,M} + d_{NMy} \cdot \rho_{1/0z} - d_{NMz} \cdot \rho_{1/0y}) \cdot a_N - (\varepsilon_{1/0y,M} - d_{NMx} \cdot \rho_{1/0z} + d_{NMz} \cdot \rho_{1/0x}) \cdot b_N \\ -(\varepsilon_{1/0z,M} + d_{NMx} \cdot \rho_{1/0y} - d_{NMy} \cdot \rho_{1/0x}) \cdot c_N \leq (1-k) \cdot t \end{array} \right\} \quad (34)$$

En discrétisant la surface  $S_{i,0}$  en  $n$  points, la relation (34) caractérise un ensemble fini de  $2n$  demi-espaces fermés dont les frontières sont des 6 – hyperplans. Il s'agit de la h-représentation d'un polytope de dimension 6 que nous appellerons  $\mathcal{D}_{i,j/i,0}^g$ .

$\mathcal{D}_{i,j/i,0}^g$  est le polytope géométrique d'une surface de classe complexe.

*Remarque 1* : les hyperplans frontière de la relation (34) sont symétriques deux à deux. Dans le cas où  $k = 0,5$ , le centre de symétrie est l'origine.

*Remarque 2* : pour une surface appartenant à une classe de surfaces dont le degré d'invariance est  $d_{inv}$ , la dimension du polytope géométrique est de  $6 - d_{inv}$ . Ainsi, les polytopes des surfaces plane, cylindrique, sphérique et conique sont respectivement de dimension 3, 4, 3 et 5. Nous allons détailler par la suite les formulations des polytopes géométriques des surfaces plane et cylindrique qui ne sont que des applications particulières des relations (34). Les relations (34) sont applicables à toutes classes de surfaces et donc à tous types de surfaces.

### III-2.1.2 Polytope géométrique d'une surface plane

Considérons une surface nominalement plane de contour rectangulaire, modélisée par une surface de substitution  $S_{1,1}$ , comprise dans une zone de tolérance  $ZT$  de dimension  $t_{1,1}$  et centrée sur la surface nominale  $S_{1,0}$ .

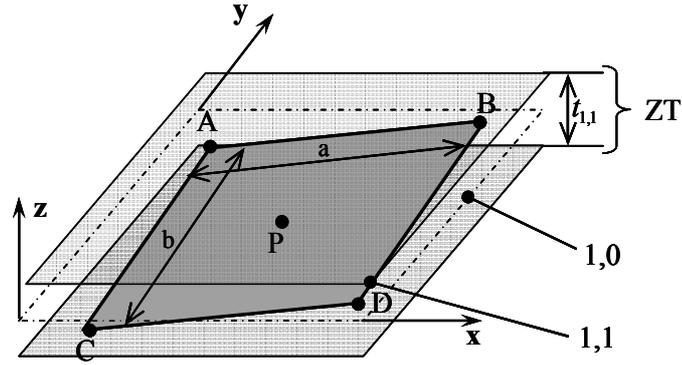


Figure 38 : Contraintes géométriques d'une surface nominale plane.

La surface nominale est définie dans la base  $(x, y, z)$  telle que

$$\mathbf{PA} = \left(-\frac{a}{2}; +\frac{b}{2}; 0\right), \mathbf{PB} = \left(+\frac{a}{2}; +\frac{b}{2}; 0\right), \mathbf{PC} = \left(+\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; 0\right) \text{ et } \mathbf{PD} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; 0\right).$$

Toute surface de substitution  $S_{1,1}$  est comprise dans la zone de tolérance  $ZT$  si elle satisfait la relation suivante :

$$S_{1,1} \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N \in S_{1,0} \quad -\frac{t}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{N-1,1/1,0} \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \quad (35)$$

Exprimons (35) en fonction des écarts de translation au point P situé à l'intersection des diagonales du contour rectangulaire de  $S_{1,1}$ , il vient :

$$\forall N \in S_{1,0} \quad -\frac{t}{2} \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{P-1,1/1,0} + \mathbf{NP} \wedge \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,0}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \quad (36)$$

La relation (36) peut être simplifiée en exploitant les propriétés géométriques d'une surface plane. Une surface plane étant un ensemble convexe, il suffit d'écrire la relation (36) sur la plus petite enveloppe convexe du contour de la surface. Cela signifie que seuls les points situés sur la plus petite enveloppe convexe du contour génèreront des hyperplans supports du polytope géométrique.

Si la plus petite enveloppe convexe du contour de la surface plane est un polygone, le respect de la relation (36) aux sommets du polygone garantit que la surface est située dans la zone de tolérance. Si la plus petite enveloppe convexe n'est pas un polygone (un cercle par exemple), il convient alors de la discrétiser en un nombre de points.

Dans le cas de la figure 38, la surface plane étant de contour rectangulaire, seuls les sommets A, B, C et D génèrent les hyperplans supports. Il suffit d'écrire la relation (36) au point P pour les points A, B, C et D :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{t}{2} \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{P-1,1/1,0} + \mathbf{AP} \wedge \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,0}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{P-1,1/1,0} + \mathbf{BP} \wedge \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,0}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{P-1,1/1,0} + \mathbf{CP} \wedge \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,0}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \\ -\frac{t}{2} \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{P-1,1/1,0} + \mathbf{DP} \wedge \boldsymbol{\rho}_{1,1/1,0}) \cdot \mathbf{z} \leq +\frac{t}{2} \end{array} \right\} \quad (37)$$

En développant chacune des inéquations, nous obtenons l'ensemble des contraintes définissant le polytope géométrique  $\mathfrak{D}_{1,1/1,0}^g$  :

$$\mathfrak{D}_{1,1/1,0}^g = \left\{ \left( \begin{array}{ccc} +\frac{b}{2} & +\frac{a}{2} & +1 \\ -\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & -1 \\ +\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & +1 \\ -\frac{b}{2} & +\frac{a}{2} & -1 \\ -\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & +1 \\ +\frac{b}{2} & +\frac{a}{2} & -1 \\ -\frac{b}{2} & +\frac{a}{2} & +1 \\ +\frac{b}{2} & -\frac{a}{2} & -1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \rho_{1,1/1,0x} \\ \rho_{1,1/1,0y} \\ \varepsilon_{P-1,1/1,0z} \end{array} \right) \leq \left( \begin{array}{c} +\frac{t}{2} \\ +\frac{t}{2} \end{array} \right) \right\} \quad (38)$$

Le système (38) est défini en fonction de trois composantes de petits déplacements :  $\varepsilon_{P-1,1/1,0z}$ ,  $\rho_{1,1/1,0x}$  et  $\rho_{1,1/1,0y}$ . Ces trois composantes correspondent aux écarts de situation d'une surface plane de normale  $\mathbf{z}$ . L'ensemble des inégalités peut alors être formalisé par un 3-polytope, c'est-à-dire un polyèdre convexe.

Le 3-polytope défini par les huit inéquations du système (38) est le polytope géométrique d'une surface plane de contour rectangulaire. Il est illustré en figure 39. Il s'agit ici d'un octaèdre.

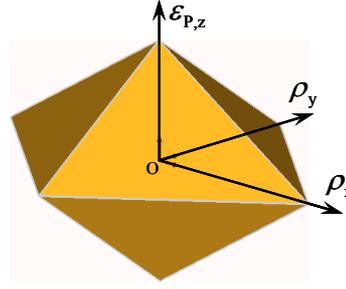


Figure 39 : 3-polytope géométrique  $\mathfrak{D}_{1,1/1,0}^g$  de  $S_{1,1}$  par rapport à  $S_{1,0}$  au point  $P$ .

La figure 40 illustre le 3-polytope obtenu dans le cas d'une surface plane de contour circulaire discrétisé en 10 points. Le 3-polytope a dans ce cas 20 facettes.

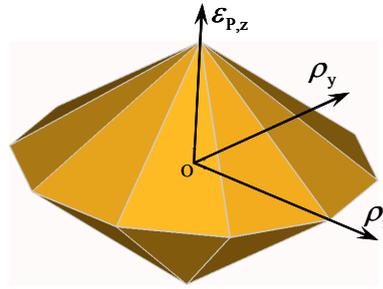


Figure 40 : 3-polytope géométrique d'une surface plane de contour circulaire.

### III-2.1.3 Polytope géométrique d'une surface cylindrique

Considérons une surface nominale cylindrique modélisée par une surface de substitution  $S_{1,1}$ , dont l'axe est compris dans une zone de tolérance cylindrique  $ZT$  de diamètre  $\varnothing_{t_{1,1}}$ , et dont l'axe est confondu avec l'axe du cylindre nominal  $S_{1,0}$ . Afin de garantir que l'axe de la surface  $S_{1,1}$  soit situé dans la zone de tolérance  $ZT$ , il convient d'écrire aux deux extrémités A et B la relation suivante où  $n$  est le pas de discrétisation angulaire autour de l'axe du cylindre nominal  $S_{1,0}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{t_{1,1}}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,1/1,0} \cdot \mathbf{n}_{\theta_i} \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ -\frac{t_{1,1}}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,1/1,0} \cdot \mathbf{n}_{\theta_i} \leq \frac{t_{1,1}}{2} \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_{\theta_i} = \cos \theta_i \cdot \mathbf{y} + \sin \theta_i \cdot \mathbf{z} \\ \theta_i = i \frac{\pi}{n}, 0 \leq i < n \text{ et } (i, n) \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (39)$$

En exprimant la relation (39) en fonction des écarts en translation du point P milieu du segment de droite limité par A et B, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{t_{1,1}}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{p-1,1/1,0,y} - \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0,z} \right) + \sin \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{p-1,1/1,0,z} + \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0,y} \right) \leq \frac{t_{1,1}}{2} \\ -\frac{t_{1,1}}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{p-1,1/1,0,y} + \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0,z} \right) + \sin \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{p-1,1/1,0,z} - \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0,y} \right) \leq \frac{t_{1,1}}{2} \end{array} \right. \quad (40)$$

avec :  $\theta_i = i \frac{\pi}{n}$ ,  $0 \leq i < n$  et  $(i, n) \in \mathbb{N}$

La relation (40) caractérise le polytope géométrique d'une surface cylindrique. Il s'agit d'un 4-polytope dont il est possible de donner une représentation graphique dans  $\mathbb{R}^3$  pour  $\rho_{1,1/1,0,y} = 0$  par exemple, voir figure 41.

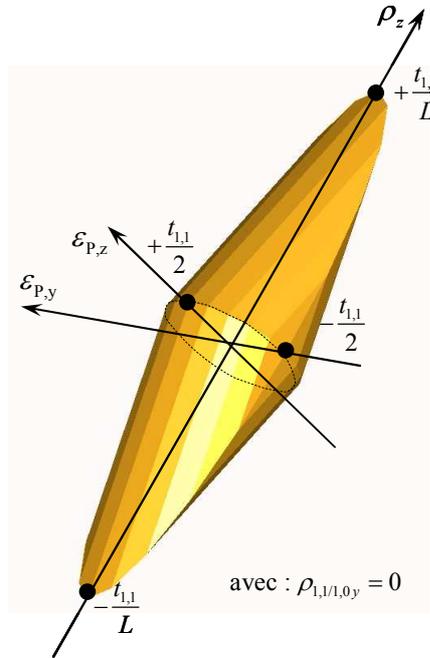


Figure 41 : 4-polytope géométrique d'une surface circulaire projeté dans  $\mathbb{R}^3$ .

### III-2.2 Caractérisation de spécifications géométriques ISO

Toute spécification géométrique est caractérisée par un polytope géométrique correspondant à la somme de Minkowski des polytopes géométriques de la surface tolérancée  $S_{i,j}$  et de la surface spécifiée  $S_{i,k}$  :

$$\mathcal{D}_{i,j/i,k}^g = \mathcal{D}_{i,j/i,0}^g + \mathcal{D}_{i,0/i,k}^g \quad (41)$$

Cela est une traduction formelle du vieil adage du mécanicien stipulant qu'une cote varie par les deux bouts.

Une spécification géométrique définit la h-représentation du polytope  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^g$ . La relation (41) est une chaîne de cotes 3d particulière entre deux surfaces de la même pièce. Dans une chaîne de cotes 3d classique entre deux surfaces de deux pièces distinctes, les deux opérandes de la relation (41) peuvent avoir des coefficients d'influence très différents.

### III-2.2.1 Spécifications de position

La définition du polytope géométrique d'une surface est directement transposable à la définition du polytope géométrique d'une spécification de position entre deux surfaces. Considérons une surface tolérancée  $S_{i,j}$  qui doit être incluse dans une zone de tolérance  $ZT$  définie selon les règles de l'ISO, positionnée de manière exacte par rapport à une référence spécifiée  $S_{i,k}$ . Etant donné que par hypothèse la surface  $S_{i,k}$  est une surface de substitution, la surface de référence  $S_{i,k}$  et la surface spécifiée correspondante sont confondues.

Toute spécification de position entre une surface  $S_{i,j}$  et une surface de référence  $S_{i,k}$  peut être définie d'après la relation suivante :

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N \in S_{i,j} \quad -\frac{t}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,k} \cdot \mathbf{n}_N \leq +\frac{t}{2} \quad (42)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,k}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{i,k}$  au point N ,
- $\mathbf{n}_N$  : normale de la surface  $S_{i,j}$  au point N
- $t$  : dimension de la zone de tolérance  $ZT$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/i,k} = \mathbf{0}$  correspond au cas où  $S_{i,j}$  est confondue avec la surface de médiane de la zone de tolérance  $ZT$  .

D'une manière analogue au polytope géométrique d'une surface plane, on définit le polytope d'une spécification de localisation entre deux plans : voir figure 42. D'une manière analogue au polytope géométrique d'une surface cylindrique, on définit le polytope d'une spécification de coaxialité entre deux surfaces cylindriques : voir figure 43.

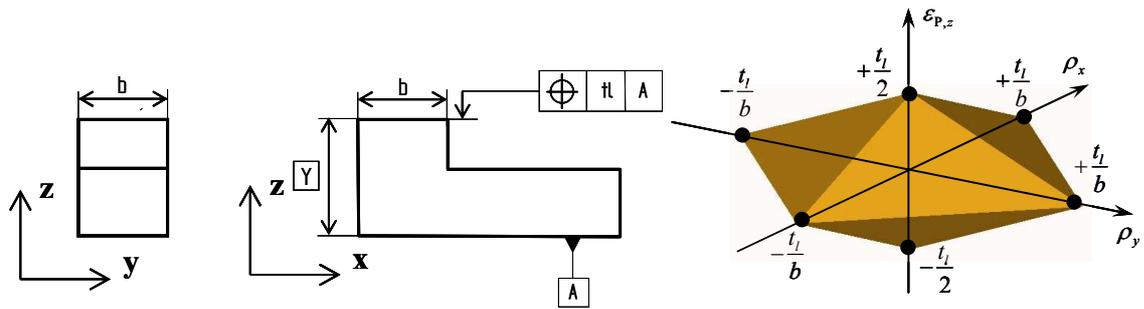


Figure 42 : 3- polytope d'une spécification de localisation entre deux plans au point P.

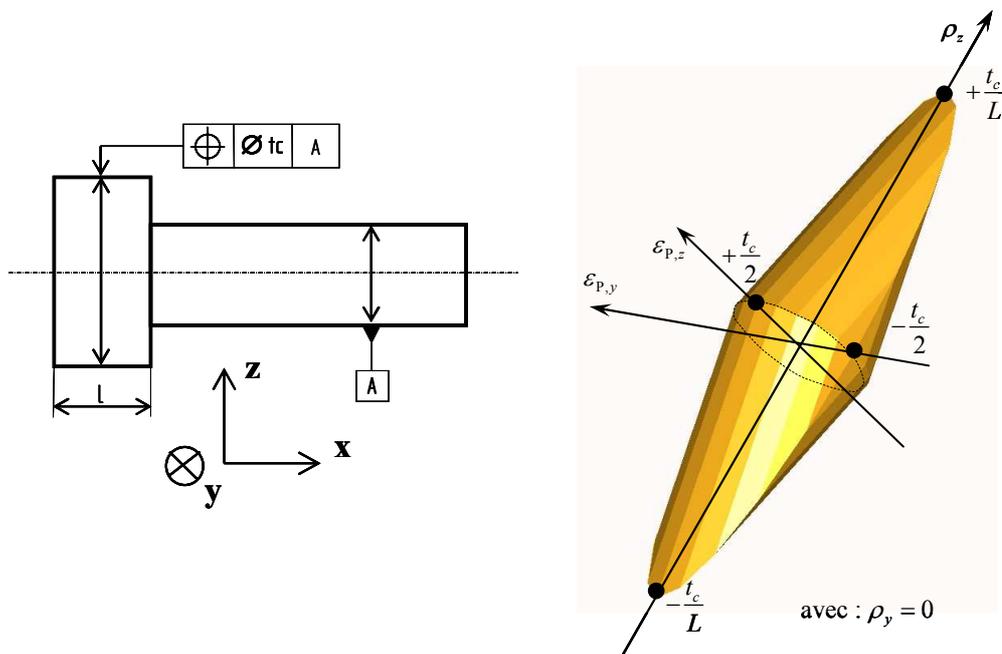


Figure 43 : 4- polytope d'une spécification de coaxialité entre deux surfaces cylindriques au point P projeté dans  $\mathbb{R}^3$ .

### III-2.2.2 Spécifications d'orientation

Considérons une surface tolérancée  $S_{i,j}$  qui doit être incluse dans une zone de tolérance  $ZT$  définie selon les règles de l'ISO, c'est-à-dire orientée par rapport à une référence spécifiée  $S_{i,k}$ . Etant donné que par hypothèse la surface  $S_{i,k}$  est une surface de substitution, la surface de référence  $S_{i,k}$  et la surface spécifiée correspondante sont confondues. Toute spécification d'orientation entre une surface  $S_{i,j}$  et une surface de référence  $S_{i,k}$  peut être définie d'après la relation (43).

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \begin{cases} \forall N_1, \forall N_2 \in S_{i,j} \text{ avec } N_1 \neq N_2 \\ -t \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{N_1-i,j/i,k} - \boldsymbol{\varepsilon}_{N_2-i,j/i,k}) \cdot \mathbf{n}_{ZT} \leq +t \end{cases} \quad (43)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N_1-i,j/i,k}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{i,k}$  au point  $N_1$ ,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N_2-i,j/i,k}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{i,k}$  au point  $N_2$ ,
- $\mathbf{n}_{ZT}$  : normale à la surface médiane de la zone de tolérance,
- $t$  : dimension de la zone de tolérance  $ZT$ .

*Remarque* : si la zone de tolérance est définie par deux plans parallèles,  $\mathbf{n}_{ZT}$  est la normale à la surface médiane. Si la zone de tolérance est cylindrique,  $\mathbf{n}_{ZT}$  est orthogonal à l'axe de la zone de tolérance : dans ce cas  $\mathbf{n}_{ZT}$  est un vecteur tournant analogue au vecteur  $\mathbf{n}_{\theta_i}$  du polytope géométrique d'une surface cylindrique.

La relation (43) peut s'écrire plus simplement :

$$\forall N_1, \forall N_2 \in S_{i,j} \text{ avec } N_1 \neq N_2, \quad -t \leq (\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \wedge \boldsymbol{\rho}_{i,j/i,k}) \cdot \mathbf{n}_{ZT} \leq +t \quad (44)$$

avec :  $\boldsymbol{\rho}_{i,j/i,k}$  vecteur écarts de rotation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{i,k}$ .

$$\text{On obtient finalement avec } \mathbf{z}_{ZT} \begin{pmatrix} a_{ZT} \\ b_{ZT} \\ c_{ZT} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \begin{pmatrix} d_{N_1 N_2 x} \\ d_{N_1 N_2 y} \\ d_{N_1 N_2 z} \end{pmatrix} :$$

$$\left. \begin{array}{l} \forall N_1, \forall N_2 \in S_{i,j} \text{ avec } N_1 \neq N_2, \\ \left. \begin{array}{l} + (d_{N_1 N_2 y} \cdot \rho_{i,j/i,kz} - d_{N_1 N_2 z} \cdot \rho_{i,j/i,ky}) \cdot a_{ZT} + (-d_{N_1 N_2 x} \cdot \rho_{i,j/i,kz} + d_{N_1 N_2 z} \cdot \rho_{i,j/i,kx}) \cdot b_{ZT} \\ + (d_{N_1 N_2 x} \cdot \rho_{i,j/i,ky} - d_{N_1 N_2 y} \cdot \rho_{i,j/i,kx}) \cdot c_{ZT} \leq t \\ - (d_{N_1 N_2 y} \cdot \rho_{i,j/i,kz} - d_{N_1 N_2 z} \cdot \rho_{i,j/i,ky}) \cdot a_{ZT} - (d_{N_1 N_2 z} \cdot \rho_{i,j/i,kx} - d_{N_1 N_2 x} \cdot \rho_{i,j/i,kz}) \cdot b_{ZT} \\ - (d_{N_1 N_2 x} \cdot \rho_{i,j/i,ky} - d_{N_1 N_2 y} \cdot \rho_{i,j/i,kx}) \cdot c_{ZT} \leq -t \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (45)$$

En discrétisant la surface  $S_{i,j}$  en  $n$  couples de points  $N_1$  et  $N_2$ , la relation (45) caractérise un ensemble fini de  $2n$  demi-espaces fermés dont les frontières sont des plans caractérisant un polytope.

Les hyperplans support du polytope seront générés par les couples de points  $N_1$  et  $N_2$  séparés par une distance maximale.

Remarque 1 :

Si la surface tolérancée est un cylindre,  $N_1$  et  $N_2$  sont les extrémités de l'axe du cylindre. La figure 44 illustre le 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité avec une zone de tolérance cylindrique ; la figure 45 illustre le 1-polytope d'une spécification de parallélisme où la zone de tolérance est définie par deux plans parallèles.

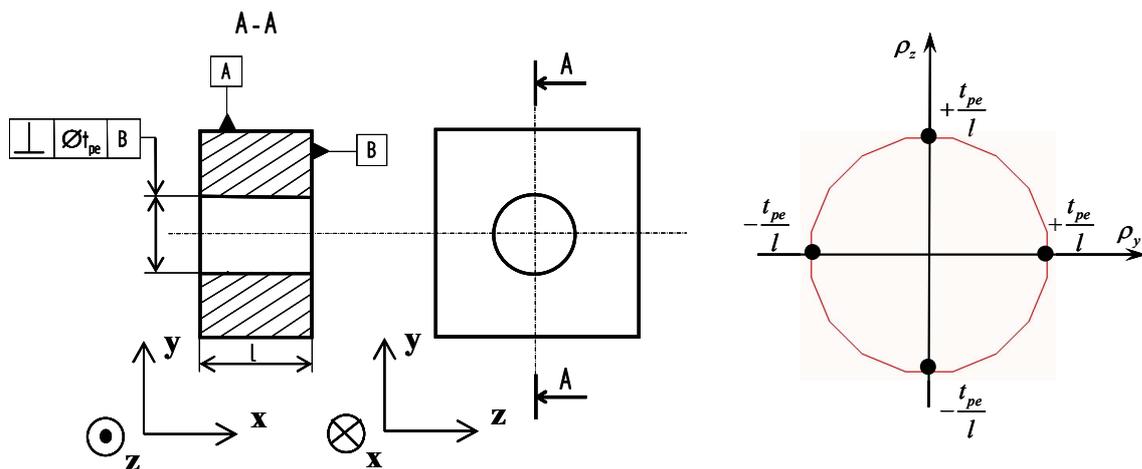


Figure 44 : 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un axe dans une zone de tolérance cylindrique.

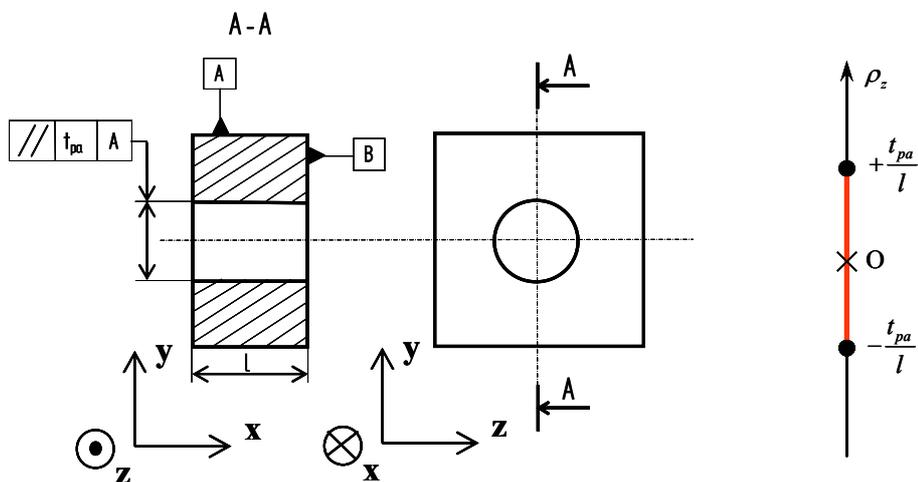


Figure 45 : 1-polytope d'une spécification de parallélisme d'un axe dans une zone de tolérance définie par deux plans parallèles.

Remarque 2 :

Si la surface tolérancée est un plan, les points  $N_1$  et  $N_2$  sont situés sur la plus petite enveloppe convexe du contour. Dans le cas particulier d'un contour de forme rectangulaire ou carrée les points  $N_1$  et  $N_2$  séparés par une distance maximale sont les deux couples de points diagonalement opposés. Dans le cas d'un contour circulaire, il y a une infinité de couples de points séparés par une distance maximale : il s'agit des couples de points diamétralement opposés. Il convient alors de discrétiser le contour en points d'une manière analogue au polytope géométrique associé au plan de contour circulaire.

La figure 46 illustre le 2-polytope d'une spécification de parallélisme d'un plan de contour rectangulaire ; la figure 44 illustre le 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan de contour circulaire.

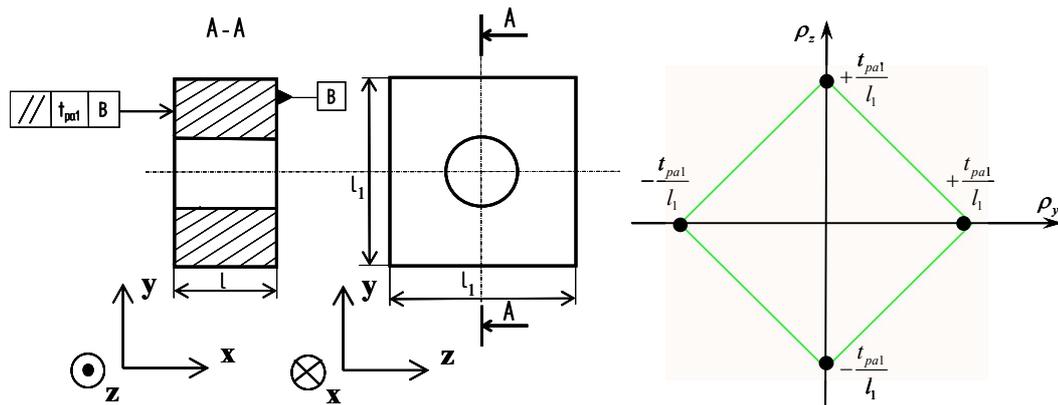


Figure 46 : 2-polytope d'une spécification de parallélisme d'un plan de contour rectangulaire.

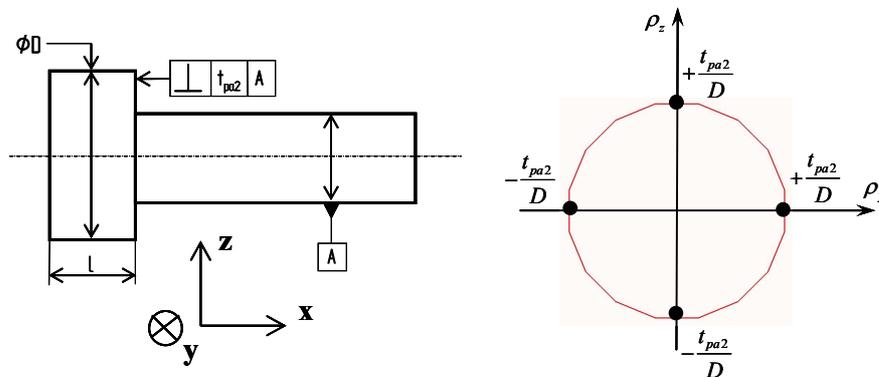


Figure 47 : 2-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan de contour circulaire.

Enfin, si la spécification d'orientation limite un écart angulaire suivant une seule direction définie par le vecteur directeur  $\mathbf{d}$  (cas d'une inclinaison ou d'une orthogonalité), on a en plus la propriété suivante :

$$\mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2 \wedge \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (46)$$

La figure 48 illustre le 1-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan.

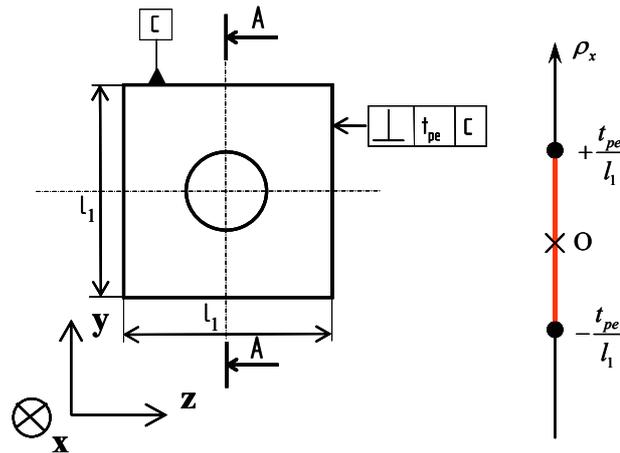


Figure 48 : 1-polytope d'une spécification d'orthogonalité d'un plan de contour rectangulaire.

### III-2.2.3 Synthèse

Considérons la pièce de la figure 49.

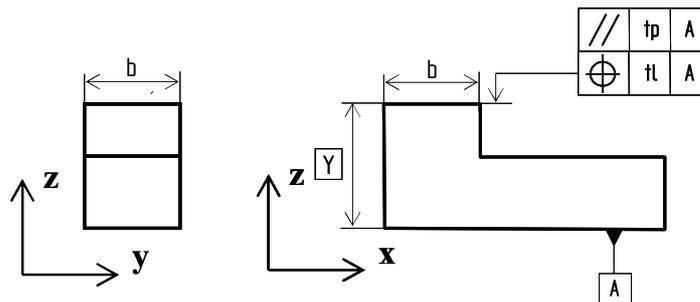


Figure 49 : parallélisme et localisation entre les deux mêmes surfaces

La surface tolérancée  $S_{i,j}$  doit respecter un parallélisme et une localisation par rapport à la référence spécifiée  $S_{i,k}$  désignée « A » sur la figure 49.

Soient  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g1}$  le polytope géométrique caractérisant le parallélisme et  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g2}$  le polytope géométrique caractérisant la localisation : voir figure 50a. Le polytope

caractérisant les deux spécifications simultanément est :  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g1} \cap \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g2}$ , voir figure 50b.

Soient  $\mathcal{D}_{i,j/i,0}^g$ , le polytope géométrique de la surface tolérancée et  $\mathcal{D}_{i,k/i,0}^g$  le polytope géométrique de la surface de référence, voir figure 50c.

D'après la relation (41) on a :  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^g = \mathcal{D}_{i,j/i,0}^g + \mathcal{D}_{i,0/i,k}^g$ , voir figure 50d.

Afin de respecter les deux spécifications, le polytope  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^g$  doit être inclus dans le polytope :  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g1} \cap \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g2}$ , voir figure 50e. La figure 50e illustre le cumul des limites admissibles des écarts de la surface tolérancée et de la surface de référence respectivement par rapport à leurs surfaces nominales satisfaisant les spécifications de parallélisme et de localisation.

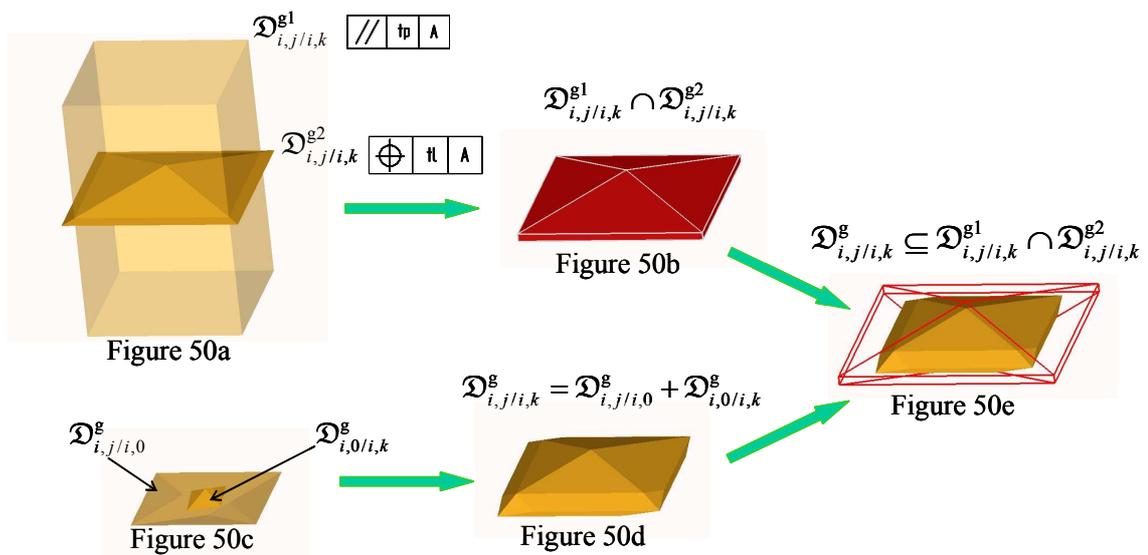


Figure 50 : Analyse des tolérances d'une pièce.

Un polytope géométrique d'une surface de substitution caractérise les limites des écarts de cette surface par rapport à son modèle nominal.

Toute spécification géométrique ISO définit un polytope géométrique à l'intérieur duquel est incluse la somme de Minkowski des polytopes géométriques respectifs de la surface tolérancée et de la surface de référence.

## III-2.3 Caractérisation d'une spécification de contact

### III-2.3.1 Caractérisation d'une liaison : méthode générale

Un polytope de contact caractérise les limites admissibles des écarts de situation entre deux surfaces potentiellement en contact. Nous allons définir l'élément de contact d'une liaison qui est l'élément géométrique défini par l'intersection des surfaces en contact dans le cas particulier d'un attribut de contact glissant. Un élément de contact peut être surfacique (liaisons appui plan, pivot glissant, rotule ...), linéique (liaisons linéaire annulaire et linéaire rectiligne) ou ponctuel (liaison ponctuelle).

Soit  $E_c$  l'élément de contact d'une liaison entre les surfaces  $S_{i,j}$  et  $S_{u,j}$  (avec  $i \neq u$ ).

Soit  $J$  le jeu de la liaison.  $J$  est la différence entre les dimensions de l'alésage et de l'arbre pour les liaisons pivot glissant, rotule ou linéaire annulaire.  $J$  est la distance entre les surfaces potentiellement en contact pour les liaisons appui plan, linéaire rectiligne ou ponctuelle.

Les différentes positions relatives entre les surfaces potentiellement en contact  $S_{i,j}$  et  $S_{u,j}$  (avec  $i \neq u$ ) sont définies par la relation suivante :

$$\forall N \in E_c \quad -d_{\min} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v} \cdot \mathbf{n}_N \leq d_{\max} \quad (47)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  au point  $N$ ,
- $\mathbf{n}_N$  : normale à l'élément de contact  $E_c$  au point  $N$  si  $E_c$  est une surface,
- $d_{\min}$ ,  $d_{\max}$  : distances minimale et maximale entre les surfaces d'une liaison de jeu  $J$ .

Pour les liaisons ponctuelle et linéaire rectiligne,  $\mathbf{n}_N$  est la normale au plan de contact orientant la liaison. Pour une liaison linéaire annulaire,  $\mathbf{n}_N$  est un vecteur tournant dans le plan contenant  $E_c$  qui est un cercle.

La cas où  $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v} = \mathbf{0}$  correspond à la configuration particulière telle que :

$$S_{i,j} \cap S_{u,v} = E_c.$$

Par conséquent, pour les liaisons de type :

- pivot glissant, rotule et linéaire annulaire :  $d_{\min} = -\frac{J}{2}$  et  $d_{\max} = +\frac{J}{2}$  (au maximum matière :  $J = J_{\min}$ , au minimum matière :  $J = J_{\max}$ , par convention on pose  $J = 0$  si il y a serrage).
- ponctuelle, linéaire rectiligne et appui plan :  $d_{\min} = 0$  et  $d_{\max} = J_{\max}$ .

Pour un nombre fini de points  $N$ , la relation (47) caractérise le polytope de contact de la liaison entre les surfaces  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  ; il est noté  $\mathfrak{D}_{i,j/u,v}^c$ .

*Remarque* : pour une liaison dont le degré de mobilité est  $d_m$ , le polytope de contact est de dimension  $6 - d_m$ . Les polytopes de contact des liaisons ponctuelle, linéaire rectiligne, appui plan, rotule, pivot glissant et linéaire annulaire sont respectivement de dimensions 1, 2, 3, 3, 4 et 2.

Nous allons détailler par la suite les formulations des polytopes de contact des liaisons appui plan et pivot glissant qui ne sont que des applications particulières de la relation (47). La relation (47) est applicable à tous types de liaisons.

### III-2.3.2 Caractérisation d'une liaison appui plan

Considérons deux surfaces nominalemt planes de contours rectangulaires en contact.

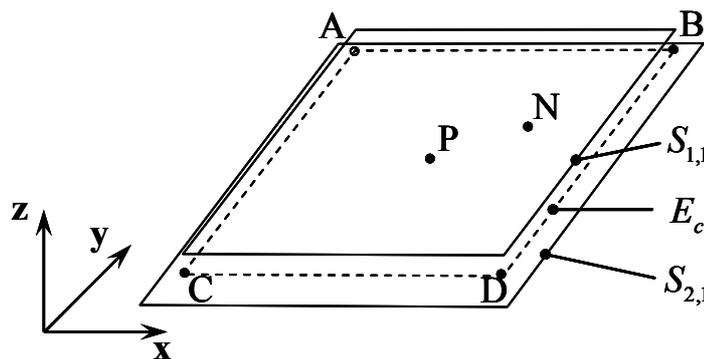


Figure 51 : Deux surfaces nominalemt planes de contour rectangulaire en contact.

La surface de contact  $E_c$  est définie dans la base  $(x, y, z)$  telle que

$$\mathbf{PA} = \left(-\frac{a}{2}; +\frac{b}{2}; 0\right), \mathbf{PB} = \left(+\frac{a}{2}; +\frac{b}{2}; 0\right), \mathbf{PC} = \left(+\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; 0\right) \text{ et } \mathbf{PD} = \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; 0\right).$$

La relation (47), caractérisant les différentes positions entre les surfaces potentiellement en contact, donne dans ce cas :

$$\forall N \in E_c \quad 0 \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{N-1,1/2,1} \cdot \mathbf{n}_N \leq J \quad (48)$$

Dans le cas de la figure 38, la surface de contact étant une surface plane de contour rectangulaire, seuls les sommets A, B, C et D génèrent les hyperplans supports. Selon la même méthodologie utilisée pour définir le polytope géométrique d'une surface plane, il suffit de développer la relation (48) au point P pour les points A, B, C et D. Nous obtenons l'ensemble des demi-espaces limités par des plans définissant le polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^c$  :

$$\mathcal{D}_{1,1/2,1}^c = \left\{ \begin{array}{l} +\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} + \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} + \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq J \\ -\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} - \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} - \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq 0 \\ +\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} - \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} + \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq J \\ -\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} + \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} - \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq 0 \\ -\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} - \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} + \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq J \\ +\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} + \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} - \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq 0 \\ -\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} + \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} + \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq J \\ +\frac{b}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1x} - \frac{a}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} - \varepsilon_{P-1,1/2,1z} \leq 0 \end{array} \right. \quad (49)$$

Le système (49) est défini en fonction de trois composantes de petits déplacements :  $\varepsilon_{P-1,1/2,1z}$ ,  $\rho_{1,1/2,1x}$  et  $\rho_{1,1/2,1y}$ . Ces trois composantes correspondent aux écarts de position entre deux surfaces planes de normale  $\mathbf{z}$ . L'ensemble des inégalités peut alors être formalisé par un 3-polytope, c'est-à-dire un polyèdre convexe.

Le 3-polytope défini par les huit inéquations du système (49) est le polytope géométrique d'une surface plane de contour rectangulaire. Il est illustré en figure 52. Il s'agit ici d'un octaèdre.

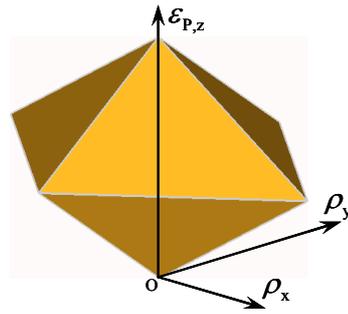


Figure 52 : 3-polytope de contact  $\mathfrak{D}_{1,1/2,1}^c$  de  $S_{1,1}$  par rapport à  $S_{2,1}$  au point  $P$ .

La figure 40 illustre le 3-polytope obtenu dans le cas d'un contact entre deux surfaces planes de contours circulaires discrétisé en 10 points. Le 3-polytope a dans ce cas 20 facettes. Nous remarquons ici que les polyèdres des figures 52 et 53 ne sont pas centrés sur l'origine dans  $\mathbb{R}^3$ .

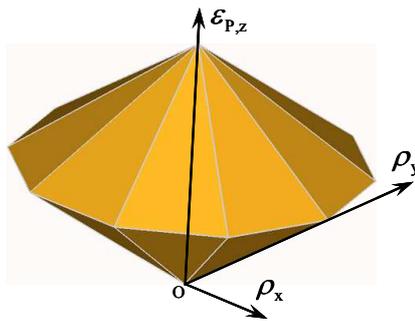


Figure 53 : 3-polytope de contact de deux surfaces planes de contours circulaires.

### III-2.3.3 Caractérisation d'une liaison pivot glissant

Considérons maintenant le contact entre deux surfaces nominalement cylindriques d'axe  $x$ .

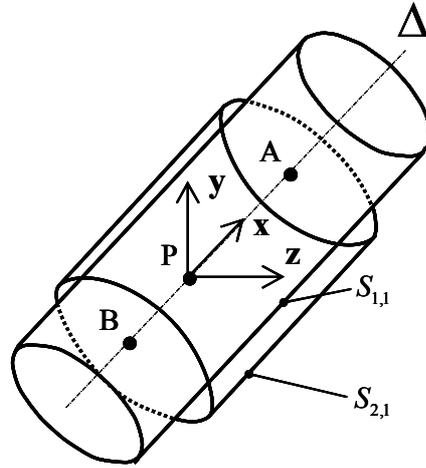


Figure 54 : Deux surfaces nominalement cylindriques en contact.

Selon une méthodologie analogue, il convient d'écrire la relation (47) aux deux extrémités A et B de l'axe de la surface de contact où  $n$  est le pas de discrétisation angulaire autour de l'axe  $\Delta$  du cylindre de la surface de contact :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{J}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,1/2,1} \cdot \mathbf{n}_{\theta_i} \leq \frac{J}{2} \\ -\frac{J}{2} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{B-1,1/2,1} \cdot \mathbf{n}_{\theta_i} \leq \frac{J}{2} \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_{\theta_i} = \cos \theta_i \cdot \mathbf{y} + \sin \theta_i \cdot \mathbf{z} \\ \theta_i = i \frac{\pi}{n}, 0 \leq i < n \text{ et } (i, n) \in \mathbb{N} \end{array} \right. \quad (50)$$

En exprimant la relation (50) en fonction des écarts en translation du point P milieu du segment de droite limité par A et B situés sur  $\Delta$ , il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{J}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{P-1,1/2,1y} - \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0z} \right) + \sin \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{P-1,1/2,1z} + \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} \right) \leq \frac{J}{2} \\ -\frac{J}{2} \leq \cos \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{P-1,1/2,1y} + \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/1,0z} \right) + \sin \theta_i \cdot \left( \varepsilon_{P-1,1/2,1z} - \frac{L}{2} \cdot \rho_{1,1/2,1y} \right) \leq \frac{J}{2} \end{array} \right. \quad (51)$$

$$\text{avec : } \theta_i = i \frac{\pi}{n}, 0 \leq i < n \text{ et } (i, n) \in \mathbb{N}$$

La relation (51) caractérise le polytope de contact entre deux surfaces cylindriques. Il s'agit d'un 4-polytope dont il est possible de donner une représentation graphique dans  $\mathbb{R}^3$  pour  $\rho_{1,1/1,0y} = 0$  par exemple, voir figure 55.

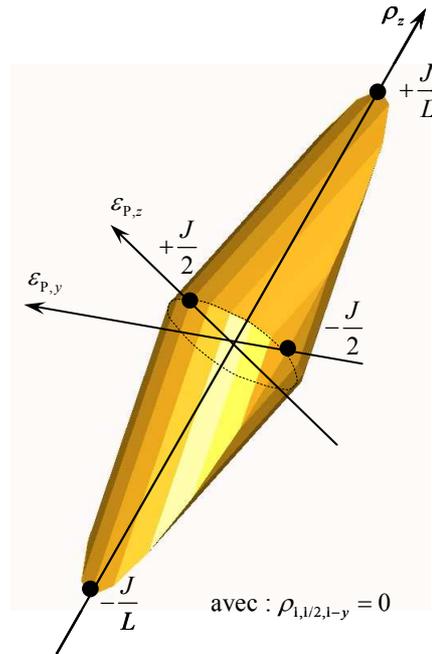


Figure 55 : 4-polytope de contact entre deux surfaces cylindriques projeté dans  $\mathbb{R}^3$ .

---

**Le polytope de contact est un polytope permettant de caractériser les limites des déplacements entre deux surfaces potentiellement en contact.**

---

### III-2.4 Caractérisation d'une exigence fonctionnelle

Selon la même méthode employée pour la caractérisation des spécifications géométriques, une exigence fonctionnelle peut être caractérisée par un polytope.

Le polytope formalisant une condition fonctionnelle est appelé polytope fonctionnel. Le polytope fonctionnel, noté  $\mathcal{D}_{i,j/u,v}^f$ , caractérise les limites des écarts de la surface de substitution  $j$  de la pièce  $i$  rapport à la surface de substitution  $v$  de la pièce  $u$  avec :  $i \neq u$  tel que les surfaces  $i, j$  et  $u, v$  ne soient pas potentiellement en contact.

Les inéquations définissant le polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{i,j/u,v}^f$  sont définies telles que  $S_{i,j}$  soit comprise dans une zone de tolérance  $ZT$  de dimension  $t$ .

Selon la même démarche que dans le cas d'une spécification géométrique, les limites des écarts fonctionnels au point M peuvent être formalisées par un polytope fonctionnel

$\mathcal{D}_{i,j/u,v}^f$  tel que :

Pour une exigence fonctionnelle de position :

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \forall N \in S_{i,j} \quad (k-1).t \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{M-i,j/u,v} + \mathbf{NM} \times \boldsymbol{\rho}_{i,j/u,v}) \cdot \mathbf{n}_N \leq k.t \quad (52)$$

avec  $0 \leq k \leq 1$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  au point N ,
- $\mathbf{n}_N$  : normale de la surface  $S_{i,j}$  au point N
- $t$  : dimension de la zone de tolérance  $ZT$

$\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v} = \mathbf{0}$  correspond au cas où  $S_{i,j}$  est confondue avec la surface de médiane de la zone de tolérance  $ZT$  dans le cas où  $k = 0.5$  .

Pour une exigence fonctionnelle d'orientation :

$$S_{i,j} \subseteq ZT \Leftrightarrow \begin{cases} \forall N_1, \forall N_2 \in S_{i,j} \text{ avec } N_1 \neq N_2 \\ -t \leq (\boldsymbol{\varepsilon}_{N1-i,j/u,v} - \boldsymbol{\varepsilon}_{N2-i,j/u,v}) \cdot \mathbf{n}_{ZT} \leq +t \end{cases} \quad (53)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N1-i,j/u,v}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  au point  $N_1$  ,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N2-i,j/u,v}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  au point  $N_2$  ,
- $\mathbf{n}_{ZT}$  : normale à la surface médiane de la zone de tolérance,
- $t$  : dimension de la zone de tolérance  $ZT$  .

### III-2.4.1 Application à l'exemple

Considérons une condition fonctionnelle limitant la position relative de deux surfaces cylindriques 1,1 et 2,1. Cette condition est telle que le déplacement, noté  $e$ , du point A de l'axe de la surface 1,1 par rapport à l'axe de la surface 2,1 respecte pour toute direction orthogonale à l'axe  $\mathbf{x}$  :

$$e \leq e_{\max} \quad (54)$$

La relation (54) dans ce cas ci peut alors être exprimée au point A en caractérisant la condition fonctionnelle limitant le déplacement du point A de la surface 1,1 :

$$e \leq e_{\max} \Leftrightarrow 0 \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{A-1,1/2,1} \cdot \mathbf{n}_{\theta_i} \leq e_{\max} \quad (55)$$

avec :  $\mathbf{n}_{\theta_i} = \cos(\theta_i) \cdot \mathbf{y} + \sin(\theta_i) \cdot \mathbf{z}$   $\theta_i = i \cdot \frac{2\pi}{n}$   $(i, n) \in \mathbb{N}^2$  et  $1 \leq i \leq n$

L'ensemble des inéquations permettant de définir le polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$  est obtenu en développant les deux inéquations de la relation (55) :

$$\mathcal{D}_{1,2/2,2}^c = \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta_i) \cdot \varepsilon_{A-1,2/2,2,y} + \sin(\theta_i) \cdot \varepsilon_{A-1,2/2,2,z} \leq e_{\max} \\ -\cos(\theta_i) \cdot \varepsilon_{A-1,2/2,2,y} - \sin(\theta_i) \cdot \varepsilon_{A-1,2/2,2,z} \leq 0 \end{array} \right\} \quad (56)$$

$$\text{avec : } \theta_i = i \cdot \frac{2\pi}{n} \quad (i, n) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n$$

La figure 56 donne une représentation de la construction du polytope fonctionnel.

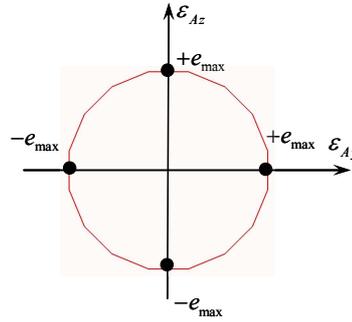


Figure 56 : 2-polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$  de l'exigence entre  $S_{1,1}$  et  $S_{2,1}$  au point A.

Dans une modélisation dans le plan  $(A, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ , on obtient :

$$\mathcal{D}_{1,2/2,2}^c = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{A-1,2/2,2,y} \leq e_{\max} \\ -\varepsilon_{A-1,2/2,2,y} \leq -e_{\max} \end{array} \right\} \quad (57)$$

La figure 57 donne une représentation graphique du polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$ .

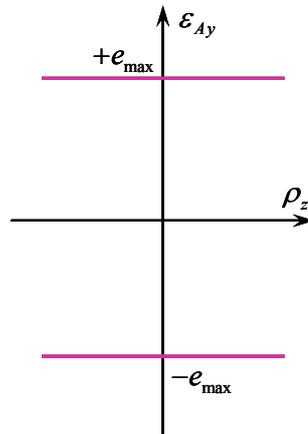


Figure 57 : 1-polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$  de l'exigence entre  $S_{1,1}$  et  $S_{2,1}$  au point  $A$  projeté dans  $(\rho_z, \varepsilon_{A,y})$ .

Dans cette modélisation plane, seul l'écart de translation  $\varepsilon_{A-1,2/2,2,y}$  est borné.

---

**Une exigence fonctionnelle peut être caractérisée par un polytope fonctionnel. Le polytope fonctionnel est défini par les limites admissibles des écarts de position ou d'orientation entre deux surfaces quelconques d'un mécanisme (i.e. deux surfaces n'appartenant pas à la même pièce et n'étant pas potentiellement en contact).**

---

### III-3 Transfert d'une exigence par des opérations sur des polytopes

#### III-3.1 Formalisation des lois de comportement géométrique par des opérations sur des polytopes

Dans le chapitre précédent, nous avons rappelé que les lois de comportement géométrique d'un mécanisme sont définies par la fermeture de  $\mu$  cycles,  $\mu$  étant le nombre cyclomatique du graphe de contacts.

Chaque fermeture de cycle peut se formaliser par l'inclusion d'une somme de Minkowski de polytopes géométriques dans une somme de Minkowski de polytopes de contact [Giordano et al, 2007].

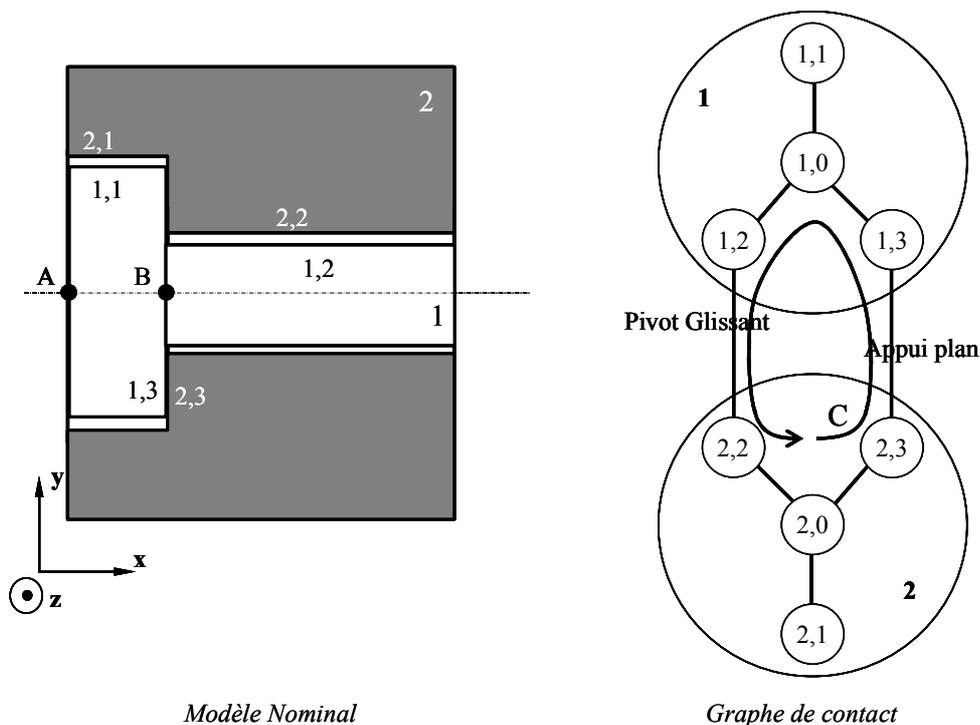


Figure 58 : Description de la boucle formalisant les lois de comportement géométrique.

Dans l'exemple traité au chapitre 2, on obtient 1 cycle formalisé par la somme de déplacements suivante :

$$d_{1,0/1,2}^g + d_{1,2/2,2}^c + d_{2,2/2,0}^g + d_{2,0/2,3}^g + d_{2,3/1,3}^c + d_{1,3/1,0}^g = 0 \quad (58)$$

La fermeture de ce cycle peut se formaliser à l'aide de polytopes par la relation (59) :

$$\left( \mathfrak{D}_{1,0/1,2}^g + \mathfrak{D}_{2,2/2,0}^g + \mathfrak{D}_{2,0/2,3}^g + \mathfrak{D}_{1,3/1,0}^g \right) \subseteq \left( \mathfrak{D}_{1,2/2,2}^c + \mathfrak{D}_{2,3/1,3}^c \right) \quad (59)$$

Mais aussi :

$$\left( \mathfrak{D}_{2,2/2,3}^g + \mathfrak{D}_{1,3/1,2}^g \right) \subseteq \left( \mathfrak{D}_{1,2/2,2}^c + \mathfrak{D}_{2,3/1,3}^c \right) \quad (60)$$

La relation (60) caractérise la condition d'interchangeabilité des pièces au regard de la condition de montage. Dans le cas où la relation (60) est vérifiée quelque soient les polytopes géométriques, le mécanisme est isostatique.

Considérons  $d_i$  la dimension du polytope  $\mathfrak{D}_i^c$  caractérisant la somme des polytopes de contact du cycle  $i$  d'un système mécanique ayant  $\mu$  cycles. Le degré d'hyperstatisme, noté  $h$  du système est donné par la relation suivante :

$$h = \sum_{i=1}^{\mu} d_i \quad (61)$$

Dans notre cas, la dimension du polytope  $\mathfrak{D}_1^c$  de l'unique cycle étant de 2, le degré d'hyperstatisme de notre mécanisme est alors de 2.

[Giordano et al, 2007] considère que la condition d'interchangeabilité peut être vérifiée si la somme des domaines écarts, notés  $[E_{i,j/l,k}]$ , soit comprise dans la somme des domaines jeux notés  $[J_{i,j/u,v}]$ . Cette condition garantit l'assemblage dans le pire des cas :

$$\left( [E_{2,2/2,3}] + [E_{1,3/1,2}] \right) \subseteq \left( [J_{1,2/2,2}^{\min}] + [J_{2,3/1,3}] \right) \quad (62)$$

Les jeux dans les liaisons sont généralement favorables aux conditions d'assemblage. Dans l'équation (62), les domaines jeux sont déterminés dans le cas le plus défavorable, c'est à dire lorsque que le jeu dans les liaisons est minimal. Les sommes des domaines écarts et des domaines jeux sont des sommes de Minkowski.

Dans notre cas, la condition (62) formalisée par des domaines peut être transposée par des opérations sur des polytopes où  $\mathfrak{D}_{i,j/u,v}^{c,\min}$  représente le polytope de contact dans la configuration d'un jeu minimum.

$$\left( \mathfrak{D}_{2,2/2,3}^g + \mathfrak{D}_{1,3/1,2}^g \right) \subseteq \left( \mathfrak{D}_{1,2/2,2}^{c,\min} + \mathfrak{D}_{2,3/1,3}^c \right) \quad (63)$$

[Petit et al, 2003] introduit la notion de domaine jeu résiduel d'une liaison entre deux pièces 1 et 2 :

$$[R_{1,0/2,0}] = ([J_{1,2/2,2}^{\min}] + [J_{2,3/1,3}^{\min}]) - ([E_{2,2/2,3}] + [E_{1,3/1,2}]) \quad (64)$$

Si le domaine jeu résiduel  $[R_{1,0/2,0}]$  définie par (64) existe alors, l'assemblage entre les pièces 1 et 2 peut être assuré. La même condition peut être formalisée sur l'existence d'un polytope jeu résiduel  $\mathcal{D}_{1,0/2,0}^r$  défini dans notre cas par :

$$(\mathcal{D}_{2,2/2,3}^g + \mathcal{D}_{1,3/1,2}^g) + \mathcal{D}_{1,0/2,0}^r = (\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,\min} + \mathcal{D}_{2,3/1,3}^c) \quad (65)$$

Dans le cas d'un mécanisme contenant plusieurs cycles (nombre cyclomatique supérieur à 1) dont les conditions de fermeture sont dépendantes, les jeux résiduels sont dépendants entre eux. Ces relations de dépendances doivent être prises en compte dans la formalisation des lois de comportement géométrique. [Gemain, 2007] développe une méthode prenant en compte ces dépendances pour un mécanisme constitué de deux pièces.

La figure 59 illustre la somme de Minkowski au point A, notée  $\mathcal{D}_1^c$ , des deux polytopes de contact respectivement des liaisons pivot glissant et appui plan, de notre système illustré en figure 58. Le polytope  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,\min}$  caractérise la liaison pivot glissant dans la configuration de jeu minimal.

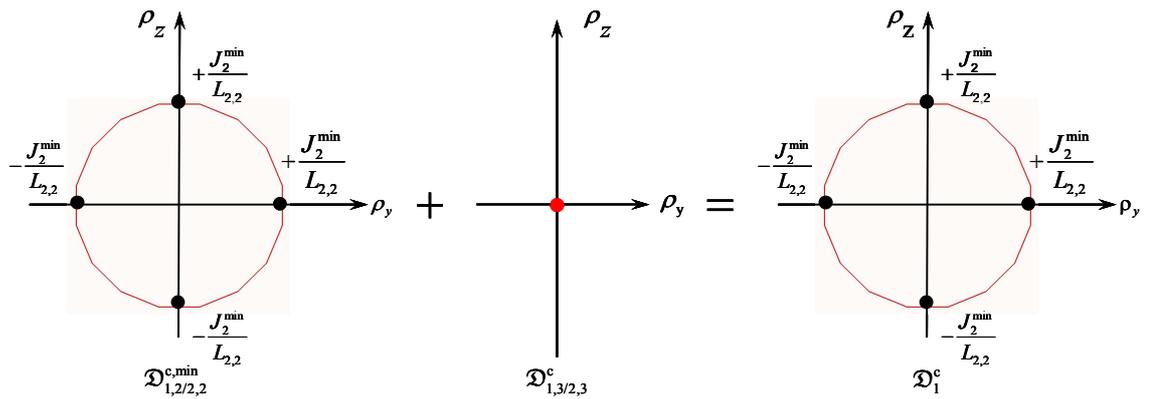


Figure 59 : Somme de Minkowski  $\mathcal{D}_1^c$  des deux polytopes de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,\min}$  et  $\mathcal{D}_{2,3/1,3}^c$

La figure 60 illustre les deux spécifications d'orthogonalité sur les pièces 1 et 2 ainsi que les polytopes géométriques correspondant au pire des cas. En général, ces spécifications sont exprimées au maximum matière [ISO 2692, 1992]. En modélisant les

surfaces fabriquées par des surfaces de substitution, cela permet dans notre exemple, de lier les limites des défauts d'orientation de l'arbre 1,2 par rapport au plan 1,3 et de l'alésage 2,2 par rapport au plan 2,3 en fonction des valeurs effectives de leurs diamètres respectifs.

La figure 61 illustre la construction du polytope géométrique global, noté  $\mathcal{D}_1^g$ , correspondant à la somme des deux polytopes géométriques  $\mathcal{D}_{1,2/1,3}^g$  et  $\mathcal{D}_{2,2/2,3}^g$ .

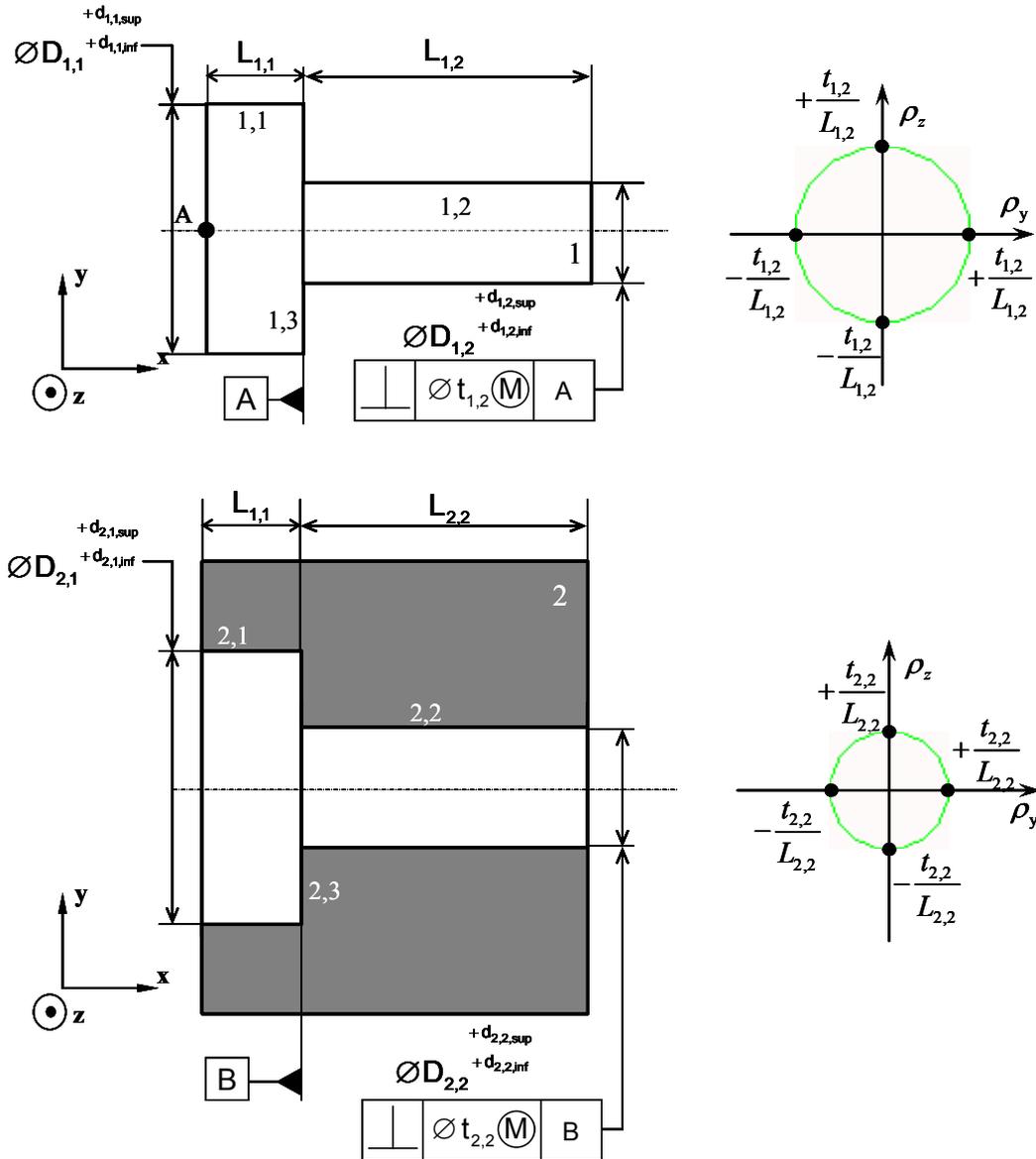


Figure 60 : Spécifications d'orthogonalité et leurs polytopes géométriques associés.

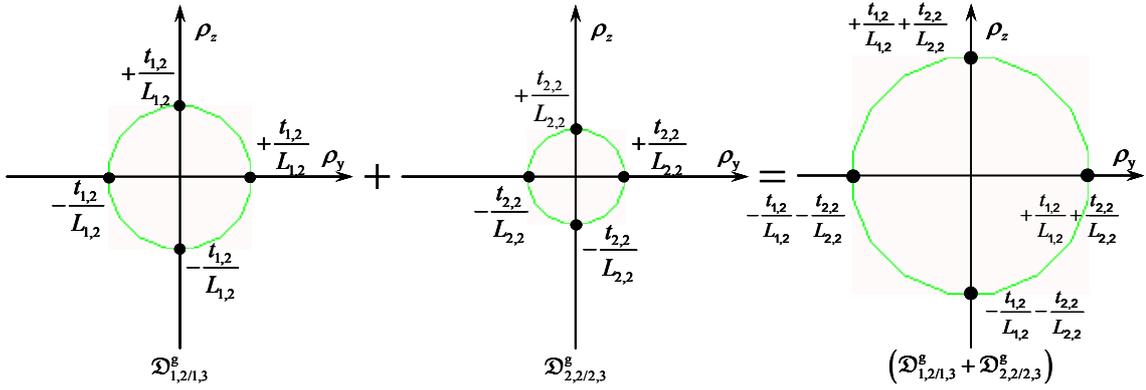


Figure 61 : Construction du 2-polytope géométrique global.

La figure 62 illustre la relation (63), garantissant que la somme de Minkowski des polytopes géométriques des deux pièces soit comprise dans le polytope de contact du cycle.

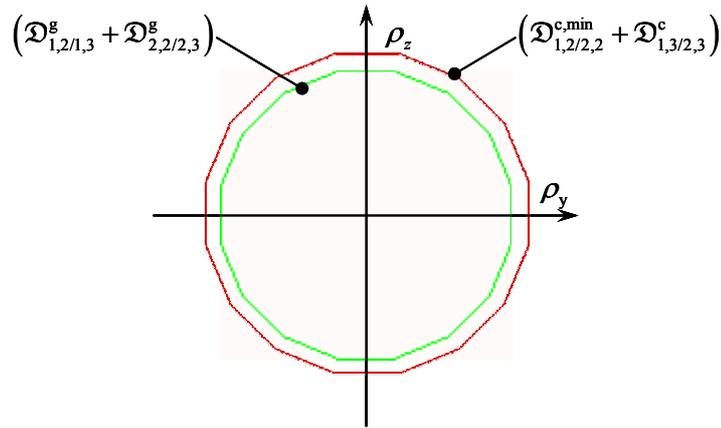


Figure 62 : Inclusion de la somme des polytopes géométriques dans la somme des polytopes de contact.

L'inégalité suivante caractérise la condition d'inclusion définie par la relation (63) et illustrée en figure 62. Elle définit la relation entre le jeu dans la liaison pivot glissant entre les pièces 1 et 2, et les dimensions des zones de tolérance des spécifications d'orthogonalité des pièces 1 et 2 au pire des cas :

$$+\frac{t_{1,2}}{L_{1,2}} + \frac{t_{2,2}}{L_{2,2}} \leq +\frac{J_2^{\min}}{L_{2,2}} \quad (66)$$

**La formalisation des lois de comportement géométrique par des opérations sur des polytopes permet de caractériser les conditions de montage induites par les assemblages hyperstatiques. Pour chacun des cycles du graphe de contacts, la**

somme des polytopes géométriques doit être comprise dans le polytope sommant les polytopes de contact.

### III-3.2 Formalisation du transfert d'une exigence fonctionnelle

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le transfert d'une exigence fonctionnelle consiste à résoudre un système constitué de  $(\mu + 1)$  équations linéaires,  $\mu$  étant le nombre cyclomatique du mécanisme.

La résolution d'un système équivalent caractérisé par des polytopes consiste à résoudre un système constitué de  $(\mu + 1)$  sommes de Minkowski. La prise en compte de plusieurs chemins caractérisant la position relative entre deux surfaces est réalisée par des intersections de sommes de Minkowski de polytopes. Dans notre exemple, la formalisation du transfert de l'exigence fonctionnelle CF introduite au chapitre 2, est illustrée par la figure 63. La condition fonctionnelle de coaxialité du point A de l'axe de la surface 1,1 par rapport à l'axe de la surface 2,1 est formalisée par deux chemins influents.

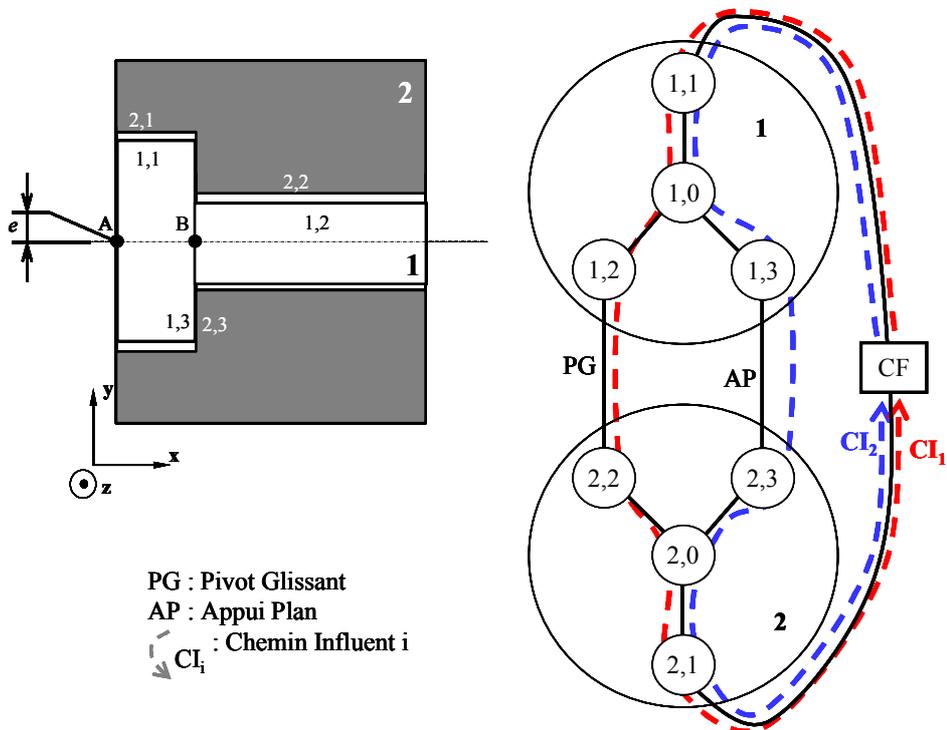


Figure 63 : Description des chemins influents sur la condition fonctionnelle.

On en déduit les deux relations (67) correspondant à deux polytopes géométriques caractérisant les écarts géométriques de la surface 1,1 par rapport à la surface 2,1 suivant les deux chemins influents :

$$\begin{aligned} CI_1 : \mathcal{D}_{1,1/2,1}^1 &= \mathcal{D}_{1,1/1,0} + \mathcal{D}_{1,0/1,2} + \mathcal{D}_{1,2/2,2} + \mathcal{D}_{2,2/2,0} + \mathcal{D}_{2,0/2,1} \\ CI_2 : \mathcal{D}_{1,1/2,1}^2 &= \mathcal{D}_{1,1/1,0} + \mathcal{D}_{1,0/1,3} + \mathcal{D}_{1,3/2,3} + \mathcal{D}_{2,3/2,0} + \mathcal{D}_{2,0/2,1} \end{aligned} \quad (67)$$

Afin que la condition fonctionnelle CF soit respectée il faut que l'intersection des deux polytopes géométriques caractérisant les écarts entre la surface 1,1 et 2,1 soit comprise dans le polytopes fonctionnel. Ainsi la relation suivante est obtenue dans notre cas :

$$\left( \mathcal{D}_{1,1/2,1}^1 \cap \mathcal{D}_{1,1/2,1}^2 \right) \subseteq \mathcal{D}_{1,1/2,1}^f \quad (68)$$

Les figures 64a et 64b illustrent respectivement le sous-graphe influent des pièces 1 et 2, sur la condition fonctionnelle CF selon le cycle influent 1 et le cycle influent 2. Les spécifications ISO influentes des pièces 1 et 2, sur la condition fonctionnelle CF selon les deux cycles influents sont représentées en figure 65.

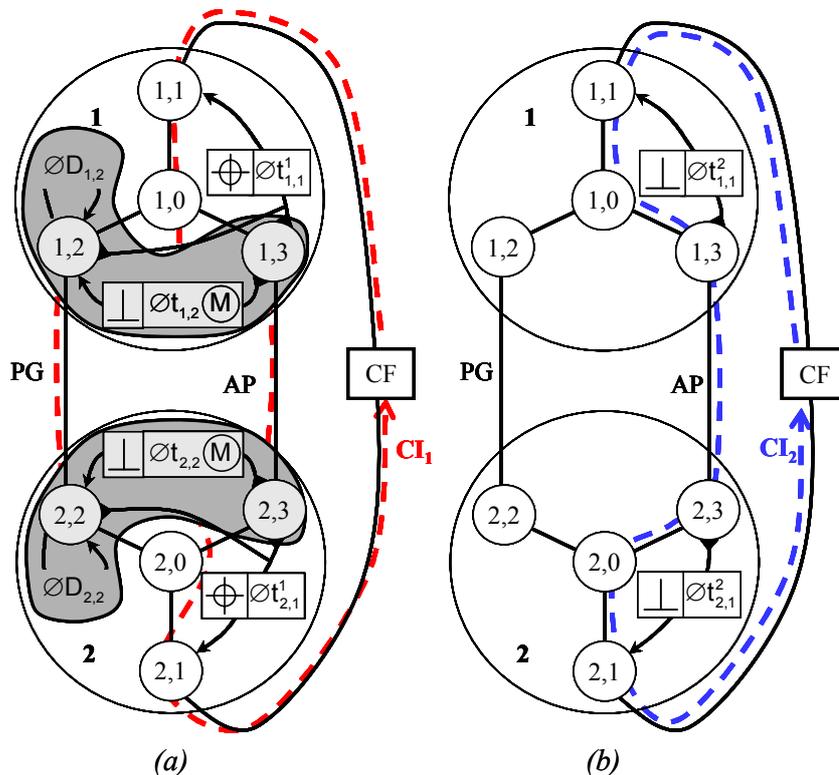


Figure 64 : Sous-graphe influent dans le graphe de contacts.

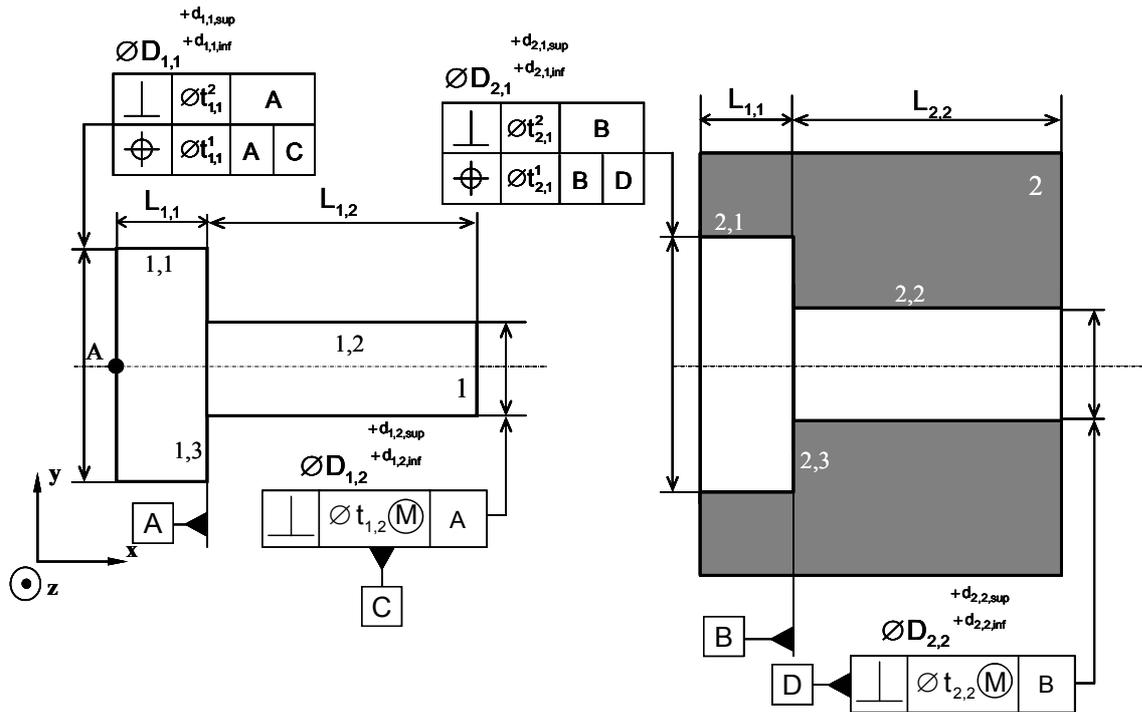


Figure 65 : Specifications ISO influentes sur CF.

Dans ce cas, le polytope géométrique caractérisant les écarts de la surface 1,1 par rapport à la surface 2,1 est donné par :

$$\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g = \left( \mathcal{D}_{1,1/1,3-1,2}^g + \mathcal{D}_{1,3-1,2/2,3-2,2}^c + \mathcal{D}_{2,3-2,2/2,1}^g \right) \cap \left( \mathcal{D}_{1,1/1,3}^g + \mathcal{D}_{1,3/2,3}^c + \mathcal{D}_{2,3/2,1}^g \right) \quad (69)$$

Les polytopes géométriques  $\mathcal{D}_{1,1/1,3-1,2}^g$  et  $\mathcal{D}_{2,3-2,2/2,1}^g$  caractérisent respectivement les spécifications de localisation des pièces 1 et 2 tandis que les polytopes géométriques  $\mathcal{D}_{1,1/1,3}^g$  et  $\mathcal{D}_{2,3/2,1}^g$  caractérisent respectivement les orthogonalités des pièces 1 et 2. Le polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,3-1,2/2,3-2,2}^c$  caractérise le comportement résultant des liaisons appui plan et pivot glissant. Le polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,3/2,3}^c$  définit le comportement de la liaison appui plan.

Dans cet exemple, le jeu dans la liaison pivot glissant est défavorable au respect de l'exigence fonctionnelle. Le polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,3-1,2/2,3-2,2}^c$  est défini dans le cas le plus défavorable, donc quand le jeu est maximum.

La figure 66 illustre la démarche de construction du polytope géométrique caractérisant le comportement de la surface 1,1 par rapport à 2,1 suivant la relation (70).

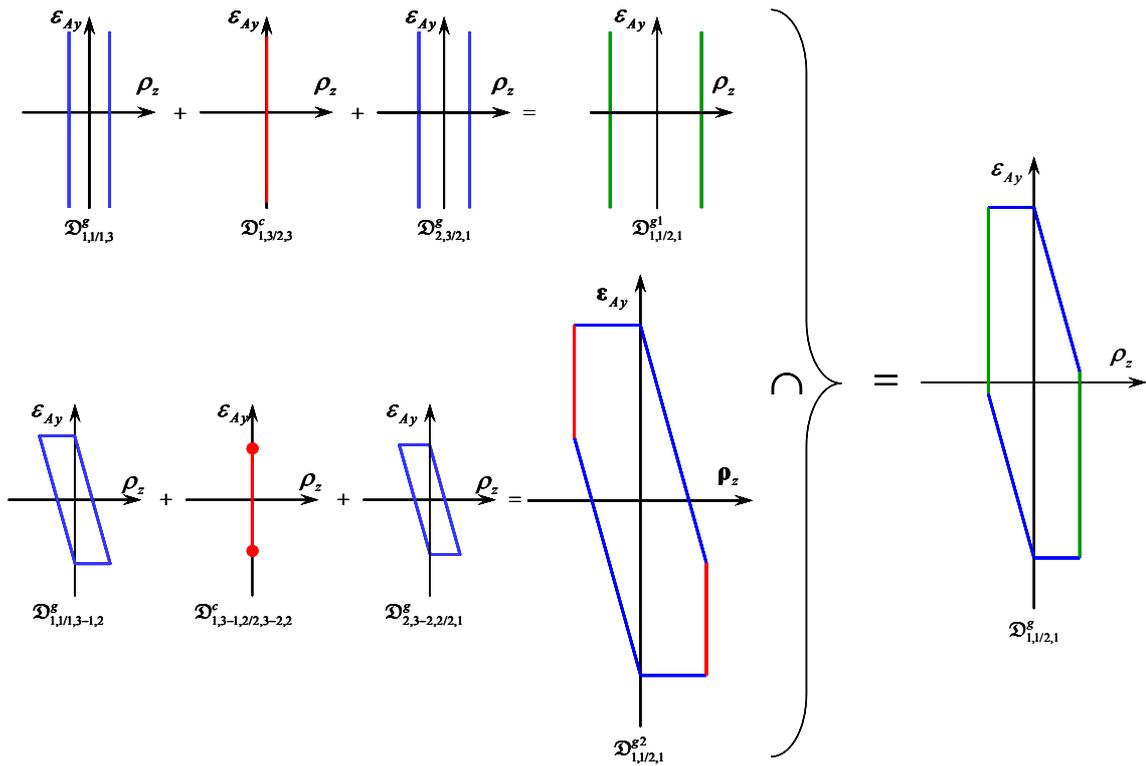


Figure 66 : Construction du polytope de géométrie  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$ .

Les limites admissibles des écarts géométriques entre les surfaces 1,1 et 2,1 sont définies par l'exigence fonctionnelle CF et exprimées par le polytope fonctionnel  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$ . La figure 67 illustre le respect de l'exigence fonctionnelle où le polytope géométrique  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$  (de dimension 2) doit être compris à l'intérieur du polytope  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^f$  (de dimension 1).

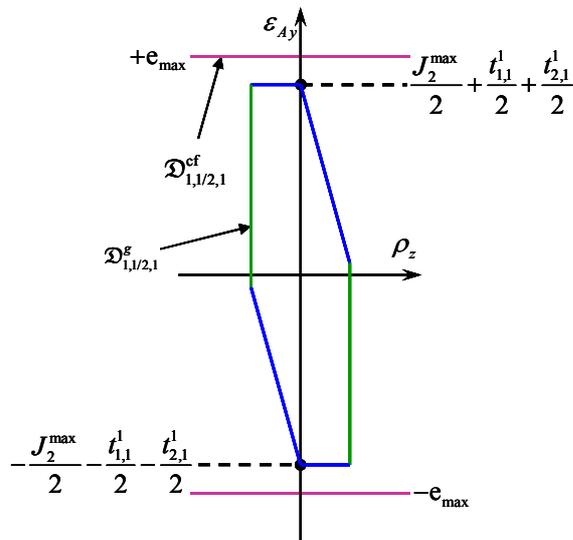


Figure 67 : 2-Polytopes caractérisant le respect de l'exigence fonctionnelle.

L'expression (71) formalisant le respect de la condition CF au pire des cas peut notamment être déduite de la figure 67 :

$$+e_{\max} \geq +\frac{J_2^{\max}}{2} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \quad (71)$$

*Remarque :*

Dans cet exemple, la relation (71) met en évidence que les spécifications de perpendicularité des pièces 1 et 2 sont redondantes avec les spécifications de localisation sur la formalisation du respect de la condition fonctionnelle. La figure 67 permet de constater que les valeurs extrémales de l'écart  $\varepsilon_{A-1,1/2,1}$  selon la direction  $y$  sont indépendantes des arêtes vertes du polytope  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$  ; ces arêtes vertes (hyperplans verticaux) caractérisent ces spécifications de perpendicularité.

---

**La formalisation du transfert d'une exigence fonctionnelle par des opérations sur des polytopes est déduite de l'intersection des polytopes géométriques de chaque chemin influent. Le polytope géométrique caractérisant un chemin influent est une somme de Minkowski de polytopes géométriques et de polytopes de contact. Afin vérifier le respect de l'exigence fonctionnelle, le polytope géométrique résultant des chemins influents doit être inclus dans le polytope caractérisant l'exigence fonctionnelle, c'est-à-dire le polytope fonctionnel.**

---

### **III-4 Synthèse sur l'analyse de tolérances par des opérations sur des polytopes**

Ce chapitre a permis de mettre en avant l'utilisation de polytopes pour formaliser les lois de comportement géométrique d'un mécanisme et le transfert d'une exigence fonctionnelle. Cela nécessite la mise en œuvre de deux opérations sur des polytopes : la somme de Minkowski et l'intersection de polytopes.

La formalisation des lois de comportement géométrique par des opérations sur les polytopes permet de prendre en compte des architectures hyperstatiques sans aucune hypothèse de prépondérance de contact. De plus, cette formalisation permet de prendre en compte les liens de dépendance entre les différentes composantes des écarts de translation et des écarts de rotation.

- Chapitre IV -

Prise en compte des variations thermomécaniques  
dans les chaînes de cotes 3d



L'objectif de ce chapitre est de proposer une méthodologie afin de prendre en compte les variations d'origine thermomécanique dans les chaînes de cotes 3d. La formalisation des chaînes de cotes par des opérations sur des polytopes, présentée au chapitre précédent, est mise en œuvre dans cette démarche.

Dans un premier temps, les hypothèses physiques sur lesquelles repose la démarche proposée seront détaillées. Puis, le processus d'intégration des déformations thermomécaniques dans les pièces puis dans les liaisons sera décrit, afin de formaliser les relations entre une condition fonctionnelle, des spécifications géométriques, des spécifications de contact et des spécifications « thermomécaniques ».

L'exemple présenté aux chapitres II et III va servir de support pour présenter la méthodologie développée.

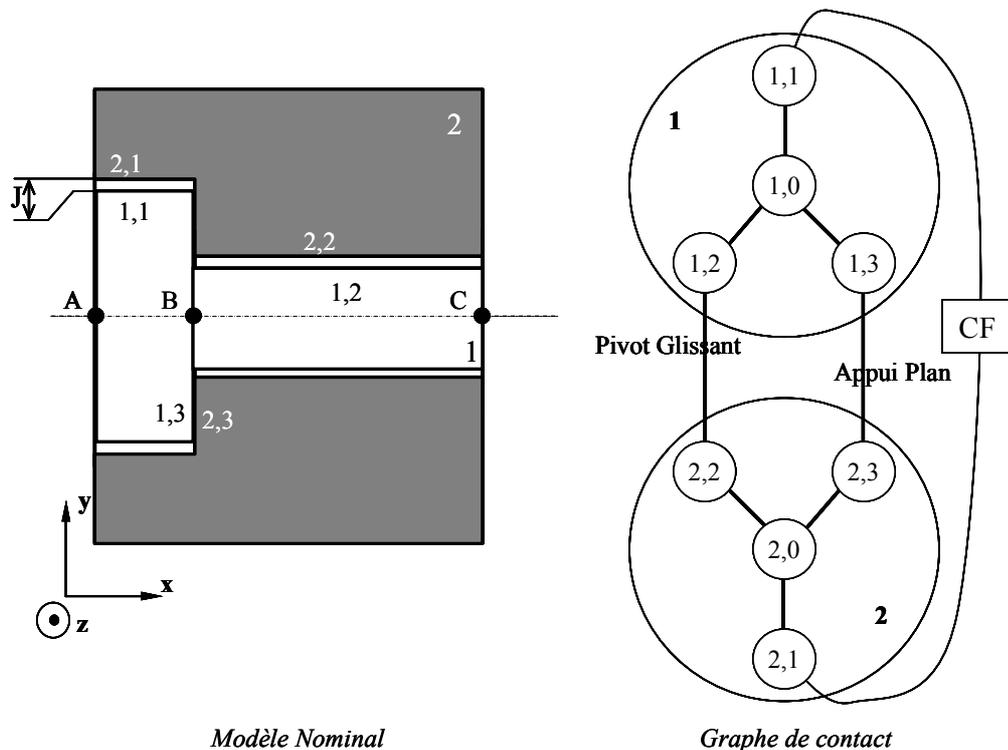


Figure 68 : Système étudié avec le graphe de contact associé

Dans le chapitre précédent, la condition fonctionnelle limitait la position relative entre deux surfaces cylindriques 1,1 et 2,1 au point A. Dans ce chapitre, la condition fonctionnelle caractérise plus précisément le jeu local entre les deux surfaces cylindriques 1,1 et 2,1. Cette caractérisation peut être exprimée par la relation suivante :

$$J_{\min} \leq J \leq J_{\max} \quad (72)$$

## IV-1 Hypothèses physiques

Afin de pouvoir intégrer les déformations thermomécaniques dans les chaînes de cotes 3d, deux situations de vie différentes vont être considérées pour les systèmes étudiés :

- une situation de vie rigide
- une ou plusieurs situations de vie thermomécaniques

Un modèle de référence est défini à partir de la situation de vie rigide, où toutes les pièces sont à 20°C. Ce modèle de référence repose sur les hypothèses émises classiquement en tolérancement géométrique :

- pas de défaut de forme des surfaces réelles,
- pas de déformation locale des surfaces en contact (pression de Hertz),
- pas de pièces déformables (solides infiniment rigides).

Une situation de vie thermomécanique correspond à un point de fonctionnement particulier du système où certaines pièces sont soumises à des contraintes thermomécaniques. Les contraintes thermomécaniques sur les pièces entraînent des déformations provoquant des écarts de situation, de dimension et de forme devant être pris en compte dans la modélisation par des chaînes de cotes 3d [Pierre et al., 2007]. Le fonctionnement du système étudié dans le temps est discrétisé en plusieurs situations de vie thermomécaniques différentes. Aucun régime transitoire ne sera considéré.

La modélisation par des chaînes de cotes pour une situation de vie thermomécanique particulière est déduite de celle définie pour la situation de vie de référence [Pierre et al, 2009a].

Les hypothèses suivantes sont alors émises :

- invariance de la structure topologique du graphe de contacts,
- prise en compte des variations de forme et de dimensions des pièces,
- pas de déformation locale des surfaces en contact.

L'invariance de la structure topologique du graphe de contacts signifie qu'il n'y a pas de contact supplémentaire et pas de suppression de contact entre deux situations de vie. De plus, le type de chaque contact reste le même : un pivot glissant reste pivot glissant, un appui plan reste appui plan, etc. Le degré d'hyperstatisme reste donc le même. Par contre, différents paramètres caractérisant un contact (jeu minimal, jeu maximal, nature de contact ...) peuvent évoluer.

Le comportement thermomécanique du système est supposé élastique ; il est modélisé en petites déformations et en petits déplacements.

Dans tout ce qui suit ne sont pas prises en compte :

- les contraintes résiduelles générées par les procédés de fabrication des pièces.
- les contraintes résiduelles éventuellement générées par le procédé d'assemblage du système étudié.

---

**Tous les systèmes étudiés seront définis pour une situation de vie de référence et plusieurs situations de vie thermomécaniques distinctes. La situation de vie de référence correspond à la description du système où toutes les pièces sont à 20 °C et sont considérées infiniment rigides. Une situation de vie thermomécanique prendra en compte uniquement les déformations élastiques d'origine thermomécanique des pièces. Les contraintes thermomécaniques engendrent des petites déformations et des petits déplacements.**

---

## **IV-2 Définition des situations de vie**

Le cycle de fonctionnement d'un système est décrit par une succession de situations de vie différentes [Pierre et al, 2009b]. Une situation de vie permet de décrire un système pour une configuration particulière. Chaque situation de vie est caractérisée par un champ thermique particulier.

### **IV-2.1 Situation de vie de référence**

La situation de vie de référence correspond à un système neuf dont la température de l'ensemble des pièces est de 20°C. Seules les variabilités dues aux procédés d'obtention des pièces et aux procédés d'assemblage des pièces sont pris en compte.

Une démarche classique de tolérancement géométrique permet de modéliser le comportement d'un système dans la situation de vie de référence. Les relations entre les spécifications géométriques des pièces, les spécifications de contacts entre les pièces et les exigences fonctionnelles sont formalisées à l'aide des chaînes de cotes tridimensionnelles.

Dans la situation de vie de référence, la caractérisation du jeu local  $J$  de l'exemple choisi est définie par la relation suivante :

$$J = \frac{(D_{2,1} + d_{2,1}) - (D_{1,1} + d_{1,1})}{2} + e_{A-2,1/1,1} \cdot y \quad (73)$$

où :

- $D_{1,1}$  et  $D_{2,1}$  désignent respectivement les diamètres nominaux des surfaces 1,1 et 2,1,
- $d_{1,1}$  et  $d_{2,1}$  désignent respectivement les écarts de dimensions des diamètres des surfaces 1,1 et 2,1,
- $e_{A-2,1/1,1}$  désigne l'écart de situation de l'axe de la surface 2,1 par rapport à l'axe de la surface 1,1 au point A.

La figure 69 rappelle les spécifications géométriques et dimensionnelles issues de la démarche de tolérancement présentée dans le chapitre précédent.

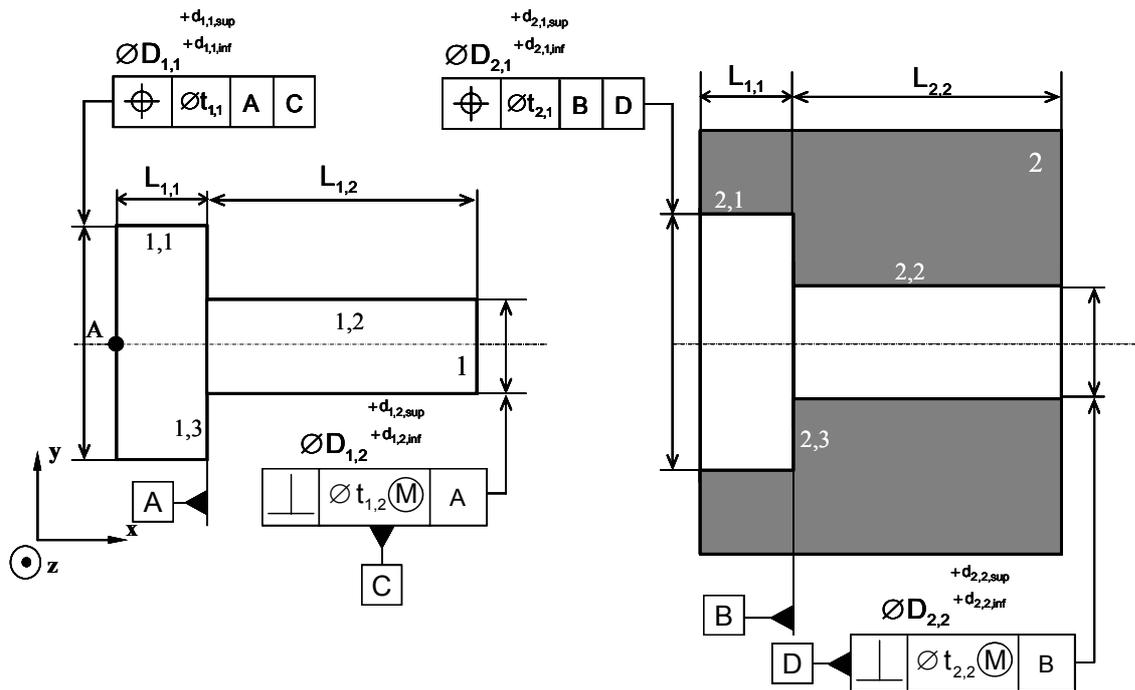


Figure 69 : Système dans la situation de vie de référence.

Il vient :

$$+d_{1,1,inf} \leq d_{1,1} \leq +d_{1,1,sup} \quad (74)$$

$$+d_{2,1,inf} \leq d_{2,1} \leq +d_{2,1,sup} \quad (75)$$

$$-\frac{J_2^{\max}}{2} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \leq \mathbf{e}_{A-2,1/1,1} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{J_2^{\max}}{2} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \quad (76)$$

avec :  $J_2^{\max} = \frac{(D_{2,2} + d_{2,2,\text{sup}}) - (D_{2,1} + d_{2,1,\text{inf}})}{2}$

D'où finalement :

$$J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - d_{1,1,\text{sup}}}{2} - J_2^{\max} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \leq J \leq J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - d_{1,1,\text{inf}}}{2} + J_2^{\max} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \quad (77)$$

avec :

$$\begin{cases} J_n = \frac{D_{2,1} - D_{1,1}}{2} \\ J_2^{\max} = \frac{(D_{2,2} + d_{2,2,\text{sup}}) - (D_{2,1} + d_{2,1,\text{inf}})}{2} \end{cases} \quad (78)$$

Le respect de l'exigence fonctionnelle exprimé par la relation (77) peut alors être caractérisé par les relations suivantes :

$$\begin{cases} J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - d_{1,1,\text{inf}}}{2} + J_2^{\max} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \leq J_{\max} \\ J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - d_{1,1,\text{sup}}}{2} - J_2^{\max} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \geq J_{\min} \end{cases} \quad (79)$$

#### IV-2.2 Situation de vie thermomécanique

Une situation de vie thermomécanique est caractérisée par un champ de température particulier. Ce champ de température peut être simulé en imposant des conditions limites thermiques (flux de convection, température imposée, source de chaleur, ...) ou peut être déterminé à partir de mesures expérimentales.

La figure 70 décrit le système dans deux situations de vie thermomécaniques différentes caractérisées respectivement par deux flux de convection. Ces deux flux de convection induisent des gradients de température importants suivant la direction  $y$  dans la pièce 1.

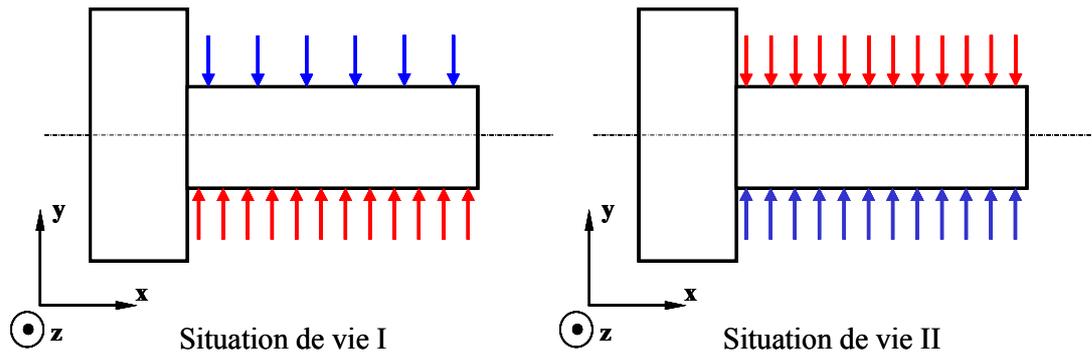


Figure 70 : Système dans des situations de vie thermomécaniques.

Les deux situations de vie thermomécaniques, définies par deux champs thermiques différents, entraînent une évolution du jeu  $J$ .

Pour chacune de ces deux situations de vie, les déformations thermomécaniques des pièces 1 et 2 d'une part, et l'évolution des conditions de contact entre les pièces 1 et 2 d'autre part doivent être prises en compte.

La démarche proposée dans ce chapitre repose sur l'intégration de l'évolution géométrique des pièces et des contacts dans les lois de comportement géométrique du système formalisées dans la situation de vie de référence.

---

**La prise en compte des déformations thermomécaniques consiste à intégrer l'évolution géométrique des pièces et l'évolution des contacts dans les lois de comportement géométrique formalisées dans la situation de vie de référence.**

---

### **IV-3 Identification des parties thermomécaniquement influentes**

Dans un mécanisme subissant des contraintes thermomécaniques, il convient d'identifier les pièces pour lesquelles leurs variations géométriques d'origine thermomécanique sont significatives au regard de leurs spécifications géométriques définies dans la situation de vie de référence. Seules ces pièces sont potentiellement influentes sur les exigences fonctionnelles du système d'un point de vue thermomécanique.

Dans un premier temps, une étude thermique réalisée sur le système permet de localiser les pièces subissant des variations de température significatives vis-à-vis de leurs formes, de leurs dimensions et des propriétés de leurs matériaux.

Puis une étude thermomécanique « à l'état libre » est réalisée sur chaque pièce subissant des variations de température significatives. Les pièces ayant des variations géométriques négligeables vis-à-vis de leurs spécifications géométriques seront qualifiées de pièces thermomécaniquement non-influents ; les autres pièces seront quant à elles qualifiées de pièces thermomécaniquement influentes.

#### IV-3.1 Simulation thermique sur le produit étudié

Afin de déterminer l'ensemble des contraintes thermomécaniques d'un système il est nécessaire de connaître le champ de température appliqué sur ce système. L'utilisation de la méthode des éléments finis permet de déterminer le champ de température sur l'ensemble des pièces. Des mesures expérimentales peuvent valider la simulation thermique.

Dans l'exemple présenté en figure 71, les résultats d'un calcul par éléments finis permettent de donner une représentation du champ de température des pièces. Il est aisé de constater que pour chaque situation de vie les résultats de la simulation thermique sont différents. A partir de ces résultats, une identification des pièces subissant un changement de température significatif est réalisée. Dans chacune des deux situations de vie, l'arbre repéré 1, subit une élévation de température importante en considérant sa forme, ses dimensions et les propriétés du matériau utilisé. Dans les situations de vie I et II, le logement 2 a un faible changement de température.

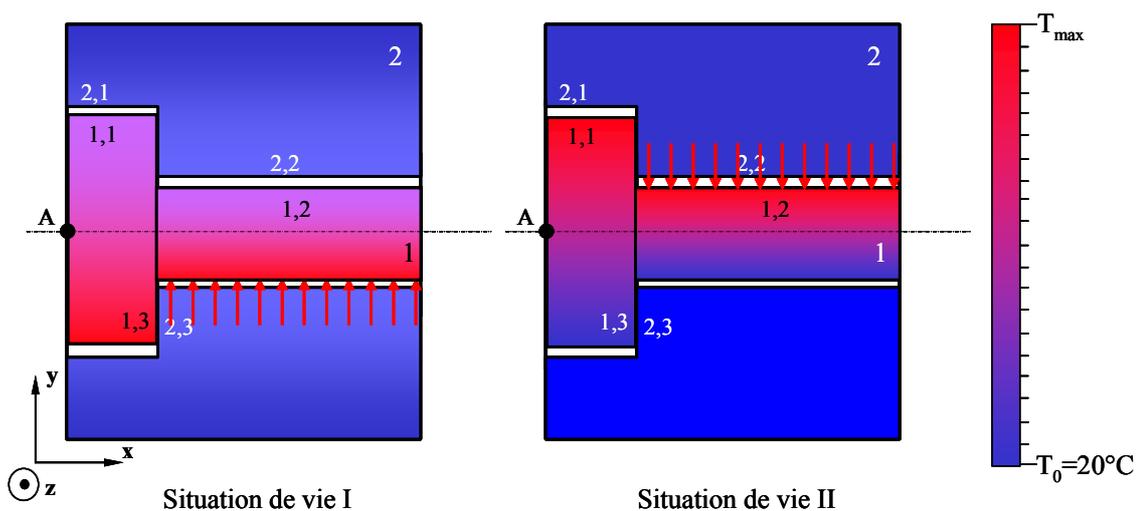


Figure 71 : Simulations thermiques du système dans deux situations de vie différentes.

Cette première étude thermique a deux objectifs : déterminer le champ de température du système et identifier les pièces subissant des changements de température potentiellement influents sur leurs variations géométriques.

### IV-3.2 Simulation thermomécanique « à l'état libre » des pièces

Dans un second temps, une simulation du comportement thermomécanique des pièces est réalisée à l'état libre. Le but de cette simulation est de déterminer l'évolution géométrique de chaque pièce en ne considérant aucune contrainte de contact avec les pièces environnantes. Cette simulation à l'état libre est réalisée seulement sur les pièces dont leurs évolutions de température, définies précédemment, ne sont pas négligeables.

L'étude thermique précédente a permis de déterminer le champ de température à appliquer sur chaque pièce pour chaque situation de vie thermomécanique. Une simulation par des éléments finis est alors réalisée afin d'évaluer les variations géométriques de la pièce.

Afin de pouvoir réaliser cette simulation, il est nécessaire de fixer un nœud du maillage de la pièce pour que le problème soit soluble. Dans l'exemple présenté en figure 72, le nœud correspondant au point A est bloqué en rotation et en translation afin de réaliser correctement la simulation par des éléments finis. Un outil de simulation thermomécanique par des éléments finis détermine le déplacement de chaque nœud du maillage. La surface déformée est alors décrite par un ensemble de points. La figure 72 donne une représentation de l'ensemble des points de la déformée thermomécanique en traits continus avec le modèle nominal en traits discontinus. Par la suite, l'ensemble des points de la déformée thermomécanique sera appelé modèle déformé.

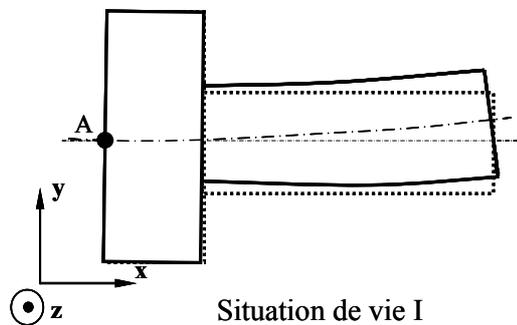


Figure 72 : Simulation thermomécanique à l'état libre de la pièce 1.

### IV-3.3 Caractérisation des écarts entre le modèle déformé et le modèle nominal

Pour déterminer la variation géométrique de la pièce 1, il est nécessaire de comparer le modèle déformé issu de la modélisation par des éléments finis avec le modèle nominal. La méthodologie présentée ci-dessous pour associer les différents éléments du modèle déformé au modèle nominal est inspirée des méthodes employées en métrologie lors du contrôle géométrique des pièces fabriquées.

Le bridage de la pièce étant totalement arbitraire, une remise en position du modèle déformé par rapport au modèle nominal doit être effectuée. Cette opération permet de déterminer la position et l'orientation optimales du modèle déformé par rapport à son modèle nominal selon le critère des moindres carrés.

Cela consiste à effectuer un balançage du modèle déformé par rapport au modèle nominal. La figure 73 illustre une association entre le modèle issu de la modélisation par des éléments finis avec le modèle nominal.

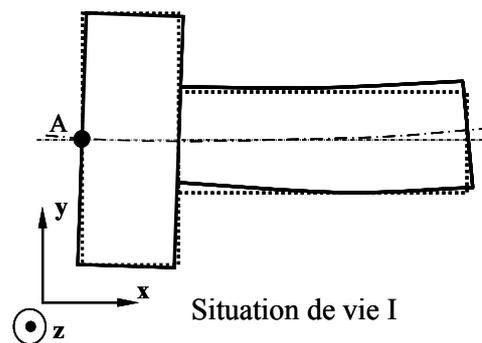


Figure 73 : Association du modèle déformé par rapport au modèle nominal.

Selon les valeurs des écarts par rapport au modèle nominal et les spécifications géométriques de la pièce définies en situation de vie de référence, une pièce peut être qualifiée de pièce thermomécaniquement influente ou non-influente.

Cette étude préliminaire détermine dans un mécanisme l'ensemble des pièces constituant les parties thermomécaniquement influentes ou non-influentes d'un mécanisme. Cependant il ne faut pas oublier qu'une pièce non-influente peut être déformée par la propagation de contraintes mécaniques dans les contacts entre pièces.

---

Une étude préliminaire permet de déterminer les pièces thermomécaniquement non-influentes et les pièces thermomécaniquement influentes à l'état libre. Une pièce influente est une pièce dont les variations géométriques ne sont pas négligeables devant ses spécifications géométriques.

---

## IV-4 Prise en compte des déformations thermomécaniques

La prise en compte des déformations thermomécaniques repose sur :

- la superposition des écarts thermomécaniques (situation, dimension et forme) et des écarts de fabrication (situation et dimension) dans les pièces,

- le cumul des écarts de forme et des écarts de dimension d'origine thermomécanique aux écarts de dimension de fabrication entre deux surfaces potentiellement en contact.

### IV-4.1 Intégration des déformations thermomécaniques

#### IV-4.1.1 Intégration des déformations thermomécaniques dans les pièces

Considérons la figure suivante modélisant une pièce constituée de  $n$  surfaces.

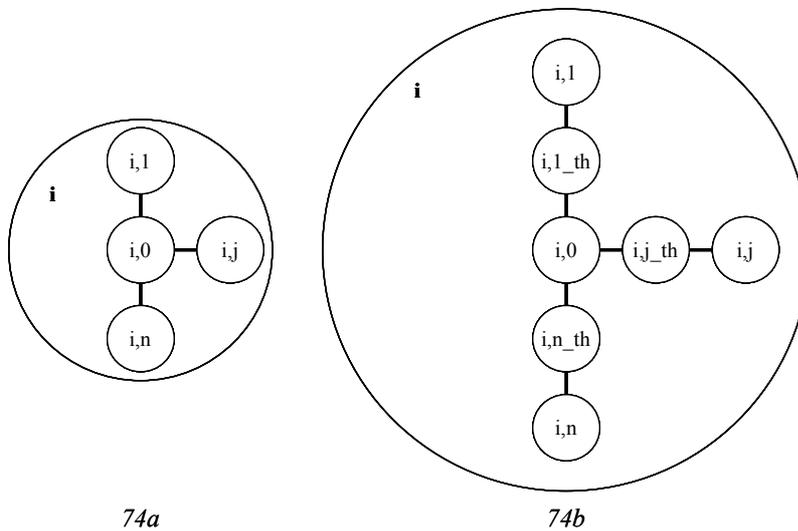


Figure 74 : Modélisations des pièces par des graphes.

La figure 74a représente le graphe d'une pièce utilisé dans un graphe de contacts dans la situation de vie de référence. L'arête reliant la surface  $i,j$  à la surface  $i,0$  représente les écarts de situation  $d_{i,j/i,0}$  dus aux défauts de fabrication de la surface de

substitution  $i,j$  par rapport à sa surface nominale. La relation de Chasles suivante caractérise les écarts de situation entre la surface de substitution  $i,j$  et la surface de substitution  $i,k$  :

$$d_{i,j/i,k} = d_{i,j/i,0} + d_{i,0/i,k} \quad (80)$$

La figure 74b représente le graphe d'une pièce dans une situation de vie de thermomécanique. L'arête reliant la surface  $i,j_{th}$  à la surface  $i,0$  représente les écarts de situation  $d_{i,j_{th}/i,0}$  de la surface de substitution  $i,j_{th}$  par rapport à sa surface nominale  $i,0$  dus aux déformations thermomécaniques. L'arête reliant la surface  $i,j$  à la surface  $i,j_{th}$  représente les écarts de situation  $d_{i,j_{th}/i,j}$  dus aux défauts de fabrication entre la surface de substitution  $i,j$  par rapport à sa surface nominale : elle correspond aux écarts  $d_{i,j/i,0}$  de la situation de vie de référence. La relation suivante caractérise les écarts de situation imputables aux défauts de fabrication et aux déformations thermomécaniques entre la surface de substitution  $i,j$  et sa surface nominale :

$$d_{i,j/i,0} = d_{i,j/i,j_{th}} + d_{i,j_{th}/i,0} \quad (81)$$

La relation suivante caractérise la position entre la surface de substitution  $i,j$  par rapport la surface de substitution  $i,k$  pour une situation de vie thermomécanique :

$$d_{i,j/i,k} = d_{i,j/i,j_{th}} + d_{i,j_{th}/i,0} + d_{i,0/i,k_{th}} + d_{i,k_{th}/i,j} \quad (82)$$

En regroupant les écarts de situation dus aux défauts de fabrication et les écarts de situation dus aux déformations thermomécaniques, il vient :

$$d_{i,j/i,k} = d_{i,j/i,k_{th}} + d_{i,j/i,k_{ma}} \quad (83)$$

avec  $d_{i,j/i,k_{ma}} = d_{i,j/i,j_{th}} + d_{i,k_{th}/i,j}$  et  $d_{i,j/i,k_{th}} = d_{i,j_{th}/i,0} + d_{i,0/i,k_{th}}$

La relation (83) caractérise le principe de superposition des écarts de fabrication et des écarts thermomécaniques dans une pièce. Ce principe est transposé dans une somme de Minkowski de polytopes. La somme de Minkowski suivante caractérise la superposition du polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,ma}$  et du polytope géométrique caractérisant les écarts thermomécaniques  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,th}$  :

$$\mathcal{D}_{i,j/i,k}^g = \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,ma} + \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,th} \quad (84)$$

Par hypothèse, le polytope  $\mathfrak{D}_{i,j,i,k}^{g,ma}$  est considéré invariant dans toutes les situations de vie.

La surface de substitution associée à une surface déformée thermomécaniquement est obtenue par approximation selon la technique des moindres carrés.

---

**Les déformations thermomécaniques dans les pièces sont caractérisées par un polytope géométrique. Le polytope géométrique global est égale à la somme de Minkowski du polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication et de celui caractérisant les écarts thermomécaniques.**

---

#### IV-4.1.2 Intégration des déformations thermomécaniques dans les contacts

La simulation d'une liaison entre deux pièces potentiellement en contact consiste à déterminer le polytope de contact dans le cas où les surfaces en contact sont déformées thermomécaniquement. La condition de non interpénétration définie dans le chapitre précédent ne dépend plus uniquement du jeu dû aux écarts de fabrication entre les deux surfaces mais aussi du jeu local dû aux écarts de dimensions et de forme d'origine thermomécanique.

Cette intégration consiste à « mettre à jour » l'ensemble des polytopes de contact des lois de comportement géométrique du système. Cette mise à jour ne s'effectue que pour les contacts dont au moins l'une des deux pièces est thermomécaniquement influente. De plus, seuls les contacts de type arbre/alésage seront considérées, c'est à dire l'ensemble des liaisons bilatérales (pivot glissant, linéaire annulaire et rotule), mais aussi les contacts constitués d'une double liaison unilatérale (double ponctuelle, double linéaire rectiligne, double appui plan) modélisant le contact tenon et mortaise par exemple.

Dans ce cas, la condition de non interpénétration est formalisée par la relation (85) généralisant la relation (47) où  $d_N$  représente le jeu local au point N :

$$\forall N \in E_c \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{N,i,j/u,v} \cdot \mathbf{n}_N \leq d_N \quad (85)$$

Avec :

- $\boldsymbol{\varepsilon}_{N-i,j/u,v}$  : vecteur écarts de translation entre  $S_{i,j}$  et  $S_{u,v}$  au point N,

- $\mathbf{n}_N$  : normale à l'élément de contact  $E_c$  au point N si  $E_c$  est une surface,
- $d_N$  : jeu local au point N entre les surfaces potentiellement en contact,
- $E_c$  : élément de contact défini par l'intersection des surfaces respectivement associées aux surfaces déformées thermomécaniquement dans le cas d'un contact glissant.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{N,i,j/u,v}$  caractérise l'écart de situation entre les éléments de situation des deux surfaces potentiellement en contact. Il s'agit des éléments de situation des surfaces respectivement associées aux déformés thermomécaniques (selon le critère des moindres carrés). La configuration où les éléments de situation des deux surfaces sont confondus est définie par la relation suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{N,i,j/u,v} = \mathbf{0} \text{ et } \boldsymbol{\rho}_{i,j/u,v} = \mathbf{0} \quad (86)$$

Le jeu local  $d_N$  au point N est défini en fonction du jeu entre les deux surfaces de substitution et en fonction des écarts de forme d'origine thermomécanique  $dev_{N-i,j/i,jn}$  de chaque surface :

$$d_N = \frac{J}{2} + \left( dev_{N-i,j/i,jn} - dev_{N-u,v/u,vn} \right) \quad (87)$$

La figure 75 illustre le cas d'une liaison pivot glissant dans une situation de vie thermomécanique particulière. Dans ce cas, le jeu entre les deux surfaces de substitution est défini par la relation suivante :

$$J = \left( D_{2,2} + d_{2,2\_ma} + d_{2,2\_th} \right) - \left( D_{1,2} + d_{1,2\_ma} + d_{1,2\_th} \right) \quad (88)$$

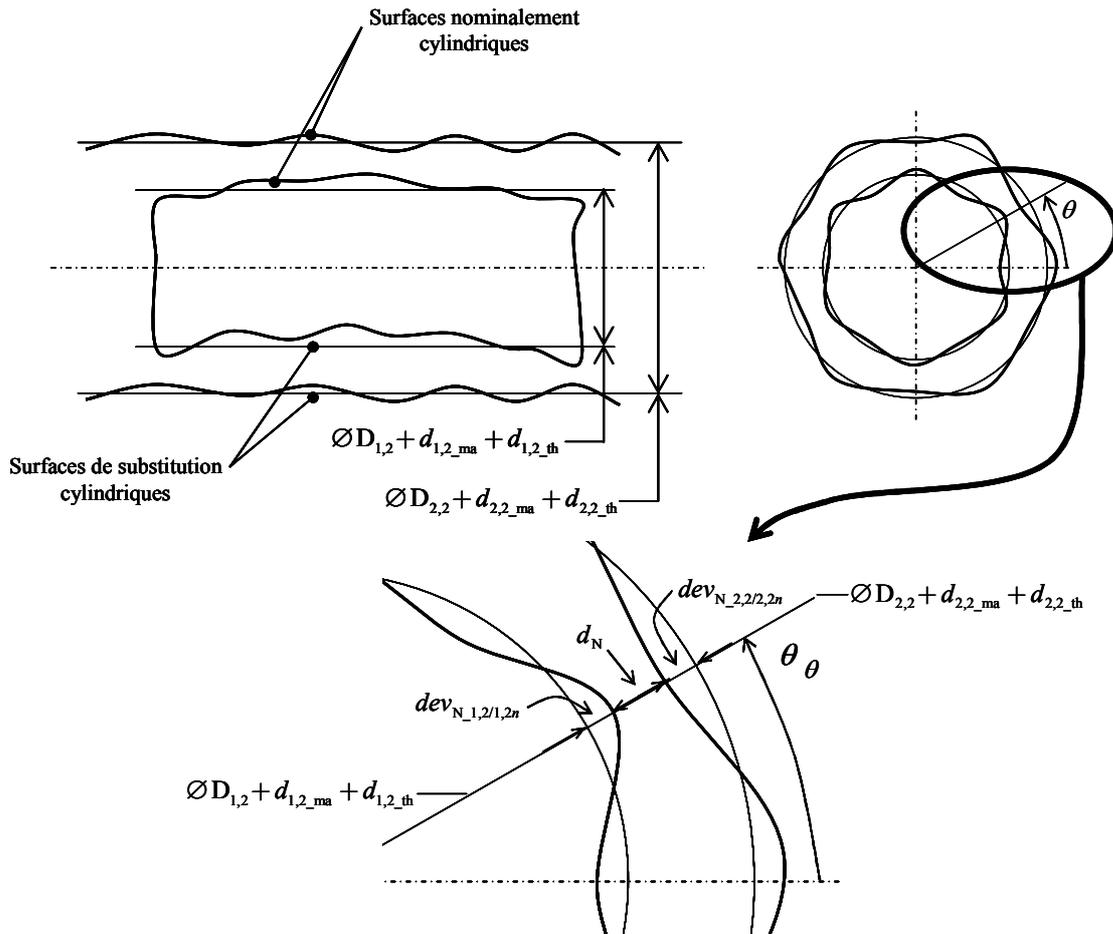


Figure 75 : Liaison pivot glissant dans une situation de vie thermomécanique.

Les figures 76 et 77 illustrent les polytopes de contact respectivement de la situation de vie de référence (voir figures 76a et 77a) et de la situation de vie thermomécanique (voir figures 76b et 77b). Pour des raisons de lisibilité les polytopes sont projetés dans les plans  $(\rho_y, \rho_z)$  et  $(\rho_z, \varepsilon_{A-y})$ . En chaque point N, la condition de non interpénétration définit un demi-espace limité par un hyperplan. La figure 77c illustre la discrétisation en 10 points de l'élément de contact  $E_c$  (un cylindre dans notre cas). Chaque point où est exprimée une condition de non interpénétration (voir figure 77c) est de la même couleur que l'hyperplan généré par cette condition dans les figures 77a et 77b. Les variations de forme et de dimension des surfaces provoquent une translation des hyperplans d'une situation de vie à une autre.

Il en résulte que :

- les hyperplans support du polytope de contact ne sont en général plus les mêmes entre deux situations de vie : la topologie du polytope de contact n'est donc pas conservée.

- l'hypervolume (contenu n-dimensionnel d'un n-polytope : aire pour un 2-polytope, volume pour un 3-polytope) varie. Une diminution de l'hypervolume caractérise une consommation de jeu par les variations thermomécaniques. Cela signifie que les variations thermomécaniques tendent à brider les deux pièces. Une augmentation de l'hypervolume caractérise une augmentation du jeu. Cela est favorable à la condition de montage mais cela dégrade la précision du guidage (ce qui peut être favorable ou défavorable au regard des exigences fonctionnelles du système).

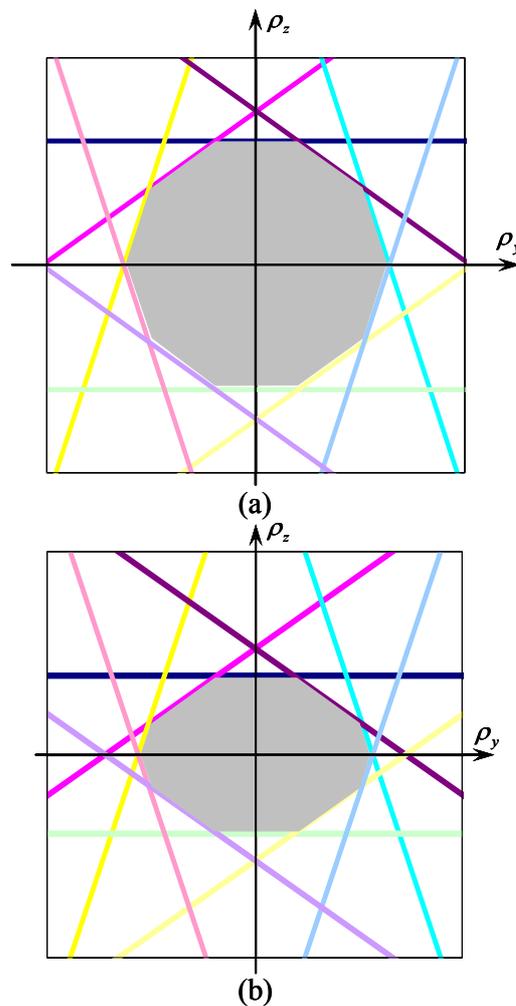


Figure 76 : Evolution du polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  dans le plan  $(\rho_y, \rho_z)$  de la situation de vie de référence vers une situation de vie thermomécanique.

Le cambrage de l'arbre dans le plan  $(y, z)$  entraîne une ovalisation de la projection du polytope de contact dans le plan  $(\rho_y, \rho_z)$ .

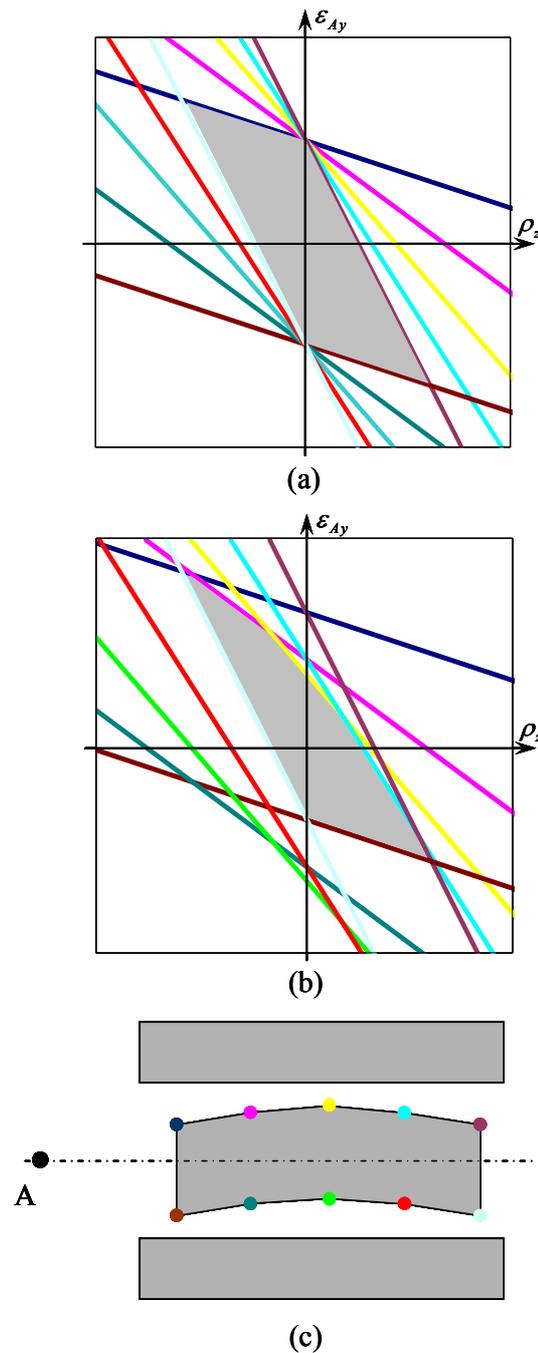


Figure 77 : Evolution du polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  au point A dans le plan  $(\rho_z, \epsilon_{A-y})$  de la situation de vie de référence vers une situation de vie thermomécanique

Le cambrage de l'arbre dans la situation de vie de thermomécanique entraîne une augmentation du nombre d'hyperplan support de la projection du polytope dans le plan  $(\rho_z, \epsilon_{A-y})$ . En effet, plusieurs positions extrêmes de l'arbre de l'alésage sont imposées par la forme cambrée de l'arbre. Chaque sommet du polytope caractérise une de ces positions extrêmes : voir figure 78.

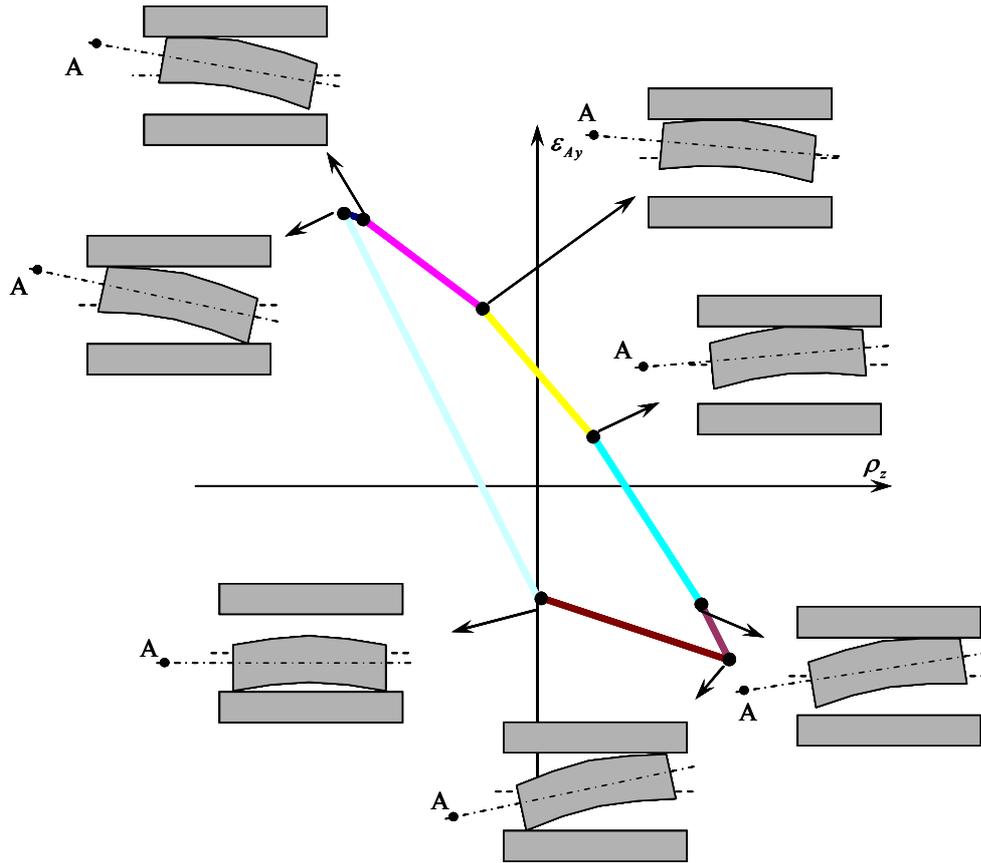


Figure 78 : Caractérisation des sommets du polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  au point A dans le plan  $(\rho_z, \varepsilon_{A-y})$ .

Ainsi pour chaque contact, un polytope de contact noté  $\mathcal{D}_{i,jn/uv}^{c,th}$  peut être défini. Il prend en compte le jeu dû aux procédés de fabrication, cumulé au jeu local dû aux déformations thermomécaniques.

Le cas où l'intersection des demi-espaces limités par des hyperplans définissant le polytope de contact  $\mathcal{D}_{i,j/uv}^{c,th}$  est vide, correspond à un phénomène de serrage local ou de bridage local entre les deux pièces. Le jeu dans la liaison est considéré comme nul avec un attribut de contact fixe. Le polytope de contact  $\mathcal{D}_{i,j/uv}^{c,th}$  est un sommet, soit un 0-polytope, confondu avec l'origine. Le phénomène de bridage va localement induire des déformations supplémentaires dans les deux pièces en contact qu'il va falloir déterminer dans une simulation thermomécanique du système global.

Considérons maintenant le mécanisme dans les situations de vie I et II décrites en figure 70.

La figure 79a représente la déformée thermomécanique de la pièce 1 dans la situation de vie I. Le polytope de contact de la liaison pivot glissant  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  n'existe pas (i.e. l'intersection des demi-espaces limités par des hyperplans est l'ensemble vide). En effet, il est aisé de remarquer que l'assemblage de l'arbre 1 dans le logement 2 n'est pas réalisable sans ajouter des déformations dans les pièces. Dans ce cas, un serrage local entre les surfaces 1,2 et 2,2 sera considéré. Le polytope de contact de la liaison pivot glissant  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  est alors considéré égal à un sommet confondu avec l'origine (voir figure 79c).

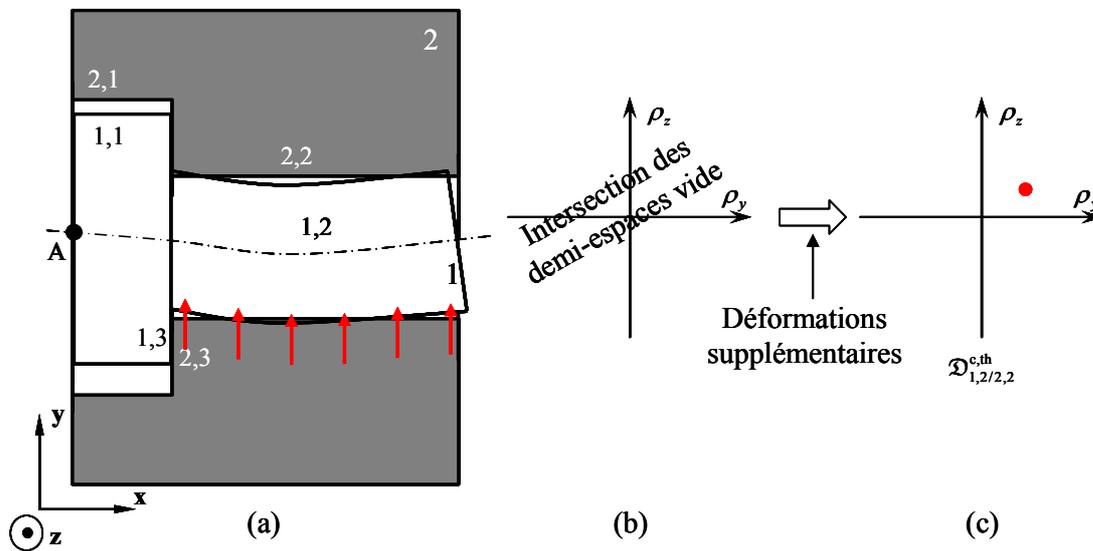


Figure 79 : Polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  dans la situation de vie I.

La figure 80a représente la déformée thermomécanique de la pièce 1 dans la situation de vie II. Sur la figure 80b, la projection du polytope de contact de la liaison pivot glissant  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  est réalisée dans le plan  $(\rho_y, \rho_z)$ . Une autre projection de ce polytope est réalisée dans le plan d'étude  $(\rho_z, \varepsilon_{A-y})$ . Dans ce cas, un jeu entre les deux surfaces en contact existe. Il n'y a pas de bridage ou serrage local entre les deux pièces.

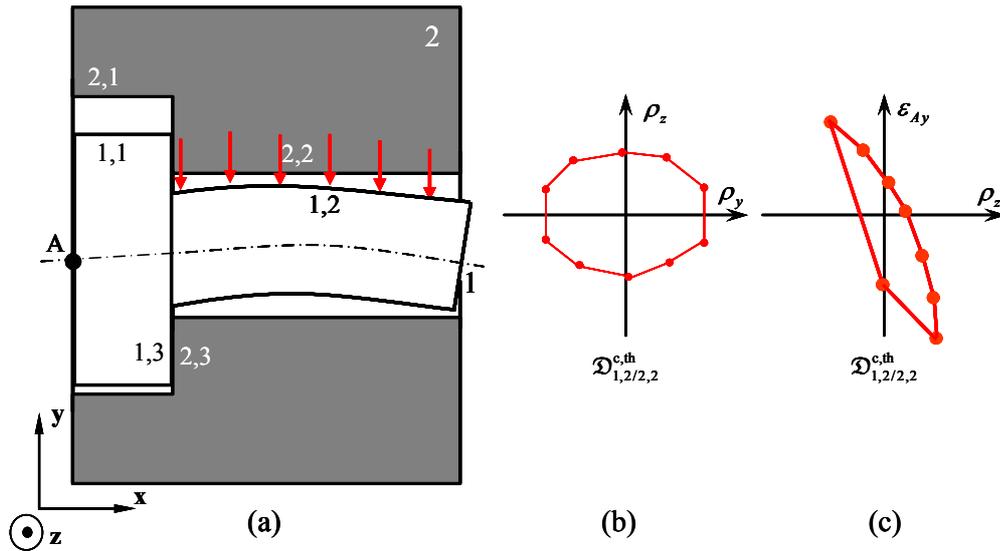


Figure 80 : Polytope de contact  $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  dans la situation de vie II.

L'intégration des déformations thermomécaniques dans les spécifications de contact repose sur une simulation d'assemblage des pièces à l'état libre. Pour chaque paire de surfaces potentiellement en contact, l'évolution entre deux situations de vie du polytope de contact dépend de l'évolution des jeux locaux entre deux points en vis à vis. Cela permet de détecter l'apparition d'un bridage local entre deux pièces.

#### IV-4.2 Formalisation des lois de comportement géométrique des mécanismes

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les lois de comportement géométrique des mécanismes sont définies par un nombre de cycles dont il faut assurer la fermeture. La somme de Minkowski de polytopes géométriques des pièces doit être comprise dans la somme de polytopes de contact de chaque cycle :

$$\sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^g \subseteq \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^c \quad (89)$$

Dans toutes les situations de vie thermomécaniques, la formalisation des lois de comportement géométrique garantissant l'assemblage devient alors :

$$\left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,ma} + \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{g,th} \right) \subseteq \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{c,th} \quad (90)$$

où :

- $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g.ma}}$  représente le polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication,
- $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g.th}}$  représente le polytope géométrique caractérisant les écarts thermomécaniques,
- $\mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c.th}}$  représente le polytope de contact prenant en compte les déformations thermomécaniques.

La relation (90) doit être vérifiée pour chaque cycle dont au moins une des pièces a été qualifiée de pièce thermomécaniquement influente. En effet, dans le cas d'un cycle dont toutes les pièces sont thermomécaniquement non-influente, la relation (90) devient :

$$\left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g.ma}} \right) \subseteq \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c.th}} \quad (91)$$

où :

- $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g.ma}}$  est égal à  $\mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g}}$  défini dans la situation de vie de référence,
- $\mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c.th}}$  est égal à  $\mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c}}$  défini dans la situation de vie de référence.

La relation (91) est alors identique à la relation (89) caractérisant la situation de vie de référence.

Considérons notre mécanisme dans ces deux situations de vie thermomécaniques.

La figure 81 représente la vérification de l'inclusion la somme des polytopes géométriques dans la somme des polytopes de contact dans la situation de vie I. La somme des polytopes de contact correspondant à un sommet, la relation (90) n'est pas vérifiée : cela correspond au bridage de l'arbre 1 dans le logement 2.

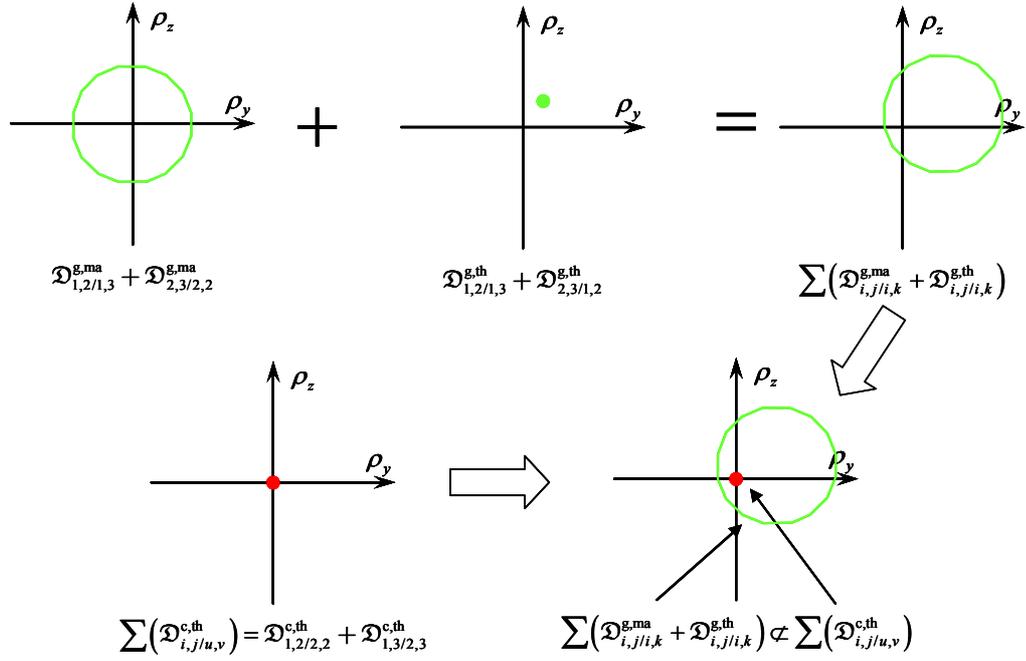


Figure 81 : Formalisation des lois de comportement géométrique dans la situation de vie I.

La figure 82 illustre la relation (90) formalisation les lois de comportement géométrique dans la situation de vie II. Différents cas possibles sont envisageables.

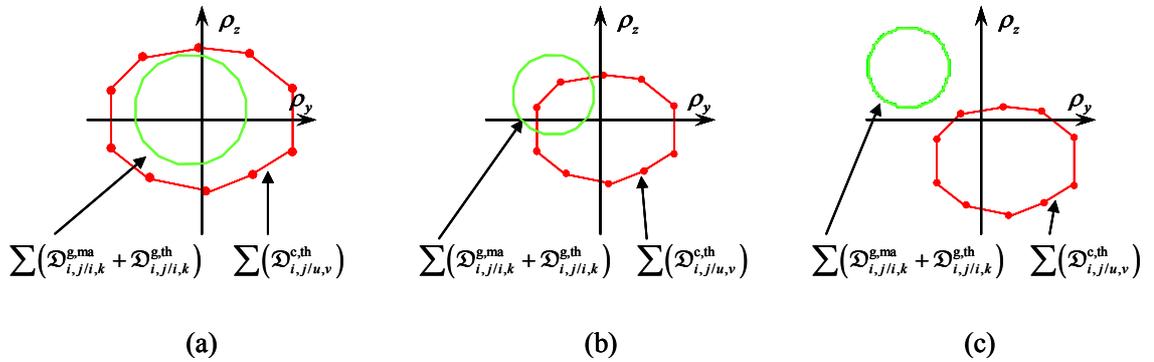


Figure 82 : Formalisation des lois de comportement géométriques dans la situation de vie II.

Dans la première configuration, voir figure 82a, la relation d'inclusion est vérifiée. Cela caractérise un non-bridage des pièces du cycle :

$$\text{cas 1 : } \left( \sum \mathcal{D}_{i,j/l,k}^{g,ma} + \sum \mathcal{D}_{i,j/l,k}^{g,th} \right) \subseteq \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{c,th} \Leftrightarrow \text{non bridage} \quad (92)$$

Dans la seconde configuration, voir figure 82b, la relation d'inclusion n'est pas vérifiée. Cependant certaines configurations permettent aux deux pièces de s'assembler

sans déformation supplémentaire : l'intersection des deux polytopes n'est pas vide. Cela se caractérise par un bridage incertain des pièces du cycle :

$$\text{cas 2 : } \left\{ \begin{array}{l} \left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,ma}} + \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,th}} \right) \not\subset \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c,th}} \\ \left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,ma}} + \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,th}} \right) \cap \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c,th}} \neq \emptyset \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{bridage incertain} \quad (93)$$

La figure 82c illustre le cas d'un bridage entre les deux pièces du cycle. Dans ce cas, l'intersection des deux polytopes est vide : la relation d'inclusion n'est pas vérifiée. Il vient :

$$\text{cas 3 : } \left\{ \begin{array}{l} \left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,ma}} + \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,th}} \right) \not\subset \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c,th}} \\ \left( \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,ma}} + \sum \mathcal{D}_{i,j/i,k}^{\text{g,th}} \right) \cap \sum \mathcal{D}_{i,j/u,v}^{\text{c,th}} = \emptyset \end{array} \right\} \Leftrightarrow \text{bridage} \quad (94)$$

Par la suite, dans la situation de vie II sera considéré uniquement le cas 1 où il n'y a pas de bridage entre les deux pièces (figure 82a).

*Remarque :*

Si un bridage entre deux pièces existe alors une étude thermomécanique complète du système doit alors être réalisée afin de prendre en compte les déformations supplémentaires induites par ce bridage.

---

**Dans toutes les situations de vie thermomécaniques, les lois de comportement géométrique des mécanismes par des opérations sur des polytopes doivent être vérifiées pour chaque cycle du graphe de contacts contenant au moins une pièce est thermomécaniquement influente. Un bridage local entre deux pièces ou un bridage dans la fermeture d'un cycle impose de réaliser une étude thermomécanique prenant en compte les déformations supplémentaires induites.**

---

## IV-4.3 Formalisation du transfert d'une exigence fonctionnelle

### IV-4.3.1 Formalisation du polytope géométrique dans le cas de pièces bridées

Il existe deux types de bridage. Le premier type est un bridage local entre deux surfaces en contact du à un phénomène de serrage local. Le second type est un bridage de cycle dû à la fermeture d'un cycle des lois de comportement géométrique. L'apparition d'un ou plusieurs bridages impose une étude thermomécanique supplémentaire intégrant les déformations ajoutées par le (ou les) bridage(s).

Considérons le mécanisme dans la situation de vie I où un bridage local et un bridage de cycle ont été détectés. Une étude thermomécanique du système complet doit être réalisée afin de prendre en compte ces deux bridages.

Les phénomènes de bridage sont modélisés dans les conditions limites de contact entre les pièces. Des conditions limites de contact entre les pièces bridées entre elles sont alors imposées dans la modélisation par des éléments finis. Les conditions limites de contact sont définies en respectant les caractéristiques des liaisons définies dans la situation de vie de référence. Dans le cas d'une liaison pivot glissant avec jeu, une configuration de contact sera alors imposée entre les deux surfaces en contact.

La figure 83 illustre le résultat issu d'un calcul éléments finis prenant en compte le contact de type pivot glissant entre les surfaces 1,2 et 2,2 ainsi que le contact de type appui plan entre les surfaces 1,3 et 2,3. Dans ce cas, le contact de type pivot glissant et le contact de type appui plan sont définis sans jeu dans la modélisation par des éléments finis.

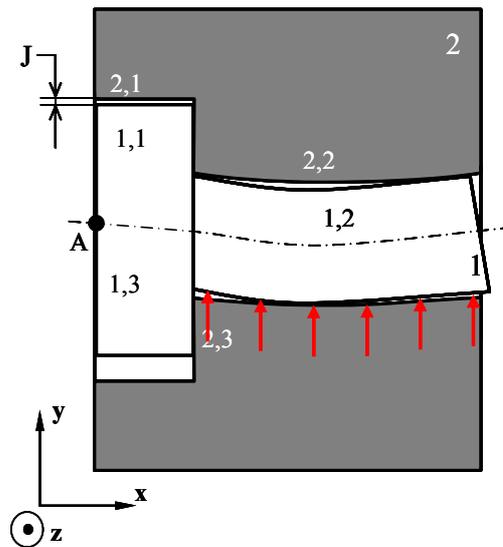


Figure 83 : Simulation thermomécanique complète situation de vie I.

L'objectif de la simulation thermomécanique est de définir le polytope géométrique  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$  intégrant les écarts d'origine thermomécanique entre les surfaces 1,1 et 2,1. La relation suivante décrit la décomposition de ce polytope :

$$\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g = \mathcal{D}_{1,1/2,1}^{g,th} + \left( \left( \mathcal{D}_{1,1/1,2}^{g,ma} + \mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th} + \mathcal{D}_{2,2/2,1}^{g,ma} \right) \cap \left( \mathcal{D}_{1,1/1,3}^{g,ma} + \mathcal{D}_{1,3/2,3}^{c,th} + \mathcal{D}_{2,3/2,1}^{g,ma} \right) \right) \quad (95)$$

avec :

- $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^{g,th}$  : polytope géométrique caractérisant les écarts d'origine thermomécanique entre les surfaces 2,1 et 1,1 ,
- $\mathcal{D}_{1,1/1,2}^{g,ma}$  : polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication de la entre les surfaces 1,2 et 1,1 ,
- $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  : polytope de contact entre les surfaces 2,2 et 1,2 intégrant les déformations thermomécaniques.

D'une manière analogue, nous définissons les polytopes  $\mathcal{D}_{2,2/2,1}^{g,ma}$ ,  $\mathcal{D}_{1,1/1,3}^{g,ma}$ ,  $\mathcal{D}_{2,3/2,1}^{g,ma}$  et  $\mathcal{D}_{1,3/2,3}^{c,th}$ .

La situation de vie de référence correspond au cas particulier où :

$$\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g = \left( \left( \mathcal{D}_{1,1/1,2}^{g,ma} + \mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th} + \mathcal{D}_{2,2/2,1}^{g,ma} \right) \cap \left( \mathcal{D}_{1,1/1,3}^{g,ma} + \mathcal{D}_{1,3/2,3}^{c,th} + \mathcal{D}_{2,3/2,1}^{g,ma} \right) \right) \quad (96)$$

avec :

- $\mathcal{D}_{1,1/1,2}^{g,ma} = \mathcal{D}_{1,1/1,2}^g$ ,  $\mathcal{D}_{2,2/2,1}^{g,ma} = \mathcal{D}_{2,2/2,1}^g$ ,  $\mathcal{D}_{1,1/1,3}^{g,ma} = \mathcal{D}_{1,1/1,3}^g$  et  $\mathcal{D}_{2,3/2,1}^{g,ma} = \mathcal{D}_{2,3/2,1}^g$
- $\mathcal{D}_{1,2/2,2}^{c,th} = \mathcal{D}_{1,2/2,2}^c$  et  $\mathcal{D}_{1,3/2,3}^{c,th} = \mathcal{D}_{1,3/2,3}^c$ .

La figure 84 illustre le polytope géométrique  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^{g,th}$  définie dans la relation (95). Il correspond à l'écart de situation dû aux déformations thermomécaniques de la surface 1,1 par rapport à la surface 2,1 .

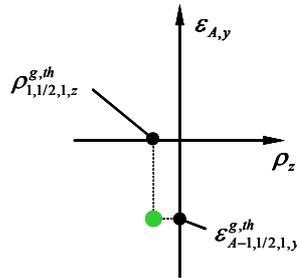


Figure 84 : Polytope géométrique  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^{g,th}$  dans la situation de vie I.

La figure 86 illustre la situation de vie I caractérisant les écarts de situation liés aux variations d'origine thermomécaniques mais aussi dus aux variabilités inhérentes aux procédés de fabrication et au processus d'assemblage des pièces.

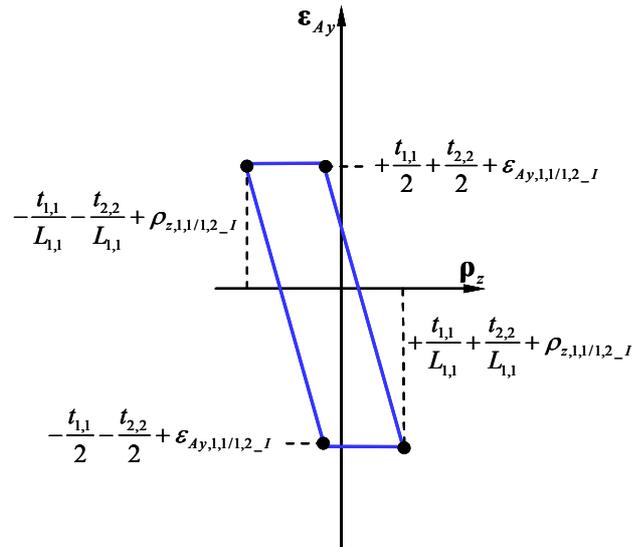


Figure 85 : Polytope géométrique  $\mathcal{D}_{1,1/2,1}^g$  dans la situation de vie I.

Les variations de l'écart de situation de l'axe de la surface 2,1 par rapport à l'axe de la surface 1,1 au point A dans la direction y sont alors déduites de la figure 85 :

$$-\frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,2}}{2} + \varepsilon_{Ay,1,1/1,2_I} \leq \mathbf{e}_{A-2,1/1,1} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,2}}{2} + \varepsilon_{Ay,1,1/1,2_I} \quad (97)$$

---

**La détermination du polytope géométrique entre deux surfaces d'un système contenant un ou plusieurs bridages est réalisée par une étude thermomécanique du système complet.**

---

#### IV-4.3.2 Formalisation du polytope géométrique entre deux surfaces d'un mécanisme ne contenant pas de bridage

Considérons maintenant le mécanisme dans la situation de vie II où les deux pièces ne sont pas bridées entre elles. Dans cette situation de vie, aucune contrainte mécanique entre les pièces n'est transmise par les liaisons. Les polytopes géométriques caractérisant les déformations d'origine thermomécanique dans ce mécanisme peuvent être déduits directement de l'étude thermomécanique à l'état libre réalisée précédemment.

La relation (98) caractérise la décomposition du polytope géométrique  $\mathfrak{D}_{1,1/2,1}^g$  dans la situation de vie II :

$$\mathfrak{D}_{1,1/2,1}^g = \left( \mathfrak{D}_{1,1/1,2}^{g,th} + \mathfrak{D}_{1,1/1,2}^{g,ma} + \mathfrak{D}_{1,2/2,2}^{c,th} + \mathfrak{D}_{2,2/2,1}^{g,th} + \mathfrak{D}_{2,2/2,1}^{g,ma} \right) \cap \left( \mathfrak{D}_{1,1/1,3}^{g,th} + \mathfrak{D}_{1,1/1,3}^{g,ma} + \mathfrak{D}_{1,3/2,3}^{c,th} + \mathfrak{D}_{2,3/2,1}^{g,th} + \mathfrak{D}_{2,3/2,1}^{g,ma} \right) \quad (98)$$

avec :

- $\mathfrak{D}_{1,1/1,2}^{g,th}$  : polytope géométrique caractérisant les écarts d'origine thermomécanique à l'état libre entre de les surfaces 1,2 et 1,1 ,
- $\mathfrak{D}_{1,1/1,2}^{g,ma}$  polytope géométrique caractérisant les écarts de fabrication entre de les surfaces 1,2 et 1,1 ,
- $\mathfrak{D}_{1,2/2,2}^{c,th}$  : polytope de contact entre les surfaces 1,2 et 2,2 intégrant les déformations thermomécaniques.

D'une manière analogue, nous définissons les polytopes  $\mathfrak{D}_{2,2/2,1}^{g,th}$ ,  $\mathfrak{D}_{2,2/2,1}^{g,ma}$ ,  $\mathfrak{D}_{1,1/1,3}^{g,th}$ ,

$\mathfrak{D}_{1,1/1,3}^{g,ma}$ ,  $\mathfrak{D}_{1,3/2,3}^{c,th}$ ,  $\mathfrak{D}_{2,3/2,1}^{g,th}$  et  $\mathfrak{D}_{2,3/2,1}^{g,ma}$ .

La figure 86 illustre la relation (98) dans la situation de vie II.

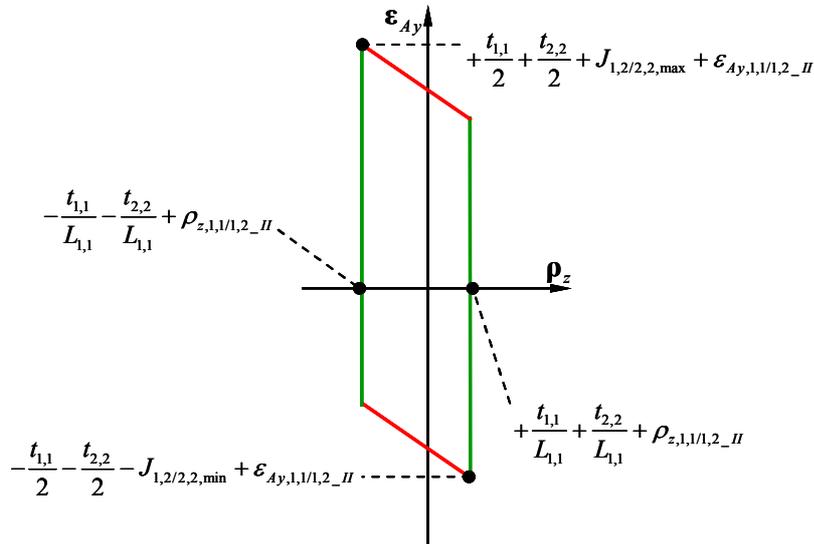


Figure 86 : Polytope géométrique  $\mathfrak{D}_{1,1/2,1}^g$  dans la situation de vie I.

La relation (99) caractérise les variations de l'écart de situation de l'axe de la surface 2,1 par rapport à l'axe de la surface 1,1 au point A dans la direction  $\mathbf{y}$  (voir figure 86) :

$$-\frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,2}}{2} - J_{1,2/2,2,\min} + \varepsilon_{Ay,1,1/1,2\_I} \leq \mathbf{e}_{A-2,1/1,1} \cdot \mathbf{y} \leq +\frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,2}}{2} + J_{1,2/2,2,\min} + \varepsilon_{Ay,1,1/1,2\_I} \quad (99)$$

**La détermination d'un polytope géométrique entre deux surfaces d'un système sans bridage est déduite des lois de comportement géométrique intégrant les déformations thermomécaniques des pièces à l'état libre.**

#### IV-4.3.3 Intégration des écarts de dimension et de forme d'origine thermomécanique des surfaces spécifiées par l'exigence fonctionnelle

Dans le paragraphe précédent, seuls les écarts de situation d'origine thermomécaniques ont été pris en compte pour les surfaces spécifiées par une exigence fonctionnelle. Cependant, les déformations thermomécaniques entraînent aussi des écarts de dimension et des écarts de forme de ces surfaces que l'on appelle généralement écarts intrinsèques respectivement à ces surfaces.

La figure 87 représente la section de la surface cylindrique 1,1 au point A. Le cylindre de substitution est associé à la surface réelle selon le critère des moindres carrés. L'écart de diamètre entre le diamètre du cylindre de substitution et le diamètre du cylindre nominal est noté  $d_{1,1\_th\_I}$ . Les écarts de forme entre le cylindre de substitution et la surface réelle sont notés  $dev(A, \theta)_{2,1\_th\_I}$ .

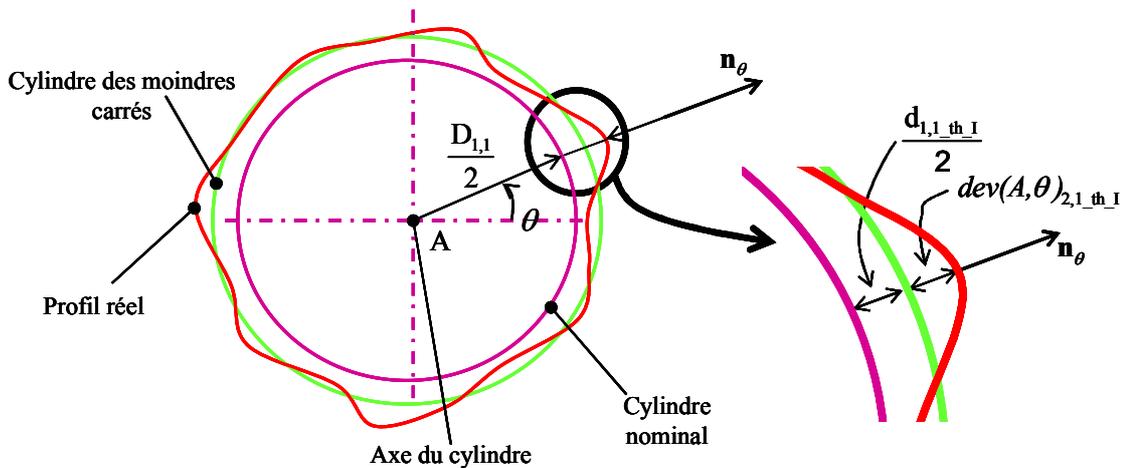


Figure 87 : Section de la surface 1,1 au point A.

Les limites de l'écart de diamètre  $d_{1,1_{ma}}$  dû aux défauts de fabrication sont caractérisées par la relation (100) où  $d_{1,1_{ma\_inf}}$  correspond à la valeur minimale admissible et  $d_{1,1_{ma\_sup}}$  la valeur maximale admissible :

$$d_{1,1_{ma\_inf}} \leq d_{1,1_{ma}} \leq d_{1,1_{ma\_sup}} \quad (100)$$

L'écart entre le diamètre de la surface de substitution associée à la surface déformée thermomécaniquement et le diamètre nominal est défini par la valeur  $d_{1,1_{th\_I}}$  pour la situation de vie I. Ainsi pour une situation de vie I, l'écart du diamètre dû aux défauts de fabrication et aux déformations thermomécaniques est pris en compte par la relation (101) :

$$d_{1,1_{ma\_inf}} + d_{1,1_{th\_I}} \leq d_{1,1_I} \leq d_{1,1_{ma\_sup}} + d_{1,1_{th\_I}} \quad (101)$$

Par hypothèse, les écarts de forme dus à la variabilité de fabrication ne sont pas pris en compte. Les limites des écarts de forme d'origine thermomécanique  $dev_{1,1_{th}}$  sont définies par l'inéquation suivante où  $dev_{1,1_{th\_I\_inf}}$  et  $dev_{1,1_{th\_I\_sup}}$  représentent respectivement la valeur minimale et la valeur maximale. :

$$dev_{1,1_{th\_I\_inf}} \leq dev_{1,1_{th}} \leq dev_{1,1_{th\_I\_sup}} \quad (102)$$

Les limites des écarts intrinsèques à la surface 1,1 sont :

$$\begin{aligned} d_{1,1_I} &\geq d_{1,1_{ma\_inf}} + d_{1,1_{th\_I}} + dev_{1,1_{th\_I\_inf}} \\ d_{1,1_I} &\leq d_{1,1_{ma\_sup}} + d_{1,1_{th\_I}} + dev_{1,1_{th\_I\_sup}} \end{aligned} \quad (103)$$

Selon la même méthodologie, les limites des écarts intrinsèques à la surface 1,1 dans la situation de vie II sont :

$$\begin{aligned} d_{1,1_{II}} &\geq d_{1,1_{ma\_inf}} + d_{1,1_{th\_II}} + dev_{1,1_{th\_II\_inf}} \\ d_{1,1_{II}} &\leq d_{1,1_{ma\_sup}} + d_{1,1_{th\_II}} + dev_{1,1_{th\_II\_sup}} \end{aligned} \quad (104)$$

---

**Les écarts de forme et les écarts de dimension des surfaces libres sont déterminés en associant une surface de substitution à la surface déformée thermomécaniquement. Ainsi les variations thermomécanique des surfaces spécifiées par l'exigence fonctionnelle sont prises en compte dans le calcul de la caractéristique spécifiée par l'exigence.**

---

#### IV-4.4 Caractérisation de l'exigence fonctionnelle

Le jeu local entre les deux surfaces cylindriques 1,1 et 2,1 est alors défini respectivement dans les situations de vie I et II par les relations (105) et (106).

$$\begin{cases} J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - (d_{1,1,\text{ma\_sup}} + d_{1,1,\text{th\_II}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_II\_sup}})}{2} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \leq J \\ J \leq J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - (d_{1,1,\text{ma\_inf}} + d_{1,1,\text{th\_II}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_II\_inf}})}{2} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \end{cases} \quad (105)$$

$$\begin{cases} J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - (d_{1,1,\text{ma\_sup}} + d_{1,1,\text{th\_I}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_I\_sup}})}{2} - J_{1,2/2,2,\text{min}} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \leq J \\ J \leq J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - (d_{1,1,\text{ma\_inf}} + d_{1,1,\text{th\_I}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_I\_inf}})}{2} + J_{1,2/2,2,\text{max}} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \end{cases} \quad (106)$$

avec :

$$J_n = \frac{D_{2,1} - D_{1,1}}{2} \quad (107)$$

Le respect de l'exigence fonctionnelle peut alors être caractérisé par la relation suivante dans la situation de vie I :

$$\begin{cases} J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - (d_{1,1,\text{ma\_sup}} + d_{1,1,\text{th\_II}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_II\_sup}})}{2} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \leq J_{\text{max}} \\ J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - (d_{1,1,\text{ma\_inf}} + d_{1,1,\text{th\_II}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_II\_inf}})}{2} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \geq J_{\text{min}} \end{cases} \quad (108)$$

et par la relation suivante dans la situation de vie II :

$$\begin{cases} J_n + \frac{d_{2,1,\text{sup}} - (d_{1,1,\text{ma\_inf}} + d_{1,1,\text{th\_I}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_I\_inf}})}{2} + J_{1,2/2,2,\text{max}} + \frac{t_{1,1}}{2} + \frac{t_{2,1}}{2} \leq J_{\text{max}} \\ J_n + \frac{d_{2,1,\text{inf}} - (d_{1,1,\text{ma\_sup}} + d_{1,1,\text{th\_I}} + \text{dev}_{1,1,\text{th\_I\_sup}})}{2} - J_{1,2/2,2,\text{min}} - \frac{t_{1,1}}{2} - \frac{t_{2,1}}{2} \geq J_{\text{min}} \end{cases} \quad (109)$$

---

**Le respect de la condition fonctionnelle est caractérisé par une relation entre la caractéristique fonctionnelle, les spécifications géométriques, les spécifications de contacts et les spécifications thermomécaniques.**

---

## IV-5 Conclusion

Le cycle fonctionnement du système étudié est discrétisé en plusieurs situations de vie : une situation de vie de référence et plusieurs situations de vie thermomécaniques. Par hypothèses, les lois de comportement géométrique de la situation de vie de référence (où toutes les pièces sont à 20°C et sont considérées infiniment rigides) sont les mêmes que les lois de comportement géométrique des autres situations de vie. Cela signifie que les cycles indépendants sont les mêmes dans les structures topologiques de contacts des différentes situations de vie respectives, que le degré d'hyperstatisme et le degré de mobilité du système étudié sont invariants.

Une situation de vie thermomécanique est caractérisée par un ensemble de spécifications thermomécaniques.

Dans une première phase, ces spécifications sont prises en compte dans une simulation thermique globale du système étudié. Ceci permet d'identifier les pièces subissant des changements de température potentiellement influents sur leurs variations géométriques.

Dans une seconde phase, toutes les pièces subissant des changements de températures potentiellement influents sont simulées thermomécaniquement à l'état libre. Cela permet de d'identifier les pièces thermomécaniquement influentes et non-influents.

Dans une 3ème phase, toutes les liaisons incluant une pièce thermomécaniquement influente sont caractérisées par un polytope de contact thermomécanique intégrant les variations de dimensions et de forme des surfaces. Cela permet de déceler les éventuels bridages (ou serrages) locaux entre deux pièces.

Puis dans une 4ème phase, la fermeture des cycles des lois de comportement géométriques incluant des pièces thermomécaniquement influentes permettent d'identifier les éventuels bridages de fermetures de cycles.

Si un bridage a été détecté, une étude thermomécanique complète du système permet de déterminer les variations thermomécaniques des surfaces spécifiées par l'exigence fonctionnelle en termes d'écarts de situation, de dimensions et de forme. Le principe de superposition des écarts de fabrication et des écarts thermomécaniques dans les pièces permet de caractériser la caractéristique fonctionnelle spécifiée par l'exigence

(le jeu rotor stator dans notre exemple fil rouge) en fonction des spécifications géométriques, des spécifications de contacts et des spécifications thermomécaniques.

Si aucun bridage n'est détecté, il convient alors à l'aide des lois de comportement géométrique incluant les variations géométriques des pièces à l'état libre, de caractériser la caractéristique fonctionnelle spécifiée par l'exigence en fonction des spécifications géométriques, des spécifications de contacts et des spécifications thermomécaniques. Un organigramme synthétise la démarche proposée et justifiée dans ce chapitre en figure 88.

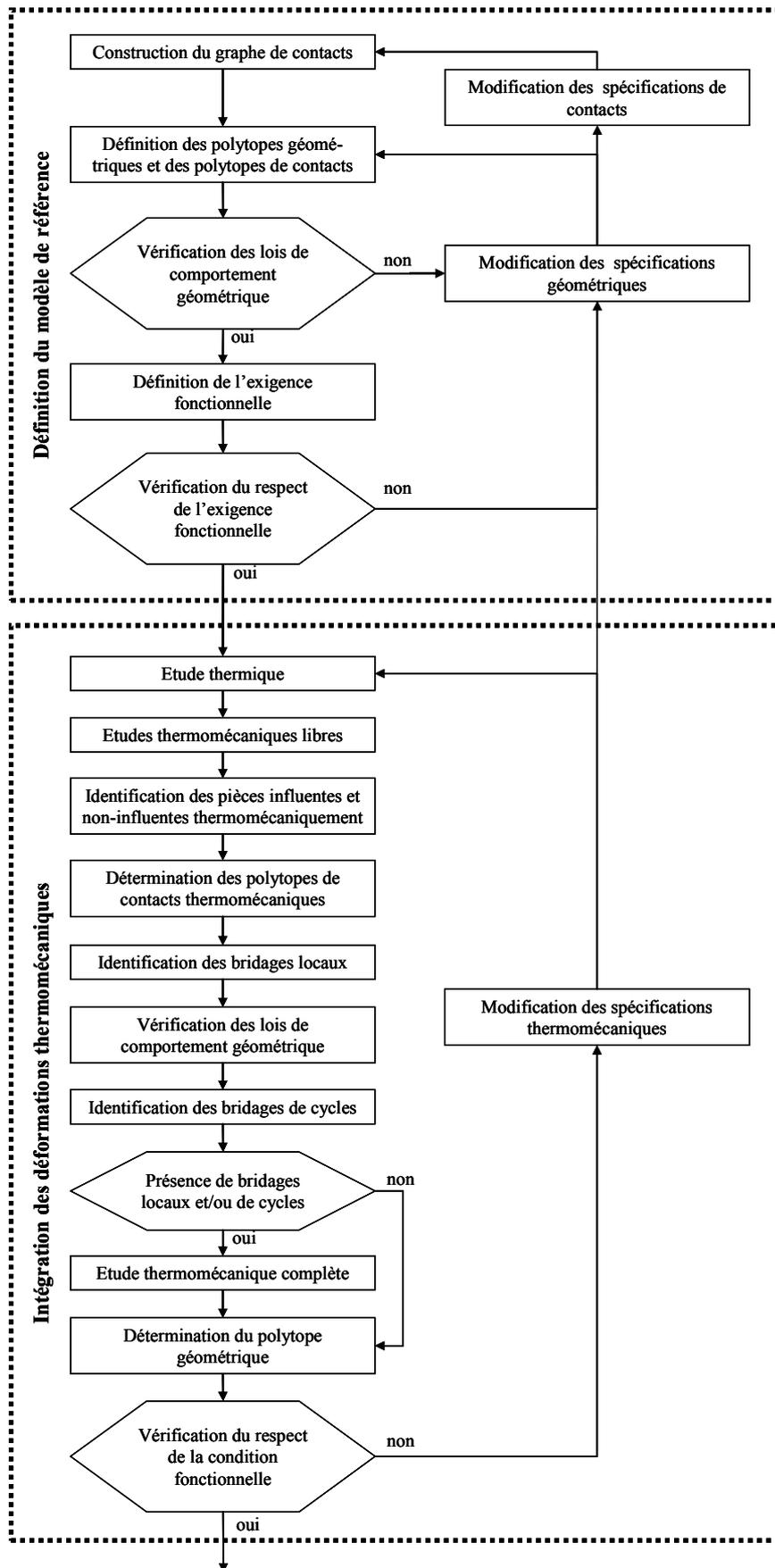


Figure 88 : Organigramme synthétisant la démarche proposée.

- Chapitre V -

Qualification des variantes d'architecture de turbine

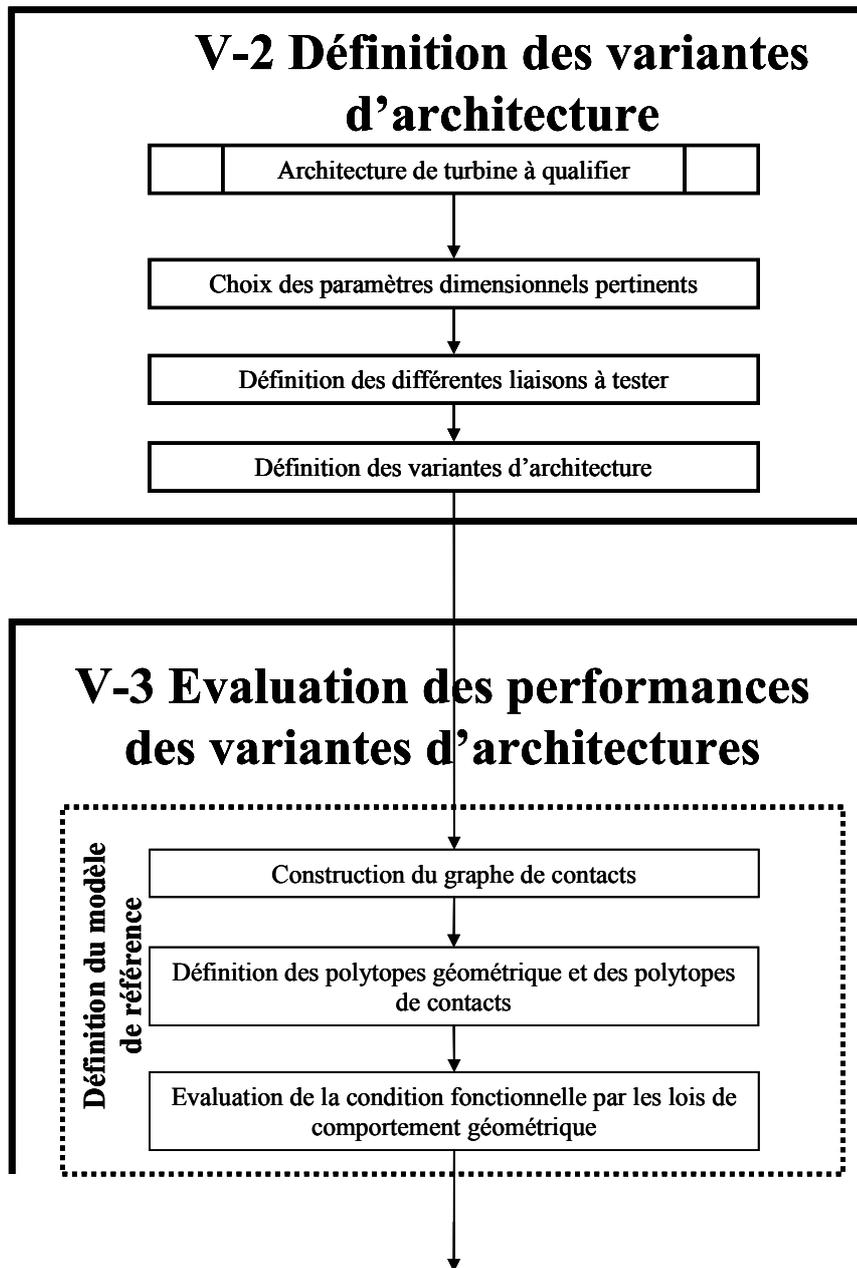


---

**Ce chapitre d'application de la démarche exposée au chapitre IV fait référence à des données et des résultats confidentiels. Cependant, la démarche de qualification de variantes d'architecture est générale et le lecteur saura la reproduire.**

---

La figure 89 illustre la démarche détaillée de la qualification de variantes d'architecture de turbine.



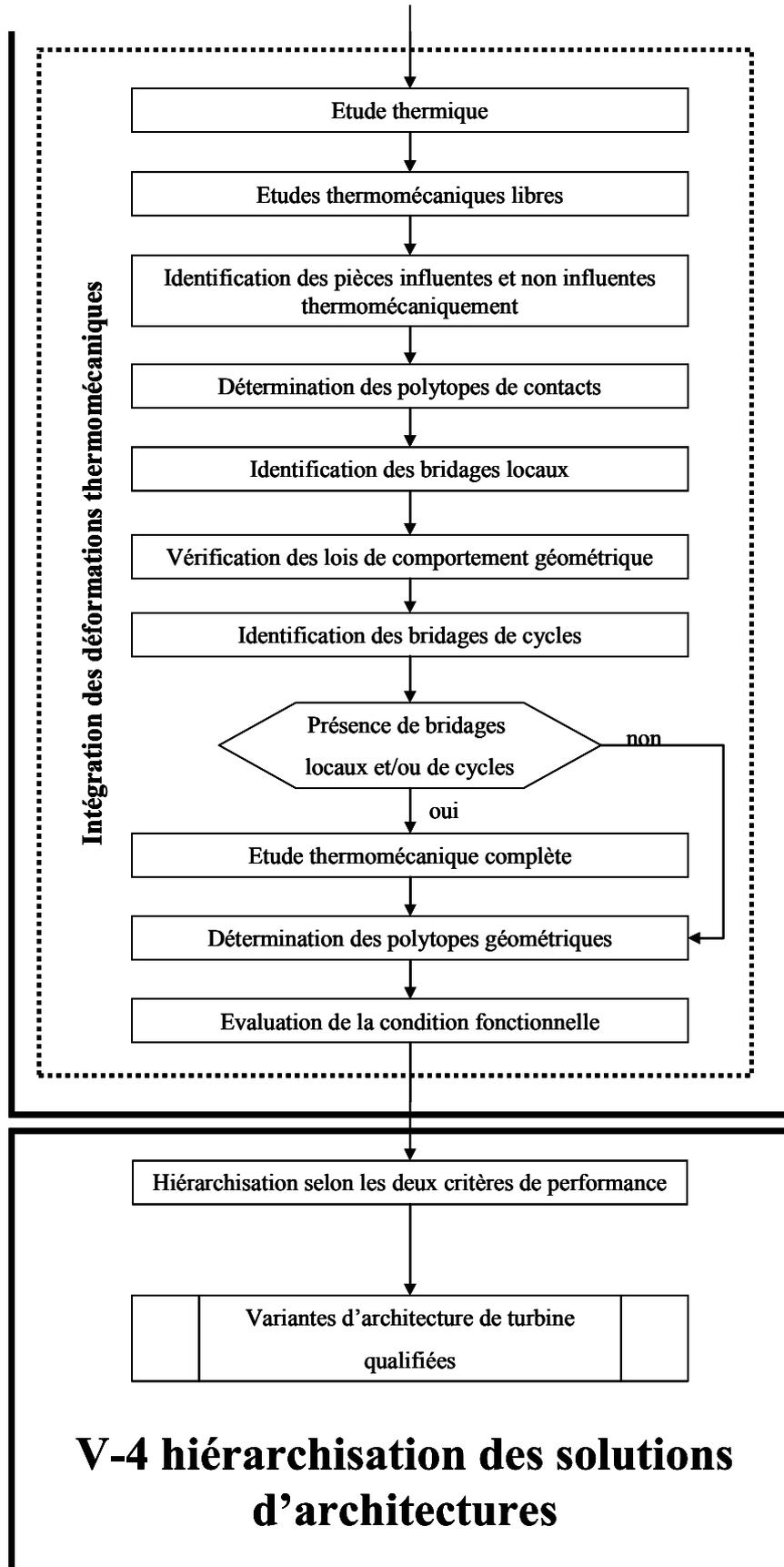


Figure 89 : Qualification de variantes d'architecture de turbine.

## V-1 Critères de performance d'une turbine

Le chapitre I a montré que la qualification d'une architecture de turbine repose sur un compromis entre le risque de touche d'une aube sur le stator et le rendement énergétique. Ce compromis entre ces deux critères passe par la maîtrise du jeu rotor stator  $J$  et de la section de fuite notée  $S_{\text{fuite}}$  durant toutes les phases de fonctionnement de la turbine [Pierre et al, 2010].

Par la suite, seule la variabilité architecturale des parties statiques de la turbine haute pression va être considérée.

### V-1.1 Critères de performance d'une turbine

Le critère de performance d'une turbine est caractérisé par :

- le risque de touche d'une aube sur le stator : il est corrélé à une valeur minimale du jeu à respecter.
- le rendement énergétique : il dépend du débit gazeux qui s'écoule entre les sommets des pales et le stator. Ce débit est corrélé à la section de fuite. La section de fuite est la différence de section entre le rotor et le stator.

Le jeu local entre les aubes et le stator  $C(\theta)$  doit être suffisant pour éviter une touche sur l'ensemble de la périphérie de la turbine (voir figure 90).

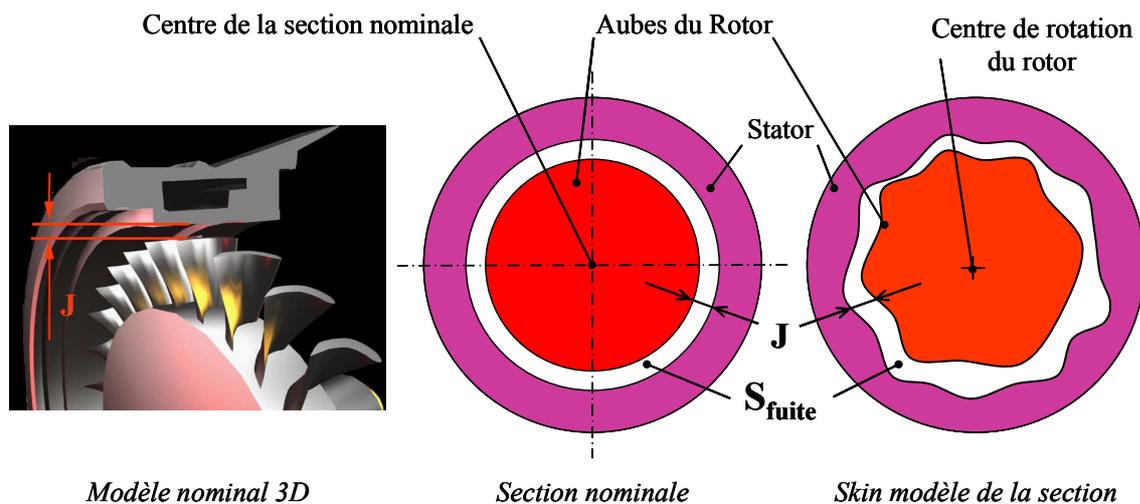


Figure 90 : Section de fuite et jeu en sommet d'aube.

Le critère de touche peut être exprimé par la relation (110) où  $C_{\text{min}}$  représente la valeur du jeu minimum garantissant le fonctionnement correct de la turbine.

$$\forall \theta \in [0; 2\pi[ \quad C(\theta) > C_{min} \quad (110)$$

La fuite de gaz entre le stator et le rotor, est déterminée la section de fuite  $S$  : voir figure 90.

Pour maximiser le rendement énergétique d'une turbine il faut minimiser la section de fuite définie par la relation suivante :

$$S < S_{max} \quad (111)$$

### V-1.2 Paramétrage géométrique du stator

La figure 91 représente le profil réel d'une section du stator en rouge. Un cercle des moindres carrés, représenté en vert est associé au profil réel. Le point M représente le centre du cercle des moindres carrés associé au profil réel.

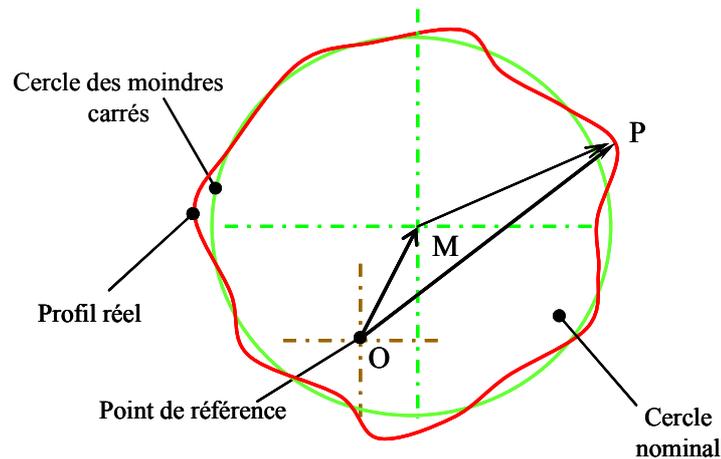


Figure 91 : Association d'une surface de substitution à un profil réel circulaire.

Le vecteur  $\mathbf{OP}$ , caractérisant la position d'un point P du profil réel par rapport à un point de référence O situé sur l'axe de rotation du rotor, peut se décomposer par la relation de Chasles suivante :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OM} + \mathbf{MP} \quad (112)$$

Le vecteur  $\mathbf{OM}$  caractérise l'écart de situation du centre du cercle de substitution par rapport au point de référence. Le vecteur  $\mathbf{e}(M)$  sera utilisé par la suite pour caractériser cet écart de situation :

$$\mathbf{OM} = \mathbf{e}(M) \quad (113)$$

Le diamètre du cercle des moindres carrés  $D_{MC}$  peut être défini en fonction du diamètre nominal  $D$  et de la variation de diamètre  $d$  :

$$D_{MC} = D + d \quad (114)$$

La distance entre le point  $P$  du profil réel et le cercle des moindres carrés, caractérisant le défaut de forme dans la direction  $\theta$ , est définie par la variable  $dev(M, \theta)$ . Le norme du vecteur  $\mathbf{MP}$  peut alors être défini par la relation (115) :

$$\|\mathbf{MP}\| = \left( \frac{D}{2} + \frac{d}{2} + dev(M, \theta) \right) \quad (115)$$

En injectant les relations (113) et (115), définissant respectivement les vecteurs  $\mathbf{OM}$  et  $\mathbf{MP}$  dans la relation de Chasles (112), le vecteur peut être alors défini par la relation suivante :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{e}(M) + \left( \frac{D}{2} + \frac{d}{2} + dev(M, \theta) \right) \cdot \mathbf{n}_\theta \quad (116)$$

La figure 92 illustre le paramétrage de la section nominale circulaire du stator.

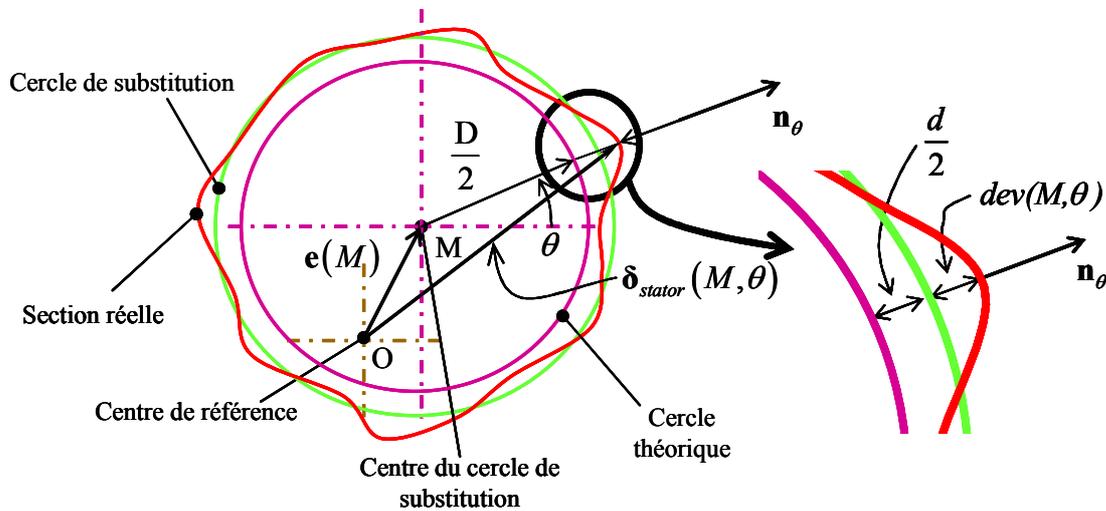


Figure 92 : Paramétrage de la section nominale circulaire.

$\delta_{stator}(M, \theta)$  définit la position d'un point du profil réel du stator, en  $M$  centre du cercle des moindres carrés et suivant l'angle  $\theta$ , par rapport à l'axe de référence.

La position  $\delta_{stator}(M, \theta)$  s'écrit alors :

$$\delta_{stator}(M, \theta) = \mathbf{e}(M) + \left( \frac{D}{2} + \frac{d}{2} + dev(M, \theta) \right) \cdot \mathbf{n}_0 \quad (117)$$

La relation précédente est définie par :

- $\mathbf{e}(M)$  : écart de situation du centre du cercle de substitution par rapport au point de référence
- $D$  : diamètre nominal
- $d$  : écart de dimension entre le diamètre nominal et le diamètre du cercle de substitution
- $dev(M, \theta)$  : écart de forme du profil réel par rapport au cercle de substitution.

### **V-1.3 Expression des critères performance d'une turbine en fonction des paramètres géométriques du stator**

Les deux critères de performance sont exprimés en fonction du paramétrage géométrique du stator : écart de situation, écart de dimension et écart de forme. L'expression détaillée des critères de performance est présentée dans l'annexe confidentielle.

## **V-2 Définition des variantes d'architecture**

- Paramètres dimensionnels pertinents
- Différentes liaisons à tester

Voir annexe confidentielle

## **V-3 Evaluation des performances des variantes d'architectures**

- Caractérisation des architectures
- Formalisation du transfert de la condition fonctionnelle
- Situation de vie de référence : phase de montage :
  - Caractérisation des écarts géométriques des contacts
  - Caractérisation des écarts géométriques des pièces
  - Synthèse

- Situation de vie thermomécanique : fonctionnement en régime permanent
  - Evolution des contacts
  - Intégration des déformations thermomécanique
  - Synthèse

Voir annexe confidentielle

## **V-4 Hiérarchisation des solutions d'architectures envisagées de stator**

- Critère du rendement énergétique
- Critère du risque de touche

Voir annexe confidentielle

## **V-5 Conclusions**

Nous avons utilisé la démarche proposée au chapitre IV sur des exemples industriels. Nous avons ainsi pu comparer différentes solutions technologiques d'architectures de turbine selon deux critères de performance : le risque de touche et le rendement énergétique.

Les différentes architectures de turbine se distinguent par des géométries du carter turbine différentes et sur la possibilité de choisir différentes liaisons encastrement entre les différentes pièces du stator.

Pour chaque solution technique, on évalue les critères de performance pour deux situations de vie différentes : la situation de vie de référence correspondant à une turbine neuve où toutes les pièces sont à 20 °C et la situation de vie thermomécanique correspondant à une situation de vie où la turbine subit les contraintes thermomécaniques les plus critiques.

- Le classement des performances des différentes architectures dépend de la prépondérance de l'un des deux critères.

Notre méthode permet donc, dans une phase de conception préliminaire, de hiérarchiser les différentes solutions et de donner au concepteur des éléments tangibles d'aide à la décision.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue que ces résultats sont à considérer toutes choses égales par ailleurs et qu'ils peuvent être modifiés si d'autres composants ou liaisons changent de comportement. Une attention particulière doit être portée sur l'influence des pièces intermédiaires (souplesse ou rigidité) entre la localisation de l'application des critères de performance et les liaisons ou composants à choisir.



## Conclusions générales et Perspectives



## Contexte et genèse

Les motivations industrielles de Turbomeca, motoriste aéronautique, sont à la base de ces travaux réalisés dans le cadre d'une équipe de recherche commune : ERT 1070 IMPACT. Le **chapitre II** a rappelé le concept des lois de comportement géométrique d'un mécanisme et a précisé les principaux outils et méthodes de chaînes de cotes 3d reposant sur ce concept. L'objectif est de proposer une démarche de simulation du respect d'une exigence fonctionnelle à partir de la formalisation des lois de comportement géométrique d'un système mécanique par des opérations (somme de Minkowski et intersection) de polytopes. Le **chapitre III** a posé les bases de la démarche appliquée à un système de solides infiniment rigides, cette démarche est étendue dans le **chapitre IV** à un système intégrant des déformations d'origine thermomécanique. Enfin, le **chapitre V** a appliqué la démarche à la simulation d'une caractéristique fonctionnelle fournie par le partenaire industriel de ces travaux. De surcroît, ces résultats donnent au concepteur des éléments de décision sur l'influence des choix de conception, en particulier des formes de pièces et du comportement des liaisons, sur le fonctionnement de la turbine. Le chapitre V fait référence à des données et résultats confidentiels.

## Contributions

Ces travaux ont conduit à lever plusieurs verrous scientifiques :

- L'analyse des spécifications géométriques d'un système mécanique par des opérations sur des polytopes : elle permet de simuler le respect d'une exigence sur des systèmes hyperstatiques sans hypothèse de prépondérance de contact.
- Méthode de déterminations des pièces thermomécaniquement influentes : la comparaison entre les variations géométriques imputables à la variabilité due aux défauts de fabrication et les variations géométriques dues aux déformations d'origine thermomécanique permet d'identifier les pièces thermomécaniquement influentes dans un mécanisme soumis à des champs de température.
- Identification des bridages locaux : l'intégration des déformations d'origine thermomécanique des surfaces en contact dans les polytopes de contact révèle les risques de bridages locaux.

- Identification des bridages de cycle : l'intégration des déformations thermomécaniques dans la formalisation des lois de comportement géométrique par des opérations sur des polytopes sert à détecter les bridages de cycle dans un mécanisme.
- Intégrations des déformations thermomécaniques dans les chaînes de cotes 3d : une démarche permettant de prendre en compte l'évolution des contacts (source potentielle de bridages) et les déformations d'origine thermomécaniques dans les chaînes de cotes 3d a été mis en place.
- Proposition d'une démarche de qualification d'architectures de turbine : la démarche de qualification de variantes d'architecture de turbine aide le concepteur dans les choix de forme et de liaisons vis à vis de deux critères de performance.

Les algorithmes de détermination d'un polytope par l'intersection de demi-espaces, les algorithmes de détermination d'intersection et de somme de Minkowski ont été développés dans le département « Ingénierie Mécanique et Conception » (IMC) de l'« Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux » (I2M) dans l'atelier logiciel Open CASCADE [Open CASCADE, 2011].

### **Perspectives envisagées**

Une des perspectives de ce travail est de prendre en compte des déformations plastiques pouvant apparaître au cours du cycle de fonctionnement du système étudié. Pour cela, la situation de vie de référence ne serait plus la même pour toutes les situations de vie thermomécaniques mais évoluerait en intégrant les déformations plastiques au cours du cycle de fonctionnement. La méthode générale proposée au chapitre IV ne serait pas pour autant remise fondamentalement en cause. De même, les déformations résiduelles générées par les processus d'obtention de pièces et d'assemblages pourraient être prises en compte.

Par ailleurs, les phénomènes transitoires peuvent générer des configurations géométriques singulières plus critiques, au regard de certaines exigences fonctionnelles, que les situations de vie thermomécanique discrétisant le fonctionnement du système. Une des voies envisageables pour modéliser ces phénomènes très complexes serait l'utilisation de la méthode des quadripôles. Des travaux engagés dans l'ERT 1070

IMPACT en collaboration avec le département « Fluides –Transferts » d'I2M doivent être exploités et poursuivis dans un futur proche.

Nos travaux se sont focalisés sur l'estimation des fuites entre le stator et le rotor d'un turbomoteur. Cependant, toutes les liaisons, en amont et en aval, contribuent à des risques de fuites et de réintroductions de flux de refroidissement dans la veine qui vont impacter le rendement énergétique. Notre méthode peut donner des éléments de qualification et d'évolution des ces différents flux. Cette perspective impose de prendre en compte les déformations locales et les défauts de forme des surfaces induits par les procédés d'obtention. Des travaux dans cette direction sont en projet dans le département IMC. Les qualifications des résultats pourrons s'appuyer sur les travaux menées dans le cadre de l'ERT et se poursuivant actuellement dans le cadre du département TREFLE.

Les outils développés sur les polytopes dans le cadre de cette thèse intéressent la communauté scientifique et nous proposons de rechercher le cadre dans lequel il pourrait être diffusé.



## Références bibliographiques



- [Anselmetti, 2006]** Anselmetti B., Generation of functional tolerancing based on positioning features, *Computer-Aided Design* 38:902-919, 2006.
- [Anselmetti, 2007]** Anselmetti B., Calcul tridimensionnel de la résultante d'une chaîne de cotes en cotation ISO, en vue d'un calcul probabiliste, *Mécanique et Industrie*, 8:3:173-185, 2007.
- [Anselmetti, 2010]** Anselmetti B., CLIC: a method for geometrical specification of products. *Geometric Tolerancing of Product.*, ISBN 978-1-84821-118-6, pp. 209-239, Published by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2010.
- [Ballot et al, 2001]** Ballot E., Bourdet P. et Thiébaud F., Determination of relative situations of parts for tolerance computation. Proc. of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Cachan (France), ISBN 1-4020-1423-6, Kluwer academic publisher, p. 63-72, 2001.
- [Ballot, 1995]** Ballot E., Lois de comportement géométrique des mécanismes pour le tolérancement. Thèse de Doctorat. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 1995.
- [Ballu et al, 1999]** Ballu A. et Mathieu L. Choice of functional specifications using graphs within the frame work of education. Proc. of the 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing ISBN 0-7923-5654-3, pp. 197-206, Kluwer academic publisher, 1999.
- [Ballu et al, 2010]** Ballu A., Mathieu L. et Legoff O., Representation of mechanical assemblies and specifications by graphs. *Geometric Tolerancing of Product*, ISBN 978-1-84821-118-6, pp. 97-110, Published by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2010.
- [Barki et al., 2009]** H. Barki, F. Denis et F. Dupont, Contributing vertices-based Minkowski sum computation of convex polyhedra, *Computer-Aided Design*, 41:525-538, 2009.
- [Berge, 1967]** Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Deuxième édition, Dunod, 1967
- [Boissonnat et al, 1998]** Boissonnat J.-D. et Yvinec M., *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1998
- [Bourdet et al, 1995]** Bourdet P. et Ballot E. Geometrical behavior laws for computer aided tolerancing. Proc. of the 4th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing (ed. F. Kimura), pp. 143-153, 1995.

- [Bourdet et al, 2010]** Bourdet P., Thiébaud F. et Cid G., Writing the 3d Chain of Dimensions (Tolerance Stack-Up) in Symbolic Expressions. Geometric tolerancing of products, ISBN 978-1-84821-118-6, ISTE-WILEY, p. 125-149. 2010.
- [Breteau et al, 2007]** Breteau P., Thiebaut F., Lartigue C., Fricero B., Falgarone H. et Moufle G.E., Assembly Simulation of Flexible Parts through the fitting of Linkage Devices. Proc. of 10th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, 2007.
- [Breteau, 2009]** Breteau P., Simulation d'assemblage flexible par la mesure - Application au domaine de l'aéronautique, Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2009.
- [Camelio et al, 2003]** Camelio J. A., Hu S. J. et Ceglarek D., Modeling variation propagation of multi-station assembly systems with compliant parts, Journal of Mechanical Design, 125 :4 :673-182, 2003.
- [Camelio et al, 2004]** Camelio J. A., Hu S. J. et Marin S. P., Compliant Assembly Variation Analysis Using Component Geometric Covariance. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 126 :2 :355-360, 2004.
- [Carlson et al, 2003]** Carlson J. S., Söderberg R. and Lindkvist L., Geometrical Inspection Point Reduction Based on Combined Cluster and Sensitivity Analysis. In Proc. of the International Mechanical Engineering Congress & Exposition, Washington, USA, 2003.
- [CeTOL, 2011],** [www.sigmetrix.com](http://www.sigmetrix.com)
- [Chase et al, 1991]** Chase K. W. et Parkinson A. R., A Survey of Research in the Application of Tolerance Analysis to the Design of Mechanical Assemblies. Research in Engineering Design, 3 :23-37, 1991.
- [Chevassus et al, 2006]** Chevassus N. ; Falgarone H. ; Thiebaut F. ; Bourdet P. et Moufle G.E. ; A new approach for best fit assembly based on the behaviour of components. Proc. of Aerospace Manufacturing and Automated Fastening Conference and Exhibition, Toulouse, France, 2006.
- [Cid et al, 2004]** Cid G., Thiebaut F. et Bourdet P., Taking the deformation into account for components' tolerancing. Proc. of the 5th conference on Integrated Design on Manufacturing and Mechanical Engineering, Bath, U.K., 2004.

- [Cid et al, 2005] Cid G., Thiebaut F., Bourdet P. et Falgarone H., Geometrical study of assembly behaviour, taking into accounts rigid components' deviations, actual geometric variations and deformations. Proc. of the 9th CIRP International Seminar on Computer-Aided Tolerancing, ISBN 978-1-4020-5437-2, 301-310, Springer,2005.
- [Cid, 2005] Cid G., Etablissement des relations de comportement de mécanismes avec prise en compte des écarts géométriques et des souplesses des composants. Thèse de doctorat, ENS de Cachan, 2005
- [Clément et al, 1988] Clément A. et Bourdet P., A Study of Optimal-Criteria Identification Based on the Small-Displacement Screw Model. Annals of the CIRP, 37 :1 : 503-506, 1988.
- [Clément et al, 1994] Clément A, Rivière A et Temmerman, Cotation tridimensionnelle des systèmes mécaniques théorie et pratique, ISBN 978-2-85330-132-9, PYC Edition, 1994.
- [Clément et al, 1995] Clément A, Rivière A et Serre P. TTRS Declarative information model. Proc. of the 4th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, 1995
- [Clément et al, 1998] Clément A. et Bourdet P., A Study of Optimal-Criteria Identification Based on the Small-Displacement Screw Model, Annals of the CIRP, 37 :1 : 503-506, 1988.
- [Clozel et al, 2010] Clozel P. et Rance P.-A, MECAMaster: a tool for assembly simulation from early design, industrial approach. Geometric Tolerancing of Product, ISBN 978-1-84821-118-6, pp. 241-273, Published by ISTE Ltd and John Wiley & Sons, 2010.
- [Clozel, 2001] Clozel P., 3d tolerancing from preliminary study. Proc. of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing , Cachan, France, 2001.
- [Dantan et al, 2002] Dantan J.Y. et Ballu A., Assembly specification by Gauge with Internal Mobilities (G.I.M.) : a specification semantics deduced from tolerance synthesis. Journal Of Manufacturing Systems, 21:3:218-235, 2002.
- [Dantan et al, 2005] Dantan JY, Mathieu L, Ballu A et Martin P., Tolerance synthesis : quantifier notion and virtual boundary. Computer Aided Design ; 37 ; pp. 231-240, 2005.
- [Dantan et al, 2008] Dantan JY, Ballu A. et Mathieu L., Geometrical product specifications - model for product life cycle. Computer Aided Design ; doi :10.1016/j.cad.2008.01.004 , 2008.

- [Dantan et al., 2009] Dantan J.-Y. et Qureshi A.-J., Worst-case and statistical tolerance analysis based on quantified constraint satisfaction problems and Monte Carlo simulation, *Computer-Aided Design* 41:1-12, 2009.
- [Dantan, 2000] Dantan JY, Synthèse des spécifications géométriques : modélisation par Calibre à Mobilités Internes. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, 2000.
- [Defazio et al, 1993] Defazio T.L., Edsall A. C., Gustavson R. E., Hernandez J., Hutchins P. M., Leung H. W., Luby S. C., Metsinger R. W., Nevins J. L., Tung K. et Whitney D. E. A prototype of feature based design for assembly. *Journal of Mechanical Design*, Vol.115-4 :723-734, 1993.
- [Ding et al, 2000] Ding Y., Ceglarek D. et Shi J., Modeling and Diagnosis of Multi- Stage Manufacturing Process : Part I State Space Model. Proc. of the Japan/USA Symposium of Flexible Automation, Ann Arbor, Michigan, 2000.
- [Ding et al, 2002a] Ding Y., Ceglarek D. et Shi J. J., , Design Evaluation of Multi-Station Assembly Processes by Using State Space Approach. *Journal of Mechanical Design*, 124 :3 :408-418, 2002.
- [Ding et al, 2002b] Ding Y., Shi J. J. et Ceglarek, D., Diagnosability Analysis of Multi-Station Manufacturing Processes. *Journal of Dynamic Systems, Measurement*, 124 :1 :1-13, 2002.
- [Dufaure et al, 2008] Dufaure J. et Teissandier D., A tolerancing framework to support geometric specifications traceability. *Int J Adv Manuf Technol*, 36:9-10:894-907, 2008.
- [Fleming, 1988] Fleming A., Geometric relationships between toleranced features. *Artificial Intelligent* ; 37 :403-412, 1988
- [Fukuda, 2004] Fukuda K., From the zonotope construction to the Minkowski addition of convex polytopes, *Journal of Symbolic Computation*, 38 :1261-1272, 2004.
- [Germain, 2007] Germain F., Tolérancement statistique tridimensionnel, intégration en CFAO, Thèse de doctorat, Université de Savoie., 2007.
- [Giordano et al, 1992] Giordano M., Duret D, Tichadou S. et Arrieux R., Clearance space in volumic dimensioning, *CIRP Annals - Manufacturing Technology*, 41(1) :565-568, 1992.

- [Giordano et al, 1993]** Giordano M. et Duret D. Clearance Space and Deviation Space, Application to three-dimensional chains of dimensions and positions. Proc. of the 3rd CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, ISBN 2-212-08779-9, 179-196, Eyrolles, 1993.
- [Giordano et al, 2007]** Giordano M., Pairel E. et Samper S. Analyse et synthèse de tolérances : méthode des domaines, Tolérancement géométrique des produits, ISBN 978-2-7462-1509-2, Hermes - Lavoisier, 161-193, 2007.
- [Hervé, 1976]** Hervé J.M. La géométrie du groupe des déplacements appliquée à l'analyse cinématique des mécanismes. Thèse d'Etat, Université de Paris VI, 1976.
- [Hu et al, 2006]** Hu S. J. et Camelio J. A., Modeling and Control of Compliant Assembly Systems. CIRP Annals - Manufacturing Technology, 55 : 1 :19-22, 2006.
- [ISO 1101, 2006]** ISO 1101, Spécification géométrique des produits (GPS) - Tolérancement géométrique - Tolérancement de forme, orientation, position et battement, 2006.
- [ISO 2692, 1992]** ISO 2692, Dessins techniques - Tolérancement géométrique - Exigence du maximum de matière, 1992
- [ISO 3952-1, 1981]** ISO 3952-1, Kinematic diagrams - Graphical symbols-Part 1, 1981.
- [ISO 5459, 1988]** ISO 5459, Dessins techniques - Cotation et tolérancement - Références et systèmes de référence pour tolérances géométriques, 1988.
- [Le Borzec, 1975]** Le Borzec R. et Lotterie J., Principes de la Théorie des Mécanismes. Dunod, 1975.
- [Lindkvist et al, 2003]** Lindkvist L. and Söderberg R., Computer-Aided Tolerance Chain and Stability Analysis. Journal of Engineering Design, 14:1:17-39, 2003.
- [Liu et al, 1996]** Liu S. C., Hu S. J. et Woo T. C., Tolerance Analysis for Sheet Metal Assemblies. Journal of Mechanical Design, 118:1:62-67, 1996.
- [Liu et al, 1997]** Liu S. C. et Hu S. J., Variation Simulation for Deformable Sheet Metal Assemblies Using Finite Element Methods. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 119: 3:368-374, 1997.

- [Mandil et al, 2009a]** Mandil G., Desrochers A. et Rivière A., Computational Methodology for the Prediction of Functional Requirement Variations Across the Product Life-Cycle. Proc. of 11th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009.
- [Mandil et al, 2009b]** Mandil G., Desrochers A. et Rivière A., Framework for the Monitoring of Functional Requirements Along the Product Life Cycle. Proc. of 6th Conception et Production Intégrées, Rabat, Maroc, 2009.
- [Marguet et al, 2003]** Marguet B., Falgarone H. et Chevassus N., AnaTole: un outil d'analyse 3d des variations géométriques pour la conception de produit aéronautique. Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique, 18:1:113-122, 2003.
- [MECAMaster, 2011]**, [www.mecamaster.com](http://www.mecamaster.com)
- [Mounaud et al, 2007]** Mounaud M., Thiebaut F., Bourdet P., Falgarone H. et Chevassus N., Integrating the flexibility of components in the assembly of aeronautics hydraulic systems. Proc. of 10th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany, 2007.
- [Mounaud et al, 2009]** Mounaud M., Thiebaut F., Bourdet P., Falgarone H. and Chevassus N., Assembly Sequence Influence on Geometric Deviations Propagation of Compliant Parts. Proc. of 11th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009.
- [Mujezinovi et al, 2004]** Mujezinovi A., Davidson J.K. et Shah J.J., A new mathematical model for geometric tolerances as applied to round faces. ASME Transactions on Journal of Mechanical Design, 126:504-518, 2004.
- [Nigam et al, 1995]** Nigam S. D. et Turner J. U., Review of statistical approaches to tolerance analysis, Computer Aided Design 27:1:6-15, 1995.
- [Open CASCADE, 2011]** [www.opencascade.com](http://www.opencascade.com)
- [Petit et al, 2003]** Petit J.-P., Samper S. et Giordano M., Minimum clearance for tolerancing analysis of vacuum pump, In proc. of the 8th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Charlotte, North Carolina, USA, 2003.

- [Pierre et al, 2007]** Pierre L., Teissandier D. and Nadeau J.-P., Analyse des tolérances géométriques dans un contexte multi-expertises, application à une turbine de moteur d'hélicoptère, Congrès Français de Mécanique, 2007.
- [Pierre et al, 2009a]** Pierre L., Teissandier D. and Nadeau J.-P., Integration of thermomechanical strains into tolerancing analysis, In International Journal on Interactive Design and Manufacturing 3:247-263, 2009.
- [Pierre et al, 2009b]** Pierre L., Teissandier D. and Nadeau J.-P. Integration of multiple physical behaviours into a geometric tolerancing approach. Proc. of the 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Annecy, France, 2009.
- [Pierre et al, 2010]** Pierre L., Teissandier D. and Nadeau J.-P., Qualification of turbine architectures in a multiphysical approach: application to a turboshaft engine, Proc. of the 8th conference on Integrated Design on Manufacturing and Mechanical Engineering, Bordeaux, France, 2010.
- [Pluviose et al, 2002]** Pluviose M. et Périllon C., Turbomachines : Description et principes de base, Techniques de l'Ingénieur, BM 4 280:1-15, 2002.
- [Pluviose et al, 2003]** Pluviose M. et Périllon C., Turbomachines : Bilan énergétique et applications, Techniques de l'Ingénieur, BM 4 283:1-16, 2002.
- [Requichaa, 1983]** Requichaa A. A. G., Toward a theory of geometric tolerancing, The International Journal of Robotics Research, 2 : 45-60, 1993.
- [Roy et al, 1999]** Roy U et Li B. Representation and interpretation of geometric tolerances for polyhedral objects. Computer Aided Design ;31(4) :273–85, 1999.
- [Samper S. et al, 1997]** Samper S. et Giordano M., Models for tolerancing process by considering mechanism flexibility. Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering'96, Kluwer Academic Publishers, 349-357, 1997.
- [Samper S. et al, 1998]** Samper S. et Giordano M., Taking into account elastic displacements in 3d tolerancing Models and application. Journal of Materials Processing Technology, 78 :1-3 :156-162, 1998.

- [Samper S. et al, 2003]** Samper S. et Giordano M., Simultaneous analysis method for tolerancing flexible mechanisms In Geometric Product Specification and Verification : Integration of Functionality. Pierre Bourdet and Luc Mathieu Ed., Kluwer Accademic Publishers, 127-134, 2003.
- [Samper S. et al, 2007]** Samper S., Petit J.-P. et Giordano M., Elastic clearance domain and use rate concept applications to ball bearings and gears. Models for Computer Aided Tolerancing in Design and Manufacturing, 331-340, 2007.
- [Serre et al, 2001]** SerreP. et Rivière A., Analysis of functional geometrical specification. Proc. of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing , Cachan, France, 2001.
- [Shen et al, 2008]** Shen Z., Shah J.J. and Davidson J.K. Analysis neutral data structure for GD&T. Journal Intell Manuf, DOI10.1007/s10845-008-0096-2, 2008.
- [Shiu et al, 1997]** Shiu B., Ceglarek D. et Shi J., Flexible Beam-Based Modeling of Sheet Metal Assembly for Dimensional Control. Transactions of NAMRI/ SME, 25 :49-54, 1997.
- [Skowronski et al, 1997]** Skowronski V. J. et Turner J. U., Using Monte Carlo variance reduction in statistical tolerance synthesis, Computer Aided Design 29:1:63-69, 1997.
- [Söderberg et al, 2001]** Soderberg R. et Lindkvist L., Automated Seam Variation and Stability Analysis for Automotive Body System. Proc. of the 7th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Cachan (France), ISBN 1-4020-1423-6, Kluwer academic publisher, p. 255-264, 2001.
- [Söderberg et al, 2002]** Söderberg R. and Lindkvist L., Stability and Seam Variation Analysis for Automobile Body Design. Journal of Engineering Design, 13 :2 :173-187, 2002.
- [Söderberg et al, 2006a]** Söderberg R., Lindkvist L. and Carlson J., Virtual Geometry Assurance for Effective Product Realization. Proc. of the 1st Nordic Conference on Product Lifecycle Management, Göteborg, 2006
- [Söderberg et al, 2006b]** Söderberg R., Lindkvist L. and Dahlström S., Computer Aided Robustness Analysis for Compliant (non-rigid) Assemblies. Journal of Engineering Design, 17 :1 :411-428, 2006.
- [Söderberg et al, 2008]** Söderberg R., Wickman C. and Lindkvist L., Improving decision making by simulating and visualizing geometrical variation in non-rigid assemblies. Annals of the CIRP, Manufacturing Technology, 57 :175-178, 2008

- [Spensieri, 2009]** Spensieri, A method to optimize geometrical quality and motion feasibility of assembly sequences. Proc. of the 11th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing. Annecy (France), 2009.
- [Srinivasan, 1993]** Srinivasan V., Role of Sweeps in Tolerancing Semantics, In proc. of the International Forum on Dimensional Tolerancing and Metrology, CRTD 27:69-78, 1993.
- [Teissandier et al, 1999a]** Teissandier D., Couétard Y. et Gérard, A. A Computer Aided Tolerancing Model: Proportioned Assemblies Clearance Volume. Computer Aided Design, 31 :805-817, 1999.
- [Teissandier et al, 1999b]** Teissandier D., Delos V. et Couétard Y. Operations on polytopes : application to tolerance analysis, In proc. of the 6th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing ISBN 0-7923-5654-3, 425-433, Kluwer academic publisher, 1999
- [Turner, 1990]** Turner J. U., Relative positioning of parts in assemblies using mathematical programming. Computer Aided Design, 22 :394-400, 1990
- [Turner, 1993]** Turner J. U., A feasibility space approach for automated tolerancing. Journal of Engineering for Industry, 115:341-345, 1993.
- [Wärmefjord et al, 2007]** Wärmefjord K., Carlson J. S. and Söderberg R., Geometrical Inspection Point Reduction for Rigid and Non-Rigid Parts Using Cluster Analysis - Industrial Verification. Proc. of the 10th CIRP Seminar on Computer Aided Tolerancing, Erlangen, Germany., 2007.
- [Wärmefjord et al, 2009]** Wärmefjord K., Carlson J. S. and Söderberg R., A Measure of the Information Loss for Inspection Point Reduction. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 131 :5, 2009.
- [Whitney et al, 2001]** Whitney D.E. et Adams J.D. Application of screw theory to analysis of mobility and constraint of mechanisms. Journal of mechanical design, 123 :1 :26-32, 2001.
- [Wickman et al, 2001]** Wickman C., Söderberg R. and Lindkvist L., Toward Non-Nominal Virtual Geometric Verification By Combining VR and CAT Technologies. Proc. Of the 7th CIRP International Seminar on Computer Aided Tolerancing, Cachan, France, 2001.

- [Wickman et al, 2004] Wickman C. and Söderber, R., Comparison of non-nominal geometry models represented in physical versus virtual environments. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 4 :3 :171-177, 2004.
- [Wirtz, 1991] Wirtz A., Vectorial tolerancing for production quality control and functional analysis in design. *Annals of the CIRP, Pennstate, USA*, 1991.
- [Wu et al, 1988] Wu Z. et Elmaraghy W. H., Evaluation of cost-tolerance algorithms for design tolerance analysis and synthesis. *Journal of Manufacturing Systems*, 1 :168-179, 1998.
- [Wu et al, 2003]. Wu Y., Shahet J.J. et Davidson J.K., Improvements to algorithms for computing the Minkowski sum of 3-polytopes, *Computer-Aided Design*, 35 :1181-1192, 2003.
- [Xie et al, 2007] Xie K., Wells L., Camelio J. A. et Youn B. D., Variation Propagation Analysis on Compliant Assemblies Considering Contact Interaction. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 129 :5 :934-942, 2007.
- [Ziegler, 1995] Ziegler G., *Lectures on polytopes*, ISBN 0-387-94365-X, Springer Verlag, 1995.



## INTEGRATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES PIECES DANS L'ANALYSE DES SPECIFICATIONS GEOMETRIQUES : APPLICATION A UNE TURBINE DE MOTEUR D'HELICOPTERE

**RESUME :** La performance d'un moteur d'hélicoptère est fortement corrélée à la performance de la turbine haute pression, et plus particulièrement à l'influence des différents composants constitutifs. Le rendement énergétique d'une turbine haute pression est garanti par la maîtrise des jeux entre les sommets des aubes et le stator durant tout le cycle de fonctionnement de la turbine. L'objectif de ces travaux est de proposer une méthode à caractère multiphysique reposant sur des opérations de polytopes (somme de Minkowski et intersection) permettant de valider des spécifications géométriques, des spécifications de contacts et des spécifications thermomécaniques. Ces spécifications garantissent une limite de la section de fuite en sommets d'aubes pour un risque de touche minimal. Un polytope permet de simuler les variations géométriques entre deux surfaces d'une même pièce, de surcroît un polytope de contact permet de simuler les variations géométriques entre deux surfaces potentiellement en contact. La structure topologique des contacts de la turbine se formalise par un graphe de contacts à une composante connexe. Cette structure permet de définir les sommes de Minkowski et les intersections des polytopes traduisant la propagation des écarts géométriques à travers la turbine. Les écarts géométriques d'origine thermomécanique sont évalués par la méthode des éléments finis. Ces travaux donnent au concepteur des éléments de décision sur l'influence des choix de conception, en particulier l'influence des formes de pièces et du comportement des liaisons, sur le fonctionnement de la turbine.

**Mots clés :** Tolérancement géométrique, thermomécanique, conception architecturale, algèbre linéaire, polytope

## INTEGRATION OF THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOUR OF PARTS IN TOLERANCING ANALYSIS: APPLICATION TO A HELICOPTER TURBOSHAFT ENGINE TURBINE

**ABSTRACT :** The performance of a helicopter engine is strongly correlated to the performance of the high pressure turbine, and particularly to the influence of the different components. The energy efficiency of a high pressure turbine is guaranteed by controlling the clearance between the top of the blades and the stator during the operating cycle of the turbine. The objective of this work is to propose a multi-physics approach based on operations on polytopes (Minkowski sum and intersection) to validate the geometric specifications, contact specifications and thermomechanical specifications. These specifications ensure a limit of the leakage section at the top of the blades for a minimal touch risk. A polytope simulates the geometric variations between two surfaces of the same part; moreover a contact polytope simulates the geometric variations between two surfaces potentially in contact. The topological structure of the contacts within the turbine is formalized by a connected graph. This structure helps to define the Minkowski sums and intersections of polytopes resulting from the propagation of the geometric deviations through the turbine. The geometric deviations induced by the thermomechanical strains are estimated by the finite element method. These works give elements of decision to the designer on the influence of design choices, especially the influence of part shapes and of behaviour of joints, on the operation of the turbine.

**Keywords :** Geometric tolerancing, thermomechanical, embodiment design, linear algebra, polytope

