



HAL
open science

Calcul direct du rayonnement acoustique généré par une cavité cylindrique sous une aile d'avion

Chicheportiche Jérémie

► To cite this version:

Chicheportiche Jérémie. Calcul direct du rayonnement acoustique généré par une cavité cylindrique sous une aile d'avion. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Arts et Métiers ParisTech, 2011. Français. NNT : 2011ENAM0027 . pastel-00639012

HAL Id: pastel-00639012

<https://pastel.hal.science/pastel-00639012v1>

Submitted on 7 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'Ingénieur

Doctorat ParisTech

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité " Mécanique "

présentée et soutenue publiquement par

Jérémie CHICHEPORTICHE

le 12 octobre 2011

Calcul direct du rayonnement acoustique généré par une cavité cylindrique sous une aile d'avion

Directeur de thèse : **Alain LERAT**

Co-encadrement de la thèse : **Xavier GLOERFELT**

Jury

M. Christophe BAILLY, Professeur, LMFA, École Centrale de Lyon

M. Avraham HIRSCHBERG, Professeur, Applied Physics, Université technologique d'Eindhoven

M. Eric LAMBALLAIS, Professeur, Institut P', Université de Poitiers

M. Lionel LARCHEVEQUE, Maître de Conférences, IUSTI, Université de Marseille

M. Aloïs SENGISSSEN, Ingénieur de recherche, Airbus

M. Xavier GLOERFELT, Maître de Conférences, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech

M. Alain LERAT, Professeur, DynFluid, Arts et Métiers ParisTech

Président

Rapporteur

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

T
H
È
S
E

Table des matières

Introduction	7
1 Méthodes numériques pour l'aéroacoustique	11
1.1 Equations résolues	11
1.1.1 Formulation 3-D cartésienne	11
1.1.2 Formulation cylindrique	13
1.2 Schémas de discrétisation spatiale	14
1.2.1 Différences finies standards sur $2N + 1$ points d'ordre $2N$	14
1.2.2 Schémas optimisés	15
1.3 Filtrage sélectif	17
1.3.1 Filtres standards sur $2N + 1$ points d'ordre $2N$	17
1.3.2 Filtres optimisés	17
1.4 Schémas d'avancement temporel	18
1.4.1 Critères de stabilité	19
1.4.1.1 Critère CFL	19
1.4.1.2 Critère visqueux	19
1.4.2 Schémas de Runge-Kutta	19
1.4.2.1 Schémas de Runge-Kutta standards	20
1.4.2.2 Schémas de Runge-Kutta linéaires à stockage réduit	20
1.4.2.3 Schémas de Runge-Kutta optimisés	21
1.5 Conditions aux limites	22
1.5.1 Traitement de la paroi	23
1.5.1.1 Condition de Tam et Dong	23
1.5.1.2 Filtrage à la paroi	24
1.5.2 Conditions de rayonnement de Tam et Dong	24
1.5.3 Conditions de Tam et Dong pour une sortie de fluide	25
1.5.4 Elaboration d'une zone éponge	25
1.6 Diffraction d'une source harmonique par un cylindre	26
1.6.1 Filtrage à la paroi	27
1.6.2 Discrétisation	28
1.7 Simulations des grandes échelles	28
1.7.1 Approches traditionnelles	29
1.7.2 Limitations des modèles de viscosité turbulente	30
1.7.3 Quelques développements récents	31
1.7.4 Approche retenue pour le présent travail	33
1.8 Conclusion	33

2	Méthode de recouvrement de maillages	35
2.1	Introduction aux méthodes de recouvrement de maillages	35
2.2	Principe de la méthode de recouvrement de maillages	36
2.2.1	Exemple 1-D	36
2.2.2	Interpolation explicite et implicite	37
2.2.3	Rôle et choix de l'interpolation	38
2.2.3.1	Précision	38
2.2.3.2	Stabilité	38
2.2.3.3	Conservativité	38
2.3	Interpolation dans un espace à une dimension	39
2.3.1	Formulation explicite d'une interpolation 1-D	39
2.3.2	Schémas d'interpolation 1-D	39
2.3.3	Analyse spectrale des schémas d'interpolation 1-D	41
2.3.4	Validation des interpolations 1-D : Advection linéaire 1-D	46
2.4	Interpolation dans un espace à deux dimensions	48
2.4.1	Introduction aux interpolations dans un espace 2-D	48
2.4.2	Formulation explicite d'une interpolation 2-D	48
2.4.3	Interpolations 2-D pour un support cartésien et support transformé	48
2.4.4	Interpolations 2-D pour un support curviligne	50
2.4.5	Analyse spectrale des méthodes d'interpolation 2-D	53
2.4.6	Validation numérique des interpolations 2-D	58
2.4.6.1	Stratégie de recouvrement de maillages	58
2.4.6.2	Recouvrement entre deux grilles cartésiennes	59
2.4.6.3	Recouvrement du coeur d'un maillage polaire par un maillage cartésien	63
2.4.6.4	Diffraction d'une source harmonique par deux cylindres	64
2.5	Conclusions	67
3	Condition d'entrée turbulente	69
3.1	Génération de turbulence synthétique	69
3.1.1	La méthode des modes de Fourier aléatoires (RFM)	69
3.1.1.1	Présentation de la méthode	69
3.1.1.2	Résultats pour la cavité cylindrique	71
3.1.2	La méthode des structures synthétiques (SEM)	73
3.1.2.1	Présentation de la méthode des structures synthétiques	73
3.1.2.2	Résultats pour la cavité cylindrique	75
3.1.3	Conclusion sur les méthodes de turbulence synthétique	76
3.2	Génération de turbulence amont par une méthode de recyclage	77
3.2.1	Introduction	77
3.2.2	Résultats pour le cavité cylindrique	77
3.2.2.1	Avec rescaling	78
3.2.2.2	Sans rescaling	80
3.2.3	Conclusion sur les méthodes de recyclage	82
3.3	Génération de turbulence avec un profil inflexionnel perturbé	83
3.3.1	Résultats	84
3.3.2	Conclusion sur la génération de turbulence par un profil inflexionnel perturbé	87

4	Rayonnement acoustique d'un écoulement sur une cavité	89
4.1	Origine physique du rayonnement acoustique	90
4.1.1	Rétroactions aéroacoustiques	90
4.1.1.1	Impact d'une couche de mélange	90
4.1.1.2	Bouclage aéroacoustique pour la cavité	90
4.1.1.3	Modèle de Rossiter	92
4.1.2	Résonances acoustiques	93
4.1.2.1	Cavités actives et passives	93
4.1.2.2	Modes acoustiques d'une cavité	93
4.1.2.3	Résonateur d'Helmholtz	94
4.2	Paramètres influençant le rayonnement acoustique	95
4.2.1	Cavité rectangulaire	95
4.2.1.1	Géométrie de la cavité	95
4.2.1.2	Écoulement en amont de la cavité	95
4.2.1.3	Dynamique de la couche de cisaillement	96
4.2.1.4	Recirculation dans la cavité	97
4.2.2	Cavités cylindriques	99
4.2.2.1	Dynamique de la recirculation	99
4.2.2.2	Champ acoustique	100
4.2.2.3	Projet AEROCAV	101
5	Rayonnement acoustique d'une cavité cylindrique $H/D=1$	105
5.1	Configuration d'étude	105
5.2	Stratégie de recouvrement de maillages	105
5.2.1	Recouvrement de maillages à l'intérieur de la cavité	105
5.2.2	Recouvrement de maillages à l'extérieur de la cavité	106
5.2.3	Interpolations dans les recouvrements de maillages	107
5.3	Simulations réalisées	107
5.3.1	Paramètres pour la simulation sans fluctuation en amont	108
5.3.2	Paramètres pour la simulation avec fluctuations en amont	108
5.4	Résultats	109
5.4.1	Champs moyens	109
5.4.2	Intensités turbulentes	117
5.4.3	Développement de la couche de mélange	121
5.4.4	Fluctuations de pression aux parois	123
5.4.5	Bruit rayonné	128
5.5	Discussions	129
5.5.1	Prédiction des fréquences des modes de la couche de mélange	129
5.5.2	Prédiction des modes de résonance d'une cavité	130
5.5.3	Modèle couplant la dynamique modale de la couche de mélange et les modes de résonance	130
5.6	Conclusions	131
	Conclusion	133

Remerciements

Ce travail de thèse s'est déroulé d'octobre 2007 à octobre 2011 au sein du laboratoire de Dynamique des Fluides (DYNFLUID) de l'école Arts et Métiers ParisTech.

Je remercie tout d'abord mes directeurs de thèse Xavier Gloerfelt et Alain Lerat, respectivement maître de conférence et professeur émérite à DYNFLUID. Xavier m'a effectivement énormément apporté que ce soit d'un point de vue scientifique ou de celui des méthodes de travail qui me seront sûrement utiles à l'avenir. Je suis reconnaissant auprès d'Alain de m'avoir permis de faire cette thèse. Je tiens ensuite à remercier les différents membres du jury : tout d'abord, Christophe Bailly pour avoir présidé avec sérieux ma soutenance, puis les rapporteurs Avraham Hirschberg et Éric Lamballais pour leurs examens minutieux du mémoire et leur amabilité, et enfin les examinateurs Lionel Larchevêque et Aloïs Sengissen pour leurs remarques souvent judicieuses et pertinentes.

Je tiens aussi à remercier les différents partenaires du projet AEROCAR à savoir les départements DAFE, DSNA, et DMAE de l'ONERA, le laboratoire IUSTI de l'université de Marseille et le laboratoire LMFA de l'École Centrale de Lyon.

Je remercie tous les membres du laboratoire DYNFLUID pour l'ambiance agréable qui y règne. J'ai une pensée particulière pour mes différents collègues de bureau à commencer par Valérie (allez courage, ça y est presque), Grégory (en fait, je suis plutôt Nadal), Rocio (viva Barça) et Guillaume (merci pour l'écran même si j'ai l'impression de l'avoir payé en café). Une autre pensée pour les doctorants qui continuent sur leur lancée comme Song Ge, Junior, Karim ou Pierre-Yves et aussi pour les anciens doctorants ou ingénieurs, Thomas, Maizen, Stéphanie, Samuel et Du Xi. Je remercie aussi tous les permanents, Paola, Jean-Christophe, Floriant, Virginie, Patrick, Farid et Frédéric pour leur disponibilité et leur gentillesse. Je tiens à adresser un spécial "Big Up" au "Chef" Don Xavier Merle qui a été guide spirituel durant toutes ces années.

Enfin, je remercie tous mes amis de Cachan avec lesquels j'ai parcouru un sacré bout de chemin et mes amis de Paris Nord pour les agréables vacances que j'ai passé en leur compagnie. Je remercie ma famille pour leur soutien moral et particulièrement mes parents et mon frère pour avoir supporté mes sautes d'humeur durant ces quatre années.

Introduction

L'apparition des premiers turboréacteurs d'avions dans les années 50 a initié la problématique des nuisances sonores en milieu urbain dans le secteur aéronautique. Le développement des flottes aériennes et des aéroports les années suivantes a rendu plus urgent le besoin de réduire les différentes composantes de bruit d'un avion. L'intégration écologique des aéroports dans l'environnement urbain reste actuellement un problème ouvert.

C'est dans ce contexte que l'aéroacoustique a connu dès lors un essor sans précédent. Cette discipline se rapporte à l'étude du bruit d'origine aérodynamique, majoritairement dans les secteurs du transport routier, ferroviaire et bien évidemment aérien. Les sources de bruit aéroacoustique sont multiples pour un avion. Une des composantes importantes et qui a été la plus étudiée est celle du jet en sortie du réacteur. Cette composante fait encore l'objet de nombreuses investigations. Ce bruit est fortement audible au décollage de l'avion, lorsque celui-ci a besoin d'un maximum de puissance. A l'atterrissage, le régime des moteurs est réduit et la source acoustique prépondérante est le bruit de cellule de l'avion, c'est-à-dire celui dû à sa voilure, à son fuselage et à son train d'atterrissage. Ce bruit est devenu d'autant plus important aux yeux des industriels que différents progrès techniques ont déjà contribué à réduire drastiquement le bruit des moteurs. Le bruit de la voilure d'un avion en phase d'atterrissage est assez complexe. On distingue ainsi le bruit lié au bord d'attaque (interactions avec des structures tourbillonnaires et avec la turbulence atmosphérique) et le bruit de bord de fuite (dû à des lâchés tourbillonnaires ou à la diffraction de structures turbulentes par le bord). Durant la phase d'atterrissage, les volets hypersustentateurs sont déployés et le problème se complexifie encore avec l'apparition de deux corps supplémentaires. Si ces composantes du bruit de cellule lors de l'atterrissage sont prépondérantes, d'autres sources de bruit plus discrètes existent. Ces sources sont essentiellement dues aux irrégularités de la surface de l'aile comme la présence de tubes de pitot ou de petites cavités. Ces cavités peuvent avoir divers rôles comme assurer une ventilation d'air chaud afin d'éviter le gel des lames d'une aile ou évacuer un surplus de carburant en cas d'urgence. Lors de la phase d'atterrissage, ces cavités génèrent un bruit assez intense et très marqué en fréquence. Même si ces composantes ne sont pas assez importantes pour rentrer en compte lors de la certification acoustique des avions, elles sont suffisamment prises au sérieux pour que les avionneurs les étudient de près.

De nos jours, la simulation numérique en mécanique des fluides est une alternative plausible aux campagnes expérimentales pouvant parfois s'avérer onéreuses. En simulation numérique pour l'aéroacoustique, deux approches différentes existent. La première consiste à simuler les équations Navier-Stokes pour la région responsable du bruit aérodynamique grâce à un code de simulation de mécanique des fluides. Cette zone peut être restreinte et les ondes acoustiques ne sont pas forcément prises en compte. La simulation sert ensuite à construire des termes sources pour une analogie acoustique. Cette analogie acoustique est une reformulation des équations de Navier-Stokes et permet, si l'on connaît la source du rayonnement acoustique, d'en déduire le rayonnement. L'analogie acoustique est basée sur les travaux de Lighthill [120, 121]. Une deuxième approche est le calcul direct du bruit ou

Direct Noise Computation (DNC) en anglais. Cette solution consiste à simuler en un seul calcul à la fois le champ aérodynamique et le champ acoustique via une résolution complète des équations de Navier-Stokes compressibles. Ainsi aucune erreur de modélisation, due à une simplification des équations, n'est réalisée. Les différents schémas numériques pour ce genre de simulation doivent être à la fois capables de propager les ondes acoustiques sur des longues distances sans les dissiper, mais aussi être capables de résoudre les grandes longueurs d'onde et les plus petites longueurs d'onde liées à un rayonnement acoustique haute fréquence ou aux fines échelles turbulentes. Ces simulations nécessitent donc des schémas les moins dissipatifs et dispersifs possibles. En général, les schémas utilisés ont un comportement que l'on nomme quasi-spectral, au sens où ils sont optimisées pour résoudre un spectre de longueur d'ondes très étendues [116, 184]. Ainsi, grâce à ce type de simulation, de nombreuses études sur divers écoulements ont pu être réalisées avec succès [34].

Pour des simulations numériques utilisant des maillages structurés, l'emploi de géométries curvilignes complexifie le calcul comme c'est le cas pour un profil d'aile par exemple. En effet, des maillages curvilignes impliquent à certains endroits des cellules assez déformées pour dégrader la précision des schémas, voir compromettre la simulation. De plus, ces déformations peuvent être très prononcées lorsque l'on s'éloigne du corps autour duquel l'écoulement est résolu. C'est pourquoi, des techniques de recouvrement de maillages ont été mises au point afin de mieux contrôler la régularité des mailles et la densité des points des maillages [11, 28]. Ces techniques consistent à utiliser plusieurs topologies de maillages pour un même calcul. Les différents maillages communiquent leur solution calculée grâce à des interpolations. Pour un profil d'aile par exemple, on utilise un maillage curviligne restreint autour du profil qui recouvre un maillage cartésien de fond. Pour le cas d'un écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique, on préfère utiliser un maillage cylindrique dans la cavité et un maillage cartésien au-dessus. Cependant, de telles techniques ont longtemps été utilisées avec des schémas d'ordre faible réservés à des simulations aérodynamiques pour lesquels de petites échelles, liées à la turbulence ou à l'acoustique, n'avaient pas besoin d'être résolues. Ce n'est que récemment que les simulations aéroacoustique emploient ces méthodes avec des schémas d'ordre élevés.

Projet Aerocav AIRBUS a initié dans le cadre de l'initiative de recherche IROQUA, et avec le soutien de la Fondation de Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace (FRAE), le projet AEROCV (Aéroacoustique des cavités) destiné à étudier le bruit rayonné par un écoulement subsonique au-dessus de cavités cylindriques. Ces cavités mesurent une dizaine de centimètres et se situent sous les ailes d'avions. Elles sont destinées à l'évacuation de surplus de carburant. Elles ne se ferment pas par mesure de sécurité. En phase d'atterrissage de l'avion, elles émettent un rayonnement acoustique très marqué en fréquence. Dans le cadre de ce projet, plusieurs campagnes expérimentales et numériques sont réalisées par plusieurs laboratoires afin d'améliorer la compréhension de la dynamique de ces cavités ainsi que de prédire quantitativement leur rayonnement acoustique. Les campagnes expérimentales sont menées dans la soufflerie subsonique F2 de l'ONERA (située à Fauga-Mauzac) et par le Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA) dans la soufflerie anéchoïque de l'Ecole Centrale de Lyon. Afin de comparer et recouper divers résultats, des simulations numériques d'écoulements de cavités cylindriques sont réalisées par le département DSN de l'ONERA, le LMFA, ainsi que le laboratoire de Dynamique des Fluides (DynFluid) de l'école des Arts et Métiers Paris-Tech. Ces campagnes sont aussi complétées par des études théoriques de stabilité linéaire réalisée par le département DMAE de l'ONERA et le laboratoire Dynfluid.

Objectifs de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la campagne numérique du projet AEROCV. Une simulation numérique du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique sera réalisée grâce à un calcul direct du bruit. Les maillages utilisés seront structurés sur lesquels les équations de Navier-Stokes seront discrétisées grâce à des schémas numériques aux différences finies de haute précision. Cependant, l'aspect cylindrique de la cavité implique, comme il a été mentionné plutôt, requiert l'emploi de techniques de recouvrement de maillages. Les difficultés de ces méthodes sont d'une part, le développement du code lorsque les schémas de discrétisation impliquent de larges supports de discrétisation, et d'autre part le choix de l'interpolation pour ne pas dégrader la précision de la solution lors de la communication entre les maillages. De plus, afin de simuler un écoulement le plus réaliste possible et le plus conforme aux expériences, un travail sur l'introduction de turbulence en amont de la cavité sera réalisé. Pour un calcul direct de bruit, la difficulté de l'introduction de turbulence en entrée de domaine est de réduire le plus possible le rayonnement acoustique parasite. En effet, nous verrons que l'acoustique rayonnée par l'écoulement au-dessus de la cavité est très faible et que suivant les méthodes d'introduction employées, ce rayonnement peut être totalement masqué. Enfin, l'étude d'un écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique sera abordée. Afin de valider nos résultats, les calculs seront comparés aux bases de données expérimentales. Le but de ces calculs est d'observer la complexité de l'écoulement due à une cavité cylindrique et de prédire le rayonnement acoustique.

Organisation du mémoire

Dans un premier chapitre, les schémas numériques de haute précision utilisés pour la réalisation d'un calcul direct seront détaillés. La modélisation utilisée pour la simulation des grandes échelles est aussi abordée.

Le deuxième chapitre porte sur la mise en place de méthodes de recouvrement de maillages pour le calcul direct. Le point principal de ce chapitre sera le choix de l'interpolation compatible avec des schémas de haute précision. Dans un premier temps, l'analyse et la validation d'interpolations dans un espace à une dimension seront entreprises. Dans un deuxième temps, les interpolations dans un espace à deux dimensions seront étudiées. À l'issue de divers cas tests, un choix sur l'interpolation sera fait.

Le troisième chapitre aborde les conditions d'entrée turbulente dans le cadre de calculs en aéroacoustique. Plusieurs techniques seront abordées. Les premières, basées sur les méthodes de turbulence synthétique, sont la technique des modes de Fourier aléatoires (Random Fourier Method) et la méthode des structures synthétiques (Synthetic Eddy Method). Les méthodes de recyclage et de remise à l'échelle d'un calcul précurseur de couche limite turbulente seront ensuite testées. Enfin, une méthode basée sur la transition vers la turbulence par un profil inflexionnel perturbé est développée.

Une bibliographie exhaustive du bruit de cavité est ensuite proposée dans le quatrième chapitre. Les études expérimentales et numériques mentionnées aborderont aussi bien les cavités rectangulaires que les cavités cylindriques.

Enfin, dans le dernier chapitre, deux simulations d'écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique seront réalisées. La cavité aura un diamètre égal à sa profondeur de 100 mm et l'écoulement subsonique aura une vitesse amont de 70 m/s. La différence entre les deux simulations est essentiellement la présence d'une condition d'entrée turbulente dans l'une d'entre elles. Les deux simulations seront comparées à la campagne expérimentale de l'École Centrale de Lyon.

Chapitre 1

Méthodes numériques d'ordre élevé pour la simulation en aéroacoustique

Dans cette thèse, nous avons décidé de réaliser des calculs directs c'est-à-dire d'obtenir lors d'un même calcul les champs aérodynamique et acoustique. L'obtention d'un champ acoustique propre impose l'utilisation de méthodes numériques spécifiques. En effet, dans la plupart des configurations que nous allons étudier, les fluctuations du champ acoustique sont inférieures de un à plusieurs ordres aux fluctuations de pression aérodynamique. Afin de ne pas dissiper ces faibles fluctuations de pression, la méthode numérique employée doit être faiblement dissipative. Elle doit aussi être capable de propager le champ acoustique en champ lointain sans distorsion. Les simulations aéroacoustiques directes nécessitent donc des schémas spatiaux et temporels faiblement dissipatifs et dispersifs. Nous présentons dans ce chapitre l'ensemble des méthodes numériques que nous utiliserons par la suite pour étudier le bruit d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique.

1.1 Equations résolues

Lors de la simulation du bruit de cavité cylindrique, deux formulations 3-D des équations de Navier-Stokes sont utilisées. La première est la formulation cartésienne. En effet, un maillage cartésien en dehors de la cavité permet de mieux propager les ondes acoustiques et de mieux discrétiser la turbulence dans la couche limite en amont de la cavité. La deuxième formulation utilise les coordonnées cylindriques afin d'améliorer le traitement des parois de la cavité.

1.1.1 Formulation 3-D cartésienne

Les équations de Navier-Stokes en formulation conservative pour un maillage cartésien (x, y, z) s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_\nu + q_x \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_\nu + q_y \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_\nu + q_z \end{aligned}$$

où l'indice e correspond à la partie Euler et l'indice ν à la partie visqueuse des flux. q_x , q_y et q_z correspondent aux trois composantes du flux de chaleur définies par $q_\alpha = -(\mu c_p / \sigma)(\partial T / \partial \alpha)$ où μ est la viscosité dynamique moléculaire, σ est le nombre de Prandtl et c_p le coefficient de chaleur spécifique à pression constante. Les flux convectifs \mathbf{F}_e , \mathbf{G}_e et \mathbf{H}_e et les flux visqueux \mathbf{F}_ν , \mathbf{G}_ν et \mathbf{H}_ν sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_e &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} & \mathbf{F}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{G}_e &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix} & \mathbf{G}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} \end{pmatrix} \\
 \mathbf{H}_e &= \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix} & \mathbf{H}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

ρ , p , u , v et w étant respectivement la masse volumique, la pression et les composantes horizontale, verticale et transversale de la vitesse. E représente l'énergie interne totale définie par :

$$E = p / [(\gamma - 1)\rho] + (u^2 + v^2 + w^2) / 2,$$

le système étant fermé par l'équation des gaz parfaits :

$$p = \rho r T,$$

où T représente la température et r la constante des gaz parfaits. Les composantes du tenseur des déformations sont celles d'un fluide newtonien :

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\
 \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yy} &= \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \\
 \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \tau_{zz} &= \mu \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)
 \end{aligned}$$

La viscosité dynamique est déterminée à partir de la loi de Sutherland.

1.1.2 Formulation cylindrique

Les équations de Navier-Stokes en formulation conservative pour un maillage cylindrique (r, θ, z) s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \mathbf{F}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} + \frac{\mathbf{B}}{r} = 0 \quad (1.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, \rho u_r, \rho u_\theta, \rho u_z, \rho E)^\top \\ \mathbf{F} &= \mathbf{F}_e - \mathbf{F}_\nu + q_r \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_e - \mathbf{G}_\nu + q_\theta \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_e - \mathbf{H}_\nu + q_z \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_e - \mathbf{B}_\nu \end{aligned}$$

Les flux convectifs \mathbf{F}_e , \mathbf{G}_e et \mathbf{H}_e et les flux visqueux \mathbf{F}_ν , \mathbf{G}_ν et \mathbf{H}_ν , ainsi que \mathbf{B}_e et \mathbf{B}_ν , sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e &= \begin{pmatrix} \rho u_r \\ \rho u_r^2 + p \\ \rho u_r u_\theta \\ \rho u_r u_z \\ (\rho E + p) u_r \end{pmatrix} & \mathbf{F}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{rr} \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{rz} \\ u_r \tau_{rr} + u_\theta \tau_{r\theta} + u_z \tau_{rz} \end{pmatrix} \\ \mathbf{G}_e &= \begin{pmatrix} \rho u_\theta \\ \rho u_r u_\theta \\ \rho u_\theta^2 + p \\ \rho u_\theta u_z \\ (\rho E + p) u_\theta \end{pmatrix} & \mathbf{G}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ u_r \tau_{r\theta} + u_\theta \tau_{\theta\theta} + u_z \tau_{\theta z} \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_e &= \begin{pmatrix} \rho u_z \\ \rho u_r u_z \\ \rho u_\theta u_z \\ \rho u_z^2 + p \\ (\rho E + p) u_z \end{pmatrix} & \mathbf{H}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{rz} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zz} \\ u_r \tau_{rz} + u_\theta \tau_{\theta z} + u_z \tau_{zz} \end{pmatrix} \\ \mathbf{B}_e &= \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho u_\theta^2 + p) \\ \rho u_r u_\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B}_\nu &= \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{\theta\theta} \\ \tau_{r\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.4)$$

u_r , u_θ et u_z étant respectivement les composantes radiale, azimutale et axiale de la vitesse. L'énergie interne totale E est donc définie par :

$$E = p/[(\gamma - 1)\rho] + (u_r^2 + u_\theta^2 + u_z^2)/2,$$

le système étant aussi fermé par l'équation des gaz parfaits. Les trois composantes du flux de chaleur sont données par :

$$\begin{aligned} q_r &= -(\mu c_p / \sigma) \frac{\partial T}{\partial r} \\ q_\theta &= -(\mu c_p / \sigma) \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ q_z &= -(\mu c_p / \sigma) \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur de déformations pour une formulation cylindrique et un fluide newtonien sont :

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= \mu \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \\ \tau_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \\ \tau_{\theta\theta} &= \mu \left(2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \\ \tau_{\theta z} &= \mu \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{zz} &= \mu \left(2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) \end{aligned}$$

La viscosité dynamique est aussi déterminée à partir de la loi de Sutherland.

1.2 Schémas de discrétisation spatiale

Pour l'évaluation des dérivées spatiales qui interviennent dans les équations, on a besoin de schémas très précis qui minimisent la dispersion (erreur de phase) et la dissipation (erreur d'amplitude) des ondes acoustiques afin de préserver leur nature durant la propagation. On utilise généralement des différences finies centrées d'ordre élevé qui sont par construction non dissipatives. L'utilisation de telles dérivées permet d'obtenir une erreur de discrétisation très faible. Ces schémas sont optimisés dans l'espace de Fourier : on minimise l'erreur sur une large bande de nombres d'onde afin d'utiliser au mieux la discrétisation (c'est-à-dire le maillage) choisie. L'objectif est de maîtriser la limite de résolubilité du maillage afin de connaître la coupure entre les nombres d'onde résolus et non résolus.

1.2.1 Différences finies standards sur $2N + 1$ points d'ordre $2N$

Une dérivée spatiale $\partial f / \partial x$ est approximée par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j [f(x_0 + j \Delta x)] = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^N a_j [f(x_0 + j \Delta x) - f(x_0 - j \Delta x)] \quad \text{où} \quad a_j = -a_{-j} \quad (1.5)$$

On annule les termes du développement de Taylor de f jusqu'à l'ordre Δx^{2N-1} inclus :

$$f(x_0 + j\Delta x) = f(x_0) + j\Delta x f'(x_0) + \frac{(j\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(j\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(j\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - j\Delta x) = f(x_0) - j\Delta x f'(x_0) + \frac{(j\Delta x)^2}{2!} f''(x_0) - \frac{(j\Delta x)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(j\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \dots$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=1}^N a_j \left[2j\Delta x f'(x_0) + \frac{2j^3\Delta x^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{2j^5\Delta x^5}{5!} f^{(5)}(x_0) + \frac{2j^7\Delta x^7}{7!} f^{(7)}(x_0) + \dots \right]$$

Les coefficients a_j sont alors solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N 2ja_j = 1 \\ \sum_{j=1}^N j^3 a_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N j^{2N-1} a_j = 0 \end{array} \right. \quad N \text{ relations} \quad \rightarrow \quad \text{ordre } 2N$$

Analyse dans l'espace de Fourier En effectuant la transformée de Fourier de (1.5), on définit un nombre d'onde effectif du schéma aux différences finies k^* :

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{j=1}^N a_j \sin(jk\Delta x)$$

L'erreur de dispersion est donnée par $|k^* \Delta x - k\Delta x|/\pi$. Le nombre d'onde effectif des schémas standards est tracé sur la figure 1.1 ainsi que l'erreur de dispersion.

1.2.2 Schémas optimisés

La résolution est choisie pour minimiser une erreur de dispersion plutôt que maximiser un ordre au sens des séries de Taylor. Ce type d'optimisation est appelé DRP (*Dispersion Relation Preserving*) et a été introduit par Tam & Webb (1993) [184]. Ainsi, on cherche à minimiser l'erreur :

$$E = \int_{\ln(k\Delta x)_l}^{\ln(k\Delta x)_h} |k^* \Delta x - k\Delta x| d(\ln(k\Delta x)) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$$

où il faut choisir les 2 limites $(k\Delta x)_l$ et $(k\Delta x)_h$. Pour créer un schéma optimisé sur $2N + 1$ points d'ordre $2M$ ($M < N$), on vérifie les M relations annulant les termes du développement de Taylor jusqu'à Δx^{2M-1} puis on ajoute $M - N$ relations $\partial E/\partial a_j = 0$ pour $j = 1$ à $M - N$ afin d'obtenir un système de N équations à N inconnues a_j .

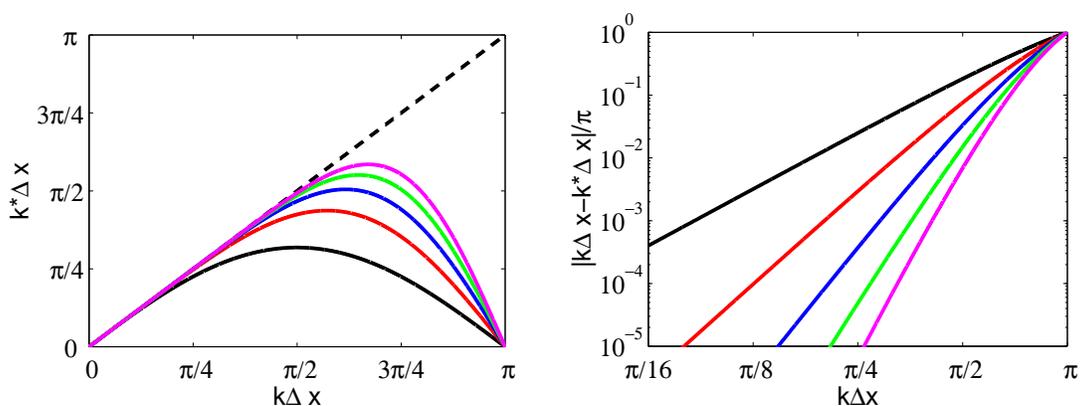


FIG. 1.1 – Caractéristiques des schémas dans l'espace des nombres d'onde. A gauche, on trace le nombre d'onde effectif des schémas standards d'ordre 2 (—), 4 (—), 6 (—), 8 (—), 10 (—) en fonction de $k\Delta x$. La relation exacte est fournie par la droite en pointillés. A droite, l'erreur de discrétisation du schéma aux différences finies est représentée avec une échelle logarithmique.

Schéma optimisé sur 11 points à l'ordre 4 On résout le système $\sum_{j=1}^N 2ja_j = 1$; $\sum_{j=1}^N j^3 a_j = 0$; $\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$; $\frac{\partial E}{\partial a_2} = 0$; $\frac{\partial E}{\partial a_3} = 0$ avec $(k\Delta x)_l = \pi/16$ et $(k\Delta x)_h = \pi/2$. Les coefficients sont donnés dans Bogey et Bailly [19]. L'optimisation du schéma est clairement visible sur la figure 1.2, où l'erreur

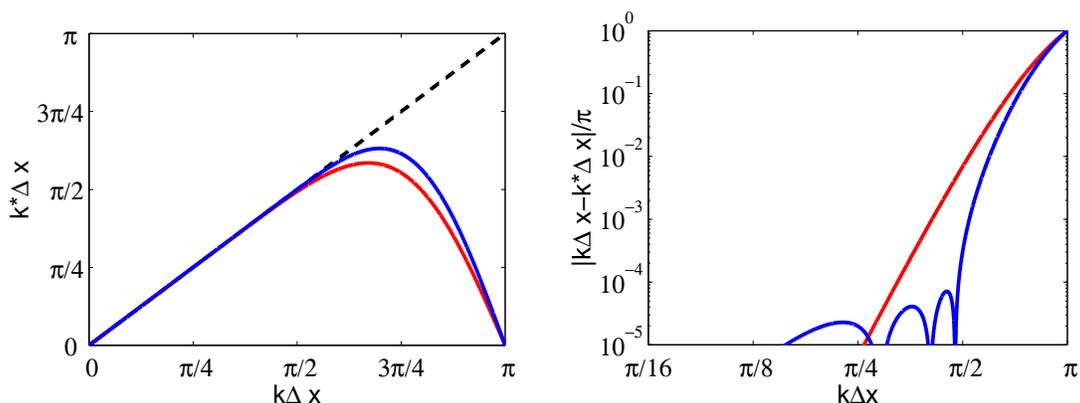


FIG. 1.2 – Caractéristiques des schémas dans l'espace des nombres d'onde. A gauche, on trace le nombre d'onde effectif des schémas standard d'ordre 10 (—) et optimisé d'ordre 4 sur 11 points (—) en fonction de $k\Delta x$. La relation exacte est fournie par la droite en pointillés. A droite, l'erreur de discrétisation du schéma aux différences finies est représentée avec une échelle logarithmique.

de dispersion du schéma optimisé sur 11 points est nettement inférieure à celle du schéma standard d'ordre 10 pour des valeurs de $k\Delta x$ comprises entre $\pi/4$ et $\pi/2$.

1.3 Filtrage sélectif

Les oscillations maille à maille (1 point sur 2 soit $k\Delta x = \pi$) ne sont pas résolues par les différences finies centrées. Ces oscillations "parasites" peuvent apparaître au niveau des conditions aux limites, lorsqu'il existe des forts gradients ou des discontinuités et risquent de contaminer la solution. On introduit un filtrage sélectif centré (non dispersif) pour dissiper ces hautes fréquences sans affecter la solution physique :

$$f^{\text{filtré}}(x_0) = f(x_0) - \sigma_d D_f(x_0) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \sigma_d \leq 1 \quad \text{et} \quad D_f(x_0) = \sum_{j=-N}^N d_j f(x_0 + j\Delta x)$$

La fonction d'amortissement du filtre centré est :

$$D_k(k\Delta x) = d_0 + \sum_{j=1}^N 2d_j \cos(jk\Delta x)$$

1.3.1 Filtres standards sur $2N + 1$ points d'ordre $2N$

On annule les termes du développement de Taylor jusqu'à Δx^{2N-1} inclus

$$\begin{aligned} D_f(x_0) &= d_0 f(x_0) + \sum_{j=1}^N d_j [f(x_0 + j\Delta x) + f(x_0 - j\Delta x)] \\ &= d_0 f(x_0) + \sum_{j=1}^N d_j \left[2f(x_0) + j^2 \Delta x^2 f''(x_0) + \frac{2j^4 \Delta x^4}{4!} f^{(4)}(x_0) + \frac{2j^6 \Delta x^6}{6!} f^{(6)}(x_0) + \dots \right] \end{aligned}$$

et les coefficients $d - j$ sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j = 0 \\ \sum_{j=1}^N j^2 d_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^N j^{2N-2} d_j = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Dans l'espace de Fourier,} \\ N \text{ relations} + \left(\begin{array}{l} D_k(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j = 0 \\ D_k(\pi) = 1 \quad \Rightarrow \quad d_0 + 2 \sum_{j=1}^N (-1)^j d_j = 1 \end{array} \right) \end{array}$$

Les fonctions d'amortissements des filtres standards sont tracées sur la figure 1.3.

1.3.2 Filtres optimisés

On choisit de minimiser l'erreur de dissipation :

$$E = \int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} D_k(k\Delta x) \, d(\ln(k\Delta x))$$

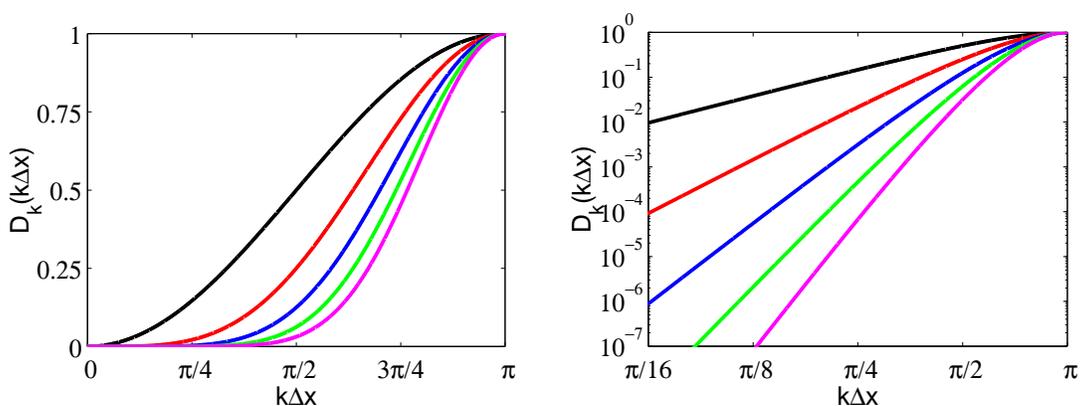


FIG. 1.3 – Caractéristiques des filtres sélectifs dans l'espace des nombres d'onde. A gauche, on trace la fonction de transfert des filtres standards d'ordre 2 (—), 4 (—), 6 (—), 8 (—), 10 (—) en fonction de $k\Delta x$. A droite, l'erreur de dissipation du filtre est représentée avec une échelle logarithmique.

Les coefficients du filtre optimisé sur 11 points sont donnés dans Bogey et Bailly [19]. Ce filtre est comparé avec le filtre standard d'ordre 10 sur la figure 1.4. On remarque que pour des valeurs de $k\Delta x$ proche de $\pi/2$, l'erreur de dissipation du filtre est bien moindre pour le filtre optimisé. Cependant l'optimisation du filtre augmente légèrement le niveau de dissipation pour les faibles nombres d'onde.

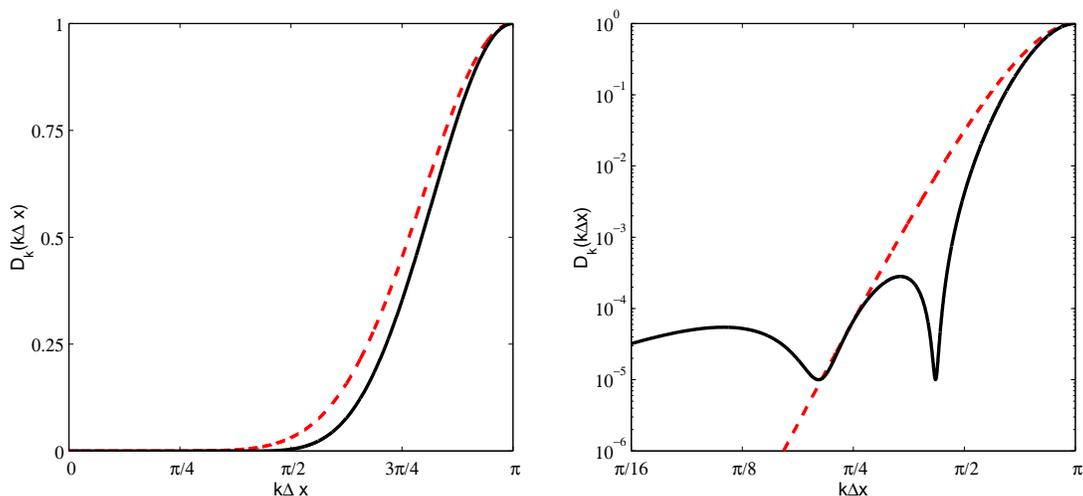


FIG. 1.4 – Caractéristiques des filtres sélectifs dans l'espace des nombres d'onde. A gauche, on trace la fonction de transfert du filtre optimisé sur 11 points Bogey et Bailly [19] (—) et du filtre standard d'ordre 10 (---). A droite, l'erreur de dissipation du filtre est représentée avec une échelle logarithmique.

1.4 Schémas d'avancement temporel

Il faut disposer d'un algorithme d'intégration temporelle minimisant les erreurs de dispersion et de dissipation et qui possède une plage de résolution fréquentielle compatible avec celle des schémas

spatiaux. Dans cette thèse, seuls les schémas d'avancement explicites de type Runge-Kutta sont présentés.

1.4.1 Critères de stabilité

Comme pour toute méthode explicite, l'étude de stabilité de l'algorithme impose que le pas de temps Δt vérifie trois types de critères : le premier lié aux termes convectifs est le critère de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), le deuxième et le troisième liés au termes visqueux et aux termes de conduction-diffusion correspondent au critère de Fourier.

1.4.1.1 Critère CFL

Cette condition de stabilité impose que la distance parcourue pendant le temps Δt par une perturbation se propageant à la vitesse $u_i \pm c$ soit en principe inférieure à la distance entre deux points du maillage [84]. En coordonnées cartésiennes, le critère s'écrit donc :

$$\text{CFL} = \Delta t \times \max_i \left[\frac{|u_i| + c}{\Delta x_i} \right]$$

1.4.1.2 Critère visqueux

De la même façon, il faut respecter un critère de discrétisation spatio-temporelle pour les flux visqueux pour assurer la convergence de l'algorithme. Il s'écrit :

$$C_{\text{visqueux}} = \Delta t \times \max_{i,j} \left[\frac{\nu}{\Delta x_i \Delta x_j} \right] \leq 2$$

On peut faire deux remarques. D'abord, en pratique, c'est le critère CFL qui sera toujours le plus restrictif. Par exemple, pour un $(\Delta x_i)_{\min}$ de 10^{-6} m et un nombre de Mach de 0.5, et un nombre de CFL de 1, le critère CFL impose $\Delta t \leq 1.93 \times 10^{-9}$ s alors que la condition de stabilité visqueuse nécessite $\Delta t \leq 1.33 \times 10^{-7}$ s. Ensuite, on constate que le pas de temps, imposé par la plus petite maille, sera toujours très faible, ce qui est un des principaux inconvénients des méthodes explicites que l'on utilise.

1.4.2 Schémas de Runge-Kutta

Souvent, on utilise une méthode de Runge-Kutta à p sous-étapes d'ordre élevé et/ou optimisée. Sa forme générale, pour intégrer l'équation $\partial \mathbf{U} / \partial t = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t)$, s'écrit :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \sum_{i=1}^p b_i \mathbf{K}^i \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}^i = \mathbf{F} \left(\mathbf{U}^n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{K}^j, t^n + c_j \Delta t \right)$$

où $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ pour $i = 1, \dots, p$. L'analyse permettant de déterminer les coefficients pour atteindre un ordre donné repose de nouveau sur le développement de Taylor de \mathbf{U} :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}(t^n + \Delta t) = \mathbf{U}^n + \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{U}^n, t^n) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta t^n}{n!} F^{(n-1)}(\mathbf{U}^n, t^n)$$

avec

$$F^{(1)}(\mathbf{U}^n, t^n) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \Big|_n \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_n \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \Big|_n$$

1.4.2.1 Schémas de Runge-Kutta standards

Le plus célèbre est celui d'ordre 4 proposé par Runge (1895) et Kutta (1901) :

c_i	a_{ij}	0	0		
	b_i	1/2	1/2		
		1/2	0	1/2	
		1	0	0	1
			1/6	1/3	1/3
				1/3	1/6

La détermination de l'ordre conditionne en partie sa stabilité. On montre en effet à partir de l'analyse de Fourier du problème $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + c \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$ où $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} e^{ikx}$, que le facteur d'amplification g s'écrit :

$$g = \frac{\hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\hat{\mathbf{U}}^n} = 1 + \sum_{i=1}^p \gamma_i z^i \quad \text{avec} \quad z = -kc\Delta t$$

Pour $p \leq 6$:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sum b_i & \gamma_3 &= \sum b_i a_{ij} c_j & \gamma_5 &= \sum b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l \\ \gamma_2 &= \sum b_i c_i & \gamma_4 &= \sum b_i a_{ij} a_{jk} c_k & \gamma_6 &= \sum b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} a_{lm} c_m \end{aligned}$$

Le facteur d'amplification exact est :

$$g_e = e^{iz} = 1 + iz + \frac{1}{2}(iz)^2 + \frac{1}{6}(iz)^3 + \frac{1}{24}(iz)^4 + \dots$$

1.4.2.2 Schémas de Runge-Kutta linéaires à stockage réduit

Pour obtenir des schémas nécessitant peu de stockage, on impose $b_p = 1$ et $b_i = 0$ pour $i = 1, \dots, p-1$ [90]. Les seuls a_{ij} non nuls sont les $a_{i,i-1}$. Le schéma s'écrit :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + b_p K^p \quad \text{avec} \quad \mathbf{K}^i = \Delta t \mathbf{F} \left(\mathbf{U}^n + \alpha_{i-1} \mathbf{K}^{i-1}, t^n + c_i \Delta t \right)$$

en posant $\alpha_i = a_{i,i-1}$ et $\alpha_0 = 0$. Pour un opérateur linéaire,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^1 &= \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} \\ \mathbf{K}^2 &= \Delta t \mathbf{F} \left(\mathbf{U}^n + \alpha_1 \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} \right) \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} + \Delta t^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n}{\partial t^2} \\ &\vdots \\ \mathbf{K}^i &= \sum_{j=1}^i \left(\prod_{l=i-j+1}^{i-1} \alpha_l \right) \Delta t^j \frac{\partial^j \mathbf{U}^n}{\partial t^j} \end{aligned}$$

Le schéma se développe en :

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \sum_{j=1}^p \left(\prod_{l=p-j+1}^p \alpha_l \right) \Delta t^j \frac{\partial^j \mathbf{U}^n}{\partial t^j} + o(\Delta t^p) \quad \text{soit} \quad \alpha_{p-i+1} = (i-1)!/i! \quad i \in \{1, \dots, p\}$$

A l'ordre 4, on obtient le tableau de coefficients suivant :

c_i	a_{ij}	b_i	0	0	0	0
			$1/4$	$1/4$	0	$1/3$
			$1/3$	0	0	$1/2$
			$1/2$	0	0	$1/2$
			0	0	0	1

Ce schéma est d'ordre 4 en linéaire et 2 en non linéaire.

1.4.2.3 Schémas de Runge-Kutta optimisés

Le facteur d'amplification effectif du schéma s'écrit :

$$g(\omega\Delta t) = \frac{\hat{\mathbf{U}}^{n+1}}{\hat{\mathbf{U}}^n} = 1 + \sum_{j=1}^p \left(\prod_{l=p-j+1}^p \alpha_l \right) (-i\omega\Delta t)^j \quad \text{et} \quad \gamma_j = \left(\prod_{l=p-j+1}^p \alpha_l \right)$$

En choisissant l'optimisation de Hu, Hussaini & Manthey [90], on minimise

$$\int_0^\Gamma |g - g_e|^2 d(\omega\Delta t) = \int_0^\Gamma \left| 1 + \sum_{j=1}^p \gamma_j (-i\omega\Delta t)^j - e^{-i\omega\Delta t} \right|^2 d(\omega\Delta t) \quad \text{et} \quad \Gamma = (\omega\Delta t)_{\max}$$

Avec l'optimisation de Bogey & Bailly [19], on minimise

$$\int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} (1 - |g(\omega\Delta t)|) d(\ln(\omega\Delta t)) + \int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} (|\omega^* \Delta t - \omega\Delta t|/\pi) d(\ln(\omega\Delta t))$$

avec les contraintes :

$$1 - |g| > 0 \quad \text{et} \quad \partial[\ln(1 - |g|)]/\partial[\ln(\omega\Delta t)] \geq -5$$

On s'intéresse au rapport $g/g_e = re^{-i\varphi}$ et l'on trace le taux d'amplification r et l'erreur de phase φ . On définit 2 critères pour les erreurs d'amplitude et de phase : le premier critère $1 - |g| < 5 \times 10^{-4}$ nous donne $T_a/\Delta t$ et le deuxième critère $|\omega^* \Delta t - \omega\Delta t|/\pi < 5 \times 10^{-4}$ nous donne $T_p/\Delta t$. Le tableau 1.1 nous fournit les valeurs de ces deux critères pour le schéma de Runge Kutta d'ordre 4 et les schémas de Bogey et Bailly [19]. Ces derniers sont plus précis et moins dispersifs que le schéma de Runge Kutta d'ordre 4. On remarque aussi sur la figure 1.5 que le schéma de Hu *et al.*[90] à 6 sous-étapes est instable très rapidement lorsque $\omega\Delta t$ augmente. Les schémas de Bogey et Bailly [19] offrent le meilleur compromis précision / stabilité. Nous utiliserons par la suite le schéma de Bogey et Bailly [19] avec $p = 6$.

schéma	$pT_a/\Delta t$	$pT_p/\Delta t$
RK ordre 4 ($p = 4$)	38.6	33.6
Bogey & Bailly $p = 5$	21.4	22.2
Bogey & Bailly $p = 6$	19.8	24.6

TAB. 1.1 – Comparaison des critères de précision et de stabilité.

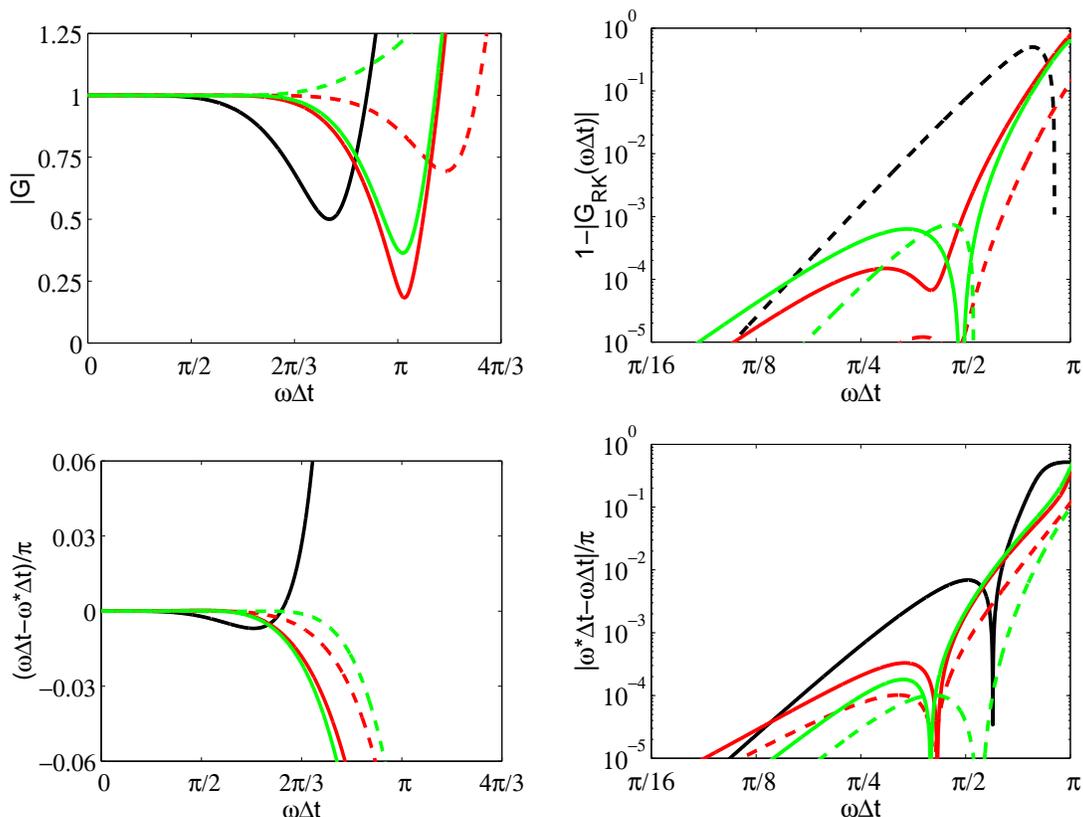


FIG. 1.5 – Caractéristiques des schémas de Runge-Kutta. En haut, taux d'amplification r et en bas erreur de phase φ . A gauche, échelle linéaire et à droite échelle logarithmique. Runge-Kutta standard d'ordre 4 (—), Runge-Kutta de Hu *et al.*[90] pour $p = 5$ (—) et $p = 6$ (- - -), Runge-Kutta de Bogey et Bailly [19] pour $p = 5$ (—) et $p = 6$ (- - -).

1.5 Conditions aux limites

La qualité d'une simulation aéroacoustique dépend fortement de la précision des conditions aux limites appliquées sur les frontières du domaine de calcul. Malgré les nombreuses études sur le sujet, il n'existe pas de formulation idéale et il faut écrire des conditions qui soient compatibles avec les conditions physiques à imposer, avec les méthodes numériques choisies et qui soient également compatibles entre elles. Pour des codes CFD dissipatifs, les ondes acoustiques sont souvent atténuées voire dissipées avant d'atteindre les frontières du domaine. Au contraire, en aéroacoustique numérique, les schémas sont très peu dissipatifs et il devient nécessaire de faire sortir les fluctuations acoustiques par des conditions non réfléchissantes ou absorbantes, en minimisant les réflexions qui pourraient se

superposer aux ondes physiques. Une autre difficulté réside dans la compatibilité entre les différentes conditions limites ainsi qu'avec le traitement des points intérieurs. Le traitement des points de paroi pose aussi des problèmes car le schéma numérique, appliqué aux points intérieurs, ne peut plus être utilisé. La présence de parois nécessite donc le développement de conditions limites de paroi.

1.5.1 Traitement de la paroi

1.5.1.1 Condition de Tam et Dong

Afin d'éviter une surspécification des conditions à la paroi, on introduit autant d'inconnues supplémentaires que de conditions à vérifier grâce à l'utilisation de points fantômes. Le nombre de conditions à vérifier dépend du type de paroi que l'on veut imposer : une seule condition pour une paroi glissante et deux ou trois pour une condition d'adhérence.

Pour le traitement d'une paroi glissante avec $v = 0$, on introduit un point fantôme pour la pression. On impose $v = 0$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour v et on écrit le schéma de discrétisation décentré pour p de la façon suivante (sur 11 points par exemple) :

$$p_{l,w-1}^{(n)} = -\frac{1}{a_{-1}^{91}} \sum_{i=0}^9 a_i^{91} p_{l,w+i}^{(n)}$$

où a_i^{91} sont les coefficients optimisés du schéma aux différences finies décentré, l'exposant 91 indiquant que la molécule de calcul comporte neuf points d'un côté et un de l'autre (voir figure 1.5.1.1). Les variables u , v , w et ρ sont elles avancées à la paroi au moyen d'un schéma totalement décentré, ici un schéma 010 pour le premier point.

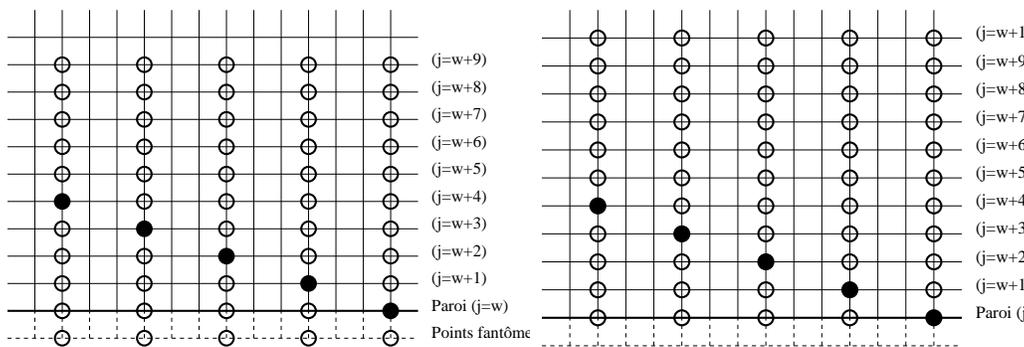


FIG. 1.6 – Condition de paroi de Tam et Dong [180]. A gauche schéma pour p , à droite schéma pour u , v , w et ρ .

Un autre schéma décentré à la paroi d'ordre 4 peut être utilisé pour simplifier l'écriture de la condition de paroi. La réduction de la taille des molécules à l'approche de la paroi peut par ailleurs améliorer la robustesse. La pression au point fantôme s'écrit alors :

$$p_{l,w-1}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(-10p_{l,w}^{(n)} + 18p_{l,w+1}^{(n)} - 6p_{l,w+2}^{(n)} + p_{l,w+3}^{(n)} \right)$$

Les autres variables u , v , w et ρ sont elles aussi avancées avec un schéma d'ordre 4 mais totalement décentré à la paroi.

Dans le cas d'une paroi non glissante avec $u = v = w = 0$, on introduit deux points fantômes : un sur p pour assurer $v = 0$ et un sur τ_{xy} pour assurer $u = 0$. On introduit la condition $u_{l,0}^{(n+1)} = 0$ dans l'équation de quantité de mouvement en x sous sa forme discrétisée aux points de frontière $(l, 0)$ pour obtenir la valeur du point fantôme $(\tau_{xy})_{l,-1}^{(n)}$. Dans sa thèse, Xavier Gloerfelt [66] note que l'utilisation d'un deuxième point fantôme sur τ_{xy} n'est pas suffisante pour imposer l'adhérence. Il faut donc surimposer $u = 0$ de façon forte. Nous avons même choisi d'imposer seulement cette condition sans créer le deuxième point fantôme. Dans ce cas, les flux visqueux sont simplement décentrés vers l'intérieur.

1.5.1.2 Filtrage à la paroi

Afin de supprimer les oscillations maille à maille près de la paroi, un filtrage sélectif est aussi nécessaire à l'instar des points intérieurs. Deux options seront considérées. Dans une première approche, on utilise des filtres centrés (sans erreur de dispersion) ; pour cela l'ordre du filtre est dégradé à l'approche de la paroi (jusqu'à l'ordre 2 pour le premier point intérieur ; le point de paroi n'étant pas filtré). La seconde approche s'appuie sur des filtres optimisés décentrés, dont les coefficients ont été calculés dans [14]. Le premier point intérieur utilise un filtre décentré sur 7 points ; les points suivants sont traités avec des filtres décentrés sur 11 points. De plus, on choisit soit de ne pas filtrer le point à la paroi, soit de le filtrer avec un schéma décentré sur 4 points.

1.5.2 Conditions de rayonnement de Tam et Dong

Cette condition limite non réfléchissante utilise, en 3D, une expression asymptotique en champ acoustique lointain des équations d'Euler linéarisées en coordonnées sphériques [181]. Cette formulation s'applique pour des frontières où seules des fluctuations acoustiques doivent sortir. En utilisant les coordonnées sphériques (r, θ, φ) , la solution asymptotique s'écrit :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u_j \\ p \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \begin{pmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_j - \bar{u}_j \\ p - \bar{p} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

où $\bar{\rho}$, \bar{u}_j , et \bar{p} sont les champs moyens et V_g désigne la vitesse de groupe des ondes acoustiques définie par :

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\varphi)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_r = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) \\ \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \end{cases} \quad (1.7)$$

$\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ est la célérité moyenne du son. L'origine des coordonnées sphériques correspond théoriquement au point où se situe la source sonore. Tam et Dong ont montré que le résultat n'est pas très sensible au choix de cette origine. Lorsqu'une paroi est présente, pour éviter une discontinuité entre la condition de paroi et la condition de Tam et Dong, on choisit l'origine du rayonnement sur la paroi (afin d'éviter un rayonnement perpendiculaire à la paroi lors du raccordement avec la condition libre).

En 2D, on utilise une formulation cylindrique (r, θ) :

$$V_g = \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 - (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta) \end{cases}$$

et on résout alors :

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u_j \\ p \end{pmatrix} + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \begin{pmatrix} \rho - \bar{\rho} \\ u_j - \bar{u}_j \\ p - \bar{p} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

1.5.3 Conditions de Tam et Dong pour une sortie de fluide

La perturbation totale est la somme d'une perturbation acoustique, tourbillonnaire et entropique [181].

– les fluctuations de pression sont associées à l'acoustique et on utilise l'équation précédente pour $p' = p - \bar{p}$:

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial}{\partial t} p' + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) p' = 0$$

– les perturbations de masse volumique et de vitesse vérifient une équation d'advection :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' = \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho_a = \frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p_a & \text{avec } \rho_a = p_a / \bar{c}^2 \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' = \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_a = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p_a \end{cases}$$

d'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla (\rho') = \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p' \right) \\ \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \\ \frac{1}{V_g} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{p'}{r} = 0 \end{cases}$$

avec la vitesse de groupe définie précédemment.

1.5.4 Elaboration d'une zone éponge

Les conditions de sortie décrites précédemment autorisent la sortie des fluctuations aérodynamiques mais un faible pourcentage peut être réfléchi. Pour une simulation aéroacoustique, ces réflexions peuvent masquer le champ acoustique physique. C'est pourquoi, il faut ajouter une zone éponge en sortie afin de les faire disparaître. Des zones éponges latérales peuvent aussi être prises en compte pour une simulation pleinement 3-D. On combine un étirement du maillage (de l'ordre de 3% à 5% sur les dernières mailles) afin de dissiper les structures tourbillonnaires, qui ne sont alors plus supportées par le maillage trop grossier, et un filtrage laplacien dont le coefficient de filtrage varie en espace afin de réaliser une transition lente entre le domaine sans filtrage et avec filtrage. Les inconnues $f = (\rho', \rho u', \rho v', \rho w', \rho E')$ sont filtrées en sortie de domaine et on obtient :

$$f_{i,j,k}^{\text{filtré}} = f_{i,j,k} - \chi \left(\frac{x_i - x_{nx-nsx1}}{x_{nx-nsx2} - x_{nx-nsx1}} \right)^2 [0.5 f_{i,j,k} - 0.25 (f_{i-1,j,k} + f_{i+1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k-1} + f_{i,j,k+1})]$$

pour $nx - nsx2 \leq i \leq nx - nsx1$ et

$$f_{i,j,k}^{\text{filtré}} = f_{i,j,k} - \chi [0.5 f_{i,j,k} - 0.25 (f_{i-1,j,k} + f_{i+1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j,k-1} + f_{i,j,k+1})]$$

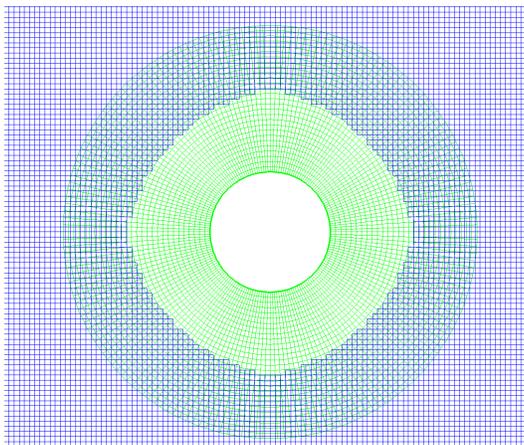


FIG. 1.7 – Recouvrement de maillages pour la diffraction d'une source par un cylindre.

pour $nx - nsx2 < i \leq nx - 1$.

nx est le nombre de point dans la direction x . $x_{nx-nsx1}$ et $x_{nx-nsx2}$ correspondent aux abscisses de début et de fin de la zone éponge dans laquelle le coefficient de filtrage suit une progression en carré. Ce type de zone éponge a déjà été mis en oeuvre avec succès dans le cas de la simulation d'un diaphragme par Gloerfelt et Lafon [75].

1.6 Diffraction d'une source harmonique par un cylindre

La diffraction d'une source harmonique par un cylindre est une bonne validation des schémas numériques à utiliser près d'une paroi. On considère principalement les problèmes liés au filtrage et à la discrétisation spatiale des équations près de la paroi, la question étant de savoir s'il faut décentrer les schémas ou les laisser centrés et dégrader leur ordre en s'approchant de la paroi. Les conditions limites extérieures sont celles de rayonnement de Tam et Dong.

La configuration du cas test est tirée du 2nd *CAA workshop on benchmark problems* [110]. Dans ce cas test, la source gaussienne est définie par :

$$S = c_\infty \sin(\omega t) \exp\left(\frac{\ln 2}{0.2^2} ((x - 4)^2 + (y)^2)\right)$$

avec $\omega = 2\pi c_\infty$, $c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}$ avec $p_\infty = 10^5$ Pa et $\rho_\infty = 1.225$ kg m⁻³. L'origine de la source a pour coordonnée $x = 4$ m et $y = 0$ m. La demi-largeur de cette source gaussienne est de 0,2 m et donc très petite devant sa longueur d'onde. La source est alors compact.

Le maillage utilisé autour du cylindre est polaire et le maillage de fond est cartésien comme le montre la figure 1.7. Ils communiquent entre eux grâce aux techniques de recouvrement de maillages qui seront explicités dans le chapitre suivant. Le centre des deux maillages est le centre du cylindre de rayon 0.5 m. Les résolutions des grilles utilisées sont les suivantes :

- grille cartésienne : $n_x = n_y = 210$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0.081$ m.
- grille polaire : $n_r = 36$, $n_\theta = 191$ et $\Delta_r = 0.0545$ m, $\Delta_\theta = 0.33$ rad.

La communication des grilles entre elles est assurée par une interpolation polynômiale de Lagrange d'ordre 6. Afin de pouvoir quantifier l'erreur numérique, la solution analytique a été calculée en s'inspirant de la solution donnée par Sherer [168].

1.6.1 Filtrage à la paroi

L'influence du filtrage à la paroi est considérée en premier. Trois filtrages sont alors retenus : les filtres optimisés de Berland *et al.*[14] avec ou sans le filtrage des variables du premier point de paroi et les filtres centrés dont l'ordre est réduit à l'approche de la paroi. Ces filtres sont décrits dans le paragraphe 1.5.1.2. Les schémas de discrétisation près de la paroi sont décentrés et optimisés sur 11 points. Le coefficient de filtrage est fixée à 0,2 partout dans le domaine de calcul. La figure 1.8 présente une superposition de la directivité pour $r=7,5$ m des solutions numérique et analytique, définie par :

$$D(\theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} (r\bar{p}^2)$$

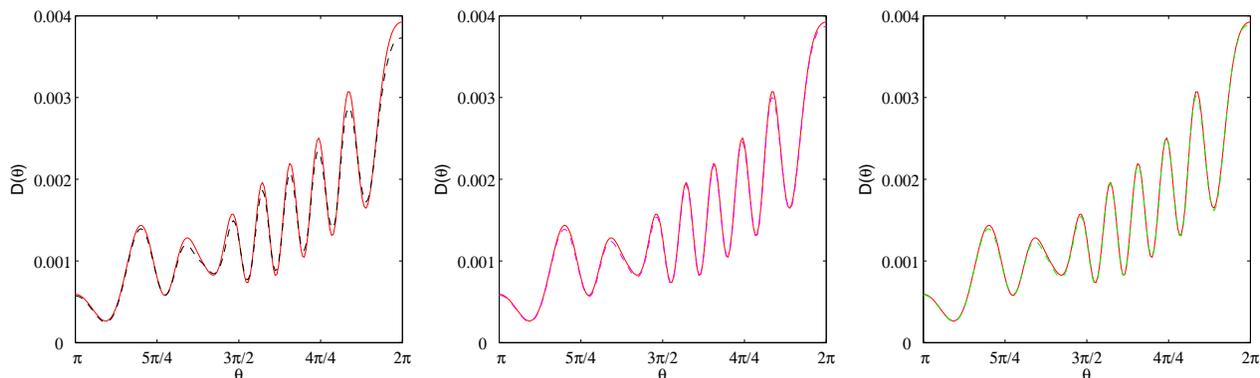


FIG. 1.8 – Diffraction d'une source par un cylindre. Filtrage centré (à gauche), filtres décentrés sans filtrage du point de paroi (au centre), filtres décentrés avec filtrage du point de paroi (à droite). Solution analytique en trait plein rouge (—).

La solution numérique avec le filtrage centré semble s'écarter le plus de la solution analytique lorsque l'on se rapproche de la source, c'est-à-dire vers $\theta = 2\pi$. Les filtres décentrés optimisés (avec ou sans filtrage du point de paroi) donnent les meilleurs résultats. Le tableau 1.2 regroupe l'erreur L_2 sur la directivité calculée par :

$$err = \sqrt{\sum_{j=1}^{ndir} \frac{(D_{num_i} - D_{an_i})^2}{n_{dir}}}$$

où $ndir$ est le nombre de point de la directivité, D_{num_i} et D_{an_i} les valeurs respectives des directivités numérique et analytique. On remarque que l'erreur pour les filtres décentrés optimisés avec ou sans filtrage du point de paroi est à peu près équivalente. Par contre, l'erreur pour les filtres centrés est plus élevée.

filtres	décentrés opt.+1 ^{er} pt. paroi	décentrés optimisés	centrés
<i>err</i>	2.5222e-05	3.0750e-05	7.7796e-05

TAB. 1.2 – Diffraction d'une source par un cylindre. Erreur numérique sur la directivité pour les filtres optimisés avec et sans point de paroi et les filtres centrés.

1.6.2 Discrétisation

Le choix de la discrétisation près de la paroi est maintenant étudié. Le filtrage est décentré et optimisé sur 11 points (sans filtrage du point de paroi). La comparaison est faite entre les schémas décentrés optimisés sur 11 points de Berland *et al.*[14] et des schémas décentrés à l'ordre 4 à l'approche de la paroi. La directivité à $r = 7,5$ m est tracée pour les différents schémas sur la figure 1.6.2. Les erreurs numériques pour ces deux choix de discrétisation sur la directivité sont présentées dans le tableau 1.3.

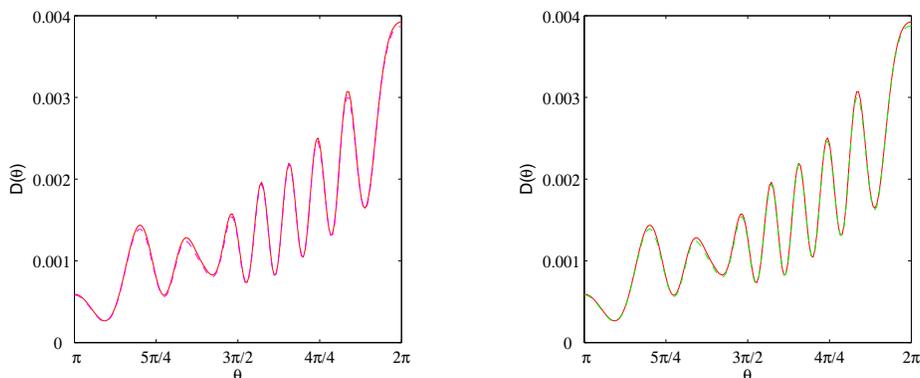


FIG. 1.9 – Diffraction d'une source par un cylindre. Schémas décentrés sur 11 points (à gauche) et schémas d'ordre 4 à l'approche de la paroi (à droite). Solution analytique en trait plein rouge (—).

Schéma spatial	optimisé	d'ordre 4
<i>err</i>	3.0750e-05	2.9707e-05

TAB. 1.3 – Diffraction d'une source par un cylindre. Erreur numérique sur la directivité pour les schémas de discrétisation optimisés et les schémas à l'ordre 4 à l'approche de la paroi.

On remarque que les erreurs calculées sont quasi-équivalentes voire même légèrement inférieures à l'ordre 4. Le choix du schéma de discrétisation revêt donc moins d'importance que le choix du filtre près de la paroi.

1.7 Simulations des grandes échelles

Nous nous proposons ici de détailler le modèle de Simulation des Grandes Échelles (SGE) ou en anglais Large Eddy simulation (LES) utilisé pour les simulations numériques turbulentes.

1.7.1 Approches traditionnelles

En LES, le maillage ne peut pas résoudre toutes les échelles présentes au sein d'un écoulement. Les équations régissant l'écoulement sont obtenues après filtrage. Les échelles plus grandes que la largeur du filtre Δ sont calculées explicitement tandis que les échelles de sous maille (subgrid scales ou SGS en anglais) sont modélisées. La fonction filtre G est appliquée à une variable f de l'écoulement de la façon suivante :

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta) f(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'$$

où l'opérateur barre désigne l'opération de filtrage. Pour les équations de Navier-Stokes, sous la condition que le filtre et l'opérateur de différenciation commutent, le tenseur des contraintes s'écrit $\mathcal{T}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$. Deux principaux modèles de fermeture ont été proposés pour \mathcal{T}_{ij} . Les modèles à viscosité turbulente, introduits par Smagorinsky [171], sont basés sur l'approximation de Boussinesq dans laquelle les tensions de Reynolds sont reliées au tenseur des contraintes par une viscosité ν_e , $\mathcal{T}_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathcal{T}_{kk} \approx -2\nu_e \bar{S}_{ij}$. Les autres modèles sont des modèles de similarité d'échelles (scale similarity models ou SSM en anglais). Le modèle SSM a été proposé par Bardina *et al.*[8] et est basé sur le fait que les plus grandes structures non résolues interagissent avec les plus petites structures résolues. Les tensions de Reynolds sont approximées par le tenseur des contraintes calculé à partir des échelles résolues en employant un filtre additionnel dont la largeur caractéristique est supérieure ou égale à celle du filtre originel G , $\mathcal{T}_{ij} \approx \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{\bar{u}}_i \bar{\bar{u}}_j$. Dans le modèle de Smagorinsky (SM), la viscosité turbulente est proportionnelle à une longueur définie comme le pas d'espace effectif $\bar{\Delta}$ et à une échelle de vitesse basée sur le taux de contraintes, $|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}$:

$$\nu_e = (C\bar{\Delta})^2 |\bar{S}|,$$

où la constante C est égale à 0.18 pour une turbulence homogène isotrope. Ce modèle a été amélioré en introduisant une procédure dynamique qui évalue localement $(C\bar{\Delta})$. Le modèle de Smagorinsky dynamique (DSM) [59, 64] repose sur l'utilisation d'un filtre test avec une largeur généralement deux fois supérieure à celle de G et sur l'identité de Germano. Les informations issues des fines structures permettent d'adapter la valeur de $(C\bar{\Delta})$ en temps et en espace afin de prendre en compte la présence de parois solides, l'existence de régions laminaires au sein de l'écoulement et les effets de backscatter. Par analogie avec la viscosité turbulente spectrale de Kraichnan, Lesieur et Métais [119] ont proposé une autre méthode pour évaluer la viscosité turbulente à partir d'une fonction de structure du second ordre. Cependant tous les modèles de viscosité turbulente souffrent des mêmes limitations. L'expression du tenseur de Reynolds étant similaire à une viscosité, celle-ci va agir sur toutes les échelles résolues et le nombre de Reynolds effectif sera artificiellement réduit. Cette carence est soulignée par de nombreuses études, qui utilisent une solution de référence obtenue à l'aide d'une DNS ou par des expériences pour évaluer la contribution exacte des termes de sous-maille. Toutes ces études révèlent une faible corrélation entre le modèle de sous maille et \mathcal{T}_{ij} [33, 131, 123, 192]. Cette observation est vraie pour tous les modèles de sous maille basés sur l'approximation de Boussinesq [166]. Les modèles de similarité d'échelles (SSM) fournissent d'assez bonnes corrélations du fait qu'ils approximent la vitesse résolue par la vitesse filtrée $u_i \approx \bar{u}_i$. Liu *et al.*[123] ont noté une bonne corrélation en utilisant un filtre secondaire (noté par un chapeau) avec une largeur de filtre plus grande 2Δ : $\mathcal{T}_{ij} \approx \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}}_i \widehat{\bar{u}}_j$. Cependant, les méthodes SSM ne sont pas capables de reproduire les phases d'interaction non linéaire se produisant aux petites échelles et sont sous dissipatives. L'accumulation d'énergie peut conduire à une divergence de la simulation numérique. Le concept des modèles mixtes (MM) est alors apparu [8], car il permet de combiner les avantages des modèles

SSM et le caractère dissipatif des modèles de sous maille tels que SM, pour des raisons évidentes de stabilisation. De nombreuses formulations de modèles mixtes ont été proposées avec des procédures dynamiques d'évaluation des coefficients [197, 189, 164, 88, 117]. Ces modèles possèdent les mêmes points faibles que les modèles SM ou DSM, à savoir un caractère dissipatif dû à la viscosité turbulente, mais les résultats sont sensiblement améliorés par la faible valeur de ν_e (~ 0.01 pour les modèles DMM contre 0.1 pour les modèles DSM dans [197]).

1.7.2 Limitations des modèles de viscosité turbulente

Bogey et Bailly [20] ont mené des simulations de jets subsoniques à haut nombre de Reynolds avec ou sans le modèle dynamique de Smagorinsky (DSM). Le développement du jet est fortement modifié par l'emploi du modèle de viscosité turbulente. Les caractéristiques associées à un écoulement à haut nombre de Reynolds sont mieux reproduites sans viscosité supplémentaire. En ce qui concerne la LES d'écoulements turbulents dans des cavités ouvertes [72], l'utilisation d'un filtrage explicite seul, ou couplé avec le modèle de Smagorinsky (SM) comportant une fonction d'amortissement de van Driest pour le traitement des parois, modifie les structures cisailés ainsi que le champ acoustique rayonné. Les figures de vorticité 1.10 montrent clairement que l'écoulement turbulent comporte plus de fines structures dans la couche limite turbulente amont ainsi que dans la couche cisail e lorsque le modèle de viscosité turbulente est désactivé. On peut en conclure que le nombre de Reynolds effectif est diminué par l'ajout du modèle de viscosité turbulente, cette conclusion ayant déjà été établie par Bogey et Bailly [20]. Par conséquent, les enroulements, qui jouent un rôle fondamental dans la boucle de rétroaction de Rossiter, sont plus cohérents dans la simulation avec SM et l'intensité du champ acoustique rayonné est accrue. De plus, l'analyse des spectres de pression [72] montre que la LES avec SM est caract ris e par un seul pic à Strouhal $St = fL/U_\infty = 0.78$. La LES avec filtrage explicite seul fournit deux pics à $St_{low} = 0.32$ et $St_{high} = 0.74$. Cette tendance est conforme avec les mesures de Karamcheti [97] dans la même configuration. Ce dernier a détecté un pic à $St = 0.71$ avec une couche limite amont laminaire et deux pics à $St_{low} = 0.33$ et $St_{high} = 0.66$ avec une couche limite amont turbulente. Afin de comprendre pourquoi la stratégie avec filtrage explicite seul fonctionne mieux, il est intéressant d'étudier les tendances actuelles de la LES dans le paragraphe 1.7.3.

Deux choses sont à noter concernant les approches LES traditionnelles. En premier, aucune donn e explicite n'est nécessaire concernant la largeur ou la forme du filtre G , même si l'opération de filtrage doit avoir une influence. Par exemple, les quantités filtr es ne sont pas les mêmes si le produit de convolution avec G s'effectue avec un filtre passe bas de largeur Δx , ou par la projection d'un nombre fini de modes dans l'espace spectral (filtre passe bas parfait). Quand on applique un filtre réel dans l'espace physique, la décomposition $f = \bar{f} + f'$ ne permet pas une séparation claire entre les échelles résolues et non résolues car \bar{f} et f' se recouvrent dans l'espace des nombres d'onde. De plus, les opérateurs de discrétisation introduisent des erreurs numériques qui peuvent grandement affecter les résultats [63]. En dehors de l'utilisation d'une méthode spectrale, l'opération de differentiation introduit une troncature additionnelle de \bar{f} . C'est pourquoi de nombreux auteurs [27, 43, 78] répartissent la solution en échelle résolue et échelle de sous filtre (subfilter-scale ou SFS en anglais). Les erreurs de discrétisation et le filtre non parfait sont responsables de l'existence de SFS résolues (RSFS) et non résolues. La stratégie LES doit donc tenir compte des effets des échelles de sous filtres résolues et des échelles de sous maille.

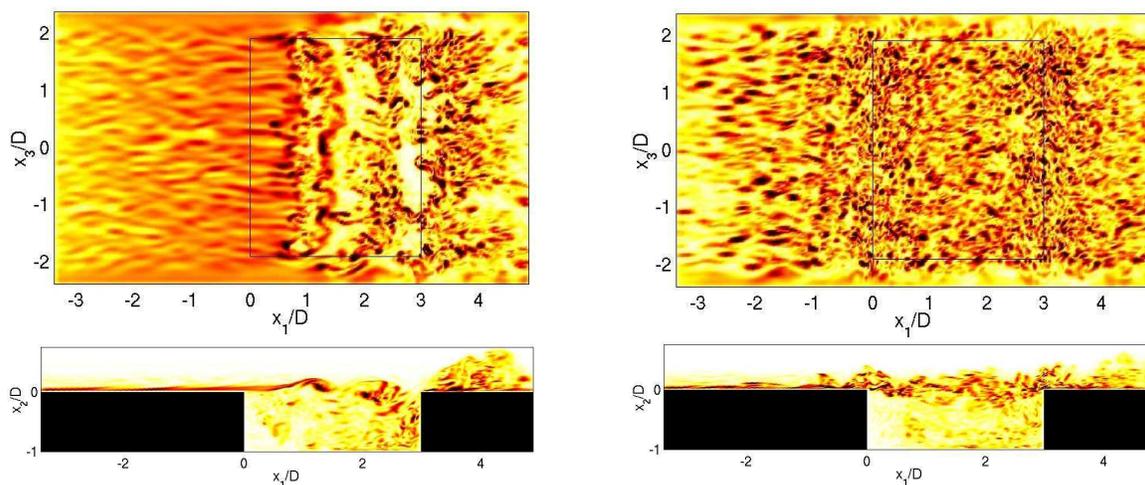


FIG. 1.10 – Influence du modèle de sous maille sur l'écoulement affleurant une cavité. LES d'une cavité dans la configuration expérimentale de Karamcheti ($L/D = 3$ et $M = 0.8$) : écoulement amont turbulent avec modèle SM ($C_S = 0.18$ et fonction d'amortissement de van Driest à la paroi) (à gauche) ; écoulement amont turbulent avec filtrage explicite seul (à droite). Vues instantanées du module de la vorticité $\|\omega\|$ en $x_2 = 0.06D$ (en haut) et $x_3 = 0$ (en bas). Niveaux entre 0 et $2 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ (Gloerfelt *et al.*[72]).

1.7.3 Quelques développements récents

Les erreurs numériques en LES : Ghosal [63] et Kravchenko & Moin [106] ont déterminé deux sources principales d'erreurs. La première est l'erreur introduite par les différences finies, que l'on appelle aussi erreur de troncature, lors de l'évaluation de forts gradients ou de fluctuations dont la longueur d'onde est inférieure à la limite de résolubilité du schéma numérique. La seconde est une erreur d'aliasing. Elle provient du calcul des produits de termes non linéaires qui génère des fréquences supérieures à celles supportées par le maillage. De plus, ces hautes fréquences interagissent avec les basses fréquences résolues. Si on utilise des schémas d'ordre faible, ces erreurs peuvent être de plusieurs ordres supérieures en amplitude aux termes de sous maille. En ce qui concerne les méthodes spectrales, seule l'erreur d'aliasing existe, et peut être supprimée en appliquant la règle de dealiasing en 3/2. L'utilisation de schémas d'ordre élevé avec de bonnes propriétés spectrales permet de réduire l'erreur due aux schémas aux différences finies. Cependant ces schémas sont sujets à de plus grandes erreurs d'aliasing. L'ajout d'un filtrage explicite dont la largeur est supérieure à la taille de maille est un bon moyen pour éviter l'effet d'aliasing [63]. Les tests *a posteriori* de Vreman *et al.*[190] indiquent que la largeur du second filtre doit être augmentée lors de l'utilisation de schémas d'ordre faible. Chow & Moin [32] recommandent de choisir un rapport largeur de filtre / taille de maille d'au moins 4 pour un schéma d'ordre 2 tandis qu'un rapport de 2 est suffisant pour un schéma de Padé d'ordre 6. L'ajout d'un filtrage explicite augmente le coût de calcul car un ratio de 4 diminue la résolution effective du maillage d'un facteur 4 dans chaque direction. Le coût de calcul est ainsi augmenté d'un facteur 64. Lund & Kaltenbach [124] ont démontré que le filtrage explicite accroît la précision de la LES mais qu'un raffinement du maillage sans filtrage explicite donne de meilleurs résultats dans le cas d'un schéma aux différences finies d'ordre 2. L'usage d'un filtrage explicite est très compétitif lorsqu'on l'applique avec des schémas d'ordre élevé. Selon Visbal et Rizzetta [187], la combinaison d'un schéma compact d'ordre 6 et d'un filtre passe bas d'ordre 10 de type Padé donne de très bons résultats. Les caractéristiques du filtre utilisé semblent plus cruciales que la contribution des termes de sous maille. Meinke *et al.*[132] ont aussi observé que les modèles de sous maille ont une influence

négligeable comparée à la résolution du maillage et aux paramètres du filtre.

Techniques de déconvolution : Les échelles de sous filtre résolues (RSFS) résultant de l'application du filtre G et/ou des erreurs numériques peuvent théoriquement être reconstruites à partir des champs résolus. Cette opération s'appelle opération de déconvolution. Cette approche consiste à trouver une approximation \tilde{u}_i de la vitesse non filtrée u_i . L'idée de la déconvolution est déjà présente dans le modèle de similitude de Bardina *et al.*[8]. Le filtrage explicite est la façon la plus simple de réaliser une opération de déconvolution. On peut ainsi directement retrouver le terme de Leonard $\overline{\overline{u_i u_j}} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ [193, 77]. La méthode de déconvolution permet d'améliorer la qualité de la solution numérique étant donné que les équations contiennent maintenant le même contenu spectral. On peut aussi tout simplement inverser la fonction filtre G . Geurts [60] construit un opérateur inverse en imposant que des polynômes d'ordre élevé soient correctement retrouvés par l'inversion. Domaradzki & Saiki [45] ou Kuerten *et al.*[108] considèrent eux des inversions exactes telles que les fonctions de Fourier dans l'espace de Fourier. Carati *et al.*[27] réalisent un développement exact des termes RSFS en fonction de la vitesse des grandes structures et de ses dérivées, ceci pour de nombreux filtres. Le premier terme du développement est le modèle tensoriel de diffusivité proposé par Leonard [118] et Clark *et al.*[33], $\mathcal{T}_{ij} \sim (\partial \overline{u}_i / \partial x_k)(\partial \overline{u}_j / \partial x_k)$. Stolz & Adams [175, 177, 176] reconstruisent la valeur approximée \tilde{u}_i à partir de la méthode de déconvolution itérative de van Cittert, $G^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (I - G)^{\nu}$, où I est l'opérateur identité. Dans le modèle de déconvolution approchée (ADM), la série est tronquée à une certaine valeur de N , $Q_N = \sum_{\nu=0}^N (I - G)^{\nu} \approx G^{-1}$.

Procédures de régularisation : La régularisation consiste à imiter le mécanisme de dissipation par une procédure spécifique. Dans le modèle ADM de Stolz & Adams, le caractère approximé de la déconvolution peut faire office de dissipation [43], mais le modèle reste tout de même sous dissipatif dans la plupart des applications pratiques. Afin de modéliser les transferts d'énergie vers les échelles non résolues, le retrait d'un terme de relaxation $\chi(I - Q_N * G) * \overline{u}_i$, avec $\chi > 0$, fait office de régularisation. Le coefficient χ peut être évalué par une procédure dynamique [177]. La fonction de transfert de $Q_N * G$ est celle d'un filtre qui ne touche pas aux échelles résolues par le second filtre, comme le montrent Stolz & Adams [177] et Mathew *et al.*[129]. Gullbrand & Chow [78] utilisent la méthode de déconvolution ADM pour reconstruire la vitesse après l'opération de filtrage explicite et ajoutent une méthode DSM pour assurer une certaine régularisation. La régularisation peut aussi être réalisée par la méthode numérique elle-même, comme c'est le cas des méthodes MILES. Les propriétés dissipatives du schéma numérique constituent un modèle implicite [21, 57].

Approches multi-échelles : Une autre stratégie LES prometteuse consiste à décomposer les spectres en plusieurs échelles. Cette décomposition est motivée par le fait que les effets du modèle de sous maille sur les échelles résolues sont limités à une interaction avec les échelles au moins deux fois inférieures aux plus petites échelles résolues. Ces conclusions sont consistantes avec le modèle de viscosité spectrale de Kraichnan [119, 44]. Domaradzki *et al.*[45, 44] ont proposé un modèle en deux étapes : une procédure de déconvolution suivie par une évaluation des structures SGS dont la taille est deux fois inférieure à la plus petite échelle résolue. Hughes *et al.*[91] ont divisé le spectre en trois échelles : grandes, petites et non résolues. Cette séparation est réalisée dans l'espace des nombres d'onde en utilisant une méthode spectrale. Les petites échelles résolues sont traitées avec un modèle de viscosité turbulente de type Smagorinsky. Les résultats obtenus sont aussi bons que ceux donnés par des modèles dynamiques. Winckelmans *et al.*[192] montrent *a priori* que les comparaisons sont meilleures quand la viscosité turbulente n'est appliquée qu'aux plus petites échelles résolues. L'avan-

tage des méthodes multi échelles est qu'elles sont plus simples à implémenter numériquement que les méthodes DSM.

1.7.4 Approche retenue pour le présent travail

Dans nos travaux, nous combinons l'utilisation de schémas aux différences finies ayant de bonnes propriétés spectrales avec un filtrage explicite sans modèle additionnel de viscosité. Cette stratégie fait partie des nouvelles approches utilisées en LES. Tout d'abord l'erreur de troncature est minimisée pour des ondes à plus de 4 points par longueur d'onde. De plus, le filtrage explicite présente de nombreux avantages. Il permet de s'affranchir des problèmes d'aliasing et supprime les oscillations maille à maille. Il fait aussi office de déconvolution en supprimant les fluctuations dont le nombre d'onde est supérieur à la résolubilité du schéma aux différences finies. Mathew *et al.*[129] ont démontré que la méthode ADM est quasiment similaire à une déconvolution suivie d'un filtrage explicite $Q_N * G$. Dans notre cas, les ondes telles que $k\Delta x < \pi/2$ sont résolues temporellement et spatialement et n'ont donc pas besoin d'être déconvoluées. Les ondes telles que $k\Delta x > \pi/2$ sont mal résolues mais sont filtrées. De plus, le filtrage explicite induit une régularisation similaire à celle utilisée dans les méthodes ADM, mais avec un coefficient constant. Étant donné que le filtre n'affecte pas les échelles résolues, la valeur exacte du coefficient n'est pas cruciale. Par exemple, Bogey et Bailly [20] appliquent le filtre à toutes les itérations temporelles ou toutes les trois itérations sans que cela n'affecte les résultats. Stolz *et al.*[177] arrivent eux aussi à la conclusion que les résultats sont peu sensibles à la valeur du coefficient de relaxation χ . L'implémentation numérique d'une procédure dynamique d'estimation des transferts d'énergie améliorerait la consistance de notre approche.

L'utilisation d'un filtrage explicite comme régularisation assure une séparation nette identique à celle des approches multi-échelles. L'effet des échelles de sous maille est pris en compte implicitement dans la région $\pi/2 < k\Delta x \lesssim 3\pi/4$ par le filtre et les différences finies car leurs coupures dans l'espace spectral ne sont pas nettes. Visbal *et al.*[188] incluent donc ce type d'approche dans la catégorie des LES implicites (ILES). Cette méthode a été appliquée avec succès pour la simulation d'un canal plan, d'écoulements autour de cylindres ou de profils, avec des résultats aussi bons que ceux obtenus avec la méthode DSM. Cette stratégie LES présente aussi l'avantage d'être versatile. Le filtrage explicite étant utilisé en combinaison avec des schémas aux différences finies d'ordre élevé, aucun autre modèle n'a besoin d'être implémenté. Des modèles comme DSM peuvent augmenter le coût de calcul de 20% à un ordre de grandeur. La présente stratégie est donc bien adaptée à la simulation d'écoulements complexes à haut nombre de Reynolds.

1.8 Conclusion

Les équations de Navier-Stokes compressibles sont résolues sous leur forme conservative. Les dérivées spatiales pour les flux convectifs sont calculées à l'aide d'un schéma centré aux différences finies sur 11 points, optimisé jusqu'à 4 points par longueur d'onde et d'ordre formel 4. Pour les dérivées des flux visqueux, le schéma utilisé est standard d'ordre 4 sur 5 points. Les ondes non résolues spatialement sont filtrées par des filtres optimisées sur 11 points. Cette opération est réalisée à la fin de l'avancement de chaque pas de temps. L'avancement temporel est réalisé à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta à six sous-étapes par pas de temps, optimisé et d'ordre 4. Les conditions limites utilisées sont les conditions de rayonnement et de sortie de Tam et Dong. Une zone éponge est aussi implémentée en

sortie de domaine afin de dissiper l'énergie des plus grosses structures et favoriser ainsi leur sortie. Pour une raison de robustesse, à l'approche de conditions limites ou d'une paroi, les schémas sur 11 points sont remplacés par un schéma centré optimisé sur 7 points et des schémas décentrés standards d'ordre 4. Pour cette même raison, et malgré une meilleure précision des filtres optimisés décentrés, les filtres restent centrés et leur précision est donc dégradées à l'approche de la paroi. Enfin, la simulation des grandes échelles est réalisée grâce à une procédure de régularisation à l'aide d'un filtrage explicite. Ce filtrage correspond à la même étape destinée à supprimer les oscillations maille à maille des différences finies.

Chapitre 2

Calcul direct par la méthode de recouvrement de maillages

2.1 Introduction aux méthodes de recouvrement de maillages

La simulation par recouvrement de maillages consiste à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles sur plusieurs maillages se recouvrant et communiquant entre eux via des interpolations dans les zones de recouvrement. L'intérêt de la méthode est de garder un maillage structuré lorsque que des géométries complexes sont étudiées. Par géométries complexes sont définis plusieurs cas possibles tels que la gestion d'un ou plusieurs corps curvilignes ou celle de maillages mobiles. Chaque maillages s'adaptent localement aux contraintes des corps étudiés et recouvrent en général un maillage cartésien de fond. Grâce à ces techniques, le code *CHIMERA* développé par Benek, Dougherty et Steger [11], a par exemple servi à la simulation aérodynamique d'une navette spatiale. Inspiré par les travaux de Kreiss [107], Chessire et Henshaw [28] développent le code *CMPGRD* et mettent l'accent sur le caractère générique d'un générateur de recouvrement de maillages. Ainsi le générateur doit prendre en compte de nombreux cas particuliers comme le recouvrement de deux maillages près d'une paroi comme le souligne Petersson [5] complexifiant ainsi fortement son algorithme. Une étape peut encore être franchie quand les méthodes de recouvrement de maillage sont combinées avec des méthodes de raffinement adaptatif comme le montrent Benoit et Jeanfaivre [12], Saunier *et al.*[165], Péron et Benoit [149], Sitaraman *et al.*[170] ou encore Henshaw et Schwendeman [83].

Les calculs aéroacoustiques nécessitent souvent l'emploi de supports de discrétisation structurés très larges ce qui peut s'avérer préjudiciable pour l'étude de géométries complexes. En découpant le domaine en plusieurs sous-domaines, la méthode de recouvrement de maillages permet de conserver l'emploi de larges supports et autorise une densité des points du maillage plus homogène que pour un maillage mono-bloc. Pour des simulations aéroacoustiques, le recouvrement de maillages est utilisé en premier par Yin et Delfs [196] pour la réponse acoustique d'un profil impacté par une rafale. Desquesnes *et al.*[39] s'intéressent au couplage entre un code CFD autour d'un profil d'aile et un solveur des équations d'Euler linéarisés propageant en champs lointain les ondes acoustiques rayonnées. Tam et Hu [182] suggèrent l'étude de la gestion d'une interface telle celle qui sépare un rotor et un stator en utilisant un maillage mobile. Emmert *et al.*[52] s'intéressent à l'aéroacoustique d'un écoulement transonique interne d'une expansion brusque dans une conduite rectangulaire. Parmi les cas se rapprochant le plus du sujet de cette thèse figurent les simulations d'un écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique de Marsden *et al.*[128, 127] et Desvigne *et al.*[41, 40].

Dans la suite, la question de la génération de recouvrements de maillages n'est pas abordée. En effet,

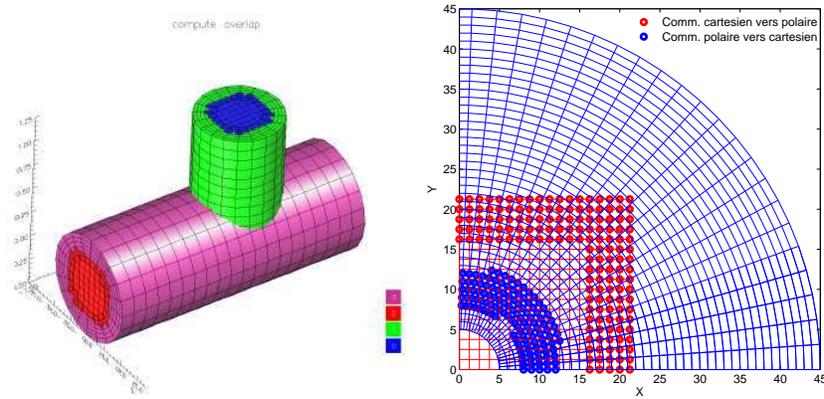


FIG. 2.1 – Exemples de recouvrement de maillages réalisés avec *Ogen*, le générateur de maillages des bibliothèques libres *Overture* [82].

nous utiliserons le générateur *Ogen* des bibliothèques libres *Overture* [82] pour générer nos maillages composites. Par contre, la question des interpolations, servant à assurer la continuité de la solution à travers les maillages, sera abordée. En effet, afin de ne pas dégrader la solution numérique, les interpolations doivent nécessairement être suffisamment précises lorsque des schémas numériques d'ordre élevés sont utilisés.

2.2 Principe de la méthode de recouvrement de maillages

2.2.1 Exemple 1-D

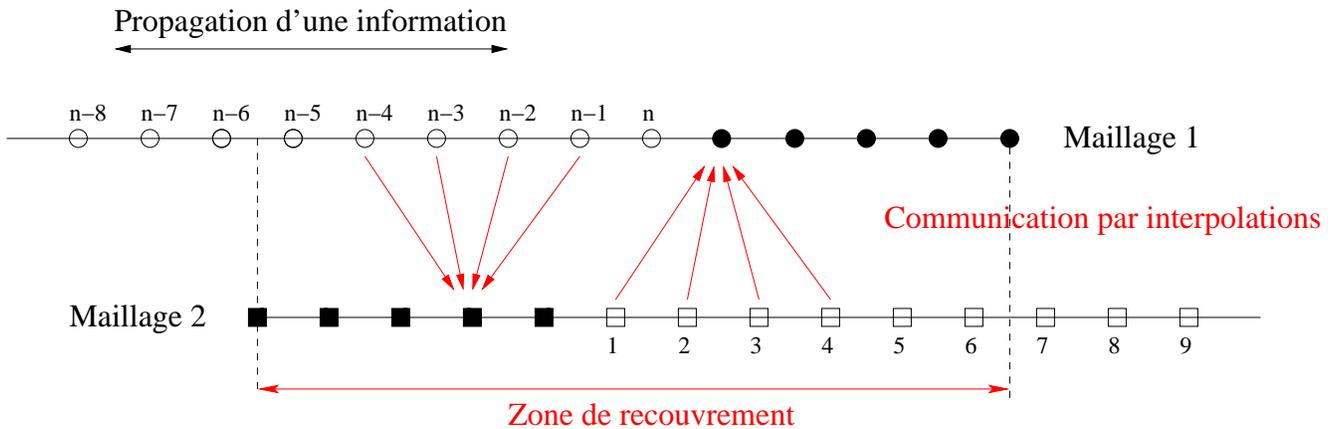


FIG. 2.2 – Exemple d'un recouvrement de maillages 1-D pour des calculs de dérivées discrétisées sur 11 points. Les points blancs sont des points donneurs et les points noirs, des points receveurs (points à interpoler). Les 4 flèches symbolisent une interpolation réalisée avec un support de 4 points.

Pour illustrer le concept de recouvrement de maillages, un exemple avec deux maillages 1-D est donné par la figure 2.2. Pour une meilleure compréhension, ces deux maillages sont identiques et décalés d'une demi-maille. Cependant cet exemple est parfaitement généralisable à des maillages quelconques.

Le maillage 1 (en haut) se termine au point d'indice n et le maillage 2 (en bas) commence au point d'indice 1. Supposons qu'une information quelconque se propage de gauche à droite sur le maillage 1 jusqu'au point n . Toutes les valeurs aux points du maillage 1 sont alors connues. Par contre, elles ne le sont pas pour le maillage 2. Il faut donc communiquer des valeurs du maillage 1 au maillage 2 afin que l'information puisse continuer à se propager. Cette communication est établie via des interpolations des points intérieurs (points blancs) du maillage 1 vers des points à interpoler (points noirs) ajoutés au début du maillage 2. Dans le jargon des méthodes de recouvrement, les points blancs sont appelés points donneurs et les points noirs, points receveurs. Le nombre de points receveurs introduits dépend du nombre de points de support du schéma numérique utilisé pour évaluer les dérivées spatiales des équations. Si, par exemple, on considère un schéma numérique de dérivation centré sur 11 points, les équations au premier point intérieur du maillage 2 (point 1) se résolvent en ajoutant cinq points receveurs à sa gauche. Si initialement l'information se propage sur le maillage 2 de droite à gauche, le même raisonnement peut être alors appliqué en ajoutant des points receveurs à droite du point d'indice n du maillage 1. Ainsi, l'ajout de points d'interpolation aux deux maillages permet à une information de se propager dans les deux sens. La zone comprise entre le premier point d'interpolation du maillage 2 et le dernier point d'interpolation du maillage 1 s'appelle la zone de recouvrement. Dans cette zone, deux solutions peuvent coexister chacune sur un maillage différent. Outre le temps attribué aux interpolations, le temps de calcul global s'en trouve ainsi augmenté par rapport à un calcul sur une seule grille. L'étendue de cette zone doit donc être minimiser. La taille de cette zone varie suivant différents paramètres : le nombre de points receveurs introduits de part et d'autre des maillages (dépendant de la taille de support de discrétisation des équations) et la taille du support d'interpolation utilisés ainsi que le caractère implicite ou explicite de ces interpolations. Ce dernier point est spécifique aux méthodes de recouvrement et est abordé ci-dessous.

2.2.2 Interpolation explicite et implicite

Que ce soit pour un recouvrement de maillages 2-D ou 3-D, le principe de base est identique à celui de l'exemple ci-dessus. Il existe toujours des points donneurs et receveurs ainsi qu'une zone de recouvrement. La taille de ce recouvrement dépend entre autre du couplage entre les différents maillages qui communiquent. Dans l'exemple de la figure 2.2, une distinction entre les points receveurs, et les points donneurs a été faite. Ainsi, un point donneur ne peut être qu'un point de discrétisation (là où les équations sont résolues). Les valeurs aux points à interpoler d'un maillage ne dépendent donc que de celles déjà connues aux points de discrétisation du maillage le recouvrant. Il s'ensuit que le processus d'interpolation d'un maillage vers un autre est complètement indépendant du même processus dans le sens inverse. On dit alors que l'interpolation est explicite. Pour ce type d'interpolation, cette distinction entre points donneurs et points receveurs impose une taille minimale de la zone de recouvrement dépendante de la taille des supports d'interpolation et de discrétisation des équations. Dans certains cas, un point receveur peut aussi être donneur, on parle alors d'interpolation implicite. La valeur d'un ou des points de support d'une interpolation pour un maillage donné est inconnue à l'instar de celle du point à interpoler de l'autre maillage. Les points interpolés de chaque maillage se retrouvent donc couplés. L'interpolation, et donc l'obtention des valeurs manquantes, est réalisée en résolvant un système d'équations prenant en compte ce couplage. Pour une interpolation du type implicite, le nombre de points interpolés total est plus faible que pour une interpolation explicite. La zone de recouvrement peut être plus petite et la génération de recouvrement de maillages complexes est facilitée. Cependant, Chessire et Henshaw [28] montrent que la résolution du système d'équations alourdit considérablement le temps de restitution du calcul final. De ce fait dans la suite du rapport,

seules les interpolations du type explicite seront considérées.

2.2.3 Rôle et choix de l'interpolation

2.2.3.1 Précision

Lorsque des méthodes de recouvrement de maillages sont employées, les interpolations, servant à relayer les informations d'une grille à l'autre, jouent un rôle prépondérant. En effet, de la qualité des transferts des valeurs va dépendre la précision de la solution numérique. Les interpolations ne doivent donc pas dégrader cette solution. C'est pourquoi Chessire et Henshaw [28] préconisent l'emploi d'interpolations au minimum du même ordre que celui des autres schémas utilisés (au sens d'une troncature d'un développement en séries de Taylor). Pour des applications aérodynamiques complexes, pour lesquels ces méthodes ont été initialement développées, les schémas de discrétisation spatiale et temporelle sont d'ordre faible. Les interpolations linéaires, d'ordre 2, peuvent alors être suffisantes. Cependant, l'emploi de schémas d'ordre élevé pour des calculs aéroacoustiques imposent l'utilisation d'interpolations plus précises. Delfs *et al.*[38] montrent ainsi que l'interpolation linéaire ne suffit pas pour propager correctement des ondes acoustiques d'un maillage de peau d'un profil d'aile à un maillage cartésien de fond. Les interpolations des interfaces de recouvrement peuvent donc être un obstacle si le contenu fréquentiel de l'écoulement est étendu. Ainsi elles doivent être capables de supporter aussi bien les grandes échelles aérodynamiques que les plus petites échelles acoustiques ou turbulentes. La résolution spectrale, à l'image de celle employée pour les schémas de dérivation, est donc tout aussi importante que l'ordre formel au sens des séries de Taylor. Dans la suite, le comportement spectral des interpolations sera étudié.

2.2.3.2 Stabilité

Desvignes *et al.*[42] montrent que le facteur principal d'instabilités numériques d'un schéma d'interpolation réside dans son caractère décentré. Pour une interpolation décentrée, le point interpolé ne se situe pas dans l'intervalle central du support d'interpolation si celui-ci est constitué d'un nombre pair de points. Cette instabilité est d'autant plus renforcée que les schémas d'interpolations sont de haute précision. Pour stabiliser ces interpolations décentrées, Desvignes *et al.* développent des interpolations optimisées, inspirées de Tam et Kurbatskii [183], auxquelles sont ajoutées une contrainte de stabilité du schéma suivant une méthode proposée par Tam et Kurbatskii [183] et expliquée dans le paragraphe 2.3.3. Cependant dans le reste du manuscrit, seules des interpolations centrées sont retenues pour un nombre pair de points de support. Celles-ci sont supposées stables et par conséquent, aucune étude de stabilité ne sera proposée.

2.2.3.3 Conservativité

Les interpolations utilisées pour les techniques par recouvrements de maillage ne sont en général pas conservatives. Dans les premiers temps du développement de ces techniques, des développements d'interpolations conservatives ont été réalisés par Berger [13], Chessire et Henshaw [29] ou Wang [191]. Cependant, les difficultés de montée en ordre de ces interpolations ou de les généraliser à des simulations multidimensionnelles ont conduits certains auteurs à préférer des interpolations non-conservatives et à les coupler éventuellement avec des méthodes de raffinement du maillage pour raffiner localement les régions où les chocs sont présents. Pour les applications aéroacoustique, Emmert *et al.*[51] réussissent à simuler un écoulement de conduite transonique. La configuration finale

visée dans le cadre de cette étude est subsonique, avec un nombre de Mach à 0.2. Aucun choc n'est simulé et il n'est donc pas nécessaire d'assurer la conservativité des interpolations.

2.3 Interpolation dans un espace à une dimension

2.3.1 Formulation explicite d'une interpolation 1-D

Soit un support d'interpolation de taille N . Soit une fonction u définie sur les points x_i de ce support. L'interpolation de la fonction u au point d'interpolation x_0 est définie par :

$$u(x_0) = \sum_{i=1}^N S_i u(x_i) \quad (2.1)$$

avec S_i les coefficients d'interpolations associés aux points x_i . Nous allons voir les différentes méthodes nous permettant d'obtenir ces coefficients.

2.3.2 Schémas d'interpolation 1-D

Polynômes de Lagrange Pour un support de taille N , les coefficients S_i sont des polynômes de degrés $N - 1$ définis par :

$$S_i = \prod_{l=1, l \neq i}^N \frac{x_0 - x_l}{x_i - x_l} \quad (2.2)$$

L'ordre au sens d'une troncature d'un développement en séries de Taylor de cette méthode est N . Cette interpolation est sans doute la plus simple à mettre en oeuvre expliquant ainsi sa grande popularité. Suivant l'application visée, l'ordre peut varier.

Interpolations optimisées dans l'espace des nombres d'ondes Suivant Tam et Kurbatskii [183], on peut calculer les coefficients dans l'espace des nombres d'onde de façon analogue à l'optimisation des schémas DRP. Le but de cette méthode est alors de contrôler la résolubilité spectrale de l'interpolation plutôt que de vérifier un ordre formel eu sens des séries de Taylor. Ainsi, pour un support équivalent à celui d'une interpolation Lagrangienne, ce schéma permet de résoudre une onde avec moins de points par longueur d'onde. Cependant, cette résolution fréquentielle plus élevée est au dépens d'erreur plus grande pour les bas nombres d'onde. Pour une onde monochromatique d'amplitude unitaire $u_\alpha(x) = e^{i[kx + \phi(k)]}$, on introduit l'erreur d'interpolation locale dans l'espace de Fourier pour la formulation explicite (2.1) :

$$E_{locale} = \left| e^{i(kx_0 + \phi)} - \sum_{j=1}^N S_j e^{i(kx_j + \phi)} \right|^2 \quad (2.3)$$

$$= \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} k \Delta x} \right|^2 \quad (2.4)$$

L'erreur intégrée à minimiser entre les nombres d'onde réduits $k\Delta x = 0$ et $k\Delta x = \kappa$ est alors :

$$E = \int_0^\kappa \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} k \Delta x} \right|^2 d(k\Delta x)$$

Le paramètre κ permet de définir un intervalle de nombres d'onde sur lequel l'interpolation est optimisée. Tam et Kurbatskii [183], puis Sherer et Scott [169], ont montré que l'erreur d'interpolation dépend de κ . Ce paramètre est pris ici égal à $\pi/2$ afin d'obtenir une limite de résolubilité spectrale des interpolations à peu près équivalente à celle des schémas de dérivation ou de filtrage. L'erreur d'interpolation peut être minimisée avec une première contrainte qui est que E est nulle pour u constant, c'est-à-dire $k = 0$:

$$E_{locale}(k = 0) = \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j \right|^2 = 0$$

On utilise alors la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte cette contrainte. La fonction de Lagrange est donc définie comme :

$$L = \int_0^\kappa \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} y} \right|^2 dy + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^N S_j \right)^2$$

et les coefficients S_j ainsi que le multiplicateur λ sont solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial S_j} = 0 & \quad \text{soit} \quad \mathcal{Re} \left[- \int_0^\kappa e^{-ijy} \left(1 - \sum_{m=1}^N S_m e^{-i \frac{x_m - x_0}{\Delta x} y} \right) dy \right] + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & \quad \text{soit} \quad \sum_{j=1}^N S_j - 1 = 0 \end{aligned}$$

Interpolations optimisées avec contraintes d'ordre Pour diminuer les erreurs d'interpolations optimisées 2-D à bas nombre d'ondes, Tam et Hu [182] ajoutent des contraintes d'ordre à la fonction de Lagrange. Pour une interpolation optimisée 1-D, ces contraintes proviennent d'un développement en séries de Taylor autour du point interpolé d'abscisse x_0 . La fonction de Lagrange devient alors :

$$L = \int_0^\kappa \left| 1 - \sum_{j=1}^N S_j e^{-i \frac{(x_j - x_0)}{\Delta x} (k\Delta x)} \right|^2 d(k\Delta x) + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^N S_j \right)^2 + \sum_m \mu_m \left[\sum_{k=1}^N S_k (x_k - x_0)^m \right] = 0,$$

avec μ_m les nouveaux multiplicateurs de Lagrange. S_j , λ et μ_m sont alors les solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial S_j} = 0 \quad \text{soit} \quad \mathcal{Re} \left[- \int_0^\kappa e^{-ij(k\Delta x)} \left(1 - \sum_{m=1}^N S_m e^{-i \frac{x_m - x_0}{\Delta x} (k\Delta x)} \right) d(k\Delta x) \right] + \frac{\lambda}{2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{soit} \quad \sum_{j=1}^N S_j - 1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \mu_m} = 0 \quad \text{soit} \quad \sum_{k=1}^N m S_k (x_k - x_0)^{m-1} = 0 \end{array} \right.$$

Dans les sections suivantes, une interpolation optimisée d'ordre m signifiera que m contraintes d'ordre ont été ajouté par le biais de m multiplicateurs de Lagrange μ_m .

Autres schémas d'interpolation proposés dans la littérature D'autres schémas d'interpolation ont été comparés dans différents articles. L'article de Sherer et Scott [169] en propose le plus grand nombre. Des interpolations compacts ont ainsi été testées avec ou sans l'optimisation proposée par Tam et Kurbatskii [183]. Malgré un très bon comportement spectral de ces interpolations, le caractère compact des schémas induit une mise en oeuvre très délicate pour des maillages complexes. Les interpolations par splines ou B-splines ont aussi été abordées. Une qualité des B-splines est l'indépendance de l'ordre recherché vis-à-vis de la taille du support. Ainsi, en théorie, la montée en ordre est possible à support fixe. En pratique, la définition des B-splines est mal posée aux frontières du support d'interpolation. Cette augmentation de l'ordre ne devient possible que pour des grands supports lorsque l'influence des frontières est faible. De plus, Guenanff [76] observe un temps de calcul plus élevé par rapport à d'autres schémas d'interpolations. Ce dernier a aussi testé les interpolations de Hermite mais les a écarté (probablement à cause d'un temps de calcul aussi plus élevé). Dans la suite de l'étude, seules les interpolations de Lagrange et les interpolations optimisées avec ou sans contraintes d'ordre sont considérées.

2.3.3 Analyse spectrale des schémas d'interpolation 1-D

La racine carrée de l'erreur locale d'interpolation, décrite par l'équation 2.4, peut être tracée pour les différentes méthodes d'interpolation dans l'espace des nombres d'onde réduits $k\Delta x$. Dans le reste du manuscrit, cette erreur sera aussi appelée erreur locale et sera tracée à la fois en échelle linéaire et logarithmique. La taille des supports d'interpolation varie entre 2 et 12 points et le point interpolé se situe au milieu du support. Ce choix de la position du point interpolé est motivé par deux raisons. La première est que les points interpolés et utilisés lors des simulations numériques seront toujours situés dans l'intervalle central du support par souci de stabilité. La deuxième raison est que Sherer et Scott montrent que l'erreur d'interpolation la plus élevée est toujours calculée pour des points interpolés aux centres de chaque intervalle du support.

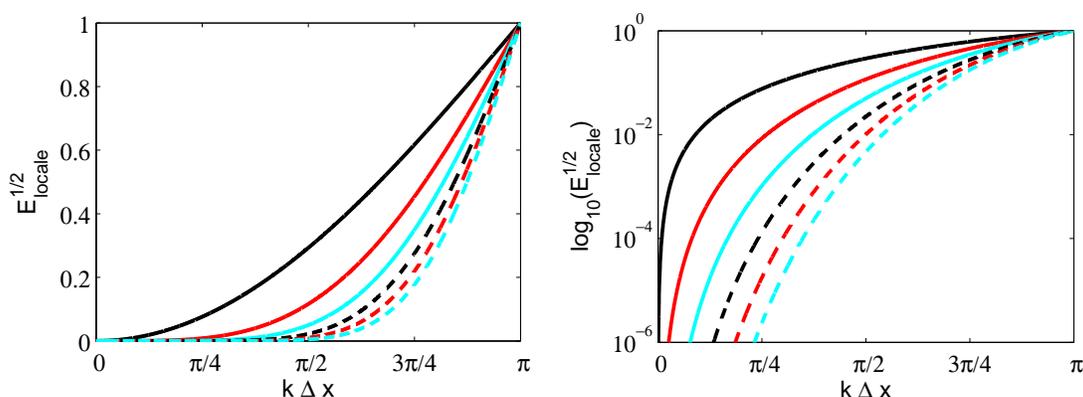


FIG. 2.3 – Erreur locale dans l'espace des nombres d'onde de l'interpolation de Lagrange pour des supports de taille $N=2$ (—), $N=4$ (—), $N=6$ (—), $N=8$ (---), $N=10$ (- - -) et $N=12$ (- - -).

Interpolation de Lagrange Les interpolations de Lagrange sont étudiées en premier. Comme le montre la figure 2.3, l'erreur diminue globalement quand la taille du support augmente. Cependant cette diminution n'est pas linéaire avec le nombre d'onde. En effet, plus le nombre d'onde augmente,

plus la différence d'erreur entre deux supports différents est faible. Ainsi, si à $\pi/4$, l'erreur d'interpolation sur 12 points est 4 ordre de grandeur en dessous de l'erreur d'interpolation sur 4 points. Aux environs de $\pi/2$, le gain d'un support sur 12 points n'est plus que d'un ordre de grandeur.

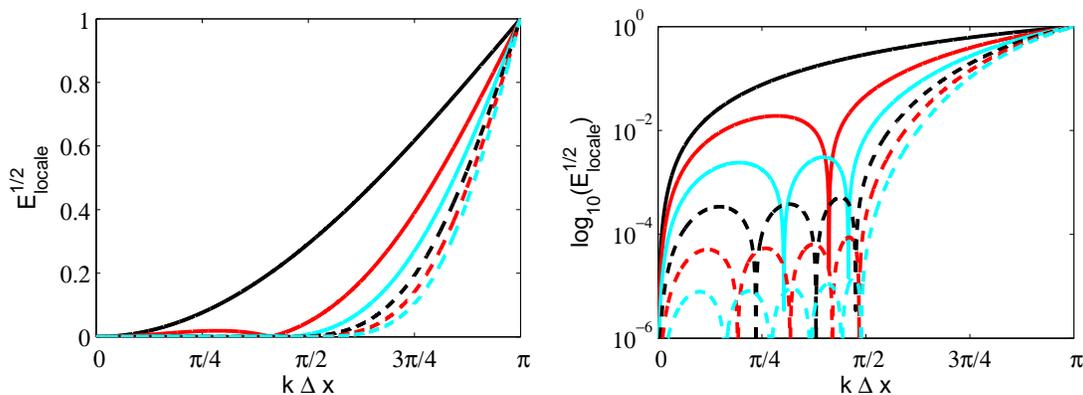


FIG. 2.4 – Erreur locale dans l'espace des nombres d'onde de l'interpolation optimisée pour des supports de taille $N=2$ (—), $N=4$ (—), $N=6$ (—), $N=8$ (---), $N=10$ (- - -) et $N=12$ (- - -).

Interpolation optimisée À l'image des interpolations de Lagrange, la figure 2.4 présente l'erreur d'interpolation du schéma optimisé lorsque le nombre de points du support augmente. Plus la taille du support augmente, plus l'erreur diminue et la résolubilité spectrale s'améliore. Cependant, des erreurs notables peuvent être observées à bas nombres d'onde. Ces erreurs se présentent sous la forme de "rebonds" dont l'amplitude diminue avec l'augmentation de la taille du support. L'échelle logarithmique permet d'observer que l'influence de la taille du support n'est pas la même sur une interpolation optimisée que sur une interpolation de Lagrange. En effet, pour une interpolation optimisée, le comportement spectral est quasi-identique jusqu'à des nombres d'ondes proches de la limite d'optimisation $\kappa=\pi/2$, quelle que soit la taille du support à partir de $N=6$. Augmenter le nombre de points du support équivaut alors à diminuer globalement le niveau d'erreur dans cet intervalle de nombres d'onde compris entre 0 et $\pi/2$. Contrairement aux interpolations de Lagrange, l'optimisation permet donc assez clairement de contrôler un niveau d'erreur sur toute une gamme d'échelles.

Comparaison entre une interpolation de Lagrange et une interpolation optimisée Les figures 2.5 présentent une comparaison de l'erreur locale dans l'espace spectral entre l'interpolation pour des polynômes de Lagrange et l'interpolation optimisée pour un support d'interpolation de taille 8. L'interpolation optimisée offre une résolubilité spectrale beaucoup plus étendue que l'interpolation polynomiale de Lagrange. Ce gain est surtout observé pour les grands nombres d'onde proche de la limite spectrale $\pi/2$. Cependant, des erreurs plus importantes en bas nombres d'onde existent pour cette méthode.

Interpolation optimisée avec contraintes d'ordre La figure 2.6 montrent l'erreur locale pour des interpolations optimisées avec différentes contraintes d'ordre pour une interpolation sur 8 points. L'interpolation de Lagrange est aussi tracée. On remarque que l'addition de contraintes d'ordre à une interpolation optimisée présente un avantage et un inconvénient. En effet, plus l'ordre de l'interpolation est élevé, plus le comportement des interpolations est amélioré pour les bas nombres

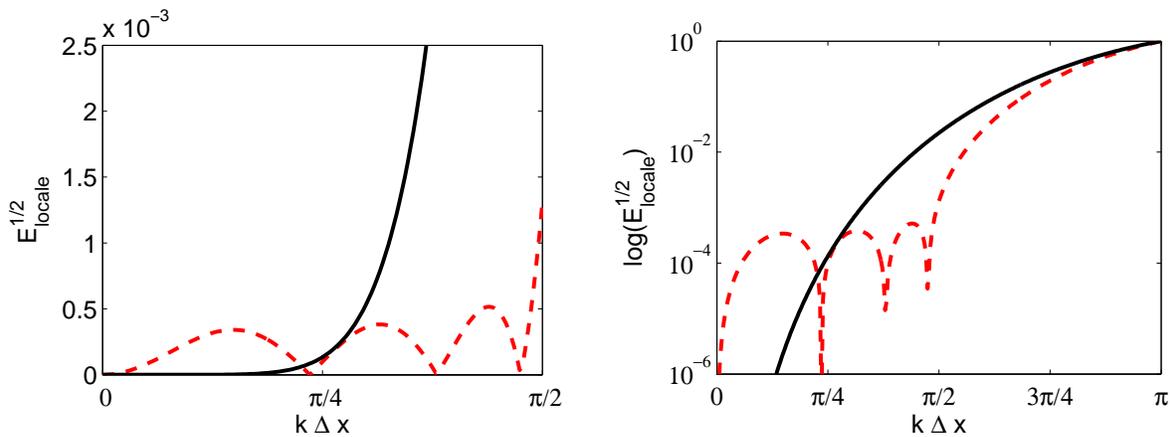


FIG. 2.5 – Comparaison de l’erreur locale dans l’espace des nombres d’onde entre l’interpolation de Lagrange (—) et l’interpolation optimisée (---), pour $N = 8$. À gauche, vue globale pour $k\Delta x = 0$ à π et, à droite, vue rapprochée pour $k\Delta x = 0$ à $k\Delta x = \pi/2$.

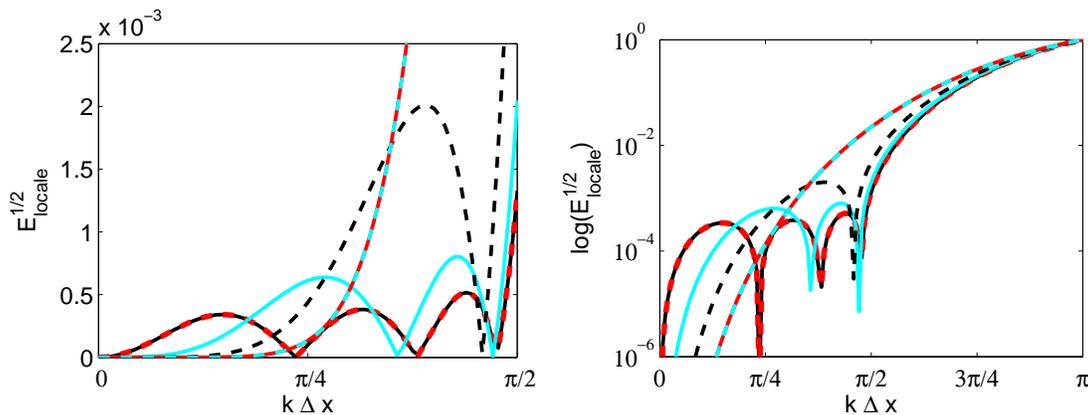


FIG. 2.6 – Erreur locale dans l’espace des nombres d’onde de l’interpolation optimisée avec contraintes d’ordre pour un supports de taille $N=8$. Interpolation d’ordre (o.) : 0.0 (—), 0.2 (---), 0.4 (—), 0.6 (---), 0.8 (---). Interpolation de Lagrange pour $N=8$ (—).

d’onde. Par contre, pour des nombres d’ondes supérieurs à $k\Delta x = \pi/4$, l’erreur augmente et la limite de résolubilité spectrale diminue légèrement par rapport à l’interpolation optimisée sans contrainte d’ordre. Cette remarque n’est pas valable pour l’interpolation optimisée d’ordre 8 car celle-ci est équivalente à une interpolation de Lagrange. Un compromis existe donc entre l’amélioration à bas nombre d’onde par l’augmentation de l’ordre et l’optimisation à haut nombre d’onde. En conclusion, une optimisation sur un large intervalle est préférable pour la propagation d’ondes acoustiques ou l’advection de différentes échelles turbulentes. L’addition de trop de contraintes d’ordre n’est alors pas le choix le plus approprié.

Analyse spectrale combinant les interpolations au schéma de dérivation Pour éviter de dégrader la solution numérique avec l’étape de communication, la précision du schéma d’interpolation doit être compatible avec celle du schéma utilisé pour les dérivées spatiales. Il convient donc d’étudier l’influence de l’interpolation sur l’erreur de dispersion du schéma de dérivation. Le schéma

de dérivation étudié est celui optimisé sur 11 points d'ordre 4 présenté dans la section 1.2.2. Ainsi, conformément à l'exemple 1-D du paragraphe 2.2.1, cinq points d'interpolations sont nécessaires au maximum pour évaluer une dérivée dans la zone de recouvrement. Réécrivons l'équation (2.1) comme ci-dessous :

$$f(x_0) = \sum_{l=-N}^N S_l f \left(x_0 + l \left(1 - \frac{\eta}{|l|} \right) \Delta x \right) \quad (2.5)$$

avec $\eta=0.5$, le décalage de la grille donneuse avec la grille receveuse. Les points receveurs à interpolier seront donc au milieu des supports d'interpolation. Reconsidérons maintenant l'équation du schéma de dérivation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-5}^5 a_j^{11} f(x_0 + j\Delta x) \quad (2.6)$$

Considérons que seulement $q \leq 5$ premiers points du support de dérivation sont interpolés avant de dériver. En injectant 2.5 dans 2.6, l'équation suivante est obtenue :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \left(\sum_{j=-5}^q a_j^{11} \sum_{l=-N}^N S_l f(x_0 + (l(1 - \frac{\eta}{|l|}) + j)\Delta x) + \sum_{j=q+1}^5 a_j^{11} f(x_0 + j\Delta x) \right) \quad (2.7)$$

Considérons maintenant $f_k = e^{ikx}$, alors le nombre d'onde effectif du schéma combinant la dérivée et les q interpolations est :

$$k^* \Delta x = -i \left(\sum_{j=-5}^q a_j^{11} e^{ikj\Delta x} \sum_{l=-N}^N S_l e^{ik(1 - \frac{\eta}{|l|})\Delta x} + \sum_{j=q+1}^5 a_j^{11} e^{ikj\Delta x} \right) \quad (2.8)$$

La figure 2.7 présente l'erreur de dispersion du schéma combinant la dérivée et les interpolations pour

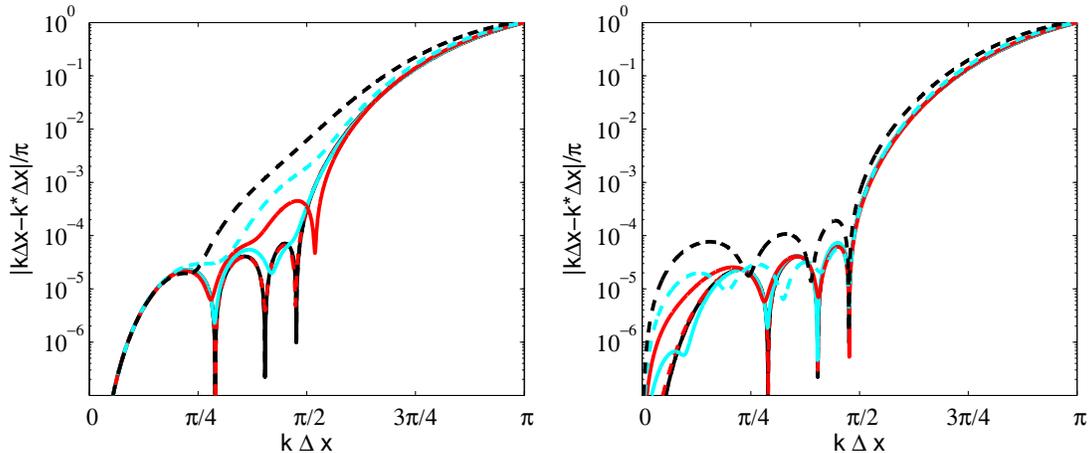


FIG. 2.7 – Erreur de dispersion d'un schéma combinant une dérivation sur 11 points et une ou des interpolations de Lagrange (à gauche) et optimisées (à droite) pour $N = 8$ et $q = 1$ (— — —), $q = 2$ (— — —), $q = 3$ (— — —), $q = 4$ (— — —), $q = 5$ (— — —). Erreur de dispersion du schéma de dérivation uniquement (— — —).

q variant de 1 à 5 et un support d'interpolation $N=8$. L'erreur pour un schéma sans point interpolé est présentée comme référence. Plus les courbes se rapprochent de cette erreur de référence, moins

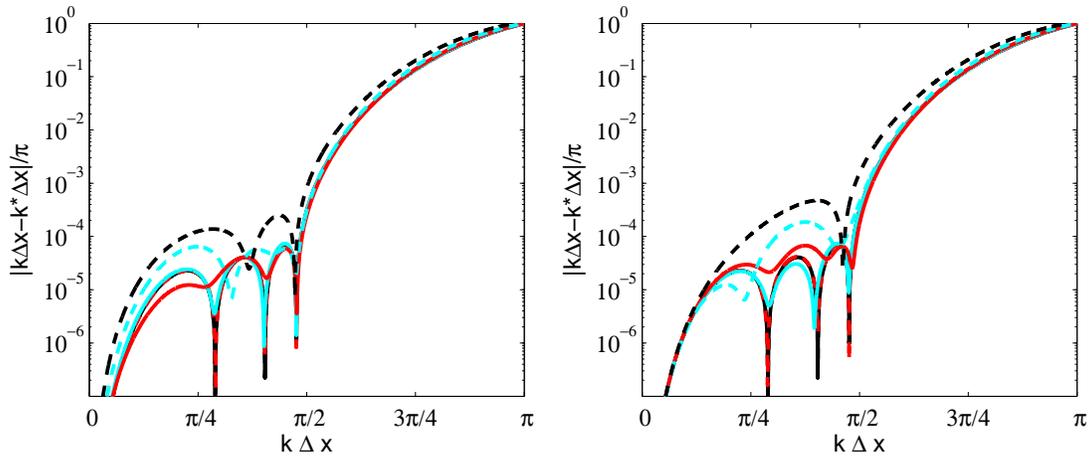


FIG. 2.8 – Erreur de dispersion d'un schéma combinant une dérivation sur 11 points et une ou des interpolations optimisées d'ordre 4 (à gauche) et d'ordre 6 (à droite) pour $N = 8$ et $q = 1$ (---), $q = 2$ (—), $q = 3$ (—), $q = 4$ (- - -), $q = 5$ (- - -). Erreur de dispersion du schéma de dérivation uniquement (—).

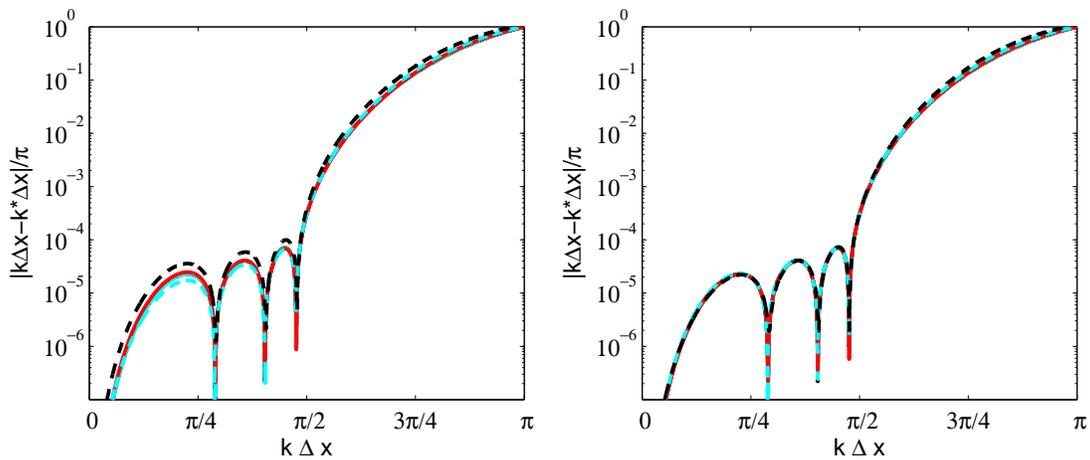


FIG. 2.9 – Erreur de dispersion d'un schéma combinant une dérivation sur 11 points et une ou des interpolations optimisées d'ordre 4 pour $N = 10$ (à gauche) et pour $N = 12$ (à droite). $q = 1$ (---), $q = 2$ (—), $q = 3$ (—), $q = 4$ (- - -), $q = 5$ (- - -). Erreur de dispersion du schéma de dérivation uniquement (—).

les interpolations dégradent la solution numérique. Des interpolations de Lagrange sont utilisées sur la figure de gauche. L'erreur de dispersion reste acceptable pour des dérivées n'utilisant que un ou deux points d'interpolation ($q=1$ et $q=2$). Pour plus de trois points interpolés ($q \geq 3$), l'interpolation dégrade le comportement du schéma de dérivation pour les nombres d'onde compris entre $\pi/4$ et $\pi/2$. Cependant le comportement de la dérivée est conservé pour les nombres d'onde inférieurs à $\pi/4$. La figure de droite présente la même analyse pour des interpolations optimisées. Pour 1 à 4 points d'interpolés, le niveau d'erreur globale avec ou sans interpolation reste le même. Seule l'erreur en bas nombre d'onde augmente avec q . Pour $q=5$, l'interpolation introduit globalement un surplus d'erreur

constant tout en gardant un comportement optimisé acceptable entre 0 et $\pi/2$. On peut ainsi noter que, contrairement aux interpolations de Lagrange, la limite κ de résolubilité spectrale du schéma de dérivation est conservée. A l'instar de l'analyse spectrale des interpolations, plus les contraintes d'ordres ajoutées à l'optimisation sont nombreuses, plus l'amélioration pour les bas nombres d'onde est effective comme le montre la figure 2.8. Cependant, la résolubilité spectrale aux grands nombres d'onde devient moins bonne. Tout en gardant une interpolation optimisée d'ordre 4, la figure 2.9 présente l'erreur de dispersion pour des interpolations sur 10 et 12 points. On remarque que pour un support de 12 points, l'interpolation n'introduit quasiment pas d'erreurs supplémentaires. A noter que ce constat est légitime vu que l'optimisation du schéma de dérivation est sur 11 points avec des contraintes d'ordre 4.

2.3.4 Validation des interpolations 1-D : Advection linéaire 1-D

On étudie l'advection linéaire scalaire d'un paquet d'ondes sur deux maillages 1-D décalés et se recouvrant. L'équation résolue est :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

L'avancement temporel est réalisé grâce à un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 optimisé, la dérivée spatiale est calculée à l'aide d'un schéma DRP sur 11 points et un filtrage optimisé sur 11 points est appliqué avec un coefficient de 0.2. Tous ces schémas sont détaillés dans le chapitre 1 dédié aux méthodes numériques et correspondent aux choix retenus pour nos simulations aéroacoustiques. La solution initiale du problème est un paquet d'ondes défini par :

$$w(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{a\Delta x}\right) \exp\left(-\ln 2 \left(\frac{x}{b\Delta x}\right)^2\right) \quad (2.10)$$

où Δx est le pas de discrétisation spatiale, $a\Delta x$ la longueur d'onde principale du paquet d'ondes et $b\Delta x$ la demi-largeur de la gaussienne. La configuration d'étude est $\Delta x=1$, $a=5$ et $b=9$. Le paquet d'ondes est donc suffisamment discrétisé à la fois pour que les erreurs dues aux schémas de discrétisation spatiale ou temporelle soient faibles mais aussi pour observer des différences entre la solution de référence calculée sur un maillage simple et les divers type d'interpolations ou les diverses tailles de support. Sur la figure 2.10 est présentée la solution initiale ainsi que tout le domaine d'advection. Au centre du maillage principal un autre maillage d'un tiers plus petit est superposé. Ces deux maillages sont décalés d'un demi-pas d'espace à l'image de l'exemple du paragraphe 2.2.1. Le paquet d'ondes est advectée de gauche à droite. Dans cette étude, la taille de recouvrement des grilles est adaptée à la taille du support d'interpolation. Ainsi, plus le support est grand, plus le recouvrement est étendu. Cependant l'influence du recouvrement sur la solution numérique est faible pour ce cas test. Le paquet d'ondes est convecté à partir de la position $x=0$ sur une distance de $N_{it}\Delta x$, avec le nombre d'itérations réalisées $N_{it}=200$. Il traverse alors complètement le domaine intermédiaire. Une erreur quadratique moyenne est alors calculée et sommée pour chaque pas de temps puis moyenné par N_{it} . Cette erreur est définie par :

$$L = \frac{1}{N_{it}} \sum_{n=1}^{N_{it}} \left(\sqrt{\frac{\sum_i (w_i - w_{analytique})^2}{\sum_i w_{analytique}^2}} \right)_n \quad (2.11)$$

Cette erreur n'est évaluée que pour les points de discrétisation c'est-à-dire seulement où les flux sont avancés. Il en résulte que les points d'interpolation ne sont pas pris en compte. Elle est tracée sur la

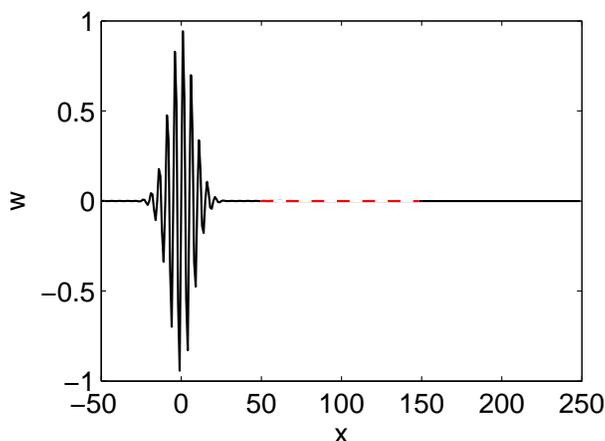


FIG. 2.10 – Solution initiale sur le maillage 1 (—) et le maillage 2 (---).

figure 2.11 et est normée par l'erreur d'un calcul sur la grille de fond seule. Quand la taille du support augmente, l'erreur due aux schémas d'interpolation tend à diminuer et chaque erreur tend vers celle d'un grille seule. De plus, l'optimisation avec contraintes d'ordre améliore la solution numérique. Ainsi l'erreur globale d'advection avec l'optimisation tend très rapidement, à partir d'un support de taille 8, vers celle de la solution de référence à 1% près. Cette observation n'est pas vraie pour les interpolations de Lagrange. Enfin, pour les interpolations optimisées, l'erreur est parfois inférieure à celle de référence. Contrairement aux interpolations de Lagrange, sa diminution avec le support d'interpolation n'est pas monotone. Ce caractère non monotone provient d'une compensation d'erreur lorsqu'une interpolation est optimisée dans l'espace des nombres d'onde.

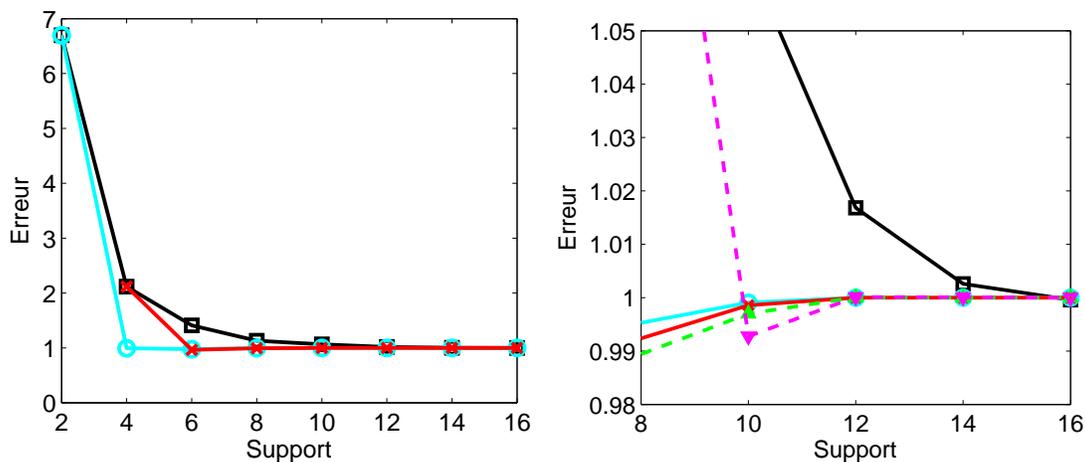


FIG. 2.11 – Erreur L à l'itération finale en fonction de la taille du support d'interpolation N . A gauche : Interpolations de Lagrange (—□), optimisées 0.2 (—○), optimisées 0.4 (—×). A droite : vue rapprochée de la figure de gauche avec ajout des interpolations optimisées 0.6 (—△) et 0.8 (—▽).

2.4 Interpolation dans un espace à deux dimensions

2.4.1 Introduction aux interpolations dans un espace 2-D

Les méthodes de recouvrement de maillage 2-D ou 3-D ont été élaborées afin de pouvoir gérer à la fois des grilles cartésiennes et curvilignes non coïncidentes. Ainsi, la forme des supports d'interpolation peuvent varier d'un maillage à l'autre, voire pour une même grille, d'une interpolation à une autre. La méthode d'obtention des coefficients d'interpolation se doit alors d'être générique et applicable à tous supports rencontrés dans les recouvrements. Deux types d'interpolations 2-D peuvent ainsi être mis en oeuvre. Le premier type d'interpolation implique des supports 2-D cartésiens issus d'une transformation au préalable du support 2-D curviligne. Une fois le support cartésien obtenu, les interpolations 1-D par direction peuvent facilement être utilisées. La difficulté est alors reportée sur le choix de la transformation. C'est ce qui sera vu dans un premier temps. Dans un deuxième temps, les interpolations 2-D réalisées directement dans un espace curviligne seront abordées.

2.4.2 Formulation explicite d'une interpolation 2-D

En 2-D, la forme générale d'une interpolation explicite d'une fonction u au point (x_0, y_0) pour un support $N \times N$ est :

$$u(x_0, y_0) = \sum_{i,j=1}^N S_{ij} u(x_i, y_j) \quad (2.12)$$

avec S_{ij} les coefficients d'interpolation associés aux points (x_i, y_j) .

2.4.3 Interpolations 2-D pour un support cartésien et support transformé

Généralisation 2-D d'une interpolation 1-D Considérons tout d'abord le cas d'un support d'interpolation cartésien $N \times N$ comme celui de la figure 2.12.

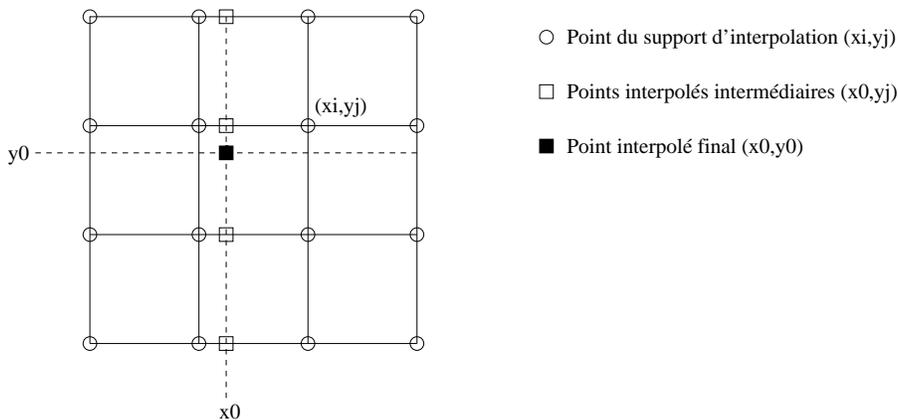


FIG. 2.12 – Support d'interpolation 2-D cartésien. Points de support d'interpolation en cercle blanc, point interpolé en carré noir, points interpolés intermédiaires en carré blanc.

L'interpolation de la fonction u au point (x_0, y_0) peut se réaliser en deux étapes. Une première étape consiste à interpoler horizontalement pour les différentes ordonnées y_j la fonction u au point x_0 (carrés

blancs sur la figure 2.12). On obtient ainsi N points d'interpolation intermédiaires de coordonnées (x_0, y_j) avec $j = 1, \dots, N$. La deuxième étape est l'interpolation verticale d'abscisse x_0 au point (x_0, y_0) avec pour support les points (x_0, y_j) avec $j = 1, \dots, N$.

Ainsi, pour une interpolation 2-D avec un support cartésien, les coefficients d'interpolation S_{ij} sont simplement le produit tensoriel des coefficients d'interpolation 1-D S_i dans chacune des directions. Par exemple, pour l'interpolation polynômiale de Lagrange, on aura :

$$S_{ij} = S_i S_j = \prod_{l=1, l \neq i}^N \frac{x_0 - x_l}{x_i - x_l} \prod_{k=1, k \neq j}^N \frac{y_0 - y_k}{y_j - y_k} \quad (2.13)$$

Dans la suite, cette interpolation sera appelée une interpolation 2×1-D (de Lagrange ou optimisée). Comme cela a déjà été mentionné, l'intérêt des méthodes de recouvrement repose essentiellement sur la gestion de maillages curvilignes. Les supports d'interpolations sont donc de topologie quelconque. Prenons l'exemple de 2 maillages, un cartésien et un curviligne. Imaginons que le point interpolé soit un point du maillage cartésien et que le support d'interpolation soit issu du maillage curviligne. Pour réaliser une interpolation 2×1-D, une transformation doit être trouver entre le support curviligne en question et un support cartésien de référence. La connaissance de cette transformation permet ensuite de trouver la nouvelle position du point à interpoler dans ce support cartésien de référence. Ce n'est qu'à partir de cette dernière étape qu'une interpolation 2×1-D peut être réalisée. Il arrive que cette transformation entre un support cartésien et un support curviligne soit connue analytiquement. Une transformation analytique est toujours préférable car elle est exacte et n'introduit donc pas d'erreurs supplémentaires. Par exemple, si le maillage donneur est polaire, on a simplement les relation ci-dessous :

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta \quad (2.14)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta = \text{atan}(y/x) \quad (2.15)$$

Ces relations entre l'espace polaire et cartésien seront fréquemment utilisées car les maillages utilisés pour les simulation seront soit cartésiens soit cylindriques. Si l'interpolation est réalisée dans un support issu d'un maillage polaire, on dira qu'elle est réalisée dans l'espace polaire. Il n'est en général pas aussi facile de trouver une transformation entre un support curviligne et un support cartésien. Deux méthodes sont présentées : l'utilisation d'interpolations transfinies proposée notamment par Guenanff [76] et l'utilisation d'un "mapping" iso-paramétrique d'ordre élevé décrite par Sherer et Scott [169]. La transformation de ces deux méthodes est aussi basée sur des interpolations.

Méthode avec transformation par interpolations transfinies Cette méthode a été proposée par Guenanff [76] et est inspirée de techniques de maillages en éléments finis. Elle consiste à trouver une transformation par interpolations polynômiales entre le support d'interpolation réel et le support d'interpolation de référence cartésien. Les interpolations de la transformation sont réalisées directement dans l'espace curviligne en considérant une méthode de résolution matricielle. Comme nous le verrons, en fonction de la régularité du maillage et de la taille des supports, la matrice à inverser peut être mal conditionnée. Une fois cette transformation connue, la position du point donneur dans l'espace de référence peut être trouvée avec plus ou moins de précision suivant la qualité de la transformation. Une interpolation polynômiale des valeurs connues aux point donneurs est ensuite réalisée dans cette espace de référence. Il faut noter que le nombre de points nécessaires à la transformation sera le même que pour l'interpolation finale.

Méthode par mapping iso-paramétrique Cette méthode fait intervenir une technique classique de la méthodologie de simulation par recouvrement de maillage. Elle est généralisée à l'ordre élevé par Sherer et Scott [169]. Contrairement à Guenanff, on part d'un élément de référence cartésien. Le but est donc de trouver la transformation de l'élément cartésien de référence vers l'élément curviligne. Comme cette transformation est réalisée à partir d'un élément cartésien, des interpolations 2×1 -D (de Lagrange en général) peuvent être utilisées évitant ainsi le problème de conditionnement lié à la méthode de Guenanff. Il faut alors trouver la position du point à interpoler dans l'espace de référence. La transformation allant du cartésien vers le curviligne, l'image par transformation de la position du point interpolé dans l'élément cartésien doit être la position du point dans le support curviligne initial. Il faut donc trouver itérativement cette position dans le support de référence cartésien jusqu'à satisfaire cette condition. Ce problème est résolu avec un algorithme de Newton. Une fois que la position du point interpolé est trouvée dans le support cartésien de référence, il devient possible d'interpoler les valeurs aux points de support grâce à des interpolations 2×1 -D.

2.4.4 Interpolations 2-D pour un support curviligne

Dans cette partie, des méthodes d'interpolation sur un support quelconque et ne nécessitant pas de transformation seront exposées. On y distingue l'interpolation multidimensionnelle avec contraintes d'ordre seules et l'interpolation multidimensionnelle optimisée avec ou sans contraintes d'ordre. On peut aussi mentionner une généralisation des interpolations 1-D directement dans un support curviligne mais cette interpolation 2-D ne sera pas abordée [126]. Avant d'aborder ces différentes méthodes, réécrivons la formule générale d'une interpolation dans l'espace 2-D d'une fonction u au point (x_0, y_0) :

$$u(x_0, y_0) = \sum_{k=1}^{N \times N} S_k u(x_k, y_k) \quad (2.16)$$

avec S_k les coefficients d'interpolation. La suite traite donc de l'obtention de ces coefficients S_k .

Interpolation avec contraintes d'ordre Le développement en séries de Taylor à l'ordre M de la fonction u aux points donneurs (x_k, y_k) autour de (x_0, y_0) s'écrit :

$$u(x_k, y_k) = u(x_0, y_0) + \sum_{p,q} \frac{1}{p!q!} \left(\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} \right)_{x_0, y_0} (x_k - x_0)^p (y_k - y_0)^q, \quad 1 \leq p + q \leq M \quad (2.17)$$

Pour trouver les coefficients d'interpolation du point (x_0, y_0) , il suffit d'injecter cette relation dans (2.16) et d'annuler tous les termes monômiaux jusqu'à l'ordre M , ce qui fournit le système :

$$\sum_{k=1}^N S_k = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^N S_k (x_k - x_0)^p (y_k - y_0)^q = 0, \quad 1 \leq p + q \leq M \quad (2.18)$$

que l'on met sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C} \mathbf{S} = (1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)^T \quad (2.19)$$

\mathbf{C} de taille $T \times N$ avec :

$$T = 1/2(M+1)(M+2), \quad \text{et} \quad C_{pq,k} = (x_k - x_0)^p (y_k - y_0)^q$$

et \mathbf{S} la matrice des coefficients :

$$\mathbf{S} = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_N)^T$$

Interpolation multidimensionnelle optimisée dans l'espace des nombres d'ondes Tam et Hu [182] proposent une approche multidimensionnelle de l'interpolation 1-D proposée par Tam et Kurbatskii [183]. On introduit la transformation de Fourier spatiale :

$$u(x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} A(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y + \phi_{k_1 k_2})} dk_1 dk_2 \quad (2.20)$$

avec $A(k_1, k_2) = |\tilde{u}(k_1, k_2)|$, $\phi_{k_1, k_2} = \arg[\tilde{u}(k_1, k_2)]$, et \tilde{u} la transformée de Fourier de u . Pour une onde simple d'amplitude unitaire :

$$u_{k_1 k_2} = e^{i(k_1 x + k_2 y + \phi_{k_1 k_2})} \quad (2.21)$$

Après l'injection de $u_{k_1 k_2}$ dans l'expression générale d'une interpolation, l'erreur locale pour une onde simple s'écrit :

$$E_{\text{locale}}(k_1, k_2) = \left| 1 - \sum_{k=1}^N S_k e^{i(k_1 \Delta_x (x_k - x_0) / \Delta_x + k_2 \Delta_y (y_k - y_0) / \Delta_y)} \right| \quad (2.22)$$

Initialement, dans le cadre de maillages non-structurés, Tam et Hu se basent sur un pas d'espace unique Δ qui est la moyenne de la distance entre chaque points. Le Garrec *et al.*[115] proposent, pour des maillages structurés, une distinction entre deux pas d'espace, Δ_x et Δ_y , comme le présente l'équation (2.22). Etant dans un espace curviligne, la définition de ces pas d'espace reste cependant arbitraire et dépend avant tout de la régularité des différents supports choisis. Dans le cadre de cette étude, Δ_x et Δ_y sont définis comme étant une moyenne sur le support de la distance entre deux points voisins projetée suivant x et y respectivement. On minimise l'erreur totale E pour $-\kappa \leq k_1 \Delta_x, k_2 \Delta_y \leq \kappa$:

$$E = \iint_{-\kappa}^{+\kappa} \left| 1 - \sum_{k=1}^N S_k e^{i(k_1 \Delta_x (x_k - x_0) / \Delta_x + k_2 \Delta_y (y_k - y_0) / \Delta_y)} \right|^2 d(k_1 \Delta_x) d(k_2 \Delta_y) \quad (2.23)$$

κ est ainsi un paramètre donné qui varie selon la résolubilité spectrale souhaitée. On impose que l'erreur soit nulle pour une constante, $\sum_{k=1}^N S_k = 1$, en utilisant la méthode du multiplicateur de Lagrange. Il faut donc minimiser le lagrangien \mathcal{L} sous la contrainte $\sum_{k=1}^N S_k - 1 = 0$:

$$\mathcal{L} = \iint_{-\kappa}^{+\kappa} \left| 1 - \sum_{k=1}^N S_k e^{i(\alpha(x_k - x_0) / \Delta_x + \beta(y_k - y_0) / \Delta_y)} \right|^2 d\alpha d\beta + \lambda \left(\sum_{k=1}^N S_k - 1 \right), \quad (2.24)$$

avec λ le multiplicateur de Lagrange. $\alpha = k_1 \Delta_x$ et $\beta = k_2 \Delta_y$ sont les nombres d'onde réduits. Pour atteindre le minimum, il faut que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad (2.25)$$

d'où le système matriciel à résoudre :

$$\mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{b}, \quad (2.26)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_N \ \lambda)^T \\ A_{kj} = \begin{cases} 4\Delta_x\Delta_y, & j = k \\ \frac{4\Delta_x\Delta_y}{(x_j - x_k)(y_j - y_k)} \sin \left[\kappa \frac{x_j - x_k}{\Delta_x} \right] \sin \left[\kappa \frac{y_j - y_k}{\Delta_y} \right], & j \neq k \end{cases} \\ (j, k = 1, 2, \dots, N) \\ A_{j(N+1)} = \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ A_{(N+1)k} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ A_{(N+1)(N+1)} = 0 \\ b_k = \frac{4\Delta_x\Delta_y}{(x_k - x_0)(y_k - y_0)} \sin \left[\kappa \frac{x_k - x_0}{\Delta_x} \right] \sin \left[\kappa \frac{y_k - y_0}{\Delta_y} \right] \\ b_{(N+1)} = 1 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Interpolation multidimensionnelle optimisée dans l'espace des nombres d'ondes avec contraintes d'ordre Les schémas optimisés introduisent une erreur plus importante en basse fréquence que les schéma classiques [182]. Pour remédier à ce problème, de nouvelles contraintes sont ajoutées au Lagrangien. Elles correspondent au développement en série de Taylor des points du support. Le Lagrangien s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \iint_{-\kappa}^{+\kappa} \left| 1 - \sum_{k=1}^N S_k e^{i(\alpha(x_k - x_0)/\Delta_x + \beta(y_k - y_0)/\Delta_y)} \right|^2 d\alpha d\beta + \lambda \left(\sum_{k=1}^N S_k - 1 \right) + \sum_{n,m} \mu_{mn} \left[\sum_{k=1}^N S_k (x - x_0)^n (y - y_0)^m \right] = 0, \quad (2.28)$$

avec μ_{mn} les nouveaux multiplicateurs de Lagrange. Pour que \mathcal{L} soit un minimum, il faut que :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S_k} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_{mn}} \quad (2.29)$$

On peut se ramener au problème matriciel suivant :

$$\mathbf{B} \mathbf{S} = \mathbf{d},$$

avec

$$\mathbf{S} = (S_1 \ S_2 \ \dots \ S_N \ \lambda \ \mu_{10} \ \mu_{01} \ \mu_{20} \ \mu_{11} \ \mu_{02} \ \dots \ \mu_{mn} \ \dots \ \mu_{0M})^T$$

$$\mathbf{d} = (b_1 \ \dots \ b_N \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)^T,$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

où \mathbf{A} est explicitée dans le paragraphe précédent et \mathbf{C} est une matrice de dimensions $(T-1) \times (N+1)$, telle que :

$$\begin{cases} C_{mn,k} = (x - x_0)^n (y - y_0)^m, & k = 1, 2, \dots, N \\ C_{mn,N+1} = 0 \end{cases}$$

2.4.5 Analyse spectrale des méthodes d'interpolation 2-D

Dans cette étude, le support curviligne considéré est représentatif de ceux qui seront rencontrés lors de la simulation de l'écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique. Ce support est donc issu d'un maillage polaire comme le montre la figure 2.13. Le support est orienté avec un angle de 45° , ce qui

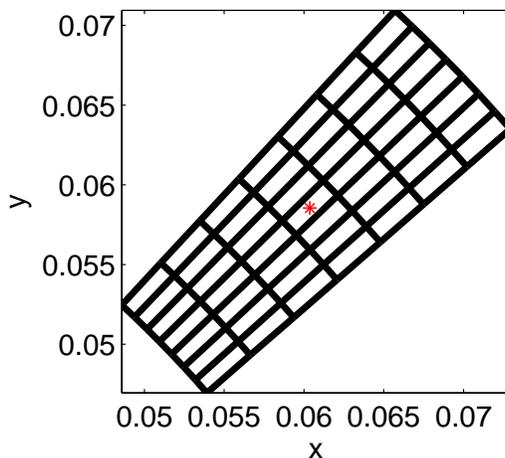


FIG. 2.13 – Support curviligne 8×8 utilisé pour l'analyse spectrale des interpolations 2-D.

constitue en général un des cas les plus défavorable pour une interpolation 2-D [76, 114]. Le support choisi est de taille 8×8 . Comme pour l'analyse spectrale 1-D, le point interpolé se situe au centre du support suivant les coordonnées (r, θ) et non suivant (x, y) . L'erreur d'interpolation des différents schémas peut être étudiée dans l'espace des nombres d'ondes par le biais de la relation (2.22). Les pas de discrétisation Δ_x et Δ_y correspondent respectivement aux pas radial et azimutal de ce support régulier. Pour chaque cas, l'erreur locale d'une interpolation en 2×1 -D dans l'espace polaire est tracée en guise de référence.

Influence d'une transformation d'un support curviligne Dans ce paragraphe, l'influence d'une transformation de coordonnées pour un support curviligne sur le comportement spectral des interpolations est étudiée. Après chaque transformation, une interpolation 2×1 -D de Lagrange est réalisée. On considère tout d'abord une transformation par interpolations transfinies. La figure du haut de 2.14 présente les iso-contours d'erreur locale dans l'espace spectral 2-D. Aucune différence entre les transformations analytique (espace polaire) et par interpolations transfinies n'est observée pour les iso-contours tracés. Seules les coupes (figures du milieu) dans les directions horizontales et diagonales présentent une erreur légèrement plus élevée pour l'interpolation aux très bas nombres d'onde. Cependant, le niveau de ces erreurs restent très faibles. Cette différence est due au fait que plus le nombre de points du support est grand, plus la transformation induit l'inversion d'une matrice mal conditionnée. Comme le montre Guenanff, une orientation du support à 45° n'est pas non plus favorable au conditionnement de la matrice. Sur les figures du bas, la méthode de transformation par interpolations transfinies est remplacée par une la transformation par projection iso-paramétrique. Contrairement à la transformation précédente, cette méthode ne présente aucune différence avec la solution de référence. En effet, cette transformation est une méthode itérative qu'on peut faire converger jusqu'au zéro machine pour ce support précis. Même si ce dernier est assez régulier, on peut tout de même tirer deux conclusions. La première conclusion est que la transformation de Sherer

et Scott est plus précise et plus robuste. La deuxième conclusion est qu'au final, dans le cas idéal (pour une transformation analytique), interpoler après une transformation d'un support curviligne doit revenir au même qu'interpoler directement dans un support cartésien. La difficulté est seulement reportée sur la transformation. Comme seuls des supports "polaires" seront considérés dans la suite de l'étude, les interpolations 2×1-D seront réalisées dans l'espace polaire.

Interpolation avec un support curviligne Les figures 2.15 présentent une comparaison entre une interpolation de Lagrange 2×1-D dans l'espace polaire et une interpolation 2-D par contraintes d'ordre pour le même support que précédemment. L'erreur dans l'espace spectral 2-D (figure du haut) est plus de dix fois plus importante pour l'interpolation par contraintes d'ordre. En effet la matrice C à inverser se révèle singulière pour une interpolation 8×8. Le conditionnement, traduisant la singularité de la matrice, est d'autant plus grand que le nombre de points du support d'interpolation augmente. C'est pour cela que cette méthode est difficilement généralisable pour des supports de plus grande taille. Le même problème de conditionnement de matrice est observé pour les interpolations multidimensionnelles optimisées. Comme pour l'interpolation avec contraintes d'ordre, ce problème d'inversion se traduit par des erreurs beaucoup plus importantes (figures du bas). L'ajout de contraintes d'ordre ne permet pas de diminuer sensiblement les niveaux d'erreurs. Au mieux, 8×8 contraintes d'ordre sont ajoutées ce qui équivaut à l'interpolation avec contraintes d'ordre seules. Comme des supports étendus d'interpolation seront considérés, les interpolations dans un espace curviligne ne seront pas retenues dans la suite du manuscrit.

Interpolation optimisée 2×1D avec ou sans contrainte d'ordre Enfin, les interpolations optimisées 2×1-D avec ou sans contraintes d'ordre sont étudiées. La figure 2.16 présente une comparaison entre une interpolation de Lagrange 2×1-D et une interpolation optimisée 2×1-D sans contrainte d'ordre. Les iso-contours de l'erreur pour l'interpolation optimisée, dans l'espace spectral 2-D, présentent des lobes qui correspondent à une diminution de l'erreur locale dans les directions diagonales. Comme le montrent les différentes coupes, ces lobes sont dus aux "rebonds" de l'erreur déjà rencontrés dans l'analyse 1-D. Si l'on considère la coupe le long de $k_1\Delta x$, on observe d'ailleurs une erreur similaire à l'interpolation 1-D optimisée sur 8 points de la figure 2.5. Globalement, la conclusion est alors la même que pour l'interpolation 1-D, à savoir qu'une erreur faible est maintenue pour des nombres d'ondes élevés et que l'erreur en bas nombre d'onde est toujours augmentée par rapport aux interpolations de Lagrange. L'ajout de contraintes d'ordre à l'interpolation optimisée ne change pas non plus les conclusions faites pour l'interpolation 1-D optimisée (figures du bas).

Conclusion de l'analyse spectrale 2-D Beaucoup de méthodes d'interpolation 2-D ont été testées. Il convient donc de faire le point sur ce qui serait préférable ou non d'utiliser. Si le support est curviligne quelconque, la transformation retenue serait la transformation de Sherer et Scott car elle présente l'avantage d'être plus robuste et généralisable. Les interpolations 2-D directement dans l'espace curviligne présentent le désavantage d'un comportement trop singulier avec l'augmentation de la taille du support. Dans notre étude, la transformation exacte entre l'espace cartésien et polaire est cependant la plus appropriée. L'interpolation retenue après transformation du support est une interpolation optimisée 2×1D avec ou sans contraintes d'ordre.

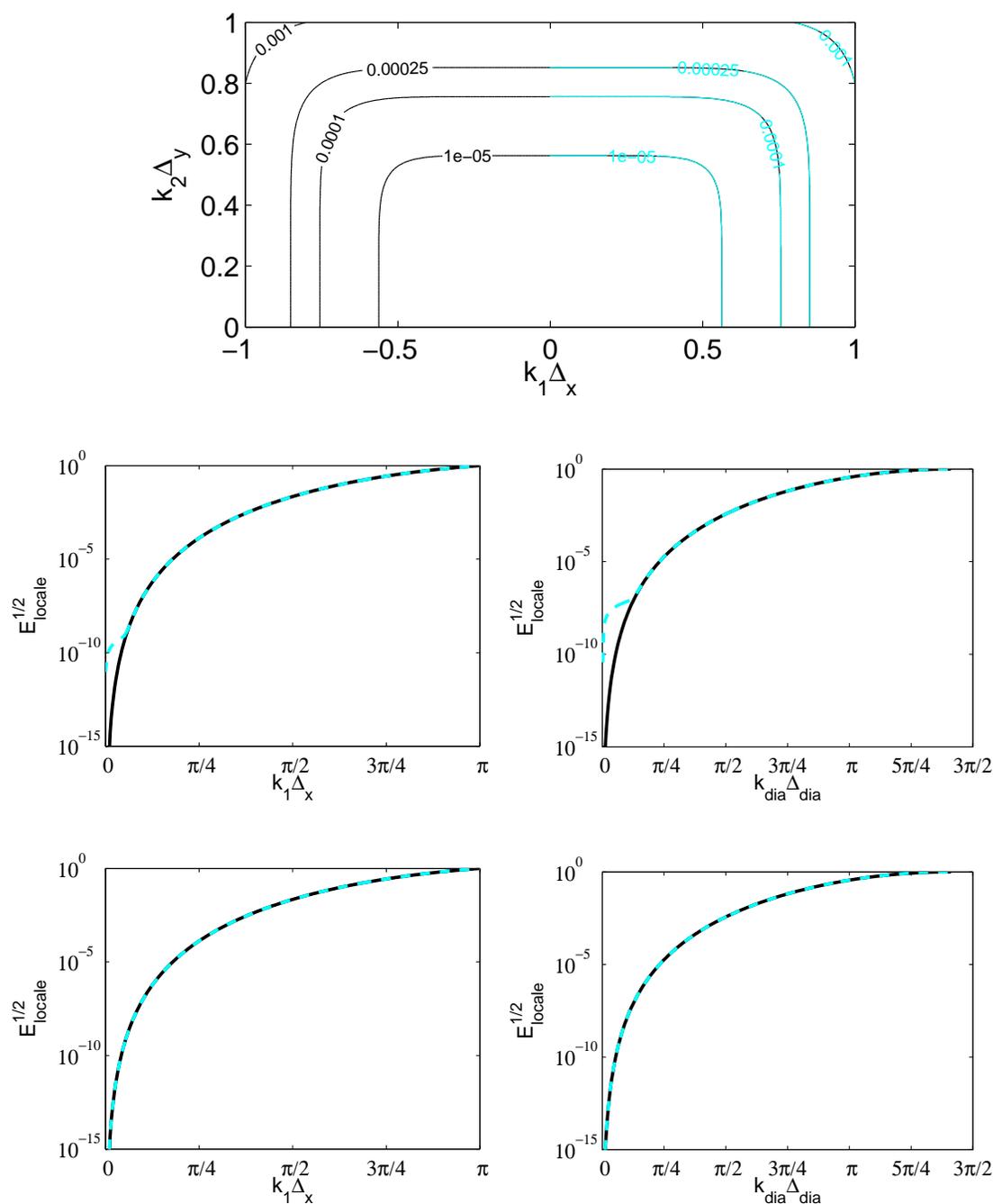


FIG. 2.14 – Erreur locale 2-D pour une interpolation de Lagrange 2×1 -D avec transformation polaire (—) et une interpolation avec transformation par interpolations transfinies (---). En haut : iso-contours de l'erreur locale. Au milieu : coupe en échelle logarithmique suivant $k_1 \Delta_x$ (à gauche) et coupe en échelle logarithmique suivant la diagonale $k_1 \Delta_x = k_2 \Delta_y$ (à droite). En bas : même légende que pour les figures du milieu pour la transformation par mapping iso-paramétrique.

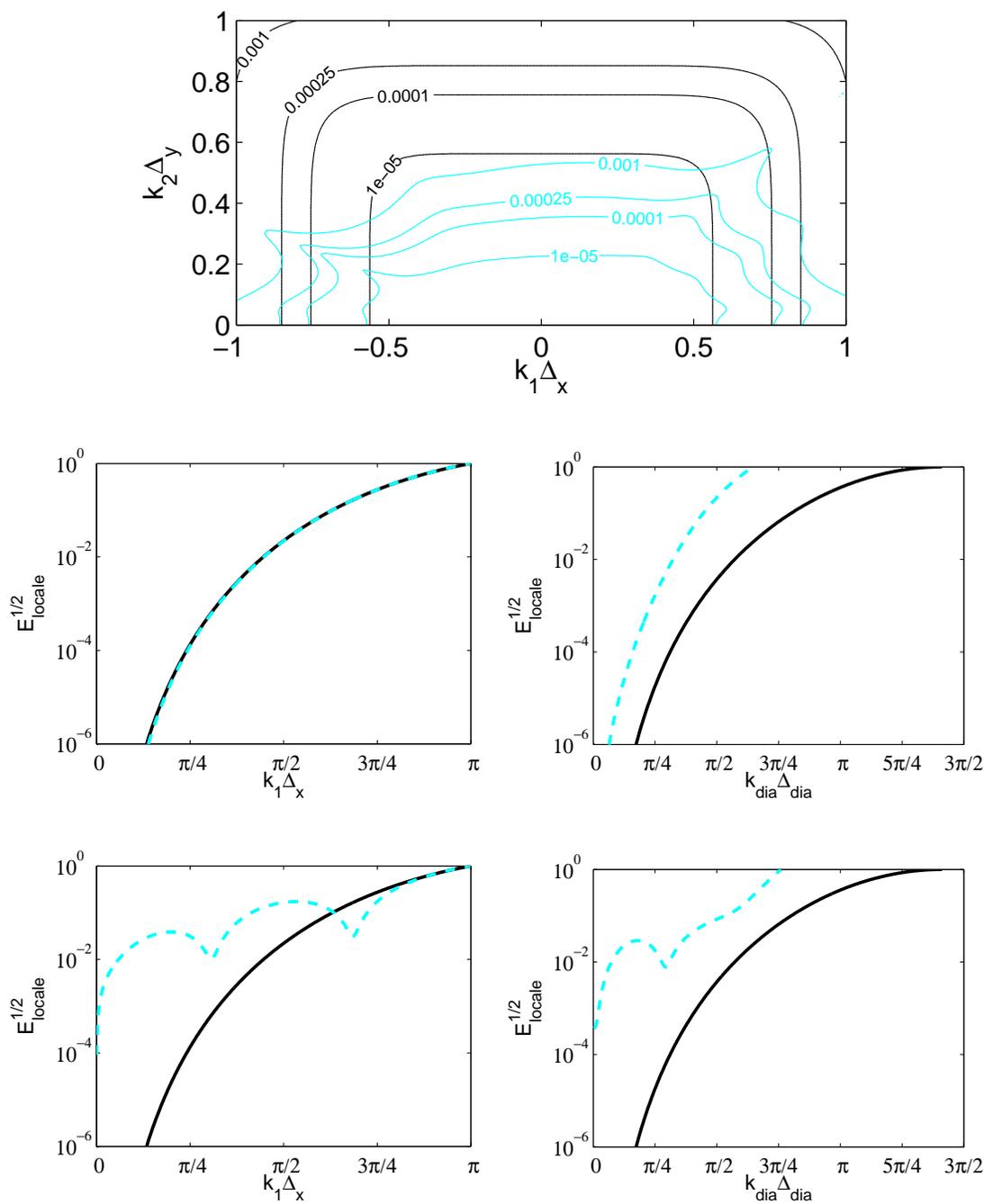


FIG. 2.15 – Erreur locale 2-D pour une interpolation de Lagrange 2×1 -D avec transformation polaire (—) et une interpolation multidimensionnelle (—). En haut : iso-contours de l’erreur locale. Au milieu : coupe en échelle logarithmique suivant $k_1 \Delta_x$ (à gauche) et coupe en échelle logarithmique suivant la diagonale $k_1 \Delta_x = k_2 \Delta_y$ (à droite). En bas : même légende que pour les figures du milieu pour une interpolation multidimensionnelle optimisée.

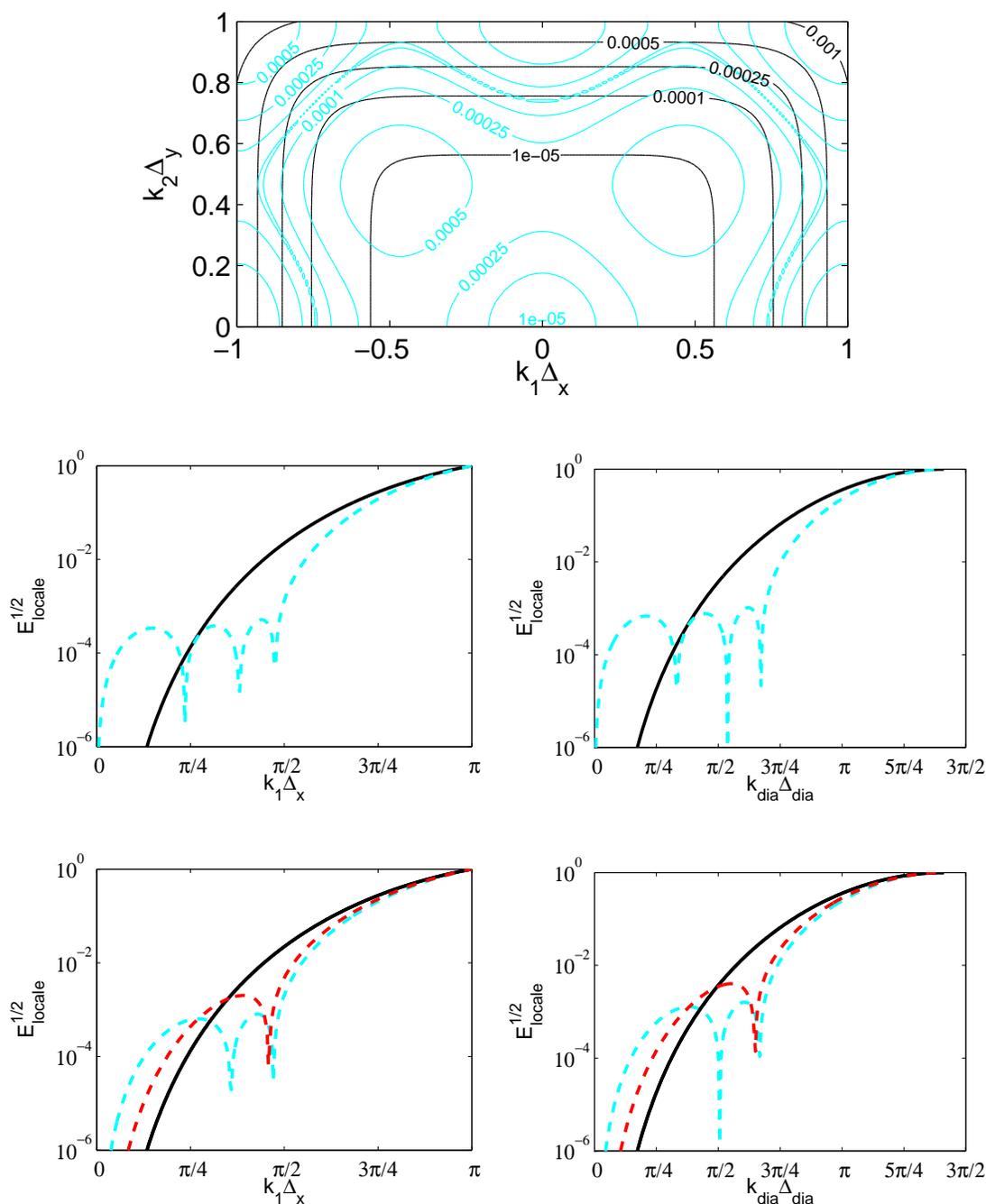


FIG. 2.16 – Erreur locale 2-D pour une interpolation de Lagrange 2×1-D (—) et une interpolation optimisée 2×1-D (—). En haut : iso-contours de l’erreur locale. Au milieu : coupe en échelle logarithmique suivant $k_1 \Delta_x$ (à gauche) et coupe en échelle logarithmique suivant la diagonale $k_1 \Delta_x = k_2 \Delta_y$ (à droite). En bas : même légende que pour les figures du milieu pour des interpolations optimisées avec contraintes d’ordre 4 (—) et 6 (—).

2.4.6 Validation numérique des interpolations 2-D

Pour la validation des interpolations 2-D, deux configurations de recouvrement de maillages sont considérées. La première configuration est composée de deux maillages cartésiens et la deuxième d'un maillage cartésien recouvrant un maillage polaire. Les équations résolues sont celles d'Euler sous leur forme cartésienne et polaire :

- formulation cartésienne

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}_e}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.30)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^t \\ \mathbf{E}_e &= (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, (\rho E + p)u)^t \\ \mathbf{F}_e &= (\rho v, \rho vu, p + \rho v^2, (\rho E + p)v)^t \end{aligned}$$

- formulation polaire

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathbf{E}_e)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{F}_e}{\partial \theta} + \frac{\mathbf{B}_e}{r} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.31)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\rho, \rho u_r, \rho u_\theta, \rho e)^t \\ \mathbf{E}_e &= (\rho u_r, p + \rho u_r^2, \rho u_r u_\theta, (\rho E + p)u_r)^t \\ \mathbf{F}_e &= (\rho u_\theta, \rho u_\theta u_r, p + \rho u_\theta^2, (\rho E + p)u_\theta)^t \\ \mathbf{B}_e &= (0, -(\rho u_\theta^2 + p), \rho u_r u_\theta, 0)^t \end{aligned}$$

où \mathbf{U} est la solution des équations, \mathbf{E}_e et \mathbf{F}_e sont les flux eulériens. ρ , p , (u, v) et (u_r, u_θ) sont respectivement la densité, la pression et les composantes de la vitesse pour la formulation cartésienne et polaire. S est un terme source. Les équations sont complétées par l'équation des gaz parfait :

$$\begin{aligned} p &= \rho r T \\ E &= p / [(\gamma - 1)\rho] + (u^2 + v^2)/2, \text{ en coordonnées cartésiennes} \\ E &= p / [(\gamma - 1)\rho] + (u_r^2 + u_\theta^2)/2, \text{ en coordonnées polaires} \end{aligned}$$

2.4.6.1 Stratégie de recouvrement de maillages

Pour un calcul utilisant des maillages recouvrants, chaque maillage possède un ordre de priorité. Les maillages avec l'ordre le plus élevé sont ceux qui sont localement adaptés à la géométrie du domaine de calcul, par exemple, le maillage de peau d'un profil d'aile. Les maillages avec l'ordre le plus faible composent les maillages de fond, c'est-à-dire ceux qui n'ont pas une topologie contrainte par la géométrie du problème. Généralement, ils sont cartésiens. Quand les maillages se recouvrent, ces ordres de priorité permettent de connaître sur quel maillage la solution est entièrement valide (maillage à la plus haute priorité) et sur quel maillage elle ne l'est que partiellement (maillage à la plus basse priorité). Les équations n'ont donc pas besoin d'être résolues entièrement sur les maillages à basse priorité et la portion non définie peut être masquée. On crée alors un trou (ou un vide), ce qui arrive généralement dans la grille de fond. Dans la littérature anglophone, on parle alors de

"cutting hole process". En théorie, ce trou doit avoir une taille optimale pour minimiser le temps de calcul. Pour des géométries complexes, l'algorithme lié au "cutting hole process" est difficile à mettre en œuvre. C'est pourquoi le générateur de maillages *Ogen* des bibliothèques *Overture* [82] est utilisé pour générer des maillages recouvrants. Ce générateur de maillages réalise les processus de "cutting hole" et fournit une table de connectivité entre les points à interpolier d'un maillage et les points de support d'interpolation d'un autre maillage. Les interpolations utilisées dans les recouvrements de cette étude seront centrées à l'instar des analyses précédentes. Les coefficients d'interpolations sont calculés avant le début du calcul. Les interpolations sont réalisées à chaque sous-étape du Runge-Kutta et une dernière fois après le filtrage de la solution lors de la dernière sous-étape du Runge-Kutta.

2.4.6.2 Recouvrement entre deux grilles cartésiennes

Deux maillages cartésiens sont considérés dans cette partie. Le premier maillage a pour résolution $nx_1=151$ et $ny_1=81$ et constitue le maillage de fond. Le second maillage a pour résolution $nx_2=60$ et $ny_2=61$ et est localisé au milieu du précédent. Le pas de discrétisation spatial est le même pour les deux grilles à savoir $\Delta x_1=\Delta x_2=1$ m et $\Delta y_1=\Delta y_2=1$ m. Ces grilles sont décalées d'une demi-maille dans chaque direction afin de pouvoir mettre en évidence l'influence des interpolations sur la solution numérique. Ici, le maillage avec la plus haute priorité est le maillage central. Ainsi le processus de "cutting hole" ne s'applique qu'au maillage de fond.

Support	Nombre de points interpolés	
	Maillage 1 (de fond)	Maillage 2
	(—)	(—)
2×2	890	1110
4×4	850	1110
6×6	810	1110
8×8	770	1110
10×10	730	1110
12×12	690	1110

TAB. 2.1 – Nombre de points interpolés par maillage.

Advection d'un tourbillon L'étude de l'advection d'un tourbillon à travers une interface de recouvrement est réalisée. Emmert [51] montre que le contenu spectral de ce cas-test est surtout représenté par des petits nombres d'onde, pour lesquels les ondes sont correctement résolues par les schémas aux différences-finies. Un tourbillon de Taylor, initialement placé en $(0,0)$, est défini par :

$$\begin{cases} u = u_\infty + A \frac{y}{\Delta y} \exp(\alpha R^2) \\ v = -A \frac{x}{\Delta x} \exp(\alpha R^2) \\ p = p_\infty - \rho_\infty \frac{A^2}{4\alpha \Delta x \Delta y} \exp(2\alpha R^2) \end{cases} \quad (2.32)$$

où $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = -\ln 2/b^2$ et $b = 3$ m (demi-largeur de la gaussienne). Le tourbillon est advecté à une vitesse moyenne constante correspondant à un nombre de Mach de $M = u_\infty/c_\infty = 0.5$. Son amplitude est de $A = 10$ m.s⁻¹. Les simulations sont réalisées avec un pas de temps $\Delta t = 0.000708$ s et 800 iterations sont effectuées. Le coefficient de filtrage est fixé à 0.1. A la dernière itération, le

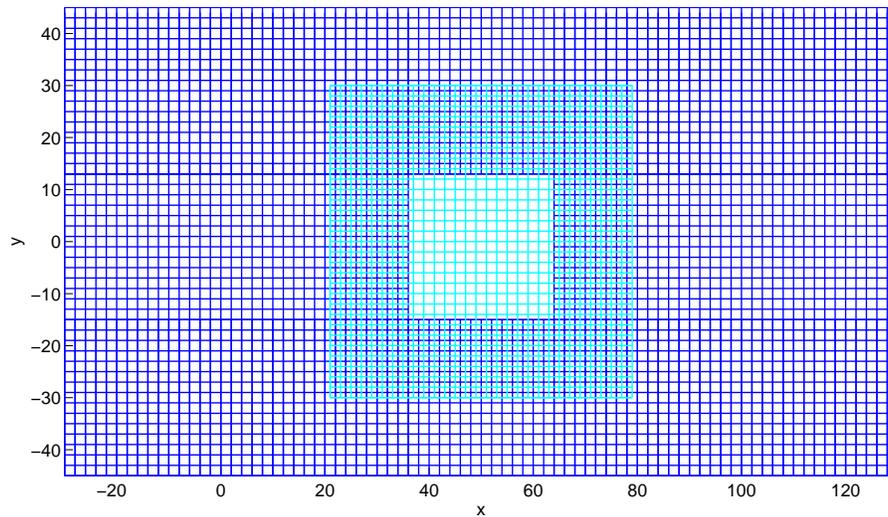


FIG. 2.17 – Recouvrement de deux maillages cartésiens. Un point sur deux est représenté.

tourbillon est encore à l'intérieur du domaine de calcul mais a complètement traversé la grille centrale. La figure 2.18 présente des champs instantanés de la pression fluctuante lors de la traversée du tourbillon à travers l'interface de recouvrement. Les interpolations utilisées sont des interpolations de Lagrange d'ordre 2 (support 2×2 , en haut) et d'ordre 6 (support 6×6 , en bas). Pour les interpolations d'ordre 2, un important niveau de bruit numérique est créé par la traversée du tourbillon. Une réduction importante de ce niveau, en deçà de ± 1 Pa, est observée pour des interpolations d'ordre 6. Le bruit numérique peut être quantifié par la pression résiduelle dans le premier tiers de la grille de fond définie par :

$$Rp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{40} \sum_{j=1}^{ny_1} (p_{i,j} - p_{\infty})^2}{40 \times ny_1}}$$

Le bruit numérique est évalué après le passage du tourbillon. Ce bruit diminue avec la montée en ordre des interpolations. A l'instar de la figure 2.18, la pression résiduelle est très faible pour une interpolation d'ordre 6. La norme L2 de l'erreur commise par rapport à la solution analytique est tracée à la dernière itération sur la figure 2.20 pour différents schémas d'interpolation. Cette erreur est évaluée sur le dernier tiers du maillage de fond. Les erreurs tracées sont normées par une erreur de référence calculée à partir de la simulation sur un maillage de fond seul. Comme pour la pression résiduelle, l'erreur diminue avec l'ordre d'interpolation pour une méthode de Lagrange. A partir d'une interpolation 8×8 , cette erreur semble constante et tend vers l'erreur commise par une simulation avec la grille de fond uniquement. Pour les interpolations optimisées avec contraintes d'ordre, le comportement de l'erreur n'est plus monotone avec la variation de taille du support. Parfois, la solution est même légèrement plus précise que celle sur une grille unique. Cependant, le type d'interpolation ne semble pas être primordiale. Pour des fluctuations de natures purement aérodynamique, un support assez large n'est pas forcément nécessaire pour fournir une solution assez précise. Sherer and Scott [169] parviennent à la même conclusion quel que soit le type d'interpolation utilisé.

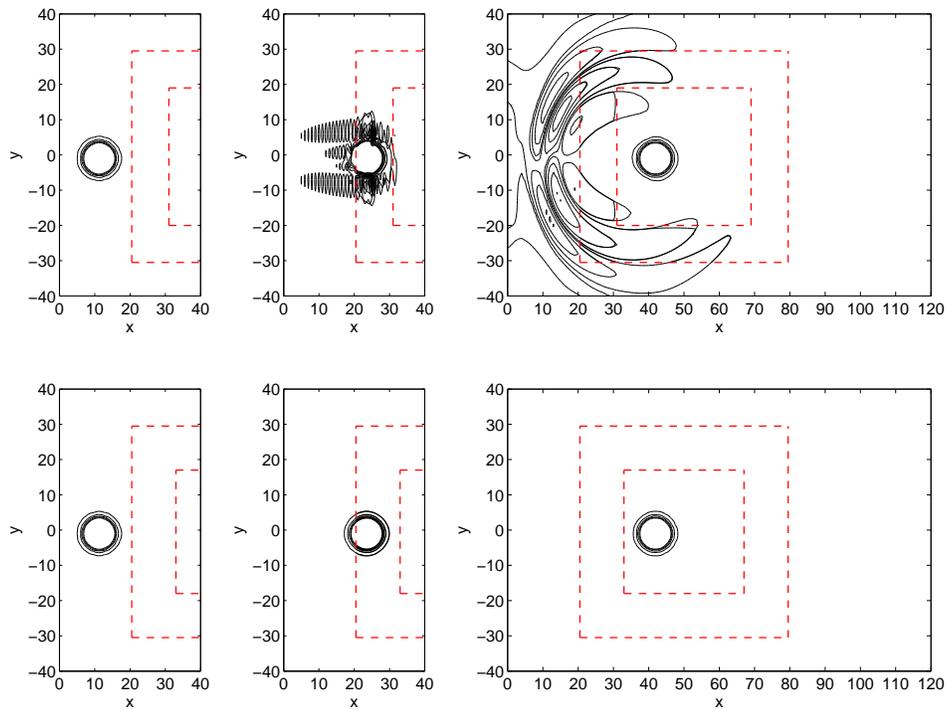


FIG. 2.18 – Iso-contours du champ de pression instantané à trois instants différents, $N_{it} = 100, 200, 350$ (de gauche à droite), représentant le passage du tourbillon à travers la première interface de recouvrement (---) pour une interpolation de Lagrange 2×2 (en haut) et 6×6 (en bas). Iso-contours de ± 1 Pa, ± 5 Pa jusqu'à ± 20 Pa tous les 5 Pa.

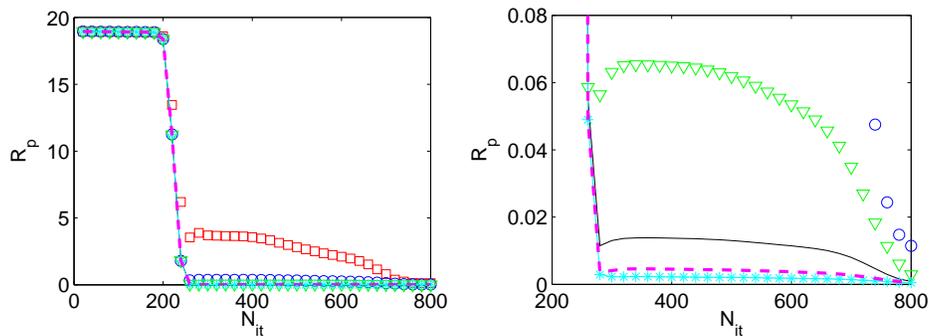


FIG. 2.19 – Pression résiduelle R_p en fonction du nombre d'itérations N_{it} pour le premier tiers de la grille de fond. A gauche : supports 2×2 (\square), 4×4 (\circ), 6×6 (∇). A droite : agrandissement de la figure de gauche avec l'ajout des supports 8×8 (—), 10×10 (---) et 12×12 (—*).

Propagation d'une source harmonique La propagation d'une source harmonique sur les mêmes maillages est maintenant considérée. Ce cas de validation permet de cibler un intervalle du spectre des interpolations en contrôlant la longueur d'onde de la source. La source harmonique, localisée à l'origine, est définie par :

$$S(t) = \epsilon \sin(\omega t) \exp\left(\frac{\ln 2}{\sigma^2} (x^2 + y^2)\right) \quad (2.33)$$

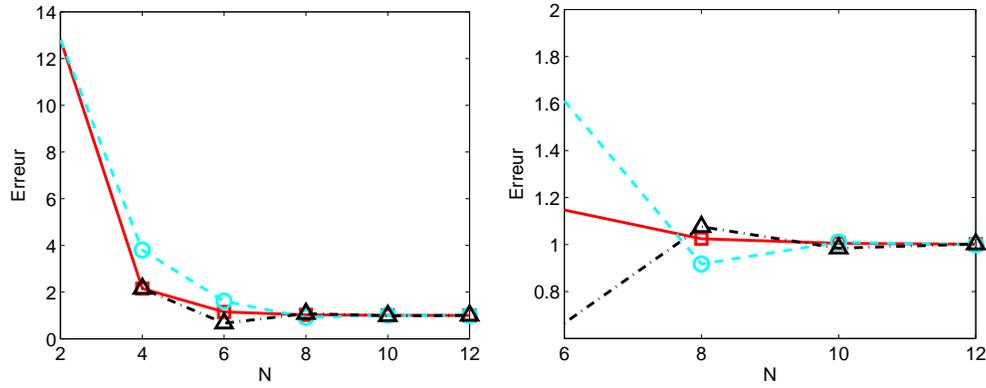


FIG. 2.20 – Advection d’un tourbillon. Variation avec la taille du support d’interpolation $N \times N$ de l’erreur entre le champ de pression à la dernière itération de la solution numérique et de la solution analytique. Interpolations de Lagrange (—□), interpolations optimisées d’ordre 2 (---○) et d’ordre 4 (-·-·△). Les erreurs sont normées par l’erreur pour la simulation avec la grille cartésienne de fond sans recouvrement.

avec ω la pulsation de la source, et $\epsilon = 346 \text{ Pa}\cdot\text{s}^{-1}$ son amplitude et σ la demi-largeur de la source. Le pas de temps Δt est 0.00072 s . Le coefficient de filtrage est fixé à 0.2 . Deux valeurs ω sont choisies. La première est $\omega = 2\pi/10 \times c_\infty/\Delta x_1$, ce qui signifie que la longueur d’onde de la source correspond à 10 pas d’espace du maillage. La solution numérique obtenue sera alors précise compte tenu des schémas de discrétisation employés. La demi-largeur σ est égale à 3. La figure 2.21 présente la norme L2 de l’erreur entre la moyenne quadratique de la pression analytique et de la pression numérique le long de la coupe à $y = 0$. L’erreur est seulement évaluée pour les points intérieurs de chaque grille. Cette erreur pour chaque interpolation est aussi normée par celle d’une simulation sur le maillage de fond seul. Les interpolations utilisées sont du type Lagrange ou optimisées avec contraintes d’ordre. Quelque soit les interpolations utilisées, la solution numérique s’approche à 2%

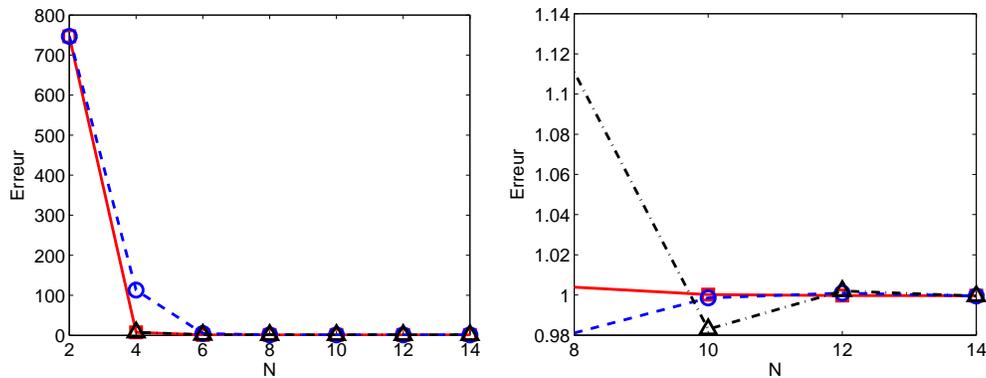


FIG. 2.21 – Propagation d’une source harmonique de pulsation $\omega = 2\pi/10 \times c_\infty/\Delta x_1$. Variation avec la taille de support $N \times N$ de la norme L2 de l’erreur faite entre la moyenne quadratique de la pression de la solution analytique et de la solution numérique le long de $y = 0$. Interpolations de Lagrange (—□), interpolations optimisées d’ordre 2 (---○) et d’ordre 4 (-·-·△). Les erreurs sont normées par l’erreur pour la simulation avec la grille cartésienne de fond sans recouvrement valant $9.4435 \times 10^{-8} \text{ Pa}$.

près de celle de référence à partir d’un support 8×8 , ce qui correspond à une erreur par rapport à

la solution analytique de 1.8887×10^{-9} Pa. Le second choix est $\omega = 2\pi/5 \times c_\infty/\Delta x_1$, correspondant à une longueur d'onde égale à 5 pas d'espace. La discrétisation de la longueur d'onde dans ce cas approche la limite de résolubilité des schémas aux différences-finies. Afin de garder une compacité de la source comparable au cas précédent, la demi-largeur est divisée par 2 d'où $\sigma=1.5$. La figure 2.22

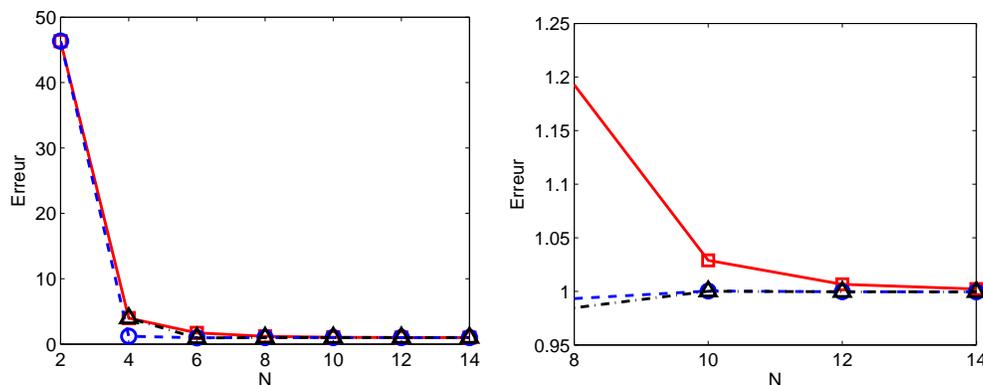


FIG. 2.22 – Propagation d’une source de pulsation $\omega = 2\pi/5 \times c_\infty/\Delta x_1$. Variation avec la taille de support $N \times N$ de la norme L2 de l’erreur faite entre la moyenne quadratique de la pression de la solution analytique et de la solution numérique le long de $y = 0$. Interpolations de Lagrange (—□), interpolations optimisées d’ordre 2 (---○) et d’ordre 4 (-.-.△). Les erreurs sont normées par l’erreur pour la simulation avec la grille cartésienne de fond sans recouvrement valant 2.3342×10^{-6} Pa.

présente l’erreur pour les différentes interpolations, définie de la même façon que pour la figure 2.21. Les interpolations optimisées améliorent nettement la solution pour un support donné. Alors que pour un support 8×8 les interpolations de Lagrange introduisent un peu moins de 20% d’erreur par rapport à la solution de référence, les interpolations optimisées n’introduisent que 2% d’erreur supplémentaire pour l’ordre 2 et 4. Ces erreurs restent alors comparables au cas test précédent démontrant alors que l’optimisation permet bien de garder un niveau d’erreur relatif sensiblement équivalent sur un large spectre. De plus, les interpolations optimisées tendent rapidement vers l’erreur d’une grille seule avec l’augmentation de la taille du support.

2.4.6.3 Recouvrement du coeur d’un maillage polaire par un maillage cartésien

Il est connu que la formulation polaire des équations d’Euler est singulière à l’axe, c’est-à-dire quand $r=0$. Plusieurs auteurs ont proposé des méthodes pour s’affranchir de cette singularité. Mohseni et Colonius [140] suggère de sauter la singularité en commençant les coordonnées radiales non plus à 0 mais à $\Delta r/2$. Constantinescu et Lele [35] réalisent un développement limité asymptotique des équations de Navier-Stokes sur l’axe. Cependant, si on considère un algorithme de résolution temporelle purement explicite, quelle que soit la méthode proposée, le pas de temps, basée sur la plus petite maille, devient très petit. Une façon de s’affranchir à la fois de la singularité et de la contrainte sur le pas de temps est de considérer une grille cartésienne recouvrant le coeur d’une grille polaire. Un exemple est donné par la figure 2.23. La résolution est de 160 points radialement et de 150 points azimuthalement pour la grille polaire et de 50 points dans chaque direction pour la grille cartésienne. Le rayon intérieur de la grille polaire est de $r = 4.94$ m et son rayon extérieur de 32 m. L’advection d’un tourbillon de Taylor à travers la grille cartésienne est simulée. Le pas de temps est de $\Delta t = 8.067 \times 10^{-5}$ s soit égal à cinq fois le pas de temps basé sur la plus petite maille $\Delta_{min} = \Delta r \Delta \theta$ qui aurait déterminé

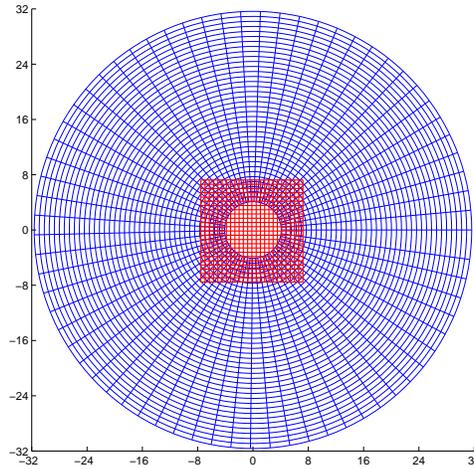


FIG. 2.23 – Maillage polaire recouvert par un maillage cartésien. Un point sur quatre est représenté.

le pas de temps si la simulation avait été réalisée sur une grille polaire seule. Pour ce cas test, 2000 itérations sont réalisées. La figure 2.24 montre que le tourbillon ne génère aucun bruit numérique parasite au-dessus de 10 Pa en valeur absolue au passage des interfaces de recouvrement, le support utilisé étant de taille 4×4 . L'erreur de la solution numérique est calculée pour la pression par :

– pour le maillage polaire :

$$pr_{err} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nr} \sum_{j=1}^{n\theta} (pr_{numerique} - pr_{analytique})_{i,j}^2}{nr \times n\theta}}$$

– pour le maillage cartésien :

$$pc_{err} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{nx} \sum_{j=1}^{ny} (pc_{numerique} - pc_{analytique})_{i,j}^2}{nx \times ny}}$$

ce qui induit une erreur totale de :

$$p_{err} = \frac{(nr \times n\theta) \times pr_{err} + (nx \times ny) \times pc_{err}}{nr \times n\theta + nx \times ny} \quad (2.34)$$

Cette erreur est calculée à la dernière itération et elle est présentée dans le tableau 2.2. On remarque que les erreurs sont quasi-équivalentes à partir d'une interpolation de Lagrange 2×1-D d'ordre 6. Comme pour le cas du recouvrement d'une grille cartésienne par une autre grille cartésienne, un support de taille modérée peut s'avérer suffisant. De plus, des interpolations multidimensionnelles optimisées ont été testées. La qualité des interpolations et de la solution numérique finale dépend fortement des tailles de mailles d'interpolation Δ_x et Δ_y (équation (2.22)) spécifiques au support curviligne. Ainsi, un mauvais choix conduit irrémédiablement à l'altération de la solution numérique, provoquant un bruit numérique intense, mais peut aussi faire diverger le calcul.

2.4.6.4 Diffraction d'une source harmonique par deux cylindres

La diffraction d'une source harmonique par deux cylindres est un cas test acoustique difficile à simuler avec les techniques classiques de génération de maillages structurés. Cependant, avec des techniques

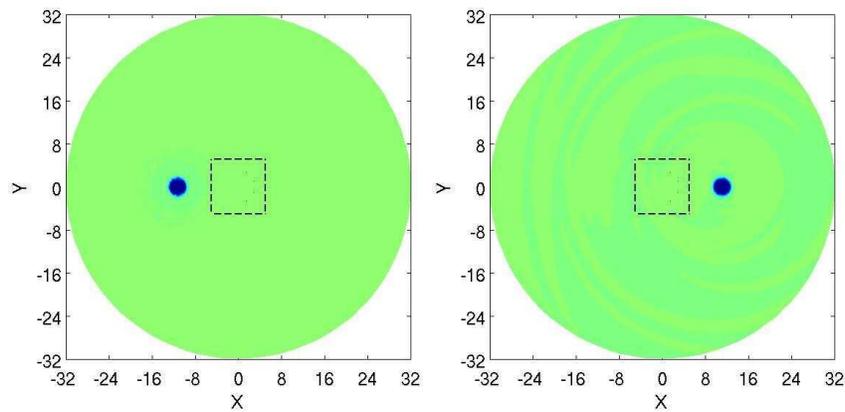


FIG. 2.24 – Champs de pression instantanés pour des niveaux compris entre -10 Pa et 10 Pa avec une interpolation de Lagrange 2×1 -D sur un support 4×4 . Les frontières du maillage cartésien sont tracées en tirets (---).

Support	Ordre	p_{err}
4×4	4	0.06924296697058
5×5	5	0.00993859825519
6×6	6	0.00454533557742
7×7	7	0.00444664792719
8×8	8	0.00435315306465

TAB. 2.2 – Erreur sur la pression entre la solution numérique et la solution analytique pour des interpolations de Lagrange 2×1 -D.

de recouvrement de maillages, il devient possible de considérer plusieurs grilles : une grille de peau polaire pour chaque cylindre et une grille de fond cartésienne propageant les ondes acoustiques. Les cylindres ont un rayon de 0.5 et 0.25 m et sont situés respectivement à $(x, y) = (-4, 0)$ et $(0, 4)$. La résolution de la première grille polaire est de $nr = 25 \times n\theta = 181$ points, et celle de la seconde de $nr = 29 \times n\theta = 181$ points. La grille cartésienne possède $nx = 164 \times ny = 164$ points. Les interpolations sont optimisées 2×1 -D et d'ordre 4 pour des supports 6×6 . La fréquence de la source harmonique est $2\pi c_\infty$ et sa demi-largeur de 0.2 m. La figure 2.25 présente un champ instantané de pression. La diffraction de la source par les cylindres est visible, surtout près du plus gros cylindre. La fluctuation de pression dans la zone de silence derrière les cylindres est plus intense pour le plus petit cylindre. Aucun bruit parasite ne révèle la présence des interfaces de recouvrement. La figure 2.26 présente une comparaison de la moyenne quadratique de la pression le long de $y = 0$ pour la solution numérique et la solution analytique donnée par Sherer [168]. Comme on peut le voir sur la figure 2.26, les faisceaux d'interférences sont bien décrits devant les cylindres. Cependant, des erreurs sont présentes derrière le plus petit cylindre. De plus, la continuité de la solution à travers les interfaces de recouvrement est très bien assurée.

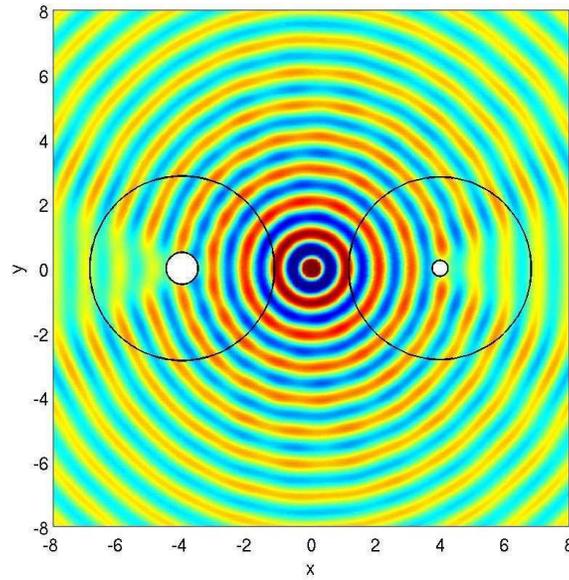


FIG. 2.25 – Champ de pression instantané, niveaux entre -0.05 Pa et 0.05 Pa.

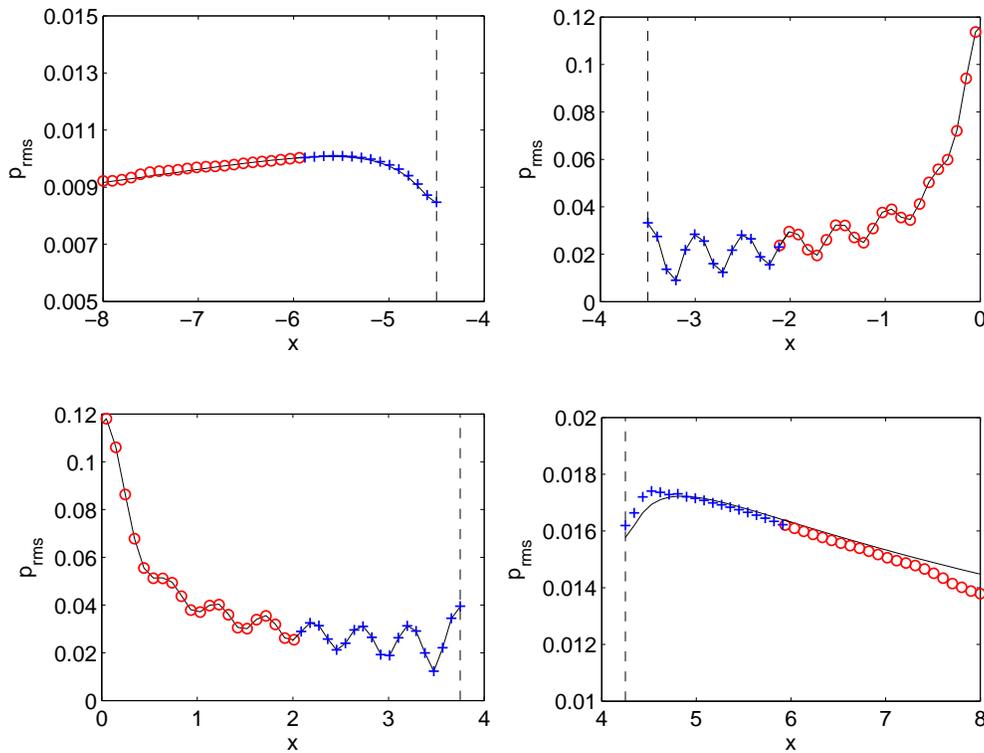


FIG. 2.26 – Moyenne quadratique de la pression le long de $y = 0$: solution analytique (—), solution numérique pour les deux maillages polaires (+) et le maillage cartésien (o). Les lignes verticales indiquent la présence des parois des cylindres. En haut : cylindre situé à $x = -4.0$ m. En bas : cylindre situé à $x = 4.0$ m.

2.5 Conclusions

Dans ce chapitre, les techniques de recouvrement de maillages ont été abordées pour des applications aéroacoustiques. Ces techniques requièrent dans ce cadre spécifique des interpolations précises. Le choix du type d'interpolation est alors crucial. L'analyse spectrale 1-D montre que les interpolations optimisées assurent une faible erreur sur un plus large spectre que les interpolations de Lagrange. Le cas d'advection 1-D d'un paquet d'ondes ou la propagation 2-D d'une source harmonique confirment que lorsque la solution numérique est discrétisée par peu de points, les interpolations optimisées induisent une erreur plus faible que les interpolations de Lagrange, ce qui peut s'avérer appréciable pour des simulations des grandes échelles. Cette conclusion est différente de celle Sherer et Scott [169] qui discriminent les interpolations optimisées par un cas test spatialement basse fréquence. De plus, il est montré que les interpolations 2×1 -D sont préférables aux interpolations multidimensionnelles. Un dernier point concerne la taille des supports d'interpolations. Chaque cas test a mis en évidence que pour une interpolation optimisée, la solution numérique de maillages recouvrants tendait rapidement vers celle d'un maillage simple quand la taille du support augmentait. Ainsi, la résolubilité du schéma d'interpolation peut être plus faible que celle des schémas aux différences finies sans que la solution numérique perde en précision. Un nombre de points de support limité implique un gain en temps de calcul. De plus, le recouvrement devient moins important et moins d'interpolations sont réalisés. La gestion des maillages en devient alors plus aisée. Ces avantages peuvent être très appréciables lorsque les techniques de recouvrements de maillages sont employées dans le cadre de simulations onéreuses en temps de calcul et en mémoire, comme pour le cas présent. Dans la suite de la thèse, les interpolations 2×1 -D optimisées sur un support 8×8 seront alors choisies pour traiter les recouvrements de maillages d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique.

Chapitre 3

Génération d'une couche limite turbulente en entrée de domaine d'un calcul aéroacoustique

3.1 Génération de turbulence synthétique

L'idée des méthodes de reconstruction de turbulence artificielle est de générer en entrée du domaine de calcul des fluctuations de vitesse qui reproduisent au mieux les caractéristiques d'une turbulence physique. Les différentes méthodes existantes peuvent être distinguées suivant qu'elles permettent de reproduire des intensités turbulentes, un spectre d'énergie, ou des moments d'ordre plus élevés. Les deux méthodes développées et testées sont : la méthode Random Fourier Modes (RFM) initiée par Kraichnan [105] et la méthode Synthetic Eddy Method (SEM) initiée par Jarrin *et al.*[95] et améliorée par Pamiès *et al.*[147].

3.1.1 La méthode des modes de Fourier aléatoires (RFM)

3.1.1.1 Présentation de la méthode

La méthode des modes de Fourier aléatoires, Random Fourier Modes (RFM) en anglais, initiée par Kraichnan [105] est utilisée ici sous la forme du modèle Stochastic Noise Generation and Radiation (SNGR) [10, 7]. Cette méthode a déjà été utilisée pour générer rapidement une couche limite turbulente en amont d'une cavité [73]. Des améliorations ont été proposées par Smirnov *et al.* [172] et Batten *et al.* [9] pour tenir compte de l'anisotropie de la turbulence de paroi. Les RFM ont été utilisés récemment pour alimenter une interface RANS-LES [37]. Le détail de la méthode est donné ci-dessous.

Dans le cas de la turbulence homogène, la transformée de Fourier spatiale 3D du champ de vitesse fluctuant peut être définie ainsi :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \int \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$$

Une application directe de la condition d'incompressibilité donne $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})\cdot\mathbf{k} = 0$, *i.e.* la composante $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ doit être perpendiculaire au vecteur nombre d'onde \mathbf{k} . Ici, on choisit un champ de vitesse fluctuant donné par :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \int 2\hat{\mathbf{u}}_a \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}) d\mathbf{k}$$

Le nombre d'onde \mathbf{k} est représenté sur la figure 3.1. En introduisant le repère local $(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2, \tilde{\mathbf{k}}_3)$ correspondant aux coordonnées sphériques (k, θ, ϕ) , comme $\tilde{\mathbf{k}}_3$ est aligné avec \mathbf{k} , la condition de normalité déduite de la condition de continuité indique que le vecteur $\hat{\mathbf{u}}_a$ est nécessairement dans le plan $(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2)$. Dans ce repère, on note $\hat{\mathbf{u}}_a = \hat{u} \mathbf{a} = \hat{u}(\cos \alpha, \sin \alpha)$, où l'angle α est défini à droite de la figure 3.1.

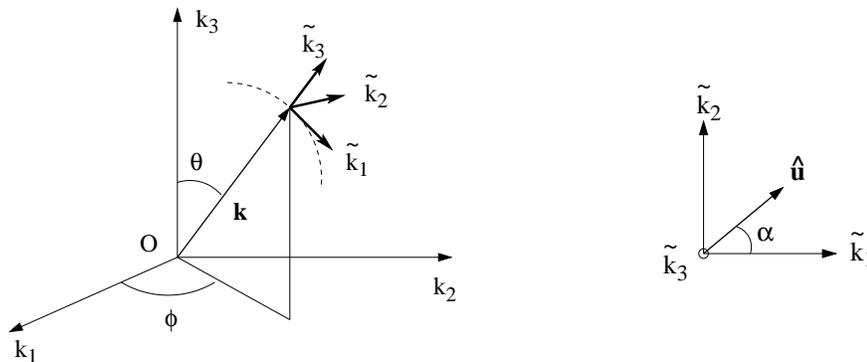


FIG. 3.1 – Repère local $(\tilde{\mathbf{k}}_1, \tilde{\mathbf{k}}_2, \tilde{\mathbf{k}}_3)$ dans l'espace des nombres d'onde k , et représentation de la composante de Fourier $\hat{\mathbf{u}}_a$.

Le champ turbulent est obtenu comme somme de N modes de Fourier indépendants. Les amplitudes \hat{u}_n ne sont pas aléatoires, mais sont obtenues à partir d'un spectre d'énergie turbulent. Le champ de vitesse fluctuant s'exprime alors comme la série de Fourier :

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N 2\hat{u}_n \cos(\mathbf{k}_n \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}t) + \omega_n t + \psi_n) \mathbf{a}_n$$

où $\psi_n, \mathbf{k}_n, \mathbf{a}_n$ sont des variables aléatoires possédant des fonctions de densité de probabilité données. L'isotropie du champ est obtenue en choisissant les variables aléatoires de la façon suivante : pour chaque mode, le vecteur nombre d'onde \mathbf{k} est choisi sur une sphère de rayon k . Dans le système de coordonnées cartésiennes, les trois vecteurs unitaires du repère local sont :

$$\tilde{\mathbf{k}}_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{k}}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{k}}_3 = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le vecteur nombre d'onde est simplement $\mathbf{k} = k\tilde{\mathbf{k}}_3$, et l'isotropie du champ nécessite que :

$$\frac{dS}{4\pi k^2} = \frac{k \sin \theta d\phi k d\theta}{4\pi k^2} = p(\theta) d\theta p(\phi) d\phi$$

Les fonctions de densité de probabilité sont choisies telles que $p(\theta) = \sin \theta / 2$ et $p(\phi) = 1/(2\pi)$. Le vecteur unitaire \mathbf{a}_n est :

$$\mathbf{a}_n = \cos \alpha \tilde{\mathbf{k}}_1 + \sin \alpha \tilde{\mathbf{k}}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta \cos \phi - \sin \alpha \sin \phi \\ \cos \alpha \cos \theta \sin \phi + \sin \alpha \cos \phi \\ -\cos \alpha \sin \theta \end{pmatrix}$$

α est tiré de manière équiprobable entre 0 et 2π , d'où $p(\alpha) = 1/(2\pi)$. Le spectre d'énergie turbulent est donné par :

$$\bar{k} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \hat{u}_n^2$$

En choisissant le modèle de von Kármán [6] pour le spectre d'énergie turbulent $E(k)$, l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ mode de Fourier est donnée par :

$$\hat{u}_n = \sqrt{2E(k_n)\Delta k_n} \quad \text{avec} \quad E(k) = \alpha_1 \frac{u'^2}{k_e} \frac{(k/k_e)^4}{[1 + (k/k_e)^2]^{17/6}}, \quad \text{and} \quad \alpha_1 = \frac{55}{9\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{5}{6})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \simeq 1.453$$

Δk_n est le pas de discrétisation dans l'espace de Fourier. Une distribution logarithmique des N modes est retenue pour tenir compte l'ensemble du spectre, des bas aux hauts nombres d'ondes. En fixant k_{min} et k_{max} , on obtient :

$$k_n = \exp[\ln k_1 + (n-1)\Delta k], \quad n = 1, \dots, N \quad \text{and} \quad \Delta k = (\ln k_{max} - \ln k_{min})/(N-1)$$

Enfin, le champ turbulent est "dégelé" par l'introduction d'une vitesse de convection \bar{u} et d'une pulsation ω_n , qui décrit l'évolution propre des fluctuations. ω_n est déduite ici du temps d'Heisenberg, $\omega_n = 2\pi u' k_n$, où $u' = 2\bar{k}/3$ est le champ de vitesse *rms* et k_n le nombre d'onde.

Le champ stochastique dégelé est alors pondéré par les profils *rms* normaux à la paroi issus d'une simulation préliminaire ou d'une base de donnée DNS, ceci afin de tenir compte de l'anisotropie de l'écoulement.

Une étude de l'influence de certains paramètres dont notamment les bornes de discrétisation du spectre turbulent k_{min} et k_{max} a été réalisée récemment [75]. Il en ressort qu'un paramétrage $k_{min} = 1/\delta$, $k_{max} = 100/\delta$, et $N = 100$ donne des résultats satisfaisants, et ce paramétrage est utilisé par la suite.

3.1.1.2 Résultats pour la cavité cylindrique

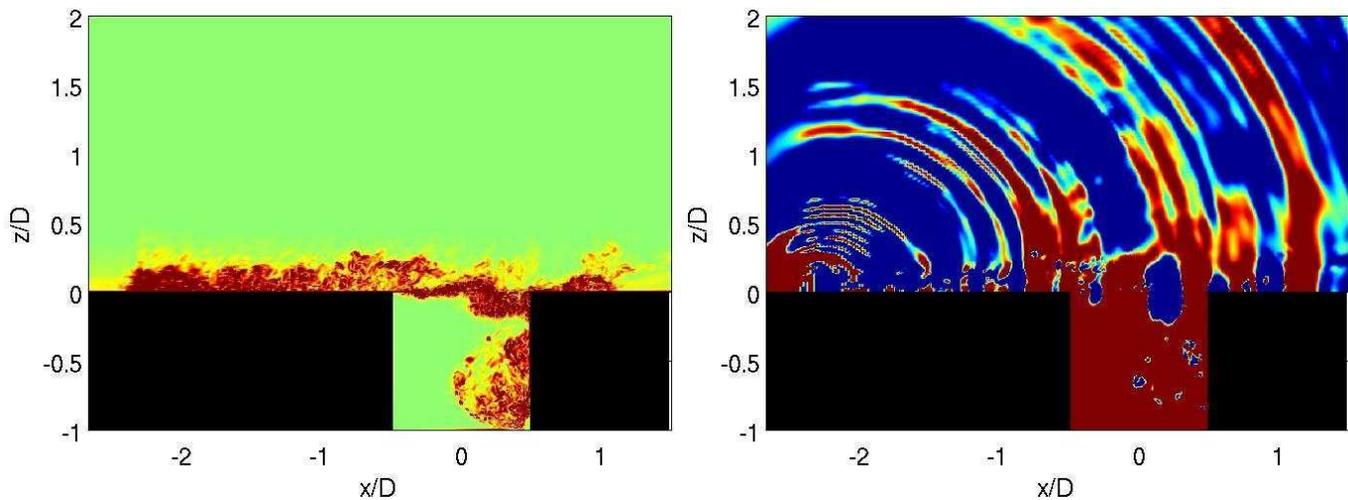


FIG. 3.2 – Méthode RFM avec les niveaux de fluctuations initiaux en entrée. A gauche : champ de la norme de vorticité, niveaux entre 0 et 1.10^4 . A droite : champ de pression fluctuante, niveaux entre -20 et 20 Pa. Champs représentés dans le plan $y/D=0$.

La méthode RFM ayant déjà été expérimentée dans d'autres études [73, 68], elle est directement utilisée pour l'étude de l'écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique. Le maillage du domaine de calcul est le même que pour la configuration sans fluctuations turbulentes en entrée de domaine présentée dans le chapitre 5. La résolution du domaine cartésien au-dessus de la cavité est de $351 \times 141 \times 180$

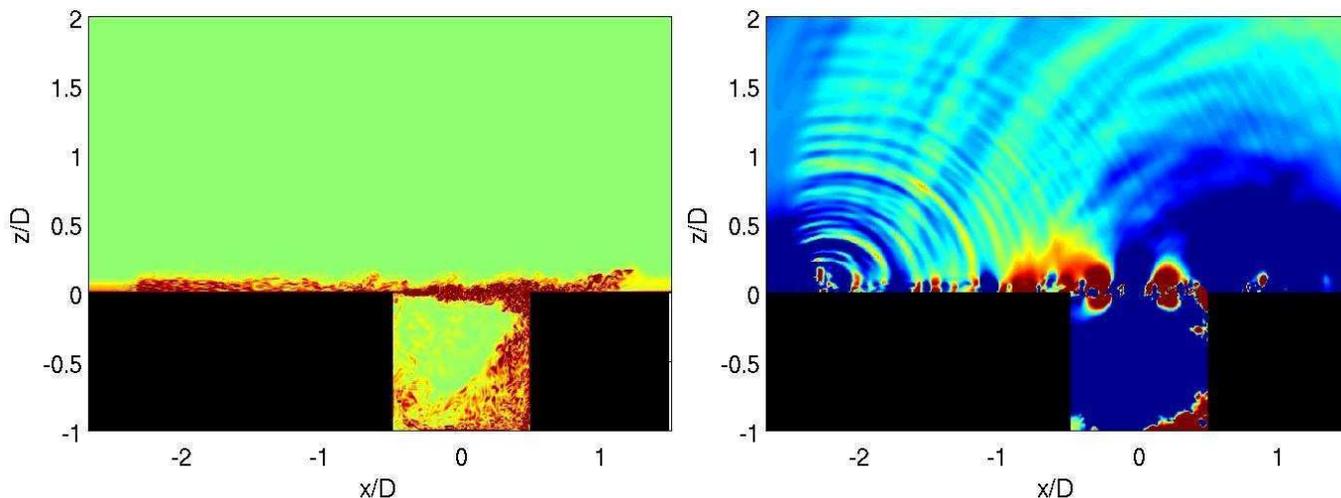


FIG. 3.3 – Méthode RFM avec les niveaux de fluctuations divisés par 10. Même légende que la figure 3.2.

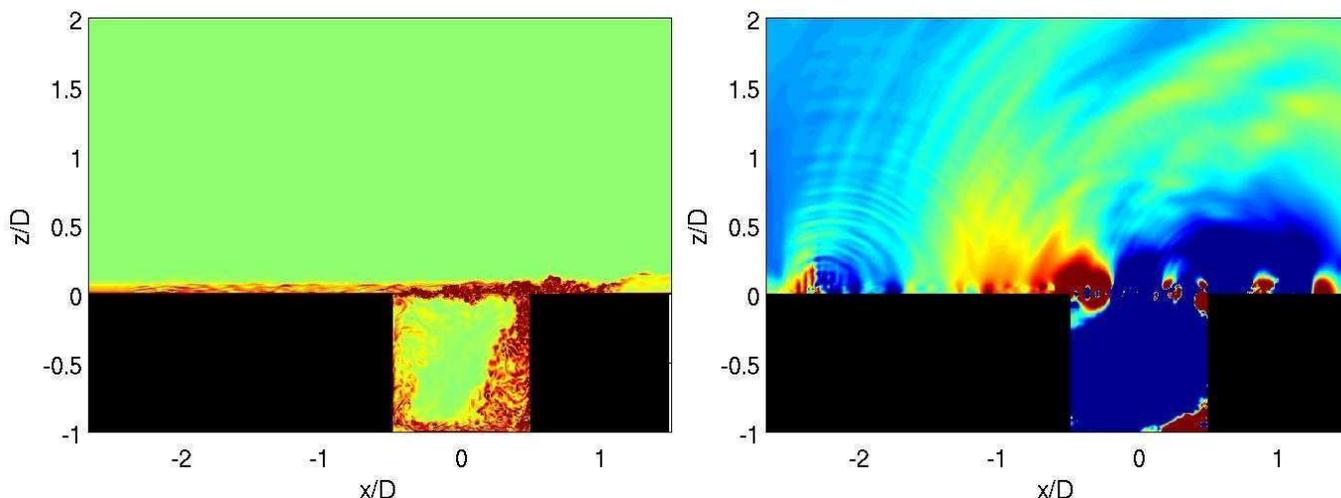


FIG. 3.4 – Méthode RFM avec les niveaux de fluctuations divisés par 400. Même légende que la figure 3.2.

points respectivement dans les directions longitudinale, transverse et verticale. Les pas de discrétisation sont $\Delta x = 2.7$ mm, $\Delta y = 1.6$ mm et $\Delta z = 0.26$ mm en amont de la cavité. Un étirement de 2 % est appliqué verticalement à partir de la paroi et un étirement de 1% longitudinalement à partir du premier point jusqu'à un demi-diamètre devant de la cavité où l'étirement devient ensuite nul (pas d'espace longitudinal constant). Le coefficient de filtrage est de 1. La vitesse amont est de 70 m/s et le calcul est initialisé avec le profil turbulent expérimental présenté dans le chapitre 5. Ce profil correspond à une épaisseur de couche limite de 15 mm. Les fluctuations de vitesse issues de la méthode RFM sont superposées aux champs de vitesse dans un plan y - z situé en début de domaine (15^{me} plan à partir de l'entrée). Un filtre laplacien est utilisé devant ce plan afin de ne pas perturber la conditions limite de non-réflexion en amont du domaine.

Le plan d'imposition de ces fluctuations est nettement observable sur la 3.2. Le niveau de turbulence est très élevé et semble décroître à l'approche de la cavité. Si ces fluctuations peuvent être qualitativement acceptables, le champ fluctuant de pression révèle un rayonnement acoustique nuisible provenant du plan d'imposition des fluctuations. Ce bruit parasite est assez intense pour masquer

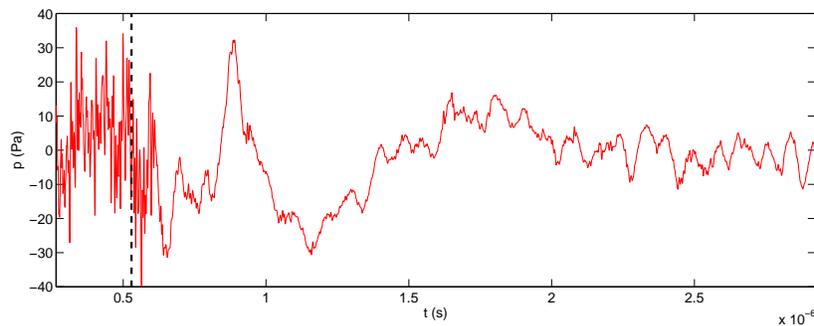


FIG. 3.5 – Historique de la pression fluctuante en $x/D=0.$, $y/D=0.$ et $z/D=2.8.$ Le trait vertical représente l’instant où les niveaux initiaux de la méthode RFM sont divisés par 10.

l’acoustique générée par l’écoulement au-dessus de la cavité. Pour diminuer ce bruit, le niveau de fluctuations imposées en entrée est divisé par 10 sur la figure 3.3. Une conséquence est la diminution des fluctuations turbulentes dans la couche limite (figure de gauche) et la réduction du bruit provenant du plan d’imposition (figure de droite). Afin de réduire encore le bruit lié à la méthode de génération synthétique de turbulence, les fluctuations imposées sont encore divisées par 40, ce qui équivaut à une amplitude 400 fois plus faible que celle initiale. La trace acoustique de la condition d’entrée est encore visible sur la figure 3.4 de droite. De plus, les fluctuations turbulentes observables sur le champ de vorticité (figure de gauche) sont très faibles voire insuffisantes par rapport aux fluctuations turbulentes présentes au sein de la couche de cisaillement de la cavité. Enfin, un historique temporel de la pression fluctuante pour un capteur ponctuel situé au-dessus de la cavité est présenté sur la figure 3.5. A partir de la ligne verticale, la première diminution du niveau des fluctuations en entrée est réalisée. Le bruit nuisible de la méthode RFM avec les niveaux initiaux est clairement observé avant la ligne et la diminution des fluctuations en entrée, après la ligne, s’avère très favorable pour l’exploitation de l’acoustique en champ lointain. Cependant cette réduction s’accompagne d’une diminution importante de l’activité turbulente dans la couche limite amont qui devient trop faible par rapport aux niveaux attendus pour une couche limite turbulente.

3.1.2 La méthode des structures synthétiques (SEM)

3.1.2.1 Présentation de la méthode des structures synthétiques

La formulation originelle de la méthode des structures synthétiques, Synthetic Eddy Method (SEM) en anglais, a été proposée par Lund *et al.* [125] qui génèrent des fluctuations de vitesse respectant les conditions de moyenne nulle, de variance unité, et de covariances nulles à partir de trois signaux aléatoires $\tilde{u}_j(x, y, z, t)$ pondérés par une décomposition de Cholesky A_{ij} du tenseur de Reynolds R_{ij} . Le champ fluctuant s’écrit donc $\sum_{j=1}^3 A_{ij}(z)\tilde{u}_j(x, y, z, t)$, les coefficients A_{ij} provenant de la matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{R_{11}} & 0 & 0 \\ R_{22}/A_{11} & \sqrt{R_{22} - A_{21}^2} & 0 \\ R_{31}/A_{11} & (R_{32} - A_{21}A_{31})/A_{22} & \sqrt{R_{33} - A_{31}^2 - A_{32}^2} \end{bmatrix}$$

Jarrin *et al.* [95] ont récemment remplacé les signaux aléatoires par une superposition de structures gaussiennes auxquelles sont affectées une échelle de longueur et une vitesse de convection. Cette formulation a été améliorée par Pamiès *et al.* [147] afin de prendre en compte le caractère anisotrope de la turbulence pariétale, et plus précisément l’évolution des échelles spatio-temporelles des structures

en fonction de leur distance à la paroi. Une manière de traduire cette inhomogénéité est d'introduire des strates dans la couche limite possédant chacune des caractéristiques propres (figure 3.6). Les caractéristiques définies pour chaque strate (taille des structures, vitesse de convection, nombre de structures par exemple) sont issues des expérimentations et des bases de données DNS afin de mimer au mieux les structures d'une couche limite physique.

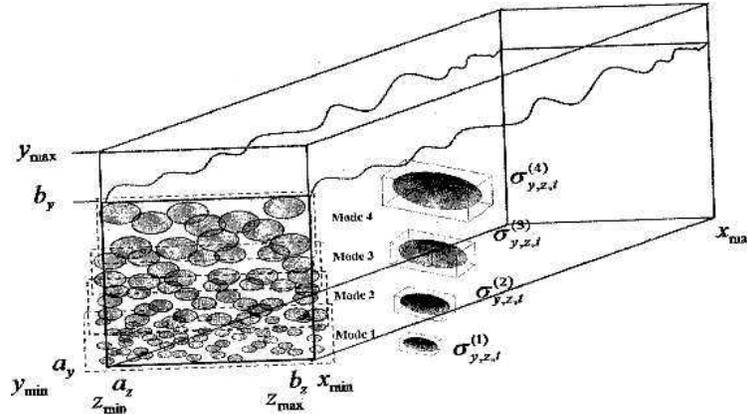


FIG. 3.6 – Exemple schématique du découpage en 4 strates (ou modes) du plan d'entrée du domaine de calcul avec des tailles de structures spécifiques à chaque strate et adaptées en fonction de la distance par rapport à la paroi (d'après Terracol, ONERA).

Le signal \tilde{u}_j s'écrit comme la somme de P modes \tilde{v}_{jp} , chacun formé de la somme de $N(p)$ structures :

$$\tilde{u}_j = \sum_{p=1}^P \tilde{v}_{jp} = \sum_{p=1}^P \frac{1}{\sqrt{N(p)}} \times \sum_{k=1}^{N(p)} \epsilon_k \Xi_{jp} \left(\frac{t - t_k - l_p^t}{l_p^t} \right) \Phi_{jp} \left(\frac{y - y_k}{l_p^y} \right) \Psi_{jp} \left(\frac{z - z_k}{l_p^z} \right)$$

A chaque mode P est donc associé :

- un nombre de structures, $N(p)$,
- un signe aléatoire associé à la structure k , ϵ_k ,
- un instant aléatoire d'apparition de la structure k , t_k ,
- une position aléatoire du centre de la structure k , (y_k, z_k) ,
- une fonction de forme de support compact sur $[-1; 1]^3$,
 $\Xi_{jp}(\tilde{t}) \times \Phi_{jp}(\tilde{y}) \times \Psi_{jp}(\tilde{z})$,
- une échelle de longueur transverse et normale à la paroi, l_p^y, l_p^z ,
- une échelle de temps longitudinale déduite d'une échelle de longueur longitudinale et d'une vitesse de convection, $l_p^t = l_p^x / c^p$.

Dans la formulation de la SEM proposée par Pamiès *et al.* [147], le nombre de structures est obtenu par recouvrement statistique de la surface de chaque mode, soit

$$N(p) \approx Ly \Delta z_p / 4 l_p^y l_p^z$$

où $\Delta z_p = z_p^{up} - z_p^{low}$ est la dimension du mode p dans la direction normale à la paroi. Le jeu de paramètres l_p^t, l_p^y, l_p^z de chaque structure k injectée est choisi de manière équiprobable dans les

mode	z_p^{low}	z_p^{up}	l_p^x	l_p^z	l_p^y	c^p
1	$20 \nu/u_\tau$	$60 \nu/u_\tau$	$100 \nu/u_\tau$	$20 \nu/u_\tau$	$30 \nu/u_\tau$	$15 u_\tau$
2	$60 \nu/u_\tau$	0.4δ	$120 \nu/u_\tau$	$60 \nu/u_\tau$	$60 \nu/u_\tau$	$15 u_\tau$
3	0.4δ	0.5δ	$60 \nu/u_\tau$	$60 \nu/u_\tau$	$120 \nu/u_\tau$	$15 u_\tau$
4	0.5δ	0.8δ	0.1δ	0.1δ	0.1δ	$0.8 U_\infty$
5	0.8δ	1.5δ	0.15δ	0.15δ	0.15δ	$0.8 U_\infty$

TAB. 3.1 – Paramètres des modes de la SEM.

intervalles $[t; t + l_p^t]$, $[z_p^{low}; z_p^{up}]$, $[-Ly/2; Ly/2]$. La condition de variance unité est assurée par :

$$\frac{1}{2^3} \int_{[-1,1]^3} [\Xi_{jp}(\tilde{t}) \times \Phi_{jp}(\tilde{y}) \times \Psi_{jp}(\tilde{z})]^2 d\tilde{t}d\tilde{y}d\tilde{z} = 1$$

Dans la formulation de Pamiès *et al.* [147], les fonctions de forme Ξ_{jp} , Φ_{jp} , Ψ_{jp} sont soit des fonctions gaussiennes normalisées soit des fonctions de la forme $H(\xi) = 1 - \cos(2\pi\xi)/2\pi\xi\sqrt{C}$ (inspirées du modèle de Perry et Marusic [150]) où $C \approx 0.214$ est une constante de normalisation qui assure la condition de variance unité.

Le tableau 3.1 donne le paramétrage proposé Pamiès *et al.* [147] pour une formulation de la SEM avec 5 modes. Les résolutions pariétales des simulations LES réalisées ne permettent pas de prendre en compte les 5 modes. Ainsi, le premier mode n'est pas résolu et le deuxième mode est à peine discrétisé.

Afin d'éviter un appel systématique à des fonctions sous fortran et afin de réduire le coût de la SEM, les fonctions $H(\xi)$ ont été remplacées par des gaussiennes sans affecter notablement les performances obtenues. De la condition de variance unité, on tire un facteur de normalisation $A(\sigma)$ où σ est l'écart-type de la gaussienne. Pamiès *et al.* [147] montrent que de meilleures performances sont obtenues pour de faibles valeurs de σ . Cependant les forts gradients de vitesse résultants posent des problèmes de stabilité numérique, et un écart-type de 0.3 est considéré dans cette étude.

3.1.2.2 Résultats pour la cavité cylindrique

Pour ce cas test, une zone de hauteur réduite est ajoutée en début de domaine de calcul comme le montre la figure 3.7 par exemple. La condition limite supérieure de cette zone est une condition de rayonnement. Le rôle de cette zone est d'évacuer hors du domaine de calcul une partie du rayonnement parasite liée à la génération de fluctuations turbulentes en entrée avant leur introduction dans le bloc comprenant la cavité. Le maillage cartésien supérieur a une résolution différente du cas testé précédemment. Celle-ci est de $41 \times 141 \times 117$ pour la zone d'entrée et de $370 \times 141 \times 205$ pour le bloc au-dessus de la cavité. Les pas de discrétisation spatiaux sont $\Delta x = 5.2$ mm, $\Delta y = 1.8$ mm et $\Delta z = 0.2$ mm en entrée. Un étirement de 1% longitudinalement est réalisé à partir du premier point du domaine jusqu'à un demi-diamètre devant la cavité. Un étirement de 1,7 % est appliqué verticalement à partir du premier point de paroi. Le CFL est de 1 et fournit un pas de temps de 4.32×10^{-7} s pour une vitesse infinie de 70 m/s. Le coefficient de filtrage est de 0.6.

A l'instar de l'étude réalisée avec la méthode RFM, un intense rayonnement à partir du plan d'imposition est visible sur la figure 3.7 à gauche. Pour diminuer ce rayonnement, l'amplitude des fluctuations imposées est progressivement réduit tout le long du calcul. A l'itération présentée sur la

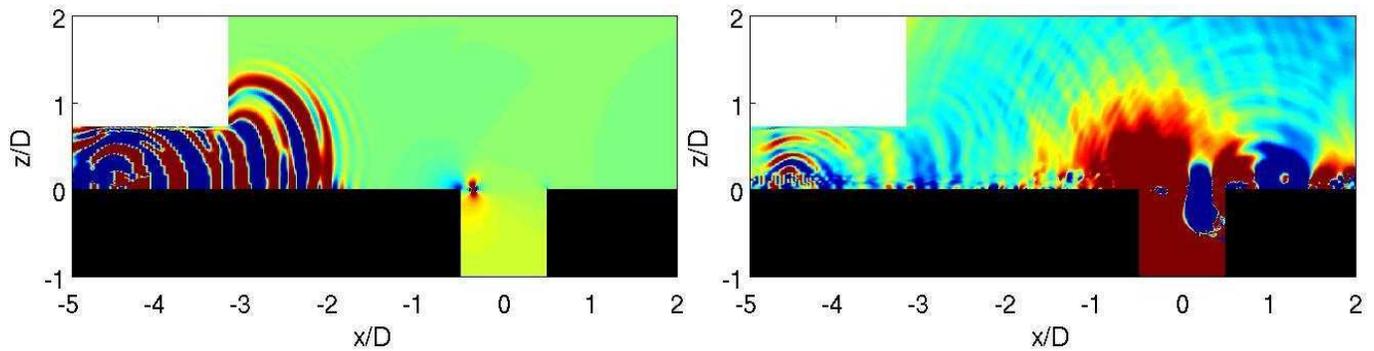


FIG. 3.7 – Méthode SEM. Champ fluctuant de pression entre -20 et 20 Pa dans le plan médian $y/D=0$. A gauche : fluctuations initiales de la méthode. A droite : fluctuations de la méthode divisées par 25.

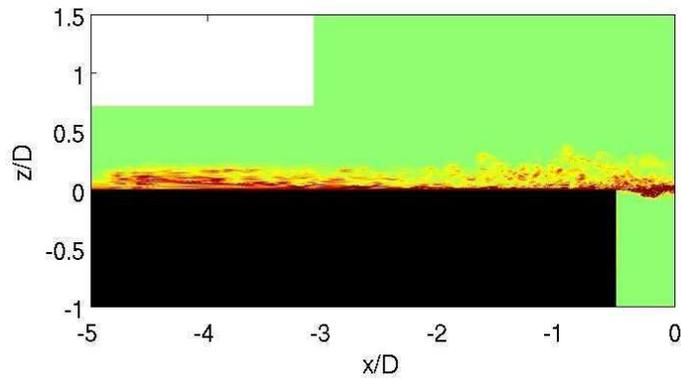


FIG. 3.8 – Champ instantané de la norme de vorticité dans le plan $y/D=0$, niveaux entre 0 et 1.10^4 . Les fluctuations de la méthode SEM sont divisées par 25 en entrée.

figure 3.7 à droite, l'amplitude initiale est divisée par 25. Le champ de pression fluctuante montre que le rayonnement parasite de la condition d'entrée est moindre mais non-négligeable. Ainsi des motifs d'interférence entre le rayonnement de la condition d'entrée et celui dû à la présence de la cavité sont encore visibles. Cette diminution de l'amplitude des fluctuations est aussi observable sur l'historique de la vorticité sur la figure 3.8. En effet, plus on se rapproche de la condition d'entrée, plus l'intensité des tourbillons gaussiens en entrée est réduite et plus les fluctuations turbulentes dans la couche limite sont faibles. Comme pour les modes RFM, l'obtention d'un rayonnement parasite acceptable requiert une diminution drastique des niveaux initiaux conduisant à une turbulence pariétale trop faible.

3.1.3 Conclusion sur les méthodes de turbulence synthétique

Les méthodes de génération de turbulence synthétique induisent un niveau de bruit numérique trop intense dans le cadre de notre étude. En effet, les niveaux acoustiques émis par un écoulement affleurant une cavité cylindrique sont assez faibles compte tenu du nombre de Mach peu élevé proche de 0.2. La diminution de l'amplitude des fluctuations imposées réduit fortement l'acoustique parasite mais aussi le niveau d'intensité turbulente au sein de la couche limite amont.

3.2 Génération de turbulence amont par une méthode de recyclage

3.2.1 Introduction

La méthode de recyclage consiste à obtenir une couche limite turbulente en recyclant les plans aval soit de la même simulation de couche limite soit d'une simulation auxiliaire. Le recyclage des plans d'une même simulation a été proposé par Spalart [173] en tenant compte d'une remise en échelle liée à l'épaississement de la couche limite. Un problème lié à cette méthode est l'apparition d'une basse fréquence lié au forçage périodique en amont du domaine de calcul. Lund *et al.*[125] propose d'extraire les plans d'une simulation auxiliaire afin d'alimenter la simulation principale. Cependant, pour une simulation compressible subsonique, un bruit numérique en entrée est susceptible d'être généré comme nous le verront plus tard. Comme pour le bouclage d'une simulation avec elle-même, une remise à l'échelle, ou "rescaling", de l'écoulement via certains paramètres caractérisant la couche limite est nécessaire avant d'introduire les plans de la simulation auxiliaire dans le calcul principal. Ainsi, en se basant sur l'épaisseur de couche limite, une simulation auxiliaire correctement résolue à un Reynolds donné peut alimenter une simulation principale à un Reynolds plus élevé grâce au rescaling. Dans le cadre notre étude, l'utilisation d'une simulation auxiliaire permet ainsi l'introduction dans la simulation principale de fluctuations turbulentes issues d'une simulation de couche limite mieux résolue. Dans le cas présent, le paramètre retenu pour le rescaling est l'épaisseur de couche limite δ . Pour éviter une étape supplémentaire d'interpolation, les simulations principale et auxiliaire doivent avoir un rapport $\Delta z/\delta$ égal entre elles, où Δz est la taille de première maille. De plus, les différents rapports de mailles seront pris identiques entre la portion de domaine d'extraction des plans du calcul préliminaire et la portion de réintroduction du domaine principal. Pour cette étude, trois plans sont extraits du calcul de couche limite et réintroduit en entrée du calcul principal. Les variables stockées aux plans d'extraction sont les dérivées temporelles des variables primitives, à savoir u , v , w , ρ et p , calculées à chaque pas de temps. Les plans sont alors réintroduits à chaque pas de temps en entrée de la simulation principale.

3.2.2 Résultats pour le cavité cylindrique

Ici, la simulation principale est celle de l'écoulement affleurant la cavité cylindrique. Le maillage cartésien supérieur du calcul de cavité utilisé pour ces tests est le même que pour celui des tests réalisés avec la méthode SEM. La seule différence est que le pas d'espace longitudinal est constant en amont de la cavité avec $\Delta x=1,7$ mm. Le calcul est toujours initialisé avec le profil expérimental correspondant à une épaisseur de couche limite de 15 mm.

La simulation auxiliaire est celle d'une couche limite. Le maillage cartésien de ce calcul comprend $264 \times 101 \times 124$ points. La taille des mailles de calcul dépend de l'utilisation ou non du rescaling. A l'instar du maillage cartésien de la simulation de cavité, un taux d'étirement vertical de 1,7% est réalisé à partir du premier point de paroi. Le pas d'espace longitudinal est constant. Les différents rapports d'aspect de mailles de calcul, $\Delta x/\Delta y$ et $\Delta x/\Delta z$ sont les mêmes que ceux en entrée du maillage de cavité. La turbulence est déclenchée par une marche comprenant 10 points longitudinalement et 16 points verticalement. La transition laminaire/turbulent forcée par une petite marche (de hauteur h de marche de l'ordre de $0.2\delta_0$) a été validée pour une couche limite à $M=0.5$ pour des maillages LES bien résolus [70]. Les conditions limites transverses sont périodiques. Ici le maillage est plus grossier et la transition est obtenue avec une marche plus haute de l'ordre de $0.31\delta_0$.

3.2.2.1 Avec rescaling

Le rapport d'aspect entre les tailles de première maille du calcul de cavité et celui auxiliaire (équivalent à l'inverse du rapport d'aspect respectif des épaisseurs de couche limite) est de 6,68. Ainsi, pour le calcul préliminaire, les pas d'espace sont $\Delta x = 0.25$ mm, $\Delta y = 0.03$ mm et $\Delta z = 0.27$ mm ce qui équivaut en variable de paroi à $\Delta x^+ \simeq 57$, $\Delta y^+ \simeq 63$ et $\Delta z^+ \simeq 7$. Pour $CFL=0.9$, le pas de temps est $\Delta t = 6.49 \times 10^{-7}$ s. Le coefficient de filtrage est de 0.2. Le calcul préliminaire est initialisé par une approximation polynômiale d'ordre 4 du profil de Blasius avec une épaisseur de 1,7 mm et une vitesse de 70 m/s. Le nombre de Reynolds initial basé sur l'épaisseur de quantité de mouvement de couche limite est de $Re_{\theta_0} \simeq 900$. Ce nombre de Reynolds est compatible avec un état de départ laminaire. Le calcul est statistiquement convergé au bout de 60000 itérations. Les trois plans nécessaires à la réintroduction sont pris en $x/D=0.36$ à chaque pas de temps. Au niveau de ces plans, l'épaisseur de couche limite est de 2,2 mm, qui une fois multiplié par le facteur de 6.68 fournit les 15 mm attendu en amont de la cavité.

Le champ de vitesse longitudinale est présenté à gauche de la figure 3.9. Le développement d'une couche limite turbulente est bien déclenché par la marche. Le champ de pression fluctuante pour ce calcul est présenté sur la figure 3.9 à droite. Le bruit introduit par la marche est très faible. Il en est de même pour la perturbation moyenne en pression susceptible d'apparaître avec la marche.

Les dérivées des variables primitives issues des plans sont ensuite introduits en début du domaine

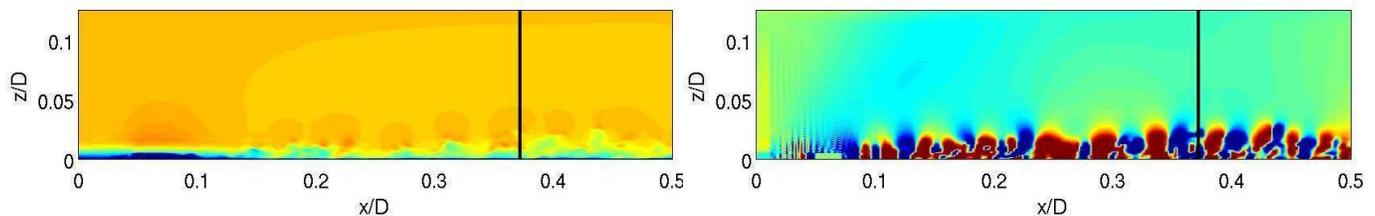


FIG. 3.9 – Simulation de couche limite auxiliaire pour $Re_{\theta_0} \simeq 900$. A gauche : champ instantané de vitesse longitudinale, niveaux 0 et 104 m/s. A droite : champ instantané de la pression fluctuante, niveaux entre -20 et 20 Pa. Champs représentés dans le plan $y/D=0$. Les traits verticaux indiquent la position des trois plans où les dérivées des variables primitives sont extraites.

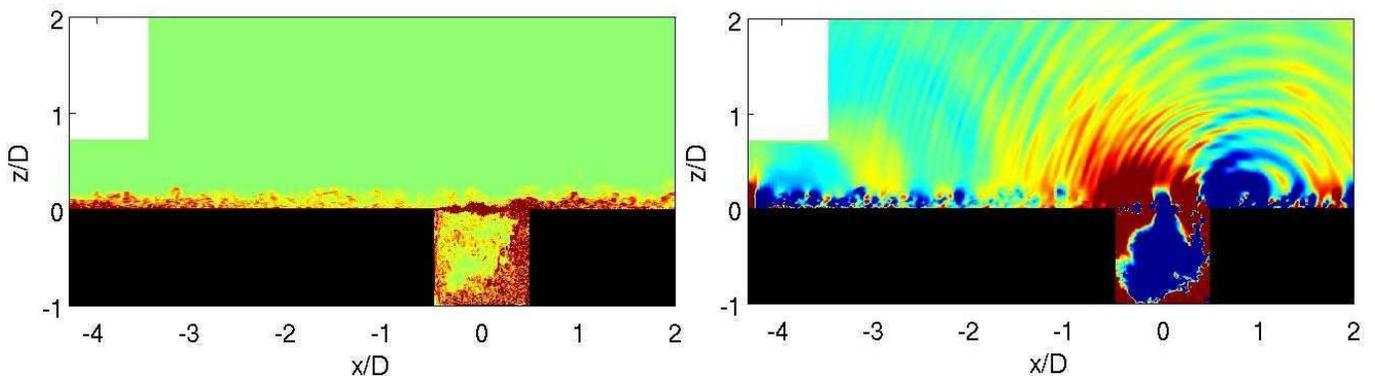


FIG. 3.10 – Simulation de l'écoulement sur la cavité avec méthode de recyclage utilisant un rescaling. A gauche : champ instantané de la norme de vorticité, niveaux entre 0 et 1.10^4 . A droite : champ instantané de la pression fluctuante entre -20 et 20 Pa. Champs représentés dans le plan $y/D=0$.

du calcul de cavité. A gauche de la figure 3.10, le champ de vorticité montre une couche limite bien

initialisée en entrée de domaine. Les fluctuations au sein de la couche limite semblent diminuer au fur et à mesure que l'on se rapproche de la cavité. De plus, un faible rayonnement acoustique dû à l'entrée, à droite de la figure 3.10, interagit avec les ondes acoustiques plus haute fréquence issue de la cavité. Cependant, cette interaction est beaucoup moins importante que pour les méthodes de génération de turbulence synthétique. La figure 3.11 présente les profils moyens de vitesse longitudinale du calcul de cavité en entrée et en une position où la couche limite semble développée ($x/D=-3.5$). Sur les mêmes graphiques sont tracés le profil expérimental initialisant le calcul et le profil après rescaling issu de la simulation auxiliaire à la même position que l'un des plans extraits. En entrée du domaine, le profil pour le calcul de cavité est fortement perturbé. Aux vues des premiers points en proche paroi, il semble tout de même s'éloigner du profil initial et évoluer vers le profil de la simulation auxiliaire. Comme on peut le voir pour une position en aval, la déformation du profil en entrée s'accroît. En effet, le profil ne ressemble plus à un profil d'une couche limite turbulente et une survitesse s'amplifie près de la paroi. La figure 3.12 présente les profils de la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse longitudinale aux mêmes positions. A titre de comparaison, les mêmes types de profil sont tracés pour la simulation auxiliaire. Si les tensions ont une allure satisfaisante en entrée de domaine, leur intensité diminue de plus de moitié plus en aval. Cette observation est similaire pour les profils de la moyenne quadratique des fluctuations de vitesse transversale et verticale sur les figures 3.13 et 3.14. Cet effondrement des intensités turbulentes résulte de la forte distorsion observée pour le champ moyen qui rompt le cycle de génération de turbulence pariétale. Afin de tester si le "fort" rescaling (augmentation d'un facteur 6.68 entre le nombre de Reynolds de la simulation et celui du calcul de cavité) est responsable de cette distorsion, un calcul sans rescaling est proposé.

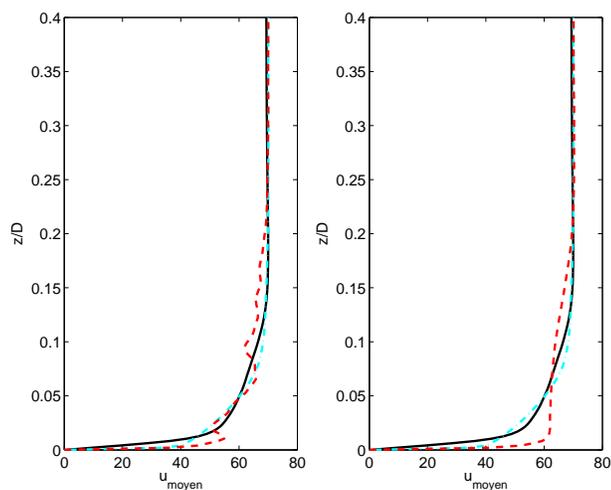


FIG. 3.11 – Profils moyens de vitesse longitudinale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (— — —) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D = -3.5$ à droite. Profil d'initialisation (— · — · —), profil issu du calcul auxiliaire (—).

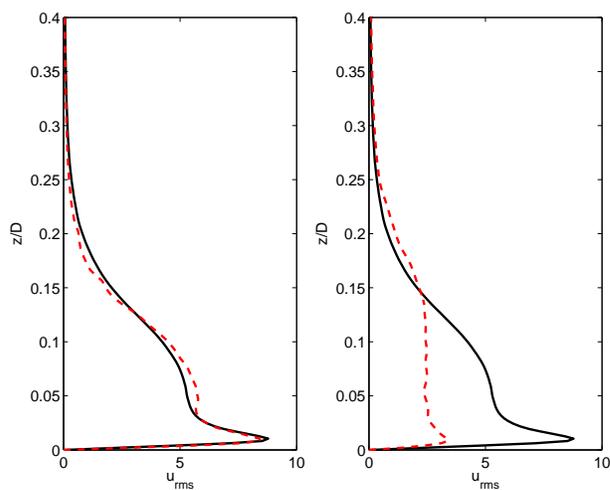


FIG. 3.12 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse longitudinale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (— — —) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D = -3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

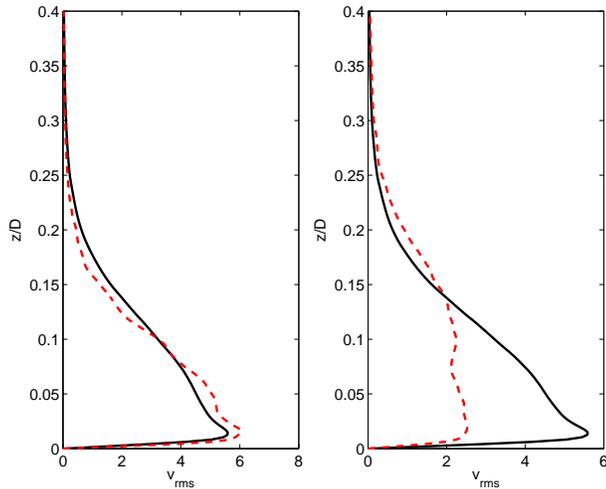


FIG. 3.13 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse transversale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D=-3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

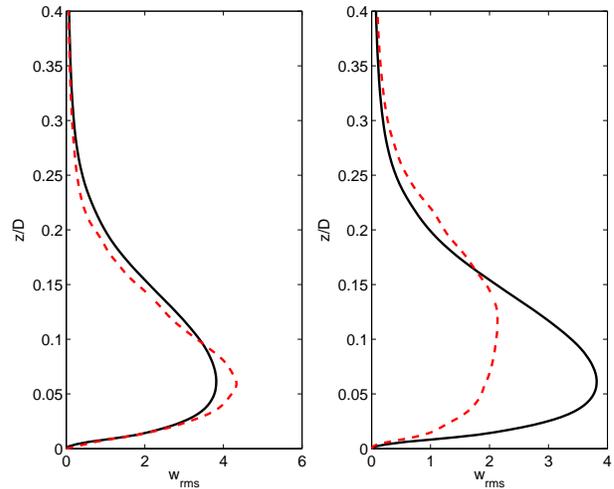


FIG. 3.14 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse verticale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D=-3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

3.2.2.2 Sans rescaling

Dans cette partie, le cas sans rescaling est présenté. Le maillage de la simulation auxiliaire reste le même mais les tailles de maille Δx , Δy , Δz sont égales à celles du maillage de la simulation principale. En variable de paroi, la discrétisation est $\Delta x^+ = 264$, $\Delta y^+ = 181$ et $\Delta z^+ = 33$. Le nombre de Reynolds en entrée est de 6000 mais le profil de Blasius est conservé en amont de la marche, ce qui n'est plus physique pour ce nombre de Reynolds. On obtient néanmoins une transition forcée efficace. L'épaisseur de couche limite à la position d'extraction des plans est maintenant maintenant d'environ $\delta=15$ mm. Sur la figure 3.15, les champs de vitesse longitudinale et de pression fluctuante sont présentés. On observe sur le champ de pression une légère dérive de la moyenne dans tout le domaine de calcul. La vorticité après réintroduction dans le calcul de cavité est présentée à gauche de la figure 3.16. Les fluctuations turbulentes diminuent à l'approche de la cavité mais restent qualitativement acceptables. Sur le champ de pression de la figure de droite, un léger rayonnement basse fréquence est à noter mais reste très acceptable compte tenu du niveau de l'acoustique g en er e par l'écoulement sur la cavité. Comme pour le cas avec rescaling, les profils de vitesse longitudinale moyenne et

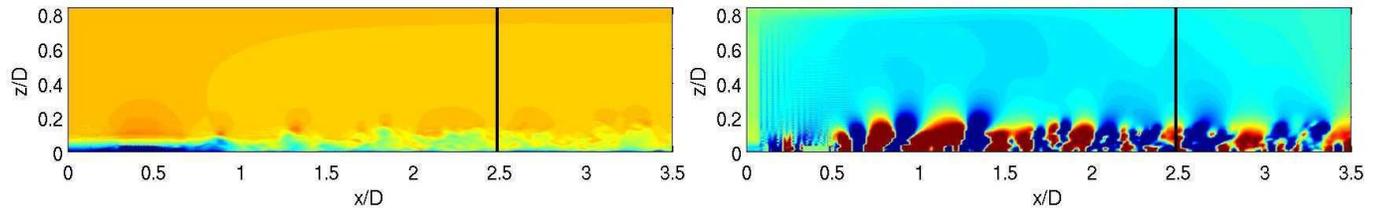


FIG. 3.15 – Simulation de couche limite auxiliaire $Re_{\theta_0} \simeq 6000$. A gauche : champ instantan e de vitesse longitudinale, niveaux 0 et 104 m/s. A droite : champ instantan e de la pression fluctuante, niveaux entre -20 et 20 Pa. Champs repr esent es dans le plan $y/D=0$. Les traits verticaux indiquent la position des trois plans où les dérivées des variables primitives sont extraites.

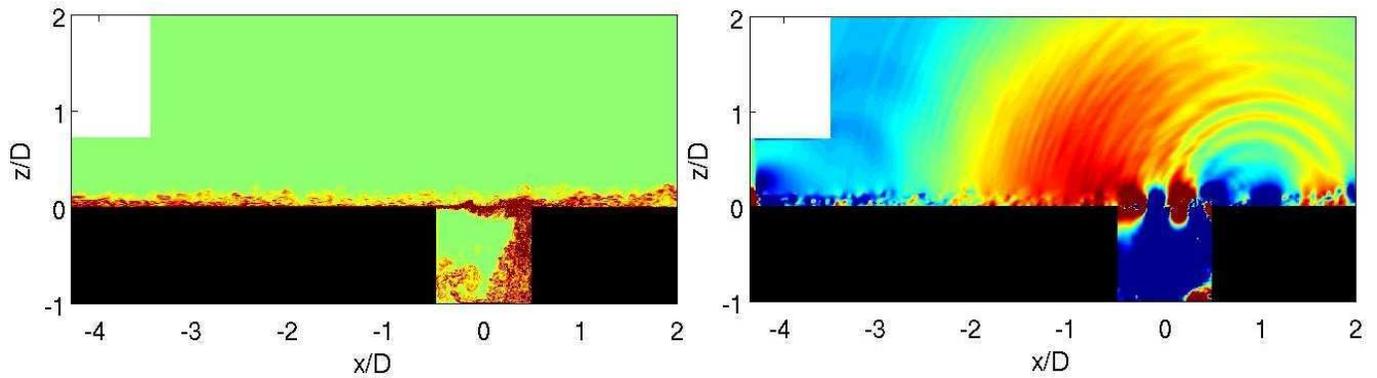


FIG. 3.16 – Simulation de l'écoulement sur la cavité avec une méthode de recyclage sans rescaling. A gauche : champ instantané de la norme de vorticité, niveaux entre 0 et 1.10^4 . A droite : champ instantané de la pression fluctuante entre -20 et 20 Pa. Champs représentés dans le plan $y/D=0$.

de fluctuations de vitesse moyenne du calcul de cavité sont tracés aux mêmes positions. Les profils moyens, sur la figure 3.17, présentent un comportement cohérent avec la simulation auxiliaire. En effet, si en entrée de domaine, le profil moyen s'accorde avec le profil expérimental initial, par la suite, il évolue vers le profil extrait du calcul auxiliaire. Cependant, les fluctuations de vitesse longitudinale de la figure 3.17 sont très faibles en entrée. Toutefois, ces fluctuations de vitesse augmentent plus loin. Les fluctuations des autres composantes de vitesse, sur les figures 3.19 et 3.20, présentent une évolution similaire au cas avec rescaling. Ainsi, les tensions sont réduites de moitié par rapport à l'entrée.

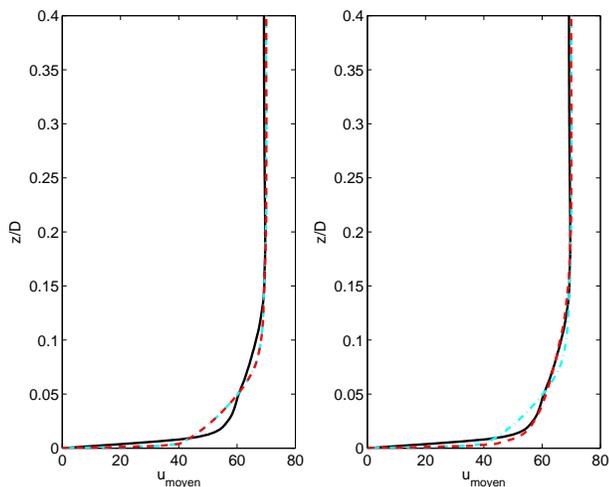


FIG. 3.17 – Profils moyens de vitesse longitudinale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D = -3.5$ à droite. Profil d'initialisation (····), profil issu du calcul auxiliaire (—).

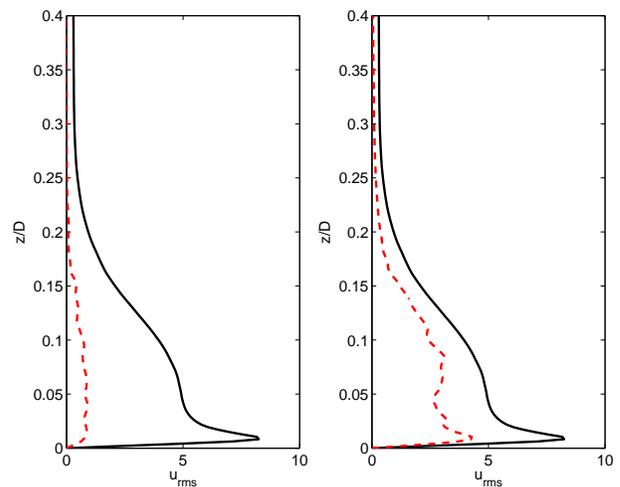


FIG. 3.18 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse longitudinale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D = -3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

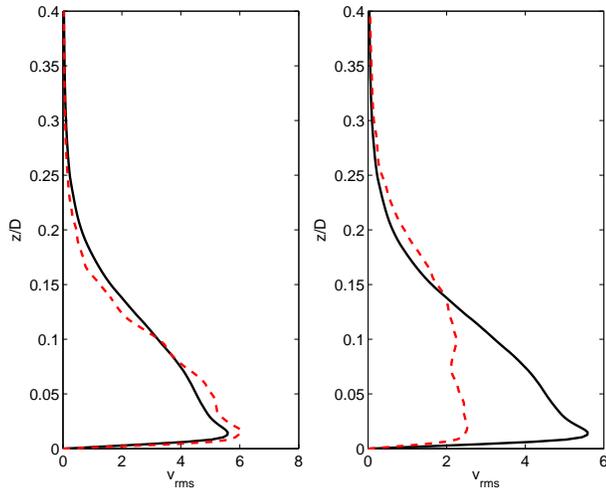


FIG. 3.19 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse transversale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D=-3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

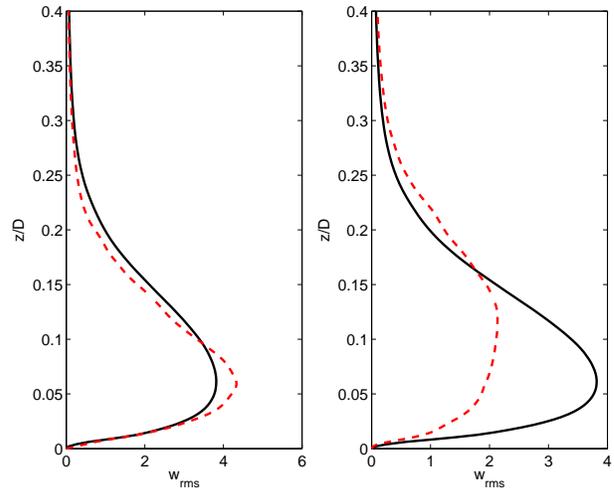


FIG. 3.20 – Profils de la moyenne quadratique de la vitesse verticale, dans le plan médian ($y/D=0$). Profil du calcul principal (---) en $x/D = -4.36$ (premier plan de réintroduction) à gauche et en $x/D=-3.5$ à droite. Profil issu du calcul auxiliaire (—).

3.2.3 Conclusion sur les méthodes de recyclage

La méthode de recyclage avec un rescaling présente une forte distortion du champ moyen pouvant être très préjudiciable si l'objectif est de reproduire correctement la couche de limite en amont de la cavité. La méthode sans rescaling permet de minimiser cette distorsion mais un problème apparaît pour le niveau des fluctuations de vitesse longitudinale en entrée. De plus, l'adaptation des champs dans le calcul de cavité s'accompagne pour les méthodes avec ou sans rescaling d'une diminution importante de la turbulence en aval de l'entrée, certainement liée aux maillages trop grossiers utilisés avec un Δz^+ de l'ordre de 30-40 au-delà du pic de production pour le cycle de régénération de la turbulence pariétale. Enfin, d'un point de vue pratique, la méthode de rescaling nécessite de réaliser, à chaque tranche de calcul de cavité, un calcul auxiliaire pour lequel un volume important de données est stocké. La gestion de deux calcul en parallèles et le stockage complique la réalisation de la simulation de l'écoulement au-dessus de la cavité.

3.3 Génération de turbulence avec un profil inflexionnel perturbé

L'idée est de réaliser une transition *bypass* rapide. L'étude précédente et les auteurs [15, 71] montrent que l'utilisation d'une petite marche peut être une solution efficace pour déclencher une turbulence sans générer de bruit parasite. Une décélération locale de l'écoulement engendre un profil inflexionnel de vitesse favorable au développement d'instabilités de Kelvin-Helmoltz. Un bruit aléatoire est suffisant pour déclencher ces modes exponentiels fortement amplifiés. Une possibilité est donc d'imposer directement un profil inflexionnel en entrée de domaine de calcul et de superposer des petites perturbations. La croissance exponentielle permet d'ajouter de très faibles perturbations afin de réduire le bruit parasite. Les perturbations les plus instables, c'est-à-dire les plus amplifiées, peuvent être choisies par une analyse de stabilité linéaire et locale du profil moyen. De plus, l'observation des instabilités secondaires et de la transition *bypass* indique qu'une tridimensionnalisation aide à atteindre un rapide déclenchement de la turbulence. Des ondes obliques peuvent être introduites. Nous avons plutôt choisi de moduler le profil moyen dans la direction transverse, à l'instar des "pics" et "vallées" observés par Klebanoff [101] dans un scénario de transition.

Dans cette étude, le profil moyen de la vitesse longitudinale en entrée est obtenu en combinant un profil de Blasius et un profil en tangente hyperbolique :

$$\bar{u} = u_{\text{BL}} \times W(\eta) \quad \text{avec} \quad \frac{u_{\text{BL}}}{U_\infty} = \begin{cases} \eta(2 - 2\eta^2 + \eta^3) & \text{if } \eta < 1 \\ 1 & \text{if } \eta \geq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

où η est la distance à la paroi normalisée par l'épaisseur de couche limite δ . La fonction de pondération $W(\eta)$ est définie par [125] :

$$W(\eta) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \tanh \left[\frac{a(\eta - b)}{(1 - 2b)\eta + b} \right] / \tanh(a) \right\} \quad (3.2)$$

Le paramètre a contrôle la pente de la tangente hyperbolique, donc le cisaillement moyen. Durant cette étude, ce paramètre est fixé à 6 empiriquement. $b\delta$ représente la hauteur du point inflexionnel à partir de la paroi. Une analyse de stabilité linéaire en locale, prenant en compte la compressibilité de l'écoulement et la viscosité du fluide, permet de trouver le mode le plus instable (ou le plus amplifié) de la forme :

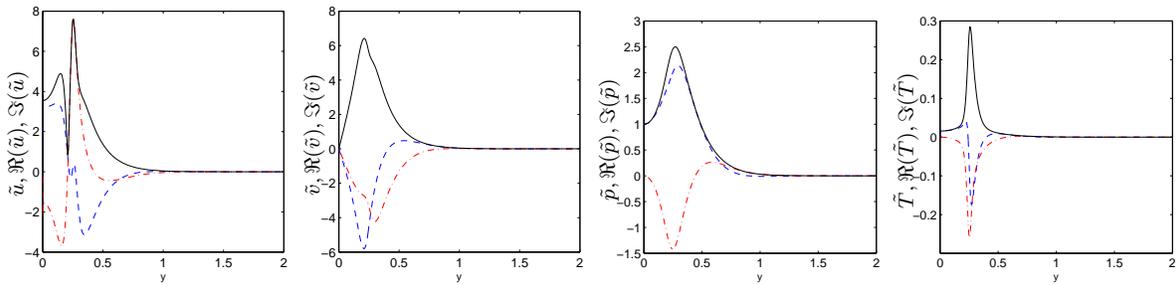
$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \tilde{\mathbf{q}}(z)e^{i(\alpha x + \beta y - \omega t)} + c.c. \quad (3.3)$$

\mathbf{q}' est le vecteur des perturbations sur les variables primitives $(u', v', w', p', T')^T$. $\tilde{\mathbf{q}}(z)$ représente le mode propre associé et $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ est un complexe issu de la théorie spatiale. α_r est le nombre d'onde longitudinal et α_i représente un taux d'accroissement pour la pulsation ω . Le nombre d'onde transverse β est nul dans cette étude. Les dérivées temporelles de ces perturbations sont superposées au profil moyen composite en un plan d'entrée :

$$\frac{\partial \mathbf{q}'(x, y, z, t)}{\partial t} = \varepsilon \omega \times [\Re(\tilde{\mathbf{q}}(z)) \sin(\alpha_r x - \omega t) + \Im(\tilde{\mathbf{q}}(z)) \cos(\alpha_r x - \omega t)] \times e^{-\alpha_i x} \times \sin(2m\pi y / L_y) \quad (3.4)$$

$\Re\{\cdot\}$ et $\Im\{\cdot\}$ représentent respectivement les parties réelles et imaginaires. Le taux de croissance α_i est négatif pour des perturbations amplifiées. La perturbation est multipliée par une très petite amplitude ε , et par une modulation transverse de la forme $\sin(2m\pi y / L_y)$, où m est le nombre de pics et de vallées le long de la direction L_y .

(a)



(b)

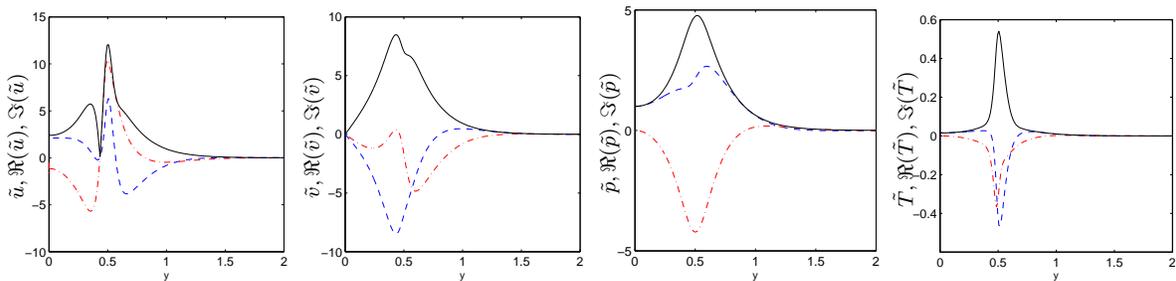


FIG. 3.21 – Amplitudes des fonctions propres issues de la théorie spatiale pour des profils moyens composites de la vitesse longitudinale Eq.(3.1) avec (a) $b = 0.25$, et (b) $b = 0.5$: module (—), partie réelle (---), et partie imaginaire (- - -). Les fonctions propres correspondent au mode le plus amplifié $\omega=2.206U_\infty/\delta$ pour $b = 0.25$, et $(\alpha_r; \alpha_i)\delta=(5.272 ; -2.758)$ et $\omega=2.349U_\infty/\delta$ pour $b = 0.5$.

3.3.1 Résultats

Contrairement aux cas d'étude précédents, les simulations considérées ici sont ceux d'une couche limite. Le maillage utilisé comprend $264 \times 124 \times 76$ points et correspond exactement à celui qui sera utilisé en amont de la cavité. Les pas d'espace sont $\Delta x = 1.7$ mm, $\Delta y = 1.1$ mm et $\Delta z = 0.2$ mm. Un taux d'étirement vertical de 1.7% est effectué à partir du premier point de paroi. Le CFL est de 0.9 et, pour une vitesse amont de 70 m/s, le pas de temps est de 4.3×10^{-7} s. Le coefficient de filtrage est fixé à 0.6. Les profils d'initialisation sont présentés sur la figure 3.22. Les deux profils sont construits à partir de profil laminaire de Blasius d'épaisseur $\delta = 0.0059$ mm. Pour le premier profil, le point d'inflexion se trouve à un quart d'épaisseur de couche limite à partir de la paroi. Pour le deuxième, il se trouve à la moitié de la couche limite. La figure 3.23 présentent divers champs de pression fluctuante après 50000 itérations en fonction du profil employé et de l'amplitude d'excitation. Le premier champ du haut montre une couche limite ayant transitionnée vers un état turbulent pour un profil inflexionnel initial avec le point d'inflexion à un quart de l'épaisseur de couche limite et une perturbation d'amplitude $\epsilon = 0.0001$. Il apparaît que l'excitation en amont rayonne très faiblement et que le champ de pression ne dérive pas. Le champ du milieu, avec le même profil initial, présente un fort rayonnement acoustique dû à l'augmentation de l'amplitude de la perturbation à $\epsilon = 0.004$. Ce rayonnement acoustique est suffisamment fort pour faire dériver le champ de pression dans le domaine de calcul. Le champ du bas, initié avec un profil inflexionnel avec le point d'inflexion situé

à la moitié de l'épaisseur de couche limite, présente une légère dérive de la pression moyenne et un rayonnement parasite très faible.

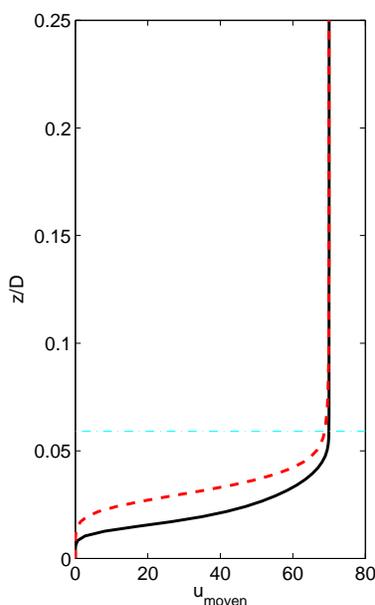


FIG. 3.22 – Profil inflexionnel initialisant le calcul. Point d'inflexion en 0.5δ (- - -) et en 0.25δ (—).

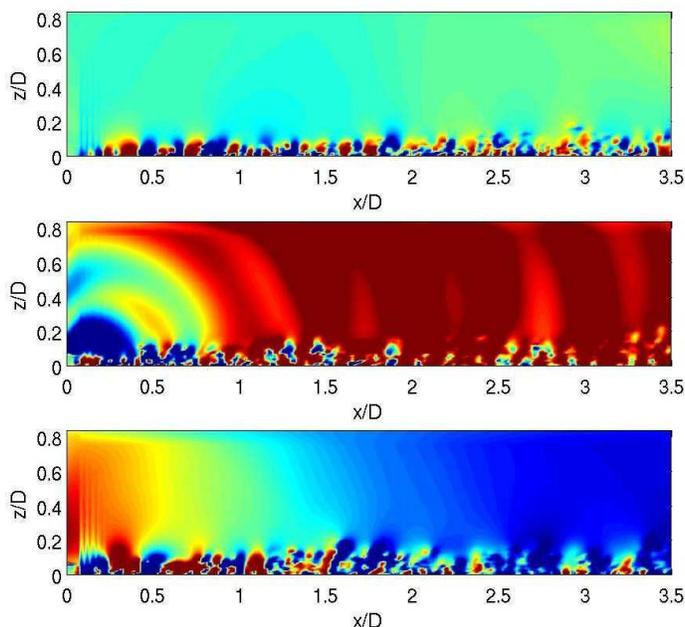


FIG. 3.23 – Champs de pression fluctuante en $y/D = 0$ et des niveaux entre ± 20 Pa. En haut : profil inflexionnel en 0.25δ et $\epsilon=0.0001$. Au milieu : profil inflexionnel en 0.25δ et $\epsilon=0.004$. En bas : profil inflexionnel en 0.5δ et $\epsilon=0.0001$.

La figure 3.24 présente le profil moyen de vitesse u pour le point d'inflexion situé à un quart de δ et des amplitudes d'excitations $\epsilon=0.0001$ et $\epsilon=0.004$. Les deux profils moyens sont très proches près de la paroi mais le profil pour $\epsilon=0.004$ est moins rempli, ce qui pourrait indiquer un caractère plus turbulent de l'écoulement dans ce cas-là. Cette observation est confirmée par les profils moyens quadratiques des fluctuations de vitesse tracés sur la figure 3.25. En effet, pour $\epsilon=0.004$, les fluctuations sont plus importantes lorsque l'on s'éloigne de la paroi que pour le cas $\epsilon=0.0001$. Les figure 3.26 et 3.27 présentent les mêmes courbes pour des profils avec une inflexion en 0.25δ et 0.5δ et $\epsilon=0.0001$. Comme précédemment, le profil moyen pour une inflexion en 0.25δ et $\epsilon=0.0001$ sur la figure 3.26 semble le moins turbulent. De plus, l'épaisseur de couche limite pour 0.5δ est plus importante. Les tensions turbulentes, représentées sur les figures 3.26 et 3.27, pour 0.25δ sont aussi moins intenses lorsque l'on s'éloigne de la paroi.

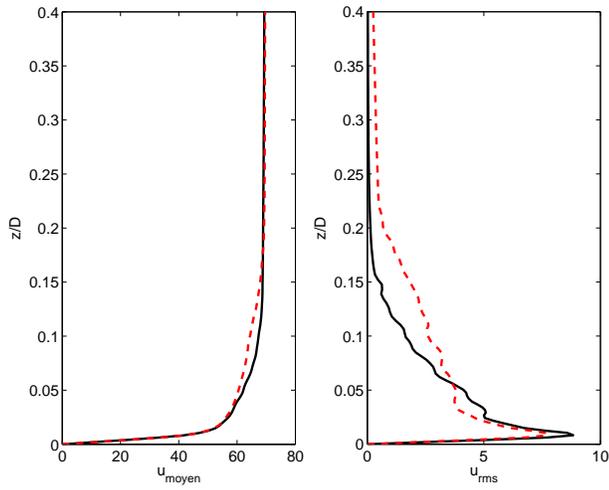


FIG. 3.24 – A gauche : profil moyen de vitesse longitudinale. A droite : profil de la moyenne quadratique de vitesse longitudinale. Profil inflexionnel initial en 0.25δ , $\epsilon=0.0001$ (—) et $\epsilon=0.004$ (- - -).

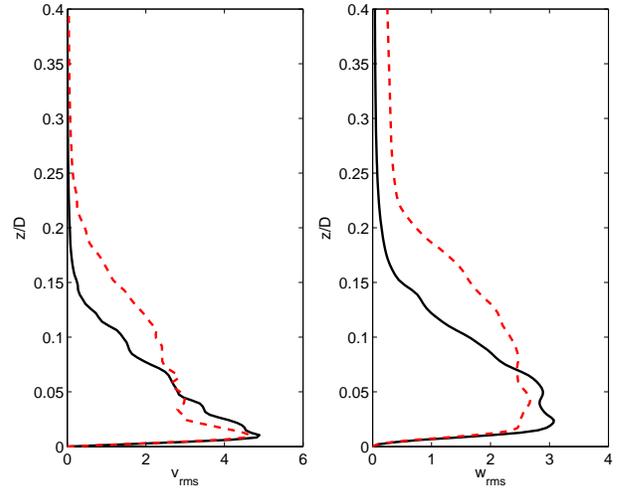


FIG. 3.25 – A gauche : profil de la moyenne quadratique de vitesse transversale. A droite : profil de la moyenne quadratique de vitesse verticale. Profil inflexionnel initial en 0.25δ , $\epsilon=0.0001$ (—) et $\epsilon=0.004$ (- - -).

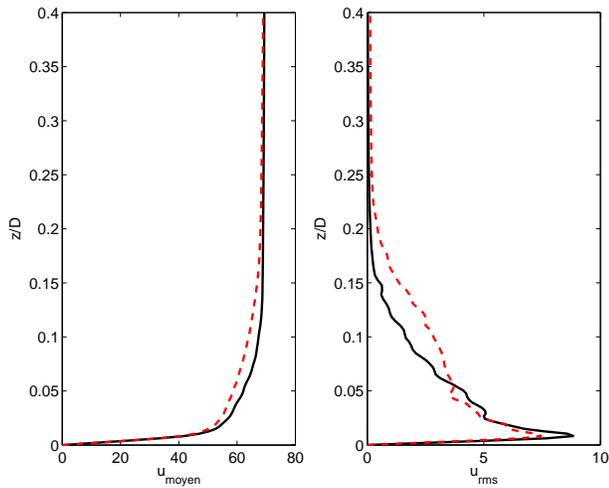


FIG. 3.26 – A gauche : profil moyen de vitesse longitudinale. A droite : profil de la moyenne quadratique de vitesse longitudinale. Profil inflexionnel initial en 0.25δ (—), en 0.5δ (- - -) et $\epsilon=0.0001$.

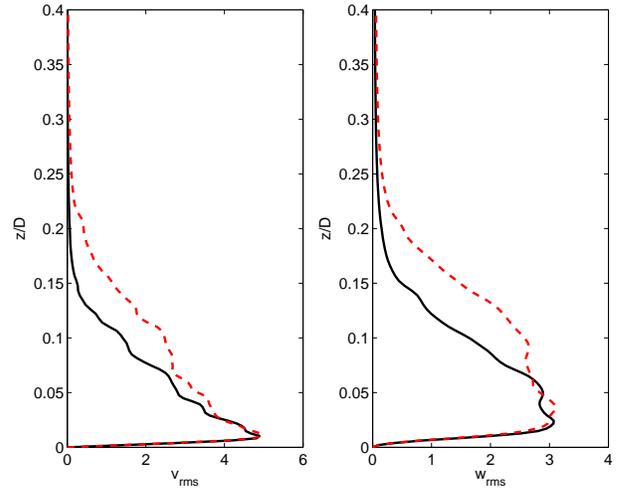


FIG. 3.27 – A gauche : profil de la moyenne quadratique de vitesse transversale. A droite : profil de la moyenne quadratique de vitesse verticale. Profil inflexionnel initial en 0.25δ (—), en 0.5δ (- - -) et $\epsilon=0.0001$.

3.3.2 Conclusion sur la génération de turbulence par un profil inflexionnel perturbé

L'amplitude de la perturbation en entrée joue un rôle important dans la génération de bruit parasite. Il est donc préférable dans notre cas de garder une amplitude ϵ égale à 0.0001. La hauteur du point d'inflexion du profil initial joue aussi un rôle important. En effet, plus celui-ci est loin de la paroi, plus la turbulence est initiée tôt et possède des niveaux importants en une position aval donnée. Cette position modifie alors sensiblement l'épaisseur de couche limite aval. La position du point d'inflexion doit donc être déterminée suivant l'épaisseur de couche limite finale souhaitée en une certaine position dans le domaine de calcul.

Chapitre 4

Rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité ouverte

Les premières études concernant le bruit de cavité sont apparues dans les années 50 et 60 pour des applications militaires. On constate alors que les oscillations auto-entretenues de l'écoulement au-dessus d'une cavité peuvent exciter les modes de structure d'une soute à bombes causant ainsi des vibrations nuisibles à la structure et engendrent rapidement la fatigue de celle-ci. De plus, la traînée augmente considérablement. En 1955, les expériences de Roshko [159] mettent en évidence l'influence des dimensions d'une cavité rectangulaire sur la recirculation de l'écoulement et fournissent une description détaillée de celle-ci. On observe alors une ressemblance avec la recirculation d'une cavité entraînée. Karamcheti [97] parvient à visualiser l'acoustique rayonné par l'écoulement affleurant une cavité. Il observe une directivité vers l'amont de la cavité et remarque l'influence d'une couche limite laminaire ou turbulente sur l'acoustique. Entre 1958 et 1962, Plumlee, Gibson et Lassiter [65, 151] étudient la résonance des cavités profondes. Ils postulent alors que la turbulence de la couche de mélange au-dessus de la cavité peut servir de source d'énergie large bande à l'excitation des modes de résonance d'une cavité. A travers une large campagne d'essais, faisant varier aussi bien les dimensions de la cavité que les vitesses d'écoulement, Rossiter [160] montre que les oscillations auto-entretenues peuvent avoir pour origine une rétroaction de nature acoustique similaire à celle due à l'impact d'une couche de mélange avec un coin. De cette observation, il trouve une formule semi-empirique permettant de trouver la fréquence des oscillations et qu'on appelle la formule de Rossiter. Par des expériences en eau, Rockwell et Knisely [154, 155] démontrent que cette rétroaction peut aussi être de nature hydrodynamique.

De nos jours, le bruit de cavité trouve des applications dans de nombreux domaines. On en trouve aussi bien dans le contexte d'écoulements internes (chambre de combustion, embranchement de tuyaux,...) que d'écoulements externes (toit ouvrant d'une voiture, césure de porte ou cavité d'un train d'atterrissage d'un avion,...). Suivant l'application, ces cavités sont de dimensions différentes et sont soumises à des conditions d'écoulement différentes (vitesse de l'écoulement principal, épaisseur de couche limite amont,...). Suivant ces paramètres, l'origine des oscillations auto-entretenues est différente d'un cas à l'autre ainsi que l'intensité et la fréquence du bruit rayonnée. Pour le cas de cavités rectangulaires, de nombreuses études expérimentales et numériques ont été réalisées pour mettre en évidence les différents phénomènes physiques régissant le rayonnement acoustique. Certaines de ces études sont mentionnées par la suite.

4.1 Origine physique du rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité ouverte

4.1.1 Rétroactions aéroacoustiques

4.1.1.1 Impact d'une couche de mélange

Le phénomène d'oscillations autoentretenues d'une couche de mélange impactant un corps est observé dans de nombreuses applications comme le résumé Rockwell et Naudascher [157] ou Blake et Powell [16]. L'introduction dans la couche de mélange d'un corps génère un rayonnement acoustique qui va exciter celle-ci au moment de sa création au coin amont d'un solide. Des oscillations autoentretenues

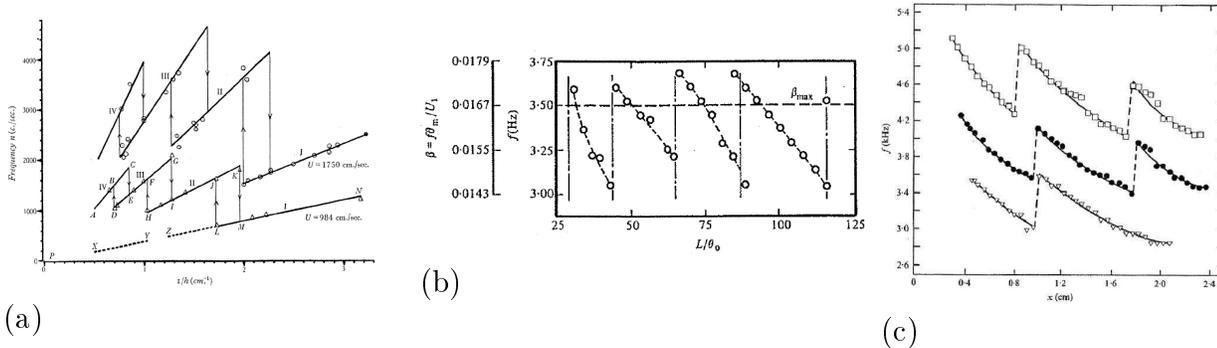


FIG. 4.1 – Evolution échelonnée de la fréquence des oscillations. (a) Variation de la fréquence avec l'inverse de la distance pour une interaction jet/biseau (Brown [26]). (b) Fréquence du pic dominant pour une couche de cisaillement impactant un coin en fonction de la longueur d'impact L/δ_{θ_0} (Ziada et Rockwell [198]). (c) Variation axiale de la fréquence d'oscillation pour une interaction couche de mélange/sonde (U_{∞} : \square 46 m/s, \bullet 40.2 m/s, ∇ 36.7 m/s) (Hussain et Zaman [92]).

sont alors observées aussi bien dans la dynamique de la couche de mélange que dans le champs acoustique suggérant ainsi qu'une relation de phase stable apparaît entre l'écoulement amont et l'écoulement aval. Gharib et Roshko [62] désignent ce phénomène par le terme anglophone *locked in* (accrochage). Ces fréquences varient avec la vitesse et sont échelonnées en paliers comme le montrent la figure 4.1. Des visualisations expérimentales montrent qu'à chaque palier correspond un nombre entier de tourbillons dans la couche de cisaillement entre les coins amont et aval.

4.1.1.2 Bouclage aéroacoustique pour la cavité

Dans la littérature dédiée au bruit de cavité, le phénomène présenté ci-dessus est désigné comme étant une boucle de rétroaction, ou en anglais, *feedback loop*. Cette boucle conduit à des oscillations auto-entretenues très organisées dans la cavité. Elle peut être décomposée comme sur la figure 4.2.

(i) Caractéristiques du feedback Les perturbations de pression, liées à l'impact de la couche de mélange sur le coin aval de la cavité, remontent l'écoulement vers le coin amont où la couche de mélange se crée et est la plus réceptive. Si la longueur L de la cavité est du même ordre que la longueur d'onde acoustique α , les perturbations générées en aval et renforçant les instabilités en amont de la couche de mélange peuvent être considérées comme de nature acoustique. Pour des écoulements basse vitesse de gaz, si $L/\alpha \ll 1$, la rétroaction se situe dans une région en champ proche et les perturbations sont de nature aérodynamique. Pour des écoulements liquides, la condition $L/\alpha \ll 1$ implique des perturbations de pression hydrodynamiques.

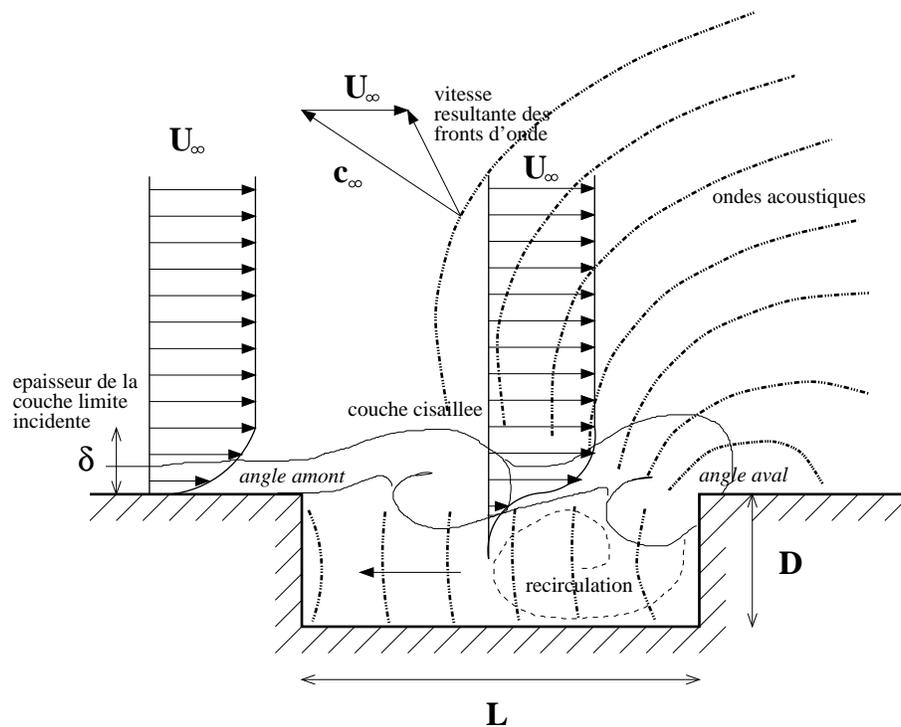


FIG. 4.2 – Scénario d'un écoulement au-dessus d'une cavité.

(ii) **Génération de tourbillons au coin amont** Les instabilités de la couche de cisaillement naissent près du coin amont. Morkovin et Paranjape [142] démontrent le rôle du gradient de pression lors de ce processus. Ils supposent que cette conversion entre les fluctuations de pression et les fluctuations tourbillonnaires est favorisée par le mouvement de va-et-vient de la couche de mélange près du point de séparation. Plusieurs études basées sur la théorie de la stabilité linéaire mettent en évidence ce mécanisme [134, 135, 179].

(iii) **Amplification des perturbations** Ces instabilités de type Kelvin-Helmholtz sont rapidement amplifiées et deviennent des tourbillons non-linéaires qui continuent à se développer à cause de l'entraînement du fluide et de la diffusion visqueuse. La théorie de stabilité linéaire locale peut être modifiée afin de comprendre le comportement de la couche de mélange [194]. Ainsi, comme le montre Forestier [55] par exemple, le comportement de la couche de mélange est similaire à celui d'une couche de mélange forcée. Cependant, cette théorie ne prend pas en compte la recirculation au sein de la cavité qui est fortement non parallèle.

(iv) **Génération de perturbations durant l'impact** Les tourbillons impactent le coin amont générant ainsi de nouvelles perturbations en pression se propageant vers l'amont et fermant ainsi la boucle. La déformation de ces tourbillons lors de l'impact est étudiée par Rockwell et Knisely [154, 155] ainsi que Tang et Rockwell [185]. Ils distinguent ainsi plusieurs types d'interactions d'un tourbillon avec le coin aval. Ainsi, un tourbillon peut soit impacter sous le coin et être convecté dans la cavité (*complete clipping*) soit, dans le cas contraire, impacter au-dessus du coin et s'échapper de la cavité (*complete escape*). Les deux solutions intermédiaires ont lieu lorsque le tourbillon est divisé en deux et que la majeure partie est convectée soit à l'intérieur de la cavité (*partial clipping*), soit à l'extérieur (*partial escape*). Pour des couches limites amont très fines ou turbulentes, aucune

interaction ne domine l'une sur l'autre. Leur sélection est aléatoire et des intermittences et des basses fréquence peuvent apparaître (phénomène de *jitter*). Il faut noter que la recirculation dans la cavité peut aussi modifier la trajectoire des structures de la couche de mélange [100, 109] et donc modifier la sélection du type d'interactions.

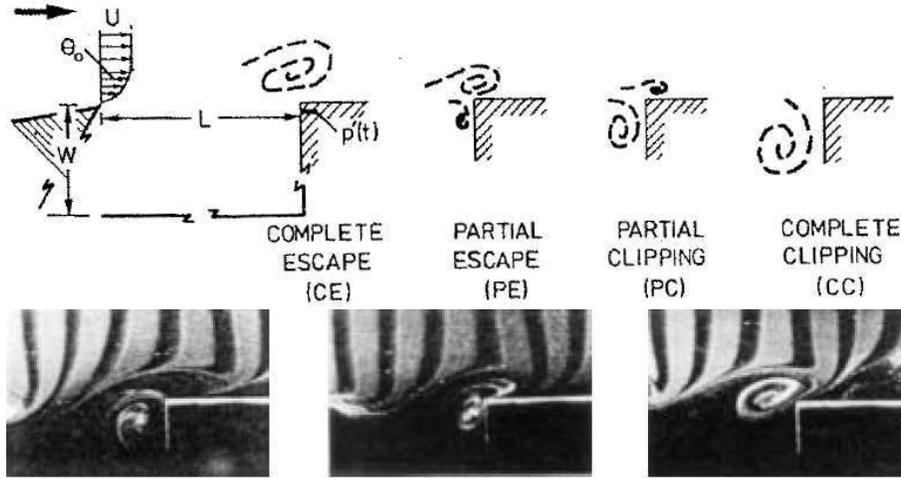


FIG. 4.3 – Les différentes classes d'interaction possible entre un tourbillon et un coin (Rockwell and Knisely [154, 155]).

4.1.1.3 Modèle de Rossiter

On parle généralement de modes de Rossiter lorsque les oscillations autoentretenues résultent d'un bouclage aéroacoustique. Les instabilités de type Kelvin-Helmholtz sont créées périodiquement près du coin amont, croissent et viennent impacter le coin aval créant ainsi des ondes acoustiques se propageant en amont. Ces ondes acoustiques excitent ainsi périodiquement l'amont de la couche de cisaillement. Le temps de traversée d'un tourbillon est L/U_c , où L est la longueur de la cavité et U_c la vitesse de convection des tourbillons. Le temps de traversée d'une onde acoustique dans le sens inverse est L/c_0 , avec c_0 la vitesse du son. Le retour de la perturbation de pression au coin amont doit renforcer et coïncider avec la formation périodique d'instabilités dans la couche de mélange. Ainsi la fréquence f des oscillations autoentretenues doit satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{L}{U_c} + \frac{L}{c_0} = \frac{n}{f}$$

où n est un entier représentant le nombre de tourbillons dans la couche de mélange. Pour accorder le modèle avec les mesures expérimentales, Rossiter [160] remplace n par $n - \alpha$, où α est interprété comme une constante correspondant au délai temporel entre l'impact du tourbillon et la formation d'une onde acoustique. La formule proposée par Rossiter [160] est alors :

$$St = \frac{fL}{U_\infty} = \frac{n - \alpha}{\frac{U_\infty}{U_c} + M} \quad n = 1, 2, \dots$$

où M est le rapport entre la vitesse longitudinale à l'infini U_∞ et la vitesse du son c_∞ . Pour des écoulements subsoniques à haut nombre de Mach ou des écoulement supersoniques, la formule de

Rossiter réussit à prédire les nombres de Strouhal admissibles. Cependant, elle ne fournit aucune information sur l'amplitude des oscillations ou sur l'ordre d'importance des modes dans le cadre d'une coexistence de modes.

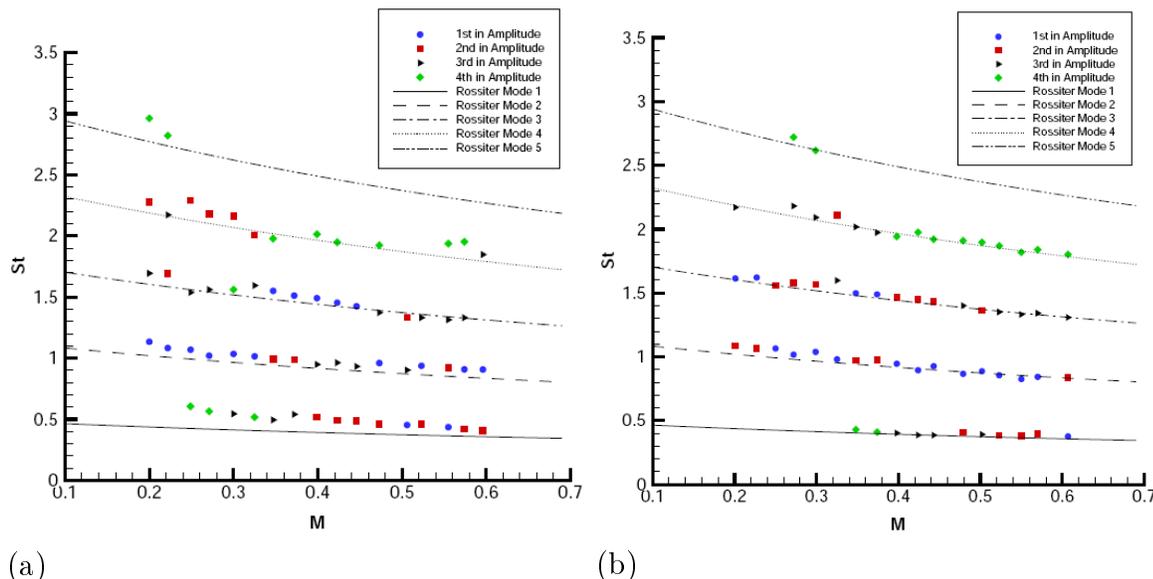


FIG. 4.4 – Modes de Rossiter. Variation des pics frequenciel en fonction du nombre de Mach pour la campagne expérimentale de Kegerise [98] ($Re/m=10^7$). (a) Cavité $L/H=2$ (b) Cavité $L/H=4$.

4.1.2 Résonances acoustiques

4.1.2.1 Cavités actives et passives

Pour des bas nombres de Mach, la réponse acoustique de la cavité peut se superposer à la boucle de rétroaction acoustique. Il se peut aussi que seule la réponse acoustique de la cavité soit responsable d'oscillations entretenues. Comme le postulent Plumlee *et al.* [151], les modes acoustiques de la cavité peuvent ainsi être excités par le bruit large bande de la turbulence de la couche de mélange. Ce phénomène est observé par Elder *et al.* [50], qui l'appellent *turbulent rumble*. Elder *et al.* [50] et Meissner [133] montrent que les modes acoustiques de cavité peuvent aussi être successivement excités par la turbulence ou par les modes de Rossiter. Une double résonance a lieu lorsque la fréquence de résonance et celle de la boucle de rétroaction sont égales. Pour des nombres de Mach entre 0.1 et 0.45, Rowley *et al.* [162, 163] mettent en évidence le caractère stable des modes aéroacoustiques de cavité. Ainsi, les pics en fréquence ne correspondent plus à la réponse acoustique due à des oscillations auto-entretenues d'un système instable mais à celle d'un système forcé légèrement stable. Rowley et Williams [161] expliquent que les oscillations de la cavité sont donc générées par des modes de résonance faiblement amortis qui amplifient le bruit large-bande externe comme celui de la turbulence. Si ce bruit disparaît alors les oscillations tendent aussi à disparaître. On parle alors des cavités passives, par opposition aux cavités actives dont les oscillations sont pilotées exclusivement par les modes de Rossiter.

4.1.2.2 Modes acoustiques d'une cavité

Cavité rectangulaire Les modes, dit de *boîte*, d'une cavité fermée par une couche de mélange peuvent donc être excités soit par les ondes de pressions issues de l'impact des tourbillons soit par

la turbulence amont. Ces modes sont des ondes stationnaires suivant les directions longitudinale, verticale et transversale. En modélisant la cavité par cinq murs rigides et une ouverture avec $p'=0$, une estimation des fréquences est obtenue pour lesquelles le couplage peut apparaître. Les fréquences des modes de cavité sont alors [17] :

$$f_{n_x n_y n_z} = \frac{c_0}{2} \sqrt{\left(\frac{n_x}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{W}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{2H}\right)^2} \quad (4.1)$$

où n_x, n_y, n_z sont des entiers et c_0 est la vitesse du son. Ces fréquences naturelles sont légèrement modifiées par la présence d'un écoulement affleurant la cavité. Ces modes acoustiques de la cavité peuvent être soit confinés soit perdre de l'énergie (donc amorties) en rayonnant vers l'extérieur de la cavité, ce que l'on appelle la perte par rayonnement. En résolvant l'équation d'onde, Tam [178] montre que pour une cavité avec $L/H > 1$, les modes acoustiques sont amorties par cette perte en rayonnement. Au contraire, pour des cavités confinées, des études numériques menées par Koch *et al.*[102, 79, 103] montrent qu'il existe des modes non-résonnants pour lesquelles la perte par rayonnement est négligeable. Une comparaison avec les modes de Rossiter suggèrent que les modes dominants concordent avec les modes de résonance de la cavité. Suivant les rapports d'aspect de la cavité, certains modes sont plus susceptibles d'être excités. Par exemple, Heller *et al.*[80] observent des modes acoustiques longitudinaux pour des cavités allongées et un écoulement à haute vitesse. Pour des cavités profondes $L/H < 1$, le mode de profondeur est souvent excités et pilote la fréquence de la dynamique comme le montre East [47]. Les modes acoustiques transverses apparaissent pour des cavités de grandes envergures comme les césures de portes [141, 153, 94], dont la longueur d'ouverture est faible, ou les soutes à bombes [113]. Plus récemment, des modes de conduite sont étudiés lorsque la cavité est confinée dans une conduite ou dans la veine d'une soufflerie. Les études expérimentales [81, 4] et numériques [69, 111, 51, 52, 53] montrent que le mode acoustique associé à la hauteur d'une conduite rectangulaire au-dessus de la cavité impose sa fréquence. Des conduites de section circulaire sont aussi étudiées [156, 54, 61, 145, 146].

Cavité cylindrique Pour une cavité cylindrique, la paroi latérale et le fond de la cavité sont considérés comme des murs rigides. A l'instar de la cavité rectangulaire, la fluctuation de pression à l'ouverture est considérée comme nulle. Les fréquences admissibles correspondant aux modes de boîte sont alors [17] :

$$f_{n_\theta n_r n_z} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\xi_{n_\theta n_r}^2 + \left(\frac{n_z \pi}{2H'}\right)^2}$$

n_r et n_θ représentent respectivement le mode radial et le mode azimutal. Le terme $\xi_{n_\theta n_r}$ représente le $n_r^{\text{ème}}$ zéro de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre n_θ . Le mode n_z représente le mode de profondeur et $n_z c_0 \pi / 4H'$ la fréquence associée à ce mode de profondeur. Pour une cavité non-bafflée, H' est la hauteur de la cavité H . Pour une cavité bafflée, une correction de fin peut être ajoutée. Ainsi H' devient $H + \delta D$, avec la correction de fin δD . Cette correction de fin est déterminée via des développements théoriques pour des cavités circulaires entourées par une paroi infinie [99, 143, 144].

4.1.2.3 Résonateur d'Helmholtz

Un résonateur d'Helmholtz est réalisé lorsque la cavité est partiellement fermée et que l'ouverture de celle-ci se résume à une fente étroite. Un exemple est la cavité formée par l'habitacle d'une voiture surmonté par un toit ouvrant. Un résonateur d'Helmholtz peut être modélisé comme un système masse/ressort. C'est pourquoi, Elder [48] identifie la dynamique du flux massique entrant et sortant

à l'ouverture de la cavité comme la principale différence entre les oscillations dues à la dynamique de la couche de mélange et les oscillations dues à la résonance de ce type de cavité. En pratique, un résonateur peut jouer deux rôles :

- celui d'un amplificateur de bruit.
- celui d'un absorbeur de sons comme pour les revêtements en nid d'abeille utilisés pour atténuer le bruit de soufflante (fan) d'un moteur d'avion.

4.2 Paramètres influençant le rayonnement acoustique d'un écoulement au-dessus d'une cavité

4.2.1 Cavité rectangulaire

4.2.1.1 Géométrie de la cavité

Cavité allongée et cavité profonde Lorsque le rapport d'aspect L/H d'une cavité est inférieur à 1, cette cavité est considérée comme allongée. Dans le cas contraire, c'est une cavité profonde. Pour des cavités avec $L/H > 2$ (soutes à bombes par exemple), beaucoup d'auteurs montrent que les oscillations sont auto-entretenues. Pour des cavités encore plus allongées, le caractère auto-entretenu des oscillations est moins évident et le spectre acoustique plus large bande. Pour des cavité profondes, les modes de profondeur pilotent majoritairement la réponse acoustique comme le soulignent Pumblee *et al.* [151]. L'étude expérimentale de East [47] montre que suivant la vitesse de l'écoulement principal, les oscillations peuvent avoir deux origines différentes. A grande vitesse, la rétroaction aéroacoustique domine alors qu'à faible vitesse les oscillations sont générées par la résonance acoustique. Si souvent les régimes d'écoulements de cavité sont catégorisés suivant le rapport L/H , cette étude démontre bien la nécessité de prendre en compte d'autres paramètres tels que la vitesse de l'écoulement ou la nature de la couche limite en amont de la cavité.

Influence de longueur transverse de la cavité La longueur transverse d'une cavité joue beaucoup sur la tridimensionnalisation de l'écoulement moyen. En effet pour des cavités larges $L/W < 1$, la couche de mélange est essentiellement bidimensionnelle avec des tourbillons très cohérents dans la direction transverse. Pour des cavités étroites, $L/W > 1$, l'effet des parois transverses induit un écoulement moins homogène dans la direction transverse. Block [18] observe expérimentalement que les cavités étroites impliquent un bruit tonal plus intense. Cependant, la fréquence principale du rayonnement reste sensiblement la même lorsque le rapport L/W varie. Les études expérimentales de Ahuja et Mendoza [1] indiquent que les oscillations ont plutôt tendance à augmenter en intensité avec la diminution de L/W . Ce résultat est contradictoire avec celui de Block [18]. Cette différence peut être attribuer aux conditions expérimentales différentes d'une étude à l'autre.

4.2.1.2 Ecoulement en amont de la cavité

Nombre de Mach Le nombre de Mach, avec L , est un des paramètres de la formule de Rossiter [160]. On observe que les fréquences principales augmentent avec l'accroissement de la vitesse. Cette remarque est généralement vraie quand le phénomène provoquant les oscillations est la boucle de rétroaction. Lorsque les fréquences sont imposées par la résonance, celles-ci ne varient plus avec la vitesse. Pour des nombres de Mach élevés, le spectre acoustique a des niveaux globaux plus élevés. De plus, il est enrichi par la présence d'interactions non-linéaires et d'harmoniques d'ordre élevé.

Pour des nombres de Mach faibles et des cavités allongées, le bruit tonal n'est pas très bien défini. Au contraire, pour des cavités profondes, le couplage avec le mode de profondeur peut générer des oscillations très intenses.

Épaisseur de couche limite L'épaisseur de couche limite en amont de la cavité est un facteur important pour la sélection des modes de la couche de cisaillement. Gharib et Roshko [62] montrent que le rapport L/δ_θ participe à la sélection des modes, avec δ_θ l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite. Pour des faibles nombres de Reynolds, plus la couche limite est petite plus les tourbillons s'enroulent facilement. Pour des hauts nombres de Reynolds, Illy *et al.*[93] montrent que l'épaisseur de couche limite influe peu sur le choix des modes. Gloerfelt [74] arrive à la même conclusion avec des simulations des grandes échelles. De même, l'addition en amont de la cavité de fluctuations turbulentes ne modifie pas la dynamique de l'écoulement.

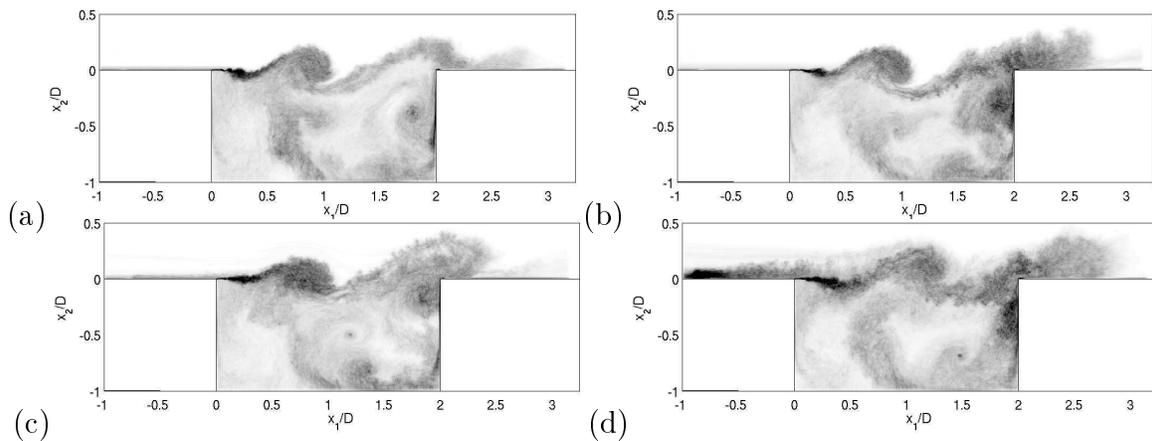


FIG. 4.5 – Influence de l'épaisseur de couche limite à grand nombre de Reynolds. LES d'un cavité $L/H=2$ pour un nombre de Mach de 0.4 [67]. Champs instantanés de la vorticité moyennée dans la direction transverse avec : (a) $\delta_{ini} = 3.5$ mm et aucune perturbation ; (b) $\delta_{ini} = 6.1$ mm et aucune perturbation ; (c) $\delta_{ini} = 3.5$ mm avec une entrée turbulente ; (d) $\delta_{ini} = 6.1$ mm avec une entrée turbulente.

4.2.1.3 Dynamique de la couche de cisaillement

La différence de vitesse entre l'écoulement externe et l'écoulement de recirculation dans la cavité crée un profil moyen avec un point d'inflexion. D'après le théorème de Rayleigh, ce type de profil est instable. Des instabilités linéaires naissent donc très tôt dans la couche de mélange. Elles croissent exponentiellement jusqu'à ce que les effets non-linéaires apparaissent pour former des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Les expériences de Forestier *et al.* [55, 56] montrent que l'évolution spatiale de l'épaisseur de quantité de mouvement d'une couche de cisaillement d'une cavité peut être découpée en trois régions. La première correspond à une évolution linéaire rapide due à la formation des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. La seconde région est celle de l'acroissement linéaire de la taille des tourbillons de Kelvin-Helmholtz. Ce mécanisme est essentiellement dû aux effets visqueux et à l'entraînement des écoulements supérieur et inférieur. La troisième région, au niveau du bord aval, correspond au mouvement entrant et sortant de l'écoulement dans la cavité. Ce mouvement implique une vitesse verticale accrue près du coin aval et donc un fort taux d'acroissement de l'épaisseur de quantité de mouvement. Si la couche de mélange est forcée par une basse fréquence, plusieurs tourbillons de Kelvin-Helmholtz peuvent former très vite un gros tourbillon près du bord amont. Ce tourbillon

dégènera ensuite en une grosse structure turbulente. Ce phénomène appelé une interaction collective est illustré sur la figure 4.7.

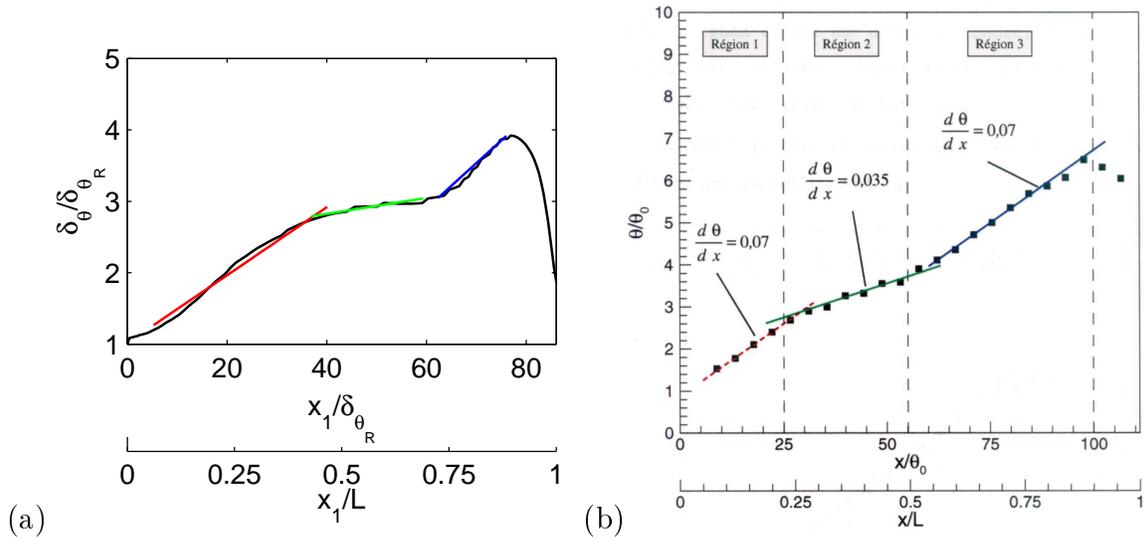


FIG. 4.6 – Epaisseur de quantité de mouvement adimensionnée $\delta_\theta/\delta_{\theta_R}$ entre les deux coins de la cavité : (a) LES pour une cavité $L/H=3$, $M=0.8$ et $Re_L=123\,000$ [73] ; (b) Expérience de Forestier *et al.* [55, 56] pour une cavité $L/H=0.42$, $M=0.8$ et $Re_L=860\,000$.

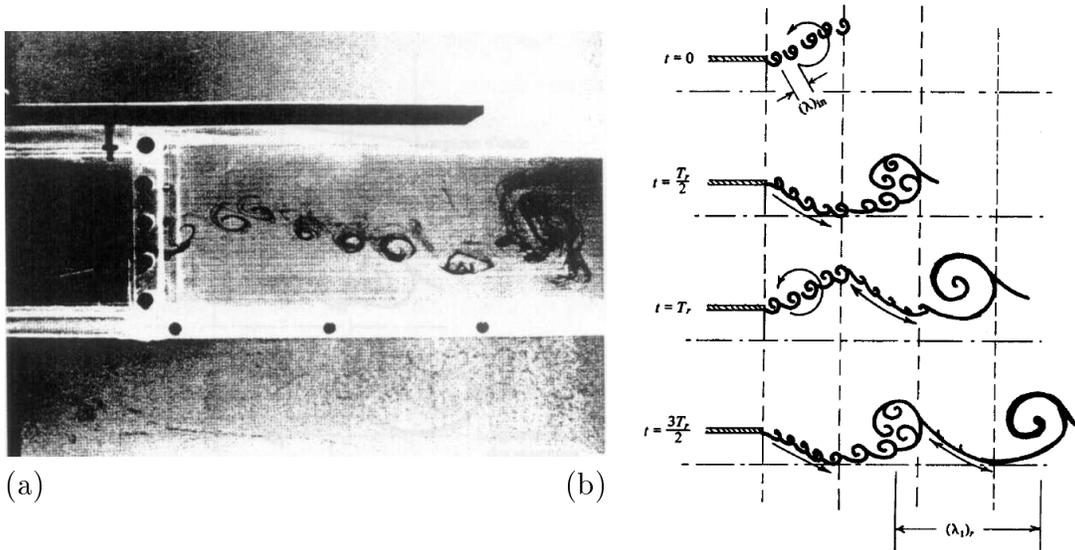


FIG. 4.7 – Interaction collective : (a) expérimentations de Ho et Huang [86] pour une couche de mélange excitée par une basse fréquence ; (b) Mécanisme de fusion par Ho et Nosseir [87].

4.2.1.4 Recirculation dans la cavité

Instabilités 3-D de la recirculation Un modèle simplifié de la recirculation pour une cavité ouverte peut être la recirculation d’une cavité fermée entraînée par une paroi mobile. De nombreuses expérimentations et simulations numériques traitent du sujet et sont recensées dans [167]. Les instabilités 3-D responsables de la tridimensionnalisation de la recirculation sont de nature centrifuge

comme l'identifient Koseff et Street [104]. Dans la littérature, elles sont appelées des instabilités de Taylor-Görtler. Une simulation numérique périodique dans la direction transverse [31] ou une étude de stabilité globale linéaire [186, 3, 31] permet d'identifier clairement ces instabilités en forme de banane. L'ajout de parois latérales complexifie la topologie de l'écoulement. De plus, elles réduisent le nombre d'instabilités de Taylor-Görtler dans la direction transverse. Près de ces parois, on peut ainsi constater la suppression de ces instabilités comme le montrent Altensoeder et Kuhlmann [2]. Des instabilités centrifuges sont aussi observées pour des simulations d'écoulement de cavités ouvertes et des écoulements incompressibles [96]. Dans cette configuration, elles coexistent et interagissent avec des instabilités de Kelvin-Helmholtz de la couche de mélange au-dessus de la cavité [195]. Une analyse de stabilité globale linéaire, menée par Brès et Colonius [24, 23, 22, 25], indique très clairement la présence de ces instabilités pour un écoulement compressible à faible nombre de Reynolds. Ces instabilités de nature centrifuge présentent ainsi une très forte ressemblance avec les instabilités de Taylor-Görtler d'une cavité entraînée.

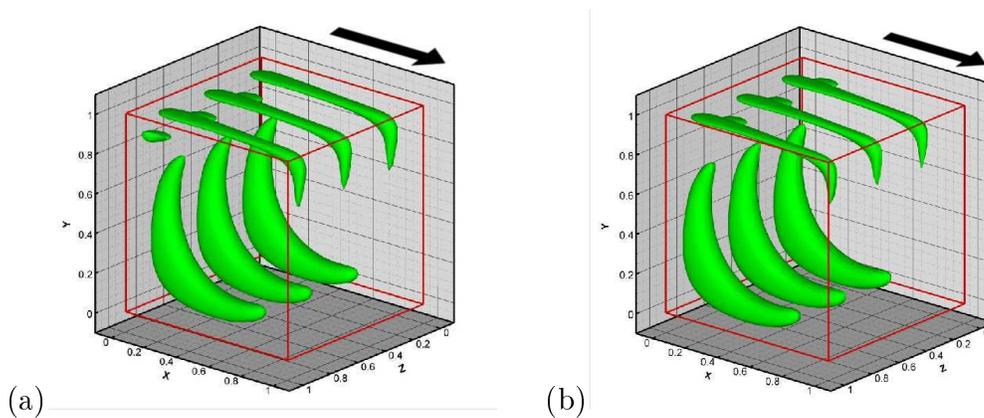


FIG. 4.8 – Iso-contours du champ perturbé pour la composante longitudinale de la vitesse : (a) simulation numérique directe ($100 \times 100 \times 64$ points) ; (b) mode d'instabilité S1 ($150 \times 150 \times 44$ points). Le mouvement de la paroi mobile est indiqué par la flèche (Chicheportiche [31]).

Effets de la direction transverse Dans une étude expérimentale, Maull et East [130] montrent que pour certaines longueurs transverses W de la cavité et des écoulements à faible vitesse, la recirculation peut se structurer en cellules dans la direction transversale. La topologie de cet arrangement dépend de la largeur transverse W corrélée avec la taille de la recirculation dans la direction de l'écoulement principal. Ces cellules n'ont pas toujours une dynamique stationnaire comme le montrent Roshko [159] et Mills [136]. Kistler et Tan [100] observent que cet arrangement, suivant la profondeur de la cavité, peut être soit symétrique ou soit asymétrique suivant le plan médian. Grâce à une simulation LES, Larchevêque *et al.*[112] montre que la bifurcation vers un arrangement asymétrique donné dépend non seulement de longueur W mais aussi du traitement de la condition limite transverse, c'est-à-dire si celle-ci est périodique, une condition de paroi glissante ou non-glissante. De plus la nature de la couche limite amont peut influencer le sens de la bifurcation. Une conséquence importante de la modulation de la recirculation porte sur l'altération de la sélection des modes de Rossiter. Un arrangement plutôt qu'un autre peut mener à un mode de Rossiter différent.

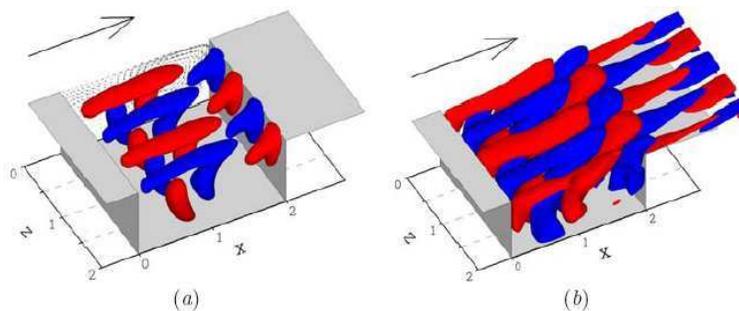


FIG. 4.9 – Visualisation instantanée des structures transverses pour des cavités $L/H=2$ avec (a) $M=0.325$ and (b) $M=0.6$: (a) calcul 2M0325-3D ; (b) calcul 2M06-3D. Les iso-surfaces représentent des niveaux de la vitesse transverses compris entre $w/U=\pm 0.01$ (Brès and Colonius [22, 25]).

Rôle de recirculation principale La recirculation d'une cavité ouverte est constituée d'un jet pariétal partant près du coin aval de la cavité, se propageant le long de paroi avale et du fond de la cavité et remontant vers la couche de mélange pour être de nouveau entraînée vers l'aval de la cavité. Lin et Rockwell [122] montrent que cette interaction entre la couche de mélange et la recirculation peut produire un pic basse fréquence dans le spectre de pression près du coin d'impact. Cette basse fréquence peut être attribuée à la modulation de la trajectoire de la couche de mélange par la recirculation comme le stipulent Kuo et Huang [109]. Pour des nombres de Reynolds très élevés, ce mécanisme n'a pas été clairement mis en évidence. Cependant, il apparaît que la recirculation est fortement instationnaire. Des études expérimentales [92, 174] montrent que le battement de la couche de mélange par une fréquence en-dessous de celle fondamentale peut aussi exister pour l'interaction d'une couche de mélange ou d'un jet avec un coin. La modulation de la couche de mélange peut donc avoir des origines autres que la recirculation.

4.2.2 Cavités cylindriques

Plusieurs applications industrielles impliquent l'emploi de cavités cylindriques. Un premier groupe concerne l'embranchement de tuyaux. En général, les cavités concernées sont profondes et le bruit tonal peut provoquer d'importantes fluctuations de pression responsables de l'apparition de vibrations et de la fatigue du système. Un deuxième groupe concerne les cavités cylindriques situées sur et sous la voilure d'un avion. Ces cavités cylindriques peuvent avoir diverses fonctions : ventilations d'air chaud évitant le gel des volets d'ailes hyper-sustentées ou l'évacuation sous l'aile du carburant en surplus. Quel que soit le groupe, les écoulements étudiés expérimentalement ou numériquement sont subsoniques pour des nombre de Mach compris entre 0.1 et 0.5. La plupart des études traitent soit de la dynamique de la recirculation particulière à certaines profondeurs de cavités, soit du champ acoustique généré par ces cavités. Dans la suite du manuscrit D designera le diamètre de la cavité et H restera la profondeur de la cavité.

4.2.2.1 Dynamique de la recirculation

Gaudet et Winter [58] observent expérimentalement, grâce à une visualisation par huile, que pour des cavités cylindriques de rapport d'aspect $D/H > 3.3$ et $D/H < 1.25$, l'écoulement est quasi-symétrique. Pour des cavités avec un rapport d'aspect proche de $D/H=2$, l'écoulement est fortement asymétrique. Cet asymétrie est accompagnée d'une augmentation de la traînée pour cette cavité. Hiwada *et al.*[85]

étudient expérimentalement l'influence de la profondeur sur la recirculation. Ils retrouvent les mêmes symétries de l'écoulement. Durant cette étude, deux phénomènes sont aussi mis en évidence. Le premier phénomène est instationnaire et concerne les cavités avec $5 > D/H > 2.5$. L'écoulement présente des oscillations autour de son état symétrique. Le deuxième phénomène concerne les recirculations asymétriques pour $2.5 > D/H > 1.4$. Si l'écoulement est perturbé, grâce à un blocage par un élément plan en amont de la cavité, la recirculation bifurque vers un autre état asymétrique et l'écoulement est considéré instable (bifurcation fourche). Dybenko et Savory [46] montrent que la surface et la durée du blocage jouent sur la bifurcation de l'écoulement. Mincu *et al.*[139, 137] réussissent à reproduire numériquement ce phénomène de bifurcation pour $D/H=2$. De plus, ils retrouvent un accroissement considérable de la traînée par rapport au cas $D/H=1$. Pour le cas $D/H=1$, ces derniers auteurs comparent la recirculation d'une cavité rectangulaire et d'une cavité cylindrique. La recirculation de la cavité cylindrique est fortement tridimensionnelle avec un flux entrant dans la cavité qui se scinde en deux le long de la paroi latérale. Celle de la cavité rectangulaire s'avère plus bidimensionnelle.

4.2.2.2 Champ acoustique

Dans une étude expérimentale consacrée à l'influence de la forme d'une cavité sur le rayonnement acoustique, Block [18] compare une cavité rectangulaire et une cavité cylindrique pour des écoulements subsoniques. Les deux cavités ont le même rapport d'aspect. Le rayonnement acoustique de la cavité cylindrique présente un bruit large-bande beaucoup plus élevé que pour la cavité rectangulaire. Cependant, les pics acoustiques de la cavité cylindrique émergent beaucoup moins du spectre contrairement au cas de la cavité rectangulaire. Une explication qui peut être avancée est le manque de cohérence des tourbillons pour la cavité cylindrique dû au bord amont non rectiligne. Ce manque de cohérence engendre ainsi un rayonnement moins marqué.

Mincu *et al.*[139, 137] comparent numériquement les spectres de pression au sein d'une cavité cylindrique et d'une cavité rectangulaire de même rapport d'aspect. Un bruit tonal intense émerge du bruit fond dans les deux cas. Les pics correspondant ont sensiblement la même fréquence et les mêmes niveaux pour les deux cas. De plus, le niveau global de bruit reste similaire contrairement à l'observation de Block.

Les nombreuses ventilations d'air chaud présentes sur les volets d'une aile sont étudiées par Czech *et al.*[36]. Les cavités ventilant l'air sont de rapports d'aspect $D/H > 2$. Cependant, elles sont partiellement bouchées et l'ouverture circulaire ainsi réduite a un diamètre égale à un dixième de la hauteur. La configuration d'étude est une rangée de cavités circulaires distribuées le long d'une portion d'aile. Pour la configuration de base, présente sur les avions Boeing 777, ils observent, conformément aux mesures en vol, un bruit tonal intense de fréquence de 2 kHz. L'auteur n'associe pas ce bruit à un mode de profondeur quart-d'onde de la cavité. Il en déduit que ce phénomène est essentiellement dû aux modes de Rossiter. La diminution de la taille de l'ouverture des cavités permet de réduire efficacement ce bruit. Cependant, cette diminution doit s'accompagner d'une augmentation du nombre de cavités qui peut réhausser les niveaux de bruit. Une observation intéressante de cette étude est faite pour certains diamètres d'ouverture pour lesquels le bruit diminue drastiquement avec l'augmentation du nombre de Mach. Pour certains nombres de Mach, le caractère oscillant de l'écoulement n'est même plus visible.

Verdugo *et al.*[158] réalisent une campagne expérimentale pour une cavité cylindrique plus profonde $D/H=0.73$ et des vitesses de 10 à 50m/s. Trois modes d'oscillations sont mis en évidence. Une analyse spectrale permet d'observer la coexistence de certains modes pour certaines vitesses. Ces modes peuvent être mis en corrélation avec le premier mode de résonance acoustique de profondeur de la

cavité. Une simulation numérique est aussi réalisée et se compare favorablement aux résultats expérimentaux.

Dans une étude expérimentale de cavités profondes $D/H < 1$, Parthasarathy *et al.*[148] associent également la fréquence principale du spectre acoustique au premier mode de résonance acoustique de profondeur de la cavité. Ils observent que le niveau de bruit n'augmente pas nécessairement avec la profondeur. En effet, ce niveau peut croître puis décroître avec la profondeur et donc peut présenter un maximum pour une profondeur donnée.

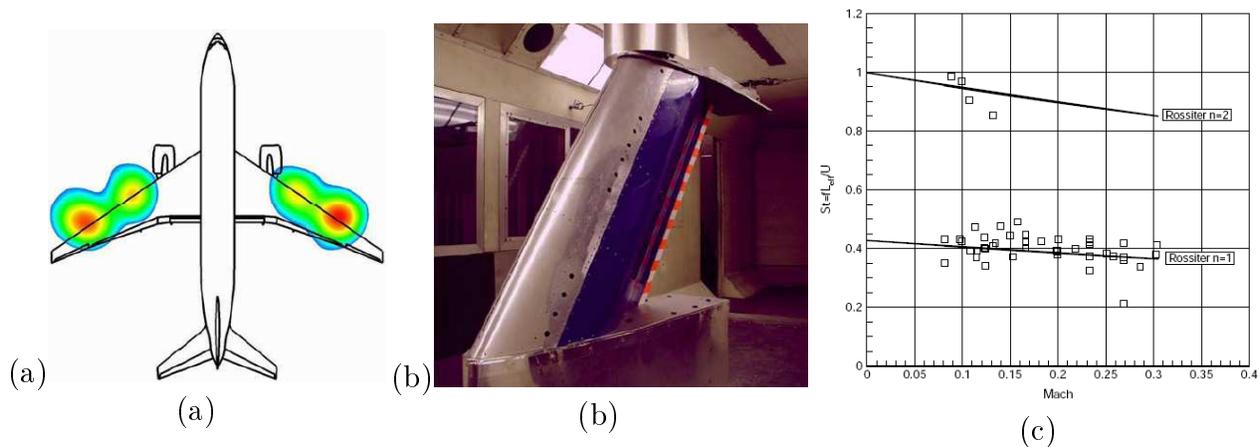


FIG. 4.10 – (a) Signature acoustique pour un Boeing 777-200 en vol réel lors de la condition d’approche. Un bruit tonal de 2 kHz provenant des cavités anti-gel est représenté. (b) Rangée de cavités anti-gel sur portion une aile dans une soufflerie. (c) Nombre de Strouhal basé sur la longueur effective des cavités circulaires en fonction du nombre de Mach (Czech *et al.* [36]).

4.2.2.3 Projet AEROCAV

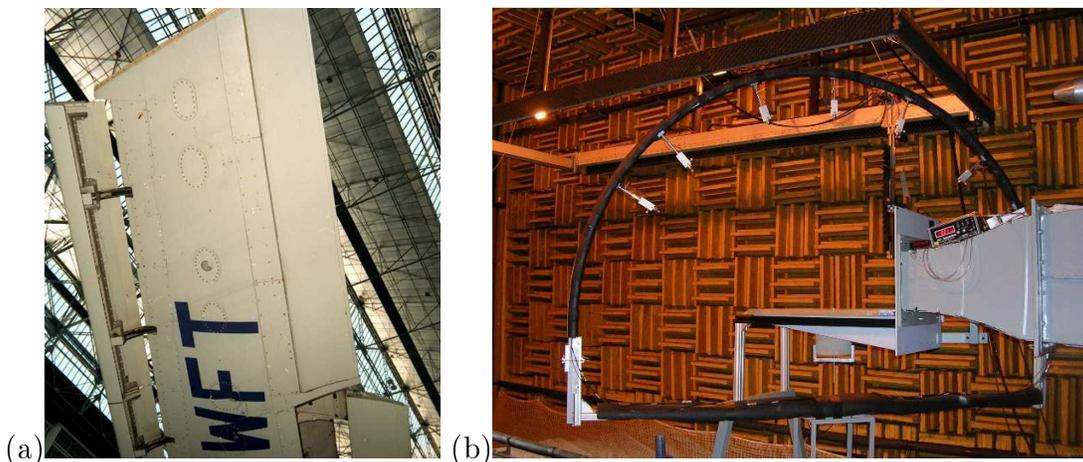


FIG. 4.11 – (a) Cavités d’évacuations situés sous l’aile d’un Airbus A320. (b) Cavité cylindrique situé dans une soufflerie anéchoïque de l’Ecole Centrale de Lyon.

Le projet de recherche AEROCAV (AEROacoustique des CAVités cylindriques) s’inscrit dans l’étude expérimentale et numérique du rayonnement acoustique d’un écoulement au-dessus de cavités cylindriques de profondeur variant de $H=50$ mm à 150 mm et des vitesses variant de 50 m/s à 110 m/s. Le

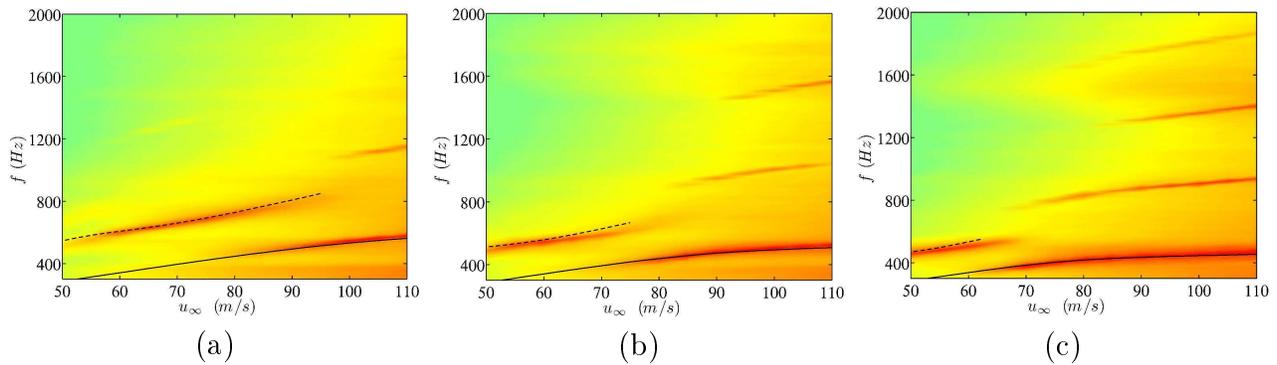


FIG. 4.12 – Densité spectrale de puissance de l’acoustique à 1 m de la cavité en fonction de la vitesse. Echelle de couleurs entre 30 et 100 dB : (a) $H=100$ mm, (b) $H=125$ mm, (c) $H=150$ mm ; (—) mode I ; (---) mode II (d’après Desvigne [40]).

diamètre est fixé à 100 mm. Cette partie décrit essentiellement les résultats obtenus par la campagne expérimentale menée par l’Ecole Centrale de Lyon et plus amplement documentée dans les références [138, 40]. Pour des cavités de rapport $D/H \leq 1$, deux comportements différents peuvent être observés. Considérons tout d’abord un rapport d’aspect $D/H=1$. Pour une vitesse de 70 m/s, un rayonnement acoustique intense et marqué est observé aussi bien numériquement [138, 30, 40] qu’expérimentalement [138]. Le niveau de ce pic acoustique se détache très clairement du bruit de fond. Cette fréquence correspond à un mode de résonance acoustique de profondeur de la cavité. De plus, deux tourbillons semblent se former dans la couche de mélange avec un délai correspondant à la fréquence fondamentale observée dans le champ acoustique lointain. Ce mode est noté mode II. Ce mode II semble provenir d’une interaction entre les modes de la couche de mélange et le mode acoustique de profondeur de la cavité.

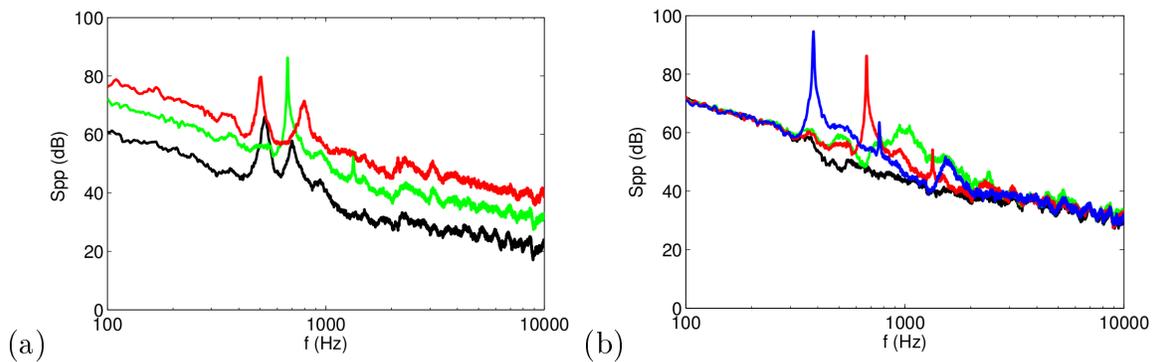


FIG. 4.13 – Spectres expérimentaux (Pa^2/Hz) à 1 m de la cavité : (a) pour une profondeur $H=100$ mm et trois vitesses différentes $U_\infty=50$ m/s (—), $U_\infty=70$ m/s (—), et $U_\infty=90$ m/s (—); (b) pour une vitesse de 70 m/s et trois profondeurs différentes $H=0$ mm (—), $H=50$ mm (—), $H=100$ mm (—), $H=150$ mm (—). D’après Marsden *et al.* [128].

Si la vitesse est de 90 m/s, deux pics se détachent du bruit de fond. De plus, le pic principal et secondaire se démarque moins nettement. Le premier pic correspond à un nouveau mode, appelé mode I, et le deuxième pic correspond au mode II. La première harmonique du mode I peut aussi être observée. Lorsque la vitesse est de 110 m/s, seule le mode I domine et sa trace acoustique émerge très clairement du bruit de fond.

Une étude de l’influence de la profondeur de la cavité est entreprise. La profondeur varie de 50 à 150

mm. Pour une profondeur de 50 mm, aucune oscillation auto-entretenu n'est constatée. Le bruit acoustique est assez faible et est principalement dû à l'impact de la couche de mélange sur le bord aval de la cavité. Ce comportement est observé numériquement par Mincu *et al.*[137]. Pour $D/H \leq 1$, des oscillations auto-entretenu sont observées. La variation de la vitesse fait apparaître pour chaque profondeur l'existence des deux modes décrits ci-dessus. Lorsque H augmente, la ou les fréquences du rayonnement acoustique diminuent contrairement aux niveaux acoustiques qui augmentent. L'augmentation de la profondeur permet aussi de voir apparaître l'enrichissement du spectre acoustique avec l'émergence de plusieurs harmoniques du mode I.

Chapitre 5

Rayonnement acoustique d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique $H/D=1$

5.1 Configuration d'étude

Suite aux campagnes expérimentales menées dans le projet AEROCARV, une configuration semblant favorable pour les simulations numériques est retenue. Il s'agit d'une cavité cylindrique de rapport d'aspect $H/D=1$ avec une vitesse amont de 70 m/s. Cette configuration présente en effet un pic en fréquence fortement marqué qui semble caractériser l'interaction entre un mode de rétroaction par la pression et un mode de résonance de profondeur de la cavité. Les deux campagnes expérimentales, une réalisée dans la soufflerie F2 de l'ONERA et l'autre dans la soufflerie anéchoïque de l'Ecole Centrale de Lyon (ECL), aboutissent à des résultats à peu près similaires. Dans cette étude, nous nous comparerons aux résultats de l'ECL plus amplement décrits par Marsden *et al.*[128] et Desvigne [40]. Le profil moyen de couche limite en sortie de buse de la soufflerie a déjà été présenté dans le chapitre traitant des conditions turbulentes. L'épaisseur de la couche limite de ce profil est de 15 mm.

5.2 Stratégie de recouvrement de maillages

5.2.1 Recouvrement de maillages à l'intérieur de la cavité

Afin de s'assurer d'un traitement correct des parois de la cavité, un maillage cylindrique est utilisé. Cependant, la formulation cylindrique des équations de Navier-Stokes présente une singularité au niveau de l'axe (pour lequel $r=0$). Afin de contourner la difficulté de l'axe, Mohseni et Colonius [140] proposent de sauter l'axe $r = 0$ et de ne commencer le maillage radial qu'en $r = \Delta r/2$, où Δr est le pas radial (à gauche de la figure 5.1). Ainsi, tous les points traités sont réguliers et aucune approximation n'est nécessaire au niveau de l'axe. Dans la méthode proposée par Constantinescu et Lele [35], l'axe est un point du maillage (au milieu de la figure 5.1). On applique les équations standards sur l'ensemble du domaine de calcul à l'exception de l'axe. Sur ce dernier, on réalise des développements en séries des différentes variables que l'on introduit dans les équations de Navier-Stokes et on prend la limite en $r = 0$. On obtient ainsi des équations exactes et régulières valables uniquement sur l'axe. Cependant, pour les deux méthodes, le pas de temps, lié à l'écart azimutale près de l'axe, est assez petit. Une simulation complète d'un écoulement affleurant une cavité cylindrique risque d'être trop coûteuse si le maillage de cette cavité est entièrement cylindrique. Une alternative

est de recouvrir le coeur du maillage polaire par un maillage cartésien comme le montre la figure 5.1. On peut alors relaxer la contrainte du pas de temps liée à l'axe. La communication entre les deux maillages est réalisée grâce à des techniques de recouvrement de maillages.

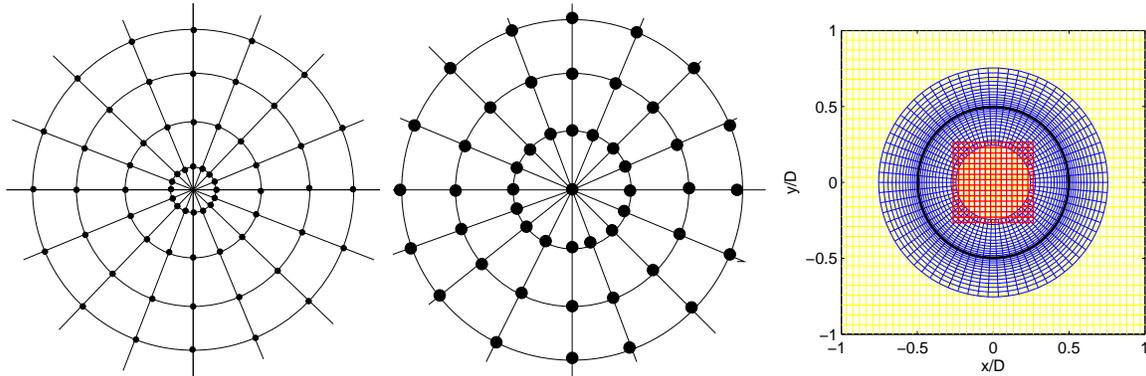


FIG. 5.1 – Traitement de l'axe pour un maillage cylindrique. A gauche : technique du saut de l'axe proposée par Mohseni et Colonius [140]. Au milieu : technique du développement en séries proposée par Constantinescu et Lele [35]. A droite : coupe à $z/D=0$ des maillages recouvrants d'une cavité cylindrique. Le maillage en bleu représente un maillage tampon décrit au paragraphe 5.2.2, la ligne noire indique la présence de la paroi latérale de la cavité.

5.2.2 Recouvrement de maillages à l'extérieur de la cavité

Une difficulté majeure de l'emploi d'un maillage cylindrique pour tout le domaine de calcul est le contrôle de la densité de points. En effet, soit la taille de maille est trop importante lorsqu'on s'éloigne de la cavité, soit, pour conserver une taille de maille correcte sur l'ensemble du domaine, la grille est trop dense au coeur de la cavité, impliquant une nouvelle fois un coût de calcul important. En-dehors de la cavité, l'utilisation d'une grille cartésienne est donc préférée à celle cylindrique pour garantir une meilleure discrétisation de la couche limite turbulente incidente et une meilleure propagation du rayonnement acoustique. Afin d'assurer une communication entre les maillages de la cavité et le maillage cartésien à l'extérieur, on a recours à des techniques de recouvrement de maillages basés sur des interpolations.

La communication entre la grille de coeur cartésienne de la cavité et le maillage extérieur ne pose aucun problème car les interpolations restent centrées à l'ordre que l'on souhaite. Cependant, la communication du maillage cylindrique vers le maillage cartésien extérieur implique une difficulté liée au manque de points de support près de la paroi latérale de la cavité pour réaliser une interpolation correcte. Les deux solutions à ce problème, qui peuvent alors paraître les plus évidentes, sont : soit de décentrer les interpolations à l'approche de la paroi de la cavité (à gauche de la figure 5.2), soit de dégrader leur ordre et de les laisser centrées. Lorsque des schémas de haute précision sont utilisés, les interpolations décentrées d'ordre élevé semblent préférables. Mais celles-ci risquent d'être fortement instables lorsque les décentrement sont maximaux. Une solution est proposée par Desvignes qui calcule des coefficients assurant des interpolations décentrées stables [42]. Dans notre cas, afin d'éviter l'emploi de tels décentrement tout en gardant l'ordre élevé des interpolations, une dernière grille est ajoutée pour jouer le rôle de transition entre le maillage de cavité et le maillage extérieur (à droite de la figure 5.2). Cette grille est à la fois une extension du maillage de cavité vers l'extérieur suivant

l'axe z , mais aussi une extension radiale de ce même maillage dans le plan $x-y$ (extension aussi visible à droite de la figure 5.1). Cette astuce permet ainsi de garder des interpolations centrées et précises dans tout le domaine de calcul.

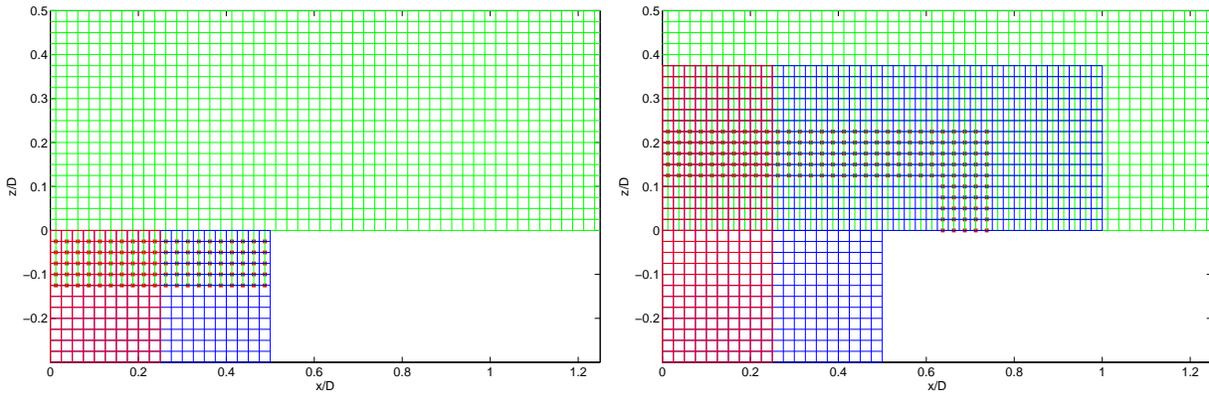


FIG. 5.2 – Stratégies de recouvrement de maillages visant la communication entre la cavité cylindrique et le maillage cartésien extérieur. A gauche : méthode sans maillage tampon impliquant un décentrement près de la paroi. A droite : méthode avec maillage tampon. Les carrés rouges représentent des points à interpoler assurant la communication dans le sens de la cavité vers le maillage cartésien extérieur à la cavité.

5.2.3 Interpolations dans les recouvrements de maillages

Les grilles cylindriques et les grille cartésiennes, à l'intérieur ou à l'extérieur de la cavité, sont coïncidente verticalement en z afin d'éviter un surcoût conséquent des interpolations (voir figure 5.2). Cette coïncidence des maillages dans une direction permet de garder des interpolations 2-D comme celles présentées dans le chapitre 2 sur des méthodes de recouvrement de maillages. Dans la suite de l'étude, les simulations seront réalisées avec des interpolations 2×1 -D optimisées sur des supports 8×8 .

5.3 Simulations réalisées

Dans le cadre de cette étude, deux simulations d'une cavité cylindrique $H/D=1$ et $U_\infty=70$ m/s sont présentées. La première est une simulation initialisée par un profil de vitesse de couche limite turbulente issu de la base de données expérimentale mais sur lequel aucune fluctuation turbulente n'est ajoutée en amont de la cavité. La deuxième simulation est initialisée par un profil inflexionnel et perturbé localement en amont par la technique décrite dans le chapitre 3 consacré aux conditions d'entrée turbulente. Dans ce cas, une couche limite turbulente se développe et des fluctuations turbulentes arrivent sur la cavité. Pour les deux simulations, l'origine du domaine se situe au centre de l'ouverture de la cavité.

Les deux simulations sont réalisées sur la machine vectorielle NEC-SX8 de l'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS). Pour la simulation avec fluctuations turbulentes, une parallélisation sur 8 processeurs est effectuée. Le domaine est découpée verticalement. Trois processeurs exécutent le calcul dans la cavité et cinq processeurs l'exécutent à l'extérieur. L'équilibre du temps de calcul entre les processeurs est rendu délicat par le caractère vectoriel de la

machine, c'est-à-dire que le temps de calcul par processeur n'évolue pas linéairement avec le nombre de points ajouté. De plus, la difficulté est renforcée par la présence dans la cavité de deux formulations des équations (cylindrique et cartésienne) et surtout l'utilisation de méthodes de recouvrement de maillage. Ainsi, la communication entre le maillage tampon et le maillage extérieur limite les performances parallèles du code.

5.3.1 Paramètres pour la simulation sans fluctuation en amont

Le domaine de calcul dans la cavité est composé d'une grille cylindrique avec $281 \times 51 \times 161$ points dans les directions azimutale, axiale et radiale, ainsi que d'une grille cartésienne recouvrant le coeur de la première grille avec une résolution de $61 \times 61 \times 161$ points. Le maillage tampon, qui assure la communication entre la cavité et la grille extérieure, est composée d'une grille cylindrique de $281 \times 101 \times 16$ points et de son coeur cartésien de $61 \times 61 \times 16$ points. Le maillage cartésien à l'extérieur de la cavité contient $601 \times 101 \times 200$ points. Pour la grille cylindrique de la cavité, la première taille de maille radiale à la paroi latérale est de $\Delta r = 0.28$ mm à partir de laquelle un étirement géométrique de 2% est réalisé vers le centre de la cavité. Les pas Δx et Δy du maillage cartésien de coeur sont constants et sont égaux à 0.88 mm. Le maillage tampon coïncide horizontalement à celui dans la cavité. Afin de faire coïncider verticalement, à l'ouverture de la cavité, les maillages intérieurs et extérieurs, les tailles de dernières mailles et l'étirement des maillages dans la cavité sont les mêmes que ceux des premières mailles de la grille cartésienne extérieure. Ces tailles de première maille longitudinale, transversale et verticale sont $\Delta x = 3.3$ mm, $\Delta y = 1.6$ mm et $\Delta z = 0.26$ mm. En début de domaine, un étirement géométrique de 1% est appliqué jusqu'à environ 4 diamètres avant le centre de la cavité. Un diamètre après le centre de la cavité, des étirements successifs de 2% sur 10 points puis de 5% sur le reste du domaine sont réalisés afin de constituer une zone éponge. Le pas Δy est constant le long de la direction transverse et un étirement vertical de 2% est réalisé à partir du premier point de paroi. Les dimensions du domaine extérieur à la cavité de calculs sont finalement $7.8D \times 2.26D \times 0.65D$. Le nombre de CFL est de 1, ce qui implique un pas de temps de 6.2×10^{-7} s. Le coefficient de filtrage est de 1. Comme mentionné précédemment, le calcul est initialisé par un profil de vitesse turbulent issu de la base de données expérimentale de l'ECL.

5.3.2 Paramètres pour la simulation avec fluctuations en amont

La grille cylindrique à l'intérieur de la cavité est composée de $261 \times 60 \times 197$ points. Sa grille cartésienne de coeur contient $91 \times 91 \times 197$ points. Le maillage tampon est composé de $261 \times 121 \times 30$ points pour sa partie cylindrique et de $91 \times 91 \times 30$ points pour sa partie cartésienne. La première taille de maille radiale du maillage cylindrique de la cavité est de $\Delta r = 0.3$ mm. Son maillage cartésien de coeur à des pas longitudinaux et transverses constants qui valent 0.66 mm. Les plus petites tailles de mailles de la grande grille cartésienne sont $\Delta x = 1.6$ mm, $\Delta y = 1.1$ mm et $\Delta z = 0.2$ mm. Le taux d'étirement radial dans la cavité à partir du premier point de la paroi latérale est de 2%. Pour la grille cartésienne extérieur, un étirement vertical de 1.7% est réalisé à partir du premier point de paroi. Une zone éponge similaire à la première simulation est aussi construite. La dimension dans la direction transverse y est étendue avec un étirement géométrique de 6% sur les 20 premiers et 20 derniers points afin d'éviter d'éventuels effets de bords. Les dimensions du domaine de calcul extérieur à la cavité sont finalement $7.2D \times 3D \times 3.4D$. Le nombre de CFL est de 0.9 pour un pas de temps de 4.3×10^{-7} s. Le coefficient de filtrage est de 0.6. Le calcul est initialisé par un profil de Blasius d'une épaisseur de 10 mm et pondéré par la fonction (3.2) pour donner un profil inflexionnel à 0.25δ ($b=0.25$, $a=6$, $\varepsilon=0.0004$). Des

perturbations issues de la théorie de stabilité spatiale, dont les caractéristiques sont données sur la figure 3.21(a), sont imposées en utilisant l'équation (3.4).

5.4 Résultats

Une comparaison entre les deux simulations et la base de données expérimentale est entreprise dans cette partie. Pour le calcul sans la condition d'entrée turbulente, 220000 itérations sont réalisées, soit un temps de physique de 0.136 s. Pour le calcul avec la condition d'entrée turbulente, 345000 itérations sont réalisées, ce qui équivaut à 0.15 s. Un problème survient au bout 225000 itérations pour la simulation avec fluctuations. Un mode de boîte semble avoir été excité et rend le calcul inexploitable au-delà d'un temps de 0.098 s comme l'indique la figure 5.3. De plus, on distingue deux phases dans la portion exploitable. Une phase d'oscillations cohérentes jusqu'à 0.07 s et une phase d'oscillations non-cohérentes après. Une telle intermittence entre des oscillations cohérentes et des bouffées déstructurées est visible dans les signaux expérimentaux mais la durée du calcul tronquée ne permet pas de savoir si la phase incohérente observée est de même nature. Les différences entre ces deux phases seront soulignées par la suite.

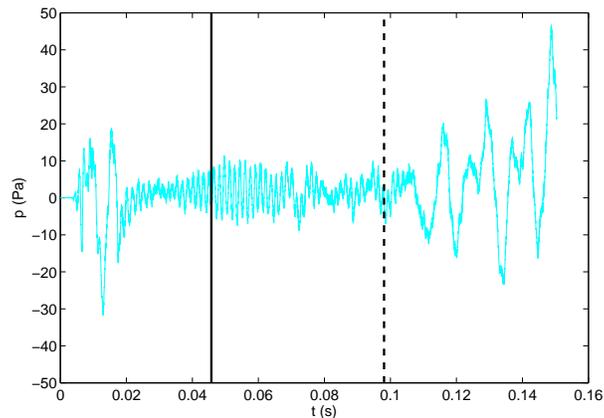


FIG. 5.3 – Historique de la pression fluctuante pour un capteur situé au-dessus du centre de la cavité à $z/D=3.1$. La ligne noire indique le début du traitement statistique du calcul et les tirets noirs indiquent la fin du traitement statistique.

5.4.1 Champs moyens

A gauche de la figure 5.4, différents profils de vitesse pour la couche limite amont sont comparés à la position $x/D = -0.55$ et $y/D=0$, c'est-à-dire juste devant la cavité. Pour la simulation sans fluctuation en amont, le profil n'évolue pas et reste similaire au profil expérimental utilisé pour initialiser le calcul. Au contraire, à droite de la figure 5.4, quand les perturbations sont ajoutées, la couche limite est plus épaisse et s'approche davantage du profil expérimental. Cependant, le profil en proche paroi est plus diffus et une survitesse est observée. Dans ce cas le profil turbulent provient d'une transition accélérée, mais le maillage dans la couche limite est largement plus grossier ($\Delta z^+ \simeq 33$) que ceux préconisés pour une SGE résolue en paroi ($\Delta z^+ \leq 5$). La taille de première maille se situe au-delà du pic correspondant au maximum de production de la turbulence pariétale. Ceci explique les résultats médiocres pour le profil de vitesse en proche paroi. Une résolution correspondante aux préconisations conduirait à des coûts de calcul quasi-prohibitifs compte du nombre de Reynolds élevé.

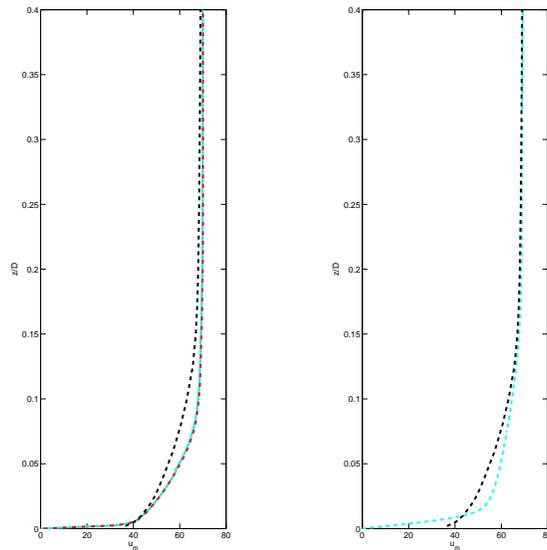


FIG. 5.4 – Profils moyens de la vitesse longitudinale u devant la cavité à $x/D = -0.55$ et $y/D=0$. Profil expérimental (---) et profil numérique (—). A gauche : sans fluctuations en entrée de domaine et avec le profil d'initialisation de la simulation (-.-.-). A droite : avec des fluctuations en entrée de domaine.

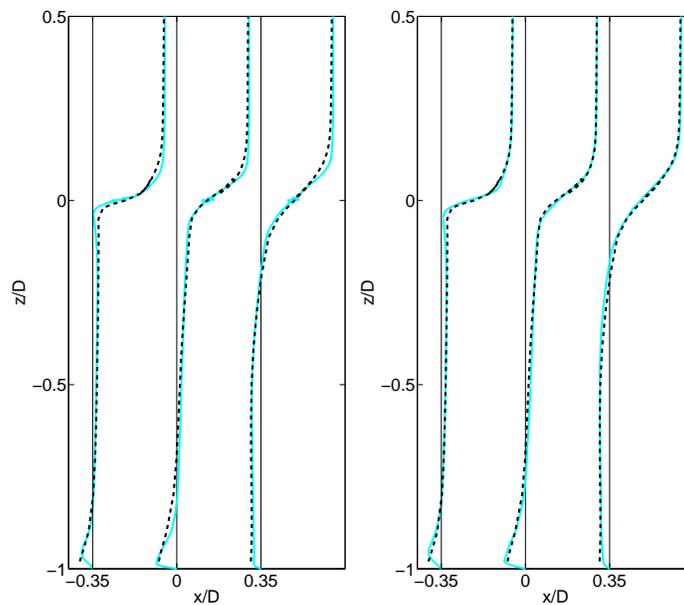


FIG. 5.5 – Profils moyens de vitesse longitudinale u issus de l'expérience (---) et de la simulation (—) pour $x/D = -0.35, 0$ et 0.35 à $y/D=0$. A gauche : sans fluctuation en entrée. A droite : avec fluctuations en entrée.

Les profils moyens de la vitesse dans la cavité aux différentes positions $x/D=-0.35, 0$ et 0.35 sont présentés sur la figure 5.5 pour le plan de symétrie en $y/D=0$. Les courbes expérimentales et numériques sont en bon accord, voire en très bon accord pour le cas avec fluctuations en amont. Le taux d'accroissement de la couche de mélange semble très bien prédit. On note que le profil à $x/D=0$ du calcul est amélioré près du fond de la cavité pour le calcul avec des perturbations en entrée.

Pour le même plan de symétrie, les champs moyens de pression p et des composantes de vitesse u, w sont montrés sur la figure 5.6 pour les deux simulations. L'écoulement dans les directions longitudinale

et verticale induit une zone de recirculation dans la cavité caractérisée par une dépression étendue sur le champ moyen de pression. La dynamique tridimensionnelle de la recirculation fait que le centre de la recirculation ne coïncide pas avec celui de la cavité suivant cette coupe comme nous le verrons plus tard. On remarque une forte corrélation entre les champs u et w concernant cette recirculation. En effet, sur le champ u , la descente de la recirculation est plus intense et plus confinée près de la paroi sur la moitié avale. Cette observation est confirmée par le champ w qui montre aussi une zone de

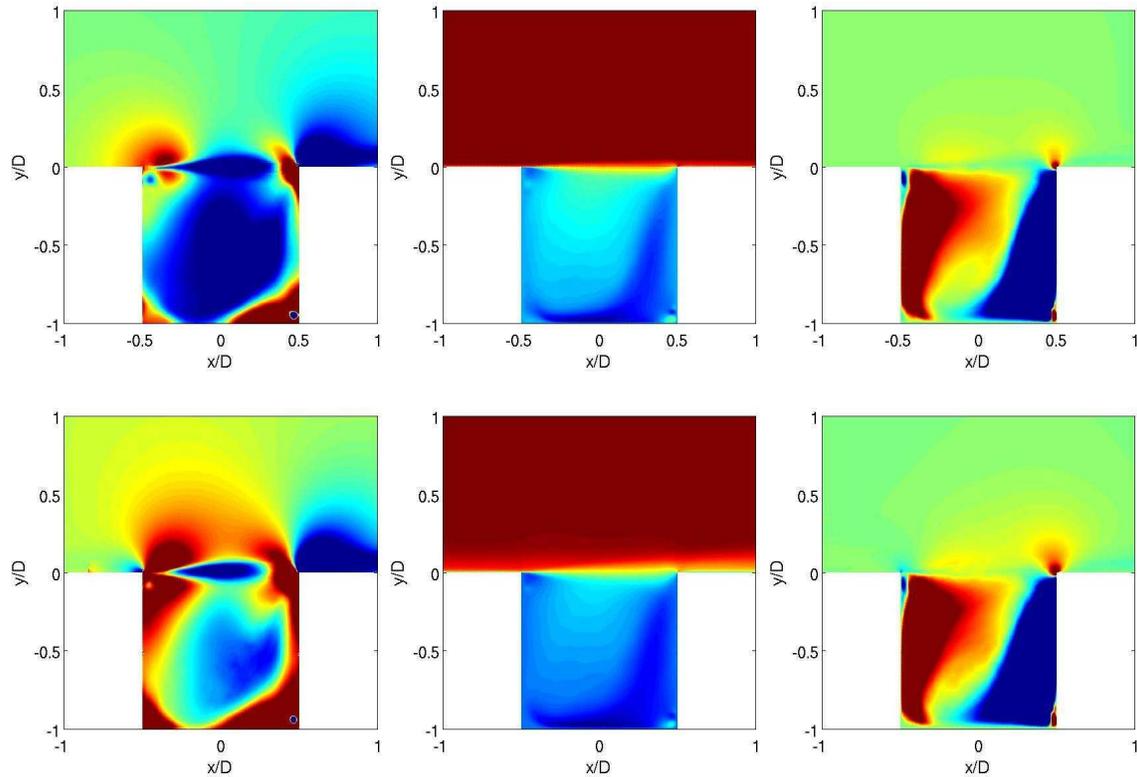


FIG. 5.6 – Champs moyens pour les simulations sans fluctuation en entrée (en haut), et avec fluctuations en entrée (en bas) : champ de pression p avec des niveaux entre $p_\infty \pm 50$ Pa à gauche, champ de vitesse longitudinale u avec des niveaux entre -20 et 50 m/s au milieu, et champ de vitesse verticale w avec des niveaux entre ± 5 m/s à droite.

descente plus restreinte et une zone de remontée plus étendue. Cette recirculation est d'une intensité plus forte pour le cas avec des perturbations en amont. Des valeurs de pression plus élevées près des parois traduisent un impact plus conséquent de la recirculation. De plus, le champ moyen de vitesse longitudinale est plus intense dans la cavité. Par contre, la vitesse verticale moyenne semble très proche pour les deux calculs. On peut noter également que lorsque les fluctuations turbulentes sont présentes, une diffusion plus importante des couches limites avant et après la cavité est aussi observée. Les coupes des différents champs moyens dans le plan $x/D=0$ sont présentées sur la figure 5.7. Elles indiquent la forte tridimensionnalisation de l'écoulement. Le cas sans perturbation est d'abord examiné, en haut de la figure 5.7. Sur les différents champs, une quasi-symétrie de l'écoulement est observée. La recirculation au sein de la cavité est très complexe. Sur la première partie de la cavité, c'est-à-dire $z/D > -0.25$, l'écoulement rentre dans la cavité comme on peut le voir pour le champ moyen u . Cette rentrée est compatible avec la géométrie de la cavité, d'où la séparation de la couche de mélange en deux sur le champ v . Elle est aussi favorisée par la recirculation au centre comme l'indique le champ w . La remontée de la recirculation est d'une taille importante comme nous l'avons déjà

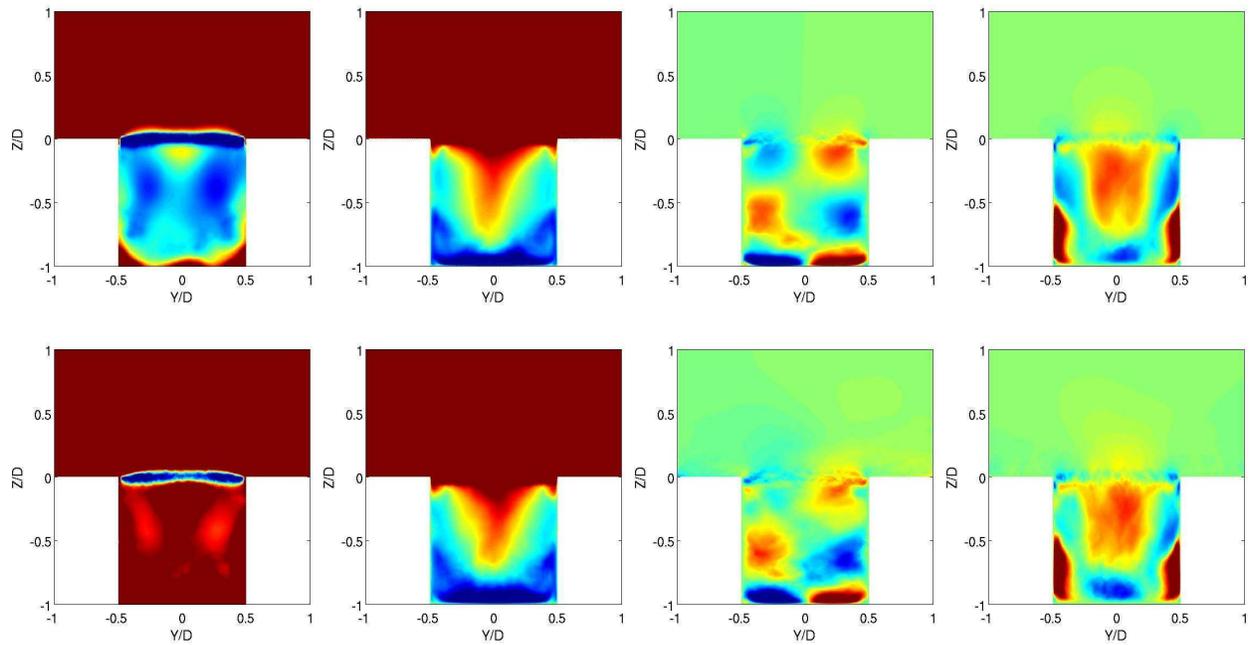


FIG. 5.7 – Champs moyens pour les simulations sans fluctuation en entrée (en haut), et avec fluctuations en entrée (en bas) : champ de pression p avec des niveaux entre $p_\infty - 75$ Pa et $p_\infty - 25$ Pa à gauche, champ de vitesse longitudinale u avec des niveaux entre ± 10 m/s au milieu, champs de vitesse transversale v et verticale w avec des niveaux entre ± 5 m/s à droite.

mentionné. On remarque que la recirculation ne se fait pas sur toute la largeur de la cavité. Ainsi, près des parois, l'écoulement continue à rentrer dans la cavité comme l'indique les vitesses négatives du champ w . De plus, entre $z/D = -0.5$ et $z/D = -0.75$, le champ de vitesse v change aussi de signe, par rapport à la première moitié de cavité, indiquant une zone de contre courant de la recirculation. Les cisaillements des champs de vitesse v et w engendrent deux régions de dépression sur le champ moyen p . Ces régions correspondent à des recirculations longitudinales dues à la courbure de la cavité. Elles sont aussi observées par Marsden *et al.*[127] et Desvigne [40]. Pour le calcul avec des fluctuations turbulentes en amont, les coupes de la figure 5.7 présentent une topologie identique.

La figure 5.8 présente des coupes horizontales suivant les positions $z/D = 0, -0.25, -0.5$ et -0.75 . Le calcul est sans perturbation en amont de la cavité. La quasi-symétrie de l'écoulement est une nouvelle fois observée. Le champ moyen u indique que l'écoulement est surtout entraîné aux alentours du plan $y/D = 0$ conformément aux observations précédentes. Jusqu'à une profondeur $z/D = -0.75$, le fluide est encore entraîné dans le sens du courant, comme le montre la positivité du champ moyen u . La zone de contre-courant de la recirculation reste alors très confinée près des parois. De plus, les lobes de signes différents visible sur les champs v et w traduisent une nouvelle fois la présence de recirculations. Ces dernières sont visibles sur le champ de pression p . La présence de fluctuations turbulentes en amont, sur la figure 5.9, ne présente aucune différence majeure concernant la topologie de la recirculation.

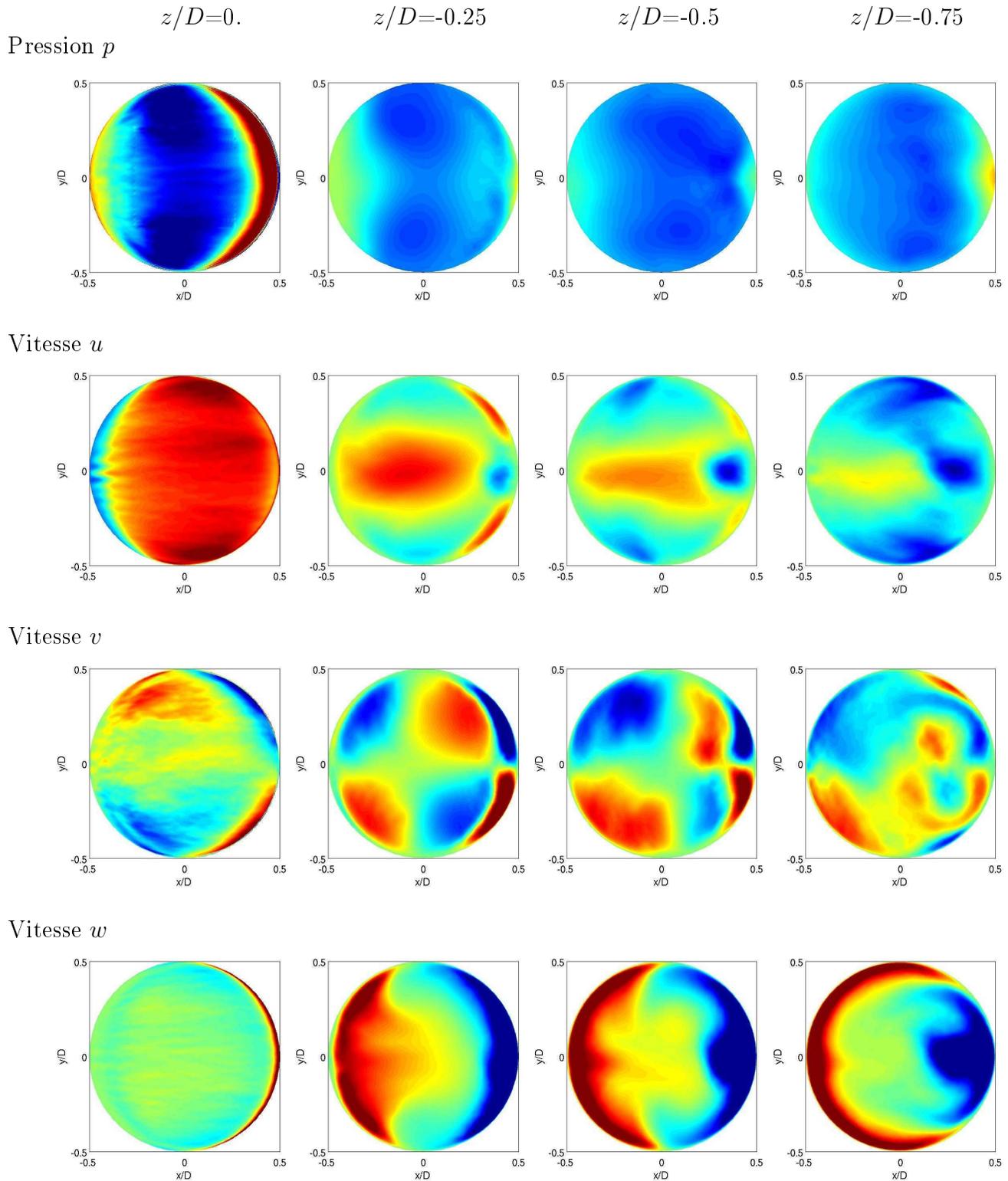


FIG. 5.8 – Coupes verticales des champs moyens pour le calcul sans fluctuation en entrée. Niveaux pour le champ de pression entre ± 100 Pa, pour le champ u entre -10 et 30 m/s à $z/D=0$ et ± 10 m/s aux autres altitudes, pour les champs v et w entre ± 5 m/s.

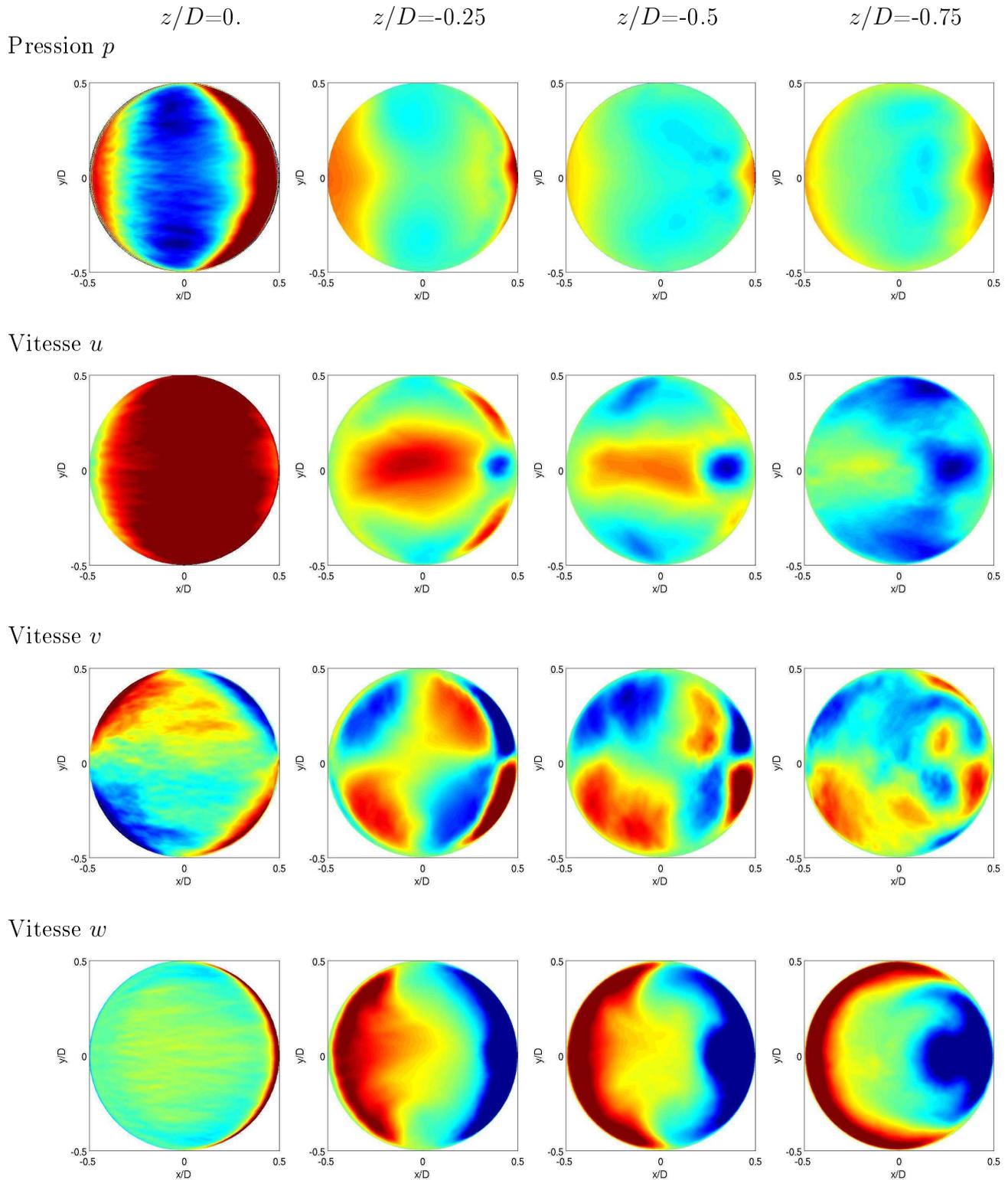


FIG. 5.9 – Coupes verticales des champs moyens pour le calcul avec fluctuations en entrée. Niveaux pour le champ de pression entre ± 100 Pa, pour le champ u entre -10 et 30 m/s à $z/D=0$ et ± 10 m/s aux autres altitudes, pour les champs v et w entre ± 5 m/s.

Sur les différentes coupes présentées précédemment, une dynamique complexe et tridimensionnelle de la recirculation principale est illustrée. Une visualisation 3-D de deux isocontours de la pression est présentée sur la figure 5.10. Outre l'aspect de la recirculation plus commun aux cavités rectangulaires présentée par l'isocontour $p_\infty - 28$, l'isocontour indique un comportement plus complexe expliquant les plusieurs zones de basse pression observées ci-dessus. Ces zones sont donc associées à la même recirculation. On retrouve ainsi les deux lobes de pression observés sur la première moitié de la cavité pour des coupes en z/D . On remarque de plus le lien direct entre une recirculation secondaire au fond amont de la cavité et la recirculation principale. Une complexité similaire de l'écoulement est observée par Mincu [139] par la visualisation du critère Q .

La distribution de la pression statique sur les parois de la cavité, présentée sur les figures 5.11 à 5.13,

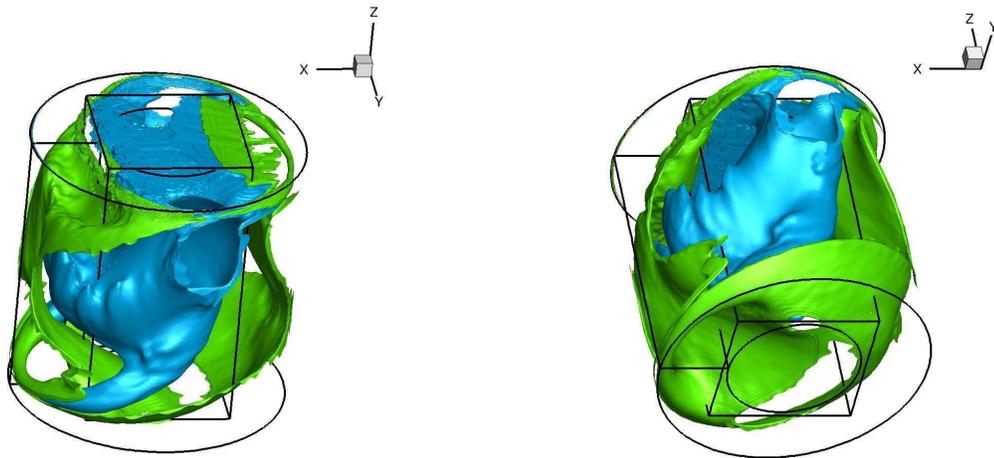


FIG. 5.10 – Isocontours de la pression moyenne pour $p_\infty - 57$ Pa (cyan) et $p_\infty - 28$ Pa (vert). Vue de dessus de la cavité (à gauche) et de dessous (à droite).

est une nouvelle démonstration du caractère pleinement tridimensionnel et complexe de l'écoulement dans la cavité. Au fond de la cavité, les résultats expérimentaux et numériques montrent la même forme de "fer à cheval" de la recirculation que la figure 5.10. Cependant, le niveau global des résultats numériques est sous-estimé par rapport à celui de l'expérience. Les différences sont plus prononcées pour la distribution de pression sur la paroi latérale dépliée. La trace d'une recirculation secondaire est visible au fond de la cavité. La distribution pour la simulation avec des fluctuations en amont est plus irrégulière car le champ de pression n'est pas assez moyenné en temps. Cependant, les niveaux sur la paroi latérale figurent une topologie similaire à celle de l'expérience. Ces différences sont dues à la fois au manque de convergence du calcul mais aussi au caractère plus turbulent par rapport à la première simulation. Pour les deux calculs, le champ de distribution de pression statique est aussi projeté sur la paroi latérale non dépliée de la cavité sur la figure 5.12.

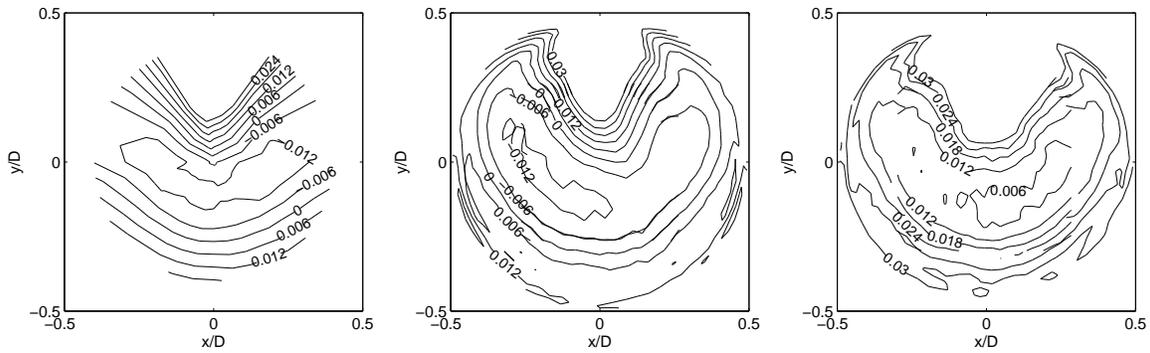


FIG. 5.11 – Comparaison entre la distribution statique de pression $(\bar{p}-p_\infty)/\rho_\infty U_\infty^2$ expérimentale (à gauche), numérique sans turbulence amont (au milieu) et avec turbulence amont (à droite) au fond de la cavité.

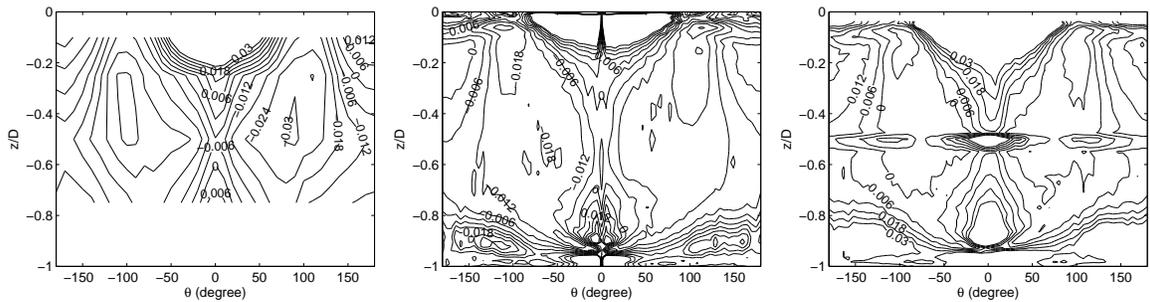


FIG. 5.12 – Comparaison entre la distribution statique de pression expérimentale (à gauche), numérique sans turbulence amont (au milieu) et avec turbulence amont (à droite) sur la paroi latérale. Les angles $\theta=0^\circ$ et $\theta=180^\circ$ correspondent à l'aval et à l'amont de la cavité respectivement. Le défaut horizontal sur la figure de droite pour le calcul avec fluctuations est lié à un défaut numérique.

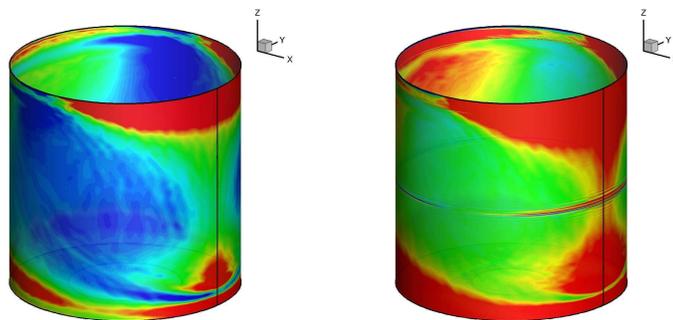


FIG. 5.13 – Comparaison entre la distribution statique de pression numérique sans turbulence amont (à gauche) et avec turbulence amont (à droite) sur la paroi latérale. Niveaux compris entre ± 0.01 .

5.4.2 Intensités turbulentes

Les profils de la moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse sont montrés sur la figure 5.14. Un bon accord avec l'expérience est observé pour les composantes longitudinales et transverses. La comparaison entre les simulations avec ou sans fluctuations indique des intensités turbulentes plus élevées dans la couche de mélange pour le cas avec fluctuations. Les niveaux sont même parfois plus importants que dans l'expérience. Cette dernière simulation permet un meilleur mélange dans la cavité, comme l'indiquent ces profils dans la cavité en meilleur accord avec l'expérience. Dans les deux cas, les intensités sont cependant plus faibles dans la cavité par rapport aux mesures, en particulier pour la composante longitudinale. Le bruit de fond dans la veine d'essai est une raison possible à cette lacune. Sur la figure 5.15, les champs de moyenne quadratique de vitesse u_{rms} , v_{rms}

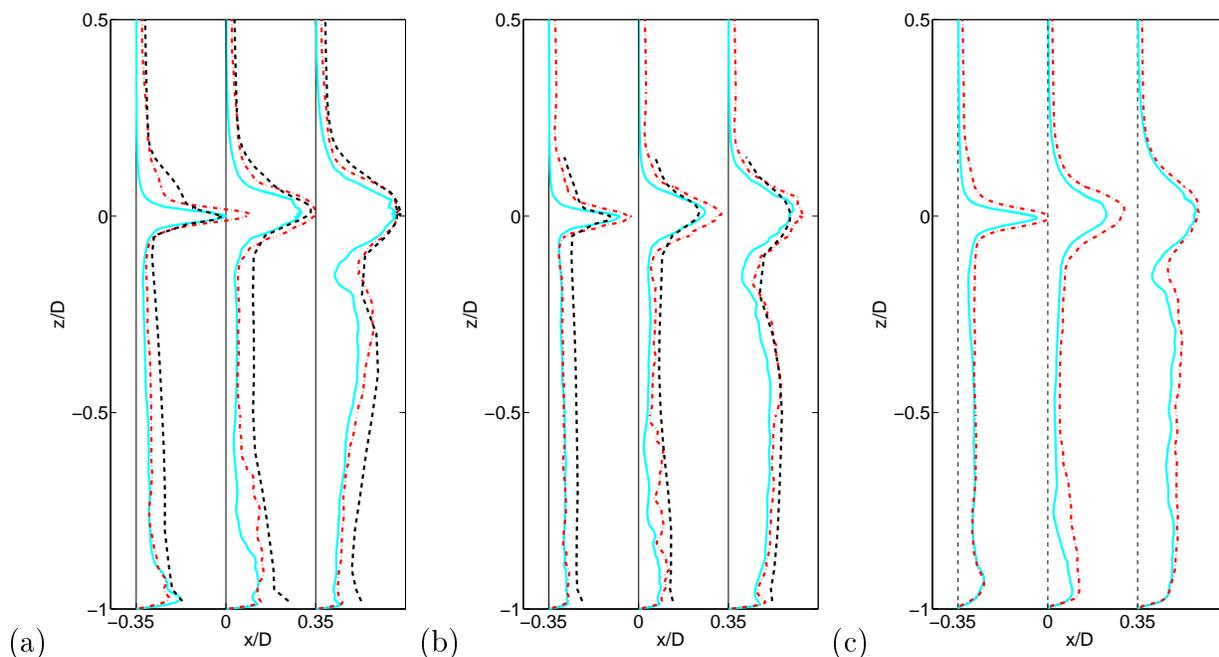


FIG. 5.14 – Moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse : (a) composante longitudinale u_{rms} , (b) composante transversale v_{rms} , et (c) composante verticale w_{rms} . Profil expérimental (— — —), profils numériques sans fluctuations en entrée (—) et avec fluctuations en entrée (· · · · ·) pour $x/D = -0.35, 0, 0.35$ et $y/D=0$.

et w_{rms} sont présentés dans le plan $y/D = 0$. Pour la simulation sans fluctuation en amont, sur la figure 5.14, la turbulence se développe dans la couche de mélange. Celle-ci est initiée très tôt près du bord amont. On observe que les intensités turbulentes dans la cavité sont importantes en aval, lors de la descente de la recirculation, et très faibles en amont, lors de la remontée de celle-ci. Pour le calcul avec une condition d'entrée turbulente, les fluctuations turbulentes en amont viennent se superposer à la turbulence de la couche de mélange. Cependant, les champs en bas de la figure 5.15 montrent que le taux de turbulence de la couche limite amont reste d'un ordre de grandeur inférieur à celui de la couche de mélange. En comparaison avec le premier calcul, les intensités turbulentes sont globalement plus importantes, que ce soit dans la couche de mélange ou dans la cavité. Les coupes transverses en $x/D=0$ de la figure 5.16 confirment cette dernière remarque. A l'instar du champ moyen, la turbulence dans la partie à contre-courant de la recirculation est localisée près du fond.

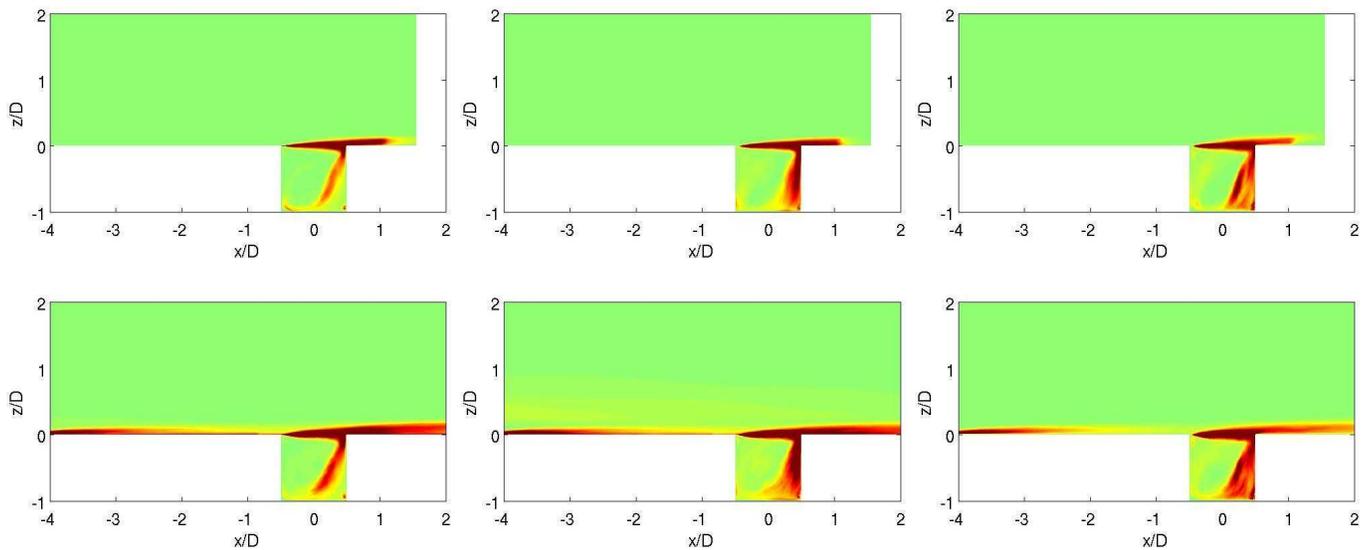


FIG. 5.15 – Moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse dans le plan $y/D = 0$. De gauche à droite, fluctuations longitudinales u_{rms} , transversales v_{rms} et verticales w_{rms} . En haut, simulation sans fluctuation en entrée et en bas, simulation avec fluctuations en entrée. Niveaux compris entre ± 50 m/s pour u_{rms} et entre ± 30 m/s pour v_{rms} et w_{rms} .

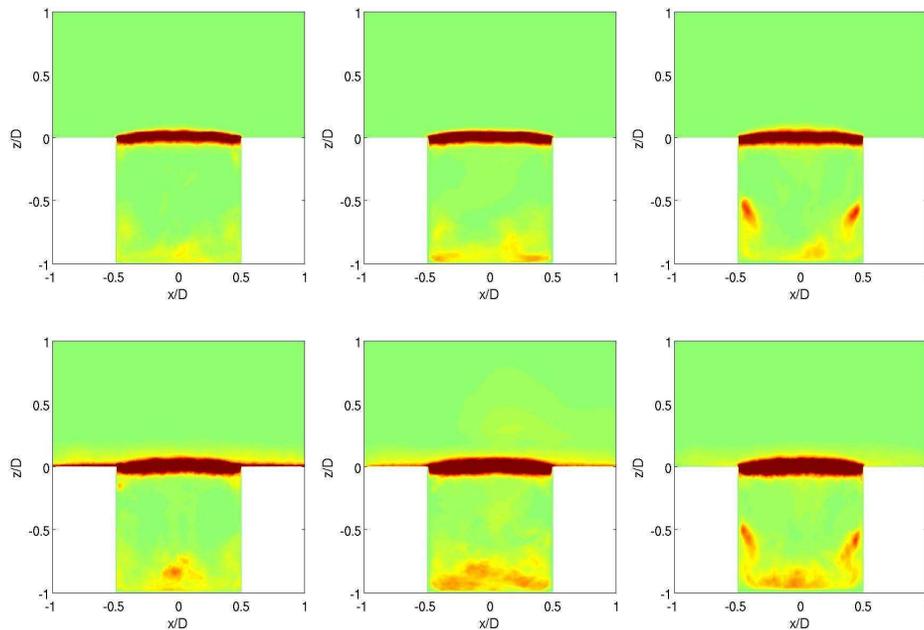


FIG. 5.16 – Moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse dans le plan $x/D = 0$. De gauche à droite, fluctuations longitudinales u_{rms} , transversales v_{rms} et verticales w_{rms} . En haut, simulation sans fluctuation en entrée et en bas, simulation avec fluctuations en entrée. Niveaux compris entre ± 50 m/s pour u_{rms} et entre ± 30 m/s pour v_{rms} et w_{rms} .

Les différentes coupes z/D des champs de fluctuations dans la cavité sont présentées sur la figure 5.17 pour le calcul sans turbulence amont et sur la figure 5.18 pour le calcul avec turbulence en amont. Les champs suivant ces coupes semblent une nouvelle fois très proches pour les deux calculs et l'intensité globale de la simulation avec une turbulence en amont est plus élevée. A l'instar des autres coupes présentées, les intensités turbulentes dans la remontée de la recirculation sont très faibles.

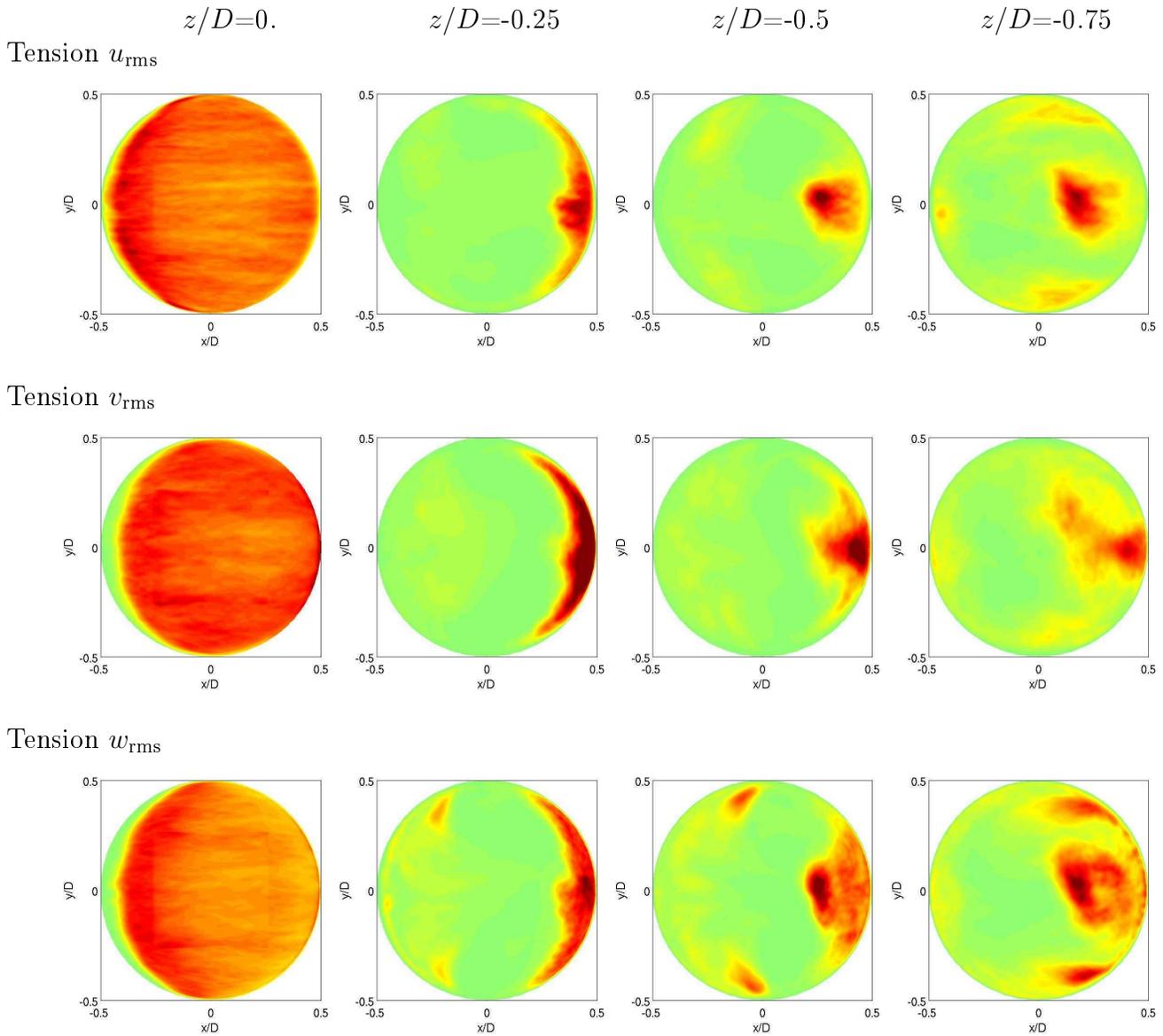


FIG. 5.17 – Coupes verticales de la moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse pour la simulation sans entrée turbulente. Niveaux pour le champ u_{rms} entre ± 100 m/s à $z/D = 0$ et entre ± 50 m/s pour les autres altitudes, pour les champs v et w entre ± 30 m/s.

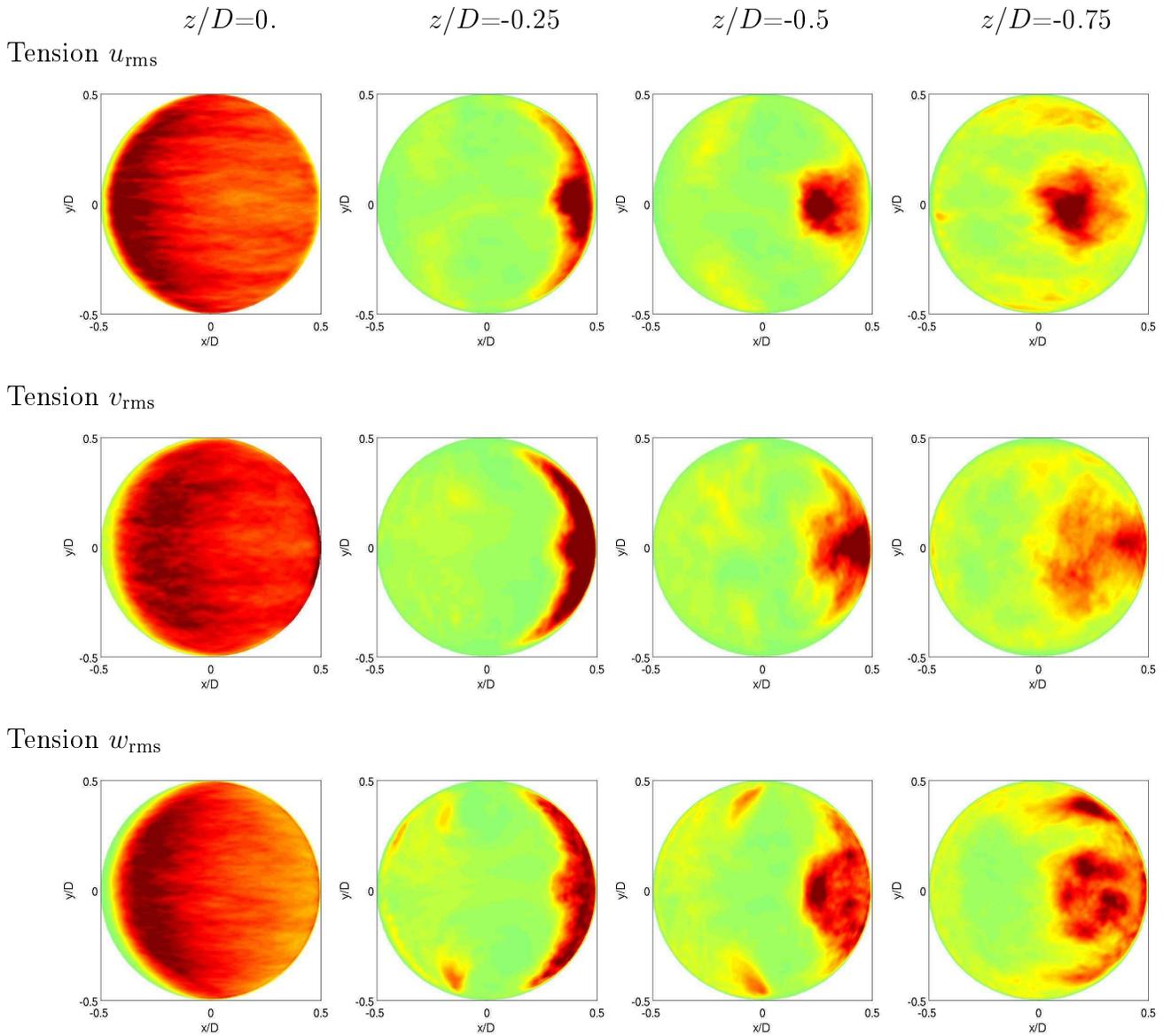


FIG. 5.18 – Coupes verticales de la moyenne quadratique des fluctuations de la vitesse pour la simulation avec entrée turbulente. Niveaux pour le champ u_{rms} entre ± 150 m/s à $z/D = 0$ et entre ± 50 m/s pour les autres altitudes, pour les champs v et w entre ± 30 m/s.

5.4.3 Développement de la couche de mélange

Les évolutions sur une période des champs instantanés de la pression fluctuante et de la norme de la vorticité sont présentées sur la figure 5.19 et 5.20. L'évolution se lit de gauche à droite puis de haut en bas. Les premiers champs instantanés montrent un tourbillon sur le point d'impacter le bord aval de la cavité. Il se scinde ensuite après l'impact et la majeure partie de celui-ci échappe à la cavité. Après l'impact, on remarque alors que deux arrangements tourbillonnaires à grande échelle sont formés dans la couche de mélange. Le tourbillon le plus avancé vers l'aval impacte à son tour le bord aval. Les tourbillons formés en deuxième moitié de la période semblent moins cohérents que ceux de la première partie de la période.

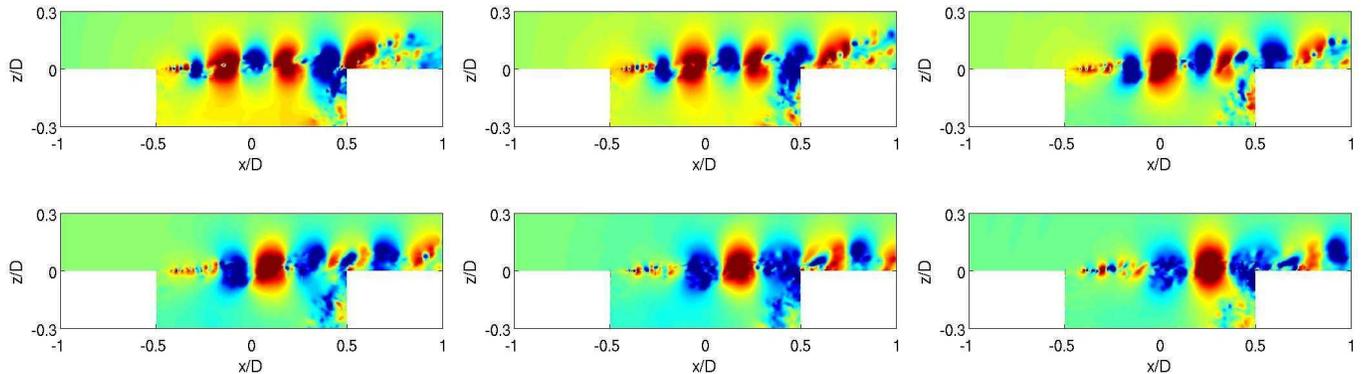


FIG. 5.19 – Champs instantanés de la pression fluctuante durant une période de la fréquence fondamentale dans le plan $y/D=0$ pour la simulation sans fluctuation. Niveaux compris entre ± 200 Pa. Sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas.

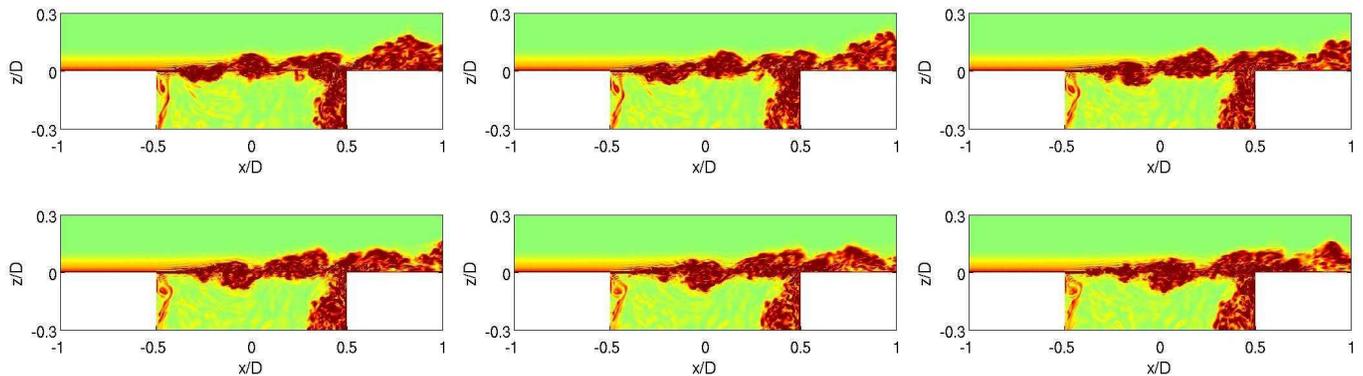


FIG. 5.20 – Champs instantanés de la norme de la vorticité durant une période dans le plan $y/D=0$ pour la simulation sans fluctuation. Niveaux compris entre 0 et 10^4 s^{-1} . Sens de lecture de gauche à droite et de haut en bas.

Une comparaison entre la simulation avec et sans fluctuations turbulentes amont est réalisée pour les champs instantanés de pression fluctuante, sur la figure 5.21, et de vorticité, sur la figure 5.22. Les champs instantanés pour la simulation avec turbulence amont sont montrés pour deux instants différents : l'un durant la phase d'oscillations cohérentes de la simulation et l'autre durant la phase d'oscillations non-cohérentes de celle-ci. Ces deux phases sont visibles sur la figure 5.3. Sur la figure 5.21, on observe peu de différences entre la simulation sans perturbation (à gauche) et avec perturbations lorsque les oscillations sont cohérentes (au milieu). Cependant, durant la phase faiblement

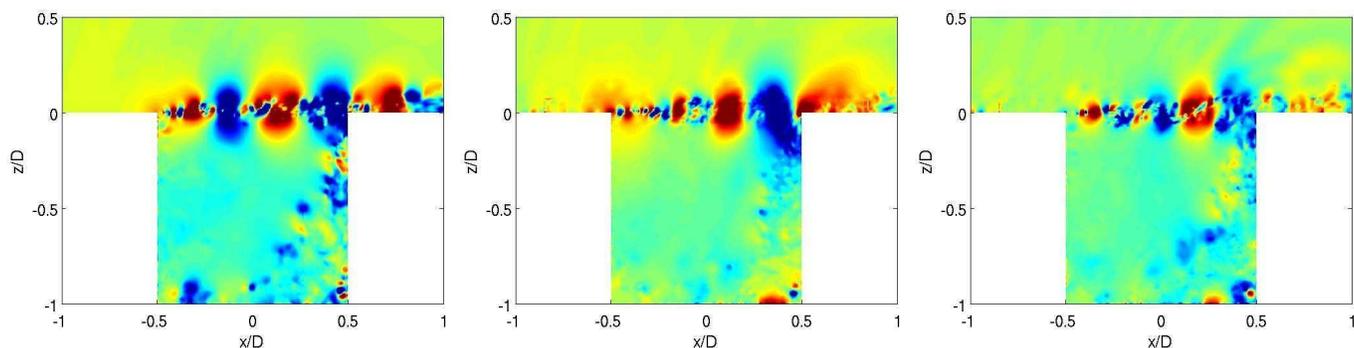


FIG. 5.21 – Champ instantané de la pression fluctuante dans le plan de symétrie $y/D=0$ avec des niveaux entre ± 100 Pa. A gauche : sans fluctuation en entrée. Au milieu : avec fluctuations en entrée durant la phase d'oscillations cohérentes. A droite : avec fluctuations en entrée durant la phase d'oscillations non-cohérentes.

cohérente des oscillations (à droite), les tourbillons semblent moins cohérents et composés de plus de fines échelles turbulentes. Les champs de vorticité de la figure 5.22 permettent d'identifier clairement la taille et l'intensité des tourbillons dans la couche de mélange. Il sont plus marqués pour le calcul avec perturbations en amont. Le niveau d'intensité turbulente est aussi plus élevé dans la couche de mélange et dans la cavité.

Sur la figure 5.23, un isocontour de la pression fluctuante instantanée est présenté pour le calcul sans

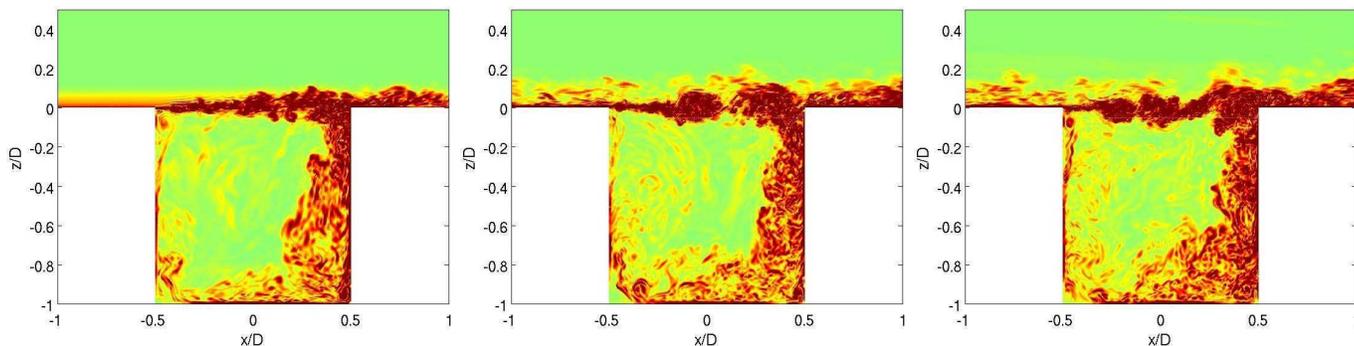


FIG. 5.22 – Champ de vorticité dans le plan de symétrie entre 0 et 10^4 s^{-1} . A gauche : sans fluctuation en entrée. Au milieu : avec fluctuations en entrée durant la phase d'oscillations cohérentes. A droite : avec fluctuations en entrée durant la phase d'oscillations non-cohérentes.

perturbation amont. Cette isocontour met en évidence les fluctuations de pression dans la couche de mélange. En amont de l'ouverture, un tube de pression est observé. Ce tube est fortement modulé dans la direction transverse. Cette modulation peut être rapprochée de la légère modulation observée pour la vitesse moyenne longitudinale près du bord de l'ouverture de la cavité, comme le montre la figure 5.8. Physiquement, ce tube pourrait être un tourbillon créé par une instabilité de Kelvin-Helmholtz. Très rapidement, ce tourbillon fait place à des fluctuations turbulentes.



FIG. 5.23 – Iso-contour de la pression fluctuante à p_∞ -137 Pa pour le calcul sans turbulence amont.

5.4.4 Fluctuations de pression aux parois

Les relevés temporels de la pression fluctuante aux parois de la cavité sont montrés sur la figure 5.24 (fond de la cavité) et 5.25 (paroi latérale de la cavité) pour l'expérience et les simulations. Les spectres correspondant sont tracés sur les figures 5.26 et 5.27. Les données temporelles expérimentales ne sont pas disponibles pour tous les capteurs considérés. Quelque soit le capteur choisi au fond ou sur la paroi latérale, les relevés temporels indiquent que les fluctuations numériques sont plus faibles que celles expérimentales. Cette tendance semble renforcée pour la simulation avec fluctuations. De plus, la périodicité des oscillations est moins marquée que pour le cas sans fluctuation en amont. Sur les figures 5.26 et 5.27, les densités spectrales des données temporelles sont représentées aux mêmes positions que pour les figures 5.24 et 5.25. Le calcul sans fluctuation est en bon accord avec l'expérience. Par exemple, la forme complexe du spectre de la simulation pour une position en-dessous du coin aval présente une forte similarité avec le spectre expérimental (figure 5.27 (f)). Cependant, une sous-estimation de 10 dB par rapport à l'expérience est observée en haute fréquence. La fréquence du pic principal est de 660 Hz pour la première simulation et de 655 Hz pour l'expérience, ce qui est assez satisfaisant compte tenu de la résolution fréquentiel plus faible pour la simulation (7.3 Hz pour la simulation contre 1.56 Hz pour l'expérience). Le premier harmonique est difficilement observé sur la simulation, alors que celui-ci est marqué dans l'expérience.

Un second mode acoustique est observé sur les spectres expérimentaux aux environs de 2100 Hz. Ce mode est assez bien représenté par la simulation sans turbulence amont. Desvignes [40] identifie ce mode comme étant une combinaison entre le premier mode acoustique azimutale et le premier mode de profondeur de la cavité. Il identifie également un troisième mode visible sur les spectres du fond de la cavité à 3400 Hz (figure 5.26 (c) et (d)) qu'il associe à un couplage entre le deuxième mode azimutale et toujours le premier mode de profondeur. Ce mode est aussi observé pour la simulation (figure 5.26 (c)) Quand les fluctuations sont introduites dans la couche limite amont (à droite des figures 5.26 et 5.27), la région haute fréquence est plus intense et se rapproche du spectre expérimental. Le pic est à 635 Hz soit environ 20 Hz en-dessous de l'expérience. Cette incertitude est due à une durée de calcul faible, correspondant à une résolution fréquentielle de 16 Hz. Ce pic est aussi beaucoup moins

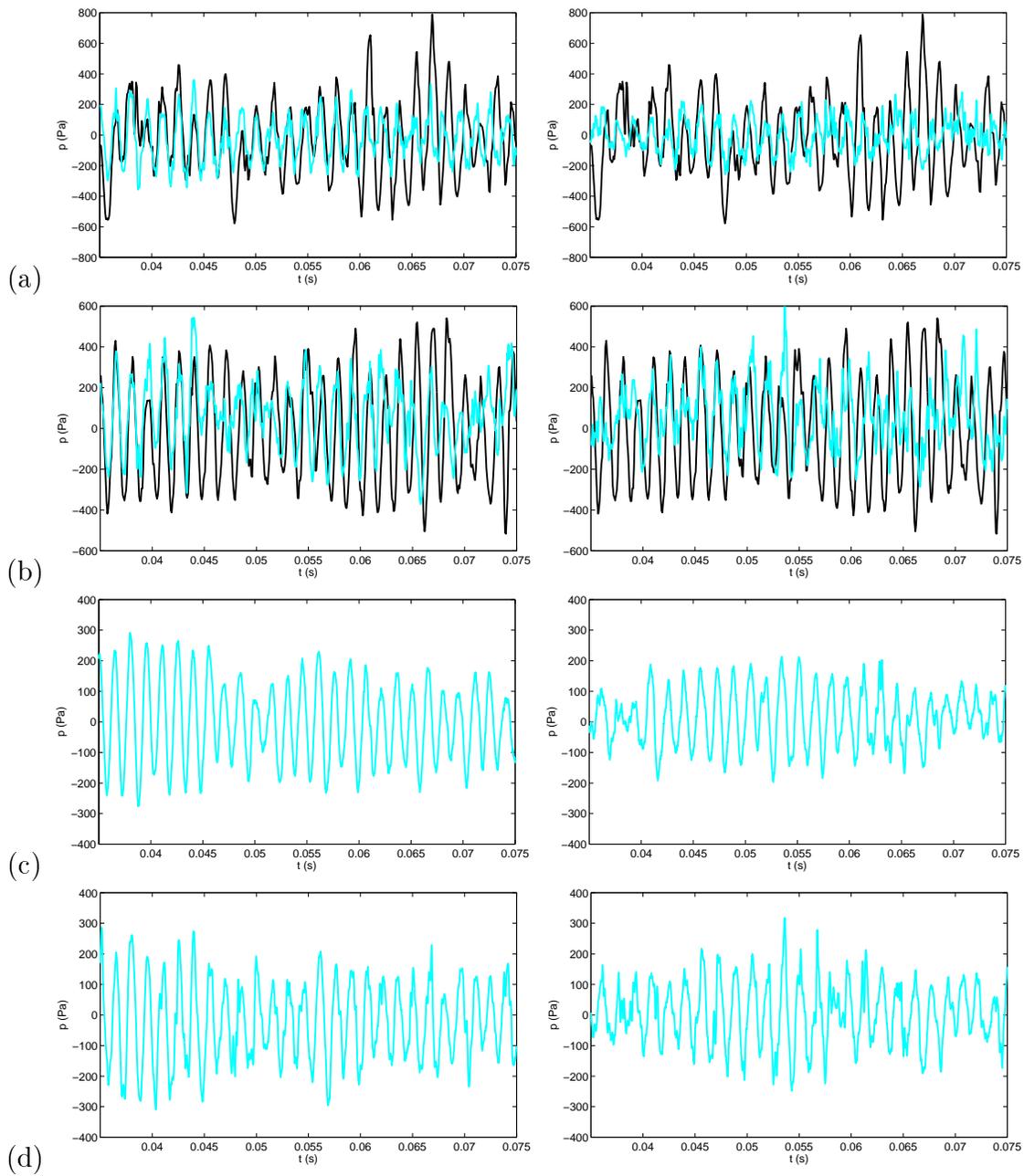


FIG. 5.24 – Relevés temporels de la pression fluctuante autour de p_∞ au fond de la cavité $z/D=-1$ pour les simulations (—) et l'expérience (—). Simulations sans fluctuation en entrée à gauche et avec fluctuations en entrée à droite : (a) à $r/R=0$; (b) à $r/R=3/4$ et $\theta=0^\circ$; (c) à $r/R=3/4$ et $\theta=180^\circ$; (d) à $r/R=3/4$ et $\theta=270^\circ$.

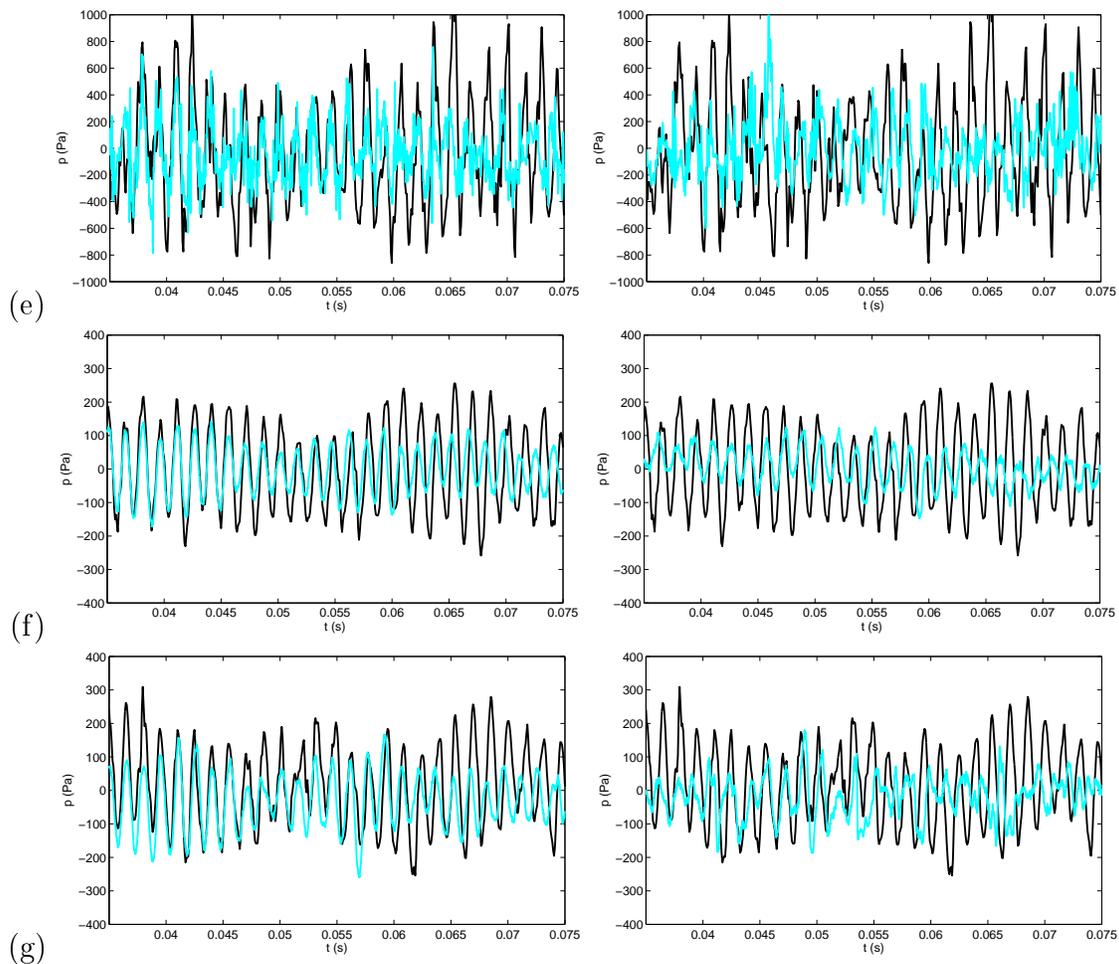


FIG. 5.25 – Relevés temporels de la pression fluctuante autour de p_∞ sur la paroi latérale de la cavité $r/R=1$ et $z/D \simeq -0.1$ pour les simulations (—) et l'expérience (—). Simulations sans fluctuation en entrée à gauche et avec fluctuations en entrée à droite : (e) à $\theta=0^\circ$; (f) à $\theta=180^\circ$; (g) à $\theta=270^\circ$.

intense et la partie cohérente des oscillations est sous-estimée. Le réhaussement du niveau spectral par l'introduction de fluctuations en amont n'est pas homogène sur tout le spectre. Ainsi, les figures 5.26 (c) et 5.27 (f) montrent une hausse plus conséquente aux alentours du pic correspondant au premier mode azimutale et mode profondeur à 2100 Hz. Desvigne [40] observe ainsi qu'un calcul avec une couche laminaire amont ne présente pas ce mode ni les autres modes acoustiques de la cavité autre que celui de profondeur. La turbulence amont et de la couche de mélange contribuent donc à enrichir le spectre acoustique suivant une excitation large bande du type *turbulent rumble* [151].

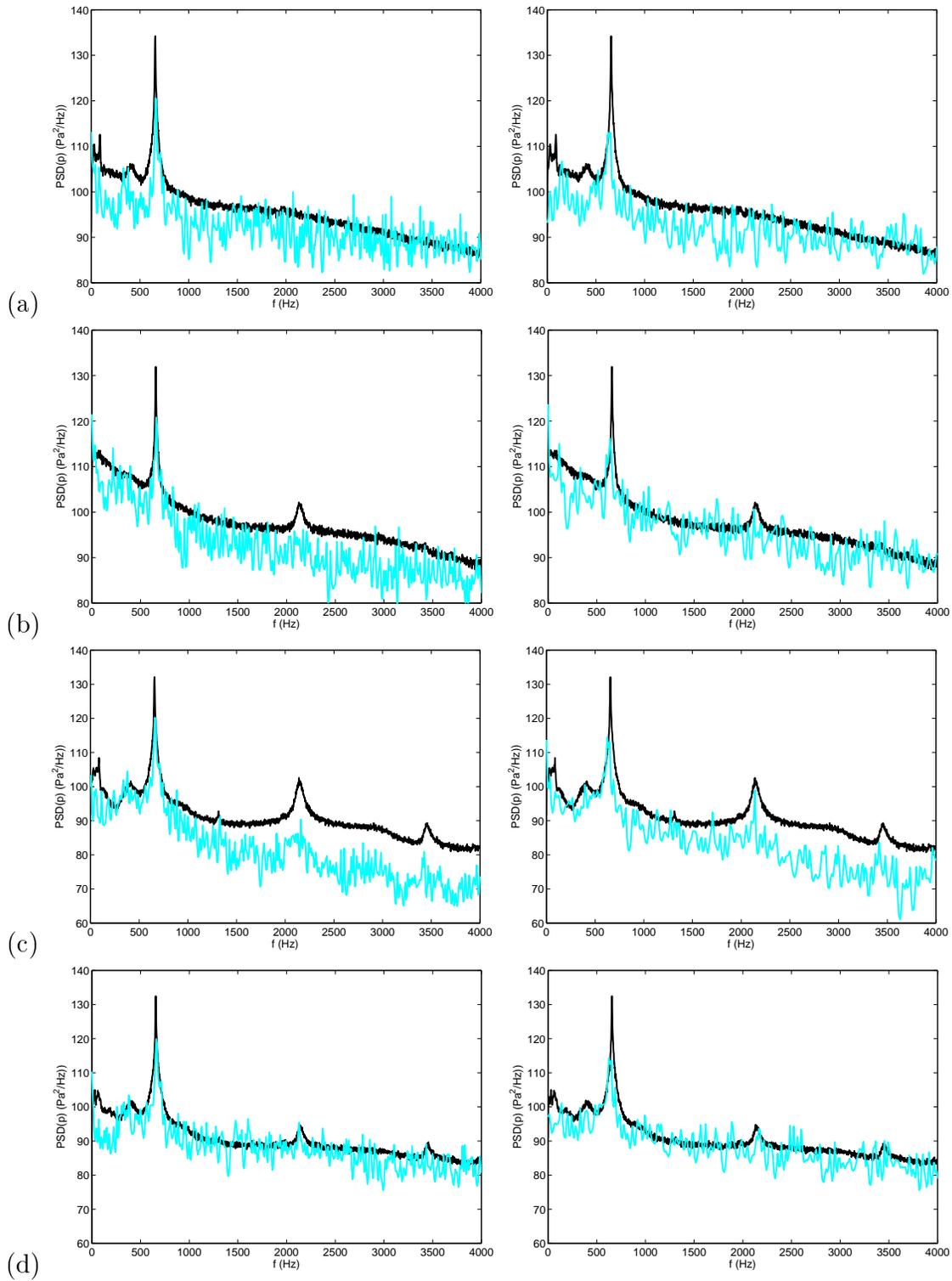


FIG. 5.26 – Densité spectrale de puissance de la pression au fond de la cavité $z/D=-1$ pour les simulations (—) et l'expérience (—). Simulations sans fluctuation en entrée à gauche et avec fluctuations en entrée à droite : (a) à $r/R=0$; (b) à $r/R=3/4$ et $\theta=0^\circ$; (c) à $r/R=3/4$ et $\theta=180^\circ$; (d) à $r/R=3/4$ et $\theta=270^\circ$.

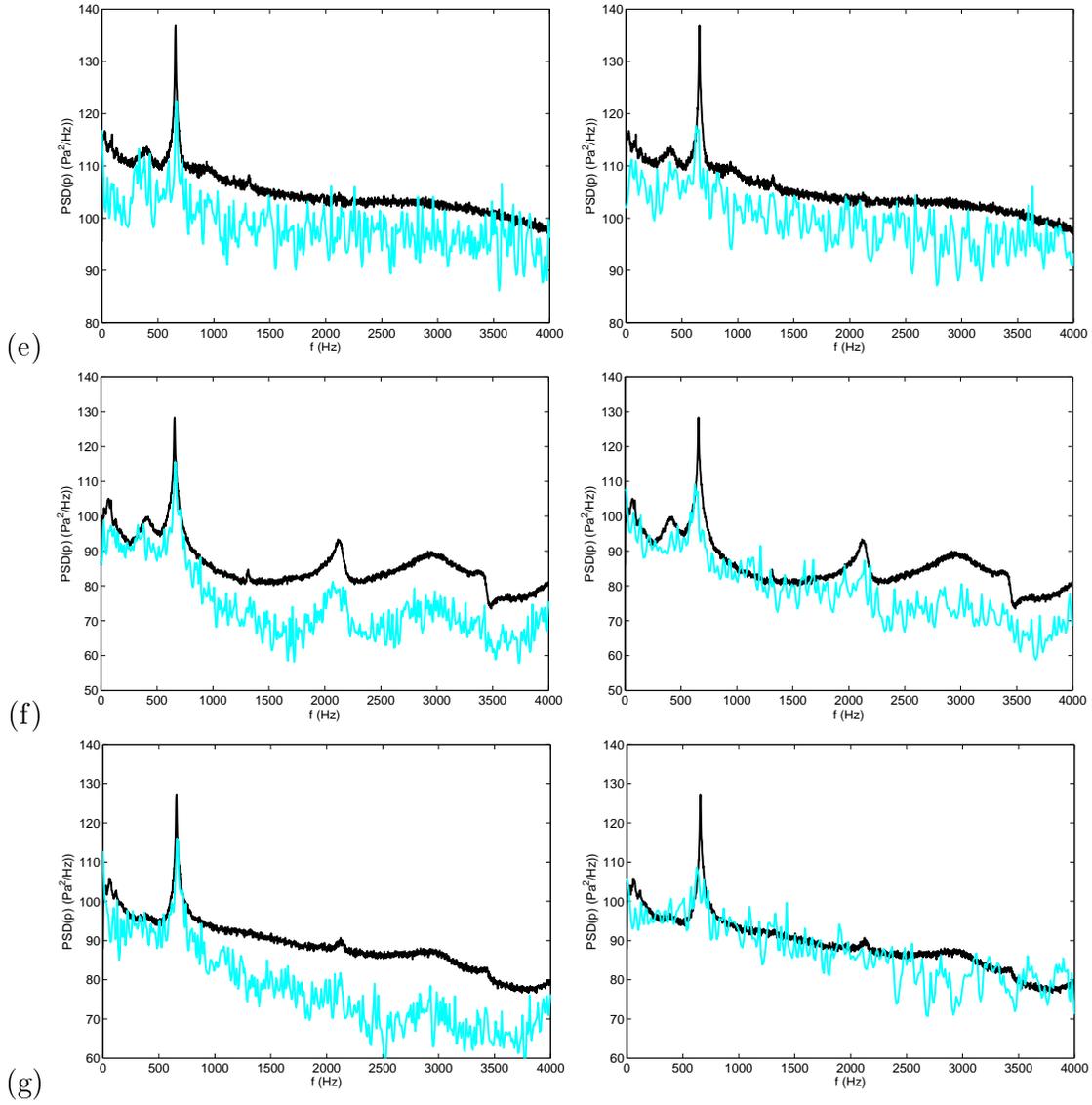


FIG. 5.27 – Densité spectrale de puissance de la pression sur la paroi latérale de la cavité $r/R=1$ et $z/D \simeq -0.1$ pour les simulations (—) et l'expérience (—). Simulations sans fluctuation en entrée à gauche et avec fluctuations en entrée à droite : (e) à $\theta=0^\circ$; (f) à $\theta=180^\circ$; (g) à $\theta=270^\circ$.

5.4.5 Bruit rayonné

Pour la simulation sans la condition turbulente en entrée, la figure 5.28 présente des champs instantanés de pression fluctuante durant la durée d'un cycle. Le rayonnement acoustique provenant de la cavité est clairement observé. On remarque qu'une composante plus haute fréquence vient se superposer au rayonnement basse fréquence. Cette composante est due au caractère turbulent des tourbillons de la couche de mélange impactant le bord aval de la cavité et elle est donc absente lorsque la couche limite incidente est laminaire [40]. Pour le calcul avec fluctuations, comme lors de

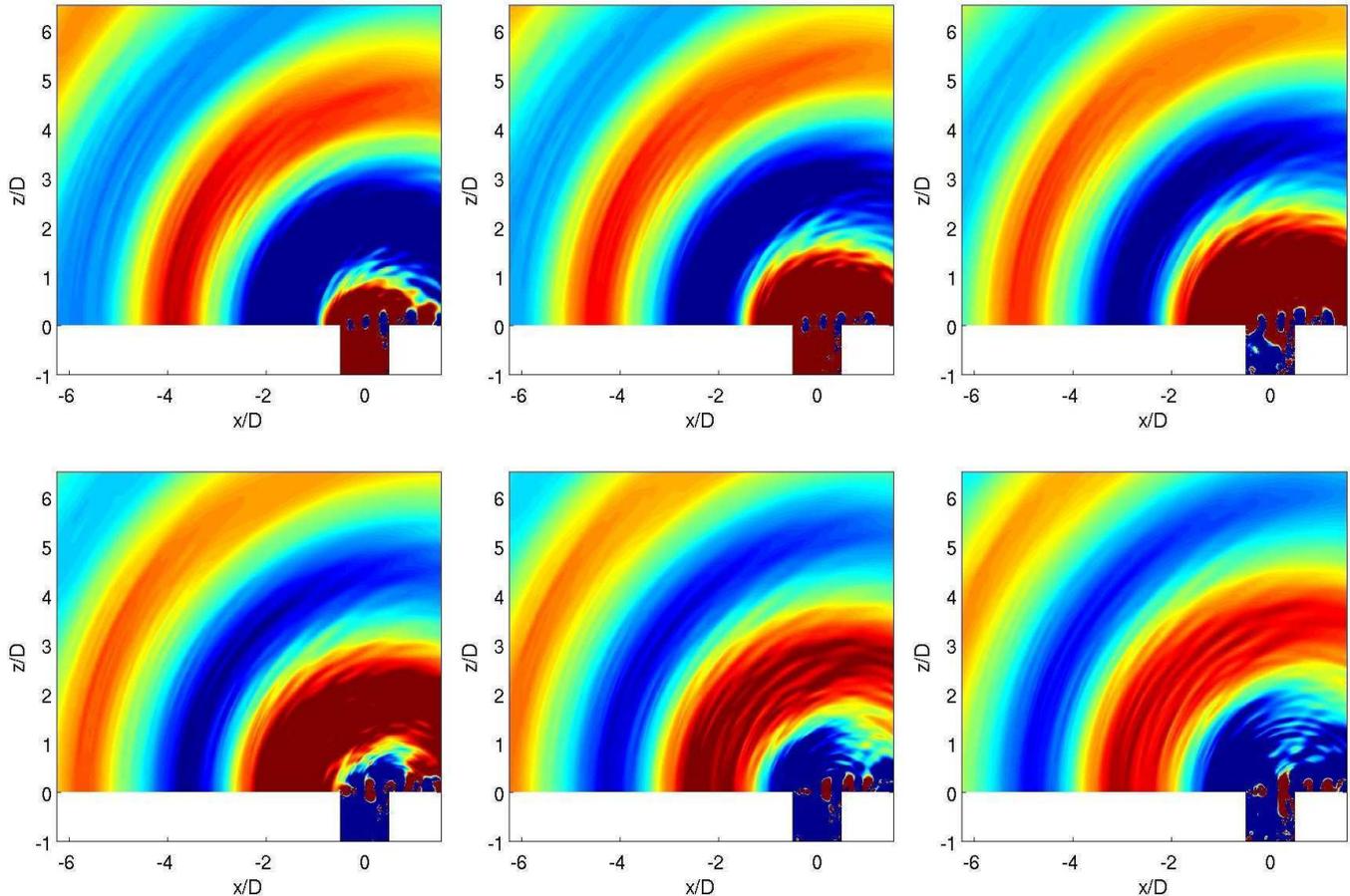


FIG. 5.28 – Champs instantanés de pression fluctuante durant un cycle de la simulation sans turbulence amont. Niveaux compris entre ± 20 Pa.

l'analyse de la couche de mélange, on distingue deux cas, sur la figure 5.3, suivant si les oscillations du signal sont cohérentes ou non. Pour la partie cohérente du signal, le champ acoustique ressemble sensiblement à celui sans turbulence amont. Lorsque l'on considère la partie non cohérente, le champ acoustique correspond uniquement au rayonnement haute fréquence et large bande caractéristique de la partie non-cohérente et la partie cohérente est beaucoup moins intense conformément aux résultats du paragraphe 5.4 et à la figure 5.3. Deux explications sont alors possibles. La première est que le champ moyen de pression commence à dériver et masque les fluctuations acoustiques. La deuxième est que les structures de la couche de mélange sont beaucoup moins cohérentes (comme le montre la figure 5.21) et impliquent un rayonnement acoustique plus faible. Un dernier point est la prédiction de la fréquence et des niveaux acoustiques en champ lointain. Cette dernière étude n'est réalisée que

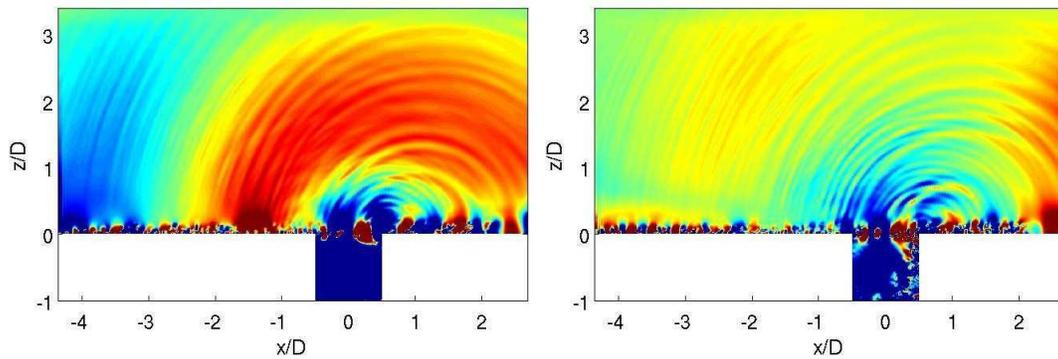


FIG. 5.29 – Champs instantanés la pression fluctuante dans le plan de symétrie $y/D=0$ avec des niveaux entre ± 10 Pa pour la simulation avec turbulence amont. A gauche : lors des oscillations cohérentes. A droite : lors des oscillations non-cohérentes.

pour le calcul sans turbulence amont. Les signaux temporels expérimentaux et numériques dans le champ acoustique sont présentés sur la figure 5.30. Le signal expérimental est relevé 1 m au-dessus du centre de la cavité et celui numérique 0.6m. Les signaux ne sont donc pas directement comparables. On observe que la pression acoustique expérimentale semble modulée par une basse fréquence. A droite de la figure 5.30, les spectres acoustiques montrent une fréquence similaire entre la simulation et l'expérience, 665 Hz et 670Hz respectivement. Les différences en basses fréquences s'expliquent essentiellement par le bruit de fond de la soufflerie. La remise à l'échelle du signal numérique par une loi en $1/r$ permet d'obtenir des niveaux plus favorable avec l'expérience.

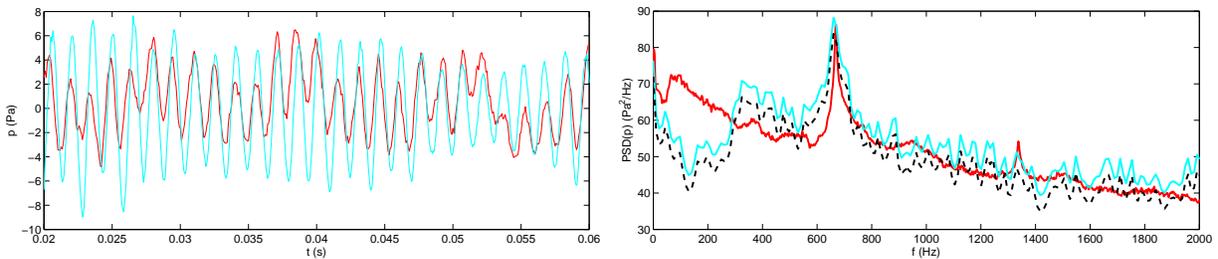


FIG. 5.30 – A gauche : fluctuations de la pression fluctuante en fonction du temps à $(x/D, y/D, z/D)=(0,0,6)$ pour les résultats numériques sans turbulence amont (—) et en $(0,0,10)$ pour les résultats expérimentaux (—). A droite : Densité spectrale de puissance de la pression fluctuante aux mêmes positions avec une troisième courbe représentant le spectre des résultats numériques sans turbulence amont extrapolé au point de mesure avec une loi en $1/r$ (---).

5.5 Discussions

5.5.1 Prédiction des fréquences des modes de la couche de mélange

Les modes de la couche de mélange, aussi appelés modes de Rossiter, peuvent être modélisés par la formule suivante :

$$f = \frac{U_\infty}{L} \frac{n - \alpha}{M + \frac{1}{\kappa}} \quad (5.1)$$

avec $\alpha=0.25$, n le mode considéré et L une longueur caractéristique. Pour une simulation turbulente d'un écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique, Desvigne [40] trouve le paramètre $\kappa=0.51$. Pour une configuration d'étude à peu près similaire, Mincu [137] obtient une valeur $\kappa=0.6$. Pour le deuxième mode ($n=2$) et une longueur caractéristique L égale au diamètre D de la cavité, la fréquence f prédite par le modèle peut varier de 566 à 655 Hz suivant la valeur du paramètre empirique κ entre 0.51 et 0.6. De plus, pour ce modèle, la géométrie de la cavité n'est pas prise en compte. Pour intégrer le caractère circulaire de la cavité, Czech *et al.*[36] prennent $L = \sqrt{\pi}D/2$. Pour cette nouvelle longueur effective, la fréquence peut varier entre 639 et 740 suivant les valeurs de κ comprises entre 0.51 et 0.6. D'autres formules peuvent être appliquées comme celle de Block [18] prenant en compte la profondeur de la cavité et un déphasage $\alpha=0$. Cependant comme pour la formule de Rossiter initiale, la prédiction de la fréquence reste fortement liée à la fois aux paramètres empiriques pouvant fortement varier d'une étude à l'autre et aussi à la difficulté de sortir du paradigme des cavités rectangulaires. Cependant, la formule de Rossiter, à l'instar des cavités rectangulaires, réussit à prédire l'ordre de grandeur de la fréquence de rayonnement en bon accord avec les valeurs numérique ou expérimentale, d'environ 670 Hz.

5.5.2 Prédiction des modes de résonance d'une cavité

Rappelons la formule pour les fréquences de résonance d'une cavité cylindrique du paragraphe 4.1.2.2 :

$$f_{n_\theta n_r n_z} = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\xi_{n_\theta n_r}^2 + \left(\frac{n_z \pi}{2H'}\right)^2}$$

Le terme $n_z c_0 \pi / 4H'$ représente la fréquence associée aux modes de profondeur de la cavité. Si la cavité n'est pas bafflée, on a $H' = H$, ce qui donne pour le premier mode $n_z=1$ une valeur de 432 Hz. Ce cas n'est réaliste car la fréquence trouvée est loin de celle observée. Pour le cas d'une cavité bafflée, on a $H' = H + \delta D$ avec δD que l'on nomme la correction de fin δD . Dans la littérature, plusieurs valeurs de δ sont disponibles en effectuant des hypothèses différentes. Une première correction de fin est proposé par Rayleigh [152] qui trouve $\delta=0.4121$. Pour cette valeur, le premier mode de profondeur a une fréquence de 613 Hz. La correction de fin proposée par Nomura *et al.* [143] avec $\delta=0.4108$ donne une fréquence sensiblement similaire. Enfin, Kinsler *et al.* [99] trouvent $\delta=0.4244$, qui est la limite supérieur prédite par Rayleigh[152], ce qui correspond dans notre cas à une fréquence de 607 Hz. Ces différentes fréquences sont très proches de la fréquence principale de 660 Hz trouvée par l'expérience et la simulation. Cependant, dans toutes ces études, cette correction de fin est obtenue en utilisant un modèle de type piston ou en considérant une impulsion acoustique impactant l'ouverture d'une cavité, sans tenir compte de la présence de l'écoulement. La nature de l'écoulement au-dessus de la cavité peut modifier sensiblement la fréquence de résonance.

5.5.3 Modèle couplant la dynamique modale de la couche de mélange et les modes de résonance

Pour expliquer le couplage du mode de résonance de la cavité avec la dynamique modale de la couche de mélange, Parthasarathy *et al.* [148] proposent un modèle d'oscillateur amorti forcé par un mode de la couche de mélange. Une des hypothèses faites est que l'oscillateur n'est excité que par le passage d'un tourbillon et donc seul le mode I de la couche de mélange est considéré. Dans le cadre de ce modèle, la fréquence fondamentale pour laquelle a lieu le couplage entre la résonance et le mode de couche de mélange ne change pas de la prédiction du mode de résonance seul d'une cavité. De plus,

cette fréquence est associée à une correction de fin avec $\delta=0.425$ qui est équivalente à celle de Kinsler *et al.* Pour des cavités résonantes avec une petite ouverture rectangulaire, Elder [49] propose un modèle basé sur une fonction de transfert modélisant la dynamique modale de la couche de mélange et sur une fonction de transfert inverse modélisant la réponse acoustique de la cavité. Lorsque le produit des deux fonctions est égal à 1, le système est oscillant et un couplage se produit entre la couche de mélange et les modes de résonance de la cavité. Cependant, des données concernant la dynamique de l'interface de la couche de mélange sont nécessaires dans la fonction de transfert directe pour fermer le modèle. Elder [49] utilise par exemple les données expérimentales pour calibrer son modèle. De plus, la cavité cylindrique étudiée par Elder est partiellement fermée avec une fente rectangulaire comme ouverture. Desvignes [40] applique le modèle à une cavité cylindrique totalement ouverte et la fonction de transfert directe est également calibrée à partir de l'expérience. Avec ce type de modèle, on peut retrouver à la fois les fréquences de couplage et l'amplitude des oscillations. Desvignes [40] retrouve très bien l'évolution de la fréquence principale en fonction de la vitesse pour la même cavité que celle de cette étude mais ne prédit pas les amplitudes. Il serait intéressant d'utiliser les données des simulations pour appliquer le modèle en essayant d'accéder à l'amplitude des oscillations.

5.6 Conclusions

Les résultats de deux simulations d'une cavité au-dessus d'une cavité cylindrique sont présentés. La première simulation est réalisée sans condition d'entrée turbulente alors que la seconde est réalisée avec une couche limite turbulente en amont de la cavité. L'écoulement avec une couche limite turbulente est simulé sur un temps physique limité car le calcul présente une dérive numérique. Une comparaison avec la base de données expérimentales de l'École Centrale de Lyon est aussi réalisée. Les résultats montrent une dynamique complexe de la recirculation dans la cavité. Ceux-ci sont conformes avec les expériences ou avec les simulations réalisées dans le cadre d'autres études [40, 127, 139]. Le comportement global des intensités turbulentes est convenablement reproduit par les simulations. Cependant, une sous-estimation par rapport à l'expérience est à noter et est expliquée en partie par le bruit de fond de la soufflerie. Cette sous-estimation implique des oscillations d'amplitude plus faible dans la cavité. Les fréquences acoustiques dans la cavité sont correctement calculées par les simulations. La fréquence fondamentale aux environs de 655 Hz est aussi marquée dans la simulation sans fluctuation que dans l'expérience. Cependant, l'amplitude plus faible des oscillations par rapport à l'expérience implique que le niveau spectral est globalement réduit. Pour le calcul sans turbulence amont, une différence d'environ 10 dB peut parfois être observée en haute fréquence. L'ajout d'une condition d'entrée turbulente permet d'augmenter globalement le taux de turbulence dans la couche de mélange et dans la cavité. Les résultats montrent ainsi que plus d'énergie est distribuée sur l'ensemble du spectre. Ainsi, le niveau global est plus fort que pour le cas sans fluctuation mais reste toujours inférieur à celui de l'expérience. Le mode fondamental est lui moins marqué que pour le cas sans turbulence amont. Néanmoins, l'excitation large bande liée à la turbulence permet de mieux reproduire les niveaux des modes acoustiques de plus hautes fréquences. Enfin, la pression acoustique en champ lointain pour le calcul sans fluctuation est conforme aux résultats précédents. La simulation parvient en effet à déterminer la fréquence du rayonnement acoustique observée par l'expérience mais le niveau acoustique associé est plus faible. La turbulence du calcul avec fluctuations alimentant en énergie principalement les composantes haute fréquence, on peut s'attendre logiquement à ce que les niveaux acoustiques soient au mieux égales à ceux du calcul sans fluctuation si le temps de calcul avait été plus long. Ces niveaux acoustiques plus faibles que l'expérience sont communs à plusieurs études [40, 127, 139] et ne sont toujours pas expliqués.

Conclusions

A l'issue de cette thèse, un code de calcul direct du bruit avec des techniques de recouvrement de maillages a été développé. Des interpolations sont nécessaires afin que chaque maillage puisse communiquer. Lorsque des schémas aux différences finies de haute précision sont utilisés, les interpolations doivent être assez précises pour ne pas dégrader l'ordre global de la solution numérique. Pour un espace à une dimension, deux familles d'interpolation ont été comparées, les interpolations polynômiales de Lagrange et les interpolations optimisées de Tam et Kurbatskii [183]. Pour des applications aéroacoustiques, il est montré que des interpolations optimisées présentent un comportement plus favorables. Lorsque l'on considère des interpolations dans un espace à deux dimensions, des interpolations 2×1-D sont préférées si l'on connaît une transformation analytique entre deux maillages de topologie différente ou si l'on calcule localement cette transformation grâce à une méthode de mapping isoparamétrique. Enfin, le point le plus important démontré sur l'étude des recouvrements de maillages est qu'une interpolation avec une résolubilité spectrale inférieure à celle utilisée par les schémas aux différences finies est suffisante pour ne pas dégrader la solution. Le principal avantage de ce résultat est de pouvoir diminuer la taille des supports d'interpolation et donc d'avoir des interpolations moins onéreuses en temps de calcul.

Une étude est aussi entreprise sur la génération de fluctuations turbulentes en entrée du domaine de calcul. Les méthodes de conditions d'entrée turbulentes doivent, dans le cadre de l'application aéroacoustique visée par cette thèse, générer le moins de bruit parasite afin de ne pas masquer le rayonnement acoustique de l'écoulement. Les premières conditions d'entrée turbulente testées sont basées sur une reconstruction synthétique de la turbulence. La méthode des modes de fourier aléatoires (RFM) et la méthode des structures synthétiques (SEM) présentent les mêmes désavantages dans le cadre de notre objectif. En effet, elles introduisent un bruit parasite trop intense que l'on ne peut diminuer qu'en réduisant l'amplitude des perturbations introduites. Cependant, cette réduction s'accompagne d'une réduction drastique des intensités turbulentes dans la couche limite. Des méthodes de recyclage avec ou sans remise à l'échelle de l'écoulement sont aussi étudiées. Un calcul précurseur de couche limite est réalisé et des plans extraits de celui-ci sont ensuite introduits en entrée de domaine du calcul principal. Lorsque le nombre de Reynolds du calcul précurseur est différent de celui du calcul principal, une remise à l'échelle des paramètres de l'écoulement est effectuée avant l'introduction dans la simulation principale. Une première observation est qu'après introduction des plans dans le calcul principal, les intensités turbulentes dans la couche limite chutent au fur-et-à-mesure que l'on s'approche de la cavité. Une deuxième observation, plus gênante, est que le profil moyen de vitesse longitudinale est fortement perturbé en entrée et devient fortement déformé en aval compte tenu du maillage grossier pour résoudre la couche limite. Une dernière méthode est abordée et retenue pour l'étude d'un écoulement au-dessus d'une cavité cylindrique. Elle se base sur la génération de turbulence via la perturbation d'un profil inflexionnel. Les caractéristiques de la perturbation sont issues d'une étude de stabilité linéaire locale du profil inflexionnel. Suivant la hauteur à la paroi du point d'inflexion et l'amplitude de la perturbation, le bruit parasite est très faible. Dans

ce cas, les intensités turbulentes et le profil moyen présentent un comportement satisfaisant compte tenu du maillage employé.

Deux simulations ont été réalisées et comparées à la campagne expérimentale de l'Ecole Centrale de Lyon. La première simulation est sans turbulence en amont de la cavité. La deuxième simulation est avec une condition d'entrée turbulente utilisant la méthode du profil inflexionnel perturbé. Pour les deux simulations, les champs moyens sont sensiblement identiques et sont en bon accord avec l'expérience. La dynamique de la recirculation d'une cavité cylindrique s'avère très compliquée à cause de la courbure de la paroi. La recirculation est en effet pleinement tridimensionnelle. Pour les deux simulations, les fluctuations aérodynamiques dans la cavité sont correctement simulées. Les fréquences liées aux modes acoustiques dans la cavité sont correctement prédites. Le pic lié à la fréquence fondamentale d'environ 650 Hz est très marqué et indique un couplage entre le mode de résonance acoustique de profondeur de la cavité et les modes de Rossiter de la couche de mélange. Cependant, une sous-estimation globale du niveau d'énergie spectrale est observée pour les deux simulations. Le calcul avec des fluctuations turbulentes en amont présente néanmoins un niveau plus élevé en haute fréquence que pour le cas sans fluctuation. Ainsi, des modes acoustiques de fréquences plus élevées ressortent d'avantage du spectre. Ce calcul permet ainsi d'observer une conséquence du mécanisme de *turbulent rumble* décrit par Plumblee *et al.*[151]. Le calcul sans fluctuation permet de retrouver, pour le champ acoustique lointain, la fréquence fondamentale observée dans l'expérience. Cette fréquence est liée à la fréquence fondamentale dans la cavité et aucune autre trace d'autres modes acoustiques de cavité n'est visible sur le spectre. A l'image des fluctuations dans la cavité, les niveaux acoustiques de la simulation sont plus faibles que ceux de l'expérience.

Perspectives

Concernant les aspects numériques de cette thèse, les travaux entrepris sur les méthodes de recouvrement de maillages permettront d'étudier des géométries complexes prenant en compte plusieurs corps. Une étude en cours aborde l'interaction d'une rafale avec une grille d'aubes pour un écoulement bidimensionnel. Cette configuration modélise l'interaction entre un rotor et un stator. La grille comporte 27 aubes et chaque aube est maillé curvilignement avec un maillage de peau. Ces maillages recouvrent un maillage cartésien de fond. Les premiers résultats présentent un bon accord avec la littérature. Pour le calcul direct de bruit de cavités rectangulaires ou cylindriques, des méthodes de recouvrement de maillages peuvent être utilisées pour étudier l'influence de la géométrie des coins amont et aval de la cavité. En effet, un maillage curviligne local peut être employé pour simuler la rondeur d'un coin.

La méthode du profil inflexionnel comme condition d'introduction de turbulence en entrée de domaine semble une solution satisfaisante pour des écoulements subsoniques en aéroacoustiques impliquant la simulation grossière d'une couche limite. Dans l'étude présente, la longueur de transition vers un écoulement pleinement turbulent n'a pas été étudiée. De plus, il s'avère que cette longueur n'a sûrement pas été atteinte. Ainsi si dans l'objectif d'une condition d'entrée rayonnant faiblement, les méthodes basées sur la turbulence synthétique ont été écartées, elles gardent encore tout leur intérêt pour des applications purement aérodynamiques. Il en va de même pour les méthodes basées sur un recyclage. En effet, pour de telles applications la qualité d'une condition d'entrée se mesure plutôt par la distance nécessaire pour avoir une turbulence pleinement développée. Ainsi, une comparaison plus fine peut être entreprise entre les différentes méthodes en prenant en compte comme critère cette distance de transition, pour des écoulements subsoniques ou supersoniques et des maillages moins grossiers.

Enfin, l'analyse des résultats des calculs de cavités pourrait être complétée par des méthodes basées sur le traitement statistique et volumique de l'écoulement de cavité. Une technique basée sur les modes de Fourier peut être utilisée afin de pouvoir extraire la dynamique modale de la couche de mélange. Une méthode similaire basée sur les modes de Koopman peut aussi être réalisée. L'utilisation de modèles théoriques, appliquées à la simulation, peut aussi nous permettre de mieux comprendre le mécanisme de rayonnement de la cavité cylindrique. Ainsi, un modèle comme celui de Elder [49] est bien adapté à la configuration présente où un mode de la couche de mélange interagit avec un mode de résonance de la cavité. Pour réaliser cette étude, la dynamique de l'interface de la couche de mélange peut être déduite de l'expérience. L'idée serait ici d'appliquer ce modèle à partir des données issues de la simulation. Un autre modèle pouvant être appliqué est celui proposée par Howe [89]. La connaissance des fluctuations hydrodynamiques pariétales près de l'ouverture de la cavité pourrait permettre de retrouver les fréquences des modes de résonance de la cavité ainsi que leur perte par rayonnement. Contrairement aux autres études théoriques, ce modèle prend en compte l'influence de l'écoulement sur les fréquences admissibles de la cavité. Cependant, cet écoulement reste potentiel. Une extension du modèle de Tam à des cavités cylindriques permettrait aussi de calculer les fréquences de résonance de la cavité ainsi que leur perte par rayonnement. Ces deux dernières études pourraient expliquer le fait que certains modes acoustiques présents dans le spectre de la cavité ne le soient plus en champ acoustique lointain. Une dernière perspective serait l'étude d'autres configurations d'écoulement. Par exemple, il serait intéressant d'étudier la coexistence de modes dans la configuration avec une vitesse $U_\infty=90$ m/s et une cavité $H/D=1$ ou de caractériser la bifurcation de l'écoulement pour une cavité $H/D=0.5$.

Bibliographie

- [1] AHUJA, K.K. & MENDOZA, J., 1995, Effects of cavity dimensions, boundary layer, and temperature in cavity noise with emphasis on benchmark data to validate computational aeroacoustic codes, NASA CR-4653.
- [2] ALBENSOEDER, S. & KUHLMANN, H.C., 2006, Nonlinear three-dimensional flow in the lid-driven square cavity, *J. Fluid Mech.*, **569**, p. 465–480.
- [3] ALBENSOEDER, S., KUHLMANN, H.C. & RATH, H.J., 2001, Three-dimensional centrifugal-flow instabilities in the lid-driven-cavity problem, *Phys. Fluids*, **13**(1), p. 121–135.
- [4] AMANDOLÈSE, X., HÉMON, P. & REGARDIN, C., 2004, A study of the acoustic oscillations by flow over cavities, *ASME Journal of Vibration and Acoustics*, **126**, p. 190–195.
- [5] ANDERS PETERSSON, N., 1999, An algorithm for assembling overlapping grid systems, *SIAM J. Sci. Comput.*, **20**(6), p. 1995–2022.
- [6] BAILLY, C., GLOERFELT, X. & BOGEY, C., 2002, Report on stochastic noise source modelling, *JEAN - Deliverable 2.4*, EU Research Programme - FP5, Contract No. GARD-CT-2000-00313.
- [7] BAILLY, C., LAFON, P. & CANDEL, S., 1995, A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows, *AIAA Paper 95-092*.
- [8] BARDINA, J., FERZIGER, J.H. & REYNOLD, W.C., 1980, Improved subgrid scale models for large eddy simulation, *AIAA Paper 80-1357*.
- [9] BATTEN, P., GOLDBERG, U. & CHAKRAVARTHY, S., 2002, Reconstructed sub-grid methods for acoustics prediction at all Reynolds numbers, *AIAA Paper 2002-2511*.
- [10] BÉCHARA, W., BAILLY, C., LAFON, P. & CANDEL, S., 1994, Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows, *AIAA Journal*, **32**(3), p. 455–463.
- [11] BENEK, J., STEGER, J. & DOUGHERTY, F., 1983, A flexible grid embedding technique with application to the Euler equations, *AIAA Paper 83-1944*.
- [12] BENOIT, C. & JEANFAIVRE, G., 2003, Three dimensional inviscid isolated rotor calculations using chimera and automatic Cartesian partitioning methods, *Journal of the American Helicopter Society*, p. 128–138.
- [13] BERGER, M. J., 1987, On conservation at grid interfaces, *SIAM J. Num. Analysis*, **24**, p. 967–983.
- [14] BERLAND, J., BOGEY, C., MARSDEN, O. & BAILLY, C., 2007, High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multi-scale and boundary problems, *J. Comput. Phys.*, **224**(2), p. 637–662.
- [15] BERLAND, J. & GLOERFELT, X., 2008, Investigation of noise radiation from a turbulent boundary layer, *14th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 5-7 May, Vancouver, Canada, AIAA Paper 2008-2802.

- [16] BLAKE, W.K. & POWELL, A., 1986, The development of contemporary views of flow-tone generation, dans *Recent advances in aeroacoustics*, Springer-Verlag, p. 247–345.
- [17] BLEVINS, R.D., 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Litton Educational Publishing.
- [18] BLOCK, P.J.W., 1976, Noise response of cavities of varying dimensions at subsonic speeds, NASA, *Tech. Note D-8351*.
- [19] BOGEY, C. & BAILLY, C., 2004, A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for noise computation, *J. Comput. Phys.*, **194**, p. 194–214.
- [20] BOGEY, C. & BAILLY, C., 2005, Decrease of the effective reynolds number with eddy-viscosity subgrid-scale modelling, *AIAA Journal*, **43**(2), p. 437–439.
- [21] BORIS, J.P., GRINSTEIN, F.F., ORAN, E.S. & KOLBE, R.L., 1992, New insights into large eddy simulation, *Fluid Dyn. Res.*, **10**, p. 199–228.
- [22] BRÈS, G.A., 2007, *Numerical simulations of three-dimensional instabilities in cavity flows*, PhD thesis, California Institute of Technology.
- [23] BRÈS, G.A. & COLONIUS, T., 2007, Direct numerical simulations of three-dimensional cavity flows, *13th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 21-23 May, Rome, Italy, AIAA Paper 2007-3405.
- [24] BRÈS, G.A. & COLONIUS, T., 2007, Three-dimensional linear stability analysis of cavity flows, *45th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, 8-11 January, AIAA Paper 2007-1126.
- [25] BRÈS, G.A. & COLONIUS, T., 2008, Three-dimensional instabilities in compressible flow over open cavities, *J. Fluid Mech.*, **599**, p. 309–339.
- [26] BROWN, G.B., 1937, The vortex motion causing edge tones, *Proceedings of the Physical Society*, London, **49**, p. 493.
- [27] CARATI, D., WINCKELMANS, G.S. & JEANMART, H., 2001, On the modelling of the subgrid-scale and filtered-scale stress tensors in large-eddy simulations, *J. Fluid Mech.*, **441**, p. 119–138.
- [28] CHESSIRE, G. & HENSHAW, W.D., 1990, Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, **90**, p. 1–64.
- [29] CHESSIRE, G. & HENSHAW, W.D., 1994, A scheme for conservative interpolation on overlapping grids, *J. Comput. Phys.*, **15**, p. 819–845.
- [30] CHICHEPORTICHE, J. & GLOERFELT, X., 2009, Direct noise computations using overset grids, *AIAA Paper 2009-3403*.
- [31] CHICHEPORTICHE, J., MERLE, X., GLOERFELT, X. & ROBINET, J.C., 2008, Direct numerical simulation and global stability analysis of three-dimensional instabilities in a lid-driven cavity, *C. R. Acad. Sci., C.R. Mecanique*, **336**, p. 586–591.
- [32] CHOW, F.K. & MOIN, P., 2003, A further study of numerical errors in large-eddy simulations, *J. Comput. Phys.*, **184**, p. 366–380.
- [33] CLARK, R.A., FERZIGER, J.H. & REYNOLD, W.C., 1979, Evaluation of subgrid-scale models using an accurately simulated turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **91**(1), p. 1–16.
- [34] COLONIUS, T. & LELE, S.K., 2004, Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation, *Progress in Aerospace Sciences*, **40**, p. 345–416.

- [35] CONSTANTINESCU, C.S. & LELE, S.K., 2002, A highly accurate technique for the treatment of flow equations at the polar axis in cylindrical coordinates using series expansions, *J. Comput. Phys.*, **183**, p. 165–186.
- [36] CZECH, M., CROUCH, J., STOKER, R., STRELETS, M. & GARBARUK, A., 2006, Cavity noise generation for circular and rectangular vent holes, *AIAA Paper 2006-2508*.
- [37] DAVIDSON, L. & BILLSON, M., 2006, Hybrid LES-RANS using synthesized turbulent fluctuations for forcing in the interface region, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **27**, p. 1028–1042.
- [38] DELFS, J., 2001, An overlapped grid technique for high resolution CAA schemes for complex geometries, *AIAA Paper 2001-2199*.
- [39] DESQUESNES, G., TERRACOL, M., MANOHA, E. & SAGAUT, P., 2006, On the use of a high order overlapping grid method for coupling in CFD/CAA, *J. Comput. Phys.*, **220**, p. 355–382.
- [40] DESVIGNE, D., 2010, *Bruit rayonné : par un écoulement subsonique affleurant une cavité cylindrique : caractérisation expérimentale et simulation numérique directe par une approche multi-domaine d'ordre élevé*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No 2010-36.
- [41] DESVIGNE, D., MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2010, Calcul direct du bruit rayonné par un écoulement laminaire à mach 0.2 affleurant une cavité cylindrique, *Congrès Français d'Acoustique*.
- [42] DESVIGNE, D., MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2010, Development of non-centered wavenumber-based optimized interpolation schemes with amplification control for overlapping grids, *SIAM J. Sci. Comput.*, **32**(4), p. 2074–2098.
- [43] DOMARADZKI, J.A. & ADAMS, N.A., 2002, Direct modelling of subgrid scales of turbulence in large eddy simulations, *J. Turbulence*, **3** 024 (<http://jot.iop.org/>).
- [44] DOMARADZKI, J.A. & LOH, K.-C., 1999, The subgrid-scale estimation model in the physical-space representation, *Phys. Fluids*, **11**(8), p. 2330–2342.
- [45] DOMARADZKI, J.A. & SAIKI, E.M., 1997, A subgrid-scale model based on the estimation of unresolved scales of turbulence, *Phys. Fluids*, **9**(7), p. 2148–2164.
- [46] DYBENKO, J. & SAVORY, E., 2006, An experimental investigation of turbulent boundary layer flow over surface-mounted circular cavities, *Canadian Society of Mechanical Engineering Forum*.
- [47] EAST, L.F., 1966, Aerodynamically induced resonance in rectangular cavities, *J. Sound Vib.*, **3**, p. 277–287.
- [48] ELDER, S.A., 1978, Edgetones versus pipetones, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**(6), p. 1721–1723.
- [49] ELDER, S.A., 1978, Self-excited depth-mode resonance for a wall-mounted cavity in turbulent flow, *J. Acoust. Soc. Am.*, **64**(3), p. 877–890.
- [50] ELDER, S.A., FARABEE, T.M. & DEMETZ, F.C., 1982, Mechanisms of flow-excited cavity tones at low Mach number, *J. Acoust. Soc. Am.*, **72**(2), p. 532–549.
- [51] EMMERT, T., 2007, *Development of a multidomain high-order algorithm for computational aeroacoustics : Application to subsonic and transonic confined flows*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No 2007-30.
- [52] EMMERT, T., LAFON, P. & BAILLY, C., 2007, Computation of aeroacoustic phenomena in subsonic and transonic ducted flow, *13th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 21-23 May, Rome, Italy, AIAA Paper 2007-3429.

- [53] EMMERT, T., LAFON, P. & BAILLY, C., 2008, Numerical study of aeroacoustic coupling in a subsonic confined cavity, *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 5-7 May, Vancouver, Canada, AIAA Paper 2008-2848.
- [54] ERDEM, D., ROCKWELL, D., OSHKAI, P. & POLLACK, M., 2003, Flow tones in a pipeline-cavity system : effect of pipe asymmetry, *J. Fluids Struct.*, **17**, p. 511–523.
- [55] FORESTIER, N., 2001, *Etude expérimentale d'une couche cisailée au-dessus d'une cavité en régime transsonique*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No NT 2001-1.
- [56] FORESTIER, N., JACQUIN, L. & GEFFROY, P., 2003, The mixing layer over a deep cavity at high-subsonic speed, *J. Fluid Mech.*, **475**, p. 101–145.
- [57] FUREBY, C. & GRINSTEIN, F.F., 2002, Large eddy simulation of high-Reynolds number free and wall-bounded flows, *J. Comput. Phys.*, **181**, p. 68–97.
- [58] GAUDET, L. & WINTER, K., 1973, Measurements of the drag of some characteristic aircraft excrescences immersed in turbulent boundary layers, Royal Aircraft Establishment, *Tech. Memo* 1538.
- [59] GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P. & CABOT, W.H., 1991, A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model, *Phys. Fluids A*, **3**(7), p. 1760–1765.
- [60] GEURTS, B.J., 1997, Inverse modeling for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **9**(12), p. 3585–3587.
- [61] GEVECI, M., OSHKAI, P., ROCKWELL, D., LIN, J.-C. & POLLACK, M., 2003, Imaging of the self-excited oscillation of flow past a cavity during generation of a flow tone, *J. Fluids Struct.*, **18**, p. 665–694.
- [62] GHARIB, M. & ROSHKO, A., 1987, The effect of flow oscillations on cavity drag, *J. Fluid Mech.*, **177**, p. 501–530.
- [63] GHOSAL, S., 1996, An analysis of numerical errors in Large-Eddy Simulations of turbulence, *J. Comput. Phys.*, **125**, p. 187–206.
- [64] GHOSAL, S., LUND, T.S., MOIN, P. & AKSELVOLL, K., 1995, A dynamic localization model for large-eddy simulation of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, **286**, p. 229–255.
- [65] GIBSON, J.E., 1958, *An analysis of supersonic cavity flow*, S.M. thesis, M.I.T. Dept. of Aeronautics and Astronautics, Cambridge, Mass.
- [66] GLOERFELT, X., 2001, *Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon. No 2001-26.
- [67] GLOERFELT, X., 2006, Aeroacoustic computations of high-Reynolds number cavity flows on staggered grids, *12th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 8-10 May, Cambridge, Massachusetts, AIAA Paper 2006-2433.
- [68] GLOERFELT, X., 2008, Compressible proper orthogonal decomposition/Galerkin reduced-order model of self sustained oscillations in a cavity, *Phys. Fluids*. to appear.
- [69] GLOERFELT, X. & BAILLY, C., 2002, Etude 2-D d'une cavité peu profonde - simulations aéroacoustiques directes, *Rapport final*, Contrat No. 20E0869001, février.
- [70] GLOERFELT, X. & BERLAND, J., 2009, Direct computation of turbulent boundary layer noise, *AIAA Paper 2009-3401*.

- [71] GLOERFELT, X. & BERLAND, J., 2009, Direct computation of turbulent boundary layer noise, *15th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 11-13 May, Miami, Florida, AIAA Paper 2009-3401.
- [72] GLOERFELT, X., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2002, LES of the noise radiated by a flow over a rectangular cavity, *ERCOFTAC Workshop on LES for Acoustics*, 7-8 october, DLR Göttingen, Germany.
- [73] GLOERFELT, X., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2003, Numerical evidence of mode switching in the flow-induced oscillations by a cavity, *Int. J. of Aeroacoustics*, **2**(2), p. 99–124.
- [74] GLOERFELT, X., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2003, Numerical investigation of the coexistence of multiple tones in flow-induced cavity noise, *AIAA Paper 2003-3234*.
- [75] GLOERFELT, X. & LE GARREC, T., 2008, Generation of inflow turbulence for aeroacoustic applications, *14th AIAA/CEAS AeroAcoustics Conference*, 5-7 May, Vancouver, Canada, AIAA Paper 2008-2926.
- [76] GUENANFF, R., 2004, *Couplage instationnaire Navier-Stokes/Euler pour la génération et le rayonnement des sources de bruit aérodynamique*, thèse de doctorat, Université Rennes I. No 3138.
- [77] GULLBRAND, J., 2001, Explicit filtering and subgrid-scale models in turbulent channel flow, dans *Annual Research Briefs*, p. 31–42. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., CA.
- [78] GULLBRAND, J. & CHOW, F.K., 2003, The effect of numerical errors and turbulence models in large-eddy simulations of channel flow, with and without explicit filtering, *J. Fluid Mech.*, **495**, p. 323–341.
- [79] HEIN, S., HOHAGE, T. & KOCH, W., 2004, On resonances in open systems, *J. Fluid Mech.*, **506**, p. 255–284.
- [80] HELLER, H.H., HOLMES, D.G. & COVERT, E.E., 1971, Flow-induced pressure oscillations in shallow cavities, *J. Sound Vib.*, **18**, p. 545–553.
- [81] HÉMON, P., F., SANTI & AMANDOLÈSE, X., 2004, On the pressure oscillations inside a deep cavity excited by a grazing airflow, **23**, p. 617–632.
- [82] HENSHAW, B., CHAND, K. & QUINLAN, D., Overture. <https://computation.llnl.gov/casc/Overture/>.
- [83] HENSHAW, W. D. & SCHWENDEMAN, D. W., 2008, Parallel computation of three-dimensional flows using overlapping grids with adaptive mesh refinement, *J. Comput. Phys.*, **227**, p. 7469–7502.
- [84] HIRSCH, C., 1990, *Numerical computation of internal and external flows, Volume 1 : Fundamentals of numerical discretization*, chap. 8. John Wiley & Sons.
- [85] HIWADA, M., KAWAMURA, T., MABUCHI, I. & KUMAD, M., 1983, Some characteristics of flow pattern and heat transfer past a circular cylindrical cavity, *Bulletin of the JSME*, **26**, p. 1744–1752.
- [86] HO, C.-M. & HUANG, L.-S., 1982, Subharmonics and vortex merging in mixing layers, *J. Fluid Mech.*, **119**, p. 443–473.
- [87] HO, C.-M. & NOSSEIR, N.S., 1981, Dynamics of an impinging jet. Part 1. The feedback phenomenon, *J. Fluid Mech.*, **105**, p. 119–142.

- [88] HORIUTI, K., 1997, A new dynamic two-parameter mixed model for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **9**(11), p. 3443–3464.
- [89] HOWE, M.S., 2004, Wall cavity aeroacoustics at low Mach number, Boston University, College of Engineering, Technical Report AM 04-001.
- [90] HU, F.Q., HUSSAINI, M.Y. & MANTHEY, J.L., 1996, Low-dissipation and low-dispersion Runge-Kutta schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **124**, p. 177–191.
- [91] HUGHES, T.J.R., MAZZEI, L. & OBERAI, A.A., 2001, The multiscale formulation of large eddy simulation : Decay of homogeneous isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, **13**(2), p. 505–512.
- [92] HUSSAIN, A.K.M.F. & ZAMAN, K.B.M.Q., 1978, The free shear layer tone phenomenon and probe interference, *J. Fluid Mech.*, **87**(2), p. 349–383.
- [93] ILLY, H., 2005, *Contrôle de l'écoulement au dessus d'une cavité en régime transsonique*, thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon.
- [94] ILLY, H., RICOT, D. & MENOIRET, A., 2007, Etude expérimentale et théorique du mécanisme d'excitation aéroacoustique des césures automobiles, *18^{ème} Congrès Français de Mécanique*, 27-31 août, Grenoble.
- [95] JARRIN, N., BENHAMADOUCHE, S., LAURENCE, D. & PROSSER, R., 2006, A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, **27**, p. 585–593.
- [96] JORDAN, S.A. & RAGAB, S.A., 1994, On the unsteady and turbulent characteristics of the three-dimensional shear-driven cavity flow, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **116**, p. 439–449.
- [97] KARAMCHETI, K., 1955, Acoustic radiation from two-dimensional rectangular cutouts in aerodynamic surfaces, NACA, *Tech. Note* 3487.
- [98] KEGERISE, M.A., 1999, *An experimental investigation of flow-induced cavity oscillations*, thèse de doctorat, Syracuse University.
- [99] KINSLER, L.E., FREY, A.E., COPPENS, A.B. & SANDERS, J.V., 2000, *Fundamentals of acoustics*, John Wiley and Sons, fourth édition.
- [100] KISTLER, A.C. & TAN, F.C., 1967, Some properties of turbulent separated flows, *The Physics of Fluids Supplement Boundary Layers and Turbulence*, p. S165–173.
- [101] KLEBANOFF, P.S., TIDSTROM, K.D. & SARGENT, L.M., 1962, The three-dimensional nature of boundary layer instability, *J. Fluid Mech.*, **12**, p. 1–34.
- [102] KOCH, W., 2004, Acoustic resonances in rectangular open cavities, *AIAA Paper 2004-2843*.
- [103] KOCH, W., 2005, Acoustic resonances in rectangular open cavities, *AIAA Journal*, **43**(11), p. 2342–2349.
- [104] KOSEFF, J.R. & STREET, R.L., 1984, Visualization studies of a shear driven three-dimensional recirculating flow, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **33**, p. 594–602.
- [105] KRAICHNAN, R., 1970, Diffusion by a random velocity field, *Phys. Fluids*, **13**(1), p. 22–31.
- [106] KRAVCHENKO, A.G. & MOIN, P., 1997, On the effect of numerical errors in Large Eddy Simulations of turbulent flows, *J. Comput. Phys.*, **131**, p. 310–322.
- [107] KREISS, B., 1983, Construction of a curvilinear grid, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **4**(2), p. 270–279.

- [108] KUERTEN, J.G.M., GEURTS, B.J., VREMAN, A.W. & GERMANO, M., 1999, Dynamic inverse modeling and its testing in large-eddy simulations of the mixing layer, *Phys. Fluids*, **11**(12), p. 3778–3785.
- [109] KUO, C.-H. & HUANG, S.H., 2001, Influence of flow path modification on oscillation of cavity shear layer, *Experiments in Fluids*, **31**, p. 162–178.
- [110] KURBATSKII, K.A., 1997, Analytical solutions of the category 1, benchmark problems 1 and 2, *Second Computational Aeroacoustics Workshop on Benchmark Problems*, NASA CP-3352, p. 9–14.
- [111] LAFON, P., CAILLAUD, S., DEVOS, J. P. & LAMBERT, C., 2003, Aeroacoustical coupling in a ducted shallow cavity and fluid/structure effects on a steam line, *J. Fluids Struct.*, **18**(6), p. 695–713.
- [112] LARCHEVÊQUE, L., SAGAUT, P. & LABBÉ, O., 2007, Large-eddy simulation of a subsonic cavity flow including asymmetric three-dimensional effects, *J. Fluid Mech.*, **577**, p. 105–126.
- [113] LARCHEVÊQUE, L., SAGAUT, P., LÊ, I. T.-H., LABBÉ, O. & COMTE, P., 2004, Large-eddy simulation of a compressible flow in a three-dimensional open cavity at high Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **516**, p. 265–301.
- [114] LE GARREC, T., 2008, *Simulation directe du bruit de bord de fuite d'un profil par une méthode multi domaines*, thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers.
- [115] LE GARREC, T., GLOERFELT, X. & CORRE, C., 2007, Multi-size-mesh, multi-time-step algorithm for noise computation around an airfoil in curvilinear meshes, *AIAA Paper 2007-3504*.
- [116] LELE, S.K., 1992, Compact finite difference schemes with spectral-like resolution, *J. Comput. Phys.*, **103**, p. 16–42.
- [117] LENORMAND, E., SAGAUT, P., TA PHUOC, L. & COMTE, P., 2000, Subgrid-scale models for large-eddy simulations of compressible wall bounded flows, *AIAA Journal*, **38**(8), p. 1340–1350.
- [118] LEONARD, A., 1973, On the energy cascade in large-eddy simulations of turbulent flows, *Adv. in Geophys.*, **A18**, p. 237.
- [119] LESIEUR, M. & MÉTAIS, O., 1996, New trends in large eddy simulations of turbulence, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **28**, p. 45–82.
- [120] LIGHTHILL, M.J., 1952, On sound generated aerodynamically I. General theory, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 211**, p. 564–587.
- [121] LIGHTHILL, M.J., 1954, On sound generated aerodynamically II. Turbulence as a source of sound, *Proc. of the Royal Society of London*, **A 222**, p. 1–32.
- [122] LIN, J.C. & ROCKWELL, D., 2001, Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity, *AIAA Journal*, **39**(6), p. 1139–1151.
- [123] LIU, S., MENEVEAU, C. & KATZ, J., 1994, On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet, *J. Fluid Mech.*, **275**, p. 83–119.
- [124] LUND, T.S. & KALTENBACH, H.-J., 1995, Experiments with explicit filtering for LES using a finite-difference method, dans *Annual Research Briefs*, p. 91–105. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., CA.
- [125] LUND, T.S., WU, X. & SQUIRES, K.D., 1998, Generation of turbulent inflow data for spatially-developing boundary layer simulations, *J. Comput. Phys.*, **140**, p. 233–258.

- [126] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2005, High-order curvilinear simulations of flows around non-Cartesian bodies, *J. Comput. Acous.*, **13**(4), p. 731–748.
- [127] MARSDEN, O., BOGEY, C. & BAILLY, C., 2010, Numerical investigation of flow features and acoustic radiation of a round cavity, *AIAA-2010-3988*.
- [128] MARSDEN, O., JONDEAU, E., SOUCHOTTE, P., BOGEY, C., BAILLY, C. & JUVÉ, D., 2008, Investigation of flow features and acoustic radiation of a round cavity, *AIAA Paper 2008-2851*.
- [129] MATHEW, J., LECHNER, R., FOYSI, H., SESTERHENN, J. & FRIEDRICH, R., 2003, An explicit filtering method for large eddy simulation of compressible flows, *Phys. Fluids*, **15**(8), p. 2279–2289.
- [130] MAULL, D.J. & EAST, L.F., 1963, Three-dimensional flow in cavities, *J. Fluid Mech.*, **16**, p. 620–632.
- [131] MCMILLAN, O.J. & FERZIGER, J.H., 1979, Direct testing of subgrid-scale models, *AIAA Journal*, **17**(12), p. 1340–1346.
- [132] MEINKE, M., SCHRÖDER, W., KRAUSE, E. & RISTER, T., 2002, A comparison of second- and sixth-order methods for large-eddy simulations, *Computers and Fluids*, **31**, p. 695–718.
- [133] MEISSNER, M., 1993, Experimental investigation of discrete sound production in deep cavity exposed to airflow, *Archives of Acoustics*, **18**(1), p. 131–156.
- [134] MICHALKE, A., 1965, On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer, *J. Fluid Mech.*, **23**(3), p. 521–544.
- [135] MICHALKE, A., 1972, The instability of free shear layers, *Progress in Aerospace Sciences*, **12**, p. 213–239.
- [136] MILLS, R.D., 1961, *The flow in rectangular cavities*, Ph.D. thesis, University of London.
- [137] MINCU, D.-C., 2010, *Aéroacoustique des cavités cylindriques*, thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille I.
- [138] MINCU, D.-C., MARY, I., REDONNET, S., LARCHEVÊQUE, L. & DUSSAUGE, J.-P., 2008, Numerical simulations of the unsteady flow and radiated noise over a cylindrical cavity, *AIAA Paper 2008-2917*.
- [139] MINCU, D.-C., MARY, I., REDONNET, S., MANOHA, E. & LARCHEVÊQUE, L., 2009, Numerical simulations of the sound generation by flow over mounted cylindrical cavities including wind tunnel installation effects, *AIAA Paper 2009-3314*.
- [140] MOHSENI, K. & COLONIUS, T., 2000, Numerical treatment of polar coordinate singularities, *J. Comput. Phys.*, **157**, p. 787–795.
- [141] MONGEAU, L., BEZEMEK, J.D. & DANFORTH, R., 1997, Pressure fluctuations in a flow-excited door gap cavity model, *SAE paper 971923*.
- [142] MORKOVIN, M.V. & PARANJPE, S.V., 1971, On acoustic excitation of shear layers, *Z. Flugwiss.*, **8/9**(2), p. 328–335.
- [143] NOMURA, Y., YAMAMURA, I. & INAWASHIRO, S., 1960, On the acoustic radiation from a flanged circular pipe, *Journal of the Physical Society of Japan*, **15**, p. 510–517.
- [144] NORRIS, A.N. & SHENG, I.C., 1989, Acoustic radiation from a circular pipe with an infinite flange, *J. Sound Vib.*, **135**(1), p. 85–93.

- [145] OSHKAI, P., GEVECI, M., ROCKWELL, D. & POLLACK, M., 2005, Imaging of acoustically coupled oscillations due to flow past a shallow cavity : effect of cavity length scale, *J. Fluids Struct.*, **20**, p. 277–308.
- [146] OSHKAI, P., ROCKWELL, D. & POLLACK, M., 2005, Shallow cavity flow tones : transformation from large- to small-scale modes, *J. Sound Vib.*, **280**, p. 777–813.
- [147] PAMIES, M., WEISS, P.E., GARNIER, E., DECK, S. & SAGAUT, P., 2009, Generation of synthetic turbulent inflow data for large eddy simulation of spatially evolving wall-bounded flows, *Phys. Fluids*, **21**(4), p. 045103–045118.
- [148] PARTHASARATHY, S.P., CHO, Y.I. & BACK, L.H., 1985, Sound generation by flow over relatively deep cylindrical cavities, *J. Acoust. Soc. Am.*, **78**(5), p. 1785–1795.
- [149] PÉRON, S. & BENOIT, C., 2011, Off-body overset adaptive Cartesian mesh method based on an octree approach, *AIAA Paper 2011-3050*.
- [150] PERRY, A.E. & MARUSIC, I., 1995, A wall-wake model for the turbulence structure of boundary layer. part 1. extension of the attached eddy hypothesis., *J. Fluid Mech.*, **298**(361).
- [151] PLUMBLEE, H.E., GIBSON, J.S. & LASSITER, L.W., 1962, A theoretical and experimental investigation of the acoustic response of cavities in an aerodynamic flow, U.S. Air Force, *Rep. WADD-TR-61-75*.
- [152] RAYLEIGH, J.W.S., 1945, *The theory of sound*, vol. II, Dover Publications, New York, revised édition.
- [153] RIBALDONE, E., CASTELLUCCIO, V. & MARCHESI, P., 2000, Experimental and numerical study of tonal noise in flow-excited cavities, *Seventh International Congress on Sound and Vibration*, Garmisch-Partenkirchen, Germany, 4-7 July.
- [154] ROCKWELL, D. & KNISELY, C., 1979, The organized nature of flow impingement upon a corner, *J. Fluid Mech.*, **93**, p. 413–432.
- [155] ROCKWELL, D. & KNISELY, C., 1980, Vortex-edge interaction : Mechanisms for generating low frequency components, *Phys. Fluids*, **23**(2), p. 239–240.
- [156] ROCKWELL, D., LIN, J.-C., OSHKAI, P., REISS, M. & POLLACK, M., 2003, Shallow cavity flow tone experiments : onset of locked-on states, *J. Fluids Struct.*, **17**, p. 381–414.
- [157] ROCKWELL, D. & NAUDASCHER, E., 1979, Self-sustained oscillations of impinging free shear layer, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, p. 67–94.
- [158] RODRIGUEZ VERDUGO, F., GUITTON, A., CAMUSSI, R. & GROTTADAUREA, M., 2009, Experimental investigation of a cylindrical cavity, *AIAA Paper 2009-3207*.
- [159] ROSHKO, A., 1955, Some measurements of flow in a rectangular cutout, NACA, *Tech. Note* 3488.
- [160] ROSSITER, J.E., 1964, Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds, *Aeronautical Research Council Reports and Memoranda*, Technical Report 3438.
- [161] ROWLEY, C.W. & WILLIAMS, D.R., 2006, Dynamics and control of high-Reynolds-number flow over open cavities, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **38**, p. 251–276.
- [162] ROWLEY, C.W., WILLIAMS, D.R., COLONIUS, T., MURRAY, R.M., MACMARTIN, D.G. & FABRIS, D., 2002, Model-based control of cavity oscillations, Part II : System identification and analysis, *AIAA Paper 2002-0972*.

- [163] ROWLEY, C.W., WILLIAMS, D.R., COLONIUS, T., MURRAY, R.M. & MACMYNOWSKI, D.G., 2006, Linear models for control of cavity oscillations, *J. Fluid Mech.*, **547**, p. 317–330.
- [164] SALVETTI, M.V. & BANERJEE, S., 1995, *A priori* tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large-eddy simulations, *Phys. Fluids*, **7**(11), p. 2831–2847.
- [165] SAUNIER, O., BENOIT, C., JEANFAIVRE, G. & LERAT, A., 2008, Third-order Cartesian overset mesh adaptation method for solving steady compressible flows, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **57**, p. 811–838.
- [166] SCHMITT, F.G., 2003, L'hypothèse de boussinesq est-elle une "approximation" ?, *16ème Congrès Français de Mécanique*, Nice, 1-5 sept.
- [167] SHANKAR, P.N. & DESHPANDE, M.D., 2000, Fluid mechanics in the driven cavity, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **32**, p. 93–136.
- [168] SHERER, S., 2004, Scattering of sound from axisymmetric source by multiple circular cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **115**(2), p. 488–496.
- [169] SHERER, S.E. & SCOTT, J.N., 2005, High-order compact finite-difference methods on general overset grids, *J. Comput. Phys.*, **210**, p. 459–496.
- [170] SITARAMAN, J., FLOROS, M., WISSINK, A. & POTSDAM, M., 2010, Parallel domain connectivity algorithm for unsteady flow computations using overlapping and adaptive grids, *J. Comput. Phys.*, **229**, p. 4703–4723.
- [171] SMAGORINSKY, J.S., 1963, General circulation experiments with the primitive equations : I. the basic experiment, *Mon. Weath. Rev.*, **91**, p. 99–163.
- [172] SMIRNOV, A., SHI, S. & CELIK, I., 2001, Random flow generation technique for large eddy simulation and particle-dynamics modeling, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **123**, p. 359–371.
- [173] SPALART, P.R., 1988, Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 1410$, *J. Fluid Mech.*, **187**, p. 61–98.
- [174] STEGEN, G.R. & KARAMCHETI, K., 1970, Multiple tone operation of edgetones, *J. Sound Vib.*, **12**(3), p. 281–284.
- [175] STOLZ, S. & ADAMS, N.A., 1999, An approximate deconvolution procedure for large-eddy simulation, *Phys. Fluids*, **11**(7), p. 1699–1701.
- [176] STOLZ, S. & ADAMS, N.A., 2003, Large-eddy simulation of high-Reynolds-number supersonic boundary layers using the approximate deconvolution model and rescaling and recycling technique, *Phys. Fluids*, **15**(8), p. 2398–2412.
- [177] STOLZ, S., ADAMS, N.A. & KLEISER, L., 2001, An approximate deconvolution model for large-eddy simulation with application to incompressible wall-bounded flows, *Phys. Fluids*, **13**(4), p. 997–1015.
- [178] TAM, C.K.W., 1976, The acoustic modes of a two-dimensional rectangular cavity, *J. Sound Vib.*, **49**, p. 353–364.
- [179] TAM, C.K.W., 1978, Excitation of instability waves in two-dimensional shear layer by sound, *J. Fluid Mech.*, **89**(2), p. 357–371.
- [180] TAM, C.K.W. & DONG, Z., 1994, Wall boundary conditions for high-order finite difference schemes in computational aeroacoustics, *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, p. 303–322. Voir aussi *AIAA Paper 94-0457*.

- [181] TAM, C.K.W. & DONG, Z., 1996, Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow, *J. Comput. Acous.*, **4**(2), p. 175–201.
- [182] TAM, C.K.W. & HU, F.Q., 2004, An optimized multi-dimensional interpolation scheme for computational aeroacoustics applications using overset grids, *AIAA Paper 2004-2812*.
- [183] TAM, C.K.W. & KURBATSKII, K.A., 2000, A wavenumber based extrapolation and interpolation method for use in conjunction with high-order finite difference schemes, *J. Comput. Phys.*, **157**, p. 588–617.
- [184] TAM, C.K.W. & WEBB, J.C., 1993, Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics, *J. Comput. Phys.*, **107**, p. 262–281.
- [185] TANG, Y.-P. & ROCKWELL, D., 1983, Instantaneous pressure fields at a corner associated with vortex impingement, *J. Fluid Mech.*, **126**, p. 187–204.
- [186] THEOFILIS, V., DUCK, P.W. & OWEN, J., 2004, Viscous linear stability analysis of rectangular duct and cavity flows, *J. Fluid Mech.*, **505**, p. 249–286.
- [187] VISBAL, M.R. & GAITONDE, D.V., 2002, On the use of higher-order finite-difference schemes on curvilinear and deforming meshes, *J. Comput. Phys.*, **181**, p. 155–185.
- [188] VISBAL, M.R., MORGAN, P.E. & RIZZETTA, D.P., 2003, An implicit LES approach based on high-order compact differencing and filtering schemes, *AIAA Paper 2003-4098*.
- [189] VREMAN, B., GEURTS, B. & KUERTEN, H., 1994, On the formulation of the dynamic mixed subgrid-scale model, *Phys. Fluids*, **6**(12), p. 4057–4059.
- [190] VREMAN, B., GEURTS, B.J. & KUERTEN, H., 1996, Comparison of numerical schemes in large-eddy simulation of the temporal mixing layer, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **22**, p. 297–311.
- [191] WANG, Z. J., 1995, A fully conservative interface algorithm for overlapped grids, *J. Comput. Phys.*, **122**, p. 96–106.
- [192] WINCKELMANS, G.S., LUND, T.S., CARATI, D. & WRAY, A.A., 1996, A priori testing of subgrid-scale models for the velocity-pressure and vorticity-velocity formulations, dans *Proceedings of the Summer Program*, p. 309–328. Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford Univ., CA.
- [193] WINCKELMANS, G.S., WRAY, A.A., VASILYEV, O.V. & JEANMART, H., 2001, Explicit-filtering large-eddy simulation using the tensor-diffusivity model supplemented by a dynamic Smagorinsky term, *Phys. Fluids*, **13**(5), p. 1385–1403.
- [194] WOOLEY, J.P. & KARAMCHETI, K., 1974, Role of jet stability in edgetone generation, *AIAA Journal*, **12**(11), p. 1457–1458.
- [195] YAO, H., COOPER, R.K. & RAGHUNATHAN, S., 2004, Numerical simulation of incompressible laminar flow over three-dimensional rectangular cavities, *ASME Journal of Fluids Engineering*, **126**(919-927).
- [196] YIN, J. & DELFS, J., 2001, Sound generation from gust-airfoil interaction using CAA-Chimera method, *AIAA Paper 2001-2136*.
- [197] ZANG, Y., STREET, R.L. & KOSEFF, J.R., 1993, A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows, *Phys. Fluids A*, **5**(12), p. 3186–3196.
- [198] ZIADA, S. & ROCKWELL, D., 1982, Oscillations of an unstable mixing layer impinging upon an edge, *J. Fluid Mech.*, **124**, p. 307–334.

CALCUL DIRECT DU RAYONNEMENT ACOUSTIQUE GÉNÉRÉ PAR UNE CAVITÉ CYLINDRIQUE SOUS UNE AILE D'AVION

RÉSUMÉ : Les sources de bruit d'origine aérodynamique sont multiples pour un avion. A l'atterrissage, la source prépondérante est le bruit dû à l'écoulement autour de la voilure, du fuselage et du train d'atterrissage. Sous l'impulsion d'Airbus, le projet AEROCAV (Aéroacoustique des cavités) s'intéresse au bruit généré par des cavités cylindriques qui se situent sous les ailes des avions pour évacuer un éventuel surplus de carburant. Elles émettent un rayonnement acoustique intense et très marqué en fréquence. Afin d'étudier les mécanismes de génération sonore, des simulations numériques du rayonnement acoustique dû à l'écoulement affleurant une cavité cylindrique sont réalisées par calcul direct du bruit. Ce type de simulation requiert des algorithmes numériques de haute précision afin de résoudre la turbulence fine échelle et le rayonnement acoustique associé de faible amplitude. Afin de gérer la géométrie complexe, une technique de recouvrement de maillages a été développée. Le point principal est le choix d'une interpolation compatible avec ces schémas de haute précision pour la communication entre les différentes grilles. Un travail spécifique est réalisé sur les méthodes de génération d'une condition d'entrée turbulente afin de reproduire de façon réaliste les conditions de la soufflerie. Deux Simulations des Grandes Échelles sont réalisées pour une cavité de diamètre et profondeur de 100 mm et une vitesse amont de 70 m/s, l'un avec la nouvelle condition d'entrée turbulente et l'autre sans. Ils permettent de reproduire les principales caractéristiques de l'écoulement et du champ acoustique mesurées durant la campagne expérimentale du projet AEROCAV.

Mots clés : aéroacoustique, recouvrement de maillages, cavité cylindrique, calcul direct du bruit, Simulation des Grandes Échelles.

DIRECT COMPUTATION OF THE NOISE GENERATED BY THE FLOW OVER A CYLINDRICAL CAVITY OVER A WING

ABSTRACT : Aerodynamically generated noise sources are multiple for an airplane. During the landing phase, airframe noise is the main source. At the instigation of Airbus, the project AEROCAV (Aeroacoustics of cavities) deals with the noise produced by cylindrical burst-disk cavities located under the wings. An intense tonal noise is emitted. Numerical simulations of the noise generated by these cylindrical cavities are performed to investigate the noise source mechanisms by using Direct Noise Computation. Such simulations require high-accuracy numerical algorithms in order to compute the fine-scale turbulence together with the very weak associated noise radiation. An overset grid method is developed to tackle the complex geometry of interest. The main point is to choose an interpolation method preserving the high-accuracy of the numerical schemes in order to ensure the communication between the different grids. Turbulent inflow methods based on synthetic turbulence, recycling techniques, or bypass transition are investigated to reproduce the flow conditions of the wind tunnel. Two Large Eddy Simulations are conducted for a cavity with a diameter and a height of 100 mm, and a freestream velocity of 70 m/s, with the turbulent inflow method for one of these computations. The characteristics of the flow and noise, as measured in the AEROCAV experimental campaign, are satisfactorily reproduced by the direct noise computations.

Keywords : aeroacoustics, overset grids, cylindrical cavity, direct computation of noise, Large Eddy Simulation.