



HAL
open science

Théorie algébrique des systèmes à évènements discrets

Pierre Moller

► **To cite this version:**

Pierre Moller. Théorie algébrique des systèmes à évènements discrets. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1988. Français. NNT: . pastel-00654163

HAL Id: pastel-00654163

<https://pastel.hal.science/pastel-00654163>

Submitted on 21 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre:

THESE

présentée à

**L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES MINES DE PARIS**

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Spécialité :

MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

par

Pierre MOLLER

Sujet de la thèse :

**THEORIE ALGEBRIQUE DES
SYSTEMES A EVENEMENTS DISCRETS**

Soutenue le 21 Décembre 1988 devant le jury composé de :

MM.	Jean-Michel LASRY	Président
	Jean-Pierre QUADRAT	Rapporteurs
	Christophe REUTENAUER	
	Albert BENVENISTE	Examineurs
	Guy COHEN	
	Michel VIOT	

RÉSUMÉ

Considérons les systèmes à événements discrets qui sont modélisables par des réseaux de Pétri du type "graphes d'évènements temporisés". Ils ont un comportement optimal (fonctionnement au plus tôt) qui peut-être calculé sans simulation par un système dynamique qui est linéaire dans l'algèbre des diodes (max,+) ou (min,+).

Le comportement asymptotique d'un tel système à événements discrets est cyclique et les caractéristiques de ce cycle (période, délai, motif) sont analysables par un calcul de valeur propre sur la matrice de dynamique. À partir de cette formulation linéaire, une représentation externe (fonction de transfert) peut-être obtenue grâce à un calcul formel sur des séries à coefficients dans les diodes, la fonction de transfert d'un tel système est rationnelle au sens des diodes et est factorisable en une expression finie de polynômes.

MOTS CLEFS

Systèmes à événements discrets, réseaux de Pétri, graphes d'évènements temporisés, évaluation de performances, algèbre linéaire (max,+), semi-groupes ordonnés, séries rationnelles.

ISBN 2 - 7261 - 0561 - 0



*Je tiens à remercier tout particulièrement Guy COHEN,
Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT qui, en m'intégrant dans leur équipe,
m'ont donné la chance de travailler sur un sujet original et de goûter aux joies
du défrichage des terrains vierges.*

*Nombreux sont ceux qui, en manifestant leur intérêt pour ce travail, ont
contribué à entretenir la motivation nécessaire à ce défrichage ...
Albert BENVENISTE, Jean-Michel LASRY, Christophe REUTENAUER,
Michel MINOUX, Didier DUBOIS, Michel FLIESS.
Qu'ils en soient sincèrement remerciés.*

*Enfin je tiens à remercier tous les chercheurs et stagiaires que j'ai cotoyés à
l'INRIA , où j'ai particulièrement apprécié l'ambiance de travail.*

A handwritten signature in black ink, consisting of a large, stylized initial 'P' followed by a series of loops and a long horizontal stroke extending to the right.

A Isabelle et Guillaume.

Théorie algébrique des systèmes à événements discrets

Introduction

1) Introduction aux systèmes à événements discrets.

L'étude mathématique des systèmes dynamiques s'est développée par l'analyse de paramètres physiques (sciences de l'ingénieur, mécanique, biologie) ou d'autres mesures quantitatives (agrégats économiques...) ou analytiques (prix, taux ...). Ces variables sont destinées à représenter l'état d'un système et son évolution en fonction du temps. Dans les théories usuelles, ce temps est une variable exogène à l'objet étudié.

Cependant, de nombreux problèmes de modélisation et d'optimisation nécessitent de considérer le temps comme une mesure endogène. Plus précisément, il intervient par les dates de certains événements ou la durée de certaines tâches caractéristiques du système. Le temps n'est plus une échelle de référence mais devient l'objet de l'analyse.

Cette problématique se rencontre dans de nombreux secteurs industriels et économiques, et est usuellement associée à la recherche opérationnelle:

- productique (ordonnancement, ateliers flexibles),
- programmation informatique (optimisation de code),
- architecture informatique (modélisation des diverses formes de parallélisme)
- contrôle de procédés discontinus (chime fine, pharmacie),
- analyse des organisations (modélisation des systèmes de décision)
- logistique,
- etc...

La théorie des systèmes à événements discrets est une nouvelle approche, qui ne se limite pas à une formalisation des contraintes, mais propose une analyse de la dynamique de la diffusion de ces contraintes pour permettre le calcul des dates des événements caractéristiques du système.

Pourquoi une théorie de systèmes? L'étude d'évènements nécessite une analyse globale des interactions de tous les évènements considérés dans le problème posé. Ces interactions peuvent être de natures très diverses:

- corrélations,
- contraintes de précedence logique (causalité),
- contraintes de temporisation (durée des taches),
- synchronisations,
- exclusions,
- partage de ressources.

Pourquoi des évènements discrets ? Il s'agit d'étudier des dates caractéristiques qui souvent correspondent à des ruptures de continuité ou des changements de modes de la dynamique physique qui gouverne les systèmes. Ce sont ces évènements qui sont discrets (au sens mathématique de la théorie de la mesure) et auxquels on s'intéresse.

Par exemple, dans un atelier flexible, chaque phase de production (opération d'une machine) pourra être décrite par la mécanique mathématique usuelle. Les évènements tels que le changement de pièce sur une machine ou le changement de programme d'un robot, se traduisent par une rupture de continuité des équations de mécanique ou même par un changement de modèle.

Le système à évènements discrets est souvent une représentation d'un niveau macroscopique, supervisant d'autres systèmes qui relèvent des méthodes quantitatives usuelles de l'ingénieur. Cependant, l'objet de cette nouvelle théorie n'est pas d'intégrer dans un formalisme mathématique unifié tous les modèles associés aux divers constituants du système. Il s'agit seulement de décrire la chronologie des actions et interactions de ces sous-systèmes.

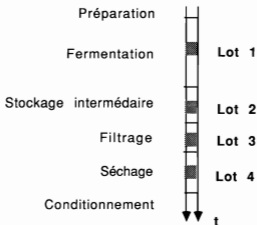
Pour illustrer l'intérêt d'une telle modélisation macroscopique, reprenons l'exemple de l'atelier flexible. L'optimisation des performances d'un robot ou d'une machine tournante peut permettre le gain de quelques pourcents de productivité. Cet investissement important (conception nouvelle ou achat) est totalement inutile si la machine optimisée n'est pas "menante" (dont la disponibilité est critique pour la production) et s'il subsiste d'autres goulots d'étranglement.

L'analyse de l'atelier, en tant que système à évènements discrets, permet d'identifier quels sont les blocages à éliminer, soit par un meilleur ordonnancement (niveau macroscopique), soit par un investissement ciblé sur la ou les machines critiques (niveau "local").

2) Application, exemple en chimie.

En chimie fine ou en pharmacie, la production ne s'effectue en général pas par un procédé continu mais par des séquences de production qui correspondent à des lots de produit qui circulent dans l'installation.

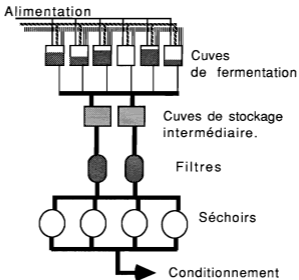
Figure 1: Exemple théorique de séquence d'opérations dans une production par fermentation.



Plusieurs lots, à des stades différents de production peuvent être présents dans l'unité. Il ne se pose aucun problème d'ordonnancement si l'architecture de l'installation est calquée sur la séquence des réactions chimiques. Cette solution est strictement analogue à celle de la chaîne de production en mécanique, ou à celle d'une architecture "pipeline" en informatique.

Déjà, sans remettre en cause l'architecture séquentielle de l'unité de production, on peut introduire une *forme de parallélisme* en multipliant les appareils qui correspondent à des phases de production longues et donc déterminantes. Dans l'exemple donné, c'est en général la fermentation qui dure le plus longtemps : quelques dizaines d'heures contre quelques heures pour les autres opérations et quelques minutes pour le conditionnement.

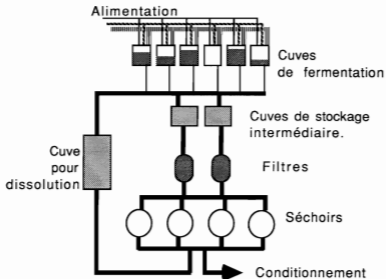
Figure 2: Architecture de production "analogique"
avec "parallélisme"



Cette architecture de type "pipeline" n'est pas toujours optimale du point de vue économique lorsque le volume de production ne justifie pas un "en cours" important ou lorsque certains appareils (stockages, décanteurs) peuvent être utilisés à différents moments de la fabrication.

Par exemple, il est souvent nécessaire d'améliorer la pureté du produit en procédant à une redissolution (dans un solvant non contaminé par la fermentation) du produit sec et à un nouveau filtrage. Comme la phase de filtrage est courte par rapport à la phase de fermentation, on peut vouloir réutiliser les filtres et les stockages intermédiaires plutôt que de dupliquer la partie "filtration" de l'unité de production.

Figure 3: Architecture de production modifiée.



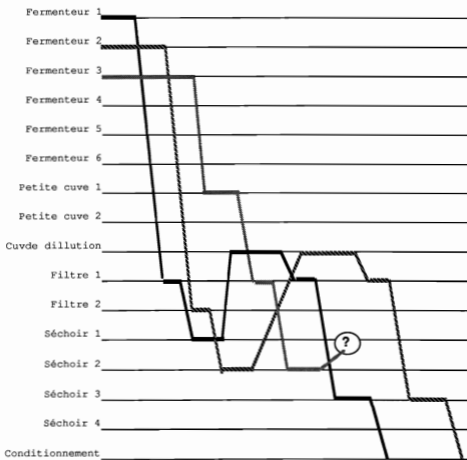
L'étude de l'occupation des filtres et du dimensionnement de ceux-ci ainsi que des cuves de stockage intermédiaire pose rapidement des problèmes combinatoires, qui sont du niveau de l'architecture de l'unité de production et pas de celui du procédé chimique mis en œuvre.

Le système à événements discrets apparaît bien ici comme un macro modèle, décrivant l'interaction de sous-systèmes qui sont étudiés par les méthodes quantitatives plus usuelles: calcul des appareils chimiques. Il y a deux niveaux d'optimisation complémentaires.

Les gains de productivité obtenus par une bonne analyse de ce système à événements discrets sont en général bien supérieurs à ceux que l'on obtiendrait par un effort (financier) comparable d'optimisation du procédé physico-chimique.

Traditionnellement, ces problèmes sont étudiés à l'aide de diagrammes de type "chemin de fer", tels que celui de la figure 4. Dans cet exemple, il apparaît un blocage dans le traitement du lot produit par le fermenteur 3 pour lequel le stockage tampon dans lequel s'effectue la dissolution n'est pas disponible. Il faut retarder la production ou doubler l'appareillage de dissolution.

Figure 4: Analyse de l'occupation des appareils par diagramme "chemin de fer"



Les contraintes d'exploitation font que l'on préfère établir un régime de production cyclique, qui permette d'éviter de recalculer en permanence l'ordonnancement des tâches. L'idéal est d'obtenir un cycle d'exploitation qui soit synchrone avec le rythme du travail humain de 24 heures décomposées en 3 X 8. Nous verrons que la théorie des diodes permet très efficacement d'analyser l'établissement d'un comportement cyclique avec ses caractéristiques (période, séquence type, transitoire avant établissement) dans un système à événements discrets.

D'autre part, comme pour les ateliers flexibles en mécanique, on tend de plus en plus à concevoir des unités de production chimique polyvalentes qui fournissent selon les campagnes de production des variétés différentes d'une même famille chimique. Dans ce cas, il est impossible de respecter dans l'architecture de l'atelier la séquence des réactions chimiques. Dans la définition d'une campagne de production apparaissent alors des conflits dans l'affectation des appareils, qui posent des problèmes combinatoires.

3) Mathématiques des systèmes à événements discrets.

Presque toutes les approches des systèmes à événements discrets commencent par des représentations graphiques, qui sont en général issues de la recherche opérationnelle. Les modèles graphiques utilisés peuvent être grossièrement classés en trois familles, selon le type de contrainte qu'ils représentent le mieux.

- a) Les graphes modélisant en priorité les synchronisations et contraintes de précédences entre événements. C'est le cas des graphes PERT, et de leurs généralisations qui admettent les cycles.
- b) Les représentations des degrés de liberté du système (non-déterminisme), qui sont à l'origine du caractère combinatoire des trajectoires possibles du système. C'est le cas des automates.
- c) Les diagrammes qui décrivent l'occupation des ressources du système. Les graphes de type "chemin de fer" en sont un exemple.

L'outil graphique le plus complet semble être le réseau de PETRI, plus particulièrement le réseau de PETRI temporisé. En effet, ce modèle permet d'intégrer dans le même formalisme graphique la représentation des trois problèmes décrits ci-dessus, la précedence (et la synchronisation), le non-déterminisme, le conflit d'accès aux ressources.

Figure 5: Réseau de PETRI
associé à l'atelier de fermentation de la figure 3
"au repos"

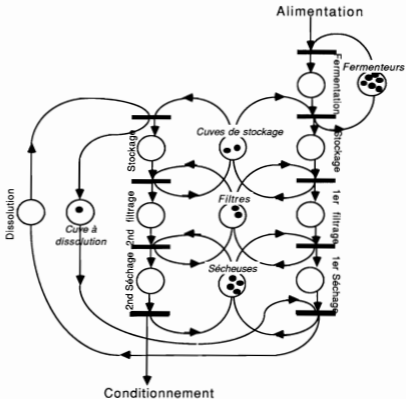
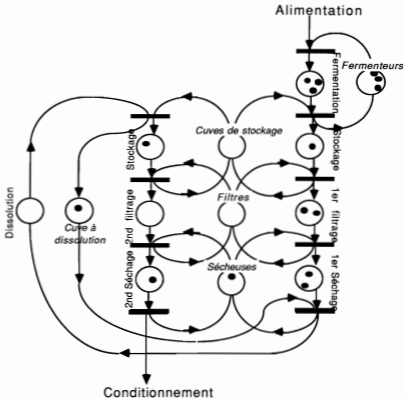


Figure 6: Réseau de PETRI
 associé à l'atelier de fermentation de la figure 3
 "en production"



Les modèles graphiques sont agréables pour formaliser de manière synthétique un système réel, mais ils ne permettent pas des calculs prédictifs de son comportement. La théorie des réseaux de PETRI établit des invariants ou des bornes sur les quantités de jetons (ressources) qui peuvent occuper une place, mais offre peu d'outils d'analyse du comportement dynamique des réseaux.

L'analyse quantitative d'un système à événements discrets, lorsqu'il a été formalisé sous forme graphique, réseau de PETRI ou autre, peut être effectuée par des méthodes que l'on peut classer en trois familles.

d) La simulation est la technique la plus courante. De nombreux logiciels de ce type sont disponibles sur le marché, notamment en productique. Cependant, même si la simulation du fonctionnement d'un système à événements discrets donne des résultats quantitatifs, il ne s'agit pas d'une véritable méthode analytique dans la mesure où on obtient rarement des informations structurelles.

e) L'optimisation combinatoire vise à déterminer une organisation optimale du système indépendamment des aléas de fonctionnement. Pour cela, il faut que le système ait été formalisé de manière à ce que les degrés de liberté dont on dispose soient identifiés, et que l'objectif soit quantifié. En général, les systèmes à événements discrets conduisent à des problèmes d'optimisation en nombres entiers extrêmement difficiles, et souvent np-complets.

f) Les méthodes probabilistes sont destinées à calculer la probabilité d'occurrence de chaque événement caractéristique en fonction du temps. Ces méthodes permettent la prise en compte des contraintes structurelles du système ainsi que des aléas de son fonctionnement. C'est l'objet de la théorie des files d'attente. En général, les calculs nécessitent d'être complétés par des simulations.

4) *Une approche algébrique basée sur les dioïdes.*

Dans le rapport INRIA n° 191, Guy COHEN, Jean-Pierre QUADRAT, Michel VIOT et Didier DUBOIS ont montré comment l'analyse d'un atelier flexible pouvait être effectuée à l'aide d'un système dynamique algébrique.

Le point essentiel de ce travail était de mettre en valeur la structure linéaire du système d'équations lorsqu'il est écrit dans un dioïde dont les opérations sont max et + (l'addition usuelle). Cette formulation linéaire a permis de ramener le problème de l'évaluation du comportement asymptotique à un calcul de valeur propre.

Le mot diïode désigne une structure algébrique analogue à un anneau, mais dont elle ne possède que les propriétés combinatoires, sans la régularité de la première loi. Dans le diïode utilisé, l'opération \max représente la contrainte de synchronisation et l'addition usuelle sert à représenter les décalages temporels.

Cette approche proposée par COHEN et al. en 1983 se devait d'être poursuivie et confrontée aux outils de modélisation graphiques dont l'usage commençait à se généraliser, les réseaux de PETRI. Cet indispensable interface avec les outils graphiques devait ensuite être complété par une études des propriétés algébriques des diïodes dont la première loi ("addition") dérive d'une relation d'ordre.

Cela a conduit à une synthèse entre le formalisme combinatoire des diïodes et l'algèbre des treillis (plus précisément des semi-groupes ordonnés en treillis) qui apporte la plupart des théorèmes de résolution d'équations énoncés dans la partie A de cette thèse.

5) Les résultats nouveaux

Le résultat central est le théorème 10.4.1: il existe une classe de réseaux de PETRI temporisés, les graphes d'événements temporisés, dont le comportement temporel peut être décrit de manière exacte par un système dynamique récurrent dont la structure est linéaire au sens des diïodes.

En fait, il y a deux représentations linéaires possibles pour chaque graphe d'événements temporisé. La première formulation calcule le temps physique (dates des événements) comme fonction du temps logique (numérotation des événements) et utilise le diïode $(\max, +)$. La seconde formulation calcule le temps logique comme fonction du temps physique, et utilise le diïode $(\min, +)$.

Ces deux formulations sont duales et strictement équivalentes: aucune n'apporte plus d'informations que l'autre. Les matrices et coefficients sont directement issus de la topologie et de la temporisation du réseau de PETRI ainsi que de son marquage initial.

Le second apport de cette thèse est l'établissement d'une représentation externe (fonction de transfert) d'un graphe d'événements temporisé, à partir de la forme linéaire. Cela a nécessité la résolution de quelques difficultés techniques liées à l'algèbre des diïodes.

La définition de la fonction de transfert d'un tel système est possible modulo certaines précautions dues aux propriétés du calcul formel sur les polynômes dans les dioïdes. Comme dans beaucoup de sous-anneaux, le calcul polynomial formel n'est pas isomorphe au calcul sur les fonctions polynômes. De plus, il faut travailler avec des séries croissantes ce qui a nécessité la définition d'une structure quotient appropriée.

Tout système possède donc deux fonctions de transfert canoniques duales, qui sont rationnelles au sens des dioïdes. Elles peuvent être factorisées en une expression rationnelle finie à l'aide de polynômes.

Ce dernier point est d'une grande importance pratique, car la représentation externe permet une approche modulaire (diviser et conquérir) des graphes d'événements, alors que, les réseaux de PERTI généraux ne peuvent pas toujours être décomposés en sous-réseaux autonomes. Pour effectuer des analyses de systèmes à événements discrets, on peut constituer des bibliothèques de structures types qu'il suffit d'assembler par combinaisons de leur fonctions de transfert.

Les opérations algébriques nécessaires sont les opérations rationnelles qui correspondent à la mise en série, la mise en parallèle et la mise en contre-réaction. Ce calcul rationnel pourrait être réalisé par un outil informatique de manipulation formelle qui utilise la factorisation finie des séries.

6) Exemple et limites d'application des dioïdes.

La classe des graphes d'événements, qui peuvent être traduits en systèmes linéaires dans les dioïdes, correspond aux réseaux de PETRI qui modélisent uniquement les problèmes de synchronisation.

Dans l'exemple de la figure 5, le réseau n'est pas un graphe d'événement. Ceci est dû au conflit d'allocation des appareils de stockage-filtrage-séchage qui n'est pas résolu dans le modèle. Sur le réseau de PETRI, cela se traduit par un "conflit structurel"

Pour pouvoir appliquer le calcul linéaire dans les dioïdes, il faut réduire la complexité combinatoire du problème, en effectuant des choix d'allocation de ressources dans le système.

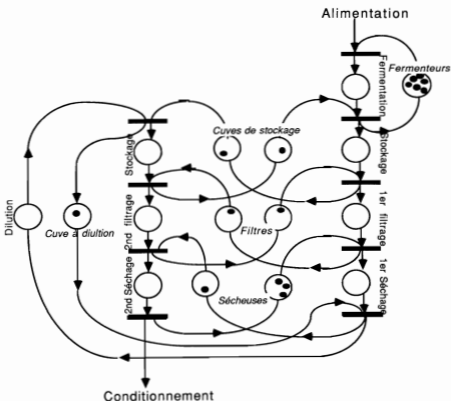
L'algèbre linéaire dans les dioides, et le calcul formel qui en est dérivé, ne permettent donc pas (pas encore?) une optimisation totale du système par le calcul.

Il faut procéder à des itérations "choix d'affectation / évaluation".

Le progrès se situe dans la précision et la facilité avec laquelle on évalue une méthode d'affectation des ressources, sans recours à la simulation.

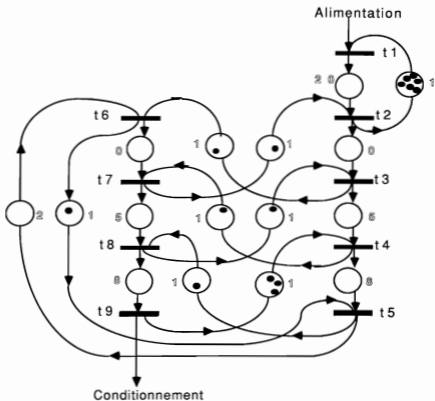
Dans l'exemple proposé, on peut tester une affectation cyclique des ressources, modélisée dans le graphe comme dans l'exemple de la figure 7.

Figure 7:
Réseau de PETRI sans "conflit structurel"



Donnons les équations qui décrivent le fonctionnement de ce réseau à partir d'une temporisation des taches qui est indiquée sur la figure 8.

Figure 8: Graphe d'évènements temporisé.



Notons X_n^k la date de n-ième activation de la transition t_k .

On obtient en notant U les entrées et V les sorties, le système suivant, dont le caractère linéaire apparaît clairement parcequ'il est écrit dans le dioïde $(\text{Max}, +)$.

Système d'équations associé au réseau de la figure 9.

$$\begin{aligned}
 X^1_n &= 1.X^2_{n-6} \oplus U_n \\
 X^2_n &= 20.X^1_n \oplus 1.X^7_{n-1} \\
 X^3_n &= 0.X^2_n \oplus 1.X^8_{n-1} \\
 X^4_n &= 5.X^3_n \oplus 1.X^9_{n-3} \\
 X^5_n &= 8.X^4_n \oplus 1.X^6_{n-1} \\
 X^6_n &= 2.X^5_n \oplus 1.X^3_{n-1} \\
 X^7_n &= 0.X^6_n \oplus 1.X^4_{n-1} \\
 X^8_n &= 5.X^7_n \oplus 1.X^5_{n-1} \\
 X^9_n &= 4.X^8_n \\
 V_n &= X^9_n
 \end{aligned}$$

Par les méthodes développées dans la partie A, on peut résoudre ce système implicite en calculant la solution minimale, qui correspond au fonctionnement "au plus tôt", c'est à dire optimal. Celui-ci est caractérisé par une fonction de transfert qui est

$$\Phi = 48.(21z)^*$$

où

$(21z)^*$ est le développement formel de $1/(0 \oplus 21z)$.

Cela signifie que le fonctionnement du système, compte tenu du choix d'affectation des ressources qui a été introduit sous forme graphique par rapport au réseau initial, est particulièrement peu performant puisqu'il a un fonctionnement propre cyclique de 1 sortie par 21 heures !

7 Problèmes ouverts.

Dans l'état des connaissances que représente cette thèse, trois axes de recherche apparaissent intéressants pour le futur.

a) Il n'a pas été possible d'établir une notion de rang satisfaisante dans l'algèbre linéaire construite avec les dioïdes. Il manque une mesure de la complexité d'un système linéaire qui donne une information analogue à celle du rang en algèbre usuelle.

b) Le fait d'avoir deux représentations duales et équivalentes d'un même système a fait apparaître que l'information traitée est une relation entre temps logique et temps physique. On doit pouvoir mieux intégrer ces deux notions dans un dioïde unique "bidimensionnel".

c) Le point qui semble le plus difficile est l'extension de cet outil algébrique à la mise en équations de réseaux de PETRI plus généraux que les graphes d'événements. Il s'agit d'intégrer le non-déterminisme "structurel", c'est à dire le "ou logique" dans des équations, ce qui est indispensable si on veut utiliser les dioïdes pour résoudre par le calcul les problèmes d'affectation de ressources.

Le point c reviendrait à effectuer une synthèse entre cette théorie et les langages formels décrivant le comportement des automates. Les automates correspondent en effet à une sous-classe des réseaux de PETRI, les machines à états, qui à l'inverse des graphes d'événements ne modélisent que le non-déterminisme.

Les problèmes d'ordonnement np -complets qui apparaissent en optimisation combinatoire et dans les réseaux de PETRI généraux ne seront probablement pas miraculeusement résolus par cette nouvelle approche algébrique. Le progrès que l'on peut en attendre est de permettre par un calcul systématique une réduction du problème d'ordonnement au noyau irréductible des degrés de libertés réels du système, qui subsistent lorsque toutes les contraintes de synchronisation sont prises en compte.

Table des Matières.

Partie A: Environnement algébrique.

Chapitre 1:

Opérations dérivées de la relation d'ordre dans un treillis.

1.1	Opérations associées à une relation d'ordre.	1-1
1.2	Treillis et treillis complets.	1-5
1.3	Propriétés combinatoires de la max-somme et de la min-somme.	1-7
1.4	Complétion d'un treillis et convention sur la relation d'ordre.	1-9
1.5	Fonctions croissantes, compatibles et continues.	1-10
1.6	Variétés de vocabulaires.	1-12
1.7	Propriétés des bijections croissantes, compatibles et continues.	1-13
1.8	Quasi-inverse d'une fonction max ou min-continue et applications.	1-14
1.9	Points fixes de fonctions entre treillis.	1-17
1.10	Opération étoile.	1-19
1.11	Conclusion.	1-20

Chapitre 2:

Dioides, approche combinatoire.

2.1	Monoïdes et dioides.	2-1
2.2	Sous-dioides et homomorphismes de dioides.	2-3
2.3	Conventions de notation.	2-4
2.4	Dioides des endomorphismes d'un monoïde.	2-4
2.5	Construction de dioides complexes.	2-5
2.6	Calcul matriciel dans les dioides.	2-9
2.7	Interprétation graphique des matrices carrées.	2-8
2.8	Séries formelles dans les dioides.	2-9
2.9	Anneaux et dioides ordonnés.	2-12
2.10	Exemple qui est presque un dioides.	2-14
2.11	Conclusion.	2-15

Chapitre 3:**Etude des dioïdes ordonnés.**

3.1	Introduction aux dioïdes ordonnés.	3-1
3.2	Règles de calcul utiles dans les dioïdes ordonnés.	3-2
3.3	Inversion de l'ordre.	3-4
3.4	Equations et simplifications dans les dioïdes ordonnés.	3-4
3.5	Premier exemple: l'algèbre de BOOLE.	3-7
3.6	Dioïdes utiles.	3-7
3.7	Quelques propriétés d'isomorphismes.	3-9
3.8	Quelques exemples de calculs.	3-10
3.9	Equation algébrique du premier degré.	3-11
3.10	Complétion d'un semi-groupe ordonné.	3-12
3.11	Dioïdes ordonnés complets.	3-15
3.12	Autre produit de fonctions à valeurs dans un dioïde ordonné complet.	3-17
3.13	Pseudo-division dans un dioïde ordonné complet.	3-19
3.14	Pseudo division et théorie des langages.	3-21
3.15	Dioïdes inversibles.	3-22
3.16	Isomorphismes entre dioïdes ordonnés.	3-23
3.17	Fonctions polynômes et ppolynômes formels.	3-24

Chapitre 4:**Moduloïdes sur un dioïde ordonné.**

4.1	Généralités sur les moduloïdes ordonnés.	4-1
4.2	Ordre sur les scalaires et les vecteurs.	4-2
4.3	Projection scalaire.	4-5
4.4	Parallélisme et produit scalaire.	4-11
4.5	Equation linéaire dans les moduloïdes ordonnés.	4-13
4.6	Parties génératrices d'un sous-moduloïde.	4-19
4.7	Indépendance linéaire dans les moduloïdes ordonnés.	4-20
4.8	Quelques propriétés de l'indépendance.	4-20
4.9	Autre approche.	4-25
4.10	Le problème de la notion de base.	4-25
4.11	Comparaison de diverses notions de rang.	4-27
4.12	Familles génératrices non-redondantes et minimales.	4-30
4.13	Un contre-exemple dans le cas des combinaisons linéaires infinies.	4-32

Chapitre 5:**Propriétés de matrices dans les dioïdes ordonnés.**

5.1	Définitions préliminaires.	5-1
5.2	Bidéterminant et permanent.	5-2
5.3	Le théorème de CAILEY-HAMILTON.	5-5
5.4	Matrices et opération étoile.	5-10
5.5	Valeurs propres.	5-12
5.6	Valeurs propres d'une matrice irréductible à coefficients distincts de ∞ .	5-14
5.7	Etude du moduloïde des vecteurs propres d'une matrice irréductible.	5-17
5.8	Suite des puissances d'une matrice.	5-18

Chapitre 6:**Opérations et parties rationnelles dans un dioïde ordonné.**

6.1	Clôture rationnelle et parties rationnellement closes.	6-1
6.2	Propriétés particulières dans le cas commutatif.	6-3
6.3	Opérations rationnelles et calcul matriciel.	6-5
6.4	Clôture rationnelle et représentation d'un élément rationnel.	6-7
6.5	Minimalité de la représentation d'un élément rationnel.	6-12
6.6	Application au cas des séries formelles.	6-13
6.7	Cas des séries en variables commutatives.	6-15
6.8	Conclusion.	6-16

Chapitre 7:**Séries formelles utiles à l'analyse des systèmes à événements discrets.**

7.1	Extension de la définition des séries.	7-1
7.2	Propriétés de l'étoile d'une série.	7-3
7.3	Séries croissantes, caractérisation et propriétés.	7-3
7.4	Congruence modulo z^* et $(\delta^{-1})^*$	7-6
7.5	Polynômes croissants.	7-8
7.6	Représentation minimale modulo z^* d'une série en z .	7-9
7.7	Représentation minimale modulo $(\delta^{-1})^*$ d'une série en δ .	7-12
7.8	Dualité entre les séries en z et les séries en δ .	7-13
7.9	Séries croissantes et dualité.	7-15
7.10	Propriétés algébriques de la transformée de CASPI-HALBWACHS.	7-18
7.11	Résumé des règles de calcul.	7-21

7.12	Structure des séries rationnelles sur DZC et DZD.	7-22
7.13	Cas de l'étoile d'un polynôme.	7-23
7.14	Minimalité de l'écriture d'une série rationnelle.	7-25
7.15	Ecriture réduite et produit des séries.	7-30
7.16	Séries rationnelles croissantes en z .	7-31
7.17	Application à certaines matrices.	7-34
7.18	Cas des séries croissantes en δ .	7-34
7.19	Séries rationnelles croissantes positives en z .	7-37

Partie B: Application aux systèmes à événements discrets.

Chapitre 8:

Description quantitative d'un système à événements discrets.

8.1	Évènements et contraintes.	8-1
8.2	Dates logiques et dates absolues.	8-2
8.3	Description quantitative des suites d'évènements.	8-3
8.4	Suites de dates.	8-4
8.5	Exemples de dateurs et compteurs.	8-6
8.6	Conditions initiales, systèmes au fonctionnement fini.	8-6
8.7	Exemples de dateurs et compteurs.	8-7
8.8	Exemples fondamentaux de dateurs et compteurs.	8-9
8.9	Dualité entre les dateurs et compteurs associés à un même évènement.	8-10
8.10	Interprétation graphique du lien entre compteurs et dateurs.	8-11

Chapitre 9:

Description algébrique d'un réseau de PETRI temporisé.

9.1	Réseaux de PETRI.	9-1
9.2	Analyse qualitative et intérêt des réseaux de PETRI.	9-2
9.3	Les quatre types de nœuds fondamentaux.	9-4
9.4	Réseaux de PETRI temporisés et systèmes à événements discrets.	9-7
9.5	Fonctionnement au plus tôt, au plus tard et non-déterminisme.	9-8
9.6	Les graphes d'évènements P-temporisés.	9-14

Chapitre 10:

Equations entre dateurs d'un graphe d'évènements temporisé.

10.1	Modélisation par suite de dates.	10-1
10.2	Marquage initial disponible à une date finie.	10-2
10.3	Système d'équations décrivant un réseau complexe.	10-3
10.4	Théorème de représentation des graphes d'évènements P-temporisés.	10-4
10.5	Le problème du blocage des réseaux.	10-7
10.6	Manipulation des formes d'état.	10-8
10.7	Représentation externe.	10-9
10.8	Comportement asymptotique du système.	10-14
10.9	Dates absolues et délais.	10-17

Chapitre 11:**Equations entre compteurs d'un graphe d'évènements temporisé.**

11.1	Compteurs associés à un graphe d'évènements.	11-1
11.2	Choix des notations.	11-3
11.3	Le théorème de représentation dans le cas des compteurs.	11-4
11.4	Représentation externe entre compteurs.	11-7
11.5	Comportement asymptotique des compteurs.	11-8

Chapitre 12:**Manipulations élémentaires sur les systèmes et la complexité.**

12.1	Assemblage de sous-systèmes.	12-1
12.2	Complexité de la réponse impulsionnelle d'un système.	12-4

Chapitre 13:**Systèmes en temps rétrograde.**

13.1	Contraintes portant sur les sorties.	13-1
13.2	Compteurs en temps rétrograde.	13-3
13.3	Les quatre systèmes associés à un réseau de PETRI.	13-4

Chapitre 1

Opérations dérivées de la relation d'ordre dans un treillis.

Ce chapitre est une brève introduction à la théorie des treillis. Il n'est pas destiné à énoncer des théorèmes difficiles ou nouveaux sur ces structures, mais à présenter les concepts et les résultats auxquels nous ferons appel par la suite. Ceux-ci seront formulés à l'aide de notations différentes de celles utilisées habituellement dans la théorie des treillis. Le but de ce changement de notations est de faire mieux apparaître les propriétés combinatoires des opérations associées à l'ordre. Ces propriétés combinatoires sont en effet à la base même du concept de dioïde, que nous introduirons au chapitre suivant. En fait, dans cette thèse, nous n'utiliserons que deux théorèmes de la théorie des treillis: la construction de la quasi-inverse d'une fonction croissante et le théorème de point fixe. Ce dernier résultat jouera un rôle essentiel dans notre théorie.

La référence de base sur la théorie des treillis est l'ouvrage de G. BIRKHOFF [TREIL1], duquel la plupart des démonstrations sont extraites, modulo le changement de notation que nous avons annoncé. Nous invitons le lecteur à consulter cet ouvrage, pour y trouver les démonstrations de propriétés élémentaires des treillis que nous ne montrerons pas.

1.1 Opération associée à une relation d'ordre.

Soit S un ensemble muni d'une relation d'ordre, pour laquelle deux éléments possèdent toujours un plus petit majorant commun. Il est alors possible de définir une opération interne sur S , laquelle à deux éléments associe leur plus petit majorant commun. Les propriétés de cette opération et celle de la relation d'ordre sont liées, comme l'indique le théorème 1.1

Théorème 1.1.1:

Soit S un ensemble muni d'une loi de composition interne notée \oplus

La relation binaire notée \geq , définie pour x et y appartenant à S , par

$$x \geq y \text{ si et seulement si } x \oplus y = x.$$

vérifie

$$\geq \text{ est reflexive si et seulement si } x \oplus x = x \text{ pour tout } x \text{ dans } S; \quad (1)$$

$$\geq \text{ est transitive si } \oplus \text{ est associative}; \quad (2)$$

$$\geq \text{ est antisymétrique si } \oplus \text{ est commutative}. \quad (3)$$

Les conditions nécessaires dans (2) et (3) sont fausses.

Si pour tout x ,

$$x \oplus x = x$$

L'opération \oplus sera dite idempotente.

Démonstration du théorème 1.1.1:

Il est évident que $x \geq x$ équivaut à $x \oplus x = x$, ce qui prouve (1).

Supposons la loi \oplus associative, comme

$$x \geq y \text{ et } y \geq z \text{ signifie } x \oplus y = x \text{ et } y \oplus z = y$$

nous obtenons

$$x \oplus z = (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y = x$$

donc $x \geq z$ La relation \geq est alors transitive, ce qui prouve (2).

Par contre, \geq peut être transitive sans que \oplus soit associative: cette condition n'est pas nécessaire. Considérons le contre-exemple suivant.

$S = \{a,b,c\}$ muni de \oplus commutative définie par:

$$a \oplus a = a, b \oplus b = b, c \oplus c = c,$$

$$a \oplus b = b, a \oplus c = c, b \oplus c = a.$$

La relation \geq est alors la relation d'ordre partiel définie par:

$$a \geq a, b \geq b, c \geq c,$$

$$b \geq a, c \geq a.$$

Observons:

$$b \oplus (b \oplus c) = b \oplus a = b \neq a = b \oplus c = (b \oplus b) \oplus c.$$

Pour prouver (3), supposons la loi \oplus commutative. Par définition de l'ordre, $x \geq y$ et $y \geq x$ signifie $x \oplus y = x = y \oplus x = y$ par conséquent, \geq est bien antisymétrique.

Donnons un exemple où la relation \geq est antisymétrique, alors que \oplus n'est pas commutative: $S = \{a, b, c\}$ et la loi \oplus est définie par

$$\begin{aligned} a \oplus a &= a, b \oplus b = b, c \oplus c = c, \\ a \oplus b &= b, a \oplus c = a, b \oplus a = c, c \oplus a = b, b \oplus c = b, c \oplus b = a. \end{aligned}$$

On obtient une relation d'ordre total $a \leq b \leq c$, qui est notamment antisymétrique et pourtant \oplus n'est pas commutative.

Dans tous les contre-exemples, les difficultés apparaissent parce qu'il existe des éléments x et y , pour lesquels $x \oplus y$ n'est comparable ni avec x , ni avec y ■

Vocabulaire:

Puisque nous allons manipuler des ensembles partiellement ordonnés, il est utile de faire quelques rappels de vocabulaire. P est une partie d'un ensemble ordonné E .

Un minorant d'une partie P est un élément x de E tel que:

$$\forall y \in P \quad y \geq x.$$

Un majorant d'une partie P est un élément x de E tel que:

$$\forall y \in P \quad y \leq x.$$

Un élément minimal d'une partie P est un élément x de P tel que:

$$y \in P \text{ et } y \leq x \text{ implique } y = x.$$

Un élément maximal d'une partie P est un élément x de P tel que:

$$y \in P \text{ et } y \geq x \text{ implique } y = x.$$

Une partie P possède un plus petit élément x°

si x° est l'unique élément minimal de P

Une partie P possède un plus grand élément x°

si x° est l'unique élément maximal de P

Une partie P admet une borne inférieure x°
si l'ensemble des minorants de P admet x° comme plus grand élément.
Nous noterons $x^\circ = \inf P$

Une partie P admet une borne supérieure x°
si l'ensemble des majorants de P admet x° comme plus petit élément.
Nous noterons $x^\circ = \sup P$

Nous pouvons résumer les résultats qui nous seront utiles par :

Proposition 1.1.2:

Soit S un ensemble muni d'une loi de composition interne \oplus commutative, associative et idempotente. La relation binaire définie par :

$$x \geq y \text{ si et seulement si } x \oplus y = x,$$

est une relation d'ordre, en général partiel.

Pour tout couple (x,y) d'éléments de S, $x \oplus y$ est le plus petit majorant commun à x et y pour cet ordre, c'est à dire la borne supérieure de $\{x,y\}$.

Cet ordre est total si et seulement si

$$x \oplus y \in \{x,y\} \text{ pour tous } x \text{ et } y.$$

Démonstration de la proposition 1.1.2:

Cette proposition résulte directement du théorème 1.1 L'ordre est total si et seulement si pour tout couple (x,y) , $x \leq y$ ou $x \geq y$. En appliquant la définition de l'ordre, cela se traduit par $x \oplus y \in \{x,y\}$.

Le seul autre point nouveau est le suivant: $x \oplus y$ majore x et y car

$$(x \oplus y) \oplus x = x \oplus y = (x \oplus y) \oplus y;$$

Soit m un majorant commun à x et y.

$$m \oplus (x \oplus y) = (m \oplus x) \oplus y = m \oplus y = m$$

Donc m majore $x \oplus y$ Cette somme est donc bien le plus petit de tous les majorants de x et y ■

1.2 Treillis et treillis complets.

Rappelons qu'un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple (x,y) possède un plus petit majorant et un plus grand minorant. En d'autres termes, toute paire $\{x,y\}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure. Cela se généralise immédiatement à toute partie finie.

Un treillis est complet si et seulement si toute partie, finie ou infinie, possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Par convention, la borne inférieure de l'ensemble vide est égale à la borne supérieure du treillis, et la borne supérieure de l'ensemble vide est la borne inférieure du treillis. Cette convention signifie que tout élément majore l'ensemble vide et le minore.

Dans la suite, nous manipulerons essentiellement des treillis complets, en utilisant les opérations "plus petit majorant" et "plus grand minorant". Cependant, au contraire de la théorie usuelle des treillis, nous ne manipulerons jamais simultanément ces opérations. Nous utiliserons le vocabulaire suivant, qui permet mieux de rendre compte du rôle que joueront les opérations max et min dans notre théorie:

Vocabulaire et notations:

Soit T un treillis, dans T peuvent être définies deux lois de composition internes.

La max-somme de deux éléments x et y
est le plus petit majorant commun à x et y .

La min-somme de deux éléments x et y
est le plus grand minorant commun à x et y

Ces opérations ne seront jamais mêlées dans une même expression, aussi seront-elles toutes deux notées \oplus

Propriétés 1.2.1:

La max-somme et la min-somme sont commutatives et associatives.

L'élément minimal du treillis T lorsqu'il existe,
est neutre pour la max-somme et absorbant pour la min-somme.

L'élément maximal du treillis T , lorsqu'il existe,
est neutre pour la min-somme et absorbant pour la max-somme.

Il est évident que la max-somme et la min-somme ont des propriétés strictement équivalentes, il suffit d'inverser l'ordre du treillis pour passer d'une opération à l'autre. Dans la suite, nous allons toujours privilégier l'une des opérations. On construit ainsi deux monoïdes différents.

Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, pour laquelle l'ensemble possède un élément neutre. Pour la max-addition d'un treillis, l'élément neutre est nécessairement l'élément minimal du treillis. Si celui-ci n'existe pas, il peut toujours être "ajouté". De même, il faut éventuellement ajouter un élément maximal au treillis pour obtenir l'élément neutre de la min-somme.

L'élément maximal du treillis, s'il existe, est évidemment absorbant pour la min-somme. Il en va de même pour l'élément minimal pour la min-somme.

Notations:

Soit T un treillis.

Nous noterons MTC le monoïde défini par T muni de la max-addition notée \oplus , et complété si nécessaire par un élément minimal.

Nous noterons MTD le monoïde défini par T muni de la min-addition notée \otimes , et complété si nécessaire par un élément maximal.

Dans MTC et MTD, nous noterons ε et ∞ les éléments extrémaux, de manière à ce que

- ε soit l'élément neutre pour l'opération \oplus
- ∞ soit l'élément absorbant pour l'opération \oplus lorsqu'il existe.

Les affectations de ε et ∞ sont donc inversées entre MTC et MTD, mais ces notations apportent beaucoup plus d'avantages que de confusions.

Si par bonheur le treillis T est complet, les deux éléments extrémaux existent toujours. De plus, la max-somme et la min-somme peuvent être étendues à des parties quelconques de T

Vocabulaire et notation:

La max-somme (respectivement la min-somme) des éléments d'une partie P d'un treillis complet est la borne supérieure de cette partie (respectivement sa borne inférieure) Par analogie avec la théorie usuelle, la notation suivante sera utilisée:

$$\sum_{x \in P} x$$

Cette définition n'est en fait qu'un changement de notation pour la borne sup (ou la borne inf) d'une partie quelconque. Ce qu'il est important de retenir, c'est que dans le cas des treillis complets, nous pouvons manipuler des séries (au sens de la nouvelle addition) sans nous préoccuper de leur convergence.

1.3 Propriétés combinatoires de la max-somme et de la min-somme.

Propriété 1.3.1:

Les formules suivantes sont valables dans tout treillis pour les sommes finies, dans les treillis complets, elles s'appliquent aux sommes quelconques.

$$\sum_{i \in I} x_i \oplus \sum_{i \in I} y_i = \sum_{i \in I} (x_i \oplus y_i)$$

$$\sum_{i \in I} x_i \oplus \sum_{i \in J} x_i = \sum_{i \in I \cup J} x_i$$

Démonstration:

Tout cela résulte de la propriété suivante d'un treillis: Soit (P_i) une famille de parties finies de P , indicée par un ensemble fini I . Alors la borne supérieure de l'union des P_i est la borne supérieure de l'ensemble des x_i , bornes supérieures des P_i .

Si le treillis est complet, le même énoncé est valable lorsqu'on supprime le mot "fini" ■

Propriété 1.3.2:

Soit T un treillis. Soient $\{x_s \mid s \in S\}$ et $\{y_s \mid s \in S\}$ deux familles d'éléments de T indicées par un ensemble fini S , telles que:

$$\forall s \in S, x_s \leq y_s$$

Alors, pour la max-somme ou la min-somme,

$$\sum_{s \in S} x_s \leq \sum_{s \in S} y_s$$

et si le treillis est complet, ce résultat reste valable pour S quelconque.

Démonstration:

Il suffit de revenir à la définition des sommes multiples; dans le cas de la max-somme: $\sum_{s \in S} y_s$ est le plus petit majorant de $\{y_s \mid s \in S\}$

Si z majore cet ensemble, pour tout indice s z majore x_s et par conséquent z majore l'ensemble $\{x_s \mid s \in S\}$ z est donc plus grand que le plus petit majorant de cet ensemble, or celui-ci est, par définition, égal à $\sum_{s \in S} x_s$ ■

Appliquons ce résultat lorsque l'une des familles est constante.

Corollaire 1.3.3:

Soit y un élément de T tel que:

$$\forall s \in S, x_s \leq y \quad (\text{respectivement } x_s \geq y)$$

pour la max-somme ou la min-somme:

$$\sum_{s \in S} x_s \leq y \quad (\text{respectivement } \sum_{s \in S} x_s \leq y)$$

1.4 Complétion d'un treillis, et convention sur la relation d'ordre:

Jusqu'à présent nous avons distingué les propriétés des treillis et des treillis complets. Cependant le résultat suivant nous permettra de considérer que tous les treillis que nous rencontrerons seront complets. Cela signifie qu'en pratique, on pourra faire des calculs avec des sommes infinies sans précautions particulières, en particulier sans tenir compte de notions de convergence. Le résultat d'un tel calcul peut cependant être "infini", c'est à dire égal à l'élément maximal du treillis.

Théorème 1.4.1:

Tout ensemble partiellement ordonné peut être plongé dans un treillis complet par une injection conservant l'ordre et les bornes supérieures et inférieures des parties lorsque ces bornes existent.

Le lecteur trouvera la démonstration dans [TREIL1]. Nous donnerons la démonstration d'un résultat plus puissant dans le chapitre 3: on peut de plus imposer que ce plongement soit un homomorphisme pour une autre opération interne, si cette opération est distributive par rapport à la max-somme ou à la min-somme.

Plusieurs constructions du treillis complet sont possibles, dont l'une est analogue à la "méthode des coupures" utilisée pour construire le corps des réels. Il n'est donc pas étonnant que le mot complet, issu de la topologie, soit utilisé: à tout ordre peut être associé une topologie canonique, et celle-ci détermine certaines propriétés des treillis. En pratique, nous n'aurons pas à utiliser explicitement cette topologie.

Nous avons indiqué que nous privilégierons toujours l'une des opérations, par exemple la max-somme; il peut alors sembler inutile de requérir l'existence de la borne inférieure d'une partie quelconque. En fait, celle-ci découle de l'existence de la borne supérieure. Il n'y a pas de treillis "à moitié complet", comme le montre le raisonnement suivant.

Supposons que toute partie possède une borne supérieure. Il est toujours possible de supposer l'existence d'un plus petit élément du treillis. Alors, toute partie P possède un ensemble non-vide de minorants, lequel possède un plus grand élément x^0 , qui est donc la borne inférieure de la partie P .

D'autre part, nous utiliserons essentiellement des sommes dénombrables; il serait possible d'introduire des treillis "dénombrablement complets", mais cela ne servirait qu'à créer du vocabulaire inutile, puisque notre objet n'est pas l'étude des treillis.

De plus, il est utile de choisir un "sens" canonique à la relation d'ordre. Nous adopterons la convention suivante.

Convention:

Soit T un treillis; la relation d'ordre canonique associée au monoïde MTC ou MTD est celle définie par

$$x \geq y \text{ si et seulement si } x \oplus y = x$$

Il ne s'agit donc pas de la même relation selon qu'on travaille dans MTC ou MTD .

1.5 Fonctions croissantes, compatibles et continues.

Définitions 1.5.1:

Soient T et T' deux treillis, et f une fonction de T dans T'

f est croissante si et seulement si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$.

Considérons T et T' sont munis de leurs structures MTC et $MT'C$ (respectivement MTD et $MT'D$),

f est max-compatible (respectivement min-compatible) si:

Pour tout couple (x, y) d'éléments de T

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y).$$

Lorsque T et T' sont des treillis complets, on dira que:

f est max-continue (respectivement min-continue) si,

Pour toute partie P de T

$f(\sup P) = \sup \{f(x), x \in P\}$ (respectivement $f(\inf P) = \inf \{f(x), x \in P\}$)

Propriété 1.5.2:

Pour toute fonction entre treillis (éventuellement complets)

max-continue \Rightarrow max-compatible \Rightarrow croissante

min-continue \Rightarrow min-compatible \Rightarrow croissante

Les implications réciproques sont fausses dans le cas général.

Démonstration et contre-exemple:

Il est immédiat que toute fonction max-compatible ou min-compatible est croissante. En effet dans le cas du max:

$x \leq y$ s'écrit $x \oplus y = y$ et par conséquent,

$f(x \oplus y) = f(y) = f(x) \oplus f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$

La réciproque est fautive, comme l'indique l'exemple donné par l'ensemble $T = [0,1]^2$, muni de l'ordre partiel induit par l'ordre usuel.

Soit f la fonction de T dans T définie par:

$f(x,y) = x.y$ (produit usuel).

f est croissante mais

$f(\max((0,1),(1,0))) = f(1,1) = 1 \neq \max(f(0,1),f(1,0)) = 0$

Enfin, toute fonction max-continue (respectivement min-continue) est évidemment max-compatible (respectivement min-compatible) puisqu'il suffit d'appliquer la définition au cas des paires d'éléments ■

1.6 Variétés de vocabulaires.

Il est important de remarquer que le fait qu'une fonction f soit max-continue (respectivement min-continue) se traduit, dans le cas de la max-somme (respectivement de la min-somme), par l'égalité suivante qui est valable pour toute partie P éventuellement infinie:

$$f(\sum_{x \in P} x) = \sum_{x \in P} f(x)$$

Cette propriété peut être interprétée comme une propriété de distributivité.

Selon que l'on se place dans la théorie des treillis, dans la théorie des automates, ou dans la théorie des semi-anneaux, il existe plusieurs vocabulaires pour ces définitions. En particulier une fonction..

- croissante est souvent appelée isotone.
- max-compatible est parfois appelée additive, ou distributive.
- max-continue est souvent appelée infiniment-distributive.

Le mot continu, qui est aussi employé en théorie des automates (cf. [LGSF2]) ou cette propriété joue un rôle essentiel, peut être interprété comme une référence à la topologie de l'ordre qui est implicite dans un treillis (cf. [TREIL1])

Par exemple, dans le cas d'une fonction de la droite complétée $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ (muni de la topologie usuelle) dans elle-même, max-continue signifie continue à gauche et min-continue signifie continue à droite.

Remarquons enfin que la définition usuelle d'un homomorphisme de monoïde suppose que l'image de l'élément neutre est l'élément neutre du monoïde image. Une application max-compatible (ou min-compatible) ne vérifie pas nécessairement cette propriété.

1.7 Propriétés des bijections croissantes, compatibles et continues.

Lorsque f est une application croissante et bijective entre deux ensembles totalement ordonnés, il est connu que f^{-1} est croissante; ceci n'est plus vrai lorsque les ordres sont seulement partiels, comme l'indique le contre exemple constitué par Z muni de l'ordre suivant:

$x \leq y$ ssi $x \leq y$ pour l'ordre usuel et x et y sont de même parité.

Z sera complété par deux éléments infinis pour obtenir un treillis complet.

L'application identique, de Z muni de cet ordre partiel dans Z muni de son ordre usuel est croissante et bijective, mais son application réciproque n'est pas croissante: $1 \leq 2$ pour l'ordre usuel mais pas pour l'ordre partiel.

Notons que la fonction f ainsi définie n'est ni max-compatible ni min compatible; dans le cas du \max $1 \oplus 2 = +\infty$ pour l'ordre partiel mais $1 \oplus 2 = 2$ usuellement.

Propriété 1.7.1:

Soient T et T' deux treillis; si f est une bijection max-compatible de MTC dans $MT'C$ (respectivement min-compatible de MTD dans $MT'D$), l'application réciproque f^{-1} est max-compatible (respectivement min-compatible).

Ce résultat reste vrai lorsque T et T' sont des treillis complets et que l'on remplace le mot compatible par le mot continu.

Démonstration:

Soient x' et y' deux éléments de T' puisque f est bijective, il existe un couple unique (x,y) d'éléments de T tel que:

$$x' = f(x) \text{ et } y' = f(y).$$

Alors, comme f est max-compatible,

$$x' \oplus y' = f(x) \oplus f(y) = f(x \oplus y)$$

Comme f est injective,

$$f^{-1}(x' \oplus y') = x \oplus y = f^{-1}(x') \oplus f^{-1}(y')$$

f^{-1} est donc max-compatible et donc croissante.

Supposons maintenant f max-continue. Soit P' une partie de T' et y^0 la borne supérieure de P' ; il existe un unique x^0 tel que $y^0 = f(x^0)$. On sait déjà que f^{-1} est croissante, et donc nécessairement x^0 est un majorant de $P = f^{-1}(P')$

Si x est un autre majorant de P alors $f(x)$ majore $f(P)$ et donc $f(x) \geq y^0$ et donc comme f^{-1} est croissante $x \geq f^{-1}(y^0) = x^0$ qui est donc bien le plus petit majorant de P ■

Une fonction qui est seulement croissante n'est pas nécessairement max-compatible, et une bijection croissante n'a pas obligatoirement une bijection réciproque croissante. Cependant un résultat intéressant peut être obtenu.

Propriété 1.7.2:

Soit f est une bijection croissante entre treillis, dont la bijection réciproque f^{-1} est croissante. Alors f et f^{-1} sont max-compatibles, et même max-continues si les treillis sont complets.

Démonstration:

Soit P une partie finie, ou quelconque dans le cas d'un treillis complet. Puisque f est croissante, dans le cas de la max-somme ou de la min-somme:

$$f(\sum_{x \in P} x) \geq \sum_{x \in P} f(x)$$

En appliquant le résultat à f^{-1} on obtient l'inégalité inverse, ce qui donne l'égalité qui signifie que f et f^{-1} sont max-compatibles ou max-continues ■

1.8 Quasi-inverse d'une fonction max ou min-continue et application.

Le premier théorème important que nous allons énoncer est celui qui permet de construire des quasi-inverses pour les fonctions max-continues ou min-continues lorsqu'elles ne sont pas bijectives. Nous l'énoncerons avec le vocabulaire que nous avons introduit, dans le cas de la max-somme.

Théorème 1.8.1:

Soient T et T' deux treillis complets munis de leurs structures MTC et $MT'C$.
Soit f une fonction max-continue de MTC dans $MT'C$.

Il existe une et une seule fonction notée f telle que:

$$\begin{aligned} f \circ f &\geq \text{Identité de } T \\ f \circ f &\leq \text{Identité de } T' \end{aligned}$$

Cette fonction f est min-continue et est définie par la formule:

$$\forall x \in T', \quad f(x) = \text{Sup} \{ y \in T / f(y) \leq x \}$$

De plus:

$$\begin{aligned} f \circ f \circ f &= f \\ f \circ f \circ f &= f \end{aligned}$$

Enfin f et f jouent un rôle symétrique, en un sens qui sera précisé dans la démonstration.

Démonstration:

Construisons à priori la fonction f de T' dans T .

$$f(x) = \text{Sup} \{ y \in T / f(y) \leq x \}$$

Montrons d'abord qu'elle est min-continue de T' dans T . Soit X une partie quelconque de T' et $\inf X$ sa borne inférieure. Par définition de celle-ci:

$$\{ y \in T / f(y) \leq \inf X \} = \{ y \in T / \forall x \in X \quad f(y) \leq x \}$$

or

$$\{ y \in T / \forall x \in X, f(y) \leq x \} = \bigcap_{x \in X} \{ y \in T / f(y) \leq x \}$$

Comme dans tout treillis complet, le sup de l'intersection d'une famille quelconque de parties est l'inf des sup de ces parties:

$$\begin{aligned} \text{Sup} \{ y \in T / f(y) \leq \inf X \} &= \text{Sup} \{ y \in T / \forall x \in X, f(y) \leq x \} \\ &= \text{Sup} \bigcap_{x \in X} \{ y \in T / f(y) \leq x \} \\ &= \text{Inf}_{x \in X} (\text{Sup} \{ y \in T / f(y) \leq x \}) \end{aligned}$$

L'égalité des termes extrêmes signifie

$$f(\inf X) = \inf_{x \in X} (f(x))$$

c'est à dire que f est min-continue.

Montrons maintenant les deux inégalités $f \circ f \geq \text{Id}_T$ et $f \circ f \leq \text{Id}_T$. Puisque f est max-continue, pour tout x de T'

$$f(f(x)) = \text{Sup} \{ f(y) / y \in T \text{ et } f(y) \leq x \} \leq x$$

ce qui prouve

$$f \circ f \leq \text{Identité de } T'$$

D'autre part, pour tout z dans T il est évident que:

$$f(f(z)) = \text{Sup} \{ y / y \in T \text{ et } f(y) \leq f(z) \} \geq z$$

car z appartient au sous-ensemble défini par l'accolade. Cela prouve

$$f \circ f \geq \text{Identité de } T$$

Montrons maintenant que la fonction f que nous avons construite est la seule solutions de ces inégalités. Soit g une fonction telle que $g \circ f \geq \text{Id}_T$ et $f \circ g \leq \text{Id}_T$.

En multipliant ces inégalités par f on obtient:

$$g \circ f \circ f \geq f \text{ et } f \circ f \circ g \leq f$$

En utilisant les inégalités vérifiées par f et f , on obtient

$$g \geq g \circ f \circ f \geq f \text{ et } g \leq f \circ f \circ g \leq f$$

ce qui prouve que $g = f$

En remplaçant g par f on obtient $f \circ f \circ f = f$ et de manière analogue on obtiendrait $f \circ f \circ f = f$

Ce résultat d'unicité implique que f et f jouent un rôle symétrique. Tout ce qui vient d'être dit s'applique évidemment lorsqu'on inverse l'ordre du treillis: f est une fonction de T' dans T min-continue, il existe donc une unique fonction g max-continue de T dans T' telle que:

$$f \circ g \geq \text{ID}_T \text{ et } g \circ f \leq \text{ID}_T.$$

Notons cette fonction g^+ car elle a été construite à partir de l'ordre inverse:

$$g^+(y) = \inf \{ x \in T' / f(x) \geq y \}$$

Le résultat d'unicité implique que $g^+ = f$ ■

Remarquons que si une fonction f est à la fois max-continue et min-continue, elle possède deux quasi-inverses f^- et f^+ . Celles-ci coïncident si et seulement si f est bijective. En général, comme nous ne manipulons qu'une relation d'ordre à la fois, nous n'utiliserons qu'une seule de ces quasi-inverses. Si l'addition dérive du max, nous utiliserons f^- .

Cette quasi-inverse permet en particulier de résoudre les équations d'inconnue x , de la forme $f(x) = b$, lorsque f est max-continue (le résultat se traduit sans peine en inversant l'ordre à f min-continue). Cela donne le corollaire suivant.

Corollaire 1.8.2:

Soient T et T' deux treillis complets, f une application max-continue de MTC dans MT'C, b un élément de T' . L'équation $f(x) = b$ possède une solution si et seulement si :

$$f(f^-(b)) = b$$

$f^-(b)$ est alors la plus grande solution.

Ce résultat, qui découle de manière évidente de la définition et des propriétés de la quasi-inverse est intéressant car, dans le cas d'équations linéaires matricielles, il donnera la méthode explicite de résolution. En effet, $f^-(b)$ sera aisément calculable.

1.9 Points fixes de fonctions entre treillis.

De toute la théorie des treillis, le théorème qui nous sera le plus utile est le théorème 1.9.1 sur les points fixes.

Théorème 1.9.1:

Soit T un treillis complet et f une fonction croissante de T dans T
 L'ensemble des points fixes de f , c'est à dire des solutions de l'équation

$$f(x) = x$$

est non-vide, et possède un plus petit élément (notons le x^-) ainsi qu'un plus grand élément (notons le x^+), tels que:

x^- est le plus petit élément de l'ensemble $\{x \in T, f(x) \leq x\}$

x^+ est le plus grand élément de l'ensemble $\{x \in T, f(x) \geq x\}$.

Démonstration:

L'ensemble $\{x \in T, f(x) \leq x\}$ possède un plus grand minorant x^- , car le treillis est complet.

Soit y un élément de $\{x \in T, f(x) \leq x\}$. Comme par construction $x^- \leq y$, nous avons, du fait de la croissance de f

$$f(x^-) \leq f(y) \leq y$$

et par conséquent, $f(x^-)$ est un minorant de $\{x \in T, f(x) \leq x\}$. Il est donc plus petit que le plus grand minorant ce qui donne

$$f(x^-) \leq x^-$$

Appliquons f à cette inégalité:

$$f(f(x^-)) \leq f(x^-)$$

$f(x^-)$ appartient donc à $\{x \in T, f(x) \leq x\}$, que minore x^- , donc

$$f(x^-) \geq x^-$$

Nous pouvons donc conclure l'égalité entre $f(x^-)$ et x^- . En inversant l'ordre, on montre l'existence de x^+ , point fixe qui est le plus grand élément de $\{x \in T, f(x) \geq x\}$.

Tout point fixe x^o appartient à $\{x \in T, f(x) \leq x\}$ et $\{x \in T, f(x) \geq x\}$ et vérifie par conséquent $x^- \leq x^o \leq x^+$. Remarquons cependant que tous les éléments vérifiant $x^- \leq x^o \leq x^+$ ne sont pas nécessairement des points fixes. ■

1.10 Opération étoile.

Lorsqu'il faut résoudre une équation de la forme:

$$x = f(x) \oplus y$$

il est tentant d'écrire, en procédant par récurrence:

$$x = f^n(x) \oplus f^{n-1}(y) \oplus f^{n-2}(y) \dots \oplus f(y) \oplus y$$

et de faire tendre l'indice n vers $+\infty$. On définit ainsi une série pour laquelle il n'y a pas de problème de convergence, si l'addition est associée au max ou au min d'un treillis complet.

Cependant, la condition "f croissante" qui suffit pour assurer l'existence d'une solution à l'équation implicite (théorème de point fixe appliqué à la fonction croissante $f(\cdot) \oplus y$), ne suffit malheureusement pas si on veut identifier à une solution de l'équation la somme de la série

$$y \oplus f(y) \oplus f^2(y) \oplus \dots \oplus f^n(y) \dots$$

pour laquelle nous utiliserons la notation de KLEENE

$$f^*(y) = y \oplus \sum_{n \geq 1} f^n(y) = \sum_{n \geq 0} f^n(y)$$

Le théorème de point fixe s'applique dès qu'une fonction est croissante, il est donc inutile de privilégier l'une des opérations max ou min. En introduisant la notation ci-dessus, on a implicitement privilégié l'une des opérations: selon le sens donné à \oplus , f^* prend des valeurs différentes.

Cette série f^* est toujours définie, pour toute fonction d'un treillis complet dans lui même. On peut alors l'identifier à un point fixe, lorsque f satisfait une propriété de continuité. Enonçons le théorème dans le cas de la max-somme.

Théorème 1.10.1:

Soit T un treillis complet muni de sa structure MTC, et f une fonction max-continue de T dans T . Pour tout élément y de T , l'équation d'inconnue x :

$$x = f(x) \oplus y$$

admet comme plus petite solution $x = f^*(y)$.

Dans le cas où $y = \epsilon$, on obtient ainsi le point fixe minimal de f .

Démonstration:

La fonction qui à x associe $f(x) \oplus y$ est croissante. Elle possède donc un point fixe minimal x^* .

Il est immédiat que:

$$x^* \geq f^n(x^*) \oplus f^{n-1}(y) \oplus f^{n-2}(y) \dots \oplus f(y) \oplus y$$

En particulier, cela implique pour tout n ,

$$x^* \geq f^n(y)$$

Par définition de $f^*(y)$, qui est la borne supérieure des $f^n(y)$

$$x^* \geq f^*(y)$$

D'autre part, puisque f est max-continue,

$$f(f^*(y)) \oplus y = y \oplus f(\sum_{n \geq 0} f^n(y)) = y \oplus \sum_{n \geq 0} f^{n+1}(y) = f^*(y)$$

donc $f^*(y)$ est une solution de l'équation implicite.

$f^*(y)$ est donc la plus petite solution de cette équation \blacktriangleleft

1.11 Conclusion.

Nous avons introduit une seule notation pour la max-somme et la min-somme, parce qu'au contraire de la théorie des treillis, nous ne nous intéresserons pas aux propriétés conjointes de ces opérations. Nous allons introduire une nouvelle opération qui jouera le rôle du produit. Pour introduire celle-ci, deux choix sont possibles: introduire une opération interne, ce qui définit un diotide, structure analogue à un anneau, ou introduire une opération externe, ce qui définit un moduloïde, structure analogue à un espace vectoriel. Il est évident qu'une opération externe suppose la donnée préalable d'une structure algébrique sur les "scalaires", aussi est-il naturel d'étudier d'abord les diotides.

Chapitre 2

Dioïdes, approche combinatoire.

Dans ce chapitre, nous allons étudier des opérations du point de vue purement combinatoire. Il n'y aura aucun théorème difficile, le but de ce chapitre est plutôt de montrer qu'un certain nombre d'objets, matrices et séries, peuvent être définis formellement. Ces constructions formelles et combinatoires sont particulièrement développées dans des ouvrages tels que [LGSF2]. Notre but est simplement d'introduire les concepts et notations qui nous seront utiles dans la théorie des systèmes à évènements discrets.

2.1 Monoïdes et dioïdes.

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, pour laquelle il existe un élément neutre. Si cet ensemble peut être muni d'une autre opération interne, il peut devenir un dioïde, à condition de satisfaire à des propriétés combinatoires suffisantes pour que le calcul soit possible et agréable. Nous adopterons la définition suivante.

Définition 2.2.1:

Un dioïde est un triplet $(D, \blacktriangledown, \blacklozenge)$ constitué de:

- un ensemble D contenant deux éléments ε et e ,
- une loi de composition interne \blacktriangledown associative et commutative,
- une loi de composition interne \blacklozenge associative,

tels que:

- \blacklozenge est distributive par rapport à \blacktriangledown à droite et à gauche,
- ε est élément neutre pour la loi \blacktriangledown et absorbant pour la loi \blacklozenge ,
- e est élément neutre pour la loi \blacklozenge

Ce dioïde est commutatif si la loi \blacklozenge est commutative.

Cette structure algébrique est souvent appelée semi-anneau, mais de nombreux auteurs préfèrent réserver le terme de semi-anneau pour les dioïdes dont la loi \blacktriangledown est symétrisable. C'est le cas de $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ qui est le dioïde qui intervient dans la réalisation des chaînes de Markov. D'autres auteurs utilisent le terme de dioïde dans le cas particulier où la première addition vérifie une propriété d'idempotence, ce qui signifie, comme nous l'avons vu au chapitre 1, qu'elle est dérivée d'une relation d'ordre.

Remarquons que e est nécessairement l'unique élément neutre pour \blacktriangleright et ϵ l'unique élément neutre pour \blacktriangledown (un élément neutre est toujours unique). Si la première opération \blacktriangledown n'est pas symétrisable, les propriétés combinatoires des opérations n'impliquent pas que l'élément neutre ϵ soit absorbant pour l'opération \blacktriangleright cependant cette propriété est essentielle pour le calcul matriciel et nous l'imposons parmi les axiomes des dioïdes. Dans la littérature des semi-anneaux, par exemple [LGSF2], l'usage est d'imposer que ϵ et e soient distincts. Cela ne nous paraît pas utile, car si ϵ est absorbant et égal à e , le dioïde est trivial: c'est un singleton. En effet, pour tout élément x on a alors:

$$x = x \cdot e = x \cdot \epsilon = \epsilon = e$$

Exemples:

Tous les anneaux et corps sont évidemment des dioïdes.

Autres exemples:

- $(\mathbb{R}^+, +, \times)$ qui est un semi-anneau,
- $(\mathbb{N}, +, \times)$ qui est aussi un semi-anneau,
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, \min)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, \max)$
- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$
- $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$
- $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$
- $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$
- etc.

La plupart de ces dioïdes ont été étudiés, parce qu'ils apparaissent comme l'algèbre naturelle pour traiter certains problèmes de théorie des graphes.

Pour avoir un aperçu des applications de ces différents dioides, le lecteur pourra consulter les ouvrages [GRAPH1] [GRAPH3] et [GRAPH4].

Les propriétés des dioides peuvent être très différentes. Cependant, tout théorème, en particulier portant sur les matrices, dont la démonstration est uniquement combinatoire, peut être traduit dans tout dioïde. [DISMA4] donne une liste de théorèmes de ce type pour le calcul matriciel.

2.2 Sous-dioïdes et homomorphismes de dioides.

Il est possible de construire toute une théorie des sous-dioïdes, relations d'équivalence compatibles avec un dioïde, dioides quotients, etc. Contentons nous de préciser notre définition des sous-dioïdes et des homomorphismes de dioides

Vocabulaire:

Soient $(D, \heartsuit, \spadesuit)$ et $(D', \heartsuit, \spadesuit)$ deux dioides dont les éléments neutres pour les opérations \heartsuit et \spadesuit sont notés respectivement ε , e et ε' , e'

Une application de D dans D' est un homomorphisme de dioides, si et seulement si

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &= \varepsilon' & f(e) &= e' \\ \forall (x,y) \in D^2 & & f(x \heartsuit y) &= f(x) \heartsuit f(y) \\ \forall (x,y) \in D^2 & & f(x \spadesuit y) &= f(x) \spadesuit f(y) \end{aligned}$$

Si cette application est bijective, c'est un isomorphisme.

Une partie D° de D définit un sous-dioïde de D si et seulement si:
 $(D^\circ, \heartsuit, \spadesuit)$ est un dioïde
et l'injection de D° dans D est un homomorphisme de dioïde.

2.3 Conventions de notation.

Compte tenu du rôle combinatoire des opérations \heartsuit et \spadesuit , il est plus commode d'utiliser les abus de notations suivants, qui permettent de mieux rendre compte de l'analogie entre le calcul dans les dioïdes et le calcul usuel. Dorénavant

- la loi \heartsuit sera appelée addition ou somme du dioïde et notée \oplus ,
- la loi \spadesuit sera appelée multiplication ou produit du dioïde et notée multiplicativement;
- les sommes multiples seront notées à l'aide du symbole Σ ,
- les produits multiples seront notés à l'aide du symbole Π

Dans les indices de sommations et les produits multiples, ainsi que dans les exposants, les règles de calcul seront les règles usuelles, sauf mention explicite du contraire.

De plus, lorsqu'aucune confusion n'est possible, le dioïde $(D, \heartsuit, \spadesuit)$ sera simplement désigné par le symbole D représentant ses éléments. Cependant, lorsqu'il nous arrivera de manipuler un même ensemble muni de deux structures différentes, nous aurons à introduire des notations ad hoc pour distinguer ces structures, comme c'est le cas pour un treillis T que l'on peut munir de deux structures de monoïdes, MTC et MTD .

2.4 Dioïde des endomorphismes d'un monoïde.

Beaucoup d'ensembles ne sont munis a priori que d'une structure de monoïde. Il y a cependant toujours un dioïde à étudier dans ce cas. le dioïde des homomorphismes du monoïde dans lui même (endomorphismes).

La somme de deux homomorphismes est définie de manière évidente par

$$(h \oplus h')(x) = h(x) \oplus h'(x)$$

Il existe alors un produit naturel sur les homomorphismes, la composition.

Propriété 2.4.1:

Les endomorphismes d'un monoïde, munis de l'addition induite par celle du dioïde et de la composition des endomorphismes, constituent un dioïde.

Démonstration:

Le seul point qui nécessite d'être montré est la distributivité du produit par rapport à l'addition. C'est justement pour obtenir cette propriété qu'il faut se restreindre aux homomorphismes et non aux fonctions quelconques. La condition de distributivité se vérifie alors immédiatement:

$$f.(g \oplus h)(x) = f(g(x) \oplus h(x)) = f.g(x) \oplus f.h(x)$$

En prenant h égal à l'identité, qui appartient nécessairement au dioïde puisque c'est son élément neutre pour le produit, on montre qu'il est bien nécessaire que f soit un homomorphisme ■

Le monoïde initial pouvait aussi être un dioïde D . L'ensemble des opérateurs qui sont des homomorphismes du dioïde, constitue évidemment un sous dioïde du précédent. D'autre part, tout élément λ d'un dioïde peut être identifié à l'homomorphisme de dioïde

$$x \rightarrow \lambda.x$$

ou être identifié à l'homomorphisme:

$$x \rightarrow x.\lambda$$

Cela définit deux sous-dioïdes d'homomorphismes, qui par analogie avec la théorie des groupes, peuvent être qualifiés d'"internes"

2.5 Construction de dioïdes complexes.

A partir d'un dioïde, de nombreux autres dioïdes peuvent être définis, dont nous allons donner des exemples qui nous serviront par la suite.

Propriété et définition 2.5.1:

Soit D un dioïde. Sur D^2 les opérations suivantes définissent une structure de dioïde:

$$(x,y) \oplus (x',y') = (x \oplus x', y \oplus y')$$

$$(x,y) \otimes (x',y') = ((x \otimes x') \oplus (y \otimes y'), (x \otimes y') \oplus (y \otimes x'))$$

et

l'élément neutre pour la loi \oplus est (ϵ, ϵ)

et l'élément neutre pour la loi \otimes est (e, e)

D peut être identifié au sous-dioïde des éléments de D^2 de la forme (λ, ϵ)

Propriété et définition 2.5.2:

Soient D un dioïde et S un ensemble quelconque. L'ensemble D^S des fonctions de S à valeurs dans D , est muni d'une structure canonique de dioïde par les opérations suivantes. Pour tout couple de fonctions (f,g) et tout élément x de S :

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$$

$$(f \otimes g)(x) = f(x) \otimes g(x)$$

L'élément neutre pour la loi \oplus est défini comme la fonction ϵ telle que:

$$\forall x, \epsilon(x) = \epsilon$$

L'élément neutre pour la loi \otimes est défini comme la fonction e telle que:

$$\forall x, e(x) = e$$

2.6 Calcul matriciel dans les dioïdes.

Les propriétés combinatoires requises pour les dioïdes ont été choisies en particulier pour permettre un calcul matriciel. Ainsi se construisent d'autres dioïdes, les ensembles de matrices carrées de dimension donnée.

Notation:

Soit D un dioïde, L'ensemble des matrices à coefficients dans D , comportant p lignes et q colonnes sera noté $M_{p,q}(D)$

Définition 2.6.1:

Soit D , un dioïde, et deux matrices:

A matrice $p \times n$ de terme générique $A_{i,j}$

B matrice $p \times n$ de terme générique $B_{i,j}$

La somme $A \oplus B$ est la matrice C de taille (p,n) et de terme générique:

$$C_{i,j} = A_{i,j} \oplus B_{i,j}$$

Remarquons qu'il existe dans les ouvrages tels que [LGSF2] des définitions encore plus générales du concept de matrice, notamment avec des ensembles I et J non finis.

Définition 2.6.2:

Soit D un dioïde, et deux matrices:

A matrice $p \times n$ de terme générique $A_{i,j}$

B matrice $n \times q$ de terme générique $B_{i,j}$

Le produit $A.B$ est la matrice C de taille (p,q) et de terme générique:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1..n} A_{i,k} \cdot B_{k,j}$$

L'abus de notations consistant à noter de la même manière les opérations sur les scalaires et sur les matrices est justifié, comme en algèbre usuelle, par le fait que le dioïde s'identifie à l'ensemble des matrices 1×1

Propriété 2.6.3:

L'ensemble des matrices carrées à n et lignes et colonnes, à coefficients dans un dioïde D , muni des opérations définies en 2.6.2, est un dioïde qui sera noté $M_{n,n}(D)$.

L'élément neutre pour la loi \oplus est la matrice dont tous les coefficients valent ε , laquelle sera aussi notée ε .

L'élément neutre pour la loi \cdot est la matrice dont tous les coefficients valent ϵ , sauf ceux de la diagonale qui valent e . Cette matrice sera notée e , ou E lorsqu'il est utile de la distinguer du scalaire e .

Le dioïde D peut lui-même être un dioïde complexe. Il est ainsi possible de définir des matrices ayant pour coefficients des matrices carrées. Il est aisé de vérifier que la donnée d'une matrice pXq , à coefficients dans l'ensemble des matrices carrées de dimension n , est équivalente à la donnée d'une matrice $pNXqn$. Ce résultat est implicitement utilisé lorsqu'on manipule des matrices "par blocs".

2.7 Interprétation graphique des matrices carrées.

Comme nous l'avons indiqué, les dioïdes ont d'abord été étudiés parce qu'ils apparaissent naturellement pour traiter certains problèmes de théorie des graphes. Le lecteur pourra consulter [DISMA1] et [GRAPH4] pour voir quels dioïdes sont adaptés à quels problèmes. Rappelons brièvement comment un graphe peut être associé à une matrice carrée, ainsi que quelques définitions utiles.

Considérons une matrice carrée M de dimension $n \times n$. On lui associe un graphe orienté et valué comportant n sommets, que nous numérotions 1 à n .

Pour tout couple d'indices (i, j) , on définit un arc reliant le sommet i au sommet j et valué par le coefficient $M_{i,j}$ de la matrice. Selon le cas, on peut considérer qu'il y a effectivement n^2 arcs, y compris ceux valués par ϵ , ou que ces derniers sont "manquants".

La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qui le constituent (selon la convention choisie, cela peut inclure des arcs valués par ϵ). Le poids d'un chemin est le produit, au sens du dioïde, des valuations des arcs qui le constituent.

Si un chemin est valué par ϵ , qui par définition est absorbant pour le produit, son poids sera ϵ . Il est donc cohérent de considérer que ce chemin n'existe pas, si on a choisi cette convention pour les arcs valués par ϵ . Dans ce cas, un graphe, et par extension une matrice carrée, sera dit connexe si entre tout couple de sommets il existe un chemin. Il sera dit fortement connexe si pour tout couple de sommets, il existe un cycle du graphe passant par ces sommets. L'ensemble des sommets peut être découpé en composantes fortement connexes, qui forment une partition du graphe et à laquelle est associée une forme bloc-diagonale de la matrice, ϵ jouant le rôle du zéro.

2.8 Séries formelles dans les dioïdes

Un autre cas important de dioïde complexe, construit à partir d'un dioïde simple est celui des séries formelles, qui peuvent être définies comme des fonctions du monoïde libre engendré par un alphabet fini, à valeur dans un dioïde. Cependant, le produit des séries n'est pas celui défini dans la structure canonique de dioïde de l'ensemble des fonctions.

Rappelons que le monoïde libre Γ^* engendré par un ensemble fini de caractères, ou alphabet Γ , est l'ensemble de toutes les chaînes finies de caractères de cet alphabet. La concaténation des chaînes de caractères définit le produit de ce monoïde, pour lequel la chaîne vide est élément neutre et est donc notée e .

Définition 2.8.1:

Soit Γ un alphabet fini, soit Γ^* le monoïde libre engendré par Γ , et D un dioïde. Le dioïde des séries formelles à variables dans Γ et à coefficients dans D , noté $D \ll \Gamma \gg$, est l'ensemble des fonctions de Γ^* dans D muni des opérations suivantes:

- "Somme" de deux séries formelles:

$$(S \oplus T)(\omega) = S(\omega) \oplus T(\omega) \quad \text{pour tout } \omega \in \Gamma^*$$

- "Produit" de deux séries formelles:

$$(S \cdot T)(\omega) = \sum_{\lambda, \mu = \omega} S(\lambda) \cdot T(\mu)$$

On peut identifier tout élément λ de D à la série dont tous les coefficients valent ε , sauf le coefficient de la chaîne vide qui vaut λ . En particulier, ε désigne bien l'élément neutre du produit pour le dioïdes et pour celui des séries et ε l'élément neutre de l'addition pour les séries et les scalaires.

Ceci permet d'identifier à la série ε tous les termes d'une série dont les coefficients valent ε . Il est ainsi cohérent de les omettre dans l'écriture explicite de la série. De plus l'écriture $\sum S(\omega).\omega$ peut être interprétée comme la représentation de la série S , ou comme une véritable somme d'une famille de série $S(\omega).\omega$

Si le dioïde est l'algèbre de Boole, on obtient un sous-langage du langage Γ^* un mot de Γ^* appartient à ce sous-langage si et seulement si son coefficient est 1. Pour une étude des séries formelles et de leurs langages, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de J.BERSTEL et C.REUTENAUER [LGSF4].

Cette définition s'applique aux séries en variables "non-commutatives". Pour les variables commutatives, une autre définition est nécessaire.

Définition 2.8.2:

Soit Γ un alphabet fini. N^Γ est l'ensemble des fonctions de Γ dans N , ensemble des entiers naturels. L'ensemble des séries formelles à coefficients dans un dioïde D et à variables commutatives dans Γ est noté $D\langle\langle\Gamma_c\rangle\rangle$ et est défini comme l'ensemble des fonctions de N^Γ dans D , muni des opérations suivantes:

$$(S \oplus T)(f) = S(f) \oplus T(f)$$

$$(S.T)(f) = \sum_{g/h(x)} S(g).T(h)$$

addition usuelle.

Cette définition peut sembler complexe, mais pour la comprendre, il suffit de voir qu'un monôme en variables commutatives est une fonction, qui à chaque lettre de cet alphabet associe le nombre d'occurrences de cette lettre dans le monôme. A chacune de ces fonctions, il faut associer un coefficient dans D , pour définir une série. Le produit de deux monômes est obtenu en additionnant les valeurs des occurrences de chaque lettre, d'où la définition du produit des séries dans le cas commutatif.

Sauf dans le cas d'une variable formelle unique, les séries en variables commutatives ne constituent pas un sous-dioïde du dioïdes des séries en variables non-commutatives, dans le même alphabet. Les propriétés de ces deux ensembles sont d'ailleurs très différentes. Les séries formelles en variables non-commutatives sont beaucoup plus utilisées, et possèdent des propriétés plus intéressantes, sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement.

Définition 2.8.3:

Une série formelle de $D\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$ ou de $D\langle\langle\Gamma_c\rangle\rangle$ est un polynôme si et seulement si les coefficients différents de ε sont en nombre fini.

Nous utiliserons au sens usuel les notions de valuation, degré et degré partiel par rapport à une variable, le rôle du zero étant bien sûr joué par ε . Le support d'une série sera, par analogie avec l'algèbre usuelle, l'ensemble des monômes dont les coefficients sont distincts de ε . Un polynôme est alors une série dont le support est fini.

De plus, il faut encore distinguer les polynômes formels des fonctions polynômes, car en général, ce ne sont pas des ensembles isomorphes, au contraire du cas usuel. Donnons encore la définition des fonctions polynômes. Celles-ci seront utiles lorsqu'on manipulera des paramètres, car une expression contenant un paramètre est à considérer comme une fonction de ce paramètre.

Définition 2.8.4:

Soit Γ un alphabet, et D un dioïde. D^Γ l'ensemble des fonctions de Γ à valeurs dans D est muni de sa structure canonique de dioïde. D est identifié au sous-dioïde de D^Γ des fonctions constantes.

Une fonction monôme de degré 1 est une fonction de Γ dans D qui associe la valeur ε à tous les caractères, sauf un.

Le dioïde des fonctions polynômes est le plus petit sous-dioïde de D^Γ , contenant les fonctions monômes de degré 1 et le dioïde D . Ce dioïde sera noté $D(\Gamma)$

En imbriquant ces définitions, on peut construire des structures de plus en plus complexes. L'exemple suivant apparaîtra lorsque nous aurons à manipuler des séries formelles dont les coefficients seront des matrices, qui dépendront de paramètres:

Soit D un dioïde, Γ et K deux alphabets:

$D[K]$ est le dioïde des fonctions polynômes à coefficients dans K

$M_n(D[K])$ est le dioïde des matrices carrées (n,n) à coefficients dans $D[K]$.

$M_n(D[K])\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$ est le dioïde des séries formelles à coefficients dans $M_n(D[K])$

$D[K]\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$ est le dioïde des séries formelles à coefficients dans $D[K]$.

$M_n(D[K]\langle\langle\Gamma\rangle\rangle)$ est le dioïde des matrices (n,n) à coefficients dans $D[K]\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$.

$M_n(D[K])\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$ et $M_n(D[K]\langle\langle\Gamma\rangle\rangle)$ sont isomorphes.

2.9 Anneaux et dioïdes ordonnés.

Les anneaux constituent une classe importante de dioïdes, qui a été abondamment étudiée. Rappelons que l'on peut construire un anneau à partir de tout dioïde dont l'addition est régulière (symétrisable). On considère alors D^2 , muni de la structure de dioïde que nous avons définie précédemment, que l'on munit de la relation binaire:

$$(x,y) \equiv (z,t) \Leftrightarrow x \oplus t = z \oplus y$$

Si l'opération \oplus est régulière, alors cette relation est une relation d'équivalence compatible avec le produit, et l'ensemble des classes d'équivalence est un anneau.

Nous allons montrer qu'une autre structure peut être construite à partir d'un dioïde quelconque, qui est intéressante si l'addition n'est pas symétrisable. Définissons une relation binaire sur le dioïde D par

$$x \geq y \Leftrightarrow \exists z \in D, x = y \oplus z$$

Il est aisé de vérifier que c'est une relation de préordre, qui est compatible avec le produit du dioïde, c'est à dire:

$$x \geq y \Rightarrow \forall \lambda \in D, \lambda.x \geq \lambda.y$$

Il suffit en effet d'écrire:

$$\lambda.x = \lambda.y \oplus \lambda.z$$

Alors, on définit une relation d'équivalence sur D par

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \geq y \text{ et } y \geq x.$$

Et la relation de préordre induit une relation d'ordre sur les classes d'équivalence.

Il est aisé de vérifier que les classes d'équivalence de $x \oplus y$ et de $x.y$ ne dépendent pas des représentants x et y , mais seulement de leurs classes. De plus les propriétés combinatoires des opérations se retrouvent évidemment pour les opérations sur les classes d'équivalence.

Théorème 2.9.1:

Soit $(D, \oplus, .)$ un dioïde. Les classes d'équivalence pour la relation

$$x \equiv y \Leftrightarrow \exists (z, t) \in D^2 \text{ tq } x = y \oplus z \text{ et } y = x \oplus t$$

sont un dioïde pour les opération induites par celles de D.

La relation de préordre définie sur D par

$$x \geq y \Leftrightarrow \exists z \in D \text{ tq } x = y \oplus z$$

induit une relation d'ordre sur les classes d'équivalence.

Si les classes d'équivalence sont stables pour la loi \oplus , alors la somme de deux classes est le plus petit majorant commun de ces classes.

Démonstration:

La vérification des propriétés combinatoires des opération est immédiate, grace à un jeu de représentants. Il reste à prouver que la somme de deux classes est le plus petit majorant de ces classes pour l'ordre induit. Il suffit d'appliquer la proposition 2 du chapitre 1, et de vérifier que pour toute classe d'équivalence X , $X \oplus X = X$. Ceci est vrai dès que l'on suppose que les classes d'équivalence sont stables pour la loi \oplus ■

Remarque:

Dès qu'il existe un x tel que $\varepsilon = e \oplus x$, les classes de e et ε sont identiques. Dans ce cas le dioïde quotient est trivial: il ne contient qu'un seul élément. C'est en particulier le cas, lorsqu'on part d'un dioïde qui est déjà un anneau.

D'autre part, si l'addition du dioïde est symétrisable, seule la classe de ε peut être stable pour l'addition. En effet, la stabilité de toute classe implique que pour tout x

$$x \oplus x \equiv x$$

il existe donc un élément z tel que

$$x = x \oplus x \oplus z$$

et par conséquent si l'addition est symétrisable

$$\varepsilon = x \oplus z$$

Ce qui signifie $x \equiv \varepsilon$

Cette construction est donc en général sans intérêt, sauf dans le cas où aucun élément n'a de symétrique pour l'addition, ce qui est justement le cas pour des additions dérivées d'un ordre, qui nous intéressent ici. ♦

2.10 Exemple qui est presque un dioïde.

Donnons un exemple qui n'est pas un dioïde, parce que l'élément ε n'est pas absorbant pour le produit. Cet ensemble a pourtant toutes les autres propriétés requises.

Considérons l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, muni de la relation d'ordre:

$$x \leq y \text{ ssi } x \text{ divise } y.$$

A cette relation d'ordre, nous associons comme au chapitre 1 une max-somme. Ici

$$x \oplus y = \text{ppcm}(x,y)$$

Pour obtenir un treillis complet, nous complétons cet ensemble par un élément maximal ∞ dont nous conviendrons qu'il est divisible par tous les éléments.

Le produit usuel, avec la règle $x \cdot \infty = x$ pour tout x , est compatible avec cet ordre mais dans ce cas, $\varepsilon = e = 1$; ε ne peut donc pas être absorbant pour le produit.

L'un des inconvénients qui résulte de l'égalité $\varepsilon = e$ est l'absence d'élément neutre pour le produit des matrices. Non seulement la construction usuelle de la matrice diagonale n'est pas possible, mais aucune matrice ne peut jouer le rôle d'élément neutre pour le produit, comme nous allons le prouver dans le cas des matrices 2×2 .

Les coefficients (x,y,z,t) d'un hypothétique élément neutre devraient pour tout couple (a,b) être solution du système:

$$a \cdot x \oplus b \cdot y = a$$

$$a \cdot z \oplus b \cdot t = b$$

Or ces relations impliquent que a divise b et b divise a , ce qui n'est le cas que si $a=b$.

2.11 Conclusion.

Un dioïde a les propriétés combinatoires requises pour définir le calcul matriciel, les séries formelles, les fonctions polynômes, ce qui permet la construction d'autres dioïdes.

Il existe deux classes de dioïdes qui semblent particulièrement intéressants, les anneaux et les dioïdes dont l'addition dérive d'une relation d'ordre. Ces deux cas semblent être des "extrêmes opposés", en ce sens qu'ils s'excluent mutuellement. Les anneaux ont déjà été abondamment étudiés. Nous allons nous intéresser aux dioïdes ordonnés.

Chapitre 3 Etude des dioïdes ordonnés.

Nous allons maintenant établir le lien entre les 2 chapitres précédents, en considérant un dioïde dont l'addition dérive d'une relation d'ordre. Ce chapitre consiste essentiellement en l'énoncé de résultats supplémentaires, obtenus en appliquant les théorèmes de la partie consacrée aux treillis, et en les formulant de manière combinatoire dans le but d'obtenir des règles de calcul commodes. R. Cunnigham-Green propose dans son ouvrage [MINMA2] une étude exhaustive des dioïdes ordonnés.

3.1 Introduction aux dioïdes ordonnés.

Dans un dioïde dont l'addition est la max-somme d'un treillis, la distributivité de la multiplication du dioïde est équivalente à la compatibilité de cette opération avec la relation d'ordre.

Rappelons que si un ensemble S est muni d'une relation d'ordre et d'une loi de composition interne \diamond cette loi est compatible avec la relation d'ordre si et seulement si, pour tous a, b, c de S :

$$a \geq b \Rightarrow c \diamond a \geq c \diamond b \quad \text{et} \quad a \diamond c \geq b \diamond c$$

Théorème et définition 3.1.1:

Soit T un treillis possédant un élément minimal ε . Soient \oplus la max-somme de ce treillis et \diamond une loi de composition interne sur T . (T, \oplus, \diamond) est un dioïde si et seulement si les 4 conditions sont vérifiées:

- \diamond est associative;
- \diamond possède un élément neutre e ;
- \diamond est compatible avec la relation d'ordre dont dérive \oplus ,
- l'élément ε est absorbant pour la loi \diamond .

(T, \oplus, \diamond) est alors appelé un dioïde ordonné.

Cet énoncé reste vrai lorsque \oplus est la min-somme d'un treillis dont ε est l'élément maximal.

Démonstration:

Compte tenu de ce qui a été montré au chapitre 1, il suffit de prouver que la distributivité de la loi \diamond équivaut à sa compatibilité avec l'ordre du treillis.

Par définition

$$a \geq b \text{ équivaut à } a \oplus b = a \text{ dans le cas de la max-addition.}$$

Alors

$$c.(a \oplus b) = c.a \oplus c.b = c.a$$

donc

$$c.a \geq c.b$$

et le même raisonnement s'applique pour la multiplication à droite par c ce qui prouve cette compatibilité ■

Dorénavant nous noterons multiplicativement l'opération \diamond , suivant la convention adoptée pour les dioïdes. Lorsque l'addition du dioïde dérive d'une relation d'ordre, tout élément est idempotent pour cette addition, et réciproquement, aussi les dioïdes ordonnés peuvent aussi être appelés dioïdes idempotents. Le terme qui conviendrait le mieux est bien sûr anglais: "lattice-ordered-semigroup".

L'étude de ces structures, ainsi que des "lattice-ordered-groups" est abordée dans les derniers chapitres de [TREIL1].

3.2 Règles de calcul utiles dans les dioïdes ordonnés.

Propriétés 3.2.1:

Dans tout dioïde dont l'addition dérive d'une relation d'ordre:

$$\forall a \quad a \oplus a = a$$

$$a \geq b \Rightarrow \forall c, a \oplus c \geq a \oplus b$$

$$a \geq b \Rightarrow \forall c, a.c \geq b.c \text{ et } c.a \geq c.b$$

$$a \geq b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a^n \geq b^n$$

Démonstration:

La première et la seconde implication ont déjà été montrées, elles traduisent respectivement l'associativité du max et la compatibilité du produit avec l'ordre associé à la somme. Le dernier point résulte du fait que $a \geq b$ équivaut à $a = (a \oplus b)$. En élevant $(a \oplus b)$ à la puissance n , on obtient un polynôme en a et b qui contient le monôme b^n et par conséquent le majore \blacktriangleleft

Il faut se garder de généraliser les inégalités précédentes en inégalités strictes

Proposition 3.2.2:

Soit D un dioïde dont l'addition dérive d'une relation d'ordre. Alors dans tous les dioïdes construits à partir de D comme dans le chapitre 2, l'addition dérive d'une relation d'ordre et le produit est compatible avec cette relation d'ordre. Il s'agit en particulier:

- des matrices carrées à coefficients dans D ;
- des séries formelles en variables commutatives ou non-commutatives, à coefficients dans D ;
- des fonctions à valeur dans D .

Démonstration:

Puisqu'on sait déjà que l'on obtient des dioïdes, il suffit de vérifier que l'addition vérifie $x \oplus x = x$. La relation

$$x \geq y \text{ ssi } x \oplus y = x$$

définit alors une relation d'ordre canonique avec laquelle le produit est compatible.

Dans le cas des matrices et des séries formelles, c'est l'ordre partiel associé à l'ordre sur les coefficients. Dans le cas des fonctions

$$f \geq g \text{ ssi } \forall x \ f(x) \geq g(x)$$

\blacktriangleleft

3.3 Inversion de l'ordre.

Dans le chapitre 1, nous avons considéré des treillis qui peuvent être munis de max-somme ou de min-somme, car une relation d'ordre peut être "inversée" pour échanger les significations de min et max.

La compatibilité du produit avec la relation d'ordre est indépendante du sens que l'on donne à celle-ci. Par conséquent, un même ensemble peut éventuellement être muni d'une autre structure de dioïde ordonné, obtenue en changeant la max-addition en min-addition. Ces deux dioïdes qui sont bâtis sur le même ensemble sont parfois isomorphes. Malheureusement il est possible qu'en inversant l'ordre, on ne construise pas un dioïde. C'est le cas pour l'algèbre de Boole. Si on ordonne $0 \leq 1$ alors $\varepsilon = 0$ et $e = 1$, c'est un dioïde. Si on ordonne $1 \leq 0$, alors $\varepsilon = 1 = e$ ce n'est plus un dioïde pour la définition que nous avons adoptée et l'élément ε n'est même pas absorbant pour le produit.

3.4 Equations et simplifications dans les dioïdes ordonnés.

La propriété d'idempotence de la max-addition dans un treillis est la cause de la plupart des difficultés algébriques et en particulier du fait que l'opération \oplus n'est pas symétrisable: à partir d'une équation en x de la forme:

$$a.x \oplus b = c.x \oplus d$$

il est impossible de se ramener à une équation de la forme

$$(a-c).x = d-b$$

Considérons la simple équation d'inconnue x

$$x \oplus a = b$$

s'il y a une solution, nécessairement a est inférieur ou égal à b . Si c'est le cas, $x=b$ est évidemment solution. Par conséquent, cette équation a une solution si et seulement si $a \leq b$.

Serait-il possible d'étendre le dioïde pour que toutes les équations de cette forme aient une solution?

Cela reviendrait à symétriser l'opération, ce qui est impossible car une opération est symétrisable si et seulement si elle est régulière, ce qui signifie

$$\forall (a,b,c) a \oplus c = a \oplus b \Rightarrow c = b$$

Lorsque la loi \oplus dérive d'une relation d'ordre dans un treillis, pour tout couple (c,b) il suffit de prendre pour a un majorant commun à c et b pour construire un contre exemple.

De même, il est inutile de définir formellement le signe "moins", de la manière suivante: écrire " $a-b$ " signifie "formellement" que dans toute égalité, b "se trouve ajouté dans l'autre membre"

Pour définir un tel calcul, la moindre des choses est de définir l'égalité entre deux objets et la règle précédente conduit alors à la définition

$$a-b = c-d \Leftrightarrow a \oplus c = b \oplus d$$

pour laquelle la relation " $=$ " n'est pas une relation d'équivalence, parce qu'elle n'est pas transitive:

$$e-e = e-e \text{ et } e-e = e-e, \text{ mais } e-e \neq e-e$$

Une autre construction peut être utile lorsque, dans un calcul, il faut distinguer pour des raisons combinatoires, des termes qui "devraient avoir un signe différent": sur D^2 , on définit deux lois internes, notées de la même manière que les lois de D dont elles dérivent:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a \oplus c, b \oplus d)$$

$$(a, b).(c, d) = (a.c \oplus b.d, a.d \oplus b.c)$$

D^2 muni de ces lois est un dioïde, que nous utiliserons dans l'étude du bidéterminant d'une matrice et dans la démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Malheureusement, comme on devait s'y attendre, la résolution des équations n'a pas progressé par cette construction car tout élément est toujours idempotent pour l'addition dans D^2 et celle-ci n'est toujours pas symétrisable.

Il existe cependant d'autres simplifications dans les calculs qui résultent de la relation d'ordre, la plus simple d'entre elles étant due à l'idempotence:

$$a \oplus a \oplus b = a \oplus b$$

plus généralement, si on sait que $a \geq b$,

$$a \oplus b \oplus c = a \oplus c$$

Pour conclure ce paragraphe, nous allons donner quelques règles de calcul valables dans le cas d'un dioïde ordonné commutatif.

Propriété 3.4.1:

La formule du binôme dans un dioïde commutatif dont l'addition dérive d'une relation d'ordre est:

$$(a \oplus b)^n = \sum_{p=1..n} a^n \cdot b^{n-p}$$

si le dioïde est totalement ordonné

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n$$

Démonstration:

La première formule s'obtient directement en développant la puissance n de $(a \oplus b)$ et en tenant compte de l'idempotence des éléments pour l'addition du dioïde. Les coefficients du triangle de PASCAL (on ne peut plus les appeler coefficients du binôme puisqu'il n'y sont plus) n'apparaissent donc pas.

Dans le cas de l'ordre total, supposons $a \leq b$. Alors pour tout q , $a^q \leq b^q$ et par conséquent $b^{n-q} \cdot a^q \leq b^{n-q} \cdot b^q = b^n$ ce qui prouve que les termes médians sont majorés par la somme des termes extrêmes. On a donc

$$\sum_{p=1..n} a^n \cdot b^{n-p} \leq b^n = (a \oplus b)^n$$

CQFD ■

Dans les dioïdes ordonnés, on peut toujours ajouter à un membre d'une égalité un terme dont on sait qu'il est majoré par un autre terme apparaissant dans cette égalité. C'est la réciproque de la règle de simplification que nous avons vue.

En fait, toute égalité dans les dioïdes ordonnés peut s'écrire de multiples manières, ce qui est une source de difficultés.

Lorsque ces égalités sont écrites à l'aide de paramètres, c'est à dire de variables représentant un élément quelconque (et non de variables formelles au sens du calcul formel), il faut interpréter ces formules comme des égalités entre fonctions de ces variables.

Si le dioïde n'est pas commutatif, il n'y a pas de formule du binôme plus simple que l'énumération de tous les termes qui apparaissent.

3.5 Premier exemple: l'algèbre de Boole.

L'algèbre de Boole est un dioïde ordonné, pour la relation d'ordre $0 \leq 1$, dans lequel $\varepsilon = 0$ et $e = \infty = 1$

Par définition des dioïdes, l'algèbre de Boole est un sous-dioïde de tout dioïde ordonné (sauf du cas très particulier de $\{\varepsilon\}$ dont on peut admettre que c'est un dioïde bien qu'il ne satisfasse pas $\varepsilon \neq e$).

Un autre dioïde ordonné qui sera utile, et qui peut jouer le rôle d'une algèbre de Boole à trois valeurs logiques, est le dioïde défini sur $\{\varepsilon, e, \infty\}$ par l'ordre $\varepsilon < e < \infty$ qui en donne l'addition, et par le seul produit possible, défini pour tout x par $\varepsilon.x = \varepsilon$ et $e.x = x$

3.6 Dioïdes utiles.

Les dioïdes ordonnés "de base" que nous utiliserons dans l'étude des systèmes à événements discrets seront les ensembles \mathbb{R} des réels et \mathbb{Z} des entiers munis des opérations suivantes, qui sont évidemment associatives et commutatives:

$$a \oplus b = \max(a, b)$$

$$a.b = a + b$$

L'addition usuelle devient la multiplication du dioïde. Celle-ci est distributive par rapport à la loi \oplus car pour tout triplet (a, b, c) d'entiers ou de réels

$$a + \max(b, c) = \max(a+b, a+c)$$

ce qui s'écrit, avec les notations introduites ci-dessus

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus (a \oplus c)$$

et il est immédiat que cette propriété reste vraie si on remplace le max par le min.

Pour obtenir des dioïdes, tels que nous les avons définis, il faut compléter \mathbb{R} et \mathbb{Z} par $+\infty$ ou $-\infty$ pour obtenir l'élément neutre de la loi additive.

$+\infty$ est élément absorbant pour l'addition usuelle et pour le "max" et est élément neutre pour le "min"

$-\infty$ est élément absorbant pour l'addition usuelle et pour le "min" et est élément neutre pour le "max"

Il reste à définir le produit $+\infty \cdot -\infty$. Nous allons adopter une convention différente selon le cas, pour que l'élément neutre pour la loi \oplus soit absorbant pour la loi notée multiplicativement.

Définitions 3.6.1:

Le "dioïde réel croissant", noté DRC est le dioïde

$$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$$

dans lequel on note

$$\varepsilon = -\infty \text{ et } \infty = +\infty$$

avec la convention

$$\varepsilon \cdot \infty = \varepsilon$$

c'est à dire en notation usuelle

$$(-\infty) + (+\infty) = -\infty$$

Le "dioïde réel décroissant" noté DRD est le dioïde

$$(\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$$

dans lequel on note

$$\varepsilon = +\infty \text{ et } \infty = -\infty$$

avec la convention

$$\varepsilon \cdot \infty = \varepsilon$$

c'est à dire en notation usuelle

$$(-\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Le "dioïde entier croissant", noté DZC est le dioïde

$$(Z \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$$

dans lequel on note

$$\varepsilon = -\infty \text{ et } \infty = +\infty$$

avec la convention

$$\varepsilon \infty = \varepsilon$$

c'est à dire en notation usuelle

$$(-\infty) + (+\infty) = -\infty$$

Le "dioïde entier décroissant" noté DZD est le dioïde

$$(Z \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$$

dans lequel on note

$$\varepsilon = +\infty \text{ et } \infty = -\infty$$

avec la convention

$$\varepsilon \infty = \varepsilon$$

c'est à dire en notation usuelle

$$(-\infty) + (+\infty) = +\infty$$

Dans tous les cas, la première opération sera notée \oplus et la seconde opération sera notée multiplicativement.

Propriétés 3.6.2:

Pour tous les dioïdes DRC, DRD, DZC, DZD:

∞ est élément absorbant pour la loi \oplus ,

∞ est absorbant pour la loi devant tout élément autre que ε

3.7 Quelques propriétés d'isomorphismes.

Propriété 3.7.1:

La transformation $x \rightarrow -x$ (opposé usuel) établit un isomorphisme entre DZC et DZD d'une part, et DRC et DRD d'autre part.

Cet isomorphisme est à la base de la théorie que CUNNINGHAME-GREEN, qui manipule en permanence des structures à quatre opérations: un dioïde et son "opposé" Nous éviterons de l'utiliser parce que dans l'étude des systèmes dynamiques, une dualité entre suites croissantes dans DZD et suites croissantes dans DZC sera introduite. Celle-ci est beaucoup plus utile et il serait malcommode de manipuler deux types de dualité intervertissant le max et le min.

Cependant l'existence de cet isomorphisme permet de n'effectuer la plupart des démonstrations que pour l'une des opérations max ou min.

Propriété 3.7.2:

La transformation $x \rightarrow e^x$ (au sens usuel) établit un isomorphisme entre le dioïde DRC et le dioïde $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \max, x)$.

En pratique, ce dioïde $(\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}, \max, x)$ ne sera pas utilisé dans la modélisation des systèmes à événements discrets, mais il peut être commode pour l'étude de certains problèmes algébriques "abstraites", ceci pour deux raisons.

-la loi notée multiplicativement est la multiplication usuelle, ce qui supprime une cause fréquente d'erreurs de calcul;

-l'élément neutre de D^n pour la max-addition, qui est alors $(0,0,\dots,0)$, est fini, ce qui est plus commode lorsqu'on veut représenter graphiquement des parties de D^n

3.8 Quelques exemples de calculs.

Dans DZC ou DRC:

$$\begin{aligned}23 \oplus 56.(67 \oplus 78) &= 23 \oplus 56.78 = 23 \oplus 134 = 134 \\4.(e \oplus 7) \oplus (\infty \oplus 8).e &= 4.7 \oplus \infty.e = 11 \oplus e = 11\end{aligned}$$

Par contre dans DZD ou DRD:

$$\begin{aligned}23 \oplus 56.(67 \oplus 78) &= 23 \oplus 56.67 = 23 \oplus 123 = 23 \\4.(e \oplus 7) \oplus (\infty \oplus 8).e &= 4.7 \oplus \infty.e = 11 \oplus e = 11\end{aligned}$$

Remarque:

Ces dioïdes jouissent de nombreuses propriétés utiles à cause des particularités suivantes.

- La relation est un ordre total, qui définit un treillis complet.
- Les deux opérations sont commutatives.
- Tout élément distinct de ε et ∞ est inversible pour le produit.

3.9 Equation algébrique du premier degré.

La forme générale d'une équation algébrique du premier degré dans un dioïde dont l'addition n'est pas une loi de groupe est

$$a.x \oplus b = c.x \oplus d$$

où la variable est x .

Nous l'étudierons dans le cas de DZC et DRC, lorsque l'addition du dioïde est le max; tous les résultats découlent directement d'une étude graphique des fonctions de la variable x $\max(x + a, b)$ et $\max(x + c, d)$

La discussion sur les valeurs des paramètres a et b est résumée dans le tableau suivant, où nous indiquons l'existence des solutions finies, distinctes de ε et de ∞ . Les divisions sont à prendre au sens du dioïde, a/b signifie donc $a \cdot b^{-1}$ au sens usuel.

Solutions finies.	$b < d$	$b = d$	$b > d$
$a < c$	pas de solution	$x \leq d/c$	$x = b/c$
$a = c$	$x \geq d/a$	x quelconque	$x \geq b/a$
$a > c$	$x = d/a$	$x \leq b/a$	pas de solution

Résolution de $a.x + b = cx + d$ dans le cas de DZC ou DRC.
avec a, b, c, d finis.

Notons que ε est solution si et seulement si $b = d$, et que ∞ est toujours solution si $a \neq \varepsilon$ et $b \neq \varepsilon$.

Lorsque l'un des coefficients est égal à ∞ ou à ε , l'équation est de l'un des types dégénérés suivants:

1er type dégénéré:

$$\begin{aligned} a \cdot x + b &= c \\ \infty > a > \varepsilon, c < \infty \text{ et } b < \infty \end{aligned}$$

Si $b > c$, il n'y a pas de solution, sinon $x = c/a$ (au sens du dioïde).

2nd type dégénéré:

$$\begin{aligned} a \cdot x + b &= \infty \\ \infty > a > \varepsilon \end{aligned}$$

Seul ∞ est solution

etc.... Les autres cas sont triviaux.

3.10 Complétion d'un semi-groupe ordonné.

Nous allons montrer qu'à partir d'un semi-groupe ordonné (qui n'est pas encore un dioïde ordonné s'il n'a pas d'élément minimal), on peut toujours se ramener au cas d'un semi-groupe ordonné en treillis (Lattice-ordered-semigroup), et même en treillis complet. Nous pourrons donc toujours faire l'hypothèse que les dioïdes ordonnés que nous utiliserons seront des treillis complets.

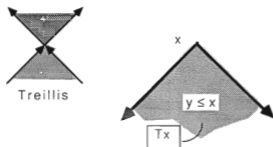
Théorème 3.10.1:

Considérons un semi-groupe (multiplicatif) ordonné, dont le produit est compatible avec la relation d'ordre. Alors ce semi-groupe peut être plongé, par un homomorphisme croissant, dans un autre semi-groupe qui est un treillis complet. Muni de la max-addition dérivée de l'ordre et du produit prolongeant le produit du semi-groupe, ce treillis complet est un diode ordonné.

Démonstration:

Notons G le semi-groupe et $P(G)$ l'ensemble des parties de G . Notons $T(G)$ le sous ensemble de $P(G)$ des parties T de G telles que:

$$\forall x \in T \quad T \supset \{y \in G / y \leq x\}$$



$T(G)$ est un ensemble partiellement ordonné pour l'inclusion. $T(G)$ contient G qui est son élément maximal, et nous pouvons convenir qu'il contient \emptyset , qui est minimal pour l'inclusion. Nous conviendrons que l'ensemble vide appartient à $T(G)$.

Les éléments de G seront identifiés à des éléments de $T(G)$ de la manière suivante:

$$x \in G \rightarrow T_x = \{y \in G, y \leq x\} \in T(G)$$

La partie T_x n'est jamais vide puisqu'elle contient toujours x . Elle contient aussi l'élément minimal de G s'il existe, ce qui n'est pas indispensable.

T_x appartient bien à $T(G)$. En effet, si $y \in T_x$ nous avons $y \leq x$ donc
 $z \leq y \Rightarrow z \leq x$

donc

$$T_x = \{ z \in G, z \leq x \} \supset \{ z \in G, z \leq y \}$$

Nous venons même de montrer que cette identification de x à T_x est croissante, c'est à dire:

$$x \geq y \Rightarrow T_x \supset T_y$$

$P(G)$ ensemble de toutes les parties de G est un treillis complet pour l'inclusion. Pour montrer qu'il en est de même de $T(G)$, il suffit de montrer que le plus petit majorant pour l'inclusion (respectivement le plus grand minorant) dans $P(G)$, d'une famille $\{T_i\}$ d'éléments de $T(G)$ appartient aussi à $T(G)$.

Le plus petit majorant commun des T_i est leur union $\cup T_i$. Cet ensemble appartient à $T(G)$ car si x appartient à $\cup T_i$ il appartient à l'un des T_i , par exemple à T_1 . Alors

$$\{ z \in G, z \leq x \} \supset T_1 \supset \cup T_i$$

ce qu'il fallait démontrer. Il en va de même pour le plus grand minorant commun des T_i , qui est leur intersection. $T(G)$ est donc un treillis complet pour l'inclusion et cet ordre prolonge celui de G .

Nous allons définir le produit de deux éléments de $T(G)$ par

$$A.B = \{ z \in G, \exists x \in A, \exists y \in B, z \leq x.y \}$$

T est évidemment stable pour ce produit, et de plus, par définition

$$T_x.T_y = T_{x.y}$$

ce qui signifie que ce produit prolonge celui de G .

Il reste à prouver que $T(G)$ muni de la max-somme dérivée de l'inclusion et de ce produit est un dioïde ordonné. Nous appliquons pour cela la caractérisation donnée dans le théorème 3-1

- l'élément neutre du produit est T_e ou e est l'élément neutre de G ;
- le produit est évidemment associatif;
- l'élément minimal de $T(G)$, l'ensemble vide, est absorbant pour le produit;

Il reste à prouver que le produit est compatible avec l'inclusion

Soient A, B, C trois parties de $T(G)$, avec $A \supset B$

$$A.C = \{ z \in G, \exists x \in A, \exists y \in C, z \leq x.y \}$$

$$B.C = \{ z \in G, \exists x \in B, \exists y \in C, z \leq x.y \}$$

Si z appartient à $A.C$, il existe un couple (x,y) tel que $z \leq x.y$, avec $x \in A$ et $y \in C$

mais le couple (x,y) vérifie aussi $x \in B$ et $y \in C$, donc z appartient à $B.C$, d'où $A.C \supset B.C$. Il est aisé de vérifier pareillement la compatibilité du produit à gauche, $C.A \supset C.B$ ce qui termine la démonstration. ■

3.11 Dioïdes ordonnés complets.

Le théorème 3.10.1 nous permet de supposer que nous travaillerons avec des dioïdes ordonnés qui sont des treillis complets. Malheureusement, cette hypothèse n'est pas suffisante pour que les propriétés du calcul soient agréables. En effet, dans tout dioïde, il y a une classe particulière d'homomorphismes que nous avons qualifiés d'internes, lesquels s'écrivent

$$x \rightarrow \lambda.x \quad \text{ou} \quad x \rightarrow x.\lambda$$

où λ est une constante.

Il est particulièrement utile que ces homomorphismes soient max-continus, au sens donné dans le chapitre 1 aussi ne dirons nous que le dioïde est complet que si une hypothèse supplémentaire est vérifiée.

Définition 3.11.1:

Un dioïde ordonné D est complet, si et seulement si la relation d'ordre associée à son addition en fait un treillis complet, et si pour tout élément λ de D et toute partie P de D ,

$$\lambda.(\sum_{x \in P} x) = \sum_{x \in P} \lambda.x$$

$$\text{et} \quad (\sum_{x \in P} x). \lambda = \sum_{x \in P} x. \lambda$$

Rappelons que cette condition supplémentaire peut aussi être interprétée comme une condition de "distributivité infinie" du produit.

Propriété 3.11.2:

En complétant un semi-groupe ordonné par la méthode proposée ci-dessus, dans le théorème 3.10.1, le dioïde $T(G)$ ainsi construit est un dioïde ordonné complet.

Démonstration.

Le produit de deux parties de $T(G)$ est défini par

$$A.B = \{ z \in G, \exists x \in A, \exists y \in B, z \leq x.y \}$$

Par définition, la relation d'ordre est l'inclusion et une max-somme infinie est une union infinie. Il nous faut donc calculer

$$\begin{aligned} A.(\cup_{i \in I} B_i) &= \{ z \in G, \exists x \in A, \exists i \in I, \exists y \in B_i, z \leq x.y \} \\ &= \cup_{i \in I} \{ z \in G, \exists x \in A, \exists y \in B_i, z \leq x.y \} \\ &= \cup_{i \in I} A.B_i \end{aligned}$$

CQFD ■

A cause de ce théorème, nous pourrions même faire l'hypothèse que les dioïdes ordonnés que nous utiliserons seront complets, au sens donné dans la définition 3.11.1

Propriété 3.11.3:

Si D est un dioïde ordonné complet, les dioïdes suivants, construits à partir de D sont aussi des dioïdes ordonnés complets:

- dioïde canonique des fonctions à valeurs dans D ;
- dioïde des matrices carrées à coefficients dans D ;
- séries formelles à coefficients dans D ;
- fonctions polynômes à coefficients et valeurs dans D .

Démonstration:

Donnons la démonstration dans le cas des séries formelles en une variable z à coefficients dans D , ensemble que l'on note $D\langle\langle z \rangle\rangle$.

Ce dioïde est évidemment un treillis complet pour l'ordre partiel induit par l'ordre sur les coefficients. Il reste à montrer que pour toute série formelle T de $D\langle\langle z \rangle\rangle$, la fonction de $D\langle\langle z \rangle\rangle$ dans $D\langle\langle z \rangle\rangle$ définie par $X \rightarrow T.X$ est max-continue.

Soit $\{ X_s, s \in S \}$ une famille de séries de $D\langle\langle z \rangle\rangle$ indicée par un ensemble S , et T une autre série de $D\langle\langle z \rangle\rangle$. Notons

$$X_s = \sum_{i \geq 0} X_{s,i} \cdot z^i$$

$$T = \sum_{i \geq 0} T_i \cdot z^i$$

alors

$$T.X_s = \sum_{k \geq 0} (\sum_{j=1..k} T_j \cdot X_{s,k-j}) \cdot z^k$$

et

$$\sum_{s \in S} (T.X_s) = \sum_{s \in S} \sum_{k \geq 0} (\sum_{j=1..k} T_j \cdot X_{s,k-j}) \cdot z^k$$

d'autre part

$$T \sum_{s \in S} X_s = \sum_{k \geq 0} (\sum_{j=1..k} T_j \sum_{s \in S} X_{s,k-j}) \cdot z^k$$

En utilisant la continuité du produit dans D , on obtient

$$T_j \sum_{s \in S} X_{s,k-j} = \sum_{s \in S} T_j \cdot X_{s,k-j}$$

donc

$$T \sum_{s \in S} X_s = \sum_{k \geq 0} (\sum_{j=1..k} \sum_{s \in S} T_j \cdot X_{s,k-j}) \cdot z^k$$

enfin

$$\begin{aligned} T \sum_{s \in S} X_s &= \sum_{k \geq 0} \sum_{s \in S} (\sum_{j=1..k} T_j \cdot X_{s,k-j}) \cdot z^k \\ &= \sum_{s \in S} \sum_{k \geq 0} (\sum_{j=1..k} T_j \cdot X_{s,k-j}) \cdot z^k \\ &= \sum_{s \in S} T \cdot X_s \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer ■

3.12 Autre produit de fonctions à valeurs dans un dioïde ordonné complet.

Nous avons vu que les fonctions à valeurs dans un dioïde D peuvent être munies d'une structure canonique de dioïde induite par celle de D , dans laquelle les sommes et produits de fonctions se font terme à terme. Dans le cas des fonctions d'un ensemble ordonné prenant à valeurs dans un dioïde ordonné complet, on peut introduire une autre multiplication, qui généralise le produit des séries.

S est un monoïde ordonné, dont le produit est compatible avec la relation d'ordre.

D est un dioïde ordonné complet.

D^S est l'ensemble des fonctions de S à valeurs dans D.

Théorème et définition 3.12.1:

Définissons une loi interne notée \blacklozenge sur D^S par

$$\forall x \in S \quad (f \blacklozenge g)(x) = \sum_{u \in S, v \in S} u.v \leq x f(u).g(v)$$

Soit \oplus la max-addition associée à l'ordre canonique sur D^S , alors $(D^S, \oplus, \blacklozenge)$ est un dioïde ordonné complet.

Démonstration:

Ce produit \blacklozenge est évidemment associatif et est compatible avec la relation d'ordre car $g \leq h$ signifie $\forall v \in S, g(v) \leq h(v)$ et par conséquent

$$\sum_{u.v \leq x} f(u).g(v) \leq \sum_{u.v \leq x} f(u).h(v)$$

et donc

$$f \blacklozenge g \leq f \blacklozenge h$$

Il en est de même pour la multiplication à droite.

Montrons enfin que ce dioïde est complet. Nous savons qu'il l'est en tant que treillis, puisque l'ordre sur ce dioïde est celui de la structure canonique. Il reste donc à montrer la "continuité" de cette multiplication \blacklozenge

Soit P une partie quelconque de D^S , et x un élément de S;

$$(g \blacklozenge \sum_{h \in P} h)(x) = \sum_{u.v \leq x} g(u). \sum_{h \in P} h(v)$$

comme le dioïde D est complet,

$$\begin{aligned} (g \blacklozenge \sum_{h \in P} h)(x) &= \sum_{u.v \leq x} \sum_{h \in P} g(u).h(v) \\ &= \sum_{h \in P} \sum_{u.v \leq x} g(u).h(v) \\ &= \sum_{h \in P} (g \blacklozenge h)(x) \end{aligned}$$

Il en résulte l'égalité désirée entre en fonctions:

$$(g \blacklozenge \sum_{h \in P} h) = \sum_{f \in P} (g \blacklozenge h)$$

■

Tout élément λ du dioïde peut être identifié à la fonction:

$$f(e) = \lambda$$

$$f(x) = \varepsilon \text{ si } x \neq e.$$

3.13 Pseudo division dans un dioïde ordonné complet.

Dans un dioïde ordonné complet, considérons un homomorphisme "interne" du type $x \rightarrow \lambda \cdot x$. Puisque par hypothèse sur le dioïde, cet homomorphisme est max-continu, on peut construire sa quasi-inverse, qui est l'application min-continue

$$y \rightarrow \sup \{ x, \lambda \cdot x \leq y \}$$

Il est aisé de vérifier que si λ est inversible, cette quasi inverse s'identifie à l'homomorphisme:

$$y \rightarrow \lambda^{-1} \cdot y$$

Nous allons utiliser cette propriété pour introduire une pseudo-division dans un dioïde ordonné complet. En théorie des treillis, cette construction s'appelle la résiduation, mais c'est bien le rôle d'une division qu'elle joue dans notre formalisme.

Définition 3.13.1:

Soit D un dioïde ordonné complet. On peut définir une opération interne appelée "pseudo division à droite" par

$$x/y = \sup \{ \lambda \in D \mid \lambda \cdot y \leq x \}$$

Il est bien sûr possible de définir la pseudo-division à gauche:

$$y \backslash x = \sup \{ \lambda \in D \mid y \cdot \lambda \leq x \}$$

Ces deux pseudo-divisions ont des propriétés similaires, et coïncident si la multiplication est commutative. Nous allons essentiellement étudier et utiliser la pseudo-division à droite.

Propriétés 3.13.2:

Pour tous éléments x et y , $y.x/x \geq y$ et $(y/x).x \leq y$

Si y est un élément inversible pour la multiplication d'un dioïde ordonné complet, alors, pour tout élément x de ce dioïde $x/y = x.y^{-1}$ et $y/x = y^{-1}.x$. En particulier, $y^{-1} = e/y = y/e$

D'autre part, $\exists \lambda$ tq $x = \lambda.y \Leftrightarrow x = (x/y).y$

Remarque:

Nous avons défini une notion de pseudo-division qui est une opération binaire. Cela n'est pas équivalent à la construction d'un pseudo-inverse, qui serait une opération d'arité 1 pour les éléments du dioïde. En effet, on ne peut pas toujours identifier la fonction $x \rightarrow x/y$ à une fonction qui s'écrit $x \rightarrow \lambda.x$ qui permettrait d'identifier λ à un inverse de x .

De plus, cette pseudo inverse est min-continue et n'est pas max-continue comme le serait le produit par un inverse à gauche de y . Cela permet de comprendre pourquoi il y a en général peu d'éléments inversibles pour le produit dans les dioïdes ordonnés. leurs inverses doivent définir un homomorphisme interne max-continu et min-continu.

Les autres règles de calcul applicables à cette pseudo-division sont:

Propriétés 3.13.3:

Pour tous x, x', y, y', z d'un dioïde ordonné complet

$$(x \oplus x')/y \geq x/y \oplus x'/y$$

$$x/(y \oplus y') \leq x/y \oplus x/y'$$

$$\text{Si } x \leq y \quad \forall z \quad x/z \leq y/z \quad \text{et } z/x \geq z/y$$

Démonstration:

Ces inégalités résultent des inclusions suivantes:

$$\begin{aligned} \{ \lambda \in D, \lambda.y \leq x \oplus x' \} &\supset \{ \lambda \in D, \lambda.y \leq x \} \cup \{ \lambda \in D, \lambda.y \leq x' \} \\ \{ \lambda \in D, \lambda.y \leq x \} \cup \{ \lambda \in D, \lambda.y' \leq x \} &\supset \{ \lambda \in D, \lambda.(y \oplus y') \leq x \} \end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser la définition de la relation d'ordre pour obtenir la dernière propriété ■

Propriété 3.13.4:

Dans un dioïde ordonné complet, si x et y sont inversibles pour le produit,

$$x \leq y \Rightarrow x^{-1} \geq y^{-1}$$

3.14 Pseudo-division et théorie de langages.

Nous avons introduit cette pseudo-division à partir du concept de quasi-inverse ou de résiduation de la théorie des treillis. Cette construction permet de retrouver une opération qui joue un rôle en théorie des séries formelles et des langages.

Soit Γ un alphabet et Γ^* le monoïde libre engendré par cet alphabet. Pour tout mot w de Γ^* et toute partie X (langage) de Γ^* on définit $w^{-1}.X$ comme étant le langage constitué par les suffixes des mots de Γ^* qui commencent par le préfixe w

Par exemple si $\Gamma = \{a,b,c\}$, $w = aba$ et $X = \{aa, ac, abab, abca, abacc, bab, ababa\}$, ce langage est $w^{-1}.X = \{b, cc, ba\}$

Cette construction peut être interprétée comme une pseudo division à gauche dans le dioïde ordonné complet Γ^*

$$w^{-1}.X = \{b, cc, ba\} = w \backslash X$$

3.15 Dioïdes inversibles.

Pour le produit, deux éléments jouent un rôle particulier : ε et ∞ . L'élément ε ne peut pas être inversible dans un dioïde puisque par définition, il est absorbant pour le produit; la situation est analogue au cas du zéro des corps. Par contre, l'élément ∞ peut être inversible comme dans l'algèbre de Boole où $e = 1 = \infty$

Dans la plupart des dioïdes que nous utiliserons, il est possible d'identifier ∞^{-1} à ε , sous les hypothèses suivantes:

Définition et notations 3.15.1:

Un dioïde ordonné complet est inversible si $\varepsilon < e < \infty$ et tous les éléments distincts de ε et de ∞ sont inversibles. Dans ce cas, on utilisera la convention suivante:

$$\varepsilon^{-1} = e/\varepsilon = \varepsilon \setminus e = \infty$$

$$\infty^{-1} = e/\infty = \infty \setminus e = \varepsilon$$

Justification:

Vérifions que la convention pour les éléments inversibles est cohérente. Si on définit l'inverse à partir de la pseudo division, $\varepsilon^{-1} = e/\varepsilon = \sup D = \infty$

Par contre, la convention $\infty^{-1} = e/\infty = \infty \setminus e = \varepsilon$ est légèrement plus difficile à justifier. Pour cela, il faut prouver que $e/\infty = \infty \setminus e = \varepsilon$

Si $x \leq y$, alors $e/x \geq e/y$. Par conséquent, e/∞ minore tous les éléments inversibles; de même pour $\infty \setminus e$. Comme par hypothèse tous les éléments du dioïde, sauf ε et ∞ sont inversibles, nécessairement:

$$\infty^{-1} = e/\infty = \infty \setminus e = \varepsilon$$

Avec cette convention, pour tout élément x :

$$(x^{-1})^{-1} = x$$

♦

D'autre part, puisque $e < \infty$, on obtient bien un dioïde en remplaçant la max-somme par la min-somme. Le mot "inversible" est alors doublement justifié, puisqu'il est aussi possible inverser l'ordre. On obtient encore un dioïde complet car la multiplication par un élément inversible est une bijection. Nous avons vu au chapitre 1 que si celle-ci est max-continue elle est nécessairement min-continue. La multiplication par les éléments e et ∞ est bien évidemment min-continue.

Nous n'utiliserons jamais le concept "abstrait" de dioïde inversible, mais les exemples de dioïdes que nous étudierons dans la pratique des systèmes à événements discrets, DZC, DZD, DRC et DRD sont tous inversibles.

3.16 Isomorphismes entre dioïdes ordonnés

Rappelons que si une bijection entre treillis et sa bijection réciproque sont croissantes, elles sont toutes deux max-continues et min-continues. En particulier, si f est une application max-continue ou min-continue entre dioïdes ordonnés complets et si f est un isomorphisme de dioïdes, f est nécessairement max-continue et min-continue.

Nous allons maintenant établir un résultat qui peut surtout être utile pour prouver que des dioïdes ordonnés complets ne sont pas isomorphes.

Théorème 3.16.1:

Soient D et D' deux dioïdes ordonnés complets et f un homomorphisme de dioïdes de D dans D' . Alors

$$\forall (x,y) \in D, f(x)/f(y) \geq f(x/y)$$

De plus, si f est un isomorphisme:

$$\forall (x,y) \in D, f(x)/f(y) = f(x/y)$$

Démonstration:

La première inégalité résulte de l'inclusion suivante:

$$\{ \mu \in D', \mu \cdot f(y) \leq f(x) \} \supseteq \{ f(\lambda) \mid \lambda \in D, \lambda \cdot y \leq x \}$$

Pour obtenir l'égalité dans le cas de f bijectif, il suffit d'appliquer l'inégalité précédente à f^{-1} qui est aussi un homomorphisme de dioïde ■

3.17 Fonctions polynômes et polynômes formels.

Dans le cas d'un dioïde ordonné, la règle de calcul des degrés et valuations du produit et de la somme de polynômes formels est plus simple que dans le cas usuel, car des termes ne peuvent pas "disparaître" lors des additions. Fixons par convention le degré du polynôme ε à $-\infty$.

Propriété 3.17.1:

Le degré du produit de deux polynômes formels est la somme de leurs degrés. La valuation du produit de deux polynômes formels est la somme de leurs valuations.

Le degré de la somme de deux polynômes formels est le max de leurs degrés. La valuation de la somme de deux polynômes formels est le min de leurs valuations.

Il n'y a pas de difficulté dans le cas des polynômes formels. Par contre, il est plus difficile de définir le degré et la valuation dans le cas des fonctions polynômes, car une même fonction peut avoir plusieurs écritures.

Dans le cas des dioïdes simples DZC, DZD, DRC et DRD, il est aisé de vérifier que les termes de degré extrêmes sont indépendants de l'écriture d'une fonction, car ils conditionnent son comportement en $+\infty$ et en $-\infty$. Les énoncés précédents sont encore valables.

Remarquons enfin que le degré est un homomorphisme du dioïde des polynômes dans le dioïde $(\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

Nous allons maintenant pouvoir montrer que les polynômes formels ne sont pas isomorphes aux fonctions polynômes. Plus précisément, nous allons montrer qu'on n'obtient pas un isomorphisme en identifiant les polynômes et les fonctions polynômes qui ont la même écriture.

Tout dioïde ordonné D contient comme sous-dioïde l'algèbre de Boole $B = \{\varepsilon, e\}$. Supposons qu'en identifiant les fonctions polynômes à coefficients dans D et leurs représentations formelles, on définit un isomorphisme de dioïdes, cet isomorphisme induirait un isomorphisme entre les fonctions polynômes à coefficients dans B et leurs représentations. Il suffit donc de montrer que cela est impossible dans le cas de l'algèbre de Boole.

Soit z une variable. Montrons que $B\langle z \rangle$, dioïde des polynômes formels en z n'est pas identifiable à $B[z]$, dioïde des fonctions polynômes de la variable z . Soient les deux polynômes:

$$P = z^2 \oplus e \quad \text{et} \quad Q = z$$

$B\langle z \rangle$ et $B[z]$ sont complets, la pseudo-division est définie, et il est immédiat que, au sens des séries formelles:

$$P/Q = \varepsilon$$

Par contre, au sens des fonctions polynômes

$$P/Q = e$$

puisque, au sens des fonctions polynômes

$$z^2 \oplus e = z^2 \oplus z \oplus e$$

car

$$\text{si } z \geq e, \quad z^2 \oplus z = z^2$$

et

$$\text{si } z \leq e, \quad z^2 \oplus e = e$$

d'après le théorème 3.16.1, cette identification n'est pas un isomorphisme et par conséquent, il est impossible d'identifier à la fois le polynôme formel P à la fonction P et le polynôme formel Q à la fonction Q .

Il en résulte que dans tout dioïde ordonné, cette identification est impossible. Il peut cependant exister des classes de fonctions polynômes qui peuvent être identifiées à leurs écritures, mais cette identification n'est valable que pour les opérations internes à ces classes.

A l'aide du même théorème 3.16.1, nous pouvons prouver que les séries formelles en plusieurs variables commutatives ne s'identifient pas à un sous-dioïde des séries formelles en variables non-commutatives. Nous considérons un dioïde ordonné complet quelconque.

Si les variables formelles x et y commutent,

$$xy/x = y$$

Par contre, si elles ne commutent pas:

$$xy/x = \varepsilon$$

Par conséquent il est impossible d'identifier les polynômes en variables commutatives au sous ensemble des polynômes en variables non-commutatives qui ont la même écriture.

Chapitre 4 Moduloïdes sur un dioïde ordonné.

Ce chapitre est une tentative de construction d'une théorie de l'algèbre linéaire dans le cas où les scalaires appartiennent à un dioïde ordonné, dans le but d'obtenir une notion de rang applicable aux systèmes dynamiques qui modélisent les systèmes à événements discrets. Nous avons abordé cette question par analogie avec le cas usuel, en essayant de traduire les concepts de rang, base et famille génératrice tels qu'ils servent dans le cas des corps que l'on utilise en automatique usuelle.

Les résultats de la théorie des modules sur les anneaux n'apportent rien car la difficulté fondamentale est due à la non-régularité de l'addition associée au max: au contraire d'un module, on ne peut même pas faire passer un terme d'un côté à l'autre dans une égalité. Les non-résultats sont cependant analogues: pas de base dans le cas général etc

Nous obtiendrons cependant un résultat important, que l'on peut interpréter comme un théorème d'unicité de base: si un moduloïde possède une famille génératrice finie minimale (non-redondante), elle est unique, modulo une permutation et des multiplications par des scalaires inversibles.

4.1 Généralités sur les moduloïdes

Nous appellerons moduloïde ordonné l'analogue d'un espace vectoriel, lorsque l'ensemble des "scalaires" est un dioïde ordonné. Par commodité nous appellerons "vecteurs" les éléments du moduloïde. Nous verrons que l'existence d'une relation d'ordre sur les "vecteurs" est, sous certaines hypothèses, équivalente à l'existence d'une relation d'ordre sur les scalaires.

Dans [DSEVD4], une ébauche de théorie axiomatique des moduloïdes avait été proposée, dans le cas des dioïdes ordonnés DZC, DZD, DRC et DRD qui nous intéressent. Celle-ci se heurtait à l'absence de coefficients infinis, ce qui impliquait d'exclure, par des axiomes ad hoc, certains cas pathologiques tels que \mathbb{R}^2 muni du max de l'ordre lexicographique. Ces difficultés disparaissent en partie si les coefficients égaux à ∞ sont acceptés.

Pour simplifier notre exposé, nous effectuerons d'emblée les abus de notations usuels: les opérations sur les "vecteurs" seront notées comme les opérations sur les scalaires dont elles dérivent.

Définition 4.1.1:

Un moduloïde (à gauche) sur un dioïde D est un triplet (M, \oplus, \cdot) où M est un ensemble contenant un élément particulier ε_M et sur lesquels sont définies deux lois de composition:

-une loi interne, de $M \times M$ dans M notée \oplus ,

-une opération externe de $D \times M$ dans M notée multiplicativement

telles que si f, g, h sont des éléments de M , λ et μ deux éléments de D :

$$\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda \cdot \mu) \cdot f$$

$$(\lambda \oplus \mu) \cdot f = \lambda \cdot f \oplus \mu \cdot g$$

$$\lambda \cdot (f \oplus g) = \lambda \cdot f \oplus \lambda \cdot g$$

$$f \oplus (g \oplus h) = (f \oplus g) \oplus h$$

$$f \oplus g = g \oplus f$$

$$\varepsilon \cdot f = \varepsilon_M$$

$$e \cdot f = f$$

Ces propriétés justifient l'abus de notation dans la définition des opérations sur le moduloïde; de plus il est commode de noter ε_M comme ε , car ε_M est nécessairement élément neutre pour la loi \oplus du moduloïde. En effet, pour tout vecteur f :

$$f \oplus \varepsilon_M = (e \oplus \varepsilon) \cdot f = e \cdot f = f$$

Si le dioïde n'est pas commutatif, il faut à priori distinguer les moduloïdes "à gauche" et les moduloïdes "à droite" selon le coté choisi pour la multiplication externe. Nous n'étudierons que les moduloïdes à gauche, et ferons l'économie du terme "à gauche" dans la suite.

Définition 4.1.2:

Soient $(M, \oplus, .)$ et $(M', \oplus, .)$ deux moduloïdes sur un dioïde D . Une application Φ de M dans M' est un homomorphisme de moduloïde si et seulement si elle vérifie les deux conditions:

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_M) &= \varepsilon_{M'} \\ \forall (\lambda, \mu) \in D^2 \text{ et } \forall (f, g) \in M^2 \quad \Phi(\lambda.f \oplus \mu.g) &= \lambda.\Phi(f) \oplus \mu.\Phi(g) \end{aligned}$$

Définition 4.1.3:

$(M, \oplus, .)$ est un sous-moduloïde de $(M', \oplus, .)$ si et seulement si:

$$M' \supset M$$

$(M, \oplus, .)$ est un moduloïde;

l'injection de M dans M' est un homomorphisme de moduloïdes.

Remarquons que tout dioïde est un moduloïde sur lui même. Plus généralement, si D° est un sous-dioïde d'un dioïde D , D est un moduloïde sur D° . De cette remarque, il résulte que pour tout dioïde D , les matrices carrées (en fait toutes les matrices), les séries formelles à coefficients dans D , les fonctions à valeur dans D et les fonctions polynômes à coefficients dans D peuvent être considérés comme des moduloïdes sur D .

La plupart des moduloïdes que nous rencontrerons seront du type défini en 4.1.4.

Définition 4.1.4:

Soit S un ensemble quelconque et D un dioïde. La structure canonique de moduloïde sur D de l'ensemble D^S des fonctions de S dans D est définie par les opérations:

$$\begin{aligned} (f \oplus g)(x) &= f(x) \oplus g(x) & \forall x \in S \\ \lambda.f(x) &= \lambda.f(x) & \forall x \in S \end{aligned}$$

L'élément ε est la fonction identiquement égale à ε .

Ce cas englobe en particulier les matrices de toute forme et de toute taille, ainsi que les divers ensembles de séries formelles que nous avons introduits

4.2 Ordre sur les scalaires et sur les vecteurs.

Un vecteur f est régulier à droite si:

$$\forall \lambda \in D^2, \lambda \neq e \Rightarrow \lambda.f \neq f$$

Nous allons maintenant établir le lien entre la relation d'ordre sur les scalaires et celle sur les vecteurs.

Lemme 4.2.1:

Si l'addition du dioïde D est idempotente, alors il en va de même pour l'addition de tout moduloïde M sur ce dioïde. Réciproquement, si l'addition d'un moduloïde est idempotente, et qu'il existe un vecteur f de M tel que,

$$\forall \lambda \in D^2, \lambda \neq e \Rightarrow \lambda.f \neq f$$

alors l'addition du dioïde est idempotente.

Démonstration:

Si l'addition du dioïde est idempotente, pour tout vecteur x du moduloïde

$$x \oplus x = e.x \oplus e.x = (e \oplus e).x = e.x = x$$

Réciproquement, si l'addition du moduloïde est idempotente, et f est le vecteur particulier du théorème,

$$f = f \oplus f = e.f \oplus e.f = (e \oplus e).f = e.f$$

par hypothèse sur f , $e \oplus e = e$, d'où la propriété d'idempotence pour tous les scalaires

$$\forall \lambda \in D, \lambda = e.\lambda = (e \oplus e).\lambda = \lambda \oplus \lambda$$

■

Compte tenu des propriétés combinatoires vérifiées par hypothèse par le dioïde D et le moduloïde M , l'idempotence de leurs additions respectives signifie qu'elles correspondent à la max-somme d'un treillis.

Définition 4.2.2:

Nous appellerons moduloïde ordonné un moduloïde sur un dioïde ordonné. Pour les vecteurs comme pour les scalaires, la relation d'ordre est caractérisée par $f \geq g$ ssi $f \oplus g = f$

Comme pour les dioïdes, les moduloïdes sont d'un plus grand intérêt s'ils sont des treillis complets. De plus, il faut aussi supposer que le produit externe vérifie une propriété de "distributivité infinie" ou "continuité"

Définition 4.2.3:

Soit D un dioïde ordonné complet. Un moduloïde M sur D est un moduloïde ordonné complet si et seulement si la relation d'ordre associée à son addition le muni d'une structure de treillis complet, et si les deux propriétés de continuité du produit sont vérifiées:

-pour toute partie P du dioïde D et tout vecteur g du moduloïde M,

$$(\sum_{\lambda \in P} \lambda) \cdot g = \sum_{\lambda \in P} \lambda \cdot g$$

-pour tout scalaire λ de D et toute partie Q du moduloïde M,

$$\lambda \cdot \sum_{x \in Q} x = \sum_{x \in Q} \lambda \cdot x$$

Dans toute la suite, D sera un dioïde ordonné complet et M sera un moduloïde sur le dioïde complet D, qui sont tous deux munis de leur ordre canonique.

4.3 Projection scalaire.

Si nous avons introduit la notion de moduloïde, c'est dans l'espoir de pouvoir manipuler des vecteurs par leurs coordonnées. Lorsqu'un moduloïde est un ensemble de fonctions d'un ensemble d'indices S dans un dioïde D, il y a évidemment un jeu de coordonnées canoniques: chaque fonction est caractérisée par les $f(s)$ pour s appartenant à S. Il est beaucoup plus difficile de définir les coordonnées d'un vecteur par rapport à une "base quelconque", comme en algèbre usuelle.

Ce problème est évidemment lié à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Pour étudier ces équations et introduire des coordonnées, nous ferons appel à la notion suivante, qui est l'analogue vectoriel de la pseudo-division (alias résiduaison)

Définition 4.3.1:

Soient f et g deux éléments de M , nous appellerons projection scalaire de f sur g , le scalaire de D défini par:

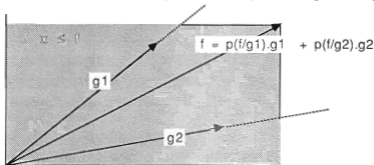
$$p(f/g) = \sup \{ \lambda \in D \ \lambda.g \leq f \}$$

Exemple:

Dans DRC^2 , considérons:

$$f = (2,3) \quad \text{et} \quad g = (5,8) \\ p(f/g) = -5 \quad p(g/f) = 3$$

L'intérêt de cette projection scalaire pour la résolution de systèmes linéaires est mis en évidence par son interprétation géométrique.



Pour résoudre l'équation d'inconnues λ et μ

$$f = \lambda.g1 \oplus \mu.g2$$

il faut que les vecteurs $\lambda.g1$ et $\mu.g2$ minorent f . Comme l'addition se fait "parallèlement aux axes", pour que l'égalité ait lieu, ces vecteurs doivent être les plus grands vecteurs colinéaires à $g1$ et $g2$ qui minorent f ; d'où la définition de la projection scalaire, qui revient à calculer les plus grands λ et μ possibles.

Lorsqu'on considère un dioïde en tant que moduloïde sur lui-même, cette projection scalaire coïncide avec la pseudo-division. Dans un cas plus général, le lien entre cette projection et la pseudo-division est explicité par le résultat 4.3.2

Propriété 4.3.2:

D est un dioïde complet et S un ensemble quelconque. Dans D^S muni de sa structure canonique définie en 4.1.4, la projection scalaire peut de calculer explicitement à l'aide de la pseudo-division de D :

$$p(f/g) = \inf\{ f(s)/g(s) \mid s \in S\}$$

Rappelons que dans D , la pseudo-division est définie par:

$$x/y = \sup\{\lambda \in D, \lambda \cdot y \leq x\}$$

Démonstration:

Par définition de l'ordre sur les fonctions:

$$\forall t \in S, p(f/g) \cdot g(t) \leq f(t)$$

Par conséquent

$$\forall t \in S, p(f/g) \in \{\lambda \in D, \lambda \cdot g(t) \leq f(t)\}$$

et

$$\forall t \in S, p(f/g) \leq f(t)/g(t)$$

donc

$$p(f/g) \leq \inf\{ f(s)/g(s) \mid s \in S\}$$

Réciproquement,

$$\forall t \in S, (\inf\{ f(s)/g(s) \mid s \in S\}) \cdot g(t) \leq (f(t)/g(t)) \cdot g(t) \leq f(t)$$

donc

$$(\inf\{ f(s)/g(s) \mid s \in S\}) \cdot g \leq f$$

donc par définition de $p(f/g)$

$$\inf\{ f(s)/g(s) \mid s \in S\} \leq p(f/g)$$

d'où la formule énoncée ■

Propriétés 4.3.3:

Pour tous vecteurs f, g, h d'un moduloïde ordonné complet, et pour tout α scalaire de D :

$$f \geq p(f/g).g$$

$$p((f \oplus g)/h) \geq p(f/h) \oplus p(g/h)$$

$$p(f/(g \oplus h)) \leq p(f/g) \oplus p(f/h)$$

$$p(\alpha.f/g) \geq \lambda.p(f/g)$$

$$p(f/\alpha.g) = p(f/g)/\alpha \text{ au sens de la pseudo-division de } D;$$

$$p(\alpha.f/\alpha.g) \geq p(f/g)$$

Démonstration:

La première formule résulte de la "continuité" de la multiplication externe.

Comme $f \oplus g$ majore f et g ,

$$\{\lambda \in D / \lambda.h \leq f \oplus g\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.h \leq f\} \cup \{\lambda \in D / \lambda.h \leq g\}$$

donc en considérant les bornes supérieures de ces ensembles,

$$p((f \oplus g)/h) \geq p(f/h) \oplus p(g/h)$$

De même, comme $g \oplus h$ majore g et h ,

$$\{\lambda \in D / \lambda.g \leq f\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.(g \oplus h) \leq f\}$$

et

$$\{\lambda \in D / \lambda.h \leq h\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.(g \oplus h) \leq f\}$$

donc

$$\{\lambda \in D / \lambda.g \leq f\} \cup \{\lambda \in D / \lambda.h \leq f\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.(g \oplus h) \leq f\}$$

ce qui implique

$$p(f/g) \oplus p(f/h) \geq p(f/(g \oplus h))$$

majoration qui est très grossière.

Fixons un scalaire α de D .

$$\lambda.g \leq f \Rightarrow (\alpha.\lambda).g \leq \alpha.f$$

Cela implique

$$\{\lambda \in D / \alpha.\lambda.g \leq \alpha.f\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.g \leq f\}$$

or

$$\alpha.\lambda.g \leq \alpha.f \Rightarrow \alpha.\lambda \leq p(\alpha.f/g)$$

donc en prenant le sup des λ ,

$$\alpha.\sup \{\lambda \in D / \alpha.\lambda.g \leq \alpha.f\} \leq p(\alpha.f/g)$$

donc

$$\rho(\alpha.f/g) \geq \alpha.\rho(f/g)$$

D'autre part,

$$\lambda.(\alpha.g) \leq f \Rightarrow (\lambda.\alpha).g \leq f \Leftrightarrow \lambda.\alpha \leq \rho(f/g)$$

donc en prenant le sup des λ ,

$$\rho(f/\alpha.g) \leq \rho(f/g)$$

et par définition de la pseudo-division

$$\rho(f/\alpha.g) \leq \rho(f/g)/\alpha$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, écrivons que par définition,

$$\alpha \cdot (\rho(f/g)/\alpha) \leq \rho(f/g)$$

donc en multipliant cette inégalité entre scalaires par le vecteur g

$$\alpha \cdot (\rho(f/g)/\alpha).g \leq \rho(f/g).g$$

ou

$$(\rho(f/g)/\alpha) \cdot \alpha.g \leq \rho(f/g).g \leq f$$

et par définition

$$\rho(f/g)/\alpha \leq \rho(f/\alpha.g)$$

ce qui prouve l'égalité.

Enfin,

$$\lambda.g \leq f \Rightarrow \alpha.\lambda.g \leq \alpha.f$$

donc

$$\{\lambda \in D / \lambda.\alpha.g \leq \alpha.f\} \supset \{\lambda \in D / \lambda.g \leq f\}$$

et

$$\rho(\alpha.f/\alpha.g) \geq \rho(f/g)$$

ce qui est la dernière inégalité à prouver ■

Contre exemples:

Dans la propriété 4.3.3 les inégalités peuvent être strictes. Donnons des exemples où c'est le cas.

Dans DZC^2 , prenons $f=(4,9)$, $g=(5,3)$, et $h=(2,2)$. Alors $\rho(f/h) = 2$ et $\rho(g/h) = 1$ mais $f \oplus g = (5,9)$ et $\rho(f \oplus g/h) = 3 > \rho(f/h) \oplus \rho(g/h) = 2$

Dans DZC^2 , prenons $f=(7,8)$, $g=(7,2)$ $h=(9,1)$. Alors $\rho(f/g) = 0$ et $\rho(f/h) = -2$ or, $g \oplus h = (9,2)$ et $\rho(f/g \oplus h) = -2 < \rho(f/g) \oplus \rho(f/h) = 0$

Dans DZC^2 , prenons $f=(7,8)$, $g=(9,9)$ et $\alpha = \infty$. Alors $\alpha.f = \alpha.g = (\infty, \infty)$ et par conséquent $p(\alpha.f/g) = e > p(f/g) = -1$

Dans DZC^2 , prenons $f=(2,3)$, $g=(8, \infty)$, et $\alpha = \infty$. Alors $p(f/g) = \varepsilon$ et $\alpha.f = (\infty, \infty)$ donc le calcul donne $p(\alpha.f/g) = e > \alpha.p(f/g) = \infty.\varepsilon = \varepsilon$ ■

Propriété 4.3.4:

Les égalités $p(\alpha.f/g) = \alpha.p(f/g)$ et $p(\alpha.f/\alpha.g) = p(f/g)$ sont vraies dès que le scalaire α est inversible dans D et régulier par rapport à M , au sens de

$$\exists \alpha^{-1} \text{ tq } \alpha^{-1}.\alpha = e \text{ et } \forall f \in M, \alpha^{-1} . (\alpha.f) = f$$

ce qui est le cas de tous les scalaires autres que ε et ∞ , dans les dioïdes DRC, DZC, DRD et DZD que nous utilisons habituellement.

Démonstration.

Par multiplication par α^{-1} il vient

$$\lambda.\alpha.f \leq \alpha.g \Leftrightarrow \lambda.f \leq g$$

donc $p(\alpha.f/\alpha.g) = p(f/g)$

Appliquons ce résultat pour obtenir

$$p(\alpha.f/g) = p(\alpha.f/\alpha.\alpha^{-1}.g) = p(f/\alpha^{-1}.g)$$

En appliquant un résultat déjà prouvé dans 4.3.3

$$p(f/\alpha^{-1}.g) = p(f/g) / \alpha^{-1} = \alpha.p(f/g)$$

car α^{-1} comme α est inversible dans le dioïde D ■

Comme pour la pseudo-division dans un dioïde ordonné, cette projection scalaire permet de caractériser les isomorphismes de dioïdes. En fait, on peut même énoncer un résultat sur les homomorphismes injectifs.

Théorème 4.3.5:

Soit Φ un homomorphisme entre moduloïdes complets Pour tout (f,g) ,

$$p(\Phi(f)/\Phi(g)) \geq p(f/g)$$

Si Φ est injectif, pour tout couple de vecteurs (f,g) ,

$$p(\Phi(f)/\Phi(g)) = p(f/g)$$

Démonstration:

Si $\lambda.g \oplus f = f$, alors

$$\Phi(\lambda.g \oplus f) = \lambda.\Phi(g) \oplus \Phi(f) = \Phi(f)$$

donc

$$\sup\{ \lambda \in D, \lambda.g \oplus f = f \} \leq \sup\{ \lambda \in D, \lambda.\Phi(g) \oplus \Phi(f) = \Phi(f) \}$$

Supposons qu'il existe un couple f et g tel que:

$$\rho(\Phi(f)/\Phi(g)) > \rho(f/g)$$

Soit

$$f^\circ = f \oplus \rho(\Phi(f)/\Phi(g)).g$$

d'après la définition de la projection scalaire, $f^\circ > f$ or

$$\Phi(f^\circ) = \Phi(f) \oplus \rho(\Phi(f)/\Phi(g)).\Phi(g) = \Phi(f)$$

Φ n'est donc pas injective ■

Remarque:

$$x \neq y \Rightarrow \rho(x/y) < e \text{ ou } \rho(y/x) < e$$

Il en résulte que toute application, qu'elle soit un homomorphisme ou non, qui pour tout couple (x,y) conserve $\rho(x/y)$, est injective et croissante.

4.4 Parallélisme et produit scalaire.

Lorsque le produit du dioïde n'est pas inversible, il y a deux notions de colinéarité qui peuvent intervenir. Nous distinguerons donc les mots colinéaire et parallèles.

Définitions 4.4.1:

Un vecteur x est colinéaire à un vecteur y si et seulement s'il existe un scalaire λ tel que $x = \lambda.y$

Deux vecteurs x et y sont parallèles si et seulement si il existe un scalaire λ inversible tel que $x = \lambda.y$

Ce qui nous intéresse avant tout, ce sont les vecteurs parallèles, et nous

pourrons les caractériser à l'aide de l'outil suivant:

Définition 4.4.2:

Le produit scalaire de deux vecteurs x et y est:

$$\pi(x,y) = \rho(x/y).\rho(y/x)$$

Ce produit n'est commutatif que si c'est le cas du produit du dioïde D . Il se comporte en fait comme un "cosinus de l'angle formé par les directions de x et y " (nous n'essayerons pas de formaliser cette notion). Comme le suggèrent les propriétés suivantes, le produit scalaire de deux vecteurs ne dépend que de leurs directions.

Propriété 4.4.2:

$$\forall (x,y) \quad \pi(x,y) \leq e$$

Démonstration:

$$\rho(x/y).\rho(y/x).x \leq x$$

et par conséquent

$$\rho(x/y).\rho(y/x) \leq \rho(x/x) = e$$

Lemme 4.4.3:

Si $\pi(x,y) = e$, alors $x = \lambda.y$

ou λ est un scalaire qui possède un inverse à droite.

Théorème 4.4.4:

Deux vecteurs x et y sont parallèles si et seulement si

$$\pi(x,y) = e \quad \text{et} \quad \pi(y,x) = e$$

Démonstration du lemme et du théorème:

Supposons $\pi(x,y) = e$, alors:

$$\begin{aligned}x &= \pi(x,y).x \oplus \rho(x/y)y \\ &= \rho(x/y)(\rho(y/x).x \oplus y) \\ &= \rho(x/y).y\end{aligned}$$

Par l'hypothèse même, $\rho(x/y)$ possède un inverse à droite qui est $\rho(y/x)$.

La condition suffisante du théorème découle directement du lemme. Si

$$\pi(x,y) = e \text{ et } \pi(y,x) = e$$

il vient

$$x = \rho(x/y).y \text{ et } y = \rho(y/x).x$$

et $\rho(x/y)$ et $\rho(y/x)$ sont inversibles par hypothèse.

La condition nécessaire est elle-aussi immédiate:

$$x = \lambda.y \text{ implique } \rho(x/y) \geq \lambda$$

et

$$y = \lambda^{-1}.x \text{ implique } \rho(y/x) \geq \lambda^{-1}$$

donc

$$\pi(x,y) \geq e \text{ et de même } \pi(y,x) \geq e.$$

Puisque le produit scalaire de deux vecteurs est toujours inférieur à e , le résultat est montré \blacklozenge

4.5 Equation linéaire dans les moduloïdes ordonnés.

Nous allons étudier l'équation d'inconnue $x=(x_1, \dots, x_n)$

$$\sum_{i=1, \dots, n} x_i.g_i = b$$

où $g_1 \dots g_n$ et b sont des vecteurs d'un moduloïde complet et régulier M .

L'application

$$f: D^n \rightarrow M$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1, \dots, n} x_i.g_i$$

est évidemment max-continue du treillis complet D^n dans le treillis complet M . On peut donc appliquer le résultat du chapitre 1, sur la quasi inverse d'une fonction max-continue. Ce résultat peut être interprété géométriquement grâce à la projection scalaire.

Théorème 4.5.1:

L'ensemble des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)$ telles que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1..n} x_i \cdot g_i \leq b$$

possède un plus grand élément

$$x^\circ = (x^\circ_1, \dots, x^\circ_n) = f(b)$$

ou f est la quasi-inverse de f .

x° est la "plus-grande sous-solution" de l'équation

$$\sum_{i=1..n} x_i \cdot g_i = b$$

Cette équation possède des solutions si et seulement si x° la satisfait; x° est alors la plus grande solution. De plus, x° peut-être calculé grâce à la projection scalaire:

$$\forall i \in \{1..n\} \quad x^\circ_i = p(b/g_i)$$

Démonstration

Il reste à prouver la formul de calcul explicite de x° . Rappelons que $x^\circ = f(b)$ est le plus grand vecteur pour l'ordre de D^n tel que:

$$\sum_{i=1..n} x^\circ_i \cdot g_i \leq b$$

En particulier

$$\forall i \quad x^\circ_i \cdot g_i \leq b,$$

et donc

$$x^\circ_i \leq p(b/g_i)$$

Par construction, le vecteur $(p(b/g_1), \dots, p(b/g_n))$ satisfait l'inéquation, car

$$\forall i \quad p(b/g_i) \cdot g_i \leq b$$

Ce vecteur minore donc x° , CQFD ■

Remarque:

La résolution des système linéaires est évidemment différente du cas de l'algèbre usuelle. La différence la plus fondamentale est que la solution canonique x° ne dépend pas linéairement du second membre, au sens du dioïde.

Considérons l'équation d'inconnue X $A.X = Y$ où Y est une matrice colonne de dimension p , X une matrice colonne de dimension q et A une matrice (p,q) .
Dans le cas des dioïdes DZC, DRC, DZD et DRD, nous allons expliciter cette résolution à l'aide d'une formule due à R. CUNINGHAME-GREEN. Pour cela , nous associerons à toute matrice M une matrice $-M$ définie par

$$(-M)_{i,j} = -M_{i,j} \text{ qui est ici l'opposé usuel.}$$

Corollaire 4.5.2:

La matrice X° définie par

$$(-X^\circ) = {}^tA.(-Y)$$

est la plus grande solution de l'inégalité $A.X \leq Y$ Ses coefficients sont les projections scalaires du second membre Y sur les colonnes de la matrice A .

L'équation $A.X=Y$ possède donc des solutions si et seulement si X° convient.

Démonstration:

Il suffit de vérifier que la résolution proposée dans le théorème 4.5.1 se traduit par la formule de CUNINGHAME-GREEN. Il a été montré que

$$X^\circ_i = p(Y/A_{.,i})$$

où

X°_i est la i -ème coordonnée de X°

$A_{.,i}$ est le i -ième vecteur colonne

Le résultat 4.3.2 s'applique puisque l'ensemble des matrices colonnes de taille p s'identifie à $D^{\{1..p\}}$ Alors, si \oplus est associé au sup,

$$X^\circ_i = p(Y/A_{.,i}) = \inf\{ Y_j/A_{j,i} \quad j=1..p\}$$

et comme la division dans ces dioïdes est la soustraction usuelle,

$$X^\circ_i = p(Y/A_{.,i}) = \inf\{ Y_j - A_{j,i} \quad j=1..p\}$$

donc en utilisant l'opposé usuel pour transformer l'inf en sup,

$$-X^\circ_i = \sup\{ A_{j,i} - Y_j \quad j=1..p\}.$$

Comme \oplus est associé au sup, on retrouve, au sens du dioïde,

$$(-X^\circ_i) = \sum_{j=1..p} A_{j,i} (-Y_j)$$

c'est à dire

$$(-X^\circ) = {}^tA.(-Y)$$

C.Q.F.D. ♣

Calcul pratique:

Etudions en détail la suite d'opérations à effectuer pour résoudre un système linéaire.

- 1) Il faut calculer X^o Pour cela il faut effectuer:
 - p.q soustractions pour le calcul des $Y_i - A_{i,k}$
pour $i=1..p$ et $k = 1..q$
 - q minimums $X_k^o = \text{Min} (Y_1 - A_{1,k} \quad Y_2 - A_{2,k} \quad \dots \quad Y_p - A_{p,k})$
pour $k=1..q$

- 2) Il faut comparer $A.X^o$ avec Y ce qui nécessite:
 - p.q additions $X_k^o + A_{i,k}$
pour $k = 1..q$ et $i = 1..p$
 - p maximums $(A.X^o)_j = \text{Max} (X_1^o + A_{j,1} \quad X_2^o + A_{j,2} \quad \dots \quad X_q^o + A_{j,q})$
pour $j = 1..p$
 - et p tests d'égalité $(A.X)_j =?= Y_j$
pour $j = 1..p$

La complexité de ce calcul est équivalente à celle de deux produits de matrices, au sens des dioïdes, qui sont beaucoup moins coûteux que les produits de matrices usuels puisque c'est l'addition usuelle qui joue le rôle de multiplication, et qu'un calcul de max ou de min n'est qu'une comparaison logique.

Exemple:

Dans DZC, considérons le système $A.X = Y$ avec:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad Y = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

Alors

$$X^0 = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Et on vérifie que:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} = Y$$

Par conséquent, le système admet une solution. Il est facile de vérifier qu'il y a d'autres solutions, par exemple:

$$X = \begin{array}{|c|} \hline \epsilon \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Cette solution minore toutes les autres solutions.

Il peut cependant exister plusieurs solutions minimales pour l'ordre partiel, comme le suggère l'exemple suivant.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad Y = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

Le système $A.X=Y$ admet les solutions suivantes:

$$X^{\circ} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad U = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \varepsilon \\ \hline \varepsilon \\ \hline \end{array} \quad V = \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon \\ \hline \varepsilon \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

X° est la solution maximale, et U et V sont deux solutions minimales pour l'ordre partiel. Montrons le pour U . Une matrice W minorant U est nécessairement de la forme

$$W = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \varepsilon \\ \hline \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

avec $a \leq 0$ et $b < 0$ ou $a < 0$ et $b \leq 0$. Plaçons nous dans la première hypothèse. En multipliant W à gauche par A il vient

$$AW = \begin{array}{|c|} \hline 2.a \oplus 1.b \\ \hline 1.a \oplus 2.b \\ \hline \varepsilon \\ \hline \varepsilon \\ \hline \end{array}$$

Si $a < 0$ et $b \leq 0$, $2.a \oplus 1.b < 2$ donc $A.W < Y$ ce qui prouve que U est une solution minimale. Il en va évidemment de même pour V , de par la symétrie des coefficients de A et Y . Pour cet exemple, il n'existe pas de solution minimale unique.

Il n'y a donc en général pas de solution minimale canonique.

4.6 Parties génératrices d'un sous-moduloïde.

Le théorème 4.5.1 peut être interprété comme une condition nécessaire pour qu'un vecteur b soit "combinaison linéaire" des vecteurs g_i . Nous allons formaliser cette notion de combinaison linéaire, qui permet d'étudier les concepts usuels de base et indépendance linéaire dans le cas des moduloïdes. Nous emploierons le mot combinaison linéaire par analogie avec la théorie usuelle des espaces vectoriels. Si

$$\sum_{i=1..n} x_i^\circ \cdot g_i = b$$

le vecteur b sera dit combinaison linéaire des vecteurs g_i . Dans le cas d'un nombre n fini de vecteurs, nous parlerons de combinaison linéaire finie.

Si le moduloïde est complet, on peut définir des combinaisons linéaires quelconques. Le fait que nous acceptons les combinaisons linéaires finies ou infinies nous posera un problème de vocabulaire, car toutes les notions de rang, dépendance etc. devront être subdivisées en deux notions: cas fini et cas non-fini. Comme nous aurons à manipuler des "bases infinies", il est donc utile d'introduire les deux notions.

Définitions 4.6:

Le sous-moduloïde engendré par une partie P est le plus petit sous-moduloïde de M contenant P . Il est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de P .

Si M est complet, le sous-moduloïde complet engendré par P est le plus petit sous-moduloïde complet de M contenant P . Il est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires quelconques d'éléments de P .

Il est évident que le sous-moduloïde engendré par une partie P est inclus dans le sous-moduloïde complet engendré par cette partie. Si P est finie, ces deux sous-moduloïdes sont égaux. En effet, comme le dioïde des scalaires est complet, il est possible d'effectuer les sommes infinies de coefficients s'appliquant à un vecteur de P pour se ramener à une combinaison linéaire finie.

En 4.5 nous avons étudié la résolution d'un système linéaire. Cela s'applique au calcul des coordonnées d'un vecteur b par rapport à une famille génératrice G . Lorsqu'il y a des solutions, celles-ci sont rarement uniques. Seules sont canoniques les coordonnées maximales, obtenues par calcul des projections scalaires de x sur les vecteurs de G . Malheureusement leur calcul est une opération non-linéaire. En fait, nous savons que cette opération est linéaire lorsqu'on inverse l'ordre dans M et D^n .

En algèbre usuelle, l'existence de coordonnées uniques est conditionnée par l'indépendance de la partie génératrice. Il est donc naturel de vouloir introduire une notion d'indépendance dans les moduloïdes.

4.7 Indépendance linéaire dans les moduloïdes ordonnés.

Dans le cas des espaces vectoriels usuels, il n'existe qu'une seule notion d'indépendance linéaire. Dans les moduloïdes, on peut en proposer trois. En effet, si x, x', y, y' vérifient une égalité de la forme

$$\lambda \cdot x \oplus \mu \cdot y = \lambda' \cdot x' \oplus \mu' \cdot y'$$

il existe un lien, que nous appellerons dépendance, entre les vecteurs de la partie $\{x, y, x', y'\}$. En général, cela ne signifie pas que l'un d'entre eux s'exprime en fonction des autres, ce qui est une forme de dépendance plus forte que nous appellerons redondance. Nous pouvons aussi introduire une notion d'indépendance associée à l'existence de "coordonnées" uniques.

De plus, il faut distinguer le cas des combinaisons linéaires finies de celui des combinaisons linéaires quelconques!

Nous avons donc six définitions d'indépendance linéaire possibles, auxquelles sont associées, par négation, autant de notions d'indépendance. Parmi celles-ci il va falloir trouver lesquelles sont utiles. Nous allons formuler les diverses définitions de dépendance. Par négation, cela nous donnera les notions d'indépendance.

Définitions 4.7.1:

Soit P une partie d'un moduloïde M.

P est légèrement dépendante, s'il existe un vecteur f du moduloïde M qui peut être exprimé sous forme de deux combinaisons linéaires finies distinctes de vecteurs de P.

$$\begin{aligned} \exists f \in M \text{ tq } f &= \sum_{x \in P} \lambda_x \cdot x = \sum_{x \in P} \mu_x \cdot x \neq \varepsilon \\ \exists x \in P \text{ tq } \lambda_x &\neq \mu_x \\ 0 < \text{card}\{x / \lambda_x &\neq \varepsilon\} = \text{card}\{x / \mu_x \neq \varepsilon\} < \infty \end{aligned}$$

P est dépendante s'il existe une partition de P en P' et P'', telle qu'il existe un vecteur f de M distinct de ε engendré par P' et P'', par combinaisons linéaires finies:

$$\begin{aligned} \exists f \in M \text{ tq } f &= \sum_{x \in P} \lambda_x \cdot x = \sum_{y \in P'} \mu_y \cdot y \neq \varepsilon \\ P \cap P' &= \emptyset \\ 0 < \text{card}\{y / \mu_y &\neq \varepsilon\} < \infty \\ 0 < \text{card}\{x / \lambda_x &\neq \varepsilon\} < \infty \end{aligned}$$

P est redondante s'il existe un élément x^0 de P qui soit combinaison linéaire finie d'autres éléments de P

$$\begin{aligned} \exists x^0 \in P \text{ tq } x^0 &= \sum_{x \in P} \lambda_x \cdot x \\ 0 < \text{card}\{x / \lambda_x &\neq \varepsilon\} < \infty \end{aligned}$$

Si M est complet, les combinaisons linéaires infinies existent et on peut reprendre les définitions précédentes en remplaçant combinaisons linéaires finies par combinaisons linéaires quelconques. Nous parlerons alors de dépendance et redondance "au sens faible"

La négation de ces définitions nous donne autant de notions d'indépendance. Nous utiliserons alors le vocabulaire suivant.

Dépendance	Indépendance
Légèrement dépendante	Totalement indépendante.
Dépendante	Indépendante
Redondante	Non-redondante

Propriétés 4.7.2:

Pour les trois notions de dépendance et d'indépendance introduites ci-dessus

$$\begin{array}{ccc} \text{Dépendance forte} & \Rightarrow & \text{Dépendance faible} \\ \text{(combinaisons linéaires finies)} & & \text{(combinaisons linéaires quelconques).} \end{array}$$

Par négation, on obtient l'implication suivante, qui paraît moins naturelle, du fait de notre choix de vocabulaire, qui définit la faiblesse relativement à la dépendance:

$$\begin{array}{ccc} \text{Indépendance faible} & \Rightarrow & \text{Indépendance forte} \\ \text{(combinaisons linéaires quelconques)} & & \text{(combinaisons linéaires finies).} \end{array}$$

Les trois notions de dépendance sont liées par les implications suivantes, valable au sens faible et au sens fort:

$$\text{Redondante} \Rightarrow \text{Dépendante} \Rightarrow \text{Légèrement dépendante.}$$

Ce qui se traduit, par négation, sur les notions d'indépendance:

$$\text{Totalement indépendante} \Rightarrow \text{Indépendante} \Rightarrow \text{Non-redondante.}$$

Démonstration:

Le lien entre sens faible et sens fort est trivial si une égalité de combinaisons linéaires est vraie avec un nombre fini de coefficients distincts de ε (dépendance forte), elle est aussi vraie si on tolère une infinité de tels coefficients (dépendance faible) Montrons les autres implications dans le cas de la dépendance:

Si un vecteur de P s'exprime en fonctions des autres, cela donne une partition de P qui satisfait à la condition de dépendance. Nous avons donc montré que la redondance implique l'indépendance.

Si un vecteur est combinaison linéaire de deux parties P' et P'' disjointes de P , il a au moins deux écritures en fonction des vecteurs de P et par conséquent, dépendante \Rightarrow faiblement dépendante.

Remarque:

Si la partie P est composée de un, deux ou trois vecteurs, les notions de dépendance et redondance coïncident souvent. En effet, une partition de trois vecteurs en deux parties donne une partie de deux vecteurs et une partie composée d'un vecteur. Si la famille est dépendante, on a alors:

$$\lambda.f = \mu_1.g_1 \oplus \mu_2.g_2$$

Si λ est inversible et régulier pour la multiplication externe, f est combinaison linéaire des g_i .

Cette remarque montre qu'il faut se méfier des "dimensions 2 et 3" (encore faut-il donner un sens au mot dimension!), où les véritables difficultés n'apparaissent pas toujours.

Exemples et contre exemples:

Nous allons voir qu'il n'y a pas de réciproque aux implications que nous avons vues ci-dessus. D est un dioïde ordonné quelconque.

Dans D^3 , les trois vecteurs (e, e, e) (e, e, e) (e, e, e) sont indépendants et non-redondants (ici les deux notions coïncident), mais il sont faiblement dépendants car (e, e, e) peut s'écrire de plusieurs manières en fonction de ces vecteurs:

$$(e, e, e) = (e, e, e) \oplus (e, e, e) = (e, e, e) \oplus (e, e, e)$$

Dans D^4 , les 4 vecteurs (e, e, e, e) (e, e, e, e) (e, e, e, e) , (e, e, e, e) sont non-redondants mais ils sont dépendants car (e, e, e, e) est la somme des deux premiers ou la somme des deux derniers.

4.8 Quelques propriétés de l'indépendance.

La notion d'indépendance que nous avons proposée a été introduite par M. GONDRAN et M. MINOUX (cf. [DISMA2]). Ils ont notamment montré que dans le cas d'une matrice à coefficients dans un dioïde totalement ordonné, la dépendance des lignes ou des colonnes est associée à la "nullité du bidéterminant" de la matrice.

Nous énoncerons ce théorème rigoureusement dans la partie consacrée à l'étude des matrices, mais nous ferons appel à ce théorème dans la démonstration du résultat suivant, qu'il est utile d'énoncer immédiatement.

Propriété 4.8.1:

Supposons que le dioïde D des scalaires soit totalement ordonné. Alors dans tout moduloïde sur D , si n vecteurs $\{h_1, \dots, h_n\}$ sont engendrés par p vecteurs $\{g_1, \dots, g_p\}$ et si $p < n$, la famille $\{h_1, \dots, h_n\}$ est dépendante.

Corollaire 4.8.2:

Dans D^n muni de sa structure canonique de moduloïde, toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est dépendante.

Démonstration:

Il suffit d'écrire que, pour i variant de 1 à n :

$$h_i = \sum_{j=1..p} x_{i,j} \cdot g_j$$

Le théorème de Gondran-Minoux permet d'affirmer que les vecteurs lignes de la matrice $[x_{i,j}]$ sont dépendants, car cette matrice a plus de lignes que de colonnes. Il en résulte que l'on peut partitionner les lignes de cette matrice de manière à ce qu'il existe un vecteur f de D^p distinct de ε engendré par chacune de ces parties. En renumérotant les lignes, on peut écrire:

$$\forall j \in \{1..p\} \quad f_j = \sum_{i=1..k} \lambda_i \cdot x_{i,j} = \sum_{i=k+1..n} \lambda_i \cdot x_{i,j}$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1..p} f_j \cdot g_j &= \sum_{j=1..p} \sum_{i=1..k} \lambda_i \cdot x_{i,j} \cdot g_j \\ &= \sum_{j=1..p} \sum_{i=k+1..n} \lambda_i \cdot x_{i,j} \cdot g_j \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1..p} f_j \cdot g_j &= \sum_{i=1..k} \lambda_i \cdot (\sum_{j=1..p} x_{i,j} \cdot g_j) = \sum_{i=1..k} \lambda_i \cdot h_i \\ &= \sum_{i=k+1..n} \lambda_i \cdot (\sum_{j=1..p} x_{i,j} \cdot g_j) = \sum_{i=k+1..n} \lambda_i \cdot h_i \end{aligned}$$

ce qui signifie que les h_i sont dépendants ■

4.9 Autre approche.

R. Cunninghame-Green propose dans [MINMA2] encore une autre notion d'indépendance:

Une famille est indépendante si et seulement si l'un au moins des vecteurs qu'elle engendre possède des coordonnées uniques.

Cette notion jouit de propriétés intéressantes, qui sont développées dans [MINMA2]. Le lecteur vérifiera aisément que:

Redondance \Rightarrow Dépendance Cuninghame-Green \Rightarrow faible dépendance.

4.10 Le problème de la notion de base.

Considérons le cas des familles totalement indépendantes, c'est à dire où tout vecteur possède des coordonnées uniques. Si une telle famille engendre un moduloïde M , tout vecteur de M (comme en algèbre usuelle) s'identifie à ses coordonnées, qui sont des fonctions du moduloïde à valeurs dans D . M est donc du type D^B ou B (à une bijection près) est la famille indépendante en question.

Par analogie avec le vocabulaire de la théorie des modules, un tel moduloïde sera qualifié de libre et la famille en question sera qualifiée de base.

Nous étudierons plus en détail les moduloïdes libres, mais nous pouvons déjà annoncer que les sous-moduloïdes strictement inclus dans D^B ne possèdent en général pas de base. Cette notion est donc beaucoup trop restrictive.

Doit alors on requérir d'une famille qu'elle soit indépendante, ou seulement non-redondante ?

Nous venons d'affirmer qu'il n'existe jamais de famille génératrice totalement indépendante autre que la "base canonique" d'un ensemble de fonctions. De même, il n'y a en général pas non plus de parties génératrices indépendantes.

Par conséquent la notion la plus utile est celle de partie libre, ou non-redondante. C'est la notion d'indépendance la plus faible parmi celles que nous avons proposées: aucun vecteur n'est combinaison linéaire des autres.

De même, doit-on requérir d'une base qu'elle engendre les autres vecteurs par combinaisons linéaires quelconques ou seulement par combinaisons linéaires finies? Cela double les définitions possibles!

En pratique, ce sont les familles génératrices non-redondantes qui seront utiles, bien qu'elles n'existent pas toujours, comme le prouve le contre-exemple suivant.

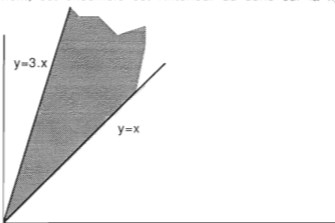
Contre-exemple:

Considérons le dioïde D défini comme étant $[0, +\infty]$ muni du max usuel et de la multiplication usuelle. Celui-ci peut être obtenu à partir de DRC par le changement de variable $x \rightarrow e^x$. Dans D^2 , considérons les couples (x, y) tels que:

$$x < y < 3.x$$

que l'on complète par deux points extrémaux (ϵ, ϵ) et (∞, ∞) .

Graphiquement, cet ensemble est l'intérieur du cône sur la figure suivante.



Cela définit un sous-moduloïde de D^2 qui ne possède aucune base. Il est aisé de vérifier que toute famille contenant au moins trois vecteurs est redondante, mais qu'aucune famille finie contenue dans le moduloïde n'est génératrice !

4.11 Comparaisons de diverses notions de rang.

A cause de l'absence d'une notion claire d'indépendance, il est difficile de définir une notion de rang pour une partie d'un Moduloïde. Celle-ci peut être introduite à partir des familles indépendantes, eu un sens ou l'autre, extraites de P , ou des familles génératrices de P

Voici quelques définitions possibles, que nous allons sommairement étudier
 P est une partie (famille de vecteurs ou sous-moduloïde) d'un moduloïde M .

Definition 4.11.1:

$\text{Rang}(P)$ = La borne supérieure des cardinaux des familles totalement indépendantes incluses dans P

Cette définition est beaucoup trop restrictive: dans D^n , d'après les remarques faites ci-dessus, les seules familles de rang n seraient celles qui sont égales à la "base canonique", modulo des multiplications par des scalaires inversibles.

Definition 4.11.2:

Rang(P) = Borne inférieure des cardinaux des ensembles S tels que P puisse être identifié à un sous-ensemble de D^S par un homomorphisme injectif

Nous ne savons pas si un tel ensemble existe; ce n'est probablement pas le cas. Cette définition ne peut pas être appliquée sans que l'on se donne P , à priori comme une partie de D^S . C'est ce que nous ferons ultérieurement.

Definition 4.11.3:

Rang(P) = Borne supérieure des cardinaux des familles indépendantes engendrées par P

Nous avons vu que cette définition équivaut à la suivante.

Definition 4.11.4:

Rang(P) = Borne supérieure des cardinaux des familles indépendantes contenues dans P

Nous proposons la conjecture suivante: Les notions de Rang $n^{\circ} 2$ et $n^{\circ} 3$ coïncident lorsqu'elles existent toutes deux. Nous avons déjà l'inégalité:
 $n^{\circ} 3 \leq n^{\circ} 2$.

Definition 4.11.5:

Rang(P) = Borne inférieure des cardinaux des familles génératrices de P

En fait, il s'agit à proprement parler des familles génératrices du moduloïde engendré par P. L'avantage de cette définition est qu'une telle famille existe toujours: il suffit de prendre P. Cette définition coïncide probablement avec la suivante, lorsque celle-ci a un sens.

Definition 4.11.6:

Rang(P) = Inf des cardinaux des familles génératrices non-redondantes de P

Definition 4.11.7:

Rang(P) = Borne supérieure des familles non-redondantes engendrées par P

Cette dernière définition est sans intérêt car il est possible de construire des familles non-redondantes de taille finie quelconque. Dans DZC³, pour tout entier positif n donné, considérons la famille des p+1 vecteurs de la forme (n-p, n, n+p) pour p=0 à n

Elle est non-redondante, car si on veut exprimer un vecteurs en fonction des autres, il faut appliquer le théorème de résolution des systèmes linéaires:

$$p((n-p, n, n+p)/(n-q, n, n+q)) = \inf(p-q, q-p)$$

Cela donne les coefficients de la plus grande sous-solution du système consistant à exprimer le vecteur n° p en fonction des autres. Or, il est aisé de vérifier sur la coordonnée "du milieu" que:

$$\sum_{q \neq p} \inf(p-q, q-p) \cdot (n-q, n, n+q) < (n-p, n, n+p)$$

Cette famille est donc non-redondante.

Ce dernier résultat prouve aussi que le rang de la définition n° 4.11.6, associé aux familles génératrices non-redondantes de P n'est pas croissant avec l'inclusion, puisque nous avons construit des ensembles de rang n quelconque inclus dans DZC³ qui est de rang 3.

Bref, il est difficile de voir clair dans le cas général, d'autant plus qu'il faudrait doubler les définitions ci-dessus pour les combinaisons linéaires finies et les combinaisons linéaires infinies!

Nous allons dorénavant nous limiter à un cas plus simple, dans lequel quelques résultats supplémentaires pourront être obtenus, notamment un résultat d'unicité de base.

4.12 Familles génératrices non-redondantes et minimales.

Dorénavant, D est l'un des dioïdes DZC, DZD, DRC, DRD , et le moduloïde M est libre, c'est à dire il est de la forme D^S ou S est un ensemble quelconque d'indices, muni de sa structure canonique, qui en fait un moduloïde complet. Ce cas recouvre tous ceux que nous aurons à manipuler, en particulier les matrices et les séries formelles.

Nous nous intéresserons à un sous-moduloïde M de D^S , et aux parties génératrices P de M . Parmi celles-ci, nous chercherons celles qui sont non-redondantes ou même indépendantes. Nous nous intéresserons uniquement au cas où P est finie et M^0 est le moduloïde engendré par P par combinaisons linéaires finies.

Si une partie P est génératrice de M^0 alors tout vecteur de P possède une décomposition en combinaison linéaire de vecteurs de P

Lemme 4.12.1:

Soit g un vecteur de P si g s'écrit

$$g = \sum_{f \in P} \lambda_f \cdot f$$

avec $\lambda_g < e$ alors la partie P est redondante et

$$g = \sum_{f \in P, f \neq g} \lambda_f \cdot f$$

Démonstration:

Elle résulte du fait que la multiplication, dans le cas d'un moduloïde D^S est continue à droite et à gauche et du fait que si D est l'un des dioïdes DRC, DZC, DZD, DRD, pour tout scalaire λ .

$$\lambda < \varepsilon \Rightarrow \text{Lim}_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = \varepsilon = -\infty$$

Notons $\lambda_g = \mu < \varepsilon$ Alors:

$$\begin{aligned} g &= \mu \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f \\ &= \mu \cdot (\mu \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f) \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f \\ &= \mu^2 \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} (\lambda_f \cdot \mu \cdot \lambda_f) \cdot f \\ &= \mu^2 \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f \end{aligned}$$

En procédant ainsi par récurrence, il vient

$$\forall n \quad g = \mu^n \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f$$

Donc par "continuité à gauche" du produit,

$$g = \varepsilon \cdot g \oplus \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f = \sum_{f \neq g} \lambda_f \cdot f$$

■

Théorème 4.12.2:

Dans D^S , si un sous-moduloïde M possède une base G , c'est à dire:

-aucun vecteur de G n'est combinaison linéaire des autres;

-tout vecteur de M est combinaison linéaire finie de G ;

alors celle-ci est unique, modulo une multiplication de ses éléments par des scalaires inversibles (distincts de ε et de ∞).

Démonstration:

Soient F et H deux parties génératrices d'un même moduloïde. Alors:

$$\forall f \in F \quad f = \sum_{h \in G} \lambda_{f,h} \cdot h$$

$$\forall h \in H \quad h = \sum_{f \in F} \mu_{h,f} \cdot f$$

Et dans chaque combinaison linéaire, il n'y a qu'un nombre fini de coefficients distincts de ε . De plus:

$$\forall (f,h) \in F \times H, \quad \lambda_{f,h} \leq P(f/h) \text{ et } \mu_{h,f} \leq P(h/f)$$

Alors,

$$\forall f \in F \quad f = \sum_{h \in G} \lambda_{f,h} \cdot (\sum_{k \in F} \mu_{h,k} \cdot k)$$

$$\forall h \in H \quad h = \sum_{f \in F} \mu_{h,f} \cdot (\sum_{l \in G} \lambda_{f,l} \cdot l)$$

Donc:

$$\begin{aligned}\forall f \in F \quad f &= \sum_{k \in F} (\sum_{h \in G} \lambda_{f,h} \cdot \mu_{h,k}) \cdot k \\ \forall h \in H \quad h &= \sum_{l \in G} (\sum_{f \in F} \mu_{h,f} \cdot \lambda_{f,l}) \cdot l\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 4.12.1, si on suppose les familles F et G non-redondantes:

$$\begin{aligned}\forall f \in F \quad \sum_{h \in G} \lambda_{f,h} \cdot \mu_{h,f} &= e \\ \forall h \in H \quad \sum_{f \in F} \mu_{h,f} \cdot \lambda_{f,h} &= e\end{aligned}$$

Comme il n'y a qu'un nombre fini de termes distincts de e dans ces sommes, et que le dioïde est totalement ordonné:

$$\begin{aligned}\forall f \in F \quad \exists h \in H \quad \lambda_{f,h} \cdot \mu_{h,f} &= e \\ \forall h \in H, \exists f \in F \quad \mu_{h,f} \cdot \lambda_{f,h} &= e\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\forall f \in F, \exists h \in H \quad P(f/h) \cdot P(g/h) &= \pi(f,h) = e \\ \forall h \in H, \exists f \in F \quad P(h/f) \cdot P(f/h) &= \pi(f,h) = e\end{aligned}$$

Comme $\pi(f,h) = e$ si et seulement si f et h sont égaux, à une multiplication par une constante inversible près, le théorème est démontré ■

4.13 Un contre-exemple dans le cas des combinaisons infinies.

Considérons DZC comme dioïde, et le moduloïde DZC^N , c'est à dire les suites à coefficients dans DZC. Nous définirons M comme le sous-moduloïde des suites croissantes tendant vers $+\infty$, complétées par la suite e . C'est un sous-moduloïde complet pour les max-sommes. Il n'est pas complet pour les min-sommes, car on peut facilement définir un ensemble de suites tendant vers ∞ , dont la borne inférieure ne tend pas vers ∞ ; il suffit de prendre l'ensemble des suites h_p de la forme:

$$\begin{aligned}h_p(n) &= 0 \text{ si } n \leq p \\ h_p(n) &= n-p \text{ sinon.}\end{aligned}$$

La borne inférieure de l'ensemble des suites h_p est la suite constante nulle.

Considérons la structure de M associée au max. Nous allons construire deux familles distinctes F et H , libres et génératrices par combinaisons linéaires infinies. Celles-ci seront indicées par $N \times N$:

Famille F:

$$\begin{aligned}f_{k,l}(n) &= \varepsilon && \text{si } n < k \\f_{k,l}(n) &= e = 0 && \text{si } k \leq n \leq k + 2.l \\f_{k,l}(n) &= 1 && \text{si } n > k + 2.l\end{aligned}$$

Famille G:

$$\begin{aligned}g_{k,l}(n) &= \varepsilon && \text{si } n < k \\g_{k,l}(n) &= e = 0 && \text{si } k \leq n \leq k + 2.l + 1 \\g_{k,l}(n) &= 1 && \text{si } n > k + 2.l + 1\end{aligned}$$

F et G sont libres et génératrices de M par combinaisons linéaires infinies.

Chapitre 5

Propriétés de matrices dans les dioïdes ordonnés.

5.1 Définitions préliminaires.

Nous allons travailler avec D^2 muni de la structure de dioïde qui a été définie en 2.5.1 par :

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x \oplus x', y \oplus y')$$

$$(x, y) \otimes (x', y') = ((x \otimes x') \oplus (y \otimes y'), (x \otimes y') \oplus (y \otimes x'))$$

où

l'élément neutre pour la loi \oplus est $(\varepsilon, \varepsilon)$

et l'élément neutre pour la loi \otimes est (e, ε)

D est identifié au sous ensemble de D^2 des couples dont la deuxième coordonnée vaut ε par

$$(x, \varepsilon) = x \quad \forall x \in D$$

On notera $(\varepsilon, e) = \theta$. Cet élément joue un rôle analogue au "i" des nombres complexes usuels car $\theta^2 = e$ ($-e$ n'existe pas), et tout couple (λ, μ) de D^2 peut s'identifier à

$$(\lambda, \mu) = \lambda \cdot \theta \oplus \mu \cdot \theta$$

Dans un couple (λ, μ) , λ joue le rôle de partie réelle, tandis que μ joue le rôle de partie imaginaire, mais au contraire du cas usuel, les nombres "imaginaires" sont les nombres "négatifs"

Nous identifierons toute matrice carrée M de dimension n à graphe valué $G(M)$ comportant n sommets numérotés 1 à n et reliés par n^2 arcs tels que le poids de l'arc reliant i à j soit $M_{i,j}$. Cette convention signifie que tous les arcs sont pris en compte, même ceux dont la valuation est ε .

En plus des notions usuelles de boucle, cycle élémentaire et chemin, nous aurons à travailler avec des familles d'arcs valués de $G(M)$, dans lesquelles un arc peut apparaître plusieurs fois.

Définition 5.1.1:

Un parcours p de $G(M)$ est une fonction de $G(M)$ dans N , où pour tout arc a de $G(M)$, $p(a)$ est le nombre d'occurrences de a dans le parcours p .

La longueur $L(p)$ d'un parcours est le nombre d'arcs qu'il contient, c'est à dire

$$L(p) = \sum_{a \in G(M)} p(a)$$

Le poids $W(p)$ d'un parcours est le produit au sens du dioïde du poids de ses arcs, comptés avec comme ordre de multiplicité leur nombre d'occurrences.

$$W(p) = \prod_{a \in G(M)} (v(a))^{p(a)}$$

où

$v(a)$ est la valuation de l'arc a , c'est à dire

$v(a) = M_{i,j}$ si a est l'arc qui relie le sommet i au sommet j .

Nous noterons $PG(M)$ l'ensemble des parcours du graphe $G(M)$ associé à la matrice M

Parmi les différents parcours possibles de $G(M)$, il y a deux cas particuliers qu'il ne faut pas confondre:

- le "parcours vide" noté \emptyset , où $\forall a \in G(M)$, $\emptyset(a) = 0$, qui vérifie, $L(\emptyset)=0$ et $W(\emptyset)=e$
- les parcours dont tous les arcs de multiplicité non nulle sont valués par ε dans $G(M)$, pour lesquels $L(p) \neq 0$ mais $W(p)=\varepsilon$

Nous aurons à cumuler des parcours. Formellement, cela revient à faire l'addition usuelle des fonctions correspondantes: pour tout arc a , le nombre d'occurrences de a dans le cumul de p et p' est la somme usuelle de $p(a)$ et de $p'(a)$

Définition 5.1.2:

La somme de deux parcours p et p' de $G(M)$ est définie par

$$\forall a \in G(M), (p+p')(a) = p(a) + p'(a)$$

Propriété 5.1.3:

$$L(p+p') = L(p) + L(p')$$

$$W(p+p') = W(p) \vee W(p') \text{ (multiplication du dioïde)}$$

$G(M)$ peut être identifié au parcours pour lequel, $\forall a \in G(M)$, $p(a)=1$. De même, toute partie de $G(M)$ est un parcours pour lequel, $\forall a \in G(M)$, $p(a) \in \{0,1\}$

Nous identifierons toute permutation σ de $\{1 \dots n\}$ avec le parcours défini par
 si (i,j) vérifie $j=\sigma(i)$ alors $p(M_{i,j}) = 1$
 sinon $p(M_{i,j}) = 0$

Cette convention signifie qu'on ne compte dans p aucun arc issu d'un sommet i tel que $\sigma(i)=i$

Rappelons que toute permutation se décompose en permutations circulaires. Un parcours de $G(M)$, s'il est une permutation, doit être interprété comme une réunion de cycles élémentaires (permutations circulaires) du graphe $G(M)$. Ces cycles sont disjoints: ils n'ont aucun sommet ni arc en commun.

On notera $P(k)$ l'ensemble des parcours de $G(M)$ qui sont des permutations de longueur k , au sens de la définition 5.1.1

De même, un chemin reliant un sommet p au sommet q (en passant éventuellement plusieurs fois par le même arc) est un cas particulier de parcours de $G(M)$. On notera $C(k,p,q)$ l'ensemble des chemins de longueur k qui relient le noeud p au noeud q .

Si M^r désigne la r -ième puissance de M au sens du dioïde, alors le terme $M^r_{i,j}$ est la somme (au sens du dioïde) du poids des chemins de longueur r qui relient le sommet i au sommet j

$$M^r_{i,j} = \sum_{s \in C(r,i,j)} W(s)$$

5.2 Bidéterminant et permanent.

La définition du bidéterminant a été introduite par M. MINOUX et M. GONDRAN dans [DISMA1].

Définition 5.2.1:

On appelle bidéterminant d'une matrice carrée M à coefficients dans D^2 , le terme noté $\text{Bid}(M)$ appartenant à D^2

$$\text{Bid}(M) = \sum_{\sigma \in P(n)} W(\sigma) \theta^{p(\sigma)}$$

où $p(\sigma)$ désigne la parité de la permutation σ

On appelle permanent d'une matrice carrée M à coefficients dans D^2 , le terme noté $\text{Perm}(M)$ appartenant à D^2

$$\text{Perm}(M) = \sum_{\sigma \in P(n)} W(\sigma) = \text{Bid}(M) \cdot (e \oplus \theta)$$

Pour une étude des propriétés du permanent et du bidéterminant, le lecteur pourra consulter les références [DISMA1] et [DISMA2]. Il y trouvera notamment le théorème suivant, dû à M. MINOUX et M. GONDRAN qui établit l'analogie entre le bidéterminant et le déterminant usuel.

Théorème 5.2.1:

Soit M une matrice carrée de taille $n \times n$, à coefficients dans un dioïde totalement ordonné. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:

a) Il existe une partition des lignes de la matrice (ou de ses colonnes) en deux familles que nous noterons C_1 à C_p et C_{p+1} à C_n , et des coefficients $\lambda_1 \dots \lambda_n$, non tous égaux à ε , tels que:

$$\sum_{i=1..p} \lambda_i \cdot C_i = \sum_{j=1..p} \lambda_j \cdot C_j$$

b) Le bidéterminant de la matrice se factorise en

$$\text{Bid}(M) = \lambda \cdot (e \oplus \theta)$$

où λ est un élément de D^2 .

Remarquons que si $\text{Bid}(M) = \lambda(e \oplus \theta)$, λ peut être pris appartenant à D , car si $\lambda = (\alpha, \beta)$, $\lambda(e \oplus \theta) = (\alpha \oplus \beta, \alpha \oplus \beta) = (\alpha \oplus \beta, \varepsilon) \cdot (e \oplus \theta)$. Cela signifie que la partie réelle (ou "positive") de $\text{Bid}(M)$ est égale à sa partie imaginaire (ou "négative").

Ce théorème peut donc être interprété ainsi il existe une combinaison linéaire "nulle" des colonnes de la matrice (en fait dont la "partie négative" est égale à la "partie positive") si et seulement si le bidéterminant est "nul", c'est à dire sa partie "négative" est égale à sa partie "positive"

La condition "a" signifie que les colonnes de la matrice ou ses lignes sont dépendantes au sens donné dans le chapitre 4. Cette dépendance est donc, comme en algèbre usuelle, associée à la "nullité" du "déterminant"

5.3 Le théorème de Cailey-Hamilton

Le théorème de Cailey-Hamilton résulte seulement des propriétés combinatoires du calcul matriciel, comme cela a été montré dans [DISMA5]. Dans le cas d'un dioïde ordonné, la démonstration est plus simple que dans le cas général, du fait de l'idempotence des éléments pour la loi \oplus . En effet, il est inutile de dénombrer combien de fois un même terme apparait dans une somme.

Définition 5.3.1:

Le bipolynôme caractéristique d'une matrice M à coefficients dans D^2 est le polynôme d'une variable λ de D^2 défini par

$$\Phi_M(\lambda) = \text{Bid}(M \oplus \theta \cdot \lambda \cdot E)$$

où E est la matrice identité du dioïde $M_{n,n}(D^2)$

Remarques:

$\Phi_M(\lambda)$ est un polynôme de degré n , dont le terme de degré n vaut toujours $i^n \lambda^n$

$\Phi_M(\lambda)$ est un polynôme à coefficients dans D^2 , même si tous les termes de la matrice M appartiennent à D .

Propriété 5.3.2:

Si on écrit:

$$\Phi_M(\lambda) = \phi_n \lambda^n \oplus \dots \oplus \phi_k \lambda^k \oplus \dots \oplus \phi_0$$

alors

$$\forall k \in \{0..n\} \quad \phi_k = \theta^k \sum_{\sigma \in P(n-k)} W(\sigma) \cdot \theta^{\text{parité}(\sigma)}$$

Théorème 5.3.3:

Pour toute matrice M à coefficients dans D^2 .

$$\Phi_M(M) = (e \oplus i) \cdot K$$

où K est une matrice à coefficients dans D .

Cela s'interprète comme la nullité de $\Phi_M(M)$, c'est à dire que sa partie "positive" est égale à sa partie "négative"

Démonstration:

Considérons une matrice M comme un tableau de n^2 variables formelles distinctes

$$\Phi_M(M) = \phi_n M^n \oplus \dots \oplus \phi_k M^k \oplus \dots \oplus \phi_0 E$$

L'expression ci-dessus est alors un polynôme en ces n^2 variables formelles, que l'on peut séparer en deux classes, les termes qui ont comme coefficient e et les termes qui ont comme coefficient θ

Pour prouver le théorème, il faut montrer que les sommes (au sens du dioïde D^2) des termes de chacune de ces classes sont égales. Dans le cas d'un dioïde ordonné, comme tout élément est idempotent pour la loi \oplus , il suffit de montrer que chaque terme qui apparaît dans une classe apparaît au moins une fois dans l'autre classe.

Pour $k \in \{1..n\}$ le terme $\phi_k M^k$ est une matrice dont le terme de ligne p et de colonne q est donné par :

$$\begin{aligned} (\phi_k \cdot M^k)_{p,q} &= \theta^k \cdot [\sum_{\sigma \in P(n-k)} W(\sigma) \cdot \theta^{P(\sigma)}] \cdot [\sum_{s \in C(p,q) / L(s)=k} W(s)] \\ &= \theta^k \cdot [\sum_{g \in F(k,p,q)} W(g) \cdot \theta^{P(g)}] \end{aligned}$$

Où $F(k,p,q)$ est l'ensemble des couples $g=(s,\sigma)$ de parcours de $G(M)$ composés d'un chemin s de longueur k reliant p à q et d'une permutation σ de longueur $n-k$

On note pour un tel couple $g=(s,\sigma)$

$$p(g) = \text{parité}(\sigma) \quad W(g) = W(s) + W(\sigma)$$

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que tout couple $g=(s,\sigma)$, appartenant à $F(k,p,q)$, peut être transformé en $g'=(s',\sigma')$ appartenant à $F(k',p,q)$ pour $k' \in \{1..n\}$ tels que g et g' définissent le même parcours de $G(M)$ avec la condition supplémentaire suivante: la permutation σ' est de parité opposée à la parité de σ ou (exclusif) la parité de k' est opposée à celle de k

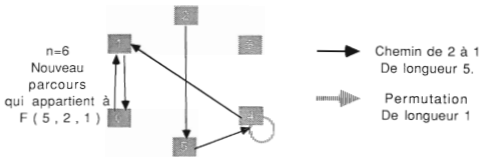
Rappelons que la parité d'une permutation est égale à la parité du nombre de cycles élémentaires de longueur paire qui la composent.

Considérons $g = (s, \sigma)$. Deux cas, divisés chacun en deux sous-cas, sont à distinguer :

1er cas: Le chemin s rencontre un cycle élémentaire de σ , noté c .



On définit s' comme étant la permutation σ privée du cycle c (c'est éventuellement un parcours vide). On définit s' comme étant le chemin de p à q obtenu en ajoutant à s le cycle c .



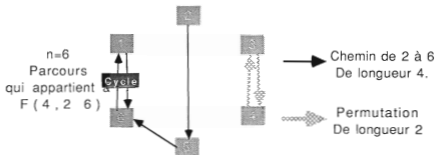
Il faut alors distinguer les deux sous-cas suivants.

a) c est de longueur paire. Alors σ' est de parité opposée à celle de σ , et la longueur de s' est de même parité que celle de s .

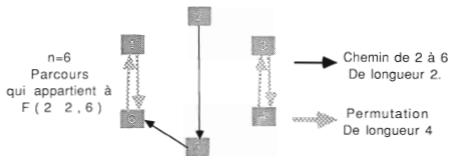
b) c est de longueur impaire. Cette fois σ' est de même parité que σ , mais k' , longueur du chemin s' est de parité opposée à k .

2ème cas: Le chemin s ne rencontre aucun cycle élémentaire de σ

Alors, la permutation σ , qui est de longueur $n-k$, rencontre $n-k$ sommets distincts. Il y a en tout n sommets, donc le chemin parcourt les k sommets restants. Le chemin, qui est composé de k arcs, rencontre $k+1$ fois un sommet. Il y a donc obligatoirement un sommet par lequel s passe au moins deux fois. Par conséquent, le chemin s contient au moins un cycle élémentaire noté c . On peut ajouter ce cycle à la permutation σ pour obtenir une nouvelle permutation, σ' car ce cycle ne rencontre pas σ .



On définit σ' comme étant la permutation σ à laquelle est ajoutée le cycle c .
On définit s' comme étant le chemin de p à q obtenu en supprimant le cycle c dans s



A nouveau, il faut distinguer deux sous-cas.

a) c est de longueur paire. Alors σ' est de parité opposée à celle de σ et s' est un nouveau chemin de p à q dont la longueur est de même parité que celle du chemin s .

b) c est de longueur impaire. Cette fois σ' est de même parité que σ , mais k' longueur du chemin s' est de parité opposée à k .

Par conséquent, tout parcours g dont le poids apparait comme coefficient dans le bipolynôme caractéristique peut être décomposé de deux manières qui sont associées à des puissances de θ de parité différentes. On a donc vérifié que chaque monôme en n^2 coefficients de la matrice, auquel est associé une famille de couples (s, σ) , apparait multiplié par θ à une puissance paire, c'est à dire θ^e et par θ à une puissance impaire, c'est à dire θ^i

5.4 Matrices et opération étoile.

Nous allons maintenant étudier trois aspects des propriétés d'une matrice à coefficient dans un diode D qui sont liés:

- les propriétés de "convergence" de A^*
- le comportement asymptotique de la suite A^n
- les valeurs propres de A .

Nous avons vu que l'étoile d'un opérateur permet de résoudre les équations implicite du type:

$$X = A.X \oplus B$$

Si A est une matrice, l'opérateur A^* s'identifie à la matrice A^* Rappelons les notations de KLEENE:

$$A^* = \sum_{n \geq 0} A^n$$

$$A^+ = \sum_{n \geq 1} A^n$$

Il est important de caractériser les matrices pour lesquelles A^* et A^+ n'ont aucun coefficient égal à ∞ . Nous dirons dans ce cas que A^* et A^+ convergent.

Théorème 5.4.1:

Soit A une matrice carré à coefficients dans un dioïde D , dont aucun coefficient n'est égal à ∞ . Si A ne contient aucun cycle élémentaire de poids total supérieur ou égal à e , pour l'ordre canonique associé à l'addition du dioïde, A^* ne contient aucun coefficient égal à ∞ .

La réciproque (condition nécessaire) est vraie dans le cas des dioïdes DRC, DZC, DZD et DRD.

Démonstration:

Ce résultat est facile à montrer à partir de l'interprétation graphique de la matrice. Notons n la taille de la matrice et fixons i et j deux sommets. Soit μ le maximum des poids des chemins de longueur inférieure ou égale à n . Par hypothèse, tous les coefficients de la matrice sont finis, donc $\mu < \infty$.

Le coefficient (i,j) de la matrice A^p est la max-somme de tous les chemins de longueur n reliant le sommet i au sommet j .

Tout chemin de longueur p reliant i à j est la somme (au sens 5.1.2) d'un chemin de longueur inférieure ou égale à n , et de cycles élémentaires. Par conséquent, si tous les cycles sont de poids inférieur ou égal à e ,

$$\forall p \quad A^p_{i,j} \leq \mu \oplus e$$

Et donc,

$$\forall (i,j) \quad A^*_{i,j} = \sum_{p \geq 0} A^p_{i,j} \leq \mu \oplus e < \infty$$

Dans le cas particulier de DZC et DRC, montrons la condition nécessaire par sa contraposée: s'il existe un cycle élémentaire de poids supérieur strictement à e , il y a des coefficients infinis dans A^* . Comme A^* majore tous les A^p , il suffit d'extraire une suite $(A^{(p)}_{i,j})$ tendant vers $+\infty$.

Choisissons un cycle de poids $\omega > \epsilon$, dont la longueur est notée c . Il existe au moins un sommet i sur ce cycle. Il est alors immédiat que:

$$A^{k.c}_{i,i} \geq \omega^k \text{ au sens du dioïde.}$$

Dans le cas de DRC, DRC, cela s'écrit, traduit en algèbre usuelle:

$$A^{k.c}_{i,i} \geq k.\omega \text{ avec } \omega > 0$$

Et par conséquent,

$$A^{k.c}_{i,i} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty$$

Le même raisonnement est vrai, en inversant les signes, dans DZD et DRD ■

5.5 Valeurs propres.

Dorénavant, nous nous limiterons au cas de DZC, DRC, DZD et DRD. Nous ne ferons que la théorie des valeurs propres associées aux vecteurs propres à gauche.

La notion de valeur propre est liée à la notion de point fixe, en effet, écrivons que X est vecteur propre d'une matrice A pour la valeur propre λ .

$$A.X = \lambda.X$$

Si λ est inversible, ce qui dans DZC, DRC, DZD ou DRD signifie que λ est distinct de ϵ et ∞ , X est alors un point fixe de $\lambda^{-1}.A$. Il y a donc toujours un vecteur propre associé à λ obtenu par $(\lambda^{-1}.A)^* V$ ou V est un vecteur quelconque. Cependant, la matrice $(\lambda^{-1}.A)^*$ a en général de nombreux coefficients infinis et les vecteurs propres ainsi construits ont alors peu d'intérêt.

Dans le cas où la matrice A est un scalaire. Si $\lambda \neq A$, les vecteurs propres associés à λ sont seulement ϵ et ∞ .

Pour construire une théorie intéressante, il est donc nécessaire d'imposer des contraintes sur les vecteurs propres: absence de coordonnées égales à ϵ (qui joue le rôle du zéro) et absence de coordonnées égales à ∞ .

Commençons par étudier le cas des valeurs propres égales à ϵ . Dans ce cas, un vecteur propre doit être solution de $M.X = \epsilon$

Lemme 5.5.1:

L'équation $M.X = \varepsilon$ possède une solution distincte du vecteur ε , si et seulement si M possède une colonne de coefficients égaux à ε .

Démonstration du lemme:

Si la solution X possède une coordonnée X_i distincte de ε , comme il existe un indice j pour lequel $M_{j,i}$ est distinct de ε nous avons $(M.X)_j \geq M_{j,i}.X_i > \varepsilon$

Réciproquement, si la colonne i de M ne contient que des ε , on peut prendre comme solution le vecteur X dont les coefficients sont tous égaux à ε , sauf celui d'indice i qui est égal à e ■

Théorème 5.5.2:

Si M est une matrice dont aucune colonne ne contient que des ε , toute valeur propre de M est strictement supérieure à ε .

Démonstration:

D'après le lemme, tout vecteur X distinct de ε , en particulier tout vecteur propre associé à une valeur propre λ , vérifie $M.X > \varepsilon$. Comme le vecteur propre possède une coordonnée X_i distincte de ε , et comme il existe un indice j pour lequel $M_{j,i}$ est distinct de ε nous avons

$$(M.X)_j = (\lambda.X)_j \geq M_{j,i}.X_i > \varepsilon$$

donc nécessairement, $\lambda > \varepsilon$ ■

Par conséquent, l'étude des valeurs propres n'offre d'intérêt que si on se place dans le cadre de la définition suivante.

Définition 5.5.3:

Soit M une matrice dont aucun coefficient n'est égal à ∞ . Un scalaire λ est

une valeur propre finie (à gauche) de M , si et seulement si:

$$\lambda \in \{\varepsilon, \infty\}$$

et il existe un vecteur colonne X dont au moins une coordonnée est distincte de ε et toutes les coordonnées sont distinctes de ∞ , tel que:

$$M.X = \lambda.X$$

X est appelé vecteur propre associé à λ .

5.6 Valeurs propres d'une matrice irréductible à coefficients distincts de ∞ .

Nous allons d'abord étudier les valeurs propres finies d'une matrice M irréductible, c'est à dire dont le graphe ne possède qu'une composante fortement connexe. En particulier M n'a aucune ligne identiquement égale à ε . Nous supposons toujours que tous les coefficients de M sont distincts de ∞

Lemme 5.6.1:

Si M est une matrice irréductible, il suffit que l'un des coefficients de M^* soit égal à ∞ pour qu'il le soient tous.

Démonstration:

Si il existe un arc de $G(M^*)$ valué par ∞ , comme M est irréductible (le graphe constitué par les arcs de valuation distincte de ε est fortement connexe), pour tout couple (i,j) , pour une puissance p adéquate, $(M^*{}^p)_{i,j} = \infty$ car ce terme contient le poids d'un chemin passant par l'arc valué par ∞ . Donc tous les coefficients de $(M^*)^*$ qui majorent ceux des puissances de M^* , sont égaux à ∞ . Pour conclure, il est aisé de vérifier que $(M^*)^* = M^* \blacktriangleleft$

Lemme 5.6.2:

Si λ est valeur propre finie d'une matrice M irréductible, les matrices $(\lambda^{-1}.M)^*$ et $(\lambda^{-1}.M)^+$ "convergent" c'est à dire aucun de leurs coefficients n'est égal à ∞ .

Démonstration:

Soit M une telle matrice, λ une valeur propre finie associée à un vecteur propre X , λ est inversible et nécessairement X est point fixe de $\lambda^{-1} \cdot M$, donc

$$\lambda^{-1} \cdot M \cdot X = X$$

$$(\lambda^{-1} \cdot M)^n \cdot X = X$$

et comme l'addition est idempotente

$$(\lambda^{-1} \cdot M)^* \cdot X = \Sigma (\lambda^{-1} \cdot M)^n \cdot X = X$$

Supposons que $(\lambda^{-1} \cdot M)^*$ "diverge" Alors le lemme 5.6.1 implique que tous les coefficients de $(\lambda^{-1} \cdot M)^*$ soient égaux à ∞ . Donc en multipliant par un vecteur X dont un coefficient est distinct de ∞ , on obtient sur la ligne correspondante le résultat ∞ .

L'égalité $(\lambda^{-1} \cdot M)^* \cdot X = X$ implique donc que les coefficients de X distincts de ∞ soient tous égaux à ∞ , ce qui est incompatible avec la définition adoptée pour les vecteurs propres.

Pour que M possède une valeur propre et un vecteur propre associé qui satisfassent la définition 5.5.3, il faut donc que $(\lambda^{-1} \cdot M)^*$ "converge" ■

Théorème 5.6.3:

Une matrice M irréductible dont aucun coefficient n'est égal à ∞ possède une unique valeur propre finie λ° définie par

$$\lambda^{\circ} = \Sigma_{\sigma} \text{cycles de la matrice } M \ W(\sigma)^{1/L(\sigma)}$$

où

$W(\sigma)$ est le poids du cycle σ

$L(\sigma)$ est la longueur du cycle σ

Si j est un indice qui appartient à un cycle réalisant le maximum dans la formule ci-dessus, alors la colonne j de la matrice $(\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+$ est vecteur propre de M .

Démonstration:

Remarquons d'abord que pour toute matrice K , comme $K^* = E \oplus K^+$

$$i \neq j \Rightarrow K^+_{i,j} = K^*_{i,j}$$

et

$$K^+_{i,i} = K^*_{i,i} \quad \text{ssi} \quad K^+_{i,i} = e$$

Soit M une matrice satisfaisant les hypothèses du théorème et soit λ° défini par la formule:

$$\lambda^\circ = \sum_{\sigma} \text{cycles de la matrice } M \quad W(\sigma)^{1/l(\sigma)}$$

Le lemme 5.6.2 implique que $(\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+$ converge. Par conséquent, en extrayant une colonne de cette matrice, on définit bien un vecteur dont aucune coordonnée n'est égale à ∞ , et qui possède des coordonnées distinctes de e si c'est le cas de M .

Soit j un noeud appartenant à un cycle de poids moyen maximal de M . Alors par définition de λ° , $(\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+_{j,j} = (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^*_{j,j} = e$

Notons $y = (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+_{\cdot j}$ la j -ième colonne de la matrice $(\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+$. Comme $(\lambda^{\circ-1} \cdot M) = (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+ \cdot (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^*$, nous avons

$$\begin{aligned} (\lambda^{\circ-1} \cdot M) \cdot y &= (\lambda^{\circ-1} \cdot M) \cdot (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+_{\cdot j} \\ &= (\lambda^{\circ-1} \cdot M) \cdot (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^*_{\cdot j} \\ &= (\lambda^{\circ-1} \cdot M)^+_{\cdot j} = y \end{aligned}$$

et par conséquent $M \cdot y = \lambda^\circ \cdot y$ c'est à dire y est un vecteur propre associé à λ°

Il nous reste à montrer l'unicité de la valeur propre finie. Le lemme 5.6.2 implique que pour toute valeur propre finie λ , $(\lambda^{-1} \cdot M)^*$ converge. Donc d'après le théorème 5.4.1 aucun cycle de $\lambda^{-1} \cdot M$ n'est de poids supérieur à e . Par conséquent:

$$\lambda \geq \sum_{\sigma} \text{cycles de la matrice } M \quad W(\sigma)^{1/l(\sigma)} = \lambda^\circ$$

Soit p le ppcm des cycles de la matrice. On vérifie aisément que pour tout vecteur propre x associé à une valeur propre λ .

$$\lambda^p \cdot x = M^p \cdot x \leq \lambda^p \cdot x$$

Par conséquent, il est aussi nécessaire que $\lambda \leq \lambda^\circ$, ce qui conclut la démonstration du théorème ■

5.7 Etude du moduloïde des vecteurs propres d'une matrice irréductible.

Considérons une matrice M de taille $n \times n$ vérifiant les conditions du théorème 5.6.3. Il est évident que l'ensemble des vecteurs x qui satisfont à l'équation:

$$M.X = X$$

est stable par combinaisons linéaires finies ou quelconques. C'est donc un sous-moduloïde complet du moduloïde D^n , dont nous allons rechercher des familles génératrices. Par définition, nous avons exclu des vecteurs propres les solutions de $M.X = X$ qui ont des coordonnées égales à ∞ , que nous appellerons vecteurs propres généralisés.

Les résultats suivants seront donnés sans démonstration, le lecteur trouvera ces démonstrations dans le rapport de recherches INRIA n° 191

Définition 5.7.1:

On appelle graphe critique d'une matrice M irréductible le graphe obtenu en conservant dans le graphe associé à M seulement les arcs appartenant à un cycle de poids moyen maximal; un tel cycle sera appelé critique.

Théorème 5.7.2:

Une famille génératrice du moduloïde des vecteurs propres (généralisés) de la matrice M , associés à la valeur propre λ° est donnée par les colonnes de la matrice $(\lambda^\circ \cdot 1.M)^+$, dont les indices sont ceux de sommets situés sur un cycle de poids moyen maximal de la matrice.

Cette famille est en général redondante, mais on peut en extraire une unique famille non-redondante, dont le cardinal est égal au nombre de composantes fortement connexes du graphe critique.

Le lecteur trouvera dans la même référence une étude des projecteurs spectraux

5.8 Suite des puissances d'une matrice.

Nous allons maintenant énoncer les propriétés asymptotiques de la suite A^n , où A est une matrice à coefficients dans DZC, DZD, DRC ou DRD. Comme précédemment, nous identifierons toute matrice carrée à un graphe orienté valué.

Lemme et définition 5.8.1:

Soit A une matrice carrée irréductible à coefficients dans un dioïde D choisi parmi DZC, DZD, DRC ou DRD, telle qu'aucun coefficient de A n'est égal à ∞ .

Si A est irréductible il existe un scalaire λ de D et un entier positif c , et un entier N tels que:

$$(1) \quad \forall n > N, A^{n+c} = \lambda^c \cdot A^n$$

Un tel couple (λ, c) sera appelé couple de cyclicité de la matrice A .

De plus, λ est égal à l'unique valeur propre finie de A .

$$(2) \quad \lambda^c = \sum_{\sigma} W(\sigma)^{1/l(\sigma)}$$

Où

$W(\sigma)$ est le poids du cycle σ .

$l(\sigma)$ est la longueur du cycle σ

La formule (2) est vraie pour tout $c = l(\sigma)$, où σ est un cycle qui réalise le max dans la formule (1).

Démonstration:

Nous ne donnerons pas une démonstration rigoureuse de ce résultat, mais seulement une justification intuitive. La démonstration complète avec se trouve dans le rapport INRIA n° 191 (ref.[1]).

Rappelons que le coefficient (i,j) de la matrice AP est la max-somme de tous les chemins de longueur n reliant le sommet i au sommet j . Lorsque p est plus grand que la matrice, pour construire un chemin de longueur p , il faut "tourner en rond" dans les cycles de la matrice. C'est évidemment en tournant dans le cycle de poids moyen maximal que l'on fait croître le plus vite le poids du chemin ■

Ce résultat ne se généralise pas aux matrices non fortement connexes. Nous obtiendrons cependant un autre résultat général dans le cas des matrices dont les termes diagonaux sont distincts de e , que nous énoncerons comme corollaire des propriétés des séries formelles croissantes que nous étudierons dans le chapitre 7

Chapitre 6

Opérations et parties rationnelles dans un dioïde ordonné.

Ce chapitre est consacré à l'étude des opérations rationnelles dans un dioïde ordonné complet. Ces opérations qui sont essentielles en théorie des automates et des langages sont associées aux "manipulations de systèmes" usuelles: mise en série, en parallèle et en contre réaction. Cela explique pourquoi leur étude est importante.

La plupart des résultats que nous allons énoncer se généralisent probablement à des dioïdes quelconques, car nous n'utiliserons pas explicitement la relation d'ordre. Celle-ci nous permet cependant de nous affranchir des problèmes de convergence de l'opération "étoile", alors que dans un dioïde ou semi-anneau quelconque, l'opération "étoile" d'une série n'est pas toujours définie.

Dans toute cette partie, D est un dioïde ordonné complet, muni de l'ordre canoniquement associé à sa max-addition.

6.1 Clôture rationnelle et parties rationnellement closes.

Considérons une fonction f de la forme:

$$x \rightarrow \lambda \cdot x \text{ ou } x \rightarrow x \cdot \lambda \\ \text{ou } \lambda \text{ est un élément fixé de } D.$$

Dans ce cas, f^* peut être identifiée à la multiplication à gauche (respectivement à droite) par

$$x^* = e \oplus \sum_{n \geq 1} x^n$$

Cette identification d'un scalaire à un opérateur justifie la convention

$$\forall x \in D, \quad x^0 = e$$

qui permet d'écrire

$$x^* = \sum_{n \geq 0} x^n$$

Définition 6.1.1:

Les opérations rationnelles dans un dioïde ordonné complet sont:

- la max-addition.
- le produit du dioïde
- l'opération étoile $x^* = e \oplus \sum_{n \geq 1} x^n$

Ces opérations ont d'abord été étudiées dans le cas des langages, qui ce sont des séries formelles à coefficients dans l'algèbre de Boole qui est un dioïde ordonné complet. Il en est donc de même pour les séries à coefficients dans cette algèbre. Cette étude des opérations rationnelles s'applique donc au cas particulier des langages.

Définition 6.1.2:

Soit P une partie d'un dioïde ordonné complet D. P est rationnellement close (abrévié R-close) si P est stable (ou close) pour les opérations rationnelles.

La clôture rationnelle de P est la plus petite partie rationnellement close contenant P et elle est notée P*

Justification de la définition:

Justifions que P* est bien définie. Le dioïde D contient P et est rationnellement clos, puisqu'il est complet. L'intersection des parties rationnellement closes contenant P est donc définie et n'est pas vide, puisqu'elle contient P. Il est aisé de vérifier que l'intersection d'une famille quelconque de parties R-closes est elle-même R-close, ce qui termine la preuve de l'existence de P* ■

Remarquons par contre que l'union d'une famille de parties R-closes n'est pas forcément R-close.

Il est évident qu'une partie R-close contenant ε et e est un sous-dioïde. Réciproquement, si P contient ε et e , la R-clôture de P contient le sous-dioïde engendré par P. Ce ne sont pas nécessairement des sous-dioïdes complets: il peuvent ne pas être clos pour les sommes infinies quelconques. Dans cette partie, nous ne nous intéresserons pas aux sommes infinies autres que celles introduites par l'opération étoile.

Propriétés 6.1.3:

Pour tout élément x de D,

$$(x^*)^* = x$$

$$x^2 = x \Leftrightarrow x = x^*$$

Si A et B sont des parties de D:

$$(A^*)^* = A^*$$

$$A \subset B \Rightarrow A^* \subset B^*$$

$$(A \cup B)^* \text{ contient } A^* \cup B^*$$

6.2 Propriétés particulières dans le cas commutatif:

On obtient un grand nombre de règles de calcul supplémentaires lorsque les éléments qui interviennent dans une formule commutent.

Propriétés 6.2.1:

Si deux éléments x et y commutent:

$$(x \oplus y)^* = x^* \cdot y^* = y^* \cdot x^*$$

$$(x^* \cdot y^*)^* = x^* \cdot y^* = y^* \cdot x^*$$

Démonstration:

Il suffit de constater que toutes ces écritures sont égales à

$$\sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} x^i \cdot y^j$$

On utilise pour cela l'idempotence des éléments pour l'addition. Il est inutile de dénombrer combien de fois un terme $x^i.y^j$ apparaît et il suffit de vérifier que pour tout couple (i,j) , le terme correspondant apparaît une fois au moins dans chaque expression ■

Considérons une expression rationnelle. Elle définit une fonction de P^n dans P^* , où n est le nombre de variables qui apparaissent dans l'expression. Il est alors intéressant de comparer les diverses expressions formelles pouvant représenter cette fonction, et surtout leurs "hauteurs d'étoile", c'est à dire le nombre maximal d'opérations étoiles imbriquées dans leurs écritures. Par exemple, la hauteur d'étoile d'une fonction polynôme est 0.

Théorème 6.2.2:

Si les éléments d'une partie P commutent, toute expression rationnelle d'éléments de P définit une fonction de ces éléments qui peut être écrite:

$$X \oplus \sum_{\text{finie}} Y_i.Z_i^*$$

où X , les Y_i et les Z_i sont des expressions polynômiales d'éléments de P

Démonstration:

Raisonnons par récurrence sur la hauteur d'étoile. Il suffit de prouver que l'on peut réduire la hauteur d'étoile du terme générique $(x \oplus z.y^*)^*$, où x, y, z sont des expressions rationnelles de hauteur d'étoile strictement inférieure.

$$\begin{aligned} (x \oplus z.y^*)^* &= x^*. (z.y^*)^* \\ &= x^*. (\emptyset \oplus z.y^* \oplus (z.y^*)^2 \oplus (z.y^*)^3 \oplus (z.y^*)^4 \dots) \\ &= x^*. (\emptyset \oplus z.z^*.y^*) \\ &= x^* \oplus z.(x \oplus y \oplus z)^* \end{aligned}$$

C'est bien une expression rationnelle de hauteur d'étoile strictement inférieure. On peut appliquer cette manipulation jusqu'à l'obtention de la forme énoncée dans le théorème ■

Exemple:

Partons d'une expression de hauteur d'étoile égale à 3.

$$\begin{aligned}
 & y.(x \oplus (z.y^*.(t \oplus x^*)^* \oplus y.(x \oplus y^*)^* \oplus x \oplus (t \oplus x^*)^*)) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus (z.y^*.(t^*.x^* \oplus y.x^*.y^*)^* \oplus x \oplus t^*.x^*)) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus (z.y^*.(t^*.x^*)^*.(y.x^*.y^*)^* \oplus x \oplus t^*.x^*)) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus (z.y^*.t^*.x^*.(e \oplus y.y^*.x^*.y^*) \oplus x \oplus t^*.x^*)) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus (z.y^*.x^*.t^* \oplus z.y.y^*.x^*.t^* \oplus x \oplus t^*.x^*)) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus (z.y^*.x^*.t^*)^* (z.y.y^*.x^*.t^*)^*.x^*.(t^*.x^*)^*) \oplus x^* \\
 &= y.(x \oplus z^*.y^*.x^*.t^*.x^*.t^*.x^*) \oplus x^* \\
 &= y.x \oplus y.z^*.y^*.x^*.t^* \oplus x^* \\
 &= y.x \oplus y.(x \oplus y \oplus z \oplus t)^* \oplus x^*
 \end{aligned}$$

En utilisant les règles d'absorption dans un dioïde ordonné, on peut encore simplifier l'expression ci-dessus, en effet

$$y.x \leq y.(y^*.x^*) \leq y.(z^*.y^*.x^*.t^*)$$

le résultat final est donc

$$y.(z^*.y^*.x^*.t^*) \oplus x^*$$

ou encore:

$$y.(x \oplus y \oplus z \oplus t)^* \oplus x^*$$

6.3 Opérations rationnelles et calcul matriciel.

Les opérations rationnelles sont aussi définies dans tous les dioïdes complexes construits à partir du dioïde D.

Lemme 6.3.1:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline c & d \\ \hline \end{array}^* = \begin{array}{|c|c|} \hline a^* \oplus a^*.b.(c.a^*.b \oplus d)^*.c.a^* & a^*.b.(c.a^*.b \oplus d)^* \\ \hline (c.a^*.b \oplus d)^*.c.a^* & (c.a^*.b \oplus d)^* \\ \hline \end{array}$$

Il est important de remarquer que ce résultat est valable avec des coefficients a, b, c, d qui peuvent eux-mêmes appartenir à des dioïdes complexes: matrices carrées, séries formelles etc. Nous verrons dans la démonstration qu'il n'est même pas nécessaire que les blocs a, b, c, d , soient des matrices de même taille.

Corollaire 6.3.2:

$$\begin{aligned}(b.d^*.c \oplus a)^* &= a^* \oplus a^*.b.(c.a^*.b \oplus d)^*.c.a^* \\ (c.a^*.b \oplus d)^*.c.a^* &= d^*.c.(b.d^*.c \oplus a)^*\end{aligned}$$

Démonstration du lemme:

Notons M la matrice globale. M^* est la plus petite solution de l'équation d'inconnue X ,

$$X = M.X \oplus E$$

où X est une matrice de même nature que M et E est la matrice identité.

$$X = \begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline z & t \\ \hline \end{array} \quad E = \begin{array}{|c|c|} \hline e & \\ \hline & e \\ \hline \end{array}$$

En décomposant l'équation par blocs, elle se transforme en un système.

$$\begin{aligned}x &= a.x \oplus b.z \oplus e \\ z &= c.x \oplus d.z \\ y &= a.y \oplus b.t \\ t &= c.y \oplus d.t \oplus e\end{aligned}$$

Il faut trouver les plus petites solutions à ce système en utilisant la "résolvante étoile"

$$\begin{aligned}y &= a^*.b.t \\ \text{donc } t &= c.a^*.b.t \oplus d.t \oplus e \\ \text{donc } t &= (c.a^*.b \oplus d)^* \text{ et } y = a^*.b.(c.a^*.b \oplus d)^*\end{aligned}$$

En procédant de même avec x et z , on obtient:

$$x = (b.d^*.c \oplus a)^* \text{ et } z = d^*.c.(b.d^*.c \oplus a)^*$$

On peut procéder autrement pour résoudre ce système.

$$x = a^*. (b.z \oplus e)$$

$$\text{donc } z = c. a^*. (b.z \oplus e) \oplus d.z$$

$$\text{donc } z = (c.a^*.b \oplus d)^*. c.a^* \text{ et } x = a^* \oplus a^*.b. (c.a^*.b \oplus d)^*. c.a^*$$

L'unicité de la solution minimale prouve les identités du corollaire ■

6.4 Clôture rationnelle et représentation d'un élément rationnel.

Dorénavant, nous allons considérer un dioïde complet D et un sous-ensemble E de D . Nous supposons toujours que E contient ε et e , mais E ne sera pas nécessairement un sous-dioïde de D .

En résumé:

$$D \supseteq E^* \supseteq E \supseteq \{\varepsilon, e\}^* = \{\varepsilon, e\}$$

Nous noterons $M_{n,p}(E)$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans E .

Comparons la clôture rationnelle de $M_{n,n}(E)$ dans le dioïde ordonné complet $M_{n,n}(D)$, que nous noterons $M_{n,n}(E)^*$ avec l'ensemble des matrices à coefficients dans E^* , que nous noterons $M_{n,n}(E^*)$

Théorème 6.4.1:

$$M_{n,n}(E^*) = M_{n,n}(E)^*$$

Démonstration:

Nous allons d'abord montrer par récurrence l'inclusion

$$M_{n,n}(E)^* \subset M_{n,n}(E^*)$$

Hypothèse de récurrence à l'ordre p

pour tout dioïde ordonné complet D ,
 pour toute partie E de D et tout entier $n \leq 2^p$
 $M_{n,n}(E)^* \subset M_{n,n}(E^*)$

a) Cas $p=0$. Le lemme prouve que l'étoile d'une matrice 2×2 a des coefficients qui sont des expressions rationnelles des coefficients de la matrice.

$$A \in M_{2,2}(E) \Rightarrow A^* \in M_{2,2}(E^*)$$

Comme E^* contient E et est stable pour la somme et le produit,

$$A \in M_{2,2}(E), B \in M_{2,2}(E) \Rightarrow A \oplus B \in M_{2,2}(E^*)$$

$$A \in M_{2,2}(E), B \in M_{2,2}(E) \Rightarrow A.B \in M_{2,2}(E^*)$$

Par conséquent, l'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre 1 la clôture de $M_{2,2}(E)$ est incluse dans $M_{2,2}(E^*)$.

b) Cas générique. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie à l'ordre p et notons $2^p = n$. Comme on peut compléter les matrices par des lignes et des colonnes vides, il suffit de prouver le résultat pour $2^{p+1} = 2.n$

Nous utiliserons:

$$M_{2.n,2.n}(E) = M_{2,2}(M_{n,n}(E))$$

En appliquant le résultat que nous venons de montrer à l'ordre 1, aux matrices 2×2 à coefficients dans le dioïde $M_{n,n}(D)$, et en remplaçant E par $M_{n,n}(E)$, il vient

$$M_{2.n,2.n}(E)^* = M_{2,2}(M_{n,n}(E))^* \subset M_{2,2}(M_{n,n}(E^*))$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'ordre p , dans le dioïde D , on obtient le résultat voulu à l'ordre $p+1$

$$M_{2.n,2.n}(E)^* \subset M_{2,2}(M_{n,n}(E)^*) \subset M_{2,2}(M_{n,n}(E^*)) = M_{2.n,2.n}(E^*)$$

Cela termine la démonstration par récurrence.

Pour montrer l'inclusion inverse, $M_{n,n}(E^*) \subset M_{n,n}(E)^*$ nous aurons besoin du résultat 6.4.2.

Théorème et définition 6.4.2:

Soit D un dioïde ordonné complet, E un sous-ensemble de D et soient deux sous-ensembles de E , que nous noterons G et H , qui contiennent tous deux ϵ et e .

Un élément x de D appartient à E^* la clôture rationnelle de E
 si et seulement si
 x peut s'écrire sous la forme:
 $x = C.A^*.B$

avec

$C \in M_{1,n}(H)$, $A \in M_{n,n}(E)$ et $B \in M_{n,1}(G)$
 où n est un entier naturel qui dépend de x .

Nous appellerons cette formule une (H,E,G) -représentation de x . L'entier n sera appelé la taille de la représentation (on évitera les mots d'"imension" et "rang" que nous n'avons pu clairement définir comme en algèbre usuelle).

Démonstration:

Les ensembles E , F et H étant donnés selon les hypothèses du théorème, appelons R l'ensemble des éléments de D qui possèdent une (H,E,G) -représentation. Il suffit alors de montrer que R contient E et qu'il est clos pour les opérations rationnelles.

R contient E car tout élément x s'écrit

$$x = \begin{array}{|c|} \hline e \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline & x \\ \hline & \\ \hline \end{array}^* \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline e \\ \hline \end{array}$$

(les cases vides contiennent le coefficient ϵ)

Montrons que R est clos pour les opérations rationnelles. Soient x et y deux éléments donnés avec leur représentations rationnelles

$$x = C.A^*.B \text{ et } y = C'.A'^*.B'$$

alors

$$x \oplus y = C.A^*.B \oplus C'.A^{**}.B'$$

$$= \begin{bmatrix} C & C' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & A' \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} B \\ B' \end{bmatrix}$$

$$x.y = (C.A^*.B).(C'.A^{**}.B')$$

$$= \begin{bmatrix} C & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & \\ & & C \\ & & A \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \\ \\ B \end{bmatrix}$$

$$x^* = (C.A^*.B)^*$$

$$= \begin{bmatrix} & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \\ e \end{bmatrix}$$

(Les cases vides sont des blocs remplis d' ϵ)

Nous avons donc montré que R est rationnellement clos et par conséquent que $R = E^*$ ■

Fin de la démonstration du théorème 6.4.1:

Il nous restait à montrer l'inclusion

$$M_{n,n}(E^*) \subset M_{n,n}(E)^*$$

Nous allons effectuer la démonstration par récurrence sur p en considérant des matrices carrées de taille 2^p

L'hypothèse de récurrence à l'ordre p est:

pour tout dioïde ordonné complet et toute partie E de ce dioïde,
pour tout $n \leq 2^p$,

$$M_{n,n}(E^*) \subset M_{n,n}(E)^*$$

a) Cas $p=0$. Soit X une matrice 2×2 à coefficients dans E^* . Les coefficients de la matrice admettent tous des $(\{\varepsilon, e\}, E, \{\varepsilon, e\})$ -représentations. Nous pouvons supposer que toutes ces représentations sont de même taille p en ajoutant éventuellement des cases "vides"

$$X = \begin{array}{|c|c|} \hline C_1 \cdot A_1^* \cdot B_1 & C_2 \cdot A_2^* \cdot B_2 \\ \hline C_3 \cdot A_3^* \cdot B_3 & C_4 \cdot A_4^* \cdot B_4 \\ \hline \end{array}$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline C_1 & C_2 & & \\ \hline & & C_3 & C_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A_1 & & & \\ \hline & A_2 & & \\ \hline & & A_3 & \\ \hline & & & A_4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|} \hline B_1 & \\ \hline & B_2 \\ \hline B_3 & \\ \hline & B_4 \\ \hline \end{array}$$

En considérant des blocs 2×2 dans l'écriture précédente, on constate que c'est une représentation $(M_{2,2}(E), M_{2,2}(E), M_{2,2}(E))$ de X et par conséquent, le théorème précédent nous donne le résultat cherché:

$$X \in (M_{2,2}(E))^*$$

b) Cas générique. Supposons l'hypothèse vraie à l'ordre p . Notons $n = 2^p$. En complétant éventuellement par des colonnes et des lignes "vides", il suffit de vérifier la propriété pour les matrices de tailles $2 \cdot n = 2^{p+1}$

$$M_{2 \cdot n, 2 \cdot n}(E^*) = M_{n, n}(M_{2, 2}(E^*))$$

D'après ce qui a été montré à l'ordre 1

$$M_{2 \cdot n, 2 \cdot n}(E^*) \subset M_{n, n}(M_{2, 2}(E^*))$$

et comme $M_{2, 2}(E)$ est une partie du dioïde ordonné complet des matrices carrées de taille 2×2 à coefficients dans D et que l'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre p dans tout dioïde de ce type, nous pouvons écrire

$$M_{2 \cdot n, 2 \cdot n}(E^*) \subset (M_{n, n}(M_{2, 2}(E)))^*$$

ou

$$M_{2 \cdot n, 2 \cdot n}(E^*) = M_{2 \cdot n, 2 \cdot n}(E^*)$$

ce qui termine la démonstration du théorème ■

6.5 Minimalité de la représentation d'un élément rationnel.

La taille de la représentation (H,E,G) d'un élément de E^* dépend évidemment des ensembles H , E et G .

Propriété 6.5.1:

Si x est un élément qui admet une (H,E,G) -représentation et une (H',E',G') représentation telles que

$$HCH', ECE' GCG'$$

alors, la taille de la (H,E,G) -représentation est supérieure ou égale à la taille de la (H',E',G') représentation.

En lisant les démonstrations qui précèdent, il est aisé de vérifier qu'en fait, dans H et G , on ne se sert que des éléments ϵ et e . A priori, si on limite H et G à $\{\epsilon, e\}$, on obtient une représentation maximale parmi les représentations minimales. Nous pouvons alors proposer la définition suivante, qui n'aura d'intérêt que lorsqu'elle sera complétée par des théorèmes constructifs, lesquels sont encore à trouver au moment où ces lignes sont écrites.

Définition 6.5.2 (proposée):

L'ordre d'un élément x de E^* est le minimum des tailles de ses représentations $(\{\epsilon, e\}, E, \{\epsilon, e\})$.

Il serait notamment intéressant d'étudier s'il y a un lien entre l'ordre d'un élément et le rang de la matrice de HANKEL que l'on peut construire à partir de A , comme c'est le cas en théorie usuelle des systèmes. Encore faut-il dégager la bonne notion de rang. Les résultats de la théorie des automates, qui s'appliquent au dioïde de l'algèbre de Boole nous font proposer la conjecture suivante.

Conjecture 6.5.3:

L'ordre d'un élément de E^* est égal au cardinal de la famille génératrice non-redondante des lignes (ou des colonnes) de la matrice de HANKEL associée à sa $(\{\varepsilon, e\}, E, \{\varepsilon, e\})$ -représentation.

Remarquons encore que s'il est facile, par analogie avec la théorie usuelle, de construire une matrice de HANKEL à partir d'une représentation rationnelle, nous n'avons pas défini cette matrice de HANKEL de manière intrinsèque. La partie la plus difficile de l'énoncé ci-dessus est certainement la preuve de l'existence d'une famille génératrice finie des lignes ou des colonnes de la matrice de HANKEL.

6.6 Application au cas des séries formelles.

A partir du théorème, nous pouvons retrouver le théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER sur les séries rationnelles. Ce théorème est valable dans n'importe quel dioïde, bien que nous n'en donnerons qu'une démonstration dans le cas des dioïdes ordonnés complets.

Dans ce théorème, D est un dioïde quelconque. Γ est un alphabet fini et Γ^* est le langage engendré par cet alphabet. Rappelons qu'une série rationnelle est une série qui appartient à la clôture rationnelle de l'ensemble des polynômes. Pour tout mot ω , nous notons $S(\omega)$ le coefficient de ω dans la série S .

Théorème 6.6.1:

Une série formelle S de $D\langle\langle\Gamma^*\rangle\rangle$ est rationnelle si et seulement s'il existe un entier n , une matrice B appartenant à $M_{1,n}(D)$, une matrice C appartenant à $M_{n,1}(D)$, et une application Φ de Γ^* dans $M_{1,n}(D)$ telles que:

- Φ est un homomorphisme du monoïde libre Γ^* dans le monoïde constitué par $M_{n,n}(D)$ muni du produit des matrices;

-pour tout mot ω de Γ^*

$$S(\omega) = B.\Phi(\omega).C$$

Dans le vocabulaire des séries formelles, ce théorème signifie que les séries sont rationnelles si et seulement si elles sont reconnaissables.

Démonstration:

Il suffit d'appliquer le théorème de représentation avec des ensembles judicieusement choisis.

On travaille dans $D\langle\langle\Gamma\rangle\rangle$, le dioïde des séries formelles à coefficients dans D , et à variables dans l'alphabet Γ

L'ensemble E est constitué des caractères de l'alphabet et des scalaires. E engendre les polynômes par sommations et produits finis, et sa clôture est égale aux séries rationnelles.

Toute série rationnelle possède donc une $((\varepsilon, \emptyset), E, (\varepsilon, \emptyset))$ -représentation qui s'écrit

$$S = C.A^*.B$$

C et B sont des matrices dont les coefficients sont égaux à ε ou e .

A est une matrice dont les coefficients sont des scalaires ou des lettres de l'alphabet Γ

A peut donc être écrite

$$A = M^0 \oplus \sum_{\alpha \in \Gamma} M(\alpha). \alpha$$

où M^0 et $M(\alpha)$ sont des matrices à coefficients dans D .

donc

$$A^n = (M^0 \oplus \sum_{\alpha \in \Gamma} M(\alpha). \alpha)^n$$

A^n est un polynôme de degré n en variables de Γ mais il n'est pas homogène à cause du terme M^0 qui peut intervenir. Pour nous débarrasser de ce terme M^0 , utilisons la formule

$$(a \oplus b.d^*.c)^* = a^* \oplus a^*.b.(c.a^*.b \oplus d)^*.c.a^*$$

avec $d = \varepsilon$ et $c = e$ il vient

$$(a \oplus b)^* = a^* \oplus a^*.b.(a^*.b)^*.a^* = (a^*.b)^*.a^*$$

Appliquons cette dernière formule avec $a = M^\circ$ et $b = \sum_{\alpha \in \Gamma} M(\alpha) \cdot \alpha$

$$A^* = (\sum_{\alpha \in \Gamma} (M^\circ)^* M(\alpha) \cdot \alpha)^* (M^\circ)^*$$

Comme $(M^\circ)^*$ est idempotent, on peut encore écrire

$$A^* = (\sum_{\alpha \in \Gamma} (M^\circ)^* M(\alpha) \cdot (M^\circ)^* \cdot \alpha)^*$$

pour simplifier les notations, posons

$$L(\alpha) = (M^\circ)^* M(\alpha) \cdot (M^\circ)^*$$

alors

$$A^* = (\sum_{\alpha \in \Gamma} L(\alpha) \cdot \alpha)^*$$

A^* peut aussi s'écrire

$$A^* = \sum_{\omega \in \Gamma^*} K(\omega) \cdot \omega$$

où pour tout mot ω , $K(\omega)$ est une matrice à coefficients dans D .

Dans ce cas, pour tout mot ω de Γ^* si on concatène un caractère α au mot ω pour obtenir la chaîne $\omega \cdot \alpha$, on obtient:

$$K(\omega \cdot \alpha) = K(\omega) \cdot L(\alpha).$$

Le théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER est donc montré, car l'homomorphisme Φ est défini par:

$$\Phi(\alpha) = L(\alpha) = (M^\circ)^* \cdot M(\alpha) \cdot (M^\circ)^* \text{ pour tout caractère } \alpha$$

$$\Phi(\omega) = K(\omega) \text{ pour tout mot } \omega.$$

Les matrices C et B sont celles données par le théorème de représentation ■

6.7 Cas des séries en variables commutatives.

Le théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER tel qu'il est usuellement connu ne s'applique qu'aux variables non-commutatives. Or le théorème de représentation, tel que nous l'avons énoncé, ne fait aucune hypothèse sur les éléments de E . Ceux-ci peuvent commuter

Analysons si la démonstration précédente, qui applique le théorème de représentation pour montrer que les séries reconnaissables et rationnelles coïncident est valable dans le cas commutatif.

Lorsque nous avons calculé le coefficient $K(\omega, \alpha)$ à partir de $K(\omega)$, nous avons seulement dû multiplier à droite par $L(\alpha)$. Il en résultait que le coefficient $K(\omega)$ est obtenu en appliquant un homomorphisme. Par contre, si les variables commutent, il faut tenir compte de tous les ordres possibles des variables dans le calcul des coefficients d'un monôme. Il n'y a pas, semble-t-il, de formule simple.

6.8 Conclusion.

Nous avons obtenus deux résultats particulièrement utiles. Le premier nous montre que la clôture rationnelle d'un ensemble de matrices est égale à l'ensemble des matrices à coefficients dans la clôture rationnelle des coefficients des matrices.

Le second nous indique que tous les éléments de la clôture rationnelle d'une partie E , peuvent être codés à l'aide trois matrices à coefficients dans E . Ce théorème s'applique en particulier aux séries en variables commutatives, ce qui n'est pas le cas du théorème de KLEENE-SCHÜTZENBERGER.

Chapitre 7

Séries formelles utiles à l'analyse des systèmes à événements discrets.

Dans cette partie, nous allons étudier en détail les séries en une seule variable formelle, à coefficients dans l'un des dioïdes DZC, DZD, DRC ou DRD, parce que ce sont ceux qui seront utiles dans l'analyse des systèmes à événements discrets. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux séries dont les coefficients sont croissants.

Pour alléger un peu la rédaction, nous ne considérerons que le cas des coefficients entiers. Sauf les résultats "utilisant la "dualité" et la transformation de CASPI-HALBWACHS" tout ce qui sera énoncé reste valable dans le cas des coefficients réels.

7.1 Extension de la définition des séries.

Nous utiliserons deux variables formelles distinctes, qui seront z pour les suites à termes dans DZC (cas où $\oplus = \max$),
 δ pour les suites à termes dans DZD (cas où $\oplus = \min$).

Nous désirons travailler avec des suites indicées par Z que nous voulons traiter comme des séries formelles. Il faut donc redéfinir les sommes et produits de séries pour les indices négatifs. Les opérations sont définies en prolongeant les règles élémentaires:

$$z^i \cdot z^j = z^{i+j} \quad \text{et} \quad \delta^i \cdot \delta^j = \delta^{i+j}$$

Alors

$$(\sum \alpha_i \cdot z^i) \cdot (\sum \beta_j \cdot z^j) = \sum_{k \in Z} (\sum_{i+j=k} \alpha^i \cdot \beta^j) \cdot z^k = \text{Max}_{k \in Z} (\text{Max}_{i+j=k} (\alpha^i \cdot \beta^j)) \cdot \delta^k$$

et

$$(\sum \alpha_i \cdot \delta^i) \cdot (\sum \beta_j \cdot \delta^j) = \sum_{k \in Z} (\sum_{i+j=k} \alpha^i \cdot \beta^j) \cdot \delta^k = \text{Min}_{k \in Z} (\text{Min}_{i+j=k} (\alpha^i \cdot \beta^j)) \cdot \delta^k$$

Par abus, nous noterons encore:

DZC $\ll z \gg$ l'ensemble des séries formelles en z à indices entiers,

DZD $\ll \delta \gg$ l'ensemble des séries formelles en δ à indices entiers.

Remarque:

DZC<<z>> et DZD<<δ>> sont isomorphes par les transformation

$$\sum u_n z^n \rightarrow \sum u_n^{-1} z^n \qquad \sum v_n \delta^n \rightarrow \sum v_n^{-1} \delta^n$$

Définitions 7.1.1:

Une série est propre si et seulement si tous ses coefficients sont distincts de ∞.

Une série est à support positif si et seulement si tous ses coefficients d'indices strictement négatifs valent ε

Une série est à support négatif si et seulement si tous ses coefficients d'indices strictement positifs valent ε

Les polynômes sont les séries dont les seuls coefficients distincts de ε sont en nombre fini et tous d'indice positif ou nul.

Les séries formelles que nous avons introduites peuvent aussi être considérées comme des fonctions de Z à valeurs dans le dioïde DZC ou DZD.

Définition 7.1.2:

Le produit de HADAMARD de deux séries, noté S ⊗ T est la série obtenue en faisant le produit des coefficients de même indice dans S et T.

$$\sum u_n z^n \otimes \sum v_n z^n = \sum u_n \cdot v_n z^n$$

$$\sum u_n \delta^n \otimes \sum v_n \delta^n = \sum u_n \cdot v_n \delta^n$$

Propriétés 7.1.3:

Θ est commutatif, associatif et vérifie:

$$(U \oplus V) \Theta T = (U \Theta T) \oplus (V \Theta T)$$

$$(\alpha \cdot V \Theta T) = \alpha \cdot (V \Theta T)$$

$$(z \cdot V \Theta T) = z (V \Theta z^{-1} T) \text{ pour les séries en } z,$$

$$(\delta \cdot V \Theta T) = \delta (V \Theta \delta^{-1} T) \text{ pour les séries en } \delta.$$

Propriété 7.1.4:

La somme, le produit, et le produit de HADAMARD de deux séries propres est une série propre.

7.2 Propriétés de l'étoile d'une série.

Il est utile de caractériser les séries dont l'étoile "converge" c'est à dire dont les coefficients sont tous distincts de ∞ .

Théorème 7.2.1:

R^* est une série propre si et seulement si R est une série propre et

séries en z :

$$\forall n \leq 0 \quad S_n \leq 0 \quad \text{ou} \quad \forall n \geq 0 \quad S_n \leq 0$$

séries en δ :

$$\forall n \leq 0 \quad S_n \geq 0 \quad \text{ou} \quad \forall n \geq 0 \quad S_n \geq 0$$

En particulier si R est une série propre à support positif ou à support négatif telle que $R_0 \oplus e = e$ alors R^* est une série propre.

7.3 Séries croissantes, caractérisation et propriétés.

Les séries à coefficients croissants, que nous appellerons par abus séries croissantes nous seront particulièrement utiles. De plus elles ont de nombreuses propriétés intéressantes.

Une suite U est croissante si et seulement si $u_n \leq u_{n+1}$, donc

$$\max(u_n, u_{n+1}) = u_{n+1}$$

ou

$$\min(u_n, u_{n+1}) = u_n$$

Sur la série associée, cela se traduit par

pour les séries en z :

$$\sum u_n z^n \oplus z \cdot \sum u_n z^n = \sum u_n z^n$$

ce qui équivaut à

$$U = U \cdot z^*$$

pour les séries en δ :

$$\sum u_n \delta^n \oplus \delta^{-1} \cdot \sum u_n \delta^n = \sum u_n \delta^n$$

ce qui équivaut à

$$U = U \cdot (\delta^{-1})^*$$

Théorème 7.3.1

Une série de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ est croissante

si et seulement si elle est multiple de z^*

Une série $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$ est croissante

si et seulement si elle est multiple de $(\delta^{-1})^*$

Corollaire 7.3.2:

S de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ est croissante si et seulement si $S \cdot z^* = S$

S de $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$ est croissante si et seulement si $S \cdot (\delta^{-1})^* = S$

Corollaire 7.3.3:

L'ensemble des séries croissantes en z (respectivement en δ) est un dioïde.

Pendant ce n'est pas un sous-dioïde du dioïde des séries quelconques DZC, car son élément neutre pour le produit est z^* ou $(\delta^{-1})^*$ et non la série e qui n'est pas croissante.

Corollaire 7.3.4:

Le produit de toute série par une série croissante est une série croissante.

Démonstration des corollaire 7.3.3 et 7.3.4:

Il suffit d'utiliser la caractérisation énoncée ci-dessus pour vérifier la stabilité de ces ensembles pour le produit et la somme. Dans le cas des séries en z

$$S.z^* = S \text{ et } T.z^*=T \Rightarrow (S \oplus T).z^* = (S \oplus T)$$

$$S.z^* = S \Rightarrow \forall T \ S. T.z^* = S.T$$

•

D'autre part, il est évident que le produit de HADAMARD de séries croissantes est une série croissante, car c'est l'addition usuelle terme à terme de deux séries croissantes.

Par contre, S^* n'est pas forcément croissante, même si S est croissante à support positif. Si

$$S = -2 \oplus -1.z \oplus 0.z^2 \oplus 0.z^3 \oplus 0.z^4 \dots$$

alors

$$S^* = 0 \oplus -1.z \oplus 0.z^2 \oplus 0.z^3 \oplus 0.z^4 \dots$$

Notations:

$SC\langle\langle z \rangle\rangle$ est l'ensemble des séries croissantes, indicées par Z de la variable formelle z , à coefficients dans le dioïde DZC .

$SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$ est l'ensemble des séries croissantes indicées par Z de la variable formelle δ , à coefficients dans le dioïde DZD .

Remarque:

$SC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$ ne sont pas isomorphes pour la transformation qui définit un isomorphisme entre $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$ par changement de signe des coefficients.

7.4 Congruence modulo z^ et $(\delta^{-1})^*$*

Définition 7.4.1:

Sur $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ on définit une relation binaire appelée congruence modulo z^* par

$$S \equiv T \quad \text{ssi} \quad S.z^* = T.z^*$$

de même, sur $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$ on définit la congruence modulo $(\delta^{-1})^*$ par

$$S \equiv T \quad \text{ssi} \quad S.(\delta^{-1})^* = T.(\delta^{-1})^*$$

Calcul pratique de $S.z^*$ et de $(\delta^{-1})^*$:

Le terme de rang n de $S.z^*$ est le sup des termes de S d'indice inférieur ou égal à n :

$$(S.z^*)_n = \sup_{i \leq n} S_i$$

Le terme de rang n de $S \cdot (\delta^{-1})^*$ est l'inf des termes de S d'indice supérieur ou égal à n :

$$(S \cdot (\delta^{-1})^*)_n = \inf_{i \geq n} S_i$$

A l'aide de la caractérisation des séries croissantes, on montre aisément que:

Propriété 7.4.2:

Les relations ainsi définies sont des relations d'équivalence compatibles avec les structures de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$:

$$\begin{aligned} S \equiv T &\Rightarrow a.S \equiv a.T \text{ pour tout scalaire } a, \\ S \equiv T &\Rightarrow S \oplus U \equiv T \oplus U \text{ pour toute série } U, \\ S \equiv T &\Rightarrow S.U \equiv T.U \text{ pour toute série } U, \\ S \equiv T &\Rightarrow S \ominus U \equiv T \ominus U \text{ pour toute série } U. \end{aligned}$$

Propriété 7.4.3:

Chaque série S de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ possède un représentant unique modulo z^* dans $SC\langle\langle z \rangle\rangle$ qui est $S.z^*$

Chaque série S de $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$ possède un représentant unique dans $SC\langle\langle d \rangle\rangle$ qui est $S \cdot (\delta^{-1})^*$

Nous appellerons "lissage" d'une série, la multiplication par z^* ou par $(\delta^{-1})^*$ de cette série pour en calculer le représentant croissant.

Démonstration:

Cas des séries en z . Si T est croissant et équivalent à S :

$$S.z^* = T.z^* = T$$

CQFD ■

7.5 Polynômes croissants.

Mis à part ϵ , les polynômes ne sont jamais des séries croissantes. Nous allons définir les séries croissantes qui jouent le rôle de polynômes. Ce sont les séries croissantes qui n'ont qu'un nombre fini de "sauts", c'est à dire de termes significatifs.

7.5.1 Définition:

Un "polynôme-croissant" est une série équivalente à un polynôme pour les relations définies précédemment.

Considérons une équation de la forme $S = A.S \oplus B$ d'inconnue S ou A et B sont des séries, telles que A^* ne soit pas égale constamment à ∞ .

$$S.z^* = (A.z^*). (S.z^*) \oplus (B.z^*)$$

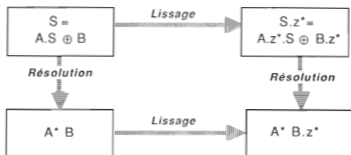
donc:

$$S.z^* = (A.z^*)^* (B.z^*) = (A^*.B).z^*$$

Il en résulte la règle de calcul suivante:

Propriété 7.5.2:

Pour calculer le représentant croissant modulo z^* ou $(\delta^{-1})^*$ de la solution de l'équation implicite $S = A.S \oplus B$, on peut d'abord lisser les coefficients A et B , ou lisser ensuite la solution $A^*.B$. Cela donne un magnifique diagramme commutatif:



En pratique, B sera souvent une série croissante et A un polynôme. Il suffit alors de calculer la série $A \cdot B$.

7.6 Représentant minimal modulo z^* d'une série en z.

Pour certaines séries en z, on peut associer à chaque classe d'équivalence modulo z^* un plus petit représentant qui est minimal au sens de l'ordre partiel sur les séries et au sens du nombre de coefficients distincts de ε . Ce représentant minimal n'a cependant pas beaucoup d'intérêt, car il n'a pas de propriété algébrique utile, au contraire du représentant maximal.

Définition 7.6.1:

Pour toute série S de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ telle que $\lim_{n \rightarrow -\infty} S_n = \varepsilon$ on définit S° de la manière suivante:

$$\begin{aligned} S^\circ_n &= \varepsilon & \text{si } (S.z^*)_{n-1} &\geq (S.z^*)_n \\ S^\circ_n &= (S.z^*)_n & \text{si } (S.z^*)_{n-1} < (S.z^*)_n \end{aligned}$$

Remarquons que S° ne dépend que de $S.z^*$ donc seulement de la classe d'équivalence de S modulo z^* .

Propriété 7.6.2:

Pour calculer S° , il suffit de remplacer par ε les termes de S qui sont majorés par un terme précédent dans la série.

Les termes distincts de ε dans S° forment une suite extraite de S (éventuellement finie) strictement croissante.

Démonstration:

Selon la définition: $(S.z^*)_n = \sup_{i \leq n} S_i$

a) $(S.z^*)_{n-1} \geq (S.z^*)_n$

alors

$$\sup_{i \leq n-1} S_i \geq \sup_{i \leq n} S_i$$

donc

$$S_n \leq \sup_{i \leq n-1} S_i$$

et comme on travaille avec des valeurs discrètes:

$$\exists p < n \text{ tq } S_p \geq S_n$$

donc tout terme remplacé par ε est majoré par un terme précédent.

b) $(S.z^*)_{n-1} < (S.z^*)_n$

alors

$$S_n > \sup_{i \leq n-1} S_i$$

donc

$$(S.z^*)_n = S_n = S_n^2 > (S.z^*)_{n-1}$$

et comme $S.z^*$ est croissante et majore S :

$$\forall p < n \quad S_p \leq (S.z^*)_{n-1} < S_n$$

donc tout terme conservé dans S est strictement plus grand que tous les termes précédents.

Théorème 7.6.3:

Si S est une série en z telle que $\lim_{n \rightarrow -\infty} S_n = -\infty$ alors pour l'ordre partiel sur les séries en z

$$S^2 \leq S \leq S.z^*$$

De plus S^2 est un représentant de S modulo z^* . C'est donc le plus petit représentant de la classe de S pour l'ordre partiel sur $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$.

S^2 est aussi l'unique représentant de la classe minimisant le nombre de coefficients distincts de ε .

Démonstration:

Par construction, $S^0 \leq S$ et par conséquent. $S^0.z^* \leq S.z^*$

Pour montrer que S^0 est un représentant de S , il reste à montrer que $S^0.z^* \geq S.z^*$ Fixons un entier n .

1er cas: $S^0_n \neq \epsilon$

alors

$$S^0_n = (S.z^*)_n \text{ par définition}$$

donc

$$(S^0.z^*)_n \geq S^0_n \geq (S.z^*)_n$$

2ème cas: $S^0_n = \epsilon$ Deux sous-cas sont possibles:

a) $S_p = \epsilon \quad \forall p < n$

alors

$$S^0_n = (S.z^*)_n = \epsilon \text{ il n'y a pas de problème.}$$

b) $\exists p < n$ tq $S_p > \epsilon$

Définissons

$$r = \max\{ p \in \mathbf{Z} \text{ tq } p < n \text{ et } S^0_p \neq \epsilon \}$$

alors

$$(S^0.z^*)_r = (S^0.z^*)_n$$

nécessairement

$$S_r = \max\{ S_p \mid p \leq n \}$$

car on a une série à passé fini, et le sup est donc un max. Alors:

$$S^0_r = (S^0.z^*)_r = (S^0.z^*)_n \geq (S.z^*)_n$$

ce qui prouve que $S^0 \equiv S$.

La minimalité du nombre de coefficients distincts de ϵ dans S^0 provient du fait que lorsqu'on conserve les coefficients communs à deux séries d'une même classe, on obtient un nouveau représentant de cette classe.

Considérons deux séries S et T de $DZC \ll z \gg$ telles que:

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} S_n = -\infty = \epsilon \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = -\infty = \epsilon$$

Définissons la série $S \cap T = W$ par

$$\text{Si } S_n = T_n \quad W_n = S_n = T_n$$

$$\text{Si } S_n \neq T_n \quad W_n = \varepsilon$$

alors

$$S \equiv T \quad \Rightarrow \quad W = S \cap T \equiv S \equiv T$$

Il est évident que $W \leq S$ et $W \leq T$ pour l'ordre partiel sur les séries, donc:

$$W.z^* \geq S.z^* = T.z^*$$

Nous avons déjà prouvé que

$$S \equiv T \Rightarrow S^0 = T^0$$

et tous les termes distincts de ε de la série $S^0 = T^0$ se trouvent dans S et dans T , donc:

$$W \geq S^0 = T^0$$

donc

$$W.z^* \geq S.z^* = T.z^* = S^0.z^*$$

ce qui termine la démonstration ■

En pratique, on manipulera essentiellement des séries en z à "passé fini", c'est à dire des séries telles que:

$$\exists P \quad \forall q < p \quad S_q = \varepsilon = -\infty$$

Celles-ci vérifient bien la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty = \varepsilon$

7.7 Représentant minimal modulo $(\delta^{-1})^*$ d'une série en δ .

La même étude peut s'appliquer aux séries en δ telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty = \varepsilon \quad (\varepsilon = +\infty \text{ dans DZD}).$$

Pour une telle série S , on définit S^0 par

$$S^0_n = \varepsilon \quad \text{si } (S^0 \cdot (\delta^{-1})^*)_{n+1} \leq (S^0 \cdot (\delta^{-1})^*)_n$$

$$S^0_n = (S^0 \cdot (\delta^{-1})^*)_n \quad \text{sinon}$$

Cela revient à ne conserver dans S que les termes qui ne sont minorés par aucun terme suivant.

Théorème 7.7.1:

Si S est une série en δ telle que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \varepsilon$,

S° est un représentant de S modulo $(\delta^{-1})^*$

minimal pour l'ordre dérivé de l'addition (maximal pour l'ordre usuel) et dont le nombre de coefficients distincts de ε est minimal.

7.8 Dualité entre séries en z et séries en δ .

$SC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$ sont associés bijectivement par une dualité, introduite par P.CASPI et N.HALBWACHS. Cette dualité est obtenue en utilisant la quasi inverse des fonctions croissantes de Z dans $Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ que sont les suites de $SC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$.

Cette étude ne s'applique pas aux séries à coefficients réels, bien qu'une généralisation soit certainement possible à partir du concept de quasi-inverse de la théorie des treillis.

A partir de l'ordre canonique associée à l'addition, la pseudo inverse d'une série se construit par

$$S_{-n} = \text{Sup} \{p / S_p \leq n\}$$

Pour obtenir des propriétés algébriques commodes, il est préférable de choisir une autre définition, que l'on peut d'ailleurs appliquer aux séries quelconques.

Définition 7.8:

Soit $D = \sum d_n \cdot z^n \in DZC\langle\langle z \rangle\rangle$, on lui associe la série en δ telle que:

$${}^{\wedge}D = H_{z\delta}(D) = \sum {}^{\wedge}d_p \cdot \delta^p$$

avec

$$\hat{d}_p = \inf \{ q / d_q \geq p \}$$

Soit $C = \sum c_n \cdot \delta^n \in SC \langle \delta \rangle$ une série en δ on lui associe la série en z

$$\hat{C} = H_{\delta Z}(C) = \sum \hat{c}_p \cdot z^p$$

avec

$$\hat{c}_p = \sup \{ q / c_q \leq p \}$$

Théorème 7.8.1:

Pour toute série S , en z ou en δ , \hat{S} est croissante.

Démonstration:

Cela résulte des inclusions

$$\{ p / S_p \geq n+1 \} \subset \{ p / S_p \geq n \}$$

et

$$\{ p / S_p \leq n \} \subset \{ p / S_p \leq n+1 \}$$

■

Théorème 7.8.2:

$$\text{Si } S \in DZD \langle \delta \rangle \quad H_{Z\delta}(S) = H_{Z\delta}(S^0) = H_{Z\delta}(S.z^*)$$

$$\text{Si } T \in DZC \langle \delta \rangle \quad H_{\delta Z}(T) = H_{\delta Z}(T^0) = H_{\delta Z}(T \cdot (\delta^{-1})^*)$$

Démonstration:

Si S est une série en z et $U = S.z^*$

$$U_n = \sup_{p \leq n} S_p$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{U}_n &= \inf \{ p / (\sup_{q \leq p} S_q) \geq n \} \\ &= \inf \{ p / (\exists q \leq p / S_q \geq n) \} \text{ car on travaille dans } Z \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \wedge U_n &= \inf \{ p / (\exists q \leq p / S_q \geq n) \} \\ &= \inf \{ p / S_p \geq n \} \\ &= \wedge S_n \end{aligned}$$

La démonstration est analogue pour la transformation des séries en δ ■

7.9 Séries croissantes et dualité.

Théorème 7.9.1:

Si S est une série croissante en z ou en δ

$$\wedge(\wedge S) = S$$

c'est à dire:

$$H_{z\delta} \circ H_{\delta z} = \text{Id sur SC}\langle\langle z \rangle\rangle$$

$$H_{\delta z} \circ H_{z\delta} = \text{Id sur SC}\langle\langle \delta \rangle\rangle$$

La transformation de CASPI-HALBWACHS définit donc une bijection entre les séries croissantes en z et les séries croissantes en δ .

Démonstration du théorème:

Soit $D = \sum d_n \cdot z^n$ une série croissante en z.

$$\wedge d_m = \inf \{ p / d_p \geq m \}$$

$$\wedge \wedge d_n = \sup \{ m / (\inf \{ p / d_p \geq m \}) \leq n \}$$

Considérons les ensembles

$$J_m = \{ p / d_p \geq m \}$$

$$I_n = \{ m / \inf J_m \leq n \}$$

alors

$$d_n \in I_n$$

car

$$n \in J_{d_n} = \{ p / d_p \geq d_n \}$$

donc

$$\hat{\hat{d}}_n \geq d_n$$

Supposons $\hat{\hat{d}}_n > d_n$. Dans ce cas, I_n contient un entier k supérieur à d_n . Alors, $\inf J_k \leq n$, et il existe un entier q tel que $d_q \geq k > d_n$. Cela est impossible si la suite d est croissante, CQFD.

La démonstration est analogue pour les séries en δ et est obtenue en inversant l'ordre sur Z *

Corollaire 7.9.2:

$$\text{Si } S \in \text{DZC} \ll z \gg \text{ alors } \hat{\hat{S}} = S \cdot z^*$$

$$\text{Si } T \in \text{DZD} \ll \delta \gg \text{ alors } \hat{\hat{T}} = T (\delta^{-1})^*$$

Corollaire 7.9.3:

Dans $\text{DZC} \ll z \gg$ et $\text{DZD} \ll \delta \gg$:

$$S \equiv T \Leftrightarrow \hat{\hat{S}} \equiv \hat{\hat{T}} \Leftrightarrow \hat{S} = \hat{T}$$

Notre choix de la définition de la dualité est donc cohérent avec la définition de l'équivalence modulo z^* et $(\delta^{-1})^*$. De plus, le calcul de la transformée d'une série est très facile si celle-ci est donnée par son représentant minimal modulo z^* ou $(\delta^{-1})^*$.

Propriété 7.9.4:

Si une série S est donnée par représentant minimal modulo z^* ou $(\delta^{-1})^*$, pour calculer sa transformée de CASPI-HALBWACHS, il suffit d'échanger z et δ et de permuter l'indice et le coefficient, dans chaque terme de la série ainsi obtenue. On obtient alors le représentant minimal de la transformée.

Exemple:

$$S = 1.z^0 \oplus 3.z^2 \oplus 4.z^4 \oplus 7.z^5$$

Alors

$$\hat{S} = 0.\delta^1 \oplus 2.\delta^3 \oplus 4.\delta^4 \oplus 5.\delta^7$$

Démonstration:

Si on considère la suite extraite de S^q constituée des termes distincts de ε , on obtient une suite strictement croissante. Dans ce cas, l'application qui à chaque indice associe le coefficient du terme correspondant est injective. Soit D une série en z . Notons:

$$D^q = \sum_{n \in Y(D)} d_n \cdot z^n$$

où $Y(D)$ est l'ensemble des indices des termes conservés dans D^q .

En appliquant la règle proposée, on obtient une série

$$F = \sum_{n \in Y(D)} n.\delta^{d_n}$$

F est donnée sous forme minimale puisque la fonction $d_n \rightarrow n$ est strictement croissante. Il suffit de montrer que $\hat{F} = D.z^*$ pour prouver que F est bien un représentant de \hat{D} .

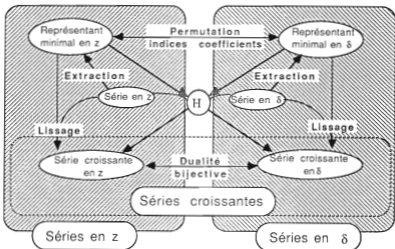
$$(\hat{F})_n = \text{Sup} \{ q / F_q \leq n \}$$

Puisque l'inverse d'une fonction croissante est croissante,

$$(\hat{F})_n = \text{Sup} \{ D_q \quad q \leq n \} = (D.z^*)_n$$

La démonstration est analogue pour la transformations des séries en z en séries en δ ■

On peut résumer toutes les transformations possibles sur le diagramme suivant.



7.10 Propriétés algébriques de la transformée de CASPI-HALBWACHS.

Théorème 7.10.1:

- si $U \in \text{DZC} \ll z \gg$ et $a \in \text{DZC}$ $\hat{a}.U = \delta^a.U$
- si $U \in \text{DZC} \ll z \gg$ et $n \in \mathbf{Z}$ $\hat{z}^n.U = n.^U$,
- si $T \in \text{DZD} \ll \delta \gg$ et $a \in \text{DZD}$ $\hat{a}.U = z^a.U$
- si $T \in \text{DZD} \ll \delta \gg$ et $n \in \mathbf{Z}$ $\hat{\delta}^n.U = n.^U$

Démonstration:

$$U = \sum u_n z^n$$

$$a.U = \sum a.u_n z^n = \sum (a+u_n).z^n \quad \text{où } + \text{ désigne la vraie addition.}$$

or

$$\begin{aligned} \hat{a}.U_n &= \inf \{ p / u_p + a \geq n \} \\ &= \inf \{ p / u_p \geq n - a \} \\ &= \hat{U}_{n-a} = (\delta^a.U)_n \end{aligned}$$

de même:

$$z^r.U = \sum u_n z^{n+r} = \sum u_{n-r} z^n$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{^}(z^r.U)_n &= \inf \{ p / u_{p-r} \geq n \} \\ &= \inf \{ p / u_p \geq n \} + r \\ &= \hat{^}U_n + r = (r \hat{^}U)_n \text{ au sens des dioïdes.} \end{aligned}$$

Les démonstrations sont analogues pour la transformation des séries en δ ■

Effectuons le calcul de la transformée pour quelques séries simples:

$$\begin{aligned} \hat{^}(a.z^n) &= n. \delta^a .(\delta^{-1})^* \\ \hat{^}(b. \delta^m) &= m. z^a .z^* \\ \hat{^}(\sum u_n z^n) &= (\sum n \delta^u).(\delta^{-1})^* \\ \hat{^}(\sum u_n \delta^n) &= (\sum n z^{u_n}).z^* \end{aligned}$$

Cela permet de prouver que la transformée de CASPI-HALBWACHS est un isomorphisme entre les dioïdes $SC\langle\langle z \rangle\rangle$ et $SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$.

Théorème 7.10.2:

$$\begin{aligned} \hat{^}(U \oplus T) &= \hat{^}U \oplus \hat{^}T \\ \hat{^}(U.T) &= \hat{^}U \hat{^}T \end{aligned}$$

Démonstration:

Effectuons la démonstration dans le cas des séries en z :

$$\begin{aligned} \hat{^}(U \oplus T)_n &= \inf \{ p / \max(U_p, T_p) \geq n \} \\ &= \inf \{ p / U_p \geq n \text{ ou } T_p \geq n \} \\ &= \inf \{ [\{ p / U_p \geq n \} \cup \{ p / T_p \geq n \}] \} \\ &= \inf \{ [\inf \{ p / U_p \geq n \} \cup \inf \{ p / T_p \geq n \}] \} \\ &= \inf \{ \hat{^}U_n \hat{^}T_n \} = \hat{^}U_n \oplus \hat{^}T_n \text{ puisque } \oplus \text{ désigne l'inf dans DZD.} \end{aligned}$$

Pour le produit, il suffit d'effectuer le calcul à l'aide des formules énoncées dans le théorème précédent.

$$U.V = \sum U_n z^n.V$$

donc

$$\begin{aligned} \wedge(U.V) &= \sum \delta^{Un.n}.\wedge V \\ &= (\sum n.\delta^{Un}).\wedge V \end{aligned}$$

Pour conclure, il faut utiliser l'une des formules qui précèdent le théorème:

$$(\sum n.\delta^{Un}) \equiv \wedge U \text{ modulo } (\delta^{-1})^*$$

alors

$$\wedge(U.V) \equiv \wedge U.\wedge V \text{ modulo } (\delta^{-1})^*$$

ce qui est en fait une égalité car les deux séries sont croissantes ■

Remarque:

Ce dernier théorème explique pourquoi nous n'avons pas tout simplement utilisé dans les deux sens la transformation:

$$(\wedge U)_n = \sup \{ p / U_p \leq n \}$$

A priori, cela semble plus simple que de manipuler deux transformées différentes. Malheureusement la transformée de z^* est alors la série:

$$\wedge(z^*) = 1 (\delta^{-1})^* \text{ et non pas } (\delta^{-1})^*$$

Or il est essentiel que la transformée de z^* soit idempotente, comme z^* , malheureusement:

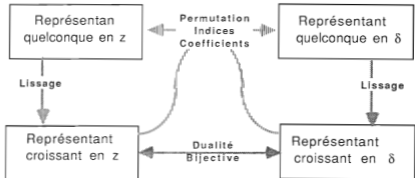
$$(1.(\delta^{-1})^*)^n = n (\delta^{-1})^*$$

Nous avons déjà une règle pratique pour le calcul de la transformée à partir d'un représentant minimal. Ces formules nous montrent que cette règle peut être appliquée dans tous les cas, ce qui mérite le nom de théorème.

Théorème 7.10.3:

Pour calculer la transformée d'une série, sous quelle forme qu'elle soit, il suffit d'inverser z et δ , puis de permuter coefficients et indices dans la série; on obtient ainsi un représentant (souvent non-croissant) de la transformée, qu'il suffit ensuite de lisser

Cela se traduit par le diagramme commutatif



Exemple:

$$S = 2.\delta^0 \oplus 2.\delta^2 \oplus 1.\delta^7 \oplus 5.\delta^9 \oplus 5.\delta^{10}$$

alors

$$\hat{S} = 0.z^2 \oplus 2.z^2 \oplus 7.z^1 \oplus 9.z^5 \oplus 10.z^5$$

ou

$$\hat{S} = (2.z^2 \oplus 10.z^5).z^*$$

7.11 Résumé des règles de calcul.

$$z^0 \equiv z^* \qquad \delta^0 \equiv (\delta \cdot 1)^*$$

$$\hat{(z^0)} \equiv (\delta \cdot 1)^* \qquad \hat{(\delta^0)} \equiv z^*$$

$$\hat{(z^0)} \equiv \delta^0 \qquad \hat{(\delta^0)} \equiv z^0$$

$$\hat{(z^n)} \equiv n.\delta^0 \qquad \hat{(\delta^p)} \equiv p.z^0$$

$$\hat{(a.z^0)} \equiv \delta^a \qquad \hat{(b.\delta^0)} \equiv z^b$$

avec les règles sur les opérations

$$\hat{(U \oplus T)} = \hat{U} \oplus \hat{T}$$

$$\hat{(U.T)} = \hat{U} \hat{T}$$

7.12 Structure des séries rationnelles sur DZD et DZC.

Les ensembles de séries $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$, $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$, $DRC\langle\langle z \rangle\rangle$, $DRD\langle\langle \delta \rangle\rangle$, $SC\langle\langle z \rangle\rangle$, $SC\langle\langle \delta \rangle\rangle$ etc.. sont des dioïdes ordonnés complets. On peut donc appliquer les études du chapitre 6 sur les opérations rationnelles. Dans ce paragraphe, nous ne nous intéresserons qu'à la clôture rationnelle des polynômes, comme dans le cas de la théorie usuelle des séries rationnelles. Tant que nous n'utiliserons pas la dualité, tous les résultats resteront valables dans le cas des coefficients réels, bien qu'ils seront énoncés seulement dans le cas entier. Comme nous avons introduit des séries avec termes d'indice négatif, il est bon de préciser notre définition des polynômes.

Un polynôme est une série formelle dont les coefficients distincts de z sont en nombre fini et sont tous d'indice positif ou nul.

Alors

les séries rationnelles sont celles qui appartiennent à la clôture de l'ensemble des polynômes tel qu'il vient d'être redéfini.

Remarquons que pour construire toutes les séries rationnelles de $D\langle\langle x \rangle\rangle$, il suffit de considérer la clôture de l'ensemble $D \cup \{x\}$

De cette définition, il résulte que toutes les séries rationnelles sont de support positif, mais il est possible d'appliquer nos résultats aux séries à support négatif, en transformant toute variable formelle x en x^{-1}

Nous d'abord quelques propriétés des séries rationnelles appartenant à $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ qui ne font pas appel à l'hypothèse de croissance et s'appliquent donc aussi aux séries de $DZD\langle\langle \delta \rangle\rangle$, $DZC\langle\langle z^{-1} \rangle\rangle$ et $DZD\langle\langle \delta^{-1} \rangle\rangle$. Dans la suite D désignera l'un des dioïdes DZC ou DZD , x une variable formelle.

Nous sommes dans le cas où le dioïde des séries est commutatif. Nous pouvons appliquer le théorème sur le niveau d'étoile "égal à 1", selon lequel une série est rationnelle sur D si et seulement si elle s'écrit:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..n} Q_i R_i^*$$

où n est un entier naturel.

et $\{P, Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n\}$ est un ensemble de polynômes.

Nous allons établir une propriété de cyclicité de la suite des coefficients d'une série rationnelle, au sens suivant.

Définition 7.12.1:

Une suite ou série formelle S vérifie la "propriété de cyclicité asymptotique" en $+\infty$ si et seulement si:

il existe un entier N , un entier c , un scalaire λ tels que:

$$\forall n \geq N \quad S_{n+c} = \lambda^c \cdot S_n$$

On appellera coefficients de cyclicité le couple (λ, c) , et on ordonnera les couples (λ, c) par

$$(\lambda, c) \geq (\lambda', c') \text{ ssi } \lambda \geq \lambda' \text{ ou } (\lambda = \lambda' \text{ et } c < c')$$

7.13 Cas de l'étoile d'un polynôme

$$\text{Soit } R = R_0 \oplus R_1 \cdot z \oplus R_2 \cdot z^2 \oplus R_3 \cdot z^3 \oplus \dots \oplus R_p \cdot z^p$$

Si $R_0 \oplus e > e$, tous les coefficients d'indice positif sont égaux à ∞ et la propriété de cyclicité est évidemment vérifiée pour $\lambda = \infty$ et $c = 1$

Supposons $R_0 \oplus e = e$. R_0^* ne dépend pas du terme R_0 , que l'on peut donc supposer égal à ϵ . Dans ce cas:

$$(R^*)_n = \sum_{\|\alpha\|=n} R_1^{\alpha(1)} \dots R_p^{\alpha(p)}$$

ou $\|\alpha\| = 1 \cdot \alpha(1) + 2 \cdot \alpha(2) + \dots + p \cdot \alpha(p)$

Dans le cas des dioïde DZC ou DRC, le \sum représente un max, qui est donc atteint par l'un des termes de la somme. Soit c l'un des indices qui réalise le maximum des $R_k^{1/k}$ (au sens du dioïde) pour k décrivant $\{1.. p\}$. La formule de maximisation qui calcule $(R^*)_n$ implique que

$$(R^*)_{n+c} \geq (R^*)_n \cdot (R^*)_c \geq (R^*)_n \cdot R_c$$

car chaque inégalité est obtenue en réduisant le nombre des termes dans le max.

A chaque entier n , associons un p -uplet $(\alpha_n(1), \dots, \alpha_n(p))$ qui réalise:

$$(R^*)_n = R_1^{\alpha(1)} \dots R_p^{\alpha(p)}$$

le terme de rang $n+c$ de la suite est obtenu pour le p -uplet

$$(\alpha(1), \dots, \alpha(c) + 1, \dots, \alpha(p))$$

donc

$$(R^*)_{n+c} = R_{c-}(R^*)_n$$

Nous venons de montrer

Théorème 7.13.1:

Si R est le polynôme

$$R = R_0 \oplus R_1.z \oplus R_2.z^2 \oplus R_3.z^3 \oplus \dots \oplus R_p.z^p$$

R^* vérifie la propriété de ce cyclicité asymptotique en $+\infty$ pour tout les couples (λ, c) tels que

$$c \text{ maximise } R_k^{1/k} \text{ pour } k \in \{1, \dots, p\}$$

$$\text{et } \lambda = R_c^{1/c}$$

Le couple (λ, c) maximal (au sens de l'ordre précédemment défini) correspond à l'inf des c qui conviennent.

Remarque:

Le coefficient λ peut être égal à ∞ . C'est le cas si et seulement si $R_0 \oplus e \neq e$ ou l'un des coefficients de R est égal à ∞ .

Corollaire 7.13.3:

L'étoile de tout polynôme s'écrit:

$$R^* = P \oplus R'.(\lambda.z^c)^*$$

où

(λ, c) est un couple de cyclicité de R^*

P est un polynôme,

R' est le polynôme obtenu en tronquant R au degré $c-1$

Dans l'écriture ci-dessus, P correspond à une phase transitoire qui précède l'établissement du comportement cyclique. D'autres écritures seraient possibles, en remplaçant R' par un polynôme dont la valuation est égale au degré de P plus 1

Théorème 7.13.4:

Toute série rationnelle S peut s'écrire:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..n} Q_i R_i^*$$

où

n est un entier et $\{ P, Q_1, \dots, Q_n, R_1, \dots, R_n \}$
est un ensemble de polynômes,

tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad R_i \text{ est un monôme de degré } c_i \\ \text{et } d^0(Q_i) - \text{val}(Q_i) = c_i \\ d^0(P) = \inf \{ d^0(Q_i) \mid i \in \{1, \dots, n\} \}$$

Il est important de remarquer qu'une série rationnelle quelconque ne vérifie en général pas de propriété de cyclicité. Par exemple c'est le cas pour

$$S = (2.z^2)^* \oplus (3.z^3)^*$$

7.14. Minimalité de l'écriture d'une série rationnelle.

Limitons nous au cas des séries en z, à coefficients dans DRC ou DZC. Nous venons de montrer que toute série rationnelle S peut s'écrire

$$S = P \oplus \sum_{i=1..n} Q_i ((\lambda_i.z^{c_i}))^*$$

quel est le nombre minimal de termes du type $Q_i ((\lambda_i.z^{c_i}))^*$ nécessaires dans l'écriture ci-dessus?

Remarquons d'abord qu'on peut supposer tous les λ distincts car

$$Q_i ((\lambda_i.z^{c_i}))^* \oplus R_i ((\lambda_i.z^{d_i}))^* \\ = (Q_i (e \oplus (\lambda_i.z)^{c_i} \oplus (\lambda_i.z)^{2c_i} \dots \oplus (\lambda_i.z)^{c_i(d_i-1)}) \\ \oplus R_i (e \oplus (\lambda_i.z)^{d_i} \oplus (\lambda_i.z)^{2d_i} \dots \oplus (\lambda_i.z)^{d_i(c_i-1)}).(\lambda_i.z)^{c_i d_i})^*$$

Il semble donc utile d'étudier le nombre de "λ" qui apparaissent dans l'écriture de la série. Si l'on trace le graphe de la suite des coefficients, ces "λ" sont les pentes des droites sur lesquelles s'accumulent une infinité de points. Cela nous suggère la définition suivante:

Définition 7.14.1:

On appellera direction asymptotique en $+\infty$ d'une série S , tout scalaire λ distinct de ε pour lequel

il existe un entier m tel que $S_m \neq \varepsilon$

et il existe une infinité d'entiers positifs q

tels que

$$S_{m+q} = \lambda^q \cdot S_m$$

Notons que la définition implique qu'un polynôme ne possède pas de direction asymptotique.

De toute évidence, si S vérifie la propriété de croissance cyclique pour un couple (λ, c) , alors λ est direction asymptotique de S , et c'est la seule, car pour des indices assez grands, tous les termes de la série croissent de manière cyclique avec la pente moyenne λ . Nous appliquerons cette remarque essentiellement aux séries rationnelles, dont nous savons qu'elles ont toujours au moins une direction asymptotique.

Propriété 7.14.2:

Une série rationnelle distincte d'un polynôme vérifie la propriété de cyclicité asymptotique si et seulement si elle possède une unique direction asymptotique.

La seule direction asymptotique de $Q((\lambda.z)^c)^*$ est λ .

Nous allons maintenant préciser le lien entre cette notion graphique de direction asymptotique et les termes du type $Q((\lambda.z)^c)^*$ qui apparaissent dans l'écriture d'une série rationnelle.

Lemme 7.14.3:

Si S et S' sont deux séries, toute direction asymptotique de $S \oplus S'$ est direction asymptotique de l'une des séries S et S'

Démonstration:

Soit λ une direction asymptotique en $+\infty$ de $U = S \oplus S'$ Par définition, il existe un entier N et un ensemble infini d'entiers positifs noté P tels que:

$$\forall p \in P \quad U_{m+p} = \lambda^p \cdot U_n$$

or

$$U_{m+p} \in \{ S_{m+p} \quad S'_{m+p} \}$$

Soit Q le sous ensemble de P des entiers q tels que $S_{m+q} = U_{m+q}$

Soit Q' le sous ensemble de P des entiers q' tels que $S_{m+q'} = U_{m+q'}$.

Alors $P = Q \cup Q'$ étant infini, l'un des ensembles Q ou Q' est infini.

Supposons que ce soit Q Soit $q = \min Q$ Alors pour $p \in Q$

$$\begin{aligned} S_{m+q+(p-q)} &= S_{m+p} = U_{m+p} = \lambda^p \cdot U_m = \lambda^{p-q} \cdot \lambda^q \cdot U_m \\ &= \lambda^{p-q} \cdot U_{m+q} = \lambda^{p-q} \cdot S_{m+q} \quad \text{car } q \in Q \end{aligned}$$

Il en résulte que λ est une direction asymptotique de S en $+\infty$ ■

Corollaire 7.14.4:

$S \oplus S'$ a au plus autant de directions asymptotiques que la somme du nombre de directions de S et du nombre de directions de S'

Corollaire 7.14.5:

Une série rationnelle a un nombre fini de directions asymptotiques.

Corollaire 7.14.6:

Pour toute série rationnelle factorisée sous la forme:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..k} Q_i ((\lambda_i, z)^{c_i})^*$$

k est au moins égal au nombre de directions asymptotiques de S.

Corollaire 7.14.7:

Pour tout entier m Il existe au moins une série rationnelle, qui n'admette aucune factorisation de la forme:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..k} Q_i ((\lambda_i, z)^{c_i})^*$$

avec k ≤ m

Démonstration du corollaire 7.14.7 :

Considérons, pour m donné, la série de DZC<<z>> définie par

$$U = \sum_{p \in P(m)} (\alpha(p) z^p)^*$$

où P(m) est l' ensemble des m premiers nombres premiers,

et $\alpha(p)$ est le carré usuel de p

U est évidemment rationnelle et:

$$\forall p \in P(m) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{p^n} = \alpha(p)^n$$

Cette dernière égalité signifie, en algèbre usuelle: $U_{p^n} = n p^2$

Il en résulte que tout p appartenant à P(m) est direction asymptotique de la série U, d'où on obtient le corollaire 4 en appliquant le corollaire 3 ■

Théorème 7.14.8:

Si S est une série rationnelle qui a k directions asymptotiques, il existe une décomposition de S de la forme:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..k} Q_i ((\lambda_i z)^{c_i})^*$$

où

P et les Q_i sont des polynômes

et

$\{\lambda_1 \dots \lambda_k\}$ est l'ensemble des directions asymptotiques de U .

Nous qualifierons une telle écriture de la série de réduite, en faisant la convention

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k$$

Démonstration:

On sait qu'on peut écrire $U = P \oplus \sum_{i=1..M} Q_i ((\mu_i z)^{\alpha})^*$

D'après le Lemme, l'ensemble des directions asymptotiques de U , est inclus dans $\{\mu_1 \dots \mu_M\}$. Supposons que μ_r ne soit pas une direction asymptotique; alors il n'y a qu'un nombre fini de termes de $Q_r ((\mu_r z)^{\alpha})^*$ qui ne sont pas strictement dominés par le terme de même indice de la série U définie par

$$U' = T \oplus \sum_{i=1..M, i \neq r} Q_i ((\mu_i z)^{\alpha})^*$$

La contribution de $Q_r ((\mu_r z)^{\alpha})^*$ à la série U est donc réduite à un nombre fini de termes, qui forment un polynôme P' . Alors:

$$U = P \oplus P' \oplus \sum_{i=1..M, i \neq r} Q_i ((\mu_i z)^{\alpha})^*$$

On peut de faire même pour tous les termes $((\mu_i z)^{\alpha})^*$ qui ne correspondent pas direction asymptotique de U ■

Remarque:

Considérons la suite

$$U_n = 0 \text{ si } n = 2^p \text{ (au sens usuel)}$$

$$U_n = e \text{ sinon.}$$

Le scalaire $\lambda=0$ est direction asymptotique de U et tous les termes distincts de e appartiennent à la direction asymptotique. Malgré cela, cette série n'est pas rationnelle; en effet, pour toute série rationnelle, la suite indicatrice de son support est périodique, une période possible étant le ppcm de tous les α_i . Ce n'est pas le cas ici.

Il n'est donc pas suffisant qu'une série aie un nombre fini de directions asymptotiques, et que tous ses termes "appartiennent à une direction asymptotique" pour que la série soit rationnelle.

7.15 Ecriture réduite et produit de séries.

Nous allons étudier l'ensemble des directions asymptotiques du produit de deux séries rationnelles.

Lemme 7.15.1:

Soient S et T deux séries rationnelles dont les directions asymptotiques sont respectivement:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k \text{ et } \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_l$$

L'ensemble des directions asymptotiques de $S.T$ est une partie de

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\} \cup \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l\}$$

qui ne contient aucun λ strictement majoré par un μ , ni aucun μ strictement majoré par un λ .

Démonstration:

Le produit de deux séries données par une écriture réduite est de la forme:

$$(P \oplus \sum_{i=1..k} Q_i ((\lambda_i.z)^{c_i})^*). (P' \oplus \sum_{j=1..l} Q'_j ((\mu_j.z)^{d_j})^*)$$

Il faut étudier ce que deviennent les termes du type:

$$Q ((\lambda.z)^c)^* Q' ((\mu.z)^d)^*$$

$$\text{Eliminons le cas } \lambda = \mu \text{ où } Q ((\lambda.z)^c)^* Q' ((\mu.z)^d)^* = Q.Q' ((\lambda.z)^l)^*$$

Nous montrerons que le terme $Q ((\lambda.z)^c)^* Q' ((\mu.z)^d)^*$ ne possède qu'une seule direction asymptotique, qui est $\max(\lambda, \mu)$

Nous nous limiterons aux séries croissantes en z . Les résultats obtenus ne pourront pas être appliqués tels quels pour les séries en δ , mais ils seront transposés à l'aide de la dualité.

7.16 Séries rationnelles croissantes en z .

Lemme 7.16.1:

Si $S = [\alpha.z^p.(\lambda^c.z^c)^* \oplus \beta.z^q.(\mu^d.z^d)^*] z^*$
avec $\lambda > \mu$

alors

$$S = P \oplus \alpha.z^p.(\lambda^c.z^c)^* z^*$$

ou P est un polynôme.

Démonstration:

D'après l'étude qui a été faite des directions asymptotiques, il suffit de montrer le résultat suivant.

Soit U et V sont deux suites croissantes non constamment égales à ε , et qui vérifient la propriété de cyclicité asymptotique en $+\infty$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N \quad u_{n+c} &= \lambda^c u_n \\ \forall m \geq M \quad v_{m+d} &= \mu^d v_m \end{aligned}$$

Alors si on définit les suites U' et V' par :

$$\forall n \quad u'_n = \sup_{p \leq n} u_p$$

$$\forall n \quad v'_n = \sup_{p \leq n} v_p$$

il existe un entier K tel que

$$\forall k \geq K \quad u'_k \geq v'_k$$

Si U et V ne sont pas constamment égales à ε , il existe un entier K^0 tel que :

$$K^0 \geq \sup(N, M) \text{ et}$$

$$\forall k \geq K^0 \quad u'_k \neq \varepsilon \text{ et } v'_k \neq \varepsilon$$

alors

$$\forall n \geq K^0$$

$$u'_{n+cd} = \lambda^{cd} \cdot u'_n \quad \text{et} \quad v'_{n+cd} = \mu^{cd} v'_n$$

Par hypothèse, $\lambda > \mu$, il en résulte qu'il existe un entier P tel que, dans l'algèbre usuelle :

$$\forall p \geq P \quad p \cdot \lambda^{cd} \cdot u'_{K^0} \geq (p+1) \cdot \mu^{cd} \cdot v'_{K^0}$$

Ce qui se traduit dans le dioïde DZC par :

$$\forall p \geq P \quad (\lambda^{cd})^p \cdot u'_{K^0} \geq (\mu^{cd})^{p+1} \cdot v'_{K^0}$$

Alors pour $n \geq K = K^0 \cdot c \cdot d \cdot P$ on peut trouver un entier p supérieur à P tel que

$$K^0 + p \cdot c \cdot d \leq n \leq K^0 + (p+1) \cdot c \cdot d$$

et

$$u'_{K^0 + pcd} = (\lambda^{dc})^p \cdot u'_{K^0} \geq (\mu^{cd})^{p+1} v'_{K^0} = v'_{K^0 + (p+1) \cdot c \cdot d}$$

Comme les suites U' et V' sont croissantes :

$$u'_n \geq u'_{K^0 + pcd} \geq v'_{K^0 + (p+1) \cdot c \cdot d} \geq v'_n$$

Ceci pour tout n supérieur à K ■

Lemme 7.16.2 :

Si $S = [\alpha.z^p.(z^c.z^c)^* \oplus \beta.z^q.(z^d.z^d)^*] z^*$

alors

$$S = P \oplus Q .(\lambda^b .z^b)^* z^*$$

où

P et Q sont des polynômes, $b = \text{ppcm}(c, d)$ et $d^o(Q) - \text{val}(Q) = b$.

Théorème 7.16.3:

Toute série rationnelle croissante en z peut s'écrire:

$$S = P \oplus Q R^*$$

où

P, Q, R sont des polynômes,

tels que

R est un monôme

$$\text{val}(Q) = d^o(P) + 1 \text{ et } d^o(Q) = d^o(P) + d^o(R)$$

Démonstration:

Ecrivons la série rationnelle:

$$S = P \oplus \sum_{i=1..n} Q_i R_i^*$$

avec

$$R_i = \lambda_i z^{c_i}$$

Une série S de $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$ est croissante si et seulement si

$$S.z^* = S.$$

donc:

$$S = (P \oplus \sum_{i=1..n} Q_i R_i^*). z^*$$

On sait que pour tout $i \in \{1.. n\}$ R_i^* s'écrit:

$$R_i^* = P_i \oplus \alpha_i .(\lambda_i z^{c_i})^*$$

Il suffit donc d'appliquer les lemmes 1 et 2 pour obtenir le théorème ■

7.17 Application à certaines matrices.

Nous avons énoncé au chapitre 5 un résultat de cyclicité sur les matrices fortement connexes. Nous pouvons énoncer un résultat analogue pour des matrices dont aucun terme diagonal n'est égal à ϵ .

Theorème 7.17.1:

Soit M une matrice carrée à coefficient dans DZC ou DZD dont aucun coefficient diagonal n'est égal à ϵ . Considérons la suite M_n des puissances de M . Alors, chaque suite $[M^n_{i,j}]$ vérifie la propriété de cyclicité asymptotique.

De plus, dans une même composante fortement connexe, les coefficients (λ, c) sont identiques.

Démonstration:

Il existe un scalaire α distinct de ϵ qui minore tous les coefficients diagonaux. En remplaçant M par $\alpha^{-1} \cdot M$, on se ramène au cas d'une matrice qui vérifie

$$M = M \oplus E$$

Il en résulte que toutes les suites $[M^n_{i,j}]$ sont croissantes et sont donc cycliques asymptotiquement. D'autre part, nous savons déjà que dans une même composante fortement connexe, la cyclicité est vérifiée globalement.

7.18 Cas des séries croissantes en δ .

Comment la forme réduite des séries rationnelles se transporte-t-elle par dualité? L'image des opérateurs qui définissent la dualité entre les séries en z et les séries en δ transforme toute série en une série croissante.

Il se pose alors un léger problème de définition: les séries rationnelles n'ont été définies que pour les séries à support positif. Or une série rationnelle en δ , dont les termes d'indice strictement négatifs valent $\varepsilon = +\infty$ ne peut pas être croissante, à moins d'être identiquement égale à $+\infty$! Il faut donc introduire les classes de séries suivantes:

Définition 7.18.1:

Une série en z (respectivement en δ) est quasi-rationnelle si et seulement si elle est équivalente à une série rationnelle modulo z^* (respectivement modulo $(\delta^{-1})^*$)

Remarque:

Il existe des séries en z quasi-rationnelles qui ne sont pas rationnelles, par exemple la série S telle que:

$$s_n = e \text{ si } n = 2^p \text{ et } s_n = \varepsilon \text{ sinon.}$$

Celle-ci est équivalente à la série z^* qui est rationnelle.

Propriété 7.18.2:

Si S est une série quasi-rationnelle en z , le représentant croissant $S.z^*$ de sa classe d'équivalence est une série rationnelle.

Démonstration:

S possède un représentant modulo z^* qui est rationnel, et qui, multiplié par z^* donne une série qui est encore rationnelle, égale à $S.z^*$ ■

Il résulte de cette propriété que toute série quasi-rationnelle en z est à support positif. C'est dans le cas des séries en δ que nous aurons à travailler avec des séries dont le support n'est pas positif. La notion de séries quasi-rationnelles est donc surtout intéressante pour les séries en δ , d'autant plus que le représentant croissant d'une série rationnelle en δ n'est en général pas rationnel, car son support n'est pas inclus dans les entiers positifs.

Lemme 7.18.3:

La transformée de CASPI-HALBWACHS de toute série en δ quasi-rationnelle est une série rationnelle croissante en z .

Démonstration:

La transformée d'une série en δ quasi-rationnelle est égale à la transformée de son représentant rationnel modulo $(\delta^{-1})^*$, or une série rationnelle en δ s'écrit

$$T = P \oplus \sum_{i=1..p} Q_i \cdot R_i^* \text{ ou } P \text{ les } Q_i \text{ et les } R_i \text{ sont des polynômes.}$$

On peut calculer sa transformée, modulo z^*

$$\hat{T} \equiv \hat{P} \oplus \sum_{i=1..p} \hat{Q}_i \cdot \hat{R}_i^*$$

Comme la transformée d'un polynôme est égale à un polynôme, modulo z^* , la formule ci-dessus implique que la transformée d'une série rationnelle en δ est quasi-rationnelle. De plus, comme cette transformée est croissante, elle est égale au représentant croissant de la classe modulo z^* , qui est rationnel. ■

En utilisant le résultat obtenu pour les séries en z , on obtient qu'une série S en δ est quasi-rationnelle si et seulement si \hat{S} s'écrit:

$$\hat{S} = P \oplus Q \cdot R^*$$

ou P, Q, R sont des polynômes en z .

On peut de plus imposer les conditions:

R est un monôme et

$$\text{val}(Q) = d^\circ(P) + 1 \text{ et } d^\circ(Q) = d^\circ(P) + d^\circ(R)$$

Cela nous donne le théorème pour les séries en δ

Théorème 7.18.4:

Toute série S quasi-rationnelle en δ vérifie:

$$S \equiv (P \oplus Q \cdot R^*) (\delta^{-1})^*$$

ou P, Q, R sont des polynômes.

On peut de plus imposer les conditions:

R est un monôme et

$$\text{val}(Q) = d^{\circ}(P) + 1 \text{ et } d^{\circ}(Q) = d^{\circ}(P) + d^{\circ}(R)$$

7.19 Séries rationnelles croissantes positives en z.

L'ensemble des séries croissantes en z est un dioïde, de même que l'ensemble des séries rationnelles. Il en va donc de même pour leur intersection car elle contient les éléments neutres ϵ et z^* . Par définition, l'ensemble des séries rationnelles est même clos pour toutes les opérations rationnelles. Cependant, l'ensemble des séries rationnelles croissantes en z n'est pas stable pour les opérations rationnelles.

Si S est une série croissante, même rationnelle, S^* n'est pas forcément croissante. Par exemple si S est définie par:

$$\forall n < 0 \quad S_n = \epsilon$$

$$S_0 = -2 \quad S_1 = -1$$

$$\forall n > 0 \quad S_n = 0 = e$$

alors

$$S^* = 0 \oplus (-1).z \oplus 0.z^2.z^*$$

De même, si S est définie par:

$$\forall n < 3 \quad S_n = \epsilon$$

$$\forall n \geq 3 \quad S_n = 0 = e$$

alors

$$S^* = 0 \oplus \epsilon.z \oplus \epsilon.z^2 \oplus 0.z^3.z^*$$

La difficulté vient du fait que l'on a défini S^0 comme valant ϵ , pour toute série S .

Théorème 7.19.1:

L'ensemble des séries en z à coefficients dans DZC qui sont rationnelles et croissantes et telles que $S_1 \geq 0$ est stable pour les opérations rationnelles

On notera cet ensemble $SCR_{P\langle\langle z \rangle\rangle}$ (Séries Croissantes Rationnelles Positives)

Démonstration:

Comme l'ensemble des séries rationnelles est stable pour les opérations rationnelles, il suffit de montrer que les autres propriétés des séries de $SCR_{P\langle\langle z \rangle\rangle}$ sont conservées pour ces opérations.

Une série S est croissante si et seulement si $S.z^* = S$.

D'autre part $S_1 \geq 0$ si et seulement si $S \oplus z = S$

a) Max-addition:

Il est évident que si deux séries ont leurs coefficients distincts de ϵ positifs, il en va de même de leur max-somme, quand à la conservation de la croissance, elle résulte du fait que, si S et T sont deux séries croissantes

$$(S \oplus T).z^* = S.z^* \oplus T.z^* = S \oplus T$$

b) Produit:

De même, il est évident que si deux séries ont leurs coefficients distincts de ϵ positifs, leur produit aussi. La conservation de la croissance résulte du fait que, si S et T sont deux séries croissantes

$$(S \cdot T).z^* = (S.z^*).(T.z^*) = S \cdot T \text{ car } z^* = z^* \cdot z^*$$

c) Opération étoile:

Pour toute série S en z $(S^*)_0 \geq 0$ donc il suffit de montrer que S^* est croissante si S vérifie les hypothèses du Théorème. Dans ce cas, S vérifie:

$$S \oplus z = S$$

Alors

$$S^* = (S \oplus z)^* = S^* z^* \quad \text{donc est croissante.}$$

CQFD ■

Un cas particulier important de dioïde est celui où les séries sont propres: il n'y a pas de coefficients infinis.

Corollaire 7.19.2:

L'ensemble des séries en z à coefficients dans DZC distincts de ∞ , qui sont rationnelles, croissantes et telles que:

$$S_0 \leq 0 \quad \text{et} \quad S_1 \geq 0$$

est stable pour les opérations rationnelles.

Démonstration:

Si $S_0 \leq 0$, $S^*_0 = 0$. La condition $S_0 \leq 0$ permet d'affirmer que les coefficients de S^* seront distincts de ∞ . Cette propriété ainsi que la condition $S_0 \leq 0$ sont évidemment conservées par max-somme et produit de séries ■

Chapitre 8

Description quantitative d'un système à événements discrets.

8.1 Evènements et contraintes.

Un système à événements discrets est un ensemble fini d'éléments sur lesquels adviennent des événements que nous considérerons comme instantanés. Nous distinguerons la notion d'évènement de celle de tâche. Les tâches ont une durée et sont constituées de deux événements: début et fin de la tâche.

Les événements dans un système sont liés par des contraintes, qui conditionnent l'évolution du système et ses propriétés. Nous n'essayerons pas d'énumérer tous les types de contraintes possibles. Citons cependant quelques exemples.

8.1.1 Contrainte de précédence simple:

Un événement α ne peut se produire qu'après un événement β .

Cette définition se généralise aisément à deux tâches α et β . Dans ce cas, la fin de α doit précéder le début de β .

8.1.2 Contrainte de précédence multiple:

Un événement α ne peut se produire qu'après des événements β et γ

Cette définition se généralise sans peine à un nombre fini d'évènements conditionneurs.

8.1.3 Contrainte de synchronisation:

Deux événements α et β se produisent à la même date.

C'est une généralisation de la contrainte de précédence: α précède β et vice-versa. Cette définition se généralise aisément aux tâches.

8.1.4 Contrainte d'exclusion:

Les événements α et β ne peuvent se produire à la même date absolue.

En d'autres termes, l'un des événements précède strictement l'autre. Cette définition se généralise alors à deux tâches α et β : α et β s'excluent si et seulement si la fin de α précède (strictement ou non) le début de β , ou vice-versa.

Dans les définitions précédentes, une contrainte peut porter sur l'un des événements d'une suite d'événements du même type, ou être une contrainte globale sur cette suite. Donnons un exemple de contrainte globale.

"Pour tout entier n , le n -ième top de l'horloge α précède toujours le n -ième top de l'horloge β "

Il peut aussi y avoir des contraintes du type:

"Un événement α ne peut se produire qu'un nombre d'unités de temps δ après les événements β et γ "

8.2 Dates logiques et dates absolues.

Les exemples de contraintes proposés ci-dessus font intervenir deux notions de temps et de précédence: le temps logique et le temps physique (ou temps absolu). L'objectif de la théorie des systèmes à événements discrets peut être défini comme l'étude des relations entre ces deux "temps" différents au cours de l'évolution d'un système. Ces relations, que nous essayerons de représenter algébriquement sont induites par les contraintes imposées aux événements du système.

Un système à événements discrets peut être aussi être interprété comme un ensemble d'horloges locales. Chaque horloge est définie par une suite d'événements d'un type donné.

Ces horloges sont liées par des contraintes de synchronisation, et sont comparées à une horloge de référence qui définit le temps absolu.

Dans notre théorie:

Temps logique \leftrightarrow Temps local \leftrightarrow Numéro

Temps physique \leftrightarrow Temps absolu

Plutôt que de faire une théorie générale de toutes les contraintes que l'on peut imaginer entre les événements dans un système, nous allons partir d'un outil de modélisation existant, les réseaux de PETRI temporisés. Nous chercherons à traduire cet outil graphique en une représentation algébrique.

Pour cela, il nous faut introduire une description quantitative des événements auxquels on s'intéresse dans un système. Nous allons utiliser une représentation proposée par P. CASPI et N. HALBWACHS dans [SPTR2], mais que nous manipulerons avec des techniques mathématiques différentes.

8.3 Description quantitative des suites d'événements.

Nous dirons que deux événements sont du même type si, dans la modélisation du système, ils ne sont distingués que par leurs dates logiques et absolues. Cette notion est donc relative à la précision du modèle employé.

Considérons une suite d'événements du même type. Chacun de ces événements peut être caractérisé par deux mesures:

- sa date logique, définie par la numérotation des événements de la suite.
- sa date absolue, mesurée par rapport à une horloge de référence.

Dans cette étude, nous supposerons que le temps absolu est mesuré par une échelle discrète. Les dates absolues seront des entiers relatifs, ainsi que les dates logiques.

8.3.1 Convention.

Pour pouvoir construire une théorie cohérente, il est essentiel de supposer que dans une suite d'évènements du même type, l'ordre induit par la numérotation logique est cohérent avec l'ordre induit par les dates absolues. En d'autres termes, l'évènement α porte un numéro d'ordre inférieur ou égal au numéro de β si et seulement si α est antérieur à β pour le temps absolu.

D'autre part, il est agréable d'imposer que la numérotation des évènements d'une même suite ne contienne pas de "trous", c'est à dire que les évènements ayant effectivement lieu soient numérotés par un intervalle $[p,q]$ de Z . On tolérera cependant des évènements fictifs dont les numéros seront strictement inférieurs à p , ou strictement supérieurs à q . Comme nous le verrons ultérieurement, cela ne pose pas de problème si des précautions adéquates sont prises: les dates absolues de ces évènements fictifs sont $-\infty$ ou $+\infty$.

Les dates absolues ainsi que les numéros des évènements ne sont définis qu'à une translation près. Le déplacement de l'origine du temps absolu affecte tout le système. Par contre, une renumérotation des évènements d'une suite n'influence pas les autres suites. Dans toute étude, il faudra donner des "conditions initiales" qui lient ces différentes horloges.

8.4 Suites de dates.

Pour toute suite d'évènements du même type, nous désirons calculer les relations entre dates logiques et dates absolues. Ces relations peuvent être décrites par deux suites indicées par Z , à valeurs dans $Z \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ces suites sont définies comme suit.

Nous définirons d'abord le temps absolu comme fonction du temps logique.

Définition 8.4.1:

Une suite d'évènements du même type peut être décrite par son dateur,

$$D = (d_n),$$

où d_n est la date absolue de l'évènement de numéro logique n .

D'après la convention 8.3.1, cette suite est croissante.

Réciproquement, à chaque instant absolu, on peut compter le nombre d'évènements ayant eu lieu, ce qui définit les compteurs d'évènements utilisés par P. CASPI et N. HALBWACHS. Pour des raisons algébriques qui apparaîtront ultérieurement, il est plus commode de manipuler une suite dont la définition est légèrement différente, qui définit le temps logique comme fonction du temps absolu.

Définition 8.4.2:

Pour toute suite d'évènements du même type, nous appellerons compteur, la suite

$$C = (c_t),$$

où c_t est l'inf des numéros des évènements postérieurs (au sens de l'inégalité large) à l'instant absolu t .

Remarquons que cette suite est toujours croissante, que la numérotation soit cohérente avec le temps absolu (convention 8.4.1) ou pas.

Si plusieurs évènements sont simultanés, on ne prend en compte dans la série C que l'évènement dont le numéro est le plus faible.

Les évènements ayant lieu à la date t s'obtiennent en comparant les suites C_t et C_{t+1} . Leurs numéros sont les entiers p tels que $C_t \leq p < C_{t+1}$. En particulier, si $C_t = C_{t+1}$ il ne s'est produit aucun évènement à la date t .

Le dernier évènement (au sens logique) qui s'est produit à l'instant absolu t porte le numéro logique $C_{t+1} - 1$.

8.5 Exemples de dateurs et compteurs.

8.5.1:

Considérons une horloge dont la fréquence est la moitié de celle de l'horloge absolue, et qui est initialisée de manière à ce que leurs instants 0 respectifs coïncident. Alors:

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad d_n = 2n$$

$$\forall t \in \mathbf{Z} \quad c_{2t-1} = c_{2t} = t$$

8.5.2:

Considérons une qui produit deux "tops" simultanés à chaque top de l'horloge absolue. Si les événements numéro 0 et 1 ont lieu à l'instant absolu 0:

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad d_{2n} = n = d_{2n+1}$$

$$\forall t \in \mathbf{Z} \quad c_t = 2t$$

8.6 Conditions initiales, systèmes au fonctionnement fini.

A l'aide de ces outils, nous pouvons étudier des systèmes fonctionnant un nombre fini de fois, d'autres qui ont un passé infini, ou d'autres qui fonctionnent indéfiniment. Pour cela, nous manipulons des séries indicées par \mathbf{Z} . Cela crée éventuellement des événements fictifs, à cause desquels nous adopterons les conventions de modélisation suivantes.

Convention 8.6.1:

Si un élément d'un système fonctionne pour la première fois à un instant absolu τ , et que le premier top correspondant de l'horloge locale qui lui est associée porte le numéro p , alors la suite de dates associée (d_n) est telle que:

$$\forall n < p, d_n = -\infty \quad \text{et} \quad d_p = \tau$$

et la suite de comptage associée (c_t) est telle que:

$$\forall t \leq \tau, c_t = p \quad \text{et} \quad c_{t+1} \geq p$$

Cette convention signifie que l'on rejette à $-\infty$ les événements passés dont on ne tient pas compte, qu'il s'agisse d'événements réels ou fictifs.

En général, l'instant initial de fonctionnement sera 0, pour l'horloge absolue, et le numéro du premier événement sera 0, et non 1

$$\begin{array}{ll} \forall n < 0, d_n = 0 & \text{et} \quad d_0 = 0 \\ \forall t \leq 0, c_t = 0 & \text{et} \quad c_1 \geq 0 \end{array}$$

Convention 8.6.2:

Si un élément d'un système ne fonctionne pas au-delà d'un événement numéro k , qui a lieu à la date absolue τ , les suites (d_n) et (c_t) associées à cet élément vérifient

$$\begin{array}{ll} d_k = \tau & \text{et} \quad \forall n > k, d_n = +\infty \\ c_\tau \leq k & \text{et} \quad \forall t > \tau, c_t = k+1 \end{array}$$

Cela signifie que l'on rejette à la date absolue $+\infty$ les événements fictifs qui sont postérieurs au dernier fonctionnement réel du système. Par "événement" réel, il faut comprendre événement dont on tient compte dans la modélisation. Le compteur reste bloqué à l'inf des numéros logiques associés aux événements qui ont lieu simultanément à l'instant final τ . Cela explique l'inégalité $c_\tau \leq k$. Si un seul événement se produit à τ , on a $c_\tau = k$.

8.7 Exemples de dateurs et compteurs.

Exemple 8.7.1:

Cas particulier où il ne se produit aucun événement. On considère que tous les événements ont lieu à la date $+\infty$.

$$\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}, d_n = +\infty \\ \forall p \in \mathbb{Z}, c_p = -\infty \end{array}$$

Pour être cohérent avec les remarques précédentes, il faut penser "Aucun des événements auxquels on s'intéresse dans le modèle n'a pu se produire à une date finie"

Par contre, la suite de dates identiquement égale à $-\infty$ modélisera le cas peu fréquent, où une infinité d'éléments ont eu lieu avant le début du fonctionnement du système, ou plutôt avant que l'on ne s'intéresse au fonctionnement de celui-ci. Le compteur associé est identiquement égal à $+\infty$

Exemple 8.7.2:

Considérons un élément pour lequel il se produit 3 évènements, numérotés 3, 4 et 5, ayant lieu respectivement aux dates -5, 6, et 9. Les suites associées sont définies par

$$\forall n < 3, d_n = -\infty$$

$$d_3 = -5$$

$$d_4 = 6$$

$$d_5 = 9$$

$$\forall n > 5, d_n = +\infty$$

$$\forall t \leq -5, c_t = 3$$

$$c_4 = c_3 = \dots = c_6 = 4$$

$$c_5 = c_6 = \dots = c_9 = 5$$

$$\forall t > 9, c_t = 6$$

8.8 Exemples fondamentaux de dateurs et compteurs.

Exemple 8.8.1:

Modélisons la mise à disposition d'une ressource, par exemple un stock de K pièces disponibles à la date τ , les pièces étant numérotées 0 à $K-1$. Pour cela, définissons un élément du système qui conditionne ceux qui utilisent la ressource. A cet élément conditionneur sont associées des suites de la forme :

$$\begin{aligned} \forall n < 0, d_n &= -\infty \\ d_0 &= d_1 = \dots = d_K = \tau \\ \forall n > K, d_n &= +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \leq \tau, c_t &= 0 \\ \forall t > \tau, c_t &= K \end{aligned}$$

Exemple 8.8.2:

Si on modélise la mise en route du système à la date τ , on écrira que tous ses éléments dépendent d'une ressource qui est disponible en quantité infinie à partir de la date τ . Cela définit les suites

$$\begin{aligned} \forall n < 0, d_n &= -\infty \\ \forall n \geq 0, d_n &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \leq 0, c_t &= 0 \\ \forall t > 0, c_t &= +\infty \end{aligned}$$

8.9 Dualité entre les dateurs et les compteurs associés à un même élément.

Les compteurs et dateurs sont des suites croissantes de \mathbf{Z} dans $\mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que l'on peut aisément prolonger en suites croissantes de $\mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ dans $\mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Cet ensemble $\mathbf{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ est un treillis qui peut être muni de la max-addition ou de la min-addition. Les dateurs et compteurs sont évidemment max-continus et min-continus (il est aisé de vérifier que ces deux notions coïncident lorsque l'ordre est total). On peut donc appliquer la construction des quasi-inverses proposée dans le chapitre 1, pour constater que le dateur et le compteur associés à une même suite d'évènements sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Propriété 8.9.1:

$$\forall n \in \mathbf{Z}, d_n = \sup \{ p \in \mathbf{Z} / c_p \leq n \}$$

$$\forall t \in \mathbf{Z}, c_t = \inf \{ q \in \mathbf{Z} / d_t \geq t \}$$

Démonstration:

Pour une date absolue t , le numéro c_t du premier évènement qui ne s'est pas encore produit, est l'inf des entiers p , tels que la date d_p soit supérieure ou égale à t .

Pour un évènement numéro q , la date d_q est la dernière date, à laquelle aucun évènement à venir ne porte de numéro supérieur ou égal à q .

Exemple 8.9.2:

Si le dateur D est défini par

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad d_n = 2.n$$

alors

$$\forall t \in \mathbf{Z} \quad c_t = \inf \{ s \in \mathbf{Z} / 2.s \geq t \} = \text{Partie Entière de } (t+1)/2$$

donc

$$c_{2t} = t \quad \text{et} \quad c_{2t+1} = t+1 \quad \forall t \in \mathbf{Z}$$

Exemple 8.9.3:

Si le dateur D est défini par

$$\forall n < 0 \quad d_n = -\infty \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0 \quad d_n = 5$$

alors

$$\forall t \leq 5 \quad c_t = \inf \{ s \in \mathbb{Z} / d_s \geq t \} = \inf]0, +\infty[= 0$$

$$\forall t \geq 6 \quad c_t = \inf \{ s \in \mathbb{Z} / d_s \leq t \} = \inf \emptyset = +\infty$$

Exemple 8.9.4:

Si le compteur C est défini par

$$\forall t \leq 4 \quad c_t = 0 \quad \text{et} \quad \forall t > 4 \quad c_t = 1$$

alors

$$\forall p < 0 \quad d_p = \sup \{ q \in \mathbb{Z} / c_q \leq p \} = \sup \emptyset = -\infty = \epsilon \text{ dans DZC}$$

$$d_0 = \sup \{ q \in \mathbb{Z} / c_q \leq 0 \} = 4$$

$$\forall p \geq 1 \quad d_p = \sup \{ q \in \mathbb{Z} / c_q \leq p \} = \sup [4, +\infty[= +\infty$$

Exemple 8.9.5:

Cas où il ne se produit aucun événement:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, d_n = +\infty$$

$$\forall t \in \mathbb{Z}, c_t = \inf \mathbb{Z} = -\infty$$

réciproquement

$$\forall n \in \mathbb{Z}, d_n = \sup \{ p \in \mathbb{Z} / -\infty \leq p \} = \sup \mathbb{Z} = +\infty$$

ce qui donne bien les séries précédemment proposées.

8.10 Interprétation graphique du lien entre compteurs et dateurs:**8.10.1: Transformation dateur \rightarrow compteur**

Sur le graphe de la suite d_n en fonction de n , on ne conserve que les points tels que d_n n'est majoré par aucun terme d'indice strictement inférieur, c'est à dire que l'on conserve les "angles supérieurs gauches" du graphe. Puis on fait une symétrie par rapport à la première bissectrice et on complète en attribuant au terme d'indice p l'inf des valeurs des termes d'indice supérieur (à droite sur le graphe).

8.10.2: Transformation compueur \rightarrow dateur

Sur le graphe de la suite c_n en fonction de n , on ne conserve que les points tels que c_n n'est majoré par aucun terme d'indice strictement supérieur (à droite sur le graphe), c'est à dire que l'on conserve les angles inférieurs droits du graphe. Puis on fait une symétrie par rapport à la première bisectrice et on complète en attribuant au terme d'indice p l'inf des valeurs des termes d'indice inférieur (à gauche sur le graphe).

En cas d'asymptote horizontale en $+\infty$, on conserve toute l'asymptote, qui par symétrie, donne une asymptote verticale, c'est-à-dire une suite qui vaut $+\infty$.

Exemple 8.10.3:

Considérons la suite d'événements définie par leurs dates absolues:

$$\forall n < 2 \quad d_n = \varepsilon$$

$$d_2 = 5$$

$$d_3 = d_4 = d_5 = 6$$

$$d_6 = 7$$

$$d_7 = 9$$

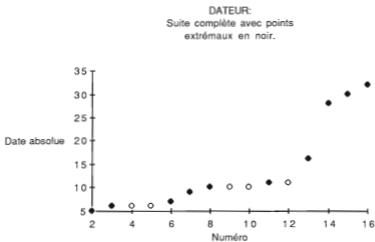
$$d_8 = d_9 = d_{10} = 10$$

$$d_{11} = d_{12} = 11$$

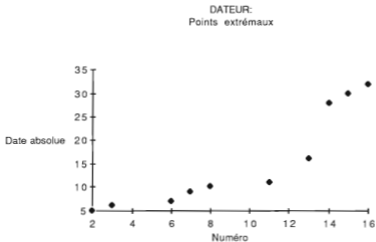
$$d_{13} = 16$$

$$\forall n > 13 \quad d_n = 2n$$

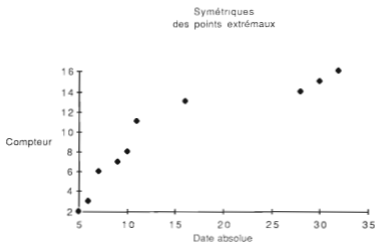
Le graphe associé à la suite D est:



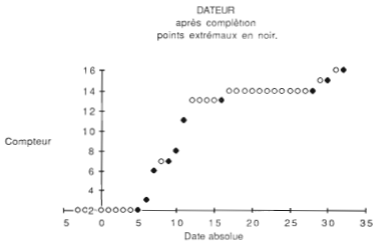
Si on ne conserve que les points extrémaux "supérieurs gauches", on obtient:



Par symétrie par rapport à la première bissectrice, on obtient:



En tirant un trait à gauche de chaque point extrémal, jusqu'à la verticale du suivant, on obtient



C'est bien le graphe du compteur C associé à la suite D:

$$\forall t \leq 5 \quad c_t = 2$$

$$c_6 = 3$$

$$c_7 = 6$$

$$c_8 = c_9 = 7$$

$$c_{10} = 8$$

$$c_{11} = 11$$

$$c_{12} = c_{13} = c_{14} = c_{15} = c_{16} = 13$$

$$\forall t > 12 \quad c_t = E((t+1)/2)$$

Pour effectuer la transformation réciproque, on extrait du graphe du compteur C les points extrémaux (angles) inférieurs droits, puis on effectue une symétrie avant de compléter en tirant un trait horizontal à droite de chaque point extrémal, jusqu'à la verticale du suivant.

Chapitre 9

Description algébrique d'un réseau de PETRI temporisé.

9.1 Réseaux de PETRI.

Plutôt que d'entreprendre une théorie générale des systèmes à évènements discrets, nous allons partir d'un outil graphique, dont l'usage est "à la mode" pour représenter de tels systèmes: les réseaux de PETRI temporisés. Nous montrerons sous des hypothèses restrictives, comment obtenir un système dynamique algébrique linéaire à partir d'un tel réseau.

Les réseaux de PETRI "normaux" sont destinés à représenter graphiquement des problèmes logiques. Ce sont des digraphes orientés, comportant les deux types de nœuds suivants:

Les places qui sont symbolisées par un rond.



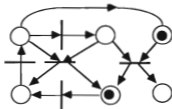
Les transitions qui sont symbolisées par un trait.



Dans ce digraphe circulent des jetons.



Les jetons résident dans les places. On appelle marquage du réseau une distribution donnée de jetons dans les places.



Réseau de Petri avec Marquage.

Les jetons circulent de place en place le long des arcs orientés, en franchissant les transitions lorsque celles-ci sont "activées". Ces activations doivent respecter les règles logiques suivantes.

Chaque transition consomme un nombre spécifié de jetons dans les places en amont, et produit un nombre spécifié de jetons dans les places en aval. S'il n'y a pas suffisamment de jetons disponibles dans une des places en amont d'une transition, celle-ci ne peut pas être activée.

La description complète d'un système par un réseau de PETRI nécessite donc:

- un digraphe Places X Transitions;
- une matrice "Pre" indicée par PXT, ou $Pre_{i,j}$ est le nombre de jetons nécessaires dans la place i pour l'activation de j ;
- une matrice "Post" indicée par PXT, ou $Post_{i,j}$ est le nombre de jetons produits dans i par l'activation de j ;
- un marquage initial.

Il est important de remarquer que le marquage initial n'est pas seulement une "condition initiale" au sens de la théorie usuelle des systèmes. Un changement de marquage initial peut conduire à un nouveau système aux propriétés totalement nouvelles.

9.2 Analyse qualitative et intérêt des réseaux de PETRI.

Le lecteur intéressé voudra bien consulter les ouvrages [PETRI1] et [PETRI2] pour trouver une définition formelle des réseaux de PETRI et une étude des divers concepts qui leur sont associés. Les propriétés que l'on cherche en général à vérifier sont:

- l'existence d'un fonctionnement infini,
 - l'accessibilité de certains marquages;
 - une majoration du nombre des jetons dans certaines places.
- etc..

Il s'agit essentiellement de propriétés qualitatives de réseaux il y a très peu de résultats quantitatifs sur les marquages. On peut représenter par des opérations matricielles dans l'algèbre usuelle l'effet de l'activation des transitions. Il s'agit en fait d'une vérification comptable utilisant les matrices PRE et POST et qui traduit place par place la vérité première:

$$\begin{aligned} \text{nombre de jetons "après"} &= \\ &\text{nombre de jetons "avant"} \\ &- \text{nombre de jetons consommés} \\ &+ \text{nombre de jetons produits} \end{aligned}$$

Malheureusement, cela ne permet d'obtenir que des conditions nécessaires pour qu'une suite d'activations de transitions soit possible, et pratiquement jamais de condition suffisante.

De plus, il est impossible, à l'aide du calcul matriciel usuel, de décrire simplement la dynamique du réseau calculer les transitions qui sont activables en fonction du marquage, sans utiliser des test du type "si $X_i \geq 0$ " pour vérifier que les jetons sont en nombre suffisant. De tels tests sont faciles à programmer, mais pour manipuler formellement leur résultat, il faut utiliser des fonctions indicatrices qui ne conduisent pas à une algèbre "pratique"

Un autre inconvénient des réseaux de PETRI est l'impossibilité d'une approche locale de la modélisation. On ne peut en général pas diviser un système en sous-systèmes, lesquels seraient modélisés individuellement. Une modification mineure de l'objet que l'on veut étudier peut d'ailleurs conduire à une redéfinition de tout le réseau !

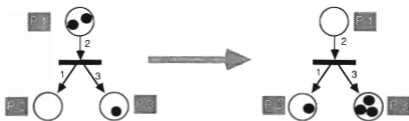
La théorie des réseaux de PETRI a cependant un intérêt majeur: il s'agit du seul modèle graphique dans lequel les opérations logiques "et" et "ou" sont toutes deux modélisées, tout en étant clairement distinguées. En effet, la population des outils graphiques se divise entre les graphes dont les nœuds sont des "et" logiques (Pert etc..) et ceux dont les nœuds sont des "ou" (Automates..).

Dans les réseaux de PETRI, il faut aussi distinguer les contraintes logiques qui se répercutent en amont et en aval par rapport au sens de circulation des jetons.

9.3 Les quatre types de noeuds fondamentaux.

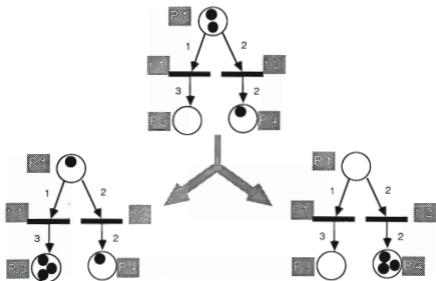
Dans un système à évènements discrets peuvent être identifiées quatre contraintes fondamentales, qui correspondent dans un réseau de PETRI aux quatre types de noeuds suivants.

9.3.1: "ET aval"



L'activation de la transition produit 1 jeton dans la place P2 et 3 jetons dans la place P3.

9.3.2: "OU aval"



Ici, deux évolutions sont possibles lorsqu'un jeton est présent dans P1 on peut activer la transition 1 ou la transition 2.

Dans le premier cas, 1 jeton est consommé dans P1, ce qui fournit 3 jetons dans P3. Dans le second cas, 2 jetons sont consommés dans P1 et 2 jetons sont produits dans P4.

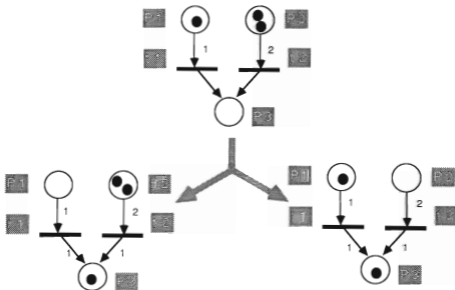
Notons qu'il s'agit ici d'un "ou exclusif", mais si P1 contenait 3 jetons ou plus, il serait possible d'activer P1 "ou inclusif" P2.

9.3.3: "ET amont"



Ici l'activation de la transition nécessite 1 jeton dans P1 et 1 jeton dans P2. Dans ce cas, il arrive trois jetons dans P3.

9.3.4: "OU amont"



Ici, la place P3 peut recevoir 1 jeton de t1 ou (inclusif) de t2. Dans le premier cas, cela consomme 1 jeton dans P1. Dans le second cas, cela consomme 2 jetons dans P2.

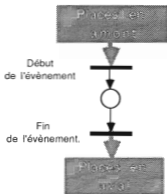
9.4 Réseaux de PETRI temporisés et systèmes à événements discrets.

Les réseaux de PETRI tels que définis en 9.1 ne modélisent que les problèmes logiques, indépendamment des problèmes de temporisation.

Pour une étude quantitative, il faut introduire les réseaux de PETRI temporisés. [PETRI 4] propose une théorie complète des réseaux de PETRI temporisés. Dans cette thèse, plusieurs définitions sont proposées pour les réseaux temporisés. Nous utiliserons ce que P CHRETIENNE appelle "Réseaux P-temporisés", dans lesquels:

- l'activation des transitions est instantanée;
- à toute place est associée une durée minimale du séjour des jetons.

Pour modéliser un événement qui n'est pas instantané, c'est à dire une tâche, on doit utiliser la figure suivante:



Pour étudier l'évolution du marquage au cours du temps, nous allons utiliser les suites de dates et de comptage que l'on peut définir dans le réseau.

Définition 9.4.1:

A toute place p sont associées deux suites de dates indicées par Z :

$X_n(p)$ est la date de l'arrivée du n -ième jeton dans la place p ,
 $Y_n(p)$ est la date de la n -ième sortie d'un jeton de la place p

Définition 9.4.2:

A toute transition t est associée une suite de dates

$T_n(t)$ est la date du n -ième franchissement de t par un jeton.

Propriété 9.4.3:

La règle du séjour minimal nous donne alors:

$$\forall n \in Z, \quad Y_n(p) \geq X_n(p) + \delta(p)$$

où $\delta(p)$ est le temps de séjour minimal dans la place p .

Lorsqu'on utilise un dioïde dont les opérations sont $(\max,+)$, cela s'écrit

$$\forall n \in Z, \quad Y_n(p) \geq X_n(p) \oplus \delta(p)$$

9.5 Fonctionnement au plus tôt, au plus tard et non-déterminisme.

Le principe même des réseaux de PETRI veut qu'une main invisible (telle la main qui agit sur le marché des économistes) déplace les jetons (Dollars ?) dans le réseau. Dans la théorie des réseaux de PETRI non temporisés, cette "main invisible" active les transitions une par une. L'histoire du réseau est alors décrite à l'aide d'une chaîne de caractères d'un alphabet dont chaque lettre est associée à une transition.

L'utilisation de chaînes de caractères pour tracer l'évolution du système est évidemment adapté aux machines séquentielles, mais il ne permet pas de représenter des systèmes, tels que les machines multiprocesseurs, dans lesquels plusieurs événements ont lieu simultanément. Il existe bien sûr des artifices permettant de réduire le parallélisme à un phénomène séquentiel. Il suffit pour cela de multiplier le nombre d'état du système, en associant un état différent à chaque avancement relatif des processus évoluant simultanément. Il suffit alors de considérer l'évolution entre ces divers états, laquelle est séquentielle. Malheureusement, cela masque le caractère parallèle du phénomène et crée en général un nombre démesuré d'états différents

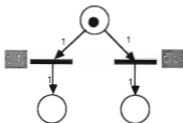
Il faut donc définir un mode de fonctionnement du réseau dans lequel plusieurs transitions peuvent être activées simultanément. Le problème de la description de ce type de fonctionnement a été étudié par P. CHRETIENNE.

Nous proposons de représenter ce fonctionnement par un ensemble de suites de dates, ou de manière équivalente, par des suites de comptages. En particulier, deux types de dates sont intéressantes:

Les dates "au plus tôt" du fonctionnement du réseau, lorsque les dates de disponibilité des jetons du marquage initial sont connues.

Les dates "au plus tard" auxquelles il faut activer les transitions pour obtenir un marquage donné à une date donnée.

A priori, il suffit, pour obtenir les dates "au plus tôt" de simuler la circulation des jetons en activant toute transition dès que possible. Mais cela suppose qu'il n'y ait pas de situation de non-déterminisme telle que celle rencontrée dans le cas du "OU aval".



Ici, l'opérateur masqué peut choisir d'activer t_1 ou t_2 . Dans le vocabulaire des réseaux de PETRI, t_1 et t_2 sont en "conflit structurel". En général, cette situation conduit à une énumération des divers choix possibles. Cette énumération devient combinatoire dès que le graphe contient des cycles qui passent par les transitions en conflit structurel. L'étude de ces problèmes d'énumération est l'objet de la théorie des automates.

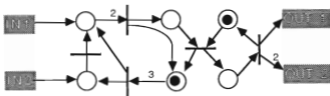
Les automates sont d'ailleurs un cas particulier de réseaux de PETRI, mais ils sont mal adaptés à la modélisation des problèmes de synchronisation entre des processus fonctionnant en parallèle. Or c'est à ces problèmes de synchronisation que nous nous intéressons particulièrement, et ils sont modélisés par des nœuds du type "ET amont" Cela nous conduit à une première restriction.

Pour simplifier notre approche, nous allons exclure les problèmes d'énumération combinatoire, en ne considérant que des réseaux de PETRI sans conflit structurel, c'est à dire sans "OU aval" Puisqu'il n'y a plus de choix à faire sur l'utilisation des jetons, cette restriction nous permet d'adopter la règle suivante.

Convention 9.5.1:

Chaque transition est activée dès que les jetons nécessaires sont disponibles.

Nous avons ainsi défini un fonctionnement "autonome" du réseau, qui devient alors un système muni d'une dynamique. Ce système peut avoir des entrées, des jetons arrivant de l'"extérieur", et produire des sorties, des jetons envoyés à l'"extérieur" Ces entrées et sorties peuvent évidemment être représentées par des suites de dates ou de comptage.



Réseau sans conflit structurel
avec entrées et sorties.

Dans l'exemple...



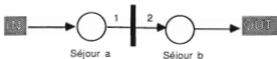
...la transition est activée lorsque deux jetons sont disponibles, ce qui produit un jeton en aval. Ecrivons l'équation sur les suites de dates associées, en fixant les conditions initiales telles que le jeton numéro 0 en aval soit produit par les jetons 0 et 1 en amont:

$$DOUT_n = DIN_{2n-1} + a + b$$

Cela définit un système dynamique qui n'est pas causal au sens de NERODE, parce que nous avons défini le "temps physique" comme fonction du "temps logique". Si on écrit les équations liant les compteurs, c'est-à-dire "temps logique" fonction du "temps physique", on obtient un système causal:

$$COUT_t = \text{Partie entière} (CIN_{t-a-ab}/2)$$

Considérons maintenant la situation inverse:



avec des conditions initiales adéquates, la relation entre les suites de dates est alors:

$$DOUT_n = DIN_{E(n/2)} + a + b$$

Si tous les jetons ont un numéro n positif, on obtient bien une relation causale, mais ce système dynamique n'est pas stationnaire, au sens suivant.

Il n'y a pas de retard logique p tel que la date de sortie numéro n ne dépende que des entrées numérotées de $n-p$ à n .

A nouveau, si on écrit les équations entre compteurs, ce genre de difficultés disparaît.

$$COUT_t = 2 * CIN_{t-a-ab}$$

Comme le but de notre théorie des systèmes à événements discrets est essentiellement d'étudier les dates physiques des événements en fonction des dates logiques, nous allons donc imposer les restrictions supplémentaires suivantes.

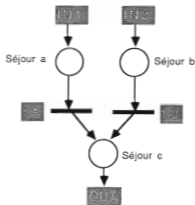
Convention 9.5.2:

Toute transition consomme un unique jeton par place en amont.

Toute transition produit un unique jeton par place en aval.

Dorénavant, nous ne préciserons plus les valuations des arcs entre places et transitions, qui sont toutes égales à 1

Une difficulté analogue à la précédente se pose dans le cas du "OU amont"



L'équation liant les suites de comptage est triviale: il suffit d'additionner le nombre de jetons venant de IN1 et le nombre de jetons venant de IN2. Comme ces suites de comptage sont en fait définies à une valeur initiale près, il faut en fait écrire, en fixant une date de référence t^0 :

$$COUT_t - COUT_{t^0} = (CIN1_{t-a-c} - CIN1_{t^0-a-c}) + (CIN2_{t-a-c} - CIN2_{t^0-a-c})$$

Ce qui nous intéresse surtout, ce sont les équations entre dateurs, et celles-ci sont beaucoup moins simples. Parmi toutes les possibilités d'entrées de jetons qui produisent n jetons en sortie, une seule est significative: celle qui se produit le plus tôt. En faisant abstraction du problème de numérotation initiale, on obtient une relation du type

$$Dout_n = \text{Inf}_{p+q=n} \text{Sup} (DIN1_p, DIN2_q)$$

qui est une sorte "d'inf convolution" opérant sur tout le passé logique des entrées.

Convention 9.5.3:

Nous allons exclure cette situation du "OU amont" pour deux raisons:

- la relation entre suites de dates n'est pas stationnaire;
- l'opération $\text{Inf}_{p+q=n} \text{Sup}..$ n'est pas de manipulation aisée.

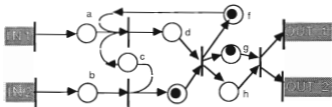
9.6 Les graphes d'évènements P-emporisés.

Les restrictions que nous avons imposé définissent une classe de réseaux qui sont les "graphes d'évènements P-temporisés"

- chaque place possède au plus une transition en amont et au plus une transition en aval;
- l'activation de toute transition nécessite un jeton dans chaque place amont et produit un jeton dans chaque place aval.

Les seuls véritables nœuds du graphe sont les transitions car toutes les places peuvent être identifiées à des arcs. Cela est cohérent avec notre choix de la temporisation, qui porte sur les places, et qui définit donc une valuation sur les arcs du graphe.

Un tel réseau peut posséder des entrées et des sorties, que nous considérerons comme des transitions particulières.



Graphe d'évènements temporisé
avec entrées et sorties.

Ces réseaux sont des généralisations des graphes Pert, dans lesquels les cycles sont autorisés.

Enonçons une propriété élémentaire mais essentielle de ces graphes d'évènements, que nous ne montrerons pas.

Propriété 9.6.1:

Le nombre total de jetons dans chaque cycle d'un graphe d'évènements est invariant.

Ces graphes d'évènements permettent d'étudier exclusivement les problèmes de synchronisation. Il ont une classe duale parmi les réseaux de PETRI, celle des "machines à états" Ce sont des réseaux dans lesquels chaque transition ne possède qu'une place amont et une place aval, où elle consomme et produit respectivement un jeton. Dans ce cas, ce sont les transitions qui peuvent être identifiées à des arcs. Ces machines à état sont en fait des automates, qui modélisent les problèmes combinatoires liés au non-déterminisme.

Nous allons étudier en détail les équations qui décrivent le fonctionnement des graphes d'évènements temporisés.

Chapitre 10

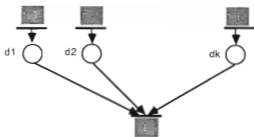
Equations entre dateurs d'un graphe d'événements temporisé.

10.1 Modélisation par suites de dates.

Dans un graphe d'événements, chaque place ne reçoit des jetons que d'une seule transition et n'en fournit qu'à une seule. Il suffit donc d'étudier les suites de dates associées aux activations des transitions.

Nous nous intéresserons aux "dates au plus tôt" auxquelles les transitions peuvent être activées. Ces dates dépendent du marquage initial et des disponibilités de jetons dans les entrées.

Pour obtenir les dates "au plus tôt" de fonctionnement, il suffit d'étudier comment une transition est conditionnée par les transitions en amont.



Le séjour minimal de tout jeton dans la place située entre les transitions t_i et t est noté d_i . La suite de dates associée à la transition t_k sera notée:

$$x_k = (x_{k,n})_{-\infty < n < +\infty}$$

La transition t peut être activée dès que chacune des places en amont contient au moins un jeton. Pour cela, il faut que chaque place en amont ait fourni au moins un jeton. C'est le dernier jeton disponible qui permet l'activation de t , lorsque le temps de séjour minimal dans la place où il se trouve est écoulé. Cela se traduit par l'équation:

$$x_n = \text{Max}_{i=1..k} (x_{i,n} + d_i)$$

Cette équation est valable si les numérotations sont initialisées de manière à ce que l'activation numéro 0 de t soit déclenchée par les activations des t_i qui sont toutes numérotées 0.

Supposons que la place située entre t et t_i contienne initialement s_i jetons. Pour activer n fois la transition t , il suffit que chaque transition t_i fournisse $(n-s_i)$ jetons.

Dans un premier temps, nous supposerons que tous les jetons du marquage initial sont disponibles depuis $t=-\infty$. Nous verrons ultérieurement comment il faut traiter le cas des jetons disponibles à une date finie.

L'équation

$$x_n = \text{Max}_{i=1..k} (x_{i,n-s_i} + d_i)$$

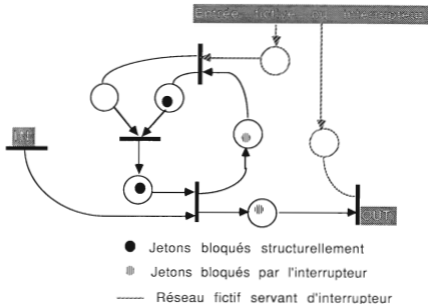
s'écrit linéairement dans les dioïdes DZC (temps entier) et DRC (temps continu)

$$x_n = \sum_{i=1..k} d_i \cdot x_{i,n-s_i}$$

10.2 Marquage initial disponible à une date finie.

Dans l'équation obtenue en 10.1, les jetons disponibles depuis $t=-\infty$ se comportent comme des opérateurs de retard. Pour traiter les jetons qui ne sont disponibles qu'à partir d'une date finie τ^0 (en général $\tau^0=0$), il nous faut modéliser explicitement cette contrainte. Cela revient à supposer que la transition immédiatement en aval de la place où se trouvent les jetons est bloquée jusqu'à τ^0 par une entrée, qui à partir de τ^0 ne joue plus aucun rôle limitant. Cela signifie que cette entrée reçoit une infinité de jetons à τ^0 .

Plus généralement, pour étudier un réseau qui est "mis en route" à τ^0 , il suffit d'ajouter une entrée fictive qui joue le rôle d'interrupteur et reçoit une infinité de jetons à τ^0 .



Nous connaissons les suites de dates et de comptage associées à cet interrupteur

$$\forall n < 0, d_n = -\infty \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, d_n = \tau^0$$

$$\forall \tau \leq \tau^0, c_\tau = 0 \quad \text{et} \quad \forall \tau > 0, c_\tau = +\infty$$

10.3 Système d'équations décrivant un réseau complexe.

Dans un réseau complexe, il faut écrire une équation du type

$$x_n = \sum_{i=1..k} d_i x_{i,n-S_i}$$

pour chaque transition du réseau. Parmi les transitions, il faut isoler les transitions d'entrée dont les dates d'activation sont une donnée du problème. On obtient ainsi un système linéaire de n équations, où n est le nombre de transitions qui ne sont pas des entrées.

En général, le graphe contient un cycle, ce qui se traduit par des équations implicites. C'est la principale difficulté technique qui se pose dans l'étude des graphes d'événements temporisés, après que l'usage de diodes appropriés ait fait apparaître la structure linéaire du problème.

Considérons un cas trivial:

$$x_n = 0.x_n \oplus u_n$$

où la suite de dates u_n est donnée.

Il y a une infinité de solutions à cette équation car il suffit de prendre x_n supérieur à u_n pour tout n .

On ne peut donc pas parler de la solution du système d'équations qui décrit le réseau. Comme on s'intéresse aux dates "au plus tôt" de fonctionnement du système, il faut chercher si ce système possède une "plus petite solution". La réponse est oui, et est une conséquence du théorème de point fixe dans les treillis.

10.4 Théorème de représentation des graphes d'évènements P-temporisés.

Soit un graphe d'évènements P-temporisé contenant q transitions, p entrées et r sorties. Définissons les suites de vecteurs X_n, Y_n, U_n à coefficients dans $Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ (temps discret) ou $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ (temps continu) par

$X_{i,n}$ = date minimale de l'activation numéro n de t_i ,

$U_{j,n}$ = date de l'arrivée numéro n d'un jeton dans l'entrée j ;

$Y_{k,n}$ = date minimale de la sortie numéro n d'un jeton par la sortie k .

La suite U_n est une donnée du problème, les suites X_n et Y_n sont à calculer

Définissons les matrices F_i, H_i et G_i à partir du réseau de PETRI temporisé et de son marquage initial comme suit.

S'il y a une place contenant i jetons entre les transitions m et l , $[F_i]_{m,l}$ vaut le délai minimal de séjour dans cette place.

Sinon $[F_i]_{m,l}$ vaut $t \ \varepsilon$.

S'il y a une place contenant i jetons entre l'entrée m et la transition l , $[G_i]_{m,l}$ vaut le délai minimal de séjour dans cette place.

Sinon $[G_i]_{m,l}$ vaut ε .

S'il y a une place contenant i jetons entre la transition m et la sortie l , $[H_{ij}]_{m,l}$ vaut le délai minimal de séjour dans cette place.
Sinon $[H_{ij}]_{m,l}$ vaut ε .

Théorème 10.4.1:

Les suites X_n et Y_n s'obtiennent en calculant la solution minimale du système récurrent suivant, système qui est linéaire au sens de l'algèbre $(\max,+)$.

$$X_n = F_0 \cdot X_n \oplus F_1 \cdot X_{n-1} \oplus F_2 \cdot X_{n-2} \oplus \dots \oplus F_f \cdot X_{n-f} \\ \oplus G_0 \cdot U_n \oplus G_1 \cdot U_{n-1} \oplus G_2 \cdot U_{n-2} \oplus \dots \oplus G_g \cdot U_{n-g}$$

$$Y_n = H_0 \cdot X_n \oplus H_1 \cdot X_{n-1} \oplus H_2 \cdot X_{n-2} \oplus \dots \oplus H_h \cdot X_{n-h}$$

Cette solution particulière est l'unique solution du système explicite:

$$X_n = F_0^* (F_1 \cdot X_{n-1} \oplus \dots \oplus F_f \cdot X_{n-f} \oplus G_0 \cdot U_n \oplus \dots \oplus G_g \cdot U_{n-g})$$

$$Y_n = H_0 \cdot X_n \oplus H_1 \cdot X_{n-1} \oplus H_2 \cdot X_{n-2} \oplus \dots \oplus H_h \cdot X_{n-h}$$

où

$$F_0^* = \sum_{n \geq 0} F_0^n \quad \text{au sens de l'algèbre } (\max,+)$$

Démonstration.

Nous avons déjà établi que les dates "au plus tôt" sont solution d'un système implicite linéaire au sens des dioïdes. D'autre part, nous avons montré que dans DZC et DRC, une équation matricielle de la forme

$$X = F \cdot X \oplus B$$

possède une solution minimale pour l'ordre partiel, qui est:

$$X = F^* \cdot B$$

Cette résolvante élimine la forme implicite et assure que l'on calcule ainsi les dates "au plus tôt" ♦

ou

$$F_0 = \begin{bmatrix} & 2 & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 3 & & & 0 \\ 3 & & 2 & \\ & 0 & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & & \end{bmatrix}$$

ce qui se traduit en

$$X_n = F_0 * (F_1 X_{n-1} \oplus G \cdot U_n)$$

$$Y_n = H \cdot X_n$$

avec

$$F_0^* = \begin{bmatrix} 0 & 2 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_0^* F_1 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$F_0^* G = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10.5 Le problème du blocage d'un réseau.

Le calcul de la résolvente F_0^* peut faire apparaître des coefficients égaux à $+\infty$. C'est le cas si et seulement si cette matrice contient un cycle dont le produit des coefficients (au sens du dioïde) est strictement positif. Ce résultat signifie que certaines activations de transitions ont lieu "au plus tôt à $+\infty$ ", c'est à dire jamais.

Lorsque F_0 contient un tel cycle, un cycle du graphe ne contient pas de jeton. Il est aisé de vérifier que nécessairement une transition va être bloquée définitivement. Le résultat du calcul est donc cohérent avec le comportement du réseau et il n'y a aucune difficulté posée par la "divergence" de la série F_0^*

Rappelons que cette notion de divergence n'est que relative à l'algèbre usuelle, puisque dans un dioïde ordonné complet une série S^* est toujours définie.

De même, si on ne fournit qu'un nombre fini de jetons à l'entrée numéro i , la coordonnée $U_{i,n}$ atteint la valeur $+\infty$. Pour toutes les transitions qui sont conditionnées par cette entrée, les dates des évènements atteindront $+\infty$ pour un indice fini, et pas seulement asymptotiquement. Il n'y a donc qu'un fonctionnement fini de cette partie du système.

10.6 Manipulation des formes d'état.

A partir de l'équation implicite ou de l'équation explicite, qui contiennent toutes deux des retards multiples, on peut se ramener à un retard unitaire par des artifices usuels de calcul matriciel. Pour rappeler comment on procède, partons d'un système donné sous la forme:

$$X_n = F_0 \cdot X_n \oplus F_1 \cdot X_{n-1} \oplus F_2 \cdot X_{n-2} \oplus \dots \oplus F_f \cdot X_{n-f} \\ \oplus G_0 \cdot U_n \oplus G_1 \cdot U_{n-1} \oplus G_2 \cdot U_{n-2} \oplus \dots \oplus G_g \cdot U_{n-g}$$

$$Y_n = H_0 \cdot X_n \oplus H_1 \cdot X_{n-1} \oplus H_2 \cdot X_{n-2} \oplus \dots \oplus H_h \cdot X_{n-h}$$

Si par exemple $h \leq f+g$, il suffit de poser

$$X'_n = (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_{n-s+1}, U_n, U_{n-1}, \dots, U_{n-t+1})$$

et

$$F'_0 =$$

F'_0							

ainsi que

Equations entre dateurs d'un graphe d'événements temporisé.

$$F_1' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline F_1 & & E_2 & \dots & F_s & G & \dots & G \\ \hline e & & & & & & & \\ \hline & e & & & & & & \\ \hline & & e & & & & & \\ \hline & & & .. & & & & \\ \hline & & & & e & & & \\ \hline & & & & & e & & \\ \hline & & & & & & e & \\ \hline & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

et

$$H' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline H_1 & H_2 & . & \dots & & H_r & & \\ \hline \end{array}$$

pour se ramener à un système avec un seul retard.

$$\begin{aligned} X_n' &= F_0' \cdot X_n \oplus F_1' \cdot X_{n-1}' \oplus G \cdot U_n \\ Y_n &= H' \cdot X_n \end{aligned}$$

En utilisant la résolvente de l'équation implicite, on obtient:

$$F = F_0' \cdot F_1'$$

et

$$\begin{aligned} X_n &= F \cdot X_{n-1} \oplus G \cdot U_n \\ Y_n &= H \cdot X_n \end{aligned}$$

Remarquons que l'étoile de F_0' ne dépend que de F_0' . Leurs conditions de "convergence" sont identiques. Si la forme initiale est déjà explicite, il suffit de reprendre la formule précédente avec $F_0 = \epsilon$, donc $F_0' = E$.

10.7 Représentation externe.

Il est évidemment possible d'effectuer d'abord l'opération étoile puis de réduire le retard. Cela ne donne pas toujours les mêmes matrices H, F et G, mais pour toute entrée U, la sortie Y est indépendante de la manière dont le calcul est effectué.

En théorie usuelle des systèmes linéaires, un système a d'innombrables représentations matricielles, qui peuvent toutes être ramenées à certaines formes canoniques qui peuvent toutes être déduites les unes des autres. Malheureusement, dans le cas qui nous occupe ici, un tel résultat n'a pu être obtenu: nous n'avons pas de forme canonique ni même de théorème sur la dimension minimale de la représentation matricielle d'un système. La cause en est l'absence d'une notion de rang suffisamment puissante dans les moduloïdes, qui sont l'analogue des espaces vectoriels dans le cas des dioïdes.

Cependant, il est indispensable de trouver une représentation canonique de l'opérateur, qui à une entrée U associe la sortie correspondante Y du système. En théorie usuelle, un même système peut avoir plusieurs formes d'état, mais il a une représentation intrinsèque: son unique fonction de transfert. La situation est analogue dans le cas des dioïdes, bien qu'il y ait quelques difficultés techniques dues au caractère croissant des suites de dates.

Nous pouvons noter toute suite de matrices S_n sous forme de série formelle. Dans le cas des suites de dates nous utiliserons la variable formelle z , et les considérerons comme des matrices à coefficients dans le dioïde $DZC\langle\langle z \rangle\rangle$.

Par abus, notons:

$$X = \sum X_n.z^n$$

$$U = \sum U_n.z^n$$

$$Y = \sum Y_n.z^n$$

Le système

$$X_n = F.X_{n-1} \oplus G.U_n$$

$$Y_n = H.X_n$$

se traduit sur les séries par

$$X = z.F.X \oplus G.U$$

$$Y = H.X$$

L'équation implicite se résoud toujours grâce à l'opération étoile:

$$X = (z.F)^*.G.U$$

$$Y = H.(z.F)^*.G.U$$

La série $H.(z.F)^*.G$ joue donc le rôle de fonction de transfert du système. Il faut cependant se méfier de l'expression "la fonction de transfert", ceci pour deux raisons.

10.7.1: 1ère difficulté. Les égalités doivent être interprétées au sens des séries formelles, et non comme des égalités entre fonctions de z . Ces deux objets algébriques ne sont en effet pas isomorphes.

10.7.2: 2nde difficulté. Plusieurs séries peuvent représenter un même système. A partir des représentations du système du type

$$X_n = F_0.X_n \oplus F_1.X_{n-1} \oplus F_2.X_{n-2} \oplus \dots \oplus F_f.X_{n-f} \\ \oplus G_0.U_n \oplus G_1.U_{n-1} \oplus G_2.U_{n-2} \oplus \dots \oplus G_g.U_{n-g}$$

$$Y_n = H_0.X_n \oplus H_1.X_{n-1} \oplus H_2.X_{n-2} \oplus \dots \oplus H_h.X_{n-h}$$

on obtient

$$Y = (H_0 \oplus z.H_1 \oplus z^2.H_2 \oplus \dots \oplus z^h.H_h). \\ (F_0 \oplus z.F_1 \oplus z^2.F_2 \oplus \dots \oplus z^f.F_f)^* \\ .(G_0 \oplus z.G_1 \oplus \dots \oplus z^g.G_g).U$$

La série

$$(H_0 \oplus \dots \oplus z^h.H_h).(F_0 \oplus z.F_1 \oplus \dots \oplus z^f.F_f)^*.(G_0 \oplus z.G_1 \oplus \dots \oplus z^g.G_g)$$

est une série qui se comporte comme un fonction de transfert du système.

Si la forme implicite est éliminée avant l'introduction des "transformées en z ", la fonction de transfert obtenue est

$$(H_0 \oplus \dots \oplus z^h.H_h).(z.F_0^*.F_1 \oplus \dots \oplus z^f.F_0^*.F_f)^*.(F_0^*.G_0 \oplus \dots \oplus z^g.F_0^*.G_g)$$

Cette forme est en général distincte de la précédente, au contraire de la théorie usuelle des systèmes linéaires dans laquelle le résultat est indépendant de la manière dont il a été calculé.

L'explication est simple. Notre analyse du comportement des réseaux de PETRI ne s'applique qu'aux systèmes dont les entrées sont croissantes. Une fonction de transfert ne doit donc jouer son rôle que relativement à un ensemble restreint de séries représentant d'entrée. Cet ensemble, celui des entrées croissantes, n'est pas suffisant pour discriminer certaines fonctions de transfert qui sont algébriquement distinctes.

Le théorème suivant montre que malgré cela, il existe une notion de fonction de transfert canonique.

Théorème 10.7.3:

Toutes les "fonctions de transfert" que l'on peut calculer par à partir des diverses formes d'état d'un système, sont équivalentes pour la relation d'équivalence définie par:

$$S \equiv T \quad \text{si et seulement si} \quad S.z^* = T.z^*$$

Elles donnent toutes la même sortie, si on les applique à des entrées croissantes.

Pour toute fonction de transfert S du système, le produit $S.z^*$ donne l'unique fonction de transfert croissante. Celle si est la sortie du système pour l'entrée z^* , qui joue le rôle d'impulsion à l'instant 0: cela correspond à la mise à disposition d'une infinité de jetons à l'instant initial 0.

Cette unique fonction de transfert croissante peut donc être appelée "La réponse impulsionnelle du système"

Soit $H.F.G$ une fonction de transfert quelconque, où H, F, G sont des matrices à coefficients polynômiaux en z , la réponse impulsionnelle peut s'écrire:

$$H.F^*.G.z^* = H.(z.E \oplus F)^*.G$$

où E est la matrice identité du dioïde.

Démonstration:

Les fonctions de transfert ne sont appliquées qu'aux entrées croissantes. Or une entrée U est croissante si et seulement si:

$$z^*.U = U$$

Par conséquent, si:

$$Y = T.U$$

alors

$$Y = T.z^*.U$$

$T.z^*$ joue donc le même rôle que T Or,

$$z^*.z^* = z^*$$

donc

$$T.z^* = (T.z^*).z^*$$

$T.z^*$ est donc croissante. Pour conclure, il suffit d'utiliser le fait que toute classe d'équivalence pour la relation \equiv ne possède qu'un représentant croissant. Enfin

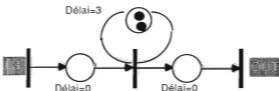
$$H.F^*.G.z^* = H.F^*. (E.z^*).G = H.(F \oplus z.E)^*.G$$

◆

Cette série z^* joue le rôle de la "masse de DIRAC" dans notre théorie: elle donne une impulsion qui lance un fonctionnement autonome du système à la date $t=0$. C'est cette même série que nous avons utilisé comme "interrupteur" pour résoudre le problème des jetons du marquage initial qui ne sont disponibles qu'à partir d'une date finie.

Exemple 10.7.4:

Le réseau très simple



se traduit en séries par

$$Y = X = 3z^2 \quad X \oplus U$$

et la fonction de transfert calculée à partir de cette équation est

$$(3.z^2)^* = e \oplus 3.z^2 \oplus 6.z^4 \oplus 9.z^6 \dots\dots$$

série qui n'est pas croissante, et ne correspond donc pas à une sortie effective de jetons. La sortie de jetons associée à l'impulsion z^* est

$$e \oplus 3.z^2 \oplus 3.z^3 \oplus 6.z^4 \oplus 6.z^5 \oplus 9.z^6 \oplus 9.z^7 \dots\dots$$

10.8 Comportement asymptotique du système.

On ne peut pas parler du comportement asymptotique du système indépendamment de ses entrées. Pour étudier son influence propre, il faut lui fournir une infinité de jetons à $t=0$ dans chaque entrée, c'est à dire une impulsion z^*

On observe alors une sortie qui peut s'écrire $H.(z.E \oplus z.F)^*.G$ Son terme de rang n est

$$H.(E \oplus F)^n.G$$

Le comportement asymptotique de cette suite de vecteurs est donc lié aux propriétés de la suite des puissances d'une matrice de la forme $F \oplus E$, dont on connaît les propriétés de cyclicité.

Théorème 10.8.1:

Chaque suite x_n de coefficient de la suite de matrices $H.(E \oplus F)^n.G$ a un comportement asymptotique cyclique du type suivant:

$$\exists N > 0, \exists c > 0, \exists \lambda \in \{0, +\infty\} \text{ tq}$$

$$\forall n > N, x_{n+c} = \lambda^c \cdot x_n$$

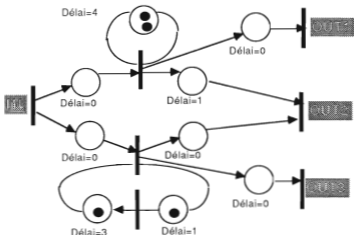
ou le couple (λ, c) est propre à chaque composante fortement connexe.

Si la matrice est fortement connexe, le même couple (λ, c) s'applique à toutes les sorties.

Le fonctionnement autonome d'un réseau fortement connexe se caractérise donc par une phase transitoire, de longueur N suivie d'un régime périodique, au cours duquel un même cycle de c évènements est reproduit avec un délay moyen λ entre deux évènements successifs.

Dans tous les cas, cette propriété de cyclicité est vraie transition par transition, mais si le réseau n'est pas fortement connexe, plusieurs modes cycliques peuvent coexister, comme c'est le cas dans l'exemple suivant.

Exemple 10.8.2:



Lorsque l'entrée fournie est z^* , la boucle supérieure a une cyclicité dont le couple est $(\lambda=4, c=2)$, laquelle se retrouve sur la sortie 1, avec un retard d'une unité de temps.

$$Y_1 = 1 \oplus 1.z \oplus 5.z^2 \oplus 5.z^3 \oplus 9.z^4 \oplus 9.z^5 \oplus \dots$$

Le cycle inférieure a une cyclicité dont le couple est aussi $(\lambda=2, c=1)$, laquelle se retrouve sur la sortie 3.

$$Y_3 = 0 \oplus 3.z \oplus 4.z^2 \oplus 7.z^3 \oplus 8.z^4 \oplus 11.z^5 \oplus \dots$$

Ces deux boucles ont le même "délay moyen" entre deux transitions: 2 unités de temps. La sortie 2 a un comportement cyclique qui est une superposition des deux précédents.

La série associée à cette sortie est:

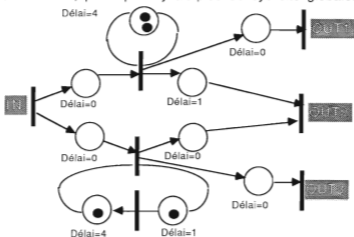
$$Y_1 = 0 \oplus 3.z \oplus 5.z^2 \oplus 7.z^3 \oplus 9.z^4 \oplus 11.z^5 \oplus \dots$$

Son couple de cyclicité est (2,1), est n'est donc égal à aucun des couples de cyclicité des cycles du système, bien que son "délai moyen" soit le même.

Le couple $(\lambda=4, c=2)$ s'applique à l'ensemble du réseau, bien qu'il ne soit pas fortement connexe.

Exemple 10.8.3:

Il suffit de "ralentir" l'un des deux cycles dans l'exemple précédent, par exemple celui du bas, pour qu'il n'y ait plus de cyclicité globale.



La cyclicité du bas du réseau, ainsi que de la sortie 3 est $(\lambda=5, c=2)$, ce qui correspond au délai moyen 2,5. Il ne peut donc plus y avoir de cyclicité globale. Le bas du réseau est plus lent que le haut, et à partir du 2ème jeton, il impose son rythme à la sortie 2 qui prend alors le régime cyclique (5,2).

Bien qu'il n'y ait pas de cyclicité globale, chaque transition a un comportement cyclique.

Nous reviendrons ultérieurement sur le comportement des réseaux constitués d'assemblages de sous-réseaux aux comportements distincts.

10.9 Dates absolues et délais.

Le lecteur peut être surpris de nous voir raisonner sur les dates absolues des événements et non sur les délais entre les événements. Les variables d'état du système dépendent du choix arbitraire d'une date initiale. A priori, il semble plus judicieux de raisonner directement sur des écarts de temps. Malheureusement, si l'on cherche à écrire des équations sur les écarts entre les événements successifs, on obtient des formules complexes qui ne sont linéaires ni dans l'algèbre usuelle ni dans l'algèbre $(\max,+)$.

Par contre, et c'est là l'intérêt de notre théorie, la réponse impulsionnelle du système est indépendante du choix de la date initiale, elle est intrinsèque. Ses coefficients doivent être interprétés comme des délais entre les entrées et les sorties, et non plus comme des dates absolues. C'est pourquoi la réponse impulsionnelle d'un système, ainsi que toutes les fonctions de transfert qui lui sont équivalentes modulo z^* , est une série dont le support est \mathbb{N} , alors que les séries qui représentent des suites de dates absolues ont pour support \mathbb{Z} .

On peut interpréter le coefficient λ comme le temps moyen écoulé entre la consommation des jetons en entrée et la sortie du jeton correspondant, en régime asymptotique, lorsqu'on a fourni une impulsion z^* . Cela n'est plus vrai lorsque les jetons en entrée arrivent trop lentement: dans ce cas, le temps moyen de traversée dépend en général du transitoire de la réponse impulsionnelle, car le régime asymptotique du réseau n'est jamais atteint.

Lorsque le réseau est fortement connexe, toutes les suites de dates associées aux transitions dans le réseau, ainsi que les sorties, ont un comportement asymptotique cyclique associé au même couple (λ, c) . Par conséquent, il n'y a pas accumulation de jetons, car le délai entre l'entrée des jetons et leur franchissement des transitions est borné. Dans la théorie des réseaux de PETRI, le réseau est dit stable.

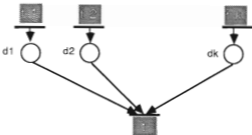
Chapitre 11

Equations entre compteurs d'un graphe d'événements temporisé.

11.1 Compteurs associés à un graphe d'événements.

Au chapitre 10, nous avons étudié les graphes d'événements en calculant les dateurs associés aux transitions. On peut en déduire les compteurs associés aux transitions en appliquant les formules de quasi-inversion. Il est aussi possible de retrouver directement les équations régissant les compteurs.

Nous avons étudié un fonctionnement "au plus tôt" du système. Sur les compteurs, cela correspond à calculer, à toute date absolue τ , le nombre maximal d'activations possibles de chaque transitions avant la date τ .



d_i est le séjour minimal de tout jeton dans la place située entre la transition t_i et t .

Notons

$$C_k = (C_k^\tau)_{-\infty < \tau < +\infty}$$

le compteur associé à la transition t_k .

A tout instant absolu τ , le nombre d'activations de t est conditionné par le nombre de jetons fournis par les transitions en amont. C'est la transition qui a fourni le moins de jetons qui définit le nombre maximal d'activations de t . De plus, pour la transition t_i , il ne faut tenir compte que des jetons arrivés avant la date absolue $\tau - d_i$.

Cela se traduit par l'équation

$$C^{\tau} = \text{Min}_{i=1..k} (D_i^{\tau-d_i})$$

Il est aisé de vérifier que cette relation est vraie lorsqu'on considère le nombre de jetons fournis, mais aussi lorsqu'on raisonne avec le numéro du premier jetons à venir, qui correspond à notre définition du compteur

Les numérotations sont initialisées de manière à ce que l'activation numéro 0 de t soit déclenchée par les activations des t_i qui sont numérotées 0.

Si la place située entre t et t_i contient s_i jetons initialement, il faut augmenter d'autant le nombre de jetons disponibles à chaque instant, ainsi que le numéro du prochain jeton attendu. On obtient alors l'équation:

$$C^{\tau} = \text{Min}_{i=1..k} (D_i^{\tau-d_i} + s_i)$$

Pour décrire l'ensemble du réseau du réseau, on obtient un système dynamique causal et stationnaire. Il est linéaire si on l'écrit dans DZD.

Remarquons que dans le cas des dateurs, on pouvait travailler avec une échelle de temps discrète (dioïde DZC) ou continue (DRC). Par contre, nous ne chercherons pas à couper les jetons en rondelles: les compteurs seront, à valeurs entières.

L'équation qui permet de calculer le compteur s'écrit donc linéairement dans l'algèbre du dioïde DZD.

$$C^{\tau} = \sum_{i=1..k} s_i . D_i^{\tau-d_i}$$

La situation est inversée par rapport au cas des dateurs: les temps de séjours dans les places jouent les rôle des retards et les jetons du marquage initial sont les coefficients de l'équation linéaire.

Si le graphe contient un cycle, il sera décrit par un système comportant une partie implicite. A nouveau, on ne peut pas parler de la solution du système d'équations qui décrit le réseau.

C'est ici une solution maximale qui est définie, puisque le système est linéaire au sens du min. C'est bien cohérent avec notre objectif: calculer le nombre maximal de jetons qui peuvent être obtenus.

11.2 Choix de notations.

Dans le cas de la représentation par dateurs, nous avons noté

- X le vecteur d'état (dates d'activation des transitions internes),
- U le vecteur d'entrée (dates d'activation des transitions d'entrée),
- Y le vecteur de sortie (dates d'activation des transitions de sortie);
- F la matrice de dynamique;
- H la matrice "d'observation";
- G la matrice "de commande"

Comme les suites de dates et de comptages associées à un même élément sont duales, il est inutile de les noter par des lettres distinctes.

Dorénavant, nous noterons toujours ΔD le compteur dual d'un dateur D. Dans la forme d'état calculée sous forme de compteur, nous aurons donc:

- ΔX comme vecteur d'état (comptage des transitions internes),
- ΔU comme vecteur d'entrée (comptage des entrées);
- ΔY comme vecteur de sortie (comptage des sorties de jetons).

Par contre, nous verrons que les matrices décrivant la dynamique de ces systèmes ne sont pas duales. Nous utiliserons donc les triplets suivants:

- (H,F,G) dans le cas des dateurs;
- (A,B,C) dans le cas des compteurs.

11.3 Le théorème dans le cas des compteurs.

Soit un graphe d'évènements contenant q transitions, p entrées et r sorties, et dans lequel le temps de séjour imposé dans toute place est positif ou nul. Définissons les suites de vecteurs $^AX, ^AU, ^AY$ à coefficients dans $Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ par

$^AX_{\tau,i}$ = numéro de la première activation de t_i postérieure à τ ;

$^AU_{\tau,j}$ = numéro de la première activation de l'entrée j postérieure à τ ;

$^AY_{\tau,k}$ = numéro de la première activation de la sortie k postérieure à τ .

Les suites croissantes $^AU_{\tau,j}$, sont une donnée du problème.

Les matrices A_i B_i et C_i sont définies de la manière suivante.

S'il y a une place dans laquelle le séjour minimal vaut i , entre les transitions m et l , $[A_i]_{m,l}$ est égal au nombre de jetons contenus initialement dans cette place. Sinon la valeur de $[A_i]_{m,l}$ est $\epsilon = +\infty$.

S'il y a une place dans laquelle le séjour minimal vaut i , entre l'entrée m et la transition l , $[C_i]_{m,l}$ est égal au nombre initial de jetons dans cette place. Sinon la valeur de $[C_i]_{m,l}$ est ϵ .

S'il y a une place où le séjour minimal vaut i entre la transitions m et la sortie l , $[B_i]_{m,l}$ est le nombre initial de jetons dans cette place. Sinon la valeur de $[B_i]_{m,l}$ est ϵ .

Théorème 11.3.1:

Les suites $\wedge X_{\tau,i}$ et $\wedge Y_{\tau,k}$ s'obtiennent en calculant la solution maximale d'un système récurrent qui est linéaire au sens de l'algèbre (min,+). Ce système s'écrit:

$$\wedge X_{\tau} = A_0 \cdot \wedge X_{\tau} \oplus A_1 \cdot \wedge X_{\tau-1} \oplus A_2 \cdot \wedge X_{\tau-2} \oplus \dots \oplus A_d \cdot \wedge X_{\tau-d} \\ \oplus C_0 \cdot \wedge U_{\tau} \oplus C_1 \cdot \wedge U_{\tau-1} \oplus C_2 \cdot \wedge U_{\tau-2} \oplus \dots \oplus C_f \cdot \wedge U_{\tau-f}$$

$$\wedge Y_{\tau} = B_0 \cdot \wedge X_{\tau} \oplus B_1 \cdot \wedge X_{\tau-1} \oplus B_2 \cdot \wedge X_{\tau-2} \oplus \dots \oplus B_g \cdot \wedge X_{\tau-g}$$

La solution maximale du système implicite, est l'unique solution du système explicite

$$\wedge X_{\tau} = A^* \cdot (A_1 \cdot \wedge X_{\tau-1} \oplus \dots \oplus A_d \cdot \wedge X_{\tau-d} \oplus C_0 \cdot \wedge U_{\tau} \oplus \dots \oplus C_f \cdot \wedge U_{\tau-f})$$

$$\wedge Y_{\tau} = B_0 \cdot \wedge X_{\tau} \oplus B_1 \cdot \wedge X_{\tau-1} \oplus B_2 \cdot \wedge X_{\tau-2} \oplus \dots \oplus B_g \cdot \wedge X_{\tau-g}$$

Où

$$A_0^* = \sum_{n \geq 0} A_0^n \quad \text{au sens de l'algèbre (min,+)}$$

Dans l'étude des équations régissant les compteurs, il apparait clairement que le système dynamique qui permet de calculer les dateurs minimaux dans DZC est lié au système dynamique qui permet, dans DZD de calculer les compteurs maximaux. Ce lien est décrit dans le théorème qui suit.

Théorème 11.3.2:

Pour obtenir une forme d'état de calcul des compteurs à parti d'une forme d'état sur les dateurs, ou vice-versa, il suffit de permuter les coefficients et les retards.

Exemple 11.3.3:

Si la forme dateur est

$$x_n = a.x_{n-1} \oplus b.x_{n-2} \oplus c.u_{n-1}$$

$$y_n = d.x_{n-3}$$

la forme compteur est

$$^{\wedge}x_{\tau} = 1. ^{\wedge}x_{\tau-a} \oplus 2. ^{\wedge}x_{\tau-b} \oplus 1.^{\wedge}u_{\tau-c}$$

$$^{\wedge}y_{\tau} = 3. ^{\wedge}x_{\tau-d}$$

Cette permutation est très simple à effectuer, mais elle ne définit pas une relation facile à analyser entre les matrices H_i , F_i , G_i et B_i , A_i , C_i , puisque le nombre de retards, donc de matrices qui interviennent dans le système, est modifié et que les coefficients distincts qui se trouvent initialement dans une même matrice, induisent des coefficients dans des matrices différentes après la transformation!

Comme pour les formes d'état définies pour les dateurs, on peut faire diverses transformations sur les formes d'état des compteurs, en particulier se ramener par une manipulation classique à un retard unitaire.

$$^{\wedge}X_{\tau} = A_0.^{\wedge}X_{\tau} \oplus A_1.^{\wedge}X_{\tau-1} \oplus C.^{\wedge}U_n$$

$$^{\wedge}Y_{\tau} = B.^{\wedge}X_{\tau}$$

Pour obtenir d'état explicite, il faut calculer la résolvante A_0^* . Cette matrice peut-elle diverger, c'est à dire, dans le cas de DZD, avoir des coefficients égaux à $-\infty$?

Les coefficients de A_0 sont égaux à ε , ou à des nombres de jetons. Ces nombres sont toujours positifs (au sens usuel) et par conséquent, dans l'algèbre $(\min,+)$, la matrice A_0^* ne "diverge" jamais: il ne peut pas y avoir de coefficient égal à $-\infty$. La difficulté apparue dans le cas des dateurs ne se pose pas pour les compteurs, par contre la manipulation de la représentation externe est analogue mais moins commode.

1.4 Représentation externe entre compteurs.

Nous pouvons noter tout compteur [$\wedge S_n$] sous forme de série formelle. Nous utiliserons alors la variable formelle δ , pour distinguer ces séries de celles qui représentent les dateurs. Notons:

$$\wedge X = \sum \wedge X_t \cdot \delta^t$$

$$\wedge U = \sum \wedge U_t \cdot \delta^t$$

$$\wedge Y = \sum \wedge Y_t \cdot \delta^t$$

Alors, si

$$\wedge X_t = A \cdot \wedge X_{t-1} \oplus C \cdot \wedge U_t$$

$$\wedge Y_t = B \cdot \wedge X_t$$

nous obtenons pour les séries:

$$\wedge X = \delta \cdot A \cdot \wedge X \oplus C \cdot \wedge U$$

$$\wedge Y = B \cdot \wedge X$$

et

$$\wedge X = (\delta \cdot A)^* \cdot C \cdot \wedge U$$

$$\wedge Y = B \cdot (\delta \cdot A)^* \cdot C \cdot \wedge U$$

C'est donc la série formelle $B \cdot (\delta \cdot A)^* \cdot C$ qui joue le rôle de fonction de transfert du système. Comme dans le cas des compteurs, il n'y a pas de fonction de transfert unique, mais toute une classe d'équivalence. Les entrées sont toujours des séries croissantes. Nous avons montré que dans le cas de l'algèbre $(\min, +)$, les séries croissantes sont caractérisées par:

$$\wedge U \text{ est croissante} \quad \text{ssi} \quad \wedge U \cdot (\delta^{-1})^* = \wedge U$$

Si $\wedge T$ est une fonction de transfert représentant le système dans le cas des compteurs, il est évident que $\wedge T \cdot (\delta^{-1})^*$ convient aussi. Nous obtenons donc un théorème strictement analogue à celui qui a été énoncé dans le cas de la représentation du système par dateur

Théorème 11.4.1:

Toutes les "fonctions de transfert" entre compteurs que l'on peut calculer à partir des diverses formes d'état d'un système sont équivalentes pour la relation d'équivalence définie par:

$$^A S \equiv ^A T \quad \text{si et seulement si} \quad ^A S. (\delta^{-1})^* = ^A T. (\delta^{-1})^*$$

Elles donnent toutes la même sortie, si on les applique à une entrée croissante.

Pour toutes fonction de transfert $^A S$ du système, $^A S. (\delta^{-1})^*$ est égale à l'unique fonction de transfert croissante du système. Celle-ci est la sortie du système pour l'entrée $(\delta^{-1})^*$, qui joue le rôle d'impulsion à l'instant absolu 0: cela correspond à la mise à disposition d'une infinité de jetons à l'instant initial 0.

Cette unique fonction de transfert croissante peut donc être appelée "La réponse impulsionnelle du système"

11.5 Comportement asymptotique des compteurs.

Tout compteur associé à une transition peut être traduit en un dateur par la dualité de CASPI-HALBWACHS.

$$^A x_\tau = \inf \{ n, x_n > \tau \}$$

Si le compteur a un comportement asymptotique cyclique caractérisé par (λ, c) , celui-ci se traduit par:

$$\begin{aligned} \exists T > 0, \exists \lambda \in \{0, +\infty\}, \exists c > 0 \text{ tq} \\ \forall \tau > T \quad ^A x_{\tau+\lambda} = c\lambda. x_\tau \end{aligned}$$

Il suffit donc de reprendre l'analyse du comportement asymptotique cyclique des dateurs pour obtenir celui des compteurs en inversant le rôle algébrique de λ et c .

λ/c (au sens usuel) est le délai moyen entre deux activations des transitions, tandis que c/λ (division usuelle) est le débit moyen en jetons.

Chapitre 12

Manipulations élémentaires sur les systèmes et complexité.

12 1 Assemblages de sous-systèmes.

L'un des reproches que nous avons fait aux réseaux de PETRI est l'impossibilité d'une approche locale des systèmes. Dans le cas des graphes d'évènements temporisés, auxquels nous nous sommes restreints, cette approche locale est possible.

En effet, le comportement d'un graphe d'évènements est entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle, qui n'est pas modifiée lorsque ce réseau est incorporé dans un réseau plus complexe. Nous allons calculer la réponse impulsionnelle de divers systèmes obtenus par assemblages de modules élémentaires. Considérons deux modules S1 et S2 dont les réponses impulsionnelles sont Φ_1 et Φ_2 . Pour étudier le comportement asymptotique du système obtenu, nous supposons que S1 et S2 sont fortement connexes, et que leurs comportements asymptotiques en régime autonome sont caractérisés respectivement par des délais moyens λ_1/c_1 et λ_2/c_2 .

Dans tous ces montages n'interviennent que des nœuds du type "et", c'est à dire des transitions qui se traduisent algébriquement par des max. Les trois types d'assemblages que l'on peut rencontrer sont:

Définition 12.1.1:



Mise en série

La réponse impulsionnelle du tout peut être calculée avec les fonctions de transfert entre dateurs ou entre compteurs par :

$$\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$$

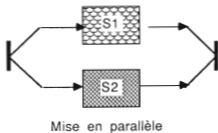
Le produit est à prendre dans DZC si on travaille avec des dateurs, et DZD si on travaille avec des compteurs.

La série Φ est cyclique et son λ/c est $\max(\lambda_1/c_1, \lambda_2/c_2)$. Il y a deux situations possibles, lorsqu'on fournit une impulsion z^* au système.

$\lambda_1/c_1 > \lambda_2/c_2$ C'est S1 qui est limitant: A la sortie, on ne perçoit que la cyclicité de S1 et le transitoire de S2, car les jetons n'arrivent pas suffisamment vite dans S2 pour exciter son mode périodique. Il n'y a pas d'accumulation de jetons. Le temps moyen de traversée du système dépend de λ_1 et du transitoire de S2.

$\lambda_1/c_1 < \lambda_2/c_2$ C'est S2 qui est limitant. Dans ce cas, il y a accumulation de jetons dans le système, et la sortie est cyclique de pente λ_2 . Le temps moyen de traversée dépend de λ_2 et du transitoire de S1

Définition 12.1.3:



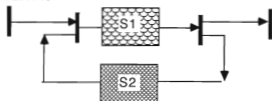
La réponse impulsionnelle du tout est

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2$$

au sens de la somme des séries dans l'algèbre DZC si on travaille avec les dateurs, et DZD si on travaille avec les compteurs.

Ici, le transitoire dépend de Φ_1 et de Φ_2 , mais c'est le régime asymptotique associé à $\max(\lambda_1/c_1, \lambda_2/c_2)$ qui s'impose.

Définition 12.1.4:



La réponse impulsionnelle du tout, calculée dans le dioïde adéquat est:

$$\Phi = \Phi_1(\Phi_1 \cdot \Phi_2)^*$$

Cette réponse impulsionnelle est cyclique, et le délai moyen λ/c est un majorant de λ_1/c_1 et de λ_2/c_2 . Cette majoration peut être stricte car la mise en contre-réaction crée de nouveaux cycles qui peuvent imposer un régime asymptotique plus lent que ceux des modules S1 et S2.

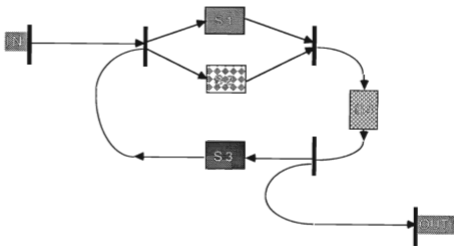
Remarquons que si $\Phi_1 = e$, élément neutre du produit des séries, nous avons $\Phi = \Phi_2^*$.

Pour toute série Φ , la série Φ^* est en fait le développement formel de la série $1/1-\Phi$

$$\Phi^* = e \oplus \Phi \oplus \Phi^2 \oplus \dots \oplus \Phi^n \oplus \dots$$

On retrouve ainsi l'analogie avec la théorie des systèmes usuels.

Exemple 12.1.4:



Ici, la fonction de transfert globale est:

$$\Phi = \Phi_4 \cdot (\Phi_1 \oplus \Phi_2) \cdot (\Phi_3 \cdot \Phi_4 \cdot (\Phi_1 \oplus \Phi_2))^*$$

12.2 Complexité de la réponse impulsionnelle d'un système.

Les manipulations de systèmes que nous venons d'étudier font clairement apparaître le lien avec les opérations rationnelles. Ces manipulations sont formellement les mêmes, que l'on travaille avec les compteurs ou avec les dateurs.

Lorsqu'on calcule une fonction de transfert pour un réseau sans cycle à partir du système d'équations qui le décrit, on obtient un polynôme à coefficients positifs (les termes distincts de ε sont positifs), car il n'y a pas de partie implicite dans l'équation.

Par conséquent, la réponse impulsionnelle d'un graphe d'évènements sans cycle est équivalente à un polynôme, modulo une multiplication par z^* si on travaille avec les dateurs, ou modulo $(\delta^{-1})^*$ si on travaille avec les compteurs. Nous avons appelé "polynômes croissants positifs" les séries égales à un polynôme à coefficients positifs, multiplié par z^* ou $(\delta^{-1})^*$

Tout graphe d'évènements peut être considéré comme un assemblage de sous-graphes sans cycles, obtenu à l'aide des trois opérations que nous venons d'étudier, qui sont dites "rationnelles".

- Le produit des séries.
- La somme des séries.
- L'étoile des séries.

Rappelons que la clôture rationnelle d'un ensemble est la plus petite partie qui le contient et qui est stable pour ces opérations rationnelles.

Théorème 12.2.1:

Que l'on travaille avec les compteurs ou avec les dateurs, l'ensemble des réponses impulsionnelles des graphes d'évènements temporisés finis est la clôture rationnelle de l'ensemble des "polynômes croissants positifs"

Toute fonction de transfert associée à un graphe d'évènements temporisé est donc équivalente, modulo z^* ou modulo $(\delta^{-1})^*$ à une série qui appartient à la clôture rationnelle des polynômes à coefficients positifs.

Ce théorème nous permet de justifier à posteriori et en toute rigueur un résultat que nous avons annoncé précédemment: dans un graphe d'évènementst temporisé, si toutes les entrées sont des impulsions, les suites de dates ou de comptage associées à chaque transition sont rationnelles croissantes, et donc cyclique comme nous l'avons montré dans le chapitre 6.

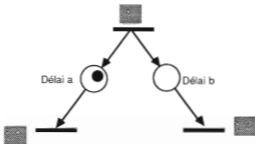
Chapitre 13 et épilogue. Systèmes en temps rétrograde.

13.1 Contraintes portant sur les sorties.

Dans les chapitres 10 et 11, nous avons calculé les dates de sortie des jetons d'un réseau de PETRI en fonction des dates de disponibilité des jetons en entrée. Il était alors naturel de calculer les dates "au plus tôt" de ces sorties.

Considérons le problème inverse à partir de dates imposées pour la sortie des jetons, quelles sont les dates auxquelles il faut fournir les jetons en entrée? Il s'agit alors de calculer les dates d'entrée "au plus tard" auxquelles les jetons d'entrée doivent être disponibles.

Considérons une transition dans un graphe d'évènements. Si ses dates d'activation "au plus tard" sont spécifiées, il en résulte des contraintes sur les transitions en amont. Considérons un exemple simple.



Notons

- D_n la date au plus tard de la n-ième activation de t ;
- $D1_n$ la date au plus tard de la n-ième activation de $t1$,
- $D2_n$ la date au plus tard de la n-ième activation de $t2$.

La n-ième activation de t peut avoir au plus premier des deux instants définis par la (n+1)-ième activation de t1 et par la n-ième activation de t2. Dans le cas de t1, il y a un décalage d'indice du à la présence d'un jeton initial

$$D_n = \min (D1_{n+1} - a , D2_n - b)$$

Cette équation s'écrit bien sur linéairement dans l'algèbre (min,+).

Par analogie avec le cas des dates "au plus tard", il est aisé de trouver la description algébrique associée à un graphe d'évènements temporisé:

Notons

V_n le vecteur des dates imposées des n-ièmes sorties;

X_n le vecteur des dates au plus tard
des n-ièmes activations de transition;

U_n le vecteur des dates au plus tard des n-ièmes entrées.

Théorème 13.1.1:

La suite U_n se calcule à partir de la donnée de V_n par un système récurrent linéaire au sens de l'algèbre (min,+), de la forme suivante:

Définissons les suites de vecteurs D,Y,U à coefficients dans $Z \cup \{-\infty, +\infty\}$ (temps discet) ou $R \cup \{-\infty, +\infty\}$ (temps continu) par

$D_{n,i}$ = date maximale de l'activation numéro n de t_i .

$U_{n,j}$ = date maximale de l'arrivée numéro n d'un jeton dans l'entrée j.

$Y_{n,k}$ = date imposée de la sortie numéro n d'un jeton par la sortie k.

Alors, les suites $U_{n,i}$ et $D_{n,i}$ se calculent à partir des suites $Y_{n,i}$ par un système récurrent qui est linéaire au sens de l'algèbre (min,+).

$$D_n = F_0 \cdot D_n \oplus F_1 \cdot D_{n+1} \oplus F_2 \cdot D_{n+2} \oplus \dots \oplus F_s \cdot D_{n+s} \\ \oplus G_0 \cdot Y_n \oplus G_1 \cdot Y_{n+1} \oplus G_2 \cdot Y_{n+2} \oplus \dots \oplus G_t \cdot Y_{n+t}$$

$$U_n = H_0 \cdot D_n \oplus H_1 \cdot D_{n+1} \oplus H_2 \cdot D_{n+2} \oplus \dots \oplus H_r \cdot D_{n+r}$$

Les matrices F_i , H_i et G_i sont telles que:

S'il y a une place contenant i jetons entre les transitions m et l , $[F_{ij}]_{l,m}$ est l'opposé usuel du délai de séjour dans cette place.

Sinon sa valeur est ϵ .

S'il y a une place contenant i jetons entre l'entrée l et la transition m , $[G_{ij}]_{m,l}$ est l'opposé usuel du temps de séjour dans cette place.

Sinon sa valeur est ϵ .

S'il y a une place contenant i jetons entre la transitions l et la sortie m , $[H_{ij}]_{m,l}$ est l'opposé usuel du temps de séjour dans cette place.

Sinon sa valeur est ϵ .

La solution maximale (dates au plus tard) est l'unique solution du système explicite

$$D_n = F^* \cdot (F_1 \cdot D_{n+1} \oplus \dots \oplus F_s \cdot D_{n+s} \oplus G_0 \cdot Y_n \oplus \dots \oplus G_t \cdot Y_{n+t})$$

$$U_n = H_0 \cdot D_n \oplus H_1 \cdot D_{n+1} \oplus H_2 \cdot D_{n+2} \oplus \dots \oplus H_r \cdot D_{n+r}$$

Où

$$F_0^* = \sum_{n \geq 0} F_0^n \quad \text{au sens de l'algèbre (min,+)}$$

Nous avons obtenu un système dynamique qui calcule les dates absolues en fonction des dates logiques, de manière "rétrograde": il se résoud du présent logique vers le passé logique.

13.2 Compteurs en temps rétrograde.

En suivant rigoureusement la construction des équations entre compteurs qui a été utilisée au chapitre 11, il est aisé d'obtenir un théorème rétrograde pour les compteurs associés au système. Ces compteurs décrivent le nombre minimal de jetons qui doivent être disponibles dans chaque place à chaque instant du passé absolu, à partir de la donnée de compteurs de sortie imposés.

Ces compteurs (nombre minimal de jetons disponibles) sont duaux, au sens de la dualité de CASPI-HALBWACHS, des dateurs étudiés ci dessus en 13.1 (date au plus tard de disponibilité des jetons).

13.3 Les quatre systèmes associés à un réseau de PETRI.

En temps retrograde, nous pouvons obtenir 2 représentations équivalentes et duales, en compteurs et dateurs, d'un graphe d'évènements P-temporisé, qui s'ajoutent aux deux représentations en temps croissant, qui sont équivalentes et duales.

Par contre, les suites de dates correspondant à un fonctionnement "au plus tôt" avec des dates d'entrées imposées sont distinctes des suites de dates correspondant à un fonctionnement "au plus tard" ou les dates de sortie sont imposées. Il est alors évident que, modulo les problèmes de synchronisation,

$$\text{dates au plus tôt} \leq \text{dates au plus tard}$$

ce qui se traduit dualement par

$$\text{compteurs maximaux} \geq \text{compteurs minimaux}.$$

Références classées par thèmes.*Algèbre des dioïdes appliquée aux systèmes à événements discrets.*

- [DSEVD1] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes.
Rapport I.N.R.I.A N° 191, Le Chesnay, Février 1983.
- [DSEVD2] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
A linear-System-Theoretic view of Discrete-Event Processes.
22nd IEEE Conf. on Decision and Control, San Antonio, Texas, 1983.
- [DSEVD3] G. COHEN, D. DUBOIS, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
A linear-System-Theoretic view of Discrete-Event Processes.
and its use for Performance evaluation in Manufacturing.
IEEE Trans. on Automatic Control, 1985.
- [DSEVD4] G. COHEN, P. MOLLER, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets.
Rapport I.N.R.I.A N° 362, Le Chesnay, Janvier 1985.
- [DSEVD5] G. COHEN, P. MOLLER, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
Linear System Theory for Discrete Event Systems.
23rd IEEE conf. on Decision and Control, December 1984.
- [DSEVD6] G. COHEN, P. MOLLER, J.P. QUADRAT, M. VIOT,
Dating and counting in Discrete Event Systems.
25rd IEEE conf. on Decision and Control, Athens, Greece, December 1986.

- [DSEVD7] P. MOLLER,
Le théorème de Cayley-Hamilton dans les dioïdes, et applications aux systèmes à événements discrets.
7th International conference on systems and optimisation.
Antibes, Juin 1986, Springer Verlag.
- [DSEVD8] Algèbres exotiques et systèmes à événements discrets.
Séminaire CNET-INRIA.
Issy les moulineaux, Juin 1987.

Théorie des réseaux de Pétri et applications.

- [PETRI1] G.W. BRAMS,
Réseaux de PETRI,
TOME 1: Théorie et analyse. MASSON, Paris, 1982.
TOME 2: Théorie et pratique. MASSON, Paris, 1983.
- [PETRI2] J.L. PETERSON,
Petri Net Theory and the modelling of systems.
PRENTICE HALL, 1981
- [PETRI4] P. CHRETIENNE
Les réseaux de petri temporisés.
Thèse , Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) , 1983.
- [PETRI5] J. SIFAKIS,
Use of Petri nets for performance evaluation.
Mesuring, modelling and evaluating computer systems,
NORTH HOLLAND PUB. CO., 1977.
- [PETRI6] C. RAMCHANDANI
Analysis of asynchronous concurrent systems by Petri nets.
PhD Thesis, MIT, Cambridge Mass.
Project MAC TR 120, February 1974.

- [PETRI7] C.V. RAMAMOORTHY, G.S. HO,
Performance evaluation of asynchronous concurrent systems using Petri nets.
IEEE Trans. on Software Eng., 6, n° 5, 1980.
- [PETRI8] M. AYMONE-MARSAN, G. CHIOLA, G. CONTE,
A class of generalized stochastic Petri nets for the performance evaluation of complex systems.
ACM Trans; on Comp. Syst., vol.2, pp 93-122, May 1984.
- [PETRI9] R.R. RAZOUK, C.V. PHELPS,
Performance analysis using timed Petri nets.
in Proc. Conf. Parallel Processing, pp126-129, August 1984.
- [PETRI10] M.A. HOLLIDAY, M.K. VERNON,
A generalized timed Petri net for performance evaluation.
in Proc. Int. Workshop on Timed Petri Nets, July 1985.
- [PETRI11] M.K. MOLLOY,
Performance analysis using stochastic Petri nets.
IEEE Trans. on Comput., Vol. C-31, pp 913-917, September 1982.
- [PETRI12] S. NATKIN:
Les réseaux de Petri stochastiques et leurs applications à l'évaluation des systèmes informatiques.
Thèse de docteur-ingénieur, CNAM, Juin 1980.
- [PETRI13] C. GIRAULT, W. REISIG, editors,
Applications and theory of Petri nets.
Springer Verlag, 1982.
- [PETRI14] C. REUTENAUER,
Aspects mathématiques des réseaux de Petri.
MASSON, 1988.

Algèbre Min-Max et applications.

- [MINMA1] R.A. CUNNINGHAM-GREEN,
Describing industrial processes and approximating their steady-state behaviour.
Op. Research Quarterly, 13, pp. 95-100, 1982.
- [MINMA2] R.A. CUNINGHAME-GREEN,
Minimax Algebra.
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,
vol. 166, Springer Verlag, 1979.
- [MINMA3] R.A. CUNINGHAME-GREEN,
Projections in Minimax Algebra.
Math. Programming, 10 pp. 111-123, 1976.
- [MINMA8] G.J. OLSDER, C. ROOS,
Cramer and Cayley-Hamilton in the max-algebra.
Delft University of technology,
Report n° 85-30, 1985.
- [MINMA9] G.J. OLSDER, C. ROOS,
Cramer and Cayley-Hamilton in the max-algebra.
In 7th International conference on systems and optimisation.
Antibes, Juin 1986, Springer Verlag.

Algèbre des treillis et des structures ordonnées.

- [TREIL1] G. BIRKHOFF,
Lattice Theory.
American Mathematical society, 1967.
- [TREIL2] L. FUCHS,
Partially ordered algebraic systems.
Pergamon Press, Oxford, 1963.

Mathématiques discrètes, théorie des dioïdes

- [DISMA1] M. GONDRAN, M. MINOUX,
Linear Algebra in dioids: a survey of recent results.
Annals of discrete-mathematics, vol.19, pp 147-164, 1984.
- [DISMA2] M. GONDRAN, M. MINOUX,
L'indépendance linéaire dans les dioïdes.
Bulletin de la direction Etudes et Recherches, EDF,
Série C, n°1, pp. 67-90.
- [DISMA3] M. GONDRAN, M. MINOUX,
Valeurs propres et vecteurs propres dans les semi-modules
et leur interprétation en théorie des graphes.
Bulletin de la direction Etudes et Recherches, EDF,
Série C, n°2, pp. 25-41.
- [DISMA4] D. ZEILBERGER
A combinatorial approach to matrix algebra.
Discrete Mathematics 56, pp 61-72,
NORTH-HOLLAND, 1985.
- [DISMA5] H. STRAUBING,
A combinatorial proof of the Cayley-Hamilton Theorém.
Discrete Mathematics 43, pp 273-279,
NORTH-HOLLAND, 1983.

Théorie des graphes.

- [GRAPH1] H. GONDRAN, M. MINOUX,
Graphes et Algorithmes,
EYROLLES, Paris, 1979.

- [GRAPH2] R.M. KARP,
A characterization of the minimum cycle mean in a digraph.
Discrete Mathematics 23, pp 309-311,
NORTH-HOLLAND, 1978.
- [GRAPH3] C. BERGE,
Graphes et hypergraphes.
DUNOD.
- [GRAPH4] B. ROY,
Algèbre moderne et théorie des graphes.
DUNOD 1970.

Théorie algébrique des automates, des langages et des séries formelles.

- [LGSF1] J.E. HOPCROFT, J.D. ULLMANN,
Introduction to Automata theory, languages and computation.
Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1979.
- [LGSF2] S. EILENBERG
Automata, languages and Machines.
Volume A and B.
Academic Press 1974.
- [LGSF3] P. MOLLER
Introducing real time in the algebraic theory of finite Automata.
IIASA working paper 86-49 September 1986.
- [LGSF4] J.BERSTEL, C.REUTENAUER,
Les séries rationnelles et leurs langages.
MASSON, Paris 1984.
- [LGSF5] J.-E. PIN,
Variétés de langages formels.
MASSON, Paris, 1984.

- [LGSF6] J. BERSTEL,
Transductions and context-free languages.
TEUBNER.

Contrôle de SEVD représentés par des automates.

- [COAUT1] P.J. RAMADGE, W.M. WONHAM,
Supervisory control of a class of discrete-event systems.
To appear in the SIAM journal on Control and optimisation.
- [COAUT2] P.J. RAMADGE, W.M. WONHAM,
On the supremal controllable sublanguage of a given language.
Linear System Theory for Discrete Event Systems.
23rd IEEE conf. on Decision and Control ,
Las Vegas, Nevada, December 1984.
- [COAUT3] P.J. RAMADGE, W.M. WONHAM,
Modular feedback logic for discrete event systems,
Information sciences and Systems Report N° 48,
Department of Electrical Engineering,
Princeton University, Princeton N. J.
- [COAUT4] P.J. RAMADGE, W.M. WONHAM,
On modular synthesis of supervisory control for
discrete-event processes.
International conference on computers, Systems & signal
processing, Bangalore, India, December 1984.
- [COAUT5] P.J. RAMADGE, W.M. WONHAM,
Proceedings of the Seventh international conference on
Analysis and optimisation of systems, Antibes, France, 1986.
In Lecture Notes in Control and information sciences, Springer-Verlag, 1986.

- [COAUT6] P.J. RAMADGE,
Control and supervision of Discrete event processes.
Ph. D. Thesis, Department of electrical engineering,
University of Toronto, 1983.

Autres approches des systèmes à évènements discrets.

- [SEVD1] Y.C. HO, C. CASSANDRAS,
Computing costate variables for Discrete-Event Systems.
Proc. IEEE Conf on Decision and Control,
Albuquerque, pp. 697-700, 1980.
- [SEVD2] Y.C. HO, C. CASSANDRAS,
A new approach to the analysis of discrete-event systems.
Automatica, vol.19, pp 149-168, 1983.
- [SEVD3] A. HAURIE, P. L'ECUYER,
Approximation and bounds in Discrete-event Programming,
IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-31, n°3, March 1986.

Modélisation des systèmes parallèles et temps réels.

- [SPTR1] J. SIFAKIS,
Le contrôle les systèmes asynchrones: Concepts, propriétés, analyse statique.
Thèse, Université de Grenoble, Juin 1979.
- [SPTR2] P. CASPI, N. HALBWACHS,
An approach to real-time-systems modelling.
Rapport de recherche n° 253, IMAG Grenoble, Juin 1981
- [SPTR3] P. CASPI, N. HALBWACHS,
Algebra of Events: A model for parallel and real-time systems.
Rapport de recherche n° 285, IMAG Grenoble, Janvier 1982.

- [SPTR4] P. CASPI, N. HALBWACHS,
Conception certifiée de systèmes temporisés.
Rapport final ATP-PCS, CNRS, Septembre 1983.
- [SPTR5] P. CASPI, N. HALBWACHS,
A functional model for describing and reasoning about time behaviour of computing systems.
Acta Informatica n°22, pp 595-627, Springer Verlag, 1986.
- [SPTR6] P. CASPI, N. HALBWACHS,
Analyse approchée du comportement asymptotique de systèmes temporisés.
TSl, vol 5, n°2 pp75-88, Mars-Avril 1986.
- [SPTR7] P. CASPI, N. HALBWACHS,
Suites de dates et compteurs d'occurrences d'évènements.
Séminaire "Algèbres exotiques et systèmes à événements discrets"
INRIA-CNRS-CNET, Juin 1987.

Problèmes d'ordonnement.

- [ORD1] E.G. COFFMAN, Editor.
Computer and Job-Shop scheduling theory.
Wiley, New-York, 1976.
- [ORD2] R.W. CONWAY, W.L. MAXWELL, L.W. MILLER,
The theory of scheduling.
Addison-Wesley 1967.
- [ORD3] B. ROY,
Les problèmes d'ordonnement: applications et méthodes.
Dunod, 1964.

Divers sujets liés aux systèmes à évènements discrets.

- [DIV1] J.L. BAER.
A survey of some theoretical aspects of multiprocessing.
ACM Comput. Surv., vol.5, pp 31-80, March 1983.
- [DIV2] R. MILNER
A Calculus of communicating systems.
Springer Verlag, 1980.
- [DIV3] L.R. RABINER, B.H. JUANG,
An introduction to Hidden Markov Models,
IEEE ASSP Magazine, January 1986.

Modélisation, contrôle et optimisation es systèmes de production.

- [PROD1] S.B. GERSHWIN, J.G. KIMENIA,
An algorithm for the computer control of production on a flexible manufacturing system.
MIT Lab for Info. & Dec. Systems Report LIDS-P-1134 . January 1982.
- [PROD2] S.B. GERSHWIN, R.R. HILDEBRANT, R. SURI, S.K. MITTER,
A Control Theorist's perspective on recent trends in manufacturing systems.
MIT Lab for Info. & Dec. Systems Report LIDS-P-1408, August 1985.
- [PROD3] S.B. GERSCHWIN,
Opportunities for control in manufacturing systems.
IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, p 833, 1985.
- [PROD4] S.B. GERSCHWIN, A. RAMAKRISHNAN, Y. CHOONG,
Short term Production Scheduling of an automated manufacturing system.
IBM Journal on Res. & Dev. , n° 29, pp 392-400, 1985.

- [PROD5] J. B. CAVAILLE, D. DUBOIS,
Heuristic methods based on mean-value analysis for Flexible
manufacturing systems performance evaluation.
21st IEEE conf. on Decision and Control, Orlando, Florida, 1982.
- [PROD6] J.L. CASTI,
Maufacturing as a system-determined science.
IIASA Working Paper WP-86-43, October 1986.
- [PROD7] H. PRADE,
Etude bibliographique des problèmes et méthodes d'ordonnement d'ateliers.
Rapport CERTI, tomes 1, 2, 3; 1976-76-77.
- [PROD8] D. LEVEQUE,
Etude du lancement périodique dans un atelier flexible.
Note 82.0.10 LAAS, Février 1982.
- [PROD9] J.J. SOLBERG,
Analytical performance evaluation of flexible manufacturing systems.
CDC, Décembre 1978.

Quelques publications sur les réseaux de files d'attente.

- [FIAT1] A. THOMASIAN, P.F. BAY,
Analytic queueing network models for parallel processing of task systems.
IEEE Trans. on computers, vol. C-35, pp 1045-1054, December 1986.
- [FIAT2] P. HEIDELBERGER, K.S. TRIVEDI,
Queuing network models for parallel processes with asynchronous tasks.
IEEE Trans. on Comp. , vol. C-31, pp 1099-1108, November 1982.
- [FIAT3] P. HEIDELBERGER, K.S. TRIVEDI,
Analytic queueing model for programs with internal concurrency.
IEEE Trans. on Comp. , vol. C-32, pp 73-82, January 1983.

Quelques références sur la simulation:

- [SIMU1] J. REITMAN.
Computer simulation Applications.
Discrete-Event Simulation for Synthesis and Analysis of Complex Systems.
Wiley-Interscience, 1971.
- [SIMU2] R.F. GARZIA, M.R. GARZIA, B.P. ZEIGLER,
Discrete-event simulation.
IEEE-Spectrum, December 1986.
- [SIMU3] J.P. BEVANS,
First, choose an FMS simulator.
American Machinist, pp 143-145, May 1982.
- [SIMU4] B.P. ZEIGLER,
Multifaceted Modeling and Discrete Event Simulation.
Academic Press, 1984.